UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
Departamento de Filosofia

JOSÉ ALEXANDRE DURRY GUERZONI

UMA NOVA INTERPRETAÇÃO DO QUANTIFICADOR EM CONTEXTOS
MODAIS: A SEMÂNTICA NOMINATIVA.

Este exemplar corresponde
a reacção final da fase
defendida pelo Sr. José
Alexandre Durry Guerzoni,
e aprovada pela comissão
julgaradora.

Campinas, 24 de abril de 1986

Balthazar Barbosa F.

Dissertação elaborada sob orienta-
ção do Prof. Dr. Balthazar Barbo-
sa Filho e apresentada como requi-
sito para obtenção do grau de Mes-
tre em Lógica e Filosofia da Ciên-
cia.

MARÇO

1986

AGRADECIMENTOS

À Prof^a. Andréa Maria Altino de Campos Loparić, a quem esse trabalho muito deve.

Ao Prof. Dr. Balthazar Barbosa Filho.

Ao Prof. Dr. Xavier Caicedo, que com valiosas observações, ajudou-nos a superar um impasse no desenvolvimento desse trabalho.

Aos Profs. Dr. Elias Humberto Alves e José Eduardo de Almeida Moura pelo estímulo e amizade.

Aos meus pais.

A minha esposa Jusmeri, e meus filhos, Uana e Dinho, pela compreensão e carinho.

À CAPES, pelo apoio financeiro parcial.

À Maria Isabel C. Girnos, pelos excelentes serviços datilográficos.

Ao meu mestre Frei Raimundo Vier,
que me transmitiu o ideal da vida
acadêmica.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	I
1. A SEMÂNTICA NOMINATIVA	1
1.1 Conceitos semânticos para linguagens modais	1
1.2 A Semântica Nominativa e os operadores clássicos	14
1.3 A Semântica Nominativa e os operadores modais	28
2. UMA EXTENSÃO DO SISTEMA S5	35
2.1 Observações preliminares	35
2.2 Os conceitos semânticos para QS5'	39
2.3 Um sistema axiomático	53
3. O TEOREMA DE COMPLETEZ PARA QS5'	75
CONCLUSÃO	98
ADENDO	108

INTRODUÇÃO

Neste estudo, desenvolvemos uma nova semântica de mundos possíveis para linguagens modais de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais, a partir de uma reformulação do conceito de satisfação. Tal como na semântica kripkeana, várias lógicas modais podem ser especificadas por meio dessa semântica, dependendo das condições impostas às respectivas relações de acessibilidade entre os mundos possíveis. Analisamos aqui, de forma detalhada, a lógica que resulta quando a relação de acessibilidade considerada é uma relação de equivalência. Estudamos algumas das suas principais características semânticas e apresentamos um sistema axiomático, com respeito ao qual, essa lógica é correta e completa. Verificamos, ainda, que esse sistema é estritamente mais fraco do que a extensão usual, para essas linguagens, do sistema S5 de Lewis com a fórmula de Barcan.

Ao elaborar essa semântica, nosso percurso teve como horizonte a crítica quineana à lógica modal quantificacional. Notadamente, a tese segundo a qual, para dar sentido à quantificação através de contextos modais, somos forçados a assumir uma doutrina essencialista: aquela que estabelece uma distinção entre propriedades essenciais e propriedades acidentais de objetos, independentemente dos meios de que a linguagem dispõe para fazer-lhes referência (cf. QUINE, 1943; 1944, 1947, 1961, 1960, 1953 e FOLLESDAL, 1969). Procurando escapar à objeção quineana, recusamos a dicotomia entre contextos referencialmente transparentes e referencialmente opacos, encaminhando-nos para o reconhecimento de um caráter intermediário dos contextos modais⁽¹⁾.

Com efeito, se entendermos por contexto referencialmente transparente aquele que expressa uma condição que é satisfeita ou não por objetos enquanto tais, e se, por outro lado, ao dizermos que um contexto é referencialmente opaco estamos recusando

(1) Cf. KAPLAN, 1969, onde se encontra uma instigante análise dos contextos intermediários; a recusa da dicotomia transparente-opaco é retomada, também, em ELGIN, 1985.

a possibilidade de determinar a sua referência, então a não transparência referencial não precisa ser interpretada como equivalente à opacidade referencial. Aprendemos, com os gregos, que

(1) Édipo quis se casar com a rainha de Tebas

e que

(2) Édipo casou-se com a rainha de Tebas.

A partir de então, entendemos que, embora (2) expresse uma condição satisfeita por Jocasta — a de ter sido casada com Édipo — ao passo que, (1) talvez não predique propriamente alguma coisa daquela que era mãe de Édipo, o que nos prende a essa história é o fato de que (1) fala de algum modo do referente de (2). Um contexto, no qual um termo singular não está sendo usado simplesmente como um meio indiferente de especificar um objeto, não nos deixa necessariamente cegos para a alusão feita a esse mesmo objeto.

Édipo, como se sabe, furou os próprios olhos. Subsumir à opacidade referencial contextos onde termos singulares ocorrem de modo não puramente referencial, como em (1), e também em

(3) 'Nove' é um numeral

ou em

(4) Necessariamente nove é maior do que sete,

depende de uma decisão teórica; em última instância, da própria natureza do modelo de análise que é utilizado. A dicotomia transparente-opaco condena à cegueira analítica aqueles que, como Quine, percebem as dificuldades envolvidas na tentativa de determinar, para tais contextos, um referente independente da linguagem: são forçados a renunciar a uma análise desses contextos, embora reconhecendo-os como sintaticamente complexos. Em especial, não são capazes de dar uma definição recursiva de verdade que venha a abrangê-los (cf., QUINE, 1969, p. 344), sendo obrigados a tratá-los semanticamente do mesmo modo como é tratada a ocorrência sintática do agrupamento de letras 'nove' em

(5) Maria está lendo uma novela⁽¹⁾.

(1) Quine, em *Three Grades of Modal Involvement*, compara a quantificação através de um contexto não transparente à quantificação, aliás absurda, em uma palavra (QUINE, 1966, p. 171).

Como mostra Kaplan, dada a dicotomia transparente-opaco, só há duas possibilidades de interpretar a ocorrência de um termo singular numa construção: ou como puramente referencial (ainda que, como no caso dos contextos modais, seja possível atribuir-lhe outra referência que não a ordinária) ou assimilando-a às ocorrências acidentais (tipográficas) exemplificadas em (5) (cf. KAPLAN, 1969). Podemos, no entanto, encarar a ocorrência de um termo singular em um contexto modal como remetendo simultaneamente a um objeto e a um modo linguístico de especificá-lo: em certo sentido, o termo estaria sendo, ao mesmo tempo, usado e mencionado⁽¹⁾. Nosso paradigma não é o de

(6) Nove não ocorre em novela,

mas antes, talvez, o de

(7) Joaquinção era assim chamado por causa do seu tamanho,

na medida em que essa sentença pode ser traduzida por

(8) Joaquinção era chamado de 'Joaquinção' por causa do seu tamanho.

Para Quine, em (8), o nome 'Joaquinção' tem duas ocorrências sintáticas: a primeira, puramente referencial e a segunda, não (cf. QUINE, 1943, 1944, 1961). A primeira ocorrência de 'Joaquinção' em (8) poderia ser vista como um mero expediente para designar um objeto, enquanto, na segunda, o nome seria empregado para referir-se a si mesmo, para designar um nome do objeto.

Não nos interessa aqui analisar aquilo que é expresso em (8), especialmente através do uso da expressão 'Joaquinção' e do predicado "ser chamado de ... por causa de ..."⁽²⁾. Basta-nos observar que, na medida em que (7) é traduzida por (8), não é estranho à linguagem natural que um termo seja usado e mencionado simultaneamente por meio de uma única ocorrência, pois, em (7), o nome tem exatamente essa dupla função. Dentro desse paradigma, podemos compreender a referência nos contextos modais como en-

(1) A noção clássica de objeto bem como a distinção tradicional entre o uso e menção são, aqui, empregados com propósitos meramente expositivos. Como o leitor perceberá, ambas sofrem alterações importantes no contexto deste trabalho.

(2) A análise de (8) também dá lugar a interessantes questões que, todavia, não serão objetos de estudo.

volvendo um duplo aspecto: ela envolve diferentes modos de predicar algo de um objeto (como necessário ou contingente, como conhecido ou crido por alguém, etc...) e diferentes modos como esse objeto é designado na linguagem. Ou melhor, os próprios modos de predicar algo de um objeto podem ser vistos como remetendo tanto aos objetos, quanto à linguagem que empregamos para falar deles, mais precisamente, aos diferentes meios (descrições) que a linguagem dispõe para dar um objeto. As sentenças modais expressariam, pois, propriedades de objetos enquanto dados sob certas descrições, enquanto referidos de um certo modo, e não de objetos tomados em si mesmos.

Os sobejamente conhecidos exemplos de falhas de substitutividade de termos singulares co-referenciais em contextos modais podem, como faz Quine, ser aduzidos em favor da tese segundo a qual os conceitos modais não expressam propriedades de objetos enquanto tais, independentemente dos meios que empregamos para especificá-los: em outras palavras, em favor da tese da não transparência referencial dos contextos modais (cf. QUINE, 1953, 1960, 1961). Todavia, uma vez que recusamos a dicotomia transparente-opaco, a aceitação dessa tese não nos compromete "ipso facto" com a tese da opacidade referencial dos contextos modais, i.e., podemos aceitar a não transparência referencial dos contextos modais, sem sermos obrigados a recusar a possibilidade de analisá-los em termos de suas referências. Como observamos acima, a sentença (1), embora não expresse uma propriedade de Jocasta como tal, independentemente das descrições que dela podemos dar, exige, pelo menos de um ponto de vista intuitivo, a consideração de objetos — mais especificamente, daquele mesmo objeto que é referido em (2) — para a sua plena inteligibilidade.

Essa observação acerca do caráter referencial, ainda que não transparente, dos contextos modais pode ser retomada, de uma outra perspectiva, a partir de outros conceitos modais. Se, como quer a lógica clássica, a verdade de uma sentença construída a partir de termos gerais e singulares, usando apenas conectivos clássicos e quantificadores, exige a existência dos objetos denotados pelos termos singulares, então certas sentenças modais também pressupõe, nesse sentido, a existência de objetos. Aceitemos, para fins de argumentação, a compreensão usual, clássica, dos conceitos de necessidade e de saber; nesse caso, a verdade das sentenças

(9) Necessariamente a Estrela da Manhã é a Estrela da Manhã

e

(10) João sabe que Túlio denunciou Catilina

implica na verdade de

(11) A Estrela da Manhã é a Estrela da Manhã

e de

(12) Túlio denunciou Catilina.

Portanto, graças à análise proposta pela lógica clássica para essas duas últimas sentenças, temos que (9) e (10) implicam, respectivamente

(13) Existe um x , tal que x é a Estrela da Manhã

e

(14) Existe um x , tal que x denunciou Catalina⁽¹⁾.

Conquanto sumárias, essas observações acerca do caráter aparentemente referencial de um contexto modal bastam para os nossos propósitos. Ainda que seja interessante explicitar a compreensão intuitiva dos conceitos modais, não cabe desenvolvê-la e fundamentá-la numa introdução a um trabalho técnico de lógica modal. Interessa-nos apenas sublinhar que, se, por um lado, os contextos modais podem ser encarados como remetendo aos modos de falar, mais especificamente, aos meios de que a linguagem dispõe para fazer referência a objetos, por outro lado, a referência a objetos não é completamente estranha à verdade das sentenças modais. Uma sentença modal poderia ser compreendida como expressando algo acerca de objetos enquanto dados por uma particular descrição (um nome, em sentido amplo). A verdade da sentença, conseqüentemente, deixaria de ser uma função exclusiva das interpretações dos termos que nela ocorrem, para depender também, em alguma medida, da própria linguagem, dos ter

(1) Observemos, também, que as eventuais falhas de pressuposição de existência dos contextos modais — i.e., quando a verdade de uma sentença não pressupõe a existência dos supostos objetos nela referidos — não é uma peculiaridade desses contextos, como atestam as sentenças seguintes, nas quais não ocorrem operadores modais:

Zeus é um personagem da mitologia grega

e

Mr Pickwick é solteiro
visto que, não parece contraditório aceitar a verdade dessas sentenças e recusar, simultaneamente, a existência seja de entes mitológicos, seja de personagens de ficção.

mos singulares que são empregados para designar os objetos. Somos levados, assim, a interpretar os conceitos modais como modalidades "de dicto cum fundamento in re".

No presente estudo, desenvolvemos uma semântica para as linguagens modais que pretende justamente dar conta dessa compreensão, quando se tem em vista a interpretação dos operadores modais por modalidades lógicas (necessidade, possibilidade e implicação lógica). A dificuldade de desenvolver essa semântica reside, essencialmente, em explicar o que significa afirmar que um objeto satisfaz uma certa propriedade enquanto designado por uma certa descrição e que, por conseguinte, a verdade de uma sentença pode depender, eventualmente, dos meios que ela emprega para fazer referência a objetos. Tomemos, como exemplo,

(15) Necessariamente $6+3$ é maior do que sete

e

(16) Não é necessário que o número de planetas seja maior do que sete.

Quando compreendemos tanto (15) quanto (16) como fazendo referência, ainda que por meio de descrições diferentes (' $6+3$ ' e 'o número de planetas'), a um mesmo objeto (o número nove), é legítimo questionar a possibilidade da verdade simultânea de ambas.

De um ponto de vista clássico, não tem sentido dizer que a verdade de uma predicação acerca de um objeto depende de como esse objeto é referido. Classicamente, ou um objeto satisfaz o predicado ou, simplesmente, ele não satisfaz, em nada importando o meio linguístico que empregamos para designá-lo. A remissão simultânea a objetos e a nomes, atribuídas aos contextos modais, não pode ser explicada a partir da semântica clássica, tal como essa é determinada pela definição tarskiana de satisfação (1). O conceito de satisfação, como se sabe, é classicamente concebido como uma relação binária entre fórmulas de uma dada linguagem e objetos de um conjunto; relação essa determinada, em

(1) Essa observação pode ser aplicada também à extensão da semântica clássica para linguagens modais dada pela assim chamada "semântica kripkeana". Aqui, também, os objetos são tomados em si mesmos como satisfazendo ou não uma certa fórmula, a qual expressa uma condição acerca de objetos como tais (cf. HUGHES e CRESSWELL, 1968; HINTIKKA, 1969, 1970 e KRIPKE, 1963b).

última instância, pela pertinência ou não dos objetos a certos conjuntos que interpretam os termos gerais da linguagem (cf. TARSKI, 1956 e 1944). Todavia — e esse é o ponto que nos interessa particularmente — os dois termos da relação são tomados como dados independentemente um do outro e a própria relação é, em certa medida, independente da linguagem que lhe fornece um dos termos: a condição necessária e suficiente para que o objeto (ou de modo mais geral, a n-upla de objetos) satisfaça uma fórmula é que ele (ou a n-upla) satisfaça a propriedade (ou a relação) expressa pela fórmula⁽¹⁾. O conceito tarskiano de satisfação nos dá uma análise semântica das sentenças apenas na medida em que as consideramos como expressando algo acerca de objetos, pouco importando os meios que empregamos para falar deles. Assim, os termos singulares são simples meios de especificar objetos. Ademais, uma vez que o conceito de satisfação caracteriza a interpretação do quantificador, dessa perspectiva, a quantificação através de um contexto só é inteligível se o tomamos como falando de objetos, sem envolver referência à linguagem⁽²⁾.

(1) Essa compreensão da relação entre a linguagem e os objetos acerca dos quais ele supostamente fala, implícita no conceito clássico de satisfação, pode ser evidenciada em dois resultados técnicos, facilmente demonstrados na lógica clássica: a preservação do conceito de satisfação (e, também, do conceito de verdade) por extensões simples da linguagem e por estruturas que difiram apenas pelas interpretações dos símbolos que não ocorrem em dada fórmula.

(2) Os conceitos quineanos de "ocorrência puramente referencial de um termo singular" e de "transparência referencial de uma construção" poderiam ser interpretados como remetendo à compreensão das sentenças caracterizadas na definição tarskiana de satisfação: como afirmando algo acerca dos objetos denotados pelos termos singulares (cf. QUINE, 1960, p. 142 e ss, 1961). Nesse sentido, não parece implausível tomar os dois resultados de preservação mencionados na nota anterior como o critério semântico de transparência referencial: um contexto é referencialmente transparente se a relação de satisfação pode ser tomada, com respeito a ele, como independente da linguagem, no sentido acima especificado. Esse critério semântico fundamentaria, até mesmo, o critério quineano de substitutividade de co-referências e, dada a compreensão puramente referencial do quantificador, o critério da possibilidade de se quantificar através do contexto. A crítica quineana à lógica modal poderia ser, então, compreendida como uma tentativa — muito bem sucedida, diga-se de passagem — de mostrar

Desse modo, a compreensão dos conceitos modais como modalidade "de dicto cum fundamento in re" e, por conseguinte, das sentenças modais como remetendo a objetos enquanto dados por certas descrições exige, para ser explicada, uma reformulação do conceito de satisfação e uma consequente reinterpretação do quantificador⁽¹⁾.

Conquanto mantenha a sua interpretação usual (puramente referencial) em contextos clássicos, nesse trabalho, a quantificação através de operadores modais será interpretada de forma mista: remete a objetos (interpretação referencial) e a nomes da linguagem (interpretação substitucional). As variáveis livres no escopo de operadores modais deverão desempenhar uma dupla função: propriamente referencial (assumem valores em domínios de objetos) e substitucional (marcam, seguram lugares para nomes da linguagem)⁽²⁾. Para tanto, introduziremos o conceito de domínio modal de uma estrutura clássica, definido, grosso modo, como um conjunto de pares, cujas primeiras ordenadas são objetos do universo da estrutura e as segundas, nomes da linguagem. A dupla valoração das variáveis (em domínio de objetos e no conjunto dos nomes da linguagem) exigida pela interpretação mista do quantificador em contextos modais adquire sentido rigoroso e preciso por meio de sequências de pares nesse domínio: a

que, dada a pressuposição de transparência referencial do quantificador, a quantificação através de operadores modais (e, em certo sentido, a própria análise semântica dos contextos modais) só é inteligível ao preço do essencialismo; i. e., ela nos força a dar sentido à distinção entre propriedades acidentais e propriedades necessárias de objetos em si mesmos, independentemente da linguagem (cf. FØLLESDAL, 1969; QUINE, 1960, 1961).

(1) Cf. nota 1, p. IV. Verifica-se, desse modo, que o presente estudo requer modificações importantes numa família de conceitos clássicos centrais, como os de objeto, referência, quantificação e satisfação. As alterações necessárias surgirão da plena inteligência do trabalho.

(2) A idéia de uma interpretação mista do quantificador, referencial com respeito aos objetos reais e substitucional com respeito aos objetos possíveis ocorre já em LEONARD, 1964, porém esse autor não a desenvolve.

projeção na primeira ordenada fornece os valores das variáveis no domínio de objetos e a projeção na segunda, no conjunto dos nomes. De forma mais geral, a ocorrência de um termo geral singular qualquer (variável ou nome) em um contexto modal será interpretada como remetendo ao par constituído por um objeto de um dado conjunto e um nome da linguagem; e, em particular, esses pares serão tomados como os valores de variáveis livres no escopo de operadores modais. A partir desses pares é que serão constituídos os referentes.

Tomaremos por empréstimo da semântica de mundos possíveis o princípio segundo o qual um conceito modal faz referência, ainda que implicitamente, a uma classe de mundos possíveis, cada um dos quais podendo ser caracterizado como uma estrutura clássica (i.e., um universo de objetos e uma interpretação para os símbolos não lógicos da linguagem). Redefinindo, então, o conceito de satisfação, poderemos caracterizar a interpretação mista (referencial-substitucional) da quantificação através de operadores modais: o quantificador seguido de um operador modal será referencial com respeito a um dado mundo (quantificação intramundada) e substitucional com respeito aos mundos possíveis acessíveis (quantificação transmundada).

Surge aqui uma dificuldade no tocante à adequação dessa interpretação mista do quantificador com respeito aos sistemas axiomáticos usuais. A princípio, pretendíamos desenvolver uma nova semântica para esses sistemas sem a fórmula de Barcan e com identidade contingente. Porém, a interpretação mista do quantificador, mais especificamente, a dupla atribuição de valores a variáveis em contextos modais põe em xeque um aspecto fundamental da compreensão ordinária do quantificador, que podemos denominar pressuposição de identidade. Na interpretação referencial do quantificador, a fim de que uma sentença da forma

$$(17) \quad (Ex)A$$

seja verdadeira, deve haver, no domínio de quantificação, um mesmo objeto que, ao ser tomado como valor de todas as ocorrências livres de x em A , satisfaz essa fórmula. Vale dizer, na determinação da relação de satisfação, o valor de uma variável deve ser o mesmo para todas as suas ocorrências livres ⁽¹⁾.

(1) Em Hintikka- 1969, encontra-se uma brilhante análise desse pressuposto da interpretação referencial do quantificador no

Esse pressuposto da compreensão clássica tem, em certa medida, uma contraparte nos sistemas axiomáticos usuais, porquanto o esquema

$$(18) \quad (Ex)A \wedge (Ex)B \rightarrow (Ex)(A \wedge B)$$

não é usualmente válido. Do ponto de vista clássico, a falsificabilidade desse esquema expressa a exigência de critérios de identidade para os objetos que constituirão o domínio de quantificação, a aceitação do princípio "nenhuma entidade sem identidade"; visto que, para o antecedente ser verdadeiro e o consequente falso, devemos poder distinguir o objeto que satisfaz A do objeto que satisfaz B, portanto, poder determinar o que conta como sendo um mesmo objeto e o que conta como mais de um objeto.

No caso da lógica modal, essa pressuposição de identidade é mais rica em consequências. Ela permite, com efeito, determinar um caso particular do esquema (18) que implica em sérias dificuldades para sua interpretação, a saber, o esquema

$$(19) \quad (Ex)(\Diamond A \wedge \neg A) \wedge (Ex)B \rightarrow (Ex)(\Diamond A \wedge B).$$

Para simplificar a análise, sejam A e B, em (19), duas fórmulas atômicas contendo exatamente x como única variável livre e tais que uma não implica logicamente na outra. Nesse caso, a sentença resultante não é válida nas extensões usuais dos sistemas de Lewis para linguagens de primeira ordem. Além disso, a sua eventual falsidade exige, na semântica kripkeana, a aceitação de critérios de identidade de objetos através de mundos, pois, para ser falsa, devemos supor que o objeto que satisfaz A em um mundo acessível, diferente do inicial (nesse, o objeto deve satisfazer a negação de A), é distinto do objeto que, no mundo inicial, satisfaz B. Portanto, devemos ser capazes de determinar o que conta como sendo um mesmo objeto e o que conta como sendo diferentes objetos, mesmo em distintos mundos possíveis⁽¹⁾. Ora,

contexto da semântica de mundos possíveis. Hintikka o denomina pressuposto de unicidade e estuda-o com respeito, principalmente, aos termos singulares que podem, eventualmente, substituir as variáveis de quantificação em uma fórmula. Esse pressuposto aparece, também, na interpretação puramente substitucional. Nesse caso, contudo, é necessário considerar critérios de identidade para termos linguísticos e não para objetos: um mesmo termo deve substituir todas as ocorrências da variável livre.

(1) Sobre o problema da identificação através de mundos veja-se HINTIKKA, 1969, 1970; QUINE, 1969 e FINE, 1978. A exigência, implícita na semântica krip-

uma vez que a quantificação através de mundos é, na interpretação mista do quantificador, presumivelmente substitucional, não tem sentido, talvez, falar aqui em critérios de identidade de objetos através de mundos. Por conseguinte, se pretendemos desenvolver uma semântica para os sistemas usuais (ou, pelo menos, nos aproximar a máximo possível desses sistemas), é necessário encontrar mecanismos específicos que permitam falsificar, sob certas condições, sentenças da forma determinado por (18) e, especialmente, por (19).

Para tanto, introduzimos uma restrição na definição de domínio modal de uma estrutura clássica; a saber: os pares que o constituem devem ser tais que, se o objeto (a primeira ordenada) for nomeado na estrutura clássica, então esse mesmo objeto deve ser denotação, nessa estrutura, do segundo termo (do nome). No decorrer do trabalho veremos que, com essa restrição, a homonímia passará a desempenhar, de algum modo, o papel que, na semântica kripkeana, é atribuído à identidade transmudana: dois objetos, em mundos distintos, nomeados em seus respectivos mundos por ao menos um termo em comum, satisfazem, por assim dizer, o pressuposto de identidade da quantificação. Veremos ainda que essa função atribuída à relação de homonímia repousa também na reformulação do conceito de satisfação; como na interpretação puramente substitucional, aqui também o valor substitucional de uma variável (o nome empregado na determinação da instância de uma fórmula) deverá ser o mesmo para todas as ocorrências livres da variável, devendo, além disso, manter-se constante com respeito a todos os mundos possíveis considerados. Assim, para que uma sentença como

$$(20) \quad (\text{Ex}) \quad \Box A$$

keana, de critérios de identificação transmudada de objetos pode ser detectada já na própria caracterização do conceito de satisfação para fórmulas modais; para que uma fórmula da forma $\Box Px$ seja satisfeita, um mesmo objeto deve ter, em todos os mundos acessíveis, a propriedade expressa por P. Não é difícil dirigir a artilharia quineana contra esses critérios e mostrar que eles nos envolvem, pelo menos no tocante à interpretação dos operadores modais por modalidades lógicas, com uma doutrina essencialista. O próprio Hintikka termina reconhecendo esse comprometimento (cf. HINTIKKA, 1969).

seja verdadeira em um mundo, é necessário que haja um mesmo nome t que torne verdadeira em todos os mundos acessíveis a sentença

$$(21) \quad A^x/t$$

(onde o termo t substitui todas as ocorrências livres de x em A).

Com esses mecanismos foi possível determinar a extensão quantificacional do sistema S5 de Lewis, com respeito ao qual essa nova semântica proposta é adequada.

CAPÍTULO 1

A SEMÂNTICA NOMINATIVA

1.1 CONCEITOS SEMÂNTICOS PARA LINGUAGENS MODAIS.

As linguagens modais aqui estudadas são constituídas quando acrescentamos os operadores modais a linguagens enumeráveis de primeira ordem que contêm a identidade e pelo menos um símbolo funcional 0-ário (uma constante individual) ⁽¹⁾.

Por simplicidade, trabalharemos apenas com aquelas linguagens cujos símbolos lógicos primitivos são: a negação (' $\neg$ '), o condicional (' $\rightarrow$ '), o símbolo para quantificação universal (' $()$ '), a identidade (' $=$ ') e o operador de necessidade (' $\Box$ '), Os demais símbolos lógicos, inclusive o operador de possibilidade (' $\Diamond$ ') e o condicional estrito (' $\dashv$ ') são introduzidos da maneira usual por definições contextuais.

Acrescentando o sobrescrito ' $\Box$ ' ao nome de uma linguagem clássica, obtemos uma denotação natural para a respectiva linguagem modal: $L^\Box$ é a linguagem modal obtida a partir da linguagem clássica L ⁽²⁾.

Na nossa metalinguagem,

(i) 'Var' denota o conjunto das variáveis; letras latinas finais ('x', 'y', 'z', ...) com ou sem índice inferior numérico, assumem valores em Var; consideramos que todas as linguagens contêm um mesmo conjunto enumerável de variáveis e que esse conjunto é dado em uma certa ordem numérica padrão;

(ii) 'TERM_L' denota o conjunto dos termos individuais da linguagem L , 't', 'a', 'b' afetados ou não por índices denotam elementos de TERM_L;

(iii) 'NOM_L' denota o conjunto dos nomes (i.e., termos individuais que não contêm variáveis) da linguagem L ;

(1) A justificação da exigência de haver ao menos uma constante individual na linguagem será explicitada no momento em que for definido o conceito de domínio modal. (cf. p.8).

(2) Sempre que não houver risco de confusão, omitiremos esse sobrescrito.

(iv) ' FORM_L ' denota o conjunto das fórmulas de L; letras latinas maiúsculas iniciais (' $\underline{A}$ ', ' $\underline{B}$ ', ...) afetadas ou não por índices, assumem valores em FORM_L e ' $\underline{\Gamma}$ ', ' $\underline{\Delta}$ ', afetadas ou não por índices denotam subconjuntos de FORM_L ;

(v) ' SENT_L ' denota o conjunto das sentenças (i.e., fórmulas que não contêm ocorrências livres de variáveis) da linguagem L;

(vi) ' $\underline{U}$ ', ' $\underline{V}$ ', afetadas ou não de índices, variam sobre expressões de L, i.e., elementos de $\text{TERM}_L \cup \text{FORM}_L$;

(vii) ' $\underline{f}$ ', ' $\underline{g}$ ', ' $\underline{h}$ ' e ' $\underline{P}$ ', ' $\underline{Q}$ ', ' $\underline{R}$ ' afetadas de um índice superior numérico n e, eventualmente, de índices inferiores, variam sobre, respectivamente, símbolos funcionais n-ários e sobre símbolos para predicados n-ários.

Uma extensão em constantes de L é uma extensão simples cujo vocabulário difere de L, no máximo, por conter novas constantes.

Se U é uma expressão e t é um termo de L, U^x/t indica a expressão que advém de U quando substituímos todas as ocorrências livres de x em U por ocorrências de t.

Quando $x_1, \dots, x_n$ forem todas as variáveis livres em U, escreveremos

$$\begin{array}{c} U^{x_1, \dots, x_n} \\ t_1, \dots, t_n \end{array}$$

em vez de

$$(\dots (U^{x_1/t_1}) \dots)^{x_n/t_n}$$

Nesse caso, se $t_1, \dots, t_n$ forem nomes em $L, U^{x_1, \dots, x_n}_{t_1, \dots, t_n}$

diz-se uma instância de U em L.

Tomamos da lógica clássica os nossos primeiros conceitos semânticos.

DEFINIÇÃO 1.1⁽¹⁾ Uma estrutura (clássica) A para uma linguagem de primeira ordem, L, é um par, on

⁽¹⁾ Cf. Shoenfield, 1967.

de o primeiro elemento é um conjunto, $|A|$, não vazio, dito o universo de A , e o segundo é uma função indexada por A , que associa:

- (i) a cada símbolo funcional n -ário, $\underline{f}$, de L , uma operação n -ária, $\underline{f}_A$, em $|A|$; e,
- (ii) a cada símbolo para predicado n -ário, $\underline{p}^n$, de L um subconjunto, $\underline{p}_A^n$, de $|A|^n$.

DEFINIÇÃO 1.2 Por indução no comprimento de um nome t de L , definimos a denotação, $\underline{t}_A$, de t em A , como segue. Suponhamos definida para todo nome de comprimento menor que o de $\underline{f}^n \underline{t}_1 \dots \underline{t}_n$. Então,

$$(\underline{f}^n \underline{t}_1 \dots \underline{t}_n)_A = \underline{f}_A^n (\underline{t}_1)_A \dots (\underline{t}_n)_A$$

Podemos introduzir, agora, o conceito específico, característico da Semântica Nominativa.

DEFINIÇÃO 1.3 Seja A uma estrutura (clássica) para L . O domínio modal, D_A , de A é o conjunto dos pares $\langle a, t \rangle$ em $|A| \times \text{NOM}_L$, tais que $a = \underline{t}_A$ ou, para todo t' em NOM_L , $t'_A \neq a$.⁽¹⁾

A partir desse conceito podemos definir, de forma natural, a dupla valoração das variáveis exigida pela interpretação mista do quantificador, da seguinte maneira. Seja A uma estrutura clássica para L e s uma sequência em D_A (isto é, uma sequência enumerável de elementos de D_A).

(1) O domínio modal é, pois, o conjunto constituído por aqueles pares de $|A| \times \text{NOM}_L$, tais que ou o segundo elemento é um dos nomes em A do primeiro elemento (o objeto) ou esse elemento não é nomeado em A .

DEFINIÇÃO 1.4 Por indução no comprimento de um termo t de L , definimos a função s^* do seguinte modo:

(i) Se t for a k -ésima variável de L , então $s^*(t)$ é a primeira ordenada do k -ésimo par em s ;

(ii) se t for $f^n t_1 \dots t_n$, $s^*(t) = f_A^n (s^*(t_1) \dots s^*(t_n))$ ⁽¹⁾.

DEFINIÇÃO 1.5 A s -instância, $U^{(s)}$, de uma expressão bem formada (termo ou fórmula) U de L é a expressão $U^{x_{k_1}, \dots, x_{k_n}}$ onde, para $j=1, \dots, n$, a_{k_j} é a segunda ordenada do k_j -ésimo par em s .

A função s^* determina, pois, o valor referencial de um termo t com respeito a uma sequência s , ao passo que, a s -instância determina o valor substitucional. Desse modo, determina-se, em particular, a dupla valoração das variáveis: em um domínio de objetos e em um domínio de nomes (ou, como diz Leonard, em um domínio de valores e em um domínio de substituídos, cf. LEONARD, 1964, p.37).

Observemos, também, que, enquanto as variáveis e os nomes assumem, via função s^* e via conceito de s -instância, valores pertencentes ao domínio modal, um termo contendo símbolos funcionais e variáveis pode, eventualmente, assumir valores fora do domínio modal. Vale dizer que, se $\underline{t}$ for um termo contendo símbolos funcionais e variáveis e se $\underline{a}$ for a s -instância de $\underline{t}$, o par $\langle s^*(\underline{t}), \underline{a} \rangle$ pode não pertencer ao domínio modal de A . Su

(1) A função s^* é, em certo sentido, equivalente à função usual em lógica clássica que atribui valores às variáveis (cf. MENDELSON, 1964).

ponhamos, por exemplo, que t é $\underline{fx}$, que $s^*(x)$ não é nomeado em A , que a s -instância de $\underline{x}$ é $\underline{a}$ e que $\underline{f}_A(s^*(x))$ é nomeado em A , mas não por $\underline{fa}$; nesse caso, $\langle s^*(\underline{fx}), \underline{fa} \rangle$ não pertence ao domínio modal de A . Esse fato nos obrigará a impor certas restrições a alguns teoremas usuais da lógica, como veremos posteriormente (cf. p.25).

Vamos definir, agora, de maneira rigorosa, os conceitos que tomamos emprestados da semântica de mundos possíveis.

DEFINIÇÃO 1.6 Uma base modal B é um terno $\langle I; O; R \rangle$, onde I é um conjunto não vazio, denominado conjunto dos índices em B, O é um elemento de I , dito a origem ou situação inicial em B, e R é uma relação binária definida em I , denominada relação de acessibilidade.

DEFINIÇÃO 1.7 Uma estrutura modal M para $L^\square$ é um par, $\langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$, onde $B_M = \langle I_M, O_M, R_M \rangle$ é uma base modal, dita a base de M e $(A_i)_{i \in I_M}$ é uma família de estruturas clássicas para L (1).

A partir do conceito de estrutura modal e do conceito de domínio modal de uma estrutura clássica, podemos definir a relação de satisfação para fórmulas contendo operadores modais.

DEFINIÇÃO 1.8 Sejam M uma estrutura modal, $i \in I_M$ e s uma sequência em D_{A_i} (i.e., o domí-

(1) As definições de base modal e estrutura modal encontram-se, com ligeiras modificações, em BOWEN, 1979, p.8 e são, em última instância, variantes dos conceitos definidos em KRIPKE, 1959; 1963a; 1963b).

nio modal da estrutura (clássica) indexada em M por i). A relação de satisfação modal entre M, i, s e A (denotada por ' $M, i, s \text{ sat } A$ ') é definida, então, por indução na complexidade de A , da seguinte maneira:

(i) Se A é atômica e

a) A é $t_1 = t_2$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse $s^*(t_1) = s^*(t_2)$;

b) A é $P^n t_1 \dots t_n$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse $\langle s^*(t_1), \dots, s^*(t_n) \rangle \in P_{A_i}^n$;

(ii) Se A é $\neg B$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse M, i, s não sat B ;

(iii) Se A é $B \rightarrow C$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse M, i, s não sat B ou $M, i, s \text{ sat } C$;

(iv) Se A é $\Box B$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse para todo j em I_M , tal que $iR_M j$:

a) se $i=j$, então $M, i, s \text{ sat } B$ e $M, i, s \text{ sat } B^{(s)}$; e

b) se $i \neq j$, então existe uma sequência s' em D_{A_j} , tal que $M, j, s' \text{ sat } B^{(s)}$;

(v) Se A é $(x_k)B$, então $M, i, s \text{ sat } A$ sse $M, i, \bar{s}$ sat B , para toda $\bar{s}$ k -variante de s em D_{A_i} (i.e., que difere de s , no máximo, por ter um outro elemento de D_{A_i} no índice k).

Podemos observar que, devido à dupla condição exigida para a satisfação de fórmulas modais, a quantificação através de operadores modais assume, de fato, um caráter misto: referencial com respeito a um dado mundo e substitucional com respeito aos mundos a ele acessíveis⁽¹⁾.

Para uma maior clareza sobre os conceitos anteriormente definidos, consideremos uma estrutura modal M e um índice i em I_M . Podemos definir, então, os seguintes conjuntos:

$$(i) \quad I_M^{(i)} = \{ j \in I_M : \text{existem } j_1, \dots, j_n, \text{ tais que } j_1=i, j_n=b \text{ e, para } 1 \leq k \leq n-1, j_k R_M j_{k+1} \}$$

$$(ii) \quad D_i^M = \{ \{ \langle a, t \rangle, (t \ A_j)_{j \in I_M^{(i)}} \} : \langle a, t \rangle \in D_{A_i} \}$$

Desse modo, se levarmos em conta a Definição 1.8, podemos perceber claramente que o domínio de quantificação em i com respeito a M não é o universo da estrutura A_i , nem a união dos universos das estruturas clássicas de M , nem, tampouco, o produto cartesiano $|A_i| \times \text{NOM}_L$; o nosso domínio da quantificação em i com respeito a M é o conjunto D_i^M , definido acima. Pois, a fim de determinarmos a relação de satisfação modal devemos considerar, não apenas os pares do domínio modal, D_{A_i} , mas, também, as denotações dos nomes nas estruturas clássicas determinadas pelos índices em $I_M^{(i)}$. O conjunto D_i^M será, então, denominado domínio modal em i com respeito a M .

Tendo esse fato em mente, podemos compreender em que sentido o conceito de satisfação estende a compreensão clássica das fórmulas abertas como expressões para relações entre os objetos do domínio. Essa compreensão pode ser transposta para a Semântica Nominativa, desde que consideremos, como objetos, os elementos de D_i^M . Desse modo, enquanto classicamente uma fórmula é satisfeita (ou não) por objetos (mais rigorosamente, por n -uplas

(1) Observemos, também, que a quantificação através de operadores modais é interpretada, em S.N., de dupla maneira (substitucional e referencial), mesmo com respeito a um dado mundo, se ele for acessível a si mesmo. Essa característica, embora não seja implicada pela compreensão intuitiva anteriormente exposta (cf. Introdução), é fundamental na determinação de um sistema axiomático adequado à essa semântica (cf., mais adiante, p.32).

de objetos), na Semântica Nominativa uma fórmula aberta é modalmente satisfeita (ou não) pelos conjuntos de D_i^M (pelas n-uplas de conjuntos de D_i^M).

Com efeito, podemos entender, semanticamente, uma fórmula aberta A , contendo $x_{k_1}, \dots, x_{k_n}$ como únicas variáveis livres como um subconjunto $A_{D_i^M}$ de $(D_i^M)^n$, definido da seguinte maneira.

$$A_{D_i^M} = \{ \langle \{ \langle a_1, t_1 \rangle, (t_1)_{A_j} \}_{j \in I_M^{(i)}} \dots, \langle \{ \langle a_n, t_n \rangle, (t_n)_{A_j} \}_{j \in I_M^{(i)}} \rangle \in (D_i^M)^n : \dots \}$$

existe uma sequência s em D_{A_i} contendo nos índices $k_1, \dots, k_n$, respectivamente, os pares $\langle a_1, t_1 \rangle, \dots, \langle a_n, t_n \rangle$, tal que, $\{M, i, s \text{ sat } A\}$.

Vemos, assim, que o domínio modal determina o domínio de quantificação; devemos, então, exigir que ele satisfaça certas condições, se quisermos que a quantificação se comporte de maneira próxima à clássica. Em primeiro lugar, tal como no caso clássico, o domínio não pode ser vazio; assim, o conjunto dos nomes da linguagem deverá ser não vazio. Por essa razão, exigimos anteriormente que as linguagens contenham ao menos uma constante.

Em segundo lugar, a fim de que a quantificação incida sobre todos os objetos da estrutura clássica A e sobre todos os nomes da linguagem L - característica essencial da interpretação mista - devemos assegurar que:

- (i) para todo objeto a em $|A|$, exista um nome t , tal que $\langle a, t \rangle \in D_A$; e que,
- (ii) para todo nome t , exista um objeto a em $|A|$, tal que $\langle a, t \rangle \in D_A$; em particular, que para todo nome t ,

$$\langle t_A, t \rangle \in D_A. \quad (1)$$

DEFINIÇÃO 1.9 Sejam A e Γ , respectivamente, uma fórmula e um conjunto de fórmulas de $L^\square$.

- (i) A diz-se modalmente verdadeira (falsa) em M com respeito a i se, para qualquer sequência s em $D_{\wedge_i}$, M, i, s sat Λ (M, i, s não sat A);
- (ii) A diz-se modalmente verdadeira (falsa) em M se A for modalmente verdadeira (falsa) em M com respeito a O_M (a origem em M).
- (iii) Se para qualquer fórmula A de Γ , A é modalmente verdadeira em M , então M diz-se um modelo modal de Γ .

(1) O fato de que, para todo nome t , o par $\langle t_A, t \rangle \in D_A$ é fundamental para que o esquema da instanciação,

$$(x)A \rightarrow A^x/t$$

seja válido, como veremos posteriormente (cf., mais adiante, p. 24 e ss.).

NOTAÇÃO. Usaremos as seguintes notações abreviadas:

$$M, i \models A$$

Para 'A é modalmente verdadeira em M com respeito a i' e,

$$M \models A$$

para 'A é modalmente verdadeira em M'; por extensão,

$$M \models \Gamma$$

abrevia 'M é um modelo modal para Γ '.

DEFINIÇÃO 1.10 Seja $\Gamma \cup \{A\}$ um conjunto de fórmulas de L^U .

(i) A é consequência modal de Γ (em símbolos, ' $\Gamma \models A$ ') se, para toda extensão em constantes L' de L, temos que A é modalmente verdadeira em M, para qualquer modelo modal M de Γ que é uma estrutura modal para L' .

(ii) A é modalmente válida (' $\models A$ ') se, para toda extensão em constantes L' de L e para qualquer estrutura modal M para L' , A é modalmente verdadeira em M.

Dado o caráter semi-substitucional da quantificação na Semântica Nominativa, fez-se necessário considerar, nas definições de validade e consequência, extensões em constantes da linguagem e assegurar, assim, que esses conceitos são preservados por essas extensões.

Expliquemos melhor esse ponto. Quando definimos classicamente os conceitos de consequência e de validade, estamos definindo, para sermos rigorosos e precisos, os conceitos de validade e consequência em uma dada linguagem (clássica) L . A omissão dessa referência à linguagem deve-se ao fato de que esses conceitos são preservados por suas extensões simples, isto é, dada uma linguagem clássica L e um subconjunto $\Gamma \cup \{A\}$ de $FORM_L$, pode-se mostrar que:

(i) A é válida em L sse A é válida em L' , para qualquer extensão simples, L' , de L ;

(ii) A é consequência de Γ em L sse A é consequência de Γ em L' , para qualquer extensão simples, L' , de L .

Na lógica clássica, (i) e (ii) seguem do fato de a verdade de uma fórmula depender apenas da interpretação dos símbolos não lógicos que nela ocorrem: prova-se facilmente que dadas duas linguagens $L \subseteq L'$, uma fórmula A de L e uma estrutura A para L' :

(iii) $A \models A$ sse $A \upharpoonright L \models A$

(cf. CHANG-KEISLER, 1973.)

No entanto, na Semântica Nominativa, bem como na interpretação puramente substitucional, a verdade de uma fórmula depende da interpretação de todos os nomes de que linguagem dis-

põe, visto que a quantificação incide sobre os objetos nomeados (apenas sobre os objetos nomeados, no caso da interpretação puramente substitucional, e apenas sobre os objetos nomeados dos mundos acessíveis, no caso de S.N.).

De fato, se os conceitos de consequência e de validade forem definidos, em S.N., de maneira usual, então esses conceitos tornar-se-ão dependentes da linguagem, fato que acarreta sérios inconvenientes.

Em primeiro lugar, a compacidade da relação de consequência seria afetada. Pois, se L for uma linguagem modal contendo infinitos nomes $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \dots$, se Γ for o conjunto

$$\{ \underline{a}_k \neq \underline{a}_k' : \underline{a}_k \text{ e } \underline{a}_k' \text{ são distintos nomes de } L \}$$

e A , a fórmula,

$$(Ex) (x = \underline{a}_1 \wedge \diamond x \neq \underline{a}_1),$$

então os seguintes fatos podem ser demonstrados:

- (i) todo subconjunto finito de $\Gamma \cup \{A\}$ tem um modelo que é uma estrutura modal para L ;
- (ii) nenhum modelo $\Gamma \cup \{A\}$ é uma estrutura modal para L ;
- (iii) existe L' , extensão em constantes de L , e existe uma estrutura modal A para L' que é modelo de $\Gamma \cup \{A\}$.

Vemos, então, que a relação de consequência, se fosse definida da maneira usual, seria não compacta. Consequentemente, nenhum sistema axiomático recursivo seria fortemente completo com respeito a essa semântica.

Em segundo lugar, o próprio conceito de validade não seria recursivamente axiomatizável. De fato, a incompletude fraca seria uma consequência do teorema, de Goedel, da incompletude da aritmética. Pois, se acrescentarmos à aritmética de Robinson, o axioma

$$(Ex_1) \diamond (x_1 + 0 \neq x_1) \wedge (x_1) (\diamond (x_1 + 0 \neq x_1) \rightarrow x_1 = 0),$$

então qualquer modelo para a nova teoria, que seja uma estrutura modal para a linguagem modal obtida a partir da linguagem ordinária da aritmética, terá como estrutura clássica indexada

pela origem, uma estrutura isomorfa ao modelo "standard" da aritmética. Vale dizer, se C é a conjunção dos axiomas de Robinson, mais o axioma acima e M é uma estrutura modal para a linguagem obtida da linguagem da aritmética acrescentando o operador modal, então para qualquer sentença clássica A ,

$$M \models C \rightarrow A \text{ sse } A \text{ é uma verdade da aritmética.}$$

Logo, se o conceito da validade fosse definido da maneira usual, teríamos que, para qualquer verdade da aritmética A ,

$$(1) \quad C \rightarrow A$$

seria válida. Portanto, não poderia haver um sistema axiomático recursivamente especificável que desse conta de todas as fórmulas válidas.

Ao embutirmos, na própria definição dos conceitos de validade e de consequência, a preservação por extensão em constantes das linguagens, asseguramos que esses conceitos independem da linguagem considerada e podemos, então, superar as dificuldades apontadas. Em particular, as fórmulas como (1), acima, deixam de ser modalmente válidas.

Observemos, também, que problemas análogos a esses ocorrem na interpretação puramente substitucional da quantificação em linguagens clássicas (i.e., não modais). Também aqui surge o problema da não compacidade da relação de consequência, como se encontra demonstrado em DUNN e BELNAP, 1968. E, se considerarmos linguagens contendo um número finito de nomes, o conceito de validade será também dependente da linguagem. Essa dependência se revela pela definibilidade da quantificação por meio de conectivos: p.e.

$$(Ex)A \leftrightarrow A^x/a_1 \vee \dots \vee A^x/a_n,$$

onde $a_1, \dots, a_n$ são todos os nomes na linguagem em questão ⁽¹⁾.

Os proponentes da interpretação substitucional adotam,

(1) Observemos que, em S.N., ao contrário, o quantificador não pode ser definido por meio de conectivos e operadores modais, dado o seu caráter puramente referencial em contextos não modais.

usualmente, duas soluções distintas para esses dois problemas. A fim de tornar o quantificador indefinível a partir de conectivos funcionais veritativos, restringem as linguagens estudadas, considerando apenas aquelas que contêm um número infinito de nomes. E, por outro lado, a fim de superar o problema da não compacidade, alteram a definição de consequência de maneira análoga a que foi feita na Definição 1.10 (cf. DUNN e BELNAP, 1968; KRIPKE, 1976; MARCUS, 1972).

Preferimos, todavia, adotar um mesmo esquema de solução para os dois problemas, preservando a possibilidade de se estudar linguagens contendo um número finito de nomes.

1.2 A SEMÂNTICA NOMINATIVA E OS OPERADORES CLÁSSICOS.

Nesta secção apresentaremos algumas proposições que, a lêm de explicitarem o comportamento dos operadores clássicos, contribuirão para a demonstração do teorema da legitimidade do sistema axiomático que será introduzido no próximo capítulo.

Essas proposições são simétricas às encontradas em MENDELSON, 1963, p. 51 e ss. acerca da lógica clássica. Mais ainda, são essencialmente adaptações daquelas.

Desse modo, na Proposição 1.13, mostramos que o conceito de verdade modal comporta-se com respeito às fórmulas clássicas tal como o conceito clássico de verdade. Consequentemente, também os demais conceitos (validade e consequência modal) comportam-se dessa forma.

As duas proposições seguintes, aprofundam este resultado. Demonstramos, na Proposição 1.14, que a relação de satisfação modal depende apenas dos valores assumidos pelas variáveis livres de uma fórmula. Mais um passo é dado, quando se evidencia, pela Proposição 1.15, que essa relação é preservada por substituição de termos individuais associados ao mesmo elemento do domínio modal.

Consideremos, então uma linguagem modal $L^{\square}$, uma estrutura modal $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$ para $L^{\square}$, um índice i em I_M e, $\{A, B, \dots\}$ e Γ , subconjuntos de $FORM_L^{\square}$

PROPOSIÇÃO 1.11 A é modalmente verdadeira (falsa) em M com respeito a i sse $\neg A$ é modalmente falsa (verdadeira) em M com respeito a i .

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata das definições de verdade (falsidade) e de satisfação modal.

PROPOSIÇÃO 1.12 Para qualquer sequência s em D_{A_i} as seguintes afirmações valem.

- (i) $s \text{ sat } A \wedge B$ sse $s \text{ sat } A$ e $s \text{ sat } B$;
- (ii) $s \text{ sat } A \vee B$ sse $s \text{ sat } A$ ou $s \text{ sat } B$;
- (iii) $s \text{ sat } (Ex_k) A$ sse $\bar{s} \text{ sat } A$, para alguma sequência $\bar{s}$ k -variante de s em D_{A_i} .

DEMONSTRAÇÃO.

Imediata a partir das definições anteriormente apresentadas e das definições usuais dos símbolos lógicos em questão.

PROPOSIÇÃO 1.13 Se A é uma fórmula clássica (i. e., A não contém ocorrências de operadores modais), então A é modalmente verdadeira em M com respeito a i sse A é verdadeira (no sentido clássico⁽¹⁾) em A_i .

(1) Os conceitos clássicos de verdade e de satisfação são entendidos, aqui, como em MENDELSON, 1963.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam s' uma seqüência em D_{A_i} e s uma seqüência em $|A_i|$, tais que, para qualquer inteiro positivo k , a primeira ordenada do k -ésimo índice de s' é o k -ésimo elemento de s . Demonstra-se, então, facilmente, que M, i, s' sat A sse s satisfaz (classicamente) A . Logo, A é verdadeira em A_i sse A é modalmente verdadeira em M com respeito a i , visto que para qualquer seqüência s' em D_{A_i} , pode-se encontrar uma seqüência s em $|A_i|$, satisfazendo as condições acima, e vice-versa.

PROPOSIÇÃO 1.14 Sejam s e $\bar{s}$ seqüências em D_{A_i} concordes nos índices correspondentes às variáveis livres em A . Nessas condições, temos que:

- (I) $s^*(t) = \bar{s}^*(t)$ para todo termo t ocorrendo em A ;
- (II) M, i, s sat A sse $M, i, \bar{s}$ sat A .

DEMONSTRAÇÃO.

(I) se t for constante ou variável, então nada há a demonstrar. Assim, suponhamos que t seja $f^n t_1 \dots t_n$ (com $n > 0$). Segue-se então, que:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= f_{A_i}^n s^*(t_1) \dots s^*(t_n) \\ &= f_{A_i}^n \bar{s}^*(t_1) \dots \bar{s}^*(t_n) \\ &= \bar{s}^*(t). \end{aligned}$$

(II) Demonstra-se por indução na complexidade de A , como segue.

(i) A é atômica.

a) A é $t_1 = t_2$, M, i, s sat A sse $s^*(t_1) = s^*(t_2)$
 sse $\bar{s}^*(t_1) = \bar{s}^*(t_2)$
 sse M, i, s sat A

b) A é $P^n t_1 \dots t_n$,
 M, i, s sat A sse $\langle s^*(t_1), \dots, s^*(t_n) \rangle \in P_{\Lambda_i}^n$
 sse $\langle \bar{s}^*(t_1), \dots, \bar{s}^*(t_n) \rangle \in P_{\Lambda_i}^n$
 sse M, i, s sat A

(ii) A é $\neg B$ ou $B \rightarrow C$,

consequência imediata da hipótese indutiva e definição de satisfação modal.

(iii) A é $\Box B$.

M, i, s sat A sse para todo j em I_M , tal que $i R_M j$:

a) se $i=j$, então M, i, s sat B e M, i, s sat $B^{(s)}$; e

b) se $i \neq j$, então existe uma sequência s' em D_{Λ_j} , tal que M, j, s' sat $B^{(s)}$

sse para todo j em I_M , tal que $i R_M j$,

a) se $i=j$, então $M, i, \bar{s}$ sat B e $M, i, \bar{s}$ sat $B^{(s)}$; e

b) se $i \neq j$, então existe uma sequência s' em D_j^M , tal que M, j, s' sat $B^{(\bar{s})}$

sse $M, i, \bar{s}$ sat A .

Pois, pela hipótese indutiva, M, i, s sat B sse $M, i, \bar{s}$ sat B . E, visto que s e $\bar{s}$ são concordes nos lugares correspondentes às variáveis livres de A , $B^{(s)}$ e $B^{(\bar{s})}$ são a mesma fórmula.

(iv) A é $(x_k)B$.

M, i, s_i sat A sse M, i, s' sat B para toda sequência s' , k -variante de s em D_{A_i}
 sse $M, i, \bar{s}'$ sat B para toda sequência $\bar{s}'$, k -variante de $\bar{s}$ em D_{A_i}
 sse $M, i, \bar{s}$ sat A .

Pois, tomando-se os pares s' e $\bar{s}'$ concordes no k -ésimo lugar segue-se da hipótese indutiva que M, i, s sat B sse $M, i, \bar{s}$ sat B .

COROLÁRIO 1.14.1 Se A é uma sentença de L , então A é modalmente verdadeira em M com respeito a i ou A é modalmente falsa em M com respeito a i .

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata da proposição.

COROLÁRIO 1.14.2 Para qualquer sequência s em D_{A_i} , as seguintes proposições são válidas:

(i) M, i, s sat $\Box A$ sse as seguintes condições são satisfeitas:

- a) se $i R_M i$, então $M, i, s \text{ sat } A$; e
 b) para todo j , tal que $i R_M j$, $M, j \models A^{(s)}$;

(ii) se $i R_M i$, então $M, i, s \text{ sat } \Box A$ sse $M, i, s \text{ sat } A$ e para todo j , tal que $i R_M j$, $M, j \models A^{(s)}$

(iii) se $i R_M i$, então $M, i, s \text{ sat } \Box A$ sse $M, i, s \text{ sat } A$ e $M, i, s \text{ sat } \Box A^{(s)}$;

(iv) se A é sentença, então $M, i, s \text{ sat } \Box A$ sse para todo j , tal que $i R_M j$, $M, j \models A$.

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata da proposição anterior e da definição de satisfação modal.

COROLÁRIO 1.14.3 Se x_k é uma variável que não ocorre livre na fórmula A , então

$$\models (x_k)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (x_k)B).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam L' uma extensão em constantes de L , M uma estrutura modal para L' e s uma sequência em D_{A_0} , tal que $M, 0, s$ não sat $(A \rightarrow (x_k)B)$.

Portanto,

$$M, 0, s \text{ não sat } (x_k)B \text{ e } M, 0, s \text{ sat } A.$$

Vale dizer, existe uma sequência $\bar{s}, k$ -variante de s em D_{A_0} , tal que

$$M, 0, \bar{s} \text{ não sat } B$$

Pela proposição 1.14,

$$M, 0, \bar{s} \text{ sat } A,$$

visto que x_k não ocorre livre em A e $M, i, s \text{ sat } A$.

Logo,

$$M, 0, \bar{s} \text{ não sat } A \rightarrow B.$$

Consequentemente, $M, 0, s \text{ não sat } (x_k)(A \rightarrow B)$. Is

to é, $M, 0, s \text{ sat } (x_k)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (x_k)B)$.

PROPOSIÇÃO 1.15 Sejam $x_1, \dots, x_n$ algumas das va
riáveis livres em A , $t_1, \dots, t_n$ termos de L , tais
que, para $k=1, \dots, n$, t_k é livre para x_k em A e
 s_i e s'_i sequências em D_{Λ_i} que diferem entre si
no máximo pelos lugares correspondentes a $x_1, \dots,$
 x_n e nestes lugares s tem, respectivamente, os
pares $\langle s'^*(t_1), a_1 \rangle, \dots, \langle s'^*(t_n), a_n \rangle$, on-
de a_k é s' -instância de t_k ($k=1, \dots, n$).

Nestas condições, temos que:

(I) Para qualquer expressão bem formada (termo
ou fórmula) U , de L , $(U^x/t_1 \dots x/t_n)^{(s')}$ é igual
a $U^{(s)}$;

(II) para qualquer termo t , $s^*(t) = s'^*(t')$, onde
 t' é o termo que advém de t substituindo as o-
corrências de $x_1, \dots, x_n$ por, respectivamente $t_1,$
 $\dots, t_n$;

(III) $M, i, s \text{ sat } A$ sse $M, i, s' \text{ sat } A^x/t_1 \dots x/t_n$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $'$ a operação que associa a uma ex-
pressão bem formada U de L (i.e., um termo ou
uma fórmula) a expressão $U^{x_1}/t_1 \dots x_n/t_n$.

(I) Se t for constante ou uma variável que não ocorre na lista $x_1, \dots, x_n$, então nada há a provar. Se t for uma variável ocorrendo na lista acima, então segu-se diretamente das hipóteses que $t^{(s)}$ é $t^{(s')}$. Assim, suponhamos que t é $f^n \bar{t}_1 \dots \bar{t}_n$. Portanto, $t^{(s)}$ é $f^n \bar{t}_1^{(s)} \dots \bar{t}_n^{(s)}$, que é, pela hipótese indutiva, $f^n \bar{t}_1^{(s')} \dots \bar{t}_n^{(s')}$, isto é, $t^{(s')}$.

Se U for uma fórmula, então prova-se, diretamente, por indução na complexidade de U , que $U^{(s)}$ é igual a $U^{(s')}$. No caso de U ser atômica, o resultado segue da definição de $'$, juntamente com o fato acima provado acerca dos termos individuais. E se U não for atômica, o resultado é consequência imediata da hipótese indutiva.

(II) Aqui, também, se t for uma constante ou uma variável que não ocorre na lista $x_1, \dots, x_n$, nada há a demonstrar. Analogamente, se t ocorre na lista acima. Assim, suponhamos que t é $f^n \bar{t}_1 \dots \bar{t}_n$. Neste caso, $s^*(t) = f^n s^*(\bar{t}_1) \dots s^*(\bar{t}_n)$
 $= f^n s'^*(\bar{t}'_1) \dots s'^*(\bar{t}'_n)$
 $= s'^*(t')$

(III) Provaremos por indução na complexidade de A que $M, i, s \text{ sat } A$ sse $M, i, s' \text{ sat } A'$
 (i) A é atômica.

Imediata a partir do (II) e da definição de satisfação modal juntamente com a definição da operação $'$.

(ii) $A \text{ é } \neg B \text{ ou } B \rightarrow C.$

Consequências da hipótese indutiva e da definição de satisfação, juntamente com a definição de '.

(iii) $A \text{ é } \Box B.$

Nesse caso, $A' \text{ é } \Box B'.$ E,

$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse: a) se } i R_M i, M, i, s \text{ sat } A; \text{ e}$

b) para todo j , tal que $i R_M j$,
 $M, j \models A^{(s_i)}$;

sse a) se $i R_m i, M, i, s' \text{ sat } A'$

b) para todo j , tal que $i R_M j$,
 $M, j \models A'^{(s')}$

sse $M, i, s' \text{ sat } A'$

Pois, por hipótese indutiva, $M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } M, i, s' \text{ sat } A'.$

E, pelo ítem (I) $A^{(s)}$ é igual a $A'^{(s')}$.

(iv) $A \text{ é } (x_j)B.$

$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } M, i, s \text{ sat } B$, para toda sequên-

cia s , k -variante de s em D_{A_i} ;

sse $M, i, s' \text{ sat } B'$, para toda sequên-

cia $\bar{s}'$, k -variante de $\bar{s}'$ em

D_{A_i} ;

sse $M, i, s' \text{ sat } A'.$

Pois, tomemos os pares $\bar{s}$ e $\bar{s}'$ concordes no j -ésimo lugar. Como $j \neq k$, para $k=1, \dots, n$ e t_k é livre para x_k em Λ (i.é., x_j não ocorre em t_k), temos que $\bar{s}^*(x_k) = s^*(x_k) = s'^*(t_k) = \bar{s}'^*(t_k)$ e a $\bar{s}$ -instância de x_k é igual a s' -instância de x_k .

Portanto, tais pares satisfazem as condições da hipótese indutiva.

COROLÁRIO 1.15.1 Seja s uma sequência em D_{Λ_i} , tal que para toda variável x , livre em A , $s^*(x)$ é um objeto nomeado em Λ_i (i.e., existe um nome a em L , tal que $a_{\Lambda_i} = s^*(x)$). Nessas condições,

$$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } M, i, s \text{ sat } A^{(s)}$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam, $x_1, \dots, x_n$ as variáveis livres em A e $a_1, \dots, a_n$ os nomes em L , tais que, para $k = 1, \dots, n$, a_k é a s -instância de x_k . Pela definição de s -instância e de domínio modal,

$$s^*(x_k) = (a_k)_{\Lambda_i}$$

para $k = 1, \dots, n$. Portanto, pela proposição anterior,

$$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } M, i, s \text{ sat } A^{(s)}.$$

PROPOSIÇÃO 1.16 Sejam A uma fórmula, na qual nenhuma ocorrência livre de x se dá no escopo de operador modal, t um termo livre para x em A e s e $\bar{s}$ sequências em D_{Λ_i} concordes em todos os lugares correspondentes às variáveis livres em A , salvo, no máximo, no lugar correspondente a x ; seja, ainda, $s^*(x) = \bar{s}^*(t)$. Nessas condições, temos que

$$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } M, i, \bar{s} \text{ sat } A^x/t.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Prova-se por indução na complexidade de A . A demonstração é análoga à da proposição anterior, com a ressalva de que, no caso de A ser da forma $\Box B$, x não ocorre livre em B e, portanto, A^x/t é a própria A ; e, assim, o resultado desejado segue da Proposição 1.14.

PROPOSIÇÃO 1.17 Seja A é uma fórmula que satisfaz uma das seguintes condições (i) ou nenhuma ocorrência de x_k se dá no escopo de operador modal e t é um termo livre para x em A , (ii) ou t é um nome ou variável livre para x_k em A ; então:

$$\models (x_k)A \rightarrow A^{x_k}/t.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam L' uma extensão em constantes de L , M' uma estrutura modal para L' , s uma sequência em D_{A_0} , tal que

$$M, 0, s \text{ não sat } A^{x_k}/t.$$

Devemos considerar os dois casos possíveis.

Caso 1: nenhuma ocorrência livre de x_k em A se dá no escopo de operador modal.

Neste caso, seja $\bar{s}$ a sequência k -variante de s , tal que $\bar{s}^*(x_k) = s^*(t)$. Pela proposição 1.16,

$M, 0, \bar{s}$ não sat A

Portanto,

$M, 0, s$ não sat $(x_k)A$.

Caso 2: t é um nome ou uma variável livre para x_k em A . Seja, então, $\bar{s}$ a sequência k -variante de s em D_{A_0} , tal que $\bar{s}$ tem no k -ésimo lugar o par $\langle s^*(t), a \rangle$ (onde a é a s -instância de t). Visto que t é nome ou variável, este par, de fato, pertence a D_{A_0} . Segue-se, então, da Proposição 1.15 que

$M, 0, \bar{s}$ não sat A .

Logo,

$M, 0, s$ não sat $(x_k)A$.

PROPOSIÇÃO 1.18 Seja Γ um subconjunto de FORM_L . Assim, se $\Gamma \models A$, então $\Gamma \models (x)A$.

DEMOSTRAÇÃO.

Consequência imediata da definição de consequência modal.

Observemos que o esquema

$$(1) \quad (x)A \rightarrow A^x/t$$

não é válido quando x ocorre no escopo de operador modal e t for um termo da forma $f^n t_1 \dots t_n$ contendo variáveis livres. Pois, nesse caso, dadas uma estrutura modal M e uma sequência s em $D_{A_0}^M$, o par $\langle s^*(t), b \rangle$ onde b é a s -instância de t pode, eventual-

mente, não pertencer ao domínio modal $D_{A_0 M}$ e, deste modo, o fato de

$$M, 0, s \text{ sat } (x)A$$

não assegura que

$$M, 0, s \text{ sat } A^x/t.$$

Em última análise, isto é uma consequência do fato, anteriormente observado, de que o domínio de quantificação é o domínio modal e os valores dos termos são elementos de $|A|_x \text{ NOM}_L$, portanto, da verdade de

$$(x)A$$

podemos inferir apenas que a propriedade A vige para todo elemento do domínio modal, e não que vale para qualquer elemento de $|A|_x \text{ NOM}_L$.

Um contra exemplo para o esquema (1) acima esclarece melhor o problema aqui envolvido.

Consideremos L uma linguagem modal contendo dois símbolos para predicados unários (P e Q), duas constantes (a e b) e um símbolo funcional unário (f) E M a estrutura modal caracterizada do seguinte modo:

$$M = \langle \langle \{0, 1\}, 0, \{\langle 0, 1 \rangle\} \rangle, \{A_0, A_1\} \rangle, \text{ onde } *$$

as estruturas clássicas A_0 e A_1 são as seguintes:

$$|A_0| = \{0, 1, 2\}$$

$$P_{A_0} = \{0\}$$

$$Q_{A_0} = \emptyset$$

$$a_{A_0} = 0$$

$$b_{A_0} = 1$$

$$f_{A_0}(0) = 1$$

$$f_{A_0}(1) = 1$$

$$f_{A_0}(2) = 0$$

$$|A_1| = \{0, 1\}$$

$$P_{A_1} = \emptyset$$

$$Q_{A_1} = \{0\}$$

$$a_{A_1} = 0$$

$$b_{A_1} = 1$$

$$f_{A_1}(0) = 0$$

$$f_{A_1}(1) = 1$$

Temos, então, que

$$M, \not\models (x) (Px \rightarrow \Box Qx) \rightarrow (Pfx \rightarrow \Box Qfx)$$

Pois, seja s uma seqüência em D_{Λ_0} , tal que s contém no índice correspondente a x o par $\langle 2, b \rangle^0$. Como 2 não é nomeado em Λ_0 , este par pertence a D_{Λ_0} . Deste modo, s não sat $\Box Qfx$, pois $M, 0, s$ não sat $\Box Qfb$. Porém,

$$M, 0, s \text{ sat } Pfx$$

e

$$M, 0, s \text{ sat } (x) (Px \rightarrow \Box Qx)$$

Pois, para qualquer seqüência $\bar{s}$ em D_{Λ_0} se $\bar{s}$ sat Px então $\bar{s}(x) = 0$ e, portanto, a é a $\bar{s}$ -instância de x , visto que o único nome de 0 em Λ_0 é a constante a . Logo, $M, 0, s$ sat $\Box Qa$, isto é, s sat $\Box Qx$.

1.3 A SEMÂNTICA NOMINATIVA E OS OPERADORES MODAIS:

Voltaremos nossa atenção, agora, para o comportamento dos operadores modais e da interação destes com os quantificadores na Semântica Nominativa. Dois resultados fundamentais serão mostrados. Em primeiro lugar, mostraremos que a quantificação através de operadores modais é, de fato, mista: incide sobre os objetos de um dado "mundo" e os objetos nomeados dos "mundos acessíveis". Em segundo lugar, mostraremos um resultado de conservação da S.N. com respeito à semântica usual (Kripke): em S.N. são válidas as fórmulas válidas na semântica de Kripke, desde que se imponha uma restrição nos teoremas específicos de S5.

Consideremos, então, uma linguagem modal, L uma estrutura modal para L , $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$, e um índice i , em I_M .

PROPOSIÇÃO 1.19 $\Box A$ é modalmente verdadeira em M com respeito a i sse as seguintes condições são satisfeitas.

- a) se $iR_M i$, então $M, i \models A$; e
- b) para todo j , tal que $iR_M j$ e para toda instância A^* de A , $M, j \models A^*$.

DEMONSTRAÇÃO.

$M, i, \models \Box A$ sse para toda sequência s

em $D_{A_i}, M, i, s \text{ sat } \Box A$;

sse para toda sequência s

em D_{A_i} , as seguintes condições são satis-

feitas:

a) se $iR_M i$, então $M, i, s \text{ sat } A$; e

b) para todo j , tal que $iR_M j$, $M, i, s \models A^{(s)}$.

sse (pelo Corolário 1.14.2) as seguintes condições são satisfeitas

- a) se $iR_M i$, então, para toda sequência s em D_{A_i} , $M, i, s \text{ sat } A$; e
- b) para toda sequência s em D_{A_i} e para todo j , tal que $iR_M j$, $M, j = A^{(s)_i}$

sse as seguintes condições são satisfeitas:

- a) se $iR_M i$, então $M, i \models A$; e
- b) para todo j , tal que $iR_M j$, $M, j \models A^*$ para toda instância A^* de A , pois, toda instância de A é s -instância de A , para alguma sequência s em D_{A_i} .

COROLÁRIO 1.19.1 $\diamond A$ é modalmente falsa em M com respeito a i sse as seguintes condições são satisfeitas:

- a) se $iR_M i$, então A é modalmente falsa em M com respeito a i ; e
- b) para todo j , tal que $iR_M j$, e para toda instância A^* de A , A^* é modalmente falsa em M com respeito ao índice j .

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência da proposição anterior, juntamente com a definição usual do operador de possibilidade e a Proposição 1.11.

COROLÁRIO 2.19.2 Suponhamos que A contém apenas x como variável livre. Então, $\Box A$ é modalmente verdadeira em M com respeito a i sse as seguintes condições são satisfeitas:

- a) se $iR_M i$, então $M, i \models (x)A$; e
 b) para todo j , tal que $iR_M j$ e para todo nome a de L , $M, j \models A^x/a$.

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata da proposição anterior.

Essas últimas proposições evidenciam, por um lado o caráter referencial-substitucional da quantificação através de operadores modais e, por outro lado, a não validade da fórmula de Barcan (B.F.)

$$(x) \Box A \rightarrow \Box (x)A,$$

na Semântica Nominativa.

Pois, como a quantificação incide, no máximo, sobre os objetos nomeados dos mundos acessíveis diferentes do inicial, basta considerar uma estrutura modal M , na qual haja estruturas incompletas (i.e., contendo objetos não nomeados) acessíveis à origem, de tal modo que, justamente alguns desses objetos não satisfaçam A . Vale dizer, dada uma fórmula A que não seja, nem ela própria válida, nem a negação de uma fórmula válida, podemos sempre construir uma estrutura modal $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$, tal que

$$M, 0_M \models (x) \Box A$$

e

$$M, 0_M \not\models \Box (x)A.$$

Para tanto, basta que haja um índice i em I_M , tal que $0_M R_M i$, $i \neq 0_M$ e

$$M, i \models A^x/a$$

para todo nome a e, para alguma sequência s em D_{A_i} ,

$$M, i, s \text{ não sat } A$$

Observemos que, na Semântica Nominativa, B.F. não é válida, mesmo com respeito à classe das estruturas modais de tipo

S5 (com relação de equivalência). Esse fato nos obrigará a impor certas restrições no esquema característico de S5 (' $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ '), visto que B.F. é dedutível nos sistemas obtidos a partir da lógica clássica, acrescentando-se os axiomas

$$\Box A \rightarrow A$$

$$\Box A \rightarrow \Box \Box A$$

(cf. HUGHES E CRESSWELL, 1968).

Até aqui discutimos o caráter misto da quantificação em contextos modais. Passemos, agora, à demonstração de que os teoremas usuais da lógica modal são, em certa medida, preservados na Semântica Nominativa. Isto é, vamos provar que os axiomas (esquemas) são modalmente válidos e que a regra de necessitação (de Goedel) preserva a validade modal.

Nas proposições seguintes L é uma linguagem modal, $A, B, \dots$ pertencem a $FORM_L$, L' é uma extensão em constantes de L , $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$ é uma estrutura modal para L' e s é uma sequência em D_{Λ_0} .

PROPOSIÇÃO 1.20 Se $M, 0, s$ sat $\Box (A \rightarrow B)$, então $M, 0, s$ sat $(\Box A \rightarrow \Box B)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $M, 0, s$ não sat $\Box (A \rightarrow \Box B)$. Logo, $M, 0, s$ sat $\Box A$ e $M, 0, s$ não sat $\Box B$. E temos dois casos possíveis.

Caso 1: $\text{OR}_M 0$ e $M, 0, s$ não sat B .

Neste caso, como $M, 0, s$ sat $\Box A$,

$M, 0, s$ sat A .

Portanto,

$M, 0, s$ não sat $A \rightarrow B$.

Vale dizer,

$M, 0, s$ não sat $\Box (A \rightarrow B)$

Caso 2: $M, i \not\models (A \rightarrow B)^{(s)}$ para algum i , tal que $oR_M i$. Consequentemente, visto que M, i, s sat $\Lambda^{(s)}$,

$$M, i \not\models (A \rightarrow B)^{(s)}$$

Portanto,

$$M, 0, s \text{ não sat } \Box (A \rightarrow B).$$

PROPOSIÇÃO 1.21

(I) Se R_M for reflexiva, então

$$M, 0, s \text{ sat } \Box A \rightarrow A$$

(II) Se R_M for transitiva, então

$$M, 0, s \text{ sat } \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

(III) Se R_M for uma relação de equivalência e A for uma fórmula fechada, então $M, \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$.

DEMONSTRAÇÃO.

(I) Consequência imediata da definição de satisfação.

(II) Se $M, 0, s$ não sat $\Box \Box A$, então temos dois casos possíveis.

Caso 1: $oR_M 0$ e $M, 0, s$ não sat $\Box A$.

Neste caso, diretamente segue-se que

$$M, 0, s \text{ sat } \Box A \rightarrow \Box \Box A.$$

Caso 2: $M, i \not\models \Box \Lambda^{(s)}$, para algum i , tal que $oR_M i$

Nesse caso, pelo Corolário 1.14.2, existe um k em I_M , tal que $iR_M k$ (e, pela transitividade, $oR_M k$),

$$M, k \not\models A^{(s)}$$

Portanto,

$$M, 0, s \text{ não sat } \Box A^{(s)}$$

E, pelo Corolário 1.14.2

$$M, 0, s \text{ não sat } A$$

(III) Se $M \not\models \Box \Diamond A$, então, pelo Corolário 1.

14.2 existe um i , tal que $0_{R_M i}$ e

$$M, i \not\models \Diamond A$$

Logo, para todo j , tal que $i R_M j$ (e, portanto,

para todo j , tal que $0_{R_M j}$)

$$M, j \not\models A$$

Vale dizer,

$$M, \models \Diamond A.$$

PROPOSIÇÃO 1.22 Se

$$\models A$$

então

$$\models \Box A.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja M' uma estrutura modal para L' , tal que

$$M' \not\models \Box A.$$

Logo, existe uma sequência s em $D_{A, 0_{M'}}$, tal que

$$M, 0, s \text{ não sat } \Box A$$

Temos assim, dois casos possíveis.

Caso 1: $0_{M'}$, $R_{M'}$, $0_{M'}$ e $M'; 0_{M'}$ não sat A .

Neste caso, segue-se trivialmente que

$$\not\models A.$$

Caso 2: $M', i \not\models A^{(s)}$, para algum i , tal que $0_{M'} R_{M'} i$.

Neste caso, seja $\bar{M} = \langle I_{M'}, i, R_{M'}, (A_j)_{j \in I_{M'}} \rangle$ a estrutura modal para L' , que advém de M' simplesmente tomando como origem o índice i , em vez de $0_{M'}$. Pode-se facilmente perceber que, para qualquer j em $I_{M'}$ e qualquer fórmula B de L' , $M', j \models B$ sse $\bar{M}, j \models B$. Consequentemente,

$$\bar{M} \not\models A^{(s)}$$

visto que i é a origem em $\bar{M}$ e $M', i \not\models A^{(s)}$

Portanto,

$$\bar{M} \not\models A^{(s)}$$

Vale dizer, pela Proposição 2.15,

$$\bar{M} \not\models A$$

pois tome-se a sequência $\bar{s}$ em D_{A_i} , tal que, para toda variável livre x em A , $\bar{s}$ tem no lugar correspondente a x o par $\langle a_{A_i}, a \rangle$, onde a é a s -instância de x

Logo, $\not\models A$.

CAPÍTULO 2

UMA EXTENSÃO DO SISTEMA S5

2.1 OBSERVAÇÕES PRELIMINARES.

No capítulo anterior apresentamos uma nova semântica para linguagens modais de primeira ordem e demonstramos algumas proposições acerca dos novos conceitos de satisfação, verdade, validade e consequência. Pode-se facilmente perceber que decorre dessas proposições a legitimidade das extensões usuais dos sistemas K, T, S4 e S5 sem fórmula de Barcan, uma vez impostas certas restrições ao uso de símbolos funcionais (cf. Proposição 1.17) e aos teoremas específicos de S5 (cf. Proposição 1.21).

Todavia, mesmo com as devidas restrições, os sistemas modais usuais não são adequados para a semântica especificada. Pois, por um lado, existem fórmulas que são modalmente válidas, embora não sejam teoremas dos sistemas usuais sem B.F.; por exemplo, quando A é uma fórmula clássica contendo livre a variável x, B uma fórmula na qual apenas x ocorre e a um nome qualquer, então o esquema

$$(1) \quad (x) \Box A \rightarrow \Box ((Ex) \Box A \wedge \Diamond B^x/a \rightarrow (Ex) (\Box A \wedge \Diamond B))$$

é modalmente válido, embora não seja demonstrável nos sistemas usuais sem fórmula de Barcan. E não podemos acrescentar B.F. a esses sistemas, pois ela não é modalmente válida, como mostramos anteriormente.

Portanto, a fim de obtermos um sistema axiomático adequado para a Semântica Nominativa - se isso for possível - devemos, além de impor algumas restrições aos axiomas usuais, encontrar novos postulados que dêem conta do significado da quantificação nessa semântica.

O problema fundamental reside justamente no fato de que a quantificação deixa de referir-se propriamente ao universo de uma estrutura (a um conjunto de objetos), passando a referir-se ao domínio modal (a um conjunto de pares constituídos por objetos e nomes). Desse modo, como ocorre em (1), acima, a verdade de

$$(2) (Ex) (\neg A \wedge \diamond B)$$

não exige, ao contrário do caso clássico ou da semântica kripkeana, a existência de um objeto propriamente dito que satisfaça ambos os conjuntivos; é suficiente que haja um objeto não no meado satisfazendo classicamente

$$(3) \neg A$$

e um nome a que torne a sentença

$$(4) \diamond B^x/a$$

verdadeira. Ou seja, de maneira mais geral, é suficiente que exista um par no domínio modal, tal que o primeiro elemento satisfaça classicamente o primeiro conjuntivo e o segundo elemento, quando tomado como substituindo de x no segundo conjuntivo, dê origem a uma sentença verdadeira.

A afirmação da existência de um par reduz-se à afirmação da existência de um objeto, apenas no caso de não haver o objetos sem nome. Pois, nesse caso, no domínio modal, o nome associado ao objeto deverá ser, por definição, o próprio nome do objeto e, portanto, afirmar

$$(5) (Ex)A$$

será equivalente a afirmar que, para algum nome a da linguagem

$$(6) A^x/a$$

é verdadeira (cf. Proposição 1.15.1). Desse modo, no caso em que todos os objetos são nomeados, a quantificação mista (referencial-substitucional) torna-se equivalente à quantificação puramente substitucional. E, como sabemos, sob essa última interpretação, o quantificador tem um comportamento formalmente idêntico ao que tem na interpretação clássica (i.e., as duas interpretações são interpretações possíveis de um mesmo sistema formal), cf. KRIPKE, 1976; DUNN e BELNAP; 1968.

Porém, existem certas sentenças - a negação da fórmula de Barcan é um exemplo - cuja verdade implica na existência de mundos contendo objetos não nomeados. E é justamente isso que torna (1) modalmente válida, pois, se houver um objeto em um mundo possível que não seja A , então esse objeto não pode ser nomeado nesse mundo, visto que, do contrário

$$(7) \quad (x) \Box A$$

não seria verdadeira no mundo de origem. Desse modo, o par formado pelo objeto que não satisfaz A e o nome a pertence ao domínio modal desse mundo possível e, por conseguinte,

$$(8) \quad (Ex) (\neg A \wedge \Diamond B)$$

será verdadeira nesse mundo sempre que

$$(9) \quad B^x/a$$

também for.

Soma-se a isso o fato de que a satisfação modal de fórmulas abertas exige a existência, não só de objetos e nomes quaisquer, mas de pares pertencentes ao domínio modal. Por exemplo, a fim de que

$$(10) \quad (Ex) (A \wedge \Box B),$$

onde A e B são como antes, seja verdadeira, não basta que haja um objeto satisfazendo classicamente

$$(11) \quad A$$

e um nome a que torne a sentença

$$(12) \quad \Box B^x/a$$

verdadeira. É necessário que o par formado pelo objeto e pelo nome pertença, de fato, ao domínio modal.

Em suma, como já observamos em outro contexto (cf. Capítulo 1, p.7 e ss), o domínio modal determina o verdadeiro domínio de quantificação e, desse modo, tanto a pressuposição de existência, como a pressuposição de unicidade da quantificação incidirão sobre os pares de objetos e nomes e não sobre os objetos das estruturas clássicas. Se, pois, tivermos um meio de caracterizar, nas próprias linguagens modais, o domínio modal, disporemos de um valioso recurso para determinar os postulados que devem ser acrescentados a fim de obtermos um sistema completo. Cabe, então, buscar um esquema de fórmulas que gere, para cada linguagem modal, uma fórmula que, quando interpretada em um estrutura modal, expresse a relação entre objetos e nomes determinada pelo domínio modal.

É justamente disso que nos ocuparemos nas páginas seguintes. Trabalharemos, aqui, com um sistema de tipo S5, uma vez

que, até o presente momento, é apenas com respeito às estruturas modais cujas relações de acessibilidade são de equivalência que podemos definir uma fórmula satisfazendo as condições acima mencionadas.

Inicialmente, introduziremos uma fórmula que expressa, em certo sentido, uma relação de indiscernibilidade entre os valores substitucionais de termos (i.e., os nomes associados, no domínio modal, aos objetos). A partir dessa fórmula, definiremos, então, tanto o predicado que caracteriza o domínio modal, como o predicado "ser nomeado". Dessa forma, poderemos determinar os diferentes postulados de um sistema axiomático adequado para a Semântica Nominativa. Por razões óbvias, esse sistema será denominado de QS5'.

Nesse capítulo, provamos, ainda, a legitimidade do sistema QS5' e apresentamos alguns de seus teoremas, importantes na demonstração do teorema de completude que será exposta no capítulo seguinte.

3.2 OS CONCEITOS SEMÂNTICOS PARA QS5'

Definiremos, agora, os conceitos de modelo, consequência e validade, específicos para o sistema axiomático que será introduzido a seguir. Vale dizer, restringiremos os conceitos anteriormente definidos, considerando apenas as estruturas modais, nas quais, a relação de acessibilidade é reflexiva, transitiva e simétrica (relação de equivalência), estruturas essas, que são denominadas S5'-estruturas. Sejam, então, L uma linguagem modal e $\Gamma, \{A\} \subseteq \text{FORM}_L$.

DEFINIÇÃO 2.1 Uma estrutura modal M para L diz-se uma S5'-estrutura para L , se a relação de acessibilidade em I_M for reflexiva, transitiva e simétrica.

DEFINIÇÃO 2.2 Uma S5'-estrutura M para L diz-se um S5'-modelo para Γ em L se, para qualquer fórmula B em Γ , B é modalmente verdadeira em M .

DEFINIÇÃO 2.3 Uma fórmula A diz-se S5'-consequência de Γ se A for modalmente verdadeira em M , para qualquer QS5'-modelo M para Γ em L' (onde L' é uma extensão em constantes de L).

DEFINIÇÃO 2.4 Uma fórmula A diz-se S5'-válida, se A for modalmente verdadeira em M , para qualquer QS5'-estrutura M para L' (onde L' é uma extensão em constantes de L).

No que se segue, as notações metalinguísticas para validade, consequência e modelo referem-se à restrição desses conceitos a QS5', que acabamos de definir.

A partir destes novos conceitos provaremos algumas proposições auxiliares que permitirão a demonstração da legitimidade dos novos postulados específicos de QS5'. Consideremos, então, uma linguagem modal, L , uma S5'-estrutura para L , $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$, $i \in I_M$ e uma sequência s em D_{A_i} .

PROPOSIÇÃO 2.5 Sejam t_1 e t_2 dois termos em L e $\underline{a}$, $\underline{b}$ dois nomes em L , tais que $\underline{a}$ é a s -instância de t_1 e $\underline{b}$ é a s -instância de t_2 . Nestas condições, vale que

$$M, i, s \text{ sat } \diamond \Box t_1 = t_2 \text{ sse } M, i \models \Box a = b.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos inicialmente que,

$$M, i, s \text{ sat } \diamond \Box t_1 = t_2$$

Temos, então, dois casos possíveis.

Caso 1: $M, i, s \text{ sat } \Box t_1 = t_2$

Neste caso, segue-se diretamente da definição de satisfação que

$$M, i, s \text{ sat } \Box a = b.$$

Vale dizer,

$$M, i \models \Box a = b.$$

Caso 2: $M, j \models \Box a = b$, para algum j , tal que $i R_M j$.

Portanto, pelas propriedades de R_M (transitividade, reflexividade e simetria),

$$M, i \models \Box a=b.$$

Por outro lado, suponhamos que

$$M, i \models \Box a=b.$$

Pela reflexividade de R_M e pelo Corolário 1.14.2,

$$M, i, s \text{ sat } \Diamond \Box t_1 = t_2.$$

OBSERVAÇÃO: A fórmula,

$$\Diamond \Box t_1 = t_2$$

expressa, de fato, uma relação de indiscernibilidade entre os valores substitucionais de t_1 e de t_2 , no sentido de que, pode-se mostrar que se $M, i, s \text{ sat } \Diamond \Box t_1 = t_2$, então para qualquer fórmula A que contém exatamente x livre,

$$M, i \models A^x/a \text{ sse } M, i \models A^x/b,$$

onde a e b são, respectivamente a s -instância de t_1 e t_2 (i.e., os valores substitucionais de t_1 e t_2 pela sequência s).

Pode-se mostrar, também, que para qualquer nome a ,

$$M, i, s \text{ sat } (\exists y) (\Diamond \Box y=a \wedge y=t), \text{ onde } y \text{ não ocorre em } t, \text{ sse o par } \langle s^*(t), a \rangle \in D_{A_i}.$$

Portanto, o domínio modal pode ser, desse modo, caracterizado por fórmulas da linguagem.

Essa fórmula expressa, em última instância, que o objeto t (i.e. $s^*(t)$) e o nome a pertencem ao domínio modal.

DEFINIÇÃO 2.6 Seja t um termo e a a primeira constante de L . A fórmula $N(t)$ é definida, contextualmente, da seguinte forma:

$N(t) = t=a \vee (\exists x)(y)(\diamond \Box x=y \rightarrow y \neq t)$ onde x e y são as duas primeiras variáveis que não ocorrem em t .

A proposição seguinte mostra que a fórmula acima definida expressa, de fato, a propriedade de ser um objeto nomeado.

PROPOSIÇÃO 2.7 M, i, s sat $N(t)$ sse $s^*(t)$ é um objeto nomeado em A_i (i.e., existe um a em NOM_L , tal que $s^*(t) = a \wedge_i$).

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos, inicialmente que $s^*(t)$ não seja nomeado em A_i . Portanto, em particular, M, i, s não sat $t=a$.

E, por absurdo, suponhamos que

M, i, s sat $(\exists x)(y)(\diamond \Box x=y \rightarrow y \neq t)$

Logo, existe uma sequência $\bar{s}$ que difere de s no máximo pelo componente correspondente a x e tal que

$M, i, \bar{s}$ sat $(y)(\diamond \Box x=y \rightarrow y \neq t)$

Seja, então, s' a sequência que difere de s , no máximo pelo componente correspondente a y e seja esse componente o par $\langle \bar{s}^*(t), b \rangle$, onde b é a $\bar{s}$ -instância de x . Como, por hipótese $s^*(t)$ não é nomeado em A_i e $s^*(t) = \bar{s}^*(t)$

(pois x não ocorre livre em t), o par acima, de fato, pertence a D_{A_i} . Assim,

$$M, i, s' \text{ sat } y=t$$

pois $s'*(y)=s'*(t)$. E

$$M, i, s' \text{ sat } \diamond \square x=y,$$

visto que $s' \text{ sat } \square (x=y)^{(s')}$. Logo,

$M, i, \bar{s}$ não sat $(y)(\diamond \square x=y \rightarrow y \neq t)$ (contradição).

Suponhamos, agora, que para algum b em NOM_L ,

$$s^*(t) = b_{A_i}.$$

Temos, então dois casos possíveis:

Caso 1: $b_{A_i} = a_{A_i}$.

Nesse caso, obviamente,

$$M, i, s \text{ sat } t=a$$

Vale dizer,

$$M, i, s \text{ sat } N(t)$$

Caso 2. $b_{A_i} \neq a_{A_i}$.

Nesse caso, seja $\bar{s}$ a sequência em D_{A_i} que difere de s , no máximo, pelo índice, correspondente a x e que tem nesse índice o par $\langle a_{A_i}, a \rangle$. Provaremos, então, que

$$M, i, \bar{s} \text{ sat } (y)(\diamond \square x=y \rightarrow y \neq t).$$

Consideremos uma sequência s' em D_{A_i} que difira de $\bar{s}$, no máximo, pelo índice correspondente a y que seja tal que

$$M, i, s' \text{ sat } y=t.$$

Logo, $s'^*(y) = s'^*(t) = s^*(t) = s^*(t) = b_{A_i}$.

Portanto,

$$s'^*(y) \neq a_{A_i}$$

E, se c é a s' -instância de y , $c_{A_i} = b_{A_i} \neq a_{A_i}$.

Portanto,

$$M, i, \bar{a} \models a = c$$

Logo, pela Proposição 2.5

$$M, i, s' \text{ não sat } \diamond \Box x=y,$$

visto que a é a s' -instância de x . Vale dizer,

$$M, i, \bar{s} \text{ sat } (y) (\diamond \Box x=y \rightarrow y \neq t)$$

Isto é,

$$M, i, s \text{ sat } (Ex) (y) (\diamond \Box x=y \rightarrow y \neq t)$$

Portanto, $M, i, s \text{ sat } N(t)$

PROPOSIÇÃO 2.8 Se t é um termo de L e $x_1, \dots, x_n$ são todas as suas variáveis livres, então

$$M, i, s \text{ sat } N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que

$$M, i, s \text{ sat } N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$$

Logo, pela Proposição 2.7, existem nomes $a_1, \dots, a_n$, tais que, para $k=1, \dots, n$

$$s^*(x_k) = (a_k)_{A_i}$$

Portanto, pela Proposição 1.15

$$s^*(t) = s^*(t_{a_1, \dots, a_n}^{x_1, \dots, x_n})$$

E, pela Proposição 2.7

$$M, i, s \text{ sat } N(t).$$

PROPOSIÇÃO 2.9 Seja t um termo de L e x_k a primeira variável que não ocorre em t . Então

$$M, i, s \text{ sat } (Ex_k)(\diamond \Box x_k = t \wedge N(x_k))$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\bar{s}$ a sequência k -variante de s que tem no k -ésimo índice o par $\langle a_{A_i}, a \rangle$, onde a é a s -instância de t . Desse modo, pela Proposição 2.7, $M, i, \bar{s} \text{ sat } N(y)$. E, visto que $M, i, \bar{s} \text{ sat } \Box (x_k = t)^{(\bar{s})}$,

$$M, i, \bar{s} \text{ sat } \diamond \Box x_k = t$$

Vale dizer,

$$M, i, s \text{ sat } (Ex_k)(\diamond \Box x_k = t \wedge N(x_k))$$

PROPOSIÇÃO 2.10 Se $x_1, \dots, x_n$ são todas as distintas variáveis livres em A , então

$$M, i, s \text{ sat } \Box A \text{ sse } M, i, s \text{ sat } A \text{ e } M, i, s \text{ sat } \Box (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos, inicialmente, que M, i, s não sat $\Box A$. Assim, pelo Corolário 1.14.2, temos dois casos possíveis, visto que R_M é reflexiva.

Caso 1: M, i, s não sat A

Caso 2: $M, j \not\models A^{(s)}$, para algum j , tal que $iR_M j$.

Ora, pela Proposição 2.7,

$$M, j \models (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n))^{(s)},$$

Portanto,

$$M, j \not\models (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A)^{(s)}$$

Vale dizer,

$$M, i, s \text{ não sat } \Box (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A)$$

Por outro lado, suponhamos que

$$M, i, s \text{ não sat } A \text{ ou } M, i, s \text{ não sat } \Box (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A)$$

No primeiro caso, pela reflexividade de R_M ,

$$M, i, s \text{ não sat } \Box A.$$

E, no segundo caso, temos duas possibilidades:

a) M, i, s não sat $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A$. Logo, M, i, s não sat A

b) $M, j \not\models (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A)^{(s)}$ para algum j , tal que $iR_M j$. Portanto,

$$M, j \not\models A^{(s)}$$

Logo,

$$M, i, s \text{ não sat } \Box A.$$

PROPOSIÇÃO 2.11 Se $x_1, \dots, x_n$ são todas as variáveis livres na fórmula A , então

$$M, i, s \text{ sat } \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A) \rightarrow \square \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $M, i, s \text{ sat}$

$$(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$$

Temos, então, dois casos possíveis:

Caso 1: $M, i, s \text{ sat } N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A$

Neste caso, pela Proposição 2.7 e definição de domínio modal, existem nomes $a_1, \dots, a_n$, tais que, para $k=1, \dots, n$

$s^*(x_k) = (a_k)_{A_i}$ e a_k é a s -instância de x_k . Portanto, como $s \text{ sat } A$, pelo Corolário 1.15.1,

$$M, i, s \text{ sat } A^{(s)}$$

E, pela Proposição 2.7

$$M, i \models (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n))^{(s)}$$

Logo,

$$M, i \models \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)^{(s)}$$

E, pela Proposição 1.21 (III)

$$M, i \models \square \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)^{(s)}$$

Assim, visto que $M, i \text{ sat } \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$,

$$M, i, s \text{ sat } \square \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$$

Caso 2: $M, j \models (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)^{(s)}$, para algum j , tal que $iR_M j$.

Logo, $M, i, s \text{ sat } \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$. E, como $M, i, s \text{ sat } \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)^{(s)}$, pela Proposição 1.21 (III),

$$M, i, s \text{ sat } \Box \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)^{(s)}$$

Vale dizer,

$$M, i, s \text{ sat } \Box \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$$

PROPOSIÇÃO 2.12 Os seguintes esquemas são QS5' válidos:

1) $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$, onde $x_1, \dots, x_n$ são todas as distintas variáveis que ocorrem em t ;

2) $(\exists x) (\diamond \Box x=t \wedge N(x))$, onde x é a primeira variável que não ocorre em t ;

3) $\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A))$, onde $x_1, \dots, x_n$ são todas as distintas variáveis livres em A ;

4) $\diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A) \rightarrow \Box \diamond (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência direta das proposições anteriores.

Os esquemas de fórmulas reunidos na proposição anterior são os novos postulados necessários para a caracterização de um sistema axiomático adequado para a Semântica Nominativa (a saber, o sistema QS5' introduzido a seguir). Antes de apresentarmos esse novo sistema, faremos alguns comentários acerca dos significados expressos por esses novos postulados.

O esquema

$$N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$$

afirma que, se os argumentos de uma função, representada pelo termo t , são objetos nomeados, então o valor dessa função é, também, um objeto nomeado; pois, N é a fórmula que expressa a propriedade de ser nomeado, e um termo complexo contendo n -variáveis expressa uma função n -ária definida no universo da estrutura clássica correspondente.

Para melhor compreendermos os dois esquemas seguintes, devemos ter em mente alguns fatos. Seja A uma estrutura clássica; denotaremos por:

- (i) $|A^N|$, o conjunto $\{a \in |A| : a \text{ é nomeado em } A\}$
- (ii) V_A , o conjunto $\{\langle a, b \rangle \in |A| \times \text{NOM}_L : \text{para alguma sequência } s \text{ em } D_A \text{ e algum termo } t, s^*(t)=a \text{ e } t^{(s)} \text{ é } b\}$.

Consideremos, agora, M uma estrutura modal e i um índice em I_M . Assim, V_{A_i} é o conjunto dos possíveis valores em i , dos termos da linguagem⁽¹⁾. E observemos que cada elemento, $\langle a, a \rangle$, em V_{A_i} , induz uma função, $F_{\langle a, a \rangle}$ que associa, a cada índice j em I_M , um elemento de $|A_j^N| \times \text{NOM}_L$ (a saber, o par $\langle a_{A_j}, a \rangle$).

Podemos, então, perceber facilmente, se tivermos em mente a definição de satisfação modal, que as imagens dessas funções desempenham um papel fundamental na Semântica Nominativa. Pois, elas determinam, dado o valor de um termo em i , o

(1) Lembremos que os termos complexos da linguagem podem assumir valores que não pertencem ao domínio modal, cf., antes, Cap.1, p. 4 .

valor desse termo nos índices acessíveis; em particular, as funções induzidas pelos elementos do domínio modal D_{A_i} determinam o valor das variáveis nesses índices. Assim, se A é uma fórmula contendo livre apenas a variável x , então $(\exists x) \Box A$ é verdadeira em M , com respeito a i , sse existe uma função $F_{\langle a, a \rangle}$ (onde, $\langle a, a \rangle \in D_{A_i}$), tal que, para todo j em I_M , se $iR_M j$, as seguintes condições são satisfeitas:

- a) se $i=j$, então $M, i, \langle a, a \rangle \text{ sat } A$ e $M, i, F_{\langle a, a \rangle}^{(i)} \text{ sat } A$; e
- b) se $i \neq j$, então $M, j, F_{\langle a, a \rangle}^{(j)} \text{ sat } A$ ⁽¹⁾.

Esse fato - que define a interpretação mista do quantificador na Semântica Nominativa - é expresso, então, pelo esquema

$$\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A));$$

vale dizer, os pares $\langle a_1, a_1 \rangle, \dots, \langle a_n, a_n \rangle$, no domínio modal, D_{A_i} , satisfazem a fórmula $\Box A$ sse, esses pares satisfazem A e, para todo mundo acessível, os objetos determinados pelas funções $F_{\langle a_k, a_k \rangle}$ satisfazem A - uma vez que esses objetos são os que satisfazem $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$.

Além disso, uma função da forma, $F_{\langle a, a \rangle}$ (onde, $\langle a, a \rangle \in V_{A_i}$) pode ser vista como uma função que escolhe, em cada

(1) A afirmação acima, segundo a qual um par satisfaz A , pode ser entendida no sentido em que, existe uma sequência s , no correspondente domínio modal, contendo esse par no índice correspondente à variável x e essa sequência satisfaz A .

As funções acima introduzidas poderiam ser compreendidas como as funções de identificação através de mundos exigidas pela Semântica Nominativa; porquanto elas determinam os objetos da quantificação através de mundos. Nessa medida, a relação de hominímia desempenha a função que, na semântica modal clássica, é a da identidade através de mundos. (Cf., antes, Introdução e HINTIKKA, 1969, em especial, os ensaios: Semantics for Propositional Attitudes e Existential Presuppositions and Uniqueness Presuppositions, onde se encontram interessantes análises das funções de identificação através de mundos na semântica modal clássica.

índice relevante, um objeto nomeado da estrutura correspondente (a saber, o objeto denotado, na estrutura, pelo nome $\underline{a}$). Sob esse ponto de vista, então, a existência dos valores dessas funções é expressa pelo esquema

$$(Ex) (\diamond \Box x=t \wedge N(x)) \quad (\text{onde } x \text{ não ocorre em } t).$$

Pois,

$$M, i, s \text{ sat } (Ex) (\diamond \Box x=t \wedge N(x))$$

sse, para algum nome $\underline{a}$,

$$M, i, s \text{ sat } \diamond \Box a=t$$

sse, para todo j em I_M , tal que $i R_M j$

$$a \wedge_j = t \stackrel{(s)}{A_j}$$

Vale dizer, se usarmos a terminologia ora introduzida,

$$M, i, s \text{ sat } (Ex) (\diamond \Box x=t \wedge N(x))$$

sse existe, em cada um dos mundos acessíveis a i , um objeto nomeado que é o valor de $F \langle s^*(t), t \rangle (s)$ (i.e., o objeto escolhido por esse função, no mundo em questão).

Finalmente, o quarto esquema, é uma instância particular do postulado característico de S5 ($\diamond A \rightarrow \Box \diamond A$): vale apenas para os objetos nomeados.

Observemos, por último, que esses novos postulados permitirão, futuramente, demonstrar em QS5', as fórmulas que expressam as características próprias do domínio modal:

- (i) para qualquer par $\langle a, a \rangle$ em $|A| \times \text{NOM}_L$, se $\langle a, a \rangle \in D_A$ e a é nomeado em A , então $a = a_A$; isto é,

$(\exists x) (\diamond \Box x=a \wedge x=t) \wedge x=b \rightarrow a=b$ (onde b é um nome qual-
quer), Cf., mais adiante, p. 59, teorema T65;⁽¹⁾

(ii) para qualquer objeto a em A , se a não for nomeado em A ,
então, para qualquer nome $\underline{a}$, o par $\langle a, \underline{a} \rangle$ pertence a D_A ;

$$\neg N(t) \rightarrow (\exists x) (\diamond \Box x=a \wedge x=t)$$

(cf., mais adiante, p. 59, teorema T63 e T64).

⁽¹⁾ Lembremos que a fórmula

$$(\exists x) (\diamond \Box x=a \wedge x=t)$$

expressa o fato de que $\langle s^*(t), a \rangle$ pertence ao domínio modal, como vimos anteriormente (Cf., p. 38).

2.3 UM SISTEMA AXIOMÁTICO.

Apresentaremos agora um sistema axiomático que é uma extensão, para a lógica modal quantificacional, do sistema proposicional S5 de Lewis. Esse sistema, que denominaremos de QS5', é caracterizado pelos seguintes postulados:

- (A1) A se A for uma fórmula tautológica⁽¹⁾;
- (A2) $(x)A \rightarrow A^x/t$ onde t é um nome; ou t é uma variável livre para x em A ; ou, ainda, t é um termo livre para x em A e nenhuma ocorrência livre de x em A se dá no escopo de operador modal;
- (A3) $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (x)B)$, se x não ocorre livre em A ;
- (A4) $x=x$
- (A5) $x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n \rightarrow f^n x_1 \dots x_n = f^n y_1 \dots y_n$;
- (A6) $x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n \rightarrow P^n x_1 \dots x_n \rightarrow P^n y_1 \dots y_n$;
- (A7) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
- (A8) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$;
- (A9) $\Diamond(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A) \rightarrow \Box \Diamond(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \wedge A)$;
- (A10) $\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow A))$;
- (A11) $(Ey)(\Diamond \Box y=t \wedge N(y))$, onde y é a primeira variável que não ocorre no termo t ;
- (A12) $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$;

(Observação: em (A9), (A10) e (A12), $x_1, \dots, x_n$ são as distintas variáveis que ocorrem livres em A ou no termo t).

⁽¹⁾ O conceito de fórmula tautológica em linguagens modais é definido de modo usual. (veja-se GALLIN, 1975).

(modus Ponens) $A, A \rightarrow B / B$

(Generalização Universal-G.U.) $A / (x)A$

(Necessitação) $A / \Box A$.

Os conceitos de prova e teorema são definidos da forma usual. O conceito de dedução, por sua vez, é definido da seguinte maneira:

DEFINIÇÃO 2.13 Uma dedução de A a partir de Γ é uma sequência de fórmulas $B_1, \dots, B_n = A$, tal que, para qualquer $k=1, \dots, n$ ao menos uma das seguintes condições é satisfeita:

- (I) B_k é axioma;
- (II) B_k pertence a Γ ;
- (III) existem $j, i < k$, tais que B_j é $B_i \rightarrow B_k$;
- (IV) existe $j < k$, tal que:
 - (i) B_k é $(x)B_j$; ou
 - (ii) B_k é $\Box B_j$ e, para alguns $j_1, \dots, j_m \leq j$, $B_{j_1}, \dots, B_{j_m} = B_j$ é uma prova em QS5' de B_j .

NOTAÇÃO: Sejam L uma linguagem modal e $\{A\} \cup \Gamma \subseteq \text{FORM}_L$. Usaremos as seguintes notações abreviativas.

$\vdash A$: A é um teorema de QS5' ;

$\Gamma \vdash A$: Γ deduz A (i.e., existe uma dedução de A a partir de Γ).

DEFINIÇÃO 2.14. Um subconjunto Γ de FORM_L diz-se consistente se não houver uma fórmula A de L , tal que

$$\Gamma \vdash A \text{ e } \Gamma \vdash \neg A;$$

por extensão, uma fórmula A diz-se consistente se o conjunto $\{A\}$ for consistente.

TEOREMA DA LEGITIMIDADE. Sejam $\{A\} \cup \Gamma$ um subconjunto de FORM_L (onde L é uma Linguagem modal de primeira ordem).

- (i) Se $\vdash A$, então $\models A$.
- (ii) Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \models A$.

DEMONSTRAÇÃO.

(i) é consequência imediata de (ii), tomando-se Γ como o conjunto vazio. E, (ii) é provado por indução no comprimento de uma dada dedução de A a partir de Γ , levando-se em conta as proposições 1.17;1.18;1.14.3;1.22;1.21 do Capítulo 1 e a Proposição 2.12 demonstrada nesse capítulo.

Apresentaremos em seguida uma lista de esquemas de teoremas de QS5' que, além de permitirem uma melhor compreensão do sistema, contribuirão para a demonstração do teorema de completude. Começaremos essa lista por alguns teoremas clássicos e/ou modais usuais, os quais serão enunciados sem as suas respectivas demonstrações. Essas demonstrações podem ser facilmente reconstruídas a partir das demonstrações de MENDELSON, 1963 (teoremas clássicos) e HUGHES e CRESSWELL, 1968 (teoremas modais usuais).

- T1 $A^x/t \rightarrow (Ex)A$, nas condições de (A2);
- T2 $t = t$;
- T3 $(Ex)(x=t)$, onde x não ocorre no termo t ;
- T4 $t_1=t_2 \rightarrow (A^x/t_1 \leftrightarrow A^x/t_2)$ se t_1 e t_2 forem livres para x em A e nenhuma ocorrência livre de x em A se dá no escopo de operador modal;
- T5 $(x)A \leftrightarrow (y)A^x/y$, se y for livre para x em A ;
- T6 $(Ex)A \leftrightarrow (Ey)A$, se y for livre para x em A ;
- T7 $(x)(y)A \leftrightarrow (y)(x)A$;
- T8 $(Ex)(A \wedge B) \rightarrow ((Ex)A \wedge (Ex)B)$;
- T9 $(Ex)(A \wedge B) \leftrightarrow ((Ex)A \wedge B)$, se x não ocorre livre em B ;
- T10 $(Ex)(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow (Ex)B)$, se x não ocorre livre em A ;
- T11 $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((x)A \rightarrow (x)B)$;
- T12 $(x)(A \wedge B) \leftrightarrow ((x)A \wedge (x)B)$;
- T13 $\neg(x)A \leftrightarrow (Ex)\neg A$;
- T14 $\neg(Ex)A \leftrightarrow (x)\neg A$;
- T15 $(x)(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((Ex)A \leftrightarrow (Ex)B)$;
- T16 $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((Ex)A \rightarrow (Ex)B)$;
- T17 $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((Ex)A \rightarrow B)$, se x não ocorre livre em B ;
- T18 $\diamond(A \wedge B) \rightarrow \diamond A \wedge \diamond B$;
- T19 $\Box A \rightarrow (\diamond B \rightarrow \diamond(A \wedge B))$;
- T20 $\Box A \rightarrow (\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box B)$;
- T21 $\diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \diamond B)$;
- T22 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\diamond A \rightarrow \diamond B)$;
- T23 $\neg \Box A \leftrightarrow \diamond \neg A$;
- T24 $\neg \diamond A \leftrightarrow \Box \neg A$;

- T25 Se $\vdash A \rightarrow B$, então $\vdash \diamond A \rightarrow \diamond B$;
- T26 $A \rightarrow \diamond A$;
- T27 $\diamond \Box t = t$;
- T28 $\Box (A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$;
- T29 $\Box (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow \Box B)$;
- T30 $\Box A \rightarrow A$;
- T31 $\diamond A \leftrightarrow \diamond \diamond A$;
- T32 $\Box \diamond A \leftrightarrow \diamond A$, se A for sentença;
- T33 $\diamond \Box A \leftrightarrow \Box A$, se A for sentença;
- T34 Se $\vdash A \rightarrow B$, então $\vdash A \rightarrow \Box B$, se A for uma sentença modalmente fechada (i.e., se A for da forma $\Box C$ ou $\neg \Box C$);
- T35 $\Box (A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \leftrightarrow C')$, onde C' advém de C substituindo algumas ocorrências de A em C que não se dão em uma parte de C da forma $(y)D$ (onde y é livre em B), por ocorrências de B ;
- T36 Se $\vdash A \leftrightarrow B$, então $\vdash C \leftrightarrow C'$, nas condições de T35;
- T37 $\Box t_1 = t_2 \rightarrow (A^x/t_1 \leftrightarrow A^x/t_2)$, se t_1 e t_2 são livres para x em A ;
- T38 Se A é uma sentença, então $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ sse $\Gamma \vdash A \rightarrow B$;
- T39 Se A é uma sentença, então $\Gamma \cup \{A\}$ é consistente sse $\Gamma \not\vdash \neg A$;
- T40 Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \vdash \Box A$, desde que A seja sentença e Γ um conjunto de sentenças modalmente fechadas.

Os teoremas (esquemas) apresentados em seguida são característicos de QS5' e as suas demonstrações serão posteriormente indicadas. Seja A uma fórmula, $x_1, \dots, x_n$ as suas distintas variáveis livres, N a fórmula $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$ e $\underline{a}$ um nome de L (eventualmente a primeira constante de L).

- T41 $\diamond A \leftrightarrow (A \vee \diamond(N \wedge A))$;
- T42 $N(x_k) \rightarrow \Box N(x_k)$;
- T43 $N \rightarrow (\diamond A \rightarrow \Box \diamond A)$;
- T44 $\diamond \Box(N \rightarrow A) \rightarrow \Box(N \rightarrow A)$;
- T45 $\diamond \Box A \wedge A \rightarrow \Box A$;
- T46 $\diamond \Box x=y \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^x/y)$, se y for livre para x em $N \rightarrow A$;
- T47 $\diamond \Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n=y_n \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N \rightarrow A)^{x_1, \dots, x_n}_{y_1, \dots, y_n}))$, se y_k é livre para x_k em $N \rightarrow A$ ($k=1, \dots, n$);
- T48 $\diamond \Box x_1=a_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n=a_n \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}))$, se $a_1, \dots, a_n$ são nomes quaisquer;
- T49 $\diamond(N \wedge \Box A) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box A)$;
- T50 $\diamond N$
- T51 $\diamond \Box A \wedge \diamond \Box B \rightarrow \diamond \Box(A \wedge B)$;
- T52 $\diamond \Box t_1=t_2 \wedge \diamond \Box t_2=t_3 \rightarrow \diamond \Box t_1=t_3$;
- T53 $N(x_k) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow \Box(N(x_k) \rightarrow A))$;
- T54 $N(x) \rightarrow \Box(N(t) \leftrightarrow N(t)^a/x)$, se x não ocorre em $N(t)$ e a não ocorre no termo t ;
- T55 $N(x) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N \rightarrow A)))^a/x$, se x não ocorre em $N \rightarrow A$;
- T56 $N(x) \rightarrow (\diamond(N \wedge A) \rightarrow \Box \diamond(N \rightarrow A))^a/x$, se x não ocorre em $N \rightarrow A$;

- T57 $N(x) \rightarrow (Ez) (\diamond \Box z=t \wedge N(z))^a/x$, se x não ocorre em $N(z)$;
- T58 $(Ez) (\diamond \Box z=t \wedge z=t) \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t)$, se t for livre para x em A e z não ocorrer em t ;
- T59 $N(x) \rightarrow ((z)A \rightarrow A^z/t)^a/x$, se ' $(z)A \rightarrow A^z/t$ ' satisfaz as condições do axioma (A2) e x não ocorre livre nessa fórmula;
- T60 $N(x) \rightarrow (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_m) \rightarrow N(t))^a/x$, onde $x_1, \dots, x_m$ são as distintas variáveis em t e x é livre para a em $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_m) \rightarrow N(t)$;
- T61 Se $\vdash A^x/a$ e a não ocorre em A , então $\vdash N(x) \rightarrow A$;
- T62 Se $\Gamma \vdash A^x/a$ e a não ocorre em A , nem em fórmulas de Γ , então $\Gamma \vdash N(x) \rightarrow A$;
- T63 $x \neq a \wedge \diamond \Box x=a \rightarrow (z) (Ey) (y=x \wedge \diamond \Box y=z)$, onde x, y e z são distintas variáveis e a é um nome qualquer;
- T64 $\neg N(x) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box y=z)$, onde x, y e z são variáveis distintas;
- T65 $t=b \wedge b \neq a \rightarrow (y) (\diamond \Box y=a \rightarrow y \neq t)$, onde b é um nome qualquer e y uma variável que não ocorre no termo t ;
- T66 Se $\Gamma \vdash A \rightarrow t \neq a$ e a é um nome que não ocorre em Γ , nem em A ou t , então $\Gamma \vdash A \rightarrow (y) (Ez) (z=t \wedge \diamond \Box y=z)$, onde z e y são distintas variáveis que não ocorrem no termo t ;
- T67 Se $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg \diamond \Box x=a$ e a não ocorre em Γ , nem em A , então $\Gamma \vdash \neg A$.

Observemos que, em QS5', não vale o metateorema usual:
 se $\Gamma \vdash A^x/a$ e a não ocorre em $\Gamma \cup \{A\}$, então
 $\Gamma \vdash A$;

pois, por exemplo, se a e b são dois nomes distintos, então

$$\Gamma \vdash \diamond a=b \rightarrow \Box \diamond a=b,$$

porém pode ocorrer que

$$\Gamma \not\vdash \diamond x=b \rightarrow \Box \diamond x=b.$$

Todavia, em QS5' vale a regra derivada mais fraca que é enunciada no teorema T62: se algo vale para um objeto nomeado arbitrário a , então vale para todos os objetos nomeados. E, como pode ocorrer que seja justamente a primeira constante de L (e, portanto, ocorre na fórmula $N(t)$), introduzimos os teoremas T54 a T60 a fim de podermos provar T61 e T62. Passaremos agora a indicar como os metateoremas da lista acima podem ser provados em QS5'.

$$T41 \quad \diamond A \leftrightarrow (A \vee \diamond (N \wedge A))$$

DEMONSTRAÇÃO

$$(1) \quad \neg \Box \neg A \leftrightarrow (A \vee \neg \Box (N \rightarrow \neg A)) \quad (A10) \times \text{taut.}^{(1)}$$

$$(2) \quad \diamond A \leftrightarrow (A \vee \diamond (N \wedge A)) \quad (1), (A1), T36 \text{ e def.}$$

$$T42 \quad N(x_k) \rightarrow \Box N(x_k)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$(1) \quad \Box N(x_k) \leftrightarrow (N(x_k) \wedge \Box (N(x_k) \rightarrow N(x_k))) \quad (A10)$$

$$(2) \quad N(x_k) \rightarrow N(x_k) \quad (A1)$$

$$(3) \quad \Box (N(x_k) \rightarrow N(x_k)) \quad (2) \times \text{Neces.}$$

$$(4) \quad N(x_k) \rightarrow \Box N(x_k) \quad (1), (3) \times \text{taut.}$$

⁽¹⁾ Usaremos a expressão 'taut.' ('tautologia') para indicar a aplicação (uma ou mais vezes) da regra modus ponens a instância do esquema (A1).

T43 $N \rightarrow (\diamond A \rightarrow \Box \diamond A)$

DEMONSTRAÇÃO

(1)	$\diamond (N \wedge A) \rightarrow \diamond A$	T18xtaut.
(2)	$\Box \diamond (N \wedge A) \rightarrow \Box \diamond A$	(1)xNeces., (A7)xM.P.
(3)	$\diamond (N \wedge A) \rightarrow \Box \diamond (N \wedge A)$	(A9)
(4)	$\diamond (N \wedge A) \rightarrow \Box \diamond A$	(2), (3)xtaut.
(5)	$\diamond A \rightarrow A \vee \diamond (N \wedge A)$	T41xtaut.
(6)	$(N \wedge A) \rightarrow \diamond (N \wedge A)$	T26
(7)	$(N \wedge A) \rightarrow \Box \diamond A$	(6), (4)xtaut.
(8)	$N \wedge \diamond A \rightarrow \Box \diamond A$	(5), (7), (4)xtaut.
(9)	$N \rightarrow (\diamond A \rightarrow \Box \diamond A)$	(8)xtaut.

T44 $\diamond \Box (N \rightarrow A) \rightarrow \Box (N \rightarrow A)$

DEMONSTRAÇÃO

(1)	$\neg \Box \neg (N \wedge \neg A) \rightarrow \Box \neg \Box \neg (N \wedge \neg A)$	(A9), def.
(2)	$\neg \Box \neg \Box \neg (N \wedge \neg A) \rightarrow \Box \neg (N \wedge \neg A)$	(1)xtaut.
(3)	$\diamond \Box (N \rightarrow A) \rightarrow \Box (N \rightarrow A)$	(2), def $\diamond$, T36.

T45 $\diamond \Box A \wedge A \rightarrow \Box A$

DEMONSTRAÇÃO

(1)	$\diamond \Box A \leftrightarrow (\Box A \vee \diamond (N \wedge \Box A))$	T41
(2)	$\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box (N \rightarrow A))$	(A10)
(3)	$\diamond \Box A \leftrightarrow (\Box A \vee \diamond (N \wedge A \wedge \Box (N \rightarrow A)))$	(1), (2), T36xtaut.
(4)	$\diamond \Box A \rightarrow \Box A \vee \diamond \Box (N \rightarrow A)$	(3), T18xtaut.
(5)	$\diamond \Box (N \rightarrow A) \rightarrow \Box (N \rightarrow A)$	T44
(6)	$\diamond \Box A \rightarrow \Box A \vee \diamond (N \rightarrow A)$	(4), (5)xtaut.
(7)	$\diamond \Box A \wedge A \rightarrow \Box A$	(6), (2)xtaut.

T46 $\diamond \Box x=y \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y})$, se y é livre para x em ' $N \rightarrow A$ '.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\Box x=y \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y})$ T37
- (2) $\diamond \Box x=y \rightarrow \diamond (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y})$ (1)xT25
- (3) $\diamond \Box x=y \rightarrow \diamond ((\Box(N \rightarrow A) \rightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y}) \wedge (\Box(N \rightarrow A)^{x/y} \rightarrow \Box(N \rightarrow A)))$ (2), def. ' $\leftrightarrow$ '
- (4) $\diamond \Box x=y \rightarrow (\diamond (\Box(N \rightarrow A) \rightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y}) \wedge \diamond (\Box(N \rightarrow A)^{x/y} \rightarrow \Box(N \rightarrow A)))$ (3), T18xtaut.
- (5) $\diamond \Box x=y \rightarrow ((\Box \Box(N \rightarrow A) \rightarrow \diamond \Box(N \rightarrow A)^{x/y}) (\Box \Box(N \rightarrow A)^{x/y} \rightarrow \diamond \Box(N \rightarrow A)))$ (4), T21xtaut.
- (6) $\diamond \Box x=y \rightarrow ((\Box(N \rightarrow A) \rightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y}) (\Box(N \rightarrow A)^{x/y} \rightarrow \Box(N \rightarrow A)))$ (5), T44, (A8) taut.
- (7) $\diamond \Box x=y \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x/y})$ (6), def. ' $\leftrightarrow$ '

T47 $\diamond \Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n=y_n \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N \rightarrow A)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}))$; onde $x_1, \dots, x_n$ são distintas variáveis livres em A e, para $k=1, \dots, n$, y_k é livre para x_k em A .

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\diamond \Box x_1=y_1 \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x_1/y_1})$ T46
- $\vdots$
- (n) $\diamond \Box x_n=y_n \rightarrow (\Box(N \rightarrow A)^{x_1/y_1 \dots x_{n-1}/y_{n-1}} \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n})$ T46
- (n+1) $\diamond \Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n=y_n \rightarrow (\Box(N \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(N \rightarrow A)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n})$ (1)a(n)xtaut.
- (n+2) $\Box A \leftrightarrow A \wedge \Box(N \rightarrow A)$ (A10)

$$(n+3) \quad \diamond \Box x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n = y_n \rightarrow$$

$$(\Box A \leftrightarrow A \wedge \Box(N \rightarrow A)^{x_1, \dots, x_n}_{y_1, \dots, y_n}) \quad (n+2) (n+1)x \text{ taut.}$$

T48 $\vdash \diamond \Box x_1 = a_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n = a_n \rightarrow$
 $(\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}))$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as distintas variáveis livres em A e $a_1, \dots, a_n$ são nomes quaisquer.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\diamond \Box x_1 = a_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n = a_n \rightarrow (\Box A \leftrightarrow$
 $(A \wedge \Box(N \rightarrow A)^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}) \quad \text{T47x, G.U., (A2)xtaut.}$
- (2) $N^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \quad \text{(A12)xtaut.}$
- (3) $A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \rightarrow (N^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \rightarrow A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}) \quad \text{(A1)}$
- (4) $(N^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \rightarrow A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}) \rightarrow A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \quad \text{(2)xtaut.}$
- (5) $\Box A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \rightarrow \Box(N \rightarrow A)^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \quad \text{(3)Neces, A7,xtaut.}$
- (6) $\Box(N \rightarrow A)^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \rightarrow \Box A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n} \quad \text{(4)Neces, A7,xtaut.}$
- (7) $\diamond \Box x_1 = a_1 \wedge \dots \wedge \diamond \Box x_n = a_n \rightarrow \Box A \rightarrow (A \wedge$
 $\Box A^{x_1, \dots, x_n}_{a_1, \dots, a_n}) \quad \text{(1), (5), (6)xtaut.}$

T49 $\diamond(N \wedge \Box A) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box A)$

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $N \rightarrow \Box N \quad \text{T42, T25xtaut.}$
- (2) $\Box A \rightarrow \Box \Box A \quad \text{T30 (A8)}$

- (3) $N \wedge \Box A \rightarrow \Box N \wedge \Box \Box A$ (1), (2)xtaut.
- (4) $N \wedge \Box A \rightarrow \Box(N \wedge \Box A)$ (3), T28xtaut.
- (5) $N \wedge \Box A \rightarrow (N \rightarrow \Box A)$ (A1)
- (6) $\Box(N \wedge \Box A) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box A)$ (5) (A7)xtaut.
- (7) $N \wedge \Box A \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box A)$ (4), (6)xtaut.
- (8) $\Diamond(N \wedge \Box A) \rightarrow \Diamond\Box(N \rightarrow \Box A)$ (7), T25
- (9) $\Diamond(N \wedge \Box A) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box A)$ (8), T44.

T50 $\Diamond(N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n))$

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \rightarrow (\Diamond N \leftrightarrow N \vee \Diamond(N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n) \wedge N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n)))$ T47, onde, p/
 $n=1, \dots, n$, y_k
 não ocorre em
 $x_1, \dots, x_n$ e p/
 $k \neq k'$, $y_k \neq y_{k'}$
- (2) $\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \wedge \Diamond(N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n)) \rightarrow \Diamond N$ (1), (A1) x T25xtaut.
- (3) $(\exists y_1) \dots (\exists y_n) (\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \wedge \Diamond(N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n))) \rightarrow \Diamond N$ (2) x G.U, T17xtaut.
- (4) $\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge N(y_1) \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \wedge N(y_n) \rightarrow \Diamond\Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \wedge \Diamond(N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n))$
 (A1), T26xtaut.
- (5) $(\exists y_1) (\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge N(y_1)) \wedge \dots \wedge (\exists y_n) (\Diamond\Box x_n=y_n \wedge N(y_n)) \rightarrow (\exists y_1) \dots (\exists y_n) (\Diamond\Box x_1=y_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\Box x_n=y_n \rightarrow \Diamond(N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n)))$ (4) x G.U x T26, T9xtaut.
- (6) $\Diamond N$ (3), (5), (A11)xtaut.

$$T51 \quad \diamond \Box A \wedge \Box B \rightarrow \diamond \Box(A \wedge B)$$

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $x_1, \dots, x_n$ as variáveis livres em A na ordem crescente, N_1 a fórmula $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$; $y_1, \dots, y_n$ as variáveis livres em B, N_2 a fórmula $N(y_1) \wedge \dots \wedge N(y_n)$ e N a fórmula $N(z_1) \wedge \dots \wedge N(z_p)$, onde $z_1, \dots, z_p$ são variáveis livres em A e B dispostas na ordem crescente.

- (1) $\diamond(N_1 \wedge \Box A) \wedge \diamond(N_2 \wedge \Box B) \rightarrow (\Box N_1 \rightarrow \Box A) \wedge \Box(N_2 \rightarrow \Box B)$ T49 xtaut.
- (2) $N_1 \wedge N_2 \rightarrow N$ (A1)
- (3) $(N_1 \rightarrow \Box A) \wedge (N_2 \rightarrow \Box B) \rightarrow (N_1 \wedge N_2 \rightarrow \Box A \wedge \Box B)$ (A1)
- (4) $\Box(N_1 \rightarrow \Box A) \wedge \Box(N_2 \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box(A \wedge B))$ (3), (2), (A7), T28 taut.
- (5) $\diamond(N_1 \wedge \Box A) \wedge \diamond(N_2 \wedge \Box B) \rightarrow \Box(N \rightarrow \Box(A \wedge B))$ (1), (4) xtaut.
- (6) $\diamond(N_1 \wedge \Box A) \wedge \diamond(N_2 \wedge \Box B) \rightarrow \diamond \Box(A \wedge B)$ (5), T50, T22 xtaut.
- (7) $\Box A \rightarrow \diamond(N_1 \wedge \Box A)$ T50, (A8) T19, (A7) xtaut.
- (8) $\Box B \rightarrow \diamond(N_2 \wedge \Box B)$ T50, (A8) T19, (A7) xtaut.
- (9) $\diamond \Box A \wedge \Box B \rightarrow \diamond \Box(A \wedge B)$ T41, (7) (8), (6) xtaut.

$$T52 \quad \diamond \Box x=y \wedge \Box y=z \rightarrow \Box x=z$$

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\diamond \Box x=y \wedge \Box y=z \rightarrow \diamond \Box(x=y \wedge y=z)$ T51
- (2) $x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$ T2, T4 xtaut.
- (3) $\Box(x=y \wedge y=z) \rightarrow \Box x=z$ (2), xNeces, (A7) taut
- (4) $\diamond \Box(x=y \wedge y=z) \rightarrow \diamond \Box x=z$ (3) xT25
- (5) $\diamond \Box x=y \wedge \Box y=z \rightarrow \diamond \Box x=z$ (1), (4) xtaut.

T53 $\vdash N(x) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow \Box(N(x) \rightarrow A))$

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $A \rightarrow (N(x) \rightarrow A)$ (A1)
 (2) $\Box A \rightarrow \Box(N(x) \rightarrow A)$ (1)xNeces. (A7)xM.P.
 (3) $\Box(N(x) \rightarrow A) \rightarrow (\Box N(x) \rightarrow \Box A)$ (A7)
 (4) $N(x) \rightarrow (\Box(N(x) \rightarrow A) \rightarrow \Box A)$ (3), (T42)xtaut.
 (5) $N(x) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow \Box(N(x) \rightarrow A))$ (2), (4)xtaut.

T54 $\vdash N(x) \rightarrow (N(t) \leftrightarrow N(t)^a/x)$ se x não ocorre em $N(t)$
 e a não ocorre em t .

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $N(x) \wedge N(t) \wedge t=z \rightarrow N(z)$ T6, T4, taut, onde
 z é uma variável
 que não ocorre em
 $N(x)$, nem em $N(t)$.
 (2) $N(x) \wedge N(t) \wedge t=z \rightarrow (\Diamond \Box z=x \rightarrow z=x)$
 (1), T43, T30 xtaut.
 (3) $N(x) \wedge N(t) \wedge t=z \rightarrow (\Diamond \Box z=x \rightarrow t=x)$
 (2), T4, taut.
 (4) $N(x) \wedge N(t) \rightarrow t=x \vee (\Diamond \Box z=x \rightarrow t \neq z)$
 (3)xtaut.
 (5) $N(x) \wedge N(t) \rightarrow t=x \vee (z) (\Diamond \Box z=x \rightarrow t \neq z)$
 (4)xG.U, (A3) taut.
 (6) $N(x) \wedge N(t) \rightarrow t=x \vee (Ex) (z) (\Diamond \Box z=x \rightarrow t \neq z)$
 (5), T1 xtaut.
 (7) $N(x) \rightarrow (N(t) \rightarrow N(t)^a/x)$ (6), T6 xtaut. e
 def. de $N(t)$.
 (8) $N(x) \rightarrow (N(t)^a/x \rightarrow N(t))$ T4, T6, xtaut.
 (9) $N(x) \rightarrow (N(t) \leftrightarrow N(t)^a/x)$ (7), (8) def ' $\leftrightarrow$ ' taut.

T55 $\vdash N(x) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N \rightarrow A)))^a/x$ onde x não ocorre em $N \rightarrow A$.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\Box A^a/x \leftrightarrow (A^a/x \wedge \Box(N \wedge N(x) \rightarrow A^a/x))$ (A10)
- (2) $N(x) \rightarrow (\Box A^a/x \leftrightarrow (A^a/x \wedge \Box(N^a/x \wedge N(x) \rightarrow A^a/x)))$ (1), T54, T35 xtaut.
- (3) $N(x) \rightarrow (\Box A^a/x \leftrightarrow (A^a/x \wedge \Box(N(x) \rightarrow (N^a/x \rightarrow A^a/x))))$ (2), (A1), T36
- (4) $N(x) \rightarrow (\Box A^a/x \leftrightarrow (A^a/x \wedge \Box(N^a/x \rightarrow A^a/x)))$ (3), T56 xtaut.
- (5) $N(x) \rightarrow (\Box A \leftrightarrow (A \wedge \Box(N \rightarrow A)))^a/x$ (4) def.

T56 $\vdash N(x) \rightarrow (\Diamond(N \wedge A) \rightarrow \Box\Diamond(N \wedge A))^a/x$ se x não ocorre em $(N \wedge A)$.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\Diamond(N(x) \wedge N \wedge A^a/x) \rightarrow \Box\Diamond(N(x) \wedge N \wedge A^a/x)$ (A9)
- (2) $N(x) \rightarrow (\Diamond(N(x) \wedge N^a/x \wedge A^a/x) \rightarrow \Box\Diamond(N(x) \wedge N^a/x \wedge A^a/x))$ (1), T54, T35 xtaut.
- (3) $\Box N(x) \rightarrow (\Diamond(N^a/x \wedge A^a/x) \rightarrow \Diamond(N(x) \wedge N^a/x \wedge A^a/x))$ (T19)
- (4) $N(x) \rightarrow (\Diamond(N^a/x \wedge A^a/x) \rightarrow \Box\Diamond(N(x) \wedge N^a/x \wedge A^a/x))$ (2), (3), T42 xtaut.
- (5) $N(x) \rightarrow (\Diamond(N^a/x \wedge A^a/x) \rightarrow \Box\Diamond(N^a/x \wedge A^a/x))$ (4) T53, (A7), T42 taut, T36.
- (6) $N(x) \rightarrow (\Diamond(N \wedge A) \rightarrow \Box\Diamond(N \wedge A))^a/x$ (5), def. de C^a/x .

T57 $\vdash N(x) \rightarrow (Ez) (\diamond \Box z=t \wedge N(z))^a/x$ se x não ocorre em $N(z)$.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $N(x) \rightarrow ((\diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)) \leftrightarrow \diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)^a/x)$ T54, T30 xtaut.
- (2) $N(x) \rightarrow (z) ((\diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)) \leftrightarrow \diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)^a/x)$ (1), xC.U, (A3)xM.P.
- (3) $N(x) \rightarrow ((Ez) (\diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)) \leftrightarrow (Ez) (\diamond \Box z=t^a/x \wedge N(z)^a/x))$ (2), T15 xtaut.
- (4) $N(x) \rightarrow (Ez) (\diamond \Box z=t \wedge N(z))^a/x$ (3), (A11), taut. e def.

T58 $\vdash (Ez) (\diamond \Box z=t \wedge z=t) \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t)$ se t for livre para x em A e z não ocorrer em t .

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $\diamond \Box y=t \wedge y=t \rightarrow \Box y=t$ T45, onde y é a primeira variável que não ocorre em t , nem em A .
- (2) $\Box y=t \rightarrow (A^x/y \leftrightarrow A^x/t)$ T37
- (3) $\diamond \Box y=t \wedge y=t \rightarrow (A^x/y \leftrightarrow A^x/t)$ (1), (2) xtaut.
- (4) $(x)A \leftrightarrow A^x/y$ (A2)
- (5) $\diamond \Box y=t \wedge y=t \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t)$ (3), (4) xtaut.
- (6) $(y) (\diamond \Box y=t \wedge y=t \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t))$ (5)xG.U.
- (7) $(Ey) (\diamond \Box y=t \wedge y=t) \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t)$ (6), T17 xtaut.
- (8) $(Ez) (\diamond \Box z=t \wedge z=t) \rightarrow ((x)A \rightarrow A^x/t)$ (7). T6 xtaut.

T59 $\vdash N(x) \rightarrow ((z)A \rightarrow A^z/t)^a/x$, se $(z)A \rightarrow A^z/t$ satisfaz as condições do esquema (A2) e x não ocorre livre nessa fórmula.

DEMONSTRAÇÃO.

Podemos supor que z ocorre livre em A no escopo de operador modal e que t é um nome contendo ocorrências do nome a ; pois, do contrário, $((z)A \rightarrow A^z/t)^a/x$ seria já uma instância do axioma (A2). E seja t' o termo t^a/x .

$$(1) \quad N(x) \wedge N(y) \rightarrow (\diamond \Box y=t' \rightarrow \Box y=t')$$

(A1).T43,T24,T23, tomando - se y a primeira variável distinta de x que não ocorrem em t .

$$(2) \quad N(x) \wedge N(y) \rightarrow \diamond \Box y=t' \rightarrow y=t' \quad (1) \text{ T30 } \text{xtaut.}$$

$$(3) \quad N(x) \rightarrow (N(y) \wedge \diamond \Box y=t' \rightarrow y=t' \wedge \diamond \Box y=t') \quad (2) \text{ xtaut.}$$

$$(4) \quad N(x) \rightarrow (y) (N(y) \wedge \diamond \Box y=t' \rightarrow y=t' \wedge \diamond \Box y=t') \quad (3) \text{ xG.U., (A3) xtaut.}$$

$$(5) \quad N(x) \rightarrow ((\exists y) (N(y) \wedge \diamond \Box y=t') \rightarrow (\exists y) (y=t' \wedge \diamond \Box y=t')) \quad (4), \text{T16 } \text{xtaut.}$$

$$(6) \quad N(x) \rightarrow (\exists y) (y=t' \wedge \diamond \Box y=t') \quad (5), \text{(A10) xtaut.}$$

$$(7) \quad N(x) \rightarrow ((z)A \rightarrow A^z/t)^a/x \quad (6), \text{T58 } \text{xtaut. def.}$$

$$\text{T60} \quad \vdash N(x) \rightarrow (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t))^a/x,$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são as distintas variáveis livres em t e x é livre para a em $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$.

DEMONSTRAÇÃO

$$(1) \quad N(x) \wedge N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t') \quad (\text{A12}), \text{ onde } t' \text{ é } t^a/x$$

$$(2) \quad N(x) \rightarrow (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t')) \quad (1) \text{xtaut.}$$

$$(3) \quad N(x) \rightarrow (N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t))^a/x$$

(2), T54, T30 def.

T61 Se $\vdash A^x/a$ e a é um nome que não ocorre em A , então
 $\vdash N(x) \rightarrow A$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $A_1, \dots, A_n = A^x/a$ uma prova em QS5' de A^x/a . Podemos supor que x seja livre em A , pois, do contrário, pelo axioma (A1)

$$\vdash N(x) \rightarrow A.$$

Provaremos, então, por indução em n , que

$$\vdash N(x) \rightarrow A.$$

Se $n=0$, então A^x/a é axioma e, além disso, se for instância de um dos esquemas seguintes, (A1), (A3), (A4), (A5), (A6), (A7), ou (A8), então a própria fórmula A é um axioma e, desse modo, por tautologia,

$$\vdash N(x) \rightarrow A.$$

E se A^x/a for instância de um dos esquemas (A2), (A9), (A10), (A11) ou (A12), então o resultado desejado é consequência, respectivamente, dos teoremas T59, T56, T55, T57 e T60.

Se $n > 0$, então temos dois casos possíveis:

(I) existem $j, k, < n$ tais que A_k^x/a é $A_j^x/a \rightarrow A^x/a$.

Pela hipótese indutiva temos que:

$$(i) \quad \vdash N(x) \rightarrow A_j$$

$$(ii) \quad \vdash N(x) \rightarrow (A_j \rightarrow A)$$

Logo, por tautologia

$$\vdash N(x) \rightarrow A$$

(II) existe $j < n$, tal que um dos seguintes casos ocorre:

(a) A^x/a é $(y)A_j^x/a$. Como, por hipótese x é livre em A , x não é y , logo, pela hipótese indutiva,

$$\vdash N(x) \rightarrow A_j$$

e, por G.U., (A3) e tautologia,

$$\vdash N(x) \rightarrow (y)A_j$$

(b) A^x/a é $\Box A_j^x/a$; nesse caso, pela hipótese indutiva,

$$\vdash N(x) \rightarrow A_j$$

$$\vdash \Box(N(x) \rightarrow A_j) \quad (\text{por necessitação})$$

Vale dizer, pelo axioma (A7) e teorema T42,

$$\vdash N(x) \rightarrow \Box A_j.$$

T62 Se $\Gamma \vdash A^x/a$ e a é um nome que não ocorre em A , nem em fórmulas de Γ , então $\Gamma \vdash N(x) \rightarrow A$.

DEMONSTRAÇÃO

Prova-se por indução no comprimento de uma dedução de A^x/a a partir de Γ , de maneira análoga à demonstração do teorema anterior.

T63 $\vdash x \neq b \wedge \Diamond \Box x=b \rightarrow (y)(\exists z)(z=x \wedge \Diamond \Box z=y)$, onde y e z são as duas primeiras variáveis distintas de x , e b um nome qualquer.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $N(x) \rightarrow (\Diamond \Box x=b \rightarrow x=b)$ T33, (A8), T61.
- (2) $x \neq b \wedge \Diamond \Box x=b \rightarrow \neg N(x)$ (1)x taut.
- (3) $x \neq b \wedge \Diamond \Box x=b \rightarrow \neg (x=a \vee (\exists y)(z)(\Diamond \Box z=y \rightarrow z \neq x))$
(2)def 'N(x)'
- (4) $x \neq b \wedge \Diamond \Box x=b \rightarrow (y)(\exists z)(z=x \wedge \Diamond \Box z=y)$
(3), T14, T36 xtaut.

T64 $\vdash \neg N(x) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$, nas condições de T56.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $x \neq a \wedge y=x \wedge \diamond \Box z=y \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$
 T63, T4, x taut., onde a é a primeira constante.
- (2) $(y) (x \neq a \wedge y=x \wedge \diamond \Box z=y \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y))$
 (1)x G.U.
- (3) $(Ey) (x \neq a \wedge y=x \wedge \diamond \Box z=y) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$
 (2), T17 xtaut.
- (4) $x \neq a \wedge (Ey) (y=x \wedge \diamond \Box z=y) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$
 (3), T9 xtaut.
- (5) $x \neq a \wedge (z) (Ey) (y=x \wedge \diamond \Box z=y) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$
 (4), (A2) xtaut., G.U.
- (6) $\neg N(x) \rightarrow (y) (Ez) (z=x \wedge \diamond \Box z=y)$
 (5)x T13, T14x taut., def. 'N(x)'.

T65 $\vdash t=b \wedge b \neq a \rightarrow (y) (\diamond \Box y=a \rightarrow y \neq t)$, onde t é um termo qualquer, y uma variável que não ocorre em t e a e b nomes quaisquer.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $y \neq a \wedge \diamond \Box y=a \rightarrow (x) (Ez) (\diamond \Box x=z \wedge z=y)$
 (T63), tomando-se x e z , respectivamente, a primeira e a segunda variáveis distintas de y .
- (2) $\diamond \Box y=a \wedge y \neq a \rightarrow \neg N(y)$ (1)x taut. def. (N(y)'.
 (A12), T4 xtaut.
- (3) $y=b \rightarrow N(y)$

(4) $t=b \wedge b \neq a \rightarrow (\diamond \Box y=a \rightarrow y \neq t)$ (3), (2), T4 xtaut.

(5) $t=b \wedge b \neq a \rightarrow (y) (\diamond \Box y=a \rightarrow y \neq t)$ (4) x G.U., A3x taut.

T66 Se $\Gamma \vdash A \rightarrow t \neq a$ e a é um nome que não ocorre em Γ , nem em A ou em t , então $\Gamma \vdash A \rightarrow (y) (\exists z) (z=t \wedge \diamond \Box y=z)$.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $A \rightarrow t \neq a$ hipótese
- (2) $N(x) \rightarrow (A \rightarrow t \neq x)$ (1), T62, tomando-se x uma variável que não ocorre em a nem em t .
- (3) $(x) (N(x) \rightarrow (A \rightarrow t \neq x))$ (2) xG.U.
- (4) $N(t) \rightarrow (A \rightarrow t \neq t)$ (3), (A2), pois x não ocorre no escopo de operador modal na fórmula em 3.
- (5) $A \rightarrow \neg N(t)$ (4), T2 xtaut.
- (6) $\neg N(t) \rightarrow (y) (\exists z) (z=t \wedge \diamond \Box y=z)$
T64 x G.U., A2 xtaut
- (7) $A \rightarrow (y) (\exists z) (z=t \wedge \diamond \Box y=z)$ (6), (5) xtaut.

T67 Se $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg \diamond \Box x=a$ e a não ocorre em Γ , nem em A , então $\Gamma \vdash \neg A$.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) $A \rightarrow \neg \diamond \Box x=a$ hipótese
- (2) $N(y) \rightarrow (A \rightarrow \neg \diamond \Box x=y)$ (1), T62, tomando-se y a primeira variável distinta de x que não ocorre em A .

- (3) $A \rightarrow (N(y) \rightarrow \neg \diamond \Box x=y)$ (2) xtaut.
- (4) $A \rightarrow (y) \neg (N(y) \wedge \diamond \Box x=y)$ (3) xG.U., A3xM.P., xtaut.
- (5) $\neg A$ (4), All, T15 xtaut.

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DE COMPLETUDE PARA QS5'

Começemos por introduzir alguns conceitos, lemas e notações auxiliares relevantes para a demonstração da completude de QS5'. No que se segue, L é uma linguagem modal, $\{A, B, \dots\}$, Γ e Δ são subconjuntos de $FORM_L$ e Δ é finito.

NOTAÇÃO: Se Δ é não vazio,

$Cnj(\Delta)$

denota a fórmula

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n$$

onde $A_1, \dots, A_n$ são todas as fórmulas em Δ , dadas em alguma ordem padrão; e se Δ for o conjunto vazio,

$Cnj(\Delta)$

denota a fórmula

$$(Ex)(x=x),$$

onde x é a primeira variável. E,

$\exists A$

denota a fórmula

$$(Ex_1) \dots (Ex_n)A,$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são todas as variáveis livres em A , na ordem crescente.

DEFINIÇÃO 3.1 O conjunto Γ diz-se:

(i) existencial consistente se para qualquer

subconjunto finito Δ de Γ , a fórmula

$$\text{Cnj}(\Delta)$$

for consistente;

(ii) maximal, se para qualquer fórmula A de L ,
 $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$.

LEMA 3.1.1 Se Γ é um conjunto existencial
 consistente e maximal, então, para quaisquer
 fórmulas A e B de L , vale que:

- (i) Se $\vdash A$, então $A \in \Gamma$;
- (ii) $A \rightarrow B \in \Gamma$ sse $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$;
- (iii) $A \in \Gamma$ sse $\neg A \notin \Gamma$.

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata da definição anterior.

DEFINIÇÃO 3.2 Uma sequência $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ de
 conjuntos de fórmulas de L diz-se uma sequên-
cia canônica em L para Γ se Σ satisfaz as se-
 guintes propriedades:

- (i) $\Gamma \subseteq \Sigma_0$; e, para todo i em ω , temos que:
- (ii) Σ_i é um conjunto existencial consistente
 e maximal;
- (iii) para qualquer A em FORM_L , $(\exists x)A \in \Sigma_i$ sse

para algum nome $\underline{a}$ e para alguma variável y livre para x em A , $A^x/y \wedge \diamond \Box y = a \in \Sigma_i$;
 (iv) para qualquer sentença A de L , $\diamond A \in \Sigma_i$ sse existe um j em ω , tal que $A \in \Sigma_j$.

Nos lemas e definições seguintes $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ é uma sequência canônica em L para Γ .

LEMA 3.2.1 Para qualquer i em ω , Σ_i satisfaz às seguintes propriedades:

(v) para qualquer variável x , existe um nome $\underline{a}$, tal que $\diamond \Box x = a \in \Sigma_i$;

(vi) para qualquer termo t de L , $t = b \in \Sigma_i$, para algum nome $\underline{b}$ em L ou, para todo nome $\underline{a}$ em L ,

$(\exists y)(y = t \wedge \diamond \Box y = a) \in \Sigma_i$ (onde y não ocorre em t);

(vii) para qualquer A em FORM_L , $(x)A \in \Sigma_i$ sse $A^x/y \in \Sigma_i$, para toda variável y livre para x em A ;

(viii) para qualquer sentença A de L , $\Box A \in \Sigma_i$ sse $A \in \Sigma_j$, para todo j em ω .

DEMONSTRAÇÃO.

(v). Como Σ_i é maximal e existencial consistente, pelo Lema 3.1.1 e teorema T27,

$\diamond \Box x = x \in \Sigma_i$;

logo, pelo teorema T1,

$(\exists y)(\diamond \Box y = x) \in \Sigma_i$ (onde y é distinto de x).

Portanto, pela propriedade (iii) de Σ_i , existe um nome $\underline{a}$ e uma variável y , tal que

$$\diamond \Box y=x \wedge \diamond \Box y=a \in \Sigma_i$$

e, pelo teorema T52,

$$\diamond \Box x=a \in \Sigma_i.$$

(vi) Pelo teorema T3 e Lema 3.1.1

$$(\exists x)(t=x) \in \Sigma_i \quad (\text{onde } x \text{ não ocorre em } t).$$

Logo, pela propriedade (iii) de Σ_i , para alguma variável y e algum nome a

$$t=y \wedge \diamond \Box y=a \in \Sigma_i;$$

desse modo, pelo teorema T63, levando-se em conta a propriedade (ii) de Σ_i e o Lema 3.1.1,

$$y=a \in \Sigma_i \text{ ou } (z)(\exists x)(x=y \wedge \diamond \Box z=x) \in \Sigma_i$$

(podemos supor que nem z , nem x ocorrem em t ou em y)

Portanto, pelo teorema T4,

$$t=a \in \Sigma_i \text{ ou } (z)(\exists x)(x=t \wedge \diamond \Box z=x) \in \Sigma_i$$

Logo, levando-se em conta a propriedade (ii) de Σ_i ,

$$t=a \in \Sigma_i \text{ ou para todo nome } a,$$

$$(\exists x)(x=t \wedge \diamond \Box a=x)$$

(vii) Consequência da propriedade (iii) de Σ_i , levando-se em conta o item (v), provado acima.

(viii) Consequência imediata da propriedade (iv) de Σ_i .

DEFINIÇÃO 3.3 Dado um i em ω , definimos uma relação em TERM_L , denotada por ' $\sim_i$ ' pondo, para quaisquer t_1 e t_2 em TERM_L ,

$$t_1 \sim_i t_2 \text{ sse } t_1 = t_2 \in \Sigma_i.$$

OBSERVAÇÃO. Decorre do lema anterior que $\sim_i$ é uma relação de equivalência em TERM_L . Desse modo, podemos denotar por $[t]_i$ a classe de equivalência do termo t pela relação $\sim_i$. Além disso, temos também, graças aos axiomas da igualdade, que $\sim_i$ é uma relação de congruência para cada símbolo funcional e cada símbolo para predicado de L .

DEFINIÇÃO 3.4 A estrutura modal canônica $M = \langle B_M, (A_i)_{i \in I_M} \rangle$ para L com respeito a Σ é definida da seguinte maneira:

(I) $B_M = \langle \omega, 0, \omega^2 \rangle$;

(II) para cada i em ω , A_i é caracterizada do seguinte modo:

(i) $|A_i| = \text{TERM}_L / \sim_i$ (i.e., o conjunto quociente de TERM_L pela relação $\sim_i$);

(ii) para qualquer símbolo funcional f^n de L

$$f^n_{A_i} [t_1]_i \dots [t_n]_i = [f^n t_1 \dots t_n]_i$$

(iii) para qualquer símbolo para predicado P^n ,

$$P^n_{A_i} = \{ \langle [t_1]_i \dots [t_n]_i \rangle \in |A_i|^n,$$

$$P^n t_1 \dots t_n \in \Sigma_i \}.$$

LEMA 3.4.1 Se M é a estrutura modal canônica para L com respeito a Γ , então, para qualquer i em ω , a) para qualquer par $\langle [t]_i, a \rangle \in D_{A_i}$, existem infinitas variáveis, $x_1, \dots, x_n, \dots$ tais que, para $k=1, \dots, n, \dots$

$$x_k \in [t]_i \text{ e } \diamond \Box_{x_k} a \in \Sigma_i;$$

b) para qualquer variável y , existe um nome a , tal que $\langle [y]_i, a \rangle \in D_{A_i}$

DEMONSTRAÇÃO.

(a) Suponhamos que $\langle [t]_i, a \rangle \in D_{A_i}$; desse modo,

$$(\exists y)(y=t \wedge \diamond \Box y=a) \in \Sigma_i.$$

Pois, ou $a \in [t]_i$ (i.e., $a=t \in \Sigma_i$) e, nesse caso, $a=t \wedge \diamond \Box a=a \in \Sigma_i$ e, pela propriedade (iii) de Σ_i ,

$$(\exists y)(y=t \wedge \diamond \Box y=a) \in \Sigma_i.$$

Ou, para todo nome b , $b \notin [t]_i$ (i.e., $b=t \notin \Sigma_i$) e, nesse caso, pela propriedade (vi) de Σ_i (Lema 3.2.1),

$$(\exists y)(y=t \wedge \diamond \Box y=a)$$

Agora, pelo teorema clássico

$$(\exists y)A \rightarrow (\exists y)(A \rightarrow (x_1) \dots (x_n)(y=y))$$

e propriedade (ii) de Σ , temos que, para qualquer inteiro positivo n ,

$$(E\tilde{y}) (y=t \wedge \diamond \Box y=a \wedge (x_1) \dots (x_n) (y=y)) \in \Sigma_i,$$

onde $\tilde{y}$ não ocorre na lista $x_1, \dots, x_n$. Portanto, pela propriedade (iii) de Σ , para qualquer inteiro positivo n , existe uma variável $\tilde{y}$ não ocorrendo na lista $x_1, \dots, x_n$, tal que

$$y=t \wedge \diamond \Box y=a \in \Sigma_i$$

$$\text{i.e., } y \in [t]_i \text{ e } \diamond \Box y=a \in \Sigma_i.$$

(b) Seja $\tilde{y}$ uma variável; pelo Lema 3.2.1(v), existe um nome $\underline{a}$, tal que

$$\diamond \Box \tilde{y} \underline{a} \in \Sigma_i.$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que $\langle [y]_i, \underline{a} \rangle \notin D_{\Lambda_i}$. Logo, existe um nome $\underline{b}$ em L , tal que $b_{\Lambda_i} = [y]_i$ e $b_{\Lambda_i} \neq \underline{a}_{\Lambda_i}$. Vale dizer,

$$b=y \wedge b \neq \underline{a} \in \Sigma_i$$

Desse modo, pelo teorema T65,

$$\diamond \Box y=a \notin \Sigma_i \text{ (contradição).}$$

As definições e os lemas anteriores nos dão os elementos básicos para a demonstração da completude de QS5' com respeito à semântica anteriormente determinada. Cabe, ainda, demonstrar que:

a) para todo subconjunto consistente Γ de SENT_L , existe uma sequência canônica Σ em L' para Γ , onde L' é uma extensão em constantes de L (LEMA SINTÁTICO); e

b) a estrutura modal canônica para L com respeito à sequência canônica Σ para Γ em L' é, de fato, um modelo para Γ em L (LEMA SEMÂNTICO).

Pois, uma vez demonstrado os itens (a) e (b), teremos que todo conjunto consistente de sentenças de L tem modelo, o qual é uma estrutura modal para alguma extensão em constantes L' , de L . O teorema de completude poderá, então, ser derivado dessa afirmação da maneira usual.

A fim de demonstrarmos o item (a) introduzimos, nas definições seguintes, novos conceitos auxiliares.

DEFINIÇÃO 3.5 Seja $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in I}$ uma sequência de conjuntos de fórmulas de L .

(i) Σ diz-se relativamente consistente se para quaisquer subconjuntos finitos Δ_i de Σ_i (onde i varia em I), o conjunto

$$\{ \diamond \text{Cnj}(\Delta_i) : i \in I \}$$

for consistente.

(ii) Uma fórmula A de L diz-se relativamente inconsistente com Σ , se a sequência obtida de Σ acrescentando-se A ao conjunto Σ_i for relativamente consistente.

DEFINIÇÃO 3.6 Seja E uma enumeração

$$(i_0, A^0), (i_1, A^1), \dots$$

do conjunto $\omega \times \text{FORM}_L$ e Γ um subconjunto de SENT_L , tal que existem infinitas constantes individuais em NOM_L , que não ocorrem em Γ (i. e., não ocorrem em sentenças de Γ). A proto-sequência canônica, $\Sigma^{\Gamma, E} = (\Sigma^k)_{k \in \omega}$, induzida por Γ e E é, então, definida da seguinte maneira.

Para cada k em ω , $\Sigma^k = (\Sigma_i^k)_{i \in \omega}$ é uma sequência de conjuntos de fórmulas de L , satisfazendo:

- (i) Σ_i^k não é conjunto vazio ($\emptyset$) apenas para um número finito de valores de i em ω ;
- (ii) existem infinitas constantes individuais que não ocorrem em fórmulas de conjuntos em Σ^k ;
- (iii) para qualquer $i \in \omega$, existem infinitas variáveis que não ocorrem livres em fórmulas pertencentes ao conjunto Σ_i^k .

A sequência $\Sigma^{\Gamma, E} = (\Sigma^k)_{k \in \omega}$ é definida por indução em k como segue.

(A) Se $k=0$, então $\Sigma_0^0 = \Gamma$ e $\Sigma_i^0 = \emptyset$, para todo $i > 0$.

(B) Suponhamos, agora, Σ^k definida de forma a satisfazer as condições (i), (ii) e (iii) acima e seja (i, A) o par (i_k, A^k) em E . Temos, basicamente, dois casos possíveis.

Caso 1: A não é relativamente i -consistente com Σ^k .

Nesse caso, Σ^{k+1} é igual a Σ^k .

Caso 2: A é relativamente i -inconsistente com Σ^k .

Sub-caso 2.1: A não é da forma $(\exists x)B$, nem, para alguma sentença B , da forma $\diamond B$.

Nesse caso, Σ^{k+1} diferirá de Σ^k , no máximo, pelo i -ésimo elemento e $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup \{A\}$.

Sub-caso 2.2: A é da forma $(Ex)B$.

Nesse caso, então seja a a primeira constante de L que não ocorre em fórmulas pertencentes a conjuntos em Σ^k e y a primeira variável livre para x em B que não ocorre livre em Σ_i^k . Então, Σ^{k+1} diferirá de Σ^k , no máximo, pelo i -ésimo elemento e $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup \{(Ex)B, B^x/y \wedge \diamond \Box a=y\}$.

Sub-caso 2.3: A é da forma $\diamond B$, onde B é sentença.

Nesse caso, Σ_i^{k+1} é $\Sigma_i^k \cup \{\diamond B\}$ e, para o menor j em ω , tal que $\Sigma_j^k = \emptyset$, $\Sigma_j^{k+1} = \{B\}$.

LEMA 3.7 (LEMA SINTÁTICO). Se Γ é um conjunto consistente de sentenças de L , então existe uma sequência canônica $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ para Γ em alguma extensão em constantes L' de L .

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam L' uma extensão em constantes de L contendo infinitas constantes novas (i. e., que não ocorrem em Γ), E uma enumeração de ω XFORM_L e $\Sigma^{\Gamma, E}$ a proto-sequência canônica induzida por Γ e E . Construimos a sequência $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ a partir de $\Sigma^{\Gamma, E}$ pondo, para ca

da i em ω , $\Sigma_i = \bigcup_{k \in \omega} \Sigma_i^k$. Os lemas seguintes provam, então, que essa sequência é uma sequência canônica para Γ em L' .

LEMA 3.7.1 Para qualquer k em ω , Σ^k é relativamente consistente.

DEMONSTRAÇÃO.

Por indução em k , como segue.

(i) $k=0$

Se Σ^k fosse relativamente inconsistente, então existiriam sentenças $A_1, \dots, A_n$ em Γ , tais que

$$\vdash \neg \diamond \exists (A_1 \wedge \dots \wedge A_n),$$

visto que o único conjunto não vazio em Σ^0 é $\Sigma^0 = \Gamma$. Porém, como $A_1, \dots, A_n$ são sentenças, temos que

$$\vdash \neg \diamond (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$$

Desse modo, graças ao teorema T22 e levando - se em conta o postulado (A8),

$$\vdash \neg (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$$

Vale dizer, Γ não seria consistente, o que contradiz a hipótese do Lema 3.7.

(ii) Suponhamos que Σ^k seja relativamente consistente e seja (i, A) o par (i_k, A^k) . Obviamente, no Caso 1 (A não é relativamente i -consis

tente com Σ^k), o resultado visado decorre da hipótese acima. Além disso, se A não for da forma $(\exists x)B$, nem, para alguma sentença B, da forma $\diamond B$, então o resultado segue diretamente da hipótese sobre esse caso, levando-se em conta a hipótese indutiva. Assim consideramos os demais casos.

Sub-caso 2.2 A é da forma $(\exists x)B$.

Sejam a a primeira constante de L que não ocorre em Σ^k e y a primeira variável livre para x em B que não ocorre livre em Σ_i^k e suponhamos que Σ^{k+1} seja relativamente inconsistente. Assim, existem subconjuntos finitos Δ_j 's de Σ_j^k 's (onde j varia em ω), tais que o conjunto

$$\{ \diamond \exists \text{Cnj}(\Delta_j) : j \neq i \} \cup \{ \diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\exists x)B \wedge B^x/y \wedge \diamond \Box y=a) \}$$

é inconsistente.

Vale dizer, se tomarmos $\Delta = \{ \diamond \exists \text{Cnj}(\Delta_j) : j \neq i \}$, temos que:

- (1) $\Delta \vdash \neg \diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\exists x)B \wedge \diamond \Box y=a \wedge B^x/y)$
(T39)
- (2) $\Delta \vdash \Box \neg \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\exists x)B \wedge \diamond \Box y=a \wedge B^x/y)$
(T23)
- (3) $\Delta \vdash \neg \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\exists x)B \wedge \diamond \Box y=a \wedge B^x/y)$
(T30, A1)
- (4) $\Delta \vdash \forall \neg (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\exists x)B \wedge \diamond \Box y=a \wedge B^x/y)$
(T14)

- (5) $\Delta \vdash \neg (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \wedge \diamond \Box y=a \wedge B^X/y)$
(A2)
- (6) $\Delta \vdash \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \wedge B^X/y \rightarrow \neg \diamond \Box y=a$
(4xtaut.)
- (7) $\Delta \vdash \neg (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \wedge B^X/y)$
(T67)
- (8) $\Delta \vdash \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \rightarrow \neg B^X/y$
(A1)
- (9) $\Delta \vdash \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \rightarrow (y) \neg B^X/y$
(G.U., A3, taut, pois
y não ocorre livre em Σ_i^k).
- (10) $\Delta \vdash \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B \rightarrow (x) \neg B$
(T5, pois y é li-
vre para x em B).
- (11) $\Delta \vdash \text{Cnj}(\Delta_i) \rightarrow \neg (\text{Ex})B$ (T14)
- (12) $\Delta \vdash \neg (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B)$ (taut. x G.U.)
- (13) $\Delta \vdash \neg \diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge (\text{Ex})B)$ (T40, T14, T23.)

Isto é, contradizendo a hipótese acerca do caso 2, A não é relativamente i-consistente com Σ^k .

Sub-caso 2.2 A é da forma $\diamond B$, onde B é sentença.

Seja, então, j o menor valor em ω , tal que $\Sigma_j^k = \emptyset$ e suponhamos, por absurdo, que Σ^{k+1} seja relativamente inconsistente.

Logo, existem subconjuntos finitos $\Delta_{\ell, s}$
 $\subseteq \Sigma_{\ell}^k$ (onde $\ell \in \omega$), tais que o conjunto

$$\{\diamond \exists \text{Cnj}(\Delta_\ell) : \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j\} \cup \{\diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B)\} \cup \{\diamond \exists B\}$$

é inconsistente.

Vale dizer, se tomarmos $\Delta = \{\diamond \exists \text{Cnj}(\Delta_\ell) : \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j\}$, temos que:

- (1) $\Delta \vdash \diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B) \rightarrow \neg \diamond \exists B$ (T38)
- (2) $\Delta \vdash \diamond (\exists \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B) \rightarrow \neg \diamond B$ (1.T9, pois B é sentença)
- (3) $\Delta \vdash \diamond (\exists \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B) \rightarrow \diamond \diamond B$ (T18, taut.)
- (4) $\Delta \vdash \diamond (\exists \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B) \rightarrow \diamond B \wedge \neg \diamond B$
(3, T31, 2, taut.)
- (5) $\Delta \vdash \neg \diamond (\exists \text{Cnj}(\Delta_i) \wedge B)$

Isto é, A não seria relativamente i-consistente com Σ^k , o que contradiz a hipótese acerca do caso 2.

LEMA 3.7.2 A sequência $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ é relativamente consistente.

DEMONSTRAÇÃO.

Segue do lema anterior da maneira usual.

LEMA 4.7.3 Para qualquer i em ω , Σ_i é existencial-consistente.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos, por absurdo, que para algum

i em ω , Σ_i não seja existencial-consistente. Logo, existe um conjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma_i$, tal que

$$\vdash \neg \exists \text{Cnj}(\Delta)$$

E, portanto, em virtude do teorema T22 e da regra de necessitação,

$$\vdash \neg \diamond \exists \text{Cnj}(\Delta).$$

Consequentemente, tomando-se um k suficientemente grande, de sorte que $\Delta \subseteq \Sigma_i^k$, temos que a sequência Σ^k não é relativamente consistente, o que contradiz o Lema 3.7.1.

LEMA 3.7.4 Para qualquer i em ω e qualquer fórmula A de L' , $A \in \Sigma_i$ sse A é relativamente i -consistente com Σ .

DEMONSTRAÇÃO.

A implicação da esquerda para a direita segue do Lema 3.7.2 e da definição de relativamente i -consistente. A inversa, por sua vez, segue diretamente da construção de Σ . Pois, se A é relativamente i -consistente com Σ , então A é relativamente i -consistente com Σ^k , onde k é tal que (i, A) é o par (i_k, A^k) . E, desse modo, $A \in \Sigma_i^{k+1} \subseteq \Sigma_i$.

LEMA 3.7.5 Para qualquer i em ω e qualquer fórmula A de L' , temos que:

$$A \in \Sigma_i \text{ sse } \neg A \notin \Sigma_i.$$

DEMONSTRAÇÃO.

A implicação da esquerda para a direita segue do Lema 3.7.3, visto que

$$\neg \exists (A \wedge \neg A)$$

é o teorema de QS5'.

Por outro lado, suponhamos que $A \notin \Sigma_i$ e que $\neg A \notin \Sigma_i$. Então, pelo Lema 3.7.4, existem subconjuntos finitos Δ_j 's, Δ_j' 's $\subseteq \Sigma_j$'s (onde $j \in \omega$), tais que os seguintes conjuntos

$$\{\diamond \exists \text{Cnj}(\Delta_\ell) : \ell \neq i\} \cup \{\diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta_i) \wedge A)\}$$

$$\{\diamond \exists \text{Cnj}(\Delta'_\ell) : \ell \neq i\} \cup \{\diamond \exists (\text{Cnj}(\Delta'_i) \wedge \neg A)\}$$

são inconsistentes.

Obviamente, podemos tomar para cada j em ω , um subconjunto $\bar{\Delta}_j$ de Σ_j , tal que $\bar{\Delta}_j = \Delta_j \cup \Delta'_j$. Assim, temos que os conjuntos

$$\{\diamond \exists \text{Cnj}(\bar{\Delta}_\ell) : \ell \neq i\} \cup \{\diamond \exists (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge A)\}$$

$$\{\diamond \exists \text{Cnj}(\bar{\Delta}_\ell) : \ell \neq i\} \cup \{\diamond \exists (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge \neg A)\}$$

são inconsistentes.

Vale dizer, se tomarmos $\Delta = \{\diamond \exists \text{Cnj}(\bar{\Delta}_\ell) : \ell \neq i\}$ temos que:

$$(1) \quad \Delta \vdash \neg \diamond \exists (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge A) \wedge \neg \diamond \exists (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge \neg A)$$

$$\neg A) \quad (T39)$$

$$(2) \quad \Delta \vdash \Box \forall \neg (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge A) \wedge \Box \forall \neg (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge \neg A)$$

$$\wedge \neg A) \quad (2, T23, T14, T36)$$

$$(3) \quad \Delta \vdash \Box \forall (\neg (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge A) \wedge \neg (\text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \wedge \neg A))$$

$$\neg A) \quad (T12, T25)$$

$$(4) \quad \Delta \vdash \Box \forall \neg \text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \quad (\text{T36, taut.})$$

$$(5) \quad \Delta \vdash \neg \Diamond \exists \text{Cnj}(\bar{\Delta}_i) \quad (\text{T23, T14})$$

Isto é, contradizendo o Lema 3.6.2, Σ não seria relativamente consistente.

LEMA 3.7.6 Para qualquer i em ω e qualquer sentença A de L' , $\Diamond A \in \Sigma_i$ sse $A \in \Sigma_j$, para algum j em ω .

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $\Diamond A \in \Sigma_i$. Logo, $\Diamond A$ é relativamente i -consistente com Σ^k , onde (i_k, A^k) é o par $(i, \Diamond A)$. Portanto, por construção, temos que, para algum j em ω , $A \in \Sigma_j^{k+1} \subseteq \Sigma_j$.

Por outro lado, suponhamos que $\Diamond A \notin \Sigma_i$. Assim, pelos Lemas 3.1.1 e 3.7.5 e teorema T22, $\Box \neg A \in \Sigma_i$.

Ora, se $A \in \Sigma_j$, para algum j em ω , então Σ seria relativamente inconsistente, pois, uma vez que A é sentença, segue-se do teorema T30 que o conjunto

$$\{\Diamond \Box \neg A, \Diamond A\}$$

é inconsistente.

LEMA 3.7.7 Para qualquer i e ω e qualquer fórmula A de L , $(\text{Ex})A \in \Sigma_i$ sse para algum nome $\underline{a}$ de L e alguma variável y livre para x em $A, A^x/y \wedge \Diamond \Box y = \underline{a} \in \Sigma_i$.

DEMONSTRAÇÃO.

A implicação da direita para a esquerda segue dos teoremas T1 e T8, levando-se em conta os Lemas 3.1.1 e 3.7.5. Já a inversa, é consequência imediata da construção de Σ . Pois, sejam $(i., (Ex)A)$ o par (i_k, A^k) de E , a a primeira constante de L que não ocorre em Σ^k e y a primeira variável livre para x em A que não ocorre livre em Σ_i^k . Assim, se $(Ex)A \in \Sigma_i$, então, pelo Lema 3.7.4 é relativamente i -consistente com Σ e, por conseguinte, é relativamente i -consistente com Σ^k ; assim, por construção,

$$A^x/y \wedge \diamond \Box y=a \in \Sigma_i^{k+1} \subseteq \Sigma_i.$$

Com a prova desse último lema auxiliar finda-se a demonstração do Lema Sintático. A fim de apresentarmos essa demonstração adaptamos para QS5' o método desenvolvido em GALLIN, 1975. Passemos, agora, à demonstração do Lema Semântico.

LEMA 3.8 (LEMA SEMÂNTICO). Sejam $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ uma sequência canônica para Γ em L , M a estrutura modal canônica para L com respeito a Γ , $i \in \omega$ e s uma sequência em D_{Λ_i} , tal que, para todo k em ω , s tem no k -ésimo índice, o par $\langle [x_k]_i, a \rangle$, onde $\diamond \Box x_k=a \in \Sigma_i$ e x_k é a k -ésima variável. Nessas condições, para qualquer fórmula A de L , vale que

$$M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } A \in \Sigma_i.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Por indução na complexidade de A da maneira que se segue:

(i) A é atômica.

A demonstração é, nesse caso, análoga à clássica e, por isso, será aqui omitida.

(ii) A é $\neg B$ ou $B \rightarrow C$.

Consequência imediata da hipótese indutiva, juntamente com a propriedade (ii) de Σ e o Lema 3.1.1.

(iii) A é $\Box B$.

Nesse caso, sejam $x_1, \dots, x_n$ as variáveis livres de A e $a_1, \dots, a_n$ os nomes em L , tais que, para $k=1, \dots, n$, a_k é a s -instância de x_k .

Assim, pela hipótese acerca da sequência s , temos que

$$\diamond \Box x_k = a_k \in \Sigma_i,$$

para $k=1, \dots, n$. E, graças ao teorema T48, levando-se em conta a propriedade (ii) de Σ e o Lema 3.1.1, temos que

$$\Box B \in \Sigma_i \text{ sse } B \in \Sigma_i \text{ e } \Box B^{(s)} \in \Sigma_i$$

(onde $B^{(s)}$ é a s -instância de B , i.e. $B_{a_1, \dots, a_n}^{x_1, \dots, x_n}$) e, pela propriedade (iv) de Σ

$\Box B \in \Sigma_i$ sse $B \in \Sigma_i$ e $B^{(s)} \in \Sigma_j$, para todo j em ω .

$$\text{sse } M, i, s \text{ sat } B \text{ e } M, j \models B^{(s)},$$

para todo j em ω (por hipótese indutiva)

sse $M, i, s \text{ sat } \Box B$ (pela Proposição 1.14.2) pois, $R_M = \omega^2$. Observemos que $B^{(s)}$ é sentença, portanto, para qualquer j em ω e qualquer sequência s_j em D_{A_j} , s_j satisfaz, com respeito a $B^{(s)}$, as condições da hipótese indutiva.

(iv) $A \text{ é } (x)B$.

$M, i, \bar{s} \text{ sat } A$ sse $M, i, \bar{s} \text{ sat } B$ para toda sequência $\bar{s}$.k-variante de s

sse $M, i, s \text{ sat } B^x/y$ para toda variável y livre para x em A

sse $B^x/y \in \Sigma_i$ para toda variável y livre para x em B

sse $A \in \Sigma_i$.

Pois, pelo Lema 3.4.1, para toda variável y livre para x existe uma sequência $\bar{s}$ k-variante de s , tal que $y \in \bar{s}^*(x)$ e $\diamond \Box y=b \in \Sigma_i$ (onde b é a $\bar{s}$ -instância de x) e vice-versa (i.e., para todo par $\langle [t]_i, b \rangle \in D_{A_i}$ existe uma variável y livre para x em A , tal que $\diamond \Box y=b \in \Sigma_i$ e $y \in [t]_i$). Desse modo, pela Proposição 1.15, tomando-se y e $\bar{s}$ satisfazendo a condição acima temos que

$M, i, \bar{s} \text{ sat } B$ sse $M, i, s \text{ sat } B^x/y$

Logo, por hipótese indutiva

$M, i, \bar{s} \text{ sat } B$ sse $B^x/y \in \Sigma_i$.

COROLÁRIO 3.8.1 A estrutura modal canônica para L com respeito a Σ é um modelo para Γ em L .

DEMONSTRAÇÃO

Consequência imediata do lema anterior, pois, pelo Lema 3.4.1, existe uma sequência s em D_{A_0} satisfazendo as condições desse lema. E, sendo A uma sentença,

$$M, 0, s \text{ sat } A \text{ sse } M, 0 \models A$$

Logo, visto que $\Gamma \subseteq \text{SENT}_L$ e $\Gamma \subseteq \Sigma_0$
 $M \models \Gamma$.

TEOREMA DA COMPLETUDE. Sejam L uma linguagem modal, Γ e A , respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula de L . Nessas condições, vale:

- (i) Se $\models A$, então $\vdash A$.
- (ii) Se $\Gamma \models A$, então $\Gamma \vdash A$.
- (iii) Se Γ é um conjunto consistente de sentenças (fórmulas fechadas), então Γ tem modelo em L' para alguma extensão simples $\langle L', \Sigma' \rangle$ de L .

DEMONSTRAÇÃO.

Inicialmente mostraremos que (iii) implica (ii) que implica (i). Obviamente, (ii) implica (i), pois basta tomar $\Gamma = \emptyset$. Cabe mostrar que (iii) implica (ii). Para tanto, suponhamos que

$$\Gamma \models A$$

Podemos supor que tanto as fórmulas em Γ , como A são sentenças, pois, pela Proposição 1.18

$$\Gamma \models A \quad \text{sse} \quad \forall \Gamma \models \forall A$$

(onde $\forall \Gamma = \{\forall C : C \in \Gamma\}$)

Agora, suponhamos, por absurdo, que

$$\Gamma \not\models A.$$

Logo, pelo teorema T35, o conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é consistente. Portanto, por (iii), este conjunto tem modelo em L' , para alguma extensão em constantes L' de L . Consequentemente, por definição de QS5' - consequência,

$$\Gamma \not\models A.$$

Finalmente, (iii) segue do Corolário 3.

7.1. Pois, se Γ é um subconjunto consistente de SENT_L , então, pelo Lema 3.7, existe uma sequência canônica Σ para Γ em alguma extensão em constantes L' de L . E, pelo Corolário 3.8.1, a estrutura modal canônica para L' com respeito a Σ é um modelo para Γ em L' .

Observemos que, ao contrário da lógica modal usual, na semântica nominalista não podemos provar que todo conjunto consistente de sentenças de uma linguagem L tem um modelo que é estrutura modal para esta mesma linguagem L . Pois, por exemplo, se L é uma linguagem cujos nomes são $a_1, \dots, a_n, \dots$, o conjunto

$$\{\Box a_{n+1} = a_n : n \text{ é um inteiro positivo}\}$$

unido com

$$\{ \exists x (\diamond x \neq a_1 \wedge x = a_1) \}$$

é consistente, porém nenhuma estrutura modal para L é modelo desse conjunto, visto que, para que a sentença $\exists x (\diamond x \neq a_1 \wedge x = a_1)$ seja verificada deve haver um nome b , tal que $\diamond b \neq a_1$ seja verificada. Fato este, que é excluído pelo conjunto em questão.

CONCLUSÃO

O propósito fundamental do nosso estudo era o de desenvolver, no âmbito das semânticas de mundos possíveis, uma nova interpretação para o quantificador em linguagens modais de primeira ordem, na qual a quantificação através de operadores modais assumisse um caráter referencial com respeito a um dado mundo e fosse definida substitucionalmente com respeito aos mundos a ele acessíveis. Como observamos anteriormente, essa interpretação mista do quantificador em contextos modais inspira-se na tese segundo a qual, um conceito modal não expressa propriedades de objetos enquanto tais, independentemente dos meios que empregamos para especificá-los; os conceitos modais expressam modalidades de dicto com fundamento in re: propriedades de objetos apenas enquanto dados sob certos nomes (descrições).

Apresentamos, então, uma definição, à maneira de Tarski, do conceito de verdade para linguagens modais de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais, na qual, porém, o conceito de satisfação é tomado como uma relação entre fórmulas da linguagem e pares constituídos por objetos de um universo e nomes da linguagem. Mostramos, também, que, se desconsiderarmos os termos funcionais abertos, a nova semântica é uma extensão conservativa da semântica kripkeana para a lógica modal sem fórmula de Barcan (Capítulo 1); e introduzimos uma extensão do sistema S5 de Lewis para o cálculo modal de predicados que é legítimo e completo com respeito à nova semântica, desde que consideremos apenas estruturas modais cujas relações de acessibilidade são relações de equivalência (S5 - estruturas modais) (Capítulo 2 e Capítulo 3).

Além disso, observamos que, no contexto dessa semântica, a quantificação em linguagens modais é interpretada a partir da compreensão referencial do quantificador em contextos extensionais (a variável de quantificação não ocorre no escopo de operadores modais) e da quantificação substitucional, em certo sentido, através de contextos modais, (cf. Adendo); e, a fim de determinarmos essa interpretação, tivemos que considerar, fundamentalmente, apenas um conjunto de estruturas clássicas quaisquer (i.e., não impusemos nenhuma restrição às estruturas clás-

sicas para que elas pudessem tomar parte no domínio de uma estrutura modal; em particular, não exigimos, como é usual em semântica kripkeana, que os mundos acessíveis a um dado mundo contivessem os objetos desse mundo). Desse modo, à primeira vista, o problema acerca da interpretabilidade da lógica modal quantificacional seria resolvido, de uma forma aceitável do ponto de vista quineano, desde que aceitássemos, por um lado, a teoria clássica de modelos (que exige a consideração simultânea de várias estruturas clássicas para definir, por exemplo, o conceito de validade) e, por outro lado, a lógica modal proposicional, por quanto a quantificação substitucional pode ser explicada considerando apenas a substituição de variáveis por nomes e, assim, definida a partir de sentenças. A semântica anteriormente desenvolvida, então, exibiria, tal como a clássica, "uma extraordinária combinação de profundidade e simplicidade, beleza e utilidade", visto que, nela, o quantificador em contextos clássicos é compreendido da maneira usual; porém, em suas fronteiras, ela seria ainda mais ousada que a clássica, na medida em que, por meio dela, pretendemos adquirir o direito de quantificar através de contextos modais, sem comprometer-nos com afirmações essencialistas. (cf. QUINE, 1969).

Nossa pretensão última, ao desenvolver o aparato lógico-matemático apresentado nos capítulos anteriores, era a de possibilitar a superação das dificuldades apontadas por Quine em sua crítica à lógica modal quantificacional, mostrando que é possível dar sentido à quantificação em contextos modais sem assumir, "ipso facto", outros compromissos teóricos que não aqueles já exigidos pela lógica clássica; no presente estudo, contentamo-nos simplesmente com a apresentação e o desenvolvimento desse aparato lógico. Vale dizer, o objetivo precípua desse estudo é apenas o de mostrar a possibilidade lógica de se atribuir uma interpretação mista (referencial-substitucional) à quantificação em contextos modais, na qual, as variáveis desempenhem duas funções igualmente relevantes do ponto de vista semântico: assumir valores em domínios de objetos e marcar lugar para nomes da linguagem. E esse objetivo limitado foi alcançado, pelo menos com respeito a uma extensão, em linguagens modais de primeira ordem, do sistema S5 de Lewis.

Inegavelmente, a interpretação mista do quantificador e o conceito de domínio modal, por ela exigido, abre todo um novo campo de investigação em lógica modal, seja a nível técnico (lógico-matemático), seja a nível conceitual e filosófico, campo que foi apenas introduzido pelo presente trabalho. Várias outras questões de caráter filosófico e conceitual podem ser postas com respeito à interpretação mista, além da questão acima esboçada acerca da superação ou não das objeções quineanas. Podemos, assim, perguntar se, no âmbito dessa interpretação, teria sentido falar em identificação através de mundos; qual o papel dos nomes, na medida em que eles tomam parte na especificação do domínio de quantificação, na constituição dos objetos intensionais, etc...

A título de conclusão, gostaríamos, no entanto, de delinear apenas alguns dos diversos problemas lógico-matemáticos que permanecem em aberto, e indicar algumas linhas possíveis de soluções a serem futuramente desenvolvidas.

1. A interpretação mista e outros sistemas modais proposicionais.

No presente estudo, consideramos apenas uma extensão do sistema S5 de Lewis; porém, na literatura especializada, encontramos vários outros sistemas axiomáticos para o cálculo proposicional modal, bem como algumas extensões desses cálculos para linguagens modais de primeira ordem, que podem ser interpretadas por meio da semântica kripkeana (cf. HUGHES E CRESSWELL, 1968; GABBAY, 1976).

Desse modo, um problema que permanece em aberto é encontrar extensões de outros sistemas proposicionais (em especial dos sistemas K, T, S4) que possam ser adequadamente interpretadas por meio da nova semântica. Todavia, como observamos anteriormente, encontrar essas extensões envolve uma séria dificuldade (cf. Cap. 2, p. 35 ss). A fim de estendermos adequadamente o sistema S5 foi de fundamental importância o fato de encontrarmos uma fórmula que expressa, caracteriza o domínio modal de uma estrutura. A primeira vista, o mesmo não parece poder ser feito com respeito a estruturas modais cujas relações de acessibilidade não sejam de equivalência. Uma alternativa possível, então,

seria introduzir um novo símbolo lógico (por exemplo, o símbolo ' $=_N$ ') que seria interpretado de tal modo que permitisse caracterizar o domínio modal, com respeito a estruturas modais quaisquer. Acrescentaríamos, desse modo, à definição de fórmula a cláusula:

se t_1 e t_2 são termos individuais, então $t_1 =_N t_2$ é fórmula; e, à definição de satisfação modal, poderia ser acrescentado o seguinte item com respeito às fórmulas atômicas:

$$c) \text{ se } A \text{ é } t_1 =_N t_2, \text{ então} \\ M, i, s \text{ sat } A \text{ sse } (t_1)^{(s)} \wedge_i = (t_2)^{(s)} \wedge_i$$

Assim, o predicado 'ser nomeado' poderia ser caracterizado pela fórmula $N(t)$, definida por

$$N(t) =_{df} t = a \vee (E y) (z) (y =_N z \rightarrow y \neq t),$$

onde a é a primeira constante da linguagem e y e z são as duas primeiras variáveis que não ocorrem em t .

Por outro lado, os sistemas axiomáticos poderiam, à primeira vista, ser determinados, a partir dos sistemas usuais sem B.F. e com identidade contingente, acrescentando-se os seguintes axiomas:

- (1) $x =_N x$
- (2) $x_1 =_N x_2 \rightarrow x_2 =_N x_3$
- (3) $x_1 =_N x_2 \wedge x_2 =_N x_3 \rightarrow x_1 =_N x_3$

mais os postulados

- (4) $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n) \rightarrow N(t)$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as variáveis que ocorrem no termo t ;
- (5) $(E y) (\Box^n y =_N t \wedge N(y))$, onde y é a primeira variável que não ocorre no termo t e, para algum inteiro positivo n , $\Box^n$ é $\Box \dots \Box$;
- (6) $\Box A \rightarrow \Box(N \rightarrow A)$
- (7) $\Box(N \rightarrow A) \rightarrow \Box A$
- (8) $\Box(N \rightarrow A) \wedge \neg \Box A \rightarrow (\Box C \rightarrow C)$, onde C é uma fórmula qualquer;

que desempenhariam uma função análoga ao dos postulados (A10) e (A12). (Observação: nos postulados (6), (7) e (8), N é a fórmula $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as variáveis livres em A .)

Acreditamos que esses novos sistemas seriam completos e legítimos com respeito à semântica determinada no Capítulo 1, uma vez impostas as devidas restrições na relação de acessibilidade.

Um problema que permanece inteiramente em aberto é saber se é possível ou não obtermos sistemas mais fracos que QS5' sem, contudo, introduzirmos novos símbolos lógicos primitivos nas linguagens.

2- A interpretação mista do quantificador e falhas de suposição de identidade.

Como mencionamos anteriormente, fórmulas da forma

$$(1) (x)\Box \neg A \rightarrow \Box((\exists x)A \wedge (\exists x)(\neg B \wedge \Diamond B) \rightarrow (\exists x)(A \wedge \Diamond B))$$

(onde A é uma fórmula clássica) são modalmente válidas, qualquer que seja a classe das estruturas modais consideradas. Todavia, essas fórmulas não são, em geral, válidas na semântica kripkeana para a lógica modal quantificacional sem a fórmula de Barcan. Além disso, o esquema (1), acima, expressa, em certa medida, o fato de que se abandona, na interpretação mista do quantificador, a suposição de identidade, pois a validade de (1) significa que, se

$$(2) (x)\Box \neg A$$

for verdadeira em um dado mundo, então

$$(3) (\exists x)A \wedge (\exists x)(\neg B \wedge \Diamond B) \rightarrow (\exists x)(A \wedge \Diamond B)$$

será verdadeira em todos os mundos acessíveis àquele; e (3) é o esquema, cuja não validade é consequência imediata do pressuposto de identidade, quando se considera a interpretação puramente referencial do quantificador (cf. Introdução, p.).

Desse modo, portanto, poderia ser levantada a conjectura de que a Semântica Nominativa pressupõe a recusa de essencialismo, uma vez que, se aceitarmos critérios de identidade de objetos através de mundos, bem como a não validade de fórmula de

Barcan (posição que é compatível, à primeira vista, com o essencialismo) então poderemos, por meio da semântica kripkeana, falsificar fórmulas da forma expressa em (1) acima. Vale dizer, aceitar o esquema (1) como logicamente verdadeiro implicaria em condenar, por princípio, qualquer mecanismo de identificação de objetos através de mundos.

Não nos interessa aqui, discutir e analisar o tão controverso problema acerca dos critérios de identificação através de mundos, nem, tampouco, determo-nos em explicitar a resposta a esse problema que, eventualmente, subjaz ao nosso trabalho. Porém, podemos facilmente concordar que a validade lógica de (1), mesmo quando a fórmula de Barcan não é válida, não parece se impor de um ponto de vista intuitivo. Assim, seria desejável que dispuséssemos de uma semântica para linguagens modais na qual, embora o quantificador fosse interpretado de uma forma mista, esquemas como (1) acima não fossem válidos. Em suma, o problema poderia ser formulado da seguinte maneira: encontrar uma semântica para os cálculos modais quantificacionais usuais que atribuísse ao quantificador um caráter misto, substitucional/referencial.

3. Interpretação substitucional e quantificação através de mundos.

A quantificação através de operadores modais foi aqui interpretada como substitucional, com respeito a todos os mundos acessíveis a um dado mundo, inclusive, esse mesmo mundo, caso ele seja acessível a si mesmo. Essa característica é necessária para a demonstração do teorema de legitimidade do sistema axiomático QS5' apresentado no capítulo 2, mais especificamente, para tornar o postulado (A12) válido na classe das QS5-estruturas modais.

Uma semântica mais elegante seria, talvez aquela, na qual a quantificação fosse substitucional apenas com respeito aos mundos acessíveis distintos de um dado mundo. Semanticamente isso poderia ser determinado, alterando-se a definição de satisfação modal, no tocante a fórmulas modais, da seguinte forma:

a) Se A é da forma $\Box B$, então

M, i, s sat A sse para todo j em I_M , tal que $iR_M j$,
tem-se que:

- a) se $i=j$, então M, i, s sat A e
 b) se $i \neq j$, então M, j, s' sat $A^{(s)}$ para
 alguma sequência s' em D_{A_j} .

O problema, então, seria determinar um sistema axiomático adequado para essa variante, mesmo quando se considera apenas a classe das QS5-estruturas modais.

4. Extensão para linguagens contendo o descritor como símbolo primitivo.

As linguagens modais estudadas nesse trabalho dispõem apenas de constantes individuais e de outros nomes gerados a partir das constantes por meio dos símbolos funcionais. Todavia, existem linguagens formais que dispõem de um procedimento bem mais geral de construção de termos singulares determinados (nomes): as descrições definidas, obtidas a partir de fórmulas por meio do descritor (operador iota). Desse modo, uma extensão possível da semântica aqui desenvolvida seria determinada, se considerarmos também essas linguagens, tomando o descritor como símbolo primitivo, de sorte que, as descrições definidas pudessem também tomar parte na constituição dos domínios modais de uma estrutura clássica.

Essa extensão é ainda mais importante do que poderia parecer à primeira vista, uma vez que a semântica anteriormente apresentada inspira-se na tese segundo a qual um contexto modal expressa uma propriedade de objetos enquanto dados sob certos nomes (sob certas descrições).

Porém, a determinação dessa extensão implica na superação de sérias dificuldades. Em primeiro lugar, os problemas que advêm da possibilidade de uma descrição definida não denotar nenhum objeto. Em segundo lugar - e esse é um obstáculo muito mais sério - nesse caso, parece não ser possível definir recursivamente o conceito de satisfação, de sorte a atribuir à quantificação um caráter misto; pois, se admitirmos as descrições definidas como eventuais substituintes de variáveis em contextos modais, então a definição anteriormente apresentada para o conceito de satisfação (cf. antes, p. 6) não seria mais correta: a cláusula referente às fórmulas modais não seria recursiva,

visto que, eventualmente, a complexidade da fórmula poderia crescer ao introduzirmos as instâncias de uma fórmula aberta, i.e., a fórmula modal poderia ser de complexidade inferior à de sua instância (sobre essa dificuldade concernente à interpretação puramente substitucional, veja-se KRIPKE, 1976).

5. Quantificação substitucional e denotação de termos singulares.

Uma acusação que poderia, eventualmente, ser feita à semântica aqui desenvolvida é a de que ela nos comprometeria com a afirmação da existência de objetos possíveis, embora tentasse mascarar esse comprometimento por meio de uma caracterização aparentemente substitucional da quantificação sobre "mundos possíveis" (i.e., a quantificação que incide sobre elementos de diferentes mundos).

Essa objeção não seria, de fato, sem fundamento, pois, em certo sentido, a quantificação através de mundos não é aqui interpretada de forma propriamente substitucional, porquanto devemos considerar as interpretações dos nomes nos diversos mundos considerados, quando da determinação do valor de verdade de uma sentença modal. Nesse sentido, como observa Quine e, também Kripke, comprometemo-nos com a existência de objetos em mundos possíveis designados pelos nomes (cf. QUINE, 1984 e KRIPKE, 1976). Contra os objetos possíveis poderia, então, ser dirigida a artilharia crítica quineana acerca dos critérios de identidade para esses objetos (cf. QUINE, 1980 e 1960).

Uma possível saída seria determinada se alterássemos a semântica de tal modo que, a quantificação através de operadores modais fosse propriamente substitucional com respeito aos mundos acessíveis distintos de um dado mundo. Isso poderia ser semânticamente caracterizado, se alterássemos a definição de estrutura modal e a de satisfação modal. Para cada índice de uma base modal poderíamos tomar, ao invés de uma estrutura clássica, um par constituído por uma estrutura clássica e uma função valoração para as sentenças atômicas da linguagem (i.e., função do conjunto das sentenças atômicas no conjunto $\{V, F\}$; e, além disso, definir-se-ia simultaneamente a relação de satis

fação para as fórmulas e a extensão da função valoração para todas as sentenças da linguagem. Para as fórmulas modais e as universais as cláusulas da nova definição poderiam ser as seguintes:

- (I) Se A for da forma $\Box B$, então
- (i) M, i, s sat A sse para todo j , tal que $iR_M j$, tem-se que:
 - (a) se $i=j$, então M, i, s sat B e $V_i^M(B^{(s)})=V$
 - (b) se $i \neq j$, então $V_j^M(B^{(s)})=V$
 - (ii) Se A for sentença, então $V_i^M(A)=V$ sse $V_j^M(B)=V$, para todo j , tal que $iR_M j$;
- (II) Se A for da forma $(x)B$,
- (i) M, i, s sat A sse $M, i, \bar{s}$ sat B, para toda sequência $\bar{s}$ que seja k-variante de s e M, i, s sat B^X/a para todo nome a da linguagem;
 - (ii) Se A for sentença, então $V_i^M(A) = V$ sse $V_i^M(B^X/a) = V$ para todo nome a da linguagem.

As demais cláusulas poderiam ser as usuais, clássicas.

Acreditamos que introduzindo apenas essas alterações nas definições semânticas apresentadas no Capítulo 1 e mantendo as definições de verdade, consequência e validade modal, as provas de completude e legitimidade para o sistema axiomático QS5' não seriam prejudicadas, sendo mais ou menos imediata a adaptação.

Outra alternativa, essa ainda mais radical, em certo sentido, seria considerar apenas o mundo de origem (indexado pela origem) como determinado por uma estrutura clássica, ao passo que os demais mundos seriam simplesmente caracterizados por valorações. Nesse caso, então, a fórmula de Barcan seria válida e, acreditamos que os sistemas usuais com B.F. seriam os sistemas axiomáticos adequados para essa variante da interpretação mista do quantificador.

Outras possibilidades surgiriam, talvez, se nos afastássemos ainda mais da Semântica Kripkeana, alterando também a caracterização do operador modal. Nesse sentido, seria interessante combinar a interpretação mista do quantificador, desenvolvida nesse estudo, com o método de valoração para a lógica modal, desenvolvido em LOPARIC, 1977.

6. A interpretação mista e as modalidades "de dicto" com fundamento "in re".

Como já observamos anteriormente, o presente estudo encontra a sua inspiração e fundamentação em uma particular compreensão dos conceitos modais como expressando modalidades "de dicto" com fundamento "in re": propriedades de objetos enquanto dados, especificados por um certo nome. Porém pode-se encontrar uma versão mais ampla dessa tese acerca dos conceitos modais, a saber, aquela determinada pela afirmação de que os conceitos modais expressam propriedades de objetos enquanto subsumidos a certos conceitos⁽¹⁾.

Surge, assim, o seguinte problema: formular uma semântica na qual a relação de satisfação dependa não apenas dos eventuais nomes que os objetos possuam, mas também dos conceitos (termos gerais, símbolos para predicados) a que os objetos possam ser subsumidos.

(1) A afirmação quineana: "na medida em que falamos referencialmente do objeto, sem uma especial tendência a considerar um fundo conceitual que agrupe os matemáticos diferenciando-os dos ciclistas ou vice-versa, não parece que tenha sentido considerar necessários alguns desses atributos e contingentes outros" (QUINE, 1960) parece pressupor essa compreensão dos conceitos modais.

ADENDO

As proposições e definições seguidas permitem-nos explicitar um aspecto interessante do quantificador na Semântica Nominativa.

DEFINIÇÃO 4.1 Seja A uma fórmula x uma variável e t um termo de L . Por indução na complexidade de A definimos as fórmulas A^0 e A^x/t da seguinte maneira.

(i) Se A é atômica, então tanto A^0 , quanto A^x/t são a própria A .

(ii) Se A é $\neg B$, então A^0 é $\neg(B^0)$ e A^x/t é $\neg(B^x/t)$

(iii) Se A é $(y)B$, então A^0 é $(y)(B^0)$ e

$$A^x/t \text{ é } \begin{cases} A, & \text{se } y \text{ for } x; \\ (y)(B^x/t), & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

(iv) Se A é $\Box B$, então A^0 é $B^0 \wedge \Box(N(x_1) \wedge \dots$

$\wedge N(x_n) \rightarrow B)$ onde $x_1, \dots, x_n$ são todas as distintas variáveis livres em B ; e A^x/t é $\Box(B^x/t)$.

(v) Se A é $B \rightarrow C$, então A^0 é $B^0 \rightarrow C^0$; e A^x/t é $B^x/t \rightarrow C^x/t$.

Observemos que, na cláusula (iv), B^x/t é a fórmula que advém de B substituindo todas as ocorrências livres de x em A por ocorrências de t . Deste modo, A^x/t é a fórmula que advém de A substituindo apenas as ocorrências livres de x em A que se dão no escopo de operadores modais por ocorrências de t . Por outro lado, A^0 representa o desdobramento, das ocorrências de variáveis de A , em ocorrências fora do escopo de operadores modais (e, portanto, ocorrências puramente referenciais - cf. Proposição 1.16) e ocorrências no escopo de operadores modais, porém precedidas pelo antecedente.

$$N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$$

(e, portanto, em certo sentido, ocorrências puramente substitucionais: marcam os lugares para nomes).

PROPOSIÇÃO 4.2 Se t é um termo fechado (nome), então nenhuma ocorrência livre de x em $(A^0)^x \uparrow t$ se dá no escopo de operador modal

DEMONSTRAÇÃO.

Imediata por indução na complexidade de A .

PROPOSIÇÃO 4.3 Sejam $x_1, \dots, x_n$ todas as variáveis livres em A e $\bar{N}$ a fórmula

$$N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n).$$

Nestas condições, temos que se M, i, s sat $\bar{N}$, então M, i, s sat A sse M, i, s sat $A^{(s)}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja, para $k=1, \dots, n$, a_k a s -instância de x_k e suponhamos que M, i, s sat $\bar{N}$. Assim, pela definição de domínio modal e Proposição 2.7, $s^*(x_k) = (a_k)_{A_i}$. Portanto, o resultado desejado segue do Corolário 1.15.1.

PROPOSIÇÃO 4.4 Se t é a s -instância de x , então M, i, s sat A sse M, i, s sat $(A^0)^x \uparrow t$.

DEMONSTRAÇÃO.

Por indução na complexidade de A .

(i) A é atômica.

Neste caso nada há a demonstrar, pois, por definição, $(A^0)^x/t$ é igual a A .

(ii) A é $\neg B$ ou $B \rightarrow C$.

Consequências imediatas da hipótese indutiva.

(iii) A é $\Box B$.

Neste caso, $(A^0)^x/t$ é $((B^0)^x/t \wedge \Box(\bar{N} \rightarrow B)^x/t)$ onde $\bar{N}$ é a fórmula $N(x_1) \wedge \dots \wedge N(x_n)$ e $x_1, \dots, x_n$ são as distintas variáveis livres em A .

Se M, i, s sat $(A^0)^x/t$, então, pelo Corolário 1.14.2, temos que M, i, s sat $(B^0)^x/t$ e, para todo j , tal que $iR_M j$, $M, j \models ((\bar{N} \rightarrow B)^x/t)^{(s)}$.

Ora, pela Proposição 2.7, para qualquer j em I_M , $M, j \models (N^x/t)^{(s)}$. Portanto, visto que $((N \rightarrow B)^x/t)^{(s)}$ é $(N \rightarrow B)^{(s)}$, para qualquer j , tal que $iR_M j$, $M, j \models B^{(s)}$. E, pela hipótese indutiva, M, i, s sat B . Logo, pelo Corolário 1.14.2, temos que M, i, s sat A .

Por outro lado, suponhamos que M, i, s não sat $(A^0)^x/t$. Temos, então, dois casos possíveis.

Caso 1: M, i, s não sat $(B^0)^x/t$. E, pela hipótese indutiva, M, i, s não sat B ; conseqüentemente, M, i, s não sat A .

Caso 2: M, i, s não sat $\Box(\bar{N} \rightarrow B)^x/t$. Cabe aqui considerar dois sub-casos possíveis.

Sub-caso 2.1: M, i, s não sat $(N \rightarrow B)^x/t$.

Neste caso, temos, então, que M, i, s sat N^x/t e M, i, s não sat B^x/t . Consequentemente, pela Proposição 4.3, M, i, s não sat $(B^x/t)^{(s)}$, isto é, M, i, s não sat $B^{(s)}$. Portanto, M, i, s não sat A .

Sub-caso 2.2: $M, j \not\models ((N \rightarrow B)^x/t)^{(s)}$, para algum j , tal que, $iR_M j$.

Vale dizer, visto que $(B^x/t)^{(s)}$ é $B^{(s)}$, $M, j \models B^{(s)}$ para algum j , tal que $iR_M j$. Logo, M, i, s não sat A .

(iv) A é $(y)B$.

Podemos supor que y não é x . Assim, $(A^0)^x \not\models t$ é $(y)((A^0)^x \not\models t)$ e o resultado visado é consequência da hipótese indutiva.

Mostramos anteriormente (Cf. Capítulo 1, p.29) que a quantificação através de operadores modais é interpretada, na Semântica Nominativa, de uma maneira dupla: referencial (com respeito a um dado mundo) e substitucional (com respeito aos mundos possíveis). Desse modo, se consideramos (como é o caso aqui) estruturas modais cujas relações de acessibilidade são reflexivas, então afirmar, por exemplo, a sentença,

$$(1) \quad (Ex) \Box A$$

é equivalente a afirmar que

$$(2) \quad (Ex)A$$

e que, para algum nome t da linguagem,

$$(3) \quad \Box A^x/t.$$

Nesse sentido, se A for uma fórmula clássica, a quantificação através de operadores modais é reduzida, em S.N., à quantificação clássica (expressa em (2)) e à quantificação substitucional (expressa em (3)). Portanto, podemos atribuir um significado a (1) considerando apenas a quantificação clássica e as instâncias possíveis de $\Box A$ na linguagem. Vale dizer, a quantificação através de operadores modais (expressa, por exemplo, em (1)) é explicada, do ponto de vista semântico, a partir da quantificação clássica aliada à aplicação de operadores modais a sentenças.

As proposições ora demonstradas permitem estender essa compreensão para sentenças mais complexas, nas quais, por exemplo, o quantificador não é imediatamente seguido do operador modal. A pretensa redução, proposta pela Semântica Nominativa, da quantificação em linguagens modais à quantificação clássica (puramente referencial), aliada à quantificação substitucional (sobre expressões da própria linguagem), pode ser melhor explicitada introduzindo, por definição, novos quantificadores - universal (' $(\forall x)$ ') e existencial (' $(\exists x)$ ') - da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 4.5 Sejam A uma fórmula de L e x uma variável, eventualmente livre em A .

$$(\forall x)A =_{df} (x)(N(x) \rightarrow A)$$

$$(\exists x)A =_{df} \neg(\forall x)\neg A. \quad (1)$$

Dada essa definição pode-se facilmente demonstrar, a partir das proposições anteriores, a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 4.6 Se y é uma variável que não ocorre em A , então as seguintes fórmulas são

(1) Observemos que, dada esse definição e as definições usuais dos conectivos, $(\exists x)A$ é equivalente a $(\exists x)(N(x) \wedge A)$.

QS5'-válidas:

$$(x)A \leftrightarrow (x)(\forall y)(\neg N(x) \rightarrow (A^O)^x/y) \wedge (\forall y)A$$

$$(Ex)A \leftrightarrow (Ex)(\exists y)((A^O)^x/y \wedge \neg N(x)) \vee (\exists x)A$$

DEMONSTRAÇÃO.

Consequência imediata das proposições anteriores.

Desse modo, uma vez que nenhuma ocorrência livre de x em

$$(A^O)^x/y \text{ ou em } N(x)$$

se dá no escopo de operadores modais, se entendermos que a interpretação dos símbolos definidos ' $(\forall x)$ ' e ' $(\exists x)$ ' em S.N. é uma interpretação puramente substitucional dos quantificadores, então pode-se interpretar o quantificador em linguagens modais a partir apenas do quantificador clássico (incidindo apenas sobre variáveis fora do escopo de operadores modais) e do quantificador substitucional. Consequentemente, visto que a quantificação substitucional pode ser explicada semanticamente, apelando-se apenas a instâncias da fórmula (i.e., a sentenças), a lógica modal quantificacional seria tão inteligível quanto a lógica clássica e a lógica modal proposicional, ou antes, tão inteligível quanto a extensão da lógica clássica obtida admitindo-se a aplicação de operadores modais apenas a sentenças. Nesse sentido, contrariamente ao que quer Quine (Cf. QUINE, 1953), a interpretação da quantificação através de operadores modais não acarretaria maiores dificuldades que a interpretação da quantificação na teoria clássica e a interpretação de operadores modais aplicados a sentenças. As ocorrências de variáveis no escopo de operadores modais poderiam, então, ser interpretadas como tendo uma dupla função: puramente referencial (assumir valores em um domínio de objetos) e puramente substitucional (segurar os lugares para os nomes da linguagem). A análise semântica dos contextos modais determinada pela Semântica Nominativa

seria análoga, em certa medida, à análise quineana de sentenças como

(4) Joaquinzão é assim chamado por causa de seu tamanho por meio de sentença

(5) Joaquinzão é chamado de 'Joaquinzão' por causa de seu tamanho,

onde a ocorrência do termo singular 'Joaquinzão' em (4) é desdobrada, em (5), por meio de duas ocorrências, a primeira puramente referencial e a segunda não referencial (cf. antes, Introdução e QUINE, 1943).

Todavia, o problema é saber se, de fato, os símbolos ora introduzidos (' $(\forall x)$ ' e ' $(\exists x)$ ') podem ser entendidos, no contexto da Semântica Nominativa, como representando a quantificação puramente substitucional. À primeira vista, isso não parece possível, posto que a fim de determinarmos o valor de verdade, em S.N., de sentenças da forma

$$(\forall x)A$$

ou, ainda, da forma

$$(\exists x)A$$

devemos considerar objetos, embora apenas objetos nomeados. Não cabe aqui, porém, discutir mais alongadamente essa questão⁽¹⁾; basta deixar registrada a redução proposta por S.N. e que é expressa, pelo menos com respeito à classe das estruturas modais de tipo S5, pela Proposição 4.6.

⁽¹⁾ Sobre a independência da interpretação substitucional do quantificador com respeito à consideração de objetos veja - se KRIPKE, 1968.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOWEN, Keneth. Model Theory for Modal Logic. Dordrecht, D. Reidel, 1979.
2. CHANG, C.C. & KEISLER, H.J.. Model Theory. Amsterdam, North Holland, 1973.
3. DUNN, J.M. & BELNAP, N.D. The Substitution Interpretation of Quantifiers. Nous, 2:177-85, 1968.
4. ELGIN, Catherine Z. Translucent Belief. The Journal of Philosophy, 82 (2):74-91, fev. 1985.
5. FINE, Kit. Model Theory for Modal Logic; Part I. The de re/de dicto distinction. Journal of Philosophical Logic, 7(2): 125-56, maio 1978.
6. FØLLESDAL, Dagfinn. Quine on Modality. In: DAVIDSON, D. & HINTIKKA, J. (eds.). Words and Objections. Dordrecht, D. Reidel, 1969. p. 175-85.
7. GABBAY, Dov M. Investigations in Modal and Tense Logics with Application to Problems in Philosophy and Linguistics. Dordrecht, D. Reidel, 1976.
8. GALLIN, Daniel. Intensional and Higher-Order Modal Logic with applications to Montague Semantics. Amsterdam, North Holland, 1975.
9. HINTIKKA, J. Models for Modalities. Dordrecht, D. Reidel, 1969.
10. _____. The Semantics of Modal Notions. Synthese, 21:408-24, 1970.
11. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. An Introduction to Modal Logic. London, Methuen, 1968.

12. KAPLAN, David. Quantifying in. IN: DAVIDSON, D. e HINTIKKA, J. (eds.). Words and Objections. Dordrecht, D. Reidel, 1969 p. 206-41.
13. KRIPKE, Saul. A Completeness Theorem in Model Logic. Jornal of Symbolic Logic, 24(1): 1-15, mar. 1959.
14. _____. Is There a Problem about Substitucional Quantification? IN: EVANS, Gareth & McDOWELL, John (eds.). Truth and Meaning; Essays in Semantics. Oxford, Oxford University Press, 1976. p. 325-419.
15. KRIPKE, Saul. Semantical Analysis of Modal Logic I. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9: 67-96, 1963a.
16. _____. Semantical Consideration on Modal Logics. Acta Philosophica Fennica, 16: 83-94, 1963b. Reimp: LINSK, 1977.
17. LEONARD, H.S. Essences, Atributes and Predicates. Proceedings and Adresses of the American Philosophical Association, 37: 25-51, 1964.
18. LINSK, Leonard (ed.) Reference and Modality. Oxford, Oxford University Press, 1977.
19. LOPARIĆ, ANDREA A.C. The Method of Valuations in Modal Logic. IN: ARRUDA, A.I.; da COSTA, N.C.A. e CHUAQUI, R. (eds.) Proceedings of the First Brazilian Conference. New York, Marcel Dekker, 1977.
20. MARCUS, Ruth C. BARCAN. Quantification and Ontology. Nous, 6: 240-50, 1972.
21. MENDELSON, Elliot. Introduction to Mathematical Logic. New York, Van Nostrand, 1964.
22. QUINE, W.v.O. Existência e Quantificação. IN: PORCHAT, O. (org.) Ensaio; Gilbert Ryle, John Austin, W.v.O. QUINE, P.F. Strawson. São Paulo, Abril Cultural, 1980a.

23. QUINE, W.v.O. From a Logical Point of View. 2. ed. New York, Harper and Row, 1961.
24. _____. Notes on Existence and Necessity. Journal of Philosophy, 40(5): 113-27, mar. 1943.
25. _____. The Problem of Interpreting Modal Logic. Journal of Symbolic Logic, 12(3): 43-8, jun. 1947.
26. _____. Reference and Modality. IN: QUINE, 1961.p.139-57.
27. _____. Reply to Kaplan. IN: DAVIDSON, D. & HINTIKKA, J. (eds.) Words and Objections. Dordrecht, D. Reidel. 1969. p. 341-5.
28. _____. Reply to Prof. Marcus. Synthese, 27: 323-30, 1962.
29. _____. Review of Charles Parsons. "Mathematics in Philosophy". The Journal of Philosophy, 81(12): 783-94, dez. 1984.
30. _____. Relatividade Ontológica. IN: PORCHAT. O. (org.) Ensaios. São Paulo, Abril Cultural, 1980b.
31. _____. O Sentido da Nova Lógica. São Paulo, Martins, 1944.
32. _____. Sobre o que há. IN: PORCHAT, O. (org.). Ensaios. São Paulo, Abril Cultural, 1980c.
33. _____. Three Grades of Modal Involvement. IN: PROCEEDINGS of the XIth International Congress of Philosophy, Brussels, 1953 v.4. Amsterdam, North Holland.
34. _____. The Ways of Paradox. New York, Random House, 1966.
35. _____. Word and Object. New York, M.I.T. Press, 1960.
36. ROGERS, Rober. Mathematical Logic and Formalized Theories. Amsterdam, North Holland, 1970.

37. SHOENFIELD, J.R. Mathematical Logic. Addison-Wesley, 1967.
38. TARSKI, A. The Concept of Truth in Formalized Languages. IN: _____ . Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford, Clarendon Press, 1956. p. 152-278.
39. _____ . The Semantic Conception of Truth. Philosophy and Phenomenological Research, 4, 1944.