Renato Busatto Neto

TEORIAS FORMAIS & INFORMAIS: A NOÇÃO DE PROVA E OS TEOREMAS DE INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida pelo Sr. Renato Busatto Neto e aprovada pela comissão julgadora.
Campinas, 19 de abril de 1989.

Dissertação de mestrado apresentada no departamento de Filosofia do IFCH, sob a orientação do Prof. Dr. Carlos Alberto Lungarzo.

UNICAMP

1989

Agradeço ao professor Antonio Mário Sette por suas sugestões e críticas, que muito me auxiliaram na elaboração deste trabalho.

Índice

* As obras citadas ao longo do trabalho são indicadas pelo nome de seu autor, seguido por um número entre colchetes que se refere à localização de cada uma delas na bibliografia.

Introdução

Há quase 60 anos, Gödel publicava a demonstração de seus teoremas de incompletude; há pelo menos 30, iniciava-se uma polêmica, que se estende até hoje, sobre as conseqüências destes teoremas fora dos domínios da lógica. A controvérsia gira em torno do confronto entre máquinas e mentes: mais exatamente, busca-se verificar se os resultados de Gödel permitem estabelecer uma distinção efetiva entre a mente humana e o computador, do ponto de vista de seu 'potencial argumentativo'.

A grosso modo, a proposta deste estudo é a análise dos elementos envolvidos na polêmica. Do ponto de vista técnico (lógico), as discussões acerca dos teoremas de Gödel parecem ter-se esgotado na década de 60. Fora desta área, as divergências ainda são profundas, embora vários autores afirmem que o assunto está (ou deveria estar) encerrado[1]. Trabalhos recentes desmentem esta opinião[2]. Sua sobrevivência deve-se, em parte, a uma compreensão errônea acerca dos aspectos matemáticos das demonstrações de Gödel (conforme será mostrado). Existem outros aspectos, contudo, que não se reduzem a equívocos. Um estudo sobre este tema, portanto, não tem um interesse exclusivamente histórico.

A relação entre um resultado formal (um teorema matemático, no caso) com a realidade física (as máquinas e seu funcionamento) ou com o domínio psicológico (a mente) envolve hipóteses empíricas. A fim de se evitar a sua análise, toda a discussão é restrita ao plano lógico-lingüístico. As idéias relativas à polêmica são reformuladas de maneira a envolverem apenas sistemas formais (em lugar de máquinas) e (meta)teorias informais (ao invés de mentes).

O estudo compõe-se de três partes. Na primeira delas, o objetivo é a definição da noção de prova. Com esta finalidade, são apresentadas e confrontadas as teorias matemáticas informais e formais. Alguns tópicos nas áreas de filosofia da matemática (o papel da intuição nas teorias informais, a natureza ontológica dos objetos matemáticos) e de filosofia da linguagem (os princípios e axiomas lógicos embutidos na linguagem natural) estão envolvidos nesta discussão. A análise dos temas procurou acompanhar o nível técnico das discussões desenvolvidas por lógicos e matemáticos a este respeito[3]. A ausência de uma análise suficientemente globalizante nesta literatura tornou necessária a construção de um quadro abrangente sobre 'provas matemáticas' a partir de observações e comentários isolados.

Muitos dos temas relacionados a esta discussão, como a intuição matemática e a lógica do discurso natural, receberam um tratamento superficial. A proposta deste trabalho, na realidade, não inclui (nem requer) uma abordagem detalhada destes temas. Sua inclusão deve-se fundamentalmente à necessidade de se estabelecer a existência de duas classes básicas de teorias matemáticas. Além disso, a análise destes tópicos permite visualizar os obstáculos que dificultam o estabelecimento de uma distinção efetiva entre elas, do ponto de vista do seu potencial dedutivo.

Na segunda parte, a demonstração dos teoremas de incompletude é examinada. As principais etapas são tratadas separadamente: o processo de aritmetização da metamatemática, a construção da sentença indecidível, a prova do primeiro teorema na aritmética e na sintaxe. Na análise dos recursos dedutivos envolvidos, procura-se destacar a presença de elementos semânticos nas demonstrações. Em relação ao segundo teorema, que é apresentado esquematicamente, existe especial interesse por sua relação com o problema da consistência dos sistemas formais que representam a aritmética.

A relação entre os teoremas de incompletude e a noção de prova passa a ser considerada na última parte. Em primeiro lugar, apresentam-se os critérios que permitem associar máquinas a sistemas formais, dos quais o mais relevante é a tese de Church/Turing. A seguir, estudo similar é desenvolvido em relação à mente e às teorias informais. Estas considerações permitem visualizar a existência de dois planos distintos no confronto entre máquinas e mentes: o empírico, que envolve as hipóteses mencionadas, e o lógico (e epistemológico, no que se refere à representação do conhecimento matemático), no qual se pode efetivamente examinar os teoremas de incompletude. Permitem também verificar que cada um dos planos pode ser abordado separadamente, tornando possível a eliminação de todos os elementos físicos e psicológicos da discussão.

As duas grandes posições que dominam até o momento a controvérsia são apresentadas através da análise dos trabalhos de alguns autores, selecionados por razões históricas[4] ou pela originalidade (ao menos relativa) de suas contribuições. De um lado, prevalece a idéia de que os teoremas de incompletude diagnosticaram uma limitação incontor nável de todos os sistemas formais frente às (meta)teorias informais. Neste caso, nenhum sistema formal poderia abarcar a totalidade das provas aritméticas informais. De outro lado, encontram-se os partidários da tese de que a limitação se estende a todos os sistemas 'lingüísticos' adequados à realização de inferências. Conseqüentemente, as provas formais poderiam representar convenientemente as informais.

A última questão é a da consistência das teorias formais. Embora seja considerada por todos os grupos envolvidos na controvérsia, o tratamento que lhe é dispensado em geral não revela seu real significado. Nossa abordagem procura recuperar a verdadeira dimensão do problema.

I

A Representação do Conhecimento Matemático

Teorias Informais

Os sistemas de objetos considerados pela matemática podem ser introduzidos por intermédio de dois métodos distintos . O primeiro deles, denominado genético ou construtivo, caracteriza-se pela exibição de regras que permitem gerar os objetos de maneira seqüencial e efetiva. No segundo caso, que envolve o método axiomático ou postulacional, não há critérios que viabilizem a construção dos objetos, mas apenas propriedades e condições que poderão ser satisfeitas por um, mais de um ou eventualmente nenhum domínio[1].

No caso construtivo, existe uma dependência evidente entre o domínio e o método: a existência dos elementos depende estritamente das regras, que determinam a gênese de um e somente um conjunto. Um exemplo típico que se enquadra neste caso é o da aritmética recursiva, onde os números naturais são definidos indutivamente.

A situação em relação à abordagem axiomática é radicalmente distinta, existindo duas situações possíveis. Os axiomas podem, em primeiro lugar, ser encarados como proposições que procuram descrever exaustivamente uma determinada realidade anterior e independente deles. A geometria de Euclides constitui uma teoria que ilustra este caso. Por outro lado, há a possibilidade de que os axiomas não visem à descrição de uma única realidade específica, existindo desta forma diferentes domínios de objetos que os satisfaçam. Tal situação pode ser observada em relação à teoria (abstrata) dos grupos. Em ambos os casos, a existência dos domínios envolvidos não é determinada pelos axi omas.

Teorias axiomáticas são aquelas que recorrem ao método de mesmo nome. Entre seus elementos constituintes básicos, cabe destacar o grupo de noções primitivas, que permanecem indefinidas na teoria, e, naturalmente, os axiomas, que estabelecem as propriedades fundamentais destas noções. Há um grupo específico destas teorias, constituído pelas denominadas "axiomáticas informais". Embora a própria denominação indique a impossiblidade de sua descrição rigorosa, elas possuem algumas propriedades gerais comuns, que são essencialmente duas: o emprego de uma teoria de inferência informal e o recurso à teoria ingênua dos conjuntos. Ambas são assumidas como básicas, de maneira que se torna dispensável qualquer fundamentação adicional[2].

A lógica presente nas teorias informais é, em linhas gerais, a embutida na linguagem natural, marcada pelo uso de expressões correntes ("não existe nenhum elemento", "para todo elemento", dotadas de seu significado usual), além do emprego de princípios de inferência comumente referendados pela comunidade dos matemáticos. A base para a aceitação deste arcabouço dedutivo — a sua suposta 'evidência' — indica a presença de uma primeira componente intuitiva na matemática informal, envolvendo especificamente a intuição lógica.

Em relação à teoria dos conjuntos, seu emprego permite a formulação da terminologia de praticamente todas as teorias informais. Conforme observam vários autores[3], não existem garantias absolutas acerca da sua <u>consistência</u>; reforça tal incerteza inclusive o fato de já terem sido constatados paradoxos relacionados com o princípio de abstração, que, a grosso modo, estabelece que toda e qualquer 'proprieda de' delimita um conjunto. Argumentos acerca da maior confiabilidade da nova versão informal 'purgada' de todos os paradoxos conhecidos não têm o valor de uma prova definitiva: sempre existe a possibilidade que se constatarem futuras contradições. A justificativa para o emprego persistente de tal teoria, contudo, mais uma vez é a sua alegada evidência, que dispensaria qualquer fundamentação a partir de princípios anteriores. A noção de conjunto representa a segunda componente intuitiva nas teorias informais — desta vez, num nível propriamente matemático.

O conceito de intuição aqui empregado representa, de maneira bastante simplificada, a via de acesso ao conhecimento das proposições necessárias, que não poderiam ser alcançadas por intermédio da razão ou da experiência. A experiência sensível não pode superar o domínio do contingente, enquanto a razão não pode justificar a validade de todas as proposições, porque, para isso, seriam necessários outros princípios, incorrendo-se assim numa regressão ao infinito. O conhecimento intuitivo é constituído por juízos auto-evidentes, como no caso das regras de dedução e dos axiomas da teoria ingênua dos conjuntos.

A partir da descrição destas características comuns, observa-se que o rótulo 'informal' termina por abarcar um conjunto bastante amplo e heterogêneo de teorias matemáticas, agrupando desde a geometria de Euclides até teorias (informais) algébricas extremamente abstratas. Tal fato desperta o interesse em se introduzir uma classificação interna. Recorrendo-se a algumas idéias fornecidas por J. Ladrière, torna-se possível a distinção de dois grupos: as teorias intuitivas e as abstratas[4].

Nas axiomáticas intuitivas, o papel da intuição é ainda mais relevante do que em uma teoria informal qualquer. As noções básicas são dotadas de um significado próprio, e os axiomas constituem asserções intuitivamente verdadeiras acerca destas noções. O método axiomático está presente na sua primeira versão, visto que os objetos existem independentemente dos axiomas. Há outras denominações que também são usualmente atribuídas neste caso, como 'axiomática concreta', ou ainda 'axiomática material'. Tomando-se um exemplo típico — novamente a geometria de Euclides — podemos observar que as noções geométricas primitivas — ponto, reta, plano — estão associadas a objetos que, ao menos hipoteticamente, existem antes da formulação da própria teoria. Os axiomas geométricos, por representarem enunciados evidentes acerca destas noções, estabeleceriam as propriedades do espaço físico[5].

Teorias concretas atualmente não ocupam mais a atenção dos matemáticos. A imposição de que elas se limitassem ao emprego de axiomas evidentes e intuitivamente verdadeiros revelou-se inaceitável após a formulação das geometrias não-euclideanas. A intuição passou a ser encarada como um guia falível na determinação dos axiomas. Surgiu, desta forma, o interesse pelo desenvolvimento de teorias abstratas, em que os termos perdem seu significado próprio, e os axiomas deixam de possuir um valor de verdade. A teoria reduz-se a uma estrutura, entendida aqui como uma série de relações estabelecidas sobre um determinado conjunto, que permanece contudo inespecificado. No caso particular da geometria, elimina-se todo e qualquer recurso à intuição espacial: não existe mais a intenção de se cristalizar através dela qualquer conhecimento acerca do espaço físico. Fica estabelecida, conseqüentemente, uma distinção rigorosa entre a teoria abstrata e suas possíveis interpetrações, o que se torna mais evidente nas demonstrações dos seus teoremas:

"Indeed, if geometry is to be deductive, the deduction must every-where be independent of the meaning of geometrical concepts, just as it must be independent of the diagrams; only the relations specified in the propositions and definitions employed may legitimately be taken into account. During the deduction it is useful and legitimate, but in no way necessary, to think of the meaning of the terms; in fact, if it is necessary to do so, the inadequacy of the proof is made manifest." (M. Pasch, citado em Wilder[43], p. 7)

Uma das conseqüências, portanto, da formulação de teorias abstratas é a própria redefinição da noção de prova: torna-se necessário limitar as informações utilizadas nos argumentos apenas às explicitamente representadas por meio de axiomas. O emprego de uma das possíveis interpretações dos termos da teoria durante as deduções pode possuir no máximo uma função acessória. Existe, contudo, outra conseqüência, que também foi constatada por Pasch ainda no final do século XIX:

"If (...) a theorem is rigorously derived from a set of propositions — the basic set — the deduction has a value which goes beyond its original purpose. For if, on replacing the geometric terms in the basic set of propositions by certain other terms, true propositions are obtained, then corresponding replacement may be made in the theorem; in this way one obtains a new theorem as a consequence of the altered basic propositions without having to repeat the proof."

(M. Pasch, citado em Wilder[43], p. 7)

Pode-se concluir que as provas em teorias abstratas adquirem um significado mais amplo: independentemente da interpretação particular que se possa atribuir às noções primitivas, todos os teoremas sempre serão válidos (supondo-se naturalmente que a teoria seja consistente).

Embora abstratas, estas teorias permanecem nitidamente informais. Isto significa que a intuição continua a desempenhar seu papel a nível lógico e também matemático. Será interessante apresentar de forma mais clara o papel da noção ingênua de conjunto neste contexto. Boa parte da terminologia de uma teoria abstrata envolve o emprego das noções de elemento, pertinência, subconjunto, etc. Pode-se inclusive tornar a noção de estrutura mais precisa por recurso a estes termos. As noções primitivas, por exemplo, podem em geral ser expressas por meio de <u>constantes</u>, que correspondem simplesmente a elementos determinados do domínio, subconjuntos, séries de subconjuntos ou mesmo conjuntos e ênuplas ordenadas (associadas aos predicados e funções da teoria). As relações internas existentes entre estas noções seriam expressas através dos axiomas, caracterizando-se desta forma a totalidade da estrutura[6].

Tomemos como exemplo a aritmética de Peano. Os termos indefinidos — número natural, zero, sucessor — correspondem respectivamente a um elemento genérico do domínio, uma constante (ou elemento assinalado) e uma função de uma variável. As operações de soma e produto não são acrescentadas a esta lista justamente porque é possível formulá-las por recurso à teoria dos conjuntos. Recorrendo-se também a esta teoria pode-se generalizar a noção de número, introduzindo-se os racionais, reais e complexos, sem que se necessite acrescentar qualquer novo termo indefinido ou axioma à aritmética.

A discussão sobre teorias informais será finalizada com mais algumas observações sobre a noção de prova. Considerando-se que ela depende dos mecanismos de inferência disponíveis na teoria, pode-se concluir que tampouco é possível caracterizá-la de maneira precisa. Uma prova informal emprega explicitamente apenas os axiomas próprios da teoria e os teoremas anteriormente demonstrados, na medida em que os princípios lógicos permanecem subentendidos[7]. A linguagem utilizada faz uso do simbolismo específico da teoria, adicionado contudo à linguagem natural, que fornece as regras de inferência intuitivamente válidas.

Formalização

Em linhas gerais, a formalização é um processo que busca eliminar todas as componentes intuitivas de uma teoria axiomática informal, seja ela material ou abstrata. Seu principal objetivo é a obtenção de uma definição mais rigorosa e precisa para o conceito de prova em cada teoria.

Alguns autores cometem um equívoco ao reduzirem a formalização à geração de teorias abstratas[8]. Estas teorias, contudo, não são necessariamente formais. O processo de formalização não se esgota com a eliminação do significado dos termos e axiomas presente na esfera informal. Conforme foi observado anteriormente, existem diversas teorias algébricas matemáticas, fortemente abstratas e dotadas de um simbolismo próprio, em que ainda se pode constatar a presença da intuição, a nível lógico (mecanismos de dedução) e matemático (noção ingênua de conjunto).

A eliminação do significado dos termos em uma teoria constituirá apenas a primeira etapa da formalização (obviamente no caso de ser aplicada a teorias materiais). A definição rigorosa da noção de prova certamente requer o processo de abstração, na medida em que todas as propriedades dos termos da teoria que sejam de alguma forma relevantes para os processos dedutivos devem ser convenientemente formuladas por meio de axiomas. Ou seja, não se pode recorrer a qualquer informação acerca dos objetos da teoria que não tenha sido formalmente expressa[9].

A explicitação de todos os axiomas próprios de uma teoria constitui o início da eliminação da intuição matemática. Em relação à geometria euclideana, por exemplo, M. Pasch já havia observado, em 1882, a necessidade de se introduzirem alguns axiomas "ocultos" que participavam implicitamente nas demonstrações de teoremas. Um deles relaciona-se com as propriedades dos triângulos:

"uma reta que intercepta um lado de um triângulo num ponto distinto de um dos seus vértices terá necessariamente de interceptar um outro lado do mesmo triângulo".[10]

A eliminação da intuição a nível matemático somente se completa após a redefinição do papel do conceito de conjunto na teoria. Existem duas opções a este respeito: a incorporação, à teoria em vias de ser formalizada, de uma versão formal para a teoria dos conjuntos; ou a completa supressão das noções básicas e princípios da teoria dos conjuntos, que seriam substituídos por novos conceitos e axiomas integralmente representáveis na teoria. A adoção da primeira alternativa carrega consigo dificuldades próprias, como por exemplo a incerteza em relação à consistência desta teoria. Nestas circunstâncias, a segunda opção representa uma solução mais atraente, principalmente quando se tem em vista a determinação de bases mais sólidas para a caracterização da noção de prova.

Um exemplo que se enquadra na segunda alternativa mencionada acima é o da aritmética de Peano. A noção de conjunto aparece explicitamente no último axioma desta teoria, que introduz o princípio de indução matemática:

"se M for um conjunto de números naturais tal que 0 (zero) seja um de seus elementos, e tal que, para todo número a ele pertencente, puder verificar-se que o sucessor de tal número também pertence ao conjunto, então o conjunto M contém todos os números naturais".

Para se reformular este axioma, a solução adotada foi o emprego de propriedades (predicados) exprimíveis por intermédio dos recursos lingüísticos disponíveis na nova teoria formal, em lugar de "conjuntos" (no sentido genérico do termo) de números naturais. Dentro desta perspectiva, o princípio de indução é substituído pelo seguinte esquema de axiomas:

$$(A(0) \ \& \ (x)(A(x) \ \& \ S(x,y) \rightarrow A(y))) \rightarrow (x)A(x)$$

onde $A(x)$ é uma fórmula qualquer de uma variável livre da teoria formal. A adequação desta solução será discutida mais tarde.

Uma vez suprimida a terminologia da teoria dos conjuntos, resta eliminar o uso implícito de seus princípios e propriedades. É necessário acrescentar à aritmética os axiomas que, na teoria informal, estavam ausentes em virtude da possibilidade de sua dedução a partir das propriedades dos conjuntos. Esta situação pode ser verificada na definição das operações de soma e multiplicação, para as quais são introduzidas as seguintes equações recursivas:

$$x_1 + 0 = x_1$$
$$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$$
$$x_1 \cdot 0 = 0$$
$$x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1$$

Resta finalmente abordar a questão relativa à lógica informal. Em princípio, parece razoável supor que bastaria explicitar, na forma de novos axiomas, os princípios e regras lógicas empregados nos processos de dedução informal, incorporando-os a seguir ao conjunto de axiomas próprios da teoria. Ocorre, entretanto, que, em geral, o número de regras e princípios lógicos que podem ser utilizados é infinito. Por uma conveniência de representação, portanto, será necessário representar a lógica sob a forma de uma teoria axiomática formal independente. Assim, a partir de um conjunto finito de axiomas e regras, torna-se possível a dedução, sob a forma de teoremas, dos demais princípios e regras lógicas. Uma teoria formalizada, portanto, contará com um cálculo lógico na condição de um de seus componentes.[11]

Teorias Formais

A matéria-prima para a formalização são as teorias informais; o produto final, as teorias (ou sistemas) formais. As características gerais destas teorias já foram indicadas no capítulo anterior. Há contudo outros aspectos que ainda não foram abordados.

Tomemos inicialmente a definição de sistema formal apresentada por W. Hatcher:

"A formal system F consists of a set A called the alphabet of F (and whose elements are called signs), a set S, an element of which is called a well-formed formula (...) of F, a set R of finite relations over S (...), an element of R being called a rule of inference of F, and a set P called the axioms of F. These sets are related in the following way: S is a subset of the set $\mathcal{M}(A)$ of all finite sequences of elements of A (...), and P is a subset of S."
(Hatcher [15], p. 12)

A presença da terminologia da teoria dos conjuntos é marcante: a noção intuitiva de conjunto é empregada sem ter sido previamente definida. À primeira vista, um dos propósitos da formalização — a eliminação do emprego desta noção — não foi respeitado nesta definição. Há necessidade, contudo, de se estabelecer uma distinção entre a teoria formal propriamente dita e o discurso a respeito dela. O texto de Hatcher citado, por se tratar de uma descrição acerca de uma teoria formal, encaixa-se no segundo caso. Desta forma, a terminologia relacionada à teoria dos conjuntos presente nesta descrição não toma parte da teoria formal propriamente dita.

A noção de conjunto, desta forma, torna-se importante para a descrição de uma teoria formal. Há, contudo, uma restrição extremamente importante: os conjuntos aqui envolvidos devem ser "efetivos" ou "decisíveis". Esta característica, portanto, aplica-se a todos os conjuntos mencionados na definição de Hatcher: de símbolos (ou alfabeto), das fórmulas bem-formadas, das regras de inferência, dos axiomas. Tal restrição torna-se um elemento absolutamente fundamental na delimitação deste conceito: uma teoria formal, que pode ser gerada através do processo de formalização, aplicado a uma teoria informal, deve necessariamente consistir de uma série de conjuntos "efetivos".

A idéia de procedimento efetivo, básica para a perfeita compreensão da natureza das teorias formais, é imprecisa. Ela apresenta como uma de suas principais características o fato de abranger uma série de processos finitos. Trata-se certamente de um conceito dotado de uma dimensão empírica, aplicável tanto ao domínio psicológico (quando se referir às atividades mentais) quanto ao físico (caso se tiver em vista um dispositivo físico/mecânico apto a executar determinadas operações). Algumas propriedades comuns podem ser constatadas com relativa facilidade:

1. todo procedimento efetivo, aplicado a qualquer situação particular, atinge seus resultados em um número finito de etapas;
2. o conjunto de regras (ou operações) que compõem o procedimento também é finito (em caso contrário, não seria possível chegar, num dado problema, a uma solução);
3. as operações empregadas são definidas <u>previamente</u> (ou seja, novas

operações não podem ser introduzidas tendo-se em vista a especificidade de um determinado problema);

4. o processo não faz apelo a qualquer instrução ou informação que não conste de seu conjunto de regras ou dos dados explicitamente apresentados no problema (isso significa que não se requer 'inteligência' na execução do procedimento[12]).

A definição de Hatcher revela outro aspecto próprio das teorias formais. A exigência de que o conjunto de fórmulas seja "efetivo" significa que deve existir um grupo de regras (fora da teoria) destinado a permitir distingüir uma fórmula da teoria de uma seqüência de símbolos não pertencente a ela. Estas regras são denominadas regras de formação. Elas também não podem ser expressas no interior da teoria, como veremos posteriormente.

Em vista do que já foi apresentado, é possível detectar uma analogia estrutural entre sistemas formais e o conceito de 'cálculo', que é definido por Carnap:

"By a calculus is understood a system of conventions or rules of the following kind. These rules are concerned with elements — the so-called symbols — about the nature and relations of which nothing more is assumed than that they are distributed in various classes. Any finite series of these symbols is called an expression of the calculus in question." (Carnap[3], p. 4)

Da mesma forma que um cálculo, uma teoria formal constitui um objeto conceitual auto-suficiente e fechado, dotado de uma determinada estrutura organizacional, em que se realizam determinadas operações — construção de fórmulas bem-formadas, de provas, etc — por recurso estrito a regras bastante precisas. A semelhança entre cálculo e sistema formal autoriza-nos a tirar algumas conclusões. A eliminação de todo o significado dos termos e sentenças, além da exclusão da intuição nas deduções e na determinação dos axiomas, estabelece uma distinção radical entre estes sistemas e as 'teorias', na sua conotação usual. A exigência de explicitação dos símbolos, dos axiomas e das regras de formação e de dedução, dispensando-se qualquer justificativa com base na intuição, permite em princípio a construção de sistemas totalmente arbitrários e artificiais. A escolha dos axiomas ou das regras (incluindo-se as lógicas), neste caso, não tem qualquer motivação cognitiva: não existirá nenhuma teoria informal na base da sua construção. Tais sistemas, portanto, representam objetos que se justificam por si mesmos. Nestas situações específicas, parece mais apropriado empregar a designação 'sistema formal', na medida em que o termo 'teoria' denota usualmente um sistema lingüístico abstrato que busca representar um objeto exterior a ele próprio. Convém ressaltar que estas observações se aplicam apenas a teorias formais e não podem ser estendidas a teorias abstratas quaisquer, porque estamos considerando que o próprio sistema de inferência é passível de uma escolha arbitrária.

Uma vez completa a análise das teorias formais, torna-se conveniente estabelecer um critério que permita classificá-las em grandes grupos. Na medida em que a formalização inclui como uma de suas etapas a incorporação de uma teoria lógica formalizada, costuma-se identificar uma teoria formal pela ordem do cálculo nela introduzido. A maior parte das teorias matemáticas pode ser convenientemente formalizada por meio de teorias formais de primeira ordem.[13]

Podemos introduzir agora a discussão acerca de provas formais. Tomemos em primeiro lugar uma noção mais abrangente, que é a de <u>dedução a partir de hipóteses</u>. Uma fórmula F é dedutível a partir de um conjunto H de fórmulas bem-formadas, denominadas <u>hipóteses</u>, caso exis tir uma seqüência de fórmulas $E_1, E_2, \ldots, E_n = F$, de maneira que cada uma delas satisfaça uma das seguintes condições:

(i) E_i é elemento de H;

(ii) E_i é um dos axiomas da teoria formal;

(iii) E_i é obtida a partir de alguma das fórmulas anteriores na se - qüência pela aplicação de uma das regras de dedução da teoria[14].

A noção de prova formal corresponde simplesmente a um caso parti cular dentro da definição de dedução: no caso, o conjunto de hipóte - ses deve ser vazio. Isto significa que uma fórmula demonstrável é aquela que pode ser deduzida a partir dos axiomas da teoria.

O conceito de prova formal, portanto, obedece estritamente aos propósitos do processo de formalização. Não existe recurso a qualquer noção semântica. Pode-se observar, contudo, que, em relação às provas informais, elas são substancialmente mais extensas, na medida em que todos os elementos envolvidos devem ser explicitados. Mesmo provas in formais bastante elementares tornam-se extremamente longas. Indepen - dentemente deste fato, esta noção é efetiva, ou seja, existe um proce dimento efetivo que permite determinar, para toda seqüência finita de fórmulas, se ela constitui ou não uma prova. A noção de demonstrabili dade, por outro lado, não goza da mesma propriedade: para as teorias aptas a representarem adequadamente a aritmética, não se pode estabelecer um procedimento efetivo que permita reconhecer, dentro do conjunto das fórmulas bem-formadas de uma teoria, aquelas que correspondem a teoremas (ou seja, sentenças demonstráveis). A construção de provas não tem de ser necessariamente efetiva numa teoria formal.

Metateorias

As teorias axiomáticas formais são construídas a partir de critérios rígidos que determinam, com base em procedimentos efetivos, a totalidade de seus símbolos, fórmulas bem-formadas e axiomas. Os recursos de uma linguagem formal normalmente não permitem a expressão de juízos acerca dela própria, conforme já havia sido assinalado no capítulo anterior. O simples fato de que a teoria é formal, não possuindo, portanto, qualquer referencial exterior a ela própria, representa um obstáculo para que exista em seu interior uma fórmula que possa referir-se a outra, mesmo que da própria teoria. Desta forma, é necessário recorrer a outra linguagem quando se pretende analisar uma determinada teoria, ou, mais exatamente, formular juízos acerca de seus elementos.

Os estudos realizados sobre uma teoria constituem sua metateoria. As observações realizadas anteriormente a respeito de teorias formais, restritas até o momento ao nível descritivo, constituem um exemplo de análise metateórica. Existem pelo menos duas abordagens distintas neste nível. A primeira delas limita-se a um estudo interno da teoria, constituindo a <u>sintaxe</u>: nesta situação, encontram-se por exemplo as descrições mencionadas acima. A segunda tem em vista tratar das relações entre uma teoria e suas possíveis interpretações, constituindo a <u>semântica</u>.

As metateorias, desta forma, constituem simplesmente teorias acerca de sistemas formais. Existe, portanto, uma semelhança estrutural entre elas e as teorias informais, na medida em que ambas reali- zam asserções significativas sobre determinados objetos ou conjuntos de objetos abstratos. A intuição faz-se novamente presente no estudo da matemática, agora em um nível mais "elevado": a metamatemática, termo empregado por D. Hilbert para designar a metateoria no domínio matemático:

"(...) dadurch werden die inhaltlichen Überlegungen, die selbstverständlich niemals völlig entbehrt oder ausgeschaltet werden können, an eine andere Stelle, gewissermassen auf ein höheres Niveau verlegt, und zugleich wird in der Mathematik eine strenge und systematische Trennung zwischen den Formeln und formalen Beweisen einerseits und den inhaltlichen Überlegungen andererseits möglich." (Hilbert[16], p. 165) [15]

Segundo Hilbert, portanto, o estudo da matemática não pode prescindir da intuição, sendo possível apenas delimitar sua esfera mínima de atuação — a metamatemática, no caso. Esta característica reforça sua semelhança com as teorias informais, que se manifestará especificamente através do emprego da lógica intuitiva e da teoria ingênua dos conjuntos, sujeita normalmente a restrições quanto à efetividade ou decisibilidade destes conjuntos.

As mesmas observações não se aplicam apenas à matemática, podendo ser estendidas a teorias formais em geral e suas respectivas metateorias.

Assim como outras teorias informais, as metateorias possuem um conjunto próprio de símbolos. Existem em primeiro lugar as constantes metalingüísticas, que representam nomes para os símbolos, termos e fórmulas do sistema formal. Isso significa que, embora sejam objetos lingüísticos, os elementos de um sistema formal não são acessados diretamente na metateoria. A necessidade do emprego de nomes para os elementos da teoria formal é justificada por Carnap:

"If a sentence (in writing) refers to a thing — my writing-table, for instance — then in this sentence a designation of the thing must occupy the position of the subject; one cannot simply place the thing itself — namely, the writing-table — upon the paper (...)" (Carnap[3], p. 154)

Introduz-se, desta forma, a distinção entre objetos e nomes também em estruturas lingüísticas, onde tal distinção em geral passa desapercebida. Existe, contudo, um recurso que, na maioria dos casos, permite contornar tal distinção. Teoricamente não existe restrição em se empregar o próprio objeto como seu nome, embora tal convenção represente uma opção bizarra quando aplicada ao mundo físico. Num contexto lingüístico, contudo, esta solução em geral não acarreta dificuldades. Todo termo empregado nestas circunstâncias é denominado "autônimo".[16]

Independentemente da convenção adotada, os nomes para os símbolos, termos e fórmulas do sistema formal passam a integrar o conjunto das constantes da metalinguagem. Torna-se conveniente, nestas circunstâncias, a introdução de variáveis metalingüísticas que possam percorrer o conjunto destas constantes, representando elementos genéricos — permitindo por exemplo a expressão de juízos acerca de fórmulas quaisquer do sistema — ou desconhecidos. Um dos usos mais significativos destas variáveis é a formulação de esquemas de axiomas, que a nível formal só poderiam ser representados através de um número infinito de fórmulas.

Em conseqüência da introdução de constantes e variáveis metalingüísticas, torna-se possível estudar um sistema formal sem que haja acesso direto a ele. A adoção de nomes para os elementos do alfabeto e para as fórmulas torna dispensável, ao menos sob o ponto de vista metalingüístico, a apresentação da teoria propriamente dita.

A respeito da sintaxe, deve-se mencionar que um de seus propósitos básicos é a apresentação das regras que determinam a construção de fórmulas bem-formadas (denominadas <u>regras de formação</u>) e as que governam a derivação de teoremas a partir dos axiomas (<u>regras de dedução</u> ou <u>transformação</u>, pertencentes à teoria lógica incorporada ao sistema). À primeira vista, pode não parecer natural o fato de tais regras não pertencerem efetivamente ao próprio sistema formal. Contudo, deve-se considerar que a sua apresentação envolve a utilização de símbolos que não pertencem ao domínio da linguagem formal. Uma regra de dedução como <u>modus ponens</u>, por exemplo, exigiria o uso de variáveis metalingüísticas sobre fórmulas e de quantificadores sobre estas variáveis, para que se pudesse representar formalmente o enunciado: "dadas duas fórmulas A e B quaisquer, se $\vdash A$ e $\vdash A \rightarrow B$, então $\vdash B$ ".

Como as regras de formação e de dedução de um sistema pertencem ao nível sintático, as noções de prova e de dedução (ou demonstração) estão entre os conceitos metalingüísticos básicos. Mais uma vez, é importante ressaltar que, embora cada uma das provas e deduções formais seja efetivamente representável no interior do sistema, o mesmo não se aplica aos conceitos de prova e de dedução, para cuja formulação também são necessárias as variáveis metalingüísticas.

Existem outros conceitos que são tratados estritamente na sintaxe. Sua formulação envolve principalmente a noção de prova, de maneira que somente após a formalização se pode propor a análise rigorosa de tais conceitos.

Há em primeiro lugar a noção de consistência, que admite mais de uma versão; a consistência absoluta, em particular, aplica-se a sistemas formais que não contenham nenhuma fórmula, tal que ela e sua negação sejam ambas demonstráveis. Outra noção, a de completude, também admite caracterizações distintas. Do ponto de vista estritamente sintático, ela indica a inexistência, em um dado sistema formal, de um par de fórmulas, P e ~P, em que ambas sejam indemonstráveis.

O conceito de decisibilidade está fundado na noção de procedimento efetivo. Uma teoria formal será decisível caso existir um procedimento efetivo que permita determinar, para toda fórmula bem-formada, se ela corresponde ou não a um teorema. A noção de 'efetividade' é informal, estandorelacionada a um conjunto de regras que permite resolver um determinado problema em um número finito de etapas. Para que o conceito receba um tratamento adequado, será necessário representá-lo matematicamente. A solução será o emprego da teoria das funções recursivas, que será considerada posteriormente.

Há finalmente a noção de independência, que pode ser aplicada ao conjunto de axiomas de uma dada teoria formal. Em princípio, um conjunto de regras ou axiomas será independente quando a eliminação de qualquer uma delas diminuiro potencial dedutivo da teoria.[17]

Deduções Metateóricas

O processo de formalização termina por desdobrar uma teoria informal em um par teoria formal/metateoria, sem que desapareça a necessidade de se recorrer à intuição. Aparentemente, a única inovação introduzida a este respeito são os limites mais estreitos para seu emprego, circunscrito agora à metateoria. Nosso problema original — a imprecisão da noção de prova — aparentemente permanece sem solução, na medida em que, na sintaxe, empregam-se princípios intuitivos. A utilidade da formalização torna-se, em princípio, discutível.

Existem, contudo, algumas características próprias dos recursos dedutivos disponíveis numa metateoria. Embora as provas metateóricas sejam apresentadas em linguagem natural, os métodos empregados são específicos. De uma maneira geral, há restrições que os limitam aos denominados métodos finitários:

"The methods used in the metatheory shall be restricted to methods, called finitary by the formalists, which employ only intuitively conceivable objects and performable processes. (...) No infinite class may be regarded as a completed whole. Proofs of existence shall give, at least implicitly, a method for constructing the object which is being proved to exist." (Kleene[18], p. 63)

Estas restrições foram inicialmente impostas à metamatemática por Hilbert. No que se refere ao emprego estrito de "objetos concebíveis", a sintaxe indiscutilvelmente já se enquadra nesta perspectiva, visto que a descrição de um sistema formal envolve apenas conjuntos 'efetivos' ou 'decisíveis'; quanto ao conceito de número natural, seu emprego está restrito à aritmética finitista. Nesta teoria, toma-se como domínio o conjunto formado por seqüências de símbolos organizadas em ordem crescente de extensão; considerando-se, por exemplo, o símbolo ' * ' como básico, o domínio será constituído pelos elementos

*, **, ***, ****, ...

que podem ser representados pela notação usual dos números naturais. Coerentemente com as restrições mencionadas por Kleene, os conceitos aritméticos são introduzidos de maneira a satisfazerem os requisitos dos procedimentos finitários: as operações de soma e multiplicação, por exemplo, são definidas por recurso ao princípio de indução.

Sobre os processos dedutivos, as condições mencionadas por Kleene os limitam ao emprego de "processos praticáveis" ("performable processes"). A fim de que a existência de um objeto matemático não seja assumida sem sua efetiva exibição (ou sem a apresentação de um método que permita a sua construção), proíbe-se a aplicação do princípio do terceiro excluído a totalidades infinitas. Os quantificadores também não podem ser utilizados indiscriminadamente: proíbe-se a sua aplicação a conjuntos infinitos.

As críticas dirigidas às metateorias perdem ao menos parte de sua validade após a exposição destas modificações. Se considerarmos que não existe a possibilidade de se justificarem indefinidamente todos os princípios e regras lógicas de uma teoria (sem que se incorra numa regressão ao infinito) e que a intuição não pode ser eliminada completamente do domínio matemático (segundo o ponto de vista de Hilbert), os métodos finitistas parecem constituir uma opção teórica absolutamente legítima, na medida em que formariam um núcleo lógico mínimo imune às críticas dirigidas a outras teorias informais. Este núcleo parece dispensar qualquer justificação ou fundamentação.[18] Sua consistência não está aparentemente em jogo: desta forma, ele pode servir como base para a análise da consistência de outras teorias.

Recursos mais fortes podem ser eventualmente empregados a nível metateórico. Mais abrangentes que os finitários, há os denominados métodos 'construtivos', que também envolvem a utilização de regras previamente definidas, reunidas em um conjunto finito. Sua aplicação, contudo, nem sempre resulta na obtenção de um resultado após um número finito de etapas. Podemos tomar, a título de ilustração, uma questão relativa à expansão decimal de π — a existência (ou não) de uma seqüência de sete algarismos '7' consecutivos nesta expansão.[19] Embora as regras a serem empregadas nesta verificação estejam perfeitamente determinadas, e, caso exista, a solução seja fornecida após um número finito de etapas, o processo se prolongará indefinidamente se tal configuração de numerais não ocorrer.

Pode-se estabelecer, desta forma, uma distinção imediata entre processos finitários e construtivos: no segundo caso, não há garantia acerca da 'efetividade' da sua aplicação. O emprego de métodos desta natureza permite a obtenção de resultados irreprodutíveis por recurso a processos finitários. A possibilidade de emprego de operações de generalização que não poderiam ser substituídas por quantificadores ligados ("<u>bounded quantifiers</u>") estabelece uma das diferenças concretas entre os dois casos. As provas que se servem destas operações serão construtivas sempre que houver procedimentos pré-estabelecidos para a verificação do valor de verdade de cada instância da proposição generalizada, mas não serão necessariamente finitárias.[20]

Há controvérsias sobre a possiblidade de se caracterizar precisamente a totalidade dos métodos construtivos. Alguns autores negam tal possibilidade:

"Il est impossible de donner de ces notions une définition satisfaisant aux conditions mathématiques de précision. D'ailleurs elles ne sont pas des notions primitives au sens donné à ce mot dans les mathématiques formelles. Nous venons de les trouver _a posteriori_ par une analyse des constructions mathématiques mais elles ne sont pas posées _a priori_ à la base de ces constructions. Les mathématiques se développent par une activité de l'esprit; ce n'est qu'après coup que nous isolons dans cette activité des notions et des méthodes caractéristiques." (A. Heyting, citado por Martin [26], p. 176)

Pode-se argumentar, ao contrário, que a noção de construtivismo deve ser caracterizada por intermédio de conceitos matemáticos, descartando-se conseqüentemente a sugestão de Heyting de que novas realizações intelectuais no campo da matemática viabilizariam a expansão contínua e imprevisível das fronteiras desta noção. Assim, enquanto a noção de procedimento finitário estaria associada à de recursividade, os procedimentos construtivos se ligariam à idéia de enumerabilidade recursiva.[21]

Existem métodos dedutivos ainda mais poderosos, passíveis de utilização em uma metateoria, denominados 'não-construtivos'. Eles podem ser classificados em dois grupos:

(1) argumentos baseados na suposição de que se possa realizar um número infinito de atos de escolha; tal suposição é representada, por exemplo, pelo axioma da escolha presente na axiomática de Zermelo para a teoria dos conjuntos.

(2) argumentos em que se considera um conjunto infinito enquanto uma totalidade acabada, passível do mesmo tratamento formal dado a outros objetos quaisquer.[22]

Na aritmética clássica, por exemplo, ocorrem provas não-construtivas em conseqüência da aplicação do princípio do terceiro excluído em situações onde estão envolvidos conjuntos infinitos. No caso da sentença

$$(x)P(x)$$

haverá apenas as seguintes alternativas, caso se aplique este princípio: ou o enunciado é verdadeiro, o que significa que todos os elementos de um dado domínio possuem a propriedade representada por 'P'; ou ele é falso, o que permitiria supor a existência de um elemento que satisfaça a negação desta sentença, isto é,

$$(\exists x) \sim P(x)$$

será verdadeira.

O emprego de tais métodos permite a obtenção de resultados de derivação impossível a nível finitário. Há contudo desvantagens. O processo de formalização perderia sua razão de ser caso se empregassem, a nível metateórico, procedimentos argumentativos de confiabilidade idêntica ou menor aos da teoria matemática que está sendo formalizada. Os resultados metateóricos obtidos nestas circunstâncias estarão sujeitos às mesmas críticas dirigidas às teorias informais.

Dado um sistema formal que tenha sido obtido a partir de uma teoria informal, é conveniente indagar se ele corresponde a uma representação adequada da teoria original. O conceito de _adequação_, neste caso, é tomado usualmente do ponto de vista dedutivo: bastará que o conjunto de teoremas de cada uma das teorias seja "equivalente" ao da outra, ou seja, que todo teorema informal possua um correspondente formal, e vice-versa. Outras características das teorias (como a axiomatização empregada) não são consideradas relevantes neste caso.

A verificação da _adequação absoluta_, no caso da aritmética clássica, por exemplo, é impossível, em termos práticos. A primeira dificuldade relaciona-se com a existência de um número infinito de teoremas informais e formais, o que inviabiliza o estabelecimento de uma correspondência entre ambos os conjuntos, elemento a elemento. Uma alternativa para contornar esta dificuldade seria a análise dos princípios de inferência (e, naturalmente, dos axiomas): caso se pudesse mostrar a equivalência entre os princípios e axiomas das duas teorias, haveria a possibilidade de se estabelecer a equivalência entre os conjuntos de teoremas. Surge, contudo, um novo obstáculo. Como já foi mencionado, numa teoria informal, opera-se com um sistema lógico impreciso: deve-se recordar que a explicitação da lógica é uma das etapas da própria formalização. Desta forma, não existe maneira efetiva de se estabelecer tal correspondência.[23]

Estabelecer a inadequação, por outro lado, tampouco representa uma tarefa simples (do ponto de vista 'empírico', embora tal conceito tenha uma formulação bastante elementar: a exibição de uma única prova informal formalmente irreprodutível bastaria para estabelecê-la) . Pode-se concluir facilmente que, no caso de se estar analisando uma teoria formal que seja de fato adequada, o número de etapas envolvido nesta verificação não será finito. Outro método seria simplesmente a descoberta de uma prova numa teoria informal em que estivesse envolvido um princípio de inferência ainda não diagnosticado: tal fato tornaria inevitável a rejeição da teoria formal aceita até então (supondo-se naturalmente a inexistência de uma prova formal estruturalmente distinta da informal, fundada apenas nos princípios de inferência efetivamente formalizados; ou seja, será necessário que o novo princípio de inferência seja independente de todos os demais disponíveis a nível formal). Mesmo que se constate uma deficiência desta natureza, contudo, pode-se em princípio fortalecer o sistema formal pela introdução da nova regra, gerando-se assim um novo sistema potencialmente adequado. Em vista desta possibilidade, costuma-se afirmar a inexistência de provas informais que não possam ser representadas em algum sistema que represente adequadamente a teoria original:

"The axioms Γ of mathematics are just the usual axioms for set theory together with definitions of all the defined symbols. It is our conviction that any mathematical proof can be expanded, somewhat routinely, to eventually reach the form of a formal proof from Γ in the above sense. Of course, this conviction is another instance (...) of a judgement of applied mathematics that is not subject to a rigorous proof. We are just stating that our rigorous notion of proof is a fully adequate mathematical version of the mathematical proofs actually found in articles and books." (Monk[28], p. 172)

Tendo-se em vista que esta opinião constitui apenas uma hipótese acerca da matemática informal (mesmo em se considerando que seja 'bem-corroborada'), a forma de se determinar a adequação continua limitada à verificação empírica da possiblidade de formalização de cada prova informal.

Uma vez constatada a inviabilidade da determinação absoluta da adequação, resta como alternativa procurar verificar algumas propriedades a ela relacionadas. A característica mais elementar é a existência, para o sistema formal, de um modelo que corresponda à teoria informal. Uma característica mais significativa é a de categoricidade, que, em linhas gerais, indica a existência de um único modelo standard, em relação ao qual todos os demais são isomórficos. Para um sistema dotado destas duas propriedades, existe um e somente um modelo, ao qual estaria associada a teoria informal original: a adequação seria aparentemente uma conseqüência imediata deste fato. [24] Ainda assim, existem problemas: não é possível determinar de maneira concludente a correspondência entre um modelo para a teoria formal e a teoria informal, pelos mesmos motivos mencionados emrelação à verificação da adequação absoluta. [25] Desta forma, a garantia da consistência (que é uma condição equivalente à de existência de um modelo) e de categoricidade para uma teoria formal não asseguram a adequação.

Um critério que supostamente englobaria uma condição necessária (mas não suficiente) para a adequação, envolvendo apenas considerações sintáticas, seria o de completude. Após alguma reflexão, contu -

do, conclui-se que nem mesmo necessária é tal condição, porque não se pode afirmar peremptoriamente que a teoria informal seja completa: não existe, aliás, maneira de se estabelecer tal propriedade numa teoria em que a noção de prova não esteja estabelecida de maneira precisa.

Em suma, a nível estritamente metateórico (sintático e semântico), recorrendo-se aos conceitos de consistência, completude e categoricidade, não é possível estabelecer condições suficientes que permitam provar a adequação de uma formalização. É absolutamente relevante enfatizar que 'modelo standard' e 'teoria informal' não são conceitos equivalentes. Enquanto o modelo é um objeto formalmente caracterizado a partir de conceitos extraídos da teoria dos conjuntos (domínio de indivíduos, funções e predicados definidos neste domínio), em cuja conceituação não está envolvida qualquer estrutura lógica (que permanece confinada na sintaxe), uma teoria informal engloba as componentes sintática e semântica, sendo marcada por uma margem de imprecisão ausente nas teorias formais e em seus modelos. Portanto, o único processo que permite efetivamente verificar a adequação continua sendo a inspeção direta, processo que sofre das limitações já consideradas.

Para algumas teorias formais, foi possível o estabelecimento definitivo da sua inadequação. Um dos casos é o da aritmética de Peano, que está relacionado ao axioma da indução. Tal axioma, por se referir à noção intuitiva de 'propriedade', aplica-se à totalidade dos subconjuntos de números naturais. O esquema de axiomas empregado no sistema formal, ao contrário, refere-se exclusivamente às propriedades exprimíveis por meio de fórmulas do sistema, que constituem um conjunto in finito enumerável. Assim, nem todas as propriedades sugeridas pelo axioma de indução podem ser representadas nesta teoria formal. [26]

Deve-se esclarecer, contudo, que não se trata de uma limitação formalmente incontornável: bastaria introduzir o cálculo de predicados de 2ª ordem para que se pudesse aplicar o quantificador universal a variáveis de predicado, ou acrescentar à teoria axiomas da teoria dos conjuntos. Ambas alternativas permitiriam a representação, neste novo sistema formal, de qualquer subconjunto de números naturais. A insistência em se conservar um sistema de 1ª ordem deve-se ao fato de ele servir como instrumento de formalização para a maior parte da aritmética a que se dedicam os matemáticos.

Há ainda outras situações em que se opera com sistemas formais visivelmente inadequados, como por exemplo:

"Even where a formal system is said to be adequate to an intuitive theory, it is often possible to construct, in terms of the whole formal system, arguments which can no longer be formalized in the system but are nonetheless of the same general type as arguments formalizable in the system. Next, in the intuitive theory, we are often less hesitant to use methods from other disciplines; for example, the use of analytic methods in number theory. The boundaries between formal systems are generally sharper so that, for example, usual formal systems of number theory do not include the analytic methods." (Wang[41], p. 6)

Em todos estes casos de patente inadequação, o fato mais relevante é o de que os axiomas e os princípios de inferência não incluídos poderiam ser representados formalmente num sistema mais abrangente; a manutenção de um sistema 'inadequado' encontra sempre uma justificativa pragmática (maior simplicidade, suficiência para determinados propósitos, etc.). Desta forma, pode-se ainda sustentar a tese mencionada por Monk de que, a cada prova informal efetivamente apresentada, existe um sistema formal (para a teoria informal em questão) potencialmente adequado, em que ela pode ser representada. A possibilidade de os teoremas de Gödel terem estabelecido uma exceção a esta regra será analisada posteriormente.

II

A Prova de Gödel Revisitada

Aritmetização da Metateoria

A demonstração dos teoremas de incompletude abrange diversas etapas. A primeira delas corresponde à representação, na aritmética informal, da sintaxe da teoria dos números formal. Através de um procedimento desenvolvido por Gödel, é possível estabelecer uma associação entre as sentenças metateóricas e um subconjunto particular de sentenças aritméticas, de tal maneira que cada uma delas será verdadeira se e somente se sua correspondente na outra teoria também o for.

É importante apresentar algumas considerações em relação às vantagens e à relevância deste processo. Há em primeiro lugar a questão da delimitação dos procedimentos dedutivos metateóricos. Uma das maneiras mais eficientes para que se precise a noção de prova em uma metateoria seria certamente a sua formalização. Tal opção, contudo, requereria a formulação de uma meta-metateoria (onde se explicitariam as regras de dedução, se formularia o conceito de metateorema, se verificaria a consistência da metateoria, etc), que, por sua vez, seria construída dentro da linguagem natural, de maneira que conservaríamos a dificuldade inicial, deslocada apenas para outro nível. A aritmetização corresponderia a uma solução intermediária entre a formalização e a imprecisão do conceito informal de 'prova metateórica sintática'. Desta forma, existiria ao menos a certeza de que não se estaria empregando na sintaxe qualquer argumento fundado em princípios dedutivos mais poderosos do que os disponíveis na aritmética. [1]

Há uma razão ainda mais relevante, também relacionada com a no - ção de prova, para justificar a aritmetização:

"If this method of arithmetization is not applied, certain difficul - ties arise in the exact formulation of the syntax. For instance, let us consider the syntactical sentence: "$\mathfrak{S}_1$ is not demonstrable", which means: "No sentencial series having $\mathfrak{S}_1$ as its final sentence is a proof." If the syntax is not arithmetized (...) we may interpret it as a theory concerning certain series of physical objects, namely, the series of written symbols. In a syntax of that kind, it is certainly possible to express: "There exists no actual written proof for $\mathfrak{S}_1$", but the sentence concerning the non-demon - strability of $\mathfrak{S}_1$ means much more, namely: "No proof for $\mathfrak{S}_1$ is possible"." (Carnap[3], p. 57)

A sintaxe deve, portanto, conter uma teoria abstrata acerca da combinação de símbolos e seqüências de símbolos: a própria definição de demonstrabilidade, fundamental para a maior parte das considera - ções sintáticas, envolve explicitamente noções combinatórias, confor- me indica o texto de Carnap. A aritmetização satisfaria esta necessi- dade da maneira mais simples:

"It proves, however, to be much simpler, instead of constructing a new combinatorial analysis of this kind in a non-arithmetical form, to use the arithmetic of the natural numbers which already contains within itself the whole of combinatorial analysis (whether of a finite or denumerable number of elements). This is the most important reason for the arithmetization of syntax." (Carnap [3], p. 57-8)

Uma vez esclarecida a conveniência da aritmetização, resta apresentar as teorias que estarão envolvidas neste processo. Consideraremos em primeiro lugar o sistema formal (de 1ª ordem) A, que em princípio representa a aritmética axiomática intuitiva. [2] Os símbolos próprios da teoria são cinco:

a) uma constante individual ('0');

b) uma constante predicativa ('$p_{1,2}(x,y)$' ou '$x=y$');

c) três constantes funcionais ('$f_{1,1}(x)$' ou '(x')', '$f_{1,2}(x,y)$' ou '$x + y$', e '$f_{2,2}(x,y)$' ou '$x.y$').

Os axiomas podem ser classificados em quatro grupos. O primeiro (A1 e A2) estabelece as propriedades da igualdade; o segundo (A3 e A4) caracteriza a função sucessor; o terceiro (A5 a A8), as funções soma e produto, por intermédio de definições recursivas. O último grupo, constituído pelo esquema de axiomas A9, representa o princípio de indução matemática:

(A1) $(x_1 = x_2) \rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3)$

(A2) $(x_1 = x_2) \rightarrow (x_1' = x_2')$

(A3) $0 \neq (x_1)'$

(A4) $((x_1)' = (x_2)') \rightarrow (x_1 = x_2)$

(A5) $x_1 + 0 = x_1$

(A6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$

(A7) $x_1 . 0 = 0$

(A8) $x_1 . (x_2)' = (x_1 . x_2) + x_1$

(A9) Para toda fórmula bem-construída de A,

$P(0) \rightarrow ((x)(P(x) \rightarrow P(x')) \rightarrow (x)P(x))$

Outra teoria envolvida é a aritmética informal, que tentaremos apresentar da maneira mais precisa possível. Os axiomas que a compõem foram originalmente propostos por Dedekind:

(AI1) Zero é um número;

(AI2) Para todo n, existe outro número que o sucede imediatamente, denominado 'sucessor', que é designado por n';

(AI3) Dois números distintos não podem possuir o mesmo sucessor;

(AI4) Zero não é sucessor de nenhum número;

(AI5) Se S for um subconjunto de números naturais que apresente as propriedades:

(i) $0 \in S$;

(ii) para todo $n \in S$, segue-se que $n' \in S$,

então S coincidirá com o conjunto dos números naturais.

Temos de distingüir ainda mais uma teoria matemática informal, que é a aritmética recursiva. Ela corresponde na realidade à teoria das funções recursivas, com seu domínio restrito ao conjunto dos números naturais. Os conceitos e princípios nela envolvidos são praticamente idênticos aos da aritmética ingênua: número natural, sucessor, princípio de substituição de iguais por iguais e o princípio de prova por recursão. Sua característica distintiva é o fato de que tanto as definições quanto as demonstrações são realizadas estritamente por emprego da recursão. Por exemplo, as operações de soma e multiplicação devem ser definidas recursivamente, enquanto na aritmética elementar (intuitiva) existe a alternativa de introduzi-las por intermédio da teoria ingênua dos conjuntos.

Há outra diferença bastante importante entre elas, relacionada ao uso de quantificadores. Na aritmética recursiva, dada uma relação qualquer, admite-se apenas a introdução de quantificadores — existenciais ou universais — ligados (bounded quantifiers), que na realidade poderiam ser eliminados, bastando para isso substituir a sentença quantificada por uma seqüência finita de disjunções ou conjunções de instâncias do referido predicado. Assim, com estas restrições, o uso de quantificadores torna-se perfeitamente dispensável. Esta limitação estabelece uma distinção efetiva (do ponto de vista argumentativo) entre a aritmética clássica e a recursiva. As provas existenciais realizadas por redução ao absurdo e pelo emprego do princípio do terceiro excluído (não-construtivas, portanto) não são diretamente representáveis na aritmética recursiva. [3]

A aritmetização da sintaxe da teoria A será realizada na aritmética clássica, com a ressalva de que, sempre que possível, se tentará observar os limites mais estreitos da aritmética recursiva. A razão é simplesmente a de que os métodos sintáticos finitários, quando mapeados na aritmética, são integralmente representáveis pela teoria das funções recursivas. Este processo, portanto, permite tornar mais precisa uma noção intuitiva extremamente importante para as considerações metateóricas.

O primeiro passo da aritmetização é a atribuição de números naturais aos símbolos, fórmulas e seqüências de fórmulas da teoria A (mais exatamente, aos nomes dos símbolos, das fórmulas, etc, na medida em que, na metateoria, não se tem acesso direto aos símbolos da teoria formal). Este mapeamento é realizado por intermédio de funções de atribuição de números de Gödel, que serão aqui designadas pela letra 'g'.

A próxima etapa consiste na definição de funções e relações re - cursivas que possam representar diversos 'predicados' metamatemáti - cos:

a) "a seqüência de fórmulas de número de Gödel 'x' é uma prova para a fórmula de número de Gödel 'y'."

$P(x,y)$ ou $x\ P\ y$;

b) "a fórmula de número de Gödel 'y' é obtida a partir da fórmula de número de Gödel 'x' pela substituição da variável livre de número de Gödel 't' pelo termo de número de Gödel 'u'."

$$y = Sb\begin{pmatrix} x & \begin{matrix} t \\ u \end{matrix} \end{pmatrix}$$

c) "a fórmula de número de Gödel 'z' é obtida a partir da fórmula de número de Gödel 'y' pela introdução do quantificador universal para a variável de número de Gödel 'x'."

$z = Gen(x,y)$ ou $z = x\ Gen\ y$

d) "a fórmula de número de Gödel 'y' é a negação da fórmula de número de Gödel 'x'."

$y = Neg(x)$

e) "o numeral cujo número de Gödel é 'y' corresponde ao número natur- ral 'x'."

$y = Nml(x)$

Este último predicado metamatemático dificilmente poderia ser considerado sintático. Na sintaxe, só pode haver referência a um sis- tema formal e seus símbolos, mas não a suas interpretações. Nos qua - tro primeiros casos, os argumentos do predicado e das funções aritmé- ticas assumem valores que correspondem a números de Gödel para símbolos, fórmulas ou seqüências de fórmulas da teoria. Na última função metateórica, contudo, a todo número natural é associado um termo da teoria (um numeral, no caso). Esta operação é indiscutivelmente semântica, na medida em que os números naturais constituem a interpretação *standard* dos numerais da teoria formal.

Um artifício que supostamente neutralizaria o caráter semântico deste predicado seria o de restringir o domínio da função ao conjunto dos números de Gödel, que corresponde obviamente a um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. Neste caso, ambas variáveis teriam uma interpretação sintática, por assumirem sempre números de Gödel como valores. Desta forma, a nova 'interpretação' metateórica da função 'y = Nml(x)' será: "o símbolo (ou termo, fórmula, seqüência de fórmulas) de número de Gödel 'x' está associado ao numeral de número de Gödel 'y'."

Nota-se que o problema original não foi eliminado. O enunciado acima não pertence ao domínio da sintaxe. Ele estabelece simplesmente uma relação entre uma série de objetos formais e um conjunto de numerais. Tal operação é estruturalmente equivalente à atribuição de números de Gödel — a distinção seria apenas a de que estariam sendo atribuídos "numerais de Gödel". Embora ela possa ser realizada estritamente no interior do sistema, sua natureza não é sintática — assim como não é a da função de atribuição de números de Gödel 'g'.

O conceito de prova e as operações metamatemáticas até aqui consideradas puderam ser representadas por meio de predicados e funções aritméticas recursivas. A noção de demonstrabilidade, ao contrário, será indicada por um predicado que não possui tal característica:

$$\mathrm{Prov}(x) \leftrightarrow (\exists y)(y\ P\ x)$$

Deve-se observar que o fato de se ter expressado tal conceito por meio deste predicado não significa, por enquanto, que não exista outra representação estritamente recursiva.

Concluído o processo de aritmetização, cabe indagar se não seria possível realizar o espelhamento diretamente no interior do sistema <u>A</u>, na medida em que esta teoria corresponde à versão formal da aritmética clássica. Tal proposta é, de certa forma, viável:

"... we have differentiated between the object-language and the syntax-language in which the syntax of the object language is formulated. Are these necessarily two separate languages? (...) ... we intend to show that, actually, it is possible to manage with one language only; not, however, by renouncing syntax, but by demonstrating that without the emergence of any contradictions the syntax of this language can be formulated within this language itself." (Carnap[3], p. 53)

Não existe propriamente a intenção de se formular a sintaxe de uma linguagem (ou teoria) "dentro desta própria linguagem", como sugere Carnap, porque uma linguagem formal não possui qualquer referencial exterior a ela própria. O espelhamento no interior da linguagem-objeto corresponderia neste caso simplesmente à 'formalização' da metateoria. A diferença, contudo, é a de que não haveria uma nova linguagem formal, e não se exigiria a construção de uma meta-metalinguagem. A formalização da metalinguagem na própria linguagem-objeto elimina os problemas mencionados a respeito da geração de uma seqüência infinita de teorias/metateorias.

A possibilidade de formalização, entretanto, não vai eliminar a necessidade de se operar em um nível informal. No processo de aritmetização, fica estabelecida uma correspondência entre as sentenças metateóricas e um conjunto de sentenças aritméticas, de maneira que cada enunciado metateórico será verdadeiro se e somente se seu correspondente na aritmética também o for. Numa teoria formal, ao contrário, as sentenças (ou fórmulas fechadas) não possuem valor de verdade. Conseqüentemente, a formalização não dispensaria a aritmetização, porque a metateoria é constituída por juízos significativos acerca de objetos formais, que possuem um valor de verdade. É necessário que se tenha em mente a distinção entre <u>formalizar</u> uma teoria e <u>representá-la</u> no interior de outra.

No caso específico das sentenças metateóricas que, por intermédio da aritmetização, são associadas a relações recursivas, existiria um critério que permitiria seu espelhamento no seio da própria linguagem-objeto, em virtude de um teorema aritmético, denominado 'lema da correspondência', segundo o qual, para todo predicado recursivo primitivo $P(x_1,\ldots,x_n)$, existe uma fórmula, no sistema <u>A</u>, de número de Gödel 'r', contendo variáveis livres de número de Gödel $g_1,\ldots,g_n$, de maneira que, para todo x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$P(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow Prov\left(Sb\left(r \begin{matrix} 17 & 19 & \ldots & g_n \\ Nml(x_1) & Nml(x_2) & \ldots & Nml(x_n) \end{matrix} \right)\right)$$

$$\sim P(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow Prov\left(Neg\left(Sb\left(r \begin{matrix} 17 & 19 & \ldots & g_n \\ Nml(x_1) & Nml(x_2) & \ldots & Nml(x_n) \end{matrix} \right)\right)\right)$$ [4]

Este 'lema' é simplesmente um teorema da aritmética informal que envolve algumas relações recursivas e a análise da decomposição de números naturais em fatores primos. Em virtude da aritmetização da meta matemática, ele possui a versão metateórica (semântica) indicada, em que se associam sentenças aritméticas verdadeiras (ou falsas) a fórmulas demonstráveis (ou refutáveis). Em decorrência dele, fica estabelecido que as sentenças metateóricas que estão associadas, via aritmetização, a sentenças aritméticas recursivas, são 'representáveis' no sistema formal: para cada sentença metateórica nestas condições, existirá uma fórmula demonstrável no sistema (caso a sentença for verdadeira) ou refutável (se for falsa). Contudo, as sentenças metateóricas para as quais não se puder estabelecer uma associação semelhante não serão representáveis em A.

Primeiro Teorema

A próxima etapa na demonstração é a construção da fórmula indecidível de Gödel. Considere-se o predicado aritmético recursivo

$$Q(x,y) = \sim\left(x \; P \; Sb\left(y \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right)\right)$$

Em decorrência do lema da correspondência, tal predicado é representável no sistema formal A; isto significa que

$$\sim\left(x \; P \; Sb\left(y \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right)\right) \rightarrow Prov\left(Sb\left(q \; \begin{matrix} 17 \\ Nml(x) \end{matrix} \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right)\right)$$

$$x \; P \; Sb\left(y \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right) \rightarrow Prov\left(Neg\left(Sb\left(q \; \begin{matrix} 17 \\ Nml(x) \end{matrix} \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right)\right)\right),$$

onde $q = g(\ulcorner Q(x,y) \urcorner)$.

Seja 'p' o número de Gödel da fórmula que se obtém a partir da fórmula $\ulcorner Q(x,y) \urcorner$ por meio da introdução do quantificador universal em relação à variável $\ulcorner x \urcorner$:

$$p = 17 \; Gen \; q = g\left(\ulcorner (x) \sim\left(x \; P \; Sb\left(y \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(y) \end{matrix}\right)\right) \urcorner\right)$$

Tomemos agora a fórmula aberta que se obtém a partir de $\ulcorner Q(x,y) \urcorner$ ao se substituir a variável livre $\ulcorner y \urcorner$ pelo numeral correspondente ao número natural 'p', e seja 'r' seu número de Gödel; então:

$$r = Sb\left(q \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right) = g\left(\ulcorner \sim\left(x \; P \; Sb\left(p \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right)\right) \urcorner\right)$$

A sentença aritmética indicada acima à direita ainda corresponde a um predicado recursivo. Esta característica, contudo, deixa de exis tir no próximo (e último) passo da construção da fórmula indecidível: a introdução do quantificador universal em relação à variável $\ulcorner x \urcorner$ na fórmula de número de Gödel 'r':

$$s = 17 \text{ Gen } r = 17 \text{ Gen}\left(\text{Sb}\left(q \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right)\right) = \text{Sb}\left(17\text{Gen}q \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right) =$$

$$= \text{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right) = g\left(\ulcorner (x)\sim\left(x \text{ P Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right)\right)\urcorner\right).$$

Denominemos 'G' a fórmula fechada cujo número de Gödel é 's', 'G_A' a sentença aritmética que corresponde à interpretação desta fórmula, e 'G_M' o enunciado metamatemático associado a esta sentença aritmética, que é:

"a fórmula de número de Gödel '$\text{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right)$' não é demonstrável no sistema formal A"

ou

"a fórmula 'G' não é demonstrável no sistema".

A prova realizada por Gödel acerca da indecisibilidade de G (primeiro teorema de incompletude) é basicamente sintática. No processo de demonstração, não se recorre à interpretação da fórmula G na aritmética (embora se empregue a interpretação de outras fórmulas, como veremos oportunamente). Em virtude do espelhamento da metateoria na aritmética, é possível tomar este metateorema como um teorema estritamente aritmético. Vamos considerar em primeiro lugar uma apresentação esquemática desta versão:

(A) Hipóteses: $\quad \text{Prov}\left(\text{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix}\right)\right) \quad$ (i)

$$\sim(\exists x)(\mathrm{Prov}(x)\ \&\ \mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(x))) \qquad \text{(ii)}$$

$$\mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \rightarrow (\exists x)\left(x\ \mathrm{P}\ \mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow n\ \mathrm{P}\ \mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}17 & 19\\ \mathrm{Nml}(n) & \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right)\right)$$

$$\text{(iii)}$$

$$\mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right) = \mathrm{Sb}\left(17\mathrm{Gen}q\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right) = 17\ \mathrm{Gen}\ \mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \rightarrow \mathrm{Prov}\left(17\mathrm{Gen}\ \mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}17 & 19\\ \mathrm{Nml}(n) & \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \qquad \text{(iv)}$$

de (iii) e (iv): $\mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}17 & 19\\ \mathrm{Nml}(n) & \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right)\right)\ \&$

$$\&\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(q\ \begin{matrix}17 & 19\\ \mathrm{Nml}(n) & \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \qquad \text{(v)}$$

de (ii) e (v): contradição

Portanto:

$$\sim(\exists x)\ (\mathrm{Prov}(x)\ \&\ \mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(x))) \rightarrow\ \sim \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(p\ \begin{matrix}19\\ \mathrm{Nml}(p)\end{matrix}\right)\right) \qquad \text{(vi)}$$

(*) lema da correspondência

(B) Hipóteses: $\mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(p \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right)\right)$ (vii)

$$\sim (\exists x)\left(\mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(t\mathrm{Gen}x)) \ \& \ (y)\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(x \quad {t \atop \mathrm{Nml}(y)}\right)\right)\right)$$

(viii)

de (vii) e (viii): $(x) \sim \left(x \ P \ \mathrm{Sb}\left(p \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right) \xrightarrow{(*)}$

$$\rightarrow (x)\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(q \quad {17 \atop \mathrm{Nml}(x)} \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right) \qquad \text{(ix)}$$

$$\mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(p \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right)\right) \rightarrow \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(17\mathrm{Gen}q \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right)\right) \text{(x)}$$

Seja $\beta = \mathrm{Sb}\left(q \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)$

de (ix) e (x): $(x)\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(\beta \quad {17 \atop \mathrm{Nml}(x)}\right)\right) \ \& \ \mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(17\mathrm{Gen}\beta))$ (xi)

de (viii) e (xi): contradição

Portanto:

$$\sim (\exists x)\ (\mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(t\mathrm{Gen}x)) \ \& \ (y)\ \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(x \quad {t \atop \mathrm{Nml}(y)}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sim \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(p \quad {19 \atop \mathrm{Nml}(p)}\right)\right)\right) \text{(xii)}$$

(*) lema da correspondência

Considerando-se que:

(viii) $\rightarrow$ (ii), então

$$(viii) \rightarrow \sim \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right) \& \sim \mathrm{Prov}\left(\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right)\right)$$

(q.e.d)

Passemos agora à versão mais relevante do teorema, que correspon de à sua tradução para a metamatemática:

(A) Hipóteses: A fórmula G é demonstrável no sistema (i)

O sistema A é consistente (ii)

Se G é demonstrável, então existe uma prova para ela; seja 'n' o número de Gödel desta prova.

Se ' n é o número de Gödel da prova de G' é verdadeira, então

$$' n\ P\ \mathrm{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right) '$$ também o será.

Se $' n\ P\ \mathrm{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right) '$ é verdadeira, então, por aplicação do lema da correspondência, a fórmula de número de Gödel

$$\underbrace{\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\left(q \begin{matrix} 17 & 19 \\ \mathrm{Nml}(n) & \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right)}_{\alpha}$$

é demonstrável no sistema. (iii)

Por outro lado, se G é demonstrável, isso equivale a afirmar que a fórmula de número de Gödel $' 17\ \mathrm{Gen}\ \mathrm{Sb}\left(q \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right) '$ é demonstrável.

Empregando-se a lógica de 1ª ordem, pode-se mostrar então que a fórmula de número de Gödel α também será demonstrável. (iv)

Obtivemos, portanto, que tanto a fórmula de número de Gödel α quanto sua negação são demonstráveis na teoria. (v)

Isso contradiz a hipótese de consistência; logo, se a mantivermos, conclui-se que G não é demonstrável no sistema. (vi)

(B) Hipóteses: A fórmula $\sim G$ é demonstrável no sistema (vii)

O sistema formal $\underline{A}$ é ω-consistente. (viii)

De (vii) e (viii), conclui-se que G não pode ser demonstrada no sistema. Se ' G não pode ser demonstrada no sistema ' é verdadeira, então ' $(x) \sim \left(x \; P \; Sb \left(p \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right) \right)$ ' também o será.

Se ' $(x) \sim \left(x \; P \; Sb \left(p \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right) \right)$ ' é verdadeira, então, pelo lema da correspondência, todas as instâncias da fórmula aberta F(x), cujo número de Gödel é ' $Sb \left(q \; \begin{matrix} 17 & 19 \\ Nml(x) & Nml(p) \end{matrix} \right)$ ', são demonstráveis na teoria. (ix)

Por outro lado, a demonstrabilidade de $\sim G$ significa que a fórmula de número de Gödel

$$Neg \left(Sb \left(p \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right) \right) = Neg \left(Sb \left(17Genq \; \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right) \right) =$$

$$= \text{Neg}\left(17\text{Gen Sb}\left(q \begin{matrix} 17 & 19 \\ \text{Nml}(x) & \text{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right),$$

que corresponde à fórmula '~(x) F(x)', também é demonstrável na teoria. (x)

Como resultado, obtivemos que '~(x) F(x)' e todas as instân - cias de F(x) são demonstráveis. (xi)

Isso contradiz a hipótese de ω-consistência da teoria; logo, se a mantivermos, conclui-se que ~G não é demonstrável na teoria.

(xii)

Finalizando, em função dos dois resultados (vi) e (xii), conclui-se que, se A for ω-consistente, G é uma fórmula indecidível na teoria.

(q.e.d)

Convém apresentarmos alguns comentários em relação à prova meta-teórica. Na parte (A), existe uma passagem em que uma sentença meta - teórica é convertida, via aritmetização, em uma sentença aritmética recursiva e,em seguida, através do lema da correspondência, em uma fórmula fechada da teoria formal. Tomemos mais uma vez esta passagem:

"G é demonstrável na teoria" (ou, equivalentemente, "existe uma se - qüência de fórmulas de número de Gödel 'n' que é prova para a fórmula G").

Se "G é demonstrável na teoria" é verdadeira, então "$n \text{ P Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \text{Nml}(p) \end{matrix}\right)$" também é verdadeira.

Se "$n \text{ P Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \text{Nml}(p) \end{matrix}\right)$" é verdadeira, "$\text{Neg}\left(\text{Sb}\left(q \begin{matrix} 17 & 19 \\ \text{Nml}(n) & \text{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right)$"

é uma fórmula demonstrável.

A prova, desta forma, não é realizada integralmente a nível sintático. [5] Na passagem analisada, uma sentença metateórica é, através da aritmética recursiva, associada a uma fórmula fechada do sistema formal, convertendo-se portanto num objeto para a sintaxe. Esta operação, realizada com base no lema da correspondência, tem um fundamento nitidamente semântico, pois envolve a associação entre sentenças aritméticas verdadeiras com fórmulas demonstráveis de uma teoria axiomática formal. O primeiro teorema de Gödel, desta forma, não corresponde a um metateorema estritamente sintático. Ladrière reconhece implicitamente este fato em um comentário sobre o papel do lema mencionado (ou 'lema de Gödel') na demonstração:

"El lema de Gödel asocia a los enunciados ciertos de esta teoria [aritmética recursiva] proposiciones derivables de LFG [sistema formal adotado por Gödel]. Sólo sobre la base de esta correspondencia pueden astudiarse las propiedades de la proposición $\mathfrak{J}*$ [fórmula indecidível G] en relación a la noción de derivabilidad y establecer el carácter indecidible de esta proposición. En cada parte de la demostración (...) se pasa, en virtud del lema, de la certeza de un determinado enunciado aritmético a la derivabilidad de una cierta proposición de LFG. Y así, se hace intervenir implícitamente la interpretación de la proposición $\mathfrak{J}*$, a saber: el enunciado que afirma la no-derivabilidad de $\mathfrak{J}*$." (Ladrière[22], p. 153)

Na realidade, não é propriamente a interpretação da fórmula G que é utilizada na demonstração, mas a de outra fórmula, conforme ana lisado anteriormente.

Na parte (B) da demonstração, também é possível detectar um componente semântico, na medida em que é empregado o lema da correspondência.

Segundo Teorema

O segundo teorema está diretamente relacionado ao primeiro. Na primeira parte deste teorema, ficou estabelecido, na versão sintática, que a fórmula G não será demonstrável no sistema se A for consistente. Esquematicamente, teríamos:

$$\mathrm{Con}_M \rightarrow G_M \qquad \text{(i)}$$

A versão aritmética para esta conclusão metateórica é:

$$\sim (\exists x)\ (\mathrm{Prov}(x)\ \&\ \mathrm{Prov}(\mathrm{Neg}(x))) \rightarrow (x) \sim \left(x\ \mathrm{P}\ \mathrm{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Nml}(p) \end{matrix}\right)\right)$$

Pode-se estabelecer facilmente que o antecedente nesta implicação possui a seguinte interpretação sintática:

"não existe uma fórmula tal que ela e sua negação sejam ambas demonstráveis (no sistema)",

que é uma das possíveis formulações para a consistência do sistema.

A versão aritmética será representada simplesmente como:

$$\mathrm{Con}_A \rightarrow G_A \qquad \text{(ii)}$$

Visto que a expressão (ii) pertence ao domínio da aritmética clássica, é perfeitamente possível a sua representação formal, que indicaremos simplesmente por:

$$\mathrm{Con} \rightarrow G \qquad \text{(iii)}$$

Retornando-se ao nível sintático, suponhamos, por absurdo, que a consistência de A pudesse ser estabelecida a partir de recursos dedutivos integralmente disponíveis no próprio sistema. Neste caso, o antecedente na implicação formal (iii) teria que ser demonstrável em A, em virtude de sua relação, via aritmetização, com a sentença metateórica 'Con_M'. Desta forma:

(1) $\vdash_{\underline{A}}$ Con (hipótese)

(2) $\vdash_{\underline{A}}$ Con $\rightarrow$ G (1º teorema incompletude)

(3) $\vdash_{\underline{A}}$ G ((1), (2), <u>modus ponens</u>)

Teríamos conseqüentemente um absurdo, na medida em que, segundo o 1º (meta)teorema, a fórmula G <u>não</u> é demonstrável em <u>A</u>. Desta forma, se o sistema for consistente, será necessário eliminar a hipótese acima, o que significa que a consistência do sistema <u>A</u> não pode ser estabelecida nele próprio.

Existe uma dificuldade em relação à representação aritmética da noção de consistência. Não há dúvida de que a sentença aritmética 'Con_A' seja uma formulação adequada para este conceito; contudo, ela certamente não corresponde à única válida. Por exemplo, a sentença

(Con'_A): $(\exists x)\ (y) \sim (y\ P\ x)$

que representa o enunciado metateórico

"existe uma fórmula não-demonstrável no sistema"

também pode representar a consistência, visto que será verdadeira se e somente se a teoria for consistente.

Há contudo artifícios que permitiriam a construção de fórmulas demonstráveis, supostamente aptas a representarem a consistência da teoria, gerando-se assim um fato contrário ào Segundo teorema. Tomemos por exemplo um novo predicado de prova P':

$$y\ P'\ x \leftrightarrow (y\ P\ x)\ \&\ \sim(y\ P\ k)$$

onde $k = g(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$.

Se a teoria for consistente, os dois predicados aritméticos $P(x,y)$ e $P'(x,y)$ poderão representar a noção sintática de prova. Tomemos, então, uma nova sentença aritmética capaz de exprimir a consistência:

(Con''_A): $\sim(\exists x)\ (x\ P\ k)$

Reformulada a partir do emprego do novo predicado de prova, esta sentença transforma-se em:

$$\sim(\exists x)\ (x\ P'\ k) \leftrightarrow \sim(\exists x)\ ((x\ P\ k)\ \&\ \sim(x\ P\ k))$$

que corresponde simplesmente a um teorema lógico, e, portanto, é demonstrável em A.[6] Sentenças desta espécie, construídas a partir do emprego de predicados de prova intencionalmente incorretos, precisam ser levadas em consideração em uma apresentação mais rigorosa do 2º teorema. Para isso, torna-se necessário incorporar ao enunciado deste teorema restrições adequadas que eliminem os resultados indesejáveis.[7]

O segundo teorema foi demonstrado apenas para a teoria formal A, mas poderia ser estendido, assim como o primeiro, a toda uma classe de sistemas formais. As condições mínimas a serem satisfeitas por um sistema de maneira que os teoremas sejam a ele aplicáveis são as seguintes:

(1) os conjuntos de números de Gödel dos símbolos, fórmulas, axiomas e regras de inferência do sistema devem ser recursivos;

(2) o conjunto de números de Gödel dos teoremas deve ser recursivamente enumerável;

(3) o sistema deve ser adequado para representar ao menos a aritmética primitiva recursiva.[8]

III

Conseqüências dos Teoremas de Incompletude

O quadro conceitual em que se travará a discussão a respeito da incompletude da aritmética formal está quase completo. Resta apenas expor os critérios que permitirão mantê-la no plano lógico-matemático, livre de referências a máquinas ou à mente.

Uma máquina (mais exatamente, um computador) corresponde a um dispositivo físico apto a executar um determinado conjunto de operações. Dada uma seqüência de informações, a máquina realiza sobre elas uma série de transformações, gerando uma solução ou afirmando a sua inexistência (considerando-se por enquanto apenas os processos que cheguem a um resultado após um intervalo de tempo finito). Se atribuirmos a este procedimento a denominação de <u>função</u>, então cada uma das funções calculáveis por uma máquina será rotulada como <u>efetivamente computável</u>. Podemos então introduzir uma primeira hipótese empírica, conhecida como tese de Turing, formulada em 1936. Segundo ela, o rótulo 'efetivamente computável' teria o mesmo significado de 'Turing-computável' [1]. Esta última expressão é aplicada a funções que possam ser calculadas por uma máquina de Turing.

Desta forma, a um objeto físico — o computador — fizemos corresponder um objeto matemático — a máquina de Turing — que serve hipoteticamente de modelo para toda e qualquer máquina real. Os objetos físicos em questão estão sujeitos a todas as limitações das máquinas de Turing, mais uma série de outras específicas.

Por outro lado, na caracterização das teorias formais, observa-se a presença da noção intuitiva de "procedimento efetivo". Na definição de sistema formal dada por Hatcher (ver p. 20), vários dos conjuntos envolvidos — de símbolos, de fórmulas bem-formadas, de regras, de axiomas — são 'efetivos' ou 'decidíveis'. Através do processo de aritmetização da metateoria, todos os símbolos e fórmulas da teoria são convertidos em números naturais. Assim, um conjunto 'efetivo' de números é aquele para o qual existe um procedimento (em termos matemáticos, um predicado) efetivo capaz de determinar seus elementos. A introdução de uma nova hipótese, a tese de Church, permitirá a representação rigorosa da noção de 'efetividade':

"In 1936 Alonzo Church proposed that we identify the intuitive notion of an effectively calculable function with the mathematically exact notion of a general recursive function and hence also the intuitive notion of an effectively decidable predicate with the mathematically exact notion of a general recursive predicate." (Delong[6], p.186)

Considerando-se que se pode provar matematicamente que o conjunto das funções recursivas coincide com o das funções Turing-computáveis, conclui-se que, por recurso às teses de Church e Turing, é possível associar a toda máquina um sistema formal que servirá de modelo teórico para ela. Esta hipótese pode ser melhor fundamentada a partir da constatação das analogias entre o computador e seu modelo; algumas observações a este respeito serão apresentadas posteriormente. O emprego das teses mencionadas, em síntese, permite relacionar as noções de 'calculabilidade efetiva' e de 'computabilidade efetiva' ao conceito matemático de 'recursividade'. Isto significa que as teses de Church e de Turing reduzem-se a uma só.

A tese de Church/Turing estabelece na realidade uma relação de cunho estritamente conceitual — entre um conceito intuitivo e outro matemático (formalizável). No estudo da relação entre máquinas e sistemas formais, contudo, é necessário recorrer-se também a uma hipótese empírica — a de que as funções efetivamente computáveis servem de modelo matemático para o desempenho de qualquer mecanismo concreto. Esta hipótese permanece normalmente subentendida nas discussões que buscam estabelecer esta relação.

A questão relativa à mente é mais complexa, pois envolve um maior número de suposições. Não existe consenso a respeito da aplicabilidade da tese de Church/Turing a todo e qualquer raciocínio matemático humano. Há dúvidas sobre a viabilidade de se reproduzir toda inferência matemática informal por meio de uma máquina de Turing. Não obstante, é possível afirmar que as atividades da mente, no domínio da matemática, se realizam no interior das teorias informais (ou que, pelo menos, são expressas através deste instrumento lingüístico):

"The result of the mathematicians activity is embodied in propositions, the asserted propositions or theorems of the given mathematical theory. We cannot hope to study in exact terms what is in the mathematician's mind, but we can contemplate the system of these propositions." (Kleene [18], p. 59)

Portanto, enquanto as máquinas podem ser representadas por sistemas formais, as deduções mentais integram o domínio das teorias informais. Embora seja unanimemente aceita a tese de que toda inferência (mecânica) possa ser realizada pela mente (numa teoria informal), a tese recíproca, conforme já assinalado, não conta com a mesma aceitação (ver discussão a respeito de adequação, p. 36). Teremos ainda de verificar se os teoremas de Gödel podem elucidar algum elemento neste tema.

Em suma, a partir das hipóteses explicitadas, é possível estender os resultados de Gödel para o nível físico: as limitações dos sistemas formais também seriam partilhadas pelas máquinas. Tendo-se em vista que estas hipóteses não serão aqui abordadas, nossa análise permanecerá restrita ao nível matemático. Como a maior parte dos trabalhos a respeito desta questão a enfoca sob o ponto de vista empírico (no confronto 'máquina X mente'), iremos, na medida do possível, reformulá-los de maneira a conservar suas conclusões e resultados no domínio formal. Limitaremos a discussão ao confronto entre os recursos dedutivos de sistemas formais e os de teorias informais.

Entre os defensores da tese de que os teoremas de incompletude estabeleceram uma distinção radical entre teorias formais e informais, do ponto de vista dedutivo, E. Nagel e J. Newman encontram-se certamente na relação dos precursores ou, ao menos, dos primeiros divulgadores. Através de uma argumentação clara e objetiva, eles destacaram alguns dos principais elementos envolvidos no problema.

O ponto de partida em sua análise é o fato de a sentença aritmética G_A estar associada à fórmula de Gödel (G). Na medida em que ela corresponde à interpretação de uma fórmula indecidível, não se pode determinar seu valor de verdade com uma prova construída a partir dos axiomas da aritmética. Existe, contudo, outro método que permitirá obter esta resposta:

"... although the formula G is undecidable if the axioms of the system are consistent, it can nevertheless be shown by <u>meta-mathematical</u> reasoning that G is true." (Nagel&Newman[29], p. 92-3)

A prova do 1º teorema de Gödel possui uma versão aritmética e outra sintática. Se tomarmos esta última versão, o resultado da primeira parte da demonstração será:

'se o sistema for consistente, a fórmula G não é demonstrável neste sistema' (1)

Portanto:

"... on the assumption that arithmetic is consistent, the meta-mathematical statement 'The formula '(x) ~Dem(x,sub(n,13,n))' is not demonstrable' has been proven true." (op.cit., p. 93)

Por intermédio do processo de aritmetização, as sentenças meta-teóricas foram representadas na aritmética informal. No caso acima, a sentença aritmética correspondente é, segundo a notação de Nagel e Newman:

$$(G_A) \qquad (x)\ \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$$

que está associada, no sistema formal, à fórmula G, como já foi assinalado.

Tendo-se em vista que:

"... meta-mathematical statementes have been mapped onto the arithmetical formalism in such a way that true meta-mathematical statements correspond to true arithmetical formulas " (op.cit.,p. 93)

podemos concluir que a sentença G_A é verdadeira, embora a fórmula fechada G seja indecidível na teoria formal.

Os autores observam a seguir que:

"It should be noted, however, that we have established an arithmetical truth, not by deducing it formally from the axioms of arithmetic, but by a meta-mathematical argument." (op.cit., p. 93)

Será basicamente a partir desta observação que eles analisarão as conseqüências dos teoremas de incompletude:

"It follows that an axiomatic approach to number theory, for example, cannot exhaust the domain of arithmetical truth. It follows, also, that what we understand by the process of mathematical proof does not coincide with the exploitation of a formalized axiomatic method." (op.cit., p. 98-9)

As provas matemáticas não se limitariam às provas formais justamente em virtude da possibilidade de recurso à metateoria:

"We have seen that mathematical propositions which cannot be estab - lished by formal deduction from a given set of axioms may, nevertheless, be established by "informal" metamathematical reasoning." (op.cit., p. 101)

A partir deste ponto, seguem-se conclusões que ultrapassam o nível lógico-matemático, atingindo o psicológico:

"As Gödel's own arguments show, no antecedent limits can be placed on the inventiveness of mathematicians in devising new rules of proof. Consequently, no final account can be given of the precise logical form of valid mathematical demonstrations." (op.cit., p. 99)

As conclusões são estendidas também ao nível físico:

"Gödel's conclusions bear on the question whether a calculating machine can be constructed that would match the human brain in mathematical intelligence. Today's calculating machines have a fixed set of directives built into them; these directives correspond to the fixed rules of inference of formalized axiomatic procedure. (...) ... the brain appears to embody a structure of rules of operation which is far more powerful than the structure of currently conceived artificial machines." (op.cit., p. 100-1)

Em suma:

"The theorem does indicate that the structure and power of the human mind are far more complex and subtle than any non-living machine yet envisaged." (op.cit., p. 101-2)

A observação de que ao maior potencial dedutivo de uma teoria informal (ou mente, no caso) poderia ser justificado simplesmente pela flexibilidade e mutabilidade do conjunto de regras de inferência está sujeita a críticas: em princípio, toda nova regra pode ser formalizada e acrescida ao sistema formal. Os autores, apesar de afirmarem peremptoriamente a superioridade das mentes sobre as máquinas, não parecem ter uma visão clara sobre como ela se traduz a nível dos processos dedutivos enquanto tais. Toda a sua argumentação na realidade só tem por fundamento os teoremas de incompletude e a crença de que a sentença G_A, que não pode ser provada formalmente a partir dos axiomas da aritmética, é verdadeira em virtude de um "argumento metamatemático". Entretanto, este juízo despertou fortes críticas, que colocaram em risco a validade de todo o conjunto das conclusões obtidas. A objeção mais relevante menciona o problema da consistência:

"Let T be a Turing machine which "represents" me in the sense that T enumerates proofs of just the mathematical statements I can prove. Then the argument is (...) that by using Gödel's technique I can discover a proposition that T cannot "prove", and moreover I can prove this proposition. This refutes the assumption that T "represents" me, hence "I am not a machine" (Turing machine). This fallacy is a misapplication of Gödel's theorem, pure and simple. Given an arbitrary machine T, all I can do is find a proposition U such that I can prove

(3) if T is consistent, U is true

where U is undecidable by T if T is in fact consistent. However, T can perfectly well "prove" (write down a proof of) (3) too! And the statement U, which T can't "prove" (assuming consistency), I can't prove either! (Unless I can prove T is consistent, which is unlikely if T is quite complicated)." (Putnam[31], p. 207)

Reformulando-se a crítica de Putnam em termos puramente lógico - matemáticos, obtém-se que o único resultado efetivamente derivável na metateoria é o enunciado (1), apresentado anteriormente. A consistência, portanto, emerge como o ponto mais sensível da discussão. A nível formal, ela não pode ser atestada (ao menos dentro do próprio sistema). Na metateoria informal, nada fica definido a este respeito pelos teoremas de incompletude — Nagel e Newman, contudo, não demonstraram preocupação com este fato e, por alguma razão, assumiram que a prova da consistência não é problemática; neste caso, por aplicação de modus ponens, eles puderam concluir que a sentença G_M ("a fórmula G não é demonstrável no sistema") é verdadeira, assim como a sentença aritmética G_A. Mas, como sugere Putnam, a consistência da aritmética está longe de ser uma questão trivial e de solução evidente. Conseqüentemente, a decisão de tomar G_A como verdadeira, na ausência de qualquer argumentação adicional, torna-se inaceitável.

Assim, nenhuma distinção ficou de fato estabelecida entre sistemas formais e metateorias, do ponto de vista das potencialidades dedutivas. O único enunciado metateórico efetivamente verdadeiro:

$$Con_M \rightarrow G_M$$

tem um correspondente a nível aritmético, que é

$$Con_A \rightarrow G_A$$

Ambos têm uma demonstração estruturalmente idêntica, representável no sistema formal, que corresponde à prova do 1º teorema de Gödel. Deve-se recordar que ele pode ser considerado como um teorema aritmético ou como metateorema.

Caso tivesse sido apresentada uma prova 'informal' para a consistência da aritmética, então certamente as conclusões dos autores sobre a existência de uma assimetria entre máquinas e mentes estariam melhor embasadas, na medida em que, em virtude do 2º teorema de incompletude, tal prova não poderia ser representada no sistema formal.

Nagel e Newman, numa réplica à crítica de Putnam, demonstram visualizar que a validade de suas conclusões depende inteiramente da possibilidade de se verificar a consistência:

"... Dr. Putnam's contention that if T cannot prove U neither can we, is sheer dogmatism, which is not mitigated by his qualification. For the qualification begs the point at issue, since it assumes that any conceivable proof we might devise for U (for example, by proving the consistency of T) must be one that can also be constructed by the (Turing) machine T. This assumption may be a part of Dr. Putnam's general outlook, though it is not clear whether he does not abandon it in apparently accepting (...) Gentzen's proof of the consistency of elementary number theory; but it is not the only tenable view, and we declined to commit ourselves to it as indisputable."
(Nagel&Newman[30], p. 211)

Deixando-se de lado o mérito de cada uma das partes nesta polêmica sobre a consistência, deve-se observar que a possibilidade e validade de uma prova realizada fora do sistema são questões em nada relacionadas aos teoremas de incompletude, que estabelecem apenas que tal prova não pode ser realizada no interior do próprio sistema.

J. R. Lucas: crença na consistência

A tese defendida por Nagel e Newman conta com outros adeptos, que conceberam uma série de novos argumentos em sua defesa. Entre eles, Lucas, num trabalho que em muitos pontos peca pela falta de clareza (Lucas [23]), expôs e dissecou alguns destes argumentos, enfatizando a impossibilidade de se contornar a limitação formal estabelecida por Gödel, e discutindo alguns pontos de vista relacionados com a questão da consistência.

Sua análise principia com a apresentação de uma prova semântica acerca da indemonstrabilidade da fórmula fechada G, que é reproduzida abaixo:

- toma-se uma fórmula que afirma: "esta fórmula é indemonstrável no sistema";
- supõe-se, por absurdo, que ela seja demonstrável em seu sistema;
- neste caso, a afirmação que ela faz de si própria é falsa;
- portanto, embora a fórmula seja demonstrável, existe uma interpretação que a torna falsa;
- se o sistema em questão for consistente, a situação descrita acima é absurda;
- logo, conservando-se a hipótese da consistência do sistema, será necessário descartar a suposição de que a fórmula G é demonstrável;
- portanto, a fórmula não é demonstrável, embora verdadeira em pelo menos uma de suas possíveis interpretações.

O argumento pode ser reformulado, tendo-se como ponto de partida a determinação do valor de verdade da interpretação dada à fórmula G:

- considera-se, por absurdo, que a interpretação "esta fórmula é indemonstrável no sistema" dada à fórmula em questão seja falsa;
- conseqüentemente, a negação desta sentença, que corresponde a "esta fórmula é demonstrável no sistema", será verdadeira;
- em virtude de tal sentença ser verdadeira, a fórmula será demonstrável no sistema;
- desta forma, embora demonstrável, existe uma interpretação que torna a fórmula falsa;
- supondo-se a consistência do sistema formal, é impossível a existência de uma fórmula demonstrável que não seja válida;
- portanto, assumindo-se por hipótese a consistência do sistema, conclui-se que a sentença é verdadeira.

Deve-se observar que esta prova, em suas duas versões, não é equivalente à de Gödel. Ela baseia-se estritamente em fatores semânticos: em primeiro lugar, a auto-referência da sentença que afirma a própria indemonstrabilidade (que corresponde à sentença metateórica G_M); além disso, a noção de verdade e suas propriedades ('a negação de uma sentença verdadeira é falsa') e o teorema de completude, em uma das suas versões ('uma teoria é consistente se e somente se tiver um modelo').

Pode-se observar também que esta prova semântica tem como um de seus resultados a mesma conclusão obtida através de 1º teorema de incompletude: a fórmula G não é demonstrável no sistema formal A, supondo-se a sua consistência. A diferença, naturalmente, é a de que Gödel obteve tal resultado empregando principalmente elementos sintáticos.

Exatamente por se limitar ao nível sintático, contudo, tal prova não pode ser utilizada isoladamente para a determinação do valor de verdade da interpretação da fórmula indecidível.

Embora não corresponda ao tema de nosso estudo, vamos considerar rapidamente as idéias de Lucas sobre a aplicabilidade dos resultados de Gödel às máquinas. Toda máquina, segundo ele, opera de acordo com um conjunto determinado de regras. Sua proposta é a de considerar não apenas os mecanismos deterministas, mas também os não-deterministas. Uma máquina determinista executa o mesmo procedimento sempre que o mesmo conjunto de dados lhe é apresentado. A mesma característica não é constatada em um mecanismo dotado de um dispositivo aleatório, que lhe permitiria 'escolher' qual função executar dentro de um conjunto pré-determinado e compatível com o sistema. A intenção de Lucas ao selecionar como objeto de análise tais mecanismos é provavelmente a de acatar a objeção dos mecanicistas[2] em relação aos sistemas deterministas, quando empregados na modelagem da mente: através de um dispositivo não-determinista, seria eventualmente possível explicar como, em mesmas situações, uma mente pode comportar-se de diferentes maneiras.

Com esta caracterização, que pretende abarcar a totalidade das máquinas, Lucas procura justificar a idéia de que os 'procedimentos dedutivos' mecânicos podem ser perfeitamente descritos por um sistema formal. Uma máquina, determinista ou não, dada a sua composição finita, só poderá executar um número finito de diferentes operações, que serão aplicadas a um número finito de informações iniciais. Não existe, contudo, restrição quanto ao número de repetições para cada uma das diferentes operações a serem executadas.

Desta forma, a analogia com um sistema formal é evidente: as operações corresponderiam às regras de dedução, e as informações iniciais, aos axiomas. A imposição de que oconjunto inicial de informações seja finito corresponde à exigência de que, numa demonstração, o número de etapas e, conseqüentemente, de axiomas nela empregados, também seja finito. Uma vez construído o sistema formal equivalente a uma determinada máquina, bastaria apresentar a sua fórmula de Gödel (está subentendido que nos interessamos aqui apenas pelas máquinas que possam ao menos representar a aritmética elementar). Por estas razões, os teoremas de Gödel estabeleceriam uma limitação das máquinas não partilhada pela mente.

Retornemos agora ao plano lógico-matemático. Diversas críticas podem ser dirigidas às conclusões de Lucas, e ele procura refutar boa parte delas. A primeira afirma que é possível contornar as limitações de um sistema formal a partir da apresentação de um novo sistema (essencialmente mais forte) em que a fórmula indecidível do anterior se torna demonstrável (ou refutável). Impondo-se, entretanto, a restrição de que a seqüência destes sistemas sucessivamente mais fortes seja finita, sempre será possível apresentar uma fórmula indecidível em todos eles, mas cujo valor de verdade poderia ser determinado a nível metateórico.

Outra alternativa para contornar a mesma limitação parte do argumento de que a fórmula de Gödel é construída através de um 'procedimento padrão', sendo passível de formalização. Segundo Lucas:
"We could construct a machine with the usual operations, and in addition an operation of going through the Gödel procedure, and then

producing the conclusion of that procedure as being true; and then repeating the procedure, and so on, as often as required. This would correspond to having a system with an additional rule of inference which allowed one to add, as a theorem, the Gödelian formula of the rest of the formal system, and then the Gödelian formula of this new, strengthened, formal system, and so on. It would be tantamount to adding to the original formal system an infinite sequence of axioms, each the Gödelian formula of the system hitherto obtained." (Lucas[23], p. 48)

No trecho citado, a falta de clareza é conseqüência sobretudo do fato de Lucas ter abordado simultaneamente três propostas distintas. A primeira corresponde à introdução no sistema de um procedimento que permita atribuir valor de verdade à fórmula de Gödel, conservando-a contudo indecidível; esta proposta será analisada mais adiante (ver p. 99). A segunda delas está relacionada com a introdução de uma nova regra de inferência no sistema, que permitiria a dedução da fórmula indecidível. A última proposta diz respeito simplesmente à introdução sucessiva das fórmulas de Gödel em seus respectivos sistemas, na condição de novos axiomas. Estas duas últimas sugestões podem ser descartadas pelo mesmo motivo: nenhuma delas impediria a aplicação do procedimento de Gödel, e em cada caso sempre seria possível a construção de uma nova fórmula indecidível.

Em relação à segunda proposta mencionada acima, cabe observar que o autor comete um equívoco ao afirmar que a adição de uma única regra de inferência permitiria demonstrar sucessivamente a fórmula de Gödel de cada novo sistema 'fortalecido'. Deve-se considerar que, uma vez introduzida tal regra, a noção de prova no sistema na realidade se modificará e passará a incorporá-la. A aplicação do procedimento de Gödel a este sistema gerará uma fórmula indecidível G', construída contudo a partir deste novo predicado de prova. Esta fórmula, quando interpretada na metateoria, terá o significado:

"A fórmula G' não é demonstrável na teoria (nem mesmo pela aplicação da nova regra de inferência)"

Desta forma, nenhuma nova regra poderia eliminar a limitação a que estão sujeitos todos os sistemas formais. Aliás, se essa regra existisse, não haveria sentido em se propor a aplicação do procedimento de Gödel para a geração de uma nova sentença indecidível.

Ainda em relação à primeira proposta para contornar a limitação dos sistemas formais — a construção de uma seqüência de sistemas sucessivamente mais fortes — Lucas analisa uma observação de Turing, segundo a qual o fato de se poder construir sempre um sistema mais forte que o anterior inviabiliza qualquer conclusão acerca da superioridade da mente sobre <u>todas</u> as máquinas (ou seja, para toda sentença cujo valor de verdade pode ser determinado na metateoria, existe uma fórmula que pode ser demonstrada em pelo menos algum sistema formal). Lucas enfatiza que sua proposta não é a criticada por Turing:

"What is at issue is not the unequal contest between one mind and all machines, but whether there could be any single machine that could do all a mind can do." (<u>op.cit.</u>, p. 50)

Neste caso, o argumento acerca da seqüência de sistemas formais sofre das limitações já assinaladas.

Outra objeção diz respeito à possibilidade de incorporação de um mecanismo de inferências não-dedutivas aos sistemas formais (ou máquinas), na tentativa de determinar o valor de verdade das sentenças indecidíveis. A realização de inferências desta natureza seria uma característica distintiva das metateorias informais que impediria a aplicação dos teoremas de incompletude de Gödel a elas (segundo Lucas). Uma forma de se incorporar um mecanismo de inferências não-dedutivas a um sistema formal seria a introdução de uma regra que permitisse acrescentar, entre os axiomas, uma fórmula ainda não provada (ou refutada): caso eventualmente se constatasse a inconsistência do novo sistema, ocorreria a substituição de tal fórmula por sua negação.

O comentário de Lucas neste caso diz respeito aos problemas decorrentes da aplicação deste método a fórmulas indecidíveis. Qualquer escolha em relação a uma fórmula indecidível — ela própria ou sua negação — jamais conduzirá a uma contradição. Segundo Lucas, a escolha da negação da fórmula de Gödel, embora não gere contradição, cria um sistema incompatível com a interpretação aritmética desta fórmula, que é considerada verdadeira. Assim, um teorema ($\sim G$) teria como interpretação uma sentença aritmética falsa ($\sim G_A$). Tal sistema não seria adequado para a representação da aritmética.

Outra opção para a eliminação das limitações de um sistema formal seria a construção de um sistema inconsistente, ao qual não se aplicariam os resultados de Gödel, visto que eles valem apenas para teorias formais consistentes. A tal sistema, seria adicionada uma regra que permitiria eliminar toda e qualquer contradição quando exibida através de uma demonstração: dado um par de fórmulas contraditórias, ambas demonstráveis, a nova regra permitiria, por exemplo, eliminar aquela de prova mais longa. O sistema permaneceria aparentemente consistente, não estando sujeito às limitações impostas pelos teoremas de Gödel.

Lucas observa que estes sistemas dificilmente poderiam ser tomados como uma representação adequada para as teorias matemáticas informais (ou para a mente). A aplicação do conjunto original de regras de inferência deixaria de ser uniforme: o uso de modus ponens, por exemplo, em certos casos seria aceitável, em outros não (quando estivesse em jogo a derivação de uma contradição). A ausência de uniformidade na aplicação destes princípios, que são julgados válidos a nível informal, representa um sinal de irracionalidade; qualquer representação para a mente (ou ao menos para seu desempenho lógico-matemático), entretanto, deve ser racional. Uma vez escolhidas as regras, todas as suas conseqüências devem ser acatadas; no caso de serem insatisfatórias, alguma espécie de revisão em relação a hipóteses ou regras será necessária.

A última crítica às teses de Lucas refere-se à questão da consistência. A constatação do valor de verdade da fórmula indecidível a nível metateórico é na realidade condicional: o único resultado que pode de fato ser estabelecido é o de que, se o sistema formal ao qual está incorporada tal fórmula for consistente, então sua interpretação na aritmética será verdadeira. Contudo, a determinação da consistência deste sistema é problemática. O 2º teorema de Gödel estabelece que a consistência não pode ser provada pelos recursos dedutivos disponíveis no próprio sistema. Esta situação estimula os mecanicistas a proclamarem a falência de qualquer tentativa de se refutar o mecani -

cismo a partir dos teoremas de incompletude. Na opinião de Lucas, a única alternativa é a inspeção do sistema em busca de contradições, método que nunca permitirá estabelecer de forma definitiva a sua consistência. Segundo ele:

"At best we can say that the machine is consistent, provided we are."
(op. cit., p. 52)

Esta frase não é acompanhada por nenhuma explicação. Provavelmente, ela pretende sugerir que a aritmética faz parte de um sistema maior, que consistiria na mente. Neste caso, a consistência do todo seria suficiente para garantir a consistência de um de seus 'subsistemas'.

É interessante observar que Lucas não se preocupou em discutir a possibilidade de exibição de uma prova formal de consistência construída num sistema mais forte — recorrendo-se, por exemplo, à indução transfinita ou à teoria dos conjuntos. Sua opção foi a de afirmar a existência de uma relação de dependência entre a consistência do sistema formal e a da mente (ou metateoria), opção aliás que encerra uma série de problemas que não foram abordados pelo autor.

Ao ser considerada a questão da consistência da mente, verifica-se em primeiro lugar a dificuldade para o seu estabelecimento. O segundo teorema de Gödel permite afirmar que, caso tomássemos a mente (ou metateoria) como um sistema formal, não seria possível que ela própria estabelecesse sua consistência (a menos que fosse na realidade inconsistente):

"A man's untutored reaction if his consistency is questioned is to affirm it vehemently: but this, in view of Gödel's second theorem, is taken by some philosophers as evidence of his actual inconsistency." (*op.cit.*, p. 52)

Por outro lado, também existem obstáculos impedindo que se conclua pela inconsistência da mente. Nossos juízos contraditórios corresponderiam antes a erros elimináveis do que sintomas de inconsistências internas:

"Our inconsistencies are mistakes rather than set policies. They correspond to the occasional malfunctioning of a machine, not its normal scheme of operations. Witness to this that we eschew inconsistencies when we recognize them for what they are." (*op.cit.*, p. 53)

As objeções de Lucas com respeito à eventual inviabilidade de constatação de consistência da mente e de sistemas formais são as seguintes:

(1) o 2º teorema de incompletude aplica-se apenas a sistemas formais, o que significa que, se a mente (ou o conjunto das teorias informais) não puder ser reduzida a um sistema desta natureza, a limitação estabelecida por tal teorema não se aplicaria a ela;

(2) embora a mente não possa assegurar formalmente sua consistência, existe a intenção de eliminar toda inconsistência, uma vez constatada; o mesmo princípio se aplica à aritmética e a qualquer teoria matemática informal, no caso de se detectar alguma contradição;

(3) a impossibilidade de se construir uma prova formal da consistência do sistema A em seu interior não exclui a possibilidade de uma prova informal fora dele.

A primeira objeção aparentemente não possui qualquer utilidade nesta polêmica, porque, de acordo com ela, é necessário supor o fracasso da tese mecanicista para que se viabilize a prova de consistência da metateoria nela própria. Entretanto, toda discussão sobre a consistência tem em vista derrubar esta tese. O argumento, portanto, envolve uma petição de princípio.

A objeção seguinte não fornece efetivamente qualquer solução à questão. As contradições detectadas na teoria dos conjuntos foram eliminadas, o que não impede absolutamente que outras venham a ser descobertas.

Em relação às provas informais mencionadas na terceira objeção, existem algumas observações problemáticas no texto:

"Such informal arguments will not be able to be completely formalized: but then the whole tenor of Gödel's results is that we ought not to ask, and cannot obtain, complete formalization." (op. cit., p. 56)

O autor parece não ter-se dado conta de que as provas informais normalmente podem ser formalizadas em sistemas mais fortes, de maneira que a conclusão mais apropriada a ser extraída dos trabalhos de Gödel seria a de que não se pode obter formalização completa por recurso a um único sistema consistente.

Em síntese, Lucas procurou, neste seu trabalho, rebater uma série de objeções à tese de que os teoremas de Gödel atestariam a existência de uma sentença indecidível apenas a nível formal. Há em primeiro lugar as objeções que tentam simplesmente eliminar a indecisibilidade (formal) da fórmula de Gödel. Finalmente, entra em questão a proposta de que a limitação se estenderia tanto a teorias formais (máquinas) quanto informais (mentes), envolvendo o problema da consistência. Embora para o primeiro grupo Lucas tenha oferecido algumas críticas relativamente coerentes, no caso da consistência seus comentários dificilmente poderiam eliminar o ceticismo dos mecanicistas. Na realidade, um dos aspectos mais relevantes nesta questão — as provas informais não-representáveis na aritmética clássica — deixou de receber a atenção necessária.

J. Webb: irrelevância da auto-referência

Entre as numerosas críticas dirigidas ao trabalho de Lucas, as formuladas por J. Webb (Webb[42]) têm a peculiaridade de expor outros supostos equívocos da tese antimecanicista, sem qualquer relação com o problema da verificação da consistência[3]. A proposta do autor é a de minimizar o impacto das provas semânticas que permitem estabelecer o valor de verdade da sentença indecidível na aritmética.

Webb reformula em primeiro lugar a demonstração dos teoremas de incompletude, empregando os sistemas de representação de Smullyan, que são baseados em métodos de Post. O emprego de tais sistemas confere à demonstração destes teoremas um caráter mais genérico: eles "permitem-nos estudar a representabilidade em sistemas de estruturas sintáticas altamente diversificadas" (Smullyan[36], p. 39).

Em linhas gerais, um sistema de representação Z é constituído pelo conjunto ordenado (E, S, T, R, P, Φ), onde:

E - conjunto enumerável de <u>expressões</u>;

S - conjunto de <u>sentenças</u>;

T - conjunto de <u>teoremas</u>;

R - conjunto de <u>sentenças refutáveis</u>;

P - conjunto de <u>predicados</u>;

$\Phi(X,n)$ - <u>função de representação</u>, onde $X \in E$ e $n \in \mathbb{N}$;

sujeitos às seguintes restrições:

(1) $S \subset E$;

(2) $T \subset S$;

(3) $R \subset S$;

(4) $\Phi(X,n) \in E$ / $H \in P \rightarrow \Phi(H,n) \in S$,

onde $n \in \mathbb{N}$.

Para completar a terminologia básica, há ainda mais algumas definições:

(1) $A \subset \mathbb{N}$ e $H \in P$

H representa A sse ($n \in A \leftrightarrow H(n) \in T$)

(2) $W \subset E$ e $X \in E$

W_o é o conjunto de números de Gödel, obtidos pela aplicação da função 'g', das expressões de W;

$X_o = g(X)$

(3) $A \subset \mathbb{N}$, $W \subset E$ e $X \in S$

X é uma sentença de Gödel para A sse ($X \in T \leftrightarrow X_o \in A$)

X é uma sentença de Gödel para W sse X é uma sentença de Gödel para W_o.

(4) $X_i \in P$ e $i \in \mathbb{N}$

$X_i(i)$ é uma expressão-diagonal sse $g(X_i) = i$

(5) $W \subset E$

W^* é o conjunto de expressões-diagonais de W, ou seja:

$i \in W^* \leftrightarrow i = g(X_i)$ & $X_i \in P$ & $X_i(i) \in W$

Falta enunciar um teorema que será empregado na demonstração da incompletude de uma certa classe de sistemas de representação:

Lema da Diagonalização - Seja $W \subset E$. Se W^* for representável em Z, então Hh será uma sentença de Gödel para W, onde:

. H representa W^*;

. $h = g(H)$.

Segundo a terminologia dos sistemas de representação, o primeiro teorema de incompletude adquire a seguinte formulação:

"Seja Z um sistema de representação. Se R^* for representável em Z, então Z é insaturado".

onde o termo 'insaturado' indica que o sistema não é simultaneamente completo e consistente.

A demonstração do teorema é esquematizada a seguir:

.$X \in R \leftrightarrow -X \in T$ — supondo-se que o sistema Z possua um símbolo para a negação ('$-$').

.R^* é representável em Z
$\exists H \in P \,/\, R^* = \{n \in \mathbb{N} \,/\, H(n) \in T\}$ — por hipótese

.Hh é uma sent. Gödel para R
$Hh \in T \leftrightarrow Hh \in R$ — segundo o lema da diagonalização, em que H é o predicado que representa o conjunto R^* e $h = g(H)$.

.se Z é consistente, Hh é indecidível em Z
$Hh \notin T \;\&\; Hh \notin R$

.$- Hh \notin T$ — segundo propriedade do símbolo de negação: $Hh \in T \leftrightarrow - Hh \in R$

A próxima preocupação do autor é determinar o valor de verdade da sentença indecidível 'Hh'. Segundo ele:

"... Hh expresses the proposition that $h \notin R^*$, i.e. $X_h(h) \notin R$, which is simply Hh $\in$ R. Hence Hh expresses a falsehood, and so on the <u>intended meaning</u> of the symbol ' $-$ ' $-$ Hh expresses a truth which is unprovable in Z." (Webb[42], p. 161-2)

É interessante verificarmos mais detidamente se a afirmação que abre a citação é correta. O predicado H representa o conjunto R^*, e isso significa que

$$R^* = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ H(n) \in T \}$$

Além disso, R^* é, por definição, o conjunto

$$R^* = \{ i \in \mathbb{N} \ / \ X_i(i) \in R \}$$

em que R é o conjunto de expressões refutáveis de Z, e $i = g(X_i)$.

Desta forma:

$$\underset{}{H(h) \in T} \quad \underset{\substack{\text{def.}\\ \text{representa-}\\ \text{bilidade}}}{\longleftrightarrow} \quad h \in R^* \quad \underset{\substack{\text{def.}\\ \text{conj. expr.}\\ \text{diagonais}}}{\longleftrightarrow} \quad X_h(h) \in R \quad \underset{\substack{h = g(X_h) =\\ = g(H)}}{\longleftrightarrow} \quad H(h) \in R$$

Esta exposição simplesmente reproduz a prova já apresentada para a indecisibilidade de Hh. Porém, ela serve para ilustrar que a ligação sugerida por Webb — de que Hh "expressa" a proposição '$h \in R^*$' — não pode ser determinada a nível sintático, sendo possível estabelecer apenas a conexão indicada.

Não se sabe, portanto, quais foram os critérios que permitiram estabelecer a associação mencionada. Na medida em que todas as expressões acima pertencem a um sistema formal, a determinação de valores de verdade exige a apresentação de uma interpretação para a teoria e, conseqüentemente, para suas expressões. Tal interpretação, contudo, não foi explicitada.

Prosseguindo em sua análise acerca da sentença Hh, Webb afirma que, por outro lado, existem argumentos que permitem concluir que ela é verdadeira, ao contrário do que pretensamente se estabeleceu acima. Seu ponto de partida mais uma vez é a suposição de que Hh expressa a proposição 'Hh ∈ R', ou seja, que ela afirma a própria indemonstrabilidade. Segundo ele, Hh será verdadeira quando interpretarmos R como o conjunto de todas as sentenças indemonstráveis de Z — o que nem sempre ocorre, tendo-se em vista que nem toda sentença indemonstrável de Z é necessariamente refutável. Aparentemente, contudo, não há razão para que se faça esta exigência acerca de R, na medida em que, mesmo que não abarque a totalidade das fórmulas indemonstráveis, a sentença Hh conservaria esta característica (pelo simples fato de pertencer a R), além da sua auto-referência, o que permitiria determinar seu valor de verdade. A maior dificuldade, contudo, permanece sem solução, pois não ficou esclarecido como se atribuiu esta interpretação à fórmula indecidível.

Tentando justificar a situação aparentemente paradoxal acerca do valor de verdade da sentença indecidível, Webb afirma:

"This situation illustrates another general metatheorem: if a sentence X is undecidable in a system Z, then there are two models M and M' such that X is true in M and false in M'. Thus when we say that we can see the truth of an Hh which a machine cannot, this means nothing more than our choosing which model M we had in mind when we constructed Z. Usually this will be done by truth-definitions in the manner of Tarski and may involve some non-constructive set-theoretic notions, e.g. the notion of an <u>arbitrary</u> infinite set of numbers." (op.cit., p. 162-3)

A existência de modelos não-isomórficos ao standard, nos quais uma fórmula indecidível assume valores de verdade distintos, não minimiza o fato de que a aritmética clássica constitui o 'modelo' (ou teoria informal, mais precisamente) em que estamos efetivamente interessados. O fato relevante, neste caso, é simplesmente o de que, a nível formal, não é possível demonstrar uma fórmula que está associada a uma sentença verdadeira neste particular modelo de nosso interesse. A existência (ao menos em princípio) de um procedimento metateórico que permita determinar o valor de verdade desta particular sentença indecidível constitui em si mesmo um fato que atesta a existência de uma assimetria entre os níveis formal e informal.

Numa longa nota introduzida na parte final do parágrafo citado acima, o autor aparentemente procura reduzir o efeito de suas próprias observações sobre a não-categoricidade da teoria, através de comentários sobre a possibilidade de construção de modelos standard a nível sintático para a aritmética de Peano, e sobre a dificuldade em se estabelecer uma relação entre atividade mental e métodos não-recursivos. Sua intenção parece ser a de remover o impacto das provas semânticas (como por exemplo a apresentada na p. 76), que poderiam estabelecer uma eventual 'superioridade' da atividade mental. Independentemente dos recursos dedutivos empregados na verificação do valor de verdade de G_A, é necessário considerar que todas as provas envolvem, em primeiro lugar, a verificação da consistência da aritmética (formal). Se existem dúvidas sobre a possibilidade de ela ser estabelecida fora da aritmética, há ao menos a certeza de que não se pode prová la no interior da própria teoria. Desta forma, mesmo que alguns elementos da teoria dos modelos possam ser utilizados na sintaxe, sempre restará uma prova que não poderá ser formalizada no sistema.

A próxima crítica elaborada por Webb refere-se ao caráter auto-referente da fórmula de Gödel. De acordo com ele, a auto-referência, neste caso:

"... is not any intrinsic property of the Gödel sentence, but is relative to the Gödel-numbering" (op.cit., p. 163).

Ele sustenta então que o valor de verdade de uma sentença aritmética não pode depender da escolha de uma particular função 'g' que atribua números de Gödel aos termos e símbolos do sistema formal. Em outras palavras, a indemonstrabilidade da fórmula de Gödel e a verdade da sentença aritmética correspondente não seriam afetadas por qualquer mudança na escolha de 'g': tal mudança teria efeitos perceptíveis apenas na metamatemática.

Será interessante retomar a versão aritmética da fórmula indecidível. De acordo com a notação adotada na parte II deste trabalho, ela é a seguinte:

$$(G_A) \qquad (x) \sim \left(x \text{ P Sb} \left(p \begin{array}{c} 19 \\ \text{Nml}(p) \end{array} \right) \right)$$

tal que

$$p = 17 \text{ Gen } q$$
$$q = g \left(\ulcorner \sim \left(x \text{ P Sb} \left(y \begin{array}{c} 19 \\ \text{Nml}(y) \end{array} \right) \right) \urcorner \right)$$

Embora q seja um número natural obtido por intermédio da função g, Webb sugere que a forma de determiná-lo não afetará o valor de verdade da sentença aritmética G_A. Na realidade, caso for escolhida ou -

tra função g', a sentença de Gödel original permanecerá a mesma do ponto de vista aritmético, na medida em que ela é constituída por funções e predicados recursivos. A única conseqüência seria a impossibilidade de atribuir o mesmo significado metamatemático a ela. Um fato importante, contudo, é o de que, para toda fórmula indecidível associada a uma sentença aritmética desta espécie, é possível determinar uma função g que corresponda a uma função de numeração de Gödel (através de um processo inverso ao da aritmetização).

Apesar de o valor de verdade da sentença aritmética G_A não ser alterado por qualquer mudança na escolha de g, uma forma efetiva de determiná-lo (além da indemonstrabilidade da fórmula correspondente) é o estabelecimento da função de Gödel que seja aplicável a ela, permitindo gerar uma sentença sintática auto-referente. Deve-se enfatizar que este processo é construtivo, e pode ser aplicado a qualquer sentença aritmética: caso ele permitir a exibição de uma função de Gödel, a sentença será verdadeira; em caso contrário, nenhuma conclusão poderá ser tirada a respeito do seu valor de verdade. Em particular, este método não permitirá detectar fórmulas de Gödel geradas a partir de predicados de prova não-<u>standard</u>.

Por todos estes motivos, é curioso ler que "a decisão final acerca do seu valor de verdade não tem qualquer ligação com a reflexividade relativa sob uma dada numeração" (<u>op.cit.</u>, p. 164). Naturalmente, pode-se supor que este processo não seja o único que permita estabelecer a decisão, mas ele determina uma condição suficiente para ela. Assim, não parece possível afirmar que ele não tenha qualquer relação com o processo de determinação do valor de verdade[4].

Webb mais adiante reelabora suas observações:

"The Hh we discover will, of course, depend on the g chosen, but obviously Hh will not suddenly become decidable in Z if we take up another Gödel-numbering in search of other undecidable sentences. Moreover, we have no general method for finding all of them, since the set of undecidable sentences is not r.e." (op.cit., p. 165)

Já foi observado que cada função de numeração de Gödel específica permite a construção de uma nova fórmula indecidível. A questão mais relevante não é a dependência da indecisibilidade de uma fórmula em relação a uma específica função escolhida, mas a maneira pela qual se pode determinar se uma dada fórmula é ou não decidível. Para um tipo particular de fórmula, estas funções permitem a determinação de um procedimento (incorporado à própria prova de Gödel) capaz de detectar a indecisibilidade. É necessário esclarecer se existe outro método 'efetivo' para detectar, no caso das sentenças de Gödel, esta propriedade metamatemática.

O autor volta a analisar especificamente o valor de verdade da sentença aritmética G_A, reafirmando que seu valor de verdade não se modificará no caso de se escolher uma nova função de numeração de Gödel:

"If g is a prime-factor numbering, then (x) A(x) expresses the proposition that no natural number can be factored in a certain way. This is true, but its truth has nothing whatsoever to do with our having discovered (x) A(x) by means of the diagonal argument" (op. cit., p. 166)

Novamente cabe indagar: através de que maneira se pode determinar que esta sentença é verdadeira? A solução seria a seguinte: "However, abbreviating $-P(x,s(h,h))$ by $A(x)$, we have a predicate $A(x)$ such that each of $A(1)$, $A(2),\ldots,A(k)$ are provable in Z (if Z is consistent). The truth of $(x)\ A(x)$ is argued from the intended interpretation of Z, in which the variable x in $A(x)$ takes only the (signs for) natural numbers as values" (op.cit., p. 165)

Devemos verificar, em primeiro lugar, se existe de fato a prova de que cada instância do predicado $A(x)$ é demonstrável. No decorrer da demonstração do 1º teorema de incompletude, obtém-se que a fórmula de Gödel não é demonstrável, caso o sistema for consistente. Empregando-se o dispositivo de aritmetização, este argumento pode ser reformulado em termos estritamente aritméticos. Assim, a sentença

$$(x) \sim \left(x\ P\ Sb\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right)\right)$$

será verdadeira. Portanto, cada instância do predicado

$$A(x) = \sim \left(x\ P\ Sb\left(p \begin{matrix} 19 \\ Nml(p) \end{matrix} \right)\right)$$

também será verdadeira. Como se trata de um predicado recursivo primitivo, é possível afirmar que, para cada uma de suas instâncias, existe uma fórmula demonstrável no sistema formal, embora não se possa provar a sentença original (contendo quantificador universal). Conseqüentemente, a situação não é a descrita por Webb. '$(x)\ A(x)$' expressa na realidade que "nenhum número natural pode ser decomposto de uma certa maneira". Ele sugere que este fato aritmético pode ser determinado a partir da constatação de que cada sentença $A(1)$,$A(2)$,... é demonstrável. A situação, na realidade, é exatamente oposta: a verdade de cada instância é determinada apenas na medida em que se estabelece que (x) A(x) é uma sentença aritmética verdadeira, apesar da indemonstrabilidade da fórmula a ela associada.

No caso de o sistema formal ser inconsistente, entretanto, seria possível afirmar que todas as instâncias de A(x) seriam demonstráveis independentemente do valor de verdade de (x) A(x), em virtude da própria inconsistência. Neste caso, contudo, a sentença aritmética '(x) A(x)' seria falsa, na medida em que G seria demonstrável. Portanto, não haveria sentido em se tentar derivar o valor de verdade de '(x) A(x)' a partir da demonstrabilidade de A(1), A(2),...

Desta forma, foram apresentadas três críticas aos procedimentos metateóricos que permitem a determinação do valor de verdade da sentença de Gödel: em primeiro lugar, a existência de modelos não-_standard_ em que os valores de verdade desta sentença são distintos; a seguir, a dependência das provas metateóricas em relação à auto-referência; finalmente, a suposição de que a prova metateórica emprega um artifício perfeitamente representável na esfera formal. Todas estas críticas mostraram-se equivocadas. Supondo-se resolvida a questão da consistência, a prova metateórica permanece válida, apesar da sua relação com a auto-referência, e irreprodutível no próprio sistema formal, em virtude do 2º teorema de incompletude.

D. Jacquette: formalização da prova semântica

Uma das críticas dirigidas aos antimecanicistas faz menção ao fato de que a fórmula de Gödel é construída a partir de um procedimento padrão (ver p. 53). Desta forma, se tal procedimento puder ser formalizado, estaria estabelecido um critério para o reconhecimento destas fórmulas e, em seguida, a determinação, em virtude de uma convenção, do seu valor de verdade a nível formal. D. Jacquette analisa esta crítica, propondo-se a refutá-la.

O autor retoma a prova semântica da sentença metateórica G_M: por afirmar a própria indemonstrabilidadem tal sentença não pode ser falsa, sob o risco de que se tenha uma teoria inconsistente (porque um teorema estaria associado a uma sentença falsa). Desta forma:

"In order to avoid inconsistency and the consequent triviality of deductive inference, it is generally admitted that first-order logic with arithmetic is formally incomplete. The Gödel sentence is judge true, and its negation false" (Jacquette[17], p. 3).

Se considerarmos aceitável pressupor a consistência da aritmética, pode-se concluir que, embora a fórmula G não seja demonstrável na teoria formal A, sua interpretação na aritmética (G_A) é verdadeira, assim como sua 'interpretação' a nível metamatemático G_M (via aritmetização da metateoria).

O procedimento semântico empregado para atribuir valor de verdade à sentença indecidível pode ser sintetizado em uma regra, que o autor denomina "procedimento (P)" :

"(P) If S says that S is unprovable, then answer (print): 'S is true'" (op.cit., p. 5)

Ou seja, dada uma sentença qualquer, bastaria determinar se ela é auto-referente e se afirma a própria indemonstrabilidade: seu valor de verdade seria determinado como conseqüência imediata deste fato[5].

O autor empenha-se a seguir em verificar se tal procedimento pode ser reproduzido a nível formal. Segundo ele:

"... the mind is able nonmechanically to implement (P) because it understands the meaning of Gödel sentences and their negations, and can use this semantic information to decide when a sentence S says of itself that it is unprovable" (op.cit., p. 6).

O problema, contudo, é o de que sem uma prova para a consistência do sistema, não é legítimo concluir que a sentença aritmética seja verdadeira: a suposição pura e simples da consistência não é aceitável. Nenhuma das provas existentes para ela pode ser formalizada no sistema A. Desta forma, conforme já foi comentado, embora a possibilidade de se estabelecer efetivamente o valor de verdade de G_A na metateoria esteja sujeita a controvérsias, não existe qualquer dúvida de que tal 'prova' não poderia ser reproduzida no próprio sistema (supondo-se que ele seja de fato consistente). Em vista desta impossibilidade, não se poderia tampouco determinar o valor de verdade da sentença indecidível em A. Portanto, mesmo que se formalize o procedimento (P), não se estará acrescentando qualquer novo elemento à discussão sobre provas formais e matateóricas.

O único mérito da tentativa de Jacquette em reproduzir o "procedimento (P)" a nível formal será o de verificar se existe uma maneira de se diagnosticar no sistema todas as sentenças de Gödel — ou seja, aquelas que afirmam sua própria indemonstrabilidade. Em suma, não existe maneira de se formalizar integralmente em A o argumento meta-teórico que estabelece o valor de verdade da sentença indecidível. O reconhecimento destas sentenças auto-referentes constitui a primeira etapa do procedimento (P), e também a única que talvez possa ser representada no sistema.

À primeira vista, a tarefa de verificar se um sistema formal pode reconhecer uma fórmula de Gödel parece supérflua, na medida em que a própria construção da fórmula fechada G obedece a um procedimento padrão perfeitamente formalizável. Existem contudo algumas dificuldades que merecem ser analisadas.

A primeira regra formal considerada por Jacquette para a representação de (P) leva em conta o fato de que a sentença indecidível — '$\sim$ Thm(n)', segundo sua notação, que será equivalente a

$$(x) \sim \left(x \text{ P } \underbrace{\text{Sb}\left(p \begin{matrix} 19 \\ \text{Nml}(p) \end{matrix} \right)}_{n} \right)$$

— tem um correspondente formal cujo número de Gödel é o próprio valor numérico do argumento:

$$g(\ulcorner \sim\text{Thm}(n) \urcorner) = n \qquad \text{(i)}$$

Restaria, então, instruir a máquina a, uma vez reconhecida a sentença $\ulcorner \sim\text{Thm}(n) \urcorner$ (que expressa a nível metamatemático a indemonstrabilidade da fórmula de número de Gödel 'n') e verificada a condição (i), identificá-la como umaa sentença de Gödel.

Jacquette afirma que esta argumentação está equivocada:

"This makes the unprovability predication too specific. (...) The problem is that the interrogator might choose predicates other than '~Thm' to represent unprovability, which would then need to be invalidly substituted in at least some referentially opaque nonextensional contexts" (op.cit., p. 6).

A sentença aritmética '~Thm(n)', segundo ele, pode receber outra interpretação metamatemática, como por exemplo:

"a fórmula de número de Gödel 'n' é demonstrável na teoria".

Assim, a expressão (i) passaria a significar:

"a fórmula ⌜~Thm(n)⌝ expressa sua própria demonstrabilidade".

Essa sentença aritmética, dada sua interpretação metamatemática, poderia ser tanto verdadeira quanto falsa (supondo-se que o sistema seja consistente). O sistema (ou a máquina) estaria instruído a classificá-la automaticamente como uma sentença de Gödel, cometendo portanto um erro.

Uma questão não esclarecida satisfatoriamente no texto é a de como se poderia realizar esta nova interpretação. Segundo o autor:

"Gödel sentences can be formulated without negation by means of a primitive unprovability predicate, such as 'Nthm' or even 'Thm'." (op.cit., p. 6)

Na aritmética informal, poderíamos certamente introduzir um nome específico para o conceito de indemonstrabilidade:

$$Nthm(x) \leftrightarrow \sim(\exists y)\ (y\ P\ x)$$

Ou poderíamos simplesmente atribuir ao predicado 'Thm(x)' um novo significado:

$$Thm(x) \leftrightarrow \sim(\exists y)\ (y\ P\ x)$$

Na aritmética, portanto, parece evidente a possibilidade de representação da noção sintática de indemonstrabilidade por meio de um predicado "primitivo". A questão, contudo, não se limita ao nível aritmético, porque nosso interesse é o de formalizar o procedimento metateórico (P): as sentenças aritméticas servem apenas como conexão entre a metateoria e a teoria formal. Na realidade, pode-se provar que:

$$g(\ulcorner Nthm(n)\urcorner) = g(\ulcorner \sim Thm(n)\urcorner),$$

porque ambos predicados aritméticos são representados por uma mesma fórmula. A sugestão de Jacquette sobre a possibilidade de se interpretar a fórmula construída para representar o conceito de demonstrabilidade como a negação deste condeito não parece exeqüível. A definição de indemonstrabilidade só pode ser estabelecida comocomplementar à de demonstrabilidade, exigindo o emprego da negação: a noção de prova formal envolve a construção de uma seqüência de fórmulas que satisfaça certas condições estabelecidas no sistema, e a noção de indemonstrabilidade simplesmente nega a possibilidade de se apresentar uma prova para uma determinada fórmula — por esta razão, ela só pode ser definida em função desta relação específica. A crítica formulada pelo autor contra a primeira proposta de formalização para (P) é, portanto, insustentável.

A segunda proposta analisada (e também refutada) pelo autor é praticamente idêntica à primeira, a menos pelo fato de se introduzir explicitamente um princípio de substituição extensional. Há duas regras envolvidas:

"(G) If $g(\ulcorner \sim Thm(n)\urcorner) = n$, then $\sim Thm(n)$ says that $\sim Thm(n)$ is $\sim Thm$.

(E) If $T_1 = T_2$ and $(\ldots T_1 \ldots)$, then $(\ldots T_2 \ldots)$."
(op.cit., p. 7-8)

É necessário verificar se a regra (E) constitui de fato um 'novo' elemento em relação à primeira proposta já analisada. Devemos, em primeiro lugar, apresentá-la numa versão mais precisa:

(E) $(((x)\ (P_1(x) \leftrightarrow P_2(x))\ \&\ P_1(n)) \rightarrow P_2(n)$

Como se pode notar, a 'nova' regra corresponde simplesmente a um metateorema do cálculo de predicados de primeira ordem. Considerando-se que a máquina a que se refere Jacquette está associada a um sistema suficientemente forte para representar a aritmética de Peano (conforme afirma o autor na p. 7), a regra (E) já faz parte dela: não há sentido em se propor a sua adição a este sistema. Conseqüentemente, a segunda tentativa mostra-se equivalente à primeira. As críticas de Jacquette, neste caso, sofrem das mesmas limitações diagnosticadas anteriormente.

O terceiro e último critério proposto faz uso de uma metavariável:

"(G') For any (metatheoretical) property Φ, if $g(\ulcorner \Phi(n) \urcorner) = n$, then $\Phi(n)$ says that $\Phi(n)$ is Φ. " (op.cit., p. 9)

O primeiro comentário que se poderia apresentar neste caso é o de que, no sistema, não há qualquer método para determinar o significado metamatemático do predicado que é instanciado na metavariável $\Phi(x)$. Deve-se recordar que nem toda sentença que satisfaz a condição

$$g(\ulcorner \Phi(n) \urcorner) = n \qquad \text{(ii)}$$

é uma sentença de Gödel. O sistema passaria a depender de uma informação adicional — o significado metamatemático do predicado $\Phi(x)$ —

para poder determinar se estamos diante de uma sentença de Gödel ou não. Esta dependência — inexistente no procedimento (G), apesar de afirmações em contrário do autor — torna o critério (G') inadequado para o reconhecimento de sentenças que afirmem a própria indemonstrabilidade.

O autor tampouco concorda que o critério (G') possa reproduzir o procedimento (P), mas por razões distintas das expostas acima:

"But the generality of (G') is unjustifiably obtained only by permitting invalid substitutions or instantiations of unprovability predicates in the referentially opaque intensional Gödel number quotation context ' $\bar{\Phi}(n)$ '." (op.cit., p. 9)

Esta observação é seguida por um comentário que procura torná-la menos obscura:

"Gödel arithmetization must provide a unique syntax-item-by-syntax-item numerical coding of every formal symbolization in its domain. Gödel number contexts are irreducibly intensional because $g(\ulcorner p \urcorner) \neq g(\ulcorner q \urcorner)$ where 'p' $\neq$ 'q', even if $p \equiv q$. The Gödel number of $\ulcorner p \rightarrow p \urcorner$ is obviously not identical in the same Gödel numbering system to the Gödel number of $\ulcorner p \vee \sim p \urcorner$, despite the logical equivalence $(p \rightarrow p) \equiv (p \vee \sim p)$." (op.cit., p. 9)

O exemplo utilizado para ilustrar a intencionalidade "irredutível" do processo de atribuição de números de Gödel não foi apropriado. Jacquette mais uma vez parece ter ignorado a distinção existente entre sistema formal e teoria informal. No caso em questão, a sentença '$p \vee \sim p$' corresponde simplesmente a uma abreviação (pertencente portanto ao nível metalingüístico ou ao informal) para '$p \rightarrow p$', de manei ra que

$$g(\ulcorner p \rightarrow p \urcorner) = g(\ulcorner p \vee \sim p \urcorner),$$

porque a representação formal de ambas sentenças é a mesma. Um exemplo mais feliz poderia ser construído pelo emprego reiterado do símbolo lógico ' ~ ':

$\sim Thm(n) \leftrightarrow \sim\sim\sim Thm(n)$, mas $g(\ulcorner \sim Thm(n) \urcorner) \neq g(\ulcorner \sim\sim\sim Thm(n) \urcorner)$.

Este exemplo também poderia ser utilizado como uma objeção relevante em relação ao critério (G). De uma maneira geral, dado um predicado P(x) tal que

$$\sim Thm(x) \leftrightarrow \sim P(x)$$

mas com a característica adicional de que

$$g(\ulcorner \sim Thm(n) \urcorner) \neq g(\ulcorner \sim P(n) \urcorner),$$

estaremos diante de uma situação em que, embora as duas sentenças tenham a mesma interpretação metateórica (porque são logicamente equivalentes), nenhum dos critérios permitiria o reconhecimento de $\ulcorner \sim P(n) \urcorner$ como uma fórmula de Gödel.

Desta forma, (G) e (G') estariam limitados em função do caráter intencional da numeração de Gödel. Jacquette observa que:

"Principle (G) is too specific, and principle (G') achieves generality only by requiring invalid intersubstitutions of extensionally codesignative unprovability predicates in referentially opaque Gödel number quotation contexts." (op.cit., p. 9-10)

Não há aparentemente razão para se afirmar que o critério (G') requeira "intersubstituições inválidas", pois a condição (ii) impede até mesmo que sentenças coextensivas a '~Thm(n)' sejam reconhecidas como auto-referentes.

Resta contudo determinar se os contextos de números de Gödel são de fato "irredutivelmente" intencionais. Seria necessário verificar a possibilidade de construção de uma função de atribuição de números de Gödel que, ao invés de identificar fórmulas específicas, apontasse conjuntos de fórmulas logicamente equivalentes. Ou seja, seria necessário definir uma relação de equivalência R no conjunto de todas as fórmulas da teoria, de maneira que

$$R(F_1,F_2) \leftrightarrow (F_1 \leftrightarrow F_2).$$

Se esta relação for recursiva, será possível definir uma nova função g' que atribuirá diferentes números de Gödel apenas a classes de equivalência distintas. Uma resposta conclusiva a respeito da possibilidade de formalização (em A) de um critério para reconhecimento de sentenças de Gödel exigiria em primeiro lugar a solução de todas estas outras questões.

Consistência da Aritmética

Todas as análises acerca das conseqüências dos teoremas de incompletude convergem para a questão da consistência. Será conveniente, desta forma, apresentar seus elementos mais importantes, destacando-se principalmente os relacionados ao caso da aritmética.

Em decorrência do segundo teorema, é impossível provar a consistência de um sistema (efetivamente consistente) nele próprio. No caso da aritmética clássica, tal resultado aplica-se tanto às provas internas quanto às absolutas; em cada um dos casos, contudo, os efeitos deste teorema são distintos.

Uma prova interna de consistência é aquela que pode ser representada no próprio sistema a que se refere, envolvendo, portanto, apenas os recursos dedutivos nele disponíveis. Provas desta natureza na realidade não possuem qualquer valor informativo sobre o sistema, visto que, se ele for inconsistente, todas as suas fórmulas serão demonstráveis, inclusive as que expressam sua consistência[6]. Paradoxalmente, portanto, mesmo que se possa obter uma prova interna para uma dada teoria, ela não teria valor na verificação desta propriedade sintática. Diante deste fato, que é uma decorrência do próprio conceito de consistência e da lógica clássica, o segundo teorema de incompletude tem seu significado fortemente reduzido: a inexistência matematicamente comprovada de uma prova interna torna-se uma informação secundária diante da certeza prévia de que, mesmo que existisse, ela seria irrelevante.

A noção de prova absoluta de consistência foi primeiramente formulada por Hilbert, e baseia-se no emprego de 'métodos finitários'. Se aceitarmos que estes métodos sejam aqueles estritamente disponíveis na aritmética recursiva, toda prova absoluta será conseqüentemente representável nesta teoria intuitiva. O adjetivo "absoluto" indica que não seria possível (nem necessário) justificar (ou fundamentar) os princípios empregados na demonstração. Por trás desta idéia, existe a convicção de que a aritmética recursiva constitui uma teoria cuja coerência não está sujeita a dúvidas, representando o ponto de partida para outras considerações de natureza teórica[7]. Uma verificação absoluta não estaria, portanto, sujeita às restrições apontadas no caso das demonstrações internas. Deve-se observar que, para a aritmética, toda prova absoluta também é interna, embora de um tipo particular. Desta forma, as provas internas "irrelevantes" são as que não recorrem apenas aos métodos finitários. O segundo teorema de Gödel só adquire relevância ao ser interpretado como indicador da inexistência de uma prova absoluta de consistência para a aritmética[8].

Em relação à possibilidade de se formular uma demonstração fora da teoria, não há em princípio obstáculos de ordem lógico-matemática, a não ser a restrição de que ela terá de ser construída em sistemas estritamente mais fortes (do ponto de vista dedutivo). Uma das soluções conhecidas foi elaborada por G. Gentzen, através do emprego da denominada 'indução transfinita'. Segundo este princípio, dada uma propriedade P e um conjunto bem-ordenado X, caso forem verificadas as condições:

(i) $P(x_0)$, onde x_0 é o primeiro elemento de X;

(ii) $(y)\ (\ ((x)_{x<y}\ P(x)) \rightarrow P(y)\ ),$

então todo elemento de X possuirá a propriedade P. A indução transfinita costuma ser identificada em função do ordinal do conjunto ao qual é aplicada; no caso específico da demonstração de Gentzen, utiliza-se a indução até ε_0. Pode-se mostrar que tal prova não pode ser representada na aritmética clássica, fato que não causa surpresa em virtude da impossibilidade das verificações internas de consistência.

Existem também as demonstrações de natureza semântica, como por exemplo a que recorre à teoria dos modelos. De acordo com o teorema de completude, toda teoria formal será consistente se e somente se tiver um modelo. Há sugestões no sentido de que se poderia tomar a própria aritmética de Peano como um modelo intuitivamente aceitável para o sistema formal A [9].

As provas mencionadas contam com alguns argumentos em favor de sua aceitabilidade. Particularmente no caso de Gentzen, embora se recorra a princípios dedutivos mais fortes do que os disponíveis em A, pode-se afirmar que não se avança muito além destes limites:

"Since all transfinite inductions up to some particular ordinal less than ε_0 are reducible to ordinary induction and can be carried out in elementary arithmetic, it seemed that Gentzen went as little as possible beyond the arithmetical system in order to prove consistency. For all the other methods used by Gentzen are formalizable in the arithmetical system." (Delong[6], p. 218)

Além disso, seria possível argumentar que a indução transfinita é um recurso 'intuitivamente' válido, podendo ser utilizada como fundamento legítimo para qualquer consideração sintática [10]. Deve-se men -

cionar mais uma vez que o recurso à intuição será inevitável quando se tiver em vista a fundamentação da matemática.

Outro ponto em favor destas provas relaciona-se com o potencial dedutivo das teorias em que elas são formuladas. O emprego de sistemas mais fortes está sujeito a críticas, mas existe a possibilidade de que os métodos empregados, ao invés de mais fortes, sejam simplesmente distintos:

"... philosophers might argue that the proof uses methods which are merely different rather than stronger than those available in the system in question. This claim has been made, for example, in the case of the constructive consistency proofs for elementary number theory." (Resnik [32], p. 145)

A demonstração de Gentzen enquadra-se perfeitamente neste caso, em virtude de seu caráter construtivo.

Há também várias objeções em relação às mesmas provas. No caso de não se partilhar da opinião apresentada por Resnik, pode-se invocar a clássica restrição acerca do emprego de metalinguagens mais poderosas do que a linguagem-objeto. No que se refere à consistência, este recurso poderia na melhor das hipóteses gerar demonstrações relativas, em que a consistência de uma teoria passa a depender da consistência de outra. Assim, a eliminação de um problema introduz outro em geral mais complexo. Supor, por outro lado, que uma metateoria desta natureza possa ser encarada como intuitivamente coerente torna dispensável a verificação de consistência da teoria original, onde haveria apenas um subconjunto próprio dos princípios dedutivos metateóricos. No caso da aritmética, se considerarmos que a incorporação da indução transfinita até ε_0 ao sistema A gera um sistema intuitivamente consistente, a mesma propriedade metateórica será compartilhada (e com maior razão) pelo sistema original: a prova de Gentzen, conseqüentemente, se tornaria supérflua.

Sobre o emprego da teoria dos modelos, há uma série de problemas específicos. Ao se indicar a aritmética de Peano como modelo para o sistema A, estamos na realidade confrontando uma teoria informal com outra formal, situação sujeita a dificuldades já analisadas (ver discussão acerca do conceito de adequação, p. 36). A aritmética de Peano também é uma teoria axiomática, definida implicitamente por meio de axiomas, não possuindo portanto as características usuais de um modelo[11]. Além disso, a incerteza acerca da sua consistência foi um dos fatores que motivou o interesse pelo processo de formalização. Uma alternativa aparentemente viável para contornar tal dificuldade seria o emprego da aritmética recursiva, na medida em que se trata de uma teoria baseada no método construtivo. Embora tal abordagem seja conceitualmente correta, sabe-se que esta teoria não poderia corresponder a uma interpretação para o sistema A, onde existem recursos dedutivos mais poderosos (aplicação irrestrita do princípio do terceiro excluído, uso essencial de quantificadores, etc).

Este conjunto de observações certamente não esgota o assunto e nem mesmo indica uma solução. Ele serve ao menos para delinear o quadro em que todas as discussões a este respeito devem ser desenvolvidas.

Conclusão

A análise comparada de teorias informais e formais permite constatar profundas distinções entre elas. O recurso à intuição no primeiro grupo contrasta com a rígida precisão que caracteriza as fórmulas, regras e axiomas formais. A questão mais relevante neste confronto relaciona-se com a avaliação do potencial dedutivo de cada uma delas: procura-se determinar se existe de fato alguma distinção também neste plano, capaz de justificar a 'superioridade' relativa de uma das abordagens; ou se, apesar de suas especificidades na representação do conhecimento matemático, o conjunto de teoremas de cada grupo é absolutamente equivalente ao do outro. O exame das suas propriedades, características e métodos não permite fornecer uma solução definita para esta questão.

Os teoremas de incompletude de Gödel introduzem, em princípio, novos elementos nesta discussão. Originalmente, eles representam apenas um resultado matamatemático (sintático na sua essência) que estabelece uma limitação incontornável para todas as teorias formais que satisfazem um determinado conjunto de condições. Dentre elas, a condição mais relevante é a existência de uma definição de prova que permita reunir todos os teoremas em um conjunto recursivamente enumerável[1]. Por aplicação do argumento da diagonal a este conjunto, pode-se exibir uma nova sentença que é indecidível na teoria. Verificou-se assim que a eliminação da imprecisão presente na matemática informal gera uma limitação. Este resultado, contudo, não traz qualquer informação acerca das teorias informais. A fórmula de Gödel de um determinado sistema está associada a uma sentença da teoria informal correspondente que naturalmente possui um valor de verdade. A possibilidade de se determinar este valor por meio de argumentação 'informal' torna-se um elemento que permitiria estabelecer a solução do confronto entre as duas espécies de teorias matemáticas.

Dois grupos antagônicos mobilizaram-se em torno desta questão. Um deles levou em consideração o fato de que a interpretação aritmética dada à fórmula indecidível representaria um enunciado metamatemático verdadeiro. Por intermédio de um argumento metateórico perfeitamente espelhável na aritmética, estaria decidida a questão em favor das teorias informais. Desta forma, dados um sistema formal qualquer (que satisfaça as condições mencionadas) e a teoria informal a ele associada, sempre existirá uma sentença comprovadamente verdadeira que é indecidível <u>neste específico sistema</u>.

O segundo grupo, em vista da possibilidade de associação da fórmula indecidível a uma sentença metateórica, enfatiza que o valor de verdade desta sentença só está condicionalmente determinado: ela será verdadeira somente se o sistema formal que representa a aritmética for consistente. Na medida em que os próprios resultados de Gödel atestaram a inexistência de uma prova absoluta de consistência (no sentido de Hilbert) para este sistema, estaria descartada a possibilidade de uma decisão. A sentença de Gödel permaneceria indecidível em ambos os níveis.

As duas análises estão sujeitas a críticas. Por um lado, realmente não se pode obter qualquer conclusão acerca da sentença aritmética sem que tenha sido estabelecida previamente a consistência do sistema formal. Em vista da ausência de uma prova absoluta, não parece razoável considerar a verificação desta propriedade metamatemática como não-problemática: argumentos baseados em crenças ou convicções tornam-se inaceitáveis. Por outro lado, existem vários elementos indicando a possibilidade de formulação de uma verificação aceitável fora do sistema. A ausência de uma prova absoluta aumenta o grau de complexidade do problema, mas não encerra automaticamente a discussão.

Os teoremas de Gödel, tomados isoladamente, não permitem resolver a polêmica relativa ao confronto entre o nível formal e o informal. Nenhum dos dois grupos envolvidos, portanto, apresentou o problema em sua devida dimensão. A verificação da consistência deve ser enfocada simultaneamente. Se houver uma prova considerada legítima (segundo algum critério) para ela, este resultado, aliado aos teoremas de incompletude, permitirá estabelecer uma assimetria entre os dois níveis. Em caso contrário, nenhuma conclusão poderá ser estabelecida com base nestes teoremas, e o problema da adequação da representação formal, tomado num sentido amplo, permanecerá sem solução.

A consistência representa o elemento ignorado da discussão. O segundo teorema de Gödel projeta o problema para fora da esfera lógico-matemática. As provas atualmente conhecidas precisam ser analisadas à luz de seus pressupostos. Dada a impossibilidade de eliminação integral da intuição , cabe determinar os princípios lógicos 'intuitivamente válidos' que poderiam ser incorporados à metamatemática: apenas os métodos finitários de Hilbert, a indução transfinita, todos os métodos construtivos, etc. O exame destes elementos não pode limitar-se a uma declaração subjetiva de princípios. Embora a completude dos sistemas formais que representam a aritmética tenha sido examinada basicamente dentro dos domínios da matemática (finitária), a consistência envolve em primeiro lugar a análise dos fundamentos da matemática.

Notas

Introdução

(1) Ver por exemplo:

BOWIE, G.L. Lucas's Number is Finally Up. J.Ph.Log., 11:279-285, 1982.

KIRK, R. Mental Machinery and Gödel. Synthese, 66:437-452, 1986.

NELSON, R.J. The Logic of Mind. Dordrecht, D. Reidel, 1982.

(2) Ver, por exemplo, Jacquette [17], ou ainda:

BOYER, D.L. J.R. Lucas, Kurt Gödel and Fred Astaire. Phil.Quar., 33:147-159, 1983.

DUBUCS, J. Réalisme et Antimécanisme chez K. Gödel. Dialectica, 40:297-308, 1986.

(3) Foram considerados principalmente Delong[6], Hatcher[15], Kleene [18], Ladrière[22], Martin[26], Mendelson[27] e Stoll[38].

(4) E. Nagel e R. Newman (Nagel & Newman [29]), de um lado, e H. Putnam (Putnam[31]), de outro, projetaram na comunidade matemática e filosófica as duas posições predominantes na polêmica. O primeiro texto de J.R.Lucas sobre este assunto (Lucas[23]) foi certamente o trabalho que gerou o maior número de réplicas neste tema.

Parte I

(1) Ver Kleene[18], p. 26. Kleene observa que esta distinção foi estabelecida por D. Hilbert.

(2) Cf. Stoll[38], p. 227-8.

(3) Por exemplo, Stoll[38], p. 228.

(4) Ladrière[22], p. 51-2. O autor apresenta esta classificação tendo

em vista estabelecer a evolução do conceito de 'teoria axiomática' ("El progreso de la axiomática consiste precisamente en la eliminación creciente de la intuición"). Ele introduz ainda um terceiro grupo, a 'axiomática formal', imediatamente anterior aos 'sistemas formais puros'. A descrição dada pelo autor, contudo, não indica qualquer distinção significativa entre as axiomáticas abstratas e as formais, de forma que parece absolutamente suficiente a distinção de apenas duas categorias entre as teorias informais.

(5) Ver Kleene[18], p. 28. É necessário mencionar que o emprego dado por Kleene à expressão 'axiomática material' desrespeita a própria distinção por ele traçada entre método construtivo e axiomático:("... the axioms merely express those properties of the objects which are being taken initially as evident from their construction ...").

(6) Cf. Stoll[38], p. 233-4.

(7) Ver Stoll[38], p. 219.

(8) Ver Hatcher[15], p. 11. Seu equívoco pode ser constatado na seguinte passagem:

"The whole process is typical of mathematics. One starts with a particular concrete situation, and then subjects it to an analysis which ignores some aspects while considering others important.(...) In mathematics, the process leads to the definition of abstract structures independent of any concrete situation. (...) Mathematical logic has given rise to the study of abstract structures called formal systems or formal languages."

(9) Cf. Kleene[18], p. 59-60.

(10) Cf. Wang[41], p. 2-3.

(11) Essa justificativa é apresentada em Stoll[38], p. 375.

(12) Segundo Stoll[38], p. 374, "an effective procedure is like a recipe in that it tells what to do at each step and no intelligence is required to follow it. In principle, it is always possible to construct a machine for the purpose of carrying out such instructions."

Fica implícito nesta passagem que Stoll relaciona 'inteligência' à capacidade de complementar o conjunto de informações necessárias à execução de um procedimento.

(13) Uma das possíveis definições para este grupo de teorias é a seguinte:

"A first-order theory, or simply a theory, is a formal system T such that

i) the language of T is a first-order language;

ii) the axioms of T are the logical axioms of L(T) and certain further axioms, called the nonlogical axioms;

iii) the rules of T are the expansion rule, the contraction rule, the associative rule, the cut rule, and the $\exists$-introduction rule." (Shoenfield[35], p. 22)

Embora os símbolos adotados nestas teorias sejam os usualmente empregados pelas teorias informais, eles estão despidos de qualquer significado.

(14) Cf. Hatcher[15], p. 12-3.

(15) "... assim, as considerações intuitivas, que evidentemente nunca

poderão ser totalmente evitadas ou eliminadas, transferem-se para outro lugar, em um nível de certa forma mais elevado, e ao mesmo tempo se tornará possível na matemática uma separação rigorosa e sistemática entre as fórmulas e as provas formais, de um lado, e as reflexões intuitivas, de outro."

(16) Cf. Carnap[3], p. 156. Existem algumas situações específicas em que é necessário observar a distinção entre o objeto lingüístico e seu nome. Três-quartos, '3/4' e '9/12' são alguns dos nomes possíveis para o número racional 3/4. Embora '3/4 = 9/12', temos que " '3/4' ≠ '9/12' ", pois tratam-se de símbolos distintos. Assim, na sentença

"O denominador de '9/12' é divisível por 3",

a afirmação é feita com respeito a um dos nomes do número em questão; a substituição deste nome por outro, neste contexto, falsificaria a sentença. Ver Manin[25], p. 9.

(17) Cf. Martin[26], p. 39.

(18) Ver Martin[26], p. 45-6.

(19) Este exemplo foi retirado de Delong[6], p. 194.

(20) Cf. Ladrière[22], p. 182. Segundo este autor:

"Se encuentran, por ejemplo, en estas demostraciones enunciados que incluyen la expresión: <u>para toda sustitución de números enteros por variables de tal proposición</u>. Y no es possible eliminar estos cuantificadores recurriendo, por ejemplo, a esquemas de derivación apropiados. Sin embargo, estas demostraciones continúan siendo constructivas."

(21) A associação entre 'finitário' (no sentido empregado por Hilbert)

e 'recursivo' é sugerida por M. Resnik (Resnik[32], p. 134); a ligação entre 'construtivo' e 'recursivamente enumerável' é defendida por H. Delong (Delong[6], p. 195). Outros elementos relacionados a este tema serão introduzidos no capítulo sobre aritmetização.

(22) Esta classificação é proposta em Ladrière[22], p. 182-3.

(23) Ver Martin[26], p. 11.

(24) H. Delong identifica a "interpretação pretendida" (intended interpretation) para uma teoria formal com a teoria informal a ela associada; neste caso, pode-se concluir imediatamente que, se a teoria for categórica, ela também será adequada (relativamente à teoria informal original).

(25) Cf. Wang[41], p. 7.

(26) Ver Mendelson[27], p. 102-3.

Parte II

(1) Ver Martin[26], p. 51.

(2) Os axiomas deste sistema foram apresentados em Mendelson[27], p. 102-3.

(3) A semelhança entre a aritmética recursiva e a finitista torna-se evidente após esta descrição. Ver p. 32.

(4) A designação 'lema da correspondência' é empregada por H. Delong (ver Delong[6], p. 171).

(5) Delong, ao contrário, considera que:

"There are two versions of Gödel's first incompleteness theorem. The first is syntactical, in which the formulas of the formal system are left uninterpreted. As we have seen, there is no self reference involved ..." (Delong[6], p. 175)

(6) Cf. Auerbach[2], p. 342-3.

(7) Este problema foi examinado em Feferman[10].

(8) Estas condições foram enumeradas por Delong (Delong[6], p. 195).

Parte III

(1) Esta terminologia encontra-se em Delong[6], p. 198-9.

(2) 'Mecanicismo' (Mechanism), neste contexto, corresponde à tese de que a mente (ou, pelo menos, seu desempenho argumentativo) pode ser explicada por meio de sistemas mecânicos. Ver Lucas[23], p. 43.

(3) Webb menciona freqüentemente a questão da consistência nas primeiras páginas de seu trabalho, mas afirma que sua maior preocupação não é esta:

"... we shall direct our specific criticism against Lucas's last step (...), i.e. the use of the 'self-referring' character of Gödel-sentences to distinguish between conscious and non-conscious beings." (Webb[42], p. 158).

(4) Lucas formulou uma crítica a Webb em termos semelhantes:

"Although it is important in considering Gödel's theorem generally to realize that there are many (infinitely many) true-but-unprovable Gödelian formulae, and that each is a true arithmetical proposition independently of any arbitrary choice of a Gödel-numbering system, it is also important (...) that it is only because the very complicated arithmetical proposition can also be viewed as the code-expression of a fairly simple meta-mathematical truth, that we can convince ourselves that it is in fact true." (Lucas[24], p. 311)

(5) Deve-se observar que a adição desta regra ao sistema não teria a finalidade de tornar G decidível, pois, neste caso, pela aplicação do procedimento de Gödel, uma nova sentença indecidível G' seria gerada. O procedimento (P) não representa uma regra de inferência: sua função seria estritamente a de atribuir um valor de verdade às fórmulas de Gödel. Este papel 'semântico' do procedimento pode parecer um empecilho à sua formalização, visto que estaríamos introduzindo no sistema um predicado capaz de representar a noção de verdade. Tal risco na realidade não existe, porque o critério só permite o reconhecimento das fórmulas de Gödel, e nem todas as sentenças indecidíveis se enquadram neste grupo.

(6) R.L.Goodstein faz os seguintes comentários:

"... of course a proof inside A of A's consistency offers no security, for if A were inconsistent then every formula in A would be provable in A. In fact, Gödel's result does not really bear upon the problem of consistency itself but affords a means of establishing the independence from the axioms of A of axioms (like transfinite induction) whose addition to A suffice to prove the closed formula C above in the enlarged system." (Goodstein[13], p. 213-4).

(7) Comentários semelhantes a respeito dos métodos finitistas foram apresentados na p. 32.

(8) Nesta discussão, não estamos levando em consideração os predicados de prova intencionalmente incorretos, a partir dos quais pode-se construir uma sentença demonstrável que expresse a consistência do próprio sistema. A este respeito, ver Auerbach[2] e Feferman[10].

(9) Shoenfield é um dos autores que faz esta sugestão:

"We construct a model of N by taking the universe to be the set of natural numbers and assigning the obvious individuals, functions, and predicates to the nonlogical symbols of N. This model is called the <u>standard model</u> of N ..." (Shoenfield[35], p. 23)

(10) Ver Ladrière[22], p. 199. O autor não apresenta maiores comentários acerca da suposta validade intuitiva do princípio de indução transfinita.

(11) Ver Kneebone[20], p. 204.

Conclusão

(1) Cf. Manin[25], p. 255.

Bibliografia

[1] ANDERSON, A. R. (ed.) Minds and Machines. New Jersey, Prentice-Hall, 1964.

[2] AUERBACH, D. R. Intensionality and the Gödel Theorems. Philosophical Studies, 48:337-351, 1985.

[3] CARNAP, R. The Logical Syntax of Language. Trad. Amethe Smeaton. London, Routledge & Kegan Paul, 1937.

[4] COHEN, P. J. Set Theory and The Continuum Hypothesis. New York, W.A. Benjamin, 1966.

[5] CURRY, H. B. Foundations of Mathematical Logic. New York, McGraw-Hill, 1963.

[6] DELONG, H. A Profile of Mathematical Logic. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1970.

[7] DETLEFSEN, M. On Interpreting Gödel's Second Theorem. Journal of Philosophical Logic, 8:297-313, 1979.

[8] DUMMETT, M. Elements of Intuitionism. Oxford, Clarendon Press, 1977.

[9] EVES, H. & NEWSOM, C.V. An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics. Ed. rev. New York, Rinehart and Winston, 1965.

[10] FEFERMAN, S. Arithmetization of Metamathematics in a General Setting. Fundamenta Mathematicae, 49:35-92, 1960.

[11] GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Dordrecht, D. Reidel, 1983.

[12] GÖDEL, K. "On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I". Trad. J. van Heijenoort. In: van Heijenoort, J. (ed.) op. cit., p. 596-616.

[13] GOODSTEIN, R. L. The Significance of Incompleteness Theorems. British

Journal for the Philosophy of Science, 14:208-220, 1963.

[14] HANSON, N. R. The Gödel Theorem - An Informal Exposition. Notre Dame Journal of Formal Logic, 2(2):94-100,228, 1961.

[15] HATCHER, W. S. Foundations of Mathematics. Philadelphia, W.B. Saunders, 1968.

[16] HILBERT, D. Gesammelte Abhandlungen. v. 3. Berlin, Springer.

[17] JACQUETTE, D. Metamathematical Criteria for Minds and Machines. Erkenntnis, 27:1-16, 1987.

[18] KLEENE, S. C. Introduction to Metamathematics. New York, D. Van Nostrand, 1952.

[19] KNEALE, William & Martha The Development of Logic. Oxford, Claredon Press, 1962.

[20] KNEEBONE, G. T. Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. London, D. Van Nostrand, 1963.

[21] LADRIÈRE, J. Les Limitations des Formalismes et leur Signification Philosophique. Dialectica, 14(4):279-328, 1960.

[22] LADRIÈRE, J. Limitaciones Internas de los Formalismos. Trad. Jose Blasco. Madrid, Editorial Tecnos, 1969.

[23] LUCAS, J. R. "Minds, Machines and Gödel". In: ANDERSON, A. R. (ed.) op. cit., p. 43-59.

[24] LUCAS, J. R. Metamathematics and the Philosophy of Mind: a Rejoinder. Philosophy of Science, 38;310-313, 1971.

[25] MANIN, Yu A Course in Mathematical Logic. Trad. Neal Koblitz. New York, Springer Verlag, 1977.

[26] MARTIN, R. Logique Contemporaine et Formalisation. Paris, P.U.F., 1964.

[27] MENDELSON, E. Introduction to Mathematical Logic. Princeton, D. Van Nostrand, 1963.

[28] MONK, J. D. Mathematical Logic. New York, Springer-Verlag, 1976.

[29] NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. Gödel's Proof. New York, New York Un. Press, 1958.

[30] NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. Discussion: Putnam's Review of Gödel's Proof. Philosophy of Science, 28:209-211, 1961.

[31] PUTNAM, H. Review of Gödel's Proof. Philosophy of Science, 27:205-207, 1960.

[32] RESNIK, M. D. On the Philosophical Significance of Consistency Proofs Journal of Philosophical Logic, 3:133-147, 1974.

[33] ROGERS JR., H. Theory of Recursive Functions abd Effective Computability. New York, McGraw-Hill, 1967.

[34] ROSSER, B. An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem. The Journal of Symbolic Logic, 4(2):53-60, 1939.

[35] SHOENFIELD, J. R. Mathematical Logic. Massachusetts, Addison-Wesley, 1967.

[36] SMULLYAN, R. M. Theory of Formal Systems. Princeton, Princeton Un. Press, 1961.

[37] STABLER, E. R. An Introduction to Mathematical Thought. Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publ. Co., 1953.

[38] STOLL, R. Set Theory and Logic. S. Francisco, Freeman, 1963.

[39] TURING, A. M. "Computing Machinery and Intelligence" In: ANDERSON, A.R. (ed.) op. cit., p. 4-30.

[40] VAN HEIJENOORT, J. (ed.) From Frege to Gödel. Cambridge, Mass., Harvard Un. Press, 1967.

[41] WANG, H. A Survey of Mathematical Logic. Peking, Science Press, 1963.

[42] WEBB, J. Metamathematics and the Philosophy of Mind. Philosophy of Science, 35(2): 156-178, 1968.

[43] WILDER, R. L. Introduction to the Foundations of Mathematics. 2.ed., New York, Wiley & Sons, 1965.