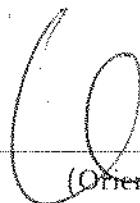


SOBRE GRAFOS PERFEITOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Candido Ferreira Xavier de Mendonça Neto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de agosto de 1987.

Prof. Dr. _____



(Orientador)

Prof. Dr. CLÁUDIO L. LUCCHESI
Chefe Dept.º C. Computação

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação.

Abstract

The first chapter introduces the notion of perfect graphs and Berge's old conjecture, proved by Lovász, appears in chapter 1 under the name of Perfect Graphs Theorem.

The second chapter presents fundamental properties of critical graphs(i. e., minimal imperfect graphs) and the so-called partitionable graphs. The chapter concludes with a presentation of Tucker's maximum clique graphs.

The third and the last chapter presents a broad collection of classes of perfect graphs. The chapter presents a weak unification of these classes.

The appendix analyzes the second conjecture, the so-called "strong" conjecture, and presents a survey of some classes over which this conjecture holds.

Sumário

O primeiro capítulo introduz a noção de grafos perfeitos e as antigas conjecturas de Berge. A primeira delas, demonstrada por Lovász, consta do capítulo I com o nome de Teorema dos Grafos Perfeitos.

O segundo capítulo apresenta propriedades fundamentais dos grafos críticos (i. é, imperfeitos minimais) e os chamados grafos particionáveis. O capítulo termina com a apresentação dos grafos de cliques máximos de Tucker.

O terceiro e último capítulo apresenta uma variada coleção de classes de grafos perfeitos. Foi conseguida uma tênue unificação de algumas dessas classes.

O apêndice considera a segunda conjectura, a chamada conjectura "forte", e apresenta um resumo de algumas classes para as quais a conjectura vale.

Agradecimentos

ao prof. Cláudio L. Lucchesi, pela orientação e pelo estímulo constante que tornaram possível a realização deste trabalho e ampliaram em muito meus conhecimentos.

ao prof. Tomasz Kowaltowski que me ajudou na elaboração deste texto em $\text{\LaTeX}$.

à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo- FAPESP, pelo auxílio financeiro.

a todos os meus amigos, e colegas, cujo apoio direto ou indireto foi decisivo nos momentos mais difíceis da elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Marilice.

Conteúdo

1	Grafos Perfeitos	2
1.1	Definições e Proposições Básicas	2
1.2	Teorema dos Grafos Perfeitos	6
2	Grafos Imperfeitos	15
2.1	Grafos críticos e Particionáveis	15
2.2	Grafo dos Cliques Máximos	24
3	Classes de Grafos Perfeitos	28
3.1	Grafos Quase-Triangulados, Triangulados, de Partição, de Intervalo e Livres de P_4	30
3.1.1	Grafos Triangulados e Quase-Triangulados	30
3.1.2	Grafos de Partição	33
3.1.3	Grafos de Intervalo e de Tolerância	34
3.1.4	Grafos Livres de P_4	36
3.2	Grafos de Comparabilidade e de Permutação	38
3.2.1	Grafos de Comparabilidade	38
3.2.2	Grafos de Permutação	39
3.3	Grafos Perfeitamente Ordenáveis	40
3.4	Grafos de Meyniel e de Paridade	40
3.4.1	Grafos de Meyniel	40
3.4.2	Grafos de Paridade	44
3.5	Grafos com Derivado Bipartido	46
A		47
A.1	Conjetura Forte dos Grafos Perfeitos	47

Capítulo 1

Grafos Perfeitos

1.1 Definições e Proposições Básicas

Damos nesta seção as definições e proposições que serão usadas ao longo da tese sem maiores referências. Ao leitor familiarizado sugerimos que prossiga à partir da seção 2.

Um grafo ¹ G consiste de um conjunto VG de *vértices* e de um conjunto AG de *arestas*, onde cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos. Um grafo é dito *finito* se VG é finito. Quando G for subentendido, escreveremos simplesmente V e A no lugar de VG e AG . Um grafo é dito *orientado* se cada aresta é um par ordenado de vértices. Se X é um subconjunto de G , usaremos a notação VX para denotar o conjunto de vértices de X , e AX para denotar o conjunto de arestas.

Seja $a = \{u, v\}$ uma aresta de G ; por simplicidade, denotaremos a aresta não só por a , mas também por uv ou vu . Dizemos que u e v são *adjacentes*, e que u e v são os *extremos* de a . Dado um vértice x de G , chamamos de *conjunto adjacente do vértice x* , notação $Adj(x)$, o conjunto dos vértices adjacentes a x em G .

O *complemento* de um grafo G , denotado por $\bar{G}$, é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\bar{G}$ se e somente se não são adjacentes em G .

Um grafo H é chamado de *subgrafo* de um outro G se seu conjunto de vértices e de arestas são subconjuntos dos vértices e arestas de G , respectivamente. O subgrafo H se diz *gerado* (notação $H := G[VH]$) se toda aresta de G com extremos em VH pertence a AH ; neste caso dizemos que VH *gera* H em G . Se H

¹Para alguns autores, o que aqui chamamos de grafo é chamado de *grafo simples* veja [3].

não é subgrafo de G dizemos que G não possui H .

Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de conjuntos, X um conjunto de $\mathcal{A}$. Dizemos que X é *maximal* em $\mathcal{A}$ se não for subconjunto próprio de nenhum elemento de $\mathcal{A}$; *minimal* se nenhum elemento de $\mathcal{A}$ é subconjunto próprio de X ; dizemos que X é *máximo* em $\mathcal{A}$ se nenhum elemento de $\mathcal{A}$ tem cardinalidade maior do que a de X ; *mínimo* se nenhum elemento de $\mathcal{A}$ tem cardinalidade menor do que a de X .

Dados dois vértices x e y de um grafo G , chamamos de *caminho* de x para y a seqüência:

$$P := (x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = y)$$

que não repete vértice, onde v_i é adjacente a v_{i-1} . Será chamado de *caminho sem cordas* se VP for minimal. Dizemos que P é um caminho de comprimento k em G , que G possui um P_k , que VP gera um P_k em G . Obs.: no caso em que $k = 1$ temos o caminho dito *degenerado*. Um *circuito* é uma seqüência:

$$C := (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$$

tal que

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$$

é um caminho, $k \geq 3$, e $v_k = v_0$. Analogamente, o circuito será chamado de *circuito sem cordas* se ele é minimal. O *tamanho* do circuito será o número de seus vértices, isto é, k , e a *paridade* do circuito será a paridade de k . Neste caso dizemos que G possui um C_k .

Um grafo G é chamado de *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois vértices x e y de G . Caso contrário é *desconexo*.

Uma *componente conexa* de um grafo G não vazio é um subgrafo H gerado de G , maximal e conexo.

Proposição 1.1 *Um grafo desconexo possui mais de uma componente conexa.*

Uma *árvore* é um grafo conexo T sem circuitos. Dizemos então que T é *acíclico*.

Um conjunto X de vértices de um grafo G é *de corte* se $G - X$ é desconexo.

Um grafo G é dito *k-conexo* se todo conjunto de corte tem pelo menos k vértices.

Um *estável* em G é um conjunto de vértices de G dois a dois não adjacentes. Denotamos por $\mathcal{E}G$ o conjunto dos conjuntos estáveis de G (ou simplesmente $\mathcal{E}$ quando ficar subentendido qual o grafo G).

Um *clique* em G é um conjunto de vértices de G dois a dois adjacentes. Denotamos por $\mathcal{C}G$ o conjunto dos cliques de G (ou simplesmente $\mathcal{C}$ quando ficar

subentendido qual o grafo G). Se um clique tem tamanho r dizemos que G possui um K_r .

Proposição 1.2 *Um clique em $\overline{G}$ é um estável em G .*

Uma *cobertura por estáveis* (ou *coloração*) de um grafo G é uma partição de V onde cada classe (*cor*) é um estável em G .

Uma *cobertura por cliques* de um grafo G é uma partição de V , onde cada classe é um clique em G .

Proposição 1.3 *Uma cobertura por cliques em $\overline{G}$ é uma cobertura por estáveis em G .*

A notação utilizada para denotar o tamanho do clique máximo (ou dos cliques máximos) de um grafo G será: ωG , ou simplesmente ω , quando G ficar subentendido; o tamanho do estável máximo (ou dos estáveis máximos) de G será denotado por αG ou simplesmente α , quando G ficar subentendido.

Proposição 1.4 *Um clique máximo em $\overline{G}$ é um estável máximo em G . Assim, $\omega \overline{G} = \alpha G$.*

O *número de cobertura por estáveis* (ou *número cromático*) de um grafo G é o tamanho de uma cobertura mínima por estáveis em G , denotado por χG ou simplesmente χ , quando ficar subentendido qual o grafo G . Do mesmo modo, o *número de cobertura por cliques* em um grafo G é o tamanho de uma cobertura mínima por cliques em G , denotado por θG ou simplesmente θ , quando ficar subentendido qual o grafo G .

Proposição 1.5 *Uma cobertura mínima por cliques em $\overline{G}$ é uma cobertura mínima por estáveis em G . Assim, $\theta \overline{G} = \chi G$.*

Lema 1.1 *Para todo grafo G valem:*

$$(i) \ \omega G \leq \chi G$$

$$(ii) \ \alpha G \leq \theta G.$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{E}$ uma cobertura mínima por estáveis e C um clique máximo de um grafo G . Então:

$$\omega G = \#C \leq \#\mathcal{E} = \chi G.$$

Como esta conclusão vale para todo clique C e toda cobertura mínima por estáveis $\mathcal{E}$, segue que:

$$\omega G \leq \chi G.$$

□

Em 1955 Mycielski (veja [28]) demonstrou que esta diferença é tão grande quanto se queira, este resultado pode ser descrito como segue: para qualquer inteiro não negativo k existe um grafo G , tal que $\omega G \leq \chi G$ e $\chi G - \omega G = k$.

Vimos nas proposições anteriores a existência de uma analogia entre os parâmetros $\omega \leftrightarrow \alpha$ e $\chi \leftrightarrow \theta$, quando trocamos G por $\overline{G}$. Então iremos falar somente de uma das desigualdades, uma vez que é fácil entendermos o caso análogo. A título de exemplo podemos estender o resultado do parágrafo anterior, do seguinte modo: para qualquer inteiro não negativo k existe um grafo G , tal que $\alpha G \leq \theta G$ e $\theta G - \alpha G = k$. Bastando complementar G e aplicar o resultado de Mycielski em $\overline{G}$.

Lema 1.2 *Dada uma cobertura por estáveis $\mathcal{S}$, e um clique C de um grafo G , se $\#\mathcal{S} = \#C$, então a cobertura $\mathcal{S}$ é mínima e o clique C é máximo.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{E}$, e C^* respectivamente uma cobertura mínima por estáveis de G e um clique máximo de G . Então:

$$\#C \leq \#C^* \leq \#\mathcal{E}_* \leq \#\mathcal{E} \leq \#C \quad (1.1)$$

- a primeira desigualdade segue da maximalidade de C^* .
- a segunda desigualdade segue do Lema.
- a terceira segue da minimalidade de $\mathcal{E}_*$.
- a última desigualdade segue da hipótese do Lema.

Assim vale a igualdade ao longo de (1.1), e portanto, $\#C = \#C^*$ e $\#\mathcal{E}_* = \#\mathcal{E}$.

□

Quando ocorre a igualdade $\omega G = \chi G$, dizemos que G satisfaz a ω -igualdade *minimax*. Quando cada subgrafo gerado de G satisfaz a ω -igualdade *minimax*, dizemos então que G é ω -perfeito.

Quando ocorre a igualdade $\alpha G = \theta G$, dizemos que G satisfaz a α -igualdade *minimax*. Quando cada subgrafo gerado de G satisfaz a α -igualdade *minimax*, dizemos então que G é α -perfeito.

Em 1961 C. Berge conjecturou que ω -perfeição e α -perfeição são equivalentes. D. R. Fulkerson tentou durante alguns anos demonstrar esta conjectura, mas em 1972 L. Lovász conseguiu demonstrá-la, usando resultados do próprio Fulkerson. Conta-se então que ao tomar conhecimento do sucesso de Lovász, Fulkerson finalmente conseguiu demonstrar esta conjectura. Assim, este resultado é conhecido como sendo de Lovász e Fulkerson. Após apreciarmos a demonstração da Conjectura então falaremos de grafos *perfeitos* e *não-perfeitos*, eliminando os prefixos α e ω .

1.2 Teorema dos Grafos Perfeitos

Antes de enunciar o Teorema dos grafos perfeitos precisamos de uma definição importante.

Denotemos por nG o número de vértices de um grafo G (ou simplesmente n quando ficar subentendido qual o grafo G). Dizemos que um grafo G satisfaz a *n-desigualdade* se:

$$\omega G \cdot \alpha G \geq nG$$

Dizemos que um grafo G é *n-perfeito* se e somente se todo subgrafo gerado de G satisfaz a *n-desigualdade*.

Proposição 1.6 *Um grafo G é n -perfeito se uma das afirmativas abaixo é verdadeira:*

$\bar{G}$ é n -perfeito.

G é ω -perfeito.

G é α -perfeito.

Demonstração. A primeira afirmativa segue da Proposição 1.4, isto é,

$$\alpha \bar{G} \cdot \omega \bar{G} = \omega G \cdot \alpha G,$$

isto é, n -perfeição é auto dual.

Para demonstrar a segunda afirmativa vamos supor que G é ω -perfeito, seja H um subgrafo gerado de G , então:

$$\omega H \cdot \alpha H = \chi H \cdot \alpha H \geq nH$$

- a igualdade segue da ω -perfeição de G .

- a desigualdade segue do fato que VH pode ser coberto por χH estáveis (com no máximo αH vértices cada um).

Portanto a ω -perfeição implica em n -perfeição.

A afirmativa (iii) é análoga à (ii).

□

Teorema 1.1 (*Teorema dos grafos perfeitos Lovasz 1972*) . Para todo grafo G as seguintes afirmações são equivalentes:

G é ω -perfeito.

G é α -perfeito.

G é n -perfeito.

Demonstração. Para demonstrarmos este Teorema iremos inicialmente definir h -substituição por vértices e enunciar dois Lemas:

Dizemos que um conjunto B é uma φ -duplicação de um conjunto A se existe uma aplicação de A no conjunto das partes de B , tal que a imagem de φ é uma partição de B (admite-se o caso em que $\varphi(v)$ é vazio para alguns elementos v de A). Dado v em A , cada elemento de $\varphi(v)$ é uma cópia de v . Dado u em B , denotamos por $\varphi^{-1}(u)$ o elemento v de A tal que $u \in \varphi(v)$; assim, u é uma cópia de $\varphi^{-1}(u)$.

Dado um grafo G e uma aplicação h de VG nos naturais, dizemos que um grafo H é uma h -substituição de vértices de G , denotado por $G \circ h$, se existe uma aplicação φ tal que VH é uma φ -duplicação de VG , onde:

- para todo u e v em VH , u e v são adjacentes em VH se e somente se $\varphi^{-1}(u)$ e $\varphi^{-1}(v)$ são adjacentes em G (cópias de um mesmo vértice não são adjacentes).
- para todo $v \in VG$, $\#\varphi(v) = h(v)$.

Veja um exemplo na figura 1.1

Proposição 1.7 Para todo clique C em $G \circ h$, $\varphi^{-1}(C)$ é um clique em G , e do mesmo tamanho. Portanto $\omega(G \circ h) \leq \omega G$

Proposição 1.8 Para todo estável E em $G \circ h$, $\varphi^{-1}(E)$ é um estável em G .

Proposição 1.9 Para todo estável E em G , $\varphi(E)$ é um estável em $G \circ h$, de tamanho $h(E)$.

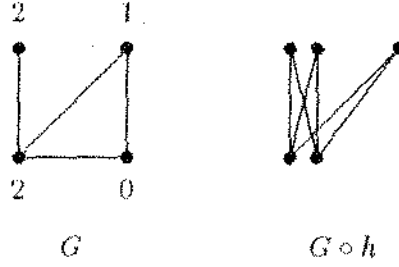


Figura 1.1: Uma h -duplicação de G , o natural ao lado de cada vértice de G é $h(v)$.

Proposição 1.10

$$\alpha(G \circ h) = \max_{S \in \mathcal{E}G} h(S)$$

Demonstração. Sejam E um estável em $G \circ h$, $E' := \varphi^{-1}(E)$, $E'' := \varphi(E')$. Segue da Proposição 1.8 que E' é um estável em G . Segue da definição de $G \circ h$ que E é um subconjunto de E'' . Segue da Proposição 1.9 que E'' é um estável em $G \circ h$ e que $\#E'' = h(E')$.

Assim,

$$\#E \leq h(E') \tag{1.2}$$

Em particular, se E for máximo então $E = E''$ e $\#E = h(E')$.

Deste modo seja F um estável máximo em $G \circ h$, assim:

$$\alpha(G \circ h) = \#F \leq h(\varphi^{-1}(F)) \leq \alpha(G \circ h).$$

- a igualdade segue da definição de F .
- a primeira desigualdade segue de (1.2).
- a última desigualdade segue do fato que $\varphi(\varphi^{-1}(F))$ é um estável em $G \circ h$.

Finalmente, para todo S em $\mathcal{E}G$, φS é um estável em $G \circ h$, com cardinalidade $h(S)$. □

A demonstração do Teorema 1.1 utiliza ainda os Lemas 1.3 e 1.4, como seguem, que serão demonstrados posteriormente.

Lema 1.3. *A operação de h -substituição de vértices preserva ω -perfeição e α -perfeição.*

Lema 1.4. *Seja H uma h -substituição de vértices de um grafo G . Se todo subgrafo gerado e próprio de G é α -perfeito, e se G é n -perfeito, então H é n -perfeito.*

A demonstração do Teorema será feita por indução em subgrafos gerados. Assim, adotamos como hipótese de indução a validade das equivalências de ω -, α - e n -perfeição para cada subgrafo gerado e próprio de G .

As implicações ω -perfeição implica em n -perfeição, e α -perfeição em n -perfeição foram demonstradas na Proposição 1.6.

Vamos mostrar que se G é n -perfeito, então G é ω -perfeito.

Seja G um grafo n -perfeito, seja H um subgrafo gerado próprio de G . Então por indução:

H é ω -perfeito.

H é α -perfeito.

Se demonstrarmos que G é ω -perfeito, então as hipóteses de indução valem para $\overline{G}$. Assim, teremos demonstrado o Teorema, pois:

$$\begin{aligned} G \text{ é } n\text{-perfeito} &\Rightarrow \overline{G} \text{ é } n\text{-perfeito} \\ &\Rightarrow \overline{G} \text{ é } \omega\text{-perfeito} \\ &\Rightarrow G \text{ é } \alpha\text{-perfeito} \end{aligned}$$

Como H é ω -perfeito, então $\chi H = \omega H$. Como esta conclusão vale para todo subgrafo gerado e próprio H de G , é suficiente mostrar que $\chi G = \omega G$. Segue do Lema 1.3 que $\omega G \leq \chi G$. Assim, vamos mostrar que $\chi G \leq \omega G$.

Consideremos inicialmente o caso em que G contém um estável Z que encontra todos os seus cliques máximos. Então,

$$\chi(G - Z) = \omega(G - Z) \leq \omega - 1$$

onde a igualdade segue da ω -perfeição de $G - Z$ (pela hipótese de indução), e a desigualdade da definição de Z . Qualquer coloração de $G - Z$ com $\omega - 1$ cores pode ser estendida a uma coloração de G com ω cores, tomando Z como uma nova cor.

Resta portanto mostrar que G possui um tal estável. Para demonstrar esta afirmativa vamos supor por absurdo que para cada estável S de G existe um clique máximo, denotado por $K(S)$, de tamanho ωG , que é disjunto de S ; isto nos conduzirá a uma contradição.

Para cada vértice x seja $h(x)$ o número de estáveis S tais que $K(S)$ contém x . Seja G' uma h -substituição de vértices de G .

Pela hipótese de indução, todo subgrafo gerado próprio de G é α -perfeito; por hipótese, G é n -perfeito; assim pelo Lema 1.4, G' é n -perfeito. Em particular,

$$\omega G' . \alpha G' \leq n G' \quad (1.3)$$

Neste momento iremos fazer algumas considerações sobre os valores envolvidos na desigualdade (1.3).

$$n G' = h(VG) = \sum_{S \in \mathcal{E}} \#K(S) = \omega G . \#\mathcal{E} \geq \omega G' . \#\mathcal{E} \quad (1.4)$$

- a primeira igualdade segue do fato que cada vértice v foi copiado $h(v)$ vezes.
- a segunda igualdade segue da definição de h .
- a terceira igualdade segue do fato que $\#K(S) = \omega G$ para todo S em $\mathcal{E}$.
- a desigualdade vem da Proposição 1.7.

Também:

$$\alpha G' = \max_{T \in \mathcal{E}} [h(T)] = \max_{T \in \mathcal{E}} \left| \sum_{S \in \mathcal{E}} \#(T \cap K(S)) \right| < \#\mathcal{E} \quad (1.5)$$

- a primeira igualdade segue da Proposição 1.9.
- a segunda igualdade segue da definição de h .
- a desigualdade segue do fato que todo estável encontra todo clique em no máximo um vértice; a desigualdade é estrita pela hipótese do absurdo, uma vez que T não encontra $K(T)$.

Em resumo, de (1.4) e (1.5)

$$n G' \geq \omega G' . \#\mathcal{E} > \omega G' . \alpha G' \quad (1.6)$$

Assim (1.6) e (1.3) são contraditórias. De fato, existe o estável Z que encontra todos os cliques máximos de G . E portanto, n -perfeição implica em ω -perfeição. E portanto, segue que G é também α -perfeito, como já discutimos anteriormente.

Demonstramos aqui (módulo os Lemas 1.3 e 1.4) que n -perfeição implica em ω -perfeição.

Assim para concluir a demonstração do Teorema iremos demonstrar os Lemas 1.3 e 1.4.

Lema 1.3 *A operação de h -substituição de vértices preserva ω -perfeição e α -perfeição.*

Demonstração. Vamos demonstrar o Lema por indução em $h(VG)$. Seja H uma h -substituição de vértices de G .

Seja K um subgrafo gerado e próprio de H . Então K é uma k -substituição de vértices de G , onde $k(VG) < h(VG)$. Pela hipótese de indução, K é ω -perfeito (se G for ω -perfeito) ou K é α -perfeito (se G for α -perfeito).

Como esta conclusão vale para cada subgrafo gerado e próprio de H , resta portanto mostrar que H satisfaz a ω -igualdade se G é ω -perfeito, ou que H satisfaz a α -igualdade se G é α -perfeito, respectivamente. Se H é subgrafo gerado de G , segue da definição de α -perfeição ou ω -perfeição que H é ω -perfeito ou α -perfeito, respectivamente.

Podemos então supor que VG contém um vértice w , tal que $h(w) > 1$. Sejam u e v duas cópias de w em H , seja $H' := H - u$.

Se G é ω -perfeito, então:

$$\chi H = \chi H' = \omega H' \leq \omega H \leq \chi H$$

- a primeira igualdade segue do fato que podemos estender uma coloração de H' a H dando a u a mesma cor de v .
- a segunda igualdade foi provada acima, pois H' é um subgrafo gerado e próprio de H .

Portanto H satisfaz a ω -igualdade, se G for ω -perfeito. De fato, substituição de vértices preserva ω -perfeição.

Resta agora provar que se G é α -perfeito, então H satisfaz a α -igualdade. Para tanto, suponhamos que G é α -perfeito. Conforme foi demonstrado anteriormente, H' satisfaz a α -igualdade. Seja $\mathcal{C}'$ uma cobertura mínima por cliques de H' . Seja K_v um clique desta cobertura que contém v . Agora suponhamos que:

$$\alpha(H - K_v) < \alpha H \tag{1.7}$$

Como todo subgrafo gerado e próprio de H é α -perfeito. Em particular,

$$\alpha(H - Kv) = \theta(H - K_v).$$

Seja K uma cobertura por cliques de $H - K_v$ de tamanho $\alpha(H - K_v)$. Então $K + K_v$ é uma cobertura por cliques de H , e de tamanho $\alpha(H - K_v) \leq \alpha H$. Resta mostrar que (1.7) é verdadeira. Para isto suponhamos que, pelo contrário,

$$\alpha(H - K_v) \geq \alpha H.$$

Na verdade, como $(H - K_v)$ é subgrafo de H , temos então a igualdade

$$\alpha(H - K_v) = \alpha H. \quad (1.8)$$

Seja $X := K_v \cup u$. Assim,

$$\alpha(H - X) = \alpha(H' - K_v) = \alpha H' - 1 < \alpha H. \quad (1.9)$$

- a primeira igualdade segue do fato que $H - X = H' - K_v$.
- a segunda igualdade segue do fato que K_v é um clique de uma cobertura mínima por cliques de H' .
- a desigualdade segue do fato que H' é subgrafo de H .

Portanto segue de (1.8) e (1.9) que:

$$\alpha(H - X) < \alpha H = \alpha(H - K_v). \quad (1.10)$$

Segue da desigualdade estrita de (1.10) que todo estável máximo de H encontra X .

Segue da igualdade de (1.10) que existe um estável máximo S em H que não encontra K_v .

Portanto u pertence a S , mas v não pertence a S . Logo, como u e v têm a mesma adjacência, então $S' := S + v$ é um estável em H de tamanho $\#S + 1$, uma contradição. Portanto a operação de substituição de vértices preserva α -perfeição. $\square$

Lema 1.4 *Seja H uma h -substituição de vértices de um grafo G . Se todo subgrafo gerado e próprio de G é α -perfeito, e se G é n -perfeito, então H é n -perfeito.*

Demonstração. Vamos demonstrar este Lema por indução em $h(V)$. Seja H uma h -substituição de vértices de G .

Seja K um subgrafo gerado e próprio de H , então segue da hipótese de indução que K é n -perfeito. Resta mostrar que H satisfaz a n -desigualdade.

Se H é subgrafo gerado de G , então segue da definição de n -perfeição que H é n -perfeito. Logo existe um vértice u em G tal que $h(u) > 1$. Suponhamos por absurdo que H não satisfaz a n -desigualdade.

Seja $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{h(u)}\}$ o conjunto das cópias do vértice u .

Agora $H - u_1$ satisfaz a n -desigualdade, logo:

$$\begin{aligned} nH - 1 = \#(VH - u_1) &\leq \omega(H - u_1) \cdot \alpha(H - u_1) \\ &\leq \omega H \cdot \alpha H \\ &\leq nH - 1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Portanto vale a igualdade ao longo de (1.11). Denotando ωH por p e αH por q , temos então:

$$\omega(H - u_1) = \omega H = p,$$

$$\alpha(H - u_1) = \alpha H = q$$

e

$$\alpha H \cdot \omega H = nH - 1 \quad (1.12)$$

Por hipótese, $G - u$, um subgrafo gerado e próprio de G , é a -perfeito. Obviamente $H - U$ é uma substituição de vértices de $G - u$. Pelo Lema 1.3, $H - U$ é α -perfeito. Como $\alpha(H - U) \leq q$, então $V(H - U)$ pode ser coberto por q cliques dois a dois disjuntos, digamos $C_1, C_2, \dots, C_q$, rotulados de modo que

$$\#C_1 \geq \#C_2 \geq \dots \geq \#C_q.$$

Deste modo, segue de (1.12) que,

$$\sum_{j=1}^q \#C_j = n(H - U) = nH - h(u) = p \cdot q - (h(u) - 1) \quad (1.13)$$

Na somatória (1.13), para cada parcela $\#C_j$, temos que $p \geq \#C_j$. Assim, no máximo $h(u) - 1$ parcelas não contribuem com p vértices à somatória. Portanto,

$$p = \#C_1 = \#C_2 = \dots = \#C_{q-h(u)+1}$$

Agora seja H' o subgrafo gerado de H pelo conjunto de vértices:

$$X' = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{q-h(u)+1} \cup \{u_1\}.$$

Como $h(u) > 1$, então H' é um subgrafo gerado próprio de H . Portanto, H' satisfaz a n -desigualdade:

$$\omega H' \cdot \alpha H' \geq nH' = p \cdot (q - h(u) + 1) + 1$$

Ora,

$$p = \omega H \geq \omega H',$$

logo,

$$\alpha H' \geq \frac{nH'}{p} > q - h(u) + 1$$

Seja S' um estável em H' com $q - h(u) + 2$ vértices. Os $q - h(u) + 1$ cliques $C_1, C_2, \dots, C_{q-h(u)+1}$ encontram com o estável S' em no máximo um vértice. Como S' tem $q - h(u) + 2$ vértices, u_1 pertence a S' . Logo $S := S' \cup U$ é um estável em H , com tamanho $\#S = \#S' + h(u) - 1 = q + 1$. Portanto, $\alpha H > q$, em contradição à definição de q . $\square$

A demonstração deste Lema completa a demonstração do Teorema dos grafos perfeitos. $\square$

Corolário 1.1 *Um grafo G é perfeito se e somente se $\overline{G}$ é perfeito.*

Capítulo 2

Grafos Imperfeitos

2.1 Grafos críticos e Particionáveis

Um grafo G é chamado de *crítico* se e somente se G é imperfeito, e todo subgrafo gerado próprio de G é perfeito.

Corolário 2.1 *Um grafo G é crítico se e somente se $\overline{G}$ é crítico.*

Proposição 2.1 *Se G é um grafo crítico, então as seguintes propriedades são válidas:*

- (i) $\alpha, \omega \geq 2$.
- (ii) $n = \alpha\omega + 1$.
- (iii) $\alpha = \alpha(G - x)$ para todo vértice x de G .
- (iv) $\omega = \omega(G - x)$ para todo vértice x de G .

Demonstração. Se $\alpha \leq 1$, então VG é um clique e portanto perfeito; logo $\alpha \geq 2$. Analogamente, $\omega \geq 2$.

Seja x um vértice qualquer de G . Então,

$$n - 1 = n(G - x) \leq \alpha(G - x)\omega(G - x) \leq \alpha\omega \leq n - 1. \quad (2.1)$$

- a primeira desigualdade segue da perfeição do subgrafo $G - x$.
- a segunda desigualdade segue do fato que $G - x$ é subgrafo de G .
- a terceira desigualdade segue do Teorema 1.1 (Teorema dos grafos perfeitos) e do fato que G é crítico.

Portanto vale a igualdade ao longo de (2.1). Em particular, valem (ii), (iii) e (iv). $\square$

Dados dois inteiros $a, w \geq 2$, dizemos que um grafo G é (a, w) -particionável se as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- (i) $n \geq aw + 1$,
- (ii) para todo vértice x de G , $a \geq \theta(G - x)$ e
- (iii) para todo vértice x de G , $w \geq \chi(G - x)$.

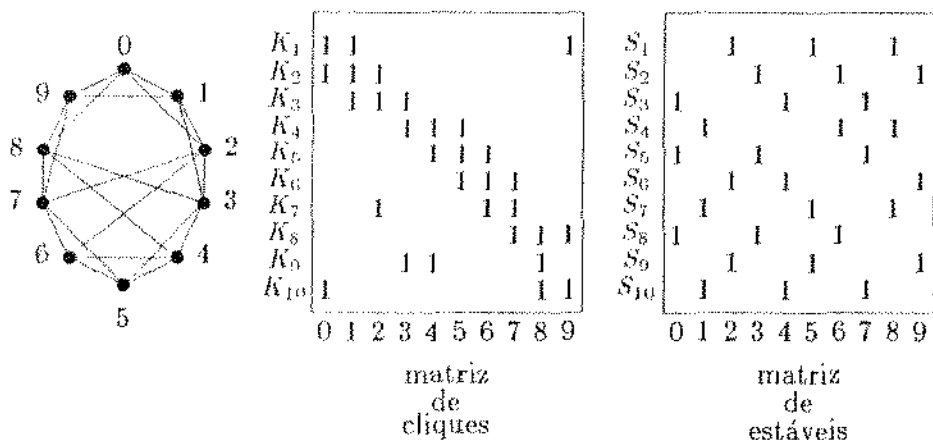
Corolário 2.2 *Um grafo G é (a, w) -particionável se e somente se $\overline{G}$ é (w, a) -particionável.*

Corolário 2.3 *Todo grafo crítico G é $(\alpha G, \omega G)$ -particionável.*

É importante observar neste ponto que nem todo grafo particionável é crítico. Chvátal (veja [7]) em 1979 encontrou uma família infinita de grafos particionáveis e não críticos, embora já era conhecido que este resultado é verdadeiro. Huang (veja [23]) em 1976 encontrou o contra-exemplo da figura 2.1 que é particionável mas não é crítico. Em 1979 Chvátal encontrou uma família infinita de grafos particionáveis mas não críticos veja [7].

Proposição 2.2 *Seja G (a, w) -particionável e x um vértice de G . Então:*

- (i) $n = \alpha \cdot \omega + 1$,
- (ii) $\alpha G = \alpha = a = \theta(G - x) = \alpha(G - x)$ e
- (iii) $\omega G = \omega = w = \chi(G - x) = \omega(G - x)$.



Note que o subgrafo gerado pelos vértices ímpares é o C_5

Figura 2.1: Um grafo particionável mas não crítico.

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned}
 n(G - x) = n - 1 &\geq aw \\
 &\geq \theta(G - x)w \\
 &\geq \theta(G - x)\chi(G - x) \\
 &\geq \alpha(G - x)\chi(G - x) \\
 &\geq n(G - x).
 \end{aligned}$$

- as três primeiras desigualdades seguem do fato que G é particionável.
- as duas últimas desigualdades são triviais.

Portanto, $n = aw + 1$ e $a = \theta(G - x) = \alpha(G - x)$.

Analogamente, $w = \chi(G - x) = \omega(G - x)$.

Falta portanto mostrar que $\alpha = \alpha G$ e que $\omega = \omega G = w$. Seja S um estável máximo de G . Ora, $\omega G \geq \omega(G - x)$; conforme foi provado acima, $\omega(G - x) = w$; por hipótese, $w \geq 2$. Assim, $\omega G \geq 2$ e portanto existe um vértice, digamos y , em $V G - S$.

Seja $\mathcal{K}$ uma cobertura por cliques de $G - y$ com $\theta(G - y)$ cliques. Temos então que:

$$\alpha(G - y) \geq \#S = \alpha G \geq \alpha(G - y)$$

- a primeira desigualdade segue do fato que y não pertence a S e S é um estável em G .
- a segunda desigualdade é trivial.

Logo $\alpha(G - y) = \alpha G$. Conforme foi provado acima, $\alpha(G - y) = a$. Portanto, $a = \alpha(G - y) = \alpha$. Analogamente, $w = \omega(G - y) = \omega G = \omega$. $\square$

Em vista do resultado acima falaremos então de grafos *particionáveis* e *não particionáveis*, eliminando o prefixo (a, w) .

Proposição 2.3 *Seja G um grafo particionável e x um de seus vértices. Então os estáveis de toda cobertura mínima por estáveis de $G - x$ são máximos e dois a dois disjuntos. Analogamente os cliques de todas as coberturas por cliques de $G - x$ são cliques máximos e dois a dois disjuntos.*

Demonstração. Seja S uma cobertura mínima por estáveis de $G - x$. Cada estável de S tem tamanho no máximo α ; logo, $\alpha \cdot \#S \geq n(G - x)$, com igualdade somente se todo estável de S tem tamanho α , e os estáveis de S são dois a dois disjuntos. Mas segue da Proposição 2.2 que:

$$n(G - x) = \alpha\omega = \alpha\#S.$$

De fato cada estável de S é máximo, e quaisquer dois estáveis de S são disjuntos. $\square$

Proposição 2.4 *Para cada clique C existe um estável máximo E em G que não encontra C . Analogamente para cada estável S em G existe um clique máximo K em G que não encontra S .*

Demonstração. Seja C um clique de G , x um de seus vértices, S uma cobertura mínima por estáveis (máximos) de $G - x$, r o número de estáveis de S que encontram C . Note que $\text{cal}S$ é disjunto e $x \in C$. Logo $r \leq \#C - 1$. Como $\#C \leq \omega = \#S$, segue que $r < \#\text{cal}S$. De fato, pelo menos um estável de S não encontra C . $\square$

Teorema 2.1 *Seja G um grafo particionável. Então valem as seguintes afirmativas:*

- (i) $n = \alpha\omega + 1$.
- (ii) *O grafo G possui exatamente n estáveis máximos e n cliques máximos.*
- (iii) *Cada vértice de G pertence a exatamente α estáveis máximos, e a ω cliques máximos.*
- (iv) *Cada clique máximo é disjunto de um único estável máximo e vice-versa.*

Demonstração. A afirmativa (i) já foi demonstrada na Proposição 2.2. Agora para demonstrar as afirmativas (ii), (iii) e (iv) nós precisamos antes definir duas matrizes e enunciar dois Lemas.

Sem perda de generalidade vamos supor que $V = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dado um subconjunto X de V , o *vetor característico* x de X é o vetor de n elementos de 0's e 1's, tal que $x_i = 1$ se e somente se $i \in X$. Frequentemente confundimos X com seu vetor característico x .

Vamos inicialmente definir a matriz, A , $n \times n$, em que cada linha de A é o vetor característico de algum clique máximo de G . A linha A_1 de A é o (vetor característico) de algum clique máximo. Para cada vértice v_i de A_1 ($1 \leq i \leq \omega$), as α linhas $A_{(i-1)\alpha+2}, A_{(i-1)\alpha+3}, \dots, A_{i\alpha}, A_{i\alpha+1}$ da matriz A serão os cliques (máximos e disjuntos dois a dois) de uma cobertura mínima por cliques de $G - v_i$.

Vamos agora definir a matriz, B , $n \times n$, em que cada linha B_i de B é um estável máximo disjunto do clique máximo A_i .

Seja 1 o vetor com n elementos 1's, J a matriz, $n \times n$, de 1's, e I a matriz identidade, $n \times n$.

Agora usando as definições acima vamos enunciar os dois Lemas.

Lema 2.1. *Para a matriz A vale a equação:*

$$1A = \omega 1.$$

Lema 2.2. *As matrizes A e B admitem inversa, a saber:*

$$A^{-1} = \omega^{-1}J - B^T$$

e

$$B^{-1} = \alpha^{-1}J - A^T.$$

Vamos agora demonstrar que todo estável máximo de G é uma linha de $\mathcal{B}$. Para isto, seja s um estável máximo de G . Pelo Lema 2.2, $\mathcal{B}$ é inversível; seja $x := s\mathcal{B}^{-1}$. Então $x\mathcal{B} = s$. Assim,

$$x = s\mathcal{B}^{-1} = \alpha^{-1}sJ - s\mathcal{A}^T = 1 - s\mathcal{A}^T.$$

Logo o vetor x é um vetor de 0's e 1's, pois o elemento i de $s\mathcal{A}^T$ será 1 se o estável s encontra o clique $\mathcal{A}_i$, e 0 caso contrário. Por outro lado,

$$x1^T = (1 - s\mathcal{A}^T)1^T = 11^T - s(1\mathcal{A})^T = n - \omega s1^T = n - \alpha\omega = 1$$

- a terceira igualdade segue do Lema 2.1.

Assim, mais do que um vetor de 0's e 1's, x é todo de 0's exceto numa única componente que é 1. Ademais, $s = x\mathcal{B}$, então s é uma linha de $\mathcal{B}$. Como esta conclusão vale para todo s , então o grafo G possui no máximo n estáveis máximos. Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é inversível, suas linhas são duas a duas distintas. Portanto, o grafo G possui exatamente n estáveis máximos, a saber, as n linhas de $\mathcal{B}$.

Ora, por dualidade temos que $\overline{G}$ possui exatamente n estáveis máximos (Segue do Corolário 2.2 e da demonstração anterior). Como $\mathcal{A}$ é inversível, então, o grafo G possui exatamente n cliques máximos (estáveis em $\overline{G}$), a saber, as n linhas de $\mathcal{A}$.

Voltando ao vetor $x = 1 - s\mathcal{A}^T$, temos que o vetor $s\mathcal{A}^T$ tem somente um zero, ou seja, existe um único clique c em G que é disjunto do estável s , mas c é uma linha de $\mathcal{A}$ (a matriz de cliques máximos) e s é uma linha de $\mathcal{B}$ (a matriz de estáveis máximos). Logo, a afirmativa (iv) é verdadeira.

Voltando ao vetor $1\mathcal{A} = \omega 1$, como $\mathcal{A}$ é a matriz de cliques máximos de G , então cada vértice pertence a exatamente ω cliques máximos. Por dualidade, cada vértice de $\overline{G}$ pertence a exatamente $\alpha\overline{G} = \omega\overline{G}$, então cada vértice de G pertence a exatamente α estáveis máximos em G . Assim, a afirmativa (iii) é verdadeira.

Lema 2.1 Para a matriz $\mathcal{A}$ vale a equação:

$$1\mathcal{A} = \omega 1$$

Demonstração. Seja x um vértice de G . Se x pertence ao clique C (clique $\mathcal{A}_1$), então x é coberto exatamente uma vez por cliques da cobertura mínima por

cliques de $G - y$, onde y é um vértice de A_1 diferente de x . Como $\#A_1 = \omega - 1$, então x ocorre em exatamente ω cliques de A . Por outro lado, se x não pertence a A_1 , então x é coberto exatamente uma vez por cliques da cobertura mínima por cliques de $G - y$, onde y é um vértice de A_1 . $\square$

Lema 2.2 *As matrizes A e B admitem inversa, a saber:*

$$A^{-1} = \omega^{-1}J - B^T$$

e

$$B^{-1} = \alpha^{-1}J - A^T.$$

Demonstração. Para demonstrar este Lema precisamos antes enunciar um Lema.

Lema 2.3. *Para o grafo G vale a equação:*

$$AB^T = J - I = BA^T$$

Então para demonstrar o Lema 2.2, basta verificar que:

$$B(\alpha^{-1}J - A^T) = \alpha^{-1}BJ - BA^T = \alpha^{-1}\alpha J - (J - I) = I$$

e também

$$A(\omega^{-1}J - B^T) = \omega^{-1}AJ - AB^T = \omega^{-1}\omega J - (J - I) = I$$

- em ambas as equações a segunda igualdade é o Lema 2.3.

Para completar a demonstração deste Lema vamos demonstrar o Lema 2.3.

Lema 2.3 *Para o grafo G vale a equação:*

$$AB^T = J - I = BA^T$$

Demonstração. Vamos inicialmente observar que o elemento AB_{ij}^T representa a interseção entre o clique A_i e o estável B_j , isto é, será 1 se A_i encontra B_j , senão será 0. Segue da construção de A que $AB_{ii}^T = 0$ ($1 \leq i \leq n$). Basta portanto mostrar que cada linha de AB^T tem $(n - 1)$ 1's. Ora,

$$1AB^T = \omega 1B^T = \omega \alpha 1 = (n - 1)1.$$

Portanto,

$$AB^T = J - I.$$

Finalmente, como:

$$J - I = (J - I)^T$$

e

$$(AB^T)^T = BA^T,$$

então

$$J - I = BA^T.$$

□

A demonstração deste Lema completa a demonstração do Lema 2.2. □

A demonstração do Lema 2.2 completa a demonstração do Teorema 2.1. □

Corolário 2.4 *Seja G um grafo particionável, E um estável máximo de G , C um clique máximo de G disjunto de E , x um vértice de C . Então o estável E pertence a todas as coberturas por estáveis de $G - x$.*

Demonstração. Seja G um grafo particionável, x um vértice de G , E um estável máximo da cobertura mínima por estáveis $\mathcal{S}$ de $G - x$, C um clique máximo de G disjunto de E . Vamos mostrar que $x \in C$. Suponhamos por absurdo que x não pertence a C , então:

$$\omega = \#\mathcal{S} \geq \# \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \cap C = \#C = \omega$$

- a primeira igualdade segue do fato que G é particionável.
- a desigualdade segue do fato que $\#(C \cap S_{S \in \mathcal{S}}) \leq 1$.
- a segunda igualdade segue do fato que x não pertence a C .

Assim, como $E \in \mathcal{S}$, então $E \cap C \neq \emptyset$, um absurdo, logo $x \in C$. Então para cada estável S de $\mathcal{S}$ existe um clique máximo $C(S)$ em G que contém o vértice x . Logo os estáveis da cobertura $\mathcal{S}$ são exatamente os estáveis disjuntos dos ω cliques máximos que contém o vértice x . Então, E pertence a todas as coberturas mínimas por estáveis de $G - y$, onde y é um vértice de C . □

Corolário 2.5 *Seja G um grafo particionável e x um de seus vértices. Então as coberturas mínimas por cliques ou estáveis de $G - x$ são únicas.*

Demonstração. A cobertura mínima por estáveis de $G - x$ fica unicamente determinada pelo conjunto de cliques máximos que contém o vértice x . $\square$

Teorema 2.2 *Um grafo particionável é ω -conexo.*

Demonstração. Por absurdo, seja G um grafo particionável e C um conjunto de corte com menos do que ω vértices. Seja V_1 e V_2 uma partição de $G - C$ em dois conjuntos não vazios tais que vértices de V_1 não são adjacentes a vértices de V_2 (se G é desconexo, então, C é um vértice de uma das partições que tenha pelo menos dois vértices, tal partição existe pois G tem pelo menos 5 vértices). Seja x um vértice de C , $\mathcal{S} := \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_\alpha\}$ uma cobertura mínima por estáveis de $G - x$. Como

$$\#(C \cap (G - x)) \leq \omega - 2 = \chi(G - x) - 2.$$

Então, pelo menos dois estáveis de $\mathcal{S}$, digamos S_1 e S_2 , não encontram C . Assim,

$$0 \neq \#(S_1 \cap V_1) = \#(S_2 \cap V_1), \quad (2.2)$$

$$0 \neq \#(S_1 \cap V_2) = \#(S_2 \cap V_2) \quad (2.3)$$

Sejam

$$S' := (S_1 \cap V_1) \cup (S_2 \cap V_2)$$

e

$$S'' := (S_2 \cap V_1) \cup (S_1 \cap V_2)$$

- para demonstrarmos as desigualdades das equações (2.2) e (2.3), basta verificar que a negação deste fato, isto é, $S_i \cap V_j = \emptyset$ ($i = 1, 2$ e $j = 1, 2$), implicaria em S_i mais um vértice de V_j ser um estável em G com mais de α vértices.
- para demonstrarmos as igualdades das equações (2.2) e (2.3), basta verificar que a negação destas igualdades implicaria em um dos estáveis S' ou S'' ter mais de α vértices.

Seja S' obtido a partir de $\mathcal{S}$ pela substituição de S_1 e S_2 por S' e S'' .

O conjunto S' é uma cobertura mínima por estáveis de $G - x$, diferente da cobertura $\mathcal{S}$. Uma contradição. $\square$

Um conjunto de corte C de um grafo G é chamado de *estrela* se existe um vértice x em C , tal que x é adjacente a todos os demais vértices de C . O vértice x é chamado de *centro* de C .

Teorema 2.3 *Um grafo particionável não contém um conjunto de corte estrela.* [10]

Demonstração. Vamos demonstrar este fato por contradição. Suponhamos que G é um grafo particionável e que C é um conjunto de corte estrela de G , seja x o seu centro. Vamos particionar $G - C$ em dois conjuntos não vazios V_1 e V_2 , tal que:

vértices de V_1 não são adjacentes a vértices de V_2 .

Sejam G_1 e G_2 os subgrafos de G gerados respectivamente por $V_1 \cup C$ e $V_2 \cup C$.

Ora, G_1 e G_2 podem ser coloridos (cobertos por estáveis) com ω cores. Para isto basta tomar $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, e restringir as colorações mínimas de $G - v_2$ e $G - v_1$ a G_1 e G_2 , respectivamente.

Seja S_1 o conjunto dos vértices de G_1 que têm a mesma cor de x na coloração de $G - v_2$, e S_2 o conjunto dos vértices de G_2 que têm a mesma cor de x na coloração de $G - v_1$. É claro que $S_1 \cap C = \{x\} = S_2 \cap C$.

Seja $S := S_1 \cup S_2 \cup \{x\}$. Ora, S é um estável em G . Vamos mostrar que não existe um clique máximo (com ω vértices) disjunto de S . Ora,

$$\omega(G - S) = \max\{\omega(G_1 - S_1), \omega(G_2 - S_2)\} \leq \omega - 1.$$

- a primeira igualdade segue do fato que um clique em $G - S$ é um clique em G_1 ou em G_2 , pois vértices de V_1 não são adjacentes a vértices de V_2 .
- a desigualdade segue do fato que os grafos $G_1 - S_1$ e $G_2 - S_2$ são $\omega - 1$ coloráveis.

Portanto, não existe em $G - S$ um clique máximo (com ω vértices) disjunto do estável S , contradizendo o Corolário 2.5. $\square$

2.2 Grafo dos Cliques Máximos

Chamamos de *grafo dos cliques máximos* de um grafo G , denotado por MG , o grafo onde o conjunto de vértices é o conjunto de cliques máximos de G , e dois vértices de MG são adjacentes se e somente se os cliques máximos correspondentes se encontram em G .

Vamos mostrar que MG é particionável se o grafo G é particionável. Para isto, precisamos demonstrar antes um resultado:

Teorema 2.4 *Se G é particionável, então cada clique máximo de MG é o conjunto dos ω cliques máximos de G que contém todos um mesmo vértice de G .*

Demonstração. Cada vértice x de G pertence a exatamente ω cliques máximos. Esses cliques máximos de G formam um clique em MG . Assim,

$$\omega MG \geq \omega \quad (2.4)$$

Por outro lado, seja $\mathcal{K} := \{C_1, C_2, \dots, C_{\omega MG}\}$ um clique máximo de MG , e $\mathcal{E} := \{E_1, E_2, \dots, E_{\omega MG}\}$ o conjunto dos estáveis máximos de G disjuntos dos cliques de $\mathcal{K}$.

Para cada par de cliques C_k, C_j de $\mathcal{K}$, existe pelo menos um vértice

$$y \in [C_k \cap C_j].$$

Logo, segue do Corolário 2.4 que E_k e E_j são disjuntos, e ambos pertencem à cobertura mínima por estáveis de $G - y$. Como este fato é verdadeiro para todos os pares de cliques de $\mathcal{K}$, concluímos então que os ωMG estáveis são disjuntos dois a dois.

Por outro lado, G não pode conter mais de ω estáveis máximos disjuntos dois a dois, pois $n = \alpha\omega + 1$, e $\alpha \geq 2$. Logo $\omega MG \leq \omega$. Desta desigualdade e de (2.4), segue que $\omega MG = \omega$.

Sendo assim, existe um único vértice z em G que não pertence a nenhum dos estáveis de $\mathcal{E}$.

Logo $\mathcal{E}$ é uma cobertura por estáveis de $G - z$. Pelo Corolário 2.4, consiste dos estáveis máximos de G disjuntos dos cliques máximos de G que contém z . Logo $\mathcal{K}$ é o conjunto dos ω cliques máximos de G que contém z . $\square$

Teorema 2.5 *Se G é particionável, então MG é particionável e:*

$$nMG = n,$$

$$\omega MG = \omega$$

$$\alpha MG = \alpha.$$

Demonstração. O grafo G , particionável, contém exatamente n cliques máximos. Assim,

$$nMG = n. \quad (2.5)$$

Pela demonstração do Teorema 2.4,

$$\omega MG = \omega. \quad (2.6)$$

O grafo G possui no máximo α cliques máximos dois a dois disjuntos, pois tem $\alpha\omega + 1$ vértices e $\alpha \geq 2$. Se x é um vértice de G , então $G - x$ pode ser coberto por α estáveis máximos disjuntos dois a dois. Portanto,

$$\alpha MG = \alpha \quad (2.7)$$

Por outro lado, seja C um clique máximo de G , e E o estável máximo de G disjunto de C . Para cada vértice v em E , seja C_v o clique máximo de MG que consiste dos cliques máximos de G que contém v . Seja $\mathcal{C} := \{C_v \mid v \in E\}$. Cada clique máximo de G diferente de C encontra E em algum vértice. Logo $\mathcal{C}$ é uma cobertura por cliques de $MG - C$. Portanto,

$$\theta(MG - C) \leq \alpha. \quad (2.8)$$

Seja C um clique máximo de G . Para cada vértice v em C , seja E_v um estável em MG formado pelos cliques da cobertura mínima por cliques (disjuntos dois a dois) de $G - v$. Seja $\mathcal{E} := \{E_v \mid v \in C\}$. Cada clique máximo de G exceto C pertence a pelo menos um dos E_v 's. Logo $\mathcal{E}$ é uma cobertura por estáveis de $MG - C$. Portanto,

$$\chi(MG - C) \leq \omega. \quad (2.9)$$

Segue das equações (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) que MG satisfaz as condições do Teorema 2.1, e portanto é particionável. $\square$

Definimos o *esqueleto* de um grafo G , denotado por SG , o subgrafo de G , que contém o mesmo conjunto de vértices de G , e que contém somente as arestas de G que participam de um clique máximo de G .

Teorema 2.6 *Se G é um grafo particionável. Então,*

- (i) $MMG = SG$ e
- (ii) SG é um grafo particionável.

Demonstração. Seja G um grafo particionável. Segue do Teorema 2.4 que cada clique de MG é o conjunto de cliques máximos de G que contém todos um mesmo vértice de G . Cada clique de MG é por definição um vértice em MMG . Logo existe uma correspondência entre vértices de G e vértices de MMG , isto é, a cada vértice v de G associamos o vértice K_v , que é o conjunto de cliques máximos de G que contém todos o vértice v . Dado dois vértices K_x e K_y adjacentes em MMG , então, por definição estes vértices são cliques que se encontram em MG , digamos $C \in (K_x \cap K_y)$. Por outro lado, o clique K_x de MG é o conjunto dos ω cliques máximos de G que contém o vértice x em G . Analogamente, o clique K_y de MG é o conjunto dos ω cliques máximos de G que contém y . Então, os vértices x e y

pertencem a C , logo x é adjacente a y em G . E também, toda aresta de MMG pertence a um clique máximo de G .

Por outro lado, se dois vértices x e y não pertencem a um clique máximo de G , então seja K_x o conjunto dos ω cliques máximos que contém todos o vértice x em G e K_y o conjunto dos ω cliques máximos que contém todos o vértice y em G , K_x não encontra K_y em MG . Logo os vértices K_x e K_y em MMG não são adjacentes. Portanto, $SG = MMG$.

A afirmativa (ii) segue do Teorema 2.5. □

Poderíamos definir o *grafo dos estáveis máximos* de um grafo G , onde todos os resultados acima seriam igualmente verdadeiros, pois seria precisamente o caso dual (obs.: o caso dual do esqueleto do grafo seria digamos '*engorda*', notação FG , onde cada não aresta xy em FG (aresta em $\overline{FG}$) implicaria no fato dos vértices x e y pertencerem a um mesmo estável máximo de G).

Capítulo 3

Classes de Grafos Perfeitos

Introdução

Neste capítulo vamos estudar algumas classes de grafos perfeitos. Vamos ver inicialmente um resultado que permite a partir de classes conhecidas de grafos perfeitos, criar novas classes de grafos perfeitos.

Teorema 3.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma classe de grafos perfeitos. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade que não vale para grafos críticos. Se $\mathcal{B}$ é uma classe de grafos que contém $\mathcal{A}$, e para todo grafo $G \in \mathcal{B} - \mathcal{A}$ são verdadeiras as seguintes afirmativas:*

- (i) G ou $\overline{G}$ satisfaz $\mathcal{P}$.
- (ii) todo subgrafo F gerado de G pertence a $\mathcal{B}$.

Então, $\mathcal{B}$ é uma classe de grafos perfeitos.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe um grafo imperfeito G em $\mathcal{B}$. Seja F um subgrafo de G imperfeito minimal (crítico). Então, nem F nem $\overline{F}$ satisfaz $\mathcal{P}$. Logo F pertence a $\mathcal{A}$, um absurdo. $\square$

Este resultado foi demonstrado em [10], existe muitos outros resultados decorrentes deste veja a referência.

Damos na figura 3.1 a maior parte das classes de grafos perfeitos já conhecidas, e as generalizações já demonstradas até a presente data¹.

¹tomaos conhecimento das classes marcadas com o símbolo (u) após a data da defesa desta tese.

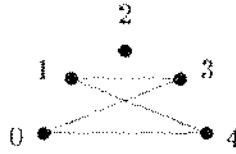


Figura 3.2: $\bar{G}$ contém um C_4 .

3.1 Grafos Quase-Triangulados, Triangulados, de Partição, de Intervalo e Livres de P_4

3.1.1 Grafos Triangulados e Quase-Triangulados

Um grafo G é *triangulado* se G não possui um circuito sem cordas com mais de três vértices.

Um grafo G é *Quase-Triangulado* se nem G , nem $\bar{G}$ possui um subgrafo gerado isomorfo a um circuito sem cordas com mais de quatro vértices.

Proposição 3.1 *Um grafo triangulado é quase-triangulado.*

Demonstração. Seja G um grafo triangulado, para mostrar que G é quase-triangulado basta mostrar que $\bar{G}$ não contém um circuito sem cordas com mais de quatro vértices. Suponhamos por absurdo que $\bar{G}$ possui um circuito sem cordas com mais de quatro vértices $C := (v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$, $k > 4$ e v_i é adjacente a v_{i-1} e a v_{i+1} (faremos todas as contas módulo k). Ora, $k > 5$, senão G teria um $\bar{C}_5 = C_5$, contradizendo a definição de G . Então G tem um circuito sem cordas com quatro vértices, a saber (v_0, v_1, v_3, v_4) como na figura 3.2, contradizendo a definição de G . $\square$

Vamos agora mostrar que os grafos quase-triangulados são perfeitos.

Teorema 3.2 *Os grafos quase-triangulados são perfeitos.*

Corolário 3.1 *Os grafos triangulados são perfeitos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ a classe dos grafos quase-triangulados. Seja $\mathcal{A}^*$ a classe dos grafos G tais que para todo subgrafo gerado F de G com pelo menos três

vértices, ou G ou $\bar{G}$ tem um conjunto de corte estrela. Segue do Teorema 3.1 e do Teorema 2.3 que $\mathcal{A}^*$ é uma classe de grafos perfeitos. Basta mostrar que a classe $\mathcal{G}$ está contida na classe $\mathcal{A}^*$. O próximo Lema será relevante na demonstração deste resultado.

Lema 3.1. *Seja C um conjunto de corte minimal de G . Se C gera um subgrafo conexo em $\bar{G}$, então cada componente conexa de $G - C$ possui um vértice adjacente a todos os vértices de C .*

Seja x um vértice qualquer de G . Seja A o conjunto dos vértices adjacentes a x em G , e N o conjunto dos vértices não adjacentes a x em G . Se A não é de corte, então N é vazio: neste caso, qualquer vértice de A é de corte e estrela em $\bar{G}$.

Se A é de corte mas não minimal, seja A_1 uma parte própria de A que é de corte: o vértice x e os vértices de $A - A_1$ estão na mesma componente conexa de $G - A_1$; logo $\{x\} \cup A_1$ é de corte em G (e estrela).

Se $\bar{G}[A]$ é desconexo, então $\{x\} \cup N$ é de corte e estrela em $\bar{G}$.

Podemos então supor que A é de corte, minimal, e que $\bar{G}[A]$ é conexo. Pelo Lema 3.1, existe pelo menos um vértice w em N que é adjacente a todos os vértices de A .

Se A não for vazio, então $N - w + x$ é de corte estrela em $\bar{G}$. Se A for vazio, então w é de corte estrela em G .

Portanto $G \in \mathcal{A}^*$.

Para completar a demonstração vamos demonstrar o Lema.

Lema 3.1 *Seja C um conjunto de corte minimal de um grafo quase-triangulado G , e também C gera um subgrafo conexo em $\bar{G}$. Então cada componente conexa de $G - C$ possui um vértice adjacente a todos os vértices de C .*

Demonstração do lema 3.1. Em primeiro lugar vamos mostrar que:

- (i) todo par de vértices não adjacentes em C possui um vizinho em comum em cada componente de $G - C$.

Seja x e y dois vértices não adjacentes de C . Seja A uma componente conexa qualquer de $G - C$. Como C é minimal, então cada vértice de C possui uma adjacência em A . Seja u e v respectivamente as adjacências de x e y em A , de modo que o caminho P_1 de x para y passando por u e v em A seja o menor possível (tal caminho existe pois A é uma componente conexa). Do mesmo modo escolhemos u' e v' respectivamente as adjacências de x e y em outra componente conexa B de $G - C - A$, de modo que o caminho P_2 de x para y passando por u' e v' em B seja o menor possível.

Agora, consideremos o caminho fechado $P := P_1 + P_2$. Ora, P é um circuito sem cordas em G , pois P_1 e P_2 são mínimos e vértices de A não são adjacentes a vértices de B . Como G é quase-triangulado, então $u = v$ e $u' = v'$, pois P possui no máximo quatro vértices.

Agora iremos mostrar que:

- (ii) o teorema é verdadeiro quando C é um estável.

Vamos demonstrar (ii) por indução em $\#C$. Se $\#C = 1$, então o teorema é verdadeiro, pois C é minimal. Se $\#C = 2$, então o teorema segue de (i). Assim, seja $\#C \geq 3$.

Deste modo, sejam x , y e z vértices de C , A uma componente conexa de $G - C$.

Ora, $C - x$ é um corte minimal em $G - x$, e $(G - x) - (C - x) = G - C$. Assim, pela hipótese de indução existe um vértice u em A adjacente a todos os vértices de $C - x$. Pelo mesmo argumento existe um vértice v em A adjacente a todos os vértices de $C - y$, e um vértice w em A adjacente a todos os vértices de $C - z$.

Nós iremos mostrar que pelo menos um destes vértices é adjacente a todos os vértices de C . Suponhamos o contrário (note que u , v e w precisam ser distintos).

Por um lado, u não pode ser adjacente a v , senão o conjunto $\{x, v, u, y\}$ mais um vértice de outra componente conexa de $G - C - A$ adjacente a x e a y , é um circuito sem cordas com cinco vértices em G . Pelo mesmo raciocínio u e v não são adjacentes a w .

Portanto, a sequência (x, w, y, u, z, v) é um circuito sem cordas com seis vértices em G , contradizendo a definição de G . Logo, a afirmativa (ii) é verdadeira.

- (iii) Para demonstrar o teorema na sua generalização completa, nós novamente usaremos indução em $\#C$. Se $\#C \leq 2$, então o teorema segue de (ii).

Assim, se $\#C > 2$, nós iremos supor que pelo menos dois vértices em C são adjacentes (senão a conclusão segue de (ii)).

Tomemos em C dois vértices x e y tal que:

- (a) x e y são adjacentes em G .

(b) $C - x$ e $C - y$ geram subgrafos conexos em $\bar{G}$.

A existência destes vértices segue da hipótese do Lema, isto é, que $\bar{G}[C]$ é conexo, e que $G[C]$ não é um estável, então existe pelo menos dois vértices não adjacentes em $\bar{G}$. Basta portanto encontrar um par x e y , tal que o caminho de x para y em $\bar{G}$ seja o mais longo possível.

Seja A uma componente conexa qualquer de $G - C$. Pela hipótese de indução A possui dois vértices u e v , tal que u é adjacente a todos os vértices de $C - x$, e v é adjacente a todos os vértices de $C - y$. Nós iremos mostrar que pelo menos um dos vértices u ou v é adjacente a todos os vértices de C . Suponhamos o contrário (note que u e v são distintos).

Segue de (a) segue que o menor caminho P' no subgrafo $\bar{G}[C]$ tem pelo menos um vértice interior a x e a y . Por outro lado, u e v precisam ser adjacentes, senão $u + v + VP'$ é um circuito sem cordas com mais de quatro vértices em $\bar{G}$. Usando o mesmo argumento usado para achar v em A , achamos w em uma componente qualquer de $G - C - A$, que seja adjacente a todos os vértices de $C - y$. Se w não é adjacente a y , então $u + w + VP'$ é um circuito sem cordas com mais de quatro vértices em $\bar{G}$.

Finalmente, $u + w + v + VP'$ é um circuito sem cordas com mais de quatro vértices em $\bar{G}$.

□

A demonstração deste Lema completa a demonstração do Teorema. □

Existem mais resultados sobre a classe de grafos triangulados e quase-triangulados, veja [19] e [14].

3.1.2 Grafos de Partição

Um grafo G é de *Partição* se existe uma partição de VG em dois conjuntos K e S , de modo que K é um clique e S é um estável em G . Veja um exemplo na figura 3.3.

Proposição 3.2 *Se G é um grafo de partição, então G é um grafo triangulado.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que G é um grafo de partição, mas possui um circuito sem cordas C com pelo menos quatro vértices. Sejam K e

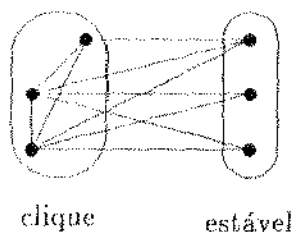


Figura 3.3: Um exemplo de grafo de partição.

S os dois conjuntos de vértices da partição de VG , onde K é um clique e S é um estável. Logo, pelo menos um e no máximo dois vértices de C pertencem a K . Em ambos os casos, S contém dois vértices adjacentes, uma contradição. Portanto G é triangulado. $\square$

Corolário 3.2 *Os grafos de partição são perfeitos.*

Para mais informações sobre esta classe de grafos veja [14].

3.1.3 Grafos de Intervalo e de Tolerância

Um grafo é de *intervalo* se seus vértices podem ser colocados numa correspondência um a um com um conjunto de intervalos I de reais, tal que dois vértices são adjacentes se e somente se os correspondentes intervalos se encontram. Veja um exemplo na figura 3.4

Existe uma generalização dos grafos de intervalo com tolerâncias, isto é, para uma coleção I de intervalos reais fechados (incluindo os extremos dos intervalos), existe uma *função de tolerância* t , de I nos reais, que associa a cada intervalo um número real que será chamado de *tolerância* do intervalo. Então um grafo é de *tolerância* se seus vértices podem ser colocados numa correspondência um a um com um conjunto de intervalos fechados I de reais, tal que dois vértices são adjacentes se e somente se a interseção dos intervalos correspondentes tem pelo menos o tamanho da menor das duas tolerâncias, veja um exemplo na figura 3.5. A demonstração da perfeição desta classe você pode encontrar em [15].

Proposição 3.3 *Se G é um grafo de intervalo, então G é um grafo triangulado.*

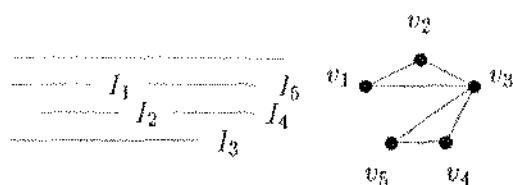


Figura 3.4: Um exemplo de grafo de Intervalo

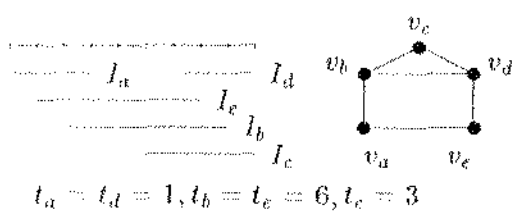


Figura 3.5: Um exemplo de grafo de Tolerância

Demonstração. Suponha que G é um grafo de intervalo e que possui um circuito sem cordas $C := \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{l-1}\}$ com mais de três vértices. Seja I_j o intervalo correspondente ao vértice v_j . Agora, seja p_k um ponto pertencente a $I_{k-1} \cap I_k$. Como C não tem cordas, então o ponto p_k não pode pertencer nem a I_{k-2} nem a I_{k+1} . Deste modo, a sequência $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}$, é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Portanto, é impossível que I_0 encontre I_{l-1} , isto é, v_0 não é adjacente a v_{l-1} . $\square$

Corolário 3.3 *Os grafos de intervalo são perfeitos.*

Para mais informações sobre esta classe de grafos veja [14].

3.1.4 Grafos Livres de P_4

Um P_4 é um caminho² de quatro vértices.

Proposição 3.4 *O P_4 é isomorfo a seu complemento.*

Corolário 3.4 *O P_4 é conexo e co-conexo.*

Proposição 3.5 *Os grafos livres de P_4 são quase-triangulados.*

Um grafo G é livre de P_4 , se G não possui um P_4 .

Corolário 3.5 *Um grafo G é livre de P_4 se e somente se $\overline{G}$ é livre de P_4 .*

Lema 3.2 *As seguintes afirmativas são equivalentes para um grafo G :*

- (i) G não é livre de P_4 .
- (ii) G contém um subgrafo gerado com pelo menos quatro vértices que é conexo e co-conexo.

Demonstração. É fácil ver que (i) implica em (ii), pois P_4 é conexo e co-conexo.

Suponhamos agora que vale (ii).

Seja X um subgrafo gerado minimal conexo e co-conexo de G . Seja x_1 um vértice qualquer de X . Observe que X tem pelo menos quatro vértices.

Segue da minimalidade de X que o conjunto $X - x_1$ é desconexo ou co-desconexo. Sem perda de generalidade suponhamos que $X - x_1$ é desconexo (se

²note que esta definição não coincide com a definição da página 3

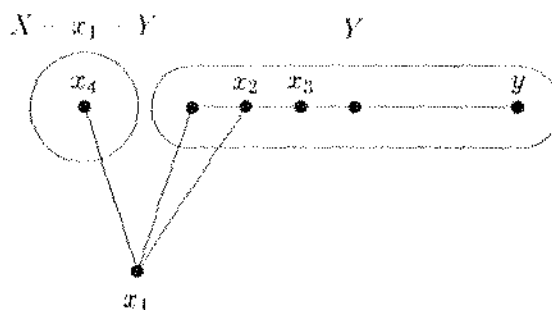


Figura 3.6: X possui um P_4

$X - x_1$ for co-desconexo, raciocínio análogo provará a existência de P_4 em $\overline{G}$, e portanto em G). Existe um vértice y em X não adjacente a x_1 , pois $\overline{X}$ é co-conexo.

Seja Y a componente conexa de $X - x_1$ que contém y .

Como o conjunto $X - x_1 - Y$ não é vazio, e X é conexo, então seja x_4 um vértice de $X - x_1 - Y$ adjacente a x_1 . Como x_4 não pertence à componente Y , então x_4 não tem nenhuma adjacência em Y .

Seja P um caminho de x_1 para y em X . Seja x_2 o último vértice adjacente a x_1 neste caminho. Seja x_3 um vértice adjacente a x_2 não adjacente a x_1 no caminho de x_2 a y em P , veja figura 3.6

A seqüência (x_1, x_2, x_3, x_4) é um P_4 . □

Teorema 3.3 *Se um grafo G é livre de P_4 , então $\chi = \omega$.*

Demonstração. Vamos demonstrar este Teorema por indução em $\#V$. O Teorema é verdadeiro para $\#V = 1$. Assim, seja G um grafo livre de P_4 com mais de um vértice. Segue do Lema 3.2 que G é desconexo ou co-desconexo. Se G é conexo, sejam $C_1, C_2, \dots, C_k$ as componentes conexas de G , senão tomamos as componentes conexas $C_1, C_2, \dots, C_k$ serão os complementos das componentes conexas de $\overline{G}$. Assim,

$$\chi G = \max_{i=1, \dots, k} \chi C_i = \max_{i=1, \dots, k} \omega C_i = \omega G \quad (3.1)$$

(se G é desconexo)

$$\chi G = \sum_{i=1}^k \chi C_i = \sum_{i=1}^k \omega C_i = \omega G \quad (3.2)$$

(se G é co-desconexo)

- tanto em (3.1) como em (3.2) a segunda desigualdade segue da hipótese de indução.

□

Corolário 3.6 *Um grafo livre de P_4 é perfeito.*

Os resultados acima foram retirados de [32].

Uma P_4 -coloração par de um grafo é uma coloração de seus vértices com duas cores, tal que todo P_4 gerado contém precisamente dois vértices em cada cor.

Uma P_4 -coloração ímpar de um grafo é uma coloração de seus vértices com duas cores, tal que todo P_4 gerado contém um número ímpar de vértices em cada cor.

Em 1983 Chvátal e Hoang em [11] demonstraram que se um grafo G admite uma P_4 -coloração par, tal que cada subgrafo gerado por uma das cores é perfeito, então este grafo é perfeito. Depois Hoang demonstrou em [21] que a afirmativa também é verdadeira quando G admite uma P_4 -coloração ímpar no lugar de uma P_4 -coloração par.

3.2 Grafos de Comparabilidade e de Permutação

3.2.1 Grafos de Comparabilidade

Um grafo G é chamado de *grafo de comparabilidade* se existe uma orientação transitiva F de G , isto é, uma orientação F de G tal que $\forall a, b, c$ vértices de G , se $ab \in F$ e $bc \in F$ então $ac \in F$.

Proposição 3.6 *Um caminho orientado em um grafo de comparabilidade é um clique.*

Para mostrar que os grafos de comparabilidade são perfeitos, vamos enunciar um resultado de Dilworth de 1950.

Obs.: existe uma generalização dos grafos de comparabilidade, veja grafos de p -comparabilidade em [6].

Teorema 3.4 (Dilworth[1950]) *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado (possui uma relação transitiva entre seus elementos). O tamanho do menor conjunto de subconjuntos linearmente ordenados necessários para particionar X é igual ao tamanho do maior subconjunto de X de elementos dois a dois não comparáveis.*

Em outras palavras, se G é um grafo de comparabilidade, então o número de cobertura por cliques é igual ao tamanho do clique máximo. Como ser de comparabilidade é uma propriedade hereditária, então segue do Teorema dos grafos perfeitos que G é perfeito.

Para mais informações sobre esta classe de grafos veja [13] e [14].

3.2.2 Grafos de Permutação

Uma *permutação* σ dos naturais $1, 2, 3, \dots, n$ é uma sequência $\sigma := [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, em que cada um dos n naturais ocorre exatamente uma única vez; dois elementos σ_i e σ_j formam uma *inversão* se $i < j$ e $\sigma_i > \sigma_j$ ou se $i > j$ e $\sigma_i < \sigma_j$.

Um *grafo de permutação* é um grafo onde seus vértices são os elementos de uma permutação σ , e dois vértices de G são adjacentes se e somente se formam uma inversão.

Teorema 3.5 *Um grafo de permutação é um grafo de comparabilidade.*

Demonstração. Seja G um grafo da permutação σ . Oriente cada aresta $\sigma_i \sigma_j$ de σ_i para σ_j se $i < j$ e de σ_j para σ_i se $j < i$. É fácil verificar que a orientação obtida é transitiva. $\square$

Corolário 3.7 *Os grafos de permutação são perfeitos.*

Para mais informações sobre esta classe de grafos veja [14].



Figura 3.7:



Figura 3.8:

3.3 Grafos Perfeitamente Ordenáveis

Um grafo G é *perfeitamente ordenáveis* se existe uma orientação de G , tal que G não possui nenhum P_4 tem a orientação da figura 3.7.

Os grafos perfeitamente ordenados são perfeitos.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [8] e [1].

Muito recentemente foram descobertos dois resultados:

O primeiro é que se G admite uma orientação, tal que nenhum P_4 gerado tem a orientação da figura 3.8, então G é perfeito, veja [29]. Neste caso dizemos que os grafos são *reversos* (com relação aos perfeitamente ordenáveis).

O segundo é que se G admite uma orientação tal que todo circuito com pelo menos quatro vértices tem orientação alternada em suas arestas, então G é perfeito, veja [22].

3.4 Grafos de Meyniel e de Paridade

3.4.1 Grafos de Meyniel

Um grafo G é chamado de *grafo de Meyniel* se todo circuito ímpar com pelo menos cinco vértices tem pelo menos duas cordas.

Dada uma coloração $\mathcal{C}$ de um grafo G com k cores. Uma *ij-cadeia* em G é um caminho no subgrafo gerado pelas duas cores i e j de $\mathcal{C}$. O *comprimento* desta cadeia será o número de suas arestas. A *paridade* desta cadeia será a paridade do número l . Uma *ij-troca* (com relação a $\mathcal{C}$) é a seguinte operação:

tome uma componente conexa H_{ij} do subgrafo G_{ij} gerado pelos vértices de cor i e j da coloração $\mathcal{C}$, e permuta as cores dos vértices da componente H_{ij} , isto é, cada vértice de cor i (se houver) recebe cor j e vice-versa; se a componente H_{ij} consiste de um único vértice v , digamos de cor i , então a ij -troca consiste em trocar de i para j a cor do vértice v , e de todas as demais componentes conexas de G_{ij} que consistam de um único vértice de cor i .

Teorema 3.6 *Os grafos de Meyniel são ω -perfeitos.*

Segue como Corolário deste Lema e do Teorema dos grafos perfeitos, que os grafos de Meyniel são perfeitos.

Demonstração. Para demonstrar este Teorema precisamos antes enunciar um Lema e um Teorema.

Lema 3.3. *Sejam G um grafo de Meyniel, x um vértice de G , $\mathcal{C}$ uma coloração de $G - x$ com k cores, e $\mathcal{C}'$ uma restrição da coloração $\mathcal{C}$ a $\text{Adj}(x)$. Se existe uma coloração $\mathcal{C}'_1$ de $\text{Adj}(x)$, obtida através de uma seqüência de ij -trocas em $\mathcal{C}'$, então existe uma coloração $\mathcal{C}_1$ de $G - x$, obtida através de uma seqüência de ij -trocas em $\mathcal{C}$, que tem $\mathcal{C}'_1$ como restrição a $\text{Adj}(x)$.*

Teorema 3.7. *Dados um grafo G de Meyniel, x um vértice de G , e uma coloração $\mathcal{C}$ de G com $k \geq \chi G$ cores, então é possível construir uma coloração $\mathcal{C}'$ de G com χG cores, obtida através de uma seqüência de ij -trocas em $\mathcal{C}$.*

Vamos então demonstrar o Teorema por absurdo. Suponhamos que G é um grafo de Meyniel imperfeito. Seja H um subgrafo gerado de G imperfeito minimal. Segue da hereditariedade dos grafos de Meyniel que H é de Meyniel. Pela escolha de H ,

$$\chi(H - x) = \chi H - 1 \text{ para todo vértice } x \text{ de } H.$$

Suponhamos que exista um vértice y em $H - x$ que não pertence a $\text{Adj}(x)$. Assim, $H - y$ pode ser colorido com $\chi H - 1$ cores. Em particular, $\chi H - 2$ cores ocorrem em $\text{Adj}(x)$. Seja H' o subgrafo gerado por $\text{Adj}(x)$ em H . Como H' é de Meyniel, então segue do Teorema 3.7 que a partir da restrição da coloração de $H - x$ com $\chi H - 1$ cores podemos obter uma nova coloração $\mathcal{C}'$ em H' com $\chi H - 2$ cores. Segue do Lema 3.3 que existe uma coloração de $H - x$ com $\chi H - 1$ cores, onde $\mathcal{C}'$ é uma restrição a $\text{Adj}(x)$. Então, H pode ser colorido com $\chi H - 1$ cores. Um absurdo. Logo, não existe um vértice y em $H - x$ não adjacente a x . Como esta conclusão vale para todo vértice x de H , concluímos que H é um clique de tamanho χH . Um absurdo.

Para completar a demonstração do Teorema vamos demonstrar o Lema 3.3 e o Teorema 3.7.

Lema 3.3 *Sejam G um grafo de Meyniel, x um vértice de G , $\mathcal{C}$ uma coloração de $G - x$ com k cores, e $\mathcal{C}'$ uma restrição da coloração $\mathcal{C}$ a $\text{Adj}(x)$. Se existe uma coloração $\mathcal{C}'_1$ de $\text{Adj}(x)$, obtida através de uma sequência de ij -trocas em $\mathcal{C}'$, então existe uma coloração $\mathcal{C}_1$ de $G - x$, obtida através de uma sequência de ij -trocas em $\mathcal{C}$, que tem $\mathcal{C}'_1$ como restrição a $\text{Adj}(x)$.*

Demonstração. Para demonstrar este Lema precisamos antes enunciar outro Lema.

Lema 3.4. *Dados um grafo G de Meyniel, um vértice x de G , uma coloração $\mathcal{C}$ de $G - x$ com pelo menos duas cores, dois vértices y_1 e y_2 em $\text{Adj}(x)$ (se existirem) com cores distintas i e j de $\mathcal{C}$, respectivamente. Se y_1 e y_2 pertencem a uma mesma componente conexa H_{ij} do subgrafo G_{ij} , gerado pelos vértices de cor i e j em G , então existe uma ij -cadeia em $\text{Adj}(x)$ ligando y_1 a y_2 .*

Para demonstrar o Lema 3.3, considere um grafo G de Meyniel, x um vértice de G , $\mathcal{C}$ uma coloração de $G - x$, i e j duas cores distintas de $\mathcal{C}$, G_{ij} o subgrafo gerado pelos vértices de cor i e j em G . Sejam H_{ij} uma componente conexa de G_{ij} , e H'_{ij} o subgrafo gerado de por $V H_{ij} \cap \text{Adj}(x)$ em G . Segue do Lema 3.4 que H'_{ij} é uma componente conexa. Assim, uma ij -troca em H'_{ij} produz o mesmo resultado em $\text{Adj}(x)$ que uma ij -troca efetuada em H_{ij} .

Para completar a demonstração do Lema 3.3 vamos demonstrar o Lema 3.4.

Lema 3.4 *Dados um grafo G de Meyniel, um vértice x de G , uma coloração $\mathcal{C}$ de $G - x$ com pelo menos duas cores, dois vértices y_1 e y_2 em $\text{Adj}(x)$ (se existirem) com cores distintas i e j de $\mathcal{C}$, respectivamente. Se y_1 e y_2 pertencem a uma mesma componente conexa H_{ij} do subgrafo G_{ij} , gerado pelos vértices de cor i e j em G , então existe uma ij -cadeia em $\text{Adj}(x)$ ligando y_1 a y_2 .*

Demonstração. Sejam G um grafo de Meyniel, x um vértice de G , $\mathcal{C}$ uma coloração de $G - x$ com pelo menos duas cores, y_1 e y_2 dois vértices de $\text{Adj}(x)$ com cores distintas i e j de $\mathcal{C}$, respectivamente, que pertencem a uma mesma componente conexa H_{ij} do subgrafo G_{ij} gerado pelos vértices de cor i e j . Seja $c := (y_1 = v_1, v_2, \dots, v_{2p} = y_2)$ a menor ij -cadeia ligando y_1 a y_2 . A paridade de c é ímpar. Vamos demonstrar o resultado por indução em p . Se $p = 1$, então y_1 é adjacente a y_2 . Logo, o Teorema segue trivialmente. Então, $p > 1$.

Suponhamos por absurdo que existe um vértice v_t em c que não pertence a $\text{Adj}(x)$. Seja v_i um vértice de c anterior a v_t em $c \cap \text{Adj}(x)$ tal que i seja o maior possível. Do mesmo modo, seja v_j um vértice de c posterior a v_t em $c \cap \text{Adj}(x)$ tal que j seja o menor possível. Então, a cadeia $d := (v_i, \dots, v_t, \dots, v_j)$ é par, senão o circuito $(x, v_i, \dots, v_t, \dots, v_j, x)$ é um circuito ímpar sem cordas com pelo menos cinco vértices.

Seja v_u um vértice em $c \cap Adj(x)$ posterior a v_j , tal que u é o menor possível maior que j (se existir, pois é possível que $j = 2p$). Se existir o vértice v_u , então $u > j + 1$, senão o circuito $(x, v_i, \dots, v_l, \dots, v_j, v_u, x)$ é um circuito ímpar com pelo menos cinco vértices e somente uma corda.

Mudar os índices de i para k e j para l . Assim, v_k e v_l têm a mesma cor, r . Se $r = i$, então, por indução, $v_{l+1} \in (c \cap Adj(x))$, e sua cor é j , e $(v_k, \dots, v_{l+1}, x, v_k)$ é ímpar, com apenas uma corda. Se $r = j$, então, por indução, $v_{k-1} \in (c \cap Adj(x))$, e sua cor é i : nesse caso, $(v_{k-1}, \dots, v_l, x, v_{k-1})$ é ímpar com apenas uma corda. $\square$

A demonstração deste Lema completa a demonstração do Lema 3.3. $\square$

Para completar a demonstração do Teorema 3.6 vamos demonstrar o Teorema 3.7.

Teorema 3.7 *Dados um grafo G de Meyniel, x um vértice de G , e uma coloração $\mathcal{C}$ de G com $k \geq \chi G$ cores. Então é possível construir uma coloração $\mathcal{C}'$ de G com χG cores, obtida através de uma seqüência de ij -trocas em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Sejam G um grafo de Meyniel, x um vértice de G .

Seja $\mathcal{C} := \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ uma coloração de G com k cores, onde $k \geq \chi G$.

Vamos demonstrar este Teorema por indução em nG . Se $n = 1$ a conclusão do Teorema é óbvia. Então, seja $n > 1$.

Se $k = \chi G$ a conclusão também é óbvia. Logo, $k > \chi G$.

Assim, seja $\mathcal{C}' = \{C_1, C_2, \dots, C_{\chi G}\}$, isto é, o conjunto das χG primeiras cores de $\mathcal{C}$. Seja x um vértice de G que não tem nenhuma cor de $\mathcal{C}'$. Seja H o subgrafo gerado pelos vértices com cores em $\mathcal{C}'$ mais o vértice x . Seja H' o subgrafo gerado pelos vértices de $Adj(x) \cap V H$. Assim, $\chi H' \leq \chi G - 1$, pois $\chi H \leq \chi G$. Logo, por hipótese de indução, podemos construir uma coloração $\mathcal{C}''$ de H' com $\chi G - 1$ cores, obtida através de uma seqüência de ij -trocas na coloração de H' .

Segue do Lema 3.3 que esta nova coloração $\mathcal{C}''$ pode também ser obtida através de uma seqüência de ij -trocas na coloração de $H - x$.

Assim, após esta seqüência de trocas, podemos dar uma das cores de $\mathcal{C}'$ para x , exatamente aquela que não ocorre em $Adj(x)$. Em outras palavras, nós podemos aumentar o conjunto de vértices coloridos com as cores $C_1, \dots, C_{\chi G}$, e este procedimento pode ser repetido até que todos os vértices de G sejam coloridos com uma das cores de $\mathcal{C}'$. Obtendo portanto, uma coloração de G com χG cores. $\square$

A demonstração deste Teorema completa a demonstração do Teorema 3.6. $\square$

Este resultado pode ser visto em [26] e [1], na segunda referência encontramos um algoritmo de reconhecimento desta classe.

3.4.2 Grafos de Paridade

Nesta seção a *paridade* de um caminho sem cordas será a paridade do número de arestas deste caminho. Em particular se dois vértices x e y são adjacentes, o caminho entre eles é a aresta xy , e a sua paridade será 1.

Um grafo G é chamado de *grafo de paridade* se para todo par de vértices x e y de G , todos os caminhos sem cordas de x para y tem a mesma paridade.

Claramente a noção de grafos de paridade é uma generalização de grafos bipartidos. Os grafos completos (seu conjunto de vértices é um clique) com pelo menos três vértices são grafos de paridade não bipartidos.

Vamos mostrar que um grafo de paridade é um grafo de Meyniel, antes porém, precisamos dar uma definição e demonstrar um resultado sobre grafos de paridade.

Dizemos que duas cordas (arestas) xy e zt de um circuito C em G se *cruzam* se os vértices x, z, y, t são distintos dois a dois e se eles aparecem nesta ordem em C .

Teorema 3.8 *Um grafo G é um grafo de paridade se e somente se todo circuito ímpar de G (com pelo menos cinco vértices) tem pelo menos duas cordas que se cruzam.*

Demonstração. Em primeiro lugar, vamos mostrar que a condição é necessária.

Seja G um grafo de paridade. Seja $C := (c_0, c_1, \dots, c_{t-1})$ um circuito ímpar em G com pelo menos cinco vértices. Vamos demonstrar este resultado por indução no número de vértices de C .

Assim, a paridade do caminho de c_0 para c_1 ³ em C pela aresta c_0c_1 é ímpar, no entanto a paridade do caminho P que passa por todos os outros vértices $c_2, c_3, \dots, c_{t-1}$ é par. Logo, existe pelo menos uma corda, digamos c_ic_j em P .

Assim, a corda c_ic_j divide o circuito C em dois circuitos, um par e outro ímpar. Se o circuito ímpar tem pelo menos cinco vértices, então a conclusão segue da hipótese de indução. Logo o circuito ímpar é um triângulo.

Sem perda de generalidade, podemos supor que este triângulo é o triângulo (c_i, c_{i+1}, c_j) .

Agora, a paridade do caminho de c_{i-1} para c_{i+1} passando pelo vértice c_i é par, no entanto a paridade do caminho P' de c_{i-1} para c_{i+1} que passa por todos os outros vértices $c_j, c_{j+1}, \dots, c_{t-2}$ é ímpar. Logo, ou c_{i-1} é adjacente a c_{i+1} , então C tem duas cordas que se cruzam. Portanto, existe uma corda em P' , digamos $c_l c_m$.

³todas as contas serão feitas sempre mod t .

Se a corda incide em c_{i+1} , então C tem duas cordas que se cruzam. Logo, a corda $c_l c_m$ não incide em c_{i+1} .

Analogamente, a corda $c_l c_m$ divide C em um circuito par e um circuito ímpar.

Se o circuito ímpar tem pelo menos cinco vértices, então a conclusão segue novamente da hipótese de indução.

Portanto, novamente, sem perda de generalidade podemos supor que este circuito ímpar é o triângulo (c_l, c_{l+1}, c_m) .

Então, seja C' o circuito formado por $C - c_{i+1} - c_{l+1}$. Como C' é um circuito ímpar com menos de $t - 2$ vértices, segue da hipótese de indução que C' tem duas cordas que se cruzam, mas estas cordas são cordas em C . Logo C' é um triângulo, isto é, ou $j = l$ ou $i = m$. Sem perda de generalidade vamos supor que $j = l$.

Assim, o caminho de c_{i+1} para c_{l+1} passando por c_j tem paridade par, no entanto, o caminho C'' que passa por c_m e c_i tem paridade ímpar. Logo, o caminho C'' tem uma corda que cruza $c_l c_j$ ou $c_l c_m$.

Agora vamos mostrar que esta condição é suficiente.

Seja G um grafo tal que todo circuito ímpar com pelo menos cinco vértices tem duas cordas que se cruzam.

Suponhamos por absurdo que G não é de paridade. Como todo subgrafo gerado de um grafo de paridade é de paridade. Seja H um subgrafo gerado de G , minimal não de paridade. Seja x e y dois vértices de H , tais que:

o caminho $P_p := (x, u_1, u_2, \dots, u_t, y)$ é de paridade par, e

o caminho $P_i := (x, v_1, v_2, \dots, v_s, y)$ é de paridade ímpar, com pelo menos três vértices.

Sejam:

$i_0 := \min\{i \mid \text{existe } j > 1 : u_i \text{ é adjacente a } v_j\}$

$j_0 := \max\{j \mid u_{i_0} \text{ é adjacente a } v_j\}$

Assim, $i_0 < t$ e $j_0 > 1$, senão a outra corda seria em P_p ou P_i contradizendo a minimalidade destes caminhos.

Os caminhos

$$P' := (u_{i_0}, v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_s, y)$$

e

$$P'' := (u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_t, y)$$

têm a mesma paridade pois pertencem a um subgrafo gerado próprio de H . Analogamente, os caminhos

$$Q' := (x, u_1, \dots, u_{i_0-1}, u_{i_0}, v_{i_0})$$

e

$$Q'' := (x, v_1, \dots, v_{j_0-1}, v_{j_0})$$

têm a mesma paridade. Por outro lado a soma das cardinalidades dos caminhos é ímpar, uma contradição. Logo a condição é suficiente. $\square$

Corolário 3.8 *Grafos de paridade são grafos de Meyniel e conseqüentemente perfeitos.*

Corolário 3.9 *Grafos bipartidos são perfeitos.*

A demonstração da perfeição desta classe de grafos e um algoritmo de reconhecimento da mesma você pode encontrar em [5] e [1].

3.5 Grafos com Derivado Bipartido

Chamamos de *derivado de um grafo* G , notação DG , é um grafo onde cada vértice corresponde a um par ordenado (x, y) para cada aresta xy de G , e dois vértices (x, y) e (y, z) de DG são adjacentes se e somente se x não é adjacente a z em G .

Teorema 3.9 *Os grafos com derivado bipartido são perfeitos.*

Este resultado pode ser encontrado em [10].

Apêndice A

A.1 Conjetura Forte dos Grafos Perfeitos

Em março de 1960 Claude Berge conjecturou que os únicos grafos críticos são os circuitos ímpares sem cordas com pelo menos cinco vértices ou seus complementos. Esta conjectura ficou sendo conhecida desde então como *Conjetura Forte dos Grafos Perfeitos* (notação CFGP).

Conjetura A.1 (CFGP) *Os únicos grafos críticos são os circuitos ímpares sem cordas ou seus complementos.*

Conjetura A.2 (CFGP) *Um grafo G é perfeito se e somente se nenhum circuito ímpar sem cordas com mais de três vértices é subgrafo gerado de G ou $\overline{G}$.*

Conjetura A.3 (CFGP) *Um grafo G é perfeito se e somente se todo circuito ímpar com mais de três vértices em G e em $\overline{G}$ tem pelo menos uma corda.*

Modificando um pouco esta última forma da conjectura (para duas no lugar de uma corda) obtemos a classe dos grafos de Meyniel como já vimos na seção 3.4.

Neste capítulo vamos ver uma lista de alguns resultados sobre classes de grafos para as quais vale esta conjectura de Berge.

Assim, a primeira conjectura de Berge enunciada no capítulo 1 ficou sendo conhecida como conjectura fraca dos grafos perfeitos.

Finalmente, existe ainda mais uma conjectura sobre grafos perfeitos que é conhecida como conjectura intermediária dos grafos perfeitos (CIGP), que é como segue:

Antes de enunciar esta conjectura, vamos fazer uma definição.

Dizemos que um grafo G tem a mesma P_4 -estrutura de um grafo H se existe uma bijeção $f: V G \mapsto V H$, onde um subconjunto $X := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vértices

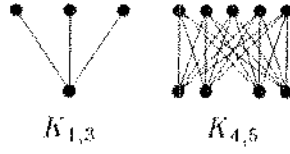


Figura A.1: Exemplos de $K_{n,m}$.

de G , gera um P_4 em G se e somente se o subconjunto $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$, gera um P_4 em H .

Conjetura A.4 (CIGP) *Um grafo G é perfeito se e somente se G tem a mesma P_4 -estrutura de um grafo perfeito.*

Existem alguns resultados sobre esta conjetura que podem ser encontrados em [9] e [19].

Damos a seguir a definição de algumas classes de grafos para as quais vale a Conjetura Forte dos Grafos Perfeitos, indicando ao final de cada definição a referência bibliográfica relevante e, eventualmente, alguma indicação da demonstração.

Grafos Livres de $K_{1,3}$ e Grafos Linha

Grafos Livres de $K_{1,3}$

Um $K_{n,m}$ em um grafo G , é um subgrafo de G completo e bipartido, veja exemplo na figura A.1.

Um grafo G é um grafo *livre de $K_{1,3}$* se nenhum subconjunto de G é um $K_{1,3}$, [30], [4] e [1].

Grafos Linha

O *grafo linha* de um grafo G , notação LG , tem como vértices as arestas de G e é tal que dois vértices a_1 e a_2 são adjacentes se a_1 e a_2 (arestas de G) têm um vértice em comum em G , veja um exemplo na figura A.2.

A validade da conjetura para esta classe segue do fato que o grafos linha são livres de $K_{1,3}$, [33] e [37].

Grafos de Círculo

Um *grafo de círculo* G é um grafo de interseção das cordas de um dado círculo C , isto é, cada vértice de G é uma corda de C , e dois vértices de G são adjacentes se e somente se as respectivas cordas se encontram, veja [4].

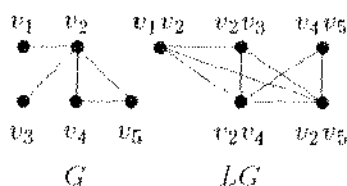


Figura A.2: Um exemplo de um grafo Linha

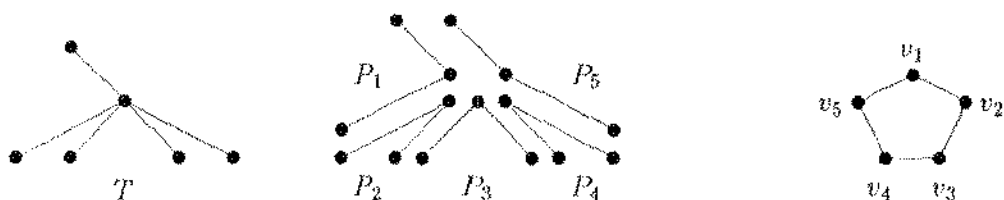


Figura A.3: Um grafo de interseção de caminhos de uma árvore

Grafos de Interseção de Caminhos de uma Árvore

Um caminho *trivial* em um grafo G é um caminho que consiste de um único vértice.

Um *grafo de interseção de caminhos de uma árvore* é um grafo G onde cada vértice é um caminho não trivial em uma árvore T , e dois vértices de G são adjacentes se e somente se os caminhos se encontram em pelo menos uma aresta. Veja um exemplo na figura A.3. A CFGP é verdadeira para esta classe de grafos, veja [16] e [17].

Grafos Arco-circulares

Um *grafo arco-circular* é o grafo G de interseção dos n arcos de uma circunferência, veja [35] e [14].

Grafos livres de $K_4 - e$

Um $K_4 - e$ é um grafo obtido pela remoção de uma aresta de um K_4 (um clique de quatro vértices), veja figura A.4.

Um grafo G é livre de $K_4 - e$ se o $K_4 - e$ não é subgrafo de G .

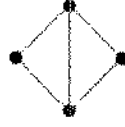


Figura .1: Um $K_4 - e$

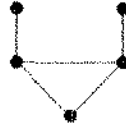


Figura .2: Um Bull

A CFGP é verdadeira para esta classe de grafos, veja [31].

Grafos livres de Bull

Um *Bull*¹ é o grafo da figura A.5.

Se o Bull não é subgrafo gerado de G , então dizemos que G é *livre de Bull*.

A CFGP é verdadeira para esta classe de grafos, veja [12].

Grafos 3-cromáticos [36]

Grafos Planares [34]

Grafos Toroidais [18]

¹tomamos conhecimento desta classe após a defesa da tese

Bibliografia

- [1] Berge, C. and V. Chvátal, *Topics on Perfect Graphs*, North-Holand Publishing Co. (1984).
- [2] Bland, R. G., H. C. Huang e L. E. Trotter, Graphical Properties Related to Minimal Imperfection, *Discrete Math.*, 27 (1979), 11-22.
- [3] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., (1976).
- [4] Buchingham, M. A. and M. C. Golumbic, Partitionable Graphs, Circle Graphs and The Strong Perfect Graph Conjecture, *Discrete Math.*, 44 (1983), 45-54.
- [5] Burlet, M. and J. P. Uhry, Parity Graphs, *Annals of Discrete Mathematics*, 16 (1982), 1-26.
- [6] Cameron, K. B., Polyedral and algorithmic Ramifications of Antichains, PHD Thesis, University of Waterloo, (1982).
- [7] Chvátal, V., Graham, R. L., Perold, A. F. and Whitesides, S. H. Combinatorial designs related to the strong perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 26 (1979), 83-92.
- [8] Chvátal, V., Perfectly Ordered Ghaphs, *Technical Report 8128*, McGill Univ., (1981).
- [9] Chvátal, V., A Semi-Strong Perfect Graph Conjecture, *Technical Report SOCS 821*, McGill Univ. (1982).
- [10] Chvátal, V., Star-Cutset and Perfect Graphs, *Technical Report SOCS 8321*, McGill Univ., outubro (1983).

- [11] Chvátal, V. and C. T. Hoang, On The P_4 -Structure of Perfect Graphs, I : Even Partitions, *Technical Report SOCS 8310*, McGill Univ., junho (1983).
- [12] Chvátal, V. and N. Sbihi, Bull-free Berge graphs are perfect, to appear in *J. Combin. Theory (B)*.
- [13] Dilworth, R. P., A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. Math. Ser. 2*, (51) (1950), 161-166.
- [14] Golumbic, M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, (1980).
- [15] Golumbic, M. C. and C. Monma, A Generalization of Interval Graphs with Tolerances, *Congressus Numerantium*, 35 (1983), 321-331.
- [16] Golumbic, M. C. and R. E. Jamison, The Overlap Graphs of Paths in a Tree, *Technical Report Israel Scientific CENTER*, 116, março (1983).
- [17] Golumbic, M. C. and R. E. Jamison, Algorithmic Aspects of Overlapping Paths in a Tree, *Technical Report Israel Scientific Center*, 125, novembro (1983).
- [18] Grinstead, C. M., The Strong Perfect Graph Conjecture for Toroidal Graphs, *J. Combin. Theory (B)* 30 (1981), 70-74.
- [19] Hayward, R. B., On The P_4 -Structure of Perfect Graphs, III : Weakly Triangulated Graphs, *Technical Report SOCS 8322*, McGill Univ., setembro (1983).
- [20] Hayward, R. B., Murky graphs, Bellairs Research Institute McGill Univ. Barbados, W. I., fevereiro (1986) 31-99.
- [21] Hoàng, C. T., On The P_4 -Structure of Perfect Graphs, II: Odd-Colourable Graphs, *Technical Report SOCS 8320*, McGill Univ., setembro (1983).
- [22] Hoàng, C. T., Alternately orientable graphs, to appear in *J. Combin. Theory (B)*.
- [23] Huang H. C., Investigation on combinatorial optimization, PHD-thesis Yale Univ. Jolivet. J. L., (1976).
- [24] Lovász, L., A Characterization of Perfect Graphs, *J. Combin. Theory (B)* 13 (1972), 95-98.

- [25] Lovász, L., Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Math.*, 2 (1972), 253-267.
- [26] Meyniel, H., On Perfect Graphs Conjecture, *Discrete Math.*, 16 (1976), 339-342.
- [27] Meyniel, H., A new property of critical imperfect graphs and some consequences, Bellairs Research Institute McGill Univ. Barbados, W. I., fevereiro (1986) 106-119.
- [28] Mycielski, J., Sur le Coloriage des Graphs, *Colloq. Math.*, 3 (1955), 161-162.
- [29] Olariu, S., All variations on perfectly ordered graphs, *J. Combin. Theory (B)*, to appear.
- [30] Parthasarathy, K. R. and G. Ravindra, The Strong Perfect Graph Conjecture is True for K_{1-3} -free Graphs, *J. Combin. Theory (B)* 21 (1976), 212-223.
- [31] Parthasarathy K. R. and G. Ravindra, The Validity of The Strong Perfect Graph Conjecture for $(K_4 - e)$ -free Graphs, *J. Combin. Theory, (B)* 26 (1979), 98-100.
- [32] Seinsche, D., On a Property of the Class of n -Colorable Graphs, *J. Combin. Theory (B)* 16 (1974), 191-193.
- [33] Trotter Jr., L. E., Line Perfect Graphs, *Mathematical Programming.*, 12 (1977), 255-259.
- [34] Tucker, A., The Strong Perfect Graph Conjecture for Planar Graphs, *Can. J. Math.*, 25 (1973), 103-114.
- [35] Tucker, A., Coloring a Family of Circular Arcs, *SIAM J. Appl. Math.*, 29 (1975), 493-502.
- [36] Tucker, A., Critical Perfect Graphs and Perfect 3-chromatic Graphs, *J. Combin. Theory (B)*, 23 (1977), 143-149.
- [37] Werra, D., On Line Perfect Graphs, *Mathematical Programming.*, 15 (1978), 236-238.