UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Este exemplar corresponde a redação final da Tese defendida pela Pra. Clara Helena Sánchez Botero e aprovada pela Comissão Julgadora.
Campinas, 12 de setembro de 1988.

ASPECTOS DA ELIMINABILIDADE DOS OPERADORES NOMINAIS

Clara helena Sánchez Botero

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, sob a orientação do professor NEWTON C.A. da COSTA, para a obtenção do título de Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência.

Campinas, setembro de 1988

A *Neno*

que

diz o que sabe,

faz o que deve

haja o que houver.

compartilhando o lema

de *Sofia Kovalevskaya.*

AGRADECIMENTOS

Esta tese é o resultado de um trabalho no qual recebemos a ajuda de muitas pessoas e entidades às quais desejamos expressar nossos mais sinceros agradecimentos. São elas:

O professor Newton C.A. da Costa que apesar de suas idéias paraconsistentes, especialmente sobre as mulheres, aceitou ser meu orientador. Foi muito o que dele aprendi, acadêmica e pessoalmente, e muito o estímulo que recebi, principalmente nos momentos mais críticos do presente trabalho.

O professor Xavier Caicedo, por sua orientação, ensinamentos e estímulo na realização do trabalho de investigação que desenvolvemos conjuntamente na Universidad Nacional de Colômbia o qual nos serviu de base para esta tese.

Os professores: Elias Humberto Alves, nosso orientador formal, e Carlos Lungarzo. Graças ao seu excepcional espírito de colaboração nos foi possível resolver várias dificuldades de índole formal, burocrática e acadêmica que se apresentaram durante a realização e redação desta tese.

Os companheiros e amigos Roberto Lima de Souza, Gastão Correia e Regina Munhoz Moreno pela ajuda que me deram para conseguir expressar em português o que tanto trabalho me custou expressar em espanhol.

Os professores e companheiros das horas infindas de estudo e "parranda" nos bons tempos da Orlando Carpino.

Minha família e amigos colombianos que me encorajaram a obter o doutorado, dando-me o suporte afetivo indispensável.

Marcos Munhoz, Iria Corrêa e demais funcionários do CLE pela atenção com que sempre me atenderam.

Nilza Galindo pela zelosa datilografia deste trabalho.

A Universidad Nacional de Colômbia, o CNPq e a CAPES, pelo apoio concedido.

SUMÁRIO

RESUMO

Na presente tese apresenta-se uma descrição do sistema formal $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, sendo $L\omega\omega$ a lógica de primeira ordem, Q_1 o quantificador generalizado de KEISLER e ϵ o símbolo de HILBERT. Demonstra-se que o sistema é correto e completo e preserva a maioria das propriedades de teoria da prova e teoria de modelos da lógica de primeira ordem. Demonstra-se igualmente que o símbolo ϵ é eliminável em $L\omega\omega(\epsilon)$ em certos tipos de fórmulas a que chamaremos de ϵ-invariantes e que, para este mesmo tipo de fórmulas, o símbolo ϵ não é eliminável em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$. Demonstra-se assim, o poder expressivo de ϵ quando se acrescenta à lógica de primeira ordem, além do ϵ, o quantificador generalizado Q_1. Esses resultados podem ser estendidos tanto a outros operadores nominais (vbto's) quanto a outros quantificadores generalizados. Além disso, inclui-se neste trabalho, um resumo histórico dos operadores nominais, que procura mostrar a relevância da teoria geral de tais operadores e, em particular, dos teoremas de eliminação, para a lógica, a filosofia, a matemática e a lingüística.

INTRODUÇÃO

Exporemos aqui as motivações que nos levaram a realizar o presente trabalho.

Em 1979, sendo aluna do curso de doutorado em lógica e filosofia da ciência na UNICAMP, assistimos um seminário no qual o professor Newton da Costa apresentou sua teoria geral dos modelos sobre os vbto's*, recentemente por ele desenvolvida. Foi o primeiro contato que tivemos com o tema que consideramos, desde então, importante objeto de investigação a ser desenvolvido em nossa tese de doutorado.

Regressando à Colômbia em fins de 1980 e, em face das dificuldades de desenvolver um trabalho eficiente distante do orientador (o professor da Costa), solicitamos, com sua anuência, ao professor Xavier Caicedo, nosso colega do Departamento de Matemática da Universidad Nacional de Colômbia (UN), que continuasse a nos orientar nesse tema.

A partir de então passamos a desenvolver um projeto de pesquisa conjunto, na UN, intitulado: "Caracterización de los vbto's por medio de isomorfismos parciales", sendo, aí, nosso objetivo usar esta técnica da lógica para caracterizar os vbto's e responder, talvez, a algumas das questões formuladas pelo professor Newton da Costa em seu trabalho *A model theoretical approach to variable binding term operators*. No entanto, como é comum acontecer com os matemáticos, nossa pesquisa sofreu uma mudança de direção e se encaminhou para o estudo da eliminabilidade do símbolo ϵ de Hilbert em certos tipos de fórmulas na lógica de primeira ordem acrescida, além do símbolo ϵ, com o quantificador generalizado Q_1 de MOSTOWSKI-KEISLER (Ver §3). Simbolizamos esta lógica por $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ e de

*Neste trabalho a expressão *variable binding term operators* (vbto's) será traduzida ao português por *operadores nominais*. Ver Cap. 1.

monstramos que é correta e completa (Ver 2.1 a 2.4). Tal trabalho [CAICEDO & SÁNCHEZ, 1987] foi apresentado como relatório interno de pesquisa na UN, se tomou como base para a presente tese e se inclui nela.

Ao sistema $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ e em geral a um sistema do tipo $L\omega\omega(Q, \nu)$ onde Q é um quantificador generalizado e ν é um operador nominal pode-se chegar por dois caminhos diferentes:

1. Estendendo a lógica de primeira ordem com operadores nominais, $L\omega\omega(\nu)$, em particular $L\omega\omega(\epsilon)$.

2. Estendendo a lógica de primeira ordem com quantificadores generalizados, $L\omega\omega(Q)$, em particular $L\omega\omega(Q_1)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & L\omega\omega(Q, \nu) & \\
L\omega\omega(\nu) \arrow[ur, "1"] & & L\omega\omega(Q) \arrow[ul, "2"'] \\
 & L\omega\omega \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Um esboço histórico de como se chegou à lógica de primeira ordem com operadores nominais, em particular a $L\omega\omega(\epsilon)$, encontra-se no Capítulo 1. Por outro lado, o percurso para se chegar a $L\omega\omega(Q_1)$ é apresentado na introdução do Capítulo 2.

Até onde sabemos, o primeiro estudo de uma lógica de primeira ordem com operadores nominais e quantificadores generalizados encontra-se em [CAICEDO & SÁNCHEZ, 1987]. No presente trabalho daremos continuidade ao estudo de tais extensões, especialmente $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, e tentaremos ressaltar os diferentes aspectos apresentados por tal sistema, caso seja obtido pelo caminho 1 ou pelo caminho 2.

Para contextualizar a parte técnica da investigação decidimos aprofundar os aspectos históricos dos vbto's: a sua origem e o seu desenvolvimento até nossos dias. Esse ponto veio não apenas atender a um interesse particular — já que somos grandes aficcionados da história da matemática — como também se tornou extremamente pertinente, em razão de desenvolvermos nossos estudos de doutorado junto a dois órgãos acadêmicos preocupados com a filosofia, a lógica e a história da ciência, o Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) e o Departamento de Filosofia.

Na pesquisa da parte histórica encontramos a íntima relação existente entre os vbto's, e os artigos definido e indefinido das linguagens naturais. Este aspecto lingüístico, assim como os de natureza lógica, filosófica e matemática, que poderão ser vistos no *Capítulo 1*, pretendem mostrar a importância da teoria geral dos vbto's e, particularmente, dos aspectos de eliminabilidade desses operadores, para possíveis aplicações nessas diferentes áreas do conhecimento.

O *Capítulo 2* é dedicado à descrição de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$. Mostra-se que este sistema é uma lógica na qual são estendidas as principais propriedades relativas à teoria da prova e à teoria de modelos da lógica de primeira ordem. Em particular mostra-se como já foi dito, que o sistema é correto e completo. Faremos também neste capítulo uma comparação entre $L\omega\omega(\iota)$ e $L\omega\omega(Q_1, \iota)$, sendo ι o símbolo para as descrições de RUSSELL.

O *Capítulo 3* trata das fórmulas ϵ-invariantes, para as quais o símbolo ϵ é eliminável em $L\omega\omega(\epsilon)$, e não o é em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$. Isso demonstra o poder expressivo do símbolo ϵ quando se acrescenta a $L\omega\omega$, além dele, o quantificador generalizado Q_1.

BARWISE e FEFERMAN [1985, 17] afirmam que se pode usar a propriedade de interpolação como um padrão de medida para se "avaliar" se na lógica em questão existe uma boa teoria da prova. Portanto, tentaremos no *Capítulo 4* nos aproximar de uma solução para o problema de interpolação no que se refere aos sistemas $L\omega\omega(\epsilon)$ e $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$.

No *Capítulo 5*, concluimos nosso trabalho apresentando algumas questões em aberto.

Finalizando esta introdução, resta-nos dizer que além do trabalho estritamente técnico, todas as facetas lógicas, matemáticas, filosóficas e lingüísticas que descobrimos possuirem os operadores nominais, se nos apresentam como do maior interesse, razão pela qual encaramos esta tese como início de nossas investigações em tão fascinante tema.

§1. ESBOÇO HISTÓRICO E IMPORTÂNCIA DOS OPERADORES NOMINAIS

1.1 Esboço Histórico

Um vbto (variable binding term operator) é um operador que, aplicado a fórmulas, forma termos ligando variáveis da fórmula. Dada a inexistência em português de um outro termo adequado para traduzir a expressão original, criada por HATCHER [1968] para este tipo de operadores, estaremos usando, neste trabalho, por sugestão do professor Xavier CAICEDO, a expressão *operadores nominais* para denominar os vbto's. Além disso o nome se justifica em razão de que a sua função é a de substantivar ou nominalizar fórmulas que, por sua vez, representam propriedades.

Embora os operadores nominais possam ser introduzidos em linguagens de primeira ordem, linguagens de ordem superior ou linguagens infinitárias, trataremos aqui unicamente do caso das linguagens de primeira ordem.

Os operadores nominais mais conhecidos e importantes na literatura matemática, até o surgimento de uma teoria geral para estes operadores nos anos setenta, foram o operador de abstração de FREGE, o operador de descrição de RUSSELL e o símbolo ϵ de HILBERT. Historicamente, Gottlob FREGE (1848-1925) e Giuseppe PEANO (1858-1932) foram os primeiros a introduzir operadores nominais como termos primitivos ou definidos de certas linguagens. FREGE introduziu, em 1893, em seu livro *Grundgesetze der Arithmetik*, um operador que converte uma função proposicional em uma classe:

escrevemos

$$"\tilde{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon) = \tilde{\alpha}(\alpha . (\alpha - 1))"$$

onde por "$\tilde{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon)$" entendemos o conjunto de valores da função $\xi^2 - \xi$, e por "$\tilde{\alpha}(\alpha . (\alpha - 1))$" da função $\xi . (\xi - 1)$. Similarmente $\tilde{\epsilon}(\epsilon^2 = 4)$ é o conjunto de valores da fun

$\xi^2 = 4$, ou, como também podemos dizer, a compreensão (comprehension) do conceito *raiz quadrada de quatro* [BOCHEŃSKI, 1970, 363].

Ele pensava que toda propriedade definia um conjunto, o conjunto dos indivíduos que satisfazem a propriedade. Chama-se a essa idéia, constantemente utilizada na teoria intuitiva dos cojuntos, de *Axioma de Abstração*. Tal axioma conduz, entretanto, a um dos paradoxos mais conhecidos da matemática, o paradoxo de RUSSELL. Isto obriga o matemático a um cuidadoso emprego do operador de abstração, para que se salve a teoria dos conjuntos. Formalizado na lógica "atual", o axioma da abstração se expressa em uma linguagem de primeira ordem, como a seguir:

(1) $\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$,

onde $\varphi(x)$ é uma fórmula da linguagem, e φ não contém y.

O conjunto y, que é garantido pelo axioma (1), é atualmente simbolizado pela conhecida expressão $\{x | \varphi(x)\}$, que é um termo obtido a partir do operador de abstração $\{\ |\ \}$. PEANO, por seu lado, independentemente de FREGE, tem uma idéia similar ao introduzir em seu *Formulario* o símbolo $\bar{x}\epsilon$. Ele se expressa como se segue [BOCHEŃSKI, 1970, 363]:

> O símbolo $\bar{x}\epsilon$ pode ser lido pela frase "os x tais que".
> Exemplo: $1 \epsilon\ \bar{x}\epsilon\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$
> "a unidade é uma raiz da equação entre parentese".

Sobre a origem dos operadores nominais, encontramos, também em BOCHEŃSKI [1970, 367], o seguinte:

> FREGE introduziu o conceito de descrição (correspondente ao artigo definido singular) ligado a suas idéias relativas à definição de classe. Seu mais importante texto sobre o assunto é o seguinte:

> "Se nos permitimos afirmar como universalmente válida a equação " $\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$", com "$\Delta$" teriamos na forma " $\grave{\epsilon}\phi(\epsilon)$" um substituto para o artigo definido na linguagem..."

FREGE, nesse importante texto, distingue dois casos:

- quando existe um único objeto que satisfaz a equação " $\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$".

- quando não existe nenhum objeto ou existe mais do que um que a satisfaça. Nesse último caso tem-se uma *descrição imprópria* e FREGE atribui a todas elas um mesmo objeto arbitrário fixo.

PEANO também introduz um símbolo para o artigo definido singular. Em seu *Formulario Matematico* (5 vol. 1895-1908), adota os símbolos ι e $\overline{\iota}$; o primeiro possibilita a definição de uma classe com um único elemento, enquanto que o segundo permite expressar, como operação inversa, o uso do artigo definido singular (*o* ou *a*).

As definições e comentários de PEANO são as seguintes:

- $\iota x = y \ni (y = n)$

  ιx (se lê "igual a x") é a classe composta pelo único y que satisfaz à condição $y = x$.

- $Z = \overline{\iota} a. = .a = \iota Z$

  a operação $\overline{\iota}$ é inversa de ι . ... na verdade, em todo caso, ele (símbolo $\overline{\iota}$) corresponde ao artigo definido da linguagem comum.

Em uma notação moderna, as definições de PEANO são expressas da seguinte forma:

$$\iota x = \{x\} \quad \text{e} \quad z = \overline{\iota} a \Leftrightarrow a = \{z\}.$$

Uma discussão entre SCHROEDER e PEANO no Congresso Internacional de Filosofia em Paris em 1900 fez pensar a Bertrand RUSSELL (1872-1970) a necessidade de uma notação para "the". O encontro com PEANO nesse congresso foi da maior importância para RUSSELL, tendo influenciado nele, de maneira especial, a notação inventada por PEANO [KENNEDY, 1980, 94].

RUSSELL, em seu famoso artigo *On Denoting* [1905], apresenta sua teoria sobre as descrições, a qual é formalmente desenvolvida nos *Principia Mathematica* [1910, 31-32, 66-69], onde o símbolo ι, de PEANO, é usado para as descrições definidas — expressões do tipo *o x tal que* — as quais, como em PEANO, correspondem ao uso do artigo definido singular. O símbolo é introduzido por meio de uma definição contextual do tipo:

$$(2)\ \varphi(\iota x\psi(x)) \text{ significa } \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x) \wedge \forall y(\psi(y) \rightarrow (x=y)))$$

dando sentido ao termo $\iota x\,\psi(x)$ no contexto φ. No caso da existência de um único elemento x que satisfaz $\psi(x)$, caso que corresponde ao emprego usual do artigo definido singular nas linguagens naturais, apresenta-se a definição [RUSSELL, 1910, 30]:

$$(3)\ E!(\iota x\phi(x)) . =: (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c$$

onde o lado esquerdo da igualdade deve ser lido

(4) "o x que satisfaz $\phi(x)$ existe",

e o lado direito na forma usual. Convém aqui ressaltarmos a observação de RUSSELL quanto à não circularidade da definição (3), de que o sentido de existência da frase (4) é diferente do que se expressa por meio do quantificador $\exists$. Em função de (2) o operador ι passa a ser, de fato, uma mera comodidade metamatemática, passível de eliminação. No entanto, do ponto de vista filosófico, o procedimento de RUSSELL é por demais interessante, visto que, ao eliminar as descrições definidas, elimina, de passagem, alguns conceitos considerados por ele bastante discutíveis. É o caso, por exemplo, do conceito de classe (os x tais que) que se relaciona com o artigo definido plural. Observe-se que em inglês a mesma palavra 'the' é empregada para o artigo definido, singular ou plural.

> Os símbolos para classes, como aqueles para as descrições, são em nosso sistema símbolos incompletos: seus usos são definidos, mas eles próprios não se supõe que signifiquem nada. Isto é, os usos de cada símbolo são de tal maneira definidos que, quando o *definiens* é substituído pelo *definiendum*, não existe mais um símbolo que possa representar uma classe. Portanto as classes, até onde as introduzimos, são meramente simbólicas ou conveniências lingüísticas, não objetos genuínos como seus membros são, se eles são indivíduos. [RUSSELL, 1910, 71-72].

RUSSELL parece não atribuir demasiada importância à simbolização das descrições indefinidas, por considerá-las facilmente definíveis a partir do quantificador existencial. Veja-se, por exemplo, RUSSELL [1966, 164-165]:

> ...suponhamos que desejemos fazer alguma declaração sobre "um tal e tal", em que "tal e tal" são os objetos que tem uma certa propriedade ϕ, isto é, os objetos x para os quais a função $\phi(x)$ é verdadeira. ...Mas a proposição de que "um tal e tal" tem a propriedade *não* é uma proposição da forma "$\psi(x)$". ...A declaração de que "um objeto tendo a propriedade ϕ tem a propriedade ψ" significa: "a asserção conjunta de $\phi(x)$ e $\psi(x)$ não é sempre falsa". No que tange à lógica, trata-se da mesma proposição que pode ser expressada por "alguns ϕ são ψ".

Ou seja, em símbolos, a definição de RUSSELL seria:

$$\psi(\epsilon x\, \varphi(x)) \underset{\text{def}}{=} \exists x(\varphi(x) \land \psi(x))$$

David HILBERT (1862-1943), ao contrário, ressalta as descrições indefinidas ao desenvolver, juntamente com Paul BERNAYS (1888-1977), toda uma teoria formal para o símbolo ϵ. A expressão $\epsilon x\,\varphi(x)$ denota "um x tal que $\varphi(x)$", o que faz de ϵ um operador nominal. Este símbolo aparece pela primeira vez na tese de W. ACKERMAN em 1924, sob a orientação de HILBERT, que, um ano antes, em [1923], havia usado um operador 'dual' que denotou com a letra grega τ. A idéia básica de HILBERT era a de eliminar, usando o ϵ, os quantificadores de certas linguagens formais, de forma a simplificar a sua estrutura lógica, com o objetivo de alcançar mais facilmente demonstrações metamatemáticas de consistência.

Os resultados obtidos por HILBERT e BERNAYS para o sistema formal do símbolo ϵ encontram-se em seu famoso tratado *Grundlagen der Matematik*, publicado em dois volumes em 1934 e 1939, onde inicialmente foi definido o símbolo ϵ em termos do símbolo η. Este é introduzido por meio da seguinte regra:

> Se a fórmula $\exists x\varphi$ é um axioma ou é derivável (dos axiomas), então $\eta x\varphi$ pode ser introduzido como um termo e a fórmula $\varphi(\eta x\varphi)$ pode ser tomada como uma fórmula inicial (que se pode inferir de $\exists x\varphi$).

Obviamente o símbolo η representa o *artigo indefinido* da mesma maneira que o símbolo ι representa o *artigo definido*, diz LEISENRING [1969, 34] e continua: O símbolo ϵ é então definido (nos *Grundlagen*) como segue:

$$\epsilon x\varphi \underset{\Delta}{=} \eta x(\exists y\,\varphi[y] \rightarrow \varphi(x))$$

A partir desta definição HILBERT e BERNAYS dispensam o uso do símbolo η, tomam o símbolo ϵ como primitivo e introduzem o axioma

$$(*)\ \varphi(t) \rightarrow \varphi(\epsilon x\,\varphi(x)).$$

O ϵ-cálculo, nos *Grundlagen*, é essencialmente o cálculo de predicados de primeira ordem, $L\omega\omega$, acrescido do símbolo ϵ como símbolo primitivo e do axioma (*), onde t é um termo da linguagem. Neste sistema, os quantificadores são definidos a partir de ϵ da seguinte forma:

$$\exists x\, \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(\epsilon x\, \varphi(x))$$

$$\forall x\, \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(\epsilon x \sim \varphi(x))$$

Os principais resultados apresentados sobre o ϵ, nos *Grundlagen*, são dois teoremas de eliminação. O primeiro afirma [LEISENRING, 1969, 64]:

Se φ é uma fórmula prenex de $L\omega\omega$, X é um conjunto de fórmulas prenex de $L\omega\omega$ e se

$$X \vdash_{L\omega\omega} \varphi \quad \textit{então} \quad Z \vdash_{L'\omega\omega(\epsilon)} \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$$

onde Z é um conjunto de instâncias de matrizes de elementos de X, e cada uma das fórmulas ψ_i é uma instância da matriz de φ. ($L'\omega\omega(\epsilon)$ é $L\omega\omega(\epsilon)$ sem quantificadores).

O resultado anterior expressa a grosso modo, que os quantificadores podem ser eliminados, em certo sentido, usando o ϵ. O segundo teorema de eliminação afirma que ϵ pode ser eliminado das deduções de fórmulas em que ele não ocorre e, estritamente, diz o seguinte:

Se φ é uma fórmula de $L\omega\omega(\epsilon)$ que não contém ϵ, X é um conjunto de fórmulas de $L\omega\omega(\epsilon)$ nas quais ϵ não ocorre e se

$$X \vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \varphi \quad \textit{então} \quad X \vdash_{L\omega\omega} \varphi .$$

LEISENRING [1969, 1] ressalta que a importância deste teorema reside no fato de que, intuitivamente, pode ser interpretado de tal maneira que legitime, como procedimento lógico, o ato de fazer escolhas arbitrárias sob certas condições.

BOURBAKI [1954], na descrição de seu sistema formal para uma teoria de conjuntos, em seus *Éléments de Mathématique* [livro I, Cap. I e II], utiliza o símbolo τ com sentido idêntico ao do símbolo ϵ de HILBERT: *Dada uma expressão A e uma letra x, denota-se por τxA um objeto distinguido satisfeito por A.* O símbolo τ serve para definir os quantificadores da seguinte maneira:

Se R é uma expressão e x uma letra, denota-se a expressão $(\tau xR|x)R$ por "existe um x tal que R" ou por $(\exists xR)$. Denota-se a expressão "não $(\exists xR)$ não R" por "para todo x, R" ou $(\forall x\ R)$.

O símbolo τ é um operador nominal que permite não só definir os quantificadores, como também, devido a sua presença nos axiomas do sistema, demonstrar o Axioma de Escolha, cuja inclusão, entre os axiomas, então, se torna desnecessária. Com isto, pode-se ter uma idéia do relevante papel que desempenha o operador nominal τ na matemática.

O próprio BOURBAKI, em seu livro *Éléments d'Histoire des Mathématiques* [1974, 21] se refere à origem do símbolo τ da seguinte maneira:

> ... mas a mais importante [dentre as mais engenhosas notações formais] é sem dúvida a introdução por HILBERT do símbolo τ, que permite considerar como signos abreviadores os quantificadores $\forall$ e $\exists$, evitar a introdução do símbolo funcional "universal" ι de PEANO e RUSSELL (que só se aplica às relações funcionais) e enfim dispensa a formulação do axioma da escolha na teoria dos conjuntos.

Ao que tudo indica, Dana SCOTT [1967] parece ter sido o primeiro a esboçar uma teoria que generaliza algumas das propriedades observadas nos operadores de abstração e descrição. Em seu artigo, em homenagem a RUSSELL, encontra-se um teorema de completude para um sistema formal com uma única relação binária e um operador nominal arbitrário. O teorema cen tral, entretanto, é um teorema de eliminabilidade do operador nominal no sistema, no sentido de que, para cada fórmula em que ele ocorre, existe outra equivalente, na mesma teoria, na qual não se dá a sua ocorrência. A demonstração semântica não proporciona um procedimento de eliminação plenamente satisfatório para SCOTT, como ele mesmo manifesta em seu artigo [1967, 279]. No entanto, sugere, como problema interessante, o estudo da eliminabilidade uniforme dos operadores nominais, que sempre surge quando são introduzidos por definição contextual.

Como dissemos anteriormente, HATCHER [1968] dá o nome de vbto's aos operadores nominais e os introduz como símbolos primitivos em um sistema de primeira ordem. É este o primeiro tratamento sintático e semântico dos operadores nominais em geral, que conhecemos. Somente em 1972, CORCORAN, HATCHER e HERRING conseguem demonstrar um teorema de correção e completude para linguagens com esses operadores e com uma semântica adequada. A teoria geral de modelos para linguagens de primeira ordem com operadores nominais foi desenvolvida independentemente por Newton da COSTA [1980], e seus resultados se estendem facilmente a linguagem de ordem superior.

Os estudos iniciais sobre operadores nominais particulares haviam sido feitos do ponto de vista sintático. Do ponto de vista semântico, os primeiros trabalhos sobre esses operadores são os de HAILPERIN [1954] e MONTAGUE & KALISH [1957] para o descritor de RUSSELL; o de GUILLAUME [1957] para o sistema de BOURBAKI e, finalmente, os de ASSER [1957] e HERMES [1965] para o símbolo ϵ. Esses autores interpretam o símbolo ϵ como uma função de escolha e provam teoremas de correção e completude para diferentes formas do ϵ-cálculo de predicados.

Os operadores nominais podem ser introduzidos em uma teoria, de forma contextual, como é o caso do ι de RUSSELL; no entanto, os lógicos atuais preferem introduzi-los como sím bolos primitivos. A eliminação de um operador nominal de uma fórmula, no sentido de se encontrar uma outra equivalente em que não ocorre tal operador, chamaremos *R-eliminação*. Esta é uma necessidade lógica, quando o operador é introduzido contextualmente, para que seja matematicamente legítimo. Tanto é assim que RUSSELL [1910, 66-71] mostra, ainda que não demonstre, que o símbolo ι pode ser R-eliminado. Quando o operador nominal é primitivo, como no caso dos símbolos ϵ de HILBERT e τ de BOURBAKI, nem sempre pode sofrer uma R-eliminação total. (Ver [MONK, 1976, 481].

No segundo teorema de eliminabilidade do ϵ de HILBERT e BERNAYS, o conceito de eliminabilidade assume um significado diverso, que passaremos a chamar *H-eliminação*. A H-eliminação consiste em eliminar o operador da dedução de uma fórmula que não o contém. Teoremas de H-eliminabilidade para o ι foram demonstrados por HILBERT & BERNAYS [1934, 422-457] HAILPERIN [1954, 14-20] em sistemas nos quais o ι é introduzido como símbolo primitivo.

O símbolo τ é impossível de se eliminar em qualquer um dos sentidos anteriormente vistos, porque sem eles não se pode definir os quantificadores. Este símbolo não aparece explicitamente, até onde sabemos, a partir do livro primeiro dos *Éléments de Mathématique*, já que a partir de um certo momento, BOURBAKI se expressará somente na metalinguagem.

Entre os que consideram importante ter o descritor como símbolo primitivo da linguagem, e não como uma mera comodidade metamatemática, podemos citar MONTAGUE [1974, 188-270], que dele se utilizou na formalização que empreendeu de um fragmento do inglês e ROSSER [1953, 180-196] e KNEEBONE [1963, 91-97] que destacaram a sua utilidade na matemática, onde são muitos os conceitos importantes introduzidos correntemente por meio de descrições. (Ver 2.7).

1.2 Operadores Nominais e Lingüística

A história dos operadores nominais nos ensina que estes surgiram do desejo que tinham os lógicos de formalizar, especialmente na matemática, o uso dos artigos. O papel destes nas diferentes línguas é bastante diverso. Há línguas que não os usam e outras que os utilizam como partículas fundamentais com gênero e número. Por outro lado, o uso dos artigos não é uniforme em cada língua. Às vezes, funcionam como operadores nominais, às vezes como quantificadores e, em certos casos, como classificadores. Alguns trabalhos dos lingüistas como o de KRAMSKY [1972] e publicações recentes do Laboratório de Lingüística Formal da Universidade de Paris, sobre a relação existente entre os artigos e as operações de determinação nas linguagens, nos levam a pensar que a teoria geral dos operadores nominais terá diversas aplicações na lingüística, já que a categoria da determinação é, segundo KRAMSKY, predominantemente uma categoria dos substantivos, ainda que em algumas línguas seja dos adjetivos ou dos verbos.

Dentro desta perspectiva, os teoremas de eliminabilidade assumiriam capital importância. A esse respeito, basta observar que a teoria das descrições de RUSSELL parece pretender demonstrar que os artigos são dispensáveis nas linguagens; o latim e o chinês até onde pudemos saber, seriam modelos adequados para a tese de RUSSELL. O primeiro expressa a categoria de determinação vs indeterminação por meio de uma flexão nos adjetivos e o segundo a expressa através da posição das palavras nas sentenças.

Para sustentar nossas afirmações deter-nos-emos em algumas idéias tomadas de KRAMSKY [1972]. Simplificaremos as referências ao texto indicando unicamente a página, da seguinte maneira [K, p].

O conceito de categoria gramatical teve origem na antiga Grécia, com ARISTÓTELES, que considerou apenas sujeito e predicado como as partes de uma sentença. Atualmente existem diversas teorias sobre quantas e quais são as categorias gramaticais. Independente desta discussão, ressaltamos que, de acordo com MATHESIUS [K, 16], a existência de artigos nas linguagens românicas e germânicas evidencia o fato que nelas a categoria de determinação vs indeterminação é uma parte substancial de seu sistema de gramática. Enquanto que a inexistência dos artigos na maioria das linguagens eslavas mostra que a categoria em questão é algo ocasional nelas.

KRAMSKY, em seu livro *The Article and the Concept Definitiness in Language*, propõe-se a elucidar alguns problemas básicos concernentes à essência da categoria de determinação vs indeterminação e esboça uma tipologia das linguagens que usam o critério de uma expressão especial para a categoria, por meio de artigos ou outros expedientes formais (gramaticais). Pelo termo "determinação" KRAMSKY [K, 30] entende o fato de que os substantivos são classificados dependendo de se o conteúdo expresso pelo substantivo é claro e identificável de uma maneira correta ou não.

Concordando com KRAMSKY, no que se refere à definição anterior, intuimos que a teoria geral dos operadores nominais está relacionada com a categoria mental, da determinação vs indeterminação, que por sua vez se expressa nas linguagens através dos artigos. Algumas das definições de artigo servem de base para a afirmação anterior e por isso achamos conveniente citá-las aqui.

1. O papel do artigo é designar um objeto familiar, [K, 19].
2. A principal função do artigo é individualizar o assunto dado, [K, 20].

3. O artigo é uma palavra formal (gramatical) por cujo intermédio o sujeito de que se fala é definido (determinado), [K, 20].

4. O artigo definido determina ou individualiza o substantivo em oposição a outro substantivo,[K, 20].

5. O artigo é uma palavra acessória junto ao substantivo, para indicar que um objeto se conhece como real, seja em um caso dado (artigo definido), seja como representante da espécie (indeterminado), seja como parte de sua extensão (partitivo), [K, 21].

6. O artigo é um elemento da linguagem que se acrescenta regularmente aos substantivos quando a noção expressada pelo respectivo substantivo concerne a um tema particular ou quando toda a categoria de sujeitos é designada como familiar, [K, 21].

7. O artigo indefinido indica um termo particular não identificado, enquanto que o artigo definido indica um tema geral ou particular, [K, 23].

8. O artigo definido se coloca antes do substantivo para mostrar que a idéia expressa pelo substantivo já foi estabelecida, e para referir-se a tal proposição, [KATO, 1971, 31].

9. Palavra variável que precede o substantivo, indicando-lhe o gênero e o número. É definido — o, a, os, as — quando se aplica a um ser determinado, dentre outros da mesma espécie. É indefinido — um, uma, uns, umas — quando se refere a um ser qualquer dentre outros da mesma espécie. [Dicionário Aurélio, 1975, 1ª ed.].

KRAMSKY, na segunda parte de sua obra classifica 278 linguagens em sete tipos e vários subtipos, segundo a forma de expressar a categoria de determinação vs indeterminação. Por exemplo:

- o inglês e o alemão são linguagens que usam o artigo definido no singular e no plural, mas usam o artigo indefinido apenas no singular, [K, 74].

- o espanhol usa os dois tipos de artigos no singular e no plural, [K, 86].

- o turco possui apenas o artigo indefinido,[K, 110].

- o francês e o italiano possuem, além dos artigos definidos e indefinidos, em singular e plural, os partitivos, [K, 119].

- o chinês e o russo não tem artigos, a categoria é expressa dependendo do lugar que as palavras ocupam na frase, [K, 198].

O português está classificado no mesmo tipo que o inglês e o alemão, como se pode observar na seguinte citação [K, 78], e que, por razões óbvias não traduziremos:

> In portuguese the definite article in singular is *o* (masc.) and *a* (femin.), in plural *os* (masc.) and *as* (femin.), e.g. *o pai* 'the father' —pl. *os pais* 'the fathers'; *a mãe* 'the mother' —pl. *as mães* 'the mothers'. The indefinite article in singular is *um* (masc.) and *uma* (femin.), e.g. *um livro* 'a book', *uma* cadeira 'a chair'. *The forms um, uma, have also plurals (uns, umas); these, however, have no more the function of article but of the indefinite numeral "several".* (Grifos nossos).

No entanto, se considerarmos a definição 9, (ver p. 22) o tipo para o português estaria equivocado, mostrando a dificuldade de se classificar uma determinada língua, com respeito ao seu uso dos artigos.

É muito difícil decidir qual das teorias sobre os artigos é a mais correta, já que uma teoria pode ser adequada para uma linguagem e não ser adequada para outra. Isto porque toda teoria do artigo é elaborada, usualmente, de tal maneira que se adeque a uma linguagem determinada.

Apresentar uma definição de artigo que seja válida em todas as linguagens que o possuem de uma forma ou de outra será, nesta altura da investigação, uma tarefa muito difícil, senão impossível para os lingüistas [K, 29]. Entretanto KRAMSKY [K, 198] não se atreve a afirmar que existam linguagens sem a categoria da determinação vs indeterminação, e destaca como tarefa importante para os lingüistas descobrir se existem linguagens sem essa categoria, ou se ela pode ser considerada como universal, seja ela expressa de maneira patente ou latente.

CULIOLI [1975], por sua vez, quer mostrar que a partir de observações (línguas diversas, aquisição de uma linguagem) tem-se que construir uma categoria gramatical, isto é, produzir uma representação metalingüística explícita sem ter que se limitar seja à utilização intuitiva de um termo, seja ao emprego de um determinante próprio de uma linguagem como o artigo definido, seja talvez recorrendo a um operador lógico como o ι de RUSSELL ou o ϵ de HILBERT.

Para CULIOLI a posição dos lógicos é mais satisfatória que a dos lingüistas com respeito à categoria de determinação vs indeterminação, mas que isto não é de grande ajuda para os lingüistas. Na realidade, segundo ROBBINS [1968, 12] citado por KRAMSKI, nos últimos cem anos o papel do artigo definido tem preocupado mais aos filósofos e aos lógicos que aos gramáticos:

> Os filósofos tem enfatizado o uso do artigo definido como um símbolo por meio do qual uma expressão predicativa pode ser convertida no nome de uma coisa singular, e portanto, suas contribuições ao entendimento do artigo definido podem somente ser entendidas através das teorias da predicação.

KATO [1972], de certa forma contradizendo a opinião de CULIOLI utiliza-se das teorias de FREGE e RUSSELL em sua tese de doutorado em lingüística. O trabalho intitulado *A representação semântica do artigo definido*, teve como base o conhecimento da autora do inglês, português e japonês que lhe permitiram atuar ela própria como informante. Afirma, por exemplo [KATO, 1972, 81]:

> Em português a teoria de RUSSELL com relação ao artigo definido é satisfatória para qualquer tipo de conjunto ou classe, seja ela uma classe cujos elementos são enumeráveis, ou uma classe que só pode ser definida qualitativamente.

Discordamos de CULIOLI e ROBBINS, no que se refere à contribuição dos lógicos com respeito à lingüística, por considerarmos que a teoria geral dos operadores nominais terá diversas aplicações na lingüística, já que o papel destes operadores, quando interpretados semanticamente, é justamente o de determinar uma classe, ou um elemento de uma classe, de maneira definida ou indefinida. As aplicações da teoria dos operadores nominais à lingüística é um trabalho por se fazer e deverá ser, portanto, um trabalho de caráter interdisciplinar.

O uso dos artigos tem sido objeto de preocupação não apenas de filósofos especialmente interessados na lógica. Em sua extensa obra, intitulada *The Logic of the Articles in Traditional Philosophy*, BARTH [1964] afirma, entre outras coisas, que os nomes próprios podem ser evitados, uma vez que, em geral, é possível substituí-los por descrições definidas, sem prejuízo algum para a comunicação, tese que coincide com a de QUINE [1954]. BARTH afirma ainda que determinadas sentenças, por exemplo, em alemão, que começam com artigos definidos, freqüentemente são traduzidos para o inglês, começando por artigos indefinidos. Assim, mais uma vez, podemos afirmar que a teoria dos operadores nominais teria muito a dizer a esse respeito, se explicita, por exemplo, relações que possam existir entre diferentes operadores nominais e suas interpretações nas diferentes línguas.

§2 O SISTEMA $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES

2.1 Introdução

A idéia de incluir quantificadores (generalizados) à lógica de primeira ordem se deve a MOSTOWSKY [1957]. FUHRKEN [1964] e VAUGHT [1964] foram os primeiros a propor teoremas de compacidade (contável) e de completude abstracta (o conjunto dos teoremas é recursivamente enumerável) para a lógica $L\omega\omega(Q_1)$, que é obtida acrescentando à lógica de primeira ordem o quantificador Q_1, cuja interpretação intuitiva seria "existe pelo menos um número não enumerável de elementos". O primeiro estudo sistemático de $L\omega\omega(Q_1)$, e de fato de uma lógica que se "comporte bem" ao se incluir um quantificador a $L\omega\omega$ é de KEISLER [1970]. Nesse trabalho se demonstra a completude para um conjunto explícito de axiomas, além de outros importantes resultados, como um teorema de omissão de tipos. O referido trabalho estimulou o estudo de $L\omega\omega(Q_1)$, assim como a busca de extensões de $L\omega\omega(Q_1)$ que mantenham algumas das propriedades da lógica de primeira ordem (tomado de [BARWISE & FEFERMAN, 1985, 123]).

Como foi dito na introdução, o primeiro estudo, até onde sabemos, de uma extensão de $L\omega\omega(Q_1)$ acrescentando-se um operador nominal encontra-se em [CAICEDO & SÁNCHEZ, 1987] e continua no presente trabalho. Apresentamos neste capítulo o sistema $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ sendo ϵ o símbolo de HILBERT, de que $L\omega\omega(\epsilon)$ é uma sublógica.

2.2. Sintaxe

A linguagem de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ é dada a partir de $L\omega\omega$ acrescentando-se dois novos símbolos lógicos: um quantificador generalizado Q_1 e um operador nominal ϵ.

Tanto os *termos* quanto as *fórmulas* de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ são definidas simultaneamente de forma recursiva, como segue:

T_1 As variáveis e as constantes são termos.

T_2 Se f é um símbolo de função n-aria e $t_1,\ldots,t_n$ são termos então $f(t_1,\ldots,t_n)$ é um termo.

T_3 Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\epsilon x\ \varphi(x)$ é um termo no qual a variável x é ligada.

F_1 Se R é um símbolo de relação n-aria e $t_1,\ldots,t_n$ são termos, então $R(t_1,\ldots,t_n)$ é uma fórmula *atômica*.

F_2 Se φ é uma fórmula então $\sim\varphi$ também é uma fórmula.

F_3 Se φ e ψ são fórmulas então $\varphi\rightarrow\psi$ é uma fórmula.

F_4 Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\varphi$ é uma fórmula.

F_5 Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $Q_1 x\varphi$ é uma fórmula.

Nota: Os outros conectivos, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ e o quantificador existencial $\exists$, são definidos como é usual na lógica de primeira ordem.

Os axiomas do sistema estão constituidos pelos axiomas para $L\omega\omega$ com igualdade de MENDELSON [1964], para ϵ de LEISENRING [1969] e para Q_1 de KEISLER [1970], e são os seguintes, com as restrições usuais:

P_1 $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

P_2 $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$

P_3 $(\sim\beta\rightarrow\sim\alpha)\rightarrow((\sim\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow\beta)$

P_4 $\forall x\alpha\rightarrow\alpha(t)$ x livre para t em α

P_5 $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\forall x\beta)$ x livre em α

I_1 $\forall x(x=x)$

I_2 $\forall x\,\forall y(x=y\rightarrow(\varphi(x,x)\rightarrow\varphi(x,y)))$

E_1 $\forall x((\beta(x,y_1,\ldots,y_n) \leftrightarrow \alpha(x,z_1,\ldots,z_m)) \rightarrow \epsilon x\beta(x,y_1,\ldots,y_n) = \epsilon x\alpha(x,z_1,\ldots,z_m)$

E_2 $\exists x\alpha(x,y_1,\ldots,y_n) \rightarrow \alpha(\epsilon x\alpha(x,y_1,\ldots,y_n), y_1,\ldots,y_n)$

E_3 $\epsilon x\alpha(x,y_1,\ldots,y_n) = \epsilon z\alpha(z,y_1,\ldots,y_n)$ z livre para x em α

C_1 $Q_1 x\alpha(x) \leftrightarrow Q_1 y\alpha(y)$ y livre para x em α

C_2 $\forall x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (Q_1 x\alpha \rightarrow Q_1 x\beta)$

C_3 $\forall x \forall y(\sim Q_1 z(z = x \vee z = y))$

C_4 $Q_1 x \exists y\alpha(x,y) \rightarrow [Q_1 y \exists x\alpha(x,y) \vee \exists y Q_1 x\alpha(x,y)]$

São duas as regras de inferência do sistema:

R_1 MODUS PONENS (MP) $\alpha, \alpha\rightarrow\beta \,/\, \beta$

R_2 GENERALIZAÇÃO (GEN) $\alpha \,/\, \forall x\alpha$

Estendemos a $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ as noções usuais de prova ($\vdash\varphi$), dedução ($\Gamma\vdash\varphi$) e consistência de um conjunto de sentenças, sem dar explicitamente as definições. Em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ valem os seguintes teoremas que enunciamos e não demonstramos, por serem as demonstrações completamente análogas às de $L\omega\omega$. Estes teoremas nos mostram que $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ preserva as principais propriedades da teoria da prova.

TEOREMA (da Dedução). Seja Γ um conjunto de sentenças de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e φ uma sentença de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Se $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi$ então $\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\psi$.

TEOREMA (de Constantes). Seja $L'\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ uma extensão de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ formada acrescentando um conjunto arbitrário de novas constantes à linguagem de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Então para qualquer conjunto Γ de sentenças de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, tem-se que:

Γ é consistente em $L'\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ se e somente se Γ é consistente em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$.

2.3. Semântica

Uma estrutura para a linguagem de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ é um par $(\mathcal{H}, F)$ no qual $\mathcal{H}$ é uma estrutura de primeira ordem e F é uma função de escolha definida no conjunto das partes de A, (o domínio de $\mathcal{H}$); ou seja $F: P(A) \to A$ é tal que:

i) $F(B) \in B$ para todo subconjunto não vazio B de A*

ii) $F(\phi) = a$, onde a é um elemento arbitrário de A.

Uma *valoração* em $(\mathcal{H}, F)$ é uma função v do conjunto das variáveis de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ em A, que notaremos por V. Ou seja,

$$v: V \to A .$$

Dada uma valoração v em $(\mathcal{H}, F)$ definimos $v(x/a)$ como a valoração que coincide com v em todas as variáveis, exceto em x, onde toma o valor a. Isto é, $v(x/a): V \to A$ cumpre duas condições:

i) $v(x/a)(y) = v(y)$ se x for distinta de y

ii) $v(x/a)(x) = a$

Uma *interpretação* de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ será um terno $\sigma = (\mathcal{H}, F, v)$, sendo $(\mathcal{H}, F)$ uma estrutura para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ e v uma valoração em $(\mathcal{H}, F)$.

A seguir definimos por indução simultaneamente sobre termos e fórmulas, o valor de cada um deles para uma $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$-interpretação. Denotaremos por $\sigma(x/a)$, a interpretação $(\mathcal{H}, F, v(x/a))$.

ST_1 $\quad t^\sigma = x^\sigma = v(x)$ $\quad$ se t é uma variável.

ST_2 $\quad t^\sigma = f^{\mathcal{H}}(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)$ $\quad$ se t é $f(t_1, \ldots, t_n)$

---

*A letra grega ϵ é usada neste trabalho, tanto como símbolo de HILBERT, como símbolo de pertinência de um elemento a um conjunto. O contexto permitirá a eliminação de ambigüidades que porventura possam se apresentar.

ST_3 $\quad t^{\sigma} = F(\{a \mid \varphi^{\sigma(x/a)} = 1\})$ se t é $\epsilon x \varphi(x)$

SF_1 $\quad$ Se φ é atômica, $R(t_1, \ldots, t_n)$, então

$$\varphi^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } (t_1^{\sigma}, \ldots, t_n^{\sigma}) \in R^{\mathcal{H}} \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

SF_2 $\quad$ Se φ é $\sim\psi$ então

$$\varphi^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \psi^{\sigma} = 0 \\ 0 & \text{se } \psi^{\sigma} = 1 \end{cases}$$

SF_3 $\quad$ Se φ é $\psi \to \gamma$ então

$$\varphi^{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{se } \psi^{\sigma} = 1 \text{ e } \gamma^{\sigma} = 0 \\ 1 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

SF_4 $\quad$ Se φ é $\forall x \psi$ então

$$\varphi^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \psi^{\sigma(x/a)} = 1 \text{ para todo } a \in A \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

SF_5 $\quad$ Se φ é $Q_1 x \psi$ então

$$\varphi^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } |\{a \in A \mid \psi^{\sigma(x/a)} = 1\}| \geq \omega_1 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Dada uma interpretação $\sigma = (\mathcal{H}, F, v)$ e uma fórmula φ de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ dizemos que σ *satisfaz* φ e usamos a notação

$$(\mathcal{H}, F) \models_{v} \varphi \quad \text{se e somente se } \varphi^{\sigma} = 1$$

Observação: Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis livres de uma fórmula φ, e se para uma valoração v, $v(x_1) = a_1$, $v(x_2) = a_2, \ldots, v(x_n) = a_n$, escrevemos:

$$(\mathcal{H}, F) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ em lugar de } (\mathcal{H}, F) \models_{v} \varphi$$

Esta notação justifica-se, porque o valor de φ para $(\mathcal{H}, F, v)$ depende, na realidade, unicamente do valor de v nas variáveis livres de φ. No caso em que φ seja uma sentença e pela mesma razão anterior, já que φ não tem variáveis livres, notaremos:

$$(\mathcal{H},F)\models \varphi \quad \text{por} \quad (\mathcal{H},F)\models_{V} \varphi$$

e diremos que $(\mathcal{H}, F)$ é um *modelo* de φ

2.4 Redução de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ a $L\omega\omega(Q_1)$

Para demonstrar a completude de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, assim como vários dos resultados do presente trabalho é necessário introduzir a seguinte definição:

Definição 1. Seja φ uma fórmula de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e seja τ o tipo de uma estrutura $(\mathcal{H},F)$ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Construimos $\tau' = \tau \cup \{f_\theta\}$, sendo f_θ um símbolo de função n-ária para cada termo da forma $\epsilon x\theta(x,y_1,\dots,y_n)$ em φ. A cada termo t de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ fazemos corresponder um termo t^* de $L\omega\omega(Q_1)$ da seguinte maneira, por indução no comprimento dos termos:

i) $t^* = t$ se t é uma variável ou uma constante

ii) $(f(t_1,\dots,t_n))^* = f(t_1^*,\dots,t_n^*)$

iii) $(\epsilon x\theta(x,y_1,\dots,y_n))^* = f_\theta(y_1,\dots,y_n)$

Dada a função $*$ podemos fazer corresponder a cada fórmula φ de tipo τ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ uma fórmula φ^* de tipo τ' de $L\omega\omega(Q_1)$ a que chamaremos *tradução de* φ. Isto faremos por indução no comprimento da fórmula:

a) $R(t_1,\dots,t_n)^* = R(t_1^*,\dots,t_n^*)$ se φ é atômica.

b) $(\sim\varphi)^* = \sim\varphi^*$

c) $(\varphi\to\psi)^* = \varphi^*\to\psi^*$

d) $(\forall x\varphi)^* = \forall x\varphi^*$

e) $(Q_1 x\varphi)^* = Q_1 x\varphi^*$

Os resultados que são expostos a seguir mostram como, usando a definição anterior, podemos relacionar as estruturas $(\mathcal{H},F)$ do tipo τ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ com as estruturas $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})$ do tipo τ' de $L\omega\omega(Q_1)$ e reciprocamente. Essas últimas são extensões de uma estrutura de primeira ordem acrescida de um conjunto de funções $\tilde{f}_\theta$, as quais interpretam os respectivos símbolos de função f_θ de τ'.

Lema 1. Sejam $(\mathcal{H},F)$ uma estrutura de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e v uma valoração em A. Então a interpretação $\sigma = (\mathcal{H},F,v)$ determina uma interpretação $\mu = (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\},v)$ de $L\omega\omega(Q_1)$ tal que, para cada termo t de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, obtém-se $t^{*\mu} = t^\sigma$.

Demonstração: Dada uma fórmula φ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e uma interpretação $\sigma = (\mathcal{H},F,v)$, seja $\mu = (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\},v)$ a estrutura na qual $\tilde{f}_\theta$ está definida por

(3) $\tilde{f}_\theta(a_1,\ldots,a_n) = F(\{b\in A \mid (\mathcal{H},F)\models \theta[b,a_1,\ldots,a_n]\})$ $a_i\in A$ $1\leq i\leq n$

para cada ocorrência de um termo do tipo $\epsilon x\theta(x,y_1,\ldots,y_n)$ em φ. Ora, segundo a definição 1, a da operação $*$, e usando indução no comprimento dos termos, obtemos:

i) $x^{*\mu} = x^\mu = v(x) = x^\sigma$

ii) $(f(t_1,\ldots,t_n)^*)^\mu = (f(t_1^*,\ldots,t_n^*))^\mu = f^{\mathcal{H}}(t_1^{*\mu},\ldots,t_n^{*\mu})$
$= f^{\mathcal{H}}(t_1^\sigma,\ldots,t_n^\sigma) = (f(t_1,\ldots,t_n))^\sigma$

iii) $((\epsilon x\theta(x,y_1,\ldots,y_n))^*)^\mu = (f_\theta(y_1,\ldots,y_n))^\mu$
$= f_\theta^{\mathcal{H}}(a_1,\ldots,a_n)$ sendo $v(y_i) = a_i$ para $1\leq i\leq n$
$= F(\{b\in A \mid (\mathcal{H},F)\models \theta[b,a_1,\ldots,a_n]\})$
$= (\epsilon x\theta(x,y_1,\ldots,y_n))^\sigma$

TEOREMA 1. Seja φ uma fórmula de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e φ^* sua tradução em $L\omega\omega(Q_1)$. Dadas as interpretações $\sigma = (\mathcal{H},F,v)$ e $\mu = (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\}v)$, como no lema anterior, obtem-se:

$$(\mathcal{H},F)\models_V \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V \varphi^*$$

Demonstração: A demonstração é feita por indução no comprimento da fórmula.

i) Se φ é atômica, $R(t_1,\ldots,t_n)$ então

$(\mathcal{H},F) \models_V R(t_1,\ldots,t_n) \Leftrightarrow$

$(t_1^\sigma,\ldots,t_n^\sigma) \in R^{\mathcal{H}} \Leftrightarrow$ (lema 1)

$(t_1^{*\mu},\ldots,t_n^{*\mu}) \in R^{\mathcal{H}} \Leftrightarrow$

$(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V R(t_1^*,\ldots,t_n^*) \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V R(t_1,\ldots,t_n)^*$

ii) Se φ é $\sim\psi$ então

$$\begin{aligned}(\mathcal{H},F)\models_V \sim\psi &\Leftrightarrow (\mathcal{H},F)\not\models_V \psi\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\not\models_V \psi^*\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V \sim\psi^*\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models (\sim\psi)^*\end{aligned}$$

iii) Se φ é $\psi\to\gamma$ então

$$\begin{aligned}(\mathcal{H},F)\not\models_V \psi\to\gamma &\Leftrightarrow \psi^\sigma = 1 \text{ e } \gamma^\sigma = 0\\ &\Leftrightarrow \beta^{*\mu} = 1 \text{ e } \gamma^{*\mu} = 0\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\not\models_V \psi^*\to\gamma^*\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\not\models_V (\psi\to\gamma)^*\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{H},F)\models_V \psi\to\gamma \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V (\psi\to\gamma)^*$

iv) Se φ é $\forall x\psi$ então

$$\begin{aligned}(\mathcal{H},F)\models \forall x\psi &\Leftrightarrow (\mathcal{H},F)\models_{V(x/a)} \psi \text{ para todo } a\in A\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V(x/a)} \psi^* \text{ para todo } a\in A\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V(x/a)} \forall x\psi^*\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V(x/a)} (\forall x\psi)^*\end{aligned}$$

v) Se φ é $Q_1 x\psi$ então

$$(\mathcal{H},F)\models_V Q_1 x\psi \Leftrightarrow |\{a\in A \mid (\mathcal{H},F)\models_{V(x/a)} \psi\}| \geq \omega_1$$

Porém por hipótese de indução tem-se que:

$$(\mathcal{H},F)\models_{V(x/a)} \psi \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V(x/a)} \psi^* \text{ para todo } a\in A.$$

Portanto

$$|\{a\in A|\ (\mathcal{H},F)\models \psi\}| = |\{a\in A|\ (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models \psi^*\}|$$

e assim

$$|\{a\in A|\ (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V(x/a)} \psi^*\}| \geq \omega_1$$

ou seja

$$(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V Q_1 x\psi^*$$

Observação: O teorema anterior é uma generalização da proposição 29.24 de MONK [1976, 482]

Dada uma fórmula φ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ chamaremos de E_1^φ, E_2^φ, E_3^φ aos axiomas E_1, E_2, E_3 restritas a φ; isto é, as fórmulas que aparecem em E_1^φ, E_2^φ, E_3^φ referem-se às subfórmulas de φ. Além disso, $(E_1^\varphi)^*$, $(E_2^\varphi)^*$, $(E_3^\varphi)^*$ serão as respectivas traduções em $L\omega\omega(Q_1)$:

$$(E_1^\varphi)^* \quad \forall x(\beta^*(x,y_1,\ldots,y_n) \leftrightarrow \alpha^*(x,z_1,\ldots,z_n)) \\ \rightarrow f_\beta(y_1,\ldots,y_n) = f_\alpha(x,z_1,\ldots,z_n)$$

$$(E_2^\varphi)^* \quad \exists x\beta^*(x,y_1,\ldots,y_n) \rightarrow \beta^*(f_\alpha(y_1,\ldots,y_n), y_1,\ldots,y_n)$$

$$(E_3^\varphi)^* \quad f_\alpha(y_1,\ldots,y_n) = f_\alpha(y_1,\ldots,y_n)$$

Observação: Notaremos por $(E^\varphi)^*$ a conjunção $(E_1^\varphi)^* \wedge (E_2^\varphi)^* \wedge (E_3^\varphi)^*$

Lema 2. Seja φ uma fórmula de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ do tipo τ e φ^* sua tradução de tipo $\tau' = \tau\cup\{f_\theta\}$. Se $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models (E^\varphi)^*$, então, existe uma função de escolha $F:P(A)\rightarrow A$ tal que

$$(\mathcal{H},F)\models_V \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_V \varphi^*$$

Demonstração: Para cada termo do tipo $\epsilon x\theta(x,y_1,\ldots,y_n)$ que ocorre em φ, definimos o conjunto

$$S^\theta_{a_1,\ldots,a_n} = \{b\in A|\ (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models \theta^*[b,a_1,\ldots,a_n]\} \quad a_1,\ldots,a_n\in A$$

Por definição $S^{\theta} a_1, \ldots, a_n$ é um subconjunto de A, razão pela qual podemos definir $F: P(A) \to A$ como a seguir:

i) $F(B) = \tilde{f}_{\theta}(a_1, \ldots, a_n)$ se $B = S^{\theta} a_1, \ldots, a_n$
para alguma θ e algumas $a_1, \ldots, a_n$ de A.

ii) $F(B) = b$ b um elemento arbitrário de B, em caso contrário.

a) F é bem definida.

Com efeito, suponhamos que α e β são subfórmulas de φ que provêm dos termos $\epsilon x \alpha(x, y_1, \ldots, y_n)$ e $\epsilon y \beta(y, z_1, \ldots, z_n)$ e que, além disso, $S^{\alpha} a_1, \ldots, a_n = S^{\beta} c_1, \ldots, c_n$. Então,

$$\{b \in A \mid (\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \alpha^*[b, a_1, \ldots, a_n] = \{b \in A \mid (\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \beta^*[b, c_1, \ldots, c_m]\}$$

ou seja,

$$(\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \forall x (\alpha^*[x, a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \beta^*[x, c_1, \ldots, c_m])$$

e como $(\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models (E_1^{\varphi})^*$ obtém-se

$$(\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \tilde{f}_{\alpha}(a_1, \ldots, a_n) = \tilde{f}_{\beta}(c_1, \ldots, c_m),$$

então,

$$F(S^{\alpha} a_1, \ldots, a_n) = F(S^{\beta} c_1, \ldots, c_m)$$

b) F é de escolha.

- No caso de ii) pela definição.
- No caso i) porque $(\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models (E_2^{\varphi})^*$ por hipótese; isto é,

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } (\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \exists x \beta^*[x, a_1, \ldots, a_n] \text{ para qualquer } a_i \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \text{então } (\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta}\}) \models \beta^*[f_{\beta}(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n]. \end{array}\right\} (4)$$

O antecedente de (4) expressa que o conjunto $S^{\beta} a_1, \ldots a_n \neq \phi$ e o conseqüente que $\tilde{f}_{\beta}(a_1, \ldots, a_n) \in S^{\beta} a_1, \ldots, a_n$; ou seja, (4) diz que
se $B = S^{\beta} a_1, \ldots, a_n \neq \phi$ então $\tilde{f}_{\beta}(a_1, \ldots, a_n) \in B$.

Porém, por definição, $F(B) = \tilde{f}_{\beta}(a_1, \ldots, a_n)$ e, portanto, (1) afirma que, se $B \neq \phi$ então $F(B) \in B$, como queríamos demonstrar.

Com F assim definida, podemos aplicar o teorema 1 e obter

$$(\mathcal{H},F)\models_{V} \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V} \varphi^*$$

TEOREMA 2. Seja φ uma sentença de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e φ^* sua tradução por meio da Definição 1. Então,

$$\models\varphi \Leftrightarrow \models (E^\varphi)^* \to \varphi^*$$

Demonstração: Suponhamos que $\models\varphi$ e que $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V}(E^\varphi)^*$. Então, pelo lema 2, existe uma função de escolha F tal que

$$(\mathcal{H},F)\models_{V}\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models_{V}\varphi^*.$$

Ora, por hipótese, toda estrutura $(\mathcal{H},F)\models\varphi$; então

$(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\}\models\varphi$ e, portanto, $\models(E^\varphi)^*\to\varphi^*$.

Seja $(\mathcal{H},F)$ uma estrutura de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, e seja $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\}$ a estrutura associada com $(\mathcal{H},F)$ pelo lema 1. Então, pelo teorema 1 obtem-se

(a) $(\mathcal{H},F)\models\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models\varphi^*$.

Ora, por hipótese

$$\models(E^\varphi)^*\to\varphi^*$$

logo $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models(E^\varphi)^*\to\varphi^*$

e, por construção, $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models(E^\varphi)^*$. Então,

(b) $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models\varphi^*$

De (a) e (b) obtem-se que $(\mathcal{H},F)\models\varphi$,

e como $(\mathcal{H},F)$ foi escolhido arbitrariamente obtem-se

$$\models\varphi.$$

2.5 Completude de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e Aplicações

O teorema anterior reduz a lógica $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ à lógica $L\omega\omega(Q_1)$ e o ϵ-cálculo, $L\omega\omega(\epsilon)$, a $L\omega\omega$. Converte-se assim em forte ferramenta para nosso trabalho como é possível observarmos nas seguintes aplicações:

Corolario 1. (Teorema de completude para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$)

$$\models \varphi \Leftrightarrow \vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi$$

Demonstração: Dada uma fórmula $\varphi \in L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, seja φ^* sua tradução em $L\omega\omega(Q_1)$. Pelo teorema de completude de $L\omega\omega(Q_1)$ [KEISLER, 1970], obtem-se

$$\models (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^* \Leftrightarrow \vdash_{L\omega\omega(Q_1)} (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^* \quad \text{e então}$$

(5) $$\models (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^* \Leftrightarrow (E_1^{\varphi})^*, (E_2^{\varphi})^*, (E_3^{\varphi})^* \vdash_{L\omega\omega(Q_1)} \varphi^* .$$

Ora, seja $\beta_1, \ldots, \beta_n$ uma demonstração de φ^* a partir de $(E^{\varphi})^*$ em $L\omega\omega(Q_1)$. Cada ocorrência de um termo do tipo $f_\theta(y_1, \ldots, y_n)$ em β_i $(1 \leq i \leq n)$ substituimo-la pelo correspondente termo $\epsilon x\, \theta(x, y_1, \ldots, y_n)$ em φ. Obtém-se, então, uma sucessão de fórmulas $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_n$ em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, que é uma dedução de φ em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ a partir de E_1^{φ}, E_2^{φ}, E_3^{φ}, pois, $\tilde{\beta}_n = \tilde{\varphi}^* = \varphi$ e $(E_i^{\varphi})^* = E_i$ $1 \leq i \leq 3$. Além disso, se β_j é um axioma de $L\omega\omega(Q_1)$, então $\tilde{\beta}_j$ será um axioma de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ e se β_j é consequência de fórmulas anteriores, β_i, β_k, pelas regras de inferência, então $\tilde{\beta}_j$ o será de $\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\beta}_k$. Consequentemente obtém-se:

(6) $$(E_1^{\varphi})^*, (E_2^{\varphi})^*, (E_3^{\varphi})^* \vdash_{L\omega\omega(Q_1)} \varphi^* \Rightarrow E_1^{\varphi}, E_2^{\varphi}, E_3^{\varphi} \vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi .$$

Pelo teorema 2 sabemos que:

(7) $$\models \varphi \Leftrightarrow \models (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^*$$

Ora, se $\models \varphi$, então, de (5), (6), (7) e MP obtém-se

$$(E_1^{\varphi}),\ (E_2^{\varphi}),\ (E_3^{\varphi}) \vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi$$

Mas E_1^{φ}, E_2^{φ} e E_3^{φ}, são axiomas de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, logo $\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi$.

Como todos os axiomas de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ são válidos e as regras de inferência preservam a validade, então:

$$\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi \quad \Rightarrow \quad \models \varphi .$$

Corolário 2. Se Γ é um conjunto de sentenças de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, φ é uma sentença de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ e $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.

Corolário 3. $\models \varphi \Leftrightarrow \vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \varphi$

Corolário 4. a) $\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{L\omega\omega(Q_1)} (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^*$

b) $\vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{L\omega\omega} (E^{\varphi})^* \rightarrow \varphi^*$

Corolário 5. (Teorema de compacidade para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$). Seja φ um conjunto de sentenças de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$. Se todo subconjunto finito de Γ tem modelo então Γ tem modelo.

Corolário 6. (Teorema de compacidade para $L\omega\omega(\epsilon)$. Dispensamos o enunciado por razões óbvias.

Conseqüência importante para o corolário 1 é o Teorema de H-eliminabilidade para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$:

Corolário 7. Se φ é uma fórmula de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ que não contem o símbolo ϵ, então

$$\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi \Rightarrow \vdash_{L\omega\omega(Q_1)}$$

Demonstração:

Se $\vdash_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} \varphi$ então, pelo corolario 1, $\models \varphi$.

Portanto, $(\mathcal{H}, F) \models \varphi$ para toda estrutura $(\mathcal{H}, F)$, então

$\mathcal{H} \models \varphi$ para toda estrutura de primeira ordem $\mathcal{H}$, já que φ não contém ϵ pela hipótese.

Portanto, $\vdash_{L\omega\omega(Q_1)} \varphi$ pelo teorema de completude de $L\omega\omega(Q_1)$.

Corolário 8. (Teorema de H-eliminabilidade de ϵ para $L\omega\omega(\epsilon)$)

Se φ é uma fórmula de $L\omega\omega(\epsilon)$ que não contem ϵ, então,

$$\vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \varphi \ , \quad \Rightarrow \quad \vdash_{L\omega\omega} \varphi$$

2.6 Estruturas: Equivalência Elementar e Isomorfismo

As noções de sub-estrutura, equivalência elementar e isomorfismo podem ser estendidas a $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ sem grandes alterações. A definição de *sub-estrutura* não sofre nenhuma modificação com respeito à noção de primeira ordem. Será apresentada, no que segue, para que o trabalho seja auto-suficiente em sua leitura.

Definição 2. Sejam $(\mathcal{H},F)$ e $(\mathcal{E},G)$ duas estruturas de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ de tipo τ. Dizemos que $(\mathcal{H},F)$ é uma sub-estrutura de $(\mathcal{E},G)$, em símbolos $(\mathcal{H},F) \subseteq (\mathcal{E},G)$ se:

1. $A \subseteq B$ onde A é o domínio de $\mathcal{H}$ e B o domínio de $\mathcal{E}$.
2. $c^{\mathcal{H}} = c^{\mathcal{E}}$ para toda constante c de τ.
3. $f^{\mathcal{H}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{E}}(a_1, \ldots, a_n)$ para todo símbolo de função n-ária f em τ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em A.
4. $R^{\mathcal{H}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{E}}(a_1, \ldots a_n)$ para todo símbolo de relação n-ária R em τ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em A.

Definição 3. Sejam $(\mathcal{H}, F)$ e $(\mathcal{E},G)$ duas estruturas de $L\omega\omega(Q, \epsilon)$ de tipo τ. Seja $\phi: A \to B$ uma bijeção. Dizemos que ϕ é um isomorfismo de $(\mathcal{H},F)$ sobre $(\mathcal{E},G)$, em símbolos, $(\mathcal{H},F) \cong (\mathcal{E},G)$, se:

1. $\phi(c^{\mathcal{H}}) = c^{\mathcal{E}}$ para toda constante τ de c.
2. $\phi(f^{\mathcal{H}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{E}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$ para toda f de τ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.

3. $R^{\mathcal{H}}(a_1,\ldots,a_n) \leftrightarrow R^{\mathcal{E}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$ para toda R de τ e quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in A$.

4. $G \circ \overline{\phi} = \phi \circ F$ sendo $\overline{\phi}: P(A) \to P(B)$ a extensão canônica de ϕ a P(A). Ou seja, o seguinte diagrama deve ser comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] & B \\ P(A) \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\overline{\phi}"'] & P(B) \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

No caso em que ϕ não seja sobrejetiva dizemos que ϕ é uma *imersão* de $(\mathcal{H},F)$ em $(\mathcal{E},G)$.

A definição de equivalência elementar não apresenta nenhuma modificação com respeito à de primeira ordem.

Definição 4. Duas estruturas $(\mathcal{H},F)$ e $(\mathcal{E},G)$ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, de tipo τ, são *elementarmente equivalentes*, em símbolos $(\mathcal{H},F) \equiv (\mathcal{E},G)$, se é o caso que para toda sentença φ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$:

$$(\mathcal{H},F) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{E},G) \models \varphi .$$

Lema 3. Se ϕ é um isomorfismo de $(\mathcal{H},F)$ em $(\mathcal{E},G)$ e se v é uma valoração em $(\mathcal{H},F)$ então $v' = \phi\circ$ é uma valoração em $(\mathcal{E},G)$ tal que se $\sigma = (\mathcal{H},F,\ )$ e $\rho = (\mathcal{E},G,v')$ então:

1. $\phi(t^\sigma) = t^\rho$

2. $\varphi^\sigma = \varphi^\rho$ para toda sentença φ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$.

Reciprocamente se v' é uma valoração em $(\mathcal{E},G)$ então $v = \phi^{-1} \circ v'$ define uma valoração em $(\mathcal{H},F)$ que cumpre as condições 1 e 2.

Demonstração: Feita por indução simultânea sobre o comprimento dos termos e das fórmulas.

ST_1 se t é uma variável de x

$\phi(x^\sigma) = \phi(v(x)) = (\phi \circ v)(x) = v'(x) = x^\rho$

se t é uma constante c

$\phi(c^{\sigma}) = \phi(c^{\mathcal{H}}) = c^{\mathcal{E}} = c^{\rho}$

St_2 $\phi(f(t_1,\ldots,t_n)^{\sigma}) = \phi(f^{\mathcal{H}}(t_1^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma}))$

$= f^{\mathcal{E}}(\phi(t_1^{\sigma}),\ldots,\phi(t_n^{\sigma}))$

$= f^{\mathcal{E}}(t_1^{\rho},\ldots,t_n^{\rho})$

$= (f(t_1,\ldots,t_n))^{\rho}$

St_3 se t é $\epsilon x\varphi$ para alguma φ

$\phi((\epsilon x\varphi)^{\sigma}) = \phi(F\{(a\in A|\varphi^{\sigma(x/a)}=1\}))$

$= G(\phi(\{a\in A|\varphi^{\sigma(x/a)}=1\}))$

$\overset{(1)}{=} G(\{\phi(a)\in B|\varphi^{\rho(x)\phi(a))}=1\}))$

$\overset{(2)}{=} G(\{b\in B)\varphi^{\rho(x/b)}=1\}))$

$= (\epsilon x\varphi)^{\rho}$

Notas: (1) Por hipótese de indução.

(2) ϕ é uma bijeção.

$SF_1 - SF_4$ Se φ é atômica se demonstra como na lógica de primeira ordem. Igualmente acontece com os passos de indução nos conectivos e no quantificador universal. Apresentamos a seguir o passo final da indução.

SF_5 Se φ é $Q_1 x\psi$ e se $(Q_1 x\psi)^{\rho} = 1$ então

$|\{a\in A|\ (\mathcal{H},F)\models_{V} \varphi[a]\ |\}\geq \omega_1$

mas pela hipótese de indução

$(\mathcal{H},F)\models_{V} \varphi[a] \Leftrightarrow (\mathcal{E},G)\models_{V'} \varphi[\phi(a)]$

portanto, como ϕ é uma bijeção,

$|\{b\in B|\ (\mathcal{E},G)\models_{V'} \varphi[b]\}| \geq \omega_1$

e assim

$(Q_1, x\psi)^{\rho} = 1.$

Conseqüência imediata do lema anterior é o seguinte teorema:

TEOREMA 3. Se $(\mathcal{H},F) \cong (\mathcal{E},G)$ então $(\mathcal{H},F) \equiv_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} (\mathcal{E},G)$

Como corolário natural tem-se o respectivo teorema em $L\omega\omega(\epsilon)$

Corolário 1. Sejam $(\mathcal{H},F)$, $(\mathcal{E},G)$ estruturas de $L\omega\omega(\epsilon)$. Se

$$(\mathcal{H},F) \cong (\mathcal{E},G) \quad \text{então} \quad (\mathcal{H},F) \equiv_{L\omega\omega(\epsilon)} (\mathcal{E},G).$$

Definição 5. Sejam $(\mathcal{H},F)$ e $(\mathcal{E},G)$ duas estruturas de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Diz-se que $(\mathcal{H},F)$ é uma *sub-estrutura elementar* de $(\mathcal{E},G)$, ou que $(\mathcal{E},G)$ é uma *extensão elementar* de $(\mathcal{H},F)$, em símbolos, $(\mathcal{H},F) < (\mathcal{E},G)$ se e somente se:

1. $(\mathcal{H},F) \subseteq (\mathcal{E},G)$

2. Para toda fórmula $\varphi(x_1,x_2,\ldots x_n)$ em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e quaisquer $a_1,\ldots,a_n$ em A tivermos:

   $(\mathcal{H},F) \models \varphi[a_1,\ldots a_n] \Leftrightarrow (\mathcal{E},G) \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$.

3. Para toda fórmula $\varphi(x, x_1,\ldots,x_n)$ e quaisquer $a_1,\ldots,a_n$ em A tivermos:

   $G(\{a \in A \mid (\mathcal{E},G) \models \varphi[a,a_1,\ldots,a_n]\}$

   $= F(\{a \in A \mid (\mathcal{H},F) \models \varphi[a,a_1,\ldots,a_n]\}$.

Da definição se obtém trivialmente:

TEOREMA 4. Se $(\mathcal{H},F)$ e $(\mathcal{E},G)$ são duas estruturas de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ tais que $(\mathcal{H},F) < (\mathcal{E},G)$ então $(\mathcal{H},F) \equiv_{L\omega\omega(Q_1,\epsilon)} (\mathcal{E},G)$.

Definição 6. Seja $(\mathcal{H}_\alpha,F_\alpha)$ uma sucessão de estruturas de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ de tipo τ tal que $(\mathcal{H}_\beta,F_\beta) \subset (\mathcal{H}_\alpha,F_\alpha)$ para $\beta < \alpha < k$. Seja $\bigcup_{\alpha<k}(\mathcal{H}_\alpha,F)$ a estrutura $(\mathcal{H},F)$ de tipo τ tal que:

1. $A = \bigcup_{\alpha < k} A\alpha$

2. $c^{\mathcal{H}} = c^{\mathcal{H}_0}$ para toda constante c de τ.

3. $f^{\mathcal{H}} = \bigcup_{\alpha < k} f^{\mathcal{H}\alpha}$ para todo símbolo de função f em τ.

4. $R^{\mathcal{H}} = \bigcup_{\alpha < k} R^{\mathcal{H}\alpha}$ para todo $\alpha < k$.

5. $F \upharpoonright A\alpha = F_\alpha$

$(\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)_{\alpha < k}$ é denominada por *cadeia de estruturas* e $(\mathcal{H}, F)$ por *união* destas cadeias. No caso em que $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) < (\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)$ dizemos que $(\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)_{\alpha < k}$ é uma *cadeia elementar*.

TEOREMA 5. Se $(\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)_{\alpha < k}$ é uma cadeia elementar de comprimento enumerável então $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta)$ $\bigcup_{\alpha < k}(\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha) = (\mathcal{H}, F)$ para todo $\&< k$.

Demonstração:

1. $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha < k} (\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)$ por construção.

2. Seja $\sigma = (\mathcal{H}_\beta, F_\beta, \ )$ uma interpretação em $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta)$ e seja $\sigma = (\mathcal{H}, F, \check{v})$ uma interpretação em $(\mathcal{H}, F)$. Demonstramos que para qualquer sentença φ de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$:

   (1) $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H}, F) \models \varphi$,

   por indução no comprimento da fórmula. No caso em que φ é atômica e nos passos de indução para os conectivos e o quantificador universal, a demontração é feita como na lógica de primeira ordem.

   Nos restringiremos, portanto, somente ao caso em que φ é $Q_1 x\psi(x)$.

   Suponhamos que $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models Q_1 x\psi(x)$.

   Então $|\{b \in A_\beta \mid (\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models \psi[b]| \geqslant \omega_1$

   Pela hipótese de indução temos

   $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models \psi[b] \Leftrightarrow (\mathcal{H}, F) \models \psi[b]$

para todo $b \in A_\beta$. Então $|\{b \in A | (\mathcal{H},F) \models \varphi[b]| \geqslant \omega_1$

e se obtém $(\mathcal{H},F) \models Q_1 x\psi$

Reciprocamente suponhamos que $(\mathcal{H},F) \models Q_1 x\psi$

então $|\{b \in A \mid (\mathcal{H},F) \models \varphi[b] \,|\} \geqslant \omega_1$

Como a cadeia é enumerável, em algum A_n deve haver um número não enumerável de elementos $b \in A$ tais que

$(\mathcal{H}_n, F_n) \models \varphi[b]$. Mas como $(\mathcal{H}_\alpha, F_\alpha)_{\alpha<k}$ é uma cadeia elementar, se $\beta < n$ $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) < (\mathcal{H}_n, F_n)$ e temos $(\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models \psi[b]$. Se $n < \beta$ com maior razão se obtém o resultado.

3. Demonstrada a condição 2, e pela condição 5 da definição de cadeia temos que se $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$ então

$F(\{a \in A_\beta \mid (\mathcal{H},F) \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]\} | =$

$F_\beta(\{a \in A_\beta \mid (\mathcal{H}_\beta, F_\beta) \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]\})$.

Observação. O teorema não vale para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ no caso em que a cadeia seja de comprimento superior a ω, mas vale sem restrições para $L\omega\omega(\epsilon)$.

TEOREMA 6. Se $(\mathcal{H},F) \subseteq (\mathcal{E},G)$, onde $(\mathcal{H},F) \subseteq (\mathcal{E},G)$ são estruturas de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ de tipo τ, e se para toda fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ e toda valoração v em $(\mathcal{H},F)$ tal que $v(x) = a$ tivermos que:

1. Se $(\mathcal{E},G) \models \exists x\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, então existe a A tal que para quaisquer $a_1, \ldots a_n \in A$ $(\mathcal{E},G) \models \varphi[a, a_1, \ldots a_n]$.

2. Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$ $1 \leqslant i \leqslant n$ e para todo $b \in B$ existe um automorfismo ϕ em $(\mathcal{E},G)$ tal que

i) $\phi(b) \in A$

ii) $\phi(a_i) = a_i$ $1 \leqslant i \leqslant n$

então $(\mathcal{H},F) < (\mathcal{E},G)$

Demonstração: Por indução no comprimento das fórmulas demonstramos que:

1. $(\mathcal{H},F) \models_V \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{E},G) \models_V \varphi$

Para as fórmulas atômicas (1) fica demonstrada, pois $(\mathcal{H},F) \subseteq (\mathcal{E},G)$. Os passos de indução nos conectivos não sofrem mudanças com relação à demonstração correspondente na lógica de primeira ordem. Ver, por exemplo, [MALITZ 1979, 168].

Vejamos os casos com quantificadores. Dada a definição de quantificador existencial é fácil provar que

$$(\mathcal{H},F) \models_V \exists x\, \varphi(x) \Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models_V \sim(\forall x \sim \varphi(x)) .$$

Assim, o passo de indução para o quantificador universal pode ser substituido por um passo de indução com o quantificador existencial. Suponhamos que

$\varphi = \exists x \psi(x)$ e que $(\mathcal{H},F) \models_V \varphi$.

Assim, para algum $a \in A$ temos

$(\mathcal{H},F) \models_V \psi[a,a_1,\ldots,a_n]$.

Mas pela hipótese de indução temos

$(\mathcal{E},G) \models_V \psi[a,a_1,\ldots,a_n]$.

Reciprocamente suponhamos que $(\mathcal{E},G) \models_V \varphi$ então

$(\mathcal{E},G) \models_V \exists x \psi(x,x_1,\ldots,x_n)$. Então por hipótese do teorema existe $a \in A$ tal que $(\mathcal{E},G) \models_V \psi[a,a_1,\ldots,a_n]$ e pela hipótese de indução $(\mathcal{H},F) \models_V \psi[a,a_1,\ldots,a_n]$ e assim $(\mathcal{H},F) \models_V \varphi$.

Agora suponhamos que $\varphi = Q_1 x \varphi(x,x_1,\ldots,x_n)$, e que

$(\mathcal{E},G) \models Q_1 x \psi(x,x_1,\ldots,x_n)$

Então $C = \{b \in B \mid (\mathcal{E},G) \models \psi[b,a_1,\ldots,a_n]$ é tal que $|C| \geqslant \omega_1$. Ora, $\phi(c) = \{\phi(b) \in B \mid (\mathcal{E},G) \models \psi[\phi(b),\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))]$

$= \{a \in A \mid \phi(b) = a$, para algum $b \in C$ e $(\mathcal{E},G) \models \psi[\phi(b),a_1,\ldots,a_n]$

$= \{a \in A \mid \phi(b) = a$, para algum $b \in C$ e $(\mathcal{H},F) \models \psi[\phi(b),a_1,\ldots,a_n]$.

Como $\phi(C) \subseteq \{a\in A \mid (\mathcal{H},F) \models \psi[a,a_1,\ldots,a_n]\}$ temos que

$\omega_1 \leqslant |\phi(C)| \leqslant |\{a\in A \mid (\mathcal{H},F) \models \psi[a,a_1,\ldots,a_n]\}|$

e portanto $(\mathcal{H},F) \models Q_1 x\psi$

Reciprocamente, como

$\{a\in A \mid (\mathcal{H},F) \models \psi[a,a_1,\ldots,a_n]\} \subseteq \{a\in A \mid (\mathcal{E},G) \models \psi[a,a_1,\ldots,a_n]\}$

obtém-se que, se $(\mathcal{H},F) \models Q_1 x\psi$ então $(\mathcal{E},G) \models Q_1 x\psi$.

O método de diagramas, por exemplo [CHANG & KEISLER, 1973, 68], pode ser estendido sem dificuldades a $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Se $(\mathcal{H},F)$ é uma estrutura de tipo τ de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e se $\mathcal{H}_A = (\mathcal{H},a)_{a\in A}$ é a expansão de $\mathcal{H}$, na lógica de primeira ordem de tipo τ', onde $\tau' = \tau\cup\{c_a \mid a\in A$ e $c_a^{\mathcal{H}_A} = a\}$, então $(\mathcal{H}_A,F)$ é uma expansão de tipo τ' de $(\mathcal{H},F)$.

Definição 7. O *diagrama* de $(\mathcal{H},F)$ denotado por $D(\mathcal{H},F)$ é o conjunto de sentenças atômicas e negações de atômicas de tipo τ' que valem em $(\mathcal{H}_A,F)$.

TEOREMA 7. Sejam $(\mathcal{H},F)$, $(\mathcal{E},G)$ estruturas de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Então ϕ é uma imersão de $(\mathcal{H},F)$ em $(\mathcal{E},G)$ se e somente se $(\mathcal{E},G)$ pode ser expandido a $(\mathcal{E}^+,G)$ um modelo do diagrama de $(\mathcal{H},F)$, tal que $G\circ\overline{\phi} = \phi\circ F$, sendo $\overline{\phi}$ a extensão canônica de ϕ a $P(A)$.

Demonstração: Como no caso da lógica de primeira ordem, se ϕ é uma imersão de $(\mathcal{H},F)$ em $(\mathcal{E},G)$ então, $(\mathcal{E}^+,G)$ onde $\mathcal{E}^+ = (\mathcal{E},\phi(a))_{a\in A}$, é modelo do diagrama de $(\mathcal{H},F)$. Por outro lado, se $\mathcal{E}^+ = (\mathcal{E},c_a)_{a\in A}$ e $(\mathcal{E}^+,G)$ é modelo do diagrama de $(\mathcal{H},F)$, basta tomar $\phi: A\to B$ tal que

1. $\phi(a) = c_a^{\mathcal{E}^+}$ e 2. $G\circ\overline{\phi} = \phi\circ F$

para que ϕ seja uma imersão em $(\mathcal{E},G)$.

2.7. Os Sistemas $L\omega\omega(\imath)$ e $L\omega\omega(Q_1, \imath)$

A definição do operador de descrição de RUSSELL é uma "definição em uso", conforme já mencionamos, ou seja, é uma definição contextual. RUSSELL não tentou analisar ou definir a expressão $\imath x\varphi(x)$ isoladamente. E ainda que sua teoria das descrições tenha sido uma de suas maiores contribuições à Filosofia, as dificuldades encontradas no tratamento metamatemático para demonstrar a eliminabilidade das descrições talvez fizeram com que a teoria de RUSSELL se tornasse impopular na comunidade matemática. HILBERT e BERNAYS [1939, 422-457) simplificaram a teoria, introduzindo na linguagem o operador $\imath$, com a condição de que o termo $\imath x\varphi(x)$ seja usado somente depois de ter sido demonstrado que:

1. $\exists x\varphi(x)$
2. $\forall x\forall y(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y)$

Além disso ampliam a regra de substituição do Cálculo de Predicados de primeira ordem, para permitir a substituição de uma expressão do tipo $\imath x\varphi(x)$ por uma variável livre, com a condição de que as cláusulas 1 e 2 tenham sido derivadas no sistema.

HILBERT e BERNAYS demonstram um teorema de H-eliminabilidade para $\imath$ nesse sistema. A demonstração é feita sintaticamente. Em ROSSER [1953,184] e HAILPERIN [1954, 16] encontramos sistemas de axiomas para o Cálculo de Predicados de 1ª ordem acrescidos de $\imath$, $L\omega\omega(\imath)$, nos quais se demonstram teoremas de H-eliminabilidade para esse símbolo.

Em HAILPERIN encontramos, além disso, teoremas de completude tanto para o sistema de RUSSELL como para o seu próprio sistema, para uma semântica adequada.

Por outro lado, o teorema 29.20 de MONK [1976] trata da H-eliminabilidade do operador de descrição em um sistema bastante análogo ao que usamos aqui para ϵ, salvo por considerar, na linguagem, uma constante distinta, a qual permitirá dar à expressão $\imath x \varphi(x)$ um valor, no caso em que não exista uma x tal que $\varphi(x)$, ou existam muitos x tais que $\varphi(x)$.

A equivalência lógica entre $L\omega\omega(\imath)$ e $L\omega\omega$ não justifica que o descritor não seja usado na matemática. Nisto concordamos com ROSSER [1953, 195] e KNEEBONE [1963, 91]. O primeiro se expressará da seguinte maneira:

> O uso das descrições na matemática do dia a dia é tão numeroso que poderíamos assinalar umas poucas instâncias para indicar seu amplo uso. Alguma noção do uso extenso das descrições pode ser tomada do fato que "the" é a palavra mais comum em inglês e que a maioria dos usos do "the" ocorre em descrições. Quando falamos de "a linha entre dois pontos", "o conjunto dos números primos", "a derivada de f(x)", etc, estamos usando descrições. Todas as constantes ou funções da matemática são dadas por descrições.

De fato, se $\varphi(x,y)$ é uma fórmula com x,y livres, a expressão $\imath y \varphi(x,y)$ define uma função em x como segue:

$$f(x) = \imath y\, \varphi(x,y).$$

KEENEBONE, por outro lado, ilustra-nos a utilidade do símbolo $\imath$, mostrando na secção 2.1 de seu livro de que maneira este símbolo pode ser usado para formalizar o conceito, tão importante, de função característica. Além disso é muito usual, em matemática, teoremas de existência e unicidade na solução de equações para as quais se conhece a solução explícita. Nestes casos a única maneira de referir-se a ela é por meio de uma descrição, a qual se converte, portanto, em nome da mesma.

Se acrescentarmos à linguagem de $L\omega\omega(\imath)$ o quantificador Q_1 e o sistema de axiomas de ROSSER [1953, 184] para

$L\omega\omega(\rceil)$ os axiomas C_1 a C_5 (ver p. 28), obteremos um sistema para $L\omega\omega(Q_1, \rceil)$ completamente análogo ao sistema para $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, por nós apresentado.

O teorema 29.20 de R-eliminação de MONK [1976] pode ser facilmente estendido a $L\omega\omega(Q_1, \rceil)$, demonstrando-se assim que $L\omega\omega(Q_1, \rceil) \equiv L\omega\omega(Q_1)$. No que se refere a $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ o caso é bem diferente, como mostraremos no próximo capítulo, justificando portanto o estudo detalhado deste sistema.

§3. A LÓGICA DAS FÓRMULAS ϵ-INVARIANTES DE $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ e $L\omega\omega(\epsilon)$

3.1 R-eliminabilidade de ϵ em I-$L\omega\omega(\epsilon)$

Definição 8. Seja $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ uma fórmula de $L\omega\omega(Q_I,\epsilon)$. Dizemos que φ é ϵ-*invariante* se, para qualquer estrutura de primeira ordem $\mathcal{H}$, qualquer valoração v, e quaisquer funções de escolha F, G em P(A) obtem-se

$$(\mathcal{H},F) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models \varphi$$

Exemplo: Dada φ, a fórmula $\varphi(\epsilon x\varphi(x))$ é ϵ-invariante, porque $\varphi(\epsilon x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\varphi(x)$ em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}(\mathcal{H},F)\models_{v} \varphi(\epsilon x\varphi(x)) &\Leftrightarrow (\mathcal{H},F)\models_{v} \exists x\varphi(x)\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},G)\models_{v} \exists x\varphi(x)\\ &\Leftrightarrow (\mathcal{H},G)\models_{v} \varphi(\epsilon x\varphi(x))\end{aligned}$$

Observação: A fórmula $\exists x\varphi(x)$ não contem ϵ e portanto é ϵ-invariante.

É importante ressaltar que nem todas as fórmulas são ϵ-invariantes, como se pode ver pelo seguinte exemplo:

Ω : $\forall x\forall y[x \neq y \rightarrow \epsilon u(u \neq x) \neq \epsilon u(u \neq y)] \wedge \exists x\forall y(x \neq \epsilon u(u \neq y))$

Ω tem como modelos estruturas $(\mathcal{H},F)$ nas quais existe uma função f injetiva, não sobrejetiva e sem pontos fixos definida em A e tal que a função de escolha F cumpre:

(*) $\qquad F(A-\{x\}) = f(x)$ para qualquer x de A.

Evidentemente dado A infinito podemos achar F e G tais que F tenha a propriedade (*) enquanto G não. Portanto

$$(\mathcal{H},F)\models \Omega \quad \text{e} \quad (\mathcal{H},G)\not\models \Omega.$$

Por outro lado, a existência de f requer que A seja infinito. Em realidade tem-se que

$$A \text{ é infinito} \Leftrightarrow (\mathcal{H},F)\models \Omega \text{ para alguma } F,$$

do qual conclui-se que ϵ não é eliminável em Ω. Pois, se o fosse, ou seja, se existisse uma fórmula φ em $L\omega\omega(\epsilon)$ tal que $\vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \Omega \leftrightarrow \varphi$ ter-se-ia que:

$$
\begin{aligned}
A \text{ é infinito} &\Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models \Omega \text{ para alguma } F \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models \varphi \text{ para alguma } F \\
&\Leftrightarrow \mathcal{H} \models \varphi \quad \varphi \text{ não contem } \epsilon
\end{aligned}
$$

o qual significaria que φ axiomatiza a classe dos conjuntos infinitos; porém sabe-se que isto não é possível pelo teorema da compacidade para $L\omega\omega$.

Passamos agora a estudar o conjunto $I\text{-}L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ das fórmulas ϵ-invariantes em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$. O primeiro resultado é o seguinte:

TEOREMA 8. O conjunto das fórmulas invariantes de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, $I\text{-}L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, é fechado para as operações lógicas ordinárias e o quantificador Q_1.

Demonstração: Consideremos interpretações $\sigma = (\mathcal{H}, F, v)$ e $\mu = (\mathcal{H}, G, v)$ e fórmulas invariantes α, β. Faremos a demonstração por indução no comprimento da fórmula:

(a)
$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H},F) \models_{v} \sim\alpha &\Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \not\models_{v} \alpha \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \not\models_{v} \alpha \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models_{v} \sim\alpha
\end{aligned}
$$

Ou seja, se α é ϵ-invariante então $\sim\alpha$ também é ϵ-invariante.

(b)
$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{H},F) \not\models \beta \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \beta^{\sigma} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha^{\sigma} = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta^{\mu} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha^{\mu} = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \not\models_{v} \beta \rightarrow \alpha
\end{aligned}
$$

Ou seja, se β e α são ϵ-invariantes então $\beta \rightarrow \alpha$ também é ϵ-invariante.

(c) $(\mathcal{H},F) \models \forall x\alpha \Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models_{V(x/a)} \alpha$ para todo $a \in A$

$\Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models_{V(x/a)} \alpha$ para todo $a \in A$

$\Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models_{V} \alpha$

Ou seja, se α é ϵ-invariante então $\forall x\alpha$ também é ϵ-invariante.

(d) $(\mathcal{H},F) \models_{V} Q_1 x\alpha \Leftrightarrow |\{a \in A \mid (\mathcal{H},F) \models_{V(x/a)} \alpha\}| \geq \omega_1$

$\underset{(*)}{\Leftrightarrow} |\{a \in A \mid (\mathcal{H},G) \models_{V(x/a)} \alpha\}| \geq \omega_1$

$\Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models_{V} Q_1 x\alpha$

(*) $\{a \in A \mid (\mathcal{H},F) \models_{V(x/a)} \alpha\} = \{(\mathcal{H},G) \mid (\mathcal{H},G) \models_{V(x/a)} \alpha\}$ pois α é ϵ-invariante por hipótese.

Demonstramos que, se α é ϵ-invariante $Q_1 x$ também é ϵ-invariante. Com isto fica demonstrado o teorema.

Corolário. O conjunto das fórmulas ϵ-invariantes de $L\omega\omega(\epsilon)$ é fechado para as operações lógicas ordinárias.

Lema 4. Seja $\varphi(\epsilon)$ em $L\omega\omega(\epsilon)$ uma fórmula ϵ-invariante do tipo τ e seja φ^* sua tradução em $L\omega\omega$. Sejam

$K_1 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists \tilde{f}_{\theta_1}, \ldots, \tilde{f}_{\theta_n} (\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta i}\} \models (E^\varphi)^* \wedge \varphi^*\}$

$K_2 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists \tilde{g}_{\theta_1}, \ldots, \tilde{g}_{\theta m} (\mathcal{H}, \{\tilde{g}_{\theta j}\} \models (E^\varphi)^* \wedge \sim \varphi^*\}$

então K_1 e K_2 são duas classes projetivas* disjuntas cuja união é Est_τ.

Demonstração: K_1 e K_2 são classes projetivas por definição. Suponhamos que $K_1 \cap K_2 \neq \phi$. Então, para alguma estrutura $\mathcal{H}$ e certas $f_{\theta i}$ $(1 \leq i \leq n)$ tem-se que

$$(\mathcal{H}, \{\tilde{f}_{\theta i}\}) \models (E^\varphi)^* \wedge \varphi^*$$

---

*Uma classe K de estruturas de tipo τ de uma lógica L se diz *projetiva* (ou PC) se e somente se existe $\tau' \supseteq \tau$ e uma classe elementar K' de tipo τ' em L tal que $K = \{\mathcal{H}\restriction_\tau \mid \mathcal{H} \in K'\}$.

e para certas g_{θ_j} $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tem-se que

$$(\mathcal{H},\{\tilde{g}_{\theta_j}\}) \models (E^{\varphi})^* \wedge \sim \varphi^*$$

Então, devido ao lema 2, existem funções de escolha F e G em P(A) tais que

$$(\mathcal{H},F) \models \varphi(\epsilon) \quad \text{e} \quad (\mathcal{H},G) \models \sim \varphi(\epsilon)$$

porém, como $\varphi(\epsilon)$ é ϵ-invariante, obtem-se uma contradição.

Por outro lado, também pelo lema 2, obtemos que $K_1 \cup K_2 = Est_\tau$, já que

$K_1 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists F (\mathcal{H},F) \models \varphi(\epsilon)\}$

$K_2 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists G (\mathcal{H},G) \models \sim\varphi(\epsilon)\}$.

TEOREMA 9. (Teorema de R-eliminação de ϵ em $L\omega\omega(\epsilon)$). Seja $\varphi(\epsilon)$ uma fórmula ϵ-invariante de $L\omega\omega(\epsilon)$ de tipo τ. Então, existe uma fórmula φ' de $L\omega\omega$ tal que $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Demonstração: Seja φ^* a tradução de φ em $L\omega\omega$. O lema 4 garante que

$K_1 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists \tilde{f}_{\theta_1},\ldots,\tilde{f}_{\theta_n} (\mathcal{H},\{\tilde{f}_{\theta_i}\} \models (E^{\varphi})^* \wedge \varphi^*\}$

$K_2 = \{\mathcal{H} \in Est_\tau \mid \exists \tilde{g}_{\theta_1},\ldots,\tilde{g}_{\theta_m} (\mathcal{H},\{\tilde{g}_{\theta_j}\} \models (E^{\varphi})^* \wedge \sim \varphi^*\}$

são classes projetivas disjuntas, cuja união é Est_τ. Pelo teorema de interpolação em $L\omega\omega$, obtem-se que existe φ' de tipo τ tal que $\mathcal{H} \in K_1 \Leftrightarrow \mathcal{H} \models \varphi'$.

Ora, $(\mathcal{H},F) \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{H} \in K_1 \Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$, pois φ' não contem ϵ e, isto significa que $(\mathcal{H},F) \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$. Portanto $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$, já que $(\mathcal{H},F)$ foi escolhida arbitrariamente.

Observação: Em uma lógica fechada para a negação o teorema clássico de interpolação é equivalente à afirmação: para cada par de classes projetivas disjuntas $K_1 \subseteq Est_\tau$ e $K_2 \subseteq Est_\tau$, existe uma classe elementar K tal que $K_1 \subseteq K$ e $K_2 \subseteq Est_\tau - K$.

Corolário: Seja $\varphi(\epsilon)$ uma fórmula ϵ-invariante de $L\omega\omega(\epsilon)$ de tipo τ. Então, existe uma fórmula φ' de $L\omega\omega$ tal que $\vdash_{L\omega\omega(\epsilon)} \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Demonstração: O corolario é uma consequência imediata do teorema 4 e do teorema de completude de $L\omega\omega(\epsilon)$.

3.2 Não Eliminabilidade de ϵ em I-$L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$

O teorema anterior não pode estender-se a $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$, pois, como veremos a seguir, nesta lógica existem fórmulas ϵ-invariantes que não são equivalentes a alguma fórmula sem ϵ. Isto faz com que o símbolo ϵ não seja eliminável e torna-o um operador bastante interessante. O resultado obtido se expressa na seguinte forma:

TEOREMA 10. Existem fórmulas ϵ-invariantes de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ que não são equivalentes a fórmula alguma de $L\omega\omega(Q_1)$.

Demonstração: Seja Ω a fórmula

$[\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))]$

$\wedge\ Q_1 x (\exists y (x = \epsilon z (zRy)))$

que abreviaremos por: "R é uma relação de equivalência" $\wedge\, \alpha$.

a) Ω é ϵ-invariante.

Com efeito:

i) "R é uma relação de equivalência", é uma fórmula de primeira ordem que não contem ϵ e, portanto, é ϵ-invariante.

ii) A fórmula $\alpha = Q_1 x (\exists y (x = \epsilon z (zRy))$ quantificando um certo conjunto de representantes das classes de equivalência, escolhidos por meio do símbolo ϵ, diz, intuitivamente, que a relação de equivalência R tem pelo menos ω_1 classes. Vejamos que α é ϵ-invariante no contexto de Ω:

Seja $(\mathcal{H}, F)$ uma estrutura de $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$:

$(\mathcal{H}, F) \models \Omega \Rightarrow (\mathcal{H}, F) \models \alpha$

Ora, $(\mathcal{H},F) \models \alpha \Leftrightarrow |\{a \in A \mid (\mathcal{H},F) \models \exists y(a = \epsilon z(zRy))\}| \geq \omega_1$.

Além disso,

$(\mathcal{H},F) \models \exists y(a = \epsilon z(zRy)) \Leftrightarrow (\mathcal{H},F) \models a = \epsilon z(zRb)$ para algum b

$\Leftrightarrow a = F(\{c \mid a_1 F) \models cRb$, para algum b$\})$

$\Leftrightarrow a = F([b])$.

Porém, F é uma função de escolha e $F([(b)]) \epsilon [b]$; então $a \epsilon [b]$;

Logo $[a] = [b]$ e $a = F([a])$.

Portanto $(\mathcal{H},F) \models \alpha \Leftrightarrow |\{a \epsilon A \mid a = F([a]\}| \geq \omega_1$

ou seja, $(\mathcal{H},F) \models \alpha \Leftrightarrow |A/R| \geq \omega_1$.

Este resultado é independente da função de escolha considerada. Assim para qualquer função de escolha G obtem-se

$(\mathcal{H},G) \models \alpha \Leftrightarrow |A/R| \geq \omega_1$,

Portanto

$(\mathcal{H},F) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{H},G) \models \alpha$,

ou seja, α é ϵ-invariante no contexto de Ω.

b) Ω não é equivalente a fórmula alguma φ' de $L\omega\omega(Q_1)$.

Na argumentação de KEISLER que demonstra com um contraexemplo que $L\omega\omega(Q_1)$ não satisfaz interpolação, usa-se o seguinte resultado [BARWISE e FEFERMAN, 1985, 57]:

Para $i = 0,1$, sejam $\mathcal{H}_i = (A_i, R^{\mathcal{H}_i})$ estruturas onde $R^{\mathcal{H}_i}$ é uma relação de equivalência com apenas um número não enumerável de classes de equivalência e $A_i/_{R^{\mathcal{H}_i}}$ é enumerável para $i = 0$ e não enumerável para $i = 1$. Então

$$\mathcal{H}_0 \underset{L\omega\omega(Q_1)}{\equiv} \mathcal{H}_1$$

Aplicando o resultado anterior ao nosso caso, obtemos que se Ω for equivalente a alguma fórmula de $L\omega\omega(Q_1)$, então seria satisfeita pela estrutura $\mathcal{H}_0$, o que é absurdo.

4. INTERPOLAÇÃO EM $L\omega\omega(\epsilon)$ e $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$

4.1 Interpolação em $L\omega\omega(\epsilon)$

A conjectura de que a propriedade de interpolação não vale em linguagens de primeira ordem com operadores nominais está em da COSTA [1980]. A equivalência entre $L\omega\omega(\iota)$ e $L\omega\omega$ garante a propriedade de interpolação em $L\omega\omega(\iota)$. No caso de $L\omega\omega(\epsilon)$, nos aproximamos da solução da conjectura, através do seguinte teorema, o qual garante a existência de uma interpolante entre duas fórmulas, φ,ψ tais que $\varphi\models\psi$, se pelo menos uma das duas é ϵ-invariante.

TEOREMA 11. Sejam $\varphi(\epsilon)$ de tipo τ e $\psi(\epsilon)$ de tipo ρ em $L\omega\omega(\epsilon)$. Se pelo menos uma das duas fórmulas é ϵ-invariante e se $\models\varphi(\epsilon)\rightarrow\psi(\epsilon)$ então existe uma fórmula θ de $L\omega\omega(\epsilon)$ de tipo $\tau\cap\rho$ tal que $\models\varphi(\epsilon)\rightarrow\theta$ e $\models\theta\rightarrow\psi(\epsilon)$.

Demonstração.

Caso 1. Se $\varphi(\epsilon)$ e $\psi(\epsilon)$ são ϵ-invariantes, existe a fórmula θ, pelo fato de que $L\omega\omega(\epsilon)\equiv I\text{-}L\omega\omega(\epsilon)$, pelo Teorema 10.

Caso 2. Se $\varphi(\epsilon)$ é ϵ-invariante e $\psi(\epsilon)$ não o é, o Teorema 10 garante que existe uma fórmula $\varphi'\in L\omega\omega$ tal que $\models\varphi\leftrightarrow\varphi'$. Ora, se $\models\varphi(\epsilon)\rightarrow\psi(\epsilon)$ então $\models\varphi'\rightarrow\psi(\epsilon)$ e então, pelo Teorema 2, $\models\varphi'\rightarrow((E^{\psi})^*\rightarrow(\psi^*))$. Usando interpretação em $L\omega\omega$, obtemos uma fórmula θ' de tipo $\tau\cap\rho'$ tal que $\models\varphi'\rightarrow\theta'$ e $\models\theta'\rightarrow((E^{\psi})^*\rightarrow\psi^*)$. Mas, usando tautologias adequadas e substituição por equivalência obtemos $\models\varphi'\rightarrow\theta'$ e $\models(E^{\psi})^*\rightarrow(\theta'\rightarrow\psi^*)$. Aplicando de novo os Teoremas 2 e 10 obtemos $\models\varphi\rightarrow\theta$ e $\models\theta\rightarrow\psi$ onde θ é tal que $\theta^*=\theta'$.

Caso 3. Se $\psi(\epsilon)$ é ϵ-invariante e $\varphi(\epsilon)$ não o é, então, pelo Teorema 4 temos $\models\varphi(\epsilon)\rightarrow\psi'$ para alguma ψ' de $L\omega\omega$. Demonstraremos que $\models((E^{\varphi})^*\wedge\varphi^*)\rightarrow\psi'$. Suponhamos que $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models(E^{\varphi})^*\wedge\varphi^*$; então pelo lema 2 existe uma função de escolha $F:P(A)\rightarrow A$ tal que $(\mathcal{H},F)\models\varphi(\epsilon)\Leftrightarrow(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models\varphi^*$. Ora, se $(\mathcal{H},F)\models\varphi(\epsilon)$ então

$(\mathcal{H},F)\models\varphi(\epsilon)$ e portanto $(\mathcal{H},F)\models\psi'$. Usando então o teorema de H-eliminabilidade para ϵ em $L\omega\omega(\epsilon)$, e como ψ' não contém ϵ, obtém-se que $\mathcal{H}\models\psi$ e portanto também que $(\mathcal{H},\{\tilde{f}_\theta\})\models\psi'$. Então existe $\theta'\in L\omega\omega$ de tipo $\tau'\cap\rho$ tal que $\models(E^{\varphi})^*\wedge\varphi^*\rightarrow\theta'$ e $\models\theta'\rightarrow\psi'$. Então $\models(E^{\varphi})^*\rightarrow(\varphi^*\rightarrow\theta')$ e $\models\theta'\rightarrow\psi'$. Usando os teoremas 2 e 10 obtemos $\models\varphi\rightarrow\theta$ e $\models\theta\rightarrow\psi$ onde θ é uma fórmula de $L\omega\omega(\epsilon)$ tal que $\theta^*=\theta'$.

4.2 Interpolação em $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$

KEISLER demonstrou em 1971 que o teorema de interpolação não vale em $L\omega\omega(Q_1)$. O contraexemplo de KEISLER pode ser descrito como segue [BARWISE e FEFERMAN, 1985, 35]:

> Seja $\varphi_0(E,R)$ uma fórmula que expressa que E é uma relação de equivalência que tem somente um número não enumerável de classes de equivalência e R é um conjunto contável de representantes. Seja ainda $\varphi_1(E,S)$ a fórmula que expressa uma afirmação similar com S sendo um conjunto não enumerável de representantes. Então $\varphi_0(E,R)\models\sim\varphi_1(E,S)$ tem uma interpolante em $L\omega\omega(Q_1)$; supor o contrário implicaria chegar ao absurdo (o mencionado no final do capítulo anterior).

Se expressamos essas "fórmulas" na linguagem de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ obtemos:

- φ_0' : "E é de equivalência" $\wedge\sim Q_1x\exists y(x=\epsilon z(zEy))$
  $\wedge\ \exists uQ_1v(v=\epsilon w(wEu))$

que abreviamos por "E"$\wedge\sim\varphi\wedge\beta$.

- φ_1': "E é de equivalência" $\wedge Q_1x\exists y(x=\epsilon z(zEy))\wedge\exists uQ\ v(v=\epsilon w(wEu)$

que abreviamos por "E" $\wedge\varphi\wedge\beta$.

No capítulo anterior demonstramos que α expressa que o número de classes de equivalência de E é não enumerável e que é ϵ-invariante no contexto de Ω, e portanto o será no contexto de φ_0' ou φ_1'.

A fórmula $\beta = \exists u Q_1 v(v = \epsilon w(wEu)$ expressa por sua vez, que cada classe de E não é enumerável e que é ϵ-invariante no contexto de Ω, e portanto o será no contexto de φ_0' ou φ_1'. De fato,

$$(\mathcal{H},F) \models \exists u Q_1 v(v = \epsilon w(wEu)) \Leftrightarrow$$

$$(\mathcal{H},F) \models Q_1 v(v = \epsilon w(wEa)) \text{ para todo } a \in A \Leftrightarrow$$

$$|\{b \in A \mid (\mathcal{H},F) \models b = \epsilon w(wEa))\}| \geqslant w_1 \text{ para todo } a \in A \Leftrightarrow$$

$$|\{b \in A \mid b = F(\{c \in A \mid cEa\}))\}| \geqslant w_1 \text{ para todo } a \in A \Leftrightarrow$$

$$|\{b \in A \mid b = F([a]) \mid \geqslant w_1 \text{ para todo } a \in A \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad |\{b \in A \mid b \in [a]\}| \geqslant w_1$$

pois F é de escolha.

Como (1) é independente da função de escolha selecionada, resulta que β é ϵ-invariante no contexto de φ_0' ou φ_1'. Portanto φ_0' e φ_1' são ϵ-invariantes, pois no capítulo anterior se demonstrou que tanto "E é relação de equivalência" como α são ϵ-invariantes e no teorema 8 demonstramos que $I\text{-}L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ é fechado para as operações lógicas ordinárias e Q_1. Ora,

$$\varphi_0' \models \sim \varphi_1' .$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\mathcal{H},F) \models \varphi_0' &\Rightarrow (\mathcal{H},F) \models \text{"E"} \wedge \sim\alpha \wedge \beta \\ &\Rightarrow (\mathcal{H},F) \models \sim \alpha \\ &\Rightarrow (\mathcal{H},F) \models \sim \text{"E"} \quad \sim\alpha \quad \sim\beta \\ &\Rightarrow (\mathcal{H},F) \models \sim \varphi_1' .\end{aligned}$$

Conjecturamos que não existe uma fórmula interpolante entre φ_0' e φ_1' e portanto que o teorema de interpolação não vale nem em $I\text{-}L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ nem em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$.

§5. OBSERVAÇÕES E PROBLEMAS EM ABERTO

5.1 História dos Operadores Nominais

Em nossa tese esboçamos uma história dos operadores nominais. Uma cuidadosa investigação sobre o tema será de fundamental importância, entre outras coisas, para avaliar porque os operadores nominais, sendo tão importantes, não foram usados na matemática usual, com excessão do operador de abstração.

5.2 Operadores Nominais e Lingüística

Sabemos que o uso do artigo indefinido não é homogêneo nas linguagens naturais, depende de quem o usa e como é usado. A nossa investigação explicitaria pelo menos dois usos do artigo indefinido nas linguagens naturais.

As fórmulas ϵ-invariantes seriam, intuitivamente falando, aquelas nas quais o símbolo ϵ abstrairia o artigo indefinido "um", quando ele é usado na linguagem ordinária com sentido de total indeterminação; isto é, trata-se de qualquer um. Nas fórmulas que não são ϵ-invariantes, nas quais a interpretação do ϵ depende da função de escolha, o símbolo ϵ abstrairia o artigo indefinido quando ele tem algum tipo de determinação, dada, naturalmente, por quem o usa.

O fato de que em $L\omega\omega(\epsilon)$ as fórmulas ϵ-invariantes, são R-elimináveis, enquanto que em $L\omega\omega(Q_1, \epsilon)$ não necessariamente, manifesta, que à medida que a linguagem se enriquece com certo tipo de símbolos, o papel do artigo indefinido se faz cada vez mais relevante. O artigo indefinido não poderia ser definido nestes casos, em função dos quantificadores, como pensava RUSSELL [1966, 165]. Caso contrário seria o do artido definido, pois ele é dispensável, o que coincide com a tese de QUINE [1960], por exemplo.

Naturalmente, estas afirmações, que fazemos sem muito aprofundar, são questões abertas colocadas para serem investigadas seriamente por um grupo interdisciplinar de filósofos da linguagem, lingüistas e lógicos.

5.3 Teoria Geral dos Operadores Nominais

Terminamos nossa tese com uma lista de problemas técnicos, que foram surgindo durante a investigação.

1º Vale o teorema de interpolação em algumas das lógicas $L\omega\omega(\epsilon)$, $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$, ou $I\text{-}L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$?

Chegamos *quase* a demonstrar o teorema de interpolação para $L\omega\omega(\epsilon)$. Porém, o *quase* não vale em matemática. Contudo, está bastante localizado o ponto crítico para que o teorema seja válido, ou não. Estamos tentanto remover o obstáculo ou encontrar um contra-exemplo.

2º Continuar com o estudo de $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$ especialmente no que se refere à teoria de modelos.

3º A definição de fórmula ϵ-invariante é uma definição semântica. Propomos, como questão:
Como caracterizar sintaticamente as fórmulas ϵ-invariantes em $L\omega\omega(\epsilon)$ e $L\omega\omega(Q_1,\epsilon)$?

4º $L\omega\omega$ tem, em relação ao operador ϵ, a propriedade de que $L\omega\omega \equiv I\text{-}L\omega\omega(\epsilon)$. Porém, como é interessante notar, os quantificadores generalizados podem ser introduzidos, de modo alternativo, como operadores nominais convenientes. Podemos, então indagar quais são as propriedades básicas do operador nominal q_1 tal que $L\omega\omega(Q_1) \equiv I\text{-}L\omega\omega(q_1)$?

5º Até onde valem os resultados desta investigação para quantificadores generalizados e operadores nominais arbitrários?

5.4 Lógicas Não-Clássicas e Operadores Nominais

O símbolo ϵ de HILBERT e o descritor de RUSSELL tem sido estudados recentemente em certas lógicas paraconsistentes. Por exemplo, nas teses de doutorado *O símbolo* ϵ *de Hilbert em lógica paraconsistente*, de Mineko Yamashita e *Descrição e paraconsistência*, de Celina A.A. Pereira Abar, (PUC de São Paulo, 1985).

Fica em aberto a questão do estudo dos operadores nominais em outras lógicas não clássicas.

BIBLIOGRAFIA

ACKERMANN, W. 1924 Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widersprunchsfreiheit. *Mathematische Annalem*, 93, p. 1-36.

ASSER, G. 1957 Theorie der logischen Auswahlfunktionen, *Zeitschr. f. math. Logik u. Grund. d. Math.*, 3, p. 30-68.

BARTH, E.M. 1974 The Logic of the Articles in Traditional Philosophy. D. Reidel Publ. Co.

BARWISE, J., FEFERMAN, S. 1985 Model-Theoretic Logics. Springer Verlag, New York.

BOCHEÑSKI, I.M. 1970 A History of Formal Logic. Chelsea Pub. Co., New York.

BOURBAKI, N. 1954 Éléments de Mathématique, Livre I (Theorie des ensembles), Cap. I, II, Hermann, Paris.

BOURBAKI, N. 1974 Éléments d'Histoire des Mathematiques. Hermann, Paris.

CAICEDO, X. 1980 Back and forth systems for arbitrary quantifiers. *Mathematical Logic in Latin America*. A.I. Arruda, R. Chuaqui, N.C.A. da Costa editores, North Holland, p. 83-102.

CAICEDO, X. SÁNCHEZ, C.H. 1987 Caracterización de operadores que ligan variables de fórmulas para obtener términos (vbto's), por medio de isomorfismos parciales. Relatório interno de pesquisa. Depto. de Matemáticas, Universidad Nacional de Colômbia, Bogotá.

CORCORAN, J., HERRING, J. 1971 Notes on a semantical analysis of variable binding term operators. *Logique et Analyse*, 55, p. 644-657.

CORCORAN, J., HATCHER, W.S., HERRING, J. 1972 Variable binding term operators. *Zeitschr. für Math., Logik und Grund. der Math.*, 18, p. 177-182.

CULIOLI, A. 1975 Note sur 'determination' et 'quantification': definition des operations d'extraction et de flèchage. Département de Recherches Linguistiques, Université de Paris VII.

CHANG, C.C. KEISLER, H.J. 1973 Model Theory. North Holland Pub. Co., Amsterdam, Londres.

da COSTA, N.C.A. 1973 Review of Corcoran, Hatcher and Herring, 1972. *Zentralblatt für Math.*, 27, p. 8-9.

da COSTA, N.C.A. 1980 Model theoretical approach to variable binding term operators. *Mathematical Logic in Latin America.* A.I. Arruda, R. Chuaqui, N.C.A. da Costa editores, North Holland, p. 133-162.

DRUCK, I., da COSTA, N.C.A. 1975 Sur les "vbtos" selon M. Hatcher. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 281, p. 741-743.

FREGE,G. 1893 Grundgesetze der Arithmetik. Traducida al inglês como "The Basic Laws of Arithmetic" por M. FURTH, 1967. Un. of California Press.

GUILLAUME, M. 1964 Recherches sur le symbole de Hilbert. Clermont-Ferrand, France.

HAILPERIN, T. 1954 Remarques on identity and description in first order axiom systems. *Journal of Symb. Logic*, 19, p. 14-20.

HATCHER, W.S. 1968 Foundations of Mathematics. Saunders, Filadelfia.

HATCHER, W.S. 1982 The Logical Foundations of Mathematics. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto.

HERMES, H. 1965. Eine Termlogik mit Auswahloperator, Springer, Berlin.

HILBERT, D. 1923 Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Mathematischen Annalen*, 88, p. 151-165.

HILBERT, D., BERNAYS, P. 1934,1939 Grundlagen der Mathematik. V. 1 e 2. Springer Verlag, Berlin.

KATO, M. 1971 A representação semântica do artigo definido. Tese, FFCL, São Bento, PUC, São Paulo.

KEISLER, J. 1970 Logic with the quantifier "There exists uncountably many". *Annals of Math. Logic*, 1, p. 1-94.

KELLEY, J.L. 1955 General Topology. Van Nostrand, New York.

KENNEDY, H.C. 1980 Peano. Life and works of Giuseppe Peano. D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland.

KNEEBONE, G.T. 1963 Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. D. van Nostrand, Co., London.

KRAMSKI, J. 1972 The Article and the Concept of Definitness in Language. C.H. van Schooneweld. Indiana Univ. Series Minor 125.

LEISENRING, A.C. 1969 Mathematical logic and Hilberts-ϵ-symbols. Macdonald thecnical and scientific. London.

MALITZ, J. 1979 Introduction to Mathematical Logic. Springer Verlag, New York, Berlin.

MENDELSON, A. 1964 Introduction to Mathematical logic. D. van Nostrand. 2ª ed. 1979.

MONK, J. 1976 Mathematical logic. Springer Verlag, N.Y.

MONTAGUE, R., KALISCH, D. 1957 Remarks on description and natural deduction. *Arch. math. Logik u. Grund.*, 3, p. 50-73.

MONTAGUE, R. 1976 Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague. Edited by H. Thomason. Yale Univ. Press.

MORTENSEN, C., da COSTA, N.C.A. 1981 Notes on the theorie of "vbtos". Preprint.

PEANO, G. 1895,1908 Formulario Mathematico. Vol. 1. Torino: Bacca.

QUINE, W.V. 1951 Mathematical Logic. Harvard Univ. Press. Cambridge.

QUINE, W.V. 1963 Set Theory and its Logic. Harvard Univ. Press. Cambridge.

QUINE, W.V. 1960 Word and Object. MIT Press. Cambridge.

RASIOVA, H. 1956 On the ϵ-Theorems. *Fund. Math.*, 43, p. 156-165.

ROBBINS, B.L. 1968 The Definite Article in English Transformation. The Hague, Mouton.

ROSSER, J.B. 1953 Logic for Mathematicians. McGraw Hill, New York.

RUSSELL, B. 1905 On Denoting. *Mind*, 14, p. 479-493.

RUSSELL, B. 1963 Introduction to Mathematical Philosophy. Allen and Unwin, London. Tem tradução ao português, 1966, Zahar Editores, Rio de Janeiro.

SCOTT, D. 1967 Existence and description in formal logic. *Bertrand Russell, Philosopher of the Century.* Little, Brown & Co. Boston. Existe tradução em espanhol, 1968, Colección libros TAU.

SHOENFIELD, J.D. 1967 Mathematical Logic. Addison Wesley.

Van HEIJENOORT, J. 1967 From Frege to Gödel. Harvard Univ. Press, Cambridge.

WANG, H. 1955 On denumerable bases of formal systems. *Math. interpretation of formal systems*, North Holland, p. 57-84.

WHITEHEAD, A., RUSSELL, B. 1910 Principia Mathematica. Vol.1. Cambridge Press.