Decomposição Ótima em Orelhas Para Grafos Matching Covered

Marcelo H. Carvalho

Decomposição Ótima em Orelhas Para Grafos Matching Covered[1]

Marcelo H. Carvalho

IC – UNICAMP

Banca Examinadora:

- Arnaldo Mandel[2]
- Cláudio L. Lucchesi (Orientador)[3]
- João Meidanis[3]
- U. S. R. Murty[4]
- Yoshiharu Kohayakawa[2]
- Cid Carvalho de Souza (Suplente)[3]
- Jorge Stolfi (Suplente)[3]

[1]Dissertação apresentada ao Instituto de Computação da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

[2]Professor do IME - USP.

[3]Professor do IC - UNICAMP.

[4]Professor da Universidade de Waterloo - Canadá.

UNICAMP

Decomposição Ótima em Orelhas Para Grafos Matching Covered

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Marcelo H. Carvalho e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de junho de 1997.

C L Lucchesi

Prof. Cláudio L. Lucchesi
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 13 de dezembro de 1996 pela Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Uppaluri Siva Ramachandra Murty

Prof. Dr. Arnaldo Mandel

Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Prof. Dr. João Meidanis

Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi

à minha esposa Elãiny,
e às minhas filhas Lívia e Lorena.

Agradecimentos

Quero agradecer a todos os amigos do IC-Unicamp e DCT-UFMS que direta ou indiretamente colaboraram para a a realização deste trabalho.

Agradeço ao Prof. U.S.R. Murty pelas valiosas sugestões que fizeram com esta Tese ficasse mais clara e mais suave para o leitor e para mim também.

Por último, gostaria de fazer um agradecimento especial ao Prof. Cláudio L. Lucchesi, meu orientador e, acima de tudo, meu grande amigo. Caro Professor, melhor do que a Tese, foi tê-lo como orientador. Obrigado por ter me introduzido neste assunto tão belo e fascinante. Um grande abraço e felicidades.

Resumo

O assunto do qual se trata este trabalho se insere na área de teoria dos grafos, e mais especificamente de grafos matching covered, que são grafos conexos em que toda aresta pertence a um emparelhamento perfeito.

L. Lovász desenvolveu toda a base da teoria dos grafos matching covered e, como conseqüência, obteve uma caracterização para o matching lattice. Desta caracterização foi possível obter uma prova para uma relaxação da conjectura de Tutte que generaliza o problema das quatro cores.

Existem dois procedimentos de decomposição de grafos matching covered que são fundamentais: um deles é a decomposição em cortes justos e o outro é a decomposição em orelhas. Para uma decomposição em orelhas podem ser usadas orelhas simples ou duplas. Uma importante questão é determinar o número mínimo de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered.

Neste trabalho apresentamos uma resposta para esta questão. Apresentamos também duas conseqüências desta solução: uma delas é que existe uma base para o matching lattice formada apenas por emparelhamentos perfeitos, e a outra é uma caracterização para o $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. Esta última nos permite obter uma prova para outra relaxação da conjectura de Tutte.

Abstract

Matching covered graphs are connected graphs in which every edge lies in a perfect matching. The base of this theory was developed by L. Lovász, and as consequence, a characterization to the matching lattice was obtained. Then it was possible to obtain a proof for a relaxation of a conjecture of Tutte which is related to the four colour problem.

There are two main decomposition procedures of a matching covered graph: tight cuts decomposition and ear decomposition. For an ear decomposition one can use single or double ears. One important question asks about the minimum number of double ears of any ear decomposition of such graphs.

This work gives an answer to this question. It is also presented two consequences: that there is a base for the matching lattice formed solely by incidence vectors of perfect matchings, and a characterization to $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ which gives a proof to an other relaxation of the Tutte conjecture.

Conteúdo

1 Introdução **1**

1.1 Primeiras considerações 1
1.2 Motivação para o trabalho 2
1.3 Organização do trabalho 4
1.4 Convenções e notação 7

2 Emparelhamento em Grafos **8**

2.1 Introdução 8
2.2 Os Teoremas de Hall, Tutte e Berge 8
2.3 Barreiras 11
2.4 Grafos matching covered 13

3 Cortes Justos **17**

3.1 Introdução 17
3.2 Cortes justos em grafos matching covered 17
3.3 Decomposição em cortes justos 21
3.4 Remoção de arestas em grafos bipartidos matching covered . . 24
3.5 Propriedades da função $b(G)$ 26
3.6 Um Teorema de estrutura para grafos bicríticos 31

4 Decomposição em Orelhas **35**

4.1 Introdução 35
4.2 Relação de dependência 36
4.3 Decomposição em orelhas e grafos matching covered 40
4.4 Colagem seqüencial de K_4 45
4.5 Bricks distintos de K_4 e $\overline{C_6}$ 52

5 Decomposição em Orelhas e Cortes Justos **58**
5.1 Introdução 58
5.2 Decomposição em orelhas e cortes justos 59
5.3 Decomposição em orelhas ótima 61
5.4 Decomposição em orelhas canônica 64

6 Cortes Robustos **68**
6.1 Introdução 68
6.2 Cortes bons 68
6.3 Cortes robustos 81
6.4 Cortes robustos especiais 84

7 O Teorema de Lovász-Vempala **91**
7.1 Introdução 91
7.2 O Teorema de Lovász-Vempala 91

8 Propriedades dos Bricks **117**
8.1 Introdução 117
8.2 Decomposição em orelhas ótima para bricks 117
8.3 Teorema de Lovász-Vempala reforçado 125

9 Conseqüências Importantes **137**
9.1 Introdução 137
9.2 Decomposição ótima em orelhas para grafos matching covered 137
9.3 Bases para o matching lattice 141
9.4 Uma caracterização para $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$ 150

10 Conclusão **161**

Lista de Figuras

3.1 Exemplo de corte justo (a) proveniente de barreira; (b) proveniente de uma 2-separação e (c) que não é proveniente de barreira e nem de 2-separação. 19
3.2 Decomposição em cortes justos. 22
3.3 O caso em que C e D se cruzam. 28
3.4 Grafos $G - e$ e G'. 32
3.5 Grafo $G - e$. 33

4.1 Relação de dependência para o grafo R_8. 37
4.2 Exemplos de colagens. 46
4.3 Colagem (a) não seqüencial e (b) seqüencial de K_4. 47
4.4 Grafo G. 51
4.5 Subgrafo gerador H. 52
4.6 Os seis blocos não nulos de G. 56

5.1 O corte C é justo em G. 59

6.1 Grafo H. 70
6.2 Um corte bom no grafo $\overline{C_6}$. 70
6.3 Exemplo de corte bom. 73
6.4 B é uma barreira não trivial maximal em $G - e$. 74
6.5 Os grafos G, L e G''. 75
6.6 Os grafos G, L_i e J_i. 76
6.7 Grafo bipartido W. 79
6.8 Grafos L_1 e L_2. 80
6.9 O grafo de Petersen. 80
6.10 Grafo G. 82

7.1 O grafo G e o grafo bipartido H. 94
7.2 O caso em que G_2 é o grafo de Petersen. 96
7.3 O caso em que G_2 é o $\overline{C_6}$. 97
7.4 A aresta e é disponível em G_1 e G_2 mas não em G. 99
7.5 Corte essencialmente proveniente de uma 2-separação. 100
7.6 O caso em que D cruza C. 101
7.7 O caso em que s' pertence a B_1 e u pertence a X. 105
7.8 Grafos (a) H e (b) H_1. 108
7.9 O corte C é proveniente de uma 2-separação em G'. 111
7.10 O corte C é proveniente de uma 2-separação em G''. 113

8.1 Formas possíveis para o grafo G. 119
8.2 Formas possíveis para o grafo G. 120
8.3 Grafo G_1 no caso (a). 121
8.4 Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (c). 122
8.5 Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (d). 123
8.6 Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (e). 125
8.7 Formas possíveis para o grafo G. 129
8.8 Formas possíveis para o grafo G. 131
8.9 Formas possíveis para o grafo G. 132
8.10 Formas possíveis para o grafo G. 133

9.1 O vetor w sobre (a) K_4 e (b) $\overline{C_6}$. 146
9.2 Exemplos de conjuntos coerentes. 150
9.3 Um conjunto coerente que não pertence a $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$. 153
9.4 Conjuntos coerentes pares do (a) K_4 e (b) $\overline{C_6}$. 155
9.5 O conjunto coerente A é a soma de dois emparelhamentos perfeitos. 157
9.6 Um conjunto coerente par que não pertence a $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$. . . 157

10.1 Exemplo onde a decomposição em orelhas não é ótima se começarmos com K_4. 162

Capítulo 1

Introdução

1.1 Primeiras considerações

Grafos matching covered são grafos conexos em que toda aresta pertence a um emparelhamento perfeito. Uma grande motivação para estudarmos este assunto se concentra em um resultado de Tait (1880) que estabelece uma equivalência entre o problema das quatro cores e a 3-coloração de grafos cúbicos planares, e na Conjectura de Tutte, que diz que "todo grafo cúbico sem aresta de corte que não contém o grafo de Petersen como um *minor* é 3-aresta colorível".

Vários resultados significativos foram obtidos desde o fim da década de 70 e em toda década de 80. Os mais expressivos destes resultados são os de Seymour [19] e L. Lovász [10], que consideram uma relaxação da Conjectura de Tutte.

O grande mérito destes trabalhos é que pela primeira vez foi possível estabelecer a real importância do grafo de Petersen em uma classe de grafos que inclui aqueles considerados pela conjectura de Tutte. Dessa forma, estes resultados dão um grande impulso à validade da Conjectura.

Esta Tese tem uma íntima relação com o trabalho de L. Lovász. Foi tentando entendê-lo que conseguimos estabelecer os resultados que a compõem. É importante ressaltar que um grande aliado deste trabalho foi o relatório técnico de U. S. R. Murty [13], onde a teoria dos grafos matching covered e o Teorema de Lovász são descritos de uma forma mais suave e didática.

1.2 Motivação para o trabalho

O problema da quatro cores foi uma das principais motivações para o desenvolvimento da teoria dos grafos. Interesses em emparelhamentos e coloração de arestas surgiram da seguinte observação de Tait [21].

Teorema 1.1 [Tait, 1880] *O problema das quatro cores é eqüivalente à afirmação de que todo grafo cúbico planar sem aresta de corte é 3-aresta-colorível.* □

Note que uma coloração das arestas de um grafo é simplesmente uma partição das arestas em emparelhamentos. Portanto, em vista do Teorema 1.1, o Teorema das quatro cores afirma que que todo grafo cúbico planar sem aresta de corte possui três emparelhamentos perfeitos disjuntos nas arestas.

Um grafo cúbico sem aresta de corte e que não possui três emparelhamentos perfeitos disjuntos é chamado de *snark*. O snark mais famoso que se conhece é o grafo de Petersen. Devido ao Teorema 1.1, o problema das quatro cores é equivalente à afirmação de que não existe snark planar.

Os snarks contém a chave de muitos problemas em aberto em teoria dos grafos. Todas as construções conhecidas de snarks podem ser vistas como modificações ou generalizações do grafo de Petersen. Tutte [23] conjecturou que, em essência, o grafo de Petersen é a única obstrução à 3-coloração de grafos cúbicos sem aresta de corte. Um grafo H é um *minor* de um grafo G se H pode ser obtido de G através das operações de remoção de vértices, remoção de arestas e contração de arestas.

Conjectura 1.2 [Tutte, 1966] *Se um grafo cúbico sem aresta de corte não contém o grafo de Petersen como um minor então ele é 3-aresta-colorível.* □

Como nenhum grafo planar contém o grafo de Petersen como um minor, a Conjectura acima inclui o problema das quatro cores como um caso especial.

Seymour [19] foi o primeiro a estudar sistematicamente a Conjectura acima. Ele estudou o lattice (reticulado) gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo cúbico 2-conexo. Lovász [10],

construiu a teoria dos grafos matching covered e deu uma completa caracterização do matching lattice (reticulado gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo matching covered).

Considere o espaço das funções que associam a cada aresta de G um número real. Para um subconjunto $A \subseteq E(G)$, o *vetor de incidência* χ^A de A é definido por $\chi^A(e) = 1$ se $e \in A$ e $\chi^A(e) = 0$ caso contrário.

Nós estamos interessados em estudar os subconjuntos de $\mathbb{Q}^E$ gerados pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo G. Se e é uma aresta que não pertence a nenhum emparelhamento perfeito de G então todos os vetores de interesse terão zero na coordenada correspondente à e. Por esta razão nos restringiremos a grafos conexos em que toda aresta pertence a algum emparelhamento perfeito; tais grafos são chamados de matching covered. O conjunto de todos os emparelhamentos perfeitos de um grafo G é denotado por $\mathcal{M}$.

O *cone inteiro* gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo G, denotado por $Cone(\mathcal{M})$, é o conjunto de todas as combinações lineares inteiras não negativas de χ^M, onde $M \in \mathcal{M}$. Em outras palavras,

$$Cone(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{Z}^E : x = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M \chi^M, \alpha_M \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}.$$

Não é difícil de ver que se G é um grafo k-regular então G é k-aresta-colorível se, e somente se, o vetor $\mathbf{1}$, contendo "1" em cada componente, pertence ao cone inteiro. Por outro lado, é bem conhecido [7] que o problema de decidir se um grafo k-regular é k-aresta-colorível é NP-completo. Portanto, é muita pretensão tentar obter uma caracterização para o cone inteiro.

Por esta razão, é importante considerarmos relaxações deste cone. Uma possível relaxação é permitir coeficientes negativos e considerar o lattice. O lattice gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de G, chamado de *matching lattice* de G e denotado por $Lat(\mathcal{M})$, é definido como segue;

$$Lat(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{Z}^E : x = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M \chi^M, \alpha_M \in \mathbb{Z}\}.$$

Podemos ainda considerar o $Frac(\mathcal{M})$, definido de forma análoga.

$$Frac(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{Z}^E : x = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M \chi^M, \alpha_M \in \mathbb{Q}\}.$$

Alguns resultados importantes sobre os conjuntos definidos acima estão colocados a seguir, onde *r-grafo* é um grafo r-regular tal que $|\nabla(S)| \geq r$ para todo subconjunto ímpar S de $V(G)$.

Teorema 1.3 [Edmonds, 1965] $\mathbf{1} \in Frac(\mathcal{M})$ *para todo r-grafo.* □

Teorema 1.4 [Seymour, 1979] $\mathbf{1} \in Lat(\mathcal{M})$ *para todo 3-grafo que não possui o grafo de Petersen como um minor.* □

Teorema 1.5 [Lovász, 1987] $\mathbf{1} \in Lat(\mathcal{M})$ *para todo r-grafo que não possui o grafo de Petersen como um minor.* □

Em [10], Lovász não apenas prova o Teorema acima, mas também caracteriza o matching lattice, isto é, ele fornece condições necessárias e suficientes para que um vetor $w \in \mathbb{Z}^E$ pertença ao $Lat(\mathcal{M})$. Para isso ele desenvolveu toda a base da teoria dos grafos matching covered.

Neste trabalho fazemos inicialmente uma breve revisão da teoria dos grafos matching covered e, a seguir, apresentamos os resultados que obtivemos.

1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2, apresentamos os principais conceitos e resultados que se referem a emparelhamento em grafos. A maioria destes resultados são simples e podem ser encontrados em qualquer livro básico em teoria dos grafos. Por esse motivo, evitamos estendê-lo com algumas demonstrações que seriam meramente repetitivas. Para essas demonstrações são indicadas referências adequadas.

Na última seção deste Capítulo, introduzimos grafos matching covered que são grafos conexos para os quais toda aresta pertence a algum emparelhamento perfeito e apresentamos seus resultados mais básicos.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de cortes justos, que é um dos mais importantes elementos no estudo de grafos matching covered, e apresentamos suas mais importantes propriedades.

Neste Capítulo também veremos um procedimento que decompõe um grafo matching covered em grafos matching covered menores chamados de bricks e braces. Os bricks e braces possuem propriedades muito importantes que, quase sempre, podem ser generalizadas para todo grafo matching covered. Através desta decomposição, podemos considerar bricks e braces como blocos básicos a partir dos quais todos os grafos matching covered podem ser construídos.

Assim, quando temos um problema qualquer sobre grafos matching covered, se conseguirmos resolvê-lo para os bricks e braces então, em geral, é possível extender a solução, utilizando esta decomposição, para todo grafo matching covered. Por exemplo, o Teorema de L. Lovász, que caracteriza o matching lattice de um grafo matching covered, segue esta linha. Outro exemplo é a Conjectura de Tutte; é suficiente demonstrá-la para os bricks e braces. Veremos mais exemplos ao longo deste trabalho.

No Capítulo 4, apresentamos outra decomposição para grafos matching covered chamada de decomposição em orelhas. Esta decomposição é indutiva e muito simples e nos permite descrever a classe dos grafos matching covered. A partir desta propriedade, conseqüências muito importantes são estabelecidas.

Neste Capítulo também definimos uma família infinita de grafos matching covered obtida por uma colagem seqüencial de K_4. Esta família pode ser construída iterativamente a partir do K_4 de tal forma que cada elemento, a partir do segundo, é obtido através de uma colagem adequada do elemento anterior a um K_4. A seguir mostramos que todo grafo matching covered possui um subgrafo que, a menos de subdivisão de arestas, é um elemento desta família.

Também mostramos que todo elemento desta família possui, a menos de subdivisão de arestas, o K_4 ou $\overline{C_6}$ como subgrafo. Uma conseqüência imediata deste resultado é que todo brick diferente do K_4 e $\overline{C_6}$ possui uma aresta cuja remoção produz um grafo matching covered. Este resultado, demonstrado por L. Lovász [10], é clássico na teoria dos grafos matching covered.

Existe uma demonstração direta e também simples para este Teorema [3]. No entanto, esta família infinita possui elementos que desempenham um papel importante na teoria dos grafos matching covered. Por exemplo, seu terceiro elemento é o único brick que possui uma única aresta cuja remoção produz um grafo matching covered, e conjecturamos que o quarto elemento é

o único que possui duas arestas. Os demais bricks possuem pelo menos três arestas com esta propriedade.

No Capítulo 5, apresentamos uma relação entre o número de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered e o número de bricks de uma decomposição em cortes justos do mesmo grafo. Assim estabeleceremos um limite inferior para o número de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered.

Este limite inferior nos sugere uma conjectura que estabelece um número mínimo de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered. Nos Capítulos 8 e 9, mostramos que esta conjectura é verdadeira.

Ainda neste Capítulo, mostramos que, a partir de uma decomposição em orelhas qualquer, podemos obter uma decomposição em orelhas particular que chamaremos de canônica, de tal forma que o número de orelhas duplas utilizados é o mesmo da decomposição inicial. Veremos, no Capítulo 9, importantes aplicações desta decomposição.

Os três próximos Capítulos têm o objetivo de demonstrar um dos principais resultados deste trabalho, que mostra que a Conjectura do Capítulo 5 é válida para os bricks. Um dos pilares desta demonstração é um Teorema demonstrado recentemente por L. Lovász e S. Vempala. Para demonstrarmos este Teorema precisamos de alguns conceitos que são introduzidos no Capítulo 6.

No Capítulo 6, introduzimos o conceito de cortes bons para bricks. Um corte ímpar em um brick é bom se ele satisfaz duas condições; uma delas diz que as duas contrações deste corte devem ser matching covered. Este conceito nos permite provar neste Capítulo um teorema que é uma relaxação do Teorema de Lovász-Vempala.

Mostramos também que os bricks em geral possuem cortes bons tais que cada uma das suas contrações, além de ser matching covered, ainda possui a propriedade de que sua decomposição em cortes justos fornece um único brick. Estes cortes recebem o nome de robustos.

Os cortes robustos que possuem uma margem de tamanho mínimo têm propriedades importantes, e foi investigando-as que pudemos, no Capítulo 7, demonstrar o Teorema de Lovász-Vempala.

No Capítulo 8, mostramos a validade da Conjectura do Capítulo 5 para bricks e apresentamos um resultado que é uma generalização do Teorema de Lovász-Vempala.

No Capítulo 9, o último desta Tese, mostramos que a Conjectura do Capítulo 5 é verdadeira para todo grafo matching covered e apresentamos uma caracterização para $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.

É importante ressaltar que, com raríssimas excessões, todas as demonstrações desta Tese (incluindo as de resultados já conhecidos) são originais.

1.4 Convenções e notação

Teoria dos conjuntos:
$:=$: igual por definição.
$x \in A$: x é elemento do conjunto A.
$A \cup B$: união dos conjuntos A e B.
$A \cap B$: intersecção dos conjuntos A e B.
$A \setminus B$: conjunto dos elementos de A que não estão em B.
$A \oplus B$: diferença simétrica de A e B, ou seja, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
$A \subseteq B$: A é subconjunto de B.
$|X|$: número de elementos do conjunto X.

Teoria dos grafos
$adj(v)$: conjunto dos vértices adjacentes ao vértice v.
$\nabla(X)$: conjunto das arestas com exatamente um extremo em X.
$\mathcal{I}(H)$: conjunto das componentes ímpares do grafo H.
$\Delta(G)$: grau máximo de um vértice no grafo G.
$G[X]$: subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices X, ou seja, é o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X e o conjunto de arestas é formado pelas arestas de G que possui ambos os extremos em X.

Capítulo 2

Emparelhamento em Grafos

2.1 Introdução

Neste Capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados que se referem a emparelhamento em grafos. A maioria destes resultados são introdutórios e podem ser encontrados em qualquer livro básico em teoria dos grafos. Por esse motivo, evitaremos estendê-lo com algumas demonstrações que seriam meramente repetitivas. Para essas demonstrações serão indicadas bibliografias adequadas.

2.2 Os Teoremas de Hall, Tutte e Berge

Seja $G := (V(G), E(G))$ um grafo simples, isto é, um grafo finito sem arestas paralelas e sem laços. Um *emparelhamento* em G é um subconjunto de arestas não adjacentes duas a duas. Um vertice $u \in V(G)$ é *coberto* por um emparelhamento M se alguma aresta de M incide em u; caso contrario, u é dito ser *descoberto* por M. Se todos os vértices de $V(G)$ são cobertos pelo emparelhamento M então M é um *emparelhamento perfeito*.

Denotaremos o número de vértices descobertos por um emparelhamento M em um grafo G por $desc(M)$. É claro que se M é um emparelhamento então

$$|M| = (|V(G)| - desc(M))/2, \tag{2.1}$$

e M é um emparelhamento perfeito de G se, e somente se, $|M| = |V(G)|/2$.

Um dos problemas básicos sobre emparelhamento em grafos é determinar condições necessárias e suficientes para que um grafo tenha emparelhamento perfeito. Trataremos este problema primeiramente para a classe dos grafos bipartidos, que constitui uma importante classe em teoria dos grafos. Em seguida consideraremos a classe de grafos em geral.

No caso de grafos bipartidos, o seguinte Teorema estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de emparelhamento que cobre todos os vértices de uma bipartição.

Teorema 2.1 (Hall) *Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Então G contém um emparelhamento que cobre todos os vértices de X se, e somente se,*

$$|adj(A)| \geq |A|$$

para todo $A \subseteq X$.

Dem. veja [2, pag. 72], [11, pag. 5], [13, pag. 12]. □

Portanto, a partir do Teorema de Hall podemos obter condições necessárias e suficientes para a existência de emparelhamento perfeito em um grafo bipartido.

Para um grafo qualquer (não necessariamente bipartido) também existe um Teorema, de autoria de Tutte [22], que fornece condições necessárias e suficientes para a existência de emparelhamento perfeito. Uma motivação para este Teorema pode ser baseada no seguinte fato: seja G um grafo e M um emparelhamento em G. Se $V(G)$ é ímpar então claramente G não possui emparelhamento perfeito. Pelo mesmo raciocínio, se U é um subconjunto ímpar de $V(G)$ então U contém um vértice descoberto por M ou $|M \cap \nabla(U)| \geq 1$, onde $\nabla(U)$ representa o conjunto das arestas que ligam U a $V(G) \setminus U$. Como consequência, se M é um emparelhamento em G e $S \subseteq V(G)$ então

$$desc(M) \geq |\mathcal{I}(G - S)| - |S|, \tag{2.2}$$

onde $\mathcal{I}(H)$ denota o conjunto das componentes ímpares do grafo H. Por 2.2 acima, podemos concluir que se um grafo G possui um subconjunto S de vértices tal que $|\mathcal{I}(G - S)| > |S|$ então G não possui emparelhamento perfeito. O Teorema de Tutte afirma que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 2.2 (Tutte) *Um grafo G tem emparelhamento perfeito se, e somente se,*

$$|\mathcal{I}(G-S)| \leq |S|$$

para todo $S \subseteq V(G)$.

Dem. veja [2, pag. 76], [11, pag. 84], [13, pag. 13]. □

Sob o aspecto algorítmico, o problema de encontrar um emparelhamento máximo em um grafo é polinomial. Existem algoritmos eficientes que determinam e exibem um emparelhamento máximo. Estes algoritmos comumente utilizam o conceito de caminhos alternados com relação a um emparelhamento, que é um conceito tradicional para este tipo de problema. A seguir daremos uma idéia de como isso é feito.

Seja M um emparelhamento em um grafo G. Um caminho em G cujas arestas estão alternadamente em M e $E(G) - M$ é chamado de caminho *M-alternado*. Um caminho M-alternado cuja origem é término são descobertos por M é chamado de caminho *M-aumentante*. Se P é um caminho M-aumentante então $M\Delta E(P)$ é um emparelhamento maior do que M, onde Δ denota a operação de diferença simétrica. Portanto, se M é um emparelhamento máximo então não existe caminho M-aumentante. O Teorema a seguir, demonstrado por C. Berge [1] e independentemente por R. Z. Norman e M. O. Rabin [15], mostra que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 2.3 *Um emparelhamento M é máximo se, e somente se, não existe caminho M-aumentante.*

Dem. veja [2, pag. 70]. □

Este Teorema sugere a seguinte idéia para determinar um emparelhamento máximo em um grafo. Comece com um emparelhamento inicial (por exemplo, $M = \emptyset$). Faça uma busca na tentativa de encontrar um caminho P que seja M-aumentante. Se existir tal caminho P então faça $M := M\Delta E(P)$, e repita o procedimento. Caso contrário, o próprio M é um emparelhamento máximo.

A idéia deste algoritmo é muito simples. O que não é tão simples é saber como implementá-la de forma eficiente. Mais precisamente, como fazer

uma busca de um caminho M-aumentante? ou então, como garantir a não existência de um tal caminho de forma eficiente? uma idéia natural é fazer uma busca construindo uma árvore de caminhos M-alternados tendo como raiz um vértice r que seja descoberto por M. No caso de grafos bipartidos pode-se demonstrar que esta idéia está correta, ou seja, ou encontramos um caminho M-aumentante ou podemos concluir que não existe tal caminho com origem em r. Esta é a base do algorítmo conhecido como *método húngaro.* Mas para grafos não bipartidos este algoritmo pode não ser correto. A generalização deste método para grafos não bipartidos foi pela primeira vez demonstrada por Edmonds [4] cujo artigo constitui um marco na história, quando se trata de emparelhamento em grafos ou de complexidade de algoritmos. O algoritmo de Edmonds, apesar de ser relativamente simples, não será apresentado aqui, mas pode ser encontrado no artigo acima citado e também em [11, pag. 358] e [13, pag. 16].

2.3 Barreiras

Seja G um grafo e S um subconjunto de $V(G)$. Definimos a *deficiência* de S, que denotaremos por $def(S)$, o valor $|\mathcal{I}(G-S)| - |S|$. A *deficiência* de um grafo G, $def(G)$, é definida como o máximo de $def(S)$, tomado sobre todos os subconjuntos S de $V(G)$. Uma *barreira* em um grafo G é um subconjunto B de $V(G)$ tal que $def(B) = def(G)$.

Seja M um emparelhamento em G. Pela equação 2.1 e pela desigualdade 2.2, podemos concluir que

$$|M| \leq (|V(G)| - def(S))/2. \tag{2.3}$$

Portanto, se denotarmos o número de arestas de um emparelhamento máximo em um grafo G por $\nu(G)$ e considerarmos um conjunto S cuja deficiência é máxima, a equação 2.3 nos diz que

$$\nu(G) \leq (|V(G)| - def(G))/2. \tag{2.4}$$

O seguinte Teorema garante que a igualdade sempre ocorre.

Teorema 2.4 (Fórmula de Tutte-Berge) *Para todo grafo G tem-se*

$$\nu(G) = (|V(G)| - def(G))/2.$$

Dem. veja [11, pag. 90]. □

Pela Fórmula de Tutte-Berge podemos concluir que $def(G) \geq 0$, com igualdade se, e somente se, G tem emparelhamento perfeito.

Uma barreira B é *maximal* se não existe barreira $B' \neq B$ tal que $B \subset B'$. Se o grafo possui uma barreira, em muitos casos é indiferente tomarmos uma barreira maximal, e esta técnica tem se mostrado muito eficiente na simplificação de demonstrações. Veja por exemplo a demonstração do Teorema de Tutte em [13]. Ao longo deste trabalho veremos mais exemplos. Isto acontece porque barreiras maximais possuem propriedades interessantes, que as barreiras em geral não possuem. Falaremos sobre duas delas a seguir.

Proposição 2.5 *Se B é uma barreira maximal em um grafo G então $G - B$ não possui componente par.*

Dem. Veja [13, pág. 13]. □

Um grafo H é *crítico* se, para todo vértice $v \in V(H)$, $H - \{v\}$ possui emparelhamento perfeito. A seguir apresentamos uma propriedade que relaciona barreiras maximais e grafos críticos.

Proposição 2.6 *Se B é uma barreira maximal em um grafo G então toda componente de $G - B$ é crítica. Além disso, nenhuma componente não trivial é bipartida.*

Dem. Veja [13, pág. 18]. □

Suponha agora que G é um grafo que possui emparelhamento perfeito. Dizemos que uma aresta de G é *admissível* se ela pertence a algum emparelhamento perfeito. Para grafos que possuem emparelhamento perfeito uma questão que surge naturalmente é a seguinte: quais arestas são admissíveis? o Lema a seguir, que também decorre do Teorema de Tutte, e o próximo Corolário, respondem a esta questão e, como veremos nos próximos capítulos, se mostram muito importantes no desenvolvimento desta teoria.

Lema 2.7 *Seja G um grafo que possui emparelhamento perfeito, u e v dois vértices de G. O grafo $G - \{u, v\}$ não tem emparelhamento perfeito se, e somente se, existe uma barreira que contém u e v.*

Dem. Aplicação direta do Teorema de Tutte. □

Corolário 2.8 *Se G é um grafo que possui emparelhamento perfeito então uma aresta é admissível se, e somente se, nenhuma barreira contém seus dois extremos.* □

2.4 Grafos matching covered

Nesta seção daremos apenas definições e conceitos básicos. Apresentaremos também uma relação que permite estabelecer uma partição para o conjunto de vértices de um grafo matching covered. As demais propriedades sobre grafos matching covered serão apresentadas ao longo do trabalho.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é *matching covered* se é conexo e todas as suas arestas são admissíveis. Neste trabalho consideraremos apenas grafos matching covered que são simples, isto é, sem arestas múltiplas e sem laços.

Uma conseqüência imediata da definição é que um grafo matching covered não possui vértice de corte. Portanto, todo grafo matching covered com mais de dois vértices é 2-conexo.

Como um grafo matching covered G possui emparelhamento perfeito, uma barreira em G é um subconjunto B de $V(G)$ tal que $def(B) = 0$, ou seja, $|\mathcal{I}(G - B)| = |B|$. O conjunto vazio e o conjunto formado por um vértice qualquer de G são exemplos de barreiras. Estas são chamadas de barreiras *triviais*. Em um grafo bipartido matching covered cada bipartição é uma barreira.

Um exemplo importante de grafos matching covered é uma subclasse dos grafos regulares chamada de r-grafos. Grafos regulares, em particular grafos cúbicos, desempenham um papel importante na teoria dos grafos. Por exemplo, como mencionamos no capítulo anterior, o Teorema das quatro cores é equivalente ao problema da 3-coloração de grafos cúbicos planares sem aresta de corte.

Mais formalmente, um grafo r-regular tal que $|\nabla(S)| \geq r$, para todo subconjunto ímpar S de $V(G)$, é chamado de *r-grafo*.

Proposição 2.9 *Todo r-grafo é matching covered.*

Dem. Veja [13, pag. 15]. □

As seguintes propriedades de grafos matching covered podem ser deduzidas diretamente das propriedades e resultados da seção anterior.

Propriedade 2.10 *Seja G um grafo conexo que possui emparelhamento perfeito. Então G é matching covered se, e somente se, cada barreira é um conjunto independente.* □

Propriedade 2.11 *Se B é uma barreira em um grafo matching covered G então $G - B$ não possui componente par. Além disso, se B é maximal então cada componente de $G - B$ é crítica.* □

O Teorema a seguir é uma caracterização para grafos bipartidos matching covered.

Teorema 2.12 *Seja G um grafo bipartido com bipartição (U, W). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é matching covered;*

(ii) *$|U| = |W|$ e para todo subconjunto próprio não vazio X de U, $|adj(X)| \geq |X| + 1$;*

(iii) *$G = K_2$ ou $|V(G)| \geq 4$ e para quaisquer dois vértices $u \in U$ e $w \in W$, $G - u - w$ tem emparelhamento perfeito;*

Dem. Veja [11, pag. 122]. □

Apresentaremos agora uma relação que nos permite estabelecer uma partição do conjunto de vértices de um grafo matching covered. Sejam x e y dois vértices de um grafo matching covered G. O Lema 2.7 nos sugere definir a seguinte relação binária sobre $V(G)$: $x \sim y$ se $G - \{x, y\}$ não tem emparelhamento perfeito. Como conseqüência desta definição temos os seguintes resultados.

Lema 2.13 *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Dem. Veja [13, pag. 23]. □

Teorema 2.14 *As classes de equivalência de $\sim$ são precisamente as barreiras maximais de G.*

Dem. Seja C uma classe de equivalência da relação $\sim$ e seja v um de seus vértices. O conjunto $\{v\}$ é uma barreira de G. Seja B uma barreira maximal de G que contém v. Vamos mostrar que $B = C$.

Quaisquer dois vértices de B são claramente equivalentes. Portanto, $B \subseteq C$. Seja K uma componente conexa de $G - B$ e w um de seus vértices. Pela maximalidade de B, a componente K é crítica. Portanto, $K - w$ tem emparelhamento perfeito.

Considere o grafo bipartido H obtido pela contração de cada componente de $G - B$ a um único vértice. Vamos denotar por k o vértice de H que é resultante da contração da componente K.

Claramente, H é matching covered pois, todo emparelhamento perfeito de G quando restrito a H também é perfeito neste grafo. Pelo Teorema 2.12, $H - \{v, k\}$ tem emparelhamento perfeito.

Como as componentes de $G - B$ são críticas, este emparelhamento pode ser estendido facilmente a um emparelhamento perfeito de $G - \{v, w\}$. Portanto, $v \not\sim w$. Como esta conclusão vale para todo $v \in B$ e para todo $w \in V(G) - B$, podemos concluir que $B = C$. □

Portanto, as barreiras maximais de um grafo matching covered G constituem uma partição de $V(G)$, a qual chamaremos de *partição canônica.* As propriedades a seguir nos mostram o que acontece com a barreiras maximais quando inserimos arestas em um grafo matching covered e quando subdividimos uma aresta.

Propriedade 2.15 *Seja G um grafo matching covered e S um conjunto de arestas que não pertencem a $E(G)$ tal que o grafo $G + S$ é matching covered. Então as barreiras maximais de $G + S$ são um refinamento das barreiras maximais de G.*

Dem. Considere uma barreira maximal B em $G + S$. Então $|\mathcal{I}((G + S) - B)| = |B|$. As arestas de S (bem como todas as de G) ou ligam B a uma componente ímpar ou possuem seus dois extremos em um mesma componente. Logo, $|\mathcal{I}(G - B)| \geq |B|$. Mas G tem emparelhamento perfeito pois, é matching covered. Portanto, $|\mathcal{I}(G - B)| = |B|$. Ou seja, B é barreira em G. □

Propriedade 2.16 *Sejam G um grafo matching covered, $e := (x, y)$ uma aresta de G e G' o grafo obtido de G subdividindo e pela inserção de dois novos vértices u e v de tal forma que o caminho obtido de e é $xuvy$. Então as barreiras maximais de G' são as mesmas de G exceto que v se une à barreira maximal que contém x e u se une à que contém y.* □

Finalizaremos este capítulo apresentando dois conceitos que, como veremos no próximo capítulos, estão intimamente relacionados com a teoria dos grafos matching covered.

Um grafo G é chamado *bicrítico* se, para quaisquer dois vértices u e v de $V(G)$, o grafo $G - \{u, v\}$ possui um emparelhamento perfeito. Claramente, grafos bicríticos são matching covered. Não é difícil de ver que um grafo com emparelhamento perfeito é bicrítico se, e somente se, suas barreiras são todas unitárias.

Um grafo bicrítico 3-conexo é chamado de *brick*. Como exemplos de bricks temos o grafo completo K_4, o prisma triangular $\overline{C_6}$, e o grafo de Petersen. Veremos mais tarde que bricks, juntamente com uma classe de grafos bipartidos chamada de braces, constituem blocos básicos a partir dos quais todos os grafos matching covered podem ser construídos.

Capítulo 3

Cortes Justos

3.1 Introdução

Neste Capítulo introduziremos o conceito de cortes justos e apresentaremos suas mais importantes propriedades. O conceito de cortes justos é um dos mais importantes no estudo de grafos matching covered. Veremos isto ao longo de todo este trabalho.

Na seção 3.2, apresentaremos uma caracterização de grafos matching covered que não possuem corte justo não trivial, e na seção 3.3, apresentaremos uma decomposição de grafos matching covered em cortes justos.

Na seção 3.5, apresentaremos alguns resultados importantes sobre o número de bricks de uma decomposição em cortes justo de um grafo matching covered. Estes resultados, juntamente com os da seção 3.6, serão utilizados nos Capítulos posteriores e com mais freqüência no Capítulo 7 para demonstrarmos o Teorema de Lovász-Vempala.

3.2 Cortes justos em grafos matching covered

Seja G um grafo e seja $S \subseteq V(G)$. Lembre-se que $\nabla(S)$ denota o conjunto de arestas que possui exatamente um extremo em S, e chamamos este conjunto de *corte determinado por* S. Os conjuntos S e $\overline{S}$ são as *margens* de $\nabla(S)$. Note que S e $\overline{S}$ determinam o mesmo corte. Um corte é *ímpar* se ambas

as margens são ímpares. A seguinte propriedade é imediata, porém muito importante.

Propriedade 3.1 *Se M é um emparelhamento perfeito em um grafo G então*

$$|\nabla(S) \cap M| \equiv |S| \pmod 2$$

para todo $S \subseteq V(G)$. □

Em particular, todo emparelhamento perfeito contém pelo menos uma aresta em cada corte ímpar.

Seja G um grafo matching covered. Um corte em G é *justo* se cada emparelhamento perfeito de G contém exatamente uma aresta do corte. Pela propriedade 3.1, todo corte justo é ímpar. Por exemplo, se v é um vértice qualquer de G então o corte $\nabla(v)$ é justo; tais cortes serão chamados de cortes justos *triviais*. Uma observação importante sobre cortes justos é a seguinte:

Proposição 3.2 *Se G é um grafo matching covered e $C := \nabla(S)$ é um corte justo em G então $G[S]$ é conexo.*

Dem. Trivial. □

Apresentaremos agora dois tipos de cortes justos não triviais. Seja B uma barreira não trivial em um grafo matching covered G, e suponha que H é uma componente não trivial de $G - B$ (Figura 3.1(a)). Por simples argumentos de contagem podemos concluir que $\nabla(V(H))$ é um corte justo. Tais cortes são chamados de *cortes provenientes de barreira*.

Suponha agora que $\{u, v\} \subseteq V(G)$ seja tal que $G - \{u, v\}$ é desconexo e que cada componente de $G - \{u, v\}$ seja par. Um par de vértices deste tipo é chamado de *2-separação*. Seja H uma componente de $G - \{u, v\}$. Então, usando novamente argumentos de contagem, podemos concluir que o corte $\nabla(V(H) \cup \{u\})$ é justo (Figura 3.1(b)). Um corte deste tipo é chamado de *corte proveniente de uma 2-separação*.

Um grafo matching covered pode ainda possuir cortes justos que não sejam nem de barreira nem provenientes de uma 2-separação. Veja o exemplo da Figura 3.1(c).

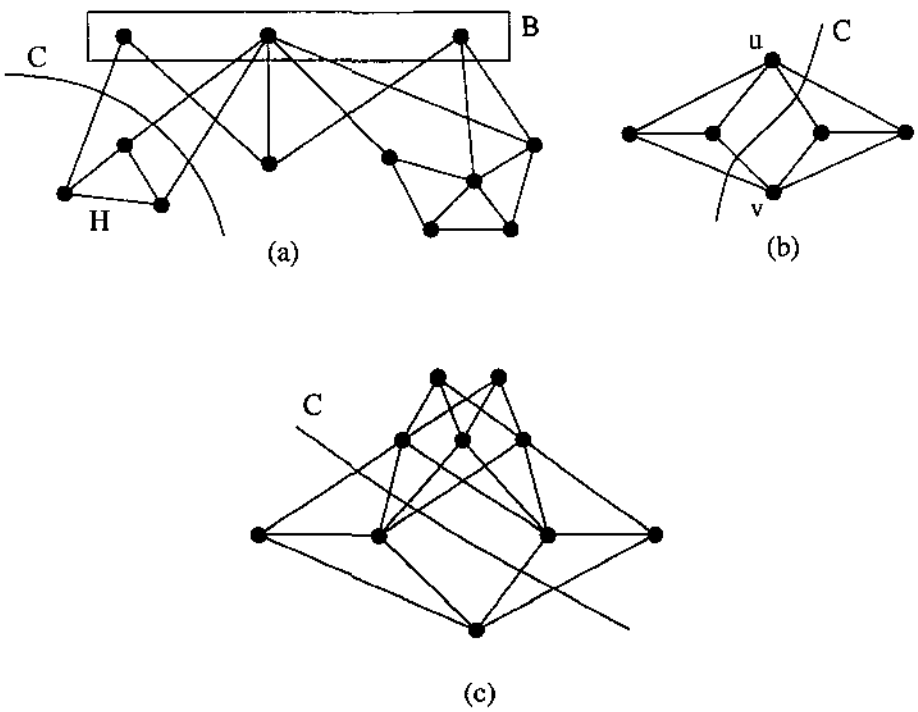


Figura 3.1: Exemplo de corte justo (a) proveniente de barreira; (b) proveniente de uma 2-separação e (c) que não é proveniente de barreira e nem de 2-separação.

Uma questão que surge naturalmente neste instante é a seguinte: Quais grafos matching covered são livres de cortes justos não triviais? Vamos responder a esta questão considerando inicialmente grafos bipartidos.

Um grafo bipartido matching covered com bipartição (U, W) é chamado de *brace* se, para todo subconjunto X de U (ou de W), $0 < |X| < |U| - 1$, tem-se $|adj(X)| \geq |X| + 2$.

Proposição 3.3 *Um grafo bipartido matching covered é livre de cortes justos não triviais se, e somente se, é um brace.*

Dem. Veja [13, pág. 27]. □

Para um grafo matching covered não bipartido, pelo que vimos até agora podemos concluir que uma condição necessária para ser livre de cortes justos não triviais é que o grafo não possua barreiras não triviais. Isto significa que deve ser bicrítico. Vimos também que sendo bicrítico mas não 3-conexo, também possui cortes justos não triviais provenientes de 2-separações. Podemos concluir então que uma condição necessária para que um grafo matching covered não bipartido seja livre de cortes justos não triviais é que ele deve ser bicrítico e 3-conexo, ou seja, um brick. Será esta condição suficiente? A resposta é sim.

Teorema 3.4 *Um grafo não bipartido matching covered é livre de cortes justos não triviais se, e somente se, é um brick.*

Dem. Veja [13, pág. 37]. □

A única prova que conhecemos para este fato é de autoria de Edmonds *et alii* [6], e usa dualidade de programação linear. Seria muito útil obter uma prova que usa somente argumentos combinatoriais.

Portanto, tudo que fizemos até agora é suficiente para caracterizarmos grafos matching covered que são livres de cortes justos não triviais.

Teorema 3.5 *Um grafo matching covered é livre de cortes justos não triviais se, e somente se, é um brick ou um brace.*

Dem. Veja [10], [13, pág. 28]. □

3.3 Decomposição em cortes justos

Seja G um grafo matching covered e $C := \nabla(S)$ um corte em G. O grafo obtido de G pela contração de S a um único vértice é chamado de uma *C-contração*. A seguinte proposição, apesar de simples, é fundamental para os nossos propósitos.

Proposição 3.6 *Se G é matching covered e C é um corte justo em G então ambas as C-contrações são matching covered. Ademais, o conjunto dos cortes justos da C-contração coincide com o conjunto de cortes da C-contração que são justos em G.*

Dem. Trivial. □

Esta proposição nos sugere a seguinte decomposição: Sejam G um grafo matching covered e $C := \nabla(S)$ um corte justo não trivial em G. Considere as duas C-contrações G_1 e G_2. Pela proposição 3.6, G_1 e G_2 são matching covered. Se G_1 ou G_2 por sua vez possuírem corte justo não trivial, podemos tomar novamente as contrações deste corte. Portanto, dado um grafo matching covered, podemos aplicar repetidamente contrações em ambas as margens de um corte justo não trivial e obter grafos matching covered com número de vértices cada vez menor. Pelo Teorema 3.5, o resultado final será uma lista de bricks e braces. Este procedimento recebe o nome de *decomposição em cortes justos*. Veja um exemplo desta decomposição na Figura 3.2.

É importante notar que, em geral, não existe uma única maneira de aplicar este precedimento. Por exemplo, o grafo pode ter mais de um elemento gerador de cortes justos não triviais (entre barreiras e 2-separações). O interessante é que, apesar da possibilidade de podermos fazer escolhas arbitrárias, a lista final de bricks e braces obtidos é essencialmente a mesma. Este Teorema, de autoria de L. Lovász, é um dos mais importantes da teoria de grafos matching covered.

Teorema 3.7 *Quaisquer duas aplicações do procedimento de decomposição em corte justos de um grafo matching covered produzem, a menos de multiplicidade de arestas, a mesma lista de bricks e braces. (Em particular, as duas listas têm o mesmo número de elementos).*

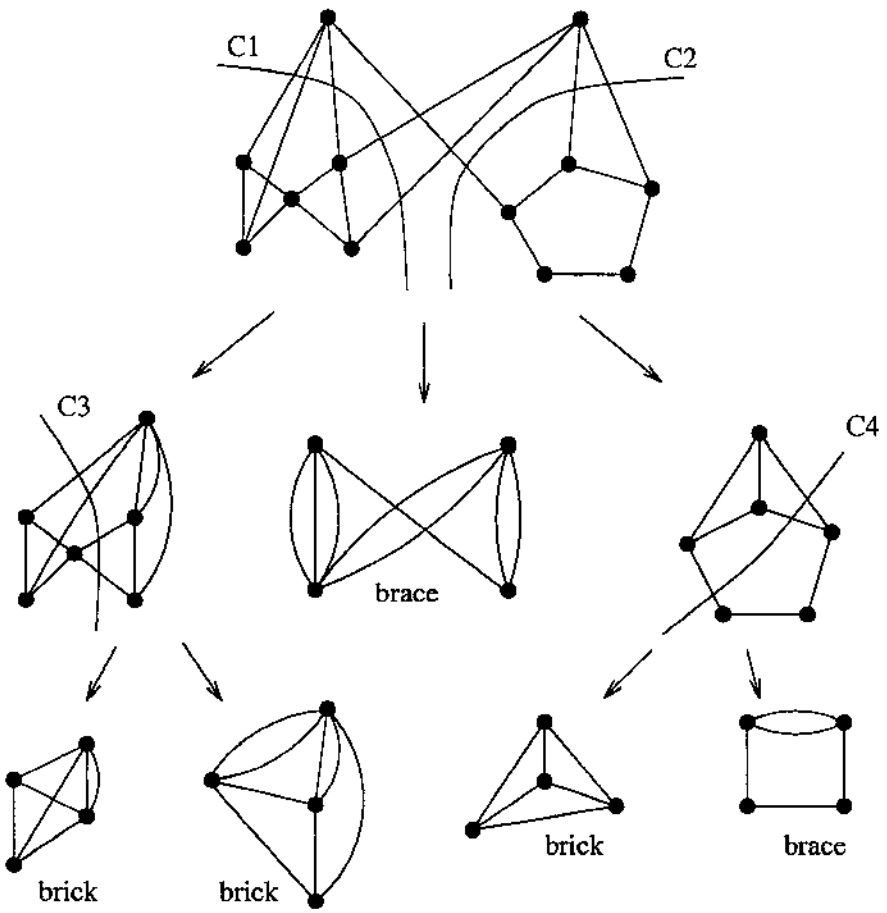


Figura 3.2: Decomposição em cortes justos.

Dem. Veja [10], [13, pág. 31]. □

Portanto, o número de bricks de uma decomposição em cortes justos de um grafo matching covered G é bem definido. Vamos denotar este número por $b(G)$.

Uma observação importante é que apesar de estarmos trabalhando com grafos simples, uma contração de um conjunto de vértices, feita durante uma decomposição em cortes justos, pode gerar grafos com arestas múltiplas. Assim, para evitar confusão e simplificar a escrita, quando dizemos que um grafo H é um brick de um grafo G, queremos dizer que a decomposição em corte justos de G produz H possivelmente acrescido de arestas paralelas.

Uma ferramenta importante para provar o Teorema 3.7, e que também será utilizada nos Capítulos posteriores, é a técnica amplamente conhecida como "descruzamento de cortes". Dois cortes $\nabla(S)$ e $\nabla(T)$ se *cruzam* se cada um dos conjuntos $S \cap T$, $S \cap \overline{T}$, $\overline{S} \cap T$ e $\overline{S} \cap \overline{T}$ é não vazio.

Uma coleção de cortes que não se cruzam dois a dois é chamada de *laminar*. Observe que dada uma decomposição em cortes justos, a coleção de cortes justos a ela associada é laminar. Se C_1 e C_2 são dois cortes justos que se cruzam então podemos escolher uma margem S de C_1 e uma margem T de C_2 tais que $|S \cap T|$ é ímpar. O Lema a seguir é trivial a partir da definição de cortes justos.

Lema 3.8 *Sejam G um grafo matching covered, $\nabla(S)$ e $\nabla(T)$ dois cortes justos de G tais que $|S \cap T|$ é ímpar. Então $\nabla(S \cap T)$ e $\nabla(\overline{S} \cap \overline{T})$ também são justos. Além disso, nenhuma aresta liga $S \cap \overline{T}$ a $\overline{S} \cap T$.* □

Terminaremos esta seção apresentando algumas propriedades de cortes justos que são muito simples e que serão utilizadas posteriormente.

Lema 3.9 *Seja G um grafo e C um corte ímpar tal que as duas C-contrações em G são matching covered. Então G é matching covered.*

Dem. Imediato da definição de grafo matching covered. □

Lema 3.10 *Seja G um grafo matching covered e C um corte ímpar tal que as duas C-contrações são bicríticas. Então G é bicrítico.*

Dem. Imediato da definição de grafo bicrítico. □

Lema 3.11 *Seja G um grafo bicrítico e C um corte justo associado à uma 2-separação de G. Então as duas C-contrações são bicríticas.*

Dem. Veja [11, pag. 158]. □

Lema 3.12 *Sejam G um grafo matching covered, B uma barreira não trivial maximal em G e H uma componente de $G - B$. Seja G' o grafo obtido de G contraindo $V(G) - V(H)$ a um único vértice u. Então as barreiras maximais de G' são $\{u\}$ e os conjuntos da forma $\{T \cap V(H) : T$ é barreira maximal em $G\}$.*

Dem. Veja [11, pág. 153]. □

Um subgrafo H de G é *nice* (relativo a G) se $G - V(H)$ possui emparelhamento perfeito.

Lema 3.13 *Seja G um grafo matching covered, H um subgrafo nice matching covered de G, e C um corte justo em G. Se $C \cap E(H) \neq \emptyset$ então $C \cap E(H)$ é um corte justo em H.*

Dem. Como H é nice, $G - V(H)$ possui um emparelhamento perfeito M'. Portanto, para todo emparelhamento perfeito M de H, $M \cup M'$ é um emparelhamento perfeito de G. Dado que C é justo em G, concluímos que M tem no máximo uma aresta em $C \cap E(H)$. Observe que esta conclusão vale para todo emparelhamento perfeito M de H.

Por hipótese, $C \cap E(H)$ contém uma aresta e. Tomando um emparelhamento perfeito M_e de H que contém e, podemos concluir, pelo raciocínio do parágrafo anterior, que esta é a única aresta de M_e em $C \cap E(H)$. Conseqüentemente, $C \cap E(H)$ é um corte ímpar em H. Novamente, usando o mesmo raciocínio do parágrafo anterior, concluímos que $C \cap E(H)$ é justo.□

3.4 Remoção de arestas em grafos bipartidos matching covered

Nesta seção apresentaremos dois casos em que podemos remover arestas de um grafo bipartido matching covered e o grafo resultante ainda permanece matching covered.

Lema 3.14 *Seja H um brace com pelo menos seis vértices. Então $H - e$ é matching covered para toda aresta $e \in E(H)$.*

Dem. Seja $H := (U, W)$ um brace com pelo menos seis vértices, ou seja, $|U| = |W| \geq 3$. Por definição de brace temos que para todo subconjunto X de U (ou de W), $0 < |X| < |U| - 1$, tem-se $|adj(X)| \geq |X| + 2$.

Seja $e \in E(H)$. Então $|adj_{(H-e)}(X)| \geq |X| + 1$, para todo subconjunto X de U (ou de W), $0 < |X| < |U| - 1$. Suponha agora que existe um subconjunto X de U (ou de W), $|X| = |U| - 1$, tal que $|adj_{(H-e)}(X)| \leq |X|$. Como $H - e$ tem emparelhamento perfeito, devemos ter, na verdade, $|adj_{(H-e)}(X)| = |X|$. Então existe $w \in W$ tal que $|adj_{(H-e)}(w)| = 1$ Conseqüentemente, $|adj_H(w)| \leq 2$, o que é uma contradição à definição de brace.

Portanto, $|adj_{(H-e)}(X)| \geq |X| + 1$, para todo subconjunto próprio não vazio X de U. Pelo Teorema 2.12, $H - e$ é matching covered. □

Seja G um brick e e uma aresta de G tal que $G - e$ é matching covered. Seja B uma barreira não trivial em $G - e$. Vamos considerar o grafo bipartido H obtido de $G - e$ contraindo cada componente de $G - e - B$ a um único vértice.

Vamos denotar por Y os vértices de H que são resultantes da contração de componentes não triviais de $G - e - B$. Uma das bipartições de H é a barreira B, e a outra vamos denotar por A.

Suponha que H possui um corte justo $D := \nabla(S)$ que não separa os vértices de Y, ou seja, os vértices de Y pertencem todos à uma mesma margem de D. Fixe a notação para que tenhamos os vértices de Y na margem S. Observe que no caso em que o conjunto Y possui um único elemento, o corte D pode até ser trivial.

Seja H' o grafo obtido de H contraindo a margem S a um único vértice s. Como D é justo, H' é matching covered. Observe que os vértices de H', exceto s são todos vértices originais de G.

Lema 3.15 *$H' - \mathrm{f}$ é matching covered para toda aresta f de H' que incide em s.*

Dem. Seja f uma aresta de H' que incide em s. Se f é paralela em H' então não há nada a fazer. Suponha que f não é paralela em H'. Vamos denotar a bipartição de H' por B' e A', onde B' contém os vértices de B e A' contém

os de A. Então, $s \in A'$, caso contrário, A' seria uma barreira não trivial em G.

Se $H' - f$ não é matching covered então pelo Teorema 2.12, existe um subconjunto $A_1 \subseteq A'$ tal que $|adj_{H'-f}(A_1)| \leq |A_1|$. Claramente, $H' - f$ tem emparelhamento perfeito. Pelo Teorema de Hall, $|adj_{H'-f}(A_1)| \geq |A_1|$. Portanto, $|adj_{H'-f}(A_1)| = |A_1|$.

Então A' e B' podem ser particionados nos conjuntos A_1 e $A_2 := A' - A_1$, $B_1 := adj(A_1)$ e $B_2 := B' - B_1$, respectivamente, de tal forma que $|A_1| = |B_1|$, $|A_2| = |B_2|$. Desta forma, f é a única aresta de H' com extremos em A_1 e B_2. Então $s \in A_1$.

Seja b o outro extremo de f, ou seja, $b \in B_2$. Como G é brick, b tem pelo menos três vizinhos em G. Portanto, b tem pelo menos dois vizinhos em A_2. Então A_2 é uma barreira não trivial em G. Isto é uma contradição, pois G é brick. Portanto, $H' - f$ é matching covered. □

3.5 Propriedades da função $b(G)$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre o número de bricks de uma decomposição em cortes justo de um grafo matching covered. Estes resultados serão utilizados no Capítulo 7, para demonstrarmos o Teorema de Lovász-Vempala.

Teorema 3.16 [Subaditividade] *Sejam G um grafo matching covered e C um corte ímpar em G tal que as duas C-contrações, G_1 e G_2, são matching covered. Então $b(G) \leq b(G_1) + b(G_2)$, com igualdade se, e somente se, C é justo em G.*

Dem. Se C é justo em G então claramente, $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$. Suponha agora que C não é justo em G e vamos mostrar, por indução em $|V(G)|$, que $b(G) < b(G_1) + b(G_2)$.

Como C não é justo, existe um emparelhamento perfeito M_0 em G tal que $|M_0 \cap C| > 1$. Se um de G_1 e G_2 é bipartido então o corte C é justo (proveniente de barreira) em G, o que contradiz a hipótese. Podemos supor então que G_1 e G_2 são ambos não bipartidos. Logo, $b(G_1) \geq 1$ e $b(G_2) \geq 1$.

Se G não possui corte justo não trivial então G é um brick, ou seja, $b(G) = 1$ e, neste caso, o Teorema é provado facilmente. Suponha então que G possua um corte justo não trivial D.

Vamos supor que $C := \nabla(X)$ e que G_1 é obtido de G pela contração de $\overline{X}$ a um único vértice $\overline{x}$. Analogamente, G_2 é obtido de G pela contração de X a um único vértice x.

Caso 1 *C e D não se cruzam.*

Vamos supor, sem perda de generalidade, que D pertence a G_1. Então D é um corte justo não trivial em G_1. Sejam G_{11} e G_{12} as duas D-contrações em G_1. Então G_{11} e G_{12} são matching covered. Além disso, $b(G_1) = b(G_{11}) + b(G_{12})$.

Fixe a notação de tal forma que $\overline{x}$ pertença a G_{12}. Observe que, como $\overline{x}$ pertence a G_{12}, o grafo G_{11} também é uma das D-contrações em G. Vamos denotar a outra D-contração em G por H. Então C é um corte ímpar não justo em H. Observe que uma das C-contrações em H é G_2 e a outra é G_{12}. Assim as duas C-contrações em H são matching covered.

Por hipótese de indução, $b(H) < b(G_{12}) + b(G_2)$. Mas $b(G) = b(G_{11}) + b(H)$, pois D é justo em G. Portanto, $b(G) < b(G_{11}) + b(G_{12}) + b(G_2) = b(G_1) + b(G_2)$.

Caso 2 *C e D se cruzam.*

Vamos denotar as margens de D por Y e $\overline{Y}$. Fixe a notação para que tenhamos $|X \cap Y|$ ímpar. Para simplificar a notação vamos fazer $I := \nabla(X \cap Y)$ e $U := \nabla(\overline{X} \cap \overline{Y})$ (Figura 3.3).

Como G_1 e G_2 são matching covered, toda aresta de G pertence a um emparelhamento perfeito que intercepta C em uma única aresta.

A partir deste fato, podemos concluir que não existe aresta ligando $\overline{X} \cap Y$ a $X \cap \overline{Y}$. Pois suponha que existe uma aresta e ligando estes dois conjuntos, e seja M um emparelhamento perfeito em G contendo e e que intercepta C em uma única aresta. Como I e U são ímpares, M deve interceptar cada um de I e U em pelo menos uma aresta. Por contagem, devemos ter $|M \cap D| \geq 3$, o que é uma contradição pois D é justo em G.

Portanto, não existe aresta ligando $\overline{X} \cap Y$ a $X \cap \overline{Y}$. Assim, para todo emparelhamento perfeito M de G,

$$|M \cap I| + |M \cap U| = |M \cap C| + |M \cap D|. \tag{3.1}$$

Mas como D é justo, temos que

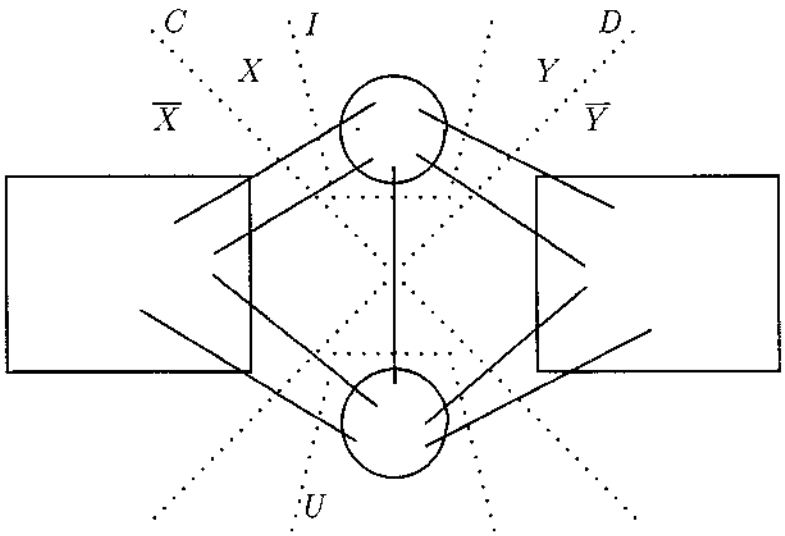


Figura 3.3: O caso em que C e D se cruzam.

$$|M \cap I| + |M \cap U| = |M \cap C| + 1. \tag{3.2}$$

Em particular, I é justo em G_1 e U é justo em G_2. Tomando o emparelhamento M_0 temos, pela equação 3.2, que $|M_0 \cap I|$ e $|M_0 \cap U|$ não são ambos unitários. Digamos que $|M_0 \cap I| > 1$. Então I é um corte ímpar não trivial em G.

Sejam G_{11} e G_{12} as duas I-contrações em G_1. Como G_1 é matching covered e I é justo em G_1, temos que G_{11} e G_{12} são ambos matching covered. Como I é justo em G_1, $b(G_1) = b(G_{11}) + b(G_{12})$.

Da mesma forma, sejam G_{21} e G_{22} as duas U-contrações em G_2. Como G_2 é matching covered e U é justo em G_2, temos que G_{21} e G_{22} são ambos matching covered. Como U é justo em G_2, $b(G_2) = b(G_{21}) + b(G_{22})$.

Sejam H_1 e H_2 as duas D-contrações em G. Vamos supor que H_1 é obtido de G contraindo-se a margem $\overline{Y}$ de D, e H_2 é obtido contraindo-se a margem Y de D. Para $i = 1, 2$, seja $M_i := M_0 \cap E(H_i)$. Como D é justo em G, M_i é emparelhamento perfeito em H_i.

O corte I em H_1 é tal que as duas I-contrações são matching covered, pois uma delas é, a menos de multiplicidade de arestas, G_{11} ou G_{12} e a outra é G_{21} ou G_{22}. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as I-contrações em H_1 são G_{11} e G_{22}. O emparelhamento M_1 é perfeito em H_1 e $|M_1 \cap I| > 1$.

Por hipótese de indução, $b(H_1) < b(G_{11}) + b(G_{22})$.

Da mesma forma, o corte U em H_2 (que pode até ser trivial) é tal que as duas U-contrações são matching covered, pois uma delas é G_{12} e a outra é G_{21}.

Se U é justo em H_2 então $b(H_2) = b(G_{12}) + b(G_{21})$. Senão, podemos aplicar hipótese de indução e concluir que $b(H_2) < b(G_{12}) + b(G_{21})$. Em qualquer caso, temos que $b(H_2) \leq b(G_{12}) + b(G_{21})$.

Mas $b(G) = b(H_1) + b(H_2)$, pois D é justo em G. Portanto, $b(G) < b(G_{11}) + b(G_{22}) + b(G_{12}) + b(G_{21}) = b(G_1) + b(G_2)$. □

Lema 3.17 *Seja G um grafo matching covered tal que $b(G) = 1$. Se G é bicrítico então G é brick.*

Dem. Por contradição, suponha que G não é brick. Por hipótese, G é bicrítico. Logo, G possui uma 2-separação. Considere um corte justo C em G associado a esta 2-separação. Pelo Lema 3.11, as duas C-contrações em G são bicríticas, e portanto, não bipartidas. Conseqüentemente, cada uma delas fornece pelo menos um brick para G. Logo, $b(G) \geq 2$, o que é uma contradição à hipótese. □

Lema 3.18 *Seja G um grafo bicrítico tal que $b(G) = 2$. Então G contém uma única 2-separação.*

Dem. Como G é bicrítico e $b(G) = 2$, concluímos que G tem uma 2-separação. Seja $\{u, v\}$ uma 2-separação de G. Considere um corte justo C de G associado à 2-separação $\{u, v\}$.

Pelo Lema 3.11, as duas C-contrações em G são bicríticas, e portanto, matching covered e não bipartidas. Como $b(G) = 2$, cada C-contração deve fornecer exatamente um brick. Pelo Lema 3.17, concluímos que cada C-contração em G é brick. Isto significa que $\{u, v\}$ é a única 2-separação de G. □

Portanto, se G é um grafo nas hipóteses do Lema 3.18 então os únicos cortes justos de G são aqueles associados à única 2-separação deste grafo.

Lema 3.19 *Sejam G um brick e C um corte ímpar não trivial em G. Seja G_1 o grafo obtido de G contraindo uma margem de C a um único vértice u. Suponha que G_1 é matching covered, $b(G_1) = 1$ e que B seja uma barreira maximal não trivial em G_1. Então:*

1. *O vértice u pertence a B;*
2. *$G_1 - B$ possui uma única componente não trivial H;*
3. *O grafo G' obtido de G_1 pela contração de $V(G_1) - V(H)$ a um único vértice b é brick.*

Dem. Se $u \notin B$ então B seria uma barreira não trivial em G. Portanto, $u \in B$. Além disso, é imediato que $G_1 - B$ possui pelo menos uma componente não trivial, caso contrário, G_1 seria bipartido.

Seja H umaa componente não trivial de $G_1 - B$. Como B é maximal, concluímos pela Propriedade 2.11 que H é crítica. Portanto, para todo vértice v de $V(H)$, o grafo $G' - \{v, b\}$ tem emparelhamento perfeito. Isto significa que b não pertence a nenhuma barreira não trivial maximal de G'. Conseqüentemente, toda barreira não trivial maximal de G' também é barreira não trivial em G. Mas G não possui barreira não trivial. Portanto, G' não contém barreira não trivial. Ou seja, G' é bicrítico. Além disso, G' tem mais de dois vértices e, portanto, $b(G') \geq 1$.

Por outro lado, $\nabla(V(H))$ é justo em G_1. Além disso, $b(G_1) = 1$ e G' é uma $\nabla(H)$-contração de G_1. Logo, $b(G') = 1$. Como esta conclusão vale para toda componente não trivial H de $G_1 - B$, concluímos que H é única.

Finalmente, G' é bicrítico e $b(G') = 1$. Pelo Lema 3.17, G' é um brick. □

Lema 3.20 *Seja G um grafo matching covered e, e uma aresta tal que $G + e$ também é matching covered. Então $b(G + e) \leq b(G)$.*

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Se G é bipartido então, como $G + e$ é matching covered, $G + e$ deve ser bipartido e, neste caso, o Lema é claramente verdadeiro. Vamos supor então que G é não bipartido, ou seja, $b(G) \geq 1$. Então, $b(G + e) \geq 1$.

Se $G + e$ não possui corte justo não trivial então $G + e$ é brick e a desigualdade $b(G + e) \leq b(G)$ também é satisfeita. Podemos supor então que $G + e$ possui um corte justo não trivial $C := \nabla(X)$.

Seja $C' := \nabla_G(X)$ o corte correspondente a X em G. Claramente, C' é justo em G pois, todo emparelhamento perfeito de G também é perfeito em $G + e$.

Sejam G_1 e G_2 as duas C'-contrações em G, onde G_1 é obtido pela contração de $\overline{X}$. Da mesma forma, sejam H_1 e H_2 as duas C-contrações em $G + e$, onde H_1 é obtido pela contração de $\overline{X}$.

Observe que se e tem pelo menos um extremo em X então $H_1 = G_1 + e$; por outro lado, se e tem ambos os extremos em $\overline{X}$ então $H_1 = G_1$. Em ambos os casos, $b(H_1) \leq b(G_1)$, sendo que no primeiro caso é utilizada a hipótese de indução. Analogamente, $b(H_2) \leq b(G_2)$.

Portanto, $b(G + e) = b(H_1) + b(H_2) \leq b(G_1) + b(G_2) = b(G)$. □

Corolário 3.21 *Se G é tal que $b(G) = 1$ e a adição de uma aresta e preserva a propriedade matching covered então $b(G + e) = 1$.* □

3.6 Um Teorema de estrutura para grafos bicríticos

Nesta seção apresentando um Teorema que estabelece uma estrutura para certos tipos de grafos bicríticos. Este resultado será muito útil a partir do Capítulo 7.

Uma barreira B em um grafo matching covered G é *especial* se $G - B$ possui um única componente não trivial. Denotaremos por $A(B)$ o conjunto dos vértices isolados de $G - B$.

Teorema 3.22 *Seja G um grafo bicrítico, e uma aresta de G tal que $G - e$ é matching covered. Se toda barreira não trivial maximal de $G - e$ é especial então*

1. *Se B é uma barreira maximal de $G - e$ então em G a aresta e incide em $A(B)$.*

2. *O grafo $G - e$ tem no máximo duas barreiras maximais não triviais.*

3. *Se $G - e$ tem duas barreiras maximais não triviais B_1 e B_2 então B_1 e B_2 são disjuntas, $A(B_1)$ e $A(B_2)$ são disjuntos, a aresta e liga $A(B_1) \setminus B_2$ a $A(B_2) \setminus B_1$, e $B_1 \setminus A(B_2)$ e $B_2 \setminus A(B_1)$ também são barreiras em $G - e$.*

4. *Ainda sob a hipótese de que $G - e$ tem duas barreiras maximais não triviais B_1 e B_2, seja G' o grafo obtido de $G - e$ contraindo $B_1 \cup A(B_1)$ a um único vértice b_1. Então $B' := B_2 \setminus A(B_1)$ é especial e única barreira não trivial maximal em G'. Além disso, $b_1 \notin (B' \cup A(B'))$.*

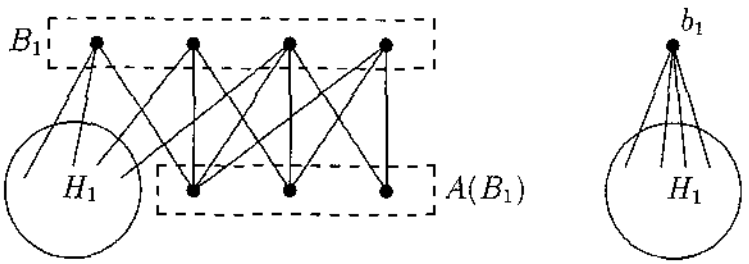


Figura 3.4: Grafos $G - e$ e G'.

Dem. Seja B uma barreira não trivial maximal de $G-e$. Pela maximalidade de B, toda componente não trivial de $G-e-B$ é crítica. Além disso, como G é bicrítico, os extremos de e pertencem a componentes distintas de $G-e-B$. Por hipótese, $G-e-B$ tem uma única componente não trivial. Então um extremo de e pertence a $A(B)$.

Observe que B é uma barreira maximal qualquer de $G-e$. Podemos concluir então que toda barreira não trivial maximal de $G-e$ contém todos os vizinhos, em $G-e$, de um dos extremos de e. Como vimos na seção 2.4, as barreiras maximais particionam $V(G-e)$. Portanto, $G-e$ tem no máximo duas barreiras maximais não triviais.

Suponha que $G-e$ tem duas barreiras maximais não triviais B_1 e B_2. Claramente, B_1 e B_2 são disjuntas. Além disso, B_1 contém todos os vizinhos, em $G-e$, de qualquer vértice de $A(B_1)$. Como as barreiras maximais particionam $V(G-e)$, concluímos que $A(B_1)$ e $A(B_2)$ são disjuntos.

Como vimos no primeiro parágrafo desta demonstração, e tem um extremo em $A(B)$, para toda barreira maximal B de $G-e$. Como $A(B_1)$ e $A(B_2)$ são disjuntos, concluímos que e liga $A(B_1)$ a $A(B_2)$. Claramente, e não tem extremo em nenhuma barreira maximal não trivial de $G-e$. Portanto, e liga $A(B_1) \setminus B_2$ a $A(B_2) \setminus B_1$.

Seja H_1 a componente não trivial de $G-e-B_1$ e seja G' o grafo obtido de $G-e$ pela contração de $B_1 \cup A(B_1)$ a um único vertice b_1 (Figura 3.4). Pelo Lema 3.12, o grafo G' tem no máximo uma barreira maximal não trivial. Além disso, se $B_2 \cap V(H_1)$ tem pelo menos dois elementos então $B' := B_2 \cap V(H_1)$ é a única barreira não trivial maximal de G'.

Como e tem um extremo em $A(B_2)$, que é disjunto de $A(B_1)$, e como e

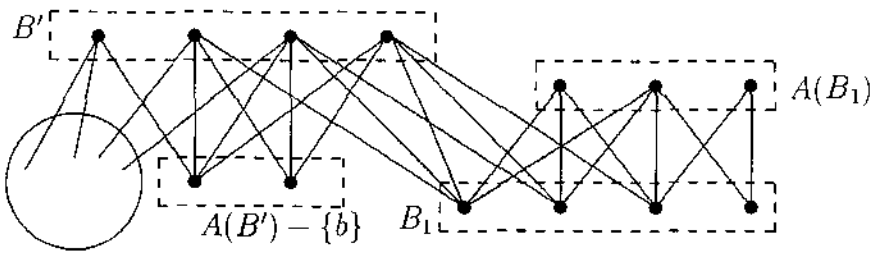


Figura 3.5: Grafo $G - e$.

não tem extremo em B_1, concluímos que e tem um extremo x em H_1. Logo, $|A(B_2) \cap V(H_1)| \geq 1$. Mas os vizinhos de x em $G - e$ estão todos em B_2, que é disjunto de B_1. Então $b_1 \notin adj(A(B_2))$ em G'. Logo, $|B_2 \cap V(H_1)| \geq 2$. Portanto, $B' := B_2 \cap V(H_1)$ é a única barreira não trivial maximal em G'.

Como a componente H_1 de $G - e - B_1$ é crítica, concluímos que $b_1 \notin B'$ em G'. Portanto, B' é barreira em $G - e$. Então $B_2 \setminus A(B_1) = B'$ é barreira em $G - e$. Analogamente, $B_1 \setminus A(B_2)$ também é barreira em $G - e$.

Resta-nos mostrar que B' é especial em G' e que $b_1 \notin A(B')$. Suponha que $G' - B'$ possui duas componentes não triviais, digamos X_1 e X_2. Então X_1 e X_2 são críticas. Se $b_1 \notin V(X_1) \cup V(X_2)$ então X_1 e X_2 são componentes de $G - e - B_2$, o que contradiz a hipótese. Suponha que $b_1 \in X_1$. Então X_2 é componente não trivial de $G - e - B_2$. Por hipótese, X_2 é a única componente não trivial de $G - e - B_2$.

Considere agora o grafo L obtido de $G - e$ contraindo X_2 a um único vértice. Então L é bipartido. Isto significa que a componente X_1 é bipartida. Mas isto contradiz o fato de que X_1 é crítica. Portanto, $G' - B'$ possui uma única componente não trivial.

Vamos agora mostrar que $b_1 \notin A(B')$. Se $b_1 \in A(B')$ então $B_2 \cup A(B_1)$ é uma barreira em $G - e$ (Figura 3.5). Como sabemos, um extremo da aresta e pertence a $A(B_1)$. Logo, $B_2 \cup A(B_1)$ é uma barreira não trivial em G, o que é uma contradição. Portanto, $b_1 \notin A(B')$. □

A partir deste resultado podemos enunciar o seguinte.

Teorema 3.23 *Seja G um grafo bicrítico, e uma aresta de G tal que $G - e$ é matching covered. Se toda barreira não trivial maximal de $G - e$ é especial*

então

1. *Ou o grafo $G - e$ não contém barreiras não triviais e, neste caso, é bicrítico;*

2. *Ou $G - e$ contém uma única barreira maximal não trivial B_1 e, neste caso, o grafo G' obtido de $G - e$ pela contração de $B_1 \cup A(B_1)$ a um único vértice é bicrítico;*

3. *Ou $G - e$ contém duas barreiras maximais B_1 e B_2 e, neste caso, fazendo $B' := B_2 \setminus A(B_1)$, o grafo obtido de $G - e$ pela contração de $B_1 \cup A(B_1)$ a um único vértice e pela contração de $B' \cup A(B')$ a um único vértice é bicrítico. Além disso, em G, a aresta e possui extremos em $A(B_1) \setminus B_2$ e $A(B')$.* □

Note que fazendo $B' := B_2 \setminus A(B_1)$, o item 3 é eqüivalente a dizer que "$G - e$ possui uma barreira maximal B_1 e barreira não trivial B', não necessariamente maximal, tais que $B_1 \cup A(B_1)$ é disjunto de $B' \cup A(B')$ e o grafo obtido de $G - e$ pela contração de $B_1 \cup A(B_1)$ a um único vértice b_1 e pela contração de $B' \cup A(B')$ a um único vértice b' é bicrítico. Além disso, em G, a aresta e possui um extremo em $A(B_1)$ e o outro em $A(B')$. Esta forma será mais conveniente para as aplicações.

Capítulo 4

Decomposição em Orelhas

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos outra decomposição para grafos matching covered chamada de decomposição em orelhas. Esta decomposição é uma propriedade indutiva e muito simples que nos permite descrever a classe dos grafos matching covered. A partir desta propriedade, conseqüências muito importantes serão estabelecidas.

Na Seção 4.2, definiremos uma relação de eqüivalência entre arestas de um grafo matching covered e apresentaremos algumas de suas propriedades. Veremos várias aplicações desta relação ao longo do trabalho. Por exemplo, na Seção 4.3 ela será usada para mostrar que todo grafo matching covered possui uma decomposição em orelhas.

Na seção 4.4 definiremos uma família infinita de grafos matching covered que podem ser construídos indutivamente a partir do K_4 de tal forma que a partir do segundo, cada elemento é obtido através de uma colagem adequada do elemento anterior a um K_4. Nesta mesma seção, mostraremos que todo grafo matching covered possui um subgrafo que, a menos de subdivisão de arestas, é um elemento desta família. Em seguida, mostraremos que todo elemento desta família possui, a menos de subdivisão de arestas, o K_4 ou $\overline{C_6}$ como subgrafo.

Uma conseqüência imediata deste resultado, e que será mostrado na seção 4.5, é que todo brick diferente do K_4 e $\overline{C_6}$ possui uma aresta cuja remoção produz um grafo matching covered. Este é um resultado clássico

nesta teoria.

4.2 Relação de dependência

Dado um grafo matching covered G, definimos a *relação de dependência* $\Rightarrow$ em $E(G)$ dizendo que a aresta a depende da aresta b (e denotaremos por $a \Rightarrow b$) se todo emparelhamento perfeito de G que contém a também contém b. De forma equivalente, $a \Rightarrow b$ se $a = b$ ou a não é admissível em $G - b$. Usaremos também o termo "a implica b" para dizer que $a \Rightarrow b$.

Lema 4.1 *Sejam G um grafo matching covered, e e f duas arestas distintas de G. Então e $\Rightarrow$ f se, e somente se, $G -$ f contém uma barreira B tal que (i) B contém ambos os extremos de e, (ii) a aresta f possui seus extremos em componentes distintas de $G -$ f $- B$.*

Dem. Se $G - f$ contém uma barreira satisfazendo os dois ítens acima então claramente $e \Rightarrow f$.

Suponha agora que $e \Rightarrow f$, ou seja, e não é admissível em $G - f$. Claramente, $G - f$ possui emparelhamento perfeito. Pelo Corolário 2.8, o grafo $G - f$ possui uma barreira B que contém ambos os extremos de e. Como e é admissível em G, a aresta f deve possuir (por contagem) seus extremos em componentes distintas de $G - f - B$. □

A relação de dependência é reflexiva e transitiva. Duas arestas e e f têm *dependência mútua* ($e \Leftrightarrow f$) se todo emparelhamento perfeito que contém uma delas também contém a outra. Esta relação é de equivalência.

Se G é um grafo matching covered então uma classe de equivalência Q da relação $\Leftrightarrow$ é *minimal* se nenhuma aresta de $G - Q$ implica uma aresta de Q. O seguinte resultado segue imediatamente:

Proposição 4.2 *Se G é um grafo matching covered e Q é uma classe minimal então toda aresta de $G - Q$ é admissível em $G - Q$.* □

Uma classe minimal de um grafo matching covered G pode ser obtida da seguinte forma: Considere o grafo orientado L obtido a partir de G onde o conjunto de vértices de L é formado pelas arestas de G e existe uma aresta orientada (e, f) em L se $e \Rightarrow f$ em G. Por exemplo, a Figura 4.1 ilustra

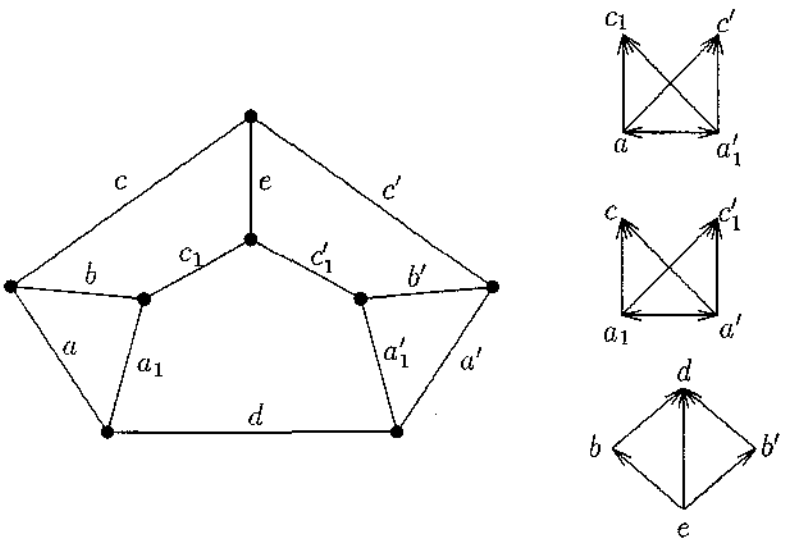


Figura 4.1: Relação de dependência para o grafo R_8.

a relação de dependência para o grafo R_8 e também apresenta o grafo L definido acima. Uma classe minimal de G é formada pelo conjunto de arestas que formam uma fonte em L.

Podemos definir também uma classe minimal *induzida* por uma aresta e como uma classe minimal Q tal que $q \Rightarrow e$ para todo $q \in Q$.

Os resultados a seguir visam estabelecer o número de arestas de uma classe minimal da relação de dependência. Como veremos, estas classes contém, em geral, um número pequeno de arestas. Vamos inicialmente analisar os bricks.

Lema 4.3 *Seja G um brick, $\{e, f\} \subseteq E(G)$ tal que $e \Leftrightarrow f$. Então $G - e - f$ é bipartido. Além disso, a aresta e possui seus dois extremos em uma destas bipartições e a aresta f possui seus dois extremos na outra bipartição.*

Dem. Pelo Lema 4.1, o grafo $G - f$ possui uma barreira B contendo ambos os extremos de e e a aresta f tem seus extremos em componentes distintas de $G - f - B$.

Suponha que exista uma outra aresta e' distinta de e com ambos os extremos em B. Seja M um emparelhamento perfeito em G contendo e'. Por

contagem, $f \in M$ e $e \notin M$, o que contradiz a hipótese. Portanto, e é a única aresta de $G - f$ contendo ambos os extremos em B.

Suponha que $G - e - f$ não é bipartido. Então alguma componente H de $G - f - B$ é não trivial. Como G é brick, pelo Teorema 3.4 o corte ímpar não trivial $\nabla(H)$ não é justo. Logo, existe um emparelhamento perfeito M tal que $|M \cap \nabla(H)| \geq 3$.

Por um argumento simples de contagem podemos concluir que $|M \cap \nabla(H)| = 3$, $f \in M$ e $e \notin M$. Novamente temos uma contradição ao fato de que $e \Leftrightarrow f$. Portanto, $G - e - f$ é bipartido. A outra parte do Lema é conseqüência direta. □

A partir deste Lema podemos mostrar que, para bricks, toda classe possui no máximo dois elementos.

Teorema 4.4 *Seja G um brick e Q uma classe de equivalência de G determinada pela relação $\Leftrightarrow$. Então $|Q| \leq 2$. Ademais, se $|Q| = 2$ então $G - Q$ é bipartido.*

Dem. Sejam e e f duas arestas de Q. Pelo Lema 4.3, $G - e - f$ é bipartido. Além disso, a aresta e possui seus dois extremos em uma destas bipartições e a aresta f possui seus dois extremos na outra bipartição. Isto vale para quaisquer duas arestas de Q.

Suponha que Q tenha três elementos, digamos q_1, q_2 e q_3. Seja B_2 (B_3) a bipartição de $G - q_1 - q_2$ ($G - q_1 - q_3$) que contém os dois extremos de q_2 (q_3). Então $\nabla(B_2) = E(G) - \{q_1, q_2\}$ e $\nabla(B_3) = E(G) - \{q_1, q_3\}$. Logo, $\nabla(B_2 \oplus B_3) = \nabla(B_2) \oplus \nabla(B_3) = \{q_2, q_3\}$, ou seja, $\nabla(B_2 \oplus B_3)$ é um corte em G composto por apenas duas arestas. Mas isto é uma contradição, pois G, sendo brick, é 3-conexo. □

Como bricks são 3-conexos, podemos concluir pelo Teorema 4.4 que:

Corolário 4.5 *Se G é um brick e Q é uma classe minimal então $G - Q$ é matching covered.* □

Veremos a seguir que, usando argumentos parecidos com os acima, podemos mostrar que para uma grande parte dos grafos matching covered, o número de arestas de uma classe minimal também é dois. Um *2-corte* em um grafo é um conjunto formado por duas arestas cuja remoção desconecta o grafo.

Lema 4.6 *Seja G um grafo matching covered e Q uma classe minimal da relação de dependência. Se Q não inclui um 2-corte então $|Q| \leq 2$.*

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Para quaisquer duas arestas e e f de Q, temos que $e \Leftrightarrow f$. Pelo Lema 4.1, o grafo $G-f$ tem uma barreira B contendo ambos os extremos de e, e a aresta f possui seus extremos em componentes distintas de $G - f - B$.

Seja M um emparelhamento perfeito de G. Se $f \notin M$ então nenhuma aresta de $G[B]$ pertence a M e $|M \cap \nabla(V(K))| = 1$ para toda componente K de $G - f - B$. Se $f \in M$ então $e \in M$ e, novamente, nenhuma arestas de $G[B] \setminus \{e\}$ pertence a M e $|M \cap \nabla(V(K))| = 1$ para toda componente K de $G - f - B$. Concluímos então que $\nabla(V(K))$ é justo em G, para toda componente K de $G - f - B$. Além disso, e é a única aresta de $G[B]$.

Assuma que $|Q| \geq 3$. Sejam e_1, e_2 e e_3 arestas de Q.

Proposição 4.6.1 *Pelo menos um de $G-\{e_1, e_2\}$ e $G-\{e_1, e_3\}$ é bipartido.*

Dem. Seja B_2 uma barreira maximal de $G - e_2$ contendo os extremos de e_1. Se cada componente de $G - e_2 - B_2$ é trivial então $G - \{e_1, e_2\}$ é bipartido.

Suponha então que $G - e_2 - B_2$ possua uma componente não trivial K. Seja H o grafo obtido de G contraindo a componente K a um único vértice. Como $\nabla(V(K))$ é justo em G, a classe $Q_H := Q \cap E(H)$ é minimal em H.

Se Q_H inclui um 2-corte em H então Q inclui um 2-corte em G, o que contradiz à hipótese. Logo, Q_H não inclui um 2-corte em H. Por hipótese de indução, $|Q_H| \leq 2$. Mas e_1 e e_2 são arestas de Q_H. Portanto, $Q_H = \{e_1, e_2\}$.

Analogamente, seja L o grafo obtido de G contraindo $V(G) \setminus V(K)$ a um único vértice h. A classe $Q_L := Q \cap E(L)$ é minimal em L e, por hipótese de indução, contém no máximo duas arestas, uma das quais é e_3.

Para qualquer emparelhamento perfeito M_3 de G contendo e_3, a aresta de $M_3 \cap \nabla(V(K))$ implica e_1 em H. Portanto, esta aresta é e_2. Podemos concluir então que $|Q| = 3$ e $Q_L = \{e_2, e_3\}$.

Seja B a barreira de $L - e_3$ contendo os dois extremos de e_2. Não é difícil de ver que $B_3 := B_2 \cup (B \setminus \{h\})$ é uma barreira de $G - e_3$ contendo as dois extremos de e_1. Então toda componente de $G - e_3 - B_3$ é trivial, senão podemos concluir, por hipótese de indução, que $|Q| \leq 2$. Portanto, $G - \{e_1, e_3\}$ é bipartido. □

Aplicando a Proposição 4.6.1 duas vezes, concluímos que existe uma permutação (i,j,k) de $(1,2,3)$ tal que ambos $G - \{e_i, e_j\}$ e $G - \{e_i, e_k\}$ são bipartidos. Sejam B_j e B_k uma das bipartições de $G - \{e_i, e_j\}$ e $G - \{e_i, e_k\}$, respectivamente.

Então $\nabla(B_j) = E(G) - \{e_i, e_j\}$ e $\nabla(B_k) = E(G) - \{e_i, e_k\}$. Logo, $\nabla(B_j \oplus B_k) = \nabla(B_j) \oplus \nabla(B_k) = \{e_j, e_k\}$, ou seja, $\nabla(B_j \oplus B_k)$ é um corte em G composto pelas arestas $\{e_j, e_k\}$. Isto contradiz a hipótese de que Q não inclui um 2-corte. □

4.3 Decomposição em orelhas e grafos matching covered

Seja H um subgrafo de um grafo G. Um caminho ímpar P em $G - E(H)$ é uma *orelha* de H se (i) ambos os extremos de P são vértices de H e (ii) P é internamente disjunto de H.

Uma *decomposição em orelhas* de um grafo matching covered G é uma seqüência

$$K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$$

de subgrafos matching covered, cada um dos quais exceto G_0 é obtido do anterior pelo acréscimo de uma ou duas orelhas disjuntas. No caso da adição ser de apenas uma orelha, dizemos que esta orelha é *simples*; no outro caso, dizemos que a orelha é *dupla*. Durante todo este trabalho usaremos sempre o termo *orelha* para nos referir a uma orelha simples ou dupla. O inteiro r é o *número de orelhas* da decomposição.

Nesta seção vamos mostrar que todo grafo matching covered possui uma decomposição em orelhas. Este Teorema foi demonstrado por Lovász e Plummer [11]. Existem provas mais simples deste Teorema; veja por exemplo a de Little e Rendl [13, pág. 56]. Recentemente, ficamos sabendo de uma outra prova bem simples, de autoria de Z. Szigeti [20].

Apresentaremos aqui duas provas para este resultado que também são muito simples. Uma delas é bem parecida à de Z. Szigeti e a outra usa os resultados da seção anterior e é bem diferente. Decidimos apresentar estas duas demonstrações devido à simplicidade e originalidade de cada uma delas.

Seja G um grafo matching covered diferente de K_2. Se trocarmos uma aresta e de G por um caminho de comprimento ímpar, ou eqüivalentemente, se e é subdividida pela inserção de um número par de vértices então o grafo resultante também é matching covered.

Reciprocamente, se trocarmos em G um caminho de comprimento ímpar, cujos vértices internos têm grau dois, por uma aresta que tem como extremos os mesmos extremos do caminho, então o grafo obtido também é matching covered. Definiremos assim uma *subdivisão ímpar* de um grafo como uma operação em que uma aresta é trocada por um caminho de comprimento ímpar.

Teorema 4.7 *Todo grafo matching covered possui uma decomposição em orelhas.*

Dem. Seja G um grafo matching covered. Vamos obter uma decomposição em orelhas de G. Seja e_0 uma aresta qualquer de G. Como G é matching covered, existe um emparelhamento perfeito M_0 que contém e_0. Faça $G_0 := G[e_0]$. Se $G = K_2$ então o Teorema está provado. Suponha então que $G \neq K_2$. Observe que o subgrafo G_0 é matching covered e nice com relação a G.

Considere agora um subgrafo próprio H que é matching covered e nice com relação a G e seja M um emparelhamento perfeito de G tal que a restrição de M a H é um emparelhamento perfeito em H. Como H é próprio e G é conexo, $E(G) - E(H)$ contém uma aresta e que possui um extremo em H. Seja M_e um emparelhamento perfeito em G contendo e.

O grafo $G[M \cup M_e]$ é formado por uma coleção de circuitos M-alternados. Vamos denotar por D o circuito M-alternado de $G[M \cup M_e]$ que contém a aresta e. Podemos ver claramente que o circuito D contém várias orelhas de H e que $H \cup D$ é um subgrafo matching covered e nice com relação a G. Escolha e e M_e de tal forma que o circuito D contenha um número mínimo de orelhas de H. Vamos mostrar, por indução em $|V(H)|$, que D contém no máximo duas orelhas de H.

Suponha que D contém s orelhas $P_1, P_2, \ldots, P_s$ de H. Se $s \leq 2$ não há nada a provar. Suponha então que $s > 2$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as s orelhas de D são arestas $e_1, e_2, \ldots, e_s$ de G, pois $H + \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ é uma subdivisão ímpar de $H + \{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$, ou seja, se algum destes grafos é matching covered então o outro também é.

Vamos denotar por S o conjunto $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Observe que, pela hipótese que fizemos de que o circuito D deve conter um número mínimo de orelhas

de H, concluímos que todo emparelhamento perfeito em $H+S$ contém todas as arestas de S ou não contém nenhuma delas.

Sejam e e f duas arestas distintas quaisquer de S e considere o grafo $H+S-e$. Pela escolha que fizemos do circuito D temos que f não é admissível em $H+S-e$. Note que um emparelhamento perfeito de H também é perfeito em $H+S-e$. Portanto, $H+S-e$ tem emparelhamento perfeito. Pelo Lema 2.8, existe uma barreira maximal B, em $H+S-e$, contendo os extremos de f.

Por um argumento de contagem podemos ver que, para que f seja admissível em $H+S$, a aresta e deve possuir seus extremos em componentes distintas de $H+S-e-B$. Novamente por um argumento de contagem, podemos concluir que f é a única aresta de S com ambos os extremos em B. Escolha e e f de tal forma que a barreira B, contendo f, seja a maior possível.

Se todas as componentes de $H+S-e-B$ são triviais então $H+S-\{e,f\}$ é bipartido onde B corresponde a uma classe da bipartição. Vamos denotar a outra classe por A. Como H é subgrafo de $H+S-\{e,f\}$, temos que H é bipartido, e (B,A) é uma bipartição de H. Seja g uma outra aresta de S distinta de e e f. Então g possui um extremo em A e o outro em B. Pelo Teorema 2.12, o grafo $H+g$ é matching covered e o Teorema está provado.

Podemos supor então que alguma componente de $H+S-e-B$ é não trivial. Seja Y uma tal componente. Então $\nabla(Y)$ é um corte justo não trivial em $H+S$.

Proposição 4.7.1 *Se $H+S$ contém um corte justo não trivial C então (i) $|S|=3$ e (ii) C contém exatamente uma aresta de S e separa as outras duas, ou seja, as outras duas arestas pertencem, cada uma delas, a uma margem distinta de C.*

Dem. Seja C um corte justo não trivial em $H+S$. Pelo Lema 3.13, C é justo em H. Sejam H' e H'' as duas C-contrações em H. Pelo Lema 3.6, H' e H'' são ambos matching covered. Seja S' (S'') o conjunto das arestas de S que pertencem a $E(H')$ ($E(H'')$).

Por hipótese de indução, H' (H'') acrescido de no máximo duas arestas, digamos $\{e',f'\}$ ($\{e'',f''\}$), de S' (S'') é matching covered.

Se $C\cap\{e',f'\}=\emptyset$ então $H+\{e',f'\}$ é matching covered. Podemos considerar, então, que $C\cap\{e',f'\}\neq\emptyset$. Analogamente, $C\cap\{e'',f''\}\neq\emptyset$.

Conforme já foi observado anteriormente, todo emparelhamento perfeito em $H+S$ contém todas as arestas de S ou não contém nenhuma delas. Portanto, C sendo justo, contém precisamente uma aresta de $\{e', f'\}$, digamos e', e uma de $\{e'', f''\}$, digamos e''. Como e' e e'' são arestas de S, concluímos que $e' = e''$. □

Como $\nabla(Y)$ é um corte justo não trivial em $H+S$, podemos concluir pela Proposição 4.7.1 que $|S| = 3$, a aresta e possui um extremo na componente Y e a outra aresta de S, digamos g, que é distinta de e e f, possui seus dois extremos em Y.

Seja L o grafo obtido de $H+S$ pela contração de $V(H+S)-Y$ a um único vértice. Como $\nabla(Y)$ é justo em $H+S$, temos que L é matching covered. Pelo Lema 3.13, o corte $\nabla(Y)$ também é justo em H. Logo, o grafo $L-\{e,g\}$, que é obtido por uma contração de um corte justo de H, é matching covered.

Vamos mostrar que existe um emparelhamento perfeito em L que contém e mas não g. Suponha por absurdo que todo emparelhamento perfeito em L que contém e também contém g. Logo, e não é admissível em $L-g$. Mas $L-g$ possui emparelhamento perfeito. Pelo Lema 2.8, existe uma barreira maximal B_1, em $L-g$, contendo os dois extremos de e.

Observe que um extremo de e é o vértice resultante da contração de $V(H+S)-Y$. Como e é admisssível em L, a aresta g deve possuir seus extremos em componentes distintas de $L-g-B_1$. Como $L-\{e,g\}$ é matching covered, e é a única aresta de L com ambos os extremos em B_1. Então $B \cup B_1$ é uma barreira em $H+S-g$ que contém f e inclui propriamente B, o que é uma contradição à escolha de e e f. Portanto, L tem um emparelhamento perfeito M' que contém e mas não g.

Seja F um emparelhamento perfeito de $H+S$ que contém f. Logo, F contém e. Além disso, $F \cap \nabla(Y) = \{e\}$. Seja M a restrição de F a $V(H+S)-Y$. Então $M \cup M'$ é um emparelhamento perfeito de $H+S$ que contém e, f mas não g, ou seja, $H+\{e,f\}$ é matching covered. Isto prova o Teorema. □

Apresentaremos agora o outro Teorema. Uma *2-aresta* é uma aresta cujos vértices extremos têm grau dois. Denotaremos por $\Delta(G)$ o grau máximo de um vértice no grafo G. Quando o grafo estiver subentendido, escreveremos apenas Δ.

Teorema 4.8 *Todo grafo matching covered distinto de K_2 e C_{2n} contém pelo menos Δ orelhas, disjuntas duas a duas, cuja remoção de qualquer uma delas resulta em um grafo que também é matching covered.*

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Suponha inicialmente que G possui uma 2-aresta, digamos e. Seja G' o grafo obtido de G trocando o caminho de comprimento três, que contém e como a aresta central, por uma aresta e'. Claramente, G' é matching covered e $\Delta(G') = \Delta(G)$. Além disso, G' é distinto de K_2 e C_{2n}.

Por hipótese de indução, G' contém pelo menos Δ orelhas, disjuntas duas a duas, cuja remoção de qualquer uma delas resulta em um grafo que também é matching covered. Cada uma destas orelhas de G' pode ser extendida trivialmente para uma de G que também satisfaz esta propriedade.

Suponha agora que G contém uma classe minimal Q da relação de dependência que inclui um 2-corte. Sejam e e f duas arestas de Q que formam um 2-corte em G. Como G é 2-conexo, $G - \{e, f\}$ possui exatamente duas componentes H_1 e H_2. Vamos fazer $e := (u_1, u_2)$ e $f := (v_1, v_2)$, onde $\{u_1, v_1\} \subseteq H_1$ e $\{u_2, v_2\} \subseteq H_2$. Considere agora os grafos $G_1 := H_1 + (u_1, v_1)$ e $G_2 := H_2 + (u_2, v_2)$.

Claramente, G_1 e G_2 são matching covered. Se G_1 é K_2 ou C_{2n} então G conteria uma 2-aresta. Mas este caso já foi tratado. Portanto, G_1 é distinto de K_2 e C_{2n}. Analogamente, G_2 também é distinto destes dois grafos.

Por hipótese de indução, para $(i = 1, 2)$, G_i contém pelo menos $\Delta(G_i)$ orelhas, disjuntas duas a duas, cuja remoção de qualquer uma delas resulta em um grafo que também é matching covered. Note que $\Delta(G) = \Delta(G_1)$ ou $\Delta(G) = \Delta(G_2)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\Delta(G) = \Delta(G_1)$.

Como as orelhas de G_i são disjuntas, no máximo uma delas contém a aresta (u_i, v_i). Além disso, cada orelha de G_i que não contém esta aresta, também é orelha em G cuja remoção resulta em um grafo matching covered.

Logo, G possui pelo menos $\Delta(G_1) - 1 + \Delta(G_2) - 1$ orelhas satisfazendo a asserção do Teorema. Mas $\Delta(G_1) = \Delta(G)$ e $\Delta(G_2) \geq 2$. Portanto, existem pelo menos $\Delta(G)$ orelhas em G satisfazendo a asserção do Teorema.

Suponha agora que nenhuma classe minimal da relação de dependência inclui um 2-corte. Pelo Lema 4.6, cada classe minimal contém no máximo dois elementos. Portanto, $G - Q$ é conexo e, conseqüentemente matching

covered, para cada classe minimal Q. Resta-nos mostrar que temos pelo menos $\Delta(G)$ classes disjuntas duas a duas.

Seja $v \in V(G)$ tal que $|\nabla(v)| = \Delta(G)$. Vamos denotar as arestas que incidem em v por $e_1, e_2, \ldots, e_k$, onde $k = |\nabla(v)|$. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, Seja Q_i uma classe minimal de G induzida pela aresta e_i. Cada aresta de Q_i implica e_i em G e, portanto, não implica e_j, onde $j \neq i$. Logo, as classes Q_i são disjuntas duas a duas. □

Corolário 4.9 *Todo grafo matching covered possui uma decomposição em orelhas.* □

Vimos portanto, que durante uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered, a adição de uma orelha simples ou dupla é suficiente em cada iteração. É importante observar que, para o caso em que temos um grafo bipartido, a adição de uma orelha simples é suficiente [13, pág. 53]. Portanto, uma decomposição em orelhas para grafos bipartidos requer apenas orelhas simples.

Na prática, para fazermos uma decomposição em orelhas, precisamos de um emparelhamento perfeito fixo, que chamaremos de emparelhamento *associado* à esta decomposição. Este emparelhamento possui a seguinte propriedade: se $K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$ é uma decomposição em orelhas de G então o emparelhamento M associado à decomposição é tal que $M \cap G_i$ é emparelhamento perfeito de G_i, para todo $0 \leq i \leq r-1$, e todas as orelhas da decomposição são caminhos M-alternados.

Outra observação importante é que a todo instante estamos considerando apenas decomposições em orelhas que são *finas*, ou seja, se $\{P', P''\}$ é uma orelha dupla de G_i então nenhum de $G_i + P'$ e $G_i + P''$ é matching covered.

4.4 Colagem seqüencial de K_4

Um importante Teorema a ser provado nesta seção é que se G é um grafo matching covered não bipartido então existe uma decomposição em orelhas $K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$ de G em que G_2 ou G_3 é não bipartido. Este Teorema foi provado por Lovász e Plummer [11]. Existe uma prova bem mais simples, de autoria de Carvalho e Lucchesi [3].

A prova apresentada aqui é diferente das duas anteriores e também é muito simples. O motivo pelo qual a apresentamos é que ela introduz uma

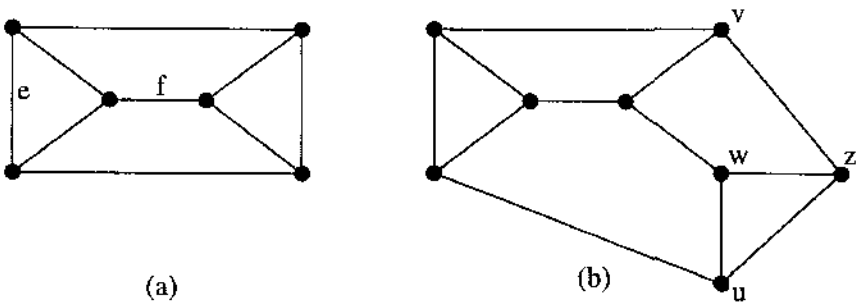


Figura 4.2: Exemplos de colagens.

família infinita de grafos matching covered que desempenha um papel importante na teoria.

Sejam G_1 e G_2 dois grafos tais que:

- $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$,
- $adj_{G_1}(v) = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ e $adj_{G_2}(v) = \{y_1, y_2, \ldots y_k\}$.

A operação de *colagem* de G_1 a G_2 em v consiste em obter um grafo G a partir de G_1 e G_2 por primeiro deletar v em ambos os grafos, e a seguir inserir as arestas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$. Por exemplo, a figura 4.2 mostra uma colagem de dois K_4 e uma colagem de um $\overline{C_6}$ a um K_4.

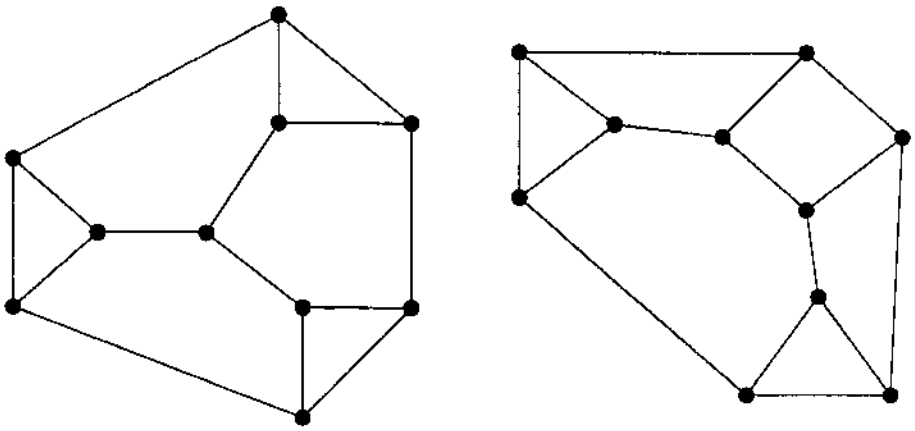
Um grafo G é uma *colagem seqüencial* de K_4 se G é cúbico e satisfaz um dos ítens abaixo:

(i) $G = K_4$, ou

(ii) G é uma colagem de G_1 a K_4 num vértice de G_1 que pertence a um triângulo, onde G_1 é colagem seqüencial de K_4.

Por exemplo, os dois grafos da figura 4.2 são colagens seqüenciais de K_4. O exemplo da figura 4.3(a) é uma colagem do grafo da figura 4.2(b) a um K_4 no vértice v indicado na figura, porém esta colagem não é seqüencial de K_4, pois o vértice usado não pertence a um triângulo. Para ser seqüencial, a colagem correta deve ser feita em um dos vértices u, w ou z, como ocorre no exemplo da figura 4.3(b), onde a colagem é feita no vértice u.

Se G é uma colagem seqüencial de K_4 definimos o *grau* de G como o número de operações de colagem de K_4 que foram feitas para obter G. Por exemplo, se $G = K_4$ então G tem grau 1. Os grafos da figura 4.2 têm grau 2 e 3, respectivamente. Note que $\overline{C_6}$ tem grau 2.



(a) (b)

Figura 4.3: Colagem (a) não seqüencial e (b) seqüencial de K_4.

A seguir apresentaremos propriedades adicionais sobre colagem seqüencial de K_4.

Propriedade 4.10 *Toda colagem seqüencial de K_4 de grau maior ou igual a dois possui precisamente dois triângulos e um subgrafo gerador que é uma subdivisão (não necessariamente ímpar) do $\overline{C_6}$. Além disso, a subdivisão ocorre nas três arestas paralelas, ou seja, as arestas dos dois triângulos não são subdivididas.* □

Propriedade 4.11 *Sejam G_1 e G_2 duas colagens seqüenciais de K_4 e seja G o grafo obtido pela colagem de G_1 a G_2 em um vértice que pertence a um triângulo nestes dois grafos. Então G é uma colagem seqüencial de K_4.* □

Proposição 4.12 *Toda colagem seqüencial de K_4 é um brick.*

Dem. Seja G uma colagem seqüencial de K_4. Vamos fazer indução no grau de G. Se o grau de G é 1 ou 2, ou seja, se $G = K_4$ ou $\overline{C_6}$ então claramente G é brick.

Suponha que o grau de G é maior do que dois. Como G possui um subgrafo gerador que é uma subdivisão do $\overline{C_6}$, temos que G é 3-conexo.

Vamos mostrar agora que G é bicrítico. Mas G é uma colagem de um grafo G_1 a um K_4, onde G_1 é uma colagem seqüencial de K_4 cujo grau é um

a menos do que o grau de G. Por hipótese de indução, G_1 é bicrítico. Como K_4 é bicrítico podemos concluir, pelo Lema 3.10, que G é bicrítico. Portanto, G é brick. □

O seguinte Teorema, provado por C. H. C. Little, desempenha um papel importante na demonstração que faremos.

Teorema 4.13 *Quaisquer duas arestas de um grafo matching covered pertencem a um circuito nice.*

Dem. Veja [8], [11, pág. 177]. □

Teorema 4.14 *Todo grafo não bipartido matching covered contém um subgrafo nice que é uma subdivisão ímpar de uma colagem sequencial de K_4.*

Dem. Por indução em $|V(G)| + |E(G)|$.

Caso 1 *G contém um subgrafo próprio H que é não bipartido, matching covered e nice.*

Por hipótese de indução, H contém um subgrafo nice K que é uma subdivisão ímpar de uma colagem de sequencial de K_4. Como K é subgrafo nice de H e H é um subgrafo nice de G, K é um subgrafo nice de G.

Caso 2 *G contém um vértice u de grau 2.*

Sejam v e w os vértices adjacentes a u ao longo das arestas α_v e α_w, respectivamente. Seja H o grafo obtido de G pela contração de $\{u, v, w\}$ a um único vértice x. Claramente, H é não bipartido. Para cada emparelhamento perfeito M de G, exatamente uma de α_v e α_w pertence a M, e assim, $M \backslash \{\alpha_v, \alpha_w\}$ é emparelhamento perfeito de H. Portanto, H é matching covered. Por hipótese de indução, H contém um subgrafo nice H' que é uma subdivisão ímpar de uma colagem sequencial de K_4.

Considere $G' := G[E(H')]$, o subgrafo de G induzido pelas arestas de H'. Se no máximo um de v e w é vértice de G' então G' é nice (com relação a G) e isomorfo a H'. Podemos então assumir que v e w são ambos vértices de G'. Como H' é uma subdivisão ímpar de uma colagem sequencial de K_4, nenhum vértice de H' tem grau maior do que três. Portanto, pelo menos um de v e w tem grau um em G'. Neste caso, a adição de α_v e α_w a G' fornece uma subdivisão ímpar de H' que é nice com relação a G.

Caso 3 *Nenhum dos casos anteriores se aplicam.*

Vamos mostrar então que G é uma colagem seqüencial de K_4. O grafo G, sendo matching covered, tem uma decomposição em orelhas $G_0 = K_2 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n$. Como G não é bipartido, $n > 0$. O grafo G_{n-1} é matching covered e nice, e como o caso 1 não se aplica, G_{n-1} é bipartido. Seja (A, B) uma bipartição de G_{n-1}.

Como $G_n = G$ não é bipartido, a última orelha é dupla, sendo que uma delas tem ambos os extremos em A e a outra tem ambos os extremos em B. Mas o caso 2 não se aplica, e portanto, esta orelha dupla é composta simplesmente por duas arestas. Vamos denotá-las por $\alpha := (a_1, a_2)$ e $\beta := (b_1, b_2)$ tais que $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ e $\{b_1, b_2\} \subseteq B$.

Como G_{n-1} é matching covered, pelo Teorema 4.13 quaisquer duas de suas arestas pertencem a um circuito nice. Em particular, se tomarmos duas arestas de G_{n-1} com extremos em a_1 e a_2, respectivamente, G_{n-1} possui um circuito nice C que tem a aresta α como corda. Seja M_1 um emparelhamento perfeito de G_{n-1} tal que C é M_1-alternado.

Seja M um emparelhamento perfeito de G que contém α (e β). Seja D o circuito M_1-alternado de $M \oplus M_1$ contendo α. Como $|D|$ é par, D contém β. O subgrafo $G' := G[C \cup D]$ de G, gerado por $C \cup D$, é certamente:

- nice e matching covered, pois C e D são ambos circuitos M_1-alternados.
- não bipartido, pois $C \cup \alpha$ é um subgrafo de G' que contém um circuito ímpar.

Como o caso 1 não se aplica, $G = G[C \cup D]$. Portanto, todos os vértices de G têm grau 2 ou 3. Mas como o caso 2 não se aplica, podemos concluir que G é cúbico. Então C é um circuito hamiltoniano em G.

Lema 4.14.1 *Seja G um grafo cúbico não bipartido e C um circuito hamiltoniano de G. Sejam α e β duas cordas de C e $\{A, B\}$ uma bipartição de $G - \{\alpha, \beta\}$ tal que α tem ambos os extremos a_1 e a_2 em A e β tem ambos os extremos b_1 e b_2 em B. Se para toda corda e de C distinta de α e β o grafo $G - e$ não é matching covered então G é uma colagem seqüencial de K_4.*

Dem. Vamos considerar dois casos, dependendo se as cordas α e β se cruzam ou não. Considere primeiro o caso em que α e β se cruzam, ou seja, os

vértices a_1, b_1, a_2, b_2 estão em C nesta ordem cíclica. Neste caso, o grafo $L := G[C \cup \{\alpha, \beta\}]$ é uma subdivisão ímpar de K_4, um grafo matching covered.

Para todas as cordas f de C distintas de α e β, o grafo $C + f$ é matching covered. Portanto, α e β são as únicas cordas de C, caso contrário, $G - e$ seria matching covered para todas as demais cordas e. Assim, G é K_4.

Vamos agora considerar o caso em que α e β não se cruzam. Então $G[C \cup \{\alpha, \beta\}]$ não é matching covered. Portanto, existe alguma outra corda e diferente de α e β. O grafo $G - e$ por hipótese não é matching covered.

Cada corda f, distinta de α, β e e, possui um extremo em A e outro em B, e C é um circuito par. Logo f é admissível em $C + f$. Portanto, cada aresta de $G - \{\alpha, \beta, e\}$ é admissível em $G - e$.

Então α não é admissível em $G - e$. Mas $G - e$ possui emparelhamento perfeito. Pelo Lema 2.8, existe uma barreira A_α, em $G - e$, contendo ambos os extremos de α. Como G é matching covered, α é admissível em G, e portanto e deve ter seus extremos em componentes distintas de $G - A_\alpha - e$.

O grafo $G - e - \{\alpha, \beta\}$ é bipartido, e portanto, as únicas barreiras maximais são as duas bipartições. Como vimos na Propriedade 2.15, a adição de arestas em um grafo matching covered apenas refina as barreiras. Logo, cada barreira de $G - e$, em particular A_α, está contida em uma bipartição. Como A_α contém os extremos de α, temos que $A_\alpha \subseteq A$. Podemos então escolher A_α como sendo uma barreira maximal em $G - e$ que contém os extremos de α. Como β possui ambos os extremos em B, β deve ter seus dois extremos em uma componente H de $G - A_\alpha - e$.

Pela maximalidade de A_α, toda componente de $G - A_\alpha - e$ é não bipartida. Mas $G - \{\alpha, \beta\}$ é bipartido e α tem ambos os extremos em A_α. Logo, H, a componente que contém ambos os extremos de β, é a única não trivial. Vamos denotar o conjunto das componentes triviais de $G - A_\alpha - e$ por S. Logo, $S \subseteq B$. Então e deve possuir um extremo em S e outro em $V(H) \cap A$.

Por um simples argumento de contagem das arestas de $\nabla(A_\alpha)$, temos que $|\nabla(V(H))| = 3$. Finalmente, seja $T := V(H) \cap A$ e $B_\beta := V(H) \cap B$.

De todos estes fatos podemos concluir que G tem as seguintes propriedades:

1. A pode ser particionado nos conjuntos A_α e T;

2. B pode ser particionado nos conjuntos B_β e S;

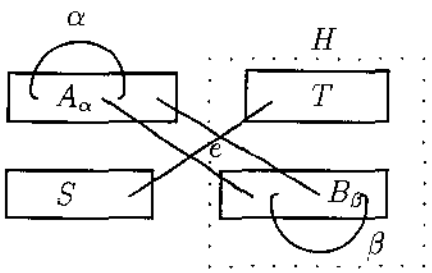


Figura 4.4: Grafo G.

3. A_α (B_β) contém ambos os extremos de α (β);

4. e é a única aresta que liga S a T;

5. Existem exatamente duas arestas que ligam A_α e B_β (Figura 4.4).

Seja $C := \nabla(V(H))$ e considere as duas C-contrações

$$G' := G \text{ contr}(V(H)) \quad \text{e} \quad G'' := G \text{ contr}(V(G) - V(H)).$$

Vamos denotar por v' (v'') o vértice de G' (G'') resultante da contração de $V(H)$ ($V(G) - V(H)$). Como $|C| = 3$ e G é cúbico, temos que G' e G'' são cúbicos. Além disso, C passa pelas duas arestas que unem A_α e B_β. Portanto, os circuitos $C' := C \cap V(G')$ e $C'' := C \cap V(G'')$ são hamiltonianos em G' e em G'', respectivamente.

Os grafos G' e G'' satisfazem as hipóteses do Lema, com C', α, e, A_α, $S + \{v'\}$ e C'', e, β, $T + \{v''\}$, B_β no lugar de C, α, β, A, B, respectivamente. Podemos então aplicar hipótese de indução a ambos.

Note que e pertence a um triângulo em G' e em G''. Portanto, G é obtido pela colagem de G' a G'' em um vértice que pertence a um triângulo nestes dois grafos. Pela Propriedade 4.11, G é uma colagem seqüencial de K_4. □

Lema 4.15 *Seja G uma colagem sequencial de K_4. Então G contém um subgrafo nice que é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$.*

Dem. Se G tem grau 1 então $G = K_4$, e se G tem grau 2 então $G = \overline{C_6}$. Vamos supor então que o grau de G é maior do que dois.

Considere o subgrafo gerador (e portanto nice) H, de G, que é uma subdivisão do $\overline{C_6}$. Vamos denotar os vértices dos dois triângulos de H por a, b,

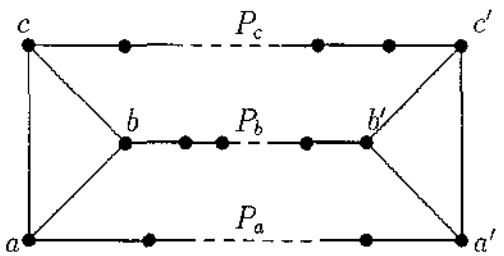


Figura 4.5: Subgrafo gerador H.

c e a', b', c', respectivamente, de tal forma que P_a, P_b e P_c sejam caminhos disjuntos em H que ligam os vértices a a a', b a b' e c a c', respectivamente (Figura 4.5). Como $|V(H)|$ é par, devemos ter $|V(P_a)| + |V(P_b)| + |V(P_c)|$ também par.

Se H é uma subdivisão ímpar do $\overline{C_6}$ então o Lema está provado. Senão, é porque um dos caminhos P_a, P_b ou P_c deve ser uma subdivisão par das arestas (a, a'), (b, b') ou (c, c'), respectivamente. Vamos supor, sem perda de generalidade, que P_a é subdivisão par da aresta (a, a'), ou seja, que $|V(P_a)|$ é ímpar. Como $|V(P_a)| + |V(P_b)| + |V(P_c)|$ é par, exatamente um de $|V(P_b)|$ e $|V(P_c)|$ é ímpar e o outro par. Vamos supor, sem perda de generalidade que $|V(P_b)|$ é ímpar e que $|V(P_c)|$ é par. Então H menos a aresta (a, b) é uma subdivisão ímpar do K_4 que é nice com relação a G. □

Teorema 4.16 *Todo grafo não bipartido matching covered contém um subgrafo nice que é uma subdivisão ímpar de K_4 ou $\overline{C_6}$.*

Dem. Seja G um grafo não bipartido matching covered. Pelo Teorema 4.14, G contém um subgrafo nice H que é uma subdivisão ímpar de uma colagem de sequencial de K_4. Pelo Lema 4.15, H contém um subgrafo nice K que é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$. Como K é subgrafo nice de H e H é um subgrafo nice de G, temos que K é um subgrafo nice de G. □

4.5 Bricks distintos de K_4 e $\overline{C_6}$

Nesta seção provaremos que se G é um brick diferente do K_4 e $\overline{C_6}$ então existe uma aresta e tal que $G - e$ é matching covered. Este resultado, que é

fundamental no contexto da teoria dos grafos matching covered, foi provado por Lovász [10].

Apresentaremos duas provas para este Teorema. A primeira delas é obtida utilizando os resultados da seção anterior. A outra é obtida utilizando apenas os resultados da seção 4.2.

Teorema 4.17 *Seja G um brick diferente de K_4 e $\overline{C_6}$. Então G contém uma aresta e tal que $G-e$ é matching covered.*

Dem. Pelo Teorema 4.16, G tem uma decomposição em orelhas $K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_k = G$ tal que o primeiro grafo não bipartido é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$.

Como G é 3-conexo, a última orelha desta decomposição é formada por uma (se for simples) ou duas (se for dupla) arestas. Como G é diferente de K_4 e $\overline{C_6}$, o grafo G_{k-1} não é bipartido. Pelo Lema 4.3, G_k é obtido de G_{k-1} pela adição de uma orelha simples que vamos denotar por e. Portanto, $G-e$ é matching covered. □

Apresentaremos agora a outra demonstração deste Teorema.

Teorema 4.18 *Todo brick distinto de K_4 e $\overline{C_6}$ contém pelo menos $\Delta-2$ arestas cuja remoção de uma delas resulta em um grafo que é matching covered.*

Dem. Seja $\nabla(v_0) := \{f_1, f_2, \ldots, f_\Delta\}$, onde v_0 denota um vértice de grau máximo em G. Para cada i tal que $1 \leq i \leq \Delta$.

- Seja Q_i uma classe de eqüivalência minimal da relação $\Leftrightarrow$ induzida por f_i.
- Seja M_i um emparelhamento perfeito de G que contém as arestas de Q_i.

Por definição de Q_i, o emparelhamento M_i contém f_i, e portanto, não contém f_j, para $j \neq i$. Assim, as classes Q_i são duas a duas disjuntas.

Pelo Teorema 4.4, cada Q_i consiste de uma ou duas arestas. Pelo Corolário 4.5, $G - Q_i$ é matching covered. Portanto, o Teorema estará provado se mostrarmos que no máximo duas classes contém duas arestas.

Suponha que três classes contém duas arestas. Mostraremos então que G é o K_4 ou o $\overline{C_6}$ e, conseqüentemente, que $\Delta = 3$.

Ajuste a notação, reindexando as arestas de $\nabla(v_0)$ se necessário, para que tenhamos Q_1, Q_2 e Q_3 contendo duas arestas. Para cada Q_i, sejam e_i e $\overline{e_i}$ suas duas arestas. Pelo Teorema 4.4, $G - Q_i$ tem uma bipartição $\{B_i, \overline{B_i}\}$ tal que e_i possui seus dois extremos em B_i e $\overline{e_i}$ possui seus dois extremos em $\overline{B_i}$.

Temos então 8 *blocos*, cada um da forma $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, onde cada C_i denota um de B_i ou $\overline{B_i}$ e $\overline{C_i}$ denota o outro. Se $\mathcal{B}$ denota o bloco $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ então $\overline{\mathcal{B}}$ denota seu bloco antipodal $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}$. Um bloco $\mathcal{B}$ é *par* ou *ímpar* dependendo da paridade de $|\{i : 1 \leq i \leq 3 \text{ e } C_i = \overline{B_i}\}|$. Vamos estender esta noção de paridade para os vértices de G, dando a cada vértice a paridade do bloco ao qual ele pertence. Chamaremos as arestas $\{e_i, \overline{e_i} : 1 \leq i \leq 3\}$ de *especiais* e as demais serão chamadas de *normais*.

Proposição 4.19 *Toda aresta normal de G liga vértices que pertencem a blocos antipodais e de paridades distintas. Toda aresta especial de G liga vértices de mesma paridade.*

Dem. Considere dois índices distintos i e j, ambos no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Qualquer aresta normal tem um extremo em B_i e outro em $\overline{B_i}$. Portanto, seus extremos têm paridades distintas e pertencem a blocos antipodais.

Uma aresta especial e_j tem um extremo em $B_i \cap B_j$, o outro em $\overline{B_i} \cap B_j$. Da mesma forma, a aresta especial $\overline{e_j}$ tem um extremo em $B_i \cap \overline{B_j}$, o outro em $\overline{B_i} \cap \overline{B_j}$. Portanto, uma aresta especial liga vértices de mesma paridade. □

Ajuste a notação, trocando B_2 com $\overline{B_2}$ (e conseqüentemente e_2 com $\overline{e_2}$) se necessário, de tal forma que ambos os extremos de e_1 sejam pares. Assim, e_1 liga um vértice em $\mathcal{B}_0 := B_1 \cap B_2 \cap B_3$ com um vértice em $B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$.

Caso 1 *Ambos os extremos de $\overline{e_1}$ também são pares.*

Neste caso, provaremos que G é o K_4. Por hipótese, nenhum extremo de $\overline{e_1}$ pertence a $\overline{\mathcal{B}_0}$. Se considerarmos o emparelhamento M_1, cujas arestas especiais são e_1 e $\overline{e_1}$, concluímos que

$$|\mathcal{B}_0| = 1 + |\overline{\mathcal{B}_0}|.$$

Portanto, se considerarmos agora os emparelhamentos M_2 e M_3, podemos concluir que cada uma de e_2 e e_3 possui um único extremo em $\mathcal{B}_0$ e $\overline{e_2}$ e $\overline{e_3}$ não possuem extremo em $\overline{\mathcal{B}_0}$. Temos então que

- os extremos das 6 arestas especiais são pares;
- cada bloco par tem três arestas especiais incidentes a ele, nenhuma das quais implica outra;
- as arestas especiais possuem extremos em blocos pares;
- cada bloco par tem um vértice a mais do que seu antipodal ímpar;
- cada bloco par é uma barreira em G;
- cada bloco par é trivial;
- cada bloco ímpar é vazio.

Portanto, G é formado por quatro vértices, cada um deles constitui um bloco par, que é adjacente a cada um dos outros três vértices por três arestas especiais, nenhuma das quais implica outra. Finalmente, não existe aresta normal. Então $G = K_4$ e $\Delta = 3$. A análise do caso 1 está completa.

Caso 2 *Ambos os extremos de $\overline{e_1}$ são ímpares.*

Neste caso, provaremos que G é o $\overline{C_6}$. Por hipótese, um extremo de $\overline{e_1}$ pertence a $\overline{B_0}$. Se considerarmos o emparelhamento M_1, cujas arestas especiais são e_1 e $\overline{e_1}$, concluímos que

$$|\mathcal{B}_0| = |\overline{\mathcal{B}_0}|.$$

Vamos considerar agora os emparelhamentos M_2 e M_3; ambos $|\{e_2, \overline{e_2}\} \cap \nabla(\mathcal{B}_0 \cup \overline{\mathcal{B}_0})|$ e $|\{e_3, \overline{e_3}\} \cap \nabla(\mathcal{B}_0 \cup \overline{\mathcal{B}_0})|$ são pares. Como G é 3-conexo, pelo menos um deles é não nulo, senão $\nabla(\mathcal{B}_0 \cup \overline{\mathcal{B}_0}) = \{e_1, \overline{e_1}\}$.

Ajuste a notação, trocando os índices 2 e 3 se necessário, para que tenhamos e_2 incidente em $\mathcal{B}_0$ e $\overline{e_2}$ incidente em $\overline{\mathcal{B}_0}$. Portanto, se fizermos $\mathcal{B}_1 := \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$, segue que $\nabla(\mathcal{B}_1 \cup \overline{\mathcal{B}_1}) \subseteq \{e_3, \overline{e_3}\}$. Podemos concluir então que os blocos $\mathcal{B}_1$ juntamente com seu antipodal são nulos. Além disso, e_3 possui seus extremos em $\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$ e $B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$ e $\overline{e_3}$ possui seus extremos nos blocos antipodais destes dois (Figura 4.6).

O próximo passo é mostrar que cada um dos seis blocos não nulos de G é trivial. Para isto, observe inicialmente que cada bloco e seu antipodal têm o mesmo número de vértices. Provaremos que $\mathcal{B}_0$ é trivial. Um argumento similar pode ser usado para os demais blocos.

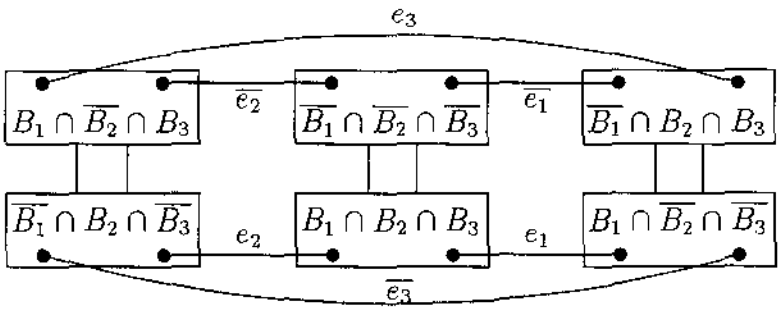


Figura 4.6: Os seis blocos não nulos de G.

Proposição 4.20 *Os extremos v_1 e v_2 de e_1 e e_2 em $\mathcal{B}_0$, respectivamente, coincidem.*

Dem. Sejam $\overline{v_1}$ e $\overline{v_2}$ os extremos de $\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$ em $\overline{\mathcal{B}_0}$, respectivamente. Suponha que v_1 e v_2 são distintos.

Como G é bicrítico, $G - \{v_1, v_2\}$ tem emparelhamento perfeito. Necessariamente, este emparelhamento perfeito contém ambos $\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$. Portanto, o subgrafo H de G induzido por $\mathcal{B}_0 \cup \overline{\mathcal{B}_0} \setminus \{v_1, v_2, \overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ tem um emparelhamento perfeito, digamos N.

Sejam $\mathcal{B}_2 := \overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}$ e $\mathcal{B}_3 := B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$. Seja H_2 o subgrafo de G induzido por $\mathcal{B}_2 \cup \overline{\mathcal{B}_2}$ e H_3 o subgrafo de G induzido por $\mathcal{B}_3 \cup \overline{\mathcal{B}_3}$. O conjunto

$$(M_2 \cap E(H_2)) \cup (M_1 \cap E(H_3)) \cup N \cup \{e_1, e_2, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$$

é um emparelhamento perfeito de G que contém Q_1 e Q_2, uma contradição. Portanto, $v_1 = v_2$. □

Concluímos então que $\overline{\mathcal{B}_0}$ é uma barreira em G, e portanto, é trivial. Logo, $\mathcal{B}_0$ também é trivial.

Cada par de blocos antipodais têm pelo menos uma aresta normal que os ligam. Resta-nos mostrar que existe uma única aresta ligando cada par de blocos antipodais. Se fizermos isso, podemos concluir que $G = \overline{C_6}$ e $\Delta = 3$.

Suponha o contrário. Sem perda de generalidade, suponha que $\mathcal{B}_0 := \{v_0\}$ e que $\Delta > 3$. As arestas especiais que incidem em v_0 são e_1 e e_2. As $\Delta - 2$ arestas normais que incidem em v_0 são arestas múltiplas. Portanto, cada

uma das classes $Q_3, Q_4, \ldots, Q_\Delta$ são formadas por uma única aresta, cada uma delas sendo uma das arestas normais múltiplas que incidem em v_0, o que contradiz nossa hipótese de que pelo menos três classes Q_i são duplas. Assim, $\Delta = 3$ e $G = \overline{C_6}$. □

Capítulo 5

Decomposição em Orelhas e Cortes Justos

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos uma relação entre o número de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered e o número de bricks de uma decomposição em cortes justos do mesmo grafo. Apresentaremos também uma decomposição em orelhas especial, denominada decomposição canônica, que será utilizada no Capítulo 9.

Na seção 5.2 apresentamos uma relação entre decomposição em orelhas e cortes justos. Esta relação será usada na seção 5.3 para estabelecermos um limite inferior para o número de orelhas duplas de uma uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered. Nesta mesma seção apresentamos uma conjectura que estabelece um limite inferior para o número de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered. Mostramos ainda que uma pequena classe de grafos matching covered satisfaz a conjectura acima. Vale ressaltar que no Capítulo 8 mostraremos que a conjectura é válida para os bricks, e no Capítulo 9 mostraremos a sua validade para grafos matching covered em geral.

Na seção 5.4 mostraremos que, a partir de uma decomposição em orelhas qualquer, podemos obter uma decomposição em orelhas particular que chamaremos de canônica, de tal forma que o número de orelhas duplas utilizados é o mesmo da decomposição inicial. Veremos, no Capítulo 9, importantes

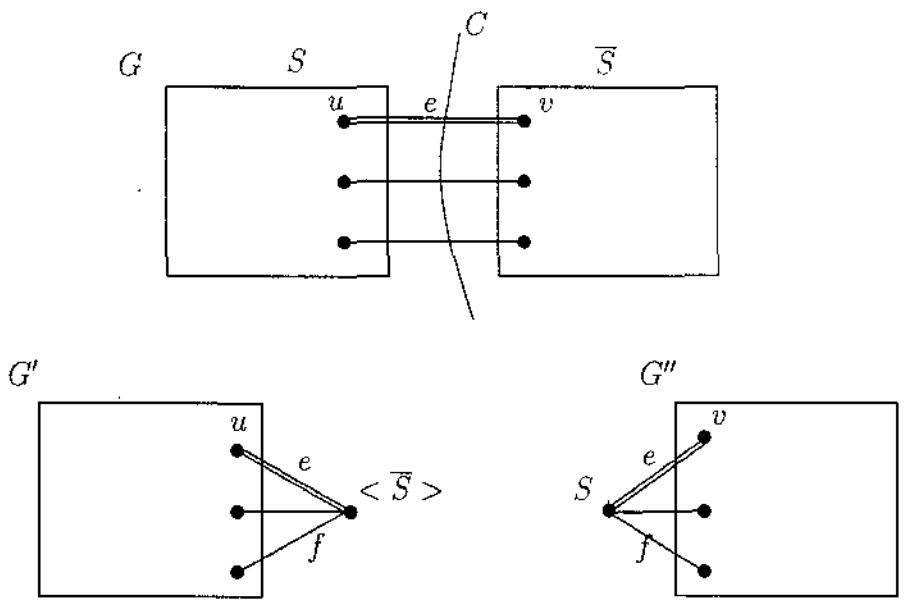


Figura 5.1: O corte C é justo em G.

aplicações desta decomposição.

5.2 Decomposição em orelhas e cortes justos

Sejam G um grafo matching covered e $C := \nabla(S)$ um corte justo em G. Sejam $G' := G$ contr$(\overline{S})$ e $G'' := G$ contr(S) (Figura 5.1). Vamos denotar por $d_*(G)$ o número mínimo de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de G.

Teorema 5.1 $d_*(G) \geq d_*(G') + d_*(G'')$.

Dem. Por indução em $|E(G)|$. Seja

$$\mathcal{D} := G_0 = K_2 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r = G$$

uma decomposição em orelhas de G que usa o número mínimo $d_*(G)$ de orelhas duplas.

Seja X o conjunto das arestas da última orelha, que adicionada a G_{r-1} fornece G. Para cada caminho desta última orelha, podemos enumerar suas arestas a partir da origem com índices $1, 2, \ldots, 2x+1$. As arestas são então classificadas como *ímpares* ou *pares*, dependendo da paridade do índice. Como o comprimento do caminho é ímpar, a classificação é a mesma independentemente do extremo do caminho por onde se inicia a enumeração.

Seja I o conjunto das arestas ímpares da orelha e P o conjunto das pares. Então $P \cup I = X$ e $P \cap I = \emptyset$. Além disso, para todo emparelhamento perfeito M de G, temos que $P \subseteq M$ e $I \cap M = \emptyset$ ou $I \subseteq M$ e $P \cap M = \emptyset$. Se M é um emparelhamento perfeito em G_{r-1} então $M \cup P$ é perfeito em G.

Dado que C é justo em G, temos que $|C \cap P| \leq 1$ e $|C \cap I| \leq 1$. Suponha que ambos os conjuntos são unitários. Então todo emparelhamento perfeito de G ou contém a aresta de $C \cap P$ ou contém a aresta de $C \cap I$. Nesse caso, $|C| = 2$ e $C \subseteq X$. Mas G_{r-1} é conexo. Portanto, ou G' ou G'', digamos G', é um circuito par, cujas arestas pertencem todas a X. Nesse caso, trivialmente,

$$d_*(G) = d_*(G'') \quad \text{e} \quad d_*(G') = 0.$$

Logo, vale a igualdade.

Podemos supor então que $|C \cap X| \leq 1$. Vamos mostrar que $C \cap P = \emptyset$. De fato, G é 2-conexo e portanto $C \setminus X$ é não vazio. Sejam $e \in (C \setminus X)$ e M_e um emparelhamento perfeito de G_{r-1} que contém e. Então $M_e \cup P$ é emparelhamento perfeito em G. Mas C é justo em G. Portanto, e é a única aresta de C em M e, conseqüentemente, $C \cap P = \emptyset$.

Assim, podemos concluir que se a orelha for dupla então um de seus caminhos está totalmente contido em G' ou em G'', digamos G''. Além disso, se um dos caminhos da orelha intercepta C então a parte do caminho em cada G' (G'') é uma orelha de G' (G'').

Note que G_{r-1} é matching covered e pelo Lema 3.13, o corte C também é justo neste grafo. Portanto, as duas C-contrações, G'_{r-1} e G''_{r-1}, em G_{r-1} são matching covered. Vamos definir $t := 1$ se a orelha é dupla e $t := 0$ se é simples.

Por definição,

$$d_*(G) = t + d_*(G_{r-1}).$$

Por hipótese de indução,

$$d_*(G_{r-1}) \geq d_*(G'_{r-1}) + d_*(G''_{r-1}).$$

Fazendo um ajuste de notação temos

$$\begin{aligned} d_*(G'_{r-1}) &\geq d_*(G') \\ t + d_*(G''_{r-1}) &\geq d_*(G''). \end{aligned}$$

Destas quatro desigualdades, obtemos a desigualdade enunciada. □

5.3 Decomposição em orelhas ótima

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que visam responder à seguinte questão: Qual é o número mínimo de orelhas duplas em uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered? Uma decomposição em orelhas é *ótima* se usa o número mínimo de orelhas duplas.

Inicialmente usaremos o Teorema 5.1 para mostrar um limite inferior para o número de orelhas duplas. Lembre-se que $b(G)$ denota o número de bricks de uma decomposição de G em cortes justos. Dentre os $b(G)$ bricks desta decomposição, vamos denotar por $p(G)$ o número de bricks que são, a menos de arestas paralelas, isomorfos ao grafo de Petersen.

Teorema 5.2 *Para todo grafo matching covered,* $d_*(G) \geq b(G) + p(G)$.

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Vamos considerar inicialmente o caso em que G possui um corte justo não trivial C. Sejam G' e G'' as duas C-contrações. Pelo Teorema 5.1,

$$d_*(G) \geq d_*(G') + d_*(G'').$$

Por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} d_*(G') &\geq b(G') + p(G') \\ d_*(G'') &\geq b(G'') + p(G''). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental da decomposição em cortes justos (Teorema 3.7),

$$\begin{aligned} b(G') + b(G'') &= b(G) \\ p(G') + p(G'') &= p(G). \end{aligned}$$

Portanto, vale a desigualdade.

Podemos então supor que G é um brace ou um brick. Se G for um brace, $b(G) + p(G) = 0$. Se G for um brick distinto do grafo de Petersen,

$$d_*(G) \geq 1 = b(G) + p(G),$$

onde a desigualdade vem do fato de que G não é bipartido.

Resta considerar o caso em que G é o grafo P de Petersen. Para toda aresta α de P, o grafo $P - \alpha$ é matching covered. Portanto, em qualquer decomposição em orelha de P, sua última orelha é uma aresta. Mas P é transitivo nas arestas, portanto

$$d_*(P) = d_*(P - \alpha), \quad \text{para todo } \alpha \in E(P).$$

Fazendo uma decomposição de $P - \alpha$ em cortes justos obteremos, a menos de arestas múltiplas, dois K_4. De fato, $d_*(P) = 2 = b(P) + p(P)$. □

O Teorema 5.2 sugere a seguinte conjectura:

Conjectura 5.3 *Todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas que usa $b + p$ orelhas duplas.* □

Terminaremos esta seção apresentando um Lema que será utilizado no Capítulo 8.

Lema 5.4 *Sejam G um grafo matching covered e C um corte justo em G. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações em G. Suponha que existe uma decomposição em orelhas de G_1 que usa d orelhas duplas e que G_2 é bipartido. Então existe uma decomposição em orelhas de G que usa d orelhas duplas.*

Dem. Por indução em $|E(G)|$. Vamos supor que $C := \nabla(X)$ e que G_1 é obtido pela contração de $\overline{X}$ ao vértice $\overline{x}$. Analogamente, G_2 é obtido pela contração de X ao vértice x.

Por hipótese, G_2 é bipartido. Vamos mostrar inicialmente que é suficiente analisar o caso em que G_2 é um brace. Suponha que G_2 não é brace, ou seja, G_2 possui um corte justo não trivial. Tome um corte justo não trivial $D := \nabla(S)$ em G_2 tal que a margem que contém x seja maximal. Fixe a notação para que tenhamos $x \in S$.

Então D é justo em G. Seja G' e G'' as duas D-contrações em G onde G' é obtido pela contração de $\overline{S}$. Assim, o corte C é justo em G'. Uma das C-contrações em G'' é o grafo G_1 e a outra é um grafo bipartido. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de G' que usa d orelhas duplas. Note que pela escolha que fizemos do corte D, podemos concluir que G'' é brace. Portanto, podemos supor que G_2 é brace.

Suponha que G_2 tenha pelo menos três vértices em cada bipartição. Pelo Lema 3.14, $G_2 - e$ é matching covered para toda aresta e de G_2. Tome então uma aresta $e \in E(G_2)$ que não incide em x. Assim, $G - e$ também é matching covered e todas as hipóteses do Lema continuam válidas. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de $G - e$ que usa d orelhas duplas. Agora acrescente e a esta decomposição para obter uma decomposição para G com a mesma propriedade.

Podemos supor então que G_2 tem dois vértices em cada bipartição. Então uma das bipartições de G_2 contém x e um outro vértice, digamos u, e os da outra bipartição vamos denotar por v_1 e v_2. Portanto, $adj(u) = \{v_1, v_2\}$.

Por hipótese, existe uma decomposição em orelhas $\mathcal{D}_1$ de G_1 que usa d orelhas dupla. Seja Q a última orelha de $\mathcal{D}_1$. Logo, $G_1 - Q$ é matching covered. Vamos fazer $t := 0$ se Q é simples e $t := 1$ se Q é dupla.

Suponha que $\overline{x} \notin V(Q)$. Neste caso, $G - Q$ é matching covered e todas as hipóteses do Lema continuam válidas com $d - t$ no lugar de d. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de $G - Q$ que usa $d - t$ orelhas duplas. Agora acrescente Q a esta decomposição para obter uma decomposição para G com d orelhas duplas.

Então $\overline{x} \in V(Q)$. O caso em que $\overline{x}$ é vértice interno de um caminho de Q é trivial. Podemos supor então que $\overline{x}$ é um extremo de um caminho de Q. Logo, em G, este caminho tem um extremo em v_1 ou v_2, digamos v_2.

Se v_2 tem dois vizinhos em X então novamente $G - Q$ é matching covered e podemos terminar por hipótese de indução. Se v_2 tem um único vizinho em

X então G é uma subdivisão ímpar de G_1. Neste caso, claramente o Lema é verdadeiro. □

5.4 Decomposição em orelhas canônica

Uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered não bipartido é *canônica* se o primeiro grafo não bipartido obtido é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$. O Teorema 4.16 garante que todo grafo matching covered não bipartido tem uma decomposição em orelhas canônica. No entanto, ele não diz nada sobre o número de orelhas duplas desta particular decomposição. Nesta seção mostraremos que podemos obter uma decomposição canônica sem aumentar o número de orelhas duplas.

Seja G um grafo matching covered e u um vértice de grau dois em G. Sejam v e w os vértices adjacentes a u e considere o corte justo $C := \nabla(X)$, onde $X := \{u, v, w\}$. Seja G_1 o grafo obtido de G pela contração de X a um único vértice x.

Lema 5.5 *Se existe uma decomposição em orelhas canônica de G_1 que usa d orelhas duplas então existe uma decomposição em orelhas canônica de G que usa d orelhas duplas.*

Dem. Se v ou w tem um único vizinho em $\overline{X}$ então G é uma subdivisão ímpar de G_1 e, neste caso, o Lema é claramente verdadeiro. Podemos supor então que v e w têm, cada um, pelo menos dois vizinhos em $\overline{X}$. Neste caso, o grau de x em G_1 é pelo menos quatro, e portanto, G_1 não é subdivisão ímpar de K_4 e nem de $\overline{C_6}$.

Por hipótese, existe uma decomposição em orelhas canônica $\mathcal{D}_1$ de G_1 que usa d orelhas duplas. Seja Q a última orelha de $\mathcal{D}_1$. Logo, $G_1 - Q$ é matching covered. Como G_1 não é subdivisão ímpar K_4 e nem $\overline{C_6}$, podemos concluir que $G_1 - Q$ é não bipartido. Vamos fazer $t := 0$ se Q é simples e $t := 1$ se Q é dupla. Então $\mathcal{D}_1 - Q$ é uma decomposição em orelhas canônica de $G_1 - Q$ que usa $d - t$ orelhas duplas.

Se $x \notin V(Q)$ em G_1 então claramente $G - Q$ é matching covered e se $x \in V(Q)$ então como o grau de x em G_1 é pelo menos quatro e G é simples, concluímos que x deve ser extremo de um caminho de Q. Logo, em G, este caminho tem um extremo em v ou w, digamos v. Como v tem dois vizinhos em $\overline{X}$ temos novamente que $G - Q$ é matching covered. Portanto, $G - Q$ é

matching covered em qualquer caso. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas canônica de $G-Q$ que usa $d-t$ orelhas duplas. Agora acrescente Q a esta decomposição para obter uma decomposição canônica de G com d orelhas duplas. □

Lema 5.6 *Sejam G um grafo matching covered e C um corte justo em G. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações em G. Suponha que existe uma decomposição em orelhas canônica de G_1 que usa d orelhas duplas e que G_2 é bipartido. Então existe uma decomposição em orelhas canônica de G que usa d orelhas duplas.*

Dem. Por indução em $|E(G)|$. Vamos supor que $C := \nabla(X)$ e que G_1 é obtido pela contração de X ao vértice x. Analogamente, G_2 é obtido pela contração de $\overline{X}$ ao vértice $\overline{x}$.

Por hipótese, G_2 é bipartido. Vamos mostrar inicialmente que é suficiente analisar o caso em que G_2 é um brace. Suponha que G_2 não é brace, ou seja, G_2 possui um corte justo não trivial. Tome um corte justo não trivial $D := \nabla(S)$ em G_2 tal que a margem que contém $\overline{x}$ seja maximal. Fixe a notação para que tenhamos $\overline{x} \in S$.

Claramente, D é justo em G. Sejam G' e G'' as duas D-contrações em G onde G' é obtido pela contração de $\overline{S}$. Assim, o corte C é justo em G'. Uma das C-contrações em G' é o grafo G_1 e a outra é um grafo bipartido. Por hipótese de indução, o Lema é verdadeiro para G'. Note que pela escolha que fizemos do corte D, podemos concluir que G'' é brace. Portanto, podemos supor que G_2 é brace.

Suponha que G_2 tenha pelo menos três vértices em cada bipartição. Pelo Lema 3.14, $G_2 - e$ é matching covered para toda aresta e de G_2. Tome então uma aresta $e \in E(G_2)$ que não incide em $\overline{x}$. Assim, $G-e$ também é matching covered e todas as hipóteses do Lema continuam válidas. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas canônica de $G - e$ que usa d orelhas duplas. Agora acrescente e a esta decomposição para obter uma decomposição para G com a mesma propriedade.

Podemos supor então que G_2 tem dois vértices em cada bipartição. Então uma das bipartições de G_2 contém $\overline{x}$ e um outro vértice, digamos u. Vamos denotar os vértices da outra bipartição por v e w. Portanto, $adj(u) = \{v, w\}$. Como G é simples, u tem grau dois em G. Podemos então terminar pelo Lema 5.5. □

Agora, já estamos em condições de provar o Teorema da Decomposição Canônica. Este Teorema é composto pelos dois resultados seguintes que são de autoria de U. S. R. Murty. Um grafo não bipartido matching covered é *quase-bipartido* se ele é obtido pela adição de duas arestas a um grafo bipartido.

Teorema 5.7 *Todo grafo quase-bipartido tem uma decomposição em orelhas canônica que usa uma única orelha dupla.*

Dem. Seja G um grafo quase-bipartido obtido pela adição das arestas e e f a um grafo bipartido H. Suponha que G é brick. Se G é K_4 ou $\overline{C_6}$, não há nada a provar. Se não, G contém uma aresta h tal que $G - h$ é matching covered (Teor. Lovász). Claramente, $G - h$ é quase-bipartido. Por hipótese de indução, $G - h$ tem uma decomposição em orelhas canônica que usa uma única orelha dupla. Adicione h a esta decomposição para obter uma decomposição canônica de G que usa uma única orelha dupla.

Se G não é brick então tome um corte justo C em G. Uma das C-contrações é bipartida e a outra é um grafo G_1 quase-bipartido. Por hipótese de indução, G_1 tem uma decomposição em orelhas canônica que usa uma única orelha dupla. Pelo Lema 5.6, G tem uma decomposição em orelhas canônica que usa uma única orelha dupla. □

Teorema 5.8 *Sejam G um grafo matching covered não bipartido e $\mathcal{D}$ uma decomposição em orelhas de G que usa d orelhas duplas. Então G tem uma decomposição em orelhas canônica que usa no máximo d orelhas duplas.*

Dem. Por indução em $|E(G)|$. Seja $\mathcal{D} := K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ uma decomposição em orelhas de G que usa d orelhas duplas.

Se G_{n-1} é não bipartido então, por hipótese de indução, G_{n-1} tem uma decomposição em orelhas canônica, $\mathcal{D}_1$, que usa d ou $d-1$ orelhas duplas dependendo se a última orelha de $\mathcal{D}$ é simples ou dupla, respectivamente. Portanto, adicionando à $\mathcal{D}_1$ a última orelha de $\mathcal{D}$ temos uma decomposição em orelhas canônica de G que usa d orelhas duplas.

Podemos supor então que G_{n-1} é bipartido. Como G é não bipartido, a última orelha de $\mathcal{D}$ é dupla e $d = 1$. Se G tem um vértice de grau dois então podemos resolver pelo Lema 5.5. Suponha então que nenhum vértice de G tem grau dois. Vamos denotar por (A, B) a bipartição de G_{n-1}. Por hipótese,

G é não bipartido. Então a última orelha de $\mathcal{D}$ é dupla e composta por duas arestas, sendo que uma delas tem ambos os extremos em A e a outra tem ambos os extremos em B. Logo, G é quase-bipartido. Pelo Lema 5.7, G tem uma decomposição em orelhas canônica que usa uma única orelha dupla. □

Capítulo 6

Cortes Robustos

6.1 Introdução

Neste Capítulo apresentaremos alguns cortes ímpares especiais que os bricks em geral possuem. Apresentaremos também várias propriedades destes cortes. Estas propriedades serão importantes para demonstrarmos, no próximo Capítulo, o Teorema de Lovász-Vempala.

Na seção 6.2 introduzimos o conceito de cortes bons para bricks. Para se ter uma idéia, um corte ímpar em um brick é bom se ele satisfaz duas condições; uma delas diz que as duas contrações deste corte devem ser matching covered. Este conceito nos permite provar nesta seção um Teorema que é uma relaxação do Teorema de Lovász-Vempala.

Na seção 6.3 mostramos que os bricks em geral possuem cortes bons tais que cada uma das contrações deste corte, além de ser matching covered, ainda possui a propriedade de que sua decomposição em cortes justos fornece um único brick. Estes cortes recebem o nome de robustos.

Na seção 6.4 estudamos as propriedades dos cortes robustos que possuem uma margem de tamanho mínimo.

6.2 Cortes bons

Nesta seção introduziremos o conceito de cortes bons para bricks. Este conceito nos permitirá provar um Teorema que, na verdade, é uma relaxação do Teorema de Lovász-Vempala. Alguns Lemas são necessários.

Lema 6.1 *Sejam G um brick, $C := \nabla(X)$ um corte ímpar em G e G' o grafo obtido de G contraindo X a um único vértice x. Então G' é brick se, e somente se, $G - X$ é 2-conexo e crítico.*

Dem. Se G' é brick então claramente $G - X$ é 2-conexo e crítico. Suponha que $G - X$ é 2-conexo e crítico, e vamos mostrar que G' é brick.

Vamos mostrar inicialmente que G' tem emparelhamento perfeito. Seja u um vértice de G' que é adjacente a x. Como $G - X$ é crítico, $G' - \{u, x\}$ tem emparelhamento perfeito M'. Logo, M' acrescido da aresta (u, x) é um emparelhamento perfeito de G'. Portanto, G' tem emparelhamento perfeito.

Vamos mostrar agora que G' não possui barreiras não triviais. Seja B uma barreira não trivial em G'. Como G' tem emparelhamento perfeito, temos que $|\mathcal{I}(G' - B)| = |B|$. Se x pertence a alguma componente ímpar de $G' - B$ então B seria uma barreira não trivial em G. Logo, $x \in B$. Seja y um vértice de B tal que $y \neq x$. Então $(G - X) - y = G' - \{x, y\}$ não tem emparelhamento perfeito. Mas isto é uma contradição, pois $G - X$ é crítico. Portanto, G' não possui barreiras não triviais. Além disso, G' possui emparelhamento perfeito. Portanto, G' é bicrítico.

Suponha que G' não é 3-conexo. Então G' contém um 2-separador $\{u, v\}$. Se u e v são distintos de x então $\{u, v\}$ é um 2-separador em G. Se $u = x$ então v é vértice de corte de $G - X$. Em ambos os casos temos uma contradição. Logo, G' é 3-conexo.

Portanto, G' é bicrítico e 3-conexo, ou seja, é um brick. □

Lema 6.2 *Seja G um grafo conexo e suponha que contraindo dois vértices u_1 e u_2 de G obtemos um grafo crítico. Então G tem emparelhamento perfeito.*

Dem. Veja [13, pág. 80]. □

Lema 6.3 *Seja G um grafo conexo, u_1, u_2, v_1 e v_2 quatro vértices de G tais que contraindo u_1 e u_2 para formar u, v_1 e v_2 para formar v, e ligando u e v por uma aresta obtemos um brick. Então um dos grafos G, $G - u_1 - v_1$, e $G - u_2 - v_2$ tem emparelhamento perfeito a não ser que G seja o grafo "H" da Figura 6.1.*

Dem. Veja [13, pág. 80], [10]. □

Um corte C em um brick G é *bom* se:

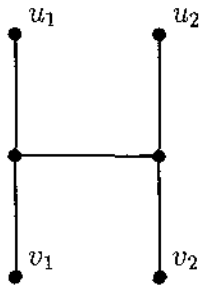


Figura 6.1: Grafo H.

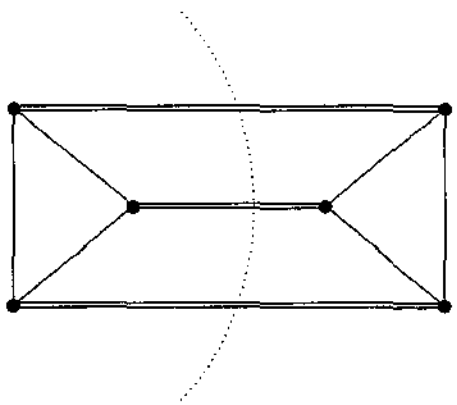


Figura 6.2: Um corte bom no grafo $\overline{C_6}$.

- As duas C-contrações em G são matching covered;
- Existe um emparelhamento perfeito M_0 em G tal que $|M_0 \cap C| = 3$.

Claramente, o segundo item desta definição nos garante que um corte bom é ímpar e não trivial. A seguir apresentaremos alguns exemplos de cortes bons em bricks. O grafo $\overline{C_6}$ claramente contém um corte bom (Figura 6.2). Os Lemas a seguir apresentam alguns cortes bons mais interessantes e que serão usados posteriormente.

Lema 6.4 *Seja G um brick e e uma aresta de G. Sejam X e Y partes de $V(G)$ tais que:*

1. *O grafo* $G' := G - e$ *é matching covered.*

2. *Os cortes* $C' := \nabla_{G'}(X)$ *e* $D' := \nabla_{G'}(Y)$, *associados em* G' *a* X *e a* Y, *respectivamente, são ambos justos e não triviais.*

3. *Para cada emparelhamento perfeito* M *de* G, *os cortes* $C := \nabla(X)$ *e* $D := \nabla(Y)$ *em* G *satisfazem a desigualdade*

$$|M \cap C| + |M \cap D| \leq 4.$$

Então os cortes C *e* D *são ambos bons em* G.

Dem. Vamos inicialmente provar que ambas as C-contrações em G são matching covered. Para isto, basta provar que para toda aresta f de G existe um emparelhamento perfeito M_f de G que contém f e que contém precisamente uma aresta de C.

Dado que G' é matching covered e que C' é justo em G', esta propriedade vale trivialmente para toda aresta f de G distinta de e. Para a aresta e, observe que o corte D não é trivial em G pois D' não é trivial em G'; dado que G é um brick, D não é justo em G. Assim, G tem um emparelhamento perfeito M_C tal que $|M_C \cap D| \geq 3$.

Da terceira hipótese, segue que $|M_C \cap D| = 3$ e $|M_C \cap C| = 1$. Além disso, D' é justo em G' e portanto M_C não é um emparelhamento perfeito em G'; assim, $e \in M_C$. De fato, ambas as C-contrações de G são matching covered.

Mas vimos também que $|M_C \cap D| = 3$. Por simetria, existe um emparelhamento perfeito M_D de G tal que $|M_D \cap C| = 3$. De fato, C é bom em G. Por simetria, D também é. □

Lema 6.5 *Seja* G *um brick e* e *uma aresta tal que* $G - e$ *é matching covered e contém uma 2-separação. Então todo corte justo associado à uma 2-separação de* $G - e$ *é bom em* G.

Dem. Vamos fazer $e := (v_1, v_2)$ e seja $\{u, v\}$ uma 2-separação em $G - e$. Como G é 3-conexo, esta 2-separação deve separar v_1 de v_2; caso contrário, $\{u, v\}$ seria uma 2-separação em G. Na verdade, $G - e - \{u, v\}$ contém exatamente duas componentes e estas são pares. Além disso, uma delas contém v_1 e a outra contém v_2.

Sejam C e C' os cortes justos de $G - e$ associados à 2-separação $\{u, v\}$. Claramente, estes cortes são não triviais. Além disso, para cada emparelhamento perfeito M de G, os cortes C e C', considerados agora como cortes em G, satisfazem a desigualdade

$$|M \cap C| + |M \cap D| \leq 4.$$

Pelo Lema 6.4, C e C' são ambos bons em G. □

Suponha que G seja um brick e que e seja uma aresta tal que $G' := G - e$ é matching covered. Seja B uma barreira não trivial em G' e seja H uma componente não trivial de $G' - B$. Por um argumento de contagem é fácil mostrar o seguinte resultado:

Lema 6.6 *Para todo emparelhamento perfeito M de G tem-se $|M \cap \nabla(V(H))| \leq 3$, com igualdade para no máximo uma das componentes de $G' - B$, e somente se $e \in M$.* □

Considere agora o grafo L obtido de G' contraindo $V(G) - V(H)$ a um único vértice b.

Lema 6.7 *Para toda 2-separação de L, os cortes em G, correspondentes aos cortes justos em L provenientes da 2-separação, são bons.*

Dem. Seja $\{u, v\}$ uma 2-separação de L e sejam C e C' os cortes justos de G' associados à 2-separação $\{u, v\}$.

Se $b \notin \{u, v\}$ então C e C' são cortes justos associados à uma 2-separação de G' e, pelo Lema 6.5, eles são bons em G. Podemos supor então que $b = u$ ou $b = v$, digamos $b = v$ (Figura 6.3).

Pelo Lema 6.6, $|M \cap \nabla(V(H))| \leq 3$, para todo emparelhamento perfeito M de G. Assim, os requisitos do Lema 6.4 estão satisfeitos, pois se considerarmos C e C' como cortes em G temos que

$$|M \cap C| + |M \cap C'| = |M \cap \nabla(V(H))| + 1 \leq 4.$$

Portanto, C e C' são bons em G. □

Vamos apresentar um terceiro exemplo de corte bom em um brick. Suponha que G seja um brick e que e seja uma aresta tal que $G' := G - e$ é matching covered. Seja B uma barreira não trivial em G'.

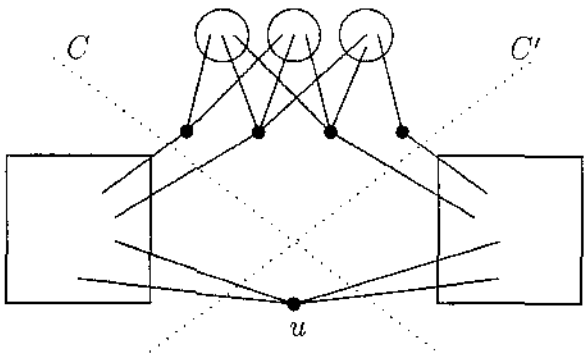


Figura 6.3: Exemplo de corte bom.

Lema 6.8 *Suponha que $G' - B$ tenha duas componentes não triviais. Então todo corte associado à uma componente não trivial de $G' - B$ é bom em G.*

Dem. Sejam H_1 e H_2 duas componentes não triviais de $G' - B$ e seja M um emparelhamento perfeito em G. Pelo Lema 6.6,

$$|M \cap \nabla(V(H_1))| + |M \cap \nabla(V(H_2))| \leq 4.$$

Novamente, as condições do Lema 6.4 estão satisfeitas. Portanto, ambos os cortes são bons. □

Relembre que o número de bricks de uma decomposição em cortes justos de um grafo matching covered G é denotado por $b(G)$. O Teorema 4.17 afirma que se G é um brick diferente de K_4 e $\overline{C_6}$ então G contém uma aresta e tal que $G - e$ é matching covered. Porém, se tomarmos uma aresta e qualquer de G, o número de bricks de $G - e$ pode ser arbitrariamente grande. O que gostaríamos é de obter uma aresta uma aresta e tal que $b(G - e)$ fosse o menor possível.

Motivados por este problema, introduzimos a seguinte definição: Dizemos que uma arestas e em um brick G é *disponível* se $G - e$ é matching covered e $b(G - e) = 1$.

O Teorema de Lovász-Vempala afirma que todo brick diferente do K_4, $\overline{C_6}$ e do grafo de Petersen contém uma aresta disponível. O Teorema a seguir é uma relaxação deste.

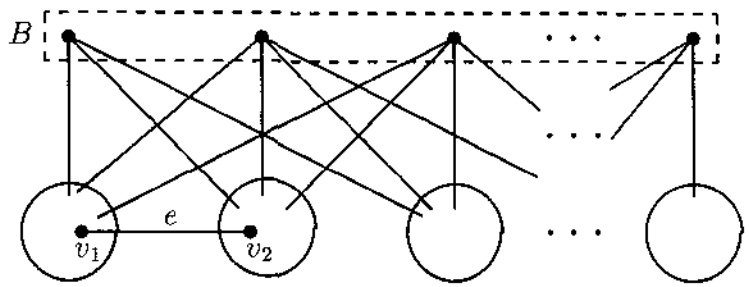


Figura 6.4: B é uma barreira não trivial maximal em $G - e$.

Teorema 6.9 *Seja G um brick e e uma aresta tal que $G - e$ é matching covered. Então*

(i) *Ou a aresta e é disponível em G.*

(ii) *Ou G contém um corte bom.*

(iii) *Ou G é o grafo de Petersen.*

Dem. Vamos fazer $e := (v_1, v_2)$. Por hipótese, $G - e$ é matching covered. Se $G - e$ é brick então e é disponível em G. Podemos assumir então que $G - e$ não é brick.

Se $G - e$ é bicrítico então como $G - e$ não é brick, ele deve ter uma 2-separação. Pelo Lema 6.5, G possui um corte bom.

Portanto, $G - e$ não é bicrítico, ou seja, ele deve possuir uma barreira não trivial. Seja B uma barreira não trivial maximal de $G - e$. Como G não contém barreira não trivial, os extremos v_1 e v_2 de e devem pertencer a componentes distintas de $G - e - B$. (Figura 6.4).

Se $G - e - B$ possui mais de uma componente não trivial então pelo Lema 6.8, G possui um corte bom. Podemos supor então que $G - e - B$ possui exatamente uma componente não trivial. Note que esta propriedade vale para toda barreira maximal não trivial de $G - e$. Podemos concluir então que $G - e$ satisfaz o item 2 ou 3 do Teorema 3.23.

Suponha que $G - e$ satisfaz o item 2 do Teorema 3.23, ou seja, $G - e$ possui uma barreira não trivial B tal que se A é o conjunto das componentes triviais de $G - e - B$ então o grafo L obtido de $G - e$ pela contração de $B \cup A$ a um único vértice b é bicrítico. Então e possui um extremo, digamos v_1, em A.

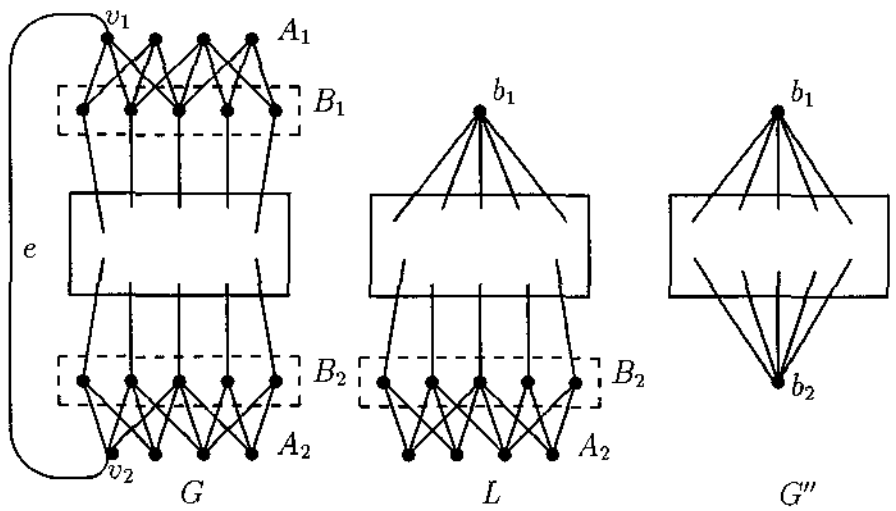


Figura 6.5: Os grafos G, L e G''.

Se L é brick então $b(G-e)=1$, ou seja, e é disponível em G. Suponha então que L não é brick. Logo, L deve conter uma 2-separação. Pelo Lema 6.7, G possui um corte bom.

Portanto, $G-e$ deve satisfazer o item 3 do Teorema 3.23. Ou seja, $G-e$ possui duas barreiras não triviais B_1 e B_2, onde uma delas, digamos B_1, é maximal em $G-e$, tais que $G-e-B_i$ $(i=1,2)$ possui uma única componente não trivial e se A_i $(i=1,2)$ representa o conjunto das componentes triviais de $G-e-B_i$ então $B_1 \cup A_1$ é disjunto de $B_2 \cup A_2$ e o grafo G'' obtido de $G-e$ pela contração de $B_1 \cup A_1$ a um único vértice b_1 e pela contração de $B_2 \cup A_2$ a um único vértice b_2 é bicrítico. Além disso, em G, a aresta e possui um extremo em A_1 e o outro em A_2 (Figura 6.5). Observe que G'' é resultado de contrações de cortes justos de $G-e$.

Lema 6.9.1 *G'' não é brick.*

Dem. Se G'' é brick então e é disponível em G. □

Portanto, G'' é bicrítico mas não é brick. Conseqüentemente, ele deve conter uma 2-separação.

Lema 6.9.2 *A única 2-separação de G'' é $\{b_1, b_2\}$.*

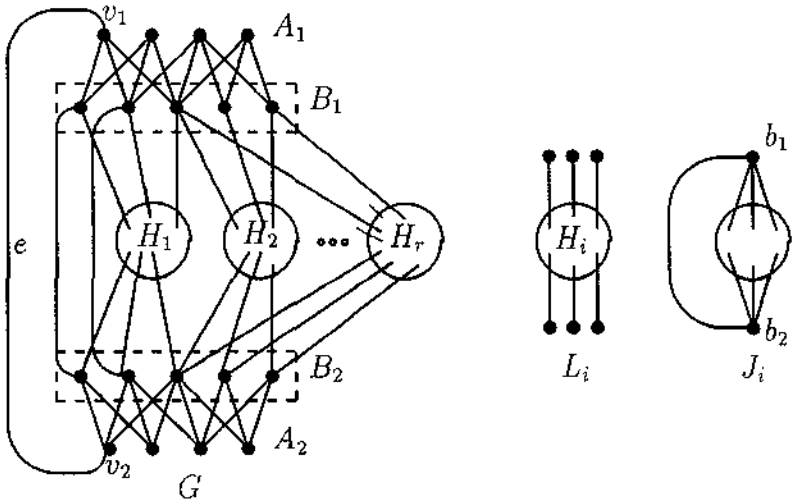


Figura 6.6: Os grafos G, L_i e J_i.

Dem. Se $\{x, y\}$ é uma 2-separação de G'' onde nem x nem y está em $\{b_1, b_2\}$ ou se $\{x, b_1\}$ é uma 2-separação de G'' onde $x \notin \{b_1, b_2\}$ então pelos Lemas 6.5 e 6.7, respectivamente, temos que G possui um corte bom. □

Sejam $H_1, H_2, \ldots, H_r$ as componentes conexas de $G'' - \{b_1, b_2\}$. Se alguma destas componentes é ímpar então, por paridade, pelo menos duas delas devem ser ímpares e, neste caso, $B_1 \cup B_2$ seria uma barreira não trivial em $G - e$. Mas isto contradiz a maximalidade de B_1. Portanto, todas estas componentes H_i são pares. Como $\{b_1, b_2\}$ é uma 2-separação de G'', devemos ter $r \geq 2$ (Figura 6.6).

Para $i = 1, 2, \ldots, r$, seja L_i o grafo formado a partir de H_i acrescentando as arestas que ligam H_i a B_1 e H_i a B_2. E seja J_i o grafo obtido de L_i contraindo-se os vértices de B_1 e também os de B_2 e ligando-se os vértices resultantes das contrações por uma aresta (Figura 6.6).

Note que cada H_i deve estar ligada a B_1 por pelo menos uma aresta (caso contrário, $G - e - B_2$ teria uma componente par). Da mesma forma, H_i deve estar ligada a B_2 por pelo menos uma aresta.

Vamos mostrar que cada H_i está ligada a B_1 (e a B_2) por pelo menos duas arestas não vizinhas. Se existe $u \in B_1$ tal que $adj(H_i) \cap B_1 = \{u\}$ então considere o grafo G' obtido de $G - e$ contraindo $B_2 \cup A_2$ a um único vértice b_2. Os vértices u e b_2 formam uma 2-separação neste grafo. Pelo Lema 6.7,

G possui um corte bom.

Se existe $u \in H_i$ tal que $adj(B_1) \cap H_i = \{u\}$ então $\{b_2, u\}$ seria uma barreira em G'', o que é uma contradição pois G'' é bicrítico. Portanto, cada H_i está ligada a B_1 e a B_2 por pelo menos duas arestas não vizinhas.

Lema 6.9.3 *Cada J_i é um brick.*

Dem. Segue do fato de que G'' é bicrítico e do Lema 6.9.2. □

Para a parte restante desta demonstração, precisamos construir emparelhamentos perfeitos especiais de G. Eles podem ser obtidos combinando os três tipos de emparelhamentos descritos abaixo:

(i) Para cada i, existe um emparelhamento X_i em L_i que emparelha dois vértices de H_i com dois vértices de B_1 e os demais vértices de H_i são emparelhados entre si. (**Dem.** O grafo $J_i - b_2$ é crítico. Seja H_i' o grafo obtido de $J_i - b_2$ quebrando b_1 em dois vértices. Pelo Lema 6.2, H_i' tem emparelhamento perfeito.)

Da mesma forma, existe um emparelhamento Y_i em L_i que emparelha dois vértices de H_i com dois vértices de B_2 e os demais vértices de H_i são emparelhados entre si.

(ii) Para cada i, H_i tem um emparelhamento perfeito Q_i. (Note que $H_i = J_i - \{b_1, b_2\}$. Como J_i é brick, segue que H_i tem emparelhamento perfeito.)

(iii) Dados quaisquer dois vértices p e q de B_1 existe um emparelhamento N_1 que emparelha v_1 com v_2 e os vértices de $A_1 - \{v_1\}$ com os de $B_1 - \{p, q\}$. (Como G é brick, $G - \{p, q\}$ tem emparelhamento perfeito. Um emparelhamento perfeito de $G - \{p, q\}$ obviamente contém tal emparelhamento N_1.)

Da mesma forma, dados quaisquer dois vértices p e q de B_2 existe um emparelhamento N_2 que emparelha v_1 com v_2 e os vértices de $A_2 - \{v_2\}$ com os de $B_2 - \{p, q\}$.

Lema 6.9.4 *Considere o corte $C := \nabla(A_1 \cup B_1 \cup H_1)$. Ambas as C-contrações em G são matching covered.*

Dem. O corte C é justo em $G - e$. Logo, ambas as C-contrações em $G - e$ são matching covered. Considere o emparelhamento perfeito $F := X_1 \cup Y_2 \cup N_1 \cup N_2 \cup Q_3 \cup \cdots \cup Q_r$ de G. Observe que $e \in F$ e $|F \cap C| = 1$. Logo, ambas as C-contrações em G também são matching covered. □

Lema 6.9.5 *O número r de componentes pares de $G-e-(A_1 \cup B_1)-(A_2 \cup B_2)$ é dois.*

Dem. Suponha que $r \geq 3$. Considere o corte $C := \nabla(A_1 \cup B_1 \cup H_1)$. Pelo Lema 6.9.4, ambas as C-contrações em G são matching covered. Seja $F = Q_1 \cup X_2 \cup Y_3 \cup N_1 \cup N_2 \cup Q_4 \cup Q_5 \cup \cdots \cup Q_r$. Então $|C \cap F| = 3$, e portanto, C é bom. □

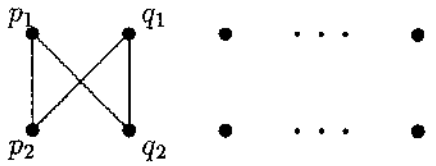
Deste ponto até o final da demonstração vamos fazer $C := \nabla(A_1 \cup B_1 \cup H_1)$. Vamos agora definir um emparelhamento em L_1 como sendo do *tipo 1* se ele emparelha um vértice de H_1 com um vértice de B_1, outro vértice de H_1 com um vértice de B_2 e o restante dos vértices de H_1 são emparelhados entre si. Da mesma forma, defina um emparelhamento em L_2 como sendo do *tipo 2* se ele emparelha um vértice de H_2 com um vértice de B_1, outro vértice de H_2 com um vértice de B_2 e o restante dos vértices de H_2 são emparelhados entre si.

Lema 6.9.6 *Se M_1 é do tipo 1 e M_2 é do tipo 2 então $M_1 \cup M_2$ não é emparelhamento em G.*

Dem. Se $M_1 \cup M_2$ é emparelhamento então considere $F := M_1 \cup M_2 \cup N_1 \cup N_2$. Claramente, F é emparelhamento perfeito de G e $|F \cap C| = 3$. Pelo Lema 6.9.4, ambas as C-contrações são matching covered. Portanto, C é bom. □

Temos agora informações suficientes para deduzir que G é, na verdade, o grafo de Petersen. Vamos definir um grafo bipartido W que será 2-aresta-colorível. A bipartição de W será (B_1, B_2). Um vértice p em B_1 será ligado a um vértice p' em B_2 por uma aresta vermelha se existir um emparelhamento do tipo 1 em L_1 que os satura. Analogamente, existirá uma aresta azul entre p e p' se existir um emparelhamento do tipo 2 em L_2 que os satura.

Pelo Lema 6.9.6, nenhuma aresta vermelha é disjunta de uma aresta azul. Como J_1 é brick, e portanto matching covered, todo vértice de $B_1 \cup B_2$ que é



vermelhas: (p_1, p_2) e (q_1, q_2)
azuis: (p_1, q_2) e (p_2, q_1)

Figura 6.7: Grafo bipartido W.

adjacente em G com um vértice em H_1 é saturado por um emparelhamento do tipo 1 e, conseqüentemente, é incidente em W com uma aresta vermelha. Portanto, existem pelo menos dois vértices em B_1 e pelo menos dois em B_2 que são incidentes a uma aresta vermelha. O mesmo acontece com as arestas azuis.

Como nenhuma aresta vermelha é disjunta de uma aresta azul, W deve ser composto por um 4-ciclo p_1, p_2, q_1, q_2, onde $\{p_i, q_i\} \subseteq B_i$ $(i = 1, 2)$, e possivelmente alguns vértices isolados (Figura 6.7).

Vamos mostrar agora que, na verdade, $B_i = \{p_i, q_i\}$ $(i = 1, 2)$. Suponha que B_1 contenha um vértice x distinto de p_1 e q_1. Se x é vizinho de algum vértice y em B_2 então existe um emparelhamento M em G do tipo 1 ou 2 tal que M acrescido da aresta (x, y) também é emparelhamento em G. Claramente, $M \cup (x, y)$ pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de G que intercepta C em três arestas.

Concluímos então que nenhum vértice de B_1 pode estar ligado a um de B_2. Portanto, qualquer outro vértice de $B_1 - \{p_1, q_1\}$ deve somente ser adjacente a vértices em A_1. Isto implica que A_1 é uma barreira em G. Como G é brick, devemos ter $|A_1| = 1$. analogamente, $|A_2| = 1$.

Se L_1 ou L_2 tem emparelhamento perfeito, digamos M, então M pode ser estendido a um emparelhamento de G que intercepta C em três arestas.

Resumindo, temos as seguintes informações sobre L_1: Identificando p_1 com q_1, e p_2 com q_2, e ligando os vértices resultantes por uma aresta, obtemos o brick J_1. Nenhum dos três grafos L_1, $L_1 - \{p_1, q_2\}$ e $L_1 - \{q_1, p_2\}$ têm emparelhamento perfeito. Pelo Lema 6.3, L_1 deve ser isomorfo ao grafo da Figura 6.1. Analogamente, L_2 deve ser isomorfo ao mesmo grafo (Figura 6.8). Então G é o grafo de Petersen (Figura 6.9). □

Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

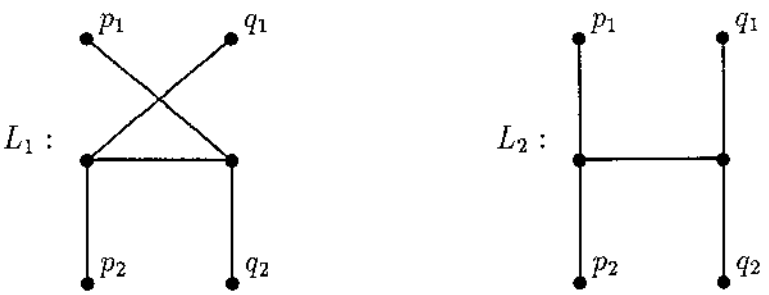


Figura 6.8: Grafos L_1 e L_2.

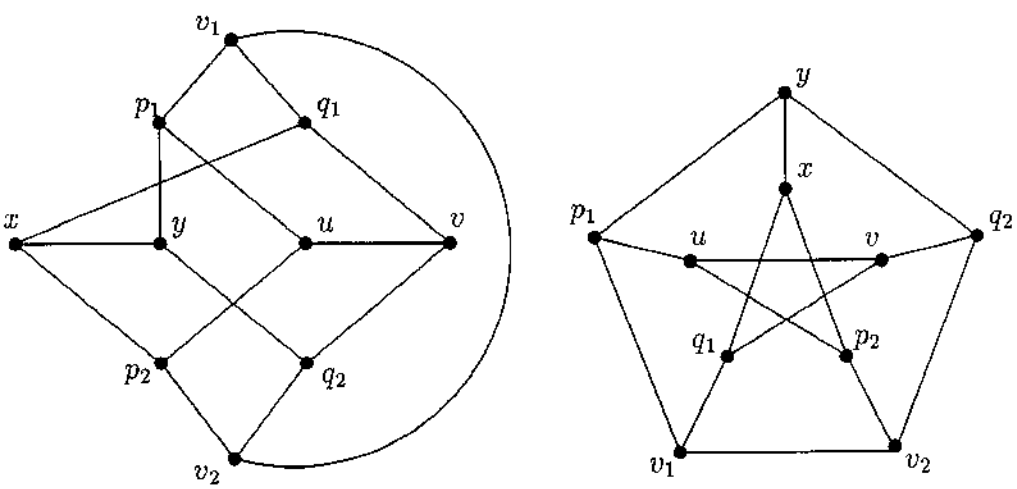


Figura 6.9: O grafo de Petersen.

Teorema 6.10 *Todo brick distinto do K_4 e do grafo de Petersen contém uma aresta disponível ou um corte bom.*

Dem. Seja G um brick distinto do K_4 e do grafo de Petersen. Se $G = \overline{C_6}$ então G tem um corte bom. Podemos supor então que G não é o $\overline{C_6}$.

Pelo Teorema 4.17, G possui uma aresta e tal que $G - e$ é matching covered. Podemos agora usar o Teorema 6.9 para concluir que e é disponível ou G possui um corte bom. □

6.3 Cortes robustos

Um corte bom C em um brick G é *robusto* se cada uma das C-contrações possui um único brick.

Para um corte ímpar C, vamos denotar por $\mathcal{M}_k(C)$ o conjunto dos emparelhamentos perfeitos M de G que intercepta C em exatamente k arestas, ou seja, $|M \cap C| = k$.

Seja G um brick e seja C um corte bom em G. Seja M_0 um emparelhamento perfeito de G tal que $|M_0 \cap C| = 3$. Então $\mathcal{M}_1(C) \neq \emptyset$ e $M_0 \in \mathcal{M}_3(C)$.

Considere agora o conjunto $\mathcal{C}_1$ de todos os cortes bons C' de G tais que:

1. $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(C')$.
2. $M_0 \in \mathcal{M}_3(C')$.
3. $\mathcal{M}_1(C')$ é maximal.

Para $j = 3, 5, \ldots$, seja $\mathcal{C}_j$ o conjunto de todos os cortes C' de $\mathcal{C}_{j-2}$ tais que $\mathcal{M}_j(C')$ é maximal. Seja $k := max\{j : \mathcal{C}_j \neq \emptyset\}$. O Teorema a seguir mostra que os cortes do conjunto $\mathcal{C}_k$ são todos robustos.

Teorema 6.11 *Se $C \in \mathcal{C}_k$ então C é robusto.*

Dem. Vamos denotar as margens de C por X e $\overline{X}$. Seja G_1 o grafo obtido de G contraindo-se a margem $\overline{X}$ a um único vértice $\overline{x}$. Vamos mostrar que $b(G_1) = 1$ por indução em $|V(G_1)|$.

Como $C \in \mathcal{C}_k$ temos que:

- As duas C-contrações em G são matching covered;

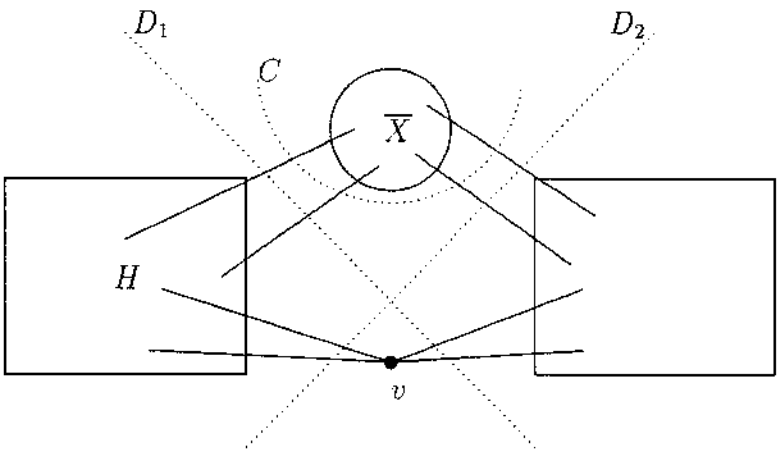


Figura 6.10: Grafo G.

- O emparelhamento perfeito M_0 de G é tal que $|M_0 \cap C| = 3$.

Então G_1 é matching covered. Se G_1 é brick, não há nada a fazer. Suponha então que G_1 não é brick. Se G_1 é bicrítico então, não sendo brick, G_1 possui uma 2-separação $\{u, v\}$. O grafo $G_1 - \{u, v\}$ é composto por várias componentes pares. Claramente, devemos ter $\overline{x} = u$ ou $\overline{x} = v$, senão $\{u, v\}$ seria uma 2-separação em G. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{x} = u$.

Seja H uma das componentes pares de $G_1 - \{u, v\}$ e considere os cortes $D_1 := \nabla(V(H) \cup \{v\})$ e $D_2 := \nabla(V(H) \cup V(\overline{X})\})$ (Figura 6.10). Para todo emparelhamento perfeito M de G tem-se:

$$|M \cap C| + |M \cap \nabla(v)| = |M \cap D_1| + |M \cap D_2|. \tag{6.1}$$

Mas $|M \cap \nabla(v)| = 1$. Logo, reescrevendo a equação temos:

$$|M \cap C| + 1 = |M \cap D_1| + |M \cap D_2|. \tag{6.2}$$

Desta equação, podemos concluir que $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(D_1)$ e $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(D_2)$. Além disso, como $|M_0 \cap C| = 3$, concluímos que M_0 intercepta um de D_1 e D_2, digamos D_1, em exatamente três aresta e o outro em uma. Portanto, o corte D_1 é bom, $M_0 \in \mathcal{M}_3(D_1)$ e $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(D_1)$.

Vamos mostrar que $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D_1)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,k$, por indução em k. Já vimos que $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(D_1)$. Suponha que $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D_1)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,i$, e $\mathcal{M}_{i+2}(C) \not\subseteq \mathcal{M}_{i+2}(D_1)$. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G tal que $|F \cap C| = i+2$ e $|F \cap D_1| \neq i+2$. Pela equação 6.2, $|F \cap D_1| = i' < i+2$. Ou seja, $F \in \mathcal{M}_{i'}(D_1)$ mas $F \notin \mathcal{M}_{i'}(C)$. Então $\mathcal{M}_{i'}(C)$ está contido propriamente em $\mathcal{M}_{i'}(D_1)$. Mas isto contradiz a escolha de C. Portanto, $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D_1)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots.k$. Podemos concluir então que $D_1 \in \mathcal{C}_j$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,k$.

Vamos mostrar agora que $\mathcal{M}_i(C)$ está contido propriamente em $\mathcal{M}_i(D_1)$, para algum $1 \leq i \leq k$, o que também contradiz a escolha de C. O corte D_2 não é justo em G. Seja F um emparelhamento perfeito de G tal que $|F \cap D_2| \geq 3$. Pela equação 6.2, devemos ter $|F \cap C| > |F \cap D_1| = i$. Logo, $F \in \mathcal{M}_i(D_1)$ mas $F \notin \mathcal{M}_i(C)$. Então $\mathcal{M}_i(C)$ está contido propriamente em $\mathcal{M}_i(D_1)$. Novamente temos uma contradição a escolha de C.

Podemos supor então que G_1 é matching covered e não é bicrítico. Portanto, ele possui uma barreira não trivial B. Conseqüentemente, o vértice $\overline{x}$ pertence a B, pois caso contrário, B seria uma barreira não trivial em G.

Seja K uma componente não trivial de $G_1 - B$ e seja $C' := \nabla(V(K))$. Ambas as C'-contrações em G são claramente matching covered. Por contagem temos que, para todo emparelhamento perfeito M de G,

$$|M \cap C| \geq |M \cap C'|, \tag{6.3}$$

com igualdade se, e somente se, $|M \cap \nabla(V(J))| = 1$ para qualquer outra componente J de $G_1 - B$ distinta de K. Da equação 6.3, podemos concluir que $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(C')$.

Como $|M_0 \cap C| = 3$ podemos concluir, por contagem, que existe uma componente de $G_1 - B$, digamos H, tal que $|M_0 \cap \nabla(V(H))| = 3$. Seja $D := \nabla(V(H))$. Como as duas D-contrações em G são matching covered, temos que D é bom em G.

Vamos mostrar que $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,k$, por indução em k. Já vimos que $\mathcal{M}_1(C) \subseteq \mathcal{M}_1(D)$. Suponha que $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,i$, e $\mathcal{M}_{i+2}(C) \not\subseteq \mathcal{M}_{i+2}(D)$. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G tal que $|F \cap C| = i+2$ e $|F \cap D| \neq i+2$. Pela equação 6.3, $|F \cap D| = i' < i+2$. Ou seja, $F \in \mathcal{M}_{i'}(D)$ mas $F \notin \mathcal{M}_{i'}(C)$. Então $\mathcal{M}_{i'}(C)$ está contido propriamente em $\mathcal{M}_{i'}(D)$. Mas isto contradiz a escolha de C. Portanto, $\mathcal{M}_j(C) \subseteq \mathcal{M}_j(D)$, $\forall j = 1,3,5,\ldots,k$. Podemos concluir então que

$D \in \mathcal{C}_j$, $\forall j = 1, 3, 5, \ldots, k$.

Vamos mostrar agora que H é a única componente não trivial de $G_1 - B$. Suponha que $G_1 - B$ possua uma outra componente H' não trivial. Seja $D' := \nabla(V(H'))$.

O corte D' é ímpar e não trivial, e portanto, não justo em G. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G tal que $|F \cap D'| \geq 3$. Então $|F \cap D| = i < |F \cap C|$. Ou seja, $F \in \mathcal{M}_i(D)$ e $F \notin \mathcal{M}_i(C)$. Conseqüentemente, $\mathcal{M}_i(D)$ contém propriamente $\mathcal{M}_i(C)$. Isto novamente contradiz a escolha de C.

Portanto, H é a única componente não trivial de $G_1 - B$. Uma das D-contrações em G_1 é bipartida, e a outra, que vamos denotar por G_1' é não bipartida. Por hipótese de indução, $b(G_1') = 1$. Então $b(G_1) = 1$. De forma análoga podemos mostrar que $b(G_2) = 1$. □

Chamaremos os elementos de $\mathcal{C}_k$ de cortes robustos M_0-*induzidos* por C.

Corolário 6.12 *Se um brick possui um corte bom então ele possui um corte robusto.* □

6.4 Cortes robustos especiais

Seja G um brick que possui um corte robusto. Vamos tomar um corte robusto $C := \nabla(X)$ em G tal que a margem X tenha tamanho mínimo.

Seja G_1 o grafo obtido de G contraindo-se $\overline{X}$ a um único vértice $\overline{x}$, e G_2 o grafo obtido de G contraindo-se X a um único vértice x. Por definição de corte robusto, temos que $b(G_1) = b(G_2) = 1$. Além disso, G contém um emparelhamento perfeito M_0 tal que $|M_0 \cap C| = 3$. Vamos estudar algumas propriedades interessantes que o grafo G_1 possui.

Lema 6.13 *Se G_2 (ou G_1) possui um corte justo não trivial C' então em G temos que $\mathcal{M}_j(C) = \mathcal{M}_j(C')$, $\forall j = 1, 3, 5, \ldots$. Ou seja, C' também é robusto em G.*

Dem. Suponha, por exemplo, que G_2 possui um corte justo não trivial C'. Sejam H_1 e H_2 as duas C'-contrações em G_2. Fixe a notação de tal forma que $x \in V(H_1)$. Como C' é justo em G_2 e $b(G_2) = 1$, um de H_1 e H_2 é bipartido. Se H_2 é bipartido então, como $x \in V(H_1)$, uma das bipartições

de H_2 é barreira não trivial em G. Mas G não possui barreira deste tipo. Portanto, H_1 é bipartido.

Observe que H_1 contém dois vértices que são resultados de contrações de conjuntos ímpares não triviais de vértices: um deles é x, e o outro, digamos y, é o vértice resultante da contração de uma margem de C'.

Se x e y pertencem à uma mesma bipartição de H_1 então a outra bipartição é uma barreira não trivial em G. Portanto, x e y devem pertencer a bipartições distintas de H_1. Neste caso, podemos ver facilmente que $\mathcal{M}_j(C) = \mathcal{M}_j(C'), \forall j = 1, 3, 5, \ldots$, em G. □

Corolário 6.14 *G_1 é brick.*

Dem. Pela minimalidade de X, temos que G_1 não possui um corte que é robusto em G. Portanto, pelo Lema 6.13, G_1 não possui corte justo não trivial. □

Lema 6.15 *G_1 não possui um corte ímpar D tal que:*

(i) *As duas D-contrações em G são matching covered.*

(ii) *Existe um emparelhamento perfeito M' de G tal que $M' \in \mathcal{M}_3(D)$ e $M' \notin \mathcal{M}_3(C)$.*

(iii) *Toda aresta de C pertence a um emparelhamento perfeito M_1 de G_1 tal que $|M_1 \cap D| = 1$.*

Dem. Seja D um corte ímpar em G_1 satisfazendo os ítens acima. Observe inicialmente que D é um corte não trivial em G_1 pois, suponha que $D := \nabla(v)$, onde $v \in V(G_1)$. Se $v \neq \overline{x}$ então D é trivial em G, o que contradiz o item (ii). No caso em que $v = \overline{x}$, temos que $D = C$, o que contradiz novamente o item (ii). Portanto, D é não trivial em G_1.

Pelos ítens (i) e (ii), concluímos que D é bom em G. Como $M' \in \mathcal{M}_3(D)$, podemos considerar o conjunto $\mathcal{D}$ dos cortes robustos M'-induzidos por D. Seja $D' \in \mathcal{D}$. Portanto, cada uma das D'-contrações em G possui um único brick e $\mathcal{M}_1(D) \subseteq \mathcal{M}_1(D')$. Além disso, $M' \in \mathcal{M}_3(D')$ e $M' \notin \mathcal{M}_3(C)$. Portanto, $D' \neq C$.

Caso 1 *C e D' não se cruzam.*

Neste caso, $D' \subseteq E(G_1)$ ou $D' \subseteq E(G_2)$. Vamos mostrar que $D' \subseteq E(G_1)$, e obtermos uma contradição à minimalidade de $|X|$.

Suponha que $D' \subseteq E(G_2)$. O corte D' pode ser justo ou não em G_2. Suponha que D' é justo em G_2. Pelo Lema 6.13, $\mathcal{M}_j(C) = \mathcal{M}_j(D')$, $\forall j = 1, 3, 5, \ldots$, em G. Isto é uma contradição pois, $M' \in \mathcal{M}_3(D')$ e $M' \notin \mathcal{M}_3(C)$.

Portanto, D' não é justo em G_2. Seja F_2 um emparelhamento perfeito de G_2 tal que $|F_2 \cap D'| \geq 3$. Por (iii), F_2 pode ser extendido a um emparelhamento perfeito F de G tal que $|F \cap D| = 1$. Então $F \in \mathcal{M}_1(D)$ mas $F \notin \mathcal{M}_1(D')$, o que é uma contradição.

Portanto, $D' \subseteq E(G_1)$, como queríamos demonstrar.

Caso 2 *C e D' se cruzam.*

Vamos denotar as margens de D' em G por Y e $\overline{Y}$. Se necessário, troque Y com $\overline{Y}$ para que tenhamos $|X \cap Y|$ ímpar. Para simplificar a notação vamos fazer $I := \nabla(X \cap Y)$ e $U := \nabla(\overline{X} \cap \overline{Y})$.

Vamos mostrar que não existe aresta ligando $\overline{X} \cap Y$ a $X \cap \overline{Y}$ pois, seja f uma tal aresta. Então $f \in C$. Por (iii), f pertence a um emparelhamento perfeito F_1 de G_1 tal que $|F_1 \cap D| = 1$. Seja F_2 um emparelhamento perfeito de G_2 que contém f. Considere o emparelhamento perfeito $F := F_1 \cup F_2$ de G. Como $|F \cap C| = 1$, devemos ter $|F \cap D'| \geq 3$. Logo, $F \in \mathcal{M}_1(D)$ mas $F \notin \mathcal{M}_1(D')$, o que é uma contradição.

Portanto, não existe aresta ligando $\overline{X} \cap Y$ a $X \cap \overline{Y}$. Assim, para todo emparelhamento perfeito M de G,

$$|M \cap I| + |M \cap U| = |M \cap C| + |M \cap D'|. \tag{6.4}$$

Vamos mostrar agora que o corte U é justo em G_2. Suponha que U não é justo em G_2. Seja F_2 um emparelhamento perfeito de G_2 tal que $|F_2 \cap U| \geq 3$. Observe que F_2 deve conter pelo menos duas arestas de D'. Por (iii), F_2 pode ser extendido a um emparelhamento perfeito F de G tal que $|F \cap D| = 1$. Então $F \in \mathcal{M}_1(D)$ mas $F \notin \mathcal{M}_1(D')$, o que é uma contradição. Portanto, U é justo em G_2.

O corte U é não trivial pois, suponha o contrário. Como não existe aresta ligando $\overline{X} \cap Y$ a $X \cap \overline{Y}$, o corte I deve ser não trivial, caso contrário, G não seria 3-conexo. Neste caso, uma margem de D' teria tamanho menor do que $|X|$, o que é uma contradição à escolha de C. Portanto, U é não trivial.

Pelo Lema 6.13, $\mathcal{M}_j(C) = \mathcal{M}_j(U)$, $\forall j = 1, 3, 5, \ldots$, em G. Portanto, $|M \cap C| = |M \cap U|$, para todo emparelhamento perfeito M de G.

Pela Equação 6.4, podemos concluir que $|M \cap I| = |M \cap D'|$, para todo emparelhamento perfeito M de G. Ou seja, $\mathcal{M}_j(D') = \mathcal{M}_j(I)$, $\forall j = 1, 3, 5, \ldots$, em G. Portanto, I é robusto em G. Como a margem $X \cap Y$ de I está propriamente contida em X, temos uma contradição à escolha de C. □

Corolário 6.16 *G_1 não possui corte bom.*

Dem. Se G_1 possui um corte bom então claramente temos os três ítens do Lema 6.15 satisfeitos. □

Nos Lemas a seguir, usaremos este Corolário para mostrar que algumas arestas de G_1 são disponíveis no próprio grafo G_1. Veremos depois que se uma destas não pertencem ao corte C e nem ao emparelhamento M_0 então elas são disponíveis também em G.

Lema 6.17 *G_1 não é o grafo de Petersen, e se* e $\in E(G_1)$ *e $G_1 - e$ é matching covered então* e *é disponível em G_1.*

Dem. Se G_1 for o grafo de Petersen então $\nabla(Q)$, onde Q é o pentágono de G_1 que não contém o vértice $\overline{x}$, é robusto em G, contradizendo a minimalidade de $|X|$.

Como $G_1 - e$ é matching covered, devemos ter um dos três ítens do Teorema 6.9 satisfeitos. Mas G_1 não é o grafo de Petersen e pelo Corolário 6.16, G_1 não possui corte bom. Portanto, e é disponível em G_1. □

A seguir, usaremos os resultados desta seção para mostrar que G_1 contém uma classe minimal da relação "$\Leftrightarrow$" de tamanho dois ou uma de tamanho um de tal forma que este elemento não pertence a M_0.

Lema 6.18 *Se f é uma aresta de G_1 em $\nabla(\overline{x}) - M_0$ então existe uma classe minimal Q de G_1 induzida por* f *tal que $|Q| = 2$ ou $|Q| = 1$ e o elemento de Q não pertence a M_0.*

Dem. Como G_1 é brick temos, pelo Teorema 4.4, que toda classe minimal de G_1, e em particular as induzidas por f, tem no máximo dois elementos. Portanto, para provar este Lema podemos assumir que toda classe minimal

induzida por f tem um único elemento e a nossa tarefa é provar que este elemento não pertence a M_0.

Seja Q uma classe minimal de G_1 induzida por f. Podemos supor então que $Q := \{h\}$ e vamos mostrar que $h \notin M_0$. Por definição de Q, temos que $h \Rightarrow f$.

Pelo Lema 4.1, o grafo $G_1 - f$ possui uma barreira B que contém ambos os extremos de h e a aresta f possui seus extremos em componentes distintas de $G_1 - f - B$. Mas um dos extremos de f é $\overline{x}$. Logo, $\overline{x}$ pertence à uma componente de $G_1 - f - B$. Considere agora M_0 restrito $E(G_1)$. Podemos então concluir por contagem que $h \notin M_0$. □

Lema 6.19 *Seja f uma aresta de G_1 tal que* f $\notin M_0$ *e nenhuma aresta de G_1 que incide em $\overline{x}$ depende de* f. *Então existe uma classe minimal Q de G_1 induzida por* f *tal que $|Q| = 2$ ou $|Q| = 1$ e o elemento de Q não pertence a M_0.*

Dem. Seja f' uma aresta de $E(G_1)$ tal que $f' \notin M_0$, $f' \Rightarrow f$ e nenhuma aresta de $E(G_1) - M_0$ depende de f'. Pode até ser que $f' = f$. Seja Q uma classe minimal de G_1 induzida por f'.

Podemos supor então que $Q := \{h\}$ e vamos mostrar que $h \notin M_0$. Suponha que $h \in M_0$. Por definição de Q, temos que $h \Rightarrow f'$.

Pelo Lema 4.1, o grafo $G_1 - f'$ possui uma barreira B que contém ambos os extremos de h e a aresta f' possui seus extremos em componentes distintas de $G_1 - f' - B$.

Observe que toda aresta que possui os dois extremos em B depende de f' em G_1. Por definição de f', podemos concluir que nenhuma aresta de $E(G_1) - M_0$ possui seus dois extremos em B.

Como $h \in M_0$ e $f' \notin M_0$, se considerarmos M_0 restrito a G_1 podemos concluir por contagem que $\overline{x} \in B$. Como $|M_0 \cap \overline{x}| = 3$, concluímos novamente por contagem que h é a única aresta de M_0 que possui ambos os extremos em B. Portanto, h é a única aresta de G_1 que possui ambos os extremos em B. Além disso, $|M_0 \cap \nabla(V(K))| = 1$ para toda componente K de $G_1 - f' - B$.

Como $G_1 - h$ é matching covered, existe um emparelhamento perfeito M_1 neste grafo que contém f'. Isto só é possível se $|M_1 \cap \nabla(V(J))| = 3$ para alguma componente J de $G_1 - f' - B$. Seja $D := \nabla(V(J))$. Vamos mostrar que, no grafo G, o corte D satisfaz as hipóteses do Lema 6.15, o que é uma contradição.

Vamos mostrar inicialmente que D é bom em G. Mostraremos primeiro que as duas D-contrações em G são matching covered. Observe que para mostrar esta propriedade é suficiente mostrar que para toda aresta $h_1 \in E(G_1)$ existe um emparelhamento perfeito de G que contém h_1 e intercepta D em uma única aresta.

Se $h_1 \in M_0$ então não há nada a fazer pois M_0 intercepta D em uma única aresta. Se $h_1 \notin M_0$ e $h_1 \neq f'$ então por definição de f', temos que $h_1 \not\Rightarrow f'$ em G_1. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G_1 contendo h_1 mas não f'. Claramente, F intercepta D em uma única aresta. Para a aresta f' tome um emparelhamento perfeito em G_1 contendo h. Este emparelhamento contém f' e intercepta D em uma única aresta. Portanto, as duas D-contrações em G são matching covered.

O emparelhamento M_1 definido acima é perfeito em G_1 e tal que $|M_1 \cap D| = 3$. Claramente, M_1 pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de G que pertence a $\mathcal{M}_1(C)$. Portanto, o item (ii) está satisfeito.

Seja h' uma aresta de C, ou seja, h' é uma aresta de $E(G_1)$ que incide em $\overline{x}$. Pela hipótese deste caso, $h' \not\Rightarrow f'$ em G_1. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G_1 contendo h' mas não f'. Então, F intercepta D em uma única aresta, ou seja, D satisfaz o item (iii) do Lema 6.15.

Logo, D satisfaz as hipóteses do Lema 6.15, o que é uma contradição. Portanto, $h \notin M_0$. □

Lema 6.20 *Se f é uma aresta de G_1 em $\nabla(\overline{x}) \cap M_0$ e $G_1 - f$ não é matching covered então existe uma classe minimal Q de G_1 induzida por* f *tal que $|Q| = 2$ ou $|Q| = 1$ e o elemento de Q não pertence a M_0.*

Dem. Se existe uma classe minimal de G_1 induzida por f de tamanho dois então não há mais nada a fazer. Podemos supor então que toda classe minimal induzida por f tem tamanho um.

Suponha que exista uma aresta f' de G_1 que não está em M_0 e $f' \Rightarrow f$. Pela transitividade da relação $\Rightarrow$, nenhuma aresta de de G_1 em $\nabla(\overline{x})$ depende de f' em G_1. Podemos então terminar aplicando o Lema 6.19.

Podemos supor então que nenhuma aresta de G_1 que está fora de M_0 depende de f. Seja Q uma classe minimal de G_1 induzida por f. Podemos assumir que $Q = \{h\}$ e vamos mostrar que $h \notin M_0$. Suponha o contrário. Como $G_1 - f$ não é matching covered, temos que $h \neq f$. Por definição de Q, temos que $h \Rightarrow f$.

Pelo Lema 4.1, o grafo $G_1 - f$ possui uma barreira B que contém ambos os extremos de h e a aresta f possui seus extremos em componentes distintas de $G_1 - f - B$. Mas um dos extremos de f é $\overline{x}$. Logo, $\overline{x}$ pertence à uma componente de $G_1 - f - B$.

Por contagem, podemos concluir que h é a única aresta de M_0 que possui os dois extremos em B. Além disso, como nenhuma aresta em $E(G_1) - M_0$ depende de f, concluímos que h é a única aresta de $E(G_1)$ com ambos os extremos em B. Podemos concluir agora que $|M_0 \cap \nabla(V(K))| = 1$ para toda componente K de $G_1 - f - B$.

O grafo $G_1 - h$ é matching covered. Logo, existe um emparelhamento perfeito M_f neste grafo contendo f. Isto só é possível se existe uma componente J de $G_1 - f - B$ tal que $|M_f \cap \nabla(V(J))| = 3$. Seja $D := \nabla(V(J))$ e vamos mostrar que, no grafo G, o corte D satisfaz as hipóteses do Lema 6.15, o que é uma contradição.

Para mostrar que as duas D-contrações em G são matching covered é suficiente mostrar que para toda aresta $h_1 \in E(G_1)$ existe um emparelhamento perfeito de G que contém h_1 e intercepta D em uma única aresta.

Se $h_1 \in M_0$ então não há nada a fazer pois M_0 intercepta D em uma única aresta. Se $h_1 \notin M_0$ então $h_1 \not\Rightarrow f$ em G_1. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G_1 contendo h_1 mas não f. Claramente, F intercepta D em uma única aresta. Portanto, as duas D-contrações em G são matching covered.

O emparelhamento M_f definido acima é perfeito em G_1 e tal que $|M_f \cap D| = 3$. Claramente, M_f pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de G que pertence a $\mathcal{M}_1(C)$. Portanto, o item (ii) está satisfeito.

Seja $h' \neq f$ uma aresta de C, ou seja, h' é uma aresta de $E(G_1)$ que incide em $\overline{x}$. Como f também incide em $\overline{x}$, temos que $h' \not\Rightarrow f$ em G_1. Logo, existe um emparelhamento perfeito F em G_1 contendo h' mas não f. Então, F intercepta D em uma única aresta. Para a aresta f tome um emparelhamento perfeito em G_1 que contém h. Então este emparelhamento também contém f e intercepta D em uma única aresta. Logo, D satisfaz o item (iii) do Lema 6.15.

Logo, D satisfaz as hipóteses do Lema 6.15, o que é uma contradição. Portanto, $h \notin M_0$. □

Capítulo 7

O Teorema de Lovász-Vempala

7.1 Introdução

Em 1987, L. Lovász conjecturou que "todo brick distinto do K_4, $\overline{C_6}$ e do grafo de Petersen contém uma aresta tal que a sua remoção resulta em um grafo matching covered cuja decomposição em cortes justos fornece um único brick". Esta conjectura apareceu em conexão com a caracterização do matching lattice. Ele notou que a prova do seu teorema poderia ser simplificada se a conjectura acima fosse verdadeira.

Em 1994, L. Lovász e S. Vempala provaram esta conjectura. Mas, pelas informações que temos, uma versão completa da prova deste Teorema ainda não foi submetida para publicação.

Neste Capítulo, apresentamos uma prova independente deste Teorema. Ele é muito importante pois, os principais resultados que propomos nesta Tese, e que estão descritos nos Capítulos seguintes, dependem diretamente dele.

7.2 O Teorema de Lovász-Vempala

O Teorema a seguir mostra que os bricks em geral possuem uma aresta disponível.

Teorema 7.1 [Lovász-Vempala] *Todo brick G distinto de K_4, $\overline{C_6}$ e do grafo de Petersen possui uma aresta disponível.*

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Seja G um brick distinto de K_4 e do grafo de Petersen. Pelo Teorema 6.10, G contém uma aresta disponível ou um corte bom. Se G contém uma aresta disponível então não há nada mais a fazer.

Suponha que G possui um corte bom. Pelo Corolário 6.12, G possui um corte robusto. Escolha um corte robusto $C := \nabla(X)$ em G tal que a margem X tenha tamanho mínimo. Seja G_1 o grafo obtido de G pela contração de $\overline{X}$ a um único vértice $\overline{x}$. O grafo G_2 é definido de forma análoga contraindo X a um único vértice x.

Como C é robusto, temos que:

- Existe um emparelhamento M_0 em G tal que $|M_0 \cap C| = 3$;
- $b(G_1) = b(G_2) = 1$.

Pelo Corolário 6.14, G_1 é brick. Vamos inicialmente tratar um caso muito simples.

Lema 7.1.1 *Se G contém uma aresta* e $\notin M_0$ *tal que* e *é disponível em G_1 e em G_2 então* e *é disponível em G.*

Dem. Por hipótese, e é disponível em G_1 e em G_2, ou seja, $G_1 - e$ e $G_2 - e$ são matching covered. Logo, $G - e$ é matching covered. Além disso, $b(G_1 - e) = b(G_2 - e) = 1$.

Como $e \notin M_0$, o emparelhamento M_0 é perfeito em $G - e$. Além disso, $|M_0 \cap C| = 3$. Pelo Teorema 3.16 da subaditividade, $b(G - e) = 1$, ou seja, e é disponível em G. □

Lema 7.1.2 *Seja $Q :=$* {e,f} *uma classe minimal em G_1 tal que:*

- *Ou nenhuma aresta de Q incide em $\overline{x}$;*
- *Ou uma aresta de Q, digamos* f, *que incide em $\overline{x}$ é disponível em G_2.*

Então e *é disponível em G.*

Dem. Como Q é minimal, $G_1 - \{e, f\}$ é matching covered. Pelo Lema 4.3, $G_1 - \{e, f\}$ é bipartido. Além disso, a aresta e possui seus dois extremos em uma destas bipartições e a aresta f possui seus dois extremos na outra bipartição.

Seja (A, B) uma bipartição de $G_1 - \{e, f\}$. Fixe a notação para que A contenha $\overline{x}$ e os dois extremos de f, e B contenha os dois extremos de e. Se considerarmos agora M_0 restrito a G_1 podemos concluir, por contagem, que $f \in M_0$ e $e \notin M_0$.

Considere agora o grafo $G' := G - \{e, f\}$. Por hipótese, G' é matching covered. O corte C é justo em G'. Além disso, uma das C-contrações em G' é bipartida e a outra é G_2 ou $G_2 - f$ no caso em que f incide em $\overline{x}$.

Como $b(G_2) = b(G_2 - f) = 1$, temos que $b(G') = 1$. O emparelhamento M_0 nos garante que $G' + f$ é matching covered. Pelo Corolário 3.21, $b(G' + f) = 1$. Portanto, $b(G - e) = 1$, ou seja, e é disponível em G. □

Lema 7.1.3 *Se G_2 contém uma aresta disponível e $\notin M_0$ então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Se e não incide em x então pelo Lema 7.1.1, e é disponível em G. Suponha então que e incide em x. Pelo Lema 6.18, existe uma classe minimal Q de G_1 induzida por e tal que $|Q| = 2$ ou $|Q| = \{h\}$ e $h \notin M_0$.

Se $|Q| = 2$ então podemos terminar pelo Lema 7.1.2. Se $|Q| = \{h\}$ e $h \notin M_0$ então pelo Teorema 6.17, h é disponível em G_1. Claramente, h é disponível em G_2. Pelo Lema 7.1.1, h é disponível em G. □

Lema 7.1.4 *Se G_2 contém uma aresta disponível* f $\in M_0 \cap \nabla(x)$ *tal que $G_1 -$* f *não é matching covered então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Pelo Teorema 6.20, existe uma classe minimal Q de G_1 induzida por f tal que $|Q| = 2$ ou $|Q| = 1$ e o elemento de Q não pertence a M_0.

Se $|Q| = 2$ então, pelo Lema 7.1.2, G contém uma aresta disponível. Podemos supor então que $|Q| = 1$ e o elemento de Q não pertence a M_0, digamos que $Q := \{e\}$. Note que $e \Rightarrow f$ em G_1. Logo, $e \notin \nabla(\overline{x})$. Assim, e também é disponível em G_2. Pelo Lema 7.1.1, e é disponível em G. □

Já sabemos que G_1 é brick. Suponha agora que G_2 não é brick. Pelos Lemas 3.17 e 3.19, G_2 possui uma barreira não trivial B tal que (i) o vértice x pertence a B, (ii) $G_2 - B$ possui uma única componente não trivial Y, e (iii) o grafo obtido de G_2 pela contração de $V(G_2) - Y$ a um único vértice é brick.

Portanto, G é composto por um grafo bipartido matching covered $H = (U, W)$ de tal forma que:

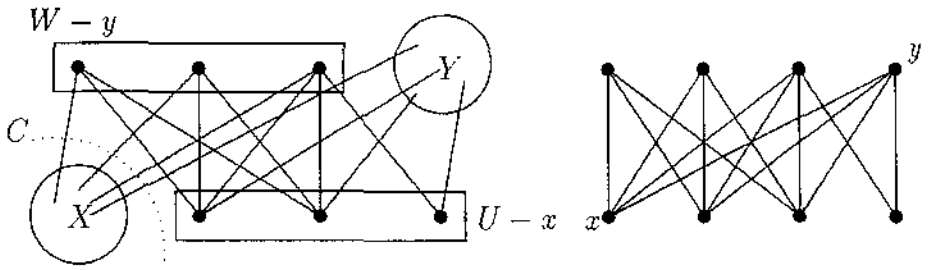


Figura 7.1: O grafo G e o grafo bipartido H.

- Dois vértices x e y, onde $x \in U$ e $y \in W$, de H são substituídos pelas (ou explodidos nas) componentes ímpares não triviais X e Y;
- O grafo obtido de G pela contração de $V(G) - X$ $(V(G) - Y)$ a um único vértice $\overline{x}$ $(\overline{y})$ é brick;
- Existe um emparelhamento perfeito M_0 em G tal que $|M_0 \cap \nabla(X)| = |M_0 \cap \nabla(Y)| = 3$ (Figura 7.1).

Lema 7.1.5 *Se $|U| = |W| \geq 2$ então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Vamos analisar o caso em que $|U| = |W| = 2$, ou seja, $U := \{x, u\}$ e $W := \{w, y\}$. Como G é brick e não possui arestas paralelas, o grafo H contém pelo menos duas aresta ligando w a x. No grafo G, estas arestas ligam w a vértices de X. Como M_0 é emparelhamento perfeito de G, pelo menos uma destas arestas não está em M_0.

Seja e uma aresta que liga w a x e que não pertence a M_0. Como e é paralela em H e H é matching covered, temos que $H - e$ é matching covered. Observe que e não incide em Y. Portanto, o grafo $G_2 - e$ é também matching covered. Além disso, Como $b(G_2) = 1$, temos que $b(G_2 - e) = 1$. Pelo Lema 7.1.3, G contém uma aresta disponível.

Suponha agora que $|U| = |W| > 2$. Vamos tratar o caso em que H é livre de corte justo não trivial, ou seja, é brace. Seja $w \neq y$ um vértice de W. Então $|adj_H(w)| \geq 3$, ou seja, w possui pelo menos dois vizinhos distintos de x. Portanto, H contém uma aresta $e \notin M_0$ que não incide em x e nem em y.

Pelo Lema 3.14, $H - e$ é matching covered. Conseqüentemente, $G - e$ é matching covered. Podemos agora aplicar o Teorema 3.16 (da subaditividade) para concluir que $b(G - e) = 1$.

Suponha agora que H possui um corte justo não trivial. Observe que todo corte justo não trivial de H deve separar x de y, ou seja, x e y devem pertencer a margens distintas deste corte pois, caso contrário, teríamos uma barreira não trivial em G.

Seja D um corte justo não trivial em H tal que a margem Z de D que contém x seja minimal. Vamos denotar por H' o grafo bipartido obtido de H pela contração de $\overline{Z}$ a um único vértice $\overline{z}$.

Pela escolha de D podemos concluir que H' é brace. Além disso, H' contém exatamente dois vértices provenientes de contrações de conjuntos não triviais de vértices: um deles é x e o outro é $\overline{z}$. Os demais vértices de H' são todos vértices originais de G.

Se x e $\overline{z}$ pertencem à uma mesma bipartição de H' então a outra bipartição seria uma barreira não trivial em G. Logo, x e $\overline{z}$ devem pertence a bipartições distintas de H'. Como H' é brace, podemos proceder de forma análoga ao que fizemos no caso em que H é brace para mostrar que G contém uma aresta disponível. □

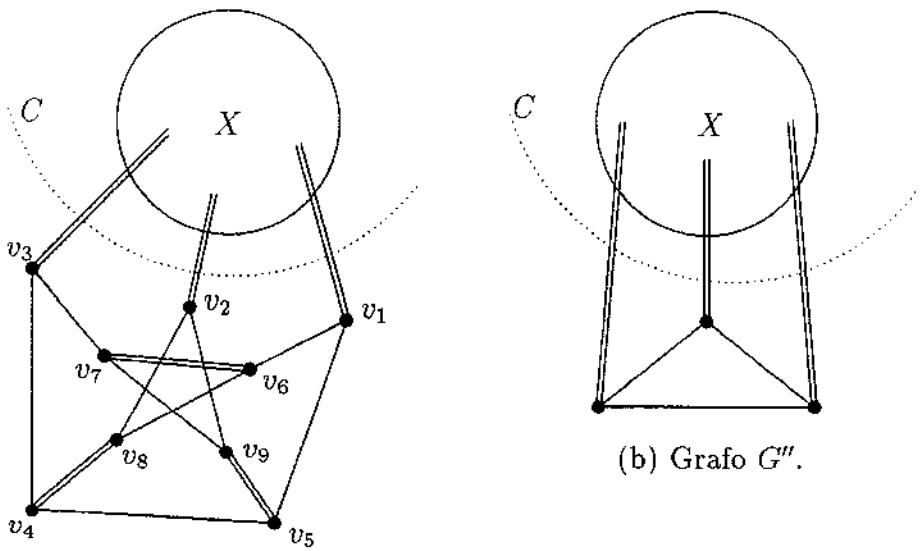
Podemos então assumir, a partir de agora, que G_2 também é brick. Vamos analisar os casos em que G_2 é K_4, $\overline{C_6}$ ou o grafo de Petersen.

Lema 7.1.6 *Se G_2 é o grafo de Petersen então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Suponha que G_2 seja o grafo de Petersen. Considere os vértices de G_2 numerados como na Figura 7.2(a). Então M_0 emparelha v_1, v_2 e v_3 com vértices de X.

Seja $G' := G - \{(v_1, v_5), (v_3, v_4), (v_6, v_7)\}$. É fácil de ver que G' é matching covered. Fazendo uma decomposição em cortes justos de G', começando com aqueles associados aos vértices de grau dois unido aos seus vizinhos, vamos obter o grafo G'' da Figura 7.2(b).

A restrição de M_0 a G'' é um emparelhamento perfeito deste grafo. Além disso, $|M_0 \cap C| = 3$ em G''. O corte C é ímpar em G''; uma das C-contrações em G'' é G_1 e a outra é K_4. Pelo Teorema 3.16 (da subaditividade), $b(G'') = 1$. Portanto, $b(G') = 1$.



(a) Grafo G.

(b) Grafo G'''.

Figura 7.2: O caso em que G_2 é o grafo de Petersen.

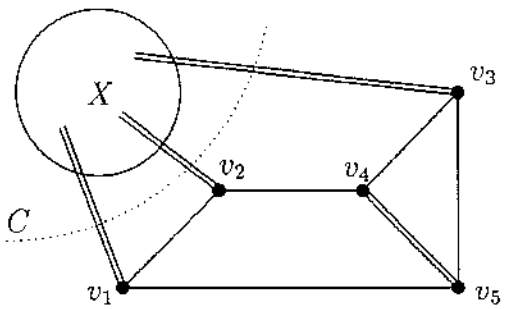


Figura 7.3: O caso em que G_2 é o $\overline{C_6}$.

Não é difícil ver que $G' + (v_6, v_7)$ é matching covered. Pelo Corolário 3.21, $b(G' + (v_6, v_7)) = 1$. Usando este mesmo Corolário podemos inserir qualquer uma das duas arestas restantes sem aumentar o número de bricks do grafo resultante. Portanto, (v_1, v_5) e (v_3, v_4) são disponíveis em G. □

Lema 7.1.7 *Se $G_2 = \overline{C_6}$ então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Suponha que G_2 seja $\overline{C_6}$. Considere os vértices de G_2 numerados como na Figura 7.3. O grafo $G_2 - \{(v_1, v_2), (v_4, v_5)\}$ é matching covered e bipartido. Podemos agora proceder de modo análogo ao que fizemos no Lema 7.1.2, para mostrar que (v_1, v_2) é disponível em G. □

Lema 7.1.8 *Se $G_2 = K_4$ então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Suponha que G_2 é o K_4. Então $|\overline{X}| = 3$. Pela minimalidade de $|X|$, devemos ter $|X| = 3$. Portanto, $G_1 = K_4$, e conseqüentemente, G é o $\overline{C_6}$ acrescido possivelmente de arestas extras. Mas o grafo $\overline{C_6}$ acrescido de qualquer aresta contém uma aresta disponível. Portanto, $G = \overline{C_6}$. □

Podemos supor então que G_2 não é K_4, $\overline{C_6}$ e nem o grafo de Petersen. Por hipótese de indução, G_2 contém uma aresta e disponível.

Suponha que e não incide em x, ou seja, no grafo G a aresta e não pertence a C. Então claramente $G - e$ é matching covered. Umas das C-contrações em $G - e$ é G_1 e a outra é $G_2 - e$. Se C não é justo em $G - e$ então, pelo Teorema 3.16 da subaditividade, podemos concluir que $b(G - e) = 1$. Caso contrário, $b(G - e) = 2$.

Suponha agora que e incide em x, ou seja, no grafo G a aresta e pertence a C. Se $e \notin M_0$ então, pelo Lema 7.1.3, G contém uma aresta disponível. Logo, $e \in M_0$.

Se $G_1 - e$ não é matching covered então, pelo Lema 7.1.4, G contém uma aresta disponível. Portanto, $G_1 - e$ é matching covered. Pelo Lema 6.17, $b(G_1 - e) = 1$. Então $G - e$ é matching covered. Umas das C-contrações em $G - e$ é $G_1 - e$ e a outra é $G_2 - e$. Se C não é justo em $G - e$ então, pelo Teorema 3.16 da subaditividade, concluímos novamente que $b(G - e) = 1$. Caso contrário, $b(G - e) = 2$.

Pelos parágrafos anteriores, podemos supor, a partir de agora que $G - e$ é matching covered, $b(G - e) = 2$ e o corte C é justo em $G - e$. Portanto, $e \in M_0$. Além disso, cada uma das C-contrações em $G - e$ possui exatamente um brick.

Note que os resultados que temos até agora são provenientes das seguintes hipóteses que temos sobre G e C: O grafo G é um brick e C é um corte robusto em G que possui uma margem de tamanho mínimo.

A partir de agora vamos introduzir uma nova hipótese, que não altera as existentes, mas apenas orientam a escolha de e em G_2. Se possível, escolha a aresta e disponível em G_2 de tal forma que e pertença a C, ou eqüivalentemente, que e incide em x em G_2.

Neste instante da demonstração ainda não temos condições de exibir uma aresta disponível em G, pois existem casos em que a aresta e satisfaz todas as condições que obtivemos e ainda não é disponível em G. Por exemplo, considere os grafos da Figura 7.4. Em cada um deles, a aresta e é disponível em G_2 e também em G_1, mas não é disponível em G.

Para continuarmos, precisamos conhecer um pouco mais sobre a estrutura do grafo G. Para isso, o que vamos fazer a partir de agora é mostrar que o corte C não pode ser um corte arbitrário no grafo $G - e$. Na verdade, vamos mostrar que o corte C é, em $G - e$, de um de dois tipos como veremos a seguir. Após isto veremos que em cada caso estaremos em condições de mostrar que G tem uma aresta disponível.

Seja H um grafo matching covered. Dizemos que um corte justo D em H é *essencialmente* proveniente de uma 2-separação se

- Ou D é proveniente de uma 2-separação em H.
- Ou H possui uma barreira não trivial B_1 tal que $H - B_1$ possui uma única componente não trivial e se A_1 representa o conjunto das com-

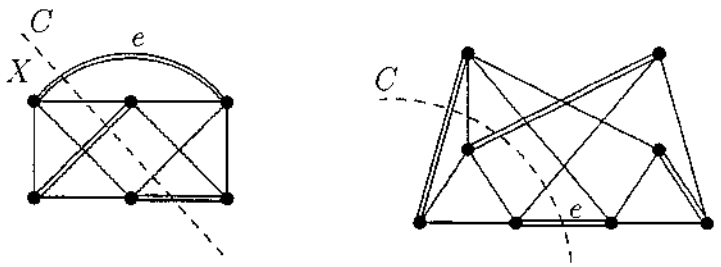


Figura 7.4: A aresta e é disponível em G_1 e G_2 mas não em G.

ponentes triviais de $H - B_1$ então D é proveniente de uma 2-separação no grafo H' obtido de H pela contração de $B_1 \cup A_1$ a um único vértice (Figura 7.5(a)).

- Ou H possui duas barreiras não triviais B_1 e B_2 tais que $H - B_i$ $(i = 1, 2)$ possui uma única componente não trivial e se A_i representa o conjunto das componentes triviais de $H - B_i$ então $B_1 \cup A_1$ é disjunto de $B_2 \cup A_2$ e D é proveniente de uma 2-separação no grafo H'' obtido de H pela contração de $B_1 \cup A_1$ a um único vértice e de $B_2 \cup A_2$ a um único vértice (Figura 7.5(b)).

Em outras palavras, um corte é essencialmente proveniente de uma 2-separação se é proveniente de uma 2-separação, a menos de contrações de no máximo duas margens bipartidas.

Vamos mostrar agora que o corte C em $G - e$ é proveniente de uma barreira ou é essencialmente proveniente de uma 2-separação.

Lema 7.1.9 *Se $G-e$ contém um corte justo D tal que as duas D-contrações em $G - e$ são não bipartidas e D cruza C então C é essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$.*

Dem. Vamos denotar as margens de D por Y e $\overline{Y}$. Fixe a notação para que tenhamos $|X \cap Y|$ ímpar. Para simplificar a notação vamos fazer $I := X \cap Y$ e $U := \overline{X} \cap \overline{Y}$. Como C e D são justos em $G - e$, temos que $\nabla(I)$ e $\nabla(U)$

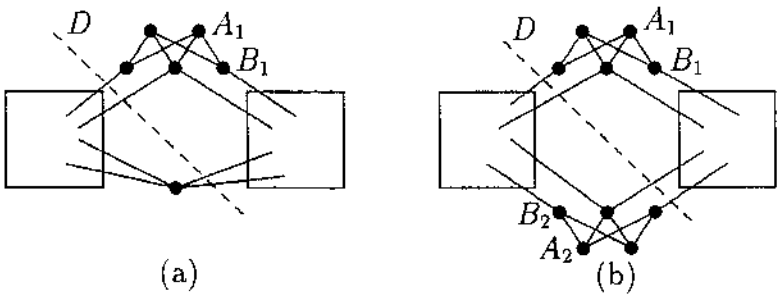


Figura 7.5: Corte essencialmente proveniente de uma 2-separação.

também são justos em $G-e$. Além disso, em $G-e$ não existe aresta ligando $X \cap \overline{Y}$ a $\overline{X} \cap Y$.

Observe que o corte $\nabla(I)$ é justo em $G_1 - e$. Como $b(G_1 - e) = 1$, uma das $\nabla(I)$-contrações em $G_1 - e$ é bipartida. Sejam G_{11} e G_{12} as duas $\nabla(I)$-contrações em $G_1 - e$. Fixe a notação para que tenhamos $\overline{x} \in V(G_{12})$ (Figura 7.6).

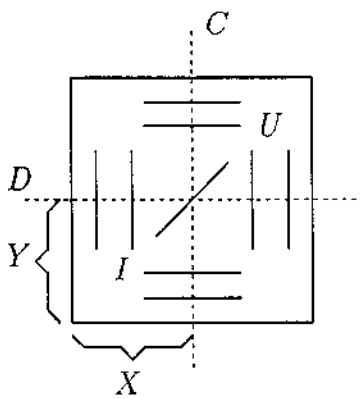
Da mesma forma, o corte $\nabla(U)$ é justo em $G_2 - e$. Sejam G_{21} e G_{22} as duas $\nabla(U)$-contrações em $G_2 - e$. Fixe a notação para que tenhamos $x \in V(G_{21})$ (Figura 7.6).

Vamos mostrar inicialmente que G_{11} é bipartido. Suponha que G_{12} é bipartido. Observe que G_{12} contém dois vértices resultantes de contrações: um deles é $\overline{x}$, e o outro, digamos v, é o vértice resultante da contração de I. Os demais vértices são todos vértices originais de G. Além disso, cada bipartição de G_{12} tem pelo menos dois vértices pois, $X \cap \overline{Y} \neq \emptyset$.

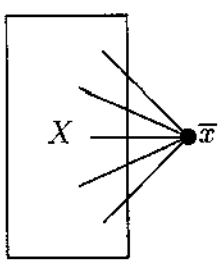
Claramente, em $G - e$ existe aresta ligando I a $\overline{X}$. Portanto, em G_{12} existe aresta ligando $\overline{x}$ a v. Logo, $\overline{x}$ e v pertencem à bipartições distintas de G_{12}.

Em G_1 a aresta e tem um extremo em $\overline{x}$ pois, e é uma aresta proveniente de G_2. Então a bipartição de G_{12} que contém $\overline{x}$ é barreira não trivial em G_1. Mas isto não pode ocorrer pois G_1 é brick. Portanto, G_{12} não é bipartido. Conseqüentemente, G_{11} é bipartido.

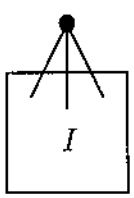
Sejam J_1 e J_2 as duas D-contrações em $G - e$, onde J_1 é obtido pela contração de $\overline{Y}$ a um único vértice $\overline{y}$ e J_2 é obtido pela contração de Y a um único vértice y. Por hipótese, J_1 e J_2 são não bipartidos. Como $b(G-e) = 2$,



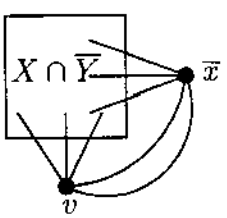
(a) Grafo $G - e$.



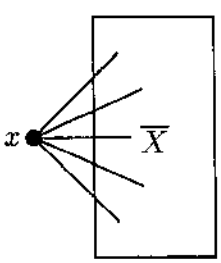
(b) $G_1 - e$



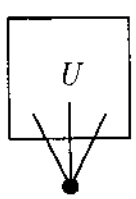
(c) G_{11}



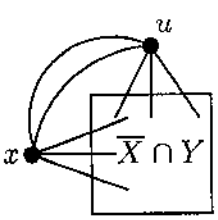
(d) G_{12}



(e) $G_2 - e$



(f) G_{22}



(g) G_{21}

Figura 7.6: O caso em que D cruza C.

temos que $b(J_1) = b(J_2) = 1$.

O corte $\nabla(I)$ é justo em J_1. Sejam J_{11} e J_{12} as duas $\nabla(I)$-contrações em J_1. Fixe a notação para que tenhamos $\overline{y} \in V(J_{12})$. Então J_{11} é, a menos de arestas paralelas, o grafo G_{11}, que como já vimos, é bipartido. Portanto, J_{11} é bipartido e J_{12} é não bipartido.

Da mesma forma, o corte $\nabla(U)$ é justo em J_2, e se considerarmos as duas $\nabla(U)$-contrações em J_2, uma delas (aquela que é, a menos de arestas paralelas, o grafo G_{12}) é não bipartida e a outra é bipartida.

Assim, os subgrafos induzidos pelos conjuntos de vértices I e U são bipartidos. Portanto, C é essencialmente proveniente de uma 2-separação. □

Podemos supor que C não cruza nenhum corte justo de $G-e$ satisfazendo as hipóteses do Lema 7.1.9. Portanto, $G-e$ não é bicrítico pois, suponha o contrário. Como $b(G-e) = 2$ temos, pelo Lema 3.18, que $G-e$ possui uma única 2-separação. Então os únicos cortes justos de $G-e$ são aqueles associados à 2-separação. Portanto, C é um destes cortes.

Podemos supor então que $G-e$ contém uma barreira não trivial. Seja B uma barreira não trivial maximal de $G-e$. Como G é brick, e deve possuir seus extremos em componentes distintas de $G-e-B$. Como $b(G-e) = 2$, no máximo duas componente de $G-e-B$ são não triviais. Como B é maximal, toda componente de $G-e-B$ é crítica.

Suponha que $G-e$ possua uma barreira não trivial maximal B tal que $G-e-B$ contém duas componentes não triviais. Sejam Y_1 e Y_2 as duas componentes não triviais de $G-e-B$.

Para $i = 1,2$, seja M_i um emparelhamento perfeito de G tal que $|M_i \cap \nabla(V(Y_i))| = 3$. Então $e \in M_i$ $(i = 1,2)$ e $|M_1 \cap \nabla(V(Y_2))| = |M_2 \cap \nabla(V(Y_1))| = 1$. Vamos agora considerar o corte $D_1 := \nabla(Y_1)$ em G.

Lema 7.1.10 *D_1 é robusto em G.*

Dem. Claramente, as duas D_1-contrações em G são matching covered. Como $|M_1 \cap \nabla(V(Y_1))| = 3$, concluímos que D_1 é bom em G.

Cada uma das D_1-contrações em $G-e$ possui um único brick. Pelo Corolário 3.21, cada uma das D_1-contrações possui um único brick em G. Portanto, D_1 é robusto em G. □

Analogamente, $D_2 := \nabla(Y_2)$ é robusto em G. Pela escolha de C, temos que $|X| \leq |Y_i|$ $(i = 1, 2)$. Por outro lado, C não cruza D_1 e nem D_2. Portanto, pela minimalidade de $|X|$ podemos concluir que $X \subseteq Y_1$ ou $X \subseteq Y_2$.

Observe que o raciocínio que fizemos é válido para qualquer barreira maximal não trivial B tal que $G - e - B$ contém duas componentes não triviais. Seja B_1 uma barreira não trivial maximal de $G - e$ tal que $G - e - B_1$ contém duas componentes não triviais e tal que a componente não trivial que contém X seja a menor possível.

Vamos fixar a notação para que Y_1 seja a componente de $G - e - B_1$ que contenha X e Y_2 seja a outra componente. Os emparelhamentos M_i e os cortes D_i $(i = 1, 2)$ continuam definidos da mesma forma que fizemos acima. Devido à maximalidade de B_1, as componentes de $G - e - B_1$ são críticas.

Lema 7.1.11 $X = Y_1$.

Dem. Sabemos que $X \subseteq Y_1$. Seja J_1 o grafo obtido de $G - e$ pela contração de $V(G) - V(Y_1)$ a um único vértice b_1. Então $b(J_1) = 1$. Observe que como $X \subseteq Y_1$, temos que $V(G) - V(Y_1) \subseteq \overline{X}$.

Como $C = \nabla(X)$ é justo em $G - e$, temos que C é justo em J_1.

Suponha que C seja não trivial em J_1. Como $b(J_1) = 1$, uma das C-contrações em J_1 é bipartida. Então uma destas bipartições, digamos B', é barreira não trivial em J_1. Como $b(J_1) = 1$, temos que $J_1 - B'$ contém uma única componente não trivial, digamos Y'. Então $C = \nabla(Y')$. Seja A' o conjunto das componentes triviais de $J_1 - B'$.

Como a componente Y_1 de $G - e - B_1$ é crítica, concluímos que $b_1 \notin B'$. Conseqüentemente, B' é barreira não trivial em $G - e$.

Se b_1 pertence à componente não trivial Y' de $J_1 - B'$ então uma das C-contrações em $G - e$ seria bipartida. Portanto, podemos assumir que b_1 é uma componente trivial de $J_1 - B'$. Como $V(G) - V(Y_1) \subseteq \overline{X}$, concluímos que a componente não trivial de $J_1 - B'$ é X, ou seja, $Y' = X$. Logo, C é um corte proveniente da barreira B' de $G - e$.

Suponha agora que C seja um corte justo trivial de J_1. Digamos que $C := \nabla(v)$. Se $v \neq b_1$ então C seria trivial em G. Portanto, $v = b_1$, ou seja, $C = \nabla(Y_1)$ em $G - e$. Conseqüentemente, $X = Y_1$. □

Podemos supor então que $G - e - B$ tem uma única componente não trivial, para toda barreira não trivial maximal B de $G - e$. Para analisar este caso necessitamos de alguns Lemas.

Considere uma barreira B (que pode até ser trivial) de $G - e$ tal que $G - e - B$ possui uma única componente não trivial. Seja A o conjunto das componentes triviais de $G - e - B$. Seja G' o grafo obtido de G contraindo $B \cup A$ a um único vértice b. Como $b(G - e) = 2$, temos que $b(G') = 2$.

Lema 7.1.12 *Se G' contém uma 2-separação $\{u, v\}$ tal que $G' - \{u, v\}$ possui duas componentes não bipartidas e $b \in \{u, v\}$ então C é proveniente de uma barreira ou essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$.*

Dem. Por hipótese, $b \in \{u, v\}$. Fixe a notação para que tenhamos $b = v$. Também por hipótese, $G' - \{u, v\}$ tem duas componentes não bipartidas. Vamos denotar uma delas por S e vamos fazer $S' := G' - S - \{u, v\}$.

Sejam $D := \nabla(V(S) \cup \{u\})$ e $D' := \nabla(V(S) \cup \{v\})$ os dois cortes justos de G' associados à esta 2-separação. Claramente, D e D' também são justos em $G - e$ e cada uma das D-contrações em $G - e$ é não bipartida. O mesmo ocorre com cada uma das D'-contrações em $G - e$.

Se $C = D$ ou $C = D'$ ou C cruza um destes cortes então podemos concluir, pelo Lema 7.1.9, que C é essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$. Suponha então que C não cruza D nem D' e é distinto dos dois.

Então devemos ter $X \subseteq V(S)$, $X \subseteq V(S')$ ou $X \subseteq (B \cup A)$. Se $X \subseteq (B \cup A)$ então uma das C-contrações em $G - e$ seria bipartida, o que não ocorre. Portanto, $X \subseteq V(S)$ ou $X \subseteq V(S')$, digamos que $X \subseteq V(S)$. O caso em que $X \subseteq V(S')$ pode ser resolvido de forma análoga.

Seja J_1 o grafo obtido de $G - e$ pela contração da margem de D que contém S'. Assim, $b(J_1) = 1$ e C é um corte justo em J_1. Então uma das C-contrações em J_1 é bipartida. Portanto, uma destas bipartições é uma barreira não trivial em J_1. Vamos denotar por B_1 esta barreira e por A_1 as componentes triviais de $J_1 - B_1$.

Vamos denotar por s' o vértice de J_1 resultante da contração da margem de D que contém S'. No grafo J_1, o vértice s' pertence a $B_1 \cup A_1$, caso contrário, uma das C-contrações em $G - e$ seria bipartida. Conseqüentemente, a componente não trivial de $J_1 - B_1$ é X.

Se $s' \in A_1$ então B_1 é uma barreira não trivial em $G - e$ e neste caso, C é um corte proveniente desta barreira.

Suponha então que $s' \in B_1$ (Figura 7.7(a)). Note que $adj_{G-e}(V(S')) = \{u\} \cup B$. Então $B' := (B_1 - \{s'\}) \cup \{B\}$ é uma barreira não trivial em $G - e$. O vértice u pertence a A_1 ou a X.

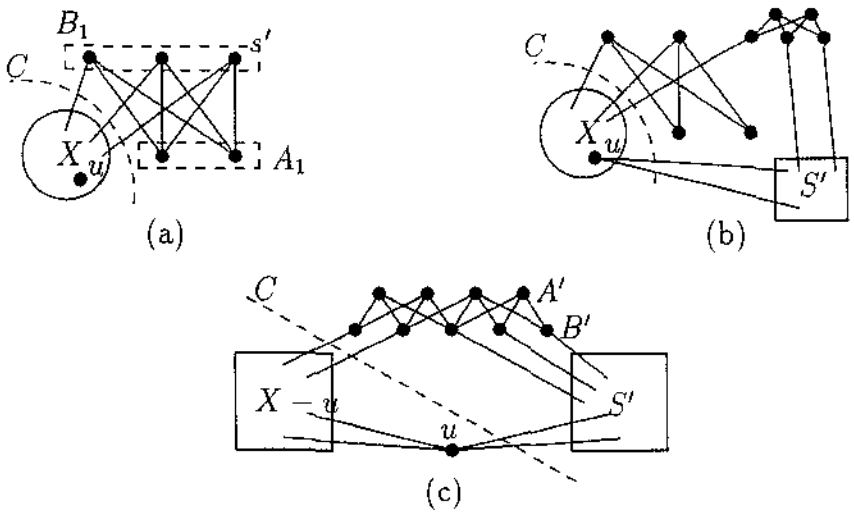


Figura 7.7: O caso em que s' pertence a B_1 e u pertence a X.

Se $u \in A_1$ então C é um corte proveniente da barreira B'. Se $u \in X$ (Figura 7.7(b)) então B' é uma barreira não trivial em $G - e$ que possui uma única componente não trivial e $A' := A_1 \cup A$ como suas componentes triviais. Assim, C é proveniente de uma 2-separação no grafo obtido de $G - e$ pela contração de $B' \cup A'$ a um único vértice (Figura 7.7(c)). □

Lema 7.1.13 *Se $G - e$ contém uma 2-separação então C é proveniente de uma barreira ou essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$.*

Dem. Seja $\{u, v\}$ uma 2-separação de $G - e$. Como G é bicrítico e 3-conexo, $G - e - \{u, v\}$ tem exatamente duas componentes e estas são não bipartidas. Vamos denotá-las por S e S'.

Fazendo $G' := G - e$ e $B := \{v\}$, temos que G' contém uma 2-separação $\{u, v\}$ tal que $G' - \{u, v\}$ possui duas componentes não bipartidas e $b \in \{u, v\}$. Pelo Lema 7.1.12, C é proveniente de uma barreira ou essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$. □

Pela hipótese deste caso, temos que $G - e - B$ tem uma única componente não trivial, para toda barreira não trivial maximal B de $G - e$. Então $G - e$ satisfaz um dos três ítens do Teorema 3.23.

O caso em que $G-e$ satisfaz o item 1 do Teorema 3.23, ou seja, que $G-e$ é bicrítico, já foi tratado.

Suponha que $G-e$ satisfaz o item 2 do Teorema 3.23, ou seja, $G-e$ contém uma barreira não trivial maximal B_1 tal que $G-e-B_1$ possui uma única componente não trivial e se A_1 é o conjunto das componentes triviais de $G-e-B_1$ então o grafo G' obtido de $G-e$ pela contração de $B_1 \cup A_1$ a um único vértice b_1 é bicrítico.

Como $b(G')=2$, concluímos, pelo Lema 3.18 que G' possui uma única 2-separação, digamos $\{u,v\}$. Então $G'-\{u,v\}$ possui exatamente duas componentes e estas são não bipartidas.

Se $b_1 \notin \{u,v\}$ então $\{u,v\}$ é uma 2-separação em $G-e$ então podemos terminar usando o Lema 7.1.13, e se $b_1 \in \{u,v\}$ então podemos terminar usando o Lema 7.1.12.

Suponha agora que $G-e$ satisfaz o item 3, ou seja, Além da barreira maximal B_1, $G-e$ possui outra barreira não trivial B_2 tal que $G-e-B_2$ possui uma única componente não trivial e se A_2 representa o conjunto das componentes triviais de $G-e-B_2$ então $B_1 \cup A_1$ é disjunto de $B_2 \cup A_2$ e o grafo G'' obtido de $G-e$ pela contração de $B_1 \cup A_1$ a um único vértice b_1 e pela contração de $B_2 \cup A_2$ a um único vértice b_2 é bicrítico.

Como $b(G'')=2$, concluímos pelo Lema 3.18 que G'' possui uma única 2-separação, digamos $\{u,v\}$. Então $G''-\{u,v\}$ possui exatamente duas componentes e estas são não bipartidas.

Se $\{b_1,b_2\} \not\subseteq \{u,v\}$ então podemos terminar pelos Lemas 7.1.13 ou 7.1.12. Suponha então que $\{b_1,b_2\}=\{u,v\}$.

Sejam S e S' as duas componentes de $G''-\{u,v\}$ e sejam D e D' os dois cortes justos de G'' associados à esta 2-separação. Então as duas D-contrações em G'' são bricks, digamos J_1'' e J_2''. Claramente, D e D' são justos em $G-e$.

Suponha que C não cruza D nem D' e é distinto dos dois. Então devemos ter $X \subseteq S$, $X \subseteq S'$, $X \subseteq (B_1 \cup A_1)$ ou $X \subseteq (B_2 \cup A_2)$. Se $X \subseteq (B_1 \cup A_1)$ ou $X \subseteq (B_2 \cup A_2)$ então uma das C-contrações em $G-e$ seria bipartida, o que não ocorre. Se $X \subseteq S$ ou $X \subseteq S'$ então C seria um corte justo não trivial no brick J_1'' ou J_2'', o que também não pode ocorrer.

Portanto, $C=D$ ou $C=D'$ ou C ou cruza um destes dois cortes. Pelo Lema 7.1.9, C é essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G-e$.

Portanto, podemos supor a partir de agora que o corte C em $G - e$ é essencialmente proveniente de uma 2-separação ou é um corte proveniente de uma barreira. Vamos então analisar e mostrar que em cada um destes casos G contém uma aresta disponível. Antes de iniciarmos a analisar os casos, vamos provar dois resultados que nos serão úteis.

Lema 7.1.14 *Se f é uma aresta de C que é disponível em G_2 então f é disponível em G_1. Além disso, $G_1 - f$ não possui uma barreira não trivial B tal que $\overline{x}$ é uma componente trivial de $G_1 - f - B$.*

Dem. Se $f \notin M_0$ ou se $f \in M_0$ e $G_1 - f$ não é matching covered então pelos Lemas 7.1.3 e 7.1.4, respectivamente, G tem uma aresta disponível. Portanto, $f \in M_0$ e $G_1 - f$ é matching covered. Pelo Teorema 6.17. f é disponível em G_1.

Seja B uma barreira não trivial de $G_1 - f$ tal que $\overline{x}$ é uma componente trivial de $G_1 - f - B$. Como f é disponível em G_1, o grafo $G_1 - f$ tem uma única componente não trivial e não bipartida, digamos X', e f tem seus extremos em componentes distintas de $G_1 - f - B$. Agora, não é difícil de ver que o corte $\nabla(X')$ é robusto em G, contradizendo a minimalidade de $|X|$. □

Lema 7.1.15 *Se $e \in C$ então $|C| \geq 4$.*

Dem. Suponha que $e \in C$ e C tenha exatamente três arestas. Vamos denotar as outras duas arestas de C por f e g. Sejam u e v os extremos de f e g que estão em X. Então, u e v formam uma barreira não trivial em $G - e$ que contém $\overline{x}$ como uma componente trivial, o que é uma contradição ao Lema 7.1.14. □

Suponha inicialmente que C é proveniente de uma barreira B_1 de $G - e$. Então $G - e - B_1$ contém duas componentes não triviais, uma delas é X e a outra vamos denotar por Y_2. Seja M_2 um emparelhamento perfeito de G tal que $|M_2 \cap \nabla(V(Y_2))| = 3$.

Seja J_2 o grafo obtido de $G - e$ pela contração de $V(G) - V(Y_2)$ a um único vértice. Vamos considerar ainda o grafo bipartido H obtido de $G - e$ contraindo cada componente de $G - e - B_1$. Vamos denotar por x e y_2 os vértices de H resultantes da contração de X e Y_2, respectivamente. Uma das bipartições de H é a barreira B_1, e a outra vamos denotar por A_1.

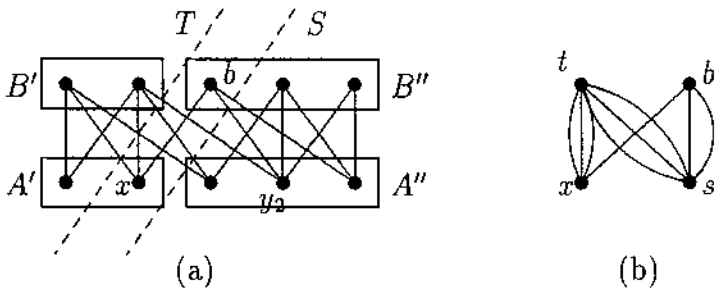


Figura 7.8: Grafos (a) H e (b) H_1.

Lema 7.1.16 *Se H contém uma aresta* f *tal que $H - \mathrm{f}$ é matching covered,* $\mathrm{f} \notin M_0 \cup M_2$ *e* f *não incide em y_2 então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Como $H - f$ é matching covered e f não incide em y_2, temos que $G_2 - e - f$ é matching covered. Além disso, $b(G_2 - e - f) = b(J_2) = 1$.

Como $e \in M_2$ e $f \notin M_2$, temos que $G_2 - f$ é matching covered. Pelo Corolário 3.21, $b(G_2 - f) = 1$. Então f é disponível em G_2 e $f \notin M_0$. Pelo Lema 7.1.3, G contém uma aresta disponível. □

Suponha inicialmente que H contém uma aresta $f \in \nabla(x)$ tal que $H - f$ não é matching covered. Como $H - f$ tem emparelhamento perfeito, podemos concluir, pelo Teorema 2.12, que os conjuntos A_1 e B_1 podem ser particionados nos conjuntos A' e $A'' := A_1 - A'$, $B' := adj(A')$ e $B'' := B_1 - B'$, respectivamente, de tal forma que $|A'| = |B'|$, $|A''| = |B''|$ e f é a única aresta de H com extremos em A' e B''. Assim, $x \in A'$.

Portanto, B' e A'' são barreiras (talvez triviais) em H (Figura 7.8(a)). Seja b o extremo de f em B''. Como f não é paralela em H e o grau de b em G é pelo menos 3, existe pelo menos duas arestas ligando b a A''.

Suponha que $y_2 \notin A''$. Se A'' é não trivial então A'' é uma barreira não trivial em G e se A'' é trivial então as arestas que ligam b a A'' seriam paralelas em H e também em G_2 e, neste caso, qualquer uma delas seriam disponíveis em G. Portanto, $y_2 \in A''$.

Sejam $S := A'' \cup (B'' - \{b\})$ e $T := B' \cup (A' - \{x\})$. Seja H_1 o grafo obtido de H pela contração de S a um único vértice s e pela contração de T a um único vértice t (Figura 7.8(b)). Assim, H_1 é obtido de H pela

contração de dois cortes justos. Portanto, H_1 é matching covered; umas das suas bipartições é composta pelos vértices x e s, e a outra pelos vértices t e b.

Note que o corte $\nabla(T)$ não separa x e y_2 em H. Portanto, pelo Lema 3.15, se g é uma aresta de H_1 que liga x e t e $H_1 - g$ é matching covered então $H - g$ também é matching covered.

Vamos mostrar agora que $e \in C$. Suponha o contrário. Como $|M_0 \cap C| = 3$ e f é a única aresta de H_1 liga x a b, pelo menos duas aresta arestas de M_0 liga x a t. Tome uma delas, digamos g tal que $g \notin M_2$. Então $H - g$ é matching covered e, como g não incide em y_2, o grafo $G_2 - e - g$ também é matching covered. Além disso, $b(G_2 - e - g) = 1$. Como $e \in M_2$ e $g \notin M_2$, podemos concluir que $G_2 - g$ é matching covered e pelo Corolário 3.21, que $b(G_2 - g) = 1$. Assim, G_2 contém uma aresta disponível que pertence a C, contradizendo a escolha de e. Portanto, $e \in C$.

Então $M_2 \cap C = \{e\}$. Pelo Lema 7.1.15, temos que $|C| \geq 4$. Conseqüentemente, $|\nabla_H(x)| \geq 3$, e como uma única aresta de H liga x a b, existem pelo menos duas arestas de H_1 que liga x a t.

Se existe g em H_1 que liga x a t e que não está em M_0 então, como g também não está em M_2, podemos concluir pelo Lema 7.1.16, que G contém uma aresta disponível. Podemos supor então que toda aresta de H_1 que liga x a t é aresta de M_0.

Isto significa que H_1 não pode ter mais do que duas arestas ligando x a t. Portanto, H_1 tem exatamente duas arestas, digamos g_1 e g_2, ligando x a t e estas são arestas de M_0, mas não de M_2. Logo, g_1 e g_2 são disponíveis em G_2. Conseqüentemente, $|B'| \geq 2$ e e tem um extremo, digamos y_1, em $A' - \{x\}$.

Vamos agora construir um novo emparelhamento perfeito de G que intercepta C em três arestas e que não contém g_1 ou g_2. Daí, podemos concluir pelo Lema 7.1.3, que G tem uma aresta disponível.

Vamos denotar os extremos de e e f em X por x_1 e x_2, respectivamente. Como G_1 é brick, $G_1 - x_1 - x_2$ tem emparelhamento perfeito N_1. Claramente, N_1 contém exatamente uma de g_1 e g_2, digamos g_1. Como sabemos, $H - g_2$ é matching covered. Então $H - g_2 - \{b, y_1\}$ tem emparelhamento perfeito N_H. Como g_1 é a única aresta incidente em x neste grafo, temos que N_H contém g_1. Claramente, N_H pode ser extendido a um emparelhamento perfeito de $G_2 - \{b, y_1\}$. Então $N_1 \cup N_2 \cup \{e, f\}$ é um emparelhamento perfeito em G que intercepta C em três arestas e não contém g_1.

Suponha agora que $H - f$ é matching covered para toda aresta f de H que incide em $\nabla(x)$. Então $G_2 - e - f$ é matching covered e $b(G_2 - e - f) = 1$. Se tomarmos $f \in (M_0 \setminus M_2)$ então f é disponível em G_2. Portanto, podemos supor que $e \in C$. Então $M_2 \cap C = \{e\}$ e pelo Lema 7.1.15, temos que $|C| \geq 4$. Logo, existe uma aresta g em H que incide em x e que não está em M_0 então, como g também não está em M_2, podemos concluir pelo Lema 7.1.16, que G contém uma aresta disponível. □

Suponha agora que C é essencialmente proveniente de uma 2-separação em $G - e$. Aqui temos três casos a analisar. Cada Lema a seguir analisará um deles.

Lema 7.1.17 *Se o corte C é proveniente de uma 2-separação em $G-e$ então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Seja $\{u, v\}$ a 2-separação de $G - e$ associada a C. Como G é 3-conexo, $G - e - \{u, v\}$ tem exatamente duas componentes. Vamos denotá-las por S e S'. Então um dos extremos de e pertence a S e o outro a S'. Além disso, $S \subseteq X$ ou $S' \subseteq X$. Fixe a notação para que tenhamos $S \subseteq X$ e $C := \nabla(S \cup \{u\})$.

Como $|M_0 \cap C| = 3$, M_0 deve conter a arestas e, deve emparelhar v com um vértice de S e u com um vértice de S'.

Se existe uma única aresta ligando v a S então u unido ao vizinho de v em S seria uma barreira não trivial em $G - e$ contendo $\overline{x}$ como uma componente trivial, o que, pelo Lema 7.1.14, não pode ocorrer. Portanto, existem pelo menos duas arestas ligando v a S.

Seja f uma aresta que liga v a S e que não pertence a M_0. Note que f é paralela em G_2, ou seja, $b(G_2 - f) = 1$. Pelo Lema 7.1.3, G contém uma aresta disponível. □

Suponha agora que $G - e$ possua uma barreira não trivial B tal que $G - e - B$ possua uma única componente não trivial. Seja A o conjunto das componentes triviais de $G - e - B$. Então e possui um extremo em A. Considere agora o grafo G' obtido de G contraindo $B \cup A$ a um único vértice b.

Lema 7.1.18 *Se o corte C é proveniente de uma 2-separação em G' então G contém uma aresta disponível.*

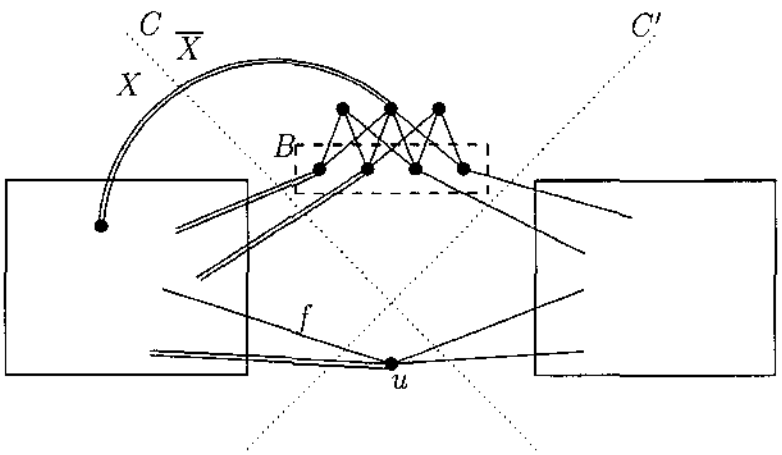


Figura 7.9: O corte C é proveniente de uma 2-separação em G'.

Dem. Seja $\{u, v\}$ a 2-separação de G' associada a C. Se b é distinto de u e v então C é proveniente de uma 2-separação em $G - e$. Esta situação já foi tratada no Lema 7.1.17. Podemos supor então que $b = u$ ou $b = v$. Fixe a notação para que tenhamos $b = v$ (Figura 7.9).

O outro corte justo, digamos C', de G' associado à 2-separação $\{u, v\}$ também é robusto em G. Portanto, se $b = v$ então devemos ter $u \in X$ e $B \cup A \subseteq \overline{X}$, senão teremos uma contradição à escolha de C (à minimalidade de $|X|$). Vamos fazer $S := X - \{u\}$ e $S' := \overline{X} - (B \cup A)$.

Vamos considerar o grafo bipartido H obtido de $G - e$ contraindo a componente não trivial de $G - e - B$ a um único vértice. Seja f uma aresta de G que possui extremos em X e B. Pelo Lema 3.15, $H - f$ é matching covered. Portanto, se existe mais de uma aresta ligando X a B então $G_2 - e - f$ também é matching covered. Além disso, $b(G_2 - e - f) = 1$.

Seja M_2 um emparelhamento perfeito de G_2 que contém e. Portanto, no caso em que existe mais de uma aresta ligando X a B, toda aresta f que liga X a B e que não está em M_2 é tal que $G_2 - f$ é matching covered. Pelo Corolário 3.21, $b(G_2 - f) = 1$. Note que toda aresta que liga X a B é aresta de C. Logo, no máximo uma aresta que liga X a B é aresta de M_2.

Vamos agora mostrar que $e \in C$. Suponha que $e \notin C$. Como $|M_0 \cap C| = 3$, M_0 contém pelo menos duas arestas que liga X a B. Pelo parágrafo anterior,

podemos concluir que uma destas duas, digamos f, não pertence a M_2. Então $G_2 - f$ é matching covered e $b(G_2 - f) = 1$. Lembre-se da hipótese que fizemos de que a aresta e deveria, se possível, ser uma aresta de C. Se $e \notin C$ então f nos leva à uma contradição à escolha de e. Portanto, $e \in C$, ou seja, e tem um extremo em A e o outro em X.

Como $|M_0 \cap C| = 3$, existe pelo menos duas arestas de M_0 ligando S a B. Se existe três arestas ligando S a B então uma delas é disponível em G_2 e não pertence a M_0, e daí, pelo Lema 7.1.3, G tem uma aresta disponível. Podemos supor então que existe exatamente duas arestas, digamos g_1 e g_2, ligando S a B e estas são as arestas de M_0. Note que g_1 e g_2 são, cada uma, disponível em G_2.

Vamos mostrar então que e não pode incidir em u. Pois, suponha que e incide em u. Seja x_2 o extremo de g_2 em S. Então g_1 é disponível em G_2, e u e x_2 formam uma barreira não trivial em $G_1 - g_1$ contendo $\overline{x}$ como uma componente trivial, o que não pode ocorrer pelo Lema 7.1.14. Portanto, e não incide em u.

Vamos agora construir um novo emparelhamento perfeito de G que intercepta C em três arestas e que não contém uma das arestas que liga S a B. Daí, podemos concluir pelo Lema 7.1.3, que G tem uma aresta disponível.

Seja x_1 o extremo de e em X. Então $G_1 - u - x_1$ tem emparelhamento perfeito N_1. Claramente, N_1 contém uma única aresta, digamos g_1, que liga S a B. Seja b_1 o extremo de g_1 em B. Note que existe pelo menos duas arestas independentes ligando B a S', caso contrário, G_2 não seria 3-conexo. Portanto, existe uma aresta h_2 que liga S' a B, cujo extremo b_2 em B é distinto de b_1.

Seja N um emparelhamento perfeito de $G - b_1 - b_2$. Então N contém e e $N_H := N \cap (E(H) \cup \{e\})$ é emparelhamento perfeito em $H - b_1 - b_2$. Seja N_2 um emparelhamento perfeito em $G_2 - e$ contendo h_2. Então N_2 emparelha u com S' e $N_1 \cup N_H \cup N_2$ é emparelhamento perfeito em G que intercepta C em três arestas e não contém uma das arestas que liga S a B. Como esta aresta é disponível em G_2, podemos concluir pelo Lema 7.1.3, que G tem uma aresta disponível. □

Suponha agora que $G - e$ possua duas barreiras não triviais B_1 e B_2 tais que $G - e - B_i$ possua uma única componente não trivial, digamos Y_i. Seja A_i o conjunto das componentes triviais de $G - e - B_i$ e suponha que $B_1 \cup A_1$ é disjunto de $B_2 \cup A_2$. Então e possui um extremo em A_1 e o outro em

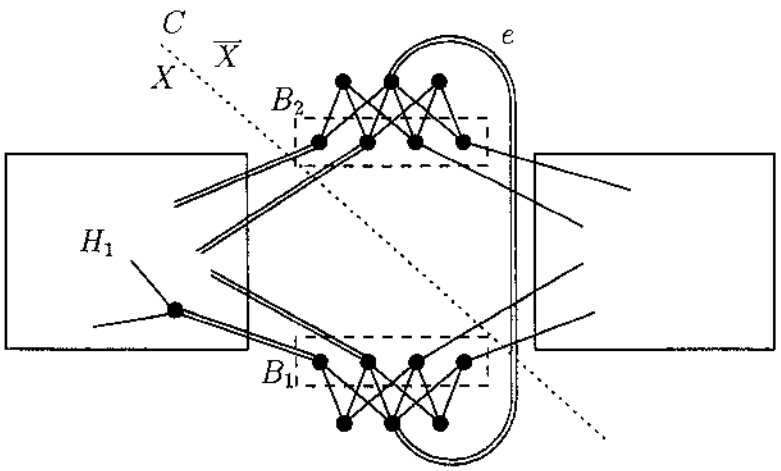


Figura 7.10: O corte C é proveniente de uma 2-separação em G'''.

A_2. Considere agora o grafo G'' obtido de G contraindo $B_1 \cup A_1$ a um único vértice b_1 e contraindo $B_2 \cup A_2$ a um único vértice b_2.

Lema 7.1.19 *Se o corte C é proveniente de uma 2-separação em G'' então G contém uma aresta disponível.*

Dem. Seja $\{u, v\}$ a 2-separação de G'' associada a C. Se $|\{b_1, b_2\} \cap \{u, v\}| = 0$ então C é proveniente de uma 2-separação em $G - e$. Esta situação já foi tratada no Lema 7.1.17. Se $|\{b_1, b_2\} \cap \{u, v\}| = 1$ então esta situação já foi tratada no Lema 7.1.18. Podemos supor então que $\{b_1, b_2\} = \{u, v\}$.

Como C é proveniente da 2-separação $\{u, v\}$ de G'' então em G devemos ter $B_1 \cup A_1 \subset X$ ou $B_2 \cup A_2 \subset X$. Fixe a notação para que tenhamos $B_1 \cup A_1 \subset X$. Como e possui um extremo em A_1 e o outro em A_2, temos que $e \in C$ (Figura 7.10). Note que B_1 é uma barreira não trivial em $G_1 - e$. Então, podemos escolher B_1 como sendo maximal em $G_1 - e$. Analogamente, podemos escolher B_2 maximal em $G_2 - e$.

Vamos considerar o grafo bipartido T_i obtido de $G - e$ contraindo a componente Y_i de $G - e - B_i$ a um único vértice. Seja f uma aresta de G que possui extremos em Y_i e B_i. Pelo Lema 3.15, $T_i - f$ é matching covered.

Portanto, se f é uma aresta que liga X a B_2 então $H_2 - f$ é matching covered. Conseqüentemente, se existe pelo menos duas arestas ligando X a

B_2 então $G_2 - e - f$ também é matching covered. Além disso, $b(G_2 - e - f) = b(G_2 - e) = 1$. Como $e \not\Rightarrow f$ em G_2 (já que as duas incidem no mesmo vértice em G_2), temos que $b(G_2 - f) = 1$, ou seja, f é disponível em G_2.

Vamos fazer $H_1 := X - (B_1 \cup A_1)$ e $H_2 := \overline{X} - (B_2 \cup A_2)$. Para $i = 1, 2$, seja L_i o grafo formado por H_i acrescido das arestas que ligam H_i a B_1 e H_i a B_2, e seja J_i o grafo obtido de L_i contraindo-se os vértices de B_1, contraindo-se os vértices de B_2 e ligando os dois vértices resultantes por uma aresta.

Vamos mostrar agora que cada H_i está, na verdade, ligado a B_1 (e a B_2) por pelo menos duas arestas independentes (não vizinhas). Se $adj(B_1) \cap H_1$ ou $adj(H_1) \cap B_1$ é um único vértice w então $\{w, \overline{x}\}$ seria um corte de vértice em G_1, mas isto não pode ocorrer porque G_1 é 3-conexo. Assim, H_1 está ligado a B_1 por duas arestas independentes. Analogamente, H_2 está ligado a B_2 por duas arestas independentes. Se H_1 tem um único vizinho em B_2 então C seria proveniente de uma 2-separação no grafo obtido de $G - e$ contraindo $B_1 \cup A_1$ a um único vértice (situação análoga ocorre se H_2 tem um único vizinho em B_1), e se B_2 tem um único vizinho w em H_1 então $B_1 \cup \{w\}$ seria uma barreira não trivial em $G_1 - e$ que possui $\overline{x}$ como uma componente trivial, o que também não pode ocorrer. Se B_1 tivesse um único vizinho em H_2 então $B_2 \cup \{w\}$ seria uma barreira não trivial em $G - e$ e C seria um corte associado a esta barreira. Mas este caso já foi tratado. Portanto, cada H_i está ligado a B_1 (e a B_2) por pelo menos duas arestas independentes.

Logo, toda aresta que liga H_1 a B_2 é disponível em G_2. Como $|M_0 \cap C| = 3$, se existe uma aresta, digamos g, ligando H_1 a B_2, que não está em M_0 então pelo Lema 7.1.3, G contém uma aresta disponível. Portanto, existem exatamente duas arestas ligando H_1 a B_2 e estas são arestas de M_0. Logo, M_0 tem duas arestas ligando H_1 a B_1, e conseqüentemente, H_1 tem pelo menos quatro vértices.

Agora vamos mostrar que cada J_i é um brick. Como e é disponível em G_1 e G_2, em vista do Teorema 3.23 e Lema 3.17, é suficiente mostrarmos que B_i é a única barreira não trivial maximal em $G_i - e$. Se $G_1 - e$ tem duas barreiras não triviais maximais então uma delas, digamos B', é tal que $\overline{x}$ é componente trivial de $G_1 - e - B'$, o que não pode ocorrer. Assim, $G_1 - e$ tem B_1 como sua única barreira não trivial maximal. Se $G_2 - e$ tem duas barreiras não triviais maximais então C é um corte justo de barreira em $G - e$. Mas este caso já foi considerado. Portanto, cada J_i é um brick.

Para a parte restante desta demonstração, precisamos construir emparelhamentos perfeitos especiais de G. Eles podem ser obtidos combinando os

três tipos de emparelhamentos descritos abaixo:

(i) Para cada i, existe um emparelhamento X_i em L_i que emparelha dois vértices de H_i com dois vértices de B_1 e os demais vértices de H_i são emparelhados entre si. (**Dem.** O grafo $J_i - b_2$ é crítico. Seja H_i' o grafo obtido de $J_i - b_2$ quebrando b_1 em dois vértices. Pelo Lema 6.2, H_i' tem emparelhamento perfeito.)

Da mesma forma, existe um emparelhamento Y_i em L_i que emparelha dois vértices de H_i com dois vértices de B_2 e os demais vértices de H_i são emparelhados entre si.

(ii) Para cada i, H_i tem um emparelhamento perfeito Q_i. (Note que $H_i = J_i - \{b_1, b_2\}$. Como J_i é brick, segue que H_i tem emparelhamento perfeito.)

(iii) Dados quaisquer dois vértices p e q de B_1 existe um emparelhamento N_1 que emparelha v_1 com v_2 e os vértices de $A_1 - \{v_1\}$ com os de $B_1 - \{p, q\}$. (Como G é brick, $G - \{p, q\}$ tem emparelhamento perfeito. Um emparelhamento perfeito de $G - \{p, q\}$ obviamente contém tal emparelhamento N_1.)

Da mesma forma, dados quaisquer dois vértices p e q de B_2 existe um emparelhamento N_2 que emparelha v_1 com v_2 e os vértices de $A_2 - \{v_2\}$ com os de $B_2 - \{p, q\}$.

Vamos agora definir um emparelhamento em L_1 como sendo do *tipo 1* se ele emparelha um vértice de H_1 com um vértice de B_1, outro vértice de H_1 com um vértice de B_2 e o restante dos vértices de H_1 são emparelhados entre si. Da mesma forma, defina um emparelhamento em L_2 como sendo do *tipo 2* se ele emparelha um vértice de H_2 com um vértice de B_1, outro vértice de H_2 com um vértice de B_2 e o restante dos vértices de H_2 são emparelhados entre si.

Lema 7.1.20 *Se M_1 é do tipo 1 e M_2 é do tipo 2 então $M_1 \cup M_2$ não é emparelhamento em G.*

Dem. Se $M_1 \cup M_2$ é emparelhamento então considere $F := M_1 \cup M_2 \cup N_1 \cup N_2$. Claramente, F é emparelhamento perfeito de G que intercepta C em três

arestas e tem uma única aresta ligando H_1 a B_2. Assim, a outra aresta que liga H_1 a B_2 é disponível em G_2 e não pertence a F. Pelo Lema 7.1.3, G tem uma aresta disponível. □

Vamos definir um grafo bipartido W que será 2-aresta-colorível. A bipartição de W será (B_1, B_2). Um vértice p em B_1 será ligado a um vértice p' em B_2 por uma aresta vermelha se existir um emparelhamento do tipo 1 em L_1 que os satura. Analogamente, existirá uma aresta azul entre p e p' se existir um emparelhamento do tipo 2 em L_2 que os satura.

Pelo Lema 7.1.20, nenhuma aresta vermelha é disjunta de uma aresta azul. Como J_1 é brick, e portanto matching covered, todo vértice de $B_1 \cup B_2$ que é adjacente em G com um vértice em H_1 é saturado por um emparelhamento do tipo 1 e, conseqüentemente, é incidente em W com uma aresta vermelha. Portanto, existem pelo menos dois vértices em B_1 e pelo menos dois em B_2 que são incidentes a uma aresta vermelha. O mesmo acontece com as arestas azuis.

Como nenhuma aresta vermelha é disjunta de uma aresta azul, W deve ser composto por um 4-ciclo p_1, p_2, q_1, q_2, onde $\{p_i, q_i\} \subseteq B_i$ $(i = 1, 2)$, e possivelmente alguns vértices isolados (Figura 6.7).

Vamos mostrar agora que, na verdade, $B_i = \{p_i, q_i\}$ $(i = 1, 2)$. Suponha que B_1 contenha um vértice x distinto de p_1 e q_1. Se x é vizinho de algum vértice y em B_2 então existe um emparelhamento M em G do tipo 1 ou 2 tal que M acrescido da aresta (x, y) também é emparelhamento em G. Claramente, $M \cup (x, y)$ pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de G que intercepta C em três arestas.

Concluímos então que nenhum vértice de B_1 pode estar ligado a um de B_2. Portanto, qualquer outro vértice de $B_1 - \{p_1, q_1\}$ deve somente ser adjacente a vértices em A_1. Isto implica que A_1 é uma barreira em G. Como G é brick, devemos ter $|A_1| = 1$. analogamente, $|A_2| = 1$.

Note que o grafo L_2 não pode ser o grafo H senão, como H_1 tem pelo menos seis vértices, teríamos uma contradição à minimalidade de $|X|$. Portanto, pelo Lema 6.3, um dos grafos L_2, $L_2 - \{p_1, p_2\}$ e $L_2 - \{q_1, q_2\}$ têm emparelhamento perfeito F'. Em qualquer caso, F' pode ser estendido a um emparelhamento perfeito F de G que intercepta C em três arestas e tem uma única aresta ligando H_1 a B_2. Assim, a outra aresta que liga H_1 a B_2 é disponível em G_2 e não pertence a F. Pelo Lema 7.1.3, G tem uma aresta disponível. Isto prova o Teorema. □

Capítulo 8

Propriedades dos Bricks

8.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades dos bricks. Na Seção 8.2 mostraremos que os bricks satisfazem a Conjectura 5.3, ou seja, que os bricks diferentes do grafo de Petersen admitem uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla.

Entre outras aplicações, este Teorema será utilizado na Seção 8.3, juntamente com o Teorema 5.8, para apresentarmos uma propriedade que generaliza o Teorema de Lovász-Vempala, e que será fundamental para provarmos, no Capítulo 9, a validade da Conjectura 5.3 para todos os grafos matching covered.

8.2 Decomposição em orelhas ótima para bricks

Nesta seção mostraremos que os bricks satisfazem a conjectura 5.3.

Teorema 8.1 *Seja G um grafo matching covered cuja decomposição em cortes justos fornece um único brick e este é diferente do grafo de Petersen. Então G admite uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla.*

Dem. Por indução em $|V(G)| + |E(G)|$. Seja G um grafo matching covered satisfazendo as hipóteses do Teorema. Como a decomposição em cortes justos

de G fornece um único brick, cada iteração de uma decomposição de G em cortes justos fornece um grafo bipartido como resultado de uma contração.

Se G tem um corte justo não trivial C então uma das C-contrações, digamos G_1, é bipartido, e a outra, digamos G_2, é um grafo matching covered tal que $b(G_2) = 1$. Claramente, o brick de G_2 é o mesmo brick de G que, por hipótese, é diferente do grafo de Petersen. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas $\mathcal{D}$ de G_2 que usa uma única orelha dupla. Pelo Lema 5.6, $\mathcal{D}$ pode ser estendida a uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

Podemos supor então que G não tem corte justo não trivial. Portanto, G é um brick. Se G é K_4 ou $\overline{C_6}$ então o Teorema é claramente verdadeiro. Suponha que G é diferente do K_4 e $\overline{C_6}$. Pelo Teorema 7.1 (de Lovász-Vempala), G contém uma aresta e tal que $G - e$ é matching covered e $b(G_e) = 1$.

Se o brick de $G - e$ é diferente do grafo de Petersen então por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de $G - e$ que usa uma única orelha dupla. Podemos então adicionar e como uma orelha simples para obter uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

Podemos supor então que o brick de $G - e$ é P, onde P é o grafo de Petersen. Observe que $G - e$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.23. Vamos utilizar este Teorema para determinar a estrutura de G.

Consideremos inicialmente o caso em que $G - e$ é bicrítico, ou seja, o caso em que $G - e$ satisfaz o item 1 do Teorema 3.23. Pelo Lema 3.17, $G - e$ é brick. Portanto, $G - e = P$. Então $G = P + e$. Mas é fácil ver que $P + e$ possui uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla.

Se $G - e$ satisfaz o item 2 do Teorema 3.23 então G tem a forma de um dos grafos da Figura 8.1(a), (b) ou (c), possivelmente acrescido de arestas adicionais com extemos em $\{u_1, u_2, u_3\}$ e B.

Se $G - e$ satisfaz o item 3 do Teorema 3.23 então G tem a forma de um dos grafos da Figura 8.2(d) ou (e), possivelmente acrescido de arestas adicionais com extemos em $\{u_2, u_3\}$ e B, $\{u_6, u_9\}$ e B', B e B', no caso (d), e $\{u_1, u_2, u_3\}$ e B,$\{u_1, u_4, u_5\}$ e B', no caso (e).

O que nos resta fazer é mostrar que em cada um destes cinco casos, G possui uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla. Vamos denotar por T (T') o grafo bipartido (matching covered) obtido pela contração da componente não trivial de $G - e - B$ ($G - e - B'$) a um único vértice h (h'). Vamos denotar os extremos de e por x e y, onde $y \in A$.

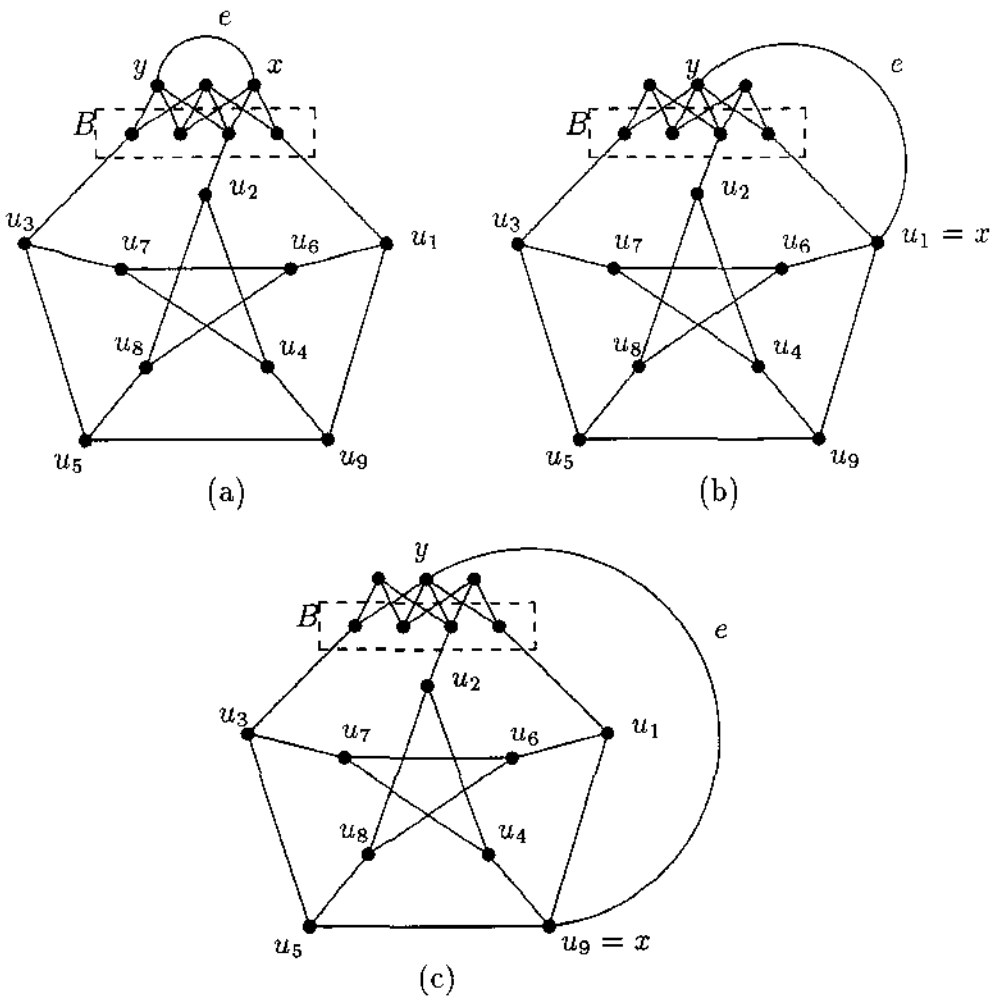


Figura 8.1: Formas possíveis para o grafo G.

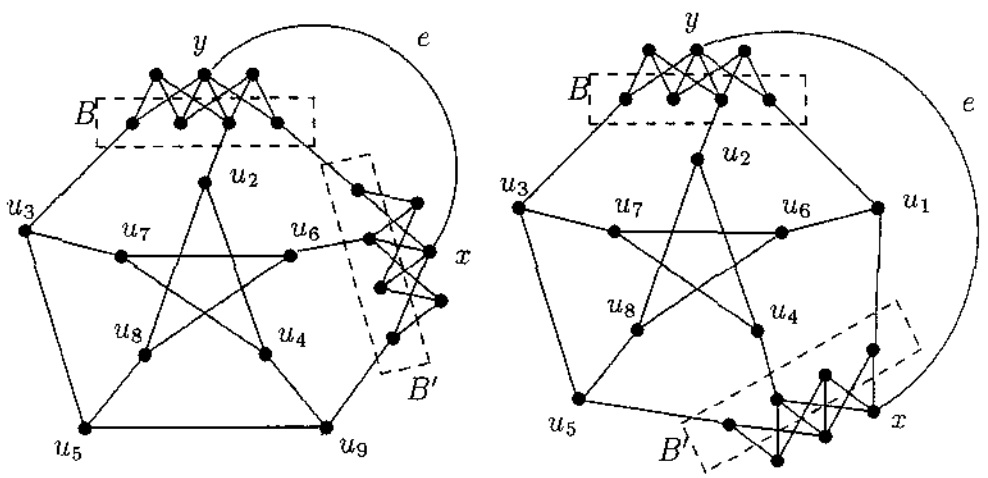


Figura 8.2: Formas possíveis para o grafo G.

Suponha inicialmente que G é da forma da figura 8.1 caso (a). Considere $G_1 := G - \{(u_6, u_7), (u_3, u_5), (u_1, u_9), e\}$ (Figura 8.3).

Proposição 8.1.1 *G_1 é matching covered.*

Dem. Considere o corte $C := \nabla(B \cup A)$ neste grafo. Uma das C-contrações em G_1 é o grafo bipartido T e a outra é uma subdivisão ímpar do K_4. Pelo Lema 3.9, G_1 é matching covered. □

Agora que já sabemos que G_1 é matching covered, podemos ver que, na demonstração da Proposição 8.1.1, o que fizemos na verdade foi uma decomposição em cortes justos para o grafo G_1, e vimos com isso que G_1 tem um único brick e este é o K_4. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de G_1 que usa uma única orelha dupla.

Seja M_e um emparelhamento perfeito de G que contém a aresta e. Por simples contagem, podemos ver que M_e emparelha os vértices u_1, u_2 e u_3 com vértices de B. Então, podemos tomar M_e contendo as arestas $\{(u_4, u_7), (u_6, u_8), (u_5, u_9)\}$. Isto mostra que e é uma orelha simples de G_1. Por outro lado, se tomarmos M_e contendo as arestas

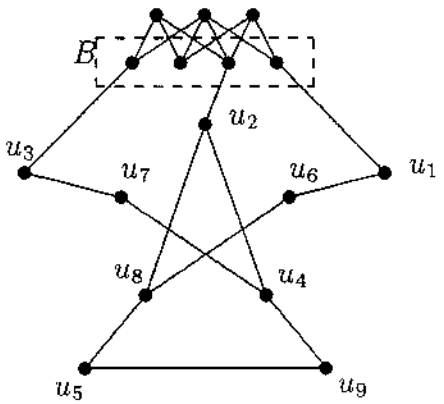


Figura 8.3: Grafo G_1 no caso (a).

$\{(u_6, u_7), (u_5, u_8), (u_4, u_9)\}$, podemos ver que (u_6, u_7) é orelha simples de $G_1 + e$. Tomando emparelhamentos perfeitos adequados, podemos facilmente incluir as outras duas arestas, uma por vez, como orelha simples para obter uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

O caso (b) da figura 8.1 é similar. Vamos tratar o caso (c). Considere um emparelhamento perfeito M de G contendo a aresta e. Por simples contagem, M emparelha exatamente dois vértices de $\{u_1, u_2, u_3\}$ com vértices de B. As seguintes proposições serão úteis para tratarmos este e outros casos futuros:

Proposição 8.1.2 *Seja* $S \subset \{u_1, u_2, u_3\}$ *tal que* $|S| = 2$. *Então* $|adj(S) \cap B| \geq 2$.

Dem. Suponha, por exemplo, que $|adj(\{u_1, u_2\}) \cap B| = 1$. Então $A \cup \{u_3\}$ é uma barreira não trivial em G. □

Para a parte restante da prova, necessitamos de emparelhamentos perfeitos construídos especialmente para cada situação. Estes emparelhamentos podem ser obtidos combinando os emparelhamentos descritos abaixo:

Proposição 8.1.3 *Dados dois vértices* p *e* q *em* B, *existe um emparelhamento* N *que contém a aresta* e *e que emparelha os vértices de* $A - \{y\}$ *com os de* $B - \{p, q\}$.

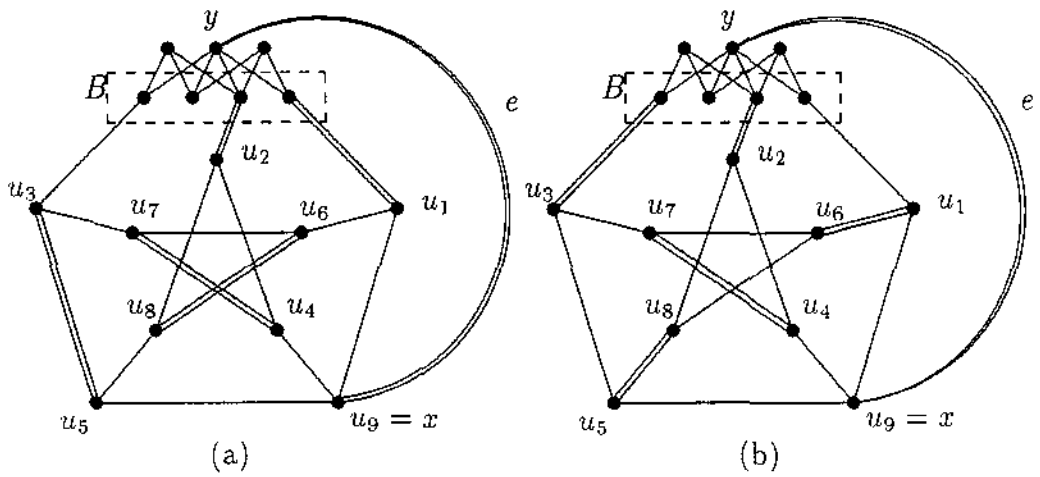


Figura 8.4: Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (c).

Dem. Como G é brick, $G - \{p, q\}$ tem emparelhamento perfeito. Um emparelhamento perfeito de $G - \{p, q\}$ obviamente contém tal emparelhamento N. □

Proposição 8.1.4 *Existe emparelhamento perfeito em G contendo e e que emparelha quaisquer dois vértices de $\{u_1, u_2, u_3\}$ com vértices de B.*

Dem. Vamos mostrar, por exemplo, que existe emparelhamento perfeito em G contendo e e que emparelha u_2 e u_3 com vértices de B. Pela Proposição 8.1.2, temos que $|adj(\{u_2, u_3\}) \cap B| \geq 2$. Logo, existem dois vértices p e q distintos em B tais que p é adjacente a u_2 e q é adjacente a u_3.

Pela Proposição 8.1.3, existe um emparelhamento N que contém a aresta e e que emparelha os vértices de $A - \{y\}$ com os de $B - \{p, q\}$. Então $N \cup \{(u_2, p), (u_3, q)\} \cup \{(u_6, u_1), (u_4, u_7), (u_5, u_8)\}$ é da forma desejada. De forma análoga, podemos mostrar que a Proposição é verdadeira para qualquer outro par de vértices em $\{u_1, u_2, u_3\}$. □

Podemos supor então que M (M') é um emparelhamento perfeito em G que contém e e emparelha u_1 e u_2 (u_2 e u_3) com vértices de B. Então M (M') contém as arestas $\{(u_4, u_7), (u_6, u_8), (u_3, u_5)\}$ ($\{(u_1, u_6), (u_4, u_7), (u_5, u_8)\}$)

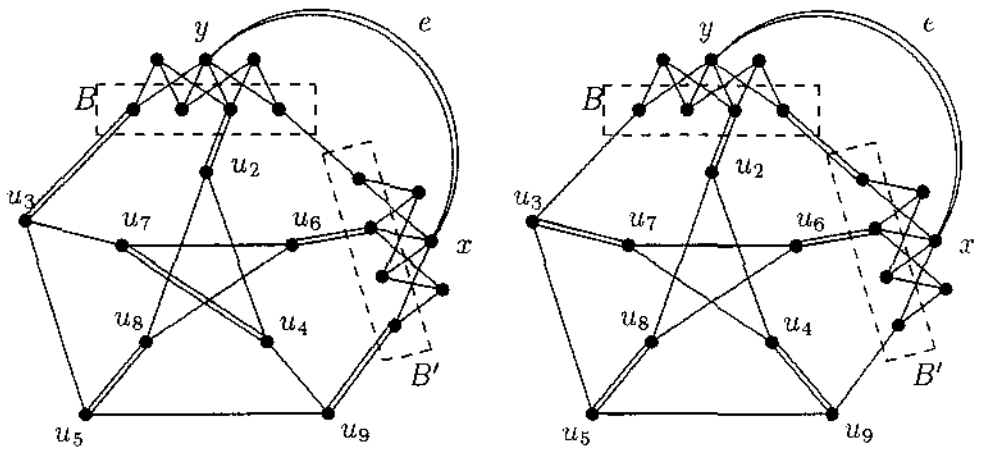


Figura 8.5: Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (d).

(Figura 8.4(a) e (b)). Considere $G_1 := G - \{(u_3, u_7), (u_5, u_8), (u_2, u_4), e\}$. Procedendo de maneira análoga ao que fizemos no caso (a), podemos ver que G_1 é matching covered, e uma decomposição de G_1 em cortes justos fornece K_4 como seu único brick. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de G_1 que usa uma única orelha dupla. Agora vamos colocar as quatro arestas restantes, cada uma delas como um orelha simples para obter uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

O emparelhamento M nos mostra que e é uma orelha simples de G_1, e o emparelhamento M' nos mostra que (u_5, u_8) é uma orelha simples de $G_1 + e$. Tomando emparelhamentos perfeitos adequados, podemos facilmente incluir as outras duas arestas, uma por vez, como orelha simples para obter uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

Trataremos agora o caso (d). Para este caso precisamos da seguinte Proposição.

Proposição 8.1.5 $|adj(\{u_2, u_3\}) \cap B| \geq 2$ *e* $|adj(\{u_6, u_9\}) \cap B'| \geq 2$. *Além disso,* $B \cup \{u_6\}$ *e* $B \cup \{u_9\}$ *possuem cada um pelo menos dois adjacentes em* B'. *Analogamente,* $B' \cup \{u_2\}$ *e* $B' \cup \{u_3\}$ *possuem cada um pelo menos dois adjacentes em* B.

Dem. Suponha que $|adj(\{u_6, u_9\}) \cap B'| = 1$. Então $A' \cup B$ é uma barreira não trivial em G, o que é uma contradição pois G é brick. situação análoga ocorre se $|adj(\{u_2, u_3\}) \cap B| = 1$.

Se $B \cup \{u_6\}$ possui um único adjacentes em B' então $A' \cup \{u_9\}$ é uma barreira não trivial em G. De forma análoga podemos mostrar os outros casos. □

Por simples contagem, todo emparelhamento perfeito em G contendo a aresta e tem exatamente duas arestas com um extremo em B e o outro em $\{u_2, u_3\} \cup B'$. Podemos usar as Proposições 8.1.5 e 8.1.3 para mostrar que existe um emparelhamento perfeito M que emparelha $\{u_2, u_3\}$ com vértices de B e $\{u_6, u_9\}$ com vértices de B' (Figura 8.5(a)). Podemos também mostrar que existe um emparelhamento perfeito M' em G contendo a aresta e e que emparelha exatamente um de u_2 e u_3, digamos u_2, com um vértice de B, e consequentemente, um de u_6 e u_9, digamos u_6, com um vértice de B' (Figura 8.5(b)).

Considere $G_1 := G - \{(u_3, u_5), (u_4, u_7), (u_2, u_8), e\}$. Por um procedimento análogo ao da proposição 8.1.1, podemos provar que G_1 é matching covered. Além disso, G_1 tem K_4 como seu único brick. Por hipótese de indução, existe uma decomposição em orelhas de G_1 que usa uma única orelha dupla.

Considerando o emparelhamento perfeito M' podemos ver que e é uma orelha simples de G_1, e Considerando o emparelhamento perfeito M podemos ver que (u_4, u_7) é uma orelha simples de $G_1 + e$. Tomando emparelhamentos perfeitos adequados, podemos facilmente incluir as outras duas arestas, uma por vez, como orelha simples para obter uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla.

Suponha agora que G é da forma da figura 8.2(e). Podemos proceder de forma análoga à Proposição 8.1.4 para mostrar que existe emparelhamento perfeito M (M') em G que contém e e emparelha u_1 e u_2 (u_1 e u_3) com vértices de B (Figura 8.6(a) e (b)). Considere $G_1 := G - \{(u_3, u_7), (u_5, u_8), (u_2, u_4), e\}$ e proceda de forma análoga aos casos anteriores. □

Teorema 8.2 *Todo brick diferente do grafo de Petersen admite uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla.*

Dem. Imediato a partir do Teorema 8.1. □

Pelo Teorema 8.2, concluímos que a conjectura 5.3 é verdadeira para os bricks.

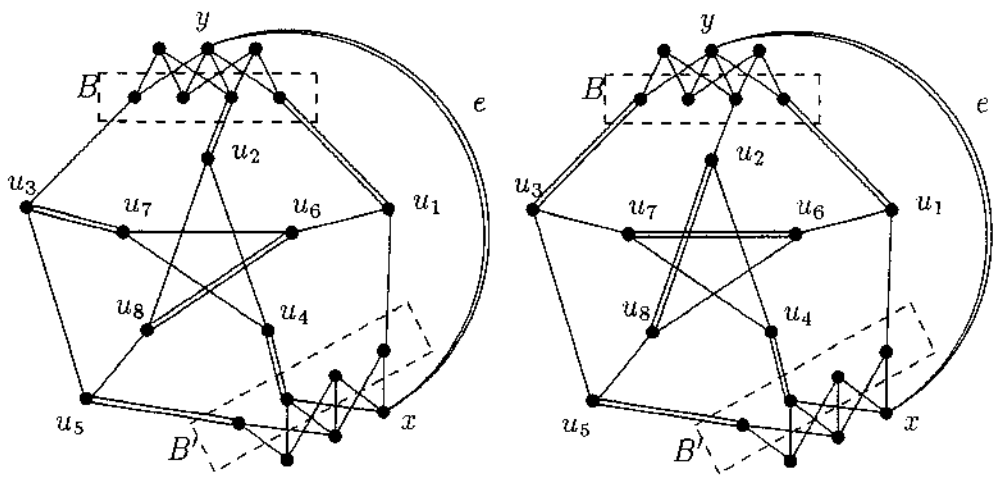


Figura 8.6: Emparelhamentos perfeitos M e M' para o caso (e).

8.3 Teorema de Lovász-Vempala reforçado

Seja G um grafo matching covered cuja decomposição em cortes justos fornece b bricks, dentre os quais p são, a menos de arestas paralelas, isomorfos ao grafo de Petersen. Vamos denotar por $\phi(G)$ o valor $b + p$.

Relembre que uma aresta e é disponível em um brick G se $G-e$ é matching covered e $b(G - e) = 1$. Dizemos que uma aresta $e \in E(G)$ é *fortemente disponível* se $G - e$ é matching covered e $\phi(G - e) = \phi(G)$. Vejamos alguns exemplos. Se G é o grafo de Petersen então $\phi(G) = 2$. Mas para toda aresta e deste grafo temos $\phi(G-e) = 2$. Portanto, toda aresta no grafo de Petersen é fortemente disponível.

Suponha agora que G seja um brick distinto do grafo de Petersen. Então $\phi(G) = 1$. Logo, uma aresta neste grafo é fortemente disponível se $G - e$ é matching covered e $\phi(G - e) = 1$, ou seja, $G - e$ deve ter um único brick e este deve ser distinto do grafo de Petersen.

Dizemos também que um par de arestas $\{e, f\}$ de um brick G é *fortemente disponível* se $G-\{e, f\}$ é matching covered e $\phi(G-\{e, f\}) = 0 = \phi(G)-1$, ou

seja, se $G-e$ é matching covered e bipartido. Chamaremos de *elemento fortemente disponível* a uma aresta fortemente disponível ou um par fortemente disponível de arestas em G.

Esta seção será dedicada a provar que "todo brick possui pelo menos três elementos fortemente disponíveis". Este Teorema será utilizado no próximo Capítulo para que possamos provar que a Conjectura 5.3 é verdadeira. Vamos inicialmente apresentar alguns resultados que contribuirão diretamente para a demonstração deste Teorema.

O Lema a seguir é Corolário do Teorema 8.2 e de outros Teoremas importantes demonstrados nos Capítulos anteriores.

Lema 8.3 *Todo brick distinto de K_4 e $\overline{C_6}$ contém uma aresta fortemente disponível.*

Dem. Seja G um brick distinto de K_4 e $\overline{C_6}$. Se G é o grafo de Petersen então toda aresta de G é fortemente disponível. Podemos supor então que G também não é o grafo de Petersen.

Pelo Teorema 8.2, existe uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.8, existe uma decomposição em orelhas canônica $\mathcal{D}$ de G que usa uma única orelha dupla. Portanto, como G é distinto de K_4 e $\overline{C_6}$, a última orelha de $\mathcal{D}$ é uma aresta, digamos e.

Claramente, a decomposição $\mathcal{D}$ fornece uma decomposição em orelhas de $G-e$ que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.2, temos que $\phi(G-e)=1$. Portanto, e é fortemente disponível. □

O que vamos fazer para exibir elementos fortemente disponíveis em um brick G, é buscá-los dentre os elementos fortemente disponíveis de G', o brick de $G-e$, onde e é fortemente disponível em G. Os dois Lemas a seguir mostram alguns exemplos de como isto é feito.

Lema 8.4 *Seja G um brick e e uma aresta fortemente disponível em G. Seja G' o brick de $G-e$ e suponha que e' seja uma aresta fortemente disponível em G'. Então (i) $G-e-e'$ é matching covered, (ii) o brick de $G-e-e'$ é o brick de $G'-e'$ e (iii) $\phi(G-e-e')=1$. Além disso, se $e \not\Rightarrow e'$ em G então e' é fortemente disponível em G.*

Dem. Pelo Lema 3.23, o grafo G' é obtido de $G-e$ por no máximo duas contrações de margens bipartidas de cortes justos. Se e' não incide em nenhum

dos vértices resultantes de contrações então claramente $G-e-e'$ é matching covered. No caso em que e' incide em algum destes vértices, podemos utilizar o Lema 3.15 para concluir que $G-e-e'$ é matching covered. Portanto, em qualquer caso, $G-e-e'$ é matching covered.

O brick de $G-e-e'$ é o brick de $G'-e'$ pois, todo corte justo de $G-e$ é também justo em $G-e-e'$ (Lema 3.13). Isto significa que podemos obter o brick de $G-e-e'$ fazendo inicialmente contrações nos cortes justos de $G-e$ até obter $G'-e'$. Como $\phi(G'-e')=1$, podemos concluir que $\phi(G-e-e')=1$.

Portanto, $G-e-e'$ tem um único brick e este é distinto do grafo de Petersen. Pelo Teorema 8.1, existe uma decomposição em orelhas de $G-e-e'$ que usa uma única orelha dupla. Por hipótese, $e \not\Rightarrow e'$. Então podemos adicionar e como uma arelha simples a esta decomposição para obter uma decomposição em orelhas de $G-e'$ que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.2, podemos concluir que $\phi(G-e')=1$. Portanto, e' é fortemente disponível em G. □

Lema 8.5 *Seja G um brick e e uma aresta disponível em G. Seja G' o brick de $G-e$ e suponha que o par de arestas $\{f_1', f_2'\}$ é fortemente disponível em G'. Então o par $\{f_1', f_2'\}$ é fortemente disponível em G ou uma dentre f_1' e f_2' é fortemente disponível em G.*

Dem. Por definição de par fortemente disponível, temos que $G'-\{f_1', f_2'\}$ é matching covered e bipartido. Vamos denotar a bipartição de $G'-\{f_1', f_2'\}$ por (U, W). Ajuste a notação para que f_1' possua seus dois extremos em U e f_2' possua seus dois extremos em W.

Por hipótese, e é disponível em G. Então $G-e$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.23. Portanto, $G-e$ satisfaz um dos três ítens deste Teorema.

Se $G-e$ é bicrítico então, pelo Lema 3.17, $G-e$ é brick. Logo, $G-e=G'$. Neste caso, se e possui um extremo em U e outro em W então $G-\{f_1', f_2'\}$ é matching covered e bipartido, ou seja, o par de arestas $\{f_1', f_2'\}$ é fortemente disponível em G.

Se e possui seus dois extremos em U então $G-\{e, f_1', f_2'\}=G'-\{f_1', f_2'\}$ é matching covered e bipartido. Considere agora um emparelhamento perfeito M de G contendo e. Por contagem, M contém f_2' mas não contém f_1'. Portanto, e e f_2' formam uma orelha dupla de $G-\{e, f_1', f_2'\}$. Logo, existe uma decomposição em orelhas de $G-f_1'$ que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.2, $\phi(G-f_1')=1$. Portanto, f_1' é fortemente disponível em

G. No caso em que e possui seus dois extremos em W, podemos concluir de forma análoga que f_2' é fortemente disponível em G.

Se $G-e$ satisfaz o item 2 do Teorema 3.23 então $G-e$ possui uma barreira não trivial B tal que se A é o conjunto das componentes triviais de $G-e-B$ então G' é obtido de $G-e$ pela contração de $B \cup A$ a um único vértice b. Em G' o vértice b pertence a U ou a W. Suponha que $b \in U$. Então mesmo que f_1' possua um extremo em b, podemos concluir, pelo Lema 3.15, que $G-\{e, f_1', f_2'\}$ é matching covered e bipartido. Daqui para frente podemos proceder de modo análogo ao caso anterior.

Se $G-e$ satisfaz o item 3 do Teorema 3.23 então $G-e$ possui duas barreiras não triviais B e B' tais que se A e A' são os conjuntos das componentes triviais de $G-e-B$ e $G-e-B'$, respectivamente, então $B \cup A$ é disjunto de $B' \cup A'$ e G' é obtido de $G-e$ pela contração de $B \cup A$ a um único vértice b e pela contração de $B' \cup A'$ a um único vértice b'. Além disso, em G, a aresta e possui um extremo em A e o outro em A'. Resta agora analisar os casos em que b e b' pertencem ambos à uma mesma bipartição de G' ou não. Em quaisquer dos casos vamos concluir que o par $\{f_1', f_2'\}$ é fortemente disponível em G ou uma dentre f_1' e f_2' é fortemente disponível em G. □

Motivados pelos dois Lemas acima, introduzimos o conceito de "promoção" de elemento fortemente disponível. Seja G um brick e e uma aresta fortemente disponível em G. Seja G' o brick de $G-e$. Dizemos que um elemento fortemente disponível em G' é *promovido* para G se ele também é fortemente disponível em G ou, no caso de ser um par de arestas, um de seus elementos é fortemente disponível em G.

Por exemplo, o Lema 8.5 nos diz que se um par de arestas é fortemente disponível em G' então ele pode ser promovido para G. O Lema 8.4 nos diz que se uma aresta e' é fortemente disponível em G' e $e \not\Rightarrow e'$ em G então e' pode ser promovida para G.

Lema 8.6 *Se G é um brick e e é uma aresta de G tal que $G-e$ é matching covered e possui K_4 como seu único brick então G possui dois elementos fortemente disponíveis promovidos do K_4.*

Dem. Por hipótese, $G-e$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.23.

Se $G-e$ satisfaz o item 1 do Teorema 3.23, ou seja, se $G-e$ é bicrítico então, pelo Lema 3.17, $G-e$ é brick. Então $G-e=K_4$, ou seja, $G=K_4+e$, o que não pode ocorrer pois neste caso G possui aresta paralela.

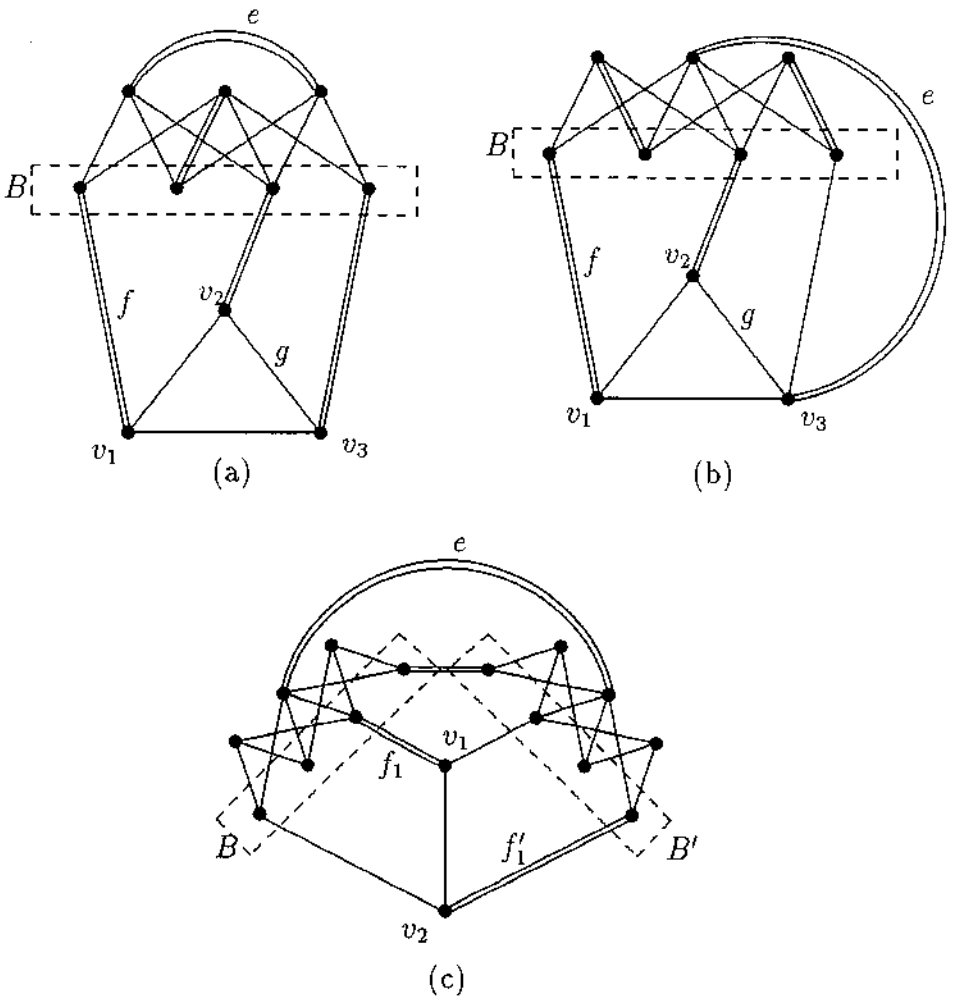


Figura 8.7: Formas possíveis para o grafo G.

Se $G - e$ satisfaz o item 2 do Teorema 3.23 então $G - e$ possui uma barreira não trivial B tal que se A é o conjunto das componentes triviais de $G - e - B$ então K_4 é obtido de $G - e$ pela contração de $B \cup A$ a um único vértice. Então G tem a forma de um dos grafos da figura 8.7(a) ou (b), possivelmente acrescido de arestas adicionais com extremos em $\{v_1, v_2, v_3\}$ e B.

Se $G-e$ satisfaz o item 3 do Teorema 3.23 então $G-e$ possui duas barreiras não triviais B e B' tais que se A e A' são os conjuntos das componentes triviais de $G - e - B$ e $G - e - B'$, respectivamente, então $B \cup A$ é disjunto de $B' \cup A'$ e K_4 é obtido de $G - e$ pela contração de $B \cup A$ a um único vértice e pela contração de $B' \cup A'$ a um único vértice. Além disso, em G, a aresta e possui um extremo em A e o outro em A'. Então G tem a forma do grafo da figura 8.7(c), possivelmente acrescido de arestas adicionais com extremos em $\{v_1, v_2\}$ e B, $\{v_1, v_2\}$ e B', B e B'.

Vamos analisar os casos (a) e (b) conjuntamente. Seja M um emparelhamento perfeito de G contendo a aresta e. Suponha que o vértice v_1 tem pelo menos dois vizinhos em B. Seja f uma aresta com extremos em v_1 e b, onde $b \in B$, e tal que $f \notin M$. Então f é fortemente disponível no K_4 e $e \not\Rightarrow f$ em G. Pelo Lema 8.4, f é fortemente disponível em G.

Portanto, se v_1 possui dois vizinhos em B então, pela observação que fizemos no parágrafo anterior, uma das arestas que liga v_1 a B é fortemente disponível em G. Caso contrário, Seja f a aresta que liga v_1 a B, e $g := (v_2, v_3)$. O par $\{f, g\}$ é fortemente disponível no K_4. Pelo Lema 8.5, este par pode ser promovido para G. Podemos usar o mesmo argumento para o vértice v_2 para encontrarmos outro elemento fortemente disponível em G' que pode ser promovido para G.

Considere agora o caso (c). Se v_1 possui dois vizinhos em B então uma das arestas que liga v_1 a B é fortemente disponível em G. O mesmo vale para v_2 e B'. Suponha então que v_1 (v_2) está ligado a B (B') por uma única aresta f_1 (f_1'). Então o par de arestas $\{f_1, f_1'\}$ é fortemente disponível no K_4. Pelo Lema 8.5, este par pode ser promovido para G. Simetricamente, podemos encontrar outro elemento. □

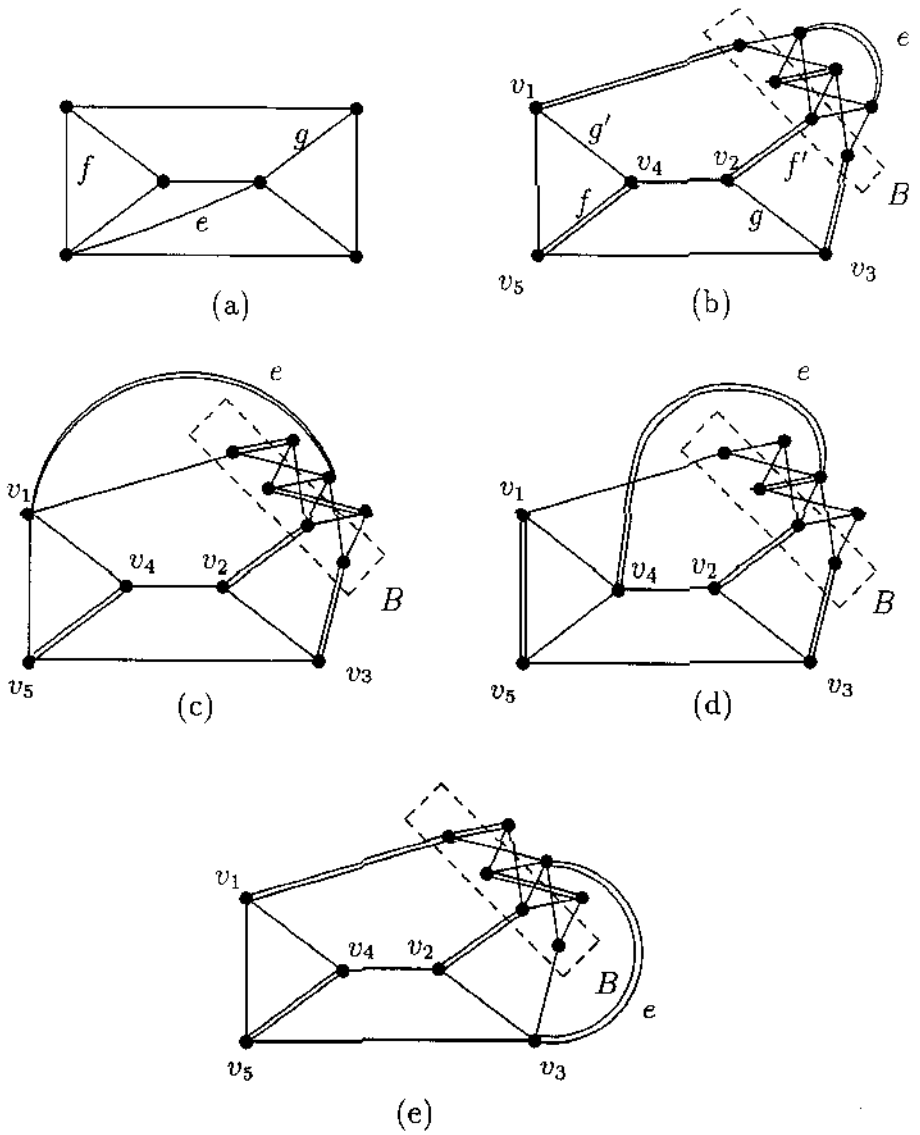


Figura 8.8: Formas possíveis para o grafo G.

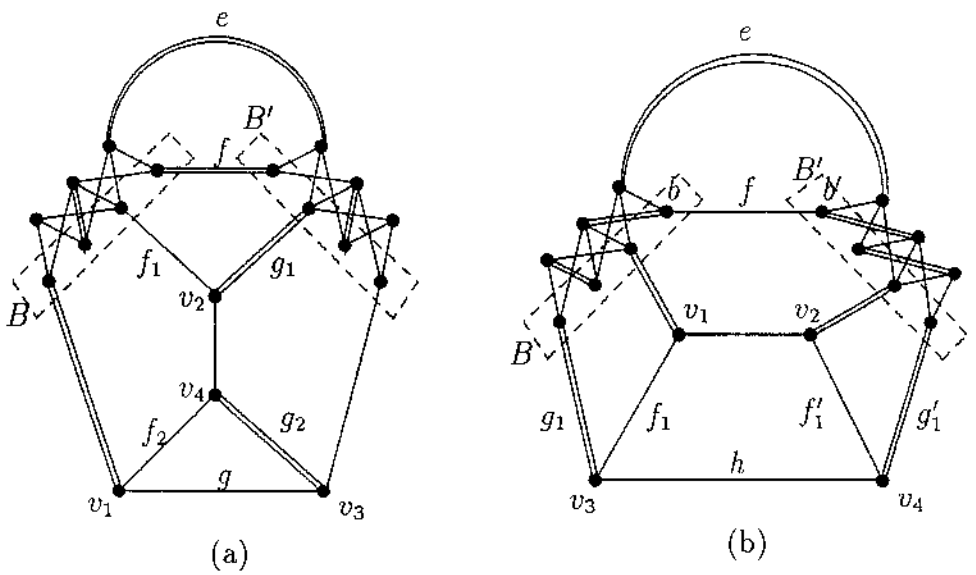


Figura 8.9: Formas possíveis para o grafo G.

De forma análoga ao que fizemos acima podemos provar o seguinte Lema.

Lema 8.7 *Se G é um brick e e é uma aresta de G tal que $G-e$ é matching covered e possui $\overline{C_6}$ como seu único brick então G possui dois elementos fortemente disponíveis promovidos do $\overline{C_6}$.*

Dem. Se $G-e$ é brick então $G = \overline{C_6} + e$, ou seja, G é o $\overline{C_6}$ acrescido de uma aresta paralela, o que não pode ocorrer, ou G é isomorfo ao grafo da Figura 8.8(a). Se $G-e$ possui uma única barreira maximal não trivial B então, pelo Lema 3.23 item 2, G tem a forma de um dos grafos da figura 8.8(b) a (e).

Se $G-e$ possui duas barreiras maximais não triviais então, pelo Lema 3.23 item 3, G tem a forma de um dos grafos da figura 8.9 ou 8.10.

Consideremos então o caso (a) da Figura 8.8. Neste caso, cada uma das arestas f e g do $\overline{C_6}$, indicadas na figura, é fortemente disponível em G.

Considere agora o caso (b). O par de arestas $\{f, g\}$ é fortemente disponível no $\overline{C_6}$. Pelo Lema 8.5, este par pode ser promovido para G.

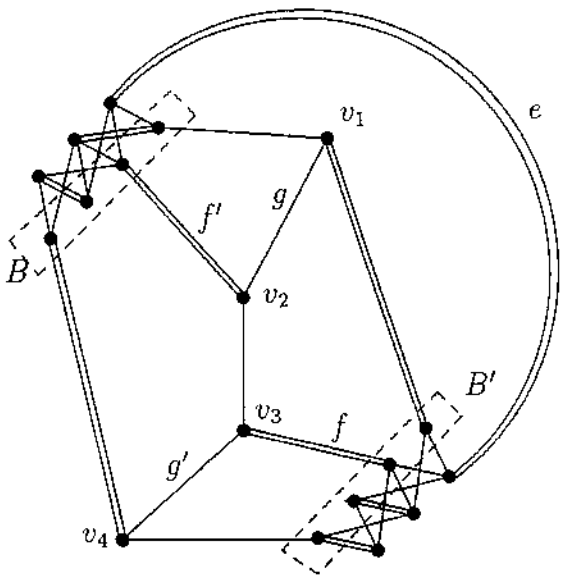


Figura 8.10: Formas possíveis para o grafo G.

Se v_2 possui dois vizinhos em B então uma das arestas que liga v_2 a B é fortemente disponível em G. Caso contrário, Seja f' a aresta que liga v_2 a B, e $g' := (v_1, v_4)$. O par $\{f', g'\}$ é fortemente disponível no $\overline{C_6}$. Pelo Lema 8.5, este par pode ser promovido para G.

Os casos (c), (d) e (e) da Figura 8.8, os casos (a) e (b) da Figura 8.9 e o da Figura 8.10 podem ser tratados de forma análoga. □

Teorema 8.8 *Seja G um brick e e uma aresta fortemente disponível em G. Seja G' o brick de $G - e$. Então G possui três elementos fortemente disponíveis, sendo que dois deles são promovidos de G'.*

Dem. Por indução em $|E(G)|$. A aresta e é um elemento fortemente disponível de G. Resta-nos mostrar então que G tem dois elementos fortemente disponíveis promovidos de G'.

Se $G' = K_4$ então o Teorema é demonstrado pelo Lema 8.6, e se $G' = \overline{C_6}$, o Teorema é demonstrado pelo Lema 8.7. Podemos supor então que G' é distinto de K_4 e $\overline{C_6}$. Como e é fortemente disponível em G, o grafo G' também é distinto do grafo de Petersen.

Por hipótese de indução, G' possui três elementos fortemente disponíveis. Se pelo menos dois deles podem ser promovidos para G então não há nada mais a fazer. Suponha então que isto não ocorre.

Observe que pelo Lema 8.5, todo par fortemente disponível de G' pode ser promovido para G. Portanto, um dos elementos fortemente disponíveis de G' é uma aresta e' que não pode ser promovida para G. Pelo Lema 8.4, $e \Rightarrow e'$ em G.

Então existe uma barreira maximal B', em $G - e'$, contendo os extremos da aresta e. Pelo Lema 8.4, $\phi(G - e - e') = 1$. Logo, $G - B' - e'$ contém exatamente uma componente não trivial X'. Escolha e' fortemente disponível em G' tal que $e \Rightarrow e'$ e a barreira maximal B' seja a maior possível.

Seja G'' o brick de $G' - e'$. Por hipótese de indução, G' possui dois elementos fortemente disponíveis promovidos de G''. Vamos agora considerar dois casos, dependendo se, em $G - B' - e'$, a aresta e' possui ou não um extremo em X'.

Caso 1 *e' não possui extremo em X'.*

Como B' é barreira maximal em $G - e'$, a componente X' é crítica. Seja J o grafo obtido de G pela contração de $V(G) - X'$ a um único vértice b. Como $\nabla(X')$ é um corte justo em $G - e - e'$, temos que J é matching covered. Além disso, $\phi(J) = \phi(G - e - e') = 1$. Vamos mostrar que J é brick.

Como X' é crítica, $J - \{b, x\}$ tem emparelhamento perfeito, para todo $x \in X'$. Logo, se J possui uma barreira não trivial B então $b \notin B$, ou seja, B é barreira em G, o que é uma contradição. Portanto, J é bicrítico. Como $\phi(J) = 1$ temos, pelo Lema 3.17, que J é brick e $J \neq P$. Então J é o brick de $G - e - e'$. Logo, $G'' = J$.

Considere um elemento fortemente disponível de G' que é promovido de G''. Se este é um par fortemente disponível em G' então, pelo Lema 8.5, este par pode ser promovido para G.

Suponha agora que este elemento é uma aresta, digamos e''. Então e'' é fortemente disponível em G'. Pelo Lema 8.4, $G - e - e''$ é matching covered. Vamos mostrar que $e \not\Rightarrow e''$ em G. Assim, podemos concluir por este mesmo Lema que e'' é fortemente disponível em G.

Seja H o grafo obtido de G pela contração de X' a um único vértice x'. Então H é matching covered. Observe que H é composto por um grafo bipartido acrescido das arestas e e e' cujos extremos de cada uma delas

pertencem a uma mesma bipartição. Uma das bipartições de H é B' (a barreira de $G-e-e'$). Vamos denotar a outra bipartição por A'. Portanto, a aresta e possui seus dois extremos em B' e e' possui seus extremos em A'. Logo, em H, temos que $e \Leftrightarrow e'$.

Se $e'' \notin \nabla(X')$ então claramente $e \not\Rightarrow e''$ em G pois, considere um emparelhamento perfeito M_1 em H contendo e. Seja f a aresta de M_1 que incide em x'. Como $G''-e''$ é matching covered, existe um emparelhamento perfeito M_2 em $G''-e''$ contendo f. Logo, $M_1 \cup M_2$ é um emparelhamento perfeito em G contendo e, mas não e'', ou seja, $e \not\Rightarrow e''$ em G. Portanto, e'' é fortemente disponível em G.

Suponha agora que $e'' \in \nabla(X')$. Se $e \Rightarrow e''$ em G então $e \Rightarrow e''$ em H. Mas como $e \Leftrightarrow e'$ em H, temos, por transitividade, que $e' \Rightarrow e''$ em H. Ou seja, em $H-e''$, existe uma barreira B'' contendo ambos os extremos de e'. Além disso, e'' deve possuir seus extremos em componentes distintas de $H-B''-e''$. Mas e'' possui um extremo em x'. Logo, x' pertence a alguma componente ímpar de $H-B''-e''$. Portanto, e' não é admissível em $G-e''$, o que é uma contradição, pois $G-e-e''$ é matching covered. Portanto, $e \not\Rightarrow e''$ em G, e assim, e'' é fortemente disponível em G.

Caso 2 *e' possui um extremo em X'.*

Seja J o grafo obtido de G pela contração de $V(G)-X'$ a um único vértice b e seja $K := J-e'$. Note que K também pode ser obtido de $G-e-e'$ contraindo $V(G)-X'$. Como $G-e-e'$ é matching covered e $\nabla(X')$ é justo em $G-e-e'$, temos que K é matching covered. Seja M' um emparelhamento perfeito em G contendo e. Então M' contém e' e a restrição de M' ao grafo J é um emparelhamento perfeito de J que contém e'. Portanto, J também é matching covered.

Como e'' é aresta de G'', que é o brick de $G-e-e'$, temos que $e'' \in E(J)$. Vamos mostrar que $e' \not\Rightarrow e''$ em J. Suponha o contrário. Logo, em $J-e''$, existe uma barreira B'' contendo ambos os extremos de e'. Mas um dos extremos de e' é x'. Então $S := (B''-x') \cup B'$ é uma barreira em $G-e''$ contendo propriamente B'. Como $G-e-e''$ é matching covered, temos que e é a única aresta de $G-e''$ com ambos os extremos em S. Mas isto contradiz a escolha de e' em G'.

Portanto, $e' \not\Rightarrow e''$ em J. Logo, existe um emparelhamento M_2 em J contendo e' mas não e''. Seja M_1 um emparelhamento perfeito em G contendo

e. Então $M_1 \cap \nabla(X') = \{e'\}$ e, consequentemente, $(M_1 \backslash E(J)) \cup M_2$ é um emparelhamento perfeito de G contendo e mas não e'', ou seja, $e \not\Rightarrow e''$ em G. Portanto, e'' é fortemente disponível em G. Isto prova o Teorema. □

Capítulo 9

Conseqüências Importantes

9.1 Introdução

Neste Capítulo apresentaremos algumas conseqüências dos Teoremas 8.2 e 8.8. Na Seção 9.2 mostraremos que a Conjectura 5.3 é verdadeira para todo grafo matching covered, ou seja, mostraremos que todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas que usa exatamente $b + p$ orelhas duplas.

Na Seção 9.3 mostraremos que o matching lattice de um grafo matching possui uma base formada somente por emparelhamentos perfeitos. Para finalizar apresentaremos, na Seção 9.4, uma caracterização para $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.

9.2 Decomposição ótima em orelhas para grafos matching covered

Pelo Teorema 5.2, sabemos que o número mínimo de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered G é $b+p$. Nesta seção vamos mostrar que todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas que usa exatamente $b + p$ orelhas duplas.

Para isso precisamos inicialmente generalizar o conceito de elemento fortemente disponível visto no Capítulo anterior. Se G é um grafo matching covered então dizemos que P é uma *orelha fortemente disponível* de G se $G - P$ é matching covered e $\phi(G - P) = \phi(G)$ se P for simples ou

$\phi(G-P) = \phi(G) - 1$ se P for dupla. Por exemplo, um elemento fortemente disponível em um brick é uma orelha fortemente disponível.

Lema 9.1 *Todo grafo matching covered distinto de K_2 e de C_{2n} contém pelo menos duas orelhas fortemente disponíveis disjuntas nas arestas.*

Dem. Seja G um grafo matching covered distinto de K_2 e de C_{2n}. Vamos fazer indução em $|E(G)|$. Se G contém arestas paralelas então cada uma delas é uma orelhas fortemente disponível. Podemos supor então que G não possui arestas paralelas.

Caso 1 *G tem um vértice u de grau dois.*

Sejam v e w os vértices adjacentes a u, e seja $X := \{u, v, w\}$. Considere o corte $C := \nabla(X)$. Este corte é justo em G. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações em G, onde G_1 é obtido pela contração de X a um único vértice x. Então G_1 e G_2 são matching covered. Além disso, G_2 é bipartido e G_1 é tal que $\phi(G_1) = \phi(G)$.

G_1 não pode ser K_2 senão G não seria matching covered. Se $G_1 = C_{2n}$ então $G = C_{2n+2}$, o que contradiz à hipótese. Portanto, G_1 é distinto de K_2 e de C_{2n}.

Por hipótese de indução, G_1 contém pelo menos duas orelhas, digamos P_1 e P_2, fortemente disponíveis e disjuntas nas arestas. Vamos mostrar que cada P_i de G_1 dá origem a uma orelha Q_i fortemente disponível em G.

Se $V(P_i)$ não contém x então tome $Q_i := P_i$. Claramente Q_i é fortemente disponível em G. Suponha então que x é um vértice de $V(P_i)$. O caso em que x é vértice interno de uma orelha de P_i também é trivial.

Podemos supor então que x é um vértice extremo de uma orelha de P_i. Seja f a aresta de P_i que incide em x. Então no grafo G a aresta f incide em um de v ou w, digamos v. Se $|\nabla(v)| \geq 3$ então tome novamente $Q_i := P_i$ e se $|\nabla(v)| = 2$ então tome $Q_i := P_i \cup \{(v,u),(u,w)\}$. Em qualquer caso podemos ver que Q_i fortemente disponível em G. □

Caso 2 *G é bipartido.*

Então $\phi(G) = 0$. Além disso, qualquer decomposição em orelhas de G usa somente orelhas simples. Como G não tem vértice de grau dois, a última orelha de qualquer decomposição em orelhas de G é sempre uma aresta. Agora é fácil de ver que G contém pelo menos duas arestas e_1 e e_2 que são orelhas fortemente disponíveis. □

Caso 3 *G é um brick.*

Se G é K_4 ou $\overline{C_6}$ então G tem não somente duas mas três orelhas duplas fortemente disponíveis e disjuntas nas arestas. Para o grafo de Petersen, toda aresta é fortemente disponível. Se G é diferente de K_4, $\overline{C_6}$ e do grafo de Petersen então peloo Teorema 8.8 G tem três elementos fortemente disponíveis. □

Caso 4 *G é bicrítico.*

Se G é brick então podemos terminar pelo Caso 3. Suponha então que G não é brick. Logo, ele tem uma 2-separação $\{u, v\}$. Seja C um corte justo associado à esta 2-separação e sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações. Então $\phi(G) = \phi(G_1) + \phi(G_2)$. Além disso, G_1 e G_2 são bicríticos e portanto, ambos são distintos de K_2 e C_{2n}.

Considere o grafo simples G_1' obtido de G_1 removendo as possíveis arestas paralelas que possam existir ligando os vértices u e v. Por hipótese de indução, G_1' contém duas orelhas fortemente disponíveis e disjuntas nas arestas. Assim, uma destas orelhas não contém a aresta (u, v) e portanto, é também uma orelha fortemente disponível em G.

Analogamente, podemos mostrar que G_2 também contém uma orelha que é fortemente disponível em G. □

Caso 5 *G não é bicrítico.*

Então G contém uma barreira não trivial. Seja B uma barreira não trivial minimal em G. Sejam $H_1, H_2, \ldots, H_k$, onde $(k = |B|)$, as componentes de $G - B$, e G_i, $1 \leq i \leq k$, o grafo obtido pela contração de $V(G) - V(H_i)$ a um único vértice x_i. O grafo bipartido obtido pela contração de cada H_i, $1 \leq i \leq k$, a um único vértice será denotado por H.

Portanto, $\phi(G) = \sum_{i=1}^{k} \phi(G_i)$. Além disso, pela escolha de B, podemos concluir que H é um brace. Como o Caso 2 não se aplica, G é não bipartido. Logo, alguma componente H_i é não trivial.

Fixe a notação para que H_1 seja não trivial. Como G não tem vértices de grau dois, G_1 não é C_{2n}. Por hipótese de indução, G_1 contém duas orelhas, P_1 e P_2, fortemente disponíveis e disjuntas nas arestas.

Se $G - P_1$ for matching covered então claramente P_1 será fortemente disponível em G. O mesmo vale para P_2. Vamos mostrar então que $G - P_1$ ou $G - P_2$ é matching covered.

Se x_1 for vértice interno de P_1 então P_2 não contém x_1 e, claramente, $G - P_2$ é matching covered. Se nenhuma orelha de P_i possui extremo em x_1 então claramente $G - P_i$ é matching covered ($i = 1, 2$). Podemos supor então que uma orelha de P_1 e uma de P_2 possuem extremo em x_1. Como $G_1 - P_i$ é matching covered ($i = 1, 2$), o vértice x_1 tem grau pelo menos dois em $G_1 - P_i$ e, conseqüentemente, x_1 tem grau pelo menos três em G_1.

Se $|B| \geq 3$ então pelo Lema 3.14, $H - e$ é matching covered para toda aresta $e \in E(H)$. Portanto, $G - P_i$ também é matching covered. Podemos supor então que $|B| = 2$; digamos que $B := \{b_1, b_2\}$.

Se algum vértice de B, por exemplo b_1, tem dois vizinhos em H_1 e P_i incide em b_1 então claramente $G - P_i$ é matching covered. Suponha então que isto não ocorre. Logo, P_1 e P_2 devem incidir em vértices distintos de B. Vamos supor que P_1 incide em b_1 e P_2 incide em b_2. Mas como vimos, o vértice x_1 tem grau pelo menos três em G_1. Então um de b_1 e b_2, digamos b_1, tem dois vizinhos em H_1. Portanto, $G - P_1$ é matching covered.

Como $|B| = 2$ e o caso 1 não se aplica, a componente H_2 é não trivial. Por hipótese de indução, G_2 contém duas orelhas, P_1 e P_2, fortemente disponíveis e disjuntas nas arestas. De forma análoga, podemos mostrar que uma delas é fortemente disponível em G. □

Teorema 9.2 *Todo grafo matching covered G admite uma decomposição em orelhas que usa exatamente $\phi(G)$ orelhas duplas.*

Dem. Por indução em $|(G)|$. Pelo Lema 9.1, G contém uma orelha fortemente disponível P. Por hipótese de indução, $G - P$ admite uma decomposição em orelhas que usa exatamente $\phi(G - P)$ orelhas duplas. Portanto, G admite uma decomposição em orelhas que usa exatamente $\phi(G)$ orelhas duplas. □

Portanto, uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered G que usa exatamente $\phi(G)$ orelhas duplas é ótima.

Podemos afirmar também que uma decomposição ótima pode ser feita em tempo polinomial pois as operações de verificar se um grafo é matching covered e decomposição em cortes justos pode ser feita em tempo polinomial, digamos $p_1(G)$ e $p_2(G)$ respectivamente. Assim, podemos determinar o valor $\phi(G)$ de forma eficiente. Uma possível orelha de G é formada por um caminho ímpar maximal cujos vértices internos têm grau dois ou um par de caminhos

disjuntos deste tipo. Assim, o tempo gasto para determinarmos uma orelha fortemente disponível é limitado superiormente por $|E(G)|^2(p_1(G)+p_2(G))$, e portanto, o tempo gasto para determinar uma decomposição ótima é limitado superiormente por $|E(G)|^3(p_1(G)+p_2(G))$.

9.3 Bases para o matching lattice

O reticulado gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo matching covered G, chamado de *matching lattice* e denotado por $Lat(\mathcal{M})$, é definido por

$$Lat(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{Z}^E : x = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M \chi^M, \alpha_M \in \mathbb{Z}\},$$

onde $\mathcal{M}$ denota o conjunto de todos os emparelhamentos perfeitos de um grafo. Vamos falar rapidamente sobre a caracterização do matching lattice estabelecida por L. Lovász. Uma descrição mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em [10] e [13].

Seja G um grafo matchnig covered. Considere o espaço das funções que associam a cada aresta de G um número real. Para um subconjunto $A \subseteq E(G)$, o *vetor de incidência* χ^A de A é definido por $\chi^A(e) = 1$ se $e \in A$ e $\chi^A(e) = 0$ caso contrário. Se w é um vetor em $\mathbb{Z}^E$ então escreveremos $w(A)$ para representar o valor $\sum_{e \in A} w(e)$.

Claramente, para um emparelhamento perfeito M e um vértice v, temos que $\chi^M(\nabla(v)) = 1$. Portanto, se $w \in Lat(\mathcal{M})$, ou seja, se $w = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M \chi^M$ então para todo vértice v tem-se $w(\nabla(v)) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha_M$. Logo, podemos enunciar o seguinte Lema.

Lema 9.3 *Uma condição necessária para que um vetor w pertença a $Lat(\mathcal{M})$ é que $w(\nabla(u)) = w(\nabla(v))$, para todo u, v em $V(G)$.* □

Um procedimento muito importante que nos permite descrever o matching lattice de um grafo matching covered é a decomposição em corte justos que apresentamos no Capítulo 3. Esta importância se deve ao fato de que $Lat(\mathcal{M})$ pode ser expresso em termos dos matching lattices dos bricks e braces provenientes da decomposição em cortes justos deste grafo.

Teorema 9.4 *Sejam G um grafo matching covered e C um corte justo não trivial em G. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações em G. Então um vetor w em $\mathbb{Z}^E$ pertence ao matching lattice de G se, e somente se, as restrições w_1 e w_2 de w a $E(G_1)$ e $E(G_2)$ pertencem ao matching lattice de G_1 e G_2, respectivamente.*

Dem. Veja [10], [13, pág. 105]. □

A partir deste Teorema podemos obter a seguinte caracterização para o matching lattice de um grafo matching covered, onde $w(C)$ representa o valor $\sum_{e \in C} w(e)$, e o termo *5-ciclo* denota um circuito de tamanho 5.

Teorema 9.5 *Seja G um grafo matching covered, e seja w um vetor em $\mathbb{Z}^E$. Fixe uma decomposição em cortes justos qualquer de G. Então w pertence ao $Lat(\mathcal{M})$ de G se, e somente se,*

(a) *$w(C)$ é o mesmo para cada corte C trivial ou usado na decomposição;*

(b) *Para cada brick (resultante da decomposição) igual ao grafo de Petersen, e para cada 5-ciclo deste grafo, a soma dos pesos das arestas de G mapeada neste 5-ciclo é par.*

Dem. Veja [10], [13, pág. 105]. □

Várias questões referentes ao matching lattice de um grafo matching covered surgiram. Uma delas quer saber se existe uma base para o matching lattice formada apenas por emparelhamentos perfeitos. Mostraremos agora que sim.

É importante lembrar que uma base de um lattice $\mathcal{L}$ é um conjunto linearmente independente $a_1, \ldots, a_k$ de vetores em $\mathcal{L}$ tais que para todo elemento $a \in \mathcal{L}$,

$$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{Z}).$$

É bem conhecido que $Lat(\mathcal{M})$, bem como qualquer lattice gerado por vetores inteiros, tem uma base que possui apenas vetores inteiros [18, Corolário 4.1b, pág. 47].

Para determinar uma base para o matching lattice formada apenas por emparelhamentos perfeitos faremos o seguinte: inicialmente determinaremos

bases para o matching lattice de cada brick e brace proveniente da decomposição em cortes justos do grafo. A seguir faremos uma "colagem" destas bases para obter uma base para o grafo original.

A base que vamos exibir para os bricks será determinada pelos emparelhamentos perfeitos associados à uma decomposição em orelhas destes que faremos de uma forma bem cuidadosa. Precisamos ainda de alguns resultados.

Considere um grafo matching covered G e uma decomposição em orelhas

$$\mathcal{D} := K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$$

de G. Lembre-se que r é o número de orelhas da decomposição. Dentre as r orelhas, vamos denotar por d o número de orelhas duplas. Portanto, $r - d$ é o número de orelhas simples. Denotaremos, respectivamente, por m, n o número de arestas e vértices. Por um simples argumento de contagem podemos mostrar que

Lema 9.6 $r + d = m - n + 2$. □

Seja M_0 o emparelhamento perfeito de G associado à decomposição D, ou seja, para cada i, $(0 \leq i \leq r-1)$, as arestas de $M_0 \cap E(G_i)$ constituem um emparelhamento perfeito de G_i e as arestas de $M_0 \backslash E(G_i)$ constituem um emparelhamento perfeito de $G - V(G_i)$.

Para cada i $(0 \leq i \leq r-1)$, seja M_i o emparelhamento perfeito de G formado por um emparelhamento perfeito de G_i contendo uma aresta de $E(G_i) \setminus (E(G_{i-1}) \cup M_0)$ mais as arestas de $M_0 \setminus E(G_i)$. (A aresta de $E(G_i) \setminus (E(G_{i-1}) \cup M_0)$ pode ser a primeira aresta de uma orelha que foi adicionada a G_{i-1} para obter G_i.)

Chamaremos de emparelhamentos *obtidos* pela decomposição D ao conjunto de emparelhamentos perfeitos $M_0, M_1 \ldots, M_{r-1}$. É deste conjunto de emparelhamentos que extrairemos uma base para o matching lattice de um grafo matching covered. Uma propriedade muito simples deste conjunto é a seguinte:

Proposição 9.7 *A seqüência de vetores de incidência dos emparelhamentos perfeitos de G obtidos por uma decomposição em orelhas é linearmente independente sobre qualquer corpo.*

Dem. Pois cada emparelhamento contém uma aresta que não pertence a nenhum emparelhamento anterior da seqüencia. □

O espaço linear gerado pelos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de um grafo matching covered G sobre um corpo $\mathbb{F}$, denotado por $Lin(\mathcal{M},\mathbb{F})$, é definido por

$$Lin(\mathcal{M},\mathbb{F}) := \{x \in \mathbb{F}^E : x = \sum_{M\in\mathcal{M}} \alpha_M \chi^M, \alpha_M \in \mathbb{F}\}.$$

Seja b o número de bricks de uma decomposição de G em cortes justos. Dentre os b bricks, denotaremos por p o número destes que são, a menos de arestas paralelas, isomorfos ao grafo de Petersen. O seguinte resultado também será necessário.

Teorema 9.8 *Seja G um grafo matching covered e $\mathcal{F}$ um corpo qualquer. Então*

(a) *$dim(Lin(\mathcal{M},\mathbb{F})) = m - n + 2 - b$ se a característica de $\mathcal{F}$ for diferente de dois;*

(b) *$dim(Lin(\mathcal{M},\mathbb{F})) = m - n + 2 - b - p$ se a característica de $\mathcal{F}$ for dois.*

Dem. Veja [10], [13, pág. 108]. □

A partir do Teorema 9.8 podemos concluir que o número máximo de vetores linearmente independentes em $Lat(\mathcal{M})$ é $m-n+2-b$, pois $Lat(\mathcal{M}) \subseteq Lin(\mathcal{M},\mathbb{R})$. Portanto, uma base para $Lat(\mathcal{M})$ terá no máximo $m-n+2-b$ vetores. No caso particular em que $b(G) = 1$, uma base para $Lat(\mathcal{M})$ terá no máximo $m - n + 1$ vetores.

Teorema 9.9 *Seja G matching covered tal que $b(G) = 1$. Suponha que o brick de G não é o grafo de Petersen. Então o matching lattice de G contém uma base formada por $m-n+1$ (vetores de incidência de) emparelhamentos perfeitos.*

Dem. Pelo Teorema 8.1, G possui uma decomposição em orelhas que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.8, G possui uma decomposição em orelhas canônica

$$\mathcal{D} := K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$$

que usa uma única orelha dupla. Lembre-se que decomposição em orelhas canônica significa que o primeiro grafo não bipartido obtido é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$.

Seja $M_0, M_1 \ldots, M_{r-1}$ o conjunto de emparelhamentos perfeitos de G obtidos pela decomposição $\mathcal{D}$, e seja $S := \chi^{M_0}, \chi^{M_1} \ldots \chi^{M_{r-1}}$ a seqüência de vetores de incidência destes emparelhamentos. Pela Proposição 9.7, a seqüência S é linearmente independente sobre qualquer corpo. Pelo Lema 9.6, o número de emparelhamentos desta seqüência é $r = m - n + 1$. Resta-nos mostrar que esta seqüência de emperelhamentos gera todos os elementos do matching lattice de G usando apenas coeficientes inteiros.

Seja $w \in Lat(\mathcal{M})$ de G. Pelo Lema 9.3, o valor $w(\nabla(u))$ é constante para todo $u \in V(G)$. Seja $\alpha := w(\nabla(u))$.

Vamos mostrar por indução em $|E(G)|$ que se esta condição ocorre (ou seja, $w(\nabla(u))$ é constante para todo $u \in V(G)$) e além disso, $b(G) = 1$ e o brick de G não é o grafo de Petersen então a seqüência S de emparelhamentos perfeitos de G gera w usando apenas coeficientes inteiros.

Vamos analisar o caso em que G é uma subdivisão ímpar de K_4. Para facilitar a notação e simplificar os cálculos, vamos supor que G é o K_4. O caso em que existem subdivisões poderá ser feito de forma análoga. Suponha que $w = (a, a', b, b', c, c')$ e que as componentes de w estejam associadas às arestas de G como na figura 9.1(a).

Considere o vetor $w' := w - a\chi^{\{a,a'\}} - b\chi^{\{b,b'\}} - c\chi^{\{c,c'\}}$. Claramente, $w' \in Lat(\mathcal{M}) \Leftrightarrow w \in Lat(\mathcal{M})$. Além disso, $w'(\nabla(v)) = w(\nabla(v)) - (a+b+c')$, para todo vértice v. Portanto, $w'(\nabla(v)) = w(\nabla(v_2)) = 0$, para todo vértice v. Ou seja, w' é o vetor nulo. Assim, os emparelhamentos $\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$, $\{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$ e $\{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$, que são os emparelhamentos perfeitos associados à decomposição $\mathcal{D}$ neste caso, geram w.

Suponha agora que G é $\overline{C_6}$. Suponha que $w = (a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'')$ e que as componentes de w estejam associadas às arestas de G como na figura 9.1(b). Observe que os emparelhamentos perfeitos associados à decomposição $\mathcal{D}$ neste caso são $F_1 := \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$, $F_2 := \{(v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_1, v_4)\}$, $F_3 := \{(v_1, v_5), (v_4, v_6), (v_2, v_3)\}$ e $F_4 := \{(v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_5, v_6)\}$.

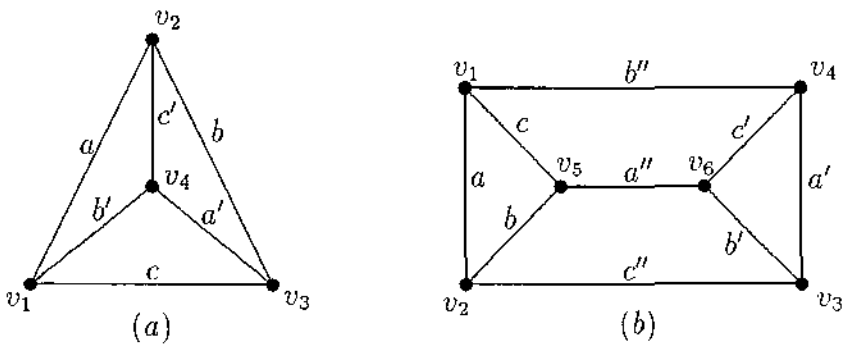


Figura 9.1: O vetor w sobre (a) K_4 e (b) $\overline{C_6}$.

Considere $w' := w - a\chi^{F_1} - b\chi^{F_2} - c\chi^{F_3} - (a'' - a)\chi^{F_4}$. Assim, $w' \in Lat(\mathcal{M}) \Leftrightarrow w \in Lat(\mathcal{M})$. Além disso, $w'(\nabla(v)) = w'(\nabla(v_5)) = 0$, para todo vértice v. Então, w' tem valor zero para todas as arestas de G exceto, possivelmente, para as do triângulo formado pelos vértices v_3, v_4 e v_6 onde temos $w'(v_3, v_4) = a' - a$, $w'(v_4, v_6) = c' - c$ e $w'(v_6, v_3) = b' - b$. Então $a' - a + b' - b = b' - b + c' - c = c' - c + a' - a = 0$, de onde podemos concluir que $a' = a$, $b' = b$ e $c' = c$. Logo, w' é o vetor nulo. Assim, os quatro emparelhamentos acima geram w em G usando apenas coeficientes inteiros.

Suponha agora que G não é nem o K_4 e nem $\overline{C_6}$. Como a decomposição $\mathcal{D}$ é canônica e usa uma única orelha dupla, a última orelha de $\mathcal{D}$ é simples. Vamos denotá-la por $P := (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_{2k+1}, v_{2k+1})$, onde os a_i's e v_i's representam as arestas e vértices de P, respectivamente.

Como $w(\nabla(u)) = \alpha$, para todo vértice $u \in V(G)$, temos que $w(a_1) = w(a_3) = \cdots = w(a_{2k+1})$ e $w(a_2) = w(a_4) = \cdots = w(a_{2k})$. Observe que $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$ são arestas de M_0 e $a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}$ são arestas de M_{r-1}. Seja

$$w' := w - w(a_1)\chi^{M_{r-1}}.$$

Então w' tem o valor zero para as arestas $a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}$ de P. Note que $\beta := w'(\nabla(u)) = \alpha - w(a_1)$, para todo $u \in V(G)$. Portanto, $w(a_2) = w(a_4) = \cdots = w(a_{2k}) = \beta$.

Considere então a restrição w'' de w' a $G_{r-2} = G - P$. Claramente, $w''(\nabla(u)) = \beta$ para todo $u \in V(G_{r-2})$. Além disso, a decomposição $\mathcal{D}$, a

menos da orelha P, é uma decomposição em orelhas de G_{r-2} que usa uma única orelha dupla. Pelo Teorema 5.2, podemos concluir que $b(G_{r-2}) = 1$ e que o brick de G_{r-2} não é o grafo de Petersen.

Por hipótese de indução, a seqüência $\chi^{M_0}, \chi^{M_1} \ldots \chi^{M_{r-2}}$ de vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de G restritos a G_{r-2} gera w'' usando apenas coeficientes inteiros, ou seja,

$$w'' = \sum_{i=0}^{r-2} \alpha_i \chi^{M_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}.$$

Então $\sum_{i=1}^{k} \alpha_{M_i} = w''(\nabla(u)) = \beta$. Portanto, se considerarmos agora estes mesmos emparelhamentos como emparelhamentos perfeitos de G temos

$$w' = \sum_{i=0}^{r-2} \alpha_i \chi^{M_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}.$$

Logo, fazendo $\alpha_{r-1} := w(a_1)$ temos

$$w = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \chi^{M_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}.$$

Isto prova o Teorema. □

Utilizando esta mesma técnica de obter bases para $Lat(\mathcal{M})$ via decomposição em orelhas, podemos mostra de forma análoga o seguinte Lema.

Lema 9.10 *O matching lattice de um grafo matching covered bipartido contém uma base formada apenas por $m - n + 2$ (vetores de incidência de) emparelhamentos perfeitos.* □

É importante notar que esta técnica de obter bases para $Lat(\mathcal{M})$ via decomposição em orelhas não funciona para o grafo de Petersen, pois uma base de $Lat(\mathcal{M})$ para este grafo contém 6 vetores e a decomposição em orelhas fornece somente 5. No entanto, podemos proceder de outra forma e mostrar que este grafo também contém uma base de emparelhamentos perfeitos.

Lema 9.11 *Se G é o grafo de petersen então o matching lattice de G contém uma base formada apenas por $m - n + 1$ (vetores de incidência de) emparelhamentos perfeitos.*

Dem. Se G é o grafo de Petersen então o número total de emparelhamentos perfeitos distintos de G é $6 = m - n + 1$ e eles são linearmente independentes em $\mathbb{R}$. Portanto, se $w \in \mathbb{Z}^E$ um vetor que pertence ao $Lat(\mathcal{M})$ de G então w deve ser combinação inteira destes seis emparelhamentos e nada mais. Portanto, eles geram w. □

Teorema 9.12 *O matching lattice de um grafo matching covered contém uma base formada apenas por (vetores de incidência de) emparelhamentos perfeitos.*

Dem. Seja G um grafo matching covered. Vamos demonstrar, por indução em $|V(G)| + |E(G)|$ que G contém uma base para $Lat(\mathcal{M})$ formada por $m - n + 2 - b$ emparelhamentos perfeitos.

Se G não tem corte justo não trivial então G é um brick ou brace. Se G é um brick distinto do grafo de Petersen então podemos resolver pelo Teorema 9.9, e se G é o grafo de Petersen então resolvemos pelo Lema 9.11. Se G é um brace então resolvemos pelo Lema 9.10.

Suponha então que G possui um corte justo não trivial C. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações. Então G_1 e G_2 são matching covered. Por hipótese de indução, para $i = 1, 2$, o grafo G_i contém uma base S_i para o matching lattice de G_i formada por $m_i - n_i + 2 - b_i$ emparelhamentos perfeitos, onde m_i, n_i e b_i representam o número de arestas, vértices e bricks de G_i. Logo, $m_1 + m_2 = m + |C|$, $n_1 + n_2 = n + 2$ e $b_1 + b_2 = b$.

A técnica que adotaremos agora para "colar" as bases S_i para obter uma base para G é a mesma utilizada no Livro de Lovász e Plummer [11, pág. 301].

Para cada $i = 1, 2$ e $e \in C$, seja S_i^e o conjunto dos emparelhamentos perfeitos de S_i que contém a aresta e. Como G_i é matching covered, nenhum S_i^e é vazio. Então selecione um $F_i^e \in S_i^e$ para cada i e e. Considere os emparelhamentos $F_1 \cup F_2^e$ (onde $F_1 \in S_1^e$) e $F_1^e \cup F_2$ (onde $F_2 \in S_2^e$) de G. Vamos denotar este conjunto de emparelhamentos perfeitos de G por $\mathcal{F}$. O número total destes emparelhamentos é

$$\begin{aligned} \sum_{e \in C} |S_1^e| + \sum_{e \in C} |S_2^e| - |C| &= |S_1| + |S_2| - C \\ &= (m_1 - n_1 + 2 - b_1) + (m_2 - n_2 + 2 - b_2) - |C| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= m + |C| - (n+2) + 4 - b - |C| \\ &= m - n + 2 - b. \end{aligned}$$

Note que devemos subtrair o valor $|C|$ na somatória acima porque os emparelhamentos $F_1^e \cup F_2^e$ aparecem duas vezes em $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que estes emparelhamentos de G são linearmente independentes em $\mathbb{R}$ e geram $Lat(\mathcal{M})$. Assuma que para cada $F_1 \in S_1$ e para cada $F_2 \in S_2$ que $\lambda(F_1)$ e $\lambda(F_2)$ sejam números reais tais que

$$\sum_{e \in C} \sum_{F_1 \in S_1^e} \lambda(F_1)\chi^{F_1 \cup F_2^e} + \sum_{e \in C} \sum_{\substack{F_2 \in S_2^e \\ F_2 \neq F_2^e}} \lambda(F_2)\chi^{F_1^e \cup F_2} = 0.$$

Restringindo esta relação a G_1 obtemos

$$\sum_{F_1 \in S_1} \lambda(F_1)\chi^{F_1} + \sum_{e \in C} \left(\sum_{\substack{F_2 \in S_2^e \\ F_2 \neq F_2^e}} \lambda(F_2) \right) \chi^{F_1^e} = 0.$$

Como os emparelhamentos perfeitos de S_1 são linearmente independentes, $\lambda(F_1) = 0$, exceto possivelmente para os emparelhamentos $F_1 = F_1^e$ $(e \in C)$. Analogamente, $\lambda(F_2) = 0$, exceto possivelmente para os emparelhamentos $F_2 = F_2^e$ $(e \in C)$. Mas então na equação 9.3 o segundo termo é zero, e portanto, $\lambda(F_1) = 0$ para todo $F_1 \in S_1$. Analogamente, $\lambda(F_2) = 0$ para todo $F_2 \in S_1$. Portanto, os elementos de $\mathcal{F}$ são linearmente independentes.

Vamos mostrar agora que os elementos de $\mathcal{F}$ geram o matching lattice de G. Seja w um vetor pertencente ao matching lattice de G. Considere as restrições w_1 e w_2 de w a $E(G_1)$ e $E(G_2)$, respectivamente. Pelo Teorema 9.4, w_1 e w_2 pertencem ao matching lattice de G_1 e G_2, respectivamente. Como S_i forma uma base para o matching lattice de G_i, temos que w_i pode ser escrito com combinação inteira dos elementos de S_i. Logo, para cada $F_1 \in S_1$ e para cada $F_2 \in S_2$ existem $\lambda(F_1)$ e $\lambda(F_2)$ inteiros tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{F_1 \in S_1} \lambda(F_1)\chi^{F_1} \\ w_2 &= \sum_{F_2 \in S_2} \lambda(F_2)\chi^{F_2}. \end{aligned}$$

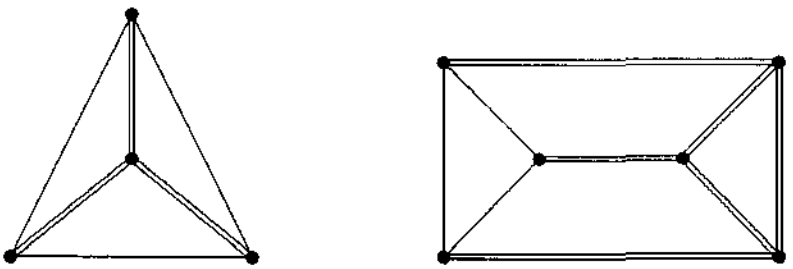


Figura 9.2: Exemplos de conjuntos coerentes.

Para cada $i = 1, 2$ e $e \in C$, seja S_i^e o conjunto dos emparelhamentos perfeitos de S_i que contém a aresta e. Então em G tome o vetor

$$z = \sum_{e \in C} \sum_{F_1 \in S_1^e} \lambda(F_1)\chi^{F_1 \cup F_2^e} + \sum_{e \in C} \sum_{F_2 \in S_2^e} \lambda(F_2)\chi^{F_1^e \cup F_2} - \sum_{e \in C} w(e)(F_1^e \cup F_2^e).$$

Então $z = w$. Portanto, os elementos de $\mathcal{F}$ geram o matching lattice de G. □

9.4 Uma caracterização para $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$

Seja G um grafo. Um conjunto $A \subseteq E(G)$ é *coerente* se os graus de todos os vértices com relação a A têm a mesma paridade, ou seja, para todo u e v em $V(G)$ tem-se

$$|\nabla(u) \cap A| \equiv |\nabla(v) \cap A| \pmod 2.$$

Por exemplo, um emparelhamento perfeito é um conjunto coerente. Outros exemplos podem ser vistos na Figura 9.2.

A soma de dois conjuntos coerentes é definida como sendo a soma de seus respectivos vetores de incidência.

Lema 9.13 *A classe dos conjuntos coerentes é fechada sob soma em Z_2.*

Dem. Para todos os subconjuntos A e B de $E(G)$ e para todo $v \in V(G)$ tem-se

$$|\nabla(v) \cap (A \oplus B)| = |\nabla(v) \cap A| + |\nabla(v) \cap B| - 2|\nabla(v) \cap A \cap B|.$$

Se A e B são coerentes então pela igualdade acima é imediato que $A \oplus B$ é coerente. □

Vamos agora mostrar como podemos utilizar decomposição em orelhas para obter uma caracterização para $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.

Seja $A \subseteq E(G)$ um conjunto coerente. Sejam $M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}$ os emparelhamentos perfeitos obtidos pela decomposição em orelhas

$$\mathcal{D} := K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$$

de G, onde M_0 é o emparelhamento perfeito associado à esta decomposição. Suponha ainda que a última orelha de $\mathcal{D}$ é simples e vamos denotá-la por C.

Como A é coerente, os graus de todos os vértices com relação a A têm a mesma paridade. Portanto, o conjunto coerente A pode conter (i) nenhuma aresta de C, (ii) todas as arestas de C, (iii) as arestas de $M_0 \cap C$, ou (iv) as arestas de $C - M_0$. Para cada um destes quatro casos definiremos um conjunto coerente B conveniente:

O conjunto coerente A contém	então faça
1) Nenhuma aresta de C	$B := A$
2) Todas as arestas de C	$B := A \oplus M_{r-1} \oplus M_0$
3) As arestas de $M_0 \cap C$	$B := A \oplus M_0$
4) As arestas de $C - M_0$	$B := A \oplus M_{r-1}$

Em cada caso temos, pelo Lema 9.13, que B é coerente em G. Chamaremos este conjunto B de *agregado* a A.

Observe que $B \cap C = \emptyset$, ou seja, $B \subseteq G_{r-2}$. Logo, a restrição B' de B à $E(G_2)$ também é coerente em G_{r-2}.

Proposição 9.14 *Se* $B' \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-2}\}, \mathbb{Z}_2)$ *em* G_{r-2} *então* $A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$ *em* G.

Dem. Note que $|\nabla(v) \cap B|$ é par para todo $v \in V(G)$. Logo, $|\nabla(v) \cap B'|$ também é par para todo $v \in V(G_{r-2})$. Portanto, o número de emparelhamentos perfeitos que geram B' em G_{r-2} é par.

Logo, $B \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$ em G, pois basta acrescentar a cada emparelhamento perfeito que descreve B' em G_{r-2} as componentes correspondendo às arestas de C e colocar valor um nas componentes correspondendo às arestas de $C \cap M_0$ e zero nas de $C - M_0$. Pelo Lema 9.13, podemos concluir que $A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$. □

Utilizando esta técnica podemos obter, por exemplo, uma caracterização de $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ para grafos bipartidos.

Teorema 9.15 *Se G é bipartido matching covered então*

$$Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) = \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente}\}.$$

Dem. Cada emparelhamento perfeito é um conjunto coerente. Logo, Pelo Lema 9.13,

$$Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) \subseteq \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente}\}.$$

Reciprocamente, seja $A \subseteq E(G)$ um conjunto coerente. Sejam $M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}$ os emparelhamentos perfeitos obtidos por uma decomposição em orelhas $K_2 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{r-1} = G$ de G, onde M_0 é o emparelhamento perfeito associado à esta decomposição.

Vamos mostrar por indução em $|E(G)|$ que

$$A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2).$$

Como G é bipartido, $G_{r-1} = G$ é obtido de G_{r-2} pela adição de uma orelha simples C. Considere então o conjunto B agregado a A, e seja B' a restrição de B a G_{r-2}. Logo, B' é coerente em G_{r-2}.

Por hipótese de indução, $B' \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-2}\}, \mathbb{Z}_2)$ em G_{r-2}. Pela Proposição 9.14, podemos concluir que

$$A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$$

em G. Portanto, $A \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. □

Uma questão que surge naturalmente neste momento é a seguinte: O Teorema 9.15 é válido para grafos não bipartidos? A resposta é "não", pois

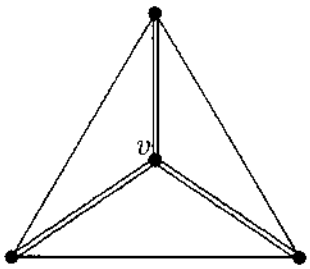


Figura 9.3: Um conjunto coerente que não pertence a $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$.

considere $G = K_4$ e o conjunto coerente $A := \nabla(v)$ representado na Figura 9.3. Não é difícil de ver que $A \notin Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.

Para grafos não bipartidos necessitamos da seguinte definição: Para um conjunto coerente A e $0 \leq i \leq 3$, seja

$$A_i := \{v \in V(G) : |\nabla(v) \cap A| = i \pmod 4\}.$$

Dizemos que A é *par* se $|A_i|$ é par, para todo i, $0 \leq i \leq 3$. Note que o conjunto coerente do exemplo da Figura 9.3 não é par. Mais à frente veremos que $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ pode ser caracterizado em termos de conjuntos coerentes pares.

Lema 9.16 *Se G é bipartido matching covered então todo conjunto coerente é par.*

Dem. Suponha que G tenha bipartição (X, Y), onde $|X| = |Y| = n$, e seja $A \subseteq E(G)$ um conjunto coerente. Então $|\nabla(v) \cap A| = i \pmod 4$ ou $|\nabla(v) \cap A| = i + 2 \pmod 4$ para todo $v \in V(G)$.

Suponha que X tenha n_1 vértices de grau i e que Y tenha n_2 vértices de grau i. Por um simples argumento de contagem, temos

$$\begin{aligned} i.n_1 + (n - n_1)(i + 2) &\equiv |A| \equiv i.n_2 + (n - n_2)(i + 2) \pmod 4 \\ -2.n_1 &\equiv -2.n_2 \pmod 4 \\ n_1 &\equiv n_2 \pmod 2 \Longrightarrow n_1 + n_2 \text{ é par.} \end{aligned}$$

Como G tem ao todo $n_1 + n_2$ vértices de grau i, concluímos que $|A_i|$ é par. Como $V(G)$ é par, $|A_{i+2}|$ também é par. Como A é coerente, $|A_{i+1}| = |A_{i+3}| = 0$. Portanto, A é coerente par. □

Lema 9.17 *A classe dos conjuntos coerentes pares é fechada sob soma em* Z_2.

Dem. Sejam A e B conjuntos coerentes pares. Então $|\nabla(v) \cap A| = i$ ou $(i+2) \pmod 4$ e $|\nabla(v) \cap B| = j$ ou $(j+2) \pmod 4$ para todo $v \in V(G)$. Por outro lado, para todo $v \in V(G)$ tem-se

$$|\nabla(v) \cap (A \oplus B)| = |\nabla(v) \cap A| + |\nabla(v) \cap B| - 2|\nabla(v) \cap A \cap B|.$$

Então $|\nabla(v) \cap (A \oplus B)| = i + j$ ou $(i + j + 2) \pmod 4$. Considere a partição de $V(G)$ nos conjuntos $A_i \cap B_j$, $A_i \cap B_{j+2}$, $A_{i+2} \cap B_j$ e $A_{i+2} \cap B_{j+2}$.

Como A e B são coerentes pares, estes quatro conjuntos são todos de cardinalidade par ou todos de cardinalidade ímpar. Sejam $S_1 := (A_i \cap B_j) \cup (A_{i+2} \cap B_{j+2})$ e $S_2 := (A_i \cap B_{j+2}) \cup (A_{i+2} \cap B_j)$. Então $|S_1| = |S_2| = 0 \pmod 2$, ou seja, são pares.

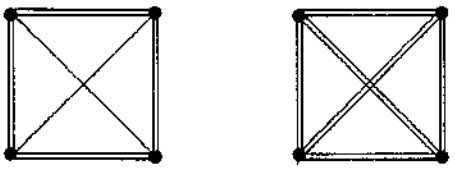
Note que

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)_{i+j} &= \{v \in S_1 : |\nabla(v) \cap A \cap B| \text{ é par}\} \cup \\
&\quad \{v \in S_2 : |\nabla(v) \cap A \cap B| \text{ é ímpar}\}. \\
(A \oplus B)_{i+j+2} &= \{v \in S_1 : |\nabla(v) \cap A \cap B| \text{ é ímpar}\} \cup \\
&\quad \{v \in S_2 : |\nabla(v) \cap A \cap B| \text{ é par}\}.
\end{aligned}$$

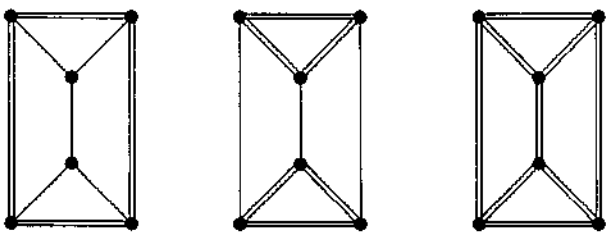
Um resultado básico em teoria dos grafos nos diz que em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par. Portanto, existe um número par de vértices v para os quais $|\nabla(v) \cap A \cap B|$ é ímpar. Como S_1 e S_2 são pares, podemos concluir que $(A \oplus B)_{i+j}$ e $(A \oplus B)_{i+j+2}$ são pares. □

Teorema 9.18 *Se G é matching covered, tem um único brick e este é distinto do grafo de Petersen então*

$$Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) = \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente par}\}.$$



(a)



(b)

Figura 9.4: Conjuntos coerentes pares do (a) K_4 e (b) $\overline{C_6}$.

Dem. Pelo Lema 9.17,

$$Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) \subseteq \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente par}\}.$$

Reciprocamente, seja $A \subseteq E(G)$ um conjunto coerente par. Como G tem um único brick e este é distinto do grafo de Petersen, existe uma decomposição em orelhas de G que usa uma única orelha dupla. Logo, existe uma decomposição em orelhas canônica $\mathcal{D}$ de G que usa uma única orelha dupla.

Sejam $M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}$ os emparelhamentos perfeitos obtidos pela decomposição canônica de G, onde M_0 é o emparelhamento perfeito associado à esta decomposição. Vamos mostrar por indução em $|E(G)|$ que $A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$.

Se G é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$ então a verificação é feita listando todos os conjuntos coerentes pares de G. Por exemplo, a menos de simetrias e com exceção de emparelhamentos perfeitos, os conjuntos coerentes pares de K_4 estão listados na Figura 9.4(a), e os do $\overline{C_6}$ estão listados na Figura 9.4(b). Cada um destes pertencem ao $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.

Se G não é uma subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$ então a última orelha de $\mathcal{D}$ é simples. Considere então o conjunto B agragado a A, e seja B' a restrição de B a G_{r-2}. Logo, B' é coerente em G_{r-2}.

Por hipótese de indução, $B' \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-2}\}, \mathbb{Z}_2)$ em G_{r-2}. Pela Proposição 9.14, podemos concluir que

$$A \in Lin(\{M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}\}, \mathbb{Z}_2)$$

em G. Portanto, $A \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. □

Teorema 9.19 *Se G é o grafo de Petersen então $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ é formado pelos conjuntos coerentes pares A deste grafo tais que para cada 5-ciclo C, $|A \cap C|$ é par.*

Dem. Pelo Lema 9.17,

$$Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) \subseteq \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente par}\}.$$

Além disso, se $w \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ então para cada 5-ciclo C do grafo de Petersen, $w(C) \equiv 0 \pmod 2$ (veja [13, pág. 8]).

Reciprocamente, seja $A \subseteq E(G)$ um conjunto coerente par tal que para cada 5-ciclo C em G, $|A \cap C|$ é par. Vamos mostrar que $A \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ listando os possíveis casos. Na verdade, vamos mostrar que os únicos conjuntos coerentes no grafo de Petersen que satisfazem às hipóteses deste Teorema são os emparelhamentos perfeitos e os circuitos de tamanho 8.

Suponha inicialmente que $|\nabla(v) \cap A| = 0$ ou 2, $\forall v \in V(G)$. Neste caso, A é um conjunto de circuitos disjuntos nos vértices. Note que o menor circuito no grafo de Petersen tem tamanho cinco. Se A é composto por dois circuitos então deve ser dois 5-ciclos, o que contradiz à hipótese. Então A deve ser composto por um único ciclo. Logo, este ciclo deve ser de tamanho 6 ou 8. Se A for um ciclo de tamanho 6 então é fácil ver que existe um 5-ciclo que intercepta A em 3 arestas. Portanto, A deve ser um ciclo de tamanho 8. Neste caso, A é a soma de dois emparelhamentos perfeitos (Figura 9.5).

Suponha agora que $|\nabla(v) \cap A| = 1$ ou 3, $\forall v \in V(G)$. Se $|\nabla(v) \cap A| = 1$ $\forall v \in V(G)$ então A é um emparelhamento perfeito. Se $|\nabla(v) \cap A| = 3$ para pelo menos um vértice então sempre existirá um 5-ciclo que intercepta A em 3 arestas, o que contradiz à hipótese.

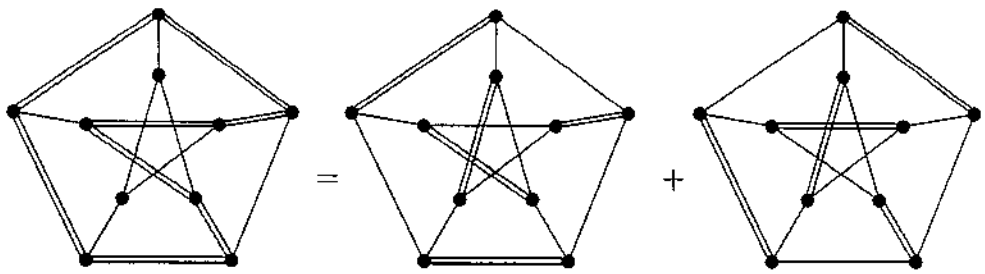


Figura 9.5: O conjunto coerente A é a soma de dois emparelhamentos perfeitos.

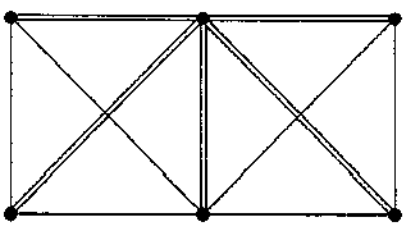


Figura 9.6: Um conjunto coerente par que não pertence a $Lin(\mathcal{M}, Z_2)$.

Se $|\nabla(v) \cap A| = 3\ \forall v \in V(G)$ então claramente A intercepta todo 5-ciclo de G em um número ímpar de arestas, o que novamente contradiz à hipótese. □

Será que a condição $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2) = \{A \subseteq E(G) : A \text{ é coerente par}\}$ vale para grafos matching covered que não possuem Petersen como brick? A resposta é "não", pois veja o exemplo da figura 9.6. Este conjunto é coerente par, mas ele não pertence a $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. Veremos por que a seguir.

Vamos apresentar agora uma condição necessária para que um conjunto coerente par pertença a $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ para um grafo matching covered em geral.

Seja G matching covered e $B \subseteq E(G)$ um conjunto coerente par. Seja C um corte justo em G e sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações. Suponha que $B \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. Sejam B_1 e A_2 as restrições de B a $E(G_1)$ e $E(G_2)$,

respectivamente. É imediato que $B_i \in Lin(\mathcal{M}_i, \mathbb{Z}_2)$ $(i = 1, 2)$, pois a restrição de cada emparelhamento perfeito de G a G_i é perfeito em G_i, e assim. B_i é coerente par em G_i. Veja que isto não acontece com o conjunto coerente da Figura 9.6.

Esta condição nos sugere a seguinte definição: Usando a mesma notação do parágrafo anterior, dizemos que um conjunto $B \subseteq E(G)$ é *fortemente coerente* se B é coerente par e para todo corte justo C, B_1 e B_2 são coerentes pares em G_1 e G_2, respectivamente.

Note que como a definição de conjunto fortemente coerente é válida para todo corte justo, podemos concluir que B_1 e B_2 são também fortemente coerentes em G_1 e G_2, respectivamente. Isto é suficiente para caracterizarmos $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ para grafos matching covered.

Teorema 9.20 *Seja G um grafo matching covered, e seja $B \subseteq E(G)$. Fixe uma decomposição em cortes justos qualquer de G. Então B pertence ao $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ de G se, e somente se,*

(a) *B é fortemente coerente;*

(b) *Para cada brick (resultante da decomposição) igual ao grafo de Petersen, e para cada 5-ciclo C deste grafo, $|B \cap C|$ é par.*

Dem. Por indução em $|V(G)|$. Seja $A \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$. Pelo Lema 9.17, B é coerente par. Vimos também que uma condição necessária para que $B \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ é que B seja fortemente coerente. Pelo Teorema 9.19, podemos concluir que o item (b) também é satisfeito.

Reciprocamente, seja B um conjunto coerente em G satisfazendo os ítens (a) e (b). Então B é coerente par. Se G é um brick distinto do grafo de Petersen então $B \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ pelo Teorema 9.18, e se G é o grafo de Petersen então $B \in Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ pelo Teorema 9.19.

Suponha então que G não é brick, ou seja, G possui um corte justo não trivial C. Sejam G_1 e G_2 as duas C-contrações e $B_i := B \cap E(G_i)$ $(i = 1, 2)$. Como B é fortemente coerente, B_1 e B_2 são também fortemente coerentes em G_1 e G_2, respectivamente. Claramente, o item (b) é satisfeito por B_i em G_i $(i = 1, 2)$. Por hipótese de indução, $B_i \in Lin(\mathcal{M}_i, \mathbb{Z}_2)$ $(i = 1, 2)$.

Considere uma aresta $e \in C$. Sejam F_{1e} e F_{2e} emparelhamentos perfeitos quaisquer em G_1 e G_2, respectivamente, contendo e. Sejam $M_{1e}, \ldots, M_{ke}$

$(N_{1e}, \ldots, N_{je})$ os emparelhamentos perfeitos de G_1 (G_2) que descrevem B_1 (B_2) e que contém e.

Se $e \notin B$ então tome os seguintes emparelhamentos perfeitos de G:

- $M_{ie} \cup F_{2e}, \quad 1 \leq i \leq k$
- $F_{1e} \cup N_{ie}, \quad 1 \leq i \leq j.$

Como $e \notin B$, o número de emparelhamentos que descrevem B_1 e B_2 em G_1 e G_2, respectivamente, e que contém e é par, ou seja, k e j são pares. Logo, os emparelhamentos F_{1e} e F_{2e} aparecem um número par de vezes, o que corresponde a zero vezes em $\mathbb{Z}_2$.

Se $e \in B$ então e pertence a um número ímpar de emparelhamentos perfeitos de M_{ie} e N_{ie}. Neste caso, tome os seguintes emparelhamentos perfeitos de G:

- $M_{1e} \cup N_{1e}$
- $M_{ie} \cup F_{2e}, \quad 2 \leq i \leq k$
- $F_{1e} \cup N_{ie}, \quad 2 \leq i \leq j.$

Isto prova o Teorema. □

Podemos agora enunciar o seguinte Corolário:

Corolário 9.21 *Se G é um r-grafo que não possui o grafo de Petersen como brick então o vetor $(1, 1, \ldots, 1)$ pertence ao $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.* □

Um fato importante é que usando esta mesma técnica podemos obter caracterizações análogas para o $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_n)$, $n \geq 3$ da seguinte forma: Primeiramente precisamos generalizar as definições de conjuntos coerentes, coerentes pares e fortemente coerente.

Seja G um grafo. Um vetor $w \in \mathbb{Z}_n^{E(G)}$ é *coerente* se para todo u e v em $V(G)$ tem-se

$$w(\nabla(u)) \equiv w(\nabla(v)) \pmod{n}.$$

Para um vetor coerente w e $0 \leq i \leq 2n$, seja

$$w_i := \{v \in V(G) : w(\nabla(v)) = i \pmod{2n}\}.$$

Dizemos que w é *par* se $|w_i|$ é par para todo i, $0 \leq i \leq 2n$. Dizemos também que um vetor coerente par w é *fortemente coerente* se para todo corte justo C em G, as restrições w' e w'' são coerentes pares em G' e G'', respectivamente, onde G' e G'' representam as duas C-contrações de G. O Teorema fica então:

Teorema 9.22 *Seja G um grafo matching covered, e seja w um vetor em $\mathbb{Z}_n^{E(G)}$. Fixe uma decomposição em cortes justos qualquer de G. Então w pertence ao $Lin(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_n)$ de G se, e somente se,*

(a) *w é fortemente coerente;*

(b) *Para cada brick (resultante da decomposição) igual ao grafo de Petersen, e para cada 5-ciclo C deste grafo, $w(C)$ é par.* □

Capítulo 10

Conclusão

Faremos agora alguns comentários sobre esta Tese.

É importante ressaltar novamente que a única prova que se conhece para o Teorema 3.4 usa dualidade de programação linear e que ainda é um dos grandes desafios desta teoria obter uma prova que usa somente argumentos combinatoriais.

A Relação de dependência e os conceitos de cortes bons e robustos são originais. Nesta Tese vimos várias de suas aplicações e creditamos que a investigação destes conceitos trará ainda mais conseqüências positivas além das apresentadas aqui.

O leitor deve ter observado que o Teorema de Lovász-Vempala é o Capítulo mais difícil da Tese. Realmente, A prova deste Teorema é a mais recente de todas as que estão na Tese. Assim, este Teorema ainda precisa ser mais trabalhado, ou seja, ainda precisamos encontrar uma demonstração mais direta para deste resultado.

No Capítulo 9 mostramos qual é o número mínimo de orelhas duplas de uma decomposição em orelhas de um grafo matching covered. Este resultado também responde as questões número 2, 2' e 3 do artigo de D. J. Naddef e W. R. Pulleyblank [14]. Algumas conjecturas sobre a decomposição ótima em orelhas são:

Conjectura 10.1 *Todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas ótima que começa com qualquer aresta.*

Conjectura 10.2 *Todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas ótima que começa com qualquer circuito nice.*

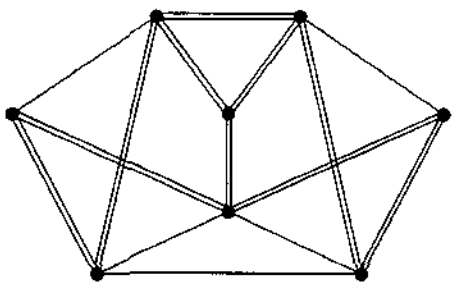


Figura 10.1: Exemplo onde a decomposição em orelhas não é ótima se começarmos com K_4.

A partir destas duas conjecturas, a questão que surge naturalmente é a seguinte: Será verdade que todo grafo matching covered admite uma decomposição em orelhas ótima que começa com qualquer subdivisão ímpar do K_4 ou $\overline{C_6}$ nice? A resposta para esta questão é "não" pois, veja o grafo da Figura 10.1; se começarmos uma decomposição em orelhas deste grafo com a subdivisão do K_4 indicada na figura, teremos que usar mais uma orelha dupla. Mas uma decomposição ótima para este grafo usa apenas uma orelha dupla.

Com relação à bases para o matching lattice, uma questão importante é:

1. Todo emparelhamento perfeito pode pertencer a uma base?

A Conjectura a seguir responde esta questão afirmativamente:

Conjectura 10.3 *Nenhum emparelhamento perfeito contém todos os elementos fortemente disponíveis de um brick.*

Com relação à Conjectura de Tutte, podemos ver que todos os Teoremas existentes até agora distinguem o grafo de Petersen dos demais bricks. O que precisamos para poder atacar esta Conjectura é de uma propriedade mais concreta que distingue os bricks que possuem o Petersen como minor, ou seja, uma propriedade que distingue todos os snarks. No entanto, estes resultados que obtivemos até agora podem nos levar à uma prova para o problema das quatro cores.

Índice

A

aresta
- admissível 12
- disponível 70
- fortemente disponível 121

B

barreira 11
- maximal 12
- trivial 13

brace 20

brick 16

C

classe
- de eqüivalência minimal 36
- minimal induzida 37

colagem 46
- seqüencial de K_4 46

conjunto coerente 145
- agregado 146
- coerente par 148
- rente 153

contração de corte 21

corte 17
- bom 66
- 18
- essencialmente proveniente de uma 2-separação 97
- justo trivial 18
- barreira 18
- proveniente de uma 2-separação 18
- 78
- robusto M_0-induzido 81
- ímpar 17

cortes laminar 23

cruzamento de cortes 23

D

decomposição em
- cortes justos 21
- 40
- canônica 60
- finas 45
- orelhas ótima 57

E

elemento fortemente disponível 122

emparelhamento 8
- associado a uma dec. orelha 45
- perfeito 8

emparelhamentos obtidos por uma decomposição em orelhas 138

G

grafo

bicrítico 16
crítico 12
matching covered 13
grau de uma colagem 46

M
margem de corte 17
matching lattice 136

N
número de orelhas 40

O
orelha 40
dupla 40
simples 40

P
par de arestas fortemente disponível 121
partição canônica 15
promoção de elemento fortemente disponível 124

R
r-grafo 13
relação de dependência 36

S
subdivisão ímpar 41
subgrafo nice 24

V
vetor de incidência 136
vértice
coberto por um emparelhamento 8
descoberto por um emparelhamento 8

Bibliografia

[1] C. Berge. Two theorems in graph theory. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 43:842–844, 1957.

[2] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications.* North-Holland, New York, 1986.

[3] M. H. Carvalho e C. L. Lucchesi. Matching covered graphs and odd subdivisions of K_4 and $\overline{C_6}$. *J. Combinatorial Theory (B)*, 66:263–268, 1996.

[4] J. Edmonds. Path, trees and flowers. *Canad. J. math.*, 17:449–467, 1965.

[5] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with (0,1) vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards B*, 69:125–130, 1965.

[6] J. Edmonds, L. Lovász, e W. R. Pulleyblank. Brick decomposition and the matching rank of graphs. *Combinatorica*, 2:247–274, 1982.

[7] I. Holyer. The NP-Completeness of edge-colouring. *SIAM J. Computing*, 10:718–720.

[8] C. H. C. Little. A Theorem on connected graphs in which every edge belongs to a 1-factor. *J. Austral. Math. Soc.*, 18:450–452, 1974.

[9] L. Lovász. Ear-decompositions of matching covered graphs. *Combinatorica*, 2:395–407, 1983.

[10] L. Lovász. Matching structure and the matching lattice. *J. Combinatorial Theory (B)*, 43:187–222, 1987.

[11] L. Lovász e M. D. Plummer. *Matching Theory.* North-Holland, 1986.

[12] L. Lovász e S. Vempala. Private communication. 1994.

[13] U. S. R. Murty. The matching lattice and related topics. Preliminary Report, University of Waterloo, Canada, 1994.

[14] D. J. Naddef e W. R. Pulleyblank. Ear-decomposition of elementary graphs and GF_2-rank of perfect matchings. *Annals of Discrete Mathematics*, 16:241-260, 1982.

[15] R. Z. Norman e M. O. Rabin. An algorithm for a minimum cover of a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:315–319, 1959.

[16] T. L. Saaty. Thirteen colorful variations on Guthrie's four-color conjecture. *American Mathematical Monthly*, 79:2–43, 1972.

[17] A. Schrijver. Short proofs of the matching polyhedron. *J. Combinatorial Theory (B)*, 34:104–108, 1983.

[18] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley, 1986.

[19] P. D. Seymour. On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc. London Math. Soc.* , 38(3):423–460, 1979.

[20] Z. Szigeti. (preprint) (1996).

[21] P. G. Tait. Remarks on colourings of maps. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A*, 10, 729, 1880.

[22] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.

[23] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph colourings. *J. Combinatorial Theory* , 1, 15–50, 1966.