

Uma abordagem multi-escala para
segmentação de imagens

Marta Duarte Teixeira

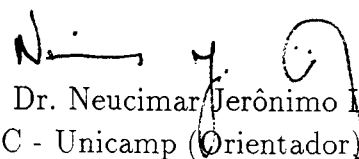
Dissertação de Mestrado

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

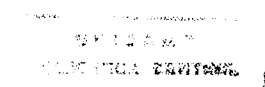
Uma abordagem multi-escala para segmentação de imagens

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Marta Duarte Teixeira e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 8 de novembro de 1999.


Prof. Dr. Neucimar Jerônimo Leite
IC - Unicamp (Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.



SEÇÃO CIRCULANTE
BIBLIOTECA CENTRAL
UNICAMP

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE 3e
 N.º CHAMADA: T/ UNICAMP
T235a
 V. Ex.
 TOMBO BC/ 46528
 PROC. 16-892/01
 C ☐ ☐ ☒ ☐
 PREÇO R\$ 11,00
 DATA 10/10/01
 Q.º CPT

CM00160085-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Teixeira, Marta Duarte

T235a Uma abordagem multi-escala para segmentação de imagens /
Marta Duarte Teixeira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Neucimar Jerônimo Leite

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Processamento de imagens. 2. Morfologia (Matemática). I.
Leite, Neucimar Jerônimo. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Computação. III. Título.

Uma abordagem multi-escala para segmentação de imagens

Marta Duarte Teixeira

8 de novembro de 1999

Banca Examinadora:

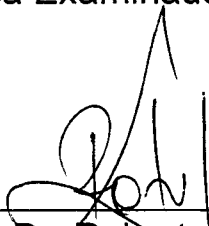
- Prof. Dr. Neucimar Jerônimo Leite
IC - Unicamp (Orientador)
- Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo
FEEC - Unicamp
- Prof. Dr. Jorge Stolfi
IC - Unicamp
- Prof. Dr. Alexandre Falcão (Suplente)
IC - Unicamp



CC-0

TERMO DE APROVAÇÃO

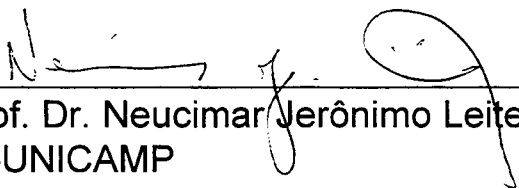
Tese defendida e aprovada em 07 de dezembro de 1999, pela
Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo
FEEC - UNICAMP



Prof. Dr. Jorge Stolfi
IC-UNICAMP



Prof. Dr. Neucimar Jerônimo Leite
IC-UNICAMP



© Marta Duarte Teixeira, 2000.
Todos os direitos reservados.

Agradecimentos

À toda minha família, em especial à minha mãe Zélia, meus avós Déia e Nica e às minhas irmãs Elisa, Míriam e Marina pelo apoio de sempre.

Ao Neucimar pela amizade e por ter sempre valorizado minhas idéias, o que sem dúvida foi o grande incentivo para este trabalho.

Ao ao meu namorado, Nathan, e aos meus amigos (acho que aqui cabe aquela velha frase “Não citarei nomes para que ninguém seja esquecido.”) que participaram desta fase de tese, nem sempre tão fácil, pela paciência e atenção.

Às pessoas que nunca se cansaram de perguntar para quando era a “tal tese” pela paciência e interesse.

Aos amigos, professores e funcionários do IC que contribuíram para torná-lo um agradável ambiente de trabalho.

À FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho abordamos o problema de segmentação de imagens através da sua representação multi-escala. Para tanto, consideramos a teoria do espaço-escala morfológico, recentemente introduzida na literatura, denominada MMDE (*Multiscale Morphological Dilation-Erosion*). Este método, associado à LDA, reduz monotonicamente o número de extremos de uma imagem e, conseqüentemente, o número de regiões segmentadas, a partir de uma suavização da imagem original. No entanto, quando associado à segmentação de imagens, o espaço-escala MMDE apresenta dois grandes problemas: o deslocamento espacial da LDA ao longo das escalas e a dificuldade de se caracterizar o conjunto de extremos presente nos diferentes níveis de representação. O primeiro problema é abordado em nosso trabalho a partir de uma modificação homotópica da imagem. Para o espaço-escala MMDE é garantido que a posição e a altura dos mínimos (para escalas negativas) e dos máximos (para escalas positivas) são mantidas ao longo das escalas. Assim, esta propriedade permite que o conjunto de mínimos (máximos) obtidos em uma determinada escala seja utilizado como marcador num processo de reconstrução geodésica e segmentação. Garantida a preservação das estruturas da imagem, consideramos uma análise do modo como os seus extremos se fundem ao longo das escalas, e definimos um novo espaço-escala morfológico no qual a suavização é dada por uma operação idempotente. Para este espaço-escala, apresentamos critérios de controle monotônico da fusão dos extremos, obtendo um melhor conjunto de marcadores para a segmentação. Estes métodos consistem em definir, a partir de informações estritamente locais, pontos da imagem original que não devem ser transformados durante a suavização, evitando, assim, que extremos significativos se fundam.

Abstract

In this work we consider the problem of image segmentation by means of a multiscale representation. This multiscale representation is based on a recently proposed morphological scale-space theory, the *Multiscale Morphological Dilation-Erosion* - MMDE, which associated to the watershed transform, reduces monotonically the number of extrema of an image and, consequently, the number of its segmented regions. This method has two basic problems concerning image segmentation: the spatial shifting of the watershed lines throughout the scales and the difficulty to characterize the set of the image extrema across these different scales. The first problem is considered here by means of a homotopic modification of the original image. The MMDE approach states that the position and the amplitude of the extrema in the original and transformed images do not change across scales. This property allows us to use a set of these extrema, present at a certain scale, as marker in a homotopic modification and segmentation of the original image. Also, we consider an analysis of the way the image extrema merge across scales and introduce a new morphological scale-space in which the monotonic reduction of the image extrema is given by an idempotent operation. For this scale-space, we consider some monotonic-preserving merging criteria, taking into account only local information, which can be used to prevent significant image extrema from merging and to define better sets of markers for segmentation.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
<i>Abstract</i>	vii
1 Introdução	1
2 O espaço-escala MMDE	4
2.1 O espaço-escala MMDE	4
2.1.1 Propriedades do espaço-escala MMDE	5
2.2 LDA no espaço-escala MMDE	6
3 Um espaço-escala idempotente: resumo dos principais resultados	9
3.1 Espaço-escala MMDE e segmentação de imagens	9
3.2 O espaço-escala morfológico idempotente	10
3.3 Critérios de fusão dos extremos	14
3.3.1 Critério 1: baseado na altura dos extremos	14
3.3.2 Critério 2: baseado na altura dos pontos entre extremos	18
3.4 Pós-processamento	20
4 Introdução ao espaço-escala idempotente	24
4.1 Introduction	25
4.2 Morphological scale-space and segmentation	26
4.2.1 The minima/maxima minimal configuration set	28
4.3 Properties of the MMC set	30
4.4 Conclusions	30
A Proof of propositions	31
B Basic propositions	34

5	Extremos de imagens e critérios de fusão	35
5.1	Introduction	36
5.2	The MMDE scale-space approach	38
5.2.1	Morphological scale-space and segmentation	39
5.2.2	An idempotent scale-space	41
5.3	Extrema merging criteria	44
5.4	Conclusions	46
A	Proof of propositions	46
B	Basic propositions	49
6	Resultados teóricos do espaço-escala idempotente	51
6.1	Introdução	52
6.2	O espaço-escala MMDE	53
6.2.1	Propriedades do espaço-escala MMDE	54
6.2.2	Fusão dos extremos no espaço-escala MMDE	55
6.3	Um espaço-escala morfológico idempotente	59
6.3.1	Propriedades do espaço-escala idempotente	63
6.4	Conclusão	66
A	Apêndice	66
7	Conclusões e trabalhos futuros	68
A	Conceitos	70
A.1	Dilatação e erosão binária	70
A.1.1	Propriedades	70
A.2	Dilatação e erosão numérica	71
A.3	Gradiente morfológico	72
A.4	Operações Geodésicas	72
A.4.1	Dilatação e erosão geodésica binária	73
A.4.2	Dilatação e erosão geodésica numérica	73
A.5	Zona de influência geodésica	74
A.6	Reconstrução binária	74
A.7	Reconstrução em níveis de cinza	75
A.8	Modificação homotópica por reconstrução	75
A.9	Linha Divisora de Águas (LDA)	76
	Bibliografia	78

Capítulo 1

Introdução

Segmentação de imagens por LDA (Linha Divisora de Águas) ou *watershed* tem sido amplamente utilizada desde sua apresentação em [3]. Como de um modo geral a LDA define uma imagem supersegmentada, várias abordagens foram propostas para evitar tal problema. Uma vez que as regiões obtidas pelo algoritmo estão associadas ao número de extremos (máximos e/ou mínimos regionais) da imagem, muitas destas abordagens consistem da redução do número de extremos [10, 27, 30, 1, 5, 34, 2].

Uma maneira de se obter esta redução é determinar um subconjunto significativo destes extremos a ser utilizado como marcador num processo de modificação homotópica por reconstrução [4, 30] da imagem original. Esta modificação elimina estruturas não marcadas e preserva integralmente as demais, gerando bons resultados de segmentação quando o conjunto de marcadores definido corresponde às regiões de interesse da imagem.

A determinação das estruturas a serem marcadas depende, naturalmente, das características da imagem e, neste sentido, algumas abordagens consistem no cálculo de atributos das estruturas, tais como distância [10], área [28] e volume [27]. Recentemente, a noção de operadores conexos que filtram platôs de uma imagem em níveis de cinza foi introduzida [7]. A definição destes operadores pode ser associada aos valores de extinção de uma imagem [27] para caracterizar a persistência dos seus componentes em termos de contraste, tamanho, volume, etc. Diferentes limiarizações destes parâmetros definem uma segmentação hierárquica da imagem correspondente a múltiplas partições da sua representação original.

Neste trabalho, abordamos o problema da supersegmentação de imagens a partir da sua representação multi-escala. A análise de imagens em diferentes níveis de representação vem sendo considerada em várias aplicações de processamento de imagens, tais como filtragem, segmentação [19, 12, 21, 25, 31, 9], compressão e codificação. *Wavelets* [20], multiresolução piramidal [13] e análise granulométrica [8] são alguns exemplos deste tipo de representação.

Uma grande dificuldade no emprego de qualquer representação multi-escala está em como relacionar as informações obtidas nas diferentes escalas. Em [32], Witkin aborda este

problema e apresenta uma teoria denominada espaço-escala na qual a representação de uma característica de interesse do sinal descreve um caminho contínuo ao longo dos diferentes níveis de representação. Neste caso, se uma característica está presente em uma escala σ , então ela deve ser encontrada na escala zero (imagem original) e em todas as escalas intermediárias. Esta propriedade é denominada propriedade da monotonicidade, uma vez que o número de características é reduzido monotonicamente ao longo das escalas. Em [32], o espaço-escala é definido pela convolução do sinal original com funções gaussianas, e os extremos do sinal e sua primeira derivada constituem a característica de interesse.

Esta propriedade do espaço-escala pode ser adequadamente associada a operações de segmentação por LDA, se considerarmos os extremos da imagem como a característica de interesse do sinal. No entanto, como discutido em [19], não existe nenhum *kernel* de convolução capaz de garantir a propriedade da monotonicidade para extremos de um sinal 2D.

A partir da limitação dos filtros lineares, operadores morfológicos variantes à escala foram associados a esta nova teoria. Chen e Yan [6], por exemplo, utilizaram aberturas variantes à escala em imagens binárias obtendo a propriedade da monotonicidade para *zero crossing* das bordas dos objetos. Park e Lee [22] definiram um espaço-escala para *zero crossing* de sinais 1D a partir de filtros morfológicos baseados em operações de abertura e fechamento. Estas operações foram utilizadas ainda por Jang e Chin [17] para suavizar contornos de objetos, definindo um espaço-escala em que as características de interesse são os segmentos dos contornos. Estes resultados, no entanto, não podem ser diretamente estendidos a imagens em níveis de cinza [16].

Recentemente, Jackway [14, 16] propôs um espaço-escala morfológico para imagens em níveis de cinza baseado em operações de dilatação e erosão. A dilatação é empregada para escalas positivas e a erosão para escalas negativas, garantindo a monotonicidade dos máximos e mínimos locais, respectivamente. Este espaço-escala é denominado *Multiscale Morphological Dilation-Erosion* (MMDE).

Jackway considerou ainda a redução monotônica do número de regiões de uma imagem, tendo como base o algoritmo de segmentação por LDA [14]. No entanto, como mencionado pelo autor, este método não pode ser diretamente associado à segmentação de imagens, uma vez que “as linhas de LDA se movem espacialmente com a variação da escala e não são um subconjunto daquelas encontradas na escala zero”¹.

Neste trabalho, exploramos algumas características do espaço-escala MMDE e apresentamos uma nova abordagem que, associada ao cálculo da LDA, apresenta bons resultados de segmentação. O primeiro aspecto considerado aqui refere-se à preservação da posição e profundidade dos extremos das imagens garantida pelo espaço-escala MMDE. Como veremos, este aspecto possibilita a utilização do conjunto de mínimos (para escalas negativas) ou máximos (para escalas positivas) como marcadores em uma modificação homotópica [4, 30]

¹Tradução do texto original em [14].

da imagem original, evitando o deslocamento espacial das linhas de LDA. Garantida a monotonicidade e preservação das estruturas da imagem, consideramos uma análise do modo como os extremos se fundem ao longo das escalas e definimos um novo espaço-escala morfológico no qual a suavização é fornecida por uma operação idempotente. Para este espaço-escala introduzimos, ainda, métodos de controle de fusão dos extremos visando melhores resultados de segmentação.

Este trabalho contém os seguintes capítulos:

Capítulo 2: O espaço-escala MMDE

Introduz o espaço-escala MMDE recentemente proposto por Jackway em [15, 16, 14] e suas principais propriedades.

Capítulo 3: Um espaço-escala idempotente: resumo dos principais resultados

Resume os principais resultados obtidos neste trabalho e descritos nos capítulos 4, 5 e 6.

Capítulo 4: Introdução ao espaço-escala idempotente

Apresenta o artigo *Morphological scale-space theory for segmentation problems* que considera o problema de segmentação de imagens a partir da teoria do espaço-escala e introduz a noção de espaço-escala idempotente. Este artigo está publicado nos anais do *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing* realizado em junho de 1999 em Antália, Turquia.

Capítulo 5: Extremos de imagens e critérios de fusão

Apresenta o artigo *An idempotent scale-space approach for morphological segmentation* que define alguns critérios de fusão, assim como técnicas de pós-processamento, que visam uma melhoria dos resultados de segmentação no espaço-escala idempotente. Este artigo foi aceito para publicação nos anais do *SPIE's 44th Annual Meeting - The International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation* realizado em Julho de 1999 em Denver, Estados Unidos.

Capítulo 6: Resultados teóricos do espaço-escala idempotente

Este capítulo apresenta o relatório técnico *Um espaço-escala morfológico idempotente* que contém os principais resultados teóricos obtidos neste trabalho. Ele contém uma análise detalhada da fusão dos extremos ao longo das escalas e apresenta as provas das proposições citadas no capítulo 3.

Capítulo 7: Conclusões e trabalhos futuros

Apresenta as conclusões do trabalho, assim como algumas das suas possíveis extensões.

Apêndice A: Conceitos

Introduz os conceitos básicos de Morfologia Matemática necessários à compreensão dos capítulos anteriores.

Capítulo 2

O espaço-escala MMDE

Neste capítulo introduzimos o espaço-escala MMDE (*Multiscale Morphological Dilation-Erosion*) recentemente proposto por Jackway em [15] e suas principais propriedades. Apresentamos, ainda, a associação do método à transformada de LDA na preservação da monotonicidade de regiões de uma imagem.

2.1 O espaço-escala MMDE

O espaço-escala morfológico é definido para escalas positivas e negativas. Para escalas positivas é considerada a operação morfológica de dilatação e para escalas negativas, a de erosão [23] (ver Anexo A para uma definição destas operações morfológicas). Suponha uma imagem f , definida no domínio $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A imagem suavizada numa escala σ é dada por [15]:

$$(f \otimes g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)(x) & \text{se } \sigma > 0 \\ f(x) & \text{se } \sigma = 0 \\ (f \ominus g_\sigma)(x) & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que a magnitude do parâmetro $|\sigma|$ corresponde à noção intuitiva de escala. A função estruturante $g_\sigma : \mathcal{G}_\sigma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$g_\sigma(x) = |\sigma|g(|\sigma|^{-1}x), \quad \forall \sigma \neq 0, \quad (2.2)$$

em que $\mathcal{G}_\sigma$ é definido como $\mathcal{G}_\sigma = \{x : \|x\| < \sigma\mathcal{R}\}$ ¹ se $g(x)$ é uma função par, não-positiva, anti-convexa e limitada, ou seja, $\mathcal{G} \subseteq \{x : \|x\| < \mathcal{R}\}$ para algum raio $\mathcal{R}$.

Algumas características das funções estruturantes devem ser consideradas para garantir o comportamento esperado no espaço-escala. Por exemplo, para se evitar o efeito de deslocamento temos que

$$\sup_{t \in \mathcal{G}} \{g_\sigma(t)\} = 0, \quad (2.3)$$

¹ $\|x\|$ representa a norma Euclidiana.

e para se evitar o efeito de translação horizontal:

$$g_\sigma(0) = 0 \quad (2.4)$$

Além destas considerações, as condições abaixo são impostas para garantir o comportamento de escala:

$$|\sigma| \rightarrow 0 \implies g_\sigma(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ -\infty & \text{se } x \neq 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

$$0 < |\sigma_1| < |\sigma_2| \implies g_{\sigma_1}(x) \leq g_{\sigma_2}(x) \text{ para } x \in \mathcal{G}_{\sigma_1}, \quad (2.6)$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty \implies g_\sigma(x) \rightarrow 0 \text{ para todo } x. \quad (2.7)$$

Para imagens numéricas, o parabolóide circular $g(x, y) = -(x^2 + y^2)$ tem sido considerado como uma função estruturante adequada por razões de dimensionalidade e eficiência computacional [16].

2.1.1 Propriedades do espaço-escala MMDE

Nesta seção apresentamos os resultados mais importantes do espaço-escala proposto por Jackway [15]. A primeira proposição relaciona a posição e a altura de um extremo local, entre o sinal suavizado pela equação 2.1 e o sinal original.

Proposição 1 [15] *Considerando a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, se $g(x)$ é um máximo local então $x = 0$, temos que:*

a) *Se $\sigma > 0$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{max})$ é um máximo local, então $f(x_{max})$ é um máximo local de $f(x)$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{max}) = f(x_{max})$;*

b) *Se $\sigma < 0$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{min})$ é um mínimo local, então $f(x_{min})$ é um mínimo local de $f(x)$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{min}) = f(x_{min})$.*

A partir desta proposição, é possível relacionar ainda a posição e a altura dos extremos ao longo das escalas.

Proposição 2 [15] *Dada a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, $g(x)$ é um máximo local então em $x = 0$, temos que:*

a) *Se $\sigma_4 > \sigma_3 > 0$ e $(f \otimes g_{\sigma_4})(x_{max})$ é um máximo local, então, $(f \otimes g_{\sigma_3})(x_{max})$ é um máximo local e, $(f \otimes g_{\sigma_3})(x_{max}) = (f \otimes g_{\sigma_4})(x_{max})$;*

b) *Se $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ e $(f \otimes g_{\sigma_2})(x_{min})$ é um mínimo local, então, $(f \otimes g_{\sigma_1})(x_{min})$ é um mínimo local e, $(f \otimes g_{\sigma_2})(x_{min}) = (f \otimes g_{\sigma_1})(x_{min})$.*

A partir dos resultados acima, podemos garantir que se um extremo do sinal se encontra em alguma escala σ , o mesmo deve ser encontrado na escala zero e em todas as escalas intermediárias. Este resultado assegura que o número de extremos não decresça quando a escala tende a zero, o que constitui a propriedade da monotonicidade. Assim:

Teorema 1 [15] (*Propriedade da Monotonicidade para o Espaço-Escala MMDE*). Seja $f : \mathcal{D}_f \subseteq R^n \rightarrow R$ uma função limitada, $g_\sigma : \mathcal{G}_\sigma \subseteq R^n \rightarrow R$ uma função estruturante satisfazendo as condições da proposição 2, e os seguintes conjuntos de pontos $E_{\max}(f) = \{x: f(x) \text{ é um máximo local}\}$ e $E_{\min}(f) = \{x: f(x) \text{ é um mínimo local}\}$, representando os pontos extremos de f . Então, para quaisquer $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$,

$$E_{\min}(f \otimes g_{\sigma_2}) \subseteq E_{\min}(f \otimes g_{\sigma_1}) \subseteq E_{\min}(f)$$

e

$$E_{\max}(f \otimes g_{\sigma_4}) \subseteq E_{\max}(f \otimes g_{\sigma_3}) \subseteq E_{\max}(f),$$

ou seja, o número de máximos (mínimos) locais decresce monotonicamente com o aumento da escala positiva (negativa). Esta propriedade pode ser estendida para garantir a monotonicidade dos extremos regionais de uma imagem [14]. A próxima seção mostra como o algoritmo de LDA é associado ao espaço-escala MMDE para garantir a monotonicidade de regiões ao longo das diferentes escalas.

2.2 LDA no espaço-escala MMDE

Uma abordagem para uma redução monotônica de regiões pode ser obtida suavizando-se o gradiente de uma imagem no espaço-escala MMDE. Como os mínimos (máximos) regionais correspondem diretamente às regiões definidas pela LDA, uma redução monotônica do número destes extremos ao longo das escalas implica numa redução monotônica das regiões da imagem. Infelizmente, esta abordagem pode gerar resultados insatisfatórios, já que filtrar a imagem gradiente não equivale a filtrar a imagem original. Por exemplo, pequenas estruturas presentes na imagem original podem ter valores elevados e predominar na imagem gradiente (estes componentes, que deveriam desaparecer no início da filtragem, vão persistir ao longo das escalas).

Assim, a suavização deve ser aplicada inicialmente à imagem original, e a LDA definida sobre a sua imagem gradiente. Uma vez que os extremos destas duas imagens não são os mesmos, é necessário estabelecer uma relação entre eles visando manter a propriedade da monotonicidade. Esta relação pode ser obtida através da modificação homotópica [30, 4] da função gradiente, como descrito a seguir.

Sejam $C[R_{\max}(f)] = p$ e $C[R_{\min}(f)] = r$, respectivamente, o número de máximos e mínimos regionais de uma imagem $f(x)$ de gradiente $|\nabla(f)|$. Suponha que selecionamos $0 \leq q \leq p$ máximos regionais, M_i , $i = 1, 2, \dots, q$ e $0 \leq s \leq r$ mínimos regionais, N_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Uma função marcadora a ser utilizada numa modificação homotópica de $|\nabla(f)|$ é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (\bigcup_{i=1}^q M_i \cup \bigcup_{j=1}^s N_j); \\ \max\{|\nabla(f)|\} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Esta modificação homotópica é definida como (ver anexo A)

$$|\nabla(f)|'(x) = \rho_{|\nabla(f)|}^*(g'(x)). \quad (2.9)$$

Para $q = p$ e $s = 0$, e denominando a modificação por $|\nabla f(x)|^+$, os mínimos de $|\nabla f(x)|^+$ correspondem a todos os máximos da imagem original a serem considerados nas escalas positivas. Analogamente, para $q = 0$ e $s = r$ os mínimos de $|\nabla f(x)|^-$ correspondem a todos os mínimos da imagem associados às escalas negativas [14]. Definidas as funções $|\nabla f(x)|^+$ e $|\nabla f(x)|^-$, podemos obter um conjunto multi-escala de linhas de LDA, representando a monotonicidade de regiões no espaço-escala, da seguinte forma:

Selecione o conjunto de escalas de interesse; para cada escala $|\sigma_k|$ faça:

1. Suavize f para obter $(f \otimes g_{\sigma_k})(x)$ a partir da equação 2.1.
2. Encontre os mínimos regionais N_i (para $\sigma_k \leq 0$) ou máximos M_i (para $\sigma_k \geq 0$), e calcule a função marcadora $g'(x)$ considerando a equação 2.8.
3. Calcule a magnitude da imagem gradiente $|\nabla(f \otimes g_{\sigma_k})|$.
4. Modifique homotopicamente a imagem gradiente considerando a equação 2.9.
5. Calcule a $LDA(|\nabla(f \otimes g_{\sigma_k})|^\pm)$.

A partir deste algoritmo e considerando as operações de suavização representadas pela equação 2.1, o conjunto de imagens obtido aqui não constitui uma segmentação adequada dos seus componentes. Os objetos claros e escuros crescem com a dilatação e erosão, respectivamente, causando um deslocamento das linhas de LDA. A figura 2.1 ilustra a aplicação deste método para escalas positivas e negativas.

O próximo capítulo apresenta um resumo do trabalho descrito nos capítulos 4, 5 e 6. Como veremos, ele introduz a noção de espaço-escala idempotente que, associado à definição de alguns critérios de fusão dos extremos da imagem, conduz a aplicações em segmentação.

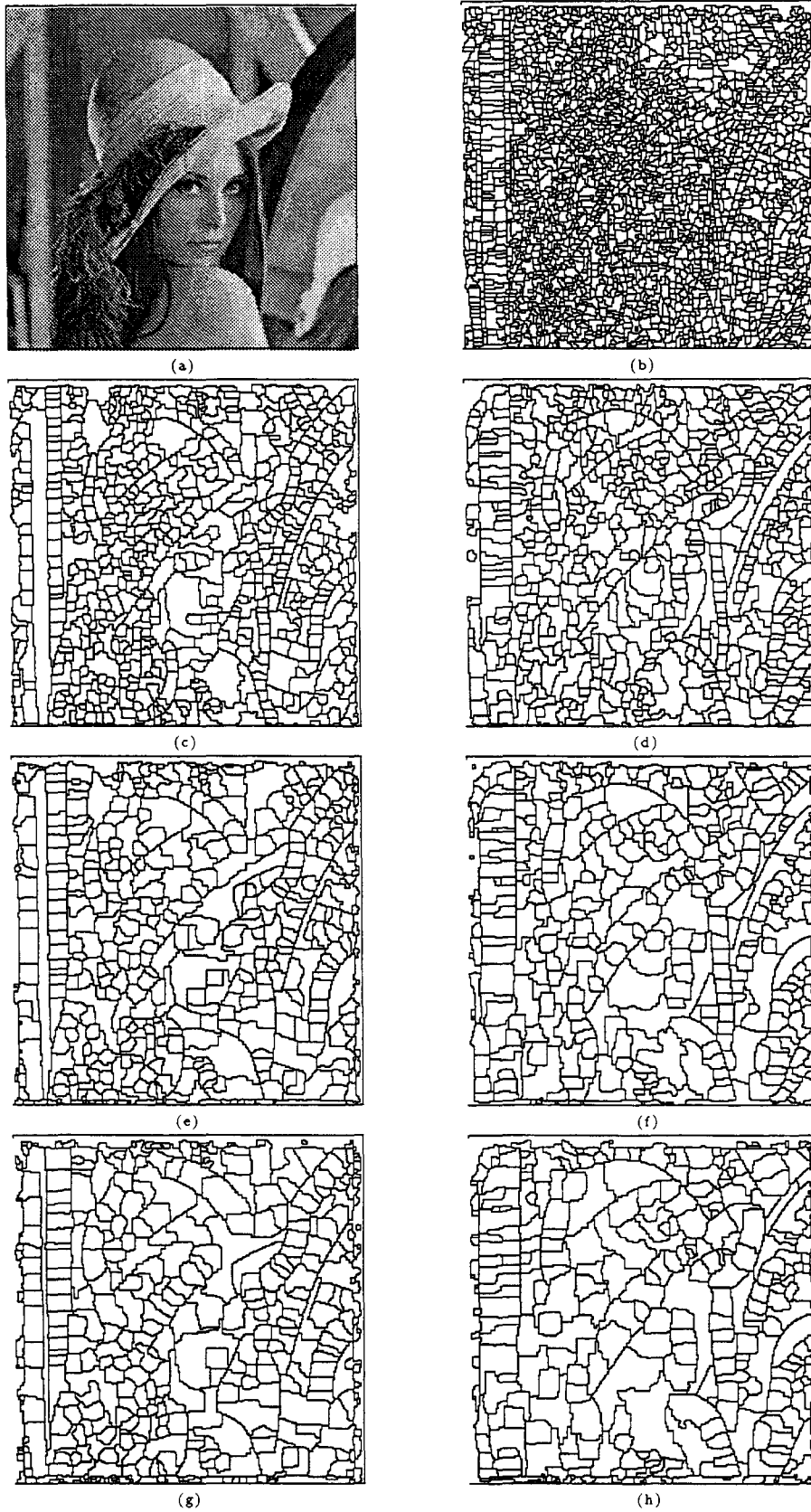


Figura 2.1: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. A LDA para o espaço-escala MMDE considerando (c) $\sigma = -3$, (d) $\sigma = 3$, (e) $\sigma = -5$, (f) $\sigma = 5$, (g) $\sigma = -7$ e (h) $\sigma = 7$.

Capítulo 3

Um espaço-escala idempotente: resumo dos principais resultados

O espaço-escala MMDE apresenta dois problemas importantes quando associado à segmentação de imagens. O primeiro deles refere-se ao deslocamento espacial da LDA ao longo das escalas e o segundo, à dificuldade de se caracterizar o conjunto de extremos presentes em uma determinada escala da imagem suavizada. Neste capítulo nós resumimos os principais aspectos considerados no nosso trabalho. Outros detalhes podem ser encontrados nos artigos e no relatório técnico apresentados nos capítulos 4, 5 e 6.

3.1 Espaço-escala MMDE e segmentação de imagens

Como afirmado em [14], o espaço-escala MMDE não pode ser diretamente associado à segmentação de imagens pois “as linhas de LDA se movem espacialmente com a variação da escala e não são um subconjunto daquelas definidas na escala zero”. No entanto, este espaço-escala possui uma propriedade importante para a segmentação que é a preservação da posição e da altura dos mínimos (ou máximos) da imagem transformada em relação à imagem original (proposição 2). Inicialmente, nós exploramos esta característica e propomos um método que evita o deslocamento espacial destas linhas. Este método consiste na simples reconstrução (modificação homotópica) da imagem original, utilizando como marcador os extremos obtidos no processo de filtragem. Após este processo, as estruturas correspondentes aos extremos marcados são totalmente reconstruídas, possibilitando uma melhor partição da imagem original. Esta segmentação multi-escala pode ser resumida nos seguintes passos.

Para cada escala σ_k :

1. Suavize f para obter $(f \otimes g_{\sigma_k})(x)$ a partir da equação 2.1.

2. Encontre os mínimos regionais N_i (para $\sigma_k \leq 0$) ou máximos M_i (para $\sigma_k \geq 0$) e calcule a função marcadora desejada, $g'(x)$, usando a equação 2.8.
3. Modifique homotopicamente a imagem original considerando a equação 2.9 para obter $f'(x)$.
4. Calcule a magnitude da imagem gradiente $|\nabla(f')|$.
5. Modifique homotopicamente a imagem gradiente usando a equação 2.9, considerando a função marcadora definida no passo 2.
6. Encontre a $LDA(|\nabla(f')|)$.

A figura 3.1 ilustra a aplicação do método acima e o compara com o algoritmo descrito na seção 2.2. Como podemos observar, a introdução da modificação homotópica “força” a LDA a seguir o contorno das regiões da imagem original, definindo uma melhor partição da mesma.

A figura 3.2 mostra o resultado da suavização, com e sem reconstrução da imagem original, a partir dos mínimos definidos no espaço-escala MMDE. Observe que, como o espaço-escala preserva a posição e o nível de cinza dos extremos, é possível filtrar um grande número destes extremos sem comprometer, graças ao processo de reconstrução, as principais estruturas da imagem original.

A próxima seção discute alguns aspectos relacionados à fusão dos extremos da imagem ao longo das diversas escalas.

3.2 O espaço-escala morfológico idempotente

Uma vez definida a imagem suavizada, é muito difícil caracterizar o conjunto dos extremos que permanecem, ou devem permanecer, em uma determinada escala. O método de espaço-escala apresentado a seguir explora o aspecto relacionado à idempotência, na transformação de um sinal suavizado pelo espaço-escala MMDE, visando estabelecer uma relação entre os extremos que persistem em uma determinada escala σ e o elemento estruturante g_σ .

Dada $f : \mathcal{D}_f \subset Z^2 \rightarrow R$ uma função imagem e considerando $(f \ominus g_\sigma)^n = \underbrace{(((f \ominus g_\sigma) \ominus g_\sigma) \ominus \dots \ominus g_\sigma))}_{n \text{ vezes}}$, definimos uma imagem suavizada até a idempotência, numa escala σ , como

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)^n(x) & \text{se } \sigma > 0 \\ f(x) & \text{se } \sigma = 0 \\ (f \ominus g_\sigma)^n(x) & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

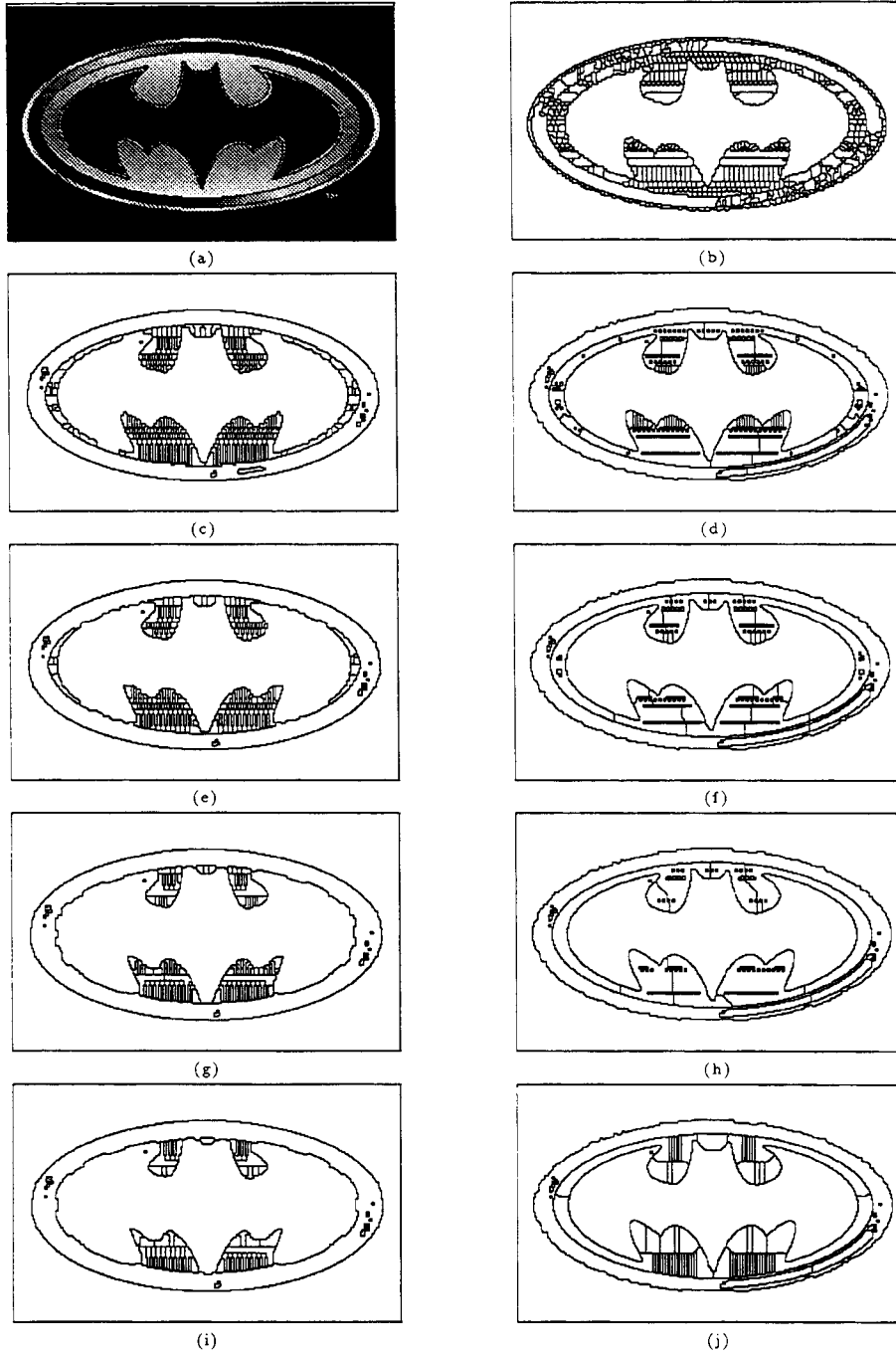


Figura 3.1: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. A LDA no espaço-escala MMDE para (c) $\sigma = -2$, (e) $\sigma = -3$, (g) $\sigma = -4$ e (i) $\sigma = -5$. A LDA no espaço-escala MMDE com reconstrução da imagem original para (d) $\sigma = -2$, (f) $\sigma = -3$, (h) $\sigma = -4$ e (j) $\sigma = -5$.

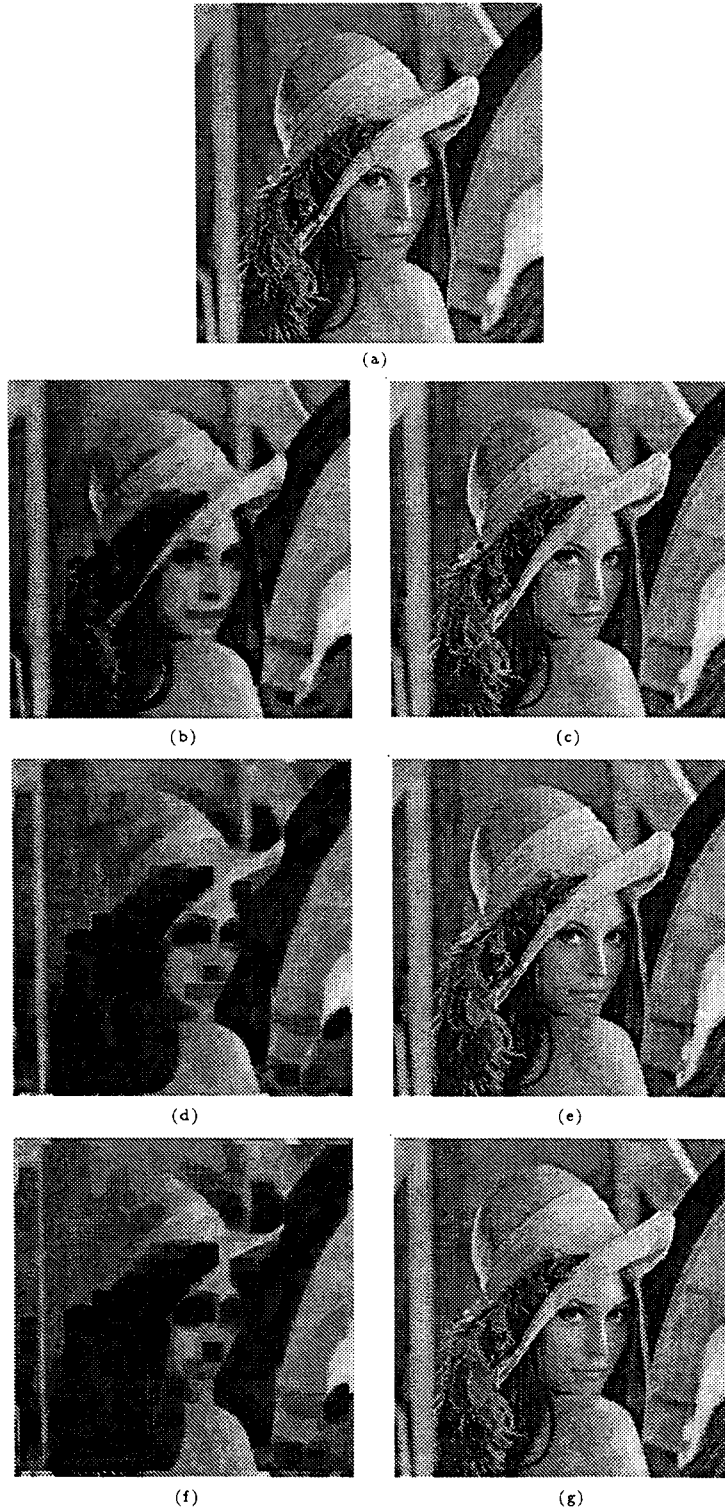


Figura 3.2: (a) Imagem original. Suavização utilizando o espaço-escala MMDE para (b) $\sigma = -2$, (d) $\sigma = -5$ e (f) $\sigma = -7$. (c), (e) e (g) reconstrução da imagem original utilizando como marcador os mínimos encontrados nas imagens (b), (d) e (f), respectivamente. O número de mínimo é igual a: (a) 2132, (b) e (c) 819, (d) e (e) 451, (f) e (g) 398.

em que n é o número de iterações tal que $(f \oplus g_\sigma)^n(x) = (f \oplus g_\sigma)^{n-1}(x)$, para $\sigma > 0$, e $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$, para $\sigma < 0$.

A figura 3.3 ilustra uma segmentação obtida a partir deste espaço-escala idempotente para duas escalas diferentes.

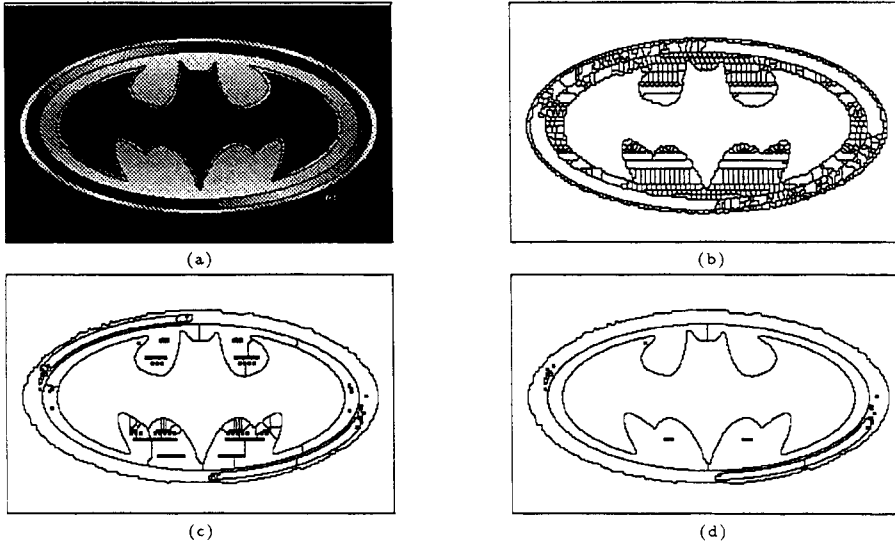


Figura 3.3: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. Espaço-escala idempotente para as escalas (c) $\sigma = -1/18$ e (d) $\sigma = -1/9$.

Nos capítulos 4, 5 e 6 mostramos como as principais propriedades do espaço-escala MMDE são preservadas no espaço-escala idempotente. Apresentamos, ainda, os seguintes resultados relativos à equação 3.1:

- A dilatação e a erosão alcançam a idempotência para escalas positivas e negativas, respectivamente;
- O número necessário de iterações para que a idempotência seja alcançada cresce com o aumento da escala;
- No processo de fusão destes extremos, existe uma relação entre o nível de cinza, a distância dos mínimos (máximos) que permanecem em uma determinada escala e o elemento estruturante g_σ .
- O espaço-escala idempotente pode ser obtido a partir de uma vizinhança 3×3 4-conectada da função estruturante parabolóide g_σ ;
- Um ponto não transformado durante o processo de suavização, considerando uma função estruturante 3×3 , não define novos mínimos (máximos) na imagem resultante (preservação da monotonicidade).

A partir deste último resultado, adotamos critérios para a transformação dos pontos da imagem visando um certo controle sobre a fusão dos extremos e, conseqüentemente, melhores resultados de segmentação. Algumas considerações relativas à definição destes critérios são apresentadas na próxima seção.

3.3 Critérios de fusão dos extremos

Um melhor resultado da segmentação com o espaço-escala morfológico pode ser obtido a partir de um certo controle local da fusão dos extremos da imagem, durante o processo de suavização. Para escalas negativas, por exemplo, algumas características interessantes que podem ser analisadas são a diferença de profundidade dos mínimos e a altura dos pontos separando estes mínimos. Como discutido nos capítulos 4 e 6, esta última informação não é devidamente considerada no espaço-escala morfológico idempotente, conforme indicado na proposição abaixo (o capítulo 6 apresenta a prova desta proposição).

Proposição 3 *Sejam x_i e $x_j \in E_{\min}(f)$ tais que $f(x_i) < f(x_j)$. Em uma malha 4-conexa, para uma escala $\sigma < 0$, podemos mostrar que x_j pertencerá a zona de influência de x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, se $\exists x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$ tal que*

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1) \quad (3.2)$$

em que d é a distância de quarteirão e $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, para $t \neq 0$.

Esta proposição relaciona o valor de um mínimo, x_j , e a zona de influência de um outro mínimo, x_i , menor que x_j , no caso de uma fusão entre estes mínimos. A partir deste resultado, temos que dois mínimos com uma pequena diferença de profundidade podem se fundir apenas em uma escala muito grosseira (ou seja, mínimos com o mesmo nível de cinza se fundem apenas quando $\sigma \rightarrow -\infty$). Além disso, podemos ver que se existe um ponto x_k pertencente a zona de influência de x_i que satisfaça a condição acima, então no processo de fusão dos mínimos x_i e x_j não são considerados os níveis de cinza dos demais pontos entre estes mínimos.

A próxima seção aborda este aspecto, resumindo os resultados apresentados no capítulo 5 relativos à definição de alguns critérios empregados na fusão dos extremos da imagem. Estes resultados são apresentados para escalas negativas (para escalas positivas, os resultados podem ser obtidos por dualidade das operações morfológicas).

3.3.1 Critério 1: baseado na altura dos extremos

Em alguns modelos de segmentação, as regiões de interesse da imagem podem ser representadas por mínimos de profundidades bem distintas. Topograficamente, uma maneira de se

evitar a fusão destes mínimos nas escalas mais grosseiras é definir, a partir da não suavização de alguns pontos da imagem original, uma espécie de barreira entre os mesmos. Este critério de fusão pode ser resumido da seguinte forma. Seja H uma constante representando um parâmetro de altura. O valor suavizado em uma escala σ negativa, $f_\sigma(x_k)$, de um ponto x_k pode ser definido como

$$f_\sigma(x_k) = \begin{cases} f(x_k) & \text{se } x_k \in N_*(x_{min}, 3 \times 3) \text{ e } (f(x_{min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \geq H \\ (f \odot g_\sigma)(x_k) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $N_*(x, 3 \times 3)$ representa a vizinhança 3×3 de um ponto x , considerando a conexidade dos extremos (4- ou 8- conexidade). Neste caso, o valor erodido $(f \odot g_\sigma)(x_k)$ está relacionado com outro mínimo regional, x'_{min} , que irá se fundir com x_{min} se $(f \odot g_\sigma)(x_k) \leq f(x_{min})$. A diferença $(f(x_{min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k))$ representa uma informação local não só da relação de profundidade mas da distância entre os mínimos. Na figura 3.4, por exemplo, temos dois mínimos, **c** e **i**, de mesma profundidade mas que se encontram a distâncias diferentes do mínimo mais profundo **i**. Para $H = 6$, temos apenas a fusão do mínimo mais distante, **c**, com **i**.

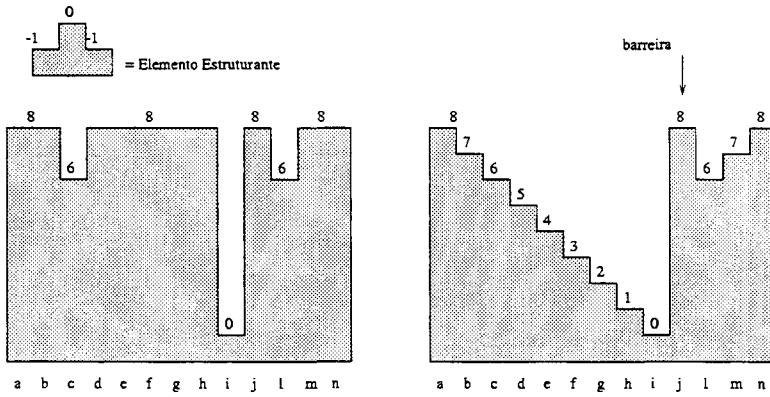


Figura 3.4: Exemplo de suavização aplicando o critério 1 para $H = 6$ e $\sigma = -1$.

Na figura 3.5, podemos observar que o mesmo resultado alcançado com este critério não pode ser obtido simplesmente a partir da redução da escala. Ou seja, aplicar o critério para um parâmetro H e uma escala σ_2 não corresponde ao resultado da suavização em uma escala σ_1 tal que $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$. Exemplos de segmentação utilizando este critério são apresentados nas figuras 3.6-3.8.

Uma outra informação que pode ser levada em conta na definição de um critério de fusão é o nível de cinza dos pontos entre os extremos regionais. Esta informação permite, por exemplo, distinguir um ruído de um mínimo significativo, como ilustrado na figura 3.9. Aqui os mínimos **x** e **z** possuem a mesma profundidade e se encontram à mesma distância de **y**.

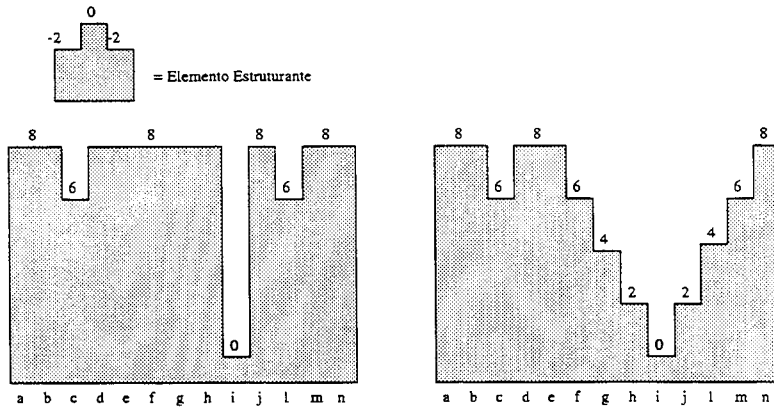


Figura 3.5: Exemplo de suavização para $\sigma = -1/2$.

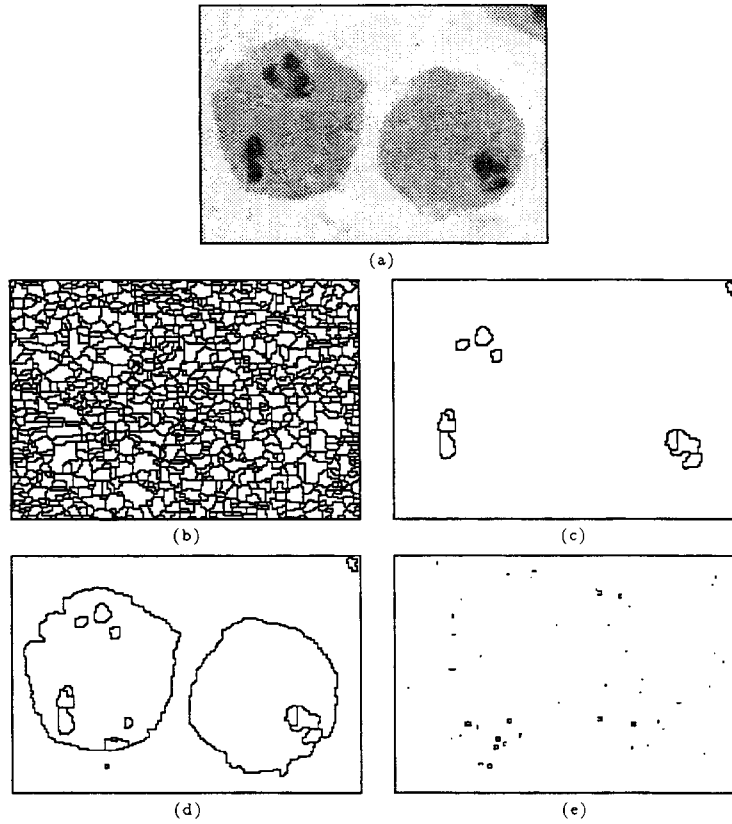


Figura 3.6: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. O resultado do espaço-escala para (c) $\sigma = -1$ e para (d) $\sigma = -1$ e $H = 20$. (e) pontos da imagem original que não foram erodidos (as barreiras).

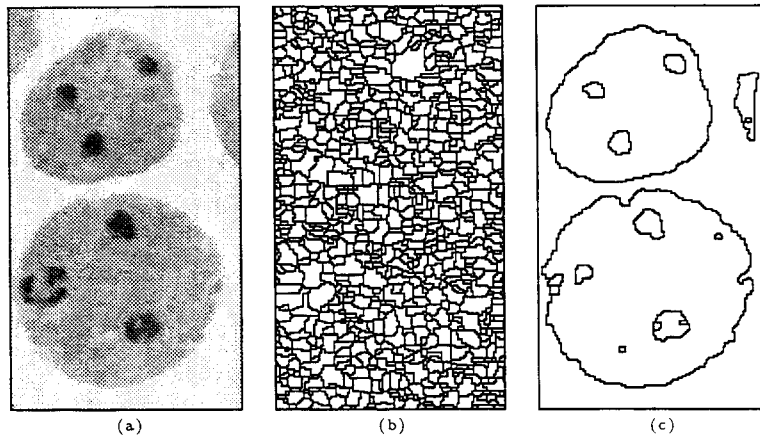


Figura 3.7: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. O resultado do espaço-escala para (c) $\sigma = -1$ e $H = 20$.

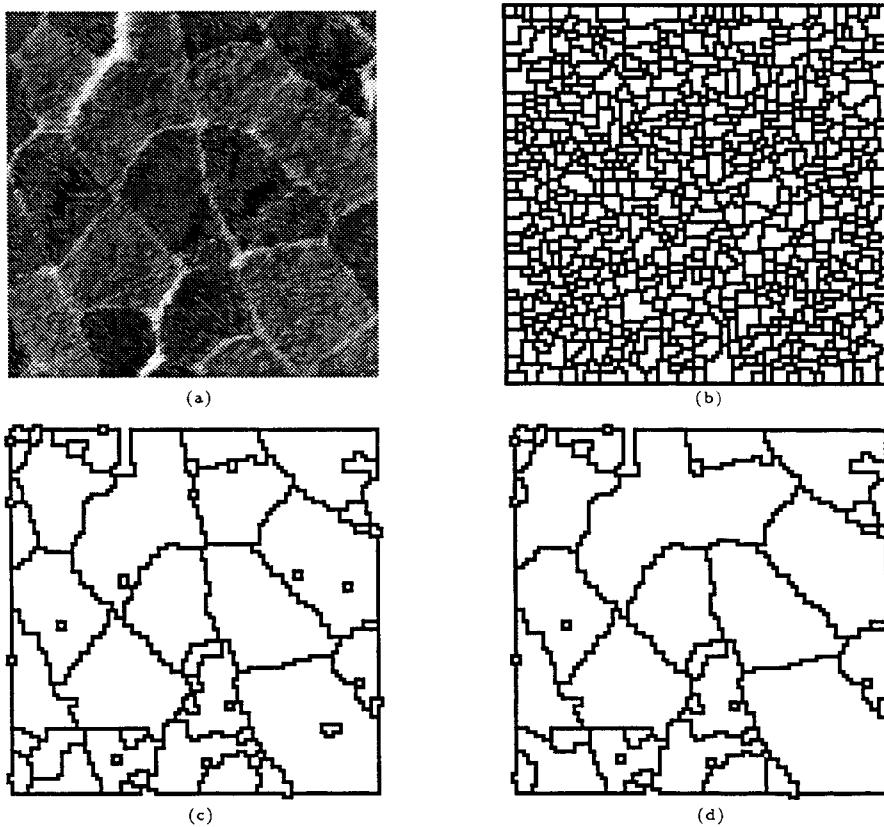


Figura 3.8: (a) Imagem original, e (b) sua LDA. O resultado do espaço-escala para $\sigma = -1/2$ e, (c) $H = 7$ e (d) $H = 10$.

Neste caso, x pode ser caracterizado como um mínimo significativo e z como um ruído. No entanto, a suavização utilizando o espaço-escala idempotente não faz distinção entre estes dois mínimos, mesmo quando o critério anterior é utilizado.

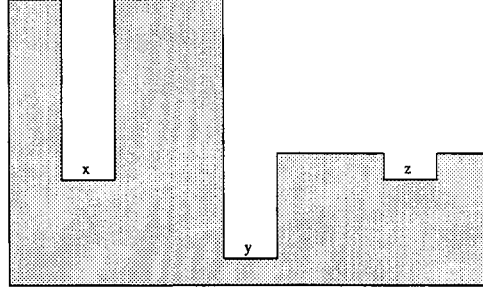


Figura 3.9: Mínimos com mesma diferença de profundidade e valores diferentes de gradiente.

Uma vez que na equação 3.3 o valor transformado, $(f \odot g_\sigma)(x_k)$, está relacionado com outro mínimo x'_{min} , a relação de profundidade entre os mínimos e os pontos que os separam pode ser dada por $f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)$. Se o valor de $f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)$ for consideravelmente maior que a diferença de profundidade entre os mínimos, representada por $f(x_{min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k)$, então estes mínimos caracterizam mínimos significativos. Na figura 3.10, por exemplo, a barreira é definida apenas na configuração 2 em que $(f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \gg (f(x_{min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k))$.

Como podemos observar na figura 3.11, esta relação é muito sensível à presença de ruído. Por exemplo, se y é considerado um mínimo significativo na configuração 1, o mesmo deve ocorrer na configuração 2. Contudo, na configuração 1, a relação $f(z) - (f \odot g_\sigma)(z)$ é menor do que na configuração 2 e, neste caso específico, nenhuma barreira seria criada entre x e y . Neste sentido, podemos concluir que a informação sobre o valor original e o valor transformado de todos os pontos entre dois mínimos, x_{min} e x'_{min} , deve ser considerada na definição de um critério de fusão. A próxima seção aborda este aspecto considerando os valores dos pixels da imagem original e suavizada pela equação 3.1.

3.3.2 Critério 2: baseado na altura dos pontos entre extremos

Para controlar a fusão dos mínimos, a diferença de amplitude entre os pixels das imagens original e transformada pode ser considerada na determinação de pontos, entre mínimos regionais, a serem preservados durante o processo de suavização. Assim, dada uma constante H representando um parâmetro de altura, definimos o valor suavizado em uma escala σ , $f_\sigma(x_k)$, de um ponto x_k , como

$$f_\sigma(x_k) = \begin{cases} (f \odot g_\sigma)(x_k) + H & \text{se } f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k) \geq H \\ (f \odot g_\sigma)(x_k) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

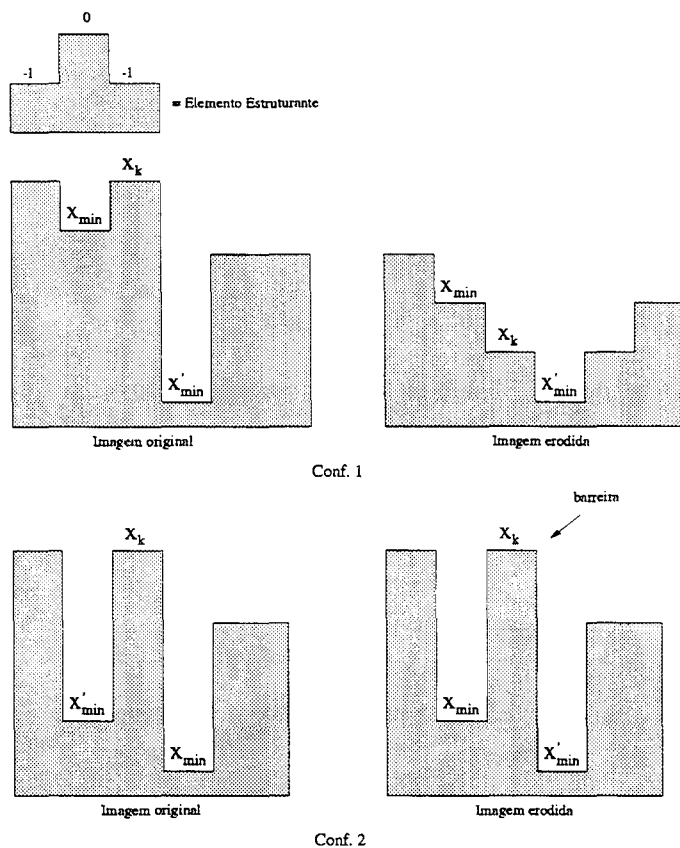


Figura 3.10: Exemplo de definição de barreira entre mínimos separados por alta diferença de amplitude entre as imagens original e transformada.

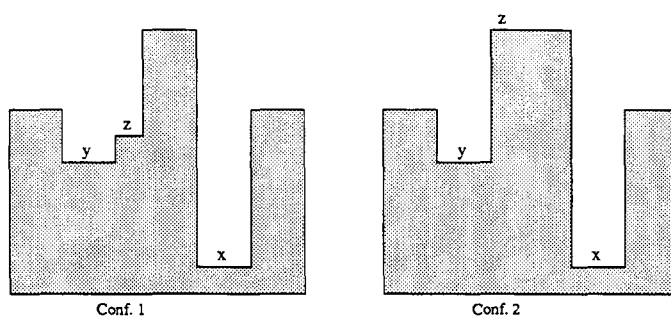


Figura 3.11: Ruído na vizinhança dos extremos (ponto z).

Como explicado na seção anterior, o valor de $(f \odot g_\sigma)(x_k)$ pode estar associado ao valor de um mínimo x'_{min} . Neste caso, se $(f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \geq H$ e x_k pertence a um caminho entre dois mínimos x_{min} e x'_{min} , ao transformar este ponto para $(f \odot g_\sigma)(x_k) + H$, estamos evitando a fusão destes mínimos através deste caminho.

Este critério considera, assim, a profundidade dos mínimos e a altura dos pontos entre eles. A figura 3.12(c) ilustra uma segmentação utilizando o espaço-escala idempotente, sem aplicação de nenhum critério. Como podemos observar, alguns mínimos significativos são eliminados. Utilizando o critério acima, podemos obter uma melhor segmentação, como ilustrado na figura 3.12(d).

Na próxima seção introduzimos um método simples de pós-processamento visando obter melhores resultados de segmentação a partir do espaço-escala idempotente.

3.4 Pós-processamento

Como visto anteriormente (proposição 3), dois mínimos com uma pequena diferença de profundidade podem se fundir apenas em uma escala muito grosseira, durante a suavização monotônica da imagem. Assim, no processo de reconstrução geodésica, uma região homogênea poderá ser marcada por mais de um mínimo, o que conduz a uma supersegmentação. Exemplos deste tipo de supersegmentação são apresentados nas figuras 3.13(c) e 3.14(c).

Outro aspecto relacionado à proposição 3.2 refere-se à distância entre os mínimos da imagem. Como podemos observar na figura 3.15(b), para $\sigma = -1$, alguns mínimos significativos se fundem com seus vizinhos mais profundos. Esta fusão (filtragem) representa uma perda de alguns componentes da imagem a serem utilizados como marcadores em nosso algoritmo de segmentação. Para uma escala menor, $\sigma = -1/2$ (Fig. 3.15(c)), alguns mínimos não significativos, distantes de um mínimo significativo, permanecem na imagem filtrada, obtidos após o processo de suavização idempotente. Esta supersegmentação pode ser reduzida a partir de uma operação de pós-processamento que leva em conta o baixo valor do gradiente das regiões não significativas da imagem. Esta operação, a ser aplicada antes do cálculo da LDA (passo 6 do algoritmo descrito na seção 3.1), é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) \leq K \\ g(x) - K & \text{se } g(x) > K, \end{cases} \quad (3.5)$$

em que $g(x)$ é o gradiente da imagem reconstruída, $f'(x)$, e K é um limiar.

As figuras 3.13(d), 3.14(d) e 3.15(d) ilustram este método. Note que além de eliminar mínimos não significativos que não se fundem com significativos (Fig. 3.15(d)), este pós-processamento funde mínimos com níveis de cinza similares e separados por baixo valor de gradiente (Fig. 3.13(d) e Fig. 3.14(d)).

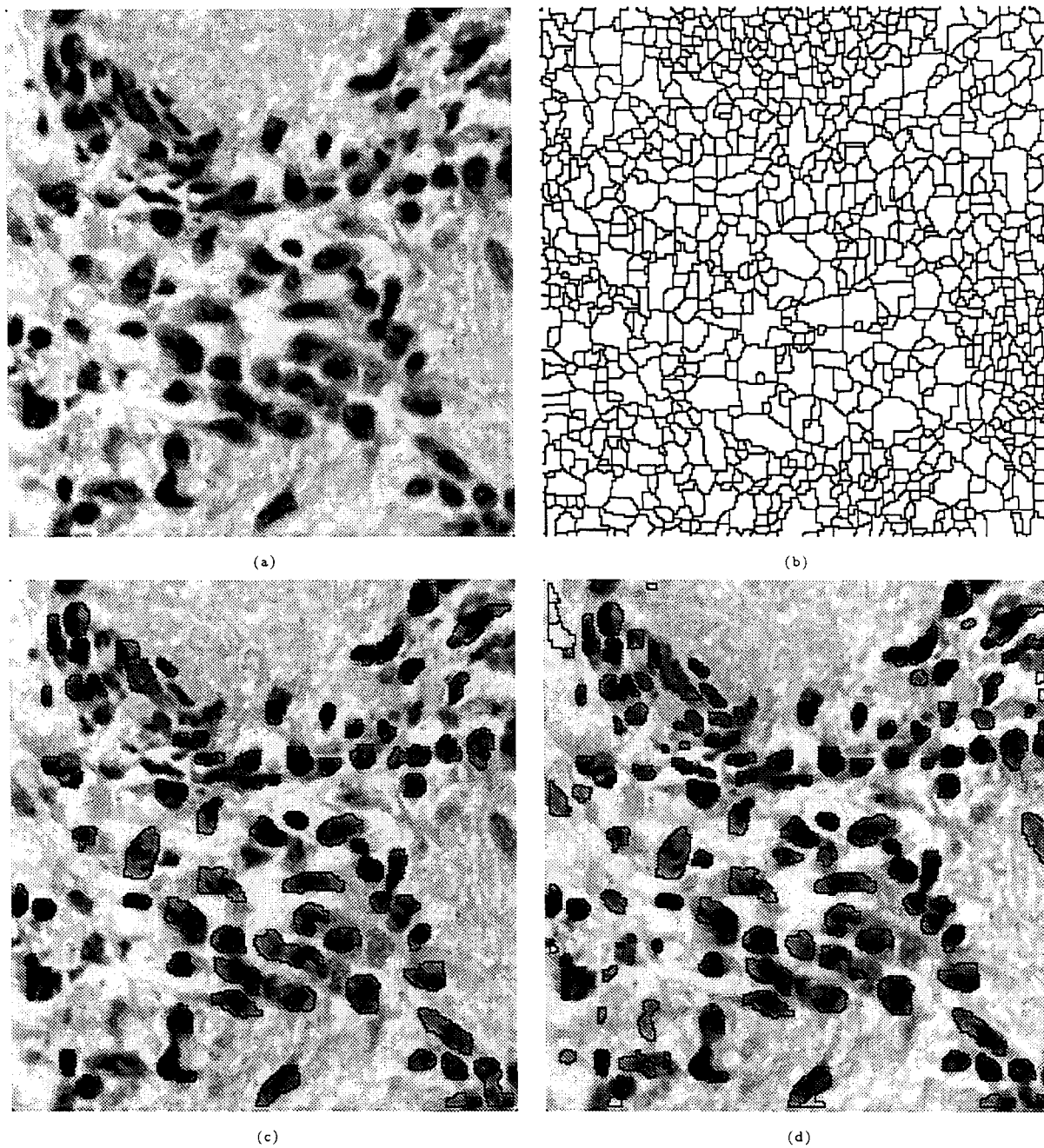


Figura 3.12: Segmentação a partir da equação 3.4. (a) Imagem original e (b) sua LDA; LDA para $\sigma = -1$ e (c) $H = 0$, (d) $H = 20$.

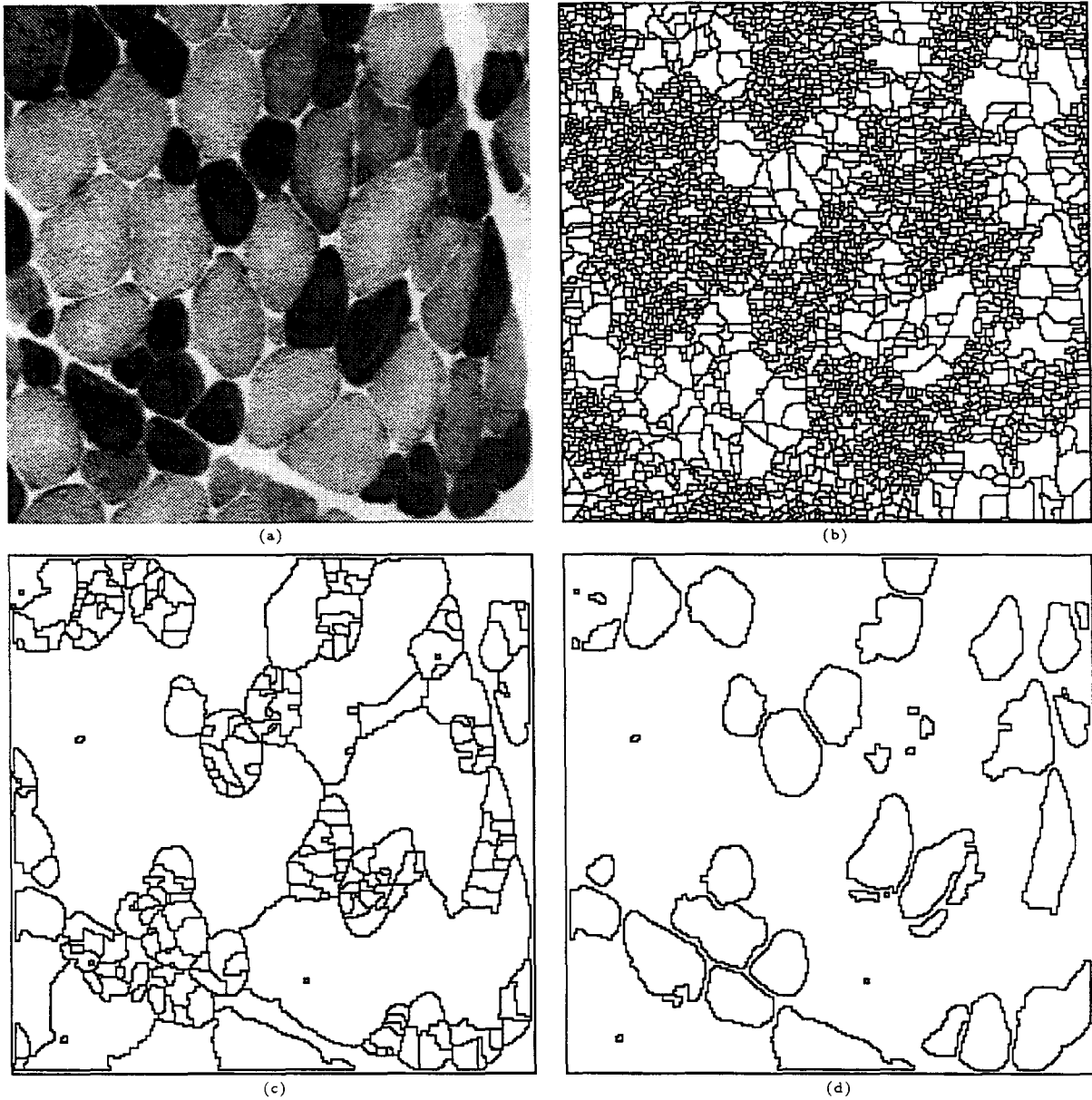


Figura 3.13: Segmentação baseada na equação 3.1 e com pós-processamento. (a) imagem original e (b) sua LDA; LDA para $\sigma = -1$ e (c) $K = 0$, (d) $K = 5$.

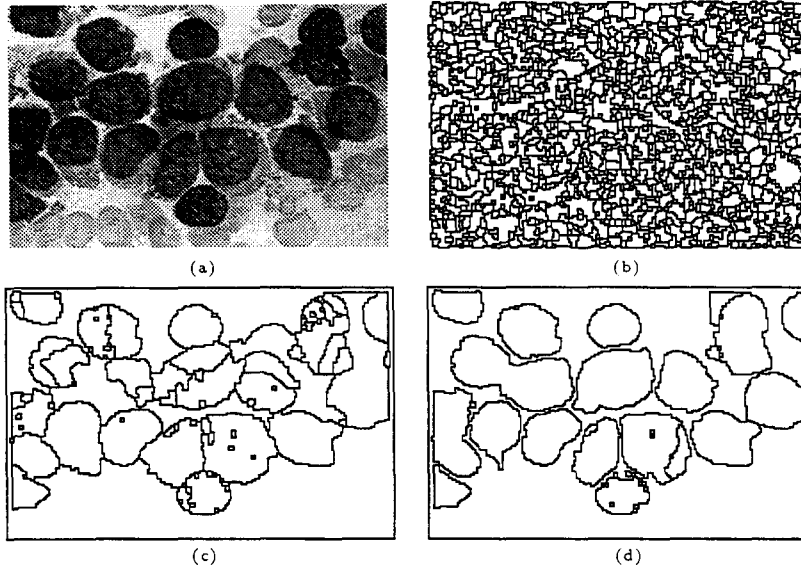


Figura 3.14: Segmentação baseada na equação 3.1 e com pós-processamento 3.1. (a) imagem original e (b) sua LDA; LDA para $\sigma = -1$ e (c) $K = 0$, (d) $K = 33$.

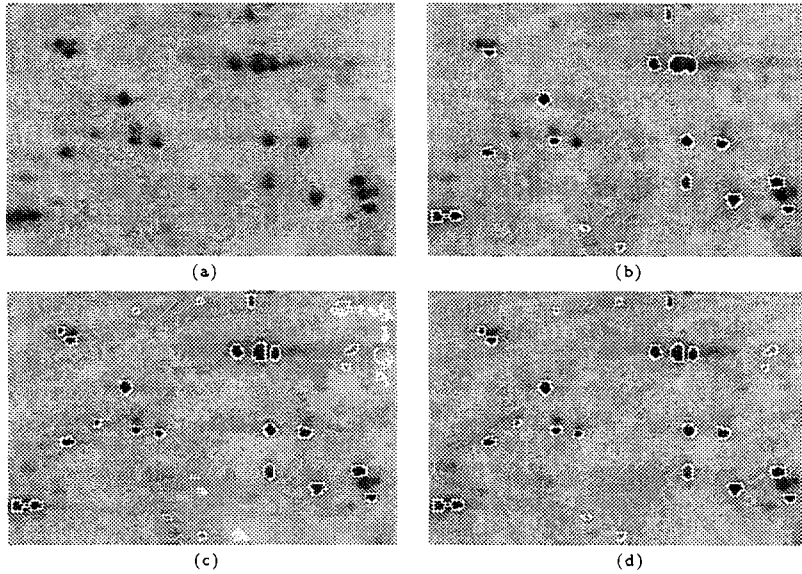


Figura 3.15: Segmentação baseada na equação 3.1 e com pós-processamento . (a) imagem original; LDA para (b) $\sigma = -1$ e $K = 0$; (c) $\sigma = -1/2$ e $K = 0$; (d) $\sigma = -1/2$ e $K = 10$.

Capítulo 4

Introdução ao espaço-escala idempotente

Neste capítulo, apresentamos o artigo *Morphological scale-space theory for segmentation problems*, publicado nos anais do *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing* realizado em junho de 1999, Antália, Turquia.

No artigo consideramos o problema de segmentação de imagens a partir do espaço-escala MMDE e definimos o espaço-escala idempotente. Para este espaço-escala, garantimos a preservação das principais propriedades do espaço-escala MMDE. Mostramos, ainda, os seguintes resultados relativos ao espaço-escala idempotente.

- A dilatação e a erosão alcançam a idempotência para escalas positivas e negativas, respectivamente.
- O número de iterações necessárias para que a idempotência seja alcançada cresce com o aumento da escala.
- Existe uma relação entre o nível de cinza e a distância dos mínimos (máximos) que permanecem em uma determinada escala e o elemento estruturante g_σ .
- O espaço-escala idempotente pode ser obtido a partir de uma vizinhança 3×3 4-conectada da função estruturante parabolóide g_σ .

Morphological scale-space theory for segmentation problems

Marta D. Teixeira and Neucimar J. Leite

Institute of Computing, State University of Campinas

C.P. 6176, 13083-970 Campinas, SP - Brazil

{973252, neucimar}@dcc.unicamp.br

Abstract

This work presents some new results on the morphological scale-space theory and their use in image segmentation. Basically, we introduce an idempotent smoothing operation based on the recently proposed multiscale-morphological-dilation-erosion method, and analyse some of its features concerned mainly with monotonicity and the way the image extrema merge in a multiscale simplification process.

4.1 Introduction

The representation of an image by multiple scales has proved to be useful in a large number of image processing applications. New and interesting multiscale methods have been considered for extracting features of a signal. Recently, Jackway [14] proposed a morphological-based scale-space method that guarantees the monotone property for the extrema of an image (its regional maxima and minima). This property, inherent to the scale-space theory, means that the number of the signal features (the extrema set) decreases monotonically as a function of scale. Thus, if a signal feature is present at a certain level of representation, then it can also be found in its finer representations, up to the original image (zero scale).

The morphological scale-space is based on the well-known non-linear morphological operations [23], and takes into account both positive and negative scales σ . For positive scales, the image is smoothed by dilation, and for negative ones it is processed by erosion. The magnitude of the parameter $|\sigma|$ represents the intuitive notion of scale. Let f be an image function defined in the discrete domain, $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A smoothed version of this image at scale σ is given by [14]

$$(f \otimes g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)(x) & \text{if } \sigma > 0; \\ f(x) & \text{if } \sigma = 0; \\ (f \ominus g_\sigma)(x) & \text{if } \sigma < 0; \end{cases} \quad (4.1)$$

where $\oplus$ and $\ominus$ stand for grayscale dilation and erosion, respectively, and g_σ is a scaled structuring function, $g_\sigma : \mathcal{G}_\sigma \subseteq Z^2 \rightarrow R$. One can show that in order to verify the monotonic property of the image extrema, g_σ should be a nonpositive, anticonvex, and even function with $g(0) = 0$ [14]. Formally, this monotonic property can be stated as follows.

Theorem 1 [15] *Let the set of points $E_{max}(f) = \{x \in f : x \text{ is a local maximum}\}$ and $E_{min}(f) = \{x \in f : x \text{ is a local minimum}\}$ represent the extrema of image f . Then, for any scales $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$,*

$$E_{min}(f \otimes g_{\sigma_2}) \subseteq E_{min}(f \otimes g_{\sigma_1}) \subseteq E_{min}(f) \quad \text{and}$$

$$E_{max}(f \otimes g_{\sigma_4}) \subseteq E_{max}(f \otimes g_{\sigma_3}) \subseteq E_{max}(f)$$

In his work, Jackway illustrates the use of the morphological scale-space method for reducing monotonically the number of extrema of an image [14]. He also defines the watershed of a signal [23] smoothed at scale σ as the feature of interest. Nevertheless, as stated by the author, the method cannot be directly applied to image segmentation since “the watershed arcs move spatially with varying scale and are not a subset of those at zero scale” [14].

This work addresses this problem by analysing the way image extrema merge, throughout the different levels of representation, in order to obtain interesting segmentation results from the morphological scale-space approach.

Section 2 shows briefly how we use the set of markers defined at a certain scale to obtain an initial partition of the image, and discusses some aspects concerning the way image extrema merge across scales. Some properties related to the definition of a basic configuration of the original image are discussed in Section 3. Our conclusions are described in Section 4. Finally, appendices A and B present the proof of the propositions introduced in this paper.

4.2 Morphological scale-space and segmentation

Images 4.1(a)-4.1(c) illustrate the algorithm proposed in [14] which defines a multiscale watershed set. Here, the structuring function is the circular paraboloid $g(x, y) = -(x^2 + y^2)$. The algorithm first smoothes the original image f , obtaining $(f \otimes g_\sigma)$ (Eq. 4.1). Next, since we are considering a negative scale, we define the regional minima of $f \otimes g_\sigma$ as the set of markers to be used in a dual reconstruction (homotopy modification [23]) of the gradient image $|\nabla(f \otimes g_\sigma)|$. Finally, we compute the watershed lines of this modified image. As we

can see in Fig. 4.1(c), these watershed lines represent a partition of the image at a certain scale but do not delineate regions according to a common segmentation model.

The scale-space properties are explored here for defining a significant set of the image extrema constituting the markers for segmentation. Before we focus on this point, we need to consider the problem of “forcing” the watershed lines to follow the contour of the regions being segmented. This can simply be done by a dual reconstruction of the original image, taking as markers the set of minima obtained from the filtering at scale σ . Fig. 4.1(d) has the same set of regional minima as in Fig. 4.1(c). In our case, we use this set to reconstruct the original image, Fig. 4.1(a), and obtain the watershed of its gradient representing a better partition of this image (Fig. 4.1(d)).

The next section discusses some aspects concerning the way the extrema merge across the scale-space smoothing steps.

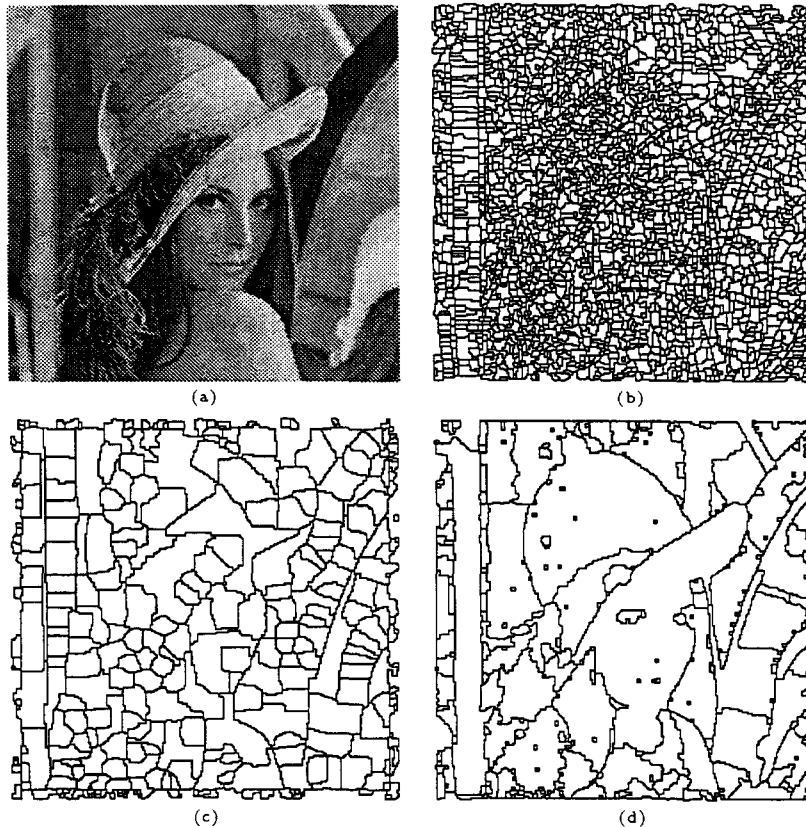


Figure 4.1: (a) Original image, and (b) its watershed lines. (c) The scale-space result for $\sigma = -5$, and (d) the scale-space with reconstruction of the original image.

4.2.1 The minima/maxima minimal configuration set

Once we define the smoothed image, it is very difficult to characterize the set of extrema that remains (or should remain) at a certain scale. The following idempotence considerations constitute an important simplification of this set.

Let f be an image function as before and $(f \ominus g_\sigma)^n = \underbrace{(((f \ominus g_\sigma) \ominus g_\sigma) \ominus \cdots \ominus g_\sigma)}_{n \text{ times}}$. We define an idempotent smoothed version of f , at scale σ , as

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)^n(x) & \text{if } \sigma > 0; \\ f(x) & \text{if } \sigma = 0; \\ (f \ominus g_\sigma)^n(x) & \text{if } \sigma < 0; \end{cases} \quad (4.2)$$

where n is the number of iterations so that $(f \oplus g_\sigma)^n(x) = (f \oplus g_\sigma)^{n-1}(x)$ for $\sigma > 0$, and $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$ for $\sigma < 0$. The following two propositions concern the idempotence property of Eq. 4.2 (here, we consider only smoothing through the negative scales, the extension to the positive ones is obtained from duality. The proof of all the propositions discussed in this paper is given in appendices A and B).

Proposition 1 *For any $\sigma < 0$ there exists a value n such that $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$.*

Proposition 2 *For any scales $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$, let m and n be the number of iterations such that $(f \ominus g_{\sigma_2})^m(x) = (f \ominus g_{\sigma_2})^{m-1}(x)$ and $(f \ominus g_{\sigma_1})^n(x) = (f \ominus g_{\sigma_1})^{n-1}(x)$. In this case, we have that $m \geq n$.*

The set of regional minima obtained after smoothing the image till idempotence constitutes the *minima minimal configuration* - MMC set at scale σ .

Let $(f \ominus g_\sigma)^n(x)$ define the MMC set at scale σ . The next proposition specifies the way two minima merge, during the smoothing operation, till we reach the MMC set.

Proposition 3 *Let x_i and $x_j \in E_{\min}(f)$ denote two points of the image f with $f(x_i) < f(x_j)$. For a 4-connectivity and $\sigma < 0$, we can show that pixel x_j will belong to the influence zone [23] of x_i , $Z(x_i)$, if $\exists x_k \in Z(x_i)$ so that*

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1) \quad (4.3)$$

where d denotes the city-block distance and

$$D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma}(g_\sigma(t))|, \quad t \neq 0.$$

Shortly, the MMC set represents a simplification of the minima defined by the original morphological scale-space method (Eq. 4.1). This set, with less non-significant minima at a certain scale, can be used as a marker in a segmentation process. Observe that merging is a

function of the distance between minima as well as their gray-scale value, and that it can be directly controlled by the structuring function g_σ . Fig. 4.2 illustrates such a segmentation based on the same number of regional minima used as markers. Fig. 4.3 shows another segmentation example.

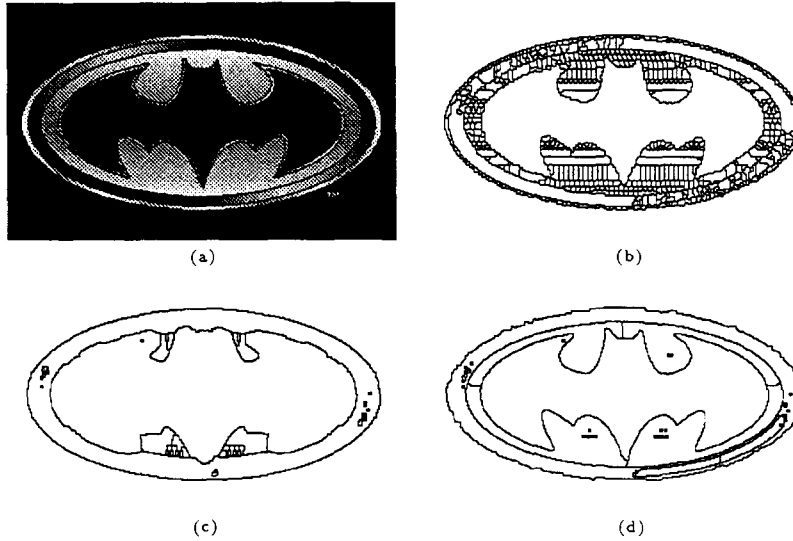


Figure 4.2: (a) Original image, and (b) its watershed lines. (c) The space-scale for $\sigma = -8$, and (d) the segmentation result.

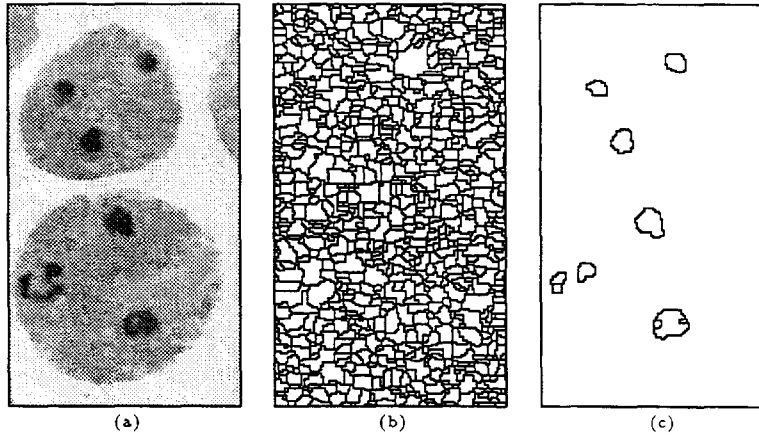


Figure 4.3: (a) Original image, and (b) its watershed lines. (c) The segmentation result for $\sigma = -1$.

Finally, we can also prove the following statement regarding computation time.

Proposition 4 *For discrete images, the MMC set can be obtained from Eq. 4.2 by considering a small 3×3 structuring function g_σ .*

4.3 Properties of the MMC set

In this section, we discuss some basic properties of the morphological scale-space method, showing how they also hold for Eq. 4.2. The next result concerns the anti-extensivity of Eq. 4.2 for negative scales (the result for positive scales follows from duality).

Proposition 5 *The definition of the MMC set is represented by the following properties:*

1. For $\sigma \rightarrow 0$, $(f \odot g_\sigma)(x) \rightarrow f(x)$ for all $x \in \mathcal{D}_f$.
2. For $\sigma \rightarrow -\infty$, $(f \odot g_\sigma)(x) \rightarrow \inf_{t \in \mathcal{D}_f} \{f(t)\}$ for all $x \in \mathcal{D}_f$.
3. For $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$, $(f \odot g_{\sigma_2})(x) \leq (f \odot g_{\sigma_1})(x) \leq f(x)$ for all $x \in \mathcal{D}_f$.

The next two propositions relate the value and the position of the minima in both smoothed and original images, across the different levels of representation.

Proposition 6 *Let the structuring function have a single maximum at the origin, that is, $g_\sigma(x)$ is a local maximum so it implies that $x = 0$ and then:*

If $\sigma < 0$ and $(f \odot g_\sigma)(x_{\min})$ is a local minimum, then $f(x_{\min})$ is a local minimum and $(f \odot g_\sigma)(x_{\min}) = f(x_{\min})$.

Proposition 7 *Let the structuring function have a single maximum at the origin, that is, g_σ is a local maximum so it implies that $x = 0$ and then:*

If $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ and $(f \odot g_{\sigma_2})(x_{\min})$ is a local minimum, then $(f \odot g_{\sigma_1})(x_{\min})$ is a local minimum and $(f \odot g_{\sigma_1})(x_{\min}) = (f \odot g_{\sigma_2})(x_{\min})$.

Based on the above considerations, we can also guarantee the monotonic property of the image extrema during the MMC set definition. Formally:

Proposition 8 *Let $E_{\min}(f) = \{x \in f : x \text{ is a regional minimum}\}$. Then, we can prove that for any scales $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$,*

$$E_{\min}(f \odot g_{\sigma_2}) \subseteq E_{\min}(f \odot g_{\sigma_1}) \subseteq E_{\min}(f)$$

4.4 Conclusions

The work reported here considers the problem of using the morphological scale-space method for image segmentation. Our approach is based on the simplification of the extrema of an image, whose smoothed version is characterized by a monotonically filtering of these extrema. Basically, we have defined an idempotent operation which allows an interesting representation of the images we can obtain at different scales. As illustrated here, this aspect, associated with the morphological reconstruction operation, can be considered to obtain sound segmentation results based on the scale-space approach.

A Proof of propositions

Proposition 1 Given a point $x \in \mathcal{D}_f$, the city-block distance, d , and $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, for $t \neq 0$, from proposition 9 (Appendix B), we have that

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\}. \quad (4.4)$$

Assuming that the $\inf$ value occurs for $y = z$, such that $d(z, x) = s$, then based on the above equation and on proposition 9, we have that

$$(f \odot g_\sigma)^s(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f, d(x, y) \leq s} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\} = f(z) + D_\sigma \times d(z, x). \quad (4.5)$$

Thus, for any iteration $t > s$, $(f \odot g_\sigma)^t(x) = (f \odot g_\sigma)^s(x)$, and we can say that there exist a value $n - 1 = \max(d(x, z))$, for any x and $z \in \mathcal{D}_f$, such that

$$(f \odot g_\sigma)(x) = f(z) + D_\sigma \times d(z, x), \quad (4.6)$$

and hence, $(f \odot g_\sigma)^n(x) = (f \odot g_\sigma)^{n-1}(x)$, for any $x \in \mathcal{D}_f$. □

Proposition 2 Proof: When $\sigma \rightarrow -\infty$ and $g_\sigma \rightarrow 0$, we have that $(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{t \in \mathcal{D}_f} \{f(t)\}$ for all $x \in \mathcal{D}_f$. In this case, the value of the global minimum of the image is propagated all over the image points and $n \leq \sup\{d(x, y)\}$ for any x and $y \in \mathcal{D}_f$.

When $\sigma \rightarrow 0$ and $g_\sigma \rightarrow \infty$, then $(f \odot g_\sigma)(x) = f(x)$ for all $x \in \mathcal{D}_f$. In this case, no minimum value is propagated on the image and $n = 1$. Thus, we have that the value of a point can be further propagated at scale σ_2 than σ_1 , which yields $m \geq n$ for the scale order in proposition 2. □

Proposition 3

Proof: If the point $x_j \notin E_{\min}(f \odot g_\sigma)$, then $\exists y \in N_4(x_j, 3 \times 3)$ ¹ such that

$$(f \odot g_\sigma)(y) < (f \odot g_\sigma)(x_j) \leq f(x_j) \quad (4.7)$$

Since we consider that x_j will belong to the influence zone of x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, then

$$(f \odot g_\sigma)(y) = f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k), \quad (4.8)$$

for any $x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$. Thus, from Eq. 4.7 and 4.8 we have that merging will occur when

$$f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k) \leq f(x_j) \quad (4.9)$$

¹ $N_G(x, \alpha)$ is the set of G-connected points in the neighborhood α of x . $G = *$ represents the connectivity defined for the image extrema (4- or 8- connectivity).

Since $d(y, x_k) = d(x_j, x_k) - 1$, we have that

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1). \quad (4.10)$$

□

Proposition 4

Proof: Let us assume two points x and y with city-block distance $d(x, y) = i$, $i > 1$. According to proposition 9, we have that at iteration i , $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ with $d(z, x) = i - 1$ such that

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1) \quad (4.11)$$

Therefore,

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \quad (4.12)$$

From Eq. 4.11 and 4.12 we have that

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i \leq f(x) - g_\sigma(y - x), \quad (4.13)$$

since $-g_\sigma(y - x) \geq D_\sigma \times i$.

Therefore, if at any iteration $j < n$,

$$(f \ominus g_\sigma)^j(y) = f(x) - g_\sigma(y - x), \quad (4.14)$$

and knowing that at iteration n ,

$$(f \ominus g_\sigma)^n(y) \leq f(x) + D_\sigma \times j \leq (f \ominus g_\sigma)^j(y), \quad (4.15)$$

thereby the computation of $\inf_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{f(y - t) - g_\sigma(t)\}$ should not be considered for any x with $d(y, x) > 1$. In this case, we only need to take into account a 4-connected 3×3 structuring function, g_σ , in Eq. 4.2.

□

Proposition 5

Proof: From proposition 9 in Appendix B we have that for any $x \in \mathcal{D}_f$,

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f} \{f(y) + D_\sigma \times d(x, y)\}, \text{ for any } y \in \mathcal{D}_f. \quad (4.16)$$

Based on this result, we can state the following

1. For $\sigma \rightarrow 0$, $D_\sigma \rightarrow \infty$, and the $\inf$ value occurs for y such that $d(x, y) = 0$, i.e., $x = y$. Thus, $(f \odot g_\sigma)(x) = f(x)$.
2. For $\sigma \rightarrow -\infty$, $D_\sigma \rightarrow 0$, and the $\inf$ value occurs for y corresponding to the global minimum of the image.

3. Since erosion is anti-extensive, $(f \ominus g_\sigma)^j \leq (f \ominus g_\sigma)^i$, for any $j \geq i$. Thus, according to proposition 10 in Appendix B,

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^j(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x), \quad (4.17)$$

and from proposition 2,

$$(f \odot g_{\sigma_2})(x) \leq (f \odot g_{\sigma_1})(x) \text{ for all } x \in D_f. \quad (4.18)$$

□

Proposition 6 Proof: *Base:* Theorem 1 holds for $n = 1$.

Step: Now, for $n > 1$, since $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = ((f \ominus g_\sigma)^{n-1} \ominus g_\sigma)(x)$, from Theorem 1 we also have that if $x_{min} \in E_{min}((f \ominus g_\sigma)^n)$, then $x_{min} \in E_{min}((f \ominus g_\sigma)^{n-1})$ and

$$(f \ominus g_\sigma)^n(x_{min}) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x_{min}) \quad (4.19)$$

Since by hypothesis $x_{min} \in E_{min}((f \ominus g_\sigma)^{n-1})$ implies that $x_{min} \in E_{min}(f)$ and

$$(f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x_{min}) = f(x_{min}), \quad (4.20)$$

thus, from equations 4.19 and 4.20 and for $\sigma < 0$, we have that if $x_{min} \in E_{min}((f \ominus g_\sigma)^n)$, then $x_{min} \in E_{min}(f)$ and

$$(f \ominus g_\sigma)^n = (f \ominus g_\sigma)^{n-1} = f(x_{min}). \quad (4.21)$$

□

Proposition 7 Proof: From proposition 9 in Appendix B, we have that for any $y \in \mathcal{D}_f$ and σ_2 ,

$$(f \odot g_{\sigma_2})(y) = \inf_{x \in \mathcal{D}_f} \{f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x)\}. \quad (4.22)$$

Now, if $y \in E_{min}(f \odot g_{\sigma_2})$, then $(f \odot g_{\sigma_2})(y) = f(y) \leq (f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x))$ for any $x \in \mathcal{D}_f$. Since $D_{\sigma_2} < D_{\sigma_1}$, then $f(y) < (f(x) + D_{\sigma_1} \times d(y, x))$ and $y \in E_{min}(f \odot g_{\sigma_1})$.

□

Proposition 8

Proof: From proposition 9 in Appendix B, we have that for any $y \in \mathcal{D}_f$ and σ_2 ,

$$(f \odot g_{\sigma_2})(y) = \inf_{x \in \mathcal{D}_f} \{f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x)\}. \quad (4.23)$$

Now, if $y \in E_{min}(f \odot g_{\sigma_2})$, then $(f \odot g_{\sigma_2})(y) = f(y) \leq (f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x))$ for any $x \in \mathcal{D}_f$. Since $D_{\sigma_2} < D_{\sigma_1}$, then $f(y) < (f(x) + D_{\sigma_1} \times d(y, x))$ and $y \in E_{min}(f \odot g_{\sigma_1})$.

□

B Basic propositions

Proposition 9 *For any iteration $i \leq n$ of Eq. 4.2 and $\sigma < 0$, we have that*

$$(f \odot g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times d(y, x) \quad (4.24)$$

if $d(y, x) \leq i$, with d being the city-block distance and $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma}(g_\sigma(t))|$, $t \neq 0$.

Proof: *Base:* Since the $\sup$ value is given by the 4-connected points, $t \in \mathcal{G}_\sigma$, closer to the origin of the structuring function, then for $d(y, x) = 1$,

$$(f \ominus g_\sigma)^1(y) \leq f(x) - g_\sigma(x - y) = f(x) + D_\sigma. \quad (4.25)$$

Step: If a point y is such that $d(y, x) = i$, then $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ with $d(z, x) = i - 1$ so that

$$\begin{aligned} (f \ominus g_\sigma)^i(y) &= \inf_t \{(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(y - t) - g_\sigma(t)\} \\ &\leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Since by hypothesis we have the following

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1), \quad (4.27)$$

then by replacing Eq. 4.27 in Eq. 4.26

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i. \quad (4.28)$$

□

Proposition 10 *For any scales $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ and any number of iterations i*

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x). \quad (4.29)$$

Proof: *Base:* Since the scale-space erosion is anti-extensive, the inequality holds for $i = 1$ [15].

Step: By hypothesis we have that $(f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1}(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1}(x)$. Since the scale-space erosion is an anti-extensive and decreasing operation [15], and

$$\begin{aligned} ((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1} \ominus g_{\sigma_2})(x) &\leq ((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1} \ominus g_{\sigma_1})(x) \\ &\leq ((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1} \ominus g_{\sigma_1})(x), \end{aligned} \quad (4.30)$$

then

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x). \quad (4.31)$$

□

Capítulo 5

Extremos de imagens e critérios de fusão

Neste capítulo apresentamos o artigo *An idempotent scale-space approach for morphological segmentation*, aceito para publicação nos anais do *SPIE's 44th Annual Meeting - The International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation* realizado em Julho de 1999 em Denver, Estados Unidos.

No artigo, definimos critérios de transformação que consideram informações como a diferença de profundidade dos mínimos e a altura dos pontos separando estes mínimos. Introduzimos, ainda, uma simples técnica de pós-processamento visando uma melhoria dos resultados de segmentação no espaço-escala idempotente. Para que este critério possa ser aplicado, com a preservação da monotonicidade, mostramos que a não transformação de um ponto durante o processo de suavização não introduz novos mínimos (máximos) na imagem resultante.

An idempotent scale-space approach for morphological segmentation

Neucimar J. Leite and Marta D. Teixeira

Institute of Computing, State University of Campinas
Campinas, SP - Brazil

Abstract

This work constitutes a first approach on image segmentation based on the recently proposed morphological scale-space theory. We introduce an idempotent smoothing operation, in the corresponding scale-space, and analyze some of its main features concerning the monotonicity of the image extrema and the way these extrema merge in a multiscale simplification process. We also define some basic criteria to control the merging of the image extrema across scales to obtain good markers for segmentation. As we will illustrate, these methods take into account only local information of the image and yield sound segmentation results, mainly in those applications where the regions to be segmented can be characterized (marked) by the extrema of the image function.

key-words: morphological scale-space, dual reconstruction, mathematical morphology

5.1 Introduction

The watershed transform [3] has been extensively used in many image processing applications involving segmentation tasks. In general, the segmentation by watersheds yields an oversegmented image which should be simplified by a filtering process to define a more meaningful version of the final partitioned image. Many of these filtering approaches are based on sets of pixels used as *markers* in a homotopy modification by reconstruction [4, 30]. This homotopy modification eliminates unmarked extrema of the image, retaining those associated with a set of predefined markers.

The definition of the significant markers for segmentation is an image-dependent process in which we can consider different information of the image structures such as contrast, size

and shape (here, these structures are associated mainly with the image extrema, i.e., its regional maxima and/or minima).

Some interesting approaches used to characterize the image structures are based on h-dome [30], dynamic [10], surface [28], and volume [27] attributes. Also, recently, the notion of connected operators for gray-scale images was introduced [7]. The definition of these operators, which filter the flat zones of an image, can be associated with the extinction values [27] of a function to characterize the persistence of the image components through dynamic, surface, and volume parameters. Different thresholdings of these parameters lead to a hierarchical segmentation of the image which can then be analysed by multiple partitions of its original representation.

This work addresses the oversegmentation problem by means of a multiscale representation of an image. Multiscale approaches have been largely considered in the signal processing theory as an effective way to relate information from different signal representations (scales), and have been extended to many image processing applications such as filtering, segmentation, compression and coding [19, 12, 21, 25, 31, 9]. Examples of this multiscale representations are the wavelets [20], the pyramid transform [13], and the granulometric decomposition [8].

One of the basic problems with any multiscale method concerns the difficulty to relate significant information or features of the signal across the different scales. In [32], Witkin proposed a novel multiscale approach, named the scale-space, in which the representation of a significant feature of a signal describes a continuous path across scales. In this case, we have that if a signal feature is present at a certain coarser scale, then it must be found at all finer scales, up to the original image representation ($\sigma = 0$). This aspect constitutes the monotonic property of the scale-space approach since the number of features across the different representation levels decreases monotonically as a function of scale.

In the Witkin's original work, extrema of a signal and its first derivative constitute the features of interest and the scale-space monotonicity property is given by convolutions of the original signal with Gaussian functions.

The monotonic property of the scale-space approach can be very useful in image segmentation by a hierarchical process. Unfortunately, as discussed in [19], there is no convolution kernel for a two-dimensional signal which can preserve this property when the feature of interest is the signal extrema.

Recently, non-linear filters based on scaled morphological operators have been associated with the scale-space theory. Chen and Yan [6], for example, defined a theorem for zero crossings of binary image by considering openings of its objects with a scaled disk. Park and Lee [22] defined a scale-space for one-dimensional signals based on opening and closing operations. Jang and Chin [17] also considered these operations in the definition of a scale-space in which the interest features are the contour segments of binary images. The extension

of these results to gray-scale images is not direct [16].

In a recent work, Jakway [15, 16] developed a scale-space approach based on a multiscale morphological dilation and erosion (MMDE) smoothing which guarantees the monotonic property for the extrema of an image. He also defines the watershed of a signal (monotonicity for regions) smoothed at a certain scale as the feature of interest. Nevertheless, as stated by the author, the method cannot be directly associated with image segmentation tasks since “the watershed arcs move spatially with varying scale and are not a subset of those at zero scale” [14].

In the following, we analyse some important characteristics of this scale-space smoothing and introduce an idempotent scale-space approach which can yield sound segmentation results when linked to the watershed transform. The first aspect considered here refers to the preservation of the spatial position and gray-scale value of the image extrema guaranteed by the scale-space smoothing. As we will see later, to prevent the watershed lines from shifting spatially, we will use these regional extrema as the set of markers in a homotopic modification of the original image. Finally, we also illustrate how to consider some local aspects of the merging process across scales in order to improve our segmentation results.

This paper is organized as follows. In Section 5.2 we introduce the morphological scale-space approach and define an algorithm for segmentation based on this approach. We also define an idempotent scale-space that can be used to characterize the set of image extrema considered in the segmentation method. In Section 5.3 we illustrate the definition of some monotonic-preserving merging criteria used to improve our segmentation results. Finally, some conclusions are drawn in Section 5.4.

5.2 The MMDE scale-space approach

The MMDE scale-space is defined for both positive and negative scales. For positive scales, the image is smoothed by dilation, and for negative scales it is processed by erosion.

Let f be an image, $f : R^2 \rightarrow R$. A smoothed version of f at scale σ is given by

$$(f \otimes g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)(x) & \text{if } \sigma > 0 \\ f(x) & \text{if } \sigma = 0 \\ (f \ominus g_\sigma)(x) & \text{if } \sigma < 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

where σ corresponds to the intuitive notion of scale, and $\oplus$ and $\ominus$ stand for gray-scale dilation and erosion [23], respectively. The scaled structuring function $g_\sigma : R^2 \times R \rightarrow R$ is defined as

$$g_\sigma(x) = |\sigma|g(|\sigma|^{-1}x), \quad \forall \sigma \neq 0 \quad (5.2)$$

One can show that in order to verify the monotonic property, g_σ should be a nonpositive, anticonvex, and even function for all $x \in R$, with $g(0) = 0$ [15]. Thus, by smoothing an image

with such a kernel, one can preserve the monotonicity of its regional maxima or minima by performing dilation (for $\sigma > 0$) or erosion (for $\sigma < 0$), respectively. An example of such a kernel used in this work is the circular paraboloid $g(x, y) = -(x^2 + y^2)$ which has been considered as a suitable function for practical reasons such as computational efficiency [16].

In his morphological scale-space, Jackway extends the monotonicity from point sets to regions by establishing a link between the extrema of the image and its gradient, through the watershed transform and the homotopic modification by a reconstruction process [23]. The next section illustrates this aspect and shows how we can define a multiscale segmentation algorithm based on the monotonicity property for regions.

5.2.1 Morphological scale-space and segmentation

Formally, the monotonicity for the image extrema can be stated as follows [15].

Theorem 1 [15] *Let the set of points $E_{max}(f) = \{x \in f : x \text{ is a local maximum}\}$ and $E_{min}(f) = \{x \in f : x \text{ is a local minimum}\}$ represent the extrema of image f . Then, for any scales $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$,*

$$E_{min}(f \otimes g_{\sigma_2}) \subseteq E_{min}(f \otimes g_{\sigma_1}) \subseteq E_{min}(f) \quad \text{and}$$

$$E_{max}(f \otimes g_{\sigma_4}) \subseteq E_{max}(f \otimes g_{\sigma_3}) \subseteq E_{max}(f)$$

A scale-space monotonicity for regions is obtained by associating the watershed transform with the gradient image as follows [15]:

Algorithm 1: FOR each scale σ_k DO:

1. smooth f to obtain $(f \otimes g_{\sigma})(x)$ using Eq. 5.1.
2. find a suitable set of regional minima N_i (for $\sigma_k \leq 0$) or maxima M_i (for $\sigma_k \geq 0$) of $(f \otimes g_{\sigma})(x)$ corresponding to a marker function, $g(x)$.
3. compute the magnitude of the gradient image $|\nabla(f \otimes g_{\sigma_k})|$.
4. modify the homotopy of this image by a dual reconstruction process [4, 30] using function $g(x)$ as marker.
5. find the watershed regions of the modified image.

ENDFOR

Fig. 5.1(c) illustrates the result of such an algorithm for $\sigma = -5$. Note that due to the smoothing operation in Eq. 5.1 (erosion, in this case) the gradient watersheds move spatially as a function of scale and do not represent the contours of the image according to a common segmentation model. Thus, for the purpose of segmentation, we need to face the problem of “forcing” these watershed lines to delineate the regions being segmented. The following proposition by Jackway allows us to use the set of extrema, present at a certain scale, as marker in a homotopic modification of the original image. This homotopy modification constitutes the base for the preservation of the image contours across scales.

Proposition 1 [15] *Let the structuring function have a single maximum at the origin, that is, $g(x)$ is a local maximum implies $x = 0$, then:*

- a) If $\sigma > 0$ and $(f \otimes g_\sigma)(x_{max})$ is a local maximum, then, $f(x_{max})$ is a local maximum of $f(x)$ and $(f \otimes g_\sigma)(x_{max}) = f(x_{max})$;*
- b) If $\sigma < 0$ and $(f \otimes g_\sigma)(x_{min})$ is local minimum, then, $f(x_{min})$ is a local minimum of $f(x)$ and $(f \otimes g_\sigma)(x_{min}) = f(x_{min})$.*

Based on this result, which states that the position and amplitude of the extrema in the original and smoothed images do not change, we define a multiscale segmentation algorithm as follows:

Algorithm 2: FOR each scale σ DO

1. smooth f to obtain $(f \otimes g_\sigma)(x)$ using Eq. 5.1.
2. find a suitable set of regional minima N_i (for $\sigma_k \leq 0$) or maxima M_i (for $\sigma_k \geq 0$) of $(f \otimes g_\sigma)(x)$ corresponding to a marker function, $g(x)$.
3. define a new image f' by modifying the homotopy of the original image f using function $g(x)$ as marker.
4. compute the magnitude of the gradient image $|\nabla(f')|$.
5. modify the homotopy of this image by a dual reconstruction process [4, 30] using function $g(x)$ as marker.
6. compute the watershed of this modified image.

ENDFOR

Fig. 5.1(d) shows the result of this algorithm representing a better partition of the original image (Fig. 5.1(a)). Note that, in this case, the set of markers used in the homotopic modification of the original and gradient images (steps 3 and 5 above) is given by the same set of minima as in Fig. 5.1(c).

The next section discusses some aspects concerning the merging of the image extrema across scales.

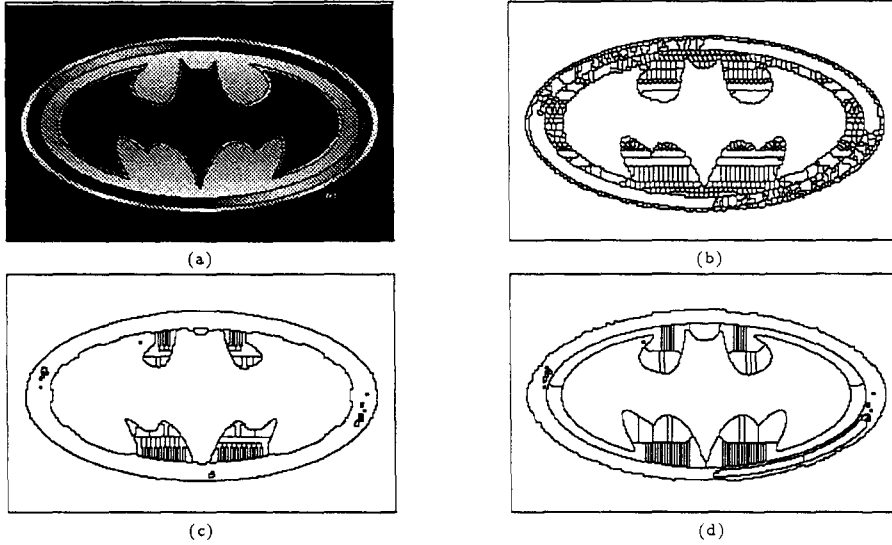


Figure 5.1: (a) Original image, and (b) its watersheds. (c) The watershed lines based on the MMDE approach ($\sigma = -5$), and (d) on the homotopy modification by reconstruction of the original image.

5.2.2 An idempotent scale-space

Once we define the smoothed image, it is very difficult to characterize the set of extrema that remains (or should remain) at a certain scale. The following idempotence considerations constitute an important simplification of this set.

Let f be an image function as before and $(f \ominus g_\sigma)^n = \underbrace{(((f \ominus g_\sigma) \ominus g_\sigma) \ominus \cdots \ominus g_\sigma)}_{n \text{ times}}$ (in the sequel, we consider that f and g_σ are defined in the discrete domain). We define an idempotent smoothed version of f , at scale σ , as

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)^n(x) & \text{if } \sigma > 0 \\ f(x) & \text{if } \sigma = 0 \\ (f \ominus g_\sigma)^n(x) & \text{if } \sigma < 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

where n is the number of iterations so that $(f \oplus g_\sigma)^n(x) = (f \oplus g_\sigma)^{n-1}(x)$ for $\sigma > 0$, and $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$ for $\sigma < 0$. As we have shown in [26], the basic properties of the MMDE approach also hold for this idempotent scale-space. The following proposition concerns the idempotence property of Eq. 5.1 (here, we consider only smoothing through the negative scales, the extension to the positive ones is obtained from duality. The proof of all the propositions discussed in this paper is given in appendices A and B).

Proposition 2 For any $\sigma < 0$ there exists a value n such that $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$.

The set of regional minima obtained after smoothing the image till idempotence constitutes the *minima minimal configuration* - MMC set at scale σ . Shortly, this set represents a simplification of the image defined at scale σ by the original morphological scale-space method (Eq. 5.1). It contains less non-significant minima that can be used as markers in our multiscale segmentation algorithm. The next proposition considers other aspects of the merging process in the definition of the MMC set.

Proposition 3 Let x_i and $x_j \in E_{\min}(f)$ denote two points of the image f with $f(x_i) < f(x_j)$. For a 4-connectivity and $\sigma < 0$, we can show that pixel x_j will belong to the influence zone [23] of x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, if $\exists x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$ so that

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1) \quad (5.4)$$

where d denotes the city-block distance and $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma}(g_\sigma(t))|$, $t \neq 0$.

Equation 5.4 relates the value of a minimum, x_j , and the influence zone of another minimum, x_i , lower than x_j for merging. According to the above proposition, two minima with small height difference can merge only at coarser scales (e.g., minima with the same gray-scale will merge only when $\sigma \rightarrow -\infty$, that is, $D_\sigma \rightarrow 0$). To illustrate such a point, let us assume the segmentation of the electrophoresis image shown in Fig. 5.2. Besides the dark blobs to be segmented, this image also shows the aspect related to the distance between the image minima concerning Eq. 5.4. As we can see in Fig. 5.2-(b), for $\sigma = -1/2$, some significant minima have been merged with their nearest “deeper” (darker) neighbors. Such a merging constitutes a filtering of the image components used as markers in our segmentation algorithm. For a finer scale, $\sigma = -1/4$ (Fig. 5.2-(c)), some non-significant minima do not merge either because of their high distance to a significant minima, or due to the small gray-scale difference between them. These non-significant minima that remain at a certain scale define an oversegmentation of the original image (Fig. 5.2-(a)). This oversegmentation can be reduced by a post-processing operation taking into account the gradient value of the non-significant regions of the image. This operation, which is followed by the watershed computation, is given by

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } g(x) \leq K \\ g(x) - K & \text{if } g(x) > K, \end{cases} \quad (5.5)$$

where $g(x)$ is the gradient of the reconstructed image, $f'(x)$, and K is a threshold value. Note that besides eliminating the non-significant minima which do not merge with the significant ones, this post-processing yields a merging of the minima with similar gray-scale and small gradient between them.

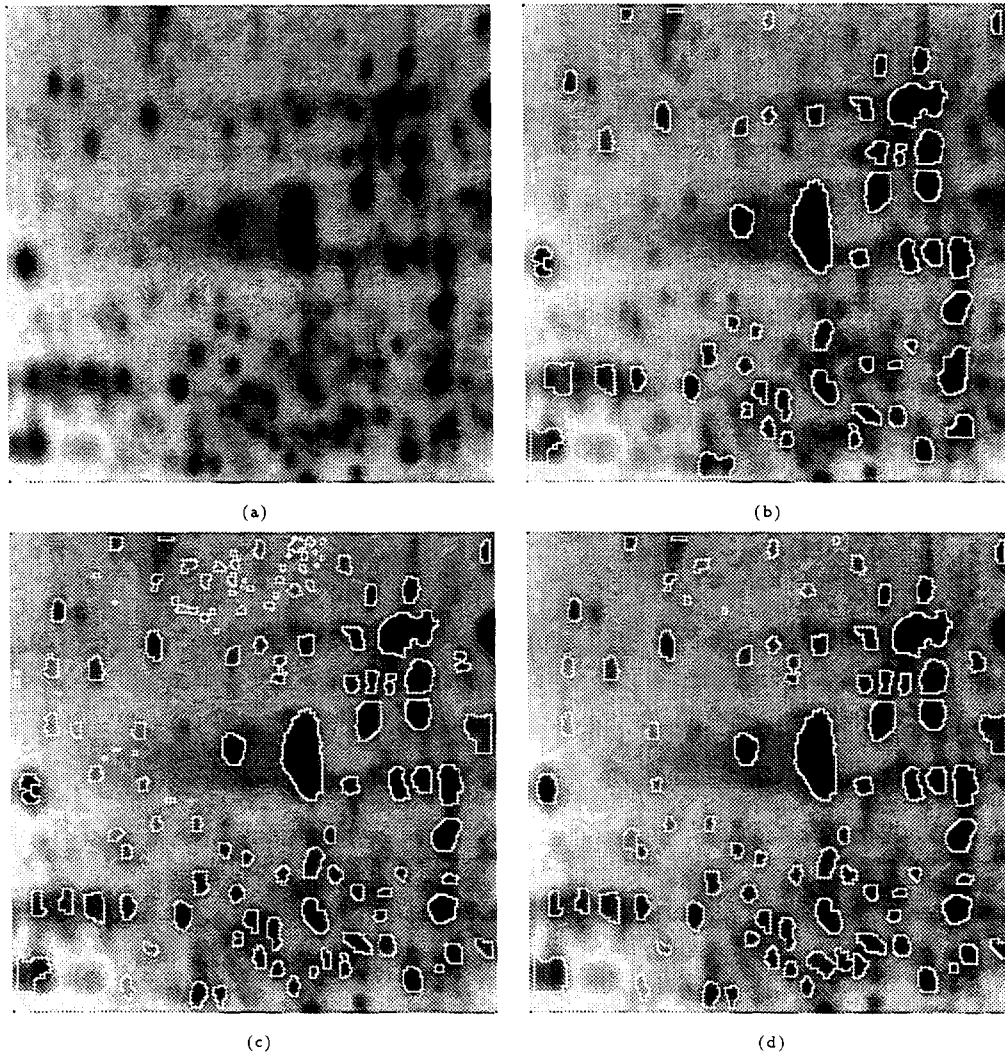


Figure 5.2: Segmentation based on the idempotent scale-space. (a) Original image; watershed lines for scales (b) $\sigma = -1/2$ and (c) $\sigma = -1/4$. (d) Image (c) after the post-processing operation ($K=10$).

Fig. 5.2-(d) illustrates such an operation applied to the image in Fig. 5.2-(a).

The next section improves this segmentation results based on the definition of some monotonic-preserving merging criteria used in the smoothing process.

5.3 Extrema merging criteria

One way to improve the segmentation results obtained here is to define some criteria to locally control the merging of the image extrema during the smoothing process. These criteria can be based on information such as the altitude difference between minima (for negative scales), and the gray-scale values of the pixels separating these minima (as we can see from proposition 3, the value of the pixels between the image minima is irrelevant from the point of view of the MMC set definition, which takes into account only the gray-scale value of the minima and their distances).

Through these merging criteria, we can detect pixels that should remain unchanged during the smoothing process, thereby preventing meaningful minima from merging. To do it, we need to guarantee that the non-smoothing of a point at a certain scale will not create a new minimum in the smoothed image. The next proposition concerns this aspect:

Proposition 4 *For a discrete structuring function g_σ of size $N \times N$, N odd, with radius $R = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, the non-smoothing of a point x_k of the image by Eq. 5.3 can introduce a new minimum in the neighborhood of x_k with radius $R-1$.*

Finally, we can also prove the following statement regarding computation time.

Proposition 5 *For discrete images, the MMC set can be obtained from Eq. 5.1 by considering a small 3×3 structuring function g_σ .*

According to propositions 4 and 5 above, we can define local merging criteria based on the unchanged state of a pixel, while preserving the monotonic property of the transformation. Some examples of these criteria are given below.

The altitude difference between minima

Suppose that in some applications the meaningful regions to be segmented can be associated with a set of minima with high altitude difference between them. One way to avoid these significant minima (markers) from merging is to consider that some points nearby these minima will not be eroded across scales. Topographically, the aim here is to define a kind of “barrier” along a regional minimum which will prevent it from merging with other minima of very different depths.

Let H be a constant representing a height parameter. The smoothed value, $f_\sigma(x_k)$, of a point $x_k \notin E_{\min}(f)$, at scale σ , is given by

$$f_\sigma(x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{if } x_k \in N_{3 \times 3}(x_{\min}) \text{ and } (f(x_{\min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \geq H \\ (f \odot g_\sigma)(x_k), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.6)$$

where $N_{3 \times 3}(x_{\min})$ denotes the 3×3 neighborhood of a point $x_{\min} \in E_{\min}(f)$. In this case, the eroded value $f_\sigma(x_k)$ can be related to the value of another regional minimum, $x'_{\min}$, that would merge with $x_{\min}$ if $f_\sigma(x_k) \leq f(x_{\min})$. The difference $(f(x_{\min}) - (f \odot g_\sigma)(x_k))$ then, gives a local information about the altitude difference of these minima.

Figure 5.3.(a)-(d) shows some segmentation examples by considering Eq. 5.6.

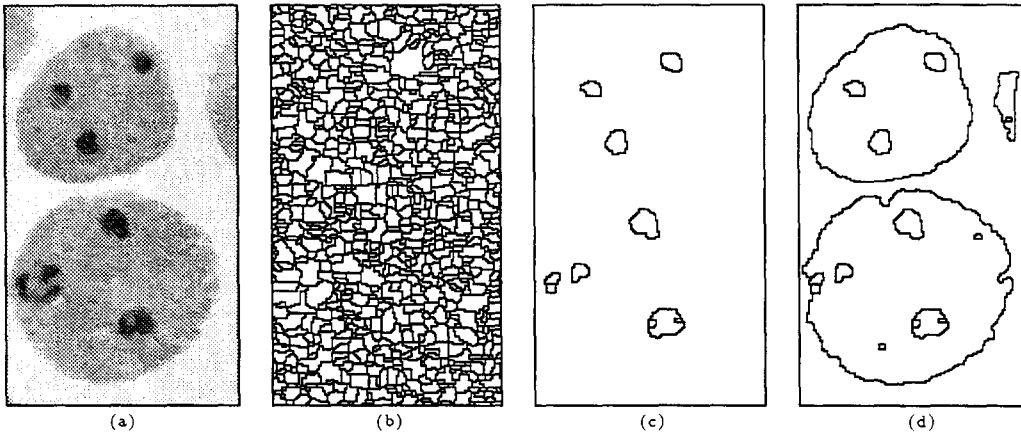


Figure 5.3: (a) Original image, and (b) its watershed lines. The result of the scale-space segmentation for (c) $\sigma = -1$, and (d) $\sigma = -1$ and $H = 20$.

The altitude of the points separating regional minima

Another information that can be taken into account to locally control the merging of the image extrema is the altitude of the points separating these extrema. For the regional minima, for example, we can define the following conditional smoothing, based on the original and the transformed values of the pixels at scale σ .

$$f_\sigma(x_k) = \begin{cases} (f \odot g_\sigma)(x_k) + H & \text{if } (f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \geq H \\ (f \odot g_\sigma)(x_k) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.7)$$

where H is a constant representing a height parameter. This equation defines a value $f_\sigma(x_k)$ such that $(f \odot g_\sigma)(x_k) < f_\sigma(x_k) \leq f(x_k)$, when the difference between $f(x_k)$ and its smoothed value, at scale σ , is greater or equal to H . As we have seen before, the transformed value

of the pixel x_k can be related to the value of a minimum x_{min} in its neighborhood. In such a case, if $(f(x_k) - (f \odot g_\sigma)(x_k)) \geq H$ and x_k belongs to a path between two regional minima, x_{min} and x'_{min} , then smoothing x_k to a value greater than $(f \odot g_\sigma)(x_k)$ can prevent these minima from merging through this path. Figure 5.4.(a)-(d) shows some segmentation examples by using Eq. 5.7.

Both of the above methods consider basic configurations of the significant extrema we seek as markers in our segmentation process. Based on these criteria, we can avoid merging (even at a coarse scale) two minima with high altitude difference, as in Figure 5.3, where regions which are not characterized by significant extrema are segmented (the nuclei of the cells), or separated by pixels with high gray-scale values, as in Figure 5.4, where minima of different depths do not merge.

5.4 Conclusions

In this work we consider the problem of image segmentation by means of the morphological scale-space theory. Our approach is based on the simplification of the extrema of an image which smoothed versions are characterized by a monotonic filtering of these extrema. Among other results, we define an idempotent morphological scale-space smoothing, which associated to the morphological reconstruction algorithm, can be used in a multiscale segmentation model. Also, we proved that by keeping unchanged a point of the image smoothed by a 3×3 structuring function, we do not add any new minima in the final transformation. As we have seen before, this result is very important if we want to define segmentation criteria taking into account the value of the image extrema and the monotonic property, inherent to the scale-space approach.

A Proof of propositions

Proposition 2

Proof:

Given a point $x \in \mathcal{D}_f$, the city-block distance, d , and $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, for $t \neq 0$, from proposition 6 (Appendix B), we have that

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\}. \quad (5.8)$$

Assuming that the $\inf$ value occurs for $y = z$, such that $d(z, x) = s$, then based on the above equation and on proposition 6, we have that

$$(f \ominus g_\sigma)^s(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f, d(x, y) \leq s} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\} = f(z) + D_\sigma \times d(z, x). \quad (5.9)$$

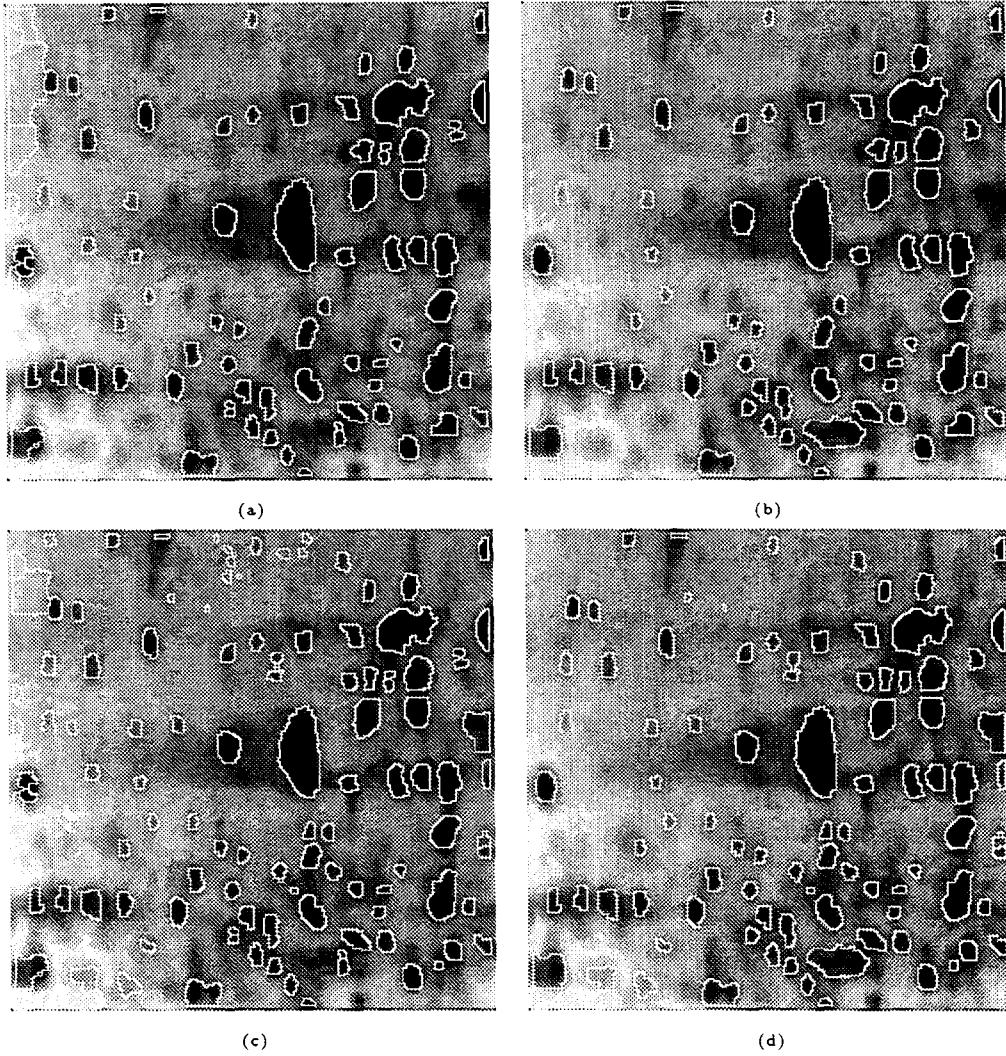


Figure 5.4: Watershed lines based on Eq. 5.7 for $\sigma = -1/2$. (a) $H = 15$ and $K = 0$; (b) $H = 15$ and $K = 10$; (c) $H = 10$ and $K = 0$; (d) $H = 10$ and $K = 10$.

Thus, for any iteration $t > s$, $(f \ominus g_\sigma)^t(x) = (f \ominus g_\sigma)^s(x)$, and we can say that there exist a value $n - 1 = \max(d(x, z))$, for any x and $z \in \mathcal{D}_f$, such that

$$(f \odot g_\sigma)(x) = f(z) + D_\sigma \times d(z, x), \quad (5.10)$$

and hence, $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$, for any $x \in \mathcal{D}_f$. $\square$

Proposition 3

Proof: If the point $x_j \notin E_{\min}(f \odot g_\sigma)$, then $\exists y \in N_4(x_j, 3 \times 3)$ ¹ such that

$$(f \odot g_\sigma)(y) < (f \odot g_\sigma)(x_j) \leq f(x_j) \quad (5.11)$$

Since we consider that x_j will belong to the influence zone of x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, then

$$(f \odot g_\sigma)(y) = f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k), \quad (5.12)$$

for any $x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$. Thus, from Eq. 5.11 and 5.12 we have that merging will occur when

$$f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k) \leq f(x_j) \quad (5.13)$$

Since $d(y, x_k) = d(x_j, x_k) - 1$, we have that

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1). \quad (5.14)$$

$\square$

Proposition 4

Proof: For two points x_i and x_p of an image f , if

$$(f \ominus g_\sigma) = f(x_i) - g_\sigma(x_i - x_p), \quad (5.15)$$

then, from proposition 7 in appendix B, we have that $\exists p_*(x_l, x_p)$ such that $(f \ominus g_\sigma)(x_l) < \dots < (f \ominus g_\sigma)(x_m) < \dots < (f \ominus g_\sigma)(x_{p-1}) < (f \ominus g_\sigma)(x_p)$, for some $x_l \in p_*(x_i, x_p)$.

Therefore, if a point $x_m \in p_*(x_{p-1}, x_l)$ is not eroded during the smoothing process, then a minimum can be created in x_{m+1} and the set of points $\{x_p, \dots, x_{m+1}\}$ will belong to an influence zone different from the one of x_p . Since the longest path occurs when $x_l = x_i$ and we have that $\#p_*(x_i, x_p)^2 = R + 1$, for a structuring element with radius R , the new defined influence zone will have, at most, $R - 1$ points of this path.

Since for $R = 1$, $\#p_*(x_p, x_i) = 2$, then no new minimum is created, and the monotonic property holds for such a case.

¹ $N_G(x, \alpha)$ is the set of G-connected points in the neighborhood α of x . $G = *$ represents the connectivity defined for the image extrema (4- or 8- connectivity).

² $\#p_*(x_i, x_p)$ = number of points of the path $p_*(x_i, x_p)$.

□

Proposition 5

Proof: Let us assume two points x and y with city-block distance $d(x, y) = i$, $i > 1$. According to proposition 6, we have that at iteration i , $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ with $d(z, x) = i - 1$ such that

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1) \quad (5.16)$$

Therefore,

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \quad (5.17)$$

From Eq. 5.16 and 5.17 we have that

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i \leq f(x) - g_\sigma(y - x), \quad (5.18)$$

since $-g_\sigma(y - x) \geq D_\sigma \times i$.

Therefore, if at any iteration $j < n$,

$$(f \ominus g_\sigma)^j(y) = f(x) - g_\sigma(y - x), \quad (5.19)$$

and knowing that at iteration n ,

$$(f \ominus g_\sigma)^n(y) \leq f(x) + D_\sigma \times j \leq (f \ominus g_\sigma)^j(y), \quad (5.20)$$

thereby the computation of $\inf_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{f(y - t) - g_\sigma(t)\}$ should not be considered for any x with $d(y, x) > 1$. In this case, we only need to take into account a 4-connected 3×3 structuring function, g_σ , in Eq. 5.3.

□

B Basic propositions

Proposition 6 For any iteration $i \leq n$ of Eq. 5.1 and $\sigma < 0$, we have that

$$(f \odot g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times d(y, x) \quad (5.21)$$

if $d(y, x) \leq i$, with d being the city-block distance and $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} (g_\sigma(t))|$, $t \neq 0$.

Proof: *Base:* Since the $\sup$ value is given by the 4-connected points, $t \in \mathcal{G}_\sigma$, closer to the origin of the structuring function, then for $d(y, x) = 1$,

$$(f \ominus g_\sigma)^1(y) \leq f(x) - g_\sigma(x - y) = f(x) + D_\sigma. \quad (5.22)$$

Passo: If a point y is such that $d(y, x) = i$, then $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ with $d(z, x) = i - 1$ so that

$$\begin{aligned} (f \ominus g_\sigma)^i(y) &= \inf_t \{ (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(y - t) - g_\sigma(t) \} \\ &\leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Since by hypothesis we have the following

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1), \quad (5.24)$$

then by replacing Eq. 5.24 in Eq. 5.23

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i. \quad (5.25)$$

□

Proposition 7 *Let us consider two points x_i and x_j of an image f , such that*

$$(f \ominus g_\sigma)(x_j) = f(x_i) - g_\sigma(x_i - x_j). \quad (5.26)$$

Then $\exists p_(x_i, x_j)$ so that for any $x_k \in p_*(x_i, x_{j-1})$, $(f \ominus g_\sigma)(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j)$.*

Proof: Since $x_i \in N_*(x_k, \mathcal{G}_\sigma)$,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) = \inf_t \{ f(x_k - t) - g_\sigma(t) \} \leq f(x_i) - g_\sigma(x_k - x_i). \quad (5.27)$$

Thus, since $d(x_k, x_i) < d(x_j, x_i)$, we have that $g_\sigma(x_k - x_i) > g_\sigma(x_j - x_i)$. Therefore,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) \leq f(x_i) - g_\sigma(x_k - x_i) < f(x_i) - g_\sigma(x_j - x_i) = (f \ominus g_\sigma)(x_j). \quad (5.28)$$

and so,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j). \quad (5.29)$$

□

Capítulo 6

Resultados teóricos do espaço-escala idempotente

Neste capítulo apresentamos um relatório técnico contendo os principais resultados teóricos obtidos neste trabalho. Mostramos, entre outros, como as propriedades originais do espaço-escala MMDE são mantidas para o espaço-escala idempotente proposto, e apresentamos os novos resultados inerentes a este espaço-escala. Realizamos, ainda, uma análise detalhada da fusão dos extremos ao longo das escalas.

Um espaço-escala morfológico idempotente

Marta D. Teixeira

Neucimar J. Leite

Resumo

Este trabalho está relacionado com a teoria do espaço-escala morfológico, recentemente proposta na literatura, a qual apresenta propriedades interessantes, em termos de simplificação dos extremos de uma imagem, tais como monotonicidade e preservação da altura e posição destes extremos ao longo das diferentes escalas de representação. Nós exploramos estas características e definimos um novo espaço-escala visando sua aplicação em problemas de segmentação. Para este espaço-escala, provamos que as propriedades originais do espaço-escala morfológico são mantidas.

Analisando o modo como a fusão dos extremos ocorre ao longo das escalas, mostramos, ainda, como manter um ponto inalterado da imagem, durante o processo de transformação, sem comprometer as propriedades gerais do método.

6.1 Introdução

A representação de uma imagem a partir de múltiplas escalas tem sido de grande importância em análise de imagens, e o interesse em uma abordagem que expresse coerentemente as principais características destas diferentes representações tem sido cada vez mais crescente. A maior dificuldade numa abordagem deste tipo refere-se ao relacionamento das informações obtidas entre as diferentes escalas.

Uma solução para este problema é modelar estas informações em um espaço matemático conhecido como espaço-escala [32]. Neste sentido, a característica de interesse do sinal forma um caminho contínuo no espaço-escala e pode ser percorrida de uma escala à outra. Sejam um sinal $f(x) : R^n \rightarrow R$ e um *kernel* $g(x, \sigma) : R^n \times R \rightarrow R$. O sinal transformado em uma escala σ é dado por $F : R^n \times R \rightarrow R$:

$$F(x, \sigma) = f(x) * g(x, \sigma), \quad (6.1)$$

onde $*$ representa a convolução. F é uma função no espaço $(n + 1)$ -dimensional denominada espaço-escala. O conceito de espaço-escala foi introduzido em processamento de imagens por Witkin [32, 33], utilizando como *kernel* a função gaussiana. Uma característica interessante

do espaço-escala, não considerada em outras abordagens multi-escala, garante que a característica de interesse do sinal, uma vez presente em alguma escala, deve persistir em todas as escalas, até a escala zero (imagem original). Esta propriedade é conhecida como propriedade da monotonicidade, uma vez que o número de características de interesse é, necessariamente, uma função monotônica decrescente da escala. Se $\#[f(x)]$ representa o número destas características, então

$$\#[F(x, \sigma_1)] \leq \#[F(x, \sigma_2)] \text{ para todo } \sigma_1 > \sigma_2 > 0. \quad (6.2)$$

No trabalho original de Witkin [32], extremos do sinal e sua primeira derivada são considerados como características fundamentais. Contudo, como discutido em [19], não existe nenhum kernel de convolução, no espaço 2D, que não introduza novos extremos no sinal com o aumento da escala. Neste caso, a propriedade da monotonicidade não é garantida para filtros lineares associados a extremos de uma imagem. Jackway apresenta em [15] um espaço-escala morfológico, denominado MMDE (*Multiscale Morphological Dilation-Erosion*), que garante a propriedade da monotonicidade para extremos de uma imagem. Além desta propriedade, o método apresenta outras características interessantes tais como a preservação da posição e do nível de cinza dos extremos.

Neste trabalho, consideramos uma análise desta teoria e propomos um espaço-escala idempotente visando uma melhor caracterização do modo como os extremos de uma imagem se fundem ao longo das escalas. Para este espaço-escala, garantimos a preservação das principais propriedades do espaço-escala MMDE. Mostramos, ainda, como um ponto da imagem pode não ser alterado durante o processo de transformação com preservação da monotonicidade. Este resultado é importante pois flexibiliza o processo de transformação de um ponto da imagem, ao longo das escalas, possibilitando, por exemplo, um maior controle na fusão dos seus extremos. Na seção 6.2, definimos o espaço-escala MMDE [15], as funções estruturantes escaláveis e as principais propriedades do método. Na seção 6.2.2, apresentamos considerações sobre a fusão dos extremos ao longo das diferentes escalas. O espaço-escala idempotente é apresentado na seção 6.3. Na seção 6.4 apresentamos a conclusão.

6.2 O espaço-escala MMDE

O espaço-escala MMDE é definido para escalas positivas e negativas. Para escalas positivas é considerada a operação morfológica de dilatação e para escalas negativas, a de erosão [23]. Suponha uma imagem f , definida no domínio $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A imagem suavizada numa escala σ é dada por [15]:

$$(f \otimes g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)(x) & \text{se } \sigma > 0 \\ f(x) & \text{se } \sigma = 0 \\ (f \ominus g_\sigma)(x) & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

em que a magnitude do parâmetro $|\sigma|$ corresponde à noção intuitiva de escala. A função estruturante $g_\sigma : \mathcal{G}_\sigma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$g_\sigma(x) = |\sigma|g(|\sigma|^{-1}x), \quad \forall \sigma \neq 0, \quad (6.4)$$

em que $\mathcal{G}_\sigma$ é definido como $\mathcal{G}_\sigma = \{x : \|x\| < \sigma\mathcal{R}\}$ ¹ se $g(x)$ é uma função limitada, ou seja, $\mathcal{G} \subseteq \{x : \|x\| < \mathcal{R}\}$ para algum $\mathcal{R}$, par, não-positiva e anti-convexa.

Algumas características das funções estruturantes devem ser consideradas para garantir o comportamento esperado no espaço-escala. Por exemplo, para se evitar o efeito de deslocamento temos que

$$\sup_{t \in \mathcal{G}} \{g_\sigma(t)\} = 0, \quad (6.5)$$

e para se evitar o efeito de translação horizontal:

$$g_\sigma(0) = 0 \quad (6.6)$$

Além destas considerações, as condições abaixo são impostas para garantir o comportamento de escala:

$$|\sigma| \rightarrow 0 \implies g_\sigma(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ -\infty & \text{se } x \neq 0 \end{cases}, \quad (6.7)$$

$$0 < |\sigma_1| < |\sigma_2| \implies g_{\sigma_1}(x) \leq g_{\sigma_2}(x) \text{ para } x \in \mathcal{G}_{\sigma_1}, \quad (6.8)$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty \implies g_\sigma(x) \rightarrow 0 \text{ para todo } x. \quad (6.9)$$

Para imagens numéricas, o parabolóide circular $g(x, y) = -(x^2 + y^2)$ tem sido considerado como uma função estruturante adequada por razões de dimensionalidade e eficiência computacional [16].

6.2.1 Propriedades do espaço-escala MMDE

Nesta seção apresentamos os resultados mais importantes do espaço-escala proposto por Jackway [15]. A primeira proposição relaciona a posição e a altura de um extremo local, entre o sinal suavizado pela equação 6.3 e o sinal original.

Proposição 4 [15] *Considerando-se a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, se $g(x)$ é um máximo local, então $x = 0$, temos que:*

a) *Se $\sigma > 0$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{max})$ é um máximo local, então $f(x_{max})$ é um máximo local de $f(x)$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{max}) = f(x_{max})$;*

b) *Se $\sigma < 0$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{min})$ é um mínimo local, então $f(x_{min})$ é um mínimo local de $f(x)$ e $(f \otimes g_\sigma)(x_{min}) = f(x_{min})$.*

¹ $\|x\|$ representa a norma Euclidiana.

A partir desta proposição, é possível relacionar, ainda, a posição e a altura dos extremos ao longo das escalas.

Proposição 5 [15] *Dada a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, $g(x)$ é um máximo local, então em $x = 0$, temos que:*

- a) *Se $\sigma_4 > \sigma_3 > 0$ e $(f \otimes g_{\sigma_4})(x_{max})$ é um máximo local, então, $(f \otimes g_{\sigma_3})(x_{max})$ é um máximo local e, $(f \otimes g_{\sigma_3})(x_{max}) = (f \otimes g_{\sigma_4})(x_{max})$;*
- b) *Se $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ e $(f \otimes g_{\sigma_2})(x_{min})$ é um mínimo local, então, $(f \otimes g_{\sigma_1})(x_{min})$ é um mínimo local e, $(f \otimes g_{\sigma_2})(x_{min}) = (f \otimes g_{\sigma_1})(x_{min})$.*

A partir dos resultados acima, podemos garantir que se um extremo do sinal se encontra em alguma escala σ , o mesmo deve ser encontrado na escala zero e em todas as escalas intermediárias. Este resultado assegura que o número de extremos não decresce quando a escala tende a zero, o que constitui a propriedade da monotonicidade. Assim:

Teorema 2 [15] *(Propriedade da Monotonicidade para o Espaço-Escala MMDE). Seja $f : \mathcal{D}_f \subseteq R^n \rightarrow R$ uma função limitada, $g_\sigma : \mathcal{G}_\sigma \subseteq R^n \rightarrow R$ uma função estruturante satisfazendo as condições da proposição 5, e os seguintes conjuntos de pontos, $E_{max}(f) = \{x: f(x) \text{ é um máximo local}\}$ e $E_{min}(f) = \{x: f(x) \text{ é um mínimo local}\}$, representando os pontos extremos de f . Então, para quaisquer $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$,*

$$E_{min}(f \otimes g_{\sigma_2}) \subseteq E_{min}(f \otimes g_{\sigma_1}) \subseteq E_{min}(f)$$

e

$$E_{max}(f \otimes g_{\sigma_4}) \subseteq E_{max}(f \otimes g_{\sigma_3}) \subseteq E_{max}(f),$$

ou seja, o número de máximos (mínimos) locais decresce monotonicamente com o aumento da escala positiva (negativa). Esta característica pode ser estendida para garantir a monotonicidade dos extremos regionais [14].

Na próxima seção fazemos algumas considerações sobre o comportamento dos extremos ao longo das escalas. Os resultados são apresentados apenas para escalas negativas (os resultados para escalas positivas podem ser obtidos por dualidade [23]).

6.2.2 Fusão dos extremos no espaço-escala MMDE

A propriedade da monotonicidade pode ser melhor compreendida se analisarmos como nenhum novo mínimo (máximo) pode ser definido na imagem erodida (dilatada). Para escalas negativas, dados dois pontos x_i e x_j pertencentes a $\mathcal{D}_f$, tais que

$$(f \ominus g_\sigma)(x_j) = f(x_i) - g_\sigma(x_i - x_j), \quad (6.10)$$

para $x_j \notin E_{min}(f)$, então:

- se $x_i = x_j$, como $\exists x_k \in N_*(x_j, 3 \times 3)$ ² tal que $f(x_k) < f(x_j)$ e a erosão é anti-extensiva, então $(f \ominus g_\sigma)(x_k) \leq f(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j) = f(x_j)$;
- se $x_i \neq x_j$, então de acordo com a proposição 23 (ver apêndice A), temos que $\exists x_k \in N_*(x_j, 3 \times 3)$ tal que $(f \ominus g_\sigma)(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j)$.

Logo, se $x_j \notin E_{\min}(f)$, então $x_j \notin E_{\min}(f \ominus g_\sigma)$.

A proposição seguinte aborda o comportamento dos mínimos no processo de suavização.

Proposição 6 *Se $x \in E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$, então no processo de suavização o $\inf_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{f(y - t) - g_\sigma(t)\}$ ocorre para $t = 0$ e*

$$f(x) < \inf_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{f(y - t) - g_\sigma(t)\}, \text{ para } t \neq 0. \quad (6.11)$$

Prova: Supondo que o inf ocorra para $z = y - t$, para $t \neq 0$, tal que $f(x) = f(z) - g_\sigma(x - z)$, então da proposição 23 temos que $\exists x_k \in N_*(x, 3 \times 3)$ tal que $(f \otimes g_\sigma)(x_k) < (f \otimes g_\sigma)(x)$, o que contradiz a hipótese de que $x \in E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$. □

A proposição abaixo mostra como um extremo regional, pertencente à imagem original, pode deixar de pertencer ao conjunto destes extremos em uma determinada escala.

Proposição 7 *Dado $R_{\min}(f)$ o conjunto de mínimos regionais de uma imagem f , se $\mathcal{M} \in R_{\min}(f)$ mas $\mathcal{M} \notin R_{\min}(f \otimes g_\sigma)$, para $\sigma < 0$, então necessariamente $\exists y \in N_*(x_{\min}, 3 \times 3)$, para $x_{\min} \in \mathcal{M}$, tal que $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (f \otimes g_\sigma)(x_{\min}) \leq f(\mathcal{M})$.*

Prova: Dado um mínimo regional $\mathcal{M}$, então qualquer ponto $x \in \mathcal{M}$ é um mínimo local. A condição para que $\mathcal{M} \notin R_{\min}(f \otimes g_\sigma)$ é que um destes mínimos locais não seja mínimo local na imagem transformada. Assim, seja $y \in N_*(x_{\min}, 3 \times 3)$, para $x_{\min} \in \mathcal{M}$ e $\notin \mathcal{M}$, como a erosão é decrescente duas situações podem ocorrer para que $x_{\min} \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$:

- Nenhum ponto $x \in \mathcal{M}$ é transformado. Neste caso, temos necessariamente, que $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq f(\mathcal{M}) = (f \otimes g_\sigma)(x_{\min})$.
- Um ponto $x \in \mathcal{M}$ é transformado.

Nenhum ponto x pode ter seu valor erodido sem que um caminho decrescente de x a um ponto $y \in N_*(x_{\min})$ seja formado, pois em caso contrário um mínimo regional x estaria sendo criado neste ponto, contradizendo o teorema da monotonicidade. Assim, se algum mínimo $x_{\min} \in \mathcal{M}$ for erodido, então $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (f \otimes g_\sigma)(x_{\min})$.

² $N_G(x, D)$ representa o conjunto de pontos G-conectados, na vizinhança D de x . $G = *$ representa a conexidade considerada para os extremos (4- ou 8- conexo).

Logo, temos que:

- para $(f \otimes g_\sigma)(y) < (f \otimes g_\sigma)(x_{\min})$, então necessariamente $x_{\min} \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$;
- para $(f \otimes g_\sigma)(y) = (f \otimes g_\sigma)(x_{\min})$, temos que $x_{\min} \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$ pois, caso contrário, $y \in \mathcal{M}$, o que contradiz a hipótese inicial.

□

A partir desta proposição, podemos analisar a relação existente entre a função estruturante e a imagem original tal que a transformação acima se verifique.

Proposição 8 Para $\sigma < 0$, um ponto $y \in N_*(x_j, 3 \times 3)$, com $x_j \in E_{\min}(f)$, poderá ser erodido para $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (f \otimes g_\sigma)(x_j)$ se $\exists x_i \neq x_j$, $x_i \in N_*(y, \mathcal{G}_\sigma)$, tal que

$$f(x_j) - f(x_i) \geq \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right| \text{ para } t \neq 0. \quad (6.12)$$

Se a condição acima ocorre, $x_j \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$.

Prova: Para que $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (f \otimes g_\sigma)(x_j)$, temos que

$$\inf_t \{f(y - t) - g_\sigma(t)\} \leq (f \otimes g_\sigma)(x_j) \leq f(x_j). \quad (6.13)$$

Se o *inf* ocorre para $y - t = x_i$, então

$$f(x_i) - g_\sigma(y - x_i) \leq f(x_j). \quad (6.14)$$

Analisando a equação acima observamos que:

- Para $x_i = y$, $g_\sigma(y - y) = g_\sigma(0) = 0$ e $f(y) \leq f(x_i)$, contradizendo a hipótese de que $x_i \in E_{\min}(f)$. Logo, para $x_i = y$ a desigualdade não se verifica.
- Para $x_i = x_j$,

$$f(x_j) - g_\sigma(y - x_j) \leq f(x_j). \quad (6.15)$$

Esta desigualdade também não se verifica pois como $y \neq x_j$, $g_\sigma(y - x_j) < 0$.

Logo,

$$f(x_j) - f(x_i) \geq -g_\sigma(y - x_i) \geq \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g(t)\} \right| \text{ para } t \neq 0. \quad (6.16)$$

□

Do resultado acima, podemos definir a seguinte condição para que dois mínimos se fundam, ou seja, passem a pertencer a uma mesma zona de influência [4].

Proposição 9 *Dados dois mínimos x_i e $x_j \in \mathcal{D}_f$ tais que $f(x_j) > f(x_i)$, x_j não poderá fundir com x_i se*

$$f(x_j) - f(x_i) < \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right|, \text{ para } t \neq 0. \quad (6.17)$$

Prova: Para escalas negativas, se x_j pertence à zona de influência de x_i , então existe um caminho decrescente $p_*(x_j, x_i)$ ³, tal que

$$(f \otimes g_\sigma)(x_j) = f(x_k) - g_\sigma(x_j - x_k), \text{ para algum } x_k \in N_*(x_j, \mathcal{G}_\sigma), \text{ tal que } i \leq k < j. \quad (6.18)$$

Sendo $(f \otimes g_\sigma)(x_j) \leq f(x_j)$, da equação 6.18 temos que

$$f(x_j) - f(x_k) \geq -g_\sigma(x_j - x_k) \text{ para } t \neq 0. \quad (6.19)$$

Como

$$\sup_{i \leq k < j} \{f(x_j) - f(x_k)\} = f(x_j) - f(x_i), \quad (6.20)$$

para que a fusão ocorra, deve-se verificar, necessariamente, a seguinte desigualdade

$$f(x_j) - f(x_i) \geq -g_\sigma(x_j - x_k) \geq \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right|. \quad (6.21)$$

Logo, se

$$f(x_j) - f(x_i) < \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right| \text{ para } t \neq 0, \quad (6.22)$$

x_j não se funde com x_i .

□

Da proposição acima, seguem os seguintes corolários

Corolário 1 *Dois mínimos de mesma profundidade se fundem apenas em uma escala $\sigma \rightarrow -\infty$.*

Prova: Da proposição 9 temos que se $f(x_j) - f(x_i) < \left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right|$, para $t \neq 0$, x_i e x_j não se fundem. Como para dois mínimos x_i e x_j de mesma profundidade, $f(x_j) - f(x_i) = 0$, x_i e x_j fundem-se apenas em uma escala tal que $\left| \sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\} \right| \leq 0$, para $t \neq 0$. Logo, pela equação 6.9, temos que x_i e x_j se fundem apenas em uma escala $\sigma \rightarrow -\infty$.

□

Corolário 2 *Com o aumento da escala negativa, mínimos com diferença de profundidade cada vez menor fundem-se progressivamente.*

³Sendo $p_G(x, y)$ uma sequência distinta de pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ tal que $x_0 = x$ e $x_n = y$ e $x_i \in N_G(x_{i+1}, 3 \times 3)$ para $0 \leq i < n - 1$.

Prova: Da equação 6.8, temos que $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 \implies |\sup_t \{g_{\sigma_1}(t)\}| \geq |\sup_t \{g_{\sigma_2}(t)\}|$, para $t \in \mathcal{G}_{\sigma_1}$. Logo, a partir da proposição 9, temos que dois pontos x_i e x_j que não se fundem em σ_1 podem se fundir em σ_2 . $\square$

A proposição seguinte relaciona os extremos de duas imagens, f e t , antes e depois da operação de suavização.

Proposição 10 *Dadas duas imagens f e t , tal que $f(x) \leq t(x)$, para qualquer $x \in \mathcal{D}_f$, e $\sigma < 0$, então se*

$$E_{\min}(f) \subseteq E_{\min}(t) \implies E_{\min}(f \otimes g_\sigma) \subseteq E_{\min}(t \otimes g_\sigma) \quad (6.23)$$

Prova: Como o espaço-escala é monotônico, temos que $E_{\min}(f \otimes g_\sigma) \subseteq E_{\min}(f) \subseteq E_{\min}(t)$. Assim, precisamos provar apenas que dado um $x_{\min} \in E_{\min}(t)$ e $x_{\min} \in E_{\min}(f)$, se $x_{\min} \notin E_{\min}(t \otimes g_\sigma)$ então $x_{\min} \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$.

Se $x_{\min} \in E_{\min}(t)$ mas $x_{\min} \notin E_{\min}(t \otimes g_\sigma)$, então pela proposição 7, $\exists y \in N_*(x_{\min}, 3 \times 3)$ tal que

$$(t \otimes g_\sigma)(y) = \inf_{u \in \mathcal{G}_\sigma} \{t(y - u) - g_\sigma(u)\} \leq (t \otimes g_\sigma)(x_{\min}) \leq t(x_{\min}). \quad (6.24)$$

Mas como para qualquer u , $f(y - u) \leq t(y - u)$, então $(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (t \otimes g_\sigma)(y)$. Como $f(x_{\min}) = t(x_{\min})$, temos que

$$(f \otimes g_\sigma)(y) \leq (t \otimes g_\sigma)(y) \leq t(x_{\min}) = f(x_{\min}). \quad (6.25)$$

Portanto, $x_{\min} \notin E_{\min}(f \otimes g_\sigma)$. $\square$

6.3 Um espaço-escala morfológico idempotente

Uma vez obtida a imagem suavizada pela equação 6.3, é muito difícil caracterizar o conjunto de extremos que permanece em uma determinada escala. O espaço-escala proposto a seguir, possibilita uma melhor caracterização deste conjunto.

Dada $f : \mathcal{D}_f \subset Z^2 \rightarrow R$ uma função imagem no plano discreto, e $(f \ominus g_\sigma)^n = \underbrace{(((f \ominus g_\sigma) \ominus g_\sigma) \ominus \dots \ominus}_{n \text{ vezes}}$ a imagem suavizada até a idempotência, numa escala σ , é definida por

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \begin{cases} (f \oplus g_\sigma)^n(x) & \text{se } \sigma > 0; \\ f(x) & \text{se } \sigma = 0; \\ (f \ominus g_\sigma)^n(x) & \text{se } \sigma < 0; \end{cases} \quad (6.26)$$

onde n é o número de iterações tal que $(f \oplus g_\sigma)^n(x) = (f \oplus g_\sigma)^{n-1}(x)$ para $\sigma > 0$, e $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$ para $\sigma < 0$. A proposição abaixo refere-se à propriedade de idempotência da equação acima (novamente, consideramos o caso para escalas negativas. Os resultados para escalas positivas podem ser obtidos por dualidade das operações morfológicas).

Proposição 11 *Para qualquer $\sigma < 0$ existe um valor n tal que $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$.*

Prova: Dado um ponto $x \in \mathcal{D}_f$ e considerando-se a distância de quarteirão d e $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, para $t \neq 0$, da proposição 24 (apêndice A) temos que

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\}. \quad (6.27)$$

Supondo que o inf ocorra para $y = z$ tal que $d(z, x) = s$, a partir da equação acima e da proposição 24, temos que

$$(f \ominus g_\sigma)^s(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f, d(x, y) \leq s} \{f(y) + D_\sigma \times d(y, x)\} = f(z) + D_\sigma \times d(z, x). \quad (6.28)$$

Logo, para qualquer iteração $t > s$, $(f \ominus g_\sigma)^t(x) = (f \ominus g_\sigma)^s(x)$.

Então, existe um $n - 1 = \max(d(x, z))$, para qualquer x e $z \in \mathcal{D}_f$ em que

$$(f \odot g_\sigma)(x) = f(z) + D_\sigma \times d(z, x), \quad (6.29)$$

e assim, $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x)$ para qualquer $x \in \mathcal{D}_f$. □

A seguir, um resultado importante que pode ser verificado facilmente refere-se ao número de iterações necessárias, entre escalas, para que a idempotência seja alcançada.

Proposição 12 *Para $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$, sejam m e n o número de iterações necessárias para que $(f \ominus g_{\sigma_2})^m(x) = (f \ominus g_{\sigma_2})^{m-1}(x)$ e $(f \ominus g_{\sigma_1})^n(x) = (f \ominus g_{\sigma_1})^{n-1}(x)$. Neste caso, temos que $m \geq n$.*

Prova: Quando $\sigma \rightarrow -\infty$ e $g_\sigma \rightarrow 0$, então $(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{t \in \mathcal{D}_f} \{f(t)\}$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$. Ou seja, o valor do mínimo global é propagado para todos os pontos e $n \leq \sup\{d(x, y)\}$ para quaisquer x e $y \in \mathcal{D}_f$.

Quando $\sigma \rightarrow 0$ e $g_\sigma \rightarrow \infty$, então $(f \odot g_\sigma)(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$. Ou seja, o valor de nenhum ponto é propagado e $n = 1$.

Assim, o valor de um ponto pode ser propagado para uma região maior em σ_2 , do que em σ_1 , possibilitando um maior número de iterações e, portanto, $m \geq n$. □

A partir da idempotência, podemos obter uma melhor compreensão do modo como os extremos se fundem ao longo das escalas. A proposição a seguir apresenta uma relação entre o nível de cinza dos extremos, a distância entre eles e o elemento estruturante.

Proposição 13 *Dados x_i e $x_j \in E_{\min}(f)$ tais que $f(x_i) < f(x_j)$, em uma malha 4-conexa, para uma escala $\sigma < 0$, podemos mostrar que x_j pertencerá a zona de influência de x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, se $\exists x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$ tal que*

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1) \quad (6.30)$$

em que d é a distância de quarteirão e $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, para $t \neq 0$.

Prova: Se $x_j \notin E_{\min}(f \odot g_\sigma)$, então $\exists y \in N_4(x_j, 3 \times 3)$ tal que

$$(f \odot g_\sigma)(y) < (f \odot g_\sigma)(x_j) \leq f(x_j). \quad (6.31)$$

Como x_j passa a pertencer a zona de influência de x_i , $\mathcal{Z}(x_i)$, então

$$(f \odot g_\sigma)(y) = f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k) \quad (6.32)$$

para algum $x_k \in \mathcal{Z}(x_i)$.

Logo, das equações 6.31 e 6.32 temos que

$$f(x_k) + D_\sigma \times d(y, x_k) \leq f(x_j) \quad (6.33)$$

para que a fusão ocorra.

Como $d(y, x_k) = d(x_j, x_k) - 1$, então

$$f(x_j) - f(x_k) \geq D_\sigma \times (d(x_j, x_k) - 1). \quad (6.34)$$

□

As duas proposições seguintes garantem que um ponto não transformado durante o processo de suavização, com um elemento estruturante 3×3 , não define nenhum novo mínimo na imagem filtrada. Este resultado pode ser associado, por exemplo, à definição de critérios que determinem quando um ponto deve ou não ser transformado, permitindo um maior controle da fusão entre os extremos.

Proposição 14 *Para imagens discretas e considerando-se a função estruturante parabolóide g_σ , o espaço-escala idempotente pode ser obtido a partir de uma vizinhança 3×3 , 4-conectada.*

Prova: Sejam dois pontos x e y quaisquer tais que a distância de quarteirão $d(x, y) = i$, para $i > 1$. De acordo com a proposição 24, na iteração i , $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ com $d(z, x) = i - 1$ tal que

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1). \quad (6.35)$$

Logo,

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \quad (6.36)$$

Substituindo 6.35 em 6.36, temos que

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i \leq f(x) - g_\sigma(y - x) \quad (6.37)$$

porque $-g_\sigma(y - x) \geq D_\sigma \times i$.

Portanto, se em uma iteração $j < n$,

$$(f \ominus g_\sigma)^j(y) = f(x) - g_\sigma(y - x), \quad (6.38)$$

como na iteração n ,

$$(f \ominus g_\sigma)^n(y) \leq f(x) + D_\sigma \times j \leq (f \ominus g_\sigma)^j(y), \quad (6.39)$$

o cálculo do $\inf_{t \in g_\sigma} \{f(y - t) - g_\sigma(t)\}$ não precisa ser considerado para qualquer x tal que $d(y, x) > 1$, ou seja, precisamos considerar apenas uma função estruturante g_σ de dimensão 3×3 , 4-conectada.

□

Proposição 15 *A não suavização de um ponto da imagem pelas equações 6.3 e 6.26 pode introduzir um novo mínimo, na imagem transformada, para funções estruturantes parabolóides de raio $R > 1$.*

Prova: Dados dois pontos x_i e x_p da imagem f , se

$$(f \ominus g_\sigma)(x_p) = f(x_i) - g_\sigma(x_i - x_p), \quad (6.40)$$

então da proposição 23 apresentada no apêndice A temos que $\exists p_*(x_i, x_p)$ tal que $(f \ominus g_\sigma)(x_l) < \dots < (f \ominus g_\sigma)(x_m) < \dots < (f \ominus g_\sigma)(x_{p-1}) < (f \ominus g_\sigma)(x_p)$, para algum $x_l \in p_*(x_i, x_p)$.

Portanto, se um ponto $x_m \in p_*(x_{p-1}, x_l)$ não for erodido, um mínimo pode ser criado em x_{m+1} e os pontos $\{x_p, \dots, x_{m+1}\}$ passam a pertencer a uma outra zona de influência diferente da de x_p . Como o maior caminho ocorre quando $x_l = x_i$ e $\#p_*(x_i, x_p)^4 = R + 1$, para uma função estruturante de raio R , a nova zona de influência definida conterá no máximo $R - 1$ pontos deste caminho.

Como para $R = 1$, $\#p_*(x_p, x_i) = 2$, então nenhum mínimo é definido e a monotonicidade é garantida para este caso.

□

⁴ $\#p_*(x_i, x_p)$ = número de pontos pertencentes a $p_*(x_i, x_p)$.

6.3.1 Propriedades do espaço-escala idempotente

Nesta seção, apresentamos resultados que garantem a preservação, no espaço-escala idempotente, das principais propriedades do espaço-escala MMDE [15].

Proposição 16 *O espaço-escala idempotente possui as seguintes propriedades:*

1. Para $\sigma \rightarrow 0$, $(f \odot g_\sigma)(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$.
2. Para $\sigma \rightarrow -\infty$, $(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{t \in \mathcal{D}_f} \{f(t)\}$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Para $\sigma \rightarrow \infty$, $(f \odot g_\sigma)(x) = \sup_{t \in \mathcal{D}_f} \{f(t)\}$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$.

Prova: Da proposição 24 temos que para qualquer $x \in \mathcal{D}_f$

$$(f \odot g_\sigma)(x) = \inf_{y \in \mathcal{D}_f} \{f(y) + D_\sigma \times d(x, y)\}, \text{ para qualquer } y \in \mathcal{D}_f. \quad (6.41)$$

1. Para $\sigma \rightarrow 0$, $D_\sigma \rightarrow \infty$, e assim o *inf* ocorre para y tal que $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$. Logo, $(f \odot g_\sigma)(x) = f(x)$.
2. Para $\sigma \rightarrow -\infty$, $D_\sigma \rightarrow 0$, e o *inf* ocorre para y igual ao mínimo global da imagem.
3. Para $\sigma \rightarrow \infty$, a prova segue por dualidade, em relação ao caso 2, empregando-se o *sup*.

□

As duas proposições, a seguir, relacionam o valor e a posição dos mínimos nas imagens suavizada e original, através das diferentes escalas.

Proposição 17 *Dada a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, se $g(x)$ é um máximo local, então $x = 0$:*

- a) *Se $\sigma < 0$ e $(f \odot g_\sigma)(x_{\min})$ é um mínimo local, então $f(x_{\min})$ é um mínimo local e $(f \odot g_\sigma)(x_{\min}) = f(x_{\min})$;*
- b) *Se $\sigma > 0$ e $(f \odot g_\sigma)(x_{\max})$ é um máximo local, então $f(x_{\max})$ é um máximo local e $(f \odot g_\sigma)(x_{\max}) = f(x_{\max})$;*

Prova: Parte a)

Base: Para $n = 1$, vale o teorema da monotonicidade do espaço-escala MMDE (Teorema 1).

Passo: Para $n > 1$, como $(f \ominus g_\sigma)^n(x) = ((f \ominus g_\sigma)^{n-1} \ominus g_\sigma)(x)$, pelo Teorema 1 temos que se $x_{\min} \in E_{\min}((f \ominus g_\sigma)^n)$, então $x_{\min} \in E_{\min}((f \ominus g_\sigma)^{n-1})$ e

$$(f \ominus g_\sigma)^n(x_{\min}) = (f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x_{\min}). \quad (6.42)$$

Como por hipótese temos que se $x_{\min} \in E_{\min}((f \ominus g_\sigma)^{n-1})$, então $x_{\min} \in E_{\min}(f)$ e

$$(f \ominus g_\sigma)^{n-1}(x_{\min}) = f(x_{\min}) \quad (6.43)$$

Pelas equações 6.42 e 6.43 temos que para $\sigma < 0$, se $x_{\min} \in E_{\min}((f \ominus g_\sigma)^n)$, então $x_{\min} \in E_{\min}(f)$ e

$$(f \ominus g_\sigma)^n = (f \ominus g_\sigma)^{n-1} = f(x_{\min}), \quad (6.44)$$

provando, assim, a parte a).

O item b) pode ser provada de modo análogo a partir da operação de dilatação.

□

Proposição 18 *Dada a função estruturante com um único máximo na origem, isto é, se $g(x)$ é um máximo local, então $x = 0$:*

a) *Se $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ e $(f \odot g_{\sigma_2})(x_{\min})$ é um mínimo local, então $(f \odot g_{\sigma_1})(x_{\min})$ é um mínimo local e $(f \odot g_{\sigma_1})(x_{\min}) = (f \odot g_{\sigma_2})(x_{\min})$;*

b) *Se $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ e $(f \odot g_{\sigma_2})(x_{\max})$ é um máximo local, então $(f \odot g_{\sigma_1})(x_{\max})$ é um máximo local e $(f \odot g_{\sigma_2})(x_{\max}) = (f \odot g_{\sigma_1})(x_{\max})$;*

Prova: Parte a)

Da proposição 24 temos que para $y \in \mathcal{D}_f$ e σ_2 ,

$$(f \odot g_{\sigma_2})(y) = \inf_{x \in \mathcal{D}_f} \{f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x)\}. \quad (6.45)$$

Se $y \in E_{\min}(f \odot g_{\sigma_2})$, então $(f \odot g_{\sigma_2})(y) = f(y) \leq f(x) + D_{\sigma_2} \times d(y, x)$, para qualquer $x \in \mathcal{D}_f$. Como $D_{\sigma_2} < D_{\sigma_1}$, então $f(y) < f(x) + D_{\sigma_1} \times d(y, x)$ e $y \in E_{\min}(f \odot g_{\sigma_1})$.

O item b segue por dualidade.

□

A partir das proposições 17 e 18 acima, podemos garantir a monotonicidade dos extremos para o espaço-escala idempotente.

Proposição 19 *Para quaisquer $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$,*

$$E_{\min}(f \odot g_{\sigma_2}) \subseteq E_{\min}(f \odot g_{\sigma_1}) \subseteq E_{\min}(f) \quad e$$

$$E_{\max}(f \odot g_{\sigma_4}) \subseteq E_{\max}(f \odot g_{\sigma_3}) \subseteq E_{\max}(f)$$

Prova: Para $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$, suponha que a proposição seja falsa e $E_{\min}(f \odot g_{\sigma_2}) \not\subseteq E_{\min}(f \odot g_{\sigma_1})$. Logo, existe algum $x_{\min}$ tal que $x_{\min} \in E_{\min}(f \odot g_{\sigma_2})$ mas $x_{\min} \notin E_{\min}(f \odot g_{\sigma_1})$, o que contradiz a proposição 18(a).

□

A redução monotônica do número de extremos para uma mesma escala é discutida na proposição a seguir.

Proposição 20 Para $\sigma < 0$ e quaisquer i e j tais que $i < j$,

$$E_{\min}((f \odot g_{\sigma})^j) \subseteq E_{\min}((f \odot g_{\sigma})^i). \quad (6.46)$$

Prova: Pelo teorema da monotonicidade temos que $E_{\min}(f \ominus g_{\sigma}) \subseteq E_{\min}(f)$ e, assim, $E_{\min}((f \ominus g_{\sigma})^i) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma})^{i-1})$ pois $(f \ominus g_{\sigma})^i(x) = ((f \ominus g_{\sigma})^{i-1} \ominus g_{\sigma})(x)$. Logo,

$$E_{\min}((f \ominus g_{\sigma})^j) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma})^i). \quad (6.47)$$

□

A proposição a seguir relaciona, para um mesmo número de iterações, os mínimos obtidos em duas escalas diferentes.

Proposição 21 Para $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ e um i qualquer, temos que

$$E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_2})^i) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^i) \quad (6.48)$$

Prova: Base: Para $i = 1$ vale o teorema da monotonicidade.

Passo: Por hipótese temos que $E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1}) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1})$, e da proposição 25, $(f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1}(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1}(x)$. Logo, pela proposição 10,

$$E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1} \ominus g_{\sigma_2}) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1} \ominus g_{\sigma_2}). \quad (6.49)$$

Baseado no teorema da monotonicidade, temos que

$$E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1} \ominus g_{\sigma_2}) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1} \ominus g_{\sigma_1}). \quad (6.50)$$

E, portanto,

$$E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_2})^i) \subseteq E_{\min}((f \ominus g_{\sigma_1})^i). \quad (6.51)$$

□

A proposição a seguir mostra que o espaço-escala idempotente é extensivo para escalas positivas e anti-extensivo para escalas negativas.

Proposição 22 Quaisquer que sejam $\sigma_2 < \sigma_1 < 0 < \sigma_3 < \sigma_4$ e $x \in \mathcal{D}_f$,

$$(f \odot g_{\sigma_2})(x) \leq (f \odot g_{\sigma_1})(x) \leq f \leq (f \odot g_{\sigma_3})(x) \leq (f \odot g_{\sigma_4})(x). \quad (6.52)$$

Prova: Como a erosão é anti-extensiva então, $(f \ominus g_{\sigma})^j(x) \leq (f \ominus g_{\sigma})^i(x)$, para qualquer $j \geq i$. Logo, a partir da proposição 25, temos que

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^j(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x). \quad (6.53)$$

Portanto, considerando a proposição 12, podemos garantir que

$$(f \odot g_{\sigma_2})(x) \leq (f \odot g_{\sigma_1})(x). \quad (6.54)$$

Para escalas positivas, a prova segue por dualidade.

□

6.4 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um espaço-escala morfológico, visando uma melhor caracterização dos extremos de uma imagem a partir de informações dos seus níveis de cinza e distribuição espacial. Para esta abordagem é garantida a propriedade da monotonicidade, inerente à teoria do espaço-escala, assim como a preservação da posição e do nível de cinza dos extremos da imagem, ao longo das diferentes escalas. Mostramos, ainda, que é possível não transformar um determinado ponto, durante o processo de suavização, sem que nenhum novo mínimo seja introduzido na imagem processada. Este resultado pode ser associado à definição de critérios que determinem quando um ponto da imagem deve ou não ser transformado possibilitando, assim, um certo controle local da fusão dos seus extremos.

A Apêndice

Proposição 23 *Dados dois pontos x_i e x_j da imagem f tais que,*

$$(f \ominus g_\sigma)(x_j) = f(x_i) - g_\sigma(x_i - x_j), \quad (6.55)$$

então $\exists p_(x_i, x_j)$ tal que para qualquer $x_k \in p_*(x_i, x_{j-1})$, $(f \ominus g_\sigma)(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j)$.*

Prova: Como $x_i \in N_*(x_k, \mathcal{G}_\sigma)$,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) = \inf_t \{f(x_k - t) - g_\sigma(t)\} \leq f(x_i) - g_\sigma(x_k - x_i). \quad (6.56)$$

Assim, como $d(x_k, x_i) < d(x_j, x_i)$, então $g_\sigma(x_k - x_i) > g_\sigma(x_j - x_i)$. Logo,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) \leq f(x_i) - g_\sigma(x_k - x_i) < f(x_i) - g_\sigma(x_j - x_i) = (f \ominus g_\sigma)(x_j), \quad (6.57)$$

e, portanto,

$$(f \ominus g_\sigma)(x_k) < (f \ominus g_\sigma)(x_j). \quad (6.58)$$

□

Proposição 24 *Sejam x e y dois pontos quaisquer da imagem f , na iteração $i \leq n$, temos que*

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times d(y, x) \quad (6.59)$$

se $d(y, x) \leq i$, em que d é a distância quarteirão e $D_\sigma = |\sup_{t \in \mathcal{G}_\sigma} \{g_\sigma(t)\}|$, para $t \neq 0$.

Prova: *Base:* Como o valor do $\sup$ ocorre para um ponto t , 4-conectado a origem, para $d(y, x) = 1$ temos

$$(f \ominus g_\sigma)^1(y) \leq f(x) - g_\sigma(x - y) = f(x) + D_\sigma. \quad (6.60)$$

Passo: Dado que $d(y, x) = i$, então $\exists z \in N_4(y, 3 \times 3)$ com $d(z, x) = i - 1$ tal que

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) = \inf_t \{(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(y - t) - g_\sigma(t)\} \leq (f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) + D_\sigma. \quad (6.61)$$

Como por hipótese temos que

$$(f \ominus g_\sigma)^{i-1}(z) \leq f(x) + D_\sigma \times (i - 1), \quad (6.62)$$

então, substituindo 6.62 em 6.61 obtemos

$$(f \ominus g_\sigma)^i(y) \leq f(x) + D_\sigma \times i. \quad (6.63)$$

□

Proposição 25 Para $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$, e um i qualquer, temos que

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x). \quad (6.64)$$

Prova: *Base:* Para $i = 1$ a desigualdade se verifica porque a erosão no espaço-escala é anti-extensiva [15].

Passo: Por hipótese, temos que $(f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1}(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1}(x)$. Como a erosão no espaço-escala é anti-extensiva [15] e a erosão, decrescente,

$$((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1} \ominus g_{\sigma_2})(x) \leq ((f \ominus g_{\sigma_2})^{i-1} \ominus g_{\sigma_1})(x) \leq ((f \ominus g_{\sigma_1})^{i-1} \ominus g_{\sigma_1})(x). \quad (6.65)$$

Logo,

$$(f \ominus g_{\sigma_2})^i(x) \leq (f \ominus g_{\sigma_1})^i(x). \quad (6.66)$$

□

Capítulo 7

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho apresentamos uma abordagem multi-escala ao problema de segmentação de imagens. Para tanto, consideramos um espaço-escala morfológico recentemente proposto na literatura em que a suavização da imagem é fornecida através de uma filtragem monotônica dos seus extremos. Além da redução monotônica dos extremos, esta teoria apresenta outra característica que é a preservação da posição e da altura dos extremos da imagem ao longo das escalas. Considerando estas características associamos a este espaço-escala a reconstrução morfológica obtendo, assim, um filtro monotônico e conexo que associado a LDA origina um particionamento adequado da imagem.

Analisando o modo como os extremos se fundem ao longo das escalas, apresentamos uma nova abordagem na qual a filtragem monotônica dos extremos é definida por operações idempotentes. Este novo espaço-escala permite uma melhor simplificação e caracterização dos extremos. Entre outros resultados, garantimos que a não transformação de um ponto, durante o processo de filtragem, não define nenhum novo mínimo (máximo) na imagem suavizada. Este resultado permite que critérios sejam adotados, durante o processo de suavização, para controlar a fusão dos extremos, como preservação da monotonicidade. Neste trabalho são apresentados dois critérios que consideram a diferença de profundidade e o gradiente entre os extremos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho verificamos várias características que podem ser exploradas em trabalhos futuros. Algumas possíveis extensões deste trabalho são apresentadas abaixo.

- A principal propriedade do espaço-escala, como mencionado na introdução, considera que as características de interesse do sinal formam um caminho contínuo ao longo das escalas. Neste trabalho, no entanto, exploramos apenas a redução monotônica do número de extremos. Seria interessante considerar, para uma determinada escala σ , informações relacionadas a estes extremos obtidas nas escalas intermediárias entre σ e

a imagem original.

- No processo de suavização podemos explorar, ainda, informações relacionadas entre outras, com a persistência de um extremo ao longo das escalas e a relação de profundidade dos extremos que se fundem. Estas informações podem ser associadas aos extremos possibilitando a definição de uma segmentação parametrizada. A parametrização permite, por exemplo, desassociar o critério da barreira da relação de distância entre os mínimos. Neste caso, para este critério, deve ser considerada não só a diferença de profundidade mas a iteração na qual ocorre a fusão.
- Investigação do processo de simplificação monotônica dos extremos da imagem em outras aplicações tais como: classificação, compressão/codificação, análise de texturas, casamento de padrões, busca por similaridade e filtragem.
- Determinação de outros critérios para controlar a fusão dos extremos baseada, eventualmente, nas características particulares de cada aplicação.

Apêndice A

Conceitos

Este anexo apresenta resumidamente algumas noções básicas de Morfologia Matemática consideradas neste trabalho. Descrições mais detalhadas destes conceitos podem ser encontradas em [23, 24, 3, 11, 30, 18, 4].

A.1 Dilatação e erosão binária

Seja $f(x)$ uma imagem binária, isto é, $\{f(x) \in 0, 1 : x \in Z^2\}$. Esta imagem pode ser representada pelo conjunto $X = \{x \in Z^2 : f(x) = 1\}$ sendo o complemento X^c , dado por $X^c = \{x \in Z^2 : f(x) = 0\}$. O conjunto simétrico $\check{X}$ de X é igual a $\check{X} = \{-x : x \in X\}$ e a translação X_u igual a $X_u = \{z : z = x + u, x \in X\}$.

Seja o elemento estruturante B um subconjunto finito. Podemos definir a dilatação do conjunto X por B [23] como

$$X \oplus B = \{u : X \cap B_u \neq \emptyset\} = \bigcup_{b \in B} X_b; \quad (\text{A.1})$$

e a erosão por

$$X \ominus B = \{u : B_u \subseteq X\} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b. \quad (\text{A.2})$$

A figura A.1 apresenta um exemplo de dilatação e erosão .

A.1.1 Propriedades

Dados X e Y duas imagens binárias e B o elemento estruturante. A erosão e a dilatação possuem as seguintes propriedades:

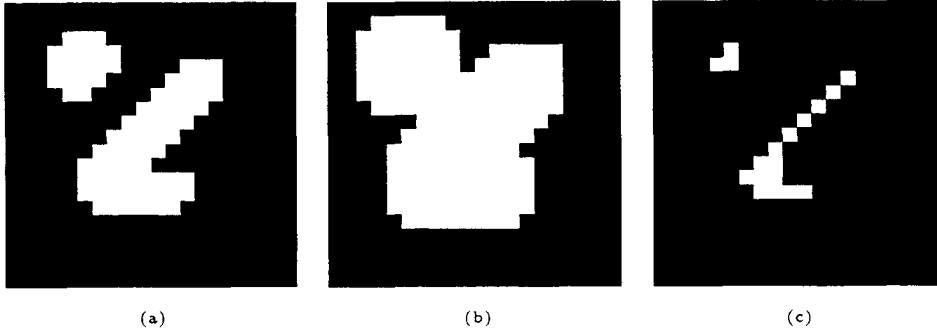


Figura A.1: Imagem original (a) e sua dilatação (b) e erosão (c) binária.

- A dilatação e a erosão são operações duais em relação ao complemento, isto é,

$$X \ominus B = (X^c \oplus B)^c. \quad (\text{A.3})$$

- A erosão e a dilatação são operações crescentes, ou seja, se $X \subset Y$, então

$$(X \ominus B) \subset (Y \ominus B) \text{ e } (X \oplus B) \subset (Y \oplus B). \quad (\text{A.4})$$

- A erosão é uma transformação anti-extensiva e a dilatação extensiva, isto é,

$$(X \ominus B) \subset X \text{ e } X \subset (X \oplus B). \quad (\text{A.5})$$

A.2 Dilatação e erosão numérica

A definição das operações acima pode ser estendida para o caso numérico, ou seja, para imagens em níveis de cinza. Sejam $f : F \rightarrow Z$ e $g : G \rightarrow Z$, definidas em Z^2 , duas funções representando imagens em níveis de cinza. Assim, a definição da erosão $f \ominus g$, e da dilatação, $f \oplus g$ é dada por:

$$(f \ominus g)(x) = \min_{z \in G, x+z \in F} \{f(x+z) - g(z)\} \quad (\text{A.6})$$

$$(f \oplus g)(x) = \max_{z \in G, x-z \in F} \{f(x-z) + g(z)\} \quad (\text{A.7})$$

Para um elemento estruturante planar, $g(z) = 0$, a erosão e a dilatação podem ser representadas simplesmente por:

$$(f \ominus g)(x) = \min_{z \in G, x+z \in F} \{f(x+z)\} \quad (\text{A.8})$$

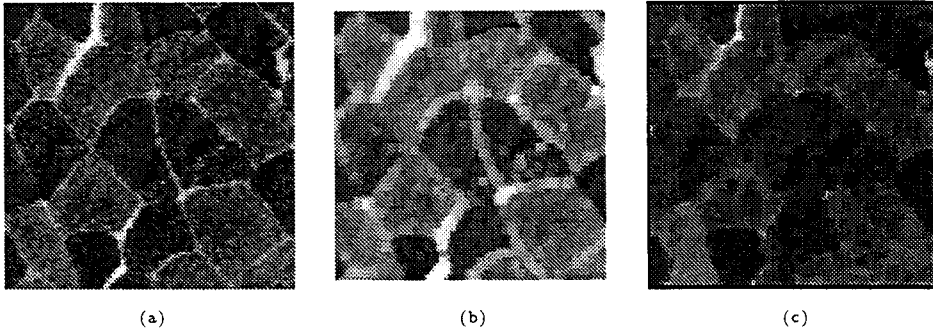


Figura A.2: Imagem original (a) e sua dilatação (b) e erosão (c) numérica.

$$(f \oplus g)(x) = \max_{z \in G, x-z \in F} \{f(x-z)\} \quad (\text{A.9})$$

A figura A.2 apresenta um exemplo de dilatação e erosão para imagens em níveis de cinza.

A.3 Gradiente morfológico

O gradiente morfológico de uma imagem f (A.3) é definido como:

$$\text{grad}(f) = (f \oplus g) - (f \ominus g), \quad (\text{A.10})$$

sendo g a função estruturante.

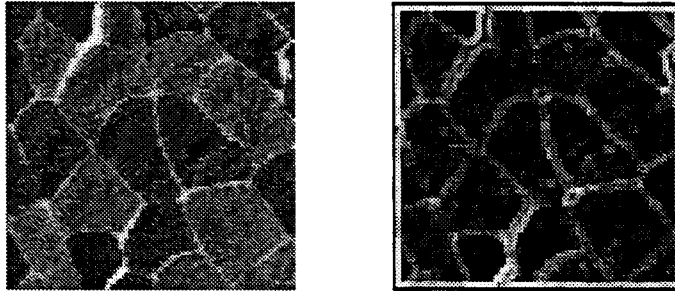


Figura A.3: Exemplo de gradiente morfológico

A.4 Operações Geodésicas

Dado um conjunto X , a distância geodésica, $d_X(p, q)$, entre dois pixels p e q é o comprimento do menor caminho unindo p a q e incluído em X . Caso este caminho não exista, a distância é considerada infinita.

Todas as operações morfológicas (dilatação, erosão, etc.) podem ser definidas usando a métrica (X, d_X) [18].

A.4.1 Dilatação e erosão geodésica binária

Se $Y \subset X$, pontos x pertencentes a X tal que $B_X(x, \lambda)$ intercepta Y constitui o conjunto λ – *dilatado* de Y em X , representado simbolicamente por:

$$D_X^\lambda(Y) = \{x \in X : B_X(x, \lambda) \cap Y \neq \emptyset\} \quad (\text{A.11})$$

em que $B_X(x, \lambda) = \{y \in X : d_X(x, y) \leq \lambda\}$.

A dilatação geodésica digital de tamanho n pode ser obtida a partir de n iterações da dilatação geodésica de tamanho 1,

$$D_X^n(Y) = \underbrace{D_X^1(D_X^1(\dots D_X^1(Y)))}_{n \text{ vezes}}, \quad (\text{A.12})$$

em que a dilatação geodésica elementar, $D_X^1(Y)$, pode ser representada por

$$D_X^1(Y) = (Y \oplus B) \cap X. \quad (\text{A.13})$$

Da mesma forma, podemos definir a erosão geodésica de Y em X por

$$E_X^\lambda(Y) = \{x \in X : B_X(x, \lambda) \subseteq Y\}. \quad (\text{A.14})$$

A.4.2 Dilatação e erosão geodésica numérica

As operações acima podem ser definidas para o caso numérico. Dado duas imagens em níveis de cinza, $f : F \rightarrow Z$ e $t : T \rightarrow Z$, com $t \leq f$, a dilatação geodésica elementar para imagens em níveis de cinza é definida por [30]

$$D_f^1(t) = (t \oplus g) \wedge f, \quad (\text{A.15})$$

em que $\wedge$ representa o ínfimo entre $(t \oplus g)$ e f . A erosão geodésica é por

$$E_f^1(t) = (t \ominus g) \vee f, \quad (\text{A.16})$$

em que $\vee$ representa o supremo entre $(t \ominus g)$ e f .

A.5 Zona de influência geodésica

Dado Y , composto por n componentes conexos Y_i , a zona de influência geodésica de Y_i , $iz_X(Y_i)$, é definida como sendo o conjunto dos pontos de X mais próximos de Y_i do que de qualquer outro Y_j [4]. Ou seja,

$$iz_X(Y_i) = \{x \in X : \forall j \neq i, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y_j) \text{ e } d_X \text{ finita}\}. \quad (\text{A.17})$$

As fronteiras entre as zonas de influência constituem o esqueleto geodésico por zona de influência, $SKIZ_X(Y)$, de Y em X . Isto é,

$$SKIZ_X(Y) = X/IZ_X(Y), \quad (\text{A.18})$$

em que $IZ_X(Y) = \bigcup_i iz_X(Y_i)$.

A.6 Reconstrução binária

Sejam duas imagens binárias, X e Y , definidas em um mesmo domínio discreto e tais que $Y \subseteq X$. Y é denominado imagem marcadora e X , máscara. Sejam $X_1, \dots, X_n$ componentes conexos de X . A reconstrução da máscara X pelo marcador Y , $\rho_X(Y)$, é a união dos componentes de X contendo, no mínimo, um pixel em Y (A.4) [30].

$$\rho_X(Y) = \bigcup_{Y \cap X_k \neq \emptyset} X_k, \text{ para } 0 < k \leq n. \quad (\text{A.19})$$

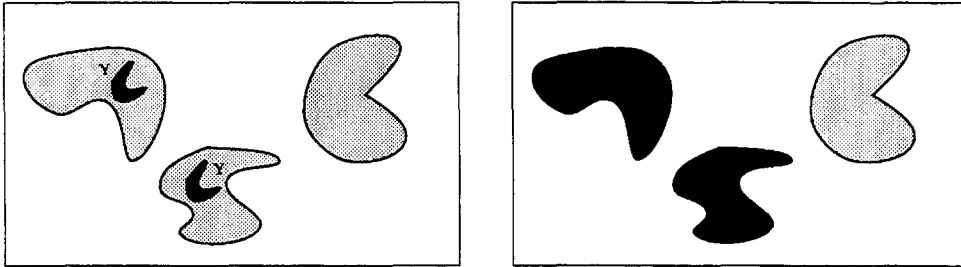


Figura A.4: Exemplo de reconstrução binária por um marcador Y

A reconstrução binária pode ser obtida pela iteração da dilatação geodésica elementar de Y no interior de X , até a idempotência

$$\rho_X(Y) = \bigcup_{n \geq 1} D_X^{(n)}(Y). \quad (\text{A.20})$$

A.7 Reconstrução em níveis de cinza

Sejam duas imagens em níveis de cinza, f e t , definidas no mesmo domínio F , tais que seus valores pertençam ao conjunto $\{0, 1, \dots, N-1\}$ e $t \leq f$. A reconstrução em níveis de cinza de t em f , $\rho_f(t)$ é dada por [30]:

$$\forall p \in F, \rho_f(t)(p) = \max\{k \in [0, N-1] : p \in \rho_{T_k(f)}(T_k(t))\} \quad (\text{A.21})$$

onde $T_k(f) = \{p \in F : f(p) \geq k\}$. A figura A.7 apresenta um exemplo de reconstrução de uma máscara f por um marcador t . A reconstrução em níveis de cinza pode ser obtida ao se reiterar a dilatação geodésica numérica de t sobre f até a idempotência, ou seja

$$\rho_f(t) = \bigvee_{n \geq 1} D_f^{(n)}(t), \quad (\text{A.22})$$

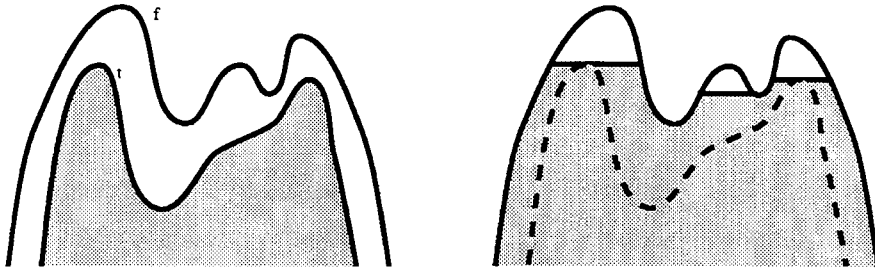


Figura A.5: Exemplo de reconstrução de uma imagem em nível de cinza f por um marcador t

A reconstrução dual $\rho_f^*(t)$, para $f \leq t$, é definida a partir de erosões geodésicas numéricas de t sobre f até a idempotência,

$$\rho_f^*(t) = \bigwedge_{n \geq 1} E_f^{(n)}(t), \quad (\text{A.23})$$

A.8 Modificação homotópica por reconstrução

Seja f uma imagem com q mínimos, M_i , $i = 1, \dots, q$. A modificação homotópica por reconstrução de uma f , f' , é definida por

$$f' = \rho_{\inf(f+1, t)}^*(t), \quad (\text{A.24})$$

sendo a imagem marcadora t definida como

$$t(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in \bigcup_{i=1}^k M_i(f); \\ 1 + \max(f) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

para $0 < k \leq q$.

Na figura A.6 ilustra esta transformação.

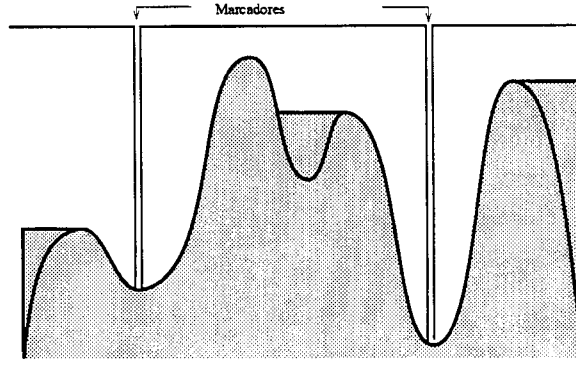


Figura A.6: Exemplo de modificação homotópica

A.9 Linha Divisora de Águas (LDA)

Seja $f : Z^2 \rightarrow Z$ uma imagem em níveis de cinza. A representação de f pode ser vista como uma superfície topográfica onde o nível de cinza indica a altitude do ponto no relevo. Uma abordagem intuitiva definindo a LDA dessa função pode ser descrita como se segue [4]. Suponha que em cada mínimo de $m_i(f)$ desta superfície exista um furo e que a imergimos, pouco a pouco, em um lago. A água que entra através dos orifícios preenche gradativamente a superfície topográfica. Sempre que as águas provenientes de dois vales da superfície se encontram, um dique é construído, evitando a união das águas de dois mínimos diferentes. Ao final do processo, os diques constituem a LDA da imagem f . Estes diques separam várias bacias hidrográficas $CB_i(f)$, cada uma contendo apenas um mínimo $m_i(f)$.

Morfologicamente, a LDA pode ser definida da seguinte forma. Seja uma seção de f , no nível h , um conjunto $T_h(f)$, definido como

$$T_h(f) = \{x \in Z^2 : f(x) \leq h\}, \quad (\text{A.26})$$

e h_{min} e h_{max} o nível mínimo e máximo encontrado na imagem. Simulando o processo de imersão, a área inundada no nível h_{min} , $W_{h_{min}}$ é dada por

$$W_{h_{min}} = T_{h_{min}}(f). \quad (\text{A.27})$$

Considerando agora um nível $h_{min}+1$, quando a água alcança esta altura, a área inundada é dada por

$$W_{h_{min}+1}(f) = min_{h_{min}+1} \cup IZ_{T_{h_{min}+1}}(W_{h_{min}}), \quad (\text{A.28})$$

em que $min_{h_{min}+1}$ representa o conjunto de mínimos no nível $h_{min}+1$.

Generalizando a equação acima, temos que, para qualquer $h \in [h_{min}, h_{max} - 1]$,

$$W_h(f) = min_h \cup IZ_{T_h}(W_{h-1}). \quad (\text{A.29})$$

Assim, continuando o processo de inundação até uma altura h_{max} , a LDA de f , $LDA(f)$, é dada por

$$LDA(f) = W_{h_{max}}^c(f), \quad (\text{A.30})$$

sendo W_h^c o complemento de W_h .

Algoritmos eficientes para o cálculo da LDA podem ser encontrados em [4, 29].

Referências Bibliográficas

- [1] M. C. Andrade, G. Bertrand, and A. A. Araújo. Segmentation of microscopic image by flooding simulation: A catcment basins mergin algorithm. *Proceedings of SPIE, Nonlinear Image Processing VIII*, 3026:164–175, February 1997.
- [2] G. Bertrand, J.C. Everat, and M. Couprie. Image segmentation through operators based upon topology. Laboratoire PSI, ESIEE, 93162 Noisy-le-Grand Cedex, France.
- [3] S. Beucher and C. Lantuejoul. Use of watersheds in contour detection. In *Proc. Int. Workshop on Image Processing, real-time edge and motion detection-estimation*, pages 433–482, Rennes-France, 1979.
- [4] S. Beucher and F. Meyer. The morphological approach to segmentation: The watershed transform. In Edward R. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12, pages 433–481. Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [5] S. Beucher and X. Yu. Road recognition in complex traffic situations. In *7th IFAC/IFORS Symposium on Transportation Systems: Theory as Application of Advanced Technology*, volume 2, August 1994.
- [6] Ming-Hua Chen and Ping-Fan Yan. A multiscale approach based on morphological filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):694–700, July 1989.
- [7] J. Crespo, J. Serra, and R.W. Schafer. Image segmentation using conected filters. In *Proc. Int. Workshop Mathematical Morphology Applications Signal Processing*, pages 52–57, Barcelona, Spain, 1993.
- [8] E. R. Dougherty. Euclidean gray-scale granulometries: Representation and umbra inducement. *J. Math. Imaging Vision*, 1:7–21, 1992.
- [9] John M. Gauch. Image segmentation and analysis via multiscale gradient watershed hierarchies. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(1):69–79, January 1999.

- [10] Michael Grimaud. A new measure of contrast: the dynamics. *Proc. Image Algebra and Morphological Image Processing III, SPIE*, 1769:294–305, 1992.
- [11] Robert M. Halarick, Stanley R. Sternberg, and Xinhua Zhuang. Image analyse using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis as Machine Intelligence*, 9(4):532–550, July 1987.
- [12] K. Haris, S. N. Efstratiadis, N. Maglaveras, and A. K. Katsaggelos. Hybrid image segmentation using watersheds and fast region merging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(12):1684–1699, December 1998.
- [13] Henk J. A. M. Heijmans and John Goutsias. Some thoughts on morphological pyramids and wavelets. In *Procd. of the IX EUSIPCO - European Signal Processing Conference*, Gr cia, 1998.
- [14] Paul T. Jackway. Gradient watersheds in morphological scale-space. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6):913–921, June 1996.
- [15] Paul T. Jackway and M. Deriche. Scale-space properties of multiscale morfological dilataion-erosion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(1):38–51, January 1996.
- [16] P.T. Jackway. *Morphological Scale-Space with Application to Three-Dimensional Object Recognition*. PhD thesis, School of Eletrical and Eletronic Systems Engineering, Queensland University of Technology, 1994.
- [17] Ben K. Jang and Roland T. Chin. Morphological scale space for 2d shape smoothing. *Computer Vision and Image Understanding*, 70(2):121–141, May 1998.
- [18] C. Lantuejoul and S. Beucher. On the use of the geodesic metric in image analysis. *Journal of Microscopy*, 121:39–49, January 1981.
- [19] L.M. Lifshitz and S.M. Pizer. A multiresolution hierarchical approach to image segmen-tation based on intensity extrema. *IEEE Transactions on Pattern Analysis as Machine Intelligence*, 12(4):529–540, 1990.
- [20] Stephane G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wave-let representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis as Machine Intelligence*, 11(7):674–693, July 1989.
- [21] Laurent Najman and Michel Schmitt. Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intel-ligence*, 18(12):1163–1173, December 1996.

- [22] K.R. Park and C.N. Lee. Scale-space using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis as Machine Intelligence*, 18(11):1121–1126, November 1996.
- [23] Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [24] Jean Serra. Introduction to mathematical morphology. *Computer Vision, Graphics, and Machine Vision*, pages 283–305, 1986.
- [25] Mark Tabb and Narendra Ahuja. Multiscale image segmentation by integrated edge and region detection. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(5):642–655, May 1997.
- [26] Marta D. Teixeira and Neucimar J. Leite. Morphological scale-space theory for segmentation problems. In *Proc. of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 364–368, Antalya, Turkey, 1999.
- [27] Corinne Vachier and Fernand Meyer. Extinction value: a new measurement of persistence. In *Proc. of 1995 IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, volume 1, pages 254–257, June 1995.
- [28] Luc Vincent. Grayscale area opennings and closings, their efficient implementation and applications. In Jean Serra and Pierre Salembier, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal Processing*, pages 22–27. UPC Publications, May 1993.
- [29] Luc Vincent. Morphological algorithms. In Edward R. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 8, pages 255–288. Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [30] Luc Vincent. Morphological grayscale reconstruction in image analysis: Applications and efficient algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(2):176–201, April 1993.
- [31] Demin Wang. A multiscale gradient algorithm for image segmentation using watersheds. *Pattern Recognition*, 30(12):2043–2052, 1997.
- [32] A.P. Witkin. Scale-space filtering. *Proc. Int’l Joint Conf. Artificial Intelligence, Pablo Alto, Calif.: Kaufmann*, pages 1019–1022, August 1983.
- [33] A.P. Witkin. Scale-space filtering: A new approach to multiscale description. In Norwood N.J. :Albex, editor, in *Image Understanding 1984*, pages 79–95. S. Ullman and W. Richards, eds., 1994.
- [34] X. Yu, S. Beucher, and M. Bilodeau. Road tracking, lane segmentation and obstacle recognition by mathematical morphology. In *Proceedings of the Intelligent Vehicles ’92*, June 1992.