André Carvalho Silva

“Sobre a Caracterização de Grafos de Visibilidade de Leques Convexos”

CAMPINAS
2013

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

André Carvalho Silva

"Sobre a Caracterização de Grafos de Visibilidade de Leques Convexos"

Orientador(a): **Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende**

Co-Orientador(a): **Prof. Dr. Orlando Lee**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida por André Carvalho Silva, sob orientação de Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende.

Assinatura do Orientador(a)

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38s

Silva, André Carvalho, 1987-
Sobre a caracterização de grafos de visibilidade de leques convexos / André Carvalho Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Pedro Jussieu de Rezende.
Coorientador: Orlando Lee.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

1. Geometria computacional. 2. Teoria dos grafos. I. Rezende, Pedro Jussieu de,1955-. II. Lee, Orlando,1969-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: On characterizing visibility graphs of convex fans
Palavras-chave em inglês:
Computational geometry
Graph theory
Área de concentração: Ciência da Computação
Titulação: Mestre em Ciência da Computação
Banca examinadora:
Pedro Jussieu de Rezende [Orientador]
Célia Picinin de Mello
Daniel Morgato Martin
Data de defesa: 05-06-2013
Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

Dissertação Defendida e Aprovada em 05 de Junho de 2013, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:

Daniel M. Mart

Prof. Dr. Daniel Morgato Martin
CMCC / UFABC

Prof^a^. Dr^a^. Célia Picinin de Mello
IC / UNICAMP

Pedro de Rezende

Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende
IC / UNICAMP

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Sobre a Caracterização de Grafos de Visibilidade de Leques Convexos

André Carvalho Silva[1]

05 de junho de 2013

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende (Supervisor/*Orientador*)
- Profª. Drª. Célia Picinin de Mello
  Institute of Computing - UNICAMP
- Prof. Dr. Daniel Morgato Martin
  CMCC - Universidade Federal do ABC
- Prof. Dr. Ricardo Dahab
  Institute of Computing - UNICAMP(Substitute/*Suplente*)
- Profª. Drª. Cândida Nunes da Silva
  DCOMP - UFSCar (Substitute/*Suplente*)

[1]Financial support: Capes scholarship (process 01P-1965-2012) 2011–2013

Abstract

The (vertex) visibility graph of a polygon is a graph that gathers all the visibility information among the vertices of the polygon. Three relevant problems related to visibility graphs are: characterization, recognition and reconstruction. Characterization calls for a set of necessary and sufficient conditions that every visibility graph must satisfy. Recognition deals with the problem of determining whether a given graph is the visibility graph of some polygon. Reconstruction asks for the generation of a polygon whose visibility graph is isomorphic to a given visibility graph.

In this work, we study these problems on a restricted class of polygons, namely, convex fans: polygons that contain a convex vertex in its kernel. This work is comprised of two main results. The first one presents three necessary conditions that visibility graphs of convex fans must satisfy. We also show that those conditions are necessary and sufficient for visibility graphs of convex pseudo-fans. As a byproduct, we show that we can construct the vertex-edge visibility graph of a convex fan in general position from its vertex visibility graph. In the second major result, we show that we can reduce the reconstruction problem of unimonotone polygons to the same problem for convex fans.

Resumo

Grafos de visibilidade entre vértices de polígonos são estruturas que resumem as informações de visibilidade de tais vértices. Existem três relevantes problemas relativos a grafos de visibilidade: caracterização, reconhecimento e reconstrução. O problema da caracterização consiste em encontrar um conjunto de condições necessárias e suficientes para a classe de grafos de visibilidade. A procura de uma forma algorítmica para se reconhecer quando um grafo é de visibilidade define o problema de reconhecimento. O problema de reconstrução trata da questão de se reconstruir um polígono a partir de um grafo de visibilidade de tal forma que este seja isomorfo ao grafo de visibilidade do polígono.

Neste trabalho, abordamos estes problemas para uma subclasse destes grafos: grafos de visibilidade de leques convexos. Dois resultados principais são apresentados nesse trabalho. O primeiro deles é um conjunto de três condições necessárias que um grafo de visibilidade de um leque convexo deve satisfazer. Adicionalmente, mostramos que estas condições são necessárias e suficientes para grafos de visibilidade de pseudo-leques convexos. Um resultado colateral deste processo é a equivalência entre grafos de visibilidade entre vértices, e grafos de visibilidade vértice-aresta, para leques convexos em posição geral. O segundo resultado consiste em que podemos reduzir o problema de reconstrução de polígonos unimonótonos para o mesmo problema para leques convexos.

Acknowledgements

Eu gostaria de agradecer a minha família pelo apoio durante a realização do meu mestrado; aos meus orientadores Pedro J. de Rezende e Orlando Lee pela paciência e apoio no decorrer do mestrado; à professora Célia P. Mello pela ajuda no início da pesquisa; Ao pessoal do Laboratorio de Otimização e Combinatória do IC por proporcionar um ambiente amigável e produtivo para convivência nesta fase da minha vida; e a CAPES pelo suporte financeiro.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Grafos de visibilidade são grafos que condensam as relações de visibilidade entre objetos geométricos de um conjunto como: vértices de polígonos, segmentos, pontos, barras e retângulos.

Existem três problemas relevantes relativos a grafos de visibilidade: caracterização, reconhecimento e reconstrução [35]. O problema da caracterização consiste em encontrar um conjunto de condições necessárias e suficientes para a classe de grafos de visibilidade. A procura de uma forma algorítmica para reconhecer quando um grafo é um grafo de visibilidade define o problema de reconhecimento. O problema de reconstrução trata da questão de se reconstruir um conjunto de objetos geométricos a partir de um grafo de visibilidade de tal forma que este seja isomorfo ao grafo de visibilidade do conjunto construído.

Esta dissertação busca tratar desses três problemas para uma classe especial de polígonos descrita a seguir. Um polígono é chamado de *leque* se o mesmo possui um vértice v, chamado de vértice universal, que enxerga todos os pontos não pertencentes ao exterior do polígono. Caso este vértice seja um vértice convexo no polígono, o polígono é denominado *leque convexo*. Uma propriedade interessante de leques convexos é que qualquer polígono pode ser decomposto em leques convexos. Logo, a caracterização de grafos de visibilidade de leques convexos pode ajudar na caracterização de polígonos simples em geral.

Existe muito interesse teórico em grafos de visibilidade [24, 34], uma vez que sua caracterização pode levar a um maior entendimento da estrutura dos objetos geométricos e de outros problemas de visibilidade como o problema da galeria de arte.

Aplicações de grafos de visibilidade incluem o problema de posicionamento de redes de antenas em terrenos, onde as antenas necessitam ter visibilidade mútua por questões de conectividade [13]. O terreno é abstraído como um polígono com buracos [12] e a sua resolução envolve encontrar o clique máximo no grafo de visibilidade do polígono. Grafos de visibilidade também são utilizados em sistemas multi-agentes com visibilidade limitada

[11]. O objetivo é recuperar informações geométricas sobre o local através de medições de vários agentes. Outra aplicação envolve planejamento urbano com análise de grafos de visibilidade [49]. A visualização entre entidades de um banco de dados e VLSI (*Very Large Scale Integration* - integração de larga escala) também utilizam grafos de visibilidade [47]. Aplicações de grafos de visibilidade envolvem ainda computação de caminhos mínimos em polígonos e decomposição de objetos bidimensionais em *clusters* [24].

O restante desta dissertação está dividida em cinco capítulos. O segundo capítulo apresenta resultados da literatura sobre grafos de visibilidade. O capítulo subsequente apresenta todas as definições, notações, convenções e alguns resultados necessários para o entendimento do restante da dissertação. O Capítulo 4 trata da caracterização de leques convexos e pseudoleques convexos. Um dos resultados principais desta dissertação é descrito nesse capítulo. No quinto capítulo é discutida a dificuldade dos problemas de reconhecimento e reconstrução para grafos de visibilidade de leques convexos. Apresentamos a relação entre leques convexos e polígonos unimonótonos nesse capítulo. O último capítulo apresenta as conclusões desta dissertação e uma breve discussão sobre trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica e Problemas Relacionados

Este capítulo apresenta alguns resultados da literatura sobre grafos de visibilidade e problemas relacionados. Alguns conceitos apresentados neste capítulo utilizam definições que, por questão de organização do texto, estão no capítulo seguinte.

Dois pontos p e q são *mutuamente visíveis* se o segmento pq não é obstruído por nenhum obstáculo. Dois vértices são *adjacentes* em um grafo de visibilidade se dois pontos dos objetos associados aos vértices são mutuamente visíveis. A definição de obstrução e a natureza do segmento dependem da estrutura geométrica do problema específico.

No contexto de grafos de visibilidade, os seguintes objetos já foram estudados: polígonos, conjunto de barras, pontos, segmentos e retângulos. Apresentaremos alguns tipos de grafos de visibilidade em seguida. Para uma revisão mais completa consulte [24].

2.1 Grafos de visibilidade de barras, retângulos e segmentos

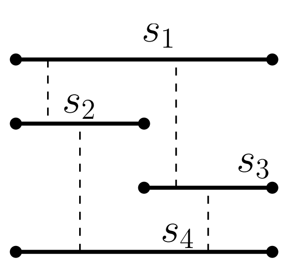


Figura 2.1: Um conjunto de barras no plano e seus segmentos de visibilidade.

Um dos primeiros tipos de grafos de visibilidade considerados e caracterizados foram os *grafos de visibilidade de barras*. Um grafo G é um grafo de visibilidade de barras se o mesmo pode ser associado a um conjunto B de segmentos de retas horizontais, chamados de barras, disjuntos no plano (veja Figura 2.1). Dois vértices v_i e v_j são adjacentes se as duas barras s_i e s_j, associadas aos vértices, são mutuamente visíveis, ou seja, se existe um segmento de reta vertical ligando s_i e s_j que não intercepta outro segmento [50]. Grafos de visibilidade de barras são grafos *st* planares (i.e., grafos planares que contêm uma representação planar na qual todos os vértices de corte estão na mesma face) [50].

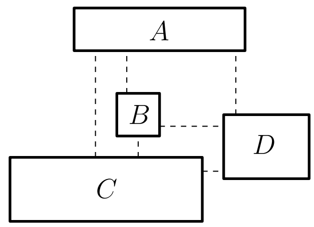


Figura 2.2: Um conjunto de retângulos no plano e seus segmentos de visibilidade.

Em *grafos de visibilidade de retângulos*, o objeto geométrico representado pelos vértices são retângulos isotéticos sem sobreposição (veja Figura 2.2). Dado um conjunto R de retângulos isotéticos com comprimento e altura positivas, dois retângulos A e B são *verticalmente (horizontalmente) visíveis* se existe um segmento de reta paralelo ao eixo vertical (horizontal) cujas extremidades estejam na fronteira de A e B. Esse segmento não pode interceptar o interior ou fronteira de qualquer um dos demais retângulos de R. A reta de visibilidade é considerada *espessa* se a reta pode ser estendida para um retângulo, onde dois lados opostos estão contidos em A e B [47]. O problema de reconhecimento de grafos de visibilidade de retângulos é NP-completo [42].

Entretanto, Streinu et al. [47] apresentaram *grafos de visibilidade de retângulos topológicos*. Estes grafos contêm mais informações combinatórias sobre a visibilidade do conjunto de retângulos, como a ordem e a direção. Eles estão completamente caracterizados e seu reconhecimento e reconstrução podem ser feitos em tempo polinomial [47].

Seja B um conjunto de segmentos disjuntos no plano (veja Figura 2.3) cujas extremidades definem um conjunto de pontos S. Dois pontos p_i e p_j de S são *mutuamente visíveis* se eles são incidentes em um mesmo segmento de B ou o segmento aberto de reta p_ip_j não intercepta nenhum segmento de B. Um *grafo de visibilidade de segmentos* é um grafo cujo conjunto de vértices é S e dois vértices são adjacentes no grafo se seus pontos associados são mutuamente visíveis [18].

Para grafos de visibilidade de segmentos, os três problemas, caracterização, reconhecimento e reconstrução, estão em aberto até o momento [24]. Existe apenas uma caracterização para grafos planares que são grafos de visibilidade de segmentos [18].

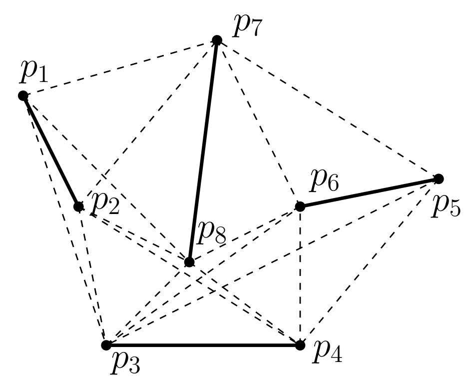


Figura 2.3: Um conjunto de segmentos e as arestas de visibilidade entre os extremos dos segmentos.

2.2 Grafos de Visibilidade de Polígonos

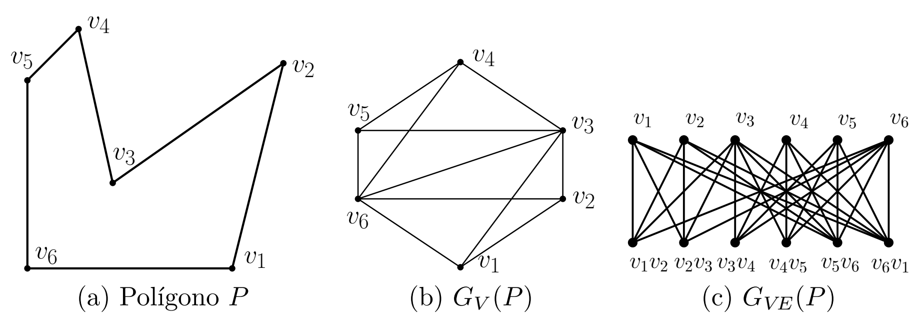


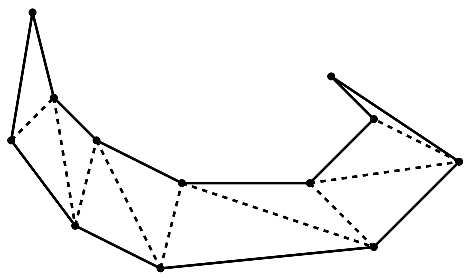
Figura 2.4: Um polígono, o grafo de visibilidade de seus vértices e seu grafo de visibilidade vértice-aresta.

Na literatura de grafos de visibilidade, grafos de visibilidade de polígonos (veja Figura 2.4) formam a classe mais estudada devido a sua relação com o problema da galeria de arte [34] e caminhos mínimos euclidianos [23]. Até o momento da escrita deste texto, os três problemas mencionados: caracterização, reconhecimento e reconstrução, ainda estão em aberto para a classe de grafos de visibilidade de polígonos [24]. Mas, sabe-se que o problema de reconstrução está em PSPACE [15].

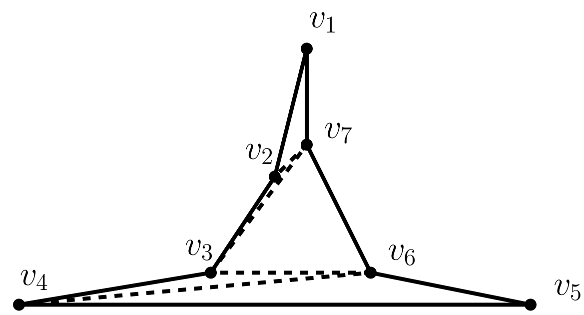
Três abordagens diferentes para os problemas mencionados foram utilizadas na literatura: restrição da classe de polígono, restrição da classe de grafos e adição de informações geométricas sobre o polígono. Estas três abordagens são tratadas nas subseções a seguir.

2.2.1 Casos Especiais de Polígonos

Mesmo que os problemas de caracterização, reconhecimento e reconstrução para grafos de visibilidade de polígonos simples não estejam resolvidos, existem alguns resultados para



(a) espiral



(b) torre

Figura 2.5: Um polígono espiral e um polígono torre.

casos especiais de polígonos. Mencionaremos alguns em seguida. Para uma revisão mais completa consulte [35, 24].

Um polígono simples é chamado de *espiral* (veja Figura 2.5a) se ele contém exatamente uma cadeia reflexa e uma cadeia convexa de vértices. Grafos de visibilidade de polígonos espirais são uma subclasse de grafos de intervalo [15].

Um *polígono torre* (veja Figura 2.5b) é um polígono simples formado por duas cadeia de vértices reflexos e uma aresta conectando duas extremidades das cadeias. Seu grafo de visibilidade contém um subgrafo bipartido de permutação [8, 6] obtido pela remoção de arcos correspondentes às arestas das cadeias reflexas e de um nó isolado.

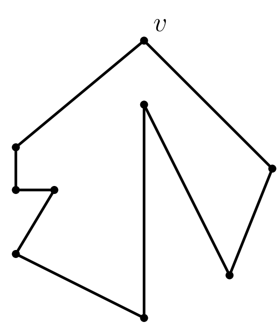


Figura 2.6: Um leque convexo cujo vértice universal é v.

Para *leques convexos* (veja Figura 2.6), ElGindy usa uma estratégia de decomposição para tentar desenhar um grafo qualquer G no plano como um grafo de visibilidade de um leque convexo [14]. O algoritmo procura decompor G em subgrafos através de arestas especiais chamadas de diagonais máximas de maneira que cada subgrafo é embutido no plano separadamente. Não é claro se é possível fazer esta decomposição para todo grafo de visibilidade de leques convexos.

A caracterização de grafos de visibilidade foram anunciadas [2, 1] em dois artigos futuros em diferentes trabalhos. Porém, estes trabalhos não nunca foram publicados até

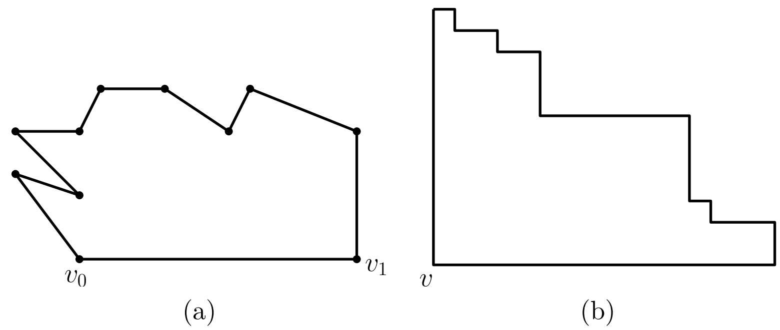


Figura 2.7: Exemplos de polígonos unimonótono e escada. Note que a direção de monotonicidade do polígono unimonótono não é a mesma da base.

o momento.

Abello et al. apresentaram condições necessárias para grafos de visibilidade de polígonos *escada* [1] (veja Figura 2.7b). Esta classe de polígonos é uma subclasse dos leques convexos. A suficiência das condições e um algoritmo para reconstrução foram anunciados para um artigo futuro que até este momento não foi publicado. Bidokhti [3] apresenta uma prova simplificada das condições necessárias para polígonos escadas e mostra a relação dos mesmos com terrenos [3]. Colley [7] mostrou que o reconhecimento de grafos de visibilidade de polígonos escada é equivalente ao reconhecimento de grafos de visibilidade de polígonos unimonótonos.

2.2.2 Caracterização de Grafos de Visibilidade

Ao invés de restringir a classe de polígonos, alguns autores da literatura tentaram restringir a classe de grafos de visibilidade. Ghosh [22, 23] mostrou que grafos de visibilidade não são uma subclasse dos grafos perfeitos, circulares ou cordais.

Um grafo G é *exoplanar* se existe um desenho planar do mesmo no qual todos os vértices estão contidos na face não limitada do plano. Um grafo G exoplanar é *maximal* quando a adição de qualquer aresta resulta em um grafo não exoplanar. ElGindy [14] provou que todos os grafos exoplanares maximais são grafos de visibilidade de algum polígono simples.

Everett et al. [17] demonstraram que existe uma família infinita de sub-grafos induzidos minimais proibidos para grafos de visibilidade. A família é construída através de modificações no grafo de Grötsch (veja Figura 2.8). Esse grafo não é um grafo de visibilidade, já que para toda ordenação dos seus vértice, existe um ciclo ordenado sem corda [33], ou seja, o grafo não atende a primeira condição necessária do Ghosh (veja Lema 3.4.1).

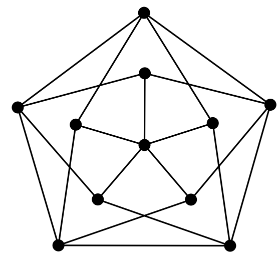


Figura 2.8: O grafo de Grötsch.

Ghosh [24] apresentou quatro condições necessárias (veja Seção 3.4.1, página 16) que um grafo em conjunto com um circuito hamiltoniano do mesmo deve satisfazer para ser um grafo de visibilidade de algum polígono simples. Uma dessas condições foi fortalecida por Everett [17] e subsequentemente provada ser necessária [44]. No desenvolvimento dessas condições, vários contra-exemplos foram estabelecidos [17, 46, 44] para as conjecturas de suficiência das condições. Além dessas condições apresentada por Ghosh, Coulard e Lubiw desenvolveram outra condição necessária adicional para grafos de visibilidade de polígonos [9].

Everett apresentou um algoritmo para verificar se um grafo satisfaz a primeira condição necessária (veja Lema 3.4.1) em $O(n^3)$ [15]. Ghosh mostrou que as duas primeiras condições necessárias por ele apresentadas (veja Lemas 3.4.1 e 3.4.2) podem ser verificadas em $O(n^2)$ [22, 23].

Abello e Kumar definem uma classe de grafos chamada de *grafos quasi-persistentes* [2] que equivalem aos grafos que atendem às condições necessárias descritas nos Lemas 3.4.1 e 3.4.2 correspondentes às duas primeiras condições necessárias apresentadas por Ghosh [24]. No mesmo trabalho, os autores apresentaram quatro condições necessárias para um grafo quasi-persistente ser um grafo de visibilidade de um polígono simples. Ghosh mostrou que essas condições podem ser derivadas da terceira e quarta condição necessária (veja Lemas 3.4.2 e 3.4.4) apresentadas por ele [23].

2.2.3 Adicionando mais Informações sobre o Polígono

Dada a dificuldade dos problemas envolvendo grafos de visibilidade, alguns autores adicionaram mais informações geométricas do polígono para os problemas de caracterização, reconhecimento e reconstrução, na tentativa de deixar o problema mais fácil, em termos de complexidade. Esta subseção apresenta algumas abordagens da literatura.

Streinu e O'Rourke apresentaram grafos de *visibilidade vértice-aresta* (veja Figura 2.4) como sendo grafos que condensam informações de visibilidade entre vértices e arestas do polígono [37]. Os mesmos autores também generalizaram a noção de visibilidade para pseudo-visibilidade em pseudopolígonos (veja Seção 3.6.1) definidos em uma pseudoconfiguração de pontos [36]. Eles apresentaram algumas condições necessárias para grafos de visibilidade vértice-aresta (veja Seção 3.7) e provaram a suficiência dessas condições para grafos de visibilidade vértice-aresta de pseudopolígonos com um algoritmo de reconstrução de um pseudopolígono [36].

Everett et al. apresentaram o conceito de informação de perfuração (*stabbing information*) de um polígono [19]. Os autores mostraram que as informações de perfuração contêm estritamente mais informação que grafos de visibilidade interno e externo entre vértices, mas menos informação que o tipo de ordem dos vértices de um polígono.

2.2.4 Problemas Clássicos em Grafos de Visibilidade

O estudo de algumas propriedades envolvendo problemas clássicos em grafos pode ajudar no entendimento da classe de grafos de visibilidade de polígonos.

O problema do clique máximo em grafos de visibilidade de polígonos simples é um problema em aberto até o momento [24]. Ao contrário da sua versão para grafos gerais, não se sabe se o problema para grafos de visibilidade é NP-difícil. Se o circuito hamiltoniano correspondente à sequência de vértices da fronteira do polígono for também dado como entrada, existe um algoritmo polinomial para encontrar o clique máximo em um grafo de visibilidade de um polígono simples [25].

O problema do conjunto dominante mínimo em grafos de visibilidade corresponde ao problema da galeria de arte e, portanto, é NP-difícil [34, 24].

Shermer [41] mostrou que o problema de encontrar o conjunto independente máximo para grafos de visibilidade é NP-difícil. Esse mesmo problema com a adição do circuito hamiltoniano correspondente a sequência de vértices da fronteira do polígono como entrada continua em aberto. Neste caso, Ghosh et al. [25] apresentaram um algoritmo polinomial para encontrar o conjunto independente máximo para grafos de visibilidade de leques convexos.

Capítulo 3

Definições e Estado da Arte

Este capítulo é dedicado a introdução de conceitos e convenções utilizados nesta dissertação. Assumimos que o leitor esteja familiarizado com algumas definições básicas encontradas em geometria computacional, grafos, topologia e geometria projetiva. Caso contrário, é recomendada consulta a [39, 5, 30] nos seus respectivos tópicos.

3.1 Definições, Notações e Convenções Básicas

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos, notações e convenções que serão utilizados no decorrer do texto.

Dizemos que um conjunto de pontos S no plano está em *posição geral* se o mesmo não contém três pontos colineares. Seja P um polígono com conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E = \{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$. Assuma que V está totalmente ordenado de acordo com a ordem induzida pelos índices (i.e., $v_i < v_j$ se e somente se $i < j$ e $v_{n-1} \not< v_0$) e que esta ordem corresponde ao sentido anti-horário dos pontos da fronteira do polígono em relação ao seu interior.

A partir deste ponto, assuma que qualquer aritmética de índices é módulo n. Uma aresta $e_i \in E$ corresponde à aresta $v_i v_{i+1}$.

Um polígono está em *posição geral* se o seu conjunto de vértices está em posição geral. Qualquer polígono mencionado a partir deste ponto deve ser entendido como um polígono simples e sem buracos.

3.2 O Plano Projetivo e Transformações Projetivas

Neste trabalho, utilizaremos tanto o plano euclidiano quanto o plano projetivo. Esta seção busca dar uma breve introdução a alguns conceitos relativos ao plano projetivo e

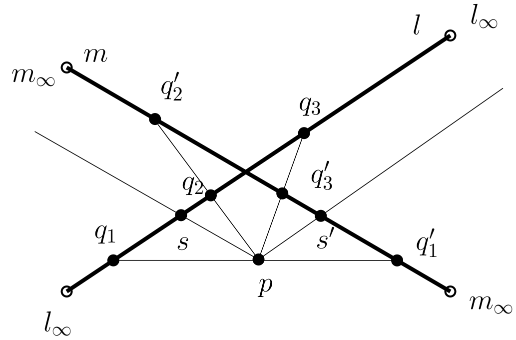


Figura 3.1: Um exemplo de transformação perspectiva

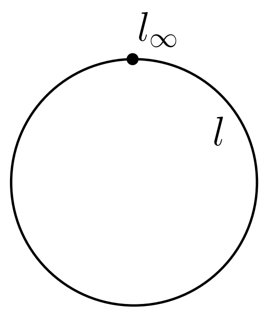


Figura 3.2: Ilustração da topologia de uma reta no plano projetivo

transformações projetivas. Para uma abordagem mais completa, consulte as referências [30, 10, 21].

Considere o problema de mapear pontos de uma reta l a pontos de outra reta distinta m no plano euclidiano (veja Figura 3.1). Para efetuar este mapeamento utilizaremos um ponto p, chamado de *ponto de perspectiva*, que não incide em l ou m. Mapearemos um ponto $q \in l$ a um ponto $q' \in m$ se a reta qp intercepta m em q'. Seja s (s') um ponto de l (m) tal que a reta ps (ps') é paralela a m (l). Por definição, s (s') não é mapeado a nenhum ponto de m (l), logo este mapeamento não é uma bijeção.

Seja l_∞ o conjunto de todas as retas paralelas a l que chamaremos de *ponto ideal*. Vamos tratar um ponto ideal como um ponto qualquer do plano. Precisamos definir o conceito de incidência de um ponto ideal em uma reta e vice-versa. Dizemos que um ponto ideal l_∞ incide em um reta l, e vice-versa, se e somente se $l \in l_\infty$. Seja r_∞ o conjunto de todos os pontos ideais l_∞ para toda reta l no plano euclidiano; denominamos r_∞ de *reta ideal*. O *plano projetivo real* P^2 é modelado como o conjunto de pontos $\mathbb{R}^2 \bigcup r_\infty$. Note que no plano projetivo, quaisquer duas retas interceptam-se em um único ponto, ideal ou não. Em particular, o ponto de interseção de r_∞ com a reta l é o ponto l_∞.

Uma reta l no plano projetivo real é equivalente a uma reta do plano euclidiano com a adição de um ponto ideal l_∞. Tais retas possuem a mesma topologia que um círculo

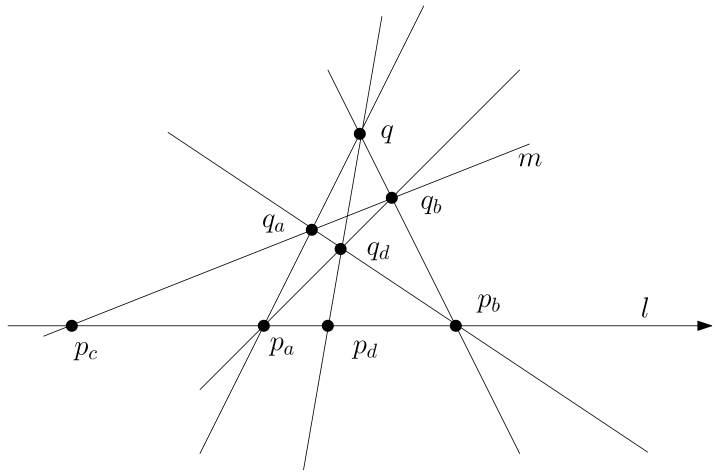


Figura 3.3: Exemplo de como achar o conjugado harmônico p_d de uma tripla de pontos p_a, p_b e p_c.

unitário [21]. Em ambos os sentidos de percurso de l, tem-se incidência no ponto l_∞ (veja Figura 3.2). Isto significa que dois pontos p e q distintos incidentes a l dividem a reta em dois segmentos distintos. Se p e q não forem pontos ideais, denominamos um desses segmento de *interno* se o segmento não contém o ponto ideal da reta e *externo* se ele contém o ponto ideal.

Considere o problema de mapeamento anterior, mas desta vez suponha que as retas estejam contidas no plano projetivo. Podemos mapear o ponto s para o ponto m_∞ e o ponto ideal l_∞ para o ponto s', obtendo uma bijeção entre o todos os pontos das duas retas. O mapeamento de uma reta a outra através de um ponto de perspectiva é chamado de *transformação perspectiva* [30].

Sejam p, q e r três pontos não-ideais de uma reta l tal que q está contido no segmento interno pr. Após uma transformação projetiva a imagem q' do ponto q pode ser mapeada ao segmento externo das imagens de p e r. O exemplo da Figura 3.1 mostra que o ponto q_2 está contido no segmento interno dos pontos q_1 e q_3, porém, a sua imagem q_2' é mapeada ao segmento externo dos pontos q_1' e q_3', imagens de q_1 e q_3, respectivamente. Note, porém, que q_3' foi mapeado ao mesmo segmento de q_1' e q_2' que s', imagem do ponto ideal l_∞. Sejam dois pontos q e r contidos em um mesmo segmento definido por outros dois pontos distintos p e s. Mostraremos que, após uma transformação projetiva, suas imagens q' e r' são mapeadas ao mesmo segmento definido pelas imagens de p e s. Em outras palavras, se r' pertencer ao segmento interno (externo) então q' também pertencerá ao mesmo segmento.

Seja l uma reta e p, q, e r três pontos distintos incidentes a l. Assuma um sentido arbitrário de percurso sobre l. Dado um par de pontos p e q em l, existe apenas um segmento direcionado unindo p a q, nesta ordem. Usaremos a notação $p < q < r$ para indicar que q está contido no segmento direcionado pr.

Fazendo referência à ilustração da Figura 3.3, seja l uma reta no plano projetivo e sejam p_a, p_b e p_c três pontos incidentes nesta ordem (i.e. $p_a < p_b < p_c$) segundo um sentido adotado em l. Seja q um ponto não incidente a l. Escolha uma reta m, distinta de l, que passa por p_c e evita q. Rotule como q_a e q_b os pontos de interseção entre m e as retas qp_a e qp_b, respectivamente. Seja q_d o ponto de encontro das retas p_aq_b e p_bq_a e rotule como p_d a interseção entre as retas l e qq_d. Chamamos p_d de *conjugado harmônico* da tripla p_a, p_b e p_c e dizemos que o segmento p_ap_b *divide harmonicamente* o segmento p_cp_d [10, 30]. Em outras palavras, p_c e p_d estão em segmentos distintos da reta l definidos pelos pontos p_a e p_b. A quádrupla $(p_a, p_b; p_c, p_d)$ é chamada de *quádrupla harmônica.* Dados quaisquer três pontos em uma reta do plano projetivo, é sempre possível achar o conjugado harmônico da tripla [30, 10]. Este fato é resumido no lema a seguir.

Lema 3.2.1. *[30] Seja p_a, p_b e p_c uma tripla de pontos em uma reta l no plano projetivo. Então, existe um ponto $p_d \in l$ tal que $(p_a, p_b; p_c, p_d)$ é uma quádrupla harmônica.*

Quádruplas harmônicas são preservadas após uma transformação projetiva [30, 10]. Sejam p, q, r e s uma quádrupla de pontos incidentes a uma reta l tal que $p < q < r < s$ segundo o sentido escolhido. Sejam p', q', r' e s' suas imagens, respectivamente, após uma transformação projetiva. Então $p' < q' < r' < s'$ ou $p' > q' > r' > s'$ na reta transformada.

Um resultado importante sobre o plano projetivo é o *princípio da dualidade* [30]:

Teorema 3.2.1. *Se A é um teorema sobre o plano projetivo real então a afirmação dual A^* abtida pela reversão dos papéis entre pontos e retas também é um teorema.*

Este teorema indica que retas e pontos comportam-se de maneira similar com relação a incidência no plano projetivo real. Seja Π uma instância do plano projetivo real. Podemos obter outra instância do plano projetivo real Π^* mapeando-se cada reta $l \in \Pi$ a um ponto $l^* \in \Pi^*$ e cada ponto $p \in \Pi$ a uma reta $p^* \in \Pi^*$ de modo que a incidência entre pontos e retas seja mantida (i.e., $p \in l$ se e somente se $l^* \in p^*$). O plano Π^* é chamado de *plano dual* de Π com respeito a este mapeamento.

A partir deste momento, qualquer segmento entre dois pontos não-ideais deve ser entendido como o segmento interno, a não ser que seja mencionado o contrário. Para qualquer conjunto de pontos mencionada neste trabalho, deve-se assumir que o mesmo não contém nenhum ponto ideal.

3.3 Visibilidade em Polígonos

A noção de visibilidade que apresentamos nesta seção é restrita a polígonos. No contexto de outros objetos geométricos, o conceito de visibilidade pode ser definido de forma distinta, como no caso de visibilidade entre segmentos [18], pontos [24], barras [50] ou retângulos [47].

Dois pontos p e q, pertencentes a um polígono P são *mutuamente visíveis* se o segmento pq não intersecta o exterior do polígono. Caso p e q sejam vértices mutuamente visíveis, o segmento que os une é chamado de *diagonal* se este não for uma aresta do polígono. Analogamente, dois pontos p e q são *externamente visíveis* se o segmento pq não intercepta o interior de P.

Um ponto p *enxerga fracamente* uma aresta e de P se o mesmo enxerga um ponto do segmento aberto e. Quando p enxerga todos os pontos de e, dizemos que *p enxerga fortemente e*. Utilizaremos a notação $p \rightarrow e$ para indicar que p enxerga fracamente a aresta e. Quando o ângulo interno em um vértice de P for maior (menor) do que π, então o vértice é dito *reflexo* (*convexo*).

Para evitar confusões entre vértices e arestas de polígonos com os termos homônimos para grafos, utilizaremos o denominação “nó” para vértices em um grafo e “arco” para referenciar uma aresta do mesmo. Tais convenções não visam corresponder ao seu uso em teoria dos grafos em referência a grafos direcionados. Assuma que todo grafo mencionado a partir deste momento é um grafo não-direcionado, a não ser que seja explicitado o contrário.

O *grafo de visibilidade* dos vértices de um polígono P é um grafo $G = (N(G), A(G))$ tal que $N(G) = V$ (i.e., o conjunto de nós de G) corresponde ao conjunto de vértices do polígono, e $(v_i, v_j) \in A(G)$, se e somente se, v_i e v_j são mutuamente visíveis [24]. O conceito de *grafo de visibilidade externa* é análogo ao anterior, usando-se a noção de visibilidade externa.

O *grafo de visibilidade vértice-aresta* $G_{VE}(P)$ de um polígono P é um grafo bipartido cujo conjunto de nós $N(G_{VE}) = V \cup E$ é formado pela união dos conjuntos de vértices e arestas do polígono [37]. O seu conjunto de arcos $A(G_{VE})$ é formado pelos pares vértice-aresta (v, e_i), tal que, $v \in V, e_i \in E$ e v enxerga fracamente a aresta e_i em P. Utilizaremos, por não induzir confusões, os termos *vértice* e *aresta* para indicar nós pertencentes à partição V e E, respectivamente, do conjunto de nós de um grafo de visibilidade vértice-aresta. A Figura 2.4 contém exemplos de ambos os tipos de grafos de visibilidade. Usaremos as notações $G_V(P)$ e $G_{VE}(P)$ para indicar os grafos de visibilidade entre vértices e visibilidade vértice-aresta para um polígono P.

Qualquer menção a grafo de visibilidade a partir deste ponto deve ser entendida como a um grafo de visibilidade dos vértices.

Note que o grafo de visibilidade de um polígono simples é hamiltoniano, pois o mesmo contém pelo menos um circuito hamiltoniano C correspondente à sequência horária ou anti-horária dos vértices que formam a fronteira do polígono.

Neste trabalho, consideramos vários problemas computacionais envolvendo grafos de visibilidade. Supomos que quando um grafo de visibilidade é dado, também é conhecido o circuito hamiltoniano correspondente à sequência de vértices da fronteira do polígono. Note que, segundo essa definição, o conjunto de nós de um grafo de visibilidade está totalmente ordenado segundo os seus rótulos, logo C é equivalente à sequência $(v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$ que corresponde à sequência circular anti-horária de vértices da fronteira do polígono.

Usaremos a notação $C(v_i, v_j)$ para representar o subconjunto de nós v_k de um grafo de visibilidade tal que se $v_i < v_j$, então $v_i < v_k < v_j$, se $v_j < v_i$, então $v_k \in N(G) \setminus (C(v_i, v_j) \cup \{v_i, v_j\})$. Analogamente, as notações $C[v_i, v_j)$, $C(v_i, v_j]$ e $C[v_i, v_j]$ representam o mesmo conjunto com a inclusão de v_i, de v_j e de ambos, respectivamente. Dizemos que uma aresta e_k pertence ao conjunto $C(v_i, v_j)$ se os dois extremos que definem a aresta estão contidos no conjunto.

3.4 Problemas Abertos Envolvendo Grafos de Visibilidade

Existem três importantes problemas em aberto envolvendo grafos de visibilidade de polígonos simples: caracterização, reconhecimento e reconstrução [35, 24]. Estes problemas são descritos a seguir.

Definição 3.4.1 (Caracterização)**.** Caracterize a classe de grafos de visibilidade de polígonos simples.

Definição 3.4.2 ($RgP(G, C)$)**.** (Reconhecimento) Dado um grafo G e um circuito hamiltoniano C de G, determine se G é um grafo de visibilidade de um polígono simples P cuja sequência de vértices na fronteira seja equivalente a C.

Definição 3.4.3 ($RsP(G_V, C)$)**.** (Reconstrução) Dado um grafo de visibilidade G de um polígono simples P e um circuito hamiltoniano C de G correspondente à sequência de vértices da fronteira de P, construa um polígono cujo grafo de visibilidade seja isomorfo a G e sua sequência circular de vértices da fronteira seja equivalente a C.

Até o momento da escrita desta dissertação estes três problemas continuam em aberto. Conhece-se, porém, alguns resultados para casos especiais de polígonos (veja Seção 2.2.1). Descreveremos brevemente alguns desses resultados e algumas definições utilizadas nos próximos capítulos.

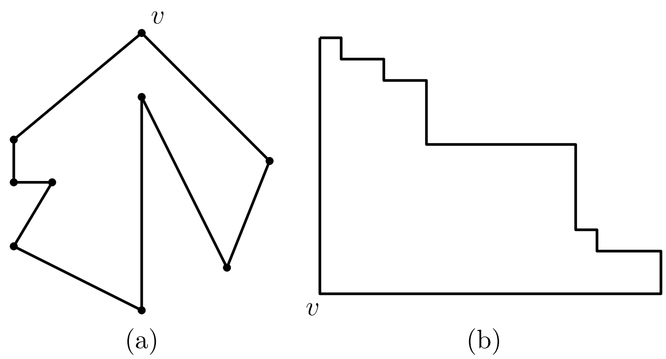


Figura 3.4: Um leque convexo e um polígono escada com vértice universal v

Um polígono simples P é chamado de *leque* se o mesmo possui um vértice v, denominado vértice universal, que enxerga todo o polígono. Caso este vértice seja convexo, o polígono é denominado *leque convexo* (veja Figura 3.4a). Uma subclasse de leques convexos, denominados de polígonos *escada* (veja Figura 3.4b) [16], foi estudada por Abello et. al. [16]. Uma caracterização para grafos de visibilidade de leques convexos foi conjecturada por ElGindy [14].

Uma *cadeia poligonal* é uma curva especificada por uma sequência de pontos, chamados de vértices, tal que a mesma consiste de segmentos de retas conectando pontos consecutivos. Uma cadeia poligonal é dita *monótona* se existe uma reta l tal que toda reta ortogonal a l intercepta a cadeia em apenas um ponto ou contém uma aresta da cadeia. Um polígono é *monótono* se o mesmo pode ser particionado em duas cadeias monótonas. Um polígono *unimonótono* (veja Figura 2.7a) é um polígono monótono tal que uma de suas cadeias monótonas consiste de apenas uma aresta.

Colley [7] mostrou que o reconhecimento de grafos de visibilidade de polígonos escada é equivalente ao reconhecimento de grafos de visibilidade de polígonos unimonótonos. Abello et al. [16] estudaram propriedades de polígonos escada, obtendo algumas condições necessárias para polígonos escada. Bidokhti [3] obteve uma prova simplificada das condições necessárias encontradas por Abello et al. [16] e mostrou essas mesmas condições também são válidas para *terrenos* [3].

3.4.1 Condições Necessárias

Ghosh [24] apresentou quatro condições necessárias para um grafo G ser um grafo de visibilidade de um polígono simples. Uma dessas condições foi fortalecida por Everett [17] e, subsequentemente, provada necessária [44]. Vários contra-exemplos foram estabelecidos [17, 46, 44] para conjecturas de suficiência apresentadas no desenvolvimento das condições. As condições assumem o conhecimento do circuito hamiltoniano C de G correspondente à sequência de vértices da fronteira do polígono. Outra condição necessária, não relacionada as condições apresentadas por Ghosh, foi desenvolvida na literatura [9].

Nos lemas que se seguem nesta subseção, supomos que G é um grafo de visibilidade de um polígono simples e $C = (v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$. Estes lemas descrevem as quatro condições necessárias apresentadas por Ghosh [24].

Um ciclo D, pertencente a G, com k nós é dito *ordenado* se sua sequência segue a ordem anti-horária de C.

Lema 3.4.1. *(*$NC1$*) Seja* D *um ciclo ordenado de tamanho* $k \geq 4$ *em* G*. Então, o subgrafo induzido por* D *em* G *tem pelo menos* $k - 3$ *cordas.*

Um par de nós (v_i, v_j) de G é dito *invisível* se os mesmos não são adjacentes em G. Seja v_w um nó pertencente à cadeia $C(v_i, v_j)$ $(C(v_j, v_i))$ tal que nenhum nó da cadeia $C[v_i, v_w)$ $(C[v_j, v_w))$ é adjacente a nenhum nó da cadeia $C(v_w, v_j]$ $(C(v_w, v_i])$. O vértice v_w é denominado *vértice bloqueante* do par invisível (v_i, v_j). Note que v_w é um ponto de articulação do subgrafo induzido pelos nós da cadeia $C[v_i, v_j]$ $(C[v_j, v_i])$.

Lema 3.4.2. *(*$NC2$*) Seja* (v_i, v_j) *um par invisível em* G*. Então existe um nó* v_w *tal que o mesmo é um vértice bloqueante de* (v_i, v_j)*.*

Note que um par invisível pode ser associado a vários vértices bloqueantes e um vértice bloqueante pode ser associado a vários pares invisíveis. Denominamos um par invisível (v_i, v_j) de *minimal* se não existe mais de um vértice bloqueante em nenhuma das cadeias de P que ligam v_i a v_j. Dois pares $(v_i, v_j), (v_k, v_l)$ são *separáveis* com relação a um nó v_x se ao percorrer C a partir de v_x em alguma direção, v_i e v_j $(v_k$ e $v_l)$ são encontrados antes de v_k e v_l $(v_i$ e $v_j)$.

Lema 3.4.3. *(*$NC3$*) Existe uma atribuição de pares invisíveis a vértices bloqueantes tal que nenhum vértice bloqueantes* v_a *é atribuído a dois ou mais pares invisíveis separáveis com relação ao mesmo.*

Lema 3.4.4. *(*$NC4$*) Seja* D *um ciclo ordenado pertencente a* G*. Então o número de vértices bloqueantes associados a pares invisíveis minimais no subgrafo induzido por* D *em* G *é no máximo* $|D| - 3$*.*

Estas condições necessárias não são suficientes [24]. Na Figura 3.5 é mostrado um grafo que atende as quatro condições necessárias apresentadas, mas não é um grafo de visibilidade (veja [46] para uma prova deste fato).

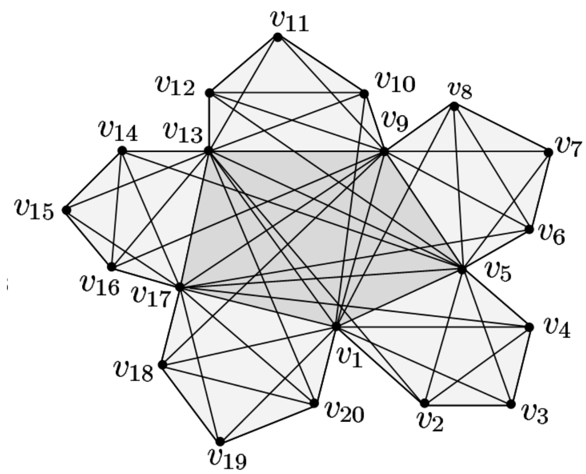


Figura 3.5: Grafo que atende às 4 condições necessárias mas não é um grafo de visibilidade de um polígono simples [24].

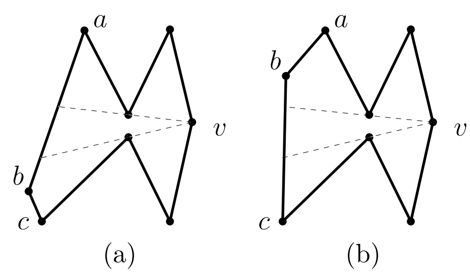


Figura 3.6: Dois polígonos com o mesmo grafo de visibilidade, mas diferentes grafos de visibilidade vértice-aresta. Observe a visibilidade entre v e a aresta bc e ab.

3.5 Representação de Polígonos

Grafos de visibilidade contêm apenas informações sobre a visibilidade interna entre vértices do polígono. Outros tipos de informações sobre visibilidade em polígonos, como visibilidade entre vértices e arestas e visibilidade externa não podem ser deduzidos a partir do grafo de visibilidade, veja Figuras 3.6a e 3.6b. No polígono da Figura 3.6a, o vértice v enxerga fracamente a aresta ab, mas não enxerga a aresta bc, enquanto que, no polígono da Figura 3.6b, v enxerga bc, mas não ab. Isto significa que dois polígonos com o mesmo grafo de visibilidade podem ter geometria bem distintas, como mostrado pela Figura 3.7.

Algumas estruturas contêm estritamente mais informações geométricas sobre um dado polígono simples do que grafos de visibilidade entre vértices como: tipo de ordem e grafos de visibilidade vértice-aresta [37]. O *tipo de ordem* de um conjunto de pontos S é um mapeamento λ que associa a cada tripla de pontos uma orientação (horária, anti-horária

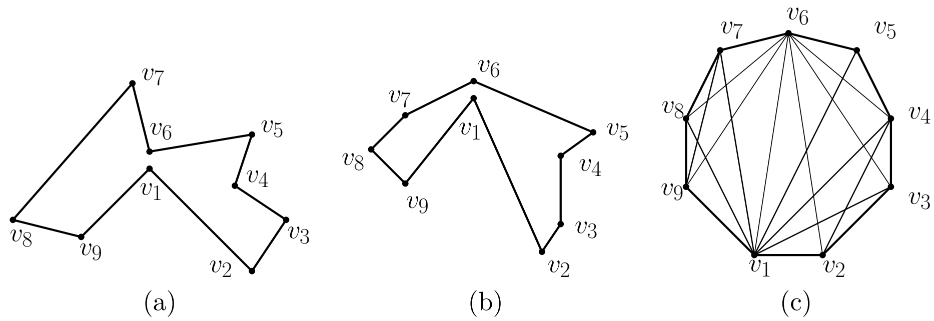


Figura 3.7: Dois polígonos com o mesmo grafo de visibilidade mas envoltórias convexas, vértices reflexos e grafo de visibilidade externo diferentes.

ou colinearidade). Uma tripla de pontos (p_i, p_j, p_k) tem orientação (anti-)horária se p_k está a esquerda (direita) da reta direcionada p_ip_j. Note que esta definição não é aplicável para o plano projetivo, uma vez que uma reta no plano projetivo não particiona o plano. Podemos obter as orientações dos pontos em um conjunto de pontos S, que não contenha nenhum ponto ideal no plano projetivo se limitarmos uma região contendo os pontos de S e aplicarmos a definição anterior. Definimos tipo de ordem de um polígono como o tipo de ordem do seu conjunto de vértices.

A partir do tipo de ordem de um polígono é possível extrair o grafo de visibilidade interna, externa, a envoltória convexa e o conjunto de vértices reflexos daquele polígono [19]. Porém o tipo de ordem contém ainda mais informações que a combinação deste conjunto de representação como mostrado na Figura 3.8. Nessa figura, o vértice v_2 está à direita da reta formada por v_7v_6 no polígono da esquerda, enquanto que no outro polígono, o mesmo está à esquerda.

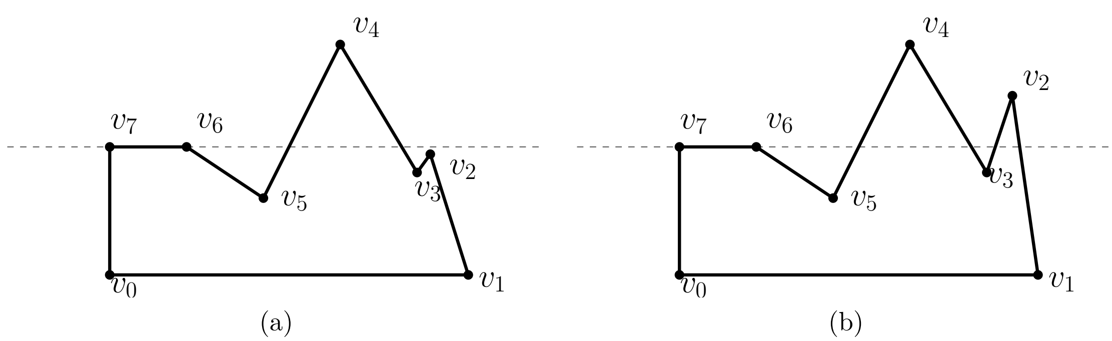
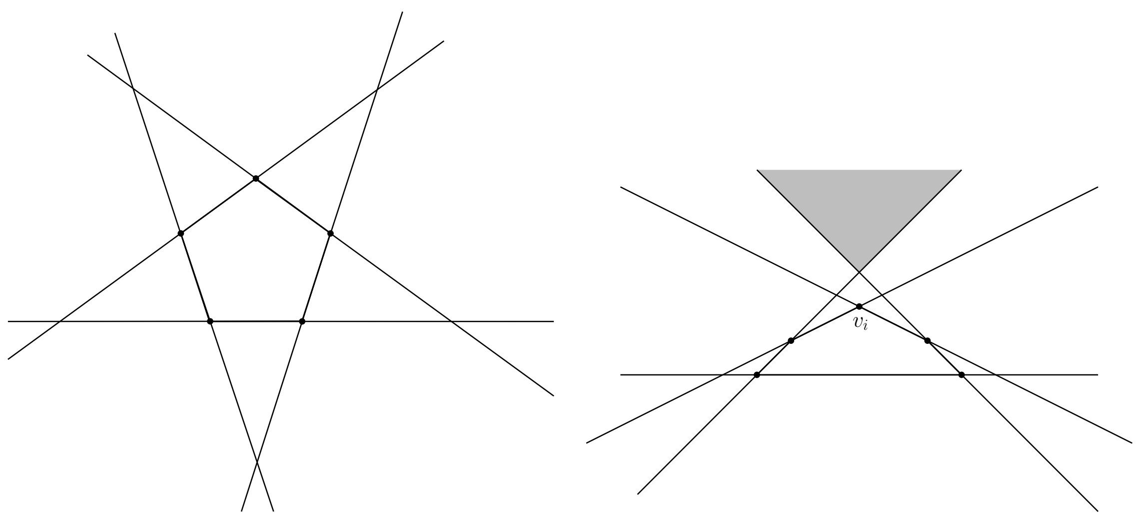


Figura 3.8: Dois polígonos com a mesma envoltória convexa, grafos de visibilidade interna, externa e vértices reflexos, mas diferentes tipos de ordem.

A partir de um conjunto de pontos S podemos obter o seu *arranjo induzido* de retas colecionando todas as retas que passam por dois pontos distintos de S. Uma *configuração de pontos* é composta de um conjunto de pontos S e o seu arranjo induzido. A partir deste momento, referenciaremos uma configuração de pontos apenas a partir do seu conjunto de pontos.

Duas configurações de pontos S_1 e S_2 são *isomorfas* se existe uma bijeção entre S_1 e S_2 tal que as orientações sejam preservadas. Mesmo que duas configurações tenham o mesmo tipo de ordem, os arranjos induzidos por essas configurações não são necessariamente isomorfos. Veja a Figura 3.9. No arranjo da Figura 3.9b, o vértice v_i incide apenas em regiões limitadas, mas no arranjo da Figura 3.9a, todos os vértices do arranjo incidem em pelo menos uma face ilimitada.



(a) (b)

Figura 3.9: Duas configurações de pontos com tipos de ordem isomorfos, mas arranjos induzidos não isomorfos. A face destacada do arranjo da direita não existe no da esquerda.

3.6 Arranjos de Retas e Pseudolinhas

Um conjunto de retas L no plano, denominado de *arranjo de retas*, induz uma subdivisão planar constituída de vértices, arestas e faces. Os *vértices* são os pontos de interseção das retas de L. Um segmento de reta de L entre dois vértices ou um raio infinito a partir de um vértice que não contém nenhum vértice em seu interior é denominado de *aresta*. Uma *face* é uma região bidimensional maximal determinada por arestas que não intercepta nenhum vértice ou aresta.

Um arranjo de retas é chamado *simples* se nenhum trio de retas é concorrente no mesmo ponto. Um arranjo de retas L é *isomorfo* a outro arranjo L' se existe uma bijeção entre as faces, arestas e vértices dos dois arranjos de forma que as incidências sejam preservadas. O arranjo induzido por uma configuração de pontos S é o arranjo determinado por todas as retas p_ip_j onde $p_i, p_j \in S$. Um *feixe* de retas é um arranjo de retas tal que todas as retas são concorrentes em apenas um ponto.

3.6.1 Arranjos de Pseudolinhas e Pseudoconfigurações de Pontos

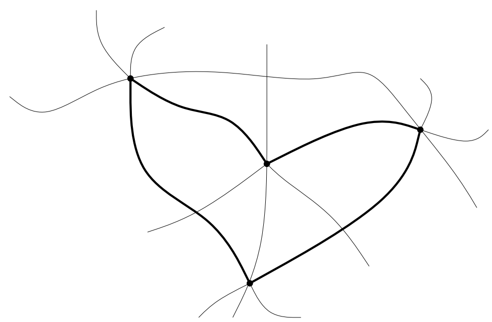


Figura 3.10: Um pseudopolígono (segmentos destacados) sobre uma pseudoconfiguração de pontos com seu arranjo de pseudolinhas

Uma *pseudolinha* é uma curva no plano topologicamente equivalente a uma reta. Note que no plano projetivo tal curva é simples e fechada e sua remoção não desconecta o plano projetivo. No plano euclidiano a curva é simples e aberta e sua remoção resulta em duas componentes conexas. Adicionalmente, perceba que uma reta é uma pseudolinha.

Um *arranjo de pseudolinhas* é uma coleção de pseudolinhas tal que quaisquer duas pseudolinhas distintas se interceptam em um único ponto e onde isto ocorre elas se cruzam. Perceba que um arranjo de pseudolinhas induz uma partição do plano em vértices, arestas e faces, da mesma maneira que arranjos de retas. Note que, em um arranjo de pseudolinhas no plano euclidiano, não existem duas pseudolinhas paralelas, ou seja, que não se interceptam.

Dois arranjos de pseudolinhas são *isomorfos* se existe uma bijeção entre os vértices, arestas e faces dos dois arranjos de modo a preservar a incidência entre os mesmos. Um arranjo de pseudolinhas $\mathcal{L}$ é dito *esticável* se existe um arranjo de retas L que é isomorfo a $\mathcal{L}$.

O problema do *esticamento de arranjo de pseudolinhas* consiste em: dado um arranjo $\mathcal{L}$ de pseudolinhas decidir se $\mathcal{L}$ é esticável.

A Figura 3.11b mostra um arranjo de pseudolinhas que não é esticável. Este arranjo é uma modificação do arranjo descrito no Teorema de Pappus (veja Figura 3.11a) pelo qual se tem que os três pontos r_1, r_2 e r_3 são colineares. A pseudolinha r_1r_3, na Figura 3.11b, força a criação de uma face, destacada na mesma figura, que não pode existir devido à restrição de colinearidade com o ponto r_2.

Teorema 3.6.1. *Sejam três pontos p_1, p_2, p_3 incidentes a uma mesma reta, sejam outros três pontos q_1, q_2, q_3 incidentes a outra reta. Sejam r_1 a interseção dos segmentos p_1q_2 e q_1p_2; r_2 a interseção de p_1q_3 e p_3q_1; e r_3 de p_2q_3 e p_3q_2. Então, os pontos r_1, r_2 e r_3 são colineares.*

Conhecem-se poucos exemplos de arranjos não isomorfos de pseudolinhas que não são esticáveis. São conhecidas algumas famílias infinitas de arranjos de pseudolinhas não isomorfos e não esticáveis [28, 45]. O problema do esticamento é NP-difícil, mas está contido em PSPACE [43, 32].

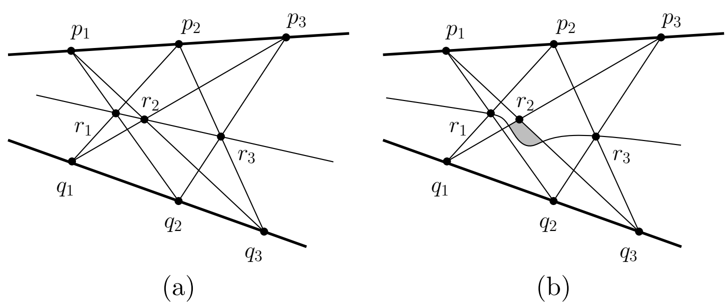


Figura 3.11: Um arranjo de Pappus e um arranjo de pseudolinhas não-esticável derivado do arranjo original. A célula destacada não existe no arranjo original.

Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de pontos e $\mathcal{L}$ um arranjo de $\binom{n}{2}$ pseudolinhas tal que cada par de pontos p_i e p_j em $\mathcal{S}$ está contido em exatamente uma pseudolinha $\ell_{ij} \in \mathcal{L}$ e cada pseudo linha em $\mathcal{L}$ contém exatamente dois pontos de $\mathcal{S}$. O par $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ é chamado de uma *pseudoconfiguração de pontos*.

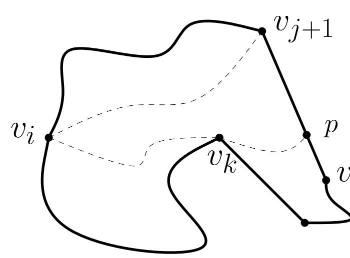


Figura 3.12: O vértice v_k é testemunha dos pares (v_i, e_k) e (v_i, e_j), mas v_i enxerga apenas e_j

Um *pseudopolígono* $\mathcal{P}$ é uma curva de Jordan composta por segmentos de pseudolinhas unindo vértices de uma pseudoconfiguração de pontos. Os *vértices* de $\mathcal{P}$ são os vértices da pseudoconfiguração utilizados na composição dessa curva e suas *arestas* são os segmentos desta. Definimos $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ e $E = \{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$ como o conjunto totalmente ordenado, segundo os seus índices, de vértices e arestas de $\mathcal{P}$. Usaremos a notação $e_i = v_i v_{i+1}$ para indicar uma aresta formada pelo segmento $v_i v_{i+1}$.

Dois vértices v_i e v_j de $\mathcal{P}$ são *mutuamente visíveis* se o segmento de pseudolinha que os une não intercepta o exterior de $\mathcal{P}$. Um vértice v_i *enxerga* uma aresta e se o par (v_i, e) possui duas testemunhas [46]. Um vértice v_k é *testemunha* (veja Figura 3.12) de um par (v_i, e) se $v_k \in e$ ou v_i enxerga v_k e a extensão do segmento de pseudolinha direcionado $v_i v_k$ intercepta a aresta e em um ponto p e o segmento $v_k p$ não intercepta o exterior de $\mathcal{P}$. Note que se v_i e v_k são extremos de e, então, em particular, v_i enxerga v_k. Adicionalmente, se v_k é um extremo de e, então $v_k = p$ e que v_k pode ser igual a v_i.

Definimos grafos de visibilidade entre vértices e grafos de visibilidade vértice-aresta para pseudopolígonos de maneira análoga a polígonos utilizando as noções de visibilidade em pseudopolígonos introduzidas acima.

A noção de convexidade de um vértice perde sua intuitividade em pseudopolígonos, já que a noção de ângulo entre dois segmentos de pseudolinhas não é definida. Dizemos que um vértice v_i de um pseudopolígono $\mathcal{P}$ é *convexo* (*reflexo*) quando v_{i+1} (não) enxerga a aresta e_{i-1} e v_{i-1} (não) enxerga e_i [36]. O caso intermediário, quando uma aresta é visível e a outra não, nunca ocorre [36].

O conceito de tipo de ordem também pode ser aplicado a pseudoconfigurações de pontos. Uma tripla (p_i, p_j, p_k) de uma pseudoconfiguração de pontos tem uma orientação (anti-)horária se p_k está a esquerda (direita) da pseudolinha direcionada $p_i p_j$. Assim como para retas no plano projetivo, uma pseudolinha não particiona o plano. Dessa forma a mesma resalva de que consideraremos uma região limitada para calcular a orientação de triplas de pontos, mencionada anteriormente para tipo de ordem de uma configuração de pontos no plano projetivo, também é aplicável para pseudoconfigurações de pontos.

O problema de *realização de tipo de ordem* (OTR) é definido da seguinte forma: seja $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ uma pseudoconfiguração de pontos no plano, decida se existe uma configuração de pontos S isomorfa a $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$. Este problema é *dual* ao problema de esticabilidade de pseudolinhas no plano projetivo, já que podemos dualizar um arranjo de pseudolinhas e obter uma pseudoconfiguração de pontos. Dessa maneira, a pseudoconfiguração de pontos é realizável se e somente se o arranjo dual é esticável [26].

A *envoltória convexa* de uma pseudoconfiguração de pontos $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ é o menor pseudopolígono $\mathcal{E}$ *convexo*, no qual todos os seus vértices são convexos, formado por um subconjunto de pontos de $\mathcal{S}$ tal que todo segmento de pseudolinha que une dois pontos de $\mathcal{S}$ não intercepta o exterior de $\mathcal{E}$.

A definição de envoltória convexa será utilizada na seção 5.3.

3.6.2 Representações de Arranjos de Pseudolinhas

Esta seção lida com a representação combinatória de arranjos de pseudolinhas. As representações aqui apresentadas são utilizadas na Seção 5.4 para expressar algumas propriedades dos arranjos induzidos por leques convexos. A seguir, duas codificações combinatórias para arranjos de pseudolinhas são apresentadas.

Seja $\mathcal{L}$ um arranjo de n pseudolinhas rotuladas com $1, \ldots, n$. Uma *sequência permissível* (*allowable sequence*) Σ é uma sequência de permutações K $(\pi_i)_{i=1}^{k}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que atende às seguintes condições:

1. π_1 é a identidade (i.e., $(1, 2, ..., n)$) e π_k é a reversão (i.e., $(n, n-1, .., 1)$);
2. Uma permutação π_i é obtida através da reversão da ordem de uma ou mais subsequências disjuntas da permutação anterior π_{i-1}, para $i = 2, ..k$;
3. A ordem de dois elementos i e j é revertida apenas uma vez entre todas as permutações π_i com relação a π_1;
4. A sequência completa não é revertida simultaneamente.

Dado um arranjo de pseudolinhas $\mathcal{L}$, que não seja um feixe de pseudolinhas, contidas no plano projetivo real, podemos obter sua representação através de sequências permissíveis de acordo com o método descrito a seguir. Seja p um ponto que não pertence a nenhuma pseudolinha de $\mathcal{L}$. Seja l_p uma reta direcionada que passa por p. Numere as pseudolinhas de acordo com a ordem de interseção com l_p, obtendo-se π_1. Rotacione l_p em torno de p até que l_p intercepte um ou mais pontos de interseção de um subconjunto de pseudolinhas. Crie a próxima permutação π_2 através da reversão das subsequências correspondentes às pseudolinhas incidentes nos seus respectivos pontos de interseção. Continue até completar um período completo de rotação de l_p. Para o plano euclidiano podemos utilizar outro método descrito em [20].

A Figura 3.13a mostra um exemplo de um arranjo de pseudolinhas cuja sequência de permutações é:

$$\begin{aligned}(1,2,3,4,5)&\overset{1,2}{\to}(2,1,3,4,5)\overset{1,3}{\to}(2,3,1,4,5)\overset{1,4}{\to}(2,3,4,1,5)\overset{1,5}{\to}(2,3,4,5,1)\overset{2,3}{\to}\\ &(3,2,4,5,1)\overset{2,4}{\to}(3,4,2,5,1)\overset{2,5}{\to}(3,4,5,2,1)\overset{3,4,5}{\longrightarrow}(5,4,3,2,1)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Se o arranjo de pseudolinhas for *simples*, ou seja, não existem três pseudolinhas concorrentes, então $k = \binom{n}{2} + 1$ é o tamanho máximo da sequência para qualquer arranjo. Um *diagrama de arames* é um arranjo de pseudolinhas visualmente ordenadas associado a uma sequência permissível (veja Figura 3.13b).

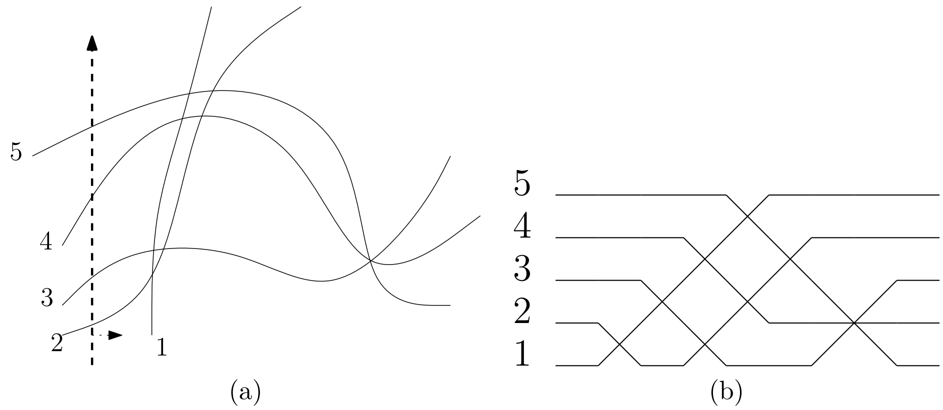


Figura 3.13: Um arranjo de pseudolinhas e sua representação em diagrama de arames. Note que os dois arranjos são isomorfos.

Toda sequência permissível pode ser realizada por um arranjo de pseudolinhas ou pseudoconfiguração de pontos como estabelece o teorema a seguir.

Teorema 3.6.2. *[27] Toda sequência permissível de permutações pode ser realizada tanto por um arranjo de pseudolinhas quanto por uma pseudoconfiguração de pontos.*

Este resultado combinado com o fato de que existe uma sequência permissível associada a cada arranjo de pseudolinhas mostra que estas sequências caracterizam completamente arranjos de pseudolinhas.

Seja α_i uma permutação da sequência $(1, ..., i-1, i+1, ..., n)$ correspondente à ordem de interseção da pseudolinha i, de acordo com um sentido escolhido, com as demais. A coleção $(\alpha_i)_{i=1,...n,}$ destas sequências é chamada de *sequências locais.* A sequência α_3 para o arranjo da Figura 3.13a é: $(1, 2, \{4, 5\})$. Note que as pseudolinhas 4 e 5 interceptam a terceira pseudolinha no mesmo ponto.

Duas sequências diferentes podem representar o mesmo diagrama de arames (veja figuras 3.14a e 3.14b). Duas sequências Σ e Σ' são ditas *localmente equivalentes* se para toda pseudolinha ℓ_i a ordem das interseções com as demais pseudolinhas (i.e., suas respectivas sequências locais) é a mesma ou completamente reversa. O teorema a seguir relaciona a equivalência entre sequências localmente equivalentes e o isomorfismo dos arranjos representados por essas sequências.

Teorema 3.6.3. *[29] Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ arranjos de pseudolinhas em P^2, e sejam Σ e Σ' suas sequências permissíveis, respectivamente. Os arranjos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são isomorfos se e somente se as sequências Σ e Σ' são localmente equivalentes.*

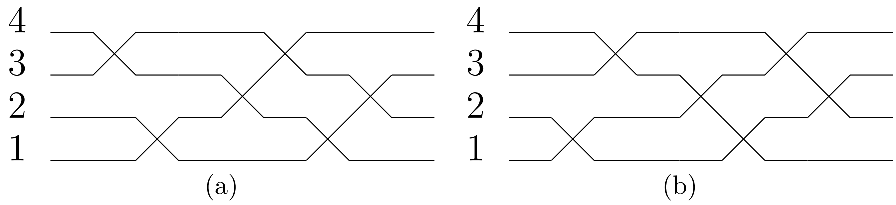


Figura 3.14: Dois arranjos isomorfos mas com sequências permissíveis distintas

3.7 Grafos de Visibilidade vértice-aresta

Grafos de visibilidade vértice-aresta de polígono simples em posição geral contêm estritamente mais informação do que grafos de visibilidade, uma vez que estes podem ser construídos a partir dos grafos de visibilidade vértice-aresta [37]. Novamente, os três problemas principais: caracterização, reconhecimento e reconstrução podem ser enunciados para essa classe de grafos. Até o momento, estes problemas continuam em aberto.

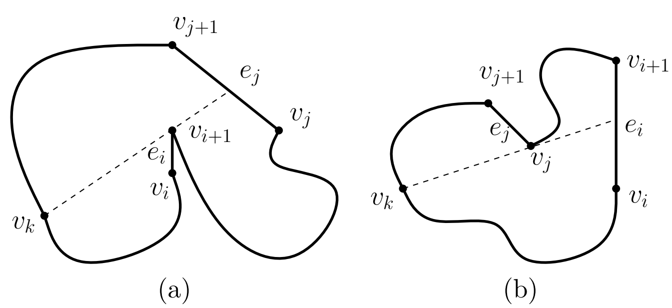


Figura 3.15: Os dois casos do Lema 3.7.1.

Streinu e O'rourke [37] obtiveram um conjunto de condições necessárias para um grafo ser um grafo de visibilidade vértice-aresta de um polígono simples em posição geral. O Lema 3.7.1 (ilustrado na Figura 3.15) descreve essas condições. Seja G_{VE} um grafo de visibilidade vértice aresta de um polígono P e seja C o circuito correspondente à sequência anti-horária de vértices da fronteira de P. Lembre-se que G_{VE} é bipartido pelos conjunto V e E de vértices e arestas do polígono. Utilizaremos essas notações no lema a seguir.

Lema 3.7.1. *[37] Seja $v_k \in V$ um nó de G_{VE} que é adjacente aos nós $e_i, e_j \in E$. Suponha que e_i e e_j não são consecutivos em C e que v_k não é adjacente a nenhuma aresta e_m com $i < m < j$. Então, um dos dois casos é verdade:*

1. *(a) v_{i+1} é um ponto de articulação no subgrafo induzido pelos vértices e arestas do intervalo $C[v_k, v_j]$; e*

   (b) v_{i+1} é adjacente a e_j, mas v_j não é adjacente a e_i.

2. (a) *v_j é um ponto de articulação no subgrafo induzido pelos vértices e arestas de $C[v_{j+1}, v_k]$; e*

   (b) *v_j é adjacente a e_i, mas v_i não adjacente a e_j.*

Seja G um grafo bipartido pelos conjuntos $V = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ e $E = \{e_0, ..., e_{n-1}\}$, chamado de conjuntos de vértices e arestas, respectivamente. Suponha que V e E estão totalmente ordenados segundo os seus índices e $e_i = v_i v_{i+1}$. Seja C um circuito hamiltoniano formado pela sequência $(v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$. Dizemos que duas arestas e_i e e_j são consecutivas se $j = i+1$. Dizemos que G é um *grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato* se o mesmo atende as condições do Lema 3.7.1 e todo vértice v_i é adjacente em G a e_i e e_{i-1} [37].

A partir de um grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato G é possível construir um pseudopolígono $\mathcal{P}$ tal que o grafo de visibilidade vértice-aresta $G_{VE}(\mathcal{P})$ é isomorfo a G. Este resultado decorre do seguinte teorema:

Teorema 3.7.1. *[36] Se G_{VE} é um grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato, então podemos construir uma pseudo-configuração de pontos $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ e um pseudopolígono $\mathcal{P}$ especificado pela ordenação de vértices de V na pseudoconfiguração, cujo grafo de visibilidade vértice-aresta é isomorfo a G_{VE}.*

Capítulo 4

Avanços na Caracterização de Grafos de Visibilidade de Leques

Neste capítulo, apresentaremos três condições necessárias para grafos de visibilidade de leques convexos e mostraremos que estas condições são suficientes para grafos de visibilidade de pseudoleques convexos. Em seguida, apresentaremos condições utilizadas para extrair as informações de visibilidade entre vértices e arestas a partir do grafo de visibilidade entre vértices de leques convexos em posição geral. Quando essas condições são aplicadas a um grafo que atende as três condições necessárias para grafos de visibilidade de leques convexos apresentadas neste capítulo, obtemos um grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato. Usaremos este grafo para reconstruir um pseudoleque convexo.

4.1 Grafos de Visibilidade de Leques: Condições Necessárias

Nesta seção, são estabelecidas três condições necessárias que grafos de visibilidade de leques convexos devem atender. Suponha que para todo leque convexo P, a ordem total dos vértices é estabelecida a partir de um vértice universal arbitrário que denominamos de v, ou seja, $v = v_0$. O Lema 4.1.4 descreve essas três condições e estabelece a necessidade.

Mostraremos, a priori, algumas propriedades de polígonos e leques convexos utilizadas neste capítulo.

Lema 4.1.1. *Se P é um polígono simples e $v_w \in P$ é um vértice convexo tal que (v_{w-1}, v_{w+1}) é um par invisível em P. Então, existe um vértice $v_k \in P$ reflexo tal que P pode ser dividido em dois subpolígonos, P' e P'', através da diagonal $v_w v_k$, de maneira que nenhum vértice de P', com exceção de v_w e v_k, enxerga nenhum vértice de P'', com exceção de v_w e v_k.*

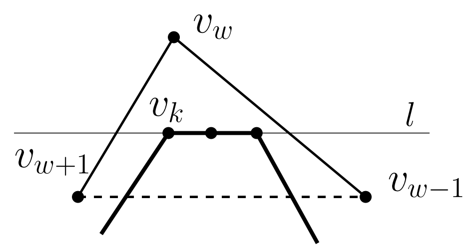


Figura 4.1: Figura ilustrativa da tese do Lema 4.1.1.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $v_w = v_0$ (i.e., este fato não modifica a ordem circular dos vértices do polígono). Uma vez que o segmento $v_{w+1}v_{w-1}$ necessariamente intercepta o exterior de P, existe pelo menos um vértice dentro do triângulo $v_{w-1}v_wv_{w+1}$ (veja figura 4.1). Seja M o conjunto de vértices mais distantes da reta $r = v_{w+1}v_{w-1}$ que estão contidos no interior do triângulo $v_{w-1}vv_{w+1}$. Note que todos os vértices de M são incidentes a uma mesma reta l, por serem equidistantes a reta r. Adicionalmente, v_w enxerga todos os vértices de M, pois, caso contrário, existiria um vértice mais distante da reta r que os vértices de M. Seja v_k o vértice de menor índice em M.

O vértice v_k é reflexo, caso contrário, ou v_{k+1} ou v_{k-1} seria mais distante que v_k, ou v_{k-1} seria colinear com v_k em l, contrariando a minimalidade do índice de v_k. Sejam P' e P'' os dois subpolígonos de P obtidos através da diagonal v_wv_k.

Suponha que existam dois vértices $v_i \in P'$ e $v_j \in P''$ mutuamente visíveis em P tais que v_i e v_j são diferentes de v_w e v_k. O segmento v_iv_j intercepta o segmento v_kv_w, mas isto significa que ou v_i ou v_j estão acima de l e, portanto, mais distantes que v_k da reta r, ou v_k, v_i e v_j são colineares. Neste último caso, como ou $v_i < v_k$ ou $v_j < v_k$, temos que existe um vértice em M com índice menor que k; contradição. □

Lema 4.1.2. *Seja (v_i, v_j) um par invisível em um leque tal que $v_i < v_j$ e seja W o conjunto de todos os seus vértices bloqueantes na cadeia $C(v_j, v_i)$. Então, $W = \{v\}$ ou $W = \emptyset$.*

Demonstração. Se existe algum vértice bloqueante v_w do par (v_i, v_j) em $C(v_j, v_i)$ tal que $v_w \neq v_0$, então, segundo a definição de vértice bloqueante, existe pelo menos um vértice que v_0 não enxerga, contradizendo o fato de que v_0 é um vértice universal no leque. □

Lema 4.1.3. *Sejam v_i e v_j dois vértices de um leque convexo P tais que $v_i < v_j$. Se (v_i, v_j) é um par invisível e v_w é um de seus vértices bloqueantes da cadeia $C(v_i, v_j)$. Então, v_w é um vértice reflexo de P.*

Demonstração. Suponha que v_w seja um vértice convexo. Como v_w é um vértice bloqueante, (v_{w+1}, v_{w-1}) é um par invisível segundo a definição de vértice bloqueante. De acordo com o Lema 4.1.1, existe um vértice reflexo v_k tal que a diagonal $v_k v_w$ particiona o polígono em dois subpolígonos de maneira que nenhum vértice de um deles enxerga nenhum vértice do outro, com exceção de v_w e v_k. Isto implica que v não pode ser nenhum vértice de P além de v_w ou v_k. Como $v_i < v_j$, então $v_w \neq v$ e como v_k é um vértice reflexo, P não contém um vértice convexo universal, contradição. □

Lema 4.1.4. *Seja G um grafo simples e C um circuito hamiltoniano em G. Se G é um grafo de visibilidade de um leque convexo P e C corresponde à sequência de vértices na fronteira de P, então, o par (G, C) atende às seguintes condições:*

1. *($CF1$) Existe um nó v cuja vizinhança é igual a $N(G) \setminus \{v\}$ (denominaremos v de nó universal);*

2. *($CF2$) Todo ciclo ordenado com mais de três nós induz uma corda em G;*

3. *($CF3$) Para todo par $(v_i, v_j) \notin A(G)$, com $v_i < v_j$, existe um vértice bloqueante v_w na cadeia $C(v_i, v_j)$.*

Demonstração. A condição $CF1$ segue diretamente da definição de leques convexos. A condição $CF2$ é equivalente à condição $NC1$ (veja Lema 3.4.1 na página 17).

Vamos mostrar a necessidade da condição $CF3$. Seja (v_i, v_j) um par invisível em G tal que $v_i < v_j$. Suponha que não exista nenhum vértice bloqueante do par em $C(v_i, v_j)$. Segundo a condição $NC2$ (veja Lema 3.4.2), existe pelo menos um vértice bloqueante em $C(v_j, v_i)$. Mas, segundo o Lemma 4.1.2, v é o único vértice bloqueante de (v_i, v_j).

Considere o subgrafo induzido G' de G pelos nós de $C[v_i, v_j] \cup \{v\}$ e seja C' o circuito hamiltoniano de G' formado pela concatenação de v e $C[v_i, v_j]$. Note que G' é o grafo de visibilidade de um subpolígono P' de P formado pelas arestas de visibilidade vv_i e vv_j e as arestas de $C[v_i, v_j]$. Note que P' é um leque convexo devido a inclusão de v. Como G' é um subgrafo induzido de G, não existe nenhum vértice bloqueante do par (v_i, v_j) em G' na cadeia $C'(v_i, v_j)$, e como G' também é um grafo de visibilidade de um leque convexo, então, v é o único vértice bloqueante do par em G'.

Pelo Lema 4.1.1 existe um nó v_w na cadeia $C'(v_i, v_j)$ tal que nenhum nó de $C'(v_w, v)$ enxerga nenhum nó de $C'(v, v_w)$. Consequentemente, nenhum nó de $C'[v_i, v_w)$ enxerga nenhum nó de $C'(v_w, v_j]$, mas isto significa que v_w é um vértice bloqueante do par (v_i, v_j) em G'. Como G' é um subgrafo induzido de G então v_w também é um vértice bloqueante de G; contradição.

□

As condições do Lema 4.1.4 podem ser generalizadas para grafos de visibilidade de leques, gerando o conjunto de condições necessárias descritas no Lema 4.1.5.

Lema 4.1.5. *Seja G um grafo simples e C um circuito hamiltoniano em G. Se G é um grafo de visibilidade de um leque P e C corresponde à sequência de vértices na fronteira de P, então, G atende às seguintes condições:*

1. *($F1$) Existe um nó v cuja vizinhança é igual a $N(G) \setminus \{v\}$;*
2. *($F2$) Não existem ciclos ordenados sem corda com mais de três nós;*
3. *($F3$) Para todo par $(v_i, v_j) \notin A(G)$, com $v_i < v_j$, pelo menos uma das seguintes duas condições é válida:*
   - *(a) Existe um vértice bloqueante v_w na cadeia $C(v_i, v_j)$;*
   - *(b) v é o único vértice bloqueante de (v_i, v_j) em $C(v_j, v_i)$ e, para todo par invisível minimal (v_k, v_l), tal que $v_k < v_l$, separável de (v_i, v_j) por v, existe um vértice bloqueante v_w que bloqueia (v_k, v_l) na cadeia $C(v_k, v_l)$.*

Demonstração. A prova da necessidade das duas primeiras condições é similar à apresentada no Lema 4.1.4. Para a terceira condição necessária, suponha que exista um par invisível (v_i, v_j) em G. Segundo a condição $NC2$ (veja Lema 3.4.2), existe pelo menos um vértice bloqueante v_w para o par invisível (v_i, v_j). O par (v_i, v_j) não pode ser bloqueado por nenhum nó de $C(v_j, v)$ e $C(v, v_j)$, caso contrário, pela definição de vértice bloqueante, v_j ou v_i não seriam adjacentes ao nó universal v. Logo, v é o único vértice bloqueante do par possível em $C(v_j, v_i)$. Dessa maneira, ou $v_w \in C(v_i, v_j)$, ou $v_w = v$. A primeira opção é descrita no item (a) da terceira condição.

Suponha que $v_w = v$ e que exista outro par invisível (v_k, v_l) separável de (v_i, v_j) por v. Segundo a condição $NC3$ (veja Lema 3.4.3), (v_k, v_l) não pode ser bloqueado por v. Logo, (v_k, v_l) pode ser bloqueado apenas por nós em $C(v_k, v_l)$. □

Até o momento, não se sabe se as três condições do Lema 4.1.5 (4.1.4) são suficientes para que o par (G, C) seja um grafo de visibilidade de um leque (convexo) e o circuito hamiltoniano de G correspondente a sequência de vértices da fronteira do polígono. Se de fato estas condições descrevem uma subclasse de grafos de visibilidade e a sequência de vértices do polígono, elas devem, pelo menos, implicar nas quatro condições necessárias para grafos de visibilidade gerais. Este fato está demonstrado no Lema 4.1.7.

Antes disso, mostraremos um lema auxiliar para a prova do Lema 4.1.7. Para o próximo lema, considere que G é um grafo simples e C é um circuito hamiltoniano em G. Adicionalmente, considere que (G, C) atende as condições $F1$, $F2$, e $F3$ e que $G[D]$ é o subgrafo induzido por um ciclo ordenado D de tamanho d em G.

Um caminho P é *ordenado* em D se a ordem dos nós em P segue a ordem dos nós em D.

Lema 4.1.6. *Se $P_k = (v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$ é um caminho ordenado em D de tamanho $k \geq 2$ tal que $v_i < v_j$ e todo nó de $D \setminus \{v_i, v_j\}$ no caminho é o vértice bloqueante de algum par invisível em $G[D]$, então, dois nós não consecutivos em P_k não são adjacentes.*

Demonstração. A prova é por indução no tamanho do caminho. Se $k = 2$, temos que $P = (v_i, v_{i+1}, v_j)$. Como v_{i+1} é um vértice bloqueante de um par em $G[D]$, então, v_j não pode ser adjacente a v_i.

Suponha que existam dois nós $v_n < v_s$ em P_k, não consecutivos em P_k tal que ou $v_n \neq v_i$ ou $v_s \neq v_j$. Seja P' a subsequência de P_k que liga v_n e v_s. P' é um caminho, já que P é um caminho. Mas, por hipótese de indução v_n não pode ser adjacente a v_s em P'. Assim, temos que quaisquer par de vértices não consecutivos, com exceção de (v_i, v_j), em P_k não são adjacentes. Se $(v_i, v_j) \in A(G[D])$, então, temos um ciclo ordenado de tamanho maior que 4 sem cordas em D e consequentemente em G, contrariando a condição $F2$ para G. $\square$

Lema 4.1.7. *Se G é um grafo e C é um circuito hamiltoniano tal que (G, C) atende às condições do Lema 4.1.5, então, ele atende às condições necessárias $NC1$, $NC2$, $NC3$ e $NC4$ (veja Lemas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4).*

Demonstração. ($F2 \iff NC1$) As duas condições são equivalentes.

($F3 \implies NC2$) Como descrito na condição $F3$, para cada par invisível existe pelo menos um vértice bloqueante w, logo, satisfaz a condição $NC2$.

($F1, F3 \implies NC3$) Suponha que existam dois pares invisíveis minimais separáveis (v_i, v_j) e (v_k, v_l) com relação a algum vértice v_s. Sem perda de generalidade, suponha que $v_i < v_j < v_k < v_l$. Sejam w_1 e w_2 vértices bloqueantes de (v_i, v_j) e (v_k, v_l), respectivamente. Segundo a condição $F3$, $w_1 \in C(v_i, v_j)$ ou $w_1 = v \in C(v_j, v_i)$; e, $w_2 \in C(v_k, v_l)$ ou $w_2 = v \in C(v_l, v_k)$.

Suponha que $w_1 \in C(v_i, v_j)$ e $w_2 = v \in C(v_l, v_k)$. Como $v_i < v_j$, então, $v \in C(v_j, v_i)$ e $w_1 \neq w_2$. O mesmo pode ser afirmado quando $w_1 = v \in C(v_j, v_i)$ e $w_2 \in C(v_k, v_l)$. Suponha que $w_1 = v \in C(v_j, v_i)$ e $w_2 = v \in C(v_l, v_k)$. Note que, como $v_0 < v_i < v_j < v_k < v_l$, então, esses pares são separáveis também com relação a v. Mas, pela condição $F3$, dois pares separáveis com relação a v não podem ser mutuamente bloqueados por v; contradição.

Suponha que $w_1 \in C(v_i, v_j)$ e $w_2 \in C(v_k, v_l)$. Como os pares são separáveis com relação a v_s, independentemente da posição de v_s, $C(v_i, v_j)$ não tem nenhum nó em comum com $C(v_k, v_l)$, logo, podemos concluir que $w_1 \neq w_2$.

($F1, F2, F3 \implies NC4$) A quarta condição necessária impõe um limite de $d-3$ vértices bloqueantes associados a pares invisíveis minimais para todo ciclo ordenado D de tamanho $d \geq 4$. Seja $G[D]$ o subgrafo induzido por um ciclo ordenado D em G. Suponha que existam $d-2$ vértices bloqueantes associados a pares invisíveis minimais em $G[D]$. Sejam

v_n e v_s os dois nós de $G[D]$ que não são vértices bloqueantes associados a nenhum par invisível minimal em $G[D]$. Seja v_j o sucessor de v_i em D tal que $v_j < v_i$ segundo a ordem em C.

Note que, $v_i \neq v = v_0$, uma vez que existe um nó $v_j < v_i$. Logo, segundo a condição $F3$, v_i não pode ser vértice bloqueante de nenhum par invisível, já que não existem dois vértices v_k e v_l, com $v_k < v_l$, em D tal que $v_i \in D(v_k, v_l)$. Assim, sem perda de generalidade, assuma que $v_i = v_n$.

O mesmo pode ser afirmado sobre v_j, exceto que v_j pode ser igual a v. Seja P o caminho ordenado em D entre v_j e v_i. Assuma que $v_j \neq v$ e que $v_j = v_s$. Como todos os outros $d-2$ nós são vértices bloqueantes de algum par invisível minimal e $d \geq 4$, pelo Lema 4.1.6, v_j não pode ser adjacente a v_i; contradição.

Assuma que $v_j = v$. Dessa maneira, v_{j+1} não pode ser vértice bloqueante de nenhum par, uma vez que $v_j = v$ é adjacente a v_{j+2}. Assuma que $v_{j+2} = v_s$. Seja (v_k, v_l) um par de nós não consecutivos em P tal que $v_k < v_l$. Pelo Lema 4.1.6, nenhum par de nós de $D[v_k, v_l]$ são adjacente entre si em $G[D]$. Então, todo nó $v_m \in D(v_k, v_l)$, que, por hipótese, é um vértice bloqueante de algum par invisível minimal em $G[D]$, é um vértice bloqueante do par (v_k, v_l). Dessa maneira, apenas os nós consecutivos de um nó de P são pares invisíveis minimais em $G[D]$. Como P tem tamanho $d-2$, temos $d-3$ pares invisíveis minimais e $d-3$ vértices bloqueantes destes pares. Logo, ou (v_n, v_s) não é um par invisível minimal, ou o par é um par invisível minimal, que pode ser associado a um vértice bloqueante de P. Assim, $v_j = v$ não é associado a nenhum par invisível minimal; contradição. $\square$

Note que, todo grafo G com circuito hamiltoniano C que atende às condições $CF1-CF3$ também atende às condições $F1-F3$. Dessa forma, G atende as condições $NC1-NC4$.

Corolário 4.1.1. *Se G é um grafo e C é um circuito hamiltoniano em G tal que (G, C) atende as condições do Lema 4.1.4, então, ele atende às condições necessárias $NC1$, $NC2$, $NC3$ e $NC4$ (veja Lemas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4).*

Os resultados do Lema 4.1.7 e Corolário 4.1.1 mostram que o par (G, C) que atendem as condições dos Lemas 4.1.5 e 4.1.4 também atendem as condições dos Lemas 3.4.1 - 3.4.4.

Como Ghosh mostrou [23] que um par (G, C) que atende as condições do Lemas 3.4.1 - 3.4.4 são grafos que atendem as condições propostas por Abello e Kumar [2], é possível utilizar o algoritmo dos mesmos para obter uma pseudoconfiguração de pontos e um pseudopolígono.

Um pseudopolígono é denominado de *pseudoleque* se existe um vértice v que enxerga todos os outros vértices do pseudopolígono. Um pseudoleque é dito *convexo* se v é um

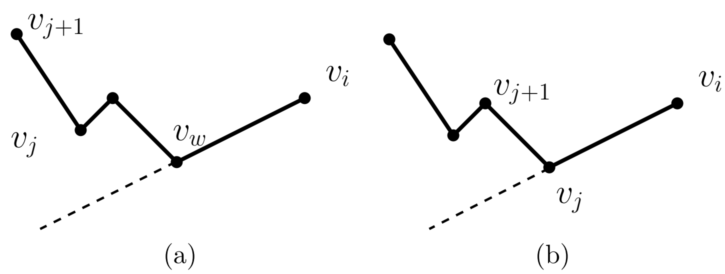


Figura 4.2: Figuras ilustrando os casos da tese do Lema 4.2.2

vértice convexo no pseudopolígono.

Dessa maneira, a partir de um par (G, C) que atende as condições 4.1.7, podemos construir um pseudoleque com a combinação dos resultados descrita acima. Isto resulta em uma caracterização completa para pseudoleques. Na próxima seção, porém, descreveremos uma prova alternativa para a construção de um pseudoleque convexo a partir de um par (G, C) que atende as condições $CF1 - CF3$ do Lema 4.1.4.

4.2 Grafos de Visibilidade de Pseudoleques Convexos: Caracterização

Nesta seção, mostraremos que as condições do Lema 4.1.4 são necessárias e suficientes para que um par (G, C) sejam o grafo de visibilidade de um pseudoleque convexo $\mathcal{P}$ tal que C seja a sequência circular de vértices de $\mathcal{P}$ (veja Teorema 4.2.1). Adicionalmente, mostraremos que o grafo de visibilidade vértice-aresta não contém mais informação do que o grafo de visibilidade para leques convexos em posição geral. O Lema 4.2.3 demonstra esta última afirmação, mostraremos algumas propriedades utilizadas nesse lema.

Lema 4.2.1. *Seja G um grafo e C um circuito hamiltoniano em G tal que (G, C) atende às condições $CF1-CF3$. Seja D o subgrafo induzido por um ciclo ordenado. Se existe um par invisível (v_i, v_j) em $G[D]$ tal que $v_i < v_j$, então, existe um conjunto $W = \{w_1, ..., w_r\}$ de vértices bloqueantes do par (v_i, v_j) em $D(v_i, v_j)$, ordenado segundo a ordem de D, tal que $(v_i, w_1), (v_j, w_r) \in A(G[D])$.*

Demonstração. Um par invisível em D também é invisível em C. Segundo a condição $CF3$, existe pelo menos um vértice bloqueante em $C(v_i, v_j)$. Como D é um ciclo ordenado, existe um caminho entre dois nós v_i e v_j em D composto apenas por nós de $C[v_i, v_j]$. Seja $W = \{w_1, ..., w_r\}$ o conjunto de todos os vértices bloqueantes do par em $D(v_i, v_j)$ ordenados segundo a ordem de D. Suponha que v_i não é adjacente a w_1. Então, (v_i, w_1) também é um par invisível em D. De forma análoga ao par (v_i, v_j), existe um vértice

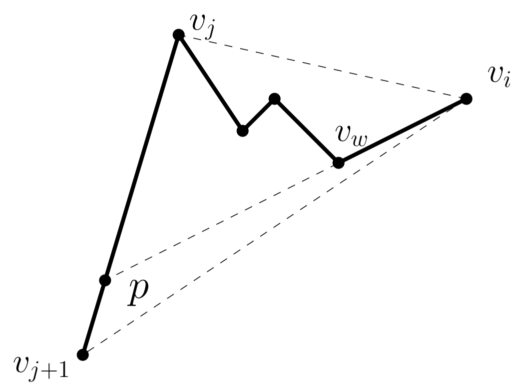


Figura 4.3: Se v_i não enxerga v_j, v_w está dentro do triângulo $v_iv_jv_{j+1}$.

bloqueante w' em $D(v_i, w_1)$. Segundo a definição de vértice bloqueante, nenhum nó de $D[v_i, w')$ é adjacente a nenhum nó de $D(w', w_1]$. Mas, como $D(w_1, v_j] \in D(w', v_j]$, então, w' também é vértice bloqueante do par (v_i, v_j). Mas, $w' < w_1$, logo, w_1 não é o primeiro vértice bloqueante do par, contradição. A prova é análoga para v_j e w_r. □

Corolário 4.2.1. *Seja P um leque convexo e (v_i, v_j) um par invisível em P e seja $W = \{w_1, ..., w_r\}$ o conjunto de todos os vértices bloqueantes do par em $C(v_i, v_j)$ ou $C(v_j, v_i)$ na ordem definida em V. Então v_i enxerga w_1 e v_j enxerga w_r, ou, v_j enxerga w_1 e v_i enxerga w_r.*

Lema 4.2.2. *Sejam P um leque convexo, v_i um de seus vértices e v_jv_{j+1} uma de suas arestas. Se $v_i < v_j$ e v_i não enxerga v_{j+1}, então, ou v_i não enxerga nenhum ponto da aresta v_jv_{j+1}, ou v_i enxerga somente v_j em v_jv_{j+1}.*

Demonstração. O lema está ilustrado na Figura 4.2. Pela condição $CF3$ do Lema 4.1.4, existe um vértice v_w bloqueante na cadeia $C(v_i, v_{j+1})$, assuma que v_w é o primeiro vértice bloqueante segundo a ordem dos vértices da cadeia $C(v_i, v_{j+1})$. Se $v_w \neq v_j$, v_i não enxerga todos os pontos das arestas formadas pelos vértices da cadeia $C(v_w, v_j]$, uma vez que todos os pontos estão à direita da reta direcionada v_iv_w.

Assim, assuma que $v_w = v_j$. Pelo Corolário 4.2.1, v_i enxerga v_j. Pelo Lema 4.1.3, v_j é um vértice reflexo em P. Isto implica que v_{j+1} está à direita da extensão do segmento v_iv_j e, portanto, v_i não enxerga nenhum ponto adicional da aresta v_jv_{j+1}. □

Podemos reescrever o Lema 4.2.2 para o caso em que $v_i > v_j$. Neste caso, se v_i não enxerga v_j, então, v_i não pode enxergar nenhum ponto da aresta v_jv_{j+1} além de v_{j+1}. A prova é simétrica à apresentada para o Lema 4.2.2.

Lema 4.2.3. *Seja P um leque convexo em posição geral. Sejam G_V e G_{VE} os seus grafos de visibilidade entre vértices e de visibilidade vértice-aresta, respectivamente. Um*

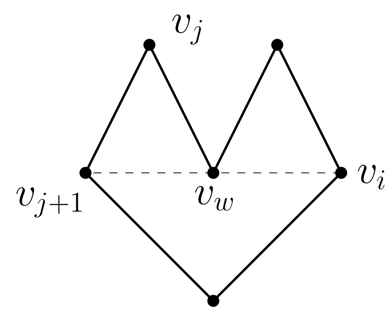


Figura 4.4: v_i enxerga v_{j+1} mas não enxerga a aresta e_j

vértice v_i enxerga fracamente uma aresta v_jv_{j+1} (i.e., $v_i \rightarrow v_jv_{j+1} \in A(G_{VE})$), tal que $v_j \neq v_i \neq v_{j+1}$, se e somente se:

1. *$v_i < v_j$ e $(v_i, v_{j+1}) \in A(G_V)$; ou*

2. *$v_i > v_j$ e $(v_i, v_j) \in A(G_V)$.*

Demonstração. Provaremos o caso em que $v_i < v_j$. O outro caso é simétrico.

($\Longleftarrow$) Se v_i enxerga v_j, então v_i enxerga ambos os extremos da aresta v_jv_{j+1} e, portanto, enxerga fracamente a aresta. Assim, assuma que v_i não enxerga v_j. Seja v_w o primeiro vértice bloqueante do par (v_i, v_j) contido na cadeia $C(v_i, v_{j+1})$. A condição $CF3$ do Lema 4.1.4 garante a existência de v_w. O vértice v_w está dentro do triângulo $v_iv_jv_{j+1}$ (veja Figura 4.3). Uma vez que v_i enxerga v_w, pelo Corolário 4.2.1, a extensão do segmento direcionado v_iv_w deve interceptar o polígono em algum ponto p. Como P está em posição geral, $p \neq v_{j+1}$. Uma vez que v_w está dentro do triângulo $v_iv_jv_{j+1}$ então $p \in v_jv_j{+}1$. Logo, $v_i \rightarrow e_j$.

($\Longrightarrow$) A prova é consequência direta do Lema 4.2.2.

$\square$

A propriedade de posição geral é importante para a validade do Lema 4.2.3. Um contra-exemplo, quando não assumimos posição geral, é mostrado na Figura 4.4.

Corolário 4.2.2. *Seja G_V um grafo de visibilidade de um leque convexo P em posição geral. Então, podemos construir em tempo polinomial o grafo $G_{VE}(P)$ a partir de G_V.*

O Lema 4.2.3 sugere que é possível extrair as informações de visibilidade entre vértices e arestas usando apenas as informações contidas no grafo de visibilidade. Uma vez que as condições necessárias $CF1 - CF3$ do Lema 4.1.4 lidam com o conhecimento de vértices bloqueantes de um par invisível, isso sugere que talvez possamos construir um grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato a partir destas condições necessárias. Este tópico é tratado no próximo lema.

Lema 4.2.4. *Seja G um grafo com um circuito hamiltoniano C. Suponha que $N(G) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ esteja totalmente ordenado de acordo com C. Seja $E = \{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$ o conjunto de arcos de C tal que $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Seja $\tilde{G}$ um grafo tal que $N(\tilde{G}) = E \cup N(G)$ e que $(v_k, e_i) \in A(\tilde{G})$ se e somente se: (1) $v_k < v_i$ e $(v_k, v_{i+1}) \in A(G)$ ou; (2) $v_k > v_i$ e $(v_k, v_i) \in A(G)$ ou; (3) $k = i$ ou $k = i + 1$. Se (G, C) atende as condições $CF1 - CF3$ do Lema 4.1.4 então $\tilde{G}$ é um grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato (i.e., atende as condições do Lema 3.7.1).*

Demonstração. Chamaremos os elementos de E de arestas e os nós de $N(G)$ em $\tilde{G}$ de vértices. Note que a construção das arestas de $\tilde{G}$ é feita de acordo com as condições do Lema 4.2.3, com a adição de uma condição para garantir que um vértice é adjacente às arestas às quais ele pertence. De acordo com a construção, $\tilde{G}$ é bipartido pelos conjuntos $N(G)$ e E. Assuma, sem perda de generalidade, que $v_0 = v$ é o nó universal indicado pela condição $CF1$.

Sejam e_i e e_j duas arestas de $\tilde{G}$ tais que $e_i < e_j$. Seja v_k um vértice de $C[v_{j+1}, v_i]$ em $\tilde{G}$ tal que v_k é adjacente a e_i e e_j, mas não é adjacente a nenhuma aresta de $C(v_i, v_j)$. Note que, pela construção, v_k não é adjacente a nenhum nó da cadeia $C(v_{i+1}, v_{j+1})$ e que v_k é adjacente a v_{i+1} e v_{j+1} em G. Temos os seguintes casos possíveis: $(v_k < v_i < v_{j+1})$ ou $(v_i < v_{j+1} < v_k)$.

$(v_k < v_i < v_{j+1})$: Este caso é equivalente ao primeiro caso do Lema 3.7.1 (veja Figura 3.15). Dividiremos a prova em três afirmações: $(v_{i+1}, e_j) \in A(\tilde{G})$, $(v_j, e_i) \notin A(\tilde{G})$ e v_{i+1} é um ponto de articulação do subgrafo induzido em $\tilde{G}$ pelos vértices e arestas do intervalo $C[v_k, v_j]$.

$((v_{i+1}, e_j) \in A(\tilde{G}))$: Como $v_{i+1} \le v_j$, então, se a afirmação for verdadeira, $(v_{i+1}, v_{j+1}) \in A(G)$. Assuma que v_{i+1} não é adjacente a v_{j+1} em G. Pela condição $CF3$, existe um vértice bloqueante v_w na cadeia $C(v_{i+1}, v_{j+1})$. Assuma, sem perda de generalidade, que v_w é o único vértice bloqueante na cadeia e que v_{i+1} e v_{j+1} são adjacentes a v_w, segundo o Lema 4.2.1. Isso significa que temos o ciclo $(v_k, v_{i+1}, v_w, v_{j+1})$ em G. Porém, v_k não é adjacente a v_w, segundo a hipótese (i.e., caso contrário, v_k enxergaria uma aresta de $C[v_{i+1}, v_j]$), e assumimos que v_{i+1} não é adjacente a v_{j+1}. Portanto, o ciclo $(v_k, v_{i+1}, v_w, v_{i+1})$ é um ciclo ordenado sem corda em G, contradizendo a condição $CF2$. A adição de outros vértices bloqueantes simplesmente aumentariam o tamanho do ciclo.

$((v_j, e_i) \notin A(\tilde{G}))$: Como $v_i < v_j$, pela construção, isso implica que $(v_i, v_j) \in A(G)$. Como v_k não é adjacente à aresta e_{j-1}, por hipótese, então v_k não é adjacente a v_j, pela construção. Pela condição $CF3$, existe pelo menos um vértice bloqueante na cadeia $C(v_k, v_j)$. Assuma que v_w é o primeiro vértice bloqueante do par (v_k, v_j). Como v_k é adjacente a v_{i+1}, então, $v_{i+1} \le v_w < v_j$. Pela definição de vértice bloqueante, isto implica que v_j não é adjacente a v_i. Logo, $(v_j, e_i) \notin A(\tilde{G})$.

Se v_{i+1} é um ponto de articulação, nenhum vértice de $C[v_k, v_{i+1})$ pode ser adjacente

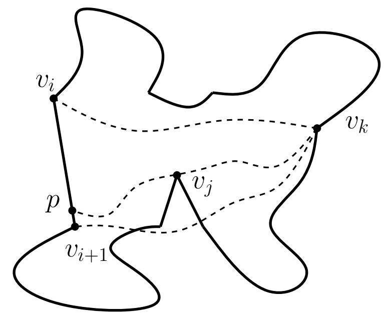


Figura 4.5: Ilustração de um caso do Lema 4.2.5

a nenhuma aresta de $C(v_{i+1}, v_j]$ em $\tilde{G}$ e vice-versa. Pela construção, isso é equivalente a dizer que v_{i+1} é um vértice bloqueante do par (v_k, v_j) em G. Suponha que v_{i+1} não é um vértice bloqueante do par (v_i, v_j) em G. Isto significa que v_k é adjacente a pelo menos um vértice de $C(v_{i+1}, v_j)$. Mas dessa forma, segundo a construção de $\tilde{G}$, v_k é adjacente a uma aresta de $C(v_i, v_j)$; contradição.

$(v_i < v_{j+1} < v_k)$: A prova é simétrica ao primeiro caso, derivando o segundo caso do Lema 3.7.1 (veja Figura 3.15).

□

Através do Teorema 3.7.1, sabemos que existe um pseudopolígono $\mathcal{P}$ cujo grafo de visibilidade vértice-aresta é isomorfo a $\tilde{G}$. Como $\tilde{G}$ foi obtido a partir de um grafo G e um circuito hamiltoniano C que atendem as condições $CF1, CF2$ e $CF3$ do Lema 4.1.4, é intuitivo pensar que as informações contidas em G estão de alguma forma expostas em $\mathcal{P}$. Não só o grafo de visibilidade vértice-aresta de $\mathcal{P}$ é isomorfo a $\tilde{G}$, mas o grafo de visibilidade de $\mathcal{P}$ é isomorfo a G, como mostrado no Lema 4.2.5.

Note que o vértice $v = v_0$ é convexo em $\mathcal{P}$, uma vez que v_1 é adjacente a $v_0 = v$ em G e v_{n-1} é adjacente a $v_n = v$, logo, segundo a construção de $\tilde{G}$, $(v_1, e_n), (v_{n-1}, e_1) \in A(\tilde{G})$. Adicionalmente, usando o mesmo argumento, o vértice v enxerga todas as arestas de $\mathcal{P}$.

Lema 4.2.5. *Se $v_k \to e_i$ e $k < i$ ou $v_k \to e_{i+1}$ e $i < k$, então, v_k e v_{i+1} são mutuamente visíveis em $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Provaremos o resultado para o caso em que $k < i$, o outro é simétrico.

Assuma que v_k não enxerga v_{i+1}. Isto significa que o segmento de pseudolinha $v_k v_{i+1}$ intercepta o exterior de $\mathcal{P}$. Uma vez que v_k não enxerga v_{i+1}, existe, pela definição, uma testemunha v_j (veja Figura 4.5), que v_k enxerga, tal que a extensão do segmento $v_k v_j$ intercepta e_i em p. Note que $p \neq v_{i+1}$, senão v_k enxergaria v_{i+1}.

Isso implica que nenhum vértice de $C[v_{i+1}, v_j)$ enxerga nenhuma aresta de $C[v_j, v_k)$, ou nenhum vértice de $C[v_k, v_j)$ enxerga nenhuma aresta de $C[v_{i+1}, v_j)$, já que, caso contrário, existiria uma pseudolinha que cruzaria a pseudolinha $v_j v_k$ $(v_k v_l)$ em dois pontos distintos.

Como $v_k < v_{i+1}$, então, $v \in C(v_{i+1}, v_k)$. Mas $v \notin C[v_{i+1}, v_j)$ ou $v \notin C(v_j, v_k]$, já que o mesmo implica que v não enxerga alguma aresta. Mas $v \neq v_j$ uma vez que v_j é um vértice reflexo (i.e., v_{j+1} não enxerga e_{j-1} e v_{j-1} não enxerga e_j); contradição. □

De acordo com o lema anterior, o vértice v de $\mathcal{P}$ enxerga todos os vértices de $\mathcal{P}$, já que o mesmo enxerga todas as arestas do mesmo. Assim, $\mathcal{P}$ é um pseudoleque convexo.

Observe que o Lema 4.2.5 demonstra que $(v_i, v_j) \in A(G) \Longrightarrow (v_i, e_{j-1}) \in A(G_{VE}(\mathcal{P}))$ $\Longrightarrow (v_i, v_j) \in A(G_V(\mathcal{P}))$ para $v_i < v_j$ e simetricamente para $v_i > v_j$. Concluímos que como $A(G) = A(G_V)$ e $N(G) = N(G_V) = V$, temos $G_V = G$. Devido a construção de um pseudoleque convexo $\mathcal{P}$, concluímos que as condições expostas no Lema 4.1.4 são suficientes para grafos de visibilidade de pseudoleques convexos. A necessidade dessas condições é anunciada no próximo lema, cuja prova é análoga a prova do lema 4.1.4.

Lema 4.2.6. *Se G é o grafo de visibilidade de um pseudoleque convexo $\mathcal{P}$ e C é o circuito hamiltoniano em G que corresponde a $\mathcal{P}$, então, (G, C) satisfaz as condições $CF1 - CF3$.*

Teorema 4.2.1. *Seja $\tilde{G}$ o grafo de visibilidade vértice-aresta abstrato obtido a partir de um grafo G que atende às condições do Lema 4.1.4. Existe um pseudoleque convexo $\mathcal{P}$, tal que o grafo de visibilidade $G_V(\mathcal{P})$ é isomorfo a G e o seu grafo de visibilidade vértice-aresta $G_{VE}(\mathcal{P})$ é isomorfo a $\tilde{G}$.*

Chamaremos todo grafo G que atende às condições do Lema 4.1.4 de *grafo de visibilidade abstrato* de um leque convexo. O Teorema 4.2.1 e o Lema 4.2.6 mostram que as condições $CF1 - CF3$ expostas no lema 4.1.4 são necessárias e suficientes para grafos de visibilidade de pseudoleques convexos em conjunto com o seu circuito hamiltoniano correspondente a sequência de vértices do polígono. Assim, temos uma caracterização desta subclasse de grafos de visibilidade. Adicionalmente, é fácil notar que a construção de $\tilde{G}$ e a verificação das condições $CF1 - CF3$ podem ser feitas em tempo polinomial. Como a construção do pseudoleque convexo a partir de $\tilde{G}$ também pode ser feita em tempo polinomial (veja o algoritmo de reconstrução de um polígono a partir de um grafo de visibilidade vértice-aresta em [36], temos que os problemas de Reconstrução e Reconhecimento para essa classe de grafos podem ser resolvidos em tempo polinomial.

A existência de $\mathcal{P}$ levanta duas questões: existe um polígono P tal que $G_V(P) \cong G_V(\mathcal{P})$? Existe algum pseudoleque convexo $\mathcal{P}$ cujo grafo de visibilidade não é isomorfo ao de nenhum polígono?

Podemos tentar responder à primeira questão resolvendo o problema de realizabilidade da pseudoconfiguração de pontos $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ de $\mathcal{P}$. É importante notar que $\mathcal{P}$ é apenas um dos pseudopolígonos possíveis de serem construídos utilizando $\tilde{G}$. Logo, se o arranjo induzido por $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ não for esticável, nada garante que não exista outro pseudopolígono com o mesmo grafo de visibilidade em outra pseudoconfiguração de pontos realizável. Até o momento da escrita deste texto, não conseguimos achar um exemplo de um pseudoleque convexo que contrariasse a segunda questão. Levantamos a questão com a seguinte conjectura:

Conjectura 4.2.1. *Para todo pseudoleque convexo $\mathcal{P}$ existe um leque convexo P, tal que $G_V(P) \cong G_V(\mathcal{P})$.*

Capítulo 5

Dificuldade dos Problemas de Reconstrução e Reconhecimento

Neste capítulo, buscamos analisar a dificuldade das diversas variações dos problemas de reconhecimento e reconstrução para leques convexos assumindo diferentes tipos de informações sobre o polígonos.

5.1 Relações entre os Problemas de Reconhecimento e Reconstrução de Leques Convexos

A Figura 5.1 resume as abordagens e resultados para os problemas de reconhecimento envolvendo leques convexos tratados nesta dissertação. As setas sólidas representam o que pode ser obtido a partir do objeto de origem. Quanto às setas tracejadas, elas representam os problemas de decisão que perguntam se existe um objeto isomorfo ou similar ao objeto de origem. Os problemas $RgLC(G, C)$, $RgLC(\tilde{G}, C)$ e $RgLC(\lambda, C)$ representam os problemas de reconhecimento de um grafo de visibilidade entre vértices, grafo de visibilidade vértice-aresta e tipo de ordem de um leque convexo, respectivamente, com a adição de um circuito hamiltoniano como entrada.

No capítulo anterior, foi mostrada uma caracterização de grafos de visibilidade entre vértices de um pseudoleque convexo. Um dos resultados colaterais da prova da caracterização mostra que é possível reconstruir um pseudoleque convexo $\mathcal{P}$ a partir de um grafo que atende as condições $CF1 - CF3$ do Lema 4.1.4, resolvendo o problema de reconstrução para grafos de visibilidade de pseudoleques convexos. Como os grafos de visibilidade de pseudoleques convexos são uma superclasse de grafos de visibilidade de leques convexos, sua caracterização pode ajudar nos problemas de caracterização e reconhecimento de grafos de visibilidade de leques convexos. Uma maneira de tentar resolver esses problemas

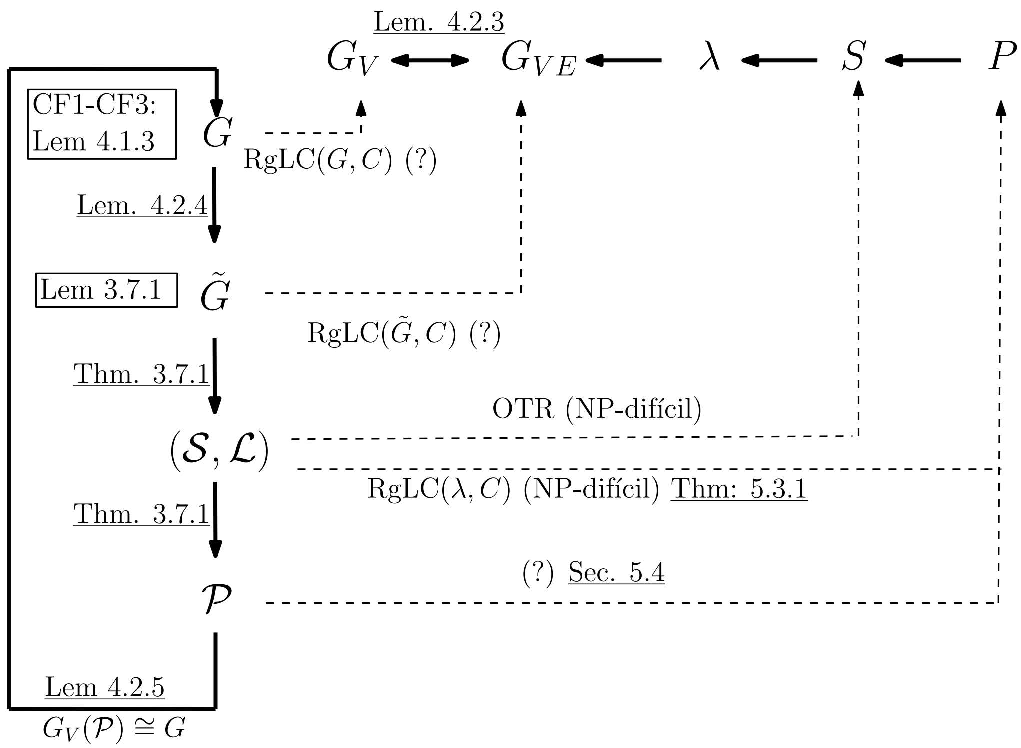


Figura 5.1: Relação entre os problemas envolvendo leques convexos tratados nesta dissertação.

é tentar achar um leque convexo cujo grafo de visibilidade é isomorfo ao grafo de visibilidade de $\mathcal{P}$ através do problema de esticamento de pseudolinhas ou realização de tipo de ordem. Para isso, buscamos propriedades nos arranjos induzidos por (pseudo)polígonos que induzem o mesmo grafo de visibilidade. Esta abordagem é tratada na Seção 5.4.

Pelo Lema 4.2.3 mostramos que é possível extrair as informações de visibilidade entre vértices e arestas a partir do grafo de visibilidade entre vértices. Isso nos induz a pensar que o problema de reconhecimento de grafos de visibilidade vértice-aresta não é mais fácil que o problema de reconhecimento de grafos de visibilidade entre vértices para leques convexos em posição geral. Dessa forma, analisamos o mesmo problema com tipo de ordem, que contém estritamente mais informações geométricas sobre o polígono. Porém, o Teorema 5.3.1 mostra que esse problema é NP-difícil.

Para o problema de reconstrução de leques convexos a partir do seu grafo de visibilidade entre vértices, analisamos se o problema se relaciona com o mesmo problema definido para polígonos unimonótonos. Mostramos que é possível transformar um leque convexo em um polígono unimonótono, e vice-versa, de maneira que a visibilidade entre os vértices do polígono é mantida. Isso é mostrado na seção a seguir.

5.2 Leques Convexos e Polígonos Unimonótonos

Seja P um leque convexo e H um semicírculo centrado em v suficientemente grande para que P esteja completamente dentro de H. Projete os vértices $v_i \in V \setminus \{v\}$ de P em H através da extensão das arestas vv_i. A ordem anti-horária produzida pelas projeções em H é monótona com relação a ordem de $V \setminus \{v\}$. Essa propriedade assemelha-se à noção de monotonicidade para polígonos, o que nos induz a pensar que deve existir uma relação entre leques convexos e polígonos monótonos. O Teorema 5.2.1 mostra essa relação.

Sejam Π e Ω dois planos ortogonais em $\mathbb{R}^3$ (veja Figura 5.2). Para cada um destes planos, acrescente uma reta ideal a este tal que toda reta paralela ao plano intercepta o mesmo em um ponto desta reta ideal e, se duas dessas retas forem paralelas entre si, elas interceptam o mesmo ponto ideal. A adição da reta ideal transforma ambos os planos em planos projetivos [30]. Seja p um ponto não incidente a Π ou Ω. Mapeamos um ponto q de Ω a um ponto q' de Π, se q' incide na reta pq. Note que este mapeamento é uma bijeção e, como Π e Ω são planos projetivos, este mapeamento pode ser entendido como um *automorfismo* de um plano projetivo, um mapeamento de um plano sobre si mesmo que mantém colinearidade entre pontos. Dessa maneira, esse mapeamento é uma perspectividade [21, 30].

Considere a seguinte denominação para a prova do teorema abaixo. Dizemos que uma reta é *paralela* a um plano projetivo se esta reta intercepta o plano em um ponto ideal ou a reta está contida no plano. Dois planos projetivos são *paralelos* entre si se os planos

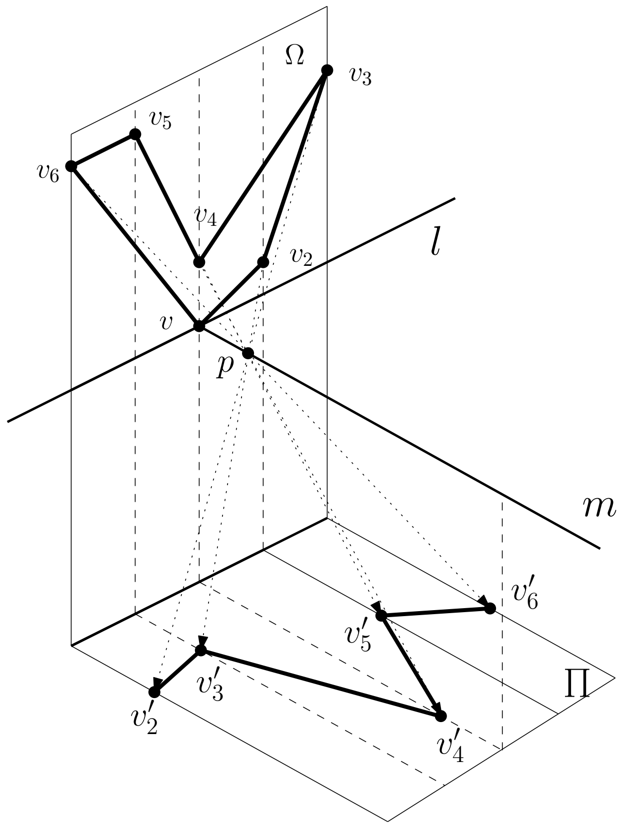


Figura 5.2: Representação gráfica da transformação T do Teorema 5.2.1.

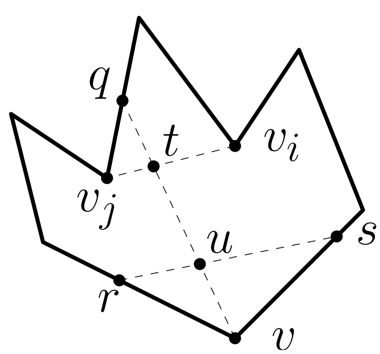


Figura 5.3: O ponto t não é externo ao polígono.

se interceptam em uma reta ideal ou são coincidentes. Duas retas em um mesmo plano projetivo são *paralelas* se elas não são concorrentes em um ponto não ideal.

O teorema a seguir utiliza o conceito de quádruplas e conjugados harmônicos. Veja a Seção 3.1 na página 10.

Teorema 5.2.1. *Seja P um leque convexo tal que v é um vértice universal de P. Então existe um polígono unimonótono U cuja base é $r's'$ tal que $G_V(U) \setminus \{r', s'\}$ é isomorfo a $G_V(P) \setminus \{v\}$.*

Demonstração. Para esta prova, deformaremos P com uma transformação perspectiva T através de um ponto p. Construiremos um polígono unimonótono U através das imagens dos pontos de P e mostraremos que se dois vértices de P são mutuamente visíveis, então suas imagens são visíveis em U. Refira-se à Figura 5.2 para melhor visualizar a transformação T, descrita a seguir.

Assuma que P esteja contido em um plano projetivo Ω. Suponha que exista uma reta l contida em Ω que intercepta o vértice universal v e nenhum outro ponto de P. Note que pela definição de leque convexo, o ângulo interno em v não pode ser igual a π, ou seja, v_{n-1}, v_1 e v não são colineares. Esse fato garante a existência da reta l.

Seja Π um plano ortogonal a Ω e paralelo a l tal que Π não intercepta o polígono P. Seja m a reta paralela a Π que passa por v e seja p um ponto de m diferente de v. Dizemos que T é a perspectividade de Ω a Π através do ponto p. Por conveniência, para $q \in \Omega$, denote $q' = T(q) \in \Pi$.

Uma vez que definimos a transformação T, o próximo passo é construir um polígono unimonótono. Sejam r e s pontos do intervalo aberto das arestas vv_1 e vv_{n-1} de P, respectivamente. Definimos como U o polígono formado pelo conjunto de pontos $\{r', s', v'_1, v'_2, ..., v'_{n-1}\}$ nesta ordem. Seja C' a sequência $(r', s', v'_1, v'_2, ..., v'_{n-1}, r')$. A seguir, mostraremos que U é um polígono simples e unimonótono.

Suponha que duas arestas $v'_i v'_{i+1}$ e $v'_j v'_{j+1}$ de U se interceptem em um ponto q'. Segundo o Lema 3.2.1, existe um ponto t' no segmento externo que une $v'_i v'_{i+1}$ tal que $(v'_i v'_j; q', t')$ é uma quádrupla harmônica. Uma vez que T é uma transformação perspectiva, $(v_i, v_j; q, t)$ é uma quádrupla harmônica em Ω e, portanto, q está contido na aresta $v_i v_j$. O mesmo pode ser afirmado sobre a aresta $v_k v_l$. Logo, $v_i v_j$ e $v_k v_l$ se cruzam em P: contradição.

Resta mostrar que a cadeia poligonal formada pelos vértices da cadeia $C'(v'_1, v'_{n-1})$ é monótona. Como a reta m é paralela a Π, v é mapeado a um ponto ideal de Π. Dessa maneira, sejam q e t dois pontos distintos da cadeia $C[v_1, v_{n-1}]$, então, as retas $v'q'$ e $v't'$ são paralelas em Π. Se k é uma reta ortogonal às retas incidentes em v', então, toda reta ortogonal a k ou não intercepta a cadeia $C'[v'_1, v'_{n-1}]$, ou intercepta a mesma em um ponto ou uma aresta, caso contrário, existiria um segmento de reta vq, tal que q é um ponto da fronteira de P, que interceptaria o exterior de P. O mesmo pode ser afirmado sobre o segmento $r's'$. Dessa forma, U é um polígono unimonótono com base $r's'$.

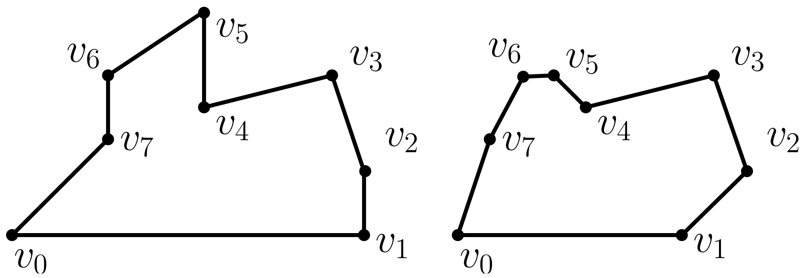


Figura 5.4: Dois polígonos unimonótonos tal que a visibilidade entre os vértices são equivalentes com exceção da base.

O último passo é mostrar que se dois vértices de P são mutuamente visíveis, então suas imagens são mutuamente visíveis em U.

Sejam v_i, v_j dois vértices não consecutivos mutuamente visíveis em P tal que $v_i < v_j$ (veja Figura 5.3). Seja t um ponto do intervalo aberto do segmento v_iv_j. Seja q o ponto de interseção da extensão do segmento vt com a fronteira do polígono. Seja u o ponto de interseção da reta vt com o segmento rs. Note que t e u são pontos não externos a P. Adicionalmente, perceba que $(q, u; t, v)$ é uma quádrupla harmônica. Dessa maneira, $(q', u'; t', v')$ é uma quádrupla harmônica e como t' está contido no segmento $q'u'$, então t' é um ponto não externo a U.

Como t foi escolhido de forma arbitrária mostramos que o segmento $v_i'v_j'$ não intercepta o exterior de U. Isso conclui a prova do isomorfismo entre os grafos $G_V(P) \setminus \{v\}$ e $G_VU \setminus \{r', s'\}$ e, consequentemente, a prova do enunciado. □

De forma similar à transformação T do teorema anterior, podemos definir uma transformação T' do plano Π para Ω tal que podemos construir um leque convexo P em Ω através dos pontos de U em Π de maneira a conservar a visibilidade entre os vértices de U. Este fato é resumido no Corolário 5.2.1.

Corolário 5.2.1. *Se U é um polígono unimonótono cuja base é v_0v_1. Então existe um leque convexo P, com um vértice universal v, tal que $G_V(U)\setminus\{v_0, v_1\}$ é isomorfo a $G_V(P)\setminus \{v\}$.*

O Teorema 5.2.1 e o Corolário 5.2.1 mostram uma correspondência entre leques convexos e polígonos unimonótonos. Note que, se U está em posição geral, o polígono resultante da aplicação de T' não está necessariamente em posição geral. Um exemplo de um polígono nesta situação está mostrado na Figura 5.4a. No primeiro polígono da figura, após a aplicação da transformação T', as imagens dos vértices v_6, v_7 e o vértice universal v serão colineares.

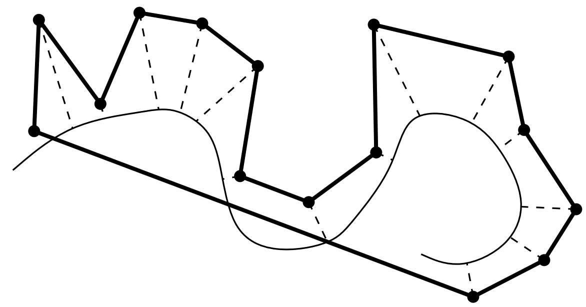


Figura 5.5: Um polígono unimonótono com relação a uma curva.

A partir do Corolário 5.2.1 podemos obter uma redução do problema de reconstrução de polígonos unimonótonos através do seu grafo de visibilidade para o mesmo problema de leques convexo. Descreveremos brevemente uma redução a seguir.

Seja (G, C) um grafo e um circuito hamiltoniano do mesmo. Suponha que G é o grafo de visibilidade de algum polígono unimonótono U e C é o circuito hamiltoniano de G correspondente à sequência de vértices da fronteira de U. Então, existe uma aresta $e = (v_i, v_j)$ em G tal que $v_i v_j$ é a base de U. Seja $G' = G \backslash \{v_i, v_j\}$ e adicione um nó v em G' tal que v é adjacente a $N(G) \backslash \{v_i, v_j\}$. Adicionalmente, construa uma sequência circular C' trocando em C os vértices v_i e v_j por v. Dessa forma, se reconstruirmos um leque convexo P a partir de G' podemos obter um polígono unimonótono N a partir da transformação T tal que $G_V(N) \cong G$ pela devida escolha dos pontos u e v da transformação T.

Porém, a redução no outro sentido já não é tão simples. Seja G grafo de visibilidade de um leque convexo P. Podem existir vários polígonos unimonótonos U com base uv tal que $G_V(U) \setminus \{u, v\}$ é isomorfo a $G \setminus v$ mas as vizinhanças de u e v em $G_V(U)$ são diferentes (veja Figura 5.4).

Intuitivamente, a transformação T do Teorema 5.2.1 deforma o leque P até que a cadeia $C[v_1, v_{n-1}]$ seja monótona com relação a uma reta. Lembre-se que essa cadeia produz uma ordem monótona com relação a um semicírculo. Formulamos a Conjectura 5.2.1 de que seja possível generalizar o conceito de monotonicidade, de uma cadeia poligonal, para uma curva simples e diferenciável e, dessa forma, produzir uma transformação semelhante a T para transformar essa cadeia em uma cadeia monótona com relação a uma reta.

Dizemos que uma cadeia poligonal é *monótona com relação a uma curva* se existe uma curva simples e diferenciável ℓ tal que para todo ponto p de ℓ, um dos raios partindo de p ortogonal à tangente da curva em p intercepta a cadeia em um único ponto ou contém uma aresta da cadeia. Um polígono P é chamado de *unimonótono com relação a uma curva* (veja Figura 5.5) se P é um polígono simples formado por uma aresta (base) que liga os vértices extremos de uma cadeia monótona com relação a esta curva.

Conjectura 5.2.1. *Seja U um polígono unimonótono com relação a uma curva, cuja*

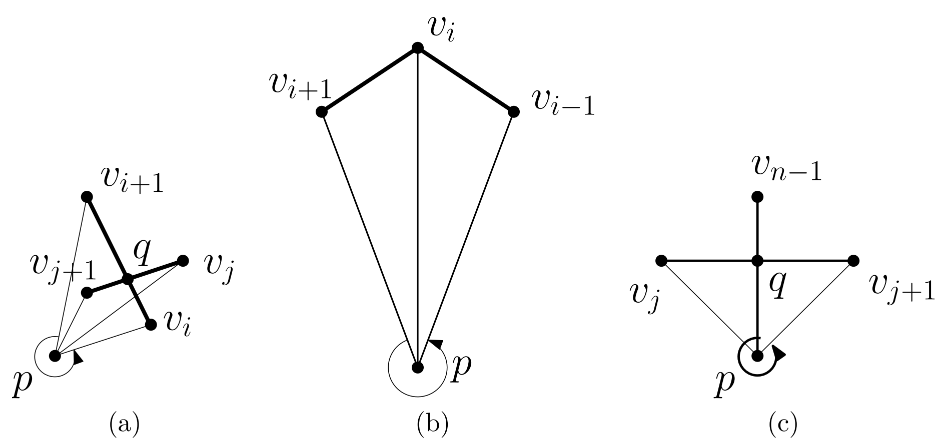


Figura 5.6: Ilustrações dos casos do Lema 5.3.1

base é $\{v_0, v_1\}$*. Então existe um polígono* P *unimonótono, cuja base é* $\{v'_0, v'_1\}$*, tal que* $G_V(U) \setminus \{v_0, v_1\}$ *é isomorfo a* $G_V(P) \setminus \{v'_0, v'_1\}$*.*

5.3 Dificuldade do Problema de Reconhecimento de Tipo de Ordem

No capítulo anterior, mostramos que é possível extrair o grafo de visibilidade vértice-aresta do grafo de visibilidade entre vértices de um leque convexo em posição geral. Uma vez que o tipo de ordem contém estritamente mais informações sobre um polígono, comparado aos grafos de visibilidade entre vértices e vértice-aresta [19, 37], levantamos, nesta seção, a questão da dificuldade do problema de reconhecimento do tipo de ordem de leques convexos em posição geral.

Primeiramente, definimos o problema. Seja $\lambda : S^3 \to \{+, -\}$ um mapeamento que associa triplas de elementos de um conjunto S a uma orientação positiva ou negativa. Seja C uma sequência circular sobre os elementos de S. Decida se existe um leque convexo P em posição geral tal que seu tipo de ordem corresponda a λ e a sequência de vértices da fronteira é isomorfa a C. Denominamos este problema de *reconhecimento de tipo de ordem de um leque convexo*: $RnLC(\lambda, C)$.

Mostramos no Teorema 5.3.1 que o problema $RnLC(\lambda, C)$ é NP-difícil. Utilizamos o fato de que a partir de qualquer (pseudo)configuração de pontos no plano, podemos construir um (pseudo)leque, como mostrado no lema a seguir:

Lema 5.3.1. *Seja* p *um ponto pertencente a uma (pseudo)configuração de pontos* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ *no plano, então existe um (pseudo)leque convexo* $\mathcal{P}$ *cujos vértices são os pontos da (pseudo)configuração e* p *é um vértice universal em* $\mathcal{P}$*.*

Demonstração. Divideremos a prova em dois casos: quando p pertence e quando não pertence à envoltória convexa de $\mathcal{P}$.

Seja γ a sequência circular anti-horária do pontos em torno de p. Sejam o e q dois pontos quaisquer de $\mathcal{S}$. Se p está na envoltória convexa, assuma que o e q são os pontos anterior e posterior de p na ordem anti-horária dos vértices da envoltória convexa. Faça $v_0 = p$, $v_1 = q$ e $v_{n-1} = o$ e, para todo par de pontos $r, s \in \mathcal{S}$ tal que $q < s < r < o$ em γ, faça $v_i = r$ e $v_j = s$ de forma que $i < j$. Seja $V = \{v_0 = p, v_1, ..., v_{n-1}\}$ o conjunto de vértices totalmente ordenado que definem o (pseudo)polígono $\mathcal{P}$. Seja E o conjunto de arestas de P tal que $e_i = v_i v_{i+1} \in E$ para todo $v_i \in V$.

Para que $\mathcal{P}$ seja um leque, duas condições devem ser satisfeitas: duas arestas e_i e e_j não podem se cruzar e p deve enxergar todos os outros vértices. Suponha que exista uma aresta $v_i v_{i+1}$ de E que cruze outra aresta distinta $v_j v_{j+1}$ de $\mathcal{P}$ (veja Figura 5.6a). Então, seja q o ponto de interseção entre as duas arestas. Note que p não é incidente à (reta) pseudolinha $v_i v_{i+1}$ nem à (reta) pseudolinha $v_j v_{j+1}$, caso contrário existiria uma (reta) pseudolinha incidente a três vértices. Logo, $v_i < q < v_{i+1}$ e $v_j < q < v_{j+1}$ na ordem circular em torno de p. Suponha que $v_i < v_j$. Dessa maneira, temos que $v_i < v_j < q < v_{j+1}$. Mas isso implica que ou $v_i < v_j < q < v_{i+1} < v_{j+1}$ ou $v_i < v_j < q < v_{j+1} < v_{i+1}$ na ordem circular em torno de p. Uma vez que v_j intercala os vértices v_i e v_{i+1} na ordem, $v_i v_{i+1}$ não pode ser uma aresta de γ, segundo a construção; contradição. O caso $v_j < v_i$ é análogo.

Suponha que $v_0 v_{n-1}$ cruza uma aresta $v_j v_{j+1}$ (veja Figura 5.6c). Adicionalmente, suponha que p não esteja na envoltória convexa. Note que não existe nenhum $v_i \in V$ tal que $v_j < v_i < v_{j+1}$ na ordem circular em torno de p, já que, caso contrário, v_{j+1} não seria o sucessor de v_j. Como as arestas se cruzam, $v_{j+1} < v_{n-1} < v_j$ em γ. Mas isto significa para todo vértice $v_i \in V \setminus \{v_j, v_{j+1}\}$, $v_{j+1} < v_i < v_j$. Logo, p está na envoltória convexa; contradição.

Assuma que p está na envoltória convexa de $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$. Neste caso, v_{n-1} não pode estar na envoltória convexa, já que existe pelo menos um vértice de $v_j v_{j+1}$ que intercepta o exterior de P; contradição. O caso em que existe uma aresta que cruza $v_0 v_1$ é análogo. $\square$

Lema 5.3.2. *Seja p um ponto pertencente à envoltória convexa de uma (pseudo)configuração de pontos $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ no plano, então existe um (pseudo)leque convexo $\mathcal{P}$ cujos vértices são os pontos da (pseudo)configuração e p é um vértice universal em $\mathcal{P}$.*

Demonstração. A demonstração é similar à do lema anterior. $\square$

Teorema 5.3.1. *RnLC(λ, C) é NP-difícil.*

Demonstração. A prova é por redução a partir do problema de realização de tipo de ordem [26] (OTR $\propto$ RnLC(λ, C)). Seja $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ uma pseudoconfiguração de pontos de uma instância do problema OTR. Seja $\lambda : \mathcal{S}^3 \to \{+, -\}$ a função de tipo de ordem da

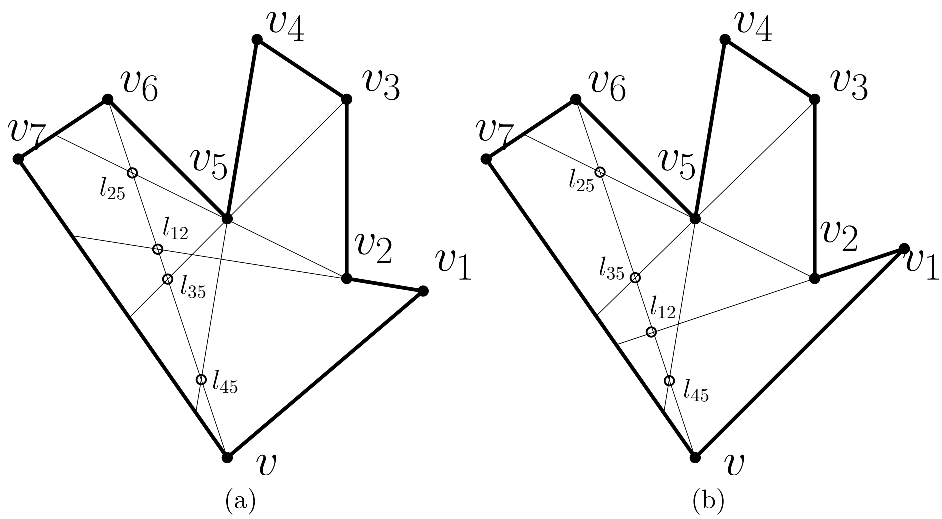


Figura 5.7: Dois polígonos com o mesmo grafo de visibilidade, mas arranjos diferentes.

pseudoconfiguração de pontos. Ache um ponto p que esteja na envoltória convexa da pseudoconfiguração de pontos e crie uma ordem circular C dos pontos em torno de p. Mapeie a instância $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ do problema OTR para o par (λ, C), que é uma instância do problema RnLC(λ, C).

Segundo o Lema 5.3.2, C descreve um pseudoleque convexo. Se a pseudoconfiguração de pontos $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ é realizável (i.e., existe configuração de pontos no plano com o mesmo tipo de ordem que a pseudoconfiguração) então a ordem C também induz um leque convexo com o mesmo tipo de ordem. Se existe um leque convexo P com o tipo de ordem equivalente a λ então o seu conjunto de pontos é isomorfo a $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ e portanto a pseudoconfiguração de pontos é realizável. $\square$

5.4 Arranjos Induzidos por Leques Convexos

Nesta seção, discutiremos algumas propriedades dos arranjos induzidos por leques convexos. Os polígonos das Figuras 5.7a e 5.7b possuem o mesmo grafo de visibilidade, porém, note que os arranjos induzidos pelos vértices dos polígonos são diferentes. Suponha que queiramos construir um novo leque convexo adicionando um vértice v_8 tal que o mesmo enxergue v_3 mas não enxergue v_1. Isto é impossível de ocorrer no polígono da Figura 5.7a, pois a face do arranjo na qual precisamos posicionar v_8 (i.e., a face posicionada à esquerda da reta v_3v_5 e à direita da reta v_1v_2) está contida dentro do polígono. Note, também, que se v_8 for posicionado de forma a enxergar v_7 (isto é, à esquerda da reta v_6v_7) então o mesmo enxergará v_2 em ambos os polígonos das Figuras 5.7a e 5.7b.

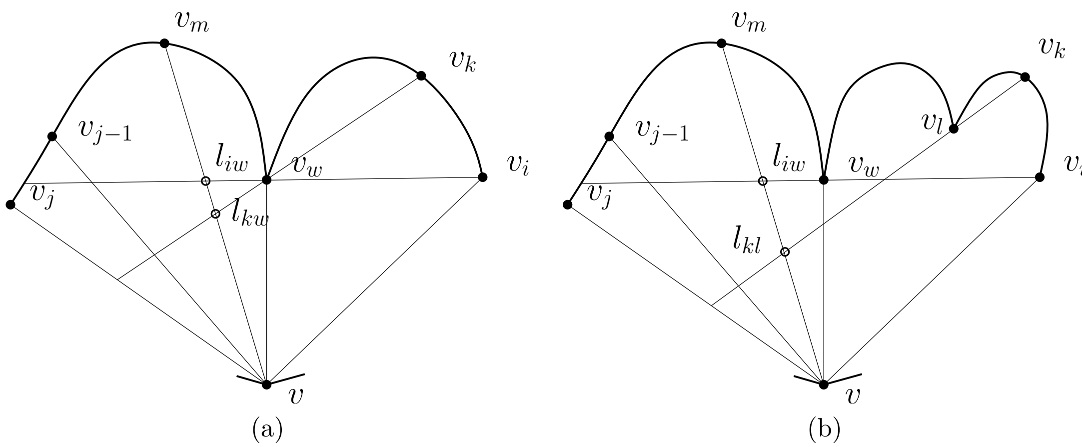


Figura 5.8: Figuras ilustrativas do Lema 5.4.1 e Corolário 5.4.2

Como observado nos exemplos das Figuras 5.7a e 5.7b algumas propriedades da visibilidade do polígono podem nos fornecer algumas informações sobre o arranjo de retas induzido pelo polígono. Apresentamos a seguir algumas propriedades das sequências locais das retas induzidas pelos vértices dos polígonos com o mesmo grafo de visibilidade.

Seja P um leque convexo e seja α_{ij} a sequência local da reta l_{ij} que passa pelos vértices v_i e v_j. Para as sequências locais, utilizaremos a notação v_i para indicar o ponto de interseção de todas as retas que passam por v_i (i.e., equivalente a $\{l_{ij} : \forall v_j \in V \setminus v_i\}$). Usaremos a notação α_i para indicar a sequência local da reta vv_i.

Lema 5.4.1. *Seja v_w um vértice bloqueante do par (v_i, v_{j-1}) e assuma que $(v_i, v_j) \in A(G_V)$ e $v_i < v_j$. Seja v_k um vértice de $C(v_i, v_w)$. Então, para todo $v_m \in C(v_w, v_j)$, $v < l_{kw} < l_{iw} < v_m$ em α_m.*

Demonstração. Veja a Figura 5.8a como referência. Como $v_i < v_k$ temos que v_k está à esquerda da reta v_iv_w, portanto, a reta v_kv_w está a esquerda da reta v_iv_w antes do ponto v_w. Após o ponto v_w, a ordem das retas é invertida. Isso significa que para qualquer reta que intercepte ambas as retas em pontos após v_w, temos que $l_{kw} < l_{iw}$ em sua sequência local.

Pelo fato de v_w ser um vértice bloqueante, todo $v_m \in C(v_w, v_j)$ está à direita das retas v_iv_w e v_kv_w e como ambos os vértices enxergam o vértice universal temos que $v < l_{kw} < l_{iw} < v_k$ em α_k. □

Lema 5.4.2. *Seja v_w um vértice bloqueante do par (v_i, v_{j-1}) e assuma que $(v_i, v_j) \in A(G_V)$ e $v_i < v_j$. Sejam v_k e v_l dois vértices da cadeia $C(v_i, v_w)$ tal que v_l é o primeiro vértice bloqueante do par (v_k, v_w). Então para todo vértice $v_m \in C(v_w, v_j)$ temos que $v < l_{kl} < l_{iw} < v_m$ em α_m (veja Figura 5.8b).*

Demonstração. A demonstração é similar à do lema anterior. □

As Figuras 5.7a e 5.7b mostram um exemplo das propriedades expressas pelo Lema 5.4.1 e pelo Corolário 5.4.2. Observe que para ambos os polígonos em α_6 temos que $l_{45} < l_{35} < l_{25}$. Note, porém, que a posição de l_{12} relativa às outras retas em α_6 não é necessariamente mantida.

Enquanto que estas propriedades não resumem toda informação que pode ser obtida sobre as sequências locais de leques convexos em geral, eles apresentam algumas propriedades do arranjo determinadas pela visibilidade entre vértices.

5.5 A Conjectura de Isotopia de Ringel e o Problema de Reconstrução

A conjectura de isotopia de Ringel [40, 26] afirma que um arranjo de retas L pode ser continuamente deformado para outro arranjo L' isomorfo a L tal que qualquer arranjo intermediário obtido no processo seja também isomorfo a L. Aplicando-se dualidade entre pontos e retas obtemos uma versão para tipo de ordem. Ou seja, dadas duas configurações de pontos com o mesmo tipo de ordem λ, podemos mover continuamente os pontos de S até obtermos S' de tal modo que qualquer configuração de pontos intermediária tenha o mesmo tipo de ordem.

Esta conjectura é falsa e alguns contra-exemplos já são conhecidos, sendo que o menor arranjo, em número de retas, contém 14 retas em posição geral [26, 48]. O Teorema da Universalidade de Mnëv [31] também contraria a conjectura com um resultado mais forte.

Através do Corolário 5.3.2 observamos que para toda configuração de pontos S podemos construir um leque convexo, ou seja, para todo tipo de ordem λ existe um leque convexo com o mesmo tipo de ordem. A falsidade da conjectura de Ringel dificulta o desenvolvimento de algoritmos indutivos para reconstrução de leques convexos, já que, ao reconstruir um leque convexo, estaremos fixando um tipo de ordem na configuração com um menor número de pontos ou retas. Existe pelo menos uma configuração de pontos com um determinado tipo de ordem tal que a adição de um novo ponto *pode* forçar a movimentação de pontos da configuração, se quisermos que o ponto adicionado enxergue um determinado conjunto de vértices, de tal maneira que mudamos o tipo de ordem.

Capítulo 6

Conclusões

Os principais resultados deste trabalho estão resumidos nos Teoremas 4.2.1 e 5.2.1. O primeiro mostra que as condições necessárias para leques convexos apresentadas no Lema 4.1.4 são suficientes para pseudoleques convexos. Este resultado, em combinação com a necessidade dessas condições para pseudoleques convexos implicadas no Lema 4.2.6, mostram uma caracterização completa dos grafos de visibilidade de pseudoleques convexos. Outra implicação desses resultados é que podemos resolver os problemas de Reconhecimento e Reconstrução desses grafos em tempo polinomial.

Um resultado colateral, mostrado pelo Lema 4.2.3, é que podemos obter as informações de visibilidade entre vértices e arestas de leque convexo em posição geral a partir do seu grafo de visibilidade entre vértices.

O teorema 5.2.1 mostra que podemos reduzir o problema de reconstrução de grafos de visibilidade de polígonos uniminótonos para o problema de reconstrução para grafos de visibilidade de leques convexos. Este resultado é alcançado através de uma transformação projetiva aplicada a um leque convexo.

Uma possível extensão para o trabalho é o estudo da esticabilidade de arranjos induzidos por leques convexos. Embora o problema de esticabilidade geral seja NP-difícil, os arranjos induzidos por leques convexos podem constituir uma classe especial com alguma propriedade que possa ser explorada para se decidir a esticabilidade em tempo polinomial. Neste sentido, o Lema 5.4.1 mostra uma propriedade comum das sequências locais de leques convexos com grafos de visibilidade isomorfos.

Bokowisk et al. [4, 38] desenvolveram alguns métodos para decidir a esticabilidade de casos especiais de arranjos de pseudolinhas no contexto de matróides orientáveis. É possível que a esticabilidade de algum arranjo da família de arranjos induzidos por leques convexos com o mesmo grafo de visibilidade possa ser decidida por algum desses métodos em tempo polinomial. Streinu [45] mostra que é possível decidir a esticabilidade de arranjos induzidos por polígonos *star-like* em tempo polinomial.

Referências Bibliográficas

[1] J. Abello, O. Egecioglu, and K. Kumar. Visibility graphs of staircase polygons and the weak Bruhat order, I: From visibility graphs to maximal chains. *Discrete & Computational Geometry*, 14:331–358, 1995. 10.1007/BF02570710.

[2] J. Abello and K. Kumar. Visibility graphs and oriented matroids. *Discrete & Computational Geometry*, 28:449–465, 2002.

[3] N. S. Bidokhti. On fully characterizing terrain visibility graphs. Master's thesis, University of British Columbia, 2012.

[4] J. Bokowski and B. Sturmfels. *Computational Synthetic Geometry*. Springer-Verlag, 1989.

[5] A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.

[6] S. Choi, S. Y. Shin, and K. Chwa. Characterizing and recognizing visibility graphs of funnel-shaped polygons. In *Proceedings of the Third International Symposium on Algorithms and Computation*, ISAAC '92, pages 219–228, London, UK, 1992. Springer-Verlag.

[7] P. Colley. Recognizing visiblity graphs of uni-monotone polygons. In *Proceedings of the 4th Canadian Conference on Computational Geometry*, 1992.

[8] P. Colley, A. Lubiw, and J. Spinrad. Visibility graphs of towers. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 7:161–172, February 1997.

[9] C. Coullard and A. Lubiw. Distance visibility graphs. In *Proceedings of the 7th Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '91, pages 289–296, New York, NY, USA, 1991. ACM.

[10] R. Courant, H. Robbins, and I. Stewart. *What is mathematics*, chapter 4. Oxford University Press, 2nd edition, 1996.

[11] Y. Disser, M. Mihalák, and P. Widmayer. A polygon is determined by its angles. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 44(8):418 – 426, 2011.

[12] S. Eidenbenz. Inapproximability of finding maximum hidden sets on polygons and terrains. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 21:139–153, January 2002.

[13] S. Eidenbenz and C. Stamm. Maximum clique and minimum clique partition in visibility graphs. In *Proceedings of the International Conference IFIP on Theoretical Computer Science, Exploring New Frontiers of Theoretical Informatics*, TCS '00, pages 200–212, London, UK, 2000. Springer-Verlag.

[14] H. A. ElGindy. *Hierarchical decomposition of polygons with applications*. PhD thesis, McGill University, Montreal, Que., Canada, 1985. AAI0557365.

[15] H. Everett. *Visibility graph recognition*. PhD thesis, University of Toronto, Toronto, Ont., Canada, 1990.

[16] H. Everett and D. G. Corneil. Recognizing visibility graphs of spiral polygons. *Journal of Algorithms*, 11(1):1 – 26, 1990.

[17] H. Everett and D. G. Corneil. Negative results on characterizing visibility graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 5(2):51 – 63, 1995.

[18] H. Everett, C. T. Hoáng, K. Kilakos, and M. Noy. Planar segment visibility graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 16:235–243, August 2000.

[19] H. Everett, F. Hurtado, and M. Noy. Stabbing information of a simple polygon. *Discrete Applied Mathematics*, 91(1-3):67 – 82, 1999.

[20] S. Felsner and H. Weil. Sweeps, arrangements and signotopes. *Discrete Applied Mathematics*, 109(1):67–94, 2001.

[21] S. Ghali. *Introduction to Geometric Computing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.

[22] S. K. Ghosh. On recognizing and characterizing visibility graphs of simple polygons. In R. Karlsson and A. Lingas, editors, *SWAT 88*, volume 318 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 96–104. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[23] S. K. Ghosh. *Visibility Algorithms in the Plane*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.

[24] S. K. Ghosh and P. P. Goswami. Unsolved problems in visibility graphs of points, segments and polygons. *CoRR*, abs/1012.5187, 2010.

[25] S. K. Ghosh, T. C. Shermer, B. K. Bhattacharya, and P. P. Goswami. Computing the maximum clique in the visibility graph of a simple polygon. *Journal of Discrete Algorithms*, 5(3):524 – 532, 2007. Selected papers from Ad Hoc Now 2005.

[26] J. E. Goodman and J. O'Rourke, editors. *Pseudoline Arrangements*. Chapman & Hall/CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2004.

[27] J. E. Goodman and R. Pollack. Helly-type theorems for pseudoline arrangements in P^2. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 32(1):1 – 19, 1982.

[28] J. E. Goodman and R. Pollack. Multidimensional sorting. *SIAM Journal on Computing*, 12(3):484–507, 1983.

[29] J. E. Goodman and R. Pollack. Semispace configurations, cell complexes of arrangements. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 1984.

[30] R. Hartshorne. *Foundations of projective geometry*. WA Benjamin, 1967.

[31] N. Mnev. On manifolds of combinatorial types of projective configurations and convex polyhedra. In *Soviet Math. Doklady*, volume 32, pages 335–337, 1985.

[32] N. Mnev. The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties. In O. Viro and A. Vershik, editors, *Topology and Geometry — Rohlin Seminar*, volume 1346 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 527–543. Springer Berlin / Heidelberg, 1988. 10.1007/BFb0082792.

[33] J. Nešetřil and V. Rödl. On a probabilistic graph-theoretical method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 72(2):417–421, 1978.

[34] J. O'Rourke. *Art gallery theorems and algorithms*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1987.

[35] J. O'Rourke. Computational geometry column 18. *SIGACT News*, 24:20–25, January 1993.

[36] J. O'Rourke and I. Streinu. Vertex-edge pseudo-visibility graphs: characterization and recognition. In *Proceedings of the 13th Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '97, pages 119–128, New York, NY, USA, 1997. ACM.

[37] J. O'Rourke and I. Streinu. The vertex-edge visibility graph of a polygon. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 10:105–120, May 1998.

[38] K. Pock. *Entscheidungsmethoden zur Realisierbarkeit orientierter Matroide*. PhD thesis, Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1991.

[39] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry*. Springer New York, 1985.

[40] G. Ringel. Teilungen der ebene durch geraden oder topologische geraden. *Mathematische Zeitschrift*, 64:79–102, 1956.

[41] T. C. Shermer. Hiding people in polygons. *Computing*, 42:109–131, 1989.

[42] T. C. Shermer. On rectangle visibility graphs III: External visibility and complexity. In *Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 234–239. Carleton University Press, 1996.

[43] P. Shor. Stretchability is NP-hard. *Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift*, 4, 1991.

[44] G. Srinivasaraghavan and A. Mukhopadhyay. A new necessary condition for the vertex visibility graphs of simple polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 12:65–82, 1994. 10.1007/BF02574366.

[45] I. Streinu. Stretchability of star-like pseudo-visibility graphs. In *Proceedings of the 15th Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '99, pages 274–280, New York, NY, USA, 1999. ACM.

[46] I. Streinu. Non-stretchable pseudo-visibility graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 31:195–206, June 2005.

[47] I. Streinu and S. Whitesides. Rectangle visibility graphs: Characterization, construction, and compaction. In *STACS 2003*. Springer Berlin / Heidelberg, 2003.

[48] P. Suvorov. Isotopic but not rigidly isotopic plane systems of straight lines. In O. Viro and A. Vershik, editors, *Topology and Geometry — Rohlin Seminar*, volume 1346 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 545–556. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[49] A. Turner, M. Doxa, and A. Penn. From isovist to visibility graphs: A methodology for the analysis of architectural space. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 28, 2001.

[50] S. K. Wismath. Characterizing bar line-of-sight graphs. In *Proceedings of the First Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '85, pages 147–152, New York, NY, USA, 1985. ACM.

...