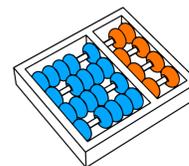


Vinicius de Novaes Guimarães Pereira

“O Leilão GSP e Preço da Anarquia”

CAMPINAS
2013



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Vinicius de Novaes Guimarães Pereira

“O Leilão GSP e Preço da Anarquia”

Orientador(a): **Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA POR VINICIUS DE NOVAES GUIMARÃES PEREIRA, SOB ORIENTAÇÃO DE PROF. DR. FLÁVIO KEIDI MIYAZAWA.

Assinatura do Orientador(a)

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414L Pereira, Vinicius de Novaes Guimarães, 1985-
O leilão GSP e preço da anarquia / Vinicius de Novaes Guimarães Pereira. –
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Flávio Keidi Miyazawa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Computação.

1. Teoria dos jogos. 2. Preço da anarquia. 3. Teoria dos leilões. 4. Leilões de
anúncios em sites de busca. I. Miyazawa, Flávio Keidi, 1970-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The GSP auction and price of anarchy

Palavras-chave em inglês:

Game theory

Price of anarchy

Theory of auction

Sponsored search auction

Área de concentração: Ciência da Computação

Titulação: Mestre em Ciência da Computação

Banca examinadora:

Flávio Keidi Miyazawa [Orientador]

André Luis Vignatti

Orlando Lee

Data de defesa: 19-04-2013

Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

Dissertação Defendida e Aprovada em 19 de Abril de 2013, pela
Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:

Andre Luis Vignatti

Prof. Dr. Andre Luis Vignatti
INF / UFPR

Orlando Lee

Prof. Dr. Orlando Lee
IC / UNICAMP

Flávio Keidi Miyazawa

Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa
IC / UNICAMP

O Leilão GSP e Preço da Anarquia

Vinicius de Novaes Guimarães Pereira¹

19 de abril de 2013

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa (Orientador)
- Prof. Dr. André Luis Vignatti
Departamento de Informática — UFPR
- Prof. Dr. Orlando Lee
Instituto de Computação — UNICAMP
- Profa. Dra. Cristina Gomes Fernandes (Suplente)
Departamento de Ciência da Computação — USP
- Prof. Dr. Eduardo Cândido Xavier (Suplente)
Instituto de Computação — UNICAMP

¹O desenvolvimento desta dissertação contou suporte financeiro do CAPES (Processo 01-P-04388-2010, 2010–2011) e da FAPESP (Processo 2010/14666, 2011–2012).

Abstract

Sponsored search auction is one of the most profitable sources of revenue on the internet. The growth of this market was, on average, 20% per year over the past years. Since the target audience and advertiser variety are big and diverse, a small increase in efficiency in this mechanism can bring a huge increase in the sites profits. In this work we discuss the evolution of the mechanisms used in this market, identifying the reasons of these changes. We evaluate the currently used mechanism, modeling in different ways and calculating the price of anarchy.

Resumo

Uma das fontes de receita mais lucrativas da internet são os anúncios para sites de busca. O crescimento deste mercado bilionário foi, em média, 20% ao ano nos últimos anos. Como o público alvo e variedade de anunciantes deste mercado é grande e diversificado, um pequeno aumento da eficiência deste mecanismo representa um grande aumento de receita para os sites. Neste trabalho discutimos a evolução dos mecanismos usados neste mercado, identificando as razões destas mudanças. Avaliamos os mecanismos usados atualmente, modelando-o de formas diferentes e calculando o seu preço da anarquia.

Ao meu pai, Paulinho.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer à minha família, por todo amor e orientação que me deram durante toda a minha vida. Agradeço ao meu orientador, Flávio Keidi Miyazawa, pela orientação, explicações, confiança depositada em mim e todo trabalho que teve comigo. Agradeço a todos professores que auxiliaram a minha caminhada. Agradeço à CAPES e Fapesp, por ter financiado este trabalho. Agradeço a todos amigos e profissionais que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

“... mesmo anteriormente, pudesse adivinhar os fios principais, os mais grossos, que ligavam diante de mim os atores, apesar de tudo eu não conhecia de modo cabal todos os recursos e segredos desse jogo.”

Um Jogador - Fiódor Dostoiévski

Sumário

Abstract	ix
Resumo	xi
Dedicatória	xiii
Agradecimentos	xv
Epígrafe	xvii
1 Introdução	1
2 Teoria dos Jogos	5
2.1 Conceitos Básicos	5
2.2 Equilíbrio de Nash Puro	7
2.2.1 Exemplos de Jogos	8
2.3 Equilíbrio de Nash Misto	11
2.4 Jogo Bayesiano	13
2.5 Medidas dos Equilíbrios	16
3 Teoria dos Leilões	19
3.1 Introdução	19
3.2 Mecanismo	21
3.2.1 Projeto de Mecanismos	21
3.2.2 Exemplos de Leilões e seus Equilíbrios	23
3.2.3 Leilões Estrategicamente Equivalentes	27
3.2.4 Mecanismo de Revelação Direta	27
3.2.5 Mecanismo Eficiente	28
4 Anúncios em Sites de Busca	31
4.1 Definições Formais	33

4.2	Possibilidades de Mecanismos	34
4.2.1	O GFP, o GSP e o VCG	34
5	Comparação Entre Mecanismos em Anúncios de Sites de Busca	37
5.1	GFP: Teoria e Prática	38
5.2	O Equilíbrio do GSP	44
5.2.1	GSP e a Incentivo-compatibilidade	44
5.2.2	GSP e o Equilíbrio de Nash	45
5.2.3	O Equilíbrio Livre de Inveja do GSP, o Equilíbrio Estável	46
5.2.4	A Estratégia VCG no Leilão de GSP	47
5.2.5	GSP na Prática	48
6	Preço da Anarquia para o GSP	53
6.1	Introdução	53
6.2	Preliminares	55
6.3	Ferramentas para Analisar o Preço da Anarquia: o Jogo Suave e Semi-suave	56
6.3.1	O Jogo Semi-Suave	57
6.4	Jogos com Informação Completa	58
6.4.1	Jogos com Estratégia Pura	58
6.4.2	Jogo com Estratégia Mista	65
6.5	Jogo Com Informações Incompletas	68
6.5.1	Jogos com Valores Correlacionados	68
6.5.2	Jogo com Valores Independentes	71
7	Conclusões	77
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Tabelas

2.1	Dilema dos Prisoneiros. Em cada célula da tabela temos, à direita superior a utilidade do jogador 2 no perfil de estratégia que a célula se encontra e à esquerda inferior a utilidade do jogador 1.	9
2.2	Convergência das Estratégias do Dilema do Prisoneiro	10
2.3	Jogo do Predador <i>vs</i> Presa Insetos	11
2.4	Convergência das Estratégias do Jogo Predador Vs Presa Inseto	12
5.1	Tabela de CTR estimados no leilão da empresa Overture	43
5.2	Tabela da Razão Entre o GFP e o VCG, onde “todas” representa o cálculo considerando todas as palavras-chave, “populares” representa as palavras-chave que têm 10 ou mais anunciantes disputando um <i>slot</i> , M.R. é a média da razão.	44
5.3	Anunciantes A, B e C fazendo uma “guerra de lances” cíclica por uma palavra-chave.	49
5.4	Anunciantes D, E e F em uma situação estável.	50

Lista de Figuras

4.1	Exemplos de propagandas em sites de busca.	32
4.2	Esta imagem representa o pagamento p_2 do segundo jogador pelo segundo <i>slot</i> nos três mecanismos, supondo 5 <i>slots</i> e 5 anunciantes. À esquerda temos o pagamento esperado no mecanismo de GFP, no meio temos o pagamento esperado no mecanismo de GSP e à direita temos o pagamento esperado no mecanismo de VCG	36
5.1	Gráfico representando o padrão “dente-de-serra” com intervalo de 15 minutos entre os pontos, cobrindo o período de 14 horas. Cada ponto representa o maior lance dado por uma palavra-chave. Do ponto A ao ponto B vemos o padrão de dois ou mais jogadores disputando o primeiro lugar pela palavra. O ponto B é o ponto onde o jogador com segundo maior lance não pode mais disputar a palavra dando um lance mais alto e desce o seu lance até o lance do jogador abaixo dele. O ponto C é o jogador com o maior valor descendo até o lance do jogador com o segundo maior valor.	40
5.2	Gráfico representando o padrão “dente-de-serra” visto na Figura 5.1, porém cobrindo o período de uma semana.	41
5.3	Gráfico de lances (<i>bid</i>) por posição (<i>position</i>). Um exemplo de degrau (<i>Gap</i>) entre os jogadores.	51
6.1	Comportamento das duas curvas que são limites superiores do Preço da Anarquia para um jogo de informação completa com estratégia pura	66

Capítulo 1

Introdução

Ferramentas de busca são fontes de informação para muitas pessoas. Mais da metade dos usuários da internet visitam sites de busca todos os dias, mais de 13% do tráfego nos sites comerciais provêm dos sites de busca e mais de 40% das buscas por produtos começam em sites de busca [11]. Como resultado disto, é extremamente interessante para sites comerciais aparecerem em uma boa posição nos sites de busca, acredita-se que as primeiras posições dos sites de busca são as mais vistas e mais visitadas. Os sites comerciais podem fazer isso através de uma engenharia reversa das ferramentas de busca. Descobrir como as ferramentas de busca ordenam as buscas, estes sites podem tentar preencher os requisitos para ficar entre as primeiras ocorrências. Tais práticas são prejudiciais aos sites de busca, porém são inevitáveis. Outro modo de ficar entre os primeiros resultados é pagando para aparecer, como propaganda, ao lado das buscas ou até nos primeiros resultados.

Como um exemplo, a receita proveniente de propagandas gerada para o Google em 2001 foi de 66 milhões de dólares, a partir daí, por ano, esta receita cresceu 514% em 2002, gerando 410 milhões, 121% em 2004, gerando 3 bilhões, mais de 50% todo ano até 2007, gerando 16 bilhões neste ano. Cresceu, em média, 20% por ano até 2012, gerando uma receita de 43 bilhões de dólares em 2012 provenientes da venda de espaço para propaganda, representando 86% da receita total deste ano e 95% da receita total de serviços na internet [8]. A partir destes dados, fica evidente o interesse em estudar formas de aumentar o lucro com a venda destes espaços para propaganda.

Uma característica importante das propagandas pela internet é que podemos saber, com uma certeza maior do que propagandas em outros meios, se as propagandas exibidas fizeram efeito sobre o público alvo. A chave para a venda de espaço para propaganda na internet está no seguinte fato. Na internet podemos saber quando uma pessoa clica em uma propaganda, a palavra-chave que o usuário está buscando e, mais importante, se esta pessoa comprou o produto que estava procurando. Baseado nestas característi-

cas pode-se cobrar do anunciante, não mais pela impressão do seu anúncio, mas cobrar um valor quando o anúncio é clicado. Desta maneira o anunciante tem mais crença no funcionamento da propaganda, pagando um valor maior pelo seu efeito.

Dentre os modelos de venda de espaço de anúncios em sites de busca, o mais usado é um leilão chamado *Generalized Second Price Auction* (GSP). Neste modelo, usado pelo “Google”, “Yahoo”, entre outros, o anunciante envia ao publicador um valor, representando o quanto ele estaria disposto a pagar para ter o seu anúncio clicado, em uma página referente à busca de uma palavra-chave específica. O publicador tem um conjunto de espaços disponíveis para colocar anúncios, para uma clareza maior do texto, chamaremos cada um desses espaços de *slot*. É de comum acordo que os *slots* localizados em melhor posição são mais visados pelo público, sendo assim mais desejados pelos anunciantes. Ao receber os valores dos anunciantes por uma palavra-chave, assim que algum usuário do sistema buscar essa palavra-chave, o publicador ordena os anúncios, da melhor até a pior posição, favorecendo os maiores valores enviados. O anunciante que tiver seu anúncio exibido na i -ésima melhor posição pagará o valor que o anunciante da posição seguinte submeteu.

Como exemplo, suponha que temos três anunciantes disputando o espaço da palavra “carro”, suponha que a página referente à busca desta palavra tem 2 *slots*. O primeiro anunciante enviou como lance o valor de R\$0,50 por cada clique, o segundo enviou R\$0,20, o terceiro enviou R\$0,15. Quando um usuário buscar pela palavra “carro”, o anúncio do primeiro anunciante aparecerá em primeiro lugar, seguido do anúncio do segundo, o anúncio do terceiro não aparecerá. Caso o primeiro anúncio seja clicado, será cobrado do primeiro anunciante o valor de R\$0,20. Caso o segundo anúncio seja clicado, será cobrado do segundo anunciante o valor de R\$0,15.

Pode não parecer intuitivo que este modelo seja o melhor para o publicador, pois cobra um preço menor do que ele poderia cobrar. Mas, como veremos no capítulo 5, entre este e a outra possibilidade de modelo testada, este é mais vantajoso tanto para o publicador quanto para o anunciante.

Tendo isto em vista, modelaremos o leilão de GSP como um jogo, fazendo diferentes suposições. Estudaremos uma medida de equilíbrio que este leilão tem, usando como medida o preço da anarquia, uma medida da ineficiência de um equilíbrio, fazendo uma comparação entre a situação ótima e a pior situação de equilíbrio que as regras deste leilão propiciam aos anunciantes. Definimos uma função de bem estar social, que atribui um valor para cada perfil de estratégia dos jogadores, este valor representando o bem estar proporcionado por esse perfil de estratégia aos jogadores. O preço da anarquia é definido como a razão entre o maior valor do bem estar social possível, entre todas as estratégias, e o menor bem estar social possível, entre todas as estratégias que são um equilíbrio.

Se o leilão for modelado como um jogo com informação completa e estratégias puras,

onde todos os anunciantes sabem dos valores de todos os anunciantes, é visto um preço da anarquia de 1,618, o que quer dizer que o melhor bem estar social que poderia ser gerado não é 1,618 vezes melhor do que o pior bem estar social que um equilíbrio do leilão poderia gerar. Se, nesta mesma modelagem, o leilão for modelado com estratégias mistas, teremos um preço da anarquia de 4. Se o leilão é modelado como um jogo de informação incompleta, onde os jogadores tem apenas uma estimativa dos lances dos outros jogadores, então é apresentado um preço da anarquia de 3,164. Se, nesta modelagem, supormos que os valores dos jogadores são correlacionados, então é apresentado um valor de 4 como preço da anarquia.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 é introduzido os conceitos básicos de Teoria dos Jogos usados neste trabalho. É discutida a prática de modelagem de uma situação real em um jogo. Qual modelagem é mais razoável para cada situação. As modelagens apresentadas são como jogos com informação completa ou incompleta, com estratégia pura ou mista. O conceitos de equilíbrios para as diversas modelagens são apresentados. No Capítulo 3 é apresentado o que é um leilão e os mecanismos clássicos. O conceito de mecanismos e suas principais propriedades são apresentados, como o mecanismo de revelação direta e o princípio de revelação direta, dois estudos importante na elaboração de um mecanismo. O Capítulo 4 explica o problema do leilão de *slots* em sites de busca. É visto suas regras e como este problema pode ser modelado formalmente. No Capítulo 5 é visto os equilíbrios para os mecanismos vistos e como estes mecanismos funcionam na prática. Os mecanismos são comparados e, a partir do estudo desses equilíbrios, é discutido qual mecanismo é melhor para ser usado. No Capítulo 6 é visto os métodos que foram usados para descobrir o preço da anarquia quando os jogos são modelados de acordo com os modelos discutidos. Finalmente, o Capítulo 7 conclui este trabalho com a discussão dos resultados obtidos e de suas principais contribuições, além de apresentar perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Teoria dos Jogos

2.1 Conceitos Básicos

Teoria dos Jogos é uma área da matemática aplicada usada para prever o comportamento de um ou mais agentes em uma situação de conflito ou cooperação. O conceito de jogo possibilita a modelagem de situações que envolvem decisões sobre as ações de um ou mais agentes, onde a ação de um agente possivelmente influenciará o resultado do jogo para os outros agentes, influenciando assim as ações dos outros agentes. Chamamos cada um destes agentes de jogador. O princípio da Teoria dos Jogos é entender estas influências e modelar situações reais em jogos, possivelmente perdendo parte dos detalhes da realidade, mas mantendo o bastante para prever as decisões e os resultados do jogo com uma aproximação razoável. A partir do momento em que entendemos como os jogadores provavelmente atuarão, teremos domínio para projetar regras e tentar forçar outras ações dos jogadores. Os conceitos expostos neste capítulo foram estudados nas obras de Fudenberg e Tirole [7]; Mas-Colell, Whinston e Green [16]; Osborne e Rubinstein [21]; Osborne [20]; Tardos e Vazirani [25]; e Miyazawa [17].

Um exemplo de jogo é a modelagem do famoso leilão para a venda de um item para vários possíveis compradores. Nesta situação nós temos vários jogadores disputando um item e quem oferecer o maior valor ganhará este item pagando um preço equivalente ao valor oferecido. Cada jogador gostaria de levar o item, porém não gostaria de pagar um preço muito alto por ele, então o lance que cada jogador oferece depende do quanto ele estaria disposto a dar pelo item e também do quanto os outros jogadores ofereceriam pelo item. Assim todas as estratégias estão conectadas dependendo uma das outras.

A Teoria dos Jogos oferece uma ferramenta para cada jogador prever as decisões dos outros jogadores. Com isso, cada jogador pode escolher a melhor estratégia para otimizar o seu ganho. No caso dos compradores, a análise da situação sob a visão da Teoria dos Jogos dirá qual é o melhor valor que ele pode oferecer para maximizar suas chances de levar

o item. No caso do leiloeiro, a ferramenta dirá, baseado nas estratégias que os jogadores provavelmente jogarão, qual será o lucro dele no presente leilão. Assim, é possível que o leiloeiro decida se seria melhor mudar as regras do leilão para melhorar a sua receita.

A princípio temos seis características principais para modelar uma situação em um jogo. Primeiro temos que definir quem são os jogadores (companhias, pessoas) e quantos eles são. Em segundo lugar, quais são as ações possíveis dos jogadores e quais são os possíveis resultados que podem ocorrer no jogo. Em terceiro temos o “tempo” do jogo, ou seja, se os jogadores devem tomar decisões simultaneamente ou as decisões devem seguir alguma ordem. Em quarto, quais as informações que cada jogador tem, ou seja, o quanto eles conhecem sobre os outros jogadores para saber quais estratégias seriam melhores. Em quinto lugar, a utilidade de cada jogador, ou seja, quanto cada jogador ganha dependendo de cada ação possível do jogo, que é baseada na motivação de cada jogador. Em sexto e último lugar, depois de definidas todas as anteriores, temos a “solução” do jogo, o equilíbrio, uma situação em que nenhum jogador teria motivações para mudar a sua estratégia.

Para definir um jogo $J = (A, N, u)$ formalmente, precisamos de três elementos essenciais. Primeiro definimos um conjunto de n jogadores, que por simplicidade denotaremos por $N = \{1, 2, \dots, n\}$, onde cada número inteiro é o nome de um jogador. Em segundo, o espaço de ações $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ que contém todas as ações possíveis para o jogo, onde o conjunto A_i contém todas as ações possíveis do jogador i . Definimos também o espaço de ações $A_{-i} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n$, como sendo o espaço de ações A sem o conjunto de ações do jogador i . Finalmente temos a função utilidade $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ que representa a preferência de cada jogador i em relação a cada vetor de ação possível em A . A imagem desta função representa uma ordem de preferência para o jogador i , isto quer dizer que se o jogo for de maximização, quanto maior o resultado da função u_i melhor para o jogador. Definimos também u como sendo o conjunto das funções de utilidade de todos os jogadores. Essa forma de representar um jogo é chamada forma normal.

Um conceito a mais que precisamos definir é o conceito de estratégia, que apesar de não ser necessário para se definir um jogo é essencial para que possamos analisar o comportamento dos jogadores. Uma estratégia é uma ação ou conjunto de ações que um jogador executará durante o jogo. Dizemos que um jogador ou conjunto de jogadores terá uma estratégia s se este jogador, ou conjunto, executar as ações definidas por esta estratégia durante o jogo. Definimos S como o espaço de estratégias que contém todas as estratégias possíveis para o jogo e S_i o conjunto de todas as estratégias possíveis para o jogador i , um vetor de estratégia $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ contém uma estratégia específica de cada jogador sendo $s_i \in S_i$ a estratégia do jogador i no conjunto de estratégias possíveis S_i deste jogador. Seja um vetor v de tamanho n , definimos um vetor v_{-i} como sendo

o vetor v sem o i -ésimo elemento, definimos também o vetor (x, v_{-i}) como o vetor v com o i -ésimo elemento substituído por x . Desta maneira, chamaremos de s_{-i} um perfil de estratégia de todos os jogadores menos do jogador i e, se $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ então $(s'_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n)$ é um perfil de estratégia substituindo s_i por s'_i em s .

Primeiro, apresentaremos jogos de informação completa com estratégias puras. Um jogo com informação completa é quando todos os jogadores têm a mesma informação sobre o jogo e todos sabem a função utilidade de cada jogador. Uma estratégia pura é quando um jogador só pode escolher como estratégia uma das ações disponíveis.

Depois de definidos um jogo $J = (A, N, u)$, o conjunto de ações A , o conjunto de jogadores N e o conjunto de funções de utilidade u , temos um jogo formal. Usando o conceito de estratégia para que possamos analisar um jogo, o nosso objetivo agora é encontrar um ou mais vetores de estratégia $s^* \in S$ que representem uma estratégia estável. Esta estratégia, que formalizamos posteriormente, é chamada de equilíbrio de Nash.

2.2 Equilíbrio de Nash Puro

A ideia intuitiva de equilíbrio é prever um estado estável para o qual as estratégias de todos os jogadores convergirão. Como cada jogador sempre tentará otimizar o seu ganho, para que um perfil de estratégia seja estável, este perfil deve necessariamente ter a propriedade de que nenhum jogador tirará proveito mudando a sua estratégia, ou seja, um perfil de estratégia onde cada jogador sozinho não teria motivação de mudar a sua própria estratégia.

Definição 2.2.1. : O perfil de estratégia s^* é um equilíbrio de Nash puro, se para todo jogador i

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*),$$

para qualquer estratégia s_i do jogador i .

Esta definição garante que se os jogadores usarem o perfil de estratégia s^* , qualquer jogador i não terá incentivo para mudar a sua estratégia de s_i^* para qualquer outra estratégia s_i . Garantindo isto para todo jogador, teremos um perfil de estratégia estável que chamamos de Equilíbrio de Nash. Note que em um jogo pode haver vários equilíbrios.

Encontrar um equilíbrio de Nash pode ser computacionalmente caro [17]. Uma maneira ingênua de tentar encontrar este equilíbrio consiste em testar todas as combinações de estratégias possíveis que podem haver no jogo. Isto teria um custo de tempo computacional de $O(nm^{n+1})$, onde n é o número de jogadores e m o número de estratégias possíveis para cada jogador, supondo que todos os jogadores tenham um número igual de estratégias possíveis. Para verificar este custo, basta ver que para cada jogador, em

uma dada estratégia, verificar se a estratégia deste jogador é melhor ou igual a qualquer outra estratégia tem um custo m . Devemos fazer esta verificação para cada estratégia e o número de estratégias possíveis é m^n , fazendo isso para cada um dos n jogadores ficamos com um custo de $O(nm^{n+1})$. Porém esta maneira tem um alto custo computacional. Existem várias outras maneiras de encontrarmos um vetor de estratégia que seja estável, vamos ver alguns exemplos onde tentaremos achar um equilíbrio.

2.2.1 Exemplos de Jogos

Um exemplo de jogo clássico é o dilema do prisioneiro. Neste jogo temos dois prisioneiros sendo interrogados pela polícia em salas diferentes e cada um dos prisioneiros deve tomar uma decisão sem consultar o outro nem saber da decisão do outro. Devem confessar ou negar o crime pelo qual estão sendo acusados e só saberão da decisão do outro prisioneiro depois de decidirem confessar ou negar o crime, depois de decidir não poderão voltar atrás na decisão. Temos então quatro situações distintas neste cenário. Se os dois presos confessarem, eles ficarão 4 anos na cadeia pelo crime que estão sendo acusados. Se ambos negarem, ficarão 2 anos na cadeia por crimes menores. Se um prisioneiro confessa e o outro não, então o prisioneiro que confessou fica apenas 1 ano na cadeia enquanto o que negou ficará 5 anos, neste caso temos duas situações distintas pois tem o caso em que o primeiro prisioneiro confessa e o segundo não e o caso em que o segundo prisioneiro confessa e o primeiro não.

Explicada a situação real podemos modelar este cenário como um jogo, observando os seis principais elementos da modelagem. Em primeiro lugar temos os dois jogadores que são os prisioneiros, vamos chamá-los de 1 e 2. Em segundo lugar temos as ações possíveis de cada jogador que pode escolher confessar ou negar, teremos então $A_i = \{c, n\}$ para $i = 1, 2$, onde c é a ação de confessar e n é a ação de negar. O conjunto de todas as ações possíveis $A = A_1 \times A_2$. A função de utilidade para cada jogador será o negativo do tempo que cada jogador ficará preso, representando assim o prejuízo do jogador, então $u_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde $u_1(c, c) = -4$, $u_1(c, n) = -1$, $u_1(n, c) = -5$ e $u_1(n, n) = -2$, sendo a função u_2 definida de maneira análoga. Veja que cada jogador quer otimizar a função utilidade maximizando-a, ou seja, diminuindo ao máximo o tempo que ele ficará na cadeia. Podemos ver a modelagem deste cenário de maneira mais intuitiva na Tabela 2.1.

1\2	<i>C</i>	<i>N</i>
<i>C</i>	-4	-5
<i>N</i>	-1	-2
	-4	-1
	-5	-2

Tabela 2.1: Dilema dos Prisioneiros. Em cada célula da tabela temos, à direita superior a utilidade do jogador 2 no perfil de estratégia que a célula se encontra e à esquerda inferior a utilidade do jogador 1.

Com o cenário modelado e o jogo definido formalmente podemos tentar achar algum equilíbrio no jogo, caso este exista. Para isso vamos ver o método de encontrar um equilíbrio usando as estratégias dominadas.

Dizemos que uma estratégia é estritamente dominada para o jogador i se em qualquer situação do jogo, o jogador i tiraria menor proveito em usar esta estratégia do que as outras estratégias possíveis:

Definição 2.2.2. Em um jogo, uma estratégia s'_i do jogador i domina estritamente uma estratégia s''_i deste jogador se

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s''_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Neste caso, podemos dizer que s''_i é estritamente dominada por s'_i .

Analogamente, dizemos que uma estratégia é fracamente dominada quando a desigualdade é fraca:

Definição 2.2.3. Em um jogo, uma estratégia s'_i do jogador i domina fracamente uma estratégia s''_i deste jogador se

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Neste caso, podemos dizer que s''_i é fracamente dominada por s'_i .

Podemos ver facilmente que uma estratégia estritamente dominada não pode ser uma estratégia escolhida de um jogador, dado que o vetor de estratégia seja um equilíbrio. Isto, pois se uma estratégia estritamente dominada for uma estratégia de um jogador nesta situação, então é melhor este jogador mudar de estratégia, fazendo com que o jogo não esteja em equilíbrio. O método de iterações de estratégias estritamente dominadas se baseia nesse fato e consiste em eliminar estratégias estritamente dominadas, tendo a certeza de que essas estratégias não fazem parte do equilíbrio. Se chegarmos em um ponto onde não podemos mais eliminar nenhuma estratégia, então chegaremos em um conjunto menor de estratégias para analisar. Veremos agora como esse método funciona com o dilema do prisioneiro. Verificaremos se confessar é uma estratégia dominada para o jogador 1. Se o jogador 1 negar teremos dois casos. Primeiro o jogador 2 também nega, dando um valor de utilidade de $u_1(n, n) = -2$ para o jogador 1. Mas neste caso, em que o jogador 2 nega, o jogador 1 terá mais ganho confessando, pois assim terá uma utilidade de $u_1(c, n) = -1$. No segundo caso o jogador 2 confessa, neste caso o jogador 1 terá uma utilidade de $u_1(n, c) = -5$, aqui também o jogador 1 terá mais ganho mudando a ação dele para c onde terá ganho de $u_1(c, c) = -2$. Vemos então que para o jogador 1, a estratégia de negar é estritamente dominada, podemos então confiar que o jogador 1, em nenhuma situação, executará a ação de negar, só restando a ação de confessar. O mesmo estudo pode ser feito para o jogador 2 dando-nos a confiança de que este jogador também nunca irá negar e, só restando a outra opção, sempre confessará. Podemos especular então que o perfil de ações (c, c) seja um equilíbrio de Nash, e realmente, verificando que dado este perfil nenhum jogador terá motivação para mudar a sua estratégia, vemos que este é um equilíbrio de Nash. A dinâmica da convergência pode ser vista na Tabela 2.2.

1\2	C	N
C	-4	-5
N	-5	-2

Diagrama de convergência:

- Na linha C: uma seta horizontal aponta da célula (C, N) para a célula (C, C).
- Na linha N: uma seta horizontal aponta da célula (N, C) para a célula (N, N).
- Na coluna C: uma seta vertical aponta da célula (N, C) para a célula (C, C).
- Na coluna N: uma seta vertical aponta da célula (N, N) para a célula (C, N).

Tabela 2.2: Convergência das Estratégias do Dilema do Prisioneiro

2.3 Equilíbrio de Nash Misto

Existem jogos onde não temos uma estratégia pura que seja um equilíbrio. Considere um jogo chamado predador-presa-insetos, onde temos dois tipos de insetos, os predadores e as presas, cada um dos tipos tem duas atitudes diferentes, podem ser passivas ou ativas. O coletivo de cada tipo de inseto terá determinado ganho ou perda dependendo da atitude que tiver. Todo o coletivo poderá economizar caloria se manter uma atitude passiva ou gastar mais caloria se manter uma atitude ativa. Porém em cada caso terá mais ou menos chance de achar alimentos. Dependendo da atitude também, os insetos do tipo predador poderão ganhar calorias capturando os insetos do tipo presa, representando um ganho para o coletivo dos predadores e uma perda para os do tipo presa. Vamos então definir o jogo na forma normal com dois jogadores, um chamado de “predador” e outro de “presa” que definiremos como jogadores 1 e 2 respectivamente. As ações de cada um dos jogadores seria $A_1 = A_2 = \{A, P\}$, onde a ação A representa a ação de ser “Ativo”, a ação P representa a ação de ser “Passivo”, A_1 é o conjunto de ações do jogador “predador” e A_2 é o conjunto de ações do jogador “presa”, a função de utilidade dos jogadores será dada pela Tabela 2.3.

1\2	A	P
A	-7	-8
P	2	6
	-6	0
	3	-1

Tabela 2.3: Jogo do Predador *vs* Presa Insetos

Testando cada uma das ações possíveis, vemos que sempre teremos um caso em que pelo menos um jogador terá vantagem em mudar de estratégia. A dinâmica pode ser vista na Tabela 2.4, onde observamos que não é possível atingir um equilíbrio de Nash puro. Porém, como veremos, podemos ter um equilíbrio de Nash misto.

1\2	A	P
A	2	6
P	3	-1

Tabela 2.4: Convergência das Estratégias do Jogo Predador Vs Presa Inseto

Para estudarmos o equilíbrio de Nash misto teremos que definir o conceito de estratégia mista. Formalmente uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidade $s_i(a_i)$ dentre todas as possíveis ações $a_i \in A_i$ do jogador i . Sendo o conjunto A_i o conjunto de todas as possíveis ações do jogador i , $s_i(a_i) = \mathbb{P}(s_i = a_i)$ é a probabilidade do jogador i executar a ação $a_i \in A_i$. O termo $s(a)$ é a probabilidade de os jogadores executarem a ação a , o termo $s_{-i}(a_{-i})$ é a probabilidade de termos a_{-i} como a ação dos jogadores menos o jogador i . O conjunto de todas as distribuições de probabilidades possíveis para o jogador i é denotado por $S_i(A_i)$, e o conjunto de todas as distribuições de probabilidade possíveis é denotado por $S(A)$ em que cada $S_i(A_i)$ pertence a este conjunto. Como caso particular desta definição, uma estratégia pura é uma estratégia mista onde a distribuição de probabilidade é restrita a 0 ou a 1, ou seja, $s_i(a_i) = 1$ ou $s_i(a_i) = 0$ para todo jogador i , toda estratégia $s_i(a_i) \in S_i(A_i)$ e toda ação $a_i \in A_i$.

Esta mudança de estratégia acarretará também uma mudança na função de utilidade de cada jogador, agora não temos mais uma utilidade determinística e sim uma esperança no valor da função utilidade. A função utilidade para o jogador i quando este jogador escolher a estratégia s_i e os outros jogadores escolherem a estratégia s_{-i} será

$$u_i(s(a)) = \mathbb{E}_{a_i \in A_i} [\mathbb{E}_{a_{-i} \in A_{-i}} [u_i(a_i, a_{-i})]] = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) \left(\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} s_{-i}(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i}) \right),$$

onde $\mathbb{E}_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} s(a) f(a)$ é a esperança do valor de uma função f definida em A , variando os elementos de $a \in A$ e as probabilidades $s(a)$ destes elementos ocorrerem. O termo $\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} s_{-i}(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i})$ que está entre os parênteses da equação é o valor esperado da utilidade u_i quando os outros jogadores usarem a estratégia $s_{-i}(a_{-i})$ e o

jogador i executar a ação a_i , assim a equação da utilidade é o valor esperado calculado em cima da estratégia $s_i(a_i)$ usando a distribuição de probabilidades $s_i(a_i)$ para todas as ações $a_i \in A_i$.

Definida uma estratégia mista, é simples definir um equilíbrio de Nash Misto usando apenas a definição de equilíbrio de Nash visto anteriormente:

Definição 2.3.1. O perfil de estratégia mista $s^*(a)$ é um equilíbrio de Nash misto se para todo jogador i

$$u_i(s^*(a)) \geq u_i(s_i(a_i), s_{-i}^*(a_{-i})),$$

para toda estratégia $s_i(a_i)$ do jogador i .

No exemplo dado da presa\caçador, um equilíbrio será $s_1(\text{Ativo}) = 7/8$, $s_1(\text{Passivo}) = 1/8$, $s_2(\text{Ativo}) = 6/7$ e $s_2(\text{Passivo}) = 1/7$. Se o jogador 1 usar esta estratégia, o jogador 2 terá uma utilidade de

$$\begin{aligned} -\frac{7}{8}7x - \frac{7}{8}8(1-x) - \frac{1}{8}6x + \frac{1}{8}0(1-x) &= -7x - \frac{7}{8}8(1-x) \\ &= -7x + 7x - 7 \\ &= -7, \end{aligned}$$

onde $x = s_2(\text{Ativo})$ é a probabilidade do jogador 2 usar a estratégia Ativo. Vemos que, com este perfil de estratégia do jogador 1, o jogador 2 não tem motivação para mudar a sua estratégia, de fato, este jogador é indiferente quanto a mudar a sua estratégia. O mesmo acontece com o jogador 1, se fixarmos este perfil de estratégia para o jogador 2. Portanto, este perfil de estratégia para os jogadores é um equilíbrio misto de Nash.

Aplicado ao mundo real, uma estratégia mista quer dizer que cada jogador executará uma ação com a probabilidade correspondente à sua estratégia. Porém, não quer dizer que o agente em si que está sendo estudado, quando confrontado com a situação do jogo, jogará “nos dados” a ação que irá tomar. Esta estratégia pode querer dizer, entre outras coisas, que se o agente é um coletivo de insetos, uma porcentagem relativa à estratégia do agente estudado poderá ter um tipo de ação, enquanto uma outra porcentagem do coletivo de insetos terá outro tipo de ação sempre. A interpretação das estratégias no mundo real irá depender da situação modelada.

2.4 Jogo Bayesiano

Jogos Bayesianos são jogos com informação imperfeita, ou seja, os jogadores tem incertezas sobre o perfil dos outros jogadores, isto se mostra como uma incerteza na função de utilidade dos outros jogadores. Jogos Bayesianos são ferramentas poderosas pois formam

modelos que chegam mais próximo da realidade, porém são jogos mais difíceis de se calcular o equilíbrio e outras propriedades.

As definições de jogos Bayesianos são similares às que tínhamos antes, porém agora devemos incluir a incerteza que cada jogador tem nas funções de utilidades. Como antes, teremos o conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de jogadores, onde cada elemento de N é um jogador. O conjunto $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é definido como o produto cartesiano de todas as ações possíveis. Teremos o elemento que permite incorporar o fator incerteza ao jogo, que é o conjunto $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_n$ de vetores de todos possíveis tipos de todos os jogadores, sendo Θ_i o conjunto de todos os possíveis tipos do jogador i e $\theta_i \in \Theta_i$ o tipo de um jogador i . Definimos também o conjunto de vetores $\Theta_{-i} = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_{i-1} \times \Theta_{i+1} \times \dots \times \Theta_n$, como sendo o conjunto de vetores de todos os tipos possíveis sem o jogador i . Dado um vetor de tipo θ , o vetor de tipos $\theta_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ será o vetor de tipos θ sem o i -ésimo termo. O tipo de um jogador é o que irá definir qual será a sua função utilidade, e apesar dos outros jogadores não saberem qual é o tipo do jogador i , todos têm uma estimativa de qual será o tipo do jogador i . As estimativas do tipo do jogador i pertencem ao conjunto Θ_i , cada jogador i sabe qual é o seu tipo θ_i . Assim, agora a função de utilidade $u_i(s; \theta)$ do jogador i , onde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, também dependerá do seu tipo θ_i e do tipo dos outros jogadores θ_{-i} .

A estimativa de cada jogador i sobre o tipo θ_{-i} dos outros jogadores é traduzida na forma de uma distribuição de probabilidade $\delta_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ que é a probabilidade, para o jogador i , do tipo dos outros jogadores ser θ_{-i} condicionada ao fato de que o tipo do jogador i é θ_i .

Uma estratégia em um jogo Bayesiano é um mapeamento $s : \Theta \rightarrow A$ de um vetor de tipos em um vetor de ações. Neste caso definimos $s : \Theta \rightarrow A$ como um vetor de estratégia pura e $s : \Theta \rightarrow S(A)$ como um vetor de estratégia mista, onde $S(A)$ é o conjunto das estratégias mistas possíveis. A estratégia de cada jogador i será dada pela função $s_i : \Theta_i \rightarrow A_i$ para uma estratégia pura e $s_i : \Theta_i \rightarrow S_i(A_i)$ para uma estratégia mista. Mesmo que o jogador i saiba qual é o seu tipo, este jogador deve ter uma estratégia para cada tipo que ele poderia ter e que os outros jogadores estimam que ele tenha, pois as estratégias dos outros jogadores dependerão desta estimativa e a estratégia do jogador i dependerá da estratégia dos outros jogadores.

Agora que temos a estrutura básica podemos falar sobre a utilidade esperada. Dado um perfil de estratégias s , para cada i e para cada θ_i podemos calcular a estimativa de cada jogador quanto às funções de utilidade:

$$\mathbb{E}[u_i(s, \theta_i)] = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \delta_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}).$$

Quer dizer que a utilidade esperada do jogador i para a estratégia geral s , com o tipo do jogador i sendo θ_i é o somatório, variando todas as possibilidades de tipos dos outros

jogadores, da probabilidade $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ de termos uma situação com os tipos θ_{-i} sabendo que o tipo do jogador i é θ_i , multiplicada pela utilidade $u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$ desta situação.

Um perfil de estratégia $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ é um equilíbrio Bayesiano se para cada jogador, sabendo do seu tipo, este perfil maximizará a sua função de utilidade esperada baseado nas estratégias dos outros jogadores, assim deverá ser pelo menos tão bom quanto o que eles ganharão com qualquer outra estratégia.

Definição 2.4.1. O perfil de estratégia s^* é um equilíbrio Bayesiano se para cada jogador i e cada tipo θ_i tivermos

$$u_i(s^*, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \delta_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}) \geq$$

$$u_i(s, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \delta_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$$

Vimos o método de estratégias estritamente dominadas para um jogo de informação completa, agora vamos ver um método semelhante que nos dará um candidato a equilíbrio para um jogo Bayesiano: o leilão de segundo preço em uma modelagem Bayesiana. Neste jogo temos um item sendo leiloado para um conjunto N de jogadores, cada jogador i tem um tipo θ_i que representa o maior valor que este jogador daria pelo item ou pode ser interpretado como o valor que este jogador realmente acha que o item vale. Então neste caso, é considerado que o lucro de um jogador é a diferença entre o quanto ele pagou e o quanto ele realmente acha que o item vale. Nossa função utilidade então é definida como $u_i = \theta_i - p_i$, onde p_i é o quanto o jogador i pagou pelo item. Vamos supor aqui que cada jogador sabe apenas do seu valor e não tem certeza do quanto seria o valor θ_j de qualquer outro jogador j , ou seja, não tem nenhuma informação sobre a função de utilidade de cada jogador. Porém, todos os jogadores compartilham uma estimativa na forma de um vetor de variáveis aleatórias $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ onde cada variável aleatória X_i corresponde à estimativa do valor do jogador i . Cada jogador i deve dar um lance a_i , o item será dado então para o jogador que deu o maior lance, porém o preço cobrado para este jogador será o valor do segundo maior lance. Temos então o conjunto N de jogadores, o conjunto de ações possíveis que é a representação dos possíveis lances dos jogadores $A = \mathbb{R}_+^n$ e a função utilidade de cada jogador $u_i(a_i) = \theta_i - a_j$, se a_i for o maior lance, onde a_j é o segundo maior lance e $u_i(a_i) = 0$ se a_i não for o maior lance. Definidas as regras, vamos ver como o método de iterações de estratégias dominadas se aplica a este jogo.

Seja um perfil de estratégia s qualquer, suponha sem perda de generalidade que o jogador i ganhou o item dando o maior lance s_i e teve que pagar o preço p correspondente ao segundo maior lance. O jogador i então tem três possibilidades, dar um lance s_i maior do que θ_i , ou dar um lance s_i igual a θ_i ou dar um lance s_i menor do que θ_i . Vamos

estudar a possibilidade deste jogador ter dado o lance $s_i = \theta_i$, neste caso o jogador levou o item pagando o valor p e tendo uma função utilidade no valor $u_i = \theta_i - p = s_i - p \geq 0$, pois $\theta_i = s_i \geq p$. Vamos agora estudar então a hipótese deste jogador ter dado um lance s_i que seja maior do que o seu próprio valor θ_i , ou seja, $\theta_i < s_i$. Nesta hipótese temos dois casos, um em que o jogador que deu o segundo maior lance p tenha dado um lance maior do que θ_i , ou seja, teremos $\theta_i < p \leq s_i$, neste caso a sua função utilidade terá um valor $u_i = \theta_i - p < 0$, então neste caso o jogador i terá prejuízo, sendo pior do que o caso em que $s_i = \theta_i$ ou até mesmo pior do que o caso do jogador i não levar o item; no outro caso temos $p \leq \theta_i$ fazendo com que a função utilidade seja $u_i = \theta_i - p$, que é igual ao caso em que $s_i = \theta_i$. Finalmente a hipótese em que $s_i < \theta_i$, neste caso teremos $p \leq s_i$, fazendo com que a função utilidade seja $u_i = \theta_i - p$ que é igual ao caso em que $s_i = \theta_i$.

Como podemos ver, se a função de utilidade de cada jogador se basear somente no lucro que este jogador pode ter sendo igual ao valor que este jogador daria pelo item menos o preço que este jogador irá pagar, então a estratégia de dar um lance igual a este valor domina fracamente qualquer outra estratégia. Este é um forte candidato e analisando a estratégia s^* vemos que nenhum jogador terá incentivo para mudar de estratégia. O fato é que não podemos garantir que um jogador irá necessariamente escolher um estratégia que domine fracamente as outras, pois duas estratégias que resultarão em uma funções de utilidade iguais dominam fracamente uma a outra, não nos dando a certeza de qual estratégia o jogador irá escolher.

2.5 Medidas dos Equilíbrios

Como vimos, nem todo equilíbrio é a melhor escolha para os jogadores. No jogo do prisioneiro por exemplo, vemos que se os jogadores pudessem combinar com antecedência a estratégia de cada um e se obrigassem a seguir a estratégia combinada, ambos teriam um resultado melhor.

Uma maneira de medir qual é a proximidade entre os equilíbrios e o que seria ótimo para os jogadores em geral é calcular o preço da anarquia e da estabilidade, como visto no trabalho de Roughgarden [22] e Miyazawa [17]. Para isso definimos o conceito de bem estar social com a função de benefício social. Esta função representa o benefício que aquela configuração de estratégia irá trazer para os jogadores como um todo. No caso do dilema do prisioneiro podemos definir essa função como o oposto do tempo médio que todos ficariam na cadeia. Então no jogo em equilíbrio teríamos uma média de -4 de valor social, pois no equilíbrio do jogo cada um ficaria 4 anos, já em uma outra estratégia, em que cada um escolhe não confessar, teríamos uma média de 2 anos por pessoa, resultando em um bem estar de -2 . Esta última apesar de não ser um equilíbrio seria a estratégia com melhor benefício social.

Para definir o preço da Anarquia e da Estabilidade precisamos fazer uma comparação entre todos os equilíbrios disponíveis e os melhores casos. Para isto, precisamos definir uma função SW (sigla para “Social Welfare”) de medida de bem estar social, que atribua um número para cada estratégia dos jogadores. Este número representa a qualidade desta estratégia para o conjunto de jogadores.

Seja $J = (S, N, u)$ um jogo onde S é o conjunto de todos os vetores de estratégias possíveis, N o conjunto dos jogadores e u a função utilidade. Seja $E(J)$ o conjunto de todos os vetores de estratégias que estão em equilíbrio e $SW : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de benefício social que atribui um número real para cada vetor de estratégia de S . O melhor caso para o bem estar social, que seria a função de bem estar social ótima em um jogo J , onde os jogadores estão tentando maximizar a função utilidade, definimos $OPT(J) = \max\{SW(s) : s \in S\}$.

Em um jogo de maximização, o Preço da Estabilidade (PoS sigla de “Price of Stability”) é a comparação entre o melhor caso de equilíbrio e o vetor de estratégia com melhor bem estar social.

$$PoS = \min \left\{ \frac{OPT(J)}{SW(s)} : \text{tal que } s \in E(J) \right\},$$

neste caso $SW(s)$ é o valor do bem estar mais próximo do ótimo.

O Preço da Anarquia (PoA, sigla de “Price of Anarchy”) é a comparação entre o pior caso de equilíbrio e a estratégia ótima e é definido como

$$PoA = \max \left\{ \frac{OPT(J)}{SW(s)} : \text{tal que } s \in E(J) \right\},$$

neste caso $SW(s)$ é o valor do bem estar mais distante do ótimo.

Caso seja um jogo de minimização teremos

$$PoS = \min \left\{ \frac{SW(s)}{OPT(J)} : \text{tal que } s \in E(J) \right\},$$

$$PoA = \max \left\{ \frac{SW(s)}{OPT(J)} : \text{tal que } s \in E(J) \right\}.$$

Como estamos interessados em análises de piores casos para um jogo de maximização, a partir daqui vamos estudar apenas o preço da anarquia para jogos de maximização.

Capítulo 3

Teoria dos Leilões

3.1 Introdução

Um leilão é uma forma de vender um conjunto de itens com valores incertos, como exposto no trabalho de Krishna [10]. Suponha uma situação em que um vendedor quer vender um conjunto de itens, mas não tem certeza do quanto uma comunidade de possíveis compradores pagaria por este conjunto ou uma parte dele. Um modo de resolver este problema é executar um leilão. Este leilão pode assumir as mais variadas formas, dependendo de um conjunto de situações. A forma de um leilão é definida pelas regras que são definidas.

Formalmente um leilão não é definido como um jogo, um leilão é uma modalidade de venda. Mas dentre todas as situações que não são jogos mas que podem ser analisadas como, um leilão é uma das mais intuitivas. Isto acontece devido à semelhança de um leilão com um jogo, um leilão tem uma grande variedade de características e isto sugere uma variedade de regras. Dentre as principais semelhanças com jogos temos os compradores que podem ser tratados como jogadores, podendo incluir até o leiloeiro como um dos jogadores. Temos também a característica de que as regras de um leilão são aplicadas a todos os compradores, incluindo a propriedade de simetria ao jogo, o que facilita a análise. A propriedade de simetria se baseia na crença de que, dada uma situação, qualquer jogador nesta situação terá a mesma estratégia de outro jogador, se este outro estivesse nesta situação. As regras de um leilão podem variar de acordo com algumas características, como por exemplo a quantidade de itens que se deseja vender, o nível de semelhanças entre os itens, se cada participante tem certeza do quanto valoriza cada subconjunto dos itens, se todo jogador tem certeza do quanto cada jogador valoriza cada subconjunto dos itens, se o vendedor tem certeza do valor do item para cada participante, entre outras características.

O tipo de leilão mais conhecido é o chamado leilão de primeiro preço para itens únicos. Neste leilão, um único item deve ser vendido para um conjunto de possíveis compradores e

o leiloeiro não está certo do quanto cada comprador daria pelo item, mais especificamente, do máximo que ele poderia ganhar pelo item. Na regra do leilão de primeiro preço com item único os compradores devem ofertar lances pelo item, este item então é entregue ao comprador que ofertou o maior lance e este comprador deve pagar o valor do lance que ofertou. Estas são as regras básicas do leilão de primeiro preço para um único item. Contudo, apesar de parecer simples, ainda temos que definir outras regras, por exemplo a maneira como esses lances serão ofertados.

O mais conhecido popularmente é o leilão de lances repetidos de primeiro preço onde o leiloeiro começa oferecendo o item por um valor baixo. Logo após, os compradores devem ofertar lances mais altos que o último lance ofertado até que ninguém ofereça mais nenhum lance por um determinado tempo. Então o último a ter ofertado um lance ganha o item, pagando o valor do seu último lance. Porém temos outros leilões mais interessantes tanto para prática quanto para estudo teórico, como por exemplo o leilão selado de primeiro preço, ou o leilão Holandês, ou até leilões híbridos que misturam regras de outros modelos clássicos. Em um leilão de lances selados os participantes devem ofertar seus lances uma única vez e estes lances devem ser oferecidos ao organizador do leilão em um envelope fechado com o valor do lance, de forma que o lance de cada participante não é revelado para os outros participantes. O item irá para o participante que ofereceu o maior lance e este participante paga o valor do lance. O leilão Holandês funciona com o auxílio de um relógio com valores decimais representando o valor do lance, este relógio começa marcando um valor considerado alto para o item, depois este valor diminui em velocidade constante até que algum participante acione um botão que para o relógio, este participante que parou o relógio ganha o item pagando o valor que o relógio marcava quando parou. Tanto o leilão de lances selados de primeiro preço e o leilão Holandês devem respeitar as mesmas duas regras, a de que o item deve ser vendido para o participante que ofereceu o maior lance e que este participante deve pagar o maior lance oferecido. Mais ainda, são análogos no sentido de que o ganhador não sabe qual seria o lance que os outros participantes dariam ou deram e, sendo assim, não sabe se o seu lance é muito maior do que os outros ofertados.

Outros tipos de leilões importantes para este trabalho são os leilões baseados em segundo preço, como por exemplo o leilão de lances selados de segundo preço e o leilão Inglês. No leilão de lances selados de segundo preço os participantes devem entregar os lances em envelopes fechados para o leiloeiro. O participante que ofertou o maior lance ganha o item e paga o segundo maior lance ofertado. Este leilão é semelhante ao leilão de lances selados de primeiro preço tendo apenas a diferença do valor cobrado pelo item não é o lance do ganhador do item e sim o segundo maior lance. O leilão Inglês, sendo análogo ao Holandês, funciona com um relógio, mas neste caso o relógio começa com um valor baixo para o item de modo que todos os participantes concordariam em levar o item por aquele preço. Em seguida o relógio aumenta o valor em velocidade constante e, conforme

o relógio aumenta, cada participante deve sinalizar a sua desistência de obter o item pelo preço marcado no relógio, até que reste apenas um participante. Este participante restante deve ganhar o item pagando o valor que marcava no relógio quando o último participante desistiu.

3.2 Mecanismo

3.2.1 Projeto de Mecanismos

Para analisar os leilões com a Teoria dos Jogos vamos modelar alguns exemplos de leilões como um jogo de informação incompleta. Definiremos então um conjunto de jogadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Cada jogador i tem um certo valor v_i sobre o item. Definimos o vetor de valores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, estes valores são exatamente o tipo de cada jogador. Os valores de v podem variar entre 0 e um valor w que seja suficientemente grande para todos os competidores. Como cada comprador tem um certo valor sobre o item (ou cada jogador tem um tipo), e este valor (ou tipo) é desconhecido para os outros compradores, podemos tratar esse valor v_i do jogador i como uma variável aleatória X_i . Como os outros jogadores não sabem quanto cada outro jogador valoriza o item, X_i é uma variável aleatória para quem não for o jogador i e para o leiloeiro, mas não para o jogador i que sabe do seu próprio valor. O conjunto dos tipos possíveis para o jogador i será denotado pelo conjunto $V_i = [0, w]$ e o conjunto de todos os tipos possíveis de valores dos jogadores será denotado pelo conjunto

$$V = \times_1^n [0, w] = \overbrace{[0, w] \times \dots \times [0, w]}^{n \text{ vezes}}.$$

Cada variável aleatória X_i terá uma função de distribuição de probabilidade correspondente f_i definida no conjunto $V_i = [0, w]$. Vamos também supor que as distribuições de probabilidade são independentes. Com isso, a função de distribuição de probabilidade f será definida no conjunto V , definido acima, e representa a distribuição de probabilidade de uma dada configuração dentre todas as possíveis, sendo definida por

$$f(v) = \prod_{i=1}^n f_i(v_i).$$

Cada função de probabilidade também terá uma função de distribuição acumulada $F_i(x) : [0, w] \rightarrow [0, 1]$, que representa a probabilidade do competidor i ter o valor entre 0 e x . Esta função é definida como

$$F_i(x) = \int_0^x f_i(y) dy.$$

A função utilidade de cada jogador está ligada diretamente ao tipo do jogador, representando o lucro para o jogador que levar o item. Com isso, definiremos $u_i(v_i) = v_i - p_i$

como sendo a função utilidade do jogador i onde v_i é o valor do jogador i e p_i o preço que este jogador deve pagar.

Na tentativa de maximizar o seu ganho cada jogador deverá ter uma estratégia frente ao leilão e nem sempre a melhor estratégia será falar a verdade. Como as regras se aplicam igualmente para todos os jogadores e a única diferença entre os jogadores é o valor de cada um. Para analisarmos o equilíbrio destes jogos vamos definir a estratégia de cada jogador dependendo unicamente do valor deste jogador. Definimos o conjunto de vetores de estratégias possíveis de todos os jogadores como $B = \{b|b : V \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ o conjunto de todas as funções b com domínio em V e imagem em \mathbb{R}^n , e $B_i = \{b_i|b_i : [0, w] \rightarrow \mathbb{R}\}$ como o conjunto de estratégias possíveis para o jogador i . Um elemento deste conjunto é uma função de estratégia $b_i(v_i)$ para o jogador i . Note que cada jogador i tem um tipo v_i que representa o quanto esse jogador valoriza o item, uma estratégia específica que dê como lance o quanto o jogador i realmente está disposto a pagar pelo item seria $b_i(v_i) = v_i$.

Assim podemos definir um mecanismo de leilão segundo o trabalho de Myerson [18]:

Definição 3.2.1. Um mecanismo de leilão (B, μ, π) tem três componentes. Sendo $B = (B_1, \dots, B_n)$ um conjunto de vetores de funções de todas as estratégias possíveis para o jogo, onde B_i é o conjunto de estratégias possíveis do jogador i ; sendo $b \in B$ um vetor de estratégia possível $\mu : B \rightarrow \Delta$, sendo Δ um conjunto de probabilidade em $[0, 1]^n$, é uma função de “regra de alocação” que define uma probabilidade de cada jogador ganhar o produto para cada estratégia b , sendo $\mu_i(b)$ o i -ésimo termo do vetor e a probabilidade do jogador i ganhar o item; $\pi : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função de “regra de pagamento” que define o preço que cada jogador deverá pagar, sendo $\pi_i(b)$ o i -ésimo termo do vetor e o valor que o jogador i deverá pagar.

Note que, por essa definição, é possível definir um mecanismo de leilão em que um dado jogador deverá pagar um preço mesmo sem ganhar o item.

Definida as regras do leilão, podemos explicitar a equação da utilidade de um dado jogador i . Dada a função de distribuição de probabilidade $f(v)$ do vetor de valores v ocorrer, e $f_{-i}(v_{-i})$ do vetor de valores v_{-i} ocorrer, a equação de utilidade u_i do jogador i pode ser dada pela equação

$$u_i(\pi, \mu, v, b) = \int_{V_{-i}} (v_i \mu_i(b(v)) - \pi_i(b(v))) f_{-i}(v_{-i}) dv,$$

que é o somatório contínuo do lucro $v_i \mu_i(b(v)) - \pi_i(b(v))$. Esta equação representa o quando ele valoriza o produto (v_i), multiplicado pela probabilidade deste jogador ganhar o item ($\mu_i(b(v))$), subtraído pelo valor que ele deve pagar ($\pi_i(b(v))$), multiplicado pela probabilidade de os valores serem v_{-i} para cada v_{-i} no conjunto contínuo V_{-i} .

Observe que a função de utilidade depende das regras de cada de leilão e que em qualquer leilão cada jogador tentará maximizar os seus ganhos. Contudo, único elemento

que o jogador tem controle é a sua estratégia $b(v)$. Assim, para cada mecanismo de leilão o jogador tentará maximizar a sua utilidade mudando a sua estratégia, sempre mantendo a consciência de que os outros jogadores também tentarão mudar a estratégia. Sabendo qual a estratégia esperada dos outros jogadores, o jogador i tentará melhorar a sua estratégia e assim continuará esse processo, talvez indeterminadamente. Caso os jogadores cheguem em um estado em que ninguém, individualmente, terá interesse em mudar, então estes jogadores terão chegado em um equilíbrio. Se o vetor de estratégia b for um equilíbrio então a seguinte condição deve ser satisfeita para cada jogador i :

$$u_i(\mu, \pi, b, t) \geq \int_{V_{-i}} (v_i \mu_i(s_i(v), b_{-i}(v_{-i})) - \pi_i(s_i(v), b_{-i}(v_{-i}))) f_{-i}(v_{-i}),$$

$$\forall s_i \in B_i, t \in [0, w].$$

Para complementar, apesar das regras apresentadas serem bem definidas, devemos incluir algumas restrições, pois com apenas estas regras damos margem à existência de leilões que não fariam sentido na prática e não seriam fieis à realidade. Dizemos que um leilão é viável se satisfaz as duas condições seguintes:

- i. Como temos apenas um item a função de probabilidade deve obedecer à seguinte condição:

$$\sum_{j \in N} \mu_j(t) \leq 1 \text{ e } \mu_i(t) \geq 0 \forall i \in N, \forall t \in T.$$

- ii. Como o leiloeiro não pode obrigar nenhum jogador a participar do leilão, então todo mecanismo de leilão deve ter algum incentivo para todos os jogadores presentes participarem, então é razoável que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\exists b_i u_i(\mu, \pi, b, t) \geq 0 \forall i \in N, t_i \in [0, w].$$

3.2.2 Exemplos de Leilões e seus Equilíbrios

Vamos estudar o mecanismo do leilão de primeiro e de segundo preço e seus equilíbrios. Sabemos que ambos leilões dependem do primeiro e do segundo maior lances dados, então devemos introduzir o conceito de variável aleatória de segunda ordem Y . Para facilitar a análise, vamos supor que todos os jogadores compartilham a mesma distribuição de probabilidade sobre os seus valores, ou seja, $f_1 = f_2 = \dots = f_n$. Cada jogador sabe apenas o seu próprio valor e todos compartilham a estimativa dos valores dos adversários. Esta estimativa é dada por variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n , cada uma correspondente à estimativa do valor de um jogador, sendo X_i correspondente à estimativa do valor do jogador i . A variável aleatória Y corresponde à estimativa do segundo maior valor, então sua função de distribuição acumulada é dada pela equação $G = F^{n-1}$.

Equilíbrio do Leilão Selado de Primeiro Preço

No leilão selado de primeiro preço para um item, pelas regras de mecanismo de leilões, temos que o vetor de estratégias ou lances B pode ser qualquer valor positivo para qualquer comprador, ou seja $B = R_+^n$. A fim de facilitar a análise vamos supor que nenhum jogador dará um lance igual a outro. Como os compradores não podem oferecer valores negativos, a função de regra de alocação π^I é definida como

$$\pi_i^I = \begin{cases} 1 & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{se } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

e a função de regra de pagamento μ é definida como

$$\mu_i^I = \begin{cases} b_i & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{se } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Definida estas funções, podemos ver que a função utilidade do jogador i dependerá do fato de o jogador i levar ou não o item e do valor do jogador que deu o segundo maior lance. Para estudar então o equilíbrio vamos ver qual é a melhor estratégia para algum jogador i . A função de utilidade nesse caso seria

$$u_i = v_i - b_i(v_i) \text{ caso leve, } 0 \text{ caso não leve.}$$

Sabemos que nenhum jogador teria uma utilidade positiva caso oferecesse um valor mais alto do que o quanto ele valoriza, ou seja $b_i(v_i) > v_i$. Pois assim o jogador teria uma utilidade menor ou igual a 0, seria 0 caso não levasse o item e seria negativa com $u_i = v_i - b_i(v_i) < 0$ caso ganhasse o item. Sabemos também que, em um equilíbrio, é esperado que o jogador com o maior valor ganhe o item. Pois caso contrário, se o jogador i tem o maior valor e um outro jogador j ganha o item, isto quer dizer que $v_i \geq v_j \geq b_j(v_j) \geq b_i(v_i)$, então o jogador i terá lucro em mudar a sua estratégia para qualquer valor entre v_i e $b_j(v_j)$. Mas como estamos em um equilíbrio e neste estado nenhum jogador tem motivação em mudar a sua estratégia, então o jogador com o maior valor levará o item.

Agora vamos supor que o jogador i tem o maior valor para o item, então qual seria a sua melhor estratégia? Como os jogadores estão em um equilíbrio simétrico então todos usam a mesma estratégia $b_j(v_j) = \beta_j, \forall j \in N$, isto é, $b_1(t) = b_2(t) = \dots = b_n(t), \forall t \in \mathbb{R}$, vamos chamar essa função de b . Para simplificar a notação, vamos definir β_j como sendo $b(v_j) = \beta_j$ para todo j . Sabemos que não é uma boa ideia oferecer um lance β_i maior do que v_i , também que o lance $\beta_i = v_i$ trará utilidade 0 para o comprador. Precisamos então estudar a probabilidade do lance β_i ser maior do que os valores de todos os outros jogadores, sendo também menor do que o valor do jogador i . Como todas estimativas de valores são independente e identicamente distribuídas então essa probabilidade pode ser

dada pela função $G(t) = F^{N-1}(t)$, pois temos $N - 1$ jogadores tirando o jogador i . Como a utilidade do comprador é dada pela equação $u_i = v_i - \beta_i$ e a probabilidade dele ganhar o item oferecendo um valor t é dada pela função $G(t)$, então devemos maximizar a equação

$$G(v_i)(v_i - \beta_i) = G(b^{-1}(\beta_i))(v_i - \beta_i).$$

Derivando essa equação em relação ao termo β_i que queremos manipular e igualando o resultado a zero temos

$$\frac{g(b^{-1}(\beta_i))}{b'(b^{-1}(\beta_i))}(v_i - \beta_i) - G(b^{-1}(\beta_i)) = 0.$$

Como esse suposto equilíbrio é simétrico, então podemos dizer que $b(v_i) = \beta_i$ e substituir na equação:

$$g(v_i)v_i = G(v_i)b'(v_i) + \beta g(v_i) = \frac{d}{dv_i}(G(v_i)b(v_i)).$$

Ficamos então com a equação diferencial

$$g(v_i)v_i = \frac{d}{dv_i}(G(v_i)b(v_i)).$$

Agora observe que $b(t)$ é uma função contínua, não decrescente onde $b(t) \leq t$ e nenhum jogador pode dar lances negativos, então $\beta(0) = 0$, temos assim uma solução para a equação diferencial:

$$\begin{aligned} b(v_i) &= \frac{1}{G(v_i)} \int_0^{v_i} xg(x)dx \\ &= \frac{1}{G(v_i)} \mathbb{E}[Y_i | Y_i < v_i] G(v_i) \\ &= \mathbb{E}[Y_1 | Y_1 < v_i]. \end{aligned}$$

Agora precisamos provar que esta solução da equação diferencial $\beta_i = b_i(v_i) = \mathbb{E}[Y | Y < v_i]$ é um equilíbrio. Para isso vamos supor que todos os outros jogadores usem esta estratégia, então vamos provar que qualquer outra estratégia que o jogador i usar será pior que a estratégia β_i .

Vamos estudar a equação $L(b(z), x)$, que determina o lucro de um jogador com valor x que ganha o item, se ele der o lance $b(z)$ para algum z , não sendo necessariamente $z = x$.

Então o lucro $L(b(z), x)$ será dado por

$$\begin{aligned}
 L(b(z), x) &= G(z)(x - b(z)) \\
 &= G(z)x - G(z)b(z) \\
 &= G(z)x - G(z)\mathbb{E}[Y|Y < z] \\
 &= G(z)x - \int_0^z yg(y) dy \\
 &= G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(y) dy \\
 &= G(z)(x - z) + \int_0^z G(y) dy.
 \end{aligned}$$

Dada a equação de lucro em relação à estratégia usada e o tipo do jogador vamos ver a desigualdade $L(b(x), x) - L(b(z), x)$:

$$\begin{aligned}
 L(b(x), x) - L(b(z), x) &= G(x)(x - x) + \int_0^x G(y)dy - G(z)(x - z) - \int_0^z G(y)dy \\
 &= G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy.
 \end{aligned}$$

Como a função G é não decrescente então sempre teremos

$$L(b(x), x) - L(b(z), x) = G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy \geq 0.$$

Provando que o lucro quando o jogador i dá como lance $b(x)$ é maior do que qualquer outra estratégia. Concluímos assim que a melhor estratégia para qualquer jogador i é dar um lance de $E[Y|Y < v_i]$, que representa a estimativa do segundo maior valor dado que o maior valor é o valor do jogador i [10].

Logicamente, supondo que o valor do jogador i é o maior valor dentre todos os jogadores, neste equilíbrio, o valor esperado que o leiloeiro irá receber será o valor do lance do jogador i que será $E[Y|Y < v_i]$. Mais a frente vamos ver como esta informação é importante e como isto faz com que este leilão seja estrategicamente equivalente ao leilão selado de segundo preço.

Equilíbrio do Leilão Selado de segundo Preço

Como vimos na Seção 2.4, no leilão de segundo preço a melhor estratégia é exibir o próprio valor como lance. Então supondo que o valor do jogador i seja o maior valor, seu lance será $b_i(v_i) = v_i$, porém o pagamento esperado deste jogador será $E[Y|Y < v_i]$.

Perceba que, apesar da regra do jogo ser diferente do leilão do primeiro preço e, sendo assim, as estratégias esperadas dos jogadores também serem diferentes, a receita esperada pelo leiloeiro é a mesma. O fato de que, apesar de cobrar um valor menor, o leiloeiro terá um lucro esperado igual é um fato guiará o estudo dos mecanismos de leilões.

3.2.3 Leilões Estrategicamente Equivalentes

Dizemos que dois leilões são estrategicamente equivalentes se para cada estratégia em um leilão existe uma estratégia equivalente em outro. Assim os leilões Holandês e leilão com lances selados de primeiro preço são estrategicamente equivalentes, pois depois de um dado competidor planejar a sua estratégia, ele poderá tanto aplicá-la em um leilão quanto em outro obtendo os mesmos resultados.

Os leilões Inglês e leilão de lances selados de segundo preço são fracamente estrategicamente equivalentes [10] pois têm estratégias equivalentes em qualquer situação, menos em uma, quando os participantes não têm certeza sobre o quanto valorizar o item. Chamamos esta incerteza de valores interdependentes, quando o valor que um dado competidor dá ao item depende do valor que os outros competidores dão à ele. Isso pode ter aplicação quando o item pode ser revendido depois.

No leilão de lances selados de segundo preço os competidores devem definir o seu lance e depois submeter ao leiloeiro. Já no leilão Inglês, os competidores sabem qual é o valor de cada competidor que desistiu de obter o item antes dele, dessa maneira ele pode redefinir qual será o seu lance durante o acontecimento do leilão.

Como o nosso objeto de estudo é a venda de itens virtuais que devem ser usados, de forma pré-definida e no momento em que o leilão é terminado, o item vendido no estudo não pode ser revendido. Sendo assim vamos tratar os valores dos jogadores como independentes, assim como vamos tratar o leilão Inglês e o leilão de lances selados de segundo preço como estrategicamente equivalentes.

3.2.4 Mecanismo de Revelação Direta

Um mecanismo de revelação direta é um caso especial de mecanismo de leilão em que os participantes, ao invés de darem lances, revelam os seus próprios valores de forma simultânea e confidencial [18]. Baseado neste valor o item é distribuído segundo as funções π e μ . A existência deste mecanismo é teórica, pois nenhum mecanismo consegue garantir que o comprador está realmente revelando o seu valor. Este mecanismo pode servir como um ideal a ser buscado pelo projeto de mecanismo ou para ser comparado com um dado de mecanismo.

Como não podemos obrigar um jogador a revelar o seu valor, um mecanismo de revelação direta deve ser projetado de maneira a ser incentivado a que todos os jogadores deem o seu valor como lance. Neste tipo de leilão dizemos também que tem a propriedade de ser incentivo compatível ou que o leilão é incentivo compatível.

Um leilão com mecanismo de revelação direta, além de ter que satisfazer as condições de um leilão viável, deve satisfazer obrigatoriamente a seguinte condição, que chamamos

de condição de incentivo-compatibilidade, para cada jogador i :

$$\begin{aligned} \int_{V_{-i}} (v_i \pi_i(v_i, b_{-i}(v_{-i})) - \mu(v_i, b_{-i}(v_i))) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i} \\ \geq \\ \int_{V_{-i}} (v_i \pi_i(b(v)) - \mu(b(v))) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i} \\ \forall v \in V, b \in B. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que, para cada jogador i , dar como lance o seu valor verdadeiro deve ter uma utilidade maior do que dar qualquer outro valor como lance.

Um exemplo de mecanismo de revelação direta é o leilão de segundo preço, pois como já vimos, em um equilíbrio é vantajoso dizer a verdade. Por causa disto, dizemos também que o leilão de segundo preço é incentivo-compatível.

O Princípio de Revelação Direta

Teorema 3.2.1 (Princípio da Revelação Direta). *Dado qualquer mecanismo de leilão viável (B, μ, π) e um equilíbrio β para este mecanismo, existe um mecanismo de leilão de revelação direta que resulta para o leiloeiro e para os jogadores a mesma utilidade esperada que o dado mecanismo no equilíbrio β .*

A ideia da prova é ver qual seria o equilíbrio de um leilão e elaborar um leilão em que depois dos jogadores revelarem os seus valores daria o resultado daquele equilíbrio.

Um exemplo simples é o mecanismo de revelação direta associado ao leilão de primeiro preço. Vimos que, no leilão de primeiro preço para um único item, em um equilíbrio, cada jogador i daria como lance o valor esperado do segundo maior valor, dado que o valor do próprio jogador i seja o maior valor. Faça então um leilão onde, se todos os jogadores oferecerem o próprio valor como lance, então pagariam o mesmo valor de como se estivessem no leilão de primeiro preço usando a estratégia que é um equilíbrio. Deste modo pagariam o mesmo valor que pagariam neste equilíbrio, que é o segundo maior valor esperado. As regras deste leilão que criamos são exatamente as regras do leilão selado de segundo preço para um único item.

3.2.5 Mecanismo Eficiente

Um mecanismo eficiente é aquele que otimiza a função de bem estar social. A ideia é de que o leilão tente distribuir os itens para os compradores que mais valorizem estes itens. Se o mecanismo tem um equilíbrio que tem uma alocação eficiente, então este mecanismo é eficiente.

Mais formalmente, uma regra de alocação $\mu^* : V \rightarrow \Delta$ é eficiente se maximiza a função de bem estar social, então para todo $v \in V$ teremos

$$\mu^*(v) \in \arg \max_{\mu \in \Delta} \sum_{i \in N} \mu_i(v) v_i.$$

Neste caso a função $SW : V \rightarrow \mathbb{R}$ de bem estar social é definida como

$$SW(v) \equiv \sum_{i \in N} \mu_i(v) v_i.$$

Também vamos definir o vetor de alocação

$$SW(v)_{-i} \equiv \sum_{j \in N, j \neq i} \mu_j(v) v_j.$$

O Mecanismo VCG

Apesar de nem sempre otimizar a receita do leiloeiro, o mecanismo VCG (sigla extraída de “Vickrey-Clarke-Groves”) é um mecanismo eficiente e é conhecido por ser incentivo-compatível [10, 19].

A regra de pagamento $\pi^{VCG} : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ do VCG é dado por

$$\pi_i^{VCG}(v) = SW(0, v_{-i}) - SW_{-i}(v).$$

Esta regra é dada pela diferença entre o valor do bem estar social quando o jogador i submete 0 como lance, o menor lance que ele poderia dar, e o valor do bem estar social sem contarmos o ganho do jogador i .

Podemos ver facilmente que o leilão do segundo preço é equivalente ao leilão de VCG aplicado à venda de um único item. Para isto, vamos comparar os dois leilões. Para simplificar a comparação, suponha que os jogadores deram os seus valores reais como lance. Esta é uma suposição razoável, visto que os leilões são incentivo-compatíveis. Suponha que o valor do jogador i é o maior valor dentre os jogadores, e que o valor do jogador j é o segundo maior.

No leilão de segundo preço, o jogador i ganha o item pagando o valor do jogador j . No leilão de VCG, o jogador i levará o item e teremos $SW(0, v_{-i}) = v_j$ e $SW_{-i}(v) = 0$, logo o preço que o jogador i pagará será $\pi_i^{VCG}(v) = SW(0, v_{-i}) - SW_{-i}(v) = v_j$.

Capítulo 4

Anúncios em Sites de Busca

As formas de se fazer propagandas no ambiente virtual da internet criaram novas oportunidades e, naturalmente, novos problemas interessantes. Enquanto as propagandas são estáticas nas revistas físicas e nas emissoras de TV, obrigando os anunciantes a ter que direcionar a propaganda para uma grande número de pessoas, na internet os sites têm a liberdade de direcionar os anúncios personalizados para cada indivíduo. Baseado no comportamento deste usuário específico, o publicador (aquele que exibe o anúncio) pode escolher qual propaganda exibir naquele aparelho e naquele determinado momento. Pegue como exemplo os sites de busca, o público alvo é qualquer pessoa que use a internet e a única informação que o publicador tem sobre o usuário é a palavra que ele está buscando. Por outro lado, sites de redes sociais, como o “Facebook”, têm bastante informação coletada de cada usuário, podendo direcionar um tipo mais específico de propaganda e assim esperar que a propaganda cause um impacto maior, porém com um público alvo menor e menos frequente que um site de busca.

Sendo assim, o objeto de interesse do nosso estudo são os sites de busca como “Google”, “Bing” e “Yahoo”. Estes tipos de site exibem alguns links de propaganda na página onde é exibido o resultado da busca. Como podemos ver na Figura 4.1, usando o site de busca da “Google”, o resultado da pesquisa usando a palavra “mestrado” obteve cinco anúncios ao lado e mais três anúncios que foram colocados no topo da pesquisa (acredita-se que este é o local onde as pessoas mais olham, ou olham primeiro), seguidos pelo resultado real ou resultado “orgânico”: primeiro a página da “Wikipédia” depois o site da “Fapesp”[11, 15].

A venda do espaço para o anúncio acontece na forma de um leilão. O item a ser vendido é o espaço para o link do anunciante. Este espaço para um anunciante é chamado de *slot*, o espaço total para anúncio é um espaço de *slots* empilhados verticalmente. Cada *slot* vale mais do que o *slot* que está logo abaixo.

Neste modelo os anunciantes pagam pelo clique no link. Ao invés de pagar pela impressão do link, cada anunciante oferece um lance para comprar um espaço na página de

The image shows a screenshot of search engine results for the keyword 'Mestrado'. The results are organized into two columns. Each result includes a title, a URL, and a short description. The left column features ads from 'pos.cruzeirodosul.edu.br', 'Univ Católica de Brasília | CatolicaVirtual.br', 'Mestrados.Ask.com', 'Wikipédia', and 'FAPESP'. The right column features ads from 'mestradoemportugal.com.br', 'Faculdade Mestrado Livre', 'Veris Metrocamp', 'Faculdades Anhanguera', and 'Unisul Virtual'. The ads are for various graduate programs, including online courses, distance education, and international modules.

Figura 4.1: Exemplos de propagandas em sites de busca.

busca de uma palavra-chave. Este lance representa o maior valor que ele estaria disposto a pagar pelo clique de um usuário, a palavra representa a informação que o anunciante e o publicador têm sobre o usuário, sobre o que este está interessado. Baseado no lance e em uma regra pré-estabelecida, o publicador escolherá a ordem em que os anúncios irão aparecer e o quanto cobrar de cada anunciante. Esta regra, também chamada de mecanismo, influenciará diretamente o lance dos anunciantes e a receita do publicador. Assim, a análise e desenvolvimento de um bom mecanismo é extremamente importante para o publicador otimizar a sua receita.

Também devemos levar em consideração de que este item (o espaço) não tem nenhum custo para o publicador e que é perecível, no sentido de que não é possível guardar um espaço para vender depois, nem é possível revender este espaço.

O interesse neste tipo de problema é a proximidade com modelos da Teoria dos Jogos bem estudados. Por exemplo, o fato de termos um grande número de buscas em um tempo pequeno e a liberdade dos anunciantes de mudar o lance a qualquer hora, nos dá a ideia de que, se um anunciante variar bastante o seu lance, ele conseguirá ter uma boa estimativa dos lances dos outros anunciantes. Isto permite uma modelagem da situação em um jogo de informação incompleta, ou até uma modelagem em um jogo de informação completa, onde cada anunciante sabe o quanto todos os outros anunciantes valorizam o item. Desse modo, podemos modelar o problema matematicamente usando abordagens clássicas de Teoria dos Jogos. Com isso podemos tentar projetar um mecanismo que otimize alguma

característica desejada.

Como mostra o trabalho de Edelman, Ostrovsky e Schwarz [6], inicialmente, por volta de 1994, as vendas eram feitas e pagas pela impressão, também chamada de *pay-per-impression*, algumas centenas de dólares eram pagas por cada mil vezes em que o anúncio aparecesse no site.

Em 1997, uma empresa chamada Overture introduziu um mecanismo revolucionário chamado de *pay-per-click*, em que as impressões só seriam cobradas se fossem clicadas. As vendas do espaço eram feitas usando um leilão chamado *Generalized First Price Auction* (GFP) em que a empresa mostraria os anúncios na ordem do valor do lance de cada anunciante, o maior valor apareceria primeiro e seguindo em ordem decrescente dos lances os outros anúncios apareciam abaixo. Assim que um anúncio fosse clicado o publicador cobraria do anunciante o valor do lance que este deu. A confiança dos anunciantes de que estavam pagando por uma propaganda que funcionava, a transparência do mecanismo e a crença dos anunciantes de que poderiam pagar um preço muito barato pelo anúncio tornaram o mecanismo um sucesso, tornando a Overture a principal plataforma de propaganda para o Yahoo! e MSN.

Porém, os anunciantes tentavam baixar os lances ao máximo até conseguir pagar o menor valor possível mantendo a colocação desejada, fazendo assim a empresa perder uma boa parte da receita. Percebendo a volatilidade dos lances em um leilão GFP, e a causa desta volatilidade, em 2002 Google começou a implementar o *Generalized Second-Price Auction* (GSP). Neste mecanismo os lances dos anunciantes eram selados e os anúncios também eram ordenados seguindo a ordem decrescente dos lances, porém o preço cobrado de um anunciante seria o lance do anunciante logo abaixo dele mais um centavo. Este acréscimo de um centavo representa o mínimo que este anunciante precisaria para ganhar este *slot*. Este mecanismo é mais amigável ao anunciante e menos suscetível a estratégias mais agressivas como ocorrem com o GFP e como veremos na Seção 5.1.

Percebendo a eficácia do mecanismo do Google, outras empresas como Yahoo! também passaram a usar este mecanismo.

4.1 Definições Formais

Seguindo a modelagem dos trabalhos de Lahaie, Pennock, Saberi e Vohra [11], Paes Leme e Tardos [13, 14] e Paes Leme e Lucier [12], modelamos um leilão de anúncios de propaganda como um jogo com um conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de jogadores e um conjunto $M = \{1, 2, \dots, m\}$ de *slots*, onde os *slots* são numerados de cima para baixo. Para simplificar o estudo vamos supor que $n = m$, sabendo que se na realidade $m < n$ então basta incluir $n - m$ *slots* com probabilidade zero de serem clicados, caso $n < m$ então basta incluir $m - n$ jogadores com valores iguais a zero. Cada jogador i tem um valor v_i

que representa o maior valor que o jogador pagaria por um clique, em um jogo Bayesiano este valor v_i é o tipo do jogador i . Chamaremos de $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ o vetor de lances dos jogadores, onde b_i é o lance do jogador i , este vetor de lances é uma representação da estratégia dos jogadores. Temos também um valor μ_{ij} chamado de *click thought rate* (CTR) que representa a probabilidade de o jogador i receber um clique se estiver no *slot* j . Para simplificar a análise vamos tratar cada μ_{ij} como um α_j , esta simplificação supõe que a probabilidade de um certo anúncio ser clicado depende apenas da posição do *slot* em que este anúncio está. Também supomos que $\alpha_i \geq \alpha_j$ sempre que $i < j$, isto retrata a crença de que um anúncio é mais provável de ser clicado quando está em um *slot* superior. Vamos tratar por p_i o preço que o anunciante i deve pagar. A permutação $\pi : M \rightarrow N$ uma função que representa uma possível alocação dos anúncios em *slots*, $\pi(i)$ é o jogador que está no *slot* i na alocação π , isso quer dizer que $v_{\pi(i)}$ é o valor do jogador que está no *slot* i na alocação π .

4.2 Possibilidades de Mecanismos

4.2.1 O GFP, o GSP e o VCG

Em um mecanismo de GFP a alocação dos jogadores segue em ordem do lance dado por cada um. Caso tenha algum lance igual ao outro a ordem entre os lances iguais será sorteada com probabilidades iguais. Então os lances são ordenados e o i -ésimo *slot* é alocado para o jogador com o i -ésimo lance mais alto, então em uma alocação π teremos $b_{\pi(i)} \geq b_{\pi(j)}$ sempre que $i < j$. O preço que cada jogador deve pagar é igual ao lance que este jogador deu, então para todo i , $p_i = b_i$.

No mecanismo GSP teremos a mesma alocação do GFP. Porém o preço que cada jogador i pagará será igual ao lance do jogador que conseguiu o *slot* logo abaixo deste jogador, então para todo jogador i tal que $\pi(j) = i$, $p_i = b_{\pi(j+1)}$ se $j < m$, caso $i = \pi(m)$ então $p_i = 0$.

No mecanismo VCG teremos a mesma alocação que o GFP e GSP. Neste caso, o preço para o jogador i será calculado da seguinte forma: pegue o valor que todos os jogadores pagariam no GFP caso o jogador i não estivesse participando do leilão, pegue um outro valor igual ao preço que todos os jogadores pagariam no GFP tirando o pagamento do jogador i , subtraia do primeiro o segundo valor e divida o resultado pelo valor do CTR do slot $\pi^{-1}(i) = j$ (o *slot* para o qual o jogador i foi alocado). Este será o preço que o jogador i pagará com a alocação π sendo $\pi(j) = i$.

Como nos trabalhos de Edelman, Ostrovsky e Schwarz [6] e Edelman e Ostrovsky [5], explicitando as equações teremos:

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k b_{\pi(k)} + \sum_{k=j}^{n-1} \alpha_k b_{\pi(k+1)}\right) - \left(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k b_{\pi(k)} + \sum_{k=j+1}^n \alpha_k b_{\pi(k)}\right)}{\alpha_j} \\
&= \frac{\sum_{k=j}^{n-1} \alpha_k b_{\pi(k+1)} - \sum_{k=j+1}^n \alpha_k b_{\pi(k)}}{\alpha_j} \\
&= \frac{\sum_{k=j+1}^n \alpha_{k-1} b_{\pi(k)} - \sum_{k=j+1}^n \alpha_k b_{\pi(k)}}{\alpha_j} \\
&= \frac{\sum_{k=j+1}^n b_{\pi(k)} (\alpha_{k-1} - \alpha_k)}{\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Podemos também definir essa equação por recursão:

$$\begin{aligned}
p_i &= p_{\pi(j)} \\
&= \frac{\alpha_j b_{\pi(j+1)} - \alpha_{j+1} b_{\pi(j+1)} + \sum_{k=j+1}^n \alpha_k b_{\pi(k+1)} - \sum_{k=j+2}^n \alpha_k b_{\pi(k)}}{\alpha_j} \\
&= \frac{\alpha_j b_{\pi(j+1)} - \alpha_{j+1} b_{\pi(j+1)} + p_{\pi(j+1)}}{\alpha_j} \\
&= \frac{b_{\pi(j+1)} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) + p_{\pi(j+1)}}{\alpha_j}.
\end{aligned}$$

O trabalho de Fukuda [4] faz uma análise comparativa entre o mecanismo de GSP e de VCG. Neste trabalho, temos a Figura 4.2 que comparam estes três mecanismos calculando o pagamento esperado entre eles. Observe nestas figuras que, imposto o mesmo vetor de lances, o pagamento do GFP é maior do que o pagamento do GSP que é maior do que o pagamento do VCG.

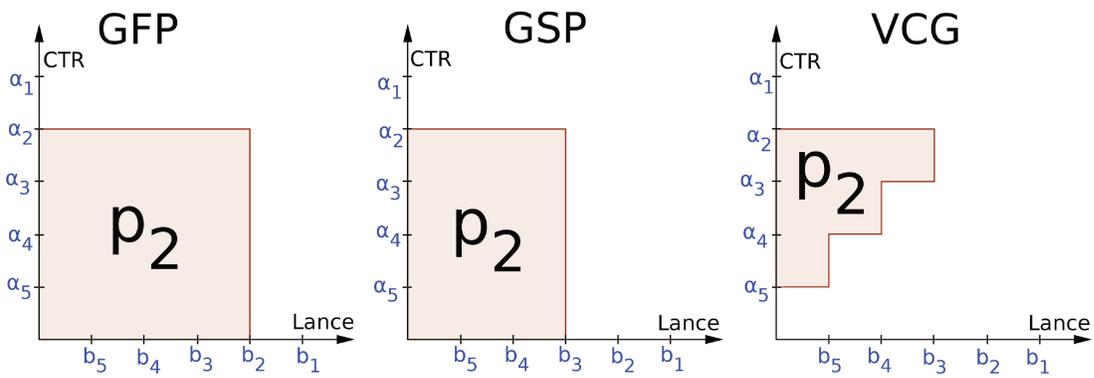


Figura 4.2: Esta imagem representa o pagamento p_2 do segundo jogador pelo segundo *slot* nos três mecanismo, supondo 5 *slots* e 5 anunciantes. À esquerda temos o pagamento esperado no mecanismo de GFP, no meio temos o pagamento esperado no mecanismo de GSP e à direita temos o pagamento esperado no mecanismo de VCG

Capítulo 5

Comparação Entre Mecanismos em Anúncios de Sites de Busca

Na extensa literatura sobre Leilões para Sites de Busca se faz suposições muito fortes sobre a realidade, como é exposto no trabalho de Markakis, Maillé, Naldi, Stamoulis, e Tuffin [15]. Algumas das modelagens dos mecanismos são feitas usando jogos com informação completa, estas se baseiam na crença de que os jogadores sabem sua valoração e sabem a valoração dos outros jogadores. Há muitos estudos que levam em conta a incerteza dos jogadores e modela o problema usando um equilíbrio de Bayes-Nash, mas este método é muito complicado e ainda está longe da realidade. O conceito de equilíbrio em si supõe que todos os jogadores irão convergir para um tipo de estratégia estável, que dependa da estratégia e informação dos outros jogadores. Um exemplo interessante de desinformação, mostrado por Lahaie, Pennock, Saberi e Vohra em [11], é a propaganda que o Google faz sobre seu mecanismo de leilão, o Google informa que como o seu mecanismo é uma variação do VCG (o que é verdade) então ele é incentivo-compatível, o que não é verdade.

Neste capítulo vamos comparar a realidade e a teoria deste problema. Na parte teórica, modelamos o jogo como na Seção 4.1 e adicionamos mais quatro suposições que merecem comentários [11]:

- i. Em primeiro lugar modelaremos o jogo como um jogo estático de informação completa, isto é, o jogo não se repete e os valores dos jogadores são conhecidos publicamente, apesar desta ser uma suposição que está longe de ser realidade a análise de jogos repetitivos tornaria a análise do jogo muito complicada [11]. Porém a modelagem estática não quer dizer que o problema deve ser interpretado estaticamente e sim que, apesar do leilão ser repetido inúmeras vezes, tratamos cada participante como sendo um jogador míope, isto é, cada jogador está tentando otimizar o ganho imediato do jogo em cada momento e não um ganho a longo prazo. Então o fato do jogo ser repetitivo dá a ideia de que os jogadores têm uma estimativa do valor

dos outros. Estimativa esta conseguida em outras rodadas do jogo, levando-nos a crer que podemos fazer uma modelagem Bayesiana ou até de informação completa. Porém a suposição dos jogadores serem míopes dá a ideia de que podemos fazer uma modelagem de um jogo estático.

- ii. Em segundo lugar, a expectativa de efeito de um anúncio está linearmente ligada ao CTR do *slot* em que este anúncio aparece. Não existe garantia de que se um anúncio recebe mais cliques então este anunciante venderá mais o produto que está oferecendo, pois argumenta-se que o perfil do cliente que clica no primeiro anúncio que aparece é diferente do que clica em algum anúncio mais abaixo. Em [11] especula-se que este tem um perfil mais seletivo por estar procurando um produto para comprar enquanto que aquele está apenas pesquisando informações. Nossa suposição então não tratará este argumento como válido, confiando que quanto mais alto o anunciante aparecer melhor para ele. Supomos mais, se o CTR do *slot* i é igual a x vezes o CTR do *slot* j , então qualquer anunciante que adquirir o *slot* i terá uma esperança de ganho de x vezes o valor do ganho caso tivesse adquirido o *slot* j .
- iii. Em terceiro, vamos supor que o pagamento esperado de um anunciante independe da qualidade dos outros anúncios que irão aparecer. Por exemplo, se o link do anunciante de uma livraria aparecer no primeiro *slot*, o retorno deste anunciante será indiferente ao fato de ter aparecido outro anunciante de livraria com qualidade melhor do que aquele ou não em algum outro *slot*.
- iv. Em quarto lugar, CTR é de conhecimento geral dos participantes. Na realidade o publicador, de posse de todos os dados, não tem certeza, mas uma estimativa do valor dos CTR, que variam em um prazo relativamente curto. Os anunciantes, por sua vez, tem uma estimativa menos precisa.

5.1 GFP: Teoria e Prática

Equilíbrio do GFP

No trabalho de Lahaie, Pennock, Saberi e Vohra [11] é dito que o mecanismo GFP modelado como um jogo estático com informação completa não tem um equilíbrio. De fato, se considerarmos os casos que acontecem na prática, com a maioria dos valores distintos entre si, então basta ver que em qualquer situação, sempre teremos pelo menos um jogador que poderia lucrar baixando um pouco o seu lance, sem ficar abaixo do lance do jogador que ganhou o *slot* abaixo. Assim esse jogador aumentará o seu lucro sem trocar de posição.

O Mecanismo de GFP na Prática

Tendo em vista que, em casos práticos, o mecanismo de GFP não tem um equilíbrio, podemos prever uma instabilidade inerente ao mecanismo, dado que os jogadores sempre estarão tentando otimizar os seus ganhos, mudando repetidamente e a qualquer momento os seus lances. Esta propriedade de os jogadores poderem mudar os lances a qualquer momento e de não termos um equilíbrio cria um ciclo infinito, uma instabilidade.

Uma evidência desta instabilidade é apresentada por Edelman e Ostrovsky [5], usando Overture no período de junho de 2002 até junho de 2003. Segundo este artigo, alguns jogadores usam um programa de lances automáticos que muda repetidamente o lance oferecido tentando otimizar os ganhos do anunciante. Tendo como entrada o valor de um anunciante, uma das estratégias deste programa é tentar ganhar o melhor espaço, dando o menor valor possível. Inicialmente este programa dá como lance o valor do anunciante mais um centavo, para assim ter o melhor lugar possível e saber qual é esse lugar. Logo depois o programa baixa o lance para o lance do jogador que ganhou o lugar logo abaixo mais um centavo, desta maneira o programa consegue o mesmo lugar pelo menor lance possível.

Quando dois ou mais jogadores com valores vizinhos (quando o maior valor mais próximo de um dos jogadores é o do outro jogador) usam este tipo de estratégia, temos um comportamento cíclico. Se fizermos um gráfico de lances por tempo teremos uma aparência de “dente-de-serra”, onde os participantes alternam de posição repetidamente, cada um vencendo o outro por um centavo de diferença. Suponha que dois jogadores com valores mais altos estejam usando esta estratégia. Após os jogadores perceberem os seus lugares irão abaixar o lance até o lance do próximo jogador, o segundo baixando até o lance do terceiro e o primeiro, após ver que o lance do segundo jogador é tão baixo quanto o do terceiro, também baixará até o lance do terceiro jogador. Após uma quantidade arbitrária de segundos, o segundo jogador irá aumentar o lance para o lance do primeiro mais um centavo, fazendo com que o primeiro jogador também aumente o lance para o lance do segundo mais um centavo. Quando um jogador chega ao seu limite, que é quando o lance iguala o seu valor, este jogador baixa o lance para o lance do próximo jogador mais alto mais um centavo. Se tivermos mais jogadores teremos o mesmo comportamento em uma escala maior, representando também uma perda maior.

Este movimento de baixar o lance drasticamente representando o lado vertical de um “dente” do padrão “dente-de-serra”, o movimento de aumentar o lance aos poucos representa o lado vertical de um “dente” no padrão. Nas figuras 5.1 e 5.2, retiradas do trabalho de Edelman e Ostrovsky [5] podemos ver um exemplo deste padrão. Na Figura 5.1, cada ponto representa o maior lance que foi dado por uma palavra específica. Sendo verificado a cada 15 minutos, o intervalo de tempo total foi de 14 horas e o valor do lance está medido em dólares. Estes dados foram coletados no dia 18 de julho de 2002

no horário de 12:15 AM até 2:15 PM. A Figura 5.2 representa a continuação do padrão observado na Figura 5.1. Observamos uma anomalia no padrão, além de diferenças no tempo entre um pico e outro. Porém o padrão é claro.

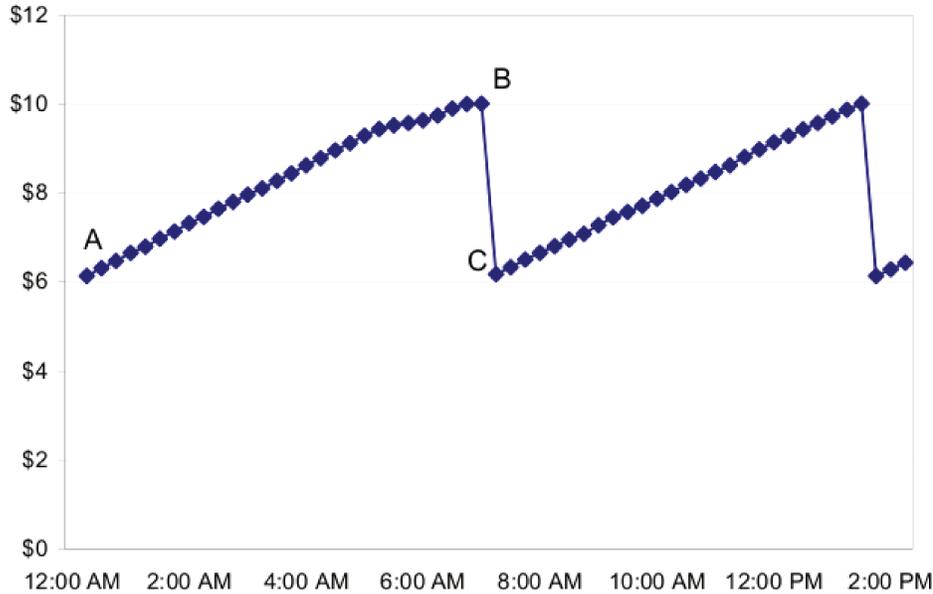


Figura 5.1: Gráfico representando o padrão “dente-de-serra” com intervalo de 15 minutos entre os pontos, cobrindo o período de 14 horas. Cada ponto representa o maior lance dado por uma palavra-chave. Do ponto A ao ponto B vemos o padrão de dois ou mais jogadores disputando o primeiro lugar pela palavra. O ponto B é o ponto onde o jogador com segundo maior lance não pode mais disputar a palavra dando um lance mais alto e desce o seu lance até o lance do jogador abaixo dele. O ponto C é o jogador com o maior valor descendo até o lance do jogador com o segundo maior valor.

Podemos inferir que este padrão “dente-de-serra” diminui o lucro do anunciante, pois o aquele que tem o valor mais alto passa a metade do tempo, ou menos, com o *slot* mais alto, ainda assim pagando menos do que o segundo maior valor, na maior parte das vezes.

Para um exemplo mais formal, vamos fazer um exemplo teórico com dois anunciantes. Estes têm valores $v_1 \geq v_2$, estão disputando por *slots* com CTRs $\alpha_1 > \alpha_2$ e os dois jogadores usam a mesma estratégia. Suponha que o pagamento mínimo é $\epsilon < v_2$. Supondo que os dois jogadores estejam usando a mesma estratégia descrita e que cada um deles mude o lance com uma demora esperada igual, os dois jogadores permanecerão o mesmo tempo com o primeiro *slot* em média e seus valores variarão entre ϵ e v_2 . Cada anunciante então pagará um valor x , com x variando linearmente entre ϵ e v_2 . Assim, o valor esperado que cada anunciante pagará por clique será

$$\epsilon + \frac{v_2 - \epsilon}{2} = \frac{v_2 + \epsilon}{2}.$$

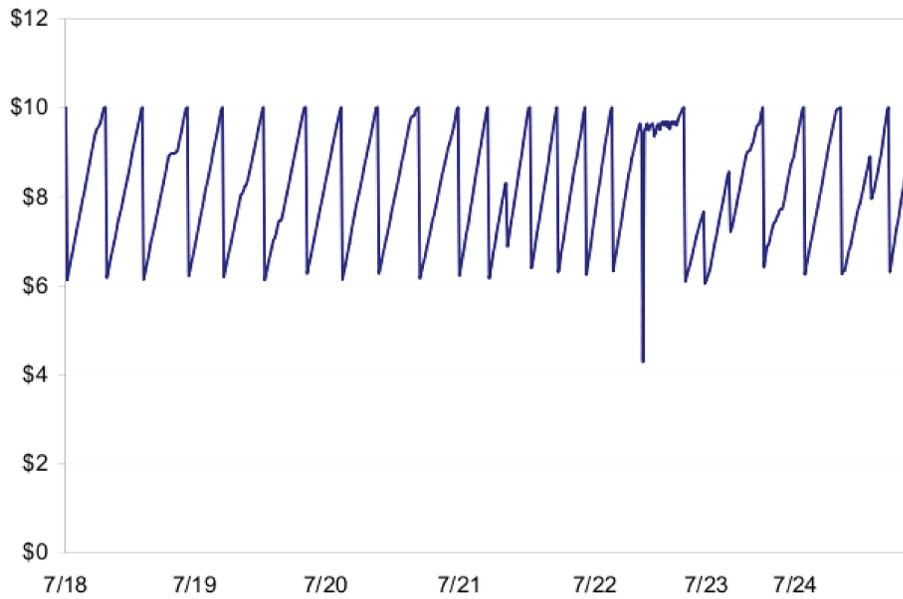


Figura 5.2: Gráfico representando o padrão “dente-de-serra” visto na Figura 5.1, porém cobrindo o período de uma semana.

Fazendo com que o lucro esperado do anunciador seja

$$\alpha_1 \frac{v_2 + \epsilon}{2} + \alpha_2 \frac{v_2 + \epsilon}{2} = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{v_2 + \epsilon}{2}.$$

Sabemos que nem todo mecanismo de GSP tem um equilíbrio incentivo-compatível. Mas para compararmos os dois mecanismos, vamos supor que, na situação anterior, teríamos um equilíbrio incentivo-compatível com o mecanismo de GSP, em que o menor lance permitido seria ϵ e o jogador com o menor lance, caso pegue um *slot*, tenha que pagar ϵ . Estamos supondo então a seguinte situação:

$$\alpha_1(v_1 - v_2) > \alpha_2(v_1 - \epsilon).$$

Teríamos então como lance do jogador o seu próprio valor v_1 e como lance do jogador 2 o seu próprio valor v_2 também. O jogador 1 ficaria com o *slot* 1 com CTR α_1 pagando o valor v_2 e o jogador 2 ficaria com o *slot* 2 com CTR α_2 pagando ϵ . O lucro esperado do anunciador então seria

$$\alpha_1 v_2 + \alpha_2 \epsilon,$$

que se compararmos com o lucro do anunciador no mecanismo de GFP teremos

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_2 + \alpha_2 \epsilon &> \alpha_1 v_2 + \alpha_2 \epsilon - (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{(v_2 - \epsilon)}{2} \\ &= \frac{\alpha_1 v_2 + \alpha_2 \epsilon + \alpha_1 \epsilon + \alpha_2 v_2}{2} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{v_2 + \epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Podemos ver assim que, sob as condições supostas, o lucro no GFP sem equilíbrio é pior do que o lucro no GSP em um equilíbrio incentivo-compatível.

As suposições anteriores nem sempre estão próximas da realidade. Mas serviram para mostrar um exemplo onde o leilão, que cobra mais caro e não temos um equilíbrio, corresponde a menos lucro do que um em que se cobra menos e temos um equilíbrio incentivo-compatível. Como veremos na próxima seção, o GSP nem sempre tem um equilíbrio que seja incentivo-compatível, então não podemos fazer esse tipo de comparação no caso geral. Porém o leilão de VCG é incentivo-compatível e com ele teríamos como comparar. Vamos ver como ele ficaria para esse caso.

A mesma situação em um leilão de VCG, onde o menor lance é ϵ e o jogador que deu o menor lance deve pagar ϵ , os anunciantes dariam os valores reais como lance e o pagamento do anunciante 1 seria

$$\frac{v_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \epsilon}{\alpha_1},$$

enquanto que o pagamento do anunciante 2 seria ϵ fazendo com que o lucro do anunciante seja

$$\begin{aligned} v_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \epsilon + \alpha_2 \epsilon &= (\alpha_1 + \alpha_2)(v_2 + \epsilon) - 2\alpha_2 v_2 - \alpha_1 \epsilon + \epsilon \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)(v_2 + \epsilon) - 2\alpha_2 v_2 + \epsilon(1 - \alpha_1), \end{aligned}$$

que para ser maior que o lucro do GSP, $(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)v_2 + \epsilon}{2})$, depende tanto do valor de α_1 e α_2 quanto do valor de v_1 e v_2 .

Como não podemos ter certeza, vamos ver como seria numa situação real. A empresa Yahoo! Overture enviou o valor de todos os lances nos 1000 maiores produtos, junto com identificadores de anunciantes e palavras entre 15 de junho de 2002 e 14 de junho de 2003 para a pesquisa de Edelman e Ostrovsky [5]. Tendo estes dados, foi calculado o lucro em um leilão de GFP e como seria este lucro em um leilão de VCG. Este lucro foi calculado supondo que em um leilão de VCG os anunciantes darão os valores verdadeiros como lances.

Tabela 5.1: Tabela de CTR estimados no leilão da empresa Overture

<i>slot</i>	CTR
1	100,0%
2	77,7%
3	58,8%
4	41,8%
5	30,2%
6	24,0%
7	18,0%
8	14,1%
9	9,0%
10	7,8%

Os dados em si já são os lances em um leilão de GFP, porém para termos os possíveis lances em um leilão de VCG precisamos dos valores dos anunciantes. Temos então os lances em um leilão de GFP e a estratégia que estamos supondo que os jogadores estão seguindo. Os autores Edelman e Ostrovsky [5] fizeram então uma “engenharia reversa” para termos o valor dos anunciantes. Lembrando que não precisamos estimar com total certeza o valor do anunciante com maior valor, pois este não entra no cálculo de nenhum pagamento no leilão de VCG. Sabemos também que em um leilão GFP os anunciantes nunca dariam um lance que fosse maior do que o quanto eles valorizam o clique, então cada lance é um limitante inferior para o valor daquele jogador. O trabalho estimou também que picos nos lances dos anunciantes representam o máximo valor que este anunciante daria. Quanto a que pico usar, o trabalho enfrentou um dilema: quanto maior o período estudado maior será o pico esperado, conseqüentemente o valor dos jogadores, também mais acurado será também o valor do pico do lance dos anunciantes; por outro lado o valor dos anunciantes tende a mudar dependendo de alguns fatores, como sazonalidade, então deveríamos restringir o período analisado para que não seja tão grande. Edelman e Ostrovsky [5] escolheram o período de uma semana. Em cada semana, o valor de cada jogador será o lance máximo que este jogador deu nesta semana.

Como não tiveram acesso aos valores dos CTRs dos *slots*, supuseram que todas as palavras teriam os mesmo valores de CTR para cada *slot*, usaram os valores dos CTRs estimados apresentados na figura C do trabalho de Brooks [2], transcritos na Tabela 5.1 deste trabalho. Deste modo, usando como parâmetro a probabilidade do primeiro *slot* ser clicado, o segundo *slot* tem 77,7% da probabilidade do primeiro *slot* ser clicado, e o décimo tem 7,8% da probabilidade, *slots* depois do décimo tem probabilidade de 0% de serem clicados.

Tabela 5.2: Tabela da Razão Entre o GFP e o VCG, onde “todas” representa o cálculo considerando todas as palavras-chave, “populares” representa as palavras-chave que têm 10 ou mais anunciantes disputando um *slot*, M.R. é a média da razão.

Estatística	todas	populares
10th percentil	0,36	0,95
25th percentil	0,52	1,02
Mediana	0,68	1,06
75th percentil	0,81	1,12
90th percentil	0,92	1,13
M.R. por palavra-chave	0,66	1,07
M.R. por clique	0,76	1,09

Então, para cada palavra, Edelman e Ostrovsky [5] fez a razão entre a receita que seria gerada pelo GFP e a receita que seria gerada pelo VCG usando os valores de CTR propostos. Esta razão pode ser vista pela Tabela 5.2, onde “todas” são todas as palavras-chave e “populares” são as palavras-chave que têm 10 ou mais anunciantes disputando um *slot*. Nesta tabela temos os percentis da razão dos dois mecanismos. Vemos que nas palavras com mais popularidade a maioria dos percentis é maior, enquanto que nas palavras com menos popularidade a receita do GFP é bem maior. No caso da média da razão (M.R.), como o trabalho não tinha os dados sobre a quantidade de cliques que cada um recebeu, não tem como fazer precisamente a média da razão, então fizeram de duas formas: a M.R. por palavras-chave supôs que todas as palavras trouxeram a mesma receita para o anunciador, a M.R. por clique supôs que todas as palavras tiveram a mesma quantidade de cliques. Por causa da falta de dados não temos como avaliar se as palavras populares são mais clicadas em relação às palavras “não-populares”. Então só podemos concluir que se o anunciante tivesse mudado o mecanismo para o VCG, sua receita com as palavras populares teria aumentado. O que é um resultado ao mesmo tempo esclarecedor e surpreendente, visto que o leilão de GFP cobra mais dos anunciantes do que o VCG. Isto também ajuda a entender o motivo de, atualmente, os anunciantes preferirem o leilão de GSP ao de GFP, apesar do GSP cobrar um valor menor.

5.2 O Equilíbrio do GSP

5.2.1 GSP e a Incentivo-compatibilidade

O GSP nem sempre tem um equilíbrio incentivo-compatível. A condição para que tenhamos um equilíbrio deste tipo é que dado um conjunto N de jogadores com valores

ordenados em ordem decrescente, $v_i \geq v_{i+1}$ para todo i , $0 \leq i < n$, e um conjunto de *slots* com valores de CTR ordenados como vimos anteriormente, $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ para todo i tal que $0 \leq i < n$, teremos as seguintes condições: Para todo $i \in N$

$$\alpha_i(v_i - v_{i+1}) \geq \alpha_j(v_i - v_{j+1}), \forall j > i$$

$$\alpha_i(v_i - v_{i+1}) \geq \alpha_j(v_i - v_j), \forall j < i$$

onde consideramos v_{n+1} como tendo valor 0. A primeira desigualdade representa a preferência do jogador i pela posição i em relação às posições inferiores (com CTR mais baixo), pagando o valor do jogador que está uma posição mais baixa. Porque se o jogador i sai da posição i , então os jogadores nas posições mais baixas sobem uma posição, assim quando o jogador i escolher uma posição j ele deve dar um lance de valor maior que v_{j+1} e menor que v_j , pois o jogador j que estava na posição j agora está na posição $j - 1$, e o jogador $j + 1$ estará ocupando a posição j . Então para ter a posição j o jogador i deve pagar o valor v_{j+1} do jogador $j + 1$. A segunda desigualdade representa a preferência do jogador i pela posição i pagando o valor do jogador $i + 1$ em contraste com a posição mais alta j pagando o valor do jogador j . Pois quando o jogador i escolhe uma posição mais alta, ao sair da posição i , não influencia a alocação das posições superiores à esta. Assim para entrar numa posição j mais alta que i , o jogador i deve dar um lance entre v_j e v_{j+1} , pagando o valor v_j .

A incentivo-compatibilidade de um leilão de GSP depende tanto dos fatores de valor dos CTRs dos *slots* quanto dos valores dos jogadores. Um exemplo de uma situação onde não exista um equilíbrio incentivo-compatível não é difícil de se imaginar, nem deve ser raro de acontecer. Como exemplo suponha que tenhamos 2 jogadores onde o jogador 1 tenha valor igual a 11 e o jogador 2 valor igual a 10. É estimado que o *slot* 1 recebe 11 cliques por hora e o *slot* 2 recebe 10. Caso os jogadores deem como lance os seus reais valores temos a seguinte desigualdade:

$$\alpha_1(v_1 - v_2) = 11(11 - 10) = 11 < 110 = 10(11 - 0) = \alpha_2(v_1 - v_3),$$

o que fere a primeira condição de incentivo-compatibilidade

$$\alpha_i(v_i - v_{i+1}) \geq \alpha_j(v_i - v_{j+1}), \forall j > i.$$

5.2.2 GSP e o Equilíbrio de Nash

De forma mais geral um equilíbrio para o GSP é definido como:

Definição 5.2.1. Dado um conjunto de jogadores N , com vetor de valores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, onde v_i é o valor do jogador i , um vetor de n *slots* com valores de CTR ordenados de

forma decrescente $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, o vetor de estratégia $b^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)$, onde b_i^* é a estratégia do jogador i , é um equilíbrio de Nash se dada a regra de alocação π , onde $\pi(i)$ é o jogador que foi alocado para o *slot* i , as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\alpha_i(v_{\pi(i)} - b_{\pi(i+1)}^*) \geq \alpha_j(v_{\pi(i)} - b_{\pi(j+1)}^*), \forall j > i$$

$$\alpha_i(v_{\pi(i)} - b_{\pi(i+1)}^*) \geq \alpha_j(v_{\pi(i)} - b_{\pi(j)}^*), \forall j < i$$

onde $v_{n+1} = 0$.

Porém aqui nós temos um conceito ambíguo: antes, definimos informalmente um equilíbrio como um estado estável do jogo, onde nenhum jogador teria motivação para mudar o seu perfil de estratégias. Podemos perceber que este equilíbrio não é estável, se levarmos em consideração que, na prática, os jogadores estão interessados em fazer com que os seus adversários tenham prejuízo. Então, apesar do lance dos jogadores não influenciarem o próprio pagamento, um jogador poderia subir um pouco o seu lance para que o jogador que ganhou o *slot* acima dele, o seu concorrente, tivesse que pagar um preço maior. Este problema vem do fato de, ao definirmos a função de utilidade dos jogadores para o leilão de GSP, não levarmos em conta que os jogadores podem achar útil, além do lucro como nós definimos, também fazer com que os seus concorrentes paguem mais. Então, ao invés de definirmos uma outra função de utilidade para cada jogador, definimos um outro tipo de equilíbrio, que não só atende melhor a realidade, como também é mais fácil de se trabalhar: o equilíbrio livre-de-inveja (*envy-free equilibrium* em inglês)[6].

5.2.3 O Equilíbrio Livre de Inveja do GSP, o Equilíbrio Estável

Suponha que temos uma estratégia que seja um equilíbrio em um leilão de GSP, e suponha que neste equilíbrio existe um jogador i com um lance diferente do jogador $i-1$, para algum i maior que 1. Como a estratégia é diferente, este jogador i pode aumentar o lance dele sem que isso influencie no seu próprio pagamento, com o objetivo de, deliberadamente, prejudicar o outro. O jogador $i-1$ por sua vez pode baixar o lance dele para retaliar o comportamento do jogador i , fazendo com que os jogadores mudem de posição. Se essa mudança é lucrativa para o jogador i então o jogador inicialmente teve reais motivos para subir o seu lance, evidenciando que este equilíbrio não é estável. Porém se essa mudança não é lucrativa, teria sido melhor que o jogador i não tivesse subido o lance. Precisamos então, para conseguir trabalhar com uma situação realmente estável para o GSP, definir uma outra função de utilidade ou definir um novo tipo de equilíbrio para o GSP. Vamos definir um novo tipo de equilíbrio para o GSP, o equilíbrio livre-de-inveja [6]:

Definição 5.2.2. Dado um vetor de estratégia b^* que seja um equilíbrio do leilão de GSP, este equilíbrio é livre-de-inveja se um jogador não pode aumentar o seu lucro mudando de

lugar e de lance com um jogador logo acima dele, deve então ter a seguinte propriedade:

$$\alpha_i(v_{\pi(i)} - p_{\pi(i)}^*) \geq \alpha_{i-1}(v_{\pi(i)} - p_{\pi(i-1)}^*), \forall i > 1.$$

5.2.4 A Estratégia VCG no Leilão de GSP

Agora vamos construir, como foi apresentado por Edelman, Ostrovsky e Schwarz em [6], a melhor estratégia b^* , do ponto de vista do anunciante, para o leilão de GSP com informação completa. Esta estratégia tem quatro propriedades interessantes. Em primeiro lugar, o pagamento correspondente a essa estratégia é o mesmo pagamento de um leilão com o mecanismo VCG. Em segundo e terceiro lugar ela é a pior estratégia possível no ponto de vista do publicador e a melhor estratégia possível para os anunciantes. Em quarto lugar, com esta estratégia teremos um equilíbrio livre-de-inveja e, conseqüentemente um estado realmente estável para os jogadores.

Pegue um conjunto de jogadores N e suponha que os jogadores estão ordenados de maneira que seus valores estejam em ordem decrescente, ou seja, $v_i \geq v_{i+1}$. Desta maneira, se esses anunciantes estivessem participando de um leilão com mecanismo VCG, então os lances que eles dariam em um equilíbrio seriam seus próprios valores. Sua alocação seria correspondente à ordem dos valores, com o jogador i sendo alocado para o *slot* i e os preços p^V que teriam que pagar seria

$$p_i^V = \frac{b_{i+1}(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \alpha_{i+1}p_{i+1}}{\alpha_i}.$$

Então vamos construir um vetor de estratégia b^* da seguinte forma: cada jogador i dará um lance igual a p_{i-1}^V , o preço que o jogador acima dele pagaria caso este fosse um leilão de VCG. O anunciante 1 pode dar o seu próprio valor ou qualquer valor maior que b_2^* . Deste modo cada anunciante pagaria o próprio preço do leilão de VCG.

Para mostrar que esta é a melhor estratégia para os anunciantes e o pior equilíbrio para o publicador, vamos usar o resultado de [24] e [3], que diz que existe um equilíbrio que é o melhor para os anunciantes e o pior para o publicador.

Teorema 5.2.1. *No leilão de GSP, a estratégia em que cada anunciante i dá como lance o valor p_{i-1}^V descrito anteriormente é a melhor estratégia para os anunciantes e a pior para o publicador.*

Demonstração. Suponha que esta estratégia seja uma estratégia $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ com pagamento $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, e a estratégia que construímos seja a $b^V = (b_1^V, b_2^V, \dots, b_n^V)$ com pagamento $p^V = (p_1^V, p_2^V, \dots, p_n^V)$.

Provando por indução no número de jogadores, começando com o jogador n , este jogador paga $p_n^V = 0$, pois n é tanto o número de jogadores como de *slots*. Este é o menor

valor que ele poderia pagar então temos $p_n = p_n^V$. Nossa hipótese de indução é o de que $p_i = p_i^V$ para algum $i \leq n$. Da condição para que tenhamos um equilíbrio livre-de-inveja vemos que para qualquer i

$$\alpha_i(v_i - p_i^*) \geq \alpha_{i-1}(v_i - p_{i-1}^*), \forall i > 1,$$

desta condição podemos concluir que

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1}p_{i-1}^* &\geq \alpha_{i-1}v_i - \alpha_i(v_i - p_i^*) \\ &= (\alpha_{i-1} - \alpha_i)v_i + \alpha_i p_i^*, \forall i > 1. \end{aligned}$$

Então, se o pagamento p_i é o menor pagamento possível para um jogador em equilíbrio, então o menor pagamento possível para o jogador $i - 1$ em um estado de equilíbrio seria

$$\alpha_{i-1}p_{i-1}^* = (\alpha_{i-1} - \alpha_i)v_i + \alpha_i p_i^* = p_{i-1}^V.$$

Provando assim que o pagamento p^V é menor pagamento possível para os jogadores. \square

5.2.5 GSP na Prática

Como vimos, não é trivial achar um equilíbrio para o GSP, muito menos um equilíbrio que seja bom para os anunciantes.

O trabalho de Asdemir [1] exhibe dados coletados por um mecanismo de busca que os autores não puderam revelar a identidade, assim como deixaram anônimos as palavras-chave e os anunciantes.

Na Tabela 5.3 vemos uma estratégia parecida com a descrita para o mecanismo GFP, podemos especular que os dois anunciantes ambicionam o segundo *slot*. Em contraste, na Tabela 5.4 vemos lances estáveis.

O trabalho de Kitts e Leblanc [9] apresenta algumas companhias que fornecem programas para dar lances no leilão de GSP. Estes programas podem descobrir o valor dos outros anunciantes variando o seu valor, usando estas informações, fazem lances baseados em alguma regra pré-definida pelo anunciante. Vamos listar abaixo algumas regras como exemplo:

- *Time Position*: O anunciante escolhe uma posição que gostaria de ficar durante certas horas do dia.
- *Relative Position*: O anunciante escolhe quantas posições gostaria de estar acima de um outro anunciante rival.

Tabela 5.3: Anunciantes A, B e C fazendo uma “guerra de lances” cíclica por uma palavra-chave.

Data	tempo	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Duração da Posição
30/12/2003	8:29:22 PM	A \$1.28	B \$1.27	C \$0.90	0:10
30/12/2003	8:39:14 PM	A \$1.28	B \$0.91	C \$0.90	0:19
30/12/2003	8:58:53 PM	A \$0.92	B \$0.91	C \$0.90	0:29
30/12/2003	10:27:26 PM	B \$0.93	A \$0.92	C \$0.90	0:10
30/12/2003	10:37:12 PM	B \$0.93	C \$0.93	A \$0.92	1:38
30/12/2003	12:15:33 AM	A \$0.94	B \$0.93	C \$0.93	1:48
30/12/2003	2:03:43 AM	B \$0.95	A \$0.94	C \$0.93	3:27
30/12/2003	5:30:13 AM	B \$0.95	C \$0.95	A \$0.94	0:59
30/12/2003	6:29:13 AM	A \$0.96	B \$0.95	C \$0.95	2:37
30/12/2003	9:06:34 AM	B \$0.97	A \$0.96	C \$0.95	0:10
30/12/2003	9:16:23 AM	A \$0.98	B \$0.97	C \$0.95	1:28
30/12/2003	10:44:51 AM	B \$0.99	A \$0.98	C \$0.95	3:28
30/12/2003	2:12:34 PM	A \$1.00	B \$0.99	C \$0.99	3:05
30/12/2003	5:17:02 PM	B \$1.01	A \$1.00	C \$0.99	0:39
30/12/2003	5:56:21 PM	A \$1.02	B \$1.01	C \$0.90	2:47
30/12/2003	8:43:33 PM	B \$1.03	A \$1.02	C \$0.90	0:10
30/12/2003	8:53:23 PM	A \$1.04	B \$1.03	C \$0.90	3:48
1/1/2004	12:41:33 AM	B \$1.05	A \$1.04	C \$0.90	3:07
1/1/2004	3:48:25 AM	A \$1.06	B \$1.05	C \$0.90	2:18
1/1/2004	6:06:06 AM	B \$1.07	A \$1.06	C \$0.90	2:57
1/1/2004	9:03:05 AM	A \$1.08	B \$1.07	C \$0.90	2:57
1/1/2004	12:00:08 PM	B \$1.09	A \$1.08	C \$0.90	1:48
1/1/2004	1:48:14 PM	A \$1.10	B \$1.09	C \$0.90	1:18
1/1/2004	3:06:56 PM	B \$1.11	A \$1.10	C \$0.90	1:29
1/1/2004	4:35:26 PM	A \$1.12	B \$1.11	C \$0.90	0:29
1/1/2004	5:04:54 PM	B \$1.13	A \$1.12	C \$0.90	4:55
1/1/2004	9:59:56 PM	A \$1.14	B \$1.13	C \$0.90	1:49
1/1/2004	11:48:10 PM	B \$1.15	A \$1.14	C \$0.90	0:59
2/1/2004	12:37:16 AM	A \$1.16	B \$1.15	C \$0.90	1:58
2/1/2004	2:35:16 AM	A \$1.16	B \$0.91	C \$0.90	3:16
2/1/2004	5:51:56 AM	A \$0.92	B \$0.91	C \$0.90	

Tabela 5.4: Anunciantes D, E e F em uma situação estável.

Data	tempo	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Duração da Posição
2/1/2004	8:36:24 PM	D \$17.25	E\$17.15	F\$17.05	85:15
6/1/2004	2:55:50 AM	D \$17.25	E\$17.15	F\$17.05	-
6/1/2004	9:51:02 AM	D \$17.25	E\$17.15	F\$17.00	-

- *GapJammer*: O anunciante escolhe um adversário e o programa vai dar como lance sempre o valor do lance do adversário menos um centavo. O objetivo é fazer com que o adversário tenha prejuízo pagando o valor total do seu lance sem nenhum desconto.
- *Move if Cheap*: O programa sobe uma posição se o aumento de preço da subida é menor do que um certo valor em dólares.
- *Move to Gap*: Esta estratégia se beneficia das estratégias anteriores. Em todas as estratégias anteriores os anunciantes darão um lance que é ou um centavo menor ou um centavo maior em relação aos outros anunciantes. Se muitos manterem este tipo de estratégia, será criado alguns “degraus” no vetor de lances. Um degrau de valor D dólares no vetor de lances é quando temos uma sequência de lances com pequena diferença e em seguida dois lances vizinhos com uma diferença de D dólares. A imagem ilustrativa 5.3, retirada do trabalho de Kitts e LeBlanc [9], representa esta situação. A estratégia “*Move to Gap*” consiste em achar um degrau de valor D e dar um lance neste intervalo. Dessa forma, este anunciante pegará o lugar em que está o degrau, pagando um valor parecido com o conjunto de jogadores logo abaixo dele, ou seja, pegará o melhor lugar dos anunciantes abaixo dele pagando quase o mesmo valor que estes anunciantes pagam.

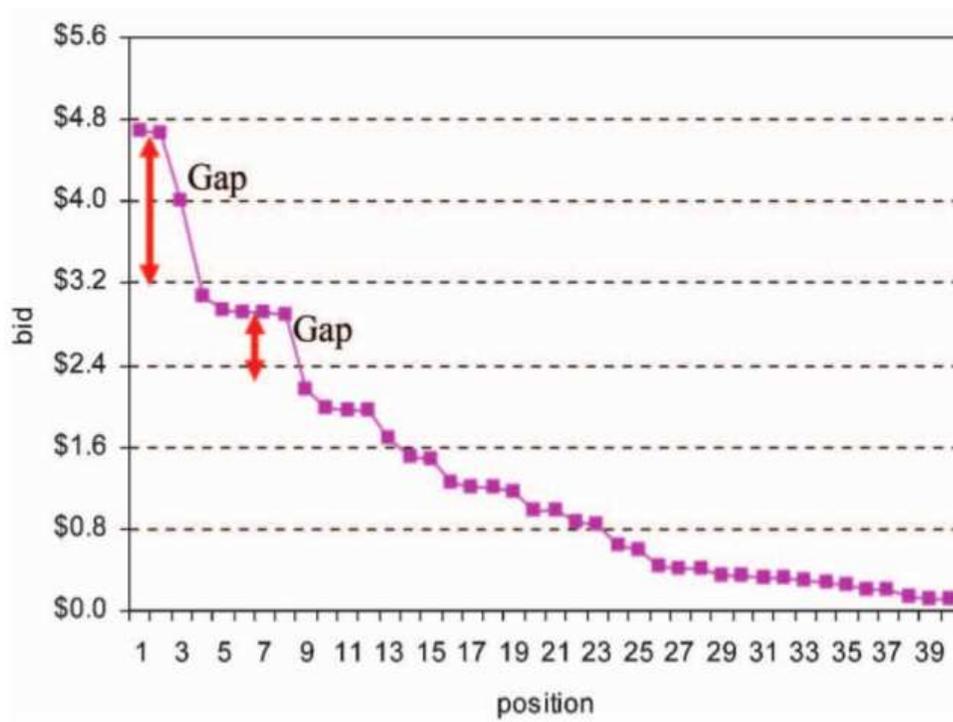


Figura 5.3: Gráfico de lances (*bid*) por posição (*position*). Um exemplo de degrau (*Gap*) entre os jogadores.

Capítulo 6

Preço da Anarquia para o GSP

6.1 Introdução

Como o GSP é o leilão mais usado, é importante estudar os aspectos deste, modelando-o de formas diferente. Nesta seção vamos estudar o preço da anarquia para o GSP.

Como visto no Capítulo 2, o preço da anarquia é uma medida da ineficiência dos equilíbrios de um mecanismo, que relaciona o pior bem estar social de um jogo em equilíbrio e o bem estar social ótimo. Note que o caso ótimo não necessariamente é um equilíbrio. Como o preço da anarquia para um jogo J é definido pela equação

$$PoA = \max \left\{ \frac{OPT(J)}{SW(s)} : \text{tal que } s \in E(J) \right\},$$

onde $E(J)$ é o conjunto de todos os equilíbrios do jogo, o nosso desejo é que o preço da anarquia se aproxime de 1, sabendo que este sempre será maior ou igual a 1. Se o bem estar social representa a satisfação do conjunto de jogadores e funcionalidade do mecanismo, aproximando do ótimo o pior bem estar social do conjunto de equilíbrio, garantimos uma maior satisfação dos jogadores, diminuindo a competição entre estes.

Por exemplo, em um jogo de maximização, um preço da anarquia de 2 quer dizer que $2 \cdot SW(b) \geq OPT$, onde b é qualquer equilíbrio e OPT é o valor do bem estar social ótimo do jogo. Neste caso, podemos dizer que o ganho social, em um equilíbrio e no pior caso, é maior do que 50% do ganho social ótimo.

No trabalho de Paes Leme e Tardos [13, 14], temos um limite no preço da anarquia de 1,618, para o leilão sendo modelado como um jogo de informação completa com estratégias puras, temos um limite de 4 para o jogo com estratégias mistas e um limite de 8 para o jogo Bayesiano. Mais tarde, Paes Leme e Lucier, em [12] mostram um novo limitante para jogos Bayesianos, um preço da anarquia de 4 para jogos quando os valores entre os jogadores são correlacionados, podendo ser baixado para 3,164 quando a relação entre os

valores é independente. Este estudo foi feito usando a ferramenta de jogos suaves (*smooth games*), definida por Roughgarden em [23]. Apesar do leilão de GSP não ser um jogo suave, este conceito é modificado criando o conceito de jogos semi-suaves (*semi-smooth games*), como veremos na seção 6.3.

Da forma como definimos a função de utilidade, sabemos que, para qualquer jogador, não é uma boa estratégia dar um lance mais alto que o seu valor. Então é razoável supor que nenhum jogador irá fazer isso.

Definição 6.1.1. Dizemos que um jogador é conservador, se este jogador nunca daria um lance maior que o seu valor.

É fácil ver que, para qualquer jogador, dar um lance mais alto que o GSP é uma estratégia fracamente dominada. De fato, o Teorema 6.1.1 mostra que se os jogadores não forem conservadores, o preço da anarquia não pode ser limitado.

Teorema 6.1.1. *O preço da anarquia para o GSP, modelado como um jogo com informação completa e com jogadores não conservadores não é limitado.*

Demonstração. Vamos mostrar um exemplo onde o preço da anarquia por ser tão grande quanto se queira, dependendo do valor do CTR de um *slot*.

Suponha um jogo onde temos dois jogadores não conservadores com valores $v_1 = 1$ e $v_2 = r$. Suponha que os *slots* tenham CTRs iguais a $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = r$, para algum r qualquer entre 0 e 1.

Se os lances dos jogadores forem $b_1 = 0$ e $b_2 = 1 - r$, teremos um equilíbrio. Teremos como utilidade $u_1 = \alpha_2(v_1 - 0) = r(1 - 0) = r$ e $u_2 = \alpha_1(v_2 - b_1) = 1(r - 0) = r$.

Para mostrar que é um equilíbrio observe os casos em que um dos jogadores fixa a sua estratégia. Empates serão desfeitos arbitrariamente com p denotando a probabilidade do jogador 1 ganhar o *slot* α_1 . Caso o jogador 1 fixe a estratégia $b_1 = 0$, qualquer outra jogada do jogador 2, $b_2 \in (0, \infty)$ ou $b_2 = 0$ trará a mesma utilidade $u_2 = r$ ou utilidade esperada $u_2 = (1 - p)(1(r - 0)) + p(r(r - 0)) \leq r$, respectivamente. Caso o jogador 2 fixe esta estratégia $b_2 = 1 - r$, qualquer outra estratégia para o jogador 1 trará a mesma utilidade. A estratégia $b_1 \in [0, 1 - r)$ terá a mesma utilidade $u_1 = r$, a estratégia $b_1 \in (1 - r, \infty)$ terá a mesma utilidade $u_1 = \alpha_1(v_1 - b_2) = 1(1 - 1 + r) = r$ e a estratégia $b_1 = 1 - r$ terá a mesma utilidade esperada $u_1 = p(1(1 - 1 + r)) + (1 - p)(r(1 - 0)) = r$. Assim, esta configuração estratégica com $b_1 = 0$ e $b_2 = 1 - r$ é um equilíbrio.

Perceba que este vetor de estratégia trará um bem estar social de $\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1 = r \cdot 0 + r$, enquanto o bem estar social ótimo seria $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 1$. Sendo assim, o preço da anarquia neste caso é $\frac{OPT(v)}{SW(v)} = \frac{1}{r}$, que pode ser tão grande quanto se queira, bastando aproximar r de 0.

Provando assim que o preço da anarquia pode ser ilimitado para jogadores não conservadores. \square

A partir daqui vamos supor que todos os jogadores são conservadores.

6.2 Preliminares

Definiremos as variáveis com as quais trabalharemos neste capítulo. Algumas variáveis servirão para o capítulo inteiro, mas como as modelagens que vamos estudar são diferentes, precisaremos definir algumas variáveis específicas para cada modelagem.

Para todas as modelagens teremos um conjunto N de jogadores, com n jogadores. Teremos também n *slots* com valores de CRT representados pelo vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, onde α_i corresponde ao CTR do i -ésimo *slot*, lembrando que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, pois cada *slot* é mais valorizado do que o *slot* logo abaixo.

A seguir listaremos as variáveis para cada modelagem.

Jogo Com Informação Completa

Em um jogo com informação completa, o valor de cada jogador é de conhecimento comum, então para cada jogador, o seu próprio valor e o valor dos outros jogadores está bem definido. Nesta modelagem supomos que os jogadores estão ordenados tal que seus valores estão em ordem decrescente. Teremos então o vetor de valores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, onde $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$. Esta suposição não cancela a generalidade do problema, visto que a ordem em que os jogadores estão organizados não tem influência sobre o resultado. Assim definidos, o valor do bem estar social ótimo é definido como

$$OPT = \sum_i^n \alpha_i v_i.$$

Para um jogo com estratégias puras, o vetor de estratégia $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ é um vetor de números reais. Como, por hipótese, os jogadores são conservadores, então, para cada $i \in N$, $b_i \leq v_i$. Se o vetor de estratégias b é um equilíbrio então teremos a seguinte propriedade para cada jogador i :

$$u_i(b) \geq u_i(b'_i, b_{-i}), \forall b'_i.$$

Para cada vetor de estratégia teremos uma função de alocação π que define qual jogador deu o i -ésimo lance mais alto, ganhando assim o i -ésimo *slot*. Então, fixado um vetor de estratégia b , a alocação $\pi(i) = j$ quer dizer que o jogador j ganhou o *slot* i . Assim, fixado um vetor de estratégia b , a nossa função de bem estar social será

$$SW = \sum_i^n \alpha_i v_{\pi(i)}.$$

Jogo Com Estratégias Mistas

Em um jogo com estratégias mistas, um vetor de estratégias $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ é um vetor de variáveis aleatórias. Novamente, como os jogadores são conservadores, teremos $\mathbb{P}(b_i > v_i) = 0, \forall i \in N$. Se o vetor de estratégias b é um equilíbrio então, para cada jogador i :

$$\mathbb{E}[u_i(b)] \geq \mathbb{E}[u_i(b'_i, b_{-i})].$$

Fixado um vetor de estratégia b , agora a função de alocação π é uma variável aleatória determinada pelo vetor de estratégia b . Nossa função de bem estar social será então:

$$SW = \mathbb{E}\left[\sum_i \alpha_i v_{\pi(i)}\right].$$

Jogo Com Informação Incompleta

Nesta modelagem, supomos que os valores dos jogadores são variáveis aleatórias, possivelmente com probabilidade correlacionada, que têm a função de distribuição acumulada de conhecimento comum. Teremos então $v \sim F$, onde F é a distribuição de probabilidade acumulada do vetor v , sendo conhecida por todos os jogadores. O vetor de estratégias b será um vetor de funções. A estratégia $b_i(v)$ do jogador i é uma função que associa, a cada perfil de valores, um número real, representando o lance do jogador i .

Nesta modelagem definiremos a função de alocação π em função do vetor de estratégias e dos *slots*, sendo $\pi(b, i) = j$ o índice do valor do jogador que, com o vetor de estratégia b , foi alocado para o *slot* α_j . Analogamente, definiremos a função de alocação $\sigma^{-1}(b, \cdot) = \pi(b, \cdot)$ como sendo uma função de alocação em função do vetor de estratégia e dos jogadores, sendo $\sigma(b, i) = j$ o índice do *slot* que, em função do vetor de estratégia b , foi alocado para o jogador i . Teremos também que definir a função de alocação ótima ν em função dos valores dos jogadores, sendo $\nu(v, i)$ o índice do *slot* que foi alocado para o jogador i na alocação do bem estar social ótimo, perceba que $\nu(v, i) = \sigma(v, i)$.

6.3 Ferramentas para Analisar o Preço da Anarquia: o Jogo Suave e Semi-suave

O Jogo Suave

O trabalho de Roughgarden [23] introduziu o conceito de jogo suave (*smooth-game*) para um jogo de minimização:

Definição 6.3.1 (Jogo suave). Um jogo de minimização de custo é (λ, μ) -suave, se para quaisquer estratégias s e s^* a seguinte condição pode ser satisfeita:

$$\sum_{i=1}^k c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \lambda C(s^*) + \mu C(s),$$

onde $C(s)$ é a função de custo social da estratégia s e $c_i(s)$ é o custo da estratégia s para o jogador i .

Este conceito representa a diferença entre, a soma do bem estar social de duas estratégias, e a soma do gasto de cada jogador em mudar de uma estratégia para outra. Mais especificamente, se supormos que a estratégia s^* é uma estratégia com um custo muito baixo e a estratégia s uma estratégia qualquer, então a soma do custo social das duas estratégias limita o aumento do custo marginal de cada jogador, se este jogador mudar para a estratégia com melhor custo social.

Em uma aplicação direta deste conceito à análise do preço da anarquia, se tivermos um jogo (λ, μ) -suave, com $\lambda \geq 0$ e $\mu < 1$, se supormos que a estratégia s^* é uma estratégia que minimiza o custo social (a estratégia ótima), e que a estratégia s é um equilíbrio genérico. Então teremos o resultado de que

$$C(s) = \sum_{i=1}^k c_i(s) \leq \sum_{i=1}^k c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \lambda C(s^*) + \mu C(s)$$

Com isso, temos

$$\frac{C(s)}{C(s^*)} \leq \frac{\lambda}{1 - \mu}$$

concluindo que $\frac{\lambda}{(1-\mu)}$ é o preço da anarquia para qualquer jogo (λ, μ) -suave de minimização.

Para jogos onde a função de utilidade é de maximização, temos a seguinte definição:

Definição 6.3.2 (jogo suave de maximização). Um jogo de maximização é (λ, μ) -suave, se para quaisquer estratégias s e s^* a seguinte condição pode ser satisfeita:

$$\sum_{i=1}^k u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \lambda SW(s^*) - \mu SW(s),$$

onde $SW(s)$ é a função de utilidade social da estratégia s e $u_i(s)$ é a utilidade da estratégia s para o jogador i .

6.3.1 O Jogo Semi-Suave

Uma extensão do conceito de jogos suaves é o conceito de jogos semi-suaves definidos por Paes Leme e Lucier [12].

Definição 6.3.3 (jogo semi-suave de maximização). Um jogo de maximização é (λ, μ) -semi-suave, se existe uma estratégia s^* que maximiza o bem estar social, tal que, para qualquer estratégia s , a seguinte condição pode ser satisfeita:

$$\sum_{i=1}^k u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \lambda SW(s^*) - \mu SW(s),$$

onde $SW(s)$ é a função de utilidade social da estratégia s e $u_i(s)$ é a utilidade social da estratégia s para o jogador i .

Assim como um jogo suave de minimização, uma propriedade de um jogo semi-suave de maximização é que temos um limitante para o preço da anarquia de forma direta. Se um jogo de maximização é (λ, μ) -semi-suave e s é um equilíbrio genérico então teremos

$$SW(s) \geq \sum_{i=1}^k u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \lambda SW(s^*) - \mu SW(s),$$

e portanto temos

$$\frac{(1 + \mu)}{\lambda} \geq \frac{SW(s^*)}{SW(s)},$$

nos revelando que o preço da anarquia para um jogo (λ, μ) -semi-suave é, no máximo, $\frac{1+\mu}{\lambda}$.

6.4 Jogos com Informação Completa

6.4.1 Jogos com Estratégia Pura

A seguir, vamos provar que o GSP, modelado como um jogo com informação completa e estratégias puras, o preço da anarquia é 1,618, isto quer dizer que em um equilíbrio qualquer, o ganho social dos jogadores é maior do que 61,8% em relação ao bem estar social ótimo, como apresentado em [13, 14].

Para provar o preço da anarquia precisamos provar um lema que captura o bem estar social associado a uma “troca” de posição entre um jogador i e um jogador j . Se considerarmos que a alocação ótima, onde o jogador i ganha o *slot* i , este teorema captura o ganho que o bem estar social poderá manter, considerando que o jogador j está alocado no lugar do jogador i . Teremos a afirmação de que $\alpha_j v_{\pi(j)} + \alpha_i v_{\pi(i)} \geq \alpha_i v_{\pi(j)}$.

Lema 6.4.1. *Para quaisquer valores de v , valores de CTR α e função de alocação π sobre um vetor de estratégia b que seja um equilíbrio, teremos*

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \frac{v_{\pi(i)}}{v_{\pi(j)}} \geq 1.$$

Demonstração. Considere o conjunto de jogadores N . Suponha o equilíbrio genérico b e seja π a alocação associada a este equilíbrio. Se $i \geq j$ então $\alpha_j \geq \alpha_i$, provando o lema de forma direta. Vamos supor então que $i < j$. Como π é um equilíbrio, o jogador que foi alocado para j , não terá motivação em subir o seu lance para pegar o slot i , teremos $\alpha_j(v_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \geq \alpha_i(v_{\pi(j)} - b_{\pi(i)})$. Como $b_{\pi(j)} \geq 0$ e $b_{\pi(i)} \leq v_{\pi(i)}$ então teremos

$$\alpha_j v_{\pi(j)} \geq \alpha_j (v_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha_i (v_{\pi(j)} - b_{\pi(i)}) \\ &\geq \alpha_i (v_{\pi(j)} - v_{\pi(i)}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pegando a equação 6.1 com a equação 6.2 teremos $\alpha_j v_{\pi(j)} \geq \alpha_i (v_{\pi(j)} - v_{\pi(i)})$. Então

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \frac{v_{\pi(i)}}{v_{\pi(j)}} \geq \frac{\alpha_i v_{\pi(j)}}{\alpha_i v_{\pi(j)}} = 1.$$

□

Vamos provar o preço da anarquia por indução, devido a isso precisamos provar um limitante no preço da anarquia para o caso base, com dois jogadores.

Lema 6.4.2. *Para dois jogadores, o preço da anarquia (PoA) é de $\frac{5}{4} = 1,25$.*

Demonstração. Sejam dois jogadores quaisquer, temos dois valores v_1 e v_2 , e dois slots com valores α_1 e α_2 quaisquer. O valor do bem estar social ótimo será $OPT = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. A única outra alocação possível será $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1$, tendo valor social $SW(\pi) = \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1$.

Temos que ver então o valor de

$$\begin{aligned} \frac{1}{PoA} &\geq \frac{SW(\pi)}{OPT} \\ &= \frac{\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}. \end{aligned}$$

Sabemos que para π ser uma alocação possível devemos ter $b_1 \leq b_2$, para ser um equilíbrio a condição $\alpha_2(v_1 - 0) \geq \alpha_1(v_1 - b_2)$ deve ser satisfeita. Como os jogadores são conservadores teremos também $b_1 \leq v_1$ e $b_2 \leq v_2$.

Para simplificar, podemos redimensionar os valores v_1 e v_2 multiplicando-os por $\frac{1}{OPT}$. Podemos também redimensionar os valores α_1 e α_2 multiplicando-os por $\frac{1}{\alpha_1}$, sem interferir

no resultado final,

$$\begin{aligned} P_{oA}^{-1} &\geq \frac{SW(\pi)}{OPT} \\ &= \frac{\frac{1}{OPT_{\alpha_1}}(\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1)}{\frac{1}{OPT_{\alpha_1}}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)}. \end{aligned}$$

Temos então novos valores

$$v'_1 = \frac{v_1}{OPT},$$

$$v'_2 = \frac{v_2}{OPT},$$

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1},$$

$$\alpha'_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Assim como a estratégia correspondente

$$b'_1 = \frac{b_1}{OPT},$$

$$b'_2 = \frac{b_2}{OPT}.$$

Estes valores mantêm as condições anteriores de alocação π possível, $b'_1 \leq b'_2$. Também conserva as condições de equilíbrio, $\alpha'_2(v'_1 - 0) \geq \alpha'_1(v'_1 - b'_2)$ e de jogadores conservadores $b'_1 \leq v'_1$ e $b'_2 \leq v'_2$. Com a simplificação de que $\alpha'_1 v'_1 + \alpha'_2 v'_2 = 1$ e $\alpha'_1 = 1$, ficamos com as condições $\alpha'_2 v'_1 \geq v'_1 - b'_2$, $v'_1 = 1 - \alpha'_2 v'_2$.

Combinando a equação $\alpha'_2 v'_1 \geq v'_1 - b'_2$ com $-b'_2 \geq -v'_2$ e $v'_1 = 1 - \alpha'_2 v'_2$ temos

$$\begin{aligned} \alpha'_2(1 - \alpha'_2 v'_2) &\geq 1 - \alpha'_2 v'_2 - b'_2 \\ &\geq 1 - \alpha'_2 v'_2 - v'_2. \end{aligned}$$

Com isso, teremos $v'_2(1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2)) \geq 1 - \alpha'_2$. Logo

$$v'_2 \geq \frac{1 - \alpha'_2}{1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2)}.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 v'_2 + \alpha'_2 v'_1 &= v'_2 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2 v'_2) \\
&= v'_2(1 - \alpha'^2_2) + \alpha_2 \\
&\geq \frac{1 - \alpha'_2}{1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2)}(1 - \alpha'^2_2) + \alpha'_2 \\
&= \frac{\alpha'^3_2 - \alpha'^2_2 - \alpha'_2 + 1 + \alpha'_2 + \alpha'^2_2 - \alpha'^3_2}{1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2)} \\
&= \frac{1}{1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2)} \\
&\geq \frac{4}{5}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

A desigualdade 6.3 se deve ao fato de que $1 + \alpha'_2(1 - \alpha'_2) \leq 1,25$ para qualquer α'_2 . Logo, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha'_1 v'_2 + \alpha'_2 v'_1}{\alpha'_1 v'_1 + \alpha'_2 v'_2} &= \alpha'_1 v'_2 + \alpha'_2 v'_1 \\
&\geq \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Então o preço da anarquia será de $PoA \leq \frac{5}{4} = 1,25$. \square

Após provados os lemas 6.4.1 e 6.4.2, podemos provar o teorema a seguir com mais facilidade.

Vamos então provar por indução que o preço da anarquia para o GSP modelado como um jogo com informação completa com estratégias puras é de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Teorema 6.4.3. *O preço da anarquia para o GSP modelado como um jogo com informação completa com jogadores conservadores é $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.*

Demonstração. Defina a variável r_n como o preço da anarquia para n jogadores.

Para o caso base, com dois jogadores, pelo Lema 6.4.2 sabemos que o preço da anarquia r_2 é igual a 1,25.

Suponha, como hipótese de indução, que o preço da anarquia é menor ou igual a 1,618 para alguma quantidade $n - 1$ de jogadores, ou seja, $r_{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pegue um conjunto de jogadores N com n jogadores e vetor de valores v . Fixe um vetor de estratégia que seja um equilíbrio b . Seja a alocação π a alocação associada a este equilíbrio.

Então nós teremos o bem estar social ótimo

$$OPT = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

e o valor de bem estar do equilíbrio π

$$SW(\pi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_{\pi(i)}.$$

Fixe r_n tal que

$$SW(\pi) \geq \frac{1}{r_n} OPT$$

seja válida. Vamos procurar um possível valor para r_n que seja uma constante.

Fixe i e j tais que $\pi(i) = 1$ e $\pi(1) = j$, ou seja, neste equilíbrio π , o jogador com o maior valor v_1 pegou o *slot* α_i e o jogador que pegou o *slot* com maior valor α_1 foi o jogador com valor v_j . Retire o jogador com maior valor v_1 e o *slot* α_i que ele pegou neste equilíbrio. Note que os jogadores restante ainda estão respeitando a equação do Lema 6.4.1.

Suponha agora que $i \leq j$ e defina as variáveis $\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_i}$ e $\gamma = \frac{v_1}{v_j}$.

$$\begin{aligned} \sum \alpha_k v_{\pi(k)} &= \alpha_i v_1 + \sum_{k \neq i} \alpha_k v_{\pi(k)} & (6.4) \\ &\geq \alpha_i v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \left(\sum_{k \neq i} \alpha_k v_k \right) \\ &\geq \frac{1}{\beta} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \left(\sum_{k=2}^i \alpha_{k-1} v_k + \sum_{k=i+1}^n \alpha_k v_k \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \left(\sum_{k=2}^i (\alpha_{k-1} - \alpha_k) v_k + \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \right) \\ &\geq \frac{1}{\beta} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} (\alpha_1 - \alpha_i) v_i + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k. \end{aligned}$$

Nós sabemos que $i \leq j$ e que

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} + \frac{v_j}{v_1} \geq 1,$$

então $v_i \geq v_j = \frac{1}{\gamma} v_1 \geq (1 - \frac{1}{\beta}) v_1 = (1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_1}) v_1$, assim podemos dizer que

$$\begin{aligned} \sum \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right) \alpha_1 v_i + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \\ &\geq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^2 \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k. \end{aligned}$$

Queremos achar o maior $\frac{1}{r_n}$ tal que

$$\frac{SW(\pi)}{OPT} \geq \frac{1}{r_n},$$

para qualquer $\beta \geq 1$, ou seja,

$$\sum_k \alpha_k v_{\pi(k)} = SW(\pi) \geq \frac{1}{r_n} OPT = \frac{1}{r_n} \sum_k \alpha_k v_k,$$

e para termos

$$\begin{aligned} \sum \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2 \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \\ &\geq \frac{1}{r_n} \left(\sum_k \alpha_k v_k \right), \end{aligned}$$

teremos que ter

$$\frac{1}{r_n} \leq \begin{cases} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 & \text{se } \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 \leq \frac{1}{r_{n-1}} \\ \frac{1}{r_{n-1}} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja

$$\frac{1}{r_n} \leq \min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 \right\},$$

para qualquer $\beta \geq 1$.

Também podemos achar um limitante retirando o termo $\alpha_1 v_j$ da equação (6.4) ao invés de retirar $\alpha_i v_1$. Ficaremos então com o seguinte limitante:

$$\begin{aligned} \sum \alpha_k v_{\pi(k)} &= \alpha_1 v_j + \sum_{k=2}^n \alpha_k v_{\pi(k)} \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \\ &= \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k. \end{aligned}$$

E para termos

$$\begin{aligned} \sum \alpha_k v_{\pi(k)} &= \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \alpha_1 v_1 + \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \\ &\geq \frac{1}{r_n} \left(\sum_k \alpha_k v_k \right), \end{aligned}$$

teremos que ter

$$\frac{1}{r_n} \leq \min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, 1 - \frac{1}{\beta} \right\}.$$

Então devemos pegar a equação em que temos o maior(melhor) $\frac{1}{r_n}$ entre as duas possibilidades, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &\leq \max \left\{ \min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, 1 - \frac{1}{\beta} \right\}, \min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, \max \left\{ 1 - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

para todo $\beta \geq 1$. Ou então, para prosseguirmos simplificando as contas, o mínimo r_n tal que

$$\begin{aligned} r_n &\geq \left[\min \left\{ \frac{1}{r_{n-1}}, \max \left\{ 1 - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\} \right\} \right]^{-1} \\ &= \max \left\{ r_{n-1}, \left[\max \left\{ 1 - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\} \right]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

para todo $\beta \geq 1$, ou para todo $\frac{1}{\beta} \in (0, 1]$.

Precisamos ver então para quais valores de $\frac{1}{\beta} \in (0, 1]$ a expressão

$$\left[\max \left\{ 1 - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\} \right]^{-1},$$

atinge o seu máximo, ou

$$\max \left\{ 1 - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 \right\}$$

atinge o seu mínimo.

Fazendo $x = \frac{1}{\beta}$ e comparando as duas curvas $h(x) = 1 - x$ e $g(x) = \frac{1}{r_{n-1}}x^2 + (1 - \frac{2}{r_{n-1}})x + \frac{1}{r_{n-1}}$ com $x \in (0, 1]$, vemos que a reta $h(x)$ tem mínimo em $x = 1$, tendo valor 0 e máximo em $x \rightarrow 0$ tendendo para o valor 1. A curva $g(x)$ tende para o valor $\frac{1}{r_{n-1}}$ quando $x \rightarrow 0$ e 1 quando $x = 1$. Igualando a derivada de $g(x)$ a zero: $\frac{2x}{r_{n-1}} + 1 - \frac{2}{r_{n-1}} = 0$ vemos que a equação tem mínimo em $x = 1 - \frac{1}{2}r$, tendo valor igual a $1 - \frac{1}{4}r$. Comparando as

equações $h(x)$ e $g(x)$ teremos

$$\begin{aligned}
1 - x &= x + \frac{1}{r_{n-1}} (1 - x)^2 \Rightarrow -2xr_{n-1} + r_{n-1} = (1 - x)^2 \\
&\Rightarrow x^2r_{n-1} - x^2r_{n-1} - 2xr_{n-1} + r_{n-1} = (1 - x)^2 \\
&\Rightarrow r_{n-1}(1 - x)^2 - x^2r_{n-1} = (1 - x)^2 \\
&\Rightarrow x^2r_{n-1} = (r_{n-1} - 1)(1 - x)^2 \\
&\Rightarrow x\sqrt{r_{n-1}} = \sqrt{(r_{n-1} - 1)}(1 - x) \\
&\Rightarrow x(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{(r_{n-1} - 1)}) = \sqrt{(r_{n-1} - 1)}.
\end{aligned}$$

Ficamos então com

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{(r_{n-1} - 1)}}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{(r_{n-1} - 1)}} \\
&= \frac{\sqrt{(r_{n-1} - 1)}}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{(r_{n-1} - 1)}} \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_{n-1} - 1}}{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_{n-1} - 1}} \\
&= \frac{\sqrt{(r_{n-1}^2 - r_{n-1})} - r_{n-1} + 1}{r_{n-1} - (r_{n-1} - 1)} \\
&= \sqrt{(r_{n-1}^2 - r_{n-1})} - r_{n-1} + 1,
\end{aligned}$$

vemos que as curvas se interseccionam em $x = \sqrt{(r_{n-1}^2 - r_{n-1})} - r_{n-1} + 1$ tendo valor $r_{n-1}\sqrt{r_{n-1}^2 - r_{n-1}}$.

Então para $r_{n-1} \geq \frac{4}{3}$ o mínimo ocorre na interseção $(r_{n-1} - \sqrt{r_{n-1}^2 - r_{n-1}})^{-1}$ e se $r < \frac{4}{3}$ o mínimo ocorre na função quadrática $(1 - \frac{r_{n-1}}{4})^{-1}$.

Como r_2 é igual a $\frac{5}{4} = 1,25$ que é menor ou igual a $\frac{4}{3}$, podemos usar a equação $(r_{n-1} - \sqrt{r_{n-1}^2 - r_{n-1}})^{-1}$ que é monotônica não decrescente e tem um ponto fixo em $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Como r_n é definido por recursão, então podemos concluir que $r_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,618$. Podemos ver o comportamento das duas curvas na Figura 6.1 retirada do trabalho [13].

Portanto, concluímos que o preço da anarquia para n anunciantes e $slots$ é 1,618. \square

6.4.2 Jogo com Estratégia Mista

Para o jogo com estratégia mista, Paes Leme e Tardos em [14] apresentaram um preço da anarquia de 4.

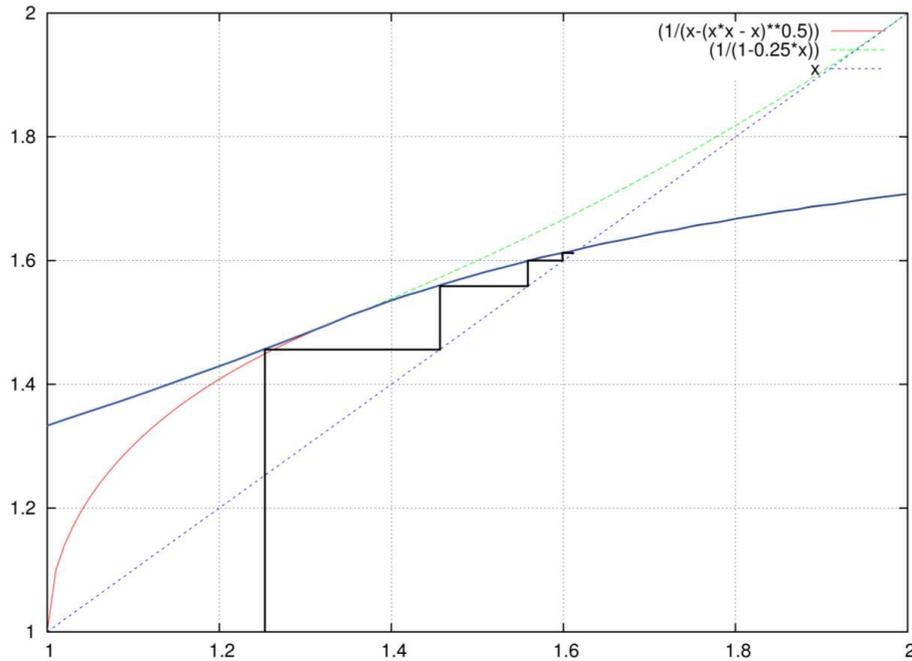


Figura 6.1: Comportamento das duas curvas que são limites superiores do Preço da Anarquia para um jogo de informação completa com estratégia pura

Usaremos um lema análogo ao Lema 6.4.1 para estudar o preço da anarquia para o equilíbrio misto de Nash.

Lema 6.4.4. *Seja b um equilíbrio qualquer, π uma função de alocação associada ao equilíbrio b , σ uma função de alocação associada aos slots tal que $\sigma = \pi^{-1}$, então a desigualdade seguinte é verdadeira:*

$$\frac{\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} + \frac{\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]}{v_i} \geq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Fixe um equilíbrio b . Agora suponha um outro cenário em que o jogador i tenha mudado a sua estratégia para

$$b'_i = \min \left\{ v_i, 2\mathbb{E}[b_{\pi(i)}] \right\},$$

e a estratégia dos outros jogadores permanece inalterada. Note que este novo vetor de estratégia não é, necessariamente, um equilíbrio.

Com esse novo vetor de estratégia (b'_i, b_{-i}) , o jogador i ganha um *slot* entre 1 e i com probabilidade maior ou igual a $\frac{1}{2}$. Pois caso $b'_i = v_i$, então este jogador ganha pelo menos

o slot i com certeza. Caso $b'_i = 2\mathbb{E}[b_{\pi(i)}]$ então, pela desigualdade de Markov teremos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b_{\pi(i)} \geq b'_i) &= \mathbb{P}(b_{\pi(i)} \geq 2\mathbb{E}[b_{\pi(i)}]) \\ &\leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Voltando ao cenário original, onde b é o nosso equilíbrio, teremos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}v_i] &\geq \mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}(v_i - p_i(b))] \\ &= \mathbb{E}[u_i(b)] \\ &\geq \mathbb{E}[u_i(b'_i, b_{-i})] \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - b'_i) \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - 2\mathbb{E}[b_{\pi(i)}]) \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - 2\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]),\end{aligned}$$

onde $p_i(b)$ é o preço que o jogador i deve pagar, dado o vetor de estratégia b .

Logo, rearranjando a última desigualdade, temos

$$\frac{\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} + \frac{\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]}{v_i} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Agora podemos provar o preço da anarquia para o modelo com estratégias mistas.

Teorema 6.4.5. *O GSP modelado como um jogo com informação completa com estratégia mista tem um preço da anarquia de 4.*

Demonstração. Seja N um conjunto de jogadores com valores v . Fixe uma estratégia b que seja um equilíbrio misto e defina a função de alocação π como função de alocação associada a esta estratégia. Defina a função de alocação para os slot $\sigma = \pi^{-1}$

Como

$$SW(v) = \sum_i^n \alpha_i v_{\pi(i)} = \sum_i^n \alpha_{\sigma(i)} v_i,$$

somando as expressões termo a termo teremos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[SW(v)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_i^n \alpha_i v_{\pi(i)} + \sum_i^n \alpha_{\sigma(i)} v_i \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \sum_i^n \alpha_i v_i \left(\frac{\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]}{v_i} + \frac{\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_i^n \alpha_i v_i \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_i^n \alpha_i v_i \\
&= \frac{1}{4} OPT(v).
\end{aligned}$$

Provando que o preço da anarquia é 4. □

6.5 Jogo Com Informações Incompletas

6.5.1 Jogos com Valores Correlacionados

Como vimos na seção sobre como o GSP funciona na prática, um fato é que o lance dos jogadores influenciam o lance de um dado jogador. Assim, podemos especular que o lance dos jogadores influenciem no valor deste dado jogador, se este jogador não tiver certeza do quanto realmente valeria pagar para seu anúncio ser clicado. Como os lances dos jogadores dependem dos seus valores, podemos inferir que o valor deste dado jogador depende dos valores dos outros jogadores. Ou então, como exposto no trabalho de Paes Leme e Lucier [12], o publicador não se interessa somente pelo lance que os anunciantes deram, mas também pela probabilidade daquele anúncio ser clicado. Esta probabilidade pode ser incorporada na forma de um novo lance, incorporamos esta probabilidade no lance que o anunciante deu, multiplicado este lance pela probabilidade do anúncio ser clicado. Porém a probabilidade de um anúncio ser clicado pode influenciar a probabilidade dos outros anúncios serem clicados, isto influenciará não só o lance, como nós vimos, mas também o valor do anunciante. Desta forma, temos razões para supor que os valores dos jogadores podem estar correlacionados. Assim, vamos estudar o preço da anarquia em um leilão de GSP em que os jogadores têm valores correlacionados.

Vamos provar que o GSP, quando modelado como um jogo de informação incompleta, onde a distribuição de probabilidade dos valores dos jogadores podem ser correlacionadas, tem um preço da anarquia de 4.

Teorema 6.5.1. *O GSP modelado como um jogo com informação incompleta com valores correlacionados, tem preço da anarquia de 4.*

Para provarmos que preço da anarquia para um jogo Bayesiano com valores correlacionados é 4, precisamos primeiro provar que este jogo modelado como um jogo com informação completa é $(\frac{1}{2}, 1)$ -semi-suave.

Para provarmos o seguinte lema, precisamos provar que, dado um vetor de estratégia que seja um equilíbrio b , temos $u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) + \alpha_i v_{\pi(b,i)} \geq \frac{1}{2}\alpha_i v_i$, para todo i . A ideia desta inequação é que, se, em um equilíbrio, o jogador i ganhar menos que a metade do que ele ganharia na alocação ótima, então seria mais vantajoso, para ele, mudar de estratégia, para dar como lance a metade do valor dele.

Lema 6.5.2. *O GSP modelado como um jogo com informação completa é um jogo $(\frac{1}{2}, 1)$ -semi-suave.*

Demonstração. Para um conjunto de jogadores N com valores v , fixe uma estratégia b qualquer com uma função de alocação e uma estratégia que maximiza o bem estar social $b^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)$, tal que $b_i^*(v) = \frac{1}{2}v_i$ para todo jogador i .

Precisamos provar que

$$\sum_{i=1}^k u_i(b_i^*, b_{-i}) \geq \frac{1}{2}SW(b^*) - SW(b),$$

onde, pela estratégia b^* , sabemos que $SW(b^*) = OPT$.

Vamos provar primeiro que

$$u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) + \alpha_i v_{\pi(b,i)} \geq \frac{1}{2}\alpha_i v_i.$$

Para isto, vamos provar que um dos dois casos, $u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) \geq \frac{1}{2}\alpha_i v_i$ ou $\alpha_i v_{\pi(b,i)} \geq \frac{1}{2}\alpha_i v_i$ é verdade. Observe o cenário em que o jogador i mudou o seu lance de b_i para $\frac{v_i}{2}$ e os outros jogadores permaneceram com a mesma estratégia. Suponha que, neste cenário, o jogador i ganhou o *slot* j .

Vamos separar em duas possibilidades, se o *slot* j para o qual o jogador i é alocado se este jogador muda o seu lance de b_i para $\frac{v_i}{2}$ é, em primeiro caso, maior ou igual a i ou, em segundo caso, menor que i . Caso $j \leq i$, se o jogador i mudar o valor do seu lance para $\frac{v_i}{2}$, este jogador ganharia outro *slot* j melhor do que i , pois $\alpha_j \geq \alpha_i$. Neste caso

$$\begin{aligned} u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) &\geq \alpha_j \left(v_i - \frac{v_i}{2}\right) \\ &\geq \alpha_i \frac{v_i}{2}. \end{aligned}$$

Caso $j > i$, ou seja, o jogador i mudou para um *slot* pior do que α_i , isto quer dizer que o lance do jogador $\pi(i)$ que está no *slot* i é maior do que $\frac{v_i}{2}$, teremos então

$$\alpha_i v_{\pi(i)} \geq \alpha_i b_{\pi(i)} \geq \frac{1}{2}\alpha_i v_i.$$

Provando assim que

$$u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) + \alpha_i v_{\pi(b,i)} \geq \frac{1}{2} \alpha_i v_i.$$

Logo, fazendo o somatório termo a termo, temos

$$\sum_i^n u_i\left(\frac{v_i}{2}, b_{-i}\right) \geq \frac{1}{2} OPT - SW(b),$$

provando que o jogo é $(\frac{1}{2}, 1)$ -semi-suave. \square

Com o fato de que o GSP modelado como um jogo de informação completa é $(\frac{1}{2}, 1)$ -semi-suave, a prova do Teorema 6.5.1 pode ser provado como a seguir

Demonstração do Teorema 6.5.1. Como o jogo GSP nesta modelagem é $(\frac{1}{2}, 1)$ -semi-suave, então para qualquer perfil v e para qualquer estratégia $b(v)$ teremos

$$\sum_i^n u_i(b'_i(v_i), b_{-i}(v_{-i})) \geq \frac{1}{2} OPT(v) - SW(\pi(b(v)), v)$$

quando $b'_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$ para todo i . Então para qualquer equilíbrio b teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[SW(\pi(b(v)), v)] &\geq \mathbb{E}\left[\sum_i^n u_i(b(v))\right] \\ &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v_i} \mathbb{E}_{v_{-i}|v_i}[u_i(b(v))] \\ &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v_i} \mathbb{E}_{v_{-i}|v_i}[u_i(b_i(v_i), b_{-i}(v_{-i}))] \\ &\geq \sum_i^n \mathbb{E}_{v_i} \mathbb{E}_{v_{-i}|v_i}[u_i(b'_i(v_i), b_{-i}(v_{-i}))] \\ &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v_i} \mathbb{E}_{v_{-i}|v_i}[u_i(b'_i(v_i), b_{-i}(v_{-i}))] \\ &\geq \frac{1}{2} \mathbb{E}[OPT(v)] - \mathbb{E}[SW(\pi(b(v)), v)] \end{aligned}$$

nos dando a inequação

$$\mathbb{E}[SW(\pi(b(v)), v)] \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}[OPT(v)] - \mathbb{E}[SW(\pi(b(v)), v)].$$

Portanto

$$\mathbb{E}[SW(\pi(b(v)), v)] \geq \frac{1}{4} \mathbb{E}[OPT(v)].$$

Provando assim que o preço da anarquia é no máximo 4 para o GSP modelado com valores correlacionados. \square

6.5.2 Jogo com Valores Independentes

Agora vamos supor que os valores entre os jogadores são independentes entre si.

Em [12] É exibido um preço da anarquia de 3,164, o que quer dizer que o bem estar social em um equilíbrio é maior do que 31,6% em relação ao ótimo.

Teorema 6.5.3. *O preço da anarquia para o GSP modelado como um jogo bayesiano com valores independentes é 1,164.*

De maneira análoga ao Lema 6.5.2, temos que provar o seguinte lema que diz que, se b é um equilíbrio bayesiano, então $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] \geq (1 - \frac{1}{e})\alpha_k v_i$. Esta inequação vale para qualquer vetor de estratégia b . A ideia intuitiva é mostrar que, como b é um equilíbrio, se o slot $\alpha_{\sigma(b(v))}$ que o jogador i ganhou não é maior do que o slot k ; e se o lance $b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}))}$ do jogador que ganharia o slot k , se o jogador i não tivesse participando, não é maior do que v_i ; então temos um limite para que $\alpha_{\sigma(b(v))}$ e $b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}))}$ não estejam tão distantes de α_k e v_i respectivamente. Se não tivéssemos este limite, o vetor de estratégia b não seria um equilíbrio.

Lema 6.5.4. *Para um slot k e um jogador i com um valor v_i a equação*

$$\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] \geq \gamma \alpha_k v_i$$

é válida para $\gamma \leq 1 - \frac{1}{e}$.

Demonstração. Os casos em que $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i] \geq \alpha_k v_i$ ou $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] \geq \alpha_k v_i$ são triviais. Vamos analisar o caso em que $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i] < \alpha_k v_i$ e $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] < \alpha_k v_i$, ou seja, $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}] < \alpha_k$ e $\mathbb{E}_{v_{-i}}[b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] < v_i$.

Suponha um outro cenário em que o jogador i tenha dado um lance b'_i tal que $b_i < b'_i < v_i$. Para simplificar as contas vamos chamar a expressão $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i]$ de W . Como o vetor de lances b é um equilíbrio então teremos $W = \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)}v_i] \geq \mathbb{E}_{v_{-i}}[u_i(b)] \geq \mathbb{E}_{v_{-i}}[u_i(b'_i, b_{-i})]$.

Como pela hipótese $\mathbb{E}_{v_{-i}}[b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)}] < v_i$, a probabilidade do jogador i ganhar um slot com CTR pelo menos igual ao CTR de α_k é positiva, podemos inferir então

$$\mathbb{E}_{v_{-i}}[u_i(b'_i, b_{-i})] \geq (v_i - b'_i)\alpha_k \mathbb{P}_{v_{-i}}[b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)} < b'_i],$$

combinando as duas desigualdades ficamos com

$$W \geq \mathbb{E}_{v_{-i}}[u_i(b'_i, b_{-i})] \geq (v_i - b'_i)\alpha_k \mathbb{P}_{v_{-i}}[b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)} < b'_i],$$

logo

$$(v_i - b'_i)\alpha_k \mathbb{P}_{v_{-i}}[b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)} < b'_i] \leq W,$$

assim, podemos concluir que

$$\mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}),k)} > v_i - b'_i] \leq \frac{W}{(v_i - b'_i)\alpha_k}.$$

Como $\mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}))} \geq v_i] = 0$ teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)}] &= \int_0^\infty \mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)} > z] dz \\ &= \int_0^{\frac{W}{\alpha_k}} \mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)} > z] dz \\ &\quad + \int_{\frac{W}{\alpha_k}}^{v_i} \mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)} > z] dz \\ &\quad + \int_{v_i}^\infty \mathbb{P}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)} > z] dz \\ &\leq \int_0^{\frac{W}{\alpha_k}} 1 dz + \int_{\frac{W}{\alpha_k}}^{v_i} \frac{W}{z\alpha_k} dz + 0 \\ &= \frac{W}{\alpha_k} + \frac{W}{\alpha_k} \left(\ln v_i - \ln \frac{W}{\alpha_k} \right) \\ &= \frac{W}{\alpha_k} + \frac{W}{\alpha_k} \ln \frac{\alpha_k v_i}{W}. \end{aligned}$$

Ficamos então com

$$\frac{W}{\alpha_k} + \frac{W}{\alpha_k} \ln \frac{\alpha_k v_i}{W} \geq \mathbb{E}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)}],$$

Multiplicando os dois lados por α_k teremos

$$W + W \ln \frac{\alpha_k v_i}{W} \geq \alpha_k \mathbb{E}_{v_{-i}}[v_i - b_{\pi^i(b_{-i},k)}].$$

Logo

$$W + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i},k)}] \geq \alpha_k v_i \left(1 - \frac{W}{\alpha_k v_i} \ln \frac{1}{\frac{W}{\alpha_k v_i}} \right),$$

usando o fato de que $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ podemos concluir que

$$W + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i},k)}] \geq \alpha_k v_i \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

□

A partir do seguinte lema poderemos provar diretamente o preço da anarquia. Este lema não é usado direto na prova pois, como não precisamos supor que o vetor de estratégia b é um equilíbrio, a enunciação isolada do lema o torna mais forte.

Lema 6.5.5. *Seja um conjunto de jogadores N , com valores $v \sim F$ para alguma distribuição de probabilidade acumulada F , com vetor de estratégia $b(\cdot)$. Se*

$$\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(b(v)),i}, v_i] + \mathbb{E}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_{-i}))}] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_k v_i,$$

para todo slot k , jogadores i e valores v_i , então

$$\mathbb{E}_{v \sim F}[SW(\pi(b(v)), v)] \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \mathbb{E}[OPT(v)],$$

onde $OPT(v)$ é o bem estar social ótimo, dado o vetor de valores v .

Demonstração. Fixado o jogador i e seu valor v_i , usaremos k como o slot ótimo para o jogador i , aquele slot que seria alocado para ele em uma alocação ótima. Este slot é o $\alpha_{\nu(v,i)}$, ou seja, $k = \nu(v, i)$ e $\alpha_k = \alpha_{\nu(v,i)}$, ficamos com

$$\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_{\nu(v,i)} v_i.$$

Fazendo a esperança do somatório da equação para todos jogadores, onde o vetor de valores v tem uma distribuição de probabilidade acumulada F , teremos

$$\mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n \left[\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \right] \geq \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n \left[\left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_{\nu(v,i)} v_i \right].$$

Logo

$$\mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n \left[\mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \right] \geq \mathbb{E}_{v \sim F} \left(1 - \frac{1}{e}\right) OPT.$$

No primeiro termo da equação temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v \sim F} \mathbb{E}_{v_{-i}}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] \\ &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v \sim F}[\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] \\ &= \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n [\alpha_{\sigma(b(v),i)} v_i] \\ &= \mathbb{E}_{v \sim F} SW(\pi(b(v)), v). \end{aligned}$$

Na segunda equação teremos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] &= \sum_i^n \mathbb{E}_{v \sim F} \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \\
&= \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \\
&\leq \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_i^n [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi(b_{-i}, \nu(v,i))}] \\
&= \mathbb{E}_{v \sim F} \sum_k [\alpha_k b_{\pi(b_{-i}, k)}] \\
&= \mathbb{E}_{v \sim F} SW(b(v), v).
\end{aligned}$$

De onde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
2\mathbb{E}_{v \sim F} SW(b(v), v) &\geq \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\sigma(b(v), i)} v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_{\nu(v,i)} v_i \\
&= \left(1 - \frac{1}{e}\right) OPT(v).
\end{aligned}$$

□

Para demonstrar o Teorema 6.5.3 basta usar o diretamente o Lema 6.5.5, supondo que a estratégia b é um equilíbrio.

Demonstração do Teorema 6.5.3. Seja um conjunto de jogadores N , com valores $v \sim F$ para alguma distribuição de probabilidade acumulada F , com vetor de estratégia $b(\cdot)$ que seja um equilíbrio.

Pelo Lema 6.5.4 sabemos que

$$\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(b(v), i)} v_i] + \mathbb{E}[\alpha_k b_{\pi^i(b_{-i}(v_i))}] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_k v_i,$$

para todo *slot* k , jogadores i e valores v_i . Então pelo Lema 6.5.5 podemos concluir que

$$\mathbb{E}_{v \sim F} [SW(\pi(b(v), v))] \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \mathbb{E}[OPT(v)],$$

onde $OPT(v)$ é o bem estar social ótimo, dado o vetor de valores v .

Logo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v \sim F} SW(b(v), v) &\geq \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\sigma(b(v), i)} v_i] + \mathbb{E}_{v_{-i}} [\alpha_{\nu(v,i)} b_{\pi^i(b_{-i}, \nu(v,i))}] \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \alpha_{\nu(v,i)} v_i \\
&= \frac{1 - \frac{1}{e}}{2} OPT(v).
\end{aligned}$$

Provando que o preço da anarquia para o GSP modelado como um jogo Bayesiano com valores independentes é $2(1 - \frac{1}{e})^{-1} \approx 3,164$.

□

Capítulo 7

Conclusões

Este trabalho apresentou os principais mecanismos de leilão aplicados ao problema da venda de espaço para anúncios em sites de busca. Foi discutido quais mecanismos seriam mais interessantes, tanto para o publicador, visando aumentar o seu lucro; quanto para o anunciante, visando tornar a competição entre estes menos agressiva. Tendo em vista que o mecanismo usado atualmente é o GSP, foi estudado o preço da anarquia para este mecanismo modelado de formas diferentes. Primeiro modelamos como um jogo com informação completa com estratégias puras, foi visto um preço da anarquia de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Modelando o jogo com informação completa e estratégias mistas, foi visto um preço da anarquia de 4. Para a modelagem do problema em um jogo de informação incompleta, vimos o preço da anarquia com valores correlacionados e com valores independentes. Para uma modelagem com valores correlacionados o preço visto foi 4, para uma modelagem com valores independentes o preço foi $(1 - \frac{1}{\exp})^{-1} \approx 3,164$.

A contribuição desta dissertação é uma apresentação e sintetização dos principais trabalhos sobre o projeto de mecanismos para anúncios em sites de busca. Para uma compreensão melhor dos mecanismos usados, foi visto a evolução dos mecanismos de leilões dos anúncios e os motivos que levaram as mudanças. Estes leilões foram modelados formalmente e foi discutido os motivos dessas modelagens e quanto destas modelagens se afastam da realidade. Os métodos para o cálculo do preço da anarquia foram exibidos, para que, talvez, possam servir para ideias futuras em outras aplicações.

Como trabalhos futuros podemos ter um estudo dos leilões de anúncios em modelagens mais complexas que sejam mais próximas da realidade. Pode ser pesquisado outras tentativas de mecanismos para o leilão de anúncios em sites de busca.

Referências Bibliográficas

- [1] Kursad Asdemir. Bidding patterns in search engine auctions. In *In Second Workshop on Sponsored Search Auctions (2006)*, ACM Electronic Commerce. Press, 2006.
- [2] N. Brooks. The atlas rank report: How search engine rank impacts traffic, July 2004.
- [3] Vincent P Crawford and Elsie Marie Knoer. Job matching with heterogeneous firms and workers. *Econometrica*, 49(2):437–50, March 1981.
- [4] A. Takeuchi M. Masui E. Fukuda, Y. Kamijo and Y. Funaki. Theoretical and experimental investigation of performance of keyword auction mechanisms. In *Proc. of 6th Workshop on Ad Auctions*, 2010.
- [5] Benjamin Edelman and Michael Ostrovsky. Strategic bidder behavior in sponsored search auctions. *Decis. Support Syst.*, 43(1):192–198, 2007.
- [6] Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, and Michael Schwarz. Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords. Working Paper 11765, National Bureau of Economic Research, November 2005.
- [7] Drew Fudenberg and Jean Tirole. *Game Theory*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1st, edition, 1991.
- [8] Google. 2012 financial tables – investor relations – google, 2013.
- [9] Brendan Kitts and Benjamin J. LeBlanc. Optimal bidding on keyword auctions. *Electronic Markets*, pages 186–201, 2004.
- [10] Vijay Krishna. *Auction Theory*. Elsevier Inc., San Diego, 1st, edition, 2010.
- [11] S. Lahaie, D. M. Pennock, A. Saberi, and R. V. Vohra. Sponsored search auctions. In *Algorithmic Game Theory*, pages 699–716, New York, NY, USA, 2007. Cambridge University Press.

- [12] R. Paes Leme and B. Lucier. Gsp auctions with correlated types. In *Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce, EC '11*, pages 71–80, New York, NY, USA, 2011. ACM.
- [13] R. Paes Leme and Éva Tardos. Sponsored search equilibria for conservative bidders. In *In Fifth Workshop on Ad Auctions*, 2009.
- [14] R. Paes Leme and Éva Tardos. Pure and bayes-nash price of anarchy for generalized second price auction. In *Foundations of Computer Science (FOCS), 2010 51st Annual IEEE Symposium on*, pages 735–744, oct. 2010.
- [15] Patrick Maillé, Evangelos Markakis, Maurizio Naldi, George D. Stamoulis, and Bruno Tuffin. Sponsored search auctions: an overview of research with emphasis on game theoretic aspects. *Electronic Commerce Research*, 12:265–300, 2012.
- [16] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *MicroEconomic Theory*. Oxford University Press, New York, 1st, edition, 1994.
- [17] F.K. Miyazawa. In *Introdução à Teoria dos Jogos Algorítmica*, pages pp. 365–417, Belo Horizonte, Julho 2010.
- [18] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, feb 1981.
- [19] N. Nisan. Introduction to mechanism design (for computer scientists). In *Algorithmic Game Theory*, pages 209–241, New York, NY, USA, 2007. Cambridge University Press.
- [20] Martin J. Osborne. *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, New York, 1st, edition, 2004.
- [21] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1st, edition, 1994.
- [22] T. Roughgarden and É. Tardos. Introduction to the inefficiency of equilibria. In *Algorithmic Game Theory*, pages 443–459, New York, NY, USA, 2007. Cambridge University Press.
- [23] Tim Roughgarden. Intrinsic robustness of the price of anarchy. In *Proceedings of the 41st annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '09*, pages 513–522, New York, NY, USA, 2009. ACM.

- [24] L. S. Shapley and M. Shubik. The assignment game i: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130, 1971. 10.1007/BF01753437.
- [25] É. Tardos and Vijay V. Vazirani. Basic solution concepts and computational issues. In *Algorithmic Game Theory*, pages 3–29, New York, NY, USA, 2007. Cambridge University Press.