

... corresponde à redação final da
... devidamente corrigida e defendida
Mário Massato Harada

... aprovada pela Banca Examinadora.

... Campinas, 28 de *março* de *2001*

M. Harada
COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
CPG-IC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Convexidade e Proximidade em Geometrias
não Euclidianas

Mário Massato Harada

Tese de Doutorado

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Convexidade e Proximidade em Geometrias não Euclidianas

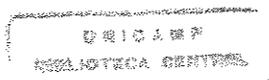
Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Mário Massato Harada e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 17 de novembro de 2000.


Pedro J. de Rezende (Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

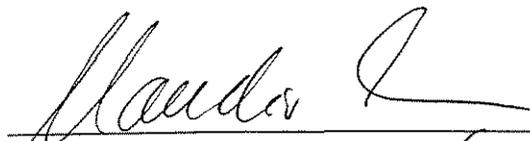
1a



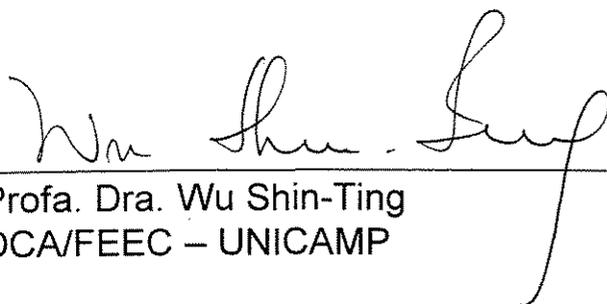
100202656

TERMO DE APROVAÇÃO

Tese defendida e aprovada em 17 de novembro de 2000, pela Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof. Dr. Cláudio Esperança
UFRJ



Profa. Dra. Wu Shin-Ting
DCA/FEEC – UNICAMP

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTR
SECÃO CIRCULANT



Prof. Dr. Ricardo Dahab
IC – UNICAMP



Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza
IC – UNICAMP



Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende
IC – UNICAMP

Convexidade e Proximidade em Geometrias não Euclidianas

Mário Massato Harada¹

Outubro de 2000

Banca Examinadora:

- Pedro J. de Rezende (Orientador)
- Claudio Esperança
COPPE-UFRJ
- Wu Shin-Ting
FEEC-UNICAMP
- Cid C. de Souza
IC-UNICAMP
- Ricardo Dahab
IC-UNICAMP
- Ivan L. M. Ricarte (Suplente)
FEEC-UNICAMP
- Célia P. de Mello (Suplente)
IC-UNICAMP

¹O trabalho de preparação desta tese foi parcialmente financiada pelo CNPq e FAPESP.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Harada, Mário Massato

H212c Convexidade e proximidade em geometrias/Mário Massato Harada-
- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Pedro J. de Rezende

Dissertação (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Geometria - Processamento de dados. 2. Algoritmos. 3.
Geometria não euclidiana . I. Rezende, Pedro J. de. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Prefácio

Estudamos problemas de convexidade e de proximidade em geometrias não euclidianas. Definimos duas geometrias provenientes de conjuntos de orientações restritas e, a partir delas, definimos conceitos relacionados a convexidade e obtemos propriedades matemáticas relevantes para a elaboração de um algoritmo eficiente para a determinação de envoltória convexa nestas geometrias. Definimos uma outra geometria baseada em um conjunto de curvas dadas, que satisfaçam certas propriedades simples, e com definições semelhantes à geometria euclidiana, apresentamos algoritmos eficientes para construção de envoltória convexa. Demonstramos que nesta geometria a métrica de comprimento de arco garante a aplicabilidade do algoritmo de Klein para construção do Diagrama de Voronoi Abstrato e construímos também uma família de exemplos de métricas comportadas.

Agradecimentos

Agradeço especialmente à minha esposa Márcia que sempre me apoiou com seu amor e compreensão. Nos momentos de dificuldades sempre soube me confortar e encorajar.

Aos meus pais Jun e Tereza, e a minha irmã Celina meus agradecimentos pelo amor, carinho e apoio que me foram essenciais durante este trabalho.

Aos meus tios o meu agradecimento pelo grande estímulo.

Ao orientador e amigo Pedro J. de Rezende agradeço pela oportunidade oferecida e ao apoio nas mais diversas situações.

Aos amigos que fiz durante essa jornada, em ordem alfabética: Fábio Lucena, Guilherme Albuquerque, Guilherme Pimentel, Juliano Oliveira, Marcelo Henriques, Marcus Vinicius e Nalvo Franco agradeço pelo apoio e amizade inestimáveis.

Agradeço aos professores e a todos os funcionários do Instituto de Computação.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro para realização deste trabalho.

Conteúdo

Prefácio	v
Agradecimentos	vi
1 Introdução	1
2 Geometrias para Orientações Restritas	4
2.1 Geometria Euclidiana	5
2.2 Geometrias para Orientações Restritas	6
2.2.1 \mathcal{O} -linhas e \mathcal{O} -escadas	6
2.2.2 As geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}-}$	7
2.3 Conceitos, Estruturas Geométricas e Propriedades das Geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}-}$	14
2.3.1 Propriedades das Geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}-}$	15
2.3.2 Interseção de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -semi-planos	21
3 Construção da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$-convexa	24
3.1 Propriedades Relevantes para o Algoritmo	24
3.2 Descrição do Algoritmo (*)	27
3.3 Corretude do Algoritmo (*)	33
3.4 Complexidade Algorítmica (*)	36
4 A geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	38
4.1 Geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade(*)	39
4.2 Determinação de um Ponto Fora da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)	43
4.3 Algumas Relações de Ordem(*)	49
4.4 Cadeia Superior e Inferior	50
4.5 Um Algoritmo para Determinação da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)	53
4.6 Outro Algoritmo para Determinação da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)	59
4.7 Corretude do Algoritmo	72

4.8	Complexidade Algorítmica	72
5	Diagrama de Voronoi na Geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	74
5.1	Diagrama de Voronoi	74
5.2	Diagrama de Voronoi Concreto e Abstrato	76
5.3	O espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é um G -espaço	79
5.4	A Métrica $d_{\mathcal{F}}$ é uma Métrica Comportada	82
5.4.1	Propriedade A	82
5.4.2	Propriedade B	84
6	Conclusão	88
6.1	Trabalhos futuros	91
A	Geometria \mathcal{G}_1	92
B	Geometria \mathcal{G}_2	96
C	Geometria GR	99
C.1	Conceitos, Estruturas Geométricas e Propriedades da Geometria GR	99
C.1.1	\mathcal{O} -Convexidade	99
C.1.2	\mathcal{O} -Semi-planos	100
C.1.3	Envoltória \mathcal{O} -convexa	101
D	Espaços Métricos e Topologia	104
E	Variedades Riemanianas	108
F	Tabela de Símbolos	113
	Bibliografia	115

Lista de Figuras

2.1	\mathcal{O} -escadas entre dois pontos onde $\mathcal{O} = \{0, 90, 180, 270\}$.	7
2.2	Exemplo de caminhos poligonais.	8
2.3	Construção para a Proposição 2.2.12.	9
2.4	Construção para obter um dos caminhos \mathcal{O} -poligonais de menor comprimento entre dois pontos.	12
2.5	Observador usado como referência.	17
2.6	Construção da demonstração da Proposição 2.3.12.	18
2.7	Construção da demonstração da Proposição 2.3.12.	18
2.8	A fronteira da interseção pode ser descrita por vértices de \mathcal{P} e \mathcal{Q} mais os pontos de interseção das arestas.	20
2.9	Ilustração para a Proposição 2.3.22.	22
3.1	Ilustração para a Proposição 3.1.7.	26
3.2	Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -Convexa.	28
3.3	Algoritmo CadeiaSuperior.	29
3.4	Caso em que a ponte superior origina-se de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada.	30
3.5	A orientação α não contribui para uma ponte superior.	31
3.6	A orientação α é a orientação do braço direito da ponte superior.	31
3.7	Algoritmo Ponte.	32
3.8	Algoritmo CasoDeg.	32
3.9	Algoritmo CasoNaoDeg.	33
3.10	Algoritmo CasoDir.	34
4.1	O ponto p precede q em C com relação a p' .	42
4.2	Figura usada no Lema 4.1.13.	42
4.3	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_1, q_2} .	44
4.4	Curva C_{q_2, p_3} .	45
4.5	Ponto r_1 .	46
4.6	Ponto t_4 .	47
4.7	Algoritmo PontoFora.	48

4.8	Região de interesse relativa ao ponto p_0 .	49
4.9	O ponto p está à esquerda do ponto q com relação a p_0 .	50
4.10	Pontos extremos da cadeia superior.	51
4.11	Figura usada na Proposição 4.4.2.	52
4.12	Divisão do conjunto S .	54
4.13	Figura usada na Proposição 4.5.3 (\Leftarrow).	55
4.14	Divisão do conjunto S_1 .	56
4.15	Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-1.	57
4.16	Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-Superior.	58
4.17	Algoritmo PontoFronteira.	58
4.18	Construção realizada no algoritmo Envoltória-$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$-convexa-2 .	60
4.19	Algoritmo Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa.	61
4.20	Algoritmo CadeiaSuperior.	61
4.21	A $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^1 precede a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^2 com relação a p_0 .	62
4.22	A $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^b e a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta $C_{p_0,p}$ interceptarem-se em mais de um ponto.	63
4.23	Caso 1 do Lema 4.6.4.	64
4.24	Caso 2 do Lema 4.6.4.	64
4.25	Caso 1 do Lema 4.6.5.	65
4.26	Caso 2 do Lema 4.6.5.	65
4.27	Caso 3 do Lema 4.6.5.	66
4.28	Construção para o Lema 4.6.6.	68
4.29	Algoritmo Ponte.	70
4.30	Algoritmo Eliminar.	71
5.1	Diagramas de Voronoi na métrica euclidiana e métrica L_1 .	76
5.2	Tipos de bissetores na métrica L_1 .	77
A.1	Conjunto \mathcal{G}_1 -convexo não conexo.	94
A.2	A interseção de \mathcal{G}_1 -polígonos \mathcal{G}_1 -convexos nem sempre é um \mathcal{G}_1 -polígono embora seja sempre um conjunto \mathcal{G}_1 -convexo.	94
A.3	Conjunto \mathcal{G}_1 -convexo não dado por interseções de \mathcal{G}_1 -semi-planos.	94
B.1	\mathcal{O} -escadas entre dois pontos onde $\mathcal{O} = \{0, 90, 180, 270\}$.	96
C.1	Exemplo de dois conjuntos \mathcal{O} -convexos e não convexos com respeito ao conjunto de orientações tracejadas.	100
C.2	Exemplos de \mathcal{O} -semi-planos, segundo Fink e Wood.	101
C.3	Uma envoltória \mathcal{O} -convexa desconexa (para definição C.1.4).	102
C.4	Não unicidade da envoltória \mathcal{O} -convexa (para definição C.1.5).	102

E.1 As aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis. 110

Capítulo 1

Introdução

Geometria Computacional pode ser definida como uma área de pesquisa que busca soluções algorítmicas eficientes para problemas de natureza geométrica. Devido às características de tais problemas, a geometria computacional tem encontrado aplicações em computação gráfica, robótica, banco de dados geográficos e várias outras áreas, conforme observado em [22].

Muitos desses problemas têm tido soluções ótimas e estas, em geral, consideram a descrição dos problemas na geometria euclidiana. Este tipo de abordagem é satisfatório para muitos dos problemas já resolvidos. Entretanto é importante observar que para determinados casos é conveniente considerar geometrias não euclidianas para busca de soluções para um problema.

Diante disto, decidimos investir em geometrias não euclidianas para busca de soluções para problemas cujas características indiquem o possível uso de uma geometria não euclidiana. Dos problemas escolhidos para tópicos desta pesquisa, escolhemos aqueles relacionados a convexidade em geometrias advindas de um *conjunto de orientações restritas* e também alguns relacionados a convexidade e proximidade em geometrias advindas de famílias de curvas. Nesta tese indicamos o conjunto de nossas contribuições está indicado com um asterisco (*).

A primeira geometria que definimos baseia-se em um *conjunto de orientações restritas* onde *orientação* (de uma reta) é o ângulo que esta faz com o eixo Ox medido no sentido anti-horário. Um conjunto \mathcal{O} de orientações restritas é um conjunto finito de orientações, por exemplo

$$\mathcal{O} := \{0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315\}.$$

Aplicações para tais geometrias incluem:

- problemas em projetos VLSI (determinação da envoltória convexa, por exemplo) que envolvem unicamente objetos cujas fronteiras são dadas por segmentos de retas

paralelas ao eixo Ox ou Oy , ou seja, as orientações destes segmentos estão no conjunto dado pelas seguintes orientações $0, 90, 180, 270$, tais objetos são denominados *objetos retilíneos*;

- modelagem geométrica para controle de acesso concorrente a um banco de dados utilizado por vários usuários.

Preparata e Shamos [22] dedicam um capítulo inteiro do seu livro para problemas de aplicação prática relacionados a objetos retilíneos.

No caso das aplicações citadas acima convém definir uma geometria baseada no conjunto de orientações dada para explorar propriedades matemáticas e, a partir daí, buscar soluções aos problemas propostos.

Nesta tese definimos duas geometrias advindas de um conjunto de orientações restritas e, a partir daí, definimos conceitos como o de convexidade e obtemos propriedades matemáticas relevantes para serem utilizadas na elaboração de um algoritmo para determinação da envoltória convexa nesta geometria. É importante observar que o conjunto de orientações não é fixo, isto é, toda a teoria desenvolvida é válida para qualquer conjunto finito de orientações.

No capítulo 2 definimos as geometrias \mathcal{G}_{O^+} e \mathcal{G}_{O^-} advindas de um conjunto de orientações restritas, definimos os conceitos de convexidade, semi-planos, polígonos, menor polígono convexo envolvente de um dado conjunto de pontos e envoltória convexa. Além disso, obtemos várias propriedades matemáticas relativas a convexidade.

No capítulo 3 descrevemos um algoritmo para determinação da envoltória \mathcal{G}_{O^+} -convexa. A abordagem a ser utilizada é a da divisão e conquista usada em [11] para determinação da envoltória convexa no caso euclidiano. Vale ressaltar que o nosso algoritmo possui a mesma complexidade do algoritmo de Kirkpatrick e Seidel para a geometria euclidiana.

Uma das características da geometria \mathcal{G}_{O^+} é a existência de pelo menos uma reta passando por um dado par de pontos. Na realidade o número de retas que passa por um dado par de pontos é infinito, no entanto os segmentos de retas entre o par de pontos são coincidentes. Além desta característica, a interseção de duas retas quaisquer desta geometria é conexa, embora esta interseção não necessariamente seja composta de um único ponto. Estas características nos foram úteis para explorar várias propriedades concernentes a convexidade semelhantes às propriedades de conjuntos convexos na geometria euclidiana.

Intuitivamente, quanto maior a semelhança da geometria definida com a geometria euclidiana maior o número de propriedades análogas que podem existir na nova geometria. Então isto nos motivou a definir uma nova geometria com características mais próximas da geometria euclidiana.

Assim, definimos no capítulo 4 a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ onde para qualquer par de pontos do

plano temos uma reta que passa por eles e esta reta é única, veja que, conforme já observado, isto não acontece na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$. Esta geometria baseia-se em um conjunto de curvas que satisfaça certas propriedades definidas no capítulo 4. Neste capítulo exploramos propriedades de convexidade nesta nova geometria e exibimos dois algoritmos para determinação da envoltória convexa. O primeiro algoritmo é semelhante ao algoritmo “Quick-Hull” para construção da envoltória na geometria euclidiana. O segundo algoritmo se baseia no algoritmo euclidiano de Kirkpatrick e Seidel [11]. Em ambos os algoritmos alcançamos a mesma complexidade dos algoritmos do caso euclidiano.

No capítulo 5.1 abordamos o problema da determinação do Diagrama de Voronoi na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. A abordagem adotada para este problema é a de utilizar o conceito de *Diagrama de Voronoi Abstrato* introduzido por Klein [12]. Vale observar que esta estrutura geométrica se construída na geometria euclidiana é igual ao Diagrama de Voronoi que conhecemos.

Klein [12] demonstra que o método utilizado por Shamos e Hoey [28] para construção do Diagrama de Voronoi pode ser utilizado para construção do diagrama de Voronoi Abstrato. Em particular, o método pode ser utilizado quando os bissetores são provenientes de uma *métrica comportada* (conceito definido por Klein). Provamos então na seção 5.1 que a métrica associada à geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é uma *métrica comportada* e com isso mostramos que o Diagrama de Voronoi Abstrato na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ pode ser obtido através das técnicas apresentadas em [28].

Por fim, no capítulo 6 tecemos alguns comentários a respeito dos resultados obtidos e de trabalhos futuros. Adicionamos também à tese seis apêndices. Os apêndices A e B tratam das geometrias \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , respectivamente, definidas apenas com intuito didático. O apêndice C trata da geometria GR definida por Rawlins [23]; a presença desta tem o objetivo de contrastá-la com as geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}-}$. Todas estas geometrias baseiam-se em um conjunto de orientações restritas. O apêndice D traz alguns conceitos e propriedades relacionados a espaços métricos e topologia. O apêndice E trata de variedades Riemannianas, estes dois últimos apêndices têm como objetivo apenas apresentar as definições relativas a espaços métricos e variedades Riemannianas usadas na tese. Por último, o apêndice F contém uma tabela de símbolos usados na tese.

Capítulo 2

Geometrias para Orientações Restritas

Geometria Computacional pode ser definida como uma área de pesquisa que busca soluções algorítmicas eficientes para problemas de natureza geométrica. Devido às características de tais problemas, a geometria computacional tem encontrado aplicações em computação gráfica, robótica, banco de dados geográficos e várias outras áreas, conforme observado em [22].

Em particular, projetos VLSI têm se utilizado dos métodos da geometria computacional para problemas que envolvem objetos retilineares, ou seja, objetos cujas fronteiras são formadas por segmentos de retas paralelas ao eixo Ox ou Oy .

O interesse especial dado a este tipo de objeto em projetos VLSI se deve, em geral, às limitações técnicas impostas pela tecnologia. Em alguns tipos de projetos VLSI, por exemplo, somente são permitidos *layouts* cujos traçados dos segmentos de reta sejam paralelos aos eixos Ox ou Oy . A exploração de objetos retilineares tem sido extensamente pesquisada em [17, 18, 19].

É natural considerar problemas que permitam o uso de objetos que generalizam os retilineares. Podemos considerar objetos cujos segmentos de reta de sua fronteira sejam paralelos a um dado conjunto de retas.

Já existem hoje aplicações que demandam tais objetos, em projetos VLSI, por exemplo, os avanços tecnológicos já permitem o uso de retas horizontais, verticais e retas com orientação de 45 e 135 graus (ou 225 e 315 graus, respectivamente), onde a *orientação* de uma reta é o ângulo que esta faz com o eixo Ox medido no sentido anti-horário. Note que neste exemplo, o conjunto de retas dado é constituído por uma reta vertical, uma reta horizontal, uma reta com orientação 45 (225) e outra reta com orientação 135 (315).

Podemos representar o conjunto de retas apenas pelas suas orientações. Assim, o

conjunto \mathcal{O} de orientações do exemplo acima é

$$\mathcal{O} := \{0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315\}.$$

A partir de agora consideraremos que o conjunto \mathcal{O} é um *conjunto simétrico*, ou seja, para qualquer $\alpha \in \mathcal{O}$ temos $\alpha + 180 \bmod 360 \in \mathcal{O}$. Além disso, denotaremos a cardinalidade de \mathcal{O} por δ .

Diante do interesse especial por objetos restritos a um conjunto de orientações, concentraremos nossos estudos nestes objetos onde \mathcal{O} é finito e $\delta \geq 4$. Em particular, exploraremos problemas de convexidade e problemas de interseções que envolvem estes objetos.

A nossa abordagem para estudo dos problemas acima citados é a de definir geometrias advindas do conjunto de orientações, para a partir daí explorar propriedades matemáticas delas e obter soluções dos problemas propostos nesta tese.

Em específico, trabalharemos com os problemas de determinação da envoltória convexa de um conjunto de pontos.

A abordagem de definir novas geometrias para estudo dos problemas citados acima naturalmente nos direciona a referenciar a geometria euclidiana. Por esta razão a seção 2.1 exhibe algumas particularidades relevantes da geometria euclidiana para serem contrastadas com as de outras geometrias.

2.1 Geometria Euclidiana

A métrica euclidiana nos fornece a distância entre dois pontos no plano que corresponde ao comprimento do segmento de reta da geometria euclidiana que os une. Representaremos a métrica euclidiana por d_e .

Convexidade

Um conjunto \mathbf{S} de \mathbb{R}^2 é *euclidianamente convexo* se para quaisquer dois pontos p e q de \mathbf{S} , o segmento de reta entre p e q está contido em \mathbf{S} . Daqui por diante substituiremos o termo euclidianamente convexo por convexo, salvo quando necessário diferenciar.

Equivalentemente, podemos dizer que um conjunto \mathbf{S} é convexo se a interseção de qualquer reta euclidiana com o conjunto \mathbf{S} é conexa (ou vazia).

Um problema importante e bastante explorado na geometria computacional é a determinação da *envoltória convexa* de um conjunto de pontos no plano. A *envoltória convexa* de um conjunto \mathbf{S} é definida como o menor conjunto convexo que contém \mathbf{S} . Ou equivalentemente, como a interseção dos conjuntos convexos que contêm \mathbf{S} , ou ainda, como a interseção dos meios-planos que contêm \mathbf{S} .

Ainda existem outras definições para convexidade de conjuntos, para o leitor interessado podemos citar [6] e [15]; já para caracterizações de conjuntos convexos temos [6] e [14].

Definições de envoltória convexa para uma outra geometria podem ser encontradas em [19] (veja também o apêndice C.1.3). Na seção seguinte definiremos geometrias não euclidianas relacionadas a um conjunto de orientações restritas.

2.2 Geometrias para Orientações Restritas

Observe que de um conjunto de orientações é possível definir uma geometria. O conjunto de retas com orientações em \mathcal{O} mais as mesmas regras de incidência entre pontos e retas da geometria euclidiana definem uma geometria advinda do conjunto de orientações em \mathbb{R}^2 , a qual denotaremos por \mathcal{G}_1 . Note que na definição da geometria acima se o conjunto $\mathcal{O} = [0, 360)$ então temos a geometria euclidiana.

Na geometria euclidiana para qualquer par de pontos distintos p e q do plano temos um segmento de reta euclidiana que liga p a q . O mesmo já não acontece quando trabalhamos com a geometria \mathcal{G}_1 . Por exemplo, seja o conjunto $\{0, 90, 180, 270\}$ e os pontos $p := (0, 0)$ e $q := (1, 1)$. Neste caso, nenhuma reta euclidiana com orientação em $\{0, 90, 180, 270\}$ contém p e q ao mesmo tempo.

Para contornar este problema, podemos considerar um outro conjunto de retas (denominadas de \mathcal{O} -escadas e definidas por Rawlins [23]) para definir uma nova geometria associada ao conjunto \mathcal{O} . Daremos a seguir as definições de Rawlins.

2.2.1 \mathcal{O} -linhas e \mathcal{O} -escadas

Definição 2.2.1 (Rawlins[23]) *Uma curva C é uma \mathcal{O} -escada se C possui interseção conexa¹ ou vazia com qualquer reta euclidiana cuja orientação pertence ao conjunto \mathcal{O} .*

Além disso, Rawlins define o conceito de \mathcal{O} -linhas.

Definição 2.2.2 (Rawlins [23]) *Toda reta euclidiana cuja orientação pertence ao conjunto \mathcal{O} é chamada de \mathcal{O} -linha.*

Em particular, toda \mathcal{O} -linha é uma \mathcal{O} -escada.

A geometria onde as retas são as \mathcal{O} -escadas, e o conjunto de pontos e as regras de incidência são os mesmos da geometria euclidiana será denotada por \mathcal{G}_2 . Observe que a geometria \mathcal{G}_2 contorna o problema da não existência de segmento de retas entre qualquer par de pontos de \mathbb{R}^2 que havia na geometria \mathcal{G}_1 , no entanto na geometria \mathcal{G}_2 o número de

¹Em todas as geometrias com que trabalhamos aqui, estamos considerando a topologia euclidiana.

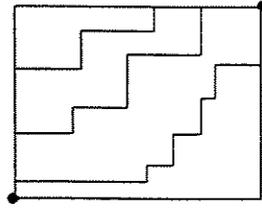


Figura 2.1: \mathcal{O} -escadas entre dois pontos onde $\mathcal{O} = \{0, 90, 180, 270\}$.

segmentos distintos de retas (\mathcal{O} -escadas) entre um par de pontos pode ser infinito (figura 2.1). Esta é uma característica indesejável pois conduz a inconsistências ou construções não univocamente determinadas.

2.2.2 As geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^-}$

Nosso objetivo agora é definir duas geometrias associadas ao conjunto \mathcal{O} em que o número de segmentos de retas entre dois pontos é um. Na realidade o número de retas que passam por dois pontos pode ser infinito, no entanto todos os segmentos de retas entre dois pontos são coincidentes.

Para isto, iniciaremos com a definição de *orientação* e *caminhos poligonais* dadas a seguir.

Definição 2.2.3 (Rawlins[23]) *A orientação de uma reta euclidiana é o menor ângulo não negativo no sentido anti-horário que a reta realiza com o eixo Ox^+ .*

Definição 2.2.4 (Rawlins[23]) *Dizemos que um conjunto de orientações \mathcal{O} é simétrico se para qualquer $\alpha \in \mathcal{O}$ temos $\alpha + 180 \pmod{360} \in \mathcal{O}$.*

Definição 2.2.5 *Um caminho poligonal é uma seqüência finita de segmentos (euclidianos) tal que:*

- *cada extremo de segmento é compartilhado por no máximo 2 segmentos (veja a figura 2.2); e*
- *existem exatamente dois extremos que pertencem a um único segmento. (A estes denominaremos de extremos do caminho poligonal).*

Permite-se que os pontos extremos da linha poligonal sejam pontos no infinito, em cujo caso o primeiro e o último segmentos são semi-retas.

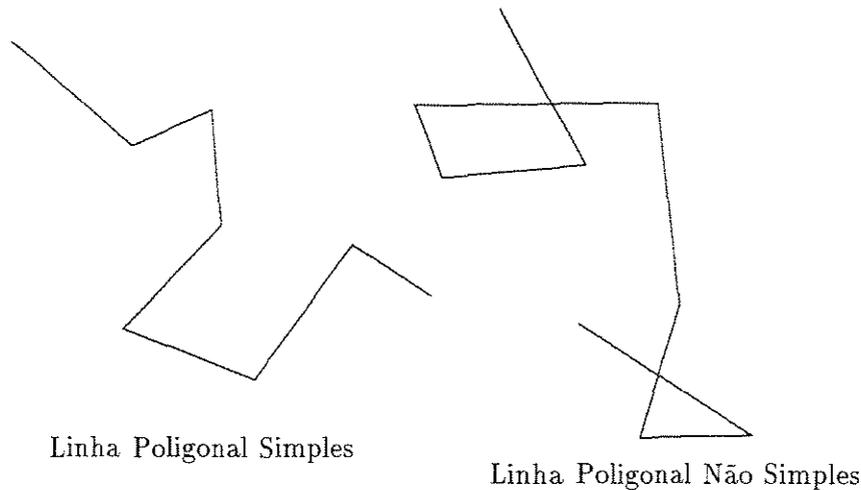


Figura 2.2: Exemplo de caminhos poligonais.

Definição 2.2.6 *Um caminho poligonal é simples se a interseção de quaisquer dois dos seus segmentos é vazia ou é um ponto extremo dos segmentos.*

Representaremos um caminho poligonal C de $(k - 1)$ segmentos pela seqüência

$$(c_1, c_2, \dots, c_k),$$

onde c_i e c_{i+1} são os extremos do i -ésimo segmento e c_1 e c_k são os extremos de C .

Definição 2.2.7 *Chamaremos de esquinas de um caminho poligonal C os pontos de C que pertencem a dois segmentos de C .*

Definição 2.2.8 (*) *Um caminho \mathcal{O} -poligonal entre dois pontos distintos p e q é um caminho poligonal simples (c_1, c_2, \dots, c_k) tal que a orientação de cada segmento $\overline{c_i c_{i+1}}$, $1 \leq i < k$, está contida no conjunto \mathcal{O} .*

Definição 2.2.9 *Chamaremos de esquinas de um caminho \mathcal{O} -poligonal C os pontos de C que pertencem a dois segmentos de C .*

Denotaremos por $\Phi(R)$ a orientação de R , onde R pode ser uma reta euclidiana ou uma semi-reta. A orientação de uma semi-reta é dada pela orientação (no sentido anti-horário) da translação que leva o ponto de partida da mesma para a origem.

Façamos agora uma análise do número de caminhos \mathcal{O} -poligonais existentes entre dois pontos distintos p e q , considerando dois casos:

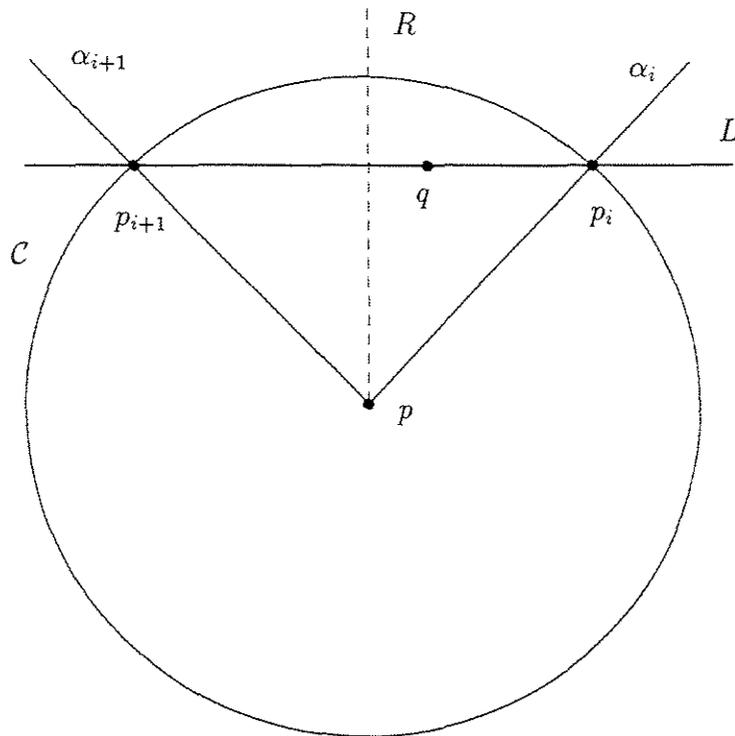


Figura 2.3: Construção para a Proposição 2.2.12.

- quando o segmento de reta euclidiana R que liga p a q possui orientação $\Phi(R) \in \mathcal{O}$ e
- quando o segmento de reta euclidiana R que liga p a q possui orientação $\Phi(R) \notin \mathcal{O}$.

É fácil ver que em ambos os casos, se considerarmos os caminhos \mathcal{O} -poligonais que possuem uma ou mais esquinas então o número de caminhos \mathcal{O} -poligonais é infinito.

No caso em que $\Phi(R) \in \mathcal{O}$, existe um caminho \mathcal{O} -poligonal que não possui esquina que é o próprio segmento de reta euclidiana que liga p a q . Obviamente este é o caminho \mathcal{O} -poligonal de menor comprimento euclidiano entre p e q .

No caso em que $\Phi(R) \notin \mathcal{O}$ não é possível construir um caminho \mathcal{O} -poligonal sem esquinas. Assim, considerando os caminhos \mathcal{O} -poligonais com apenas uma esquina, temos que o número de caminhos \mathcal{O} -poligonais neste caso é $\binom{\delta/2}{2}$. Veremos adiante que não é necessário considerar caminhos com mais de uma esquina.

Dentre os caminhos \mathcal{O} -poligonais com *uma* esquina existem apenas 2 caminhos que realizam o menor comprimento euclidiano como será demonstrado no Lema 2.2.10. Um método para se encontrar estes caminhos é dado na Proposição 2.2.12.

Lema 2.2.10 (*) *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dentre os caminhos \mathcal{O} -poligonais de menor comprimento euclidiano ligando p a q , existem no máximo dois caminhos \mathcal{O} -poligonais com apenas uma esquina.*

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$. Considere o paralelogramo \mathcal{P} de vértices diagonais p e q de menor perímetro construído com duas orientações $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$, tais que $\alpha_1 < \alpha_2$. Sobre a fronteira de \mathcal{P} há dois caminhos P_N e P_S ligando p a q .

Se \mathfrak{S} é um caminho de comprimento euclidiano mínimo entre p e q então o subcaminho de \mathfrak{S} entre qualquer par de pontos (p', p'') , denotado por $\mathfrak{S}(p', p'')$, também é de comprimento euclidiano mínimo.

Ademais, \mathfrak{S} não pode sair fora de \mathcal{P} pois, caso contrário, seja p_1 a primeira esquina de \mathfrak{S} a partir de p fora de \mathcal{P} , um subcaminho $\mathfrak{S}(p_1, q)$ encontra um dos raios que emanam de p nas direções α_1 e α_2 . Seja p_2 o primeiro ponto de interseção de $\mathfrak{S}(p_1, q)$ com um destes raios. O segmento $\overline{pp_2}$ sobre este raio é mais curto que $\mathfrak{S}(p, p_2)$. Contradição. Logo \mathfrak{S} está inteiramente contido em \mathcal{P} .

Ainda mais, \mathfrak{S} não pode sair fora de nenhum dos paralelogramos formados por esquinas consecutivas com direções α_1 e α_2 . Se \mathfrak{S} entra num desses paralelogramos, ou \mathfrak{S} usa uma orientação entre α_1 e α_2 ou \mathfrak{S} tem uma esquina dentro de um desses paralelogramos. Estas duas possibilidades não podem ocorrer, pois \mathcal{P} deixaria de ser o paralelogramo com menor perímetro.

Logo, \mathfrak{S} usa apenas as orientações α_1 e α_2 entre p e q . Portanto o comprimento de \mathfrak{S} é igual à metade do perímetro de \mathcal{P} e, portanto, P_N e P_S são os caminhos mínimos entre p e q com uma só esquina. \square

A propriedade do Lema 2.2.10 também aparece em [29]. Acreditamos que nossa demonstração é mais simples.

A seguir a Proposição 2.2.12 mostra como obter os dois caminhos \mathcal{O} -poligonais de comprimento euclidiano mínimo com uma esquina. Para isto devemos fazer algumas definições.

Seja \mathcal{O} um conjunto de δ orientações $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\delta)$ indexados de modo que $\alpha_i < \alpha_{i+1}, \forall i, 1 \leq i < \delta$, e sejam p e $q \in \mathbb{R}^2$, pontos distintos.

Definição 2.2.11 (Rawlins [23]) *Um intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ é dito \mathcal{O} -livre se*

$$\mathcal{O} \cap [\alpha_1, \alpha_2] = \emptyset$$

Escolha $i, 1 \leq i < \delta$, tal que $\alpha_i \leq \Phi(\overrightarrow{pq}) \leq \alpha_{i+1}$ (as operações nos índices $1, \dots, \delta$ são implicitamente módulo δ), onde \overrightarrow{pq} é o raio com origem em p e passando por q .

Na figura 2.4, considere o setor formado pelos dois raios que emanam de p nas direções α_i e α_{i+1} (veja a figura 2.3). Seja R o raio bissetor deste setor, partindo de p . Seja L a reta euclidiana perpendicular a R passando por q . Seja p_i (p_{i+1}) a interseção de L com o raio que parte de p na direção α_i (α_{i+1}).

Seja \mathcal{C} a circunferência centrada em p de raio $d_e(p, p_i)$. Note que, por construção, \mathcal{C} passa por p_{i+1} e q pertence ao segmento que liga p_i e p_{i+1} .

Proposição 2.2.12 (*) *Sejam $\mathcal{O}, p, q, p_i, p_{i+1}$ e \mathcal{C} como descritos acima. Seja \overline{L} a reta euclidiana com orientação α_{i+1} , passando por q e seja p' a interseção de \overline{L} com o raio $\overrightarrow{pp_i}$ (figura 2.4). Então o caminho \mathcal{O} -poligonal (p, p', q) é um dos caminhos \mathcal{O} -poligonais com uma esquina e de menor comprimento que liga p a q .*

Demonstração: Da demonstração do Lema 2.2.10, segue-se que para todo caminho \mathcal{O} -poligonal de comprimento euclidiano mínimo que utiliza somente duas orientações com mais do que duas esquinas existe um caminho \mathcal{O} -poligonal com uma esquina que utiliza as mesmas orientações e de mesmo comprimento. Consideraremos o caminho \mathcal{O} -poligonal (p, p', q) como um caminho \mathcal{O} -poligonal entre p e q .

Note que (p, p', q) faz parte da fronteira do paralelogramo formado por α_i e α_{i+1} . Além disso, as orientações α_i e α_{i+1} fazem com que p e q estejam sobre uma diagonal do paralelogramo. Como α_i e α_{i+1} formam um intervalo \mathcal{O} -livre então o paralelogramo é o de menor perímetro com p e q sobre uma das diagonais. Assim, (p, p', q) é um dos caminhos \mathcal{O} -poligonais de menor comprimento que liga p a q . \square

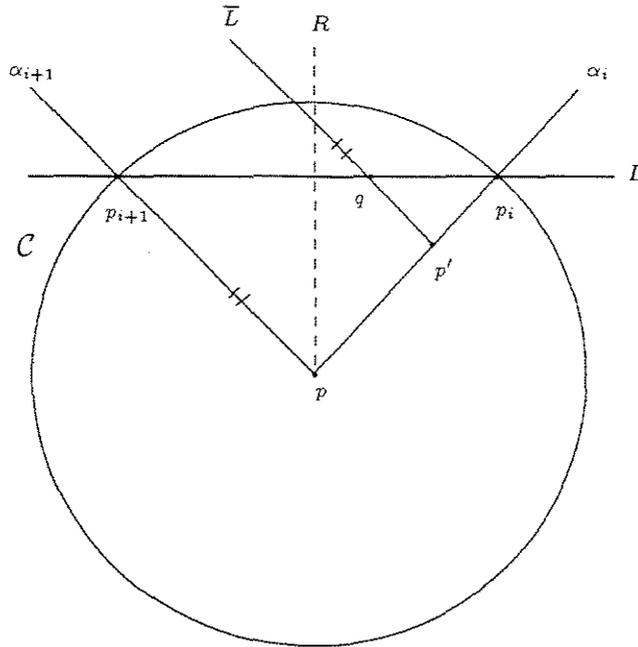


Figura 2.4: Construção para obter um dos caminhos \mathcal{O} -poligonais de menor comprimento entre dois pontos.

Corolário 2.2.13 *As orientações dos caminhos \mathcal{O} -poligonais de menor comprimento entre dois pontos distintos e com apenas uma esquina formam um intervalo \mathcal{O} -livre.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.2.12. \square

Nosso objetivo agora é definir uma geometria associada ao conjunto \mathcal{O} em que o número de segmentos de reta entre dois pontos é sempre um. Na realidade, definiremos duas tais geometrias. Para isto, devemos inicialmente definir os conjuntos de retas que farão parte destas duas geometrias.

Definição 2.2.14 (*) *Chamaremos de reta degenerada uma reta euclidiana R cuja orientação $\Phi(R) \in \mathcal{O}$.*

Chamaremos de reta não degenerada um par de semi-retas com mesma origem e orientações α e β com $\alpha < \beta$ tais que α e $\beta + 180$ formam um intervalo \mathcal{O} -livre, e $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

Geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$

Definiremos a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ cujo conjunto de retas é formado por todas as retas degeneradas e não degeneradas, cujo conjunto de pontos é \mathbb{R}^2 e as relações de incidência

entre pontos e retas são as mesmas da geometria euclidiana. Denominaremos as retas da geometria \mathcal{G}_O de \mathcal{G}_O -reta degenerada e \mathcal{G}_O -reta não degenerada conforme o caso.

Na geometria \mathcal{G}_O podemos ter dois segmentos de retas distintos passando por um dado par de pontos.

Proposição 2.2.15 (*) *Seja R uma \mathcal{G}_O -reta e p e q dois pontos distintos de R então o segmento da \mathcal{G}_O -reta que liga p a q é um caminho O -poligonal entre p e q de comprimento euclidiano mínimo.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.2.12. \square

Definiremos a seguir duas geometrias onde o número de segmentos de retas entre dois pontos quaisquer de \mathbb{R}^2 é um. Para isto, particionaremos o conjunto de todas as retas não degeneradas em dois conjuntos segundo a orientação do vetor resultante das orientações das semi-retas utilizadas.

Definição 2.2.16 (*) *Seja R uma reta não degenerada formada por duas semi-retas cujas orientações são α e β . Diremos que R é positiva se*

$$0 \leq \Phi(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) < 180,$$

e é negativa em caso contrário, onde $\vec{\bullet}$ é um vetor unitário com orientação \bullet .

Geometria \mathcal{G}_{O+} e \mathcal{G}_{O-}

Definiremos o conjunto das retas da geometria \mathcal{G}_{O+} como sendo constituído de todas as retas degeneradas e todas as retas não degeneradas positivas, o conjunto dos pontos como sendo todos os pontos de \mathbb{R}^2 e as relações de incidência conforme a geometria euclidiana. Denominaremos as retas da geometria \mathcal{G}_{O+} de \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada e \mathcal{G}_{O+} -reta não degenerada conforme o caso.

A geometria \mathcal{G}_{O-} é definida similarmente. Note que as retas degeneradas fazem parte tanto de \mathcal{G}_{O+} quanto de \mathcal{G}_{O-} e note que se R é uma reta degenerada de \mathcal{G}_{O+} sua orientação é:

$$0 \leq \Phi(R) < 180.$$

Por conveniência, se R é uma reta degenerada de \mathcal{G}_{O-} consideraremos sua orientação como sendo:

$$180 \leq \Phi(R) < 360.$$

Assim, convém chamarmos as retas degeneradas de positivas (negativas) se estas são vistas como retas de \mathcal{G}_{O+} (\mathcal{G}_{O-}).

Em resumo, as geometrias \mathcal{G}_{O+} , \mathcal{G}_{O-} , \mathcal{G}_O e \mathcal{G}_2 resolvem o problema da não existência de retas passando por um dado par de pontos de \mathbb{R}^2 pois nestas geometrias existe pelo menos 1 reta passando por um dado par de pontos de \mathbb{R}^2 .

É importante observar que as geometrias \mathcal{G}_{O+} e \mathcal{G}_{O-} possuem um único segmento de reta entre quaisquer dois pontos. A geometria \mathcal{G}_O possui no máximo dois segmentos distintos entre dois pontos quaisquer de mesmo comprimento euclidiano. A geometria \mathcal{G}_2 pode possuir um número infinito de segmentos de reta entre dois pontos quaisquer e não necessariamente possuem o mesmo comprimento euclidiano.

Como conseqüência da definição da geometria \mathcal{G}_{O+} (\mathcal{G}_{O-}), podemos formular, dentre outros, problemas de convexidade que serão abordados nas seções seguintes. Indicaremos quando alguns destes problemas foram tratados na literatura através de uma abordagem que essencialmente corresponde a considerá-los na geometria \mathcal{G}_2 que definimos.

Na seção seguinte exibiremos definições de estruturas geométricas das geometrias \mathcal{G}_{O+} , \mathcal{G}_{O-} e \mathcal{G}_O .

2.3 Conceitos, Estruturas Geométricas e Propriedades das Geometrias \mathcal{G}_O , \mathcal{G}_{O+} e \mathcal{G}_{O-}

Daqui por diante, para simplificação de notação, utilizaremos \mathcal{G}_{O^*} para denotar \mathcal{G}_{O+} e \mathcal{G}_{O-} , quando quisermos nos referir a ambas ao mesmo tempo.

Nesta seção definiremos conceitos e estruturas geométricas comuns às geometrias \mathcal{G}_{O^*} e \mathcal{G}_O . Para simplificação utilizaremos \mathcal{G} para denotar \mathcal{G}_{O^*} e \mathcal{G}_O . Algumas propriedades das geometrias \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são exibidas no apêndice A. Não exibiremos tais propriedades nesta seção pois acreditamos que desta forma a exposição fica mais didática.

Definição 2.3.1 (*) *Um \mathcal{G} -semi-plano é uma das duas regiões fechadas do plano cuja fronteira é uma \mathcal{G} -reta.*

Daqui por diante \mathbf{S} denotará um conjunto de pontos (não necessariamente finito).

Definição 2.3.2 (*) *Um conjunto \mathbf{S} é \mathcal{G} -convexo se a interseção de \mathbf{S} com qualquer \mathcal{G} -reta é conexa.*

Definição 2.3.3 (*) *A envoltória \mathcal{G} -convexa de um conjunto \mathbf{S} é o menor conjunto fechado \mathcal{G} -convexo que contém \mathbf{S} .*

Conforme veremos na subseção 2.3.1 a interseção de conjuntos \mathcal{G} -convexos é um conjunto \mathcal{G} -convexo. Assim, envoltória \mathcal{G} -convexa está bem definida, pois como no caso euclidiano, " \subset " define uma relação de ordem parcial para conjuntos \mathcal{G} -convexos.

Definição 2.3.4 (*) Dados n pontos p_0, p_1, \dots, p_{n-1} , que definem uma seqüência de segmentos de \mathcal{G} -retas em ordem cíclica $T_i = p_i p_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, onde as somas dos índices são tomadas módulo n , os pontos p_i 's juntamente com os segmentos T_i 's formam um \mathcal{G} -polígono. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos de \mathcal{G} -arestas do \mathcal{G} -polígono.

Definição 2.3.5 (*) Dizemos que um \mathcal{G} -polígono $\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ é simples se ele satisfaz a seguinte propriedade:

- todas as arestas de \mathcal{P} são disjuntas exceto pelos vértices que as arestas consecutivas compartilham, isto é, $T_i \cap T_{i+1} = \{p_{i+1}\}$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $i < j-1$ e $j < i+n-1$.

Como nesta tese não utilizaremos o conceito de \mathcal{G} -polígonos não simples, todas as referências a \mathcal{G} -polígonos subentendem como \mathcal{G} -polígonos simples. Além disso, quando nos referirmos a um \mathcal{G} -polígono consideraremos às vezes também o interior do mesmo.

Definição 2.3.6 (*) Um \mathcal{G} -polígono é \mathcal{G} -convexo se sua interseção com qualquer \mathcal{G} -reta é conexa.

Chamaremos de *menor \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo envolvente* de um conjunto \mathbf{S} o menor \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo que contém \mathbf{S} .

Veremos na subseção 2.3.1 que esta definição é consistente apenas nas geometrias \mathcal{G}_2 , \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_{0^*} , pois a interseção, nestas geometrias, de \mathcal{G} -polígonos \mathcal{G} -convexos é um \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo. Logo, " \subset " estabelece uma relação de ordem parcial entre \mathcal{G} -polígonos \mathcal{G} -convexos para $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_{0^*}$.

2.3.1 Propriedades das Geometrias \mathcal{G}_0 , \mathcal{G}_{0^+} e \mathcal{G}_{0^-}

Nesta seção descreveremos propriedades comuns às geometrias \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_{0^*} .

Incidência

Conforme vimos anteriormente, existe pelo menos uma \mathcal{G} -reta passando por qualquer par de pontos do \mathbb{R}^2 .

\mathcal{G} -convexidade Demonstraremos agora que um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo pode ser dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -semi-planos. Este fato é demonstrado na Proposição 2.3.12 que utiliza os resultados das Proposições 2.3.7, 2.3.8 e 2.3.9 e as definições 2.3.10 e 2.3.11.

Proposição 2.3.7 (*) *Um conjunto \mathcal{G} -convexo é conexo.*

Demonstração: Seja \mathbf{P} um conjunto \mathcal{G} -convexo. Suponha, por absurdo, que \mathbf{P} seja não conexo. Sejam \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 componentes conexas de \mathbf{P} . Sejam p_1, p_2 pontos de \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , respectivamente. Seja R uma \mathcal{G} -reta passando por p_1 e p_2 . A interseção de R com \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 é não conexa, o que contradiz a hipótese de que \mathbf{P} é \mathcal{G} -convexo. \square

Proposição 2.3.8 (*) *A interseção de dois conjuntos \mathcal{G} -convexos é um conjunto \mathcal{G} -convexo.*

Demonstração: Sejam \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 conjuntos \mathcal{G} -convexos. Suponha, por absurdo, que $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2$ é não \mathcal{G} -convexo. Assim, seja R uma \mathcal{G} -reta tal que $R \cap (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$ é não conexa.

Sejam $p_1, p_2 \in r$ tais que os pontos p_1 e p_2 pertencem a componentes conexas distintas de $R \cap (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$ e, além disso, seja p' um ponto pertencente ao segmento de R que liga p_1 a p_2 tal que $p' \notin (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$.

Por hipótese, \mathbf{P}_1 (\mathbf{P}_2) é \mathcal{G} -convexo. Além disso, $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_1$ (\mathbf{P}_2). Assim, a interseção de R com \mathbf{P}_1 (\mathbf{P}_2) é conexa. Logo temos que $p' \in \mathbf{P}_1$ (\mathbf{P}_2). Portanto, $p' \in (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$, o que contradiz a escolha de p' . \square

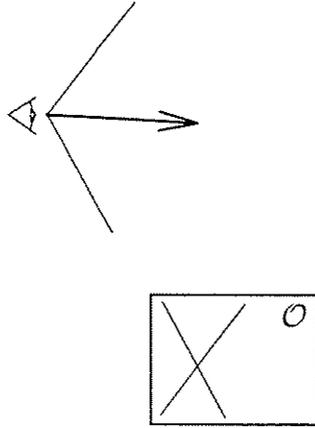
Proposição 2.3.9 (*) *Seja \mathbf{P} um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo e $p \notin \mathbf{P}$. Então existe pelo menos um raio com origem em p cuja orientação pertence a \mathcal{O} tal que este não intercepta \mathbf{P} .*

Demonstração: Seja R um raio com origem em p e orientação $\alpha \in \mathcal{O}$ tal que R intercepta \mathbf{P} . O raio R' com origem em p e orientação $\alpha + 180$ não intercepta \mathbf{P} , pois do contrário \mathbf{P} seria não $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo. \square

A seguir definiremos um conceito a ser utilizado na Proposição seguinte.

Definição 2.3.10 (*) *Denominaremos de braços de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta não degenerada as duas semi-retas que a formam.*

Para distinguirmos os braços esquerdo e direito de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta não degenerada consideraremos um observador referencial que situar-se-á na interseção das semi-retas que a formam olhando no sentido do vetor resultante das orientações destas semi-retas. Veja a figura 2.5.



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Figura 2.5: Observador usado como referência.

Definição 2.3.11 (*) *Seja T uma \mathcal{G}_O -reta não degenerada. Então o braço esquerdo (braço direito) é a semi-reta de T que está à esquerda (direita) do observador descrito acima.*

Para denotar o braço esquerdo (direito) de uma \mathcal{G}_O -reta T utilizaremos a notação $B_e(T)$ ($B_d(T)$). Além disso, para referenciarmos a orientação de cada braço de uma \mathcal{G}_O -reta não degenerada T usaremos

$$\Phi(B_e(T)) \text{ e } \Phi(B_d(T)).$$

No caso de uma \mathcal{G}_O -reta degenerada T' utilizaremos

$$\Phi(T').$$

Proposição 2.3.12 (*) *Um conjunto fechado é \mathcal{G}_O -convexo se e somente se ele é dado por interseção de \mathcal{G}_O -semi-planos.*

Demonstração:

\Leftarrow Seja \mathbf{P} um conjunto dado por interseções de \mathcal{G}_O -semi-planos. Note que \mathcal{G}_O -semi-planos são conjuntos \mathcal{G}_O -convexos. Pela Proposição 2.3.8, a interseção de conjuntos \mathcal{G}_O -convexos é um conjunto \mathcal{G}_O -convexo. Assim, \mathbf{P} é um conjunto \mathcal{G}_O -convexo.

\Rightarrow Seja \mathbf{P} um conjunto \mathcal{G}_O -convexo e seja $p \notin \mathbf{P}$, mostraremos que existe um \mathcal{G}_O -semi-plano que contém \mathbf{P} e não contém p .

Pela Proposição 2.3.9 existe um raio R_0 com orientação $\alpha \in \mathcal{O}$ e origem em p tal que R_0 não intercepta \mathbf{P} . Como \mathbf{P} é fechado, da \mathcal{G}_O -convexidade de \mathbf{P} segue-se que existem raios euclidianos com origem em p e de suporte do conjunto \mathbf{P} tais que estes estão à

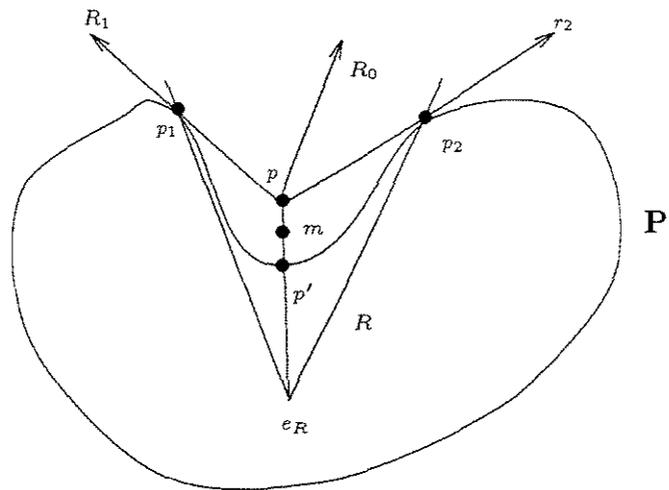


Figura 2.6: Construção da demonstração da Proposição 2.3.12.

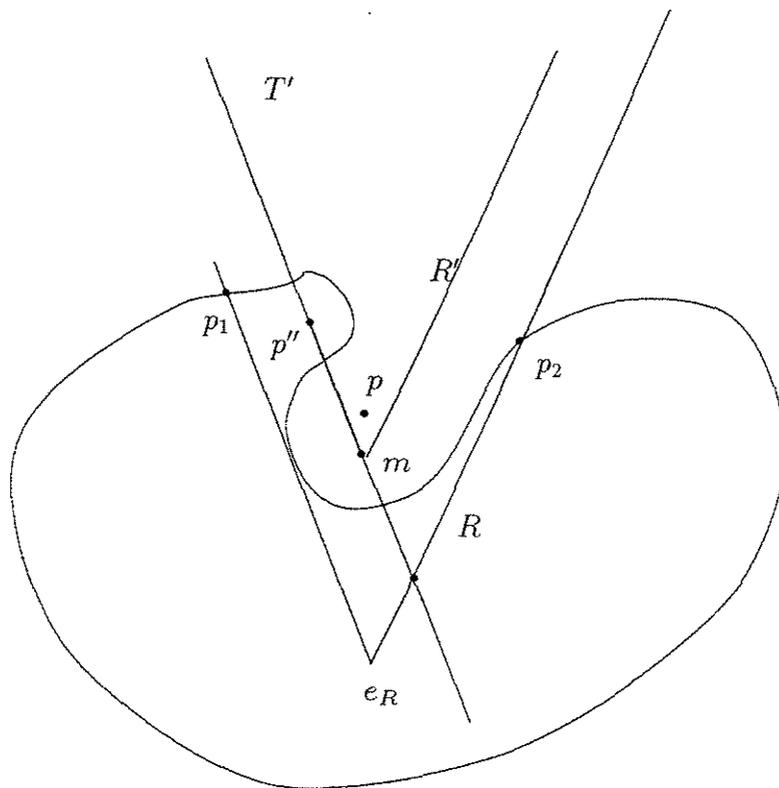


Figura 2.7: Construção da demonstração da Proposição 2.3.12.

esquerda e à direita de R_0 com relação a um observador situado no ponto p e olhando na direção do raio R_0 .

Assim, sejam R_1 e R_2 os raios euclidianos de suporte do conjunto \mathbf{P} com origem em p . Além disso, sejam p_1 e p_2 os primeiros pontos das interseções de R_1 e R_2 com \mathbf{P} , respectivamente (veja a figura 2.6). Seja R uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -reta que passa por p_1 e p_2 .

Consideraremos o caso em que R é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -reta não degenerada, o caso em que R é degenerada é análogo.

Pela $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -convexidade de \mathbf{P} , o segmento de reta de R entre p_1 e p_2 está inteiramente contido em \mathbf{P} . Seja e_R a esquina de R . Considere agora o segmento de reta euclidiana que liga e_R a p . Seja p' o ponto da interseção deste segmento com a fronteira de \mathbf{P} mais próximo de p . Além disso, seja m a mediana do segmento de reta euclidiana $\overline{p'p}$ (veja a figura 2.6).

A $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -reta R' paralela a R com esquina em m limita um $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -semi-plano que não contém p . Mostraremos que R' não intercepta \mathbf{P} .

Suponha, por absurdo, que R' intercepta \mathbf{P} . Devemos analisar dois casos:

- os dois braços de R' interceptam \mathbf{P} ; neste caso temos que $m \in R'$ e $m \notin \mathbf{P}$, ou seja, a interseção de R' com \mathbf{P} é não conexa, o que é uma contradição, pois \mathbf{P} é $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -convexo;
- apenas um dos braços de R' intercepta \mathbf{P} ; suponha, sem perda de generalidade, que o braço esquerdo de R' intercepta \mathbf{P} , num ponto p'' (figura 2.7).

Seja T' a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -reta degenerada com orientação $\Phi(\text{Be}(R'))$ que passa por m .

Temos que $p'' \in T' \cap \mathbf{P}$, $m \in T' \setminus \mathbf{P}$ e $T' \cap \text{Bd}(R) \in T' \cap \mathbf{P}$ contradiz a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -convexidade de P . \square

A Proposição 2.3.12 não é válida nas geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ e \mathcal{G}_2 pois nestas duas geometrias existem semi-planos que não são convexos. Na Proposição seguinte estabelecemos uma propriedade semelhante à da Proposição 2.3.12.

Proposição 2.3.13 (*) *Um conjunto fechado é $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo se e somente se ele é dado por interseção de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -semi-planos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexos.*

Demonstração: Análogo a demonstração 2.3.12. \square

Proposição 2.3.14 (*) *Seja \mathbf{P} um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo. Então \mathbf{P} é dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -semi-planos limitados por $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -retas degeneradas.*

Demonstração: Conseqüência das definições de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^-}$ retas. \square

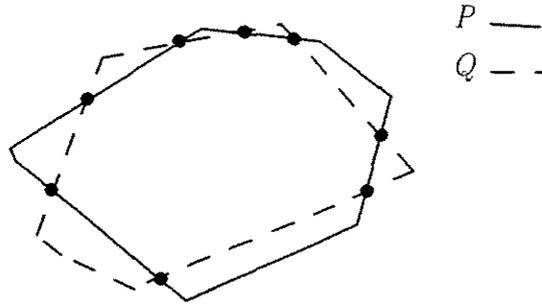


Figura 2.8: A fronteira da interseção pode ser descrita por vértices de \mathcal{P} e \mathcal{Q} mais os pontos de interseção das arestas.

\mathcal{G} -polígonos Agora daremos algumas propriedades sobre \mathcal{G} -convexidade em \mathcal{G} -polígonos.

Proposição 2.3.15 (*) *A interseção de dois \mathcal{G} -polígonos \mathcal{G} -convexos é um \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo.*

Demonstração: Sejam \mathcal{P} e \mathcal{Q} dois \mathcal{G} -polígonos \mathcal{G} -convexos. Pela Proposição 2.3.8 a interseção de conjuntos \mathcal{G} -convexos é um conjunto \mathcal{G} -convexo e pela Proposição 2.3.7 conjuntos \mathcal{G} -convexos são conexos.

Além disso, a fronteira da interseção de \mathcal{P} e \mathcal{Q} será dada por segmentos de \mathcal{G} -retas, já que as fronteiras de \mathcal{P} e \mathcal{Q} são formadas por segmentos de \mathcal{G} -retas. Assim, a fronteira da interseção pode ser descrita por uma seqüência de pontos provenientes de \mathcal{P} , \mathcal{Q} e dos pontos da interseção $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ (veja um exemplo na figura 2.8). \square

Proposição 2.3.16 (*) *O menor $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -polígono $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -convexo envolvente de um conjunto S é dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -semi-planos.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.3.12. \square

Proposição 2.3.17 (*) *O menor $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -polígono $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexo envolvente de um conjunto S é dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -semi-planos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -convexos.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.3.14. \square

Envoltória \mathcal{G} -convexa Exibiremos agora algumas propriedades sobre Envoltória \mathcal{G} -convexa.

Proposição 2.3.18 (*) *A envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -convexa é dada por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^*}$ -semi-planos.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.3.12. \square

Proposição 2.3.19 (*) *A envoltória \mathcal{G}_O -convexa é dada por interseções de \mathcal{G}_O -semi-planos limitados por \mathcal{G}_O -retas degeneradas.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.3.14. \square

Proposição 2.3.20 (*) *A envoltória \mathcal{G} -convexa de um conjunto \mathbf{S} é igual ao menor \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo envolvente de \mathbf{S} .*

Demonstração: Sejam $EC(\mathbf{S})$ e $MPCE(\mathbf{S})$ a envoltória \mathcal{G} -convexa e o menor \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo envolvente de \mathbf{S} , respectivamente. Inicialmente mostraremos que

$$MPCE(\mathbf{S}) \subset EC(\mathbf{S}).$$

Suponha por absurdo que existe

$$p \in MPCE(\mathbf{S}) \setminus EC(\mathbf{S}).$$

Assim, $p \notin \mathbf{S}$ pois $p \notin EC(\mathbf{S})$. Como $EC(\mathbf{S})$ é um conjunto \mathcal{G} -convexo e $p \notin EC(\mathbf{S})$ então pelas demonstrações das Proposições 2.3.12 e 2.3.13 existe um \mathcal{G} -semi-plano \mathcal{H} (\mathcal{G} -convexo) que separa p de $EC(\mathbf{S})$.

Note que a \mathcal{G} -reta que limita \mathcal{H} intercepta $MPCE(\mathbf{S})$. A interseção de \mathcal{H} com $MPCE(\mathbf{S})$ é um \mathcal{G} -polígono \mathcal{G} -convexo menor do que $MPCE(\mathbf{S})$, o que é uma contradição.

Por outro lado,

$$EC(\mathbf{S}) \subset MPCE(\mathbf{S}).$$

por definição de $EC(\mathbf{S})$. \square

2.3.2 Interseção de \mathcal{G}_O -semi-planos

Apresentamos aqui uma interessante relação entre interseção de \mathcal{G}_O -semi-planos e envoltória \mathcal{G}_O -convexa.

Proposição 2.3.21 (*) *A interseção dos \mathcal{G}_O -semi-planos que contêm um conjunto \mathbf{S} é dada pela interseção da envoltória \mathcal{G}_{O+} -convexa com a envoltória \mathcal{G}_{O-} -convexa de \mathbf{S} .*

Demonstração: Fazer interseção de todos \mathcal{G}_O -semi-planos que contêm \mathbf{S} é equivalente a fazer interseção da interseção dos \mathcal{G}_{O+} -semi-planos que contêm \mathbf{S} com a interseção dos \mathcal{G}_{O-} -semi-planos que contêm \mathbf{S} .

Pela Proposição 2.3.13 a envoltória \mathcal{G}_{O+} -convexa é dada por interseção de \mathcal{G}_{O+} -semi-planos. Portanto, a interseção de \mathcal{G}_O -semi-planos que contêm \mathbf{S} é dada pela interseção das envoltórias \mathcal{G}_{O+} -convexas de \mathbf{S} . \square

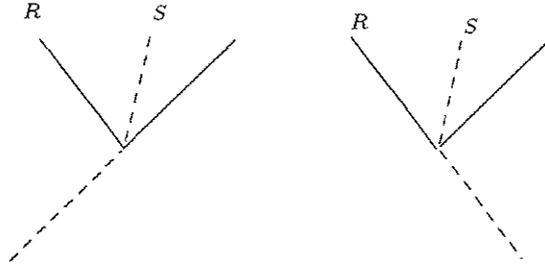


Figura 2.9: Ilustração para a Proposição 2.3.22.

Disposição de \mathcal{G}_O -retas

A seguinte Proposição mostra uma relação que existe entre \mathcal{G}_O -retas. Tal relação será utilizada para o cálculo de complexidade do algoritmo para determinação da envoltória \mathcal{G}_O -convexa a ser dado no capítulo 3.

Proposição 2.3.22 (*) *Sejam R e S duas \mathcal{G}_O -retas não degeneradas. Além disso, seja T uma \mathcal{G}_O -reta degenerada. Então*

1. (figura 2.9)

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(B_e(S)) \leq \Phi(B_e(R))$$

e

$$\Phi(B_d(R)) + 180 \leq \Phi(B_d(S)) \leq \Phi(B_e(R)) + 180$$

ou

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(B_d(S)) \leq \Phi(B_e(R))$$

e

$$\Phi(B_d(R)) + 180 \leq \Phi(B_e(S)) \leq \Phi(B_e(R)) + 180.$$

2.

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(T) \leq \Phi(B_e(R)).$$

Demonstração: A \mathcal{G}_O -reta R é não degenerada, assim pela Corolário 2.2.13 os intervalos

$$[\Phi(B_d(R)), \Phi(B_e(R)) + 180]$$

e

$$[\Phi(B_e(R)), \Phi(B_d(R)) + 180]$$

são intervalos \mathcal{O} -livres.

Desta forma, qualquer braço, tanto o esquerdo quanto o direito, de uma outra $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta não degenerada não pode estar no intervalo \mathcal{O} -livre de R . Portanto,

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(B_e(S)) \leq \Phi(B_e(R))$$

e

$$\Phi(B_d(R)) + 180 \leq \Phi(B_d(S)) \leq \Phi(B_e(R)) + 180$$

ou

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(B_d(S)) \leq \Phi(B_e(R))$$

e

$$\Phi(B_d(R)) + 180 \leq \Phi(B_e(S)) \leq \Phi(B_e(R)) + 180.$$

Ademais, qualquer $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta degenerada T deve ter sua orientação fora do intervalo \mathcal{O} -livre de R . Assim,

$$\Phi(B_d(R)) \leq \Phi(T) \leq \Phi(B_e(R)). \square$$

Em outras palavras, a Proposição 2.3.22 afirma que no caso de duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -retas não degeneradas, o braço direito de uma delas está entre os braços da outra e a orientação do braço esquerdo daquela está entre as orientações simétricas do braço direito e esquerdo desta.

Além disso, a Proposição 2.3.22 diz que não pode haver uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta degenerada T e uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ -reta não degenerada R que, no sentido anti-horário, antecede $B_d(R)$ ou sucede $B_e(R)$.

No capítulo seguinte utilizaremos algumas das Propriedades sobre $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexidade para construção de um algoritmo para a determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa.

Capítulo 3

Construção da Envoltória

$\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa

Neste capítulo descrevemos um algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa de um conjunto de pontos. A abordagem a ser utilizada é a da divisão e conquista similar à usada em [11].

Na seção 3.1 são dadas algumas propriedades relevantes para a descrição de um algoritmo para determinação da envoltória, na seção 3.2 descrevemos o referido algoritmo e na seção 3.3 damos a prova de correção e, por fim, na seção 3.4 é feita a análise de complexidade do algoritmo.

3.1 Propriedades Relevantes para o Algoritmo

Nesta seção descreveremos algumas propriedades relativas a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa. A construção dela será por divisão e conquista.

A divisão do problema é realizada através de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta L degenerada e $\lfloor |\mathbf{S}|/2 \rfloor$ pontos de \mathbf{S} estão à esquerda de L e $\lfloor |\mathbf{S}|/2 \rfloor$ estão à direita de L (possivelmente sobre L). Assumiremos que, a menos de uma rotação, $90 \in \mathcal{O}$, e daqui por diante L é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada tal que $\Phi(L) = 90$.

Mostraremos a seguir que apesar de trabalharmos com um número limitado de orientações a envoltória é limitada.

Proposição 3.1.1 (*) *A envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa de \mathbf{S} é limitada para $\delta \geq 4$.*

Demonstração: Sejam R_1, R_2 duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -retas degeneradas. Sejam \mathcal{H}_{R_1} e \mathcal{H}'_{R_1} (\mathcal{H}_{R_2} e \mathcal{H}'_{R_2}) dois $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -semi-planos de suporte de \mathbf{S} tal que a fronteira destes é dada por $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -retas degeneradas com orientação $\phi(R_1)$ ($\phi(R_2)$).

Note que a interseção destes quatro semi-planos de suporte determinam um quadrilátero limitado que contém a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} que é, portanto, limitada. \square

Convenção

Convencionaremos que uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -aresta de uma envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa é a parte da fronteira da envoltória dada por um segmento de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta T tal que os extremos deste segmento são pontos de \mathbf{S} e, além disso, este segmento é o maior segmento de T cujos extremos são pontos de \mathbf{S} .

Daqui por diante, denotaremos por $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$ a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de um conjunto finito de pontos \mathbf{S} .

Definiremos a seguir uma relação de ordem entre pontos que será usada para determinar dois pontos na fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa (Proposição 3.1.3). De posse desses dois pontos determinaremos duas seqüências de arestas da envoltória denominadas de *cadeia superior* e *cadeia inferior* dadas na definição 3.1.4.

Definição 3.1.2 *Dizemos que um ponto p está à esquerda (direita) de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada se p está à esquerda (direita) de um observador olhando na direção da orientação da reta.*

Proposição 3.1.3 (*) *Seja \mathbf{S} um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^2 e considere a ordenação dos pontos segundo uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada. Seja p_m (p_M) o ponto mais à esquerda (direita) e com menor ordenada possível. Então p_m (p_M) pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} .*

Demonstração: Suponha, por contradição, que p_m não pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} , ou seja, p_m pertence ao interior de \mathbf{S} .

Seja H a reta vertical que passa por p_m . Note que o conjunto \mathbf{S} está totalmente à direita da reta H e, além disso, H limita um $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -semi-plano de suporte e, portanto, a interseção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa com o $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -semi-plano de suporte limitado por H resulta em um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexo menor do que a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa. Contradição. \square

Definição 3.1.4 (*) *Seja \mathbf{S} um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^2 e considere a ordenação dos pontos com relação a $\alpha := 90$. Seja p_m (p_M) o ponto mais à esquerda (direita) e com menor ordenada possível. Definiremos a cadeia superior de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$ relativa a L como a seqüência de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -arestas da fronteira de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$ que vai de p_m a p_M no sentido horário com relação a um ponto interior à envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa. Analogamente, a cadeia inferior de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$ relativa a L é a seqüência de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -arestas da fronteira de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$ que vai de p_m a p_M no sentido anti-horário com relação a um ponto interior à envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa.*

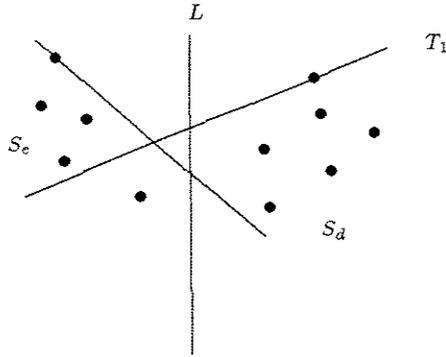


Figura 3.1: Ilustração para a Proposição 3.1.7.

Definiremos a seguir o termo “ponte superior” que será usado no algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa.

Definição 3.1.5 (*) *Seja $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}}(\mathbf{S})$ a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa de \mathbf{S} e denote as cadeias superior e inferior relativas a uma dada $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada L , respectivamente, por CS e CI . Denominaremos de ponte superior com relação a L a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -aresta da cadeia superior interceptada por L . No caso de duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -arestas interceptarem L então a ponte superior com relação a L é a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -aresta cujo extremo esquerdo é interceptado por L . A ponte inferior com relação a L é definida analogamente.*

As Proposições 3.1.6, 3.1.7 e 3.1.8 dizem respeito à ponte superior e serão utilizadas na descrição do algoritmo.

Proposição 3.1.6 (*) *Seja CS a cadeia superior relativa a L da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa de \mathbf{S} . Considere o conjunto A das $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -arestas de CS sem seus pontos extremos. Então L intercepta no máximo uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -aresta de A .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que L intercepta mais de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -aresta de A . Note que toda gop -aresta pode ser estendida para uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta de suporte de \mathbf{S} (Proposição 2.3.12). Assim, se L ($\Phi(L) = 90$) interceptar duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -arestas uma das duas vai possuir interseção com L acima da outra e ao estendermos as $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -arestas para o infinito uma das $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -retas estendidas vai separar os extremos da outra $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -aresta. Contrariando o fato de que as $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -retas estendidas são de suporte. \square .

A seguir temos duas Proposições relacionadas a uma ponte superior com relação a L . As Proposições para a ponte inferior são análogas e por isso são omitidas.

Proposição 3.1.7 (*) *Uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta não degenerada cujas orientações dos braços direito e esquerdo são α e β , respectivamente, é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte de \mathbf{S} cujo braço direito é interceptado por L se e somente se existem:*

- *uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada T_1 com orientação α que é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte do conjunto*

$$\mathbf{S}_d := \{p' \in S : p' \text{ está à direita de } L\} \text{ e ;}$$

- *uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada T_2 com orientação β que é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte do conjunto*

$$\mathbf{S}_e := \{p' \in S : p' \text{ está à esquerda de } T_1\}$$

e além disso, os raios partindo de $T_1 \cap T_2$ com orientações α e β que formam um intervalo \mathcal{O} -livre e $\mathbf{S}_d \cup \mathbf{S}_e = \mathbf{S}$ (veja a figura 3.1).

Demonstração: Como α e β formam um intervalo \mathcal{O} -livre então os raios partindo de $T_1 \cap T_2$ formam uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta. Note que o braço direito T_1 possui todos os pontos de \mathbf{S}_d de um só lado, o mesmo acontece com T_2 . Como $\mathbf{S}_d \cup \mathbf{S}_e = \mathbf{S}$ então temos uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte. \square

Note que uma das hipóteses da Proposição 3.1.7 pede que L intercepte o braço direito da ponte, esta hipótese pode ser modificada e exigir-se que L intercepte o braço esquerdo da ponte. Neste último caso, as conclusões serão análogas.

Apresentaremos agora uma Proposição análoga a 3.1.7 para o caso em que a ponte é um segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada.

Proposição 3.1.8 (*) *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ tais que $p.x < q.x$ e $\Phi(\overline{pq}) \notin \mathcal{O}$. Além disso, sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ tais que $(\alpha, \beta + 180)$ é um intervalo \mathcal{O} -livre. Seja l um dos caminhos \mathcal{O} -poligonais com apenas uma esquina entre p e q que utiliza as orientações α e β . Então l é um segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta se $\Phi(\overline{pq}) \in (\alpha, \beta + 180)$ e o vetor resultante da soma dos vetores unitários com orientações α e β está em $[0, 180)$.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.2.10. \square

Descreveremos a seguir um algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa.

3.2 Descrição do Algoritmo (*)

Descreveremos um algoritmo para construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa para um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^2 . Utilizaremos uma abordagem de divisão e conquista semelhante a usada em [11].

Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -Convexa-Superior**Entrada:** Conjunto de pontos \mathbf{S} .**Saída:** A cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} . $\mathbf{M}_1 := \{p : p.x \leq q.x, \forall q \in \mathbf{S}\}$ $\mathbf{M}_2 := \{p : p.x \geq q.x, \forall q \in \mathbf{S}\}$ seja p_m o ponto de menor ordenada em \mathbf{M}_1 seja p_M o ponto de maior ordenada em \mathbf{M}_2 se $|\mathbf{S}| = 1$ então devolva p_m senão devolva **CadeiaSuperior**(p_m, p_M, \mathbf{S})

Figura 3.2: Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -Convexa.

A construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa será realizada em duas partes: primeiro a construiremos a cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa e, posteriormente, construiremos a cadeia inferior. Assim a obtenção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} será dada pela concatenação das cadeias superior e inferior.

Como os procedimentos para a construção da duas cadeias são semelhantes, descreveremos apenas a construção da cadeia superior. Conforme já observado a divisão do problema será realizada através de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta L degenerada.

Nesta abordagem, ao invés de resolvermos as instâncias menores do conjunto \mathbf{S} que foram criadas pela divisão, trataremos primeiramente de determinar como combinar as soluções que vamos obter. Em outras palavras, devemos primeiramente encontrar uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -aresta da cadeia superior que intercepta L . Se duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -arestas da cadeia superior interceptarem L , ou seja, se L contiver um vértice v da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa então devemos identificar a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -aresta que possui v como ponto extremo esquerdo. Dito de outra forma, devemos encontrar a “ponte superior com relação a L ”. Daqui por diante, utilizaremos apenas o termo “ponte com relação a L ”, salvo quando necessário diferenciar. Nas figuras 3.2 e 3.3 apresentamos os algoritmos que descrevem os passos acima descritos.

Note que no algoritmo da figura 3.3, o comando **Ponte**(\mathbf{S}, L), na linha $\ll 1 \gg$, atribui a (r, s) os pontos extremos da ponte com relação a L . Descreveremos em seguida como obter tais pontos.

A Proposição 3.1.7 sugere um método para encontrar a ponte com relação a L . Inicialmente verificaremos se a ponte com relação a L é um segmento de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada. Para cada $\alpha_i \in \mathcal{O}$, $1 \leq i \leq \delta/2$, seja \mathbf{R}_{α_i} o conjunto de retas euclidianas com orientação α_i passando por pontos de \mathbf{S} , e seja também \mathbf{I}_{α_i} o conjunto das interseções das retas de \mathbf{R}_{α_i} com L . Além disso, seja \max_{α_i} o ponto de maior ordenada em \mathbf{I}_{α_i} e seja R_{α_i} a reta euclidiana de \mathbf{R}_{α_i} que passa por \max_{α_i} .

Se existir um valor para i tal que $R_{\alpha_i} \cap \mathbf{S}$ contém pontos à esquerda e à direita de

Algoritmo CadeiaSuperior

Entrada: Pontos p_m, p_M extremos da cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa e o conjunto \mathbf{S} de pontos.

Saída: A cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa.

seja a um número real tal que

$p.x \leq a$ para $\lceil |S|/2 \rceil$ pontos $p \in \mathbf{S}$ e

$q.x \geq a$ para $\lfloor |S|/2 \rfloor$ pontos $q \in \mathbf{S}$

$L := \{(x, y) : x = a\}$

$(r, s) \leftarrow \text{Ponte}(\mathbf{S}, L)$

« 1 »

$\mathbf{E} := \{p : p.x \leq r.x, \forall p \in \mathbf{S}\}$

$\mathbf{D} := \{p : p.x \geq s.x, \forall p \in \mathbf{S}\}$

imprima(r, s)

se $r \neq p_m$ então CadeiaSuperior(p_m, r, \mathbf{E})

se $s \neq p_M$ então CadeiaSuperior(s, p_M, \mathbf{D})

Figura 3.3: Algoritmo CadeiaSuperior.

L então encontramos uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte de \mathbf{S} e portanto temos uma ponte com relação a L . Note que se existir um valor i tal que $R_{\alpha_i} \cap \mathbf{S}$ contém pontos à esquerda e à direita de L então este valor é único. Por outro lado, se não existir um valor para i que satisfaça a condição acima então devemos procurar a ponte com relação a L em segmentos de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas não degeneradas (a figura 3.4 ilustra um dos casos).

A determinação da ponte com relação a L no caso em que a ponte é um segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta não degenerada baseia-se na Proposição 3.1.7. Inicialmente consideraremos que toda $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta não degenerada é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta candidata a contribuir com um segmento que formará a ponte superior com relação a L .

Descreveremos agora como verificar se uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta candidata realmente contribui com um segmento que formará a ponte, tratando apenas o caso em que uma dada orientação $\alpha \in \mathcal{O}$ é a orientação do braço direito de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta (Proposição 3.1.7), pois o caso em que α é a orientação do braço esquerdo é análogo.

Se nesta análise a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta candidata não for aquela que contribui com a ponte então descartaremos α , conseqüentemente descartaremos a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta considerada, e tomaremos outra orientação em \mathcal{O} .

Seja $\alpha \in \mathcal{O}$ tal que α é a orientação do braço direito de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta cuja orientação do braço esquerdo é β . Seja $\mathbf{S}_{(d,L)}(\mathbf{S}_{(e,L)})$ o conjunto de pontos de \mathbf{S} à direita (à esquerda) de L , $\mathbf{R}_{(d,\alpha)}$ o conjunto de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas degeneradas com orientação α passando por pontos de $\mathbf{S}_{(d,L)}$ e $\mathbf{I}_{(d,\alpha)}$ o conjunto de pontos dados pelas interseções de $R \in \mathbf{R}_{(d,\alpha)}$ com L . Além

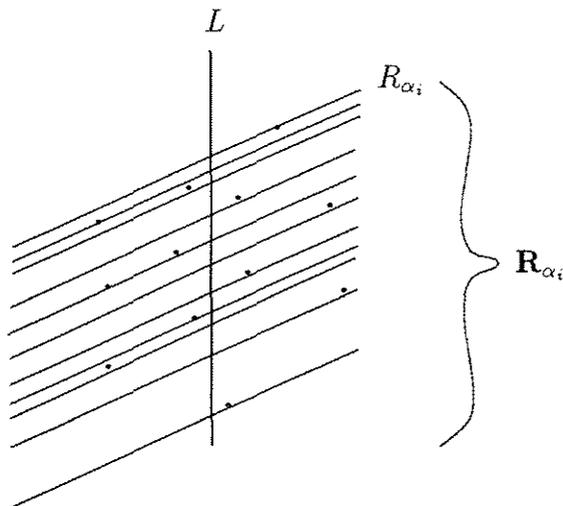


Figura 3.4: Caso em que a ponte superior origina-se de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada.

disso, seja $R_\alpha \in \mathbf{R}_{(d,\alpha)}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta cuja interseção com L possui maior ordenada em $\mathbf{I}_{(d,\alpha)}$.

Seja $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)}$ o conjunto de pontos de \mathbf{S} à esquerda de L e à esquerda ou sobre R_α , seja $\mathbf{R}_{(e,\beta)}$ o conjunto de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas degeneradas com orientação β passando por pontos de $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)}$.

É fácil ver que se $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)} = \emptyset$ então não existe $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte de \mathbf{S} cuja orientação do braço direito é α que passe por pontos de $\mathbf{S}_{(d,L)}$ e $\mathbf{S}_{(e,L)}$. Em outras palavras a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta cuja orientação do braço direito é α não contém uma ponte (a figura 3.5 ilustra esse caso). Devemos então considerar outra orientação e recomeçar o método.

Suporemos então que $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)} \neq \emptyset$. Assim, seja $\mathbf{I}_{(e,\beta)}$ o conjunto de pontos dados pelas interseções de $R \in \mathbf{R}_{(e,\beta)}$ com R_α . Além disso, seja $R_\beta \in \mathbf{R}_{(e,\beta)}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada cujo ponto de interseção com R_α é o mais próximo do ponto de interseção $L \cap R_\alpha$.

Agora, seja p_d o ponto de \mathbf{S} mais afastado do ponto $L \cap R_\alpha$ tal que $p_d \in R_\alpha$ e seja p_e o ponto de \mathbf{S} mais afastado do ponto $L \cap R_\alpha$ tal que $p_e \in R_\beta$ (veja a figura 3.6).

Note que os raios com orientação α e β com origem em $R_\alpha \cap R_\beta$ passando por p_d e p_e formam um caminho \mathcal{O} -poligonal C com uma única esquina. Este caminho \mathcal{O} -poligonal é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta pois, por escolha, α é uma orientação do braço direito de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta. O Algoritmo **Ponte** aparece na figura 3.7. Os algoritmos chamados pelo algoritmo **Ponte** são dados nas figuras 3.8, 3.9 e 3.10. O Algoritmo **CasoEsq** foi omitido por ser análogo ao algoritmo **CasoDir**.

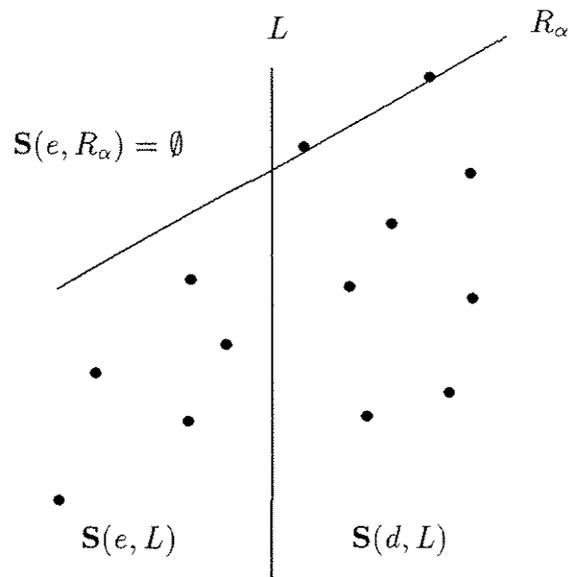


Figura 3.5: A orientação α não contribui para uma ponte superior.

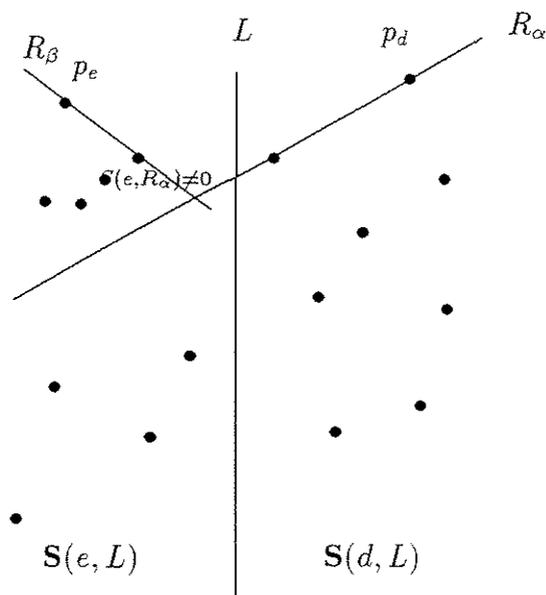


Figura 3.6: A orientação α é a orientação do braço direito da ponte superior.

Algoritmo Ponte

Entrada: Conjunto de pontos \mathbf{S} e a \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada L .

Saída: Pontos extremos da ponte com relação a L .

$\mathbf{S}_{(e,L)} := \{p \in \mathbf{S} : p \text{ está à esquerda ou sobre } L\}$
 $\mathbf{S}_{(d,L)} := \{p \in \mathbf{S} : p \text{ está à direita ou sobre } L\}$
 $(p_e, p_d, ACHOU) \leftarrow \text{CasoDeg}(\mathbf{S}_{(e,L)}, \mathbf{S}_{(d,L)}, L)$
se não $ACHOU$ então $(p_e, p_d) \leftarrow \text{CasoNaoDeg}(\mathbf{S}_{(e,L)}, \mathbf{S}_{(d,L)}, L)$
devolva (p_e, p_d)

Figura 3.7: Algoritmo Ponte.

Algoritmo CasoDeg

Entrada: Conjunto de pontos $\mathbf{S}_{(e,L)}, \mathbf{S}_{(d,L)}$, a \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada L .

Saída: Pontos extremos da ponte com relação a L .

se $\mathbf{S}_{(e,L)} \subset L$ e $\mathbf{S}_{(d,L)} \subset L$ então « 1 »
 $p_e := (p \in \mathbf{S}_{(e,L)} : p.y < q.y, \forall q \in \mathbf{S}_{(e,L)} \cup \mathbf{S}_{(d,L)})$
 $p_d := (p \in \mathbf{S}_{(e,L)} : p.y > q.y, \forall q \in \mathbf{S}_{(e,L)} \cup \mathbf{S}_{(d,L)})$
 devolva $(p_e, p_d, \text{verdadeiro})$
senão
 $i \leftarrow 1$
 repita
 seja \mathbf{R}_{α_i} o conj. das gop -retas deg. com orientação α_i passando por pontos de \mathbf{S}
 $\mathbf{I}_{\alpha_i} := \{p : p = R \cap L, R \in \mathbf{R}_{\alpha_i}\}$
 $\max_{\alpha_i} := (p \in \mathbf{I} : p.y \geq q.y, q \in \mathbf{I}_{\alpha_i})$
 seja R_{α_i} a \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada que passa por \max_{α_i} com orientação α_i
 $P := \{R_{\alpha_i} \cap \mathbf{S}\}$
 se $|P| \neq 1$ então
 $p_e := (p \in P : p.x \leq q.x, \forall q \in P)$
 $p_d := (p \in P : p.x \geq q.x, \forall q \in P)$
 se p_e está à esquerda de L e p_d à direita de L então
 devolva $(p_e, p_d, \text{verdadeiro})$
 $i \leftarrow i + 1$
 até que $i > \delta/2$
devolva $(?, ?, \text{falso})$

Figura 3.8: Algoritmo CasoDeg.

Algoritmo CasoNaoDeg**Entrada:** Conjunto $\mathbf{S}_{(e,L)}, \mathbf{S}_{(d,L)}$, a \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada L .**Saída:** Pontos extremos p_e e p_d . $i \leftarrow 1$ **repita**se α_i é a orientação do braço direito e $\alpha_i \neq 90$ então « 1 » $(p_e, p_d, ACHOU) \leftarrow \text{CasoDir}(\alpha_i, \mathbf{S}_{(d,L)}, L)$ **senão** $(p_e, p_d, ACHOU) \leftarrow \text{CasoEsq}(\alpha_i, \mathbf{S}_{(e,L)}, L)$ se $ACHOU$ então devolva (p_e, p_d) **senão** $i \leftarrow i + 1$ **até que** $i > \delta$

Figura 3.9: Algoritmo CasoNaoDeg.

3.3 Corretude do Algoritmo (*)

O algoritmo **CadeiaSuperior** (figura 3.3) realiza a divisão de \mathbf{S} através da construção dos conjuntos \mathbf{E} e \mathbf{D} , e elimina os pontos que não podem contribuir como pontos extremos da ponte com relação a L . A Proposição seguinte demonstra que aqueles pontos podem de fato ser eliminados.

Proposição 3.3.1 *Seja P a ponte com relação a L com pontos extremos r e s tal que $r.x < s.x$. Seja*

$$\mathbf{F} := \{p \in \mathbf{S} : r.x < p.x < s.x \text{ e } p \notin P\}.$$

Então para qualquer $q \in \mathbf{F}$, q não é vértice de nenhuma \mathcal{G}_{O+} -aresta da cadeia superior de $EC_{\mathcal{G}_{O+}}(\mathbf{S})$.

Demonstração: Analisaremos apenas o caso em que P é um segmento de uma \mathcal{G}_{O+} -reta não degenerada, o caso degenerado é análogo. Suponha, por absurdo, que existe $q \in \mathbf{F}$ tal que q é um ponto extremo de uma ponte superior P' com relação a uma \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada L' com $\Phi(L') = 90$, assumamos s.p.g que L' está à esquerda de L .

Faremos a demonstração analisando dois casos: a ponte P' é um segmento de uma \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada e a ponte P' é um segmento de uma \mathcal{G}_{O+} -reta não degenerada.

1. Suporemos agora que a ponte P' é um segmento de uma \mathcal{G}_{O+} -reta R degenerada. Pela Proposição 2.3.22 a orientação de uma \mathcal{G}_{O+} -reta degenerada está entre os braços de toda \mathcal{G}_{O+} -reta não degenerada. Assim,

$$\Phi(B_e(P)) \leq \Phi(R) \leq \Phi(B_d(P)).$$

Algoritmo CasoDir

Entrada: A orientação α , o conjunto $\mathbf{S}_{(d,L)}$, a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada L .

Saída: Pontos extremos p_e e p_d .

seja β uma orientação de \mathcal{O} tal que

α e β formam um intervalo \mathcal{O} -livre

seja $\mathbf{R}_{(d,\alpha)}$ o conj. das $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas deg. com orientação α passando por pontos de $\mathbf{S}_{(d,L)}$

$\mathbf{I}_{(d,\alpha)} := \{p : p = R \cap L, R \in \mathbf{R}_{(d,\alpha)}\}$

$\max_1 := (p \in \mathbf{I}_{(d,\alpha)} : p.y \geq q.y, \forall q \in \mathbf{I}_{(d,\alpha)})$

seja R_α a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta que passa por \max_1 tal que $\Phi(R_\alpha) = \alpha$

$\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)} := \{p \in \mathbf{S} : p \text{ está à esquerda ou sobre } R_\alpha\}$

se $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)} \neq \emptyset$ então

seja $\mathbf{R}_{(e,\beta)}$ o conj. das $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas deg. com orientação β passando por pontos de $\mathbf{S}_{(e,R_\alpha)}$

$\mathbf{I}_{(e,\beta)} := \{p : p = R \cap R_\alpha, R \in \mathbf{R}_{(e,\beta)}\}$

seja $R_\beta \in \mathbf{R}_{(e,\beta)}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada cujo ponto de interseção com R_α é o mais próximo do ponto de interseção $L \cap R_\alpha$

seja p_d o ponto de \mathbf{S} mais afastado do ponto $L \cap R_\alpha$ tal que $p_d \in R_\alpha$

seja p_e o ponto de \mathbf{S} mais afastado do ponto $L \cap R_\alpha$ tal que $p_e \in R_\beta$

devolva $(p_e, p_d, \text{verdadeiro})$

devolva $(?, ?, \text{falso})$

Figura 3.10: Algoritmo CasoDir.

Se $\Phi(B_d(P)) \leq \Phi(R) \leq 90$ então a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta R separa r de s (contradição). Por outro lado, se $90 < \Phi(R) \leq \Phi(B_e(P))$ então R separa r de s (contradição) ou R contribui para uma ponte inferior.

2. Analisaremos agora o caso em que a ponte superior P' é um segmento de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta R não degenerada. Pela Proposição 2.3.22 os braços de R são tais que

$$\Phi(B_d(P)) \leq \Phi(B_e(R)) \leq \Phi(B_e(P))$$

e

$$\Phi(B_d(P)) + 180 \leq \Phi(B_d(R)) \leq \Phi(B_e(P)) + 180.$$

Assim, da mesma forma que no caso degenerado aplicando-se argumento análogo do item anterior a cada braço da $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta não degenerada R , temos que $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta R passando pelo ponto q separa r de s (contradição). \square

A ponte com relação a L

O algoritmo **Ponte** encontra a ponte com relação a L analisando dois casos: ou a ponte é um segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada ou a ponte é um segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta não degenerada (com esquina entre seus pontos extremos).

Os dois casos são divididos nos algoritmos **CasoDeg** e **CasoNaoDeg**. Analisemos inicialmente o algoritmo **CasoDeg**. Devemos analisar duas situações a saber:

- a orientação do segmento de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada que é a ponte com relação a L possui a mesma orientação que L ;
- as orientações da ponte e da $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada L são distintas.

A primeira situação ocorre somente quando os pontos de $\mathbf{S}_{(e,L)}$ e $\mathbf{S}_{(d,L)}$ estão sobre L . Este caso é previsto no ponto $\ll 1 \gg$ na figura 3.8.

Na segunda situação, o algoritmo **CasoDeg** escolhe dentre as $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -retas degeneradas que passam por pontos de \mathbf{S} aquela que possui interseção de maior ordenada com L e que possui pontos à esquerda e à direita de L . Note que a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta assim escolhida é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta de suporte de \mathbf{S} e portanto contribui com um segmento para uma ponte com relação a L .

No caso em que nenhuma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta degenerada satisfaz a condição de escolha então o algoritmo **CasoNaoDeg** encontrará a ponte com relação a L conforme veremos a seguir. A orientação α escolhida em $\ll 1 \gg$ (figura 3.9) é a orientação do braço direito de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta tal que $\alpha \neq \Phi(L)$. Assim, $\mathbf{I}_{(d,\alpha)} \neq \emptyset$ no algoritmo **Casodir** da figura 3.10. A $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta R_α é degenerada com orientação α e de suporte do conjunto $\mathbf{S}_{(d,L)}$.

O conjunto $\mathbf{S}_{(e, R_\alpha)}$ é definido como o conjunto de pontos de \mathbf{S} que estão à esquerda ou sobre de R_α . Se $\mathbf{S}_{(e, R_\alpha)} = \emptyset$ então a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta com orientação do braço direito igual a α não contribui para a ponte. Se $\mathbf{S}_{(e, R_\alpha)} \neq \emptyset$, a $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta R_β definida no algoritmo é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte do conjunto $\mathbf{S}_{(e, R_\alpha)}$. A linha \mathcal{O} -poligonal T passando pelo ponto $R_\alpha \cap R_\beta$ com orientações α e β (formando um intervalo \mathcal{O} -livre) é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta de suporte (por construção).

3.4 Complexidade Algorítmica (*)

Faremos a análise de complexidade do Algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -Convexa**. Antes, porém, faremos uma definição e daremos uma propriedade relacionada que nos será útil.

Definição 3.4.1 *Duas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas P e Q são paralelas se P pode ser transladada de modo a coincidir com Q .*

É imediato verificar que paralelismo é uma relação de equivalência.

Proposição 3.4.2 *Existem 2δ classes de equivalência por paralelismo entre $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas.*

Demonstração: Cada orientação $\alpha \in \mathcal{O}$ dá origem a uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta degenerada e, além disso, existe uma única orientação que realiza com α uma $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta não degenerada. \square

A complexidade do algoritmo **CasoDeg** é $O(\delta n)$ (onde $n = |\mathbf{S}|$, pois a execução do laço **repita** é realizada $\delta/2$ vezes e todas as operações internas ao laço possuem custo de ordem $|\mathbf{S}|$). Vale ressaltar que estas operações são simples determinações de interseção entre segmentos de retas euclidianas (realizadas no máximo n vezes) e também de determinação de pontos com propriedade de máxima ou mínima abscissa ou ordenada (\max_{α_i}, p_e e p_d).

Já no algoritmo **CasoNaoDeg** temos também a mesma complexidade pois o laço **repita** é executado δ vezes chamando ou **CasoDir** ou **CasoEsq**. Nestes procedimentos as operações são de mesma natureza que no algoritmo **CasoDeg**. Assim, podemos dizer que o estágio da conquista no algoritmo possui custo de $c\delta n$, onde c é uma constante positiva.

Por outro lado, o estágio da divisão possui custo dado por

$$\max_{h_l + h_r = h} \left\{ f\left(\frac{n}{2}, h_l\right) + f\left(\frac{n}{2}, h_r\right) \right\} \text{ se } h > 2$$

onde h representa o número de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -arestas numa dada chamada recursiva e n o número de pontos considerados nesta mesma chamada.

Assim como no algoritmo dado em [11], a complexidade do algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa** é dada pela função $f(|\mathbf{S}|, h)$ onde h é o número de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -arestas de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}}(\mathbf{S})$. A função f deve satisfazer a seguinte relação de recorrência:

$$f(n, h) \leq \begin{cases} c\delta n & \text{se } h = 2, \\ c\delta n + \max_{h_l+h_r=h} \{f(\frac{n}{2}, h_l) + f(\frac{n}{2}, h_r)\} & \text{se } h > 2, \end{cases}$$

onde $n \geq h > 1$. Conforme demonstrado em [11], $f(n, h) \leq c\delta n \log h$.

Note que desta forma, obtemos um algoritmo para determinação da envoltória \mathcal{G}_O+ -convexa com a mesma complexidade $O(n \log h)$ do algoritmo de Kirkpatrick e Seidel [11] para o caso euclidiano.

No capítulo seguinte definiremos uma nova geometria advinda de um conjunto de curvas. Para a referida geometria definiremos o conceito de convexidade e mostramos um algoritmo para determinação da envoltória convexa.

Capítulo 4

A geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

No capítulo 2 abordamos a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ uma de cujas características é a existência de pelo menos uma reta passando por cada par de pontos. Na realidade, em $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ o número de retas que passa por um par de pontos é infinito, no entanto os segmentos destas retas entre o par de pontos são coincidentes. Veja que, desta forma, existe alguma semelhança com a geometria euclidiana. Além desta característica, a interseção de duas retas quaisquer daquela geometria é conexa, mas tal interseção não necessariamente é composta de um único ponto. Estas características nos foram úteis para explorar várias propriedades concernentes a convexidade, semelhantes às propriedades de conjuntos convexos na geometria euclidiana.

Intuitivamente, quanto maior a semelhança da geometria definida com a euclidiana, tanto maior o número de propriedades análogas às desta podem existir naquela. Isto nos motivou a definir uma nova geometria com características ainda mais próximas às da geometria euclidiana, tratando-se porém de uma generalização.

Neste capítulo, definiremos a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ onde para qualquer par de pontos do plano temos uma reta que passa por eles e esta reta é única. Veja que, conforme já observado, isto não acontece na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$.

A partir desta definição, exploraremos propriedades de convexidade nesta nova geometria e exibiremos dois algoritmos para determinação da envoltória convexa. Na seção 4.1 definiremos a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ e mostraremos algumas propriedades relativas a convexidade. As seções 4.2, 4.3 e 4.4 contêm propriedades e definições utilizadas no algoritmo para determinação da envoltória convexa na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ dado na seção 4.5. Por fim, na seção 4.6 exibimos um segundo algoritmo para determinação da envoltória convexa na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

4.1 Geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade(*)

Caracterizaremos nesta seção as famílias de curvas nas quais serão definidas as geometrias que estudaremos a seguir. Por clareza de exposição, convém que, por um momento, consideremos a extensão de \mathbb{R}^2 por um ponto no infinito e sua identificação (por projeção estereográfica) com a esfera de Riemann. Denominamos o ponto no infinito (correspondente ao pólo norte da esfera de Riemann) de *ponto impróprio* e os demais pontos de *pontos próprios*.

Seja \mathcal{F} uma família de curvas diferenciáveis por partes (definição E.1.20) na esfera de Riemann que satisfaz as seguintes condições:

- toda curva $C \in \mathcal{F}$ é uma curva de Jordan fechada que passa pelo pólo norte da esfera;
- dados dois pontos próprios existe um único membro da família \mathcal{F} que passa por eles;
- o número de partes diferenciáveis da curva é limitado.

Um exemplo de uma família de curvas é dado pelas parábolas $ax^2 + c = 0$, e retas $x = c$, $a, c \in \mathbb{R}$. Outros exemplos podem ser dados por gráficos de funções e retas verticais. É importante observar que a definição da família \mathcal{F} , a menos da última restrição, inicialmente foi feita em [7] que é uma generalização do trabalho de Peixoto [21].

Como usualmente lidaremos apenas com os pontos próprios, o leitor pode considerar que estaremos sempre trabalhando com \mathbb{R}^2 , a menos que explicitamente indiquemos que se trata de situação onde convenha considerar a esfera completa (ou seja, $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$).

Geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

Definiremos uma geometria baseada numa família \mathcal{F} de curvas que satisfaça as três condições descritas acima. A geometria denotada por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, tem por conjunto de pontos todo o \mathbb{R}^2 , por conjunto de retas as curvas de \mathcal{F} , e possui as mesmas regras de incidência da geometria euclidiana.

Utilizaremos daqui por diante o termo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta para referir a uma curva do conjunto \mathcal{F} e o termo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmento para referir a um arco de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta. Diremos que pontos sobre uma mesma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -colineares.

A seguir definiremos o conceito de convexidade na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ e exibiremos algumas propriedades relacionadas a este conceito que são análogas às de conjuntos convexos na geometria euclidiana e esta analogia permite adaptar métodos existentes para obtenção da envoltória convexa na geometria euclidiana para a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Definição 4.1.1 (*) Um conjunto de \mathbb{R}^2 é $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo se a interseção de qualquer $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta com o mesmo é conexa.

Note que a definição 4.1.1 é uma generalização do conceito de convexidade da geometria euclidiana pois se tomarmos como a família de curvas \mathcal{F} o conjunto das retas euclidianas no plano, temos a geometria euclidiana.

Esta generalização nos permite buscar propriedades de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade que sejam análogas a propriedades existentes na geometria euclidiana. A Proposição seguinte evidencia uma destas propriedades.

Proposição 4.1.2 (*) A interseção de conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos é um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo.

Demonstração: Sejam \mathbf{X} e \mathbf{Y} dois conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos e seja \mathbf{Z} a interseção de \mathbf{X} com \mathbf{Y} . Além disso, seja C uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que intercepta \mathbf{Z} .

Para mostrarmos a conexidade de $C \cap \mathbf{Z}$ é suficiente demonstrar que para todo par de pontos de $C \cap \mathbf{Z}$ o segmento de C entre eles está inteiramente contido em \mathbf{Z} .

Sejam p_1 e p_2 pontos de $C \cap \mathbf{Z}$. O arco de C entre p_1 e p_2 pertence a \mathbf{X} pela sua $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade, da mesma forma ele também pertence a \mathbf{Y} . Logo, o arco de C entre p_1 e p_2 pertence à interseção $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$. \square

A Proposição 4.1.2 induz uma relação de ordem parcial entre conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos dada por “ \subset ”. Isto nos permite definir a estrutura geométrica *Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa* dada a seguir.

Definição 4.1.3 (*) A envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 é o menor conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo que o contém. Onde “menor” é determinado pela relação de ordem parcial induzida pela relação “ \subset ”.

Podemos, então, caracterizar a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa utilizando a Proposição 4.1.2.

Corolário 4.1.4 (*) A envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de um conjunto de pontos é dada pela interseção de todos os conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos que o contém.

Demonstração: Conseqüência direta da Proposição 4.1.2. \square

Uma caracterização importante da envoltória convexa de um conjunto na geometria euclidiana é que esta pode ser dada pela interseção dos semi-planos que o contêm. Note que se obtivermos a mesma caracterização na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ isto poderá nos permitir adaptar algoritmos da geometria euclidiana para a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Assim, definiremos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos e mostraremos que conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos também são dados por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos que os contêm.

Definição 4.1.5 (*) *Seja C uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta. As duas regiões abertas e disjuntas que formam $\mathbb{R}^2 \setminus C$ são denominadas de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos.*

As propriedades das Proposições 4.1.6, 4.1.8 e 4.1.9 serão usadas no Corolário 4.1.10 que demonstra que conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos são dados pela interseção dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos que o contêm.

Proposição 4.1.6 (*) *Um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano é $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo.*

Demonstração: A interseção de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta com um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano não pode ser desconexa pois isto acarretaria em uma interseção com a fronteira do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano (uma outra $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta) em dois ou mais pontos, o que, por definição da família \mathcal{F} , não é possível ocorrer. \square

Definição 4.1.7 *Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^2 e seja C uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta. Dizemos que C é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de X , se X está contido na união de C com um de seus $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos e, além disso, C contém pelo menos um ponto da fronteira de X .*

As Proposições e Lemas abaixo que são devidas a Drandell [7] estão aqui redigidas de modo a utilizar a terminologia que introduzimos ao invés da redação original de Drandell.

Proposição 4.1.8 (Drandell [7]) *Seja X um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo, fechado e limitado com interior não vazio. Então, por cada ponto da fronteira de X passa uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que é de suporte de X .*

Proposição 4.1.9 (Drandell [7]) *Seja X um conjunto fechado e limitado com interior não vazio tal que por todo ponto da sua fronteira passa uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que é de suporte. Então X é um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo.*

Corolário 4.1.10 *Um conjunto X fechado, limitado e com interior não vazio é $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo se e somente se X é dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos que contêm X .*

A seguir serão dados dois Lemas 4.1.11 e 4.1.13 e duas definições que serão utilizadas na descrição de um algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Lema 4.1.11 (Drandell [7]) *Seja X um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo fechado, limitado, com interior não vazio. Seja p um ponto interno a X . Qualquer $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p intercepta a fronteira de X em dois pontos.*

Denotaremos por $A_{p,q}$ o arco da curva de \mathcal{F} entre p e q que não inclui o ponto no infinito.

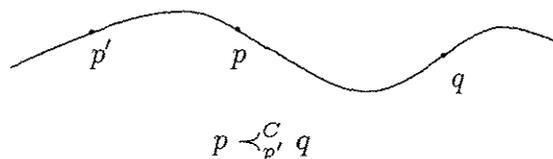


Figura 4.1: O ponto p precede q em C com relação a p' .

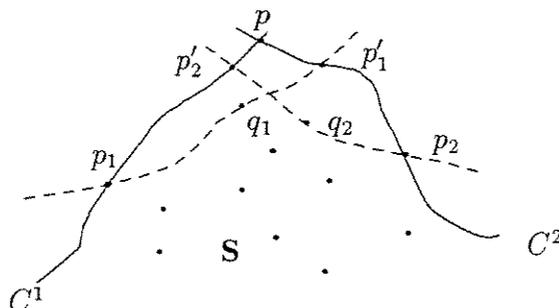


Figura 4.2: Figura usada no Lema 4.1.13.

Definição 4.1.12 (*) *Seja C uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta e sejam p e q dois pontos distintos de \mathbb{R}^2 em C . Considere um terceiro ponto $p' \in \mathbb{R}^2$ tal que $p' \notin A_{p,q}$ e $p' \in C$. Dizemos que p precede q em C com relação a p' se $p \in A_{p',q}$; em caso contrário, dizemos que p sucede q em C com relação a p' . Denotamos o primeiro caso por $p <_{p'}^C q$ e o segundo por $q <_{p'}^C p$ (figura 4.1).*

Daqui por diante consideraremos que \mathbf{S} é um conjunto finito de pontos tal que existe pelo menos 3 pontos não $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -colineares.

Lema 4.1.13 (*) *A fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} é composta pela união de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos (de suporte de \mathbf{S}) e os pontos extremos destes pertencem a \mathbf{S} .*

Demonstração: Seja $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$ a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$ é um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo e não vazio, pela escolha de \mathbf{S} . Assim pelo Corolário 4.1.10 temos que $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$ é dada pela interseção dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos que contêm \mathbf{S} . Note que a fronteira dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte. Resta mostrar que os pontos extremos destes $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos são pontos de \mathbf{S} .

Suponha, por contradição, que um dos pontos extremos de um dos arcos não é ponto de \mathbf{S} . Assim, sejam C^1 e C^2 duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte de \mathbf{S} que contêm dois $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas na fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} que se interceptam em $p \notin \mathbf{S}$

(figura 4.2), ou seja, p é extremo de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos mas não pertence ao conjunto \mathbf{S} . Além disso, sejam p_1 e p_2 dois pontos de \mathbf{S} em C^1 e C^2 , respectivamente, (note que estes pontos existem pois C^1 e C^2 são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte de um conjunto finito) tais que p_1 está no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^2 contendo \mathbf{S} e p_2 está no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^1 contendo \mathbf{S} .

Seja $I_1(I_2)$ o conjunto das interseções entre a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta $C^1(C^2)$ e as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas passando por $p_2(p_1)$ e por pontos de \mathbf{S} .

Sejam

$$p'_1 := r \in I_1 : r \prec_p^{C^1} q, \text{ para todo } q \in I_1,$$

$$p'_2 := r' \in I_2 : r' \prec_p^{C^2} q, \text{ para todo } q \in I_2 \text{ e}$$

pontos em C^1 e C^2 , respectivamente. Note que p'_1 e p'_2 são os pontos de I_1 e I_2 em C^1 e C^2 , respectivamente, mais próximos de p (veja a figura 4.2).

Sejam q_1 e q_2 pontos de \mathbf{S} em C_{p_1, p'_1} e C_{p_2, p'_2} , respectivamente, tais que q_1 é o ponto de \mathbf{S} em C_{p_1, p'_1} mais próximo de p'_1 e q_2 é o ponto de \mathbf{S} em C_{p_2, p'_2} mais próximo de p'_2 . É fácil ver que C_{p_1, q_1} e C_{p_2, q_2} são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte de \mathbf{S} , pois de outra forma estaríamos contrariando a escolha de p'_1 e p'_2 .

Note que a interseção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa com os $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C_{p_1, p'_1} e C_{p_2, p'_2} e que contém \mathbf{S} resulta em um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo menor que a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa. Contradição. \square

Definição 4.1.14 (*) *Denominamos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -aresta a fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa entre dois pontos p e q de \mathbf{S} tais que entre p e q não existe nenhum outro ponto de \mathbf{S} .*

Na próxima seção, descreveremos um método para, dado um conjunto \mathbf{S} , encontrar um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} , sem se tê-la construído previamente. Tal ponto será utilizado para definir relações de ordem entre pontos, entre pontos e $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas, e entre duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas.

4.2 Determinação de um Ponto Fora da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)

Nesta seção descreveremos como obter um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de um conjunto \mathbf{S} . Este ponto será utilizado para definir relações de ordem entre pontos e entre pontos e $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas. A determinação deste ponto será realizada sem a obtenção prévia da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Nesta geometria, a obtenção de um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa não é trivial como no caso da geometria euclidiana. Isto se deve ao fato de que na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ a

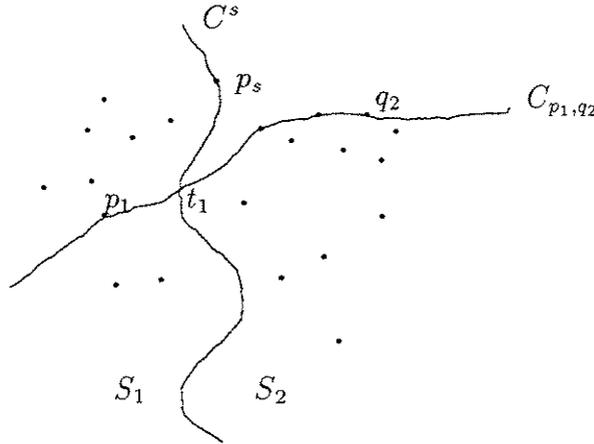


Figura 4.3: $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_1, q_2} .

noção de paralelismo¹ não é igual ao da geometria euclidiana, na qual dada uma reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela à reta dada passando por esse ponto. Na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ esta propriedade não é válida pois existe um número indefinido de paralelas a uma dada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta já que este número pode variar de acordo com a família \mathcal{F} .

A abordagem adotada para determinar o referido ponto é a de encontrar uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S} e determinar um ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por essa $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta e que não contém o conjunto \mathbf{S} .

Descreveremos então como obter uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} . Seja C^s uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta. Temos dois casos a analisar de acordo com a posição de C^s com relação ao conjunto \mathbf{S} : ou o conjunto \mathbf{S} está totalmente contido em um dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C^s ou ambos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C^s contém pontos de \mathbf{S} .

No primeiro caso, temos imediatamente que qualquer ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^s e que não contém \mathbf{S} é um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Analisaremos então o segundo caso. Denominamos de \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 os subconjuntos determinados pela divisão de \mathbf{S} através da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^s . Consideraremos, sem perda de generalidade, que os pontos de \mathbf{S} sobre C^s pertencem a \mathbf{S}_1 .

Seja $p_1 \in \mathbf{S}_1$ e seja

$$I_1 := \{C^s \cap C_{p_1, q} : \text{para cada } q \in \mathbf{S}_2\},$$

o conjunto das interseções da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^s com as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas que passam por p_1 e por pontos de \mathbf{S}_2 (veja a figura 4.3).

¹Denominamos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas *paralelas* aquelas que não se interceptam.

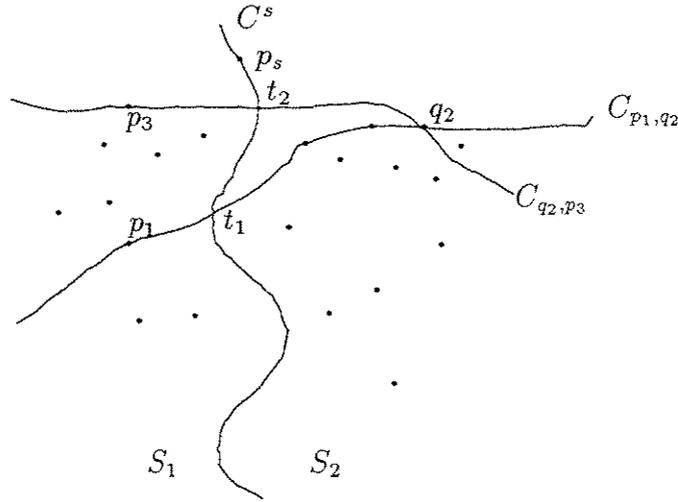


Figura 4.4: Curva C_{q_2, p_3} .

Seja p_s um ponto sobre C^s tal que $p_s \notin A_{p, q}$ para $p, q \in I_1$. Seja t_1 o ponto de I_1 tal que

$$t_1 \prec_{p_s}^{C^s} q, \text{ para todo } q \in I_1,$$

ou seja, t_1 é o ponto de I_1 mais próximo de p_s em C^s .

Considere agora a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p_1 e t_1 e seja q_2 o ponto em \mathbf{S}_2 tal que

$$q \prec_{t_1}^{C_{p_1, t_1}} q_2, q \in \mathbf{S}_2 \text{ e } q \in C_{p_1, t_1},$$

ou seja, q_2 é o ponto de \mathbf{S}_2 sobre C_{p_1, t_1} mais afastado de t_1 . Para denotar a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p_1 e t_1 utilizaremos C_{p_1, q_2} pois $C_{p_1, q_2} = C_{p_1, t_1}$.

Note que o conjunto \mathbf{S}_2 está contido na interseção dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C^s e por C_{p_1, q_2} , pois, de outra forma, haveria contradição com a escolha de t_1 . Observe ainda que a semi-reta de C_{p_1, q_2} contida no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^s e que contém \mathbf{S}_2 é um arco que limita \mathbf{S}_2 em um dos seus lados.

Encontraremos agora um arco que limita o conjunto \mathbf{S}_1 de um dos seus lados. O mesmo procedimento utilizado para encontrar A_{t_1, q_2} será utilizado para encontrar o arco que limita \mathbf{S}_1 . Desta vez, o ponto de partida será o ponto q_2 .

Assim, seja C_{q_2, p_3} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta cujo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmento A_{t_2, p_3} limita \mathbf{S}_1 em um dos seus lados onde $t_2 \in C^s$ e $p_3 \in \mathbf{S}_1$ (figura 4.4). Agora, seja r_1 um ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^s e que contém \mathbf{S}_1 tal que r_1 está no lado oposto em que \mathbf{S}_1 está com relação ao arco A_{t_2, p_3} (figura 4.5).

Encontraremos agora uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S}_1 passando pelo ponto r_1 .

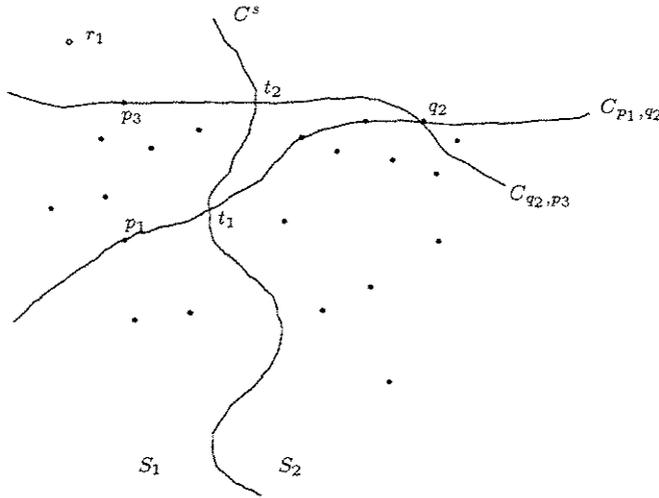


Figura 4.5: Ponto r_1 .

Seja

$$I_2 := \{C_{q_2, p_3} \cap C_{r_1, q}, q \in \mathbf{S}_1\},$$

o conjunto das interseções da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{q_2, p_3} com as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas que passam por r_1 e por pontos de \mathbf{S}_1 . Seja t_3 o ponto de I_2 tal que

$$q \prec_{t_2}^{C_{q_2, p_3}} t_3, q \in I_2,$$

ou seja, t_3 é o ponto mais afastado de t_2 na $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{q_2, p_3} .

Note que a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{r_1, t_3} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S}_1 passando pelo ponto r_1 , pois de outra forma teríamos uma contradição com a escolha de t_3 .

Considere o conjunto de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas passando pelo ponto t_3 e por pontos de \mathbf{S}_2 . Seja

$$I_3 := \{C^s \cap C_{t_3, p} : \text{para todo } p \in \mathbf{S}_2\},$$

o conjunto das interseções da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^s com as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas passando por t_3 e por pontos de \mathbf{S}_2 .

Seja $p_{s'}$ um ponto sobre C^s tal que $p_{s'}$ está no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C_{p_1, q_2} e que não contém \mathbf{S}_2 e, além disso, $p_{s'} \notin A_{p, q}$ para $p, q \in I_3 \cup \{t_2\}$ (figura 4.6).

Seja t_4 o ponto de I_3 tal que

$$t_4 \prec_{p_{s'}}^{C^s} q, \text{ para todo } q \in I_3,$$

ou seja, t_4 é o ponto de I_3 mais próximo de $p_{s'}$.

Demonstraremos na Proposição 4.2.1 que a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{t_3, t_4} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S} .

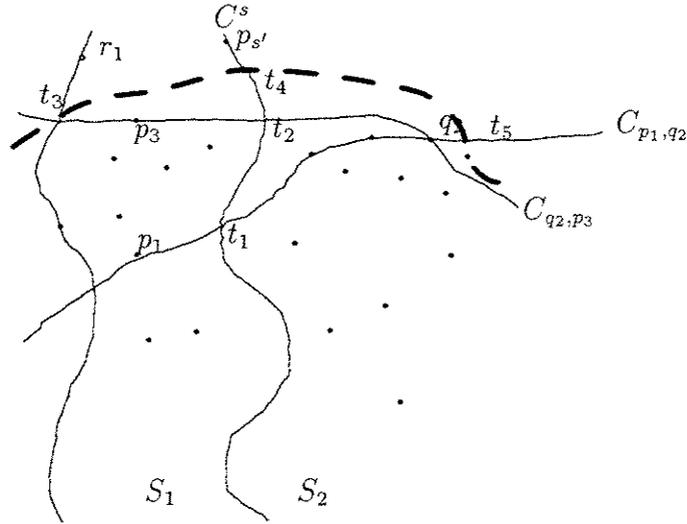


Figura 4.6: Ponto t_4 .

Proposição 4.2.1 (*) *Sejam C^s , C_{p_1,q_2} , C_{q_2,p_3} e C_{r_1,t_3} as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas descritas acima. Se $t_4 \prec_{p_3}^{C^s} t_2$ então C_{t_3,t_4} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} (veja a figura 4.6).*

Demonstração: A $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{t_3,t_4} intercepta C_{r_1,t_3} e C_{q_2,p_3} em t_3 . Pela definição de \mathcal{F} , t_3 é o único ponto de interseção destas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas.

Por construção, $t_4(C_{t_3,t_4} \cap C^s)$ e $t_2(C_{q_2,p_3} \cap C^s)$ são tais que $t_4 \prec_{p_3}^{C^s} t_2$. Desta forma, a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{t_3,t_4} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S}_1 .

Note ainda que $t_1(C_{p_1,q_2} \cap C^s)$ e t_2 são tais que $t_2 \prec_{p_3}^{C^s} t_1$. Logo, a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{t_3,t_4} é de suporte do conjunto \mathbf{S}_2 . \square

O método acima encontra-se descrito no algoritmo **Pontofora** dado na figura 4.7. Analisamos a seguir a complexidade do algoritmo **Pontofora**. Antes porém, faremos considerações à respeito das interseções realizadas entre curvas da família \mathcal{F} . A determinação do conjunto I_1 (algoritmo **Pontofora**) depende das características das curvas envolvidas na interseção. Se as curvas envolvidas tiverem representação polinomial até grau quatro então a determinação da interseção pode ser feita através da resolução simples de uma equação. No entanto, isto nem sempre acontece, neste caso devemos recorrer a métodos numéricos, nem sempre triviais, para a determinação da interseção entre duas curvas da família. A complexidade algorítmica para determinação destas interseções vai depender das curvas da família \mathcal{F} . Assim, consideraremos que a determinação das interseções entre curvas de \mathcal{F} possui complexidade $c_{\mathcal{F}}^1$, onde $c_{\mathcal{F}}^1$ indica a complexidade do método numérico utilizado para determinação das interseções entre curvas da família \mathcal{F} . Analisemos agora a complexidade do algoritmo **Pontofora**:

Algoritmo PontoFora**Entrada:** Conjunto S de pontos.**Saída:** Um ponto de \mathbb{R}^2 fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de S .seja C^s uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta em \mathbb{R}^2 .se S está totalmente em um dos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C^s então devolva um ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano oposto

senão

início C^s particiona o conjunto S em S_1 e S_2 % Considere que os pontos $S \cap C^s$ estão em S_1 seja $p_1 \in S_1$ $I_1 := \{C^s \cap C_{p_1, q} : \text{para todo } q \in S_2\}$ $t_1 := p \in I_1 : p \prec_{p^s} q, \text{ para todo } q \in I_1$ seja q_2 o ponto de S_2 sobre a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_1, t_1} mais afastado de t_1 seja C_{q_2, p_3} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por q_2 com interseção t_2 com a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^s tal que A_{t_2, p_3} limita S_1 em um dos seus ladosseja r_1 um ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C^s que contém S_1 , com r_1 no lado oposto ao que S_1 está com relação ao arco A_{t_2, p_3} seja C_{r_1, t_3} uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de S_1 passando por r_1 com interseção t_3 com a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{q_2, p_3} seja C_{t_3, t_4} uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de S passando por t_3 Considere o $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C_{t_3, t_4} e que não contém S Tome um ponto p neste $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano**devolva** p **fim**

Figura 4.7: Algoritmo PontoFora.

- determinar se o conjunto S está totalmente de um dos lados de uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta R pode ser feito através de um teste análogo ao teste para determinar se um ponto está dentro ou fora de um polígono euclidiano. Esta operação tem custo $O(V)$ onde V é o número máximo de partes diferenciáveis de uma curva de \mathcal{F} . Assim, a complexidade algorítmica para esta operação é $O(|S| \cdot V)$. Note que as curvas de \mathcal{F} são curvas fechadas de Jordan, assim se todos os pontos de S estão em uma das regiões limitadas por R , então S está totalmente de um dos lados de R .
- a determinação do ponto t_1 depende do conjunto I_1 e do cálculo da distância do ponto p^s aos pontos de I_1 sobre C^s que pode ser realizada através do cálculo de uma integral usando-se um método numérico. Determinar o ponto t_1 requer um custo de

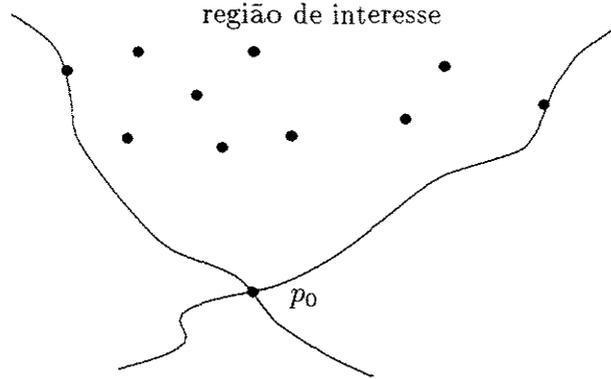


Figura 4.8: Região de interesse relativa ao ponto p_0 .

$O(c_{\mathcal{F}}^2 \cdot n)$, onde $c_{\mathcal{F}}^2$ é a complexidade do método numérico para se calcular a integral de uma curva da família \mathcal{F} .

Assim, a complexidade do algoritmo **Pontofora** é $O(|\mathbf{S}|(c_{\mathcal{F}}^1 + c_{\mathcal{F}}^2 + V))$.

Na seção seguinte definiremos algumas relações de ordem que serão utilizadas para a determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

4.3 Algumas Relações de Ordem(*)

Nesta seção definiremos algumas relações de ordem entre $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas e entre pontos da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ que serão úteis para descrição do algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Proposição 4.3.1 (Drandell [7]) *Seja \mathbf{X} um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo, fechado, limitado de interior não vazio. Seja p_0 um ponto fora de \mathbf{X} . Então, existem exatamente duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de \mathcal{F} passando por p_0 que são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte de \mathbf{X} .*

Definição 4.3.2 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam C^1 e C^2 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte de \mathbf{S} passando por p_0 e sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 os $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos limitados por C^1 e C^2 , respectivamente, que contêm \mathbf{S} . A interseção $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ é denominada de região de interesse relativa ao ponto p_0 (veja a figura 4.8).*

Note que pela Proposição 4.3.1 o conceito de região de interesse está bem definido. Agora definiremos uma relação entre pontos situados na região de interesse relativa a um ponto.

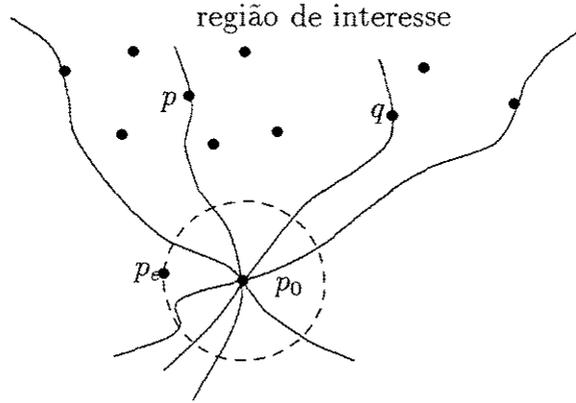


Figura 4.9: O ponto p está à esquerda do ponto q com relação a p_0 .

Definição 4.3.3 (*) Seja p_0 um ponto fora da envoltória \mathcal{G}_F -convexa de \mathbf{S} e sejam p e q dois pontos distintos de \mathbf{S} . Seja $B_{\mathcal{F}}(p_0, r)$ uma bola com centro em p_0 e raio $r > 0$. Escolha um ponto p_e sobre $\partial B_{\mathcal{F}}(p_0, r)$ (fronteira de $B_{\mathcal{F}}(p_0, r)$) fora da região de interesse relativa a p_0 . Dizemos que p está à esquerda (direita) de q com relação a p_0 se encontrarmos o \mathcal{G}_F -segmento $A_{p_0, p}$ antes do \mathcal{G}_F -segmento $A_{p_0, q}$ quando caminhamos sobre $\partial B_{\mathcal{F}}(p_0, r)$ em sentido horário a partir de p_e (veja a figura 4.9).

Note que esta relação independe do ponto p_e escolhido (desde que fora da região de interesse). Denotamos por $p \models_{p_0} q$ ($q \models_{p_0} p$) quando p está à esquerda (direita) de q com relação a p_0 .

Definição 4.3.4 (*) Seja p_0 um ponto fora da envoltória \mathcal{G}_F -convexa de \mathbf{S} . Dizemos que um ponto $p \in \mathbf{S}$ está à esquerda (direita) de uma \mathcal{G}_F -reta C que passa por p_0 e que intercepta a sua região de interesse se para qualquer ponto q na interseção de C com a região de interesse tivermos que $p \models_{p_0} q$ ($q \models_{p_0} p$).

O método utilizado para a determinação da envoltória \mathcal{G}_F -convexa utiliza o paradigma de divisão e conquista e é dividida em duas partes: primeiramente determina-se a *cadeia superior* e posteriormente a *cadeia inferior*. Definiremos na seção seguinte as cadeias superior e inferior da envoltória na geometria \mathcal{G}_F .

4.4 Cadeia Superior e Inferior

Nesta seção, dividimos a cadeia de arcos da fronteira da envoltória \mathcal{G}_F -convexa de \mathbf{S} em duas partes cujos pontos extremos são os pontos p_i e p_f que serão definidos mais

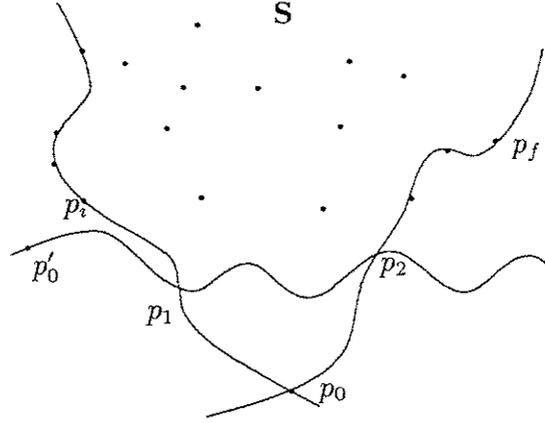


Figura 4.10: Pontos extremos da cadeia superior.

adiante. Demonstraremos que tais pontos pertencem à fronteira da envoltória e, por fim, definiremos *cadeia superior e inferior*.

Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} e seja C^{p_0} uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que separa \mathbf{S} de p_0 . Seja I_1 o conjunto das interseções de C^{p_0} com todas as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas passando por p_0 e por pontos de \mathbf{S} . Seja p'_0 um ponto em C^{p_0} tal que $p'_0 \notin A_{p,q}$ para $p, q \in I_1$. Defina

$$p_1 := p \in I_1 : p \prec_{p'_0}^{C^{p_0}} q, \text{ para todo } q \in I_1,$$

$$p_2 := p \in I_1 : q \prec_{p'_0}^{C^{p_0}} p, \text{ para todo } q \in I_1.$$

Seja $p_i(p_f)$ um ponto de \mathbf{S} na $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta $C_{p_0,p_1}(C_{p_0,p_2})$ (figura 4.10) tal que

$$p_i := p \in C_{p_0,p_1} \text{ e } p \in \mathbf{S} : p \prec_{p_0}^{C_{p_0,p_1}} r, r \in \mathbf{S} \text{ e } r \in C_{p_0,p_1},$$

$$p_f := p \in C_{p_0,p_2} \text{ e } p \in \mathbf{S} : s \prec_{p_0}^{C_{p_0,p_2}} p, s \in \mathbf{S} \text{ e } s \in C_{p_0,p_2}.$$

Proposição 4.4.1 (*) *Sejam C^{p_0} , C_{p_0,p_1} , p_0 , p'_0 , p_i , p_1 e \mathbf{S} as estruturas geométricas descritas acima. Então C_{p_0,p_i} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} .*

Demonstração: Suponha, por contradição, que C_{p_0,p_i} não seja uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} . Então existem pontos p' e p'' de \mathbf{S} em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-planos distintos limitados por C_{p_0,p_i} .

Seja $C_{p_0,p'}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_0 e p' e seja $C_{p_0,p''}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_0 e p'' . Uma destas duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas intercepta C em um ponto p_t tal que $p_t \prec_{p'_0}^C p_1$. Contradição à escolha de p_1 . \square

Proposição 4.4.2 (*) *Sejam C_{p_0,p_1} , p_0 , p_i e \mathbf{S} as estruturas geométricas descritas acima. Então p_i pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} .*

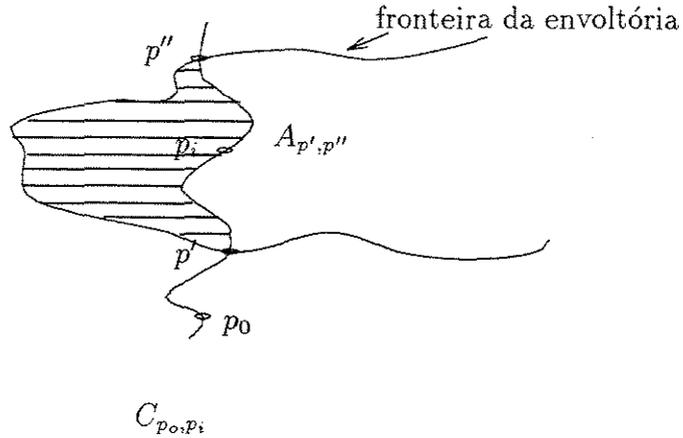


Figura 4.11: Figura usada na Proposição 4.4.2.

Demonstração: Suponha, por contradição, que p_i é um ponto interior à envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Então pelo Lema 4.1.11 a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_0, p_i} intercepta a fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa em dois pontos p' e p'' .

Pela Proposição 4.4.1 a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_0, p_i} é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte, então a região entre $A_{p', p''}$ e a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_0, p_i} não contém pontos de \mathbf{S} (veja a figura 4.11). Assim, a interseção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa com o $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C_{p_0, p_i} é um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo contendo \mathbf{S} .

Portanto, temos um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo contendo \mathbf{S} menor do que a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} , o que é uma contradição. \square

Observe que, analogamente à Proposição acima, temos que C_{p_0, p_f} também é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} e o ponto p_f também pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} .

Definição 4.4.3 (*) Denominamos a fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa entre p_i e p_f no sentido anti-horário com relação a um ponto interior à envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa. A outra parte da fronteira denominamos de cadeia inferior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Note que para a determinação dos pontos p_i e p_f utilizamos a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^{p_0} que separa p_0 de \mathbf{S} , descreveremos agora como obter tal $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta. No ponto p_0 estabeleça uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S} . Veja que existe pelo menos um ponto de \mathbf{S} nesta $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte. Escolha dentre estes pontos o mais próximo de p_0 e estabeleça nele uma outra $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte distinta daquela que passa por p_0 . Esta última $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta separa p_0 de \mathbf{S} , pois duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de \mathcal{F} podem interceptar-se no máximo uma única vez. As operações

descritas para encontrar a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que separa p_0 de \mathbf{S} são $O(|\mathbf{S}| \cdot V)$ pois utilizamos apenas operações de teste entre pontos e curvas (conforme já observado no algoritmo **PontoFora**).

Na seção seguinte descreveremos um algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

4.5 Um Algoritmo para Determinação da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)

Nesta seção, descreveremos um algoritmo para construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de um conjunto finito de pontos \mathbf{S} , utilizando o paradigma de divisão e conquista.

Dividiremos a construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa em duas etapas, cada etapa determinará uma cadeia de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa que, quando concatenadas, formam a fronteira da envoltória.

Assim, sejam p_i e p_f os pontos extremos da cadeia superior (seção 4.4). Dividiremos então o conjunto \mathbf{S} em duas partes \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 . O conjunto $\mathbf{S}_1(\mathbf{S}_2)$ é constituído pelos pontos de \mathbf{S} que estão estritamente à esquerda da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_i, p_f} que passa por p_i e p_f , tendo como referencial um ponto que caminha sobre C_{p_i, p_f} de p_i a p_f (veja a figura 4.12). Consideraremos também que os pontos p_i e p_f pertencem a \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 . Convém observar que os pontos de \mathbf{S} sobre C_{p_i, p_f} podem ser descartados pois estes sempre estão no interior da envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

O conjunto \mathbf{S}_1 contém os pontos da fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa que formam a cadeia superior que, quando concatenada com a cadeia inferior proveniente dos pontos do conjunto \mathbf{S}_2 , dá origem à cadeia completa de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} .

Para determinarmos a cadeia superior utilizaremos algumas definições e uma propriedade relacionada a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulos (Proposição 4.5.3).

Definição 4.5.1 (*) *Dados n pontos q_0, q_1, \dots, q_{n-1} , (onde quaisquer três pontos são não $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -colineares) que definem uma seqüência de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos em ordem cíclica $T_i = q_i q_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, onde as somas dos índices são tomadas módulo n , os pontos q_i 's juntamente com os segmentos T_i 's formam um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono.*

Definição 4.5.2 (*) *Denominaremos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo todo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono com três $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas.*

Daqui por diante consideraremos apenas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígonos simples, isto é, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígonos cujas arestas se interceptam apenas em seus extremos. Note que a seqüência de pontos

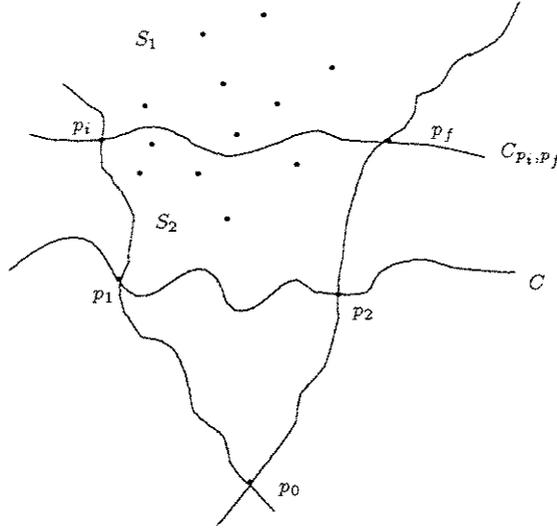


Figura 4.12: Divisão do conjunto S .

que forma um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono (seqüência de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmentos da Definição 4.5.1) define uma curva de Jordan fechada no plano. Portanto, existe uma área limitada a qual chamamos de *interior do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono*.

Quando nos referirmos a um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígono estaremos também referenciando seu interior (quando isto não for necessário faremos as devidas observações). A Proposição 4.5.3 estabelece uma propriedade importante para eliminação de pontos do conjunto S que não pertencem à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa.

Proposição 4.5.3 (*) *Seja X um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo e p um ponto de X , p pertence ao interior de algum $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo com vértices em pontos de X , se e somente se p não pertence à fronteira de X .*

Demonstração:

\Rightarrow Suponha, por contradição, que p pertence à fronteira de X . Então pela Proposição 4.1.8 temos que por p passa uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C que é de suporte de X . Logo, C intercepta exatamente duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas de um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo que contém p pois as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas quando interceptam-se o fazem em apenas um ponto. Desta forma, C deixa de ser uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte pois existem vértices do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo em lados opostos de C . Contradição.

\Leftarrow Seja p um ponto no interior de X . Seja C^1 uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por um ponto no interior de X distinto de p . Pelo Lema 4.1.11 a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^1 intercepta a fronteira de X em dois pontos. Sejam p_1 e p_2 estes pontos.

Seja $C_{p_2, p}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_2 e p . Seja $q_1 \in X$ um ponto sobre $C_{p_2, p}$ tal que $p \prec_{C_{p_2, p}}^{C_{p_2, p}} q_1$ (veja a figura 4.13). Seja C_{p_1, q_1} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_1 e q_1 , considere agora

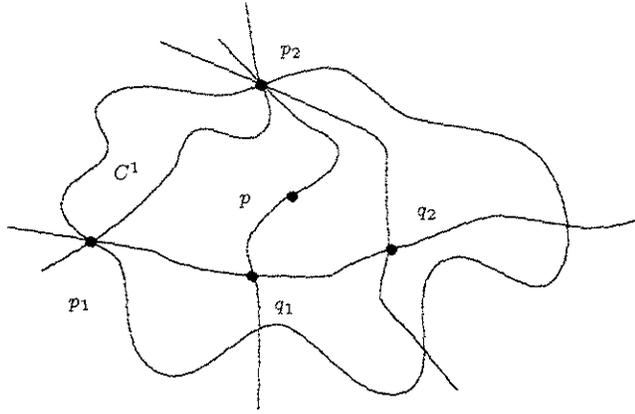


Figura 4.13: Figura usada na Proposição 4.5.3 (\Leftarrow).

um ponto $q_2 \in \mathbf{X}$ tal que $q_1 \prec_{p_1}^{C_{p_1, q_1}} q_2$. Seja, também, C_{p_2, q_2} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_2 e q_2 .

Note que os arcos A_{p_1, p_2} , A_{p_2, q_2} e A_{q_2, p_1} formam um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo com vértices em pontos de \mathbf{X} e que contém p em seu interior. \square

A obtenção dos pontos da fronteira da envoltória que pertencem à cadeia superior será feita utilizando-se o paradigma de divisão e conquista semelhante ao descrito por Preparata e Shamos em [22]. O processo da divisão será feito através da construção de um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo com vértices nos pontos do conjunto tal que este $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo divide o conjunto em três subconjuntos a saber: um subconjunto de pontos no interior do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo (possivelmente vazio) e dois outros subconjuntos descritos mais adiante.

Note que o subconjunto no interior do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo pode ser eliminado utilizando a propriedade da Proposição 4.5.3. No caso de não haver pontos de \mathbf{S} internos ao triângulo não eliminamos nenhum ponto. Os dois outros subconjuntos citados, se forem não vazios são submetidos novamente ao processo de divisão, e em caso contrário, os vértices do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo são pontos da fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa (Proposição 4.5.3). Veja que no processo de divisão um novo vértice de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$ é determinado.

Para construir o $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo descrito acima utilizamos os pontos p_i e p_j e um terceiro ponto que também pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa. Descreveremos agora como obter este terceiro ponto.

Seja p' um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa do conjunto \mathbf{S}_1 tal que p' pertence à $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_i, p_j} . Seja C' uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que separa p' de \mathbf{S}_1 .

Para obter um ponto de \mathbf{S}_1 que pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S}_1 procedemos da mesma forma que na obtenção dos pontos p_i e p_j . Assim, seja I_2 o conjunto das interseções da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C' com as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas que passam por p' e por pontos de \mathbf{S}_1 . Seja

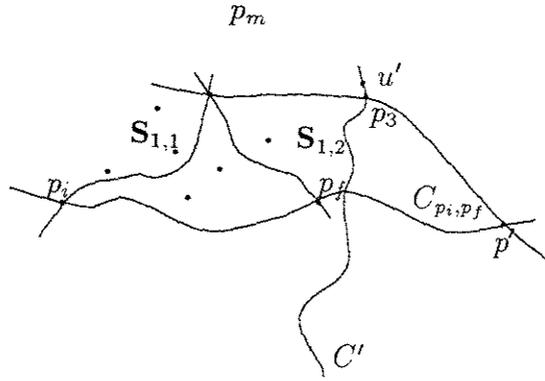


Figura 4.14: Divisão do conjunto \mathbf{S}_1 .

$p_{r'}$, um ponto de C' tal que $p_{r'} \notin A_{r,s}$ para $r, s \in I_2$ e $p_{r'}$ pertence ao mesmo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano ao qual \mathbf{S}_1 pertence. Defina

$$p_3 := p \in I_2 : p \prec_{p_{r'}}^{C'} q, q \in I_2.$$

Seja C_{p', p_3} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p' e p_3 e seja p_m um ponto de \mathbf{S}_1 que pertence a C_{p', p_3} . Pela Proposição 4.4.1 o ponto p_m pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa (veja a figura 4.14). Note que podem existir vários pontos sobre C_{p', p_3} e todos eles pertencem a fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa. Assim, qualquer destes serve ao nosso propósito.

Desta forma, temos três pontos (p_i, p_j, p_m) para formar um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo. Esse triângulo divide o conjunto \mathbf{S}_1 em três subconjuntos, o primeiro subconjunto é dado pelos pontos interiores ao $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo, pela Proposição 4.5.3 os pontos internos ao $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo (p_i, p_j, p_m) não pertencem à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S}_1 e portanto podem ser desconsiderados.

Os dois outros subconjuntos formados com a construção do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo são: um subconjunto contido no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado pela $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_j, p_m} e que não contém os pontos internos do referido $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo e o outro subconjunto contido no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C_{p_i, p_m} e que não contém os pontos internos do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo (p_i, p_j, p_m) (veja a figura 4.14).

Como não temos informações adicionais sobre estes dois últimos subconjuntos aplicaremos o mesmo método descrito acima para cada um desses dois subconjuntos, ou seja, construiremos novamente outro $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo para eliminarmos pontos. Esta eliminação de pontos continua até ficarmos com um subconjunto de apenas três pontos. Note que neste momento, os três pontos pertencem à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S}_1 . A eliminação é correta pois pela Proposição 4.5.3 qualquer ponto no interior de um $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo com vértices em \mathbf{S} não pertence à fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Os

Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-1**Entrada:** Conjunto de pontos \mathbf{S} .**Saída:** Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa.seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} seja C^0 uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que separa p_0 de \mathbf{S} « 1 » $L := \{C' \in \mathcal{F} : C' \text{ passa por } p_0 \text{ e } q \in \mathbf{S}\}$ $I_1 := \bigcup_{C_i \in L} C^0 \cap C_i$ seja p_r um ponto em C^0 tal que $p_r \notin A_{p,q}, \forall p, q \in I_1$ $p_1 := p : p \prec_{p_r}^{C^0} q, \forall q \in I_1$ $p_2 := p : q \prec_{p_r}^{C^0} p, \forall q \in I_1$ $p_i := p \in C_{p_0, p_1} \cap \mathbf{S} : p \prec_{p_r}^{C_{p_0, p_1}} q, \forall q \in \mathbf{S} \cap C_{p_0, p_1}$ $p_f := p \in C_{p_0, p_2} \cap \mathbf{S} : q \prec_{p_r}^{C_{p_0, p_2}} p, \forall q \in \mathbf{S} \cap C_{p_0, p_2}$ $\mathbf{S}_1 := \{p \in \mathbf{S} : p \text{ está à esquerda de } C_{p_i, p_f} \text{ quando se caminha de } p_i \text{ para } p_f\} \cup \{p_i, p_f\}$ $\mathbf{S}_2 := \{p \in \mathbf{S} : p \text{ está à direita de } C_{p_i, p_f} \text{ quando se caminha de } p_i \text{ para } p_f\} \cup \{p_i, p_f\}$ devolva $\left\{ \begin{array}{l} \text{Envoltória-}\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-Convexa-Superior}(\mathbf{S}_1, p_i, p_f) \\ \cup \\ \text{Envoltória-}\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-Convexa-Inferior}(\mathbf{S}_2, p_f, p_i) \end{array} \right.$

Figura 4.15: Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-1.

algoritmos são dados nas figuras 4.15, 4.16 e 4.17.

O algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-1** (figura 4.15) tem complexidade $O(|\mathbf{S}|(c_{\mathcal{F}}^1 + c_{\mathcal{F}}^2 + V))$ onde $c_{\mathcal{F}}^1, c_{\mathcal{F}}^2$ e V foi definido na seção 4.2 (dependência da família de curvas). Note que a eliminação dos pontos com a construção do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -triângulo no algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-Superior** (figura 4.16) tem complexidade $O(|\mathbf{S}|(c_{\mathcal{F}}^1 + c_{\mathcal{F}}^2 + V))$. Após esta eliminação existe uma chamada recursiva com os subconjuntos \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 . A análise do caso médio deste algoritmo é semelhante a análise do caso médio do algoritmo *Quick-Hull* dada em [22]. Assim, no caso médio a complexidade deste algoritmo é $O(kn + kn \log n)$ onde $k = c_{\mathcal{F}}^1 + c_{\mathcal{F}}^2 + V$.

No entanto, pelo fato deste método utilizar a mesma abordagem do algoritmo *QuickHull*, no pior caso, **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-1** tem complexidade $O(kn^2)$.

Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-Superior

Entrada: Conjunto \mathbf{T} de pontos e os pontos p_i e p_f .

Saída: Parte da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa relativa ao conjunto de entrada.

se $\mathbf{T} = \{p_i, p_f\}$ então devolva (p_i, p_f)

senão

$p_m := \text{PontoFronteira}(\mathbf{T}, p_i, p_f)$

$\mathbf{T}_1 := \{p \in \mathbf{T} : \text{tal que } p \text{ está no } \mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-semi-plano limitado por } C_{p_i, p_m} \text{ e que não contém o ponto } p_f\}$

$\mathbf{T}_2 := \{p \in \mathbf{T} : \text{tal que } p \text{ está no } \mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-semi-plano limitado por } C_{p_f, p_m} \text{ e que não contém o ponto } p_i\}$

devolva $\left\{ \begin{array}{l} \text{Envoltória-}\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-Convexa-Superior}(\mathbf{T}_1, p_i, p_m) \\ \cup \\ \text{Envoltória-}\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\text{-Convexa-Superior}(\mathbf{T}_2, p_m, p_f) \end{array} \right.$

Figura 4.16: Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-Superior.

Algoritmo PontoFronteira

Entrada: Conjunto de pontos \mathbf{T} , pontos p_i e p_f .

Saída: Um ponto p_m da fronteira da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{T} .

seja C_{p_i, p_f} a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p_i e p_f

seja C' uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que deixa \mathbf{T} de um de seus lados e intercepta a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_i, p_f}

seja p' um ponto no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano limitado por C' e que não contém \mathbf{T}

$L := \{C \in \mathcal{F} : C \text{ passa por } p' \text{ e } q \in \mathbf{T} \text{ e } p'\}$

$I_2 := \bigcup_{C_i \in L} C' \cap C_i$

seja $p_{r'}$ um ponto em C' tal que $p_{r'} \notin A_{p, q}$ para $p, q \in I_2$

e $p_{r'}$ pertence ao mesmo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -semi-plano (limitado por C_{p_i, p_f}) que contém \mathbf{T}

$p'' := \{p : p \prec_{p_{r'}}^{C'} q, q \in I_2\}$

seja $p_t \in \mathbf{T}$ tal que $p_t \in C_{p_{r'}, p''}$

devolva p_t

Figura 4.17: Algoritmo PontoFronteira.

4.6 Outro Algoritmo para Determinação da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa(*)

Nesta seção descreveremos um outro algoritmo para a construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa e que utilizará a mesma abordagem empregada no algoritmo para a determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa dada no capítulo 3. A construção da cadeia superior e da cadeia inferior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa pode ser realizada em duas etapas independentes e análogas, então, apresentaremos apenas a construção da cadeia superior.

O paradigma utilizado para este algoritmo é o de divisão e conquista e segue uma abordagem semelhante à de Kirkpatrick e Seidel [11]. O processo da divisão da instância do problema será realizado por uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L passando por um ponto p_0 e pela região de interesse com relação a p_0 onde p_0 denotará um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa do conjunto \mathbf{S} . Antes de descrevermos o algoritmo necessitamos de algumas definições, dadas a seguir.

Definição 4.6.1 (*) *Seja $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$ a envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam CS e CI as cadeias superior e inferior de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$. Seja C^L uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de \mathcal{F} que passa por p_0 e pela região de interesse com relação a p_0 . Denominamos de ponte superior com relação a C^L a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -aresta de CS interceptada por C^L . No caso de duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -arestas interceptarem a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L (a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L passa por um vértice de $EC_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{S})$), consideraremos como ponte superior a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -aresta que possui um dos seus extremos estritamente à esquerda de C^L .*

Como na descrição do algoritmo para determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa, antes de resolvermos as instâncias menores no processo de divisão e conquista, determinamos como combinar as soluções daquelas instâncias, ou seja, basta encontrarmos a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -aresta que intercepta a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L . Note que desta forma, pela Definição 4.6.1, estamos encontrando a ponte superior com relação a C^L .

Após a determinação da ponte superior com relação à $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L que divide o conjunto \mathbf{S} , se faz necessária a eliminação de alguns pontos que não podem ser pontos extremos de uma ponte superior. A eliminação destes pontos é explicada a seguir.

Sejam r e s pontos extremos da ponte superior com relação a C^L . Eliminamos os pontos $p \in \mathbf{S}$ tais que

$$r \models_{p_0} p \models_{p_0} s,$$

onde \models foi definido na seção 4.3.

Na seção 4.7 demonstraremos que a eliminação de pontos, segundo este critério, não elimina nenhum ponto que possa ser extremo de alguma ponte superior que esteja ainda por ser determinada.

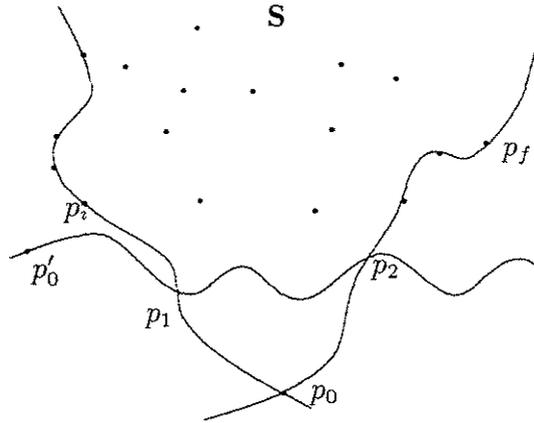


Figura 4.18: Construção realizada no algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa-2**.

Após a eliminação, aplicamos recursivamente o método descrito acima nos seguintes subconjuntos de \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}_1 := \{p : p \models_{p_0} r, p \in \mathbf{S}\}$$

$$\mathbf{S}_2 := \{p : s \models_{p_0} p, p \in \mathbf{S}\},$$

podendo ocorrer o caso em que nenhum ponto seja eliminado.

As figuras 4.19 e 4.20 ilustram o algoritmo descrito acima. A figura 4.18 ilustra a construção realizada no algoritmo **Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa-2**. Descreveremos a seguir um método para obtenção da ponte superior com relação a C^L .

A ponte superior com relação a C^L

O procedimento **Ponte**(\mathbf{S}, C^L) no algoritmo dado na figura 4.20 atribui a (r, s) os pontos extremos da ponte com relação a C^L . Descreveremos agora como obter tais pontos.

A abordagem adotada para encontrar os pontos extremos da ponte superior com relação a C^L baseia-se na classificação dos pontos de \mathbf{S} como candidatos a extremo da ponte superior ou como não candidatos.

Para esta classificação utilizamos a definição dada abaixo e os Lemas 4.6.3, 4.6.4 e 4.6.5.

Definição 4.6.2 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam C^1 e C^2 duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de \mathcal{F} cuja interseção p_i situa-se na região de interesse com relação ao ponto p_0 . Seja $B(p_i, r)$ a bola de centro em p_i e raio $r > 0$. Dizemos que C^1 precede C^2 (C^1 sucede C^2) com relação a p_0 se encontramos a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^1 antes (depois) de*

Algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-2**Entrada:** Conjunto de pontos \mathbf{S} .**Saída:** Cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} .seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} seja C^0 uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que separa p_0 de \mathbf{S}

$$I_1 := \bigcup_{p \in \mathbf{S}} C_{p_0, p} \cap C^0$$

seja p'_0 um ponto em C^0 tal que $p'_0 \notin A_{p, q}$, $p, q \in I_1$

$$p_1 := p \in I_1 : p \prec_{p'_0}^{C^0} q, q \in I_1$$

$$p_2 := p \in I_1 : q \prec_{p'_0}^{C^0} p, q \in I_1$$

seja p_i um ponto de \mathbf{S} na $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_0, p_1} tal que

$$p_i := p \in C_{p_0, p_1} \cap \mathbf{S} : p \prec_{p_0}^{C_{p_0, p_1}} q, q \in \mathbf{S} \cap C_{p_0, p_1}$$

seja p_f um ponto de \mathbf{S} na $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C_{p_0, p_2} tal que

$$p_f := p \in C_{p_0, p_2} \cap \mathbf{S} : q \prec_{p_0}^{C_{p_0, p_2}} p, q \in \mathbf{S} \cap C_{p_0, p_2}$$

se $|S| = 2$ então devolva C_{p_i, p_f} senão devolva $\text{CadeiaSuperior}(\mathbf{S}, p_i, p_f, C^0, p_0, p'_0)$

Figura 4.19: Algoritmo Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa.

Algoritmo CadeiaSuperior**Entrada:** O conjunto \mathbf{S} , pontos extremos p_i, p_f da cadeia superior da Envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa, a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^0 , o ponto p_0 e o ponto p'_0 (todos esses pontos são definidos no algoritmo Envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -Convexa-2).**Saída:** Vértices da cadeia superior da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} .

$$I_1 := \bigcup_{p \in \mathbf{S}} C_{p_0, p} \cap C^0$$

seja p_l o ponto mediano de I_1 relativo a $\prec_{p'_0}^{C^0}$

« 1 »

seja C^L a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_0 e p_l

$$(r, s) \leftarrow \text{Ponte}(\mathbf{S}, C^L)$$

imprima(r, s)

$$\mathbf{S}_1 := \{p \in \mathbf{S} : p \models_{p_0} r\}$$

$$\mathbf{S}_2 := \{p \in \mathbf{S} : s \models_{p_0} p\}$$

se $r \neq p_i$ então $\text{CadeiaSuperior}(\mathbf{S}_1, p_i, r, C^0, p_0, p'_0)$ se $s \neq p_f$ então $\text{CadeiaSuperior}(\mathbf{S}_2, s, p_f, C^0, p_0, p'_0)$

Figura 4.20: Algoritmo CadeiaSuperior.

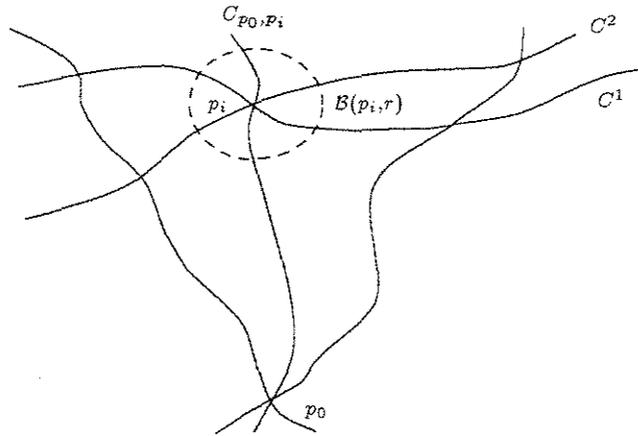


Figura 4.21: A $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^1 precede a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^2 com relação a p_0 .

C^2 ao caminharmos na fronteira de $B(p_i, r)$ a partir de um dos pontos da interseção $\partial B(p_i, r) \cap C_{p_0, p_i}$ no sentido anti-horário (veja a figura 4.21).

Denotaremos por $C^1 \equiv_{p_0} C^2$ ($C^2 \equiv_{p_0} C_1$) quando C^1 precede (sucede) C^2 com relação a p_0 . Se as $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas C^1 e C^2 são coincidentes ou não se interceptam na região de interesse (podem se interceptar fora dela) então, neste caso, denotaremos este fato por $C^1 \equiv_{p_0} C^2$.

Lema 4.6.3 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam p e q pontos distintos de \mathbf{S} que estão sobre uma mesma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p_0 tal que $q \prec_{p_0}^{C^{p,q}} p$. Então q não pode ser um ponto extremo de uma ponte superior.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o ponto q é um ponto extremo de uma ponte superior. Seja C^b a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que contém a ponte superior com extremo q .

Observe que a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta $C_{p_0, p}$ e C^b interceptam-se em q e, por definição de \mathcal{F} , esta é a única interseção entre elas. Note ainda que C^b é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} pois C^b contém a ponte superior, mas isto só é possível se a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^b e $C_{p_0, p}$ interceptarem-se em mais de um ponto (veja a figura 4.22). Contradição. \square

Lema 4.6.4 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam p e q pontos distintos de \mathbf{S} tais que $p \equiv_{p_0} q$. Seja $C_{p,q}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p e q . Seja C^b a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta contendo a ponte com relação a uma dada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^L na região de interesse relativa a p_0 :*

- se $C_{p,q} \equiv_{p_0} C^b$ então q não pode ser um ponto extremo de uma ponte superior com relação a C^L (veja a figura 4.23);

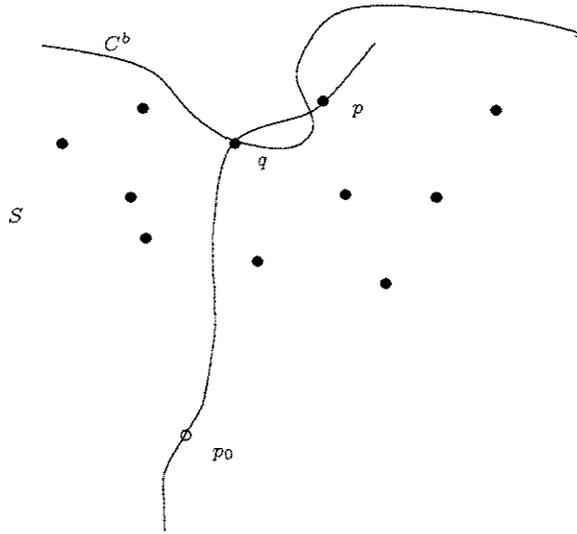


Figura 4.22: A $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^b e a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta $C_{p_0, p}$ interceptarem-se em mais de um ponto.

- se $C^b \equiv_{p_0} C_{p, q}$ então p não pode ser um ponto extremo de uma ponte superior com relação a C^L (veja a figura 4.24).

Demonstração: (Caso 1) Suponha, por absurdo, que o ponto q é um ponto extremo de uma ponte superior com relação a C^L . Por hipótese, $C_{p, q} \equiv_{p_0} C^b$ e $p \not\equiv_{p_0} q$, então p e q estão em lados opostos da $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^b . Contradição, pois C^b é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte. A prova para o caso 2 é análoga. \square

Note que pelos Lemas 4.6.3 e 4.6.4 para eliminarmos pontos de \mathbf{S} que não podem ser pontos extremos de uma ponte superior com relação a uma dada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta devemos conhecê-la de antemão, mas ela é justamente o que procuramos. O seguinte Lema resolve este problema.

Lema 4.6.5 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} e seja C^L uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta passando por p_0 e pela região de interesse relativa a p_0 . Seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de $\mathbf{S} \cup \{p_0\}$ e seja C^b a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que contém a ponte com relação a C^L .*

1. $C^h \equiv_{p_0} C^b$ se e somente se todos os pontos de \mathbf{S} sobre C^h estão estritamente à direita de C^L (veja a figura 4.25);
2. $C^h \equiv_{p_0} C^b$ se e somente se C^h contém pelo menos um ponto de \mathbf{S} que está estritamente à direita de C^L e contém pelo menos um ponto de \mathbf{S} que está estritamente à esquerda de C^L (veja a figura 4.26);

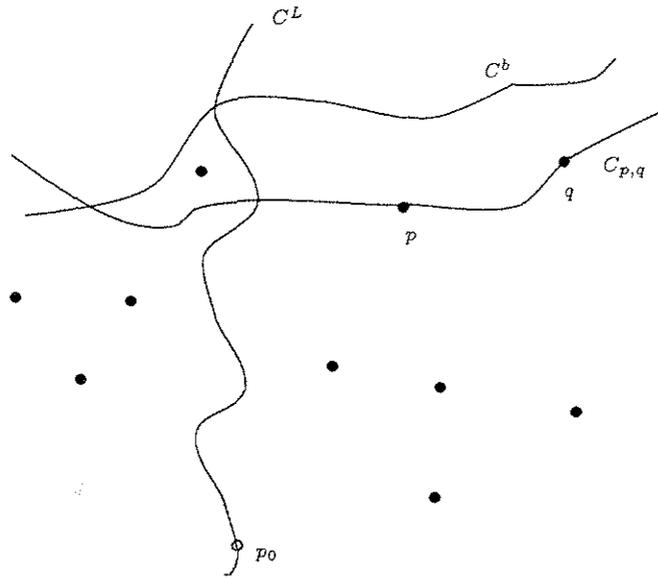


Figura 4.23: Caso 1 do Lema 4.6.4.

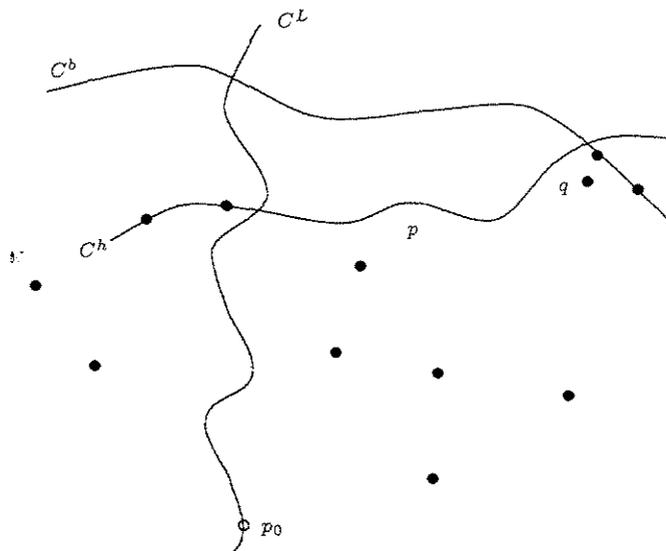


Figura 4.24: Caso 2 do Lema 4.6.4.

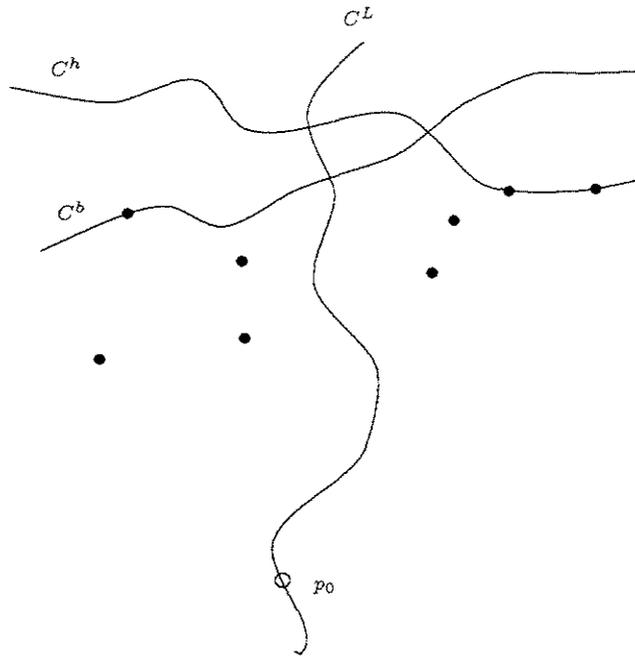


Figura 4.25: Caso 1 do Lema 4.6.5.

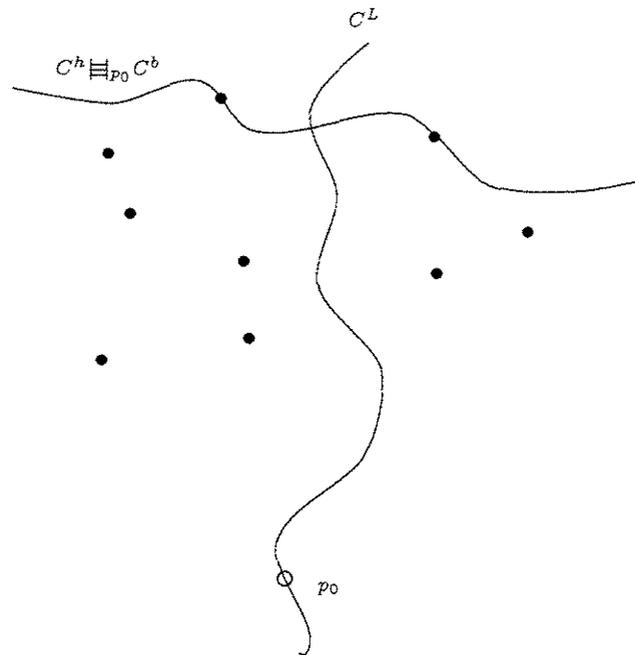


Figura 4.26: Caso 2 do Lema 4.6.5.

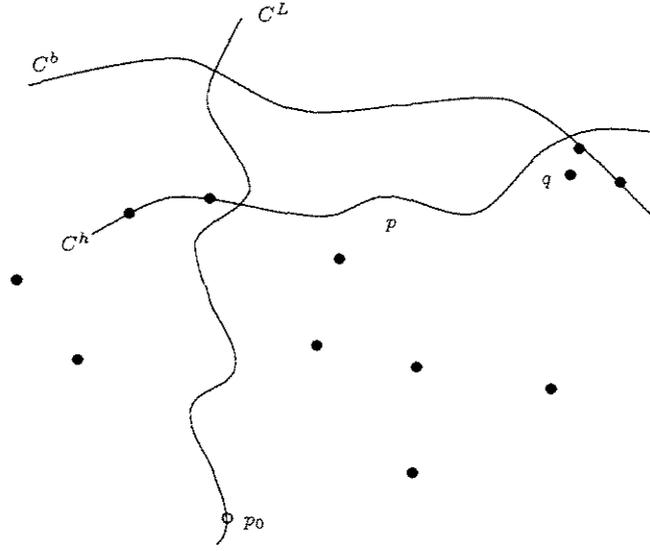


Figura 4.27: Caso 3 do Lema 4.6.5.

3. $C^b \equiv_{p_0} C^h$ se e somente se todos os pontos de S sobre C^h estão estritamente à esquerda de C^L (veja a figura 4.27).

Demonstração:

caso 1 \Rightarrow Sejam p_1 e p_2 pontos extremos da ponte com relação a C^L tais que $p_1 \vDash_{p_0} p_2$. Seja p_e o ponto de interseção entre C^h e C^b .

Note que C^h é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte e, por hipótese, $C^h \equiv_{p_0} C^b$ então $p_2 \vDash_{p_0} p_e$. Portanto, todos os pontos de S em C^h estão à direita de C^L , pois a interseção de C^L com C^h está entre os pontos p_1 e p_2 e C^b é de suporte.

\Leftarrow Sejam p_1 e p_2 pontos extremos da ponte com relação a C^L e seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de S tal que os pontos de S em C^h estão à direita de C^L .

Podemos afirmar que C^h intercepta C^b , pois C^h é uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto que dá origem à cadeia superior. Assim, por definição de \equiv temos que $C^h \equiv_{p_0} C^b$.

caso 2 \Rightarrow Seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de S tal que $C^h \equiv_{p_0} C^b$. Estas duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas se interceptam pois, por hipótese, C^h e C^b são $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas de suporte da cadeia superior. Mas se $C^h \equiv_{p_0} C^b$, então estas duas $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas devem ser coincidentes. Assim, C^h contém pelo menos um ponto de S que está estritamente à direita de C^L e contém pelo menos um ponto de S que está estritamente à esquerda de C^L ;

\Leftarrow Seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} que contém pelo menos um ponto de \mathbf{S} estritamente à direita de C^L e contém pelo menos um ponto de \mathbf{S} estritamente à esquerda de C^L . Note que, por definição de “ponte superior”, a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^h contém a ponte superior com relação a C^L então temos que $C^h \equiv_{p_0} C^b$;

caso 3 Análogo ao caso 1. \square

Observe que no Lema 4.6.4 para eliminar p ou q temos que fazer uma das duas comparações: $(C^b \equiv_{p_0} C_{p,q})$ ou $(C_{p,q} \equiv_{p_0} C^b)$. Para fazer tal comparação precisamos de uma informação que ainda não está disponível: a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^b . Para contornar esse problema usaremos o Lema 4.6.5 para eliminar um dos dois pontos p ou q .

Assim, pelo Lema 4.6.5 temos que verificar em qual dos três casos os pontos extremos de C^h se encaixam. Desta forma, podemos saber se $C^h \equiv_{p_0} C^b$, $C^b \equiv_{p_0} C^h$ ou $C^b \equiv_{p_0} C^h$. Para isto, basta verificar as posições dos pontos em C^h com relação a C^L . Como temos que $C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}$ então podemos eliminar p ou q usando o Lema 4.6.4.

Encontrar uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte C^h pode requerer tempo linear, isto é computacionalmente caro para ser realizado para cada um de $\lfloor |\mathbf{S}|/2 \rfloor$ pares de \mathbf{S} , (pois teríamos complexidade quadrática na etapa da conquista do algoritmo) mas gostaríamos que o tempo total aqui fosse linear, como é possível obter no caso euclidiano. Para isso, utilizaremos o resultado do Lema 4.6.6 a ser apresentado mais adiante. Mostraremos a seguir como contornar o problema citado acima.

Seja PARES um conjunto de $\lfloor |\mathbf{S}|/2 \rfloor$ pares de pontos de \mathbf{S} tal que nenhum ponto de \mathbf{S} participa de mais de um par e seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} tal que:

1. $C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}$ para pelo menos $\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor$ pares de pontos em PARES;
2. $C_{p,q} \equiv_{p_0} C^h$ para no máximo $\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor$ pares de pontos em PARES.

Note que no item 1 acima temos, pelo Lema 4.6.5, que $C_{p,q} \equiv_{p_0} C^b$ para $\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor$ pares de pontos em PARES e no item 2 temos, pelo Lema 4.6.5, que $C^b \equiv_{p_0} C_{p,q}$ para no máximo $\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor$ pares de pontos em PARES.

Desta forma, após a obtenção de C^h podemos aplicar o Lema 4.6.4 e o Lema 4.6.5 para eliminar vários pontos.

Os Lemas 4.6.6 e 4.6.9 serão utilizados para obter C^h com as propriedades descritas acima.

Lema 4.6.6 (*) *Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -conveza de \mathbf{S} . Seja C^r uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte de \mathbf{S} passando por p_0 . Sejam C^1 e C^2 duas curvas de \mathcal{F} que passam por pontos de \mathbf{S} . Se C^1 e C^2 interceptam-se na região de interesse com relação a p_0 então sejam f_1 e f_2 , pontos fora da região de interesse com relação a p_0 , que estão do lado oposto ao conjunto \mathbf{S} com relação a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta C^r e estão sobre C^1 e C^2 , respectivamente.*

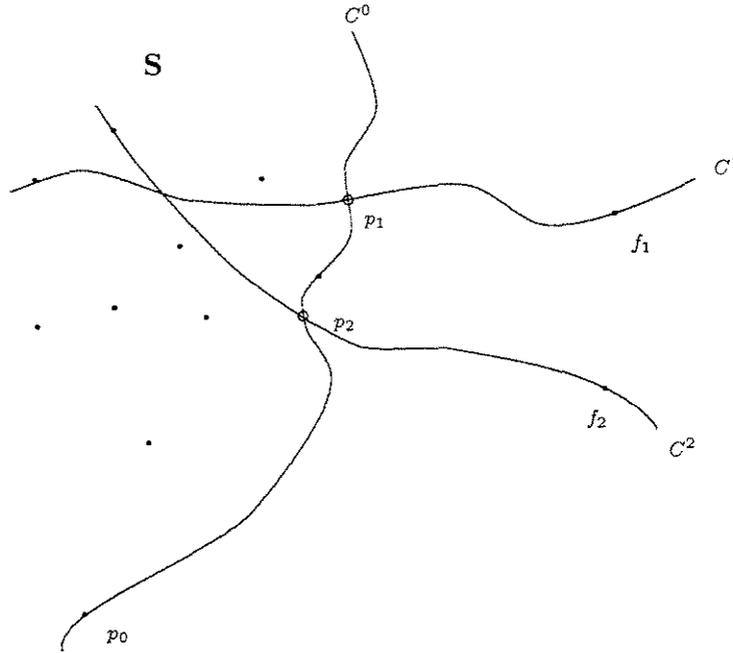


Figura 4.28: Construção para o Lema 4.6.6.

Sejam p_1 e p_2 pontos de interseção de C^1 com C^r e de C^2 com C^r , respectivamente (veja a figura 4.28). Então

- $C^1 \equiv_{p_0} C^2$ se e somente se $p_1 \prec_{p_0}^{C^r} p_2$;
- $C^2 \equiv_{p_0} C^1$ se e somente se $p_2 \prec_{p_0}^{C^r} p_1$.

Demonstração:(caso 1) \Rightarrow se $C^1 \equiv_{p_0} C^2$ então $p_1 \prec_{p_0}^{C^r} p_2$ pois C^1 e C^2 interceptam-se uma única vez e p_1 está mais próximo de p_0 do que p_2 está de p_0 .

\Leftarrow se $p_1 \prec_{p_0}^{C^r} p_2$ então $C^1 \equiv_{p_0} C^2$ pois C^1 e C^2 interceptam-se uma única vez e C^1 é encontrado antes do que C^2 quando se caminha na fronteira da bola de centro $C^1 \cap C^2$ e raio $\rho > 0$ no sentido anti-horário a partir de um dos pontos da interseção $C_{p_0, C^1 \cap C^2} \cap \partial B(C^1 \cap C^2, \rho)$.

(caso 2) Análogo ao caso 1. \square

Definição 4.6.7 *Sejam C^1 e C^2 curvas na região de interesse com relação a um ponto fora da envoltória- $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Dizemos que a curva C^1 está à esquerda (direita) de uma curva C^2 quando os pontos de C^1 na região de interesse estão à esquerda (direita) dos pontos de C^2 na região de interesse.*

Antes de enunciarmos o Lema 4.6.9 descreveremos uma construção que será utilizada nele. Seja p_0 um ponto fora da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de \mathbf{S} . Sejam C^r e C^s as curvas de suporte de \mathbf{S} passando por p_0 tal que C^r está à esquerda de C^s . Considere o conjunto PARES, definido anteriormente.

Lema 4.6.8 (*) *Seja $C_{p,q}$, $(p, q) \in \text{PARES}$ uma curva que não intercepta C^s (C^r). Seja C^h uma curva de suporte de \mathbf{S} que intercepta C^s (C^r) então $C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}$ ($C_{p,q} \equiv_{p_0} C^h$).*

Demonstração: A relação de ordem entre $C_{p,q}$ e C^h é a mesma que existe entre C^s (C^r) e C^h . Assim, $C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}$ ($C_{p,q} \equiv_{p_0} C^h$). \square

Lema 4.6.9 (*)

Sejam C^r e C^s as duas curvas construídas acima e também considere o conjunto PARES já definido. Suponha que exista pelo menos uma interseção de uma curva $C_{p,q}$, para $(p, q) \in \text{PARES}$, com C^r ou C^s . Seja \mathcal{T} (\mathcal{U}) o conjunto das curvas $C_{p,q}$ que não interceptam C^s (C^r). Se C^s (C^r) é a curva com maior número de interseções com as curvas $C_{p,q}$ então seja m um ponto sobre esta curva tal que m precede $\text{abs}(\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor - |\mathcal{T}|)$ ($\text{abs}(\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor - |\mathcal{U}|)$) pontos de interseções com relação a $\prec_{p_0}^{C^s}$ ($\prec_{p_0}^{C^r}$). Seja C^h uma $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta de suporte do conjunto \mathbf{S} passando por m . Então C^h determina três conjuntos de pares de pontos:

- $\text{MENOR} := \{(p, q) \in \text{PARES} : C_{p,q} \equiv_{p_0} C^h\}$;
- $\text{IGUAL} := \{(p, q) \in \text{PARES} : C_{p,q} \equiv_{p_0} C^h\}$;
- $\text{MAIOR} := \{(p, q) \in \text{PARES} : C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}\}$.

tais que

$$|\text{MENOR}| + |\text{IGUAL}| < \lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor,$$

$$|\text{MAIOR}| \geq \lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor.$$

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso em que C^s possui o maior número de interseções com as curvas $C_{p,q}$. O outro caso é análogo.

Note que as curvas $C_{p,q}$, $(p, q) \in \text{PARES}$ que interceptam C^s passam por pontos de \mathbf{S} e por pontos fora da região de interesse com relação a p_0 . Temos também que m precede $\text{abs}(\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor - |\mathcal{T}|)$ pontos de interseção sobre C^s e além disso C^h intercepta todas as curvas $C_{p,q}$ que passam pelos pontos de interseção sobre C^s e que sucedem m com relação a $\prec_{p_0}^{C^s}$. Assim, pelo Lema 4.6.6 $C^h \equiv_{p_0} C_{p,q}$ para $\text{abs}(\lfloor |\text{PARES}|/2 \rfloor) - |\mathcal{T}|$ pares de pontos no conjunto PARES. Além disso, C^h intercepta as curvas do conjunto \mathcal{T} pois

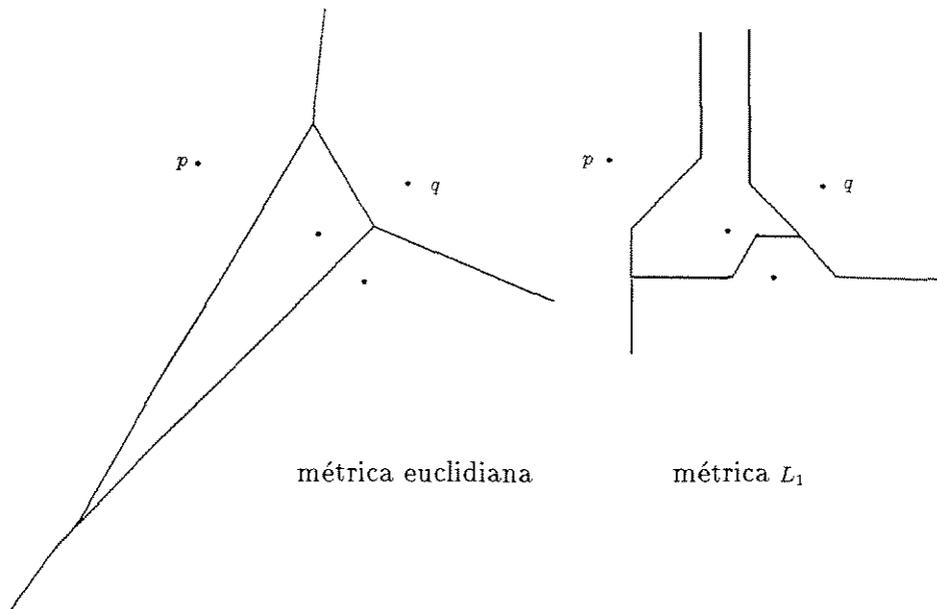


Figura 5.1: Diagramas de Voronoi na métrica euclidiana e métrica L_1 .

Na seção 5.2 veremos que uma métrica associada à geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é uma métrica comportada. Na seção seguinte apresentaremos as definições de Klein [12] e mostraremos como utilizar a abordagem dele na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

5.2 Diagrama de Voronoi Concreto e Abstrato

Nesta seção exibimos as definições do *Diagrama de Voronoi Concreto e Abstrato* e de *sistema admissível de curvas*. As definições desta seção são provenientes de [12].

Definição 5.2.1 *Seja (M, d) um espaço métrico, e suponha que uma relação de ordem total \prec exista em M . Seja $\mathbf{S} \subset M$ um conjunto finito e não vazio. Para $p, q \in \mathbf{S}$, $p \neq q$, sejam*

$$C(p, q) := \{z \in M : d(p, z) \leq d(q, z)\}$$

$$D(p, q) := \{z \in M : d(p, z) > d(q, z)\},$$

e defina

$$H(p, q) := \begin{cases} C(p, q), & \text{se } p \prec q \\ D(q, p), & \text{se } q \prec p. \end{cases}$$

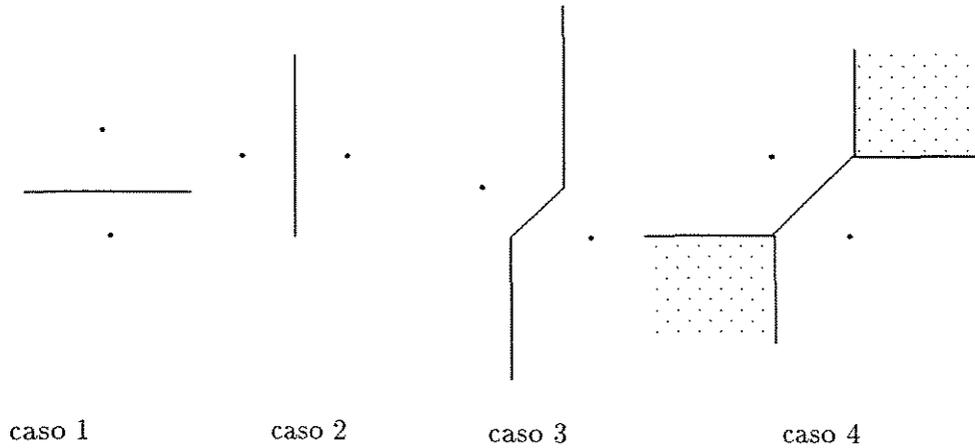


Figura 5.2: Tipos de bissetores na métrica L_1 .

Denotamos por

$$\mathcal{T}_p(\mathbf{S}) := \bigcap_{q \in \mathbf{S} \setminus \{p\}} H(p, q)$$

a Região de Voronoi Concreta de p com relação a \mathbf{S} e por

$$\text{Vor}_{cr}(\mathbf{S}) := \bigcup_{p \in \mathbf{S}} \partial \mathcal{T}_p(\mathbf{S})$$

o Diagrama de Voronoi Concreto de \mathbf{S} .

Note que a definição acima é equivalente à definição usual (definição 5.1.1). Apresentamos agora a definição de *métrica comportada* e um Teorema que será utilizado mais adiante.

Definição 5.2.2 Uma métrica d em \mathbb{R}^2 é uma métrica comportada se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. d induz a topologia euclidiana (definição D.1.8);
2. as bolas na métrica d são limitadas com relação à métrica euclidiana (definição em D.1.10);
3. se $p, q \in \mathbb{R}^2$ e $p \neq q$ então existe um ponto $r \notin \{p, q\}$ tal que $d(p, q) = d(p, r) + d(r, q)$;
4. se $p, q \in \mathbb{R}^2$ e $p \prec q$ então $J(p, q) := C(p, q) \cap \overline{D(p, q)}$ é uma curva homeomorfa a $(0, 1)$. A interseção de duas tais curvas $J(p, q)$ e $J(v, w)$ consiste de um número finito de componentes conexas.

Definição 5.3.1 Definimos uma geodésica P em um espaço métrico (M, d) como um homeomorfismo $P : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ existe um $\varepsilon_t > 0$ onde

$$d(P(t_1), P(t_2)) = |t_2 - t_1|$$

para

$$|t_i - t| < \varepsilon_t, \quad i = 1, 2.$$

Definição 5.3.2 (Bussemann [3]) Definimos como G -espaço um espaço métrico que satisfaz as seguintes propriedades:

1. o espaço é finitamente compacto (definição D.1.18);
2. o espaço é convexo (definição D.1.15);
3. todo ponto do espaço possui a propriedade da extensão local (definição D.1.16);
4. dois pontos distintos quaisquer estão sobre no máximo uma geodésica.

A seguir demonstraremos que $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é um G -espaço. A propriedade 1 é verdadeira pois as métricas d_e e $d_{\mathcal{F}}$ são equivalentes (Proposição 5.3.3).

Proposição 5.3.3 (*) A métrica $d_{\mathcal{F}}$ é equivalente à métrica d_e .

Demonstração: As distâncias entre dois pontos distintos $p, q \in \mathbb{R}^2$ nas métricas $d_{\mathcal{F}}$ e d_e são tais que:

$$d_{\mathcal{F}}(p, q) \geq d_e(p, q), \quad (5.1)$$

pois $d_{\mathcal{F}}(p, q)$ é o comprimento do $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmento que liga p a q enquanto que d_e é o comprimento do segmento de reta euclidiana.

Assim, para $\varepsilon > 0$ temos que

$$B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \varepsilon) \subset B_{d_e}(p, \varepsilon). \quad (5.2)$$

Por outro lado, dado $\lambda > 0$ mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_e}(p, \delta) \subset B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \lambda)$. Tomando

$$\delta := \min_{p' \in \partial B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \lambda)} d_e(p, p'),$$

temos como consequência de (5.1) que

$$B_{d_e}(p, \delta) \subset B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \lambda). \quad \square$$

A propriedade 2 segue-se da seguinte Proposição.

Proposição 5.3.4 (*) Se p e q dois pontos distintos de \mathbb{R}^2 então existe um ponto $r \notin \{p, q\}$ tal que $d_{\mathcal{F}}(p, q) = d_{\mathcal{F}}(p, r) + d_{\mathcal{F}}(r, q)$.

Demonstração: Sejam p e q pontos distintos de \mathbb{R}^2 e seja $C_{p,q}$ a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -reta que passa por p e q . Qualquer ponto r no $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -segmento entre p e q é tal que

$$d_{\mathcal{F}}(p, q) = d_{\mathcal{F}}(p, r) + d_{\mathcal{F}}(r, q),$$

pois $d_{\mathcal{F}}$ é uma métrica dada por comprimento de arco. \square

Mostraremos agora que a propriedade 3 é válida em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$.

Proposição 5.3.5 Seja $p \in \mathbb{R}^2$ então p possui a propriedade de extensão local com relação a $d_{\mathcal{F}}$.

Demonstração: Seja $p \in \mathbb{R}^2$ e $B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \delta)$ a bola de centro em p e raio $\delta > 0$. Além disso, sejam p_1 e p_2 pontos distintos em $B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \delta)$ e

$$\varepsilon := \min_{p' \in \partial B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \delta)} d_{\mathcal{F}}(p_2, p').$$

Seja também C_{p_1, p_2} a curva que passa por p_1 e p_2 e $r \in C_{p_1, p_2} \cap B_{d_{\mathcal{F}}}(p_2, \varepsilon/2)$ tal que $r \notin A_{p_1, p_2}$.

Note que

$$d_{\mathcal{F}}(p_1, p_2) + d_{\mathcal{F}}(p_2, r) = d_{\mathcal{F}}(p_1, r)$$

e

$$d_{\mathcal{F}}(p_2, r) = \varepsilon/2.$$

Logo, p possui a propriedade da extensão local. \square

Resta mostrar que dois pontos distintos quaisquer estão no máximo sobre uma geodésica. Isso é dado pela Proposição abaixo.

Proposição 5.3.6 As curvas da família \mathcal{F} na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ são as geodésicas com relação a $d_{\mathcal{F}}$.

Demonstração: Considere a representação paramétrica de uma curva de \mathcal{F} por comprimento de arco, $(x(t), y(t))$. Assim, por definição

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 1,$$

onde t indica o comprimento de arco.

Desta forma, o comprimento de arco no intervalo $[x(t_1), x(t_2)]$ é

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |t_2 - t_1|.$$

Assim, pela definição 5.3.1 toda curva de \mathcal{F} é uma geodésica. \square

Pela Proposição acima temos que a propriedade 4 é verdadeira para $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$. Podemos concluir então que $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é um G -espaço.

Na seção 5.4 demonstraremos que $d_{\mathcal{F}}$ é uma métrica comportada.

Teorema 5.4.4 *Sejam p e q pontos distintos de \mathbb{R}^2 , o bissetor dos pontos p e q é uma curva aberta de Jordan que é estrelada com relação aos pontos p e q e também é estrelada com relação ao pontos da curva $C_{p,q}$ exceto possivelmente os pontos do segmento de p a q .*

Note que se uma curva é estrelada com relação a algum ponto então ela é uma curva simples.

Temos então que os bissetores em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ são homeomorfos a $(0, 1)$. Na seção seguinte demonstramos a propriedade B para a métrica $d_{\mathcal{F}}$.

5.4.2 Propriedade B

Resta agora mostrar que a interseção de duas curvas $J(p, q)$ e $J(v, w)$ consiste de um número finito de componentes conexas. Para demonstrar tal fato utilizamos um resultado de Eberlein [8] que afirma que em toda variedade riemanniana bidimensional completa, simplesmente conexa e livre de pontos conjugados a interseção de dois bissetores quaisquer possui no máximo um ponto.

Mostraremos então que o espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é uma variedade riemanniana bidimensional completa, simplesmente conexa e livre de pontos conjugados. Para isto mostraremos que todo G -espaço é um espaço de curvatura limitada, e por fim, mostraremos que este espaço é uma variedade Riemanniana bidimensional com as propriedades desejadas.

Apresentaremos a noção de *espaço de curvatura limitada*, para isto precisamos de algumas definições auxiliares dadas a seguir que foram retiradas de Aleksandrov [1]. As duas definições seguintes foram adaptadas para a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Definição 5.4.5 *Sejam C^1 e C^2 curvas de \mathcal{F} com interseção em um ponto O . Sejam p_x e p_y pontos em C^1 e C^2 , respectivamente. Denote por l_x o comprimento do arco A_{O,p_x} , por l_y o comprimento do arco A_{O,p_y} e por l_z o comprimento do arco A_{p_x,p_y} . Denote também por $\xi_{C^1 C^2}^K(l_x, l_y)$ o ângulo oposto ao lado com comprimento l_z de um triângulo com lados l_x, l_y, l_z em uma superfície de curvatura constante K (Definição E.1.38). Definimos ângulo superior entre C^1 e C^2 como*

$$\hat{\alpha}(C^1, C^2) = \overline{\lim}_{l_x, l_y \rightarrow 0} \xi_{C^1 C^2}^K(l_x, l_y).$$

Definição 5.4.6 *Seja $T = ABC$ um triângulo no \mathbb{R}^2 e $T^K = A^K B^K C^K$ um triângulo em uma superfície de curvatura constante K com seus lados de mesmo comprimento que os lados do triângulo T . O excesso do triângulo T com relação a K é*

$$\delta_K(T) = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}) - (\hat{\alpha}_K + \hat{\beta}_K + \hat{\gamma}_K),$$

onde $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ e $\hat{\alpha}_K, \hat{\beta}_K, \hat{\gamma}_K$ são os ângulos dos triângulos T e T^K , respectivamente.

Definição 5.4.7 Um espaço métrico (M, d) é de curvatura limitada se satisfaz as seguintes condições:

1. a métrica do espaço é intrínseca (definição E.1.21);
2. M é localmente compacto (definição D.1.14);
3. os arcos de curva de menor comprimento são localmente extensíveis, ou seja, para cada ponto $p \in M$ existe uma bola aberta $B(p, \lambda_p)$ de centro p e raio λ_p tal que todo arco de curva de menor comprimento entre dois pontos p' e q' pertencentes a $B(p, \lambda_p)$ pode ser prolongado para outro arco de curva de menor comprimento com extremos $p'', q'' \in M$.
4. existem $k_1, k_2, k_1 \leq k_2$ tais que o excesso de um triângulo T com relação a k_1 é não negativo e o excesso de T com relação a k_2 é não positivo, ou seja,

$$\hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\beta}_{k_1} + \hat{\gamma}_{k_1} \leq \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} \leq \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\beta}_{k_2} + \hat{\gamma}_{k_2},$$

onde $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ são os ângulos de T , os índices nestas variáveis indicam os respectivos ângulos nas superfícies de curvatura constante k_1 e k_2 .

Agora podemos demonstrar que $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é um espaço de curvatura limitada.

Teorema 5.4.8 O espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é um espaço de curvatura limitada.

Demonstração: A afirmação do Teorema é consequência imediata da verificação essencialmente trivial das quatro propriedades enunciadas na definição 5.4.7. A verificação é feita de acordo com a ordem apresentada na definição 5.4.7:

1. Por definição, a métrica $d_{\mathcal{F}}$ utilizada em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é a métrica intrínseca (Definição E.1.21);
2. \mathbb{R}^2 é localmente compacto pois \mathbb{R}^2 é compacto;
3. as curvas da família \mathcal{F} são geodésicas em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$. Assim, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ existe uma bola $B_{d_{\mathcal{F}}}(p, \lambda_p)$ de centro p e raio λ_p tal que todo arco de uma curva de \mathcal{F} de extremos p' e q' pertencentes a $B(p, \lambda_p)$ pode ser prolongado para outro arco com extremos $p'', q'' \in \mathbb{R}^2$. Assim, $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ possui a propriedade de extensão local.
4. Para a última propriedade basta escolher $k_1 = 0 = k_2$. \square

Agora, resta demonstrarmos que este espaço métrico é uma variedade Riemanniana.

O espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é uma variedade Riemaniana

Nesta seção, concluiremos que a métrica $d_{\mathcal{F}}$ na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é uma métrica comportada conforme a definição dada por Klein [12]. As três primeiras propriedades da definição de Klein foram demonstradas no início da seção 5.4 e a propriedade de que os bissetores são homeomorfos ao intervalo $(0, 1)$ foi demonstrada na subseção 5.4.1. Resta demonstrar que a interseção de dois bissetores em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ consiste de um número finito de componentes conexas.

Para demonstrar tal fato utilizaremos um Corolário resultante de um Teorema de Berestoviskii (Teorema 12.2 enunciado [1]).

Corolário 5.4.9 $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é uma variedade Riemaniana.

Note que, como estamos considerando \mathbb{R}^2 com a métrica $d_{\mathcal{F}}$ temos que esta variedade é bidimensional e completa e simplesmente conexa. Acharmos desnecessário demonstrar tais propriedades pois estas são consideradas resultados canônicos em topologia. Para o leitor interessado podemos citar [5]. Agora, podemos enunciar um Corolário de um resultado de Ehrlich dado em [9].

Corolário 5.4.10 O espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{\mathcal{F}})$ é livre de pontos conjugados.

Por fim, o resultado desejado é dado por Eberlein [8] no Teorema a seguir.

Teorema 5.4.11 (Eberlein [8]) *Seja uma variedade riemaniana bidimensional completa, simplesmente conexa e livre de pontos conjugados. Então a interseção de dois bissetores quaisquer dessa variedade possui no máximo um ponto.*

Desta forma, temos que a métrica $d_{\mathcal{F}}$ é uma métrica comportada. Temos também que os bissetores em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ são curvas bissetoras e pelo Teorema 5.4.2 $J(p, q) = B(p, q)$. E conforme observado por Klein um sistema de curvas bissetora formado pelos $J(p, q)$, p e q pertencentes a um conjunto de pontos, com uma métrica comportada é um sistema admissível de curvas. Temos então que os bissetores em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ com a métrica $d_{\mathcal{F}}$ formam um sistema admissível de curvas bissetoras.

Note que desta forma pode-se utilizar a abordagem de Klein que é baseada no algoritmo de Shamos e Hoey para a construção do diagrama de Voronoi.

Observe que não fornecemos como obter os bissetores na métrica $d_{\mathcal{F}}$. Nosso objetivo principal foi de fornecer uma família de geometrias exemplo com uma métrica comportada já que o único exemplo fornecido por Klein [12] foi a própria geometria euclidiana.

A obtenção dos bissetores pode ser feita através da solução de sistemas algébricos. Um exemplo disso é visto quando a família de curvas \mathcal{F} é formada pelas várias translações de uma parábola em \mathbb{R}^2 . Neste caso o bissetor de $p^1, p^2 \in \mathbb{R}^2$ por

$$\int_{p_x^1}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_x^{p_x^2} \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são as equações de parábolas que passam, respectivamente, por p^1 e p^2 . A solução deste tipo de equação pode ser feita em softwares como o Maple.

A definição da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ foi motivada pela definição das geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^-}$. Em $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ fornecemos um algoritmo para construção da envoltória convexa e também mostramos que, desde que saibamos como determinar bissetores na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, é possível a construção do diagrama de voronoi utilizando-se a abordagem de Klein [12] mostrando que a métrica na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é uma métrica comportada cujos bissetores formam um sistema admissível de curvas.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta tese abordamos problemas de convexidade (envoltória convexa) e proximidade (diagrama de Voronoi) em geometrias não euclidianas. No capítulo 2 definimos três geometrias advindas de um conjunto de orientações restritas.

Uma abordagem existente para geometrias advindas de um conjunto de orientações restritas é a dada por Rawlins [23] onde a geometria definida por ele é formada por \mathcal{O} -escadas, o conjunto de pontos é \mathbb{R}^2 e as regras de incidência entre pontos e retas são as mesmas da geometria euclidiana.

Acreditamos que a geometria de Rawlins é pouco natural pois qualquer tipo de curva cuja interseção com uma reta com orientação em \mathcal{O} , seja conexa ou vazia, pode ser uma reta da geometria. Além disso, o número de segmentos de retas entre dois pontos pode ser infinito (e estes não são coincidentes). Rawlins também define o conceito de convexidade onde um conjunto é \mathcal{O} -convexo se sua interseção com qualquer reta euclidiana cuja orientação pertence ao conjunto \mathcal{O} é conexa (ou vazia). Note que esta definição permite que conjuntos \mathcal{O} -convexos sejam não conexos.

Devido às características descritas acima buscamos uma definição para a geometria de orientações fixas onde os segmentos de reta entre dois pontos de \mathbb{R}^2 sejam coincidentes e a definição de convexidade nesta geometria não leve a conjuntos convexos não conexos. Definimos então no capítulo 2 a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ que possui as características acima (na realidade, definimos duas tais geometrias $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{O}-}$).

Definimos o conjunto das retas da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ como sendo constituído de todas as retas degeneradas e todas as retas não degeneradas positivas, o conjunto dos pontos como sendo todos os pontos de \mathbb{R}^2 e as relações de incidência conforme a geometria euclidiana.

Demonstramos no capítulo 2 que os segmentos de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -retas entre dois pontos quaisquer de \mathbb{R}^2 são coincidentes. Note que assim conseguimos uma proximidade maior com a geometria euclidiana. Definimos também o conceito de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexidade onde um conjunto é $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexo se sua interseção com qualquer $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -reta é conexa.

A partir desta definição demonstramos que conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexos são conexos, que a interseção de conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexos é um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexo, que todo conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexo é dado por interseção de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -semi-planos.

Veja que as semelhanças das propriedades de conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexos com os conjuntos convexos euclidianos é grande. Diante destas evidências obtivemos um algoritmo para construção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de um conjunto finito de pontos \mathbf{S} . A complexidade algorítmica deste é $O(n \log h)$ onde h denota o número de arestas da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexa de \mathbf{S} e n o número de pontos em \mathbf{S} . É importante observar que esta é a mesma complexidade do algoritmo de Kirkpatrick e Seidel [11] no caso euclidiano e este algoritmo possui complexidade $O(n \log h)$, onde h também denota o número de arestas da envoltória. Note que h pode ser igual a n , assim no pior caso o algoritmo de Kirkpatrick e Seidel tem complexidade $O(n \log n)$ que é a cota inferior para o problema da construção da envoltória convexa.

Vale a pena ressaltar que várias outras propriedades a respeito de conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -convexos foram obtidas no capítulo 2 e que são análogas às propriedades da geometria euclidiana. No capítulo 3 apresentamos um algoritmo para determinar a envoltória de um conjunto de pontos.

A relativa semelhança existente entre a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ e a geometria euclidiana é uma característica que nos direciona a buscar por novas propriedades para que possam ser aplicadas em soluções a problemas relacionados a um conjunto de orientações restritas. Um exemplo de aplicação prática já citado é o uso de todas as propriedades obtidas até então em projetos VLSI.

Pode-se ainda citar a modelagem geométrica para o acesso concorrente, realizado por vários usuários, a um banco de dados. Preparata e Shamos [22] dedicam um capítulo inteiro do seu livro para problemas de aplicação prática relacionados a objetos retangulares, ou seja, objetos cujas arestas estão restritas a um conjunto de orientações, neste caso $\mathcal{O} = \{0, 90, 180, 270\}$. Note que nossa abordagem é mais genérica, pois permite mais do que quatro orientações em \mathcal{O} , desde que este seja finito. Vale lembrar que a literatura tem inúmeros exemplos de soluções para problemas de natureza que envolvem orientações, dentre as quais podemos citar [18, 17, 19, 24, 10, 30, 29, 26, 23, 20]. Todos estes artigos não abordam o problema da maneira como apresentamos no capítulo 2 ou seja, não definem uma nova geometria e não exploram propriedades desta para uso na solução dos problemas apresentados. A abordagem utilizada nestes artigos foi a de definir um novo conceito de convexidade utilizando-se de curvas com restrições relacionadas ao conjunto de orientações e a partir daí elaborar algoritmos para a determinação da envoltória convexa.

Na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ uma das características é a existência de pelo menos uma reta passando por um dado par de pontos. Na realidade o número de retas que passa por um dado par de pontos é infinito, no entanto os segmentos destas retas entre o par de pontos

são coincidentes. Além desta característica, a interseção de duas retas quaisquer desta geometria é conexa, mas não necessariamente composta de um único ponto. Estas características nos foram úteis para explorar várias propriedades concernentes a convexidade, semelhantes às propriedades de conjuntos convexos na geometria euclidiana.

Intuitivamente, quanto maior a semelhança da geometria definida com a geometria euclidiana maior o número de propriedades análogas que podem existir na nova geometria. Isto nos motivou a definir uma nova geometria com características mais próximas da geometria euclidiana.

Assim, definimos no capítulo 4 a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ onde para qualquer par de pontos do plano temos uma reta que passa por eles e esta reta é única, o que, conforme já observado, não acontece na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$.

Caracterizamos também famílias de curvas na esfera de Riemann nas quais definimos a geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Estas famílias de curvas devem satisfazer as seguintes condições:

- toda curva $C \in \mathcal{F}$ é uma curva de Jordan fechada que passa pelo pólo norte da esfera;
- dados dois pontos próprios existe um único membro da família \mathcal{F} que passa por eles.

Como usualmente lidamos apenas com os pontos próprios consideraremos que estamos trabalhando com \mathbb{R}^2 . Além disso consideramos que as curvas da família \mathcal{F} são diferenciáveis por partes.

A geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é definida pelo conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 , pela família \mathcal{F} de curvas e as mesmas regras de incidência da geometria euclidiana. Definimos também o conceito de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade onde um conjunto de \mathbb{R}^2 é $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo se a interseção de qualquer curva de \mathcal{F} com o mesmo é conexa.

Note que a definição acima é uma generalização do conceito de convexidade da geometria euclidiana, pois se consideramos como sendo a família de curvas todo o conjunto de retas no plano, temos que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ coincide com a geometria euclidiana.

Esta analogia nos permite buscar propriedades de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexidade que sejam análogas a propriedades existentes na geometria euclidiana. No capítulo 4 demonstramos que um conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo é conexo, que interseções de conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos são conjuntos $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexos e também demonstramos que todo conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo é dado por interseções de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -planos de suporte.

Vale aqui também a ressalva de que estas propriedades têm análogas na geometria euclidiana. Estas e uma série de outras propriedades (dadas no capítulo 4) nos foram úteis para a obtenção de um algoritmo para a determinação da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa de um conjunto finito de pontos \mathbf{S} utilizando o método de Kirkpatrick e Seidel [11]. A complexidade obtida também foi de $O(n \log h)$, onde h representa o número de arestas da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa e n é a cardinalidade de \mathbf{S} .

Para a obtenção deste algoritmo foi necessária a definição de novos termos e novas relações de ordem entre estruturas geométricas de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ como, por exemplo, uma relação de ordem entre $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -retas. Vale a pena lembrar que a definição desta geometria mostra uma abordagem mais formal de atacar problemas que não envolvem retas euclidianas.

Seguindo esta linha de pesquisa em geometrias não euclidianas definimos uma métrica associada à geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. A definição da métrica $d_{\mathcal{F}}$ foi o primeiro passo para buscarmos um algoritmo para a determinação do Diagrama de Voronoi. O caminho utilizado para alcançar tal objetivo foi de demonstrar que a métrica utilizada é uma *métrica comportada* (definido em [12]). Após demonstrarmos tal fato, a utilização do algoritmo de Shamos e Hoey [28] para determinação do diagrama foi imediata.

É de grande destaque o número de propriedades obtidas durante o estudo da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ para obtenção da envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexa e do diagrama de Voronoi. Tais propriedades podem ser aproveitadas para solução de problemas cuja descrição incluem curvas genéricas que respeitam a caracterização dada para \mathcal{F} .

Na próxima seção descrevemos possíveis tópicos para pesquisa futura.

6.1 Trabalhos futuros

A definição de duas novas geometrias não euclidianas para apresentar soluções a problemas de convexidade e proximidade abriu um leque de opções para pesquisa dentre as quais podemos citar:

- definição de novos conceitos na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$, como o de visibilidade e conseqüente estudo de propriedades e soluções para determinação do núcleo de $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ -polígonos;
- generalização dos conceitos da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ para \mathbb{R}^n , $n > 2$;
- definição de novos conceitos na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, como o de visibilidade e conseqüente estudo de propriedades e soluções para determinação do núcleo de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -polígonos;

A abordagem de definir geometrias não euclidianas para solução de problemas cuja natureza foge do escopo euclidiano nos fornece uma formalização maior e abre um caminho para busca de soluções a problemas nestas novas geometrias que sejam análogos a problemas que ocorrem na geometria euclidiana. No caso da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$ o número de propriedades conseguidas durante o desenvolvimento da tese foi considerável e podem ser usadas para solução de outros problemas. O mesmo também ocorre no caso da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Esta última, diferentemente da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$, lida com curvas que quando interceptam-se o fazem em apenas um único ponto.

Apêndice A

Geometria \mathcal{G}_1

Neste apêndice damos algumas propriedades e definições relativas à geometria \mathcal{G}_1 . A definição desta geometria teve apenas valor didático para a definição da geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{O}+}$. Desta forma, este apêndice será sucinto e breve nas definições e propriedades. Relembremos, então, a definição desta geometria.

Geometria \mathcal{G}_1

O conjunto de retas com orientações em \mathcal{O} mais as mesmas regras de incidência entre pontos e retas da geometria euclidiana definem uma geometria para \mathbb{R}^2 advinda do conjunto de orientações em \mathcal{O} , a qual denotaremos por \mathcal{G}_1 . Denominaremos de \mathcal{G}_1 -reta toda reta da geometria \mathcal{G}_1 .

Conforme já observado, diferentemente da geometria euclidiana, a geometria \mathcal{G}_1 não possui uma \mathcal{G}_1 -reta passando por cada par de pontos de \mathbb{R}^2 .

A seguir definiremos o conceito de polígono na geometria \mathcal{G}_1 .

Definição A.1.1 (*) *Dados n pontos p_0, p_1, \dots, p_{n-1} , que definem uma seqüência de segmentos de \mathcal{G}_1 -retas em ordem cíclica $T_i = p_i p_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, onde as somas dos índices são tomadas módulo n , os pontos p_i 's juntamente com os segmentos T_i 's formam um \mathcal{G}_1 -polígono. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos de \mathcal{G}_1 -arestas do \mathcal{G}_1 -polígono.*

Definição A.1.2 (*) *Dizemos que um \mathcal{G}_1 -polígono $\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ é simples se ele satisfaz a seguinte propriedade:*

- *todas as arestas de \mathcal{P} são disjuntas exceto pelos vértices que arestas consecutivas compartilham, isto é, $T_i \cap T_{i+1} = \{p_{i+1}\}$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $i < j-1$ e $j < i+n-1$.*

Doravante, todas as referências a \mathcal{G}_1 -polígonos serão subentendidas como \mathcal{G}_1 -polígonos simples. Além disso, quando nos referirmos a um \mathcal{G}_1 -polígono consideraremos às vezes também o interior do mesmo.

Definiremos a seguir o conceito de semi-plano na geometria \mathcal{G}_1 e o conceito de convexidade, além disso, mostraremos duas propriedades relacionadas ao conceito de \mathcal{G}_1 -convexidade.

Definição A.1.3 (*) *Um \mathcal{G}_1 -semi-plano é uma das duas regiões fechadas do plano cuja fronteira é uma \mathcal{G}_1 -reta.*

Continuaremos a denotar por S um conjunto de pontos (não necessariamente finito).

Definição A.1.4 (*) *Um conjunto S é \mathcal{G}_1 -convexo se a interseção de S com qualquer \mathcal{G}_1 -reta é conexa.*

Definição A.1.5 (*) *Um \mathcal{G}_1 -polígono é \mathcal{G}_1 -convexo se sua interseção com qualquer \mathcal{G}_1 -reta é conexa.*

Definição A.1.6 (*) *A envoltória \mathcal{G}_1 -convexa de um conjunto S é o menor conjunto fechado (no sentido da definição D.1.9) \mathcal{G}_1 -convexo que contém S .*

Conforme veremos na Proposição A.1.7 adiante a interseção de conjuntos \mathcal{G}_1 -convexos é um conjunto \mathcal{G}_1 -convexo. Assim, envoltória \mathcal{G}_1 -convexa está bem definida, pois " \subset " define uma relação de ordem parcial para conjuntos.

Proposição A.1.7 (*) *A interseção de quaisquer dois conjuntos \mathcal{G}_1 -convexos é um conjunto \mathcal{G}_1 -convexo.*

Demonstração: Sejam \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 conjuntos \mathcal{G}_1 -convexos. Suponha, por absurdo, que $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2$ é não \mathcal{G}_1 -convexo. Assim, seja R uma \mathcal{G}_1 -reta tal que $R \cap (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$ é não conexa.

Sejam $p_1, p_2 \in R$ pontos que pertencem a componentes conexas distintas de $R \cap (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$ e, além disso, seja p' um ponto pertencente ao segmento de R que liga p_1 a p_2 tal que $p' \notin (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$.

Por hipótese, $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$ é \mathcal{G}_1 -convexo. Além disso, $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$. Assim, a interseção de R com $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$ é conexa. Logo temos que $p' \in \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$. Portanto, $p' \in (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2)$, o que contradiz a escolha de p' . \square

Uma observação importante a respeito de conjuntos \mathcal{G}_1 -convexos é que nem todo conjunto \mathcal{G}_1 -convexo é conexo, a figura A.1 mostra um exemplo. Assim, também podemos ter que interseções de \mathcal{G}_1 -polígonos \mathcal{G}_1 -convexos sejam não conexas e, portanto, a interseção não é um \mathcal{G}_1 -polígono (figura A.2).

Vale a pena ressaltar que não é válida na geometria \mathcal{G}_1 a propriedade válida na geometria euclidiana de que conjuntos convexos são dados por interseções de semi-planos, um exemplo é dado na figura A.3.

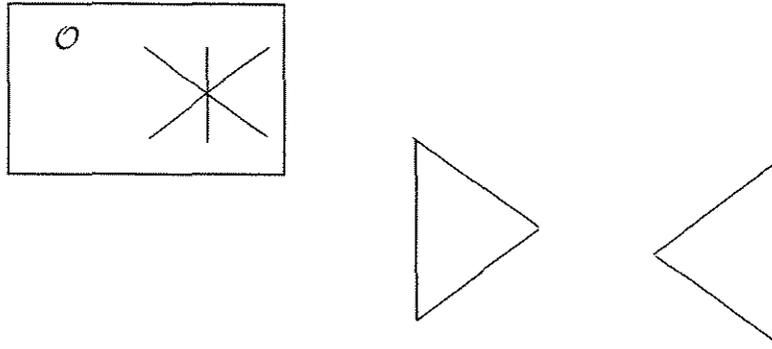


Figura A.1: Conjunto \mathcal{G}_1 -convexo não conexo.

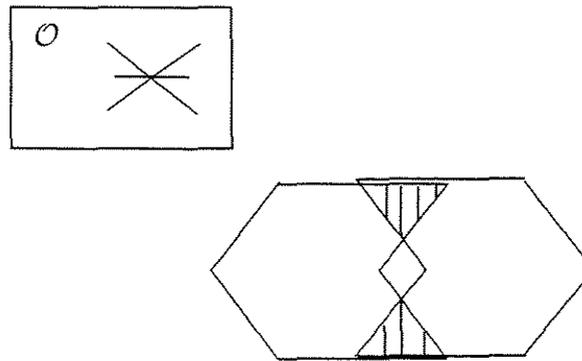


Figura A.2: A interseção de \mathcal{G}_1 -polígonos \mathcal{G}_1 -convexos nem sempre é um \mathcal{G}_1 -polígono embora seja sempre um conjunto \mathcal{G}_1 -convexo.

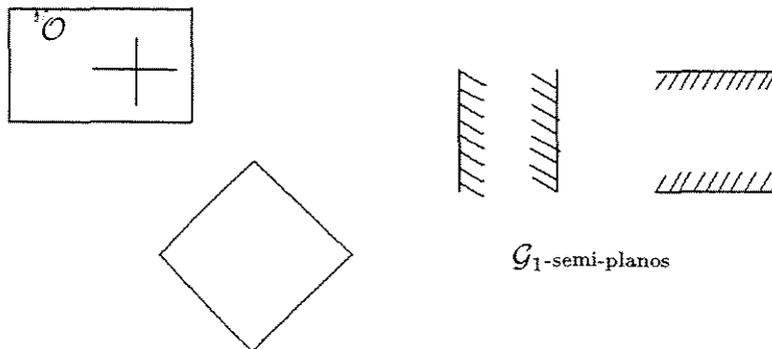


Figura A.3: Conjunto \mathcal{G}_1 -convexo não dado por interseções de \mathcal{G}_1 -semi-planos.

\mathcal{G}_1 -semi-planos

Proposição A.1.8 \mathcal{G}_1 -semi-planos são \mathcal{G}_1 -convexos.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que um \mathcal{G}_1 -semi-plano \mathcal{H} seja não \mathcal{G}_1 -convexo. Então existe uma \mathcal{G}_1 -reta R cuja interseção com \mathcal{H} é não conexa.

Logo, a interseção da fronteira de \mathcal{H} com R é não conexa. Temos uma contradição, pois a interseção de \mathcal{G}_1 -retas é conexa. \square

Note que na geometria \mathcal{G}_1 se considerarmos um conjunto infinito de orientações $[0, 360)$ temos equivalência com a geometria euclidiana. Conforme já observado a definição desta geometria deve-se apenas a caráter didático. No apêndice B exibimos também algumas propriedades e definições na geometria \mathcal{G}_2 . Vale alertar o leitor que a estrutura do apêndice B é semelhante à deste apêndice inclusive na forma das definições e propriedades. Esta abordagem também se deve a caráter didático e acreditamos que isto, por si só, justifica a presença do referido apêndice.

Apêndice B

Geometria \mathcal{G}_2

Neste apêndice damos algumas propriedades e definições relativas a geometria \mathcal{G}_2 . Da mesma forma que no apêndice A seremos breves nos comentários a respeito das definições e propriedades aqui descritas. Apesar da grande semelhança com o apêndice A decidimos por incluir este apêndice pois mais adiante iremos utilizar algumas das definições de \mathcal{G}_2 para comparação com a geometria de Rawlins (apêndice C). Começaremos por relembrar a definição da geometria \mathcal{G}_2 .

Geometria \mathcal{G}_2

A geometria onde as retas são as \mathcal{O} -escadas, e o conjunto de pontos e as regras de incidência são os mesmos da geometria euclidiana será denotada por \mathcal{G}_2 . Observe que a geometria \mathcal{G}_2 contorna o problema da não existência de segmento de reta entre qualquer par de pontos de \mathbb{R}^2 que havia na geometria \mathcal{G}_1 , no entanto na geometria \mathcal{G}_2 o número de segmentos distintos de retas (\mathcal{O} -escadas) entre um par de pontos pode ser infinito (figura B.1). Além disso, temos que existe pelo menos uma \mathcal{G}_2 -reta passando por qualquer par de pontos do \mathbb{R}^2 .

Da mesma forma que no apêndice A definiremos, de maneira análoga, o conceito de

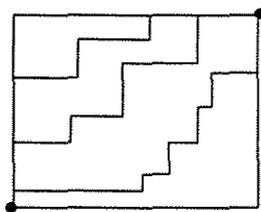


Figura B.1: \mathcal{O} -escadas entre dois pontos onde $\mathcal{O} = \{0, 90, 180, 270\}$.

\mathcal{G}_2 -semi-plano, \mathcal{G}_2 -convexidade e \mathcal{G}_2 -polígonos.

Definição B.1.9 (*) *Dados n pontos p_0, p_1, \dots, p_{n-1} , que definem uma seqüência de segmentos de \mathcal{G}_2 -retas em ordem cíclica $T_i = p_i p_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, onde as somas dos índices são tomadas módulo n , os pontos p_i 's juntamente com os segmentos T_i 's formam um \mathcal{G}_2 -polígono. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos de \mathcal{G}_2 -arestas do \mathcal{G} -polígono.*

Definição B.1.10 (*) *Dizemos que um \mathcal{G}_2 -polígono $\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ é simples se ele satisfaz a seguinte propriedade:*

- *todas as arestas de \mathcal{P} são disjuntas exceto pelos vértices que arestas consecutivas compartilham, isto é, $T_i \cap T_{i+1} = \{p_{i+1}\}$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $i < j-1$ e $j < i+n-1$.*

Daqui por diante, todas as referências a \mathcal{G}_2 -polígonos subentendem como \mathcal{G}_2 -polígonos simples. Além disso, quando nos referirmos a um \mathcal{G}_2 -polígono consideraremos às vezes também o interior do mesmo.

Definição B.1.11 (*) *Um \mathcal{G}_2 -semi-plano é uma das duas regiões fechadas do plano cuja fronteira é uma \mathcal{G}_2 -reta.*

Definição B.1.12 (*) *Um conjunto S é \mathcal{G}_2 -convexo se a interseção de S com qualquer \mathcal{G}_2 -reta é conexa.*

Definição B.1.13 (*) *Um \mathcal{G}_2 -polígono é \mathcal{G}_2 -convexo se sua interseção com qualquer \mathcal{G}_2 -reta é conexa.*

Definição B.1.14 (*) *A envoltória \mathcal{G}_2 -convexa de um conjunto S é o menor conjunto fechado (definição D.1.9) \mathcal{G}_2 -convexo que contém S .*

Conforme veremos na Proposição B.1.16 a interseção de conjuntos \mathcal{G}_2 -convexos é um conjunto \mathcal{G}_2 -convexo. Assim, envoltória \mathcal{G}_2 -convexa está bem definida pois " \subset " define uma relação de ordem parcial para conjuntos.

Proposição B.1.15 (*) *Um conjunto \mathcal{G}_2 -convexo é conexo.*

Demonstração: Seja \mathbf{P} um conjunto \mathcal{G}_2 -convexo. Suponha, por absurdo, que \mathbf{P} seja não conexo. Sejam \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 componentes conexas de \mathbf{P} . Sejam p_1, p_2 pontos de \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , respectivamente. Seja R uma \mathcal{G}_2 -reta passando por p_1 e p_2 . A interseção de R com \mathbf{P}_1 e com \mathbf{P}_2 é não conexa, o que contradiz a hipótese de que \mathbf{P} é \mathcal{G}_2 -convexo. \square .

Proposição B.1.16 (*) *A interseção de dois conjuntos \mathcal{G}_2 -convexos é um conjunto \mathcal{G}_2 -convexo.*

Demonstração: Análoga a demonstração da Proposição A.1.7. \square

Proposição B.1.17 (*) *Um conjunto fechado é \mathcal{G}_2 -convexo se e somente se ele é dado por interseção de \mathcal{G}_2 -semi-planos \mathcal{G}_2 -convexos.*

Demonstração: Análogo a demonstração 2.3.12. \square

É importante observar aqui uma diferença com a geometria \mathcal{G}_1 . Nesta última geometria não se verifica a Proposição B.1.17, que também é válida na geometria euclidiana.

No apêndice C descreveremos a geometria de Rawlins para um conjunto de orientações restritas.

Apêndice C

Geometria GR

Rawlins [23], Schuierer [27] e Wood [30] propuseram soluções para problemas de convexidade e visibilidade em uma geometria semelhante a \mathcal{G}_2 , no entanto a semelhança encontra-se apenas no conjunto de retas definidas. Os conceitos de convexidade, semi-planos e visibilidade empregados por eles, que serão apresentados na seção C.1, diferem daqueles das geometrias por nós definidas. Denotaremos a Geometria de Rawlins por GR . A seção C.1 contém as definições de convexidade, semi-planos e visibilidade desta geometria obtidas de [23, 24, 25, 27].

C.1 Conceitos, Estruturas Geométricas e Propriedades da Geometria GR

As retas da geometria definida por Rawlins consiste das \mathcal{O} -escadas, o conjunto de pontos é \mathbb{R}^2 e as regras de incidência entre pontos e retas são as mesmas da geometria euclidiana.

Nas subseções seguintes descreveremos as definições de convexidade, semi-planos, envoltória convexa e visibilidade dadas em [23, 24, 25, 27]. Vale a pena ressaltar que os trabalhos existentes na literatura abordam problemas definidos na geometria GR .

C.1.1 \mathcal{O} -Convexidade

Apresentaremos duas definições de convexidade que generalizam as definições dadas em [17, 18, 19, 20, 30] que são para as orientações $\{0, 90, 180, 270\}$. A definição C.1.1 é uma generalização do conceito de convexidade definido em [17, 18, 20] e a definição C.1.2 generaliza o conceito de convexidade definido em [19, 30].

Definição C.1.1 ([17, 18, 20]) *Um conjunto S é \mathcal{O} -convexo se para quaisquer dois pontos de S que determinam um segmento de reta euclidiano cuja orientação pertence ao*

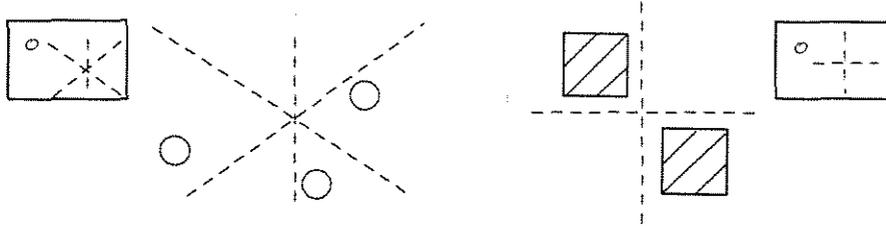


Figura C.1: Exemplo de dois conjuntos \mathcal{O} -convexos e não convexos com respeito ao conjunto de orientações tracejadas.

conjunto \mathcal{O} , este segmento está contido em S .

Rawlins [23] definiu o conceito de convexidade (para a geometria GR) da seguinte forma:

Definição C.1.2 ([19, 30]) *Um conjunto S é \mathcal{O} -convexo se sua interseção com qualquer reta euclidiana cuja orientação pertence ao conjunto \mathcal{O} é conexa (ou vazia).*

É fácil ver que as definições acima são equivalentes. Note ainda que um conjunto \mathcal{O} -convexo não necessariamente é conexo, como mostra o exemplo da figura C.1. Vale também observar que a definição de \mathcal{O} -convexidade difere do conceito de \mathcal{G}_2 -convexidade. A determinação de \mathcal{O} -convexidade se dá através da verificação da interseção de uma reta euclidiana com orientação em \mathcal{O} com um dado conjunto enquanto que a determinação de \mathcal{G}_2 -convexidade se faz através da verificação da interseção de \mathcal{G}_2 -retas com o dado conjunto.

Esta diferença na definição do conceito de convexidade nas geometrias \mathcal{G}_2 e GR acarreta em conjuntos \mathcal{G}_2 -convexos conexos (Proposição B.1.15) e conjuntos GR -convexos não conexos (figura C.1).

C.1.2 \mathcal{O} -Semi-planos

Analogamente à geometria euclidiana pode-se definir semi-planos para a geometria GR . Por exemplo, Fink e Wood [10] definiram \mathcal{O} -semi-plano da seguinte forma:

Definição C.1.3 ([10]) *Um \mathcal{O} -semi-plano é uma região fechada do plano tal que sua interseção com qualquer reta euclidiana cuja orientação pertence a \mathcal{O} é vazia, uma semi-reta ou uma reta.*

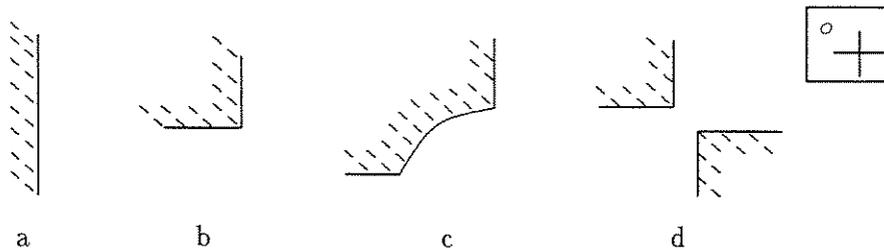


Figura C.2: Exemplos de \mathcal{O} -semi-planos, segundo Fink e Wood.

Note que pela definição C.1.3, as componentes conexas da fronteira de um \mathcal{O} -semi-plano são \mathcal{O} -escadas. No entanto a fronteira de um \mathcal{O} -semi-plano pode ser desconexa, como mostra o exemplo da figura C.2.d. Veja que isto não ocorre na geometria \mathcal{G}_2 pois lá definimos \mathcal{G}_2 -semi-planos com sendo uma das duas regiões fechadas do plano cuja fronteira é uma \mathcal{G}_2 -reta.

C.1.3 Envoltória \mathcal{O} -convexa

Rawlins [23] no intuito de generalizar o conceito de envoltória \mathcal{O} -convexa em [19] de $|\mathcal{O}| = 4$ para $|\mathcal{O}| \geq 4$ fez a seguinte definição:

Definição C.1.4 ([23]) *A envoltória \mathcal{O} -convexa de um conjunto de pontos \mathbf{S} é o menor conjunto \mathcal{O} -convexo que o contém.*

Desta forma, envoltória \mathcal{O} -convexa está bem definida pois “ \subset ” define uma ordem parcial para os conjuntos e a interseção de dois conjuntos \mathcal{O} -convexos é \mathcal{O} -convexo. Portanto, a definição acima é equivalente a definir envoltória \mathcal{O} -convexa como a interseção de todos os conjuntos \mathcal{O} -convexos que contêm \mathbf{S} .

Porém, embora esta definição dê origem a uma única envoltória \mathcal{O} -convexa para um conjunto de pontos, ela permite que a envoltória \mathcal{O} -convexa seja desconexa. A figura C.3 exibe um exemplo.

Tentativas para contornar o problema da não conexidade da envoltória \mathcal{O} -convexa aparecem na literatura, inclusive Montuno et al [17] e Nicholl et al [18] que definem:

Definição C.1.5 *Uma envoltória \mathcal{O} -convexa de um conjunto \mathbf{S} é qualquer dos menores conjuntos \mathcal{O} -convexos e conexos que contêm \mathbf{S} .*

Apesar da definição acima eliminar o problema da não conexidade, perde-se a unicidade da envoltória \mathcal{O} -convexa, como mostra o exemplo da figura C.4. A perda da unicidade resulta em grandes dificuldades de consistência para muitas aplicações.

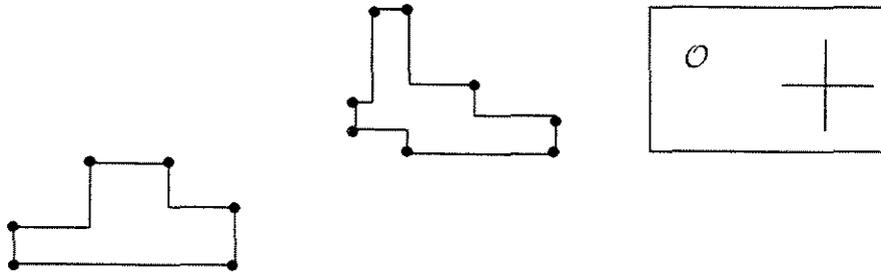


Figura C.3: Uma envoltória \mathcal{O} -convexa desconexa (para definição C.1.4).

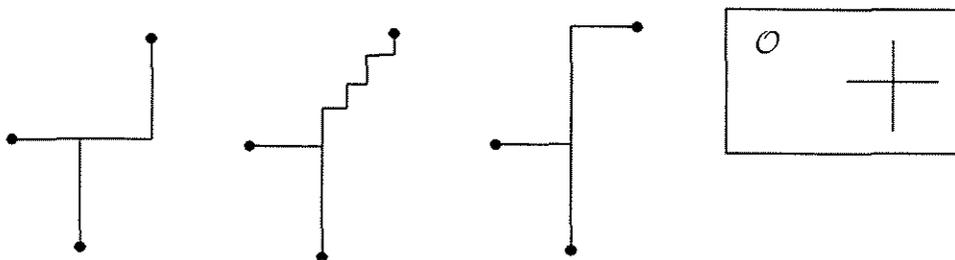


Figura C.4: Não unicidade da envoltória \mathcal{O} -convexa (para definição C.1.5).

Convém observar que Rawlins [23] estende um algoritmo de Ottmann [19] para $|\mathcal{O}| \geq 4$ mas obtém uma envoltória \mathcal{O} -convexa que não satisfaz à sua própria definição C.1.4. Vale então ressaltar aqui que a definição de envoltória convexa dada para a geometria \mathcal{G}_2 resulta em uma única estrutura e esta é conexa.

Apêndice D

Espaços Métricos e Topologia

Este apêndice contém algumas definições relacionadas a Topologia e a Espaços Métricos. A apresentação dos conceitos usados no capítulo 4 será feita de maneira sucinta pois este apêndice tem como objetivo servir apenas de referência rápida. Uma descrição com maiores detalhes foge ao escopo desta tese. Para maiores detalhes sobre o assunto aconselhamos consultar [16].

Apresentamos a seguir os conceitos de *topologia*, *espaço topológico* e *homeomorfismo*.

Definição D.1.1 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção \mathfrak{S} de partes de X , denominados de abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

- \emptyset e X pertencem a \mathfrak{S} ;
- se $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S}$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{S}$;
- dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathfrak{S}$ para cada $\lambda \in L$ temos que

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{S}.$$

Definição D.1.2 *Um espaço topológico é um par (X, \mathfrak{S}) onde X é um conjunto.*

Definição D.1.3 *Sejam A e B dois espaços topológicos. A função $f : A \rightarrow B$ é um homeomorfismo se, e somente se*

1. f é bijetora;
2. f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Neste caso, diz-se que os conjuntos A e B são homeomorfos.

Apresentamos a seguir o conceito de *métrica* e *espaço métrico* que é bastante utilizado nesta tese.

Definição D.1.4 *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

- $d(x, x) = 0$;
- se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição D.1.5 *Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .*

A definição abaixo estabelece uma vizinhança em torno de um ponto utilizando-se o conceito de métrica. O conceito de bola aberta foi utilizado na Definição 5.4.7 do capítulo 4.

Definição D.1.6 *Seja p um ponto num espaço métrico (M, d) . Dado um número real $r > 0$, a bola aberta de centro p e raio r é o conjunto $B_d(p, r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto p é menor do que r , ou seja,*

$$B_d(p, r) := \{x \in M : d(x, p) < r\}.$$

O conceito de conjunto aberto, apresentado a seguir, foi utilizado na Definição 4.1.5.

Definição D.1.7 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.*

A conceito de *topologia induzida* foi utilizado na definição de métrica comportada (Definição 5.2.2).

Definição D.1.8 *Seja (M, d) um espaço métrico. A topologia induzida pela métrica d sobre M é dada pelo conjunto de abertos desse espaço.*

O conceito dado a seguir foi mencionado várias vezes no capítulo 4, por exemplo, nas Proposições 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10 e 4.3.1.

Definição D.1.9 Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado se \overline{F} é aberto.

O conceito de *conjunto limitado* foi utilizado na definição de métrica comportada (definição 5.2.2).

Definição D.1.10 Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico (M, d) . O subconjunto A é limitado se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) < k$, para todo $x, y \in A$.

A Proposição 5.3.3 utiliza-se da Definição dada a seguir.

Definição D.1.11 Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M . Diz-se que d e d' são métricas equivalentes se, para cada $\varepsilon > 0$ e $p \in M$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$ e, vice-versa, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$.

Definição D.1.12 Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto $p \in M$ é limite de uma seqüência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B_d(p, \varepsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B_d(p, \varepsilon),$$

denotamos por

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = p,$$

e dizemos que (x_n) é uma seqüência convergente ou que (x_n) converge para p .

Definição D.1.13 Um espaço métrico é completo se toda seqüência de Cauchy é convergente.

A noções de *conjunto compacto*, *espaço métrico convexo* e da *propriedade da extensão local* apresentadas a seguir, são utilizadas na definição de G -espaço dada em 5.3.2.

Definição D.1.14 Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é compacto se, para toda seqüência (x_n) de pontos de K , existe uma subseqüência (x_{n_i}) que converge para um ponto de K .

Definição D.1.15 Um espaço métrico (M, d) é convexo se para quaisquer dois pontos distintos p e q de M existe um ponto $r \notin \{p, q\}$, $r \in M$ tal que

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q).$$

Definição D.1.16 Dizemos que um espaço métrico (M, d) possui a propriedade da extensão local se para todo ponto p do espaço métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que para dois pontos distintos x e y em $B_d(p, \varepsilon)$ existe um ponto z tal que

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z).$$

Ainda relacionado com a definição de G -espaço temos o conceito de *espaço finitamente compacto* apresentado logo após a definição de *ponto de acumulação*.

Definição D.1.17 Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M . Um ponto $p \in M$ é ponto de acumulação de A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ a interseção

$$B_d(p, \varepsilon) \cap A$$

é um conjunto infinito.

Definição D.1.18 Um espaço é finitamente compacto se este possui um subconjunto infinito limitado com pelo menos um ponto de acumulação.

No apêndice seguinte apresentaremos alguns conceitos relacionados a geometria diferencial e geometria Riemanniana.

Apêndice E

Variedades Riemannianas

Este apêndice contém algumas das definições relacionadas a variedades Riemannianas. É importante ressaltar que este apêndice não tem como objetivo ser um texto abrangente sobre o assunto, mesmo por que existem referências [4], [5] e [13] relacionadas ao assunto que possuem um bom detalhamento e também fornecem uma visão intuitiva das definições contidas neste apêndice. Além disso, um detalhamento maior sobre o assunto fugiria do escopo desta tese.

Apresentaremos a seguir o conceito de superfície regular e de curvas diferenciáveis por partes, este último conceito é utilizado na definição da família \mathcal{F} de curvas e também no conceito de métrica intrínseca (utilizada na geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$).

Definição E.1.19 *Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão k se para cada $p \in S^k$ existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $S \cap V$ tais que:*

- \mathbf{x} é um homeomorfismo diferenciável;
- $(d\mathbf{x})_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

Daqui por diante \mathcal{S} denotará uma superfície regular.

Definição E.1.20 *Um mapeamento $C : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ (superfície regular) de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ para uma superfície \mathcal{S} é uma curva diferenciável por partes no intervalo $[a, b]$ se existe uma partição do intervalo $[a, b]$*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$$

tal que C é diferenciável em $[t_i, t_{i+1}]$ para $i = 0, \dots, k$.

Definição E.1.21 *Sejam p e q dois pontos distintos em \mathcal{S} tais que existem curvas diferenciáveis por partes ligando p a q . A distância intrínseca $\rho(p, q)$ do ponto p ao ponto q é o valor*

$$\rho(p, q) = \inf \{ \text{comprimento euclidiano das curvas diferenciáveis por partes ligando } p \text{ a } q \}$$

A Proposição seguinte estabelece que a função distância definida acima é uma métrica.

Proposição E.1.22 *A distância ρ definida acima é uma métrica (veja Carmo [5]).*

É importante observar que quando a definição E.1.21 é aplicada à geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ temos que $\rho(p, q) = d_{\mathcal{F}}(p, q)$, para dois pontos distintos de \mathbb{R}^2 , pois existe uma única curva de \mathcal{F} entre p e q e esta curva é diferenciável por partes. Assim, $d_{\mathcal{F}}$ é uma métrica.

Os conceitos dados a seguir são necessários para a apresentação da definição de Variedade Riemanniana. Este conceito é utilizado no resultado de Eberlein [8], na realidade neste resultado é utilizado o conceito de variedade Riemanniana bidimensional completa. Inicialmente, apresentamos o conceito de *variedade diferenciável* e posteriormente o conceito de variedade Riemanniana.

Definição E.1.23 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto \mathcal{M} e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ de abertos U_i de \mathbb{R}^n em \mathcal{M} tais que:*

1. $\cup_i \mathbf{x}_i(U_i) = \mathcal{M}$;
2. *para todo par i, j com $\mathbf{x}_i(U_i) \cap \mathbf{x}_j(U_j) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_i^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_j^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ são diferenciáveis (figura E.1);*
3. *a família $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}$ é maximal relativamente às condições (1) e (2).*

O par (U_i, \mathbf{x}_i) é chamado de *sistema de coordenadas de \mathcal{M} em p* .

Agora apresentaremos três definições que serão utilizadas na definição de métrica Riemanniana. Este conceito é necessário pois uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada uma *variedade Riemanniana*.

Definição E.1.24 *Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Uma aplicação diferenciável $C : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ é chamada curva (diferenciável) em \mathcal{M} . Suponha que $C(0) = p \in \mathcal{M}$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de \mathcal{M} em \mathbb{R}^n diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva C em $t = 0$ é a função $C'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$C'(0)f = \left. \frac{d(f \circ C)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ a alguma curva $C : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ com $C(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a \mathcal{M} em p será indicado por $T_p(\mathcal{M})$.

Proposição E.1.25 O conjunto $T_p(\mathcal{M})$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n (veja Carmo [5]).

Definição E.1.26 O espaço vetorial $T_p(\mathcal{M})$ é chamado o espaço tangente de \mathcal{M} em p .

Definição E.1.27 Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma lei que faz corresponder a cada ponto p de \mathcal{M} um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, então a função

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em U .

Definição E.1.28 Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana.

A definição a seguir ainda se relaciona ao resultado de Eberlein, onde apresentamos o conceito de variedade Riemanniana completa.

Definição E.1.29 Uma variedade Riemanniana \mathcal{M}_r é (geodesicamente) completa se para todo $p \in \mathcal{M}_r$, as geodésicas $\gamma(t)$ que passam de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

As duas definições seguintes são auxiliares para a apresentação da definição de pontos conjugados sobre uma geodésica. O conceito de ponto conjugado é utilizado no Teorema 5.4.11 de Eberlein e no Teorema (Teorema 5.4.10) de Ehrlich.

Definição E.1.30 Seja $C : [0, l] \rightarrow S$ uma curva regular parametrizada, onde o parâmetro $s \in [0, l]$ é o comprimento de arco. Uma variação de C é um mapeamento diferenciável $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que

$$h(s, 0) = C(s), s \in [0, l].$$

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva $h_t : [0, l] \rightarrow S$ dada por $h_t(s) = h(s, t)$ é chamada de uma curva de variação h_t . A variação h_t é dita própria se

$$h_t(0) = C(0), h_t(l) = C(l), t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

A noção de geodésica que estamos utilizando é a de curva que minimiza a distância entre dois pontos, assim uma geodésica parametrizada é também uma curva parametrizada.

Definição E.1.31 *Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ uma geodésica parametrizada em S e seja $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma variação de γ tal que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a curva $h_t(s) = h(s, t)$, $s \in [0, l]$ é uma geodésica parametrizada (não necessariamente por comprimento de arco),*

$$J(s) := (\partial h / \partial t)(s, 0)$$

é chamado de campo de Jacobi ao longo de γ .

Definição E.1.32 *Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ , $t_0 \in (0, l]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Curvatura de Superfície A seguir apresentaremos conceitos auxiliares para a definição de curvatura de uma superfície utilizada no capítulo 5. Iniciaremos com a definição de curvatura de uma curva em um ponto.

Definição E.1.33 *Seja $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada por comprimento de arco $s \in I$. O número $|C''(s)| := k(s)$ é chamado de curvatura de C em s .*

Definição E.1.34 *Um vetor unitário na direção $C''(s)$ em um ponto onde $k(s) \neq 0$ é chamado de vetor normal a C em s .*

Definição E.1.35 *Sejam C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p e θ tal que $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n := k \cos \theta$ é chamado de curvatura normal de C em p .*

Definição E.1.36 *Seja $p \in S$. A máxima e a mínima curvatura normal em p , denotadas por k_1 e k_2 , respectivamente, são chamadas de curvaturas principais em p .*

Agora podemos apresentar o conceito de *curvatura Gaussiana* (nos capítulos 4 e 5 utilizamos apenas o termo curvatura ao invés de curvatura Gaussiana).

Definição E.1.37 *A curvatura Gaussiana de S em p é dada por*

$$K := (k_1 + k_2)/2.$$

Definição E.1.38 *Um superfície S possui curvatura constante quando sua curvatura Gaussiana é a mesma para todo $p \in S$.*

No próximo apêndice apresentamos uma tabela de símbolos usados nesta tese.

Apêndice F

Tabela de Símbolos

letras minúsculas p, q, r, s, t, v	pontos, vértices
letras maiúsculas P, Q, R, T	retas, segmentos, raios
C	curvas, caminhos
letras maiúsculas em negrito I, S, P, Q, R	conjuntos de pontos
\mathcal{O}	conjunto de orientações
δ	cardinalidade de \mathcal{O}
\mathcal{E}	envoltória $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -convexa
\mathcal{F}	família de curvas
\mathcal{P}	polígonos
\mathcal{H}	semi-planos
\mathcal{H}_R	semi-plano limitado por R
α, β, γ	orientações
$\vec{\alpha}$	raio com orientação α
\vec{pq}	raio com origem em p passando por q
\overline{pq}	segmento de reta euclidiana entre p e q
m	mediana de reta ou segmento
k, m, n	cardinalidade de conjuntos
h, i, j, l	índices
$p.x$	abscissa do ponto p
$p.y$	ordenada do ponto p
$\Phi(R)$	orientação da reta, segmento ou raio
$\text{Be}(T)$	braço esquerdo da $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta T
$\text{Bd}(T)$	braço direito da $\mathcal{G}_{\mathcal{O}^+}$ -reta T
\mathcal{G}	geometrias

$|S|$ cardinalidade do conjunto S
 Ox, Oy eixos das coordenadas cartesianas
 \mathbb{R} conjuntos dos reais
 \mathbb{R}^2 plano

Bibliografia

- [1] A. D. Aleksandrov, V. N. Berestovskii, and I. G. Nikolaev. Generalized riemannian spaces. *Russian Math. Surveys*, 41(3):1–54, 1986.
- [2] H. Busseman. *Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry*. Princeton University Press, 1942.
- [3] H. Busseman. *The Geometry of Geodesics*. Academic Press, Inc., 1955.
- [4] M. P. Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [5] M. P. Carmo. *Geometria riemanniana*. IMPA, 1979.
- [6] L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee. Helly's theorem and its relatives. In *Convexity, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume VII, pages 101–180, Providence, Rhode Island, 1963. American Mathematical Society.
- [7] M. Drandell. Generalized convex sets in the plane. *Duke Mathematical Journal*, 19:537–547, 1952.
- [8] P. Eberlein. The cut locus of noncompact finitely connected surfaces without conjugate points. *Comment. Math. Helvetici*, 51:23–44, 1976.
- [9] P. E. Ehrlich and H. I. Hof. Dirichlet region in manifolds without conjugate points. *Comment. Math. Helvetici*, 54:642–658, 1979.
- [10] E. Fink and D. Wood. Generalized halfspaces in restricted-orientation convexity. Technical report, Carnegie-Mellon University, 1996.
- [11] D. G. Kirkpatrick and R. Seidel. The ultimate planar convex hull algorithm? *SIAM Journal of computing*, 15:187–299, 1986.
- [12] R Klein. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, volume 400 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1989.

- [13] E. Kreyszig. *Differential Geometry*. University of Toronto Press, 1959.
- [14] S. R. Lay. *Convex Sets and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics. J.Wiley, 1982.
- [15] M. P. Levitska. Characterizations of convex sets. In P. M. Gruber and J. M. Wills, editors, *Handbook of Convex Geometry*, volume A. Elsevier Science Publishers, 1993.
- [16] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, 1977.
- [17] D. Y. Montuno and A. Fournier. Finding the x-y convex hull of a set of x-y polygons. Technical Report CSRG-148, University of Toronto, 1982.
- [18] T. M. Nicholl, D. T. Lee, Y. Z. Liao, and C. K. Wong. Constructing the x-y convex hull of a set of x-y polygons. *BIT*, 23:456–471, 1983.
- [19] T. Ottmann, E. Soisalon-Soininen, and D. Wood. On the definition and computation of rectilinear convex hulls. *Information Sciences*, 33:157–171, 1984.
- [20] T. Ottmann, E. Soisalon-Soininen, and D. Wood. Partitioning and separating sets of orthogonal polygons. *Information Sciences*, 42:31–49, 1987.
- [21] M. M. Peixoto. On convexity. *Anais da Acadêmia Brasileira de Ciências*, 21:291–302, 1949.
- [22] F. P. Preparata and M.I. Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1986.
- [23] G. J. E. Rawlins. *Explorations in Restricted Orientation Geometry*. PhD thesis, University of Waterloo, 1987.
- [24] G. J. E. Rawlins and D. Wood. Optimal computation of finitely oriented convex hull. *Information and Computation*, 72:150–166, 1987.
- [25] G. J. E. Rawlins and D. Wood. Restricted oriented convex sets. *Information Sciences*, 54:263–281, 1991.
- [26] J. R. Sack. *Rectilinear Computational Geometry*. PhD thesis, Carleton University, 1984.
- [27] S. Schuierer and D. Wood. Staircase visibility and computation of kernels. *Algorithmica*, 14:1–26, 1995.
- [28] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Proceedings 16th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 151–162, 1975.

- [29] P. Widmayer, Y.F. Wu, and C. K. Wong. Distance problems in computational geometry for fixed orientations. In *Proceedings of the 1st Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 186–195, 1985.
- [30] D. Wood. An isothetic view of computational geometry. In G. T. Toussaint, editor, *Computational Geometry*, pages 429–459. Elsevier Science Publishing, 1985.