UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

JAIRO JOSÉ DA SILVA

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), sob a orientação do Prof. Dr. Andrés Rômulo Raggio.

Campinas-SP, março de 1990

SOBRE O PREDICATIVISMO EM HERMANN WEYL

-Alguns aspectos do construtivismo em matemática

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

08/03/90

Prof. Dr. Andréa Rômulo Raggio

INTRODUÇÃO

O <u>Predicativismo</u> pode ser caracterizado em termos gerais como o projeto de reformulação de partes essenciais de matemática segundo o princípio do círculo vicioso de Poincaré-Russel. Este proibe que qualquer objeto seja definido em termos de uma totalidade que o contenha, envolva ou pressuponha. O princípio proposto e discutido informalmente por Poincaré em vários textos é supostamente a viga mestra sobre a qual erigem-se os "Principia Mathematica" de B.Russell e A.N. Whitehead. Muitos críticos consideram entretanto que o polêmico axioma de reducibilidade reintroduz, de maneira subreptícia, procedimentos impredicativos[1]. Assim, foi H. Weyl num texto que marcou época - "Das Kontinuum"(1918) - o primeiro a levar a cabo uma efetiva reformulação de grande parte da análise clássica em bases estritamente predicativistas, evitando simultaneamente generalidades à maneira de Poincaré e excessiva rigidez formal à maneira de Russell. Também ao contrário destes, Weyl recusa uma análise ramificada numa hierarquia de tipos.

Weyl teve seguidores que até o presente dedicam-se à tarefa de recuperar para segmentos essenciais da matemática a credibilidade e a segurança dos procedimentos predicativistas, da análise clássica à geometria diferencial[2], da teoria da medida e análise funcional à teoria dos modêlos[3].

Numa outra direção o trabalho pioneiro de Weyl dá origem a outros problemas. Sua recusa à ramificação não conseguiu sensibilizar a maioria das que viam no seu "approach" senão uma leitura muito rigorosa do princípio do círculo vicioso.

Mas uma vez libertos do nível básico em que Weyl comprimiu sua análise e livres para construirmos uma hierarquia de tipos, outras questões, de caráter metamatemático apresentam-se: que ordinais são aceitáveis como índices de tipos, uma vez que a noção de ordinal arbitrário é impredicativa? que formalizações são apropriadas para a caracterização precisa das noções informais de definição e demonstração predicativas? A busca de respostas a estas questões ocupa até hoje um grande contingente de lógicos, e o predicativismo, ou mais

1.E.g.[37]

2.E.g.[28]

3.E.g.[41] e Jose Esplugues in "Una Introduccion construtiva a la Teoria de Modelos" (Ed. Tecnos, 1977) precisamente, os diferentes sistemas de análise predicativa formalizados à semelhança de outros sistemas matemáticos, são estudados na perspectiva de uma metamatemática "clássica".

Mas as questões que nós nos colocamos são de outra ordem. Historicamente o princípio do círculo vicioso surge aparentemente como uma estipulação ad hoc visando barrar a derivação dos paradoxos que deram origem ao "escândalo dos fundamentos", no começo deste século. Todos estes paradoxos envolvem em algum ponto definições impredicativas. Assim, todo o predicativismo parece ressentir-se de um suporte filosófico, de uma organicidade teórica, na qual surja como o desenvolvimento matemático de posições filosóficas mais gerais e sistemáticamente relacionadas de modo coerente.

Pelo papel privilegiado que o predicativismo reserva à linguagem (contrariamente ao intuicionismo, por exemplo), algumas leituras de caráter nominalista tem-lhe sido impostas.

Certamente o próprio "Principia Mathematica" tem uma clara, se bem que não totalmente bem- sucedida, orientação nominalista. Mais recentemente, Lorezen ([28]) e C Chihara ("[5]) apresentaram, o primeiro se não um desenvolvimento da análise em bases nominalistas, ao menos segundo uma postura "ontologicamente indiferente", e o segundo um esboço de uma inserção do predicativismo na esfera do pensamento nominalista. Nosso objetivo é mostrar que se bem que possíveis em princípio, tais leituras, ao menos no caso de "Das Kontinuum", falseiam seus fundamentos filosóficos e obscurecem sua compreensão.

Nosso trabalho quer mostrar que "Das Kontinuum" insere-se na principiante tradição fenomenológica de E:Husserl e que a forma, mesmo nos detalhes, em que é aí apresentada uma teoria dos números reais, é determinada pela perspectiva dos ensinamentos de Husserl à época.

Essa relação não é arbitrária ou acidental. Weyl foi aluno de Husserl em Göttingen, a partir do semestre de inverno de 1904-05, época em que este lecionou sobre a fenomenologia da consciência do tempo imanente. Tanto as "Investigações Lógicas" quanto as "Idéias" de Husserl são explicitamente citadas no corpo de "Das Kontinuum". É nossa proposta explicitar como alguns dos princípios gerais da Fenomenologia e alguns dos seus ensinamentos econtram acesso à matemática e fundamentam uma teoria dos números reais.

Um outro problema que nos preocupa é o das relações entre <u>intuicionismo</u> e <u>predicativismo</u>, em particular como cada um entende a "construção" matemática, uma vez que ambos parecem, em menor ou maior graus, rejeitar o realismo subjacente à matemática clássica.

O ponto de partida para o intuicionismo é a não adequabilidade da interpretação clássica das constantes lógicas em contextos infinitos. Em particular a veracidade de juizos existenciais depende da construção efetiva do objeto que se afirma existir (além de uma demonstração de que este objeto satisfaz as propriedades dele afirmadas). O ponto de partida para o predicativismo é outro totalmente diverso. O não reconhecimento da legitimidade das definições impredicativas como constituintes de verdadeiros objetos parece uma imposição mais ou menos arbitrária, *ad hoc*, visando exclusivamente barrar a derivação de paradoxos.

Um problema para diferentes projetos fundacionais, em particular para o predicativismo, é derivar possiveis restrições à prática matemática de uma teoria filosófica positiva.

Usualmente considera-se que qualquer doutrina nos fundamentos da matemática é precedida por uma particular ontologia que lhe traça os caminhos. Não é incomum ver-se os principais projetos fundacionais associados à antiga questão dos universais. A correlação seria:

logicismo---------realismo

construtivismo---------conceptualismo

formalismo---------nominalismo

Mas, claro, nem tudo é tão simples. Há logicistas realistas (Frege) e logicistas nominalistas (Russell). Alguns construtivistas não concordam entre si quanto ao que de fato se pode admitir como existente em matemática, quando não no próprio sentido desta palavra. Uns admitem como existente apenas o que se pode efetivamente representar na intuição pura (intuicionistas), outros o que se pode descrever numa certa linguagem dada numa intuição originária (Weyl), onde o conceito de intuição não é certamente o mesmo. Aqueles fazem referência à intuição kantiana do tempo, este à intuição husserliana. Outras ainda há que predicativistas (logo construitivistas de alguma forma) adotam uma noção formalista de existência (Poincaré).

A questão se complica ainda mais quando queremos justificar a adoção de uma lógica clássica ou não-clássica para a matemática como consequência de uma postura ontológica. Poincaré e Weyl adotam a lógica clássica e outros construtivistas, como os intuicionistas, a rejeitam.

Assim outras questões se apresentam: como conciliar construtivismo com a interpretação clássica das constantes lógicas? é possivel justificar uma ou outra lógica em questões de outra ordem que questões de ontologia?

A leitura de M. Dummertt ([11]) nos fornece uma pista. Diz ele : "qualquer justificação para a adoção de uma lógica em detrimento de outra como a lógica para a matemática deve considerar questões de <u>significado</u> "(p. 215). Foi o que buscamos como justificativa para a adoção da lógica clássica no predicativismo, de Poincaré e de Weyl: uma teoria do significado. E posteriormente uma ontologia por ela determinada.

Nosso trabalho começa assim com a tarefa de sustentar a filosofia da matemática de Poincaré numa teoria do significado. Prossegue explicitando o construtivismo kantiano, suas relações com o intuicionismo e uma crítica do psicologismo aí latente. Chegando então a Weyl e suas relaçoes com a fenomenologia.

Tanto no estudo de Kant quanto no de Weyl uma preocupação central é com a explicitação da noção de constituição do objeto matemático.

Este é exemplarmente um objeto ideal. Mas não precisamos ir à matemática, ou mesmo às ciências "abstratas" em geral, para toparmos com objetos ideais. Qualquer pessoa que me conte casualmente ter gostado de uma particular audição da "D. Giovanni", faz referência a um tal objeto. Pois o que é <u>isto</u> de que se diz ter gostado: a ópera "D: Giovanni"?. Certamente não um objeto no espaço e no tempo um isto - aqui, se bem que tenha tido uma origem no espaço e no tempo, no interior de uma consciência. Como esta "formação interior" na consciência de Mozart pode ganhar o status de um objeto impessoal, atemporal, com multiplas "encarnações"?.

Estas são questões que se podem colocar a respeito de qualquer objeto ideal, numa perspetiva construtivista. Elas também nos estarão preocupando.

Terminamos mostrando que no predicativismo nem tudo são boas intenções apenas. Mostramos como toda a aritmética e grande parte da análise clássica podem ser predicativamente recuperadas.

I - O PREDICATIVISMO EM POINCARÉ

A questão que orientou minha leitura de Poincaré foi: é possível descobrir aquém da restrição predicativista por ele imposta à matemática mais do que uma estipulação ad hoc visando exclusivamente barrar a derivação de paradoxos? Veremos adiante que a resposta é afirmativa, que as restrições de caráter predicativista repousam numa teoria, mesmo que não completamente articulada, do significado em matemática.

Não me interessa aqui o traçado do que se poderia propriamente chamar uma filosofia da matemática em Poincaré, principalmente porque tal coisa não existe, ou ao menos não existe enquanto um corpo articulado e consistente. Poincaré não se enquadra nos canones de rigor e pronfundidade na análise de questões filosóficas pertinentes à matemática que se tornaram norma em especial na Filosofia Analitica. Seus pontos de vista são apresentados muitas vezes desacompanhados de um arrazoado convincente, quando não francamente dogmáticos, e sem a preocupação de uma teoria geral onde ajustem-se organicamente entre si, o que nos obriga a providenciar com frequência leituras e interpretações orientadas sempre pelo ideal de uma articulação coerente. Mais do que por uma reflexão metódica, Poincaré é guiado pela sua prática como matemático, preocupado principalmente - dado importante - com problemas de matemática aplicada[1], e por uma postura filosófica geral que se poderia rotular como uma espécie de Kantismo revisitado e temperado com doses de pragmatismo e nominalismo na medida de um visao "bom-senso". Antes que um filosófico, Poincaré é um matemático culto preocupado com questões filosóficas.

É interessante mostrar aqui um aspecto deste Kantismo de Poincaré : é quase a versão oposta do de Frege. Enquanto para este a Aritmética é um corpo de proposições analiticas, para aquele é falsa a afirmação da redutibilidade da aritmética à lógica. Para Poincaré o princípio de indução completa, o pilar mais básico da aritmética, é o exemplo acabado de uma proposição sintética a priori. Enquanto para Frege a geometria euclidiana é um corpo de proposições sintéticas a priori, para Poincaré tal não é o caso. Para

1 " It is Poincaré's strong empirical tendencies that lie behind his anti-Platonic philosophy of Mathematics" ([53]p.138)

este o espaço euclidiano não coincide com o espaço visual, tatil ou motor e não é uma moldura imposta a cada uma de nossas representações consideradas individualmente.

Os axiomas geométricos, sejam da geometria euclidiana ou das geometrias de Lobatchevsky ou Riemann, são convenções, nem verdadeiras nem falsas, entre as quais escolhemos guiados por interesses práticos ou por sua maior ou menor simplicidade. Por outro lado, Poincaré esposa neste contexto uma "postura" de caráter Kantiano e afirma que o objeto de estudo da geometria é um grupo particular e é o conceito geral de grupo que "se impõe a nós como forma não de nossa sensibilidade mas como forma do nosso entendimento" [, pp.90-91].

1. Definições - Estas são para Poincaré o passaporte para a existência em Matemática. Nada existe que não tenha sido propriamente definido, com particular ênfase no termo "propriamente". Poincaré assinaria a frase de Sartre "existir é possuir uma marca registrada, alguma porta nas tábuas infinitas do Verbo". Poincaré distingue dois tipos de definições: a direta, ou explícita; e a indireta, implícita ou por meio de postulados. No primeiro tipo o definido é explicitamente introduzido por uma expressão de uma linguagem arbitrária onde constem apenas um número finito de símbolos, ou seja, se t é o termo definido, então a definição tem a forma $t = \iota x\, \psi(x)$ onde $\psi(x)$ é uma fórmula de comprimento finito numa variável livre de uma linguagem arbitrária apropriada.

Nas palavras do próprio Poincaré a definição deve lançar mão apenas "de um número finito de palavras". Outra restrição essencial é que a definição seja predicativa, o sentido desta restrição e por quê acredito que definições não predicativas, ou impredicativas, para Poincaré, infrigem a estipulação de que definições devem conter somente um número finito de palavras, serão abordados em breve.

No segundo tipo de definição, dá-se um sistema de axiomas que conjuntamente definem uma noção quando todas as outras que aí figuram forem previamente definidas. Assim a noção, ou termo geral, "número natural" estará definido pelos postulados de Peano se forem já definidos os termos "zero" e "sucessor". Esse exemplo entretanto não seria do agrado de Poincaré, pois como veremos a definição por postulados só será legítima se os postulados forem consistentes, isto é, não implicarem em contradição, mas, acredita Poincaré, não há demonstração possível deste fato que não lance mão do princípio de indução completa, que é justamente um dos axiomas do sistema cuja consistência se está a demonstrar, originado um círculo vicioso onde nada se prova. O raciocínio de Poincaré é mais ou menos como se segue: se um conjunto de axiomas tem um número finito de consequências a constatação de que entre elas não figura uma contradição não apresenta maiores problemas teóricos - quiçá alguns de ordem prática apenas. Se essas consequências forem em número infinito, porém, e uma demonstração direta se faz necessária - existe uma demonstração indireta de consistência via a apresentação de um modelo - então devemos mostrar que as operações da lógica - regras válidas de inferência - aplicadas a premissas explicitamente não contraditórias - isto é, tais que entre elas não existam duas tais que uma seja a negação da outra - não podem nos dar senão conclusões igualmente isentas de contradição, e daí concluir, pelo princípio de indução completa, que contradições nunca vão aparecer.

O exemplo preferido de Poincaré para uma definição por sistema de postulados é a de distância via os axiomas da geometria euclidiana.

Tanto num como noutro tipo de definição não basta entretanto estipular-se que se trata de uma definição, é preciso mostra-lo. Poincaré cita algumas vezes, [[31] p.161, p.ex.] o dito de Stuart Mill de que toda definição implica num axioma, o que afirma que o objeto definido existe. Não concorda com ele, entretanto. Ao invés de um axioma, a definição deve vir acompanhada de uma prova de que o definido existe.

O que vem a ser isso só será entendido quando se entender que sentido Poincaré atribui a "existência " em Matemática

2. Existência em Matemática - " Un etre mathématique existe, pourvu que sa definition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises" [[32] p.59]. ... en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens., il signifique exempt de contradiction" [[31] p.162]. Outras citações poderiam ser reproduzidas, mas a tônica, ou as próprias palavras, não mudam. Existir significa simplesmente estar isento de contradições, ou melhor dito, significa que a sentença que afirma a existência não é contraditória " em si mesma", isto é não é a negação de uma tautologia, ou com sentenças já admitidas como verdadeiras. Assim se um termo é definido por uma fórmula $\Psi(x)$ (definição direta), sua existêncica estará garantida, e portanto a definição é legítima, se demonstrarmos que a sentença $\exists!x\ \Psi(x)$ não é contraditória no sistema das sentenças já admitidas. Isso não é equivalente, é claro, à

estipulação de que tal sentença seja <u>deduzível</u> das já admitidas.

Em [[5], p.151] afirma-se "obviosly, to say that a solution to such and such an equation <u>exists</u> is not to say that a solution to the equation is free from contradiction". Assim Chiahara é levado a afirmar que Poincaré não pretende que a interpretação de "existir" como "livre de contradições" seja válida em todo contexto matemático, mas apenas naqueles onde deve-se examinar a consistência de definições específicas.

No entanto Poincaré é bem claro nesse ponto, "existir" tem <u>apenas um</u> sentido em Matemática: estar livre de contradições. No caso específico enunciado por Chihara, parece-me que a resposta de Poincaré seria previsível: suponha que tenhamos concluído que determinada equação de forma p.ex. p(x) = 0 tenha solução, ou que uma solução exista, por uma demonstração indireta, do tipo reductio ad absurdum.

Ora, tal demonstração nada mais é que a demonstração que a sentença (não) $\exists$ x (p(x) = 0) é contraditória; logo $\exists$ x (p(x)=0) não é; ou seja a sentança que afirma que soluções existem está livre de contradições com as sentenças já admitidas. Se por outro lado soubermos que a equação tem solução por estarmos de posse de uma especifica solução a, então temos que p(a) = 0, e assim podemos novamente afirmar que $\exists$ x (p(x)=0) é verdadeira, supondo, como é claro, verdadeiras as sentenças já admitidas.

Assim, mesmo que a citação que abre essa seção pareça dar razão a Chihara, o contexto que a contém, onde discute-se o dito de S. Mill pode explicar a aparente restrição do escopo que Chihara quer ver no sentido que Poincaré dá ao termo "existir" em Matemática.

Em outras ocasiões onde o assunto é abordado Poincaré é taxativo: "existir" significa "estar livre de contradições". E acredito que a leitura que fiz deste "estar livre de contradições" dá mesmo conta de todas as situações em que um ente matemático é dito existir.

No caso de definições por sistema de postulados, dizemos que o termo definido existe (no caso de uma noção ou termo geral, podemos tomá-la extensivamente e afirmar que o que existe é sua extensão entendida como um objeto) quando o sistema é consistente e toda sua extensão por adjunção de sentenças já admitidas também o é.

3. <u>O infinito</u> - Poincaré repudia a existência do infinito atual em Matemática, e o faz sustentado por uma particular noção de significação que examinaremos logo

mais . Entre outros males, Poincaré responsabiliza a crença no infinto real por originar paradoxos, mesmo que aceitasse, com Russel, que alguns deles surgem mesmo em contextos finitos (o exemplo é o paradoxo do menor número inteiro que não pode ser definido por uma sentença com menos de cem palavras portuguesas; e que no entanto assim o foi pela sentença anterior). Poincaré acreditava que a origem deste paradoxo está na extensão de formas clássicas de inferência a classificações mutáveis, ou impredicativas (que veremos mais adiante) e que "essas dificuldades se apresentam com muito maior frequência quando se trata de coleções infinitas" [[30], p.86] na medida em que esse infinito e tomado como completamente atualizado.

" Não há infinito atual e quando falamos de uma coleção infinita, queremos dizer uma coleção à qual se podem incessantemente juntar novos elementos(semelhante a uma lista de subscrição, que jamais fosse encerrada na expectativa de novos subscritores)" [[30],p.86].

4. O teorema de Cantor - Como só podemos dizer que existe aquilo que é definível num número finito de palavras, e como as definições poderiam ser numeradas com os números naturais desde um até o infinito, conclue Poincaré que só haveria um número cardinal possível, o $\aleph_0$. Como então dizemos que a potência do contínuo não é amesma das naturais?

É o teorema de Cantor falso? Não, responde Poincaré, mas o que ele demonstra não é como se crê a existência de cardinais superiores a $\aleph_0$, mas antes a impossibilidade de se completar procedimentos infinitos, ou antes da inatualidade de coleções infinitas.

Lembremos que a diagonalização só é possível na hipótese de que a enumeração dos reais seja completamente dada. Em detalhes o que Poincaré crê ser demonstrado por Cantor é que não se pode achar entre os números naturais e os pontos da reta definíveis em um número finito de palavras uma lei de correspondência tal que:

(1) Essa lei se pode enunciar num número finito de palavras

(2) Dado um natural qualquer, pode-se achar o ponto da reta correspondente que estará definido pela sua contra - imagem e pela Lei de correspondência e será, portanto, definido por um número finito de palavras se o natural o for.

(3) Sendo dado um ponto P na reta, suposto definido num número finito de palavras (definição que pode aludir à própria lei de correspondência)

haverá um natural que será determinado sem ambiguidade pelo enunciado da Lei e pela definição do ponto.

(4) A lei de ser predicativa, isto é, se N corresponde a P, assim continuará quando se tiver introduzido (via definição) novos pontos na reta.

É hora agora de examinarmos que valor mais alto se levanta a exigir a excomunhão do infinito atual e das definições impredicativas da congregação das noções e das definições matemáticas.

5. <u>Verificabilidade e Sentido</u> - Em [[30],p. 114] Poincaré afirma que "todo teorema de matemática deve ser suscetível de verificação. Quando enuncio um teorema, afirmo que conseguirei obter todas as verificações que empreender; e mesmo se uma dessas verificações exigir um trabalho que exceda as forças de um homem, afirmo que, se muitas gerações, cem se for preciso, julgarem a propósito levar a efeito essa verificação, ela terá ainda êxito "<u>o teorema não tem outro sentido</u>" (meus grifos). Mas uma verificação não é uma demonstração. Uma afirmação universal, por exemplo, não pode ser passível de verificação, apenas suas instâncias particulares, as sentenças que afirmam de indivíduos em particular o que o teorema afirma de todos, podem ser verificadas.

A demonstração por sua vez é a síntese de todas as verificações e tem por finalidade justamente dispensar-nos delas. Convém citar Poincaré textualmente neste ponto: "La vérification diffère précisament de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémises dans une autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus genérale que les prémises.

L'égalité 2 + 2 = 4 n'a éte ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Toute énoncé particulier en mathématique pourra toujours être vérifié de la sorte.

Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, ele ne serait pas une science... Il n'y a de science que du général.

On peut même dire que les sciences exactes ont présisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications" [[32],p.13].

Não é tarefa fácil fazer sentido do que Poincaré quer nos fazer crer. Que significado devemos atribuir ao conceito de <u>verificação</u>? Tendo em vista que apenas enunciados particulares são possíveis de verificação, tentaremos precisar alguns termos.

As <u>instâncias</u> de um enunciado qualquer seriam asserções que diriam de objetos específicos e determinados o que o enunciado diria de objetos inespecíficos ou indeterminados,ou seja, seriam obtidas elimindo-se seus quantificadores e substituindo-se cada uma das variáveis ligadas por constantes em seus domínios. Assim um enunciado universal seria verdadeiro se todas as suas instâncias o fossem um existencial seria verdadeiro se pelo menos uma de suas instâncias o fosse.

Mas assim entendida a noção, pode ocorrer que um enunciado <u>não</u> tenha instâncias, como as entendemos informalmente. Por exemplo o enunciado $(\forall x\, A(x)) \to B$, onde A é uma fórmula unária qualquer e B uma sentença.

Podemos remediar esta situação considerando como instâncias de uma fórmula as instâncias, no sentido acima, da sua equivalente fórmula prenex.

Entenderemos por <u>verificação</u> um procedimento <u>efetivo</u> de constatação da veracidade de instâncias verdadeiras. A verificação difere da demonstração porque esta é uma "verificação simultânea" de todas as instâncias verdadeiras do teorema.

O que o teorema afirma, isto é seu <u>sentido</u>, é que todas as suas instâncias verdadeiras são <u>verificáveis</u> <u>em</u> <u>princípio</u>.

Se estendermos um pouco o sentido destes termos poderemos obter um critério de significação que mantenha a intuição original. Entendendo por verificação um procedimento efetivo e uniforme de se atribuir às instâncias de um enunciado qualquer um valor verdade (verdadeiro ou falso), poderemos dizer que um enunciado é significativo se todas as suas instâncias são verificáveis em princípio.

Se quisermos ser mais precisos e identificar a vaga noção de verificável à precisa noção de <u>decidível</u>, então para Poincaré, os enunciados significativos<u>sobre</u> <u>um</u> <u>domínio</u> são exatamente os obtidos a partir dos predicados decidíveis sobre este domínioo pela lógica quantificacional.

Mas evidentemente nada disto é explicitamente dito por Poincaré.

Entretanto seja o que for que ele entenda por "verificação" parece certo que esta é para ele um procedimento que nos permite decidir para um certo enunciado particular sobre o domínio, se ele é verdadeiro ou falso, e que uma verificação não é uma verdadeira demonstração.

Diz Chihara, "Parece que provam-se teoremas gerais e verificam-se instâncias particualres do teorema; pode-se verificar um teorema geral apenas na medida em que se pode verificar uma instância particulardo teorema" [[5],p.141].

Esta noção da demonstração como uma somatória de verificações é que leva provalvemente Poincaré a afirmar "qu'il [le raisonnement mathématique] participe dans une certaine measure de la nature du raisonnement indudif et que c'est par là qu'il est fécond" [[32], p.4].

Significado, para Poincaré, é definido em termos de verificabilidade e esta noção está intimamente relacionada a procedimentos decisórios, meios de se afirmar, mensuração ou até "insight" intuitivo de que determinado estado de coisas está em conformidade com o que dele se afirma.

Para Poincaré, os números naturais não existem como uma totalidade plenamente constituida, mas antes como um domínio em permanente construção. Num certo sentido são criações do espírito humano. Mas simultaneamente Poincaré não questiona a interpretação usual das constantes lógicas em asserções sobre os números naturais. Não estaria então incorrendo em incoerência? como seria possível conciliar-se uma postura ontológica construtivista - a existência matemática em função da atividade humana de definir - com a lógica clássica? não exigiria aquela uma revisão desta?

Dumett (op. cit.) nos oferece uma possibilidade de solução do dilema. Segundo ele não há necessariamente uma relação de compromisso entre a tese que os números naturais são criações do pensamento com a adoção de uma lógica intuicionista para asserções numéricas. Dumett acredita que há uma interpretação de que os números naturais são criações do espirito que não determina uma correta noção de verdade para asserções numéricas em geral, independentemente de consideraçoes gerais sobre significado.

Segundo esta interpretação, a afirmação de que os números naturais são uma construção do espirito só esta qualificada quando acompanhada de uma noção de verdade para a classe das proposições decidíveis.

Se a restrita classe das asserções numéricas decidiveis admite uma noção clássica (platonista) de verdade, isto é, que um predicado decidível aplicado a um número natural é verdadeiro ou falso independente de qualquer verificação efetivamente realizada, ou dito de outra forma, se a verificação possível <u>em princípio</u> é suficiente para lhe garantir um valor verdade que poderíamos ignorar, então o construtivista <u>não</u> tem à sua disposição a possibilidade de abandonar a lógica clássica para asserções numéricas em geral sustentado <u>apenas</u> pela sua interpretação do status ontológico dos objetos matemáticos. É lhe necessária toda uma teoria do significado que imponha uma nova lógica.

Ora, como vimos para Poincaré enunciados particulares são significativos se verificáveis <u>em princípio.</u> Em particular, enunciados decidíveis devem ser significativos, isto é, tem um valor verdade determinado e fixo. Logo, para a classe destes enunciados vale a noção clássica de verdade. Portanto, segundo Dumett, a adoção da lógica clássica em Poincaré para enunciados aritméticos em geral, aí incluídos enunciados gerais que não são em si decidíveis, mas que tem instâncias decidíveis, é simplesmente, ao contrário do se poderia supor, questão de coerência, uma vez que Poincaré não considera questões de significado na perspectiva que Dumett acha imprescíndivel para, neste caso, impor uma reforma lógica.

Que efeito tem essas considerações de significação sobre o infinito atual?

Poincaré diz que " como as verificações só se podem aplicar a números finitos, segue-se que todo o teorema relativo aos números infintos ou, sobretudo ao que se denomina conjuntos infinitos, ou cardinais transfinitos, ou ordinais transfinitos, etc., não pode ser mais do que em modo abreviado de enunciar proposições sobre os números finitos. Se for de outro modo, esse teorema não será verificável, não terá sentido" [[30],p.114-115].

Novamente não esta claro o que Poincaré tem em mente. Ele parece dizer que dado um conjunto A, um enunciado do tipo $a \in A$ só poode ser verificado se A for finito, isto é $A = \{ a_1, a_2,...,a_n \}$. Assim $a \in A$ é equivalente a $a=a_1$ ou ... ou $a= a_n$. Se A for infinito, $a \in A$ não seria verficável. Esta interpretação só é possivel se conjuntos forem sempre considerados <u>extensionalmente</u> e A so puder ser visto como <u>dado</u> se todos os seus elementos forem explicitamente dados.

De fato Poincaré considerava conjuntos extensionalmente [[30],p.124] e que só podemos considerar um conjunto como <u>dado</u> quando conhecemos todos os seus elementos, ou em outras palavras quando tivermos definido cada um deles ou equivalentemente, quando tivermos introduzido, via definição, para cada um deles, um termo na linguagem. Assim, mesmo que tivessemos um esquema, um processo efetivo de produzir definições, nunca teríamos todas as definições dos elementos de um conjunto infinito, por isso ele nunca nos será dado completamente.

" Quando me refiro a todos os números inteiros, quero dizer todos os números inteiros que se tem inventado e todos aqueles que se poderão inventar um dia; quando falo de todos os pontos do espaço, quero dizer todos os pontos cujas coordenadas são exprimíveis por números racionais, algébricos, por integrais ou de qualquer outra maneira de se pude inventar. É esse " o que se puder" que é o infinito" [[30], pp.109-110].

Assim considerar um conjunto infinito como dado seria equivalente a realizar no presente todas as possibilidades do futuro (ou pelo menos as possibilidades relevantes ao caso), uma impossibilidade . Portanto um conjunto infinito não pode ser completamente dado. Logo, asserções que o envolvam nunca poderão ser copmpletamente verificadas.

Assim qualquer menção ao infinito num enunciado significativo deve ser apenas "façon de parler".

Assim afirmações do tipo:

(a) a série dos primos é ilimitada.

(b) a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

devem ser traduzidas para, respectivamente

(a') para cada primo P, existe um primo (($\pi_{q<P}\, q$) + 1) maior que p

(b') existe um número L tal que para todo inteiro positivo N, existe um inteiro positivo M tal que se n> M então $| L - \frac{1}{n^2} | < \frac{1}{N}$.

Tanto (a') quanto (b') são passíveis de verificação, ou melhor suas instâncias verdadeiras o são. São portanto significativos, e o infinito que aparace em (a) ou (b) são apenas abreviações convenientes.

"Esses teoremas participam do infinito não porque uma das verificações possíveis dele participe, mas porque as verificações possíveis são em número infinito" [[30],p.121].

Uma outra consequência que Poincaré tira das considerações sobre significado acima é que um teorema da forma "existe x tal que $\psi(x)$" afirma que pelo menos uma sua instância $\psi(a)$ é verificável.

Logo o enunciado "existe uma boa-ordem dos reais" só tem sentido se se puder verificar, isto é , constatar efetivamente que uma certa ordenação explicitamente dada dos reais é uma boa - ordem, ou equivalentemente, se pudermos em princípio bem-ordená-lo e explicitamente mostrar que este é o caso.

Mas tal não é o caso. Poincaré diria que a lei que permite bem - ordenar os reais não é exprimível num mínimo finito de palavras (ela requereria um número de palavras superior mesmo a $\aleph_0$ (cf. [[30], pp.123-124]).

Logo " o teorema é destituído de sentido, ou falso, ou pelo menos, indemonstrado" [[30],p.124].

6. <u>Definições e classificações impredicativas</u> - Definições impredicativas são essencialmente aquelas que "contém um círculo vicioso", onde o objeto definido figura direta ou indiretamente em sua própria definição.

Isto ocorre quando:

1º o objeto é definido por uma relação com <u>todos</u> os indivíduos de um gênero G e, por sua vez, é um indivíduo de G.

2º o objeto é definido do mesmo modo e existe um indivíduo de G que só pode ser definido por menção a ele.

Do ponto de vista de que definições de nenhuma maneira "criam" entidades, mas tão sómente as selecionam, então é argüível (e.g. Carnap) que as definições impredicativas não involuem nenhum círculo. Mas para Poincaré, como vimos, não se pode dizer de um objeto matemático que pré-existe à sua definição. Assim um objeto impredicativamente definido tem sua "existência" dependente da existência (definição) de <u>todos</u> aqueles aos quais sua definição se refere, e que incluem ele próprio.

Ou ainda, considerando que o genero G sò esta <u>dado</u> quando estiverem dados todos os seus elementos, e o objeto definido em termos de G sò esta dado quando G o estiver, temos que nem este objeto, nem o genero G, estarão alguma vez dados.

A maneira "criativa" como Poincaré vê as definições implica que de alguma forma os objetos matemáticos são construidos segundo hierarquias, onde os objetos de níveis inferiores são introduzidos <u>antes</u> dos objetos de níveis superiores. Um objeto definido por menção a uma certa coleção de objetos só pode ser introduzido no hierarquia depois de todos os objetos a que se refere. Porisso um objeto não pode ser definido por uma relação com todos os individuos de um genero que o contenha, ou que contenha um individuo que só "existe" (isto é, só pode ser definido) por menção a ele.

Em [[31]p.211] Poincaré afirma que "les definitions non prédicatives ne peuvent être substituées au terme défini". E isto porque se um termo é impredicativamente definido e nos dispusermos a eliminá-lo onde aparece pela sua definição e nesta todos os termos definidos pelas suas definições, não lograríamos nunca a partir dela uma identidade tautológica. Num certo sentido a definição não contém apenas um número finito de palavras uma vez que a tentativa de substituição do termo definido pela sua definição nos levaria a uma regressão infinita[1].

Assim, asserções envolvendo este termo não serão verificaveis. Ou, colocando a questão sob outro ótica, uma asserção envolvendo qualquer objeto só poderá ser verficavel em principio se o objeto estiver em algum momento dado. Como isto não ocorre para "objetos" impredicativamente definidos, asserções que os envolvam não podem ser verificadas. Logo não são significativas.

Poincaré simplesmente nos diz que asserções envolvendo objetos impredicativamente definido não podem ser verificadas porque esses objetos não podem ser dados. Assim, se para asserções em geral, verificabilidade, que se pode entender como a "existência" ideal do estado de coisas a que a asserção se refere, determina o sentido, para nomes este é determinado pela "existência" ideal do objeto referente.

Ao lado de definições, Poincaré considera ainda classificações impredicativas.

Considere o paradoxo do menor número inteiro que não pode ser definido por uma frase com menos de cem palavras portuguesas, e que no entanto o é. Poincaré acredita que a origem do paradoxo está em se considerar imutável a classificação dos inteiros em duas categorias, dos que podem e dos que não podem ser definidos por uma frase com menos de cem palavras portuguesas e sacar conclusões segundo as regras clássicas de inferência, exclusivamente válidas para

1. Lembre a condição de Pascal de que as definições devem permitir-nos a substituição, em todo contexto, do termo definido pela sua definição

classificações imutáveis. No entanto, a classificação não é imutável, no sentido de que sempre que a considerarmos terminada, poderemos alterá-la. Diz Poincaré " a classificação não poderá ser definitiva senão quando tivermos passado em revista a todas as frases com menos de cem palavras (há apenas um número finito delas, portanto a tarefa é factivel) tivermos rejeitado aquelas que não têm sentido e houvermos fixado definitivamwente o sentido daquelas que apresentarem algum. Mas entre essas frases, há algumas que não podem ter sentido senão depois de ficar fixa a classificação; são aquelas em que se trata dessa própria classificação. Em resumo, a classificação dos números pode ser definitiva unicamente depois que a seleção das frases estiver finda, e essa seleção só poderá terminar depois que a classificação houver sido feita, de sorte que nem a classificação, nem a seleção jamais poderiam estar concluidas" [[30],pp.85-86].

Assim Poincaré é levado a distinguir entre classificações predicativas, que não podem ser alteradas pela introdução de novos elementos, e não predicativas, ou impredicativas, que são constantemente alteradas pela introdução de elementos novos.

Essencialmente, classificações impredicativas são aquelas em que o princípio de classificação depende de uma classe ou de uma noção que não permanece invariável enquanto a classificação está sendo feita, fazendo-nos classificar um objeto ora numa, ora noutra categoria. No exemplo acima, a classificação depende da classe das frases com menos de cem palavras que são significativas e que definem um número inteiro, esta classe porém é alterada na medida em que a classificação está em curso.

A grande deficiência de tais classificações é que para elas não valem as regras clássicas da lógica formal. Para Poincaré, a lógica formal nada mais é do que o estudo das propriedades comuns a toda classificação imutável, assim aplicá-la fora de seu escopo fatalmente originaria paradoxos.

O ponto interessante a ser assinalado aqui é que Poincaré procura com a noção de classificação predicativa delimitar o escopo de validade das regras clássicas de inferência. As classificações impredicativas são classificações apenas na aparência, por proclamação, pois na verdade são irrealizáveis pois, e isto é algo a se notar, para que tenhamos uma classificação é preciso que possamos determinar de uma vez por todas a categoria de qualquer objeto que nos seja dado, possível de classificação, mesmo que não saibamos em nenhum momento a categoria de cada um da totalidade dos objetos classificáveis.

Como isto não ocorre nas classificações impredicativas, as relações entre as categorias determinadas na classificação são alteráveis, sendo impróprias ao tratamento da lógica formal clássica, a única disponível, e, consequentemente sem direito de cidadania em Matemática.

Conclusão

É patente em nossa tentativa de explicitar a razão da critica de Poincaré à matemática de seu tempo, triunfalmente formalista, que estegrande cientista frequentemente satisfazia-se com uma linguagem excessivamente alegórica, pouco rigorosa e que quase nada explicava efetivamente, quando se tratava de refletir sobre a atividade matemática.Tome por exemplo a "restrição" que exige que as definições matemáticas"tenham um número finito de palavras". Como se alguma vez alguém tivesse logrado definir o que quer que seja com um número <u>infinito</u> de palavras ! Ou ainda sua versão da existência matemática : o <u>que</u> é isto que passa a "existir" através de uma definição apropriada? Ou, que tipo de dependência existe entre um objeto e aqueles outros que comparecem em sua definição? Que significa "verificar" um teorema? A "construção" matemática é um processo no interior de consciências individuais (psicologismo) ou de alguma forma exterioriza-se como atividade de consciências envolvidas num projeto comum? As respostas a estas perguntas estão, em Poincaré, na dependência de algum tipo de interpretação que, muitas vezes mostra mais os compromissos do intérprete que as intenções originais. Alguns, como E. Zahar [40] aproximam-no de Kant. "les objects mathematiques ne pre éxistent pas à leur definition, c'est-a-dire a leur construction dans les temps. L'intuition pure du temps peut être idealiseé de façon a ne remplir qu'une seule fonction: celle de permettre l'intération, en nombre fini, d'operations créant un être mathematique". Outros, como Chihara, interpretam-no segundo uma orientação nominalista: o que uma definição "cria" é um símbolo numa linguagem. " For Poincaré , the power of the mathematician to "create" entities boils down to a power to introduce new symbols into his language via definitions" .[[5],p.168]. Esta leitura tem algum apoio nos textos. Lê-se por exemplo, em Poincaré, com os meus grifos. "un jour on a imaginé le <u>mot</u> d'uniformité de la convergence, et ce mot seul les [certos argumentos] a rendu inutiles" [[31],p.28], "un <u>mot</u> bien choisi suffit le plus souvant pour faire dis paraître les exception que comportaient les règles enoncés dans l'ancien langage" [[31],p.29], "parmi les <u>mots</u> que ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'invariant" [[31],p.30]. E por aí afora. Mas em muitas outras passagens fica claro também que os termos definidos referem-se a "algo", não são apenas símbolos mas antes sinais cheios de significado, indicando objetos que, por outro lado, não se poderia ver com nenhum tipo de subsistência ontológica. A verdade é que parece que a Poincaré coube, nos fundamentos da matemática, indicar caminhos que não lhe coube percorrer. Basta-nos aqui notar que duas "posturas" fundamentais convergem em Poincaré, determinando-lhe a saída predicativista do labirinto dos paradoxos. Por um lado seu anti-platonismo sustentado por forte empiricismo, por outro lado um operacionalismo de homem afeito às ciências físicas. Só se pode dizer que existe em matemática o que se pode definir apropriadamente sem contradição, e só se pode definir apropriadamente através de expressões significativas, que são aquelas exatamente que podem ser verificadas. O importante é que em Poincaré a questão da ontologia conhece uma inflexão linguistica e o problema do que existe é traduzido no problema de que expressões, construidas segundo as normas da gramática e da lógica, são ademais significativas. Dificilmente se poderia dizer que Poincaré esposa uma teoria verificacionista de significado, tal como se entende usualmente esta expressão. No entanto é certo que uma verificação deve nos dizer se um enunciado particular é verdadeiro ou falso, o que não elimina inclusive a possibilidade da resposta se apresentar numa intuição irredutivel, que é uma "experiência" matemática genuina, segundo Poincaré.Também ao delimitar a existência matemática aos dominios das expressões significativas, Poincaré delimita simultaneamente o campo de validade da lógica clássica. Para uma sentença com significado, isto é, verificável, vale certamente, por exemplo, que é ou verdadeira ou falsa, tertium non datur. As classificações predicativas, por seu turno, são exatamente aquelas para as quais valem as regras clássicas de inferência. Enfim, para Poincaré, os paradoxos não constituiam certamente apenas um acidente de percurso aos quais bastaria isolar por alguma restrição ad hoc, mas os sintomas de um mal que ameaçaria todo o edificio da matemática, e que se deveria sanar antes a partir de uma teoria do significado que nos previnisse contra o contra-senso e o consequente colapso da lógica, quepor uma ontologia dogmàtica que excluisse dos dominios da matemática, via alguma restrição fortuita, objetos problemáticos.

II - O construtivismo em Kant

Introdução: Nossos objetivos nas páginas seguintes são:

1. Caracterizar a noção de construção de conceitos e o sentido de construção na matemática kantiana.

2. Expor a teoria kantiana dos números irracionais e a teoria kantiana do contínuo como precursora das teorias aritméticas do contínuo, que irão se tornar privilegiadas na matemática a partir da chamada aritmetização da análise, mas principalmente como precursora das teorias intuicionistas, em sentido amplo, do contínuo.

3. Elaborar algumas críticas à interpretação intuicionista da matemática em Kant, notando por um lado que é possivel uma leitura puramente conceitual de traços da matemática que Kant creditava a seu suposto caráter intuitivo e, por outro, a possibilidade de um desvio para o psicológico que tal interpretação pode propiciar. Esta última nos será útil quando do estudo do intuicionismo de Weyl, de seu caráter objetivista e como este caráter opõe-se ao psicologismo de intuicionistas da escola de Brouwer e de como tais diferenças de orientação devem-se em última análise ao papel reservado à linguagem em ambos os sistemas.

1. O Esquematismo dos Conceitos Puros do Entendimento

Segundo Kant aquilo que um conceito representa , pode ou não ser também intuido, isto é, percebido na intuição, pura ou empirica. Por exemlo, aquilo que é simplesmente representado no conceito de circulo pode ser intuido no objeto este prato. Neste caso Kant diz que o conceito é homogeneo ao objeto, portanto a subsunção do objeto no conceito é uma operação que não envolve mistérios. O objeto O pode ser pensado segundo o conceito C se aquilo que é representado em C é intuido em O.

Entretanto se um conceito, como por exemplo uma categoria, representa o que não pode ser intuido, então Kant acredita que temos um problema: como aplicá-los a seus exemplos? A intuição pode nos dar A e B, mas não dá A como causa de B. O que então nos habilita a falar de causalidade numa sequência de eventos e não em outras?

Este problema é a origem da teoria do esquematismo dos conceitos puros do entendimento. O esquema de um conceito é exatamente o que intermedia o conceito e seus exemplos; é homogêneo, por um lado, ao conceito e, por outro,ao fenomeno subsumido ao conceito; tem um pé no entendimento e outro na sensibilidade.

Se bem que atentando em particular para as categorias, a forma de Kant tratar o problema no Cap. 1 dos Analitica dos Principios faz crêr que a todo conceito associa-se um esquema. Vejamos por exemplo o conceito de triângulo, como aplicá-lo a seus exemplos?

Segundo Kant a ele não está associada uma (ou mesmo várias) imagem(s), de modo tal que possa dizer "um triângulo é algo que se parece com isto" (onde "isto" denota a imagem), mas uma regra , de tal modo que digo "um triângulo é algo que se obtém assim" (onde "assim" denota a regra). Esta regra, este procedimento geral de se obter imagens de triângulos quaisquer, é precisamente o esquema associado ao conceito de triângulo e que nos permite aplicá-lo aos objetos da sensibilidade.

Kant define o esquema como "a representação de um processo geral da imaginação para dar a um conceito a sua imagem" ([25] p.183).

Ou, dito de outra forma, é uma regra[1] que produz imagem na intuição que representam, ainda que de modo particular e não completamente adequa

1 chama-se regra " a representação de uma condição universal segundo a qual um certo discurso pode ser posto" ([25] p.155)

do, o conceito: é uma regra segundo a qual a imaginação produz imagens ou diagramas que representam o conceito.

O esquematismo é função da imaginação, mas o esquema distingue-se da imagem, como bem ressalta Kant: "... como a síntese da imaginação não tem por objetivo uma intuição singular, mas tão só a unidade na determinação da sensibilidade, há que distinguir o esquema da imagem. Assim, quando disponho cinco pontos um após o outro . . . . . tenho uma imagem do número cinco. Em contrapartida, quando penso um número em geral, que pode ser cinco ou cem, este pensamento é antes a representação de um método [meus grifos] para representar um conjunto, de acordo com certo conceito, por exemplo mil, numa imagem, do que essa propria imagem, que eu, no ultimo caso, dificilmente poderia abranger com a vista e comparar com o conceito " ([25]p.183)

Diz ainda: " De fato, os nossos conceitos sensíveis puros não assentam sobre imagens dos objetos, mas sobre esquemas. Ao conceito de um triângulo em geral nenhuma imagem seria jamais adequada. Com efeito, não atingiria a universalidade do conceito pelo qual este é válido para todos os triângulos retangulos, de angulos obliquos, etc.,ficando sempre apenas limitado a uma parte dessa esfera. O esquema do triângulo só pode existir no pensamento e significa uma regra da síntese da imaginação com vista a figuras no espaço" ([25] p.183)

Ou ainda:" Só podemos dizer que a imagem é um produto da faculdade empirica da imaginação produtiva, e que o esquema de conceitos sensiveis (como das figuras no espaço) é um produto e, de certo modo, um monograma da imaginação pura a priori, pelo qual e segundo o qual são possiveis as imagens, estas têm de estar sempre ligadas aos conceitos, unicamente por intermedio do esquema que elas designam e ao qual não são em si mesmas inteiramente adequadas." ([25]p.184)

Das citações acima parece então ficar claro que, para os conceitos sensiveis, quer da sensibilidade pura, quer da sensibilidade empírica, o esquema é o procedimento pelo qual a imaginação pura a priori produz imagens que representam, mesmo imperfeitamente, o conceito.

Mas se isto fosse todo que pudessemos esperar do processo de esquematismo o problema inicial referente às categorias ainda estaria sem resposta, uma vez que tais conceitos não admitem imagens que os representem, nem mesmo remotamente. Nestes casos os esquemas devem ser apenas regras para a determinação da subsunção* no tempo, os esquemas das categorias serão simplesmente "determinaçoẽs a priori do tempo segundo regras". Dito mais elementarmente, são " traduçoēs" das categorias em conceitos que levam, de algum modo, a temporabilidade consigo , e que tenham portanto elementos homogêneos" aos fenômenos.

"... o esquema de um conceito puro do entendimento é algo que não pode reduzir-se a qualquer imagem, porque é apenas a síntese pura, feita de acordo com uma regra da unidade segundo conceitos em geral, e que exprime a categoria; é um produto transcendental da imaginação, referente à determinação do sentido interno em geral, segundo as condições de sua forma (o tempo), em relação a todas as representações conforme à unidade da apercepção." ([25] p.184]

Se C é uma categoria e O um objeto então o esquema de C nada mais é que a regra geral: C é aplicável a O apenas se C' é aplicável a O, onde C' é um novo conceito que envolve alguma determinação de tempo.

Por exemplo, o esquema da <u>quantidade</u> (quantitatis), como conceito do entendimento, é o <u>número</u>, que é uma representação que engloba a adição sucessiva da unidade á unidade. (do homogêneo)". ([25] p 184)

Isto é, o conceito de <u>quantidade</u> é aplicavel aos fenômenos pela interseção do conceito de <u>número</u>, representado como uma sintese de unidades homogêneas sucedendo-se no tempo.

Um objeto pode ser pensado sob o conceito de <u>necessidade</u> se pode ser pensado como existente em todo o tempo. Pode ser pensado sob o conceito de <u>substância</u> se pode ser pensado como subsistente no tempo, e , analogamente, para todas as categorias.

De um modo geral, Kant chama <u>esquema</u> "a esta condição formal e pura daa sensibilidade a que o conceito do entendimento está restringido no seu uso" ([25] p.183). Quer "construindo" imagens na intuição, quer "determinando o tempo segundo regras", o esquema dos conceitos puros é a garantia de que estes conceitos conhecerão apenas um uso empírico, que "enquanto condições de uma experiência possível se referem a priori ùnicamente a fenômenos. " ([25] p.182)

Em particular para a aplicação dos conceitos sensíveis não basta uma regra que <u>possa</u> produzir imagens, mas também produzi-las realmente, isto é, o procedimento dado no esquema deve, se podemos usar o termo, "convergir". Se levarmos a sério a sugestão kantiana de que a aritmética é a ciência do tempo, como a geometria é a ciência do espaço, e privilegiarmos o sentido interno na "construção" das imagens dos conceitos numéricos, colocando entre parênteses o espaço e a exterioridade (a aritmética como uma pura atividade da alma, como uma experiência interior), encontraremos problemas com o quesito da convergência dos procedimentos construtivos, esquemáticos, no caso de conceitos de números irracionais. Este particular problema foi proposto a Kant por um correspondente (A.W. Rehberg) e, como veremos mais adiante, a solução kantiana vai exatamente na direção da espacialização dos procedimentos esquemáticos da aritmética e contra, assim a, digamos, privatização da aritmética como experiência interna. Com isto Kant evita o desejado por aquele correspondente: uma liberação dos conceitos puros da matemática das restrições da sensibilidade, e mais uma vez reafirma que, mesmo esses conceitos, não conhecem outro domínio que o dos fenômenos.

É exatamente esta restrição, mais o caráter do espaço e do tempo como formas de toda intuição, que garantem a matemática seu caráter de conhecimento a priori dos fenômenos quanto a forma, com idêntica enfase nos três termos grifados.

Para os conceitos puros da matemática, o esquema produz imagens que valem, cada uma delas, como uma representação do conceito, mas apenas na medida em que considero nesta imagem o que nela é geral e comum às outras imagens. Assim, na matemática temos o privilégio de examinar "concretamente" os conceitos, examinando qualquer uma de suas imagens e buscando nelas as determinações implicitas no conceito. É isto o que caracteriza o "construtivo" da matemática kantiana e que analisaremos a seguir.

2. O Construtivismo Kantiano

Na "Doutrina Transcedental do Método", Kant sintetiza a diferença metodológica entre Filosofia e Matemática pela bem conhecida máxima:" o conhecimento Filosófico é o conhecimento racional por conceitos: o conhecimento matemático, por construção de conceitos" ([25],p.580)

O que significa construir um conceito?

" Construir um conceito significa apresentar a priori a intuição que lhe corresponde" ([25] p 580). Esta, enquanto intuição é um objeto singular, mas como construção de um conceito exprime o que vale universalmente na representação para todas as intuições possíveis que pertencem ao conceito.

O esquema de um triangulo, por exemplo, produz intuições singulares, valendo cada uma delas como uma construção do conceito de triângulo, na medida em que considero nelas apenas o ato de construção, "assim construo um triângulo apresentando um objeto correspondente ao conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja , de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos, completamente a priori, sem ter pedido o modelo à qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo" ([25]p.580).

Assim, por oposição à Filosofia, o conhecimento matemático considera " o geral no particular e mesmo no individual, mas a priori e por meio da razão, de tal modo que, da mesma maneira que este individual está determinado por certas condições gerais da construção, também o objeto do conceito, a que este individual corresponde apenas como seu esquema (aqui no sentido de imagem - minha nota), deve ser pensado como universalmente determinado" ([25]p.580).

A peculiaridade da Matemática como conhecimento racional por construção de conceitos deve-se a que apenas o conceito de grandeza lhe diz respeito e apenas este se pode construir, isto é, expor a priori na intuição.

"A meditação matemática ... nada pode fazer com o mero conceito, mas apressa-se a recorrer à intuição, na qual considera in concreto o conceito, embora não de modo empírico, mas simplesmente numa intuição que apresentou a priori, isto é, construiu, e na qual tudo aquilo que resulta das condições gerais da construção deve ser válido também de uma maneira geral para o objeto do conceito construido" ([25]p 581).

Assim, considerar um conceito _in concreto_ é examiná-lo na intuição a priori (singular) dada na construção do conceito.

Na Matemática ... os conceitos devem estar imediatamente presentes _in concreto_ na intuição pura" ([25],p.78) (meus grifos). Aqui " in concreto" opõe-se a "in abstracto", este significando "mediante conceitos", aquele "na intuição singular".

O método matemático não consiste em analisar os conceitos, mas antes sair deles para alcançar as propriedades que não residem neles mas contudo lhes pertencem, e isto so é possível quando os considero _in concreto_ e pela análise de suas construções.

Porisso apenas na matemática encontram-se verdadeiras definições[1]. Kant crê que nem os conceitos empiricamente dados, nem os priori são passíveis de definição, mas apenas de explicitação (ou explicação) e exposição. Restam então os arbitrariamente pensados. O problema é que neste caso a definição pode não captar um verdadeiro objeto, e assim a pretensa definição não é mais que uma declaração de propósitos. São capazes de definição apenas os conceitos que contém uma síntese arbitrária que _pode ser construída a priori_; assim só a Matemática possui definições. Definir é construir conceitos originais.

Nada pode ser definido que não possa ser _efetivamente_ construido[2].

"Na Matemática a definição pertence _ad esse_" ([25]p 591 n).

Mas Kant não considera apenas as construções ostensivas, senão também as construções simbólicas, como em Álgebra: " A Matematica, porém, não constrói simplesmente grandezas (quanta) como na geometria. Constrói também a pura grandeza (quantitas), como acontece na álgebra, em que faz inteiramente abstração da natureza do objeto que deve ser pensado segundo um tal conceito de grandeza. Escolhe então uma certa notação de todas as construç~oes de grandezas em geral (números), como as da adição, da subtração, extração de raízes, etc. e , depois de ter indicado o conceito geral das grandezas, segundo as suas diferentes relações, representa na intuição, de acordo com certas regras gerais, toda a operação pela qual é engendrada ou modificada a quantidade. Quando uma grandeza

1. cf [25] 589-592.

2. porisso "as definições matemáticas nunca podem ser falsas" ([25]p 591).

deve ser dividida por outra, combina os caracteres de ambas segundo a forma que designa a divisão, etc., e alcança assim, mediante uma construção simbólica, tal como a geometria por uma construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos), aquilo que o conhecimento discursivo, mediante simples conceitos, nunca poderia alcançar" ([25]p. 582). Aqui Kant aproxima a construção simbólica da álgebra à construção ostensiva da Geometria, para afastá-la do conhecimento meramente discursivo.

Os símbolos da álgebra não são meros auxiliares da memória, mas novos <u>objetos</u> sobre os quais se opera. Construções <u>simbólicas</u> são representações na intuição (tempo) das transformaçoes dos símbolos (operações que transformam ou engendram as quantidades representadas por eles) segundo regras. Pode-se dizer que os símbolos estão para as figuras geométricas assim como as manipulaçoes das operaçoes aritméticas (adição, subtração, etc.) segundo suas regras estão para as construções geométricas.

3-UMA TEORIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS EM KANT

Na sua Mécanique Analytique (1788), Lagrange nos informa, de saida, suas intenções: "...não se encontrarão Figuras nesta obra. Os mètodos que aqui exponho não exigem nem construções nem raciocinios geomètricos ou mecânicos, mas apenas operações algèbricas sujeitas a uma marcha regular e uniforme".

Enquanto na Inglaterra os matemàticos ou talvez fosse mais correto chamà-los geômetras, como MacLaurin , apegavam-se dogmaticamente, apesar das criticas de Bekerley, à herança newtoniana e entendiam que o Cálculo deveria ser tratado em termos geométricos; no continente europeu Lagrange, Euler, d'Alembert, entre outros, preparavam o caminho para a a sua fundamentação rigorosa e a criação da Análise, que se dariam no século XIX com Cauchy, Cantor, Weierstrass, Dedekind, entre outros.

Como na Mécanique, tambem para os métodos infinitesimais Lagrange aponta o caminho do formalismo algebrico. Pela sua acepção da derivada como um coeficiente no desenvolvimento da função em série de potências, Lagrange acreditou ter reduzido o Cálculo à Álgebra e assim eliminado as obscuridades, nada infinitesimais, dos seus fundamentos. Por sua vez, Euler (1748), portanto antes de Lagrange, com sua noção analitica de função (que deveria enfraquecer mais tarde), amplia o domínio exclusivamente geométrico do Cálculo para ai incluir manipulações algébricas.

Prepara-se assim, por todo o século XVIII o caminho para a introdução do formalismo algébrico como a expressão privilegiada da razão matemática. Esta que deveria dar, neste século, espaço ao formalismo lógico, que é, evidentemente, um conceito impossível ao século XVIII. Os matemáticos de então são alheios à noção da demonstração matemática como uma marcha regular e uniforme, diríamos mecânica, de proposições segundo regras lógicas explicitas e arbitrarias. A Matemática ainda não havia se encontrado com a Lógica e não cogitava em adotar critérios lógicos de rigor.

O fundamento dea verdade e da "rigida demonstratio" (Euler) era ainda o "ver claro e distinto" cartesiano, e o que o formalismo algébrico abandonava era apenas a intuição geométrica como único fundamento do rigor.

Mas é claro que uma vez iniciado o movimento de retração da intuição geométrica como corte suprema da verdade, estava aberto o caminho que levaria os matemáticos a todo tipo de contrariedade, das funções sem derivadas, passando pelas demonstrações quase "teológicas" de existências de Cantor, ao "escândalo" dos fundamentos no início deste século, e que os obrigariam à instalação de um tribunal de apelação onde a intuição não fosse mais o juiz.

Mais sobre isso adiante.

A nossa pergunta agora é: onde e com quem está Kant, com a vanguarda do pensamento matemático da época ou com a tradição? Infelizmente, teremos que responder que , na perspectiva de então, Kant foi um reacionário.

Talvez por seu respeito à obra de Newton, o mesmo respeito estéril que paralizou o desenvolvimento da matemtica inglêsa, mas principalmente por coerência com a Filosofia Transcendental, Kant ocupava as trincheiras dos que se opunham à entronização de um formalismo que considerava vazio se não fosse restrito pelas formas a priori da intuição, o espaço e o tempo. Se bem que não tenha tratado diretamente das questões relativas ao Cálculo, que sintomáticamente considerava parte da Física, Kant nos esclarece sobre suas posições sobre os números irracionais e complexos numa carta endereçada a A.W. Rehberg, datada de de 25.09.1790. Este correspondente irá inquirir Kant sobre a possibilidade de livrar a imaginação matemática ds amarras da intuição possivel.

Ao longo dos séculos XVII e XVIII os matemáticos foram gradativamente se convencendo de que os números imaginários (complexos), que permitem uma solução geral para a equação do segundo grau, permitiriam também resolver equações de qualquer grau.

Varias tentativas de demonstração deste fato foram publicadas durante o século XVIII, a de d'Alembert, por exemplo, em 1746 e por fim uma demonstração rigorosa, baseada na de d'Alembert, por Gauss em 1799. E' para uma generalização da noção de número, que incorpore a noção de número imaginário, que Rehberg procura aliciar Kant e, consequentemente, na direção de um critério formalista, não intuitivo, de "existência", determinada pelas conveniências da propria teoria matemáticxa. O que se pede, enfim, é que à Matemática seja permitido cuidar-se de si própria.

O problema colocado a Kant, como este o entende, tem a seguinte forma: o entendimento tem o poder de criar números, como $\sqrt{2}$, conceitualmente, por que é incapaz de expressá-los em suas relações exatas com a unidade ? Se o entendimento pode pensar estes números, deveria tambem poder produzi-los; assim não precisamos assumir uma faculdade de imaginação transcedental que, independentemente ds intuições do espaço e do tempo, oferecesse a tais conceitos seus objetos?

A resposta de Kant irá, em primeiro lugar, negar a existência de uma tal faculdade de imaginação, que não dependesse ds intuições puras para suas sínteses. Mais ainda, no que diz respeito aos interesses propriamente matemáticos de Rehberg, Kant irá desaponta-lo completamente ao qualificar de absurdo, tout court, o conceito de número imaginário. Kant reafirmará ainda o ponto central da Crítica, de que o conhecimento a priori quanto a forma dos fenômenos, como a Matemática e a Física Teórica, so se realiza plenamente como conhecimento enquanto exclusivamente aplicáveis aos dados da intuição sensível (sensibilia), donde o imperativo da construtibilidade de seus conceitos, isto é da síntese a priori de seus exemplos na intuição pura do espaço e do tempo. Finalmente, ao reconhecer a preeminência da intuição espacial, geométrico, sobre a intuição temporal, aritmética, mesmo para a síntese númerica, Kant faz a questão de Rehberg servir a seus propósitos, no caso como um argumento para a refutação do idealismo psicológico.

Kant começa sua resposta notando que:

1) dado um número a e um seu fator x (possivelmente fracionário) é sempre possível encontrar um outro fator y tal que $a = x \cdot y$

2) se nenhum fator for dado, mas apenas uma relação entre eles, por exemplo que sejam iguais, então o problema será equivalente , neste caso , ao cálculo da média proporcional entre o número e a unidade, isto é de um número x tal que $1 : x = x : a$. Este é o conceito de $\sqrt{a}$.

Como este conceito não envolve nenhuma relação dedeterminada entre x e a unidade, sua anàlise lógica não nos responderá se tal relação existe ou não, isto é se o número x é ou não irracional. A análise lógica só nos poderá dizer se o conceito é possível, nunca se o conceito, se possível é ou não vazio, sem objeto, ou, ainda menos, se existe um tal objeto a ele subsumido na intuição, se este objeto é um número racional ou não. Para estas duas questões: é o conceito de $\sqrt{a}$, se possível, vazio? pode o objeto que lhe corresponde na intuição se existente, ser expresso por uma relação exata com a unidade? o que se pede são precisamente sínteses a priori na intuição pura, ou seja construções.

Se a for número negativo o conceito será simplesmente absurdo, e lá se vão os números imaginários, e suas imensas possibiliddes formais, que Kant deveria ver como nada além de metafísica da pior espécie.

Mas para uma a positivo, o conceito é logicamente possível. Entretanto como a possibilidade logica não e' garantia de existência, poderia ocorrer que o conceito fosse, mesmo assim, vazio. Tal seria se não pudessemos apresentar-lhe um objeto na intuição pura.

Mas isto nós podemos fazer. Para um número inteiro ou mesmo racional, a, podemos construir geometricamente, a partir de segmentos de comprimentos iguais a a e à unidade, um segmento de comprimento $\sqrt{a}$. Pouco importa que tenhamos, para dar ao conceito um objeto, que apelar para a forma do sentido externo (o espaço). Aliás é exatamente a existência de uma síntese espacial mesmo para aqueles números para os quais não existe uma síntese puramente temporal, para o conceito da sua raiz quadrada, que Kant julga filosoficamente relevante como argumento contra o idealismo psicológico.

Dado que $\sqrt{a}$ nao é, para a positivo, um conceito vazio, passamos à questão se é ou não um número propriamente dito, ou seja racional. E para tanto não basta apenas nomeá-lo, denota-lo ou simbolizá-lo, como na Álgebra, mas computá-lo. Ora, a computação é um processo seriado e o tempo é a condição formal de todas as séries.

Kant explicita como seria este cômputo, isto é nos dá um procedimento efetivo para decidirmos se $\sqrt{a}$ é ou não racional, para um número inteiro positivo a. Começa por assumir o fato demonstrado de que $\sqrt{a}$ é ou inteiro ou irracional para a inteiro. Assim para decidirmos sobre a racionalidade de $\sqrt{a}$ basta calcularmos o quadrado dos números menores que, digamos, o própria a e verificamos se algum destes quadrados é igual a a .

Mas Kant nos dá tambem o que hoje chamariámos de um algoritmo para o cômputo de aproximações arbitrárias de $\sqrt{a}$, caso esta quantidade seja irracional.

Esta é uma regra, no sentido kantiano "a representação de uma condição universal segundo a qual um certo diverso pode ser posto ", que nos dá um sequência potencialmente infinita, decrescente, de frações aproximando-se assintóticamente de $\sqrt{a}$.

A rigor como esta sequência no caso de raízes irracionais não converge para um objeto, Kant afirma que a resposta o que é $\sqrt{a}$, por exemplo, não é um numero mas uma regra para aproximar-se da resposta tanto quanto se queira.

Esses argumentos nos mostram que Kant não aceita o artifício algébrico, que já se apresentava no seu tempo, mas cuja uso só iria aumentar, de incorporar elementos ideais às teorias matemáticas com finalidades intrínsicas às própriaas teorias, nem lhe ocorria evidentemente postular, como Hilbert, uma Matemática significativa, finitária e uma Matemática formal, auxiliar, ou ainda, como Weyl, uma Mastemática intuitiva e outra construida sobre esta por certos processos lógico-linguisticos. Estes desenvolvimentos são obra deste século quando afinal se tornou claro que o formalismo, lógico mais acentuadamente, apresenta perigos e limitações que, é obvio, seriam impensáveis naquela segunda metade do século XVIII. O que Kant queria combater era uma má Metafísica dogmática e a aceitação de objetos para os quais não se pudesse oferecer uma representação na intuição pura, objetos que aproximavam-se perigosamente de fantasmas, sombras de nada. Se quisermos ver as posições de Kant sob uma luz favorável poderemos dizer que assim agindo Kant apenas quis garantir para a Matemática a segurança da consistência, evitando o aparecimento de antinomias envolvendo objetos e noções do seu dominio. Isto está quase explicitamente dito na Crítica quando Kant falando sobre as definições matemáticas diz que nada pode ser definido que não possa ser efetivamente construido e, porisso, " as definições matemáticas nunca podem ser falsas".

Mas é mais certo que a arma mais pesada da artilharia de Kant na luta contra o formalismo ou o convencionalismo é sua particular noção do conhecimento matemático. Para ele, o conhecimento é a conjunção do entendimento com a intuição. Aquele pode pensar,por si, abstratamente, um objeto, mas sem o concurso desta seria rigorosamente um pensamento sobre nada. Conhecer é estabelecer relações conceituais entre os dados da intuição. Se se trata da intuição pura temos conhecimento a priori de objetos, como a Matemática, mas apenas segundo a sua forma e exclusivamente na medida em que estas formas sejam formas de algo na intuição sensível possível.

Assim, contra Rehberg, Kant reafirma a limitação da sensibilidade à espontaneidade do conhecimento tendo em vista o caráter propedêutico da Matemática, como uma ciência propriamente formal mas apenas enquanto estas formas sejam formas de objetos de sensibilidade.

Numa carta a um outro correspondente, Johann Schultz, de 25.11.1788, esta postura é extremamente clara;" a ciência dos números é, a despeito da sucessão, que exige toda a construção da grandeza, uma síntese puramente intelectual, que nós representamos no pensamento... Mas na medida em que são grandezas (quanta) que trata-se de determinar por seu intermédio, elas nos devem ser dadas de tal modo que nós possamos apreender suas intuições sucessivamente, e que esta apreensão esteja então submetida à condição do tempo; assim, nós não podemos submeter à nossa estimativa de grandeza pelos números nenhum objeto senão aquele da intuição sensível possível, e é então um princípio que não se admite nenhuma excessão, aquele segundo o qual a Matemática não se aplica senão aos sensibilia "

A resposta de Kant a questão proposta por Rehberg tem então a forma seguinte: os conceitos da Matemática são exclusivamente aplicáveis aos dados da intuição sensível e assim é inescapável impor a eles os limites da sensibilidade.

Uma faculdade de imaginação transcendental, livre destas limitações, não poderia gerar, por força de sua própria transcendentalidade, números aplicáveis a objetos da sensibilidade.

Kant percebia que a aceitação de elementos ideais, produtos de síntese puramente inteleotuais, em Matemática, anularia seus esforços em reousá-los em Metasísica. Certamente ele não deveria desconhecer as críticas que Berkeley havia, em The analyst (1734), feito ao Cálculo, onde se diz que "aquele que consegue digerir uma segunda ou terceira fluxão, uma segunda ou terceira diferença, não precisa, creio melindrar-se com nenhum ponto de divindade".

Mas, detendo-nos nos aspectos puramente matemáticos da resposta de Kant a Rehberg, perguntamos se seria possível explicitar aí alguma teoria dos números reais. A resposta é afirmativa.

Primeiro, Kant nos apresenta uma teoria aritmética dos reais,ou seja, não é lícito referirmo-nos senão a números racionais e sequências de números racionais.

Segundo, essas sequências devem ser determinadas por algum algoritmo,ou seja, devemos poder através de um procedimento uniforme e efetivo determinar qualquer, um de seus termos por maior que seja.

A idéia de expurgar da Matemática, qualquer objeto "complexo" que não seja, em algum sentido do termo, "definível" não é, mesmo na época de Kant, nova. O proprio Descartes havia banido da Geometria todas as curvas que não tivessem uma definição analítica precisa em termos exclusivamente das operações algébricas de soma, produto, diferença, divisão e extração de raízes de qualquer ordem, e já nos referimos à definição de Euler de função, envolvendo o requisito de analiticidade, ou seja, funções deveriam ser bem comportadas relações definidas por expressões analíticas de um certo tipo.

Mas a criação por Cantor da teoria dos conjuntos (um "paraiso", segundo Hilbert) viria eliminar de vez qualquer modestia ou cautela que os matematicos pudessem ter quanto a admitir desconhecidos em suas casas ou conversar com estranhos.

Conjuntos "arbitrários", funções "arbitrárias", números reais "arbitrarios tornam-se moeda corrente. Dedekind, na metade do século XIX, tambem nos apresenta uma teoria aritmética dos reais,onde se admite porem livremente a referência a conjuntos e sequências arbitrarias de racionais.

Tudo parece ir muito bem até a eclosão do escândalo dos fundamentos nos primeiros anos deste século, que mostraria que nem tudo estava em ordem na teoria, já agora ingênua,, dos conjuntos. Por esta época começam a aparecer então versões renovadas de analiticidade, com Poincaré, com Weyl, com Lebesgue, entre outros.

Para Poincaré nada existe que não seja definível "num número finito de palavras", para Weyl nenhum real existe, enquanto um conjunto de racionais à maneira de Dedekind, que não seja definível, se bem que de modo não elementar,por uma fórmula da aritmética dos racionais,para Baire, Borel, Hadamard e Lebesgue, nada existe em matemática que não seja definível por uma propriedade explicitamente dada, para a Análise Recursiva os números ou funções reais são exclusivamente dados por procedimentos recursivos, algoritmicos.

Assim, menos que seu conservadorismo em Matemática caberia agora apontar em Kant, ironicamente, seu pioneirismo, mesmo inconsciente,não nos parecendo exagero de admirador atribuir-lhe a primazia de apresentar uma teoria <u>construtiva</u> dos fundamentos da Análise.

4- Da necessária união do espaço e do tempo na representação das intuições e a refutação do idealismo.

Kant termina sua resposta a Rehberg afirmando: " A necessidade da síntese das duas formas da sensibilidade, espaço e tempo, na determinação dos objetos de nossa intuição ... esta evidência da necessária síntese do sentido interno com o sentido externo, mesmo na determinação do tempo de nossa existência, parece-me útil na demonstração da objetiva realidade de nossas representações de coisas externas (contra o idealismo psicológico) embora não possa desenvolver esta ideia no momento".

Assim, ao admitir nossa incapacidade de construir no tempo, exclusivamente, um objeto que corresponda a um conceito aritmético, e a necessidade de apelar para o espaço para que se cumpra esta finalidade,Kant desvia o problema dos fins a que lhe destinava Rehberg e o faz servir a seus propósitos. A necessidade da representação geométrica para dar suporte às sínteses temporais da aritmética aponta para o fato filosoficamente relevante de que mesmo onde o sentido interno parecia privilegiado a forma do sentido externo é requerida como meio de representação.

O tempo é a forma do sentido interno e assim, como modificações do espírito, nossas representasções são sempre funções do tempo. É no tempo que estas são, para a constituição do conhecimento,ordenadas, ligadas e postas em relação. "Venham as nossas representações de onde vierem, sejam produzidas pela influência de coisa externas ou provenientes de causas internas, possam formar-se a priori ou empiricamente, como fenômenos pertencem contudo, como modificações do espírito, ao sentido interno e, como tais, todos os nossos conhecimentos estão, em última análise, submetidos à condição formal do sentido interno, a saber, ao tempo, no qual devem ser sempre ordenados,ligados e postos em relação " ([25] p.135-6). O tempo é a condição da diversidade em geral: " Toda a intuição contém em si um diverso que, porém não teria sido representado como tal, se o espírito não distinguisse o tempo na série de impressões sucessivas, pois, como encerrado num momento, nunca pode cada representação ser algo diferente da unidade absoluta" ([25] p.136).

Para a síntese do diverso de qualquer intuição é necessário a consciência conceber ou percorrer cada elemento do diverso, reproduzindo-o pela ação da imaginação intelectualmente disciplinada[1], à medida em que avança para os elementos seguintes, gerando assim um todo, uma representação completa da diversidade, que é oferecida ao entendimento para pensa-la como una. Mesmo o espaço e o tempo como intuições puras só assim podem ser representados: " é evidente que, se quero traçar um linha de pensamento, ou pensar o tempo de um meio-dia a outro, ou apenas representar-me um certo número, devo em primeiro lugar conceber necessáriamente, uma a uma, estas diversas representações. Se deixasse escapar do pensamento as representações precedentes (as primeiras partes de uma linha, as partes precedentes do tempo, ou as unidades representadas sucessivamente) e não as reproduzisse à medida que passo às seguintes, não poderia jamais reproduzir-se nenhuma representação completa, nem nenhum dos pensamentos mencionados, nem mesmo as representações fundamentais, mais puras e primeiras, do espaço e do tempo" ([25] p.140).

O que as sínteses de apreensão e reprodução nos oferecem é a representação simultânea de uma diversidade. Ora, se o tempo é a condição da diversidade em geral, o espaço é a condição da diversidade simultânea.

Assim, a representação de qualquer diversidade requer a conjunção das duas formas puras da intuição: o espaço e o tempo. Mesmo a representação de cada um destes como intuição pura só é possível pela síntese de ambos como formas: o tempo só pode ser representado por uma linha reta e esta só pode ser representada pelo seu traçado, como um movimento (como ato do sujeito, não como determinação de um objeto), uma função do tempo. (cf. [25] p.155, p. 137, p.199)

Chegamos assim ao cerne do argumento de Kant contra a idealismo psicológico: a nossa experiência interna (cuja forma é o tempo) só é possível mediante o pressuposto da experiência externa (cuja forma é o espaço). Mesmo a representação do tempo da minha existência pressupõe algo de permanente na percepção, que não pode ser algo em mim e, portanto, deve ser uma coisa exterior a mim (e não uma simples representação de uma coisa exterior a mim).

A questão dos números irracionais, ou mesmo todo o problema da continuidade, como demonstram os paradoxos de Zenão, seriam insoluveis para

1- "...se as representações se reproduzissem indistintamente, uma das outras,longe de formar um encadeamento determinado, não seriam mais do que um amontoado sem regra alguma e da qual não poderia resultar qualquer conhecimento, é preciso que a sua reprodução tenha uma regra,segundo a qual uma representação se une de preferencia com esta do que a uma outra na imaginação " ([25] p. 163)

Kant se a ciência da quantidade devesse privilegiar o sentido interno colocando entre parentêses a exterioridade do mundo exterior[1].

Porisso diz Vuillemin ([36] p 45): "Tudo se passa como se o sentido interno não nos fornecesse senão uma apreensão discreta da sucessão de nossos estados e de sua forma (números), e como se nós não tivessemos acesso à verdadeira continuidade senão desviando desse sentido interno para tomá-la emprestada ao espaço pela idéia de uma aproximação ao infinito"

A determinação do tempo da minha existência é a determinação de um quantum continuo, assim não é possível na experiência interna apenas. Este é, em poucas palavras,o núcleo do argumento de Kant contra o idealismo. A incapacidade das determinações do sentido interior frente á potência do continuo reaparece, de alguma forma, na incapacidade da aritmética de dominar seu próprio objeto, devendo lançar mão do sentido externo como meio de representação. É esta discrepância entre o discreto da aritmética e o continuoda geometria que Kant quer crer motiva a Rehberg querer livrá-la das amarras da intuição possivel. Desejo ao qual Kant não condescende, fazendo esta discrepância reverter em favor de seus argumentos contra o idealismo, por um lado, e por outro, apontar para a necessidade da busca de suporte geométrico para os conceitos, aritméticos, de números irracionais. E não buscá-lo numa suposta capacidade de imaginação transcedental.

1-O que mostram os paradoxos de Zenão senão que nenhum <u>quantum</u> continuo pode ser "coberto" por uma sucessão discreta ? e que portanto a continuidade é inacessivel à "experiência interna"?

5-Crítica

5.1. A Matemàtica de Kant e a nossa

Kant reconhecia apenas três disciplinas matemàticas: a aritmética , ou a teoria da quantidade determinada, a álgebra, ou a teoria da quantidade indeterminada; e a geometria, ou a teoria dos quanta.

I- IA aritmética: Esta é, na Crítica, a aritmética dos inteiros - Kant não reconhecia à aritmética o direito a verdadeiros axiomas e, assim, não há na matemàtica kantiana lugar para uma teoria axiomatica dos nùmeros.

Vejamos porque. Tomemos por exemplo o conceito aritmético de cinco e o conceito geométrico de triângulo. A representação do numero cinco numa imagem ..... é perfeitamente rigida com relação ao conceito, enquanto a representação do conceito de triângulo numa imagem de um triângulo arbitrário, isósceles ou não, equilatero ou não, é mais fluida exatamente em virtude da arbitrariedade do particular triângulo traçado. Assim, os conceitos da aritmética são perfeitamente determinados relativamente ás suas imagens, enquanto os da geometria são, por outro lado, indeterminados, e é esta indeterminação que provê a Geometria de verdadeiros axiomas, por oposição à Aritmética, onde as fórmulas numéricas não são axiomas propriamente ditos por serem proposições individuais. Nas palavras de Kant: " Porém, no que se refere à quantidade (quantitas), ou seja, à resposta à pergunta acerca de quanto uma coisa é grande, não há, na verdade, a esse respeito, axiomas propriamente ditos, embora muitas dessas proposições sejam sintéticas e imediatamente certas (indemonstrabilia). Que quantidades iguais somadas a quantidades iguais, ou delas subtraídas, deêm quantidades iguais, são proposição analíticas , porque tenho consciêcia imediata da identidade da produção de uma grandeza e da outra; os axiomas, porém, devem ser proposições sintéticas a priori. Em contrapartida, as proposições evidentes da relação entre números, embora sintéticas, não são gerais como as da Geometria, e, por isso mesmo, não se podem denominar axiomas, antes fórmulas numéricas . 7 + 5 = 12 não é uma proposição analítica.... Muito embora sintética, é simplesmente uma proposição individual. Na medida em que aqui se tem em vista somente a síntese do homogêneo (das unidades), esta síntese só pode aqui dar-se de uma única maneira, embora o uso destes números seja depois geral. Quando digo que, com três linha das quais duas tomadas juntamente, são maiores do que a terceira, pode construir-se um triângulo, tenho aqui apenas a simples função da imaginação produtiva, que pode traçar linhas maiores ou menores ou fazê-las, encontrar-se segundo os ângulos que lhe aprouver. Pelo contrário, o número 7 só de uma maneira é possível, bem como o número 12, produzido na síntese do primeiro com o número 5. Tais proposições não deverão pois denominar axiomas (neste caso haveria uma infinidade deles!) mas fórmulas numéricas" ([25] p. 200).

Acredito digno de nota observarmos nesta citação que proposições da forma $n = m \rightarrow n+k = m+k$ que poderiam ser vistas atualmente como verdadeiros axiomas da aritmética são para Kant proposições analiticas, logo indignas deste status, reservado exclusivamente para proposições sintéticas a priori e gerais. E que Kant considera surpreendente até como possibilidade da existencia de um número infinito de axiomas, o que hoje não nos causa nenhuma estranheza.

Uma conclusão que poderiamos tirar das palavras de Kant é que mesmo que dos esquemas de conceitos numericos possamos dizer que produzem imagens desses conceitos, estas são confinadas, nas palavras de Vuillemin (op. cit), numa "singularidade absoluta", por oposição à indeterminação das figuras do espaço com relação a seus conceitos. Assim mais que provedores de imagens os esquemas de conceitos numericos podem ser vistos como puras regras de construção.

Kant considera ainda, como distintos dos axiomas, os postulados, reproduzindo uma distinção presente entre os geometras gregos. Para ele, " postular significa dar uma proposição por imediatamente certa, sem justificação nem prova" ([25] p.250), mas como uma proposição simplesmente prática "que apenas contém a síntese pela qual damos a nos proprios um objeto e reproduzimos o seu conceito" ([25] p.251). Por exemplo, considere a proposição : com uma linha dada e um ponto dado, existe uma circunferencia com centrio neste ponto e raio igual a linha. O que esta proposição nos dá é a possibilidade prática de uma certa construção. Não podemos prová-la porque tal "prova" seria apenas a exibição da efetividade da construção, nenhuma construção acessória seria requerida. "Semelhante proposição não pode ser demonstrada, porque o processo que ela exige é, precisamente, aquele pelo qual produzimos, antes de mais, o conceito de tal figura" ([25] p. 251).

Quanto ao conceito, tão rico em possibilidades, de número imaginário, a aritmética kantiana deve dispensá-lo: é tido, como vimos, como simplesmente absurdo.

II - A Álgebra : como para Kant a equação linear com uma incógnita não passa de simples escrita simbólica que só adquire significação quando as letras são substituidas por números (tornando-se aritmética) e o cálculo diferencial e integral é um ramo da Física, não resta à Àlgebra propriamente dita senão aquilo que merecia esse nome àquela época.

Os tratados de álgebra até o século XVIII contentavam-se em expor as regras pelas quais reduz-se um sistema linear de equaçoes algébricas a uma equação do tipo $ax = b$. Ora, esse conjunto de regras, ou operações, constitui o que chamamos hoje um certo grupo de transformações lineares. E é exatamente essa noção, puramente intelectual (por oposição à sensível), que permite explicar a incongruência entre a generalidade do conceito espacial e a particularidade de suas imagens que Kant creditava ao caráter sensível e intuitivo do dado espacial.

Assim como a imagem determinada de um triângulo não é congruente ao conceito de triângulo, que permanece invariante sob a diversidade possível de suas imagens, um sistema de equações lineares permanece invariante sob o grupo das transformações elementares. Dois sistemas equivalentes são como duas imagens do mesmo conjunto de relaçoes " in abstrato" que seria representado por cada uma destas imagens.

É a noção de grupo de transformações que está no cerne da diferença entre síntese e generalidade, que Kant erroneamente creditava ao caráter sensível do espaço.

III - A Geometria : Considere-se o problema, frequentemente levantando por Kant para mostrar a irredutibilidade do espaço a um conceito, da congruência indireta de figuras, como é o caso das mãos direita e esquerda. Para Kant, a diferença observável entre estas figuras não pode ser conceitualmente fundamentada, mas apenas intuida. Vê-se a diferença, mas não se a compreende.

Hoje entretanto podemos abordar o problema do seguinte modo; pergunta-se: quais são as transformações do plano que conservam ângulos em grandeza mas trocando-lhes o sinal? a resposta nos leva ao grupo das inversões, e as figuras referidas acima são exatamente relacionadas entre si por elementos desse grupo.

De modo análogo, as contruçoes geométricas, puramente sensíveis segundo Kant, baseiam-se no postuladdo de que translações e rotações não alteram nem a grandeza nem a forma das figuras. Novamente o conceito de grupo de transformações (puramente analítico) resolve problemas que para Kant ilustravam o fundamento intuitivo e sensível da geometria. Assim é o problema das relações entre figuras homotéticas, que ilustram por exemplo o teorema aritmético da quarta proporcional. Para Kant é essa indeterminação da grandeza com relação a forma que faz da síntese geométrica uma síntese geral. Aqui o conceito fundamental é o de grupo das homotetias, conceito que, novamente, pode ser explicitado por meios puramente analíticos. (basta associar, números complexos aos pontos do plano e as homotetias serão funções do tipo $w = a z + b$, onde as variáveis livre (z) e a ligada (w) e as constantes (a e b) representam números complexos).

Assim, "não existe então nada na intuição sensível geométrica de que não possa dar conta analiticamente o entendimento" (Vuillemin, op cit p 53).

Até mesmo o suposto Kantiano do espaço euclidiano como fundamento do diverso simultâneo pode ser analiticamente expresso pela noção de espaço vetorial.

Como posso captar intelectualmente a particularidade de um ponto dado, distingui-lo de todos os outros pontos, sem pressupor o meio geométrico como fundamento dessa distinção?

A resposta lança mão das noções de "base" e "independência linear". Qualquer ponto do espaço pode ser unicamente determinado por um vetor $\vec{v}$ da forma $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ onde $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ são três vetores linearmente independentes (uma base) e a, b e c, são números reais relativos a essa base.

Assim o próprio espaço, enquanto fundamento do diverso simultâneo, pode ser analiticamente (eisto é, intelectualmente) expresso.

Desse modo, a geometria euclidiana (a geometria para Kant), suas construções e seu próprio substrato, o espaço, perdem suas características de sínteses sensíveis e de pura intuição para admitirem uma formulação puramente intelectual. Esse é o caminho que, já desde Kant, vai seguir a Matemática, mas que terá que ser refeito, nos estudos fundacionais, desde a descoberta dos paradoxos ditos cantorianos.

5.2 <u>As origens do paradoxos; existência, definição e o conceito de infinito em Matemática; Kant e Poincaré</u>

" infinity is only a great reservoir
of recollection, or a reservoia of aspiration:
man-made"

(D.H.Lawrence)

As sínteses matemáticas chamamos sínteses <u>sensíveis</u>, às quais oporemos as sínteses intelectuais, simples fusões conceituais, não-construtivas, na medida em que dispensam a apresentação in concreto dos conceitos no espaço e no tempo.

Que a Matemática dos nossos dias realiza tais sínteses é inquestionável, o que se mostrou nas páginas anteriores foi que a própria Matemática de Kant, um sistema de sínteses sensíveis realizadas a priori na intuição pura, pode ser reformulada como um sistema de sínteses intelectuais[1]. Mas isto não está isento de riscos, como historicamente demonstra a descoberta dos paradoxos de Teoria dos Conjuntos.

---

1. Há, em contrapartida, uma maneira em que síntese puramente intelectuais podem ser reduzidas a síntese sensíveis: oferecendo-se-lhes um "modelo construtivo". Aqui ao conceito puro corresponde na intuição não uma imagem segundo seu esquema, mas um monograma, uma representação, produzida pela imaginação segundo as determinações do espaço e do tempo, que apresenta com o conceito uma certa "identidade estrutural". P. ex. ao conceito de número complexo corresponderia não uma regra de determinação temporal - como no caso dos reais - mas uma representação por deslocamentos - vetores - num plano arbitrário. A "identidade estrutural" entre o conceito e o modelo é determinada pela correspondência entre as operações puramente formais entre números complexos e as operações contrutivas entre deslocamentos: à soma de complexos corresponde a composição de deslocamentos, etc. Com o predomínio da Matemática Formalista (das sínteses intelectuais) sobre a construtiva (das sínteses sensíveis), esse tipo de redução tornou-se crucial para garantir algum tipo de coerência aos sistemas formais - que tradicionalmente chamamos de consistência. O que justamente não constitui um problema para a Matemática construtiva. Kant chega a afirmar que na Matemática não se escondem nem podem passar despercebidas afirmações falsas"([25]p 391); Frege na célebre disputa com Hilbert, em vista de suas posições Kantianas em geometria, considera completamente inútil um demonstração da consistência dos axiomas da geometria euclidiana. O formalista Hilbert por seu lado eleva o problema da consistência à categoria de primordial e nos oferece por exemplo modelos aritméticos de geometrias não-euclidianas. É ai que os formalistas prestam tributo a Kant: os modelos são sempre construtivos e as intuições puras do espaço e do tempo o próprio material da construção.

De um modo geral tais paradoxos repousam sobre uma falsa pressuposição ontológica: a da existência de um determinado objeto matemático, em geral uma classe. Pressupor significa admitir como existente um objeto que não pode ser dado in concreto na intuição (" in concreto" aqui opõe-se inclusive à representação do objeto como " o único x tal que $\psi(x)$" mesmo estando demonstrado que existe um único x na condição $\psi(x)$).

O paradoxo constitui-se em verdade na redução ao absurdo do pressuposto.

Temos um análogo disto nas antinomias. A primeira por exemplo pressupõe o mundo como objeto, e portanto no escopo da experiência possível. Como tal deve simultaneamente ser intuido como limitado (na tese) e ilimatado (na antítese) no tempo e no espaço, o que constitui um reductio ad absurdum do pressuposto do mundo como objeto da experiência possível. É falsa a suposição de um objeto da intuição que contradiz as condições formais desta intuição.

No paradoxo de Russell o pressuposto da classe das classes que não se contém contradiz o próprio princípio de não-contradição, o que vale dizer as próprias condições formais do pensamento.

O critério de existência da Matemática Kantiana é a representação in concreto do objeto na intuição. Esta representação é a posteriori para os objetos sensiveis, a priori para os puros. Nenhum dos objetos acima, o mundo ou classe de Russell satisfaz o critério. No primeiro caso o objeto é representado <u>por conceitos,</u> isto é, in abstrato como a totalidade dos objetos da experiência possível, no segundo como a totalidade das classes que não se contém, mas a representação in abstrato não é suficiente para garantir existência, pois "o objeto não está meramente contido, analiticamente no meu conceito, mas é sintéticamente acrescentado ao meu conceito" ([25]p. 505), "toda a pressuposição de existência é sintética"([25]p.504). Em nenhum dos casos tem-se a possibilidade de representação in concreto, e é justamente essa impossibilidade que exibe a primeira antinomia. O caso da classe de Russell é ainda mais grave, o paradoxo mostra a incompatibilidade dos próprios conceitos que confluem na representação in abstrato mesma: a síntese conceitual é simplesmente, e num sentido muito forte, impensável.

Na medida em que previlegiam-se as sínteses intelectuais em detrimento das sensíveis abre-se a possibilidade aos paradoxos e o problema da existência dos objetos matemáticos coloca-se em outros termos. Para Mill a existência é estipulada: à definição deve seguir o <u>axioma</u> estipulando a existência do definido,. Para Poincaré, a existência é logicamente garantida, existir significa estar livre de contradições, isto é, uma síntese puramente intelectual determina um objeto se não for contraditória em si mesma ou com "verdades já admitidas"; o que o coloca numa posição, nesta questão em particular, oposta a Kant. O que para Poincaré garante a <u>existência</u> do objeto, para Kant garante apenas sua <u>possibilidade</u>, pois como categoria puraa existência não se distingue da possibilidade. (vide [25]p. 506).Da posssibilidade lógica do conceito não se segue a existência de um objeto por ele subsumido (vide nota à pag 503).

Toda proposição de existência é, para Kant, sintética e imprescinde de representação in concreto do objeto na intuição.

Como consequência, a noção de <u>definição</u> em Matemática é mais forte em Kant que em Poincaré. Para aquele "não restam outros conceitos capazes de definição do que aqueles que contém uma síntese arbritrária, que pode ser construída a priori" ([25]p.590) e " as definições matemáticas são construções de conceitos originariamente formados". (ver ¶ 1 acima).

Assim <u>definir</u> um conceito é construí-lo, isto é, representá-lo a priori na intuição por intermédio do seu esquema, o que implicade imediato na existência de um objeto a ele submetido. Por isso "as definições matemáticas nunca podem ser falsas" ([25]p. 491).

Já Poincaré, ao abandonar a condição necessária de construtibilidade do conceito, no sentido Kantiano, deve buscar em outro lugar a garantia de "veracidade" das definições matemáticas, Irá fazê-lo na restição predicativista.

Une-os entretanto o pressuposto de que só pela definição um objeto matemático tem existência.

O infinito é outro ponto de concordância entre Kant e Poincaré. Para aquele, como para este, infinito significa apenas indeterminado. A infinitude do espaço e do tempo, na medida em que estes são apenas as formas puras da intuição, significa apenas que é ilimitado em princípio o campo da experiência possível. " A infinitude do tempo nada mais significa que qualquer grandeza determinada de tempo é somente possível por limitações de um tempo único, que lhe serve de fundamento. Portanto, a representação do tempo terá de ser dada como ilimitada"([25]p.71). "A infinitude de uma série consiste precisamente em nunca poder ser terminada por síntese"([25]p.392). "O verdadeiro conceito (transcendental) da infinitude é que a síntese sucessiva da unidade na mensuração de um quantum não pode nunca ser exaustivamente acabada (este contém, assim, uma quantidade (da unidade dada), que é maior do que todo o número, o que é o conceito matemático de infinito"([25]p.396) "eis porque é impossível uma grandeza infinta dada"([25]p.396).

Mesmo na divisibilidade infinita de um quantum contínuo, o infinito aparece apenas como potência, e não como atualidade. O contínuo não é formado por partes simples em quantidade atualmente infinita." A propriedade das grandezas, segundo a qual nenhuma das suas partes é a mínima possível, (nenhuma parte é simples) denomina-se continuidade. O espaço e o tempo são <u>quanta contínua</u>, porque nenhuma das suas partes pode ser dada sem ser encerrada entre limites (pontos e instantes). O espaço é pois contituído por espaços, o tempo por tempos.

Pontos e instantes são apenas limites, simples lugares da limitação do espaço e do tempo; os lugares, porém, pressupõem sempre as intuições que devem limitar ou determinar, e não é com simples lugares, considerados como partes integrantes, que poderiam mesmo ser dados anteriormente ao espaço e ao tempo, que se pode formar espaço e tempo". ([25]p.204). O ponto matemático é simples "mas não uma parte, é apenas o limite de um espaço" ([25]p.403).

5.3. <u>O psicologismo e Kant - A Herança Kantiana no Intuicionismo</u>

Enquanto formas a priori de toda intuição, o espaço e o tempo são, em Kant, elementos constituintes subjetivos de toda experiência. Se bem que não explicitamente identificados às estruturas <u>psiquicas</u> de sujeitos concretos, estas formas são supostamente constitutivas de uma estrutura identicamente reproduzida em cada consciência individual. Como Kant não explicita como esta estrutura subjetiva é objetivada, como a construção a priori na intuição pura de figuras geométricas e séries numéricas segundo regras, são transformadas de algo-para-mim em algo-para-nós, abre-se a possibilidade de uma leitura "psicoloogizante" de entidades ideais supostamente objetivas.

É sintomático que Frege sinta-se compelido, em sua luta contra o psicologismo em lógica e matemática, a reler Kant na caracterização dos juízos sintéticos e analíticos. Ao retirar a ênfase do conteúdo dos juízos e coloca-la na sua justificação, Frege ignora as "vivências psiquicas" (as sínteses ou análises) que constituem o juízo e volta-se para as "vivência lógicas" (demonstrações objetivamente configuradas como entidades lógicas extra-psiquicas) que o justificam. Conscientemente ou não, Frege percebe que este"détour" é necessário para livrar Kant de leituras de orientação psicologista.

Numa outra direção o predicativismo matemático fará o mesmo, objetivando desta vez as <u>regras</u> que determinam as sínteses (vivências do eu, formas do <u>eu penso</u>), como <u>descrições</u> constitutivas (no sentido Kantiano de "regra, como a representação de uma condição universal, segundo a qual um certo diverso pode ser posto de maneira idêntica) de objetividades idênticas a si mesmas, expressas linguisticamente e portanto uma possessão comum, na medida em que é comum a possessão da linguagem em questão e suas significações.

G. de Ruggiero ("Sumários de história de la filosofia" p. 217) afirma. "Kant ... faz da subjetividade - entendida no sentido mais profundo de uma consciência universal, comum a todos os sujeitos empíricos novo centro ao redor do qual gravita o mundo objetivo (fenomênico)".

Isto é, a objetividade Kantiana é constituida por subjetividades concordantes (constituição transcendental do mundo da experiência). Mas Kant não tematiza esta concordância. É um pressuposto; de ordem psicológica, uma vez que caracteriza um elemento da formação psicológica humana. Em outras palavras, Kant assume um a priori: a uniformidade de certas estruturas psicológicas nos homens.[1]

O que é uma demonstração na matemática de Kant? Uma sequência de construções, num sentido geral que inclue tanto construções geométricas propriamente ditas,quanto as contruções simbólicas da álgebra, na intuição pura. O que valhe dizer, sequências de operações mentais. Não se trata em Kant de eliminar " intuições" reduzindo as demonstrações a simples manipulações formais

1. Husserl mesmo observa que Kant não enfatiza a separação entre a psicologia pura (fundada na experiência interna) e a fenomenolgia transcendental (fundada na experiência transcendental, fruto da redução fenomenológica-transcendental) e que portanto sua doutrina das sinteses não está claramente constituida a partir da experiência transcendental (cf. "[17]" ¶ 100) Assim abre-se a possibilidade de reduzi-la a uma doutrina psicológica. Hussel considera o idealismo "formal" kantiano como uma teoria das finalidades do conhecimento, e portanto como psicologismo, da mesma vertente do de F.A. Lange para quem as bases da matemática são as bases de nossa organização intelectual. (cf. " [21]-Prolegômenos ¶28 e " [22] ", onde se lê: Kant não atingiu a intenção última da distinção aqui necessária, visto que lhe faltava o conceito de fenomenologia e de redução fenomenológica e porque não conseguiu desvencilhar-se totalmente do psicologismo e do antropologismo)

segundo regras lógicas. Aqui ainda vemos em Kant a preponderância do psicológico, do mental, sobre o lógico.

Estas caracteristícas do Kantismo Matemático aparecem todas no intuicionismo. Beth, por exemplo, afirma (em " [2] ", in Constuictivity in Mathematics, p. 15): A fim de atingir este fim (o rigor da matemática clássica) devemos, em particular, tentar eliminar os elementos subjetivos, e às vezes misticos, que podem ser encontrados em muitos escritos intuicionistas". E continua: " devemos começar do conteudo verdadeiramente matemático, isto é objetivo, da matemática intuicionista e tentar construir uma linguagem (uma terminologia, ou um aparato conceitual) no qual este conteúdo possa ser adequadamente expresso. Se tal construção revelar-se impossível, parece seguir-se que a matemática intuicionista está condenada para sempre a permanecer uma experiência puramentesubjetiva".

Esta afirmação de Beth contém alguns pontos dignos de nota:

1. O único conteúdo verdadeiramente matemático da matemática intuicionista é o que pode ser objetivado.

2. Esta objetivação dá-se pela condensação das experiências puramente subjetivas nas estruturas objetivas de uma linguagem, um aparato conceitual, compartilhadas por uma comunidade.

3. Falhar neste projeto é condenara matemática intuiciosta a um dossié de vivências mentais, subjetivas, que é, parece, sua presente situação.

Este projeto, item 2 em particular, nos parece melhor desenvolvido pela matemática predicativista do que no proprio intuicionismo.

Em certa oposição a Beth, afirma Heyting ("[16], p. 69): "Se bem que construções matemáticas sejam originalmente operações mentais, o simbolismo é necessário, numa certa medida, por razões práticas (meus grifos).

Contrariando Beth, para Heyting a expressão linguística da operações mentais, que são para ele originalmente, e supõe-se essencialmente, o que constitue as construções de que trata tematicamente a matemática intuicionista, é simplesmente uma necessidade prática e não, como para Beth, o instrumento de objetivação destas construções.

Sobre a noção de construção e o papel da linguagem na matemática intuicionista diz Troelstra (" [34] " p.4): "As construções (mentais) que consideramos, são pensadas como existindo na mente de um matemático individual (idealizado). A linguagem da matemática é uma tentativa (necessariamente quase sempre inadequada) em descrever estas construções mentais. Falar de matemática intuicionista é assim uma questão de sugerir construções mentais análogas a outras pessoas. A similaridade dos procedimentos do pensar entre os vários indivíduos humanos torna tal tentativa possível. O matemático, que se ocupa a matemática construtiva, é uma criatura idealizada, suas idéias são supostamente claras e distintas, não turvas e confusas, como frequentemente são as nossas...a linguagem não é essencial para o matemático idealizado".

Troelstra sugere então que:

1. Construções são "vivências mentais" de uma consciência pura cujas funções psiquicas (memória, atençãom etc) são supostamente perfeitas.
2. Há um "isomorfismo" dos procedimentos intelectuais entre os homens. E cada um deles concretiza, de modo aproximado, a estrutura mental do matemático ideal.
3. A linguagem, necessariamente imperfeita é inessencial, tem um papel puramente descritivo, a objetividade das construções é determinada pela hipótese da similaridade dos procedimentos mentais entre os homens.

Estas linhas de Troelstra explicitam de modo exemplar as posições básicas, nem sempre tão claras, do " psicologismo transcensdental" inerente à matemática e herdadas do mencionado a priori do Kantismo.

Heyting (in Bochénski, " [4] ",p.293) afirma:"A matemática intuicionista é uma atividade do <u>pensamento</u>, e toda linguagem- mesmo a formalista- é para ela um <u>meio de comunicação</u>". Portanto em total acordo com Troelstra.

W. Kneale e M Kenaele (" [26]" p.681) - afirmam."É difícil saber exatamente o que é que eles (Brouwer e seus discípulos) querem dizer por "construção" e "construtivo"... mas o fato de muitas vezes negarem a dependência do pensamento matemático de qualquer gênero especial de linguagem e exprimirem desconfiança pela técnica de formalização...sugere que eles pensam que uma demonstração construtiva é uma demonstração que consiste em efetuar uma experiência na imaginação".

Kneale & Kneale citam neste ponto um texto de Heyting ("Intuitionismo; an Introduction",p..8) que expõe claramente a orientação psicologizante, antiplatônica e empirista de alguns intuicionistas."A matemática intuicionista... consiste em construções mentais; um teorema de matemática exprime um fato puramente empírico, nomeadamente a ocorrência de uma certa construção. "2+2 = 3+1" tem que ser interpretado como sendo uma abreviaçãode "efetuei a construção mental indicada por"2+2" e "3+1" e verifiquei que conduzem ao mesmo resultado": Ou seja, identifica-se o conteúdo <u>nomeado no</u> juizo como o conteúdo notificado pelo juizo (para estas distinções veja Husserl, "[21]",1º investigação).

Quanto à objetividade dos teoremas matemáticos, Kneale & Kneale afirmam sobre Heyting:...é óbvio que ele pensa que os teorem-as que ele demonstrou refletindo nos seus próprios poderes de construção mental podem ser demonstrados por qualquer outra pessoa que seja suficientemente inteligente... Talvez os intuicionistass modernos concordem com Kant que os teoremas da matemática são objetivos no sentido de serem válidos para todos os seres inteligentes" (meus grifos).

Nesta interpretação de Kant, com a qual concordo, a objetividade da matemática perde seu caráter de total independência da atividade matemática e a verdade matemática o seu de universalidade e intemporalidade.

Beth ("[3]" p, 409) afirma, como uma das máximas do intuicionismo. "É impossível penetrar nos fundamento da matemática sem prestar atenção às condições sob as quais a atividade mental própria aos matemáticos se dá". Afirma-se, ao que parece, que o estudo dos fundamentos da matemática deve conter uma análise da psicologia da atividade matemática de matemáticos reais. Beth nota corretamente que tal orientação contraria as posições de Frege no assunto.

Quanto ao papel da linguagem na matemática intuicionista Beth afirma, interpretando Brouwer, que a linguagem matemática "não pertence propriamente à matemática; nada mais é que um instrumento imperfeito usado pelos matemáticos para comunicar seus resultados e torná-los mais facilmente captados"(p.411). Tem portanto finalidade essencialmente prática.

Para Weyl ("[39]",p.50), Brouwer não aceita o sentido usual de proposição, como aquilo que afirma um fato, um estado de coisas (conteúdo nomeado no juizo) e estaria mais perto de acatar proposições o como descrições de estados mentais (conteúdo notificado pelo juizo):"Se nada a não ser a possibilidade de uma construção está sendo afirmada, nós não temos uma proposição significativa, apenas em virtude de uma efetiva construção, uma demonstração executada, uma sentença existencial acquire significado" (ibid. p.51)."Mesmo uma sentença universal não se refere a um fato", mas consiste numa "sentença hipotética:- se aplicada a um dado número dá-nos uma proposição definida"(ibid.p.51)

III - O Predicativismo em Weyl

"A matemática não consiste no desenvolvimento indiscriminado das consquências lógicas de dadas hipóteses, mas a intuição e a vida da mente científica põem os problemas e estes não podemser resolvidos por regras mecânicas como exercício de cálculo ".

Weyl

1 - O PRIMADO DA INTUIÇÃO

O objetivo confesso de " Das Kontinuum " é " compreender matemáticamente, segundo o seu conteúdo formulável em conhecimento 'exato', a continuidade dada a nós numa intuição imediata (em particular no tempo que flui e no moviemnto) " (p.44).

Compreender a continuidade dada numa intuição e compreende-la matemáticamente são duas tarefas distintas. A primeira compreensão é descritiva, fenomenológica; a segunda, exata, isto é, ideal, "trabalhando na substrutura das coisas ". Esta, originada daquela por ideação, não pode substituí-la; aquela, por outro lado, não pode prescindir desta, a menos que se renuncie a todo compromisso propriamente teórico. São tarefas complementares enfim.

O objetivo de Weyl é matemático, mas como o compreende, o matemático não é aquele vazio de significado, o mero jogo hipotético-dedutivo formal, mas o esforço para explicitar o logos inerente à realidade que é, esta, vivida numa intuição imediata.

Porisso Weyl pode dizer que " as nossas considerações sobre o problema do contínuo contribuem para o esclarecimento do problema da teoria do conhecimento que trata das relações entre os dados imediatos (intuitivos) e os conceitos formais (da esfera matemática), através dos quais, em geometria e em física, procuramos reconstruir os próprios dados" (introdução a "Das Kantinuum"), mesmo que do ponto de vista estritamente matemático nos apresente apenas uma teoria aritmética dos números reais.

Visto com um pouco mais de acuidade, o ensaio nos dá por um lado uma descrição fenomenológica do contínuo da intuição conjuntamente com uma explicitação, também fenomenológica, da intuição fundamental da Mathesis pura, a sucessão discreta e nunca interrompida dos números naturais; por outro lado, pelo lado do pensar conceitual, os primeiros esforços para a reconstrução de todo o edifício da Mathesis pura como formas do eu penso sobre as bases daquela intuição originária, conjuntamente com uma tentativa ideatória de nos render a intuição vivida do contínuo segundo os conceitos da Mathesis.

As pp. 81-83 do ensaio, Weyl nos oferece um brevíssimo histórico da problemática que o levou ás idéias expressas no texto. Este histórico tem a forma de uma confissão e configura o testemunho de uma conversão. Do convencionalismo, ou formalismo em sentido laxo, usual dos matemáticos, ao intuicionismo husserliano.

As coisas se passaram mais ou menos como se segue:

O problema original era o da explicitação da noção de enunciado de classe definido (definido Klassenaussage), de Zermelo, expresso nas " Investigações nos Fundamentos da Teoria dos Conjuntos I" (1908). A noção faz apelo às " leis universalmente válidas da lógica", que não são especificadas por Zermelo. Como esta noção é essencial para a formulação do axioma da separação /Axiom der Aussongderung) e a axiomática de Zermelo fundamental às teorias de Dedekind e Cantor, uma fundamentação segura da análise, e de toda a Matemática, na perspectiva da época, deveria começar pela elucidação do conceito problemático.

Na verdade era a própria noção de conjunto que pedia esclarecimento. Em Cantor, entendia-se por conjunto "qualquer coleção de objetos do nosso pensamento ou intuição separados e isolados num todo". O conceito, extremamente impreciso, cercava-se de um realismo que beirava contrangedoramente o misticismo. Para tornar as coisas piores, a teoria ingênua dos conjuntos encontrava-se ainda bombardeada pelos paradoxos de Burali-Forti e de Russell. Se Zermelo tem o mérito de trazer, pelo seu esforço de axiomatização, um pouco de luz à obscuridade reinante, dificilmente poderia, pela vaguidade de algumas de suas noções fundamentais, ter o crédito de trazer para a teoria dos conjuntos o mesmo grau de perfeição formal que Hilbert, por exemplo, nos levaria à Geometria Euclidiana.

O esforço de precisão conceitual será retomado por Weyl, entre outros, que terá o mérito, independentemente de Russell, de alinhavar o conceito a certas formações sintáticas da linguagem. Mas se neste o conceito de conjunto é simplesmente substituido pelo de função proposicional naquele evita-se a redução nominalista, em nome do objetivismo herdado de Husserl.

Uma maneira de se ler o ensaio de Weyl é como uma resposta à premente questão da época: o que é um conjunto? Esta resposta nos é dada, e só pode ser adequadamente comprendida, no ambiente da filosofia de Husserl como expressa principalmente nas " Investigações Lógicas" ("Logische Untersuchungen"- 1900-1901) e nas "Idéias" ("Ideen au einer reinen Phänomenologie und Phänomenologischen Philosophie" - 1913).

Weyl nos apresentará um conjunto como um objeto categorial, totalmente objeto e plenamente existente, sem contudo reivindicar-lhe nenhuma independência no sentido do realismo platônico. Pelo contrário, a sua natureza mesma é de objeto dependente. Dependente de certos atos que o põem. E que o põem de modo diferenciado ao longo das diversas regiões do domínio da Mathesis pura.

Consequentemente não poderá haver por exemplo, como há em Cantor, uma "escala universal de números cardinais e ordinais infinitos", válida de igual modo em qualquer dessas regiões.

Mas voltemos a Zermelo e aos problemas iniciais de Weyl.

Para Zermelo "uma questão ou asserção é definida se as relações fundamentais do domínio (ele se refere a um domínio de indivíduos - objetos e conjuntos - e às relações de pertinência daqueles a estes), por meio de axiomas e leis da lógica universalmente válidas, determinam sem arbitrariedade se se verifica ou não". Um enunciado de classe - ou função proposicional - C(x) é definido se é definido, no sentido acima, para cada indivíduo do domínio. A noção é fundamental para o enunciado de :

Axioma III (Axioma da separação). Quando o enunciado de classe C(x) é definido para todos os elementos de um conjunto M, M possui um subconjunto contendo como elementos exclusivamente aqueles elementos de M para os quais C(x) é verdadeira.

Dito de outro modo, um "enunciado de classe definido" é um predicado unário de algum modo logicamente determinado pela relação fundamental de pertinência

Para Weyl a "definição de Zermelo parecia " pouco satisfatória", e ele se pôs a explicitar este "de algum modo logicamente determinado".

A seguinte solução provisória é encontrada: Um predicado C(x) é definido, para efeitos da aplicação do axioma da separação, se pertence à classe gerada a partir da relação fundamental de pertinência por:

1) negação

2) identificação (de variáveis)

3) conjunção

4) disjunção

5) substituição (de variáveis por constantes do domínio)

6) projeção (quantificação existencial)

Ou equivalentemente, o axioma da separação poderia ser substituido por um grupo de seis outros axiomas, cada um deles garantindo a existência do conjunto obtido, a partir de um conjunto dado qualquer, por um dos "princípios de construção" acima.

A etapa seguinte na fundamentação da Aritmética e da Análise, segundo este sistema que não pressupõe supostamente o conceito de número natural, seria intruduzi-lo à maneira de Dedekind em " A natureza e o significado dos números" ("Was sind und was sollen die Zahlen ?" -1887), inclusive as noções de definição e demonstração por inclusão completa.

Do projeto diz Weyl : " Esta tentativa me levou a uma formulação muito extensa e sempre muito complicada, mas sem a obtenção de um resultado definitivo".

Weyl certamente não deixou de notar que, primeiramente, ainda que não explicita no sistema, a noção de número natural ai aparece implicitamente, no seguinte sentido: uma qualquer demonstração no sistema é uma sequência finita, mas de comprimento indeterminado, de certos processos elementares, e a noção de número natural nada mais é que o esquema abstrato geral destas sequências. Uma vez que Weyl buscava uma fundamentação radical, suficiente inclusive para fudamentar os próprios procedimentosque hoje chamamos de metamatemáticos, é claro que o sistema proposto lhe pareceria insuficiente.

Em segundo lugar, provavelmente por influência de Poincaré, Weyl deparou-se com a <u>impredicativadade</u> da definição, em Dedekind, da noção de cadeia gerado por um subconjunto de um conjunto qualquer por meio de uma função ai definida, essencial para a definição do conjunto dos números naturais. A cadeia gerada, com respeito a f, por um subconjunto A é definida como a intersecção de todas as cadeias com respeito a f que contém A.

E o que há de inaceitável na impredicatividade?

Como mostra a sua versão do axioma da separação, Weyl caminhava na direção de considerar os conjuntos antes como objetos <u>abstraídos</u>, segundo relações determinadas explicitamente dadas, a partir de domínios já constituídos de objetos, que como objetos abstratos independentementes. Assim os cojuntos só podem ser pensados como dispostos numa hierarquia de abstração crescente, cujo nível mais baixo seria formado por simples indivíduos, que para Weyl, seriam dados numa forma de intuição originária. Consequentemente, um ocnjunto não poderia ser determinado a partir de outro que já não estivesse previamente constituído. E essa é apenas uma versão do princípio do círculo vicioso, a restrição predicativista ela mesma.

Weyl, deve ter percebido à época que as definições impredicativas não poderiam ter lugar numa teoria de conjuntos crescentemente "construtiva".

Esta deve ter sido aproximadamente a situação quando Weyl entrou em contato com a filosofia de Husserl, pois ele escreve: "Só no quadro de uma filosofia geral, à qual cheguei depois de voltar as costas ao convencionalismo, vi com clareza que estava seguindo uma quimera escolática e acatei a firme convicção(de acordo com Poincaré, ainda que, de resto, conpartilho pouco a sua posição filosófica) que a idéia da interação, da sucessão dos números naturais, constitue um fundamento último do pensamento matemático, apesar da "teoria das cadeias" de Dedekind, que buscava fundar a definição e a demonstração por indução completa sobre o silogismo, sem referir-se a esta intuição".

A "Filosofia geral" a que Weyl se refere é a filosofia de Husserl. O primeiro ato concreto de conversão consiste na aceitação do princípio dos princípios desta filosofia : a intuição é a única fonte de autoridade e direito para o conhecimento.

Sobre a intuição escreve Weyl (p.35n) "...(a intuição imediata) permanece sempre a única fonte de legitimação do conhecimento, nela consiste ' a experiência viva da verdade' ".

Em Husserl a intuição imediata de um ser - ai - um objeto, uma situação objetiva, uma essência, uma objetividade categorial - é a vivência da presença em si deste algo, como ele objetivamente é.

É o ver em geral, que nos dá por definição, a coisa tal como ela é.

Essa intuição apresenta-se sob diversas modalidades, como intuição puramente empírica ou sensível, como intuição eidética, constitutiva das essências, ou como intuição categorial, ponente das objetividades categoriais em geral.

A <u>evidência</u> é a vivência da concordância entre a menção e o mentado presente na intuição, entre a significação de um enunciado (juízo) e a situação objetiva presente em si mesma na intuição correspondente. A <u>verdade</u>, num dos seus sentidos (v. "[21]", 6a inv ¶ 39) é o ideal desta adequação, ou ainda, a própria concordância vivida na evidência e porisso Husserl, e Weyl, podem falar desta "experiência viva da verdade".

A intuição em Husserl é a fonte última da justificação de toda a afirmação racional ("[20]" ¶ 19), o fundamento último do saber ("[21]" Prolegômenos ¶ ¶ 6, 40). A evidência, a consciência imediata da própria verdade (Ibid. ¶ 6), a vivência da verdade e não apenas o "sentimento", no sentido meramente psicológico, da verdade (Ibid. ¶51), de modo a ser possível evidências contraditórias em sujeitos distintos. O que é vivido como verdadeiro não pode ser falso (6a. inv ¶39)). No julgamento com evidência o objetivo nos é dado originariamente (Prol. ¶ 62). Assim a evidência instaura uma legalidade essencial (3a inv ¶ 7). É a forma mais alta do cumprimento da intenção significativa pela correspondente intuição (5a.inv.introd.).

Dai o <u>princípio de todos os princípios</u> ("[20]" ¶ 24) : a intuição, doadora primordial do objeto, e a evidência, doadora primordial da verdade, são as fontes de toda a autoridade para o conhecimento. O que quer que se apresente na intuição imediata é para ser aceito tal como, e apenas como, aí se apresenta.

O papel reservado por Weyl em seu ensaio à intuição, sua recusa a uma formalização "rigorosa", como seria do gosto de um Frege, apenas nos testemunha sua aderência ao intuicionismo husserliano, seu desdém pelo convencionalismo e seu radical compromisso com o " princípio de todos os princípios ", que poderia perfeitamente ser a sentença a abrir o ensaio.

Mas certamente Weyl nos apresenta demonstrações. Não deveriam ser estas, junto com a rigorosa determinação conceitual, o arcabouço de todo o edifício da <u>Mathesis</u> ? A este respeito tanto Husserl quanto Weyl são também claros. Ambos concordam que se por um lado os conceitos matemáticos são e devem ser, exatos, e portanto inadequados para a descrição da intuição como é vivida, por outro, a demonstração tem vis - a - vis a intuição um papel acessório.

Diz Weyl (pp 34-34n) " 'Na Ciência, aquilo que se pode demonstrar não deve ser aceito sem demonstração ', assim começa o famoso ensaio de Dedekind ("<u>Was sind und was sollen die Zahlen</u> ? Esta afirmação que é certamente característica do modo de pensar da maior parte dos matemáticos, exprime todavia um princípio errôneo. Como se aquele complexo de raciocínios que chamamos demonstração pudesse, na sua mediatiz produzir qualquer 'crença', sem que nós nos assegurássemos da correção de todo e qualquer passo numa intuição imediata!"

A função da demonstração é conduzir à evidência, via uma sucessão de evidencias, o que não é imediatamente evidente.

Na demonstração "toda a intuição necessária se concentra nos raciocínios lógicos, e não é mais dirigida sobre as coisas ou sobre os estados de coisas dos quais se julga" (p.34).

Igualmente em Husserl, a dedução é a explicitação de uma intuição, o caminho que a partir da evidência imediata conduz à evidência mediata ("[20]" ¶75).

O formalismo hilbertiano poderia ser descrito como dedução a partir de conjecturas, ou pelo menos de premissas não evidentes, e isto não é, segundo Husserl e Weyl, conhecimento. "Analogias...podem, antes de toda a intuição real, nos suprir com conjecturas a respeito das relações essenciais das coisas, e delas podemos inferir consequências que nos levam adiante, mas no fim as conjecturas devem ser redimidas pela visão real das conexões essenciais. Enquanto isto não é feito, não temos nenhum resultado que possamos chamar de fenomenlógico" ("[20]" ¶75).

Em Weyl; " Sabe-se também qual seja o papel do procedimento dedutivo próprio em matemática, na qual, à excessão dos casos mais simples, um estado de coisas é de tal modo complicado, que é praticamente impossível levá-lo a uma plena presença na mente e dele se apropriar assim numa intuição livre" (p.34).

Nesta citação é digna de nota a explicitação do conceito de intuição como plena presença na mente, idêntico ao de Husserl, e a compreensão, também herdada dele, da decução como substituta da intuição livre" faute de mieux".

Pela decidida aceitação do princípio fundamental da fenomenologia, o primado epistemológico da intuição e da evidência Weyl volta as costas ao convencionalimo que o havia antes cativado e que deveria depois ser eregido em programa por Hilbert, e propõe-se a tarefa de revisitar a Análise Clássica para reformulá-la sobre a única intuição que está na base de todo o edifício lógico da Mathesis pura: a sucessão potencialmente infinita de unidades homogêneas.

Weyl busca assim, pela intuição de seu eidos, uma fundamentação fenomenológica desta Análise e coloca um paradigma para toda a fundamentação que se possa chamar fenomenológica em Matemática: começar por uma descrição das relações imediatamente intuíveis num domínio de objetos - relações fundamentais e axiomas a elas relacionados, seguida pela explicitação lógica dos atos constituintes de objetos e essências de um nível mais alto enquanto fundados em última instância naquela evidência constitutiva originária (v. "[20]" ¶ 75).

2 - OBJETOS DEPENDENTES E INDEPENDENTES

"Todo conhecimento, se bem que comece com descrições intuitivas, tende na direção de construções "simbólicas""

Weyl

Já no ¶ 1 de "Das Kontinuun " Weyl no coloca um problema de interpretação. Falando de juizos existenciais sobre um domínio, Weyl afirma que a premissa de que têm sentido é equivalente a de que este é um domínio "fechado de objetos determinados, existentes em si". No ¶ 2 diz que proposições sobre um domínio, de um modo geral, tem sentido se, e só se, este domínio é um "sistema fechado de objetos existentes em si".

Queremos aqui explicitar o sentido desta expressão e procurar entender o que seria um sistema aberto de objetos que não tem em si sua existência, e consequentemente explicitar o critério de significabilidade a que Weyl alude.

Como já disssemos Weyl acata o direto fundacional da intuição fundamental da sucessão infinita dos números naturais. Vista com acuidade, esta intuição não apenas oferece um domínio de objetos - os proprios números - mas simultaneamente uma relação entre eles, uma ordenação destes objetos segundo um suceder-se. Esta intuição de um estado de coisas é o que Husserl chamará de intuição categorial.

Esta intuição nos fornece aqui um domínio de objetos e, poderiamos dizer, o radical elementar do discurso sobre este domínio: x sucede a y Neste sentido poderiamos também dizer que uma linguagem, um modo de referência a um domínio de objetos, pode ser dada numa intuição originária. Do ponto de vista desta linguagem diremos que uma forma sintática primitiva. está constituida: x sucede a y, onde estes x e y são termos simples (variáveis individuais) que denotam os números naturais.

Weyl chama relação a formas sintáticas arbitrárias de uma linguagem qualquer, e distingue entre relações originárias, que são como acima, constituidas numa intuição categorial originária e relações derivadas, que são as formas sintáticas complexas desta linguagem originaria, derivadas daquelas outras por ação do expressar, ou do pensar, categorial.

Essas forma sintáticas (relações) uma vez que podem , por saturação de termos por objetos, constitui-se em preposições que expressam juizos, podem também ser ditas expressarem formas judicativas, que também chamaremos usando um termo de Weyl de esquemas de juizos.

Numa terminologia atual, o que Weyl chama de relações são apenas fórmulas abertas de um linguagem. ~~As relações originária são as formulas abertas de uma linguagem~~. As relações originárias são as fórmula primas desta linguagem.

Mas o interesse de Weyl não está propriamente nestas relações mas nos objetos que eles determinam, e aqui a palavra "objeto" designa algo bem distinto daqueles primeiros objetos, os números naturais. Esses "objetos" são os conjuntos determinados extensionalmente por estas relações no dominio originariamente constituido. Estes objetos de ordem superior são constituidos em dois momentos, ou via dois principios : o de compreensão, pelo qual a toda relação, originária ou derivada,corresponde um conjunto como sua extensão, e de extensionalidazde, pelo qual duas relações equi-extensionais determinam o mesmo conjunto.

Segundo a visão cantoniana da matemática estes conjuntos estão lá no dominio originário, de uma vez por todas constituidos, restando a nós apenas descobri-los, mais ou menos como uma pérola numa ostra. Em Weyl eles são constituidos segundo uma intenção do pensamento expressa por formas sintáticas da linguagem originária. Aqui dois pontos devem ser realçados, primeiro que estas formas não são formas de uma linguagem qualquer, mas de uma linguagem dada numa intuição originária, que poderiamos também chamar fundadora, segundo, que estas formas expressam as intenções do pensar em sua função categorial de coletar. Assim, estes conjuntos são determinados pelo pensar dito categorial, mas não o são de uma forma completamente livre, são determinados pelo pensar na sua função de coletar mas segundo as intenções expressas pelas formas sintáticas, que por sua vez não são formas de uma linguagem qualquer, mas de uma linguagem que se impõe a nós no proprio ato em que se constitue o dominio sobre o quel estes conjuntos são determinados.

Assim ficam esboçadas as restrições que Weyl se impõe ao desenvolver a análise: não se pode falar de conjunto de números naturais que não seja expresso como extensão de uma relação, não se pode falar de uma relação que não seja como forma da linguagem originária.

Como essas relações podem admitir " núcleos sintáticos" (termos) distintos, os conjuntos que lhe correspondem não são sempre conjuntos de números, mas também de pares, ternas, etc. de números.

Vemos então como a ontologia de Weyl admite uma nítida demarção: de um lado os objetos que poderiamos chamar de <u>simples</u> ou <u>elementares</u>, os números naturais ou quaisquer outros passíveis de se auto-apresentarem numa intuição livre, e por outro os objetos constituidos como correlatos de certas formas categoriais.

Segundo o ponto de vista da linguagem originária, aqueles não apresentam nenhuma estrutura sintática enquanto estes apresentam por força de sua constituição uma estrutura sintática. Segundo o ponto de vista do pensamento, aqueles se impõem a ele como substrato, estes são por ele determinados, são manisfestações do <u>eu penso</u>.

Podemos então aqui esboçar a interpretação de que o domínio chamado por Weyl de <u>domínio de base</u>, dos objetos*independentes do pensar em sua função determinadora, é o domínio que Weyl chama de "fechado do objetos existentes em si", enquanto o domínio dos objetos sintaticamente compostos, constituídos pelo pensar, é o domínio "aberto", porque em constante determinação, de objetos cuja existência não está "em si", isto é, que não se auto-apresentam numa intuição fundadora imediata, que são determinados por ação do pensar,. cuja existência é <u>dada</u> pelo eu que pensa.

Vemos que existe uma diferença essencial entre as quantificações num e noutro domínio. Como o domínio dos objetos ~~sistematicamente~~ complexos não está, nem pode estar, por força de sua constante determinação, <u>dado</u> de uma vez por todas, juizo existênciais sobre este domínio não são <u>nem mesmo em principio</u> decidiveis. Por outro lado juizos existenciais sobre o domínio "fechado" dos objetos simples, auto-dados na intuição fundadora são, todos eles, <u>em principio</u> decidiveis. Assim, ao limitar quanto à <u>significação</u> das proposições existenciais, o domínio de quantificação àquele "fechado" dos objetos "existentes em si", Weyl determina a <u>decidibilidade</u> como critério de <u>significabilidade</u>.

Desse modo proposições <u>com sentido</u> devem quantificar <u>exclusivamente</u> sobre o domínio de base. Este é o que Weyl chama de <u>procedimento</u>

* sintáticamente simples, auto-dados numa intuição originária,

restrito e que estudaremos com mais detalhes adiante. Devemos entretanto esclarecer que Weyl não afirma que um juizo existencial, por exemplo, com o quantificador restrito ao dominio dos números naturais é decidivel no sentido de que sua validade neste dominio pode ser decidida num número finito de testes, o que não é em geral como sabemos verdadeiro. O que Weyl afirma é que sua decidibilidade envolve apenas um dominio pré-dado às determinações do entendimento, de uma vez por todas constituido. Se quisermos podemos dizer que esses juizos são decidiveis latu sensu, admitida uma liberalização de nossos poderes, admitida a possibilidade de examiná-los em todas as suas instâncias. É isso o que queremos dizer com decidivel em principio.

Para qualificarmos melhor a distinção que faz Weyl entre objetos existentes em si e objetos cuja existência não está em si, e compreendermos se faz sentido, e qual, a pergunta se Weyl os ve como objetos "autênticos" ou meras façons de parler, de algum modo elimináveis como focos referenciais, convém-nos determos um pouco sobre a teoria do objeto em Husserl, que evidentemente não esperamos expor com nenhuma intenção de completude, e que, parece-nos evidente, fundamenta os pontos de vista de Weyl.

Como em Husserl as significações são sempre passiveis de cumprimento numa intuição adequada e o objeto é entendido, de um modo geral, como o polo intencional quer de significação, quer de intuições - o cumprimento de uma significação é exatamente uma síntese de identidade entre o objeto representado e o objeto intuido - podemos expôr o conceito de objeto quer pelo lado das significações, quer pelo lado das intuições. Por aquele o objeto é o sujeito de qualquer sentença categórica, afirmativa, por este é o correlato intencional da intuição, entendida em sentido amplo como um ato impletivo em geral. Em [20] ¶ 22 lemos que objeto pode ser definido como " o sujeito de uma sentença (categorica, afirmativa)", em [21] 6ª inv. ¶ 45 que "intuição [é] todo ato impletivo em geral, sendo então seu correlato intencional o objeto".

Já notamos no paragrafo anterior que a intuição em Husserl admite mais variantes dos que usualmente seriam aceitas por este nome. Diferentemente de Kant por exemplo, a intuição não está restrita aos sentidos, quer externo, quer interno, está é apenas a intuição sensivel, quer na forma de percepções, que na forma de imaginação.. Não está também restrita ao individual, mas pode também nos dar o geral e até o universal. Apresenta-nos tanto individuos quanto estados de coisas e essências, segundo o qual é chamado de categorial e ~~eidética~~ respectivamente.. Assim não apenas individuos e objetos do sentido, mas também estados de coisas e essências são, num sentido amplo, objetos. Estados de coisas são chamados em particular de objetividades categoriais. Quando percebemos não apenas A juntamente com B, o livro e a mesa, ou os objetos a,b,c,... mas A e B, o livro sobre a mesa e os individuos a,b,c,... como elementos de um conjunto, percebemos, no sentido proprio do termo, uma objetividade categorial. "Porisso se convertem em objetos os conjuntos, as pluralidades indeterminadas, as totalidades, os grupos de determinado número de objetos, as disjuntivas, os predicados (o ser justo), as situações objetivas; e em percepções, os atos, por meio, das quais aparecem como dados" ([21] 6ª inv ¶ 45).

Vamos esclarecer porque Weyl chama essas percepções de atos. Nada existe na intuição que nos dá um A e que nos dá um B que nos dê a cópula A e B independentemente de um ato do sujeito que constitua na base dessas intuições isoladas a intuição da cópula. " Existe um ato, que presta aos elementos categoriais da significação os mesmos serviços que a mera percepção sensivel presta aos materiais" ([21] 6ªinv. ¶ 45). Será útil para nossos objetivos observar que tal ato está necessariamente fundado na intuição sensivel. Não podemos imaginar, e não nos referimos a uma mera impossibilidade circunstancial, uma fraqueza imaginativa, mas a uma impossibilidade essencial, a intuição de A e B sem a intuição de um A e a intuição de um B.

Se enquanto objetividade, a objetividade categorial nos remete a uma experiencia primária que a constitue originalmente, enquanto categorial nos remete a uma estrutura, a uma forma sintática. A objetividade categorial remete sempre a uma forma sintática e assim numa regressão, que não pode ser infinita, devemos atingir objetos sintáticamente simples ou informes, que chamaremos para distingui-los de individuos.

Outro nome que Husserl da às objetividades categoriais é, por este motivo, o de objetividades sintáticas . Em [20] ¶ 11 lemos: "Por objetividade sintáticas :entendemos as que são derivadas de outras objetividades por meio de formas sintáticas.

" ...Todo objeto, na medida em que pode ser explicitado e relacionadoa outros objetos e é em suma logicamente determinável, toma diferentes formas sintáticas; como correlatas do pensar em sua função determinadora objetividades de um grau superior são constituidas... Todas essas

* eidética

"objetividades categorias" podem funcionar como objetividades em geral, e tambem como substratos de construções categóricas, e estas (como substratos) novamente [para futuras construções] e assim por diante. Reciprocamente qualquer tal construção aponta retrospectivamente, de um modo auto-evidente a substratos ultimos, a objetos de um primeiro ou mais baixo grau, para objetos que não são mais construções do tipo sintático-categorico, que não contem em si vestigios dessas formas ontologicas que são menos correlatos das funçõers do pensamento".

Daqui podemos concluir que as objetividades categoriais são dependentes em dois sentidos: primeiro, daquelas de um grau inferior sobre as quais se constituem; segundo, do pensar que as determinam como correlatos de suas funções determinadoras.

Tendo em vista ainda a dupla caracterização dos objetos, podemos atingir o nivel dos individuos mediante uma teoria da significações. Os individuos são os termos ultimos das significações. " Podemos atingir o substrato ultimo sintáticamente sem forma pela lado de uma teoria formal das significações: toda proposição e todo possivel membro dela contém os chamados termos como substratos de suas formas apofânticas. Eles podem ser termos apenas num sentido relativo, eles podem conter formas eles proprios.... Mas em todo caso atingimos retrospectivamente e necessariamente os termos ultimos, substratos ultimos, que não contem mais em si vestigios de formação sintatica " ([20] ¶ 11). Os individuos são os termos primitivos do discurso significativo.

Uma teoria formal das significações é o objetivo da quarta investigação em [21]. Aí aprendemos que os complexos de significação admitem leis a priori. Assim é que toda forma proposicional, isto é toda proposição despida de referência, enquanto significação pura, só pode particularizar-se como uma proposição com sentido na medida em que a interpretação dos termos não interpretados da forma proposicional for restrita por leis a priori. Assim por exemplo a forma proposicional S ϵ p só pode contituir-se como proposição significativa se o termo S denotar uma significação substântiva e o termo p uma significação adjetiva.

Essas leis visam impedir o sem sentido mas permitem o contra sentido. Por exemplo se naquela forma proposicional S denotar a significação este quadrado e p a significação redondo, então a proposição correspondente tem segundo Husserl um sentido unitário, se bem que seja a priori impossivel, e isto caracteriza o contra-sentido, uma intuição adequada de um quadrado redondo. O contra-sentido só pode ser eliminado numa teoria "material" das significações, precedida pelo principio da possibilidade da experiência. Proposições com sentido quanto ao conteúdo é como Husserl irá chamar aquelas isentas de contra-sentido, que Weyl chama simplesmente de proposições com sentido.

Aprendemos também nesta quarta investigação que "o problema de uma ciência das significações seria, pois, investigar a estrutura legal essencial das significações e as leis nelas fundadas de enlace das significações e da modificação das significações e reduzir ditas leis ao número minimo de leis elementares independentes.... Assim, pois, em uma morfologica puramente lógica das significações trata-se, antes de tudo, de fixar as formas primitivas e de fixá-las dentro do marco da pureza descrita. Haveria de fixar as formas primitivas das significações independentes, das orações completas com suas articulações imanentes e estruturas das articulações. Logo viriam as formas primitivas da complicação e modificação, que as diferentes categorias dos possiveis membros admitem conforme a sua essência... Depois se trataria de uma sinopse sistemática sobre a ilimitada variedade das outras formas que podem derivar-se por continuada complicação ou modificação " (¶ 13).

Essa morfologia deve ser a primeira tarefa da Lógica. Não coincidentemente, esta é a primeira tarefa de Weyl em " Das Kontinuum ".

Weyl desenvolve realmente uma morfologia das significações, ou antes uma morfologia das formas proposicionais passiveis de preenchimento significativo. Do ponto de vista meramente formal, as formas primitivas são as relações originárias e as derivadas as obtidas destas por meio dos principios definidores.

Explicitamente, a negação de uma forma proposicional é uma forma proposicional, a conjunção e a disjunção de formas proposicionais é uma forma proposicional, a identificação de termos numa forma proposicional será uma forma proposicional, a substituição de um termo por um objeto ou a quantificação sobre variáveis numa forma proposicional gera uma forma proposicional, a substituição de uma forma proposicional por outra numa forma proposicional, gera uma forma proposicional. Estes principios podem ser livremente iterados, e inclusive, o que afastaria Weyl de predicativistas de orientação finitista, como Poincaré, infinitamente iterados. Weyl coloca mesmo entre os principios definidores o de iteração que admite como principio válido de complicação de formas proposicionais a substituição infinita de uma forma proposicional recorrente numa forma proposicional dada, o que seria também equivalente a uma conjunção infinita de formas proposicionais.

Do ponto de vista material, isto é tendo em vista proposições com sentido quanto ao conteúdo, nas palavras de Husserl (simplesmente proposições com sentido em Weyl), esses principios, em especial o de substituição de termos e quantificação devem ser qualificados e restritos. Assim a substituição e quantificação de variáveis ficarão restritas ao dominio de base, ao domínio dos individuos. Este é essencialmente o procedimento restrito a que se atém Weyl e do qual falaremos mais adiante.

A esta morfologia e hierarquia de significações corresponde, tanto em Weyl quanto em Husserl, uma correspondente morfologia e hierarquia de objetos. Aqueles no nível mais baixo da hierarquia, os individuos serão ditos independentes, os demais dependentes em sentido absoluto. Também relativamente um objeto dependente, em sentido absoluto será independente daqueles que o seguem na hierarquia. Uma objetividade categorial enquanto remetendo a uma formação sintática complexa é um objeto dependente cujo "grau" de dependencia está determinado pela complexidade desta formação.

Esta hierarquia de objetos determinada por uma hierarquia de significação nada mais explicita do que, como já dissemos, além de determináveis pelo lado das intuições, as categorias de objetos podem também ser determinadas pelo lado das significações.

Para Husserl um objeto é dependente se não pode ser pensado independentemente de outros objetos - e aqui não pode ser pensado não aponta para uma incapacidade subjetiva, do não poder representar-se, mas para uma necessidade objetiva ideal do não poder ser de outro modo (cf. [21] 3ª inv. ¶ 7).

Vejamos, em Weyl os conjuntos são, enquanto objetos, dependentes dos indivíduos que os compõem como elementos. Mas na medida em que são também determinados categorialmente, são dependentes do pensar, ou do intuir, que determinam, ou melhor diríamos, que os fundam.

E é exatamente a esta distinção que aponta Weyl ao falar de objetos existentes em si e daqueles outros cuja existência não está em si. Aqueles são os objetos independentes, estes os dependentes, os fundados em atos que os constituem, os atos do significar e do intuir categorial.

Vejamos o que nos diz [21] 6ª inv. ¶ 46: " Ao verificar-se os novos atos da conjunção, da disjunção, da apreensão individual determinada e indeterminada (isto-algo), da generalização, do conhecer simples, relacionante e unificante, não surgem vivências subjetivas quaisquer, nem tampouco atos em geral enlaçados com os primitivos, mas atos que constituem novas objetividades ... surgem atos nos quais aparece algo como real e como dado nêle próprio, mas de tal modo que este algo, tal como aparece aqui, não estava dado, nem poderia estar, apenas nos atos fundamentantes [nos que dá por exemplo os elementos do conjunto]. Mas por outro lado a nova objetividade se funda na antiga; tem referência objetiva a que aparece nos atos fundamentantes. Seu modo de aparecer está determinado essencialmente por esta referencia. Trata-se aqui de uma esfera de objetividades que só podem aparecer "elas mesmas" em atos de tal modo fundados.

Nestes atos fundados reside o categorial do intuir e do conhecer; neles encontra o pensamento enunciativo, quando funciona como expressão, seu cumprimento: a possibilidade de uma adequação perfeita a tais atos define a verdade do enunciado como justeza do mesmo".

Isso nos deixa com uma solução de compromisso quanto ao status ontológico das objetividades categoriais. Não são meras conveniências de expressão, não são vivências subjetivas, mas autênticos objetos. Por outro lado sua existência objetiva está fundada em atos fundamentados, o que simplesmente significa que seu existir não pode apresentar-se senão por meio de uma abstração, que é um ato sempre fundamentado, uma intenção subsidiária. Somente sobre os atos que nos dão um A e um B podemos perceber (intuir) A como parte de B, somente sobre atos que nos dão a,b,c,... podemos perceber a,b,c,...como elementos de um mesmo conjunto.

As objetividades categoriais não são objetos reais, que são objetos de uma possível percepção sensível, mas ideais. Em [20] 2ª inv.¶ 8 lemos."... os objetos ideais existem verdadeiramente. É evidente que não só tem sentido falar de tais objetos (por ex, do número 2, da qualidade vermelho, do principio de contradição, e outros exemplos) e representá-los como dotados de predicado, senão que também apreendemos intuitivamente certas verdades categóricas que se referem a estes objetos ideais. Se estas verdades valem, tem que existir tudo aquilo que pressupõe sua validez. Se vejo como intuição que 4 é um número par, que o predicado enunciado convém realmente ao objeto ideal 4, então este objeto não pode ser mera ficção, uma mera ' façon de parler ' , um nada ".

Assim, fica claro porque Weyl chama os conjuntos determinados categorialmente sobre o domínio de base de existentes, porém com uma existência dependente, que não está neles, por oposição à existência absoluta dos indivíduos auto-dados numa intuição imediata. Estas duas classes de objetos pertencem a dois distintos níveis de existência, cuja fronteira é demarcada, pelo lado da intuição , pela possibilidade da apresentação de uns numa intuição imediata e de outros numa intuição mediatizada, pelo lado da constituição sintático-categorial, pela simplicidade de uns e pela complexidade de outros, pelo lado dos atos da consciência, pelo caráter fundamentante daqueles que poêm a uns e fundamentado do que poêm a outros.

Se o procedimento restrito limita o escopo do quantificador existencial ao domínio dos indivíduos, reservando-lhes pois um caráter privilegiado de existência, por outro lado não relega os objetos ideais ao papel de meras conveniências de expressão, elimináveis do discurso significativo por algum artifício conveniente. Diz Weyl ([38] ¶ 6) " Assim, não tencionamos aqui vetar o uso do termo existe em relação aos objetos não pertencentes à categoria de base".

Poderiamos fazê-lo se quisessemos, mas atentando sempre para a qualificação que a noção de existência deve ter no domínio dos objetos ideais.

Posteriormente, Weyl irá tornar-se mais "conservador" e recusar mesmo ao domínio dos números naturais o caráter de um sistema "fechado de objetos existentes em si". Mais próximo dos intuicionistas, mais no espirito de Poincaré, Weyl irá abandonar a idéia de que este seja um domínio de existência absoluta de uma vez por todas determinado. E consequentemente abandonar como significativa a quantificação ilimitada sobre este domínio . Assim proposição que envolvessem irrestrita quantificação sobre os números naturais, como por exemplo o "teorema" de Fermat, não mais seriam necessáriamente significativas.

Acreditamos que o que até aqui dissemos é o suficiente para livrar Weyl de qualquer leitura nominalista, por um lado, e por outro da acusação de hipóstase metafisica, ao menos no que diz respeito às objetividades categoriais, à maneira dos realista platônicos.

3 - O CONTINUO MATEMÁTICO E O CONTINUO DA INTUIÇÃO

O modêlo do contínuo em Weyl é o tempo imanente, cuja descrição como a forma unitária de toda experiência no fluxo único de experiência de um Ego puro, reproduz a de Husserl, apresentada em alguns pontos das "Idéias" e da maneira completa na "Fenomenologia da consciência do tempo imanente", texto publicado posteriormente ao de Weyl, mas a cujo conteudo este teve acesso nos cursos de Göttingen conduzidos por Husserl, no período de inverno 1904/05.

Nas "Idéias" esta descrição está contida nos ¶¶ 81,82, aos quais Weyl remete numa nota com a indicativa " a propósito do problema do tempo, cf. Husserl, Idéias ¶¶81,82..." Vejamos, em resumo o que dizem estes parágrafos. Em primeiro lugar, o tempo a que se refere Husserl é o tempo fenomenológico (imanente), por oposição ao tempo objetivo (transcendente), que é a forma unitária de toda experiência no fluxo único de experiência do Ego puro. O Eu físico ou psíquico, já sob a ação da redução fenomenológica, estão junto com o tempo objetivo, entre parênteses. O tempo imanente "que pertence essencialmente à experiência como tal com os modos no qual seu conteúdo intrísico se apresenta - e derivados destes os agora, antes e depois modalmente determinados, simultaneidade, sucessão etc - não é para ser medido por nenhum estado do sol, por nenhum relógio, por nenhum meio físico, e geralmente não pode ser medido de modo algum". Este ponto já nos oferece um exemplo do fato, muitas vezes repetido por Weyl, de que os conceitos matemáticos falseiam necessáriamente a intuição do contínuo e de que esta em geral nem sempre é mais aptamente capatada pelo "esprit de géometrie" (os conceitos ideais da matemática) que pelo "esprit de finesse" (os conceitos morfológicos vagos) - fato já notdao por Husserl ([20], ¶¶ 74,75 Intr. à 1a.inv ¶6; 3a inv ¶9, 3a inv ¶ 19). O exemplo eleito por Weyl para representar o contínuo da nossa intuição é exatamente o contínuo do tempo imanente, esta "forma geral daquilo que eu vivo na minha consciência, que me faz aparecerem as minhas 'Vivências' como sucedendo-se uma ás outras". Mas para que uma teoria matemática do tempo seja possível é necessário impor a esta intuição uma estrutura matemática, instantes e segmentos temporais; é necessário poder-se medir o tempo imanente, o que na passagem há pouco citada de Husserl não se pode fazer. E Weyl concorda com ele, " no contínuo, já para o conceito de ponto, falta o apoio necessário da intuição". Weyl percebe que impor ao contínuo da intuição do tempo fenomenológico uma estrutura matemática é falsear esta intuição e atribue a

Bergson " o mérito de haver insistido sobre a profunda estranheza do mundo conceitual da matemática no confronto com a continuidade imediatamente vivida do tempo fenomenológico ("la durée"), mas não vê nisso apenas impulso de esquematização ou economia de pensamento, mas a "franca razão que luta para trazer à luz o 'logos' inerente à realidade".

Mas voltemos a Husserl. O tempo fenomenológico é a forma necessária ligando experiências com experiências. Esta forma apresenta-se em vários modos, um deles é o do agora atual, constante e continuametne preenchido com conteúdos diversos. Mas uma vivençia apresentando-se sob a forma do agora, e passando imediatamente para a forma do já passado, pode ocupar, sob a forma de retenção, (da qual oa memória é o locus psiquico), novamente a forma do agora, e assim sucessivamente, o contínuo de retenções constitue a vivência da duração. " O agora atual é necessariamente algo puntual e assim permanece, uma forma que persiste através de mudanças contínuas de conteúdo. É o mesmo com a continuidade do ' já passado'; é uma continuidade de formas com conteúdos sempre novos.... A forma recebe um conteúdo continuamente fresco; assim à cada impressão unida com a experiência do 'agora', uma nova impressão, corresponde a um sempre-novo ponto da duração, está continuamente anexando-se. A impressão transforma-se em retenção, e esta continuamente em retenção modificada, e assim por diante".

Mas a esta dimensão retencional da consciência corresponde uma dimensão protencional. À lembrança corresponde a expectativa. O contínuo do depois corresponde ao contínuo do antes.

Como nenhuma experiência acaba ou começa sem a consciência de ter acabado ou começado, e esta consciência apresenta-se num agora respectivamente depois do último momento da experiência e numa vivência retencional de uma experiência imediatamente anterior ao primeiro momento da experiência que começa, então o" fluxo da experiência é uma unidade infinita e a forma do fluxo é uma que necessariamente envolve todas as experiências de um Ego puro. É uma forma contendo uma variedade de sistemas de formas".

Este fluxo não é estritamente linear, a cada vivência sob a forma do agora corresponde uma "orla" de vivências sob a mesma forma, experiências desta orla apresentam-se então sob a forma do simultâneo e constituem a consciência total primordial do agora de um Ego puro,conhecendo o mesmo processo de deslocamentos no contínuo do antes e depois já descrito para o agora de uma experiência isolada.

Assim constituem-se as três dimensões da vivência temporal do Ego puro. o "antes", o "depois" e o "ao mesmo tempo".

É interessante notar nestas análises que a forma do agora é necessariamente puntual, é o limite quer de sequências de experiências sob a forma do depois quer de experiências sob a forma do antes, é o ponto ideal encapsulado entre o já havido e o porvir.

Tendo em mente a afirmação de Weyl de que para o instante puntual não há apoio na inutição, vejamos o que ele nos diz sobre esta idealidade do agora: "aquilo que nos é dado na consciência não se dá como um 'ser simplesmente' (como por exemplo, o ser lógico dos conceitos), mas como um 'ser agora' que perdura e muda,assim que posso dizer. Isto é agora - mas agora não é mais?. Se, na reflexão, rompemos esta corrente, para por defronte a nós como um objeto este "agora" duradouro que envolve um conteúdo vivido mutável, já se torna para nós um decurso, no qual podemos fixar pontos. A cada ponto corresponde um certo 'todo' vivido: se a consciência está nesse ponto, então ele a vive o correspondente 'todo', e só este é. Mas de onde vem a duração concreta de todo viver? Se mantivermos os ponto singulares isolados uns dos outros, uma só resposta é possível. ainda que tenha apenas as vivências daquele instante, a ele corresponde todavia uma lembrança mais ou menos distinta que tem como objeto intencional a vivência que tiva há apenas um instante.

Se tenho, por exemplo, uma percepção luminosa da breve duração, então num instante A tenho não apenas aquela vivência perceptiva, mas simultaneamente também as lembranças "correspondentes" a vivências perceptivas de todos os instantes passados que caem naquela breve duração, mais: neste instante A, não apenas me lembro a vivência perceptiva do instante recentemente passado B, mas lembro toda a vivência do instante B, e isto contém por sua vez, além das percepções, as lembranças das vivências de todos os instantes precedentes. A percepção contínua consistiria assim de uma infinidade de sistemas compostos cada um de uma infinidade de lembranças, uns contidos nos outros e a eles referidos; aquele que vem antes é o "contido". Ora, é claro que o nosso viver não contém nada de tudo isto e além disso, uma tal engrenagem de instantes vividos, puntiformes, contidos sem fim uns nos outros, quando vem concebidos como um todo fechado em si (meus grifos), é absurda".

Weyl nos diz aqui simultaneamente:

a) qual é a estrutura matemática que se vai impor ao contínuo da intuição: pontos (instantes) ordenados (e segmentos para os quais haja uma relação de igualdade).

b) que esta estrutura não é vivida numa intuição.

c) que um continuo atomizado em pontos não pode ser concebido como um todo fechado em si, isto é, como um todo independente.

Evidentemente pela identificação que parece existir em Weyl entre um todo independente, um todo "fechado em si", e um todo intuível, (c) é apenas uma paráfrase de (b).

Este "esquema abstrato do contínuo com seu infinito encadeamento de partes possíveis" é representado pelo conceito de número real.

Assim para o conceito de número real:

a) este número não pode ser dado em si, mas como limite de um todo, que só este é (para a idéia objetiva do tempo, nos diz Weyl, resulta que um ponto singular não é autônomo, não é evidenciável e não podemos nunca fixá-lo com precisão, mas apenas aproximadamente)

b) que este todo não-independente seja, em virtude deste seu caráter, representado como uma unidade noemática (objetiva) que corresponde ao ato noético (subjetivo) que o constitue e que esteja em última instância referido a uma totalidade constituida (independente) intuivel de objetos. (Que ele seja individualizado pela ação do pensar categorial e portanto expresso numa linguagem que nos seja dada numa intiuição originária, no caso a linguagem da aritmética dos números naturais.

c)que os números reais ordenam-se segundo a ordenação por inclusão das totalidades que os determinam.

Deste modo Weyl é conduzido a uma teoria aritmética dos números reais vistos como certos conjuntos de números naturais, conjuntos que são por sua vez categorialmente determinados e, assim, expressos segundo certas formações sintáticas da linguagem da aritmética alementar que, como vimos é a única que nos é dada numa intuição originária.

A estrutura de pontos e conjuntos de pontos que o pensar conceitual impõe ao continuo da intuição não pode entretanto vir fixada de modo absoluto mas apenas com referência a um sistema de coordenadas, que Weyl vê como um substituto formal da consciência, a projeção de um Eu puro que confere, exclusivamente, existência e significado. Isso aponta novamente para o fato de que esta estrutura não e' intrinsica ao continuo como vivido na intuição e que sua objetividade tem o status de toda objetividade ideal, correlato intencional das vivências de significado de uma consciência pura.

Nas palavras de Weyl: " o sistema de coordenadas é o resíduo inevitável do anulamento do Eu naquele mundo físico geométrico que a a razão extrae sob a norma da "objetividade" daquilo que nos é dado - ele constitue nesta esfera objetiva uma última, pobre indicação do fato que o existir [Dasein] é dado e pode ser dado, apenas como conteúdo intencional das vivências mentais de um Eu puro que confere significado".

Mas qual é o sentido preciso da afirmação de que o conceito de número real representa o esquema abstrato do contínuo? O primeiro passo nesta direção é dotar o contínuo intuitivo de alguma estrutura matemática e em seguida mostrar-se que esta é o "mesma" estrutura do domínio dos números reais. Mas a análise de Weyl também envolve a noção de uma função continua, e a representação aludida é adequada se esta noção representar conceitualmente a noção de uma função " intuitivamente continua", como por exemplo, a função que descreve o movimento de minha mão, enquanto escrevo, no tempo.

A definição de função continua envolve quantificação irrestrita sobre números reais e estes são definidos segundo princípio aparentemente arbitrarios. Mudam-se os princípios e uma função antes continua pode deixar de se-lo. Que justificativa se pode dar para tomar-se os princípios de Weyl e não outros? Evidentemente que sejam suficientes para que todas as funções intuitivamente continuas e suas propriedades traduzam-se em funções continuas da teoria e propriedades demonstraveis na teoria.

Vamos mostrar que este é o caso. O que mostraremos essencialmente é que o contínuo intuitivo, ou antes um esquema abstrato dele, munido de uma estrutura matemática e o "contínuo" dos números reasi são isomorfos basicamente devido ao fato de que ambas as estruturas são erigidas segundo os mesmos "princípios de construção", i.e., segundo as mesmas determinações categóricas.

Supomos então o contínuo do tempo munido de uma estrutura: instantes e segmentos são os elementos básicos, as relações de ordem entre instantes (<) e igualdade entre segmentos as relações básicas.

Interpretemos a expressão "numa certa duração" por "em todos os instantes de um segmento temporal".

Uma função contínua entre dois continuos munidos dessa mesma estrutura pode ser representado por uma função contínua (no sentido da análise) entre reais, <u>se</u>, <u>e</u> <u>somente</u> <u>se</u>, existir um isomorfismos de ordem entre o contínuo da intuição (com a estrutura acima) e o contínuo matemático dos reais (este isomorfismo leva instantes em números reais e segmentos temporais em intervalos de reais, as relações de ordem e igualdade sendo preservadas - a igualdade entre segmentos temporais é traduzida pela relação de igualdade de comprimentos entre intervalos numéricos).

Fixemos um segmento OE no contínuo do tempo e uma coleção $\bar{R}$ de relações definidas no domínio dos instantes e segmentos temporais, juntados aos números naturais. Esta coleção R deve conter apenas relações derivadas das relações básicas entre instantes e segmentos temporais e da relação de sucessor entre naturais segundo certos princípios lógicos não especificados que devem também ser suficiente para definir-se os racionais e suas operações e os números reais como cortes de racionais e suas operações.

Considere a relação R, que suporemos em $\bar{R}$:

$$R(\lambda, P) = \exists\ L(L<P \wedge OL = \lambda\,(OE)).$$

Esta relação determina um <u>homomorfismo</u> <u>injetor</u> ϕ entre instantes e números reais $\phi(P) = \{\lambda: R(\lambda, P)\}$.

Este homomorfismo será sobrejetor, e portanto o isomorfismo procurado, se se verificar a seguinte propriedade:

P: Dado um número real r (ie, um corte definível de racionais) tem-se que: 1) para cada $\lambda \in r$ existe L, t.q. $OL_\lambda = \lambda\,(OE)$. 2. existe um instante P t.q. $\forall \lambda \in r: L_\lambda < P$ e para todo $P' < P$ existe $\lambda \in r$ t.q. $P' < L_\lambda < P$.

Toma-se P como um <u>axioma</u> , <u>o</u> <u>axioma</u> <u>da</u> <u>continuidade</u>. E o isomorfismo está dado.

As condições que exigimos de $\bar{R}$ implicam que entre os princípios geradores de $\bar{R}$ encontram-se os de Weyl. Como estes são também suficientes para prover uma classe de relações com as propriedades de $\bar{R}$, não há nenhum entrave em se os tomar como os únicos. <u>Se</u> pelo acréscimo de novos princípios definidores tivéssemos um aumento dos reais disponíveis, o axioma da continuidade garantiria a permanência do isoformismo. Logo, esses novos princípios seriam supérfluos para este fim.

Assim, o problema acima da existência de uma função intuitivamente contínua que não seja representada por uma função contínua da teoria não se apresenta se aceitar-se que o contínuo da intuição possa ser atomizado em instantes e segmentos temporais com as relações de ordem e igualdade a partir das quais, mais a relação de sucessor entre naturais, derivam-se outras relações pelos <u>mesmos</u> princípios que são uniformemente aplicados na derivação de relações em qualquer domínio. Entre esses princípios devem figurar os antes mencionados.

Essas razões, mais a de economia, justificam os princípios definidores como enunciados.

Pode-se entretanto questionar as próprias definições de número real e de função como dadas. Em defesa dessas definições, em oposição a teoria <u>clássica</u> dos reais e das funções (contínuas) diga-se que são suficientes para nos dar todos os resultados da teoria das funções contínuas que traduzem propriedades intuitivas destas (como a que afirma que uma função contínua assume todos os seus valores intermediários). Além de um modelo matemático isomorfo ao contínuo intuitivo. Se elegância é economia de meios, a análise de Weyl é mais elegante.

Poderíamos querer entretanto desenvolver uma <u>hiperanálise</u>, cujo domínio de base conteria além dos naturais os reais, segundo os mesmos princípios definidores. Aqui permite-se a quantificação sobre reais. Dado um conjunto limitado (definível) de reais, <u>não</u> é certo que exista um supremo, pois este deveria ser definido, como um número real, por uma relação finita[1] . Mas sua definição deve envolver quantificação sobre os reais do conjunto dado, logo não seria determinada por uma relação finita. Não vale também o princípio de convergência de Cauchy. Assim a hiperanálise não oferece uma teoria utilizável do contínuo. No entanto com o isomorfismo acima, e com um segmento temporal OE fixo, existe uma correspondência entre os conjuntos da hiperanálise e as funções de O,E. Em virtude desse isomorfismo, o axioma da continuidade não pode ser substituído pelo princípio de convergência de Cauchy, que como já mencionamos não vale na hiperanálise, ou o axioma hilbertiano da completude, que também não é.

Uma consequência do fato de que o axioma da continuidade só pode ser enunciado via uma "tradução" analítica (ie, mencionando a correspondência entre instantes e números reais) é que não se pode desenvolver uma teoria do tempo ou uma geometria como ciências axiomáticas antônomas. "A verdadeira e

(1) Weyl chama de <u>finita</u> uma qualquer relação básica ou derivada

propria geometria do contínuo só se pode tratar analiticamente, isto é, desenvolvendo a análise como uma parte da teoria pura dos números e interpretando depois seus teoremas geometricamente, com a ajuda do princípio de "tradução" inerente ao conceito de coordenadas".

4 O PROCEDIMENTO RESTRITO

O que Weyl chama de procedimento restrito é a realização metodológica do princípio de que todo juízo significativo deve referir-se a um estado de coisas em princípio experenciável. Este princípio, afeito àquele do primado epistemológico da intuição, é o mesmo que justifica uma lógica clássica nos domínios da matemática predicativa.

O procedimento restrito, ao proibir a quantificação sobre objetos dependentes, reafirma a distinção de caráter ontológico entre estes objetos, constituídos pelo pensar e aqueles, independentes, que "se oferecem" a nós numa intuição e que constituem um domínio "fechado de objetos determinados, existentes em si". Por serem objetos cuja existência não está "em si", estes objetos dependentes formam um domínio aberto, em constante e ininterrupta determinação.

Lembremos que o que Weyl chama de processo, matemático essencialmente o processo de geração de objetos ideais, se dá em dois momentos:

1) abstração, via o princípio de compreensão e

2) identificação, via princípio de extensionalidade.

O processo matemático incidindo sobre relações cujas variáveis livres refiram-se exclusivamente ao domínio de base "produzem" conjuntosdo 1º nível, objetos que reunidos ao domínio de base, juntamente com as relações de pertinência, formam um novo domínio. Aplicando-se o processo a relações cujas variáveis livres referem-se agora ao novo domínio, obtém-se conjuntos do 2º nível. E assim sucessivamente. Se se permite em cada momento desta hierarquia a quantificação ou substituição de variáveis sobre todo o domínio em questão (e não apenas sobre o domínio de base), podem aparecer em qualquer nível conjuntos cujos elementos sejam todos elementos de um domínio inferior na hierarquia.

Assim nenhum nível se completa antes de se percorrer toda a hierarquia.

Consequentemente as duas fases do processo matemático ocorreriam paralelamente: a 1ª fase não se completa, para um certo nível, antes de se percorrer toda a hierarquia, logo a 2ª fase também nunca se completa antes disso.

Isto nos leva ao "primeiro mandamento" do procedimento restrito: substituição de variáveis por constantes ou quantificação só são válidas sobre o domínio de base.

Mas não é apenas quantificação sobre objetos ideais que faz intervir contra-golpes na hierarquia, isto é relações de níveis superiores determinando conjuntos de níveis inferiores. Um dos princípios definidores de Weyl, o de substituição, também pode fazê-lo. Tomemos um exemplo: seja R (u,v,x,y,z) uma relação cujas variáveis livres refiram-se todas ao domínio de base e S(x,w,U) outra relação cujas duas primeiras variáveis refiram-se ao domínio de base e a última a categoria dos conjuntos bidimensionais do 1º nível. Por substituição essas relações dão origem à relação S' = S (x w ϕ(x y z)), onde ϕ é a função determinada por R, isto é ϕ (x y z) = { (u,v): R(u v x y z)}.

S' determina um conjunto do <u>1º nível</u>. Assim não é possível identificar-se, por exemplo, os conjuntos obtidos com uma <u>única</u> aplicação do processo matemático com aqueles correspondentes a relações cujas variáveis livres refiram-se exclusivamente ao domínio de base, visto que uma tal relação pode vir a ser construida apenas <u>depois</u> de uma primeira aplicação do processo. Aqui também os dois momentos do processo ocorrem paralelamente, e a relação de <u>igualdade</u> entre conjuntos a partir do 2º nível, que não sejam ambos <u>determinados</u> por relações lógicamente equivalentes, nunca pode ser <u>definitivamente</u> estabelecida, uma vez que os domínios, a partir do 1º nível inclusive, <u>nunca</u> estão completos.

Assim acrescenta-se um "segundo mandamento" ao procedimento restrito: não é lícito usar-se o conceito de igualdade entre conjuntos na definição das relações derivadas (se bem que a rigor a igualdade entre conjuntos do <u>1º nível</u> não seja problemática).

O procedimento restrito tem para Weyl a vantagem de separar o domínio dos objetos independentes, o domínio da intuição, daquele dos objetos dependentes, o domínio do pensar. Aquele permanece o domínio por excelência do conhecimento, este o domínio das categorias do conhecer, aquele o domínio <u>de que</u> se fala, este o das categorias <u>com as quais</u> se fala. Nas palavras de Weyl: " a importância do princípio do preocedimento restrito resulta no modo mais evidente da seguinte observação: apenas restringindo-nos ao procedimento restrito, os objetos da categoria de base permanecem invariavelmente o argumento verdadeiro e próprio da nossa investigação: de outro modo, a massa das propriedades e relações derivadas torna-se para nós matéria de conhecimento, paritária ao universo dos objetos originários". Assim:

1) os objetos do domínio de base permanecem os únicos objetos do conhecimento.

Essa é a restrição do conhecimento ao domínio do intuível, em tudo semelhante à restrição kantiana do entendimento as limitações da intuição possível.

2) daí, para decidir-se da validade dos juizos finitos (formados segundo as restrições do procedimento restrito) toma-se sob consideração apenas os objetos do domínio de base. Enquanto que para os juizos transfinitos (não finitos) entrariam em consideração também a totalidade aberta dos objetos ideais de niveis superiores.

Mas isto ainda não é tudo. Nas justificação do procedimento restrito Weyl apresenta um argumento que é essencialmente aquele apresentado por Kant a Rehberg para a justificação da restrição do tempo na determinação dos números irracionais:se se considera as aplicações da análise, sómente uma análise desenvolvida segundo o procedimento restrito pode ser vista como uma idealização dos procedimentos reais onde números, conjuntos e funções numéricas são sempre determinados segundo um procedimento explicitável sobre domínios intuiveis. Na prática, diria Kant, nenhum número irracional seria introduzido sem que se soubesse aproximá-lo por uma sequência de números racionais tanto quanto se quisesse. Na prática, diria Weyl, nenhum número real ou função de números reais seria introduzido sem que se pudesse explicita-lo como constituido# segundo determinações categoriais a partir do domínio básico dos números naturais, ou sem prejuizo do princípio de procedimento restrito, dos números racionais.

5- Predicativismo e Lógica Clássica

Uma questão que nos colocamos é a de como é possível uma reformulação "construtiva" da matemática sem uma concomitantemente reforma de sua Lógica. Seria possivel sobre os mesmo pressupostos reafirmar os principios da lógica clássica enquanto se opera uma severa crítica da matemática clássica? Veremos a seguir que sim, que o primado da (possibilidade) da intuição que em Weyl é o prinicipio reformulador da análise, também funciona como o principio fundador do significado e, consequentemente, limitador do campo de validade da leis clássicas da lógica.

Em [38] aprendemos que um juizo afirma sempre um estado de coisas, e que uma proposição tem sentido quando, e apenas quando, exprime um juizo. Mas o estado de coisas afirmado pode ou não subsistir, quando se diz do juizo que é, respetivamente, verdadeiro ou falso. Mas um estado de coisas não é sempre o correspondente pretensamente objetivo de uma qualquer intenção pretensamente significativa, a mera correção gramatico-formal de uma proposição não garante, nem mesmo como possibilidade, a subsistencia de um correspondente estado de coisas na esfera objetual. Se a significação de proposições é determinada por possíveis estados de coisas, e se existem proposições privadas de sentido, então existem estados de coisas que não são, nem mesmo em principio, possiveis.

Weyl não explicita qual é o seu critério de compatibilidade de elementos objetuais num estado de coisas complexo, mas não é dificil identifica-lo: é simplesmente o critério da inserção deste estado de coisas na esfera da intuição possivel. Este critério ordena a esfera dos conteúdos dos juizos segundo relações de compatibilidade e imcompatibilidade a priori determinadas. Assim por exemplo " a propriedade verde refere-se a objetos visiveis; uma proposição segundo a qual, por exemplo, um valor ético é verde, não é nem verdadeira nem falsa, mas simplesmente privada de sentido"(¶ 1). Um juizo proprio só pode relacionar conteudos compativeis, isto é idealmente "existentes" na forma determinada pelo juizo, e uma proposição com sentido é aquela que além da correção gramático-formal expressa um juizo, assim "as proposições privadas de sentido podem talvez comparecer apenas no pensamento linguistico, nunca no pensamento objetual " (¶ 1).

Baseado nesta elucidação, para as proposições com sentido, porque apenas estas são passíveis de um valaor verdade fixo, ainda que indeterminado, Weyl sustenta a validade das leis lógicas clássicas. Por exemplo " a lógica formal tem perfeitamente razão quando afirma que, destes dois juizos [o afirmativo e a sua negação] um é sempre verdadeiro, e o outro é sempre falso" (¶ 1).

Weyl vê na questão dos paradoxos uma " escolástica da pior espécie" que só é possivel pela desatenção aos fundamentos fenomenológicos do dominio do sentido e o consequente abuso da lógica para além dos seus limites, que são exatamente os limites do significado.

Não menos que em Weyl em Husserl já se apresenta o problema de que a lógica (e queremos sempre dizer a clássica, pois neles não há outra) deve ser justificada , e esta justificação não pode ser dada apenas formalmente e de uma vez por todas independentemente da "estrutura" ideal do dominio que ela rege. Em [21] lemos que " a exclusão dos predicados contraditórios em uma esfera ideal (por exemplo, a aritmética, a esfera das significações, etc) não é por si compreensivel, mas precisa demonstrar-se ou estabelecer-sae axiomaticamente de novo em cada uma dessas esferas" (6ª inv. cap 4 ¶ 30). E isto porque predicados contraditórios não se excluem necessariamente em qualquer dominio: não podemos dizer que "toda espécie de papel ou é áspera ou é não áspera, pois isto implicaria que todo papel singular de uma espécie qualquer fosse áspero, ou todo papel singular não áspero, e tais afirmações não são exatas, naturalmente, para quaisquer espécies" (ibid ¶ 30).

Consideremos então a esfera dos conteúdos em geral ("dos objetos no mais geral dos sentidos" (ibid ¶ 31)). A conciliabilidade ou compatibilidade e a inconciliabilidade ou incompatibilidade são relações ideais nesta esfera fenomenologicamente fundadas da seguinte maneira: primeiramente , a compatibilidade de conteúdos "não pertence às individualidades dispersas, mas às espécies de conteúdos" (ibid ¶ 31), isto e', é determinada pela compatibilidade de suas respectivas espécies, e esta compatibilidade é determinada pela "existência" ideal da espécie complexa, dada pela união, mediante abstração ideatória, destas espécies. Esta "existência" ideal é por sua vez determinada pela possibilidade da apresentação desta espécie complexa numa intuição apropriada. Em segundo lugar, a compatibilidade (ou incompatibilidade) de espécies diz sempre respeito a alguma espécie de todo; por exemplo, vermelho e verde são espécies incompativeis com relação à extensão monocromática, mas compatíveis com relação à espécie extensão policromática.

A incompatibilidade de conteúdos não é apenas a negação formal da compatibilidade, mas igualmente fundada "como uma idéia da mesma hierarquia... que se pode realizar mediante um fato fenomenológico peculiar"(ibid ¶ 30). Assim certas espécies de conteúdos são incompativeis quando há a intuição de que não é possivel nenhuma intuição unitária que dê a espécie complexa em adequação perfeita, isto é quando podemos determinar a priori a impossibilidade da "existência" ideal da espécie complexa.

Assim fundadas essas relações de compatibilidade, é possivel agora enunciar os axiomas da lógica dessas relações. Por exemplo:

1) quando dois conteúdos não são incompatíveis, então são compatíveis

2) uma das duas coisas se dá, ou compatibilidade ou incompatibilidade, tertium non datur.

Esses axiomas não valem apenas "formalmente", mas são leis densas de conteúdo, uma vez que a incompatibilidade não é definida como mera negação da compatibilidade, mas é fundada sobre um caráter fenomenologicamente positivo: a evidência da contrariedade. Portanto esses axiomas não poderiam preceder a esta fundamentação.

Na esfera das significações, o correlato da compatibilidade dos conteúdos é a possibilidade das significações. Uma intenção significativa é possivel se pode se ajustar a um ato intuitivo no modo de uma "intuição [satisfação] objetivamente perfeita" (ibid ¶ 30), ou seja, se há uma " intuição perfeita in specie cuja matéria é identica à sua " (ibid ¶ 30). Onde este "há" tem o sentido de há realmenteou poderia haver.

Como esta intuição determina a compatibilidade de certos conteúdos,então a possibilidade de uma intenção significativa é determinada pela compatibilidade de seus conteúdos. "Falar da realidade de uma significação é, pois, o mesmo que dizer que a significação é uma 'expressão' objetivamente perfeita de uma conciliabilidade de conteudos intuitivos" (ibid ¶ 31).

De modo análogo funda-se a relação de impossibilidade de significações, e destas fundamentações seguem-se os aximoas da lógica das significações, comrespeito às suas mútuas compatibilidades e incompatibilidades.

1) a possibilidade e impossibilidade das mesmas significações se excluem

2) de um par de significações contraditórias (isto é, uma representa como incompatível o mesmo que a outra representa como compatível) uma é possivel e a outra impossivel.

3) a negativa de uma negativa - isto é uma significação que represente a incompatibilidade de certas coisa ∕℅ como incompatível - é equivalente à positiva, isto é àquela significação que representa a intima conexão da mesma coisa ∕℅ por meio da mesma matéria.

O que Weyl chama de juizo com sentido é o que Husserl chama, nesta 6ª investigação, de significação possivel e que em [17] chama de juizo com sentido quanto ao conteúdo ou ainda evidenciável em sua distinção.

Vejamos, em [17] Husserl ainda está preocupado com a justificação fenomenologica da lógica e nos diz por exemplo que o principio do terceiro excluido assenta-se sobre uma pressuposição que pertence ao extrato inferior da lógica formal, anterior à introdução do conceito de verdade, nomeadamente, de que todo juizo que tenha "sentido quanto ao conteúdo", isto é cujos "nucleos sintáticos" sejam entre si convenientes, pode ser levado à evidência da distinção,ou seja transformados num juizo distinto, um "juizo propriamente dito" (cf. [17] ¶¶ 88-89).

Vamos tentar esclarecer o que seja isto. Husserl distingue dois momentos num juizo: a matéria ou conteúdo do juizo e sua forma ou modalidade. Aquela refere-se ao sobre o que se julga, esta ao como se julga. Que S seja p, ou que tenha a propriedade p, é um conteúdo que pode ser posto sob diferentes modalidades: a da asserção, da dúvida, do desejo, da possibilidade, etc. É a antiga distinção forma-matéria[1]. O que de novo Husserl introduz é que considerações referentes ao conteúdo possam ser relevantes para a lógica formal.

Como já dito nas "Investigações" aqui novamente Husserl reafirma que a unidade possivel do conteudo do juizo está ligada a condições que vão além da simples capacidade puramente gramático-formal de sentido e é a pre-condição da efetuação do juizo. "A possibilidade de efetuação unitária do conteúdo do juizo precede à possibilidade de efetuação do proprio julgamento e é a sua

---

1 poderiamos chamar esta forma, para qualifica-la e distingui-la, de forma modal. Husserl considera também a forma categorica, expressa no exemplo pelo atributivo "é ".

condição. Ou ainda, a "existência" ideal do conteúdo do juizo é a pressuposição da "existencia" ideal do juizo (no sentido mais amplo de uma objetividade categorial intencional enquanto tal) e se reabsorve nesta última ([17] ¶ 89].

Afirmar que um juizo tenha "sentido quanto ao conteúdo" é afirmar a "existência" ideal do conteúdo do juizo, que nada mais é que, ainda, sua inserção no campo da intuição, ou experiência, possivel. Assim, a coerência, ou sentido, de um juizo quanto ao conteúdo é consequencia da "coerência das coisas na unidade sintética da experiência sobre a base da qual repousa" ([17] ¶ 89). Tais juizos podem efetivamente ser transformados em juizos distintos, isto é juizos com uma significação unitária fixa, e no dominio desses juizos funda-se de modo análogo ao já mostrado acima os axiomas clássicos da lógica.

Em termos sintáticos, a restrição às condições da experiência possivel traduz-se numa restrição quanto ao escopo dos "núcleos sintáticos" (termos) que, denotando conteudos, devem ser regrados pelas relações de compatibilidade e incompatibilidade estabelecidos neste dominio. ". Os materiais sintáticos dos juizos não intuitivos... não podem ser variáveis de uma maneira completamente livres, como se se pudesse coletar de um modo completamente arbitrário tais materiais e com eles formar julgamentos possíveis. É a priori que os materiais sintáticos de um juizo possível (e de todo complexo de juizos que possam ser ligados sob a forma de um juizo) tem uma referência intencional à unidade da experiência possivel e à unidade de um conjunto de coisas captáveis por uma experiência unitária" ([17] ¶ 89).

É esta unidade coerente da experiênoia possivel que funda fenomenologicamente uma lógica clássica no domínio dos juizos possiveis de distinção, ou com sentido quanto ao conteúdo, ou ainda possíveis, e no dominio do que Weyl chama de proposições com sentido. Assim o pressuposto do primado da (possibilidade)da intuição que rege a reforma da matemática em Weyl é, paradoxalmente, o mesmo que sustenta a validade da lógica clássica e podemos dizer que é pelo estabelecimento dos limites desta lógica nos limites dos juizos distintos que se faz necessário um projeto de reformulação da matemática, para trazê-la também para os limites do pensar,do representar,com referência intencional à unidade da intuição possivel.

Movimentos análogos percebemos em Kant, restringindo o entendimento aos limites da intuição, ou em Poincaré ao referir a noção de juizo significativo ao de juizo verificável . Em todos eles a unidade do domínio da intuição possivel limita o campo do significante, onde a verdade é um valor possivel, que divide com a falsidade toda a extensão deste campo em dois domínios completamentares.

6- PREDICATIVISMO E LINGUAGEM

Ao contrário do intuicionismo, o predicativismo reserva um papel privilegiado á linguagem.

Enquanto naquele a matemática é compreendida como uma atividade interna a qual a linguagem não pode ser nunca inteiramente fiel e para a qual só pode imperfeitamente servir como meio de comunicação, neste cabe á linguagem o papel distintivo de constituição do próprio corpo das idealidades de que trata .

Esta relação intima entre predicativismo e linguagem, evidente na medida em que no predicativismo a categoria da definibilidade é central, tem servido para que algumas leituras de caráter nominalista lhe tenham sido impostas, para que seja negado ao objeto matemático um status ontológico proprio e todo movimento que vise constitui-lo seja reduzido a uma série de convenções linguisticas, meras façons de parler que não implicam nenhum compromisso ontologico irrecusável.

Certamente o proprio "Principia Mathematica" tem uma clara, se bem que não totalmente bem sucedida, orientação nominalista. Mais recentemente Lorenzen ("[28]") e Chihara ("[5]") apresentam, o primeiro senão um desenvolvimento da análise em bases nominalistas,ao menos segundo uma postura "ontológicamente indiferente", e o segundo o esboço de uma inserção do predicativismo na esfera do pensamento nominalista.

Nada disso se passa em Weyl. Já vimos que nele a intuição originária, que nos dá um dominio básico de objetos, nos dá simultaneamente uma linguagem, um modo de referência, fundamental. E que são os complexos de significado desta linguagem que irão apontar, como correlatos intencionais, os objetos ideais, não-independentes mas concomitantemente irredutiveis a meras convenções linguisticas, constituidos segundo cadeias de formas sintáticas mais e mais complexas, a partir do dominio de base, por ação do pensar expresso por estas formas.

Quando Lorenzen (op.cit.) substitui os pricipios de compreensão e extensionalidade de Weyl por uma restrição de escopo no dominio dos juizos significativos àqueles juizos que sejam invariantes segundo certas relações, naturalmente acredita que por este simples artificio linguistico evita a introdução de novos objetos, idealidades, no dominio do discurso.

Mas a Weyl não ocorreria tal pensamento, pois certamente não lhe escaparia que, sendo a propria linguagem um corpo constituido de significações e portanto de objetividade ideais, a redução nominalista não nos livraria do compromisso com a desconfortável duplicidade de objetividade e idealidade do foco do discurso significativo. Em suma, a manipulação do objeto matemático como mera significação não nos liberta de nenhum compromisso com "objetos abstratos".

Já notamos que uma possível critica a ser dirigida a Kant é o da não tematização do como a matemática vivida como experiência interna pode tornar-se propriedade de toda uma comunidade co-partícipe desta experiência,ou se quisermos a da a-historicidade do eu transcedental. Já vimos também que esta é um problema não resolvido no intuicionismo.

Mas este não é necessariamente um problema do predicativismo de Weyl, por ele ser coerente com o pressuposto de que a matemática não é uma experiência interna que de algum modo misterioso torna-se uma possessão comunitária, mas antes uma atividade de consciências co-participantes na tarefa da constituição de seu sentido através da posse de uma linguagem comum. Com o pressuposto de que a genese do sentido é histórica.

Este pressuposto não é explicitado pelo proprio Weyl porque seu objetivo é matemático e não filosófico, mas sua aderência à doutrina husserliana da constituição hierárquica do objeto matemático segundo a hierarquia das significações e do estatuto não-independete destes objetos,mas simultaneamente irredutiveis à interioridade das consciências, o faz em principio e antecipadamente comprometido com a explicitação que nos dá Husserl da "história transcedental" da formação de sentido a que chamamos matemática e que dá toda a dimensão do problema da constituição linguistica dos objetos ideais e da propria possibilidade de um projeto de uma ciência matemática de objetos ideais.

Esta explicitação está contida na "Origem da Geometria " (1939), da qual nos ocuparemos a seguir (se bem que um seu esboço posse ser lido nas "Investigações" e nas "Idéias").

A história dos fatos nos conta que, provavelmente, a geometria constitui-se como ciência entre os gregos, a partir de uma herança pré-cientifica ligada à praxis cultural de povos ainda mais antigos. O que Husserl se propõe não é explicitar, nos limites de uma historiografia, como ou onde ou por quem a geometria originou-se como um corpo organizado de verdades ideais, sobre objetos ideais. Por mais interesse que tal projeto possa ser, ele não toca nas questões transcedentais: como idealidades constituídas na consciência, subjetiva e imanente, do proto-fundador da geometria puderam ser objetivadas? como essas idealidades puderam ser aí constituídas? que ato fundamenta a unicidade do objeto ideal. O que interessa a Husserl é explicitar como são constituídas os objetos ideais, enquanto idealidades e enquanto idealidades objetivas, em particular os objetos matemáticos enquanto exemplares desta classe dos objetos ideais das ciências cidéticas. A questão proposta é "interrogar... o sentido originário da geometria...que não interrompe seu curso e ao mesmo tempo não cessa de se edificar, permanecendo através de todas as suas novas formas "a" geometria" ([19]p.173). As pesquisas levadas a cabo "são históricas num sentido insolito, isto é segundo uma direção temática que abre problemas de fundo totalmente estranhos à História habitual, problemas que... são também indubitavelmente históricos"([19]p 174). O projeto de Husserl é o de uma história transcedental. A preocupação é com "Uma questão em retorno sobre o sentido mais originário segundo o qual a geometria nasceu um dia e, desde então, permaneceu presente como tradição milenar, assim ainda permanece para nós, viva numa elaboração incessante "([19]p.175). Ou seja, questiona-se o sentido originário e fundador deste <u>projeto</u> cultural: <u>a</u> geometria com ênfase na sua unicidade). A questão não é uma <u>de fato</u>, mas <u>de direito</u>: independentemente de conhecimentos fatuais busca-se um a priori histórico com evidência apoditica, não o que houve, mas o que <u>deve necessáriamente</u> ter havido: "nós questionamos sobre o sentido segundo o qual pela primeira vez (a geometria) entrou na história - <u>deve</u> ter aí entrado, se bem que nada saibamos sobre os primeiros criadores e que nada perguntemos sobre eles"([19]p.175);"numa questão em retorno é possivel sobre os principios originários e submersos da geometria, tais como <u>devem necessáriamente</u> ter sido, enquanto 'proto-fundadores'"([19]p.175)(meus grifos).

Uma primeira evidência apresenta-se: a geometria já contituída é uma tradição, nascida da produção humana, que remete aso primeiros criadores " que a partir de materiais predisponíveis, materiais brutos e materiais já formados pelo espirito, dão forma ao novo"([19]p.176), como toda ciência, a geometria "relaciona-se a uma cadeia aberta de gerações de pesquisadores, conhecidos ou desconhecidos, trabalhando uns com os outros e uns para os outros, enquanto contituem, para a totalidade da ciência viva, a subjetividade produtora. A ciência, em particular a geometria, com um tal sentido de ser, deve ter tido um começo histórico, e este sentido, ele próprio, uma origem num ato produtor "([19]p.177-8). Deve ter havido um momento onde a geometria originou-se como um projeto na subjetividade de seu inventor. E aqui coloca-se o primeiro problema: A existência geométrica é existência objetiva e ideal (não real, a fortiori, não psiquica), "ela não é existência de alguma coisa de pessoal na esfera pessoal da consciência, ela é existência de um ser-aí, objetivamente para 'todo-mundo' (para o geometra real e possível ou para qualquer um que compreenda a geometria): Ou melhor, ela tem desde sua proto-fundação uma existência especificamente supra-temporal e acessível, como disto temos certeza, a todos os homens e em primeiro lugar aos matemáticos reais e possíveis de todos os povos, de todos os séculos, e isto sob todas as suas formas particulares,. E todas as formas novas produzidas por quem quer que seja sobre o fundamento das formas dadas endossam de imediato a mesmo objetividade"([19]p.179). Como se dá esta objetivação, esta projeção do espaço intra-psiquico de seu proto-fundador para o espaço intersubjetivo da cultura com todas as características da objetividade ideal: valor supra-temporal, normatividade universal, inteligibilidade para o todo-o-mundo, desenraizamento do "hic et nunc"?

Esta objetividade é característica de um grande número de produtos culturais, mas realiza-se de modo exemplar e mais elevado nos objetos da geometria. A palavra "leão" por exemplo tem um grau restrito de objetividade ideal, determinado pelo domínio das comunidades que se expressam em português, já seu conteúdo intencional, a unidade de sentido da palavra "leão", tem um grau maior de objetividade, liberta que é de toda a subjetividade linguística de fato. No entanto o objeto a que a palavra se refere é um objeto real: o leão em carne e osso como objeto de receptividade. A objetividade ideal da geometria é absoluta e sem limites: não apenas seus conteúdos intencionais mas suas próprias referências são ideais. "A geometria é idênticamente a mesma na 'lingua original' de Euclides e em todos as suas 'traduções'...(e seu) tema consiste precisamente em objetividades ideais..."([19]p.180).

Mas como a objetividade ideal absoluta não habita um τόπος οὐράνιος[1] é possível a pergunta :"como a idealidade geométrica (como aquela de todas as ciências) vem à sua objetividade ideal a partir de seu surgimento original intra-pessoal no qual ela se apresenta como formação no espaço de consciência da

(1) Lugar Celeste. Com isso Husserl quer dizer que essas objetividades ideais não tem um lugar fora do mundo, no sentido do realismo platônico, ou numa mente divina. Cf. [21], 1ª investigação ¶31 e "[20]" ¶22.

alma do primeiro inventor? ([19]p.181).

A resposta vem presta: pela mediação da linguagem. É pela linguagem que as objetividades ideais obtém sua encarnação, seu corpo linguístico. Mas a linguagem aqui referida não é uma linguagem qualquer de fato, historicamen-- te circunscrita, mas uma linguagem universal, uma linguagem transcedental, que, ao menos como idéia, congrega numa mesma comunidade falante todos os homens, mediata e imediatamente, " uma comunidade do poder-exprimir-se na reciprocidade, normalidade e plena inteligibilidade, e nesta comunidade, todo mundo pode falar como de um ente objetivo de tudo aquilo que está aí, no mundo circundante de sua humanidade" ([19]p.183)[2].

Nós somos constantemente conscientes do mundo, como horizonte de nossas vidas, como horizonte aberto de coisas e de homens, presentes ou não, com os quais podemos entrar em conexão atual ou potencial, imediata ou mediatamente, numa compreensão recíproca e, sobre o fundamento desta conexão, numa troca, num enganjamento com eles, e em seguida num saber habitual desse sercomunalizado (v.o.p.182). A este horizonte de humanidade pertence a linguagem universal, onde tudo tem um nome (é em princípio nomeável), "todo o mundo pode falar como de um ente objetivo de tudo aquile que está aí" ([19]p.183).

Este movimento, da subjetividade do proto-fundador da geometria para a inter-subjetividade da comunidade linguística dos geômetras, garante a possibilidade da idéia, no sentido Kantiano infinita da ciência, impossível se circunscrita ao domínio finito daquela subjetividade. É a abertura da linguagem universal que funda a possibilidade da ciência como projeto, e tem assim um sentido teleológico. Isto já havia sido antes expresso por Husserl, nas [21] tomo II ¶2: "toda indagação teórica, ainda que não se mova só em atos de expressão, nem sequer em enunciados completos., termina , no entanto, em enunciados.

Apenas nesta forma converte-se a verdade, e especialmente a teoria, em patrimônio perdurável da ciência, em tesouro de saber e de investigação progressiva, tesouro inventariado em documento autênticos e mobilizável em todo o momento".

(2) Cf a definição de "objeto" em Idéias ¶22 como o sujeito de qualquer sentença (afirmativa e categórica) verdadeira. Que reafirma o locus linguístico dos objetos ideais. Para um objeto ideal existir não significa mais nada além de que podemos falar dele com verdade, ou que nossa vida concreta pode ser para ele dirigida,
~~falar como de um ente objetivo de tudo aquilo que está aí" ([19]p.183).~~

O que foi dito é que pela mediação da linguagem constituem-se as objetividades ideais, mas não foi dito como isto se dá. Como pressuposto da linguagem comum o geometra proto-fundador pode enunciar sua formação interior, mas não é pelo simples ato da enunciação que esta formação torna-se um para-nós. Se assim fosse cada ser falante teria o poder divino de criar objetividade pela sua mera nomeação. Alegoricamente falando, é preciso que a formação interior do primeiro geometra torna-se moeda corrente, tenha valor.

E isto se dá pelo poder de ativação da evidência originária, tanto ao nível da consciência do primeiro criador quanto ao nível da comunidade linguística pela compreensão ativa da linguagem. A evidência, primeira ou reativada, é fenomenologicamente a única fonte de valor. A evidência viva e originária da primeira produção é transitória, mas pode ser reativada como evidência da mesma produção, quer pelo próprio produtor num momento posterior aquele da produção originária, quer pelos co-participantes da comunidade linguística (ouvintes ou leitores), por compreensão ativa e assim co-produtora da formação original, (vide[19]pp184-5). "(a reativação) permite vivificar, sob as crostas sedimentares das aquisições linguísticas e culturais o sentido da evidência fundadora" (J. Derrida, introdução a [19]p.100). Mas o "sujeito falante" não é por si capaz de fundar o ser-para-a-perpetuidade do objeto ideal que deve estar-aí mesmo quando o inventor e seus associados não estejam mais engajados nessa permuta do seu sentido fundador. Este sentido deve poder persistir, contrariamente ao fogo sagrado das vestais, mesmo quando suas virgens guardiãs já tiverem abandonado o templo. A cristalização (e consequente sedimentação) deste sentido, a constituição definitiva da objetividade ideal dá-se na, e pela possibilidadde da linguagem escrita. E pelo poder, da parte do leitor, em reativar, na leitura ativa, o sentido originário sedimentado nos textos. É claro que esta constituição não se dá apenas no ato real da escrita, a verdade não pode estar a mercê dessas contigências mundanas. É pela possibilidade, e não atualidade, da incorporação linguística, é pela incorporabilidade linguística, que constitui-se a supra-temporalidade do objeto ideal. Se assim não fosse, a verdade da geometria seria tão perecível quanto os documentos em que estivesse consignada. Mas esta possibilidade seria nada sem aquela outra, a da reativação do sentido sedimentado na expressão pelo leitor (ou ouvinte). E para tanto a expressão deve se acautelar da pluricidade de sentidos. Isto seria um transtorno para a tarefa da reativação do seu sentido. A reativação é um garimpeiro que extrai a evidência de sob as camadas sedimentares acumuladadas sobre ele pelas tradições linguísticas culturais. "(a evidência geométrica) sedimenta-se, por assim dizer. Mas o leitor pode torná-la de novo evidente, pode reativá(-la) " ([19]p.187). E como afirma Derrida (op.cit.p.101) " a equivocidade da expressão é o terreno preferido dos depósitos sedimentares". É porisso que o geometra proto-fundador e aqueles que o sucedem devem estar" atentos à univocidade da expressão linguística"([19]p.188). Mas tanto a univocidade da expressão quanto, correlativamente, o poder total de reativação são ideais; portanto " o conhecimento objetivo, absolutamente estabelecido, da verdade, é uma idéia infinita" ([19]p.189 nota). E assim sendo, também a recuperação total das origens não é senão um horizonte teleológico.

A constituição objetiva da ciência em sua literatura não é uma idéia original das "Origens", veja-se por exemplo nas "Investigações" tomo I ¶ 6: "Apenas em sua literautra tem a ciência uma consistência objetiva; apenas na forma de obras escritas tem uma existência própria, ainda que plena de relações com o homem e suas atividades intelectuais; desta forma se propaga através dos milênios e sobrevive aos individuos, às gerações e às nações. Representa assim uma soma de dispositivos externos, nascidos de atos de saber que foram levados a cabo por muitos indivíduos e que puderam converter-se de novo em atos semelhantes de inúmeros individuos, em uma forma facilmente compreensivel, mas que não cabe, sem prolixidade, descrever de modo exato". É claro que nesta última frase, Husserl faz menção à evidência sedimentada. Mas a verdade não depende da expressão que a cristaliza, mas da evidência que a funda. Porisso na citação, Husserl refere-se às obras escritas como dispostivos externos da ciência. Mas como é possível, para cada pesquisador, reativar constantemente as evidências originárias fundadoras da objetividade geométrica? como os acréscimos novos no desenvolvimento deste projeto, a geometria; podem requerer uma reativação, praticamente impossivel, do sentido originário da geometria ? deve o geometra percorrer, cada vez do princípio, a cadeia prodigiosa dos fundamentos até as arqui-premissas e reativá-las efetivamente na sua totalidade?"([19]p.189). A resposta assume que idealidades de um nivel inferior podem constituir idealidades de um nível superior e que o sentido originário propaga-se na cadeia, por mais longa que seja, das deduções e definições e que é possivel uma recuperação gradativa deste sentido. Assim a reativação impõe-se como tarefa, como idéia no sentido Kantiano e a recuperação total das origens adquire dimensão teleológica.

"Entretanto se nós pensarmos na evidente finitude do poder tanto individual quanto comunitário, de converter efetivamente as cadeias lógicas seculares em cadeias de evidências autenticamente originárias na unidade de uma realização, nós notamos que a lei (da reativibilidade das evidências nas cadeias dedutivas) esconde uma idealização: a saber a liberação além de seus limites e, de um certo modo, a infinitização de nosso poder"([19]p.193).

A recusa desta tarefa leva, por exemplo no ensino da geometria, ao ensino metodológico, operatório e cego da matemática: aprende-se a servir-se de signos e não de significações, signos cujos sentidos originários estão soterrados sob depósitos sedimentares. Em outros textos Husserl critica a objetivação linguística e a simbolização matemática, de perse, como fatores de degradações da ciência de uma "formação de sentido" a uma arte ou um jogo (cf. "[21]" tomo II, 1ª inv. ¶ 20). É a mesma recusa em outra frente.

A pergunta como o sentido ideal, já constituído na imanência subjetiva, pode ser objetivado? Husserl responde: pelo poder de reativação, intra-psiquica e intersubjetiva, que como ato ou como idéia teleológica, forma os nós da rede que constitue e sustenta as objetividades ideais e cuja trama é tecida pela linguagem oral e escrita. A pergunta é agora: como, num momento "anterior", a própria idealidade pode se constituir no espaço da consciência de seu proto-fundador?

Novamente, independendo da situação real concreta deste fundador, é certo que habitava um mundo de coisas e de cultura. Coisas que deveriam necessáriamente ter uma corporeidade., formas, espaciais, formas de movimento, possibilidades de deformação. Hábitos culturais relacionados a esses corpos, originários das necessidades da praxis, voltados a "découpage" de certas qualidades materiais destes corpos, previlegiando-as e aperfeiçoando-as, dirigindo a consciência no rumo de uma idealização progressiva cujo fim é a constituição da idealidade geométrica mas que passa pelo domínio das idealidades morfológicas[1].

(1) conceitos morfológicos são conceitos vagos, mas de uma vaguidade essencial, não acidental. Os conceitos morfológicos tem "contornos indefinidos" mas não são porisso inexatos, no sentido de imperfeitos. Opõem-se aos conceitos ideais da geometria e são mais apropriados às ciências descritivas. Exemplos: os conceitos de burguesia, punhado ou, como é aqui pertinente, redondo (que é o conceito morfológico que corresponderia ao conceito ideal de círculo). cf. "[20] ¶74(este parágrafo nos parece essencial para a compreensão da "Origem). Cf. também "[21]" 2ª investigação ¶39

Assim "o filósofo que não conhecia a geometria, mas deve ser imaginável como seu inventor"([19]p.211) tinha a sua disposição a coisa, o corpo, os conceitos morfológicos, a arte métrica e a possibilidade da criação imaginária[2].

A partir daí por idealização (constituição dos conceitos ideais) forma-se o campo da matemática. Esta idealização faz nascer do tipo morfológico, por ideação, isto é por passagem ao limite, uma idealidade superior, não sensível, exata e objetiva, "formações de nomes semelhantes, mas de um gênero novo"([19]p.212). A ideação que dá essencias ideais como "limites" ideais, que não podem em princípio ser encontradas em nenhuma intuição sensória, as quais ocasionalmente as essências morfológicas "aproximam-se", mais ou menos, sem nunca atingi-las" ("[20]" ¶74). Nas "Investigações"; 1ª investigação ¶ 18 temos." A rigor, nenhum conceito geométrico pode como é bem sabido - representam-se intuitivamente de modo adequado. Imaginados ou desenhamos o traço e dizemos - ou pensamos - que é uma reta. E assim com todas as figuras. Serve a imagem de mero apoio para a intellectio. Não oferece um exemplo real do objeto intencional, senão apenas um exemplo de figuras sensíveis, que pertencem à espécie sensível que constitue o ponto de partida natural para as "idealizações geométricas". Nestes processos intelectivos do pensamento geométrico se constitue a idéia do corpo geométrico, que é cunhado na significação da expressão definitória.

Os objetos ideais de um "gênero novo" são produtos "que nascem de um ato espiritual de idealização, de um pensar "puro" que tem seu material nos pré-dados universais já descritos desta humanidade e deste mundo humano circundante de fato e cria a partir deles as 'objetividades ideais'" ([19]p.212).

São estas objetividades apresentadas a seu proto-fundador na clareza da evidência que irão pelos meios antes descritos ganhar a persistência, a objetividade, a supra-temporalidade, o valor normativo universal e a validade apodítica característicos da geometria.

---

(2) "O geometra quando pensa geometricamente opera com a imaginação muito mais do que com percepções de figuras ou modêlos"("[20]" ¶70, este parágrafo está dedicado em analisar a posição privilegiada da livre imaginação na clarificação de essência)

7- PREDICATIVISMO E FORMALISMO

" Se o ponto de vista de Hilbert prevalecer sobre o intuicionismo, como parece ser o caso, então eu vejo nisto uma derrota decisiva da atitude filosófica da fenomenologia pura, que então mostra-se insuficiente para compreensão da ciência criativa, mesmo na área cognitiva que é a primeira e a mais facilmente aberta à evidência - a matemática "

Weyl

Se resumirmos as teses formalistas nas afirmações de que os axiomas de uma teoria não se referem a nenhum domínio em particular e que definem implicitamente seus próprios termos, que são postos numa aparente posição de preeminência lógica por mera convenção ou por singelas razões de praticidade, antes que devido a uma suposta e explícita veracidade evidente, que os juízos da teoria, seus teoremas, não são nada além de consequências lógicas necessariamente derivadas dos axiomas, que a noção de verdade identifica-se com os de demonstrabilidade e as de existencia a de livre de contradições no sistema, então não é difícil advinhar que Weyl rejeita tal postura em sua totalidade e em cada uma de suas teses.

Antes de tudo, tanto Weyl quanto Poincaré, ambos anti-formalistas intuicionistas certamente não deixaram de perceber que foi exatamente o abandono pelos matemáticos formalistas da intuição como critério de verdade que tornou o organismo matemático susceptível à contaminação pelos paradoxos.

A primeira sentença do prefácio a "Das Kontinuum" diz: " com este ensaio não nos propomos erigir, no espírito do formalismo, em torno da "rocha sólida" sobre a qual está fundamentado o edifício da Análise, uma bela cerca de madeira, para depois persuadir o leitor - e no fundo nós mesmos - de haver assim lançado os verdadeiros fundamentos. Sustentamos, ao invés disso, a opinião que uma parte essencial deste edifício está construída sobre areia. Creio poder substituir este terreno movediço por suportes nos quais possamos confiar..."

Weyl critica os formalistas segundo, digamos, duas fontes: uma epistemológica e outra lógica.

Segundo a primeira linha de ataque, o jogo hipotético-dedutivo dos formalistas, porque os axiomas assim entendidos são meras <u>hipóteses</u>, as quais nenhuma evidência viria redimir para fazê-las <u>conhecimento</u>, não tem nenhum valor cognoscitivo, uma vez que não existe um "significado cognoscitivo" no qual valham esses axiomas. Weyl reafirma que o discurso matemático significativo e epistemologicamente relevante é <u>sempre</u> a respeito de um domínio de objetos aberto à intuição e às determinações categóricas do conhecer.

A cadeia inferencial dos axiomas aos teoremas, por sua vez,não é como querem os formalistas, uma concatenação mecanicamente engendrada, mas antes um constante renovar da intuição que constitui os princípios inferenciais que a compõem. Uma matemática mecanizada,cuja única tarefa fosse nos prover de teoremas automaticamente derivados estaria em princípio banalizada e desqualificada como <u>ciência</u>.

Além desses argumentos de caráter gnosológico, Weyl nos apresenta outros, talvez mais problematicos para os formalistas, de caráter propriamente lógico, e que em seu espírito apresentam uma surpreendente antevisão dos teoremas de incompletude de Gödel e seus fatais golpes no formalismo.

Weyl afirma que o significado formalista de existência (em que mesmo Poincaré incorreu) é logicamente insustentável. E isto porque a decidibilidade de juizos existênciais, imprescindivel se se que preservar a lógica clássica, dependeria da <u>consistência</u> e <u>completude</u> do sistema, e <u>isto</u> nem sempre se pode provar. Mas mesmo que se pudesse, essa demonstração não seria possível <u>independentemente da intuição fundamental da sucessão infinita dos números naturais</u>, o próprio esquema formal de qualquer demonstração.

Mas não é esta a essência do teorema de incompletude de Gödel? a idéia de que a demonstração do consistência de um sistema formal deve envolver uma tradução aritmética dos procedimentos formais?

Assim o formalismo e a noção formal de existência ou são insustentáveis ou envolvem uma petição de princípio.

Diz Weyl:..." a convicção de poder derivar, por exemplo, todos os juizos gerais e verdadeiros específicos da geometria elementar...dos axiomas geométricos através do raciocinio lógico, representa um ato de fé científico: estamos na impossibilidade de intuir verdadeiramente que coisa é, e menos ainda estamos na posição de "demonstrá-lo" por via lógica por meio das mesmas leis lógicas".

Que isto tenha sido escrito mais de dez anos antes de Gödel publicar seu famoso ensaio não deixa de nos surpreender.

Mas até nesta crítica Weyl se deixa acompanhar pela sombra de Husserl. Vejamos o que este nos diz no ¶72 das "Idéias": [um domínio definido] tem as seguintes características distintivas, que um número finito de conceitos e proposições... determinam completa e não-ambiguamente segundo linhas de pura necessidade lógica a totalidade de todas as possíveis formações no domínio, de modo que em princípio nada permaneça em aberto nele.... Num domínio matemáticamente definido os conceitos de "verdade" e "implicação formal dos axiomas" são equivalentes". Husserl neste ponto do texto chama a atenção do leitor às semelhanças entre o seu conceito de domínio definido e o "axioma de completude" posteriormente enunciado por Hilbert, sem menção à fonte.

O que Weyl nos diz é que este conceito é central ao formalismo mas simultaneamente não pode ser formalizado.

8 - O INFINITO

Provavelmente um dos maiores problemas de se entronizar a intuição como fundadora da verdade está em que os "olhos da mente", desafortunadamente, apresentam-se com diferentes níveis de acuidade. Nos predicativistas aquilo que é <u>dado</u> no estágio pré-predicativo, intuitivo, do domínio do discurso, junto com a própria linguagem deste discurso, está em função do que e de quanto cada um deles está disposto a aceitar como "dado na intuição". Assim só existe uma noção relativa de predicativismo, "módulo" o fundamento intuído. O caráter do infinito em matemática é um ponto de discórdia. Como vimos, Poincaré não está disposto a aceitar como "evidente" nem o infinito real do conjunto dos números naturais, mas apenas a irrecusável compulsão de se passar para o número seguinte, isto é, do motor da geração ininterrupta dos naturais.

Poincaré acata a validade da intuição de um procedimento sempre renovado de passar-ao-seguinte, da sucessão potencialmente infinita dos números, mas não da intuição do atualmente infinito, que não pode ser operacionalmente, isto é efetivamente, constituído.

Já em Weyl, o domínio dos números se oferece à intuição já constituído em sua totalidade infinita. Em Poincaré é a <u>operação</u> de passar ao sucessor que contitui a essência de uma totalidade em construção, em Weyl é a <u>estrutura</u> de ordem discreta, linear e aberta que constitui a essência de uma totalidade já constituída. Num esta é dinamica, noutra estática. Em Weyl acata-se a intuição de um estado-de-coisas <u>universal</u>, isto é que se verifica não entre um número finito e determinado de objetos como em Poincaré, mas entre todos os objetos de um domínio infinito de uma vez por todas determinado.

Além de ser uma consequêncai esperada do seu critério de significado, o "finitismo" de Poincaré aponta também na direção de que seu entendimento do conceito de intuição tem uma dívida com o kantismo: a intuição é sempre do particular e cabe ao entendimento a constituição do geral, mas com a importante restrição de que, de algum modo, é apenas <u>em função deste particular</u> que o geral é significante. O critério de significação de Poincaré na verdade não diz outra coisa.

Por outro lado, e neste ponto já sem surpresa, Weyl segue Husserl ao acatar como epistemológica, e ontológicamente, válida a intuição do universal.

Em [22] pp 78-9 afirma-se " Mais facilmente apreensível, pelo menos para quem consiga colocar-se na posição do puro ver e evitar todos os preconceitos naturais, é o conhecimento de que podem chegar ao absoluto dar-se em si não só objetos singulares, mas também universalidades, objetos universais e estado de coisas universais. Este conhecimento é de importância decisiva para a possibilidade de uma fenomenologia...as investigações fenomenológicas são investigações universais de essências."

Ou ainda," não menos temos evidência do universal; objetalidades e estados de coisas universais surgem-nos em autopresentação e estão dados no mesmo sentido, portanto, inquestionavelmente; e estão autodados adequadamente no sentido mais rigoroso"([22] p 90)

Na perspectiva de Husserl, Poincaré estaria ainda preso à atitude natural e ao antropologismo de que ele explicitamente acusa Kant (v.[22] p.75), enquanto Weyl promoveria uma investigação nos fundamentos da matemática propriamente fenomenológica.

IV - A aritmética

A-A ARITMÉTICA DOS NATURAIS

Apresentamos a seguir uma formalização da aritmética de Weyl, a mais próxima possível do tratamento informal que este lhe dá.

Weyl introduz a adição e multiplicação de números naturais, a partir do sucessor, por definições recursivas. Este procedimento é formalizado, de modo mais natural, no contexto de uma lógica infinitária . $L_{\omega_1\omega}$

Os únicos axiomas não-lógicos usados por Weyl são aqueles usuais do sucessor. O "princípio de indução completa" é usado por Weyl como uma regra de inferência; nós o preferimos como um esquema de axiomas.

1 - O SISTEMA W

1.1 Definição. Consideremos a linguagem elementar com identidade com uma quantidade enumerável de variáveis: n, m, 1, s, t, etc; um símbolo de constante : $\underline{o}$, e um símbolo funcional unário: S. As definições de termos e fórmulas são as usuais com um único acréscimo:

(a) Se $(A_i)_{i\in\omega}$ é uma familia (enumerável) de fórmulas então $\bigwedge_{i\in\omega} A_i$ (conjução infinita) é uma fórmula.

Axiomas: (não-lógicos)

1) $\forall n \exists m\ (n \neq \underline{0} \rightarrow n = Sm)$

2) $\forall n\ (Sn \neq \underline{0})$

3) $\forall n\ \forall m\ (Sn = Sm \leftrightarrow n = m)$

4) para toda fórmula R(n):

$R(\underline{0}) \wedge \forall n\ (R(n) \rightarrow R(Sn)) \rightarrow \forall n\ R(n)$

1.2 lema: $p = Sq \wedge p = Sq' \rightarrow q = q'$ (imediato)

Introduzimos na linguagem o símbolo funcional unário A pela definição:

$Ap = q \leftrightarrow p = Sq$

DEFINIÇÃO: $\underline{1} = S\underline{o}$; $\underline{2} = S\underline{1} = S^2\underline{o}$, ... $\underline{k+1} = S\underline{k} = S^{k+1}\underline{o}$; ...

1.3.Definição: Chamaremos um fórmula de finita ou infinita se seu comprimento for, respectivamente finito ou infinto.

Seja $A(n_1 - n_k)$ uma fórmula finita e $B(n'_1 - n'_k)$ uma subfórmula de A, definiremos uma fórmula infinita $\tilde{A}$, a iteração de A pela substituição de B como segue:

$$A^1(n_1 - n_k) = A\ (n_1 - n_k)$$

$$A^{k+1}(n_1 - n_k) = A^{k\frac{(B(n'_1 - n'_k)}{A'(n'_1 - n'_k)}}\ (n_1 - n_k)$$

isto é a subfórmula $B(n'_1 \ldots n'_k)$ é substituida pela fórmula $A'(n'_1 \ldots n'_k)$ onde A' é uma conveniente variante de A.

e $$\tilde{A}\ (n, n_1 - n_k) = \bigwedge_{\underline{k} \neq \underline{o}} (\ n = \underline{k} \rightarrow A^k\ (\ n_1 - n_k))$$

2 - ADIÇÃO

2.1. Definição: Seja $S(p,m) ; = \exists\ q\ (q = Sm \wedge p = q)$. Então

$$S^2\ (p,m) := S(\frac{p=q}{S(p,q)})\ (p,m) = \exists\ q\ (q = Sm \wedge \exists\ q'\ (q' = Sq \wedge p = q'))$$

e assim sucessivamente.

isto é, $S(p,m) \leftrightarrow (p=Sm)$, $S^2(p,m) \leftrightarrow (p=S^2m), \ldots, S^k(p,m) \leftrightarrow (p=S^km)$, etc.

Seja $\tau^+(m, n, p) := \tilde{S}\ (n, p, m)$, isto é,

$\tau\ (m, n, p) := (n = \underline{0} \rightarrow p = m\ ) \wedge \tau^+(m, n, p)$. Assim: $\tau(m, n, p) \leftrightarrow \bigwedge_{\underline{k}} (n = \underline{k} \rightarrow p = S^km)$, onde $S^0m = m$

2.2 TEOREMAS

1) τ (m, Sn, p) $\leftrightarrow$ τ (m, n, Ap)

<u>Dem</u>: τ (m, Sn, p) $\leftrightarrow \bigwedge_{\underline{k}}$ (Sn = $\underline{k}$ $\rightarrow$ p = S^{k}m). Mas esta fórmula é

equivalente a :

$\bigwedge_{\underline{k}}$ (n = $\underline{k}$ $\rightarrow$ p = S^{k+1}m), que é por sua vez equivalente, pela

definição de A, a $\bigwedge_{\underline{k}}$ (n = $\underline{k}$ $\rightarrow$ Ap = S^{k} m) que é ainda

equivalente a τ (m, n, Ap) $\square$

<u>Corolario</u>. τ(m, Sn, Sp) $\leftrightarrow$ τ (m, n, p)

2) τ(m, n, p) $\wedge$ τ(m, n, p') $\rightarrow$ (p = p')

<u>Dem</u>: indução em n.

n = $\underline{o}$: τ (m, $\underline{o}$, p) $\leftrightarrow$ (p = m)

τ (m, $\underline{o}$, p') $\leftrightarrow$ (p' = m). Donde p = p'.

Agora, τ (m, Sn, p) $\leftrightarrow$ τ(m, n, Ap) e τ(m, Sn, p') $\leftrightarrow$ τ(m, n, Ap')

pela hipótese indutiva : Ap = Ap'. Donde p = p'.

O resultado para n arbitrário segue do axioma (3) $\square$

Em virtude deste resultado introduzimos o símbolo funcional binário + pela definição:

$$m + n = \iota\, p.\ \tau\ (m, n, p)$$

3) τ(Sm, n, p) $\leftrightarrow$ τ(m, n, Ap)

<u>Dem</u>: por indução em n:

n= $\underline{o}$: τ (Sm, $\underline{o}$, p) $\leftrightarrow$ (p = Sm)

$\tau\ (m, \underline{o}, Ap) \leftrightarrow (Ap = m)$. E $p = Sm \leftrightarrow Ap = m$

Agora, $\tau\ (Sm, Sn, p) \leftrightarrow \tau\ (Sm, n, Ap) \underset{ind.}{\leftrightarrow} \tau(m, n, A\ Ap) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \tau\ (m, Sn, Ap)$ □

Corolario $\quad \tau(Sm, n, Sp) \leftrightarrow \tau(m, n, p) \leftrightarrow \tau(m, Sn, Sp)$

Em termos do símbolo definido +, mostramos que

$\alpha)\ m + \underline{o} = m$

$\beta)\ m + Sn = Sm + n = S(m+n)$

4) $\tau\ (\underline{o}, n, p) \leftrightarrow (p = n)$

Dem: indução em n :

$n = \underline{o}$: $\tau\ (\underline{o}, \underline{o}, p) \leftrightarrow (p = \underline{o})$. Logo $p = n$

Agora, $\tau\ (\underline{o}, Sn, p) \leftrightarrow \tau(\underline{o}, n, Ap) \underset{ind.}{\leftrightarrow} Ap = n \leftrightarrow p = Sn$.

isto é (7) $\underline{o} + n = n$ □

5) $m + n = n + m$

Dem: indução em n :

$n = \underline{o}$: $m + \underline{o} = m$ por (α) e $\underline{o} + m = m$ (7)

Agora, $m + Sn \underset{(\beta)}{=} S\ (m+n) \underset{ind.}{=} S\ (n+m) \underset{(\beta)}{=} Sn + m$ □

6) $m + (n + k) = (m + n) + k$

Dem: indução em k

$k = \underline{o}$: $m + (n + \underline{o}) \underset{(\alpha)}{=} m + n$

$$(m + n) + \underline{o} \underset{(\alpha)}{=} m + n$$

Agora, $m + (n + Sk) \underset{(\beta)}{=} m + (Sn + k) \underset{\text{ind.}}{=} (m + Sn) + k \underset{(\beta)}{=}$

$\underset{(\beta)}{=} S(m + n) + k \underset{(\beta)}{=} (m + n) + Sk$ □

3. MULTIPLICAÇÃO

3.1. Definição: Seja $P(p,m) = \exists k\, [\tau(m, k, p) \wedge \tau(m, k, m)]$

$$P^2(p,m) = P\left(\frac{\tau(m,\ k,\ m)}{P(k,\ m)}\right) = \exists k\, [\tau(m, k, p) \wedge \exists k'\, [\tau(m, k', k) \wedge \tau(m, k', m)]]$$

e assim sucessivamente.

Isto é: $P(p, m) \leftrightarrow (p = m)$

$P^2(p, m) \leftrightarrow (p = m + m)$

$\vdots$

$P^k(p, m) \leftrightarrow (p = m+m+\ldots+m)$: k parcelas

Seja $P^+(n, m, p) := \tilde{P}(n, p, m)$ e $\pi(n, m, p) := (n{=}\underline{o} \rightarrow p = \underline{o}) \wedge P^+(n, m, p)$

Assim $\pi(n, m, p) = \bigwedge_{\underline{k}} (n = \underline{k} \rightarrow P^k(p, m))$, com a definição $P^0(p, m) := (p = \underline{o})$

3.2. TEOREMAS

1) $P^{k+1}(p, m) \leftrightarrow \exists q\, (\tau(m, q, p) \wedge P^k(m, q))$

Dem: imediato das definições

2) $\pi(Sn, m, p) \leftrightarrow \exists q\, (\pi(n, m, q) \wedge \tau(m, q, p))$

<u>Dem</u>: $\pi(Sn, m, p) = \bigwedge_{\underline{k}}(Sn = \underline{k} \rightarrow P^{k}(p, m)) \leftrightarrow \bigwedge_{\underline{k}}(n = k \rightarrow P^{k+1}(p, m)) \underset{(1)}{\leftrightarrow}$

$\underset{(1)}{\leftrightarrow} \bigwedge_{\underline{k}}(n = \underline{k} \rightarrow \exists q\, (\tau(m, q, p) \wedge P^{k}(m, q)) \leftrightarrow$

$\exists q(\tau(m,q,p) \wedge \bigwedge_{k}(n = k \rightarrow P^{k}(m, q')) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \exists q\, (\tau(m, q, p) \wedge \pi(n, m, q)) \square$

3) $\pi(n, m, p) \wedge \pi(n, m, p') \rightarrow (p = p')$

<u>Dem</u>: indução em n.

$n = \underline{o}$: imediato . O passo indutivo segue de (2)$\square$

DEFINIÇÃO: $n \cdot m = \iota p : \pi(n, m, p)$

Em termos do símbolo definido, já mostramos que:

(α) $\underline{o} \cdot m = \underline{o}$

(β) $Sn \cdot m = n \cdot m + m$

4) (γ) $n \cdot Sm = n \cdot m + n$

<u>Dem</u>: indução em n.

$n = \underline{o}$: $\underline{o}\, Sm \underset{(\alpha)}{=} \underline{o}$ e $\underline{o} \cdot m + \underline{o} \underset{(\alpha)}{=} \underline{o} + \underline{o} = \underline{o}$

Agora, $Sn \cdot Sm \underset{(\beta)}{=} (n \cdot Sm) + Sm \underset{\text{hip ind.}}{=} (n.m + n) + Sm =$

$= n.m + (n + Sm) = n.m + (Sn + m) = n.m + (m + Sn) =$

$= (n.m + m) + Sn \underset{(\beta)}{=} Sn.m + Sn \square$

5) (δ) $n \cdot \underline{o} = \underline{o}$

<u>Dem</u>: indução em n.

$n = \underline{o}$: $\underline{o} \cdot \underline{o} \underset{(\alpha)}{=} \underline{o}$

Agora; $Sn \cdot \underline{o} \underset{(\beta)}{=} (n \cdot \underline{o}) + \underline{o} \underset{ind}{=} \underline{o} + \underline{o} = \underline{o}$ $\square$

6) (λ) $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$

Dem: indução em k:

$k = \underline{o}$: $n \cdot (m + \underline{o}) = n \cdot m \underset{(\varepsilon)}{=} n \cdot m + n \cdot \underline{o}$

Agora, $n \cdot (m + Sk) = n \cdot (Sm + k) \underset{ind.}{=} n \cdot Sm + n \cdot k \underset{(\gamma)}{=}$

$\underset{(\gamma)}{=} (n.m+n) + n.k = n.m + (n + n.k) = n \cdot m + (n.k + n) \underset{(\gamma)}{=} n.m + n.Sk$ $\square$

7) $(n.m) \cdot k = n \cdot (m.k)$

Dem: indução em k

$k = \underline{o}$: $(n.m).\underline{o} \underset{(\varepsilon)}{=} n.m$ e $n \cdot (m.\underline{o}) \underset{(\varepsilon)}{=} n.m$

Agora, $(n.m).Sk \underset{(\gamma)}{=} (n.m).k + (n.m) \underset{ind}{=} n.(m.k) + n.m \underset{(\lambda)}{=}$

$\underset{(\lambda)}{=} n \cdot (m.k+m) \underset{(\gamma)}{=} n.(m.Sk)$ $\square$

8) $(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$

Dem: indução em k

$k = \underline{o}$: $(n+m) \cdot \underline{o} \underset{(\varepsilon)}{=} \underline{o}$; $\underline{o} \underset{(\varepsilon)}{=} n \cdot \underline{o} + m \cdot \underline{o}$

Agora, $(n+m) \cdot Sk \underset{(\gamma)}{=} (n+m).k + (n+m) \underset{ind}{=} (n.k+m.k) + (n+m) =$

$= (n.k + n) + (m.k + m) \underset{(\gamma)}{=} n \cdot Sk + m \cdot Sk$ $\square$

9) $n.m = m.n$

<u>Dem</u>: indução em n.

$n = \underline{o}$: $\underline{o}.m \underset{(\alpha)}{=} \underline{o}$ e $m.\underline{o} \underset{(\alpha)}{=} \underline{o}$

Agora, $Sn.m \underset{(\beta)}{=} n.m + m \underset{ind}{=} m.n + m \underset{(\gamma)}{=} m.Sn$ $\square$

4- O que demonstramos até aqui nos mostra que o sistema W é suficiente para desenvolvermos toda a aritmética primitivamente recursiva, ou como diz Weyl, todas as verdade elementares sobre os números naturais (que usaremos livremente na sequência).

Uma formalização do sistema de Weyl extremamente fiel à forma como é apresentado envolveria a introdução de variáveis de diversos tipos diferentes, mas como esta variáveis só serão imprescindíveis para o desenvolvimento da aritmética dos racionais, omitimos esta desnecessária complexidade.

Notamos com Weyl que a noção de " número natural" e a de "número m é o sucessor do número n", além do que Skolem chamava de " o modo recursivo de pensar", são os fundamentos extra-lógicos da aritmética e é possível sustentá-la neles, além de nas "formas vazias" da lógica. O projeto propriamente matemático de Weyl consiste em mostrar que, mais, são os fundamentos de toda a análise clássica.

Neste ponto em particular Weyl propõ-se uma tarefa no essencial semelhante a que se propõe Skolem no campo da aritmética (em "Os fundamentos da aritmética elementar estabelecidos por meio do modo recursivo de pensar, sem o uso de variáveis aparentes sobre domínios infinitos" (1919)). Assim como este evita a quantificação ilimitada sobre os naturais, Weyl considera ilegítima a quantificação sobre os números reais, se bem que, ao contrário de Skolem, não considere indesejável a quantificação irrestrita sobre os naturais. O fato de serem dados numa intuição imediata, ao contrário dos números reais, dá, segundo

Weyl, aos números naturais uma dimensão própria de existência, e a nós o direito de quantificar livremente sobre eles.

Seria oportuno dizermos aqui algumas palavras sobre a predicatividade do princípio de indução completa. Swegundo Edward Nelson ([29]), o princípio de indução pressupõe que o sistema dos númerosnaturais seja dado. Se este não é o caso, o conceito de um número natural deve ser introduzido como o objeto satisfazendo toda fórmula indutiva. Mas então para uma fórmula indutiva em particular as variáveis ligadas supostamente percorreriam o domínio dos objetos satisfazendo toda fórmula indutiva, inclusive esta em questão. O que caracteriza a impredicatividade do conceito .

Certamente foi algo do tipo que Weyl percebeu nas sua primeiras tentativas de introduzir a noção de número natural, a que já nos referimos, e que levou a acusar o sistema de Dedekind de conter um círculo vicioso e abandonar qualquer tentativa de introduzir formalmente a noção de número natural, tomando-a como dada. Sob a influência de Husserl, Weyl acata o direito fundacional desta intuição categorial.

B - A ARITMÉTICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

1 - A TEORIA W'

Seja W' a extensão por definições de W incluindo os novos símbolos + e ..

Acrescentamos à linguagem de W', além das variáveis de W, de agora em diante chamadas de variáveis de nível 1 (tipo 1), para cada $k \in \mathbb{N}^*$, variáveis de nível 2 (tipo k) X^k, Y^k,....

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, consideremos também os símbolos funcionais k-ários $\langle\ \rangle_k$ (em geral o índice k será omitido), o símbolo relacional binário $\in$ e o abstrator abs.

DEFINIÇÃO DE TERMOS DA LINGUAGEM:

1) Cada variável de nível n (n = 1, 2) (tipo k) é um termo de nível n (tipo k).

2) o é um termo de nível 1 (tipo 1)

3) Se t_1, t_2 são termos de nível 1 (tipo 1) então $t_1 + t_2$ e $t_1 . t_2$ são termos de nível 1 (tipo 1).

4) Se $t_1,...,t_k$ são termos de nível 1 (tipo 1) então $< t_1...t_k >$ é um termo de nível 1 (tipo k)

5) Se $A(n_1 - n_k)$ é uma fórmula (a ser definida abaixo) com k variáveis de nível 1 (tipo 1) livres então abs $A(n_1 - n_k)$ é um termo de nível 2 (tipo k).

DEFINIÇÃO DE FÓRMULAS DA LINGUAGEM

1) Se t_1 e t_2 são termos de nível 1 (tipo k) então $t_1 = t_2$ é uma fórmula.

2) Se t é um termo de nível 1 (tipo k) e T é um termo de nível 2 e tipo k, então $t \in T$ é uma fórmula.

3) A disjunção de fórmulas é uma fórmula, a negação de uma fórmula é uma fórmula e se n uma variável de nível 1 (tipo 1) então $\exists$ n A é uma fórmula.

AXIOMAS

1) $< n_1 - n_k > \in$ abs $A(n_1 - n_k) \leftrightarrow A(n_1 - n_k)$ (princípio de compreensão)

2) $T_1 = T_2 \leftrightarrow \forall n_1 - n_k [<n_1 - n_k > \in T_1 \leftrightarrow <n_1 - n_k> \in T_2]$ (princípio de extensionalidade) T_1, T_2 são termos de nível 2 e tipo k.

2 - FRAÇÕES

2.1. Definição: Seja A_{t_1,t_2} a fórmula : $A_{t_1,t_2}(k,1) \equiv (t_2 . 1 = t_1 . k)$.

A fração t_2/t_1 é o termo de nível 2 e tipo 2 dado por abs $A_{t_1 t_2}$.

2.2 Teorema: $m/n = m'/n' \leftrightarrow m \,.\, n' = m' \,.\, n$

Dem: $m/n = m'/n' \underset{Ext}{\leftrightarrow} \forall n_1 n_2 (< n_1 , n_2 > \in m/n \leftrightarrow$

$\leftrightarrow < n_1 , n_2 > \in m'/n') \underset{comp}{\leftrightarrow} \forall n_1 n_2 [(n.n_2 = m.n_1) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (n'.n_2 = m'.n_1)] \leftrightarrow \forall n_1 n_2 [n'.(n.n_2) = n'(m.n_1) \leftrightarrow n.(n'.n_2) =$

$= n(m'.n_1)] \leftrightarrow \forall n_1 [(m.n')n_1 \leftrightarrow (m'.n)n_1) \leftrightarrow [m.n' = m'n]$ □

2.3 DEFINIÇÃO Sejam as frações m/n e m'/n'. Considere a fórmula $P(k,l)$ dada por $P(k,l) = \exists p [nk = mp \wedge n'p = m' l]$.

$P(k,l)$ é a fórmula $\exists p [A_{m,n}(k,p) \wedge A_{m',n'}(p,l)]$. Por outro lado $P(k,l)$ é equivalente à fórmula $(n\, m')\, k = (m\, m')\, l$, isto é, à fórmula $A_{t_1,t_2}(k,l)$ onde $t_1 = n.n'$ e $t_2 = m.m'$.

Portanto $m.m'/n.n' = abs\ P(k,l)$, por extensionalidade e compreensão.

2.4 DEFINIÇÃO $m/n \,.\, m'/n' := abs\ P(k,l)$. Logo $m/n \,.\, m'/n' = m.m'/n.n'$, por 2.3.

2.5 DEFINIÇÃO Seja $S(k,l) = \exists p,q [np = mk \wedge n'q = m'k \wedge l = p + q]$

$S(k,l)$ é a fórmula $\exists p,q [A_{m,n}(k,p) \wedge A_{m',n'}(k,p)) \wedge l = p + q]$

Mas $S(k,l)$ é equivalente a $(n.n').\, l = (mn' + m'n)k = A_{t_1 t_2}(k,l)$ onde $t_1 = m\, n' + m'\, n$ e $t_2 = n\, n'$.

Portanto $m\, n' + m'\, n / n\, n' = abs\ S(k,l)$.

2.6 DEFINIÇÃO $m/n + m'/n' := abs\ S(k,l)$.

Logo $m/n + m'/n' = m\,.n' + m'\,.n / n\, n'$, por 2.5.

2.7 TEOREMA $\forall n,m \left(o/n = o/m \wedge n/n = m/m \right)$.

Dem: imediata a partir do Teorema 2.2 □

2.8 DEFINIÇÃO Sejam dadas as frações 0 e 1 definidas por o/n e n/n respectivamente. Mostra-se facilmente que $m/n + 0 = m/n$ e que $m/n \cdot 1 = m/n$

Introduzimos agora na linguagem um símbolo relacional binário para frações com a definição:

$$m/n < m'/n' \leftrightarrow \exists\, m^*, n^* \,[\, m/n + m^* / n^* = m'/ n' \,].$$

Demonstra-se facilmente a lei de tricotomia.

3. RACIONAIS

O caminho clássico para a introdução dos números racionais seria o de tomar o conjunto quociente das frações módulo a relação de igualdade. Por este caminho, um racional seria um conjunto de conjuntos de pares de números naturais, contra a intenção explícita de Weyl de tê-los como conjuntos de uplas de naturais.

3.1 DEFINIÇÃO: Suponha que

$\forall m,n,m',n' \,[\, \langle m, n \rangle \in X^2 \wedge m/n = m'/n' \rightarrow \langle m', n' \rangle \in X^2 \,]$ seja um teorema; então X^2 será chamada de <u>domínio das frações</u>.

3.2 DEFINIÇÃO: Suponha que

$\forall\, m,n,p,q,m',n',p',q' \,[\, \langle m,n,p,q \rangle \in X^4 \wedge m/n = m'/n' \wedge m'/n' = p'/q' \rightarrow$ $\rightarrow \langle m',n',p',q' \rangle \in X^4 \,]$ seja um teorema. Então X^4 será chamado de um <u>domínio bidimensional de frações</u>.

3.3 DEFINIÇÃO: Seja $R_{m,n,p,q}\,(m',n',p',q') = \{ (m/n) + (m'/n') = (p/q) + (p'/q') \}$.

Seja $m/n \div p/q := \text{abs}\, R_{m,n,p,q}$

$m/n \div p/q$ é então um domínio bidimensional de frações

$\underline{3.4}$ TEOREMA: $m/n \div p/q = m'/n' \div p'/q' \leftrightarrow m/n + p'/q' = m'/n' + p/q$

Dem. imediata das definições. Usam-se as propriedades comutativa e associativa das frações que são consequências imediatas das propriedades comutativa, associativa e distributiva dos números naturais □

$\underline{3.5}$ TEOREMA: $m/n \div m/n = p/q \div p/q$

Dem: imediato de 3.4. □

$\underline{3.6}$ DEFINIÇÃO: $\tilde{o} := \text{abs}\ [\ m/n = p/q\ ]$

Sejam $+_{m,n}\ (m',n',p',q') = [\ m/n + p'/q' = m'/n'\ ]$

$-_{m,n}\ (m',n',p',q') = [\ m/n + m'/n' = p'/q'\ ]$

Sejam $+\ m/n := \text{abs}\ +_{m,n}$

$-\ m/n := \text{abs}\ -_{m,n}$, $\tilde{o}$, $+\ m/n$ e $-\ m/n$ são então domínios de frações.

$\underline{3.7}$ TEOREMA: $\tilde{o} = m/n \div m/n$; $-\ m/n = m/n \div o$ e $+\ m/n = o \div m/n$

Dem: $m/n \div m/n = \text{abs}\ \{m/n \div m'/n' = m/n \div p'/q'\} =$

$= \text{abs}\ \{m'/n' = p'/q'\} = \tilde{o}$

$m/n \div o = \text{abs}\ \{m/n + m'/n' = o/n + p'/q'\} =$

$= \text{abs}\ \{m/n + m'/n' = p'/q'\} = -\ m/n$

$o \div m/n = \text{abs}\ \{o/n + n'/n' = m/n + p'/q'\} =$

$= \text{abs}\ \{m'/n' = m/n + p'/q'\} = +\ m/n$ □

3.8 DEFINIÇÃO: Domínios bidimensionais de frações da forma $m/n \div p/q$ serão chamados de números racionais. Um número racional é positivo se é da forma $+m/n$ e negativo se é da forma $-m/n$.

3.9 TEOREMA: Um número racional é ou positivo ou negativo ou igual a $\tilde{0}$.

Dem: Seja $m/n \div p/q$ dado.

$m/n < p/q \leftrightarrow \exists\, m^* n^* [\, m/n + m^*/n^* = p/q \,]$. Portanto

$m/n \div p/q = \text{abs} [\, m/n + m'/n' = p/q + p'/q' \,] =$

$= \text{abs} [m'/n' = m^*/n^* + p'/q' \,] = 0 \div m^*/n^*$.

Logo $m/n \div p/q = + m^*/n^*$. Analogamente se $p/q < m/n$.

Então $m/n \div p/q = - m^*/n^*$ e se $m/n = p/q$ então

$m/n \div p/q = \tilde{0}$ $\Box$

4 - OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Seja $S_{\substack{m,n,p,q\\ m',n',p',q'}}(m^*, n^*, p^*, q^*) = \exists\, k, l\, [\, \langle m^*, n^*, k^*, l^* \rangle \in m/n \div p'/q' \,\wedge$

$\wedge \langle k, l, p^*, q^* \rangle \in m'/n' \div p'/q']$

4.1 DEFINIÇÃO: $(m/n \div p/q) + (m'/n' \div p'/q') = \text{abs}\, S_{\substack{m,n,p,q\\ m',n',p',q'}}$.

$(m/n \div p/q) + (m'/n' \div p'/q')$ é um domínio bidimensional de frações.

4.2 TEOREMA: $(m/n \div p/q) + (m'/n' \div p'/q') = (m/n + m'/n') \div (p/q + p'/q')$

Dem: das definições e propriedades aritméticas da adição de frações.

COLORÁRIO: A soma de números racionais é um número racional.

Demonstram-se facilmente as leis associativa e comutativa para a adição de racionais.

O racional $\tilde{0}$ é o elemento neutro da adição.

4.3 TEOREMA: $\exists\, m',n',p',q'$ [$(m/n \div p/q) + (m'/n' \div p'/q') = \tilde{0}$]

Dem: Se $m/n \div p/q = +\, m^*/n^*$ então $m' = m^*$, $n' = m^*$, $p' = 0$ e q'

qualquer, daí $m'/n' \div p'/q' = m^*/n^* \div 0 = -\, m^*/n^*$.

Portanto $(m/n \div p/q) + (m'/n' \div p'/q') = (+\, m^*/n^*) + (-\, m^*/n^*) =$

$= (0 \div m^*/n^*) + (m^*/n^* \div 0) \underset{(7)}{=} m^*/n^* \div m^*/n^* \underset{(5)}{=} \tilde{0}$.

Analogamente para $m/n \div p/q = -\, m^*/n^*$ ou $m/n \div p/q = \tilde{0}$. □

4.4 DEFINIÇÃO $(m'/n' \div p'/q')$ nas condições do enunciado do teorema 8 é chamada de *inverso aditivo* de $(m/n \div p/q)$. Demonstra-se facilmente que este inverso é único.

4.5 DEFINIÇÃO: Se m/n é uma fração e k um número natural então $k \,.\, m/n := k.m/n$.

Seja agora o racional $\mu = (m/n) \div (p/q)$ e a fração m'/n'. Seja a fórmula $P\,(m^*, n^*, p^*, q^*) = \exists\, k,l,p',q'$ [$(m/n \div k/l = p/q + p'/q') \wedge (m^*/n^* = m'/n' .\, k/l) \wedge$ $\wedge\, (p^*/q^* = m'/n'\, ,\, p'/q')$].

$m'/n' \,.\, \mu := \text{abs}\ P\,(m^*, n^*, p^*, q^*)$.

$m'/n' \,.\, \mu$ é um domínio bidimensional de frações. Além disso :

$m'/n' \,.\, (m/n \div p/q) = (m'/n' \,.\, m/n) \div (m'/n' \,.\, p/q)$. Donde $m'/n' \,.\, (m/n \div p/q)$ é um número racional.

Sejam agora $\lambda = (m/n \div p/q)$ e $\mu = (m'/n' \div p'/q')$ dois números racionais. Já vimos que λ é ou positivo ou negativo ou igual a $\tilde{0}$. Esta possibilidades são expressas respectivamente pelas seguites fórmulas:

$$\mathrm{Pos}\ (m,n,p,q) = \exists\, \tilde{m}\, \tilde{n}\ [\ m/n + \tilde{m}/\tilde{n} = p/q\ ]$$

$$\mathrm{Neg}\ (m,n,p,q) = \exists\, \tilde{m}\, \tilde{n}\ [\ p/q + \tilde{m}/\tilde{n} = m/n\ ]$$

$$\tilde{0}\ \ (m,n,p,q) = [\ p/q = m/n\ ]$$

para cada uma destas possibilidades defini-se o produto :

$$\lambda\ .\ \mu = \begin{cases} \tilde{0} & \text{se } \lambda = \tilde{0} \text{ ou } \mu = \tilde{0} \\ \alpha.\mu & \text{se } \lambda = +\alpha \\ -(\alpha.\mu) & \text{se } \lambda = -\alpha \end{cases}$$

4.6 DEFINIÇÃO: $\lambda > \mu \leftrightarrow \lambda + (-\mu) =: \lambda - \mu$ é positivo.

Facilmente demonstram-se as propriedades aritméticas usuais do produto e da relação de ordem.

Notamos que a "construção" dos racionais a partir de frações de numerador e denominador naturais dispensa a prévia "construção" dos números inteiros.

Históricamente as frações foram criadas antes dos números inteiros e com o tratamento apresentado Weyl quer não apenas emparelhar o desenvolvimento lógico das noções com o seu desenvolvimento histórico, mas também trazer este como argumento em favor da "naturalidade" daquele.

A ANÁLISE REAL

INTRODUÇÃO

A Análise real é o primeiro grande teste do predicativismo enquanto prática matemática. Se na aritmética o universo do discurso é formado pelos números sobre os quais a quantificação irrestrita não é problemática, na análise este universo não está pré-determinado, dado à intuição num estágio pré-predicativo, mas antes deve ser predicativamente constituído e , assim, sobre seus objetos não se pode quantificar. E esta é uma grave restrição. Mesmo as noções mais básicas da análise envolvem quantificação sobre os reais, então é de se esperar uma drástica redução do escopo da análise clássica quando revisitada pelo predicativismo. No entanto praticamente toda ela pode ser recuperada, com algumas modificações aqui e ali. Certamente algo irá se perder, mas não tanto quanto seria de se temer a princípio. O que talvez nos traga uma lição histórica, que os matemáticos dos períodos anteriores à grande difusão das teorias cantorianas pensavam de modo essencialmente predicativista mesmo que não se expressassem em termos que se possam assim qualificar. Kreisel ("<u>La Predicativité</u>") afirma, de Poincaré, Baire e Lebesgue, que a prática destes matemáticos era influenciada pelas suas concepções predicativas da análise e assim não se pode muito admirar-se de que seus resultados sejam predicativamente recuperáveis. A impredicatividade parece, como afirmou Poincaré, andar de braços com a teoria dos conjuntos de Cantor e assim é também pouco digno de admiração que um teorema essencilmente impredicativo como o de Cantor-Bendixson (todo conjunto fechado é a reunião de um conjunto perfeito e de uma sequência de pontos) envolva tão fundamentalmente esta teoria.

Do ponto de vista estritamente matemático a recuperação predicativa de grande parte da análise real clássica fundamenta-se quase exclusivamente no fato de que o conjuto dos números racionais, sobre os quais é lícito quantificar-se, é denso no conjunto dos números reais e, assim, estes podem ser aproximados por sequências racionais, os valores de uma função contínua ficam determinados por seus valores racionais e na teoria da medida e integração podemos aproximar conjuntos de reais por sequências formadas por intervalos de extremos racionais.

Isto então aponta na direção de que uma teoria "abstrata" só pode ser predicativamente recuperada se nos espaços abstratos em questão pudermos encontrar equivalente apropriados do dominio dos números e sequências racionais.

Mas é exatamente isto que devemos esperar se, como já notamos, o predicativismo, ao menos na versão de Weyl, privilegia um dominio pré-predicativo _sobre_ o qual se fala, que constitue o objeto do discurso teórico e o fundamento independente de suas abstrações, para as quais a linguagem, que ele próprio determina, fornece o "corpo vivo".

Há um ensaio de A. Grzegorczyk ("_Elementary definable analysis_") em que se procura " dar uma estrita forma matemática a algumas idéias expressas por H. Weyl em 'Das Kontinuum' ". No entanto se o tratamento aí dado à análise segundo Weyl é mais "estritamente matemático", por outro lado ignora as convicções filosóficas que, acreditamos ter mostrado, Weyl toma como pressuposto neste trabalho. Assim, para o ¶1 que se segue seguimos fielmente o tratamento de Weyl, completanto demonstrações, explicitando noções, ordenando a sequência dos resultados segundo a sua dependência lógica e incluindo alguns outros que Weyl não menciona explicitamente. Para o ¶2 (teoria da medida) seguimos quase sem alteração o excelente "_Ein Konstruktiver Weg Zur Masstheorie und Funktionalanalysis_", de P. Zahn, já citado que, junto a "_Das Kontinuum_" e "_Differential und Integral_", de P. Lorenzen, formam a sagrada familia da matemática predicativa _na prática_. A inclusão deste capitulo tem como principal objetivo mostrar que o projeto de Weyl é exequivel, elegante e não exige tão grandes sacrificios quanto se poderia a principio supor.

Além de, grande trunfo, poder responder a questões filosóficas com maior segurança que a matemática tradicional, ou mesmo outras versões construtivistas como o intuicionismo que, sacrificando a lógica clássica e mais tradição que o predicativismo, aparece como uma forma bizarra de matemática que, além disso, parece pouco à vontade para responder as criticas de um certo "psicologismo " militante.

1 - FUNDAMENTOS

> "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica formada de qualquer modo por uma quantidade variável e por números e quantidades constantes"
>
> Euler

1.1 DEFINIÇÃO: Seja L a linguagem de 1ª ordem com uma quantidade enumerável de constantes (para os números racionais), variáveis (para os números racionais) denotados por letras gregas minúsculas,ou pelas letras m,n,l,k (usadas exclusivamente quando queremos denotar números naturais,que consideraremos um subconjunto dos racionais), com ou sem índices, e as relações $\lambda + \zeta$ e $\lambda \cdot \zeta$. Chamaremos as fórmulas de L de fórmulas finitas. Uma relação R é uma relação finita se for definida por uma fórmula finita. Consideremos que , para cada $n \in \mathbb{N}$, R_n seja uma relação finita de mesma aridade, então a relação $R(n,\ldots) = R_n(\ldots)$ será chamada de relação primaria.

Se incluirmos as relações primárias entre as relações básicas de L, obteremos uma linguagem (certamente não elementar) a cujas fórmulas chamaremos de fórmulas primárias.

Seja $\bar{L}$ a extensão de L pela inclusão de variáveis (para números reais) denotados por a,b,c,x,y,z,r,s,t, com ou sem índices, e da relação $\lambda < x$, com a ressalva de que as novas variáveis terão exclusivamente ocorrências livres. Definimos de modo análogo para $\bar{L}$ as noções de relação finita, relação primária e fórmula primária.

Dada uma fórmula ψ, as variáveis que aparecem entre parenteses à direita da metavariável "ψ", são as únicas variáveis livres de ψ.

1.2 DEFINIÇÃO: Um número real r é definível se existe $\psi(\lambda)$ primária tal que, como um corte inferior de Dedekind, $r = \hat{\lambda} : \mathbb{Q} \models \psi(\lambda) =: \hat{\lambda} : \psi(\lambda)$.
Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definível se existe $\psi(x_1 \ldots x_n)$

primária tal que para todo $\bar{a} = (a_1 ... a_n) \in A : \hat{\lambda} : \mathbb{R} \models \psi(\bar{a},\lambda)$ determine um corte inferior de Dedekind e $f(\bar{a}) = \hat{\lambda} : \mathbb{R} \models \psi(\bar{a},\lambda) =: \hat{\lambda} : \psi(\bar{a},\lambda)$.

Ex. Os números racionais considerados como números reais (cortes) são definíveis, as funções constantes com valores definíveis e a função identidade são definíveis.

Se r e $f(\bar{x})$ são respectivamente definidos por $\rho(\lambda)$ e $\psi(\bar{x}, \lambda)$ então as expressões $\lambda \in r$, $\lambda < r$ e $\rho(\lambda)$, assim como $\lambda \in f(\bar{a})$, $\lambda < f(\bar{a})$ e $\psi(\bar{a},\lambda)$ são equivalentes. Denotamos po D o conjunto dos reais definíveis.

Se $\theta(\lambda)$ define um real qualquer então seja $\hat{\theta}(\lambda) = \neg\, \theta(\lambda) \wedge \exists\, K\, (\lambda [\neg \theta(K)]$

1.3. TEOREMA: $r,s \in D \Rightarrow r + s, r . s \in D$

Dem: sejam r e s definíveis respectivamente por $\rho(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$. Assim,

$r+s = \hat{\lambda} : \exists\, \mu_1\, \mu_2\, [\rho(\mu_1) \wedge \rho(\mu_2) \wedge \lambda = \mu_1 + \mu_2]$. Ademais $-r = \hat{\lambda} : \hat{\rho}(-\lambda)$ e $-s = \hat{\lambda} : \hat{\psi}(-\lambda)$. Sejam as fórmulas:

$r \leq 0 = \forall \lambda\, [\rho(\lambda) \rightarrow \lambda < 0] \equiv$

$s \leq 0 = \forall \lambda\, [\psi(\lambda) \rightarrow \lambda < 0]$. Então $|r| = \hat{\lambda} : [r \leq 0 \rightarrow \lambda < -r] \vee$

$\vee [r \leq 0 \rightarrow \lambda < r]$

Analogamente define-se $|s|$. Daí

$|r|\,|s| = \hat{\lambda} : \exists \mu_1\, \mu_2 [\mu_1 < |r| \wedge \mu_2 < |s| \wedge \lambda < \mu_1 . \mu_2]$ e finalmente

$r . s = \hat{\lambda} : [(r \leq 0 \leftrightarrow s \leq 0) \rightarrow \lambda < |r|\,|s|] \vee [r \leq 0 \leftrightarrow s \leq 0) \rightarrow$

$\rightarrow \lambda < -|r|\,|s|]$ $\square$

1.4 TEOREMA: $r \in D \Rightarrow -r \in D$ e se $r \neq 0$, $1/r \in D$.

Dem: Seja r definido por $\rho(\lambda)$. A demonstração de 1.3 já nos dá que $-r \in D$. Seja $I(\lambda) = \exists\, K\, \forall\, \mu\, [K < \mu \wedge \rho(\mu) \rightarrow \lambda < 1/K]$

$1/r = \hat{\lambda} : I(\lambda) \wedge \exists\, \lambda' [\lambda < \lambda' \wedge I(\lambda')]$ $\square$

OBS: se $r = 0$ a definição acima nos daria $1/r = \emptyset$.

COLORARIO: Com a restrição a D da ordem usual nos reais temos que D é um corpo ordenado.

1.5 TEOREMA: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definível e contínua em a. Se $a \in D$, então $f(a) \in D$.

Dem: Seja f definível por $\rho(\lambda, x)$ e seja a definido por $\psi(x)$.

Seja $A(\lambda) = \exists K\ \forall \mu\ [K < \mu \wedge \psi(x) \to \rho(\lambda, \mu)]$.

Portanto $f(a) = \hat{\lambda}: A(\lambda) \wedge \exists \lambda' [\lambda < \lambda' \wedge A(\lambda')]$. □

1.6 TEOREMA: f,g definíveis ⇒ f + g, f.g definíveis

Dem: De modo exatamente análogo à demonstração de que a adição ou o produto de reais definíveis é um número real definível, mostra-se que a função adição ou a função produto são funções reais definíveis. Nas fórmulas que definem $x + y$ ou $x \cdot y$ substituimos as ocorrências de subfórmulas do tipo $K < x$ e $K < y$ por $\rho(K)$ e $\psi(K)$ onde ρ e ψ definem respectivamente f e g □

COLORARIO: $f_1, \ldots, f_n$ definíveis ⇒ $\sum f_i$ e $\prod f_i$ definíveis.

1.7 TEOREMA: Se $n \in \mathbb{N}$ então $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^n$ é definível.

Dem: Se $a \in D$ então por 1.3 $a^n \in D$. Tomamos a fórmula $\rho(\lambda)$ que define a^n e substituimos as subfórmulas do tipo $\psi(\xi)$, onde ψ define a, por $\xi < x$. A fórmula $\rho(\lambda, x)$ resultante define x^n □

COLORARIO: Polinômios com coeficientes definíveis são definíveis.

4.8 <u>TEOREMA</u>: Seja p um <u>polinômio</u> com coeficientes em D. As raízes <u>reais</u> de p são definíveis.

<u>Dem</u>: Seja r_n a <u>maior</u> raiz real de p, então um racional λ é menor ou igual a r_n se, e só se, existe $K > \lambda$ tal que $p(K)$ está arbitrariamente próximo de zero. Isto é, sendo
$A(\lambda) = \forall \varepsilon > 0 \ \exists \xi > \lambda : | p(\xi) | < \varepsilon$; então $\mathbb{Q} \cap]-\infty, r_n] = \hat{\lambda}:A(\lambda)$.
A inclusão $\subseteq$ vem da continuidade de p e $\supseteq$ do fato de que r_n é a <u>maior</u> raiz real.
Assim, definimos r_n por : $r_n = \hat{\lambda}: A(\lambda) \wedge \exists \lambda' (\lambda < \lambda' \wedge A(\lambda'))$.
Seja $B(\lambda)$ a fórmula que define r_n.
Seja $A'(\lambda) = \exists \xi > \lambda : B(\xi) \wedge \forall \varepsilon > \exists K [\lambda < K < \xi \wedge | p(\xi) | < \varepsilon]$.

Defina r_{n-1}, a <u>segunda</u> <u>maior</u> raiz real de p por:
$r_{n-1} = \hat{\lambda}: A'(\lambda) \wedge \exists \lambda' [\lambda < \lambda' \wedge A'(\lambda')]$
E assim sucessivamente definem-se todas as raízes reais de p $\Box$

<u>COLORÁRIO</u>: D é algebricamente fechado em $\mathbb{R}$. Logo todos os números algébricos são definíveis.

4.9 <u>TEOREMA</u>: $a \in D \Rightarrow \sqrt{a} \in D$ ou $\sqrt{-a} \in D$.

<u>Dem</u>: $a > 0 \Rightarrow b = \sqrt{a} = \hat{\lambda} : \exists \eta < a \ \forall \xi (\eta < \xi < a \rightarrow \lambda < \xi^2)$
$a > 0 \Rightarrow -a > 0$ e $-a \in D$. $\Box$

4.10 <u>TEOREMA</u>: D é um corpo real fechado.

<u>Dem</u>: pelo Lema acima e pelo fato de que todo polinômio com coeficientes em D de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, que está em D.$\Box$

Nota: Pode-se definir um número complexo como <u>definível</u> se suas componentes reais forem definíveis. Assim, os complexos definíveis formam um corpo. Ademais se um polinômio p(x) tem coeficientes complexos definíveis, a equação p(x) = 0 decompõe-se num sistema de duas equações $p_1(x_1,x_2) = 0$ e $p_2(x_1,x_2) = 0$ onde p_1 e p_2 tem coeficientes em D. Mas um polinômio $q(x_1,x_2)$ com coeficientes em D, tem suas raizes reais definiveis. Como $p(x)$ tem todas as suas raizes (x_1,x_2) em $\mathbb{C}$, (x_1,x_2) será solução do sistema $p_1 = 0$ e $p_2 = 0$; isto é (x_1,x_2) será definivel. Logo o corpo dos complexos definiveis é algebricamente fechado.

1.11 TEOREMA: Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiveis. Então $(g \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definivel.

Dem: Sejam $f(\bar{x}) = \hat{\lambda}: \psi(\lambda,\bar{x})$ e $g(x) = \hat{\lambda}: \rho(\lambda,x)$. Substitua a as variáveis que aparecem ligadas em ρ por variáveis que não apareçam em ψ. Substitua em ρ todas as ocorrências da forma $\eta < \bar{x}$ por

$\psi(\eta,\bar{x})$; seja $\theta(\lambda,\bar{x})$ a fórmula resultante.

Logo $(g \circ f)(\bar{x}) = \hat{\lambda}\ \theta(\lambda, \bar{x})$ □

1.12 DEFINIÇÃO: Um conjunto enumerável E de reais é definivelmente enumerável (d-enumeravel) se existe uma fórmula primária $\psi(n,\lambda)$ tal que $\forall x \in E\ \exists n: x = \hat{\lambda}: \psi(n,\lambda)$

1.13 TEOREMA: D não é d-enumerável.

Dem Suponha o contrário, via fórmula $\psi(n,\lambda)$. Seja

$a := \hat{\lambda}\ \neg\ \psi(\lambda,\lambda)$ (1)

Logo $a \in D$. Assim existe n tal que $a = \hat{\lambda}: \psi(\lambda,n)$ (2)

Agora; $n \in a \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \psi(n,n)$. Mas por (1), $n \in a \Leftrightarrow \neg\psi(n,n)$. Contradição □

1.14 DEFINIÇÃO: Uma sequência $s_* : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é definivel se existe uma fórmula primária $\psi(n,\lambda)$ tal que $S(n) = \hat{\lambda}\ \psi(n,\lambda)$. De modo análogo introduzimos a noção de sequência dupla s_{**} definivel.

Ex: $S(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ é definivel.

1.15 DEFINIÇÃO

E TEOREMA: Uma sequência $k_*: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (resp $\lambda_*: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$) é <u>definível</u> se existe uma fórmula primária $\psi(n,m)$ (respec. $\rho(n,\lambda)$) tal que $\forall n\ \exists !\ \psi(n,m)$ (resp. $\forall\ n\ \exists !\ \lambda\ \rho(n,\lambda)$) e $k_n = \iota\ m\ \psi(n,m)$ (resp. $\lambda_n = \iota\ n\ \rho(n,\lambda)$). De modo análogo introduziremos a noção de sequências definíveis duplas, triplas, etc.

<u>TEOREMA</u>: Seja $\rho(k)$ uma fórmula primária tal que $\exists\ k\ \rho(k)$. Então existe k_* uma sequência definível de naturais tal que $\forall k\ (\rho(k) \leftrightarrow \exists\ n\ (k = k_n))$ Isto é, se a_* for uma sequência definível qualquer então $\{ a_k: \rho(k)\} = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\}$. Ademais se $\forall\ m\ \exists\ k{>}m\ \rho(k)$, então podemos tomar $k_1 < k_2 < \ldots$ tal que, a_{k_*} seja uma subsequência de a_*.

<u>Dem</u>: seja $k_0 = 0$ e k_n o menor natural k tal que,

$(k > k_{n-1} \wedge \rho(k)) \vee (k = k_0 \wedge \neg \exists\ n > k_{n-1}\ \rho(n))$.

No caso $\exists\ n > k_{n-1}\ \rho(n)$ tem -se que $k_n > k_{n-1}$ e $\rho(kn)$. Em particular $k_1 > 0$ e $\rho(k_1)$. Em caso contrário $k_n = k_0$ e, das hipótese $\rho(k_n)$.

Mostraremos que $\forall\ k\ (\rho(k) \to \exists\ n\ (k = k_n))$.

Seja k tal que $\rho(k)$ e $k \neq k_n$ para todo n. Então $\forall n\ (k{>}k_{n-1} \to$
$\to k > k_n)$ e $k > 0 = k_0$.

Daí $\forall n\ (k > k_{n-1})$, $\forall n\ (k_n > k_{n-1} \geq n)\ k > k$ □

<u>1.16 TEOREMA</u>: Seja a_* uma qualquer sequência para a qual exista uma fórmula primária $\psi(n,m)$ tal que $a_n = a_m \leftrightarrow \psi(n,m)$ (isto inclue sequências definíveis numéricas - de números naturais, racionais ou reais) e tal que $\{a_0, a_1, \ldots\}$ seja <u>infinito</u>. Então existe uma subsequência b_* de a_* talque $\{b_0, b_1, \ldots\} = \{a_0, a_1, \ldots\}$ e $b_n \neq b_m$ para todo m e n com $m \neq n$.

<u>Dem</u>: seja $k_n = \min\ \{k: \forall m{<}n : a_k \neq a_{k_m}\}$ e $k_0 := 0$ e $b_n := a_{k_n}$ □

<u>COLORARIO</u>. Existe uma sequência racional λ_* definível <u>injetiva</u> <u>sobre</u> $\mathbb{Q}$ (ou seja, com uma adaptação da definição 1.12, podemos dizer que $\mathbb{Q}$ é c-enumerável).

<u>Dem</u> Seja $h: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(m,n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$ e o par (i_*, j_*) tal que $k = h(m,n) \Leftrightarrow i_k = m \wedge j_k = n$.
Então a sequência $s_* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $s_k = (i_k, j_k)$ é uma sequência definível (a extensão da noção da sequência definível de <u>pares</u> de naturais é simples rotina) <u>sobre</u> $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Pelo teorema acima podemos encontrar uma sequência definível λ_* <u>injetora</u> <u>sobre</u> $\mathbb{Q}$. $\square$

<u>1.17</u> <u>TEOREMA</u>: Existe uma sequência racional dupla definível λ_{**} tal que $(\lambda_{i*})_i = (\lambda_{1*}, \lambda_{2*}, \ldots)$ é uma aplicação injetora de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto das sequências da forma $(p_1, p_2, \ldots p_n, 0, 0 \ldots)$. Daí $\bigcup_r \mathbb{Q}^r$ é c-enumerável. Idem para $\bigcup_r \mathbb{N}^r$ e $\bigcup_r \mathbb{Z}^r$.

<u>Dem</u>: dado um numero i diferente de 0 considere a sua decomposição canônica em produto de potências de primos:

$$i = 2^{\lambda_1 - 1} \cdot 3^{\lambda_2 - 1} \cdot 5^{\lambda_3 - 1} \ldots \quad \text{Seja } l_{ij} = \lambda_j$$

$(l_{i*})_i : i \to l_{i*} = (\lambda_1, \ldots \lambda_n, 1, 1, \ldots)$ é uma sequência definível injetora no conjunto das sequências da forma $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 1, 1, \ldots)$.
Além disso existe uma sequência definível $u_* \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ com $u_1 = 0$ injetora. Seja $\lambda_{**} := u_{l_{**}}$ $\square$

<u>1.18</u> <u>TEOREMA</u>: Se S_* é uma sequência definível de reais, então <u>lim</u> S_*, se existir, é definível.

<u>Dem</u>: Seja $S(n) = \hat{\lambda}\, \psi(n,\lambda)$; logo <u>lim</u> $S_* = \hat{\lambda} : \exists\, \eta > \lambda\ \exists\, n\ \forall m > n\ \psi(m,\eta)$ $\square$

<u>COROLARIO</u>. Se S_* é definível e $S(n) \to a$ então $a = \lim S_*$ é definível

Dem: $a = \lim S_* = \underline{\lim}\ S_*$ □

Se S_* é uma sequência definível, então cada $S(n)$ é um número real definível.

1.19 DEFINIÇÃO: Uma sequência $\mathfrak{F}$ de funções reais é definível se existe uma fórmula primária $\psi(n,\lambda,x)$ tal que $\mathfrak{F}(n)(x) = \hat{\lambda}\ \psi(n,\lambda,x)$

COROLARIO: Se $\mathfrak{F}$ é uma sequência definível de funções, então cada uma destas funções é definível.

1.20 TEOREMA: Se $\mathfrak{F}$ é uma sequência definível de funções e $\mathfrak{F} \to f$ então f é definível.

Dem: Seja $\mathfrak{F}(n)(x) = \hat{\lambda}\ \psi(n,\lambda,x)$. Então $f(x) = \hat{\lambda} : \exists n\ \forall m > n\ \psi(m,\lambda,x)$ □

Pode ocorrer no entanto que sequências convergentes de funções, ou numeros reais, definíveiss convirjam para uma função, ou num número real não definível.

Dos resultados acima segue-se que funções definidas como séries infinitas de potências com coeficientes numa sequência definível são definíveis, Isto é:

1.21 TEOREMA: As funções elementares da análise são definíveis.

1.22 DEFINIÇÃO: Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é definível se existe $\psi(x)$ primária tal que $A = \hat{x} : \mathbb{R} \models \psi(x) =: \hat{x}.\psi(x)$

COROLARIO: Operações booleanas sobre conjuntos definíveis geram conjuntos definíveis.

1.23 TEOREMA: Um intervalo é definível se, e só se seus extremos o forem

Dem: tomemos o intervalo $[a,b]$ onde a e b são respectivamente definido por $\rho(\lambda$ e $\psi(\lambda)$. Considere as fórmulas

$a < x := \forall\eta\ (\psi(\eta) \to \eta < x) \wedge \exists\ \eta\ (\eta < x \wedge \neg\rho(\eta))$ e

$x \leq b := \forall\eta\ (\eta < x \to \psi(\eta))$. Assim $]a,b]$ é definido por $a < x \wedge x \leq b$.

Reciprocamente se $\theta(x)$ define $]a,b]$ então

$a = \hat{\lambda}:\exists k\ \ \forall\eta[\theta(\eta) \to k(\eta) \wedge \lambda < k]$ e

$b = \hat{\lambda}:\exists\eta\ (\theta(\eta) \wedge \lambda < \eta)$ □

1.24 DEFINIÇÃO: Uma seqüência de intervalos é definível se seus extremos são determinados por seqüências definíveis de reais.

COROLÁRIO: Cada termo de uma seqüência definível de intervalos é um intervalo definível.

1.25 TEOREMA: Seja S_* uma seqüência definível de reais, crescente e monotona. Se S_* é limitada superiormente, então lim S_* existe e é definível

Dem: lim S_* = lim S_* □

1.26 TEOREMA: Seja S_* uma seqüência definível e limitada, então S_* tem uma subseqüência convergente definível.

Dem: Seja L = lim S_*, L é então um número real definível. Como S_* é definível, existe uma fórmula $\psi(k,\lambda)$ que exprime que λ é um racional que pertence a $S(n)$ para o menor n tal que $|S(n) - L| < 1/k$ se $S(n) \neq L$ ou que pertence a L em caso contrário. Esta fórmula define uma subseqüência de S_* que converge para L □

Este é um exemplo de um teorema clássico da análise que não é predicativamente válido para seqüências arbitrárias (isto é, seqüências não necessáriamente definíveis). No caso de seqüências definíveis entretanto podemos substituir subfórmulas de forma $\lambda < S(n)$ por $\rho(n,\lambda)$ onde ρ define S_*, e isto é tudo que precisamos para reproduzir a demonstração tradicional do teorema nos limites da linguagem da aritmética dos racionais. Além, claro da substituição de escolhas arbitrárias por escolhas bem determinadas.

1.27 TEOREMA: Sejam as sequências s_* e r_* definíveis, determinando uma sequência definível de intervalos tal que:

(i) $s(n) < r(n)$

(ii) $s(n) < s(n+1)$

(iii) $r(n) > r(n+1)$

Então existe um número real definível na interseção de todos estes intervalos.

Dem: S_* é uma sequência monótona, crescente e limitada superiormente, pois $\forall i,j\ s(i) < r(j)$ (I). Por 1.25 $r = \lim s_*$ é definível, ademais por (I) $r < r(j)$, para todo j. Como $s(i) < r$ para todo i, r pertence à interseção dos intervalos.

1.28 DEFINIÇÃO Um subonjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ é definível se existe $\rho(\lambda)$ primária tal que $A = \hat{\lambda}\, \rho(x)$.

1.29 TEOREMA: Sejam A, B $\subseteq \mathbb{Q}$ subconjuntos definíveis tal que $A \cup B = \mathbb{Q}$ e $\forall \lambda \in A\ \forall k \in B : \lambda < k$. Então existe um real definível r tal que $\forall \lambda \in A : \lambda \leq r$ e $\forall k \in B : r \leq k$.

1.30 TEOREMA: Um conjunto definível e limitado de racionais possui supremo e ínfimo definíveis.

1.31 TEOREMA: Todo conjunto infinito, definível e limitado de racionais possui um ponto de acumulação real definível.

As demonstrações destes teoremas são rotineiras, com a observação de que em 1.31. definimos o maior ponto de acumulação do conjunto.

Estes teoremas entretanto não valem para conjuntos deiníveis de reais, pois não podermos quantificar sobre variáveis reais.

1.32 <u>DEFINIÇÃO</u>: Uma sequência de reais a_i é <u>densa</u> num conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ quando $\{a_1, a_2, \ldots\}$ é um conjunto denso em M, isto é quando todo intervalo contendo um ponto de M contém também um ponto a_i. Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ é <u>separável</u> quando existe uma sequência definível de reais densa em M.

1.33 <u>TEOREMA</u>: Todo conjunto separável de reais, limitado, possui supremo e ínfimo definíveis.

<u>Dem</u>: trivial □

1.34 <u>TEOREMA</u> Seja $M \subseteq \mathbb{R}$, se $M \cap \mathbb{Q}$ é denso em M e M é limitado, então M possui supremo e ínfimo definíveis.

<u>Dem</u> trivial □

1.35 <u>TEOREMA</u> <u>(HEINE-BOREL)</u>: Suponha (A_n) uma sequência definível de abertos tal que nenhuma subsequência finita cubra $[0,1]$, então existe um real <u>definível</u> r tal que $r \in [0,1]$ e $r \notin \bigcup_n \Delta_n$

<u>Dem</u>: seja $\psi(\lambda,n)$ a fórmula $\lambda < 0 \vee \exists m < n\ \psi(m,\lambda)$; onde $\psi(m,x)$ define(Δ_n) e $\Phi(\lambda,n) \equiv \psi(\lambda,n) \vee \forall \eta < \lambda\ (\psi(\eta,n))$. Esta fórmula "diz" que $\lambda < 0$ ou $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ cobre $[0, \lambda]$.

Seja $r = \hat{\lambda} : \exists n\ \Phi(\lambda,n)$. Logo r é definível e < 1.

Se existisse $\Delta_{n_0}\ r$, então, como Δ_{n_0} é aberto, existe $\lambda_0 \in \Delta_{n_0}$ tal que $r < \lambda_0$, mas temos que $\Phi(\lambda_0, n_0)$, o que implica que $\lambda_0 < r$. Contradição.

Logo $r \notin \bigcup_n \Delta_n$ □

Nota: O interessante no teorema é que r é <u>definível</u> <u>em</u> <u>termos</u> <u>da</u> sequência (Δ_n).

1.36 O fato central que permite a recuperação, na análise de Weyl, dos resultados clássicos das funções reais contínuas é que, sendo os racionais um conjunto denso em $\mathbb{R}$ o valor de uma função real contínua em qualquer ponto é determinado por seus valores em ponto racionais.

1.37 TEOREMA: Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e seja $f/_{I \cap \mathbb{Q}}$ definível, isto é, existe $\rho(\lambda,k)$ primária tal que $f(k) = \hat{\lambda} : \rho(\lambda,k)$. Então f é definível.

Dem: Seja $p(\lambda,x) = \exists \xi\ \forall \mu\ (\xi < \mu < x \to \rho(\lambda,\mu))$ e seja $\psi(\lambda,x) = P(\lambda,x) \wedge \wedge \exists \lambda' > \lambda : P(\lambda',x)$. Evidentemente $\psi(\lambda,x)$ é primária e define f □

1.38 TEOREMA (BOLZANO[1])

Seja f contínua e definível no intervalo $[0,1]$ com $f(0) < 0$ $f(1) > 0$, então existe c definível tal que $c \in (0,1)$ e $f(c) = 0$.

Dem: definiremos o maior valor c para o qual f se anula

$c = \hat{\lambda} : \exists \eta\ (0 < \eta < 1 \wedge \eta > \lambda \wedge f(\eta) < 0)$

c é um número real tal que $c \in (0,1)$

Suponha $f(c) < 0$, f é contínua em c. Como $\forall \eta > c\ f(n) \geq 0$ tem-se contradição com a continuidade de f em c. Logo $f(c) \geq 0$.

Se $f(c) \geq 0$. $\exists \lambda < c$ talque $\forall \eta > \lambda : f(n) \geq 0$, contra a definição de c. Logo $f(c) = 0$ (1) □

(1) o teorema é facilmente generalizado para a seguinte forma: Se f é contínua e definível em $[0,1]$ e se x_1, x_2 são dois pontos quaisquer definíveis de $[0,1]$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Então para todo $d \in [f(x_1), f(x_2)]$ definível, existe $c \in [x_1, x_2]$ definível tal que $f(c) = c$.

1.39 TEOREMA. Seja f definível e contínua no intervalo $[0,1]$. Então neste intervalo o máximo e o mínimo de f são definíveis.

Dem: seja $M = \hat{\mu}: \exists \lambda \ (0 \leq \lambda \leq 1 \wedge \mu < f(\lambda))$. M é real definível ou $M = +\infty$. Seja $x \in [0,1]$ qualquer, se $f(x) > M$, pela continuidade de f existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $f(\lambda) > M$; portanto seja μ tal que $M < \mu < f(\lambda)$. Logo $\mu \in M$, mas $M < \mu$.

Contradição. Logo $f(x) \leq M$.

Definiremos a função M: $[0,1]$ como:

$\mathcal{M}(x) = \hat{\mu} : \exists \lambda \ [\lambda < x \wedge \lambda < 0 \wedge \mu < f(\lambda)]$

Obviamente $M(x)$ é definível.

Distinguiremos dois casos:

I) para todo $\lambda \leq 1$ tem-se que $M(\lambda) = M$

Neste caso seja a = o ponto onde f assume o seu máximo = 0

II) existe $\lambda \leq 1$ tal que $M(\lambda) < M$. Nesse caso seja

$a = \hat{\lambda} : \exists \lambda' > \lambda \ (0 < \lambda' \leq 1 \wedge M(\lambda') < M)$

a é um real definível

para todo $\lambda < a$, $f(\lambda) < M$; pela continuidade de f tem-se que $f(a) \leq M$. Mas se $f(a) \leq M$, existirá $\lambda \geq a$ tal que $M(\lambda') < M$ para $\hat{\lambda} > \lambda$; isto é $\lambda < a$, contradição.

Logo $f(a) = M$, o que mostra que M é <u>real</u> definível e e o <u>menor</u> valor para o qual f assume o seu maximo. De modo análogo controi-se b para o qual f assume o seu mínimo. □

1.40 TEOREMA Um fato central na teoria das funções reais contínuas é que estas são <u>uniformemente</u> contínuas no intervalo unitário fechado. Para que este resultado seja <u>predicativamente</u> válido precisamos mostrar que se f é uma função definível e contínua em $[0,1]$ então existe uma função $\delta: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ <u>definível</u> tal que para todo $m \in \mathbb{N}$.

$|x-y| < \delta(n) \to |f(x) - f(y)| < 1/n$.

Dem: Seja então uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definível e contínua em $[0,1]$.

Sem perda de generalidade suporemos $f(x) = f(0)$ para $x < 0$, $f(x) = f(1)$ para $x > 1$ e que f não é constante em $[0,1]$.

Seja x um número real e α um número racional.

Defina $d(x,\alpha) = \sup\limits_{\substack{\lambda<x \\ |\lambda-\mu|<\alpha}} \{ |f(\lambda) - f(\mu)| \}$. $d(x,\alpha)$ é uma função

definível com valores reais de x e α. Se eliminarmos a restrição $\lambda < x$ teremos uma função definível $d(\alpha)$ com valores reais tal que $d(\alpha) \geq d(\beta)$ para $\alpha > \beta$ e $d(x,\alpha) \leq d(\alpha)$

É suficiente mostrar que $\lim\limits_{\alpha \to 0} d(\alpha) = 0$. Pois neste caso, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\delta(n) = \hat{\lambda}.\ \lambda \leq 0 \vee d(\lambda) < 1/n$. Esta fórmula define para quase todos os $n \in \mathbb{N}$ um valor real $\delta(n)$ (pode ocorrer que para alguns naturais iniciais $\delta(n)$ seja todo o conjunto dos racionais, mas como f não é constante por suposição, a partir de um certo valor n , $\delta(n)$ será um número real).

Seja $x(\alpha) = \hat{\lambda}: \exists k > \lambda : d(k,\alpha) < d(\alpha)$, $x(\alpha)$ é uma função de α com valores reais.

Ve-se que dados b e b' reais tais que $b < x(\alpha) < b'$ então $d(\alpha) = \sup\limits_{|\lambda-\mu|<\alpha} \{ |f(\lambda) - f(\mu)| : b \leq \lambda < b' \}$.

Seja agora $\lim x(\frac{1}{n}) = a$ e seja γ um racional qualquer. Da continuidade de f em a existem b e b' reais entre os quais a está contido e um real positivo e tal que $|f(x) - f(a)| \leq \gamma/2$ para todo x no intervalo $b - e < x < b' + e$.

Daí segue que: $|f(x) - f(y)| \leq \gamma$ se $b \leq x \leq b'$ e $|y - x| < e$. (*)

Ademais existe n_0 tal que $1/n_0 < e$ e $b < x(\frac{1}{n_0}) < b'$.

Como para x e y vale (*), γ não pode ser menor que $d(\frac{1}{n_0})$.

Assim, $d(\alpha) \leq \gamma$ sempre que $\alpha \leq 1/n_0$. Isto é, $\lim\limits_{\alpha \to 0} d(\alpha) = 0$ □

Diferenciação e Integração. O Cálculo Diferencial e Integral clássico entra essencialmente inalterado no escopo da análise de Weyl.

1.41 TEOREMA: Seja f definível e diferenciável num domínio aberto U então $f': U \to \mathbb{R}$ é definível.

Dem: Seja a sequência definível

$$s(n,x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} : x \in U$$

Logo $f'(x) = \lim s(n,x)$ □

1.42 TEOREMA: Seja f definível e contínua em $[a,b]$ definível então $\int_a^b f$ é um real definível.

Dem: Seja a função $g(i,n)$ definida por

$$g(i,n) = \frac{b \cdot i + a\,(n-i)}{n} \; ; \; i < n,\ n > 0$$

Seja $s(n)$ definida por

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\,g(\,i,\,n))\,(\,g(\,i+1,\,n) \;-\; g(\,i,\,n))$$

Logo $\int_a^b f = \lim s(n)$ □

De um modo geral, se f é definível e contínua em $[a,b]$ definível, então a função $F(x) = \int_a^x f$ é definível no intervalo $[a,b]$.

1.43 TEOREMA: (ROLLE)

Seja f contínua e definível em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ e tal que $f(0) = f(1)$. Então existe $c \in (0,1)$ definível tal que $f'(c) = 0$.

Dem: Podemos supor sem perda de generalidade que f não é constante (em caso contrário tome $c = 1/2$). Definimos o menor c tal que $f'(c) = 0$ como o conjunto dos racionais não positivos mais os racionais positivos $\lambda < 1$ talque para todo $0 < \xi < \lambda$, o sinal da derivada em ξ é igual ao sinal da derivada em ξ □

Daí segue o:

1.44 TEOREMA: (TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA DERIVADAS)

Seja f contínua e definível em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$. Então existe $c \in (0,1)$ definível tal que $f(1) - f(0) = f'(c)$

1.45 TEOREMA (TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS)

Seja f definível e contínua em [0,1], então existe c ∈ [0,1] definível tal que $f(c) = \int_0^1 f$.

Dem Sejam m e $\mathcal{M}$ respectivamente os mínimo e máximo de f em [0,1]. Temos que $m \leq \int_0^1 f \leq \mathcal{M}$. Como $\int_0^1 f$ é definível, existe pelo teorema de Bolzano c ∈ [0, 1] definível tal que $f(c) = \int_0^1 f$ □

2- MEDIDA DE LEBESGUE NA RETA

> "Aquilo a que se pode aplicar medidas grandes e pequenas (relativas), tem uma medida exata, que está entre ambas"
>
> Parmênides

Entendemos por sequência, daqui por diante, sempre uma sequência _definível_.

_2.1_ _DEFINIÇÃO_: _Um_ _domínio_ _aberto_ é um conjunto G da forma $\bigcup_n \,]p_n, q_n[$, onde p_* e q_* são sequências racionais tal que para todo n; $p_n \leq q_n$. Um _intervalo elementar_ é um intervalo da forma $[p,q[= \{x \in \mathbb{R} : p \leq x < q\}$ tal que $[p,q] \subseteq G$, para um domínio aberto (_fixo_ daqui por diante). Uma sequência da forma $I_* = [p_*, q_*[$, onde p_*, q_* são sequências racionais é chamada de _sequência_ _elementar_ _de_ _intervalos_.

_2.2_ _DEFINIÇÃO_ Seja $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tal que $\forall p,q \in \mathbb{I}$: $[p,q[$ seja um intervalo elementar. Definimos $m : \mathbb{I} \to [0, \infty[$ por : $m(p,q) := q - p$. Evidentemente m é uma função definível. m é chamado de _comprimento_ do intervalo $[p,q[$, usualmente denotamos a imagem do par (p,q) por m por $m[p,q[$ e nos referimos a $\mathbb{I}$ como o _conjunto_ _dos_ _intervalos_ _elementares_.

Este, como veremos adiante, é um subconjunto definível de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, uma vez que a condição "$[p,q[$ é elementar" reduz-se a condição $[p,q] \subseteq G$ que é expressa por uma fórmula elementar.

Seja I_* uma sequência elementar de intervalos. Então existe uma sequência (definível) s_* de números reais tal que para todo n : $s_n = m[p_n, q_n[$.

Esta sequência $s_* \in [0,\infty[^{\mathbb{N}}$ é definida como sendo o comprimento de I_*, denotado por $m\, I_*$.

_2.3_ _TEOREMA_. (i) $m\, \emptyset = 0$

(ii) $mI = mI_1 + mI_2$ quando $I = I_1 + I_2$, isto é $I = I_1 \cup I_2$ e $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Dem:

(i) trivial

(ii) Seja $I = [p,q[$, então $I = I_1 + I_2$ se, e somente se existe $r \in \mathbb{Q}$: $p \leq r < q$ tal que $I_1 = [p,r[$ e $I_2 = [r,q[$, logo

$m\,[p,q[= q-p = (q-r)+(r-p) = mI_1 + mI_2$ □

COROLÁRIO: $I \subseteq J \Rightarrow mI \leq mJ$

Dem: $I \subseteq J \Rightarrow J = I + I_0 + I_1 \Rightarrow mI \leq m\,J$ □

2.4 TEOREMA: A interseção de intervalos elementares é um intervalo elementar. Para sequências elementares de intervalos I_*, J_*, as relações I_i/J_j, $I_i \neq \emptyset$ e $I_i \subseteq J_j$ são representáveis por fórmulas primárias.

Dem: $I = [p,q[$ e $J = [r,s[$, então $I \cap J = [\max(p,r), \min(q,s)[$.

$$I/J = \begin{cases} [p,r[& \Leftarrow p \leq r \leq q \leq s \\ [s,q[& \Leftarrow r \leq p \leq s \leq q \\ I & \Leftarrow I \cap J = \emptyset \\ \emptyset & \Leftarrow I \subseteq J \\ [p,r[\cup[s,q[& \Leftarrow J \subseteq I \end{cases}$$

$I \subseteq J \Leftrightarrow r \leq p < q \leq s \vee p < q$.

$I = \emptyset \Leftrightarrow p = q$ □

2.5 TEOREMA. Sejam os intervalos $I_1 \ldots I_m$ dois a dois disjuntos, então

$$\sum_{i \leq m} \subseteq \bigcup_{j \leq n} J_j \Rightarrow \sum_{i \leq m} m\,I_i \leq \sum_{j \leq n} m\,J_j$$

Dem: trivial

COROLÁRIO: $\sum_{i \leq m} I_i = \sum_{j \leq n} J_j \Rightarrow \sum_{i \leq m} m\,I_i = \sum m\,J_j$

2.6 Nosso objetivo é definir numa σ-álgebra de subconjuntos de G contendo I uma função m que satisfaça as propriedades:

(i) $m\emptyset = 0$

(ii) $m[b,c[= c - b$

(iii) seja σ-aditiva e

(iv) seja invariante por translação

Estamos longe deste objetivo uma vez que a classe I não é nem mesmo fechada por uniões finitas ou diferenças. Iremos então estender I e m conjuntamente, passo a passo até o objetivo final.

2.7 DEFINIÇÃO: Um subconjunto E de G é um subconjunto elementar de G se $E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$; onde I_i é um intervalo elementar, para todo i: $1 \leq i \leq n$.

Considerando $J_1 := I_1$

$J_2 := I_2/I_1$

$J_3 := (I_3/I_2)/I_1$ e assim sucessivamente como a diferença entre intervalos elementares é a união finita disjunta de intervalos elementares definíveis em função daqueles, temos que cada conjunto elementar pode ser escrito (evidentemente não de modo único) como a soma de intervalos elementares.

Agora, a união, a interseção e a diferença de conjuntos elementares são conjuntos elementares, como é facil de ver.

2.8. DEFINIÇÃO: Dado um conjunto elementar $E = i_1 + \ldots + i_n$ definimos o comprimento de E : $mE := mi_1 + \ldots + mi_n$.

Evidentemente $m\,E \in [0, \infty[$.

Por 2.5 o comprimento de E não depende da particular representação de E.

2.9 TEOREMA: Sejam E, F, conjuntos elementares.

(1) $E \cap F = \emptyset \rightarrow m(E + F) = mE + mF$

(2) $m(E \cup F) + m(E \cap F) = mE + mF$

(3) $m(E \cup F) \leq mE + mF$

(4) $E \subseteq F \Rightarrow mE \leq mF$

(5) $m(E/F) = mE - mF$, se $F \subseteq E$

(6) $m(E \setminus F) \geq mE - mF$

Dem:

(1) trivial

(2) : $E \cup F = E + (F/E)$ e $(F/E) + (E \cap F) = F$

Daí,

$m(E \cup F) + m(E \cap F) = mE + m(F/E) + m(E \cap F) = mE + mF$

(3) : segue de (2)

(4) : $E \subseteq F \Rightarrow mE + m(F/E) = mF \Rightarrow mE \leq mF$

(5) : segue de (1 e 4)

(6) : $E/F + F = E \cup F \Rightarrow E \subseteq E/F + F \Rightarrow$

$\Rightarrow mE \leq m(E/F) + mF \Rightarrow mE - mF \leq m(E/F)$ $\Box$

2.10 DEFINIÇÃO: Seja I_{**} uma sequência dupla de intervalos e n_* uma sequência (definível) de naturais. Então a sequência :

$E_* = \sum_{i \leq n_*} I_{*i}$ é chamada de sequência elementar. (sequências elementares são sequências definíveis de conjuntos elementares (definíveis)).

Cada E_n é obviamente um conjunto elementar (e obviamente $E_n \subseteq G$)

Daí, definimos o comprimento de E_* como a sequência (definível) de reais mE_*. Evidentemente, se $p \in \mathbb{Q}$, a relação $p \in E_n$ é expressa por uma fórmula primária.

2.11 TEOREMA: (a) Sejam E, F conjuntos elementares.

$E \subseteq F \Leftrightarrow E \cap \mathbb{Q} \subseteq F$

(b) Seja $\bar{E} = \bar{I}_1 \cup \ldots \cup \bar{I}_n$, um conjunto elementar fechado e seja B um domínio aberto $B = \bigcup_j J_j$.

$\bar{E} \subseteq B \Leftrightarrow \exists n : \bar{E} \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \leq n} J_j$

Dem:

(a) sejam $E = I_1 \cup \ldots \cup I_n$, $F = J_1 \cup \ldots \cup J_m$

$E \cap \mathbb{Q} = (I_1 \cap \mathbb{Q}) \cup \ldots \cup (I_n \cap \mathbb{Q})$. Basta então mostrar que:

(1) $I \cap \mathbb{Q} \subseteq F \Rightarrow I \subseteq F$. Se $m = 1$, isto segue de 2.4. SUponhamos (1) válida para qualquer I. COmo $I/J_{m+1} = I'_1 \cup \ldots \cup I'_k$ temos que $I \cap \mathbb{Q} \subseteq F \cup J_{m+1} \Rightarrow I/J_{m+1} \cap \mathbb{Q} \subseteq F \Rightarrow \forall l \leq k: I'_l \cap \mathbb{Q} \subseteq F \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall l \leq k: I'_l \subseteq F \Rightarrow I/J_{m+1} \subseteq F \Rightarrow I \subseteq F \cup J_{m+1}$.

(b) seja $B_n = \bigcup_{j<n} I_j$. Assim para todo n, por (a)

$\bar{E} \subseteq B_n \Leftrightarrow \bar{E} \cap \mathbb{Q} \subseteq B_n$. Por Heine-Borel, $\bar{E} \subseteq B \Rightarrow \exists n\, \bar{E} \subseteq B_n$ □

COROLÁRIO: (a) Sejam E_*, F_* sequências elementares. A relação $E_i \subseteq F_j$ é expressa por uma fórmula primária.

(b) Sejam E_* uma sequência elementar e $B_* = \bigcup_i J_{*i}$ uma sequencia de domínios abertos onde J_{**} é uma sequência dupla de intervalos elementares. A relação $\bar{E}_i \subseteq B_j$ é expressa por uma fórmula primária.

Dem: pelo teorema acima a quantificação sobre reais que as definições destas relações exigiriam pode ser substituida por uma quantificação sobre racionais □

2.12 As sequências elementares formam uma coleção com propriedades de fecho mais interessantes que a classe dos conjuntos elementares. Nós as veremos a seguir.

Note que os conjuntos elementares correspondem ao método de se aproximar uma figura limitada no plano por quadriculação. As sequências elementares correspondem ao metodo de exaustão, aproximação sucessiva por quadriculação finita.

2.13 TEOREMA: Sejam $\mathcal{M}_*$, $\mathcal{N}_*$ sequências elementares, n_* e k_{**} sequências de naturais e A(n) uma fórmula primária. Então são sequências elementares:

(1) $(\mathcal{M}_n \cap \{x \in G : A(n)\})_n$

(2) $\mathcal{M}_* / \mathcal{N}_* = (\mathcal{M}_n / \mathcal{N}_n)_n$

(3) $\mathcal{M}_* \cup \mathcal{N}_* := \langle \mathcal{M}_n \cup \mathcal{N}_n \rangle_n$

(4) $\bigcup_{k<n_*} \mathcal{M}_{k_{**}} := \langle \bigcup_{k<n_j} \mathcal{M}_{k_{j*}} \rangle_j$. Além disso tem-se que $\forall m: \mathcal{M}_m \subseteq G$.

Dem: para (1) basta notar que, para cada n, $\{x \in G : A(n)\}$ é ou vazio ou o proprio dominio G; para (2) e (3) que a deferença e a união de conjuntos elementares são ainda conjuntos elementares, para (4) que a união de uma subsequência finita de uma sequência elementar é um conjunto elementar □

Consequências. Interseções e subsequências de sequências elementares são sequencias elementares. Denotando por A_G a coleção dos conjuntos elementares E tal que a sequência $\langle E \rangle_n$ seja elementar, tem-se que A_G é fechada por união, diferença e contém $\emptyset$. Ademais se $\mathcal{M}_*$ é uma sequência elementar, então $\mathcal{M}_k \in A_G$. Qualquer coleção de sequências com as propriedades acima é dita um anel (em G). Denotemos o anel em questão por R_G e por abuso de notação consideraremos $A_G \subseteq R_G$

2.14 DEFINIÇÃO E LEMA a: Seja $\mathcal{M}_*$ uma sequência elementar. $\mathcal{M}_*$ é crescente (decrescente) quando $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_{n+1}$ $(\mathcal{M}_{n+1} \subseteq \mathcal{M}_n)$ para todo n.

$\mathcal{M}_* \uparrow \mathcal{M} :\Leftrightarrow \mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ e $\mathcal{M}_*$ é crescente

$\mathcal{M}_* \downarrow \mathcal{M} :\Leftrightarrow \mathcal{M} = \bigcap_n \mathcal{M}_n$ e $\mathcal{M}_*$ é decrescente.

$\mathcal{M}_*$ é separável $\Leftrightarrow \forall n, m : n \neq m \Rightarrow \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}_m = \emptyset$

LEMA: Seja $\mathcal{M}_*$ uma sequência elementar,separável, tal que $\sum_n \mathcal{M}_n \in A_G$. Então $m \sum_n \mathcal{M}_n \geq \sum_n m\, \mathcal{M}_n$.

Dem: $m\mathcal{M}_1 + \ldots + m\mathcal{M}_n = m(\mathcal{M}_1 + \ldots + \mathcal{M}_n) \leq m \sum_n \mathcal{M}_n$ □

Se q_* é uma sequência racional e $q \in \mathbb{Q}$ então $q_* \uparrow q :\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall n : q_n \leq q_{n+1}$ e $q = \lim q_*$.

2.15 TEOREMA: Para $\mathcal{M}_*, \mathcal{M} \in R_G$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\mathcal{M}_* \uparrow \mathcal{M} \Rightarrow m\,\mathcal{M} = \lim_n \mathcal{M}_n$

(2) $\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_n \Rightarrow m\,\mathcal{M} = \sum_n m\,\mathcal{M}_n$

(3) $\mathcal{M}_* \downarrow \mathcal{M} \Rightarrow m\,\mathcal{M} = \lim_n \mathcal{M}_n$

(4) $\mathcal{A}_* \downarrow \emptyset \qquad \Rightarrow \lim_n \mathcal{A}_n = 0$

(5) $m[p,q[\; = \lim_n m\,[\,p,\, q_n[\; =$, para toda $q_* \uparrow q$ e todos os p, q com

$\emptyset \neq [p,q] \subseteq G$.

(6) $m[p,q[\; = \lim_n m\,]p_n,\, q\,[$ para toda $p_* \downarrow p$ e todos os p,q com

$\emptyset \neq [p,q] \subseteq G$.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2). Sejam $\mathcal{A}_*$ uma sequência elementar e $\mathcal{A} \in A_G$ tal que $\mathcal{A} = \sum_n \mathcal{A}_n$. Daí $\langle \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n \rangle_n$ é uma sequência elementar e $\langle \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n \rangle_n \uparrow \mathcal{A}$. Portanto $m\,\mathcal{A} = \lim_n m\,(\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n) =$
$= \lim_n (m\,\mathcal{A}_1 + \ldots + m\,\mathcal{A}_n) = \sum_n m\,\mathcal{A}_n$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sejam $\mathcal{A}_*$ uma sequência elementar e $\mathcal{A} \in A_G$ tal que $\mathcal{A}_* \uparrow \mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}_{*+1}/\mathcal{A}_*$ é também uma sequência elementar e $\sum_i (\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i = \mathcal{A}/\mathcal{A}_1 \;\in\; A_G$. De $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \sum_i (\mathcal{A}_{i+1} / \mathcal{A}_i)$ segue que $m\,\mathcal{A} = m\,\mathcal{A}_1 + m \sum_i (\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i) = m\,\mathcal{A}_1 + \sum_i m\,(\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i) =$
$= \lim_n (m\,\mathcal{A}_1 + \sum_{i<n} m\,(\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i)) = \lim_n m\,(\mathcal{A}_1 + \sum_{i<n} \mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i)) =$
$= \lim_n m\,\mathcal{A}_n$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Seja $\mathcal{A}_* \downarrow \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_* \uparrow \mathcal{A}_1/\mathcal{A}$, daí
$m\,\mathcal{A}_1 - \lim_n m\,\mathcal{A}_n = \lim_n m\,(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_n) = m\,(\mathcal{A}_1 / \mathcal{A}) = m\,\mathcal{A}_1 / m\,\mathcal{A} =$
$= m\,\mathcal{A}_1 - m\,\mathcal{A}$
e finalmente $m\,\mathcal{A} = \lim_n m\,\mathcal{A}_n$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sejam $\mathcal{A}_* \uparrow \mathcal{A}$ então, $\mathcal{A}/\mathcal{A}_* \downarrow \emptyset$. Daí
$m\,\mathcal{A} - \lim_n m\,\mathcal{A} = \lim_n (\mathcal{A}/\mathcal{A}_n) = 0$ e portanto $m\,\mathcal{A} = \lim_n m\,\mathcal{A}_n$

(3) $\Rightarrow$ (4): óbvio

(1) $\Rightarrow$ (5): a sequência $\mathcal{A}_* = \langle\, [\,p,\, q_n\, [\,\rangle_n$ é elementar e $[\,p,\, q\,[\; \in A_G$.

(5) $\Rightarrow$ (6): seja $\emptyset \neq [p,q] \subseteq G$, então existe $p_0 < p$ tal que $[p_0,\, q\,] \subseteq G$. (6) segue então de (5) pela decomposição de $[p_0,\, q\,[/[p,q[$ e $[p_0,\, q\,[/\;]p_n,\, q\,[$ em intervalos.

(6) $\Rightarrow$ (1): seja $\mathcal{A}_*$ uma sequência de elementos, $\mathcal{A}_* \uparrow I =$
$= [p,\, q[,\; \emptyset \neq [p,\, q] \subseteq G$. Temos que mostrar que

$m\,I = \lim_n m\,\mathcal{A}_n$.

Obviamente $\lim_n m\,\mathcal{A}_n \leq m\,I$. Temos que mostrar que

$mI < \lim_n m\,\mathcal{A}_n + \epsilon$ para qualquer ϵ. $\mathcal{A}_* = \bigcup_{j<k_*} I_{*j}$, onde I_{**} é

uma sequência dupla de intervalos elementares

$I_{*j} = [r_{nj}, s_{nj}[$, $\emptyset \neq [r_{nj}, s_{nj}] \subseteq G$. Para todo par de

índices n,j podemos tomar um número natural $k = k_{nj}$, tão

grande quanto se queira, de modo que $p_0 < r_{nj} - 1/k$.

Consequentemente $[r_{nj}-1/k, s_{nj}] \subseteq G$, e

$m\left([r_{nj} - 1/k, s_{nj}[\;/\; [r_{nj}, s_{nj}[\right) < \epsilon\,.\,2^{-n-1}.\,2^{-j}$.

Sejam $J_{nj} = [r_{nj} - 1/k_{nj}, s_{nj}[$, $F_n = \bigcup_{j<k_*} J_{nj}$ e

$F_*' = \bigcup_{j<k_*} \bar{J}_{nj}$.

Temos que F_* é uma sequência elementar e que

$\mathcal{A}_n \subseteq F'_* \subseteq F_n$.

Como $F_n/\mathcal{A}_n \subseteq \bigcup_{j<k_*} (J_{nj} / I_{nj})$.

Assim que $m(F_n/\mathcal{A}_n) < \epsilon.2^{-n-1}$.

Finalmente sejam $G_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, $G' = F'_1 \cup \ldots \cup F'_n$ e δ tão

pequeno que para $I_0 = [p, q - \delta[$ tem-se que $mI - mI_0 < \epsilon/2$.

Então G'_* é uma sequência crescente que cobre

$\bar{I}_0 = [p, q - \delta]$. Por compacidade $\bar{I}_0 \subseteq G'_n$ para algum n fixo.

$G_n/\mathcal{A}_n = (F_1 / \mathcal{A}_n) \cup \ldots \cup (F_n/\mathcal{A}_n) \subseteq$

$\subseteq (F_1 / \mathcal{A}_1) \cup \ldots \cup (F_n/\mathcal{A}_n)$. Daí,

$m(G_n/\mathcal{A}_n) < \epsilon/2\,(2^{-1} + \ldots + 2^{-n}) < \epsilon/2$. Portanto

$mI < mI_0 + \epsilon/2 \leq m\,G_n + \epsilon/2 < m\mathcal{A}_n + \epsilon \leq \lim_j m\,E_j + \epsilon$.

Com isso mostramos que $mI = \lim_n m\,\mathcal{A}_n$ para $\mathcal{A}_* \uparrow I$.

Sejam agora $\mathcal{A}_*$ uma sequência elementar e $\mathcal{A} \in A_G$ com

$\mathcal{A}_* \uparrow \mathcal{A} = I_1 + \ldots + I_k$. Para todo $j \leq m$ tem-se que

$\mathcal{A}_* \cap I_j \uparrow I_j$, logo $mI_j = \lim_n m\,(\mathcal{A}_n \cap I_j)$. Daí

$m\,\mathcal{A} = m\,I_1 + \ldots + m\,I_k = \lim_n (m\,(\mathcal{A}_n \cap I_1) + \ldots + m\,(\mathcal{A}_n \cap I_k)) =$

$= \lim_n m\,\mathcal{A}_n$. $\Box$

A propriedade (2) é usualmente chamada de <u>σ-aditividade</u>. Como a propriedade (5) é obviamente verdadeira para comprimentos de intervalos elementares, o comprimento de conjuntos elementares goza da propriedade de σ-

aditividade sempre que cada um destes conjuntos for um membro de A_G e for representado como soma de termos de sequências elementares. Então diremos que a função comprimento restrita à coleção das sequências elementares é uma <u>medida</u> (a medida de Lebesgue em R_G)

<u>2.16</u> <u>DEFINIÇÃO</u>: introduzimos (mantendo-a na sequência) a notação: seja (i_*, j_*) a sequência injetora de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e h_{**} a sua inversa. Daí

$i_{h_{kl}} = k$, $j_{h_{kl}} = l$ e $h_{i_* j_*} = m$.

Com esta notação diremos que $\mathcal{A}_{**}$ é uma <u>sequência dupla elementar</u> se $\mathcal{A}_{i_* j_*}$ for uma sequência elementar. Assim

(1) $\mathcal{A}_{**}$ é uma sequência dupla elementar $\Leftrightarrow$ existe uma sequência elementar $\mathcal{N}_*$ tal que $\mathcal{A}_{**} = \mathcal{N}_{h_{**}}$.

(2) $\mathcal{A}_{h_{**}}$ é uma sequência elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_*$ é uma sequência elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_{k**}$ é uma sequência elementar.

(3) $\mathcal{A}_{i_*}$ é uma sequência elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_*$ é uma sequência elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_{j_*}$ é uma sequência elementar.

Consequentemente podemos identificar as sequências elementares simples $\mathcal{A}_*$ com as respetivas sequências duplas $\mathcal{A}_{**}$ tal que $\mathcal{A}_{*m} = \mathcal{A}_*$, qualquer m. Para sequências duplas valem propriedades análogas àquelas válidas para sequências simples.

<u>DEFINIÇÃO</u> Seja O_G o conjunto de toas as sequências da forma $\bigcup_n E_{*n}$ com E_{*n} uma sequência elementar dupla. Estes serão chamados de sequências <u>abertas</u>. Um conjunto E é <u>aberto</u> se a sequência constante $\langle E_n \rangle \in O_G$. Se E é aberto , escrevemos, por abuso de notação, $E \in O_G$

<u>2.17</u> <u>TEOREMA</u>: Para todo elemento $\mathcal{A}_* \in O_G$ existe uma sequência elementar dupla E_{**} com $E_{m*} \uparrow \mathcal{A}_m$, para todo m.

<u>Dem</u>: Seja $\mathcal{A}_* = \bigcup_n F_{*n}$ com F_{**} uma sequência elementar dupla e $E_{*n} := \bigcup_{j \leq n} F_{*j}$, então E_{**} é uma sequência elementar dupla e $E_{m*} \uparrow \mathcal{A}_m$, para todo m. □

2.18 TEOREMA: Suponha que $G \in \mathcal{O}_G$, isto é, que exista $G_* \in R_G$ tal que $G_* \uparrow G$. Então o conjunto $\mathcal{O}_G$ tem as seguintes propriedades, onde k_{**} é uma sequência dupla de naturais e $A(n)$ uma fórmula primária:

(1) $\mathcal{M}_* \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \forall n: \mathcal{M}_n \subseteq G$

(2) $\langle\{x \in G: A(n)\}\rangle \in \mathcal{O}_G$

(3) $\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_* \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \mathcal{M}_* \cap \mathcal{N}_* \in \mathcal{O}_G$

(4) $\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_* \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \mathcal{M}_* \cup \mathcal{N}_* \in \mathcal{O}_G$

(5) $\mathcal{M}_* \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{M}_{k_{*n}} \in \mathcal{O}_G$

Além disso, $R_G \subseteq \mathcal{O}_G$

Dem: Se $R_* \in R_G$ então $R_* = \bigcup_n R_* \in \mathcal{O}_G$.

(1): trivial

(2): $\{ x \in G: A(n) \} = \bigcup_n (G_* \cap \{ x \in G : A(n)\})$ (pois $G = \bigcup_n G_n$)

(3): $\bigcup_m E_m \cap \bigcup_n F_n = \bigcup_\lambda (E_{i\lambda} \cap F_{j\lambda})$ (onde $m = i_{h**}$ e $n = j_{h**}$)

(4): $\bigcup_n E_n \cap \bigcup_n F_n = \bigcup_n (E_n \cup F_n)$

(5): $\bigcup_{m,n} E_{k_{*m}n} = \bigcup_\lambda E_{k_{*i_\lambda} j_\lambda}$ $\square$

Qualquer conjunto de sequências com as propriedades (1)-(5) será chamada uma topologia (em G).

Consequencias: $\mathcal{M}_* \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{M}_n \in \mathcal{O}_G$ e $\mathcal{M}_{k_*} \in \mathcal{O}_G$ (por (5))

2.19 DEFINIÇÃO: Diremos que $\mathcal{M}_{**}$ é uma sequência dupla aberta (escrevemos $\mathcal{M}_{**} \in \mathcal{O}_G$) se $\mathcal{M}_{i_* j_*} \in \mathcal{O}_G$.

2.20 LEMA: Valem para sequências abertas os mesmo enunciados (1)-(3) de 2.16 válidos para sequências elementares. Além disso valem para sequências duplas abertas propriedades análogas as (1)-(4) de 2.15 e as propriedades:

(5) $\mathcal{M}_{**} \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{M}_{i_{*+n}\, j_{*+n}} \in \mathcal{O}_G$ e em particular,

(6) $\mathcal{M}_{**} \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \mathcal{M}_{k_{*+}\, j_{*+}} \in \mathcal{O}_G$ e ainda

(7) $\mathcal{A}_{*} \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \bigcup_{*<n_*} \mathcal{A}_{k_{**}} \in \mathcal{O}_G$

Dem: (5) e (6) : $\mathcal{A}_{*+} \in \mathcal{O}_G \quad \Leftrightarrow \mathcal{A}_{i_* j_*} \in \mathcal{O}_G \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{A}_{k_{i_* j_* n}\, l_{i_* j_* n}} \in \mathcal{O}_G$

(7): $\bigcup_{*<n_*} \mathcal{A}_{k_{**}} = \bigcup_{*} (\mathcal{A}_{k_{**}} \cap \{ x \in G : m < n_* \}) \in \mathcal{O}_G$ para $\mathcal{A}_* \in \mathcal{O}_G$ □

2.21 CONVENÇÕES Seja $G \in \mathcal{O}_G$ e seja m a medida de Lebesgue em R_G, sequências elementares serão denotadas por E_* ,F_* ou, no caso de conjuntos E,F. Sequências abertas e conjuntos abertos serão denotados respectivamente por B_*, C_*, B, C.

2.22 LEMA: Para cada E_* crescente existe $\lim_n m\, E_n \in [0, \infty]$.

Se para cada m, E_{m*} for crescente então $\lim_n m\, E_{*n} \in [0, \infty]^{\mathbb{N}}$.

Dem: trivial □

DEFINIÇÃO: Para $E_* \uparrow B$ seja $m\, B = \lim_n m\, E_n$ .. Logo $m\, B \in [0, \infty]$ para todo B.

As demonstrações seguintes mostram que m B não depende da particular representação de B.

2.23 LEMA $B \subseteq C \Rightarrow m\, B \leq m\, C$

Dem: Sejam $E_* \uparrow B$, $F_* \uparrow C$ e $B \subseteq C$. Para todo m seja $E_m \subseteq B \subseteq C =$

$= \bigcup_n F_n$, portanto $E_m = \bigcup_n (E_m \cap F_n)$ e com isso

$m\, E_m = \sup_n m\, (E_m \cap F_n)$. Daí

$m\, B = \sup_* m\, E_m = \sup_* \sup_n m\, (E_m \cap F_n) = \sup_n \sup_m m\, (E_m \cap F_n) \leq$

$\leq \sup_* m\, F_m = m\, C$ □

2.24 LEMA: Para cada sequência $B_* \in \mathcal{O}_G$ tem-se que $mB_* := (mB_1, mB_2, \ldots) \in [0,\infty]^{\mathbb{N}}$

Dem: existe $E_{*+} \uparrow B_m$ para todo m. Temos que $m\, B_i = \lim_n m\, E_{in}$. Logo

$mB_* = \lim_n E_{*n}$ e o resultado segue de 2.22.

2.25 _EMA Se $B_* \uparrow B$ então $mB = \lim_n m\,B_n$.

Dem: Seja $B_* \uparrow B$, para todo m tem-se que $B_m \subseteq B$, logo $m\,B_m \leq m\,B$ e com isso $\lim_n m\,B_n \leq m\,B$. Seja $E_{m*} \uparrow B_m$ para todo m; daí $mB_m = \lim_n m\,E_{mn}$. Ademais $\bigcup_n \bigcup_{*\leq n} E_{mn} = \bigcup_m \bigcup_{n\geq *} E_{mn} = \bigcup_* \bigcup_n E_{mn} = \bigcup_* B_m = B$ e, obviamente a sequência crescente $\bigcup_{*\leq *} E_{m*}$ é elementar. Portanto $\bigcup_{*\leq *} E_{**} \uparrow B$. Daí
$m\,B = \lim_n m\,(E_{1n} \cup \ldots \cup E_{nn}) \leq \lim_n m\,(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \lim m\,B_* \quad \Box$

2.26 LEMA: $m\,(B \cup C) + m\,(B \cap C) = m\,B + m\,C$

Dem: sejam $E_* \uparrow B$ e $F_* \uparrow C$. Então $E_* \cup F_*$ e $E_* \cap F_*$ são sequências elementares crescentes, daí $B \cup C = \bigcup_* (E_* \cap F_*)$ e $B \cap C = \bigcup_k E_k \cap \bigcup_l E_l = \bigcup_{kl} (E_k \cap F_l) = \bigcup_* (E_* \cap F_*)$, pois para $m = \max(k,l)$ $E_k \cap F_l \subseteq E_m \cap F_m$. De 2.9 temos que
$m(B \cup C) + m(B \cap C) = \lim_* (m\,(E_m \cup F_m) + m(E_m \cap F_m)) =$
$= \lim_* (mE_m + m\,F_m) = m\,B + m\,C \quad \Box$

2.27 LEMA: Seja E_* uma sequência elementar constante, onde para todo n, $E_n = E$. Então $E_* \uparrow E$ e a medida de E segundo a definição 2.22 coincide com a medida previamente definida de E.

Dem: $mE \underset{2.22}{=} \lim_n mE_n = mE \quad \Box$

2.28 TEOREMA: Seja $B = \sum_n B_n$, então $mB = \sum_n m\,B_n$. ALém disso $m\,\bigcup_n B_n \leq \sum_n mB_n$, para qualquer B_*.

Dem: Seja $C_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, portanto $C_* \uparrow B$ e $m\,B = \lim_n m\,C_n =$
$= \lim_n m\,(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \lim_n (mB_1 + \ldots + mB_n) = \sum_n m\,B_n$.
De um modo geral, para qualquer B_*, definimos C_* de modo análogo. $C_* \uparrow \bigcup_n B_n$ e então $m\,\bigcup_n B_n = \lim_n m\,C_n =$
$= \lim_n m(B_1 \cup \ldots \cup B_n) \leq \lim_n (mB_1 + \ldots + m\,B_n) = \sum_n m\,B_n \quad \Box$

2.29 DEFINIÇÃO: A função m da definição 2.22 é chamada a *medida de Lebesgue* na *topologia* O_σ das sequências abertas (determinada pelas sequências elementares).

Nós mostramos na verdade que a medida de Lebesgue no anel R_G das sequências elementares estende-se (via a definição 2.22) para uma medida na topologia gerada por este anel (definição 2.16), de modo único, isto é, qualquer outra função de conjuntos definida nesta topologia com as propriedades dadas pelos resultados 2.24, 2.25, 2.26, 2.27 e que associa ao $\emptyset$ o valor 0 coincide com a função m. (claro, na hipótese de que G é um elemento da topologia).

Esta topologia não é a topologia standard da reta. Mostraremos entretanto que a topologia standard D_S está contida nesta topologia D_G e que a medida de Lebesgue na topologia standard pode ser dada pela restrição da medida de Lebesgue em D_G a D_S.

Antes disso:

2.30 LEMA: No caso de $G \in D_G$, a medida m sobre D_G tem a seguinte propriedade: para todo $B_* \in D_G$ com $m\, B_* < \infty$ (isto é $mB_m < \infty$ para todo m) existe uma sequência dupla A_{*+} de subconjuntos de G com $G/A_{*+} \in D_G$ tal que para todo m tem-se que $A_{m*} \uparrow B_m$ e $\lim_n m\,(B_*/A_{mn}) = 0$.

Dem: existe para B_* uma sequência elementar dupla A_{*+} com $A_{m*} \uparrow B_m$, para todo m. Como $G \in D_G$ existe uma sequência elementar $G_* \uparrow G$. Portanto $G_+ / A_{/*/*}$ é uma sequência elementar dupla e daí $G/A_{*+} = \bigcup_k (G_k/A_{*+}) \in D_G$. Como $m\, B_m = \lim_n m\, A_{mn}$, segue que $\lim_n m(B_m/A_{*n}) = m\, B_m - \lim_n m\, A_{mn} = 0$. □

2.31 TEOREMA E DEFINIÇÃO: Seja $G = \bigcup_n]r_*, s_*[\subseteq \mathbb{R}$, com as sequências primárias r_*, s_* de pontos racionais. Seja D_S o conjunto de todas as sequências de conjuntos da forma $\bigcup_n]p_{*n}, q_{*n}[$, com as sequências p_{*+}, q_{*+} primárias cujos membros sejam subconjuntos de G. Então D_S é uma topologia, isto é tem as propriedades (1)-(5) de 2.18. D_S é chamada topologia standard (de G).

Dem: (1): vale por definição

(2): seja, para A(n) uma fórmula primária,

$$q_{mn} := \begin{cases} r_m \Leftrightarrow A(n) \\ \\ s_m \Leftrightarrow \neg A(n) \end{cases}$$

Então $\langle\{ x \in\in G: A(n)\}\rangle_n = \bigcup_*]q_{m*}, s_m p[\in O_S$.

(3)-(5): Sejam $U_{*n} =]p_{*n}, q_{*n}[$, $V_{*n} =]r_{*n}, s_{*n}[$,

$\mathcal{M}_* = \bigcup_n U_{*n}$, $\mathcal{N}_* = \bigcup_n V_{*n}$, então

$$\mathcal{M}_* \cap \mathcal{N}_* = \bigcup_{*n} ( ]p_{*m}, q_{*m}[\cap]r_{*n}, s_{*n}[ ) =$$

$$= \bigcup_{*n}]\sup (p_{*m}, r_{*n}), \inf (q_{*m}, s_{*n}) [=$$

$= \bigcup_k]\sup (p_{*i_k}, r_{*j_k}), \inf (q_{*i_k}, s_{*j_k})[\in O_S$. Consequentemente, sejam $W_{*,2_{n-1}} = U_{*n}$ e $W_{*,2n} = V_{*n}$. Então $\mathcal{M}_* \cup \mathcal{N}_* = \bigcup_* W_{*m} \in O_S$.

Finalmente $\bigcup_* \mathcal{M}_{k**} = \bigcup_{*n} U_{k** n} = \bigcup_\lambda U_{k*i_\lambda j_\lambda} \in O_S$ □

<u>2.32</u> <u>TEOREMA</u>: Seja $G \in O_S$, O_S a topologia standard em G e m a medida de Lebesgue no anel das sequências elementares. Então a função m definida sobre O_S por $m\,B = \lim_n m\,E_m$, onde E_* é uma sequência elementar tal que, $E_* \uparrow B$ e $B \in O_S$ é uma medida sobre O_S, e para cada $B_* \in O_S$ com $m\,B_* < \infty$, existe uma A_{*+} com $G/A_{*+} \in O_S$ tal que $A_{m*} \uparrow B_m$ e $\lim_n m\,(B_m / A_{mn}) = 0$.

<u>Dem</u>: para todo elemento de O_S tem-se que $\bigcup_*]p_{*m}, q_{*m}[=$
$= \bigcup_n [p_{*i_n} + 1/j_n , q_{*i_n} - 1/j_n] \in O_G$. Daí $O_S \subseteq O_G$ e assim $G \in O_G$. Portanto pelos resultados anteriores a medida de Lebesgue no anel das sequências elementares estende-se à medida de Lebesgue em O_G, a restrição desta medida a O_S é a medida m procurada.

Seja agora $B_* \in O_S$. Podemos escrever $B_* = \bigcup_n I_{*n} = \bigcup_n \bar{I}_{*n} =$
$= \bigcup_n (\bar{I}_{*1} \cup \ldots \cup \bar{I}_{*n})$, onde $I_{*+} =]p_{*+}, q_{*+}[$ e $\bar{I}_{*n} = [p_{*+}, q_{*+}]$.
Para $A_{*+} := \langle \bar{I}_{*1} \cup \ldots \cup \bar{I}_{*n}\rangle_{*n}$ tem-se que $A_{m*} \uparrow B_m$.
Mostraremos que $G/A_{*+} \in O_S$.
Seja $G = \bigcup_j J_j$ (onde $J_* =]r_*, s_*[$).

Então $G/A_{mn} = \bigcup_j (I_j / (\bar{I}_{m1} \cup \ldots \cup \bar{I}_{mn}))$. Cada membro desta união é representável como uma união finito de intervalos elementares abertos. Existe uma representação $I_j/(\bar{I}_{m1} \cup \ldots \cup \bar{I}_{mn}) = \bigcup_j K_{jmnj}$. Daí $G/A_{*+} = \bigcup_{ij} K_{i*+j} \in O_S$. Colocamos $E_{mn} = I_{m1} \cup \ldots \cup I_{mn}$; logo E_{*+} é uma sequência elementar e $E_{m*} \uparrow B_m$. Então $m\,B_m = \lim_n E_{mn}$, porisso, e como O_G contém O_S e todas as sequências elementares e $(B_m / A_{mn}) + E_{mn} \subseteq B_m$, temos que $m\,(B_m/A_{mn}) + m\,E_{mn} \leq m\,B_m$. Para $mB_m < \infty$ segue que $0 \leq m\,(B_m/A_{mn}) \leq mB_m - mE_{mn}$ e finalmente que $\lim_n m\,(B_m/A_{mn}) = 0$. □

<u>2.33.DEFINIÇÃO</u>: Se existir uma sequência elementar $G_* \uparrow G$ tal que $mG_* < \infty$, diremos que a medida de Lebesgue no anel das sequências elementares é <u>σ- finita</u>.

Anàlogamente define-se σ-finitude para a medida de Lebegue numa topologia, O_S ou O_G. A medida será <u>finita</u> em O_S ou O_G se $mG < \infty$.

<u>2.34 TEOREMA</u>: Se m é σ-finita no anel das sequências elementares então $G \in O_G$, portanto O_G tem a topologia gerada por este anel e m é estensível à medida de Lebesgue m em O_G. Além disso m em O_G é σ-finita, pois O_G contém todas as sequências elementares.

<u>2.35 TEOREMA</u>: Seja em 2.32, m finita, então a sua extensão para O_S é σ-finita.

<u>Dem</u>. Para $G = \bigcup_i I_i$; $G_n = \bigcup_{i \leq n} I_i$ e $G_* \uparrow G$, então

$mG_n \leq m\,\bar{I}_1 + \ldots + m\,\bar{I}_n \leq mI_1 + \ldots + m\,I_n < \infty$ □

<u>2.36</u> Sejam O uma topologia em G (O_S ou O_G). $A_* \in \bar{O} \Leftrightarrow G/A_* \in O$. Define-se anàlogamente $A \in \bar{O}$ e $A_{*+} \in \bar{O}$. Denotaremos por B, C, B_*, C_*, B_{*-}, C_{*+} elementos de O e por A, A_*, A_{*+} elementos de $\bar{O}$, chamados de conjuntos <u>fechados</u> ou sequências <u>fechadas</u>.

2.37 LEMA (a) $A_* / B_* \in \bar{O}$

(b) $B_* / A_* \in O$

(c) $A_* \cap A'_* \in \bar{O}$

(d) $A_* \cup A'_* \in \bar{O}$

(e) $\bigcap_n A_{k*n} \in \bar{O}$

Dem trivial □

2.38 Em virtude de 2.32 (para O_s) e 2.30 (para O_G) considerando $G \in O_s$ temos que m é uma medida σ-finita em O tal que para todo $B_* \in O$ com $mB_* < \infty$ existe $A_{*\perp} \in \bar{O}$ tal que para todo m tem-se que $A_{m*} \subseteq B_m$ e $\lim_{*} m\,(B_m / A_{mn}) = 0$. Estenderemos a medida m passo a passo até, finalmente uma medida sobre uma σ-álgebra contendo O.

2.39 DEFINIÇÃO: Um subconjunto $\mathcal{M}$ de G é limitado (not. l) quando existe um conjunto aberto B com $\mathcal{M} \subseteq B$ e $mB < \infty$. Um l-subconjunto $\mathcal{M}$ de G é (m-)mensurável ou um m-conjunto quando podemos aproximá-lo por fora por uma sequência $B_* \in O$ e por dentro por uma sequência $A_* \in \bar{O}$ tal que:

$\forall n \quad A_n \subseteq \mathcal{M} \subseteq B_n \quad \wedge \quad \lim_n m\,(B_n/A_n) = 0$

O par de sequência (A_*, B_*) é chamado uma (m-)armadura para $\mathcal{M}$ e seja $m\mathcal{M} := \inf_n mB_n$.

Esta definição ainda deve ser justificada. Devemos mostrar existência e unicidade: Sendo (A_*, B_*) uma armadura para $\mathcal{M}$, então $mB_* \in [0,\infty]^{\mathbb{N}}$, e então existe $m\,\mathcal{M} \in [0,\infty]$ - unicidade: $\inf_n m\,B_*$ não depende da particular armadura. Estas coisas são mostradas na demonstração do seguinte teorema:

2.40 TEOREMA: Para l-m-conjuntos tem-se: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow m\mathcal{M} \leq m\mathcal{N}$

Dem: Seja (A_*, B_*) uma armadura para $\mathcal{M}$ e (A'_*, B'_*) uma armadura para $\mathcal{N}$. Tem-se então, para todo m,n:

$A_n \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq B'_n$

$B_n \subseteq (B_n/A_n) \cup B'_n$

$m\mathcal{M} = \inf_k mB_k \leq m\,(B_k / A_k) + m\,B'_n$

$$m\mathcal{A} \le \lim_n m(B_n/A_n) + m B'_n = 0 + mB'_n$$

$$m\mathcal{A} \le \inf_n B'_n = m\,\mathcal{N} \quad \square$$

(portanto se $\mathcal{A}=\mathcal{N}$ tem-se que $\lim_n m B_n = \lim_n m B'_n$)

<u>2.41</u> <u>TEOREMA</u>: Todo 1-conjunto aberto B é mensurável, e sua nova medida coincide com a antiga.

<u>Dem</u>. de 2.38 B tem (A_*, B) como armadura $\square$

<u>2.42</u> <u>TEOREMA</u>: Para 1-m-conjuntos : $m\mathcal{A} = \inf_{B \supseteq \mathcal{A}} mB < \infty$. $m\mathcal{A}$ é o supremo de todos os elementos de $[0,\infty[$ que são menores ou iguais a mB, para todo $B \in O$ com $\mathcal{A} \subseteq B$.

<u>Dem</u>: de 2.40 e 2.41 tem-se que $\forall B \supseteq \mathcal{A}$ $m\mathcal{A} \le mB$. Agora, caso seja (A_*, B_*) uma armadura para $\mathcal{A}$:

$\forall\, \xi\ \forall B \supseteq \mathcal{A}: \xi \le mB \Rightarrow \forall n: \xi \le mB_n \Rightarrow \xi \le m\mathcal{A}$ $\square$

<u>2.43 LEMA</u>: Para conjuntos abertos B, C e 1-m-conjunto $\mathcal{A}$: $B \subseteq \mathcal{A} \cup C \Rightarrow mB \le m\mathcal{A} + mC$

<u>Dem</u>: Seja $B \subseteq \mathcal{A} \cup C$. Para todo $D \in O$ com $D \supseteq \mathcal{A}$: $B \subseteq D \cup C \in O$, daí $mB \le mD + mC$. Para $mC < \infty$: $mB - mC \le mD$. Portanto $mB - mC \le m\mathcal{A}$. Daí $mB \le m\mathcal{A} + mC$, A desigualdade evidentemente vale para $mC = \infty$ $\square$

<u>2.44 LEMA</u>: Seja (A_*, B_*) uma armadura para o 1-conjunto $\mathcal{A}$, então $m\mathcal{A} = \lim_n mB_n$.

Dem Quando $A_n \subseteq \mathcal{M} \subseteq B_n$ tem-se que $\mathcal{M} \subseteq B_n \subseteq \mathcal{M} \cup (B_n/A_n)$, daí (do lema anterior)

$m\mathcal{M} \leq mB_n \leq m\mathcal{M} + m(B_n / A_n)$ para todo n. Para

n suficientemente grande $m(B_n / A_n) < \epsilon$.

Portanto $| mB_n - m\mathcal{M} | < \epsilon$ □

2.45 TEOREMA: Sejam $\mathcal{M}$ $\mathcal{N}$ 1-m-conjuntos, então o são $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ e tem-se que $m(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) + m(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = m\mathcal{M} + m\mathcal{N}$. Portanto:

$m(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \leq m\mathcal{M} + m\mathcal{N}$

$m(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = m\mathcal{M} + m\mathcal{N}$ se $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$

Dem: Seja (A_*, B_*) uma armadura para $\mathcal{M}$ e (A'_*, B'_*) uma armadura para $\mathcal{N}$. Então tem-se $A_n \cup A'_n \subseteq \mathcal{M} \cup \mathcal{N} \subseteq B_n \cup B'_n$ e

$A_n \cap A'_n \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subseteq B_n \cap B'_n$, $\forall$ n. Mostraremos que

$\lim_n m((B_m \cup B'_n) /(A_n \cup A'_n)) = 0$, e daí a mensurabilidade do 1-conjunto $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$.

$0 \leq m[(B_m \cup B'_m) /(A_m \cup A'_m)] \leq m((B_n/A_n) \cup (B'_n/A'_n)) \leq$

$\leq m(B_n/A_n) + m(B'_n/A'_n) < \epsilon$, para n suficientemente grande

Análogamente mostra-se que $(A_* \cap A'_*, B_* \cap B'_*)$ é uma armadura para $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Das demonstrações segue que:

$m(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) + m(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \lim_n (m(B_n \cup B'_n) + m(B_n \cap B'_n)) =$

$= \lim_n (mB_n + mB'_n) = m\mathcal{M} + m\mathcal{N}$ □

2.46 TEOREMA: Sejam $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ 1-m-conjuntos, então também o é $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.

Dem: Se (A_*, B_*) e (A'_n, B'_*) são respectivamente armaduras para $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, mostraremos que $(A_*/B'_*, B_*/A'_*)$ é uma armadura para $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.

$\forall n$: $A_n/B'_n \subseteq \mathcal{M}/\mathcal{N} \subseteq B_n/A'_n$. Portanto

$0 \leq m((B_n/A'_n) / (A_n/B'_n)) \leq m((B_n/A_n) \cup (B'_n/A'_n)) \leq$

$\leq m(B_n / A_n) + m(B'_n/A'_n) < \epsilon$. para n suficientemente grande □

De 2.46 segue que todo 1-conjunto fechado A é mensurável, pois se $A \subseteq B$ então $A = B/(B/A)$ e $B/A \in \mathcal{O}$.

2.47 DEFINIÇÃO: Uma seqüência $\mathcal{M}_*$ de 1-subconjuntos de G chama-se (m)-mensurável ou m-sequência, quando sequências duplas $A_{*+} \in \bar{O}$ e $B_{*+} \in O$ existem tal que (A_{m*}, B_{m*}) para todo m é uma armadura de $\mathcal{M}_m$. Então chamamos (A_{*+}, B_{*+}) uma armadura para $\mathcal{M}_*$

Seja $\mathcal{M}_*$ uma sequência de l-conjuntos mensuráveis, então $\forall m \ \exists A_*, B_* \ . \ (A_*, B_*)$ é uma armadura para $\mathcal{M}_m$, custo não podemos concluir que $\exists \ A_{*+}, B_{*+} \ \forall m \ (A_{m*}, B_{m*})$ sejam uma armadura para $\mathcal{M}_m$, e concluir daí a mensurabilidade de $\mathcal{M}_*$. Esta conclusão demanda o uso do "axioma da escolha", que não está à nossa disposição.

2.48 TEOREMA: Seja $\mathcal{M}_*$ uma m-sequência de l-conjuntos, então $m\mathcal{M}_* \in [0,\infty[^{\mathbb{N}}$

Dem: Seja (A_{n*+}, B_{n*+}) uma armadura para $\mathcal{M}_*$, então $mB_* \in [0,\infty]^{\mathbb{N}}$ e daí $mB_{n*+} \in [0,\infty]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Da limitação dos conjuntos $\mathcal{M}_m$ segue que $m\mathcal{M}_* = \inf_n mB_{n*+} \in [0, \infty[^{\mathbb{N}}$ □

2.49 TEOREMA: Sejam $\mathcal{M}_*$ e $\mathcal{N}_*$ m-sequências com l-membros, então o são também $\mathcal{M}_* \cup \mathcal{N}_*$, $\mathcal{M}_* \cap \mathcal{N}_*$ e $\mathcal{M}_* / \mathcal{N}_*$. São também mensuráveis todas as sequências $B_* \in O$ com l-membros.

Dem: análoga ao caso de m-conjuntos □

2.50 LEMA: Uma sequência $\mathcal{M}_*$ de l- conjuntos é mensurável se, e só se, existem sequências duplas $B_{*+}, C_{*+} \in O$ tal que

(1) $\forall m,n \ (C_{mn} \cup \mathcal{M}_m = B_{mn}) \wedge \forall m \ \lim_n mC_{mn} = 0$. De (1) segue que $m\mathcal{M}_* = \lim_n m B_{*n} = \inf_n m B_{*n}$

Dem: Seja (A_{*+}, B_{*+}) uma armadura para $\mathcal{M}_*$ e $C_{*+} = B_{*+}/A_{*+}$

Suponha agora (1) com B_{h*+}, C_{h*+} em lugar de B_{*+}, C_{*+}.

Queremos um $A_* \in \bar{O}$ tal que (A_{h*+}, B_{k*+}) seja uma armadura para $\mathcal{M}_*$. Para todo m e quase todo n: $mB_{hmn} \leq m\mathcal{M}_m + mC_{hmn} < \infty$

Daí existe uma sequência de naturais k_* com $m B_{h_{k*}*n} < \infty$ para todo m,n daí $mB_* < \infty$. De 2.39 B_* tem uma armadura (A_{*+}, B_*). Para todo k,n $A_{kn}'' \subseteq B_k$ e $\lim_n m(B_k / A_{kn}'') = 0$

Da definição de medida em topologia, existe

$n_k = \min\{n: m(B_k/A''_{kn}) < 1/k\}$. Para $A'_k := A''_{kn_k}$ tem-se que $A'_k \subseteq B'_k$ $m(B_k/A'_k) < 1/k$. Seja $A_k := A'_k/C_k$. Então $A_k \subseteq B_k/C_k \subseteq \mathcal{A}_m$ para $k = h_{mn}$, $A_{h_{**}} \subseteq \mathcal{A}_m$ para todo m n.

Dai $B_k/A_k = B_k/(A'_k/C_k) = (B_k/A'_k) \cup (B_k \cap C_k) = (B_k/A'_k) \cup C_k$.

Donde $0 \leq m(B_k/A_k) \leq m(B_k/A'_k) + mC_k \leq 1/k + mC_k < \epsilon$ para $k = h_{mn}$ e n suficientemente grande. Portanto $\lim_n m(B_{h_{*n}}/A_{h_{*n}}) = 0$ □

<u>2.51</u> <u>TEOREMA</u>: Para toda m-sequência $\mathcal{A}_*$ e todo $k_{*+} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $\bigcup_m \mathcal{A}_{k_{**}}$ é mensurável, no caso de todo membro $\bigcup_* \mathcal{A}_{k_{1*}}$ dessa sequência for 1-conjunto. Se em particular $\bigcup_* \mathcal{A}_*$ é limitado, tem-se:

(a) $m \bigcup_* \mathcal{A}_* = \lim_* m\mathcal{A}_*$ se $\mathcal{A}_*$ é crescente

(b) $m \bigcup_n \mathcal{A}_* \leq \sum_* m\mathcal{A}_*$

(c) $m\sum_* \mathcal{A}_* = \sum_* m\mathcal{A}_*$ se $\mathcal{A}_*$ é separável.

<u>Dem</u>: demonstraremos primeiramente a mensurabilidade de $\bigcup_* \mathcal{A}_{k_{**}}$.

Da hipótese e 2.50 existem sequências duplas $B^0_{*+}, C^0_{*+} \in D$ tal que: $C^0_{k*} \cup \mathcal{A}_k = B^0_{k*}$, $\lim_* mC^0_{k*} = 0$. Seja $m_{kn} = \min\{m: mC^0_{km} \leq 1/n.2^k\}$

$B_{kn} := B^0_{km_{kn}}$, $C_{kn} := C^0_{km_{kn}}$. Tem-se então

(1) $C_{kn} \cup \mathcal{A}_k = B_{kn}$, $m\,C_{kn} < 1/n.2^k$.

De $B^1_{1n} := \bigcup_* B_{k_{1*}n}$, $C^1_{1n} = \bigcup_* C_{k_{1*}n}$, segue-se que

$C^1_{1n} \bigcup_* \mathcal{A}_{k_{1*}} = B^1_{1n}$, $0 \leq mC^1_{1n} \leq \sum_* mC_{k_{1*}n} \leq \sum_k mC_{kn} \leq \sum_k 1/n.2^k = 1/n$

De 2.50 temos a mensurabilidade de $\bigcup_* \mathcal{A}_{k_{**}}$.

Mostraremos agora (a) Seja $\mathcal{A}_*$ crescente e seja em particular $k_{1m} = m$, daí $\mathcal{A} := \bigcup_* \mathcal{A}_*$, $B_n := \bigcup_* B_{mn}$, $C_n = \bigcup_* C_{mn}$.

Da dem: $C_n \cup \mathcal{A} = B_n$ $mC_n \leq 1/n$. Portanto $mB_n \leq$

$\leq m\mathcal{A} + mC_n \leq m\mathcal{A} + 1/n < \infty$. Para todo m, n tem-se de (1), para $\mathcal{A}_*$ crescente, $\mathcal{A}/\mathcal{A}_* \subseteq B_n/\mathcal{A}_m \subseteq (B_n / (B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn})) \cup$

$\cup ((B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn}))/\mathcal{A}_m) \subseteq (B_n/(B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn})) \cup C_{1n} \cup \ldots \cup C_{mn} \subseteq$

$\subseteq (B_n/(B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn})) \cup C_n$ daí

$0 \leq m\mathcal{A} - m\mathcal{A}_m = m(\mathcal{A}/\mathcal{A}_m) \leq m(B_n - m(B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn}) + 1/n \leq$

$\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ para $n \geq 2/\epsilon$ e m suficientemente grande.

(b) e (c) demonstram-se de (a). □

Em virtude do pressuposto em 2.38, existe uma sequência

$G_* \in \mathcal{D}$ com $G_* \cdot G$ e $mG_* < \infty$. Fixamos G_* e definimos:

<u>2.52</u> <u>DEFINIÇÃO</u>: Um conjunto <u>não limitado</u> $\mathcal{M} \subseteq G$ é <u>(m-)mensurável</u>, <u>ou um m-conjunto</u> quando a sequência $\mathcal{M} \cap G_*$ é mensurável. Seja

$m\,\mathcal{M} = \sup_n m(\mathcal{M} \cap G_n)$ (= $\lim_n m(\mathcal{M} \cap G_n)$).

Uma <u>sequência</u> de subconjuntos de G não exclusivamente limitados chama-se <u>m-mensurável</u> ou uma <u>m-sequência</u> quando $\mathcal{M}_{i_*} \cap G_{j_*}$ é mensurável.

Para 1-conjuntos e sequências de 1-conjuntos tem-se análogos: Sejam todos os $\mathcal{M}_m$ limitados e $\mathcal{M}_{i_*} \cap G_{j_*}$ mensurável, então o é também $\mathcal{M}_* = \cup(\mathcal{M}_* \cap G_*) = \bigcup_n(\mathcal{M}_{i_{h_{*n}}} \cap G_{j_{h_{*n}}}$. De 2.49 todo elemento B_* de $\mathcal{D}$ é mensurável e para todo conjunto aberto B não-limitado sua nova medida $mB = \infty$. De 2.48 existe $m\mathcal{M} = \sup_n m(\mathcal{M} \cap G_n)$ para toda m-sequência $\mathcal{M}$. Tem-se que :

<u>2.53</u> <u>TEOREMA</u>: Para m-sequência $\mathcal{M}_*$: $m\mathcal{M}_* \in [0,\infty]^{\mathbb{N}}$.

<u>Dem</u>: análoga a de 2.48 $\square$

As m-sequências formam uma σ-álgebra no sentido da seguinte definição:

<u>2.54</u> <u>DEFINIÇÃO</u>: Uma σ-álgebra em um conjunto G é um conjunto ϑ de sequencias de conjuntos tal que , para toda sequência de conjuntos $\mathcal{M}_*$, $\mathcal{N}_*$, toda sequência de números naturais k_{*1} e toda fórmula A(n) tem-se:

(a) $\mathcal{M}_* \in \vartheta \Rightarrow \forall n\ \mathcal{M}_n \subseteq G$

(b) $\langle \{x \in G : A(n)\} \rangle_n \in \vartheta$

(c) $\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_* \in \vartheta \Rightarrow \mathcal{M}_* / \mathcal{N}_* \in \vartheta$

(d) $\mathcal{M}_* \in \vartheta \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{M}_{k_{*n}} \in \vartheta$

not. $\mathcal{M} \in \vartheta$ para $\langle \mathcal{M} \rangle_n \in \vartheta$

<u>consequencia</u> 1) $\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_* \in \vartheta \Rightarrow \mathcal{M}_* \cap \mathcal{N}_*, \mathcal{M}_* \cup \mathcal{N}_* \in \vartheta$ (pois, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{M}/(\mathcal{M}/\mathcal{N})$ e $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = G/[(G/\mathcal{M}) \cap (G/\mathcal{N})]$)

$\mathcal{M}_* \in \vartheta \underset{(d)}{\Rightarrow} \bigcup_n \mathcal{M}_n \in \vartheta$, $\mathcal{M}_{k_*} \in \vartheta$, $\mathcal{M}_n \in \vartheta$, para todo n, e $\bigcap_n \mathcal{M}_{k_{*n}} \in \vartheta$.

2) ϑ é uma σ-álgebra $\Leftrightarrow$ ϑ é uma anel e ϑ é uma topologia.

3) $\mathcal{M} \in \vartheta \Rightarrow \bigcap_{*<n_*} \mathcal{M}_{k_{*n}} \in \vartheta$.

2.55 <u>COLORÁRIO E DEFINIÇÃO:</u> De 2.38 segue que: As m-sequências formam uma σ-álgebra em G, que contém D. Denotamo-la por $\vartheta(m)$. m estende-se de modo único a uma medida sobre a σ-álgebra $\vartheta(m)$.

<u>Dem</u>: (a) trivial

(b) $\langle \{x \in G : A(i_k) \cap G_{jk}\} \rangle_k$ é como elemento de G mensurável

(c) e (d) seguem de 2.49 e 2.51 com $(\mathcal{M}_{i*} / \mathcal{N}_{i*}) \cap G_{j*} =$
$= (\mathcal{M}_{i*} \cap G_{j*}) / (\mathcal{N}_{i*} \cap G_{j*})$ e $\bigcup_* \mathcal{M}_{k_{i**}} \cap G_{j*} = \bigcup_* (\mathcal{M}_{i_{n**}} \cap G_{j_{n**}})$
para $n_{*m} = k_{k_{i*}*j*}$.

Ademais $D \subseteq \vartheta(m)$

Mostraremos que m é uma <u>medida</u> sobre $\vartheta(m)$

(i) $m\, \emptyset = 0$

(ii) $2.53 \Rightarrow m\mathcal{M}_* \in [0, \infty]^{\mathbb{N}}$ para $\mathcal{M}_* \in \vartheta$

(iii) agora sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \vartheta(m)$ e $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, 2,52 e 2,45 $\Rightarrow$
$\Rightarrow m(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \lim_n [(\mathcal{M}+\mathcal{N}) \cap G_n] =$
$= \lim_n [\, m(\mathcal{M} \cap G_n) + m(\mathcal{N} \cap G_n)\,] = m\mathcal{M} + m\mathcal{N}$.

(iv) para $\mathcal{M}_* \in \vartheta(m)$ e $\mathcal{M}_* \uparrow \mathcal{M}$, 2.52 e 2.51 $\Rightarrow$
$\Rightarrow m\mathcal{M} = \sup_n m(\mathcal{M} \cap G_n) = \sup_n \sup_* m(\mathcal{M}_m \cap G_n) =$
$= \sup_* \sup_n m(\mathcal{M}_m \cap G_n) = \sup_* m\, \mathcal{M}_m$. □

Agora, que a medida m tem uma <u>única</u> extensão para $\vartheta(m)$: seja ψ qualquer extensão então $\psi\mathcal{M} = \inf_n m\, B_n$ de 2.39 e $\psi\mathcal{M} = \sup_n m(\mathcal{M} \cap G_n)$ de 2.52.

2.56 <u>TEOREMA</u>: A medida m na σ-álgebra dos m-conjuntos é invariante por translação.

<u>Dem</u>: Seja $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$: $\mathcal{M} + c = \{x : x - c \in \mathcal{M}\}$

Se $\mathcal{M}$ é um intervalo $[a, b[$, então $\mathcal{M} + c$ é um intervalo

$\mathcal{A} + c = [\, a + c, b + c \,[$. $m(\mathcal{A} + c) = (b + c) - (a + c) =$

$= b - a = m\, \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ é um domínio aberto: $\mathcal{A} = \sum_n I_n$ então $\mathcal{A} + c = \sum_n (I_n + c)$

e o resultado segue por σ-aditividade.

Seja $\mathcal{A}_*$ uma sequência mensurável e $G_n =]-n,n[$, então $\mathcal{A}_{i*} \cap G_{j*}$

é uma sequência mensurável de I-conjuntos com uma

armadura (A_{*+}, B_{*+}). Então $(A_{*+} + c, B_{*+} + c)$ é uma

armadura para $(\mathcal{A}_{i*} \cap G_{j*}) + c$. Daí segue a mensurabilidade

de $\mathcal{A}_* + c$.

Para $\mathcal{A}$ mensurável, quando (A_{*+}, B_{*+}) é uma armadura para

$\mathcal{A} \cap G_*$ temos:

$m(\mathcal{A} + c) = \sup_m m((\mathcal{A} \cap G_n) + c) = \sup_m \inf_n m(B_{mn} + c) =$

$= \sup_m \inf_n m\, B_{mn} = \sup_m m(\mathcal{A} + G_n) = m\, \mathcal{A}$ □

BIBLIOGRAFIA

[1] Bennett, J. : La Critica de la Razón Pura de Kant
1. La Analitica, Alianza Ed., Madrid, 1979.

[2] Beth, E.W. : "Remarks on Intuitionistic Logic ", in Constructivity in Mathematics, A.Heyting (ed.), North-Holland, Amesterdam, 1959.

[3] ---------- : The Foundations of Mathematics,

[4] Bochénsky, I.M. : A History of Formal Logic, Chelsea Publ Company, N.Y.1970.

[5] Chihara, C. : Ontology and the Vicious Circole Principle, Cornell U. Press, 1973.

[6] Dedekind, R.: Essays on the Theory of Numbers, Dover, N.Y., 1963.

[7] de Moura, C.A.R. : Critica da Razão na Fenomenologia, EDUSP, Nova Stella, S.P.,1989.

[8] de Muralt,A. : L'Ideé de la Phénoménologie, PUF, Paris, 1958.

[9] de Ruggiero, G. : Sumário de História de la Filosofia, Ed. Claridad, B.A., 1948.

[10] de Waelhens, A. : Phénoménologie et Vérité, PUF, Paris, 1953.

[11] Dummett,M. : "THe Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", inTruth and Other Enigmas, Hanward U. Press, 1980.

[12] Feferman,S. : "Systems of Predicative Analysis", J S L 29 (1964).

[13] Gödel, K. : "Russell's Mathematical Logic", in P.A. Schilpp (ed.)The Philosophy of Bertrand Russell, tudor Publ. Company, N.Y.

[14] Grzegorczyk, A. : "Elementary Definable Analysis", Fund. Math. t.41, 1955.

[15] Hazen, A. : "Predicative Logics ", inHandbook of Philosophical Logic, vol. I, 331-407.

[16] Heyting, A. : "Some Remarks on Intuitionism", in Constantctivity in Mathematics, A. Heyting (ed.), Norht Holland, Amsterdam, 1959.

[17] Husserl, E. : Logique Formelle et Logique Transcendantale, PUF, Paris, 1957.

[18] ________ : Fenomenologia de la Concienca Del Tiempo Immanente, Ed. Nova Buenos Aires, B. A., 1959.

[19] ________ : L'Origine de Gémétrie, PUF, Paris, 1962.

[20] ________ : Idéas - General Introduction to Pure Phenomenology, Collier - MacMillan, Londres, 1972.

[21] ________ : Investigaciones Lógicas, Alianza Ed. Madrid, 1982.

[22] ________ : A Idéia da Fenomenologia, Edições 70, Lisboa, 1986.

[23] Kant, I. : Prolégomènes a Toute Métaphisique Future, L.Ph.J. Vrin, Paris, 1941.

[24] _____ : Logique, L. Ph. J. Vrin, Paris, 1982.

[25] _____ : Crítica da Razão Pura, Ed. Fundação Calouste Gulbenkain, Lisboa, 1985.

[26] Kneale, W. e Kneale, M. : O desenvolvimento da Lógica, Ed. Fundação Calouste Gullbenkian, Lisboa, 1980.

[27] Kreisel, G. : "La Prédicativité ", Bull. Soc. Math. France 88 (1960).

[28] Lorenzen, P. : Differential and Integral, U. of Texas Pres, Austin, 1971.

[29] Nelson, E. : Predicative Arithmetic, Princeton U. Press, N.J., 1986

[30] Poincaré, H. : Últimos Pensamentos, Garnier, R.J., 1924.

[31] _________ : Science et Méthode, Flammarion, Paris, 1927.

[32] _________ : LaScience et l'Hypothése, Flammarion, Paris, 1943.

[33] _________ : La Valeur de la Science, Flammarion, Paris, 1970.

[34] Troelstra, A. S., Principles of Intuitionism, Spring-Verlag, 1969.

[35] van Heijenoort, J. (ed.) : From Frege to Godel, Havard U. Press, 1977.

[36] Vuillemin, J. : Phisique et Métaphysique Kantiennes, PUF, Paris, 1955.

[37] Wang, H. "The Formalization of Mathematics ", J S L 19 (1954).

[38] Weyl, H. : Das Kontinuum, Dé Gruyter, Leipig, 1918; trad. it. Il Continuo, Bibliopolis, Nápoles, 1977.

[39] ______ : Philosophy of Mathematics and Natural Science, Athemeum, N.Y., 1963.

[40] Zahar, E. : "Les Fondements des Mathématiques d'aprés Poincaré et Russell", Fund. Scientiae, vol.8 n.9.

[41] Zahn, P. : Ein Konstruktiver Weg zur Masstheorie und Funktionalanalysis, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.

[42] Zweig, A. (ed.) : Kant - Philosophical Correspondence 1759 - 99, The U. of Chicago Press, 1967.