UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

SOBRE O PROBLEMA DA INTERPRETAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE - DA CONCEPÇÃO TRADICIONAL À VISÃO DE HINTIKKA E REMES

Roberto Lima de Souza

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDAÇÃO FINAL DA TESE DE MESTRADO DEFENDIDA PELO SR ROBERTO LIMA DE SOUZA E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA.
CAMPINAS, 20/12/85

Zelsko Loparić

Dissertação apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, sob a orientação do Prof. Dr. ŽELJKO LOPARIĆ, para a obtenção do título de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência.

Campinas, novembro de 1985.

NOSSOS AGRADECIMENTOS...

Ao Professor *Zeljko Loparic*, pelas sugestões, críticas e orientação fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores *Luiz Paulo de Alcântara* e *Walter Alexandre Carnielli*, pelos esclarecimentos que gentilmente nos prestaram quanto a aspectos técnicos da parte geométrica.

Aos Professores *Elias Humberto Alves* e *José Alexandre Guerzoni*, pela feliz troca de idéias com que nos possibilitaram aperfeiçoar certas formulações lógicas.

Aos Professores e Companheiros do Centro de Lógica, pelos brilhantes ensinamentos e amizade com que nos distinguiram.

Aos funcionários e amigos *Marcos Munhoz* e *Da. Iria*, pelo zelo e atenção com que sempre nos atenderam.

Ao PICD/CAPES pelo apoio que nos foi concedido.

DEDICATÓRIA

A *Socorro*, minha mulher, e aos meus filhos, *Roberta Maria*, *Arthur Joseph* e *Pedro Henrique*, a quem subtraí horas de precioso convívio para a realização deste trabalho.

S U M Á R I O

Páginas

RESUMO

A presente dissertação *Sobre o Problema da Interpretação do Método de Análise, da Concepção Tradicional à Concepção de Hintikka e Remes*, está estruturada em uma introdução, três capítulos principais e uma conclusão.

A primeira parte de nossa introdução trata do papel dos historiadores da matemática grega na formulação da primeira interpretação dada ao método, como um caso particular da tese de Lakatos de que toda história da ciência é uma resconstrução racional empreendida à luz de uma metodologia prévia, explícita ou implicitamente assumida pelo historiador. Por outro lado, procura-se mostrar também que um trabalho desenvolvido por filósofos da ciência à luz da história do método, confirma uma outra tese de Lakatos de que não só a filosofia da ciência fornece metodologias à luz das quais se reconstrói racionalmente a história da ciência, como também esta última se constitui em um guia para a filosofia da ciência. Na segunda parte da introdução, levanta-se a importância das idéias da análise a partir das influências por elas exercidas como modelo conceitual para a formação de outras importantes idéias não só na história da filosofia, como também na história da metodologia e filosofia da ciência. Neste aspecto, discute-se, em especial, a presença das idéias analíticas em Descartes, Newton e Kant.

Por fim, sugere-se, a partir do trabalho de filósofos contemporâneos mais recentes, como Lakatos, novas perspectivas para o modelo metodológico da análise associado à teoria lógica da computabilidade.

No capítulo I, são apresentados três aspectos considerados básicos como introdução ao tema: uma caracterização geral do método de análise e síntese, uma investigação sobre a origem geométrica da análise, como forma de detectar as genuínas fontes informativas da história da metodologia analítica e, por fim, os principais pontos que ensejaram, a partir do relato de Pappus, as diferentes interpretações dadas ao método em si e à sua prática.

No capítulo II, apresenta-se uma controvérsia em torno do método analítico a partir da concepção tradicional dos historiadores da matemática grega. Em um primeiro momento, são enfocados os aspectos que constituem a concepção tradicionalmente aceita, onde se destaca a análise como um movimento descendente e dedutivo. Em especial são examinadas, aí, as abordagens de Heath, Duhamel e Zeuthen. Discute-se, a seguir, a interpretação oferecida por Cornford , que, estabelecendo uma estreita associação da análise com a dialética de Platão, a concebe como um movimento ascendente e não dedutivo. Considera-se, na seqüência, a posição de Robinson contrária a Cornford e favorável à concepção tradicional, ilustrada por um exemplo de análise geométrica como uma seqüência de passos dedutivos. Por fim, é apresentada a posição de Gulley por uma terceira interpretação. Este autor, investigando as razões que apóiam uma e outra concepção, conclui que Pappus oferece, em sua abordagem, a descrição de dois métodos distintos e que, supondo a equivalência de ambas para todos os casos, incorre, sem se dar conta disso, em uma inconsistência em seu relato.

No III Capítulo, aborda-se a concepção de Hintikka e Remes sobre o método de análise-e-síntese. Num primeiro momento, empreende-se um exame do sentido direcional da análise, a partir de que se conclui que a ênfase excessiva concedida a este aspecto, principalmente por se considerar, aí, muito mais a análise da prova (dos passos proposicionais) do que a análise de figura, não apenas obscureceu outros aspectos até mais importantes do método, como também, paradoxalmente, desvirtuou o verdadeiro sentido direcional da análise. Nesta perspectiva, procura-se recuperar o movimento ascendente como típico da análise e absolver Pappus da acusação de inconsistência em seu relato. Em seguida, aborda-se a concepção instancial e a estrutura lógica do sistema analítico. Examina-se a tese de que, na análise de uma figura, ao invés de se lidar com uma formulação geral do problema ou teorema, trabalha-se preferencialmente com configurações definidas de objetos geométricos como instância dessa formulação geral. Exemplos são dados tanto a nível da lógica elementar como a nível geométrico. A estrutura lógica do método, tal como reconstituída por Hintikka e Remes é também confrontada com procedimentos mecânicos de provas de teoremas como forma de exemplificar esta conexão sugerida pelos dois autores. Na última parte do III Capítulo, analisa-se a concepção construcional do método analítico. Procura-se, a partir disso, uma recuperação do significado heurístico da análise, onde as construções auxiliares sugeridas pelas inter-relações entre os objetos geométricos de uma dada configuração se apresentam como elemento de fundamental importância para a descoberta de provas. Exemplo de análise geométrica, dentro desta ótica, é também aí oferecido, e, a partir deste, considera-se que a análise, tida como análise de figura, requer dois tipos de passos - inferências dedutivas e construções auxiliares - e que estes passos exigem igualmente dois tipos distintos de justificação na resolução da síntese: a prova de que as premissas obtidas na análise são verdadeiras e que são legítimas as construções pretendidas.

Na conclusão, reflete-se sobre a importância de uma consideração ampla do problema - como a empreendida por Hintikka e Remes - onde um indispensável instrumental lógico, histórico, metodológico e epistemológico contribui decisivamente para o desvendamento de pseudoquestões cruciais e para a indicação dos elementos realmente relevantes para a solução do problema. Procura-se, aí também, desvelar uma metodologia justificacionista na concepção dos historiadores, onde a análise poderia, até certo ponto, dispor de algum grau de *certeza*, mas em detrimento do seu significado heurístico e de sua esfera de aplicação. Aponta-se, entre as principais razões para que fosse escamoteado o movimento retrodutivo como típico da análise, o fato de ter sido ele considerado como algo não *racional*, mas que, numa perspectiva heurística, não há razões para que assim seja considerado. Neste aspecto, a abordagem de Hintikka e Remes é confrontada também com idéias de Lakatos e Polya. Por fim, procura-se mostrar que as teses de Hintikka e Remes, concebidas a partir de uma visão sistêmica do método de análise-e-síntese, se impõem como satisfatoriamente aceitáveis.

INTRODUÇÃO

1. Considerações Preliminares:

O problema da interpretação do método de análise envolve toda uma discussão de que participaram autores diversos, em artigos e livros diversos e em épocas diversas . Trataram eles da análise numa tentativa de elucidar a sua origem, o seu significado e a sua verdadeira prática. Uma das principais dificuldades encontradas nessa tarefa tem sido a relativa escassez, na literatura da antigüidade, de descrições do método, além de que a mais completa abordagem, devida a Pappus, antigo geômetra grego, deu margem às mais variadas interpretações. Sabe-se, contudo, da grande importância e influência exercida pela análise como método de descoberta de provas de teoremas e de soluções de problemas na prática dos geômetras gregos.

Os nossos primeiros contatos com o tema se deram através de alguns artigos, a partir dos quais fomos colecionando referências que nos levaram a verdadeiras preciosidades bibliográficas do século passado, algumas das quais tivemos a graça de localizar na seção de livros raros da biblioteca da matemática da USP. Nessa tarefa, tivemos também o imprescindível apoio do Professor Željko Loparić que nos apresentou outras referências e pôs à nossa disposição até mesmo material do seu acervo particular. Foi um verdadeiro trabalho de tecelão artesanal. Antes de tudo, preparar o fio, depois separar as meadas e, em seguida, tecer a urdidura. Tudo isso conseqüência, como dissemos, de uma discussão esgarçada no tempo. Era necessário recompor o tecido.

As primeiras reconstituições do método analítico foram devidas aos historiadores da matemática grega . Mas, como ressalta Lakatos, toda história da ciência é uma reconstrução racional empreendida à luz de uma metodologia prévia assumida; implícita ou explicitamente, pelo historiador[1]. Assim, a abordagem que eles deram do método, constituía-se, já, em uma interpretação. Posteriormente, matemáticos, metodólogos e filósofos da ciência tiveram a sua atenção voltada para a análise geométrica grega, como que confirmando a tese de que não só a filosofia da ciência oferece metodologias, à luz das quais se reconstrói racionalmente a história da ciência, como também esta última se constitui em um guia para a filosofia da ciência[2].

No entanto, os novos interesses pelo método se

1 - Veja-se Lakatos, I. {1974}.

2 - Veja-se Lakatos, I. {1974}.

fundam igualmente em novas razões. Como afirma Loparić, *recentemente vem sendo desenvolvida uma nova visão filosófica da ciência que encara esta última como atividade de resolução de problemas*[1]. Neste contexto, o antigo método da análise, como método de descoberta de provas de teoremas e de soluções de problemas geométricos, assumiu importância considerável, até mesmo como modelo conceitual para a atividade do cientista[2]. Mas essas novas idéias têm uma história antiga. Até que fosse recobrado o verdadeiro significado heurístico do método - o que acreditamos já se possa dizer - muitas águas rolaram sob a ponte, e muitos anos de passaram até que novas luzes fossem lançadas sobre o problema, iliminando caminhos mais promissores.

Este nosso trabalho se propõe, pois, a ser um exame interno dessas principais teses desenvolvidas no âmbito do problema da interpretação do método de análise, desde a concepção dos historiadores, chamada de concepção tradicional, até a visão de Hintikka e Remes. Será não apenas uma consolidação das discussões esparças surgidas em torno

---

1 - Loparić, Ž. {1983}, 5 p. 73.

2 - Esta questão poderá ser examinada à luz da Filosofia da Ciência desenvolvida, entre outros, por Lakatos. Veja-se Lakatos, I. {1978}.

do problema - o que já seria uma contribuição positiva - mas, mais que isso, uma análise dessas teses, a partir de que se poderá também refletir sobre a atividade de busca de uma solução para um problema de múltiplas faces, como o da interpretação do método de análise, onde os enfoques históricos, filosófico, metodológico e epistemológico tiveram importante papel.

2. Importância e Influência das Idéias da Análise:

Além de sua importância em si, como procedimento heurístico sistematizável na condução do processo de descoberta de provas de teoremas e de soluções de problemas geométricos, torna-se relevante mencionar que não ocorreu, como se poderia imaginar, que o método de análise geométrica se restringisse apenas ao domínio da história das matemáticas, mas que foi inegável a influência que veio exercendo, como modelo conceitual, para a formação de importantes idéias não só na história da filosofia, como também na história da metodologia e filosofia da ciência. E é exatamente pelas influências que exerceu através de séculos que se torna possível aquilatar a importância do método.

Poder-se-ia investigar, aqui, toda uma tradição de ciência que se estende até à época moderna, de Galileu e Newton, em que é inegável a presença marcante do modelo analítico. Considerando, porém, que isso representaria uma outra tarefa que estrapolaria os limites de uma introdução à investigação que nos propusemos a empreender, destacaremos, a seguir, apenas alguns tópicos principais com que poderemos ilustrar este ponto de forte motivação para um estudo sobre o método de análise.

Em Descartes, a análise geométrica grega não foi simplesmente um ponto de partida para a sua geometria analítica. Mais que isso, foi um dos fundamentos para as suas idéias metodológicas gerais. Não é assim sem propósito que, no prefácio dos seus *Principes*, ele afirma que é através deste método que se tornará possível *depois de encontrar as primeiras causas e os verdadeiros princípios* deduzir deles *as razões de tudo aquilo que se é capaz de saber*. E mais adiante, no mesmo prefácio, encontramos que *é necessário começar pela busca destas primeiras causas, isto é, dos princípios; e que estes princípios devem ter duas condições: a primeira é que eles sejam tão claros e tão evidentes que o espírito humano não possa duvidar de sua verdade, quando se aplique a considerá-los com atenção; a segunda é que deles dependa o conhecimento das outras coisas de sorte que eles possam ser conhecidos sem elas, mas não reciprocamente, elas sem eles.*

É por demais conhecido que, na filosofia carte siana, há verdades que são descobertas e verdades que são estabelecidas em duas ordens distintas: a ordem da análise, em que se busca descobrir os princípios, ou seja, a ordem da invenção e, portanto a *ratio cognoscendi* que se determina de conformidade com as exigências de nossa certeza, e a ordem da síntese, em que se instituem os resultados da ciência. Esta é, por conseguinte, a ordem da *ratio essendi*, segundo a qual as coisas se dispõem em si quanto à sua dependência real.

Esta conexão certamente se tornará muito mais nítida quando nos adentrarmos nas considerações específicas sobre a metodologia analítica como veremos nos capítulos seguintes. Todavia, na própria terminologia de Descartes, em especial quando formula alguns dos seus preceitos metodológicos gerais, é visível a transferência, para esse contexto, até mesmo da linguagem geométrica. No seu segundo preceito, por exemplo, ele fala em *dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas forem necessárias para melhor resolvê-las*[1]. É patente que temos, aí, a transposição para a metodologia

1 - Descartes, R. Discurso do Método, tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior, [1973], pp. 45 e 46.

geral de uma importante técnica analítica empregada pelos antigos geômetras gregos, a saber, a de dividir a figura em novos traçados, tantos quantos necessários, até que se encontrassem certas conexões capazes de conduzir à descoberta dos elementos fundamentais para a prova do teorema ou resolução do problema proposto. É neste sentido que, comentando esse segundo preceito de Descartes, Lebrun afirma que, aí, *as palavras 'dificuldades' (que significa problema matemático) e 'resolver' devem remeter-nos à 'Geometria', nomeadamente à primeira parte do Livro III, onde se trata da resolução (...) mediante dois métodos* (composição e decomposição). (...) *Não é, pois, questão somente de 'dividir', mas também de decompor até os elementos mais simples, cuja combinação engendrará a solução*[1]. E tal solução é, assim, possibilitada em razão de que *composição implica dependência das partes umas em relação às outras, e do todo em relação às partes*[2]. Esta conexão entre a metodologia cartesiana e a análise dos antigos geômetras gregos (em especial Euclides, Arquimedes e Apolônio) é também, por diversas vezes, apontada por Granger que constata que, afinal de contas, *dividir a dificuldade, ir do simples ao complexo, efetuar enumera -*

1 - Lebrun, G. Nota ao *Discurso do Método*, {1973} p. 46.

2 - Lebrun, G. Nota ao *Discurso do Método*, {1973} p. 56.

ções completas, é o que observa rigorosamente o geômetra quando analisa um problema[1].

Por fim, resta dizer que Descartes, além disso, parece estender os princípios analíticos até à fundamentação da física em que justifica a intervenção da experiência como instrumento para determinar e isolar, entre uma infinidade de *objetos geométricos possíveis* aqueles que estão, de fato, enquadrados dentro do universo das *coisas realmente existentes*. E não poderá parecer estranha essa aproximação da física cartesiana às matemáticas, *às quais* (ele) *almeja mais do que tudo que ela se assemelhe*. (Respostas às Quintas Objeções). Em Descartes, é, portanto, *a análise que mostra o verdadeiro caminho pelo qual uma coisa foi metodicamente inventada e revela como os efeitos dependem das causas*. (Respostas às Segundas Objeções).

Esta última perspectiva cartesiana da análise nos remete, agora, a Newton que ficou também conhecido como profundo apreciador da antiga geometria grega. Não nos causa surpresa, portanto, que tenha ele assemelhado o seu método experimental ao método de análise, concebendo similarmen

1 - Granger, G. G. Introdução ao Vol. XV de *Os Pensadores*, 1973, p.17

te um sistema de interdependência entre os fatores conhecidos (controláveis) e os ainda não conhecidos (não controláveis). Para se aclarar melhor esta similaridade, vejamos um trecho da '*Ótica*', onde as próprias afirmativas de Newton podem mostrar essa ampla influência da análise geométrica:

> *Tanto na matemática, como na filosofia natural, a investigação de coisas difíceis pelo método de análise deve sempre anteceder o método de composição. Esta análise consiste em fazer experimentos e observações, e em extrair conclusões a partir delas por indução. (...) E se nenhuma exceção ocorre a partir dos fenômenos, a conclusão pode ser formulada em termos gerais. Mas se, algum tempo depois, ocorrer qualquer exceção, a partir dos experimentos, tal formulação pode ser, então, enunciada com as exceções tal como ocorrem. Mas, por esta forma de análise, podemos proceder dos compostos para os componentes e dos movimentos para as forças que os produzem; e, em geral, dos efeitos para as suas causas e das causas particulares para as mais gerais, até que o argumento termine na formulação mais geral. Este é o método de análise: E a síntese consiste em assumir as causas descobertas, e estabelecidas como princípios, e por meio delas explicar*

> *os fenômenos que lhes são decorrentes, e provar as explicações assim oferecidas*[1].

Como se pode perceber, então, a conexão fundamental entre o método experimental e a análise geométrica em Newton, é que o primeiro era igualmente concebido por ele como um método de descoberta, e, por conseguinte, não pode parecer estranho que diversos historiadores tenham reivindicado a descoberta de antecipações dos métodos da ciência experimental, ocultas na terminologia da análise (resolução) e síntese (composição).

Um outro ponto a destacar é o reflexo das idéias de análise e síntese no pensamento de Kant. A presença de tais idéias pode ser encontrada em várias passagens de algumas de suas diversas obras. Já na primeira seção da Dissertação de 1770, Kant lança mão da análise e da síntese quando trata da *Noção do Mundo em Geral*. Percebe-se, aí , que a idéia de análise está estreitamente associada ao conceito de divisão e que a idéia de síntese relaciona-se inti

1 - Referência apud Hintikka, J. & Remes, U.{1974}, p. 115: Opticks, Query, 23/21 (Edição 1730), reimpressão da Dover, pp. 404-405. (O trecho citado tem tradução nossa).

mamente à noção de composição. A análise, assim, está voltada para a consideração das partes, o *simples*, enquanto que a síntese, para o todo, o *mundo*. A recorrência a esses conceitos, torna-se, então, merecedora de uma nota em que Kant fornece informações adicionais que tornam possível se estabelecer melhor uma conexão com as idéias da análise geométrica. Transcrevamos essa nota:

> *As palavras 'análise' e 'síntese' possuem comumente uma dupla acepção. A síntese, no sentido qualitativo, é uma progressão, na série dos subordinados, da condição ao condicionado; no sentido quantitativo, ela é, então, uma progressão, na série dos coordenados, da parte dada por seus complementos, para o todo. Simetricamente, a análise, no primeiro sentido, é uma regressão do condicionado à condição; no segundo, do todo às suas partes possíveis ou mediatas, isto é, às partes de suas partes; e assim mais que divisão, ela é a subdivisão do composto dado. É apenas no segundo sentido que nós tomamos aqui a síntese e a análise*[1].

1 - Kant, I. {1942}, p. 20. (O trecho citado tem tradução nossa)

Nesta nota de Kant, dois aspectos podemos destacar para uma conexão mais estreita com as idéias da análise e da síntese geométricas: Em primeiro lugar, o movimento regressivo (retrodutivo) como característico da análise e o movimento progressivo como característico da síntese, e, em segundo lugar, a idéia de análise como divisão de um todo em suas partes e em partes das partes.

Com relação ao primeiro aspecto, de fato, no antigo método de análise geométrica, supondo-se demonstrado o teorema e resolvido o problema, estágios anteriores eram perseguidos até que fosse descoberto, nessa *regressão*, um estágio tal que fosse algo assim como um princípio que pudesse servir de ponto de partida para a síntese. A síntese, então, como procedimento complementar, constituía-se no movimento progressivo, a partir dos princípios, até que se chegasse a estabelecer a demonstração do teorema ou solução do problema proposto. Certamente que este primeiro aspecto da conexão que, ora, estabelecemos, poderá resultar mais claro após a exposição até mesmo da caracterização geral do método de análise que ofereceremos já no Capítulo I adiante.

É com relação ao segundo aspecto, a descrição da análise por Kant como *divisão e subdivisão do composto dado*, que se torna ainda mais transparente a conexão que se possa estabelecer com o antigo método de análise geométrica grega. Na realidade, conforme será visto no Capítulo III, a concepção de análise como análise de figura pressupõe a divisão da figura em novos traçados, de forma a tornar explícitas certas inter-relações entre as diversas partes de uma mesma configuração de modo a possibilitar a descoberta dos elementos necessários para conduzir, na síntese subseqüente, a prova do teorema ou solução do problema geométrico em questão. Neste contexto, é interessante ressaltar, ainda, que o sentido quantitativo (o segundo sentido) da análise e da síntese é precisamente o que mais se assemelha, na forma descrita por Kant, aos princípios fundamentais da análise geométrica. Torna-se notável, portanto, que Kant encerre a sua nota afirmando que é *apenas no segundo sentido que nós tomamos aqui a síntese e a análise.*

Nos prolegômenos, vamos encontrar uma outra passagem em que Kant afirma, explicitamente, utilizar-se do método de análise, e, mais que isso, oferece, ali, uma descrição do método a ser por ele empregado, que é bastante próxima da caracterização geral da análise geométrica. Vejamos a passagem com grifos nossos.

> *Mas não devemos aqui procurar primeiro a possibilidade de tais proposições, (sintéticas a priori) isto é, perguntar se são possíveis. Há um nú-*

> *mero suficiente delas e de fato não são dadas realmente com indiscutível certeza.* Como o método aqui seguido agora deve ser analítico, *nosso* ponto de partida *será que tal conhecimento sintético, porém puro, da razão* realmente existe. *Em seguida devemos 'investigar' o fundamento desta possibilidade e perguntar como é possível este conhecimento para que possamos estar em condições de determinar,* a partir dos princípios *de sua possibilidade, as condições de seu uso, seu âmbito e seus limites*[1].

Nesta descrição do método analítico em Kant, três elementos fundamentais coincidem com a descrição de Pappus do antigo método de análise geométrica: a) o ponto de partida, b) o movimento e c) o limite da análise (que é ponto de partida para a síntese).

a) Observando-se qual o ponto de partida do método analítico tal como descrito por Kant nessa sua passagem, percebe-se claramente que este consiste em se assumir o que se procura como se fosse *realmente existente*. Ora,

1 - Kant, I. (1974), p. 115.

mas, na antiga descrição do método oferecida por Pappus[1], não encontramos outra idéia que não esta a respeito do ponto de partida da análise geométrica: (...) *Na análise teórica assumimos o que se procura como se fosse existente e verdadeiro* (...)

b) Em relação ao movimento da análise, temos, nessa passagem de Kant, que este consiste em uma '*investigação*' do *fundamento desta possibilidade*: *Em seguida devemos* investigar *o fundamento desta possibilidade e perguntar como é possível este conhecimento* (...). Em Pappus, temos que: *Assumimos o que se procura como se fosse dado, e* investigamos *algo de que provém, aquilo que o acarreta como resultado, e, novamente qual a causa antecedente deste último e assim por diante*. Desta forma, o que se descreve aí é uma investigação que parte do que se assumiu como existente e verdadeiro para aquilo que o possibilita, *os princípios de sua possibilidade*, para utilizar a terminologia Kantiana.

c) Mas vejamos, agora, para concluir este confronto entre o método analítico em Kant e antiga análise geo

1 - A descrição completa poderá ser vista no I Capítulo.

métrica, o que se estabelece como limite deste método. Em Kant, o limite da análise vem a ser *os princípios de possibilidade*, a partir dos quais se determina o que fora assumido, no ponto de partida da análise, como *realmente existente*. É esta a idéia que encontramos na passagem dos Prolegômenos acima transcrita. Ora, em Pappus, vamos ter que a análise prossegue *até que seja alcançada (...) alguma coisa acima (...) pertencente à classe dos primeiros princípios*. Este, o limite da análise que, igualmente, se constitui em ponto de partida da síntese, onde se estabelece o que se deseja provar.

Pelo que acabamos de ver, portanto, torna - se dificultoso rechaçar que Kant estivera realmente de posse dessas antigas idéias metodológicas e que, em tais casos, as transpôs adequadamente para uma outra esfera de aplicação.

Diversos outros confrontos poderíamos ainda estabelecer entre algumas idéias Kantianas e o antigo método de análise geométrica. No entanto, alguns deles resultariam em um alongamento considerável desta introdução, além de requerer uma antecipação de aspectos mais complexos da análise como os que serão vistos no Capítulo III. Exemplo disso seria um estudo a respeito do reflexo das idéias da análise e da síntese sobre certos aspectos da distinção estipu lada por Kant entre os juízos analíticos e sintéticos, o que é efetivamente investigado e discutido por Hintikka[1]. Isto posto, consideramos aqui ilustrado o ponto principal de que Kant, de fato, recorreu, em diversos momentos, aos velhos conceitos de análise e síntese empregados na prática dos antigos geômetras gregos, e que isso evidencia, mais uma vez, a importância do método, constituindo-se em mais uma motivação para se investigar detalhadamente o tema.

Dando-se um grande salto no tempo, vamos encontrar filósofos da ciência contemporâneos, como Lakatos, a adotar a estrutura analítica como modelo conceitual para a ciência que, desta forma, passa a ser encarada como uma atividade de resolução de problema. *Essa nova visão de ciência* - como afirma Loparić - *em discordância clara com a abordagem axiomática que dominou o positivismo lógico desde os meados dos anos trinta, sugere diversas linhas de pesquisa. Pode-se tentar lucrar filosoficamente com os resultados da teoria lógica da computabilidade e da solubilidade*[2]. E, nessa perspectiva, mais uma vez o modelo metodológico da análise assume importante significado, pois, afinal de con-

1 - Veja-se Hintikka, J. {1973}.

2 - Loparić, Z. {1983}, 5.

tas, é característica fundamental das ciências computacio - nais a adoção de uma metodologia analítica.

Por essas considerações, mesmo tecidas em li - nhas gerais, percebe-se que o diversificado papel que tem sido e possa vir a ser desempenhado pela análise geométri - ca, como paradigma metodológico, pode motivar enormemente um exame rigoroso de aspectos selecionados de sua história. De nossa parte, selecionamos, como objeto de nossa investiga - ção, o problema da interpretação do método de análise, tema que consideramos fundamentalmente importante para a compre- ensão mais ampla desse paradigma metodológico.

CAPÍTULO I:

MÉTODO DE ANÁLISE: CARACTERIZAÇÃO GERAL, ORIGEM E DIFICULDADES PARA A SUA INTERPRETAÇÃO.

A nossa intenção, neste capítulo, é apresentar três aspectos que consideramos básicos como orientação geral ao tema que nos propomos a investigar que é o problema da interpretação do método de análise.

Em primeiro lugar, procuraremos expor as características gerais do método, como abordagem preliminar da matéria que é objeto de discussão. Uma caracterização geral da análise, todavia, nos impõe algumas restrições. Se, por um lado, isso significa a tentativa de uma abordagem isenta de posições particulares ou divergentes, por outro lado, significa, também, reconhecer que não será ainda possível, aqui, tecer-lhe uma mais profunda e detalhada consideração.

Em segundo lugar, tentaremos estabelecer a origem geométrica da análise, considerando-se que uma investigação acerca da história do método pode oferecer pistas para a compreensão do seu verdadeiro significado, como nos leva a crer o procedimento adotado pela grande maioria dos estudiosos do assunto.

Finalmente, levantaremos os principais pontos que ensejaram as diferentes interpretações dadas ao método em si e à sua prática, como forma introdutória de examinar a natureza da discussão.

1. Caracterização Geral do Método de Análise e Síntese

Apesar das várias divergências quanto ao método de análise, há pontos de partida comuns, bem como um acordo quanto às suas características gerais, cuja abordagem procuraremos oferecer nesta seção.

O método de análise era comumente empregado na busca de provas de teoremos e de construções para a resolução de problemas geométricos. No primeiro caso, a análise se diz teórica e, no segundo, análise de problema.

Na análise teórica, assume-se o que se está procurando, ou seja, o próprio teorema ou proposição que se deseja provar, como se fosse ela verdadeira, e, a partir desta, investiga-se um estágio anterior que possa conduzir à prova do teorema e, assim sucessivamente, outros estágios anteriores, até que se atinja uma proposição já conhecida ou estabelecida como verdadeira. Alcançando-se uma proposição conhecida como verdadeira, tem-se um axioma, um postulado ou um dos chamados *primeiros princípios*. No caso de se alcançar uma proposição estabelecida como verdadeira, deve tratar-se de um teorema anteriormente provado. Em qualquer caso, atingindo-se esse estágio, será possível, então, a demonstração do teorema em questão. Todavia, se nessa busca de antecedentes for alcançado algo reconhecidamente falso, então a proposição originariamente assumida como verdadeira é, na realidade, falsa.

Na análise de problema, assume-se o problema proposto como resolvido e, a partir da solução assumida, busca-se igualmente, de forma sucessiva, as condições antecedentes que proporcionariam tal resolução, até que seja alcançado o que os matemáticos denominam de *dados*. Atingido esse estágio, será possível, então, construir a solução do problema. Todavia, se nessa investigação, for alcançado algo impossível de construir, o problema será igualmente impossível.

Tanto no caso da análise teórica quanto no caso da análise de problema, o procedimento analítico em si não representa a demonstração do teorema nem a resolução do problema. A análise significa, assim, uma busca do caminho da prova ou da construção da solução, e é nisso que reside o seu papel heurístico de *método de descoberta*.

Para o estabelecimento do Teorema ou para a construção rigorosa da solução do problema, tanto o Geômetra como o matemático deverão adotar o procedimento complementar da síntese que se segue à análise propriamente dita.

Na síntese, parte-se do que por último foi alcançado na análise, ou seja, da proposição conhecida ou estabelecida como verdadeira (na análise teórica) e dos dados já conhecidos (na análise do problema) e, pela retrodução ou reversão dos passos lá alcançados, estabelece-se , passo por passo, o teorema ou a construção pretendida.

Esse procedimento complementar não será necessário no caso de o processo da análise conduzir a algo reconhecidamente falso ou impossível, quando, então, sem a necessidade de qualquer síntese, a suposição originária revela-se falsa e o problema, impossível.

Este último aspecto, contudo, estará sujeito a discussões posteriores como veremos nos capítulos subseqüentes.

2. A Origem Geométrica da Análise

Entre outros aspectos relacionados com o método de análise, discute-se também a sua origem. Ao que parece, a principal questão que se levanta aí é a de saber se a formulação original do método é filosófica ou geométrica.

Ao que tudo indica, a tentativa de demonstrar que a formulação original do método tenha sido filosófica apóia-se principalmente na tese de que o método de análise seja de autoria de Platão. Iniciaremos pela análise dessa tese, examinando em que e até que ponto poderia se fundamentar tal opinião.

Embora não se possa precisar, com exatidão, a origem da análise, algumas fontes chegaram a atribuir a sua descoberta a Platão. Hintikka e Remes[1] acrescentam que, embora Platão não empregue o termo '*análise*', seja para designar um método geométrico, ou um método filosófico, algumas fontes[2] alegam ter sido ele o inventor do verdadeiro método de análise geométrica.

Uma das principais razões pelas quais se associou, na antigüidade, o nome de Platão ao método de análise é levantada por Gulley:

> *Certamente, o modo como a análise geométrica é formulada em Proclus e nos comentários sobre Aristóteles sugere que o desenvolvimento da análise filosófica por Platão e a análise silogística de Aristóteles contribuíram*

1 - Hintikka, J. & Remes, U.{1974}, cap. VII, p. 84.

2 - Hintikka e Remes{1974}nos remetem às seguintes fontes: Proclus (ed. Friedlein) p. 211 linhas 18; Diógenes Laertius II, 24 ; Academicorum Index Herculanensis, ed. S. Merkler, Weidmann, Berlim; 1902, p. 17.

> *enormemente para a sua formulação. No caso de Platão, esta é, sem dúvida, a explicação para a estreita associação que se estabeleceu, na antigüidade , entre o nome de Platão e a análise geométrica.*[1]

Encontram-se, certamente, diversas semelhanças entre os procedimentos adotados por Platão e aqueles que são próprias da análise geométrica. Cornford[2], por exemplo, com o objetivo de definir as experiências mentais que Platão distingue como *nóesis* e *diánoia* chega a nos oferecer fortes indícios dessa semelhança, em particular quando trata de estabelecer o confronto de matemática e dialética em Platão, no tocante aos movimentos do pensamento. Segundo Cornford, então, quando Platão distingue, em um certo sentido específico, *Nóesis* de *diánoia*, *Nóesis* passa a significar o movimento ascendente da intuição ou a busca de antecedentes , enquanto que *diánoia* assume, aí, o significado de movimento descendente do pensamento, desenvolvendo o raciocínio da argumentação dedutiva[3]. Sem dúvida, podemos observar uma semelhança com os procedimentos de análise e síntese, pelo me -

1 - Gulley, N. {1958}, 33, pp. 6 - 7 (Tradução nossa).
2 - Cornford, F. M. {1932} 41, p. 67.
3 - Este ponto será retomado no Capítulo II, Seção 2.

nos em sua caracterização geral, descrita na seção precedente[1]. Tal semelhança se acentua ainda mais quando Cornford acrescenta que *Platão entendia que a mente deve possuir o poder de dar um passo ou salto para cima, da conclusão para as premissas nela envolvidas*[2].

Para Cornford, foi talvez por essa semelhança que Proclus, em uma certa passagem, estabeleceu uma estreita associação entre o método de Platão que consiste na subida da dialética *aos princípios genuínos*, e o método de análise geométrica. A passagem que, a seguir, transcreveremos, merecerá posteriores comentários:

> *No entanto certos métodos têm sido transmitidos. O mais refinado é o método que, por meio da análise, conduz a coisa procurada para cima até um princípio conhecido; um método que Platão, segundo dizem, transmitiu a Leodamas, e, por meio do qual este último afirmou ter descoberto muitas coisas na geometria*[3].

---

1 - Este aspecto será ainda discutido mais detalhadamente no Capítulo II, Seção 2.

2 - Cornford, F. M.{1932}, 41, p. 67. (Tradução nossa).

3 - Proclus in Eucl. I, p. 211, 18, tradução de Thomas Heath (Greek Mathematics, I, 291). (Tradução nossa).

É interessante observar que a passagem de Proclus se inicia com a frase *certos métodos têm sido transmitidos*. Isso, segundo nos parece, é mais um indício de que os *métodos*, principalmente os de descoberta, eram guardados como segredos e que não era, de fato, costume transmití-los[1]. Para Hintikka e Remes[2], a relativa ausência de discussões explícitas do método entre os antigos matemáticos e filósofos deve-se ao fato de que a análise, a final de contas, é um método de descoberta e não de prova. Cremos, portanto, que nada há mais de notável aí a não ser a informação de ter sido Platão o transmissor do método e que Leodamas, através dele, tenha *descoberto muitas coisas*, o que caracteriza a análise como procedimento heurístico. Assim, não concordamos que essa passagem seja uma evidência da autoria de Platão.

Mas vejamos o que diz dessa passagem o Sir Heath:

> *Sendo a análise, segundo a antiga concepção, nada mais do que uma série*

---

1 - Em Hintikka, J. e Remes, U.({1974}, p. 7), encontramos que *diversos matemáticos do Século XVII participavam da crença de Descartes de que os antigos matemáticos tinham ocultado intencionalmente este método vital para eles.*

2 - Hintikka, J. e Remes, U., {1974}, p. 7.

de sucessivas reduções de um teorema ou problema a outro, até que seja finalmente reduzido a um teorema ou problema já conhecido, é difícil ver em que possa consistir a suposta descoberta de Platão; pois a análise, neste sentido, deve ter sido freqüentemente usada em investigações anteriores (de que exemplos são oferecidos). Por outro lado, a linguagem de Proclus sugere que o que ele tinha em mente era o método filosófico descrito na passagem da República, que naturalmente não se refere, de forma alguma, à análise matemática; pode ocorrer, portanto, que a idéia de que Platão descobriu o método de análise seja devida a um engano. Todavia, a análise e a síntese, seguindo-se uma a outra, são descritas de alguma forma como a progressão ascendente e descendente no método dialático intelectual. Sugeriu-se, portanto, que o mérito de Platão foi observar a importância, do ponto de vista do rigor lógico, da síntese confirmatória, subseqüente à análise.[1]

1 - Heath, T. A History of Greek Mathematics, I, 303, citado por F.M. Cornford. *Mathematcs and Dialectic in the 'Republic' VI-VII*, in Mind N. S. 41 (1932), p. 64. (Tradução nossa).

Cornford, que tanta similaridade encontra entre a dialética de Platão e a análise geométrica, concorda que não há dúvida de que Platão não tenha inventado o método de análise; todavia observa que a sua conexão com o método dialético é muito mais próxima do que Heath, sugere, e desenvolve toda uma argumentação nesse sentido[1].

Mas voltemos, ainda à passagem de Proclus que transcrevemos anteriormente: Cherniss[2] à semelhança de Hintikka a Remes, a aponta, juntamente com a de Diógenes Laetius, III, 24[3], como um dos principais sustentáculos da *tradição* de que seja de Platão a autoria da análise geométrica. Essa *tradição* que é rejeitada por Cherniss, é defendida por Mugler em *Platon et la Rēcherche Mathēmatique de Son Époque*[4]. Segundo Mugler, *a invenção do método de análise está contida, em germe, na 'República' 510-11*[5]. Além disso, para ele, *o que distingue os métodos do*

1 - Veja-se Cornford, F. M., {1932}, 41, p. 68.

2 - Cherniss, H. {1950-51}, 4, p. 418.

3 - A passagem de Diógenes Laertius indica que Favorinus foi a sua fonte para a afirmativa de que Platão foi o primeiro a explicar o método a Leodamas. Cherniss, H. {1951}, 4, p. 418.

4 - Mugler, Strasburg, {1948}, pp. 283-297, referência apud Mahoney, M.S. ({1968/69}, 5, p. 318) e Cherniss, H. {1950/51}.

5 - Mugler, opus cit. p. 288.

geômetra e do dialético não é tanto o seu procedimento, mas a sua esfera de aplicação[1].

Entre outros comentários e argumentos que se fundamentam em aspectos cronológicos no confronto de textos antigos[2], Cherniss comenta, em particular, as passagens de Proclus e Diógenes Laertius. Proclus - diz o seu comentário - sentiu alguma reserva com relação à afirmativa de que Platão transmitiu o método a Leodamas e, por essa razão, protegeu-se com a expressão *segundo dizem*. Quanto à passagem de Diógenes Laertius, Cherniss considera que, aí, há apenas a indicação de que Favorinus foi a sua fonte de informação para o enunciado de que Platão foi o primeiro a explicar a método a Leodamas. E acrescenta:

> *Ninguém afirma inequivocamente que Platão foi o primeiro a formular o método; e o mais antigo autor do 'Index Herculanensis' (Col. V. 14 ff. p. 17, Mekler), cujo testemunho Mugler não menciona, fala apenas da proeminência da análise à época de Platão, sem atribuir o método ao próprio Platão*[3].

1 - Idem, ibid. p. 291. Para Cherniss, no entanto, ({1951}, 4, p. 416), Platão afirma exatamente o contrário: É o método que distingue a matemática e a dialética e que o movimento ascendente de 511-B pertence somente à dialética.

2 - Veja-se Cherniss, H. {1951}, 4. p. 420.

3 - Cherniss, H.{1950-51}, p. 418. (Tradução nossa).

O que, de certo, torna altamente improvável a autoria de Platão do método de análise e que, conseqüentemente, exclui a sua formulação filosófica como a originária, são as evidências de que a análise geométrica, como um método reconhecido, era pré-platônica.

Admite-se, comumente, que a análise fora já empregada por Hipócrates de Quios e talvez pelos primeiros pitogóricos. No caso de Hipócrates, são diversas as referências[1] com respeito ao uso que ele fizera desse método na busca de soluções para problemas como o da duplicação de cubo[2].

Mahoney[3] considera que o método empregado por

1 - Veja-se Heath, T. - History of Greek Mathematics (Repr. Oxford {1960}, pp. 183-200); Bacca, J.D.G. - Textos Clássicos para la Historia de la ciencia (Vol. I de la Biblioteca Filosófica del Anuario EPISTEME, Universidad de Venezuela, Instituto de Filosofia, Caracas, {1961}, pp. 44-47); Mahoney, M.S. - *Another Look at Greek Geometrical Abalysis* in Archive for History of Exact Sciences, pp. 331-33); Hintikka, J. & Remes, U. - The Method of Analysis (D. Reidel Publishing Company, Boston, {1974}, p. 84); Thesleff, H. - *Scientific and Technical Style in Early Greek Prose* In Arcotos (N.S.) B. {1966}, p. 105); P.H. Michel et allii - História Geral das Ciências, Tomo I, 2º vol., (Difusão Européia de Livros, São Paulo, {1959}, p. 37); Brunschvicg, L. {1947}, p. 53.

2 - O problema consiste em calcular qual deve ser a aresta de um cubo cujo volume seria igual ao dobro de um cubo dado.

3 - Mahoney, M.S. {1969}, pp. 331-332.

Hipócrates de Quios era um tipo especial de análise, a análise por redução. Neste sentido, a recorrência a um texto específico de História da Ciência[1], nos revela que Hipócrates de Quios é considerado o inventor do método *apagógico* que consiste em reduzir um problema a outro, de tal forma que, se o segundo for resolvido, o primeiro também estará solucionado.

Mas, considerando-se a importância da referência a Hipócrates de Quios como um dos pontos fundamentais para o estabelecimento da origem geométrica do método de análise, convém investigar, internamente, a forma como um problema geométrico era por ele tratado.

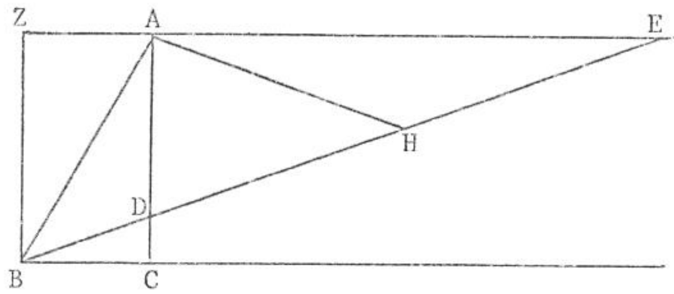
De acordo com Mahoney, além do problema da duplicação do cubo, dois outros problemas que dominaram a época de Platão - a quadratura do círculo e a trisecção de um ângulo - já haviam sido tratado por Hipócrates de Quios pelo método de análise por redução. Vejamos, pois, a título de exemplo para posterior confronto, como Hipócrates de

1 - História Geral das Ciências, Tomo I - A Ciência Antiga e Medieval, 2º volume - As Ciências no Mundo Greco-Romano - P.H. Michel, L. Bourgey, T. Bearjeu, R. Bloch, J. Itard, tradução de Ruy Fauto e Gita K. Chinzbery. Difusão Européia do Livro, S. Paulo, 1959.

Quios considerou o segundo problema[1].

Antes de tudo, a análise começa com a redução do problema particular a um outro mais geral, cuja solução se impõe como condição para a solução do primeiro:

Seja, pois, o ângulo ABC trisectado. Trace uma linha AC perpendicular a BC. Suponha, agora, que o problema está solucionado e que o ângulo DBC é igual a um terço do ângulo ABC. Trace BZ perpendicular a BC e complete o retângulo ACBZ.



Prolongue as linhas BD e ZA até o seu ponto de encontro em E. Seja H o ponto médio de DE e trace AH; Uma vez que o triângulo ADE é um triângulo reto, AH = DH = HE. Portanto $\angle$ AHD = $\angle$ HAE + $\angle$ HEA = 2 $\angle$ HEA = 2 $\angle$ DBC = $\angle$ ABD, de que se segue que AH = AB = ½ DE. Por conseguinte, o ângulo ABC po-

1 - Exemplo da abordagem do primeiro problema encontra-se também em Mahoney, M.S. (1968), 5, p. 333. Veja-se também Heath, T. History of Greek Methematics (Repr. Oxford, {1960}, p. 183-200).

de ser trisectado se é possível estabelecer, entre a linha ZA prolongada e a linha AC, uma linha transversa ED que seja igual a 2AB que, se prolongada, passa pelo vértice B. (estabelecendo um terço do ângulo que se propunha trisectar).

Desta forma, o problema da trisecção do angulo, se reduz a um outro problema com novas condições que requerem técnicas específicas de solução[1]. Todavia, o que nos interessa aqui é muito mais o procedimento adotado por Hipócrates de Quios do que a solução propriamente dita, pois a análise, em si, não representa a demonstração do teorema ou, no caso, a solução do problema.

Se confrontarmos, agora, essa estratégia com a caracterização geral da análise vista na Seção 1. deste Capítulo, constata-se que temos aí um claro exemplo do emprego do método de análise: Assume-se o problema proposto como resolvido e, a partir da solução assumida, busca-se, de forma sucessiva, as condições antecedentes que proporcionariam tal solução. Satisfeitas essas condições, será possível, então, construir a solução do problema.

1 - Para detalhes da solução deste problema, veja-se Mahoney, M.S. {1968}, 5 p. 333.

A partir desta consideração do procedimento empregado por Hipócrates de Quios, não resta dúvida de que temos uma certa correspondência com o método de análise e, por conseguinte, uma evidência pré-platônica do uso do método para resolver problemas geométricos[1].

Na antigüidade, são encontradas, ainda, diversas outras referências à análise, as quais ilustram não apenas o seu significado geral, como também o seu sentido específico na lógica e, em seguida, o uso do termo para designar um método geométrico. Gulley[2], por exemplo, destaca que a aplicação do termo nos diversos campos do saber foi detalhadamente descrita pelos comentadores gregos, em particular quando trataram de explicar o título do '*Analíticos*' de Aristóteles. Remetendo-nos a diversas fontes[3], Gulley apon-

1 - Consta ainda que, ao aplicar esse método ao problema da duplicação do cubo, Hipócrates de Quios obteve, na falta de uma solução, um resultado surpreendente ao nível da matemática de então. Esse resultado, por si só notável, foi o de estabelecer que o problema da duplicação do cubo se reduzia ao de encontrar duas médias proporcionais entre dois números dados - e não uma apenas, como para a duplicação do quadrado. (Cf. História Geral das Ciências, p. 37).

2 - Gulley, N.{1958}, 33, p. 4.

3 - Alexandre, in An. Pr. I, 7 - 12 (Wallies); Ammonius, in An. Pr. I, 5 - 10 (Wallies); Philophonus, in An. Pr. I, 5 - 16 (Wallies); Eustratius, in An. Pr. II, 3 - 10 (Hayduck).

ta o uso que era feito do termo pelos γραμματικοί, φυσιολόγοι, φιλοσόφοι e γεωμέτραι (gramáticos, fisiólogos naturalistas, filósofos e geômetras) para designar um processo de resolução de um todo para as suas partes, de um composto para os seus elementos, do complexo para o simples. No sentido lógico, que diz respeito ao sentido geométrico, a análise é vista como um movimento de busca de antecedentes.

Há, no entanto, uma outra evidência em favor de que o método analítico não fora, inicialmente, uma formulação filosófica, mas que, em sendo uma formulação já existente de uma prática dos antigos geômetras, se viu influenciado pelos trabalhos de Platão, no sentido de receber uma formulação mais precisa. Desta forma, quando Platão introduz, pela primeira vez, no Meno, o método analítico ἐξ ὑποθέσεως[1] (a partir de hipóteses), ele o compara ao antigo método de análise geométrica, donde se pode concluir que este antecedera àquele.

Outra evidência bem mais importante é a referência que faz Aristóteles ao método que, em seu tempo, era

1 - Cf. Gulley, N. *Greek Geometrical Analysis* in Phronesis 33 (1958), p. 7, nota 1.

conhecido como análise geométrica, e isto sugere que o método fora originariamente formulado pelos geômetras. É conhecida a passagem da *Ética*[1] em que a deliberação humana é descrita como um processo que, tencionando um fim a ser alcançado pela ação, trabalha regressivamente ao longo de uma cadeia de meios para atingi-lo, até que encontre, como primeiro elo dessa cadeia, uma ação que possa, de imediato, ser executada e que, no caminho descendente, conduza ao objetivo pretendido. Em suma, esse processo poderia ser esquematizado da seguinte forma: Um agente X pretende alcançar um objetivo A. Para alcançar A, é necessário desempenhar uma ação B. Todavia para realizar B, X verifica que, antes, tem que praticar a ação C, e assim sucessivamente, até que X encontre, nesse processo, uma ação que possa ser, de imediato, realizada e, a partir da qual, sejam percorridos os meios para alcançar o objetivo. Digamos, para simplificar, que essa ação imediata seja C. Executada a ação C, X poderá realizar B que conduzirá a A, que é o objetivo pretendido.

Aristóteles compara esse processo regressivo utilizado na solução de um problema prático, à análise de uma figura geométrica (διάγραμμα), onde o último passo da

1 - Cf. Gulley, N. *Greek Geometrical Analysis* in Phronesis 33 (1958), p. 7, nota 1.

análise se torna o primeiro na construção que se segue. Ora, ao comparar o processo de deliberação, na esfera da ação humana, à análise de uma figura geométrica, Aristóteles não buscou, como segundo termo da comparação, um procedimento que fosse filosófico nem, especificamente, dialético. Isso não deixa de revelar que o sentido da análise estava, então, muito mais solidificado como um método geométrico . Além disso, Aristóteles, nessa passagem, nos oferece, também, uma descrição do método de análise. Apesar disso, a única explicação extensiva do conceito de análise e síntese só veio surgir bem posteriormente, sendo devida a Pappus [1] que, podendo ser considerado uma testemunha fidedigna, tinha um completo conhecimento da história do método, como pode revelar a sua *Collectio*[2], além de ter sido um hábil matemático e perfeito praticamente da análise.

---

1 - *Pappus, grande matemático grego, viveu provavelmente em torno do ano 300 de nossa era. No Livro VII das suas Collectiones, Pappus descreve um ramo de estudo que ele chamou de analyomenos. Podemos traduzir este nome por 'Tesouro da Análise' ou 'Arte de Resolver Problemas' ou mesmo 'Heurística'.*

G. Polya in A Arte de Resolver Problemas, tradução de Heitor Lisboa de Araújo. RJ., Interciência, 1978. p. 104.

2 - Pappi Alexandrini Collectionis Quae Supersunt, ed. por Fr. Hultsch, Weidmann, Berlin, vols. I-III, 1876-1877).

3. Dificuldades Básicas para a Interpretação da Análise.

Como é reconhecido pelos estudiosos do assunto, a descrição de análise feita por Pappus[1] é o que há de mais informativo dentre as remanescentes descrições antigas do método[2]. Em razão disso é que a grande maioria das interpretações da análise se baseia principalmente nessa passagem de Pappus, embora se verifique que os defensores de uma e de outra interpretação procurem reforçar, também, a sua posição em outros relatos que não o de Pappus[3]. Assim sendo, antes de apresentarmos a exposição do problema de interpretação da análise, façamos transcrever, aqui, a famosa passagem[4].

> (I) *A análise, então, toma o que é procurado como se fosse admitido e, a partir disso, através de suas sucessivas conseqüências*

1 - A passagem é apresentada, entre outros, por Hintikka, J. e Remes, U. in The Method of Analysis, D. Reidel Publishing Company, Boston, U.S.A., pp. 8 - 10; Richard Robinson in *Analysis in Greek Geometry*, Mind N. S. 43, 1936, p. 465 - 6 - Tradução de Heath.

2 - Esta nossa afirmativa se baseia em Richard Robinson, opus cit. nota anterior, p. 466.

3 - Essas indicações serão explicitadas adiante no capítulo II e III.

4 - Tradução nossa a partir do texto de Heath citado por Robinson opus cit., p. 466.

(διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων) passa para algo que se admite como ponto de partida da síntese: pois na análise, assumimos o que se procura como se isso (já) fosse dado (γεγονός), e investigamos algo de que provém, aquilo que o acarreta como resultado, e, novamente, qual a causa antecedente deste último e assim por diante, até que seja alcançada, pela retrodução dos nossos passos, alguma coisa, acima, já conhecida ou pertencente à classe dos primeiros princípios. A um tal método chamamos de análise como solução retrovertida (ἀνάπαλιν λύσιν).

(II) Mas, na síntese, que é o processo reverso, tomamos como já dado o que por último foi alcançado na análise e, colocando na ordem natural de conseqüência o que antes era antecedente e conectando-os sucessivamente um ao outro, chegamos finalmente à construção do que era procurado; e a isto chamamos de síntese.

(III) A análise, por sua vez, é de dois tipos: o primeiro é dirigido para a busca da verdade e se chama de análise teórica; o segundo se dirige para a descoberta do que estamos decididos a encontrar e se chama de análise de problema.

1) Na análise teórica, assumimos o que se procura como se fosse existen-

> te e verdadeiro. Feito isso, passamos, através de suas sucessivas conseqüências (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων), como se elas fossem também verdadeiras e estabelecidas em virtude da nossa hipótese, para algo admitido: neste ponto, (a) se o que é admitido é verdadeiro, então o que é procurado será também verdadeiro, e a prova corresponderá ao caminho reverso da análise; mas (b) se o que é alcançado é algo reconhecidamente falso, o que se procura é igualmente falso,
>
> 2) Na análise de problema, assumimos o que é proposto como se fosse conhecido. Depois disso, passamos através de suas sucessivas conseqüências (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων), tomando-as como verdadeiras, até chegarmos a algo admitido: Neste ponto, (a) se o que é admitido é possível e obtenível, isto é, se se trata do que os matemáticos chamam de <u>dados</u>, então o que era originariamente proposto será também possível, e a prova, novamente, corresponderá à ordem reversa da análise; mas (b) se chegarmos a algo reconhecidamente impossível, o problema será também impossível.

Examinando o relato de Pappus, podemos dividi-lo em três partes fundamentais: Na primeira (I), encontramos uma descrição geral da análise, onde o método é descrito estritamente como um movimento ascendente de busca de premissas. Na segunda (II), encontramos uma descrição da síntese como um processo dedutivo na direção oposta à da análise. Finalmente, na terceira parte (III), encontramos uma descrição detalhada da análise nos seus dois tipos (análise teórica e análise de problemas) como um movimento dedutivo a partir do que se pretende demonstrar, assumindo-o como verdadeiro.

É a partir da descrição da análise em (I) e em (III) que têm surgido as diferentes interpretações do método. O nosso intento agora é o de detectar, de uma forma geral e sem apresentar ainda os argumentos que tendem a sustentar uma a outra posição[1], os principais aspectos que se têm constituído em ponto de discordância entre as principais interpretações.

Essas interpretações divergem, entre si, quanto a três aspectos fundamentais: em primeiro lugar, o relato de Pappus dá ensejo ao célebre problema da direção da análise. Discute-se, aí, se a análise é um movimento <u>ascendente</u>, ou seja, uma subida em busca de antecedentes dos

1 - Esses argumentos serão apresentados à medida que expusermos as diferentes posições nos capítulos II e III.

quais se segue o pressuposto inicial, ou se é, pelo contrário, um movimento descendente, em que cada passo subseqüente é uma conseqüência lógica do que é assumido como ponto de partida na análise. Intimamente relacionado ao aspecto direcional, surge o problema lógico da análise. A discussão vai girar em torno de questões como a de se saber se a análise é um procedimento dedutivo ou não, ou que tipo de inferência é aí estabelecido, ou ainda como se dá a reversibilidade dos passos da análise na síntese complementar[1]. Na realidade, do ponto de vista prático, falar do problema direcional significa tratar também do problema lógico da análise, ou seja, para se discutir o seu aspecto direcional, torna-se imprescindível uma investigação quanto ao tipo de lógica subjacente ao método. Finalmente, o terceiro ponto de discordância sobre o relato de Pappus é a questão de se saber, afinal de contas, se ele está tratando, em sua abordagem, de um único método ou de duas formas distintas do mesmo método de análise geométrica em que uma seria ascendente e não dedutiva e a outra descendente e dedutiva[2].

---

1 - Discussões detalhadas sobre o problema direcional e o problema lógico da análise serão oferecidas nas seções 1., 2. e 3. do Cap.II.

2 - Este aspecto é discutido em detalhes na seção 4. Capítulo II.

Quanto ao primeiro aspecto do problema da interpretação da análise, ou seja, o aspecto direcional, a primeira parte do relato de Pappus (I) parece estar descrevendo, de forma bastante clara, um procedimento ascendente de busca de premissas. Os que sustentam essa posição, se baseiam mais exatamente nesse trecho e interpretam a frase de Pappus (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων) como significando '*através de seus passos subseqüentes*', não no sentido de conseqüências lógicas, mas de passos que se sucedem apenas temporalmente[1]. Além disso, supõe-se, aí, que as implicações caminham em um único sentido e que, conseqüentemente, a análise significa um movimento *contra a corrente* e, assim, apenas a síntese é que é dedutiva, mas não a análise.

Já os que sustentam ser a análise um movimento descendente, vão se fundamentar muito mais na parte (III) do relato de Pappus. Entendem διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων como sendo '*através das suas sucessivas conseqüências*', no sentido de conseqüências lógicas. Todavia, o privilégio concedido à parte (III) exige uma conciliação com o que Pappus estabelece na parte (I), e, desta forma, o percurso ascendente da

1 - Este ponto é discutido nas seções 2. e 3. do capítulo II. Todavia uma outra abordagem deste aspecto é oferecido no capítulo III.

análise passa a ser encarado como uma questão de ponto de referência. A análise só teria sido descrita por Pappus como um movimento ascendente apenas em relação à síntese complementar. Isso significa dizer que, embora a análise seja dedutiva e descendente, ou seja um movimento *a favor da corrente*, pode também ser considerada como um movimento ascendente no sentido de que, na síntese, o processo se inicia pelo que por último foi alcançado na análise e, assim, a última proposição obtida na análise, passa a ser a primeira na ordem da síntese. É sob esta ótica que a análise seria considerada uma *subida* até à primeira proposição. Além disso, presumida a reciprocidade das implicações, Pappus estaria, em qualquer caso, correto ao afirmar fosse qual fosse a direção tomada pela análise.

Em suma, a descrição (I) de Pappus trataria do movimento que vai da proposição assumida como verdadeira para a conseqüência que já é conhecida, não do ponto de vista de como se processa, de fato, por ocasião da análise, mas em relação à síntese subseqüente. Os que assumem esta posição, pressupõem, como condição do método, que as implicações sejam recíprocas, pois, em caso contrário, não seria possível a convertibilidade por ocasião da síntese.

De toda forma, do ponto de vista direcional, procede-se analiticamente quando se seguem relações de conseqüência lógica em um sentido oposto à sua direção normal, enquanto que se procede sinteticamente quando se seguem essas conseqüências em sua direção natural. Este aspecto, no entanto, por ter sido preponderante na literatura filosófica da idade média, deixou à margem um outro ponto fundamental à discussão do método de análise: o seu sentido construcional[1]. Em poucas palavras, investiga-se, aí, quais devam ser as transformações necessárias (preparação ou construções) a serem efetuadas na figura, até que se chegue a um estágio anterior que nos possibilite conduzir a prova[2].

O terceiro ponto de discordância na interpretação do relato de Pappus é, como dissemos, o de se saber se se trata aí de um único método ou de duas formas distintas de um mesmo método de análise geométrica, em que uma seria dedutiva e descendente e outra ascendente e não-dedutiva. Os autores que divergem quanto aos dois primeiros pontos, são unânimes quanto a este terceiro: Eles supõem tratar-se de um único método. Todavia, à luz das evidências que tendem a sustentar uma e outra posição, há quem defenda a posição de que, na realidade, Pappus, em seu relato, esteja tratando de duas formas distintas da análise e não, de um

1 - Maiores detalhes serão vistos no Capítulo III

2 - Veja-se o exemplo de Hipócrates de Quios oferecido na Seção anterior.

único método com um único conjunto de regras.

O problema maior parece decorrer do fato de que as posições são irreconciliáveis, principalmente no que diz respeito a uma pluralidade de métodos descritos, pois os autores que divergem entre si quanto aos dois primeiros problemas, estão supondo a consistência do relato de Pappus, fazendo apelo ao fato de que ele não apenas era um profundo conhecedor do método, mas também um exímio praticamente da análise. Por outro lado, quem se propõe a defender que Pappus, em sua abordagem, trata de dois métodos distintos, há de incorrer na acusação de que ele, supondo a equivalência das duas formas distintas do método de análise, não se deu conta da inconsistência envolvida nessa sua suposição, uma vez que, nos casos em que as implicações não são recíprocas, a afirmativa de que '*se na análise encontramos algo reconhecidamente como falso ou impossível então o que se procura será falso ou impossível*' não é necessariamente verdadeira, uma vez que premissas falsas podem dar origem a conclusões verdadeiras.

Essas são, em resumo, as principais dificuldades suscitadas pelo relato de Pappus para uma interpretação do que teria sido o método de análise praticado pelos antigos geômetras gregos. Considerações mais detalhadas serão urdidas em capítulos subseqüentes.

CAPÍTULO II:

A INTERPRETAÇÃO TRADICIONAL DA ANÁLISE E PRINCIPAIS CONTROVÉRSIAS

Faremos, neste capítulo, uma exposição da controvérsia em torno do método analítico, a partir da concepção tradicional, ou concepção padrão, que tem sido comumente aceita pelos historiadores da matemática grega.

Como foi visto no capítulo I, seção 3., toda essa discussão toma, como ponto de partida, a passagem de Pappus em que é feita a descrição de análise. Expusemos lá os pontos principais da discussão, bem como os aspectos implicados em se assumir uma ou outra posição.

Aqui, consideraremos, portanto, 1. A Concepção Tradicionalmente Aceita da Análise, 2. A Concepção de Cornford: Análise Geométrica e Dialética, 3. A Crítica de Robinson a Cornford em Defesa da Concepção Tradicional e 4. A Posição de Gulley por uma Terceira Interpretação.

A relevância dessa controvérsia decorre do fato de se ter levantado, aí, alguns aspectos do problema da interpretação da análise, a partir dos quais se estimulou um estudo mais acurado do tipo de lógica envolvido no método, o que, segundo cremos, veio clarificar o verdadeiro sen tido heurístico implícito na análise. Desta forma, este capítulo se reveste de uma importância especial, uma vez que ele permitirá que se perceba, como será visto no capítulo seguinte, o refinamento crescente com que Hintikka e Remes trataram da questão.

1. Concepção Tradicionalmente Aceita da Análise

A concepção tradicionalmente aceita, ou concepção-padrão da análise, representa a posição dos historiadores da matemática grega, em especial Hankel, Cantor e Heath que, segundo Richard Robinson, se põem de acordo quanto ao método que os geômetras gregos denominavam de análise[1].

Esta concepção será aqui considerada principalmente a partir da exposição feita por Heath no § 6 do Capítulo IX de sua introdução a *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Além disso, tendo em vista que o confronto entre a posição de Heath, Cantor e Hankel já foi estabelecido por Richard Robinson, consideraremos o tratamento que foi dado

1 - Veja-se Robinson, R. {1936}, 45, p. 464.

à questão por Duhamel[1] e por Zeuthen[2], procurando confrontá-los com Heath.

Trataremos, em primeiro lugar, do aspecto lógico geral do método e, em especial, do que Pappus chamou de análise teórica, que é a análise enquanto empregada como busca de um caminho para o estabelecimento da verdade de uma certa proposição, ou seja, para a descoberta de prova de teoremas. Feita esta abordagem, concluiremos esta seção considerando o que Pappus chamou de análise de problemas, ou seja, a análise enquanto empregada na busca de soluções de problemas.

1.1 - A Análise Teórica e a Lógica Geral do Método:

Iniciemos com a transcrição do trecho de Heath em que expõe, sucintamente, o movimento da análise e a lógica aí envolvida:

> *O método é da seguinte forma: Digamos que seja requerido provar que uma*

1 - Duhamel, J.M.C. {1885}.
2 - Zeuthen, H.C. {1902}.

certa proposição A é verdadeira. Assumimos, como hipótese, que A é verdadeira e, partindo desta, descobrimos que, se A for verdadeira, uma certa outra proposição B é verdadeira; se B for verdadeira, então C; e assim por diante, até que cheguemos a uma proposição K que é admitidamente verdadeira. O objetivo do método é possibilitar-nos inferir, na ordem reversa, que, desde que K seja verdadeira, a proposição A originariamente assumida é verdadeira. Agora, Aristóteles já tornara claro que hipóteses falsas podem levar a uma conclusão verdadeira. Há, portanto, uma possibilidade de erro, a menos que uma certa precaução seja tomada. Enquanto, por exemplo, B pode ser uma conseqüência necessária de A, pode ocorrer que A não seja uma conseqüência necessária de B, assim, para que a inferência reversa de que A é verdadeira a partir de K, seja logicamente justificada, é necessário que cada passo da cadeia de inferência possa ser incondicionalmente convertível[1].

1 - Heath, T.L. {1925}, p. 41. (trecho citado com tradução nossa.

Podemos perceber, claramente, que a análise é interpretada aí como sendo um processo dedutivo e, portanto, descendente, a partir do que se deseja provar. O método consiste, pois, em se assumir como verdadeiro o que se deseja provar e, a partir disso, se extrair as necessárias conseqüências até chegar a algo já conhecido independentemente como verdadeiro, ou seja, a algo assim como um primeiro princípio ou teorema anteriormente provado, de forma que o conhecimento de sua verdade independa do que originariamente se havia suposto.

A prova do pressuposto inicial, feita reversamente pelo processo da síntese, que é igualmente dedutivo , se inicia pelo que por último foi alcançado na ordem da análise, ou seja, partindo do que é conhecido independentemente como verdadeiro, até que se chegue à proposição que se deseja demonstrar.

Esquematicamente, poderíamos dizer que, caso se deseje provar a proposição A, deve-se extrair daí uma conseqüência lógica, que chamemos B. Se B não é algo conhecido independentemente como verdadeiro, deve-se continuar o processo de extrair conseqüência. Digamos que esta conseqüência de B seja C. Não sendo C ainda algo independentemente conhecido como verdadeiro o processo deve continuar sucessivamente. Mas sendo alcançado algo reconhecidamente ver dadeiro, conclui-se o trabalho da análise. Digamos que este último passo seja K, Desta forma, o caminho da análise corresponderia à seqüência de passos A→B→C→D→K. A síntese seria, pois, o caminho reverso: Uma vez que K é conhecido independentemente como verdadeiro e implica D, então D é verdadeira. Sendo D verdadeiro e implicando C, então C é verdadeiro, e assim sucessivamente, até que se chegue a A que era o que se pretendia provar. Desta forma, a síntese pode ser representada pela seguinte seqüência de passos: K→D→C →→B→A.

Fica claro que esta interpretação pressupõe que as implicações devem ser recíprocas em todos os passos. Este aspecto, para a interpretação tradicional, assume importância fundamental por duas razões. Em primeiro lugar, considerando-se que a análise é vista aí como um processo dedutivo que vai de A até K, então a síntese subseqüente, que corresponde ao caminho reverso de K para A só será possível se as implicações forem *incondicionalmente recíprocas* em todos os passos. Em segundo lugar, o pressuposto da reciprocidade representa a garantia, do ponto de vista lógico, de que se K, a última proposição alcançada na ordem da análise, for falsa, então A, que se pretendia provar, é igualmente falsa, e esse resultado será conhecido independentemente de qualquer síntese subseqüente[1].

Heath observa que, naturalmente, um grande número de teoremas da geometria são incondicionalmente convertíveis, e tanto isso é verdade que, na prática, a dificuldade para assegurar a reversibilidade dos seus passos sucessivos não é tão grande como se poderia supor. Todavia, *é sempre necessário cuidado*: um passo proposicional pode não ser incondicionalmente convertível na forma como se apresenta e, para que assim se torne, será necessário que algumas condições sejam adicionadas. Tais condições seriam, por exemplo, certas propriedades matemáticas que possibilitam reverter os passos, como aquelas que fazem parte dos Elementos de Euclides[2].

A própria abordagem de Heath, pelo que acabamos de ver, parece sugerir algumas dificuldades sérias para a concepção tradicional. Em primeiro lugar, como ele mesmo reconhece, nem todos os teoremas da geometria elementar são incondicionalmente convertíveis. A isso se segue que um pas

1 - Este aspecto, à luz da concepção tradicional, será adiante detalhada.

2 - Exemplos de tais propriedades serão oferecidos na Seção 3. deste Capítulo.

so proposicional que não seja incondicionalmente convertí - vel, pode se tornar convertível mediante certas condições adicionais.

No nosso modo de ver, levanta-se aí uma dificuldade que não é resolvida. Ainda que seja possível identificar-se quais seriam essas condições capazes de possibilitar a reversibilidade de tais passos proposicionais, uma outra questão permanece. Esta questão, que é fundamental, é a de se saber se isto é sempre possível, pois, em caso contrário, ou (1) a análise é um processo estritamente dedutivo em todos os seus passos e, assim sendo, nem todo teorema geométrico pode ser tratado pelo método de análise, ou, então, (2) pelo menos em certos casos, a análise não é um processo dedutivo em todos os seus passos. Ora, mas não encontramos, na literatura sobre o método de análise qualquer referência que sugira que a análise seja um método para a descoberta de provas de *certos* teoremas geométricos. Por outro lado, como veremos, há fortes indícios do emprego do método também como processo não dedutivo, e, assim, a alternativa (2) poderia se apresentar como mais aceitável.

Diante dessas considerações, portanto, parece-nos que assumir a postura de que a análise seja um procedimento dedutivo em todos os seus passos, como preconiza Heath, pode representar a imposição de sérias limitações ao método de análise.

De qualquer forma, no que diz respeito ao aspecto direcional, a análise, na concepção tradicionalmente aceita, é um movimento descendente, enquanto análise em si, uma vez que de A se segue B; de B, segue-se C, e assim sucessivamente até K. Mas é apenas em relação à síntese complementar que a análise pode, então, ser considerada como um movimento ascendente, uma vez que, atingido K, este será o ponto de partida da síntese. Deste modo, a análise representa uma *subida* até K de que decorre a prova no processo da síntese.

Para a concepção tradicional, isso explica por que Pappus, na primeira parte de seu relato sobre a análise, ao invés de falar das sucessivas conseqüências B, C,..., a partir de A (como na parte III do mesmo relato), afirma que se investiga, aí, um B a partir do qual se segue A (A como conseqüência de B e não o inverso) e novamente qual o antecedente deste último (C por exemplo) e assim sucessivamente. É que, na realidade, os antigos geômetras gregos buscavam laboriosamente se assegurar da reversabilidade dos passos na síntese subseqüente. E assim, na análise, trabalhavam de forma retrovertida (*backwards*) até alcançar o estágio K, a partir do qual, revertendo o processo, pudessem estabelecer A como conseqüência.

Heath deixa bem posto também que a *reductio ad absurdum* e uma forma de análise. Temos aí um processo que se inicia igualmente a partir da pressuposição de que A é uma proposição verdadeira. Mas, através das suas sucessivas conseqüências B, C,..., podemos chegar a uma proposição K que, ao invés de ser admitidamente verdadeira, é reconhecidamente falsa, ou ainda, uma sentença que contradiz a hipótese originária A ou alguma outra proposição intermediária entre A e K. Sabendo-se que uma inferência correta não pode, a partir de uma proposição verdadeira, levar a uma proposição falsa, então poderemos concluir, neste caso, que a hipótese A é falsa, pois se fosse verdadeira todas as conseqüências corretamente inferidas a partir dela preservariam a verdade e não originariam contradições.

Heath observa, ainda, que este método de provar a falsidade de uma determinada hipótese possibilita um método indireto de provar que uma dada hipótese A é verdadeira. Para isso, basta apenas que tomemos a negação de A e provemos que ela é falsa. Na prática, porém, algumas vezes a negação de A, ou -A, poderá incluir mais de um caso a fim de que se possa provar a sua falsidade, e cada um destes casos deve ser considerado separadamente. Tomemos como exemplo disso a prova de uma certa proposição A que estabeleça que *uma determinada parte de uma figura é igual a uma certa outra*. Ora, se partirmos de -A, teremos aqui que analisar dois casos: (1) que a parte da figura em questão é menor e (2) que é maior que a outra parte considerada. Se provarmos que cada uma dessas hipóteses, (1) e (2), leva a conclusões que são admitidamente falsas ou contraditórias com a própria hipótese original ou com alguma de suas conseqüências, então A é verdadeira[1].

Feita esta abordagem do ponto de vista de Heath, vejamos, agora, como Duhamel concebe a análise para a demonstração de teoremas.

Num primeiro momento, a análise é vista como um movimento ascendente e não-dedutivo de busca de antecedentes, ou seja, o que ele chama de método de redução:

> *Vê-se, portanto, que este método chamado de* análise *consiste em estabelecer uma cadeia de proposições, começando com aquela que se pretende demonstrar e terminando em uma proposição conhecida, onde, a começar da primeira, cada uma seja uma conseqüência necessária daquela que a segue; daí*

1 - Este assunto merecerá uma rediscussão na Seção 3. do III Capítulo.

> *resulta que a primeira é conseqüência da última e, por conseguinte, verdadeira com ela*[1].

No entanto, Duhamel se apercebe das *dificuldades* de assim conceber e deixa claro que um procedimento analítico desta ordem só é adotado se as implicações não são recíprocas. Neste caso, contudo, se impõe a seguinte questão: Entre as diversas proposições de que a primeira possa ser conseqüência necessária, qual se deverá escolher? E esta mesma questão se estenderá a cada proposição que compõe a cadeia. Para Duhamel, nada se poderá dizer a este respeito, e, assim, a cadeia de proposoções poderá ser prolongada indefinidamente sem que se chegue a uma proposição conhecida, como também será possível encontrá-la prontamente. Isto dependerá da sagacidade de quem procura a demonstração.

Duhamel, todavia, não deixa de considerar também a análise como um movimento dedutivo:

> *Se suas proposições sucessivas de que acabamos de falar, forem recíprocas, poder-se-á considerar a segunda*

1 - Duhamel, J.M.C.{1885}, p. 41. (Trecho citado com tradução nossa).

> *como deduzida da primeira em vez de considerá-la como tendo a primeira como conseqüência. E se esta reciprocidade ocorre da primeira à última, pode-se dizer que o método analítico consiste em estabelecer uma série de proposições em que a primeira é a proposição a ser demonstrada e onde a segunda se deduz da primeira, a terceira, da segunda, e assim por diante, até que se chegue a uma proposição reconhecidamente verdadeira*[1].

Fica claro, pois, que, para Duhamel, a análise como movimento dedutivo pressupõe a reciprocidade dos passos, com o que Heath está igualmente de acordo.

Devemos observar, no entanto, é que Heath, ao considerar proposições que não são recíprocas na forma como propostas, vai bem mais além que Duhamel e investiga a estipulação de condições que possibilitem torná-las conversíveis.

1 - Duhamel, J.M.C. {1885}, pp. 41-42. (Trecho citado com tradução nossa).

1.2 - A Análise de Problemas:

Para Heath, é em relação a problemas que o antigo método de análise tem uma maior significação, pois era a análise o único método geral de que se utilizavam os gregos para resolver todos *os problemas mais abstrusos* (τὰ ἀσοφέστατα τῶν προβλεμάτον).

Suponhamos que nos seja proposto construir uma figura que satisfaça certas condições. Em uma situação tal, se pretendemos proceder de forma completamente metódica e não meramente por tentativas, convém primeiramente *analisar* essas condições. Para isso, devemos assumir que todas elas estão de fato preenchidas, ou seja, que o problema esteja resolvido. A partir disso, valendo-nos de todos os recursos que a prática nos ensina em tais casos, devemos transformar essas condições em outras que sejam necessariamente preenchidas se as anteriores o forem e continuar essa transformação até que, finalmente, cheguemos a condições que possam efetivamente ser satisfeitas. Desta forma, teremos chegado a alguma relação que nos possibilita construir uma parte particular da figura que não necessita ser fundamentada, a fim de que o problema possa ser resolvido. Assim, é que essa parte particular da figura se torna um dos dados do problema. Quando isso ocorre, a segunda nova parte da figura também se torna dada, e assim prosseguimos até que todas as partes da figura que nos fora proposta, estejam construídas.

A esta primeira parte da análise que vai até à descoberta de uma relação que nos possibilita dizer que uma certa nova parte da figura não pertencente aos dados originais é _dada_ é o que se chama de _transformação_ na terminologia de Hankel; e a segunda parte, em que se prova que as demais partes da figura também são _dadas_, é o que se chama de _resolução_.

A síntese subseqüente, portanto, consistirá igualmente de duas partes: (1) a _construção_, na ordem em que foi, de fato, obtida e que segue a segunda parte da análise (a _resolução_) e (2) a _demonstração_ de que a figura obtida satisfaz todas as condições propostas e que segue, na ordem reversa, a primeira parte da análise (a _transformação_).

Heath observa que a segunda parte da análise , a _resolução_, pode ser consideravelmente facilitada e abreviada pela existência de uma coleção de _dados_, tal como no livro de Euclides, que consiste de proposições que provam que, se em uma dada figura certas partes ou relações são dadas, então outras partes ou relações também o são. Na primeira parte da análise, a _transformação_, aplica-se normalmente a regra de que cada passo da cadeia deve ser incondicionalmente convertível, e qualquer falha na observância a essa condição se tornará visível na síntese subseqüente. A segunda parte, a resolução, poderá ser diretamente convertida em construção, desde que se trate de dados que possam ser construídos de acordo com os *Elementos*.

Em suas considerações finais à análise de problema, Heath observa que, em certos casos, descobrimos, através da análise, que a solução de um determinado problema só é possível sob certas condições que não fazem parte de sua enunciação geral. Assim, a determinação dessas condições se constitui, nesse contexto, em elemento fundamental e, com isso, nos remete ao conceito de *diorismos* (διορισμός)[1].

Em um primeiro sentido, *diorismos* é, pois, uma determinação da possibilidade de solução do problema. Em Euclides, I, 22, encontramos um exemplo deste primeiro sentido, quando a construção de um certo triângulo, a partir de três retas determinadas, atinge o *diorismos* de que a construção proposta só poderá ser efetuada se a soma de duas das três linhas retas for maior que a terceira restante.

1 - As considerações aqui feitas são complementadas com base em Mahoney, M.S. [1968], 5, pp. 327-329.

Todavia, relacionada a esta primeira função do *diorismos*, há uma outra que é de grande importância, em especial, para a concepção tradicionalmente aceita. Trata-se de que o *diorismos* também satisfaz as condições sob as quais um passo não originariamente reversível, em uma análise, pode se tornar reversível. Exemplo disso é fornecido por Mahoney:

> *Suponha que a análise de um problema de construção se reduza ao problema de construir uma linha de comprimento x que satisfaça a equação* $2x - x^2 = b^2$. *Uma tal construção é geometricamente possível, no plano real, apenas se a área dada* b^2 *é menor ou igual a* $\frac{1}{2}a^2$. *Desta forma,* <u>na síntese</u>, *o passo que propõe esta construção se depara com a condição sobre a extensão da área* b^2.[1]

É neste sentido que Heath observa que, embora em certos casos o *diorismos* que se manifesta, seja provado no final da análise, em outros, a sua prova é protelada até ao final da síntese, onde se torna condição de reversibili-

1 - Mahoney, M.S. {<u>1968</u>}, 5, p. 328. (Trecho citado com tradução nossa).

dade dos passos[1].

Desta forma, como afirma Mahoney, os *diorismoi* servem, então, a dois propósitos: (1) eles auxiliam o estabelecimento da reversabilidade de certas implicações simples e (2) estabelecem a possibilidade de solução.

É tempo de considerarmos, agora, a abordagem que é dada por Duhamel à análise de problemas. É posto inicialmente que o objetivo de um problema é determinar *algo* que satisfaça a certas condições dadas. Mas, evidentemente, isso será obtido se se encontrar um outro elemento, ainda que sujeito a novas condições, que acarrete o primeiro como conseqüência necessária. Se este novo problema é mais fácil de resolver que o primeiro, então a questão terá sido avançada. Caso essas novas condições sejam conhecidas, resolvendo-se o segundo problema, o primeiro estará resolvido. Todavia, se este segundo não puder ser imediatamente resolvido, busca-se, da mesma forma, remetê-lo a um terceiro problema. Se não for possível ainda resolver imediatamente este terceiro, trata-se semelhantemente de remetê-lo a um quarto ,

1 - Exemplos do primeiro e do segundo caso são citados por Heath (1925), p. 142) em Arquimedes, *Da Esfera e do Cilindro*, II, 7 e II,4 respectivamente.

e assim sucessivamente, até que se chegue a um problema que se saiba resolver. Nesta cadeia de problemas, a solução de qualquer um deles fará conhecer a solução do problema precedente, de tal forma que, revertendo-se o processo até o problema original, a solução do problema anterior proporciona a solução do problema proposto.

Percebemos aí, mais uma vez, que, nesta primeira abordagem do método ora aplicado a problemas, Duhamel não considera a dedutibilidade na ordem da análise, mas apenas na ordem da síntese. Todavia, está ele bastante convencido de que conceber o método apenas desta forma acarreta dificuldades e incertezas:

> *Os problemas que substituímos sucessivamente, uns pelos outros, não são determinados de maneira absoluta; a escolha pode ser mais ou menos feita com discernimento, e, algumas vezes, ao invés de tornarmos a solução do problema mais próxima, podemos torná-la mais distante. Assim, nossos métodos se apresentam apenas como meios de procurar e não de encontrar seguramente. Eles indicam como devemos conduzir nossas tentativas, mas sem dizer em que elas devem consistir precisamente, nem se elas terão algum êxito. Não é preciso exagerar o seu poder, mas estaremos bem longe da verda*

de se os encararmos como inúteis[1].

Visto assim, o método consistiria em uma cadeia de redução de um problema a outro em que, não obstante o caráter heurístico que possibilita direcionar as tentativas de solução, haverá sempre a possibilidade de não se chegar a ela.

Percebendo estas dificuldades é que Duhamel reconhece que *as relações substituídas devem ser recíprocas para que a solução seja perfeita*[2]. E assim, passa a abordar a análise problema na forma geral como vista por Heath e estabelece :

> *Se nos problemas que são substituídos uns pelos outros, partindo-se do que foi proposto, as condiçoes de dois consecutivos quaisquer são recíprocas, as soluções do primeiro são idênticas àquelas do último e de qualquer uma dos outros*[3].

1 - Duhamel, J.M.C. {1885}, p. 44. (Trecho citado com tradução nossa).

2 - Duhamel, J.M.C. {1885}, p. 44. (Trecho citado com traduçao nossa).

3 - Duhamel, J.M.C. {1985}, p. 45. (Tradução nossa).

Como vemos, portanto, há uma concordância entre Heath e Duhamel quanto à dedutibilidade dos passos nas duas direções. Todavia, Heath vai mais além ao considerar o caso em que a convertibilidade não é possível exatamente na forma em que os passos foram conduzidos na análise, quando se deve empregar, como vimos anteriormente, o *diorismos*[1].

Para concluir esta seção, resta-nos, agora, abordar a posição de Zeuthen[2], que trata principalmente da aplicação da análise na solução de problemas. Segundo Zeuthen, a finalidade de um problema matemático é encontrar quantidades ou figuras que satisfaçam a certas exigências. Na busca da solução, pode-se freqüentemente *adivinhar*, de certa forma, com base em problemas análogos, e é inegável que, por essa via, se possa chegar, talvez, a importantes resultados. Uma tal adivinhação, no entanto, não se constitui em um método propriamente dito. Como em todo procedimento metódico, convém analisar as condições postas, e, para isso, é necessário, em primeiro lugar, tê-las de forma bem clara. Assim, deve-se iniciar o processo imaginando que as condi -

1 - A questão de se saber se os passos da análise são exatamente seguidos na síntese, em ordem reversa, será ainda discutida na Seção 3. deste Capítulo.

2 - Zeuthen, H.G. [1902], p. 75 e seguintes.

ções estão satisfeitas, ou seja, que o problema esteja resolvido. Em seguida, tomando-se por base regras de problemas análogos, busca-se transformar as condições a serem preenchidas, em outras que serão <u>necessariamente</u> satisfeitas se as primeiras o forem. Esse processo de transformação deverá prosseguir até que se chegue, enfim, a condições que se sabe satisfazer, e, por meio dessa análise, descobre-se como resolver o problema, se, de fato, ele for solúvel.

Nesta sua concepção de análise de problema , tudo leva a crer que se trata de um processo dedutivo. Convém, contudo, expor a sua descrição da síntese complementar para que, daí, tiremos novas conclusões.

Seguindo a descrição de síntese feita por Zeuthen, teremos aí que executar a solução do problema, ou seja, determinar as quantidades e as figuras encontradas de forma a satisfazer as condições requeridas e transformadas. Feito isto, torna-se ainda necessário demonstrar que as condições primitivamente postas são igualmente satisfeitas. Essa demonstração, em regra geral, se opera por uma transformação das condições que segue uma ordem inversa daquela que se operou na análise, de forma a concluir que, se as novas condições pelas quais se substituiram as primeiras foram satisfeitas, estas também o são <u>necessariamente</u>. E acrescenta:

> *Pode-se omitir esta demonstração - ou melhor já a temos realizada na análise - desde que se tenha utilizado apenas transformações reversíveis, de modo que as novas condições requeridas sejam não apenas necessárias, mais suficientes para as primeiras; de outra forma, não*[1].

Neste ponto, Zeuthen e Duhamel se põem de acordo quanto à concepção de que a análise, como movimento ascendente, não chega a se constituir em um método propriamente dito devido ao seu caráter de *incerteza* e de não normatividade. Zeuthen, porém, não deixa de tratar da possibilidade de tornar reversíveis alguns passos que não o são na forma como conduzidos na análise. Neste aspecto, enquanto Heath aponta também para a função que possa ser desempenhada pelos *diorismoi* para a convertibilidade desses passos, o que foi visto anteriormente, Zeuthen recorre ao que ele chama de *Moyens auxiliaires d'analyse*. Esses meios auxiliares de análise se constituem de certas propriedades matemáticas expostas em uma coleção de problemas contidos nos Elementos de Euclides, o que é igualmente apontado por Heath. Com isso,

1 - Zeuthen, H.G. {1902}, pp. 76-77 (tradução nossa).

a convertibilidade da cadeia de redução de um problema a outro pode ser efetuada, ainda que não sejam seguidos, na síntese, exatamente os mesmos passos da análise, desta feita , na ordem reversa.

Por fim, todos os três autores estão de acordo com que Pappus descreve um único método - a análise - que pode ser aplicado para a demonstração de teoremas (análise teórica) e para a solução de problemas (análise de problemas).

> 1. *É em relação a problemas que a antiga análise teve a maior significância porque este era o único método geral de que os gregos se utilizavam para resolver os mais abstrusos problemas*[1]. (Heath)
>
> 2. *Este método chama-se ainda análise porque reconduz o problema proposto a uma série de outros, até que se encontre um que se saiba resolver; da mesma forma, nos casos de teoremas, o método que chamamos de análise transpõe a demonstração do teorema proposto a uma série de outros, até*

1 - Heath, T.L. (1925) , p. 140 (tradução nossa).

> *que se chegue a um teorema conhecido. Esta identidade de movimento para os dois gêneros de questão constitui um único método que não pode ser designado a não ser por uma única denominação*[1]. (Duhamel)
>
> *3) Quem se utiliza da análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema, ou que se serve da síntese para expor aquilo que encontrou, a solução de problemas mais simples e a demonstração, se apoiará sempre na exatidão de proposições mais simples, supondo que esteja de posse destes problemas ou proposições mais simples*[2]. (Zeuthen)

2. A Concepção de Cornford: Análise Geométrica e Dialética

No decorrer do artigo *Mathematics and Dialectic in the Republic VI-VII*[3], Cornford faz uma crítica à concepção comumente aceita de análise e apresenta a sua visão do método.

1 - Duhamel, J.M.C. {1885}, pp. 44-45 (tradução nossa).

2 - Zeuthen, H.G. {1902}, p. 86 (tradução nossa).

3 - Cornford, F.M. {1932}, 41, pp. 61-95.

No referido artigo, os objetivos de Cornford são dois: (1) definir as experiências mentais que Platão distingue como Noésis e diãnoia e (2) explicitar alguns conceitos platônicos contidos no seu esquema da educação dos que devem governar. Esses objetivos são respectivamente perseguidos nas duas partes principais que compõem o seu artigo: (1) *'Noesis'* and *'Dianoia'* e (II) The Programs of Education and Research. Interessa-nos, de perto, a primeira parte, onde o autor destaca quatro elementos básicos do confronto entre matemática e dialética: (a) Objetos, (b) Métodos de Procedimento, (c) Movimentos do Pensamento, Dedutivo e Intuitivo, Vistos nos Procedimentos e (d) Estados Mentais do Matemático e do Perfeito Dialético. É, especificamente, nas seções (b) e (c) que Cornford oferece a sua abordagem do método de análise na geometria.

> *Platão entendia que a mente deve possuir o poder de dar um passo ou salto para cima, da conclusão para as premissas aí envolvidas. Uma verdade primeira não pode, naturalmente, ser deduzida ou provada a partir da conclusão; ela deve ser apreendida por um ato de penetração analítica. Tal ato está implícito na solução 'por meio de hipóteses' no MENO 86, já citado; o geômetra percebe diretamente, sem argumento discursivo, que a condição anterior deve ser satisfeita desde que seja possível realizar a cons-*

> *trução pretendida. Agora, em uma certa passagem, entendeu-se que Proclus associa o método platônico da subida dialética aos genuínos princípios com o método de análise geométrica*[1].

Como se percebe, então, para Cornford existe uma estreita relação entre os tipos de inferência desenvolvidos na dialética de Platão e na análise geométrica. Tal conexão é mais explicitamente destacada por Cornford, quando considera que, na abordagem da subida dialética, Platão está descrevendo o movimento do pensamento que foi ilustrado a partir do método de análise e que, assim, esta *salto para cima* que a mente é capaz de realizar exprime um dos sentidos de *Noêsis*. Por outro lado - prossegue Cornford - o método dialético inclui também um movimento progressivo a partir dos princípios que se identifica com aquele desenvolvido na síntese e que corresponde ao sentido de *diánoia* em Platão[2].

A título de ilustração e de confronto, torna-se interessante salientar que Brunschvicg [3], em sua aborda

---

1 - Cornford, F.M. {1932}, 41, pp. 67-68 (trecho com tradução nossa).

2 - Veja-se Cornford, F.M. {1932}, 41, pp. 72-73.

3 - Brunschvicg, L. {1947} p. 49 e seguintes.

gem do método de Platão, embora não reconheça a autoria platônica do método de análise e síntese, considera existirem ali duas partes principais: a *regressão analítica* e a *dialética sintética*. Segundo este autor, a regressão analítica teria, em Platão, a função de estabelecer as bases da ciência como *independentes do sensível*, remontando das hipóteses que são aí alcançadas, aos princípios absolutos que as fundamentam. Tal é o procedimento na *logística* ou aritmética, na geometria e na astronomia. Enfim, a doutrina platônica das ciências matemáticas, exprime em sua análise regressiva, através de graus sistemáticos de uma teoria do conhecimento, a intensidade crescente da atividade intelectual. Por outro lado, na dialética sintética, ocorre uma progressão inversa:

> *Se a regressão que parte da observação sensível e da prática vulgar, desabrocha nas hipóteses fundamentais do matemático, a ciência em sua constituição definitiva procede a partir dessas hipóteses na direção de suas conseqüências*[1].

Chegamos, agora, ao ponto em que a associação estabelecida por Cornford bem se aproxima do exame do méto-

1 - Brunschvucg, L. {1947}, p. 55 (trecho com tradução nossa).

do platônico empreendido por Branschvicg:

> *As matemáticas situadas na região da* διάνοια *(diânoia) não são mais que uma ciência intermediária. Sua verdade reside em uma ciência superior. (...) A dialética tem a função de retomar as hipóteses das técnicas particulares e conduzi-las até aos seus princípios, ela se apossa do incondicional; e daí, por um caminho que é o inverso da análise, constrói uma cadeia ininterrupta de idéias que, suspensa ao princípio absoluto, constituirá um mundo completamente independente do sensível, o mundo da* νόησις[1]. (nóesis)[1].

Investigadas as bases da associação estabelecida por Cornford entre a dialética e a análise geométrica, bem como o confronto que acabamos de empreender com a abordagem oferecida por Brunschvicg do método de Platão, voltemo-nos, agora, para a concepção de Cornford a respeito do método de análise.

1 - Brunschvicg, L. (1947) p. 56 (trecho com tradução nossa)

A interpretação que Conrford apresenta do método analítico, não se fundamenta apenas na similaridade que ele aponta com a dialética de Platão. Ela está, sobretudo , baseada na parte I do relato de Pappus, onde, de forma bastante clara, o método parece estar sendo descrito como um movimento ascendente de busca de premissas, a partir das quais se possa provar, na síntese, o que é assumido como verdadeiro na análise:

> *(I) A análise, então, toma o que é procurado como se fosse admitido e, a partir disso, através de suas sucessivas conseqüências* (διὰ τῶν εξῆς αχολούθων) *passa para algo que se admite como ponto de partida da síntese: pois na análise, assumimos o que se procura como se isso (já) fosse dado* (γεγονός), *e investigamos algo de que provém, aquilo que o acarreta como resultado, e, novamente, qual a causa antecedente deste último e assim por diante, até que seja alcançada, pela retrodução dos nossos passos, alguma coisa, acima, já conhecida ou pertencente à classe dos primeiros princípios. A um tal método chamamos de análise como solução retrovertida.* (ἀνάπαλιν λύσιν)[1].

1 - Apresentamos a referida passagem de forma completa no Cap. I, Seção 3.

Vejamos, pois, como é textualmente interpretada essa passagem por Cornford e a sua crítica à interpretação costumeira do método de análise:

> *Concluo, a partir da discussão do Sir Thomas Heath, (...) que os modernos historiadores da matemática (...) compreenderam mal a frase 'a sucessão dos passos subseqüentes' (τῶν ἑξῆς ἀκολούθων), interpretando-a como 'conseqüências' lógicas, como se fosse τὰ συμβαίνοντα. (...) Eles têm se esforçado, então, para mostrar como as premissas de uma demonstração podem ser as conseqüências de uma conclusão. Tudo se esclarece quando vemos - o que Pappus diz - que a mesma seqüência de passos é seguida em ambos os processos - de forma ascendente na análise, da conseqüência para as premissas implicadas nesta conseqüência, e de forma descendente na síntese, quando os passos são revertidos para estruturar o teorema ou demonstrar a construção 'na ordem natural' (lógica). Não se pode seguir a mesma série de passos, primeiro em uma direção e, depois, em sentido oposto, e se chegar a* conseqüências *lógicas em ambas as direções. E Pappus nunca disse que se pudesse. Ele acrescenta* ἑξῆς *para indicar que os passos 'se seguem em sucessão' mas que não são, como* ἀκόλουθα *isoladamen*

> *te poderia sugerir, 'conseqüência' lógica na direção ascendente*[1].

Como se pode observar, para Cornford, ao contrário do que afirmam os historiadores da matemática grega, a análise não se caracteriza como um processo de extrair conseqüências lógicas daquilo que se assume como verdadeiro, mas, antes, como uma busca do que poderia implicá-lo. Por esse ponto de vista, a análise é exclusivamente um movimento ascendente de busca de premissas sem se constituir em um processo de dedução.

A síntese, por sua vez, é que é dedutiva e refaz o caminho reverso da análise, *a favor da corrente*. Se a análise fosse dedutiva - argumenta Cornford - a síntese refaria exatamente o mesmo caminho da análise em sentido reverso. Claro está que, para Cornford, as implicações não são recíprocas, pois chega a reconhecer a impossibilidade de se ter conseqüências lógicas nas duas direções. Essa sua afirmação se baseia, também, na passagem em que Pappus diz que a síntese *coloca na ordem natural de conseqüente o que antes era antecedente*. Por conseguinte, a ordem da análise é,

1 - Cornford, F.M. {1932}, 41. p. 72 (trecho citado com tradução nossa).

do ponto de vista lógico, não-natural, *um movimento contra a corrente*.

Esquematicamente, a posição de Cornford pode ser assim apresentada: Supondo que se deseja provar uma proposição A, o trabalho da análise consiste, inicialmente, na busca de uma outra proposição que pudesse implicá-la. Digamos que esta tal proposição seja B. Não sendo B algo reconhecidamente verdadeiro, deve-se prosseguir até à descoberta de uma outra proposição que possa implicar esta última e assim sucessivamente até que se chegue, nesta subida, a algo como um princípio, um axioma ou teorema anteriormente provado. Digamos que este último passo seja E. Assim, a análise corresponde ao seguinte esquema: $A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow D \leftarrow E$, onde as setas invertidas "$\leftarrow$" representam um movimento na direção oposta ao das conseqüências lógicas. A prova oferecida, na síntese subseqüente, corresponde, portanto, à ordem natural das conseqüências lógicas: $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

Para Cornford, a famosa frase de Pappus διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ao invés de significar *através de sucessivas conseqüências*, no sentido de conseqüências lógicas, significa *através de uma seqüência* sucessiva, no sentido temporal. Em suma, a análise a) é não dedutiva, b) é um movimento estritamente ascendente e c) as implicações não são recíprocas.

Ao que tudo indica, esta concepção se deve também à estreita associação que Cornford procura estabelecer entre a análise geométrica e a dialética em Platão. Prova disso é que ele, como se percebe da citação no início desta seção, se fundamentou bastante na passagem de Proclo em que é descrita a análise[1]. Mas, como observa Robinson, *Proclo estava certo quando descreveu a análise em termos que remontam ao caminho ascendente da dialética na Linha Divisória de Platão, pois esse caminho é uma série de intuições,* como também é *certo que, em seu relato da subida dialética, Platão descreve o movimento ascendente do raciocínio, ilustrado a partir da análise geométrica*[2].

3. A Crítica de Robinson a Cornford em Defesa da Concepção Tradicional

Em seu artigo *Analysis in Greek Geome*

1 - Proclus, Eucl. I, p. 211,18. Tradução do Sir Thomas Heath (Greeck Mathematics, I, 291) - Referência apud Cornford, F.M. {1932}, 41, p. 68.

2 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 8.

try[1], Robinson sustenta que é correta a concepção tradicionalmente aceita da análise e que Cornford está equivocado em sua interpretação do método. Os argumentos contra Cornford defendem três pontos: (1) que ele está influenciado por um duvidoso princípio *a priori*, (2) que ele não consegue explicar um conjunto de textos de importância fundamental e (3) que é incorreta a sua interpretação de Pappus.

O primeiro ponto de Robinson é, pois, que Cornford, quando afirma *não se poder seguir a mesma seqüência de passos, primeiro numa direção, e depois no sentido oposto, e se chegar a* conseqüências *lógicas nas duas direções*[2] estabelece um duvidoso princípio *a priori* em que se fundamenta:

Se esse princípio fosse verdadeiro - argumenta Robinson -

> *o método de análise, tal como descrito pelos historiadores da matemática, seria uma impossibilidade lógica; e se os geômetras gregos realmente su*

1 - Publicado originalmente in Mind 45/ 1936, pp. 464-473. O referido artigo traduzido por Roberto Lima de Souza aparece publicado nos *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* 4/1983.

2 - Cornford, F.M. {1932}, 41, p. 72.

> *punham utilizar um tal método, estavam grosseiramente enganados, seja na sua geometria, seja na sua metodologia*[1].

Mas, naturalmente, não se pode aceitar que um absurdo lógico fosse prática dos grandes geômetras gregos. Além disso, se os historiadores da matemática considerassem que fosse um absurdo lógico conceber o método de análise--síntese como um processo que possibilita conseqüências lógicas nas duas direções, certamente reconsiderariam a sua atribuição aos geômetras gregos e partiriam para uma reinterpretação dos textos.

Para evidenciar, por fim, este ponto, Robinson conclui apresentando a seguinte seqüência de passos matemáticos (1) $3x=4y$, (2) $3x+y=5y$, (3) $3x+2y=6y$, onde se observa que conseqüências lógicas são obtidas seja na ordem (1), (2), (3), ou na sua inversão (3), (2), (1). Com respeito a isso, ofereceremos, ao final desta seção, um outro exemplo matemático a partir do qual teceremos algumas considerações.

Como segundo ponto, o de que Cornford não con-

1 - Robinson, R. {1983}, 4, pp. 9-10.

segue explicar um conjunto de textos fundamentais, Robinson faz ver que, para se compreender o verdadeiro sentido do método, deve-se levar em conta dois tipos de textos. Em primeiro lugar, aqueles que oferecem uma descrição teórica da análise e, em segundo lugar, aqueles que tratam da prática do método e que disso oferecem exemplos. Enquanto que textos do primeiro tipo são escassos, pois *as descrições que chegaram até nós são poucas e insuficientes*, textos do segundo tipo são bastante numeroso, e *os exemplos são abundantes e claros*[1]. Não obstante isto - diz Robinson - *no artigo do Professor Cornford (...) apenas o primeiro tipo de texto foi discutido*[2]. Desta forma, Robinson se propõe partir de um exemplo - a demonstração da proposição XIII.1 de Euclides pelo método de análise e síntese - que igualmente apresentamos abaixo, com o objetivo de explicitar que a prática do método esclarece a sua descrição.

Proposição XIII.1: *Se uma linha reta for seccionada em razão extrema e média, o quadrado do segmento maior, acrescido da metade do todo, é cinco vezes o quadrado da metade.*

1 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 10. São citadas proposições geométricas tratadas pelo método de análise no Segundo Livro de Arquimedes, *Da Esfera e do Cilindro* e outras no próprio Pappus.

2 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 10.

Análise:

Seja, pois, a linha reta AB seccionada em C, em razão extrema e média e seja AC o maior segmento, e $AD = \frac{1}{2} AB$.

Digo que $CD^2 = 5AD^2$.

Pois, desde que

(1) ... $CD^2 = 5AD^2$

e

(i) ... $CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2(CA \times AD)$ <II., 4>

Portanto,

(2) ... $CA^2 + AD^2 + 2(CA \times AD) = 5AD^2$

Portanto, por subtração,

(3) ... $CA^2 + 2(CA \times AD) = 4AD^2$.

Mas (desde que $BA = 2AD$)

(ii) .... $BA \times AC = 2(CA \times AD)$

E (desde que AB foi segmentada em razão extrema e média)

(iii) ... $AC^2 = AB \times BC$

Portanto,

(4) ... $BA \times AC + AB \times BC = 4AD^2$

Mas

(iv) ... $(BA \times AC) + (AB \times BC) = AB^2$ <II., 2>

Portanto,

(5) $\ldots AB^2 = 4AD^2$

e isto é verdadeiro, pois $AB = 2AD$ *(por construção.*

Síntese:

Ora, uma vez que

(5) $\ldots AB^2 = 4AD^2$

e

(*iv*) $\ldots BA^2 = BA \times AC + AB \times BC$ <II.,2>

Portanto,

(4) $\ldots BA \times AC + AB \times BC = 4AD^2$

Mas

(*ii*) $\ldots BA \times AC = 2(DA \times AC)$

e

(*iii*) $\ldots AB \times BC = AC^2$

Portanto,

(3) $\ldots AC^2 + 2(DA \times AC) = 4DA^2$,

e por conseguinte

(2) $\ldots DA^2 + AC^2 + 2(DA \times AC) = 5DA^2$

Mas

(*i*) $\ldots DA^2 + AC^2 + 2(DA \times AC) = CD^2$ <II.,4>

Portanto,

(1) $\ldots CD^2 = 5DA^2$,

que é o que queríamos demonstrar[1].

Com este exemplo, Robinson pretende rebater a tese de Cornford de que *se a análise fosse dedutiva, a síntese refaria, na ordem reversa, exatamente os mesmos passos da análise*. Assim, apresenta, inicialmente, os diagramas da análise e da síntese, representando os passos percorridos no exemplo acima:

Análise. 1→2→3→4→5
↑ ↗ ↑ ↑
i ii iii iv

Síntese. 5→4→3 → 2→1
↑ ↗↖ ↑
iv ii iii i

Poder-se-ia objetar - diz Robinson - que as inferências lógicas não caminham exatamente nas duas direções em razão da ocorrência das proposições com algarismos romanos. Assim, por exemplo, a nossa inferência do passo 1 para o 2 é, na realidade, uma inferência de 1 + i para 2, e não de 1 isoladamente. E que, na ordem reversa, nós não passamos de 2 para 1, mas de 2 + i para 1.

1 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 11.

Na prática, todavia, - rebate Robinson - todos nós raciocinamos por entimemas, isto é, consideramos A como conseqüência de B, quando na realidade, se segue de B + C . Muitas vezes, para possibilitar a reversibilidade dos passos, o geômetra - como muitos exemplos o demonstram[1]- pode recorrer a outros princípios que, quando explícitos, tornam trivial o que parecia impossível. Portanto, a introdução dos passos intermediários (i), (ii), (iii) e (iv), que expressam certas propriedades matemáticas relevantes para a prova, não tem outra função que a de explicitar as inferências lógicas em diversas passagens, e possibilitar a sua reversibilidade por ocasião da síntese subseqüente. Os passos fundamentais da análise, porém, são os mesmos da síntese em ordem reversa. Além disso, como o exemplo demonstra, tanto a análise quanto a síntese são dedutivas.

Como último ponto de sua argumentação contra Cornford e em favor da concepção tradicional, Robinson faz ver que a forma como Cornford interpreta Pappus incorre em erro lógico.

---

1 - Verificamos vários exemplos de introdução de princípios como passos intermediários da análise e da síntese em *Oevres Completes D'Arquimede* (1921) pp. 90, 109 e 112) - De La Sphère et du Cylindre, Livro II, prop. I, VI e VIII.

Ao sustentar que a análise não é dedutiva nem um movimento descendente, mas um movimento ascendente de busca de antecedentes, Cornford interpreta a frase de Pappus διᾶ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων (através de suas sucessivas conseqüências) com ênfase excessiva na palavra ἑξῆς (sucessivas), e, assim ἀκολούθων lhe parece, então, como *conseqüência* no sentido temporal e não lógico.

É preciso, todavia, levar em conta o que Pappus diz adiante em seu relato:

> (...) *Mas se, na análise, é alcançado algo que se admite como falso (ao invés de se alcançar algo verdadeiro), o que se pretende demonstrar é igualmente falso.*

Assim, fica claro que, se a nossa seqüência de passos não é dedutiva na análise, mas apenas na síntese, nada garante - como estipula Pappus - que, ao se chegar a algo reconhecidamente falso, o que se assumiu como verdadeiro seja igualmente falso, uma vez que premissas falsas podem dar origem a conclusões verdadeiras. Esquematicamente falando, se temos, na análise, a seqüência A←B←C←D←K, como propõe Cornford, ao invés de A→B→C→D→K, e se K é algo reconhecidamente falso, então não se pode dizer que, logicamente, A seja igualmente falso. E isso contraria o que afirma Pappus.

Desta forma, como explicitara Heath, Robinson nos leva a compreender que a *Reductio ad absurdum* faz parte da interpretação da descrição de Pappus, sob pena de o seu relato não fazer sentido nos trechos como o que acabamos de citar. Mas afirmar que a *reductio ad absurdum* é uma forma de análise pressupõe que ela seja naturalmente dedutiva e, conseqüentemente, um movimento que é, em si, descendente e que, apenas em relação à síntese subseqüente, quando os passos são postos *na ordem natural* da prova, pode ser ela considerada como um movimento ascendente[1]. Para Robinson, na interpretação da análise como um movimento ascendente e não dedutivo, conforme propõe Cornford, *a atividade da mente não é de demonstração, mas de 'intuição'. O geômetra que se utiliza da análise 'advinha' a premissa de que se segue a conclusão*[2].

Em suma, o pensamento de Robinson pode ser enfeixado nos seguintes pontos: (1) que é possível seguir a mesma seqüência de passos, primeiro num sentido e depois no sentido oposto, e chegar a conseqüências lógicas em ambas as direções; (2) que os geômetras gregos freqüentemente assim

1 - Este aspecto merecerá uma rediscussão no Cap. III, Seção 3.
2 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 8.

o fizeram e a esse procedimento chamaram de análise e síntese e (3) que a interpretação que Cornford oferece à passagem de Pappus, incorre em erro lógico.

Pode-se, igualmente, observar aqui que as críticas de Robinson a Cornford, não obstante bem fundamentadas, baseiam-se também em um pressuposto: a *unanimidade* da posição dos historiadores da matemática grega em relação ao método de análise. Esta unanimidade, como Robinson bem pôs em nota ao seu artigo em tela, foi por ele constatada em relação a Hankel, Cantor e Heath[1]. Verificando-se, todavia, certas passagens de Duhamel e Zeuthen[2], bem como a posição de Gulley, que será vista na seção seguinte, constata-se que, em alguns aspectos, a idéia geral que Cornford faz do método, encontra também respaldo em uma tradição considerável.

Para concluir esta seção, gostaríamos, agora,

1 - A nota de Robinson ({1983/4} p. 5) é a seguinte: *Verifiquei essa afirmação nos casos de Hankel (Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelelter, 1874, 137-149); Cantor (Geschichte der Mathematik, 2a. ed., i, 207 ss.) e Heath (The Thirteen Books of Euclid's Elements, i, 137 ss.). Nenhum desses três autores menciona qualquer ponto de vista discordante quanto ao que foi o método.* A *abordagem que se segue está baseada em suas afirmativas.*

2 - Veja-se Seção 1, deste Capítulo.

de fazer algumas colocações nossas, conforme sugerimos ao final da exposição do primeiro ponto da argumentação de Robinson.

Ao apresentar uma seqüência de três proposições matemáticas em que se tem conseqüências lógicas no sentido (1)-(2)-(3) e (3)-(2)-(1), Robinson acrescenta:

> *Quando apresentei a um amigo matemático a descrição convencional de análise grega, ele replicou que, embora não visse por que razão o processo é chamado de "análise", ele mesmo o praticava cotidianamento*[1].

Para ilustrar mais este ponto, ofereceremos, aqui, um outro exemplo matemático mais detalhado, a partir do qual desenvolveremos alguns pontos que, segundo cremos, explicitam certos aspectos da argumentação de Robinson em relação à interpretação da análise.

Suponhamos que se deseje provar a seguinte proposição matemática:

1 - Robinson, R. {1983}, 4, p. 10.

$$N^2 + 2N + 1 = \frac{(N^2 + N)^2}{N^2}$$

Se pretendemos buscar a prova de tal proposi - ção pelo método de análise, estaremos diante de um caso de análise teórica, pois aqui o objetivo não é determinar o valor de 'N' (determinar quantidades é objetivo da análise de problemas), mas demonstrar que a proposição em causa é verdadeira para qualquer que seja o N.

Análise:

A análise vai consistir em se assumir que a proposição seja verdadeira e, a partir dela, extrair conseqüências.

(1) $N^2 + 2N + 1 = \frac{(N^2 + N)^2}{N^2}$ - assumida, por hipótese, como verdadeira.

(i) $(N + 1)^2 = N^2 + 2N + 1$ - propriedade do quadrado da soma.

(2) $(N + 1)^2 = \frac{(N^2 + N)^2}{N^2}$ - de (1) e (i) por substituição

(ii) $\frac{(N^2 + N)^2}{N^2} = \left(\frac{N^2 + N}{N}\right)^2$ - propriedade do quadrado de uma fração.

(3) $(N + 1)^2 = \left(\frac{N^2 + N}{N}\right)^2$ - de (2) e (ii) por substituição.

(4) $N + 1 = \frac{N^2 + N}{N}$ - de (3) por simplificação.

(5) $N(N + 1) = N^2 + N$ - de (4) (transposição)

(6) $N^2 + N = N^2 + N$ - de (5) (distribuição)

Tendo sido alcançado, no passo (6), algo reconhecidamente verdadeiro, como um princípio (o de identidade, no caso), encerra-se aí o trabalho da análise e pode-se, agora, proceder à síntese.

<u>Síntese</u>:

A síntese vai consistir na prova da proposição a partir do que por último foi alcançado na análise.

(6) $N^2 + N = N^2 + N$ - princípio incondicionalmente aceito como verdadeiro.

(5) $N(N + 1) = N^2 + N$ - de (6), pondo-se 'N' em evidência.

(4) $N + 1 = \dfrac{N^2 + N}{N}$ - de (5) (transposição)

(3) $(N + 1)^2 = \left(\dfrac{N^2 + N}{N}\right)^2$ - de (4) (alteração homogênea dos termos da equação)

(ii) $\left(\dfrac{N^2 + N}{N}\right)^2 = \dfrac{(N^2 + N)^2}{N^2}$ - propriedade do quadrado de uma fração.

(2) $(N + 1)^2 = \dfrac{(N^2 + N)^2}{N^2}$ - de (3) e (ii) por substituição

(i) $(N + 1)^2 = N^2 + 2N + 1$ - propriedade do quadrado da soma

(1) $N^2 + 2N + 1 = \frac{(N^2 + N)^2}{N^2}$ - de (2) e (i) por substituição.

Percebemos, aí, um exemplo de análise-síntese em que as conseqüências lógicas seguem nas duas direções . É interessante observar ainda que, na síntese (acima), a proposição (1) é também conseqüência da proposição matemática (5) que afirma que um número multiplicado pelo seu sucessor é igual à soma deste número ao quadrado mais ele mesmo. E isto nós descobrimos pela análise.

Agora, claro está, neste exemplo, no caso da análise, que o passo (2) não se segue de (1) isoladamente , mas de (1) + (i), assim como (3) só se segue de (2) + (ii) e não de (2) isoladamente. Quando raciocinamos pressupondo essas *propriedades matemáticas*, ocorre- como Robinson bem pôs - o que se chama de entimema. (E comumente os nossos professores não explicitam essas inferências por serem óbvias- para eles! - razão por que a matemática, muitas vezes, parece, ao aluno, arbitrária. São essas mesmas propriedades matemáticas que Heath chama de *condições adicionais*, o que corresponde, na terminologia de Zeuthen, aos *meios auxiliares de análise*.

De toda forma, a introdução dessas proprieda - des facilita a reciprocidade de todos os passos da cadeia , embora eles não se operem, na síntese, exatamente como na análise. Assim, por exemplo, o nosso passo (2), na análise, se operou a partir de (1) + (i) e, na síntese, de (3) + (ii). Isso todavia é condição da própria reversibilidade. Enquanto (i) possibilitou chegar a (2) na ordem da análise, (ii) possibilitou que revertêssemos a esse passo na ordem da síntese. Com isso acreditamos ter explicitado algo que Robinson apenas parece sugerir: Uma coisa é a reversibilidade dos passos e outra é como ela se opera. Assim, se de um estágio A eu chego logicamente a B e de B eu chego logicamente a A, ocorre dedutibilidade em ambas as direções e a cadeia é, portanto reversível, mesmo que, na volta, não tenham sido utilizadas operações idênticas.

É comum observar (conforme me disse um amigo matemático) que os matemáticos, em geral, já aceitam como provada a proposição quando se atinge (no último passo da análise) um princípio comumente aceito (ou auto-evidente), normalmente na forma 'a = a'[1]. Isto é mais um indício de que

1 - A constatação de que o último passo alcançado na análise (teórica) é um princípio (ou proposição auto-evidente) incondicionalmente aceito como verdadeiro, levou-nos a conjecturar que *analítico* no sentido em que se aplica a proposições desta natureza (sentido 1) possa ser uma extensão de *analítico* significando *relativo a análise* - o método - (sentido 2), pois, de fato, proposições analíticas (no sentido 1) são alcançadas por meio da análise.

os matemáticos sabem que é possível a reversibilidade. Eis por que Zeuthen afirma que *se pode omitir esta demonstração - ou melhor já a temos completamente feita na análise - se é que nos utilizamos apenas de transformações reversíveis*[1].

Por fim, com este exemplo, pretendemos rebater uma afirmativa de Cornford que não foi - pelo menos explicitamente - atacada por Robinson.

A afirmativa é a seguinte: *Uma verdade primeira (um princípio) não pode ser deduzida ou provada a partir da conclusão*[2]. De fato, Pappus nunca afirmou, nem faz parte da concepção tradicionalmente aceita da análise que um princípio possa ser provado a partir da conclusão, (até mesmo porque, na análise, nada se prova), mas a conclusão é que é provada, na síntese subseqüente, a partir do *princípio* que por último se alcançou na análise. Agora, como ficou demonstrado no exemplo acima, um *princípio* pode ser efetivamente deduzido da conclusão que é assumida como hipótese. Assim, a proposição matemática do nosso exemplo $N^2 + N = N^2 + N$ que

---

1 - Zeuthen, H.G. {1902}, p. 76.

2 - Cornford, F.M. {1932}, 41, p. 67.

é da forma '$a = a$', é uma conseqüência lógica da conclusão $N^2 + 2N + 1 = \frac{(N^2 + N)^2}{N^2}$. A primeira é deduzida, mas não provada a partir da segunda, enquanto que a segunda é deduzida e provada a partir da primeira.

E, com este ponto, acreditamos ter aclarado certos aspectos da posição de Robinson em favor da concepção tradicionalmente aceita da análise.

Por fim, resta-nos dizer que, em nossa opinião, embora Cornford se veja seriamente criticado por afirmar (1) que não se pode ter conseqüências lógicas primeiro em uma direção e, depois, em outra que lhe seja oposta e (2) que se a análise fosse dedutiva, a síntese refaria exatamente o mesmo caminho da análise em sentido inverso, essas suas afirmativas, que são facilmente rebatíveis, não se seguem necessariamente da sua concepção de análise, mas da ênfase excessiva que se confere à análise dos passos proposicionais. E este aspecto será objeto de consideração no capítulo seguinte.

4. A Posição de Gulley por uma Terceira Interpretação

Nesta seção, abordaremos a posição de Gulley com relação à interpretação do método de análise, em face da concepção de Cornford e do posicionamento de Robinson em favor da concepção tradicionalmente aceita.

Em seu artigo *Greek Geometrical Analysis*[1], Gulley, a exemplo dos demais estudiosos do assunto, se propõe a considerar a questão da interpretação do método a partir do relato de Pappus.

Como vimos no Capítulo I, Seção 3. *Dificuldades Básicas para a Interpretação da Análise*, o relato de Pappus pode ser dividido em três partes fundamentais: Na primeira (I), encontramos uma descrição Geral da análise, onde o método é apresentado estritamente como um movimento ascendente de busca de premissas. Na segunda (II), encontramos uma descrição da síntese como um processo dedutivo complementar em direção oposta à da análise. Finalmente na terceira parte (III), temos uma descrição detalhada da análise nos seus dois tipos (análise teórica e análise de problema) como um movimento dedutivo a partir do que se pretende demonstrar ,

1 - O artigo apareceu originalmente publicado em Phronesis 3/1958 pp. 1-14. A tradução em língua portuguesa - *A Análise Geométrica Grega* - é de Roberto Lima de Souza e se encontra publicada em Cadernos de História e Filosofia da Ciência 4/1983, pp. 16-27.

assumindo-o como verdadeiro.

Tendo em vista que a posição de Gulley parte da consideração de que as interpretações divergentes se fundam, cada uma delas a seu modo, nas descrições contidas nas partes (I) e (III)[1] do relato de Pappus, procuraremos, mais uma vez, transcrevê-las abaixo, para efeito de um melhor acompanhamento, aqui, da discussão.

> *(I) A análise, então, toma o que é procurado como se fosse admitido e, a partir disso, através de suas sucessivas conseqüências, (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων) passa para algo que se admite como ponto de partida da síntese: pois, na análise, assumimos o que se procura como se isso (já) fosse dado (γεγονός), e investigamos algo de que provém, aquilo que o acarreta como resultado, e, novamente, qual a causa antecedente deste último e assim por diante, até que seja alcançada, pela retrodução dos nossos passos, alguma coisa, acima, já conhecida ou pertencente*

1 - Gulley considera, em seu artigo, a descrição de análise (I) e a descrição de análise (II), as quais, em nossa divisão do texto de Pappus, se situam respectivamente nas partes (I) e (III).

ã classe dos primeiros princípios. A um tal método chamamos de análise como solução retrovertida

....

[III] A análise, por sua vez, é de dois tipos: o primeiro é dirigido para a busca da verdade e se chama de análise teórica; o segundo se dirige para a descoberta do que estamos decididos a encontrar e se chama de análise de problema.

[1] Na análise teórica, assumimos o que se procura como se fosse existente e verdadeiro. Feito isso, passamos, através de suas sucessivas conseqüências (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων), como se elas fossem também verdadeiras e estabelecidas em virtude da nossa hipótese, para algo admitido: neste ponto, (a) se o que é admitido é verdadeiro, então o que é procurado será também verdadeiro, e a prova corresponderá ao caminho reverso da análise; mas (b) se o que é alcançado é algo reconhecidamente falso, o que se procura é igualmente falso.

[2] Na análise de problema, assumimos o que é proposto como se fosse conhecido. Depois disso, passamos atra-

> *vés de suas sucessivas conseqüências (διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων), tomando-as como verdadeiras, até chegarmos a algo admitido: Neste ponto, (a) se o que é admitido é possível e obtenível, isto é, se se trata do que os matemáticos chamam de* dados, *então o que era originariamente proposto será também possível, e a prova, novamente, corresponderá à ordem reversa da análise; mas (b) se chegarmos a algo reconhecidamente impossível, o problema será também impossível.*

Diante dessas duas descrições de análise, no mesmo relato, duas interpretações foram oferecidas: a concepção tradicionalmente aceita e a interpretação de Cornford. Gulley faz ver que a primeira interpretação se fundamente, sobretudo, na parte (III) do relato de Pappus, aceitando-a como a formulação correta da análise geométrica e explicando (I) como uma mera forma alternativa de descrever (III). A segunda, ao contrário, fundamentando-se antes na parte (I) que é aceita como a formulação adequada do método, explica (III) como uma maneira de descrever (I). Em suma, cada concepção, por seu lado, procura conciliar (I) e (III) como se uma abordagem fosse uma forma alternativa de descrever a outra.

Para Gulley, no entanto, há um pressuposto co mum a essas duas interpretações que pode estar sujeito a discussão. Esse pressuposto é o de que Pappus, em seu relato, descreve, tanto em (I) como em (III), e de forma perfeitamente consistente, um método que, excluindo-se todas as demais formas de análise, é o que foi denominado de análise geométrica.

De um lado, temos uma interpretação que pressupõe ser a análise sempre dedutiva; do outro, a concepção que exclui a dedutibilidade como procedimento da análise.

Claro está que, postas nestes termos, as duas interpretações são incompatíveis e que Cornford, ao conceber a análise exclusivamente como não dedutiva *por ser impossível conseqüências lógicas nas duas direções*, não se apercebeu dessa possibilidade no caso de as implicações serem recíprocas. Assim, a partir dessas duas interpretações, somos levados a concluir que Pappus, nas partes (I) e (III) do seu relato, apresenta abordagens da análise em que (a) ou apenas uma delas é correta e a outra confunde a análise geométrica como uma outra forma de análise, ou (b) ambas descrevem métodos reconhecidos pelos gregos como formas de análise geométrica.

A argumentação de Gulley vai no sentido de que, na realidade, Pappus descreve duas formas distintas do mesmo método. Sustentar tal ponto de vista, no entanto, só se torna possível à luz de evidências externas ao relato de Pappus em favor de uma e de outra concepção, ou seja, verificando-se se ambas as abordagens repousem em tradições dignas de confiança.

Para Gulley, não é difícil sustentar o que preconiza a concepção tradicionalmente aceita:

> *Aceito a concepção de que os gregos admitem uma forma de análise geométrica em que tanto a análise quanto a síntese eram estritamente dedutivas. Certamente não há, em qualquer descrição do método na antiguidade, nenhuma menção da condição essencial para que a sua aplicação seja bem sucedida - a de que as implicações sejam, em cada passo, recíprocas. Mas, pelo menos, não resta dúvida de que os geômetras gregos estavam conscientes de que um grande número de proposições geométricas eram conversíveis (veja-se Aristóteles, An. Post. 78a, 10-13; Proclo, In Eucl., Friedlein, pp. 72, 26ss., 252,5ss.), como também é indubitável que eles praticavam um método de análise em que os passos eram, de fato, convertíveis, e que, antes da época de Pappus, havia uma formulação do método que representava*

a análise como sendo dedutiva[1].

Desta forma, para defender o seu ponto de vista, resta *decidir se a tradição em que se baseia a abordagem (I) de Pappus é legítima ou não*[2]. Percorrendo um grande número de textos antigos em que há evidências em favor de uma forma de análise não-dedutiva[3], ou seja, um método de trabalhar em sentido inverso, da conclusão para as premissas, das quais se deduz essa conclusão, Gulley conclui que é principalmente em Aristóteles[4] que repousa o reconhecimento de uma forma de análise, empregada na geometria, correspondente à descrição (I) de Pappus, onde claramente a relação lógica entre premissas e conclusão é não-reversível.

Embora não considerados por Gulley, Zeuthen e Duhamel[5], apresentam a análise também como movimento não-dedutivo. A diferença entre eles e Cornford é que para este último a análise é excusivamente não-dedutiva. Assim, a posi

1 - Gulley, N. {1983}, 4, pp. 18-19.

2 - Gulley, N. {1983}, 4, p. 19.

3 - Gulley, N. {1983}, 4, p. 19-22. Notas: 3, 4, 5, 6, 7 e 9.

4 - An. Pr. 46, 40ss.; An Pr. I, 7, 15-18; An. Pr. I,5, 27-31; An. Post. I, 319, 18ss.; An. Post. 94a 28-35.

5 - Veja-se Seção 1, deste Capítulo.

ção de Gulley já fora, de certa forma, compartilhada anteriormente. No entanto, em relação ao relato de Pappus, Gulley chega a conclusões particulares, que fazem parte da sua terceira interpretação.

Para Gulley, embora Pappus, em seu relato, aparentemente esteja descrevendo um único método, como um único conjunto de regras, na realidade está reproduzindo duas abordagens diferentes da análise geométrica, as quais correspondem às duas formas distintas do método, e está supondo a equivalência das duas, em (I) e (III), para todos os casos de análise, sem se dar conta das inconsistências envolvidas nessa sua suposição.

> *Escapou a Pappus que (I) é uma formulação correta para os casos em que (III) é uma formulação incorreta. A própria forma de sua descrição sugere que esta é composta de duas descrições distintas do método. A uma afirmativa inicial de que a análise é uma passagem através das sucessivas conseqüências de uma pressuposição inicial, seguem-se duas descrições, a primeira mais geral e a segunda dividindo-se em análise teórica e análise de problema. Mas cada descrição é perfeitamente auto-consistente*[1].

1 - Gulley, N. {1983}, 4, p. 27.

Como vemos, dizer que Pappus oferece duas abordagens da análise que correspondem a duas formas distintas do método, implica em atribuilher-lhe a pecha de ser inconsistente em seu relato. Para Hintikka[1], aí reside a incoveniência dessa terceira interpretação. Lançar contra Pappus uma acusação dessa ordem parece bastante forte, principalmente se considerarmos que, além de geômetra e matemático, Pappus foi um exímio praticante do método. Para solucionar este problema decorrente da interpretação gulleyana, Hintikka, como veremos no capítulo seguinte, procurará investigar também a significação do termo ἀκολούθων empregado por Pappus.

Ainda em relação a este problema, chama-nos a atenção o fato de que Zeuthen e Duhamel e, em especial este último, tenham tratado da análise, seja como processo dedutivo, seja como processo não-dedutivo, sem, contudo, disso inferir a inconsistência da descrição de Pappus. É que esses autores, por considerarem que a análise como movimento ascendente e não-dedutivo não seja propriamente um método, são de opinião que Pappus, em seu relato, descreve apenas um

1 - Hintikka, J. & Remes, U. {1984}, p. 13.

método, a análise geométrica enquanto um procedimento dedutivo, à luz da concepção tradicional.

Outro ponto na interpretação de Gulley que certamente está sujeito a discussão é a questão de se saber em que tipo de análise se aplica a dedutibilidade, ou se as duas formas - a dedutiva e a não-dedutiva - são estanques ou não. Com isso, pretendemos explicitar que a interpretação de Gulley, segundo nos parece, secciona, de forma definitiva, para um lado a análise como processo dedutivo e, para outro, como processo não-dedutivo. Este ponto se ressalta ainda mais se atentarmos que, mesmo na concepção tradicionalmente aceita que defende a análise como processo dedutivo, e, para ser mais incisivo, em Heath que é tido como um dos seus mais legítimos representantes, admite-se - embora com certas cautelas - a não reversibilidade incondicional de alguns passos da análise.

Levantados estes problemas, concluímos esta seção, a última deste capítulo, sumarizando a posição de Gulley:

a) O relato de Pappus trata de duas formas distintas do método, e disso decorre;

b) que a análise pode ser identificada ora como um movimento ascendente, ora como um movimento descendente;

c) que há uma forma de análise que é dedutiva e outra não-dedutiva e

d) que, no caso de a análise ser dedutiva, a reciprocidade das proposições é condição do método, mas, em caso contrário, não há necessidade de tal estipulação.

CAPÍTULO III:

O SENTIDO INSTANCIAL E CONSTRUCIONAL: A RECUPERAÇÃO DO SIGNIFICADO HEURÍSTICO DA ANÁLISE

Abordaremos, neste capítulo, a concepção de Hintikka e Remes sobre o método de análise.

Em um primeiro momento (Seção 1.), será feita uma retomada do problema direcional da análise onde, à luz das recentes discussões, se procurará examinar o que se encontra na base deste problema, gerado pelo relato de Pappus, bem como alguns dos seus aspectos que ou não foram anteriormente considerados ou parecem merecer uma nova compreensão.

Na Seção 2., será vista a estrutura lógica do sistema analítico, tendo como ponto de partida a chamada concepção instancial. Merecerá destaque, aí, o movimento ascendente, como característico da análise, mas sistematizável na estrutura do método que é enfocado numa perspectiva heurística. Concluiremos essa seção, apresentando um confronto entre a estrutura lógica da análise, tal como reconstituída por Hintikka e Remes, e um procedimento para a busca de provas de teoremas que denominamos de *dedução auxiliar*.

Por fim, na última seção, será visto o sentido construcional da análise como desdobramento e complemento da visão instancial. Além da apresentação de exemplos de análise geométrica que buscam evidenciar a prática pappusiana do método, será também discutida, finalmente, a consistência do relato de Pappus à luz da concepção de Hintikka e Remes.

1. Considerações Sobre o Problema Direcional da Análise:

Conforme vimos no Capítulo I e em toda a discussão desenvolvida ao longo do Capítulo II, entre os diversos problemas suscitados pelo relato de Pappus, surge o conhecido problema direcional da análise, ao qual grande ênfase se tem sido dada.

Tanto na idade média, como ainda em grande parte da literatura mais recente, a análise tem sido identificada simplesmente como um movimento *contra a corrente*, ou seja, como um movimento em direção contrária à das implicações lógicas, enquanto que a síntese tem sido vista como um movimento *a favor da corrente*, acompanhando a direção das inferências lógicas. Por outro lado, a partir da concepção, com ampla influência, de que a análise seja um movimento estritamente dedutivo (descendente), toda essa velha tradição que concebe a análise como um movimento retrodutivo, um método de trabalhar *para trás*, pareceu carecer de uma reinter pretação. Todavia, nos termos em que esta foi, até aqui, empreendida, ou se vê comprometido o verdadeiro sentido direcional da análise ou, quando não, chega-se a conseqüências que afetam, do ponto de vista lógico, a estrutura da análise-síntese ou, ainda, a consistência do relato de Pappus em que ambas as abordagens buscam respaldo.

Para os que sustentam a idéia de análise como movimento descendente, essas duas abordagens podem facilmente coexistir ali, desde que se assuma que Pappus imaginava todos os passos da análise como passos de dedução que são convertíveis (mais equivalências que implicações), e este lhes parece ser o único refúgio possível. Já quem concebe a análise como um movimento genuinamente ascendente de busca de premissas, parece esbarrar em sérios problemas lógicos , e esta tem sido uma das principais críticas a essa concepção, como foi visto no capítulo precedente.

Em suma, o problema tem sido tratado sob a ótica de se saber, afinal de contas, A) se na análise são extraídas conseqüências lógicas do que é assumido como verdadeiro (o que se deseja provar) ou b) se, pelo contrário, são aí investigadas premissas (antecdentes) de que se possa seguir a conclusão desejada. No primeiro caso (a), teríamos a análise - em si - como movimento descendente, mas que se poderia considerar como ascendente, em relação à síntese complementar. No segundo caso (b), teríamos a análise como um movimento genuinamente ascendente, um método de *trabalhar para trás*. Como percebemos, então, o que se encontra na base deste problema é o fato de se conceber a direção da análise enquanto comparado à direção de conseqüências lógicas.

Inegavelmente, este aspecto do método de análise tem merecido uma maior atenção de quantos se tenham dedicado a estudá-lo, em confronto com outros problemas lógicos e filosóficos suscetíveis de um cuidadoso exame, a partir, igualmente, do relato de Pappus. Mas, embora não seja este o mais importante aspecto do método, há sérias razões para uma retomada do problema direcional em Pappus. Uma delas é o fato de que os partidários do aspecto direcional, ou seja, os que discutem o método sob a ótica da direção dos seus passos, deixaram de lado certos fatores básicos para a compreensão do verdadeiro problema direcional. Além disso, as dificuldades apontadas nessas suas discussões só poderão ser completamente resolvidas, segundo Hintikka e Remes[1], quando forem esclarecidos outros aspectos do método como veremos nas seções seguintes. Uma outra razão, a mais impor-

1 - Veja-se Hintikka, J. & Remes, U. {1974}, p. 11 e Hintikka, J. {1973}, pp. 201-202.

tante, é que o relato de Pappus, até o ponto em que foi tratado na última abordagem que mereceu dentro da ótica direcional, pareceu revelar-se auto-contraditório.

Esta auto-contradição, para Hintikka e Remes, resulta de uma má compreensão da terminologia pappusiana:

> *Se o que acontece, na análise, é uma passagem do resultado desejado para as suas* consequências *conforme* τᾶ ἀκολοῦθα *é usualmente traduzido), como, então, inverter, subseqüentemente, o processo e, ainda assim, obter uma série de conclusões válidas, conforme sugere a descrição de síntese oferecida por Pappus? Se P implica Q, não é usualmente verdadeiro que Q implique P; Todavia é isto que a terminologia de Pappus entendida como* conseqüências *parece pressupor*[1].

Como se percebe, então, deve haver uma má compreensão da frase διᾶ τῶν ἑξῆς ἀκολοῦθων (através de suas sucessivas conseqüências).

1 - Hintikka, J. & Remes, U. (1974), pp. 11-12 (trecho citado com tradução nossa).

Na tentativa de resolver o impasse entre a concepção tradicionalmente aceita e a posição de Cornford , Gulley, como foi visto no capítulo anterior, investigou evidências externas ao relato de Pappus que apoiassem também a concepção da análise como um movimento ascendente e não dedutivo. O inconveniente, porém, é que, tendo sido apontadas tais evidências, a sua conclusão foi a de que Pappus, embora aparentemente apresente um único método com um único conjunto de regras, está, na realidade, reproduzindo duas abordagens distintas da análise geométrica, correspondentes às duas diferentes formas do método e está supondo a equivalência das duas, sem se dar conta da inconsistência envolvida nessa sua suposição.

Para Hintikka e Remes, esta interpretação Gulleyana peca pelo fato de não poder reconciliar as diferentes partes da descrição de Pappus[1], e o preço pago pela interpretação externalista foi o de ter que incriminá-lo por inconsistência. Desta forma, considerando-se que esta interpretação pode, à primeira vista, favorecer muito mais uma das partes - a que defende a análise como um movimento as -

1 - A posição de Gulley se encontra discutida no Cap. II, Seção 4.

cendente - e levando-se em conta que não há nenhuma evidência interna de qualquer confusão cometida por Pappus, uma causa movida contra a concepção tradicional da análise seria mais convincente se pudesse absolvê-lo desta acusação de inconsistência em seu relato. E, de fato, fundamentos para esta absolvição podem ser investigados.

A primeira dificuldade para isso são aqueles enunciados cruciais do relato de Pappus em que ele parece, quase que textualmente, afirmar que a análise é a passagem da conclusão esperada para as suas conseqüências. Tais enunciados são entendidos, pela maioria dos comentaristas recentes em seu valor nominal, isto é, no sentido que se convencionou lhes atribuir, e não literalmente, no seu sentido real. Em razão disso, criou-se o problema de reconciliá-los com os enunciados igualmente explícitos no mesmo relato, em que a análise é descrita como um movimento ascendente, da conclusão esperada para as premissas das quais se segue.

Para Hintikka e Remes, todavia, inexiste o problema real desta compatibilização, pois os enunciados cruciais não significam o que, recentemente, os comentaristas entenderam significar, e isto pode ser mostrado por um estudo da terminologia de Pappus. Uma investigação neste sentido poderá não só evidenciar, de uma forma interna ao seu relato, a análise como um movimento ascendente, como também a inexistência, aí, de qualquer inconsistência de que Pappus não se dera conta.

Nesses enunciados que parecem favorecer a idéia da análise como um movimento descendente, os termos que têm sido entendidos geralmente como conseqüência lógica são akolouthein (ἀκολουθεῖν) e akōlouthon (ἀκόλουθον). É importante observar que tais termos são sempre usados por Pappus quando ele está falando do percurso que parte da conclusão desejada para as premissas e nunca quando descreve o caminho reverso das premissas para a conclusão que se pretende estabelecer. Aí, em lugar destes, são empregados termos como apódeixis (ἀπόδειξις), hepómena (ἑπόμενα) e symbáinein (συμβαίνειν)[1].

Esta duplicidade de terminologia já pode sugerir uma via de reconciliação entre as duas partes do relato. O que Hintikka e Remes sugerem, então, é que akólouthon, na descrição pappusiana da análise, não significa conseqüência lógica, mas algo além disso, como *o que corresponde a*, ou melhor, *o que vai juntamente com*. E, assim, no relato de

1 - O texto do relato de Pappus, no original grego e com versão em língua inglesa, é apresentada por Hintikka e Remes in {1974}, pp. 8-10.

Pappus, akōlouthon expressa uma certa concomitância estabelecida da conclusão para as premissas, de forma que *o que vai juntamente com* essas premissas possibilita deduzir, a partir delas, a conclusão esperada. Em razão disso, o termo tò akōloutho é traduzido por Hintikka e Remes como *a concomitância* ou *o concomitante* em vez de *conseqüência*.

Abrindo-se, aqui, um parêntese, é interessante observar que, na nossa língua portuguesa que tantos vocábulos possui de origem grega, vamos encontrar também uma evidência etimológica em favor dessa interpretação de Hintikka e Remes. Assim, por exemplo, a palavra *anacoluto* é empregada para designar *figura de sintaxe em que um termo se acha como que solto na proposição, sem se ligar sintaticamente a outro*. Etimologicamente, então, *anacoluto* provém de *an* (ausência, negação) e *akōlouthon* (ligação sintática, *o que vai juntamente com, concomitância*, inter-relação). Na proposição *O mar não há beleza que se lhe compare*, por exemplo, o termo *o mar* não possui nenhuma função sintática: não é sujeito, nem objeto direto, nem indireto, nem aposto, nem vocativo, etc. É um anacoluto. O que ocorre em proposições como esta é uma quebra da construção sintática. Talvez, no caso, tenha-se imaginado originariamente uma construção fraseológica como *O mar é de beleza incomparável* ou *Não há beleza que se compare à do mar*, mas, dada a rapidez do processo mental, a verbalização tenha se feito, por um lapso, de forma anacolútica.

Assim como um termo, toda uma proposição pode se constituir igualmente em um anacoluto em relação ao restante do período, quando - principalmente na linguagem falada - o pensamento, não completamente explicitado, é, a partir de uma frase reticente, retomado nas proposições seguintes que possuem nexo lógico, em um sentido amplo do termo. Agora, é comum, também, associar-se ligação sintática a uma relação lógica por uma certa extensão do termo. Desta forma é comum, gramaticamente falando, referir-se a uma análise sintática como análise lógica. Claro está que entre proposições que possuem entre si uma relação de conseqüência lógica, no sentido exato do termo, se estabelece *a fortiori* uma relação sintática. Obviamente, porém, pode haver relação sintática entre proposições sem que isto represente uma relação de conseqüência lógica (uma como conseqüência da outra).

Mas fechemos o nosso parêntese e voltemos a Hintikka e Remes. Após investigarem o sentido de *akólouthon* em passagens de Platão e Aristóteles que também favorecem a sua interpretação[1], chegam a uma outra passagem do próprio

1 - Veja-se Hintikka, J. & Remes, U. (1974), pp. 13-14.

Pappus em que aparece o termo crucial, e que é importante peça na sua argumentação:

Em Hultsch 30, linhas 9-11, pode-se ler (a tradução é de Ivor Thomas):

ὃ μὲν οὖν τὸ θεώρημα προτείνων συνιδὼν οντινοῦν πρότον <u>τὸ ἀκόλουθον</u> τούτῳ ἀξιοῖ δητεῖν καὶ οὔχ ἂν ἄλλως ὑγιῶς προτείνοι...	*Portanto quem propõe um teorema, não importanto como se tornou sabedor disso, deve estabelecer para a investigação a conclusão inerente nas premissas, e de nenhuma outra forma poderia ele corretamente propor o teorema...*[1]

Se reconstruirmos, a partir das observações de Hintikka e Remes, a tradução de Ivor Thomas que eles consideram se afastar um pouco do sentido literal, teremos, então, o texto da seguinte forma:

> *Portanto quem propõe um teorema , não importanto como disso se tornou sabedor, deve determinar que se investigue "o que vai juntamente com" o teorema (a conclusão) nos axiomas (ἀξιοῖ), e de nenhuma outra forma poderia ele propor corretamente o teorema.*

1 - Hintikka, J. & Remes, U. (1974), p. 14 (trecho citado com tradução nossa).

Vê-se, assim, que a palavra crucial *akõlouthon* (ἀκόλουθον) não poderia aqui, por qualquer excesso de imaginação, significar conseqüência lógica,

> *porque qualquer teorema aceitável não implica qualquer axioma ou qualquer parte destacável de um axioma. E o mais importante é que a descoberta de um axioma implicado pelo teorema não poderia por si estabelecer corretamente o teorema. Todavia Pappus afirma que 'de nenhuma outra forma se poderia propor corretamente o teorema'*[1].

Desta forma, uma interpretação dessa passagem que tenha sentido deverá entender *tõ akõlouthon* (τὸ ἀκόλουθον) como *o concomitante* ou *o que vai juntamente com* o teorema nos axiomas. E um raciocínio conduzido nessa direção não é (para os antigos matemáticos) - acrescenta Hintikka e Remes - nem uma forma estranha, nem antinatural de encarar provas matemáticas.

Finalmente, uma outra evidência em favor dessa

1 - Hintikka, J. & Remes, U. (1974), p. 15 (trecho citado com tradução nossa).

interpretação vai ser encontrada internamente no relato de Pappus, quando ele descreve a análise teórica. Vejamos, mais uma vez a passagem:

> *[...] Na análise teórica, assumimos o que se procura como se isso fosse existente e verdadeiro. Feito isto, passamos através de seus concomitantes* (ακολούθων), *como se fossem verdadeiros e existentes em virtude da nossa hipótese, para algo admitido [...]*

Se a palavra *akōlouthon* significasse, aí, *conseqüências* (dedutivas) e não *concomitantes*, seria desnecessário apelar para que as conseqüências fossem também assumidas *como verdadeiras e existentes em virtude da nossa hipótese* (seja qual for o sentido do termo), pois já era conhecido por Aristóteles que a inferência dedutiva preserva a verdade. Assim, seria suficiente descrever a análise teórica nos seguintes termos:

> *[...] Na análise teórica, assumimos o que se procura como se fosse existente e verdadeiro. Feito isto, passamos, através de suas sucessivas conseqüências [...], para algo admitido [...]*

Diversas outras evidências são aduzidas ainda em favor dessa interpretação[1], e uma vez seja reconhecido o verdadeiro sentido da terminologia *akoloutheîn* (ἀκολουθεῖν) em Pappus, descarta-se a análise como um movimento em si descendente e, o que é principal, supera-se, em alto grau, a pressuposta autocontradição apontada por Gulley no relato de Pappus.

No entanto, mesmo depois de removida a principal razão dessa suposta inconsistência, outras questões permanecem. Referimo-nos principalmente às últimas linhas, no relato de Pappus, que encerram, respectivamente, a descrição da análise teórica e a descrição da análise de problemas, que, aparentemente, podem contradizer a interpretação de Hintikka e Remes. Ali, encontram-se, pois, as seguintes assertivas: (1) *Mas se nos deparamos com algo reconhecidamente falso, o que se procura será igualmente falso* e (2) *Mas se chegarmos a algo reconhecidamente impossível, o problema será igualmente impossível.*

Com estes enunciados, parece suposto por Pap -

1 - Em especial, são citados Nicomachus de Gerara, *Introduction to Arithmetic*, tradução de M.L. D'Doge, MacMillan Company, N.York, 1926, p. 291, On αxολόυθos; J.W. Stakelum, *Galen and the Logic of Propositions*, Angelicum, Roma, 1940, pp. 72-79.

pus que a verdade (no caso da análise teórica) ou a possibilidade (no caso de análise de problema) do que é admitido independentemente como verdadeiro, fosse uma conseqüência do que, de fato, se procura; e essa suposição nos levaria, então, a considerar ou a interpretação da análise como um movimento descendente, o que já foi descartado, ou, de outra forma, a pressupor a reversibilidade da análise.

Na realidade, essa dualidade metodológica, tal como descrita por Pappus, se constitui em um obstáculo para uma interpretação simples do método. Trata-se, aí, de fato, não de uma descrição da análise, como um método isolado, mas de um método de *análise-e-síntese*, cujas partes integrantes não podem, sob pena de descaracterização do verdadeiro método, ser imaginadas separadamente.

Em cuidadoso estudo empreendido por Branschvicg sobre a regressão analítica, vamos encontrar uma passagem que bem parece expressar uma concordância com o ponto de vista de Hintikka e Remes, e estabelecer, como sustentáculo para a concepção da análise como um movimento ascendente, a sua insuficiência como método isolado. Vejamos a passagem:

> *Esta análise (geométrica), diferentemente da análise dos modernos, não é auto-suficiente, pois os antigos es*

> *tão situados, não no terreno da álgebra, onde as proposições são expressas em geral por equações e são recíprocas, mas sobre o terreno da geometria onde elas são, de forma usual, hierarquicamente ordenadas. Estabelecer que, sendo B verdadeira, A é verdadeira, não significa demonstrar que a verdade de A implique a verdade de B*[1].

Assim, a análise não é um método estanque, e tanto isso é verdade que, mesmo se adotássemos literalmente a caracterização geral que Pappus oferece para o método, como foi interpretada até aqui por Hintikka e Remes, nenhuma síntese seria mais necessária para complementar o trabalho da análise, pois uma vez descoberta uma premissa a partir da qual se segue a conclusão desejada e desde que esta seja conectada a outras mais até que se chegasse, nessa subida, a teoremas anteriores ou axiomas, nenhuma justificação posterior seria então requerida. Esta consideração leva Hintikka e Remes a reconhecer a insuficiência desse seu exame:

> *Portanto a nossa interpretação da análise pappusiana como um movimento*

1 - Brunschvicg, L. {1947}, p. 54 (trecho citado com tradução nossa)

> *ascendente, embora fortemente sustentada por um estudo rigoroso da evidência, não pode ser exatamente a história total*[1].

Assim sendo, algo mais deve ser acrescido em favor da idéia de reversibilidade. Reconhecendo-se, embora, que *akoloutein* não era para Pappus um termo técnico, a simetria da relação que é por ele expressa, revela que o seu uso em Pappus não é incompatível com a idéia de reversibilidade dos passos da análise, e considerações adicionais neste sentido serão feitas na seção seguinte *A Estrutura lógica do Sistema Analítico*.

Ao que parece, então, o relato de Pappus reflete muito mais a situação lógica geral, onde a análise significa - na ótica direcional - basicamente um procedimento ascendente, do que a efetiva prática geométrica, onde a operacionalização tende a enfatizar o movimento descendente e o problema da reversibilidade. Mas, como veremos adiante, isso não significa dizer que, na prática geométrica, cada passo da análise pudesse ter como certa a sua reversibilidade desde o início. Essa convertibilidade que era apenas espera

1 - Hintikka, J. & Remes, U. {1974}, p. 17 (trecho citado com tradução nossa).

da na fase da análise, deveria ser provada na síntese subseqüente. Eis por que, novamente, tem-se que considerar análise e síntese, conforme concebiam os gregos, *como duas metades de um único método e não como dois métodos separados.*

Isto posto, e à parte alguns problemas que ainda serão discutidos, o aspecto direcional da análise, na descrição de Pappus, assume um sentido razoável. Resta-nos, agora, explicitar por que, para Hintikka e Remes, o genérico problema da direção da análise não possui relação alguma com a questão das *fontes objetivas de valor heurístico do método de análise.* Este é um aspecto que não parece ter sido muito bem compreendido em quase todas as abordagens que foram dadas ao método e que, em razão disso, é merecedor de um maior destaque.

Estende-se, freqüentemente, que a análise enquanto procedimento descendente, ou dedutivo, é um processo cujas regras podem ser estabelecidas objetivamente, ao passo que, enquanto movimento ascendente, longe de ser racionalmente normatizável, deve ser considerada como objeto da *intuição* ou *adivinhação*, conforme se expressa Robinson em sua crítica a Cornford[1]. Constatamos, contudo, que esta

1 - A posição de Cornford se encontra discutida no Cap. II, Seção 3.

idéia pode ser encontrada bem antes em Paul Tannery, quando expõe, em suas *Memórias Científicas*[1], duas formas de análise, a análise porística e a análise zetética. Para Tannery, a análise porística, empregada pelos antigos geômetras gregos, consiste na busca de demonstrações rigorosas para fórmulas práticas e enunciados imediatamente fornecidos à intuição, mas não chega a ser um método, no sentido de que não se presta a uma sistematização própria dos procedimentos metodológicos. A análise zetética, que é o procedimento fundamental do método analítico moderno, tem como objeto a invenção de soluções (ou proposições equivalentes).

Essa tese contrária à possibilidade de normatização da análise, enquanto movimento ascendente, não é compartilhada por Hintikka e Remes que, em relação a essa questão assim se expressam:

> *As regras que nos dizem quando uma suposta conclusão C de fato se segue dedutivamente da premissa conhecida A ou de outro conjunto de premissas A, B,..., também funcionam no caminho de*

1 - Veja-se Tannery, Paul {1915}, pp. 163 e seguintes.

> *volta, dizendo-nos se uma suposta premissa A ou um conjunto finito de supostas premissas A, B,..., de fato acarretam uma dada conclusão C. Visto que não há nenhuma outra razão objetiva que se apresente para uma assimetria entre as duas direções, pode-se, portanto, proceder 'contra a corrente' por meio do mesmo esquema que nos mostra como proceder 'a favor da corrente'. (Em particular, nenhuma preferência aqui pode se basear em termos numéricos, pois da mesma forma como uma dada proposição acarreta diversas outras, também ela mesma pode ser inferida de diversas outras)*[1].

Conseqüentemente, desde que as regras lógicas para o caminho ascendente são as mesmas para o procedimento descendente, fica demonstrado que o aspecto direcional da análise não tem grande significação em termos de um maior ou menor proveito do ponto de vista heurístico. Desta forma, não se pode considerar que uma certa direção (ascendente ou descendente) seja mais condutiva que outra no sentido de propiciar a descoberta de lemas a que se possa reduzir o

---

1 - Hintikka, J. & Remes, U. (1974), pp. 18-19 (citação com tradução nossa).

resultado almejado. Naturalmente que uma distinção pode ser estabelecida em termos de familiaridade para o matemático, e, assim, o procedimento descendente se revela mais usual. Esta distinção, no entanto, não pode ser considerada uma diferença objetiva.

Para Hintikka e Remes, então a questão da direção da análise é um dos aspectos mais superficiais do conceito de análise e síntese, e a ênfase que lhe tem sido dada é freqüentemente um indício de que os elementos mais sutis e profundos do método, inclusive o papel das construções auxiliares, estão sendo subestimados.

Desta forma, além de um estudo sobre a lógica do método de análise, faz-se necessário, ainda, empreender uma investigação do aspecto construcional da análise, onde, apesar de se revelar uma certa *incerteza* do método, revela-se também a verdadeira fonte do seu poder heurístico. E isso veremos nas seções seguintes.

2. A Concepção Instancial e a Estrutura Lógica do Sistema Analítico:

Podemos perceber, pelo exposto na seção precedente, o quanto é linear, simplificada e dicotômica a con -

cepção direcional da análise. Agora, introduzindo a nossa abordagem do tema central desta seção que é a reconstituição da estrutura lógica do método analítico empreendida por Hintikka e Remes, reportemo-nos, em primeiro lugar, à concepção desses autores, segundo a qual o objeto da análise geométrica é principalmente a figura e não a passagem dedutiva dos axiomas para o teorema a ser provado ou, no caso de problemas, para as construções que se pretende executar. Quando o que se analisa vem a ser os passos entre as proposições que possibilitam essas passagens, e não a figura , dá-se ênfase à análise da prova, denominada por Hintikka e Remes de interpretação proposicional, que é também uma conseqüência do destaque concedido ao aspecto direcional. Embora, em princípio, seja possível assim considerar o método de análise, o privilégio concedido a esse enfoque obnubilou a compreensão da verdadeira prática dos geômetras gregos e , como vimos anteriormente, também o sentido da sua terminologia.

Em confronto com essa interpretação proposicional, Hintikka e Remes apresentam a sua interpretação instancial que faz parte da concepção da análise como análise de figura. Nesta visão, o objeto da análise é, em verdade, a figura geométrica em relação à qual se busca provar (no caso da análise teórica) o teorema desejado ou se exemplificar (no caso da análise de problema) os diversos passos que conduzem à construção pretendida. Assim, dentro desta concepção o que se analisa são os componentes dos objetos geométricos nas suas inter-relações e interdependências relevantes para a prova do teorema ou para a solução do problema. Por conseguinte, os passos da análise - sem importar a direção da relação de conseqüência lógica - não nos levam de uma proposição para outra, mas de um objeto geométrico, com um certo número de configurações, para outro.

Em uma formulação da interpretação instancial em termos lógicos elementares, um teorema é tipicamente uma implicação geral, ou seja, uma implicação da forma (1): $(x_1)\ldots(x_k)(A(x_1,\ldots,x_k)\rightarrow B(x_1,\ldots,x_k))$, onde A e B podem ser ainda expressões mais complexas. No caso de problemas, estando lidando, de fato, com proposições da forma (2): $(x_1)\ldots(x_k)(A(x_1,\ldots,x_k)\rightarrow(\exists y_1)\ldots(\exists y_m)C(x_1,\ldots x_k,y_1,\ldots,y_m))$.

Sabendo-se que o primeiro passo em uma proposição euclideiana é uma *ekthēsis*, ou seja, a *exposição* ou *explicitação* do teorema geral a ser provado, isto equivale a dizer que, a partir de um enunciado concernente a qualquer triângulo, qualquer círculo ou qualquer configuração geométrica de um certo tipo, aparentemente nos inclinamos para o que se procura com um caso particular dessas configurações que, normalmente, são assumidas para serem, na realidade, inferidas. É por referência ao que a figura representa, é que o resto do argumento é explicitado. Em Pappus, o teorema já se dá de uma forma previamente exposta e, assim, normalmente a enunciação geral é omitida.

Todavia, a *ektesis* admite uma caracterização em termos da lógica abstrata. Desta forma, uma ektesis, em termos da lógica moderna, importa em um passo de instanciação. E o que ocorre é que partimos da implicação geral (1) para considerar instanciadas (variáveis livres) as expressões '$A(a_1,\ldots,a_k)$' e '$B(a_1,\ldots,a_k)$'. Aqui, intuitivamente falando, $a_1,\ldots,a_k$ representam as entidades geométricas (indeterminadas) de que fala o teorema (por exemplo linhas, , círculos, etc.) e que estão representadas na figura que ilustra o teorema. O que se vai tentar descobrir não é tanto uma prova de (1) a partir de axiomas anteriores, mas uma prova de '$B(a_1,\ldots,a_k)$' a partir de '$A(a_1,\ldots,a_k)$'. Em uma análise se está interessado principalmente na interligação destes intervalos, partindo da última parte aceita, isto é, de '$B(a_1,\ldots,a_k)$'. O que importa essencialmente não é tanto se saber se estamos extraindo conclusões de B ou procurando descobrir premissas a partir das quais juntamente com 'A', 'B' possa ser inferido, mas o fato de que a força lógica de 'B' - o que ele diz de certos tipos de configurações geométricas - é também levada em conta para a realização desta tarefa.

Para ilustrar a concepção instancial, tomemos o caso de um teorema. Esse teorema deverá, pois, em sua formulação geral, possuir a estrutura da formulação (1) prognosticada por Hintikka e Remes. Tomemos como exemplo a proposição 1.15 dos elementos de Euclides *Se duas retas se cortam, então elas formam ângulos opostos pelo vértice iguais.*

Adotemos, agora, a seguinte interpretação I-(1):

$\mathcal{D}$ (domínio) ... conjunto de retas e ângulos

C^2 ... a reta 1 corta a reta 2

F^3 ... as retas 1 e 2 formam o ângulo 3

O^2 ... o ângulo 1 é oposto pelo vértice ao ângulo 2

a igualdade será expressa pelo símbolo usual, e assim estaremos em uma lógica de primeira ordem com igualdade.

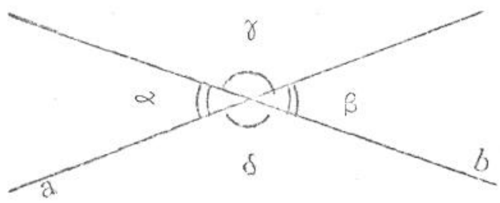
A partir de I-(1), verificamos que a proposição 1.15 assume a seguinte formulação:

$$(x_1)\ldots(x_6)\ ((C^2(x_1,x_2)\wedge(F^3(x_1,x_2,x_3)\wedge F^3(x_1,x_2,x_4)\wedge F^3(x_1,x_2,x_5)\wedge F^3(x_1,x_2,x_6))\wedge(O^2(x_3,x_4)\wedge O^2(x_5,x_6)))\rightarrow((x_3=x_4)\wedge(x_5=x_6)))$$

que possui a mesma estrutura da formulação (1):

$$(x_1)\ldots(x_k)\ (A(x_1,\ldots x_k)\rightarrow B(x_1,\ldots x_k)).$$

Instanciando-se a nossa formulação, digamos que x_1 seja a reta '*a*' e x_2, a reta '*b*'; x_3 seja o ângulo α, x_4 seja β, x_5 seja γ e x_6 seja δ. Teremos, então, a figura que é expressa pelo antecedente, que é a nossa parte A , como se segue:



Neste caso, C^2 diz de '*a*' e '*b*' que elas se cortam; F^3 afirma que '*a*' e '*b*' formam os ângulos α, β, γ, e δ. 0^2 nos diz que α é oposto pelo vértice a β, e γ a δ.

Vejamos, então, a prova da proposição 1.15 de acordo com a interpretação instancial.

<u>Análise</u>:

1. Assumimos, por hipótese, a primeira parte da nossa implicação (A), ou seja, que '*a*' e '*b*' se cortam e formam os ângulos opostos pelo vértice α e β , e γ e δ , e devemos provar, então, que $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$ (que é a nossa parte B).

2. Aqui, de fato, não sabemos que $\alpha = \beta$ e que $\gamma = \delta$, mas se assumirmos que isto seja verdadeiro, teremos que 1) $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, uma vez que a α e a β adicionamos o mesmo γ. (E de acordo com o axioma 2., *se quantidades iguais são adiciona-*

das a quantidades iguais, os resultados permanecem iguais.) Do mesmo modo, temos que 2) $\delta+\beta=\gamma+\beta$, uma vez que, nessa equação aos nossos ângulos opostos pelo vértice δ e γ, adicionamos o mesmo β.

3. Todavia, as nossas equações 1)$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ e 2) $\delta+\beta=\gamma+\beta$ de que poderiam provir? Verificamos pela figura (a nossa proposição instanciada-A) que $\alpha+\gamma$ repousa sobre a reta '*a*' e que $\beta+\gamma$ repousa sobre a reta '*b*' e que, assim , $\alpha+\gamma$ e $\beta+\gamma$ formam ângulos rasos. Do mesmo modo, $\delta+\beta$ e $\gamma+\beta$; Assim, $\alpha+\gamma$ é igual à soma de dois ângulos retos e, do mesmo modo, $\beta+\gamma$ que é o outro lado da equação. O mesmo se aplica a $\delta+\beta$ e $\gamma+\beta$; e isso decorre da proposição 1.13 (teorema anterior) que estabelece que *Se uma linha reta forma com outra dois ângulos, elas formarão dois ângulos retos ou ângulos cuja soma é igual a dois ângulos retos*. Temos assim que 1) $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$ e $\delta+\beta = \gamma+\beta$ são verdadeiros, de acordo com a proposição 1.13 que é independentemente conhecida como verdadeira. Aí, portanto, se encerra o trabalho da análise.

<u>Síntese</u>:

1. Uma vez que *se uma linha reta forma com outra dois ângulos retos ou ângulos cuja soma é igual a dois ângulos retos* é uma proposição conhecida como verdadeira , portanto $\alpha+\gamma= 2R$, $\beta+\gamma= 2R$, $\delta+\beta= 2R$ e $\delta+\beta= 2R$, e isso decorre da instanciação da proposição 1.13, em termos da nossa

figura.

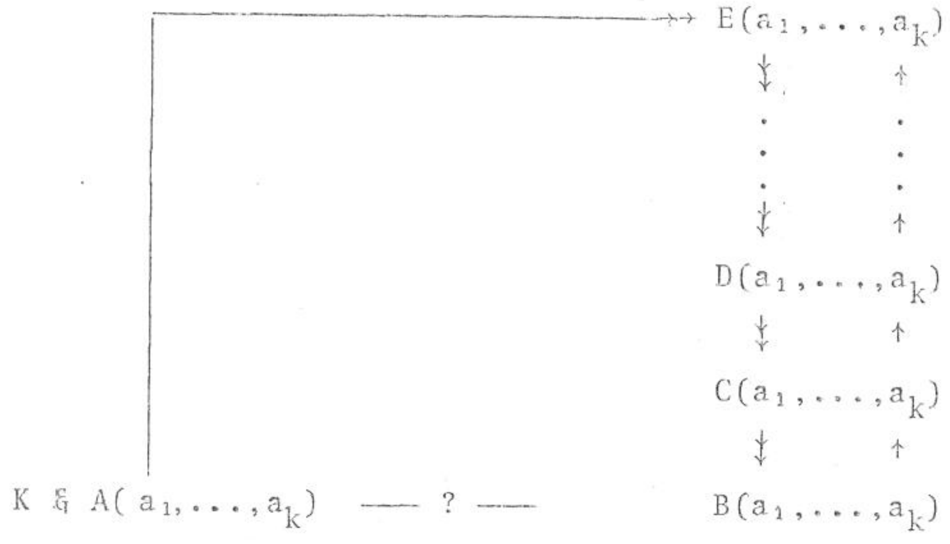
2. Aplicando-se, agora, o axioma 1, que afirma que *coisas iguais a uma mesma outra terceira são iguais entre si*, temos então que $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$ e que $\delta+\beta = \gamma+\beta$.

3. Uma vez que $\alpha+\gamma= \beta+\gamma$ são verdadeiras, então, se aplicarmos, agora, o axioma 3., segundo o qual *se quantidades iguais são subtraídas de quatidades iguais, os resultados são iguais*, teremos que $\alpha=\beta$, subtraindo-se γ a cada lado da igualdade. Do mesmo modo, de $\delta+\beta = \gamma+\beta$, e pelo mesmo axioma, subtraindo-se β de cada lado da igualdade, teremos que $\delta=\gamma$. Portanto, $\alpha=\beta$ e $\delta=\gamma$, como se queria demonstrar.

Um exemplo de análise de problema será visto na seção seguinte, onde consideraremos a concepção construcional, que completa a visão de Hintikka e Remes do método de análise-e-síntese.

Isto posto, vejamos agora a estrutura lógica do sistema analítico na reconstituição de Hintikka e Remes. Para isso, consideremos o gráfico 1, adiante, a partir do qual poderá ser visto até que ponto é possível entender a análise como um movimento descendente. O caminho ascendente, como típico da análise, é representado pelas setas simples "→" que indicam as conclusões (concomitâncias) inicialmente extraídas a partir de B, levando-se em conta as informações de A e também de K, que representa uma conjunção de axiomas e teoremas anteriormente provados e adequados. As setas dúplices "↠" indicam as conseqüências (lógicas) que se espera eventualmente estabelecer na síntese e que se apóiam em A & K como suas premissas. Vejamos, pois, o gráfico:

(Gráfico 1)



Podemos dizer, então, que as provas obtidas pelo antigo método analítico eram essencialmente o que os modernos lógicos chamam de provas por dedução natural[1].

1 - Esta conexão entre os métodos de dedução natural e o conceito tradicional de análise parece tornar possível, segundo Hintikka e Remes, comparações entre as velhas discussões da geometria heurística e recentes estudos de provas mecânicas de teoremas.

Para se visualizar melhor esta conexão estabelecida por Hintikka e Remes, consideraremos, a seguir, um exemplo muito simples no cálculo proposicional. No caso, o nosso teorema será $((P \wedge (P \to Q)) \wedge (Q \to S)) \to (S \wedge Q)$. Em relação ao gráfico 1, acima, o nosso A será a primeira parte da implicação $((P \wedge (P \to Q)) \wedge (Q \to S))$ e o B, a segunda parte, ou seja, $(S \wedge Q)$. Seja o nosso conjunto K, a axiomática de Kleene (1952)[1]. Teremos, então, que K é o conjunto dos dez seguintes axiomas (esquemas), mais a regra de Modus Ponens (MP):

Ax.1 - $A \to (B \to A)$

Ax.2 - $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

Ax.3 - $(A \wedge B) \to A$

Ax.4 - $(A \wedge B) \to B$

Ax.5 - $A \to (B \to (A \wedge B))$

Ax.6 - $A \to (A \vee B)$

Ax.7 - $B \to (A \vee B)$

Ax.8 - $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Ax.9 - $(A \to B) \to ((A \to -B) \to - A)$

1 - Aqui, o nosso K poderia ser um conjunto de regras de dedução natural, o que de fato ocorre na prática. Desta forma, por exemplo, as informações contidas nos axiomas 3 e 4 funcionam, no raciocínio ascendente, como verdadeiras regras de separação: $A \wedge B/A$ e $A \wedge B/B$.

Ax.10 - $\sim\sim A \to A$

M.P. - A, $A \to B/B$

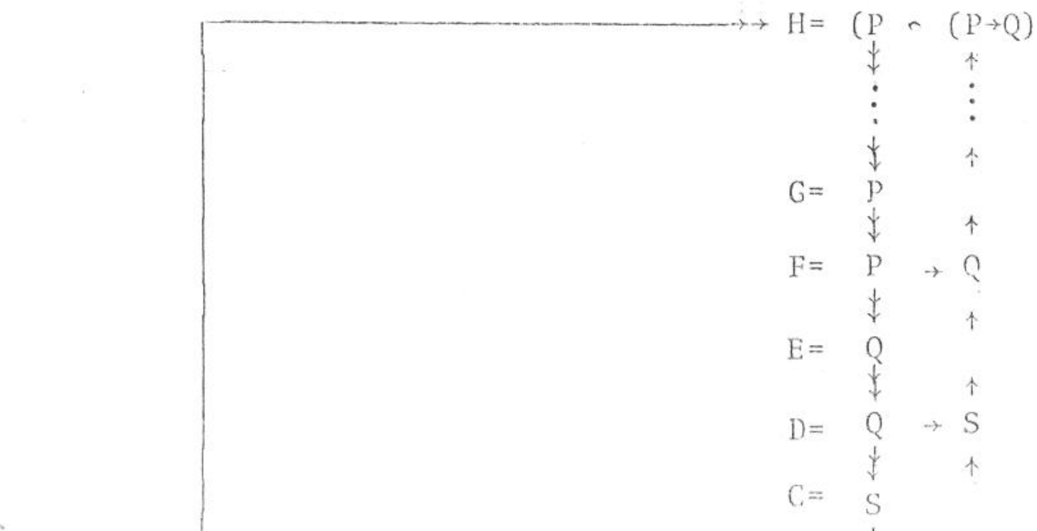
Levando-se em conta as informações fornecidas por K&A e B conjuntamente, procuraremos estabelecer as concomitâncias representadas pelas setas simples "→" que indicam o caminho ascendente. Além disso, para o estabelecimento das conseqüências lógicas, cujo caminho descendente é representado pelas setas dúplices "↠", considera-se apenas A & K, de que se segue a parte B. (veja-se o gráfico 2).

Desta forma, vejamos como explicitar o nosso raciocínio ascendente: Precisamos obter, como a parte B nos informa, (S ^ Q). Mas teremos (S ^ Q), se tivermos S e Q , conforme nos sugere o Ax.5 de K. Então, suponhamos inicialmente, pela ordem, que temos S. De onde S poderia provir? Verificamos que S ocorre na fórmula (Q→S) que poderá ser obtida pelo Ax.3 de K, a partir da nossa parte A. Supondo-se agora que temos (Q→S), disso inferimos que S poderá ser obtido daí pela regra de Modus Ponens de K, se tivermos também Q (de que também precisamos para a nossa parte B). Supondo-se agora que temos Q, de onde poderia ele resultar? Verificamos novamente, pelas informações de K & A, que Q poderá provir de (P→Q), se também tivermos P, aplicando-se a regra de M.P. Supondo-se, então, que temos (P→Q) e P, de onde poderiam provir? Uma vez mais, pelas informações de K & A, verificamos que ambos poderiam ser deduzidos a partir de (P ^ (P→Q)) ; que é uma parte conjuntiva de A. Encerra-se aí, portanto, o caminho ascendente.

O percurso descendente, onde se tentará estabelecer a ligação da parte A com a parte B, poderá ser assim expressa: Uma vez que se tem (P ^ (P→Q)), a partir de A, pelo Ax.3, obtém-se daí, igualmente pelo Ax.3, P e, pelo Ax.4 , P→Q, dos quais resulta, pela regra de M.P., Q (que é uma parte de B). Q→S, por sua vez, poderá ser obtido de A pelo Ax.4; e, uma vez que já temos Q, tem-se, então, S (que é outra parte de B), também pela regra de M.P. Tendo-se S e Q, tem- se, então, pelo Ax.5 de K, (S ^ Q) que é a nossa parte B.

Em termos do diagrama delineado por Hintikka e Remes, teremos então:

(Gráfico 2)



Evidencia-se, assim, que é possível proceder *contra a corrente* por meio do mesmo esquema que nos mostra como proceder para baixo, *a favor da corrente*, e, deste modo, o procedimento ascendente, *contra a corrente*, não é, como o disse Robinson, matéria de adivinhação. Além disso, como foi posto por Hintikka e Remes, o que mais importa, no processo analítico, não é bem o fato de se estar extraindo conclusões a partir de B ou de se estar procurando descobrir premissas a partir das quais, juntamente com A, siga-se B. Antes disso, o que há de relevante é o fato de que a força lógica de B - as informações que presta acerca de certos tipos de configurações geométricas - é também considerada para conduzir a tarefa analítica.

Desta forma, torna-se relevante reconhecer que, na prática pappusiana, a análise pressupõe inferências, a partir do conseqüente B, que se deseja alcançar, que são tipicamente como as representadas pelas setas simples. Por outro lado, deve-se sustentar a idéia de que, depois de tudo, a análise procede como um movimento descendente.

Uma questão, todavia, merece ser posta aqui. Pode-se-ia indagar, então, por que Pappus, na sua prática matemática, também se afastou da idéia de movimento ascendente. Para Hintikka e Remes, o ponto crucial aqui é que um importante aspecto da utilidade heurística do método de análi se é devido à possibilidade de se tomar tanto as informações de B a respeito de uma certa configuração geométrica, quanto as informações de A & K que as sustentam. Isso implica que se procedermos apenas para cima numa tentativa de estabelecer as setas duplas diretamente, sem levar em conta as informações do antecedente A & K, fica-se sujeito ao risco de não se proceder consistentemente, uma vez que tais informações poderiam deixar de ser efetivamente utilizadas para se descobrir os estágios intermediários C, D,..., e, aí, sim, teríamos uma tentativa cega de busca de antecedentes. Conseqüentemente, torna-se relevante a utilização de A & K como um procedimento heurístico viável. No entanto, o que, em princípio, não se pode descartar é uma tentativa de um procedimento ascendente, simultâneo ao movimento descendente. Deste modo, à medida que se procede para cima, busca-se, ao mesmo tempo, o apoio de A & K para a mesma configuração que é obtida dedutivamente, ou seja, tomando-se A & K como premissas[1]. Este caso, por exemplo, ocorre na análise teórica que examinamos acima.

De qualquer forma, no procedimento duplo de

1 - Para Hintikka e Remes, *este procedimento duplo é plenamente factível, e a sua lógica é, de fato, importante para o método de tableau semântico de Beth*, [1974], p. 37. Veja-se também nota 6, p. 40.

análise-e-síntese, a função específica da síntese vem a ser primeiramente a de verificar como se possa converter as setas simples em setas dúplices, mas isso não é tudo. A tarefa sintética para garantir a reversibilidade de diversos passos não é, de modo algum, exorbitantemente defícil, pois , na verdade, muitos passos de uma análise geométrica serão de qualquer forma reversíveis pela mediação da dependência funcional existente entre os elementos geométricos, e isso contribui para uma aprecisação do significado da reversibilidade para a prática da análise. Desta forma, deve-se considerar também o problema da reversibilidade não dentro de uma ótica de reversibilidade de passos, mas de construções.

Para se vislumbrar por que a síntese não pode ser encararda como uma tarefa restrita simplesmente à justificação da reversibilidade, veja-se, por exemplo, nos gráficos 1. e 2. (vistos antes) e o 3., (adiante), que os passos sintéticos indicados pelas setas dúplices (dedutivos) não são o reverso dos passos analíticos, indicados pelas setas simples, no sentido de que seriam se se tratasse de equivalências lógicas. É por uma estreita associação com este ponto que se pode dizer que a inconclusividade do comentário geral de Pappus sobre a análise se deve, em parte, a um fracasso esforço para reconciliar a importância prática do problema da reversibilidade com a perspicácia lógica geral de compreender que não é por razões lógicas que a reversibilidade deve ser tida como o aspecto crucial do procedimento analítico.

Para Hintikka e Remes,

> *tudo isso nos leva a ver, num primeiro momento, o que é essencial e o que não o é no método de análise. Os mais importantes aspectos parecem ser (1) a idéia de estudar as inter-relações dos objetos geométricos em uma dada configuração e (2) a idéia heurística geral de se tomar o máximo de informações para parir sobre esta configuração*[1].

Mas, uma vez que também foi sugerido por Hintikka e Remes que parece possível se estabelecer comparações entre as discussões da geometria heurística e recentes estudos de provas mecânicas de teoremas[2], vejamos agora, para concluir esta seção, um procedimento que não o tableau semântico, nem os métodos de Herbrand, sobejamente já expostos por outros autores, entre eles Nils Nilsson[3]. Trata-se

1 - Hintikka, J & Remes, U. {1974}, p. 38 (citação com tradução nossa).

2 - Hintikka, J. & Remes, U. {1974}, pp. 36 e 38.

3 - Nils Nilsson, {1971}.

Trata-se de um procedimento para descobrir a prova de um teorema a que denominamos de *Dedução Auxiliar*[1]. Veremos, aí, como a estrutura lógica do sistema analítico, tal como reconstituída por Hintikka e Remes, é requerida para tal fim.

Retomemos, então, o nosso exemplo conforme apresentado no gráfico 2. que representa a nossa busca dos axiomas relevantes indicada pelas setas simples "$\rightarrow$" e os estágios intermediários (B, C,...,H) que deverão ser estabelecidos dedutivamente na direção das setas dúplices "$\twoheadrightarrow$" (H, G,...,B). Estabeleçamos, agora, os passos dedutivos lá representados e teremos, então, a dedução de B a partir de A & K (a nossa *Dedução Auxiliar*). O nosso K será ainda, naturalmente, a axiomática de Kleene. Contudo, o nosso objetivo final será a prova de $\vdash_{k}((P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow S)) \rightarrow (Q \wedge S)$[2].

1 - Este procedimento é uma adaptação do que nos foi transmitido por Andréa Loparić em 1977, quando, em sua classe de Lógica, revelamos interesse em saber como seria possível, no processo de demonstração de teoremas, dirigir a mente para a busca dos axiomas relevantes para a prova. Ao estudarmos, posteriormente, o trabalho de Hintikka e Remes sobre a lógica do método analítico, pudemos, então, constatar a estreita associação que se pode estabelecer entre tal estudo e o procedimento que, ora, apresentamos.

2 - Este procedimento que, para efeito de simplificação, é apresentado no cálculo proposicional, é também aplicável no cálculo dos predicados.

Dedução Auxiliar:

1. $((P \wedge (P\rightarrow Q)) \wedge (Q\rightarrow S))$ premissa (a nossa parte A)
2. $((P \wedge (P\rightarrow Q)) \wedge (Q\rightarrow S))\rightarrow(P \wedge (P\rightarrow Q))$ Ax. 3

(H)3. $(P \wedge (P\rightarrow Q))$ 1,2/M.P.

4. $(P \wedge (P\rightarrow Q))\rightarrow P$ Ax.3

(G)5. P 3,4/M.P.

6. $(P \wedge (P\rightarrow Q))\rightarrow(P\rightarrow Q)$ Ax.4

(F)7. $(P\rightarrow Q)$ 3,6/M.P.

(E)8. Q 5,7/M.P.

9. $((P \wedge (P\rightarrow Q)) \wedge (Q\rightarrow S))\rightarrow(Q\rightarrow S)$ Ax.4

(D)10. $(Q\rightarrow S)$ 1,9/M.P.

(C)11. S 8,10/M.P.

12. $S\rightarrow(Q\rightarrow(S \wedge Q))$ Ax.5

13. $Q\rightarrow(S \wedge Q)$ 11,12/ M.P.

(B)14. $(S \wedge Q)$ 8,13/M.P.

Mas, considerando-se que desejamos provar $\vdash_{K}((P\wedge(P\rightarrow Q))\wedge(Q\rightarrow S))\rightarrow(S\wedge Q)$ e não $((P\wedge(P\rightarrow Q))\wedge(Q\rightarrow S))\vdash_{K}(S\wedge Q)$, ou seja, uma vez que não podemos contar com a premissa $((P\wedge(P\rightarrow Q))\wedge(Q\rightarrow S))$, então assumimos que ela deva aparecer como antecedente do passo 14 da nossa dedução auxiliar. Desta forma, este passo 14 converte-se em 14' $((P\wedge(P\rightarrow Q))\wedge(Q\rightarrow S)) \rightarrow (S\wedge Q)$ que é a implicação completa que desejamos provar. Mas, como 14 tem como antecessor o passo 13 $Q\rightarrow(S\wedge Q)$, concomitantemente, devemos ter, então, um passo 13'...

$((P \wedge (P \to Q)) \wedge (Q \to S)) \to (Q \to (S \wedge Q))$ anterior a 14', e assim continuamos sucessivamente nessa nossa caminhada ascendente em que $((P \wedge (P \to Q)) \wedge (Q \to S))$, a nossa parte A, deverá aparecer como antecedente de cada passo da dedução auxiliar. O passo 9' será dispensado, uma vez que em 10' já teremos alcançado o Ax. 4 expresso por 9. Desta forma, o nosso caminho ascendente terá como limite o passo 3' $((P \wedge (P \to Q)) \wedge (Q \to S)) \to (P \wedge (P \to Q))$ que é o Ax.3 expresso no passo 2 da dedução auxiliar. Assim o passo 2' será também dispensado, como também o passo 1' que é a premissa com que não podemos agora contar. No gráfico 3, adiante, esse caminho ascendente será novamente representado pelas setas simples →.

Mas, uma vez que o passo 3' se constitui no limite para a nossa caminhada ascendente, ele deverá ser, conseqüentemente, o ponto de partida da nossa demonstração. Assim, as setas dúplices ↠ indicarão o caminho que deveremos perfazer, no sentido descendente, através dos nossos N's (3', 4', 5'...) que deverão ser interligados com as passagens que os justificarão. Partindo de 3', teremos como meta 4'; estabelecendo-se 4', procuraremos alcançar 5' que, estabelecido, será ponto de partida para 6' e assim por diante. Deste modo, a nossa tarefa estará dividida em etapas intermediárias, onde cada passo nos fornece também as pistas de como possa ser alcançado. Em razão disso, torna-se importante, aí, indicar, do lado direito dos respecti -

vos passos, os N's a partir de que foram eles obtidos na dedução auxiliar (D.A.). Desta forma, por exemplo, como na D.A. o passo 5 foi obtido a partir de 3 e 4, assim também, na prova, os passos 3' e 4' deverão ser requeridos para 5'. Vejamos, então, no gráfico 3, o desenvolvimento do procedimento até aqui adotado.

(Gráfico 3)

3' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(P\wedge(P\to Q))$ Ax.3

$\vdots$

4' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to((P\wedge(P\to Q))\to P)$ do Ax.3 da D.A.

5' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to P$ de 3' e 4'

6' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q))$ do Ax.4 da D.A.

7' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(P\to Q)$ de 3' e 6'

8' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to Q$ de 5' e 7'

10' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(Q\to S)$ Ax.4

11' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to S$ de 8' e 10'

12' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(S\to(Q\to(S\wedge Q)))$ do Ax.5 da D.A.

13' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(Q\to(S\wedge Q))$ de 11' e 12'

14' $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(S\wedge Q)$ de 8' e 13'

K

A demonstração de $\vdash_{k} ((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(S\wedge Q)$ será agora enormemente facilitada porque dividida em estágios intermediários, onde a força lógica de cada N' será levada em conta, no sentido de que as informações aí contidas nos orientam na busca dos axiomas relevantes de K para o seu estabelecimento. Assim, em um certo sentido, estaremos procedendo simultaneamente para cima e para baixo.

Na prova a seguir, para efeito de redução do comprimento das fórmulas, estaremos adotando a seguinte regra de convenção.

$A^* \equiv ((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S)$. Assim, onde aparece A^*, deve-se entender a fórmula $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))$.

Demonstração:

(3') 1. $A^*\to(P\wedge(P\to Q))$ Ax.3

2. $(P\wedge(P\to Q))\to P$ Ax.1

3. $((P\wedge(P\to Q))\to P)\to(A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to P))$ Ax.1

(4') 4. $A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to P)$ 2,3/ M.P.

5. $(A^*\to(P\wedge(P\to Q)))\to((A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to P))\to(A^*\to P))$ Ax.2

6. $(A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to P))\to(A^*\to P)$ 1,5/ M.P.

(5') 7. $A^*\to P$ 4,6/ M.P.

8. $(P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q)$ Ax.4

9. $((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q))\to(A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q)))$ Ax.1

(6')10. $A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q))$ 8,9/ M.P.

11. $(A^*\to(P\wedge(P\to Q)))\to((A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q)))\to(A^*\to(P\to Q)))$ Ax.2

12. $(A^*\to((P\wedge(P\to Q))\to(P\to Q)))\to(A^*\to(P\to Q))$ 1.11/ M.P.

(7')13. $A^*\to(P\to Q)$ 10,12/ M.P.

14. $(A^*\to P)\to((A^*\to(P\to Q))\to(A^*\to Q))$ Ax.2

15. $(A^*\to(P\to Q))\to(A^*\to Q)$ 7,14/ M.P.

(8')16. $A^*\to Q$ 13,15/ M.P.

(10')17. $A^*\to(Q\to S)$ Ax.4

18. $(A^*\to Q)\to((A^*\to(Q\to S))\to(A^*\to S))$ Ax.2

19. $(A^*\to(Q\to S))\to(A^*\to S)$ 16,18/ M.P.

(11')20. $A^*\to S$ 17,19/ M.P.

21. $S\to(Q\to(S\wedge Q))$ Ax.5

22. $(S\to(Q\to(S\wedge Q)))\to(A^*\to(S\to(Q\to(S\wedge Q))))$ Ax.1

(12')23. $A^*\to(S\to(Q\to(S\wedge Q)))$ 21,22/ M.P.

24. $(A^*\to S)\to((A^*\to(S\to(Q\to(S\wedge Q))))\to(A^*\to(Q\to(S\wedge Q))))$ Ax.2

25. $(A^*\to(S\to(Q\to(S\wedge Q))))\to(A^*\to(Q\to(S\wedge Q)))$ 20,24/ M.P.

(13')26. $A^*\to(Q\to(S\wedge Q))$ 23,25/ M.P.

27. $(A^*\to Q)\to((A^*\to(Q\to(S\wedge Q)))\to(A^*\to(S\wedge Q)))$ Ax.2

28. $(A^*\to(Q\to(S\wedge Q)))\to(A^*\to(S\wedge Q))$ 16,27/ M.P.

(14')29. $A^*\to(S\wedge Q)$ 26,28/ M.P. ou seja $((P\wedge(P\to Q))\wedge(Q\to S))\to(S\wedge Q)$ que é o teorema que queríamos demonstrar.

Um tal procedimento bem que pode ser heuristicamente vantajoso, principalmente quando se tratar de teoremas mais complexos. Além disso, outras regras de abreviação podem ser utilizadas não só para evitar fórmulas por demais extensas, como também para reduzir o número de passos da demonstração. Outras estratégias heurísticas são também adotadas ao longo da dedução, levando em conta o que já se tem e o próximo estágio que se deseja alcançar, que, por sua vez , sugere passos intermediários anteriores com que se deva lidar.

Embora outros confrontos pudessem ainda ser estabelecidos, acreditamos, todavia, que, pelo que apresentamos aqui, considerando-se os gráficos 2 e 3, dá para se ter uma ilustração mais concreta, em primeiro lugar, da reconstrução da estrutura lógica do método de análise empreendida por Hintikka e Remes e, em segundo lugar, do confronto que eles sugerem ser possível se estabelecer, entre essa estrutura a certos processos de provas mecânicas de teoremas.

3. O Sentido Construcional e a Resolução do Sistema Analítico:

O sentido construcional da análise, na concepção de Hintikka e Remes, complementa a sua visão de análise como análise de figura.

Como vimos antes, o desenvolvimento natural de uma análise de figura não é linear, mas assume a forma de uma rede mais complexa de conexões, onde, de um ponto de vista heurístico, o que se torna mais interessante de considerar são as inter-relações entre os objetos geométricos de uma certa configuração. Assim, entender os passos da análise não meramente como passos de uma proposição para outra, mas como de um objeto geométrico para outro, significa voltar a atenção para a figura, e, na medida em que nos voltamos para a figura, como instância da primeira parte de nossa implicação, podemos melhor compreender o real significado da análise, seja teórica ou de problemas.

Contudo, para analisar uma figura, como diz Hintikka, *em todos os casos mais interessantes nós precisamos de uma 'preparação' (em grego κατασκευή) a fim de tornar possível conduzir a prova*[1]. Isto significa dizer que, mui -

1 - Hintikka, J. (1973), p. 202.

tas vezes, a figura dada necessita ser complementada em termos de novos traçados (construções auxiliares) a fim de que a prova possa ser conduzida com êxito. Desta forma, entende-se que o objeto da análise não é meramente a simples figura determinada por um certo teorema ou problema, mas esta mesma figura ampliada por um certo número de construções adequadas. Em outras palavras, uma análise de figura só poderá ser bem sucedida se, além de assumirmos a verdade do teorema ou a solução do problema, formos capazes de explicitar um número suficiente de construções auxiliares na figura, a partir das quais sejam obtidos os elementos que possibilitem executar a construção da prova ou chegarmos aos dados que possibilitarão resolver o problema.

No entanto, por maior que seja a certeza da necessidade de tais construções, a impreditibilidade do número desses elementos auxiliares implica em uma correspondente incerteza do método de análise, no sentido de que, em princípio, nunca se pode estar seguro de que tenhamos realizado as construções auxiliares suficientes até que se atinja o resultado desejado. Deste modo, a descoberta das construções auxiliares adequadas não apenas é freqüentemente o elemento de maior dificuldade da análise, como também parte essencial para a prova de uma proposição ou solução de um problema geométrico.

Em razão disso, a tarefa principal da análise vai se constituir na sistematização das informações (ao máximo possível) sobre os dados do problema ou das partes da proposição que se deseja provar, posto que, assim trabalhadas, tais informações possibilitarão introduzir os elementos novos - as construções auxiliares - que possibilitarão reduzi-las a *algo já conhecido ou pertencente à classe dos primeiros princípios.*

Uma fundamentação desta interpretação em termos de uma história do método, podemos encontrar em Aristóteles e no próprio Pappus. Podemos dizer que a formulação desta concepção já se encontrava na Metafísica IX, 9, onde Aristóteles afirma com muita clareza o seguinte:

> *É pela atividade também que as proposições geométricas são descobertas; pois nós as encontramos pela divisão (das figuras). Se as figuras já estivessem divididas, as proposições seriam óbvias, mas do jeito que a figura é (apresentada), elas estão presentes apenas potencialmente*[1].

1 - Referência apud Hintikka, J. [1973], p. 203. (Citação com tradução nossa).

Uma afirmativa dessa ordem bem que expressa a importância das construções auxiliares e da relação entre a figura e as proposições. Assim concebidas, as construções auxiliares poderão explicitar certas conexões existentes entre as figuras, ou seja, os passos de um objeto geométrico para outro, que conduzirão a algo já estabelecido a partir de que se possa construir a prova. Deste modo, a tarefa primeira da análise é a de tornar atual (através do ato, *da atividade*) o que é apenas potencial.

Mas, como também dissemos, uma fundamentação da concepção construcional da análise pode igualmente ser encontrada em Pappus. É o seu próprio relato que nos pode fornecer pistas para assim se chegar também a conceber a análise. Vejamos um breve comentário de Hintikka a esse respeito:

> *Esta interpretação é também encorajada pela formulação de Pappus. O que poderia ele entender pelo seu convite a que se assuma (na análise teórica) aquilo que é procurado como se fosse* verdadeiro e existente *se não que se assumisse que as construções auxiliares já estivessem feitas?*[1]

1 - Hintikka, J. (1973), p. 202. (citação com tradução nossa).

De fato, dentro de uma ótica construcional, essa afirmativa de Pappus na descrição da análise teórica assume um significado muito mais exato, não podendo mais ser vista apenas como uma ênfase retórica ao que afirmara na formulação geral da análise, onde, sem nenhuma adjetivação nos convida a assumir o que é procurado como se já fosse dado.

Na realidade, em uma análise pappusiana, constata-se o papel fundamental e indispensável das construções auxiliares, e este caráter de indispensabilidade não deixa de ser o reflexo de que, na geometria elementar, freqüentemente se deve assumir que, mesmo antes de o teorema poder ser provado ou o problema solucionado, já tinham sido realizadas *construções* que ultrapassam à simples enunciação do teorema ou exposição do problema.

Feita esta abordagem sobre a concepção construcional da análise, e antes de apresentarmos um exemplo de análise em Pappus que evidencie estes pontos, convém considerar, aqui, as etapas do sistema de análise-e-síntese.

O método de análise-e-síntese se compõe de duas etapas principais:

1) a análise e 2) a síntese, que são procedimentos complementares e não opostos no sentido forte do termo. Agora, co

mo foi visto na seção anterior, o primeiro passo de uma proposição euclidiana é uma *ekthésis*, ou seja, uma exposição ou explicitação do teorema geral a ser provado que, em termos da lógica moderna, importa em um passo de instanciação. Mas como, em Pappus, o teorema já aparece previamente exposto, isto significa dizer que normalmente a exposição geral é por ele omitida.

1) A análise, no sentido amplo, se divide em dois estágios: 1.1) a análise restrita (propriamente dita) ou transformação e 1.2) a resolução.

1.1) Na transformação, assume-se o que se procura como verdadeiro ou resolvido e, a partir disso, investigam-se dois tipos de antecedentes: a) as proposições anteriormente estabelecidas de que isso possa ser deduzido e b) as construções legítimas e os dados que possibilitem construir a formulação instanciada. Chegando-se a proposições independentemente tidas como verdadeiras ou construções que se possa executar, encerra-se, aí, a análise restrita.

1.2) Na resolução, que é a segunda parte da análise ampla, deve-se provar que as premissas obtidas na transformação são verdadeiras e que são legítimas as construções realizadas.

2) A síntese, por sua vez, se inicia pelo que por último foi alcançado na análise e se compõe igualmente de dois estágios: 2.1) a construção da síntese, ou simples-

mente construção (κατασκευή) e 2.2) a síntese propriamente dita ou demonstração (ἀπόδειξις).

2.1) Na construção, a figura que instancia a formulação geral é efetivamente construída de acordo com as construções que se revelaram legítimas no estágio analítico da resolução.

2.2) Na demonstração, prova-se a proposição inicialmente suposta como verdadeira ou soluciona-se o problema que se supôs resolvido, a partir das premissas alcançadas na transformação e estabelecidas na resolução.

Consideremos, agora, como exemplo, a análise de um problema que se encontra na *Collectio* de Pappus, traduzido por T.L. Heath e reproduzido por Hintikka e Remes[1]. O problema é o seguinte:

> *Dado um círculo ABC* [mas não os pontos A,B,C] *e dados os pontos D e E externos a ele, traçar linhas retas DB e EB, a partir de D e E, até um ponto B no círculo* (a ser determinado), *tais que, se os prolongamentos de DB e EB encontrarem*

1 - Este problema se encontra em Heath, T.L. [1925], pp. 141-42, e é reproduzido por Hintikka, J. & Remes, U. [1983], 4, pp. 31-32.

o círculo novamente em C e A [a serem determinados] , *AC seja paralela a DE.*

Como vemos, este problema se encontra de forma previamente exposta, mas verifiquemos aqui se, em uma possível formulação geral em termos da lógica elementar, teremos uma estrutura que corresponda àquela da formulação (2) proposta por Hintikka e Remes:

$$(x_1)\ldots(x_k)((A(x_1,\ldots x_k)\rightarrow(\exists y_1)\ldots(\exists y_m)C(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots y_m)).$$

Para isso, adotemos a seguinte interpretação I-(2):

$\mathcal{D}$ .... retas, pontos e círculos

E^2 ... O ponto 1 é externo ao círculo 2 .

F^4 ... Os pontos 1 , 2 e 3 formam o círculo 4 .

R^3 ... Os pontos 1 e 2 formam a reta 3 .

A^2 ... A reta 1 é prolongada até o ponto 2 .

P^2 ... A reta 1 é paralela à reta 2 .

Dada a interpretação I-(2), temos, então, que o problema assume a seguinte formulação geral:

$$(x_1)\ldots(x_3)((E^2(x_1,x_3)\wedge E^2(x_2,x_3))\rightarrow\exists y_1\ldots\exists y_7((F^4(y_1,y_2,y_3,x_3)\wedge(R^3(x_1,y_2,y_4)\wedge$$
$$\wedge R^3(x_2,y_2,y_5)\wedge R^3(y_1,y_3,y_6)\wedge R^3(x_1,x_2,y_7))\wedge(A^2(y_4,y_3)\wedge A^2(y_5,y_1)))\rightarrow$$
$$\rightarrow P^2(y_6,y_7)))$$

que, como vemos, corresponde à estrutura da formulação geral (2) de

Hintikka e Remes.

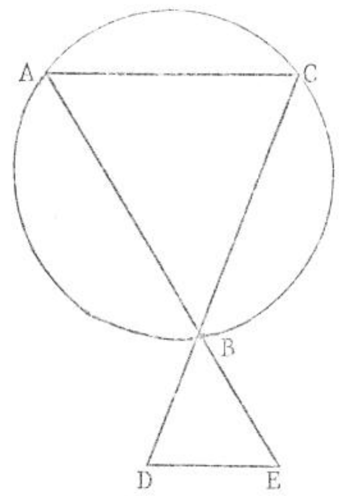
Partindo-se de nossa formulação em I-(2), temos, então, que a exposição do problema, em uma formulação geral, pode ser expressa, em linguagem usual, da seguinte forma: Se dois pontos quaisquer x_1 e x_2 são externos a um círculo qualquer x_3, então existem os pontos y_1, y_2 e y_3 tais que, se estes pontos formam o círculo x_3 e determinam as retas x_1y_2, x_2y_2, y_1y_3, x_1x_2; e o prolongamento de x_1y_2 encontra o ponto y_3 e o prolongamento de x_2y_2 encontra o ponto y_1, então y_1y_3 é paralela a x_1x_2.

Instanciando-se esta formulação, temos, por exemplo, que dados os pontos D e E externos a um círculo , existem os pontos A, B e C tais que, se eles determinam o círculo ABC e as retas DB, EB, AC e DE, e o prolongamento de DB encontra o ponto C e o prolongamento de EB encontra o ponto A, então AC é paralela a DE (onde os pontos x_1 e x_2 correspondem aos pontos D e E, e os pontos A, B e C correspondem a y_1, y_2 e y_3).

Verifica-se, facilmente, que esta versão instanciada de nossa formulação geral corresponde à exposição do problema oferecida por Pappus.

Instanciando-se em termos de figura (figura (F-1), teremos representada a parte A de nossa implicação, que é assumida, como também se assume existentes as retas de que fala a parte B, e procuraremos, a partir disto, estágios antecedentes que permitam demonstrar que AC

Fig. F-1



é paralela a DE (o que se assume como resolvido, tudo de conformidade com a estrutura lógica do sistema analítico - gráfico 1 da seção precedente - que se aplica igualmente a problemas).

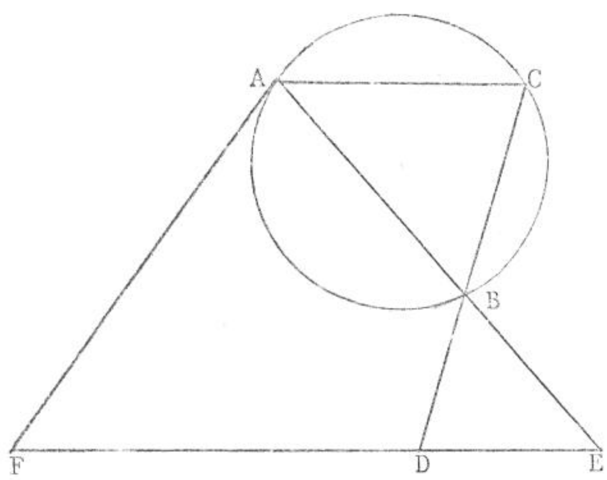
O nosso problema, então, vai consistir em determinar os pontos A, B e C no círculo que satisfaçam as condições de que, dados dois pontos D e E, externos a este círculo, se DB for prolongada até o ponto C e EB for prolongada até o ponto E, então AC seja paralelo A DE (o que devemos provar). Observe-se que, de certa forma, a dificuldade do problema está ligada a que C e A dependem de B, logo o problema envolve uma *ignorância de segunda espécie* em C e A, a partir de uma *ignorância de primeira espécie* em B.

As construções auxiliares inicialmente requeridas para a solução, aparecerão conforme se vê na figura F-2. Vejamos, a seguir, a análise e a síntese em Pappus, conforme apresentados por Hintikka e Remes.

<u>Análise</u>:

Suponhamos o problema resolvido e a tangente em A traçada, encontrando o prolongamento de ED em F.

Fig. F-2



(Parte I - Transformação)

Então, desde que AC é paralela a DE, o ângulo em C é igual ao ângulo CDE. Mas como FA é uma tangente, o ângulo em C é igual ao ângulo FAE. Portanto, o ângulo FAE é igual ao ângulo CDE, e assim A, B, D, F estão no mesmo círculo. Portanto, o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED.

(Parte II - Resolução)

Mas o retângulo AE, EB é dado, pois é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E. Portanto, o retângulo FE, ED *é dado; e como ED é dado, então FE é dado (em comprimento). (dados, 57). Mas FE é também dado em posição, logo F é dado. (dados, 27). Agora, FA é a tangente a partir de um ponto dado F, a um círculo ABC, dado em posição; portanto, FA é dado em posição e magnitude. (dados, 90). E F é dado; então, A é dado. Mas E é também dado, portanto a reta AE é dada em posição. (dados, 26). E o círculo ABC é dado em posição; portanto, o ponto B é também dado. (dados, 25). Mas os pontos D, E são também dados; portanto, as retas DB, BE são também dadas em posição.*

<u>Síntese</u>:

(Parte I - Construção)

Suponhamos dados o círculo ABC e os pontos D e E. Tomemos um retângulo contido por ED e por uma certa reta FE, (retângulo esse) igual ao quadrado sobre a tangente ao círculo a partir de E. A partir de F, trace FA tangenciando o círculo em A; Tracemos ABE e depois DB, prolongando DB de modo a encontrar o círculo em C. Tracemos AC. Digo então que AC é paralela a DE.

(Parte II - Demonstração)

Desde que, por hipótese, [isto é, por construção] o retângulo FE, ED é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E, o qual, [o quadrado] por sua vez, é igual ao retângulo

AE, EB, o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED. Portanto A, B, D, F estão sobre o mesmo círculo, donde o ângulo, FÂE é igual ao ângulo BD̂E. Mas o ângulo FAE é igual ao ângulo ACB no segmento alterno; portanto o ângulo ACB é igual ao ângulo BDE. Portanto, AC é paralela a DE[1].

Como vemos, no exemplo acima, as construções adicionais que aparecem em F-2 e outras que são desenvolvidas posteriormente[2] e que não fazem parte da exposição do problema, se constituem em elementos imprescindíveis para a prova do problema em questão. Além disso, constatamos também que a estrutura lógica do sistema analítico, conforme reconstituída por Hintikka e Remes se aplica igualmente para teoremas e problemas. Por tudo isso, pode-se agora melhor compreender por que Hintikka assim se expressa:

> *Esta diferença na direção I dos passos da análise) não é, todavia, o que o matemático praticante, estando fascinado com o método de análise é capaz de encontrar. É*

1 - Embora já tenhamos tornado mais clara a '*exposição*' deste problema, a análise e a síntese podem parecer ainda um tanto herméticas. Para uma melhor compreensão disto, ofereceremos uma explanação mais detalhada em apêndice final.

2 - Veja-se apêndice final.

> *mais provável que ele esteja interessado nas similaridades entre análise teórica e análise de problema. A razão para isto será apreciada por todos aqueles que têm tentado provar proposições geométricas a partir de axiomas ou proposições anteriores. Na prova de proposições geométricas, raramente é suficiente considerar a figura dada, isto é, a figura de que fala o antecedente da proposição. Em todos os casos interessantes nós precisamos de uma 'preparação' ou 'construção' ou uma 'maquinaria' (em grego κατασκηυῆ) a fim de tornar possível conduzir a prova. Em outras palavras, devemos complementar a figura traçando novas linhas, círculos e outras figuras*[1].

Mas é tempo, agora, de retomarmos um último ponto a ser resolvido, qual seja o do resultado negativo da análise que parece favorecer a concepção do método como um movimento descendente. O ponto de apoio desta visão são principalmente aquelas afirmativas finais do relato de Pap-

1 - Hintikka, J. (1973), pp. 201-202. (citação com tradução nossa).

pus (1) sobre a análise teórica e (2) sobre a análise de problemas. Vejamo -las mais uma vez:

> (1) *Mas se nos depararmos com algo reconhecidamente falso, o que se procura será igualmente falso.*
>
> (2) *Mas se chegarmos a algo reconhecidamente impossível, o problema será igualmente impossível.*

A partir da concepção instancial da análise (análise como análise de figura), da visão da estrutura lógica do sistema analítico, expostas nas seções precedentes, e da concepção construcional que acabamos de abordar, se tornará mais factível a remoção desse aparente obstáculo à idéia da análise como um movimento tipicamente ascendente.

Antes de tudo, conforme vimos, inclusive pelo exemplo de análise em Pappus, o que, na prática, se assume como verdadeiro não é exatamente o teorema geral ou o problema, mas uma versão instanciada da conjunção do antecendente e o conseqüente da enunciação geral. Assim, na análise restrita, tanto o que é dado (dedomena) como o que se deve procurar (zetoumeno) são pontos de partida de dedução , conforme vimos na Seção 2. deste Capítulo, quando tratamos da estrutura lógica do método, e, neste ponto, a interpretação proposicional falha.

As informações fornecidas por Pappus com relação ao limite da análise é bem mais favorável à concepção de análise de figura. Diz ele que a análise se encerra quando chegamos a algo *em ordem como primeiro princípio.* (τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων). Comentadores viram nisto axiomas e postulados; todavia, segundo Hintikka e Remes, o termos *'arxês'* (ἀρχῆς), em Pappus, é tipicamente empregado para definir objetos matemáticos e suas inter-relações e não proposições matemáticas. Esses objetos são constituídos do mesmo tipo de *material* de que se constituem os dados, isto é, não de proposições, mas de algo como por exemplo linhas, pontos, razões, etc.

A isto Hintikka e Remes acrescentam:

> *Observe-se que, em certos casos, há dificuldades significativas em tentar interpretar 'arxês'*[1] *na descrição geral de Pappus da análise como 'primeiros princípios' no sentido de axiomas. Por exemplo, se a análise é entendida como um movimento descendente ou como uma sé -*

1 - Para um estudo mais detalhado sobre a significação deste termo, veja-se Hintikka, J. & Remes, U. [1974], pp. 75 e seguintes.

> *rie de equivalências, ela não pode sempre terminar em um axioma. Pois, usualmente, nenhum axioma é implicado pelo teorema desejado que , sendo como se espera, uma conse - qüência lógica dos axiomas, é tipicamente mais fraco que eles*[1].

Visto isto, pode-se indagar, agora, o que é que, na realidade ocorre com o resultado negativo da análise e que implicações possa ter isso no contexto da situação metodológica. Vimos, acima, que, na resolução, a segunda parte da análise no sentido amplo, deve-se provar que as pre - missas obtidas na transformação são verdadeiras e que são legítimas as construções realizadas. Em suma, aí são verificadas as condições de solubilidade. Desta forma, a nossa questão pode ser convertida em indagar se, na resolução, pode ser provada a impossibilidade.

Hintikka e Remes argumentam no sentido de que se o procedimento da resolução é como aquele sugerido pela prática da análise em Pappus, então ele não prova, aí, a impossibilidade do problema ou a falsidade do teorema, mas

1 - Hintikka, J. & Remes U. [1974], pp. 75-76. (trecho citado com tradução nossa).

apenas a atribui à falha dos esforços empreendidos anteriormente por não lograrem êxito.

Como demonstra o exemplo de análise de problema em Pappus, visto acima, a resolução tem uma forma especial. Temos, aí, passos que são do tipo *se isto é dado, então aquilo é dado*, onde o que é dado é um objeto matemático. Mas o ponto mais importante aí, como afirmam Hintikka e Remes é que:

> *Mesmo se tivéssemos esgotado todas as formas possíveis de tentar extrair uma das construções auxiliares com base apenas nos dados, através da mediação de teoremas conhecidos, de forma "se isto é dado, então aquilo é dado" e falhássemos em obter uma desejada construção, mesmo assim não teríamos provado, aí, a impossibilidade do problema em questão. Não teríamos nem mesmo provado que não podemos realizar a particular construção auxiliar em causa, pois continua aberta a possibilidade de que ela possa ser obtida por meio de adequadas construções auxiliares adicionais que não estão sendo consi-*

deradas[1].

Como vemos, então, uma análise particular não prova que o problema seja insolúvel, e assim, quando Pappus afirma que *se chegarmos a algo impossível, o problema será igualmente impossível*, está querendo dizer que ele é impossível, ou seja, que a sua solução é impossível em relação ao que se obteve ou se deixou de obter na análise.

Mas por que se vê nessa *impossibilidade* aludida por Pappus uma evidência para a concepção de análise como um movimento descendente? O que se alega a esse respeito é que o resultado da análise propriamente dita (a análise restrita) poderia ser, então, um argumento por redução ao absurdo[2], ou seja, que em tais casos, obtém-se uma prova indireta, sem a necessidade de qualquer síntese, da negação do que se pretendia provar.

Com relação a esse assunto, Hintikka e Remes retomam o relato de Pappus e consideram aí digno de menção o fato de que, em sua descrição da análise, nos seus dois tipos, tais provas redutivas não tenham merecido nada além do que uma observação de passagem sobre a possibilidade de

1 - Hintikka, J. & Remes, U. [1974], pp. 57.
2 - Veja-se o Capítulo II, Seção 1.

um resultado negativo da análise. Nisto talvez, possa se encontrar mais um ponto de apoio para a concepção de análise como um movimento ascendente.

Como foi visto quando da exposição da estrutura lógica do sistema analítico, procede-se de forma ascendente pelas mesmas regras que dizem como proceder para baixo. Desta forma, no movimento ascendente, pode-se também chegar a algo impossível, só que, em tal contingência, não se necessita mesmo de uma prova redutiva e, assim, como afirmam Hintikka e Remes, *a única conclusão legítima seria um 'non sequitur", em vez de uma prova redutiva*[1].

No entanto, Hintikka e Remes se propõem a analisar uma outra possibilidade para explicar o descaso de Pappus em relação a provas redutivas em seu relato e, nesta análise, dois aspectos podem ser destacados.

Em primeiro lugar, considera-se que, se em uma análise bem sucedida, for obtido um resultado positivo que prove um certo teorema S a partir das premissas dadas, o correspondente resultado negativo poderia provar, igual -

1 - Hintikka, J. & Remes, U. (1974), p. 77 (trecho citado com tradução nossa).

mente a partir dessas premissas, a sua negação ~S. Mas visto que nem S nem ~S possam ser provados a partir dessas premissas, como ocorre com freqüência, segue-se daí que outros tipos de resultados sejam também admitidos.

Em segundo lugar - e este ponto é para Hintikka e Remes o mais importante - o descaso de Pappus por uma prova por *reductio ad absurdum* como resultado de uma análise que tenha sido tentada com esforço, pode ser explicado , de certo modo, pelo fato de que uma prova deste tipo é, estritamente falando, um resultado indesejável da análise propriamente dita. Mas vejamos textualmente o que Hintikka e Remes argumentam com respeito a este ponto:

> *Diz-se que a análise é uma tentativa de provar um suposto teorema dado S (ou executar uma construção definida C). Ora, uma prova redutiva concebida ao longo das linhas tradicionais, provaria não S, mas ~S (ou poderia provar não a possibilidade de C, mas a impossibilidade de C). Assim, o resultado de uma análise poderia simplesmente importar em algo que nem de longe se ajusta ao esquema de um sistema de prova analítica e, conseqüentemen-*

te, Pappus não insistiu nisto[1].

E acrescentam ainda, em favor dessa sua posição, uma passagem da Ética (III,3), onde Aristóteles ao invés de falar de *silogismo prático negativo*, adota, em semelhante caso, uma postura que se coaduna com a linha de argumentação que vem sendo desenvolvida. Vejamos o que ele diz:

> *(...) E se chegamos a uma impossibilidade, então nós desistimos da procura.*

Do mesmo modo, para Pappus, se chegamos a um resultado negativo em uma análise tentada com esforço, isso significa dizer que se chegou a algo que não é mais análise e que, portanto, não exige nenhuma resolução como contrapartida em termos de uma prova por redução ao absurdo. E com isso é superada essa aparentemente intransponível barreira à concepção da análise como um movimento ascendente.

Para concluir, juntemos agora as derradeiras peças restantes do quebra cabeça e elucidemos a controvertida frase de Pappus:'διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων'.

1 - Hintikka, J & Remes, U. (1974), p. 78 (cit. com tradução nossa).

Como foi sustentado anteriormente, os passos da análise geométrica se dão a partir de uma certa configuração para outra (Seção 2.). Verificamos igualmente, de acordo com a investigação empreendida na Seção 1., quanto ao significado da palavra *'akoloûthon'* (ἀκολοῦθον), o seu emprego para designar *'concomitância'*, *'inter-relação'*, *'interdependência'*, *'o que vai juntamente com'*.

Convém aqui observar que, em grego, a preposição 'διά' regendo o genitivo, é tipicamente empregada para introduzir um adjunto adverbial de meio, ou seja, uma locução adverbial que exprime a circunstância por meio de que algo se realiza[1]. Ora, é exatamente este contexto sintático que encontramos na frase 'διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων'. Por conseguinte, esta expressão também crucial no relato de Pappus para o problema da interpretação do método de análise faz sentido de acordo com a concepção de Hintikka e Remes, onde os passos da análise se dão pelas (por meio de) conexões sucessivas entre as figuras. E, como isso se verifica na prática do método em Pappus, assim este último obstáculo à concepção da análise como um movimento ascendente se vê também finalmente removido.

1 - Veja-se Hintikka, J. & Remes, U. (1974), p. 81.

CONCLUSÃO

O estudo que acabamos de empreender sobre o problema da interpretação do método de análise, da concepção tradicional à concepção de Hintikka e Remes, leva-nos a algumas conclusões que bem podem se constituir em objeto de uma reflexão sobre como certos problemas - sejam êles filosóficos, metodológicos ou epistemológicos - parecem estagnar quando discutidos em uma mesma linha de investigação. Em certos casos, subjacentes a essa linha de investigação única, há pressupostos metodológicos previamente assumidos que impossibilitam multidirecionar o problema para outros enfoques e, até que novas luzes sejam lançadas, impedem perceber que o aspecto preponderante na preocupação central, não é, de fato, a via adequada para a sua solução. Assim, só mesmo em uma ótica mais ampla, é que o que era tido como crucial, nessa situação, vem a se revelar como secundário e o que, por anos a fio, fora capaz de concentrar as atenções de quase todos os interessados no problema em questão, vem a ser um indício de que outros aspectos mais relevantes estavam sendo postos à margem da discussão.

No caso específico do problema da interpretação do método de análise, não ocorreu diferentemente. O problema lógico surgido na interpretação direcional da análise de tal forma atraiu a atenção dos historiadores da matemáti ca grega que filósofos e matemáticos chegaram a supor que, resolvido este problema, se tornaria possível, então, uma real compreensão do genuíno método de análise geométrica. Em decorrência disso, tivemos a excessiva ênfase concedida ao seu aspecto direcional, o que não só contribuiu para que outros aspectos lógicos e filosóficos mais importantes e suscetíveis de um cuidado exame, fossem deixados de lado, como também, paradoxalmente, fosse desvirtuado, de certa forma, o verdadeiro problema direcional.

Em conseqüência desse privilégio concedido à direção dos passos da análise, pudemos ver como a concepção tradicional de tal forma se centrou nos passos proposicionais que não se deu conta de explicar adequadamente o papel das construções auxiliares. Além disso, parece não ter sido, aí, compreendido que conceber a análise como um movimento estritamente dedutivo significaria impor sérias limitações ao método, não obstante se dispusesse, assim, de um certo elemento de *certeza*.

Constatamos, adiante, como Cornford tentou resgatar o movimento ascendente como típico da análise, inclusive estabelecendo uma estreita associação com a dialética de Platão. Mas, embora, em parte, estivesse certo, foi por estar também por demais voltado para a ótica da direção dos passos proposicionais que acabou fornecendo, em suas afirmativas, facilmente rebatíveis por Robinson, munição para os partidários da concepção tradicional.

Gulley poderia até estar certo em conceber duas formas de análise - uma dedutiva e outra não dedutiva - mas, em sua tentativa de conciliar as duas posições, falhou porque tomava como base dessa sua interpretação a pressuposição da inconsistência no relato de Pappus. E isso foi novamente uma decorrência do enfoque exclusivamente direcional. Todavia, resolvido o problema da inconsistência - como foi visto em Hintikka e Remes - não se tem razões definitivas, ao nosso modo de ver, para se descartar essa possibilidade das duas formas de análise. O próprio Hintikka admite que, na análise se pode também proceder dedutivamente. Além disso, encontramos, em diversos textos antigos, referências a esses dois tipos de análise, como em Paul Tannery, quando trata da análise porística e da análise zetética. Duhamel e Zeuthen admitem claramente a análise também como movimento ascendente, mas parecem entender, do mesmo modo que Tannery e, recentemente, Richard Robinson, que a análise, assim concebida, não é propriamente um método, mas matéria de *advinhação* ou *intuição*, por não poder ser normatizável. Desta forma, Pappus deveria estar tratando, em seu relato, de um único método, a análise geométrica como um movimento dedutivo e descendente.

Percebe-se, assim, que o movimento retrodutivo tem sido considerado como não racionalmente reconstruível , e foi, possivelmente, também por esta razão que o enfoque direcional, nas discussões mais recentes, tendeu a relativizar os enunciados pappusianos que descrevem a análise como uma busca de premissas anteriores, explicando-os como uma formulação alternativa do movimento descendente, pressupondo-se a reciprocidade, em todos os casos, dos passos da análise (inferências bicondicionais).

Esta questão é também muito claramente exposta por Lakatos quando afirma:

> *Alguns defensores do estilo dedutivista alegam que a dedução é o padrão heurístico em matemática, que a lógica da descoberta é a dedução. Outros compreendem que isso não é verdade, mas tiram dessa compreensão a conclusão de que o descobrimento matemático é uma questão completamente não-racional. Assim é que dirão que, embora a descoberta matemática não proceda dedutivamente, se quisermos que a nossa apresentação das descobertas matemáticas proceda racionalmente, deve-se agir no estilo dedutivista*[1].

1 - Lakatos, I. [1978], pp. 186 - 7.

Revela-se, desta forma, que, subjacente à tentativa de escamotear o movimento da análise como um movimento retrodutivo, se situa toda uma metodologia justificacionista previamente assumida. Não é à toa que, em toda a filosofia da ciência *vigente*, tem-se constatado a ênfase que é dada ao contexto da justificação e à ciência como produto (conjunto de leis e teorias já elaboradas), enquanto que o contexto da descoberta e, muitas vezes, o processo (a ciência enquanto atividade) têm sido relegados como algo menor ou, quando muito, como algo meramente psicológico. É bastante conhecida a tese de Popper, com ampla influência no pensamento contemporâneo, de que o como se dá a descoberta não pode ser objeto da filosofia da ciência porquanto é impossível reconstruir racionalmente o seu trajeto. De nossa parte, não concordamos com tal tese, pelo menos em sua formulação geral, e esta posição poderá ser compartilhada por todos aqueles que, embora reconhecendo que Popper *mostrasse estarem errados aqueles que alegam ser a indução a lógica do descobrimento científico*, compreendam o alcance das críticas de Lakatos ao seu estilo dedutivista:

> *Popper, quando (de fato, em 1934) dividindo os aspectos da descoberta entre psicologia e lógica de tal modo a não deixar lugar para a heurística como campo independente da investigação, obviamente não tinha então compreendido que sua 'lógica da descober*

> ta' era mais um esquema estritamente lógico do progresso da ciência. Essa a origem do título paradoxal do seu livro, a tese que parece ter duas faces: (a) não existe lógica do descobrimento científico - tanto Bacon como Descartes estavam errados; (b) a logica do descobrimento científico é a lógica de conjecturas e refutações. A solução desse paradoxo está à mão : (a) não existe lógica infalibilista do descobrimento científico, que leve infalivelmente a resultados; (b) existe uma lógica falibilista do descobrimento que é a lógica do descobrimento científico. Mas Popper, que lançou a base dessa lógica do descobrimento, não estava interessado na metaquestão do que era a natureza de sua investigação e não compreendeu que isso nem era psicologia nem lógica, mas disciplina independente: a lógica do descobrimento, heurística[1].

Voltando à nossa questão, podemos compreender melhor, agora, por que resultaram, até certo ponto, infrutíferas as discussões da análise sob o enfoque exclusivo da

1 - Lakatos, I. (1978), p. 187.

direção dos seus passos, enquanto comparados a conseqüências lógicas. É que se encarava, aí, sobretudo, uma análise da prova - com ênfase no aspecto dedutivista - e se esquecia a análise enquanto análise de figura, onde as interdependências entre os objetos geométricos devem ser lavadas em conta como forma de possibilitar que se executem as construções adicionais para conduzir a prova. Como vimos, anteriormente, no último capítulo, os fundamentos históricos dessa concepção de análise, Hintikka e Remes foram buscar em Aristóteles e no próprio Pappus. Podemos ver, agora, como essa posição é igualmente compartilhada por um outro autor também contemporâneo, G. Polya, quando assim se expressa:

> *O método pelo qual se inicia o exame de um problema geométrico pelo traçado de uma figura em que, por suposição, a condicionante é satisfeita, remonta aos geômetras gregos. Ele é indicado pela frase curta e algo enigmática de Pappus: 'Admita que o necessário já foi feito'*[1].

O ponto crucial, portanto, vem a ser a descoberta dessas construções que, de certa forma, implica em um

1 - Polya, G. [1978], p. 83.

elemento de impreditibilidade e conseqüente incerteza do método de análise, no sentido de que nunca se pode saber, ao certo, se já terão sido realizadas ou não as construções auxiliares suficientes para se atingir o resultado desejado. Neste sentido, podemos uma vez mais verificar a concordância com o pensamento de Polya quando afirma:

> *Antes de termos resolvido o problema, permanece a dúvida se aquela figura pode ser desenhada. É possível satisfazer toda a condicionante imposta pelo problema? Não podemos dizer que sim, antes de chegarmos à solução definitiva. Não obstante, começamos por presumir uma figura na qual a incógnita esteja ligada aos dados de maneira prescrita pela condicionante. Pode parecer que, traçando a figura, fazemos uma suposição injustificada.*
>
> *Não necessariamente. Não agimos incorretamente quando, ao examinarmos o problema, consideramos a* possibilidade *de haver um objeto que satisfaça a condicionante imposta à incógnita e que mantenha, com todos os dados, as relações exigidas, desde que não confundamos a simples possibilidade com a certeza*[1].

1 - Polya, G. (1978), p. 83.

De tudo isso, depreendemos que, como método de descoberta, a análise não é infalível, mas que, por essa razão, não se pode considerá-la como um método desprezível , uma vez que essa falibilidade - conforme ressalta Lakatos - faz parte do próprio contexto heurístico.

Isso todavia não foi alcançado pela concepção tradicional nem pelos que posteriormente discutiram o método, até que Hintikka e Remes concebessem a análise, não como método isolado, mas como um método de análise-e-síntese. Enquanto para os tradicionalistas a síntese nada mais representa do que o ordenamento natural do que fora alcançado na análise e, por isso mesmo, em certos casos dispensável, para Hintikka e Remes ela representa - retomando-se a antiga tradição dos geômetras gregos - a outra metade de um todo , onde apenas se espera estabelecer, com sucesso, as construções que foram supostas possíveis na análise.

Retomando, agora, para finalizar, o nosso ponto inicial nesta nossa conclusão, qual seja o de que a investigação de um problema - seja ele filosófico, metodológico, ou epistemológico - pode revelar, em um contexto mais amplo de investigação, as pseudoquestões cruciais e os elementos realmente relevantes não anteriormente considerados, sustentamos que tenha sido este o importantes trabalho desenvolvido por Hintikka e Remes quando empreenderam uma diagnose do método de análise-e-síntese. Recapitulemos , pois, as suas principais teses que, até onde pudemos investigar, parecem-nos satisfatoriamente sustentáveis.

Em primeiro lugar, do ponto de vista lógico, Hintikka e Remes defendem que uma prova obtida a partir do método de análise importa, de forma essencial, em uma prova pelo que modernamente chamamos de método de dedução natural. Neste aspecto, isso significa dizer que, ao invés de se lidar com uma formulação geral do problema ou teorema, trabalha-se preferencialmente com configurações definidas de objetos geométricos como instância desse formulação geral.

Em segundo lugar, o verdadeiro objeto da análise é a figura e não as conexões dedutivas em termos proposicionais, a prova. Desta forma, o que se dissecava era, na realidade, a figura em cujos elementos se busca descobrir as inter-relações relevantes para conduzir a prova.

Convém, no entanto, considerar, a seguir, que essa figura tal como se apresenta, nem sempre pode ser a única a representar o teorema desejado. Nestes casos, são requeridas tipicamente as chamadas construções auxiliares que introduzem novos elementos na figura, os quais, por sua vez, se constituem em elementos de mediação para se realizar a construção pretendida. É exatamente nessas construções auxiliares que, em princípio, reside o principal elemento de não-trivialidade e de impreditibilidade do método analítico, e, desta forma, se constituem no aspecto heuristicamente crucial, mas, ao mesmo tempo, no elemento recalcitrante no contexto da análise como método de descoberta.

Como foi visto na estrutura lógica do sistema analítico, uma outra tese importante de Hintikka e Remes é a de que uma aplicação correta das técnicas de dedução natural a um teorema geométrico, concebido como versão instanciada da implicação geral, consiste em extrair conclusões do antecedente, juntamente com K (conjunto de axiomas e teoremas anteriores adequados) e, ao mesmo tempo, investigar premissas a partir de que se pudesse estabelecer a conclusão (o conseqüente). No entanto, devido a parecer indesejável um procedimento duplo, cujas duas pontas podem igualmente interagir de formas diferentes, na prática a análise consistiu em extrair conclusões a partir das formas instanciadas do antecedente e do conseqüente conjuntamente. Em qualquer caso, no entanto, as informações contidas no conseqüente (que se deseja provar) são efetivamente levadas em conta.

Por fim, podemos destacar ainda que, considerando-se serem esses passos de dois tipos, a saber, inferências dedutivas e construções auxiliares, dois diferentes tipos de justificação eram requeridos e, de fato, apresentados na resolução da síntese: a prova de que as premissas obtidas na transformação são verdadeiras e que são legítimas as construções realizadas.

Como pano de fundo, é inegável o trabalho de reconstrução histórica do método, o que é mais uma prova de frutuosidade da associação entre a história e a filosofia da ciência. Neste aspecto, argumentos filológicos contribuem também para a elucidação da terminologia pappusiana, o que, aliado à investigação da prática do método, favoreceu enormemente a compreensão do seu real significado.

Como vemos, então, a questão da interpretação do método de análise em Hintikka e Remes, é tratada em uma ótica mais ampla, onde o indispensável instrumental lógico, histórico, metodológico e epistemológico desempenhou relevante papel para a verdadeira compreensão do problema.

APÊNDICE FINAL

Com o objetivo de tornar mais explícita a análise-e-síntese do problema de Pappus apresentada no Capítulo III, Seção 3., decidimos acrescentar este apêndice final em que pudéssemos elucidar melhor certas passagens do referido problema que, de certa forma, podem parecer um tanto herméticas. De fato, fizéssemos isso no decorrer do próprio capítulo, correríamos o risco de incorrer em tantas intervenções de caráter técnico que, certamente, acabaríamos perdendo o fio condutor de sua seqüência fundamental. Em face a isto, procuramos manter ali a íntegra do texto de Pappus transcrito por Hintikka e Remes e explicitar, ao máximo, a própria exposição do problema que, à primeira vista, não parecia igualmente suficientemente clara.

Veremos aqui, em um primeiro momento, uma seqüência de teoremas e lemas que serão referidos como fatos 1-6, a que faremos recorrência quando, em um segundo momento, nos detivermos na consideração do problema em causa.

<u>Fato</u>-1: A tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

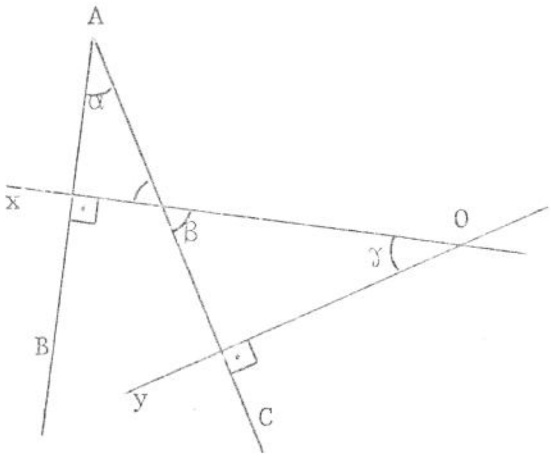
<u>Fato</u>-2: Se as semi-retas AB e AC determinam um ângulo, e OX e OY são semi-retas perpendiculares respectivamente a AB e AC, então $X\hat{O}Y = B\hat{A}C$.

Prova: β é ângulo comum aos dois triângulos (por ser oposto pelo vértice)[1].

$\alpha + \beta = 90°$

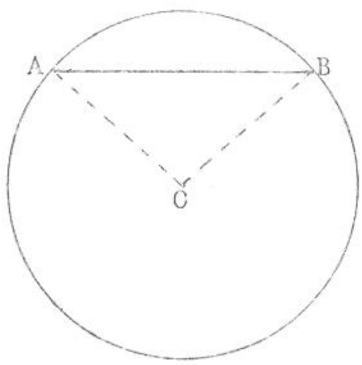
$\gamma + \beta = 90°$

logo $\alpha = \beta$



Definição:

Uma corda que não seja diâmetro, divide o círculo em dois arcos: a) arco maior (aquele que se situa no mesmo semiplano da origem O) e b) arco menor (que se situa no outro semiplano).



O ângulo AÔB é chamado ângulo vertical. Dizemos que o arco menor tem uma medida em graus igual ao ângulo central correspondente e que o arco maior tem uma medi-

1 - Veja-se o teorema apresentado no Capítulo III, Seção 2.

da em graus igual a 360º - aº, onde aº é a medida do ângulo central. No caso em que a corda é o próprio diâmetro, os dois arcos são iguais, medido cada um deles 180º[2].

Fato:3: Todo ângulo inserido em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.

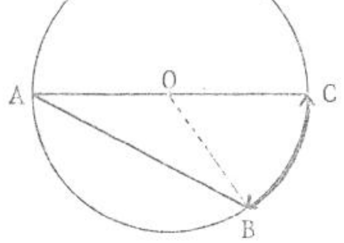
Ilustração:

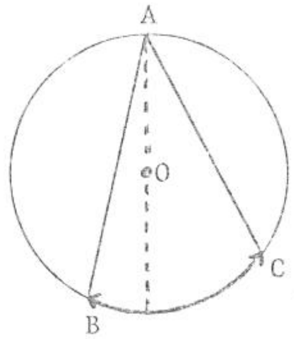
Há três casos básicos:

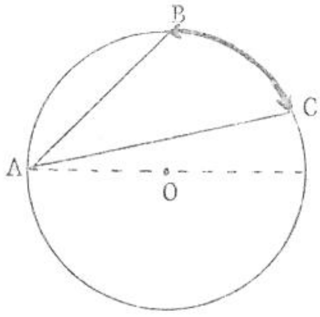
a) O diâmetro é um dos lados do ângulo (figura-1);

b) O diâmetro divide o ângulo (figura-2);

c) O diâmetro nem é um dos lados do ângulo, nem divide o ângulo (figura-3).





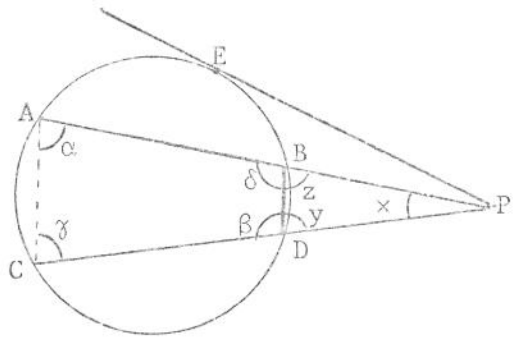


1 - Esta definição impõe uma medida em graus aos arcos que só faz sentido em arcos de circunferência.

<u>Fato-4</u>: Se P é um ponto fora do círculo, E é um ponto de tangência e A, B, C, D são pontos quaisquer no círculo, então valem:

$\overline{PE}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

e reciprocamente, se vale $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, então, A, B, C, D estão em um mesmo círculo.



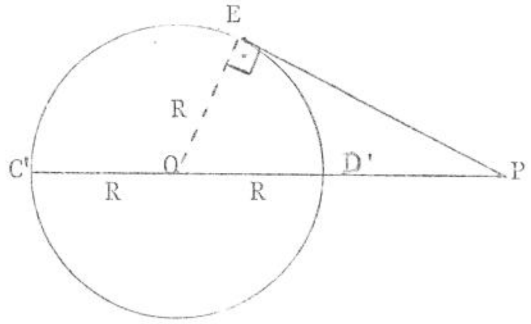
<u>Prova</u>: Como ABCD é um quadrilátero inserido em um círculo, $\alpha + \beta = 180°$ e $\gamma + \delta = 180°$ (fato 5).

Logo, como $\beta + y = 180°$, $y = \alpha$, e analogamente, $z = \gamma$ e daí PBD e PAC são semelhantes e então:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

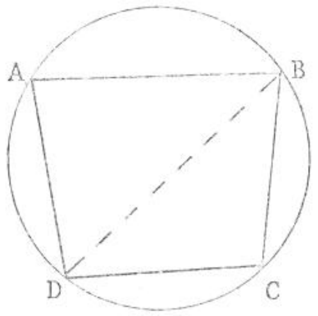
Fica claro que esta relação também vale se a reta que passa por P, C' e D' também passa no centro do círculo: neste caso, temos:

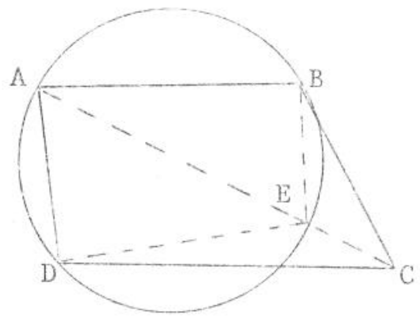
Pelo Fato-1, o raio R é perpendicular a PE no ponto de tangência, e aplicando-se Pitágoras, temos:



$\overline{PO}^2 = \overline{PE}^2 + R^2 \rightarrow \overline{PE}^2 = \overline{PO}^2 - R^2 = (\overline{PO}-R).(\overline{PO}+R) = \overline{PC}'.\overline{PD}'$, pois $\overline{PC}' = \overline{PO}+R$ e $\overline{PD}' = \overline{PO}-R$. Como $\overline{PC}'.\overline{PD}' = \overline{PA}.\overline{PB}$, temos que $\overline{PE}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$. (A recíproca usa o fato de que triângulos com lados proporcionais são tais que há dois ângulos opostos suplementares (Fato-5).

Fato-5: Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares (o que vale dizer que o quadrilátero possui dois pares de ângulos opostos suplementares).



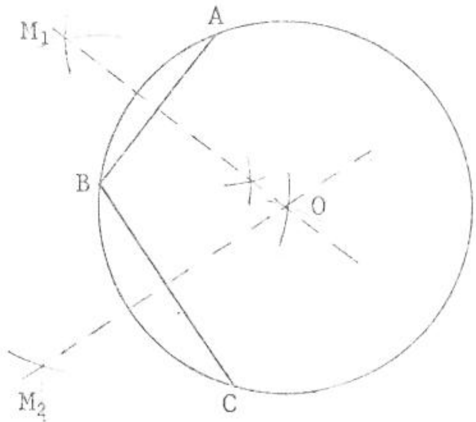


Prova: Por um lado, suponha que ABCD está inserido no círculo (fig-1). Então cada um dos seus ângulos é um ângulo inscrito no círculo. Tome $\hat{A}$ e $\hat{C}$ por exemplo : Estes ângulos subentendem exatamente os dois arcos determinados por $\hat{B}$ e $\hat{D}$. Um deles é metade do arco maior, e outro é metade do arco menor; como a soma das medidas angulares dos dois arcos é 360°, a soma de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ é 180°. O mesmo vale para a soma de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

Por outro lado, suponha que $\hat{A} + \hat{C} = 180°$; se o quadrilátero não está inscrito num círculo, pelo menos três dos seus vértices estão inscritos em algum círculo (Fato-6). Suponha que C esteja fora do círculo (Fig-2). Seja E o ponto onde CA encontra o círculo. Pela parte 1, $\hat{A} + \hat{E} = 180°$ e por hipótese, $\hat{A}+\hat{C} = 180°$, logo $\hat{E} = \hat{C}$. Mas $B\hat{E}A > B\hat{C}A$ (pois $B\hat{E}A$ é ângulo externo do Δ BEC) e analogamente $B\hat{E}A + D\hat{E}A = \hat{E} > B\hat{C}A + D\hat{C}A = \hat{C}$. Temos então uma contradição, e C não pode estar fora do círculo. (De forma similar pode-se provar que C não pode também estar dentro do círculo; logo C só pode estar sobre o círculo).

Fato-6: Três pontos não colineares determinam uma e única circunferência.

Prova: Dados A, B, C não colineares, eles formam o Δ ABC; tome as mediatrizes M_1 e M_2 (por $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$) e a sua intersecção O. Como todo ponto de M_1 é equidistante de A e B (pois determina



Δ's isóceles com A e B) e todo ponto de M_2 é equidistante de B e C pelas mesmas razões, então O, que é a intersecção de M_1 e M_2, é equidistante de A, B, C , isto é, O é o centro de uma circunferência que passa por A, B e C.

Vistos este fatos (1-6) cuja prova pode ser encontrada facilmente em qualquer livro de geometria, passemos, agora, à consideração do problema de Pappus.

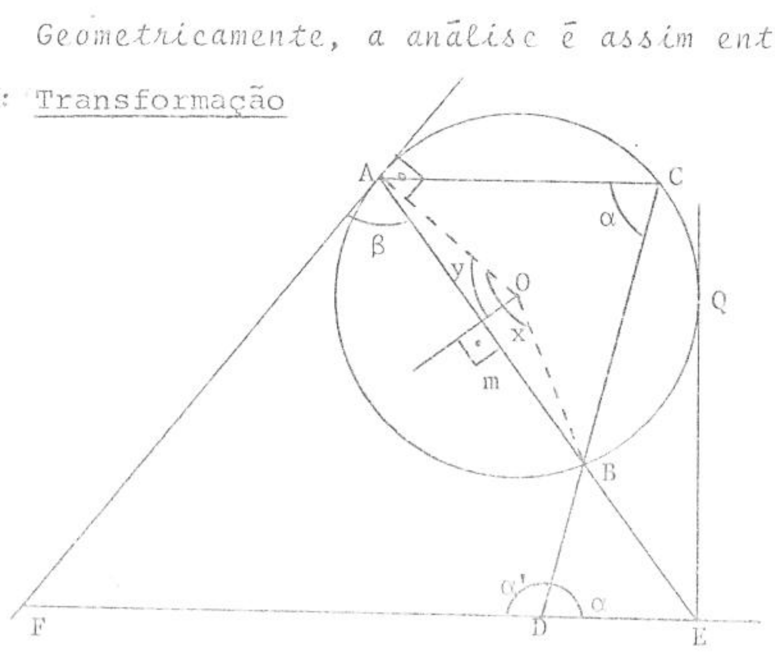
1. Exposição:

Dado um círculo ABC [mas não os pontos A, B, C; note-se que um dado círculo *representa* infinitos conjuntos A, B, C ,] e [dados] *dois pontos D e E, externos a ele, traçar linhas retas DB, EB, a partir de D e E até um ponto B no círculo* [a ser determinado], *tais que, se os prolongamentos de DB e EB encontrarem novamente o círculo em C e A* [pontos a serem determinados] *AC seja paralelo a DE.*

ANÁLISE:

Geometricamente, a análise é assim entendida:

Parte-1: Transformação



Desde que AC é // a DE, o ângulo em C é igual ao ângulo CDE. Mas como FA é uma tangente, o ângulo em C é igual ao ângulo FÂE. [Pelo Fato-1, AO é perpendicular a AF, e $\alpha = {}^1/_2$ x pelo fato-3; pela construção apresentada no fato-6, $y = \frac{x}{2}$ porque o Δ AOB é isósceles, e OM é mediatriz de AB. Portanto $y = \alpha$. Mas AF é perpendicular a AO, e AB é perpendicular a OM, logo, pelo fato-2, $F\hat{A}E = A\hat{O}M$ e $\beta = \alpha$.] *Portanto, o ângulo FAE é igual ao ângulo CDE e, assim, A, B, D, F estão no mesmo círculo* [porque $\alpha' = 180° - \alpha$, $\beta = \alpha$, logo, pelo fato-5, A, B, D, F estão no mesmo círculo]. *Portanto o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED.* [Pelo fato-4, $\overline{EA}.\overline{EB} = \overline{EF}.\overline{ED}$ no círculo que contém A, B, D, F e também $\overline{AE}.\overline{EB} = \overline{EQ}^2$ no círculo que contém A, B e C, onde $\overline{EQ}$ é tangente a esse círculo.]

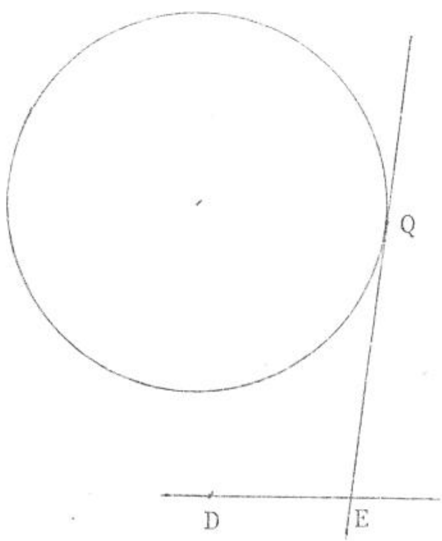
Parte II: Resolução

Mas o retângulo AE, EB é dado, pois é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E [isto é, $\overline{EQ}^2$, onde Q foi descrito acima] *portanto, o retângulo FE, ED é dado; e como ED é dado, então FE é dado* [em comprimento]. *Mas FE é também dado em posição, logo F é dado* [isto é, a reta FE é dada, e sobre ela, a partir de E, pode-se determinar F se se conhece o comprimento $\overline{FE}$].

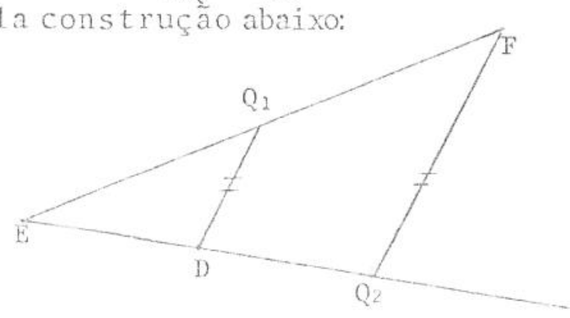
Agora, FA é a tangente a partir de um ponto F, a um círculo ABC, dado em posição; portanto FA é dado em posição e magnitude. E F é dada; então A é dado [isto é, temos um círculo dado e um ponto f dado fora dele; existem dois pontos A e A' no círculo tais que AF e A'F são retas tangentes ao círculo por F, mas sobre a tangente dada, A é único, i.é., bem determinado]. *Mas E também é dado, portanto a reta AE é dada em posição. E o círculo ABC é dado em posição, portanto, o ponto B é também dado* [isto é, uma reta que passa por um ponto A no círculo e que não é a reta tangente nesse ponto, corta o círculo em outro ponto, B no círculo]. *Mas os pontos D, E são também dados; portanto as retas DB, EB são também dadas em posição.*

SÍNTESE:

Parte-I: Construção

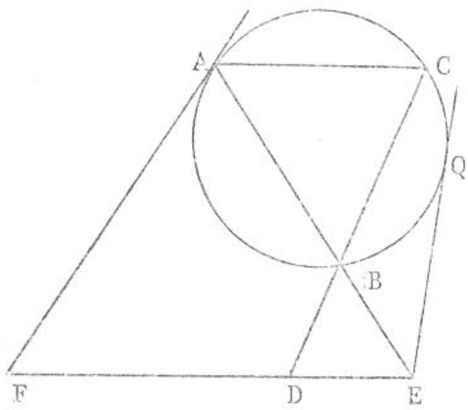


Suponhamos dados o círculo ABC e os pontos D, E. Tomemos um retângulo contido por ED e por uma outra reta EF [retângulo esse] *igual ao quadrado sobre a tangente ao círculo a partir de E:* [i.é. $EF.ED=EQ^2$, ou $\frac{EF}{EQ} = \frac{EQ}{ED}$ dado pela construção abaixo:



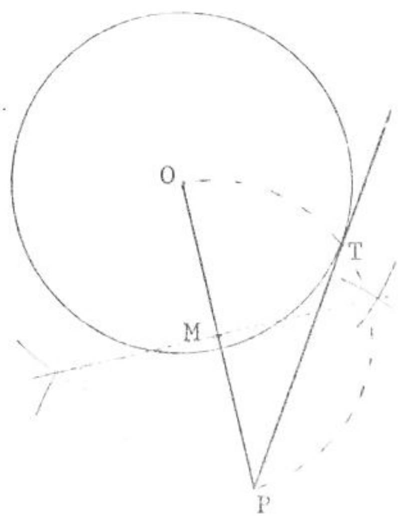
[Sobre duas semi-retas quaisquer que foram um ângulo, marque EQ_1 e ED numa delas: Tome uma paralela a DQ_1, passando por Q , até encontrar EQ num ponto F. É claro que por semelhança de Δ's, temos $\frac{EQ}{ED} = \frac{EF}{EQ}$, e EF é a distância procurada.]

A partir de F, tracemos FA, tangenciando o círculo em A; Tracemos ABE e depois DB, prolongando DB de modo a encontrar o círculo em C. Tracemos AC. Digo, então, que AC é paralelo a DE.



Observação: A maneira construtiva de traçar uma tangente a um círculo por um ponto dado é a seguinte - que é implicitamente usada para construir os pontos A e Q:

1) traça-se o segmento OP e calcula-se o seu ponto médio M;
2) traça-se o círculo de centro M e raio OM ; o ponto T, onde os dois círculos se cortam é o ponto de tangência, porque o OTP



é retângulo (já que o semicírculo é o arco capaz de 90º) e PT é paralelo ao raio OT.

Parte-II: Demonstração

Dado que por hipótese [i.é. por construção] *o retângulo FE, ED é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E, o qual* [i.é., o quadrado] *por sua vez é igual ao retângulo AE, EB, o retângulo AE, ED é igual ao retângulo FE, ED. Portanto, A, B, D, F estão no mesmo círculo* [fato-4] *donde o ângulo FÂE é igual ao ângulo BDE* [Fato-5: os ângulos FÂE + BD̂F = 180º, e por outro lado, BD̂E + BD̂F = 180º, logo FÂE = BD̂E].

Mas o ângulo FAE é igual ao ângulo ACB no segmento alterno [veja-se o comentário na parte da Transformação] *portanto, o ângulo ACB é igual ao ângulo BDE. Portanto AC é paralelo a DE.*

Como se percebe por este exemplo, não podemos ter aqui uma análise como aquela apresentada por Richard Robinson (veja-se capítulo II, Seção 3.) onde os passos proposicionais desempenham fundamental importância. Mas como foi bem posto por Hintikka e Remes, embora se possa também assim entender a análise, nos casos mais interessantes, o que é sobretudo levado em conta são as inter-relações existentes entre os objetos geométricos e, assim, a descoberta de construções auxiliares que permitam explicitar essas conexões são o elemento heuristicamente relevante neste contexto. E disto, a concepção tradicional não consegue dar conta.

Além disso, observa-se que a transformação, onde se supõe o problema resolvido, só apresenta uma seqüência de casos particulares dessa hipótese (instâncias) até que se chegue a um ponto de interesse que, no caso, é uma relação de igualdade entre magnitudes: *o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED.*

Na resolução, mostra-se a legitimitada dessa igualdade entre as magnitudes e que esta é conhecida. A partir disso, estabelecendo-se conexões entre essas *magnitudes* e *posições* chega-se a determinar os pontos A, B, C e F, ficando evidenciada a análise como um processo ou método de descoberta.

Este exemplo, portanto, ilustra três pontos fundamentais da concepção de Rintikka e Remes: 1) A análise como análise de figura (e não de passos proporcionais), 2) o seu sentido instancial e 3) o seu sentido construcional - - aspectos que contribuem para a recuperação do significado heurístico do método. Além disso, ilustra-se, aí, que a análise e síntese não podem ser vistos como métodos isolados , mas como um método de análise-e-síntese, e que é fundamental para a sua compreensão, a sua efetiva prática.

BIBLIOGRAFIA

01. Arquimedes. - Les Oeuvres Completes D'Arquimede - Traduite du Grec en francais par Paul Ver Eecke - - Desclée, De Braouwer & Cie - - Paris/Bruxelles - 1921.

02. Bacca, J.D.G. - Textos Classicos Para La Historia De las Ciencias - Vol. 1 de La Biblioteca Filosofica del Anuario *Episteme* - Universidad Central de Venezuela, Instituto de Filosofia - Caracas - 1961.

03. Brunschvicg, L. - Les Étaps de la Philosophie Mathématique - Presses Universitaires de France - Vendôme - - 1947.

04. Cherniss, H. - *Plato as Mathematician* in Review of Methaphisics 4 (1951), 395-425.

05. Cornford, F.M. - *Mathematis and Dialectic in the Republic* in Mind N.S. 41 (1932), 61-95.

06. Descartes, R. - Discurso do Método - Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior - *Os Pensadores*, Vol. XV - Editora Abril - São Paulo - 1973.

07. ____________. - Objeções e Respostas - Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior - *Os Pensadores*, Vol. XV - Editora Abril - São Paulo - 1973

08. ____________. - Meditações - Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior- *Os Pensadores*, Vol. XV - Editora Abril - São Paulo - 1973.

09. ____________. - Regras Para a Direção do Espírito - Estampa - Lisboa - 1971.

10. ____________. - Oeuvres Scientifiques (Extraits) par Marc Soriano - Larousse - Paris - 1956.

11. Duhamel, J.M.C. - Des Méthodes Dans Les Sciences De Raisonement (Première Partie) - Gauthier - Villars - Paris - 1885.

12. Granger, G.G. - Introdução ao Vol. XV de *Os Pensadores* (René Descartes) - Editora Abril - São Paulo - 1973.

13. Guéroult, M. - Descartes Selon L'Ordre Des Raisons - Aubier-Editions Montaigne - Paris - 1953.

14. Gulley, N. - *Greek Geometrical Analysis* in Phronesis 33 (1958), 1-14.

15. __________. - *A análise Geométrica Grega* -Tradução de Roberto Lima de Souza- - in Cadernos de História e Filosofia da Ciência 4 (1983) , 16-27.

16. Heath, T.L. - The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. I - Dover Publications Inc. - New York - 1956 (Republicação da 2a. Ed. de 1925).

17. Hintikka, J. - Logic, Lenguage-Games and Informations - Claredon Press - Oxford - 1973.

18. Hintikka, J. & Remes, U.- The Method of Analysis - D. Reidel Publishing Company - Dordrecht (Holland) - 1974.

19. ________________.- *A Análise Geométrica Antiga e a Lógica Moderna* - Tradução de Walter Alexandre Carnielli - in Cadernos de História e Filosofia da Ciência 4 (1983), 28-47.

20. Kant, I. - La Dissertation de 1770 - Traduction par Paul Mouy - Librairie Philosophique J. Vrin - Paris - 1942.

21. ________. - Prolegômenos - Tradução de Tânia Maria Bernkopf - *Os Pensadores*, Vol. XXV - Editora Abril - São Paulo - 1974.

22. Lakatos, I. - Historia de la Ciencia y Sus Reconstrucciones Racionales - Traducido por Diego Ribas Nicolas - Editorial Tecnos - Madrid - 1974.

23. __________, - A lógica do Descobrimento Matemático - Organizado por John Worall e Elie Zahar, tradução de Nathanael C. Caixeiro - Zahar Editores - Rio de Janeiro - 1978.

24. __________. - Mathematics, Science and Epistemology - Cambridge University Press - Cambridge - 1978.

25. Lebrun, G. - Prefácio e Notas ao Vol. XV de *Os Pensadores* (René Descartes) - Editora Abril - São Paulo - 1973.

26. Liard, L. - Lógica - Tradução de Godolfredo Rangel - Companhia Editora Nacional - São Paulo-1968.

27. Loparić, Z. - *Heurística Kantiana* in Cadernos de História e Filosofia da Ciência 5 (1983), 71-89.

28. Mahoney, M.S. - *Another Look at Greek Geometrical Analysis* in Archive for History of Exact Sciences 5 (1968/9), 319-348.

29. Mates, B. - Lógica Elementar - Tradução de Leônidas H.B. Hegenberg e Octanny Silveira da Mota - Companhia Editora Nacional - São Paulo - 1968.

30. Mendelson, E. - Introduction to Mathematical Logic - Second Edition - D. Van Nostrand Company - New York-1979.

31. Nilson, N. - Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence - McGraw Hill Book Company - New York - 1971 .

32. P.H. Michel et al. - História Geral das Ciências - Tomo I: A Ciência Antiga e Medieval, 2º Vol.: As Ciências no Mundo Greco-Romano - Tradução de Ruy Fauto e Cita, K. Ghinzbery - - Difusão Européia do Livro - - São Paulo - 1959.

33. Polya, G. - A Arte de Resolver Problemas - Tradução de Heitor Lisboa de Araújo - Editora Interciência - Rio de Janeiro - 1978.

34. Rich, Barnett - Geometria Plana - Tradução de Ricardo Vieira Lima Magalhães Gondin - Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda. - Rio de Janeiro - 1972.

35. Robinson, R. - *Analysis in Greek Geometry* in Mind N.S. 45 (1936), 464-473.

36. ___________, - *A Análise na Geometria Grega* - tradução de Roberto Lima de Souza - in Cadernos de História e Filosofia da Ciência 4 (1983) , 5-15.

37. Souza, Roberto L. de - Ciência e Metafísica em Descartes - trabalho apresentado no curso de *História da Filosofia* CLE - UNICAMP - 1977.

38. ______________. - A tradição Analítica e os Programas de Resolução Mecânica de Teoremas: Aspectos Heurísticos Comparativos - Trabalho apresentado no curso *Filosofia da Ciência no Século* XX - CLE - UNICAMP - 1978.

39. Tannery, Paul - Mémoires Scientifiques - Gauthier-Villars - Paris - 1915.

40. Zeuthen, H.G. - Histoire Des Mathématiques Dans L'antiquité Et Le Moyen Âge - - Traduite par Jean Mascart - - Gauthier -Villars - Paris - 1902.

Obs. Citações são feitas a partir das obras cujo ano de edição se encontra grifado .