

Grafos PI

Sheila Morais de Almeida

Dissertação de Mestrado

Grafos PI

Sheila Morais de Almeida

Abril de 2005

Banca Examinadora:

- Célia Picinin de Mello (Orientadora)
- Márcia Rosana Cerioli
Instituto de Matemática e COPPE - Sistemas e Computação - UFRJ
- Cid Carvalho de Souza
Instituto de Computação - UNICAMP
- Simone Dantas de Souza
Instituto de Computação - UNICAMP

Grafos PI

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Sheila Moraes de Almeida e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 04 de abril de 2005.

Célia Picinin de Mello (Orientadora)

Anamaria Gomide (Co-orientadora)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Almeida, Sheila Morais de

AL64g Grafos PI / Sheila Morais de Almeida -- Campinas, [S.P. :s.n.],
2005.

Orientadores : Célia Picinin de Mello; Anamaria Gomide

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Teoria dos grafos interseção. 3.
Representação dos grafos. I. Mello, Célia Picinin de. II. Gomide,
Anamaria. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Computação. IV. Título.

Título em inglês: PI graphs

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Graph theory. 2. Intersection graph theory. 3.
Representation of graphs.

Área de concentração: Teoria da Computação

Titulação: Mestre em Ciência da Computação.

Banca examinadora: Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza (UNICAMP)
Prof. Dra. Márcia Rosana Cerioli (UFRJ)
Prof. Dra. Simone Dantas de Souza (UNICAMP)

Data da defesa: 04/04/2005

Resumo

Uma representação PI consiste em duas retas paralelas, r e s , e triângulos com um vértice em r e um lado em s . Considere R uma representação PI. O grafo interseção de R é chamado *grafo PI* quando cada vértice do grafo corresponde a um triângulo de R e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, os triângulos correspondentes se intersectam.

Segundo o livro *Graph Classes - a Survey* (1999) [3], escrito por Brandstädt, Le e Spinrad, os problemas de reconhecer e de caracterizar a classe dos grafos PI ainda não estão resolvidos. Essa é a principal motivação para o estudo da classe PI.

Nesta dissertação, apresentamos um estudo dos grafos PI baseado nas suas relações com outras classes de grafos tais como os grafos de intervalos e permutação, que são classes amplamente conhecidas de grafos interseção, e os grafos trapezoides, que possuem uma estrutura muito semelhante à dos grafos PI.

Esta dissertação é uma síntese de trabalhos existentes sobre a classe PI e apresenta novas condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo seja PI.

Abstract

A PI-representation consists of two parallel lines, r and s , and triangles with one vertex on r and the other two on s . Let R be a PI-representation. The intersection graph of R is called *PI graph* when each vertex in the graph corresponds to a triangle in R and there exists an edge between two vertices if and only if their corresponding triangles intersect.

According to the book *Graph Classes - a Survey* (1999) [3], by Brandstädt, Le and Spinrad, the PI graph characterization and recognition problems are still open. This is the main motivation for the study of the PI graph class.

In this dissertation, we present a study of PI graphs based on their relationship with other graph classes such as the interval and permutation graphs, which are well known intersection graph classes, and trapezoid graphs, which have a very similar structure to that of PI graphs.

This dissertation is a survey on existing work on the PI graph class and presents new necessary and/or sufficient conditions for a graph to be PI.

Agradecimentos

Agradeço aos professores Jorge Stofi e Ariadne B. R. de Carvalho, meus primeiros orientadores, as duas pessoas que me iniciaram na pesquisa e que foram tão maravilhosos que me fizeram desejar seguir seus passos. Admiro muito vocês.

Agradeço à professora Célia Picinin de Mello e ao professor Cid Carvalho de Souza, meus primeiros professores em teoria da computação. Suas aulas excelentes fizeram com que eu me apaixonasse pela teoria e desejasse viver com ela todos os meus dias. Estou deixando aqui minhas juras de amor eterno à teoria da computação.

Às minhas orientadoras Célia Picinin e Anamaria Gomide, minha amizade e meus sinceros agradecimentos pelo carinho, pela paciência, pelo apoio e amizade. Tenho certeza de que eu não poderia estar em melhores mãos, vocês são excepcionais.

Aos meus amigos, Gilberto Pastorello Jr., Luís Meira, Cândida Nunes, professor Rodolfo Azevedo, professor Guido Araújo e professor Cid Carvalho por se interessarem pelo problema dos grafos PI, por me questionarem, pelas soluções que me trouxeram, por dedicarem um pouquinho do seu tempo (cada um na sua medida) ao meu desafio. O interesse de vocês me empolgou e deu ânimo para que eu seguisse com esse trabalho e fez com que eu achasse que o meu projeto era o mais interessante e bonito do mundo :-)

Em especial, agradeço ao meu grande amigo Vinícius Fortuna que, além de ser um amigo maravilhoso, dedicou bastante tempo aos meus grafos PI. Obrigada pelo algoritmo de reconhecimento, obrigada pelo apoio e por todas as vezes que você discutiu o meu projeto comigo.

A Augusto Devegili, Lásaro Camargos, Marcio Oliveira, Cláudio Carvalho e Thiago Coelho, pelas madrugadas que me fizeram companhia, estudando complexidade de algoritmos no IC.

Ao meu amigo, Cláudio Guido, pela amizade, pela companhia em Porto Alegre, por ser tão tão tão legal.

Ao Rodrigo Tomita, meu fiel companheiro de café, meu muro das lamentações, meu conselheiro e meu amigo de todas as horas.

Ao Ulisses, meu amor, por existir e por estar aqui no IC. Isso fez com que eu quisesse vir ao IC todos os dias :-)

Às meninas que moram comigo, Elo (que faz faculdade de dança e foi assistir meu seminário sobre grafos PI), Dry, Cá, Tai, Sá e Tatá, pela amizade, pelo companheirismo, pela paz e alegria da nossa casa.

À CAPES, que me concedeu uma bolsa de mestrado para que realizasse esse projeto.

Finalmente, meus agradecimentos especialíssimos aos meus pais, Chico e Cida, e meus irmãos, Fabrício e Grace, que foram meu alicerce, que me demonstraram seu amor nas pequenas coisas e das mais diversas formas, que me apoiaram sempre. Amo muito vocês.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Agradecimentos	viii
1 Introdução	1
2 Notação e conceitos necessários	3
3 Grafos PI e classes relacionadas	7
3.1 Os grafos PI	7
3.2 Subclasses dos grafos PI	9
3.2.1 Grafos permutação	9
3.2.2 Grafos de intervalos	10
3.3 Superclasses dos grafos PI	12
3.3.1 Grafos PI*	12
3.3.2 Grafos paralelogramos	16
3.3.3 Grafos trapezóides	17
3.3.4 Grafos de co-comparabilidade	18
3.4 A classe dos grafos trapezóides simples	21
3.5 Relações de continência	22
4 Grafos trapezóides e grafos PI	25
4.1 Propriedades dos grafos trapezóides	25
4.2 Quando um grafo é PI	29
4.2.1 Contração de arestas	30
4.2.2 Uma restrição na representação PI: os grafos PI-especiais	31
4.2.3 Uma caracterização para os grafos PI	33

5	A família de Gallai e os grafos PI	41
5.1	Família de Gallai e grafos de co-comparabilidade	41
5.2	Família de Gallai e grafos PI	45
5.3	Grafos PI e grafos permutação	47
6	Conclusões e trabalhos futuros	51
	Bibliografia	53

Lista de Figuras

3.1	(a) Grafo G .	(b) Uma representação PI de G .	8
3.2	(a) Grafo G .	(b) Uma representação permutação de G .	9
3.3	(a) Grafo G .	(b) Uma representação por intervalos de G .	10
3.4	(a) C_4 .	(b) Uma representação PI de C_4 .	11
3.5	Um grafo de intervalos que não é grafo permutação.		11
3.6	(a) Grafo G .	(b) Uma representação PI* de G .	12
3.7	(a) Grafo apresentado por Cheah e Corneil.	(b) Uma representação PI* do grafo de Cheah e Corneil.	13
3.8	Representação PI de um $K_{4,4}$		14
3.9	Uma representação PI dos subgrafos $K_{4,4}$ induzidos do grafo de Cheah.		15
3.10	(a) Grafo C_4 .	(b) Uma representação por paralelogramos de C_4 .	16
3.11	(a) Grafo de Lin: um grafo paralelogramo que não é PI.	(b) Uma representação por paralelogramos do grafo de Lin.	18
3.12	(a) Grafo G .	(b) Uma representação trapezoidal de G .	19
3.13	Grafo de Felsner, que é trapezóide e não é paralelogramo.		20
3.14	(a) Grafo G .	(b) Uma orientação transitiva de G .	20
3.15	(a) Grafo G .	(b) Uma orientação transitiva no complemento do grafo G .	21
3.16	Grafo PI que não é trapezóide simples.		22
3.17	Diagrama das relações dos grafos PI com algumas classes de grafos conhecidas. Os números são referências a figuras dessa dissertação que contêm exemplos de grafos em cada classe.		23
3.18	Diagrama das relações entre os grafos PI e as classes descritas em [20]. Os números são referências a figuras dessa dissertação que contêm exemplos de grafos em cada classe.		24
4.1	Grafo fracamente cordal que não é trapezóide.		29
4.2	(a) Grafo G .	(b) Uma representação PI de G .	30
4.3	(a) C_5 .	(b) C_4 resultante da contração da aresta $(a, b) \in E(C_5)$.	31
4.4	Grafos proibidos para a classe dos grafos de intervalos		32
4.5	Ordem dos extremos dos trapézios segundo a regra (4.3).		33

4.6	Uma representação trapezoidal que não é resultado do algoritmo <i>TRAPtoPI</i> .	37
5.1	Grafos proibidos para a classe de Comparabilidade.	41
5.2	Complementos dos grafos proibidos para Comparabilidade	42
5.3	Grafos cujos complementos são de co-comparabilidade e pertencem à família de Gallai.	43
5.4	Uma representação por intervalos da família H_n .	43
5.5	Uma representação por intervalos da família I_n .	44
5.6	Uma representação PI da família J_n .	44
5.7	Orientações transitivas para os grafos A_1, \dots, A_7, A_9 e A_{10} .	46
5.8	Uma representação PI da família $\overline{D_{2n+1}}$.	46
5.9	Uma representação PI da família $\overline{E_{2n}}$.	47
5.10	Uma representação PI da família $\overline{F_{2n+1}}$.	47
5.11	Uma representação PI para o complemento dos grafos $A_1..A_7, A_9$ e A_{10} .	48
5.12	Grafos proibidos para permutação que pertencem a classe PI.	49
5.13	Grafos cujos complementos são proibidos para permutação e são PI.	50

Capítulo 1

Introdução

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. Pode-se associar um grafo G a \mathcal{F} da seguinte forma: cada conjunto de \mathcal{F} corresponde a um vértice de G e existe uma aresta ligando dois vértices em G se, e somente se, os conjuntos correspondentes a estes vértices se intersectam. O grafo G é chamado *grafo interseção* da família \mathcal{F} . Sabe-se que todo grafo simples é grafo interseção de alguma família de conjuntos [17]. Assim, várias classes amplamente conhecidas de grafos foram definidas considerando famílias com estruturas especiais. Se \mathcal{F} for, por exemplo, uma família de intervalos de um conjunto linearmente ordenado como a reta real, o grafo interseção de \mathcal{F} é um *grafo de intervalos*. Considere duas retas paralelas r_1 e r_2 . Se \mathcal{F} for uma família de segmentos de reta com um extremo em r_1 e outro em r_2 , o grafo interseção dos elementos de \mathcal{F} é chamado *grafo permutação*.

A classe de grafos PI foi definida em 1987 no artigo “Extensions of permutation and interval graphs” [8], muito citado nas referências de trabalhos sobre grafos interseção de famílias de conjuntos entre duas retas paralelas. O artigo, escrito por Corneil e Kamula, generaliza as classes de grafos permutação e de intervalos, criando uma nova classe onde a família \mathcal{F} contém triângulos com um lado em r_1 e um vértice em r_2 . O grafo interseção de \mathcal{F} é chamado *grafo PI (Point-Interval)*. No mesmo artigo, Corneil e Kamula definem a classe dos *grafos trapezóides*, uma outra generalização dos grafos permutação e de intervalos, onde a família \mathcal{F} contém trapézios entre as retas paralelas r_1 e r_2 . Os autores mostram que a classe trapezóide é uma superclasse dos grafos PI.

Segundo o livro *Graph Classes - a Survey* (1999) [3], escrito por Brandstädt, Le e Spinrad, os problemas de reconhecer e de caracterizar a classe PI ainda não estão resolvidos. Essa é a principal motivação para o estudo da classe, já que os grafos de intervalos e permutação são reconhecidos por algoritmos lineares [2, 25] e os grafos trapezóides por algoritmos polinomiais [5].

Apesar de não serem conhecidos algoritmos polinomiais para o reconhecimento de grafos PI, alguns problemas já são resolvidos eficientemente para esta classe. Lin apresenta,

no artigo “Triangle graphs and their coloring” [19], um algoritmo $O(n \log \chi)$ para a coloração mínima dos vértices e para encontrar uma maior clique de um grafo PI, onde χ é o número cromático do grafo; também apresenta um algoritmo de tempo $O(n \log \alpha)$ para o problema de encontrar um maior conjunto independente de vértices e uma cobertura por cliques mínima em grafos PI, onde α é o tamanho de um maior conjunto independente.

Apesar de Lin apresentar em [20], um grafo trapezóide que não é PI, não encontramos na bibliografia uma característica dos grafos PI que os distinguisse dos demais grafos trapezóides. Dedicamos grande parte do estudo realizado nesta dissertação na busca de tal característica. Outras alternativas incluíram a busca de grafos proibidos para subclasses dos grafos PI que não fossem proibidos para a própria classe PI. Assim, analisamos as classes dos grafos de intervalos e permutação.

O capítulo 2 apresenta as notações e alguns conceitos básicos necessários para a leitura desta dissertação. O capítulo 3 apresenta a classe de grafos PI e algumas relações importantes dessa classe com outras classes de grafos. No capítulo 4 estão algumas propriedades descritas por Corneil e Kamula [8] para os grafos trapezóides e que são herdadas pela classe PI; definimos uma subclasse dos grafos PI, a classe PI-especial, obtida restringindo os triângulos da família \mathcal{F} a triângulos não obtusângulos; mostramos quando um grafo PI não é de intervalos; e identificamos, dentre os grafos trapezóides, aqueles que são PI. O capítulo 5 relaciona os grafos PI com a família de Gallai e a classe dos grafos permutação e apresenta uma condição necessária para que um grafo seja PI. No capítulo 6 estão as conclusões e algumas considerações que podem direcionar o estudo dos grafos PI em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Notação e conceitos necessários

Algumas definições são necessárias para uma boa leitura dessa dissertação. Assim, este capítulo se destina à apresentação da notação utilizada e de alguns conceitos de teoria dos grafos.

Nesta dissertação, $G = (V(G), E(G))$ denota um grafo simples e conexo, com $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$, onde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ é o conjunto dos vértices e $E(G) = \{(v_i, v_j), \text{ tal que } v_i, v_j \in V(G)\}$ é o conjunto das arestas de G . Quando não houver ambigüidade, utilizaremos V e E para denotar os conjuntos de vértices e de arestas, respectivamente.

Quando $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, H é chamado de *subgrafo de G* . O *subgrafo induzido de G* para um subconjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ é o subgrafo $G[V'] = (V', E')$, onde $E' = \{(u, v) \in E(G), \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq V'\}$.

O grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, onde $\overline{E} = \{(u, v), \text{ tal que } (u, v) \notin E\}$ é chamado de *complemento de G* .

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. Pode-se associar a \mathcal{F} um grafo G tal que cada conjunto de \mathcal{F} corresponde a um vértice de G e existe uma aresta ligando dois vértices em G se, e somente se, os conjuntos correspondentes a esses vértices se intersectam. O grafo G é chamado *grafo interseção* da família \mathcal{F} e a família \mathcal{F} é chamada de *representação de G* .

Algumas classes de grafos bastante estudadas são formadas por grafos interseção de famílias de conjuntos com estruturas especiais. Exemplos são os grafos de intervalos, onde \mathcal{F} é uma família de intervalos de um conjunto linearmente ordenado como, por exemplo, a reta real; os grafos trapezoides, onde \mathcal{F} é uma família de trapézios entre duas retas paralelas; e os grafos permutação, onde \mathcal{F} é uma família de segmentos de reta com extremos em duas retas paralelas.

Sejam duas retas paralelas, r_1 e r_2 , e polígonos Θ_1 e Θ_2 formados entre r_1 e r_2 , cada um com pelo menos um vértice em r_1 e um vértice em r_2 . A notação $\Theta_1 \ll \Theta_2$ indicará que todos os pontos do polígono Θ_1 estão estritamente à esquerda de todos os pontos

do polígono Θ_2 , não havendo interseção entre eles. Da mesma forma, se Θ_1 e Θ_2 forem segmentos de reta com um extremo em r_1 e um extremo em r_2 ou intervalos de uma reta, teremos $\Theta_1 \ll \Theta_2$ sempre que todos os pontos de Θ_1 estiverem estritamente à esquerda de Θ_2 .

Para qualquer representação de um grafo através da interseção de figuras geométricas entre duas retas paralelas, convencionaremos que a reta inferior será chamada r_1 e a reta superior será r_2 . Consideraremos r_1 e r_2 retas reais. Para que não haja ambigüidade, chamaremos de *pontos extremos* os vértices dos polígonos e os extremos dos intervalos e dos segmentos de reta das representações desta dissertação. Os pontos extremos que estão sobre r_1 e r_2 , serão ordenados da esquerda para a direita. Com os pontos ordenados, diz-se que um ponto P precede um outro ponto Q quando P e Q estão na mesma reta e P está à esquerda de Q na representação. O fato de que P precede Q será denotado por $P < Q$. Dois pontos P e Q onde $P < Q$ são ditos consecutivos se, e somente se, não existe nenhum outro ponto extremo S de uma figura geométrica tal que $P < S < Q$.

Considere R uma representação de um grafo através da interseção de figuras geométricas entre as retas paralelas r_1 e r_2 . Sejam Θ_1 e Θ_2 duas figuras geométricas distintas em R . Pode-se considerar, sem perda de generalidade, que os pontos extremos de Θ_1 são distintos dos pontos extremos de Θ_2 , pois se houver um ponto extremo de Θ_1 na mesma posição de um ponto extremo de Θ_2 , então $\Theta_1 \cap \Theta_2 \neq \emptyset$. Como r_1 e r_2 são retas reais, existe um ponto mais a esquerda (ou mais a direita) onde se pode colocar um dos dois extremos coincidentes de forma a manter a interseção e não criar novas adjacências.

Caracterizar uma classe de grafos é encontrar propriedades para o conjunto dos grafos que pertencem à classe de tal forma que satisfazer essas propriedades é condição necessária e suficiente para que o grafo pertença à classe.

Reconhecer uma classe de grafos é construir um algoritmo que tenha como entrada um grafo G e que responda se G pertence ou não à classe. Em geral, buscam-se algoritmos que sejam eficientes, ou seja, que respondam a essa questão em tempo polinomial.

Um *caminho* em um grafo $G = (V, E)$ é uma seqüência de vértices distintos (v_1, \dots, v_n) , $v_i \in V$, com um conjunto de arestas $\{(v_i, v_{i+1}) \in E, \quad 0 < i < n\}$. Um caminho P , com n vértices, tem *comprimento* $n - 1$. Observe que o comprimento de um caminho é igual ao seu número de arestas.

Um *ciclo* em um grafo $G = (V, E)$ é uma seqüência de vértices $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1})$, $v_i \in V$, onde (v_1, \dots, v_n) é um caminho e a aresta $(v_n, v_{n+1}) = (v_n, v_1) \in E$. Um ciclo com n vértices é dito de *tamanho* n .

Os grafos que não possuem ciclos induzidos de tamanho maior que 3 são chamados *grafos cordais* e os grafos que não possuem ciclos induzidos nem complementos de ciclos induzidos com mais de 4 vértices são chamados *fracamente cordais*.

Uma aresta (v_i, v_j) , quando orientada do vértice v_i para o vértice v_j , será denotada

por $[v_i, v_j]$.

A *propriedade de orientação transitiva* se dá quando cada aresta de um grafo $G = (V, E)$ pode ser orientada de forma a resultar em um grafo orientado $\vec{G} = (V, \vec{E})$ que satisfaça a seguinte condição:

$$\text{Se } [v_i, v_j] \in \vec{E} \text{ e } [v_j, v_k] \in \vec{E}, \text{ então } [v_i, v_k] \in \vec{E} \quad (\forall v_i, v_j, v_k \in V).$$

Propriedade hereditária de um grafo G é uma propriedade satisfeita por G e que também é satisfeita por qualquer subgrafo induzido de G .

Em toda classe de grafos interseção, a propriedade de ser grafo interseção é hereditária. Seja H um subgrafo induzido de um grafo interseção de uma família de conjuntos \mathcal{F} , então H é grafo interseção de um subconjunto de \mathcal{F} .

Três vértices distintos e dois a dois não adjacentes em um grafo formam uma *tripla asteroidal* quando para quaisquer dois deles existe um caminho que os liga e não passa pela vizinhança do terceiro. Um grafo que não possui triplas asteroidais é chamado de grafo *sem tripla asteroidal* (STA).

Um grafo G é *perfeito* se, para todo subgrafo induzido H de G , o número cromático de H é igual ao tamanho de uma maior clique de H .

Em [1], encontram-se os conceitos básicos da teoria dos grafos não definidos neste trabalho.

Capítulo 3

Grafos PI e classes relacionadas

Esse capítulo destina-se à apresentação da classe PI e das principais classes que contextualizam os grafos PI. Algumas relações de continência importantes serão descritas a seguir. Na página 23, diagramas de Venn exibem as relações de continência descritas neste capítulo.

3.1 Os grafos PI

Considere duas retas paralelas e uma família \mathcal{T} de triângulos tal que cada triângulo $\Delta = (T, E, D)$ satisfaz as seguintes condições:

- sobre uma das retas deve estar um intervalo $[E, D]$ que será a *base* do triângulo;
- sobre a outra reta deve estar um único ponto T , que será o *topo* do triângulo.

O grafo interseção dos triângulos de \mathcal{T} tal que todos os triângulos tem base sobre uma mesma reta, é chamado *grafo PI*.

Chamaremos de *representação PI* de um grafo G à representação de G através da interseção dos triângulos de \mathcal{T} entre duas retas paralelas. As retas que contêm as bases e os topos dos triângulos de \mathcal{T} serão denotadas por r_1 e r_2 , respectivamente. A figura 3.1 apresenta um grafo G e sua representação PI.

Observe que a base de cada triângulo pode se constituir de um único ponto. Assim, o triângulo terá um topo T e uma base $[E, D]$ onde $E = D$. Portanto, há casos em que, em vez de um triângulo $\Delta = (T, E, D)$, a representação permite que se tenha um segmento de reta $\Gamma = (T, E)$ entre r_1 e r_2 .

Nesta dissertação, o triângulo que representa o vértice v_i na representação PI, R , de um grafo PI será denotado por $\Delta_{v_i}(R) = (T_{v_i}, E_{v_i}, D_{v_i})$. Quando não houver ambigüidade, $\Delta_{v_i}(R)$ será substituído por $\Delta_i = (T_i, E_i, D_i)$.

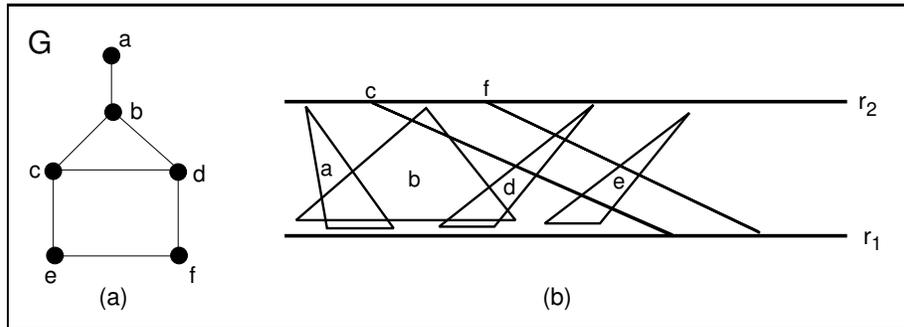


Figura 3.1: (a) Grafo G . (b) Uma representação PI de G .

Lema 3.1.1 *Todo segmento de reta de uma representação PI pode ser substituído por um triângulo.*

Prova Considere uma representação PI e seja \mathcal{C} o conjunto dos pontos em r_1 que são extremos das bases dos triângulos ou extremos dos segmentos de reta entre r_1 e r_2 . Ordene os pontos em \mathcal{C} tal que, para todo K_i e $K_{i+1} \in \mathcal{C}$, tem-se $K_i < K_{i+1}$. Como r_1 é uma reta real, existe um ponto X tal que $K_i < X < K_{i+1}$. Para cada segmento de reta (T_i, K_i) , forme o triângulo (T_i, K_i, X) . Construimos, portanto, uma representação por triângulos que mantém as adjacências de G e que não apresenta segmentos de reta entre r_1 e r_2 . \square

Uma característica da classe PI é a sua hereditariedade. Sejam $G = (V, E)$ um grafo PI e $\{\Delta_v\}_{v \in V}$ uma representação PI de G . A representação $\{\Delta'_v\}_{v \in V'}$ de um subgrafo induzido $G' = (V', E')$ construída retirando-se os elementos de $\{\Delta_v\}_{v \in V}$ que representam vértices que não pertencem a V' é, claramente, uma representação PI de G' . Sendo assim, G' é PI. Portanto, vale o seguinte lema:

Lema 3.1.2 *Sejam G um grafo PI e G' um subgrafo induzido por qualquer subconjunto de vértices de G . O grafo G' é PI.*

Segundo o livro *Graph Classes - a Survey* de A. Brandstädt, V. B. Le e J. P. Spinrad [3], os problemas de reconhecer e de caracterizar a classe PI ainda não estão resolvidos.

Em [19], encontramos algoritmos eficientes para coloração mínima dos vértices e para encontrar uma maior clique de um grafo PI. Esses dois problemas podem ser resolvidos em tempo $(O(n \log \chi))$, onde χ é o número cromático do grafo. O problema de encontrar um maior conjunto independente de vértices de um grafo PI pode ser resolvido em tempo $(O(n \log \alpha))$, onde α é o tamanho de um maior conjunto independente.

3.2 Subclasses dos grafos PI

Nesta seção, serão apresentadas as subclasses mais conhecidas dos grafos PI. Serão vistos os grafos permutação e os grafos de intervalos.

3.2.1 Grafos permutação

Considere duas retas paralelas r_1 e r_2 . Um grafo G é chamado de *grafo permutação* se G é o grafo interseção de uma família \mathcal{S} de segmentos de reta com um extremo em r_1 e o outro em r_2 . A representação de G através da interseção dos elementos da família \mathcal{S} será chamada *representação permutação* de G . O grafo C_4 é de permutação. Veja uma representação permutação para o C_4 na figura 3.2.

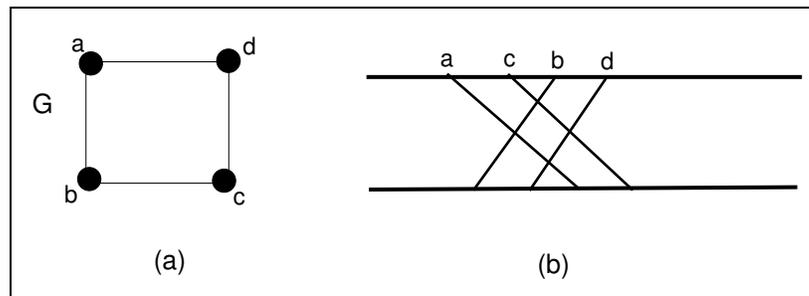


Figura 3.2: (a) Grafo G . (b) Uma representação permutação de G .

Os grafos permutação foram caracterizados em 1941 [12].

Teorema 3.2.1 *Um grafo G é grafo permutação se, e somente se, G e seu complemento \overline{G} admitem uma orientação transitiva para suas arestas.*

Tais grafos podem ser reconhecidos em tempo linear [25]. Também nesta classe vários problemas difíceis possuem soluções elegantes e polinomiais. Em [17] encontramos, além da caracterização da classe, algumas aplicações interessantes e um algoritmo para a coloração dos vértices de um grafo permutação.

Como as representações PI admitem que triângulos $\Delta = (T, E, D)$ sejam segmentos de reta $\Gamma = (T, B)$, $B = E = D$, toda representação permutação é uma representação PI. Logo, vale o seguinte lema.

Lema 3.2.2 *Se G é um grafo permutação então G é PI.*

A inclusão é estrita, o grafo da figura 3.1 é PI e não possui uma orientação transitiva para suas arestas, logo não é permutação (pelo teorema 3.2.1).

3.2.2 Grafos de intervalos

Outra subclasse dos grafos PI amplamente conhecida é a dos grafos de intervalos. Um *grafo de intervalos* é o grafo interseção de uma família \mathcal{I} de intervalos de um conjunto linearmente ordenado como, por exemplo, a reta real. Chamaremos de *representação por intervalos* de um grafo G à representação de G através da interseção dos intervalos da família \mathcal{I} . Veja a figura 3.3.

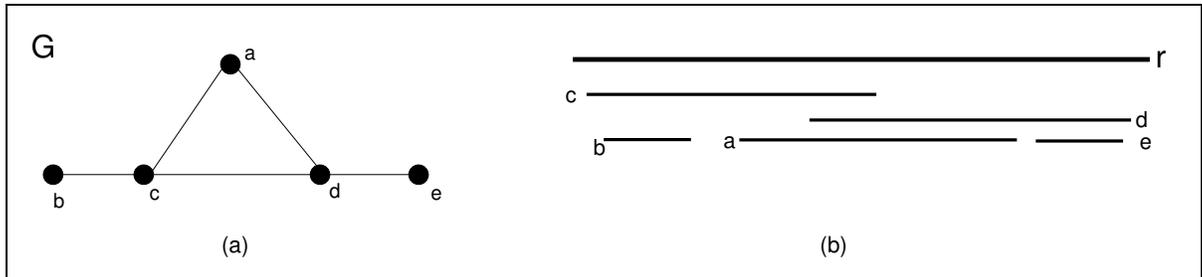


Figura 3.3: (a) Grafo G . (b) Uma representação por intervalos de G .

Esta é uma das classes mais estudadas dentre os grafos interseção. Vários problemas conhecidos como NP-difíceis possuem algoritmos simples e polinomiais quando nos restringimos aos grafos de intervalos (por exemplo, o problema de coloração mínima dos vértices do grafo). O problema de reconhecimento está resolvido desde 1976, através de um algoritmo de tempo linear [2]. Um algoritmo de reconhecimento bastante atual pode ser encontrado em [9].

Lekkerkerker e Boland [18] e Gilmore e Hoffman [16] caracterizaram independentemente esta classe. A caracterização a seguir pode ser encontrada em [17].

Teorema 3.2.3 *Um grafo G é grafo de intervalos se, e somente se, G é cordal e seu complemento admite uma orientação transitiva nas arestas.*

É conhecido que todo grafo de intervalos é PI [8]. A seguir, apresentamos uma prova deste fato.

Lema 3.2.4 *Todo grafo de intervalos é PI.*

Prova Seja $G = (V, E)$ um grafo de intervalos e $\{\Omega_v\}_{v \in V}$ uma representação por intervalos de G . Já que o conjunto de intervalos que representam os vértices de G é um conjunto linearmente ordenado, podemos colocar todos esses intervalos sobre uma mesma reta real r_1 . Chamemos de D_v e E_v os pontos extremos a direita e a esquerda, respectivamente,

de Ω_v . Para cada intervalo Ω_v de r_1 escolha um ponto $T_v \in \Omega_v$. Agora, considere uma segunda reta, r_2 (também real) paralela a r_1 , marque em r_2 o ponto T_v e ligue E_v e D_v à T_v . A representação obtida é uma interseção de triângulos entre duas retas paralelas e de tal forma que as bases estão todas sobre r_1 . O fato de escolhermos um ponto do intervalo Ω_v não foi ao acaso, foi para que se preservassem as interseções da representação por intervalos de G e para que não se criassem novas interseções. Portanto, G possui uma representação PI, logo G é PI. \square

A inclusão é estrita, já que C_4 não é grafo de intervalos pois os grafos de intervalos são cordais (teorema 3.2.3) e é PI (veja figura 3.4).

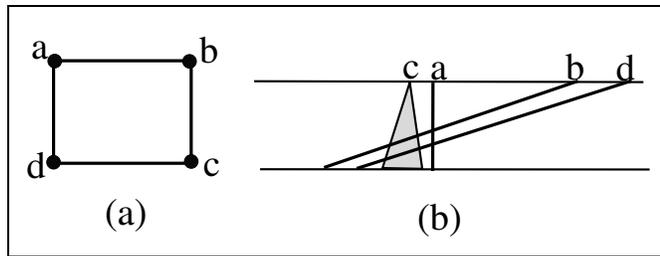


Figura 3.4: (a) C_4 . (b) Uma representação PI de C_4 .

Na figura 3.5 apresentamos um grafo de intervalos que não é grafo permutação (tal grafo não possui uma orientação transitiva para suas arestas). Portanto, grafos de intervalos e permutação são classes distintas e com interseção não vazia (a interseção contém o grafo da figura 3.3).

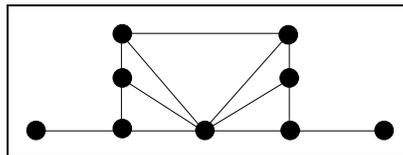


Figura 3.5: Um grafo de intervalos que não é grafo permutação.

O grafo da figura 3.1 é prova de que existem grafos PI que não são grafos permutação e também não são grafos de intervalos. De fato, tal grafo não possui orientação transitiva em suas arestas, logo não é permutação (teorema 3.2.1). Além disso, possui C_4 como subgrafo induzido, portanto não é cordal, logo não é grafo de intervalos (teorema 3.2.3).

3.3 Superclasses dos grafos PI

Nessa seção serão apresentadas algumas superclasses dos grafos PI. O estudo das propriedades hereditárias dessas classes é importante, pois abrange a classe PI.

A classe de grafos PI surgiu como uma generalização das classes permutação e intervalos dada em 1987 por Corneil e Kamula [8]. Além dos grafos PI, os autores definiram outra classe que recebeu o nome de PI^* e que será vista a seguir.

3.3.1 Grafos PI^*

Considere novamente duas retas paralelas, r_1 e r_2 , e uma família \mathcal{V} de triângulos formados entre elas e tal que a base de cada triângulo pode estar tanto em r_1 quanto em r_2 . O grafo interseção dos elementos de \mathcal{V} é chamado *grafo PI^** .

A representação de um grafo G através da interseção dos elementos da família \mathcal{V} será chamada de *representação PI^** de G . Veja a figura 3.6.

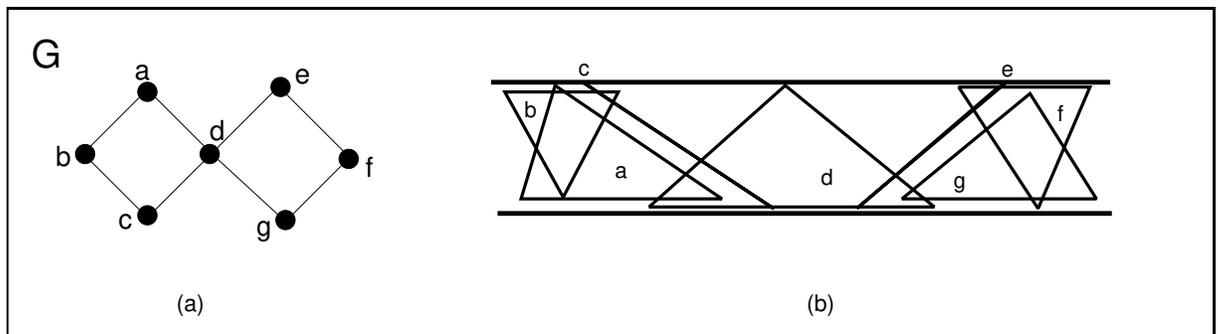


Figura 3.6: (a) Grafo G . (b) Uma representação PI^* de G .

Observe que \mathcal{V} pode conter segmentos de reta.

Como toda representação PI é uma representação PI^* , vale o seguinte lema.

Lema 3.3.1 *Todo grafo PI é PI^* .*

A inclusão é estrita, o grafo de Cheah da figura 3.7, citado por Cheah e Corneil em [5] e encontrado em [4], é um exemplo de grafo PI^* que não é PI. Como apresentado na figura 3.7, há uma representação PI^* para tal grafo.

Mostraremos que o grafo de Cheah não é PI. Observe que G possui dois grafos bipartidos $K_{4,4}$ disjuntos como subgrafos induzidos. O lema a seguir prova que, em um certo sentido, só há uma forma de representar um $K_{4,4}$ utilizando uma representação PI.

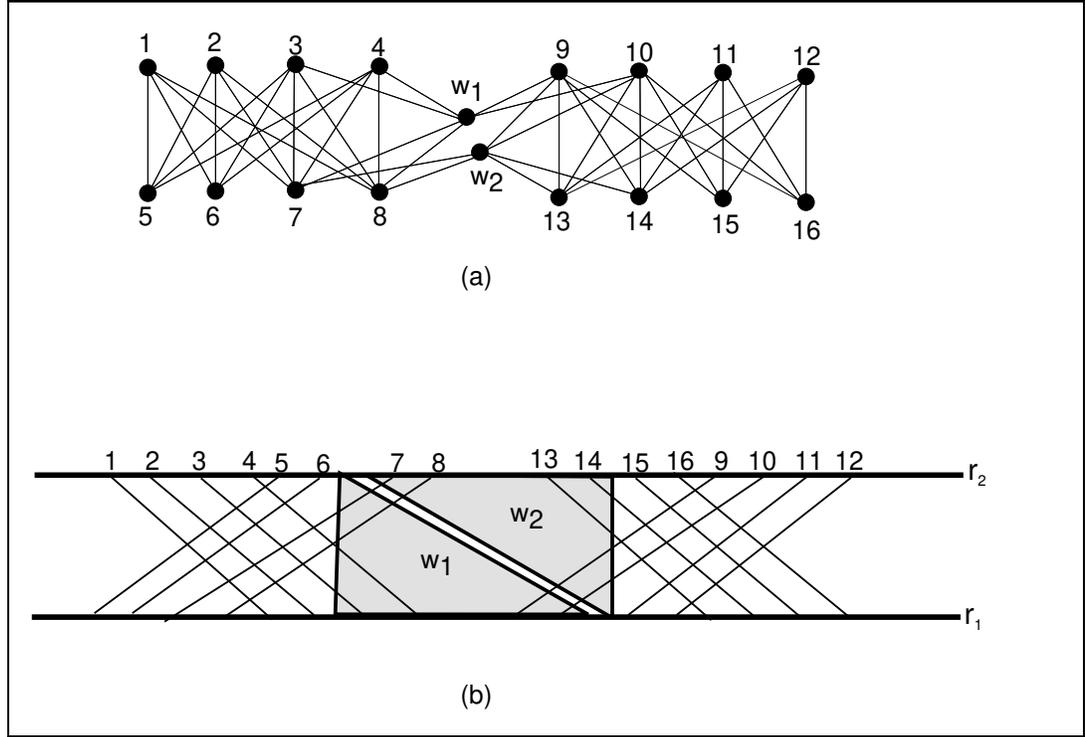


Figura 3.7: (a) Grafo apresentado por Cheah e Corneil. (b) Uma representação PI* do grafo de Cheah e Corneil.

Lema 3.3.2 *Existe uma única representação PI para um grafo $K_{q,q}$.*

Prova Seja $K_{q,q}$ um grafo bipartido completo com bipartição $\{\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2\}$, onde $\mathcal{Q}^1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_q\}$ e $\mathcal{Q}^2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_q\}$. Os vértices do conjunto \mathcal{Q}^1 são dois a dois não adjacentes, então, uma representação PI de \mathcal{Q}^1 segue a regra:

$$\Delta_{u_1} \ll \Delta_{u_2} \ll \Delta_{u_3} \ll \dots \ll \Delta_{u_q} \tag{3.1}$$

Podemos adotar a ordenação topológica dos triângulos apresentada em (3.1), sem perda de generalidade, pois a permutação de qualquer triângulo Δ_{u_i} , $u_i \in \mathcal{Q}^1$, com qualquer triângulo Δ_{u_j} , $u_j \in \mathcal{Q}^1$, em (3.1) ainda é uma representação PI de \mathcal{Q}^1 . Dizemos que, nesse sentido, (3.1) é única.

O mesmo ocorre com os vértices do conjunto \mathcal{Q}^2 :

$$\Delta_{v_1} \ll \Delta_{v_2} \ll \Delta_{v_3} \ll \dots \ll \Delta_{v_q} \tag{3.2}$$

Cada vértice de \mathcal{Q}^2 é adjacente a todos os vértices de \mathcal{Q}^1 , ou seja, $\Delta_{v_i} \cap \Delta_{u_j} \neq \emptyset$, $1 \leq i, j \leq q$. Como a representação PI de \mathcal{Q}^1 é única, para representar o grafo $K_{q,q}$

basta incluir os triângulos que representam vértices do conjunto \mathcal{Q}^2 na representação PI do subgrafo induzido por \mathcal{Q}^1 . Para isso, a inserção do triângulo Δ_{v_i} nesta representação deve ser tal que possibilite a inserção de $\Delta_{v_{i+1}}$, para todo triângulo Δ_{v_i} , $1 \leq i < q$.

Para que uma representação PI inclua todos os vértices de \mathcal{Q}^2 e satisfaça $\Delta_{v_i} \cap \Delta_{u_j} \neq \emptyset$, $1 \leq i, j \leq q$, é preciso que:

$$T_{v_i} < T_{u_1}, 1 \leq i \leq q \quad \text{e} \quad E_{u_q} < D_{v_i}, 1 \leq i \leq q \quad (3.3)$$

ou

$$T_{u_q} < T_{v_i}, 1 \leq i \leq q \quad \text{e} \quad D_{v_i} < D_{u_1}, 1 \leq i < q \quad \text{e} \quad E_{v_q} < D_{u_1} \quad (3.4)$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar a representação que utiliza a regra (3.3), pois a representação dada por (3.4) é a mesma de (3.3), mudando-se apenas os rótulos entre \mathcal{Q}^1 e \mathcal{Q}^2 .

Como $\Delta_{v_i} \ll \Delta_{v_{i+1}}$, ou seja, $T_{v_i} < T_{v_{i+1}}$ e $D_{v_i} < E_{v_{i+1}}$, por (3.1), (3.2) e (3.3) tem-se:

$$T_{v_1} < \dots < T_{v_q} < T_{u_1} < \dots < T_{u_q} \quad \text{e} \quad D_{u_{q-1}} < E_{u_q} < D_{v_1} < E_{v_2} < \dots < D_{v_{q-1}} < E_{v_q} \quad (3.5)$$

Portanto, a representação PI de $K_{q,q}$ é única a menos de permutações de triângulos em (3.1) ou (3.2) e troca de rótulos entre \mathcal{Q}^1 e \mathcal{Q}^2 . \square

Do lema 3.3.2 podemos concluir que a única representação PI de um subgrafo $K_{4,4}$ é a apresentada na figura 3.8.

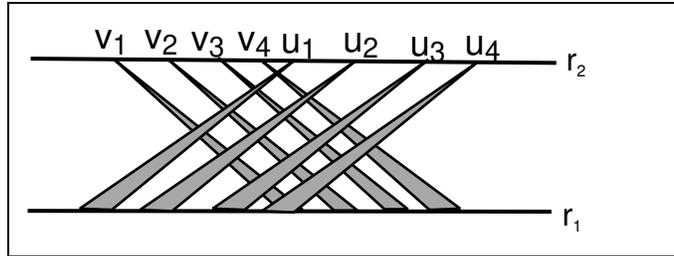


Figura 3.8: Representação PI de um $K_{4,4}$

O grafo da figura 3.7 possui dois $K_{4,4}$ disjuntos como subgrafos induzidos. Sejam eles H e H' (veja figura 3.9).

Como são disjuntos, temos:

$$R(H) \ll R(H') \quad (3.6)$$

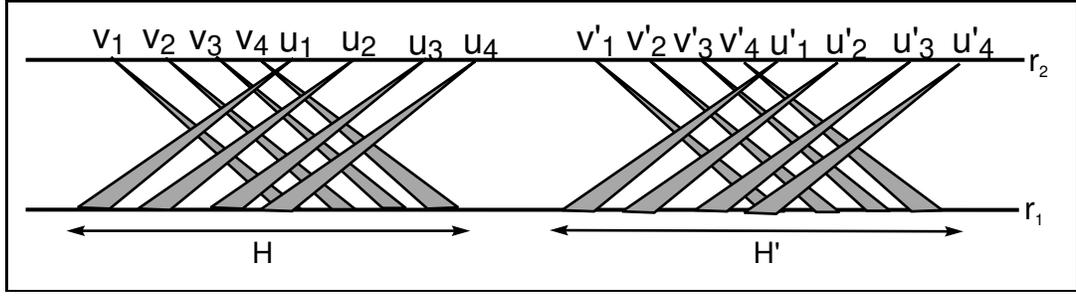


Figura 3.9: Uma representação PI dos subgrafos $K_{4,4}$ induzidos do grafo de Cheah.

onde $R(H)$ e $R(H')$ são as representações PI dos subgrafos H e H' , respectivamente.

Para representar o grafo da figura 3.7 como grafo PI, basta incluir os triângulos Δ_{w_1} e Δ_{w_2} , que representam os vértices w_1 e w_2 , na figura 3.9.

O vértice w_1 é adjacente a dois (e somente dois) vértices de \mathcal{Q}_H^1 , a dois (e somente dois) vértices de \mathcal{Q}_H^2 e a dois (e somente dois) vértices não adjacentes de H' . Assim, a posição para Δ_{w_1} é a seguinte:

- $T_{u_2} < T_{w_1} < T_{u_3}$

De fato, pois se $T_{w_1} < T_{u_2}$, então w_1 não pode ser adjacente a nenhum vértice de H' sem ser adjacente a três ou quatro vértices de \mathcal{Q}_H^1 . Se $T_{u_3} < T_{w_1}$, então para que w_1 seja adjacente a dois vértices de \mathcal{Q}_H^1 , terá que ser adjacente aos quatro vértices de \mathcal{Q}_H^2 .

- $D_{v_2} < E_{w_1} < D_{v_3}$

A justificativa desta posição é semelhante à dada no item anterior. Observe que o extremo direito da base do triângulo Δ_{w_1} deve estar livre para fazer interseção com os triângulos de $R(H')$.

- $E_{u'_2} < D_{w_1} < E_{u'_3}$

De fato, como só resta fixar a posição do extremo direito da base de Δ_{w_1} , se $D_{w_1} < E_{u'_2}$, então w_1 não será adjacente a dois elementos de H' ; e se $E_{u'_3} < D_{w_1}$, então w_1 será adjacente a mais de dois elementos de H' .

O vértice w_2 é adjacente a dois (e somente dois) vértices de $\mathcal{Q}_{H'}^1$, a dois (e somente dois) vértices de $\mathcal{Q}_{H'}^2$ e dois (e somente dois) vértices não adjacentes de H . Assim, a posição para Δ_{w_2} é a seguinte:

- $T_{v'_2} < T_{w_2} < T_{v'_3}$

- $E_{u'_2} < D_{w_2} < E_{u'_3}$

O raciocínio a ser seguido para esta conclusão é igual ao utilizado para concluir a posição de Δ_{w_1} .

Os vértices w_1 e w_2 não são adjacentes. Como $T_{w_1} < T_{w_2}$, tem-se:

$$D_{w_1} < E_{w_2} \quad (3.7)$$

Desta forma, $R(H) \ll \Delta_{w_2}$ e w_2 não é adjacente a vértices de H , uma contradição. Portanto, grafos isomorfos ao grafo de Cheah (figura 3.7) não possuem representação PI.

3.3.2 Grafos paralelogramos

Outra superclasse dos grafos PI é a classe dos grafos paralelogramos, definida por Lin em [20].

Grafos paralelogramos são grafos que podem ser representados pela interseção de uma família \mathcal{P} de paralelogramos entre duas retas paralelas r_1 e r_2 . Cada paralelogramo se constitui de um intervalo $\Omega^1 = [E^1, D^1]$ em r_1 e um intervalo $\Omega^2 = [E^2, D^2]$ em r_2 , com $|\Omega^1| = |\Omega^2|$. Os outros dois lados do paralelogramo são um segmento de reta com extremos E^1 e E^2 e outro segmento com extremos D^1 e D^2 . A representação de um grafo através da interseção dos paralelogramos da família \mathcal{P} será chamada *representação por paralelogramos*. Veja figura 3.10.

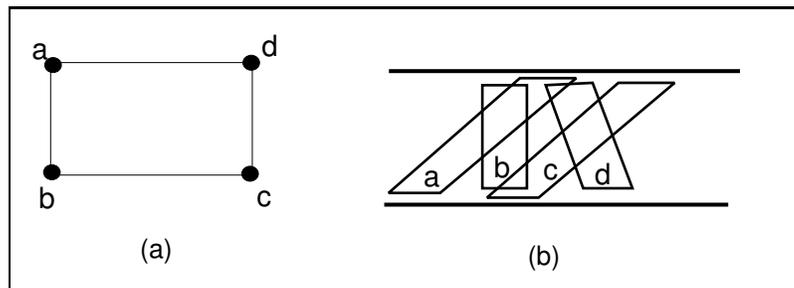


Figura 3.10: (a) Grafo C_4 . (b) Uma representação por paralelogramos de C_4 .

Observe que a representação por paralelogramos de G pode conter segmentos de reta.

Segundo Lin [20], os problemas de caracterização e reconhecimento dos grafos paralelogramos ainda não foram resolvidos.

Lema 3.3.3 [20] *Todo grafo PI é grafo paralelogramo.*

Prova Sejam G um grafo PI, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e R uma representação PI de G . Sem perda de generalidade, podemos assumir que todos os pontos extremos dos triângulos em R são pontos distintos. A notação T_i será usada para indicar o i -ésimo topo em r_2 (da esquerda para a direita) na representação R .

Para cada triângulo $\Delta_i = (T_i, E_i, D_i)$, o tamanho de sua base $D_i - E_i > 0$ será denotado por \mathcal{L}_i .

O topo de cada triângulo Δ_i pode ser transformado em um intervalo do mesmo tamanho de sua base, da seguinte forma: para cada triângulo Δ_j tal que $T_i < T_j$ posicione o topo T_j em $T_j + \mathcal{L}_i$. Construa, agora, o paralelogramo $\Omega_i^1 = [E_i^1, D_i^1] = [E_i, D_i]$ e $\Omega_i^2 = [E_i^2, D_i^2] = [T_i, T_i + \mathcal{L}_i]$.

Repetindo o processo anterior para cada triângulo Δ_i , $1 \leq i \leq n$, transformamos o topo de cada triângulo Δ_i de R em intervalos de tamanho \mathcal{L}_i , temos uma representação por paralelogramos que preserva as adjacências de G . Portanto G é um grafo paralelogramo.

□

A classe PI está estritamente contida na classe dos paralelogramos, pois o grafo de Lin, apresentado na figura 3.11 (a), não é PI e é paralelogramo [20]. Veja sua representação por paralelogramos na figura 3.11 (b).

3.3.3 Grafos trapezóides

Dentre as classes de grafos interseção que são superclasses dos PI, a mais conhecida é a classe dos grafos trapezóides. Sejam duas retas paralelas, r_1 e r_2 , e dois intervalos, $\Omega_1 = [E^1, D^1]$ e $\Omega_2 = [E^2, D^2]$, considerados sobre r_1 e r_2 , respectivamente. A figura geométrica formada unindo os extremos E^1 com E^2 e D^1 com D^2 é um trapézio. Consideremos, agora, uma família \mathcal{Z} de trapézios entre r_1 e r_2 . O grafo interseção da família \mathcal{Z} é chamado de *grafo trapezóide* e a representação desse grafo através da interseção dos trapézios da família \mathcal{Z} é conhecida como *representação trapezoidal*. O grafo da figura 3.12 é um exemplo de grafo trapezóide.

As representações trapezoidais admitem triângulos e segmentos de reta. Usando os mesmos argumentos do lema 3.1.1, pode-se concluir que todo triângulo e todo segmento de reta podem ser substituídos por um trapézio.

Para esta classe são conhecidas as soluções do problema da caracterização [8, 10] e do reconhecimento [7, 11].

Segundo Cheah e Corneil [5], Ma e Spinrad [21, 22], apresentaram um algoritmo de reconhecimento envolvendo multiplicação de matrizes que pode ser executado em tempo $O(n^2)$ e, com algumas alterações, produz uma representação trapezoidal do grafo.

Em [5], Cheah e Corneil mostraram um algoritmo totalmente baseado na teoria dos grafos, mais precisamente baseado na representação trapezoidal. Os autores construíram,

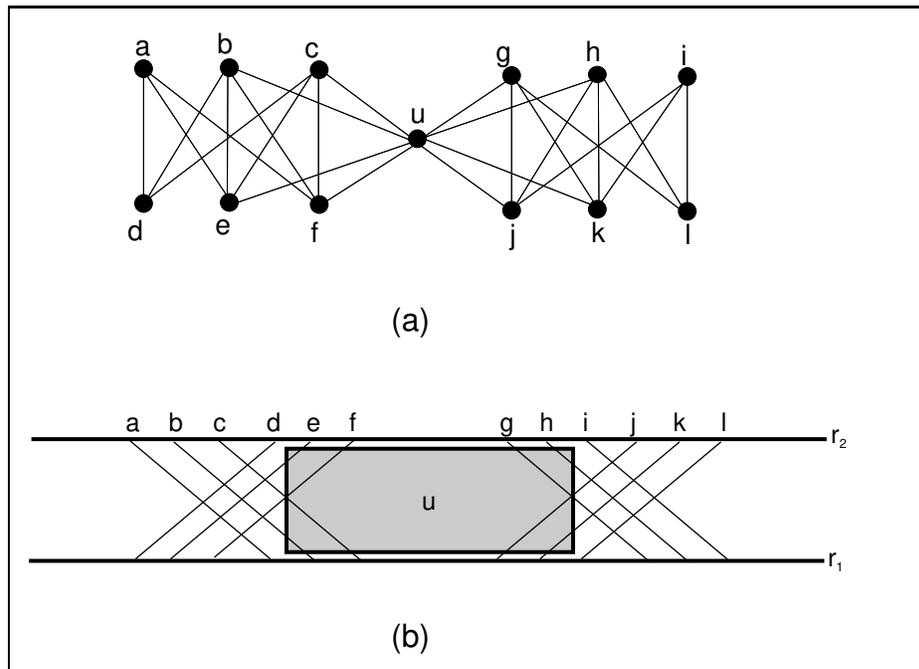


Figura 3.11: (a) Grafo de Lin: um grafo paralelogramo que não é PI. (b) Uma representação por paralelogramos do grafo de Lin.

a partir do grafo trapezóide, um grafo permutação com uma propriedade especial e apresentaram um algoritmo para verificação de tal propriedade. Com isso, garantem um algoritmo de tempo $O(n^3)$ para reconhecimento dos trapezóides que constrói uma representação trapezoidal. Cheah e Corneil afirmaram que a implementação dessa solução é mais simples que as outras existentes para o reconhecimento dos trapezóides.

Como todo paralelogramo é um trapézio, tem-se o seguinte lema.

Lema 3.3.4 *Todo grafo paralelogramo é trapezóide.*

A inclusão é estrita, pois em [13] Felsner prova que o grafo da figura 3.13 é trapezóide e não é paralelogramo. Chamaremos o grafo da figura 3.13 de grafo de Felsner.

Nesta dissertação, o trapézio que representa o vértice v_i será denotado em uma representação trapezoidal R por $\Pi_{v_i}(R) = (E_{v_i}^2, D_{v_i}^2, E_{v_i}^1, D_{v_i}^1)$. Quando não houver ambigüidade, utilizaremos apenas $\Pi_i = (E_i^2, D_i^2, E_i^1, D_i^1)$.

3.3.4 Grafos de co-comparabilidade

A próxima superclasse dos grafos PI a ser definida é a classe dos grafos de co-comparabilidade. Entretanto, apresentaremos primeiro a classe dos grafos de comparabilidade, que não é

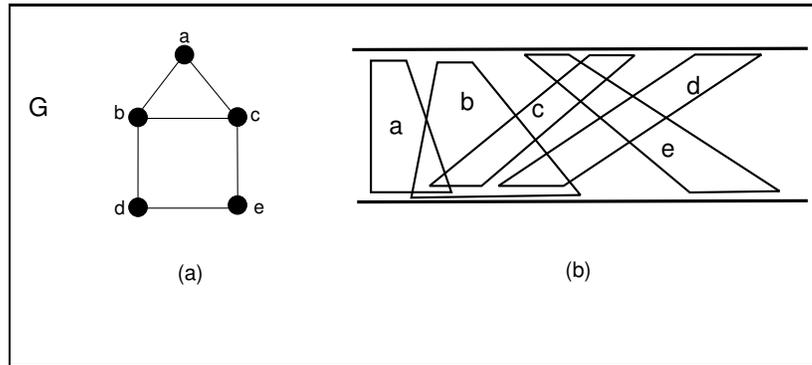


Figura 3.12: (a) Grafo G . (b) Uma representação trapezoidal de G .

superclasse nem subclasse dos grafos PI, mas tem interseção não vazia com esta classe.

Um grafo que admite uma orientação transitiva para suas arestas é chamado de *grafo de comparabilidade*.

Um exemplo de grafo de comparabilidade é dado na figura 3.14.

Se o complemento de um grafo G é um grafo de comparabilidade, então G é chamado *grafo de co-comparabilidade* [17]. A figura 3.15 mostra um grafo de co-comparabilidade.

Em [17] pode-se encontrar um capítulo inteiro dedicado ao estudo dos grafos de comparabilidade, além de extensa bibliografia sobre essa classe. Nesse livro também encontramos um algoritmo de reconhecimento para tal classe de tempo $O(\Delta m)$, onde Δ é o grau máximo dos vértices do grafo.

O reconhecimento dos grafos de co-comparabilidade pode ser feito verificando-se que o complemento desses grafos é de comparabilidade. A construção do complemento de um grafo G pode ser $O(n^2)$ e portanto o reconhecimento dos grafos de co-comparabilidade pode ser feito em $O(n^2)$.

Lema 3.3.5 [8] *Todo grafo trapezóide é grafo de co-comparabilidade.*

Prova Seja G um grafo trapezóide. Sejam três vértices quaisquer u , v e w pertencentes à $V(G)$, tais que $(u, v) \in E(\overline{G})$ e $(v, w) \in E(\overline{G})$. Então $(u, v) \notin E(G)$ e $(v, w) \notin E(G)$. Como G é grafo trapezóide, em uma representação trapezoidal $\{\Pi_{v \in V}\}$ de G , $\Pi_u \ll \Pi_v$ e $\Pi_v \ll \Pi_w$ e, portanto, $\Pi_u \ll \Pi_w$. Dessa forma, $(u, w) \notin E(G)$ e isso implica que $(u, w) \in E(\overline{G})$. Assim, uma orientação transitiva das arestas de \overline{G} é dada por:

$$[u, v] \in E(\overline{G}) \iff \Pi_u \ll \Pi_v \text{ na representação trapezoidal de } G.$$

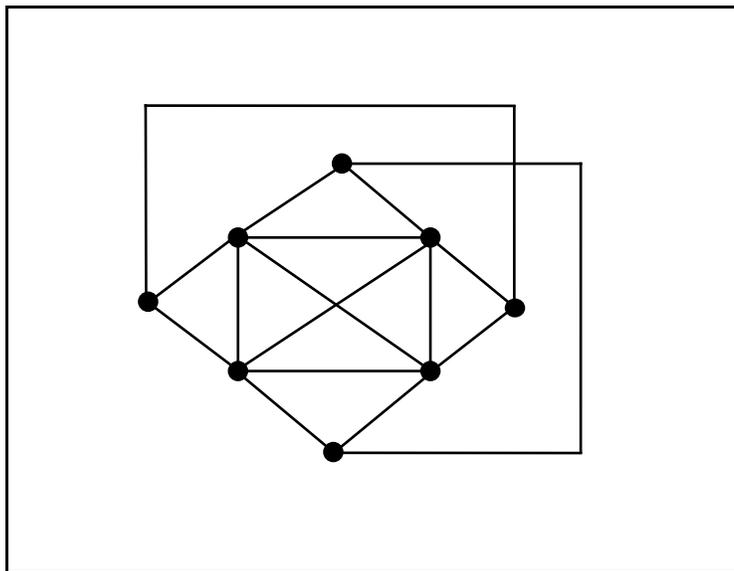


Figura 3.13: Grafo de Felsner, que é trapezóide e não é paralelogramo.

Portanto, \overline{G} possui uma orientação transitiva para suas arestas, logo G é grafo de co-comparabilidade. \square

Além disso, as classes trapezóide e co-comparabilidade não são iguais: $\overline{C_6}$ é um grafo de co-comparabilidade que não é trapezóide [8].

Pelo lema 3.2.2 e pelo teorema 3.2.1 tem-se que a interseção dos grafos PI com os grafos de comparabilidade é exatamente a classe dos grafos permutação.

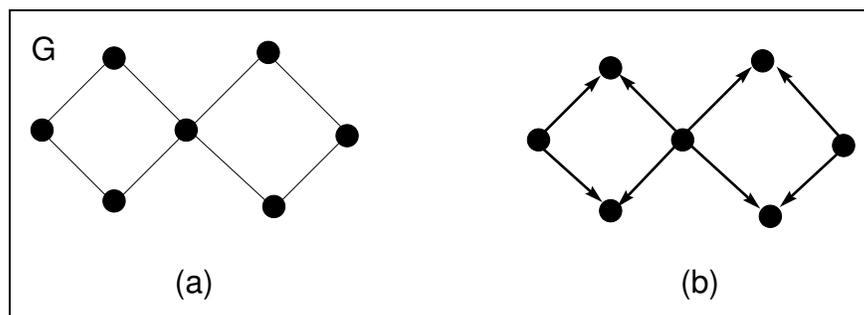


Figura 3.14: (a) Grafo G . (b) Uma orientação transitiva de G .

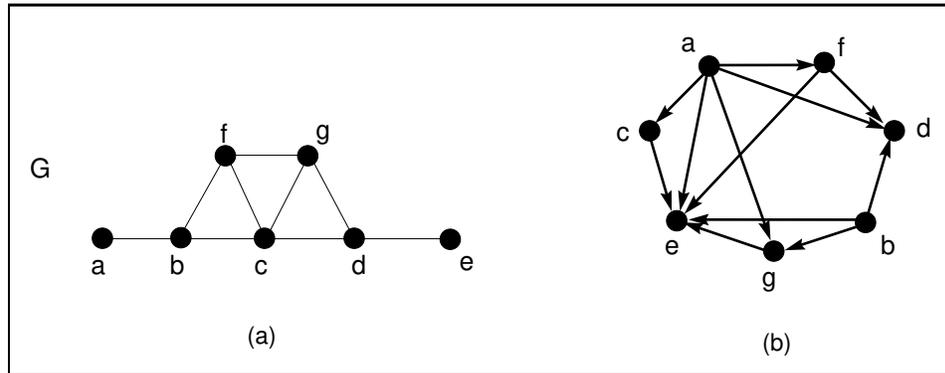


Figura 3.15: (a) Grafo G . (b) Uma orientação transitiva no complemento do grafo G .

3.4 A classe dos grafos trapezóides simples

Sejam novamente as retas paralelas r_1 e r_2 . Os grafos *trapezóides simples* são grafos interseção de uma família \mathcal{Y} de segmentos de reta com extremos em r_1 e r_2 e retângulos com lados em r_1 e r_2 . A representação de um grafo através da interseção dos elementos de \mathcal{Y} é uma *representação trapezoidal simples*. O grafo de Lin da figura 3.11 (a) é um exemplo de grafo trapezóide simples e a representação da figura 3.11 (b) é uma representação trapezoidal simples.

Os grafos trapezóides simples não possuem caracterização, nem algoritmo polinomial de reconhecimento [20].

Tanto retângulos quanto segmentos de reta tem extremos que são intervalos de mesmo tamanho em r_1 e r_2 , portanto vale o lema abaixo.

Lema 3.4.1 *Todo grafo trapezóide simples é paralelogramo.*

Lin [20] prova que o grafo da figura 3.11 é trapezóide simples e não é PI e prova que o grafo da figura 3.16 é PI e não é trapezóide simples. O grafo C_4 é PI e é trapezóide simples. Portanto, vale o seguinte teorema.

Teorema 3.4.2 *PI e trapezóides simples são classes distintas com interseção não vazia.*

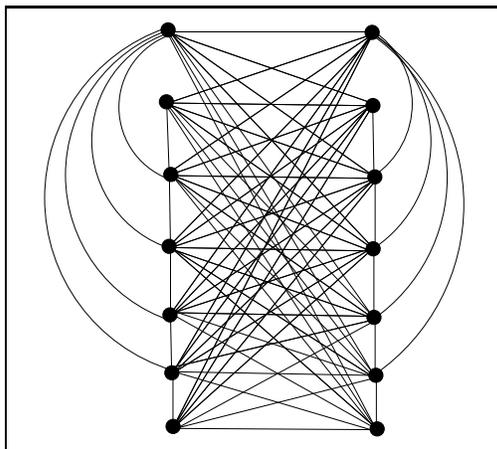


Figura 3.16: Grafo PI que não é trapezóide simples.

3.5 Relações de continência

As relações de continência podem ser descritas como segue, onde o conjunto dos grafos de cada classe é representado pelo seu nome.

$$\text{Intervalo} \subset \text{PI} \quad (3.8)$$

$$\text{Permutação} \subset \text{PI} \quad (3.9)$$

$$\text{PI} \subset \text{PI}^* \quad (3.10)$$

$$\text{PI} \subset \text{Paralelogramo} \subset \text{Trapezóide} \subset \text{Co-comparabilidade} \quad (3.11)$$

$$\text{Trapezóide Simples} \subset \text{Paralelogramo} \quad (3.12)$$

$$\text{PI} \neq \text{Trapezóide Simples} \quad (3.13)$$

Os diagramas das figuras 3.17 e 3.18 expressam as relações da classe PI com as demais classes.

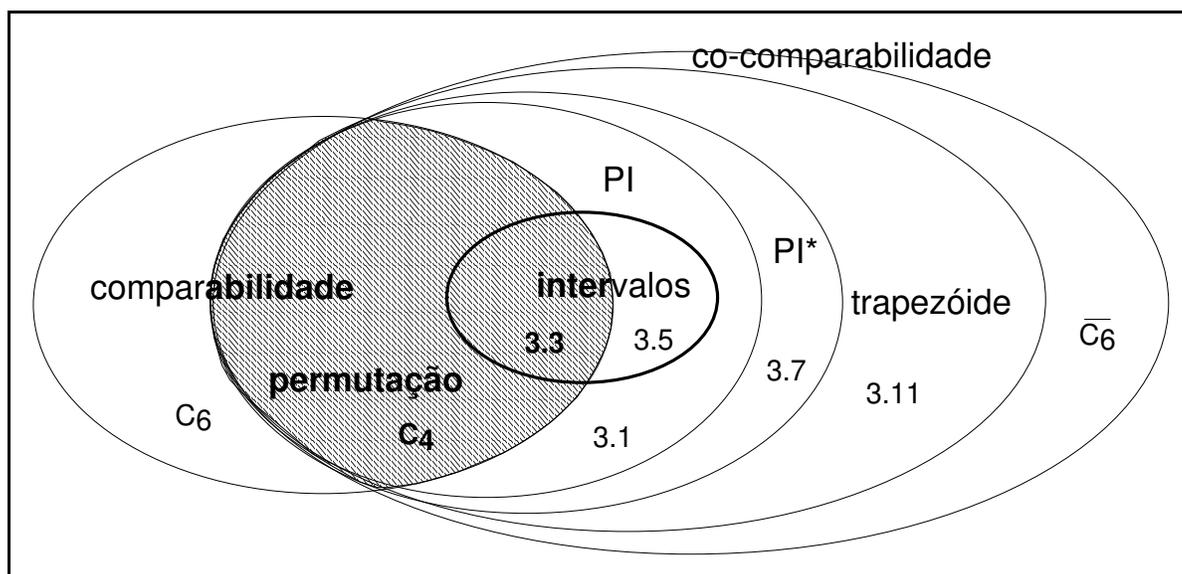


Figura 3.17: Diagrama das relações dos grafos PI com algumas classes de grafos conhecidas. Os números são referências a figuras dessa dissertação que contêm exemplos de grafos em cada classe.

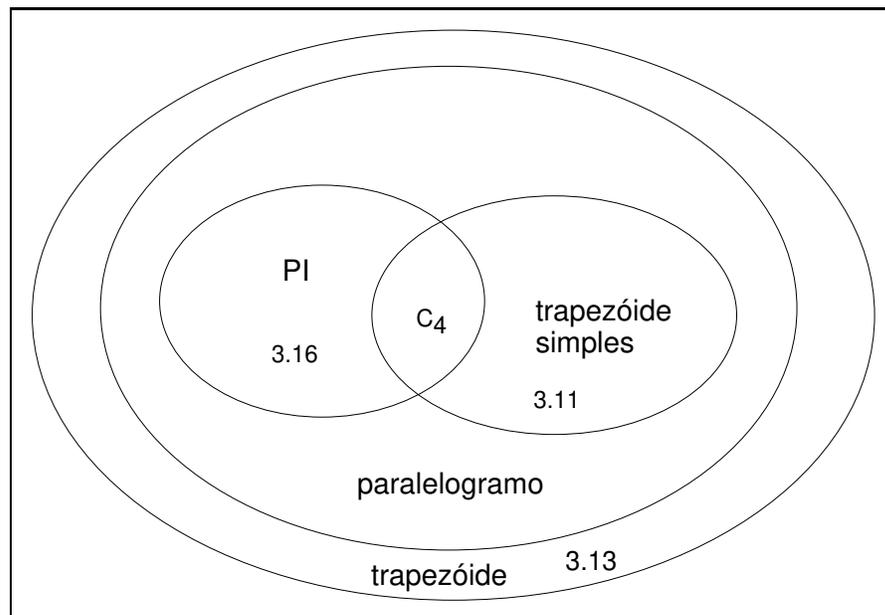


Figura 3.18: Diagrama das relações entre os grafos PI e as classes descritas em [20]. Os números são referências a figuras dessa dissertação que contêm exemplos de grafos em cada classe.

Capítulo 4

Grafos trapezóides e grafos PI

Este capítulo destina-se a apresentar propriedades dos grafos PI. Como todo grafo PI é trapezóide, algumas propriedades dos grafos trapezóides que são herdadas pelos grafos PI serão apresentadas na seção 4.1. Esta seção baseia-se no artigo de Corneil e Kamula [8]. A seção 4.2 destina-se a apresentar condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo seja PI.

4.1 Propriedades dos grafos trapezóides

Um grafo trapezóide G pode ter muitas representações trapezoidais diferentes. Há várias operações que podem ser realizadas sobre a representação trapezoidal R de um grafo sem alterá-lo. Uma delas é uma reflexão em relação a uma reta perpendicular às retas paralelas r_1 e r_2 da representação R . Nesse caso, cria-se uma nova representação trapezoidal R' , obtida de R através da reordenação de todos os pontos extremos tal que, para dois pontos extremos distintos P e Q numa mesma reta, tenhamos: $P <_R Q$ se, e somente se, $P >_{R'} Q$. Similarmente, a reflexão em relação a uma reta paralela às retas r_1 e r_2 da representação transforma R em R' efetuando a troca de todos os pontos extremos da reta r_2 com os pontos extremos da reta r_1 da seguinte forma: para quaisquer dois pontos P e Q , $P <_R Q$ e $P, Q \in r_1$ em R se, e somente se, $P <_{R'} Q$ e $P, Q \in r_2$ em R' .

Como as representações trapezoidais admitem triângulos, toda representação PI é uma representação trapezoidal. Portanto, as reflexões de representações PI em relação a retas perpendiculares ou paralelas a r_1 e r_2 também preservam as adjacências do grafo.

Sejam dois vértices não adjacentes v_i e v_j de um grafo trapezóide G , representados por Π_i e Π_j em qualquer representação trapezoidal de G . Então ou $\Pi_i \ll \Pi_j$ ou $\Pi_j \ll \Pi_i$. A operação de reflexão permite considerar, sem perda de generalidade, $\Pi_i \ll \Pi_j$.

O lema 4.1.1 estabelece uma ordem na representação trapezoidal de uma aresta e de um vértice não adjacente a ambos os extremos dessa aresta.

Lema 4.1.1 *Sejam v_1 e v_2 dois vértices adjacentes em um grafo trapezóide $G = (V, E)$. Seja v_t tal que $(v_1, v_t) \notin E$ e $(v_2, v_t) \notin E$. Em qualquer representação trapezoidal de G , se $\Pi_1 \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_1$), então $\Pi_2 \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_2$).*

Prova Sejam v_1 , v_2 e v_t como descritos no lema. Suponha que $\Pi_1 \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_1$) e Π_2 não está estritamente à esquerda (direita) de Π_t . Como $\Pi_2 \cap \Pi_t = \emptyset$, então $\Pi_t \ll \Pi_2$ ($\Pi_2 \ll \Pi_t$). Dessa forma, $\Pi_1 \ll \Pi_t \ll \Pi_2$ ($\Pi_2 \ll \Pi_t \ll \Pi_1$), logo $\Pi_1 \ll \Pi_2$ ($\Pi_2 \ll \Pi_1$), ou seja, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. Portanto, $(v_1, v_2) \notin E$, uma contradição. \square

Seja G um grafo que possui um caminho $P_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ como subgrafo induzido. Seja v_t um vértice de $V(G)$ que não é adjacente a nenhum vértice de $V(P_k)$. Em qualquer representação trapezoidal de G , o trapézio Π_t , que representa o vértice v_t , estará estritamente à direita (ou estritamente à esquerda) de todos os trapézios que representam vértices de $V(P_k)$. O lema a seguir, provado em [8], é uma generalização do lema 4.1.1 que considera, em vez de uma aresta de G , um subgrafo induzido P_k .

Lema 4.1.2 [8] *Seja $P_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um caminho induzido em um grafo trapezóide G . Seja $v_t \in V(G)$ e tal que $(v_i, v_t) \notin E(G)$, $1 \leq i \leq k$. Se $\Pi_i \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_i$) para algum i , $1 \leq i \leq k$, então $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$), para todo j , $1 \leq j \leq k$.*

Prova A prova desse lema é por indução no número de vértices do caminho P_k . Para um caminho P_2 , com 2 vértices, a prova está feita no lema 4.1.1.

Sejam P_k e v_t como descritos no lema e, por hipótese de indução, se existe um vértice v_i tal que $\Pi_i \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_i$) na representação trapezoidal de P_k , então $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$), para todo j , $1 \leq j \leq k$.

Seja P_{k+1} um caminho induzido em G e $v_t \in V(G)$, tal que $(v_i, v_t) \notin E(G)$, $1 \leq i \leq k + 1$. Suponha que existe um vértice v_i em P_{k+1} tal que $\Pi_i \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_i$). Note que qualquer representação trapezoidal de um caminho P_{k+1} contém uma representação trapezoidal do caminho P_k .

Se $1 \leq i \leq k$, então por hipótese de indução, $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$), $1 \leq j \leq k$. Como $(v_{k+1}, v_t) \notin E(G)$, $(v_k, v_{k+1}) \in E(G)$ e $\Pi_k \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_k$), pelo lema 4.1.1, $\Pi_{k+1} \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_{k+1}$). Assim, $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$), $1 \leq j \leq k + 1$.

Se $i = k + 1$, isto é, $\Pi_{k+1} \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_{k+1}$). Como $(v_k, v_{k+1}) \in E(G)$ e $(v_k, v_t) \notin E(G)$, pelo lema 4.1.1, $\Pi_k \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_k$). Sendo $\Pi_k \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_k$), por hipótese de indução, $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$) para todo j , $1 \leq j \leq k$. Logo, $\Pi_j \ll \Pi_t$ ($\Pi_t \ll \Pi_j$) para todo j , $1 \leq j \leq k + 1$. \square

Lema 4.1.3 [8] *Grafos trapezoides não contêm triplas asteroidais.*

Prova Por contradição, assumamos que existe um grafo G que contém uma tripla asteroidal $\{v_1, v_2, v_3\}$ e possui uma representação trapezoidal. Seja P_{12} um caminho de v_1 para v_2 que não passa pela vizinhança de v_3 . Considere também caminhos P_{23} e P_{31} , similares a P_{12} , de v_2 para v_3 e de v_3 para v_1 , respectivamente. Aplicando o lema 4.1.2 sobre o caminho P_{23} e considerando o vértice v_1 , tem-se $\Pi_1 \ll \Pi_2 \rightarrow \Pi_1 \ll \Pi_3$. Fazendo o mesmo para P_{12} e P_{31} , considerando respectivamente os vértices v_3 e v_2 , tem-se $\Pi_1 \ll \Pi_3 \rightarrow \Pi_2 \ll \Pi_3$ e $\Pi_2 \ll \Pi_3 \rightarrow \Pi_2 \ll \Pi_1$. Logo, se $\Pi_1 \ll \Pi_2$, então $\Pi_2 \ll \Pi_1$, uma contradição! \square

Corneil e Kamula [8] provaram que grafos trapezoides não contém C_n , $n \geq 5$, como subgrafo induzido. Apresentamos, a seguir, uma outra prova para esse resultado.

Lema 4.1.4 *Grafos trapezoides não contém C_n , $n \geq 5$, como subgrafo induzido.*

Prova Seja $C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$. Como $(v_1, v_4) \notin E(C_5)$, tem-se $\Pi_1 \cap \Pi_4 = \emptyset$. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $\Pi_1 \ll \Pi_4$. Pelo lema 4.1.1, $\Pi_1 \ll \Pi_4 \rightarrow \Pi_2 \ll \Pi_4 \rightarrow \Pi_2 \ll \Pi_5 \rightarrow \Pi_3 \ll \Pi_5 \rightarrow \Pi_3 \ll \Pi_1 \rightarrow \Pi_4 \ll \Pi_1$, uma contradição. Portanto, não existe representação trapezoidal para o C_5 .

Os grafos da família C_n , $n \geq 6$, têm tripla asteroidal. De fato, seja $C_n = (v_1, \dots, v_n, v_1)$, então v_1, v_3 e v_5 são uma tripla asteroidal. Pelo lema 4.1.3, grafos trapezoides não contém tripla asteroidal.

Como ser grafo trapezóide é propriedade hereditária (pois quando não se pode representar um subgrafo induzido, não é possível representar o próprio grafo), então nenhum grafo trapezóide contém C_n , $n \geq 5$ como subgrafo induzido. \square

Na observação 4.1.5 e nos lemas 4.1.6 e 4.1.8, considere $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ e as operações nos índices serão feitas módulo n .

Observação 4.1.5 *Em qualquer representação trapezoidal de $\overline{C_n}$, $n \geq 4$, como $(v_i, v_{i+1}) \notin E$, $(v_i, v_{i-1}) \notin E$ e $(v_{i-1}, v_{i+1}) \in E$, pelo lema 4.1.1,*

$$\Pi_i \ll \Pi_{i-1} \quad e \quad \Pi_i \ll \Pi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1)$$

ou

$$\Pi_{i+1} \ll \Pi_i \quad e \quad \Pi_{i-1} \ll \Pi_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.2)$$

Lema 4.1.6 [8] *Grafos trapezoides não contém $\overline{C_n}$, n ímpar e $n \geq 5$, como subgrafo induzido.*

Prova Como ser trapezóide é propriedade hereditária, basta provar que \overline{C}_n , n ímpar e $n \geq 5$, não é trapezóide.

Suponha que \overline{C}_n , n ímpar e $n \geq 5$, é um grafo trapezóide e seja R uma representação trapezoidal de \overline{C}_n .

Como $(v_1, v_2) \notin E(\overline{C}_n)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Pi_1 \ll \Pi_2$. Da observação 4.1.5, $\Pi_1 \ll \Pi_0 = \Pi_n$. A aplicação sucessiva do lema 4.1.1 implica que $\Pi_{i-1} \ll \Pi_i$ e $\Pi_{i+1} \ll \Pi_i$, i par e $2 \leq i \leq n-1$. (Note que $i-1$ e $i+1$ são índices ímpares.)

Sendo n ímpar, tem-se $\Pi_n \ll \Pi_{n-1}$. Como $(v_n, v_1) \notin E(\overline{C}_n)$, $(v_n, v_{n-1}) \notin E(\overline{C}_n)$ e $(v_1, v_{n-1}) \in E(\overline{C}_n)$, pelo lema 4.1.1, $\Pi_n \ll \Pi_1$, uma contradição.

Portanto não é possível representar um grafo \overline{C}_n , n ímpar e $n \geq 5$, com uma representação trapezoidal e, dessa forma, \overline{C}_n , n ímpar e $n \geq 5$, não é trapezóide. \square

Os lemas 4.1.4 e 4.1.6 confirmam que os grafos trapezoides são perfeitos [6].

Os resultados obtidos no lema 4.1.6 podem ser alcançados analisando-se apenas a disposição dos intervalos na reta r_2 . Observe que o mesmo não ocorre quando consideramos \overline{C}_n , n par.

Observação 4.1.7 *Seja R uma representação trapezoidal do grafo G . Assuma que, para quaisquer dois trapézios Π_i e Π_j de R , os pontos extremos de Π_i são distintos dos pontos extremos de Π_j . Considere que Ω_p^q é o intervalo do trapézio p na reta q . As seguintes regras são satisfeitas em R :*

$$(u, v) \in E(G) \iff \begin{cases} \Omega_u^2 \cap \Omega_v^2 \neq \emptyset \text{ ou} \\ \Omega_v^2 \ll \Omega_u^2 \text{ e } E_u^1 < D_v^1. \end{cases}$$

$$(u, v) \notin E(G) \iff \Omega_u^2 \ll \Omega_v^2 \text{ e } D_u^1 < E_v^1.$$

Lema 4.1.8 [8] *Grafos trapezoides não contém \overline{C}_n , n par e $n \geq 6$, como subgrafo induzido.*

Prova Como ser trapezóide é propriedade hereditária, basta provar que \overline{C}_n , n par e $n \geq 6$, não é trapezóide.

Suponha que \overline{C}_n , n par e $n \geq 6$, é um grafo trapezóide e seja R uma representação trapezoidal de \overline{C}_n . Assuma, sem perda de generalidade, $\Pi_1 \ll \Pi_2$ em R . Note que se $\Pi_1 \ll \Pi_2$ a aplicação sucessiva do lema 4.1.1 implica que $\Pi_{i+1} \ll \Pi_i$ e $\Pi_{i-1} \ll \Pi_i$ para todo i par, $2 \leq i \leq n$.

Seja Π_{k+1} o trapézio com ponto extremo direito mais à direita em r_2 dentre todos os trapézios de índice ímpar. Assim, $D_{k+3}^2 < D_{k+1}^2$ e $D_{k-1}^2 < D_{k+1}^2$.

Como k é par, $\Pi_{k+1} \ll \Pi_k$ e, portanto, $D_{k+1}^2 < E_k^2$ implicando que $D_{k+3}^2 < E_k^2$. Como $(v_k, v_{k+3}) \in E(\overline{C}_n)$ e $\Omega_{k+3}^2 \ll \Omega_k^2$, da observação 4.1.7 tem-se $E_k^1 < D_{k+3}^1$.

Novamente, como k é par, $\Pi_{k-1} \ll \Pi_k$, logo $D_{k-1}^1 < E_k^1 < D_{k+3}^1$.

Como $k+2$ é par, tem-se $\Pi_{k+3} \ll \Pi_{k+2}$, portanto, $D_{k+3}^1 < E_{k+2}^1$. Assim, $D_{k-1}^1 < E_{k+2}^1$.

Como $k+2$ é par, $\Pi_{k+1} \ll \Pi_{k+2}$ e, portanto, $D_{k+1}^2 < E_{k+2}^2$. Como $D_{k-1}^2 < D_{k+1}^2$, tem-se $D_{k-1}^2 < E_{k+2}^2$.

Assim, $\Pi_{k-1} \cap \Pi_{k+2} = \emptyset$ e $(v_{k-1}, v_{k+2}) \notin E(\overline{C_n})$, uma contradição. \square

Como corolário dos lemas 4.1.4, 4.1.6 e 4.1.8, tem-se:

Corolário 4.1.9 *Grafos trapezóides são fracamente cordais.*

A classe dos trapezóides está estritamente contida na classe dos grafos fracamente cordais, pois existem grafos que são fracamente cordais e que não são trapezóides. Um exemplo é o grafo G da figura 4.1, que apresenta uma tripla asteroidal formada pelos vértices c , l e i . Do lema 4.1.3 grafos trapezóides são livres de triplas asteroidais e, portanto, G não é trapezóide.

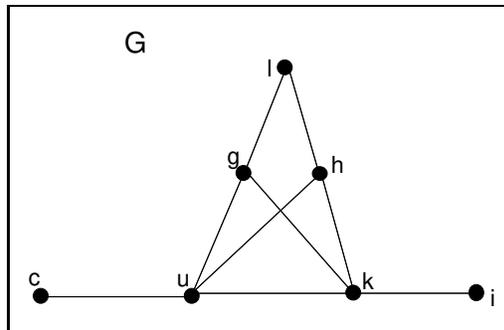


Figura 4.1: Grafo fracamente cordal que não é trapezóide.

4.2 Quando um grafo é PI

Até o momento, todas as propriedades vistas sobre os grafos PI são, na verdade, propriedades que os grafos PI herdam de suas superclasses como, por exemplo, os grafos trapezóides. Nos perguntamos se não há uma maneira de identificar, dentre os grafos que são trapezóides (ou PI*), aqueles que são PI. Assim, começamos estudando a operação de contração de arestas.

4.2.1 Contração de arestas

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $(u, v) \in E(G)$. A contração da aresta (u, v) em G cria um novo grafo $G' = (V(G'), E(G'))$ tal que $V(G') = V(G) \cup \{uv\} \setminus \{u, v\}$; se $(i, j) \in E(G)$ e $i, j \neq u, v$, então $(i, j) \in E(G')$; e se $(i, u) \in E(G)$ ou $(i, v) \in E(G)$ então $(i, uv) \in E(G')$.

A operação de contrair uma aresta em um grafo G não preserva a propriedade de G ser (ou não) PI, como veremos a seguir.

Seja G' um grafo resultante da contração de uma aresta de um grafo PI G . Será que G' é PI? Não, a contração de uma aresta de G não implica que o novo grafo, G' , é PI. A figura 4.2 apresenta um grafo G e sua representação PI. A contração da aresta $(u_1, u_2) \in E(G)$ resulta num grafo G' que é exatamente o grafo de Lin (figura 3.11), um grafo paralelogramo que não é PI.

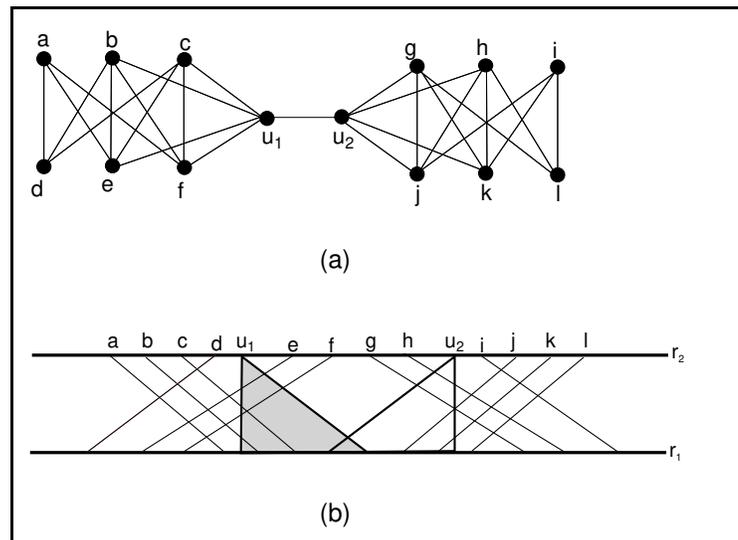


Figura 4.2: (a) Grafo G . (b) Uma representação PI de G .

Seja G' um grafo PI obtido a partir da contração de uma aresta de um grafo G . Será que G é PI? Mais uma vez, uma resposta negativa. O grafo G não é necessariamente PI. Seja um ciclo $C_4 = (ab, c, d, e, ab)$, resultante da contração da aresta (a, b) do ciclo $C_5 = (a, b, c, d, e, a)$, como mostra a figura 4.3. O grafo C_4 é PI, veja a figura 3.4. Pelo lema 4.1.4, o grafo C_5 não é trapezóide e, portanto, não é PI.

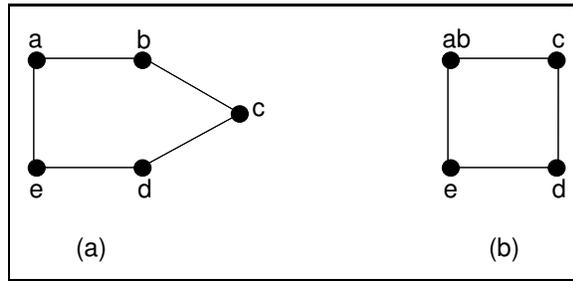


Figura 4.3: (a) C_5 . (b) C_4 resultante da contração da aresta $(a, b) \in E(C_5)$.

4.2.2 Uma restrição na representação PI: os grafos PI-especiais

A classe PI-especial é obtida a partir de uma restrição imposta à representação dos grafos PI tal que nenhum triângulo possui ângulo obtuso nos vértices da base e nenhum triângulo é degenerado, ou seja, para todo triângulo $\Delta = (T, E, D)$, tem-se $E \neq D$. Chamaremos os triângulos que satisfazem tais propriedades de *triângulos especiais* (TESP).

Sejam duas retas paralelas r_1 e r_2 . O grafo interseção de uma família de triângulos especiais que possuem um vértice em r_2 e um lado em r_1 será chamado *grafo PI-especial*.

Nos perguntamos se os grafos PI-especiais, que sofrem restrições na representação, constituem uma subclasse estritamente contida na classe PI. O teorema a seguir mostra que PI-especial é exatamente a classe dos grafos de intervalos e, portanto, é estritamente contida na classe PI.

Teorema 4.2.1 *Um grafo G é PI-especial se, e somente se, G é grafo de intervalos.*

Prova Sejam G um grafo PI-especial e R uma representação de G através da interseção de TESP's entre duas retas paralelas r_1 e r_2 . Seja $\Delta = (T, E, D)$ um triângulo de R com vértice T em r_2 e vértices E e D em r_1 . Note que, se Δ_i e Δ_j são triângulos sem ângulos obtusos nos vértices das bases, os lados de Δ_i e Δ_j que estão sobre a reta r_1 se intersectam em pelo menos um ponto. Seja p a função projeção ortogonal sobre a reta r_1 . A união das imagens $p((T, E))$ e $p((T, D))$ é o intervalo $[E, D]$ da reta r_1 . Dessa forma, p associa a cada TESP de R um intervalo $[E, D]$ tal que existe interseção entre dois intervalos se, e somente se, existe interseção entre seus respectivos TESP's. Logo, os lados dos triângulos que estão sobre r_1 formam uma representação de G por intervalos. Portanto, G é grafo de intervalos.

Sejam G um grafo de intervalos e R uma representação de G através da interseção de intervalos de uma reta r_1 . Construa uma reta r_2 paralela a r_1 . Para cada intervalo $[E, D]$ de r_1 , marque em r_2 um ponto T de tal forma que $p((T, E)) \subset [E, D]$. Ligue os dois

extremos E e D ao ponto T . Essa construção, se repetida para todos os intervalos de R , gera uma família de TESP. Como a projeção de cada ponto T sobre r_1 é um ponto no intervalo $[E, D]$, as adjacências de G foram preservadas. Logo, G é um grafo PI-especial.

□

Uma consequência do teorema 4.2.1 é que a representação PI de um grafo que não é de intervalos contém pelo menos um triângulo com ângulo obtuso em um vértice da base. Note que o segmento de reta que representa o vértice b do ciclo C_4 na figura 3.4 só pode ser substituído por um triângulo com ângulo obtuso interno na base. Assim, numa representação PI podem haver triângulos e segmentos de reta, mas nem todo segmento de reta pode ser substituído por um TESP, nesse caso, o grafo não é PI-Especial.

O teorema 4.2.2 exibe uma caracterização dos grafos de intervalos através de uma família de subgrafos proibidos [17].

Teorema 4.2.2 *Um grafo é de intervalos se, e somente se, não contém nenhum dos grafos da figura 4.4 como subgrafo induzido.*

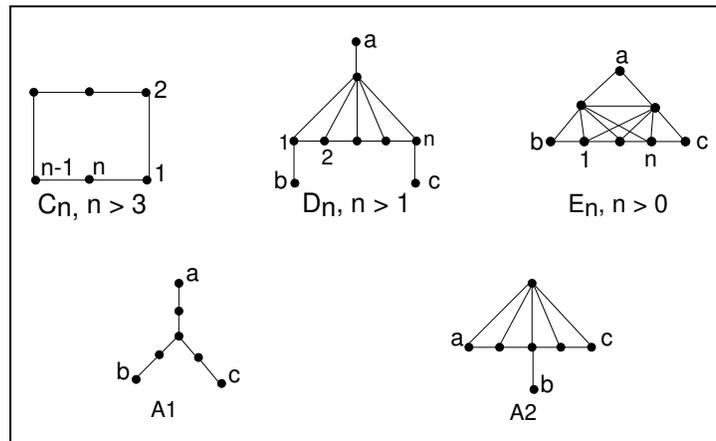


Figura 4.4: Grafos proibidos para a classe dos grafos de intervalos

Teorema 4.2.3 *Se G é PI e não é grafo de intervalos, então G contém C_4 como subgrafo induzido.*

Prova Seja G um grafo PI que não é de intervalos. Pelo teorema 4.2.2, G contém algum grafo da figura 4.4 como subgrafo induzido. Pelo lema 3.1.2, todo subgrafo induzido de G é PI. Mostraremos que dentre os grafos da figura 4.4, apenas C_4 é PI.

De fato, pelo corolário 4.1.9 e pela relação de continência (3.11), a família C_n , $n > 4$ não é PI, pois não é fracamente cordal. Pela relação (3.11) e pelo lema 4.1.3, todos os outros grafos da figura 4.4 não são PI, pois não são grafos STA (em cada grafo, a tripla asteroidal consiste dos vértices a , b e c). Finalmente, a figura 3.4 apresenta uma representação PI para o grafo C_4 . \square

4.2.3 Uma caracterização para os grafos PI

Ainda na tentativa de identificar os grafos trapezoides que são PI, nos voltamos para um estudo das estruturas das representações trapezoidal e PI. Esta seção apresenta uma condição necessária e suficiente para que um grafo trapezóide seja PI.

Sejam G um grafo trapezóide e R uma representação trapezoidal de G tal que, para todo trapézio Π_u , não ocorrem Π_v e Π_w tais que

$$E_u^2 < D_v^2 < E_w^2 < D_u^2 \quad \text{e} \quad D_v^1 < E_u^1 < D_u^1 < E_w^1. \quad (4.3)$$

Note que, pela regra (4.3), a aresta (v, w) não pertence a $E(G)$. Veja figura 4.5.

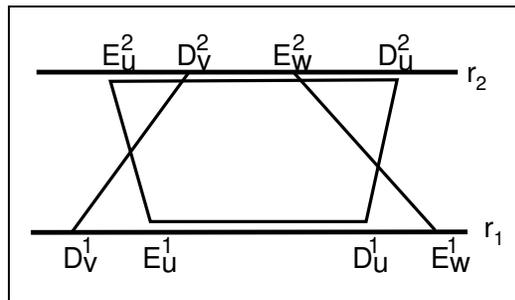


Figura 4.5: Ordem dos extremos dos trapézios segundo a regra (4.3).

Segue abaixo o algoritmo *TRAPtoPI*, que transforma uma representação trapezoidal R em uma representação trapezoidal R' de G que difere de R por apresentar um triângulo Δ_u no lugar do trapézio Π_u .

Algoritmo *TRAPtoPI*

Entrada: Uma tupla (R, u) , onde R é uma representação trapezoidal do grafo G tal que (4.3) não ocorre para todo trapézio de R e $u \in V(G)$ é o vértice representado por Π_u em R e que será representado por Δ_u em R' .

Saída: A representação trapezoidal R' de G , onde o trapézio Π_u , que representa o vértice u , foi substituído por um triângulo Δ_u .

Passos:

1. Inicialização: $T_e = E_u^2$; $T_d = D_u^2$;
2. Se $E_u^2 \neq D_u^2$ faça:
 - (a) Se existem trapézios Π_v tais que $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $E_u^2 < D_v^2 < D_u^2$ faça:
 - Seja Π_k o trapézio com ponto extremo direito mais à esquerda na reta r_2 dentre todos os trapézios Π_v . Faça $T_d = D_k^2$;
 - (b) Se existem trapézios Π_w tais que $\Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$ e $E_u^2 < E_w^2 < D_u^2$ faça:
 - Seja Π_k o trapézio com ponto extremo esquerdo mais à direita na reta r_2 dentre todos os trapézios Π_w . Faça $T_e = E_k^2$;
 - (c) Escolha um ponto T_u tal que $T_e < T_u < T_d$;
 - (d) Substitua Ω_u^2 por T_u fazendo $E_u^2 = D_u^2 = T_u$;

Note que se $E_u^2 = D_u^2$, Π_u já é um triângulo e nada precisa ser feito.

Observe também que os trapézios Π_v e Π_w dos passos (a) ou (b) podem ser triângulos ou segmentos de reta. Nesses casos, $D_v^2 = T_v$ (para o passo (a)) e $E_w^2 = T_w$ (para o passo (b)).

Para quaisquer dois trapézios Π_i e Π_j da representação trapezoidal R (que é dado de entrada do algoritmo *TRAPtoPI*), assumamos, sem perda de generalidade, que os pontos extremos do trapézio Π_i são distintos dos pontos extremos do trapézio Π_j . Considere o ponto T_u criado pelo algoritmo *TRAPtoPI* para substituir o intervalo $[E_u^2, D_u^2]$ da representação trapezoidal R .

O lema a seguir apresenta uma prova de que sempre existe um ponto T_u para ser escolhido no passo (c).

Lema 4.2.4 *Sejam R uma representação trapezoidal para um grafo G tal que (4.3) não ocorre, para todo trapézio de R , e u um vértice de G tal que Π_u possui $E_u^2 \neq D_u^2$. Após os passos (a) e (b) de *TRAPtoPI* tem-se $T_d - T_e > 0$.*

Prova Como $E_u^2 \neq D_u^2$, sabemos que $E_u^2 < D_u^2$. Após o passo (1) do algoritmo, $T_e = E_u^2$ e $T_d = D_u^2$.

Suponha, por contradição, que após os passos (a) e (b) do algoritmo *TRAPtoPI* tenhamos $T_d < T_e$.

Como $E_u^2 < D_u^2$, se $T_d < T_e$, um dos dois valores (T_d e/ou T_e) se alterou após o passo (2).

Se T_d se alterou no passo (a), então $T_d = D_v^2$, onde Π_v é o trapézio com ponto extremo direito mais à esquerda dentre todos os trapézios Π_v tais que $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $E_u^2 < D_v^2 < D_u^2$. Nesse caso, $E_u^2 < T_d < D_u^2$, logo $E_u^2 = T_e < T_d$. Portanto, a alteração de T_d no passo (a) não é suficiente para que $T_d < T_e$.

Se T_d não se alterou no passo (a) e T_e se alterou no passo (b), então $T_d = D_u^2$ e $T_e = E_w^2$, onde Π_w é o trapézio com ponto extremo esquerdo mais à direita dentre os trapézios Π_w tais que $\Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$ e $E_u^2 < E_w^2 < D_u^2$. Nesse caso, $E_u^2 < T_e < D_u^2$, logo $T_e < T_d = D_u^2$. Portanto, a alteração de T_e no passo (b) não é suficiente para que $T_d < T_e$.

Se T_d se alterou no passo (a) e T_e se alterou no passo (b), então $T_d = D_v^2$ (onde Π_v é o trapézio com ponto extremo direito mais à esquerda dentre todos os trapézios Π_v tais que $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $E_u^2 < D_v^2 < D_u^2$) e $T_e = E_w^2$ (onde Π_w é o trapézio com ponto extremo esquerdo mais à direita dentre os trapézios Π_w tais que $\Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$ e $E_u^2 < E_w^2 < D_u^2$). Nesse caso, $E_u^2 < T_d < D_u^2$ e $E_u^2 < T_e < D_u^2$. Como T_d e T_e não estão diretamente relacionados, da suposição, vamos assumir que $T_d < T_e$. Nesse caso, tem-se $E_u^2 < D_v^2 < E_w^2 < D_u^2$. Além disso, como $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$, tem-se $D_v^1 < E_u^1 < D_u^1 < E_w^1$, ou seja, a representação R contém um trapézio Π_u satisfazendo (4.3), contradição. \square

Lema 4.2.5 *O ponto T_u , escolhido pelo algoritmo TRAPtoPI é tal que $E_u^2 < T_u < D_u^2$*

Prova O ponto T_u escolhido pelo algoritmo TRAPtoPI é tal que $T_e < T_u < T_d$ (passo c).

Os pontos T_e e T_d são definidos na inicialização do algoritmo: $T_e = E_u^2$ e $T_d = D_u^2$ (passo (1)).

Se esses pontos não se alterarem até o fim do algoritmo, pelos passos (1) e (c) tem-se $T_e = E_u^2 < T_u < T_d = D_u^2$.

Entretanto, esses pontos podem se alterar nos passos (a) e (b).

Se T_d se altera no passo (a) e T_e não se altera no passo (b), então $T_d = D_k^2$, onde Π_k é um trapézio tal que $E_u^2 < D_k^2 < D_u^2$. Logo, $E_u^2 < T_d < D_u^2$. Como T_e não se altera no passo (b), tem-se $T_e = E_u^2 < T_u < T_d < D_u^2$ e, portanto, $E_u^2 < T_u < D_u^2$.

Se T_d não se altera no passo (a) e T_e se altera no passo (b), então $T_e = E_k^2$, onde Π_k é um trapézio tal que $E_u^2 < E_k^2 < D_u^2$. Logo, $E_u^2 < T_e < D_u^2$. Como T_d não se altera no passo (a), tem-se $E_u^2 < T_e < T_u < T_d = D_u^2$ e, portanto $E_u^2 < T_u < D_u^2$.

Se T_d se altera no passo (a) e T_e se altera no passo (b), então $T_d = D_k^2$, onde Π_k é um trapézio tal que $E_u^2 < D_k^2 < D_u^2$ e $T_e = E_k^2$, onde Π_k é um trapézio tal que $E_u^2 < E_k^2 < D_u^2$. Pelo lema 4.2.4, $E_u^2 < T_e < T_u < T_d < D_u^2$ e, portanto $E_u^2 < T_u < D_u^2$. \square

Seria interessante que a representação R' criada pelo algoritmo TRAPtoPI ainda fosse uma representação do grafo G . Como o algoritmo TRAPtoPI altera apenas o trapézio que representa o vértice u , as interseções entre quaisquer dois trapézios Π_v e Π_w , $v, w \neq u$, estão preservadas. O lema a seguir garante que as adjacências do vértice $u \in V(G)$ foram preservadas em R' .

Lema 4.2.6 *A representação R' , produzida pelo algoritmo TRAPtoPI, preserva as adjacências do grafo G .*

Prova Seja R a representação trapezoidal de G que é dado de entrada para o algoritmo *TRAPtoPI*.

Observe, primeiro, que o lema 4.2.5 garante que a transformação de Π_u em Δ_u não cria novas adjacências, ou seja, todo trapézio Π_v que não intersecta Π_u em R , não terá interseção com Δ_u em R' . De fato, se $\Pi_v \ll \Pi_u$, como não houve mudanças em r_1 , $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ em R' . Como $D_v^2 < E_u^2$ em R , pelo lema 4.2.5, $D_v^2 < E_u^2 < T_u$, logo $D_v^2 < T_u$ em R' . Se $\Pi_u \ll \Pi_v$, como não houve mudanças em r_1 , $\Omega_u^1 \ll \Omega_v^1$ em R' . Como $D_u^2 < E_v^2$ em R , pelo lema 4.2.5, $T_u < D_u^2 < E_v^2$, logo $T_u < E_v^2$ em R' . Portanto $\Pi_v \cap \Delta_u = \emptyset$ em R' .

Todo trapézio Π_v que intersecta Π_u em r_1 na representação R terá interseção com Δ_u em r_1 na representação R' . Assim, se $\Pi_u \cap \Pi_v \neq \emptyset$ em R , $\Delta_u \cap \Pi_v \neq \emptyset$ em R' . De fato, como a alteração de Π_u para Δ_u ocorre em r_2 , se $\Omega_u^1 \cap \Omega_v^1 \neq \emptyset$ em R , como nenhum ponto da representação de G em r_1 foi modificado, tem-se $\Omega_u^1 \cap \Omega_v^1 \neq \emptyset$ em R' .

Resta garantir que os trapézios Π_v que não intersectam Π_u na reta r_1 e tais que $\Pi_u \cap \Pi_v \neq \emptyset$ em R , tem interseção não vazia em R' .

Considere a representação R . Há 4 casos em que $\Pi_u \cap \Pi_v \neq \emptyset$ e $\Omega_u^1 \cap \Omega_v^1 = \emptyset$:

1. $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $E_u^2 < D_v^2 < D_u^2$
2. $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $D_u^2 < D_v^2$
3. $\Omega_u^1 \ll \Omega_v^1$ e $E_u^2 < E_v^2 < D_u^2$
4. $\Omega_u^1 \ll \Omega_v^1$ e $E_v^2 < E_u^2$

O lema 4.2.5 garante que as interseções dos casos (2) e (4) são preservadas. No caso (2) tem-se $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ e $T_u < D_v^2$ em R' . De fato, $T_u < D_u^2$ pelo lema 4.2.5, $D_u^2 < D_v^2$ em R (pelas condições do caso (2)) e a posição de D_v^2 em R' não se alterou. Da mesma forma, no caso (4) tem-se $\Omega_u^1 \ll \Omega_v^1$ e $E_v^2 < T_u$ em R' , pois $E_u^2 < T_u$ (lema 4.2.5), $E_v^2 < E_u^2$ em R (pelas condições do caso (4)) e a posição de E_v^2 em R' não se alterou.

Portanto, os trapézios que intersectam Π_u em r_1 tem suas interseções preservadas e o lema 4.2.5 garante que novas adjacências não são criadas e que todos os trapézios que estão nas condições (2) ou (4) tem suas interseções preservadas.

No passo (1) do algoritmo: $T_e = E_u^2$ e $T_d = D_u^2$.

Suponha que existem trapézios Π_k em R que estão no caso (1). Da escolha do trapézio Π_v no passo (a) tem-se $T_d = D_v^2$ e, portanto, $T_d \leq D_k^2$ para todo k tal que o trapézio Π_k está no caso (1). (Note que $T_e = E_u^2$.) Se não há trapézios nas condições do caso (3), então nada ocorre no passo (b) do algoritmo. No passo (c), tem-se $T_e = E_u^2$, $T_d = D_v^2$ e escolhe-se T_u tal que $E_u^2 < T_u < D_v^2$. Logo, $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1$ (pelas condições do caso (1)) e $T_u < D_v^2$, para todo trapézio Π_v que esteja nas condições do caso (1). Portanto, $\Pi_v \cap \Delta_u \neq \emptyset$ em

R' , onde $\Delta_u = (T_u, E_u^2, D_u^2)$. Portanto, todas as interseções de R entre Π_u e os trapézios Π_k que estão no caso (1) estão preservadas em R' .

Suponha que existem trapézios Π_v em R que estão no caso (3) e se não há trapézios nas condições do caso (1), então nada ocorre no passo (a) do algoritmo. Da escolha do trapézio Π_v no passo (b), tem-se $T_e = E_v^2$ e, portanto, $E_k^2 \leq T_e$ para todo k tal que Π_k está no caso (3). (Note que $T_d = D_u^2$.) No passo (c), tem-se $T_e = E_v^2$, $T_d = D_u^2$ e escolhe-se T_u tal que $E_v^2 < T_u < D_u^2$. Logo, $\Omega_u^1 \ll \Omega_v^1$ (pelas condições do caso (3)) e $E_v^2 < T_u$, para todo trapézio Π_v que esteja nas condições do caso (3). Portanto, $\Pi_v \cap \Delta_u \neq \emptyset$ em R' , onde $\Delta_u = (T_u, E_u^2, D_u^2)$. Portanto, todas as interseções de R entre Π_u e os trapézios Π_k que estão no caso (3) estão preservadas em R' .

Suponha que existem trapézios Π_v e Π_w nas condições dos casos (1) e (3), respectivamente. Então $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$. Logo, no passo (a), pela escolha do trapézio Π_v , tem-se $T_d = D_v^2$, e $T_d \leq D_k^2$, para todo k tal que Π_k está no caso (1). (Note que $T_e = E_u^2$.) No passo (b), da escolha do trapézio Π_w , tem-se $T_e = E_w^2$ e, portanto $E_k^2 \leq T_e$, para todo k tal que Π_k está no caso (3). (Note que $T_d = D_v^2$.) Agora, $E_w^2 < D_v^2$, caso contrário, R conterá uma configuração em relação a Π_u satisfazendo (4.3). No passo (c), tem-se $T_e = E_w^2$, $T_d = D_v^2$ e escolhe-se T_u tal que $E_w^2 < T_u < D_v^2$. Logo, $\Omega_v^1 \ll \Omega_u^1 \ll \Omega_w^1$ (pelas condições dos casos (1) e (3)) e $E_w^2 < T_u < D_v^2$, para todos os trapézios Π_v e Π_w que estejam nas condições do caso (1) ou (3), respectivamente. Portanto $\Pi_v \cap \Delta_u \neq \emptyset$ e $\Pi_w \cap \Delta_u \neq \emptyset$ em R' .

Além disso, como $E_u^2 < E_v^2 < T_u < D_v^2 < D_u^2$, tem-se $E_u^2 < T_u < D_u^2$ e, dessa forma, todas as interseções já provadas estão preservadas. \square

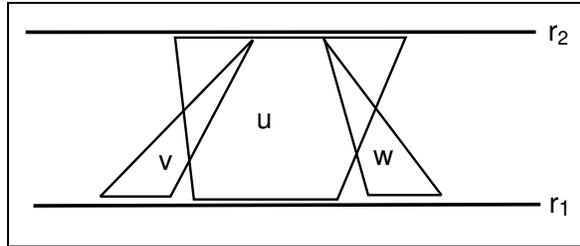


Figura 4.6: Uma representação trapezoidal que não é resultado do algoritmo *TRAPtoPI*.

Lema 4.2.7 *A execução do algoritmo TRAPtoPI sobre uma representação trapezoidal R não cria a condição (4.3) na representação trapezoidal R' , resultante do algoritmo.*

Prova Suponha, por contradição que, após a execução do algoritmo *TRAPtoPI* sobre uma representação trapezoidal R , a condição (4.3) é criada na representação resultante

R' . Nesse caso, como apenas o trapézio Π_u foi alterado, tal trapézio deve ser parte da obstrução criada em R' . Ou seja, Δ_u é o trapézio Π_u , Π_v ou Π_w de R' .

Para evitar ambigüidades, chamemos os trapézios da obstrução criada em R' de Π'_u , Π'_v e Π'_w .

Obviamente, Δ_u não pode ser o trapézio Π'_u , pois não é possível existir um ponto extremo de Π'_v tal que $T_u < D_v^{2'} < T_u$.

Se Δ_u é o trapézio Π'_v de R' , então existe um outro trapézio Π'_u em R' tal que $E_u^{2'} < T_u < E_w^{2'} < D_u^{2'}$ e $D_u^1 < E_u^{1'} < D_u^{1'} < E_w^{1'}$.

Como a execução de *TRAPtoPI* preserva as adjacências do grafo na nova representação R' , o vértice representado pelo triângulo Δ_u (que é o trapézio Π'_v em R') e o vértice representado por Π'_w em R' não são adjacentes. Portanto, em R tínhamos $D_u^2 < E_w^{2'}$.

Como a execução de *TRAPtoPI* preserva as adjacências do grafo na nova representação R' , o vértice representado pelo triângulo Δ_u (que é o trapézio Π'_v em R') e o vértice representado por Π'_u em R' são adjacentes. Portanto, em R tínhamos $E_u^{2'} < D_u^2$.

Logo, em R , tínhamos: $E_u^{2'} < D_u^2 < E_w^{2'} < D_u^{2'}$ e, como nenhuma alteração foi feita em r_1 , temos $D_u^1 < E_u^{1'} < D_u^{1'} < E_w^{1'}$. O vértice representado pelo trapézio Π'_u em R' estava sendo representado por um trapézio em R que estava na condição (4.3). Logo R tem um trapézio na condição (4.3), contradição.

A prova para o caso em que Δ_u é o trapézio Π'_w em R' é análoga a que fizemos para $\Delta_u = \Pi'_v$. \square

Teorema 4.2.8 *G é um grafo PI se, e somente se, G possui uma representação trapezoidal tal que para todo trapézio Π_u não ocorre (4.3).*

Prova Seja R uma representação PI de G . Como representações trapezoidais admitem triângulos, R é uma representação trapezoidal de G tal que $T_u = E_u^2 = D_u^2$, para todo trapézio $\Pi_u = \Delta_u$.

Como $E_u^2 = D_u^2$, não existe nenhum ponto extremo de outro triângulo entre E_u^2 e D_u^2 , logo não ocorre $E_u^2 < D_v^2 < E_w^2 < D_u^2$.

Seja G um grafo trapezóide e R uma representação trapezoidal de G tal que para todo trapézio Π_u não ocorre (4.3).

A aplicação sucessiva do algoritmo *TRAPtoPI* na representação R , substitui todo trapézio Π_u por um triângulo Δ_u . Pelo lema 4.2.6, a cada aplicação do algoritmo *TRAPtoPI*, as adjacências de G são preservadas.

Note que a aplicação sucessiva do algoritmo *TRAPtoPI* não cria a situação (4.3). De fato, suponha que após algumas aplicações do algoritmo *TRAPtoPI* a situação representada na figura 4.6 (e que satisfaz (4.3)) ocorra. Note que $T_v < T_w$.

Considere o passo do algoritmo *TRAPtoPI* em que Π_v foi escolhido para ser transformado em Δ_v . Então, as desigualdades válidas eram $\Omega_v^1 < \Omega_u^1$ ($D_v^1 < E_u^1$), pois o algoritmo

não promove nenhuma alteração em r_1 , e $E_u^2 < T_v \leq T_d = D_v^2$.

Considere, agora, o passo em que o algoritmo *TRAPtoPI* transforma Π_w em Δ_w . Então, $\Omega_u^1 < \Omega_w^1$ ($D_u^1 < E_w^1$) e $E_w^2 < T_w \leq T_d = D_u^2$.

Como $\Omega_v^1 < \Omega_u^1 < \Omega_w^1$ e, na situação criada, $T_v < T_w$, então originalmente $\Pi_v \cap \Pi_w = \emptyset$. Logo, a princípio, $D_v^2 < E_w^2$. Portanto, tinha-se $E_u^2 < D_v^2 < E_w^2 < D_u^2$ e a situação (4.3) já existia, uma contradição.

Como a aplicação sucessiva do algoritmo não cria a situação (4.3) e como as adjacências são sempre preservadas, é possível construir uma representação PI de G , logo G é PI. \square

Capítulo 5

A família de Gallai e os grafos PI

Neste capítulo será apresentada a família dos grafos proibidos para comparabilidade. O interesse é identificar, dentre os grafos dessa família, aqueles que são de co-comparabilidade e, dentre estes, os que são (ou não) PI.

5.1 Família de Gallai e grafos de co-comparabilidade

Em [15], Gallai apresentou a seguinte caracterização para os grafos de Comparabilidade:

Teorema 5.1.1 *Um grafo é de comparabilidade se e somente se não contém um subgrafo induzido isomorfo a qualquer dos grafos da figura 5.1 ou a um dos complementos dos grafos da figura 5.2.*

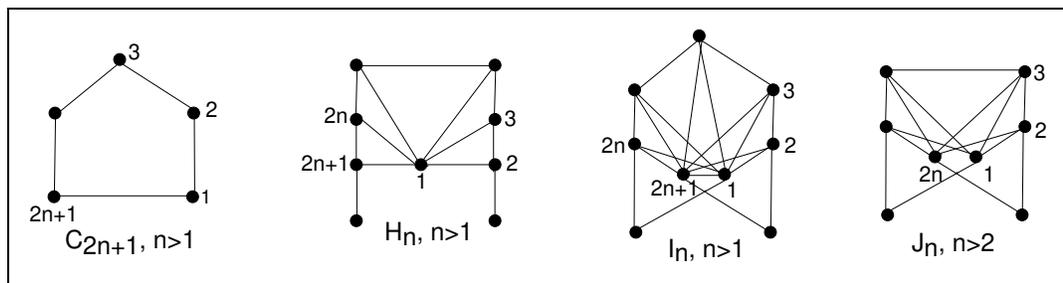


Figura 5.1: Grafos proibidos para a classe de Comparabilidade.

Os grafos da figura 5.1 e os complementos dos grafos da figura 5.2 formam uma família que recebeu o nome de *família de Gallai*.

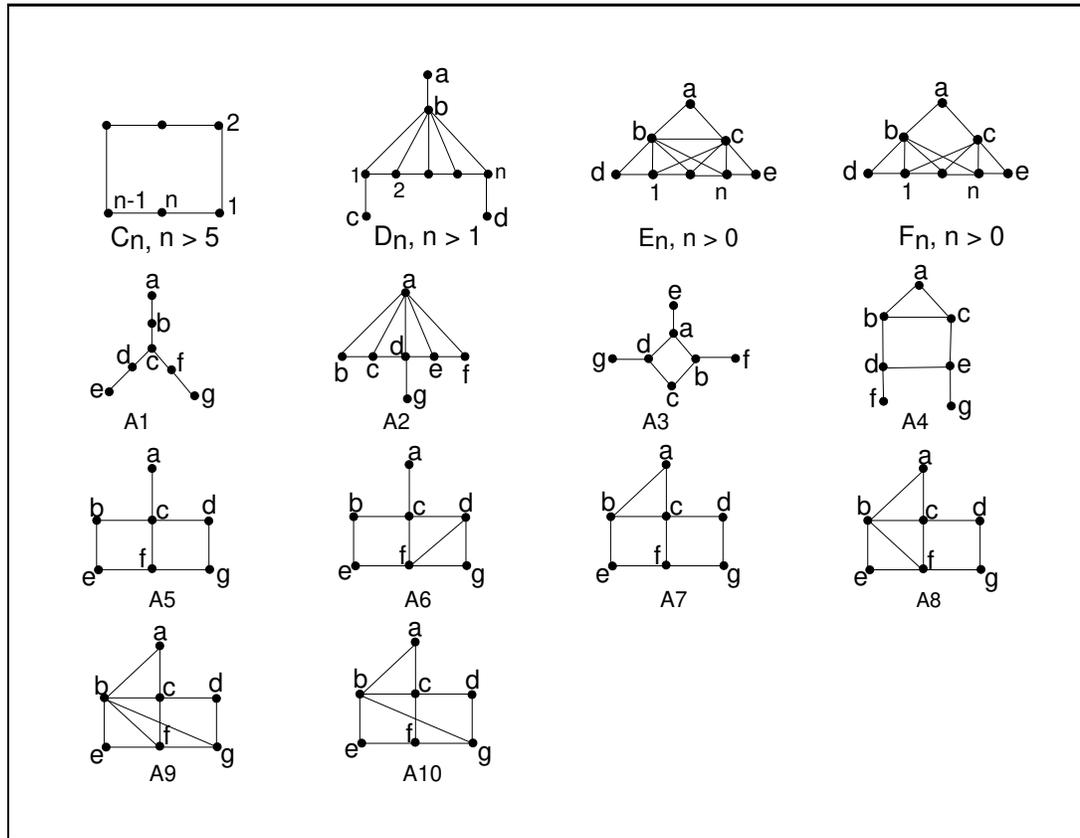


Figura 5.2: Complementos dos grafos proibidos para Comparabilidade

O teorema 5.1.2 descreve os grafos pertencentes à família de Gallai que são de co-comparabilidade.

Teorema 5.1.2 *Dentre os grafos da família de Gallai, os grafos H_n e I_n , $n > 1$, e J_n , $n > 2$, apresentados na figura 5.1 e aqueles cujos complementos estão na figura 5.3 são de co-comparabilidade.*

Prova Primeiro consideramos os grafos da figura 5.1.

- C_{2n+1} , $n \geq 2$

Os ciclos C_{2n+1} , $n \geq 2$, não são grafos de co-comparabilidade, pois não são perfeitos e todo grafo de co-comparabilidade é perfeito [17].

- H_n e I_n , $n \geq 2$

Essas duas famílias pertencem à classe dos grafos de intervalos. Nas figuras 5.4 e 5.5 estão

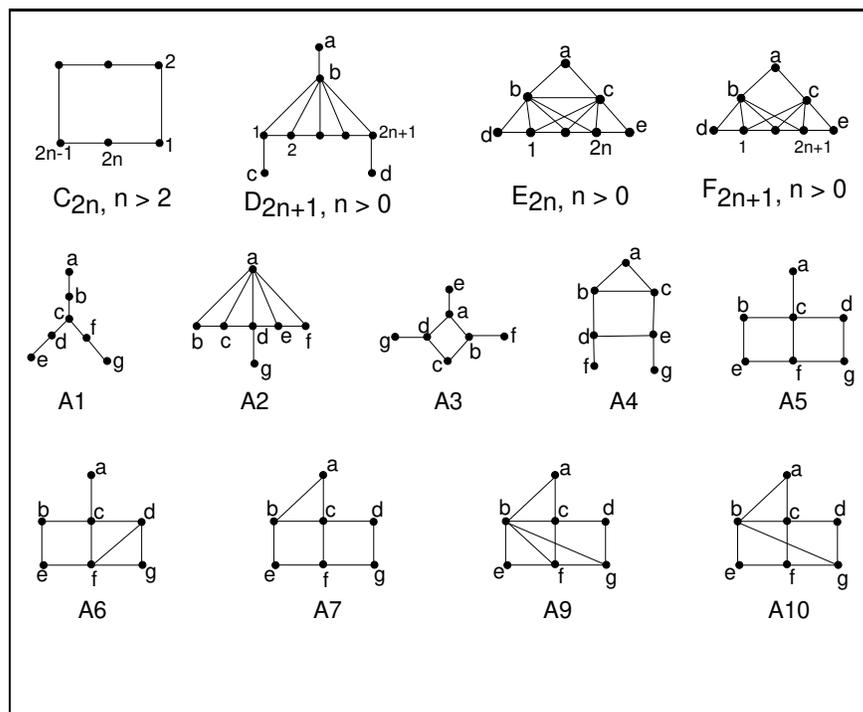


Figura 5.3: Grafos cujos complementos são de co-comparabilidade e pertencem à família de Gallai.

as representações através da interseção de intervalos para os grafos H_n e I_n , respectivamente. Portanto, pelas relações de continência (3.8) e (3.11), H_n e I_n , $n \geq 2$, são grafos de co-comparabilidade.

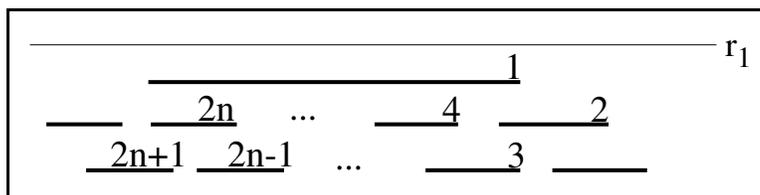


Figura 5.4: Uma representação por intervalos da família H_n .

- $J_n, n \geq 3$

Os grafos da família J_n , $n \geq 3$, são grafos PI (figura 5.6). Pela relação de continência (3.11), os grafos J_n , $n \geq 3$, são grafos de co-comparabilidade.

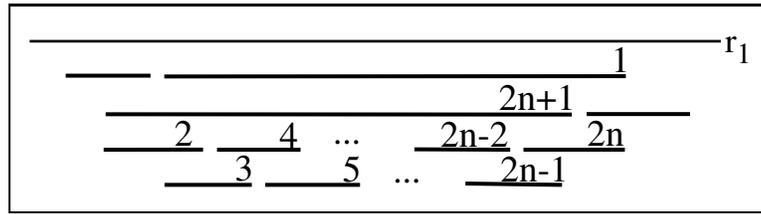


Figura 5.5: Uma representação por intervalos da família I_n .

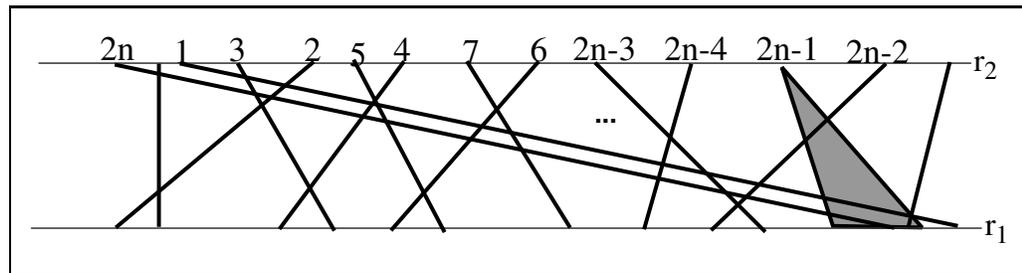


Figura 5.6: Uma representação PI da família J_n .

Portanto, da figura 5.1, apenas a classe C_{2n+1} , $n \geq 2$, é proibida para co-comparabilidade.

Para decidir se os grafos G cujos complementos \overline{G} aparecem na figura 5.2, são de co-comparabilidade, basta verificar se os grafos \overline{G} da figura são de comparabilidade. Vejamos cada caso:

- C_n , $n \geq 6$

Pelo teorema 5.1.1, os ciclos C_{2n+1} , $n \geq 2$, são proibidos para comparabilidade. Seja o ciclo $C_{2n} = (1, 2, \dots, 2n, 1)$, $n \geq 3$. A orientação de C_{2n} , tal que $2i$, $1 \leq i \leq n$, é fonte e $2i + 1$, $1 \leq i \leq n - 1$ é sumidouro, é uma orientação transitiva.

Portanto, $\overline{C_{2n+1}}$, $n \geq 2$ são proibidos para co-comparabilidade e $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, é uma família de grafos de co-comparabilidade.

- D_n , $n > 1$

Como H_n , $n > 1$ não é de comparabilidade e os grafos D_{2n} , $n > 1$, contêm H_n , $n > 1$ como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo D_n da figura 5.2), pelo teorema 5.1.1, D_{2n} , $n > 1$, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo D_2 é fácil verificar que não é possível exibir uma orientação transitiva para suas arestas. Um grafo D_{2n+1} , $n \geq 1$ com os vértices rotulados como na figura 5.2, admite a seguinte orientação transitiva: $[a, b]$, $[i, b]$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$), $[1, c]$, $[2n + 1, d]$ e o caminho $1, 2, \dots, 2n, 2n + 1$, orientado de forma que todos os vértices ímpares sejam fontes e os vértices pares sejam sumidouros.

Assim, a família $\overline{D_{2n}}$, $n \geq 1$, é proibida para co-comparabilidade e os grafos $\overline{D_{2n+1}}$, $n \geq 1$, são grafos de co-comparabilidade.

- E_n , $n \geq 1$

Os grafos E_{2n+1} , $n \geq 1$, contêm I_{n+1} , $n \geq 1$, como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo E_n da figura 5.2) e, portanto, pelo teorema 5.1.1, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo E_1 , é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Para os grafos E_{2n} , $n \geq 1$, se rotularmos os vértices como na figura 5.2, uma orientação transitiva pode ser feita orientando o caminho $1, 2, \dots, 2n$ de forma que todos os vértices pares sejam fontes, os ímpares sumidouros e as demais arestas orientadas da seguinte forma: $[d, 1]$, $[2n, e]$, $[a, b]$, $[d, b]$, $[c, b]$, $[c, e]$, $[c, a]$, $[c, i]$, $[i, b]$, $1 \leq i \leq 2n$.

Portanto, $\overline{E_{2n}}$, $n \geq 1$ é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{E_{2n+1}}$, $n \geq 0$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- F_n , $n \geq 1$

Os grafos F_{2n} , $n \geq 2$, possuem J_{n+1} , $n \geq 2$ como subgrafo induzido, por isso e pelo teorema 5.1.1, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo F_2 é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Uma possível orientação transitiva para a família F_{2n+1} , $n \geq 0$, (com os vértices de F_{2n+1} rotulados como na figura 5.2) é: $[a, b]$, $[d, b]$, $[a, c]$, $[e, c]$, $[i, b]$, $[i, c]$, $1 \leq i \leq 2n+1$, $[1, d]$, $[2n+1, e]$ e as arestas do caminho $1, 2, \dots, 2n, (2n+1)$, orientadas de forma que os vértices ímpares sejam fontes e os pares sejam sumidouros.

Portanto, $\overline{F_{2n+1}}$, $n \geq 0$, é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{F_{2n}}$, $n \geq 1$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- A_i , $1 \leq i \leq 10$, $i \neq 8$

A figura 5.7 mostra uma orientação transitiva para cada um desses grafos. Portanto são grafos de comparabilidade e seus complementos são grafos de co-comparabilidade.

- A_8

O grafo A_8 é isomorfo ao grafo $\overline{F_2}$. Logo, pelo teorema 5.1.1, A_8 não é grafo de comparabilidade e $\overline{A_8}$ não é grafo de co-comparabilidade. \square

5.2 Família de Gallai e grafos PI

Dentre os grafos da família de Gallai que são de co-comparabilidade, podemos encontrar alguns grafos (ou algumas famílias de grafos) que são PI. O teorema 5.2.1 demonstra que $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, são os únicos grafos de co-comparabilidade pertencentes à família de Gallai que não são PI.

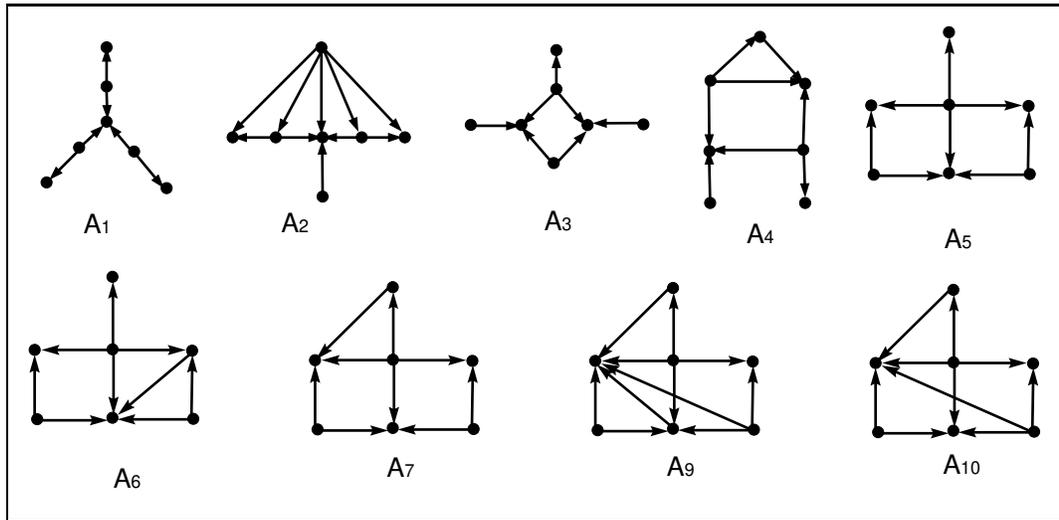


Figura 5.7: Orientações transitivas para os grafos A_1, \dots, A_7, A_9 e A_{10} .

Teorema 5.2.1 *Todo grafo G da família de Gallai que é de co-comparabilidade é PI, exceto $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$.*

Prova Da demonstração do teorema 5.1.2, temos que J_n , $n > 2$, é PI (figura 5.6) e os grafos H_n e I_n , $n > 1$, são grafos de intervalos (figuras 5.4 e 5.5), portanto, pela relação de continência (3.8), são PI.

Vamos analisar os grafos cujos complementos aparecem na figura 5.3.

Como todo grafo PI é trapezóide, pelo lema 4.1.8, $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, não é PI.

As figuras 5.8, 5.9 e 5.10 apresentam, representações PI das famílias $\overline{D_{2n+1}}$, $\overline{E_{2n}}$ e $\overline{F_{2n+1}}$, (respectivamente). Portanto os complementos de D_{2n+1} , E_{2n} e F_{2n+1} , com $n \geq 1$ em todos os casos, são grafos PI.

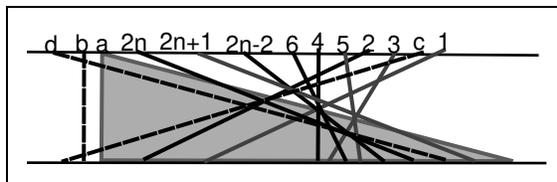


Figura 5.8: Uma representação PI da família $\overline{D_{2n+1}}$.

A figura 5.11 apresenta uma representação PI para os grafos $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_7}, \overline{A_9}$ e $\overline{A_{10}}$.

Desta forma, concluímos que todos os grafos de co-comparabilidade que pertencem à família de Gallai são PI, exceto os grafos $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$. \square

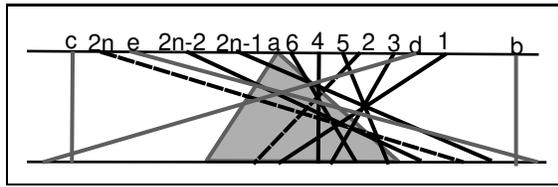


Figura 5.9: Uma representação PI da família $\overline{E_{2n}}$.

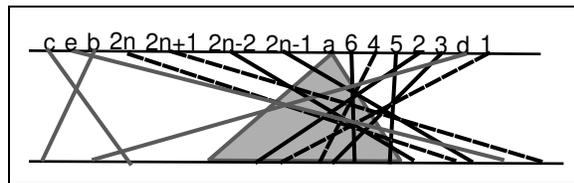


Figura 5.10: Uma representação PI da família $\overline{F_{2n+1}}$.

5.3 Grafos PI e grafos permutação

Essa seção apresenta uma condição necessária para que um grafo seja PI.

Teorema 5.3.1 *Se G é PI, então G é um grafo permutação ou contém algum dos grafos da figura 5.12 ou o complemento de um grafo da figura 5.13 como subgrafo induzido.*

Prova Se G é PI e é grafo permutação, o teorema vale.

Seja G um grafo PI que não é permutação. Pelas relações de continência resumidas na figura 3.17, G é grafo de co-comparabilidade e não é de comparabilidade, logo G possui algum grafo da família de Gallai como subgrafo induzido (pelo teorema 5.1.1). Como ser PI é propriedade hereditária (pelo lema 3.1.2), G contém algum grafo da família de Gallai que é PI como subgrafo induzido. Tais grafos foram apresentados na seção 5.2 e são exatamente os grafos da figura 5.12 e os complementos dos grafos da figura 5.13. \square

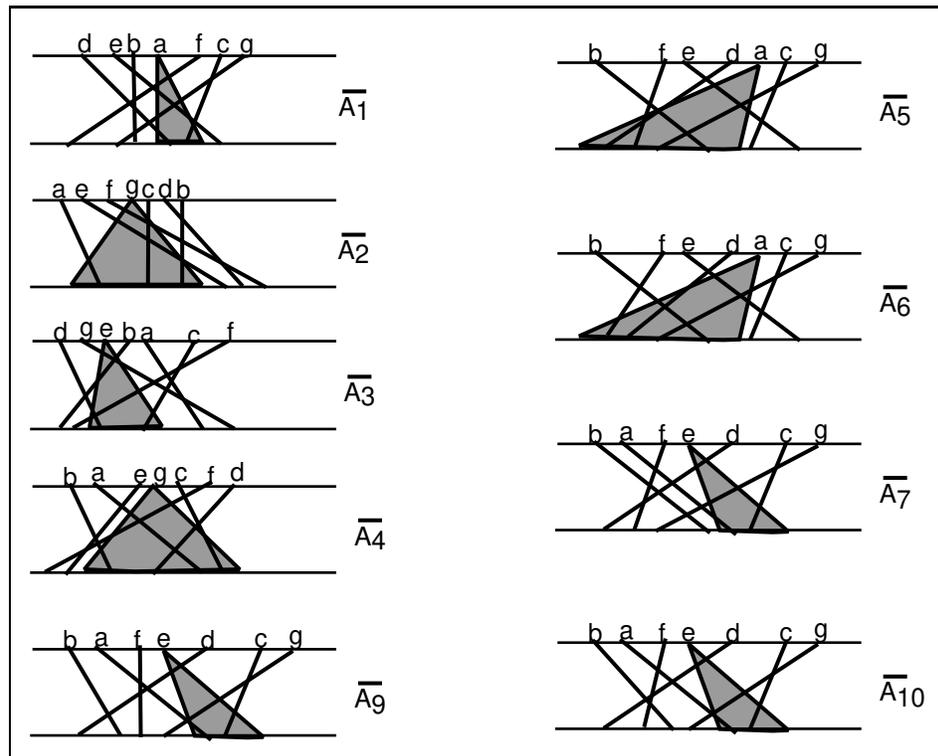


Figura 5.11: Uma representação PI para o complemento dos grafos $A_1..A_7$, A_9 e A_{10} .

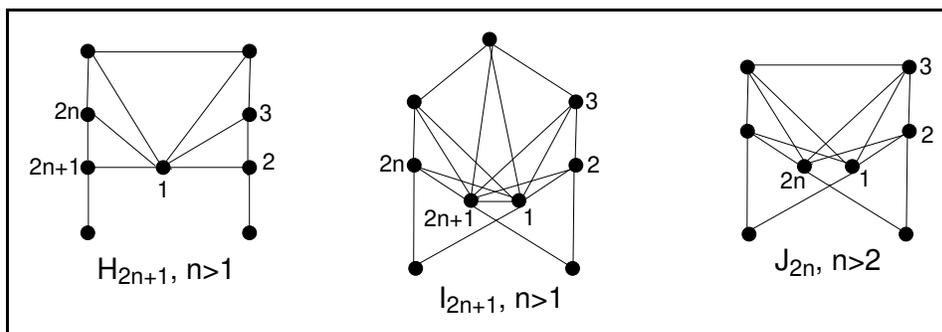


Figura 5.12: Grafos proibidos para permutação que pertencem a classe PI.

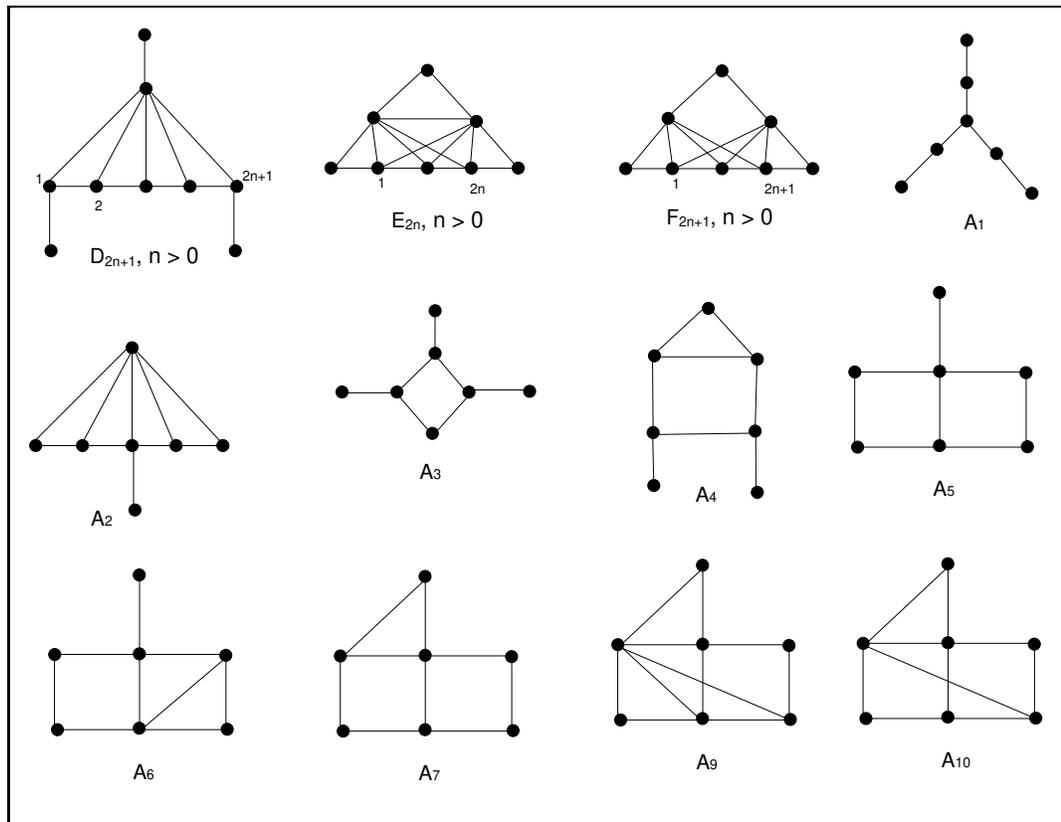


Figura 5.13: Grafos cujos complementos são proibidos para permutação e são PI.

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

O capítulo 3 apresenta a relação da classe PI com outras classes de grafos, algumas amplamente estudadas e com muitas aplicações bem conhecidas (como grafos de intervalos, permutação e co-comparabilidade), outras menos observadas, mas que possuem estruturas muito parecidas com a dos grafos PI (como trapezóides, paralelogramos, PI* e trapezóide simples). Neste capítulo, apresentamos uma demonstração de que a inclusão da classe PI em PI* é estrita. Apesar de Cheah ter apresentado em [4] um grafo PI* que não é PI, tal demonstração não aparece em seu trabalho. Dentre as questões que podem ser resolvidas em trabalhos futuros está a relação dos grafos PI* com as classes paralelogramo e trapezóide simples.

No capítulo 4 dedicamos uma atenção especial à classe dos grafos trapezóides devido à grande similaridade da estrutura dos grafos trapezóides e PI. Além disso, o fato de os grafos trapezóides serem uma superclasse dos PI torna este estudo bastante proveitoso, sendo uma das melhores formas de se conhecer propriedades da classe PI. Neste capítulo, também definimos uma outra classe de grafos, que recebeu o nome de PI-especial. Tal subclasse dos grafos PI se restringe aos grafos PI que podem ser representados sem o uso de triângulos obtusângulos na representação PI. Provamos que todo grafo PI-especial é grafo de intervalos e essa observação foi importante para notarmos que todo grafo PI que não é de intervalos possui um C_4 como subgrafo induzido. Eis a primeira condição necessária: se um grafo é PI, então é grafo de intervalos ou possui um C_4 como subgrafo induzido. Ainda no capítulo 4, estudamos as propriedades das representações trapezoidal e PI. Esse estudo foi inspirado nos trabalhos de Cheah e Corneil [4, 5] e deu origem ao teorema 4.2.8, uma caracterização para os grafos PI. Segundo o teorema, G é um grafo PI se, e somente se, G possui uma representação trapezoidal tal que para todo trapézio Π_u não ocorre $E_u^2 < D_v^2 < E_w^2 < D_u^2$ e $D_v^1 < E_u^1 < D_u^1 < E_w^1$. Existe uma certa semelhança entre esse teorema e a conjectura apresentada por Cheah em [4]. Corneil e Cheah apresentam em [4, 5] um algoritmo $O(n^3)$ para o reconhecimento dos grafos trapezóides e afirmam

que se a conjectura de Cheah for verdadeira, então, com uma pequena modificação neste algoritmo, teremos um algoritmo para o reconhecimento dos grafos PI. Consideramos que um estudo mais detalhado do trabalho de Cheah e Corneil pode ser bastante proveitoso.

Seja R uma representação trapezoidal qualquer, será possível transformar R , sempre que o grafo representado for PI, em uma representação trapezoidal onde não ocorre a regra (4.3) para todo trapézio de R ? Mais que isso: será que tal transformação pode ser feita em tempo polinomial? Nesse caso, teríamos um algoritmo de reconhecimento eficiente para a classe PI.

No capítulo 5, apresentamos a família de Gallai, a família dos grafos proibidos para comparabilidade. O objetivo foi identificar, dentre esses grafos, quais são PI. O estudo da família de Gallai permitiu concluir que todo grafo desta família que é de comparabilidade é PI, exceto $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$. Mais que isso, o estudo da família de Gallai permitiu apresentarmos mais uma condição necessária para que um grafo seja PI: se G é PI, então G é um grafo permutação ou contém algum dos grafos da figura 5.12 ou o complemento de um grafo da figura 5.13 como subgrafo induzido.

Referências Bibliográficas

- [1] J.A. Bondy e U.S.R. Murty, “Graph Theory with Applications”, American Elsevier, New York, 1979.
- [2] K.S. Booth e G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms, *J. of Comp. and Syst. Sci.*, **13** (1976), 335–379.
- [3] A. Brandstädt, V. Le e J. Spinrad, “Graph Classes - a Survey”, SIAM, Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [4] F. Cheah, A recognition algorithm for II-Graphs, Doctoral thesis, TR246/90, Dept. of Computer Science, Univ. of Toronto, 1990.
- [5] F. Cheah e D.G. Corneil, On the structure of trapezoid graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **66** (1996), 109–133.
- [6] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour e R. Thomas, Progress on perfect graphs, *Mathematical Programming Ser. B*, **97** (2003), 405–422.
- [7] O. Cogis, On the Ferrers dimension of a digraph, *Discrete Math.*, **38** (1982), 47–52.
- [8] D.G. Corneil e P.A. Kamula, Extensions of permutation and interval graphs, *Congressus Numerantium*, **58** (1987), 267–275.
- [9] D.G. Corneil, S. Olariu e L. Stewart, The ultimate interval graph recognition algorithm?, *Proc. of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, (1998), 175–180.
- [10] I. Dagan, M.C. Golumbic e R.Y. Pinter, Trapezoid graphs and their coloring, *Discrete Applied Mathematics*, **21** (1988), 35–46.
- [11] J.P. Doignon, A. Ducamp e J.C. Falmagne, On realizable biorders and the biorder dimension of a relation, *J. Math Psychol.*, **28** (1984), 73–109.

- [12] B. Dushnik e E.W. Miller, Partially ordered sets, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 600–610.
- [13] S. Felsner, Tolerance graphs and orders, *Proc. 18th International Workshop Graph-Theoretical Concepts in Computer Science. WG92, Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, **657** (1992), 17–26.
- [14] C. M. Figueiredo, J. Meidanis e C. P. Mello, A linear-time algorithm for proper interval graph recognition, *Information Processing Letters*, **56** (1995), 179–184.
- [15] T. Gallai, Transitiv orientierbare graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), 25–66.
- [16] P.C. Gilmore e A.J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and interval graphs, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 539–548.
- [17] M.C. Golumbic, “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs”, Academic Press, New York, 1980.
- [18] C.G. Lekkerkerker e J.C. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.*, **51** (1962), 45–64.
- [19] Y.L. Lin, Triangle graphs and their coloring, *Workshop on Orders, Algorithm and Applications, ORDAL’94, Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science*, **831** (1994), 128–142.
- [20] Y.L. Lin, Triangle graphs and simple trapezoid graphs, *Journal of Information Science and Engineering*, **18** (2002), 467–473.
- [21] T.H. Ma, Algorithms on special classes of graphs and partially ordered sets, Doctoral thesis, TN(1990), Dept. of Computer Science, Vanderbilt Univ., Nashville, 1990.
- [22] T.H. Ma e J.P. Spinrad, Avoiding matrix multiplication, *R.H. Möhring, ed., Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin*, **484** (1991), 61–71.
- [23] T.H. Ma e J.P. Spinrad, On the 2-chain subgraph cover and related problems. *J. Algorithms*, **17** (1994), 251–268.
- [24] R.M. McConnell e J.P. Spinrad, Linear-time transitive orientation, *8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1997), 19–25.
- [25] R.M. McConnell e J.P. Spinrad, Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Mathematics*, **201** (1999), 189–241.

- [26] J.P. Spinrad, On comparability and permutation graphs, *SIAM Journal of Computing*, **14** (1985), 658–670.