

**Cortes Orientados e Cortes
Ímpares em Grafos**

Jaime Cohen

Cortes Orientados e Cortes Ímpares em Grafos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Jaime Cohen e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de junho de 1995.

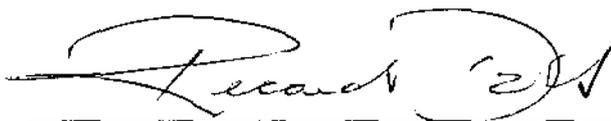


Cláudio L. Lucchesi
Orientador

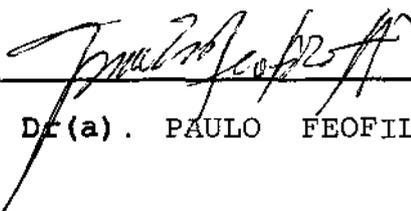
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Tese defendida e aprovada em, 30 de 06 de 1995

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). RICARDO DAHAB



Prof(a). Dr(a). PAULO FEOFILOFF



Prof(a). Dr(a). CLÁUDIO LEONARDO LUCCHESI

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca do IMECC da UNICAMP

Cohen, Jaime

C66c Cortes Orientados e Cortes Ímpares em Grafos / Jaime Cohen – Campinas, [SP : s.n.], 1995.

Orientador: Cláudio Leonardo Lucchesi

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Teoria dos Grafos. 2. Análise Combinatória. I. Lucchesi, Cláudio Leonardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Cortes Orientados e Cortes Ímpares em Grafos¹

Jaime Cohen²

Departamento de Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP

Banca Examinadora:

- Célia P. de Mello (Suplente)³
- Cláudio L. Lucchesi (Orientador)⁴
- Paulo Feofiloff⁵
- Ricardo Dahab⁴

¹Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

²O autor é Bacharel em Informática pela Universidade Federal do Paraná

³Professora do Departamento de Ciência da Computação do IMECC – UNICAMP.

⁴Professor do Departamento de Ciência da Computação do IMECC – UNICAMP.

⁵Professor do Departamento de Ciência da Computação do IME – USP

A José Schichman

Agradecimentos

Esta dissertação é dedicada a José Schichman, uma pessoa brilhante que muito me ensinou e ajudou e a quem eu sou eternamente grato.

A minha “idiche mame” pela paciência de passar milhares de horas ao telefone ouvindo milhares de problemas e por ter resolvido centenas deles.

Ao prof. Lucchesi que é o idealizador desta dissertação. Agradeço pela oportunidade de trabalhar com um tema tão interessante. Agradeço também por todo o incentivo que recebi.

Ao prof. Paulo Feofiloff pelas ótimas sugestões feitas, que permitiram que várias idéias pudessem ser apresentadas com maior clareza nesta versão do trabalho.

Aos professores do DCC, Célia P. de Mello, Cláudia M. Bauzer Medeiros, Heloísa V. da Rocha, João Meidanis, João C. Setubal, Jorge Stolfi, Marcus Vinicius S. P. de Aragão, Ricardo Dahab e Tomasz Kowaltowski pelos excelentes cursos e seminários que deram, pelas conversas, conselhos, cartas de recomendação e pela possibilidade de conviver em um ambiente acadêmico de qualidades evidentes.

Ao Marcelo H. Carvalho, agradeço por ter me ajudado a compreender alguns assuntos complicados, em particular o Teorema de Edmonds-Giles.

Aos amigos Anderson D. Parreira, Antonio Soeiro Cardoso Júnior e Clevan R. da Costa.

Ao CNPq, FAPESP e FAEP.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar igualdades minimax em grafos que envolvem cortes orientados, cortes ímpares e suas coberturas.

A primeira metade da dissertação trata das igualdades que relacionam famílias disjuntas máximas de cortes com as coberturas mínimas dos cortes do grafo. Na segunda parte, os papéis destes problemas são invertidos, isto é, as igualdades relacionam cortes mínimos com famílias disjuntas máximas de coberturas dos cortes.

Mostramos ao longo do trabalho que em muitos casos é possível estabelecer analogias entre resultados para cortes orientados e para cortes ímpares. Estas analogias apresentam-se de duas maneiras: através de enunciados semelhantes e através de demonstrações semelhantes.

Entre os teoremas apresentados na primeira parte do trabalho, destacam-se os Teoremas de Lucchesi-Younger e de Edmonds-Giles para cortes orientados e os de Lovász e de Seymour para cortes ímpares. Também são apresentados teoremas que tratam de circuitos orientados e ímpares em grafos planares, mostrando que a analogia também se estende para outros tipos de problemas.

Na segunda parte estabelecemos relações entre a igualdade minimax dual ao Teorema de Lovász com a generalização de uma famosa conjectura de Fulkerson. Provamos um caso particular desta igualdade. Apresentamos também um resultado para um caso particular da igualdade dual ao Teorema de Lucchesi-Younger que foi provado por Schrijver e independentemente por Feofiloff e Younger.

Abstract

The goal of this dissertation is to unify some results of Graph Theory related to directed cuts, odd cuts and their coverings.

In the first half of this work we show equalities that relate maximum disjoint families of cuts with the minimum coverings of the cuts of the graph. In the second half, we present the duals of those equalities, i. e., they relate minimum cuts with disjoint families of coverings.

Our main purpose is to provide examples that show analogies between results on directed cuts and odd cuts. The analogies are of two types: in the statements of the results and in their proofs.

Among the results presented in the first half, the most important are Lucchesi-Younger and Edmonds-Giles' theorems on directed cuts and Lovász and Seymour's theorems for odd cuts.

In the last part of this work we extend a result by Seymour that relates the dual of Lovász's theorem with a generalization of a famous conjecture due to Fulkerson. We prove a particular case of that equality. We also show an equality for a particular case of the dual of Lucchesi-Younger's theorem which had been proved by Schrijver and independently by Feofiloff and Younger.

Prefácio

O objetivo desta dissertação é explorar algumas semelhanças encontradas em problemas da Teoria dos Grafos que tratam de igualdades minimax que envolvem cortes ímpares, cortes orientados e suas coberturas.

No capítulo 1 apresentamos as definições de grafos, dígrafos e cortes, bem como outras definições importantes. Definimos o conceito de famílias e operações que as envolvem.

O capítulo 2 é uma introdução ao tema de igualdades minimax que contém alguns exemplos clássicos de igualdades. Aproveitamos estes exemplos para ilustrar diversos conceitos importantes. Estes conceitos são úteis no estudo das igualdades específicas que abordamos nos capítulos seguintes. Entre eles estão os conceitos de dualidade e de desigualdades triviais. Também comentamos alguns aspectos sobre a relação entre as igualdades minimax e a existência de algoritmos eficientes para os problemas subjacentes à igualdade. Este último tema pode ser visto como uma motivação para o estudo das igualdades minimax.

O capítulo 3 tem como objetivo estabelecer resultados fundamentais envolvendo famílias de cortes e coberturas dos cortes de um grafo. Na seção 3.1 fazemos uma introdução aos problemas que tratam dos cortes orientados. Na seção 3.2 definimos os T -cortes e T -junções, mostramos suas relações com os cortes ímpares e apresentamos alguns resultados fundamentais sobre as T -junções. A seção 3.3 descreve o procedimento de laminarização que é um meio de obter famílias de cortes que são bem “estruturadas”. A seção 3.4 estabelece dois resultados fundamentais para as demonstrações dos principais teoremas do capítulo 4. O primeiro resultado, chamado de Teorema da Partição, afirma que uma família k -disjunta de cortes orientados pode ser particionada em k famílias disjuntas. O outro resultado é uma generalização do Teorema da Partição e afirma que qualquer família de cortes orientados pode ser particionada em um número arbitrário de famílias que utilizam as arestas do dígrafo de forma balanceada. Na seção 3.5 abordamos o problema da partição de famílias de T -cortes nos grafos bipartidos.

O capítulo 4 apresenta diversas igualdades minimax que relacionam famílias disjuntas máximas de cortes com coberturas mínimas. A seção 4.1 descreve o Método do Elemento Essencial que é um método indutivo que empregamos nas demonstrações das igualdades minimax das seções 4.2, 4.3 e 4.5. Na seção 4.2 provamos o Teorema de Lucchesi-Younger. Na seção 4.3 tratamos dos Teoremas de Lovász e de Seymour para T -cortes.

A seção 4.4 tem como objetivo apresentar o Teorema de Edmonds-Giles para as k -coberturas

dos cortes orientados. Para demonstrá-lo utilizamos as mesmas técnicas das seções anteriores, a saber, a laminarização e a partição de uma família de cortes orientados.

A seção 4.5 traz algumas tentativas de estabelecer resultados análogos ao Teorema de Edmonds-Giles para os T -cortes. Estabelecemos um resultado para o caso $|T| = 2$. Sua importância reside no fato de que k coberturas minimais dos T -cortes correspondem a k caminhos aresta-disjuntos entre os dois vértices de T . Assim, estabelecemos uma igualdade minimax para o problema dos k caminhos aresta-disjuntos entre dois vértices cuja cardinalidade é mínima. Este problema é a generalização mais natural para o clássico problema do caminho mínimo entre dois vértices. Ainda nesta seção, apresentamos uma conjectura para o caso $|T| = 4$. A seção 4.6 descreve as conseqüências dos teoremas das seções 4.2 a 4.6 para problemas que lidam com circuitos em grafos planares.

O capítulo 5 trata das igualdades minimax duais às apresentadas no capítulo 4. Na seção 5.1 estendemos um resultado de Seymour que relaciona uma igualdade minimax para T -cortes mínimos com uma generalização de uma famosa conjectura de Fulkerson. Além disso, provamos que se todos os T -cortes têm a mesma paridade e $|T| \leq 8$, então o número de T -junções disjuntas é igual ao tamanho de um T -corte mínimo.

Na seção 5.2 abordamos o dual do Teorema de Lucchesi-Younger. Mostramos o contra-exemplo de Schrijver que apresenta uma 2-cobertura dos cortes orientados que não contém 2 coberturas disjuntas. Finalmente, apresentamos de forma resumida o resultado provado por A. Schrijver [Sch82] e independentemente por P. Feofiloff e D. H. Younger [FY87] para grafos fonte-sorvedouro conexos.

Resumo esquemático das igualdades minimax apresentadas na dissertação:

Igualdades minimax	Cortes Orientados	Cortes Ímpares
Famílias máximas de cortes = coberturas mínimas	Teorema de Lucchesi-Younger	Teoremas de Lovász e Seymour
Famílias máximas de cortes = k -coberturas mínimas	Teorema de Edmonds-Giles	Análogos ao Teorema de Edmonds-Giles Teorema para $ T = 2$ Conjectura para $ T = 4$
Famílias de circuitos = coberturas mínimas	Circuitos Orientados	Circuitos Ímpares
Famílias de coberturas = cortes mínimos	Conjectura de Edmonds-Giles Teorema de Feofiloff-Younger	Generalização da Conjectura de Fulkerson Teorema para $ T \leq 8$

Conteúdo

Prefácio	viii
1 Definições Preliminares	1
1.1 Grafos, Cortes e Cortes Ímpares	1
1.2 Dígrafos, Cortes e Cortes Orientados	2
1.3 Famílias	3
1.4 Convenções e Notação	5
2 Igualdades Minimax	6
2.1 Alguns Exemplos de Igualdades Minimax	6
2.2 Igualdades Minimax e Algoritmos	9
3 Famílias de Cortes e Coberturas Mínimas dos Cortes	12
3.1 Cortes Orientados e suas Coberturas	12
3.2 T-Cortes e T-junções	13
3.3 Laminarização	19
3.4 Partição de uma Família de Cortes Orientados	24
3.5 Partição de uma Família de T-cortes	28
4 Os Teoremas	32
4.1 O Método do Elemento Essencial	32
4.2 O Teorema de Lucchesi-Younger	35
4.3 Os Teoremas de Lovász e Seymour	36
4.4 O Teorema de Edmonds-Giles	44
4.5 As k -coberturas dos T-cortes	49
4.6 Circuitos Orientados e Circuitos Ímpares em Grafos Planares	53
5 Problemas Duais	57
5.1 Duais para o Teorema de Lovász	57
5.2 Duais para o Teorema de Lucchesi-Younger	64
Conclusão	70
Bibliografia	73
Índice de Definições	74

Capítulo 1

Definições Preliminares

1.1 Grafos, Cortes e Cortes Ímpares

Um *grafo* G é uma dupla (V, E) , onde V é um conjunto finito e E é uma família de pares não ordenados de elementos de V . Os elementos de V são chamados *vértices* e os de E *arestas*. Dada uma aresta $e = \{u, v\} \in E$, diremos que u e v são as *pontas* da aresta e . Uma aresta da forma $\{u, u\}$ é chamada de *laço*.

Um grafo $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dizemos que G' é um *subgrafo induzido* de G se para toda aresta $\{u, v\} \in E$ tal que $u, v \in V'$, $\{u, v\} \in E'$.

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto $X \subseteq V$, $\delta(X)$ denota o conjunto das arestas que possuem uma ponta em X e outra em $V \setminus X$. Um conjunto não vazio de arestas $d \subseteq E$ com a propriedade de que existe um conjunto $X \subseteq V$ tal que $d = \delta(X)$ é chamado um *corte* de G .

Um corte cuja cardinalidade é ímpar é chamado de *corte ímpar*. Um corte $\delta(X)$, $X \subseteq V$, *separa* dois vértices s e t se um de s e t está em X e o outro está em $V \setminus X$. Diremos que um corte d é *trivial* se $d = \delta(\{v\})$ para algum $v \in V$. O *grau* de um vértice v é a cardinalidade de $\delta(\{v\})$.

As seguintes propriedades dos cortes são verdadeiras¹:

1. Para todo $X \subseteq V$, $\delta(X) = \delta(\overline{X})$, onde $\overline{X} = V \setminus X$;
2. Se o grafo é conexo, então $\delta(X) = \delta(Y)$ implica que $X = Y$ ou $X = \overline{Y}$;
3. Se $X, Y \subseteq V$ então $\delta(X \oplus Y) = \delta(X) \oplus \delta(Y)$;

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V' e V'' tais que toda aresta de E possua uma ponta em V' e a outra em V'' .

¹ $X \oplus Y$ é a diferença simétrica entre X e Y , isto é, $X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

Um *caminho* em um grafo $G = (V, E)$ é uma seqüência $P = \langle v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-1}, v_n \rangle$, onde $v_i \in V$ para $0 \leq i \leq n$, $v_i \neq v_j$ se $i \neq j$ e $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $0 \leq i \leq n-1$. Dizemos que o caminho *liga* os vértices v_0 e v_n . Os vértices v_0 e v_n são os *extremos* do caminho e v_1, \dots, v_{n-1} são os vértices *internos* do caminho. O *tamanho* do caminho P é n .

Um grafo é dito *conexo* se para cada par de vértices existir pelo menos um caminho que os tenha como extremos. Dado um grafo G qualquer, os seus subgrafos maximais que são conexos são chamados de *componentes conexos* de G .

1.2 Dígrafos, Cortes e Cortes Orientados

Podemos *orientar* um grafo $G = (V, E)$ associando-se a cada aresta $\{u, v\} \in E$ um par ordenado contendo os vértices u e v . O grafo G munido desta orientação é chamado de *grafo orientado* ou *dígrafo*. O grafo G será chamado de *grafo subjacente* ao dígrafo.

Todos os conceitos definidos para grafos não orientados podem ser estendidos para os dígrafos, aplicando-os aos seus grafos subjacentes. Assim, por exemplo, dizemos que um dígrafo é *conexo* se o seu grafo subjacente for conexo. Entretanto, algumas definições próprias aos dígrafos serão necessárias.

Dado um dígrafo, podemos representar o conjunto de suas arestas e suas orientações por uma família de pares ordenados. Se (u, v) é uma aresta do dígrafo, diremos que sua *orientação* é de u para v . Diremos que u é sua *ponta positiva* e v sua *ponta negativa*. Nas ilustrações, as arestas dos dígrafos serão representadas por uma seta, com o seu início representando a ponta positiva e seu fim representando a ponta negativa.

Um caminho $\langle v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-1}, v_n \rangle$ é dito *orientado* se para todo i , $0 \leq i \leq n-1$, v_i e v_{i+1} são as pontas positiva e negativa de e_i , respectivamente. Dizemos que o caminho orientado *começa* em v_0 e *termina* em v_n .

Um dígrafo é dito *fortemente conexo* se para cada par orientado de vértices (u, v) existir um caminho orientado que começa em u e termina em v .

Assim como definido para os grafos, se $X \subseteq V$ então $\delta(X)$ denota o conjunto das arestas que possuem uma ponta em X e a outra em $V \setminus X$. Denota-se por $\delta^+(X)$ o conjunto das arestas de $\delta(X)$ que possuem a ponta positiva em X , isto é, as arestas que “saem” de X e por $\delta^-(X)$ o conjunto $\delta(X) - \delta^+(X)$, ou seja, as arestas que “entram” em X .

Um *corte orientado* é um corte $d \subseteq E$ tal que $d = \delta(X)$, $X \subseteq V$, e $\delta^-(X) = \emptyset$ ou $\delta^+(X) = \emptyset$. Um vértice v tal que $\delta(\{v\})$ é um corte orientado com $\delta^-(X) = \emptyset$ é chamado uma *fonte* e se $\delta^+(X) = \emptyset$ então ele é chamado de *sorvedouro*.

Ao definirmos um corte por $\delta(X)$, diremos que X é a *margem* usada na definição do corte. A seguinte propriedade sobre cortes orientados é verdadeira:

Para qualquer dígrafo e para qualquer corte orientado $d \neq \emptyset$, só existe um conjunto minimal $X \subseteq V$ tal que $d = \delta(X)$ e $\delta^-(X) = \emptyset$. A mesma propriedade é verdadeira se trocarmos a condição $\delta^-(X) = \emptyset$ por $\delta^+(X) = \emptyset$.

Baseados nesta propriedade, faremos as seguintes importantes definições. Se $d \subseteq E$ é um corte orientado não vazio, então:

$V^+d :=$ o conjunto minimal $X \subseteq V$ tal que $d = \delta(X)$ e $\delta^-(X) = \emptyset$;

$V^-d :=$ o conjunto minimal $X \subseteq V$ tal que $d = \delta(X)$ e $\delta^+(X) = \emptyset$;

Exemplo:

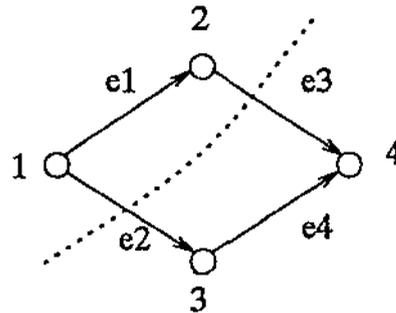


Figura 1.1: $d = \{e_2, e_3\}$, $V^+d = \{1, 2\}$, $V^-d = \{3, 4\}$

Chamaremos o conjunto V^+d de *margem positiva* do corte d e o conjunto V^-d de *margem negativa* do corte d .

1.3 Famílias

Os problemas centrais que serão apresentados ao longo deste trabalho tratam de coleções de certos objetos. Em muitos momentos, a simples noção de conjunto não será suficiente para os nossos propósitos. Estaremos interessados em permitir a existência de objetos repetidos, contá-los separadamente ao computar o tamanho da coleção bem como fazer operações com essas coleções. Por esse motivo, definiremos a seguir o conceito de família que servirá como uma ferramenta indispensável daqui em diante.

Informalmente podemos dizer que uma família é uma coleção de objetos com a possibilidade de haver objetos repetidos. A seguir daremos uma definição formal de família utilizando as noções de conjunto e função.

Uma *família* com base B é uma função $\mathcal{F} : B \rightarrow N$.

Para $x \in B$, diremos que $\mathcal{F}(x)$ é a *multiplicidade* de x em \mathcal{F} . Diremos que um elemento $x \in B$ *pertence* à família \mathcal{F} , e escrevemos $x \in \mathcal{F}$, se $\mathcal{F}(x) > 0$. A *cardinalidade*

ou o *tamanho* de uma família \mathcal{F} com base B é o valor $\sum_{x \in B} \mathcal{F}(x)$ e será denotado por $|\mathcal{F}|$.

Dadas duas famílias \mathcal{F} e \mathcal{F}' com base B , dizemos que \mathcal{F}' é uma *subfamília* de \mathcal{F} se $\mathcal{F}'(x) \leq \mathcal{F}(x)$ para todo $x \in B$.

Famílias Disjuntas

Seja E um conjunto finito e uma família \mathcal{F} com base $B \subseteq 2^E$, isto é, B é um conjunto de subconjuntos de E . Dado um elemento $e \in E$ denotaremos por $\#_{\mathcal{F}}(e)$ o valor $\sum_{x \in \mathcal{F}, e \in x} \mathcal{F}(x)$ e diremos que esse é o número de vezes que o elemento e é usado por \mathcal{F} . Se $e \notin \bigcup_{x \in \mathcal{F}} x$ então $\#_{\mathcal{F}}(e) = 0$.

Exemplo: Suponha que E é o conjunto de arestas de um grafo e que B é um conjunto de cortes do grafo. Então em uma família \mathcal{F} cuja base é B , o valor $\#_{\mathcal{F}}(e)$ representa o número de cortes da família que contêm a aresta e .

Uma família é *disjunta* (em relação a E) se $\#_{\mathcal{F}}(e) \leq 1$ para todo elemento $e \in E$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, diremos que uma família é *k-disjunta* (em relação a E) se $\#_{\mathcal{F}}(e) \leq k$ para todo elemento $e \in E$. De forma mais genérica, dada uma função $f : E \rightarrow \mathbb{N}$, diremos que \mathcal{F} é *f-disjunta* se $\#_{\mathcal{F}}(e) \leq f(e)$ para todo elemento $e \in E$.

Operações com Famílias

Dadas duas famílias \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 com base B , as operações serão assim definidas:

nome da operação	notação	definição
adição	$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2(x), \forall x, x \in B$
subtração	$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}(x) := \max\{0, \mathcal{F}_1(x) - \mathcal{F}_2(x)\}, \forall x, x \in B$
produto por escalar	$\mathcal{F} = k \cdot \mathcal{F}_1, k \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(x) := k \cdot \mathcal{F}_1(x), \forall x, x \in B$
restrição	$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 X, X \subseteq B$	$\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_1(x), \text{ se } x \in X$ $\mathcal{F}(x) := 0, \text{ se } x \in B \setminus X$

Nota 1: As operações definidas acima só se aplicam a famílias com a mesma base. Além disso, a família resultante possui a mesma base das famílias operadas.

Nota 2: Sempre que o conjunto base B estiver subentendido e dado $d \in B$, denotaremos por $k \cdot d$ a família $\mathcal{F} : B \rightarrow \mathbb{N}$, com $\mathcal{F}(d) = k$ e $\mathcal{F}(x) = 0$, para todo $x \in B \setminus \{d\}$. Ainda, quando não houver ambigüidade, denotaremos a família $1 \cdot d$ simplesmente por d .

1.4 Convenções e Notação

Usaremos os seguintes símbolos:

u, v, x, y : para denotar vértices;
 $e, e_1, e_2, e', e'', \dots$: para denotar arestas
 X, Y, W : para denotar conjuntos (de vértices);
 $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$: para denotar famílias;
 k, r, m : para denotar constantes;

Teoria dos Conjuntos:

$:=$: igual por definição;
 N : conjunto dos números naturais incluindo o 0;
 $N_{<k}$: o conjunto $\{0, 1, \dots, k-1\}$;
 Z : conjunto dos números inteiros;
 $A \cup B$: união dos conjuntos A e B ;
 $A \cap B$: intersecção dos conjuntos A e B ;
 $A \setminus B$: o conjunto dos elementos de A que não estão em B ;
 $A \oplus B$: diferença simétrica de A e B , ou seja, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 $A \subseteq B$: A é subconjunto de B ;
 $A \subset B$: A é subconjunto de B e A é diferente de B ;
 $a \equiv b \pmod{x}$: $a - b = k \cdot x$, para algum $k \in Z$.

Teoria dos Grafos:

$d(v)$: o grau do vértice v ;
 $Adj(v)$: o conjunto dos vértices adjacentes ao vértice v ;
 $\delta(X)$: se $X \subseteq V$ então $\delta(X)$ são as arestas com uma ponta em X e a outra em $V \setminus X$;
 $\delta(v)$: denota o mesmo que $\delta(\{v\})$;
 $\delta_t(X)$: denota $\delta(X) \cap t$;

Nota: Utilizamos o símbolo “:=” nas definições de todos os conceitos que necessitaram de um símbolo para igualdade por definição. Para tornar o texto menos carregado utilizamos “:=” na definição de símbolos apenas quando achamos isto necessário para uma correta leitura do texto.

Capítulo 2

Igualdades Minimax

Igualdades minimax são pares de problemas de otimização combinatória em que um deles objetiva minimizar alguma função e o outro objetiva maximizar outra função e tais que ambos possuem soluções ótimas de mesmo valor. Os problemas que serão abordados na dissertação são enunciados como igualdades minimax. Esta seção constitui uma pequena introdução ao tema.

Igualdades minimax são freqüentes em otimização combinatória. Elas nos fornecem conhecimentos importantes sobre a estrutura dos problemas e além disso nos indicam, na maioria dos casos, que eles podem ser resolvidos computacionalmente de forma eficiente, isto é, através de algoritmos polinomiais. Discutiremos adiante algumas idéias por trás desta relação, mas primeiramente vamos apresentar alguns problemas clássicos que se apresentam como igualdades minimax e que nos ajudarão a ilustrar algumas idéias.

2.1 Alguns Exemplos de Igualdades Minimax

O primeiro exemplo de igualdade minimax que apresentaremos envolve os grafos bipartidos. Esta classe de grafos é importante não só por modelar diversos problemas de forma natural mas também porque pode-se mostrar que alguns problemas sobre grafos em geral são equivalentes a problemas em grafos bipartidos.

Abaixo estão os enunciados de dois problemas e em seguida o Teorema de König que é a igualdade minimax que os relaciona:

Emparelhamento Máximo *Determinar um conjunto de arestas não adjacentes de cardinalidade máxima.*

Cobertura Mínima por Vértices *Determinar um conjunto de vértices de cardinalidade mínima tal que toda aresta do grafo possua pelo menos um de seus vértices no conjunto.*

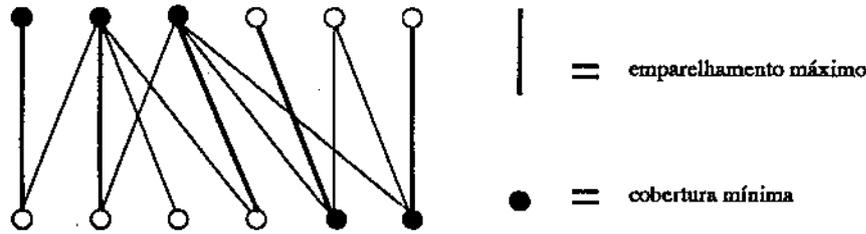


Figura 2.1: Ilustração do Teorema de König.

Teorema de König (1916) *Em um grafo bipartido, um emparelhamento máximo tem a mesma cardinalidade que uma cobertura mínima por vértices.*

Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [LP86]. A partir deste teorema podemos observar uma característica comum em igualdades minimax de que uma das desigualdades pode ser obtida facilmente. Neste caso, toda cobertura por vértices é maior do que ou igual a qualquer emparelhamento. Isso é facilmente verificado pois qualquer cobertura por vértices deve cobrir as arestas de um emparelhamento e dado que estas arestas são disjuntas, a cobertura obrigatoriamente terá um número de vértices maior do que ou igual ao número de arestas do emparelhamento.

A igualdade citada acima implica que ao apresentarmos uma cobertura por vértices e um emparelhamento, ambos com o mesmo tamanho, sabemos que a cobertura é mínima e o emparelhamento é máximo. Provar que a igualdade sempre é válida significa mostrar que estas soluções de valores iguais sempre existem. Esta afirmação nos conduz a uma forma de abordar os problemas: através de algoritmos que buscam solucionar os dois problemas ao mesmo tempo. Se demonstrarmos que o algoritmo sempre termina com as soluções procuradas, teremos provado que a igualdade sempre acontece. Este enfoque é utilizado no livro “Algoritmos para Igualdades Minimax em Grafos” [FL88] que apresenta diversas igualdades minimax que são provadas apresentando-se algoritmos para a resolução dos problemas subjacentes a igualdade.

Note que para grafos em geral, os dois problemas apresentados acima nem sempre têm soluções com o mesmo valor. Um exemplo simples é o grafo completo com três vértices. Para cobrir todas as arestas são necessários pelo menos dois vértices, enquanto que um emparelhamento tem no máximo uma aresta.

Provavelmente a igualdade minimax mais conhecida é o Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo. Apresentaremos abaixo um resultado que é um caso particular deste Teorema, mas que foi a primeira igualdade minimax obtida envolvendo fluxos e cortes.

Teorema de Menger (1927) *Em um grafo, o número máximo de caminhos aresta-disjuntos entre dois vértices s e t é igual ao tamanho de um corte mínimo dentre aqueles que separam s de t .*

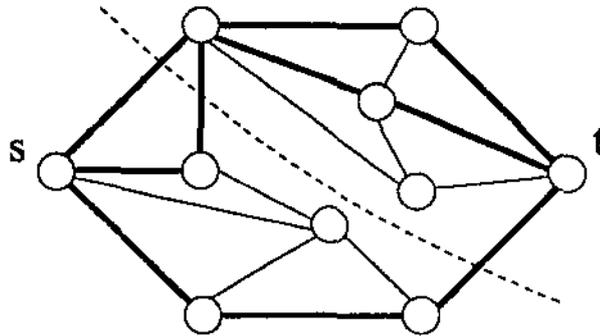


Figura 2.2: Ilustração do Teorema de Menger.

Novamente podemos verificar a ocorrência de uma desigualdade trivial. O número máximo de caminhos aresta-disjuntos entre s e t é menor do que ou igual ao tamanho de um corte mínimo que separa s de t , pois cada caminho deve utilizar pelo menos uma aresta do corte.

O Teorema de Menger nos permite ilustrar uma relação de dualidade que existe em muitos problemas de otimização e que ocorre em particular com os problemas que serão apresentados adiante. O Teorema de Menger relaciona determinados cortes mínimos com coleções de caminhos disjuntos entre dois vértices. Imagine que agora o papel desses dois problemas fossem invertidos, isto é, estamos interessados em relacionar um caminho mínimo entre s e t com as coleções disjuntas máximas de cortes que separam s de t . Será que estes dois problemas também se relacionam por uma igualdade minimax?

A resposta é afirmativa. Primeiramente note que uma coleção disjunta de cortes que separam s e t não pode ser maior do que um caminho entre s e t , já que cada um dos cortes usa pelo menos uma aresta de cada caminho entre s e t . Para mostrar que a igualdade sempre ocorre, considere o conjunto $\{V_i \subseteq V : V_i = \{v \in V : d(s, v) \leq i\}$, para $i = 0, \dots, d(s, t) - 1\}$, onde $d(s, v)$ denota o tamanho do menor caminho (a distância) entre s e v . Estes conjuntos representam exatamente os vértices alcançados em cada nível de uma busca em largura a partir de s . A coleção de cortes $C = \{\delta(V_0), \dots, \delta(V_{d(s,t)-1})\}$ possui a mesma cardinalidade de um caminho mínimo. Para verificar que C é de fato disjunta, note que se $(u, v) \in \delta(V_i)$, então $u, v \in V_{i+k}$, $k \geq 1$, porque $d(s, v) = d(s, u) + 1$. Logo não pode existir uma aresta que pertença a dois cortes da coleção.

As desigualdades triviais bem como a relação de dualidade citada acima não ocorrem por acaso. Os problemas em questão são exemplos de modelos bastante genéricos chamados de *Sistemas de Menger e König* em [Woo78] e de *pares transversais* em [FL88] nos quais a desigualdade sempre é válida e a relação de dualidade é uma condição natural.

Exemplos de igualdades minimax ocorrem também fora da Teoria dos Grafos. O exemplo mais importante é a igualdade minimax que relaciona problemas primais e duais na Programação Linear. Seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = c^T \cdot x \\ &\text{sujeito a } A \cdot x \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Onde $c, x \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$, sendo A, b e c constantes e x é variável. c^T representa a transposta de c . O seu problema dual é representado por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } w = y^T \cdot b \\ &\text{sujeito à } y^T \cdot A \geq c^T \\ &y \geq 0, \end{aligned}$$

onde $y \in R^m$. Podemos mostrar que a desigualdade trivial também ocorre entre estes dois problemas. Seja $x' \in R^n$, $y' \in R^m$, $x', y' \geq 0$ e tais que $Ax' \leq b$ e $y'^T A \geq c$. Então, já que $x', y' \geq 0$, $cx' \leq y'^T Ax' \leq y'^T b$. Logo $x' \leq y'$. A desigualdade oposta também pode ser provada [GT89].

2.2 Igualdades Minimax e Algoritmos

Em geral, as igualdades minimax implicam a existência de algoritmos polinomiais para a solução dos problemas subjacentes à igualdade. A primeira explicação para tal fato está relacionada com a questão da Teoria da Complexidade de Algoritmos que indaga se as classes NP e co-NP coincidem.

Problemas de decisão são aqueles cujas soluções restringem-se a duas possibilidades: sim e não (ou existe e não existe, etc). Os problemas da classe NP são os problemas de decisão para os quais existem algoritmos não determinísticos polinomiais para resolvê-los [GJ79]. Isso equivale a dizer que caso a resposta ao problema seja positiva, existe uma prova, de tamanho limitado por um polinômio em função do tamanho da instância, que pode ser verificada por um algoritmo polinomial. Considere por exemplo o problema do Emparelhamento Máximo. Em sua versão de decisão pergunta-se se um grafo possui um emparelhamento de tamanho maior do que ou igual a k . Este problema se encontra na classe NP pois, ao apresentarmos um emparelhamento de tamanho maior do que ou igual a k , pode-se verificar facilmente que de fato se trata de um conjunto de arestas não adjacentes do grafo e cuja cardinalidade é igual a ou maior do que k .

Os problemas da classe co-NP são os problemas cujos complementos se encontram em NP, ou seja, caso a resposta seja negativa, existe uma prova para este fato que pode ser verificada em tempo polinomial. Considere novamente o problema do Emparelhamento

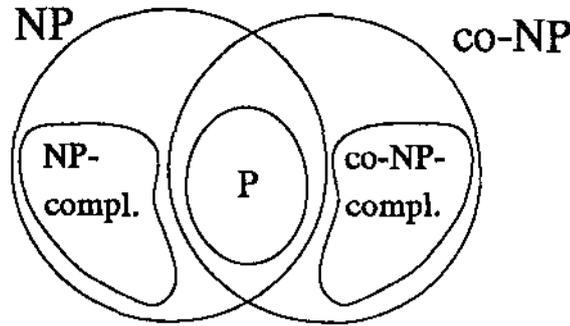


Figura 2.3: Provável relação entre a classe P e a interseção de NP e co-NP.

Máximo. Mostramos que o mesmo se encontra em NP e graças ao Teorema de König podemos deduzir que ele pertence também à classe co-NP. Para provarmos que não existe um emparelhamento de tamanho maior do que ou igual a k , basta que se apresente uma cobertura por vértices de tamanho menor do que k . O Teorema de König é uma garantia de que tal conjunto existe se e somente se o grafo não possui o emparelhamento procurado.

Pela mesma razão pela qual acredita-se que P seja diferente de NP, também se acredita que NP seja diferente de co-NP. A razão é que um conjunto grande de problemas, chamados NP-completos, pertencem à classe NP, mas não se conseguiu demonstrar até agora se pertencem ou não à classe co-NP. O mesmo ocorre com os problemas co-NP-completos. De fato, basta que se prove que um problema NP-completo está em co-NP para que se prove que todos estão. A figura 2.3 ilustra a provável relação entre as classes citadas acima.

Algoritmos polinomiais são conhecidos para a resolução de praticamente todos os problemas que sabemos estarem na interseção de NP e co-NP.¹ Acontece que as igualdades minimax implicam que os problemas pertencem a esta interseção. Isso já nos dá um indício de que existem algoritmos polinomiais para resolver tais problemas. Esta idéia é reforçada pelo trabalho de Grötschel, Lovász e Schrijver [GLS81], que mostraram um meio de obtenção de algoritmos polinomiais a partir de igualdades minimax. Este resultado é uma consequência do Método Elipsóide para resolução em tempo polinomial de problemas de Programação Linear. Outra conclusão pode ser tirada a partir destes fatos: é provável que não existam igualdades minimax que relacionam problemas NP-completos entre si ou com outros problemas em NP.

Um outro aspecto importante das igualdades minimax é que pode-se explorar a dualidade de dois problemas para elaborarmos algoritmos eficientes. Neste caso a igualdade minimax nos fornece um critério de otimalidade para o problema.

Ao conjecturarmos uma igualdade minimax é natural que façamos as seguintes per-

¹Uma exceção é o problema de determinarmos se um número é primo. Este problema está na interseção de NP e co-NP embora não seja conhecido para ele nenhum algoritmo polinomial em função do número de dígitos numa representação com base maior do que 1. [PS82]

guntas: i. para quais classes de grafos a igualdade é válida? ii. se a igualdade não vale para uma determinada classe, existe alguma outra igualdade que seja válida? iii. de que forma a relação se aplica a problemas ponderados? [Pul89]

Boas referências sobre igualdades minimax são:

- A. Schrijver. “Min-max results in combinatorial optimization” [Sch83]
- P. Feofiloff e C. L. Lucchesi. “Algoritmos para Igualdades Minimax em Grafos” [FL88]
- W. R. Pulleyblank. “Polyhedral Combinatorics” [Pul89]
- M. Grötschel, L. Lovász e A. Schrijver. “Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization” [GLS88].

Capítulo 3

Famílias de Cortes e Coberturas Mínimas dos Cortes

Neste capítulo apresentaremos vários resultados fundamentais sobre famílias de cortes orientados e ímpares e sobre as coberturas destes cortes. A maioria destes resultados serão utilizados no capítulo 4.

3.1 Cortes Orientados e suas Coberturas

Nesta seção faremos alguns comentários sobre os cortes orientados de um dígrafo e suas coberturas.

Um conjunto t de arestas de um dígrafo é uma *cobertura dos cortes orientados* se ele tem interseção não nula com cada corte orientado.

Os cortes orientados estão bastante relacionados com a conexidade de um dígrafo. Definimos anteriormente os dígrafos fortemente conexos como sendo os dígrafos nos quais para cada par de vértices u e v existe um caminho orientado ligando u a v . Podemos caracterizar os dígrafos fortemente conexos em função dos cortes orientados. Um dígrafo é fortemente conexo se e somente se os cortes $\delta(V)$ e $\delta(\emptyset)$ forem seus únicos cortes orientados. Se o dígrafo possuir um corte orientado $\delta(X)$, $\emptyset \neq X \subset V$, com $\delta^-(X) = \emptyset$, ele não pode ser fortemente conexo, pois se tomarmos um vértice $u \in V \setminus X$ e um vértice $v \in X$, não pode existir um caminho orientado de u a v . O corte orientado pode ser visto como uma barreira para se caminhar pelo dígrafo. Além disso, se o dígrafo não for fortemente conexo então ele possui algum corte orientado diferente de $\delta(V)$ e de $\delta(\emptyset)$. Tome dois vértices u e v tais que não existe um caminho orientado de u a v e tome o conjunto X de todos os vértices que são origem de caminhos orientados que terminam em v . Claramente $\delta(X)$ é um corte orientado e $\emptyset \neq X \subset V$.

Estabelecida a relação entre os cortes orientados e a conexidade dos dígrafos, podemos agora enunciar o problema de determinarmos uma cobertura mínima dos cortes orientados

de um dígrafo de uma forma diferente. O problema da cobertura mínima dos cortes orientados é equivalente ao problema de determinarmos o menor conjunto de arestas de um dígrafo tal que a contração de cada uma destas arestas torna o dígrafo fortemente conexo. A operação de contração poderia ser substituída por uma operação equivalente que consiste na inclusão de uma aresta com a orientação invertida para cada aresta do conjunto.

O primeiro algoritmo polinomial para determinação de uma cobertura mínima dos cortes orientados de um dígrafo foi desenvolvido por C. L. Lucchesi [Luc76]. Outros algoritmos polinomiais foram desenvolvidos por A. V. Karzanov e A. Frank. Os algoritmos podem ser encontrados nas referências [Luc76, FL88, Fra81, Kar79] respectivamente. Além de determinar uma cobertura mínima para os cortes orientados eles também determinam uma família disjunta máxima de cortes orientados, que corresponde ao outro problema da relação minimax.

Um problema parecido com o problema da cobertura mínima dos cortes orientados é o de se determinar o menor número de arestas que se adicionadas ao dígrafo o tornam fortemente conexo. Este problema tem solução bastante mais simples e também tem o formato de uma igualdade minimax. Seja $D = (V, E)$ um dígrafo. Podemos supor que D é acíclico pois a contração de cada um dos seus componentes fortemente conexos a um vértice não modifica os cortes orientados do dígrafo. Seja s o número de fontes, t o número de sorvedouros e q o número de vértices isolados do dígrafo. Então o número mínimo de arestas que adicionadas ao dígrafo o tornam fortemente conexo é igual a $q + \max(s, t)$. Esta expressão é claramente um limite inferior para o problema, já que um conjunto de arestas que tornam o dígrafo fortemente conexo deverá conter arestas com pontas finais em cada uma das fontes, pontas iniciais em cada um dos sorvedouros e cada vértice isolado deverá ser coberto por uma ponta final e uma ponta inicial de alguma aresta. O método para determinarmos um conjunto que atinge este limite inferior consiste basicamente em determinar um conjunto de arestas que formam um circuito entre as fontes, os sorvedouros e os vértices isolados [ET76].

3.2 *T*-Cortes e *T*-junções

Nesta seção definiremos o conceito de *T*-cortes e mostraremos que eles são uma generalização dos cortes ímpares. Mostraremos que as coberturas minimais dos *T*-cortes de um grafo são equivalentes às *T*-junções, de forma que podemos nos restringir ao estudo das *T*-junções ao lidarmos com o problema das coberturas mínimas dos *T*-cortes. Provaremos que o problema da *T*-junção mínima pode ser reduzido ao problema do emparelhamento de custo mínimo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e um conjunto $T \subseteq V$ com um número par de vértices em cada componente conexo de G . Um T -corte de G é um conjunto de arestas $\delta(X)$, $X \subseteq V$, tal que $|X \cap T|$ é ímpar.

Os cortes ímpares, isto é, cortes com um número ímpar de arestas, são generalizados pelo conceito de T -cortes, bastando para isso tomarmos o conjunto T igual ao conjunto dos vértices de grau ímpar do grafo. A veracidade desta afirmação decorre do lema abaixo:

Lema 3.1 *Seja $G = (V, E)$ e $T \subseteq V$ o conjunto de vértices de grau ímpar de G . Se $X \subseteq V$ então*

$$|\delta(X)| \equiv |X \cap T| \pmod{2}.$$

Prova: $|\delta(X)| = \sum_{v \in X} d(v) - 2 \cdot |\{e \in E : e \subseteq X\}|$. Portanto, $|\delta(X)| \equiv \sum_{v \in X} d(v) \pmod{2}$. Mas $\sum_{v \in X} d(v) \equiv |X \cap T| \pmod{2}$, pois T contém os vértices de grau ímpar de G . \square

Algumas referências apresentam um conceito diferente para cortes ímpares. Nelas os cortes ímpares são definidos como conjuntos $\delta(X)$, $X \subseteq V$, tal que $|X|$ é ímpar. Esta definição se aplica aos grafos com um número par de vértices, pois do contrário todos os cortes do grafo seriam ímpares. Esta definição também é um caso particular dos T -cortes, bastando para isso tomarmos $T = V$.

T -junções e sua equivalência às coberturas minimais dos T -cortes

Consideraremos ao longo desta seção que $G = (V, E)$ é um grafo e que $T \subseteq V$ tal que todo componente conexo de G tenha um número par de vértices de T .

Um conjunto $t \subseteq E$ é uma T -junção se para todo $v \in V$ tem-se que $|\delta(v) \cap t|$ é ímpar se $v \in T$ e par se $v \notin T$.

Exemplo:

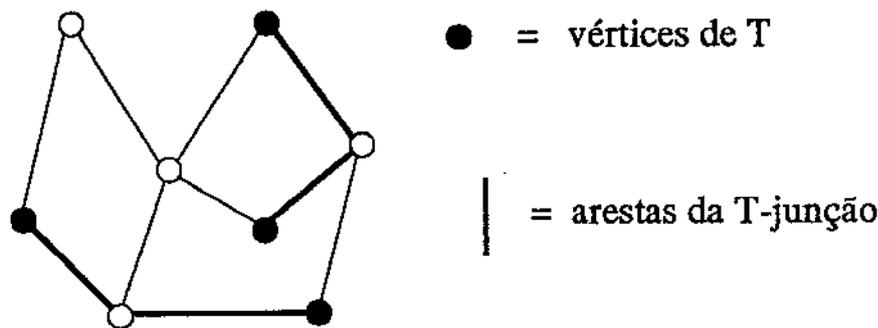


Figura 3.1: Exemplo de uma T -junção.

Lema 3.2 *Toda T -junção é uma cobertura dos T -cortes de G .*

Prova: Seja $t \subseteq E$ uma T -junção. Tome o grafo $G' = (V, t)$. Os vértices de G' com grau ímpar são exatamente os vértices de T . Aplicando-se o lema 3.1 ao grafo G' , temos que $|\delta_{G'}(X)| \equiv |X \cap T| \pmod{2}$ para todo $X \subseteq V$. Assim, se $\delta(X)$ é um T -corte então $|X \cap T|$ é ímpar e portanto $\delta(X) \cap t$ não é vazio. \square

Lema 3.3 *Toda cobertura minimal dos T -cortes de um grafo é uma T -junção.*

Prova: Vamos mostrar que toda cobertura dos T -cortes contém uma T -junção, o que, aliado ao lema anterior, prova que as coberturas minimais são T -junções.

Seja $t \subseteq E$ uma cobertura dos T -cortes. Primeiramente vamos mostrar que é possível obter um conjunto de $|T|/2$ caminhos, não necessariamente disjuntos, cujas arestas pertencem a t e tal que os vértices que são extremos dos caminhos são os vértices de T . Cada vértice de T será um dos extremos de apenas um dos caminhos.

Vamos construir um conjunto de caminhos cujos extremos são os vértices $\{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_{|T|/2}, t_{|T|/2}\}\}$. Suponha que já construímos um conjunto de caminhos com extremos $\{s_i, t_i\}$ para $0 \leq i < k \leq |T|/2$. Vamos incluir um novo caminho a este conjunto cujos extremos são vértices de T que ainda não foram utilizados como extremos de nenhum caminho, isto é, que pertencem ao conjunto $\bar{T} = T \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{s_i, t_i\}$. Seja s_k um vértice qualquer de \bar{T} . Seja $X \subseteq V$ o conjunto de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de s_k por caminhos cujas arestas estão em t . Se algum s_i , $0 \leq i \leq k-1$, pertence a X , então o vértice t_i também pertence. Assim, $X \cap \bar{T}$ deve conter algum vértice de $\bar{T} \setminus s_k$, pois se não contivesse, $\delta(X)$ seria um T -corte não coberto por t . Podemos repetir este processo até obtermos os $|T|/2$ caminhos.

Sejam $P_1, \dots, P_{|T|/2}$ os caminhos obtidos. Vamos verificar agora que a diferença simétrica $t' = \bigoplus_{i=1}^{|T|/2} P_i$ é uma T -junção. Se $v \in V$, então

$$|\{v\} \cap T| \equiv \sum_{i=1}^{|T|/2} |\delta_{P_i}(v)| \pmod{2}.$$

Essa congruência é verdadeira pois se o vértice pertence a T então ele é extremo de exatamente um dos caminhos, podendo ocorrer internamente qualquer número de vezes. Por outro lado, se o vértice não pertence a T então ele não é extremo em nenhum dos caminhos, de forma que $\sum_{i=1}^{|T|/2} |\delta_{P_i}(v)|$ é par. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{|T|/2} |\delta_{P_i}(v)| = \sum_{e \in \delta(v)} |\{i : e \in P_i\}| \equiv |\delta_{t'}(v)| \pmod{2}$$

A última equivalência vem do fato de que as arestas pertencentes a t' são exatamente aquelas que aparecem em um número ímpar de caminhos, fato que decorre de uma propriedade básica da operação de diferença simétrica. Provamos assim que $|\{v\} \cap T| \equiv |\delta_{t'}(v)| \pmod{2}$ e portanto t' é uma T -junção. \square

Uma propriedade interessante da T -junção obtida na demonstração deste lema é que ela é formada por caminhos que casam os vértices de T dois a dois além de possíveis circuitos. Esta propriedade é compartilhada por todas as T -junções. No caso da T -junção conter circuitos, podemos retirá-los sem alterar a paridade do número de arestas adjacentes a cada vértice. Portanto, as T -junções minimais são formadas apenas por caminhos disjuntos nas arestas.

O Problema da T -junção de cardinalidade mínima

O problema de determinarmos uma T -junção de cardinalidade mínima pode ser reduzido eficientemente ao problema do emparelhamento máximo de custo mínimo que por sua vez pode ser resolvido em tempo polinomial [PS82]. O problema do emparelhamento máximo de custo mínimo consiste em determinar um emparelhamento de cardinalidade máxima com custo mínimo. A redução consiste em aplicarmos o algoritmo do emparelhamento máximo de custo mínimo ao grafo completo obtido da seguinte maneira: para cada vértice de T o grafo terá um vértice e o custo de uma aresta é igual ao tamanho de um caminho mínimo, no grafo original, entre os dois vértices correspondentes.

Exemplo:

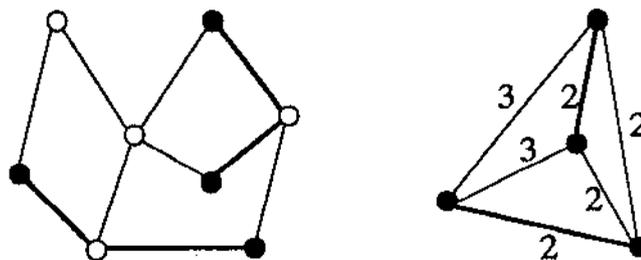


Figura 3.2: Redução do problema da T -junção mínima ao problema do emparelhamento máximo de custo mínimo.

Ao aplicarmos um algoritmo para o problema do emparelhamento máximo de custo mínimo obtemos um *emparelhamento perfeito*, isto é, cada vértice do grafo pertence a alguma aresta do emparelhamento. Este emparelhamento corresponde a um conjunto de caminhos no grafo original que ligam os vértices de T dois a dois. Estes caminhos são disjuntos em relação às arestas porque se não fossem, ao tomarmos a diferença simétrica destes caminhos, obteríamos novos caminhos cuja soma das cardinalidades seria menor e que portanto corresponderiam a um emparelhamento perfeito de menor custo. Por outro lado, já vimos que cada T -junção minimal é formada por caminhos disjuntos nas arestas que ligam os vértices de T dois a dois. Assim, cada T -junção minimal corresponde a um emparelhamento perfeito no grafo associado cujo custo é igual a cardinalidade da T -junção. Portanto, o conjunto de arestas dos caminhos obtidos através da redução é uma

T -junção mínima.

O Problema da T -junção mínima com custos não negativos

Se associarmos um custo não negativo a cada aresta, podemos formular o problema da determinação de uma T -junção de custo mínimo. Este problema pode ser resolvido através da mesma redução apresentada acima, porém desta vez definindo o custo de uma aresta do grafo completo igual ao custo de um caminho mínimo entre os dois vértices. Repare que neste caso uma aresta cujo custo original é 0 poderia ser utilizada por mais de um dos caminhos obtidos. Para contornar este problema basta tomarmos a diferença simétrica dos caminhos obtidos e teremos uma T -junção que possui o mesmo custo.

O Problema da T -junção mínima com custos arbitrários

Podemos definir uma versão generalizada do problema ponderado da T -junção mínima permitindo que os custos possam ser também negativos. Mostraremos adiante que este problema pode ser reduzido ao caso em que todos os custos são não negativos.

A versão com custos não negativos e $|T| = 2$ é equivalente ao problema do caminho mínimo entre dois vértices. Poder-se-ia perguntar se a versão com custos arbitrários generaliza o problema do caminho mais longo entre dois vértices, bastando para isso atribuímos um custo igual a -1 a todas as arestas do grafo. Porém isso seria incoerente, ou surpreendente, já que sabemos que o problema do caminho mais longo é NP-completo [GJ79]. A sutileza que diferencia as duas situações é que ao permitirmos custos negativos, pode acontecer que todas as T -junções de custo mínimo contenham circuitos, cujos custos seriam negativos. Veja o seguinte exemplo:

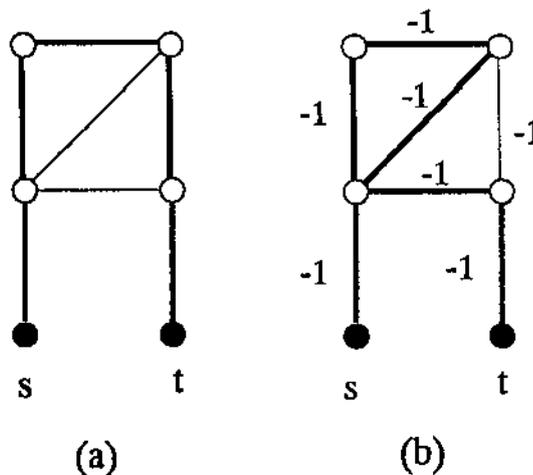


Figura 3.3: (a) Caminho mais longo entre s e t . (b) $\{s, t\}$ -junção de custo mínimo.

Se apesar de custos negativos não houverem circuitos com custos negativos, então o problema é equivalente ao caso com custos não negativos e a redução para o problema do

emparelhamento de custo mínimo é a mesma. Agora passaremos a mostrar que o caso mais geral também pode ser resolvido de forma eficiente.

Redução do caso geral ao caso com custos não negativos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $T \subseteq V$ com um número par de vértices em cada componente conexo de G . Seja uma função $c : E \rightarrow \mathbb{Z}$. Vamos construir uma instância para o problema da T -junção mínima com custos não negativos e mostrar como o problema original pode ser resolvido a partir dela.

Seja $E' = \{e \in E : c(e) < 0\}$. Seja $V' = \{v \in V : |\delta(v) \cap E'| \text{ é ímpar}\}$, ou seja, os vértices que possuem um número ímpar de arestas adjacentes cujos custos são negativos. Seja $T' = T \oplus V'$. Os dois lemas abaixo mostrarão que uma T' -junção de custo mínimo em relação à função c' , tal que $c'(e) = |c(e)|$ para todo $e \in E$, corresponde a uma T -junção de custo mínimo em relação a função c .

Lema 3.4 *Um conjunto $t \subseteq E$ é uma T -junção de G se e somente se $t' := t \oplus E'$ é uma T' -junção de G .*

Prova: Considere um vértice qualquer $v \in V$. Então,

$$|\delta(v) \cap t'| = |\delta(v) \cap t| + |\delta(v) \cap E'| - 2 \cdot |\delta(v) \cap t \cap E'|.$$

Suponha que t é uma T -junção. Se $v \in T'$ então, por definição, ou $|\delta(v) \cap t|$ ou $|\delta(v) \cap E'|$ é ímpar, mas não ambos. Portanto, $|\delta(v) \cap t'|$ é ímpar. Por outro lado, se $v \notin T'$ então ambos os valores são pares ou ambos são ímpares e portanto $|\delta(v) \cap t'|$ é par. Portanto t' é uma T' -junção.

Suponha agora que t' é uma T' -junção. Observe que $T = T' \oplus V'$. Assim, se $v \in T$ então $|\delta(v) \cap t'|$ ou $|\delta(v) \cap E'|$ é ímpar, mas não ambos. Nos dois casos $|\delta(v) \cap T|$ é ímpar. Se $v \notin T$ então $|\delta(v) \cap t'|$ e $|\delta(v) \cap E'|$ são ambos ímpares ou ambos pares. Para que a igualdade seja válida $|\delta(v) \cap t|$ deverá ser par. \square

Agora mostraremos a relação entre os custos de uma T -junção e de uma T' -junção.

Lema 3.5 *Seja $c' : E \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c'(e) = |c(e)|$ para todo $e \in E$. Então, para todo $t \subseteq E$, $c(t) = c'(t \oplus E') + c(E')$.*

Prova: $c(t) = c(t \setminus E') + c(t \cap E') = c'(t \setminus E') + c(t \cap E') = c'(t \setminus E') + c'(E' \setminus t) + c(E') = c'(t \oplus E') + c(E')$. \square

Como o termo $c(E')$ é constante, a T' -junção t' cujo valor $c'(t')$ é mínimo corresponde à T -junção $t' \oplus E'$ que minimiza $c(t)$. Como c' é uma função não negativa, a redução está concluída.

3.3 Laminarização

Será mostrada nesta seção uma técnica que é muito utilizada quando trabalhamos com famílias de cortes. Ela permite transformar uma dada família de cortes em outra com a mesma cardinalidade, que utiliza cada aresta um número menor ou igual de vezes e além disso possuindo a propriedade de ser laminar. Esta propriedade, que será definida adiante, concede à coleção de cortes uma estrutura que será importante nas demonstrações que apresentaremos adiante.

Assumiremos daqui em diante que os grafos e os dígrafos são conexos. A rigor esta simplificação não é necessária já que vários dos resultados apresentados valem igualmente para os grafos que não são conexos. Entretanto, ficará claro que o caso geral dos teoremas facilmente decorre do caso em que supõem-se que os grafos são conexos.

Assumiremos também a partir deste ponto que os cortes são não vazios. Assim, ao nos referirmos a um corte de cardinalidade mínima, estaremos nos referindo a um corte não nulo cuja cardinalidade é mínima. Da mesma forma, ao falarmos de um família disjunta máxima de cortes, estaremos assumindo que não são permitidos cortes vazios.

Dois cortes $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ se *cruzam* se cada um dos seguintes conjuntos $X \cap Y$, $X \cap \bar{Y}$, $\bar{X} \cap Y$ e $\bar{X} \cap \bar{Y}$ não forem vazios. Neste caso, diremos também que X e Y se *cruzam*.

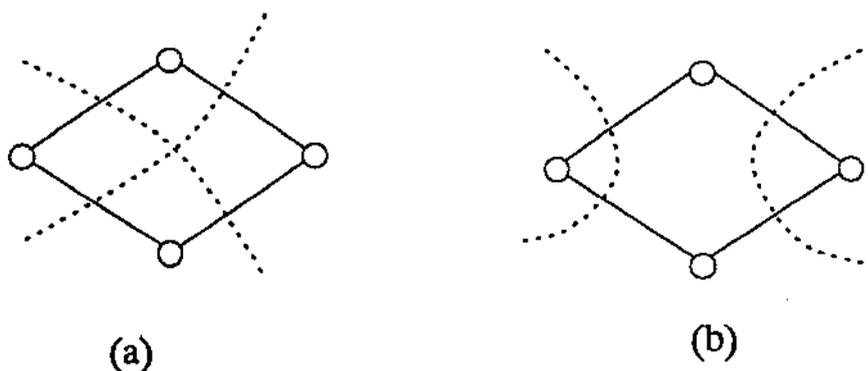


Figura 3.4: Exemplo de cortes que se cruzam (a) e que não se cruzam (b).

Note que a definição de cruzamento não depende da margem utilizada na definição do corte. Este é o principal motivo para assumirmos que os grafos são conexos.

Uma família de cortes é *laminar* quando nenhum par de cortes da família se cruza.

Para ilustrar o procedimento de laminarização, apresentamos abaixo a sua versão para cortes em geral e nas próximas seções mostraremos que ele também podem ser aplicado no caso das famílias de cortes orientados e de T -cortes.

O procedimento que descrevemos abaixo transforma uma família de cortes em uma família de cortes que é laminar e que possui a mesma cardinalidade da família dada. Além disso, a utilização de nenhuma aresta é aumentada.

Procedimento de Laminarização**Entrada:** Família de cortes \mathcal{C} **Saída:** Família laminar de cortes \mathcal{L} **início****enquanto** existirem dois cortes $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ que se cruzam1.1 tome $r := \min\{\mathcal{C}(\delta(X)), \mathcal{C}(\delta(Y))\}$ 1.2 $\mathcal{C} := \mathcal{C} - r \cdot (\delta(X) + \delta(Y)) + r \cdot (\delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y))$ **retorne** \mathcal{C} **fim**

Cada iteração do procedimento descrito acima toma dois cortes que se cruzam e elimina aquele que possui a menor multiplicidade. Com efeito, ao serem retiradas r cópias de cada um dos cortes, um deles ficará com a multiplicidade nula e, como convencionado na definição de famílias, ele deixará de pertencer à família de cortes. Além disso, são acrescentadas r cópias do corte definido pela interseção das margens e r cópias do corte definido pela união das margens.

Em algumas aplicações particulares pode-se demonstrar que o procedimento termina em tempo polinomial [GLS88]. Entretanto, não é a complexidade desse algoritmo que nos interessa aqui e sim a questão existencial de que para cada família de cortes corresponde uma família laminar de cortes com a mesma cardinalidade e que usa cada aresta um número menor ou igual de vezes.

Lema 3.6 *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

- i. *O procedimento termina após um número finito de iterações;*
- ii. $|\mathcal{L}| = |\mathcal{C}|$;
- iii. *para toda aresta e , $\#\mathcal{L}(e) \leq \#\mathcal{C}(e)$ ¹.*

Prova: **Item i:** Vamos mostrar que a cada iteração do algoritmo o número de cruzamentos entre cortes da família diminui e portanto o número de iterações é finito. Cada iteração do procedimento elimina pelo menos r^2 cruzamentos da família, que correspondem às r cópias dos cortes $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ subtraídas da família. Vamos mostrar que além disso, cada novo cruzamento introduzido na família corresponde a um cruzamento eliminado que não está incluído no conjunto dos r^2 cruzamentos citados acima. Sejam $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ dois cortes que se cruzam e $\delta(Z)$ um terceiro corte da família.

¹Lembre-se que $\#\mathcal{C}(e)$ representa o número de vezes que a aresta é usada pela família \mathcal{C} . Veja a seção 1.3.

caso I. Se Z cruza $X \cap Y$ e $X \cup Y$ então Z cruza X e Y .

Prova: Como Z cruza $X \cap Y$ então $Z \cap X, Z \cap Y, \bar{Z} \cap X$ e $\bar{Z} \cap Y$ são não vazios. Como Z cruza $X \cup Y$ então $Z \cap \bar{X}, Z \cap \bar{Y}, \bar{Z} \cap \bar{X}$ e $\bar{Z} \cap \bar{Y}$ são não vazios. Logo Z cruza X e Z cruza Y .

caso II. Se Z cruza $X \cap Y$ então Z cruza X ou Z cruza Y .

Prova: Como Z cruza $X \cap Y$ então $Z \cap X, Z \cap Y, \bar{Z} \cap X$ e $\bar{Z} \cap Y$ são não vazios. Veja a figura 3.5.

Suponha inicialmente que $Z \cap \bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$. Como $\bar{Z} \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) \neq \emptyset$, então $\bar{Z} \cap \bar{X} \neq \emptyset$ ou $\bar{Z} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$. Portanto Z cruza X ou Y .

Se $Z \cap \bar{X} \cap \bar{Y} = \emptyset$ então $\bar{Z} \cap \bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ pois $\bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$. Trocando-se na notação Z por \bar{Z} , podemos demonstrar este caso de forma semelhante ao caso anterior.

caso III. Se Z cruza $X \cup Y$ então Z cruza X ou Z cruza Y .

Este caso pode ser demonstrado analogamente ao caso anterior trocando-se na notação X por \bar{X} e Y por \bar{Y} .

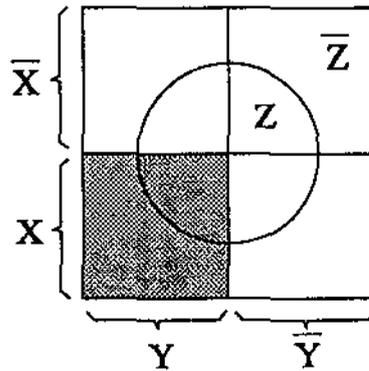


Figura 3.5: Se o corte Z cruza a intersecção dos cortes X e Y que se cruzam, então Z cruza X ou Y .

Item ii: A igualdade $|\mathcal{L}| = |\mathcal{C}|$ é trivial pois a cada iteração o número de cópias subtraídas é igual ao número de cópias somadas à família.

Item iii: Seja $A = X \cap Y, B = \bar{X} \cap Y, C = X \cap \bar{Y}$ e $D = \bar{X} \cap \bar{Y}$ como mostrado na figura 3.6. Seja $e = (u, v)$ uma aresta do grafo e $\mathcal{C}' = \mathcal{C} - r \cdot (\delta(X) + \delta(Y)) + r \cdot (\delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y))$.

caso I. Se os vértices u e v pertencem ao mesmo conjunto, dentre os conjuntos A, B, C ou D , então a aresta e não pertence nem ao corte $\delta(X \cap Y)$ e nem ao corte $\delta(X \cup Y)$. Como a aresta também não pertence a $\delta(X)$ nem a $\delta(Y)$ então $\#_{\mathcal{C}'}(e) = \#_{\mathcal{C}}(e)$.

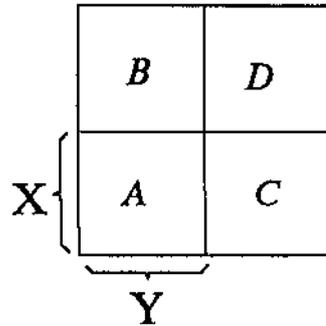


Figura 3.6: As quatro intersecções entre as margens de dois cortes.

caso II. Se $u \in A$ e $v \in D$ então $e \in \delta(X)$, $e \in \delta(Y)$, $e \in \delta(X \cap Y)$ e $e \in \delta(X \cup Y)$.
Logo $\#_{c'}(e) = \#_c(e)$.

caso III. Se $u \in A$ e $v \in C$ então $e \notin \delta(X)$, $e \in \delta(Y)$, $e \in \delta(X \cap Y)$ e $e \notin \delta(X \cup Y)$.
Logo $\#_{c'}(e) = \#_c(e)$.

O caso em que $u \in A$ e $v \in B$ é análogo.

caso IV. Se $u \in B$ e $v \in D$ então $e \notin \delta(X)$, $e \in \delta(Y)$, $e \notin \delta(X \cap Y)$ e $e \in \delta(X \cup Y)$.
Logo $\#_{c'}(e) = \#_c(e)$.

O caso em que $u \in C$ e $v \in D$ é análogo.

caso V. Finalmente, se $u \in B$ e $v \in C$ então $e \in \delta(X)$, $e \in \delta(Y)$, $e \notin \delta(X \cap Y)$ e $e \notin \delta(X \cup Y)$. Logo $\#_{c'}(e) < \#_c(e)$.

□

Como consequência do item iii, obtemos a seguinte propriedade fundamental de cortes:

Lema 3.7 (Propriedade Submodular dos Cortes) *Sejam $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ dois cortes que se cruzam, então $|\delta(X \cap Y)| + |\delta(X \cup Y)| \leq |\delta(X)| + |\delta(Y)|$. □*

Laminarização de Cortes Orientados

Considere agora que temos um dígrafo e uma família de cortes orientados. O seguinte lema mostra que podemos aplicar o procedimento de laminarização a uma família de cortes orientados.

Lema 3.8 *Seja D um dígrafo conexo e $d' = \delta(X)$ e $d'' = \delta(Y)$ dois cortes orientados em D tais que $\delta^-(X) = \emptyset$ e $\delta^-(Y) = \emptyset$. Se d' e d'' se cruzam, então $\delta(X \cap Y)$ e $\delta(X \cup Y)$ são cortes orientados não nulos.*

Prova: i. $X \cap Y \neq \emptyset$ e $\overline{X \cap Y} \neq \emptyset$ pois os cortes se cruzam. A conexidade de D garante que $\delta(X \cap Y) \neq \emptyset$. Mas $\delta^-(X \cap Y) = \emptyset$, pois se $(u, v) \in \delta^-(X \cap Y)$ então $v \in X \cap Y$ e $u \notin X$ ou $u \notin Y$ e portanto $(u, v) \in \delta^-(X)$ ou $(u, v) \in \delta^-(Y)$, contradição. Logo $\delta(X \cap Y)$ é um corte orientado não nulo.

ii. Podemos mostrar analogamente que $\delta(X \cup Y)$ é um corte orientado não vazio. \square

Isso mostra que podemos aplicar o procedimento de laminarização aos cortes orientados. O lema 3.6 se aplica neste caso e temos portanto que:

Lema 3.9 *Para qualquer família \mathcal{L} de cortes orientados existe uma família laminar \mathcal{L}' de cortes orientados tal que $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$. \square*

O caso V do item iii do lema 3.6 nunca ocorre já que não podem haver arestas com uma das pontas em $X \cap \overline{Y}$ e a outra em $\overline{X} \cap Y$. Disso podemos concluir que $\#_{\mathcal{L}}(e) = \#_c(e)$ para toda aresta $e \in E$ e que o lema 3.7 pode ser enunciado de forma mais forte no caso dos cortes orientados:

Lema 3.10 (Propriedade Modular dos Cortes Orientados) *Sejam $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ dois cortes orientados que se cruzam, com $\delta^-(X) = \emptyset$ e $\delta^-(Y) = \emptyset$. Então*

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(X \cup Y)| = |\delta(X)| + |\delta(Y)|.$$

\square

Laminarização de Cortes Ímpares e T-cortes

Para aplicar o procedimento de laminarização a uma família de T -cortes devemos tomar um pouco mais de cuidado. Dados dois T -cortes $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ que se cruzam, não é verdade que $\delta(X \cap Y)$ e $\delta(X \cup Y)$ são necessariamente T -cortes. Na verdade, quando $\delta(X \cap Y)$ e $\delta(X \cup Y)$ não são T -cortes, $\delta(X \cup \overline{Y})$ e $\delta(\overline{X} \cup Y)$ são T -cortes. As seguintes igualdades são verdadeiras: $|X \cap T| = |X \cap Y \cap T| + |X \cap \overline{Y} \cap T|$ e $|Y \cap T| = |X \cap Y \cap T| + |\overline{X} \cap Y \cap T|$. Como $|X \cap T|$ e $|Y \cap T|$ são ímpares, então ou $|X \cap Y \cap T|$ é ímpar ou $|X \cap \overline{Y} \cap T|$ e $|\overline{X} \cap Y \cap T|$ são ímpares. Como $|X \cap Y \cap T|$ possui a mesma paridade que o conjunto $|\overline{X} \cap \overline{Y} \cap T|$, fica demonstrada a afirmação.

Mostramos que o procedimento de laminarização pode ser utilizado em famílias de T -cortes, desde que tomemos o cuidado de acrescentar os cortes corretos à família. Daí temos o seguinte lema:

Lema 3.11 *Para qualquer família \mathcal{L} de T -cortes existe uma família laminar \mathcal{L}' de T -cortes tal que $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$. \square*

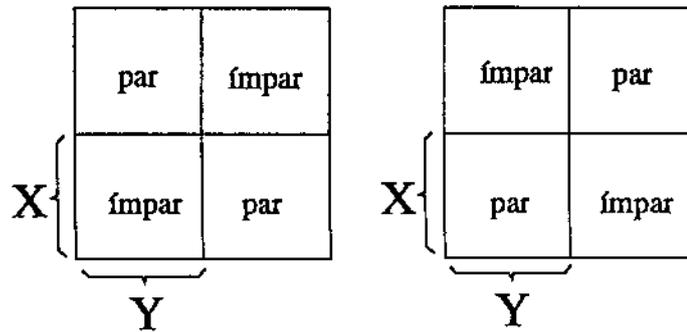


Figura 3.7: O esquema mostra as duas situações possíveis entre dois T -cortes que se cruzam.

3.4 Partição de uma Família de Cortes Orientados

Mostraremos nesta seção que uma família k -disjunta de cortes orientados pode ser particionada em k famílias disjuntas. Mostraremos também um resultado mais geral que afirma que uma família de cortes orientados pode ser particionada em k famílias de forma que a utilização das arestas do dígrafo é feita de forma equilibrada pelas famílias da partição. O primeiro resultado será utilizado nas demonstrações do Teorema de Lucchesi-Younger e do Teorema de Lovász e o segundo na demonstração do Teorema de Edmonds-Giles, que serão apresentados no capítulo 4.

Assumiremos ao longo desta seção que $D = (V, E)$ é um dígrafo conexo e \mathcal{L} é uma família de cortes orientados laminar e que $r = |\mathcal{L}|$. Representaremos por d_0, d_1, \dots, d_{r-1} as r cópias de cortes de \mathcal{L} , ou seja, $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{r-1} 1 \cdot d_i$.

Vamos definir uma função, a qual chamaremos de função *potencial*, que associa a cada vértice de V um valor inteiro não negativo. Utilizando esta função definiremos uma outra, que associa a cada cópia de um corte da família um valor inteiro tal que para cada aresta do dígrafo, todos os cortes que a contém possuem valores consecutivos. Para particionarmos a família em k famílias, poderemos tomar os cortes cujos valores pertencem às classes de congruência módulo k . Como todos os cortes que contém uma aresta em comum recebem valores consecutivos, as arestas são usadas de forma balanceada pelas famílias da partição.

Função Potencial

Chamaremos de função *potencial* a função $\pi : V \rightarrow N$ definida por $\pi(v) = |\{i \in N : v \in V^+ d_i\}|$, ou seja, $\pi(v)$ é igual ao número de cópias de cortes de \mathcal{L} em relação aos quais v pertence à margem positiva.

Considere um caminho $P = \langle v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n \rangle$ do dígrafo D . Podemos particionar as arestas de P em dois conjuntos, um contendo as arestas da forma (v_i, v_{i+1}) que denotaremos por \vec{E}_P e o outro contendo as arestas da forma (v_{i+1}, v_i) que denotaremos por \overleftarrow{E}_P . Seja a seguinte expressão:

Exemplo:

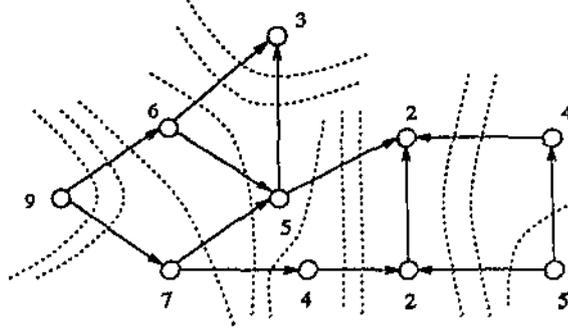


Figura 3.8: Família de cortes orientados e a função potencial π correspondente.

$$D_P := \sum_{i=0}^{r-1} (|\overleftarrow{E}_P \cap d_i| - |\overrightarrow{E}_P \cap d_i|)$$

O valor desta expressão pode ser computado somando-se uma unidade para cada interseção de uma aresta de \overleftarrow{E}_P com um corte da família e subtraindo-se uma unidade para cada interseção de uma aresta de \overrightarrow{E}_P com um corte da família. O seu valor é o mesmo para todos os caminhos que ligam um dado vértice u a um vértice v . Provamos abaixo que este valor é igual a $\pi(v) - \pi(u)$, que pode ser interpretado como a diferença de potencial entre os vértices u e v .

Lema 3.12 *Se P é um caminho entre os vértices u e v , então $D_P = \pi(v) - \pi(u)$.*

Prova: Se $d \in \mathcal{L}$ é tal que $u, v \in V^+d$, então $|\overrightarrow{E}_P \cap d| = |\overleftarrow{E}_P \cap d|$. Igualmente, se $u, v \notin V^+d$, então $|\overrightarrow{E}_P \cap d| = |\overleftarrow{E}_P \cap d|$. Se $u \in V^+d$ e $v \in V^-d$ então $|\overleftarrow{E}_P \cap d| - |\overrightarrow{E}_P \cap d| = -1$ e se $u \in V^-d$ e $v \in V^+d$ então $|\overleftarrow{E}_P \cap d| - |\overrightarrow{E}_P \cap d| = 1$. Por outro lado, a diferença $\pi(v) - \pi(u)$ é igual ao número de cortes d tais que $v \in V^+d$ e $u \in V^-d$ menos o número de cortes d tais que $u \in V^+d$ e $v \in V^-d$. Portanto a igualdade é verdadeira. \square

Dada uma aresta $e \in E$, podemos considerar a subfamília de \mathcal{L} composta pelos cortes que contêm e . Podemos tomar estes cortes na seguinte ordem: $d_{i_0}, \dots, d_{i_{m-1}}$, onde $m = \#\mathcal{L}(e)$ e $V^-d_{i_0} \subseteq V^-d_{i_1} \subseteq \dots \subseteq V^-d_{i_{m-1}}$. Além disso, se $d_{i_j} = d_{i_{j+1}}$ então suporemos sempre que $i_j < i_{j+1}$.² Esta ordenação é possível apenas porque \mathcal{L} é laminar, de forma que para quaisquer dois cortes a e b distintos que não se cruzam e que possuem uma aresta em comum, temos que $V^-a \subset V^-b$ ou $V^-b \subset V^-a$. Veja a figura 3.9.

²Isto implica que as diversas cópias de um mesmo corte são consideradas sempre em ordem crescente com relação aos seus índices.

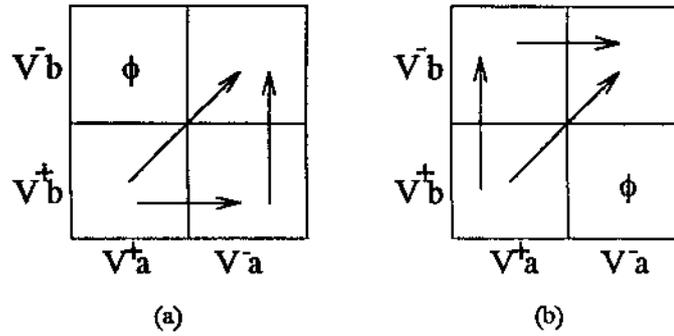


Figura 3.9: Se dois cortes a e b que não se cruzam possuem uma aresta em comum, então ou (a) $V^-b \subseteq V^-a$ ou (b) $V^-a \subseteq V^-b$

Seja $e = (u, v)$ uma aresta e $d_{i_0}, \dots, d_{i_{m-1}}$ os cortes de \mathcal{L} que contêm e , com a ordenação descrita acima. Definimos $w_e : \{i_0, \dots, i_{m-1}\} \rightarrow N$ como a função para a qual $w_e(i_j) = \pi(v) + j$, para $j \in N_{<m}$.

Exemplo:

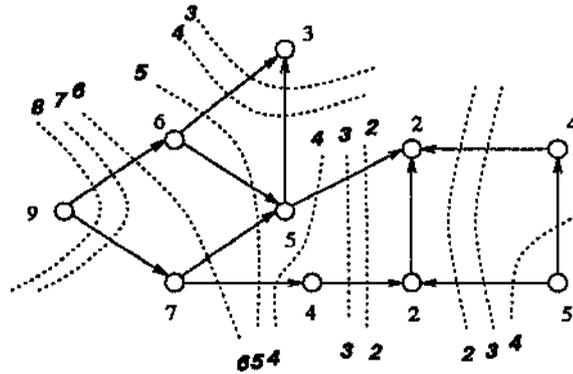


Figura 3.10: Uma família de cortes orientados e a função w que associa números inteiros consecutivos aos cortes que contêm um aresta em comum.

Mostraremos abaixo que o valor $w_e(i)$ é o mesmo em relação às diferentes arestas de d_i e portanto a função w_e induz uma função $w : N_{<r} \rightarrow N$ que associa a cada corte um valor inteiro.

Lema 3.13 *Seja um corte orientado $d_i \in \mathcal{L}$ e $e' = (u', v')$, $e'' = (u'', v'')$ duas arestas de d_i . Então $w_{e'}(i) = w_{e''}(i)$.*

Prova: Pela definição da função w , temos:

$$w_{e'}(i) = \pi(v') + |\mathcal{D}'| + |\mathcal{C}| \text{ e}$$

$$w_{e''}(i) = \pi(v'') + |\mathcal{D}''| + |\mathcal{C}|,$$

onde \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' e \mathcal{C} são as subfamílias de \mathcal{L} definidas abaixo. Lembre-se que $\mathcal{L}|F$ é a restrição da família \mathcal{L} ao conjunto F :

$$\mathcal{D}' := \mathcal{L} \setminus \{d \in \mathcal{L} : e' \in d, e'' \notin d \text{ e } V^-d \subset V^-d_i\},$$

$$\mathcal{D}'' := \mathcal{L} \setminus \{d \in \mathcal{L} : e' \notin d, e'' \in d \text{ e } V^-d \subset V^-d_i\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C} := \sum_{j=0}^{r-1} \{d_j \in \mathcal{L} : e' \in d_j, e'' \in d_j \text{ e } V^-d_j \subset V^-d_i \text{ ou } d_j = d_i, j < i\}.$$

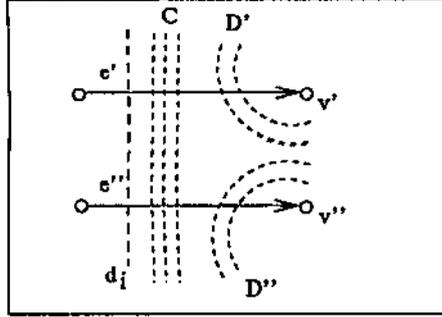


Figura 3.11: Ilustração da demonstração do lema 3.13

Vamos mostrar que

$$\pi(v') - \pi(v'') = |\mathcal{D}''| - |\mathcal{D}'|. \quad (3.1)$$

Seja $d \in \mathcal{L}$.

1. $v' \in V^+d$ e $v'' \notin V^+d$ se e somente se $d \in \mathcal{D}''$.

Suponha que $v' \in V^+d$ e $v'' \notin V^+d$. É claro que $e' \notin d$. Como d e d_i não podem se cruzar, então $e'' \in d$. Como \mathcal{L} é laminar e $d \neq d_i$, então ou $V^-d \subset V^-d_i$ ou $V^-d_i \subset V^-d$. Mas $v' \in V^-d_i$ e $v' \notin V^-d$. Assim, $V^-d \subset V^-d_i$ e portanto $d \in \mathcal{D}''$. Reciprocamente, se $d \in \mathcal{D}''$ então $v'' \in V^-d$ e como $V^-d \subset V^-d_i$ e $e' \notin d$, então $v' \in V^+d$.

2. $v' \notin V^+d$ e $v'' \in V^+d$ se e somente se $d \in \mathcal{D}'$.

Este caso é análogo ao anterior, trocando-se os papéis de \mathcal{D}' e \mathcal{D}'' e de v' e v'' .

Os casos 1 e 2 mostram que a igualdade 3.1 é verdadeira e portanto $w_{e'}(i) = w_{e''}(i)$. \square

Teorema 3.14 (Teorema da Partição) *Seja $D = (V, E)$ um dígrafo. Seja \mathcal{L} uma família laminar de cortes orientados k -disjunta. Então existe uma partição de \mathcal{L} em k famílias disjuntas, isto é, existem famílias disjuntas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$, tais que $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_i$.*

Prova: O Lema 3.13 mostrou que a função w que associa a cada cópia de cortes de \mathcal{L} um valor inteiro está bem definida. Pela definição de w sabemos que os cortes que contêm uma mesma aresta são associados por w a valores consecutivos. Considere a partição de \mathcal{L} definida pelas famílias $\mathcal{L}_j = \{d_i \in \mathcal{L} : w(i) \equiv j \pmod{k}\}$, para $0 \leq j \leq k-1$. Como uma aresta é usada no máximo k vezes por \mathcal{L} e como os cortes que a contêm estão associados a

valores consecutivos, então cada um destes cortes pertence a uma família diferente desta partição e portanto cada família \mathcal{L}_j é disjunta. \square

A figura 3.10 mostra uma família 3-disjunta e os valores que a função w associa a cada corte. Se tomarmos as famílias dos cortes para os quais w associa valores pertencentes aos conjuntos $\{0, 3, 6, \dots\}$, $\{1, 4, 7, \dots\}$ e $\{2, 5, 8, \dots\}$, respectivamente, obteremos três famílias disjuntas que formam uma partição da família original.

Usando a mesma idéia, podemos demonstrar a seguinte generalização do Teorema 3.14:

Teorema 3.15 (Teorema da Partição Balanceada) *Seja $D = (V, E)$ um dígrafo. Seja \mathcal{L} uma família laminar de cortes orientados e k um valor inteiro maior do que 0. Então existe uma partição de \mathcal{L} em k famílias $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{k-1}$, tais que para cada $i \in N_{<k}$ e cada $e \in E$,*

$$\lfloor \frac{\#\mathcal{L}(e)}{k} \rfloor \leq \#\mathcal{L}_i(e) \leq \lceil \frac{\#\mathcal{L}(e)}{k} \rceil.$$

\square

3.5 Partição de uma Família de T -cortes

Na seção anterior mostramos como as famílias de cortes orientados podem ser particionadas em famílias disjuntas. Nesta seção abordamos o problema de particionar uma família de T -cortes em grafos bipartidos. No capítulo seguinte utilizaremos estes resultados para provar os Teoremas de Lovász e de Seymour.

Ao contrário das famílias de cortes orientados, existem famílias laminares k -disjuntas de T -cortes em grafos bipartidos que não podem ser particionadas em k famílias disjuntas. Este é o caso do exemplo da figura 3.13. Entretanto, mostraremos que é possível transformar uma família k -disjunta qualquer de T -cortes em uma família k -disjunta que pode ser particionada.

Seja um grafo bipartido e uma partição do seu conjunto de vértices nos conjuntos V^+ e V^- de forma que toda aresta do grafo possui uma ponta em V^+ e a outra em V^- . Diremos que uma família de cortes do grafo é *válida* quando ao orientarmos cada aresta do grafo do vértice em V^+ para o vértice em V^- , cada corte da família se torna um corte orientado do dígrafo obtido. Veja a figura 3.12.

Mostramos adiante que sempre existe uma família k -disjunta máxima de T -cortes que é válida e laminar. Uma família válida de T -cortes corresponde a uma família de cortes orientados do dígrafo obtido orientando-se as arestas de V^+ para V^- . Assim, o Teorema da Partição da seção anterior implica que uma família k -disjunta válida e laminar de T -cortes pode ser particionada em k famílias disjuntas. Daí temos o seguinte teorema:

Exemplos:

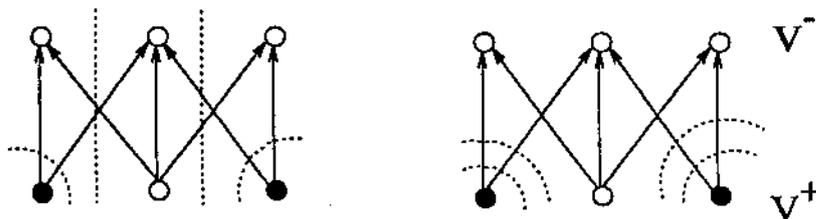


Figura 3.12: Uma família de cortes que não é válida e uma que é válida. As setas que aparecem na ilustração servem apenas para facilitar a compreensão, já que o conceito se aplica a grafos não orientados.

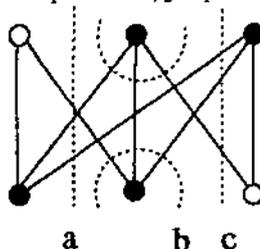


Figura 3.13: Uma família 2-disjunta de T -cortes que não pode ser particionada em duas famílias disjuntas. Ocorre que os cortes a , b e c se intersectam mutuamente. Note que os cortes a e c não são válidos.

Teorema 3.16 *Em um grafo bipartido, qualquer família \mathcal{F} k -disjunta de T -cortes corresponde a uma família de T -cortes de mesma cardinalidade, k -disjunta e que pode ser particionada em k famílias disjuntas.*

Prova: Se a família \mathcal{F} não for laminar, então obtemos uma família \mathcal{L} que é laminar e tal que $|\mathcal{L}| = |\mathcal{F}|$. Pelo lema 3.17 sabemos que existe uma família \mathcal{L}' k -disjunta de T -cortes com $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$ que é válida e que, portanto, pode ser particionada em k famílias disjuntas. \square

Lema 3.17 *Seja $B = (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição (V^+, V^-) . Seja $T \subseteq V$, tal que $|T|$ seja par. Se \mathcal{L} é uma família laminar de T -cortes de B , então existe uma família \mathcal{L}' de T -cortes de B que é válida, laminar e tal que $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$.*

Prova:

1. Base da Indução: Se todos os cortes da família são triviais então a família satisfaz a propriedade desejada pois cada T -corte poderá ser definido por um vértice que é ou uma fonte ou um sorvedouro do dígrafo D_G obtido orientando-se as arestas do grafo do conjunto V^+ para o conjunto V^- .
2. Seja \mathcal{L} uma família k -disjunta máxima de T que seja laminar³. Suponha que o Teorema é verdadeiro para todo grafo com menos vértices do que B ou se existir uma família \mathcal{L}' laminar tal que $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$ e que possui mais cortes triviais do que \mathcal{L} .

³A existência das famílias laminares foi discutida na seção 3.3

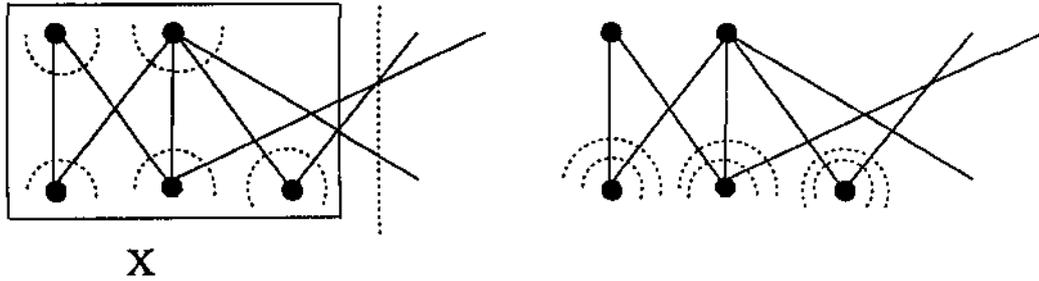


Figura 3.14: Exemplo da operação do item 4 da demonstração do lema 3.17.

3. Suponha que existe um T -corte $d = \delta(v)$ em \mathcal{L} que é trivial e tal que $\mathcal{L}(d) = k$. Seja B_d o grafo bipartido obtido a partir de B contraindo-se os vértices de $W = \{v\} \cup \text{Adj}(v)$ em um único vértice v' . Tome $T' = T \setminus W$ e acrescente v' a T' se $|W \cap T|$ for ímpar. Pela hipótese da indução, o grafo B_d possui uma família \mathcal{L}' de T' -cortes que é k -disjunta, laminar e válida e tal que $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L} - k \cdot \delta(v)| = |\mathcal{L}| - k$. As seguintes propriedades são verdadeiras em relação à família $\mathcal{C} = \mathcal{L}' + k \cdot \delta(v)$:

- i. \mathcal{C} é uma família de T -cortes k -disjunta em B ;
- ii. \mathcal{C} é válida, laminar e
- iii. $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{L}|$.

Os itens i e ii são triviais. O item iii é verdadeiro pois $|\mathcal{C}| = |\mathcal{L}'| + k \geq |\mathcal{L}|$.

4. Seja $X \subset V$ minimal tal que $\delta(X) \in \mathcal{L}$ e $\delta(X)$ não é trivial.

Seja $A = V^+ \cap X \cap T$ e $B = V^- \cap X \cap T$. Se necessário, troque as definições de A e B de forma que $|A| > |B|$ (lembre-se que $X \cap T$ é ímpar). Seja

$$\mathcal{L}^+ = \sum_{v \in A} 1 \cdot \delta(v) \text{ e}$$

$$\mathcal{L}^- = \sum_{v \in B, \delta(v) \in \mathcal{L}} 1 \cdot \delta(v).$$

Tome $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - (\mathcal{L}^- + \delta(X)) + \mathcal{L}^+$. Veja a figura 3.14.

- i. $|\mathcal{L}'| \geq |\mathcal{L}|$ porque $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}| - (|\mathcal{L}^-| + 1) + |\mathcal{L}^+|$ e $|\mathcal{L}^+| \geq |\mathcal{L}^-| + 1$.
- ii. \mathcal{L}' é k -disjunta e laminar. Seja $\delta(v) \in \mathcal{L}^+$. Seja $e := \{u, v\} \in \delta(v)$. Se $e \in \delta(X)$, então pela definição de \mathcal{L}' , é fácil verificar que $\#_{\mathcal{L}'}(e) = \#_{\mathcal{L}}(e)$. Suponha então que $e \notin \delta(X)$. Como \mathcal{L} é laminar e X é minimal, os únicos cortes de \mathcal{L} que podem conter e são os cortes triviais $\delta(u)$ e $\delta(v)$. Se $\delta(u) \notin \mathcal{L}$ então $\#_{\mathcal{L}'}(e) \leq k$ pois pelo item 3 sabemos que $\mathcal{L}(\delta(v)) < k$. Caso $\delta(u) \in \mathcal{L}$ então $u \in B$ e portanto pela definição de \mathcal{L}' , temos também que $\#_{\mathcal{L}'}(e) \leq \#_{\mathcal{L}}(e)$.

A laminaridade de \mathcal{L}' é uma consequência direta da definição de \mathcal{L}' .

Como o número de cortes triviais de \mathcal{L}' é maior do que o de \mathcal{L} , então a hipótese da indução implica a existência da família de cortes válida. \square

Podemos ver esta demonstração como um algoritmo que transforma uma família laminar qualquer em uma família laminar que é válida. A demonstração que apresentamos acima é similar à utilizada por Lovász em [LP86].

Capítulo 4

Os Teoremas

Neste capítulo iremos apresentar os principais teoremas deste trabalho. Eles correspondem a diversas igualdades minimax que relacionam famílias de cortes com coberturas mínimas dos cortes do grafo. Mostraremos que apesar destes teoremas tratarem de objetos distintos, podemos demonstrá-los de forma semelhante. Para alcançar este objetivo empregaremos os resultados sobre laminarização da seção 3.3 e sobre partição de famílias de cortes das seções 3.4 e 3.5.

Na seção 4.1 apresentamos o método do elemento essencial que permite provarmos igualdades minimax que envolvem famílias disjuntas e coberturas em geral. Na seção 4.2 é apresentado o Teorema de Lucchesi-Younger e na seção 4.3 os teoremas de Lovász e de Seymour.

A seção 4.4 mostra uma generalização do Teorema de Lucchesi-Younger que estabelece uma igualdade minimax envolvendo as k -coberturas mínimas dos cortes orientados, isto é, conjuntos de arestas que intersectam cada corte orientado em pelo menos k arestas. Apresentaremos uma demonstração original para esta igualdade que consiste na utilização de técnicas que são generalizações daquelas utilizadas nas demonstrações dos teoremas das seções anteriores.

Na seção 4.5 abordamos o problema da existência de uma igualdade minimax que envolva as k -coberturas dos T -cortes. Mostramos que se $|T| = 2$, então podemos provar um resultado análogo ao Teorema de Edmonds-Giles. Apresentamos uma conjectura para o caso em que $|T| = 4$.

Na seção 4.6 apresentamos igualdades minimax para circuitos em grafos planares que são conseqüências dos teoremas apresentados nas seções 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente.

4.1 O Método do Elemento Essencial

Vamos temporariamente deixar os grafos e os dígrafos de lado e trabalhar em um contexto um pouco mais geral.

Seja E um conjunto finito qualquer. Seja $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ tal que $F_i, F_j \in \mathcal{F}$ e $F_i \subseteq F_j$ implicam que $i = j$. Chamaremos uma família de subconjuntos com esta propriedade de *coleção básica*. Dizemos que um conjunto $t \subseteq E$ é uma *cobertura de \mathcal{F}* se para todo $d \in \mathcal{F}$, $t \cap d \neq \emptyset$. Seja $\nu(\mathcal{F})$ a cardinalidade máxima de uma família disjunta de elementos de \mathcal{F} e $\tau(\mathcal{F})$ a cardinalidade de uma cobertura mínima de \mathcal{F} . Ao longo deste capítulo usaremos freqüentemente esta notação e quando a família \mathcal{F} estiver claramente definida pelo contexto, usaremos simplesmente os símbolos ν e τ .

Um fato trivial é que $\nu(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F})$, pois se \mathcal{F} contém k conjuntos disjuntos, uma cobertura de \mathcal{F} deve conter pelo menos k elementos.

Exemplo: Todos os exemplos dados no capítulo 2.1 podem ser vistos sob esta ótica. Em particular, o Teorema de Menger afirma que se E é o conjunto de arestas de um grafo conexo e $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ é a coleção de todos os caminhos que ligam s a t , então $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$. Note que as coberturas minimais de todos os caminhos entre s e t são exatamente os cortes minimais que separam s de t . O dual desse Teorema diz que se \mathcal{D} é o conjunto de todos os cortes que separam s de t , então $\nu(\mathcal{D}) = \tau(\mathcal{D})$.

Passaremos agora a descrever um método para provarmos a igualdade $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$. Seja $E' \subseteq E$. Definiremos $\nu(\mathcal{F}, E')$ como sendo a cardinalidade máxima de uma família disjunta de elementos de \mathcal{F} contidos em E' e $\tau(\mathcal{F}, E')$ é a cardinalidade mínima de uma cobertura dos elementos de \mathcal{F} contidos em E' . Note que $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F}, E)$ e $\tau(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F}, E)$. Resumindo:

$$\nu(\mathcal{F}, E') := \max\{|\mathcal{F}'| : \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \cap 2^{E'}, \mathcal{F}' \text{ disjunta}\};$$

$$\tau(\mathcal{F}, E') := \min\{|t| : t \subseteq E' \text{ e } (F \in \mathcal{F} \cap 2^{E'} \Rightarrow F \cap t \neq \emptyset)\}.$$

O *método do elemento essencial* é um meio de demonstrarmos que $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$. Ele consiste em uma indução sobre a cardinalidade do conjunto E' que é efetuado retirando-se um *elemento essencial* do conjunto E' . A seguir definiremos o conceito de elemento essencial.

Um elemento x de E' é *essencial* em relação a um par (\mathcal{F}, E') se ele é usado por todas as famílias disjuntas máximas de $\mathcal{F} \cap 2^{E'}$, isto é, $\nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{x\}) < \nu(\mathcal{F}, E')$.

Teorema 4.1 *Se, para todo $E'' \subseteq E'$ tal que $\nu(\mathcal{F}, E'') > 0$, o par (\mathcal{F}, E'') possui um elemento essencial, então $\nu(\mathcal{F}, E') = \tau(\mathcal{F}, E')$.*

Prova: Se $E' = \emptyset$ então $\nu(\mathcal{F}, E') = \tau(\mathcal{F}, E') = 0$. Suponha por hipótese de indução que $\nu(\mathcal{F}, E'') = \tau(\mathcal{F}, E'')$ para todo E'' tal que $|E''| < |E'|$. Por hipótese, (\mathcal{F}, E') possui um elemento essencial $e \in E'$. Pela hipótese da indução, $\nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\}) = \tau(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\})$ e portanto existe um conjunto $t' \subseteq E' \setminus \{e\}$ com $|t'| = \nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\})$ que cobre todos os conjuntos de \mathcal{F} que estão contidos em $E' \setminus \{e\}$. Então $t := t' \cup \{e\}$ cobre $\mathcal{F} \cap 2^{E'}$ e $|t| = |t'| + 1 = \nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\}) + 1 \leq \nu(\mathcal{F}, E')$, donde $|t| \leq \nu(\mathcal{F}, E')$. Mas a desigualdade

$\tau(\mathcal{F}, E') \geq \nu(\mathcal{F}, E')$ é trivialmente válida, porque para cobrirmos uma família disjunta de cardinalidade k precisa-se de pelo menos k elementos. Isso implica que t é uma cobertura mínima e que $\tau(\mathcal{F}, E') = \nu(\mathcal{F}, E')$ como queríamos demonstrar. \square .

Em geral a recíproca deste Teorema não é verdadeira. Tome $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathcal{F} = \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}$. Este exemplo corresponde aos cortes ímpares de um K_4 com uma das arestas subdivididas por um vértice. O conjunto $\{1, 5\}$ é uma cobertura mínima de \mathcal{F} e os conjuntos $\{1, 4, 7\}$ e $\{2, 5, 6\}$ são dois conjuntos disjuntos, de forma que $\nu(\mathcal{F}, E) = \tau(\mathcal{F}, E)$. Se tomarmos o conjunto $E' := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, podemos verificar que $\nu(\mathcal{F}, E') = 1 < \tau(\mathcal{F}, E') = 2$ e que E' de fato não possui nenhum elemento essencial.

Apesar do exemplo que acabamos de mostrar, se $\nu(\mathcal{F}, E') = \tau(\mathcal{F}, E') > 0$, então existe um elemento essencial em E' . Qualquer aresta contida em uma cobertura mínima de $\mathcal{F} \cap 2^{E'}$ é essencial. Se t é uma cobertura mínima de $\mathcal{F} \cap 2^{E'}$ e $e \in t$, então $t \setminus \{e\}$ cobre todos os conjuntos que não usam e . Assim, $\nu(\mathcal{F}, E') = \tau(\mathcal{F}, E') = \tau(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\}) + 1 > \nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\})$. Logo $\nu(\mathcal{F}, E' \setminus \{e\}) < \nu(\mathcal{F}, E')$ e portanto e é um elemento essencial.

O Caso Ponderado

As igualdades minimax relacionadas com famílias disjuntas máximas e coberturas mínimas de coleções básicas podem ser generalizadas para casos ponderados. Seja $c : E \rightarrow N$ e $\mathcal{F} \subseteq 2^E$. Dizemos que \mathcal{F} é c -disjunta se cada elemento $e \in E$ é usado no máximo $c(e)$ vezes pela família. Podemos interpretar $c(e)$ como sendo a *capacidade* do elemento e . O *valor* $c(t)$ de uma cobertura t de \mathcal{F} é definido como $\sum_{e \in t} c(e)$. Neste caso é interessante interpretar o valor $c(e)$ como sendo o custo de usarmos o elemento e .

Denotaremos por $\nu_c(\mathcal{F})$ o tamanho de uma família c -disjunta máxima de conjuntos de \mathcal{F} . Por $\tau_c(\mathcal{F})$ denotaremos o valor de uma cobertura de \mathcal{F} de valor mínimo.

Seja uma família \mathcal{F} e uma função $c : E \rightarrow N$. Um elemento $x \in E$ é *essencial* em relação ao par (\mathcal{F}, c) se $c(x) > 0$ e ele é usado $c(x)$ vezes por todas as famílias c -disjuntas máximas. Assim, se $x \in E$ é um elemento essencial, então $\nu_c(\mathcal{F}) > \nu_{c'}(\mathcal{F})$, onde $c'(e) = c(e)$ se $e \neq x$ e $c'(x) = c(x) - 1$.

Usando o mesmo raciocínio indutivo utilizado na prova do Teorema do Elemento Essencial, podemos mostrar que $\nu_c(\mathcal{F}) = \tau_c(\mathcal{F})$ sempre que existir um elemento essencial para cada par (\mathcal{F}, c') , onde $c' : E \rightarrow N$ é tal que $c'(E) \leq c(E)$.

Na seção 4.4 teremos a oportunidade de apresentar um exemplo deste método.

4.2 O Teorema de Lucchesi-Younger

Nesta seção estudaremos o Teorema de Lucchesi-Younger. Este Teorema foi demonstrado originalmente por Cláudio L. Lucchesi e Daniel H. Younger no início dos anos setenta [Luc76, LY78]. O Teorema é uma igualdade minimax que relaciona a cardinalidade de famílias disjuntas de cortes orientados com a cardinalidade de coberturas mínimas dos cortes orientados de um dígrafo. Este problema, portanto, se enquadra no modelo de problemas apresentados até aqui e em particular ao modelo de coleções básicas apresentado na seção anterior, aonde o Método do Elemento Essencial foi apresentado. A demonstração que apresentamos é baseada em [LY78]. L. Lovász [Lov76] apresenta outra prova para o Teorema. O enunciado da igualdade minimax é o seguinte:

Teorema 4.2 (Lucchesi-Younger) *Em um dígrafo, uma cobertura mínima dos cortes orientados tem a mesma cardinalidade de uma família disjunta máxima de cortes orientados.*

Em termos de coleções básicas, o Teorema afirma que se $D = (V, E)$ é um dígrafo qualquer e \mathcal{F} é o seu conjunto de cortes orientados, então $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$. Se mostrarmos que qualquer conjunto $E' \subseteq E$ tal que $\nu(\mathcal{F}, E') > 0$ contém um elemento (ou aresta) essencial em relação à \mathcal{F} , então o Teorema do Elemento Essencial implicará a igualdade desejada. Utilizando o Teorema da Partição, apresentado na seção 3.4, provaremos que de fato esta aresta essencial sempre existe. Na verdade provaremos que todo corte orientado contido em E' contém pelo menos uma aresta essencial.

O Teorema da Partição afirma que uma família k -disjunta e laminar de cortes orientados pode ser particionada em k famílias disjuntas. Uma consequência fundamental deste Teorema é o seguinte lema:

Lema 4.3 *A cardinalidade de uma família k -disjunta máxima (ν_k) de cortes orientados é igual a k vezes a cardinalidade de uma família disjunta máxima de cortes orientados ($k \cdot \nu$).*

Prova: A desigualdade $\nu_k \geq k \cdot \nu$ é trivial pois dada uma família disjunta \mathcal{F} de cortes orientados, a família $k \cdot \mathcal{F}$ é k -disjunta e sua cardinalidade é $k \cdot |\mathcal{F}|$. Por outro lado, se \mathcal{L} é uma família k -disjunta de cortes orientados, então podemos obter uma família laminar \mathcal{L}' tal que $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}|$. O Teorema da Partição afirma que \mathcal{L}' pode ser particionada em k famílias disjuntas tais que a soma de suas cardinalidades é igual à cardinalidade de \mathcal{L}' . Assim, o tamanho da maior destas famílias será maior do que ou igual a $\frac{|\mathcal{L}'|}{k}$ e portanto $k \cdot \nu \geq \nu_k$. \square

Os cortes orientados contidos em $\mathcal{F} \cap 2^{E'}$ são os cortes orientados do dígrafo obtido a partir de D contraindo-se as arestas de $E \setminus E'$. Assim, podemos estender o lema acima e afirmar que $\nu_k(\mathcal{F}, E') = k \cdot \nu(\mathcal{F}, E')$ para todo $E' \subseteq E$.

Teorema 4.4 *Se \mathcal{F} é a coleção de cortes orientados de um dígrafo e $E' \subseteq E$ é tal que $\nu(\mathcal{F}, E') > 0$, então E' contém uma aresta essencial.*

Prova: Seja d um corte orientado, $d \in \mathcal{F}$, tal que $d \subseteq E'$. A existência de d é garantida pela hipótese de que $\nu(\mathcal{F}, E') > 0$. Vamos provar que pelo menos uma das arestas de d é essencial em relação ao par (\mathcal{F}, E') .

Seja $k = |d|$ e $d = \{e_1, \dots, e_k\}$. Suponha por absurdo que d não contém uma aresta essencial. Assim, para cada aresta $e_i \in d$, existe uma família disjunta \mathcal{F}_i de cortes orientados contidos em $E' \setminus e_i$ tal que $|\mathcal{F}_i| = \nu(\mathcal{F}, E')$.

Seja $\mathcal{L} = (\sum_{i=1}^k \mathcal{F}_i) + 1.d$. A família \mathcal{L} é k -disjunta, pois cada família \mathcal{L}_i é disjunta e as arestas do corte d são usadas no máximo em $k - 1$ destas famílias.

Por definição, a cardinalidade de \mathcal{L} é $k \cdot \nu(\mathcal{F}, E') + 1$. Mas isso implica que $\nu_k(\mathcal{F}, E') > k \cdot \nu(\mathcal{F}, E')$, o que é uma contradição. \square

Com esse último resultado, acabamos de provar o Teorema de Lucchesi-Younger. É natural perguntarmos se o Teorema 4.2 pode ser generalizado a uma versão ponderada. A resposta é afirmativa e resulta no seguinte teorema:

Teorema 4.5 (Lucchesi-Younger – versão ponderada) *Seja $D = (V, E)$ um dígrafo e $c : E \rightarrow N$ uma função. Então o tamanho de uma família c -disjunta de cortes orientados é igual ao valor mínimo de uma cobertura dos cortes orientados.*

Este teorema pode ser demonstrado utilizando-se a versão ponderada do método da aresta essencial. Não apresentaremos esta demonstração por duas razões. Em primeiro lugar, o Teorema 4.5 é um caso particular do Teorema de Edmonds-Giles que provaremos na seção 4.4 e além disso porque podemos considerá-lo como um corolário do Teorema 4.2. Podemos associar a um dígrafo $D = (V, E)$ com ponderação $c : E \rightarrow N$ um dígrafo não ponderado $D' = (V', E')$ onde V' contém V e para cada aresta $(u, v) \in E$, associamos um caminho orientado começando em u e terminando em v com comprimento $c(e)$. Assim, uma família c -disjunta de cortes orientados de D corresponde a uma família disjunta de cortes orientados em D' e vice-versa. Além disso, cada cobertura de valor k em D corresponde a uma cobertura de cardinalidade k em D' . Aplicando-se o Teorema 4.2 a D' , obtemos a igualdade desejada para o dígrafo D e a função c .

4.3 Os Teoremas de Lovász e Seymour

Os Teoremas de Lovász e de Seymour possuem enunciados bastante semelhantes ao do Teorema de Lucchesi-Younger. Eles também comparam a cardinalidade de uma família máxima de cortes com a de uma cobertura mínima. Entretanto, ao invés de cortes orientados, estes resultados tratam de T-cortes. Mostraremos que o método da aresta essencial também é eficaz neste contexto. O enunciado do Teorema de Lovász é o seguinte:

Teorema 4.6 (Lovász) *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $T \subseteq V$ tal que $|T|$ seja par. Então, a cardinalidade de uma família máxima 2-disjunta de T -cortes é igual ao dobro da cardinalidade de uma cobertura mínima dos T -cortes, isto é, $\nu_2 = 2 \cdot \tau$.*

Lembre-se que como os T -cortes generalizam os cortes ímpares, o teorema enunciado acima implica que a cardinalidade de uma família máxima 2-disjunta de cortes ímpares é igual ao dobro da cardinalidade de uma cobertura mínima dos cortes ímpares.

Uma diferença importante deste teorema para os demais vistos até aqui é a necessidade de trabalharmos com famílias 2-disjuntas de cortes ao invés de famílias disjuntas. A questão é que existem grafos para os quais a igualdade minimax não ocorre ao compararmos famílias disjuntas máximas com T -junções mínimas. Este é o caso do grafo completo de quatro vértices (K_4) e do grafo de Petersen, ambos com $T = V$. No primeiro caso $\nu = 1$ e $\tau = 2$ e no segundo $\nu = 4$ e $\tau = 5$. Veja a figura 4.1.

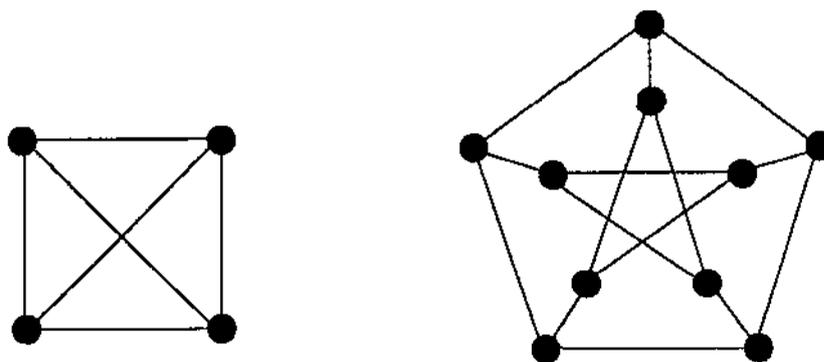


Figura 4.1: K_4 e o Grafo de Petersen: exemplos de grafos cujas T -junções mínimas são estritamente maiores do que as famílias disjuntas máximas de T -cortes.

No caso dos grafos bipartidos a igualdade é válida para famílias disjuntas, resultado provado originalmente por Seymour em [Sey81]. O enunciado desta igualdade é o seguinte:

Teorema 4.7 (Seymour – grafos bipartidos) *Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido conexo e $T \subseteq V$ tal que $|T|$ seja par. Então, a cardinalidade de uma família disjunta máxima de T -cortes é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima dos T -cortes.*

Mostraremos inicialmente que o Teorema de Seymour implica o Teorema de Lovász. Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos o grafo bipartido B_G como sendo o grafo obtido a partir de G através da subdivisão de cada uma de suas arestas por um vértice. Daqui em diante, $\nu_k(G)$ denota o tamanho de uma família k -disjunta máxima de T -cortes de G .

Lema 4.8 *Dado um grafo $G = (V, E)$ e $T \subseteq V$ tal que $|T|$ seja par, então $\nu_{2k}(G) = \nu_k(B_G)$.*

Prova: Dada uma aresta $e \in E$, seja v_e o vértice de B_G que subdividiu e . Cada família $2k$ -disjunta de T -cortes de G corresponde a uma família k disjunta de B_G com a mesma cardinalidade, pois podemos associar aos cortes que utilizam uma dada aresta $e = \{u, v\}$ cortes em B_G tais que metade deles use a aresta $\{u, v_e\}$ e a outra metade use $\{v_e, v\}$. Logo, $\nu_k(B_G) \geq \nu_{2k}(G)$.

Por outro lado, se \mathcal{F} é uma família k -disjunta de T -cortes de B_G , podemos associá-la a uma família $2k$ -disjunta de G . Se $e := \{u, v\} \in E$, então o número de cortes de \mathcal{F} que possuem u e v em margens opostas é de no máximo $2k$, pois cada um destes cortes deve conter a aresta $\{u, v_e\}$ ou a aresta $\{v_e, v\}$. Portanto, para cada corte $\delta(X) \in \mathcal{F}$, podemos associar o corte $\delta(X \cap V)$ de G e teremos desta forma uma família $2k$ -disjunta de T -cortes. Logo $\nu_{2k}(G) \geq \nu_k(B_G)$. \square

Além da relação estabelecida pelo lema acima, é claro que $\tau(B_G) = 2 \cdot \tau(G)$. Assim, como o Teorema de Seymour implica que $\nu(B_G) = \tau(B_G)$, temos que $\nu_2(G) = \nu(B_G) = \tau(B_G) = 2 \cdot \tau(G)$, o que implica o Teorema de Lovász. Adiante provaremos que no caso dos grafos bipartidos temos que $\nu_k(G) = k \cdot \nu(G)$. Entretanto, este resultado não será suficiente para provarmos o Teorema de Seymour da mesma forma como provamos o Teorema de Lucchesi-Younger. A razão disso é que a contração de arestas de um grafo bipartido pode resultar em um grafo que não é bipartido. Assim, se pretendemos encontrar uma demonstração análoga à utilizada na seção anterior, devemos aplicá-la ao Teorema de Lovász.

No caso dos grafos orientados, mostramos que $\nu_k = k \cdot \nu$. Apesar desta igualdade não ser verdadeira no caso dos T -cortes, podemos mostrar um resultado análogo que afirma que $\nu_{2k} = k \cdot \nu_2$. Este resultado será provado adiante e corresponde ao lema 4.11. Abaixo mostramos como este lema pode ser utilizado para que o Teorema de Lovász seja provado de forma análoga ao Teorema de Lucchesi-Younger. Utilizaremos também o lema 4.10, cuja demonstração igualmente será adiada, que afirma que toda família 2-disjunta máxima de T -cortes tem cardinalidade par.

Prova do Teorema de Lovász

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $T \subseteq V$ tal que $|T|$ seja par. Seja \mathcal{F} o conjunto de todos os T -cortes de G . Seja $E' \subseteq E$ tal que $\nu_2(\mathcal{F}, E') > 0$, isto é, existe pelo menos um T -corte de G contido em E' .

Assim como no Teorema 4.2, vamos mostrar que cada T -corte contido em E' contém uma aresta essencial em relação às famílias 2-disjuntas de T -cortes, isto é, que existe uma aresta $e \in E'$ tal que $\nu_2(G, E') > \nu_2(G, E' \setminus e)$. O lema 4.10 implica que se e é uma aresta essencial, então $\nu_2(G, E') \geq \nu_2(G, E' \setminus e) + 2$. Supondo por indução que $\nu_2(G, E'') = 2 \cdot \tau(G, E'')$ para todo $E'' \subset E'$, temos que $\nu_2(G, E') \geq \nu_2(G, E' \setminus e) + 2 =$ (pela h.i.) $2 \cdot \tau(G, E' \setminus e) + 2 \geq 2 \cdot (\tau(G, E') - 1) + 2 = 2 \cdot \tau(G, E')$. Concluimos assim que $\nu_2(G, E') \geq 2 \cdot \tau(G, E')$. Como $\nu_2(G, E') \leq 2 \cdot \tau(G, E')$ é trivial, provamos a igualdade $\nu_2(G, E') =$

$2 \cdot \tau(G, E')$. Passamos agora a provar que todo conjunto $E' \subseteq E$ possui uma aresta essencial.

Teorema 4.9 *Se \mathcal{F} é a coleção de T -cortes de um grafo e $E' \subseteq E$ é tal que $\nu(\mathcal{F}, E') > 0$, então E' contém uma aresta essencial.*

Prova: Seja $d = \{e_1, \dots, e_k\}$ um T -corte de G tal que $d \subseteq E'$. Suponha por absurdo que d não contém nenhuma aresta essencial. Então, para cada i de 1 até k existe uma família 2-disjunta \mathcal{L}_i contida em $E' \setminus \{e_i\}$ tal que $|\mathcal{L}_i| = \nu_2(\mathcal{F}, E')$. Seja $\mathcal{L}' = (\sum_{i=1}^k \mathcal{L}_i) + 2.d$.

Como \mathcal{L}' é $2k$ -disjunta e, por definição, $|\mathcal{L}'| = k \cdot \nu_2(\mathcal{F}, E') + 2$, tem-se que $\nu_{2k}(\mathcal{F}, E') > k \cdot \nu_2(\mathcal{F}, E')$. Isto contradiz o lema 4.11, que provaremos adiante. \square

Resta-nos provar os lemas 4.10 e 4.11. Começemos pelo mais simples.

Lema 4.10 *Toda família 2-disjunta máxima de T -cortes tem cardinalidade par.*

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo e $T \subseteq V$ tal que $|T|$ é par. Seja \mathcal{C} uma família 2-disjunta de T -cortes de G formada pelos cortes $\delta(X_0), \delta(X_1), \dots, \delta(X_{2r})$. Vamos mostrar que é possível acrescentar um novo T -corte a essa família e mantê-la 2-disjunta.

Seja $X := \bigoplus_{i=0}^{2r} X_i$.

1. $|X \cap T|$ é ímpar.

$|X_i \cap T|$ é ímpar para cada $i, 0 \leq i \leq 2r$. Portanto, $\sum_{i=0}^{2r} |X_i \cap T|$ também é ímpar. Mas,

$$\sum_{i=0}^{2r} |X_i \cap T| = \sum_{v \in T} \sum_{i=0}^{2r} |\{v\} \cap X_i|.$$

Existe portanto um número ímpar de vértices em T para os quais $\sum_{i=0}^{2r} |\{v\} \cap X_i|$ é ímpar. Por definição X contém exatamente esses vértices.

2. $\mathcal{C} + \delta(X)$ é 2-disjunta.

Já vimos que $\delta(X' \oplus X'') = \delta(X') \oplus \delta(X'')$ ¹. Portanto, $\delta(X) = \bigoplus_{i=0}^{2r} \delta(X_i)$. Logo $\delta(X)$ contém exatamente as arestas que estão contidas em apenas um dos cortes da família \mathcal{C} . Isso mostra que $\mathcal{C} + \delta(X)$ é 2-disjunta.

\square

Provaremos agora que $\nu_{2k} = k \cdot \nu_2$. Mostraremos que este resultado decorre do lema 4.12 que afirma que nos grafos bipartidos $\nu_k = k \cdot \nu$.

¹Veja a seção 1.1.

Lema 4.11 *A cardinalidade de uma família $2k$ -disjunta máxima de T -cortes é igual a k vezes a cardinalidade de uma família 2-disjunta máxima de T -cortes, ou seja, $\nu_{2k} = k \cdot \nu_2$.*

Prova: Pelo lema 4.12 que provaremos em seguida, temos que $\nu_k(B_G) = k \cdot \nu(B_G)$. Portanto, $\nu_{2k}(G) = \nu_k(B_G) = k \cdot \nu(B_G) = k \cdot \nu_2(G)$. Note que o lema 4.8 foi utilizado na primeira e na última igualdade. \square

Para concluir a demonstração do Teorema de Lovász resta provar que nos grafos bipartidos $\nu_k = k \cdot \nu$.

Lema 4.12 *Se B é um grafo bipartido, então $\nu_k(B) = k \cdot \nu(B)$.*

Prova: O Teorema 3.16 da seção anterior mostrou que sempre existe uma família k -disjunta máxima de T -cortes que pode ser particionada em k famílias disjuntas. A maior família desta partição tem cardinalidade maior do que ou igual a $\frac{|F|}{k}$ e portanto $k \cdot \nu(B) \geq \nu_k(B)$. A outra desigualdade é trivial e portanto o lema está provado. \square

O Teorema de Seymour segue agora como um corolário do Teorema de Lovász. Dado um grafo bipartido B , temos que $\nu_2(B) = 2 \cdot \tau(B)$. Mas pelo lema acima temos que $\nu_2(B) = 2 \cdot \nu(B)$ e portanto $\nu(B) = \tau(B)$.

Versão ponderada para os Teoremas de Lovász e Seymour

Assim como fizemos com o Teorema de Lucchesi-Younger, podemos também formular versões ponderadas para os Teoremas de Lovász e de Seymour. Os comentários que fizemos sobre aquela versão também são válidos neste contexto. A versão ponderada para o Teorema de Lovász tem o seguinte enunciado:

Teorema 4.13 *Seja $G = (V, E)$ um grafo, $T \subseteq V$, tal que $|T|$ é par e $c : E \rightarrow N$ uma função. Então o tamanho de uma família $2 \cdot c$ -disjunta de T -cortes de G é igual ao dobro do valor de uma cobertura de valor mínimo dos T -cortes de G .*

Sempre que todos os circuitos do grafo tiverem valor par em relação a função c , caso em que o grafo é dito c -bipartido, a igualdade é válida sem a necessidade de dobrarmos a capacidade de cada aresta. Isso ocorre pois quando substituimos cada aresta do grafo por um caminho de tamanho igual a capacidade de cada aresta, obtemos um grafo que é bipartido.

Grafos para os quais $\tau = \nu$

Já vimos que os grafos bipartidos são, em certo sentido, especiais com relação aos problemas tratados nesta seção. Para eles a igualdade minimax é válida sem que seja necessário permitirmos que cada aresta seja utilizada duas vezes. Perguntamos: para

quais grafos esta igualdade é válida? Infelizmente não se conhece uma boa caracterização para estes grafos.

Sempre que $|T| = 2$ a igualdade é válida. Neste caso, os T -cortes coincidem com os cortes que separam os dois vértices de T e as T -junções minimais são exatamente os caminhos entre os dois vértices. Como vimos na seção 2.1, o tamanho de um caminho mínimo entre dois vértices é igual ao número máximo de cortes disjuntos que os separam.

Uma outra situação em que a igualdade é válida ocorre quando consideramos os grafos série-paralelos. Esta classe de grafos é independente da classe dos grafos bipartidos, isto é, nenhuma delas está contida na outra. Esta classe é formada pelos grafos que podem ser obtidos a partir do K_2 através das seguintes operações: acrescentar novas cópias de arestas já existentes e subdividir uma aresta através da adição de um vértice. Temos então o seguinte teorema [LP86]:

Teorema 4.14 (Seymour) *Seja $G = (V, E)$ um grafo série-paralelo e $T \subseteq V$, $|T|$ par. Então a cardinalidade de uma família máxima disjunta de T -cortes é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima dos T -cortes.*

□

P. D. Seymour também provou, em [Sey81], a seguinte caracterização para os grafos nos quais vale a igualdade $\tau = \nu$, que se aplica ao caso em que $|T| = 4$.

Teorema 4.15 *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $T = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V$. Então $\tau = \nu$ se e somente se pelo menos uma das seguintes condições for válida. Denotaremos por d_{ij} a distância entre os vértices v_i e v_j :*

- i. $d_{12} + d_{34} > \tau$,
- ii. $d_{13} + d_{24} > \tau$,
- iii. $d_{14} + d_{23} > \tau$ ou
- iv. $d_{12} + d_{23} + d_{13}$ é par.

Antes de demonstrarmos o teorema, temos algumas observações a fazer. A primeira é que $d_{12} + d_{34} \geq \tau$, pois do contrário poderíamos tomar a diferença simétrica entre dois caminhos mínimos entre v_1 e v_2 e entre v_3 e v_4 , respectivamente, e obter uma T -junção de cardinalidade menor do que τ . A mesma observação se aplica aos itens ii e iii.

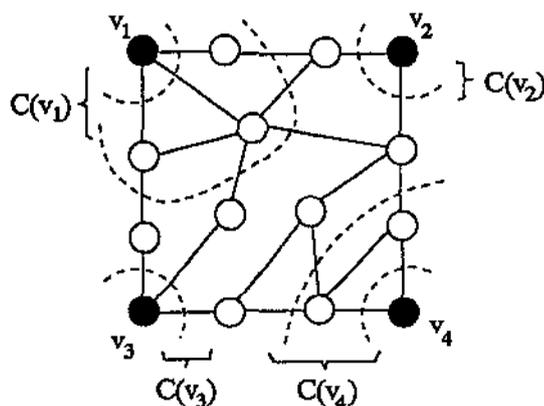
Outra observação diz respeito à aparente assimetria que o item iv apresenta. O que ocorre é que sempre que os itens i, ii e iii são falsos então a paridade de $d_{ij} + d_{jk} + d_{ik}$ é a mesma para quaisquer i, j e $k \subset \{1, 2, 3, 4\}$ distintos. Suponha que $d_{12} + d_{34} = d_{13} + d_{24} = d_{14} + d_{23} = \tau$. Mostraremos que $d_{12} + d_{23} + d_{13}$ e $d_{23} + d_{34} + d_{24}$ têm a mesma paridade. Como o termo d_{23} é comum aos dois somatórios, basta mostrarmos que $d_{12} + d_{13}$ e $d_{34} + d_{24}$

têm a mesma paridade. Dois números têm a mesma paridade se e somente se sua soma é par. Assim, basta provarmos que $d_{12} + d_{13} + d_{34} + d_{24}$ é par. De fato, por hipótese, esta soma vale 2τ .

Considere uma família \mathcal{C} disjunta máxima de T -cortes. Cada T -corte de G pode ser definido como $\delta(X)$ para algum $X \subseteq V$ tal que $|X \cap T| = 1$. Assim, seja $\mathcal{C}(v_i)$ a família de cortes de \mathcal{C} que têm v_i como o único vértice de T em uma de suas margens. Seja $c(v_i) = |\mathcal{C}(v_i)|$. É claro que $\{\mathcal{C}(v_i) : 1 \leq i \leq 4\}$ é uma partição de \mathcal{C} e portanto $\sum_{i=1}^4 c(v_i) = |\mathcal{C}| = \nu$. Podemos supor que \mathcal{C} é laminar. Na verdade, sem perda de generalidade, podemos supor que para cada v_i em T ,

$$\mathcal{C}(v) := \{\delta(\text{Adj}_i(v)) : 0 \leq i < c(v)\}, \text{ onde } \text{Adj}_i(v) := \{u \in V : d(v, u) \leq i\}.$$

Exemplo:



Dados dois vértices distintos v_i e v_j de T , a disjunção de \mathcal{C} implica que

$$c(v_i) + c(v_j) \leq d_{ij}.$$

A demonstração que segue é a mesma apresentada em [Sey81].

Demonstração do Teorema 4.15

Para provar a necessidade da condição, suponhamos que vale a igualdade minimax e que i, ii e iii são todas falsas. Vamos provar a validade de iv. Assim, vamos supor que $|\mathcal{C}| = \tau = d_{12} + d_{34} = d_{13} + d_{24} = d_{14} + d_{23}$ e provar que $d_{12} + d_{23} + d_{13}$ é par. De fato, $\tau = d_{12} + d_{34} \geq c(v_1) + c(v_2) + c(v_3) + c(v_4) = |\mathcal{C}| = \tau$. Logo $d_{12} = c(v_1) + c(v_2)$. Podemos mostrar da mesma maneira que $d_{23} = c(v_2) + c(v_3)$ e $d_{13} = c(v_1) + c(v_3)$. Somando-se estas igualdades temos que $d_{12} + d_{23} + d_{13} = 2 \cdot (c(v_1) + c(v_2) + c(v_3))$ que é par.

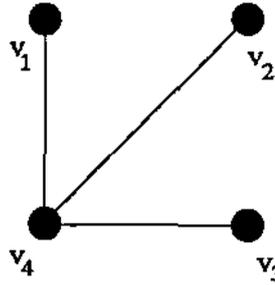
Passaremos agora a provar a suficiência da condição. Suporemos então que pelo menos uma das quatro condições é válida e provaremos que $\nu = \tau$.

Seja \mathcal{C} uma família disjunta máxima de T -cortes laminar.

Seja o grafo $H = (T, E_H)$, onde $E_H := \{\{v_i, v_j\} : c(v_i) + c(v_j) = d_{ij}, i \neq j\}$. O grafo H não contém vértices isolados, pois se v_i for isolado em H então podemos acrescentar $\delta_G(\text{Adj}_{c(v_i)}(v_i))$ a \mathcal{C} , uma contradição.

Vamos considerar inicialmente o caso em que o grafo H tem um par de arestas que não se intersectam. Suponhamos, por exemplo, que $\{v_1, v_2\} \in E_H$ e que $\{v_3, v_4\} \in E_H$. Assim, $c(v_1) + c(v_2) = d_{12}$ e $c(v_3) + c(v_4) = d_{34}$. Somando-se as duas igualdades temos que $|\mathcal{C}| = d_{12} + d_{34} \geq \tau$, o que implica a igualdade minimax.

Podemos então supor que H não tem um par de arestas que não se intersectam. Logo H é isomorfo ao grafo representado abaixo:



Sem perda de generalidade, suporemos que v_4 é o vértice de grau 3 em H .

Vamos considerar agora o caso em que $c(v_4) = 0$. Tomando-se a diferença simétrica dos três caminhos mínimos em G de v_4 a cada um dos outros três vértices, temos obviamente uma T -junção em G . Assim, $d_{14} + d_{24} + d_{34} \geq \tau$. Logo, $|\mathcal{C}| = c(v_1) + c(v_2) + c(v_3) = d_{14} + d_{24} + d_{34} \geq \tau$, o que implica a igualdade.

Podemos então supor que $c(v_4) > 0$. Seja $\mathcal{C}' := \mathcal{C} + \delta(\text{Adj}_{c(v_1)}(v_1)) + \delta(\text{Adj}_{c(v_2)}(v_2)) - \delta(\text{Adj}_{c(v_4)-1}(v_4))$.

Seja c' a função análoga a c para a família \mathcal{C}' . Portanto,

$$c'(v_1) = c(v_1) + 1;$$

$$c'(v_2) = c(v_2) + 1;$$

$$c'(v_3) = c(v_3);$$

$$c'(v_4) = c(v_4) - 1.$$

Como $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}| + 1$, então \mathcal{C}' não é uma família disjunta. Podemos concluir que $c'(v_1) + c'(v_2) > d_{12}$, isto é, $c(v_1) + c(v_2) \geq d_{12} - 1$. Mas como $\{v_1, v_2\} \notin E_H$, então

$$c(v_1) + c(v_2) = d_{12} - 1.$$

Analogamente podemos provar que

$$c(v_2) + c(v_3) = d_{23} - 1$$

e que

$$c(v_1) + c(v_3) = d_{13} - 1.$$

Se a condição i for verdadeira, isto é, $d_{12} + d_{34} > \tau$, então da primeira das três igualdades acima temos que

$$|\mathcal{C}| = c(v_1) + c(v_2) + c(v_3) + c(v_4) = d_{12} - 1 + d_{34} \geq \tau,$$

o que implica a igualdade minimax.

Analogamente, se a condição ii ou iii forem verdadeiras então pode-se mostrar a igualdade de forma análoga.

Finalmente, suponhamos que as três condições i, ii e iii são falsas. Nas observações iniciais notamos que as somas das distâncias envolvendo quaisquer três dos quatro vértices de T têm a mesma paridade. Somando-se as três igualdades que obtivemos temos

$$2(c(v_1) + c(v_2) + c(v_3)) = d_{12} + d_{23} + d_{13} - 3,$$

o que mostra que iv também é falsa, uma contradição. \square

4.4 O Teorema de Edmonds-Giles

Como vimos na seção 4.2, o Teorema de Lucchesi-Younger estabelece uma igualdade minimax envolvendo as coberturas dos cortes orientados de um dígrafo. Alguns anos após a descoberta daquela igualdade, J. Edmonds e R. Giles provaram uma outra igualdade que generaliza a primeira e que envolve as k -coberturas dos cortes orientados, isto é, conjuntos de arestas que intersectam cada corte orientado em pelo menos k arestas. Abaixo enunciamos uma primeira versão deste teorema.

Teorema 4.16 (Edmonds-Giles) *Seja $D = (V, E)$ um dígrafo e um inteiro $k \geq 1$ e menor do que ou igual ao tamanho de um corte orientado mínimo de D . Então, a cardinalidade de uma k -cobertura mínima dos cortes orientados de D é igual ao máximo, sobre todas as famílias \mathcal{C} de cortes orientados, da expressão:*

$$k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_{\mathcal{C}}(e) - 1\}.$$

Esta expressão é bem menos complexa do que parece. Dada uma família de cortes orientados, o seu valor é dado multiplicando o tamanho da família por k e subtraindo o número de vezes que cada aresta foi usada pela família menos 1, sempre que esse valor for positivo. Assim, para arestas usadas 0 ou 1 vezes pela família, não subtraímos nada. Já uma aresta usada 2 vezes corresponde a um decréscimo de 1, e assim por diante. Como mostra o exemplo (a) da figura 4.2, não seria suficiente comparar o tamanho das

k -coberturas com o valor igual a k vezes o tamanho de uma família disjunta. Para $k = 2$, o valor máximo que conseguimos para 2 vezes o tamanho de uma família disjunta é 2, enquanto que uma cobertura mínima tem tamanho 3. Porém, ao considerarmos a família representada na figura pelas linhas tracejadas que usa uma das arestas duas vezes, obtemos para a expressão $k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_c(e) - 1\}$ o valor $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

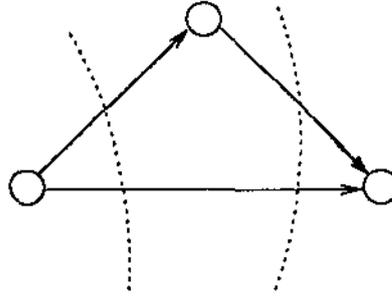


Figura 4.2: Um dígrafo para o qual é necessário que uma família de cortes orientados utilize uma aresta mais de uma vez para que a igualdade do Teorema 4.16 aconteça, para $k = 2$.

O Teorema 4.16 possui uma versão análoga para o caso de dígrafos ponderados. Este resultado será demonstrado com uma adaptação da versão ponderada do método da aresta essencial e utilizará também o Teorema da Partição Balanceada da seção 3.4.

Dado um dígrafo $D = (V, E)$, uma função $c : E \rightarrow N$ e uma família de cortes orientados de D , denotaremos por $\nu_c(\mathcal{C}, D)$ o valor da expressão

$$k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_c(e) - c(e)\}$$

e por $\nu_c(D)$ denotaremos o máximo valor que a expressão acima atinge.

Note como o valor da expressão do Teorema 4.16 corresponde ao valor de $\nu_c(\mathcal{C}, D)$ quando a função c é igual a 1 para todas as arestas. Os valores das duas expressões são realmente análogos. Para calcular o valor de $\nu_c(\mathcal{C}, D)$ devemos tomar o valor de $k \cdot |\mathcal{C}|$ e subtrair o número de vezes que cada aresta foi utilizada além da sua “capacidade” $c(e)$. Denotaremos por $\tau_c(D)$ o valor de uma k -cobertura dos cortes orientados de D cujo valor é mínimo.

Para simplificar a notação, omitiremos a letra D em $\nu_c(\mathcal{C}, D)$. Faremos o mesmo para $\nu_c(D)$ e $\tau_c(D)$, que serão representados apenas por ν_c e τ_c respectivamente.

Teorema 4.17 (Edmonds-Giles) *Seja um dígrafo $D = (V, E)$, uma função $c : E \rightarrow N$ e um inteiro $k \geq 1$ menor do que ou igual ao tamanho de um corte orientado mínimo de D . Então,*

$$\tau_c = \nu_c.$$

Demonstração da desigualdade trivial

Primeiramente mostraremos a desigualdade trivial $\tau_c \geq \nu_c$. Seja t uma k -cobertura dos cortes orientados de D . Seja \mathcal{C} uma família de cortes orientados de D . Então

$$\begin{aligned} k \cdot |\mathcal{C}| &\leq \sum_{d \in \mathcal{C}} |d \cap t| = \sum_{e \in t} \#_c(e) = \sum_{e \in t} c(e) + \sum_{e \in t} [\#_c(e) - c(e)] \leq \\ &\leq c(t) + \sum_{e \in t} \max\{0, \#_c(e) - c(e)\} \leq c(t) + \sum_{e \in E} \max\{0, \#_c(e) - c(e)\} \end{aligned}$$

Logo,

$$c(t) \geq k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_c(e) - c(e)\}.$$

Como a k -cobertura t e a família \mathcal{C} são arbitrárias, tem-se que a desigualdade vale para uma cobertura de valor mínimo e para uma família que maximiza ν_c . Portanto $\tau_c \geq \nu_c$. \square

Nosso objetivo daqui em diante é mostrar a existência de uma k -cobertura cujo tamanho é igual a ν_c e portanto mínima e que mostra que $\tau_c = \nu_c$.

Também utilizaremos o método da aresta essencial, porém devidamente adaptado a este contexto. Diremos que uma aresta e com custo $c(e) > 0$ é *essencial* em relação a D e a uma função $c : E \rightarrow N$ se $\nu_c(D) > \nu_{c'}(D)$, onde $c'(e) = c(e) - 1$ e $c'(e') = c(e')$ para toda aresta $e' \neq e$. Se uma aresta é essencial então ela é utilizada $c(e)$ vezes ou mais por todas as famílias de cortes que maximizam ν_c .

A justificativa para esta definição de aresta essencial é a seguinte. Seja $c : E \rightarrow N$ uma função. Suponha que e é uma aresta essencial e que por hipótese de indução $\tau_{c'} \leq \nu_{c'}$ para toda função $c' : E \rightarrow N$ tal que $c'(E) < c(E)$. Seja $c_e : E \rightarrow N$ a função cujo valor $c_e(e) = c(e) - 1$ e $c_e(e') = c(e')$ para toda aresta $e' \neq e$. Pela hipótese da indução, existe uma k -cobertura t_e tal que $c_e(t_e) \leq \nu_{c_e}$. Mas $c(t_e) \leq 1 + c_e(t_e) \leq 1 + \nu_{c_e}$ e como e é essencial, isto é, $\nu_{c_e} < \nu_c$, então $1 + \nu_{c_e} \leq \nu_c$. Logo $c(t_e) \leq \nu_c$ e portanto $\tau_c \leq \nu_c$, como queríamos provar. Para base desta indução, podemos usar o caso em que $\nu_c = 0$. Nesta situação, cada corte orientado (se existir algum) necessariamente possui pelo menos k arestas com custo 0. Portanto existe uma k -cobertura de custo 0 e a igualdade se verifica.

Resta-nos provar que todo o dígrafo $D = (V, E)$ e toda a função $c : E \rightarrow N$, tal que $\nu_c(D) > 0$, possuem uma aresta que é essencial.

Seja $E_0 = \{e \in E : c(e) = 0\}$. Supondo que $\nu_c(D) > 0$, então existe um corte orientado d tal que $|d \cap E_0| < k$. Vamos mostrar que d contém um aresta essencial.

Seja $d_{>0} = d \setminus E_0 = \{e_1, \dots, e_r\}$, onde $r = |d_{>0}|$. Como $|d| \geq k$ temos que $d_{>0} \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $d_{>0}$ contém uma aresta essencial em relação a D e à função c . Suponha por redução ao absurdo que $d_{>0}$ não contém nenhuma aresta essencial. Então, para cada

$i, 1 \leq i \leq r$, existe uma família de cortes orientados \mathcal{D}_i tal que $\nu_{c_i}(\mathcal{D}_i) = \nu_{c_i} = \nu_c$, onde $c_i(e_i) = c(e_i) - 1$ e $c_i(e) = c(e)$, se $e \neq e_i$.

Tome a família

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^r \mathcal{D}_i + 1.d.$$

Como no Teorema de Lucchesi-Younger, podemos obter uma família laminar \mathcal{L} tal que

- i. $|\mathcal{L}| = |\mathcal{D}|$ e
- ii. $\#\mathcal{L}(e) = \#\mathcal{D}(e), \forall e \in E$.

Graças ao Teorema da Partição Balanceada da seção 3.4, sabemos que é possível particionar a família \mathcal{L} em r famílias $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$, de forma que para todo $i, 1 \leq i \leq r$, é verdade que

$$\lfloor \frac{\#\mathcal{L}(e)}{r} \rfloor \leq \#\mathcal{L}_i(e) \leq \lceil \frac{\#\mathcal{L}(e)}{r} \rceil.$$

Vamos mostrar que $\sum_{i=1}^r \nu_c(\mathcal{L}_i) > \sum_{i=1}^r \nu_{c_i}(\mathcal{D}_i)$ e como $\sum_{i=1}^r \nu_{c_i}(\mathcal{D}_i) = r \cdot \nu_c$, poderemos concluir que $\nu_c(\mathcal{L}_j) > \nu_c$ para algum $j, 1 \leq j \leq r$, o que é uma contradição.

Vamos desenvolver o termo $\sum_{i=1}^r \nu_c(\mathcal{L}_i)$:

$$\sum_{i=1}^r \nu_c(\mathcal{L}_i) = \sum_{i=1}^r [k \cdot |\mathcal{L}_i| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#\mathcal{L}_i(e) - c(e)\}] = k \cdot |\mathcal{L}| - \overbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{e \in E} \max\{0, \#\mathcal{L}_i(e) - c(e)\}}^{(1)}.$$

Por outro lado, podemos desenvolver o termo $\sum_{i=1}^r \nu_{c_i}(\mathcal{D}_i)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \nu_{c_i}(\mathcal{D}_i) &= \sum_{i=1}^r [k \cdot |\mathcal{D}_i| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#\mathcal{D}_i(e) - c_i(e)\}] = \\ &= k \cdot (|\mathcal{D}| - 1) - \sum_{i=1}^r \sum_{e \in E} \max\{0, \#\mathcal{D}_i(e) - c_i(e)\} = k \cdot |\mathcal{D}| - \overbrace{(k + \sum_{i=1}^r \sum_{e \in E} \max\{0, \#\mathcal{D}_i(e) - c_i(e)\})}^{(2)} \end{aligned}$$

Assim, é suficiente provarmos que (1) < (2). O ponto chave para a compreensão do argumento que vamos desenvolver é que dada uma aresta e duas famílias \mathcal{L}_i e \mathcal{L}_j , o Teorema da Partição Balanceada implica que o módulo da diferença $\#\mathcal{L}_i(e) - \#\mathcal{L}_j(e)$ é igual a 0 ou a 1.

Particionaremos as arestas do dígrafo em dois grupos, um contendo as arestas que foram usadas acima de sua capacidade por alguma família \mathcal{L}_i e o outro contendo o complemento deste conjunto.

$$\begin{aligned} E_{>} &:= \{e \in E : \#\mathcal{L}_i(e) > c(e) \text{ para algum } i, 1 \leq i \leq r\} \\ E_{<} &:= E \setminus E_{>} \end{aligned}$$

O valor de (1) restrito às arestas de E_{\leq} é 0 e portanto é menor do que ou igual ao valor de (2) restrito a estas mesmas arestas. Portanto, se mostrarmos que (1) < (2) em relação às arestas de $E_{>}$, a desigualdade mais geral fica provada. Assim, mostraremos que (1') < (2'), onde (1') e (2') são definidos assim²,

$$(1') \sum_{e \in E_{>}} \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{L}_i}(e) - c(e)\}$$

$$(2') k + \sum_{e \in E_{>}} \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)\}$$

Note porém que podemos simplificar a expressão (1'), já que o Teorema da Partição implica que se $\#_{\mathcal{L}_i}(e) > c(e)$ para algum i , então $\#_{\mathcal{L}_j}(e) \geq c(e)$ para todo j . Assim:

$$(1') = \sum_{e \in E_{>}} \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{L}_i}(e) - c(e)\} = \sum_{e \in E_{>}} \sum_{i=1}^r [\#_{\mathcal{L}_i}(e) - c(e)] =$$

$$= \sum_{e \in E_{>}} [\#_{\mathcal{D}}(e) - r.c(e)] \quad (1'')$$

O somatório (1'') pode ser dividido em três parcelas que correspondem ao valor do somatório restrito aos conjuntos de arestas $E_{>} \setminus d$, $E_{>} \cap d_{>0}$ e $E_{>} \cap d \cap E_0$, respectivamente. Vamos analisar cada caso:

i. $e \in E_{>} \setminus d$. Neste caso, $\#_{\mathcal{D}}(e) = \sum_{i=1}^r \#_{\mathcal{D}_i}(e)$ e $r.c(e) = \sum_{i=1}^r c_i(e)$. Assim,

$$\#_{\mathcal{D}}(e) - r.c(e) = \sum_{i=1}^r [\#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)] \leq \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)\}.$$

ii. $e \in E_{>} \cap d_{>0}$. Neste caso, pelas definições da família \mathcal{D} e das funções c_i 's, temos que $\#_{\mathcal{D}}(e) = \sum_{i=1}^r \#_{\mathcal{D}_i}(e) + 1$ e $\sum_{i=1}^r c_i(e) = r.c(e) - 1$. Daí,

$$\#_{\mathcal{D}}(e) - r.c(e) = \sum_{i=1}^r [\#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)] \leq \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)\}.$$

iii. Finalmente, se $e \in E_{>} \cap d \cap E_0$, então $\#_{\mathcal{D}}(e) = \sum_{i=1}^r \#_{\mathcal{D}_i}(e) + 1$ e $\sum_{i=1}^r c_i(e) = r.c(e)$, donde

$$\#_{\mathcal{D}}(e) - r.c(e) = 1 + \sum_{i=1}^r [\#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)] \leq 1 + \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{\mathcal{D}_i}(e) - c_i(e)\}.$$

²É claro que a inversão que faremos aos somatórios não altera os valores das expressões.

Lembre-se que d é um corte tal que $|d \cap E_0| < k$. Assim, somando-se as três desigualdades obtidas para todas as arestas de $E_>$, temos:

$$(1'') \leq |d \cap E_0| + \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{D_i}(e) - c_i(e)\} < k + \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^r \max\{0, \#_{D_i}(e) - c_i(e)\} = (2).$$

□

4.5 As k -coberturas dos T -cortes

Ao longo desta dissertação mostramos diversas analogias entre os cortes orientados e os cortes ímpares. Na seção anterior apresentamos uma igualdade minimax que relaciona as k -coberturas dos cortes orientados, de forma que é natural indagarmos se existe um resultado análogo para as k -coberturas dos T -cortes. Não temos uma resposta definitiva para a questão, apresentaremos alguns resultados positivos e outros negativos.

O Problema dos k Caminhos Mínimos entre Dois Vértices

Podemos analisar as coberturas mínimas dos T -cortes ou T -junções no caso em que $|T| = 2$. Se $T = \{x, y\}$, as T -junções correspondem aos caminhos que ligam x a y . Uma T -junção mínima corresponde a um caminho mínimo entre esses dois vértices.

As k -coberturas mínimas dos $\{x, y\}$ -cortes correspondem às famílias de k caminhos aresta-disjuntos entre x e y cuja soma dos comprimentos seja mínima. É trivial o fato de que k caminhos aresta-disjuntos entre x e y são uma k -cobertura dos $\{x, y\}$ -cortes do grafo. Por outro lado, se t é uma k -cobertura dos $\{x, y\}$ -cortes de G , então no subgrafo $H := (V, t)$ de G que contém apenas as arestas de t , o menor $\{x, y\}$ -corte tem cardinalidade no mínimo k . Pelo Teorema de Menger apresentado no capítulo 2, H contém pelo menos k caminhos aresta-disjuntos de x a y .

O problema dos k caminhos aresta-disjuntos, entre dois vértices, de cardinalidade mínima é a generalização mais natural para o clássico problema do caminho mínimo entre dois vértices. Daí o interesse da igualdade minimax que mostraremos.

O teorema apresentado abaixo tem um enunciado análogo ao Teorema de Edmonds-Giles. A sua demonstração consistirá em mostrar que dada uma família laminar de $\{x, y\}$ -cortes de um grafo G , é possível orientar as arestas de G de forma que cada corte desta família torna-se um corte orientado do dígrafo correspondente. Isso implica que pode-se aplicar o Teorema da Partição Balanceada para que o resultado seja demonstrado da mesma maneira que o Teorema da seção anterior.

Teorema 4.18 ³ *Seja um grafo $G = (V, E)$, uma função $c : E \rightarrow N$, dois vértices x e y e um inteiro $k \geq 1$ menor do que ou igual ao tamanho de um $\{x, y\}$ -corte mínimo. Então,*

³Em [Sch83] há uma citação deste Teorema.

o mínimo da soma dos custos de k caminhos disjuntos entre x e y é igual ao máximo, sobre todas as famílias \mathcal{C} de $\{x, y\}$ -cortes de G , da expressão:

$$k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_{\mathcal{C}}(e) - c(e)\}. \quad (4.1)$$

Prova: A demonstração é absolutamente análoga à demonstração do Teorema de Edmonds-Giles. A única observação importante a fazer é que apesar de G não ser orientado, é possível particionar de forma balanceada uma família laminar \mathcal{L} de $\{x, y\}$ -cortes.

De fato, mostraremos que é possível orientar as arestas de G de forma que cada corte de \mathcal{L} corresponde a um corte orientado do dígrafo obtido. Para cada corte $\delta(X)$ em \mathcal{L} , adote como margem o conjunto $X \subseteq V$ tal que $x \in X$. Oriente cada aresta do corte para fora de X . Essa orientação parcial das arestas de G é consistente, pois se uma aresta $\{u, v\} \in E$ deve ser orientada de u para v em relação a $\delta(X)$ e de v para u em relação a $\delta(Y)$, então

- i. $u \in X \cap \bar{Y}$ e
- ii. $v \in \bar{X} \cap Y$.

Mas pela escolha dos conjuntos X e Y temos:

- iii. $x \in X \cap Y$ e
- iv. $y \in \bar{X} \cap \bar{Y}$.

Logo $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ se cruzam, o que é uma contradição.

Assim, orientando arbitrariamente as demais arestas, obtemos um dígrafo em que cada corte de \mathcal{L} é orientado. Portanto é possível particionar \mathcal{L} de forma balanceada. \square

Apesar das demonstrações deste Teorema e do Teorema de Edmonds serem semelhantes, não se pode afirmar que este seja um caso particular daquele. Dado um grafo e dois vértices x e y , não é possível orientar as arestas do grafo de forma que os $\{x, y\}$ -cortes de G correspondam aos cortes orientados do dígrafo e vice-versa. Este é o caso do grafo representado na figura 4.3.

O Caso $|T| = 4$

Ao substituirmos $|T| = 2$ por $|T| \leq 4$ no enunciado do Teorema 4.18, obtemos uma proposição que não é verdadeira. Sabemos que para o grafo K_4 com $T = V$, não é verdade que uma cobertura mínima dos T -cortes tem a mesma cardinalidade de uma família disjunta máxima de T -cortes. Para $k = 1$, a igualdade do Teorema 4.18 só pode ser verdadeira se existir uma família disjunta para a qual a igualdade é válida. Com efeito, ao acrescentarmos um corte à família, o valor de ν_c cresce no máximo uma unidade, de

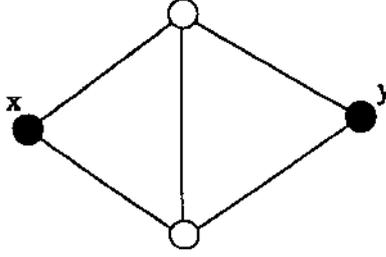


Figura 4.3: Um exemplo de grafo para o qual não é possível orientar as arestas de forma que os cortes orientados e os $\{x, y\}$ -cortes se relacionem um a um.

forma que se a família utilizar alguma aresta mais de uma vez, o valor permanece igual ou diminui. A igualdade também não acontece no caso em que $k = 2$. Portanto o K_4 é um contra-exemplo para a proposição.

Procurando manter a analogia existente entre o Teorema de Lucchesi-Younger e o Teorema de Lovász, podemos enunciar uma outra proposição que não tenha o K_4 como contra-exemplo. A idéia é permitir que as arestas sejam utilizadas até duas vezes sem que nenhuma penalidade seja aplicada. Propomos então a seguinte conjectura:

Conjectura 4.19 *Seja um grafo $G = (V, E)$, uma função $c : E \rightarrow N$, $T \subseteq V$ tal que $|T| \leq 4$ e um inteiro $k \geq 1$ menor do que ou igual ao tamanho de um T -corte mínimo. Então, o dobro do valor de uma k -cobertura de valor mínimo dos T -cortes de G é igual ao máximo, sobre todas as famílias \mathcal{C} de T -cortes de G , da expressão:*

$$k \cdot |\mathcal{C}| - 2 \cdot \sum_{e \in E} \max\left\{0, \left\lceil \frac{\#c(e) - 2 \cdot c(e)}{2} \right\rceil\right\}. \quad (4.2)$$

A desigualdade trivial da expressão acima é válida.

Prova da Desigualdade Trivial

Seja t uma k -cobertura dos T -cortes de um grafo G e \mathcal{C} uma família qualquer de T -cortes de G . Mostraremos que o valor da expressão (4.2) para a família \mathcal{C} é menor do que ou igual ao dobro do valor de t .

$$\begin{aligned} k \cdot |\mathcal{C}| &\leq \sum_{d \in \mathcal{C}} |t \cap d| = \sum_{d \in \mathcal{C}} \sum_{e \in t} |\{e\} \cap d| = \sum_{e \in t} \#c(e) = \\ &= \sum_{e \in t} 2 \cdot c(e) + \sum_{e \in t} [\#c(e) - 2 \cdot c(e)] \leq 2 \cdot c(t) + \sum_{e \in t} \max\{0, \#c(e) - 2 \cdot c(e)\} = \\ &= 2 \cdot c(t) + 2 \cdot \sum_{e \in t} \max\left\{0, \frac{\#c(e) - 2 \cdot c(e)}{2}\right\} \leq 2 \cdot c(t) + 2 \cdot \sum_{e \in E} \max\left\{0, \left\lceil \frac{\#c(e) - 2 \cdot c(e)}{2} \right\rceil\right\}. \quad \square \end{aligned}$$

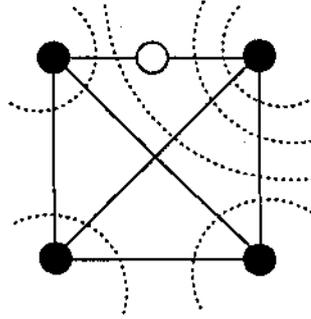


Figura 4.4: Exemplo de grafo para o qual a Conjectura 4.19 é verdadeira.

A figura 4.4 mostra um exemplo para o qual a igualdade da Conjectura 4.19 é válida. Para $k = 1$ ou 2 a igualdade é verdadeira, bastando tomarmos a família que contém os 4 T -cortes triviais distintos. Para $k = 3$, a família de T -cortes representada pelas linhas tracejadas faz a expressão 4.2 assumir o valor 14. Note que apenas duas arestas são utilizadas mais do que duas vezes. Estas arestas correspondem a subtração de 4 no valor da expressão. O valor 14 é exatamente o dobro do tamanho da única 3-cobertura do grafo. Temos portanto a igualdade desejada.

A generalização da Conjectura 4.19 para conjuntos T de tamanho arbitrário é falsa. O grafo de Petersen, apresentado na figura 4.1, com $T = V$, é um contra-exemplo. Para $k = 1$ a igualdade é válida. O grafo possui um emparelhamento perfeito e portanto uma cobertura mínima dos T -cortes deste grafo possui cardinalidade igual a 5. A família de T -cortes $\mathcal{C} := \sum_{v \in V} \delta(v)$ formada pelos T -cortes triviais é 2-disjunta e o valor da expressão (4.2) é igual a 10, o que mostra a igualdade. Entretanto, para $k = 2$ a igualdade não ocorre. É sabido que o grafo de Petersen não possui dois emparelhamentos perfeitos disjuntos, portanto uma 2-cobertura mínima dos seus T -cortes tem cardinalidade no mínimo 11. Por outro lado, a expressão 4.2 não atinge o valor 22. Observe primeiramente que qualquer família de T -cortes para a qual o valor da expressão (4.2) seja maior do que ou igual a 22 deverá possuir pelo menos 11 cortes. Além disso, como cada corte do grafo de Petersen possui pelo menos três arestas, temos que $\sum_{e \in E} \#_c(e) \geq 3 \cdot |\mathcal{C}|$. Utilizaremos também o fato de que $\max\{0, a\} + \max\{0, b\} \geq \max\{0, a + b\}$. Temos então que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |\mathcal{C}| - 2 \cdot \sum_{e \in E} \max\left\{0, \left\lceil \frac{\#_c(e) - 2 \cdot c(e)}{2} \right\rceil\right\} &= 2 \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\left\{0, 2 \cdot \left\lceil \frac{\#_c(e) - 2 \cdot c(e)}{2} \right\rceil\right\} \leq \\ &\leq 2 \cdot |\mathcal{C}| - \max\left\{0, \sum_{e \in E} 2 \cdot \left\lceil \frac{\#_c(e) - 2 \cdot c(e)}{2} \right\rceil\right\} \leq 2 \cdot |\mathcal{C}| - \max\left\{0, \sum_{e \in E} (\#_c(e) - 2)\right\} \leq \\ &\leq 2 \cdot |\mathcal{C}| - \max\{0, 3 \cdot |\mathcal{C}| - 2 \cdot |E|\} = 2 \cdot |\mathcal{C}| - \max\{0, 3 \cdot |\mathcal{C}| - 30\}. \end{aligned}$$

Se $|\mathcal{C}|$ for maior do que ou igual a 10 então o valor da expressão acima é $30 - |\mathcal{C}|$, donde concluímos que seu valor é menor do que ou igual a 20.

Consideramos como um problema em aberto o estabelecimento de uma igualdade minimax análoga à apresentada acima para o caso em que T tem tamanho arbitrário.

4.6 Circuitos Orientados e Circuitos Ímpares em Grafos Planares

Nesta seção abordaremos algumas igualdades minimax para problemas que envolvem famílias disjuntas de circuitos ímpares e orientados em grafos planares.

Usaremos nesta seção diversos conceitos sobre grafos planares mas não nos preocuparemos em estender o texto com definições e demonstrações sobre o assunto. Caso necessário, recomendamos ao leitor que consulte livros texto sobre Teoria dos Grafos como C. Berge [Ber73] e J. A. Bondy e U. S. R. Murty [BM76].

Consideramos ao longo desta seção que os circuitos são conjuntos de arestas.

Duais de Grafos Planares

Um grafo pode ser representado no plano R^2 associando-se cada vértice a um ponto do R^2 e cada aresta a uma curva com início e fim nos pontos que representam os vértices que compõe a aresta. Se esta representação é tal que cada curva só intersecta outra curva nos pontos que representam vértices em comum entre as arestas correspondentes então diremos que a representação é uma *representação planar*.

Dizemos que um grafo é *planar* se ele possui uma representação planar que o representa. Uma representação planar divide o plano em regiões que denominamos de *faces*. Dada uma representação planar de um grafo planar G , o seu grafo *dual* G_* é o grafo que contém um vértice correspondendo a cada face da representação de G e dois vértices estão ligados por uma aresta se as faces que correspondem a eles possuírem uma aresta em comum nos circuitos que as delimitam. Todo grafo dual de um grafo planar também é planar. A figura 4.5 mostra a representação de um grafo planar e o seu dual.

As arestas de G e de G_* se correspondem uma a uma. Seja $\phi : E \rightarrow E_*$ a função bijetora que associa as arestas de G às de G_* . Dado um conjunto $c \subseteq E$, definimos $\phi(c) := \{e_* \in E_* : \phi(e) = e_* \text{ para algum } e \in c\}$.

Pode-se mostrar que se $c \subseteq E$ são as arestas de um circuito de G então $\phi(c)$ é um corte minimal de G_* . Também é verdade que se $d \subseteq E_*$ é um corte minimal de G_* então $\phi^{-1}(d)$ é um circuito de G . Além disso, um conjunto $t \subseteq E$ é uma cobertura de todos os circuitos de G se e somente se $\phi(t)$ é uma cobertura de todos os cortes de G_* .

Podemos utilizar as mesmas idéias que levaram à descoberta do conceito de T -cortes e definir os T -circuitos em grafos planares. Dada uma representação planar de um grafo, selecionamos um conjunto de faces T de cardinalidade par e definimos que um circuito do grafo é um T -circuito se o número de faces de T que ele delimita na representação

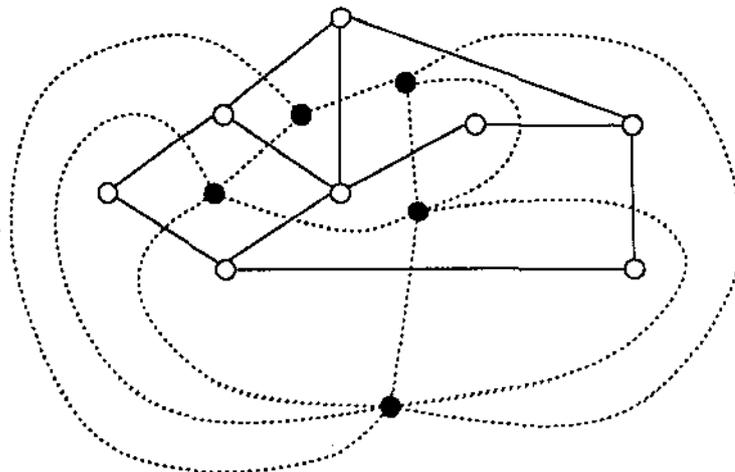


Figura 4.5: Uma representação planar e o seu dual.

planar for ímpar. Se escolhermos para T as faces delimitadas por circuitos ímpares, os T -circuitos serão exatamente os circuitos ímpares do grafo.

Pode-se mostrar que um conjunto de arestas $c \subseteq E$ é um T -ciclo de G se e somente se $\phi(c)$ é um T_* -corte minimal de G_* , onde T_* é o conjunto de vértices de G_* que corresponde ao conjunto de faces T . Temos então que:

Lema 4.20 *Um conjunto $t \subseteq E$ é uma cobertura dos T -circuitos de G se e somente se $\phi(t)$ é uma cobertura de todos os T_* -cortes de G_* . \square*

Note que para todo $t_* \subseteq E_*$ existe um $t \subseteq E$ tal que $t_* = \phi(t)$ de forma que o lema acima implica que as coberturas de T -circuitos de G estão em correspondência biunívoca com as coberturas dos T_* -cortes de G_* .

No caso dos dígrafos planares, podemos estabelecer uma relação entre os circuitos orientados e os cortes orientados do dígrafo dual, que passamos a definir agora. Dada uma representação planar de um dígrafo $D = (V, E)$, definimos seu dual $D_* = (V_*, E_*)$ da seguinte maneira:

- i. o grafo subjacente a D_* é o grafo dual da representação planar do dígrafo D , visto como um grafo;
- ii. dada uma aresta $e_* := \{u, v\} \in E_*$ e supondo que u corresponde a uma face limitada, definimos a orientação da aresta e_* de u para v se $\phi^{-1}(e_*)$ tiver orientação no sentido horário em relação a face que corresponde a u ; do contrário orientamos e_* de v para u .

Pode-se provar o seguinte lema:

Lema 4.21 *Um conjunto de arestas $t \subseteq E$ é uma cobertura dos circuitos orientados de D se e somente se $\phi(t)$ é uma cobertura dos cortes orientados de D_* . \square*

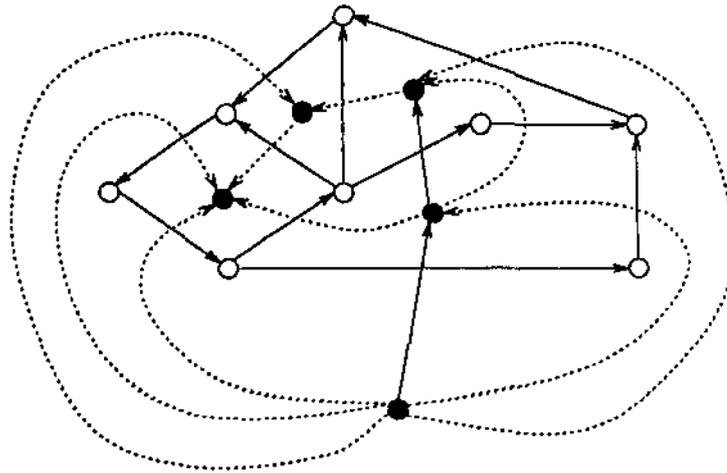


Figura 4.6: Um mapa planar de um dígrafo e o seu dual.

A partir do que foi discutido acima, passaremos a apresentar as implicações dos teoremas apresentados nas seções 4.2, 4.3 e 4.4 para as relações minimax que envolvem circuitos em grafos planares e suas coberturas.

Igualdades Minimax para Circuitos em Grafos Planares

O Teorema de Lucchesi-Younger tem como corolário a seguinte igualdade minimax:

Teorema 4.22 *Em um dígrafo planar, a cardinalidade de uma família disjunta máxima de circuitos orientados é igual a cardinalidade de uma cobertura mínima dos circuitos orientados do dígrafo. □*

Por sua vez, o Teorema de Edmonds-Giles implica o seguinte teorema:

Teorema 4.23 *Em um dígrafo planar, uma k -cobertura mínima dos circuitos orientados é igual ao máximo, sobre todas as famílias \mathcal{C} de circuitos orientados, da expressão:*

$$k \cdot |\mathcal{C}| - \sum_{e \in E} \max\{0, \#_{\mathcal{C}}(e) - 1\}.$$

□

Seja um grafo planar e uma representação planar deste grafo cujas faces são representadas pelo conjunto F . Seja $T \subseteq F$ um conjunto de faces cuja cardinalidade é par. Assim, o Teorema de Lovász implica a seguinte igualdade:

Teorema 4.24 *A cardinalidade de uma família 2-disjunta máxima de T -circuitos é igual ao dobro da cardinalidade de uma cobertura mínima de todos os T -circuitos. □*

É um fato conhecido que se todos os vértices de um grafo planar têm seus graus pares, caso em que o grafo é chamado *euleriano*, então seus grafos duais são bipartidos. Daí, o Teorema de Seymour implica a seguinte igualdade minimax:

Teorema 4.25 *Se o grafo planar for euleriano então a cardinalidade de uma família disjunta máxima de T -circuitos é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima dos T -circuitos. \square*

Capítulo 5

Problemas Duais

No capítulo 2 mostramos um exemplo de igualdades minimax duais. Neste capítulo exploraremos o conceito de dualidade para os problemas abordados no capítulo anterior.

Ao enunciarmos os duais dos Teoremas de Lucchesi-Younger e de Lovász obtemos conjecturas bastante interessantes. O dual do Teorema de Lovász deve comparar a cardinalidade de uma família 2-disjunta máxima de T -junções ao dobro do tamanho dos T -cortes mínimos. Entretanto, mostraremos que essa igualdade não é verdadeira. Seymour em [Sey79] provou que se todos os vértices do grafo têm grau par, então a igualdade enunciada segue como consequência da generalização de uma famosa conjectura de Fulkerson. Estenderemos este resultado provando que se todos os T -cortes têm a mesma paridade, então a conjectura de Fulkerson é equivalente a igualdade minimax para T -cortes. Este caso inclui o resultado de Seymour e também o caso dos cortes ímpares.

No caso do dual do Teorema de Lucchesi-Younger, se restringirmos o resultado aos grafos fonte-sorvedouro conexos, obtemos um teorema que por si só parece ser um resultado bastante forte que foi provado por P. Feofiloff e D. H. Younger [FY87] e independentemente por A. Schrijver [Sch82]. O caso geral permanece como conjectura, apesar do exemplo descoberto por Schrijver [Sch80], que mostra que uma 2-cobertura dos cortes orientados nem sempre contém duas coberturas disjuntas.

5.1 Duais para o Teorema de Lovász

Na seção 2.1 apresentamos o Teorema de Menger. Ele afirma que o número de caminhos aresta-disjuntos entre dois vértices é igual ao tamanho de um corte mínimo que separa os dois vértices. Podemos enunciar esta igualdade em termos de T -junções e T -cortes. Já vimos que quando $|T| = 2$, os T -cortes são exatamente os cortes que separam os dois vértices e que as T -junções minimais são caminhos que ligam estes vértices. Assim, o Teorema de Menger afirma que quando $|T| = 2$ então existe um número de T -junções disjuntas que é igual ao tamanho de um T -corte mínimo. Veremos que essa igualdade não

ocorre no caso geral.

Ao longo desta seção assumiremos que $G = (V, E)$ é um grafo e que $T \subseteq V$ possui um número par de vértices em cada componente conexo de G .

Abaixo mostramos um exemplo com $|T| = 4$ para o qual a igualdade não ocorre. Os T -cortes mínimos deste grafo têm tamanho 2, porém não existem duas T -junções disjuntas. Isso pode ser facilmente verificado. Note primeiro que o grafo não possui nenhuma T -junção de tamanho 2. Assim, duas T -junções disjuntas deveriam ter pelo menos 6 arestas, ou seja, todas as arestas do grafo seriam utilizadas. Além disso, cada T -junção deve ter um número par de arestas adjacentes ao vértice que não pertence a T (vértice branco), mas o seu grau é 3 e portanto isso é impossível.

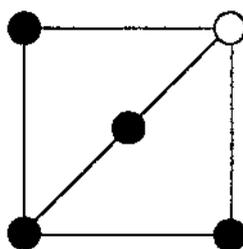


Figura 5.1: Grafo cujo T -corte mínimo tem tamanho 2 e que não possui duas T -junções disjuntas.

Passaremos agora a explicar a relação entre estas igualdades e a Conjectura de Fulkerson. Um grafo é dito r -regular se todos os seus vértices possuírem grau r . Diremos que um grafo é um r -grafo se ele for r -regular e não possuir nenhum V -corte menor do que r . Observe que por esta definição, se $r > 0$ então o grafo necessariamente tem um número par de vértices, pois do contrário o corte $\delta(V)$ seria um corte ímpar de cardinalidade 0. Fulkerson enunciou a seguinte conjectura:

Conjectura 5.1 (Fulkerson) *Todo 3-grafo possui 6 emparelhamentos perfeitos 2-disjuntos.*

É sabido que todo 3-grafo possui um emparelhamento perfeito. Este fato pode ser provado facilmente se utilizarmos o seguinte resultado de Tutte que caracteriza os grafos que possuem algum emparelhamento perfeito. Denotaremos por $o(G)$ o número de componentes conexos de G que possuem um número ímpar de vértices.

Teorema 5.2 (Tutte) *Um grafo $G = (V, E)$ possui um emparelhamento perfeito se e somente se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.*

□

A necessidade desta condição é trivial, pois um emparelhamento perfeito deve emparelhar pelo menos um vértice de cada componente ímpar de $G - S$ com um vértice de S . Uma demonstração completa deste teorema pode ser encontrada em [BM76]. Deste teorema podemos obter o seguinte resultado bem conhecido:

Lema 5.3 *Todo r -grafo, $r > 0$, possui um emparelhamento perfeito.*

□

O menor 3-grafo que não possui 3 emparelhamentos perfeitos disjuntos é o grafo de Petersen apresentado anteriormente na seção 4.3.

Seymour [Sey79] generalizou a Conjectura de Fulkerson da seguinte maneira:

Conjectura 5.4 (Seymour) *Todo r -grafo possui $2r$ emparelhamentos perfeitos 2-disjuntos.*

Seymour também provou que a Conjectura 5.4 implica na seguinte proposição:

Conjectura 5.5 *Se todos os vértices de G têm grau par então o tamanho de uma família 2-disjunta máxima de T -junções é igual ao dobro do tamanho de um T -corte mínimo.*

Se tomarmos um grafo qualquer e para cada aresta acrescentarmos uma outra aresta formada pelos mesmos dois vértices, o grau de cada vértice se torna par. Daí a implicação descrita acima prova que para qualquer grafo, a Conjectura 5.4 implica na seguinte proposição:

Conjectura 5.6 *O tamanho de uma família 4-disjunta máxima de T -junções é igual ao quádruplo do tamanho de um T -corte mínimo.*

Vamos agora considerar a seguinte conjectura:

Conjectura 5.7 (Cohen, Lucchesi) *Se todos os T -cortes de G têm a mesma paridade então o tamanho de uma família 2-disjunta máxima de T -junções é igual ao dobro do tamanho de um T -corte mínimo.*

Provaremos abaixo que a Conjectura 5.7 é equivalente à Conjectura 5.4. Este caso inclui o resultado de Seymour e também o caso das coberturas dos cortes ímpares. Na verdade, quando todos os T -cortes têm a mesma paridade então apenas estes dois casos são possíveis: ou todos os vértices têm grau par ou T é formado pelos vértices de grau ímpar do grafo. No segundo caso, a igualdade minimax tem o seguinte enunciado:

Conjectura 5.8 *O tamanho de uma família 2-disjunta máxima de coberturas dos cortes ímpares é igual ao dobro da cardinalidade de um corte ímpar mínimo.*

Na demonstração que segue utilizaremos uma operação sobre o grafo que chamaremos de *redução*. Dados um vértice $v \in V$ e duas arestas $\{x, v\}$ e $\{y, v\}$ adjacentes a v , a operação de *redução* consiste em obtermos o grafo $G' = (V, E')$, onde $E' = E \setminus \{\{x, v\}, \{y, v\}\} \cup \{x, y\}$. A figura 5.2 ilustra a operação de redução. Observe que

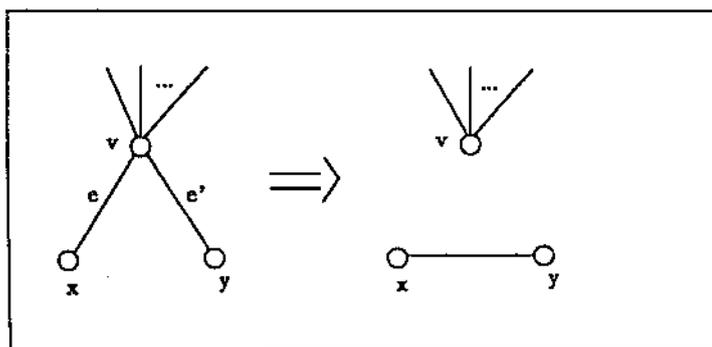


Figura 5.2: Operação de redução no vértice v e nas arestas e e e' .

para todo $X \subseteq V$, $|\delta_{G'}(X)| = |\delta_G(X)|$ ou $|\delta_{G'}(X)| = |\delta_G(X)| - 2$, portanto, todos os T -cortes de G têm a mesma paridade se e somente se todos os T -cortes de G' têm a mesma paridade.

A idéia da demonstração é aplicar sucessivamente a operação de redução até que o grafo obtido seja um r -grafo, sendo r o tamanho dos T -cortes mínimos do grafo original. O ponto crucial da prova é mostrar que é possível aplicar a operação de redução sem diminuir o tamanho dos T -cortes mínimos.

Teorema 5.9 *A Conjectura 5.7 é equivalente à Conjectura 5.4.*

Prova: Vamos provar inicialmente que a Conjectura 5.7 implica a Conjectura 5.4. Se G é um r -grafo, então todos os V -cortes de G têm a mesma paridade. Supondo que a Conjectura 5.7 é verdadeira, então G possui $2r$ V -junções 2-disjuntas. Cada V -junção deve ter pelo menos uma aresta adjacente a cada vértice. Mas o grau de qualquer vértice é r e portanto cada V -junção tem exatamente uma aresta adjacente a cada vértice. Em outras palavras, cada V -junção é um emparelhamento perfeito.

Agora provaremos a recíproca. Seja G um grafo qualquer e r o tamanho de um T -corte mínimo de G . Se G é um r -grafo e $V = T$ então a Conjectura 5.4 implica que G possui $2r$ emparelhamentos perfeitos 2-disjuntos, que são T -junções. Podemos assumir então que G não é um r -grafo ou $V \neq T$. Assumiremos como hipótese de indução que o resultado é válido para todo grafo com menos arestas que G .

Podemos supor que $r \geq 2$, pois os casos $r = 0$ e $r = 1$ são triviais. Também podemos supor que para todo $v \in V$, $|\delta(v)| \geq 2$. Se $|\delta(v)| \leq 1$ então $v \notin T$ e podemos considerar o grafo $G - v$ no lugar do grafo G .

Como G não é um r -grafo ou $V \neq T$ então existe um vértice $v \in V$ tal que $v \notin T$ ou $v \in T$ e $|\delta(v)| \geq r + 2$. Seja $z \subseteq \delta(v)$ um conjunto maximal de arestas com a propriedade de que existe um T -corte mínimo que o contém.

Se $z = \emptyset$ então tome quaisquer duas arestas $\{x, v\}$ e $\{y, v\}$ de $\delta(v)$. Aplique a operação de redução sobre estas arestas. Obtemos assim o grafo G' . O tamanho de um T -corte

mínimo de G' também é r pois, por hipótese, todos os T -cortes de G que contêm as arestas em questão têm tamanho maior do que ou igual a $r + 2$. Pela hipótese de indução, G' contém $2r$ T -junções 2-disjuntas. Estas $2r$ T -junções de G' correspondem a $2r$ T -junções de G desde que para cada T -junção t que contenha a aresta $\{x, y\}$ tomemos em seu lugar a T -junção $(t \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, v\}, \{y, v\}\}$. É claro que todo corte coberto por $\{x, y\}$ é coberto ou por $\{x, v\}$ ou por $\{y, v\}$.

Suponha agora que $z \neq \emptyset$. Vamos provar que existem duas arestas de $\delta(v)$ para as quais a operação de redução não diminui o tamanho dos T -cortes mínimos. Desta forma é possível aplicar a hipótese de indução da mesma forma que fizemos no caso anterior.

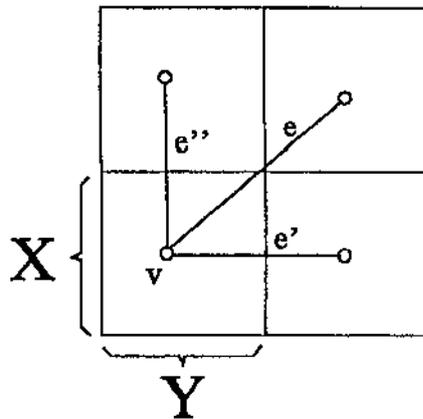
Proposição: Nem toda aresta de $\delta(v)$ está em z , isto é, $\delta(v) \setminus z \neq \emptyset$.

Por absurdo, suponha que $\delta(v) \subseteq z$. Seja $\delta(X)$, $v \in X \subset V$, um T -corte mínimo que inclui $\delta(v)$. Se $v \notin T$ então $\delta(X) \setminus \delta(v) = \delta(X \setminus \{v\})$. Portanto $\delta(X \setminus \{v\})$ é um T -corte menor do que $\delta(X)$, contradição. Se $v \in T$ então, por hipótese, $|\delta(v)| > r$. Logo $|\delta(X)| \geq |\delta(v)| > r$, contradição.

Proposição: Seja $e \in z$ e $e' \in \delta(v) \setminus z$. A operação de redução utilizando as arestas e e e' não diminui o tamanho dos T -cortes mínimos.

Mostraremos que nenhum T -corte mínimo contém estas duas arestas, e como assumimos que todos os cortes têm a mesma paridade, o tamanho dos T -cortes mínimos é preservado após a redução.

Seja $\delta(X)$, $X \subset V$, um T -corte mínimo tal que $v \in X$ e $z \subseteq \delta(X)$. Suponha por redução ao absurdo que existe um T -corte mínimo $\delta(Y)$, $v \in Y \subset V$, tal que $e, e' \in \delta(Y)$. Como z é maximal, existe uma aresta $e'' \in \delta(X)$ tal que $e'' \notin \delta(Y)$. Veja a figura abaixo:



Vemos assim que X e Y se cruzam. Sabemos portanto que $T \cap (X \cap Y)$ e $T \cap (X \cup Y)$ são ímpares ou $T \cap (\bar{X} \cap Y)$ e $T \cap (\bar{X} \cup Y)$ são ímpares. Se $T \cap (X \cap Y)$ for ímpar então, pela propriedade de submodularidade, sabemos que $\delta(X \cap Y)$ é um T -corte mínimo. Assim, como $z \cup \{e'\} \subseteq \delta(X \cap Y)$, z não era maximal, contradição.

Suponha então que $\bar{X} \cap Y$ é ímpar. Neste caso temos que $|\delta(X)| + |\delta(Y)| > |\delta(\bar{X} \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cup Y)|$, pois $e \notin \delta(\bar{X} \cap Y)$ e $e' \notin \delta(\bar{X} \cup Y)$. Porém isso contradiz a minimalidade dos

T -cortes $\delta(X)$ e $\delta(Y)$.

Provamos assim que as arestas e e e' não pertencem a nenhum T -corte mínimo. Podemos assim reduzir o grafo a partir destas arestas. \square

Poderíamos pensar na seguinte relaxação das Conjecturas 5.4 e 5.7, que não é válida:

Conjectura 5.10 *O tamanho de uma família 2-disjunta máxima de T -junções é igual ao dobro do tamanho de um T -corte mínimo.*

Proposição 5.11 (Seymour [Sey79]) *O grafo G da figura 5.3 é um contra-exemplo da Conjectura 5.10.*

Prova: O grafo G é obtido a partir do grafo G' da figura 5.3 subdividindo-se cada uma de suas arestas por um vértice. Por sua vez, o grafo G' é obtido a partir do grafo de Petersen substituindo-se um dos vértices pelo K_3 .

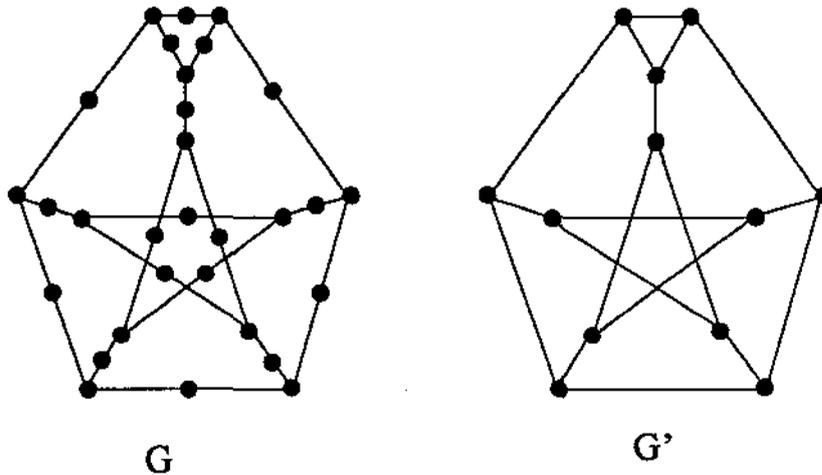


Figura 5.3: Contra-exemplo para a Conjectura 5.10.

O grafo de Petersen, 3-regular, tem 10 vértices e 15 arestas. O grafo G' tem portanto 12 vértices e 18 arestas. Assim, o grafo G tem 30 vértices e 36 arestas. Em particular, G tem um número par de vértices. Façamos $T = V$. Os T -cortes mínimos de G têm tamanho 2. Vamos mostrar que o grafo G não possui uma família 2-disjunta de T -junções de tamanho 4. Suponha que \mathcal{F} é uma família 2-disjunta formada pelas T -junções t_1, t_2, t_3 e t_4 . Como cada aresta de G é adjacente a algum vértice de grau 2 então cada aresta de G é usada duas vezes por \mathcal{F} . Sejam

$$c_1 := t_1 \oplus t_2;$$

$$c_2 := t_1 \oplus t_3;$$

$$c_3 := t_1 \oplus t_4.$$

Cada vértice de G tem um número par de arestas incidentes em cada c_i ($1 \leq i \leq 3$), assim, cada c_i é uma união de circuitos aresta-disjuntos de G . Cada aresta de G pertence a exatamente 2 destes conjuntos. Podemos estabelecer uma associação natural entre cada conjunto de arestas c_i de G e um conjunto c'_i de arestas de G' . Para cada i , c'_i também é uma união de circuitos aresta-disjuntos de G' . Assim, como cada vértice de G' tem grau 3, o complemento de c'_i é um emparelhamento perfeito de G' . Mas cada aresta pertence a dois conjuntos dentre c'_1, c'_2 e c'_3 e portanto cada aresta pertence a apenas um dos complementos. Logo c'_1, c'_2 e c'_3 são três emparelhamentos perfeitos e disjuntos de G' . Entretanto, é fácil ver que se o grafo G' possui três emparelhamentos perfeitos disjuntos então o grafo de Petersen também os possui. Chegamos assim a uma contradição¹.

O caso $|T| \leq 8$

Já vimos que a generalização da Conjectura de Fulkerson implica que sempre que todos os T -cortes têm a mesma cardinalidade então o grafo possui $2r$ T -junções 2-disjuntas, onde r é o tamanho de um T -corte mínimo. A demonstração que apresentamos consiste na redução do grafo a r -grafos. Com isso em vista, provaremos agora o seguinte resultado:

Teorema 5.12 *Se $|T| \leq 8$ e todos os T -cortes de G têm a mesma paridade, então G possui uma família disjunta de T -junções cujo tamanho é igual ao tamanho de um T -corte mínimo.*

Prova: Usando o mesmo método utilizado na demonstração do Teorema 5.9, podemos reduzir o grafo G a um r -grafo $G' = (V', E')$ com $V' = T$ e tal que se G' possui r V' -junções disjuntas então G possui r T -junções disjuntas. Provaremos abaixo que todo r -grafo cujo número de vértices é menor do que ou igual a 8 possui r emparelhamentos perfeitos disjuntos. Este resultado completa esta demonstração pois os emparelhamentos perfeitos são V' -junções de G' . \square

Lema 5.13 *Seja $G = (V, E)$ um r -grafo tal que $|V| \leq 8$. Então G possui r emparelhamentos perfeitos disjuntos.*

Se $|V| = 2$ ou $r = 0$ então o resultado é trivial. Suponha então que $|V| \geq 4$ e que $r > 0$. Por hipótese de indução, assumiremos que o resultado é válido para todo r' -grafo $G' = (V', E')$ tal que $|V'| = |V|$ e $r' < r$ ou $|V'| < |V|$.

caso i. G possui um V -corte não trivial de cardinalidade r .

Seja um V -corte não trivial $\delta(X)$, $X \subseteq V$ tal que $|\delta(X)| = r$. Tome os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ obtidos pela contração de X e $V \setminus X$, respectivamente,

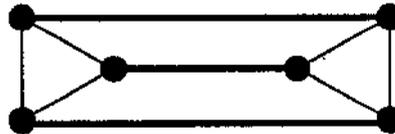
¹Esta demonstração é semelhante à apresentada em [Sey79]

a um único vértice. Os grafos G_1 e G_2 são r -grafos e ambos possuem um número menor de vértices do que G . Pela hipótese de indução, existem famílias disjuntas \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 de emparelhamentos perfeitos de G_1 e de G_2 , respectivamente. Cada um destes emparelhamentos intersectam $\delta(X)$ em apenas uma aresta. Assim, podemos “mesclar” as duas famílias, tomando-se a família $\mathcal{F} = \{t_1 \cup t_2 : t_1 \in \mathcal{F}_1, t_2 \in \mathcal{F}_2 \text{ e } t_1 \cap t_2 \neq \emptyset\}$. É fácil verificar que \mathcal{F} é formada por r emparelhamentos perfeitos disjuntos de G .

caso ii. Todo V -corte não trivial de G possui cardinalidade maior do que r .

Pelo lema 5.3 sabemos que G possui um emparelhamento perfeito $t \subseteq E$. Afirmamos que $G' = (V, E \setminus t)$ é um $(r - 1)$ -grafo. Seja $\delta(X)$, $X \subseteq V$ um V -corte de G' . Se $\delta(X)$ é trivial então obviamente $|\delta_{G'}(X)| = r - 1$. Se $\delta(X)$ não é trivial, então $|\delta_G(X)| \geq r + 2$. Como $|V| \leq 8$, $|X| = 3$ ou $|\bar{X}| = 3$. Portanto, $|\delta_G(X) \cap t| \leq 3$. Logo $|\delta_{G'}(X)| \geq r - 1$. Logo G' é um $(r - 1)$ -grafo e pela hipótese de indução sabemos que G' possui uma família de $r - 1$ emparelhamentos perfeitos disjuntos. Podemos acrescentar t a esta família e obter os r emparelhamentos procurados. \square

O exemplo abaixo mostra que o caso i da demonstração é necessário, isto é, a retirada de um emparelhamento perfeito só garante que o grafo obtido seja um $r - 1$ grafo se não existirem V -cortes de tamanho r .

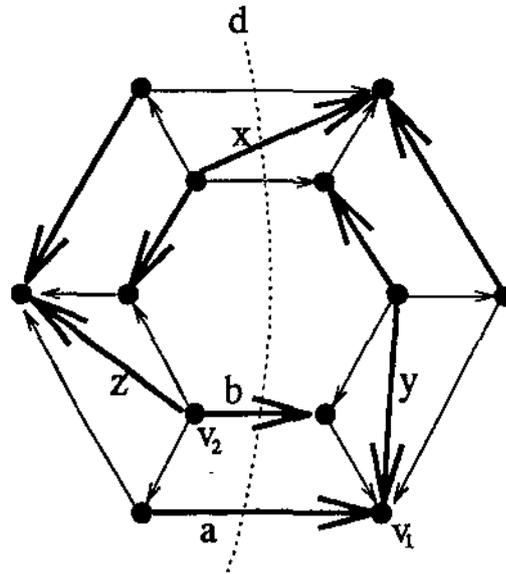


Se relaxarmos qualquer uma das hipóteses feitas no enunciado do Teorema 5.12, a afirmação deixa de ser válida. Assim, se permitirmos $|V| = 10$, temos o grafo de Petersen como contra-exemplo. Se não exigirmos que todos os T -cortes tenham a mesma paridade, então, embora o resultado permaneça válido para $|T| = 2$, o exemplo da figura 5.1 apresentado anteriormente mostra que para $|T| = 4$ a igualdade nem sempre ocorre.

5.2 Duais para o Teorema de Lucchesi-Younger

Ao enunciarmos a igualdade minimax dual ao Teorema de Lucchesi-Younger, obtemos a seguinte conjectura:

Conjectura 5.14 *O tamanho de uma família disjunta máxima de coberturas dos cortes orientados de um dígrafo é igual ao tamanho de um corte orientado mínimo.*



Em [EG77], Edmonds e Giles conjecturam que toda k -cobertura dos cortes orientados conteriam k coberturas disjuntas. Entretanto, Schrijver apresenta em nota intitulada “A Counterexample to a Conjecture of Edmonds and Giles” [Sch80] o seguinte dígrafo:

Seja t o conjunto de arestas em destaque do grafo da figura 5.2. É fácil verificar que:

- i. t cobre os cortes orientados de G e
- ii. para toda aresta $e \in t$, $t \setminus e$ cobre todos os cortes orientados.

Portanto t é uma 2-cobertura dos cortes orientados. Suponha que estas arestas foram particionadas em duas coberturas t_1 e t_2 . As arestas que ligam o hexágono menor ao maior formam um corte orientado, de forma que uma das coberturas deve conter uma aresta dentre x, y e z enquanto que a outra contém as duas restantes. Suponha que $x \in t_1$ e $y, z \in t_2$. Para cobrir o corte $\delta(v_1)$, t_1 deve conter a aresta a e para cobrir o corte $\delta(v_2)$ ele deve conter a aresta b . Mas assim t_2 não cobre o corte d , o que é uma contradição.

No caso dos T -cortes, se uma igualdade minimax análoga à Conjectura 5.14 fosse verdadeira, então qualquer k -cobertura dos T -cortes conteriam k coberturas disjuntas. A igualdade minimax poderia ser aplicada ao grafo formado pelas arestas da k -cobertura. No caso dos cortes orientados a situação não é a mesma. A retirada de arestas do dígrafo pode aumentar o número de cortes orientados. Assim, o contra-exemplo apresentado não implica necessariamente que a Conjectura 5.14 seja falsa. Apesar disso, não é descabido interpretá-lo como um indício de que a Conjectura 5.14 não seja verdadeira.

Certamente ao considerarmos a restrição da Conjectura 5.14 a certas classes de dígrafos, obtemos igualdades válidas. A classe mais significativa para a qual esta igualdade foi provada é a classe dos dígrafos *fonte-sorvedouro conexos*². Esta classe é formada pelos

²Daqui em diante diremos simplesmente f-s-conexos.

dígrafos nos quais cada fonte é conectada por um caminho orientado a cada sorvedouro. Esta igualdade foi provada independentemente por A. Schrijver em [Sch82] e por P. Feofiloff e D. H. Younger em [FY87]. Abaixo apresentaremos uma demonstração resumida desta igualdade utilizando um resultado sobre *bi-coberturas* cuja demonstração pode ser encontrada em [FY87].

Faremos primeiramente algumas definições. Se d é um corte orientado então $E^-d := \{(u, v) \in E : \{u, v\} \cap V^-d \neq \emptyset\}$ e E^+d é definido analogamente. Seja um dígrafo conexo $D = (V, E)$ e C o conjunto de *todos* os cortes orientados de D . Definimos assim:

$$C^+ := \{d \in C : E^-d \cap E^-d' \neq \emptyset, \text{ para todo } d' \in C\} \text{ e}$$

$$C^- := \{d \in C : E^+d \cap E^+d' \neq \emptyset, \text{ para todo } d' \in C\}.$$

Exemplo:

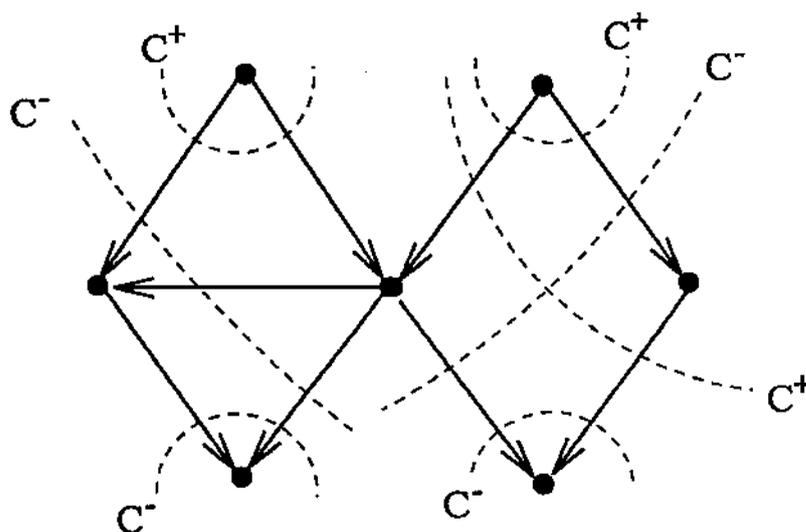


Figura 5.4: Cortes de um dígrafo f-s-conexo associados aos conjuntos C^+ ou C^- a qual pertencem.

Os grafos f-s-conexos podem ser caracterizados em função dos conjuntos C^+ e C^- . Um grafo é f-s-conexo se e somente se todos os seus cortes orientados estão em C^+ ou em C^- .

Dado um conjunto $t \subseteq E$, definimos os seguintes conjuntos:

$$t^+ = \{e \in t : e \in \delta(v), \text{ para alguma fonte } v \in V\} \text{ e}$$

$$t^- = \{e \in t : e \in \delta(v), \text{ para algum sorvedouro } v \in V\}.$$

Dizemos que $t \subseteq E$ é uma *bi-cobertura* dos cortes orientados se t^+ é uma cobertura de C^+ e t^- é uma cobertura de C^- . Se t^+ for uma k -cobertura de C^+ e t^- for uma k -cobertura de C^- então dizemos que t é uma k -*bi-cobertura*.

No caso dos grafos f - s -conexos, é claro que toda bi-cobertura é uma cobertura dos cortes orientados. Outro fato importante que utilizaremos adiante é que $d \in C^+$ se e somente se V^+d não contém nenhum sorvedouro. Analogamente, $d \in C^-$ se e somente se V^-d não contém nenhuma fonte. Pode-se provar o seguinte teorema [FY87]:

Teorema 5.15 (Feofiloff-Younger) *Toda k -bi-cobertura contém k bi-coberturas disjuntas. \square*

Utilizando o Teorema 5.15, mostramos abaixo que nos grafos f - s -conexos toda k -cobertura dos cortes orientados contém k coberturas disjuntas.

Teorema 5.16 (Feofiloff-Younger, Schrijver) *Em um dígrafo f - s -conexo, se $t \subseteq E$ é uma k -cobertura dos cortes orientados então t contém k coberturas disjuntas.*

Prova³: Sem perda de generalidade, podemos supor que o dígrafo é acíclico e conexo. Além disso, se existe um caminho orientado entre os vértices u e v então podemos supor que a aresta (u, v) pertence ao dígrafo, adicionando se necessário (u, v) a E , mas não a t .

Vamos supor por hipótese de indução que o teorema é verdadeiro para toda k -cobertura $t' \subseteq E$ tal que $|t'| < |t|$ e para todo dígrafo $D' = (V', E')$ tal que $|V'| < |V|$.

caso i. Existe um corte orientado não trivial d tal que $|d \cap t| = k$.

Seja $D_1 = (V_1, E_1)$ e $D_2 = (V_2, E_2)$ obtidos pela contração de V^+d e V^-d , respectivamente, a um único vértice. Seja $t_1 = t \cap E^-d$ e $t_2 = t \cap E^+d$. Os conjuntos t_1 e t_2 são k -coberturas de D_1 e D_2 , respectivamente. Pela hipótese de indução, o conjunto t_1 contém k coberturas disjuntas de D_1 . Seja \mathcal{F}_1 a família disjunta composta por estas k coberturas. Analogamente, podemos determinar a família \mathcal{F}_2 contendo k coberturas disjuntas de D_2 . Seja a família $\mathcal{F} := \{t_1 \cup t_2 : t_1 \in \mathcal{F}_1, t_2 \in \mathcal{F}_2 \text{ e } t_1 \cap t_2 \neq \emptyset\}$.

Vamos mostrar que cada elemento de \mathcal{F} é uma cobertura dos cortes orientados de D . Seja $c \in \mathcal{F}$ e d' um corte orientado de D . Se d' não cruza d então evidentemente c cobre d' . Supondo então que os cortes se cruzam, sabemos que $\delta(V^+d \cap V^+d')$ e $\delta(V^+d \cup V^+d')$ são cortes orientados. Além disso, $\delta_c(V^+d \cup V^+d') \geq 1$, $\delta_c(V^+d \cap V^+d') \geq 1$ e $|d \cap t| = 1$. Por modularidade, lema 3.10, sabemos que

$$|\delta_c(V^+d \cap V^+d')| + |\delta_c(V^+d \cup V^+d')| = |d \cap c| + |d' \cap c|.$$

Portanto $|d' \cap c| \geq 1$.

³Esta demonstração é semelhante à apresentada em [FY87]

caso ii. Podemos supor que para todo corte orientado d não trivial, temos que $|d \cap t| > k$. Isso implica que se $e \in t$ então $e \in t^+$ ou $e \in t^-$, pois do contrário $t \setminus \{e\}$ seria também uma k -cobertura e o resultado seria provado por indução. Assim, toda aresta de t incide numa fonte ou num sorvedouro.

Se t é uma k -bi-cobertura de D , então pelo Teorema 5.15 sabemos que t pode ser particionado em k bi-coberturas e isso prova o teorema.

Suponha então que t não é uma k -bi-cobertura. Sem perda de generalidade vamos supor que existe um corte $d \in C^+$ tal que $|d \cap t^+| < k$. Suporemos ainda que d é tal que V^+d seja minimal.

Como $|d \cap t^+| < k$, então existe uma aresta $e := (u, v) \in d \cap t^-$. Assim u não é fonte e v é sorvedouro.

Seja $d' \in C^+$ tal que $V^+d' \subset V^+d$, $e \notin d'$ e V^+d' seja maximal. Veja a figura 5.5 (a). A existência de algum corte com esta propriedade decorre do fato de haver pelo menos um vértice que é fonte contido em V^+d .

Pela minimalidade de V^+d , $|d' \cap t^+| \geq k$. Assim, existe uma aresta $e' := (u', v') \in d' \cap t^+$ e $e' \notin d$. Como $d \in C^+$, não existem vértices que são sorvedouros em V^+d . Assim, como $e' \subseteq V^+d$, então v' não é sorvedouro mas u' é fonte. Seja $e'' := (u', v)$. Como u' é fonte e v é sorvedouro, então existe um caminho orientado de u' a v de forma que $e'' \in E$.

Vamos mostrar que $t' := (t \setminus \{e, e'\}) \cup e''$ é uma k -cobertura dos cortes orientados de D e além disso que todo corte orientado que contém a aresta e'' contém e ou e' . Daí, podemos aplicar a hipótese da indução utilizando t' . Ao substituírmos e'' por $\{e, e'\}$ na cobertura que utiliza e'' , obtemos k coberturas disjuntas contidas em t .

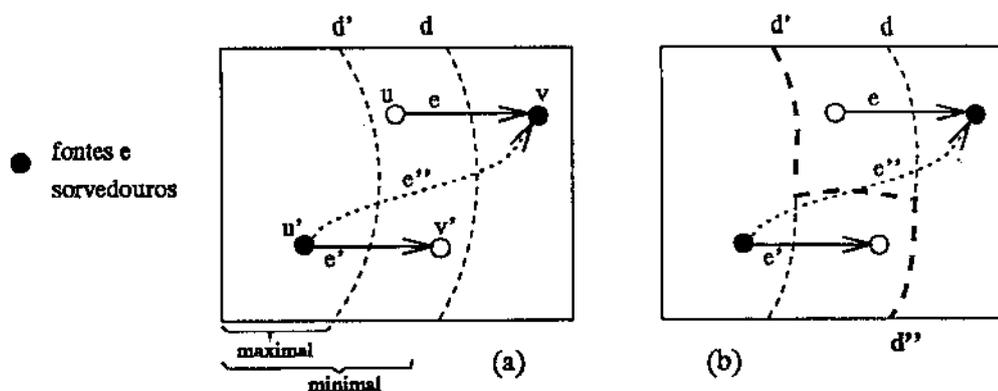


Figura 5.5:

Vamos provar agora que t' é uma k -cobertura dos cortes orientados. Como u não é fonte e v' não é sorvedouro, então, para todo $w \in V$ que é fonte ou sorvedouro,

$|\delta(w) \cap t'| = |\delta(w) \cap t|$. Por outro lado, os cortes orientados não triviais têm mais do que k arestas de t e além disso, aqueles cortes que contêm e e e' também contêm e'' . Portanto todos os cortes orientados não triviais são k -cobertos por t' .

Vamos mostrar agora que todo corte orientado que contém e'' contém também e ou e' . Suponha que existe um corte orientado d'' tal que $e'' \in d''$ e $\{e, e'\} \cap d'' = \emptyset$. Podemos supor que $V^+d' \subset V^+d'' \subset V^+d$ pois do contrário poderíamos substituir d'' pelo corte $\delta((V^+d \cap V^+d'') \cup V^+d')$. Veja a figura 5.5 (b). Além disso, $d'' \in C^+$ porque $V^+d'' \subset V^+d$ implica que $E^-d'' \supset E^-d$ e como $d \in C^+$ então $d \in C^+$.

Assim, se $|d'' \cap t^+| \geq k$ então V^+d' não era maximal e se $|d'' \cap t^+| < k$ então V^+d não era minimal. Em ambos os casos temos uma contradição. De fato, todo corte orientado que contém e'' contém e ou e' . Isso conclui a demonstração. \square

Conclusão

Este trabalho unifica os principais resultados da Teoria dos Grafos que tratam de cortes ímpares e cortes orientados e se apresentam como igualdades minimax. Apesar de muitos resultados importantes terem sido estabelecidos, vários problemas permanecem ainda em aberto.

Mostra-se nesta dissertação que é útil abordar as igualdades minimax para cortes ímpares e orientados em conjunto. Apesar da relação entre estes dois conceitos não ser ainda inteiramente conhecida, sabemos que muitas semelhanças existem entre eles, bem como algumas diferenças fundamentais.

Entre as semelhanças, podemos destacar a correspondência existente entre os enunciados das diversas igualdades minimax e principalmente a possibilidade de demonstrá-las utilizando idéias em comum. Em particular, as demonstrações que apresentamos para os teoremas de Lucchesi-Younger, Lovász e Edmonds-Giles e do Teorema 4.18 são bastante análogas. Outro resultado relevante é a perfeita analogia existente entre os circuitos ímpares e orientados em grafos planares no que diz respeito às relações com os cortes do grafo dual.

A principal semelhança entre os problemas duais para cortes orientados e ímpares apresentados no capítulo 5 é a existência de importantes problemas em aberto. A dificuldade destes problemas representa ou uma outra semelhança entre cortes orientados e ímpares, ou apenas significa que não conhecemos com suficiente profundidade os problemas que envolvem as famílias disjuntas de coberturas de cortes.

A primeira diferença marcante entre igualdades minimax para os cortes ímpares e orientados está refletida nos enunciados do Teorema de Lucchesi-Younger e de Lovász, já que o enunciado do segundo mostra que é necessário recorrer às famílias 2-disjuntas de cortes para que a igualdade seja válida. Podemos concluir outra diferença importante a partir do conteúdo da seção 4.5 que mostra que mesmo que exista uma igualdade minimax para o problema da k -cobertura mínima dos T -cortes, é provável que ela não seja totalmente análoga ao Teorema de Edmonds-Giles. Esta igualdade minimax deveria corresponder à Conjectura 4.19, que mostramos não ser válida no caso geral. Para os problemas do capítulo 5 as diferenças parecem ser ainda maiores, mas talvez não conheçamos o suficiente destes problemas para fazermos afirmações mais objetivas.

Além do que foi discutido até aqui, esta dissertação traz as seguintes contribuições:

- Apresentamos demonstrações originais para os Teoremas de Lovász e de Edmonds-Giles, tendo em comum a utilização do que chamamos de Método da Aresta Essencial.
- Estendemos o resultado de Seymour estabelecendo uma relação mais profunda entre a generalização da Conjectura de Fulkerson e a igualdade minimax para T -cortes mínimos.
- Provamos o Teorema 4.18 para as k -coberturas dos T -cortes no caso em que $|T| = 2$, mostrando que o problema de determinar k -caminhos aresta-disjuntos entre dois vértices pode ser relacionado através de igualdade minimax.
- Provamos o Teorema 5.12 que afirma que se todos os T -cortes têm a mesma paridade e $|T| \leq 8$, então o número de T -junções disjuntas é igual ao tamanho de um T -corte mínimo.

Além destes resultados, apresentamos as seguintes conjecturas que consideramos relevantes:

- Conjectura 4.19 que trata das k -coberturas dos T -cortes para $|T| \leq 4$.
- Conjectura 5.7 que tem o seguinte enunciado: se todos os T -cortes de G têm a mesma paridade então o tamanho de uma família 2-disjunta máxima de T -junções é igual ao dobro do tamanho de um T -corte mínimo.

Além da tentativa de resolução destas conjecturas, acreditamos que os seguintes assuntos podem ser pesquisados como continuação deste trabalho:

- A demonstração do Teorema 4.18 que apresentamos é um espelho da demonstração do Teorema de Edmonds-Giles. Talvez este resultado não precise de tanto esforço para ser demonstrado. Uma prova mais direta para o problema poderia ser procurada.
- Seria muito interessante que se investigasse igualdades minimax para as k -coberturas dos T -cortes. Pode-se também tentar provar que o problema da k -cobertura mínima dos T -cortes seja NP-difícil para algum k e $|T|$ constantes. Isto nos indicaria que uma igualdade para o caso geral não deve existir.
- A aplicação de abordagens semelhantes à apresentada no capítulo 4, que consiste em trabalhar ao mesmo tempo com dois tipos de problemas que apresentam simetrias, pode ser utilizada para tentativas de solução não apenas dos problemas do capítulo 5 deste trabalho mas também de outros tipos de problemas da Teoria dos Grafos.

- Os mesmos problemas estudados nesta dissertação poderiam ser estudados com ênfase em algoritmos eficientes para solucioná-los. Também seria interessante o estudo destes problemas através de Combinatória de Poliedros.

Bibliografia

- [Ber73] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. Macmillan, 1976.
- [EG77] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:185–204, 1977.
- [ET76] K. Eswaran and R. E. Tarjan. Augmenting problems. *SIAM J. Comp.*, 5(4):653–665, December 1976.
- [FL88] P. Feofiloff and C. L. Lucchesi. *Algoritmos para Igualdades Minimax em Grafos*. VI Escola de Computação, Campinas, 1988.
- [Fra81] A. Frank. How to make a digraph strongly connected. *Combinatorica*, 1:145–153, 1981.
- [FY87] P. Feofiloff and D. H. Younger. Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs. *Combinatorica*, 7(3):255–263, 1987.
- [GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: a guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman and Company, 1979.
- [GLS81] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 2(1):169–197, 1981.
- [GLS88] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 1988.
- [GT89] D. Goldfarb and M. J. Todd. Linear programming. In G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd, editors, *Optimization*, volume 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*. North-Holland, 1989.
- [Kar79] A. V. Karzanov. On the minimal number of arcs of a digraph meeting all its directed cutsets. *Graph Theory Newsletters*, 8(4), 1979.

- [Lov76] L. Lovász. On two minimax theorems in graph. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 21:96–103, 1976.
- [LP86] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. North Holland, 1986.
- [Luc76] C. L. Lucchesi. *A minimax equality for directed graphs*. PhD thesis, University of Waterloo, 1976.
- [LY78] C. L. Lucchesi and D. H. Younger. A minimax relation for directed graphs. *J. London Math. Soc.*, 17(2):369–374, 1978.
- [PS82] C. Papadimitriou and K. Steinglitz. *Combinatorial Algorithms – Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, 1982.
- [Pul89] W. R. Pulleyblank. Polyhedral combinatorics. In G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd, editors, *Optimization*, volume 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, chapter V, pages 371–446. North-Holland, 1989.
- [Sch80] A. Schrijver. A counterexample to a conjecture of Edmonds and Giles. *Discrete Mathematics*, 32:213–214, 1980.
- [Sch82] A. Schrijver. Min-max relations for directed graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 16:261–280, 1982.
- [Sch83] A. Schrijver. Min-max results in combinatorial optimization. In B. Korte A. Bachem, M. Grotschel, editor, *Mathematical Programming: the state of the art*. Springer-Verlag, 1983.
- [Sey79] P. D. Seymour. On multicolourings of cubic graphs and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc. London Math. Soc. Serie 3*, 38:423–460, 1979.
- [Sey81] P. D. Seymour. On odd cuts and plane multicommodity flows. *Proceedings of the London Math. Soc.*, 42:178–192, 1981.
- [Woo78] D. R. Woodall. Menger and König Systems. *Lecture Notes in Mathematics*, pages 620–635, 1978.

Índice de Definições

- bi-coberturas 66
- c-bipartido 40
- c-disjunta 34
- caminho 2
 - orientado 2
- capacidade 34
- circuitos
 - orientados 53
 - ímpares 53
- cobertura 33
 - dos cortes orientados 12
- coleção básica 29
- componentes conexos 2
- corte 1
 - orientado 2
 - trivial 1
 - ímpar 1
 - cruzamento 19
 - cópias de 24
- dígrafo 2
 - conexo 2
 - fortemente conexo 2
- dual 53
- elemento essencial 34
- emparelhamento perfeito 16
- euleriano 56
- faces 53
- família 3
 - disjunta 4
 - k-disjunta 4
 - base de uma 3
- fonte-sorvedouro conexo 65
- fonte 2
- função potencial 24
- grafo 1
 - bipartido 1
 - orientado 2
 - subjacente 2
 - conexo 2
- grau 1
- laminar 19
- margem 2
 - negativa 3
 - positiva 3
- multiplicidade 3
- método do elemento essencial 33
- orientação 2
- planar 53
- ponta de uma aresta
 - ponta negativa 2
 - ponta positiva 2
- redução 59
- representação planar 53
- r-grafo 58
- r-regular 58
- sorvedouro 2
- subfamília 4
- subgrafo 1
- subgrafo induzido 1
- T-circuito 53
- T-corte 14
- T-junção 14
- válida 28