COSME DAMIÃO BASTOS MASSI

PROVAS DE NORMALIZAÇÃO PARA A LÓGICA CLÁSSICA

Tese de doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas .

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 11/12/1990.

Orientador

OUTUBRO DE 1990

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Carlos P.D. Pereira, que soube me orientar com segurança e firmeza;

Ao Prof. José Alexandre D. Guerzoni, por suas valiosas sugestões;

Ao Prof. Lauro Frederico B. da Silveira, pela revisão do texto;

À UNESP, e em particular, ao Departamento de Filosofia do Campus de Marília, pela concessão do meu afastamento que viabilizou a realização deste trabalho.

À minha esposa Sônia,

À minha filha Juliana,

Ao meu amigo Sílvio S. Chibeni .

S U M Á R I O

I N T R O D U Ç Ã O

Em teoria da prova, temos três tipos de resultados fundamentais sobre a forma que derivações pertencentes a um sistema formal $\mathbb{S}$ podem assumir :

[I] Teorema da Forma Normal - Toda derivação em $\mathbb{S}$ possui uma forma normal;

[II] Teorema de Normalização (Fraca) - Dada uma derivação em $\mathbb{S}$, podemos efetivamente obter sua forma normal, através de certas operações chamadas de reduções;

[III] Teorema de Normalização (Forte) - Dada uma derivação em $\mathbb{S}$, sua forma normal é única e sempre pode ser obtida após um número finito de reduções, independentemente da ordem em que as mesmas são aplicadas.

A distinção entre " Teorema da Forma Normal " e "Teoremas de Normalização " foi introduzida por Kreisel [6] . Prawitz [13],usa a terminologia "fraca" e "forte" para os teoremas de normalização

Se denotarmos por $\mathbb{C}$ a formulação em Dedução Natural da Lógica Clássica de primeira ordem com todos os operadores lógicos (Prawitz [12]), é bem sabido que temos resultados de normalização "fraca" e "forte" para o fragmento $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ que contêm os operadores $\wedge, \forall$, $\supset$, $\neg$. Normalização (fraca) para $\mathbb{C}'$ pode ser obtida da seguinte maneira :

Seja Π uma derivação em $\mathbb{C}'$. Então Π pode ser efetivamente transformada em uma derivação Π' tal que:

(i) Toda aplicação da regra do absurdo clássico tem consequência atômica;

(ii) Π' está na forma normal.

Em Prawitz [12], encontramos a afirmação de que o teorema de normalização fraca é válido para $\mathbb{C}$. Em 1968, Prawitz & Malmmas

[15],assumem explicitamente um teorema de normalização para o sistema completo $\mathbb{C}$, mas nenhuma prova é fornecida. A primeira prova de normalização para $\mathbb{C}$, datada de 1974, é devida a Richard Statman [16]. Statman não oferece uma prova direta deste resultado. Ele utiliza um conceito modificado de forma normal , onde é permitido aplicações do absurdo clássico cujas conclusões não são premissas maiores de regras de eliminação. A prova é obtida através da imersão da lógica clássica de segunda ordem em um outro sistema.

Em 1980, N. Tenant [18] propõe uma prova direta do mesmo resultado, mas infelizmente havia uma falha em sua prova. Em particular, a proposição enunciada no parágrafo 4 , p. 195 , está incorreta.

Tradicionalmente, as provas de normalização forte são obtidas usando as seguintes idéias:

(a) Define-se uma propriedade $\mathbb{P}$,aplicável às derivações Π de um dado sistema formal $\mathbb{S}$;

(b) Prova-se que $\mathbb{P}$ é mais forte que normalização forte (NF), isto é, $\forall\Pi\ (\ \mathbb{P}(\Pi) \rightarrow NF(\Pi)\ )$;

(c) Por fim, mostra-se que $\forall\Pi\ \mathbb{P}(\Pi)$.

Aparecem na literatura diversas propriedades $\mathbb{P}$. Por exemplo:

Prawitz - " Strong Validity "

Tait - " Convertibility "

Jervell - " Regularity "

Leivant - " Stability "

Martin-Löf - " Computability "

Girard - " Candidat de Réductibilité "

Tem sido assinalado que a fraqueza deste tipo de prova, às vezes chamada de "Prova Semântica ", reside no fato de que o processo combinatório envolvido na construção das Sequências de Redução, fica embutido na definição da propriedade $\mathbb{P}$, tornando-se difícil recapturar algumas propriedades combinatórias importantes, tais como um limite para o comprimento das sequências de redução ou para o comprimento das derivações normais. Recentemente , provas "sintáticas" foram apresentadas evitando tal situação. Algumas dessas provas usam como modelos para os termos certas funções (veja Gandy [1]), enquanto outras constroem um mapeamento em sequências de redução de um sistema auxiliar que satisfaz normalização forte (Girard [3], Pereira [11] e Massi [9]) .

Outro método de se obter normalização forte ,sugerido pelo Prof. Per Martin-Löf, consiste em usar a idéia de que se a pior sequência de reduções termina, então todas as sequências de reduções terminam em uma única forma normal.

O objetivo da presente tese é fornecer provas de normalização para a Lógica Clássica de primeira ordem, usando algumas das idéias que foram apresentadas acima.

No capítulo III, fornecemos uma prova direta do teorema de normalização simples para o sistema completo $\mathbb{C}$ [1], e no capítulo IV ,uma outra prova via "Cálculo dos Sequentes" .

Três provas de normalização forte são apresentadas :

(a) " Prova Semântica " de normalização forte para o sistema

---

[1] O mesmo resultado foi obtido independentemente por Gunnar Stålmarck, da Universidade de Estocolmo, usando uma técnica ligeiramente diferente.

completo $\mathbb{C}$, usando o conceito de "Strong Validity " de Prawitz (cap. V) ;

(b) Prova "Sintática " de normalização forte para o sistema completo $\mathbb{C}$, usando a técnica de Girard (cap. VI) ;

(c) Prova de normalização forte para o sistema $\mathbb{C}'$ via " <u>Pior Sequência de Reduções</u> "(cap. VII) .

CAPÍTULO I

D E D U Ç Ã O   N A T U R A L

Neste capítulo, apresentaremos o Sistema de Dedução Natural $\mathbb{C}$, para a Lógica Clássica de primeira ordem com todos os operadores lógicos.

O Sistema $\mathbb{C}$ que é, em essência , do tipo introduzido por Gentzen [2] , encontra-se definido em Prawitz [12]. Com uma diferença: apresentaremos um conceito modificado de forma normal.

(I) **A LINGUAGEM DE $\mathbb{C}$**

Sua linguagem é a usual da Lógica Clássica de primeira ordem. Em particular, contém:

(a) Parâmetros no lugar de variáveis livres. Variáveis são sempre ligadas ;

(b) Uma constante lógica ($\perp$), para a falsidade. A negação ($\neg$) é definida por $\neg A \equiv (A \supset \perp)$.

Usaremos os seguintes símbolos, como constantes lógicas : $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\supset$ (implicação), $\forall$ (quantificador universal), $\exists$ (quantificador existencial) .

(II) **REGRAS DE INFERÊNCIA E DERIVAÇÕES**

As regras de inferência, consistem em regras de introdução (I) e regras de eliminação (E), para cada constante lógica, com exceção do $\perp$. Elas são indicadas pelas figuras abaixo:

(Uma fórmula escrita entre colchetes e acima de uma premissa, indica que as suposições desta forma , que ocorrem acima da premissa, são eliminadas na regra de inferência)

$\wedge$ - I

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$\wedge$ - E

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad , \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

$\vee$ - I

$$\frac{A}{A \vee B} \quad , \quad \frac{B}{A \vee B}$$

$\vee$ - E

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C}$$

$\supset$ - I

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \supset B}$$

$\supset$ - E

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$\forall$ - I

$$\frac{A(a)}{\forall x A(x)}$$

$\forall$ - E

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

$\exists$ - I

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

$\exists$ - E

$$\frac{\exists x A(x) \quad \begin{matrix}[A(a)] \\ B\end{matrix}}{B}$$

Regra do absurdo clássico ($\perp_c$) :

$$\frac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \perp\end{matrix}}{A}$$

Como um caso especial desta regra, temos a regra do absurdo intuicionista ($\perp_I$):

$$\frac{\perp}{A}$$

Restrição para a regra $\forall$ - I : o parâmetro a não deve ocorrer em qualquer suposição da qual a premissa depende.

Restrição para a regra $\exists$ - E : o parâmetro a não deve ocorrer em $\exists x A(x)$, em B ou qualquer outra suposição, diferente de $A(a)$, da qual B depende.

Restrição para a regra $\perp_c$: A deve ser diferente de $\perp$ e não pode ter a forma $B \supset \perp$.

Nas regras de eliminação acima, a premissa que contém a constante lógica é denominada premissa maior . As outras , quando existem, são chamadas premissas menores.

O parâmetro a que aparece nas regras $\forall$ - I e $\exists$ - E, é chamado parâmetro próprio da regra .

Assumiremos, de acordo com Prawitz [12] , os resultados sobre parâmetros próprios :

(a) Um parâmetro em uma derivação, é um parâmetro próprio de apenas uma regra de inferência;

(b) O parâmetro próprio de uma regra $\forall$ - I , ocorre somente acima da conclusão da regra ;

(c) O parâmetro próprio de uma regra $\exists$ - E , ocorre somente acima da premissa menor da regra .

As derivações em $\mathbb{C}$ são escritas na forma de árvores. As fórmulas do topo da árvore são as suposições ,e as outras fórmulas da árvore são obtidas das que estão imediatamente acima, por uma das regras de inferência.

Uma suposição em uma derivação é chamada aberta, se ela não foi eliminada por qualquer regra de inferência na derivação. Caso contrário, é chamada fechada .Marca-se com numerais, as suposições eliminadas (fechadas), escrevendo o mesmo numeral na regra de inferência que as eliminou. As suposições são , também, chamadas top-fórmulas .

(II.1) Usaremos as seguintes convenções :

(a) As letras gregas Π e Σ , com ou sem índices, denotarão derivações e/ou sequências de derivações (incluindo a sequência vazia) em $\mathbb{C}$.

(b) $\begin{matrix}\Pi \\ A\end{matrix}$ denota uma derivação, cuja fórmula final é A .

(c) $\dfrac{\Pi_1 \; \Pi_2 \; \ldots . \Pi_n}{A}$ denota uma derivação, cujas subderivações imediatas são Π_1 , Π_2 ,......,Π_n , e A é a fórmula final .

(d) $r(\Pi)$ denota a última regra de inferência em Π .

(e) $\begin{matrix}\Gamma \\ \Pi\end{matrix}$ denota uma derivação Π que tem Γ como o conjunto de suas top-fórmulas.

(f) $\begin{matrix}\dfrac{\Sigma}{\Gamma} \\ \Pi\end{matrix}$ denota a árvore obtida, escrevendo Σ acima de cada top-fórmula de Π pertencente a Γ .

(g) Σ_t^a denota o resultado de substituir o parâmetro a pelo termo t em todas as ocorrências de a em Σ .

(h) O símbolo $\equiv$ será usado para denotar a identidade sintática entre derivações.

(i) $\Gamma \vdash A$ denota uma derivação de A a partir do conjunto Γ de suposições.

(II.2) Definições :

(1) O <u>grau</u> de uma fórmula A , denotado por $d(A)$, é um número natural , tal que :

(i) Se A é uma fórmula atômica, então $d(A) = 0$;

(ii) Se A é $(C \wedge D)$, $(C \vee D)$, $(C \supset D)$, então $d(A) = d(C) + d(D) + 1$;

(iii) Se A é $(\forall x C(x))$ ou $(\exists x C(x))$, então $d(A) = d(C) + 1$.

(2) O <u>comprimento</u> de uma derivação Π, denotado por $l(\Pi)$, é um número natural, tal que :

(i) Se Π é uma fórmula, então $l(\Pi) = 1$;

(ii) Se Π é $\dfrac{\Pi_1 \; \Pi_2 \ldots \Pi_n}{A}$

então $l(\Pi) = l(\Pi_1) + l(\Pi_2) + \ldots + l(\Pi_n) + 1$.

Usando nossas convenções, podemos escrever :

(a) $l\left(\begin{matrix}\Pi \\ A\end{matrix}\right) = l(\Pi)$;

(b) $l\left(\dfrac{\Pi}{A}\right) = l(\Pi) + 1$.

(3) Se A é uma ocorrência de fórmula na derivação Π , a <u>sub-árvore de Π determinada por A</u> , é a derivação obtida de Π , removendo todas as ocorrências de fórmulas em Π, com exceção de A e das que se encontram acima de A .

(4) Seja Π a derivação $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \ldots \Pi_n}{A}$ e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente, as fórmulas finais de $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Então, dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ocorrem <u>imediatamente</u> <u>acima</u> de A, na ordem da esquerda para a direita; e que A_i <u>ocorre</u> <u>ao</u> <u>lado</u> de A_j $(i, j \leq n)$.

(5) Uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de ocorrências de fórmulas em uma derivação Π é um <u>ramo</u>, se e somente se :

(i) A_1 é uma top-fórmula ;

(ii) A_i ocorre imediatamente acima de A_{i+1}, para cada $(i < n)$;

(iii) A_n é a fórmula final de Π.

(6) Um <u>segmento</u> em uma derivação Π, é uma sequência $\sigma = A_1. A_2. \ldots A_n$, de ocorrências consecutivas de fórmulas em um <u>ramo</u> em Π, tal que :

(i) A_1 não é uma conclusão de uma regra $(\vee - E)$ ou $(\exists - E)$;

(ii) A_i $(i < n)$ é uma premissa menor de uma regra $(\vee - E)$ ou $(\exists - E)$;

(iii) A_n não é uma premissa menor de uma regra $(\vee - E)$ ou $(\exists - E)$.

Duas ocorrências de fórmulas são ditas <u>da mesma forma</u>, se elas são ocorrências da mesma fórmula.

É claro que todas as ocorrências de fórmulas de um segmento são da mesma forma.

(7) O <u>grau de um segmento</u>, denotado por $d(\sigma)$, é o grau da fórmula que ocorre em σ.

(8) O <u>comprimento de um segmento</u> σ , denotado por $l(\sigma)$, é o número de ocorrências de fórmulas em σ .

(III) DERIVAÇÕES NORMAIS

(III.1) SEGMENTO MÁXIMO :

Um segmento $\sigma = A_1 . A_2 . \ldots . A_n$, é um <u>segmento máximo</u> quando :

(a) $n = 1$

(i) A_1 $(= A_n)$, é a conclusão de uma regra de introdução ou da regra do absurdo intuicionista e é , ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação ;

(ii) A_1 $(= A_n)$, é a conclusão da regra do absurdo clássico e é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação;

(iii) A_1 $(= A_n)$, é a conclusão da regra do absurdo clássico e é, ao mesmo tempo, premissa menor da regra $(\supset - E)$, cuja premissa maior é uma top-fórmula da forma $(A_1 \supset \bot)$;

(b) $n > 1$

(i) A_n é a conclusão da regra $(\vee -E)$ ou $(\exists - E)$ e é , ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação;

(ii) A_n é a conclusčo da regra $(\vee - E)$ ou $(\exists - E)$ e é, ao mesmo tempo, premissa menor de uma aplicaçčo da regra $(\supset - E)$, cuja premissa maior é uma top-fórmula da forma $(A_n \supset \bot)$.

(III.2) GRAU DE UMA DERIVAÇÃO

O <u>grau de uma derivação</u> Π , denotado por $d(\Pi)$, é definido como : $d(\Pi) = \text{máx} \{ d(\sigma) : \sigma$ é um segmento máximo de tipo (a.i),(a.ii) ou (b.i) }.

Se Π não contém segmentos máximos, ou se não contém segmentos máximos de tipo (a.i), (a.ii) ou (b.i), então $d(\Pi) = 0$.

Os segmentos máximos que consideramos na definição do grau de Π, são aqueles segmentos máximos definidos por Prawitz [12] .

(III.3) DERIVAÇÃO NORMAL

Uma derivação Π é chamada de <u>normal</u> se e somente se Π não contém segmentos máximos.

Veremos agora como remover os segmentos máximos de uma derivação, estabelecendo reduções para cada tipo de segmentos máximos.

(IV) REDUÇÕES

As reduções são de três tipos (Pereira [10]) : reduções operacionais, reduções permutativas e reduções do absurdo. As reduções operacionais e as reduções permutativas, foram introduzidas por Prawitz [12] .

Em todas as reduções abaixo, a derivação à direita é uma <u>redução</u> da derivação à esquerda.

(IV.1) REDUÇÕES OPERACIONAIS

(1) $\wedge$ - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{A_i} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma_i\\ A_i\end{array} \qquad\qquad (i = 1 \text{ ou } 2)$$

(2) $\vee$ - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2} \quad \begin{array}{c}[A_1]\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{B} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ A_i\\ \Sigma_i\\ B\end{array} \qquad\qquad (i = 1 \text{ ou } 2)$$

(3) $\supset$ - redução

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\\ \Sigma_2\\ B\end{array}$$

(4) $\forall$ - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}}{A(t)} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma^a_t\\ A(t)\end{array}$$

(5) $\exists$ - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A(t)\end{array}}{\exists x A(x)} \qquad \begin{array}{c}[A(a)]\\ \Sigma\\ B\end{array}}{B} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A(t)\\ \Sigma_t^a\\ B\end{array}$$

(IV.2) REDUÇÕES PERMUTATIVAS

(6) $\vee$-E - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array}}{C} \qquad \Sigma_4}{D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\vee B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \Sigma_4}{D} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array} \quad \Sigma_4}{D}}{D}$$

onde C é a premissa maior de uma regra de eliminação e Σ_4 pode ocorrer à esquerda de C .

(7) $\exists$-E - redução

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array}}{C} \qquad \Sigma_3}{D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \Sigma_3}{D}}{D}$$

onde C é a premissa maior de uma regra de eliminação e Σ_3 pode ocorrer à esquerda de C .

(IV.3) REDUÇÕES DO ABSURDO

(8)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A\,]^k\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{A}\,k \qquad \Sigma_1}{B} \qquad\qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{\,i}}{\bot}}{\neg A}\\ \Sigma^\circ\\ \bot\end{matrix}}{B}\,i$$

onde :

(i) A é premissa maior de uma regra de eliminação ;

(ii) Σ_1 pode ocorrer à esquerda de A ;

(iii) Σ° é obtido de Σ, substituindo todas as partes da forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ A\end{matrix} \qquad \neg A^{\,k}}{\bot} \qquad \text{por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ A\end{matrix} \quad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{\,i}}{\bot}$$

(9)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg C\,]\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \qquad\qquad\qquad \begin{matrix}\Sigma\\ \bot\end{matrix}$$

(10)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \qquad\qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

(11)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

(V) REDUTIBILIDADE

(V.1) REDUÇÃO IMEDIATA

Uma derivação Π', é uma <u>redução imediata</u> de Π, se Π' é obtida de Π substituindo uma sub-árvore de Π por sua redução.

(V.2) SEQUÊNCIA DE REDUÇÃO

Uma derivação Π <u>se reduz</u> a Π', denotado por $\Pi \Rightarrow \Pi'$, se existe uma sequência de derivações $\Pi_1, \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n$ ($n \geq 1$), tal que :

(i) $\Pi_1 = \Pi$;

(ii) Π_{i+1} é uma redução imediata de Π_i ($i < n$) ;

(iii) $\Pi_n = \Pi'$.

A sequência $\Pi_1, \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n$ é chamada de <u>sequência de redução</u> para a derivação Π .

Uma derivação Π é <u>normalizável</u>, se Π tem uma sequência de redução finita $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$, tal que Π_n é normal .

(V.3) LEMAS

Os lemas abaixo, podem ser obtidos diretamente das definições (Prawitz [13]) .

(1) Se $r(\Pi)$ é uma introdução ou uma regra do absurdo, Π é da forma

$\dfrac{\Pi'}{A}$ ou $\dfrac{\Pi' \quad \Pi''}{A}$, e se $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ é uma sequência de

redução para Π , então cada Π_i $(i \leq n)$ termina com a mesma regra que

Π , sendo assim da forma $\dfrac{\Pi'_i}{A}$ ou $\dfrac{\Pi'_i \quad \Pi''_i}{A}$, respectivamente,

e $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots\ldots \Pi'_n$, $\Pi''_1, \Pi''_2, \ldots\ldots \Pi''_n$, são também sequências de redução, omitindo possíveis repetições.

(2) Se $\Pi_1(a)$ se reduz a $\Pi_2(a)$, <u>a</u> não é um parâmetro próprio de $\Pi_1(a)$ e $[A(a)]$ é um conjunto de suposições abertas em $\Pi_1(a)$, então toda

derivação $\dfrac{\Sigma}{\begin{array}{c}[A(t)] \\ \Pi_1(t)\end{array}}$ se reduz a $\dfrac{\Sigma}{\begin{array}{c}[A(t)] \\ \Pi_2(t)\end{array}}$.

(V.4) ÁRVORE DE REDUÇÃO - Caracterização informal .

A <u>árvore</u> <u>de</u> <u>redução</u> <u>de</u> <u>uma</u> <u>derivação</u> Π é a árvore cujos <u>ramos</u> são as sequências de redução iniciando em Π.

A <u>árvore</u> <u>de</u> <u>redução</u> <u>das</u> <u>derivações</u> $\Pi_1, \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n$ é a árvore construída com as árvores de redução de cada uma das derivações Π_i $(1 \leq i \leq n)$, por exemplo, colocando uma ao lado da outra.

O <u>comprimento</u> de uma árvore de redução, é o número de ocorrências de derivações na árvore.

CAPÍTULO II

C Á L C U L O   D O S   S E Q U E N T E S

(I) DEFINIÇÃO DO CÁLCULO DOS SEQUENTES (CS)

O Cálculo dos Sequentes para a Lógica Clássica, foi desenvolvido por Gentzen [2].

Apresentaremos uma versão do Cálculo dos Sequentes (CS), formulada por Prawitz [12].

A linguagem é a do Capítulo I, com a adição de um novo símbolo , a saber: $\rightarrow$. A expressão da forma $\Gamma \rightarrow \Delta$, onde Γ e Δ são sequências finitas de fórmulas (possivelmente vazias), é chamada de um <u>sequente</u> . Γ é seu <u>antecedente</u> e Δ seu <u>consequente</u> .

Uma <u>derivação</u> no Cálculo dos Sequentes é uma árvore de sequentes na qual :

(i) Todo top-sequente tem a forma $A \rightarrow A$;

(ii) Todas as outras ocorrências de sequentes, são obtidas das que estão imediatamente acima por uma da regras de inferência abaixo.

(I.1) REGRAS DE INFERÊNCIA

(1) Regras Estruturais

(a) Atenuação no antecedente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

(b) Atenuação no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}$$

(c) Contração no antecedente

$$\frac{\Gamma, A, A, \theta \rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \theta \rightarrow \Delta}$$

(d) Contração no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A, A, \Delta}{\Gamma \rightarrow \theta, A, \Delta}$$

(e) Permutação no antecedente

$$\frac{\Gamma, A, B, \theta \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \theta \rightarrow \Delta}$$

(f) Permutação no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A, B, \Delta}{\Gamma \rightarrow \theta, B, A, \Delta}$$

(g) Corte

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A \qquad A, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \theta, \Lambda}$$

(2) Regras Operacionais

(h) $\wedge$ - Introdução no antecedente

$$\frac{A_i, \Gamma \rightarrow \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (i = 1, 2)$$

(i) $\wedge$ - Introdução no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

(j) $\vee$ - Introdução no antecedente

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

(k) $\vee$ - Introdução no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2} \quad (i = 1, 2)$$

(l) $\supset$ - Introdução no antecedente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \theta, \Delta}$$

(m) $\supset$ - Introdução no consequente

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B}$$

(n) $\forall$ - Introdução no antecedente

$$\frac{A_t^x, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

(o) $\forall$ - Introdução no consequente

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A_x^a}$$

(p) $\exists$ - Introdução no antecedente

$$\frac{A,\Gamma \to \Delta}{\exists x A^{a}_{x},\Gamma \to \Delta}$$

(q) $\exists$ - Introdução no consequente

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A^{x}_{t}}{\Gamma \to \Delta, \exists x A(x)}$$

(r) $\perp_c$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \perp}{\Gamma \to \Delta, A}$$

OBS.: O parâmetro a não deve ocorrer na conclusão das regras $\forall$ - Introdução no consequente e $\exists$ - Introdução no antecedente.

NOTA: Devemos observar que, em qualquer derivação no Cálculo dos Sequentes (CS), o consequente de um sequente nunca é vazio.

(II) HAUPTSATZ

Teorema: Toda derivação Π no Cálculo dos Sequentes (CS), pode ser transformada em uma outra derivação Π' em (CS) ,com o mesmo sequente final, na qual não existe aplicação da regra do corte.

Prova: É análoga à prova de Gentzen [2], acrescentando os dois casos abaixo, que substituem os casos da negação.

Caso 1 : A derivação :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, \perp}{\Gamma \to \Delta, A} \qquad \theta \to \Lambda}{\Gamma, \theta^{*} \to \Delta, \Lambda}\ \text{mix}$$

Se transforma em:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, \perp}{\Gamma \to \Delta, B}}{\Gamma, \theta^{*} \to \Delta, \Lambda}$$ (possivelmente várias atenuações,permutações e contrações)

Onde B é a primeira fórmula da sequência Λ .

Caso 2: A derivação :

$$\cfrac{\theta \rightarrow \Lambda \qquad \cfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \perp}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}}{\theta, \Gamma^{*} \rightarrow \Lambda^{*}, \Delta, A}\ \text{mix}$$

Se transforma em:

$$\cfrac{\cfrac{\theta \rightarrow \Lambda \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, \perp}{\theta, \Gamma^{*} \rightarrow \Lambda^{*}, \Delta, \perp}\ \text{mix}}{\theta, \Gamma^{*} \rightarrow \Lambda^{*}, \Delta, A}$$

CAPÍTULO III

NORMALIZAÇÃO FRACA PARA A LÓGICA CLÁSSICA

O objetivo do capítulo é fornecer uma prova direta do teorema de normalização fraca para a Lógica Clássica de primeira ordem : o sistema $\mathbb{C}$ do capítulo I .

Utilizando-se das reduções do Capítulo I para o sistema C, podemos provar os lemas abaixo :

LEMA 1 : Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash A$, tal que $d(\Pi) = n$ e todo segmento máximo de grau n que contribui para o grau de Π é do tipo (a.i). Então, Π se reduz a uma derivação Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash A$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Prova : como em Prawitz [12] .

LEMA 2 : Toda derivação Π tal que $d(\Pi) = 0$, se reduz a uma derivação normal Π' .

Prova : Se Π é normal, então $\Pi' \equiv \Pi$.

Se Π não é normal, então o resultado é obtido usando como valor de indução para uma derivação Π :

k = a soma dos comprimentos dos segmentos máximos de Π

Escolha um segmento máximo σ em Π, tal que não exista outro segmento máximo acima dele, ou acima de (ou que contém) uma fórmula que ocorre ao lado da última fórmula de σ.

Seja Π_1 a redução de Π (que elimina o segmento máximo σ). É fácil ver, a partir das reduções do absurdo (9), (10) e (11) , que o valor de indução de Π_1 é menor que o valor de indução de Π . O resultado então é imediato.

LEMA 3 : Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash B$, tal que :

(i) $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação , cuja premissa maior A é a última ocorrência de fórmula de todos os segmentos máximos de Π ;

(ii) $d(\Pi) > 0$.

Então, Π se reduz a uma derivação Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash B$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Prova : Por indução no comprimento de Π.

(1) Se A é do tipo (a.i) - o resultado é obtido diretamente das reduções.

(2) Se A é do tipo (b.i) ,e

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{C \vee D} \quad \dfrac{\Sigma_2}{A} \quad \dfrac{\Sigma_3}{A}}{A} \qquad \Sigma_4}{B}$$

Π se reduz a $\Pi*$:

$$\Pi* \equiv \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{C \vee D} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{A} \quad \Sigma_4}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_3}{A} \quad \Sigma_4}{B}}{B}$$

Se $d(\Pi*) < d(\Pi)$, então $\Pi* \equiv \Pi'$

Se $d(\Pi*) = d(\Pi)$, então pelo menos uma das sub-árvores de Π determinada por uma das premissas menores B , tem a forma do lema.

Suponhamos que as duas sub-árvores tenham a forma do lema, os outros casos são similares. Então, pela hipótese indutiva :

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_i}{A} \quad \Sigma_4}{B} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\Pi_i \\ B\end{array} \qquad (i = 2,3)$$

tal que $d(\Pi_i) < d(\Pi)$.

Podemos então considerar Π' como

$$\Pi' \equiv \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{C \vee D} \quad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_3 \\ B\end{array}}{B}$$

logo, $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Obs.: O caso de

$$\Pi \equiv \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\exists x C(x)} \quad \dfrac{\Sigma_2}{A}}{A} \quad \Sigma_3}{B}$$ é similar .

3) Se A é do tipo (a.ii), então

$$\Pi \equiv \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^k \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{A} \quad \Sigma_1}{B}$$

que se reduz a

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{\,i}}{\perp}}{\neg A}\\ \Sigma^{\circ}\end{array}}{\perp}}{B}\, i$$

onde todas as partes de Π , da forma

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{A} \qquad \neg A^{\,k}}{\perp}$$

foram substituidas por

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ A\end{array} \qquad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{\,i}}{\perp}$$

Os únicos segmentos máximos que podem ocorrer em Π^{*} são todos dos tipos (a.i) e (b.ii) e os do primeiro tipo têm a forma de A .O resultado segue então do LEMA 1 .

TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO FRACA :

Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash A$, então Π se reduz a uma derivação normal Π' de $\Delta \subset \Gamma \vdash A$.

Prova: Por indução no par ordenado (α, β), onde α é o grau de Π e β é o seu comprimento.

(1) Se $r(\Pi)$ é uma introdução ou a regra do absurdo, então o resultado segue diretamente da hipótese indutiva.

(2) Se $r(\Pi)$ é uma eliminação, então Π é da forma:

$$\Pi \equiv \frac{\begin{matrix} \Pi_1 & & \Pi_n \\ A_1 & \dots & A_n \end{matrix}}{B}$$

Usando a hipótese indutiva, cada $\Pi_i (1 \leq i \leq n)$ se reduz a uma derivação normal Π'_i . Seja Σ a seguinte derivação:

$$\Sigma \equiv \frac{\begin{matrix} \Pi'_1 & & \Pi'_n \\ A_1 & \dots & A_n \end{matrix}}{B}$$

Se Σ é normal, então consideramos $\Pi' \equiv \Sigma$. Se Σ não é normal, então Π' é obtida de Σ usando lema 2 (caso $d(\Sigma) = 0$) ou lema 3 (caso $d(\Sigma) > 0$). O resultado segue da hipótese indutiva com respeito a α .

CAPÍTULO IV

NORMALIZAÇÃO FRACA VIA CÁLCULO DOS SEQUENTES

(I) INTRODUÇÃO

Nosso objetivo é provar o Teorema de Normalização fraca para a Lógica Clássica de primeira ordem completa , Sistema $\mathbb{C}$, utilizando-se do *HAUPTSATZ* para o Cálculo dos Sequentes (CS).

A prova pode ser esquematizada da seguinte maneira:

Uma derivação em Dedução Natural é transformada numa derivação no Cálculo dos Sequentes; através do *HAUPTSATZ* , esta é transformada numa derivação no Cálculo dos Sequentes sem corte e, a partir dela, obtemos uma derivação normal em Dedução Natural.

(II) TEOREMAS

Nos teoremas abaixo, as letras gregas maiúsculas são usadas para representar tanto conjuntos de fórmulas, como sequências de fórmulas . O contexto determina o caso. Em particular, o conjunto obtido da sequência Γ será representado também por Γ .

Uma derivação em $\mathbb{C}$, de uma fórmula A a partir de um conjunto $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ de fórmulas, será representada por:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \vdots \\ A \end{array}$$

Teorema 1 : Toda derivação Π em Dedução Natural, pode ser transformada numa derivação Π^*, no Cálculo dos Sequentes, tal que: Se Π é uma derivação, em $\mathbb{C}$, de A a partir do conjunto Γ ($\Gamma \vdash_{C} A$), então Π^* é uma derivação, em CS, do sequente $\Gamma \to A$ ($\vdash_{CS} \Gamma \to A$).

Prova: Por indução no comprimento da derivação Π.

Base: Se $\Pi \equiv A$, então $\Pi^* \equiv A \to A$.

Passo Indutivo.

Temos vários casos de acordo com a última regra de derivação em Π:

(a)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \vdots \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \wedge B} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to A} \quad \dfrac{\Gamma_2 \to B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to A \wedge B}$$

(b)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \vdots \\ A_1 \wedge A_2\end{matrix}}{A_i} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\Gamma_1 \to A_1 \wedge A_2 \quad \dfrac{A_i \to A_i}{A_1 \wedge A_2 \to A_i}}{\Gamma_1 \to A_i}$$

($i = 1,2$)

(c)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \vdots \\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\Gamma_1 \to A_i}{\Gamma_1 \to A_1 \vee A_2}$$

($i = 1,2$)

(d)

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A \vee B & C & C \end{array}}{C} \qquad \Pi^* \equiv \frac{\Gamma_1 \to A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \to C}{A, \Gamma_2^\circ \to C} \qquad \dfrac{\Gamma_3 \to C}{B, \Gamma_3^\circ \to C}}{A \vee B, \Gamma_2^\circ, \Gamma_3^\circ \to C}}{\Gamma_1, \Gamma_2^\circ, \Gamma_3^\circ \to C}$$

onde : (i) $\Gamma_2^\circ = \Gamma_2 - \{ A \}$, (ii) $\Gamma_3^\circ = \Gamma_3 - \{ B \}$

(e)

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \supset B} \qquad \Pi^* \equiv \frac{\dfrac{\Gamma \to B}{A, \Gamma^\circ \to B}}{\Gamma^\circ \to A \supset B}$$

onde : $\Gamma^\circ = \Gamma - \{ A \}$

(f)

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ A & A \supset B \end{array}}{B} \qquad \Pi^* \equiv \frac{\Gamma_2 \to A \supset B \qquad \dfrac{\Gamma_1 \to A \qquad \dfrac{B \to B}{B, \Gamma_1 \to B}}{A \supset B, \Gamma_1 \to B}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \to B}$$

(g)

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array}}{\forall x A_x^a} \quad (a \notin \Gamma) \qquad \Pi^* \equiv \frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to \forall x A_x^a}$$

(h)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \forall x A\end{array}}{A^x_t} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\Gamma \to \forall x A \qquad \dfrac{A^x_t \to A^x_t}{\forall x A \to A^x_t}}{\Gamma \to A^x_t}$$

(i)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A^x_t\end{array}}{\exists x A} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\Gamma \to A^x_t}{\Gamma \to \exists x A}$$

(j)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\\ \exists x A^a_x\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\\ B\end{array}}{B} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\Gamma_1 \to \exists x A^a_x \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \to B}{A, \Gamma_2^\circ \to B}}{\exists x A^a_x, \Gamma_2^\circ \to B}}{\Gamma_1, \Gamma_2^\circ \to B}$$

onde : (i) $a \notin \Gamma_2^\circ$, $\Gamma_2^\circ = \Gamma_2 - \{ A \}$

(ii) $a \notin B$.

(k)

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A} \qquad \Pi^* \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \bot}{A \supset \bot, \Gamma^\circ \to \bot}}{\Gamma^\circ \to (A \supset \bot) \supset \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A, \bot}}{\to A, A \supset \bot} \qquad \dfrac{\bot \to \bot}{\bot \to A}}{(A \supset \bot) \supset \bot \to A, A}}{(A \supset \bot) \supset \bot \to A}}{\Gamma^\circ \to A}$$

onde : $\Gamma^\circ = \Gamma - \{ A \supset \bot \}$

Teorema 2 : Toda derivação $\Pi*$, no Cálculo dos Sequentes (CS) sem corte, pode ser transformada numa derivação normal Π , em Dedução Natural [1] , tal que :

(i) Se o sequente final de $\Pi*$ é $\Gamma \rightarrow A$, então Π é a derivação $\Delta \vdash_{C} A$, com $\Delta \subseteq \Gamma$;

(ii) Se o seguente final de $\Pi*$ é $\Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n > 1$), então Π é a derivação $\Delta \cup \{\neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_{n-1}\} \vdash A_n$, com $\Delta \subseteq \Gamma$.

Prova : Por indução no comprimento de $\Pi*$.

Base : Se $\Pi* \equiv A \rightarrow A$, então $\Pi \equiv A$.

Passo Indutivo.

Temos vários casos de acordo com a última regra de $\Pi*$:

(1)

$$\Pi* \equiv \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma \rightarrow B \end{matrix}}{A, \Gamma \rightarrow B} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix} \Delta \\ \vdots \\ B \end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma \cup \{ A \}$

(2)

$$\Pi* \equiv \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n \end{matrix}}{A, \Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix} \Delta, \{\neg A_1, \neg A_2, \ldots, A_{n-1}\} \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}$$

onde : ($\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma \cup \{ A \}$)

---

[1] Usaremos a definição de derivação normal dada em Pravitz [12].

(3)

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow B, A} \qquad\qquad \Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Delta \\ \vdots \\ B\end{matrix} \quad \neg B}{\perp}}{A}$$

onde: ($\Delta \subseteq \Gamma$)

(4)

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, A} \qquad\qquad \Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Delta, \{\neg A_1, \neg A_2, \ldots\ldots, \neg A_{n-1}\} \\ \vdots \\ A_n\end{matrix} \quad \neg A_n}{\perp}}{A}$$

(5)

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Lambda, A, A, \Gamma \rightarrow B\end{matrix}}{\Lambda, A, \Gamma \rightarrow B} \qquad\qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta \\ \vdots \\ B\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Lambda \cup \{ A \} \cup \Gamma$

(6)

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Lambda, A, A, \Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\end{matrix}}{\Lambda, A, \Gamma \rightarrow A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n} \qquad\qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta, \{\neg A_1, \ldots\ldots \neg A_{n-1}\} \\ \vdots \\ A_n\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Lambda \cup \{ A \} \cup \Gamma$

(7)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \to B_1, B_2, \ldots, B_n, A, A\end{matrix}}{\Gamma \to B_1, B_2, \ldots, B_n, A} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta, \{\neg B_1, \ldots, \neg B_n, \neg A^i\} \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{A \quad \neg A^i}{\bot}}{A}\, i\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$

(8)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \to B_1, \ldots, B_n, A, A, C_1, \ldots, C_m\end{matrix}}{\Gamma \to B_1, \ldots, B_n, A, C_1, \ldots, C_m} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta, \{\neg B_1, \ldots \neg B_n, \neg A, \neg C_1, \ldots \neg C_{m-1}\} \\ \vdots \\ C_m\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$

(9)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Lambda, A, B, \Gamma \to C_1, \ldots, C_n\end{matrix}}{\Lambda, B, A, \Gamma \to C_1, \ldots, C_n} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta, \{\neg C_1, \ldots \neg C_{n-1}\} \\ \vdots \\ C_n\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Lambda \cup \Gamma \cup \{A, B\}$

(10)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \to C_1, \ldots, C_n, A, B\end{matrix}}{\Gamma \to C_1, \ldots, C_n, B, A} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix}\Delta, \{\neg C_1, \ldots, \neg C_n, \neg A^i\} \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{B \quad \neg B}{\bot}}{A}\, i\end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$

(11)

$$\Pi^{*} \equiv \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n,A,B,D_1,\ldots,D_m\end{array}}{\Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n,B,A,D_1,\ldots,D_m} \qquad \Pi \equiv \begin{array}{c}\Delta_1,\Delta_2\\ \vdots\\ D_m\end{array}$$

onde : $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ e $\Delta_2 = \{\neg C_1,\ldots,\neg C_n,\neg A,\neg B,\neg D_1,\ldots,\neg D_{m-1}\}$

(12)

$$\Pi^{*} \equiv \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_i,\Gamma \rightarrow B_1,\ldots,B_n\end{array}}{A_1 \wedge A_2,\Gamma \rightarrow B_1,\ldots,B_n} \qquad \Pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{A_1 \wedge A_2}{A_i} \;,\; \Delta\\ \vdots\\ B_n\end{array} \qquad (i=1,2)$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\neg B_1,\ldots,\neg B_{n-1}\}$

(13)

$$\Pi^{*} \equiv \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n,A \qquad \Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n,B\end{array}}{\Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n,A \wedge B}$$

então $\Pi \equiv$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta_1,\Delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,\Delta\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

onde : $\Delta_1,\ \Delta_2 \subseteq \Gamma$ e $\Delta = \{\neg C_1,\ldots,\neg C_n\}$

(14)

$$\Pi^{*} \equiv \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A,\Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n \qquad B,\Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n\end{array}}{A \vee B,\Gamma \rightarrow C_1,\ldots,C_n}$$

então $\Pi \equiv$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix} A, \Delta_1, \Delta \\ \vdots \\ C_n \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B, \Delta_2, \Delta \\ \vdots \\ C_n \end{matrix}}{C_n}$$

onde : $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Gamma$ e $\Delta = \{ \neg C_1, \ldots, \neg C_{n-1} \}$

(15)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma \rightarrow B_1, \ldots, B_n, A_i \end{matrix}}{\Gamma \rightarrow B_1, \ldots, B_n, A_1 \vee A_2} \qquad \Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix} \Delta, \Delta_1 \\ \vdots \\ A_i \end{matrix}}{A_1 \vee A_2} \qquad (i=1,2)$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$ e $\Delta_1 = \{ \neg B_1, \ldots \neg B_n \}$

(16)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A^x_t, \Gamma \rightarrow B_1, \ldots, B_n \end{matrix}}{\forall x A, \Gamma \rightarrow B_1, \ldots, B_n} \qquad \Pi \equiv \begin{matrix} \dfrac{\forall x A}{A^x_t} \; , \Delta \; , \; \Delta_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$ e $\Delta_1 = \{ \neg B_1, \ldots \neg B_{n-1} \}$

(17)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma \rightarrow B_1, \ldots, B_n, A \end{matrix}}{\Gamma \rightarrow B_1, \ldots B_n, \forall x A^a_x} \qquad \Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix} \Delta, \Delta_1 \\ \vdots \\ A \end{matrix}}{\forall x A^a_x}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta_1 = \{ \neg B_1, \ldots, \neg B_n \}$ e $a \notin \Gamma, \Delta_1$

(18)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A,\Gamma \to B_1,\ldots\ldots,B_n\end{array}}{\exists x A^a_x,\Gamma \to B_1,\ldots\ldots,B_n} \qquad \Pi \equiv \dfrac{\exists x A^a_x \qquad \begin{array}{c}A,\Delta,\Delta_1\\ \vdots\\ B_n\end{array}}{B_n}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta_1 = \{ \neg B_1,\ldots\ldots,\neg B_{n-1} \}$ e $a \notin \Gamma, \{ B_1,\ldots B_n \}$

(19)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to B_1,\ldots\ldots,B_n,A^x_t\end{array}}{\Gamma \to B_1,\ldots\ldots,B_n,\exists x A} \qquad \Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Delta,\Delta_1\\ \vdots\\ A^x_t\end{array}}{\exists x A}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$ e $\Delta_1 = \{ \neg B_1,\ldots\ldots,\neg B_n \}$

(20)

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to C_1,\ldots\ldots,C_n,A \qquad B,\Gamma \to D_1,\ldots\ldots,D_m\end{array}}{A \supset B,\Gamma \to C_1,\ldots\ldots,C_n,D_1,\ldots\ldots,D_m}$$

$$\text{Então } \Pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,\{\neg C_1,\ldots\ldots,\neg C_n\}\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad A \supset B}{B}\ ,\ \Delta_2\ ,\{\neg D_1,\ldots,\neg D_{m-1}\}\\ \vdots\\ D_m\end{array}$$

onde : Δ_1 , $\Delta_2 \subseteq \Gamma$

(21)

$$\Pi^* \equiv \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A,\Gamma \rightarrow C_1,\dots,C_n,B\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow C_1,\dots,C_n,A \supset B} \qquad \Pi \equiv \frac{\begin{matrix}A,\Delta,\{\neg C_1,\dots,\neg C_n\} \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$

(22)

$$\Pi^* \equiv \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \rightarrow B_1,\dots,B_n,\perp\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow B_1,\dots,B_n,A} \qquad \Pi \equiv \frac{\begin{matrix}\Delta,\{\neg B_1,\dots,\neg B_n\} \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}$$

onde : $\Delta \subseteq \Gamma$

TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO FRACA

Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash_c A$,então Π se reduz a uma derivação normal Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash_c A$.

Prova :Usando Teorema 1 e *HAUPTSATZ* , obtemos uma derivação em (CS) sem corte do sequente $\Gamma \rightarrow A$. O resultado segue imediatamente do Teorema 2 .

CAPÍTULO V

NORMALIZAÇÃO FORTE (PROVA SEMÂNTICA)

(I) INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é provar o Teorema de Normalização Forte para a Lógica Clássica de primeira ordem, sem reduções permutativas e com todos os operadores lógicos, Sistema $\mathbb{C}$.

Usaremos uma ampliação do conceito de <u>Validade Forte</u> , definido em Prawitz [13] .

(II) DERIVAÇÃO NORMAL

Neste capítulo, usaremos as reduções operacionais do Capítulo I (reduções de (1) a (5)), e a redução para o absurdo clássico definida por Statman [16] :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^k\\ \Sigma_1\\ \bot\end{matrix}}{A}\,k \qquad \Sigma_2}{B} \qquad \text{se reduz a} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma_2}{B} \qquad \neg B^i}{\bot}}{\neg A}\\ \Sigma_1\\ \bot\end{matrix}}{B}\,i$$

onde: (i) A é a premissa maior de uma regra de eliminação;

(ii) Σ_2 pode ocorrer à esquerda de A .

(II.1) Fórmula Máxima

Uma ocorrência da fórmula A em uma derivação Π é denominada <u>fórmula máxima</u> se, e somente se:

(i) A é, ao mesmo tempo, consequência de uma regra de introdução e premissa maior de uma regra de eliminação;

(ii) A é, ao mesmo tempo, consequência da regra do absurdo clássico e premissa maior de uma regra de eliminação.

(II.2) Derivação Normal

Uma derivação é <u>normal</u> se, e somente se, não contém ocorrências de fórmulas máximas.

(III) VALIDADE FORTE (VF)

Uma derivação Π em $\mathbb{C}$, é válida fortemente (VF) se ,e somente se :

(1) $r(\Pi)$ é $\wedge - I$, $\vee - I$, $\exists - I$ ou a regra do absurdo, e se as derivações das premissas de $r(\Pi)$ são (VF);

(2) $r(\Pi)$ é $\supset - I$, sendo Π da forma :

$$\Pi \equiv \frac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1\end{matrix}}{A \supset B}$$ e se para qualquer derivação (VF) $\dfrac{\Sigma_1}{A}$,temos que:

$$\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_1}{A} \\ \Pi_1\end{matrix}$$ é (VF) .

(3) $r(\Pi)$ é $\forall$-I , e se a derivação da premissa de $r(\Pi)$ é (VF), para qualquer substituição do parâmetro próprio de $r(\Pi)$ por um termo t ;

(4) Se $r(\Pi)$ não é uma introdução nem a regra do abusurdo, e se as seguintes condições são satisfeitas :

(i) Π é normal ou cada derivação Π', para qual Π se reduz, é (VF);

(ii) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ A_1 \vee A_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_1] \\ \Sigma_1 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2] \\ \Sigma_2 \\ B\end{array}}{B} \text{, então } \begin{array}{c}\Sigma_i \\ B\end{array} \text{ e } \begin{array}{c}\Sigma' \\ A_i \\ \Sigma_i \\ B\end{array}$$

são (VF), onde :

(a) $i = 1,2$;

(b) Σ' é parte de uma derivação Π_1, para a qual a derivação Σ se reduz ;

(c) A_i é a ocorrência de fórmula imediatamente acima de $A_1 \vee A_2$ ou de um segmento que contém $A_1 \vee A_2$ como a última ocorrência de fórmula .

(iii) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \exists x A(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}[A(a)] \\ \Sigma_1 \\ B\end{array}}{B} \text{, então } \Sigma_1 \text{ e } \begin{array}{c}\Sigma' \\ A(t) \\ \Sigma_{1t}^{a} \\ B\end{array} \text{ são (VF) , onde}$$

Σ' é como na condição (ii) acima .

(IV) VALIDADE FORTE POR SUBSTITUIÇÃO

Uma derivação é a resultante de Π por substituição, quando : (i) substituímos parâmetros não próprios em Π por termos, e depois, (ii) substituímos suposições abertas em Π por derivações (VF) dessas suposições.

Uma derivação Π é válida fortemente por substituição (VFS) se, e somente se, todas as derivações resultantes de Π por substituição são válidas fortemente (VF).

(V) TEOREMAS

TEOREMA 1 : Toda sequência de redução iniciando de uma derivação válida fortemente (VF) , termina em uma derivação normal.

Prova: Por indução na definição de válida fortemente (VF), usando o Lema (1) do Capítulo 1 .

LEMA 1 : Se uma derivação Π_1 se reduz a uma derivação Π_2 e se Π_1 é (VF) , então Π_2 também é (VF) .

Prova : Por indução na definição de (VF), usando os Lemas (1) e (2) do Capítulo I .

LEMA 2 : Se uma derivação Π é da forma

$\Pi \equiv \dfrac{A \quad \Pi_1 \ldots \Pi_n}{B}$, $\Pi_i (1 \leq i \leq n)$ é (VF) e A é a premissa maior de uma regra de eliminação , então Π é (VF) .

Prova : Como $r(\Pi)$ é uma eliminação, devemos mostrar que cada redução imediata Π' de Π , é (VF).

Valor de indução : α = comprimento da árvore de redução das derivações das premissas menores de $r(\Pi)$. $\underline{\alpha}$ é finito pelo TEOREMA 1.

Como A é a premissa maior, então Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \frac{A \quad \Pi'_1 \ldots . \Pi'_n}{B}$$ onde para algum i $(i \leq n)$ Π'_i é uma redução imediata de Π_i , e para os outros j $(j \neq i \leq n)$ $\Pi'_j \equiv \Pi_j$.

Usando o Lema 1 , Π' satisfaz às condições do Lema 2. Como o valor de indução de Π' é menor que o de Π, o resultado segue da hipótese indutiva.

LEMA 3: Uma derivação Π , tal que $r(\Pi)$ é uma eliminiação , é válida fortemente (VF) , quando :

(i) Toda sequência de redução iniciando de uma derivação de uma premissa de $r(\Pi)$, termina em uma derivação normal ;

(ii) Se $r(\Pi)$ é $\wedge - E$, $\supset - E$, ou $\forall - E$, então as derivações das premissas de $r(\Pi)$ são (VF) ;

(iii) Se $r(\Pi)$ é $\vee - E$ ou $\exists - E$, então a condição (ii) ou (iii), respectivamente, na definição de (VF) é satisfeita ;

(iv) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^k \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{A}\,k \qquad \Sigma_1}{B}$$ onde A é premissa maior , então Π^* :

$$\Pi^* \equiv \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \quad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B}{\bot}}{\begin{array}{c}\neg A \\ \Sigma \\ \bot\end{array}} \qquad \text{é (VF) .}$$

Prova : Por indução no terno (α, β, γ) , onde :

α - é comprimento da árvore de redução da derivação da premissa maior de $r(\Pi)$, se existe tal premissa (caso contrário, $\alpha = 0$).

β - é o comprimento da derivação da premissa maior de $r(\Pi)$, se existe tal premissa (caso contrário, $\beta = 0$) .

γ - é o comprimento da árvore de redução das derivações das premissas de $r(\Pi)$.

Pela condição (i), α e γ são finitos .

Como $r(\Pi)$ é uma eliminação, devemos mostrar que cada redução imediata Π' de Π é (VF) .

Consideremos dois casos.

Caso (a) : Π' é obtida de Π , substituindo uma sub-árvore própria de Π por sua redução imediata. Isto é :

Se $\Pi \equiv \dfrac{\Pi_1 \ldots . \Pi_n}{A}$, então $\Pi' \equiv \dfrac{\Pi'_1 \ldots .. \Pi'_n}{A}$, onde :

para algum i ($\leq n$) Π_i se reduz imediatamente a Π'_i e para os outros j ($i \neq j \leq n$) $\Pi'_j \equiv \Pi_j$.

O valor de indução de Π', $(\alpha', \beta', \gamma')$,é menor que o de Π , pois : $\alpha' < \alpha$, ou $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ e $\gamma' < \gamma$.

Π' satisfaz à condição (i), pois Π a satisfaz . A condição (ii) é satisfeita por causa do Lema 1 .

Vamos verificar a condição (iii), apenas para $r(\Pi)$ igual a $\vee$ - E . O caso de $\exists$ - E é similar .

Se Π é :

$$\Pi \equiv \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ A_1 \vee A_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_1] \\ \Sigma_1 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2] \\ \Sigma_2 \\ B\end{array}}{B} \text{, então } \Pi' \equiv \frac{\begin{array}{c}\Sigma' \\ A_1 \vee A_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_1] \\ \Sigma'_1 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2] \\ \Sigma'_2 \\ B\end{array}}{B}$$

Como Π satisfaz à condição (iii), Σ_1 e Σ_2 são (VF) . Logo, pelo Lema 1 , Σ'_1 e Σ'_2 são (VF) .

Falta mostrar que

$$\begin{array}{l}\Sigma* \\ A_i \\ \Sigma'_i \\ B\end{array}$$ é (VF) , onde $\Sigma*$ é parte de uma derivação $\Pi*$, para a qual a derivação Σ' se reduz , e A_i é como se exige na condição.

Como Π satisfaz à condição (iii), então

$$\begin{array}{l}\Sigma^{o} \\ A_i \\ \Sigma_i \\ B\end{array}$$ é (VF) , onde Σ^{o} é parte de uma derivação Π^{o}, para a qual a derivação Σ se reduz, e o A_i é como se exige na condição.

Pela transitividade das reduções

$$\begin{matrix} \Sigma* \\ A_i \\ \Sigma_i \\ B \end{matrix} \quad \text{é (VF).}$$

Como Σ_i se reduz a Σ'_i, usando o Lema 2 do Capítulo 1,

$$\begin{matrix} \Sigma* \\ A_i \\ \Sigma_i \\ B \end{matrix} \quad \text{se reduz a} \quad \begin{matrix} \Sigma* \\ A_i \\ \Sigma'_i \\ B \end{matrix} \quad \text{, que , pelo Lema 1, é (VF).}$$

Isso completa a prova de (iii).

Condição (iv) :

$$\text{Se } \Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^k \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{A} \quad \Sigma_1}{B} \quad \text{, então } \Pi' \text{ pode ser :}$$

(a)

$$\Pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \Sigma' \\ \bot\end{matrix}}{A} \quad \Sigma_1}{B} \quad \text{, onde } \Sigma' \text{ é uma redução imediata de } \Sigma .$$

(b)

$$\Pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{A} \quad \Sigma'_1}{B} \quad \text{, onde } \Sigma'_1 \text{ é uma redução imediata de } \Sigma_1.$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Devemos provar que :

$$(I) \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma_1}{B} \quad \neg B}{\bot}}{\neg A} \\ \Sigma' \\ \bot \end{array} \qquad\qquad (II) \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma'_1}{B} \quad \neg B}{\bot}}{\neg A} \\ \Sigma \\ \bot \end{array}$$

são (VF), na hipótese de que

$$(III) \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma_1}{B} \quad \neg B}{\bot}}{\neg A} \\ \Sigma \\ \bot \end{array} \qquad \text{é (VF) .}$$

Vemos que :

(a) (I) é (VF), usando (III), o Lema (2) do Capítulo 1 e o Lema 1 (deste capítulo) .

(b) (II) é (VF), usando (III) e o Lema 1 .

Caso (b) : Π' é uma redução própria de Π .

Temos dois subcasos :

Subcaso 1 : A premissa maior de $r(\Pi)$ é conclusão de uma regra de introdução.

Se $r(\Pi)$ é $\wedge$ - E , $\supset$ - E ou $\forall$ - E , então, usando a condição (ii) para Π e a definição de (VF) , concluímos que Π' é (VF) .

Se $r(\Pi)$ é $\vee$ -E ou $\exists$ - E , então , usando a condição (iii) para Π e a reflexividade das reduções, concluímos que Π' é (VF).

Subcaso 2 : A premissa maior de $r(\Pi)$ é conclusão da regra do absurdo , então , usando a condição (iv) para Π e a definição de (VF), concluímos que Π' é (VF) .

TEOREMA 2 : Toda derivação Π ,em $\mathbb{C}$, é válida fortemente por substituição (VFS) .

Prova : Por indução no comprimento de Π.

A base é trivial.

Passo Indutivo.

Se $r(\Pi)$ é uma introdução ou a regra do absurdo, então o resultado é imediato da hipótese indutiva.

Se $r(\Pi)$ é uma eliminação , Π é da forma:

$\Pi \equiv \dfrac{\Pi_1 \ldots\ldots \Pi_n}{A}$. Devemos mostrar que $\Pi^* \equiv \dfrac{\Pi^*_1 \ldots\ldots \Pi^*_n}{A}$, é (VF),

onde Π^* é qualquer resultante de Π por substituição.

É suficiente mostrar que Π^* satisfaz às condições do Lema 3 .

Por hipótese indutiva, $\Pi_1, \ldots\ldots, \Pi_n$ são (VFS) . Logo, $\Pi^*_1, \ldots\ldots, \Pi^*_n$ são (VF) e a condição (ii) é satisfeita.

Pelo Teorema 1, a condição (i) também é satisfeita.

Usando o Lema 1 e a definição de (VF), a condição (iii) é satisfeita.

Condição (iv) :

$$\text{Se } \Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^k\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{A}\,k \qquad \Sigma_1}{B} \quad , \text{ então } \Pi^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A^*]\\ \Sigma^*\\ \bot\end{array}}{A^*} \qquad \Sigma_1^*}{B^*}$$

Precisamos mostrar que

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^* \quad \Sigma_1^*}{B^*} \qquad \neg B^*}{\bot}}{\neg A^*}\\ \Sigma^*\\ \bot\end{array} \qquad \text{é (VF).}$$

Pela hipótese indutiva, Σ é (VFS). Portanto, basta mostrar que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^* \quad \Sigma_1^*}{B^*} \qquad \neg B^*}{\bot}}{\neg A^*} \qquad \text{é (VF) .}$$

Usando a definição de (VF), devemos provar que

$$\text{(I)} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ A^*\end{array} \quad \Sigma_1^*}{B^*} \qquad \neg B^*}{\bot} \qquad \text{é (VF), para qualquer derivação } \Sigma_2 \text{ (VF).}$$

Da hipótese indutiva $\dfrac{A \quad \Sigma_1}{B}$ é (VFS) . Logo ,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ A^*\end{array} \qquad \Sigma_1^*}{B^*} \qquad \text{é (VF), para qualquer derivação } \Sigma_2 \text{ (VF).}$$

Usando o Lema 2 , obtemos que (I) é (VF). O que conclui a prova.

TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO FORTE

Toda sequência de redução iniciando de uma derivação Π , em $\mathbb{C}$, termina em uma única forma normal.

Prova:

(a) Finitude - Segue imediatamente, usando os Teoremas 1 e 2 .

(b) Unicidade - Por analogia com Girard [3] .

CAPÍTULO VI

NORMALIZAÇÃO FORTE
(PROVA SINTÁTICA)

(I) INTRODUÇÃO

Lema Geral :

Seja o par $\langle \mathbb{S}, \Rightarrow \rangle$, onde $\mathbb{S}$ é um sistema dedutivo formal e $\Rightarrow$ é a redução para as derivações Π em $\mathbb{S}$, tal que:

(i) Se $\Pi \Rightarrow \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$;

(ii) $\langle \mathbb{S}, \Rightarrow \rangle$ satisfaz normalização fraca ;

(iii) O Teorema de Church & Rosser (Unicidade da forma normal), é válido em $\langle \mathbb{S}, \Rightarrow \rangle$.

É fácil mostrar que $\langle \mathbb{S}, \Rightarrow \rangle$ satisfaz normalização forte.

Um exemplo desse resultado será desenvolvido neste capítulo, usando a técnica estabelecida por Girard [3] .

No artigo de Pereira [11] , encontramos uma aplicação desta técnica ,para a Lógica Intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas.

Construiremos um sistema auxiliar para a Lógica Clássica de primeira ordem, denominado $\mathbb{C}$(AP),que satisfaça às condições do resultado acima.

Provaremos o Teorema de Normalização Forte par $\mathbb{C}$, fazendo um mapeamento das sequências de reduções em $\mathbb{C}$, nas sequências de reduções em $\mathbb{C}$(AP).

(II) O SISTEMA $\mathbb{C}(AP)$

(II.1) A linguagem de $\mathbb{C}(AP)$ é a mesma do Capítulo I, e acrescentamos dois esquemas de axiomas :

(1) $A \supset \forall x_1 \ldots\ldots \forall x_n\ (Px_1 \ldots x_n \supset Px_1 \ldots x_n)$

(2) $\forall x_1 \ldots\ldots \forall x_n\ (Px_1 \ldots\ldots x_n \supset Px_1 \ldots\ldots x_n)$

Onde A é uma fórmula qualquer e P é um símbolo para predicado.

OBS.: No caso da fórmula atômica $\perp$, teremos :

(1) $A \supset (\perp \supset \perp)$

(2) $\perp \supset \perp$

(II.2) AMPLIAÇÕES

Definiremos certas árvores, chamadas ampliações, AP(B) e AP(AB), por indução sobre o comprimento de B .

Seja B a fórmula atômica $Pt_1 \ldots\ldots t_n$, e sejam $\Pi(AB)$ e $\Pi(B)$ as seguintes derivações :

$$\Pi(AB) \equiv \begin{array}{c} A \quad A \supset \forall x_1 \ldots\ldots \forall x_n\ (Px_1 \ldots x_n \supset Px_1 \ldots x_n) \\ \hline \forall x_1 \ldots \forall x_n\ (Px_1 \ldots x_n \supset Px_1 \ldots x_n) \\ \hline \forall x_2 \ldots \forall x_n\ (Pt_1 \ldots x_n \supset Pt_1 \ldots x_n) \\ \hline \vdots \\ Pt_1 \ldots t_n \supset Pt_1 \ldots t_n \end{array}$$

$$\Pi(B) \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\forall x_1 \ldots . x_n \, (Px_1 \ldots x_n \supset Px_1 \ldots x_n)}{\forall x_2 \ldots . x_n \, (Pt_1 \ldots x_n \supset Pt_1 \ldots x_n)}}{\vdots} \\ Pt_1 \ldots t_n \supset Pt_1 \ldots t_n \end{array}$$

AP(AB) e AP(B) são definidas por indução no comprimento de B, da seguinte maneira :

(1) Base :

$$AP(AB) \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \qquad \begin{array}{c} A \\ \Pi(AB) \\ B \supset B \end{array}}{B} \qquad \begin{array}{c} A \\ \Pi(AB) \\ B \supset B \end{array}}{B} \qquad \begin{array}{c} A \\ \Pi(AB) \\ B \supset B \end{array}}{B}$$

$$AP(B) \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \qquad \begin{array}{c} \Pi(B) \\ B \supset B \end{array}}{B} \qquad \begin{array}{c} \Pi(B) \\ B \supset B \end{array}}{B} \qquad \begin{array}{c} \Pi(B) \\ B \supset B \end{array}}{B}$$

Denotaremos AP(AB) e AP(B), respectivamente, por :

$$\begin{array}{cc} B & A \\ \vdots & \\ B & \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ B \end{array}$$

(2) Se B é $C\vee D$.

$$AP(A\ C\vee D) \equiv \dfrac{C\vee D \qquad \dfrac{\begin{matrix} C \qquad A \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C\vee D} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D \qquad A \\ \vdots \\ D \end{matrix}}{C\vee D}}{C\vee D}$$

$$AP(C\vee D) \equiv \dfrac{C\vee D \qquad \dfrac{\begin{matrix} C \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C\vee D} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D \\ \vdots \\ D \end{matrix}}{C\vee D}}{C\vee D}$$

(3) Se B é $\exists x C(x)$.

$$AP(A\ \exists x C(x)) \equiv \dfrac{\exists x C(x) \qquad \dfrac{\begin{matrix} C(a) \qquad A \\ \vdots \\ C(a) \end{matrix}}{\exists x C(x)}}{\exists x C(x)}$$

$$AP(\exists x C(x)) \equiv \dfrac{\exists x C(x) \qquad \dfrac{\begin{matrix} C(a) \\ \vdots \\ C(a) \end{matrix}}{\exists x C(x)}}{\exists x C(x)}$$

(4) Se B é $C\wedge D$, $\forall x C(x)$ ou $C\supset D$, veja Girard [3] .

Uma derivação $\Pi(AP)$ é chamada de uma <u>ampliação imediata</u> de Π se, e somente se, $\Pi(AP)$ pode ser obtida de Π por substituição de algumas ocorrências de fórmulas B em Π, por $AP(B)$ ou por $AP(AB)$.

Uma derivação Π^* é uma <u>ampliação</u> de Π, se existe uma sequência $\Pi_1 \ldots \Pi_n$, onde :

(i) $\Pi_1 \equiv \Pi$;

(ii) Π_{i+1} é uma ampliação imediata de Π_i $(1 \leq i < n)$;

(iii) $\Pi_n \equiv \Pi^*$.

Uma ocorrência da fórmula A em uma derivação Π é chamada de uma <u>AP-fórmula</u>, quando :

(i) A é uma fórmula atômica, ou

(ii) A é uma top-fórmula , que não é premissa maior de uma regra de eliminação, ou

(iii) A é consequência de uma das regras: $\wedge$-E , $\supset$ - E ou $\forall$ - E, e não é , ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação.

TEOREMA : Toda derivação Π ,em $\mathbb{C}$, possui uma AP-fórmula .

Prova: Por indução no número de aplicações de regras de introdução em Π.

(III) REDUÇÕES

As reduções para $\mathbb{C}(AP)$ são definidas da seguinte maneira:

(1) $\vee$ - reduções

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{array}}{C}
\qquad \text{se reduz a} \qquad
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} & \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{array}}{B \supset C}\\
\vdots & \\
A & \\
\Pi_2 & \\
C &
\end{array}
$$

O caso onde $A \vee B$ é obtido da premissa B é similar.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array}}{A \vee B} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \Sigma_3\\ C\end{array}}{C}
\qquad \text{se reduz a} \qquad
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array} & \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \Sigma_3\\ C\end{array}}{B \supset C}\\
\begin{array}{c}\Pi_1\\ D\end{array} & \vdots & \\
 & A & \\
\vdots & & \\
D & & \\
\Pi_2 & & \\
C & &
\end{array}
$$

onde : (i) A não é eliminada em Σ_2 ;

(ii)
$$
\Sigma_2 \equiv \begin{array}{c}\Pi_1\\ D\\ \Pi_2\end{array}
$$

(iii) D é a primeira AP-fórmula de Σ_2 , de baixo para cima e no ramo mais à esquerda.

O caso onde $A \vee B$ é obtido de B e nenhuma hipótese B é eliminada em Σ_3 é similar.

(2) $\exists$ - reduções

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ C(t)\end{matrix}}{\exists x C(t)} \qquad \begin{matrix}[C(a)]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{B} \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ C(t)\\ \vdots\\ C(t)\\ \Pi_{2t}^{\,a}\\ B\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ C(t)\end{matrix}}{\exists x C(x)} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{B} \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix} & & \Pi_1\\ \Pi_3 & & C(t)\\ & & \vdots\\ D & & C(t)\\ & \vdots & \\ & D & \\ & \Pi_4 & \\ & B & \end{matrix}$$

onde : (i) A fórmula C(t) não é eliminada em Π_2 pela regra $\exists$ - E indicada;

(ii) $$\Pi_2 \equiv \begin{matrix}\Pi_3\\ D\\ \Pi_4\\ B\end{matrix}$$

(iii) D é a AP-fórmula obtida como na $\vee$ - redução.

(3) Reduções Permutativas

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ B\end{matrix}}{B} \qquad \begin{matrix}\Pi_1 & & \Pi_n\\ A_1 & \ldots & A_n\end{matrix}}{C} \qquad \text{se reduz a} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 & \Pi'_1 & & \Pi_n\\ B & A_1 & \ldots & A_n\end{matrix}}{C}}{C}$$

onde:

$$\Pi'_1 \equiv \begin{matrix}\Sigma\\ D\\ \vdots\\ D\\ \Pi\\ A_1\end{matrix}$$ e D é a AP-fórmula como em (1)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists xA(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ B\end{matrix}}{B}}{C}$$ se reduz a $$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists xA(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \dfrac{B}{C}\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \Sigma_3\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \Sigma_4}{D}$$ se reduz a $$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ C\end{matrix} \quad \Sigma_4}{D} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ C\end{matrix} \quad \Sigma_4}{D}}{D}$$

(4) Reduções do Absurdo

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^k\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{A}\,k \qquad \Sigma_1}{B}$$ se reduz a $$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{i}}{\bot}}{\neg A}\\ \Sigma^{o}\\ \bot\end{matrix}}{B}\,i$$

onde: (i) A é premissa maior de uma regra de eliminação ;

(ii) Σ_1 pode ocorrer à esquerda de A ;

(iii) Σ^{o} é obtida de Σ, substituindo todas as partes da forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ A\end{matrix} \qquad \neg A^{k}}{\bot} \qquad \text{por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ A\end{matrix} \qquad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^{i}}{\bot}$$

OBS.: Quando nenhuma ocorrência da fórmula $\neg A$,em Σ, é eliminada pela regra do absurdo indicada, devemos fazer uso das expansões de Prawitz [13].

(4.1)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \bot\end{matrix}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \bot\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}$$

(4.2)

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \bot\end{matrix}}{C} \qquad \begin{matrix}\Pi\\ D\end{matrix}\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \neg C}{\bot} \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\begin{matrix}\Sigma\\ \bot\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}C \qquad \begin{matrix}\Pi\\ D\end{matrix}\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \neg C}{\bot}}{\neg C}\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}$$

onde C é $\forall x A(x)$, $(A \wedge B)$ ou $(A \supset B)$.

O caso onde devemos considerar o AP(C) em vez do AP(D C) é similar.

(4.3)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \bot\end{array}}{A \vee B} \quad \begin{array}{c}\Pi\\ D\end{array}\\ \vdots\\ A \vee B \qquad \neg(A \vee B)\end{array}}{\bot}$$

se reduz a :

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\Sigma\\ \bot\\ \vdots\end{array} \qquad \dfrac{\bot}{\neg(A \vee B)}\\ \vdots\\ \bot\end{array}$$

where the upper $\bot$ is obtained by

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}A \quad \begin{array}{c}\Pi\\ D\end{array}\\ \vdots\\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad \neg(A \vee B)}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}B \quad \begin{array}{c}\Pi\\ D\end{array}\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \vee B} \qquad \neg(A \vee B)}{\bot}}{\bot}$$

O caso de AP(A∨B) e o do quantificador existencial são similares.

(4.4)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \quad \text{se reduz a} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

(4.5)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \quad \text{se reduz a} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x(Ax)\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}\\ \vdots\\ \bot\end{array}$$

(4.6)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array}}{C} \quad \begin{array}{c}\Pi\\ E\end{array}\\ \vdots\\ C \qquad \neg C\end{array}}{\bot}$$

se reduz a

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 & \\ C & \neg C\end{matrix}}{\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3 & \\ C & \neg C\end{matrix}}{\bot}}{\bot} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \Pi\\ C & E\\ \vdots & \\ C & \neg C\end{matrix}}{\bot}}{\neg C}$$

$$\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}$$

onde C é $\forall x A(x)$, $(A\wedge B)$ ou $(A\supset B)$.

O caso de $AP(C)$ e o do quantificador existencial são similares.

(4.7) $$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ C\vee D\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ C\vee D\end{matrix}}{C\vee D} \qquad \begin{matrix}\Pi\\ E\end{matrix}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \\ C\vee D & \neg(C\vee D)\end{matrix}}{\bot}$$

se reduz a

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 & \\ C\vee D & \neg(C\vee D)\end{matrix}}{\bot} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3 & \\ C\vee D & \neg(C\vee D)\end{matrix}}{\bot}}{\bot} \qquad \dfrac{C\vee D \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \Pi\\ C & E\\ \vdots & \\ C & \end{matrix}}{C\vee D} \quad \neg(C\vee D)}{\bot} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \Pi\\ D & E\\ \vdots & \\ D & \end{matrix}}{C\vee D} \quad \neg(C\vee D)}{\bot}}{\neg(C\vee D)}$$

$$\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}$$

O caso de $AP(C\vee D)$, $AP(\exists x B(x))$, e o de $AP(\exists x B(x)\ \ E)$ são similares.

(4.8)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ B\vee C\end{array}}{\dfrac{\begin{array}{c} B\vee C \\ \vdots \\ B\vee C\end{array} \qquad \neg(B\vee C)}{\bot}} \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ E\end{array}$$

se reduz a

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A(x)\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ B\vee C\end{array} \quad \neg(B\vee C)}{\bot}}{\bot} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{B\vee C \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}B \quad \begin{array}{c}\Pi\\ E\end{array}\\ \vdots\\ B\end{array}}{B\vee C} \quad \neg(B\vee C)}{\bot} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}C \quad \begin{array}{c}\Pi\\ E\end{array}\\ \vdots\\ C\end{array}}{B\vee C} \quad \neg(B\vee C)}{\bot}}{\dfrac{\bot}{\neg(B\vee C)}}\\ \vdots\\ \bot\end{array}$$

O caso de AP(B∨C), AP(∃xB(x)) e o de AP(∃xB(x) E) são similares.

(5) As ∀ - reduções, ∧ - reduções e ⊃ - reduções, são tomadas de Girard [3] .

(IV) NORMALIZAÇÃO - C(AP)

Teorema: O teorema de normalização fraca e o teorema da unicidade da forma normal (Church & Rosser) são válidos para C(AP).

Prova: (i) Normalização fraca - por analogia com o capítulo III .

(ii) Church & Rosser - como em Girard [3] .

Teorema: O sistema $\mathbb{C}(AP)$ satisfaz normalização forte.

Prova: Examinando as reduções para $\mathbb{C}(AP)$ vemos que, se $\Pi \Rightarrow \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$. O resultado é imediato , usando o Lema Geral (página 1) .

(V) MAPEAMENTO

O teorema abaixo é o enunciado preciso de que qualquer sequência de reduções , para uma dada derivação Π em $\mathbb{C}$, pode ser mapeada em uma sequência de reduções em $\mathbb{C}(AP)$.

TEOREMA DO MAPEAMENTO :

Se Π se reduz imediatamente a Π' , e se $\Pi*$ é uma ampliacčo de Π, então existe uma ampliação $\Pi'*$ de Π' , tal que $\Pi*$ se reduz a $\Pi'*$.

Prova: Por indução no comprimento de $\Pi*$.

Consideremos dois casos :

Caso (a) : Se Π' é obtida de Π , substituindo uma sub-árvore própria de Π por sua redução imediata.

$$\text{Se } \Pi \equiv \frac{\Pi_1 \ldots\ldots \Pi_n}{A} \text{ , então } \Pi' \equiv \frac{\Pi'_1 \ldots\ldots \Pi'_n}{A}$$

onde, para algum i ($\leq n$), Π_i se reduz imediatamente a Π'_i e para os outros j ($j \neq i \leq n$) , $\Pi'_j \equiv \Pi_j$.

Temos três subcasos :

Subcaso 1 : $\Pi^* \equiv \dfrac{\Pi^*_1 \ldots\ldots \Pi^*_n}{A}$, onde Π^*_i é uma ampliação de Π_i .

Pela hipótese indutiva podemos obter, para o dado i , o Π'^*_i .

Seja $\Pi'^* \equiv \dfrac{\Pi^*_1 \ldots \Pi'^*_i \ldots\ldots \Pi^*_n}{A}$

Subcaso 2 : Se Π^* é :

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{ccc} \Sigma & & \Pi_4 \\ A & & B \\ & \vdots & \\ & A & \end{array}$$

onde Σ é uma ampliação de Π .

$$\text{Seja } \Pi'^* \equiv \begin{array}{ccc} \Sigma' & & \Pi_4 \\ A & & B \\ & \vdots & \\ & A & \end{array}$$

onde Σ' é obtida aplicando a hipótese indutiva a Σ.

O caso de AP(A) é similar.

Caso (b) : Se Π' é obtida por uma redução própria .

Existem vários casos dependendo da redução própria utilizada. Examinaremos apenas o caso das reduções do absurdo (reduções de (4) a (4.8) ,acima). Todos os outros casos são análogos aos tratados por Girard [3] .[1]

(1) Se Π é :

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^k \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{A}\,k \qquad \Sigma_1}{B}$$

Então , Π' é :

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B^i}{\bot}}{\neg A} \\ \Sigma^\circ \\ \bot \end{matrix}}{B}\,i$$

(1.1) : Se $\Pi*$ é :

$$\Pi* \equiv \dfrac{\dfrac{\Pi*_1}{A} \qquad \Pi*_2}{B}$$

onde $\Pi*_1$ e $\Pi*_2$ são ampliações de Σ e Σ_1 , respectivamente.

$\Pi*$ se reduz a Σ_4 :

$$\Sigma_4 \equiv \dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Pi*_2}{B} \qquad \neg B^i}{\bot}}{\neg A} \\ \Pi*_1{}^\circ \\ \bot \end{matrix}}{B}\,i$$

---

[1] Para uma análise detalhada de todos os casos ,veja Massi [9] .

Precisamos considerar se a ampliação Π^*_1 substitui partes de Σ , da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_3 & \\ A & \neg A^k\end{array}}{\perp} \qquad \text{por } \Sigma_5 :$$

$$\Sigma_5 \equiv \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \neg A & \Pi_4 \\ & D \end{array} & \\ & \vdots & \\ \dfrac{\begin{array}{cc}\Pi^*_3 & \\ A & \neg A\end{array}}{\perp} & & \begin{array}{c}\Pi_5 \\ E\end{array} \\ & \vdots & \\ & \perp & \end{array} .$$

onde Π^*_3 é uma ampliação de Σ_3 .

Usando a definição de $AP(D\ \neg A)$, temos :

$$\Sigma_5 \equiv \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \dfrac{A \quad \neg A^k}{\perp} & \begin{array}{c}\Pi_4 \\ D\end{array} \end{array} & \\ & \vdots & \\ \dfrac{\begin{array}{cc}\Pi^*_3 & \dfrac{\perp}{\neg A} \\ A & \end{array}}{\perp} & & \begin{array}{c}\Pi_5 \\ E\end{array} \\ & \vdots & \\ & \perp & \end{array}$$

Neste caso, $\Pi^{*\circ}_1$ será obtida de Π^*_1 substituindo Σ_5 por Σ_6 :

$$\Sigma_\sigma \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3^*\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{A \quad \Pi_2^*}{B} \quad \neg B}{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg A}}{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array} \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$

Mas, Σ_σ se reduz a Σ'_σ :

$$\Sigma'_\sigma \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3^*\\ A\end{array} \quad \Pi_2^*}{B} \quad \neg B}{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array} \\ \vdots \\ \perp \end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3^*\\ A\end{array} \\ \vdots \\ \perp \end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array} \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$

Veja que Σ'_σ é uma ampliação de :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_3\\ A\end{array} \quad \Sigma_1}{B} \qquad \neg B}{\perp}$$

Obs.: Os casos de AP($\neg$A) e AP($\perp$) são similares.

Podemos, então, considerar o $\Pi'*$ como

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \Pi^*_2}{B} \qquad \neg B^i}{\perp}}{\neg A} \\ \Pi^{*\circ\prime}_1 \\ \dfrac{\perp}{B}\ i \end{array}$$

onde $\Pi^{*\circ\prime}_1$ é a redução de $\Pi^{*\circ}$ obtida reduzindo sub-árvores da forma Σ_6 para Σ'_6 , como feito acima.

É fácil ver, usando Lema (2) (capítulo I), que $\Sigma_4 \Rightarrow \Pi'*$, logo $\Pi* \Rightarrow \Pi'*$ e $\Pi'*$ é uma ampliação de Π' .

(1.2) Se A é $(M \wedge N)$, B é M e Σ_1 é vazio . Neste caso ,

$$\Pi* \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Pi^*_1 & \Pi_3 \\ M \wedge N & D \end{array} \\ \vdots \\ \dfrac{M \wedge N}{M} \end{array}$$

Usando a definição de $AP(D\ M \wedge N)$:

$$\Pi* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Pi^*_1 & \\ \dfrac{M \wedge N}{M} & \begin{array}{c}\Pi_3 \\ D\end{array} \end{array} \\ \vdots \\ M \end{array} & \qquad & \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Pi^*_1 & \\ \dfrac{M \wedge N}{N} & \begin{array}{c}\Pi_3 \\ D\end{array} \end{array} \\ \vdots \\ N \end{array} \end{array}}{\dfrac{M \wedge N}{M}} \end{array}$$

Seja Π'^{*} :

$$\Pi'^{*} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{M\wedge N}{M} \quad \neg M^{i}}{\bot}}{\neg(M\wedge N)} \\ \Pi_1^{*o'} \\ \dfrac{\bot}{M}\,i \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array} \\ \vdots \\ M \end{array} & \qquad\qquad & \begin{array}{c} \Pi_1^{*} \\ \dfrac{M\wedge N}{N} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array} \\ \vdots \\ N\end{array} \end{array} \\ \vdots \\ M \end{array}$$

onde $\Pi_1^{*o'}$ é como em (1.1).

(1.3) Se A é $(M\supset N)$, B é N e Σ_1 está à esquerda de A .

Usando a definição de AP(E $M\supset N$) , temos :

$$\Pi^{*} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2^{*}\\ M\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{M \quad \begin{array}{c}\Pi_1^{*}\\ M\supset N\end{array}}{N} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots \\ N\end{array}}{M\supset N}}{N}$$

onde Π_1^{*} e Π_2^{*} são como em (1.1) .

Neste caso Π^* se reduz a

$$
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_2\\ M\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi^*_1\\ M\supset N\end{array}}{N} & & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} & & \\
\vdots & & & & \Pi^*_2 \\
N & & & & M \\
 & & \vdots & & \\
 & & N & &
\end{array}
$$

Seja Π'^* ,como :

$$
\Pi'^* \equiv
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_2\\ M\end{array} \quad M\supset N}{N} \quad \neg N^{\,i}}{\perp}}{\neg(M\supset N)}}{} & & & & \\
\Pi^{*\,\circ\prime}_1 & & & & \\
\dfrac{\perp}{N}\, i & & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} & & \\
\vdots & & & & \Pi^*_2 \\
N & & & & M \\
 & & \vdots & & \\
 & & N & &
\end{array}
$$

onde $\Pi^{*\,\circ\prime}_1$ é como em (1.1). O caso de AP(M⊃N) é similar.

(1.4) Se A é $\forall x A(x)$, B é $A(t)$ e Σ_1 é vazio.

Usando a definição de AP(E $\forall x A(x)$), temos :

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(a)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}}{A(t)} \end{array} \qquad\qquad a \notin \Pi^*_1 \ , \ \Pi_3$$

Seja Π'^* , como :

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)} \qquad \neg A(t)^{i}}{\bot}}{\neg \forall x A(x)} \\ \Pi^{*\,\circ\prime}_1 \\ \dfrac{\bot}{A(t)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots \\ A(t) \end{array}$$

onde $\Pi^{*\,\circ\prime}_1$ é como em (1.1) .

(1.5) Se A é $(M \vee N)$ e Σ_1 é Π_3, Π_4 , então :

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \bot\end{array}}{M \vee N} \quad \begin{array}{c}[M]\\ \Pi_3\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[N]\\ \Pi_4\\ B\end{array}}{B} \qquad \text{e} \qquad \Pi' \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{M \vee N \quad \begin{array}{c}\Pi_3\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ B\end{array}}{B} \qquad \neg B^{i}}{\bot}}{\neg(M \vee N)} \\ \Sigma^{\circ} \\ \dfrac{\bot}{B}\, i \end{array}$$

Se Π^* é :

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ M\vee N\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array}\\ \vdots\\ M\vee N\end{array} \quad \Pi^*_3 \quad \Pi^*_4}{B}$$

onde Π^*_3 , Π^*_4 são, respectivamente , ampliações de Π_3 e Π_4 .

Usando a definição de $AP(E\ M\vee N)$, temos :

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ M\vee N\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}M \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array}\\ \vdots\\ M\end{array}}{M\vee N} \quad \dfrac{\begin{array}{c}N \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array}\\ \vdots\\ N\end{array}}{M\vee N}}{M\vee N} \quad \Pi^*_3 \quad \Pi^*_4}{B}$$

Π^* se reduz a Σ_5:

$$\Sigma_5 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ M\vee N\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}M \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array}\\ \vdots\\ M\end{array}}{M\vee N} \quad \Pi^*_3 \quad \Pi^*_4}{B} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}N \qquad \begin{array}{c}\Pi_5\\ E\end{array}\\ \vdots\\ N\end{array}}{M\vee N} \quad \Pi^*_3 \quad \Pi^*_4}{B}}{B}$$

Sejam Π_6 e Π_7 :

$$\Pi_6 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} M \qquad \overset{\Pi_5}{E} \\ \vdots \\ M \end{array}}{M\vee N} \quad \Pi_3^{*} \quad \Pi_4^{*}}{B} \qquad\qquad \Pi_7 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} N \qquad \overset{\Pi_5}{E} \\ \vdots \\ N \end{array}}{M\vee N} \quad \Pi_3^{*} \quad \Pi_4^{*}}{B}$$

É fácil ver que $\Pi_6 \rightarrow \Pi_3^{**}$ e $\Pi_7 \rightarrow \Pi_4^{**}$, onde Π_3^{**} e Π_4^{**} são, respectivamente, ampliações de Π_3^{*} e Π_4^{*}.

Logo, Σ_5 se reduz a Σ_6 :

$$\Sigma_6 \equiv \dfrac{\overset{\Pi_1^{*}}{M\vee N} \quad \Pi_3^{**} \quad \Pi_4^{**}}{B}$$

Podemos considerar Π'^{*}, como :

$$\Pi'^{*} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{M\vee N \quad \Pi_3^{**} \quad \Pi_4^{**}}{B} \quad \neg B^{i}}{\bot}}{\neg(M\vee N)} \\ \Pi_1^{*\circ\prime} \\ \dfrac{\bot}{B}\, i \end{array}$$

onde o $\Pi_1^{*\circ\prime}$ é como em (1.1) .O caso de AP(M∨N) é similar.

(1.6) Se A é $\exists x A(x)$.

Usando a definição de AP(E $\exists x A(x)$), temos :

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1^* \\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} A(a) \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \\ E\end{matrix} \\ \vdots \\ A(a)\end{matrix}}{\exists x A(x)}}{\exists x A(x)} \qquad \Pi_2^*}{B}$$

onde Π_1^* e Π_2^* são como em (1.1) . Π^* se reduz a Σ_5 :

$$\Sigma_5 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1^* \\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} A(a) \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \\ E\end{matrix} \\ \vdots \\ A(a)\end{matrix}}{\exists x A(x)} \qquad \Pi'^*_2}{B}}{B}$$

Seja Π_4 :

$$\Pi_4 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} A(a) \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \\ E\end{matrix} \\ \vdots \\ A(a)\end{matrix}}{\exists x A(x)} \qquad \Pi'^*_2}{B}$$

onde Π'^*_2 é obtida de Π_2^*, fazendo a ampliação na AP-fórmula (redução (3)) .

É fácil ver que : $\Pi_4 \Rightarrow \Pi_2^{**}$ e Π_2^{**} é uma ampliação de Π_2^* .

Logo, Σ_5 se reduz a Σ_6 :

$$\Sigma_6 \equiv \frac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ \exists x A(x)\end{array} \quad \Pi^{**}_2}{B}$$

Seja Π'^* , como :

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x A(x) \quad \Pi^{**}_2}{B} \quad \neg B^i}{\perp}}{\neg\exists x A(x)} \\ \Pi^{*\,\circ\prime}_1 \\ \dfrac{\perp}{B}\, i \end{array}$$

onde $\Pi^{*\,\circ\prime}_1$ é como em (1.1) . O caso de $AP(\exists x A(x))$ é similar.

(1.7) Se Π^* é :

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{cc} \dfrac{\Pi^*_1 \quad \Pi^*_2}{B} & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots & \\ B & \end{array}$$

onde Π^*_1 e Π^*_2 são, respectivamente, ampliações de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \perp\end{array}}{A}$ e Σ_1 .

Aplicando a hipótese indutiva em $\dfrac{\Pi^*_1 \quad \Pi^*_2}{B}$, obtemos Σ_3 , e

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{cc} \begin{array}{c}\Sigma_3\\ B\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots & \\ B & \end{array}$$

(2) Se Π é :

$$\Pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array}}{C} \qquad \neg C}{\bot} \qquad \text{e se } \Pi' \equiv \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array} \quad .$$

(2.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ C\end{array} \qquad \neg C}{\bot} \quad , \text{ onde } \Pi^*_1 \text{ é uma ampliação de } \Sigma_1 \ .$$

Seja Π'^* , como :

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{c}\Pi^*_1\\ \bot\\ \vdots\\ \bot\end{array}$$

(2.2) Se C é $\forall x A(x)$, $(A \wedge B)$ ou $(A \supset B)$ e Π^* é :

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{l}\begin{array}{cc}\Pi^*_1 & \Pi_3\\ C & D\end{array}\\ \quad\vdots\\ \cfrac{C \qquad \neg C}{\bot}\end{array} \quad , \text{ onde } \Pi^*_1 \text{ é como em (2.1).}$$

Seja Π'^* da forma :

$$
\Pi'^{*} \equiv \begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Pi^{*}_{1} \\ \bot \end{array} &
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} C & \begin{array}{c} \Pi_3 \\ D \end{array} \end{array} \\
\vdots \\
\dfrac{\dfrac{C \qquad \neg C}{\bot}}{\neg C}
\end{array}
\end{array} \\
\vdots \\
\bot
\end{array}
$$

Obs.: O caso de AP(C) é tratado de maneira análoga ao (2.1).

(2.3) Se C é $(A \vee B)$ e se Π^{*} é :

$$
\Pi^{*} \equiv \begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\dfrac{\Pi^{*}_{1}}{A \vee B} & \begin{array}{c} \Pi_3 \\ D \end{array}
\end{array} \\
\vdots \\
\dfrac{A \vee B \qquad \neg(A \vee B)}{\bot}
\end{array}
$$

Seja Π'^{*} da forma :

$$
\Pi'^{*} \equiv \begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Pi^{*}_{1} \\ \bot \end{array} &
\dfrac{\dfrac{A\vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\begin{array}{cc} A & \begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array}\end{array}\\ \vdots \\ A\end{array}}{A\vee B} \qquad \neg(A\vee B)}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\begin{array}{cc} A & \begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array}\end{array}\\ \vdots \\ A\end{array}}{A\vee B} \qquad \neg(A\vee B)}{\bot}}{\bot}}{\neg(A\vee B)}
\end{array} \\
\vdots \\
\bot
\end{array}
$$

Obs.: O caso de AP(A∨B) é análogo ao (2.3)

(2.4) Se C é $\exists x A(x)$, é análogo ao (2.3), usando a redução correspondente.

(2.5) Se Π* é da forma :

$$\Pi^* \equiv \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 \\ C\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{C \quad \neg C}{\bot} & \begin{matrix}\Pi_3 \\ D\end{matrix} \\ \vdots & \\ \bot & \end{matrix}}{\neg C}}{\bot}$$

onde Π^*_1 é uma ampliação de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \bot\end{matrix}}{C}$

Π* se reduz a Σ_2 :

$$\Sigma_2 \equiv \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 \\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot} & \begin{matrix}\Pi_3 \\ D\end{matrix} & \\ \vdots & & \begin{matrix}\Pi^*_1 \\ C\end{matrix} \\ \bot & & \\ & \vdots & \\ & \bot & \end{matrix}$$

Pela hipótese indutiva temos que :

$\Pi_4 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ C\end{array} \qquad \neg C}{\perp}$ se reduz a Π'_4 , então, seja $\Pi'*$ da forma:

$$\Pi'* \equiv \begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Pi'_4 & \Pi_3\\ \perp & D\end{array}\\ \vdots\\ \perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi^*_1\\ C\end{array}\\ \vdots\\ \perp\end{array}$$

(2.6) Se $\Pi*$ é da forma:

$$\Pi* \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\Pi^*_1 \qquad \Pi^*_2}{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array}\\ \vdots\\ \perp\end{array}$$

onde Π^*_1 e Π^*_2 são , respectivamente, ampliações de

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \perp\end{array}}{C} \qquad \text{e} \qquad \neg C \quad .$$

Usando a hipótese indutiva, seja $\Pi'*$ da forma:

$$\Pi'* \equiv \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Sigma' & \Pi_3\\ \perp & D\end{array}\\ \vdots\\ \perp\end{array}$$

(3) Se Π é da forma:

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3\\ A\vee B & C & C\end{matrix}}{C} \qquad \neg C}{\bot}$$

Neste caso Π' é da forma:

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

(3.1) Se $\Pi*$ é da forma:

$$\Pi* \equiv \dfrac{\dfrac{\Pi^*_1 \quad \Pi^*_2 \quad \Pi^*_3}{C} \qquad \neg C}{\bot}$$

onde Π^*_1 , Π^*_2 e Π^*_3 são , respectivamente, ampliações de

$$\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ C\end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ C\end{matrix}$$

Seja $\Pi'*$ da forma:

$$\Pi'* \equiv \dfrac{\Pi^*_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_2\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_3\\ C\end{matrix} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

(3.2) Se C é $\forall x A(x)$, $(A \wedge B)$ ou $(A \supset B)$ e se Π^* é da forma:

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\Pi^*_1 \quad \Pi^*_2 \quad \Pi^*_3}{C} \qquad \begin{array}{c}\Pi_4\\ E\end{array} \\ \vdots \\ \dfrac{C \qquad \neg C}{\perp} \end{array}$$

onde Π^*_1 , Π^*_2 e Π^*_3 são como em (3.1)

Seja Π'^* da forma:

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\Pi^*_1 \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_2\\ C \quad \neg C\end{array}}{\perp} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_3\\ C \quad \neg C\end{array}}{\perp}}{\perp} \qquad \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} C \qquad \begin{array}{c}\Pi_4\\ E\end{array} \\ \vdots \\ C \qquad \neg C\end{array}}{\perp}}{\neg C} \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$

Obs.:O caso de AP(C) é análogo ao (3.2).

(3.3) Se C é $(M \vee N)$ e se Π^* é da forma:

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi^*_2\\ M \vee N\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi^*_3\\ M \vee N\end{array}}{M \vee N} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \vdots \\ \dfrac{M \vee N \qquad \neg(M \vee N)}{\perp} \end{array}$$

onde Π^*_1 , Π^*_2 e Π^*_3 são como em (3.1).

Este caso é similar ao (3.2) .

Obs.: O caso de $AP(M\vee N)$ é análogo ao (3.3) .

(3.4) Se C é $\exists xM(x)$ e se Π^* é da forma:

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\overset{\Pi^*_1}{A\vee B}\quad \overset{\Pi^*_2}{\exists xM(x)}\quad \overset{\Pi^*_3}{\exists xM(x)}}{\exists xM(x)} \qquad \overset{\Pi_4}{E} \\ \vdots \\ \dfrac{\exists xM(x) \quad \neg\exists xM(x)}{\perp} \end{array}$$

onde Π^*_1 , Π^*_2 e Π^*_3 são como em (3.1) .

Este caso é análogo ao (3.2) .

Obs.: O caso de $AP(\exists xM(x))$ é análogo ao (3.4) .

(3.5) Se Π^* é da forma:

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{C \quad \neg C}{\perp} \qquad \overset{\Pi_3}{E} \\ \vdots \\ \dfrac{\overset{\Pi^*_1}{C} \qquad \dfrac{\perp}{\neg C}}{\perp} \end{array}$$

onde Π^*_1 é uma ampliação de

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}$$

Π^* se reduz a

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 & \\ C & \neg C\end{matrix}}{\perp} & & \begin{matrix}\Pi_3 \\ E\end{matrix} & & \\
 & \vdots & & & \\
 & \perp & & & \begin{matrix}\Pi^*_1 \\ C\end{matrix} \\
 & & \vdots & & \\
 & & \perp & &
\end{array}$$

Usando a hipótese indutiva em Π_5 ,

$$\Pi_5 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 & \\ C & \neg C\end{matrix}}{\perp} \quad , \quad \text{obtemos } \Pi'_5 .$$

Seja Π'^* da forma:

$$\Pi'^* \equiv \quad \begin{array}{ccccc}
\begin{matrix}\Pi'_5 \\ \perp\end{matrix} & & \begin{matrix}\Pi_3 \\ E\end{matrix} & & \\
 & \vdots & & & \\
 & \perp & & \begin{matrix}\Pi^*_1 \\ C\end{matrix} & \\
 & & \vdots & & \\
 & & \perp & &
\end{array}$$

(3.6) Se Π^* é da forma:

$$\Pi^* \equiv \begin{array}{cc} \dfrac{\Pi^*_1 \qquad \Pi^*_2}{\bot} & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{\bot} \end{array}$$

onde Π^*_1, Π^*_2 são, respectivamente, ampliações de

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ C\end{array}}{C} \qquad \text{e} \qquad \neg C \,.$$

Usando a hipótese indutiva em Π_4,

$$\Pi_4 \equiv \dfrac{\Pi^*_1 \qquad \Pi^*_2}{\bot} \qquad \text{, obtemos o } \Pi'_4 \,.$$

Seja Π'^* da forma :

$$\Pi'^* \equiv \begin{array}{cc} \begin{array}{c}\Pi'_4\\ \bot\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{\bot} \end{array}$$

(4) Se Π é da forma:

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\exists x A(x)} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ B\end{array}}{B} \qquad \neg B}{\bot}$$

Este caso é análogo ao (3), usando as reduções correspondentes.

(VI) TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO FORTE

Teorema: O Sistema $\mathbb{C}$ é normalizável fortemente .

Prova: Usando o Teorema do Mapeamento , qualquer sequência de reduções em $\mathbb{C}$ pode ser mapeada em uma sequência de reduções em $\mathbb{C}(AP)$.

O resultado segue diretamente do Teorema de Normalização Forte para $\mathbb{C}(AP)$.

CAPÍTULO VII

NORMALIZAÇÃO FORTE VIA PIOR SEQUÊNCIA

(I) INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma noção de pior sequência de redução para a Lógica Clássica, e mostramos que se a pior sequência de redução para uma derivação Π termina [1], então qualquer sequência de redução para Π termina em uma única forma normal.

A pior sequência de redução para Π, pode ser compreendida intuitivamente como aquela sequência de redução que leva em consideração todas as fórmulas máximas que podem ser geradas a partir daquelas já existentes em Π.

(II) PIOR SEQUÊNCIA

Usaremos o Sistema $\mathbb{C}'$ para a Lógica Clássica de primeira ordem definido por Prawitz [13] (onde a conclusão da regra do absurdo clássico ($\perp_c$) é sempre uma fórmula atômica),com os seguintes símbolos lógicos: $\wedge$ (conjunção), $\supset$ (implicação) , $\forall$ (quantificação universal) e $\perp$ (falsidade).

Seja Π uma derivação em $\mathbb{C}'$ não normal . A primeira fórmula máxima que ocorre em Π, de baixo para cima e mais à direita, será

---

[1] Esta idéia foi sugerida pelo Prof. Per Martin Löf .

representada por $F(\Pi)$.

A <u>fórmula</u> <u>máxima</u> <u>principal</u> de Π , representada por $FP(\Pi)$, é definida por indução no número de ocorrências de fórmulas máximas em Π , da seguinte maneira :

(1) Base : a única ocorrência de fórmula máxima em Π é a $FP(\Pi)$.

(2) Se Π é da forma:

$$\Pi \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}}$$

onde: (i) $A \supset B$ é $F(\Pi)$;

(ii) A não é eliminada pela regra $(\supset - I)$ mostrada ,

então, $FP(\Pi)$ é : (i) $A \supset B$, se Π_1 é normal ; ou

(ii) $FP(\Pi_1)$, se Π_1 não é normal.

(3) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \Pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}}$$

onde: (i) $A \supset B$ é $F(\Pi)$;

(ii) A é eliminada pela regra $(\supset - I)$ mostrada,

então, $FP(\Pi)$ é $A \supset B$.

(4) Se Π é da forma:

$$\Pi \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \quad \Pi_2 \\ \underline{A \qquad B} \\ \underline{A \wedge B} \\ A \\ \Pi_3 \end{array}$$

onde $A \wedge B$ é $F(\Pi)$,

então, $FP(\Pi)$ é : (i) $A \wedge B$, se Π_2 é normal ; ou

(ii) $FP(\Pi_2)$, se Π_2 não é normal .

(5) Se Π é da forma:

$$\Pi \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \quad \Pi_2 \\ \underline{A \qquad B} \\ \underline{A \wedge B} \\ B \\ \Pi_3 \end{array}$$

onde $A \wedge B$ é $F(\Pi)$,

então, $FP(\Pi)$ é : (i) $A \wedge B$, se Π_1 é normal ;

(ii) $FP(\Pi_1)$, se Π_1 não é normal .

(6) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \underline{A(a)} \\ \underline{\forall x A(x)} \\ A(t) \\ \Pi_2 \end{array}$$

onde $\forall x A(x)$ é $F(\Pi)$, então, $FP(\Pi)$ é $\forall x A(x)$.

Uma derivação Π <u>se reduz de forma pior a</u> Π', se existe uma sequência $\Pi_1 \ldots\ldots \Pi_n$., tal que :

(i) $\Pi \equiv \Pi_1$; e

(ii) Π_{i+1} é a redução imediata de Π_i obtida eliminando a $FP(\Pi_i)$;

(iii) $\Pi_n \equiv \Pi'$.

A <u>pior sequência de redução</u> para Π é uma sequência $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$, tal que :

(1) $\Pi = \Pi_1$;

(2) para cada i ,Π_{i+1} é a redução imediata de Π_i obtida eliminando a $FP(\Pi_i)$

(3) a última derivação da sequência, quando existe , é normal .

Admitiremos que a pior sequência de redução para qualquer derivação Π é finita.

(II.1) CONVENÇÕES

(a) $\Pi \underset{n}{\Rightarrow} \Pi'$, significa que Π se reduz a Π' por uma sequência de comprimento n .

(b) $\Pi \overset{p}{\rightarrow} \Pi'$, significa que Π se reduz de forma pior a Π' .

(c) lp (Π) é o comprimento da pior sequência de redução para Π.

(d) $\Pi \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'$, significa que Π se reduz imediatamente a Π' .

(e) $\Pi \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'$, significa que Π se reduz imediatamente a Π', eliminando a $FP(\Pi)$.

(II.2) TEOREMAS

Teorema (1): UNICIDADE - Toda derivação Π não normal possui uma única pior sequência de redução.

Prova: é imediata da definição de pior sequência.

Teorema (2) : Se Π é

$$\text{(I)} \quad \Pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \Pi_3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{(II)} \quad \Pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}}{A \wedge B}}{A} \\ \Pi_3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{(III)} \quad \Pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}}{A \wedge B}}{B} \\ \Pi_3 \end{array}$$

onde : (i) $A \supset B$ e $A \wedge B$ são $F(\Pi)$;

(ii) A não é eliminada em Π_2 pela regra $\supset$ - I mostrada .

Então, respectivamente ,

(I) $lp(\Pi) = lp(\Pi_1) + lp(\Sigma) - 1$, onde

$$\Sigma \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^*_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \Pi_3 \end{array} \quad , \ \Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1 \quad \text{e} \quad \Pi^*_1 \text{ é normal , ou}$$

(II) $lp(\Pi) = lp(\Pi_2) + lp(\Sigma) - 1$, onde

$$\Sigma \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi^*_2\\ B\end{array}}{A \wedge B}}{A} \\ \Pi_3 \end{array} \quad , \ \Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2 \quad \text{e} \quad \Pi^*_2 \text{ é normal ; ou}$$

(III) $lp(\Pi) = lp(\Pi_1) + lp(\Sigma) - 1$, onde

$$\Sigma \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 & \Pi_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}} \quad , \ \Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1 \quad \text{e} \quad \Pi^*_1 \ \text{é normal} \ .$$

Prova : é imediata da definição de pior sequência .

Nota: Como $lp(\Sigma) \geq 2$,temos :

(i) $lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$, se Π é como em (I) ;

(ii) $lp(\Pi_2) < lp(\Pi)$, se Π é como em (II) ;

(iii) $lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$, se Π é como em (III) .

Teorema (3) Se Π se reduz imediatamente a Π' ($\Pi \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'$), então, $lp(\Pi') < lp(\Pi)$ e existe uma derivação Π^* , tal que $\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*$ e $\Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*$.

Prova: Por indução em $lp(\Pi)$.

Base: $lp(\Pi) = 1$. Π é normal . Neste caso, o resultado é imediato .

Passo indutivo : $lp(\Pi) > 1$, Π não é normal .

Seja Π° uma derivação tal que $\Pi \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi^\circ$. Neste caso, $lp(\Pi^\circ)$ é menor do que $lp(\Pi)$. Vamos mostrar que :

(*) Se $\Pi^\circ \underset{n}{\Rightarrow} \Pi_1$, então , $lp(\Pi_1) < lp(\Pi^\circ)$ e existe Π^*_1 tal que $\Pi^\circ \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1$ e $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1$.

Prova: Por indução em n .

Base: $\Pi^{\circ} \underset{i}{\Rightarrow} \Pi_1$. Como $lp(\Pi^{\circ}) < lp(\Pi)$, o resultado segue imediatamente da hipótese indutiva do Teorema .

Passo indutivo : $n > 1$. Seja $\Pi^{\circ} \underset{n-1}{\Rightarrow} \Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi_1$.

Da hipótese indutiva , existe Π^*_2 , tal que $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2$, $\Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2$ e $lp(\Pi_2) < lp(\Pi^{\circ})$. Portanto , $lp(\Pi_2) < lp(\Pi^{\circ}) < lp(\Pi)$. Podemos aplicar a hipótese indutiva do Teorema a Π_2. Logo, existe Π^*_3 tal que $\Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$, $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$ $lp(\Pi_1) < lp(\Pi_2)$. Logo , $lp(\Pi_1) < lp(\Pi^{\circ})$.

Usando o Teorema 1 em Π_2, temos três possibilidades :

(1) $\Pi^*_2 \equiv \Pi^*_3$.

Neste caso, $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2 \equiv \Pi^*_3$ e $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$.

(2) $\Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2$.

Neste caso, $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2$ e $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2$.

(3) $\Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$.

Neste caso, $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$ e $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_3$

Voltemos ao Teorema .

Consideremos dois casos:

Caso (a) : $\Pi' = \Pi^{\circ}$, onde $\Pi \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi^{\circ}$.

Neste caso, o resultado é imediato.

Caso (b) : $\Pi' \neq \Pi^{\circ}$.

Temos várias possibilidades de acordo com a $F(\Pi)$.

(1) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

onde : (i) $A \supset B$ é $F(\Pi)$;

(ii) A não é eliminada em Π_2 pela regra $\supset$ - I mostrada .

(1.1) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

onde $\Pi_1 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_1$.

Pelo Teorema (2) , podemos usar em Π_1 a hipótese indutiva. Logo, existe Π^*_1 tal que $\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1$, $\Pi'_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*_1$ e $lp(\Pi'_1) < lp(\Pi_1)$.

Seja Π^* da forma :

$$\Pi^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi^*_1 \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

Observamos, facilmente, que $\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*$, $\Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi^*$ e ,usando o Teorema (2), $lp(\Pi') < lp(\Pi)$.

(1.2) Se Π' é da forma:

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}}$$

onde $\Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2$.

Temos duas possibilidades .

(1.2.1) Se Π_1 é normal , neste caso Π° é da forma :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi_2 \\ B \\ \Pi_3\end{array} \qquad \text{e} \quad \Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi'_2 \\ B \\ \Pi_3\end{array} \quad , \text{ onde } \Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} .$$

Vemos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. Usando (*), existe $\Pi*$ tal que : $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$, $\Pi'^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $lp(\Pi'^{\circ}) < lp(\Pi^{\circ})$. Então, $\Pi \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$, $\Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $lp(\Pi') \leq lp(\Pi^{\circ}) < lp(\Pi)$.

(1.2.2) Se Π_1 não é normal, neste caso Π° é da forma :

$$\Pi^{\circ} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^{\circ}_1 \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi_1 \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi^{\circ}_1$$

Temos que

$$\Pi'^{\circ} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi^{\circ}_1 \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} .$$

Vemos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. Usando (*) , existe $\Pi*$ tal que :

$\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$, $\Pi'^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $lp(\Pi'^{\circ}) < lp(\Pi^{\circ})$. Logo :

$$\Pi \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \quad , \Pi' \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \quad \text{e } lp(\Pi') \leq lp(\Pi^{\circ}) < lp(\Pi) .$$

(1.3) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{B} \\ \Pi'_3 \end{matrix} \qquad , \text{ onde } \Pi_3 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_3 .$$

Como $A \supset B$ é $F(\Pi)$, Π e Π' devem ter as seguintes formas :

$$\Pi \equiv \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{B} \\ \Pi_4 \\ C \end{matrix}}{E} \\ \Pi_6 \end{matrix} \qquad\qquad \Pi' \equiv \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi'_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{B} \\ \Pi_4 \\ C \end{matrix}}{E} \\ \Pi_6 \end{matrix}$$

onde $\Pi_5 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_5$.

Temos duas possibilidades .

(1.3.1) Se Π_1 é normal , neste caso temos :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ B\\ \Pi_4\\ C\end{matrix}}{E} \\ \Pi_6 \end{matrix} \qquad \text{e} \quad \Pi'^{\circ} \equiv \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\Pi'_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ B\\ \Pi_4\\ C\end{matrix}}{E} \\ \Pi_6 \end{matrix}$$

Logo, $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$.

O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2) .

(1.3.2) Se Π_1 não é normal , neste caso temos :

$$\Pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_5\\D\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1^\circ\\A\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\\Pi_4\\C\end{array}}{E}\\\Pi_6\end{array} \qquad e \qquad \Pi'^\circ \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_5\\D\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1^\circ\\A\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\\Pi_4\\C\end{array}}{E}\\\Pi_6\end{array}$$

Novamente, $\Pi^\circ \Rightarrow \Pi'^\circ$.

O resultado segue de maneira análoga ao anterior.

(1.4) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \begin{array}{c}\Pi_2\\B\\\Pi_3\end{array}$$

Neste caso, como $\Pi^\circ \neq \Pi'$, Π_1 não é normal . Logo ,

$$\Pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1^\circ\\A\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\\Pi_3\end{array}$$

Vemos que $\Pi^\circ \Rightarrow \Pi'$. Usando (*) , existe $\Pi*$ tal que :

$$\Pi \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi^\circ \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \quad , \quad \Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \quad e \quad lp(\Pi') < lp(\Pi^\circ) < lp(\Pi) .$$

(2) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \Pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}\, k}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}} \quad , \text{ onde } A \supset B \text{ é } F(\Pi) \ .$$

(2.1) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \Pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}\, k}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi_1 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_1 \ .$$

Neste caso, temos :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi_1 \\ A \\ \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3\end{array} \qquad \text{e} \qquad \Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi'_1 \\ A \\ \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3\end{array} \quad , \text{ onde } \Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \ .$$

Vemos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2) .

(2.2) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \Pi'_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}\, k}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2$$

Consideremos duas possibilidades :

(2.2.1) Se a redução $\Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2$ é tal que :

$$\Pi'_2 \equiv \begin{array}{c} \Pi_4 \\ B \end{array} \quad \text{e} \quad A^k \text{ não ocorre em } \Pi_4 \text{. Isto é ,}$$

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_4 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}}$$

onde A não é eliminada pela regra $\supset$ - I mostrada . Então :

(A) Π_1 é normal , neste caso ,

$$\Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi_4 \\ B \\ \Pi_3 \end{array} \quad \text{, onde } \Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} .$$

Temos que :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \\ \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3 \end{array}$$

Observamos facilmente que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. [2] O resultado segue de

---

[2] Efetuamos em Π° uma redução do mesmo tipo que a redução $\Pi_2 \Rightarrow \Pi_4$. As reduções ,no caso em questão , são dos tipos : $\wedge$ - redução ou $\supset$ - redução (com a regra $\supset$ - I não relevante) . O resultado segue imediatamente por inspeção nessas reduções.

maneira análoga ao (1.2.2) .

(B) Π_1 não é normal , neste caso ,

$$\Pi'^{\circ} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1^{\circ} \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_4 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

, onde $\Pi' \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ}$.

Seja Σ da forma:

$$\Sigma \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1^{\circ} \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k \\ \Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\,k}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

, onde $\Pi_1 \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi_1^{\circ}$.

Vemos que :

$$\Sigma^{\circ} \equiv \begin{matrix}\Pi_1^{\circ} \\ A \\ \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3\end{matrix} \qquad e \qquad \Sigma' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1^{\circ} \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_4 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

onde : (i) $\Sigma \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Sigma^{\circ}$;

(ii) $\Sigma \underset{i}{\Rightarrow} \Sigma'$.

Observamos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Sigma^{\circ}$ e $\Sigma' \equiv \Pi'^{\circ}$. Usando (*) , existe $\Pi*$ tal que : $\Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$, $\Sigma^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $lp(\Sigma^{\circ}) < lp(\Pi^{\circ})$. Logo :

$\Pi \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $\Sigma \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Sigma^{\circ} \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$. Com isso obtemos, $lp(\Sigma) \leq lp(\Pi^{\circ}) < lp(\Pi)$.

Usando a hipótese indutiva em Σ, existe $\Sigma*$ tal que :

$$\Sigma \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* \quad , \quad \Sigma' \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* \quad e \quad lp(\Sigma') < lp(\Sigma) .$$

Como $lp(\Sigma') = lp(\Pi'^{\circ})$, pois $\Sigma' \equiv \Pi'^{\circ}$, obtemos , $lp(\Pi') \leq lp(\Sigma) < lp(\Pi)$.

Usando o Teorema (1) em Σ , obtemos :

(a) $\Pi* \equiv \Sigma*$. Com isso, temos :

$$\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \equiv \Sigma* \quad e \quad \Pi' \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \equiv \Sigma' \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* .$$

(b) $\Pi* \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma*$. Com isso, temos :

$$\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* \quad e \quad \Pi' \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \equiv \Sigma' \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* .$$

(c) $\Sigma* \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$. Com isso, temos :

$$\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \quad e \quad \Pi' \underset{i}{\overset{p}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ} \equiv \Sigma' \overset{p}{\Rightarrow} \Sigma* \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* .$$

(2.2.2) Se a redução $\Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2$ é tal que :

$$\Pi'_2 \equiv \begin{array}{c} A^k \\ \Pi_4 \\ B \end{array}$$, com A^k pertencendo a Π_4 . Isto é ,

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \Pi_4 \\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{\begin{array}{c}B \\ \Pi_3\end{array}}$$

Neste caso, Π'° é da forma :

$$\Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \\ \Pi_4 \\ B \\ \Pi_3 \end{array}$$

Temos que :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \\ \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3 \end{array}$$

Observamos facilmente que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$.[3] O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2) .

(2.3) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} [A]^k \\ \Pi_2 \\ B \end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c} B \\ \Pi'_3 \end{array}}$$

Como $A \supset B$ é $F(\Pi)$, o resultado segue de maneira análoga ao (1.3) .

---

[3] Efetuamos em Π° uma redução do mesmo tipo que a redução $\Pi_2 \Rightarrow \Pi_4$ o resultado segue por inspeção nessas reduções .

(3) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \quad\quad \Pi_2 \\ \underline{A \quad\quad B} \\ \underline{A \wedge B} \\ A \\ \Pi_3 \end{array}$$

onde $A \wedge B$ é $F(\Pi)$.

(3.1) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \begin{array}{c} \Pi'_1 \quad\quad \Pi_2 \\ \underline{A \quad\quad B} \\ \underline{A \wedge B} \\ A \\ \Pi_3 \end{array} \quad , \text{ onde } \Pi_1 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_1$$

Temos duas possibilidades:

(a) Π_2 é normal , neste caso, temos :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \\ \Pi_3 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c} \Pi'_1 \\ A \\ \Pi_3 \end{array}$$

onde $\Pi' \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi'^{\circ}$.

Observamos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2).

(b) Π_2 não é normal , neste caso, temos :

$$\Pi^{\circ} \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2^{\circ} \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_3\end{matrix}} \qquad e \qquad \Pi'^{\circ} \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 & \Pi_2^{\circ} \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

onde $\Pi_2 \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi_2^{\circ}$.

Observamos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2) .

(3.2) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi'_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_3\end{matrix}} \quad , \text{ onde } \quad \Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2 \ .$$

Pelo Teorema (2), podemos usar em Π_2 a hipótese indutiva. Logo , existe Π_2^* tal que : $\Pi_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi_2^*$, $\Pi'_2 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi_2^*$ e $lp(\Pi'_2) < lp(\Pi_2)$.

Seja Π^* :

$$\Pi^* \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2^* \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_3\end{matrix}}$$

Observamos, facilmente, que $\Pi \Rightarrow \Pi^*$, $\Pi' \Rightarrow \Pi^*$ e, usando o Teorema (2), $lp(\Pi') < lp(\Pi)$.

(3.3) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi'_3\end{matrix}} \quad , \text{ onde } \Pi_3 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_3 \ .$$

Como $A \wedge B$ é $F(\Pi)$, o resultado segue de maneira análoga ao (1.3) .

(3.4) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \begin{matrix}\Pi_1 \\ A \\ \Pi_3\end{matrix}$$

Neste caso, como $\Pi^{\circ} \neq \Pi'$, Π_2 não é normal . Logo :

$$\Pi^{\circ} \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2^{\circ} \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_3\end{matrix}} \quad , \text{ onde } \Pi_2 \overset{p}{\underset{i}{\Rightarrow}} \Pi_2^{\circ} \ .$$

Observamos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'$, e o resultado segue de maneira análoga ao (1.4) .

(4) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_3\end{matrix}} \quad , \text{ onde } A \wedge B \text{ é } F(\Pi).$$

O resultado segue de maneira análoga ao (3) .

(5) Se Π é da forma :

$$\Pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}}{\begin{array}{c}A(t)\\ \Pi_2\end{array}} \quad , \text{ onde } \forall x A(x) \text{ é } F(\Pi).$$

(5.1) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi'_1\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}}{\begin{array}{c}A(t)\\ \Pi_2\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi_1 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_1 \ .$$

Neste caso , temos :

$$\Pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi_{1t}^{\ a}\\ A(t)\\ \Pi_2\end{array} \qquad \text{e} \qquad \Pi'^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\Pi'^{\ a}_{1t}\\ A(t)\\ \Pi_2\end{array}$$

Observamos que $\Pi^{\circ} \Rightarrow \Pi'^{\circ}$. O resultado segue de maneira análoga ao (1.2.2) .

(5.2) Se Π' é da forma :

$$\Pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}}{\begin{array}{c}A(t)\\ \Pi'_2\end{array}} \quad , \text{ onde } \Pi_2 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'_2 \ .$$

Como $\forall x A(x)$ é $F(\Pi)$, o resultado segue de maneira análoga ao (1.3) .

Isso conclui a prova do Teorema (3) .

Corolário (1) : Se Π se reduz a Π' ($\Pi \underset{n}{\Rightarrow} \Pi'$), então, $lp(\Pi') < lp(\Pi)$ e existe um $\Pi*$ tal que $\Pi \Rightarrow \Pi*$ e $\Pi' \Rightarrow \Pi*$.

Prova : por indução em n .

Base: $\Pi \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'$, é o próprio Teorema (3) .

Passo Indutivo: $\Pi \underset{n-1}{\Rightarrow} \Pi_1 \underset{i}{\Rightarrow} \Pi'$. Da hipótese indutiva , existe $\Pi*$, tal que :

$$\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \text{ , } \Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \text{ e } lp(\Pi_1) < lp(\Pi) \text{ .}$$

Usando o Teorema (3), existe $\Pi*_1$ tal que :

$$\Pi_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1 \text{ , } \Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1 \text{ e } lp(\Pi') < lp(\Pi_1).$$

Com isso, temos $lp(\Pi') < lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$.

Usando o Teorema (1) em Π_1 , temos :

(a) $\Pi* \equiv \Pi*_1$

Neste caso , $\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \equiv \Pi*_1$ e $\Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1$;

(b) $\Pi* \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1$

Neste caso, $\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi* \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1$ e $\Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1$;

(c) $\Pi*_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$

Neste caso , $\Pi \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$ e $\Pi' \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*_1 \overset{p}{\Rightarrow} \Pi*$.

Corolário (2): **NORMALIZAÇÃO FORTE**

Se a pior sequência de redução para uma derivação qualquer Π, em $\mathbb{C}'$, termina, então toda sequência de redução para Π termina em uma única forma normal.

Prova:

Seja $\Pi_1\ \Pi_2\ .....$ uma sequência qualquer de redução para Π.

(I) FINITUDE:

Como $lp(\Pi_1)$ é finito, e pelo corolário (1), temos :

$lp(\Pi_j) < lp(\Pi_i)$ para qualquer $j > i$ . .

Portanto, existe um k tal que $lp(\Pi_k) = 1$, isto é, Π_k é normal .

(II) UNICIDADE :

Sejam $\Pi_1\ \Pi_2 .... \Pi_n$ e $\Pi'_1 \Pi'_2\ ..... \Pi'_m$ duas sequências de redução para Π que terminam . Vamos mostrar que $\Pi_n \equiv \Pi'_m$.

Usando o Corolário (1), existem Π^*_1 e Π^*_2 tal que :

(i) $\Pi_1 \overset{p}{\rightarrow} \Pi^*_1$ e $\Pi_n \overset{p}{\rightarrow} \Pi^*_1$;

(ii) $\Pi'_1 \overset{p}{\rightarrow} \Pi^*_2$ e $\Pi'_m \overset{p}{\rightarrow} \Pi^*_2$.

Como Π_n e Π'_m são normais , então $\Pi_n \equiv \Pi^*_1$ e $\Pi'_m \equiv \Pi^*_2$. Isto é , Π^*_1 e Π^*_2 são normais. Pela unicidade da pior sequência para Π (Teorema (1)), $\Pi^*_1 \equiv \Pi^*_2$.

A prova está concluída.

R E F E R Ê N C I A S

[1] GANDY , R. O - *Proofs of Strong Normalization* , em To Haskell Cury : Essays in Combinatory Logic , Lambda Calculus and Formalism, Academy Press (1980).

[2] GENTZEN, G. - *The Collected Papers of Gerard Gentzen* , ed. por M. E. Szabo , North Holland (1969).

[3] GIRARD, J. Y. - *Proof Theory and Logical Complexity* , Bibliopolis (Napoli 1987) .

[4] HERMANN, E. H. - *Automatic Theorem Proving : An attempt to improve readability of proofs generated by resolution methods in aplication of mathematical logical*, Proceeding of Latino American Meeting for Mathematical, American Mathematical Society (1980).

[5] JERVELL, H. R. - *A Normalform in first order Arithmetic*, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J. E. Fenstad , North Holland, Amsterdam (1971).

[6] KREISEL, G. - *A Survey of Proof Theory II* , em Proceedings of Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J. E. Fenstad, North Holland , Amsterdam (1971).

[7] MARTIN-LOF, P. - *Hauptsatz for Intuicionistic Theory of Iterated Inductive Definitions*, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J. E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).

[8] MARTIN-LOF, P. - *Hauptsatz for Theory of Species*, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J. E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).

[9] MASSI, C. D. B. - *Dissertação de Mestrado*, Unicamp (1989).

[10] PEREIRA, L. C. P. D. - *On the Estimation of the Length of Normal Derivations*, em Akademilitteratur , Stockholm, (1982).

[11] PEREIRA, L. C. P. D. - *Normalização forte para a Lógica Intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas*, em Cadernos de Histöria e Filosofia da Ciència, 7/1974 , Unicamp.

[12] PRAWITZ, D. - *Natural Deduction*, Stockholm, (1965).

[13] PRAWITZ, D. - *Ideas and Results in Proof Theory*, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J. E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971) .

[14] PRAWITZ, D. - *Validity and Normalizability of Proofs in 1 Order and 2 Order Classical and Intuitionistic Logic*, em Atti del Congresso Nazionali di Logica, Montecatini (1979), Bibliopolis .

[15] PRAWITZ, D. & MALMNAS, P. E. - *A Survey of Some Connections Between Classical Logic, Intuitionistic and Minimal Logic*, em Contributions to Mathematical Logic, ed. por A. Schmidt, K. Schutt and H. J. Thiele, North Holland, Amsterdam (1968).

6] STATMAN, R. - *Structural Complexity of Proofs*, PhD. ssertation, Stanford (1974).

7] TAIT, W. W. - *Intensional interpretations of functionals of nite type I*, em Journal of Symbolic Logic 32 (1967), 158-212 .

8] TENNANT, N. - *A Proof-theoretical Approach to Entailment*, em urnal of Philosophical Logic, 9 (1980).