

Tópicos na classe dos Grafos
Clique

Luis Arturo Pérez Lozada

Tópicos na classe dos Grafos Clique

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Luis Arturo Pérez Lozada e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de abril de 1996.

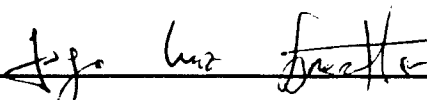


Profa. Célia Picinin de Mello
Orientadora

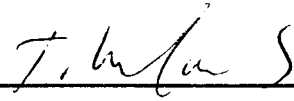
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Tese defendida e aprovada em, 10 de 04 de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JAYME LUIZ SZWARCFITER



Prof(a). Dr(a). JOÃO MEIDANIS



Prof(a). Dr(a). Célia Picinin de Mello

Tópicos na classe dos Grafos Clique¹

Luis Arturo Pérez Lozada²

Departamento de Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP

Banca Examinadora:

- Ricardo Dahab (Suplente)³
- Célia Picinin de Mello (Orientadora)³
- Jayme Luiz Szwarcfiter ⁴
- João Meidanis ³

¹Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

²O autor é Bacharel em Estatística pela Universidad Nacional Agraria, Lima, Perú.

³Professor do Departamento de Ciência da Computação - IMECC - UNICAMP.

⁴Professor do COPPE-Sistemas - UFRJ.

Aos meus pais e irmãs pelo incentivo recebido nesta aventura brasileira.

Agradecimentos

À professora Célia Picinin de Mello, pela orientação e interesse demonstrado neste trabalho.

A todos os colegas da turma 94.

A meus amigos Edwin Marcos, e Victor Maehara por sua valiosa ajuda.

Aos professores do Departamento de Ciência da Computação, especialmente a Ricardo Dahab.

Ao povo Brasileiro por fazer-me sentir como um de seus integrantes.

Ao Governo do Brasil, em especial ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro recebido que permitiu cumprir um de meus maiores projetos.

A minha pátria o Peru, e em especial a minha cidade Lima, que mesmo estando tão longe sempre meus sentimentos, carinhos e emoções estiveram voltadas à elas.

O homem santo reuniu os seus amigos. “Estou velho”, disse ele. “E sábio”, respondeu um dos amigos. “Sempre te vimos rezando durante todo esse tempo. O que conversavas com Deus?”.

“No começo, eu tinha o entusiasmo da juventude. Pedia a Deus que me desse forças para mudar a humanidade. Aos poucos, percebi que isto era impossível; então, passei a pedir a Deus que me desse forças para mudar quem estava à minha volta. Agora já estou velho e minha oração é muito mais simples. Peço a Deus o que devia ter pedido desde o começo.” “O que pedes?”, insistiu o amigo. “Peço para que consiga mudar a mim mesmo.”

Paulo Coelho
“*Matkub*”

Resumo

Uma clique de um grafo G é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo maximal de G . O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G . Indutivamente define-se o i -ésimo grafo clique iterado de G como $K^i(G) = K(K^{i-1}(G))$.

Apresenta-se de maneira organizada uma compilação de pesquisas realizadas nos últimos anos a respeito de diversos tópicos na classe dos grafos clique, entre eles: o estudo das propriedades dos grafos clique de conhecidas classes de grafos; a convergência; divergência e diâmetro dos grafos clique-iterados.

Abstract

A clique of a graph G is a set of vertices that induce a maximal complete subgraph of G . The clique graph $K(G)$ of a graph G is the intersection graph of the cliques of G . Inductively we denote the i th iterated clique graph of G by $K^i(G) = K(K^{i-1}(G))$.

We will present in an organized way a compilation of investigations made in the last years with respect to the several topics on this class of graphs, such as: the study of proprieties of clique graphs of well-known class of graphs; convergence; divergence and diameters of iterated clique graphs.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Definições Básicas	2
1.2	Operações com grafos	4
1.3	Propriedades do operador clique K	4
2	Caracterização e Reconhecimento da Classe dos Grafos Clique	6
2.1	Caracterização dos Grafos Clique	6
2.1.1	Um caso particular	10
2.2	Reconhecimento dos Grafos Clique	11
2.2.1	Caracterização e Reconhecimento dos Grafos Helly	14
3	Classes de Grafos Clique-Fixas	18
3.1	Grafos Helly	18
3.2	Grafos Helly-hereditários	20
3.3	Grafos Helly-desmontáveis	22
3.4	Grafos $\mathcal{H}_1$	24
3.5	Grafos sem Arestas Multiclique	27
3.6	Grafos Ptolemaicos	28
3.7	Grafos Blocos	32
3.8	Grafos Indiferenças	34
3.8.1	Grafos Indiferença Mínimos	36
3.9	Grafos Sigma	38
3.10	Classes de grafos não Clique-Fixas	39
3.11	Uso dos Hipergrafos	41
4	Classe de Grafos Clique-convergentes	43
4.1	Clique-convergência à um vértice (k_1)	44
4.1.1	Grafos Indiferença	44
4.1.2	Grafos Helly-desmontáveis	45
4.1.3	Grafos Desmontáveis	47

5	Classes de Grafos Clique-Divergentes	50
5.1	Teorema da Retração	51
5.2	Automorfismo Coafim	53
6	Diâmetros de Grafos Clique-Iterados	56
6.1	Caracterizações	56
6.2	Diâmetros Crescentes	59
6.3	Diâmetros Constantes	63
6.4	Diâmetros Não-crescentes	63
7	Conclusões	64

Lista de Figuras

1.1	Grafo G e seu grafo clique $K(G)$	3
1.2	Operações com grafos.	5
2.1	G é um grafo Helly e H não é Helly.	7
2.2	Nem todo grafo clique é um grafo Helly.	8
2.3	Ilustração da construção feita por Hamelink.	9
2.4	Ilustração do Lema 1.	10
2.5	Ilustração da demonstração do corolário 1.	12
2.6	Triângulo estendido e subgrafo clique do grafo G , relativo ao triângulo Tr	15
3.1	H não é um grafo Helly e $K(H)$ é grafo Helly.	19
3.2	Um grafo que não é Helly-hereditário, mas é Helly.	20
3.3	Grafos proibidos para grafos Helly-hereditários.	21
3.4	Grafo desmontável e não desmontável.	22
3.5	Grafo Helly-desmontável e não Helly-desmontável.	23
3.6	Grafos $\mathcal{H}_1$, e $\mathcal{H}_0$	25
3.7	Grafo sem arestas multiclique e grafo com arestas multiclique.	27
3.8	O grafo Gema.	28
3.9	Ilustração da demonstração do Lema 17.	30
3.10	Um grafo e seu grafo bloco.	32
3.11	Ilustração da construção feita por Harary.	33
3.12	Grafo indiferença e seu subgrafo representante.	34
3.13	Dois grafos indiferença onde o da esquerda é indiferença mínimo.	36
3.14	O grafo k_3 , uma representação própria e uma representação própria mínima.	37
3.15	Representação própria mínima de k_3 e grafo $H(f)$	38
3.16	Os três primeiros grafos das seqüências (G_2^m) e (G_3^m)	39
3.17	A classe dos grafos $\mathcal{H}_0$ não é clique-fixa.	40
3.18	A classe dos grafos cordal não é clique-fixa.	40
3.19	O Hipergrafo H e o seu hipergrafo dual H^*	41
3.20	Grafos subjacentes dos hipergrafos H e H^* , respectivamente.	42
4.1	Grafos clique-convergentes a um circuito periódico de grafos.	43
4.2	Grafo indiferença G com $diam(G) = ind(G) = 3$	44
4.3	Obtenção de $K^2(G)$	46

4.4	Relação entre os grafos Helly e os grafos desmontáveis.	48
4.5	Relação de inclusão entre classes clique-convergentes à k_1	49
5.1	O grafo O_3 e seu grafo clique $K(O_3)=O_4$	50
5.2	G_2 é o retrato de G_1	51
5.3	Ilustração da demonstração do corolário 6.	53
5.4	Automorfismos afim e coafim.	53
5.5	Ilustração da demonstração do corolário 7.	55
6.1	Grafo clique com diâmetro crescente.	57
6.2	Grafo clique com diâmetro constante.	58
6.3	Grafo clique com diâmetro não-crescente.	58
6.4	Construções dos Grafos $H_1(G)$ e $H_2(G)$	60
6.5	Grafos adequados para a construção de $H_1(G)$ e $H_2(G)$	60
6.6	Construção de $H_1(G_1)$	61
6.7	O grafo $K(H_1(G_1))$	61
6.8	Um grafo auto-clique.	63

Simbologia

c_n	Ciclo de comprimento n
k_n	Grafo completo de n vértices
Tr	Triângulo
$N[v]$	Vizinhança (fechada) de v
$diam(G)$	Diâmetro do grafo G
C	Clique
K	Operador clique
$K(G)$	Grafo clique de G
$K^i(G)$	i -ésimo grafo clique-iterado de G
$\omega(G)$	Tamanho da clique máxima de G
$\mathcal{F}$	Família de conjuntos
$\mathcal{C}(G)$	Família das cliques do grafo G
$\mathcal{C}_v(G)$	Coleção de cliques contendo v
$\mathcal{G}$	Classe de grafos
$\overline{G}$	Complemento do grafo G
$G_1 \cup G_2$	União dos grafos G_1 e G_2
$G_1 + G_2$	Combinação dos grafos G_1 e G_2
$G_1 \times G_2$	Produto cartesiano dos grafos G_1 e G_2
$G_1 \cdot G_2$	Produto normal dos grafos G_1 e G_2

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grafos é um componente essencial de quase todo tópico em Ciência da Computação, até o ponto que não seria possível imaginar tópicos como estrutura de dados, banco de dados, teoria da comunicação em redes, ou teoria de autômatos sem a presença dos grafos.

Seja $\mathcal{F}$ uma família, não vazia de conjuntos. O **grafo interseção** associado a $\mathcal{F}$ é obtido representando cada conjunto de $\mathcal{F}$ como um vértice, e unindo dois vértices por uma aresta se e somente se os correspondentes conjuntos se intersectam.

Se $\mathcal{F}$ corresponde a uma família de intervalos sobre uma reta real a classe de grafos interseção que se obtém é a dos **grafos de intervalos**. Se os intervalos possuem um mesmo comprimento, o grafo resultante é chamado **grafo de intervalo próprio** ou **grafo indiferença**. Se $\mathcal{F}$ corresponde à família das cliques de um grafo, a classe de grafos interseção obtida é a dos grafos clique. Nosso interesse é esta classe de grafos.

Um importante problema aberto nessa classe é o do seu reconhecimento. Não se sabe se reconhecer grafos clique é um problema pertencente à classe $\mathcal{P}$ ou à $\mathcal{NP}$ -completo.

A classe dos grafos clique também pode ser vista como a imagem do operador grafo clique. Seja $K : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$, o operador grafo clique que a cada grafo em $\mathcal{G}^*$ associa o seu grafo clique, ($\mathcal{G}^*$ denota a classe de todos os grafos simples e conexos). Note que K é uma função não sobrejetora nem injetora.

Considere, agora, uma classe particular de grafos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*$. Se $K(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$, dizemos que $\mathcal{G}$ é uma classe **clique-fechada** sob o operador K . Se, além disso, para cada $G \in \mathcal{G}$ existir $H \in \mathcal{G}$ tal que G é o grafo clique de H , isto é, se $\mathcal{G} = K(\mathcal{G})$, dizemos que $\mathcal{G}$ é uma classe **clique-fixa** sob o operador K .

Algumas classes de grafos são clique-fixas. Neste caso, se a classe puder ser reconhecida em tempo polinomial, o problema do reconhecimento dos grafos clique dessa classe está, evidentemente, resolvido.

Um grafo **clique-converge** se após um certo número de aplicações do operador grafo clique se obtém um grafo isomorfo a algum dos grafos anteriores. Caso contrário, dizemos que **clique-diverge**.

Uma classe particular de grafos clique-convergentes tem sido caracterizada. Mas, em geral, não sabemos se reconhecer grafos clique-convergentes é um problema pertencente à

classe $\mathcal{NP}$.

Em relação aos grafos clique-divergentes pouco se encontra na literatura.

Esta tese está dividida em 7 capítulos. O capítulo 2 contém a caracterização dos grafos clique, discorre sobre o problema do reconhecimento da classe e exhibe um algoritmo polinomial que reconhece uma importante subclasse dos grafos clique.

No capítulo 3 são mostradas algumas das classes clique-fixas conhecidas. Na literatura algumas das demonstrações, que provam que uma determinada classe é clique-fixa fazem uso dos hipergrafos. Usamos nas demonstrações somente a linguagem de grafos.

Algumas classes clique-convergentes serão discutidas no capítulo 4, e no 5 tratamos de classes clique-divergentes.

Estudamos no capítulo 6 a relação entre o diâmetro de um grafo e o diâmetro de seus grafos clique-iterados.

Finalmente, o capítulo 7 contém as conclusões.

Em resumo esta tese contém algumas das pesquisas realizadas sobre os grafos clique e o operador grafo clique; resalta os problemas ainda considerados abertos tal como o reconhecimento da classe dos grafos clique, o problema de reconhecer e caracterizar os grafos clique-convergentes e os grafos clique-divergentes; trata de questões referentes ao diâmetro em grafos clique-iterados, e discute os resultados parciais existentes na literatura a respeito das principais conjecturas do tema da tese.

1.1 Definições Básicas

Um **grafo** G é um conjunto finito, não vazio, $V(G)$, e um conjunto, $A(G)$, de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ são ditos **vértices** de G , enquanto os elementos de $A(G)$ são as **arestas** de G . Uma aresta $e \in A(G)$ é denotada pelo par de vértices (v, w) que a forma. Neste caso, v e w são **vértices adjacentes** e são as **extremidades** de e . Dizemos, também, que os vértices v e w **incidem** na aresta e . Reciprocamente dizemos que a aresta e é **incidente** a v e w . Duas arestas são **adjacentes** quando possuem alguma extremidade comum. Denotamos $n = |V(G)|$ e $m = |A(G)|$.

Denotamos por $Adj(v)$ o conjunto de **vértices adjacentes** a $v \in V(G)$. O vértice v é dito **universal** sempre que v é adjacente a todos os outros vértices de G . Dizemos também, que v é **universal** a um subgrafo H de G se v é adjacente a todo vértice de H . Um grafo **estrela** é um grafo conexo que possui um vértice universal cuja remoção é um conjunto independente de vértices. Um **conjunto independente** de vértices é um conjunto de vértices não adjacentes dois a dois.

A **vizinhança** (fechada) de v , denotada por $N[v]$, é definida como $Adj(v) \cup \{v\}$. Um vértice $y \in V(G)$ será dito **dominado** por um outro vértice $z \in V(G)$ em G quando $N[y] \subseteq N[z]$. Se $N[y] = N[z]$, diremos que y e z são vértices **gêmeos**.

Os grafos normalmente são visualizados através de uma representação geométrica, na qual cada vértice é representado por um ponto distinto, e cada aresta é representada através de uma linha unindo os pontos correspondentes a suas extremidades. Em geral confundimos o grafo com sua representação geométrica. Serão denominados indistintamente “grafos”.

Dois grafos G e H são **isomorfos** ($G \cong H$) quando existe uma função biunívoca $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $(v, w) \in A(G)$ se e somente se $(f(v), f(w)) \in A(H)$.

Um **subgrafo** G' de um grafo G é um subconjunto V' de seu conjunto de vértices e um subconjunto A' de arestas incidentes apenas aos vértices de V' . Quando A' contém todas as arestas de A cujas extremidades estão contidas em V' , então G' é o **subgrafo induzido** em G por V' , denotado por $G' = G[V']$. Seja G' um subgrafo de G , diz-se que G' é um **subgrafo gerador** de G , se $V(G) = V(G')$. Dado um grafo G , e um vértice $v \in V(G)$, o grafo $G - v$ é obtido a partir de G retirando-se o vértice v de seu conjunto de vértices, e todas as arestas de $A(G)$ incidentes a v . Dada uma aresta e , o grafo $G - e$ é o grafo obtido retirando-se a aresta e de $A(G)$.

Uma sequência de vértices $v_0, v_1, \dots, v_i$ tal que $(v_j, v_{j+1}) \in A(G)$ é um **passeio** entre v_0 e v_i . Se os vértices v_j são distintos, então trata-se de um **caminho**. O valor i é o **comprimento** do caminho. A **distância** $d(v, w)$ entre dois vértices $v, w \in V(G)$ é o comprimento de um caminho mínimo entre v e w em G . Se não existe um caminho entre v e w , então $d(v, w)$ é considerada infinita. O **diâmetro** de G é o valor $\text{diam}(G) = \max\{d(v, w) \mid v, w \in V(G)\}$. Denotamos por P_i o grafo formado por um único caminho de comprimento i .

Um **ciclo** é um caminho $v_1, v_2, \dots, v_i, v_1$. Mediante c_n representamos ao ciclo de n arestas. O ciclo de três arestas é chamado de **triângulo**, será denotado por Tr . Um grafo que não possui ciclos é dito **acíclico**. G é **conexo** se existe um caminho entre cada par de seus vértices.

Um conjunto S é **maximal** (**minimal**) em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém (está contido) propriamente (em) S não satisfaz P .

Um grafo é **completo** quando contém uma aresta entre cada par de seus vértices. O grafo completo com n vértices é designado por k_n . Um conjunto $C \subseteq V(G)$ é uma **clique** se $G[C]$ é um subgrafo completo maximal de G . Algumas vezes usamos o termo clique para o próprio subgrafo completo maximal. O **grafo clique** de G , denotado por $K(G)$, é o grafo interseção das cliques de G (veja Figura 1.1).

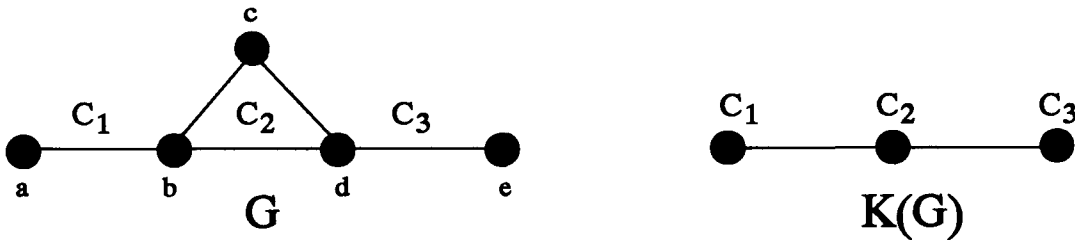


Figura 1.1: Grafo G e seu grafo clique $K(G)$.

Quando conveniente, denotamos o grafo G por $K^0(G)$, e em geral denotamos por $K^i(G) = K(K^{i-1}(G))$ o i -ésimo **grafo clique iterado**. Nos referimos a K como o **operador clique**.

O **tamanho da clique máxima** de um grafo G , é denotado por $\omega(G)$ e definido como: $\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ é uma clique de } G\}$. Um vértice $v \in V(G)$ é dito **simplicial** quando sua vizinhança $N[v]$ é uma clique.

Uma coleção de arestas independentes de um grafo G é chamado um **emparelhamento** de G pois estabelece um emparelhamento dos vértices incidentes a eles.

Um grafo é **cordal** quando não possui ciclos induzidos de comprimento maior do que três.

Num **problema de decisão** o objetivo consiste em decidir a resposta “sim” ou “não” a uma questão. Define-se a classe $\mathcal{P}$, como sendo aquela que compreende todos os problemas de decisão π que admitem um algoritmo polinomial. E a classe $\mathcal{NP}$, como sendo aquela que compreende todos os problemas de decisão π , tais que existe uma justificativa à resposta “Sim” para π , cujo passo de reconhecimento pode ser realizado por um algoritmo polinomial no tamanho da entrada de π . Um problema de decisão π é denominado **$\mathcal{NP}$ -completo** quando as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\pi \in \mathcal{NP}$,

(ii) todo problema de decisão $\pi' \in \mathcal{NP}$, pode ser transformado polinomialmente em π .

Podemos dizer que a classe $\mathcal{NP}$ -completo corresponde aos problemas de maior dificuldade dentre os pertencentes a $\mathcal{NP}$.

Um **homomorfismo** f de G_1 em G_2 é uma função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que para cada dois vértices adjacentes v_1, v_2 de G_1 tem-se : (i) $f(v_1)=f(v_2)$, ou (ii) $f(v_1)$ e $f(v_2)$ são adjacentes.

1.2 Operações com grafos

Sejam G_1 e G_2 dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos V_1 e V_2 , e conjuntos de arestas disjuntas A_1 e A_2 , respectivamente.

A **união** dos grafos, denotado por $G_1 \cup G_2$, possui conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$, e conjunto de arestas $A_1 \cup A_2$.

A **combinação** dos grafos, denotado por $G_1 + G_2$, consiste de $G_1 \cup G_2$ e de todas as arestas combinando V_1 com V_2 . Note que $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$, e que $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$.

Existem outras operações sobre G_1 e G_2 , as quais resultam num grafo G cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $V_1 \times V_2$. Estes incluem o **produto cartesiano**, e o **produto normal** de grafos (tal como é definido por Berge em [3]).

Para definir estas operações considere quaisquer dois vértices uv e $u'v' \in V_1 \times V_2$.

No produto cartesiano de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, estes vértices são adjacentes se e somente se $(u, u') \in A_1$, e $(v, v') \in A_2$.

No produto normal de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \cdot G_2$, estes vértices são adjacentes se e somente se $u = u'$ e $(v, v') \in A_2$, ou $v = v'$ e $(u, u') \in A_1$, ou $(u, u') \in A_1$ e $(v, v') \in A_2$.

A Figura 1.2, ilustra estas operações.

1.3 Propriedades do operador clique K

A aplicação do operador clique sobre certas operações com grafos satisfazem propriedades gerais :

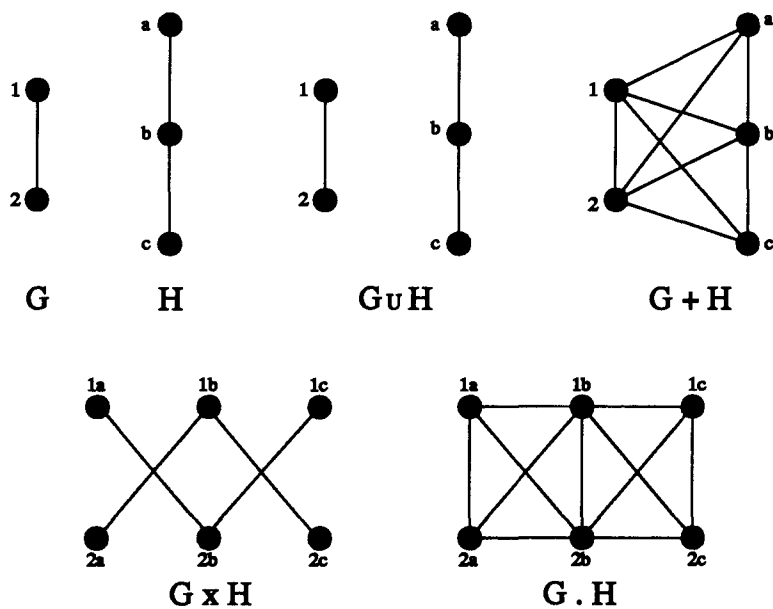


Figura 1.2: Operações com grafos.

- (1) $K(G_1 \cup G_2) = K(G_1) \cup K(G_2)$.
- (2) $K(G_1 \cdot G_2) = K(G_1) \cdot K(G_2)$.
- (3) $\overline{K(G_1 + G_2)} = \overline{K(G_1)} \times \overline{K(G_2)}$.

Capítulo 2

Caracterização e Reconhecimento da Classe dos Grafos Clique

A primeira questão que surge em relação a qualquer classe de grafos é o problema da caracterização. Caracterizar uma classe de grafos é encontrar condições necessárias e suficientes para que um dado grafo pertença à classe.

Uma outra questão, é o problema do reconhecimento. Reconhecer uma classe de grafos é obter um algoritmo eficiente (complexidade polinomial) que recebe como entrada um grafo e decide se tal grafo pertence à classe em questão.

Neste capítulo abordamos o problema da caracterização e do reconhecimento da classe dos grafos clique e de uma de suas subclasses.

2.1 Caracterização dos Grafos Clique

O problema da caracterização da classe dos grafos clique é um problema resolvido em 1971 por Roberts e Spencer [27].

O objetivo consistiu em estabelecer condições necessárias e suficientes para que um dado grafo G seja o grafo clique de um outro grafo H , é dizer para que $G = K(H)$.

Hamelink [10] abordou esse problema e estabeleceu uma condição **suficiente** para que um grafo seja um grafo clique. Posteriormente, Roberts e Spencer inspirados no resultado de Hamelink, caracterizaram os grafos clique, onde além da condição de suficiência obtiveram, também, uma condição **necessária**. Os resultados de Roberts e Spencer serão apresentados nesta seção.

Diz-se que uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios satisfaz a **propriedade Helly**, quando cada subfamília de $\mathcal{F}$ formada por conjuntos que se intersectam dois a dois têm um elemento em comum.

Denotamos por $\mathcal{C}(G)$ a família das cliques do grafo G . Observe que $\mathcal{C}(G)$ é única pois é uma família particular entre todas as famílias de subgrafos completos de G : “ Os subgrafos completos maximais de G ”.

Um grafo G é **Helly** quando $\mathcal{C}(G)$ satisfaz a propriedade Helly.

Seja $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$ uma família de subgrafos completos do grafo G da Figura 2.1. A família $\mathcal{F}$ não satisfaz a propriedade Helly, pois a subfamília $\{\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$, formada por subgrafos completos que se intersectam dois a dois, não contém um vértice comum.

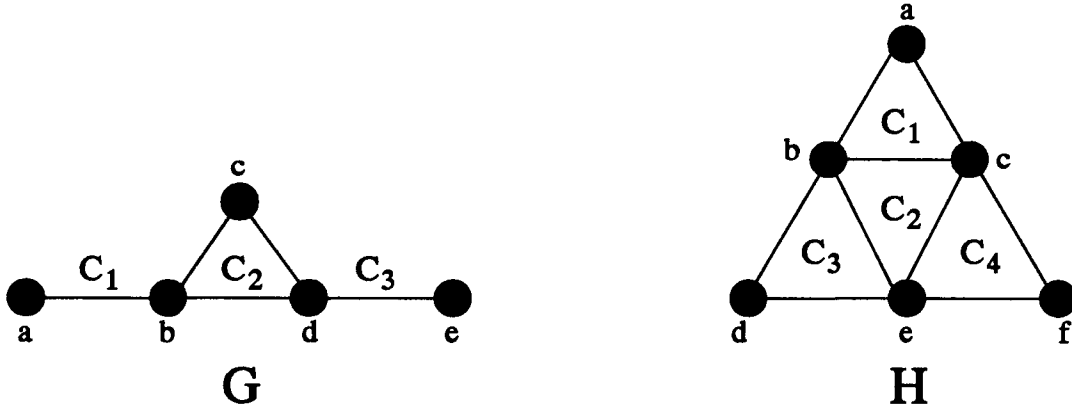


Figura 2.1: G é um grafo Helly e H não é Helly.

Observe que o conjunto das cliques do grafo G (Figura 2.1) é $\mathcal{C}(G) = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{d, e\}\}$. É fácil ver que $\mathcal{C}(G)$ satisfaz a propriedade Helly. Logo o grafo G da Figura 2.1 é um grafo Helly. Mas o grafo H (pirâmide) não é um grafo Helly, pois $\mathcal{C}(H) = \{\{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, e, f\}\}$, contém a subfamília $\{\{a, b, c\}, \{b, d, e\}, \{c, e, f\}\}$ formada por cliques que se intersectam duas a duas e não possuem um vértice comum.

Teorema 1 (Hamelink [10]) *Se G é um grafo Helly, então G é um grafo clique.*

Demonstração : Será incluída na demonstração do Teorema 2.

A recíproca do Teorema de Hamelink não é verdadeira, isto é, nem todo grafo clique é um grafo Helly. O seguinte exemplo, apresentado no trabalho original de Roberts e Spencer, ilustra a sentença anterior.

Sejam G um grafo e H seu grafo clique, isto é, $H \cong K(G)$, (Figura 2.2). Observe que $\mathcal{C}(H) = \{C'_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, C'_2 = \{c_2, c_5, c_6, c_7\}, C'_3 = \{c_4, c_7, c_8, c_9\}, C'_4 = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_8\}\}$. É fácil ver que as cliques são duas a duas não disjuntas mas a interseção

$$\bigcap_{i=1}^4 C'_i = \emptyset.$$

Logo, $\mathcal{C}(H)$ não satisfaz a propriedade Helly. Portanto H não é grafo Helly, mas $H \cong K(G)$. Porém, podemos dizer que uma forma mais fraca da recíproca é verdadeira, o qual mostramos na subseção 2.1.1.

Para demonstrar a suficiência do Teorema 2, será construído um grafo G tal que $H \cong K(G)$. Esta construção foi feita por Hamelink para a demonstração do Teorema 1.

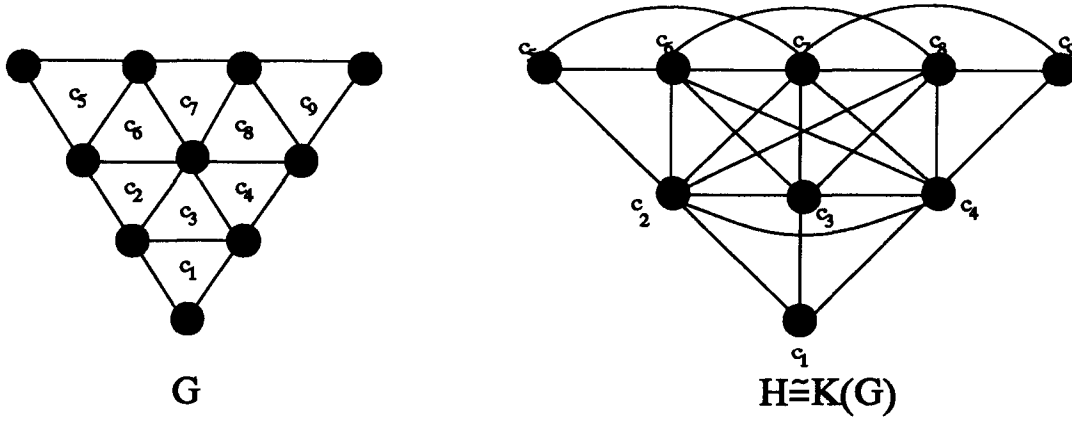


Figura 2.2: Nem todo grafo clique é um grafo Helly.

Teorema 2 (Roberts e Spencer [27]) *Um grafo H é grafo clique se e somente se existe uma família $\mathcal{C}$ de subgrafos completos de H que satisfaz as seguintes propriedades :*

- (1) $\mathcal{C}$ cobre todas as arestas de H , isto é, se $(x, y) \in A(H)$, então (x, y) está contido em algum elemento de $\mathcal{C}$.
- (2) $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade Helly.

Demonstração : ($\Leftarrow$) Seja H um grafo e $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \dots, L_p\}$ uma família de subgrafos completos de H satisfazendo (1) e (2). Construa o grafo G da seguinte forma :

$$V(G) = V(H) \cup \mathcal{C}$$

e $A(G)$ do seguinte modo :

1. Se $h \in V(H)$, então h é adjacente a L_i se e somente se $h \in L_i$;
2. L_i é adjacente a L_j se e somente se $i \neq j$ e $L_i \cap L_j \neq \emptyset$;
3. Se $h, h' \in V(H)$, então h não é adjacente a h' .

Para mostrar que $H = K(G)$, seja $C(h) = \{h\} \cup \{L_i : h \in L_i\}$. Seja C uma clique de G . Suponha que C não contenha nenhum vértice $h \in V(H)$. Então C é formada por vértices que correspondem a um conjunto de cliques de H , que se intersectam duas a duas. Como $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade Helly, estas cliques possuem pelo menos um vértice $h \in V(H)$ em comum. Pela definição de G , este vértice h é adjacente a todos os vértices de C , o que contradiz sua maximilidade. Portanto, toda clique de G contém pelo menos um vértice $h \in V(H)$. Pelas regras de construção segue que as únicas cliques de G são os conjuntos $C(h)$, e que H é o grafo clique de G .

($\Rightarrow$) Para provar a condição de **necessidade**, suponha que $H = K(G)$. Seja $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Sejam ainda $V(H) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$, e $C_1, C_2, \dots, C_m$ as cliques de G , enumeradas de forma que $(h_i, h_j) \in A(H)$ se e somente se $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

Para $i = 1, 2, \dots, n$; defina $L_i = \{h_j : g_i \in C_j\}$. Logo cada L_i induz um subgrafo completo em H porque, se h_j e h_k estão em L_i , então $g_i \in C_j \cap C_k$, e assim h_j e h_k são adjacentes. O objetivo é mostrar que $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, satisfaz as propriedades (1) e (2). A propriedade (1) é satisfeita porque se h_j é adjacente a h_k , logo $C_j \cap C_k \neq \emptyset$. Finalmente, $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade Helly. Para isso, suponha que $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_r}$, se intersectam dois a dois. Então, para todo j, k , existe um vértice h_{jk} em $L_{i_j} \cap L_{i_k}$. Assim g_{i_j} e g_{i_k} estão ambos em C_{jk} e portanto g_{i_j} e g_{i_k} são adjacentes. Segue que $\{g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r}\}$ estão contidos em alguma clique C_s de G , e assim $h_s \in \bigcap_{i=1}^r L_{i_i}$. $\square$

Observe que a prova da suficiência do Teorema 2, demonstra o Teorema 1 quando consideramos $\mathcal{C} = \mathcal{C}(H)$.

A construção do grafo G contida na demonstração do Teorema 2, é ilustrada na Figura 2.3, para $H \cong c_4$. Observe que o item (2) da construção corresponde exatamente ao grafo clique de H .

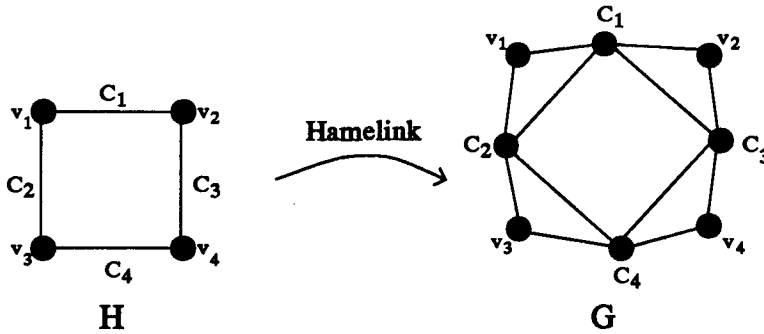


Figura 2.3: Ilustração da construção feita por Hamelink.

Esta construção, será referenciada com frequência no capítulo 3. Para facilitar, quando a usamos diremos a **construção de Hamelink**. É de destacar que o grafo G resultante da construção, possui a característica de que toda clique contém exatamente um dos vértices $v \in V(H)$, e todo $v \in V(H)$ está contido em exatamente uma clique de G .

O Teorema 3, exhibe uma estrutura proibida como subgrafo (não necessariamente induzido) para classe dos grafos clique.

Teorema 3 (Hamelink [10]) *Qualquer grafo H contendo uma clique T com três vértices $\{x, y, z\}$ e três outras cliques A, B e C tais que :*

$$V(T) \cap V(A) = \{x, y\},$$

$$V(T) \cap V(B) = \{y, z\},$$

$$V(T) \cap V(C) = \{x, z\},$$

não é grafo clique.

Demonstração : Assuma que H é o grafo clique de G . Seja α o homomorfismo, $\alpha : v \rightarrow C_v$, onde $v \in V(H)$ e C_v é a clique de G contendo o vértice v **simplicial**. Assuma também sem perda de generalidade que $V(C_x) \cap V(C_y) \subseteq V(C_z)$. Seja $a \in V(A) \setminus \{x, y\}$. Então a é adjacente a x e y mas não a z , assim C_a intercepta C_x e C_y mas não a C_z . Seja $u \in V(C_a) \cap V(C_x)$, $v \in V(C_a) \cap V(C_y)$, e $w \in V(C_x) \cap V(C_y)$. Estes três vértices são distintos e mutuamente adjacentes, daqui estão contidos em uma clique C_t de G . Agora C_t é diferente de C_x, C_y, C_z , mas possui interseção não vazia com cada uma delas. Daqui $t \in V(H)$ é adjacente a x, y e z , o qual contradiz a asunção que T é uma clique em H . $\square$

2.1.1 Um caso particular

Existem certas situações nas quais as condições a serem satisfeitas do Teorema 2, podem ser reduzidas. Por exemplo, quando as condições de Hamelink chegam a ser tanto necessárias como suficientes. Esta subseção demonstra a recíproca do Teorema 1, quando o tamanho de uma maior clique em um grafo é menor ou igual a 3. Considere, primeiro, o seguinte Lema que será útil para o caso particular mencionado.

Lema 1 (Roberts e Spencer [27]) *Seja $\mathcal{C}$ uma família de subgrafos completos de um grafo G , satisfazendo (1) e (2) do Teorema 2. Suponha que nenhum membro de $\mathcal{C}$ está contido em qualquer outro. Logo $\mathcal{C}$ contém um conjunto com dois vértices se e somente se este conjunto é uma clique de G .*

Demonstração : ($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{C}$ contém um conjunto com dois elementos $L_1 = \{h, h'\}$, que não é uma clique, isto implica a existência de um vértice $h'' \neq h, h'$, que é adjacente a h e h' . Logo existirão subgrafos completos L_2 e L_3 pertencentes a $\mathcal{C}$, tal que $\{h, h''\} \subseteq L_2$ e $\{h', h''\} \subseteq L_3$. Isto implica que L_1, L_2 e L_3 se intersectam dois a dois, mas não tem elemento comum, contradizendo a propriedade Helly.

($\Leftarrow$) Cada clique com dois elementos está contida em $\mathcal{C}$ de acordo com a propriedade (1). $\square$

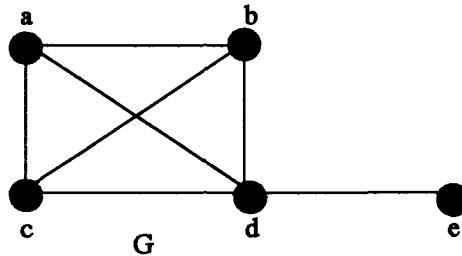


Figura 2.4: Ilustração do Lema 1.

Dado o grafo G da Figura 2.4, e $\mathcal{C}$ uma família de subgrafos completos de G , onde $\mathcal{C} = \{\{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{d, e\}\}$, a família $\mathcal{C}$ satisfaz as propriedades (1) e (2) do Teorema 2, portanto G é um grafo clique. Agora $\{d, e\} \in \mathcal{C}$ e $|\{d, e\}| = 2$, e $\{d, e\}$ constitui uma clique do grafo G .

Teorema 4 (Roberts e Spencer [27]) *Se $\omega(G) \leq 3$, G é um grafo clique se e somente se G é grafo Helly.*

Demonstração : Se G é um grafo Helly, pelo Teorema 1, G é grafo clique. Seja G um grafo clique. Logo existe alguma família $\mathcal{C}$ de subgrafos completos de G satisfazendo as propriedades (1) e (2) do Teorema 2. Seja $\mathcal{C}'$ a família de todos os elementos maximais (em termos de conjuntos, e não referido às cliques) de $\mathcal{C}$, junto com todas as cliques de G formadas por um único vértice. A família $\mathcal{C}'$ também satisfaz as propriedades (1) e (2) do Teorema 2. Deve-se mostrar que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(G)$. O fato que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(G)$ segue diretamente do Lema 1, desde que $\omega(G) \leq 3$. Para mostrar que $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{C}'$, seja $L \in \mathcal{C}(G)$. Pelo Lema 1, tem-se que $L \in \mathcal{C}'$ se $|L| \leq 2$. Seja $L = \{h_1, h_2, h_3\}$.

Da propriedade (1), $\mathcal{C}'$ cobre todas as arestas de G . Logo, $\mathcal{C}'$ possui elementos L_1, L_2 e L_3 contendo $\{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}, \{h_2, h_3\}$ respectivamente. Mas como $\mathcal{C}'$ satisfaz a propriedade (2), há um vértice h em $L_1 \cap L_2 \cap L_3$. Desde que h pertence a cada L_i , então h é adjacente a cada h_i , ou igual a algum h_i . Assim $\{h_1, h_2, h_3, h\}$ é um subgrafo completo em G , mas como $\omega(G) \leq 3$ implica que h é algum h_i . Portanto, $L \in \mathcal{C}'$. $\square$

Sabemos que a pirâmide não é um grafo Helly. Desde que $\omega(G) = 3$, pelo Teorema 4, a pirâmide não é um grafo clique. Além disso, a pirâmide é um subgrafo proibido para a classe dos grafos clique (Teorema 3).

Corolário 1 (Roberts e Spencer [27]) *Se $\omega(G) \leq 3$, G é um grafo clique se e somente se G não contém um subgrafo isomorfo ao grafo pirâmide.*

Demonstração : ($\implies$) Suponha que G contém um subgrafo isomorfo ao grafo pirâmide. Dado que $\omega(G) \leq 3$, os três triângulos exteriores são cliques. Estes se intersectam duas a duas mas não têm vértice comum, contradizendo a propriedade Helly. Logo G não é grafo clique.

($\impliedby$) Suponha que G não é um grafo clique. Sendo $\omega(G) \leq 3$, tem-se que $\mathcal{C}(G)$ não satisfaz a propriedade Helly. Sejam C_1, C_2 , e C_3 três cliques que se intersectam duas a duas, mas que não possuem vértice comum. Usando o fato que $\omega(G) \leq 3$, é fácil ver que cada C_i é um triângulo. Mais ainda, $|C_i \cap C_j| = 1, i \neq j$. Suponha, por exemplo, que $|C_1 \cap C_2| = 2$. Sejam $C_1 = \{h_1, h_2, h_3\}$ e $C_2 = \{h_1, h_2, h_4\}$, tais como mostra a Figura 2.5.

Logo, dado que $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, e $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, conclui-se que $C_3 = \{h_3, h_4, h_5\}$. Logo $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ é um subgrafo completo, contradizendo $\omega(G) \leq 3$. Assim C_1, C_2, C_3 são triângulos sem vértice em comum, cada par deles tendo exatamente um vértice em comum. Isto implica que os vértices de C_1, C_2, C_3 correspondem aos vértices de um subgrafo isomorfo ao grafo pirâmide. $\square$

2.2 Reconhecimento dos Grafos Clique

O Teorema 2 caracteriza a classe dos grafos clique. Mas, de acordo com o nosso conhecimento, o problema do reconhecimento desta classe pertence a $\mathcal{NP}$. Nada se sabe em relação à sua pertinência à classe $\mathcal{P}$ ou à classe $\mathcal{NP}$ -completo.

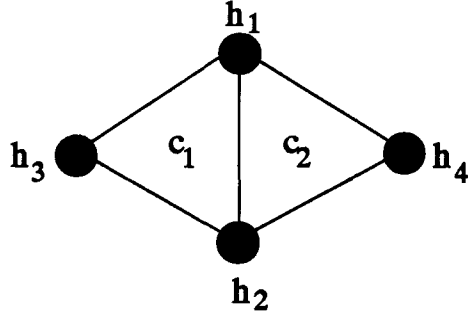


Figura 2.5: Ilustração da demonstração do corolário 1.

É interessante observar que as condições (1) e (2) do teorema da caracterização dos grafos clique (Teorema 2) podem ser verificadas em tempo polinomial.

Roberts e Spencer, em [27], mencionam uma maneira de verificar se uma dada família de conjuntos satisfaz a propriedade Helly. O Teorema 5 demonstra a sugestão de Roberts e Spencer e o Teorema 6 demonstra que o problema do reconhecimento pertence à classe $\mathcal{NP}$.

Seja $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ uma família de conjuntos. Considere todas as triplas de elementos $u, v, w \in S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{F}} S_i$, e $\mathcal{F}'(u, v, w)$, a subfamília de todos os conjuntos que contém pelo menos dois dentre os elementos u, v, w .

Teorema 5 *Seja $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ uma família de conjuntos. A família $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade Helly se e somente se para todo u, v, w de $S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{F}} S_i$*

$$\bigcap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(u, v, w)\} \neq \emptyset$$

Demonstração : ($\Rightarrow$) Observe que os elementos pertencentes a $\mathcal{F}'(u, v, w)$ se intersectam dois a dois, logo, por hipótese,

$$\bigcap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(u, v, w)\} \neq \emptyset$$

($\Leftarrow$) Seja $\bigcap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(u, v, w)\} \neq \emptyset$ para todo $u, v, w \in S$ e $S_i \in \mathcal{F}$.

Suponha que $\mathcal{F}$ não satisfaça à propriedade Helly. Então existe uma subfamília $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ cujos conjuntos se intersectam dois a dois, mas não possuem um elemento em comum.

Considere $\mathcal{F}_2 = \{S_1, \dots, S_m\}$ uma subfamília de $\mathcal{F}_1$ minimal em relação a não satisfazer a propriedade Helly, isto é,

- (i) $\mathcal{F}_2$ não satisfaz a propriedade Helly ;
- (ii) qualquer subfamília com $m-1$ elementos, a satisfaz.

Observe que $m \geq 3$. Sendo $\mathcal{F}_2$ minimal em relação a não satisfazer a propriedade Helly, então $\bigcap_{S \in \mathcal{F}_2 - S_i} S \neq \emptyset$ para todo S_i de $\mathcal{F}_2$. Logo, para cada $i, i=1, \dots, m$, existe $x_i \in (\bigcap_{j \neq i} S_j) - S_i$.

Sendo $m \geq 3$, existem pelo menos três x_i, x_j, x_k , distintos dois a dois. Logo, sendo $\mathcal{F}_2$ mínima em relação a não satisfazer a propriedade Helly, cada elemento de $\mathcal{F}_2$ contém pelo menos dois dentre x_i, x_j, x_k .

Portanto, $\mathcal{F}_2 = \{S_1, \dots, S_m\} \subset \mathcal{F}(x_i, x_j, x_k)$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Esta demonstração encontra-se em [20].

Uma outra maneira de expressar o Teorema 5 é dizer, que uma família $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_p\}$ satisfaz a propriedade Helly se e somente se para cada tripla de elementos u, v, w em $S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{F}} S_i$, existe um elemento x em S , com a propriedade que cada conjunto S_i contendo dois dos elementos u, v, w , também contém x .

Dada a família $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ e $S_1 = \{a\}$, $S_2 = \{b, c, d\}$, $S_3 = \{c, d\}$, $S_4 = \{a, b, d\}$, $S_5 = \{a, b, c, d\}$, $S_6 = \{a, b\}$, tem-se que :

$$\mathcal{F}'(a, b, c) = \{S_2, S_4, S_5, S_6\} \text{ e } \cap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(a, b, c)\} \neq \emptyset$$

$$\mathcal{F}'(a, b, d) = \{S_2, S_4, S_5, S_6\} \text{ e } \cap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(a, b, d)\} \neq \emptyset$$

$$\mathcal{F}'(a, c, d) = \{S_2, S_3, S_4, S_5\} \text{ e } \cap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(a, c, d)\} \neq \emptyset$$

$$\mathcal{F}'(b, c, d) = \{S_2, S_3, S_4, S_5\} \text{ e } \cap \{S_i : S_i \in \mathcal{F}'(b, c, d)\} \neq \emptyset.$$

Logo, pelo Teorema 5, a família $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade Helly.

Assim o Teorema 5 provê um algoritmo polinomial para testar se uma determinada família satisfaz a propriedade Helly. O que ainda não sabemos é se a caracterização de Roberts e Spencer conduzirá a um algoritmo polinomial para o reconhecimento da classe dos grafos clique.

O Teorema 2 estabelece que um grafo G é um grafo clique se e somente se existe uma família $\mathcal{C}$ de subgrafos completos de G , que satisfaz as seguintes duas propriedades :

(1) $\mathcal{C}$ cobre todas as arestas de G .

(2) $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade Helly.

Ambas propriedades (1) e (2) podem ser verificadas em tempo polinomial no tamanho dos dados de entrada, logo a seguinte pergunta é natural : Porque não sabemos se a caracterização de Roberts e Spencer conduz a um algoritmo polinomial para o problema de reconhecimento da classe ?. O problema se encontra na escolha de uma família de subgrafos completos que satisfaz as condições (1) e (2) do Teorema 2, pois a cardinalidade da família $\mathcal{M}$ contendo todas as possíveis famílias de subgrafos completos de um grafo dado G é exponencial. De fato seja $\mathcal{C}^*$ uma família pertencente a $\mathcal{M}$, que satisfaz as propriedades (1) e (2) do Teorema 2, para um grafo G .

É conhecido que o número de cliques $C_1, C_2, \dots, C_s$ de um grafo pode ser exponencial.

Defina cada $\mathcal{C}_i \in \mathcal{M}$ como :

$$\mathcal{C}_i = \{C_i, \{\alpha : \alpha = (u, v) \in A(G) - A(C_i)\}\}$$

para $i = 1, 2, \dots, s$. Logo a família $\mathcal{M}$, possui uma quantidade de elementos que é exponencial. O que não sabemos ainda é se a escolha apropriada de uma família $\mathcal{C}^*$, entre todos os

elementos que estão em $\mathcal{M}$, que permite reconhecer se o grafo G é um grafo clique pode ser feita em tempo polinomial.

Numa família $\mathcal{C}$ de subgrafos completos de um grafo G , um subgrafo completo, L_i , é **essencial** se L_i contiver uma aresta de G que não pertence a nenhum outro subgrafo completo L_j de G , com $j \neq i$ e $L_j \in \mathcal{C}$.

Teorema 6 (Mello [20]) *O problema reconhecimento de grafos clique pertence à classe $\mathcal{NP}$.*

Demonstração : O grafo G e uma família $\mathcal{C}$ formada por subgrafos completos essenciais de G é um certificado sucinto de que G é um grafo clique.

Observe que, $|\mathcal{C}| \leq |A(G)|$.

Logo, verificar se para cada aresta (u, v) de G , existe um subgrafo completo em $\mathcal{C}$ que contém (u, v) , pode ser feito em tempo polinomial no tamanho de $A(G)$.

Além disso, o algoritmo originado do Teorema 5 verifica se $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade Helly. Este algoritmo é executado em tempo polinomial no tamanho de $\mathcal{C}$ (logo, no tamanho de $A(G)$).

Então, de fato, G e $\mathcal{C}$ formam um certificado (verificável em tempo polinomial no tamanho de G) de que G é um grafo clique.

Portanto, o problema do reconhecimento de grafos clique pertence a $\mathcal{NP}$. $\square$

Uma outra questão que surge naturalmente com respeito aos grafos clique é : Dado um grafo G , determinar o seu grafo clique $K(G)$. Este é um problema trivial, embora intrinsecamente exponencial, pois o número de cliques de um grafo pode ser exponencial no número de vértices (Moon e Moser [21]).

2.2.1 Caracterização e Reconhecimento dos Grafos Helly

A classe dos grafos Helly é uma importante subclasse dos grafos clique e será vista sob diversos aspectos em capítulos posteriores. Acharmos, então, interessante estudar o reconhecimento dos grafos Helly. Portanto, o propósito desta subseção é mostrar uma caracterização dos grafos Helly, desenvolvida por Szwarcfiter [28] que conduzirá a um algoritmo em tempo polinomial para o reconhecimento desta classe de grafos.

Se a família $\mathcal{C}(G)$ das cliques de um grafo G for conhecida, então é possível verificar se G é grafo Helly em tempo polinomial. Basta testar a propriedade Helly para $\mathcal{C}(G)$ (Teorema 5). Isto é, considerar todas as triplas u, v, w que formam um triângulo Tr em G , e então considerar as cliques que possuem pelo menos uma aresta de Tr e verificar se estas cliques possuem um vértice comum.

O problema é encontrar a família $\mathcal{C}(G)$, pois o número de elementos de $\mathcal{C}(G)$ pode ser exponencial em n .

Dessa forma, saber testar a propriedade Helly não é suficiente para reconhecer grafos Helly.

Uma abordagem alternativa, é relacionar o subgrafo de G induzido pelos vértices que formam triângulos com pelo menos uma aresta de um triângulo Tr , e o subgrafo formado

exatamente pelos vértices e arestas das cliques pertencentes ao subconjunto de cliques de G que contém pelo menos uma aresta do triângulo Tr . O Lema 2, demonstra que ambos os subgrafos possuem o mesmo conjunto de vértices e que o segundo é subgrafo do primeiro.

Primeiro será apresentado duas definições.

Seja G um grafo conexo, e Tr um triângulo de G . Um **triângulo estendido** de G , relativo a Tr , é o subgrafo de G induzido pelos vértices que formam triângulos com pelo menos uma aresta de Tr . O triângulo estendido de G , relativo a Tr , será denotado por G_{Tr} .

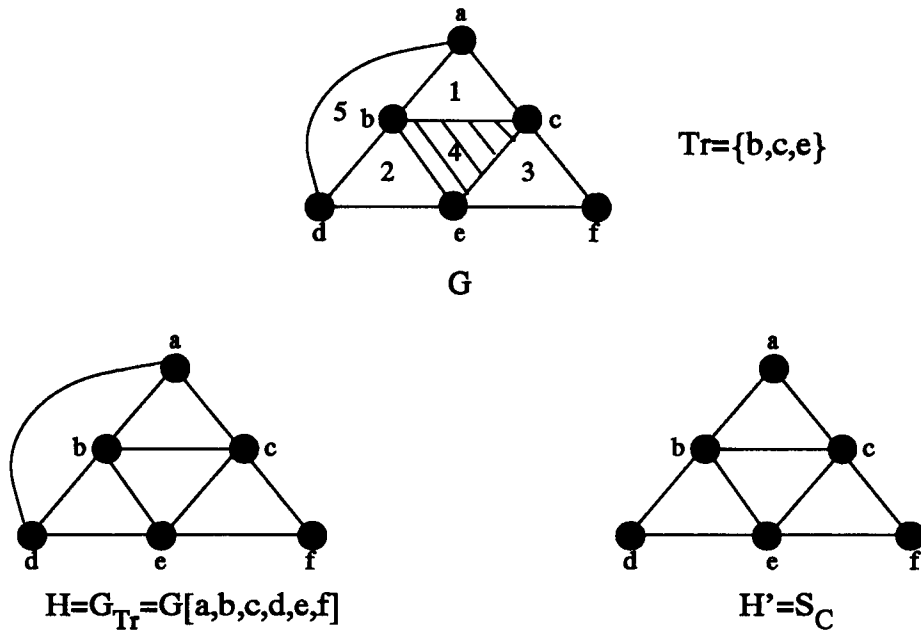


Figura 2.6: Triângulo estendido e subgrafo clique do grafo G , relativo ao triângulo Tr .

Seja $\mathcal{C}$ o subconjunto das cliques de G que contém pelo menos uma das arestas de um triângulo Tr . O **subgrafo clique** relativo a $\mathcal{C}$ em G , denotado por $S_{\mathcal{C}}$, é o subgrafo de G formado exatamente pelos vértices e arestas das cliques pertencentes a $\mathcal{C}$.

A Figura 2.6 mostra um grafo G , o triângulo estendido de G relativo ao triângulo $Tr = \{b, c, e\}$, e o subgrafo clique de G , relativo ao subconjunto de cliques de G que contém pelo menos uma das arestas de Tr , ou seja $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Com respeito à definição acima, as seguintes observações são bastantes claras : O subgrafo clique de G não é necessariamente um subgrafo induzido de G . Cada clique pertencendo a $\mathcal{C}$ é uma clique do subgrafo clique relativo a $\mathcal{C}$ em G . A recíproca não é verdadeira. De fato, considere a Figura 2.6 e $\mathcal{C}' = \{1, 2, 3\}$. Então $S_{\mathcal{C}'}$ é isomorfo ao subgrafo $S_{\mathcal{C}}$. Mas, $\{b, c, e\} = 4$ é uma clique em $S_{\mathcal{C}'}$ e não pertence a $\mathcal{C}'$.

O Lema a seguir relaciona os triângulos estendidos e os subgrafos clique.

Lema 2 (Szwarcfiter [28]) *Seja G um grafo, Tr um triângulo em G e $\mathcal{C}$ o subconjunto de cliques de G contendo pelo menos uma das arestas de Tr . Então o subgrafo clique relativo a $\mathcal{C}$ em G é um subgrafo gerador do triângulo estendido G_{Tr} de G relativo a Tr .*

Demonstração : Seja H o triângulo estendido de G relativo a Tr e H' o subgrafo clique relativo a $\mathcal{C}$ em G . Devemos mostrar que $V(H)=V(H')$. Seja $v \in V(H)$. Então v forma um triângulo com alguma aresta e de Tr . Isto é, v pertence a alguma clique contendo e . Daqui $v \in V(H')$. Por outro lado, seja $v \in V(H')$. Então v pertence a alguma clique contendo uma aresta e de Tr . Isto é, v forma um triângulo com e , e portanto $v \in V(H)$. Conseqüentemente $V(H)=V(H')$.

Seja $(v, w) \in A(H')$. Então (v, w) é uma aresta de alguma clique de G , que contém uma aresta e de Tr . Isto é, ou v forma um triângulo com e ou v é incidente a e . Similarmente para w . Portanto v, w são ambos vértices do triângulo estendido H de G . Daqui $(v, w) \in A(H)$. Conseqüentemente $A(H') \subset A(H)$. $\square$

A Figura 2.6 ilustra o Lema 2.

O Teorema 7 caracteriza os grafos Helly e indica a possibilidade de testar a propriedade Helly para $\mathcal{C}(G)$, sem conhecer as cliques do grafo. Para isto, bastaria verificar se cada triângulo estendido de G contém um vértice universal.

Teorema 7 (Szwarcfiter [28]) *Um grafo G é um grafo Helly se e somente se cada um de seus triângulos estendidos contém um vértice universal.*

Demonstração : ($\implies$) Suponha o contrário. Isto é, seja G um grafo Helly que contém um triângulo estendido H , relativo a algum triângulo Tr , sem vértice universal. Seja $\mathcal{C}$ o subconjunto de cliques de G contendo pelo menos uma das arestas de Tr . Claramente, quaisquer duas arestas de Tr tem um vértice comum. Portanto quaisquer duas cliques de $\mathcal{C}$ tem também um vértice comum. Por hipótese, H não tem vértice universal. Do Lema 2, o subgrafo clique H' relativo a $\mathcal{C}$ é um subgrafo gerador de H . Logo H' também não contém um vértice universal. Conseqüentemente, $\mathcal{C}$ é um conjunto de cliques que se intersectam duas a duas mas não têm um vértice comum. Portanto G não é Helly, contradição.

($\impliedby$) Seja G um grafo tal que cada um de seus triângulos estendidos tem um vértice universal. Supor que o teorema não é verdadeiro, é dizer G não é Helly. Então G contém uma subfamília de $\mathcal{C}(G)$ de cliques que se intersectam duas a duas se vértice comum. Seja $\mathcal{C}'$ uma subfamília minimal de $\mathcal{C}(G)$ não satisfazendo a propriedade Helly. Isto é, $\mathcal{C}'$ não satisfaz Helly, mas cada subfamília desta a satisfaz. Desde que cada duas cliques de G satisfaz a propriedade Helly, segue-se que $\mathcal{C}'$ existe e $|\mathcal{C}'| \geq 3$. Seja $\mathcal{C}'$ formado pelas cliques $\{C_1, \dots, C_k\}$. Pela minimalidade de $\mathcal{C}'$, segue-se que as cliques de $\mathcal{C}' - C_i$ contém um vértice comum, denotado por v_i , $i=1, \dots, k$. Dado que $\mathcal{C}'$ não satisfaz a propriedade Helly, $v_i \notin V(C_i)$. Porque $k \geq 3$, cada dois vértices distintos v_i, v_j pertencem a uma mesma clique e , portanto, devem ser adjacentes. Daqui para $k=3$ os vértices v_1, v_2, v_3 formam um triângulo, denotado por Tr . Seja H' o subgrafo clique relativo a $\mathcal{C}'$. Desde que $\mathcal{C}'$ não satisfaz a propriedade Helly segue-se que H' não contém um vértice universal. Denote por H'' o subgrafo clique relativo às cliques de G , tendo pelo menos uma aresta de Tr . Por

construção, cada clique $C_i \in \mathcal{C}'$ contém todos os vértices $v_j, i \neq j$. Isto é, cada clique de $\mathcal{C}'$ tem pelo menos uma aresta de Tr . Daqui H' é um subgrafo de H'' . Suponha que H'' tem um vértice universal w . Então w é adjacente em G a todos os vértices de H' , em particular. Neste caso, w deve pertencer a H' , pois caso contrário as cliques que formam H' não são maximais. Mas neste caso w é um vértice universal em H' , uma contradição. Consequentemente, H'' não pode ter um vértice universal.

Seja H o triângulo estendido de G relativo a Tr . Pelo Lema 2, H'' é um subgrafo gerador de H . Pela hipótese, H contém um vértice universal z . Então z pertence a todas as cliques que formam H'' . Neste caso, z é um vértice universal de H'' . Mas H'' não tem vértice universal. Portanto G é um grafo Helly. $\square$

O Algoritmo

O algoritmo de reconhecimento para os grafos Helly deriva-se diretamente do Teorema 7, “Um grafo G é Helly se e somente se existe um vértice universal para cada triângulo estendido H ”. Dado um grafo G , para cada um de seus triângulos Tr , achar o triângulo estendido H relativo a Tr , e verificar se H tem um vértice universal.

Achar todos os triângulos de G requer $O(nm)$ etapas. O triângulo estendido H pode ser construído em tempo $O(n)$, para cada triângulo Tr . Para verificar se H tem um vértice universal requer tempo $O(m)$, para cada H . Daqui uma implementação correta deste algoritmo possui complexidade de ordem $O((n + t)m)$, onde t é o número de triângulos de G .

Capítulo 3

Classes de Grafos Clique-Fixas

Seja $\mathcal{G}$ uma classe de grafos e $K(\mathcal{G})$ a classe dos grafos clique de todos os membros de $\mathcal{G}$, i. e., $K(\mathcal{G}) = \{K(G) : G \in \mathcal{G}\}$. Se $K(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$, a classe $\mathcal{G}$ é dita **fechada sob o operador clique** ou **clique-fechada**. Se $\mathcal{G} = K(\mathcal{G})$, a classe $\mathcal{G}$ é dita **fixa sob o operador clique** ou **clique-fixa**.

Uma subclasse de grafos de uma classe $\mathcal{G}$ que é clique-fixa, poderá não ser clique-fixa. Um exemplo, que posteriormente será mostrado, é a classe de grafos $\mathcal{H}_0$ (não clique-fixa) subclasse dos grafos Helly (clique-fixa).

3.1 Grafos Helly

Escalante [7], mostrou que a classe dos grafos Helly é clique-fixa.

A construção de Hamelink definida na seção 2.1 constituirá a base de várias demonstrações neste capítulo.

Lema 3 (Escalante [7]) *Se G é um grafo Helly, então $K(G)$ é um grafo Helly.*

Demonstração : Seja $\{C'_i : i \in I\}$ um conjunto de cliques de $K(G)$ tais que $C'_i \cap C'_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in I$. O objetivo é mostrar que $\bigcap \{C'_i : i \in I\} \neq \emptyset$.

Suponha que $C'_i = \{C_{i_k} : 1 \leq k \leq m_i\}$. Note que cada C_{i_k} é uma clique de G . Desde que C'_i é uma clique de $K(G)$, logo $C_{i_k} \cap C_{i_q} \neq \emptyset$ para todo $k \neq q, k, q = 1, \dots, m_i$. Conseqüentemente, $\bigcap \{C_{i_k} : 1 \leq k \leq m_i\} \neq \emptyset$, desde que G é um grafo Helly.

Seja $x_i \in \bigcap \{C_{i_k} : 1 \leq k \leq m_i\}$, $i \in I$. Desde que $C'_i \cap C'_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in I$, logo $C_{i_k} = C_{j_p} \in C'_i \cap C'_j$, para algum $1 \leq k \leq m_i$ e algum $1 \leq p \leq m_j$. Conseqüentemente, x_i é adjacente a x_j para todo $i, j \in I$. Daqui, existe uma clique, C de G contendo $\{x_i : i \in I\}$. Desde que $x_i \in C \cap C_{i_k}$, $C \cap C_{i_k} \neq \emptyset$, para todo $i \in I, 1 \leq k \leq m_i$. Pela maximalidade de C'_i segue-se que $C \in C'_i$ para todo $i \in I$. Daqui,

$$\bigcap \{C'_i : i \in I\} \neq \emptyset.$$

□

Observe que a recíproca do Lema 3 não é verdade, isto é, se $K(G)$ é Helly, G não é necessariamente um grafo Helly. A Figura 3.1, mostra o grafo Helly k_4 , sendo $k_4 \cong K(H)$, e H (o grafo pirâmide) não é grafo Helly. Observe, agora, que k_4 é também o grafo clique do grafo estrela G e G é um grafo Helly. Mas podemos dizer que uma forma mais fraca da recíproca é verdadeira, a qual mostramos no Lema 4.

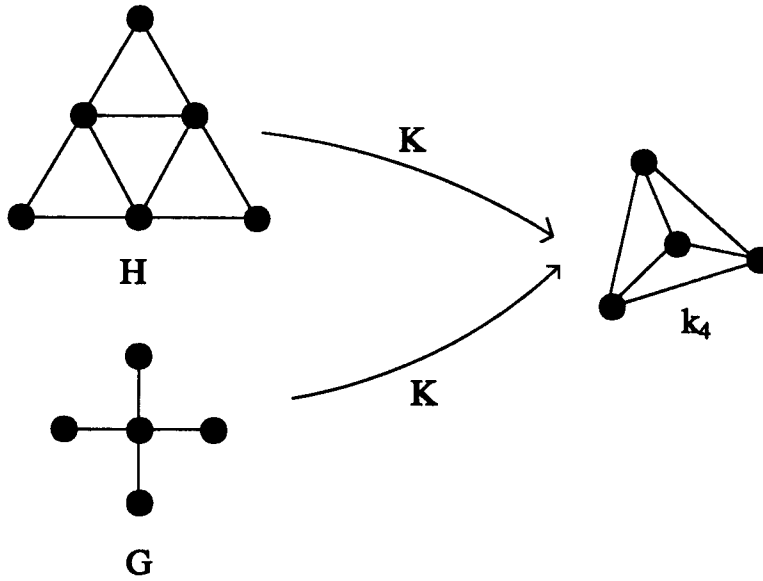


Figura 3.1: H não é um grafo Helly e $K(H)$ é grafo Helly.

Lema 4 (Escalante [7]) *Se H é um grafo Helly, então H é o grafo clique de algum grafo Helly G .*

Demonstração : Desde que H é um grafo Helly, então H é um grafo clique (Teorema 1).

Então, podemos garantir a existência de um grafo G , tal que $H \cong K(G)$. Seja G obtido pela construção de Hamelink. Devemos, então, mostrar que G é um grafo Helly.

Seja $\mathcal{C}' = \{C'_i : i \in I\}$ um conjunto de cliques de G com interseções duas a duas não vazias. Nosso objetivo é mostrar que $\bigcap \{C'_i : i \in I\} \neq \emptyset$.

Suponha que para cada $C'_i \in \mathcal{C}'$, $C'_i = \{C_{i_k} : 1 \leq k \leq m_i, x_i\}$, onde cada C_{i_k} é uma clique de H contendo x_i .

Por hipótese $C'_i \cap C'_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in I$, logo existe $C_{i_k} = C_{j_p} \in C'_i \cap C'_j$, para algum $1 \leq k \leq m_i$ e algum $1 \leq p \leq m_j$; conseqüentemente, x_i é adjacente a x_j para todo $i, j \in I$ em H .

Daqui existe uma clique, digamos Q , de H contendo $\{x_i : i \in I\}$. Desde que $x_i \in Q$ e $x_i \in C'_i$, logo $x_i \in Q \cap C'_i$, assim $Q \cap C_{i_k} \neq \emptyset$, para todo $i \in I$, $1 \leq k \leq m_i$. Pela maximalidade de C'_i , segue-se que $Q \in C'_i$ para todo $i \in I$, e daqui,

$$\bigcap \{C'_i : i \in I\} \neq \emptyset.$$

□

Teorema 8 (Escalante [7]) *A classe dos grafos Helly é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 3 e 4.

Nas próximas seções serão estudadas outras classes de grafos clique-fixas. Merece ressaltar que todas as classes encontradas na literatura que são clique-fixas, correspondem a classes particulares dos grafos Helly.

3.2 Grafos Helly-hereditários

Uma interessante subclasse dos grafos Helly são os denominados grafos Helly-hereditários.

Um grafo **Helly-hereditário** G possui a propriedade que todo subgrafo induzido de G é um grafo Helly. Mas nem todo grafo Helly é um grafo Helly Hereditário. A Figura 3.2, mostra um grafo Helly G , na qual o subgrafo induzido pelos vértices $\{a, x, y, b, z, c\}$ não é um grafo Helly.

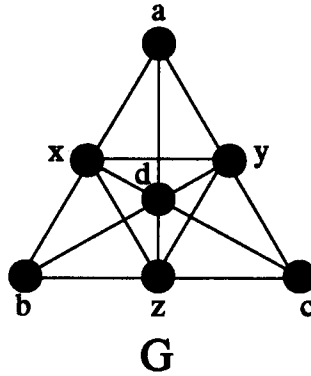


Figura 3.2: Um grafo que não é Helly-hereditário, mas é Helly.

Prisner em [25], apresentou várias caracterizações dos grafos Helly-hereditários, além de mostrar que esta classe de grafos é clique-fixa. Estes resultados serão apresentados em detalhe nesta seção.

Geralmente classes de grafos que são hereditários possuem caracterizações através de subgrafos proibidos. É fácil ver que os grafos da Figura 3.3 são subgrafos proibidos para os grafos Helly-hereditários (de fato, não são grafos Helly). Note que em qualquer um desses grafos não existem as arestas (a, z) , (b, y) e (c, x) .

Teorema 9 (Prisner [25]) *Um grafo G é um grafo Helly-hereditário se e somente se não contém nenhum dos 4 grafos da Figura 3.3 como subgrafo induzido.*

Demonstração : Nenhum dos 4 grafos da Figura 3.3 é um grafo Helly. Logo, um grafo Helly-hereditário não contém algum desses grafos como subgrafo induzido. Por outro lado, seja G um grafo sem nenhum dos grafos da Figura 3.3 como subgrafo induzido. Suponha que G não é Helly-hereditário. Então, $|V(G)| \geq 6$ e G contém pelo menos 4 cliques. Logo,

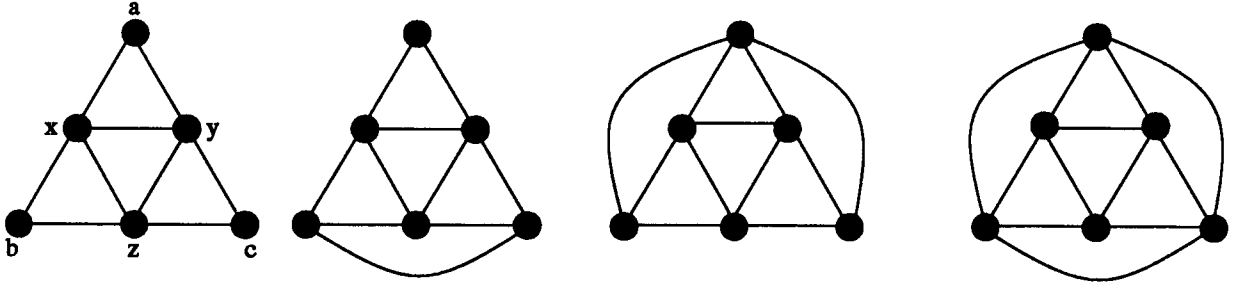


Figura 3.3: Grafos proibidos para grafos Helly-hereditários.

por definição, algum subgrafo induzido F de G não é Helly. Seja C_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $k \geq 4$, a menor subfamília de cliques de F que se intersectam duas a duas cuja interseção total é vazia. Da minimalidade da subfamília temos que cada uma das interseções $C_2 \cap \dots \cap C_k$, $C_1 \cap C_3 \cap \dots \cap C_k$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap \dots \cap C_k$ é não vazia. Escolha vértices x_1, x_2, x_3 nestes três conjuntos respectivamente. Os três conjuntos são disjuntos, pois $\bigcap_{i=1}^k C_i = \emptyset$. Segue-se que x_1, x_2, x_3 são distintos. Pela mesma razão, C_1 e $C_2 \cap \dots \cap C_k$ são disjuntos. Logo existe algum $y_1 \in C_1$ não adjacente a x_1 . Da mesma maneira podemos achar vértices y_2, y_3 em C_2, C_3 , respectivamente, não adjacentes a x_2 e x_3 , respectivamente. Isto é, $y_1 \notin C_2 \cup C_3$, $y_2 \notin C_1 \cup C_3$, e $y_3 \notin C_1 \cup C_2$, assim os vértices $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ são distintos, e induzem um dos grafos da Figura 3.3 em F , e assim também em G , contradizendo a hipótese. $\square$

O corolário 2 é uma reformulação do Teorema 9, e provê diretamente um algoritmo de reconhecimento para os grafos Helly-hereditários de ordem $O(n^2m)$.

Corolário 2 (Prisner [25]) *Um grafo G é um grafo Helly-hereditário, se e somente se para cada triângulo $\{x, y, z\}$ em G , existe uma aresta tal que se w é adjacente a ambos os extremos dessa aresta (por exemplo x e y), ou $w = z$ ou w é adjacente a z .*

No Corolário 2, tais arestas (x, y) são chamadas “boas” para o triângulo. Note que é suficiente encontrar no grafo a ser reconhecido, um triângulo sem nenhuma aresta boa, para afirmar que tal grafo não é Helly-hereditário.

Lema 5 *Se G é um grafo Helly-hereditário, então $K(G)$ é Helly-hereditário.*

Demonstração : Seja G um grafo Helly-hereditário. Então, por definição, G é grafo Helly. Logo, pelo Lema 3, $K(G)$ é grafo Helly. Falta mostrar que todo subgrafo induzido próprio de $K(G)$ é Helly.

Suponha que $K(G)$ contenha um subgrafo induzido próprio que não é Helly. Então $K(G)$ não é grafo Helly-hereditário. Logo, pelo Teorema 9, $K(G)$ contém um dos quatro grafos da Figura 3.3 como subgrafo induzido. Então, pelo Teorema 3, $K(G)$ não é um grafo clique. Mas $K(G)$ é um grafo Helly e, portanto, é grafo clique. Contradição. $\square$

Lema 6 *Se H é um grafo Helly-hereditário, então H é o grafo clique de algum grafo Helly-hereditário G .*

Demonstração : Seja H um grafo Helly-hereditário, e G obtido pela construção de Hame-link. Mostremos que G é Helly-hereditário.

Suponha que não é. Então G contém um dos 4 grafos da Figura 3.3 como subgrafo induzido. Denotemos esse subgrafo de G por P . Observe que $G \not\cong P$, pois G é Helly. Ainda, P não é subgrafo de $K(H)$, pois pelo Lema 5, $K(H)$ é Helly-hereditário.

Da construção de G , tem-se que $K(H)$ contém um dos triângulos de P . Sejam $\{C_1, C_2, C_3\}$ seus vértices. Desde que C_1, C_2, C_3 são os vértices de um triângulo em $K(H)$, existem c_{12}, c_{13}, c_{23} em $V(H)$ pertencentes a $C_1 \cap C_2, C_1 \cap C_3$ e $C_2 \cap C_3$, respectivamente.

Se nenhum dos c_{ij} pertencer a $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, H contém um dos grafos da Figura 3.3 como subgrafo induzido, contradizendo H ser Helly-hereditário. $\square$

Teorema 10 *A classe dos grafos Helly-hereditários é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 5 e 6.

3.3 Grafos Helly-desmontáveis

Nesta seção mostramos que a classe dos grafos Helly-desmontáveis é clique-fixa.

Um grafo G é **desmontável** se admite uma ordenação $u_1, \dots, u_n$ de seus vértices tal que, para $i < n$, o vértice $\{u_i\}$ é dominado em $G \setminus \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$.

A Figura 3.4 mostra dois grafos, o primeiro deles é um grafo desmontável. Logo é possível construir a sequência de vértices a, e, d, b, c que satisfaz a definição. Pelo contrario o grafo H não é um grafo desmontável, pois não possui nenhum vértice dominado, não sendo assim possível construir tal sequência de vértices.

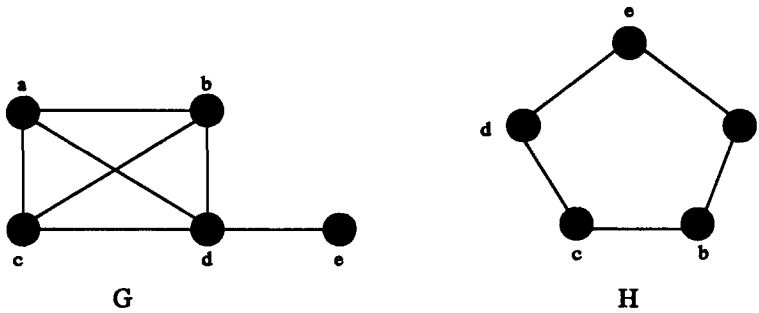


Figura 3.4: Grafo desmontável e não desmontável.

Um grafo G é **Helly-desmontável**, se é um grafo Helly e também é desmontável. O grafo estrela $(k_{1,3})$ da Figura 3.5 corresponde a um grafo Helly-desmontável, enquanto c_4 não é Helly-desmontável. Observe também que o grafo da Figura 3.2 é Helly-desmontável mas não é Helly-Hereditário.

Lema 7 (Bandelt e Prisner [2]) *Seja G um grafo desmontável, então $K(G)$ é também um grafo desmontável.*

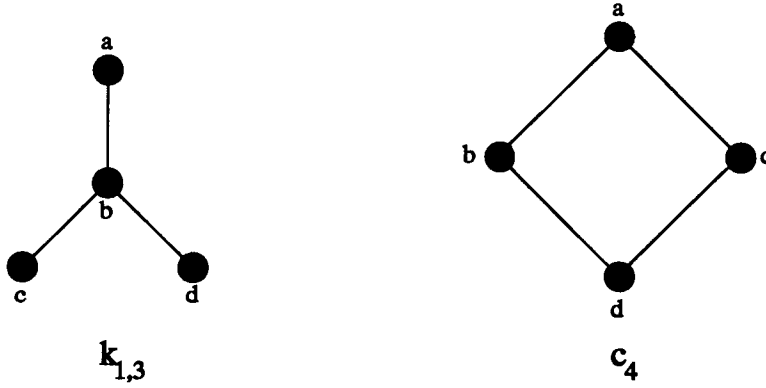


Figura 3.5: Grafo Helly-desmontável e não Helly-desmontável.

Demonstração : Por indução em n . Para $n \geq 2$, seja a asserção verdadeira para todos os grafos com menos de n vértices. Por definição, achamos vértices z e y tal que $G \setminus z$ é desmontável e z é dominado por y . Claramente, $K(G \setminus z)$ consiste de todos os conjuntos da forma $C \setminus \{z\}$, onde C é uma clique de G tal que $C \setminus \{z\}$ não está contido em qualquer outra clique de G . Daqui, como cada clique de G contendo z também contém y , o grafo $K(G \setminus z)$ é isomorfo a um subgrafo induzido de $K(G)$. Logo $C \setminus \{z\}$ está contido em alguma clique C' de G tal que $z \notin C'$. Certamente cada clique de G que intersecta C deve também intersectar C' , isto é, C' domina C em $K(G)$. Retirando de $K(G)$ os vértices correspondentes às cliques C obtém-se uma cópia isomorfa de $K(G \setminus z)$. Sendo $K(G \setminus z)$ desmontável, assim o é $K(G)$. $\square$

Lema 8 *Se G é um grafo Helly-desmontável, então $K(G)$ é Helly-desmontável.*

Demonstração : Seja G um grafo Helly-desmontável. Segue diretamente dos Lemas 3 e 7, que $K(G)$ é um grafo Helly-desmontável. $\square$

Lema 9 *Se H é um grafo Helly-desmontável, então H é o grafo clique de algum grafo Helly-desmontável G .*

Demonstração : Seja H um grafo Helly-desmontável, então H é um grafo Helly.

Pela construção de Hamelink, podemos garantir a existência de um grafo G , tal que $H \cong K(G)$. Além disso, pelo Lema 4, G é um grafo Helly. Falta mostrar que G é desmontável.

O grafo resultante G da construção de Hamelink, possui a característica de que toda clique contém exatamente um dos vértices $v \in V(H)$, e que todo vértice $v \in V(H)$ está contido em exatamente uma clique de G .

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ os vértices de H . Em G pegue um vértice qualquer v_i , e seja C'_i a clique que contém v_i em G , logo $C'_i = \{C_{i_k}; 1 \leq k \leq m_i, v_i\}$, onde $v_i \in C_{i_k}$ para todo $k = 1, \dots, m_i$ em H . Observe que v_i em G , é dominado por todo C_{i_k} , para todo $k = 1, \dots, m_i$ e para todo $i = 1, \dots, n$. Assim todo vértice $v \in V(H)$ é dominado em G . Retire de G todos estes vértices. Pela construção de G , o grafo restante $G \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ corresponde exatamente ao

grafo clique de H . Como H é um grafo desmontável, pelo Lema 7, $K(H)$ também o é. Logo $K(H)$ possui uma sequência de vértices $x_1 \dots x_l$, tal que para $i < l$, $\{x_i\}$ é dominado em $K(H) \setminus \{x_1 \dots x_{i-1}\}$.

Então a sequência de vértices $v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_l$, demonstra que G é desmontável. $\square$

Teorema 11 *A classe dos grafos Helly-desmontáveis é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 8 e 9.

3.4 Grafos $\mathcal{H}_1$

Nesta seção apresentamos o trabalho de Deng e Lim [5], que mostraram uma outra classe particular dos grafos Helly que é clique-fixa, chamada classe de grafos $\mathcal{H}_1$.

É preciso enunciar duas definições essenciais. Dado um grafo conexo G dizemos que o grafo G satisfaz a :

- **Propriedade T_0** , se existe uma clique A de G com $x \in A$, $y \notin A$, ou $y \in A$, $x \notin A$, para quaisquer dois vértices distintos $x, y \in V(G)$; ou seja existe uma clique em G que contém exatamente um dos dois vértices.
- **Propriedade T_1** , se existem cliques A e B de G tais que $x \in A$, $y \notin A$ e $y \in B$, $x \notin B$, para quaisquer dois vértices distintos $x, y \in V(G)$.

Observe que um grafo G que satisfaz a propriedade T_0 (T_1) não possui vértices gêmeos (dominados).

Um grafo Helly é chamado grafo $\mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_0$) se satisfaz a propriedade T_1 (T_0).

Observe também, que se um grafo G satisfaz a propriedade T_1 , logo também satisfaz a propriedade T_0 , e assim todo grafo $\mathcal{H}_1$ é $\mathcal{H}_0$.

Na Figura 3.6, é fácil verificar que o grafo G satisfaz T_0 e T_1 . O grafo H , não satisfaz T_1 , pois para os vértices x e y , não existem cliques A e B de H , tais que simultaneamente $x \in A$, $y \notin A$, e $y \in B$, $x \notin B$; mas H satisfaz a propriedade T_0 (para esse par de vértices, em particular, $y \in B$ e $x \notin B$). O grafo L é mostrado na Figura 3.17. Observe, também, que os grafos G , H e L correspondem a grafos Helly, assim G é um grafo $\mathcal{H}_1$, H é um grafo $\mathcal{H}_0$, e L é simplesmente um grafo Helly.

Sabemos que os grafos Helly é uma classe clique-fixa, mostraremos que $\mathcal{H}_1$ também é e que $\mathcal{H}_0$ não é.

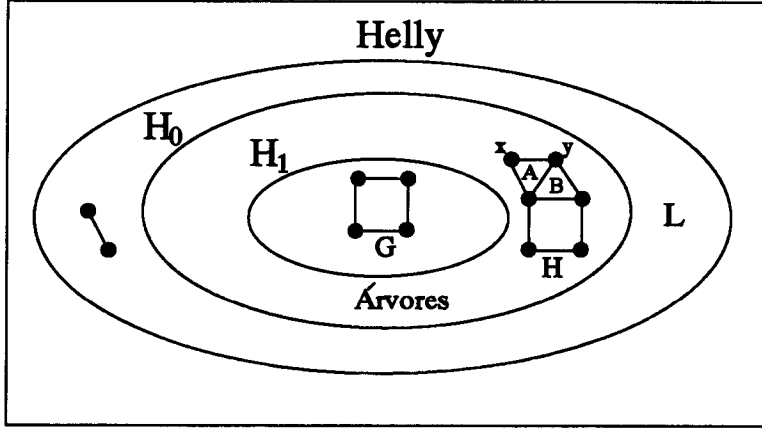
Deng e Lim [5], demonstram que $\mathcal{H}_1$ é clique-fixa.

Primeiro, mostraremos algumas propriedades das cliques dos grafos pertencentes a $\mathcal{H}_1$.

Lema 10 (Deng e Lim [5]) *Seja G um grafo $\mathcal{H}_1$. Para cada vértice $x \in V(G)$, seja $k(x)$ o conjunto de vértices de $K(G)$:*

$$k(x) = \{C \in V(K(G)) : x \in C\}.$$

Então, $k(x)$ é uma clique de $K(G)$.

Figura 3.6: Grafos $\mathcal{H}_1$, e $\mathcal{H}_0$.

O Lema 10 diz que o conjunto das cliques de G que contêm um mesmo elemento é uma clique em $K(G)$.

Lema 11 (Deng e Lim [5]) *Sejam G um grafo $\mathcal{H}_1$ e $Q = \{C : C \in V(K(G))\}$, uma clique de $K(G)$. Então, em G :*

$$|\bigcap \{C : C \in Q\}| = 1$$

Demonstração : Seja $Q = \{C_i : i \in I\}$ uma clique qualquer de $K(G)$. Logo cada C_i , $i \in I$ é uma clique de G . Agora desde que Q é uma clique de $K(G)$, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j \in I$. Consequentemente, $\bigcap \{C_i : i \in I\} \neq \emptyset$, desde que G é um grafo Helly. Seja $x \in \bigcap \{C_i : i \in I\}$.

Sustentamos que $|\bigcap \{C_i : i \in I\}| = 1$. Suponha o contrário, isto é, que existe $y \neq x$, onde $y \in \bigcap \{C_i : i \in I\}$. Logo x e $y \in C_i$ para todo $i \in I$. Além disso, pela maximalidade de Q (pois é clique), qualquer vértice de $K(G)$ que corresponda à clique de G contendo os vértices x ou y deve pertencer à clique Q . Segue-se que cada clique de G contendo x (respectivamente y) deve também conter y (respectivamente x).

Daqui não existe cliques A e B de G , tais que $x \in A, y \notin A$ e $y \in B, x \notin B$. Isto contradiz o fato de que o grafo G possui a propriedade T_1 . $\square$

Demonstraremos, agora, que $\mathcal{H}_1$ é clique-fixa.

Lema 12 (Deng e Lim [5]) *Se G é um grafo $\mathcal{H}_1$, então $K(G)$ é um grafo $\mathcal{H}_1$.*

Demonstração : Seja G um grafo $\mathcal{H}_1$, então G é um grafo Helly que satisfaz a propriedade T_1 . Segue-se que $K(G)$ é também um grafo Helly (Teorema 8), devendo-se mostrar somente que $K(G)$ satisfaz a propriedade T_1 .

Sejam $C_1 \neq C_2 \in V(K(G))$ (em G , cliques). Nosso objetivo é mostrar que existem duas cliques Q_1 e Q_2 de $K(G)$ (Q_1 e $Q_2 \in V(K^2(G))$), na qual $C_1 \in Q_1$, $C_2 \notin Q_1$ e $C_2 \in Q_2$,

$C_1 \notin Q_2$. Se C_1 e C_2 são duas cliques disjuntas em G , é evidente que C_1 e C_2 pertencem a cliques distintas em $K(G)$.

Suponha, agora que C_1 e C_2 se intersectam em G . Desde que $C_1 \neq C_2$, existe em G um vértice $x \in C_1 \setminus C_2$, e $y \in C_2 \setminus C_1$. Desde que G é um grafo $\mathcal{H}_1$, logo pelo Lema 10, obtemos que para cada vértice $x \in V(G)$, $k(x)$ é uma clique de $K(G)$, onde $k(x) = \{C \in K(G) : x \in C\}$.

Assim $k(x)$ é uma clique onde $C_1 \in k(x)$, $C_2 \notin k(x)$, e $k(y)$ é uma outra clique onde $C_2 \in k(y)$, $C_1 \notin k(y)$; daqui $K(G)$ é um grafo $\mathcal{H}_1$. $\square$

Mostremos, agora, que o operador K é sobrejetor em $\mathcal{H}_1$.

A abordagem usada nas classes anteriores, não será útil nesta, pois, a construção de Hamelink a partir de um grafo $H \in \mathcal{H}_1$ não origina um grafo $\mathcal{H}_1$. Por exemplo, na Figura 2.3, o grafo G (resultado da construção de Hamelink para o grafo H (pertencente a $\mathcal{H}_1$)) não possui a propriedade T_1 . De fato, v_1 e C_2 , por exemplo, certificam que a propriedade T_1 não é válida, pois toda clique de G que contém v_1 , contém também C_2 .

Lema 13 (Deng e Lim [5]) *Se H é um grafo $\mathcal{H}_1$, então H é o grafo clique de algum grafo $\mathcal{H}_1$ G .*

Demonstração : Seja H um grafo $\mathcal{H}_1$ e seja $G=K(H)$. Então, pelo Lema 12, G é um grafo $\mathcal{H}_1$. Mostremos que $H \cong K(G)$. Para isto defina a função

$$f : V(H) \longrightarrow V(K(G))$$

sendo $f(x) = k(x)$. Do Lema 10, $k(x)$ é uma clique de $K(H)$ e daqui $k(x) \in V(K(G))$. Além disso, os vértices comuns de dois cliques $k(x)$ e $k(y)$ de $K(H)$ correspondem as cliques em H contendo tanto x e y . Segue-se que $k(x)$ e $k(y)$ tem um vértice comum se e somente existe uma clique em H contendo tanto x e y , i.e., se e somente se x e y estão unidos por uma aresta em H . Em outras palavras, $k(x)$ e $k(y)$ são adjacentes em $K(G)$ se e somente se x e y são adjacentes em H .

O que resta mostrar é que f é sobrejetora. Seja Q um vértice de $K(G)$. Então Q é uma clique de $K(H)$. O Lema 11 implica que $|\cap \{C : C \in Q\}|=1$. Seja $\cap \{C : C \in Q\}=\{x\}$. Então pela maximalidade da clique e Lema 10, $k(x) = \{C : C \in Q\}$; daqui, $f(x) = Q$. Assim, $H \cong K(G)$. $\square$

Da demonstração do Lema 13, tem-se que se G é um grafo $\mathcal{H}_1$, então $G \cong K^2(G)$ ¹. Este resultado foi encontrado por Lim [18].

Teorema 12 (Deng e Lim [5]) *A classe dos grafos $\mathcal{H}_1$ é clique-fixa.*

Os Lemas 12 e 13 demonstram o Teorema 12.

¹Isto implica que a classe de grafos $\mathcal{H}_1$ é uma classe clique-periódica de período 2, tal como será visto no capítulo 4.

3.5 Grafos sem Arestas Multiclique

Nesta seção estudaremos o trabalho de Chong-Keang e Yee-Hock [4], que mostraram que a classe dos grafos sem arestas multiclique é clique-fixa.

Uma aresta de um grafo G é chamada **multiclique** se pertence a mais de uma clique de G . É claro que um grafo G não possui arestas multiclique se e somente se $|C_i \cap C_j| \leq 1$, para quaisquer duas cliques C_i e C_j de G . A Figura 3.7 mostra um grafo G sem arestas multiclique, e um grafo H com arestas multiclique.

O Lema a seguir, constitui a base nas caracterizações posteriores.

Lema 14 (Chong-Keang e Yee-Hock [4]) *Todo grafo sem arestas multiclique é grafo Helly.*

Demonstração : Seja G um grafo sem arestas multiclique, logo $|C_i \cap C_j| \leq 1$, para quaisquer duas cliques C_i e C_j de G . Se $|C_i \cap C_j| = 0$, C_i e C_j são duas cliques disjuntas.

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de cliques de G que se intersectam duas a duas. Então, por hipótese, $|C_i \cap C_j| = 1$, para quaisquer duas cliques C_i e C_j de $\mathcal{C}$. Seja $u \in C_i \cap C_j$. Mostraremos $u \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$. Para isso, considere $C_k \in \mathcal{C}$, $k \neq i, j$ e suponha que $v \in C_i \cap C_k$, e $w \in C_k \cap C_j$, com $v, w \neq u$. Então, existe uma clique C_l em $\mathcal{C}$ que contém $\{u, v, w\}$. Logo, $|C_k \cap C_l| \geq 1$, $|C_j \cap C_l| \geq 1$ e $|C_i \cap C_l| \geq 1$, com o que G contém arestas multiclique. Contradição !.

Portanto, $u = v = w$, e o conjunto de cliques de G , satisfaz a propriedade Helly. $\square$

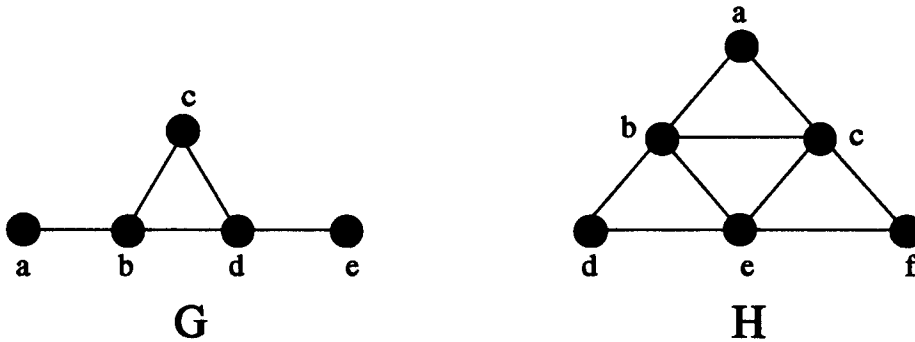


Figura 3.7: Grafo sem arestas multiclique e grafo com arestas multiclique.

Teorema 13 (Chong-Keang e Yee-Hock [4]) *Se G é um grafo sem arestas multiclique, então $K(G)$ é um grafo sem arestas multiclique.*

Demonstração : Sejam C'_i e C'_j duas cliques distintas de $K(G)$. Os vértices de C'_i são cliques de G que se intersectam duas a duas; agora pelo Lema 14 a interseção de todas estas cliques é não vazia com, digamos, $u \in V(G)$ o vértice comum. Similarmente existe um vértice $v \in V(G)$ que é o vértice comum das cliques de G que originam C'_j .

Se $u = v$ logo $V(C'_i \cup C'_j)$ gerariam um grafo completo em $K(G)$, contradizendo o fato que C'_i e C'_j são cliques de $K(G)$, daqui $u \neq v$. Cada vértice de $C'_i \cap C'_j$ em $K(G)$ corresponde

a uma clique em G contendo tanto u quanto v . Logo se $|C'_i \cap C'_j| \geq 1$, existem pelo menos duas cliques em G que contêm ambos u e v , contradizendo a hipótese de G não conter arestas multiclique.

Portanto, $K(G)$ não contém arestas multiclique. $\square$

Teorema 14 (Chong-Keang e Yee-Hock [4]) *Se H é um grafo sem arestas multiclique, então H é o grafo clique de algum grafo G sem arestas multiclique.*

Demonstração : Seja H um grafo sem arestas multiclique logo pelo Lema 14, H é um grafo Helly.

Pela construção de Hamelink, podemos garantir a existência de um grafo G , tal que $H \cong K(G)$, faltando somente mostrar, que G é um grafo sem arestas multiclique.

Como $H \cong K(G)$ segue-se que as cliques de G correspondem aos vértices de H . Além disso, os vértices comuns das cliques C_x e C_y de G contendo respectivamente os vértices x e y de H em G corresponde à clique em H contendo tanto x quanto y . Segue-se também que C_x e C_y têm um vértice comum se e somente se existe uma clique em H contendo x quanto y . Assim G não possui arestas multiclique desde que H não possui. $\square$

Teorema 15 (Chong-Keang e Yee-Hock [4]) *A classe dos grafos sem arestas multiclique é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Teoremas 13 e 14.

3.6 Grafos Ptolemaicos

Nesta seção será mostrado que a classe dos grafos Ptolemaicos é clique-fixa.

Um grafo conexo G é dito **ptolemaico** se é cordal e não possui uma “gema” como subgrafo induzido. A Figura 3.8 mostra o grafo gema.

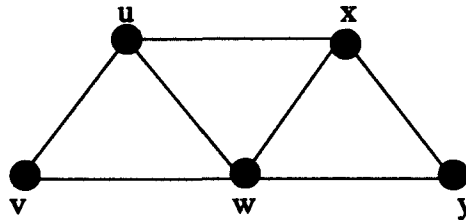


Figura 3.8: O grafo Gema.

Os grafos ptolemaicos foram introduzidos por Kay e Chartrand [17]; originalmente foram definidos em termos das propriedades do **espaço métrico** $(V(G), d_G)$, a saber : Um grafo G é ptolemaico se G é conexo e se para quaisquer quatro de seus vértices u, v, x, y , tem-se :

$$d(u, v).d(x, y) \leq d(u, x).d(v, y) + d(u, y).d(v, x)$$

Esta desigualdade é conhecida como a **desigualdade ptolemaica**, daí o nome atribuído aos grafos que satisfazem esta desigualdade.

O grafo gema não é ptolemaico, observe que os vértices u, v, x, y não satisfazem a desigualdade, pois $d(v, x).d(u, y) > d(u, v).d(x, y) + d(v, y).d(x, u)$.

Um interessante resultado que mostra as relações de inclusão entre diversas classes de grafos é apresentado por Howorka [15]. Neste estudo é mostrado que os grafos ptolemaicos constituem uma classe particular dos grafos Helly, e portanto subclasse dos grafos clique; além de mostrar que os grafos ptolemaicos contém propriamente os grafos blocos:

Grafos blocos $\subset$ Grafos ptolemaicos $\subset$ Grafos Helly $\subset$ Grafos clique.

Várias caracterizações para esta classe de grafos encontram-se em Howorka [16]. O Lema 15 contém uma caracterização que será utilizada na demonstração do Lema 16.

Lema 15 *Um grafo conexo G é ptolemaico se e somente se para todo par de cliques distintas e não disjuntas, P e Q de G , $P \cap Q$ separa $P \setminus Q$ de $Q \setminus P$.*

Lema 16 *Se G é um grafo ptolemaico, então $K(G)$ é ptolemaico.*

Demonstração : Seja G um grafo ptolemaico, e $K(G)$ o seu grafo clique. Temos que mostrar que $K(G)$ é ptolemaico.

Suponha que $K(G)$ não é ptolemaico. Dois casos devem ser analisados:

- $K(G)$ não é cordal, logo $K(G)$ contém um ciclo induzido c_n , $n \geq 4$, de cardinalidade mínima. Sejam $\{c_1, \dots, c_n\}$, $n \geq 4$, os vértices de c_n em $K(G)$ e C_i a clique correspondente a c_i , $i = 1, \dots, n$ em G .

Sejam $v_i \in C_i \cap C_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ e $v_n \in C_n \cap C_1$. Como v_i e $v_{i+1} \in C_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, e v_n e $v_1 \in C_1$, então $(v_i, v_{i+1}) \in A(G)$ (pois $(v_i, v_{i+1}) \in A(C_{i+1})$), $i = 1, \dots, n-1$ e $(v_n, v_1) \in A(G)$ (pois $(v_n, v_1) \in A(C_1)$). Ou seja, cada aresta (v_i, v_{i+1}) pertence a uma clique C_i .

Se existir aresta (v_i, v_{i+2}) em G , considere o subgrafo induzido por $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, w_{i+1}, w_{i+2}\}$, onde $w_{i+1} \in C_{i+1} \setminus (C_i \cup C_{i+2})$ e $w_{i+2} \in C_{i+2} \setminus (C_{i+1} \cup C_{i+3})$.

Primeiro, existem w_{i+1} e w_{i+2} definidos como acima tal que $(w_{i+1}, v_{i+2}) \notin A(G)$ e $(v_i, w_{i+2}) \notin A(G)$, pois caso contrário $v_i \in C_{i+2}$ e $v_{i+2} \in C_{i+1}$, contradizendo a maximalidade destas cliques. Se existir a aresta (w_{i+1}, w_{i+2}) em G , então G contém o ciclo induzido c_4 , caso contrário, G contém uma gema. Se não existir aresta (v_i, v_{i+2}) em G , G contém um ciclo induzido.

- $K(G)$ contém uma gema induzida. Então G contém 4 cliques u, v, x, y , tal que $u \cap v \neq \emptyset$, $u \cap x \neq \emptyset$, $x \cap y \neq \emptyset$, $v \cap x \neq \emptyset$, $v \cap y \neq \emptyset$, $x \cap v \neq \emptyset$. Além disso G contém uma clique w que intersecta as outras 4 cliques. (Veja Figura 3.8).

Suponha que w intersecta v e u , mas $u \cap v \cap w \neq \emptyset$. Considere as cliques v e w . Observe que $v \cap w$ não separa $v \setminus w$ de $w \setminus v$, contradizendo o fato de G ser ptolemaico. Logo

existe $y_1 \in v \cap u$ tal que $y_1 \in v \cap u \cap w$. Analogamente existem $y_2 \in u \cap x \cap w$ e $y_3 \in x \cap y \cap w$.

Pela maximalidade de x , existe $y_4 \in x \setminus (v \cap x)$ tal que $(y_1, y_4) \notin A(G)$. Analogamente pela maximalidade de v , existe $y_5 \in v \setminus (v \cap x)$ tal que $(y_3, y_5) \notin A(G)$. Logo, se $(y_4, y_5) \in A(G)$, G contém um ciclo induzido e se $(y_4, y_5) \notin A(G)$, G contém uma gema induzida. Ambos os casos são contradição à hipótese. $\square$

Lema 17 *Se H é um grafo ptolemaico, então H é o grafo clique de algum grafo ptolemaico G .*

Demonstração : Seja H um grafo ptolemaico, logo H é grafo Helly; assim pela construção de Hamelink, garante-se a existência do grafo G , tal que $H \cong K(G)$, faltando mostrar que G é ptolemaico.

Suponha que G não é ptolemaico, logo G possui ciclos c_n , $n \geq 4$ ou gemas como subgrafos induzidos. Assim os casos a serem analisados são:

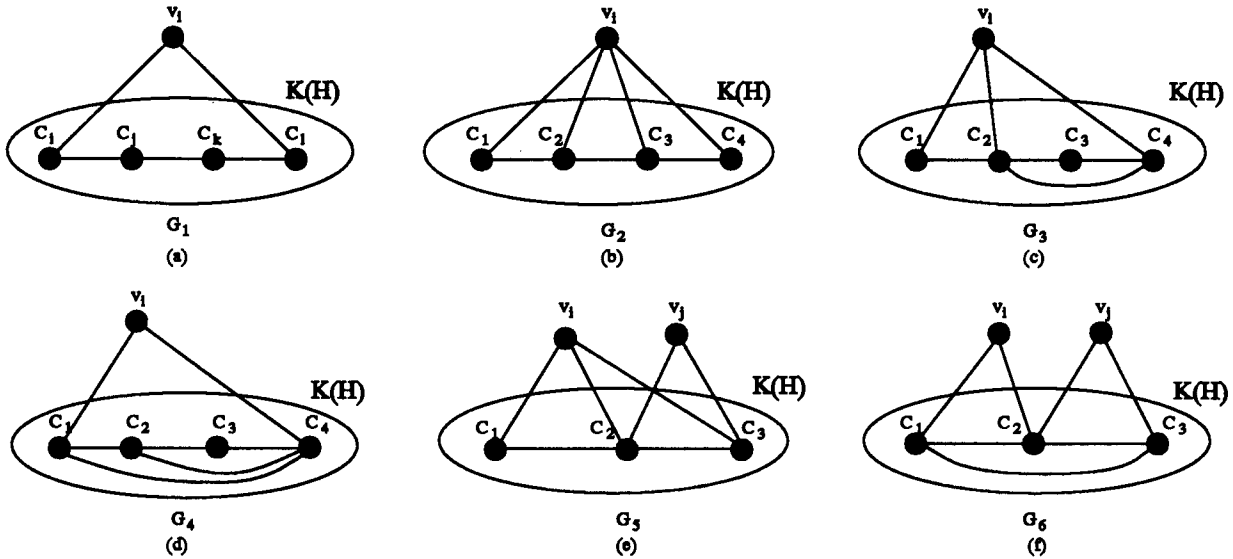


Figura 3.9: Ilustração da demonstração do Lema 17.

- G contém o subgrafo induzido G_1 . Então G_1 contém exatamente um vértice v_i de H , e v_i é adjacente a pelo menos dois vértices C_i e C_l não adjacentes em $K(H)$, tal como mostra a Figura 3.9 (a).

Desde que v_i é adjacente a C_i e C_l , então $v_i \in C_i \cap C_l$ em H , logo $(C_i, C_l) \in A(K(H))$, e $K(H)$ possui um ciclo induzido c_n , $n \geq 4$, contradizendo o fato de $K(H)$ ser ptolemaico (Lema 16).

- G contém as gemas induzidas. Como $K(H)$ é ptolemaico, então pelo menos um vértice da gema pertence aos vértices de H em G . Desde que não existem 3 vértices da gema

dois a dois não adjacentes, então a gema induzida em G possui 1 ou 2 vértices de H . Temos, então os seguintes casos:

- G contém o subgrafo induzido G_2 . Sejam $\{v_i, C_1, C_2, C_3, C_4\}$, os vértices que induzem G_2 , com $\{C_i, i = 1, \dots, 4\} \in V(K(H))$ e $v_i \in V(H)$, tal como mostra a Figura 3.9 (b).

Desde que v_i é vértice universal em G_2 , logo $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ induzem uma clique em $K(H)$, assim, $\{v_i, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ não induzem G_2 , contradição.

- G contém o subgrafo induzido G_3 . Neste caso, como $v_i \in C_1 \cap C_4$ em H , logo $(C_1, C_4) \in A(G)$, contradizendo a hipótese de $\{v_i, C_1, C_2, C_3, C_4\}$, induzirem uma gema em G .
- G contém o subgrafo induzido G_4 .

O grafo G , resultante da construção de Hamelink, garante que toda clique em G contém exatamente um vértice de H , e reciprocamente todo vértice de H está contido exatamente numa clique de G .

Em G_4 , $\{v_i, C_1, C_4\}$ induzem uma clique. Sejam $v_j, v_k \in V(H)$, e considere que $\{v_j, C_1, C_2, C_4\}$ e $\{v_k, C_2, C_3, C_4\}$ estão contidas em duas outras cliques em G_4 . Logo é claro que $v_i \in C_1 \cap C_4$, $v_j \in C_1 \cap C_2 \cap C_4$, e $v_k \in C_2 \cap C_3 \cap C_4$ em H .

Pela maximalidade de C_1 e C_3 existem $v_l \in C_1 \setminus \{(C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_4)\}$ e $v_m \in C_3 \setminus \{(C_2 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_4)\}$, tal que $(v_l, v_k) \notin A(H)$ e $(v_i, v_m) \notin A(H)$, respectivamente. Logo, se $(v_l, v_m) \notin A(H)$, então $\{v_i, v_j, v_k, v_l, v_m\}$ induzem uma gema em H , se $(v_l, v_m) \in A(H)$, H contém o ciclo c_4 induzido pelos vértices $\{v_i, v_l, v_k, v_m\}$, contradição.

- G contém o subgrafo induzido G_5 . Sejam $\{v_i, v_j, C_1, C_2, C_3\}$, os vértices que induzem G_5 , com $\{C_i, i = 1, \dots, 3\} \in V(K(H))$ e $\{v_i, v_j\} \in V(H)$, tal como mostra a Figura 3.9 (e).

Desde que v_i é adjacente a C_1 e C_3 , então $v_i \in C_1 \cap C_3$ em H , e $(C_1, C_3)x \in V(K(H))$. Logo $\{v_i, v_j, C_1, C_2, C_3\}$ não induzem G_5 , contradição.

- G contém o subgrafo induzido G_6 . Desde que $(C_1, C_3) \in A(K(H))$ logo existe $v_k \in C_1 \cap C_3$ em H .

Suponha que $v_k \notin C_2$. Então $\{v_i, v_j, v_k, C_1, C_2, C_3\}$ induzem uma pirâmide G . Contradição, pois G é grafo Helly por hipótese.

Suponha que $v_k \in C_2$, logo as cliques C_1, C_2, C_3 se intersectam duas a duas e possuem interseção total não vazia (v_k). É claro que $v_i \in C_1 \cap C_2$ e $v_i \notin C_3$ e $v_j \in C_2 \cap C_3$ e $v_j \notin C_1$.

Pela maximalidade de C_1 e C_3 existem $v_l \in C_1 \setminus \{(C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_3)\}$ e $v_m \in C_3 \setminus \{(C_3 \cap C_1) \cup (C_3 \cap C_2)\}$, tal que $(v_l, v_j) \notin A(H)$ e $(v_m, v_i) \notin A(H)$, respectivamente. Logo, se $(v_l, v_m) \notin A(H)$, então $\{v_i, v_j, v_k, v_l, v_m\}$ induzem uma gema em H , se $(v_l, v_m) \in A(H)$, H contém o ciclo c_4 induzido pelos vértices $\{v_i, v_j, v_l, v_m\}$, contradição.

Portanto, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 não correspondem a subgrafos induzidos de G . $\square$

Teorema 16 *A classe dos grafos ptolemaicos é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 16 e 17.

3.7 Grafos Blocos

Nesta seção será mostrado que a classe dos grafos bloco é clique-fixa. Para tal fim consideremos algumas definições prévias.

Um **vértice de corte** de um grafo é um vértice cuja remoção incrementa o número de componentes conexos do grafo. Assim se v é um vértice de corte de um grafo conexo G , então $G \setminus \{v\}$ é desconexo. Um grafo G é dito **não separável** se é conexo, não trivial e não possui vértices de corte. Um **bloco** de um grafo é um subgrafo maximal que é não separável. O **grafo bloco** de um grafo G (denotado por $B(G)$) é um grafo conexo na qual todo bloco é uma clique.

$B(G)$ corresponde ao grafo interseção dos blocos do grafo G , assim, os blocos de G correspondem aos vértices em $B(G)$ e dois destes vértices são adjacentes sempre que os correspondentes blocos contêm um vértice de corte comum em G (i.e se intersectem).

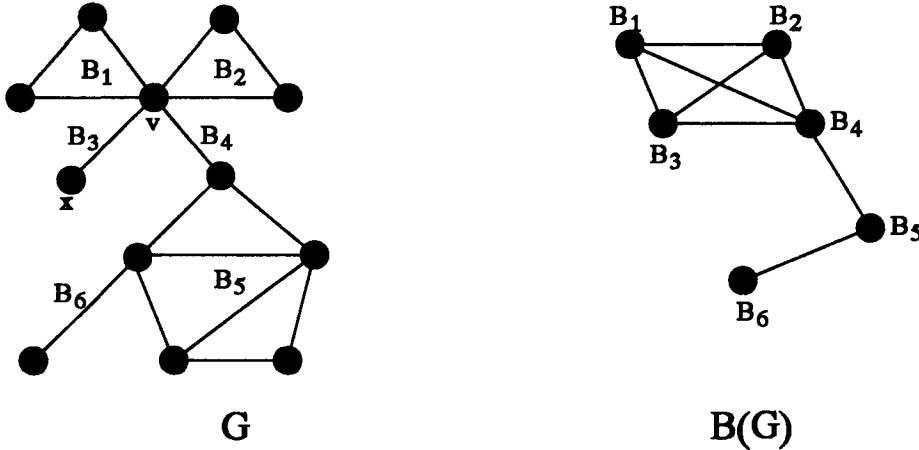


Figura 3.10: Um grafo e seu grafo bloco.

A Figura 3.10 mostra os blocos B_i , $i = 1, \dots, 6$ do grafo G , e seu grafo bloco. Observe que o vértice v é um vértice de corte, enquanto x não o é.

Note que em G toda aresta pertence a exatamente um de seus blocos.

Harary [11], provê uma construção na qual a partir de um grafo bloco H pode-se obter um outro grafo bloco G , tal que $H \cong B(G)$, esta construção é analoga à de Hamelink [10] (capítulo 2, seção 2.1).

Construção : Seja H um grafo bloco e $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ a família dos blocos de H . Forme o grafo G segundo a construção de Hamelink, mas com :

$V(G) = V(H) \setminus \{\text{Vértices de corte}\} \cup \mathcal{B}$ e, $A(G)$ do seguinte modo :

1. Se $h \in V(H) - \{\text{Vértices de corte}\}$, então h é adjacente a B_i se e somente se $h \in B_i$;
2. B_i é adjacente a B_j se e somente se $i \neq j$ e $B_i \cap B_j \neq \emptyset$;
3. Se $h, h' \in V(H) \setminus \{\text{Vértices de corte}\}$, então h não é adjacente a h' .

É fácil de conferir que o grafo G é tal que $H \cong B(G)$. A Figura 3.11 ilustra esta construção.

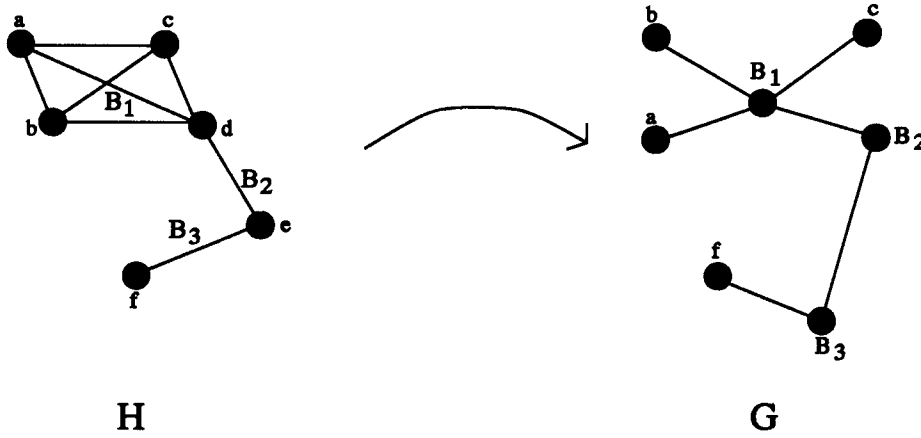


Figura 3.11: Ilustração da construção feita por Harary.

Lema 18 Se G é um grafo bloco, então $K(G)$ é um grafo bloco.

Demonstração : Seja G um grafo bloco e $\mathcal{C}(G)$ a família das cliques de G . Por definição, todo bloco em G , é uma clique. Assim, $\mathcal{C}(G)$ corresponde exatamente à família dos blocos de G . Segue diretamente que $K(G) = B(G)$. $\square$

Observe que uma árvore é um grafo bloco, logo o grafo clique de uma árvore é um grafo bloco.

Lema 19 Se H é um grafo bloco, então H é o grafo clique de algum grafo bloco G .

Demonstração : Seja H um grafo bloco, devido a construção de Harary [11], garante-se a existência de um grafo bloco G tal que $H \cong B(G)$.

Por definição, todo bloco em H é uma clique, e assim $H \cong B(G)$ é equivalente a $H \cong K(G)$. $\square$

Teorema 17 A classe dos grafos bloco é clique-fixa.

A demonstração segue diretamente dos Lemas 18 e 19.

3.8 Grafos Indiferenças

Hedman [13], mostrou que a classe dos grafos indiferença é clique-fixa.

Um grafo G é de intervalo se existe uma função f de $V(G)$ nos intervalos fechados da reta real, com a propriedade que para vértices distintos $\{u\}$ e $\{v\}$ tem-se $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$ se e somente se $\{u\}$ e $\{v\}$ são adjacentes em G . A função f chama-se **representação** de G .

Se para vértices distintos $\{u\}$ e $\{v\}$ de G , tem-se que os intervalos $f(u)$ e $f(v)$ possuem interseção própria (i.e. nenhum intervalo está contido propriamente num outro), diz-se que G é um grafo de intervalo próprio ou um grafo indiferença, e f é uma **representação própria** de G .

Existem muitas caracterizações na classe dos grafos indiferença. Roberts [27], caracterizou os grafos indiferença através de uma ordem linear sobre os seus vértices : “Um grafo é compatível com uma ordem linear sobre os seus vértices se e somente se é um grafo indiferença”. Maehara [19], caracterizou os grafos indiferença em termos de sua estrutura clique. Szwarcfiter e outros [6], apresentaram uma nova demonstração desta caracterização que evidencia a ordem dos vértices : “Grafos indiferença são exatamente aqueles que admitem uma ordem linear sobre os seus vértices, na qual os vértices contidos numa mesma clique são consecutivos”. Esta ordem é chamada de **ordem indiferença**.

A ordem indiferença não é única, por exemplo, a ordem reversa de uma ordem indiferença é uma ordem indiferença. Observe que uma ordem indiferença induz uma ordem sobre as cliques do grafo.

Seja $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ a família das cliques de um grafo indiferença G . O **representante** r_i da clique C_i , ($1 \leq i \leq k$), é o vértice de C_i de menor índice na ordem indiferença. Seja $R = \{r_i, i = 1, \dots, k\}$. Denomina-se $G[R]$ de **subgrafo representante** de G .

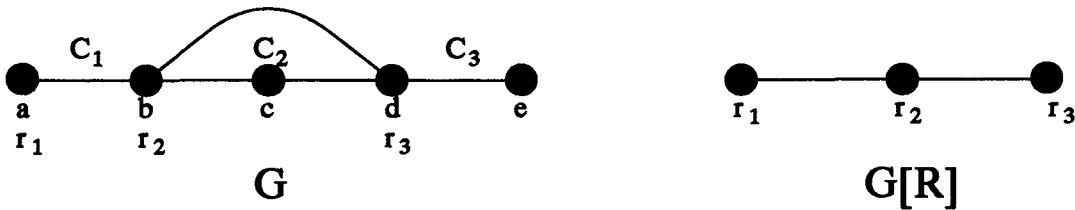


Figura 3.12: Grafo indiferença e seu subgrafo representante.

Observe que duas cliques possuem o mesmo representante se e somente se são iguais.

Os grafos indiferença formam uma outra subclasse dos grafos Helly (Lema 20). É fácil ver que são, também, grafos Helly-desmontáveis.

Lema 20 (Hedman [13]) *Todo grafo indiferença é um grafo Helly.*

Demonstração : Considere as cliques de G ordenadas segundo a ordem induzida pela ordem indiferença.

Sejam $C_1, C_2, \dots, C_m$ nessa ordem tal que $C_i \cap C_j \neq \emptyset, \forall i, j = 1, \dots, m$. Então $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ e sendo que $C_1 \cap C_m \neq \emptyset$, pela hipótese, tem-se que :

$$r_m \in \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

□

Lema 21 (Hedman [13]) $K(G) \cong G[R]$.

Demonstração : Temos que exibir uma bijeção entre $V(K(G))$ e $V(G[R])$ que preserve adjacências. Sejam $C_1, \dots, C_k$ os vértices de $K(G)$ e $\varphi : V(K(G)) \longrightarrow V(G[R])$, tal que $\varphi(C_i) = r_i$.

- φ é uma função 1 – 1.

$C_i \neq C_j \iff r_i \neq r_j$ pela observação anterior, e porque cada vértice de $G[R]$ é um representante de alguma clique em G .

- φ preserva adjacências.

Seja $i < j$ e $(C_i, C_j) \in A(K(G))$, então $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ em G , e $r_i < r_j$. Logo $r_j \in C_i$ e assim $(r_i, r_j) \in A(G[R])$.

Seja $(r_i, r_j) \in A(G[R])$. Sem perda de generalidade assuma que $r_i < r_j$. Logo $r_j \in C_i$ e assim $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ em G , e $(C_i, C_j) \in A(K(G))$. □

O Lema 22, é consequência direta do Lema 21, e do fato de que todo subgrafo induzido de um grafo indiferença é um grafo indiferença.

Lema 22 (Hedman [13]) Se G é um grafo indiferença, então $K(G)$ é grafo indiferença.

A abordagem (construção de Hamelink) usada nas demonstrações de classes anteriores, não será útil na demonstração do Lema 23. Pois a construção de Hamelink a partir de um grafo indiferença H não origina um grafo indiferença G . Por exemplo, para o grafo indiferença G da Figura 3.12 a construção de Hamelink origina um grafo que não é indiferença.

Lema 23 (Hedman [13]) Se H é um grafo indiferença, então H é o grafo clique de algum grafo indiferença G .

Demonstração : Seja H um grafo indiferença com vértices $v_1, \dots, v_n$, ordenados segundo a ordem indiferença. Procedemos à demonstração por indução em n (número de vértices de H). Primeiro, assumo $n = 2$, isto é, os vértices de H são v_1 e v_2 , e $v_1 < v_2$. Escolha um número real x tal que, $v_1 + 1 < x < v_2 + 1$. Sejam os vértices w_1, w_2 e w_3 de G , três pontos sobre a reta real tal que $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2$, e $w_3 = x$. É claro que $C_1 = \{w_1, w_2\}$ e $C_2 = \{w_2, w_3\}$. Daqui, $r_1 = w_1 = v_1$ e $r_2 = w_2 = v_2$. Logo $H \cong G[R] \cong K(G)$, pelo isomorfismo obvio que mapeia r_1 sobre v_1 e r_2 sobre v_2 .

Segundo, assuma que o Lema 23, é verdadeiro para todos os grafos indiferença com n vértices. Seja H um grafo indiferença com $n + 1$ vértices $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$, sem perda de generalidade assuma que os vértices estão ordenados segundo a ordem indiferença.

Construa $H' = H \setminus \{v_{n+1}\}$. Então pela hipótese indutiva existe um grafo indiferença G' , com vértices $w_1, \dots, w_p$, tal que $H' \cong K(G')$. Desde que os vértices estão ordenados em ordem ascendente, logo existe um número k , $0 \leq k \leq n - 1$, talque $v_{n-k}, \dots, v_n$ são incidentes a v_{n+1} e $v_1, \dots, v_{n-k-1}$ não o são. Se $k = n - 1$, então os vértices $v_1, \dots, v_n$ são incidentes a v_{n+1} , e entre si, daqui H é uma clique.

Sejam r_{n-k} e r_{n-k-1} vértices de G' correspondentes a v_{n-k} e v_{n-k-1} . Sejam agora, x e y tais que $x < y$, $x, y \in V(G')$, e x é o vértice mais à direita na ordem indiferença tal que x é adjacente a r_{n-k} e y é o mais à direita adjacente a r_{n-k-1} .

Construa G tal que $V(G) = V(G') \cup \{a, b\}$ onde $x < a \leq y$, e $b > y$. G assim construído satisfaz $H \cong K(G)$. $\square$

Teorema 18 *A classe dos grafos indiferença é clique-fixa.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 22 e 23.

3.8.1 Grafos Indiferença Mínimos

Da seção 3.8 tem-se que o operador clique mesmo quando restrito à classe dos grafos indiferença é sobrejetor, mas não injetor. Um claro exemplo são os grafos da Figura 3.13, dois grafos indiferença distintos mas com o mesmo grafo clique.

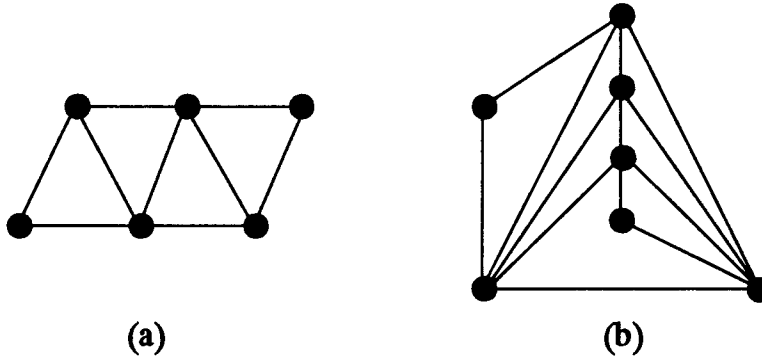


Figura 3.13: Dois grafos indiferença onde o da esquerda é indiferença mínimo.

Gutierrez [9] exhibe uma subclasse dos grafos indiferença onde o operador K restrito a ela é também injetor.

Dado um grafo indiferença G e uma representação própria f de G denota-se por a_i (b_i) ao extremo esquerdo (direito) do intervalo, e por $Extr(f) = \bigcup_{i=1}^n \{a_i, b_i\}$ ao conjunto de pontos extremos dos intervalos da imagem de f .

Uma representação própria, de um grafo indiferença G , é dita **mínima** se o número de pontos extremos de seus intervalos é $|Extr(f)| = 2 |V(G)| - |C(G)|$, ($C(G)$ é a família

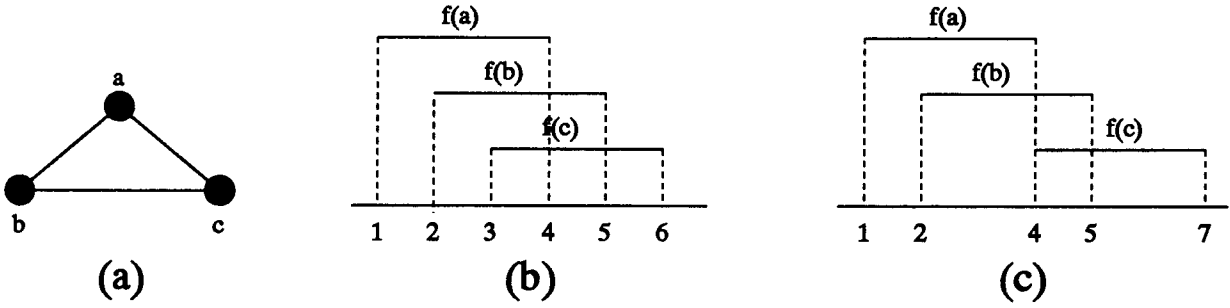


Figura 3.14: O grafo k_3 , uma representação própria e uma representação própria mínima.

das cliques do grafo G). A Figura 3.14 (c), mostra uma representação própria mínima para o grafo indiferença k_3 .

Gutierrez, apresenta um algoritmo de ordem $O(n^2)$, com o qual constroe-se uma representação própria para um grafo indiferença G .

Uma propriedade interessante na classe dos grafos indiferença mostrado por Gutierrez, é que todo grafo indiferença G satisfaz a seguinte desigualdade :

$$|V(G)| \geq 2 |C(G)| - |C(K(G))|. \text{ A recíproca é falsa.}$$

Um grafo G é **indiferença mínimo**, se satisfaz a igualdade :

$$|V(G)| = 2 |C(G)| - |C(K(G))|.$$

É fácil de conferir que o grafo da Figura 3.13 (b), não é grafo indiferença mínimo, pois $|V(G)| > 2 |C(G)| - |C(K(G))|$, e que o grafo da Figura 3.13 (a) satisfaz a igualdade.

Note que todo grafo indiferença mínimo é um grafo indiferença, mas a recíproca é falsa. Em particular, o grafo completo k_n , $n \neq 1$, não é indiferença mínimo.

O Teorema 19 demonstra que K é injetor quando restrito aos grafos indiferença mínimos.

Teorema 19 (Gutierrez [9]) *A aplicação do operador clique restrito à classe dos grafos indiferença mínimos, é uma bijeção (salvo isomorfismos) sobre a classe dos grafos indiferença.*

Antes de proceder com a demonstração, se considerarão alguns resultados preliminares.

Seja f uma representação própria de um grafo indiferença G . Defina-se o grafo $H(f)$ como segue : $V(H(f)) = Extr(f)$, e para dois pontos extremos distintos a e b , $(a, b) \in A(H(f))$ se e somente se existe um $v \in V(G)$ tal que $a, b \in f(v)$.

O seguinte Lema mostra algumas das propriedades do grafo $H(f)$.

Lema 24 (Gutierrez [9]) *1. Seja G um grafo indiferença. Se f é uma representação própria de G , então $H(f)$ é um grafo indiferença tal que $G \cong K(H(f))$. Mais ainda, f é uma representação própria mínima de G se e somente se $H(f)$ é um grafo indiferença mínimo.*

2. Se S é um grafo indiferença mínimo, então existe uma representação própria mínima s de $K(S)$ tal que $H(s) \cong S$.

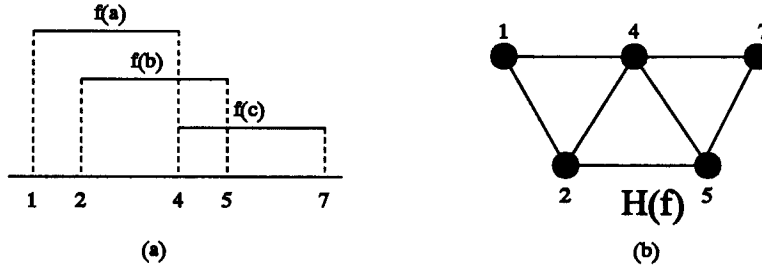


Figura 3.15: Representação própria mínima de k_3 e grafo $H(f)$.

3. Se s e t são representações próprias mínimas de um grafo indiferença G , então $H(s) \cong H(t)$.

A família das cliques de $H(f)$ é $\mathcal{C}(H(f)) = \{\{f(v_i) \cap Extr(f)\}_{v_i \in V(G)}\}$. Assim no grafo $H(f)$ da Figura 3.15 (b), $\mathcal{C}(H(f)) = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5, 7\}\}$.

Observe que duas cliques $\{f(v_i) \cap Extr(f)\}$, e $\{f(v_j) \cap Extr(f)\}$ são adjacentes em $K(H(f))$, se e somente se $f(v_i) \cap f(v_j) \neq \emptyset$, com o qual G e $K(H(f))$ são isomorfos.

Demonstração : (Teorema 19) Seja G um grafo indiferença e f uma representação própria mínima de G . Por (1) do Lema 24, $H(f)$ é um grafo indiferença mínimo tal que $K(H(f)) \cong G$.

Sejam S e T grafos indiferença mínimos e h um isomorfismo de $K(S)$ em $K(T)$. Por (2) do Lema 24, existem representações próprias mínimas s e t de $K(S)$ e $K(T)$ respectivamente, tais que $H(s) \cong S$ e $H(t) \cong T$. É claro que $t \circ h$, é uma representação própria mínima de $K(S)$. Logo, por (3) do Lema 24, $H(s) \cong H(t \circ h) = H(t)$, e assim $S \cong T$. $\square$

3.9 Grafos Sigma

Nesta seção apresentamos o trabalho de Gutierrez [9], que mostrou, uma subclasse dos grafos indiferença que é clique-fixa, os denominados **grafos Sigma**, (Σ) .

Seja $\mathcal{U}$ a classe união dos grafos indiferença mínimos com os grafos completos. A classe Σ é uma classe contida propriamente na classe $\mathcal{U}$ e que, além disto, é a maior subclasse clique-fixa dos grafos $\mathcal{U}$ com respeito à inclusão.

Passamos agora a definir a classe Σ . Primeiro construamos a seqüência de grafos $(G_h^m)_{m \geq 1}$, aplicando sucesivamente a inversa do operador clique K , da classe dos grafos indiferença na classe dos grafos indiferença mínimos (veja Teorema 19), iniciando com o grafo completo k_h .

Definamos $G_h^1 = k_h$, e utilizando uma representação própria mínima f de k_h , $G_h^2 = H(f)$. Por (1) do Lema 24, G_h^2 é um grafo indiferença mínimo e $K(G_h^2) \cong G_h^1$. Da mesma maneira obtém-se G_h^3 e assim sucesivamente.

A Figura 3.16, mostra os três primeiros grafos das seqüências (G_2^m) e (G_3^m) .

Teorema 20 (Gutierrez [9]) $\Sigma = \{G_h^m; m \geq 1, h \geq 1\}$, é uma classe clique-fixa contida em $\mathcal{U}$. Além disso, se $\mathcal{H}$ é uma classe clique-fixa e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}$, então $\mathcal{H} \subseteq \Sigma$.

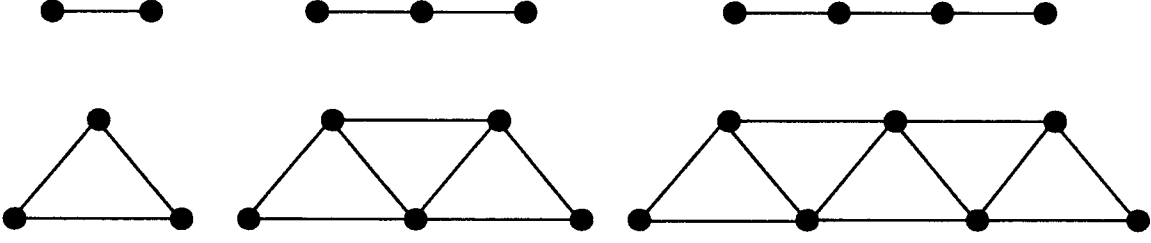


Figura 3.16: Os três primeiros grafos das seqüências (G_2^m) e (G_3^m) .

Demonstração : Por construção, Σ é uma classe clique-fixa contida em $\mathcal{U}$. Seja $G \in \mathcal{H}$, se G é grafo completo então $G \in \Sigma$. Se o índice i de G é 2, então $K(G) = k_h$ para algum $h \geq 2$. Logo, pelo Teorema 19, G é isomorfo a G_h^2 com o qual $G \in \Sigma$. Se $i > 2$ então $K^{i-2}(G)$ têm índice 2 e $K^{i-2}(G) \in \Sigma$. Como K é uma bijeção da classe dos grafos indiferença no mínimos então, dado que $K^{i-2}(G)$ é um grafo indiferença mínimo e $K(K^{i-3}(G)) = K^{i-2}(G)$, se têm que $K^{i-3}(G) \in \Sigma$. Com a mesma lógica se prova que os grafos $K^{i-4}(G), \dots, G$ estão em Σ . $\square$

3.10 Classes de grafos não Clique-Fixas

Nem todas as classes de grafos compreendidas neste trabalho são clique-fixas. Sabe-se que numa classe clique-fixa $\mathcal{G}$, cumpre-se :

1. Se $G \in \mathcal{G}$, então $K(G) \in \mathcal{G}$.
2. Se $H \in \mathcal{G}$, então H é o grafo clique de algum grafo $G \in \mathcal{G}$.

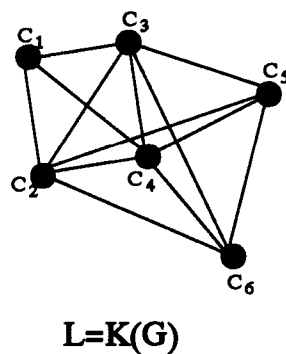
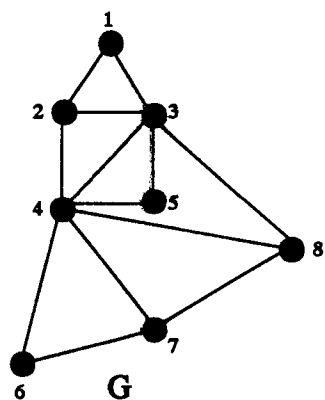
Um exemplo é a classe dos grafos desmontáveis. O Lema 7, seção 3.3 demonstra que é clique-fechada, isto é, satisfaz a condição 1. Porém, não é clique-fixa, pois contém grafos (Ex. pirâmide) que não são grafos clique, não cumprindo assim a segunda condição.

Mas, existem classes de grafos que não são nem clique-fechadas, como a classe $\mathcal{H}_0$ descrita na seção 3.4; a classe $\mathcal{U}$, união das classes dos grafos indiferença mínimos e os grafos completos (seção 3.9); e a classe dos grafos cordais.

A Figura 3.17, ilustra esta asserção para a classe dos grafos $\mathcal{H}_0$. Veja que G é um grafo $\mathcal{H}_0$, mas $L = K(G)$ não o é (para os vértices C_2 e C_4 em particular, não existe clique em L que contenha exatamente um dos dois vértices).

É fácil de mostrar que $\mathcal{U}$, não é uma classe clique-fechada; o grafo da Figura 3.13 (a) pertence a classe $\mathcal{U}$, mas o seu grafo clique é k_4 -{uma aresta} o qual não pertence a $\mathcal{U}$.

No caso dos grafos cordais, a Figura 3.18 ilustra que esta classe não é clique-fechada. O grafo G é um grafo cordal e $K(G)$ não é cordal (os vértices 2,3,4 e 5 de $K(G)$ induzem um ciclo de comprimento maior do que três).



Cliques de G :

$C_1=\{1,2,3\}$ $C_2=\{2,3,4\}$

$C_3=\{3,4,5\}$ $C_4=\{3,4,8\}$

$C_5=\{4,7,8\}$ $C_6=\{4,6,7\}$

Cliques de $K(G)$:

$C'_1=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$C'_2=\{C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$

Figura 3.17: A classe dos grafos $\mathcal{H}_0$ não é clique-fixa.

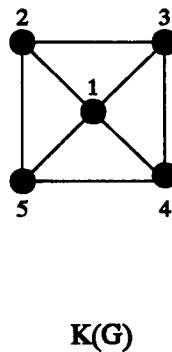
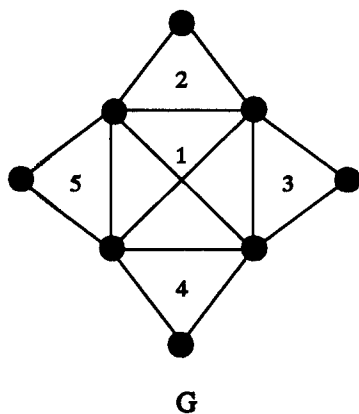


Figura 3.18: A classe dos grafos cordal não é clique-fixa.

3.11 Uso dos Hipergrafos

A idéia inicial do uso dos hipergrafos foi tentar ampliar certos resultados clássicos da teoria dos grafos.

Posteriormente, foi notado que estas generalizações usualmente conduzem à simplificação. Mais ainda, uma simples sentença algumas vezes poderia unificar muitos teoremas em grafos.

Bandelt e Prisner [2], utilizaram a visão dos hipergrafos para caracterizar as classes de grafos clique-fixas, pois foi notado que os grafos Helly, Helly-desmontáveis, ptolemaicos, bloco, e grafos sem arestas multiclique, correspondem ao **grafo linha** de hipergrafos que possuem certas características específicas.

Um hipergrafo H é um par $(V, \mathcal{E})$ consistindo de um conjunto (finito) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vértices, e uma família $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ de subconjuntos não vazios de V , as hiperarestas de H , tais que cada vértice acha-se em alguma hiperaresta.

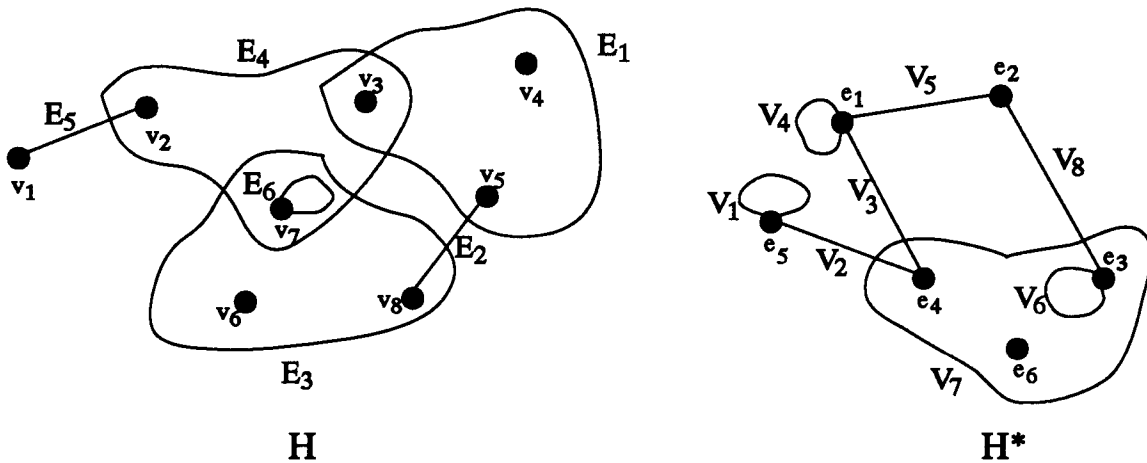


Figura 3.19: O Hipergrafo H e o seu hipergrafo dual H^* .

Um hipergrafo pode ser desenhado como um conjunto de pontos representando os vértices. A hiperaresta E_j é representada por uma linha unindo dois vértices se $|E_j| = 2$, por um laço se $|E_j| = 1$, e por uma curva fechada simples contendo vértices se $|E_j| \geq 3$. Note que um grafo simples (sem laços e sem arestas múltiplas), é um hipergrafo onde cada uma de suas hiperarestas possui tamanho dois; um multigrafo (com laços e arestas múltiplas) corresponde a um hipergrafo onde cada hiperaresta possui tamanho dois o menos, não obstante em hipergrafos não se concedera pontos isolados como vértices, pois por definição todo vértice esta contido em alguma hiperaresta.

O **hipergrafo dual** H^* tem $\mathcal{E}$ como seu conjunto de vértices, e arestas $V_i = \{e_j/v_i \in E_j \text{ em } H\}$. Note-se que $(H^*)^* = H$.

O **grafo subjacente** de um hipergrafo H , denotado por $S(H)$, tem o mesmo conjunto V de vértices de H , e dois vértices distintos são adjacentes se e somente se eles estão contidos dentro de uma mesma hiperaresta de H . O **grafo linha** de H , denotado por $S(H^*)$, é o

grafo subjacente do hipergrafo dual H^* de H . A Figura 3.20, mostra os grafos subjacentes dos hipergrafos H e H^* da Figura 3.19.

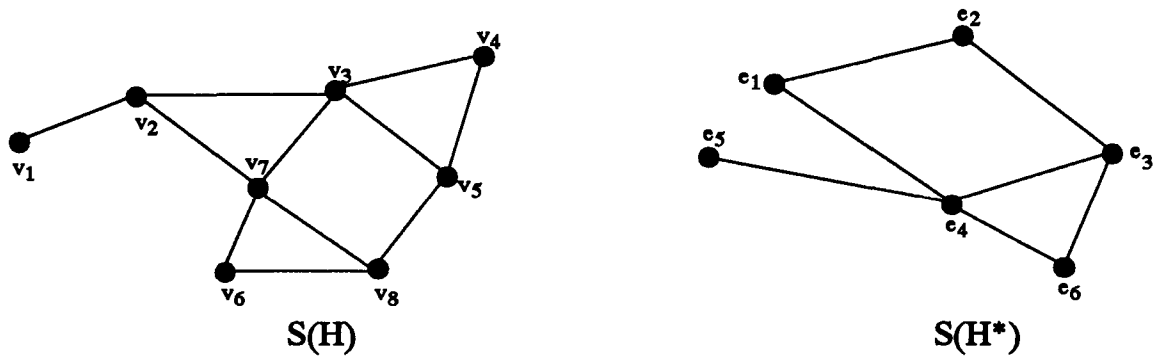


Figura 3.20: Grafos subjacentes dos hipergrafos H e H^* , respectivamente.

Capítulo 4

Classe de Grafos Clique-convergentes

Um grafo G clique-converge se após de um certo número de aplicações do operador clique se obtém um grafo isomorfo a algum dos grafos anteriores.

Dado um grafo G , seja $\mathcal{F} = \{K^0(G), K(G), K^2(G), \dots\}$ a família dos grafos clique-iterados de G não isomorfos entre si. Se existe um inteiro $i \geq 1$, tal que $K^i(G) \cong K^j(G)$, para algum $j \leq i - 1$, dizemos G **clique-converge** à subfamília $\mathcal{M} = \{K^j(G), K^{j+1}(G), \dots, K^{i-1}(G)\}$, onde i é o menor inteiro que satisfaz a condição acima. O conjunto de grafos $\mathcal{M}$ é chamado de **circuito p -periódico** sendo $p = i - j = |\mathcal{M}|$, o seu **período** de convergência.

A Figura 4.1, mostra dois grafos clique-convergentes. Os ciclos c_n ($n \geq 4$), constituem grafos clique-convergentes de período $p = 1$. (Grafos com esta característica são chamados de grafos **auto-clique**). O grafo $\overline{c_6}$ (grafo complementar do ciclo c_6), é um exemplo de um grafo clique-convergente de período $p = 2$.

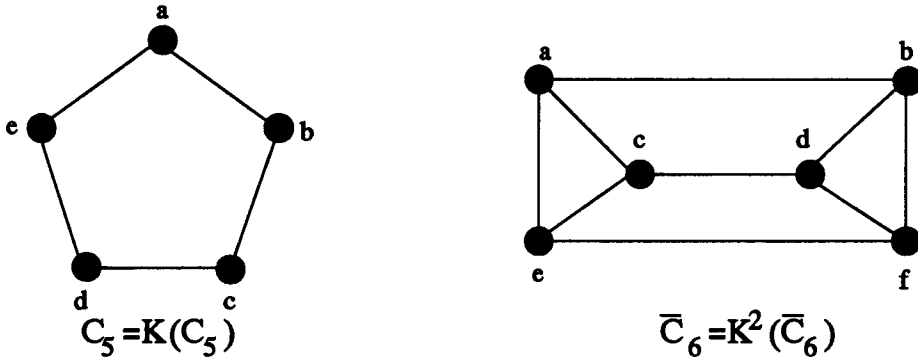


Figura 4.1: Grafos clique-convergentes a um circuito periódico de grafos.

Agora bem, se $\mathcal{M} = \{k_1\}$ (k_1 é o grafo completo de um vértice), estamos considerando o caso particular da clique-convergência ao grafo de um vértice. Este caso será tratado com maior detalhe na seguinte seção.

Nem todo grafo clique-converge. Se a família $\mathcal{F}$ é infinita, então o grafo G é **clique-divergente**. Neumann-Lara em [22] e [23], foi quem estudou esta classe de grafos. Tratamos deste caso no capítulo 5.

4.1 Clique-convergência à um vértice (k_1)

Um grafo G **clique-converge** ao grafo de um vértice, se existe algum inteiro $i \geq 0$ tal que $K^i(G) \cong k_1$. O menor inteiro i tal que $K^i(G) \cong k_1$ é denominado **índice** de G .

Todo grafo completo k_n ($n \geq 1$), é um grafo clique-convergente à k_1 de índice 1; o grafo pirâmide é de índice 2, mas os ciclos c_n ($n \geq 4$), não são grafos clique-convergentes à k_1 .

A caracterização da classe de grafos clique-convergentes à k_1 é um problema até agora não resolvido. Este problema foi citado em Bandelt e Prisner [2].

Uma abordagem para a tentativa de resolver o problema da caracterização é estudar classes de grafos que clique-convergem à k_1 . Em 1991, Bandelt e Prisner, caracterizaram uma subclasse dos grafos Helly que clique-convergem à k_1 (os grafos Helly-desmontáveis), e posteriormente, Prisner [26] demonstrou que os grafos desmontáveis também clique-convergem à k_1 .

Apresentamos algumas das classes encontradas na literatura que clique-convergem à k_1 e evidenciamos as relações de inclusão existentes entre elas.

4.1.1 Grafos Indiferença

Hedman [13] indiretamente foi o primeiro a estudar a clique-convergência a um vértice. Nesse artigo, demonstrou que os grafos indiferença clique-convergem à k_1 , e além disso que os parâmetros índice e diâmetro são iguais para estes grafos.

O grafo indiferença da Figura 4.2, clique-converge à k_1 e possui índice e diâmetro igual a 3.

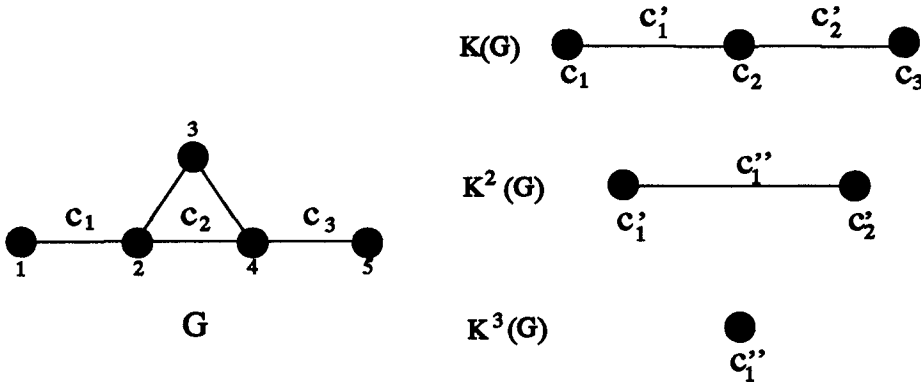


Figura 4.2: Grafo indiferença G com $diam(G) = ind(G) = 3$.

Os lemas abaixo demonstram que o número de vértices e o diâmetro de um grafo indiferença diminuem a cada aplicação do operador clique.

Lema 25 (Hedman [13]) *Em todo grafo indiferença G , tem-se $|V(G)| > |V(K(G))|$.*

Demonstração : Seja G um grafo indiferença conexo com vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$; onde $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ e tendo $k < n$ cliques $C_1, C_2, \dots, C_k$ com representantes $r_1, r_2, \dots, r_k$.

Como G é conexo $|V(C_i)| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Em particular, para $i = k$, $\{r_k, \dots, v_n\} \in V(C_k)$, e $r_k < v_n$. Assim, $v_n \notin \{r_1, \dots, r_k\}$, logo $|V(G)| > |V(G[R])|$. Mas como $G[R] \cong K(G)$, tem-se que $|V(G)| > |V(K(G))|$. $\square$

Corolário 3 Se G é indiferença, então G clique-converge à k_1 .

Lema 26 (Hedman [13]) Se G é um grafo indiferença, então $\text{diam}(G) > \text{diam}(K(G))$.

Demonstração : Seja G um grafo indiferença conexo com vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$; onde $v_1 < v_2 < \dots < v_n \in V(G[R]) = \{r_1, \dots, r_k\}$ com $r_1 < \dots < r_k$. Logo, é claro que $\text{diam}(G) = d(v_1, v_n)$ e $\text{diam}(G[R]) = d_{G[R]}(r_1, r_k)$. Suponha que $\text{diam}(G) = d$ e seja $u_0 = v_1, u_1, \dots, u_d = v_n$, um caminho mínimo de v_1 a v_n . Logo é claro que $u_0 < \dots < u_d$.

Agora, para cada i ($0 \leq i < d$), seja w_i o vértice de $G[R]$ tal que $w_i = \min\{r; r \in G[R], (r, u_{i+1}) \in A(G)\}$. Logo segue facilmente que $w_0 = r_1$, e $w_{d-1} = r_k$, e $u_{i-1} < w_i < u_i$ para cada $0 < i < d-1$. Daqui $(w_i, w_{i+1}) \in A(G[R])$. Assim $w_0, w_1, \dots, w_{d-1}$ é um caminho de comprimento $d-1$ entre $w_0 = r_1$ e $w_{d-1} = r_k$. Portanto, $\text{diam}(G[R]) \leq d-1 < \text{diam}(G)$, mas como $G[R] \cong K(G)$, segue que $\text{diam}(K(G)) < \text{diam}(G)$. $\square$

Teorema 21 (Hedman [13]) Para qualquer grafo indiferença, tem-se $\text{ind}(G) = \text{diam}(G)$.

Demonstração : O corolário 8 (seção 6.1), mostra que os diâmetros de G e de $K(G)$ diferem de no máximo uma unidade. Deste corolário e do Lema 26 obtém-se que num grafo indiferença e conexo G , $\text{diam}(G) = \text{diam}(K(G)) + 1$.

Seja $i = \text{ind}(G)$. Indutivamente, tem-se que: $\text{diam}(G) = \text{diam}(K^1(G)) + 1 = \text{diam}(K^2(G)) + 2 \dots = \text{diam}(K^i(G)) + i = i$ (pois $K^i(G)$ é o grafo trivial). $\square$

4.1.2 Grafos Helly-desmontáveis

Bandelt e Prisner [2], caracterizaram os grafos Helly que são clique-convergentes à k_1 . Estes grafos são os denominados grafos **Helly-desmontáveis**, conhecidos também como grafos **disco-Helly**.

Sabendo que os grafos indiferença são clique-convergentes à k_1 , e que estes formam uma subclasse dos grafos Helly (Lema 20), uma questão natural é saber se todos os grafos Helly são clique-convergentes à k_1 .

A Figura 4.1 mostra dois grafos Helly que não são clique-convergentes à k_1 .

Uma outra questão que merece ser analisada é se a classe dos grafos Helly contém classes clique-convergentes à k_1 distintas dos grafos indiferença. Neste caso a resposta não é imediata, mas será apresentado o resultado de Bandelt e Prisner [2], que responde esta questão.

Para o estudo desta questão vemos, em primeiro lugar, a clique-convergência dos grafos Helly. Será demonstrado que todo grafo Helly clique-converge, e caracterizada a classe dos grafos Helly que clique-convergem à k_1 .

Um grafo Helly G possui a propriedade que a sua segunda clique iterada, corresponde a um certo subgrafo induzido de G (Lema 27).

Lema 27 (Escalante [7]) *Seja G um grafo Helly. Os passos descritos a seguir fornece $K^2(G)$.*

1. *Particione $V(G)$ em p classes ($1 \leq p \leq n$) de vértices gêmeos. Seja v_i um dos elementos da classe i ($i = 1, \dots, p$).*
2. *Construa $G' = G[v_i]$ $i = 1, \dots, p$.*
3. *Retire de G' , os vértices dominados.*

O subgrafo induzido de G obtido com a aplicação de 1., 2. e 3. é isomorfo a $K^2(G)$.

Demonstração : Observe primeiro que G é um grafo Helly e $K(G) = K(G')$. Sendo G' um grafo Helly sem vértices gêmeos, então para cada subfamília $\mathcal{C}$ de cliques de G' que se cruzam duas a duas existe um único vértice x pertencente à interseção das cliques pertencentes a $\mathcal{C}$.

O vértice x não é vértice dominado em G' , pois

$$N[x] \supseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C,$$

ou seja, nenhum vértice pertencente a $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ domina x . Além disso, nenhum vértice

$$y \notin \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

domina x pois, caso contrário, se $N[y] \supseteq N[x]$, y pertenceria a alguma clique em $\mathcal{C}$.

Logo, sendo G' um grafo Helly existe uma correspondência 1–1 entre as cliques de $K(G')$ e os vértices não dominados de G' . $\square$

Do Lema 27, espera-se que a clique-convergência de um grafo Helly à k_1 seja equivalente a um esquema de eliminação de vértices dominados. Considere o grafo Helly G da Figura 4.3. Primeiro observe, que G não contém vértices gêmeos distintos. Então $G = G'$. Os vértices $\{a, d\}$ são dominados pelo vértice $\{e\}$, e os vértices $\{c, f\}$ pelo vértice $\{b\}$. Logo tem-se que $K^2(G)$ é a aresta $\alpha = (b, e)$. Além disso, foram retirados do grafo G os vértices : a, d, c, f , para obter-se $K^2(G)$.

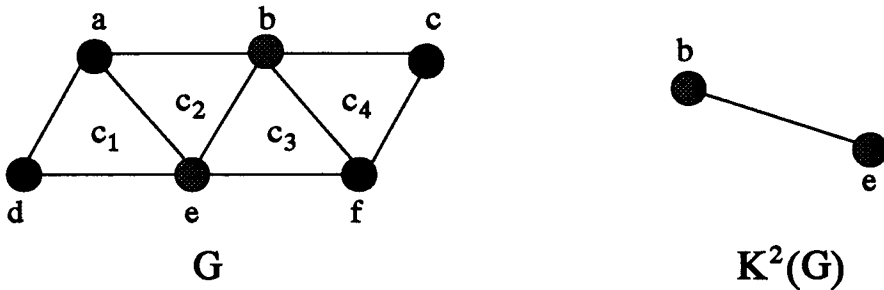


Figura 4.3: Obtenção de $K^2(G)$.

Seja G um grafo. O grafo $R(G)$ obtido de G através dos passos do Lema 27 é denominado grafo *pared*. Observe que $R(G)$ pode conter vértices gêmeos (na aresta (b, e) da Figura 4.3, os vértices $\{b\}$ e $\{e\}$ são gêmeos).

Define-se $R^{i+1}(G) = R(R^i(G))$. Note que $R^{i+1}(G)$ é um subgrafo induzido de $R^i(G)$, para todo i . Seja i o menor inteiro positivo tal que $R^i(G) = R^{i+1}(G) = S(G)$. O grafo $S(G)$ é denominado grafo *completely pared*. Observe que $S(G)$ ou é um vértice ou contém somente vértices não dominados.

O Teorema 22, demonstra que todo grafo Helly clique-converge.

Teorema 22 (Escalante [7]) *Todo grafo Helly clique-converge a $\{S(G)\}$ ou a $\{S(G), K(S(G))\}$.*

Demonstração : Seja G um grafo Helly e $\mathcal{F} = \{K^0(G), K(G), K^2(G), \dots\}$ a família dos grafos clique-iterados não isomorfos de G .

Pelo Lema 27, $K^2(G) \cong R(G)$ e $R(G)$ é um subgrafo induzido de G . Sendo que o grafo clique de um grafo Helly é Helly (Lema 3), então $R^i(G)$ é Helly e para todo $i \geq 0$, $R^i(G) = K^{2i}(G)$. Logo, a sequência de potências pares, $K^{2i}(G)$, $i \geq 0$, origina uma sequência de subgrafos induzidos de G : $G, R(G), R^2(G), R^3(G), \dots, R^i(G)$ (respectivamente, para cada $i \geq 0$), onde $S(G) = R^i(G)$ é o grafo de um único vértice ou não contém vértices dominados. Logo, $S(G) = R^i(G) = R^{i+1}(G) = R^{i+2}(G) = \dots$

Portanto, a família $\mathcal{F}$ é família finita e G clique-converge a um subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{F}$, onde $S(G) \in \mathcal{M}$.

Se $K(S(G)) = S(G)$, então $\mathcal{M} = \{S(G)\}$.

Se $K(S(G)) \neq S(G)$, então $\mathcal{M} = \{S(G), K(S(G))\}$, pois $K^2(S) = S$. □

A seguir apresenta-se um dos principais resultados obtidos por Bandelt e Prisner [2]: a caracterização dos grafos Helly que clique-convergem a k_1 .

Teorema 23 (Bandelt e Prisner [2]) *Seja G um grafo Helly. G clique-converge à k_1 se e somente se G é desmontável.*

A demonstração segue diretamente dos Lemas 3 e 27.

Sabemos que um grafo indiferença é um grafo Helly (Lema 20) e que clique-converge à k_1 (Corolário 3), então pode-se usar o Teorema 23 para concluir que um grafo indiferença é Helly-desmontável. Esta inclusão é própria. A Figura 4.4, mostra um grafo Helly-desmontável, $k_{1,3}$, que é um grafo proibido para os grafos indiferença.

Observe também que existem grafos clique-convergentes à k_1 que não são grafos Helly, como por exemplo o grafo pirâmide.

4.1.3 Grafos Desmontáveis

Vimos na subseção anterior que a pirâmide é um grafo desmontável (não Helly) que clique-converge à k_1 .

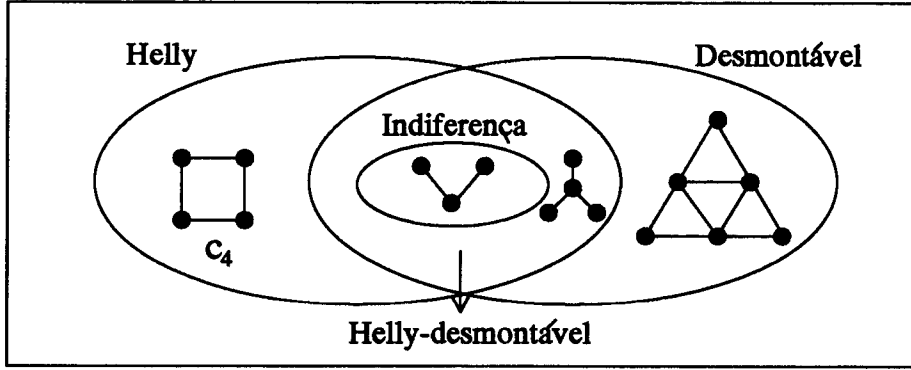


Figura 4.4: Relação entre os grafos Helly e os grafos desmontáveis.

O problema de decidir se os grafos desmontáveis são clique-convergentes à k_1 foi considerado aberto por Bandelt e Prisner [2].

Posteriormente, Prisner [26] baseado em resultados de topologia algébrica mostrou que os grafos desmontáveis são clique-convergentes à k_1 .

Teorema 24 (Prisner) *Seja G um grafo desmontável, então G clique-converge à k_1 .*

A demonstração do Teorema 24 encontra-se em [26].

Mas a recíproca do Teorema 24 não é verdadeira, isto é, nem todo grafo clique-convergente à k_1 é desmontável. O grafo P da Figura 4.5, (apresentado no trabalho original de Prisner [26]) é um exemplo de um grafo clique-convergente à k_1 que não é desmontável. Pode-se verificar que P não possui vértices dominados, logo não é um grafo desmontável, mas P clique-converge à k_1 , pois $K^7(P) \cong k_1$.

Finalmente, resumizamos na Figura 4.5, as relações de inclusão existentes encontradas entre as diversas classes de grafos que são clique-convergentes à k_1 .

Observe, primeiro, que todo grafo cordal é desmontável, tal como mostra o Lema 28.

Lema 28 *Todo grafo cordal G é desmontável.*

Demonstração : Seja G um grafo cordal conexo, sabe-se que G admite uma ordenação $u_1, \dots, u_n$ de seus vértices tal que para $i < n$, o vértice $\{u_i\}$ é simplicial em $G \setminus \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$. Porém, um vértice simplicial $\{u_i\}$ em $G \setminus \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ é um vértice dominado em $G \setminus \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$. Logo, G é grafo desmontável. $\square$

Como consequência do Lema 28 e Teorema 24, segue diretamente que todo grafo cordal é clique-convergente à k_1 . Note-se também que um grafo cordal G , não é necessariamente um grafo Helly (a pirâmide é um exemplo).

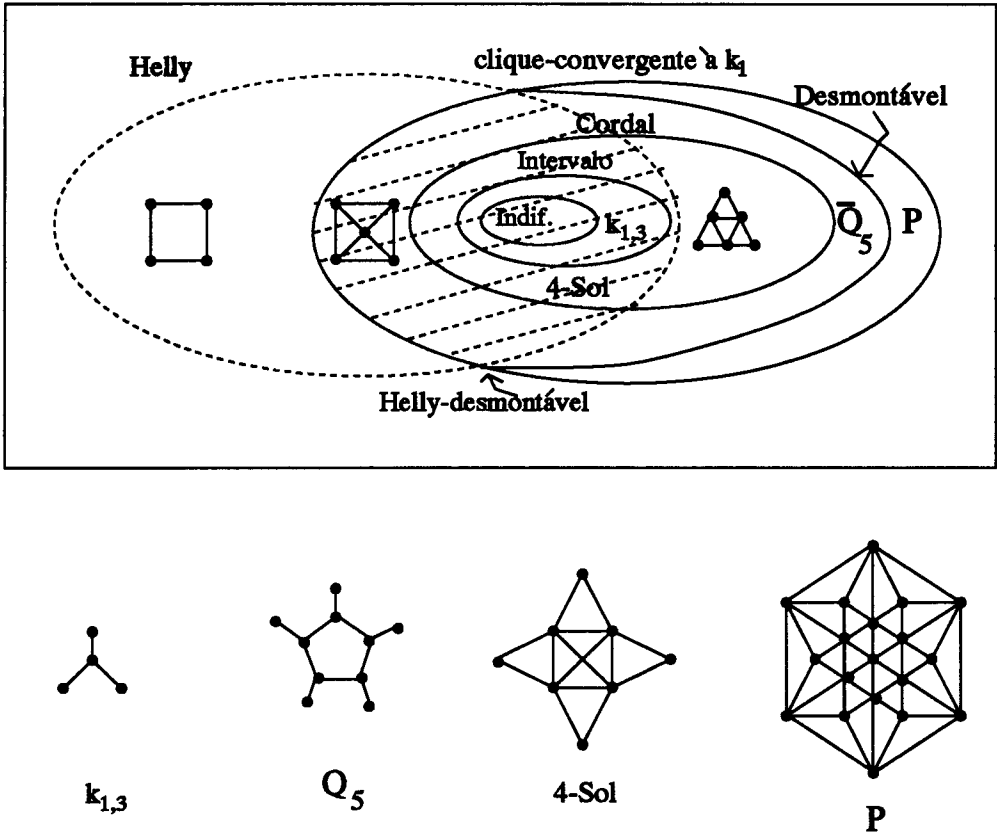


Figura 4.5: Relação de inclusão entre classes clique-convergentes à k_1 .

Capítulo 5

Classes de Grafos Clique-Divergentes

Neste capítulo apresenta-se duas classes de grafos que são clique-divergentes, estudadas por Neumann-Lara [22]. Muito pouco é conhecido a respeito desta classe de grafos. Pelo que sabemos as duas únicas classes clique-divergentes conhecidas são o n -octahedrom O_n , para $n > 2$ e os complementos dos ciclos c_n , para $n \geq 8$.

Um grafo G é dito **clique-divergente** se $|V(K^i(G))| \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$.

O primeiro exemplo que apresentamos de um grafo clique-divergente, é o n -**octahedrom** O_n para $n > 2$, sendo :

$$O_n = \underbrace{k_2, \dots, 2}_n$$

Escalante em [7], mostra que $K(O_n) = O_{2n-1}$. A Figura 5.1, mostra o grafo $O_3 = k_{2,2,2}$ e seu grafo clique. Observe que $K(O_3) = O_4$, e que $|V(K^i(O_3))| \rightarrow \infty$, conforme $i \rightarrow \infty$.

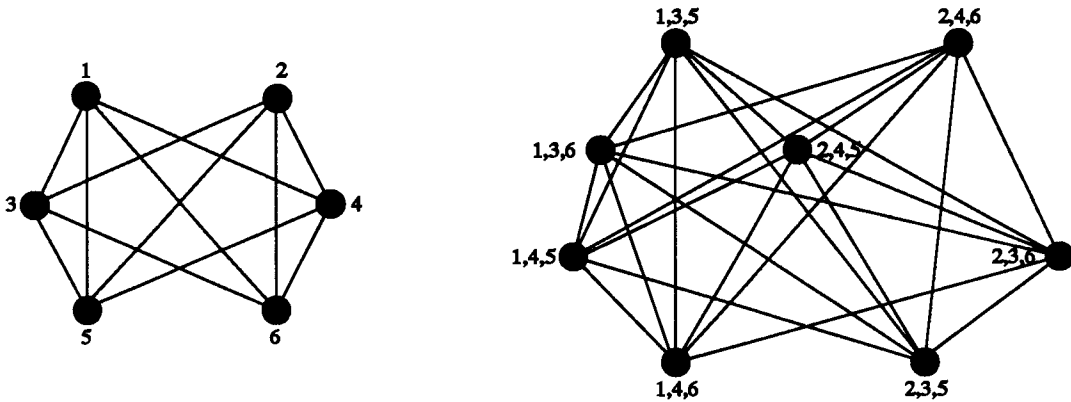


Figura 5.1: O grafo O_3 e seu grafo clique $K(O_3) = O_4$.

Antes de apresentar os resultados de Neumann sobre a clique-divergência é necessário retomar algumas das propriedades do operador clique K (seção 1.3), assim como conhecer algumas definições prévias.

Com o propósito de simplificar a escrita do complemento do grafo clique de um grafo G , escrevemos $\overline{K}(G)$ em vez de $\overline{K(G)}$.

É muito conveniente poder expressar a estrutura de um determinado grafo em termos de grafos simples e pequenos. O grafo n_r -partido completo $k_{n_1, \dots, n_r}$ pode ser expresso como a combinação iterada : $\overline{k_{n_1}} + \overline{k_{n_2}} + \dots + \overline{k_{n_r}}$. Assim :

$$\underbrace{k_2, \dots, 2}_n = \overline{nk_2} = O_n.$$

A propriedade (2), (seção 1.3), implica que o produto normal de dois grafos G_1 e G_2 , é clique-divergente se e somente se, G_1 ou G_2 é clique-divergente. Suponha que só G_1 é clique-divergente, desde que $|V(K^i(G_1 \cdot G_2))| = |V(K^i(G_1))| \cdot |V(K^i(G_2))|$, e devido a que $|V(K^i(G_1))| \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$, segue que $|V(K^i(G_1 \cdot G_2))| \rightarrow \infty$, conforme $i \rightarrow \infty$, e portanto clique-divergência de $G_1 \cdot G_2$.

A propriedade (3), (seção 1.3) constitui uma ferramenta muito útil no estudo da clique-divergência.

5.1 Teorema da Retração

A mais importante ferramenta no estudo da clique-divergência é o **Teorema da Retração**.

Um homomorfismo $f : G_1 \rightarrow G_2$ é chamado uma **retração**, se existe um homomorfismo g de G_2 em G_1 tal que $fg = I$, onde I indica a identidade em G_2 . Se diz que G_2 é um **retrato** de G_1 , se existe uma retração de G_1 sobre G_2 .

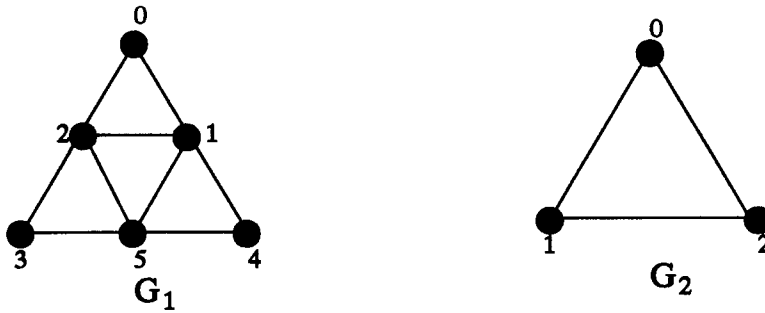


Figura 5.2: G_2 é o retrato de G_1 .

A figura 5.2 mostra que o grafo G_2 é um retrato de G_1 . A função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, definida por $f(i) = \lfloor i/2 \rfloor$, para todo $i = 0, \dots, 5$, é uma retração de G_1 sobre G_2 . $\lfloor x \rfloor$ indica o maior inteiro, menor igual a x .

O Teorema da retração é uma consequência direta do Lema 29.

Lema 29 (Neumann [22]) Se $f : G_1 \rightarrow G_2$ é uma retração, então existe uma retração $\tilde{f} : K(G_1) \rightarrow K(G_2)$.

Teorema 25 (Teorema da Retração) *Se $f : G_1 \rightarrow G_2$ é uma retração, e G_2 é clique-divergente, assim também o é G_1 .*

Demonstração : Pelo Lema 29, existem retrações $\tilde{f}_i : K^i(G_1) \rightarrow K^i(G_2)$, para $i = 1, 2, \dots$, e estas são sobrejeções. Portanto $|V(K^i(G_1))| \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$, logo G_1 é clique-divergente. $\square$

Uma outra forma de expressar o Teorema da retração é : “ Se o grafo G_1 possui um retrato G_2 clique-divergente, logo G_1 é clique-divergente ”.

Apresenta-se a seguir algumas das aplicações do teorema da retração :

Corolário 4 (Neumann [22]) $k_{n_1, \dots, n_r}$ é clique-divergente para $r > 2$ e $n_1, \dots, n_r > 1$.

Demonstração : A demonstração é direta. Existe uma retração f de :

$$f : k_{n_1, \dots, n_r} \rightarrow \underbrace{k_2, \dots, 2}_r = O_r.$$

Desde que O_r é clique-divergente, logo pelo Teorema 25, $k_{n_1, \dots, n_r}$, ($r > 2$ e $n_1, \dots, n_r > 1$) é clique-divergente. $\square$

Corolário 5 (Neumann [22]) *Seja G um grafo e G_1, G_2 dois subgrafos de G cuja união é G , e cuja interseção é um grafo completo. Se G_1 é clique-divergente, então G é clique-divergente.*

Demonstração : Defina o homomorfismo $f : V(G) \rightarrow V(G_1)$, da seguinte maneira : $f|_{V(G_1)}$ (f restrito a $V(G_1)$) = identidade em $V(G_1)$, e para vértices x de $V(G) \setminus V(G_1)$, $f(x)$ é qualquer vértice de $V(G_1) \cap V(G_2)$. f assim definido é uma retração de G sobre G_1 .

Desde que G_1 é clique-divergente, pelo Teorema 25, G é clique-divergente. $\square$

É fácil de conferir que os complementos dos ciclos c_n não clique-divergem para $n \leq 7$. No capítulo 4, mostramos que tanto $\overline{c_5}$ como $\overline{c_6}$ são grafos clique-convergentes com períodos de convergência 1 e 2 respectivamente; o grafo $\overline{c_7}$ é também clique-convergente com período igual a 2.

O Teorema 25, permite mostrar que $\overline{c_8}$ é clique-divergente.

Corolário 6 (Neumann [22]) $\overline{c_8}$ é clique-divergente.

Demonstração : Tem-se que $K(\overline{c_8}) = \overline{k_2} + \overline{R}$, onde R é o grafo mostrado na Figura 5.3. A função $f : V(\overline{R}) \rightarrow V(O_2)$ (onde $V(\overline{R}) = \{0, 1, \dots, 7\}$ e $V(O_2) = \{0, 2, 4, 6\}$), definida por $f(i) = i$ se $i = 0, 2, 4, 6$, e $f(i) = i + 3 \pmod{8}$ se $i = 1, 3, 5, 7$, é uma retração de $\overline{R}$ sobre O_2 . Agora como $\overline{k_2} + O_2 = O_3$, logo $K(\overline{c_8})$ têm O_3 como retrato, e pelo Teorema 25, $K(\overline{c_8})$ é clique-divergente, e assim também o é $\overline{c_8}$. $\square$

Lema 30 (Neumann [22]) *Seja G é um grafo conexo, então existe um grafo H , tal que $K(\overline{k_2} \times G) = \overline{k_2} + H$.*

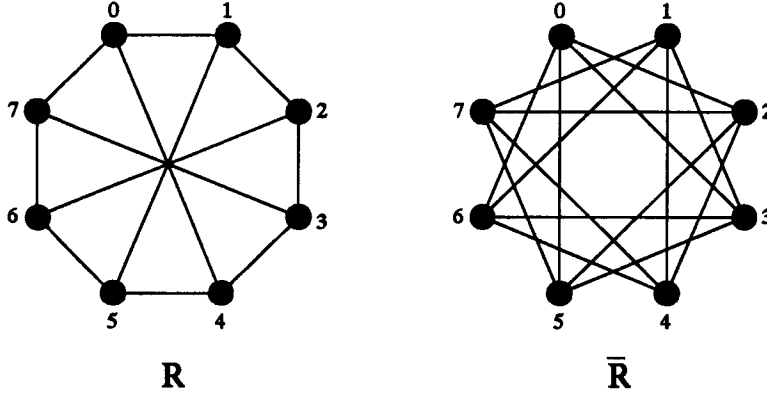


Figura 5.3: Ilustração da demonstração do corolário 6.

5.2 Automorfismo Coafim

Um **automorfismo** f num grafo G é um isomorfismo do grafo sobre ele mesmo. Se diz que f é um **automorfismo afim** se $(v, f(v)) \in A(G)$, para todo $v \in V(G)$. Contrariamente f é um **automorfismo coafim** se este é um automorfismo afim de $\overline{G}$, i.e. se para todo $v \in V(G) : (i) v \neq f(v)$, e $(ii) (v, f(v)) \notin A(G)$.

A Figura 5.4, mostra dois grafos e seus respectivos automorfismos. O primeiro grafo apresenta um automorfismo afim f , enquanto o segundo apresenta um automorfismo coafim g .

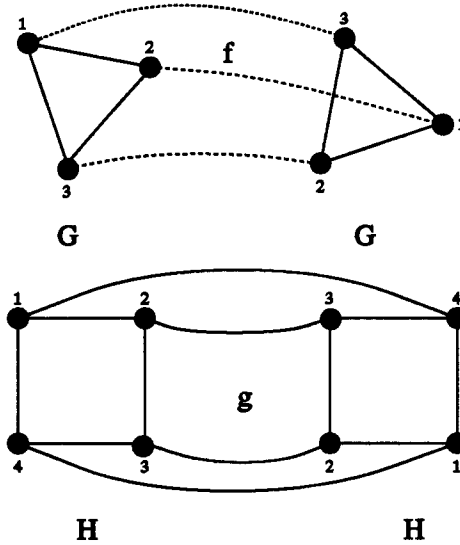


Figura 5.4: Automorfismos afim e coafim.

Teorema 26 (Neumann [22]) $O_m + G$ é clique-divergente, se $m \geq 2$ e G têm um automorfismo coafim. Além disso $K^2(O_m + G) = O_{2^{2^m-1}-1} + H$, para algum grafo H o qual também possui um automorfismo coafim.

Demonstração : Pela propriedade (3) (subseção 1.3),

$$\begin{aligned}\overline{K}(O_m + G) &= \overline{K}(O_m) \times \overline{K}(G) \\ &= \overline{O_{2^{m-1}}} \times \overline{K}(G) = (2^{m-1}k_2) \times \overline{K}(G)\end{aligned}$$

Portanto,

$$K(O_m + G) = \sum_1^{2^{m-1}} k_2 \times \overline{K}(G)$$

Pela propriedade (3),

$$\overline{KK}(O_m + G) = \overline{K}\left(\sum_1^{2^{m-1}} k_2 \times \overline{K}(G)\right) = \prod_1^{2^{m-1}} \overline{K}(k_2 \times \overline{K}(G))$$

Pelo Lema 30, e desde que $\overline{K}(G)$ possui um automorfismo afim segue que :

$$\begin{aligned}\overline{K^2}(O_m + G) &= \prod_1^{2^{m-1}} (k_2 \cup \overline{L}) = \underbrace{(k_2 \times \dots \times k_2)}_{2^{m-1}} \cup H_1 \\ &= (2^{2^{m-1}-1}k_2) \cup H_1\end{aligned}$$

para algum H_1 . Daqui obtemos :

$$K^2(O_m + G) = O_{2^{2^{m-1}-1}} + H.$$

Desde que $O_{2^{2^{m-1}-1}} + H$ possui um automorfismo coafim, H possui também um automorfismo coafim.

Se $m > 2$, a clique-divergência de $O_m + G$ segue imediatamente. $\square$

Os Teoremas 25 e 26, permitem mostrar que $\overline{c_{6m}}$ é clique-divergente para $m \geq 2$.

Corolario 7 (Neumann [22]) $\overline{c_{6m}}$ é clique-divergente para $m \geq 2$.

Demonstração : $K(\overline{c_{6m}}) = \overline{k_2} + \overline{k_3} + G$, para $m \geq 2$, onde G é um grafo não nulo o qual possui um automorfismo coafim. Portanto $K(\overline{c_{6m}})$ têm $\overline{k_2} + \overline{k_3} + G = O_2 + G$ como retrato, e pelos Teoremas 25 e 26, $K(\overline{c_{6m}})$ é clique-divergente, e assim também o é $\overline{c_{6m}}$. $\square$

Para ilustrar a demonstração do corolario 7, consideramos o ciclo c_{12} tal como mostra a Figura 5.5, e procuramos os conjuntos independentes maximais, estes conjuntos serão os vértices em $K(\overline{c_{12}})$.

Assim temos que os conjuntos independentes de tamanho 6 são : $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, e $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; os de tamanho 4 são : $C = \{0, 3, 6, 9\}$, $D = \{1, 4, 7, 10\}$, e $E = \{2, 5, 8, 11\}$. Observe que os conjuntos independentes A e B possuem vértices em comum com os conjuntos independentes C , D , e E , assim estes formam $\overline{k_2} + \overline{k_3}$ em $K(\overline{c_{12}})$.

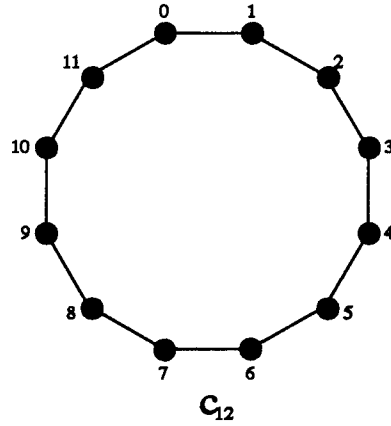


Figura 5.5: Ilustração da demonstração do corolário 7.

Note-se que todo conjunto independente de tamanho 5 em c_{12} intersecta A, B, C, D, E . Assim $K(\overline{c_{12}}) = \overline{k_2} + \overline{k_3} + G$. É fácil de verificar que o grafo G apresenta um automorfismo coafim.

Num trabalho posterior ([23]), Neumann mostra que $\overline{c_n}$ é clique-divergente para $n \geq 8$.

O conceito de retrato pode ser aplicado para verificar se certos grafos clique-convergem à k_1 . De fato, sabemos que se G_2 é o retrato de G_1 , então $K(G_2)$ é o retrato de $K(G_1)$, (Lema 29). Então, se G_1 clique-converge à k_1 , e desde que todo retrato de k_1 é k_1 , tem-se que G_2 clique-converge à k_1 .

Capítulo 6

Diâmetros de Grafos Clique-Iterados

Neste capítulo apresenta-se dois estudos referentes aos diâmetros de **grafos clique-iterados**.

Hedman, em [14], foi quem primeiro estudou a relação entre o diâmetro de um grafo G e de seu grafo clique $K(G)$. Ele mostrou que para qualquer grafo conexo G , tem-se :

$$\text{diam}(G) - i \leq \text{diam}(K^i(G)) \leq \text{diam}(G) + i$$

onde $\text{diam}(G)$ denota o diâmetro de G . Neste mesmo artigo, Hedman exibiu grafos satisfazendo a igualdade $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G) + 1$. Foi, também, Hedman [12] quem formulou a questão sobre a existência de um grafo G onde $\text{diam}(K^2(G)) = \text{diam}(G) + 2$.

Nosso primeiro estudo corresponde ao trabalho realizado por Balakrishnan e Paulraja [1], que caracterizaram os grafos G_1, G_2, G_3 para os quais, tem-se que :

$$\text{diam}(K(G_1)) = \text{diam}(G_1) + 1$$

$$\text{diam}(K(G_2)) = \text{diam}(G_2)$$

$$\text{diam}(K(G_3)) = \text{diam}(G_3) - 1$$

O segundo estudo corresponde ao trabalho realizado por Peyrat, Rall e Slater [24], que vão mais além da questão formulada por Hedman e analisam o problema da existência de um grafo G cujo i -ésimo grafo clique iterado têm diâmetro igual ao diâmetro de G mais i , e mostram duas construções onde, para adequadas escolhas do grafo G , constroem o grafo H tal que $\text{diam}(K^2(H)) = \text{diam}(H) + 2$, respondendo assim afirmativamente a questão de Hedman sobre a existência de tais grafos.

6.1 Caracterizações

Balakrishnan e Paulraja [1], caracterizaram os grafos para os quais o diâmetro do grafo clique de um grafo G difere do diâmetro de G de no máximo uma unidade.

Duas cliques A e B são chamadas **cliques diametrais**, se existir um caminho de comprimento mínimo P de u a v , onde $u \in A$ e $v \in B$, tais que $\text{diam}(G) = d(u, v)$. O caminho P é chamado **caminho diametral**.

Duas cliques diametrais A e B de G podem ser classificadas :

1. de *tipo 1*, se $d(u, v) = \text{diam}(G)$, para cada par de vértices $u \in A$ e $v \in B$.
2. de *tipo 2*, se existir um caminho diametral P que contém exatamente uma aresta de A ou B , e todos os demais caminhos diametrais (se existirem) entre A e B contém no máximo uma aresta de A ou de B .
3. de *tipo 3*, se existir um caminho diametral P que contém uma aresta extrema em A e a outra em B .

Teorema 27 (Balakrishnan e Paulraja [1]) *Seja G um grafo conexo. Então $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G) + 1$ se e somente se existir um par de cliques diametrais de tipo 1 em G .*

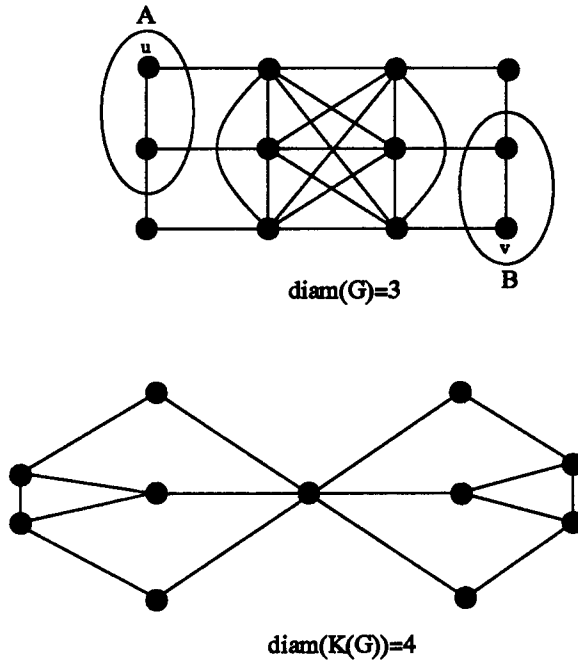


Figura 6.1: Grafo clique com diâmetro crescente.

Demonstração : $\Leftarrow$ Sejam A e B cliques diametrais de *tipo 1* em G . Logo $d(u, v) = \text{diam}(G)$ para cada par de vértices $u \in A$ e $v \in B$ em G . Seja P um caminho diametral entre A e B em G . P tem $\text{diam}(G)$ arestas, e duas arestas de P não pertencem a uma mesma clique. Mais ainda, nenhuma das arestas extremas de P podem estar em A ou em B . Sejam $e_1, e_2, \dots, e_{\text{diam}(G)}$ as arestas de P e sejam $C_1, C_2, \dots, C_{\text{diam}(G)}$ as cliques de G contendo as arestas na ordem mencionada. Logo, usando a mesma notação para uma clique em G e para um vértice em $K(G)$, $A C_1 C_2 \dots C_{\text{diam}(G)} B$ é um caminho mínimo de A a B em $K(G)$. Logo, $d(A, B) = \text{diam}(G) + 1$ em $K(G)$.

$\Rightarrow$ Seja $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G) + 1$. Sejam A e B as duas cliques em G que correspondem aos vértices extremos do caminho diametral $A C_1 C_2 \dots C_{\text{diam}(G)} B$ em $K(G)$. Suponha que existe um par de vértices $u \in A$ e $v \in B$ tais que $d(u, v) \neq \text{diam}(G)$ em G . Seja $d(u, v) = t < \text{diam}(G)$. Logo $d(A, B) \leq t + 1 \leq \text{diam}(G)$ em $K(G)$ o que é uma contradição. $\square$

Teorema 28 (Balakrishnan e Paulraja [1]) *Seja G um grafo conexo. Então $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G)$ se e somente se :*

1. *existem cliques diametraes A e B do tipo 2, e*
2. *não existem pares de cliques diametraes C e D do tipo 1.*

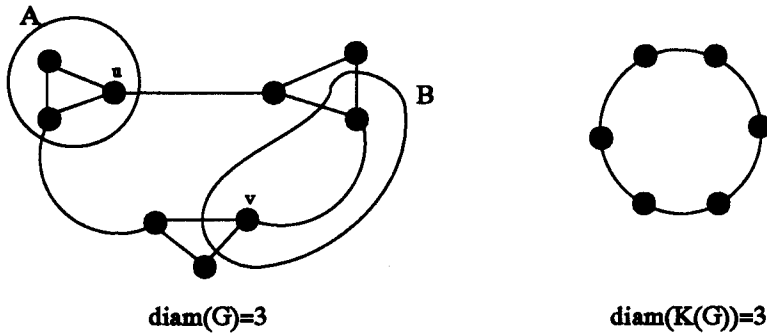


Figura 6.2: Grafo clique com diâmetro constante.

Teorema 29 (Balakrishnan e Paulraja [1]) *Seja G um grafo conexo. Então $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G) - 1$ se e somente se cada par de cliques diametraes A e B de G são do tipo 3.*

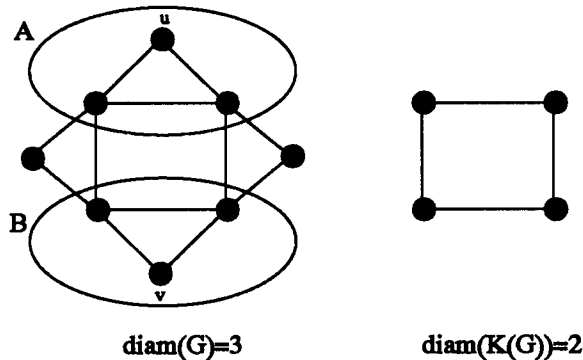


Figura 6.3: Grafo clique com diâmetro não-crescente.

A relação entre os diâmetros do i -ésimo grafo clique iterado de G e o grafo G , encontrada por Hedman, pode ser facilmente deduzida dos Teoremas 27, 28 e 29.

Corolário 8 (Hedman [14]) Para qualquer grafo conexo G ,

$$\text{diam}(G) - i \leq \text{diam}(K^i(G)) \leq \text{diam}(G) + i.$$

Demonstração : Por indução em i . **base** $i = 1$ a relação abaixo é válida pelos Teoremas 27, 28 e 29 :

$$\text{diam}(G) - 1 \leq \text{diam}(K(G)) \leq \text{diam}(G) + 1$$

H.I: Suponha que a expressão é válida para $i \geq 1$, isto é,

$$\text{diam}(G) - i \leq \text{diam}(K^i(G)) \leq \text{diam}(G) + i.$$

Mostremos que a expressão é válida para $i + 1$. Pela definição de grafo clique-iterado $K^{i+1}(G) = K(K^i(G))$. Seja $H = K^i(G)$, logo $K^{i+1}(G) = K(H)$, assim :

$$\text{diam}(K^{i+1}(G)) = \text{diam}(K(K^i(G))) = \text{diam}(K(H)).$$

Por hipótese de indução : $\text{diam}(H) - 1 \leq \text{diam}(K(H)) \leq \text{diam}(H) + 1$. Portanto, $\text{diam}(G) - i - 1 \leq \text{diam}(K^{i+1}(G)) \leq \text{diam}(G) + i + 1$. $\square$

As Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 ilustram os Teoremas 27, 28 e 29, respectivamente. As cliques A e B em cada figura são cliques diametraes, pois pode ser verificada a existência de caminhos diametraes P de u a v , para os quais $d(u, v) = \text{diam}(G)$, onde $u \in A$ e $v \in B$.

É interessante notar que as caracterizações dos Teoremas 27, 28 e 29 diretamente não originam algoritmos polinomiais para o reconhecimento dessas classes. Até aonde vai nosso conhecimento esse problema permanece aberto.

Dizemos, que os diâmetros dos grafos clique-iterados de um grafo G são crescentes (constantes, não-crescentes) se a sequência dos diâmetros é crescente (constantes, não-crescentes).

6.2 Diâmetros Crescentes

Nesta seção mostramos duas construções de grafos que, para adequadas escolhas de G , produzem grafos H para o qual tem-se que $\text{diam}(K^2(H)) = \text{diam}(H) + 2$, assim respondendo afirmativamente a questão de Hedman. (A Figura 6.4 ilustra essas construções.)

Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Considere duas cópias disjuntas G' e G'' de G e o grafo completo k_{2n} . Construa $H_1(G)$ tal que $V(H_1(G)) = V(G') \cup V(k_{2n}) \cup V(G'')$, e $A(H_1(G))$ é formado pelas arestas de um emparelhamento entre k_{2n} e $G' \cup G''$, além das arestas de G' , G'' e k_{2n} . Logo $|V(H_1(G))| = 4n$ e $|A(H_1(G))| = 2n + 2m + \binom{2n}{2}$. (Veja Figura 6.4 (a).)

Para a segunda construção, considere quatro cópias disjuntas G_1, G_2, G_3, G_4 de G , e dois vértices v_1, v_2 , não pertencente a $V(G)$. Construa $H_2(G)$ tal que :

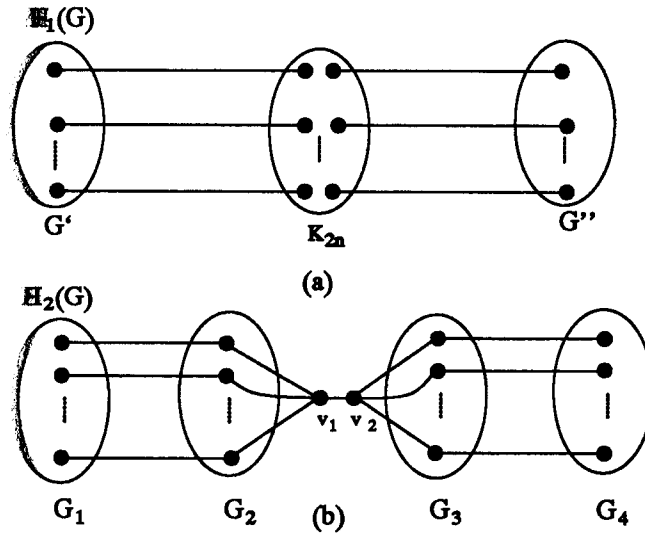


Figura 6.4: Construções dos Grafos $H_1(G)$ e $H_2(G)$.

$$V(H_2(G)) = \bigcup_{i=1}^4 V(G_i) \cup \{v_1, v_2\},$$

e $A(H_2(G)) = \bigcup_{i=1}^4 A(G_i) \cup \{(v_{1i}, v_{2i}), i = 1, \dots, n, v_{1i} \in V(G_1) \text{ e } v_{2i} \in V(G_2)\} \cup \{(v_{3i}, v_{4i}), i = 1, \dots, n, v_{3i} \in V(G_3) \text{ e } v_{4i} \in V(G_4)\} \cup \{(v, v_1), v \in V(G_2)\} \cup \{(v_2, v), v \in V(G_3)\} \cup \{(v_1, v_2)\}$. Logo, $|V(H_2(G))| = 4n + 2$ e $|A(H_2(G))| = 4n + 4m + 1$. (Veja Figura 6.4 (b).)

Note que o $\text{diam}(H_1(G)) = 3$ e $\text{diam}(H_2(G)) = 5$ para $n \geq 1$.

Os grafos G_1 e G_2 da Figura 6.5, são exemplos de escolhas adequadas para as construções de $H_1(G)$ e $H_2(G)$. Posteriormente estes grafos serão definidos.

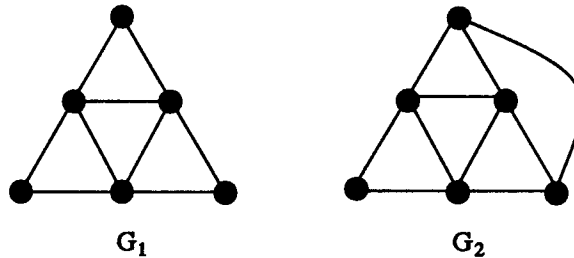


Figura 6.5: Grafos adequados para a construção de $H_1(G)$ e $H_2(G)$.

A Figura 6.6 mostra a construção de $H_1(G_1)$. (Apenas algumas arestas de k_{12} estão desenhadas.) Note a existência das cliques diametraes A e B onde $d(u, v) = \text{diam}(H_1(G_1)) = 3$, para todo $u \in A$ e $v \in B$. Logo estas cliques correspondem a cliques diametraes de tipo 1, e pelo Teorema 27, deduz-se que $\text{diam}(K(H_1(G_1))) = \text{diam}(H_1(G_1)) + 1 = 3 + 1 = 4$.

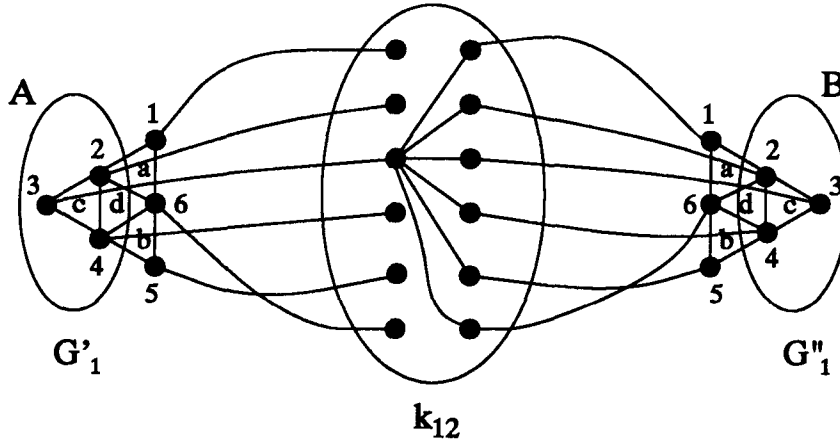


Figura 6.6: Construção de $H_1(G_1)$.

Considere, agora, o grafo $K(H_1(G_1))$, tal como mostra a Figura 6.7, (novamente, algumas arestas não estão desenhadas), onde se observa a existência de dois tipos de cliques : as cliques k_4 provenientes da interseção das cliques $\{1,2,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,3,4\}$ e $\{4,5,6\}$ em G_1 ; e as cliques k_2 correspondentes à interseção entre as arestas do emparelhamento, e as cliques de G_1 . Observe que estas cliques são duplicadas (provenientes de G'_1 e G''_1). Note, também, que as cliques k_4 correspondem à cliques diametraais de *tipo 1*, pois $d(u, v) = \text{diam}(K(H_1(G_1)))$ para todo $u \in k_4$ e $v \in k_4$. Logo $K(H_1(G_1))$ satisfaz o Teorema 27, assim $\text{diam}(K^2(H_1(G_1))) = \text{diam}(K(H_1(G_1))) + 1 = \text{diam}(H_1(G_1)) + 2$.

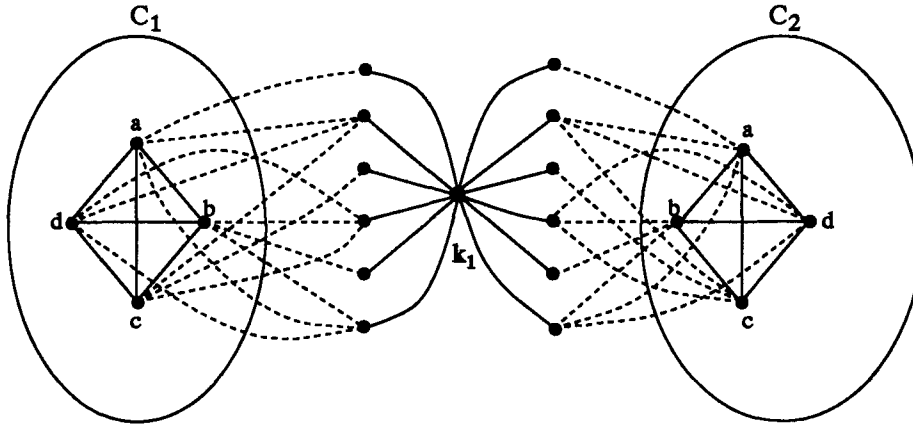


Figura 6.7: O grafo $K(H_1(G_1))$.

O Teorema 30 afirma que os grafos que constituem escolhas adequadas para a construção de $H_1(G)$ e $H_2(G)$ são aqueles cujo conjunto de cliques de G não satisfaz a propriedade Helly.

Teorema 30 (Peyrat, Rall e Slater [24]) *Se o conjunto de cliques de um grafo G não satisfaz a propriedade Helly, então :*

$$1. \text{diam}(K^2(H_1(G))) = \text{diam}(H_1(G)) + 2.$$

$$2. \text{diam}(K^2(H_2(G))) = \text{diam}(H_2(G)) + 2.$$

Demonstração : Seja G um grafo não Helly. Para cada vértice x de G' ou G'' , seja $\bar{x}$ a aresta do emparelhamento unindo x a k_{2n} em $H_1(G)$. Sejam C uma clique em G , e C' e C'' as respectivas cópias de C em G' e G'' .

Logo, os vértices de $K(H_1(G))$ são de três tipos:

1. $\bar{x}$, para cada x em G' e G''
2. C' e C'' para cada C em G , e
3. A , um vértice correspondente a k_{2n}

Desde que G não satisfaz a propriedade Helly, existe uma clique L de $K(G)$, por exemplo $L = \{C_i : 1 \leq i \leq r\}$, tal que em G , a interseção :

$$\bigcap_{i=1}^r C_i = \emptyset.$$

Assim, não existe vértice x em G' ou G'' tal que $\bar{x}$ é adjacente em $K(H_1(G))$ a cada vértice de $L' = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_r\}$ ou a cada vértice de $L'' = \{C''_1, C''_2, \dots, C''_r\}$, isto implica que $d(C'_i, C''_j) = 4$, em $K(H_1(G))$ para cada $i, j = 1, \dots, r$. Pelo Teorema 27, $\text{diam}(K^2(H_1(G))) = \text{diam}(K(H_1(G))) + 1 = \text{diam}(H_1(G)) + 2 = 5$. A demonstração é semelhante para $H_2(G)$.
□

A construção de $H_1(G)$, com grafos adequados G provê exemplos de grafos H com diâmetro três e $\text{diam}(K^2(H)) = 5$.

Para obter grafos H com $d = \text{diam}(H) > 3$, é suficiente substituir cada aresta do emparelhamento entre G' e k_{2n} por um caminho de comprimento $d - 2$, e também obtem-se $\text{diam}(K^2(H)) = \text{diam}(H) + 2$.

Para obter grafos H de diâmetro dois com esta propriedade, construa H como segue: Seja G um grafo adequado de diâmetro 2, tome duas cópias G' e G'' de G e una cada vértice de G' a cada vértice de G'' por um caminho de comprimento dois, forme uma clique com os vértices internos desses caminhos.

Para $i = 3$, Peyrat, Rall e Slater exibiram um grafo G onde $\text{diam}(K^i(H_1(G))) = \text{diam}(H_1(G)) + i$ e comentaram que Peyrat mudando um exemplo proposto por Rall e Slater construiu um grafo G com 150 vértices para o qual $\text{diam}(K^4(H_1(G))) = \text{diam}(H_1(G)) + 4$.

Finalmente, conjecturaram que, para um inteiro positivo fixo i , existe um grafo G , tal que

$$\text{diam}(K^i(G)) = \text{diam}(G) + i.$$

Ferreira, em [8], conjecturou que grafos candidatos prováveis para satisfazer esta igualdade com valores maiores do que $i = 4$ são os grafos **linha iterados** dos grafos completos, que

possuam pelo menos $i + 1$ vértices. Porém ele não conseguiu provar esta conjectura. Alguns experimentos práticos realizados por Ferreira, com o intuito de verificar esta igualdade, com ajuda de computador, não foram bem sucedidos.

Observe que grafos nos quais seus grafos clique-iterados apresentam diâmetros crescentes não implicam grafos clique-divergentes. As Figuras 6.6 e 6.7 ilustram tal afirmação, observe que $|V(H_1(G_1))| = 24$ e $|V(K(H_1(G_1)))| = 21$, não satisfazendo a definição de grafo clique-divergente.

6.3 Diâmetros Constantes

Um grafo G é dito **auto-clique** se $G \cong K(G)$. Os grafos auto-clique são grafos clique-convergentes de período 1.

Um exemplo simples de grafo auto-clique são os ciclos c_n , $n \geq 4$. A Figura 6.8 mostra um grafo auto-clique distinto dos ciclos.

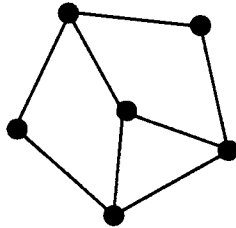


Figura 6.8: Um grafo auto-clique.

A classe dos grafos *auto-clique* constitui um claro exemplo de grafos nos quais os seus grafos clique-iterados apresentam diâmetros constantes. Mas, observe que não é exclusivamente esta classe que apresenta esta característica. A Figura 6.2 ilustra tal afirmação.

6.4 Diâmetros Não-crescentes

As classes de grafos nas quais o índice e diâmetro são iguais são exemplos de grafos cujos grafos clique-iterados apresentam diâmetros não-crescentes.

Algumas classes de grafos estudadas na seção 4.1 possuem diâmetro não-crescente. Na subseção 4.1.1, foi mostrado que um grafo indiferença apresenta essa propriedade. Por exemplo, a sequência correspondente aos diâmetros do grafo da Figura 3.12 é: 3, 2, 1, 0, 0, ..., 0. Esta classe de grafos constitui o primeiro exemplo nos quais os grafos clique-iterados apresentam diâmetros não-crescentes. Outras classes com esta característica são os grafos Helly-desmontáveis e os grafos cordais. Estas classes são classes clique-convergentes à k_1 .

A Figura 6.3 é um exemplo de grafo com diâmetro não-crescente e que não clique-converge à k_1 . Esse grafo clique-converge a c_4 .

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas pesquisas realizadas nos últimos anos referentes a diversos tópicos na classe dos grafos clique.

No capítulo 2, discorremos sobre a complexidade existente no problema do reconhecimento dos grafos clique. A caracterização de Roberts e Spencers [27], diretamente, não conduz a um algoritmo eficiente para o reconhecimento da classe. Desde que o número de cliques de um grafo G é intrinsecamente exponencial, assim também o é o número de subgrafos completos. Portanto a escolha de uma família adequada, entre todas as possíveis famílias de subgrafos completos de G , que permita reconhecer se G é um grafo clique, não pode, diretamente, ser determinada em tempo polinomial.

Uma alternativa a seguir na solução deste problema, consiste em reconhecer subclasses particulares dos grafos clique, por exemplo os grafos Helly. Apresentamos também neste capítulo um dos mais recentes trabalhos de Szwarcfiter [28], nele mostra-se um algoritmo eficiente para o reconhecimento da classe dos grafos Helly, algoritmo que até pouco tempo era inexistente.

Um outro tópico de interesse que forma o capítulo 3, trata do estudo das propriedades dos grafos clique de conhecidas classes de grafos, com especial ênfase naquelas classes de grafos para o qual, dado um grafo G pertencente à classe $\mathcal{G}$, o grafo clique de G pertence à $\mathcal{G}$; mais ainda, o grafo G constitui por sua vez o grafo clique de algum outro grafo H , também pertencente à classe $\mathcal{G}$. Estas classes de grafos foram chamadas de clique-fixas. Existem muitas classes de grafos clique-fixas na literatura.

Algumas das demonstrações deste capítulo são alternativas às já existentes. Tais demonstrações prescindem do uso da teoria dos hipergrafos. Apresentamos também dois trabalhos recentemente publicados (1994), que introduzem duas novas classes de grafos clique-fixas: a classe dos grafos $\mathcal{H}_1$ (Deng e Ling [5]), grafos Helly que satisfazem certa propriedade T_1 ; e os denominados grafos Sigma (Gutierrez [9]), subclasse dos grafos de intervalo próprio. Ilustramos também que nem todas as classes de grafos tratados neste trabalho são, clique-fixas, claros exemplos são a classe dos grafos cordais, e os grafos desmontáveis, etc.

No capítulo 4, compilamos e apresentamos os resultados conhecidos na literatura sobre os grafos clique-convergentes a um vértice (k_1) de forma a tornar mais fácil e claro o estudo

desse tópico. O problema da falta da caracterização nesta classe de grafos ainda persiste, e portanto, continua interessante a procura de condições suficientes para que um grafo clique-convergente convirja a um vértice.

Desde que Bandelt e Prisner [2], tiveram êxito em caracterizar uma classe particular (os grafos Helly-desmontáveis), formula-se o problema da caracterização da classe dos grafos Helly que clique-convergem aos circuitos $\{S(G)\}$ e $\{S(G), K(S(G))\}$, quando $S(G) \neq k_1$.

O capítulo 5, apresenta parte dos trabalhos de Neumann Lara [22] e [23], referentes ao estudo das propriedades dos grafos clique-divergentes. Muito pouco é conhecido a respeito desta classe de grafos. Pelo que sabemos as duas únicas classes clique-divergentes conhecidas são o n -octahedron O_n para $n > 2$ e os complementos dos ciclos de tamanho maiores ou iguais a 8. Uma das poucas ferramentas conhecidas para determinar se um dado grafo clique-diverge é o Teorema da Retração.

Finalmente o capítulo 6, compreende o estudo dos diâmetros de grafos clique-iterados de um grafo G . Abrange-se o caso dos grafos que apresentam diâmetros crescentes, constantes e não-crescentes com a aplicação iterada do operador clique. Não se acredita que existam grafos cujos grafos clique-iterados aumentem indefinidamente de diâmetro (Peyrat, Rall e Slater [24]). No entanto, é possível que, dado um inteiro i finito, existam grafos satisfazendo $\text{diam}(K^i(G)) = \text{diam}(G) + i$. (Szwarcfiter [29].)

Um grafo clique-convergente à k_1 com índice igual ao seu diâmetro é um exemplo de grafo cujos grafos clique-iterados possuem diâmetros não-crescentes. Não conferimos se o grafo P (Figura 4.5) que clique-converge à k_1 , e não possui índice igual ao seu diâmetro, apresenta uma sequência de diâmetros não-crescentes.

Conjeturamos que para os grafos desmontáveis o índice é igual ao diâmetro.

Bibliografia

- [1] R. Balakrishnan and P. Paulraja. Self-clique Graphs and Diameters of Iterated Clique Graphs. *Utilitas Mathematica*, 29:263–268, 1986.
- [2] H-J. Bandelt and E. Prisner. Clique Graphs and Helly Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 51:34–45, 1991.
- [3] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Dunod Université, Paris, 1973.
- [4] Lim Chong-Keang and Peng Yee-Hock. On Graphs without Multicliqual Edges. *Journal of Graph Theory*, 5:443–451, 1981.
- [5] C. L. Deng and C. K. Lim. A Class of Clique-closed Graphs. *Discrete Mathematics*, 127:131–137, 1994.
- [6] J. L. Szwarcfiter e C. de Figueiredo e S. Klein e C. P. de Mello. Ordens Indiferença. *Pesquisa Operacional*, 11(2):43–47, 1991.
- [7] F. Escalante. Über iterierte Clique-Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.
- [8] C. F. Ferreira. *Sobre Grafos Clique Convergentes*. PhD thesis, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1992. In portuguese.
- [9] M. Gutierrez and L. Oubina. Minimum Proper Interval Graphs. *Discrete Mathematics*, 142:77–85, 1995.
- [10] R. C. Hamelink. A Partial Characterization of Cliques Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 5:192–197, 1968.
- [11] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusset, 1969.
- [12] B. Hedman. Open Questions. *Graph Theory Newsletter*, 12, 1983.
- [13] B. Hedman. Clique Graphs of Time Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 37:270–278, 1984.
- [14] B. Hedman. Diameters of Iterated Clique Graphs. *Hadronic Journal*, 9:273–276, 1986.

- [15] E. Howorka. On Metric Properties of certain Clique Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 27:67–74, 1979.
- [16] E. Howorka. A Characterization of Ptolemaic Graphs. *Journal Graph Theory*, 5:323–331, 1981.
- [17] D. C. Kay and G. Chartrand. A Characterization of certain Ptolemaic Graphs. *Canad. J. Math.*, 17:342–346, 1965.
- [18] C. K. Lim. A Result on Iterated Clique Graphs. *J. Austral. Math. Soc. (series A)*, 32:289–294, 1982.
- [19] H. Maehara. On Time Graphs. *Discrete Math.*, 32:281–289, 1980.
- [20] C. P. Mello. *Sobre Grafos Clique-Completo*s. PhD thesis, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1992. In portuguese.
- [21] J. W. Moon and L. Moser. On Cliques in Graphs. *Israel J. Math*, 3:23–28, 1965.
- [22] V. Neumann-Lara. On Clique-Divergent Graphs. *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, 260:313–315, 1978.
- [23] V. Neumann-Lara. Clique Divergence in Graphs. *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 25:563–569, 1981.
- [24] C. Peyrat, D. F. Rall, and P. J. Slater. On Iterated Clique Graphs with Increasing Diameters. *Journal of Graph Theory*, 10:167–171, 1986.
- [25] E. Prisner. Hereditary Clique-Helly Graphs. *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 1991. To appear.
- [26] E. Prisner. Convergence of Iterated Clique Graphs. *Discrete Mathematics*, 103:199–207, 1992.
- [27] F. S. Roberts and J. H. Spencer. A Characterization of Clique Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 10:102–108, 1971.
- [28] J. L. Szwarcfiter. Recognizing Clique-Helly Graphs. Technical report, Laboratoire de Recherche en Informatique-Université de Paris Sud, 1994. *Ars Combinatoria*, to appear.
- [29] J. L. Szwarcfiter. Comunicação pessoal. 1996.