José Alexandre Durry Guerzoni

SEMÂNTICA NOMINATIVA E LÓGICAS MODAIS

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de *Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência* na área de Lógica e Epistemologia. Universidade Estadual de Campinas. Prof. Orientador: Carlos Alberto Lungarzo.

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida pelo Sr. José Alexandre Durry Guerzoni e aprovada pela comissão julgadora.
Campinas, 12 de Abril de 1989.

Campinas

1989

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.

Em nossa pesquisa, da qual o presente texto é um relato, procuramos uma melhor compreensão, do ponto de vista lógico-formal, da semântica que havíamos apresentado em nossa dissertação de mestrado. Esta semântica é uma versão da Semântica de Mundos Possíveis na qual consideramos linguagens modais de primeira ordem com identidade, pelo menos uma constante individual e, eventualmente, outros símbolos funcionais. Tomamos emprestado da Semântica de Mundos Possíveis a tese segundo a qual um contexto modal remete, ainda que de maneira implícita, a vários mundos, situações possíveis. Como sabemos, Kripke em seus trabalhos pretendeu formalizar e estudar a idéia de que os conceitos modais expressam propriedades de objetos como tais (modalidades <u>de re</u>). Nós, ao contrário, tinhamos no horizonte a crítica quineana à quantificação através de operadores modais e buscamos nossa inspiração na tese de que, embora a referência a objetos não seja estranha a um contexto modal, este não expressa uma propriedade de objetos enquanto tais, independentemente dos meios que a linguagem dispõe para lhes fazer referência (modalidades de <u>dicto cum fundamento in re</u>). Esta compreensão dos conceitos modais nos conduzia à idéia de atribuir às variáveis, quando em contextos modais, um duplo papel: referencial (i.e., remeter a um universo de objetos) e substitucional (i.e., marcar lugar para os nomes disponíveis na linguagem). Mais precisamente, a noção de modalidades <u>de dicto cum fundamento in re</u>, quando associada à idéia fundamental de uma semântica de mundos possíveis, sugeria a idéia de uma interpretação mista dos quantificadores cujas variáveis ocorrem livres no escopo de operadores modais (quantificação através de contextos modais): uma interpretação na qual a quantificação fosse referencial com respeito a um dado mundo e substitucional no tocante aos mundos acessíveis.

Em nossa dissertação, apresentamos uma formalização possível, tendo como ponto de partida a Semântica de Mundos Possíveis para a Lógica Modal Proposicional, da idéia de uma interpretação mista dos quantificadores em linguagens modais. Demos a ela o nome de Semântica Nominativa (abreviadamente, S.N.) e estudamos algumas de suas propriedades. Em especial, mostramos que, quando consideramos apenas linguagens modais que não contêm outros símbolos funcionais além de constantes individuais, ela é uma extensão em esquemas da Semântica Clássica; ou seja, nenhuma instância, em uma dessas linguagens, de um esquema classicamente válido pode ser falsificada na nova semântica. No entanto, quando consideramos linguagens com termos individuais complexos, podemos falsificar o esquema da substituição (instanciação) , se a variável a ser substituída ocorrer livre no escopo de um operador modal e o termo substituendo for um termo complexo aberto. Mostramos, também, que a Semântica Nominativa permite falsificar o esquema (fórmula) de Barcan, embora torne válido certos esquemas que não são válidos na Lógica Modal Quantificacional, quando consideramos sistemas sem a fórmula de Barcan (B.F.). Portanto, as lógicas modais quantificacionais eventualmente caracterizáveis em S.N. deveriam ser extensões próprias daquelas usuais sem B.F. e estariam propriamente contidas nas que contêm B.F. Estudamos apenas a lógica que podemos obter quando consideramos a classe das bases modais (frames) nas quais as relações de acessibilidade são relações de equivalência.
Para axiomatizá-la, lançamos mão de certos símbolos definíveis em linguagens modais e que expressam, quando consideramos esta classe de bases modais, a propriedade 'ser nomeado' e uma relação peculiar de identidade nos mundos acessíveis.

Várias questões nos apareciam como interessantes e merecedoras de um estudo mais acurado do que o desenvolvido na dissertação. Que contribuição original S.N. traz à questão da interpretabilidade dos quantificadores em contextos modais? Sendo ela uma variante das versões já existentes na literatura, o que a individualizaria nesse contexto? Em que medida a própria idéia de uma interpretação mista dos quantificadores implicaria num afastamento das leis lógicas usualmente válidas? Uma vez que S.N. é apenas uma das maneiras que podemos imaginar para formalizar a idéia intuitiva de uma interpretação mista da quantificação através de operadores modais, podemos nos perguntar em que medida o comportamento desviante com respeito às leis lógicas (clássicas e/ou modais) seria consequência da própria idéia de uma interpretação mista dos quantificadores em contextos modais. Ou seja, seria possível fornecer uma interpretação mista dos quantificadores adequada para os cálculos modais quantificacionais usuais? Além disso, com respeito a que classes de bases modais podemos definir os predicados referidos acima? Seria possível axiomatizar lógicas caracterizáveis em S.N. sem lançar mão desses predicados? Enfim, para quais lógicas modais proposicionais podemos encontrar extensões quantificacionais que podem ser adequadamente interpretadas em S.N.?

O objetivo teórico da pesquisa é, por conseguinte, duplo. Por um lado, esclarecer melhor a peculiaridade da Semântica Nominativa, no contexto das versões já existentes na literatura; e, por outro, avaliar em que medida esta semântica tem um domínio de aplicação, em Lógica Modal Quantificacional, análogo ao dessas versões.

No Capítulo 1, reapresentamos a Semântica Nominativa introduzindo, porém, duas pequenas alterações. Em primeiro lugar, na definição de base modal, consideramos também bases modais não normais, o que nos permite, como em Kripke, 1963, abordar as lógicas modais meramente congruentes, monotônicas e regulares. Em segundo lugar, introduzimos uma alteração na definição de satisfação. Na dissertação, esta relação era determinada, no tocante às fórmulas modais, por uma cláusula referencial com respeito a um dado mundo (se este fosse acessível a si mesmo) e substitucional com respeito a todos os mundos acessíveis a este mundo (inclusive ele próprio). Aqui, no entanto, a cláusula substitucional é empregada apenas para os mundos acessíveis distintos daquele do qual partimos.

No Capítulo 2, tendo como pano de fundo uma caracterização abstrata do que é uma semântica de mundos possíveis para linguagens modais de primeira ordem, analisamos o papel que S.N. atribui às variáveis, quando estas ocorrem livres no escopo de operadores modais . De uma maneira mais geral, analisamos o papel de um termo singular. Essa análise põe em relevo a originalidade de S.N. face as demais semânticas existentes na literatura; em S.N., um termo singular remete, simultaneamente, a um objeto de uma estrutura clássica e a uma família de objetos homônimos. Nessa medida, a contribuição de S.N. ao debate sobre a quantificação através de contextos modais consiste em uma nova resposta à constituição dos objetos intensionais, cuja plena inteligência demandaria uma explanação, então de um ponto de vista filosófico, que não procuramos fornecer aqui.

Finalmente, no último capítulo, apresentamos uma extensão quantificacional da menor lógica modal proposicional regular e monotônica, i.e., da lógica C2. Provamos a legitimidade e a correção desta extensão, com repeito à classe de todas as estruturas modais. No entanto, tivemos o cuidado de demonstrar esses resultados com métodos que podem ser facilmente aplicados, quando consideramos outras lógicas modais proposicionais caracterizáveis por classes particulares de bases modais.

O leitor perspicaz poderá encontrar, por si mesmo, a partir dos resultados que aqui expomos, respostas às questões que formulamos antes. Chamamos atenção apenas para o fato de que a própria idéia de uma interpretação mista dos quantificadores implica na impossibilidade de falsificar fórmulas da forma

$$\Diamond(Ex)\Box A \rightarrow (Ex)\Diamond(A \rightarrow \Box A).$$

CAPÍTULO 1

A SEMÂNTICA NOMINATIVA: CONCEITOS E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS.

1.1 Preliminares sintático-linguísticos. No presente estudo, consideraremos linguagens modais de primeira ordem, enumeráveis e que contêm a identidade e, pelo menos, um símbolo funcional 0-ário (i.e., uma constante individual). Para simplificar, suporemos que essas linguagens contêm como símbolos lógicos primitivos apenas os seguintes: o símbolo para a negação ('~') , o símbolo para a quantificação universal ('( )'), o símbolo para a conjunção ('&'), o símbolo para a identidade ('='), e o símbolo para o operador modal ('□'). Os demais símbolos lógicos usuais podem ser introduzidos pelas definições costumeiras. Suporemos, também, que todas as linguagens aqui estudadas contêm o mesmo conjunto de variáveis e este conjunto é dado em uma certa ordem padrão (a ordem alfabética).

Observemos que qualquer linguagem modal de primeira ordem pode ser vista como obtida de uma linguagem clássica de primeira ordem a qual acrescentamos o operador modal. Desse modo, podemos denotar uma linguagem modal simplesmente acrescentando o sobrescrito '□' à linguagem clássica que lhe deu origem. Obviamente, sempre que não houver risco de confusão, podemos empregar uma mesma expressão para denotar tanto a linguagem modal, como a linguagem clássica.

Como é usual, uma extensão em constantes de uma linguagem é uma extensão simples que dela difere, no máximo, por conter novas constantes individuais.

Em nossa meta-linguagem empregaremos, entre outras, as seguintes notações e variáveis meta-sintáticas:

(i) '<u>VAR</u>' denota o conjunto das variáveis; letras latinas tipográficas do final do alfabeto ($\underline{v}$, $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ e $\underline{w}$), com ou sem índices numéricos inferiores, assumem valores neste conjunto; em particular, para $k \geqslant 0$, $\underline{x}_k$ denota a k-ésima variável na ordem alfabética.

(ii) $\underline{TERM}_L$ denota o conjunto dos termos individuais de L; $\underline{t}$, e $\underline{u}$ afetados ou não por índices indicam elementos de $\underline{TERM}_L$

(iii) $\underline{NOM}_L$ denota o subconjunto de $\underline{TERM}_L$ formado pelos nomes (i.e., termos singulares que não contêm ocorrências de variáveis); as letras $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, e $\underline{d}$, afetadas ou não de índices assumem valores em $\underline{NOM}_L$.

(iv) $\underline{FORM}_L$ indica o conjunto das fórmulas de L,; letras latinas maiúsculas iniciais, afetadas ou não por índices, assumem elementos deste conjunto como valores e letras gregas maiúsculas, subconjuntos de $FORM_L$

(v) $\underline{SENT}_L$ denota o conjunto das sentenças (i.e., fórmulas que não contêm ocorrências livres de variáveis).

(vi) $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ e $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ afetadas de um índice numérico superior n e, eventualmente, de outros índices inferiores, assumem como valores, respectivamente, símbolos funcionais n-ários e símbolos para predicados n-ários (se $n \geqslant 0$).

Aqui, empregaremos a noção de substituição uniforme e simultânea de variáveis <u>com eventuais renomeações de variáveis ligadas</u> . Assim, se $\underline{U}$ é uma expressão de L, se $y_1,\ldots,y_n$ são algumas de suas variáveis livres e se $\underline{t}_1,\ldots,t_n$ são termos de L,

$$\underline{U}(y_1/\underline{t}_1,\ldots,y_n/\underline{t}_n)$$

denota a expressão que advém de U, quando substituímos simultaneamente, todas as ocorrências livres de y_k por ocorrências de t_k e, eventualmente, renomeamos as variáveis ligas de U, a fim de que nenhuma variável em t_k ocorra ligada como parte de uma ocorrência de t_k que substitui uma ocorrência de y_k, para k=1,...,n (cf., p.e., <u>Bell & Machover</u>, 1977, p.63).

1.2 Conceitos semânticos fundamentais. Para uniformizar a terminologia, explicitar a notação, bem como, manter nosso trabalho o mais auto-contido possível, apresentaremos as definições dos principais conceitos semânticos que serão empregados, mesmo aquelas que tomamos emprestado seja da Semântica Clássica, seja da Semântica de Mundos Possíveis usual.

Consideremos, então, uma linguagem clássica de primeira ordem L.

DEFINIÇÃO 1.1 Uma estrutura (clássica) para L, A, é um par, no qual o primeiro elemento é um conjunto não vazio, $|A|$, denominado o universo de A e o segundo, uma função que associa:

(i) a cada símbolo funcional n-ário, $\underline{f}$, de L uma operação n-ária, $\underline{f}_A$, em $|A|$: e

(I) a cada símbolo para predicado n-ário, $\underline{P}$, um subconjunto, $\underline{P}_A$, de $|_A|^n$.

DEFINIÇÃO 1.2 Por indução no comprimento de um nome $\underline{a}$ de L, definimos a denotação, $\underline{a}_A$, de $\underline{a}$ em A. Suponhamos definida para todo termo de comprimento menor do que o de $\underline{f}\ \underline{t}_1 \ldots \underline{t}_n$; então $(\underline{f}\ \underline{t}_1 \ldots \underline{t}_n)$ é $\underline{f}_A\ (\underline{t}_{1_A}, \ldots, \underline{t}_{n_A})$.

Tendo em mente esses dois conceitos clássicos, podemos definir o primeiro dos conceitos peculiares à nova semântica, aquele que permite que as variáveis desempenhem simultaneamente duas funções distintas: remeter a objetos e marcar lugares para os nomes disponíveis na linguagem.

DEFINIÇÃO 1.3 O <u>domínio modal</u>, D_A , <u>de A</u> é o conjunto dos pares $\langle a, \underline{a} \rangle$ em $|A| \times \underline{NOM}_L$, tais que ou o primeiro elemento não é nomeado em A (i.e., para todo b em $\underline{NOM}_L$, $\underline{b}_A$ não é a) ou o segundo elemento, $\underline{a}$, é um dos nomes do primeiro (i.e., $\underline{a}_A$ é a).

Ao considerarmos sequências de elementos do domínio modal de uma estrutura, podemos atribuir valores, nesse domínio, às variáveis da linguagem. Estes valores serão pares ordenados formados por objetos de um universo e nomes da linguagem. Determinamos, dessa maneira, a dupla valoração exigida pela própria idéia de uma interpretação mista dos quantificadores. As primeiras ordenadas constituem os possíveis valores referenciais das variáveis e as segundas, seus valores substitucionais.

Por um processo análogo ao clássico, podemos estender a dupla valoração para todos os termos da linguagem. Consideremos, pois, A, uma estrutura clássica e s, uma sequência no domínio modal de A .

DEFINIÇÃO 1.4 O <u>valor referencial</u>, $s^*(t)$, de um termo t de L é definido, por indução, como segue

(i) se t for a k-ésima variável, então $s^*(t)$ é a primeira ordenada do k-ésimo par em s:

(ii) se t for $f^n t_1, \ldots, t_n$ então $s^*(t)$ é

$$f^n{}_A(\bar{s}^*(t_1), \ldots, s^*(t_n)).$$

DEFINIÇÃO 1.5 A <u>s-instância</u>, $U^{(s)}$, de uma expressão bem formada U de L, cujas variáveis livres são $y_1, \ldots, y_n$ é a expressão $U(a_1, \ldots, a_n)$, onde, para $k=1, \ldots, n$, a_k é a segunda ordenada do par que s atribui ao índice de y_k.

Observemos que, através do conceito de s-instância, podemos associar a cada termo singular t de L e a cada sequência s em D_A um valor em $\underline{NOM_L}$, a saber, a s-instância de t. Podemos denominar tal valor de t em $\underline{NOM_L}$, o <u>valor substitucional de t em A com respeito a s</u>.

Antes de introduzirmos os demais conceitos, cabe uma observação acerca da dupla valoração dos termos que é determinada pelo conceito de domínio modal de uma estrutura clássica.

Embora o domínio modal induza tanto o valor referencial de um termo, como o seu valor substitucional, no caso dos termos singulares complexos é possível que os pares formados pelos seus valores referenciais e seus valores substitucionais não pertençam ao domínio modal. Um exemplo torna o ponto mais claro. Para simplificar, suponhamos que a linguagem L contém, como símbolos não lógicos, apenas os seguintes: uma constante individual $\underline{a}$ e um símbolo funcional unário $\underline{f}$. Seja A a estrutura clássica para L na qual:

$$|A| \text{ é } \{0,1,2\}$$

$\underline{a}_A$ é igual a $f_A(1)$ que é igual a $f_A(2)$ que é o zero e, finalmente, $f_A(0)$ é 1.

Nesse caso, se tomarmos a sequência s em D_A que atribui à variável x_k o par $\langle 2, a \rangle$, teremos que

$$s^*(fx) = 0 = a_A \neq ((fx)^{(s)})_A = (fa)_A = f_A(0) = 1$$

Ou seja, $s^*(fx)$ é um objeto nomeado em A, porém $(fx)^{(s)}$ não é um de seus nomes em A. Consequentemente, o par

$$\langle s^*(fx), (fx)^{(s)} \rangle$$

não pertence a D_A

O fato do domínio modal não ser fechado por essa dupla valoração terá, como é previsível, importantes consequências para a adequação da interpretação dos quantificadores que oferecemos aos cálculos quantificacionais modais usuais. Oportunamente retornaremos a esse ponto (cf., mais adiante, pp 13 ss).

Votemos à apresentação dos conceitos semânticos básicos, considerando aqueles que tomamos emprestado das versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis.

DEFINIÇÃO 1.6 Uma base modal, $\mathcal{B}$, é um terno $\langle I, R, N \rangle$ no qual I é um conjunto não vazio, cujos elementos são denominados índices ou mundos em $\mathcal{B}$, R é uma relação binária em I, denominada relação de acessibilidade e, finalmente, N é um subconjunto de I, cujos elementos são chamados índices ou mundos normais em $\mathcal{B}$.

DEFINIÇÃO 1.7 Uma estrutura modal, $\mathcal{M}$, para a linguagem modal $L^{\square}$ é um par $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, (A_i)_{i \in I} \rangle$, no qual $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ é uma base modal (denominada base de $\mathcal{M}$) e $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de estruturas clássicas para L (a linguagem que deu origem a $L^{\square}$).

Observemos que, ao contrário das versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis, não impusemos o tradicional requisito de inclusão segundo o qual, para quaisquer índices i e j em I, se i R j, então $|A_i| \subseteq |A_j|$. Esse requisito, necessário à definição usual de satisfação para fórmulas modais, pode aqui ser dispensado, graças ao papel substitucuional que as variáveis desempenharão com respeito aos mundos acessíveis distintos do inicial, como mostra a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.8 A <u>relação de satisfação</u> definida entre, por um lado, estruturas modais para a linguagem L, índices na base modal dessas estruturas e sequências nosdomínios modais das estruturas clássicas indexadas por esses índices, e, por outro lado, fórmulas de $L^{\Box}$ é definida por indução na complexidade das fórmulas, de maneira análoga à usual. Consideremos, pois, uma estrutura modal M para L, um índice i de B_M e uma sequência s no domínio modal de A_i. A relação de satisfação denotada por M, i, s sat. A é definida pelas cláusulas seguintes:

(i) M, i, s sat $t_1 = t_2$ sse $s^*(t_1) = s^*(t_2)$;

M, i, s sat $P^n t_1 \ldots t_n$ sse $\langle s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n) \rangle \in P^n_{A_i}$

(ii) M, i, s sat A & B sse M, i s sat A e M, i, s sat B;

(iii) M, i, s sat ~A sse M, i, s não sat A;

(iv) M, i, s sat (x_k) A sse M, i, $\bar{s}$ sat A, para qualquer sequência $\bar{s}$, em D_{A_i}, k-variante de s (i.e., que difere de s, no máximo, por atribuir a k um outro elemento de D_{A_i});

(v) M, i, s sat $\Box$A sse i$\in$ N e, para qualquer j em I, tal que i R j, as seguintes condições valem:

(a) se i = j, então M, i, s sat A

(b) se i $\neq$ j, então M, j, s' sat $A^{(s)}$, para alguma sequência s' em D_{A_j} .

A partir do conceito de satisfação , podemos definir, de maneira análoga à clássica, o conceito de verdade para linguagens modais de primeira ordem. Como em uma estrutura modal consideramos simultaneamente vários índices (consequentemente, várias estruturas clássicas), temos dois conceitos principais de verdade: em um índice e na estrutura modal como um todo. Esses conceitos são apresentados na definição que se segue.

DEFINIÇÃO 1.9 (i) Uma fórmula A de L diz-se verdadeira (falsa) em uma estrutura modal M e no índice i de B_M , em símbolos, M, i $\models$ A se, para qualquer sequência s em D_{A_i} , M ,i, s sat A (respect., M, i s não sat A). (ii) Uma fórmula A de L diz-se verdadeira em M (respectivamente, falsa em$M$), em símbolos M $\models$A se A é verdadeira em M e em todos os índices de B_M.

OS conceitos que acabamos de introduzir determinam uma semântica, no sentido de Tarski, 1956 e 1944, para as linguagens modais de primeira ordem que contêm o símbolo para a identidade e, pelo menos, uma constante individual (podendo ter outr os símbolos funcionais). Essa semântica, que denominamos de Semântica Nominativa, é uma extensão, por um lado, da Semântica Clássica para linguagens de primeira ordem e, por outro, da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens modais proposicionais.

Observemos que S.N. confere às variáveis da linguagem a possibilidade delas desempenharem, no contexto da relação de satisfação, uma dupla função: referencial (ou seja, remeter a objetos do universo da estrutura clássica determinada pelo índice,se este for acessível a si mesmo ou, ainda, se a variável ocorrer em contextos não modalizados) e substitucional (ou seja, marcar lugar para os nomes disponíveis na linguagem, se a variável ocorrer livre no escopo de operador modal e o índice acessível for distinto do índice considerado.

Além disso, na caracterização recursiva da relação de satisfação em uma estrutura modal com respeito a um índice, (Definição 1.9), a cláusula referente às fórmulas modais considera, no tocante aos índices acessíveis distintos do original apenas as instâncias (i.e., sentenças formadas pela substituição das variáveis por nomes) da fórmula que ocorre no escopo do operador modal (cf. item b da cláusula (v)).

Nessa medida, portanto, podemos afirmar que S.N. realiza a idéia intuitiva, apresentada antes, de uma interpretação mista da quantificação em contextos modais (i.e, dos quantificadores cujas variáveis ocorrem livres no escopo de uma ocorrência de operador modal).

É nessa maneira peculiar de interpretar a quantificação em contextos modais que reside a originalidade de S.N no contexto da Semântica de Mundos Possíveis. Com efeito, p.e., em Bowen, 1979 , encontramos uma versão da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens modais de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais que difere da versão apresentada acima, essencialmente, por empregar uma noção de satisfação puramente referencial. (Consequentemente, Bowen é obrigado a impor uma restrição nas estruturas modais consideradas, a saber, que satisfaçam ao requisito de inclusão). No entanto, cumpre salientar que a abordagem de SN, além de exigir um novo conceito, o de domínio modal, tem consequências muito significativas, tanto do ponto de vista lógico matemático (principalmente, no tocante às lógicas modais que podem ser caracterizadas em S.N., cf., mais adiante, capítulo 3), quanto do ponto de vista conceitual (cf., mais adiant, Cap.2). Antes, porém, de explorarmos essas novas implicações, apresentemos as propriedades mais elementares da nova semântica, procurando, em especial, determinar em que medida ela é uma extensão conservativa (em esquemas) da Semântica Clássica, por um lado, e, por outro, da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens modais proposicionais.

No restante deste capítulo, a menos que explicitamente se afirme o contrário, L indica uma linguagem modal de primeira ordem, A.B,... fórmulas de L, $\mathcal{B} = \langle I,R,N \rangle$ uma base modal, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{B}, (A_i)_{i \in I} \rangle$ uma estrutura modal para L e i um índice em I.

1.3 A Semântica Nominativa e os operadores clássicos. Nesta secção procuraremos determinar quais postulados (leis) da Lógica Clássica continuam verdadeiros em qualquer estrutura modal, mesmo quando instanciados em uma linguagem modal. Veremos, então, que se a linguagem contiver, como símbolos funcionais, apenas constantes individuais, todas as leis lógicas clássicas são verdadeiras. Por outro lado, se a linguagem contiver outros símbolos funcionais, além das constantes individuais, devemos impor restrições não usuais ao esquema da substituição.

Observemos, inicialmente, que, obviamente, os operadores booleanos recebem, em S.N., os seus significados usuais (a mera inspecção da definição de satisfação, acima exposta, é suficiente para mostrar esse ponto). Além disso, o conceito de verdade que apresentamos acima é uma extensão conservativa do conceito clássico, no sentido em que se A for uma fórmula clássica (i.e., não contiver ocorrências do operador modal), então A é verdadeira em $\mathcal{M}$ e i se e somente se A for verdadeira na estrutura A_i. Pois, como facilmente se demonstra, neste caso, a relação de satisfação depende apenas da estrutura A_i e dos valores referenciais das variáveis livres em A.

Além disso, o conceito de satisfação preserva as propriedades fundamentais de seu análogo clássico. Em primeiro lugar, a relação de satisfação modal depende apenas dos valores que atribuírmos às variáveis livres da fórmula. Em segundo lugar, ela é preservada pela substituição de termos que assumem o mesmo elemento do domínio modal como valores

Essas observaçoes de cunho intuitivo recebem uma expressão clara, rigorosa e precisa em uma reformulação, segundo linhas facilmente perceptíveis, daquelas proposições que normalmente encontramos nos manuais de Lógica Clássica e que permitem provar a légitimidade do C álculo de Predicados (cf., por exemplo, Mendelson,1963,pp51-2) . Como essa reformulação é simples, apresentaremos apenas as proposições que serão citadas diversas vezes no decorrer do presente estudo.

PROPOSIÇÃO 1.10 Sejam s e s' duas sequências em D_{Ai}. concordes nos índices das variáveis livres em A. Nestas condições, temos que M,i,s sat A sse M,i, s' sat A.

DEMONSTRAÇÃODe maneira análoga à clássica, por indução na complexidade de A. Para o caso em que A é modal, devemos levar em conta o fato de que, nas condições especificadas, a s-instância de uma sub-fórmula de A é igual a s'-instância dessa mesma sub-fórmula.

Decorre dessa proposição o seguinte corolário:

COROLÁRIO 1.10.1 Se A for uma sentença de L, então A é verdadeira em M e i ou A é falsa em M e i.

Essa proposição permite mostrar, também, a afirmação feita anteriormente de que a cláusula (b) do ítem (v) da definição de satisfação reduz-se a uma cláusula meramente substitucional. Ou seja,

COROLÁRIO 1.10.2 Para qualquer sequência s em D_{A_i}, M,i,s sat $\Box$A sse i $\in$ N e, para qualquer j em I, tal que i R j valem as seguintes condições:

(a) se i = j, então M,i,s sat A ; e

(b) se i $\neq$ j, então M,j $\models A^{(s)}$.

PROPOSIÇÃO 1.11 Seja t um termo qualquer de L e seja $\bar{s}$ e s duas sequências em D_i, k-variantes entre si, tais que $\bar{s}$ atribui a k o par $\langle s^*(t), t^{(s)}\rangle$. Então, M,i,s sat $A(x_k/t)$ sse M, i, $\bar{s}$ sat A.

DEMONSTRAÇÃO. Análoga à clássica, por indução na complexidade de A. No caso em que A é modal (i.e., A é da forma $\Box$B), basta observar que, sob as condições especificadas pela Proposição, a $\bar{s}$- instância de B é idêntica a s-instância de $B(x_k,t)$.

COROLÁRIO 1.11.1 Seja s uma sequência em D_{A_i}, tal que para qualquer variável x livre em A, s*(x) é a denotação em A_i da s-instância de x. Nestas condições, M,i,s sat A se e somente M,i $\models A^{(s)}$.

Esse corolário será de grande utilidade no futuro. Aqui, porém, já podemos indicar uma de suas implicações mais interessantes, a saber, que a interpretação mista proposta por S.N. reduz-se à interpretação puramente substitucional (e, por conseguinte, equivale à interpretação referencial), quando consideramos apenas estruturas clássicas completas(i.e., nas quais todos os objetos são nomeados). Pois, neste caso, pela definição de domínio modal, o valor referencial de uma variável com respeito a uma sequência qualquer será a denotação de valor substitucional da variável com respeito à mesma sequência.

Como na Semântica Clássica a legitimidade do Cálculo de Predicados Clássico decorre de observações análogas às expressas pelas proposições anteriores, poderíamos ser levados a crer que toda instância de um esquema clássico válido, em uma linguagem modal qualquer, é verdadeira em qualquer estrutura modal.

Com efeito, toda instância de uma tautologia clássica é verdadeira em *M* e i. Além disso, tanto a regra de modus ponens, como a regra de generalização preservam a verdade em uma estrutura e um índice. Mais ainda, decorre diretamente da Proposição 1.10 que qualquer fórmula de L da forma

$$(x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (x)B)$$

(onde x não ocorre livre em A) é verdadeira em *M* com respeito a o índice i.

Porém, a validade do esquema da substituição

$$(x)A \rightarrow A(x/t)$$

não decorre imediatamente da Proposição 1.11. Para derivarmos dessa proposição a verdade de uma instância, em L, desse esquema na estrutura *M* e índice i, deveríamos mostrar, antes, que, para toda sequência s no domínio modal de A_i, existe uma sequência $\bar{s}$ nesse domínio que satisfaz as condições da Proposição (i.e., que o par $< s^*(t), t^{(s)} >$ pertence, de fato, ao domínio modal de A_i). Todavia, como já observamos anteriormente, isso nem sempre é verdadeiro, posto que um termo singular complexo pode assumir valores fora do domínio modal, se for aberto. O exemplo seguinte esclarecerá melhor o ponto.

Para simplificar, suponhamos que os únicos símbolos não lógicos de L são os seguintes: dois símbolos para predicados unários (P e Q), duas constantes individuais (a, b) e um símbolo funcional unário f. Suponhamos, agora, que I = {0,1}, N=I e R = {<0,1>} e A_0 e A_1 são as estruturas clássicas seguintes:

$|A_0| = \{0,1,2\}$ $\qquad$ $|A_1| = \{0,1\}$

$P_{A_0} = \{0\}$ $\qquad$ $P_{A_1} = \emptyset$

$Q_{A_0} = \emptyset$ $\qquad$ $Q_{A_1} = \{0\}$

$a_{A_0} = 0$ $\qquad$ $a_{A_1} = 0$

$b_{A_0} = 1$ $\qquad$ $b_{A_1} = 1$

$f_{A_0}(0) = 1 = f_A(1)$ $\qquad$ $f_{A_1}(0) = 0$

$f_{A_0}(2) = 0$ $\qquad$ $f_{A_1}(1) = 1$

Neste caso, tomemos a sequência s no domínio modal de A_i, tal que s atribui ao índice de x o par $< 2,b >$ (como 2 não é nomeado em A_0, esse par pertence ao domínio modal). Assim, M,0, s não sat $\Box$Qfx, visto que M,1 $\not\models$ Qfb; porém, M,0,s sat Pfx. Por outro lado, para qualquer sequência $\bar{s}$ em D_{A_0} que difere de s no máximo pelo índice de x, se M, i,$\bar{s}$ sat Px, então $\bar{s}$ *(x) é 0 e, porconseguinte, $x^{(\bar{s})}$ é a (visto que esse é o único nome em L que nomeia 0 em A_0). Portanto, M,i,$\bar{s}$ sat $\Box$Qx. Mostramos, pois, que M,i,s não sat (x)(Px $\rightarrow$ $\Box$Qx) $\rightarrow$ Pfx $\rightarrow$ $\Box$Qfx).

Observemos que, neste exemplo, temos exatamente o caso referido antes, no qual um termo singular aberto complexo pode assumir valor fora do domínio modal (pois, como facilmente se mostra, o par $< s^*(fx), (fx)^{(s)} >$ não pertence ao domínio modal de A_i). A possibilidade de falsificar uma instância do esquema da substituição, na Semântica Nominativa, reside justamente no fato de que a definição de domínio modal que apresentamos pode levar à exclusão desse domínio de possíveis valores dos termos singulares complexos. Futuramente teremos ocasião de explicar melhor esse ponto e mostrar que a restrição imposta aos pares que podem tomar parte do domínio modal conduz inevitavelmente à falsificabilidade do esquema da instanciação.

Vejamos, agora, em que condições o esquema da substituição vale. Obviamente, se a variável de quantificação não ocorrer no escopo de operadores modais, vale a substituição, visto que, nesse caso, a relação de satisfação depende apenas dos valores referenciais da variável. De forma mais rigorosa, PROPOSIÇÃO 1.12 Sejam s e $\bar{s}$ duas sequências k-variantes, tais que $s^*(t) = \bar{s}^*(x)$. Temos, então, que M , i,s sat $A(x/t)$ se e somente se M ,i,$\bar{s}$ sat A.

Por outro lado, se t for uma variável ou um nome, o par $\langle s^*(t), t^{(s)} \rangle$ pertence, necessariamente, ao domínio modal de A_i. Portanto, qualquer fórmula da forma

$$(x)A \rightarrow A\,(x/t)$$

é verdadeira em M com respeito ao índice i, desde que ou t seja um nome ou uma variável ou, ainda, se x não ocorrer livre no escopo de operadores modais.

Determinamos, assim, em que medida a Semântica Nominativa é uma extensão conservativa da Semântica Clássica. Pois, lembremos, os esquemas clássicos acima considerados formam um conjunto completo de postulados para a Lógica Quantificacional Clássica (cf., p.e., Mendelson,1963).

Antes de passarmos à análise do comportamento dos operadores modais, observemos que a falsificabilidade do esquema da instanciação em S.N. dá a essa semântica uma peculiaridade que, ao que sabemos, nenhuma outra semântica existente na literatura possui . Pois, em todas as lógicas (semânticas) que encontramos na literatura, se for possível falsificar uma fórmula da forma (x)A (onde A é uma fórmula da linguagem correspondente à lógica considerada), então é possível falsificar A(x/a), se a for uma constante nova (i.e., que não ocorra em A). No entanto, na Semântica Nominativa, embora seja possível, como vimos, falsificar, por exemplo,

$$(y)((x)(Px \rightarrow \Box Qx) \rightarrow (Pfy \rightarrow \Box Qfy))$$

não podemos falsificar

$$((x)(Px \rightarrow \Box Qx) \rightarrow (Pfy \rightarrow \Box Qfy))(y/a)$$

1.4 A Semântica Nominativa e os operadores modais. Do ponto de vista dos operadores modais, uma consequência das proposições anteriores que vale a pena ressaltar é o fato de que esses operadores recebem, na Semântica Nominativa, quando aplicados a sentenças, os seus significados usuais na Semântica de Mundos Possíveis. Ou seja, se A for uma sentença, então

(i) $M, i \models \Box A$ sse $M, j \models A$, para todo j em I, tal que i R j; e

(ii) $M, i \models \Diamond A$ sse $M, j \models A$, para algum j, tal que i R j.

Consequentemente, em S.N., valem as correlações, usuais na Lógica Modal, entre certas propriedades de relações binárias e certos esquemas modais, desde que instanciemos esses esquemas por sentenças. Em particular, se N = I e A for uma sentença, temos que:

(i) se R for reflexiva, $M, j \models \Box A \rightarrow A$;

(ii) se R for transitiva, $M, j \models \Box A \rightarrow \Box\Box A$;

(iii) se R for simétrica, $M, j \models A \rightarrow \Box\Diamond A$

(iv) se R for euclidiana $M, j \models \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

para qualquer j em I (cf., por exemplo, Chellas,1980,pp69ss)

Facilmente se demonstra que (i) vale mesmo que A seja uma fórmula aberta. No entanto, o mesmo não ocorre com os demais ítens, como mostraremos a seguir.

Para simplificar, suponhamos que A seja uma fórmula clássica contendo apenas a variável x livre. Desse modo, se M satisfizer às seguintes condições:

(a) i R i e para qualquer objeto (e existe pelo menos um) que satisfaz A em A_i, não é nomeado;

(b) para todo j diferente de i, tal que i R j (e há pelo menos um j) e, para qualquer nome a, $M, j \models A(x/a)$, então nem $A \rightarrow \Box\Diamond A$, nem $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ são verdadeiras em $\mathcal{M}$ com respeito a i, ainda que $\mathcal{R}$ seja, respectivamente, simétrica ou euclidiana. Ademais, se R for simétrica, então $\Box\sim A \rightarrow \Box\Box\sim A$ também não é verdadeira em $\mathcal{M}$ e i, mesmo que R seja transitiva.

Portanto, como era de se esperar, a peculiaridade de S.N. face as versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis reside, propriamente, na noção de satisfação para fórmulas modais abertas e, nessa medida, na interpretação dos quantificadores cujas variáveis de quantificação ocorrem livres no escopo de operador modal.

A proposição seguinte mostra exatamente que tais quantificadores recebem, em S.N., uma dupla interpretação: referencial com respeito a um dado mundo e substitucional, em certo sentido, nos demais mundos acessíveis.

PROPOSIÇÃO 1.13. $M, i \models \Box A$ se e somente se $i \in N$ e valem as condições seguintes:

(a) se i R i, então $M, i \models A$;

(b) para todo $j \neq i$, tal que i R j e para toda instância A' de A, $M, j \models A'$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência das definições e proposições anteriores, se levarmos em conta que toda instância de A é uma s-instância de A, para alguma sequência s em D_{A_i} adequada (a saber, a sequência constituída pelos pares formados pelas denotações dos nomes e os próprios nomes empregados na formação da instância).

Portanto, em particular, se A for uma fórmula clássica cuja única variável livre é x, então $(Ex)\Box A$ é verdadeira em M com respeito a i sse i for um índice normal e estiverem satisfeitas as condições:

(a) se i R i, então $M, i \models (Ex)A$; e

(b) existe um nome a, tal que, para todo $j \neq i$, tal que i R j, $M, j \models A(x/a)$.

Ou seja, uma vez que os quantificadores em contextos clássicos recebem, aqui, a interpretação puramente referencial, podemos dizer que em S.N. a quantificação através de operadores modais recebe a interpretação mista desejada.

Essa característica da interpretação dos quantificadores implica, em particular, na possibilidade de falsificarmos o esquema de Barcan (fórmula de Barcan):

(BF) $(x) \Box A \to \Box (x)A$,

Pois, como mostra a Proposição 1.13, para que uma dada instância desse esquema seja falsa em $\mathcal{M}$ com respeito a i é suficiente que $\mathcal{M}$ satisfaça às seguintes condições:

(a) se i R i, então $\mathcal{M}, i \models (x)A$

(b) i é normal;

(c) para todo j em I, tal que i R j, $\mathcal{M}, j \models A'$, para qualquer instância A' de A ; e, finalmente,

(d) existe $j \neq i$, tal que i R j e $\mathcal{M}$,j,s não sat A, para alguma sequência s em D_{A_j}.

Duas observações interessantes podem ser feitas acerca da falsificabilidade de (BF) na Semântica Nominativa. Em primeiro lugar, observemos que os requisitos (a),(b),(c) e(d), acima, podem ser satisfeitos por estruturas modais cujas rela ções de acessibilidade são relações de equivalência. Ora, como (BF) é um teorema das extensões usuais, para a Lógica Quantificacional, do sistema S5 de Lewis, os postulados desse sistema não podem ser todos eles, simultaneamente, verdadeiros em qualquer estrutura modal cuja relação de acessibilidade é de equivalência. Com efeito, como vimos, o postulado característico de S5 ($\Diamond A \to \Box \Diamond A$) não vale, quando A é uma fórmula aberta.

Em segundo lugar, a não validade de (BF) implica na impossibilidade de se demonstrar que todo conjunto consistente de fórmulas tem um modelo no qual toda estrutura clássica é completa (i.e., na qual todos os objetos são nomeados). Essa é uma característica peculiar de S.N., mas de toda versão

não apenas

da Semântica de Mundos Possíveis na qual o Postulado da Substituição vale (ao menos, quando o termo de instanciação, que substitui a variável, é um nome), mas na qual (BF) não vale. Pois, nesse caso, teremos que, para qualquer nome a,

$$(x)\Box A \rightarrow \Box A(x/a)$$

é verdadeira. Por conseguinte, se A for uma fórmula clássica,

$$(x)\Box A \rightarrow \Box (x)(x=a \rightarrow A)$$

é verdadeira. Consequentemente, para que $\Diamond(Ex){\sim}A$ seja verdadeira é necessário que exista pelo menos uma estrutura clássica incompleta.

Essas observações bastam, por enquanto, No terceiro capítulo, quando tivermos já introduzido formalmente as noções de validade e de lógica modal, retornaremos a essa análise dos operadores modais. Vejamos, agora, como se comporta o símbolo clássico de identidade, quando em contextos modais.

1.5 <u>A identidade na Semântica Nominativa</u>. Como era de se esperar, tendo em vista a motivação intuitiva de S.N., o símbolo para identidade expressa aqui uma relação meramente contingente. Vale dizer, em S.N. podemos falsificar o postulado

(I.N.) $\qquad (x)(y)(x=y \rightarrow \Box x=y)$

tambem em índices normais. Pois, como facilmente se demonstra, (IN) é falsa em M com respeito a i se existir um objeto em A_i e existirem dois nomes distintos a e b na linguagem L, tais que:

(a) tanto o par $\langle a, a\rangle$, quanto o par $\langle a, b\rangle$ pertencem ao domínio modal de A_i; e

(b) para algum $j \neq i$, tal que i R j, a_{A_j} não é b_{A_j}.

Por outro lado, (IN) é verdadeira em um índice i normal se todo objeto do universo de A_i tiver exatamente um único nome. Pois, seja s uma sequência no domínio modal de A_i e suponhamos que todo objeto no universo de A_i tem exatamente um nome (i.e., para todo a em A_i, existe um e apenas um nome a, tal que α é a_{A_i}). Assim, $s^*(x)$ é $(x^{(s)})_{A_i}$ e $s^*(y)$ é $(y^{(s)})_{A_i}$. Portanto, se $s^*(x)=s^*(y)$, a s-instância de x é idêntica à de y; consequentemente, M, i, s sat $x=y \rightarrow \Box x=y$, se i for normal.

No entanto, alguns autores (cf.,p.e., Quine,1962) entendem que a relação de identidade pressupõe a substitutividade em todos os contextos. Ou seja, uma fórmula A contendo exatamente as variáveis livres x e y,distintas, expressaria a relação de identidade se, para quaisquer termos t e u e qualquer fórmula B da linguagem, tivermos:

(i) $A(t,t)$ (reflexividade)

(ii) $A(t,u) \rightarrow (B(x/t) \leftrightarrow B(x/u))$ (sbstitutividade de idênticos)

Nesse sentido, como de (i) e (ii), pela regra de Goedel e generalização Universal, podemos deduzir (IN), devemos reconhecer que o símbolo clássico de identidade não é interpretado,na Semântica Nominativa,pela relação de identidade. Observemos, no entanto, que ,quando consideramos bases modais quaisquer (eventualmente, bases cujas relações de acessibilidade são intransitivas), nenhuma fórmula de uma linguagem modal de primeira ordem contendo o símbolo de igualdade pode expressar a relação de identidade, no sentido acima, se o símbolo de igualdade for interpretado por uma relação contingente. Neste caso, podemos expressar apenas uma relação mais fraca que, para cada número natural n, garante a substitutividade no escopo de, no máximo, n ocorrências de operadores modais. Vejamos, então, como podemos expressar tais relações intermediárias de identidade, as quais denominaremos , para $n \geq 0$, relação de identidade de grâu n.

DEFINIÇÃO 1.14. Seja $n \geqslant 0$ e sejam t e u termos quaisquer de L. A fórmula $\boxed{n}\, t=u$ é definida por indução em n pelas cláusulas seguintes:

(i) $\boxed{n}\ t=u$ é $t=u$, se $n=0$;

(ii) $\boxed{n}\ t=u$ é $t=u \ \& \ (\Box(Ex_0)(x_0=x_0) \rightarrow \Box\boxed{m}\ t=u)$, se $n=m+1$

No restante desse trabalho, empregaremos 'T' para indicar a fórmula (sentença) $(Ex_0)(x_0=x_0)$. Ademais, nas asserções e proposições que apresentaremos a seguir, empregaremos os seguintes conjuntos:

(I) $I^i_{(n)} = \{i\} \cup \{j \in I$: existe uma sequência $i=j_1,\ldots, j_n=j$, tal que, para $1 \leq k < n$, $j_k \in N$ e $j_k\ R\ j_{k+1}\}$

(ii) $I^{(i)}_{(n)} = \{j \in I$: existe uma sequência $i=j_1,\ldots,j_n=j$, tal que, para $1 \leq k < n$, $j_k \in N$ e $j_k\ R\ j_{k+1}$ e existe $1 \leq m \leq n$, tal que $j_m \neq i\}$

(iii) $I^i_n = \bigcup_{m \leq n} I^i_{(m)}$

(iv) $I^{(i)}_n = \bigcup_{m \leq n} I^{(i)}_m$

Observemos que, enquanto necessariamente i pertence a I^i_n, i pode não pertencer a $I^{(i)}_n$ (ele pertencerá se e somente se existir um $j \neq i$, tal que $i\ R\ j$ e $i \in I^j_{n-1}$).

Asserção 1. Para qualquer $n \geq 0$, qualquer j em I e quaisquer nomes a e b de L, $M, j \models \boxed{n}\, a=b$ sse $M, \ell' \models a=b$, para qualquer ℓ em I^j_n.

Demonstração. Por indução em n. Se $n=0$, então $I^j_n = I^j_{(n)} = \{j\}$ e $\boxed{n}\, a=b$ é $a=b$: portanto, a asserção é trivial. Se $n = m+1$ então $\boxed{n}\, a=b$ é $a=b \mathbin{\&} (\Box T \rightarrow \Box \boxed{m}\, a=b)$. Devemos, então, considerar dois casos possíveis.

Caso 1. j não é normal. Nesse caso, I^j_n é j e, como $M, j \not\models \Box T$, $M, j \models \Box T \rightarrow \Box \boxed{m}\, a=b$. Portanto, trivialmente, $M, j \models \boxed{n}\, a=b$ sse $M, \ell \models a=b$, para qualquer ℓ em I^j_n.

Caso 2. j é normal. Neste caso, $M, j \models \Box T$ e $I^j_n = \bigcup \{ I^\ell_m : jR\ell \} \cup \{ j \}$. Ora, por hipótese de indução, para qualquer ℓ em I,

$$(*) \qquad M, \ell \models \boxed{m}\, a=b \text{ sse } M, \ell' \models a=b, \text{ para todo } \ell' \text{ em } I^\ell_m$$

Portanto,

$$M, j \models a=b \mathbin{\&} \Box \boxed{m}\, a=b \text{ sse } M, \ell \models a=b \text{ , para todo } \ell \text{ em } I^j_n,$$

visto que $M, j \models \Box \boxed{m}\, a=b$ sse $M, \ell \models \boxed{m}\, a=b$, para todo ℓ, tal que $j R \ell$.

PROPOSIÇÃO 1.15 Para qualquer $n \geq 0$, quaisquer termos t e u de L (nomes ou termos abertos), e qualquer sequência s em D_{A_i}, M, i, s sat n $t=u$ se e somente se $s^*(t) \doteq s^*(u)$ e, para qualquer j em $I^{(i)}_n$, $(t^{(s)})_{A_j}$ é idêntico a $(u^{(s)})_{A_j}$.

DEMONSTRAÇÃO. Por indução em n. Se $n=0$, então a proposição é trivial ; pois, nesse caso, $I^{(i)}_n$ é $\emptyset$. Suponhamos, então, que $n=m+1$. Podemos supor, sem perdas, que i é normal (pois, caso contrário, a proposição é trivial). Cabe, portanto, provar que $\mathcal{M}$,i, s sat t=u & $\Box$ $\boxed{m}$ t=u se e somente se s*(t)=s*(u) e, para qualquer j em $I_n^{(i)}$, $(t^{(s)})_{A_j}$ é idêntico a $(u^{(s)})_{A_j}$. Ora, pela hipótese de indução, $\mathcal{M}$,i, s sat $\boxed{m}$ t=u sse s*(t)= s*(u) e para qualquer j em $I_n^{(i)}$, $\mathcal{M}$,j $\models$ $(t=u)^{(s)}$. E, pela asserção anterior, para qualquer j em I, $\mathcal{M}$,j $\models$ $\boxed{m}$ $(t^{(s)}=u^{(s)})$ se e somente se $\mathcal{M}$, $\ell \models t^{(s)}=u^{(s)}$, para qualquer ℓ em I_n^j . Ora, como $I_n^{(i)}$ é a união dos I_m^j , para j, tal que i R j, decorre de todos esses fatos o resultado desejado.

Graças a essa última proposição, podemos provar, de maneira análoga à usual em Semântica de Mundos Possiveis, por indução na complexidade das fórmulas a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.16 Sejam t e u termos singulares quaisquer, A uma fórmula de L na qual toda ocorrência livre da variável x se dá no escopo de no máximo n ocorrências distintas de ocorrências do operador modal. Se $\mathcal{M}$,i, s sat n t=u, então vale que:

$\mathcal{M}$, i, s sat A(x/t) sse ,i,s sat A(x/u).

Futuramente, ao apresentarmos um sistema axiomático adequado para S.N., apresentaremos uma prova sintática desse mesmo resultado.

CAPÍTULO 2

SEMÂNTICA NOMINATIVA E REFERÊNCIA.

2.1 Introdução.No capítulo anterior, vimos que a Semântiva Nominativa é uma extensão, por um lado, da Semântica Clássica e, por outro, da Semântica de Mundos Possíveis para as linguagens modais proposicionais. Nessa medida, ela aparece como uma alternativa às versões da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens modais de primeira ordem, existentes na literatura (cf.,p.e., Kripke,1959 e 1963b: Gabbay,1976: Bowen,1979). Vimos , também, que a peculiaridade de S.N. face a essas versões, reside, em última instância, na maneira como são interpretados os quantificadores cujas variáveis ocorrem livres no escopo de operadores modais(quantificação através de operadores modais).

Naquele capítulo, insistimos na idéia de que a quantificação através de mundos — a interpretação, na Semântica de Mundos Possíveis, da quantificação através de operadores modais — é entendida em S.N. de uma maneira dupla: referencial com respeito a um dado mundo (se este for acessível a si m esmo) e substitucional, com respeito aos demais (distintos daquele) mundos acessíveis. E, desse modo, S.N. atribui às variáveis livres, quando em contextos modais, uma dupla função: remeter a objetos de um universo clássico e marcar lugares para os nomes disponíveis na linguagem.

Porém, devemos ter certo cuidado com essa caracterização preliminar da quantificação através de mundos na Semântica Nominativa. Pois, conforme o significado que emprestamos à noção de interpretação substitucional, podemos ser levados à falsa idéia de que, para darmos conta da quantificação através operadores modais, não precisamos considerar outros objetos extra-linguísticos, além dos pares no domínio modal de uma estrutura clássica.

Sem querer entrar na polêmica acerca do que se deve entender por uma interpretação substitucional dos quantificadores (cf. Barcan,1972; Kripke,1976; Quine,1984,p.e.), o valor de verdade de uma fórmula geral (universal ou existencial) depender apenas dos valores de suas instâncias (i.e., daquelas fórmulas fechadas—sentenças— que pudermos obter da fórmula geral, ao eliminarmos o quantificador e substituirmos a variável de quantificação por termos de uma classe previamente designada para esse fim).

Uma vez que essa caracterização não pressupõe o modo como o valor de uma instância deva ser determinado, nem a natureza dos termos que formam a classe de substituição, ficam incluídas nessa caracterização aquelas interpretações nas quais, como substituendos são nomes na linguagem, os valores de verdade de instâncias de uma fórmula geral dependem das denotações dos nomes (cf., p.e., Barcan,1962).

Com efeito, esse é o caso da Semântica Nominativa, quando consideramos a quantificação através de mundos distintos. Pois, como mostramos na Proposição 1.13, a verdade de uma generalização de uma fórmula modal (i.e., de uma sentença da forma $Q_1 \ldots Q_n$ § B, onde $Q_1, \ldots, Q_n$ é uma sequência qualquer de quantificadores (universais e/ou existenciais) e § é um operador modal), em um índice de uma estrutura modal, depende, no tocante aos demais índices dessa estrutura, apenas dos valores de verdade das instâncias da fórmula no escopo do operador modal. No entanto, os valores de verdade de uma sentença, contendo ocorrências de nomes, são determinados considerando-se as denotações desses nomes nas correspondentes estruturas clássicas.

Portanto, é apenas no sentido explicado acima que podemos dizer que a interpretação da quantificação através de operadores modais, proposta por S.N., é uma interpretação mista: referencial com respeito a um dado mundo e substitucional com respeito aos demais mundos acessíveis.

Podemos observar que, embora em uma primeira abordagem as variáve pareçam simplesmente desempenhar o duplo papel de remeter a objetos de um universo clássico e marcar lugares para nomes disponíveis na linguagem, uma análise mais profunda revela que uma ocorrência livre de uma variável no escopo de um operador modal remete a uma família de objetos tomados cada um deles de um estrutura clássica.

Com efeito, quando c onsideramos uma estrutura modal (consequentemente, uma família de estruturas clássicas), cada sequência no domínio modal de cada uma das estruturas clássicas consideradas permite associar a cada variável, por um lado, um dado objeto do universo da estrutura clássica e, por outro, uma família de objetos tomados nas demais estruturas clássicas consideradas na estrutura modal (a saber, as denoções dos nomes que constituem as segundas ordenadas dos pares no domínio modal).

Portanto, a Semântica Nominativa, tal como as versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis para linguagems modais de primeira ordem, exige que consideremos, simultaneamente, objetos em vários mundos possíveis (em várias estruturas clássicas). Nela, também, os termos singulares, quando em contextos modais, remetem a uma família de objetos, cada um deles é membro do universo de uma das estruturas clássicas consideradas.

Nesse sentido, a originalidade de S.N. deve ser procurada no modo, por ela proposto, para constituirmos as famílias de objetos clássicos que constituem os possíveis valores de termos singulares em contextos modais. Ou seja, formulando de maneira mais intuitiva, a particularidade de S.N., no contexto da Semântica de Mundos Possíveis, deve ser procurada, essencialmente, na resposta que ela propõe à questão:

Qual a natureza dos "objetos" a que um termo singular pode fazer alusão, quando em contextos modais?

No presente capítulo procuraremos, justamente, explicitar a resposta subjacente a S.N. para tal questão. A obtenção de uma maior clareza acerca dos verdadeiros valores possíveis de termos singulares em contextos modais, além de ampliar a compreensão conceitual de S.N., ajudará na obtenção de vários resultados lógico-matemáticos fundamentais. Para tal, forneceremos inicialmente uma caracterização geral da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens modais de primeira ordem que, além de compreender as principais versões existentes na literatura especializada, permite compreender melhor as dificuldades envolvidas em qualquer tentativa de fornecer uma semântica referencial-- i.e, na qual os termos singulares e a quantificação são entendidos como remetendo a domínios de objetos-- tendo, como ponto de partida, a noção de base modal.

2.2 Semântica de Mundos Possíveis e Funções de Escolha. Inspirados nas idéias expostas por Hintikka em seu artigo Semantics for Propositional Attitudes, procuraremos fornecer uma caracterização geral, abstrata, da SEmântica de Mundos Possíveis para linguagens modais de primeira ordem. Tal como no capítulo anterior, consideraremos $\mathcal{B} = \langle I, R, N \rangle$ uma base modal, L uma linguagem modal de primeira ordem, $M = \langle \mathcal{B}, (A_i)_{i \in I} \rangle$ uma estrutura modal para L e i um elemento de I.

Determinemos, inicialmente, quais os índices de uma base modal são efetivamente relevantes para a caracterização dos conceitos semânticos fundamentais, quando consideramos um dado índice da base. Aproveitemos a ocasião, para definirmos de maneira rigorosa todas as noções referentes a base modal que serão úteis futuramente.

Para $n \geqslant 0$, definimos a relação R^n da maneira usual, a saber,

(i) $R^0 = \{ \langle i,j \rangle \in I^2 : i = j \}$

(ii) $R^{n+1} := \{ \langle i,j \rangle \in I^2$: ou i = j e i não é normal ou existe j' em N, tal que i R^n j' e j' R j$\}$

.

Podemos provar, facilmente, a seguinte asserção

Asserção: Para quaisquer i e j em I e qualquer inteiro positivo $n \geqslant 1$, i R^n j se e somente se ou j=i e $i \notin N$ ou existe uma sequência $i=j_0, \ldots, j_n=j$, tal que, para $1 \leqslant k < n$, j_k é normal e $j_k = j_{k+1}$ ou $j_k \; R \; j_{k+1}$.

Além do mais, facilmente mostramos que os conjuntos I_n^i e $I_n^{(i)}$, anteriormente definidos (cf., acima, p.21) são, respectivamente,

$$\{ j \in I : i \; R^n \; j \}$$

e

$$\{ j \in I : i R^n j \text{ e existe } j' \neq i, \text{ tal que } i \; R^n \; j' \text{ e } j' \; R^n \; j \}$$

No que se segue, diremos que um índice j é <u>indiretamente acessível</u> a i se, existe um $n \geq 1$, tal que $j \in I^{(i)}_{(n)}$.

A partir da relação R^n, podemos definir duas outras noções importantes.

Como é usual, a <u>base modal gerada por i a partir de $\mathcal{B}$</u>, denotada por $\mathcal{B}^{(i)}$, é

$$\mathcal{B}^{(i)}_{\omega} = \langle I^{i}_{\omega} , R \cap (I^{i})^2, N \cap I^{i} \rangle$$

onde $I^{i}_{\omega} = \bigcup_{n \geq 0} I^{i}_{(n)}$. Ao passo que, a <u>base modal gerada por i a partir de $\mathcal{B}$ de grau n</u> (onde $n \geq 0$) é o terno

$$\langle I^{i}_{(n)} , R \cap (I^{i}_{(n)})^2 , N \cap I^{i}_{(n)} \rangle$$

De posse dessas noções, podemos iniciar a nossa procura de uma caracterização abstrata de uma semântica para linguagens modais de primeira ordem, tendo como ponto de partida a noção de base modal (i.e., uma semântica que estenda a Semântica de Mundos Possíveis para a lógica modal proposicional).

Observemos, inicialmente, que para definirmos uma relação de satisfação (consequentemente, uma noção de verdade), que não torne as formulas modais equivalentes a fórmulas clássicas, devemos ser capazes de atribuir valores, simultaneamente, em todos os índices relevantes, às variáveis da linguagem; ou seja, cada variável deve poder assumir, simultaneamente, em cada índice da base modal relevante, um objeto como valor. Podemos considerar, então, o seguinte conceito:

DEFINIÇÃO 2.1 Seja i um índice em I. Um <u>domínio de escolha em i</u> para M é um conjunto não vazio C_i de funções de escolha (eventualmente funções parciais) na família $(A_j)_{j \in I^i}$.

Ou seja, um elemento de um domínio de escolha em i para M é uma função f, tal que, para qualquer j em I^i, $f(j)$, se estiver definido, é um elemento do universo da estrutura clássica cujo índice é j. Com o auxílio de tais funções de escolha, podemos definir u ma atribuição de valores aos termos singulares nos universos de todas as estruturas clássicas relevantes, de maneira análoga à clássica:

DEFINIÇÃO 2.2 Seja C_i um domínio de escolha em i para $\mathcal{M}$. Para cada sequência $F = \langle \delta_0, \ldots, \delta_n, \ldots \rangle$ de elementos de C_i, F^* é a função de $TERM_L \times I^i$ em $\bigcup_{j \in I^i} |A_j|$, tal que, para qualquer j em I^i,

(i) $F^*(x_k, j)$ é $\delta_k(j)$;

(ii) $F^*(f^n t_1 \ldots t_n, j)$ é $f^n_{A_j}(F^*(t_1, j), \ldots, F^*(t_n, j))$

Desse modo, se associarmos a cada j em I um domínio de escolha em j para $\mathcal{M}$, podemos definir, trivialmente, a noção de satisfação .

DEFINIÇÃO 2.3 Uma <u>estrutura modal generalizada</u>, G , <u>obtida de $\mathcal{M}$</u> é um par $\langle \mathcal{M}, (C_i)_{i \in I} \rangle$ no qual, para cada i em I, C_i é um domínio de escolha em i para $\mathcal{M}$.

Graças a essas definições, é trivial definir a noção de satisfação por uma sequência de funções de escolha em uma estrutura modal generalizada. Devemos, apenas, ter o cuidado de definir essa relação entre a estrutura G, um índice i uma sequência F deelementos do domínio de escolha em j para $\mathcal{M}$ (onde j é tal que $i \in I^j$). Em especial, teremos as seguintes cláusulas :

G ,i, F sat_r $\Box$A sse G,j , F sat_r A, para todo j em I, tal que i R j:

$\mathcal{M}$,i, F sat_r(x)A sse $\mathcal{M}$,j ,$\bar{F}$ sat_r A, para toda sequência $\bar{F}$ que difere de F ,no máximo, por atribuir ao índice de x um outro elemento de C_i.

Vemos, portanto, que uma semântica de mundos possíveis para linguagens modais de primeira ordem, a fim de dar conta da quantificação através de operadores modais, deve considerar como possíveis valores de variáveis funções de escolha na família das estruturas clássicas consideradas (mais precisamente, os objetos dos universos dessas estruturas clássicas que compõem a imagem das funções). Nessa medida, o domínio de escolha em um índice é o verdadeiro domínio de quantificação nesse índice (i.e., quando consideramos a relação de satisfação nesse índice).

As versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis, ao exigirem que as estruturas modais satisfaçam ao requisito de inclusão, consideram os domínios de escolha (de quantificação) como formados por funções constantes. E, assim, podemos subsumir essas versões ao esquema geral apresentado acima.

Por outro lado, se tivermos em mente a idéia de que o domínio de escolha em i com respeito a M é um subconjunto do universo da estrutura produto ($\prod A_j : j \in I^i$), podemos facilmente explicitar as dificuldades que o tratamento dos símbolos funcionais em linguagens modais acarretam. Os símbolos funcionais, mais precisamente, os termos singulares abertos complexos deverão receber valores, a fim de preservar as leis usuais da identidade, no fecho algébrico, segundo a estrutura produto, do domínio de escolha. Deste modo, em qualquer versão da Semântica de Mundos Possíveis para linguagens que contenham símbolos funcionais n-ários (com $n \geqslant 0$), na qual os domínios de escolha não são algebricamente fechados, poderemos falsificar ou o esquema da substituição ou alguma instância do esquema

$$\Box^m T \rightarrow \Box^m (y_1 = z_1 \;\&\; \ldots \;\&\; y_n = z_n \rightarrow f^n y_1 \ldots y_n = f^n z_1 \ldots z_n)$$

(onde $m \geqslant 0$). Este é o caso da Semântica Nominativa, na medida em que excluímos do domínio modal os pares cujas primeiras ordenadas são objetos nomeados, mas não pelos nomes que formam as segundas ordenadas, como veremos oportunamente. Porém essa não apenas a situação da semântica nossa; pois, na versão encontrada em Bowen,1979, o domínio da quantificação não é algebricamente fechado, uma vez que, enquanto os símbolos funcionais são interpretados como designadores não rígidos (i.e., expressam em mundos distintos, funções eventualmente diferentes), as variáveis assumem em todos os mundos os mesmos objetos como valores. Nessa versão, como em S.N., não vale o esquema da instanciação, embora erroneamente o autor o assuma, por crer a questão imediata.

Vemos, portanto, que de uma maneira geral, em uma Semântica de Mundos Possíveis, os termos singulares (variáveis, nomes e termos abertos complexos) assumem valores no fecho algébrico do domínio de escolha. Desse modo podemos denominar tal conjunto de domínio de referência em i com respeito a M e observarmos que esse é o conjunto:

$\{ \delta$: existe um termo t de L contendo exatamente n-variáveis livres distintas e existem $\delta_1, \ldots, \delta_n$ em A_i, tais que, para todo j em I^i, $\delta(j) = t_{A_j}(\delta_1(j), \ldots, \delta_n(j)) \}$

onde t_{A_j} pode ser, definido, da maneira usual, como a função n-ária em A_j que associa a uma n-upla $a_1, \ldots, a_n$ de objetos em A_j o valor de t para essa n-upla.

2.3 Semântica Nominativa e referência através de mundos. Como afirmamos antes, na Semântica Nominativa, tal como nas versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis, devemos considerar objetos em diferentes estruturas clássicas (mundos), posto que o conceito de satisfação pressupõe que os nomes na linguagem designem objetos em cada uma das estruturas clássicas consideradas. Nesse sentido, o domínio da quantificação através de mundos não é um domínio modal, mas constituído por famílias de objetos de universos clássicos.

Com efeito, as proposições 1.14 e 1.15, demonstradas na final do capítulo anterior, já apontam para essa observação. Pois, em conjunto, elas implicam que dois termos singulares t e u são intersubstituíveis, em todos os contextos, preservada a relação de satisfação, se e apenas se (i) ambos assumem o mesmo valor referencial e (ii) seus valores substitucionais denotam, em cada um dos mundos relevantes, um e o mesmo objeto. Portanto, não é necessário que os valores substitucionais dos termos com respeito a uma dada sequência sejam idênticos (isto é, sejam um e o mesmo nome); é suficiente que designem os mesmos objetos.

Porém, ao contrário das versões usuais, não podemos representar, de uma maneira geral, os valores de variáveis livres no escopo de operadores modais como funções de escolha em sub-famílias da família de estruturas clássicas consideradas em uma estrutura modal. Pois, por exemplo, se o índice i for indiretamente acessível a si mesmo, devmos considerar simultaneamente dois objetos de A_i, eventualmente distintos, para determinar a relação de satisfação em $\mathcal{M}$ e i, no tocante àquelas fórmulas modais que contém um número suficiente de iterações de operadores modais; ou seja, neste caso, devemos considerar tanto as primeiras ordenadas, como as den otações das segundas ordenadas dos pares no domínio modal de A_i.

Na Semântica Nominativa, portanto, os domínios de quantificação será constituídos por pares cujas primeiras ordenadas são objetos do universo de uma estrutura clássica e as segundas, funções de escolha em uma família de universos de estruturas clássicas. Ou seja, quando consideramos a relação de satisfação, por exemplo, em M com respeito a i, as variáveis devem poder assumir como valores elementos do produto cartesiano do universo de A_i pelo conjunto das funções de escolha na família

$$(|A_j|)_{j \in I(i)}$$

Obviamente, o conjunto acima pode ser visto como um conjunto de funções de escolha em uma família de universos clássicos, desde que consideremos um conjunto de índices adequado (cf. Apêndice II).

Sejamos mais precisos na caracterização desses domínios. Para tal devemos ter em mente alguns fatos acerca das semânticas de mundos possíveis e, em particular, de S.N. Em primeiro lugar, como facilmente podemos perceber, em uma semântica de mundos possíveis para linguagens modais quantificacionais, quando consideramos uma fórmula modal específica, os possíveis valores das variáveis livres nesta fórmula dependem do grau de modalização da própria fórmula, mais precisamente, do grau de modalização das ocorrências livres de variáveis, visto que o conjunto dos índices da base modal efetivamente relevantes é função do grau de modalização da fórmula considerada. Em segundo lugar, devemos nos lembrar que, na Semântica Nominativa, consideramos apenas as funções de escolha induzidas pelos nomes disponíveis na linguagem, haja vista a cláusula substitucional que define a quantificação através de mundos distintos. E, por último, devemos levar em conta o fato de que a definição que demos de domínio modal exclui deste eventuais pares cujas primeiras ordenadas são objetos nomeados, porém, as segundas não são nomes deles.

Assim, para especificarmos de forma precisa e clara os verdadeiros domínios de quantificação considerados em S.N., devemos introduzir várias noções auxiliares.

O grau de modalização de uma fórmula é definido, da maneira usual, pelas seguintes cláusulas indutivas:

(i) $g(A) = 0$, se A for atômica;

(ii) $g(\sim A) = g(A)$;

(iii) $g(A \,\&\, B) = \max\{g(A), g(B)\}$

(iv) $g(\ \ A) = g(A)+1$;

(v) $g(\ (x)A\ ) = g(A)$.

Já o grau de modalização de uma variável x em uma fórmula A, $g_A(x)$, é determinado pelas cláusulas:

(i) $g_A(x) = 0$, se A for atômica;

(ii) $g_{\sim A}(x) = g_A(x)$;

(iii) $g_{A \,\&\, B}(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$;

(iv) $g_{\Box A}(x) = \begin{cases} g_A(x) & \text{, se } x \text{ não ocorre livre em } A; \\ g_A(x)+1 & \text{, de outro modo;} \end{cases}$

(v) $g_{(y)A}(x) = \begin{cases} g_A(x) & \text{, se } x \text{ for diferente de } y; \\ 0 & \text{, de outro modo.} \end{cases}$

No que se segue, denotaremos por

$$A^N$$

a sub-estrutura da estrutura clássica A cujo universo é o conjunto

$$\{a_A \in |A| : a \in NOM_L\}$$

Estas noções auxiliares permitem caracterizar de maneira precisa os verdadeiros domínios de quantificação na Semântica Nominativa; ou seja, determinar os objetos (famílias de objetos de estruturas clássicas) que devem ser tomados como eventuais valores de variáveis livres e dos quais podemos afirmar que satisfazem (ou não) uma fórmula no índice i com respeito à estrutura modal M. Observemos, inicialmente, que a natureza desses objetos depende do grau de modalização das variáveis livres na fórmula, visto que a relação de satisfação, no tocante a uma fórmula de grau modal n, depende apenas dos índices em I_n^i. Ou seja, para cada número natural n, podemos definir o domínio de quantificação em i com respeito a M de grau n, em símbolos,

$$_nQ_i^M$$

como o conjunto daquelas famílias de objetos clássicos que devem ser levados em consideração para caracterizar a relação de satisfação em i, com respeito a M no tocante às fórmulas de grau de modalização menor ou igual a n. Vale dizer, para n=0,

$$_0Q_i^M = |A_i|$$

e para n estritamente maior do que 0, $_nQ_i^M$ é o conjunto dos pares da forma

$$\langle \alpha, (a_{A_j})_{j \in I_n^{(i)}} \rangle$$

onde $\langle \alpha, a \rangle$ pertence ao domínio modal de A_i.

Portanto, na Semântica Nominativa, as variáveis devem assumir valores no conjunto

$$Q_i^M = {}_\omega Q_i^M = \bigcup_{n \in \omega} ({}_nQ_i^M)$$

para que seja possível determinar a relação de satisfação em i com respeito a M, ou seja, este conjunto é o verdadeiro domínio de quantificação em i com respeito a M.

Além disso, na SEmântica Nominativa os nomes disponíveis na linguagem fazem referência também a elementos de um domínio de quantificacão, tal como caracterizamos acima, visto que para qualquer estrutura clássica A e qualquer nome a, o par a_A, a pertence ao domínio modal de A. Todavia, os termos singulares complexos e abertos remetem a elementos que, eventualmente, não pertencem ao domínio de quantificação, visto que este domínio pode não ser fechado pelas operações definíveis nele com o auxílio dos símbolos funcionais disponíveis na linguagem. Vale dizer, os termos singulares (variáveis, nomes e termos singulares complexos abertos) devem assumir valores, quando consideramos a relação de satisfação em i com respeito a *M*, ou no domínio da estrutura clássica A_i ou, então, no conjunto dos pares da forma:

$$\langle t_{A_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (t_{A_j}(a_{1_{A_j}}, \ldots, a_{n_{A_j}}) \; j \in I_{\bar{m}}^{(i)} \rangle$$

onde t é um termo de L contendo ocorrências de exatamente n variáveis livres, m é um inteiro positivo e, para $1 \leqslant k \leqslant n$, o par $\langle \alpha_k , a_k \rangle$ pertence ao domínio modal de A_i

O verdadeiro <u>domínio de referência em i com respeito a *M*</u>, que podemos denotar por

$$D_i^M$$

é o fecho algébrico (num sentido facilmente caracterizável) do domínio de quantificação em i com respeito a *M*.

Esta caracterização dos domínios de quantificação na Semântica Nominativa responde, pois, à questão, posta no início do presente capítulo, acerca da natureza dos objetos a que os termos singulares fazem alusão, quando interpretamos as linguagens modais segundo os cânones determinados na Semântica Nominativa.

Em resumo, podemos afirmar que o domínio modal de uma estrutura clássica é apenas um expediente para a constituição, ao imergirmos a estrutura clássica em uma estrutura modal, do verdadeiro domínio de referência. Este, então, é formado, por um lado, por objetos de universos clássicos e, por outro, de famílias de objetos <u>homônimos</u>. Nesta medida, a relação de homonímia desempenha na Semântica Nominativa um papel análogo ao que alguns autores exigem das funções de identificação através de mundos nas versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis (cf., p.e., <u>Hintikka</u>,1969 e <u>Chisholm</u>,1967).

Essa caracterização dos domínios de quantificação pode ser confirmada, de um ponto de vista lógico-matemático, pela análise dos morfismos entre estruturas modais que preservam a satisfatibilidade de conjuntos de fórmulas, como mostraremos a seguir. Antes, porém, aproveitamos essa caracterização dos domínios de quantificação para mostrar em que sentido a própria noção de domínio modal implica na possibilidade de falsificar alguma instância de um postulado válido.

Como vimos antes, para verificarmos todas as instâncias do postulado

$$\square^n T \rightarrow \square^n (y_1 = z_1 \; \& \; \ldots \; y_m = z_m \rightarrow f^m y_1 \ldots y_m = f^m z_1 \ldots z_m)$$

é necessário que os termos singulares complexos abertos assumam valores nos fechos algébricos dos domínios de quantificação (isto é, nos domínios de referência). Por outro lado, para que não seja possível falsificar uma instância do postulado

$$(x)A \rightarrow A(x/t)$$

é necessário que os domínios de quantificação sejam idênticos aos domínios de referência. Ora, na Semântica Nominativa, como vimos, os domínios de quantificação são induzidos por domínios modais. Facilmente percebemos que a restrição imposta na definição de um domínio modal (isto é, a exclusão dos pares eventualmente existentes cujas primeiras ordenadas são objetos nomeados, mas cujas segundas não são nomes destes objetos) torna possível que um domínio de quantificação seja um subconjunto próprio do domínio de referência correspondente.

2.4 Estruturas modais elementarmente equivalentes e morfismos.
A análise precedente, acerca dos verdadeiros domínios de quantificação através de mundos distintos, permite perceber as condições que devemos impor a duas estruturas modais distintas para que elas verifiquem (e/ou satisfaçam) às mesmas fórmulas de uma dada linguagem.

Para determinarmos, de maneira geral, um conjunto de condições suficientes para que duas estruturas modais satisfaçam às mesmas fórmulas, devemos considerar diversas noções auxiliares mais ou menos usuais.

No que se segue, por simplicidade, empregaremos um mesmo símbolo para designar tanto uma linguagem modal de primeira ordem, como a linguagem clássica que lhe deu origem.

Se Γ é um conjunto de fórmulas, então designaremos por $L(\Gamma)$ a linguagem (clássica ou modal, dependendo do contexto) cujos símbolos não lógicos são apenas os que ocorrem em fórmulas de .

O grau de modalização de um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem modal L é o $\max\{g(A): A \in \Gamma\}$, no conjunto $\omega \cup \{\omega\}$

Um p-morfismo φ de uma base modal $\mathcal{B} = \langle I, R, N \rangle$ na base modal $\mathcal{B}' = \langle I', R', N' \rangle$ é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$ que satisfaz à seguinte condição adicional:

para qualquer i em I e qualquer j' em I', se $\varphi(i)\ R'\ j'$, então existe j em I, tal que $i\ R\ j$ e $\varphi(j) = j'$

(cf., p.e., Segerberger & Bull, 1984; Lemon, 1977, entre outros).

Se $\mathcal{M} = \langle \mathcal{B}, (A_i)_{i \in I} \rangle$ é uma estrutura modal, então o esqueleto de $\mathcal{M}$ (em símbolos, $sk(\mathcal{M})$) é o conjunto

$$\bigcup_{i \in I} (|A_i|) \cup I$$

Nas definições seguintes, consideraremos uma linguagem modal L, um conjunto Γ de fórmulas de L cujo grau de modalização é α, uma extensão simples L' de L, duas bases modais $\mathcal{B} = \langle I, R, N \rangle$ e $\mathcal{B}' = \langle I', R', N' \rangle$ e, finalmente, duas estruturas modais $\mathcal{M} = \langle \mathcal{B}, (A_i)_{i \in I} \rangle$ e $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{B}', (A'_i)_{i \in I} \rangle$ para, respectivamente L e L'.

DEFINIÇÃO 2.6 Uma função $\varphi: sk(M) \longrightarrow sk(M')$ é um $\underline{\Gamma\text{-i-}}$ proto-morfismo de M em M' se as seguintes condições estão satisfeitas:

(i) $\varphi \upharpoonright I_\alpha^i$ é um p-morfismo de $B_\alpha^{(i)}$ em $B'^{(\varphi(i))}_\alpha$;

(ii) para qualquer j em I^i, $\varphi \upharpoonright |A_j|$ é um isomorfismo de $A_j \upharpoonright L(\Gamma)$ em $A'_{\varphi(j)} \upharpoonright L(\Gamma)$.

Observemos que, se M e M' são estruturas modais que satisfazem ao requisito de inclusão, então a existência de um Γ-i-protomorfismo entre ambas é condição suficiente para que preservem a relação de satisfação nas versões usuais (puramente referenciais) da Semântica Kripkeana. Todavia, no caso da semântica que vimos estudando, essa condição não é suficiente, uma vez que não leva em conta os domínios modais, ou melhor, os domínios de quantificação. Devemos considerar, então, a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2.7 Um Γ-i-proto-morfismo de M em M', φ, é um $\underline{\Gamma\text{-i-morfismo de } M \text{ em } M'}$ se, para qualquer índice j em I_α^i, φ satisfaz mais às seguintes condições:

(i) para qualquer j' em I_p^j, tal que $j\, R\, j'$ e $\varphi(j) = \varphi(j')$, ou $j = j'$ ou $A'_{\varphi(j)}$ é uma estrutura clássica completa;

(ii) a função que associa a um par $\langle a, (a_{A_\ell})_{\ell \in I_p^{(j)}} \rangle$ o par $\langle \varphi(a), (\varphi(a_{A_\ell}))_{\ell\, I_p^{(j)}} \rangle$ (isto é, a função definida a partir de φ ponto a ponto) é uma bijeção de pQ_j^M em $pQ_{\varphi(j)}^{M'}$ (isto é, do domínio de quantificação em j com respeito a M de grau p no domínio de quantificação em $\varphi(j)$ com respeito a M' de grau também p);

onde $p = \alpha\text{-}\min \{ k \in \omega : i\, R^k\, j \}$.

Observemos que a exigência expressa pelo ítem (i) da definição acima tem em vista o fato de que, na Semântica Nominativa, a quantificação através de operadores modais é interpretada por duas cláusulas distintas: a primeira, referencial, aplica-se apenas ao próprio índice i , se ele for acessível a si mesmo; ao passo que a segunda, substitucional, refere-se aos <u>demais</u> índices acessíveis a i. Consequentemente, a identificação, através de morfismos, de mundos distintos acessíveis entre si preservará a relação de satisfação apenas se as estruturas clássicas forem completas (visto que, neste caso, as cláusulas substitucionais e referenciais são equivalentes).

O ítem (ii), por sua vez, exige que os objetos dos verdadeiros domínios de quantificação, nos índices relevantes, sejam os mesmos, a menos de isomorfismo, como era de se esperar.

No que se segue, diremos que M' é uma <u>M'-i-expansão de M</u> (e, reciprocamente, M é uma <u>Γ-i-contração de M'</u>) se existir um Γ-i-morfismo de M em M' .

Antes de mostrarmos que, de fato, os morfismos definidos acima preservam a satisfatibilidade , apresentemos uma maneira alternativa de caracterizar estes morfismos

. <u>Asserção</u> Um Γ-i-proto-morfismo, φ, de M em M' satisfaz (ii) da Def. 2.7 se e somente se, para qualquer j em I^{i}_{α}, para qualque par $\langle a, a\rangle$ em D_{A_j} , existe um par $\langle a', a'\rangle$ em $D_{A_{\varphi(j)}}$ (e, vice versa, para todo par $\langle a', a'\rangle$ em $D_{A_{\varphi(j)}}$, existe um par $\langle a, a\rangle$ em D_{A_j}), tais que:

(a) $\varphi(a) = a'$

(b) para todo ℓ em $I^{(j)}_{p}$, $a_{A_\ell} = a'_{A_{\varphi(\ell)}}$, onde $p = \alpha - \min\{k \in \omega : i\ R^k\ j\}$.

PROPOSIÇÃO 2.8 Seja M uma Γ-i-expansão de M e seja j um índice em I_n^i. Além disso, consideremos $\underline{A}$ uma fórmula de $L(\Gamma)$ de grau menor ou igual a $g(\Gamma) - \min\{p \in w : iR^p j\}$ e s e s' sequências em, respectivamente, D_{A_j} e $D_{A'_{\varphi(j)}}$, tais que, para qualquer variável $\underline{x}$ que ocorre livre em $\underline{A}$, as seguintes condições valem:

(i) $\varphi(s^*(x)) = s'^*(\underline{x})$

(ii) para todo ℓ em $\overline{I}^{(j)}$, $\varphi((\underline{x}^{(s)})_{A_\ell}) = (\underline{x}^{(s')})_{A_{\varphi(\ell)}}$.

Nestas condições, temos que

M, j, s sat $\underline{A}$ sse M', $\varphi(j)$, s' sat $\underline{A}$.

DEMONSTRAÇÃO. Por indução na complexidade de $\underline{A}$. Se $\underline{A}$ for uma fórmula atômica, então o resultado desejado segue do fato de ser um isomorfismo, quando consideramos a linguaguem $L(\Gamma)$. E, se $\underline{A}$ for um composto booleano, segue das hipóteses de indução. Se A for da forma $(x_k)B$, então, pela condição (iv) da definição de Γ-i-morfismo, para toda sequência $\overline{s}$, em D_{A_j}, k- variante de s, existe uma sequência k-variante de s' em $D_{A_{\varphi(j)}}$, (e vice-versa), tais que $\overline{s}$ e $\overline{s}'$ satisfazem às condições de aplicabilidade de h.i.

Consideremos, agora, o caso em que $\underline{A}$ é da forma $\Box\underline{B}$. Mostremos, inicialmente, a seguinte asserção auxiliar:

Asserção: M, $\ell \models B^{(s)}$ sse M', $\varphi(\ell) \models B^{(s')}$, se $jR\ell$. e $\ell \neq j$

Demonstração. Sejam S_ℓ e S'_ℓ sequências em, respectivamente, D_{A_ℓ} e $D_{A_{\varphi(\ell)}}$ tais que, para qualquer variável x livre em A, S_ℓ e S'_ℓ atribuem ao índice de x, respectivamente, $<(x^{(s)})_{A_\ell}, x^{(s)}>$ e $<(x^{(s')})_{A'_{\varphi(1)}}, x^{(s')}>$. Desse modo, pela Proposição 1.11, temos que:

(*) M, $\ell \models B^{(s)}$ sse M, ℓ, S_ℓ sat B.

(**) M', $\varphi(1) \models B^{(s)}$ sse M', $\varphi(1)$, S'_ℓ sat B.

Mostremos que ℓ, S_1 e S'_1 satisfazem as condições da proposição, o que nos permite aplicar a hipótese de indução. Seja $m = \min \{p \in N: i\, R^p{}_j\}$. Desse modo, como $g(B) + 1 = g(A) \leqslant n - m$, $n - m \geqslant 1$, portanto, $m + 1 \leqslant n$ e, como $j\, R\, \ell$ (portanto, $i\, R^{m+1}\ell$), $j\, R^n l$, i.e, $\ell \in I^i_n$. Além disso, $g(B) \leqslant n - \min \{p \in N\ i\, R^p l\}$

Falta mostrar, ainda, que estão satisfeitas (i) e (ii).

Ora, vejamos,

$\varphi(s_\ell{}^*(x)) = \varphi((x^{(s)})_{A_\ell})$ pela construção de S_1

$= (x^{(s')})_{A_{\varphi(1)}}$ por (ii), visto que $\ell \in I^{(j)}$.

$S'_\ell{}^*(x)$, pela escolha de S'_ℓ.

e para qualquer $\ell' \in I^{(\ell)}$

$\varphi((x^{(s_1)})_{A_{\ell'}}) = \varphi((x^{(s)})_{A_{\ell'}} = (x^{(s'_\ell)})_{A'_{\varphi(\ell')}}$

Donde, decorre o resultado desejado.

Voltemos, então, à demonstração principal.

Suponhamos que M, j, s não sat $\Box B$.

Caso 1.1 M, j, s não sat B e j R j .

Por hipótese de indução, M', $\varphi(j)$, s' não sat B. Logo, como $\varphi \restriction I^i_n$ é um morfismo, $\varphi(i)\ R'\ \varphi(j)$ e por conseguinte, M', $\varphi(j)$, s' não sat $\Box B$.

<u>Caso 1.2</u> M, ℓ, $\not\models B^{s)}$, para algum $\ell \neq j$, tal que $jR\ell$. Logo, pela asserção acima, M', $\varphi(1) \not\models B^{(s')}$. e se $\varphi(\ell) \neq \varphi(j)$, temos diretamente que M', $\varphi(j)$, s' não sat $\Box B$. E, se $\varphi(j) = \varphi(\ell)$, então $A_{\varphi(j)}$ é completa e, consequentemente, graças à Proposição 1.11, como M', $\varphi(\ell) \not\models B^{(s')}$, M', $\varphi(j)$, s' não sat B e, portanto, M', $\varphi(j)$, s' não sat $\Box B$.

Por outro lado, suponhamos que M', $\varphi(j)$, S' não sat $\Box B$.

<u>Caso 2.1.</u> M', $\varphi(j)$, s' não sat B e $\varphi(j)\ R'\ \varphi(j)$

Como φ é um p-morfismo, existe um $\ell \in I$, tal que $\varphi(\ell) = \varphi(j)$ e $j\, R\, \ell$. Se $\ell = j$, então o resultado desejado decorre diretamente da hipótese indutiva. Se $\ell \neq j$, então, $A'_{\varphi(j)}$ é completa e, portanto, M', $\varphi(\ell) \not\models B^{(s')}$. Logo, pela asserção, M, $\ell \not\models B^{(s)}$, i.e, M, j, s não sat $\Box B$.

Caso 2.2 Para algum $\ell' \neq \varphi(j)$, $\varphi(j)\ R\ell'$ M', $\ell' \not\models B^{(s')}$. Logo, como φ é um p-morfismo, existe ℓ e I, tal que $\varphi(\ell) = l'$ e jRl. Como $\varphi(j) \neq \ell'$, $\ell \neq j$. Assim, pela asserção inicial, M, $\ell \not\models B^{(s)}$ e, consequentemente, M, j, s não sat $\Box B$.

COROLÁRIO 2.8.1. Para qualquer fórmula $\underline{A}$ em Γ, temos que:

(i) existe uma seqüência s em D_{A_i}, tal que M, i, s sat $\underline{A}$ sse existe uma s' em D_{A_i}, tal que M', i, s' sat $\underline{A}$;

(ii) M, i $\models \underline{A}$ sse M', i' $\models \underline{A}$

onde i' é φ(i).

Obviamente, se $\Gamma = FORM_L$ e L = L', então as duas estruturas modais são elementarmente equivalentes.

A Proposição 2.8 terá muitas aplicações no restante deste trabalho, principalmente no próximo capítulo.

2.9 Identidade e domínios de referência. Uma vez que os referendos termos singulares, em contextos modais, s-ao pares, em contextos modais, são pares ordenados, podemos pensar em reduzir a questão da identidade à identidade das ordenadas. Sabemos que o símbolo clássico de igualdade expressa adequadamente a relação de identidade entre as primeiras ordenadas (isto é, entre objetos de um mesmo universo clássico). Caberia, então, encontrar uma fórmula que expressasse a relação de identidade entre as famílias de objetos homônimos. Ou antes, visto que uma relação forte de identidade não pode ser expressa, quando consideramos bases modais quaisquer, caberia procurar, para cada natural n $\geq$ 1, uma fórmula $\underline{A}$, contendo exatamente duas variáveis livres, digamos $\underline{x}$ e $\underline{y}$, tal que, para qualquer estrutura modal M para qualquer índice i em I, qualquer seqüência s no domínio modal de $\mathbf{A}_i$ e quaisquer termos $\underline{t}$ e $\underline{u}$, valesse a propriedade seguinte:

M, i, s sat $\underline{A}(\underline{t}, \underline{u})$ sse $(t^{(s)})_{\mathbf{A}_j} = (u^{(s)})_{\mathbf{A}_j}$, para qualquer j em $I_n^{(i)}$

Infelizmente, como mostraremos oportunamente, esta é uma tarefa impossível de realizar, quando consideramos bases modais quaisquer. Todavia, mesmo neste caso, se existir um objeto não nomeado em $\mathbf{A}_i$, o problema é solúvel.

DEFINIÇÃO 2.4 O símbolo $\sim_n$ é contextualmente definido da seguinte forma. Seja $n \geq 0$, sejam $\underline{t}$ e $\underline{u}$ termos quaisquer de L, seja $\underline{x}$ a primeira variável que não ocorre em t, nem em $\underline{u}$ e, finalmente, seja T a fórmula $(E\underline{x}_0)\ (\underline{x}_0 = \underline{x}_0)$; a fórmula $\underline{t} \sim_n \underline{u}$ é, então, a fórmula

$$(x)\ (y)\ (x \not\equiv y\ \&\ \Box T \rightarrow \Box(x \equiv y \rightarrow \boxed{n}\ t \equiv u))$$

Na proposição seguinte, que visa mostrar que, de fato, $\sim_n$ satisfaz à propriedade que esperamos, consideramos uma estrutura modal $\mathbf{M}$, um índice i, tal que $\mathbf{A}_i$ é incompleta, uma sequência s no domínio modal de $\mathbf{A}_i$ e $\underline{t}$ e $\underline{u}$ termos quaisquer de L.

PROPOSIÇÃO 2.5. Sejam a e b as s-instâncias de, respectivamente $\underline{t}$ e $\underline{u}$. Temos, então, que $\mathbf{M}$, i, s sat $t \sim_n u$ sse $\mathbf{M}, j \models \underline{a} = \underline{b}$, para todo $j \in I^{(i)}_{n+1}$.

DEMONSTRAÇÃO

$\Rightarrow$ Seja $j \in I^{(i)}_{n+1}$, tal que $M, j \not\models a \equiv b$

Como $j \in I^{(i)}_{n+1}$, $i \in \mathbf{N}$ e existe $j' \in I$, $j' \neq i$, tal que $i\ R\ j'$ e, para algum $0 \leq m \leq n$, $j' R^m j$.

Seja, agora, $\bar{s}$ uma sequência em D_{A_i} que difere de s no máximo pelos valores atribuídos aos índices de x e de y e tais valores são, respectivamente, $< \mathbf{a}, c >$ e $< \mathbf{c}_{A_i}, c >$ (onde $\mathbf{a}$ é um objeto não nomeado em A_i e c uma constante, tal que $< \mathbf{a}, c > \in D_{A_i}$) (como A_i é incompleta, necessariamente existem tais pares em $D_{\mathbf{A}_i}$). Portanto, M, i, $\bar{s}$ sat $x \equiv y$ e, além disso, obviamente,

$M, j' \models x^{(\bar{s})} \equiv j^{(\bar{s})}$

Porém, como $j' R^m j$ e $M, j \not\models t^{(\bar{s})} \equiv u^{(\bar{s})}$, e $m \leq n$, $M, j' \not\models \boxed{n}\ t^{(\bar{s})} \equiv u^{(\bar{s})}$, pela proposição 1.15. Logo, M, i, s não sat $\underline{t} \sim_n \underline{u}$

$\Leftarrow$ Suponhamos que M, i, s não sat $\underline{t} \sim_n \underline{u}$

Logo, existe uma sequência $\bar{s}$, tal que M, i, $\bar{s}$ sat $x \not\equiv y$ e M, i, $\bar{s}$ não sat $\Box(x \equiv y \rightarrow \boxed{n}\ \underline{t} \equiv \underline{u})$. Portanto $i \in N$ (pois M, i, $\bar{s}$ sat $\Box T$) e existe $j \neq i$, tal que $M, j \models x^{(\bar{s})} \equiv y^{(\bar{s})}$, porém $M, j \not\models \boxed{n}\ a \equiv b$ (i deve ser diferente de j, visto que M, i, $\bar{s}$ não sat $x \equiv y$).

Logo, pela Proposição 1.15, existe $j' \in I_n^j$, tal que $M, j \not\models a \equiv b$. Ou seja, existe $j' \in I_{n+1}^{(j)}$ e $M, j' \not\models a \equiv b$ (pois, como $j' \in I_n^j$ e iRj e $j \neq i$, $j' \in I_{n+1}^{(i)}$).

Observemos que existem duas situações nas quais a proposição acima é vacuamente satisfeita: (i) se i não for normal e (ii) se para todo j em I, se i R j, então i = j. Pois, em ambas as situações, temos que $I_{n+1}^{(i)} = \emptyset$ e $M, i \models \underline{t} \sim_n \underline{u}$, para quaisquer termos $\underline{t}$ e $\underline{u}$.

A fórmula $\underline{x} \sim_n \underline{y}$ (onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são duas variáveis quaisquer) é uma resposta, parcial, para o problema posto no início da seção. Ela expressa a identidade da família de objetos homônimos, em estruturas incompletas.

Cumpre salientar, aqui, que são justamente tais estruturas que colocam problemas com respeito às exigências das lógicas modais usuais. Como sabemos, nas lógicas modais usuais, nas quais o esquema de Barcan não é uma tese, também não é tese o esquema

$$(x) \Box \underline{A} \rightarrow \Box [(Ex) (\sim A \ \& \ B) \ \& \ (Ex) (\sim C \ \& \ \Diamond C) \rightarrow (Ex) (B \& \Diamond C)] .$$

No entanto, se $\underline{B}$ for clássica, então, como facilmente se demonstra, nenhuma instância desse esquema pode ser falsificada na Semântica Nominativa. Nesse sentido, afirmamos antes, a homonimia é incapaz de dar conta, com a mesma eficiência, da presuposição da unicidade da quantificação (i.e., o que nas versões usuais da Semântica de Mundos Possíveis é a função de identificação através de mundos).

CAPÍTULO 3

S.N. E A LÓGICA MODAL PROPOSICIONAL C2.

3.1 Novos conceitos semânticos e propriedades semânticas. Aqui, consideraremos apenas uma extensão, para linguagens modais de primeira ordem, da menor lógica modal proposicional que pode ser caracterizada por meio de bases modais (cf., antes, Apresentação); porém, como o leitor facilmente perceberá, os resultados que apresentaremos podem ser facilmente adaptados quando consideramos outras lógicas modais regulares e monotônicas.

Devemos, considerar, portanto, os seguintes conceitos:

DEFINIÇÃO 3.1 Seja L uma linguagem modal e $\Gamma \cup \{A\}$ um conjunto de fórmulas de L.

(i) Uma estrutura modal M para L diz-se um modelo de Γ em i (onde i é um índice na base de M) (em símbolos, $M, i \models \Gamma$), se, para qualquer fórmula B em Γ, M, i = B;

(ii) A é consequência de Γ (em símbolos, $\Gamma \models A$) se, para qualquer extensão em constantes L' de L, para qualquer modelo em i de Γ, M, que é uma estrutura modal para L', A é verdadeira em M com respeito a i;

(iii) A é <u>válida</u> (em símbolos, $\models A$) se, para qualquer extensão em constantes L' de L e qualquer estrutura modal M para L', A é verdadeira em M.

Nas proposições seguintes, consideramos L uma linguagem modal, A e B, fórmulas de L, $M = \langle B, (\mathbf{A}_i)_{i \in I} \rangle$ uma estrutura modal para L e i um índice em B. Como é usual se $y_1, \ldots, y_n$ é uma sequência de variáveis, empregaremos $(\vec{y})$, para designar a sequência $(y_1), \ldots, (y_n)$ e $(E_{\vec{y}})$ para designar $(E_{y_1}) \ldots (E_{y_n})$

PROPOSIÇÃO 3.2 Seja s uma sequência em $D_{\mathbf{A}_1}$, tal que $s^*(x)$ não é nomeado em $\mathbf{A}_i$. Logo, $\mathbf{M}$, i, s sat $(y)\ (E_z)\ (z = x\ \&\ (\vec{y})\ (\Box A \rightarrow (A(u/z) \rightarrow \Box A\ (y/z))))$, onde $y, z, y_1, \ldots, y_n, x$ são variáveis distintas

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\bar{s}$ uma sequência que difere de s no máximo, pelo valor atribuído ao índice de y e seja $\bar{\bar{s}}$ a sequência que difere de $\bar{s}$ no máximo por ter no índice de z o par $\langle s^*(x), y^{(s)} \rangle$ (como $s^*(x)$ não é nomeado em $\mathbf{A}_1$, esse par pertence, de fato a $D_{\mathbf{A}_i}$) Assim, M, i, $\bar{\bar{s}}$ sat $z = x$ e além disso, se M, i, s' sat $\Box A$ e M, i, s sat $A(y/z)$, então $\mathbf{M}$, i, s' sat $\Box A\ (y/z)$, para qualquer sequência s' que difere de $\bar{\bar{s}}$ no máximo pelos valores dos índices de $y_1, \ldots, y_n$, pois, neste caso, $A^{(s')}$ é idêntica a $(A(y/z))^{(s')}$.

PROPOSIÇÃO 3.3 . $\mathbf{M}, i, \models\ (x)\ \Box A \rightarrow \Box(x)\ (\sim A \rightarrow (y)\ (E_z)\ (z = x\ \&\ (\vec{y})\ (\Box B \rightarrow (B(y/z) \rightarrow \Box B\ (y/z)))))$ e $\mathbf{M}, i \models (x)\ \Box A \rightarrow (y)\ \Box\ (x)\ (x = y \rightarrow A)$

DEMONSTRAÇÃO. (i) Consequência da preposição anterior, levando-se em consideração, o fato de que, se $\mathfrak{M}$, i, s sat (x) $\Box$A, então, para qualquer $j \neq i$, tal que iRj e qualquer sequência s' em $D_{\mathfrak{A}_j}$, se $\mathfrak{M}$, j, s' sat $\sim A(y_1/b_1, \ldots, y_n/b_n)$, então $s^*(x)$ não é nomeado em $\mathfrak{A}_j$ (onde $y_1, \ldots, y_n$ são as demais variáveis livres em A e $b_1, \ldots, b_n$ são as suas respectivas s-instâncias).

(ii) Consequência imediata da observação feita acima.

PROPOSIÇÃO 3.4. Seja s uma sequência em $D_{\mathfrak{A}_i}$, tal que M, i, s sat $(E\vec{y})$ $(\Diamond A \ \& \sim A)$ (x/a), para todo nome a em L. Nestas condições, $\mathfrak{M}$, i, s sat (x) $(E\vec{y})$ $\Diamond$A.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que se $\mathfrak{M}$,i, s sat $(E\vec{y})$ $(\Diamond A \ \& \sim A)$ (x/a), para qualquer nome a, então existe uma sequência $\bar{s}$, que difere de s, no máximo, pelo valor nos índices de $y_1, \ldots, y_n$, e existe um $j \neq i$, tal que, iRj e, para todo nome a, M, $j \models A(x/a)^{(\bar{s})}$.

PROPOSIÇÃO 3.5 Suponhamos que, para algum nome b de L, $\mathfrak{M} \not\models A(x/b)$ e seja $\mathscr{C}$ um conjunto infinito de constantes (que, eventualmente, mas não necessariamente, pertencem a L) que não ocorrem em A, nem em b. Logo, para cada constante a da linguagem L U $\mathscr{C}$, que não ocorre em A, existe uma estrutura modal $M' = \langle B, (A_i^!)_{i \in J} \rangle$ para L U $\mathscr{C}$, tal que M', $i \not\models A$ (x/a).

DEMONSTRAÇÃO. Seja a uma constante que não ocorre em A. Como $\mathfrak{M} \not\models A(x/b)$, existe um índice i e uma seqüência s em $D_{\mathfrak{A}_i}$, tal que $\mathfrak{M}$, i, s não sat A e $s(x) = b_{\mathfrak{A}_i}$ e $x^{(s)^i}$ é b.

Como $\mathscr{C}$ contém infinitas constantes individuais, existe uma bijeção σ de $\mathscr{C}$ em NOM_L. Construímos a estrutura modal $M' = \langle B, (A_i)_{i \in I} \rangle$, tomando para cada j em I, A'_j a estrutura clássica que difere de A_j, no máximo, por:

(i) $a_{A'_j} = b_{A_j}$;

(ii) para qualquer constante c em ψ, $c_{A'_j}$ é $(\sigma(c))_{A_j}$ e

e definimos a função ψ pondo dom(ψ) = sk(M) e, $\psi \upharpoonright (I \cup \bigcup_{j \in I} |A_j|)$ é a função identidade.

<u>Asserção</u>: ψ é um {A}-i- homorfismo de M em M'.

<u>Demonstração.</u> Obviamente, ψ é um {A} -i-protomorfismo de M em M'. Seja j um elemento de I^i. Inicialmente, consideremos $\langle c, c \rangle$ um par em D_{A_j}. Obviamente, para todo ℓ em I^j, $c_{A_\ell} = (\sigma^{-1}(c))_{A'_\ell}$. Suponhamos, por absurdo, que $\langle c, \sigma^{-1}(c) \rangle$ não pertence a $D_{A'_j}$. Logo, existe um nome d em $NOM_L \cup \mathscr{C}$, tal que $c = d_{A'_j} \neq (\sigma^{-1}(c))_{A'_j}$. Como $(\sigma^{-1}(c))_{A'_j}$ é c_{A_j}, $c \neq c_{A_j}$. Seja d' o nome em NOM_L que advém de d substituindo a por b e, para c' em $\mathscr{C}$, c' por (c'). Facilmente se mostra, por indução na complexidade de d, que $d_{A'_j}$ é d'_{A_j}. Logo, $c = d'_{A_j}$, isto é c é nomeado em A_j e, como $c \neq c_{A_j}$, $\langle c, c \rangle$ não pertence a D_{A_j} (absurdo).

Por outro lado, seja $\langle c, c \rangle$ um par em $D_{A'_j}$ e seja $\bar{c}$ o termo que advem de c substituindo a por b e , para c' em , c' por (c). Obviamente, para todo ℓ em I^j, $c_{A'_\ell} = \bar{c}_{A_\ell}$. Além disso, se $\langle c, \bar{c} \rangle$ não pertence a D_{A_j}, então $\bar{c}_{A_j} = c_{A'_j} \neq c$ e c é nomeado em A_j; consequentemente, é nomeado em A'_j e $\langle c, c \rangle$ não pertence a $D_{A'_j}$

Vale dizer, mostramos que ψ é uma função sobrejetora de D_{A_i} em $D_{A'_j}$, para qualquer $j \in I$.

Voltemos à demonstração da proposição.

Decorre da asserção feita, pela Proposição 2.8 , como M, i, s não sat A, que M', i, s' não sat A, onde s' é uma sequência que atribui, ao índice de y, o par $< s^*(y), (o^{-1}(y^{(s)})) >$, para qualquer variável y livre em A distinta de x e ao índice de x, o par $< a_{A'_i}, a >$.

Portanto, pela Proposição 1.11,

M', i, s' não sat A(x/a). (Q.E.D)

COROLÁRIO 3.5.1. Seja a uma constante de L que não ocorre em A. Se $\models$ A(x/a), então para qualquer estrutura modal M para L, qualquer índice i em B_M e qualquer sequência s em D_{A_i}, tal que s* (x) é nomeado em A_i, M, i, s sat A.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência da proposição anterior, tendo em mente que, pela Proposição 1.10, se M, i, s sat A e s*(x) é nomeado, então M, i, s sat $A(x/x^{(s)})$ e, pela definição de validade, podemos sempre estender a linguagem.

Esses proposições permitem facilmente provar a legitimidade dos novos postulados necessários para caracterizar um sistema axiomático adequado para a Semântica Nominativa quando consideramos todas as bases modais. Resumindo, temos a proposição seguinte

PROPOSIÇÃO 3.6. Para qualquer linguagem L e quaisquer fórmulas A, B de L, temos que:

(i) $\models (x) \Box (\vec{z}) (B \rightarrow (E\vec{y}) (\Box A \ \& \sim A) \rightarrow$
$\Box(x) (\vec{z}) (B \rightarrow (E\vec{y}) \Diamond A)$

(ii) $\models (x) \Box A \rightarrow (y) \Box (x) (x = y \rightarrow A)$

(iii) $\models (x) \Box A \rightarrow \Box (x) (\sim A \rightarrow (y) (Ez) (z = x \ \& (\vec{y})$
$(\Box B \rightarrow (B(y/z) \rightarrow \Box B (y/z)))))$

(iV) Se $\models A(x/a)$ e a é uma constante que não ocorre em A, então $\models (x)(x = b \rightarrow A)$, para qualquer nome b e $\models (x)(\sim A \rightarrow (y)(Ez)(z = x \ \& (\vec{y}) (\Box B \rightarrow (B(y/z) \rightarrow \Box B(y/z)))))$.

(v) Se $\models B \rightarrow (E\vec{y}) ((\Diamond A \ \& \sim A)(x/a)))$ e a é uma constante que não ocorre em A, nem em B, então $\models B \rightarrow (x)(E\vec{y}) \Diamond A$ (onde $x, y, z, z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_n$ são variáveis distintas.

Observemos que esses resultados valeriam mesmo que na definição de validade tivessemos considerado apenas as estruturas modais cujas bases pertencem a uma dada classe de bases (i.e, se tivessemos tomado uma outra lógica modal proposicional, que não C2, como ponto de partida).

3.2 <u>O sistema QC2*</u>. Este sistema é determinado pelos postulados (esquemas de axiomas e de regras) seguintes:

P1 A se, A for tautólogica;

P2 $(x)\ A \rightarrow A(x/t)$ se t for um nome ou uma variável ou, ainda, se nenhuma ocorrência livre de x em A se der no espaço de operador modal;

P3 $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (x)B)$, se x não ocorre livre em A.

P4 $x = x$

P5 $y_1 = z_1\ \&\ \ldots\ \&\ y_n = z_n \rightarrow f^n\ y_1 \ldots y_n = f^n\ z_1 \ldots z_n$

P6 $y_1 = z_1\ \&\ \ldots\ \&\ y_n = z_n \rightarrow P^n\ y_1 \ldots y_n \rightarrow P^n\ z_1 \ldots z_n$

P7 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

P8 $A,\ A \rightarrow B/B$

P9 $A/(x)A$

P10 $A \rightarrow B\ /\ \Box A \rightarrow \Box B$

P11 $(x)\Box(B \rightarrow (E\vec{y})(\Diamond A\ \&\ {\sim}A)) \rightarrow \Box(x)(\vec{z})(B \rightarrow (E\vec{y})(\Diamond A)$

P12 $(x)\ \Box A \rightarrow ((y)\ \Box(x)\ (x = y \rightarrow A)$

P13 $(x)\ \Box A \rightarrow \Box(x)({\sim}A \rightarrow (y)(Ez)(z = x\ \&\ (\vec{y})(\Box B \rightarrow$
$(B(y/z) \rightarrow \Box B(y/z)))))$

P14 $A(x/a)$ / $(x)(x = b \rightarrow A)$

P15 $B \rightarrow (E\vec{y})(\Diamond A(x/a)\ \&\ {\sim}A(x/a))$ / $B \rightarrow (x)(E\vec{y})\Diamond A$

P16 $A(x/a)$ / $(x)({\sim}A \rightarrow (y)(Ez)(z = x\ \&\ (\vec{y})(\Box B \rightarrow (B(y/z) \rightarrow \Box B(y/z)))))$

OBSERVAÇÃO. Nesses esquemas, A e B são fórmulas quaisquer, x, y, z, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_p são variáveis distintas e empregamos a notação usual segundo a qual, se y_1, ..., y_n é uma sequência de variáveis, $(\vec{y})$ (respec., $(E\vec{y})$) designa a sequência de quantificadore (y_1) ... (y_n) (respect., (Ey_1) ... (Ey_n)). A Além disso, em P14 a P16, a é uma constante que não ocorre em A, nem em B, b é um nome qualquer e x não ocorre livre em B.

Cumpre observar que os postulados (regras) P14 a P16 exigem, para poderem ser aplicados em geral, que possamos dispor de um estoque ilimitado de constantes novas. Ora, como uma linguagem modal pode conter apenas um número finito de constantes individuais, não podemos empregar a noção usual (clássica) de prova. Devemos considerar, portanto, a noção seguinte:

DEFINIÇÃO 3.7. Sejam L uma linguagem modal e A uma fórmula de L. Uma <u>prova de A em QC2*</u> é uma sequência A_1, ..., A_n de fórmulas de uma extensão em constantes L' de L, tal que A_n é A e, para qualquer $1 \leq k \leq n$, A_k é um axioma ou advém de fórmulas anteriores segundo uma das regras (P7, P8, P10, P14, P15, ou P16).

DEFINIÇÃO 3.8 Uma fórmula A de L diz-se um teorema de QC2* (em símbolos, $\vdash$ A) se existir uma prova de A em QC2*.

Observe-se que, facilmente se mostra, de maneira análoga à clássica, que se L é uma linguagem que não contém outros símbolos funcionais além das constantes individuais e se A for uma fórmula de L, então vale a seguinte regra derivada:

$\vdash$ A(x/a) e a não ocorre em A, então $\vdash$ (x)$\Diamond$A.

Ou seja, nesse caso particular, os postulados P14 a P16 seriam ociosos (i.e., poderiam ser trivialmente derivados dos demais, usando essa propriedade. (No apêndice encontramos uma prova semântica de um resultado análogo a esse, quando consideramos lógicas modais proposicionais entre C2 e S4).

A partir dessa definição de prova, podemos considerar a definição usual, em Lógica Modal, de dedução:

DEFINIÇÃO 3.9 Seja $\Gamma \cup \{A\} \subseteq FORM_L$. Uma dedução de A a partir de Γ é uma sequência de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ de L, tal que A_n é A e, para $1 \leqslant k \leqslant n$, uma das seguintes condições vale:

(i) A_k é um teorema;

(ii) $A_k \in \Gamma$;

(iii) existe $j < k$, tal que A_k é $(x)A_j$;

(iv) existem $j < \ell < k$, tais que, A_ℓ é $A_j \rightarrow A_k$.

NOTAÇÃO: $\Gamma \vdash A$: existe uma dedução de A a partir de Γ.

Com essas definições, decorre dos resultados apresentados antes, o seguinte teorema de legitimidade:

TEOREMA: Sejam L uma linguagem modal e $\Gamma \cup \{A\} \subseteq FORM_L$.

(i) $\vdash A \Rightarrow \models A$

(ii) $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$

Apresentaremos, agora, uma lista de meta-teoremas em QC2* que serão empregados na prova da completude.

T1 $\vdash \Box A \rightarrow \Box T$

T2 Se $\vdash A$, então $\vdash \Box B \rightarrow \Box A$

T3 $\vdash \Box A \ \& \ \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \ \& \ B)$

T4 Se $\vdash A \rightarrow B$, então $\vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

T5 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

A demonstração desses teoremas pode ser encontrada em qualquer manual de Lógica Modal que considere, também, lógicas modais não normais. Nos teoremas seguintes, consideramos $n \geq 0$ e t e u termos quaisquer.

T6 $\boxed{n}\ x = x$

T7 $\boxed{n}\ t = u \rightarrow (A(x/t) \leftrightarrow A(x/u))$

T8 $\boxed{n}\ t = u \rightarrow \boxed{m}\ t = u$ se $n \geqslant m$

DEMONSTRAÇÃO. Por indução em n.

T9 Se $\vdash (x)(A \rightarrow \sim\boxed{n}\ x = a)$ e a é uma constante que não ocorre em A, então $\vdash (x)(A \rightarrow x \neq b)$, para qualquer nome b.

DEMONSTRAÇÃO. A partir do postulado P14, levando-se em conta T6.

T10 Se $\vdash A(x/a)$ e a não ocorre em A, então $\vdash (Ex) \sim A \rightarrow$
$(z)(y)(y \neg_n z \rightarrow (\sim B \rightarrow (\Box T \rightarrow \Box (B \rightarrow \boxed{n}\ y = z))))$

DEMONSTRAÇÃO

(1) $A(x/a)$ hipótese

(2) $(x)(\sim A \rightarrow (v)(Ew)(w = x \;\&\; (\Box(B \rightarrow v = v) \rightarrow$
$\rightarrow ((B \rightarrow w = v) \rightarrow \Box (B \rightarrow w = v)))))$ (1) x P16

(3) $(x)(\sim A \rightarrow x \neq a)$ (1) x P14

(4) $(Ex) \sim A \rightarrow (Ex)(Ew)(w = x \;\&\; x \neq a \;\&$
$(\Box (B \rightarrow a = a) \rightarrow ((B \rightarrow w = a) \rightarrow \Box(B \rightarrow w = a)))$ (2), (3), teo clas.

(5) $(Ex) \sim A \rightarrow (Ev)(Ew)(w \neq v \ \& \ \Box T \rightarrow$
$((B \rightarrow w = v) \rightarrow \Box (B \rightarrow w = v))$ (4), T6, T2 e teo. clas

(6) $(Ex) \sim A \ \& \sim B \ \& \ \Box T \rightarrow (Ev)(Ew)(w \neq v \ \&$
$\Box (B \rightarrow w = v))$.

(7) $z \sim_n y \ \& \ \Box T \rightarrow [(Ev)(Ew)(w \neq v \ \& (\Box(B \rightarrow w = v))$
$\rightarrow \Box (B \rightarrow \boxed{n} z = y)]$ def $\sim_n$, P2, taut, (6)

(8) $(Ex) \sim A \ \& \sim B \ \& \ \Box T \rightarrow (z)(y)(z \sim_n y \rightarrow$
$\Box (B \rightarrow \boxed{n} z = y))$

T11 $\vdash (x) (A \rightarrow (y)(Ez)(z = x \ \& \ z \sim_n y))$, se $\vdash \sim A(x/a)$
e a não ocorre em A

DEMONSTRAÇÃO

(1) $\sim A(x/a)$ hipótese

(2) $(x)(\sim A \rightarrow (y)(Ez)(z = x \ \& \ (w)(v)$
$(\Box(w = v \rightarrow \boxed{n} y = y) \rightarrow ((w = v \rightarrow \boxed{n} z = y) \rightarrow$
$\Box (w = v \rightarrow \boxed{n} z = y)))))$ (1) x P13

(3) $\Box T \rightarrow \Box (w = v \rightarrow \boxed{n}\, y = y)$ — T6, T2 x taut

(4) $w \neq v \rightarrow (w = v \rightarrow \boxed{n}\, z = y)$ — tautologia

(5) $(x)(\sim A \rightarrow (y)(Ez)(z = x \;\&\; (w)(v)(w \neq v \rightarrow (\Box T \rightarrow \Box (w = v \rightarrow \boxed{n}\, z = y)))))$ — (1), (3), (4), teoremas clássicos usuais.

(6) $(x)(\sim A \rightarrow (y)(E_2)(z = x \;\&\; z \,\tilde{}n\, y)$ — (4) def. de $\tilde{}n$

T12 Se $\vdash (x)(A \rightarrow \sim x \sim_n a)$, então $\vdash (x) \sim A$ (onde a não ocorre em A).

DEMONSTRAÇÃO.

(1) $(x)(A \rightarrow \sim x \,\tilde{}n\, a)$ — hipótese

(2) $A \rightarrow \sim x \,\tilde{}n\, a$ — (1), P2 x taut

(3) $A \rightarrow \sim (v)(w)(w \neq v \;(\Box T \rightarrow \Box (w = v \rightarrow \boxed{n}\, x = a)))$ — (2) x def. de $\tilde{}n$

(4) $A \to \Box T \ \& \ (Ev)(Ew)(w \neq v \ \& \ \Diamond \sim (w = v \to \boxed{n}\, x = a))$ (3) x teo. usuais

(5) $A \to \Box T \ \& \ (Ev)(Ew)((w = v \to \boxed{n}\, x = a) \ \&$
$\Diamond \sim (w = v \to \boxed{n}\, x = a))$ (4), teo usuais

(6) $A \to (Ev)(Ew)((w = v \to \boxed{n}\, x = a) \ \&$
$\Diamond \sim (w = v \to \boxed{n}\, x = a))$ (5), taut.

(7) $(x)(A \to (Ew)(Ev) \ \Diamond \sim (w = v \to n \ x = z))$ (6), P15

(8) $A \to (z) \ \Diamond \sim (\boxed{n}\, x = z)$ (7), teo. usuais

(9) $\Box T \to \sim A$ (8), T6, T2, P2 taut.

(10) $\sim A$ (5), (9), taut

(11) $(x) \sim A$ (10) x General.

3.3 <u>A completude de QC2*</u>. Para demonstrarmos esse resultado empregaremos o método de Lindenbaum Henkin, em uma adaptação original, tendo em vista as peculiaridades da Semântica Nominativa e das lógicas modais adequadas a ela.

Observamos, em primeiro lugar, que não podemos empregar apenas constantes como testemunhas, pois, além de não valer o esquema de Barcan (cf. antes, Cap. 1, as implicações desse fato para a aplicação do método de Henkin), podemos encontrar fórmulas existenciais consistentes, cujas instânciações por nomes são inconsistentes (por exemplo, fórmulas da forma $(Ex)((y)(Py \rightarrow \Box Qy)\ \&\ Pfx\ \& \sim\Box\ Qfx))$

Por outro lado, para podermos usar variáveis como testemunhas, devemos considerar uma noção mais fraca de consistência, visto que, p.e, o conjunto

$$\{ (Ex)\ Px,\ (Ex)\sim Px\}$$

é consistente, porém, para qualquer variáveis y, z, o conjunto

$$\{ Py\ \& \sim Pz\}$$

é inconsistente. Consideremos, então, os conceitos apresentados na seguinte definição

DEFINIÇÃO 3.10. Seja L uma linguagem modal e seja $\Gamma \cup \{A\}$ um subconjunto de fórmuals de L.

(i) <u>Γ deduz fracamente A</u> (em símbolos, $\Gamma \vdash_f A$) se existem fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ em Γ, tais que $\vdash A_1\ \&\ \ldots\ A_n \rightarrow A$

(ii) Γ é <u>fracamente consistente</u> (abreviadamente, f- consistente) se Γ não deduz fracamente o absurdo ($\perp$).

(iii) Γ diz-se <u>maximal-f-consistente em L</u> se Γ é f-consistente e, para qualquer fórmula A de L, tal que $A \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{A\}$ não é f-consistente.

(iv) Γ diz-se <u>henkin -completo</u> se, para qualquer fórmula A de L, $(Ex)A \in \Gamma$ se e somente se $A(x/y) \in \Delta$, para alguma <u>variável</u> y.

Além dessas noções mais ou menos correntes, necessimos de uma noção auxiliar, específica para lógicas modais caracterizavéis na Semântica Nominativa

DEFINIÇÃO 3.11 Um conjunto Δ de fórmulas de L diz-se <u>nominal consistente</u> em L se, para qualquer fórmula $\underline{A}$ de L, Δ satisfaz às seguintes condições:

(1) Para qualquer fórmula $\underline{B}$ de L, se $\Delta \vdash_f \underline{B} \rightarrow (E\vec{y})(\sim\Box A \,\&\, \underline{A})(\underline{x}/\underline{a})$, para qualquer nome $\underline{a}$ em L, então $\Delta \vdash_f B \rightarrow (x)(E\vec{y}) \sim\Box \underline{A}$ (onde $y_1, \ldots, y_n$ são algumas das variáveis livres em A).

(2) Se $\Delta \vdash_f \underline{A}(\underline{x}/\underline{a})$, para qualquer nome $\underline{a}$, então

(i) $\Delta \vdash_f (x)(\underline{x} \equiv \underline{a} \rightarrow \underline{A})$, para qualquer nome $\underline{a}$ em L e

(u) $\Delta \vdash_f (x)(\sim\underline{A} \rightarrow (\underline{z})(E\underline{y})(\underline{y} \equiv \underline{x} \,\&\, (\vec{z})\ (\Box \underline{B} \rightarrow (\underline{B}(\underline{z}/\underline{y}) \rightarrow \Box B \rightarrow (\underline{B}(\underline{z}/\underline{y})))))$, para qualquer fórmula $\underline{B}$ (x, y, z, $z_1, \ldots, z_n$ variáveis distintas).

Nos lemas seguintes, 3.11.1 e 3.11.2 consideremos Δ um conjunto maximal-f- consistente e henkin-completo.

LEMA 3.11.1 Seja Δ um conjunto nominal-consistente e seja $\underline{A}$ uma fórmula de L. Se $\Delta \vdash_f \underline{A}(\underline{x}/\underline{a})$, para todo nome $\underline{a}$, então Δ satisfaz mais às seguintes condições:

(3) para qualquer $n \geq 0$, existe um nome $\underline{a}$, tal que: Δ

$\Delta \vdash_f (Ex) \sim A \rightarrow (Ex)(\sim A \ \& \ x \sim_n a)$

(4) para qualquer $n \geq 0$, $\Delta \vdash_f (x)(\sim A \rightarrow (y)(Ez)(z \equiv x \ \& \ z \sim_n y))$;

(5) para qualquer fórmula B, qualquer $n \geq 0$, $\Delta \vdash_f (Ex) \tilde{\sim} A \rightarrow (y)(z)(y \sim_n z \rightarrow (B \rightarrow (\Box T \rightarrow \Box(\sim B \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv z))))$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\Delta \vdash_f \underline{A}(\underline{x}/\underline{a})$, para qualquer nome $\underline{a}$.

(3). Por absurdo, assumamos que, para todo nome $\underline{a}$,

$\Delta \not\vdash_f (Ex) \sim A \rightarrow (E\underline{x})(\underline{x} \ \bar{\sim} n \ \underline{a} \ \& \sim \underline{A})$

Logo, pela maximildade de Δ, $(E\underline{x}) \sim \underline{A} \in \Delta$ e, para todo nome a, $(x)(\tilde{} A \rightarrow \tilde{} x \ \tilde{} n \ a) \in \Delta$. Donde, pela henkin-completude e maximalidade, existe uma variável y, tal que $\sim A(x/y) \in \Delta$ e $\sim y \ \tilde{} n \ \underline{a} \in \Delta$, para todo nome a . Ou seja, por definição do símbolo $\tilde{} n$ e maximalidade, $(Ev)(Ew)(w \not\equiv v \ \& \ \Box T \ \& \ \tilde{\sim}\Box (w \equiv v \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv a)) \in \Delta$. Por teoremas usuais da Lógica Modal Quantificacional, $(Ev)(Ew)(w \equiv v \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv a) \ \& \ \tilde{\sim}\Box (w \equiv v \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv a)) \in \Delta$, para todo nome $\underline{a}$. Portanto, pela condição (1.), da definição de nominal-consistência, $(z)(Ew)(Ev) \tilde{\sim}\Box(w \equiv v \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv z) \in \Delta$. Assim, pela maximidade de Δ, e teoremas usuais,)

$(z) \sim \boxed{n}\, y = z$. Além disso, como $\Box T \in \Delta$, $(Ey) \boxed{n}\, y = z \in \Delta$, (absurdo)

(4.) Pela condição (2)(ü), como $\Delta \vdash_f A(\underline{x}/\underline{a})$, para todo nome $\underline{a}$, $\Delta \vdash (x)(A \to (y)(Ez)(z = x \;\&\; (w)(v)(\Box(w = v \to \boxed{n}\, z = z) \to ((w = v \to \boxed{n}\, z = y) \to \Box(w = v \to \boxed{n}\, z = y)))))$. Ora, como $\vdash \Box T \to \Box(w = v \to \boxed{n}\, z = z)$ e $\vdash w \neq v \to (w = v \to \boxed{n}\, z = y)$, pela maximalidade de Δ, $\Delta \vdash_f (x)(A \to (y)(Ez)(z = x \;\&\; (w)(v)$ $(w \neq v \to \Box T \to \Box(w = v \to \boxed{n}\, z = y))))$, i.e, $\Delta \vdash_f (x)(A \to (y)(Ez)(z = x \;\&$ $y \,\bar{}n\, a))$, para qualquer nome $\underline{a}$.

(5.) Para mostrarmos que Δ satisfaz (5.), devemos mostrar, antes, uma asserção auxiliar.

• <u>Asserção</u>: Para qualquer fórmula $\underline{B}$ de L, existe um nome $\underline{a}$ em L, tal que, se $\Box T \to (\tilde{\ }B \to \Box(B \to y = a)) \in \Delta$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>. Suponhamos que $\Box T \in \Delta$ e, por absurdo, que $\sim B \to \Box(B \to y = a) \notin \Delta$ para todo nome a. Logo, pela maixmalidade de Δ, e $(B \to y = a) \;\&\; \sim\Box(B \to y \equiv a) \in \Delta$. Portanto, pela condição (1.) da definição de nominal-consistência, $(z) \tilde{\ }\Box(B \to y \equiv z) \in \Delta$. Conse-quentemente, $(z) \sim\Box\, y \equiv z \in \Delta$ e, como $\Box T \in \Delta$, $\sim(z)\tilde{\ }\Box\, y = z \in \Delta$ (ab-surdo).

Voltemos à demonstraação principal. Por absurdo, assumamos que, para alguma fórmula B, $(Ex)\sim A \to (y)(z)(y \,\bar{}n\, z \to (B \to (\Box T \to \Box(\sim B \to \boxed{n}\, y \equiv z)))) \notin \Delta$. Logo, pela henkim completude, existem variáveis y, w, e v, tais que, $\sim A(x/y)$, $w \,\bar{}\, n\, v$, B, $\Box T$, $\sim\Box(\sim B \to \boxed{n}\, w = v) \in \Delta$. Pela asserção, existe um nome a, tal que $\Box(\sim B \to y = a)$. Como $\Delta \vdash_f A(x/b)$, para todo nome b, pelo item (2)(i), da definição anterior, $\Delta \vdash_f (x)(\sim A \to x \neq a)$. Logo, $y \neq a \in \Delta$. Além disso, como $w \,\bar{}\, n\, v \in \Box$ (i.e, $(x)(y)(x \neq y \to (\Box T \to \Box(x = y \to \boxed{n}\, w = v))) \in \Delta$) e $\Box T \in \Delta$, $\Box(y = a \to \boxed{n}\, w = v) \in \Delta$. Consequentemente, $\Box(\sim B \to \boxed{n}\, w = v) \in \Delta$ (absurdo) (Q.E.D.)

LEMA 3.11.2 Se Δ satisfaz (3) a (5) do lema anterior e (2)(i), da definição de nominal-consistência então para qualquer variável x, vale que:

(6) Se existe um nome a, tal que $x \equiv a \in \Delta$, então para cada $n \geqslant 0$, existe um nome b, tal que $\boxed{n}\, x = b \in \Delta$;

(7) Se não existe nome a, tal que $x \equiv a \in \Delta$, então para qualquer $n \geqslant 0$, temos que

(a) existe um nome b, tal que, para qualquer fórmula A, $\sim A \to (\Box T \to \Box(A \to \boxed{n}\, x = b)) \in \Delta$

(b) para todo nome b, existe uma variável y, tal que $x = y \in \Delta$ e, para qualquer fórmula A, $\sim A \to (\Box T \to \Box(A \to \boxed{n}\, y = b)) \in \Delta$

DEMONSTRAÇÃO. Seja x uma variável de L. e $n \geqslant 0$. Se existe um nome a, tal que $x \equiv a \in \Delta$, então pela maximalidade de Δ e condição (2)(i), $\boxed{n}\, x = b \in \Delta$, para algum nome $\underline{b}$. E se $x = a \notin \Delta$, para todo nome a, então $\Delta \vdash_f x \neq a$, para todo nome $\underline{a}$. Portanto, pela condição (3), como $\vdash (Ey)\boxed{n}\, y = x$, $(Ey)(\boxed{n'}\, y = x \;\&\; y \,\bar{}n\, b) \in \Delta$ (onde $n' = n+1$). Logo, pelos teoremas usuais, $x \,\bar{}n\, b \in \Delta$.

Desse modo, como Δ satisfaz (5), pela maximalidade de A, para qualquer fórmula B, $B \to (\Box T \to \Box(\sim B \to \boxed{n}\, x = b)) \in \Delta$. Além disso, pela condição (4) e maximalidade, para todo nome $\underline{b}$, $(Ez)(z = x \;\&\; z \,\bar{}n\, b) \in \Delta$. Logo, existe variável y, tal que $y = x \in \Delta$ e $z \,\bar{}n\, b \in \Delta$. Assim, pela condição (5), para toda fórmula B, $\sim B \to (\Box T \to \Box(B \to \boxed{n}\, y = b)) \in \Delta$ (Q.E.D.)

LEMA 3.11.3 Seja Δ um conjunto maximal- consistente e henkin completo. Nestas condições, as seguintes afirmações são equivalentes .

(I) Δ é nominal-consistente

(II) Δ satisfaz as condições (3) a (5) do Lema 3.11.1 2.1 e além disso, Δ satisfaz (2).(i)

(III) Δ satisfaz (6), (7) (a) e (7)(b).

DEMONSTRAÇÃO. Pelos lemas anteriores, (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III). Agora, suponhamos que Δ satisfaz (6), (7a) e (7b). Mostraremos que Δ satisfaz (1), (2)(i) e (2)(ii).

$\underline{\Delta}$ satisfaz (1) Sejam $\underline{A}$ e $\underline{B}$ fórmulas como na definição. Suponhamos que $\Delta \not\vdash_f B \rightarrow (x)(Ey_1) \ldots (Ey_n) \sim\Box A$. Logo, pela maximalidade de Δ, $B \in \Delta$, e $(Ex)(y_1) \ldots (y_n) \sim\Box A \in \Delta$. e, pela henkin-completude de Δ, existe variável y, tal que $(y_1) \ldots (y_n) \Box A(x/y) \in \Delta$. Temos dois casos possíveis:

CASO 1: $y \equiv a \in \Delta$, para algum nome $\underline{a}$.

Seja n o grau de modalização de $\Box A$. Pela condição (6), existe um nome $\underline{b}$, tal que $\boxed{n}\, y \equiv b \in \Delta$. Pela maximalidade de Δ e Teorema T7, $(y_1) \ldots (y_n) \Box A\ (x/b) \in \Delta$. Consequentemente, $(y_1) \ldots (y_n)$ $(\Box A \vee \sim A)(x/b) \in \Delta$, para algum nome b.

CASO 2 : $y \equiv a \notin \Delta$, para todo nome a.

Suponhamos, por absurdo, que $\Delta \vdash_f B \rightarrow (Ey_1) \ldots (Ey_n) (\sim\Box A \,\&\, A)(x/a)$, para todo nome a. Pela condição (7)(a), existe um nome b, tal que $\sim C \rightarrow \Box (C \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv b) \in \Delta$, para qualquer fórmula C. Assim, $(Ey_1) \ldots$ $(Ey_n)(\sim\Box A \,\&\, A)(x/b) \in \Delta$. Logo, existem variáveis $z_1, \ldots, z_n$, tais que $\sim\Box A\ (x/b)' \in \Delta$ e $A(x/b)' \in \Delta$ e $A(x/b)' \in \Delta$(onde $A(x/b)'$ e $A(z_1, \ldots, z_n)$). Logo, $\sim\sim A(x/b)' \rightarrow \Box(\sim A(x/b)' \rightarrow \boxed{n}\, y \equiv b) \in \Delta$ e pela maximalidade de Δ, e Teorema, T7, $\Box\ (\sim A(x/b)' \rightarrow \sim A(x/y)') \in \Delta$, portanto, por teoremas usuais, $\sim\Box\ A(x/y)' \in \Delta$ e, assim, $\sim(y_1) \ldots$ $(y_n)\ \Box A\ (x/y) \in \Delta$ (absurdo).

Δ satisfaz (2)(i). Suponhamos que $\Delta \not\vdash_f (x)(x \equiv a \rightarrow A)$, para algum nome a. Logo, pela maximalidade e henkin-completude, existe variável y, tal que $y \equiv a \in \Delta$ e $A(x/y) \in \Delta$. Assim, por (6), existe nome b, tal que $\boxed{n}\, y \equiv b \in \Delta$ (onde n é o grau de modalização de $\underline{A}$). Logo, $A(x/b) \in \Delta$, para algum nome b. E, pela consistência de Δ, $\Delta \not\vdash \underline{A}(\underline{x}/\underline{a})$, para todo nome a

Δ satisfaz (2)(ii). Suponhamos que $\Delta \not\vdash_f (x)(\tilde{}A \rightarrow$
$z)(Ey)(y = x \;\&\; (z_n)(\Box B \rightarrow (B(z/y) \rightarrow \Box B(z/y) \rightarrow \Box B(z/y)))))$, i.e,
$Ex)(\tilde{}A \;\&\; (Ez)(y)(y = x \rightarrow (Ez_1) \ldots (Ez_n)(\Box B \;\&\; B(z/y) \;\&\; \sim\Box B(z/y)))) \in \Delta$.

ogo, existem variáveis v e w, tais que $\sim A(x/v) \in \Delta$ e $(\;)(\; = v \rightarrow$
$Ez_1) \ldots (Ez_n)\ (\Box B \;\&\; B(z/y) \;\&\; \Box B(z/y))(z/w) \in \Delta$. Obviamente,
se $v \equiv a \in \Delta$, para algum nome a, então $\tilde{}A(x/a) \in \Delta$, para algum nome a (pelo condição (6) e teorema T7), i.e., $\Delta \not\vdash_f A(x/a)$, para todo nome a. Mostraremos, agora, que a hipótese contrária, que $v \equiv a \notin \Delta$, para todo nome a, conduz ao absurdo. Suponhamos, então, que $v \not\equiv a\ \Delta$, para todo nome a. Pela condição (7.)(a), existe um nome b, tal que, para qualquer fórmula C,

$$\sim C \rightarrow \Box(C \rightarrow \boxed{n}\ w = b) \in \Delta$$

(ou, se $w \equiv a$, para algum nome a, esse fato é garantido pela condição (b)). E, pela condição (7)(b), existe uma variável z, tal que $z \equiv v$ e, para toda fórmula C,

$$\tilde{}C \rightarrow \Box\ (C \rightarrow \boxed{n}\ z = b) \in \Delta$$

Logo, como $(y)(y = v \rightarrow (Ez_1) \ldots (Ez_n)\ (\Box B(z/w) \;\&\; B(z/y) \;\&$
$\sim\Box B\ (z/y)) \in \Delta$. Consequentemente, $\Box B(z/w)' \;\&\; B(z/\bar{z})' \;\&\sim\Box B(z/\bar{z})' \in \Delta$
onde ' é a operação de henkização. E, pela escolha de z,

$$B(z/\bar{z})' \rightarrow \Box\ (B(z/\bar{z})' \rightarrow \boxed{n}\ \bar{z} = b)) \in \Delta$$

Assim, como $B(z/\bar{z})' \rightarrow \Box\ (\tilde{}B(z/\bar{z})' \rightarrow \boxed{n}\ w \equiv b) \in \Delta$ e $B(z/\bar{z})' \in \Delta$
e, como $\sim\Box B(z/\bar{z})' \in \Box$, pelos teoremas modais usuais,
$\sim\Box B(z/w)' \in \Delta$ (absurdo).

DEFINIÇÃO 3.12 Seja Δ um conjunto de fórmulas de L. Δ diz-se saturado em L se:

(i) Δ é maximal-f-consistente;

(ii) Δ é henkin-consistente; e, finalmente,

(iii) Δ é nominal-consistente.

Mostraremos, agora, mais uma propriedade de conjuntos saturados que será utilizada futuramente.

LEMA 3.12.1 Sejam A e B fórmulas de L, como nos postulados P12 a P14 , e seja Δ um conjunto saturado. Nessas condições, valem as seguintes asserções:

(i) Se $\Box(\vec{z})\ (B \rightarrow (Ey_1)\ldots(Ey_n)(\sim \Box A \mathbin{\&} A)(x/a)) \in \Delta$, para todo nome a, então $\Box(x)(\vec{z})\ (B \rightarrow (Ey_1)\ldots(Ey_n) \sim \Box A) \in \Delta$.

(ii) Se $\Box(\vec{z})\ A(x/a) \in \Delta$, para todo nome a, $\Box(x)(x = a \rightarrow A) \in \Delta$, para todo nome a.

(iii) Se $\Box(\vec{z}){\sim}A(x/a) \in \Delta$, para todo nome a, então $\Box(x)\ (\vec{z})$ $(A \rightarrow (z)(Ey)(y = x \mathbin{\&} (\vec{v})(\Box B \rightarrow (B(z/y) \rightarrow \Box B(z/y)))$

DEMONSTRAÇÃO. Decorre da asserção que apresentaremos em seguida, levando-se em conta os postulados, respectivamente P11, P12 e P13 e tendo em mente o fato de Δ ser saturado.

<u>Asserção</u>: Para qualquer fórmula A, $(Ex) \Diamond A \in \Delta$ sse $\{(Ex)A\} \cup \Delta^{\Box} \subseteq \Delta$ ou $\Diamond A(x/a) \in \Delta$, para algum nome $\underline{a}$.

DEMONSTRAÇÃO. Da esquerda para a direita é trivial. Por outro lado, suponhamos que, para todo nome $\underline{a}$, $\Diamond A(x/\underline{a}) \notin \Delta$. Logo, $\Box \sim A(x/\underline{a}) \in \Delta$, para todo nome $\underline{a}$. Por outro lado, suponhamos que $(Ex) \Diamond A \in \Delta$. Como Δ é saturado e $\Box \top \in \Delta$, existe uma variável y e um nome $\underline{a}$, tais que $\Diamond A(x/y) \in \Delta$ e $(\sim A(x/y) \rightarrow \Box(A(x/y) \rightarrow \boxed{n}\ y = a)) \in \Delta$, onde n é o grau de modalização de x em $\underline{A}$. Logo, como $\vdash \boxed{n}\ y \equiv a \rightarrow A(x/y) \rightarrow A(x, a)$, $\sim A(x/y) \rightarrow \Box(A(x/y) \rightarrow A(y/a)) \in \Delta$ e $\sim A(x/y) \rightarrow \Diamond A(x/y) \rightarrow \Diamond A(x/a)$. Assim, $A(x/y) \in \Delta$. Cabe mostrar que $\Delta^{\Box} \subseteq \Delta$. Suponhamos que $\Delta^{\Box} \nsubseteq \Delta$. Logo, existe fórmula B, tal que $\neg B \in \Delta$ e $\Box B \in \Delta$ e, como $\sim B \rightarrow \Box(B \rightarrow \boxed{n}\ y \equiv b) \in \Delta$, para algum nome b, $\Diamond A(x, y) \rightarrow \Diamond A(x/b) \in \Delta$ e, $\Diamond A(x/b) \in \Delta$ (contradição).

Para definirmos a base modal, necessitamos de uma terminologia adicional.

DEFINIÇÃO 3.14. Seja Δ um conjunto saturado de fórmulas de L e seja A uma fórmula de L, cujoas variáveis são $y_1, \ldots, y_n$ e sejam $a_1, \ldots, a_n$ nomes em L. Dizemos que $A(a_1, \ldots, a_n)$ é uma <u>Δ-instância de A</u> se, para $1 \leqslant k \leqslant n$, temos que:

(i) $y_k \neq b \in \Delta$, para todo nome b e $y_k \sim_m a_k \in \Delta$, ou

(ii) $\boxed{m+1}\, y_k = a_k \in \Delta$

onde $n \geqslant g_A(y_k))$.

NOTAÇÃO. Seja Δ um conjunto saturado em L.

(i) $\epsilon(\Delta^{\square}) = \{A \in FORM_L : \square A \in \Delta\}$

(ii) $\epsilon_s(\Delta^{\square}) = \{A^* \in SENT_L$: existe fórmula A em $\epsilon(\Delta^{\square})$ e A^* é uma Δ-instância de A$\}$

DEFINIÇÃO 3.15. A base canônica B_L, para L é o termo $< S, R, N >$, onde $S = \{\Delta : \Delta$ é saturado em L$\}$; $R = \{<\Delta, \Sigma> :$ $\Delta = \Sigma$ e $\epsilon(\Delta^{\square}) \subseteq \Delta$ ou existe uma fórmula A em Δ, tal que $\epsilon_s(\Delta^{\square}) \cup \{\sim A\} \subseteq \Sigma$ $\}$; $N = \{\Delta \in S : \square T \in \Delta\}$.

LEMA 3.15 Seja Δ um conjunto saturado em L. Para qualquer fórmula A de L e qualquer Δ-instância, A^* de A, vale que $\Diamond A \in \Delta$ se e somente se $\square T \notin \Delta$ ou existe Σ em S, tal que $\Delta R \Sigma$ e, ou $\Delta = \Sigma$ e $A \in \Delta$ ou $\Sigma \neq \Delta$ e $A^* \in \Sigma$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja A uma fórmula de L e seja A^* uma Δ-instância de A.

Da direita para a esquerda é trivial, pois se $\Diamond A$ não pertence a Δ, então $\square \sim A$ pertence a Δ e, consequentemente, $\square T$ (pois, $\vdash \square C \rightarrow \square T$, para qualquer fórmula C) e, tanto $\epsilon(\Delta^{\square}) \cup \{A\}$, como $\epsilon_s(\Delta^{\square}) \cup \{A^*\}$ serão inconsistentes.

Por outro lado, suponhamos que $\Diamond A$ pertence Δ, porém $\epsilon(\Delta^{\square}) \cup \{A\} \nsubseteq \Delta$ e $\square T \in \Delta$. Temos, então, dois casos possíveis:

Caso 1. $\varepsilon(\Delta^{\square}) \not\subseteq \Delta$. Nesse caso, existe uma fórmula B, tal que $\square B$ pertence a Δ , porém B não pertence a Δ. Ora, como $\Diamond A$ pertence a Δ, $\Diamond(B \,\&\, A)$ pertence a Δ (visto que $\vdash \square B \,\&\, \Diamond A \rightarrow \Diamond(B \,\&\, A)$) e $\sim(B \,\&\, A)$ pertence a Δ.

Caso 2. $A \notin \Delta$. Logo, $\sim(A \,\&\, A) \in \Delta$ e $\Diamond(A \,\&\, A) \in \Delta$.

Vemos, portanto, que em ambos os casos existe uma fórmula B, tal que $\sim(B \,\&\, A)$ pertence a Δ , porém $\Diamond(B \,\&\, A)$ também pertence a Δ. O resultado desejado decorre, então, dos dois lemas que passaremos a mostrar.

LEMA 3.15.2 SEja Δ um conjunto saturado, tal que $\square T \in \Delta$ e seja A uma fórmula de L cujas distintas variáveis livres são $v_1, \ldots, v_n$ e tal que $\Diamond A \in \Delta$, porém $A \notin \Delta$. Finalmente, seja Σ o conjunto $\{A\} \cup \{B \in \varepsilon(\Delta^{\square})$: as variáveis livres em B ocorrem livres em A$\}$. Temos, então, que Σ satisfaz às seguintes propriedades:

(i) Σ é f-consistente;

(ii) Σ é nominal consistente;

(iii) para qualquer sentença B , se $B \in \varepsilon_s(\Delta^{\square})$, então $\Sigma \vdash_f B$;

(iv) $\Sigma \vdash_f A^*$, para qualquer Δ-instância A^* de A.

DEMONSTRAÇÃO. (i) Como $\square T \in \Delta$, $\varepsilon(\Delta^{\square})[v_1; \ldots, v_n]$ não é vazio. Assim, se Σ for fracamente inconsistente, pela monotonicidade, $\Delta \vdash_f \square\sim A$ (absurdo).

(ii) Aqui mostraremos apenas que Σ satisfaz à condição (1.) da definição de nominal-consistência, pois a demonstração para as demais é análoga, usando os demais ítens do Lema 3.12.1.

SEjam B e C fórmulas quaisquer de L , tais que

$\Sigma \vdash_f B \to (E\vec{y})(\sim\Box C \,\&\, C)(x/a)$, para qualquer nome a.

Podemos supor, sem perdadde generalidade, que x não ocorre livre em A, nem em B. Consideremos, então $z_1, \ldots z_n$ as variáveis livres em B ou em C(x/a) que não ocorrem livres em A. Temos, então, que

$$\Sigma \vdash_f (\vec{z})(B \to (E\vec{y})(((\sim\Box C \,\&C)(x/a)))),$$

para qualquer nome a. Logo,

$$\varepsilon(\Delta^{\Box}) \vdash_f A \to (\vec{z})(B \to (E\vec{y})(((\sim\Box C \,\&\, C)(x/a)))),$$

para todo nome a.(pois, $z_1, \ldots, z_n$ não ocorrem livres em A). Logo,

$$\Delta \vdash_f \Box(A \to (\vec{z})(B \to (E\vec{y})((\sim\Box C \,\&\, C)(x/a))),$$

para todo nome a e, por conseguinte, pelo Lema 3.12.1, item (i),

$$\Delta \vdash_f \Box(x)(A \to (\vec{z}) (B \to (Ey) \sim\Box C)),.$$

Portanto, visto que x não ocorre em A

$$\Sigma \vdash_f (x)(\vec{z})(B \to (Ey) \sim\Box C)$$

(iii) Decorre diretamente da asserção seguinte:

Asserção. Para qualquer fórmula B de L , $\Box(B \to (A \to B^*)) \in \Delta$ se B* for uma Δ-instância de B.

Demonstração. Seja B uma fórm ula cujas distintas variáveis livres são $y_1, \ldots y_m$ e seja $B(a_1, \ldots, a_m)$ uma Δ-instância de B. Por definição de Δ-instância, temos que, para $1 \leq k \leq m$,

$y_k \sim_{p_k} a_k \in \Delta$ e $y_k \neq b \in \Delta$, para todo nome b; ou

$\boxed{p_k}\, y_k = a_k \in \Delta$ (onde p_k é o grau de modalizaçãr de y_k em B). Ora, como $\Box T \in \Delta$ e Δ é nominal-consistente, temos que, para k=1,...,n

$$\Delta \vdash_f (\sim A \to \Box(A \to \boxed{p_k}\, y_k = a_k)).$$

Portanto, pelo teorema T9 e teoremas modais usuais,

$$\Delta \vdash_f \sim A \to \Box(A \to (B \leftrightarrow B^*)),$$

ou seja, como $\sim A \in \Delta$, $\Delta \vdash_f \Box(B \to (A \leftrightarrow B^*)$.

(iv) Para mostrar que Σ deduz fracamente toda Δ-instância de A é suficiente mostrar que $\Box(A \rightarrow A^*) \in \Delta$, para qualquer Δ-instância A* de A. Fato este que decorre da propriedade (7a) de conjuntos nominais consistentes, tendo em mente o teorema T8 e o fato de que A não pertence a

(Q.E.D.)

LEMA 3.15.3. Seja Δ um conjunto f-consistente e nominal-consistente de fórmulas de L, tal que existem infinitas variáveis que não ocorrem livres em fórmulas de Δ. Então existe um conjunto Σ saturado em L, tal que $\Delta \subseteq \Sigma$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ uma enumeração de todas as fórmulas de L. Da maneira usual, construiremos, inicialmente, uma família $(\Delta_n)_{n \in \omega}$ de conjuntos, onde Δ_0 é Δ para $n \geqslant 1$, devemos considerar vários casos possíveis:

Caso 1 $\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$ é f-inconsistente. Nesse caso, Δ_n é Δ_{n-1}

Caso 2 $\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$ é f-consistente.

Sub-caso 2.1. A_n não é da forma (Ex)B. Nesse caso, Δ_n é $\Delta_{n-1} \cup \{A\}$.

Sub-caso 2.2 A_n é da forma (Ex)B. Aqui, devemos considerar:

Sub-sub-caso 2.2.1. $\Delta_{n-1} \cup \{B(x/a)\}$ é f-consistente para algum nome a. Seja, então, y a primeira variável que não ocorre livre em $\Delta_{n-1} \cup \{B\}$ e a o primeiro nome, tal que $\Delta_{n-1} \cup \{(B(x/a)\}$ é f-consistente. Δ_n é, então, $\Delta_{n-1} \cup \{A, B(x/a), B(x/y)\}$

Sub-sub-caso 2.2.2 $\Delta_{n-1} \cup \{B(x/a)\}$ é f-inconsistente, para qualquer nome a. Nesse caso, Δ_n é $\Delta_{n-1} \cup \{B(x/y)\}$ (onde, y é a primeira variável livre nova).

Consideremos, então, $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n$. Por indução em n pode-se mostrar que Δ_n é f-consistente e nominal-consistente. E, portanto, como Σ é maximal, Σ é saturado em L.

DEFINIÇÃO 3.16 A <u>estrutura modal canônica para</u> L, M_L é o par $\langle B_L, (A_\Delta)_{\Delta \in S} \rangle$ no qual, para todo Δ em S, A_Δ é a estrutura clássica para L canônica, isto é,

(i) $|A_\Delta| = TERM_L / \approx_\Delta$ (onde $t \approx_\Delta u$ se e somente se $t = u$ pertence a Δ);

(ii) para tôdo símbolo para predicado P^n, $P^n_{A_\Delta} =$

$$\{ \langle [t_1]_\Delta, \ldots, [t_n]_\Delta \rangle : P^n t_1 \ldots t_n \in \Delta \}$$

(iii) para todo símbolo funcional n-ário, f^n e para quaisquer $[t_1]_\Delta, \ldots, [t_n]_\Delta, [u]_\Delta$ em $|A_\Delta|$, $f^n_A([t_1]_\Delta, \ldots [t_n]_\Delta) = [u]_\Delta$ se e somente se $f^n t_1 \ldots t_n \in \Delta$;

(onde $[t]_\Delta$ denota a classe de equivalência de t pela relação $\approx_\Delta$

Graças aos lemas 3.11.1 e 3.12.2, facilmente se prova o lema seguinte:

LEMA 3.16.1. Seja Δ um conjunto saturado em L e sejam t um termo e a um nome em L. O par $\langle [t]_\Delta, a \rangle$ D_{A_Δ} se e somente se, para qualquer $n \geq 0$, existe uma variável x em $[t]_\Delta$, tal que ou $\boxed{n}\ x = a \in \Delta$ ou $t \neq b \in \Delta$, para qualquer nome b e $x \sim_n a \in \Delta$.

LEMA SEMÂNTICO. Sejam A uma fórmula de L, Δ um conjunto saturado em L e s uma sequência em D_{A_Δ} que satisfaz às seguintes condições:

(a) se $x = a \in \Delta$, para algum nome a, então $\boxed{n}\, x = x^{(s)} \in \Delta$

(b) se $x \neq a \notin \Delta$, para todo nome a, então $x \underset{n}{-} x^{(s)} \in \Delta$

(c) $s^*(x) = [x]_\Delta$,

para qualquer variável x livre em A (onde $n \geqslant g_A(x)$). Nestas condições, temos que

$$M_L, \Delta, s \text{ sat } A \text{ sse } A \in \Delta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Da maneira usual, por indução na complexidade de A. Aqui, apresentaremos apenas os dois casos que dão um pouco de trabalho.

Caso 1. A é da forma $\Box B$. Neste caso, porhipótese de indução,

(*) M_L, Δ, s sat B se e somente se B

E, como pelo Lema 3.16.1, para todo Σ em S, podemos encontrar uma sequência s' em D_{A_Σ} que satisfaz as condições (a). (b) e (c), acima, decorre da hipótese de indução, levando-se em conta a Proposição 1.11, que

(**) para todo Σ em S, tal que $\Sigma \neq \Delta$ e $\Delta R \Sigma$

$$M_L, \Sigma \models B^{(s)} \text{ se e somente se } B^{(s)} \in \Sigma.$$

De (*) e (**), pelo Lema 3.15.1, obtemos o resultado desejado.

Caso 2. A é da forma $(x_k)B$. Neste caso, pelo lema anterior, para toda sequência $\bar{s}$ em D_A, k-variante de s, existe uma variável y, tal que $s^*(y) = \bar{s}^*(x_k)$ e $x_k^{(\bar{s})}$ é $y^{(s)}$. Assim,

M, Δ, s sat A sse $M, \Delta, \bar{s}$ sat B, para toda sequência k-variante de s;

sse M, Δ, s sat $B(x/y)$ (pela Proposição 1.11)

sse $B(x_k/y) \in \Delta$, para toda variável y

sse $(x_k)B \in \Delta$.

COROLÁRIO Para qualquer sentença A de L e qualquer conjunto Δ saturado em L, $M, \Delta \models A$ se e somente se $A \in \Delta$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata do Lema Semântico, visto que, qualquer sequência em D_{A_Δ} satisfaz (vacuamente) as condições (a),(b) e (c), para toda variável livre de A.

TEOREMA DA COMPLETUDE. SEja L uma linguagem modal e sejam um conjunto de fórmulas e A uma fórmula de L.

(i) $\models A \Rightarrow \vdash A$;

(ii) $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$;

(iii) Se Γ é um conjunto consistente de sentenças de L, então Γ tem modelo em L', para alguma extensão em constantes L' de L.

DEMONSTRAÇÃO. Facilmente se mostra, graças aos cuidados que tomamos nas definições de prova, dedução, validade e consequência, que (i) decorre de (ii) que, por sua vez, decorre de (iii). Para demonstrarmos (iii), consideremos um conjunto infinito de constantes novas (i.e., que não ocorrem em sentenças de Γ). Facilmente se demonstra que Γ é nominal-consistente em $L \cup \mathcal{C}$ e Γ contina consistente em $L \cup \mathcal{C}$. Logo, pelo Lema 3.15.3, como Γ não contém variáveis livres, existe um conjunto saturado em L, Δ, tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Portanto, pelo corolário acima, $M_L, \Delta \models A$, para toda fórmula A em Γ.

ADENDO I

Neste adendo mostraremos que, para qualquer conjunto consistente de fórmulas (abertas ou não) de uma linguagem modal L, existe uma estrutura modal *M* para uma extensão em constantes L' de L, existe um índice i na base de *M* e existe uma sequência s no domínio modal da estrutura clássica indexada por i, tais que *M*, i, s sat A para t oda fórmula A do conjunto em questão.

Observemos inicialmente que, ao contrário do usual, este resultado não pode ser demonstrado diretamente a partir da afirmação, demonstrada antes, de que todo conjunto consistente de sentenças tem modelo, visto que nem sempre podemos substituir variáveis por constantes preservando a consistência.

Aproveitaremos a ocasião para mostrar um teorema de completude quando consideramos, por um lado, a noção de dedução fraca e, por outro, uma noção de consequência semântica como preservação da relação de satisfação (e não, como antes, de verdade).

Nas definições e proposições seguintes, consideramos uma linguagem modal L, $\Gamma \cup \{A\}$ e Δ conjuntos de fórmulas de L.

DEFINIÇÃO I.1 A fórmula A diz-se consequência fraca de Γ se, para qualquer extensão simples L' de L, para qualquer estrutura modal *M* para L', para qualquer índice i na base de *M* e para qualquer sequência s no domínio modal da estrutura clássica indexada por i, se *M*, i, s sat B, para toda fórmula B em Γ, então *M*, i, s sat A.

DEFINIÇÃO I.2 Um conjunto Γ de fórmulas de L é fortemente nominal completo em L se, para qualquer variável x, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) se $x = b \in \Gamma$, para algum nome b, então existe um nome a, tal que, para qualquer $n \geqslant 0$, $\boxed{n}\, x = a \in \Gamma$;

(ii) Se não existe nome b, tal que $x = b \in \Gamma$, então:

(a) existe um nome a, tal que, para qualquer $n \geqslant 0$ e para qualquer fórmula B de L, $\sim B \to (\Box T \to \Box(\sim B \to \boxed{n}\, x = a))$ pertence a Γ ;

(b) para todo nome b em L , existe uma variável y, tal que, para qualquer $n \geqslant 0$ e qualquer fórmula B de L, $x = y \in \Gamma$ e $\sim B \to (\Box T \to \Box(B \to \boxed{n}\, y = b))$.

Observemos que decorre do Lema 3.11.3 que todo conjunto saturado e fortemente nominal completo é nominal consistente. Mostremos, agora, que todo conjunto fracamente consistente pode ser incluído em um conjunto saturado e fortemente-completo (portanto, o mesmo vale para um conjunto consistente).

PROPOSIÇÃO I.3 Seja Γ um conjunto f-consistente de fórmulas de L, tal que existem infinitas variáveis que não ocorrem livres em fórmulas de Γ e existem infinitas constantes que não ocorrem em fórmulas de Γ. Nestas condições, existe um conjunto Δ fortemente-completo e saturado em L, tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ uma enumeração das fórmulas de L. Definimos, por indução em n, a família de conjuntos de fórmulas $(\Delta_n)_{n \in \omega}$, por meio das seguintes cláusulas:

(i) Δ_0 é o próprio conjunto Γ

(ii) Seja A a n-ésima fórmula na enumeração de $FORM_L$, considerada acima. Se $\Delta_n \cup \{A\}$ for f-inconsistente, então Δ_{n+1} é o próprio Δ_n. Caso contrário, devemos considerar a forma de A:

<u>Caso 1</u>: A não é da forma (Ex)B. Neste caso, Δ_{n+1} é $\Delta_n \cup \{A\}$.

Caso 2 A é da forma (Ex)B. Neste caso, seja a a primeira constante de L que não ocorre em Δ_n e y a primeira variável que não ocorre livre em Δ_n. Devemos considerar ainda a forma de B; para tal, seja z uma variável distinta de x e b um nome qualquer em L.

Sub-caso 2.1 B não é z = x, nem z = x & x $\sim_0$ b . Neste caso, Δ_{n+1} é $\Delta_n \cup \{A, B(x/y)\}$.

Sub-caso 2.2 B é z = x. Neste caso, Δ_{n+1} é $\Delta_n \cup \{A, B(x/y)\} \cup \Theta$, onde

$$\Theta = \begin{cases} \{\boxed{m}\, z = a : m \in \omega\}, & \text{se } \Delta_n \cup \{B(x/a)\} \text{ for f-consistente} \\ \{z \sim_m a : m \in \omega\}, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

Sub-caso 2.3 B é z = x & x $\sim_0$ b . Neste caos, Δ_{n+1} é $\Delta_n \cup \{A, B(x/y)\} \cup \Theta$, onde

$$\Theta = \begin{cases} \emptyset \text{ (vazio)}, & \text{se } \Delta_n \cup \{z = a\} \text{ for f-consistente} \\ \{y \sim_m b : m \in \omega\}, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

LEMA I.3.1 Para todo $n \geqslant 0$, Δ_n é f-consistente.

DEMONSTRAÇÃO. Por indução em n. Por hipótese, Δ_0 é f-consistente. Suponhamos, agora, que Δ_n não é f-consistente (onde $n \geqslant 1$). Consideraremos, aqui, apenas os casos não triviais. Assim, podemos supor que $\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$ é consistente fracamente. Sub-caso 2.2. (i) A é da forma (Ex)(z = x) e $\Delta_{n-1} \cup \{z = a\}$ é f-consistente. Neste caso, se Δ_n fosse f-inconsistente, existiria um $m \geqslant 0$, tal que $\Delta_{n-1} \vdash_f \sim \boxed{m}\, z = a$, pelo teorema T8. Portanto, por T9, $\Delta_{n-1} \vdash_f \sim z = a$. (ii) B é (Ex)(z = x), porém $\Delta_{n-1} \cup \{z = a\}$ é f-inconsistente. Neste caso, se Δ_n

fosse f-inconsistente, existiria $m \geq 0$, tal que $\Delta_{n-1} \vdash_f \sim z \sim_m a$ (T8), o que é absurdo tendo em vista o teorema T12 e o fato de que a não ocorre em Δ_{n-1}.

<u>Sub-caso 2.3</u> B é $z = x \,\&\, x \sim_0 b$ e $\Delta_{n-1} \cup \{z = a\}$ é f-inconsistente. Logo, por T8, existe $m \geq 0$, tal que

$\Delta_{n-1} \vdash_f (Ex)\,(z = x \,\&\, x \sim_0 b) \,\&\, z = y \,\&\, y \sim_0 b \rightarrow \sim y \sim_m b$

Por leis clássicas,

$\Delta_{n-1} \vdash_f z = y \,\&\, y \sim_0 b \rightarrow \sim y \sim_m b$

E, pelo teorema T8,

$\Delta_{n-1} \vdash_f y \sim_m b \rightarrow z \neq y$

Portanto, como y não ocorre livre em Δ_{n-1},

$\Delta_{n-1} \vdash_f (y)(y \sim_m b \rightarrow z \neq y)$

Porém, como por hipótese Δ_{n-1} $z = a$ é f-inconsistente e a não ocorre em Δ_{n-1}, pelo teorema T11,

$\Delta_{n-1} \vdash_f (Ey)(y = z \,\&\, y \sim_m b)$ (absurdo)

Vemos, portanto, que $\Delta = \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n$ é consistente, maximal e henkin-completo. Falta apenas mostrar que é fortemente nominal-completo. O que mostramos no lema seguinte.

LEMA I.3.2 $\Delta = \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n$ é nominal fortemente completo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja x uma variável e seja y uma variável distinta de x e seja, ainda, $(Ey)(y = x)$ a n-ésima fórmula na enumeração antes considerada. Obviamente $\Delta_n \cup \{(Ey)(y = x)\}$ é f-consistente. Além disso, se existir um nome b em L, tal que $b = x$ pertence a Δ, então $\Delta_n \cup \{a = x\}$ é f-consistente e, pela construção, $\boxed{m}\, x = a \in \Delta_{n+1}$, para qualquer $m \geq 0$. Por outro lado, se para todo nome b em L $x \doteq b$ não pertence a

Δ , então $\Delta_n \cup \{x = a\}$ é f-inconsistente e, por construção, $x \sim_m a$ pertence a Δ , para qualquer $m \geq 0$ e, como $\Delta_n \cup \{x = a\}$ é f-inconsistente, pelo teorema T10, para qualquer fórmula B e qualquer $m \geq 0$, $\sim B \to (\Box T \to \Box(B \to \boxed{m}\ x = a)) \in \Delta$.

Consideremos, agora, b um nome qualquer de L,. Como $\Delta_n \cup \{x = a\}$ é f-inconsistente, pelo teorema T11, $\Delta_n \vdash_f (Ey)(x = y \ \& \ y \sim_o b))$ Portanto, seja $(Ey)(x = y \ \& \ y \sim_o b)$ a m-ésima fórmula da enumeração, $\Delta_m \cup \{(Ex)(x = y \ \& \ y \sim_o b)\}$ é f-consistente. Pela construção, existe uma variável z, tal que $z = x \in \Delta_m$ e $z \sim_k a \in \Delta_m$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto, pelo teorema T10, $\sim B \to (\Box T \to \Box(B \to \boxed{k}\ z = b)) \in \Delta$ para todo $k \geq 0$ e toda fórmula B de L.

Dos resultados que provamos agora juntamente com os resultados demonstrados no capítulo anterior, em particular, o Lema Semântico, decorre o resultado desejado, a saber,

TEOREMA Seja L uma linguagem modal e seja $\Delta \cup \{A\} \subseteq FORM_L$.

(i) $\Gamma \vdash_f A$, então $\Gamma \models_f A$

(ii) Se Γ é um conjunto fracamente consistente, então existe uma extensão em constantes L' de L, existe uma estrutura modal M para L', existe um índice i na base de M e existe uma sequência s em D_{A_i} , tal que M, i, s sat B, para qualquer fórmula B em .

Observemos apenas que, como é usual, aqui também podemos supor que existem inifinitas variáveis que não ocorrem livres no conjunto .

ADENDO II

Analisaremos, aqui, as condições sob as quais podemos representar os domínios de quantificação na Semântica Nominativa como funções de escolha em uma família de estruturas clássicas. Desse modo, procuraremos determinar em que medida S.N. pode ser subsumida ao esquema abstrato de Semântica de Mundos Possíveis apresentado no início do segundo capítulo.

Consideremos, então, uma linguagem modal de primeira ordem L, uma base modal $B = \langle I, R, N \rangle$, uma estrutura modal $M = \langle B, (A_i)_{i \in I} \rangle$ para L e i um índice em I.

Observemos, inicialmente, que todo par α, a em $A_i \times NOM_L$ induz uma função de escolha na família

$$(|A_j|)_{j \in I^i},$$

a saber, a função $\delta_{\langle \alpha, a \rangle}$, tal que, para cada j em I^i,

$$\delta_{\alpha, a}(j) \begin{cases} = \alpha, & \text{se } j = i \\ = a_{A_j}, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

Vale dizer, os domínios modais das estruturas clássicas em M induzem uma estrutura modal generalizada

$$G_M = \langle M, (C_i)_{i \in I} \rangle$$

onde, para cada i em I,

$$C_i = \{ \delta_{\langle \alpha, a \rangle} : \langle \alpha, a \rangle \in D_{A_i} \}$$

De modo análogo, cada sequência s em D_{A_i} induz uma sequência F_s em C_i, a saber, a sequência tal que, para cada $k \geq 0$, F atribui a k a função $\delta_{s(k)}$.

Podemos nos perguntar, agora, em que condições a noção de satisfação em i com respeito a M coincide com a de satisfação na estrutura modal generalizada induzida por M, G_M. Para determinarmos tais condições, necessitamos de um lema auxiliar.

LEMA. Suponhamos que para qualquer j em I^i, para qualquer par$\langle a,a\rangle$ em D_{A_j}, as seguintes condições valem:

(i) $f_{\langle a,\ a\rangle}(j) = a$;e

(ii) para todo ℓ em $I^{(j)}$, $f_{\langle a,a\rangle}(\ell) = a_{A_\ell}$.

Nestas condições, temos que, para qualquer sequência s em D_{A_i} M , i, s sat A se e somente G_M, j, F_s sat_r A.

DEMONSTRACÃO. Consideremos, aqui, apenas os casos que dão um pouco de trabalho.

<u>A é da forma B.</u> Neste caso, por hipótese de indução,

(*) M , i, s sat A sse G_M, i, F_s sat_r B

E, por outro lado, para todo j em I, tal que $i\neq j$, $i\ R\ j$, tome-a sequência s_j em D_{A_j}, tal que atribui ao índice de uma variável x livre em A o par$\langle (x^{(s)})_{A_j}$, $x^{(s)}\rangle$. Pela Proposição 1.11,

(**) M, j $B^{(s)}$ sse M, j, s_j sat B.

Além disso, se $i\ R\ j$ e $j\neq i$, então $j \in I^{(i)}$ e, por hipótese, $F_s{}^*(x,\ j\ ) = (x^{(s)})_{A_j} = s_j(x)$ e para todo ℓ em $I^{(j)}$, $F_s{}^*(x,\ell) = (x^{(s)})_{A_\ell} = (x^{(s_j)})_{A_\ell}$ (visto que $I^{(j)} \subseteq I^{(i)}$), para qualquer variável x livre em B. Logo, pela hipótese de indução

(***) M,j, s_j sat B sse G_M , j, F_s sat_r B

O resultado desejado decorre diretamente de (*), (**) e (***).

<u>A é da forma $(x_k)B$.</u> Neste caso, basta considerarmos os os pares $\bar{s}$ e $\bar{F}_{\bar{s}}$, k-variantes de, respectivamente, s e F_s , tais que o k-ésimo elemento em $\bar{F}_{\bar{s}}$ é a função $f_{\langle a,\ a\rangle}$ onde$\langle a\ ,a\rangle$ é o k-ésimo par em $\bar{s}$ (por hipótese existem tais pares).

PROPOSIÇÃO. As afirmações (i) e (ii) abaixo são equivalentes:

(i) para todo j em I, A_j é completa ou j $I^{(j)}$;

(ii) M, j, s sat A se e somente se G_M, j, F_s sat A, para qualquer fórmula A.

DEMONSTRAÇÃO. Assumamos, inicialmente, (i). Seja j I , mostraremos que, para qualquer sequência s em D_{A_j}, s e F_s satisfazem as condições (i) e (ii) do lema anterior. Se $j \in I^{(j)}$, então por construção de F_s, para todo em $I^{(j)}$, $F^*(x,\ell)$ é $(x^{(s)})_{A_\ell}$ (visto que $\ell \neq j$) e se A_j for completa, $(x^{(s)}_j)_{A_j}$ é $s^*(x)$; assim, se $j \in I^{(j)}$, $F^*(x, j) = a_{A_j} = (x^{(s)})_{A_j}$, para qualquer variável x .

Por outro lado, suponhamos que exista j em I^i, tal que A_j é incompleta e $j \in I^{(j)}$. Seja, então, a um objeto não nomeado em A_j. Como $j \in I^{(j)}$, existe $\ell \neq j$, tal que j R ℓ e ℓ R^n j, para algum $n \geqslant 0$. Consideremos, então, a um nome em L e A(x) a fórmula

$$(y)(y \neq x \rightarrow \Box(x=y \rightarrow \boxed{n}\, x=a)$$

onde y é diferente de x. E seja s uma sequência em D_{A_j}, tal que $s^*(x) = a$ e $x^{(s)}$ é a. Como $j \in I^{(j)}$, j é normal e M, j, s sat A(x). Porém, G_M, F_s não sat_r A(x) , visto que, se tomarmos a sequência $\bar{F}$ em C_j que difere de F no índice de y e neste tem a função $\langle a_{A_j} ; a \rangle$, G_M, j, $\bar{F}$ sat_r $y \neq x$ e G_M, ℓ, $\bar{F}$ sat x=y, porém G_M, ℓ, $\bar{F}$ não sat $\boxed{n}$ x= a , pois ℓ R^n j e G_M, j , $\bar{F}$ não sat x=a.

CONJECTURA. Seja B uma base modal, tal que, para qualquer índice i em B, i não é indiretamente acessível a si mesmo (isto é, i não pertence a $I^{(i)}$) e seja E um esquema proposicional modal. E é válido em B se e somente se toda instância de E em uma linguagem modal de primeira ordem L é verdadeira em qualquer estrutura modal para uma estensão de L cuja base é B

Observemos que, mesmo que a condição (i) da proposição acima não esteja satisfeita, podemos sempre representar os objetos dos domínios de quantificação (e, consequentemente, dos domínios de referência) como funções de escolha em uma família de universos clássicos, desde que escolhamos um conjunto adequado de índices, como mostramos a seguir.

Seja $(I_n)_n$ uma família de conjuntos disjuntos dois a dois e todos eles da mesma cardinalidade de I e I_0 é o próprio conjunto I. Tomemos, agora, σ_0 a função identidade em I e para n estritamente maior do que 0, σ_n uma bijeção qualquer de I_n em I. Além disso, seja

$$\sigma = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$$

Para cada $n \geq 0$, definimos a relação R_n em $I_n \times I_{n+1}$ como o conjunto

$$\{\langle i, j\rangle \in I_n \times I_{n+1} : \langle \sigma_n(i), \sigma_{n+1}(j)\rangle \in R \text{ e } \sigma_n(i) \neq \sigma_{n+1}(j)\}$$

A base modal $B' = I', R', N'$ é o terno onde $I' = \bigcup_{n\in\omega} I_n$,

$N' = \bigcup_{n\in\omega}\{i \in I_n : \sigma_n(i) \in N\}$ e $R' = \bigcup_{n\in\omega}\{\langle i, i\rangle \in I_n^2 : \sigma_n(i), \sigma_n(i) \in R\} \cup \bigcup_{n\in\omega} R_n$.

Facilmente se mostra que σ é um p-morfismo de B em B' e que, para quaisquer i e j em I', se j R' i e $j \neq i$, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Consideremos a estrutura modal $M' = \langle B' , (A'_i)_{i \in I'} \rangle$, tal que para todo i em I', A'_i é $A_{\sigma(i)}$. Desse modo, pela Prop.2.8

(*) M', i , s sat A sse M , σ(i), s sat A

para qualquer sequência s em $D_{A'_i} = D_{A_{\sigma(i)}}$

Ora, como para todo j em I', j não é indiretamente acessível a si mesmo , visto que se ℓ R' ℓ' , então $\ell' = \ell$ ou $\ell \in I_n$ e $\ell' \in I_{n+1}$), pela proposição que mostramos acima,

(**) M', i, s sat A se e somente se G_M, i , F_s sat_r A

E, como σ é sobrejetora, para qualquer i em I, temos que

M , i, s sat A sse G_M, i, F_s sat_r A

para qualquer fórmula A e qualquer sequência s em D_{A_i}

ADENDO III

Neste adendo apresentamos, inicialmente, uma maneira de expressar a identidade entre famílias de objetos homônimos, quando consideramos bases modais cujas relações de acessibilidade são euclidianas. Em seguida, especificamos algumas condições suficientes para tal que relação não seja expressável.

PROPOSIÇÃO. Sejam t e u termos quaisquer de uma linguagem L e, para $n \geqslant 0$, seja $(*_n)$ a fórmula

$$\boxed{n'}\ t=u \vee (t \neq u \ \&\ \Diamond\boxed{n}\, t=u)$$

onde $n' = n+1$. E seja $\mathcal{B} = \langle I, R, N \rangle$ uma base modal, tal que R satisfaz às condições seguintes:

(i) R é euclidiana;

(ii) para todo i em I, existe $j \neq i$, tal que $i\ R\ j$.

Nessas condições, para qualquer estrutura modal M cuja base é $\mathcal{B}$ e qualquer índice i em $\mathcal{B}$, temos que

$$M, i, s \text{ sat } (*_n) \text{ sse } M, j \models t^{(s)} = u^{(s)}, \text{ para todo j em } I^{(i)}_{n+1}$$

para qualquer sequência s em D_{A_i}.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, inicialmente que M, i, s sat $(*_n)$. Pela Proposição 1.15, se M, i, s sat $\boxed{n'}\ t=u$, então $M, j \models t^{(s)} = u^{(s)}$, para qualquer j em $I_{n+1}^{(i)}$. Por outro lado, se M, i, s sat $t \neq u$ & $\Diamond \boxed{n} t=u$, então existe um $j \neq i$, i R j, tal que M, j $\models t^{(s)}=u^{(s)}$. Consequentemente, para todo ℓ em I_n^j, M, ℓ $\models t^{(s)}=u^{(s)}$. Ora, como R é euclidiana, $I_{n+1}^{(i)} \subseteq I_n^j$. Donde decorre o resultado desejado.

Suponhamos, agora, que M, i, s não sat $(*_n)$. Portanto,

(1) M, i, s não sat $\boxed{n'}$ t=u e

(2) M, i, s não sat $t \neq u$ ou M, i, s não sat $\Diamond \boxed{n}$ t=u

Devemos, então, considerar dois casos possíveis:

Caso 1: M, i, s não sat $t \neq u$. Neste caso, decorre de (1), acima, que existe um $j \neq i$ e um inteiro positivo $m \leq n$, tais que M, j $\not\models \boxed{m} t^{(s)}= u^{(s)}$. Vale dizer, existe ℓ em $I_m^j \subseteq I_{n+1}^{(i)}$, tal que $M, \ell \not\models t^{(s)}= u^{(s)}$.

Caso 2: M, i, s não sat $\Diamond \boxed{n}$ t=u. Nesse caso, como existe $j \neq i$, tal que i R j, temos que existe $j \neq i$, i R j e M, j $\not\models$ $\boxed{n} t^{(s)}= u^{(s)}$. Consequentemente, existe ℓ em I_n^j $I_{n+1}^{(i)}$, tal que M, ℓ $\not\models t^{(s)}=u^{(s)}$.

(Q.E.D.)

A fim de caracterizarmos um conjunto suficiente de condições para a inexpressabilidade da relação que vimos considerando, devemos introduzir uma notação auxiliar:

NOTAÇÃO Seja $\mathcal{B}= \langle I, R, N \rangle$ uma base modal e seja i um elemento em I.

$I_i = \{ j \in I$: existe $n \geq 0$ e $j R^n i \}$

No que se segue, consideramos n um inteiro positivo, $\mathcal{B}= \langle I, R, N \rangle$ uma base modal e $i \neq j$ elementos de I, tais que:

I) $I^i \subseteq N$ e $I^i \subseteq \{\ell \in I$: existe ℓ' em I e $\ell R \ell' \}$;

II) $i\,R\,i$, $i\,R^n\,j$, $j\,R\,j$ e i não pertence a $I^{(i)}$;

III) para qualquer ℓ em I^i, existe ℓ' em I, tal que $\ell\ R\ \ell'$ e ℓ' não pertence a I_j.

Consideremos, também, a base modal $B' = < \{0,1\}\ ,\ R',\ \{0.1\} >$ onde $R' = \{<0,0>\ ,\ <0,1>\ ,\ <1,1>\}$. Podemos mostrar, sem necessidade de grande engenhosidade, as seguintes asserções:

Asserção 1. Seja Υ a função característica de I_i, isto é, para todo k em I,

$$\Upsilon(k) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \in I_i \\ 1 & , \text{ se } k \notin I_i \end{cases}$$

Υ é um p-morfismo de $B^{(i)}$ em B'.

Asserção 2. Seja $\overline{\Upsilon}$ a função característica de I_j. $\overline{\Upsilon}$ é um p-morfismo de $B^{(i)}$ em B'.

Consideremos, agora, A e A' duas estruturas clássicas completas para L (onde L é uma linguagem que contém pelo menos dois nomes distintos e disjuntos), tais que:

$$A \not\models a = b \qquad \text{e} \qquad A' \models a=b$$

Consideremos, também, as seguintes estruturas modais:

$M = <B,\ (A_k)_{k \in I}>$, onde A_k é A, se k pertence I_i e é A', de outro modo;

$\overline{M} = <B'\ ,\ (\bar{A}_p)_{p \in \{0,1\}}>$ onde $\bar{A}_0$ é A e $\bar{A}_1$ é A';

$\overline{\overline{M}} = <B\ ,\ (\bar{\bar{A}}_k)_{k \in I}>$ onde $\bar{\bar{A}}_k$ é A , se k pertence a I_j e é A' , de outro modo.

D Das asserções 1 e 2, acima, levando-se em conta a Proposição 2.8, podemos facilmente mostrar a asserção seguinte:

<u>Asserção 3.</u> Para qualquer sequência s em $D_{A_i} = D_{\bar{A}_0} = D_{\bar{\bar{A}}_i} = D_A$ e para qualquer fórmula A de L, temos que

$$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } \bar{\bar{M}}, i, s \text{ sat } A$$

Temos, então, a proposição seguinte

PROPOSIÇÃO. SEja $\mathcal{B}$ uma base modal, tal que existem $i \neq j$ que satisfazem as condições I), II), e III), acima especificadas. Nestas condições, para qualquer $n \geqslant 1$, não existe fórmula $A(x,y)$, contendo exatamente duas variáveis livres (x e y), tal que:

(*) para toda estrutura modal M cuja base é $\mathcal{B}$, para todo índice k em $\mathcal{B}$ e para toda sequência s em D_{A_i} ,

M, i, s sat $A(x,y)$ sse $M, j \quad x^{(s)} = y^{(s)}$, para todo j em $I^{(i)}$

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por ab_surdo, que $x \approx_n y$ é uma fórmula.de L que satisfaz (*) e consideremos M a estrutura antes descrita e s uma sequência em D_{A_i} que atribui aos índices de x e y os pares, respectivamente $\langle a_{A_i}, a \rangle$ e $\langle b_{A_i}, b \rangle$. Como i não pertence a $I^{(i)}$, por construção de M e hipótese acerca de $x \approx_n y$ teríamos que $M, i \models a \approx_n b$ e, assim, pela asserção anterior, $\bar{\bar{M}}, i \models a \approx_n b$. Ora, $j \in I_n^{(i)}$ e $\bar{\bar{A}}_j \not\models a = b$ (absurdo).

Observemos que, se R for reflexiva e transitiva e, além disso N for igual a I, então as condições I), II) e III) , acima, são equivalentes à seguinte:

existe $i \neq j \neq \ell \neq i$, tais que $i \, R \, j \, R \, \ell$, porém $\ell \not R \, j$ e $i \quad I^{(i)}$

ADENDO IV

Vimos antes que, se considerarmos linguagens modais que não contêm outros símbolos funcionais, além das constantes individuais, então vale em QC2* a regra derivada usual:

$$\vdash A(x/a) \Longrightarrow \vdash (x)A$$

se a for uma constante que não ocorre em A.

Neste adendo apresentaremos uma prova <u>semântica</u> de um resultado análogo a este. Desse modo, podemos afirmar que tal regra vale para qualquer extensão de QC2* que seja caracterizável por bases modais cujas relações não são simétricas.

Consideremos L uma linguagem modal que não contêm outros símbolos funcionais além de constantes individuais e seja $\mathcal{B} = \langle I, R, N \rangle$ uma base modal e seja i um índice em I.

PROPOSIÇÃO. Seja A uma fórmula de L e seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{B}, (A_i)_{i \in I} \rangle$ uma estrutura modal modal para L, tal que $\mathcal{M}, i \not\models (x)A$. Se $i \notin I^{(i)}$, então para qualquer constante individual a que não ocorre em A, existe uma estrutura modal $\mathcal{M}'$ cuja base é $\mathcal{B}$, para uma extensão em constantes L' de $L \cup \{a\}$, tal que $\mathcal{M}', i \not\models A(x/a)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{M}, i \not\models (x)A$, existe uma sequência s em D_{A_i}, tal que $\mathcal{M}, i$, s não sat A. Seja, então, $\langle \alpha, b \rangle$ o par que s atribui ao índice de x. Podemos supor, graças às proposições 1.11 e 3.5, que $b_{A_i} \neq \alpha$, isto é, que α não é nomeado em A_i.

Seja a uma constante que não ocorre em A e sejam N_1 e N_2 dois conjuntos disjuntos, equipotentes a NOM_L, de constantes novas (i.e., diferentes de a e que não pertencem a L). Além disso, consideremos ρ_1 e ρ_2 duas bijeções de NOM_L em, respectivamente, N_1 e N_2. Definimos uma família $(A'_i)_{i \in I}$ de estruturas clássicas para $L \cup N_1 \cup N_2 \cup \{a\}$, da maneira como se segue.

(I) Para todo j em I, se $j \neq i$, então A'_j difere de A_j no máximo pelos seguintes tópicos:

(a) $a_{A'_j}$ é b_{A_j}

(b) para qualquer constante c em N_k, $c_{A'_j}$ é $(\rho_k^{-1}(c))_{A_j}$.

(II) A'_i difere de A_i no máximo por:

(a) $a_{A'_i}$ é a

(b) para toda constante c em N_1, $c_{A'_i}$ é também a

(c) para toda constante c em N_2, $c_{A'_i}$ é $(\rho_2^{-1}(c))_{A_i}$.

Observemos que, para qualquer $j \neq i$, um objeto é nomeado em A_j se e apenas se for nomeado em A'_j. Além disso, o único objeto em $|A_i| = |A'_i|$ nomeado em A'_i que não é nomeado em A_i é o objeto a. Consideremos, agora, $\mathcal{M}' = \langle B, (A'_i)_{i \in I} \rangle$.

<u>Asserção</u>: $\mathcal{M}'$ é uma $\{\mathbf{A}\}$-i-expansão de $\mathcal{M}$.

<u>Demonstração.</u> Obviamente, a identidade entre sk($\mathcal{M}$) e sk($\mathcal{M}'$) é um $\{\mathbf{A}\}$-i-proto-morfismo de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{M}'$. Assim, cabe mostrar apenas que, para qualquer j em I^i, qualquer par $\langle c, c \rangle$ em D_{A_j}, existe uma par $\langle c', c' \rangle$ em $D_{A'_j}$ (e, vice-versa), tal que $c = c'$ e, para todo ℓ em $I^{(j)}$, $c_{A_\ell} = c'_{A'_\ell}$. Ou seja, é suficiente mostrar que para qualquer j em I, para qualquer objeto c em $|A_j| = |A'_j|$, valem as condições seguintes

(i) para qualquer nome c em NOM_L, se $\langle c, c \rangle \in D_{A_j}$, existe um nome c' em $NOM_L \cup N_1 \cup N_2 \cup \{a\}$, tal que $\langle c, c' \rangle \in D_{A'_j}$

e, para qualquer ℓ em $I^{(j)}$, $c'_{A'_\ell} = c_{A_\ell}$;

(ii) para qualquer nome c em $NOM_L \cup N_1 \cup N_2 \cup \{a\}$, se $\langle c, c\rangle \in D_{A'_j}$, então existe nome c' em NOM_L, tal que $\langle c, c'\rangle$ pertende a D_{A_j}.

Consideremos, então, j em I e c um objeto de A_j.

<u>Caso 1. j = i</u>. Se $\langle c, c\rangle$ pertence a D_{A_j}, então tomamos o par $\langle c, \rho_1(c)\rangle$. Como $i \notin I^{(i)}$, para todo ℓ em I^j, $\ell \neq i$; assim, por construção de A_ℓ, $(\rho_1(c))_{A'_\ell} = (\rho_1^{-1}(\rho_1(c)))_{A'_\ell} = c_{A_\ell}$. Além disso, como $j \neq i$, c é nomeado em A_j sse é nomeado em A'_j; consequentemente, $\langle c, \rho_1(c)\rangle \in D_{A'_j}$.

Por outro lado, se $\langle c, c\rangle$ é um par em $D_{A'_j}$, consideramos c', tal que

$$c' \text{ é } \begin{cases} b & \text{, se c for a} \\ \rho_k^{-1}(c) & \text{, se c pertencer a } N_k \text{, para k=1,2} \\ c' & \text{, se c não pertencer a } N_1 \cup N_2 \cup \{a\} \end{cases}$$

Por construção, para todo ℓ em I^j (incluindo o próprio j), $c'_{A_\ell} = c_{A'_\ell}$ e, assim, levando-se em conta que A_j e A'_j nomeiam os mesmos objetos, temos também que $\langle c, c'\rangle \in D_{A_j}$

<u>Caso 2. j = i</u>. Seja $\langle c, c\rangle$ um par em D_{A_i}, temos que considerar dois sub-casos possíveis:

Sub-caso 2.1 c é o objeto a. Nesse caso, consideremos a constante $\rho_1(c)$. Como $(\rho_1(c)_{A'_i}$ é o objeto a, o par $\langle a, \rho_1(c)\rangle$ pertence a $D_{A'_i}$ e, pela construção de M', para todo ℓ em $I^{(i)}$ $(\rho_1(c))_{A'_\ell} = c_{A_\ell}$, pois se ℓ pertence a $I^{(i)}$, $\ell \neq i$.

Sub-caso 2.2 c é diferente de a. Nesse caso, consideremos $\rho_2(c)$. Como c é diferente de a e a é o único objeto nomeado em A'_i que não é nomeado em A_i, $\langle c, \rho_2(c)\rangle$ pertence a $D_{A'_i}$

(pois, $c_{A_i} = (\rho_2(c))_{A'_i}$). E, pela construção de M', para qualquer ℓ em I^i, $(\rho_2(c))_{A'_\ell} = c_{A_\ell}$.

Por outro lado, seja $\langle c, c\rangle$ um par em $D_{A'_i}$. Tomamos a constante c' em NOM_L como no caso em que j = i, a saber, c' é b se c for a, é ρ_k^{-1} (c) se c pertencer a N_k (para k=1,2) e é a prória c de outro modo. Logo, para todo ℓ em I^i, incluindo o próprio i, $c_{A'_\ell} = c'_{A_\ell}$ e como a não é nomeado em A_i, $\langle c, c'\rangle$ pertence a D_{A_i} (mesmo quec seja a)

Voltemos à demonstração principal. Consideremos, agora, uma sequência s' em $D_{A'_i}$ que atribui ao índice de x o par $\langle a, a\rangle$ (podemos supor, sem perda de generalidade que x é a única variável livre em A). Assim, pela Proposição 2.8, M' ,i, s' não sat A (levando-se em conta a asserção anterior). E, pela Proposição 1.11, como $s'^*(x) = (x^{(s')})_{A'_i}$, M', i, s' não sat A(x/a)

(Q.E.D.)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BELL, J.L. & MACHOVER, M. A Course in Mathematical Logic. Amsterdam, North Holland, 1977.

2. BOWEN, K. Model Theory for Modal Logic. Dordrecht, D. Reidel, 1979.

3. CHELLAS, B.F. Modal Logic. Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

4. CHISHOLM, R. Identity through possible worlds: some questions. Nous, 1 : 1-8, 1967.

5. DUNN, J.M. & BELNAP, N.D. The Substitution Interpretation of Quantifiers. Nous, 2: 177-85, 1968.

6. GABBAY, Dov.M. Investigations in Modal and Tense Logics with application to Problems in Philosophy and Linguistics. Dordrecht, D. Reidel, 1976.

7. GABBAY, D.M. & GUENTHNER, F. Handbook of Philosophical Logic. Dordrecht, D. Reidel, 1984. v 2: Alternatives to Classical Logic.

8. GARSON, J.W. Quantification in Modal Logic. In: GABBAY & GUENTHNER, 1984, pp249-307.

9. GOLDBLATT, R.I. Metamathematics of Modal Logic. Reports on Mathematical Logic, 6:41-78, 1976 e 7: 21-52, 1976.

10. HINTIKKA, J. Models for Modalities. Dordrecht, D. Reidel, 1969.

11. ________. The Semantics of Modal Notions. Synthese, 21: 408-24, 1970.

12. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. An Introduction to Modal Logic. London, Methuen, 1968.

13. KRIPKE, S. A completeness Theorem in Modal Logic. Journal of Symbolic Logic, 24: 1-15, 1959.

14. ________. Is There a Problem about Substitutional Quantification? In: EVANS, G. & McDOWELL, J. (eds). Truth and Meaning. Oxford, Oxford University Press, 1976, pp.325-419.

15. _______. Semantical Anlysis of Modal Logic I. Zeit. f. Math. Log. u. Grund. d. Math., 9:67-96, 1963.

16, _______. Semantical Consideration on Modal Logics. Acta Philosophica Fenica, 16: 83-94, 1963 Reimp. LINSK, 1977.

17. LEMMON, E.J. An introduction to Modal Logic. Oxford, Basil Blackwell,1977.

18. LINSK, L. (ed.) Reference and Modality. Oxford, Oxford University Press, 1977.

19. MARCUS, Ruth C. Barcan. Quantification and Ontology. Nous 6: 240-50, 1972.

20. _______. Modal Logics I: Modalities and intensional languages. Boston Studies in Philosophy of Science, Dordrecht, d.Reidel, 1963.

21. MENDELSON,E. Introduction to Mathematical Logic. New York, Van Nostrand, 1964.

22. QUINE, W.v.O. From a Logical Point of View. 2.ed. New York, Harper and Row, 1961.

23. _______. Reply to Prof. Marcus. Synthese, 27: 323-30, 1962.

24. SEGERBERBER, K. & BULL,R.A. Basic Modal Logic. In: GABBAY, & GUENTHENER, 1984, pp.1-88.

25. TARSKI, A. The Concept of Truth in Formalized Languages: In: Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford, Clarendon Press, 1956. pp.152-278.

26. _______. The Semantic Conception of Truth. Philosophy and Phenomenological Research, 4, 1944.