

A estrutura de dados gema para representação de mapas n -dimensionais

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Arnaldo Jovanini Montagner e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 5 de março de 2007.

Jorge Stolfi (Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA:	T/UNICAMP
	M76e
V	Ex.
TOMBO BUCL	73594
PROC.	16.145-07
C	<input type="checkbox"/>
	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	14,00
DATA	07/08/07
BIB-ID	417883

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Montagner, Arnaldo Jovanini
M76e A estrutura de dados gema para representação de mapas n-
dimensionais/Arnaldo Jovanini Montagner -- Campinas, [S.P. :s.n.],
2007.

Orientador: Jorge Stolfi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Estruturas de dados (Computação). 2. Geometria
computacional. 3. Teoria dos grafos. 4. Topologia. I. Stolfi, Jorge. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III.
Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: The gem data structure for n-dimensional maps

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Data structures. 2. Computational geometry. 3. Graph theory. 4. Topology.

Área de concentração: Computação gráfica

Titulação: Mestre em Ciência da Computação

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Stolfi (IC-Unicamp)
Prof. Dr. Sóstenes Lins (Depto. De Matemática-UFPE)
Prof. Dr. Orlando Lee (IC-Unicamp)
Profa. Dra. Célia Picinin de Mello (IC-Unicamp)

Data da defesa: 05/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

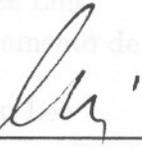
Tese defendida e aprovada em 05 de março de 2007, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof. Dr. Sóstenes Luiz Soares Lins
Departamento de Matemática – UFPE.



Prof. Dr. Orlando Lee
IC – UNICAMP.



Prof. Dr. Jorge Stolfi
IC – UNICAMP.

A estrutura de dados gema para representação de mapas n -dimensionais

Arnaldo Jovanini Montagner¹

Janeiro de 2007

Banca Examinadora:

- Jorge Stolfi (Orientador)
- Sóstenes Lins
Departamento de Matemática - Universidade Federal do Pernambuco
- Orlando Lee
- Célia Picinin de Mello (Suplente)

¹Suporte financeiro: Bolsa do CNPq mar/2005–ago/2005, Bolsa da FAPESP (processo 05/53270-9) set/2005–nov/2006.

Resumo

Mapas são subdivisões de espaços topológicos em regiões simples, e triangulações são um tipo específico de mapa em que cada elemento é um simplexo (aresta, triângulo, tetraedro, etc). Neste trabalho, tratamos o problema de representação da topologia de triangulações e mapas de dimensão arbitrária. Estudamos a utilização de uma representação baseada em grafos de arestas coloridas, já utilizada como ferramenta teórica, mas nunca empregada em aplicações práticas. A principal limitação desta representação é a relativa inflexibilidade imposta sobre a manipulação da topologia. Há porém grandes vantagens em sua utilização, como a simplicidade de representação e a generalidade.

Este trabalho consiste na especificação teórica de uma estrutura de dados baseada nestes grafos coloridos e de operações topológicas para construção e manipulação da estrutura. A utilização desta estrutura é ilustrada através de algoritmos para resolução de problemas em geometria computacional.

Abstract

Maps are subdivisions of topological spaces into simple regions, and triangulations are a specific kind of map wherein each element is a simplex (edge, triangle, tetrahedron, etc). In this work, we analyze the problem of representing the topology of triangulations and maps with arbitrary dimension. We study a representation based on edge-colored graphs, already used as theoretical tool, but never employed in practical applications. The main limitation of this representation is the relative inflexibility imposed on the manipulation of topology. There are, though, great advantages in its use, as its simplicity and generality.

This work consists in the theoretic specification of a data structure based on these colored graphs and of topological operators to build and manipulate the structure. The use of this structure is illustrated by algorithms for computational geometry problems.

Agradecimentos

Aos meus pais, que sempre deram grande importância à minha formação acadêmica e profissional, e que me apoiaram em todas as fases da minha vida.

Ao meu irmão, Guilherme, pela constante alegria e pelo interesse que demonstrou em meu trabalho.

À minha namorada, Juliana, pelo carinho, compreensão e alegria que me proporcionou durante os anos de mestrado.

Ao professor Jorge Stolfi, pela atenção, pelas valiosas idéias e críticas e, principalmente, pelo exemplo de amor à profissão.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Agradecimentos	xi
1 Introdução	1
1.1 Mapas	1
1.1.1 Triangulações	2
1.2 Representação de mapas e triangulações	3
1.3 Trabalhos relacionados	5
1.3.1 Estruturas de dados representando mapas	5
1.3.2 Estruturas de dados representando triangulações	7
1.4 Organização da dissertação	8
2 Mapas	9
2.1 Conceitos básicos	9
2.1.1 Mapas n -dimensionais	9
2.1.2 Isomorfismo de mapas	11
2.1.3 Submapas	12
2.1.4 Mapas simples	12
2.1.5 Mapas linearmente realizáveis	13
2.1.6 Triangulações	13
2.2 Colagem de mapas	14
2.3 Junção de mapas	16
2.4 Subdivisão de mapas	18
2.4.1 Subdivisão baricêntrica	18
3 Gemas	21
3.1 Conceitos básicos	21

3.1.1	Triangulação colorida	21
3.1.2	Gemas como estruturas algébricas	22
3.1.3	Gemas como grafos coloridos	22
3.2	Gemas como triangulações	23
3.2.1	Triangulação canônica de uma gema	24
3.2.2	Gemas representando triangulações	25
3.3	Resíduos de uma gema	26
3.3.1	Definição de resíduo	26
3.3.2	Relação entre resíduos e elementos da triangulação	27
3.3.3	Órbita de um elemento	29
3.4	Produto de gemas	29
3.4.1	Definição formal	29
3.4.2	Junção de triangulações coloridas	30
3.4.3	Gemas aumentadas	30
3.5	Triangulações representáveis pelas gemas	31
3.5.1	Triangulação coesa	31
3.5.2	Triangulações sobre variedades e não-variedades	34
4	A estrutura de dados gema	37
4.1	A estrutura	37
4.1.1	Representando resíduos	38
4.1.2	Limitações	38
4.1.3	Aplicações	38
4.2	Operações básicas de manipulação	39
4.3	Operações de mais alto nível	41
4.3.1	Percorrendo a triangulação de uma gema	41
4.3.2	Cirurgia	42
5	Gemas como representação de mapas	51
5.1	Gemas representando subdivisões baricêntricas	51
5.1.1	Interpretando as gemas baricêntricas	52
5.2	Construindo gemas baricêntricas	54
6	Algoritmo de casco convexo	59
6.1	Conceitos básicos do problema	60
6.1.1	Polítopos convexos	60
6.2	O algoritmo Gift-wrapping	61
6.2.1	Visão geral	61
6.2.2	Encontrando a faceta adjacente	62

6.2.3	Encontrando a faceta inicial	63
6.3	Representando politopos por gemas	64
6.3.1	Mapa de um politopo	64
6.3.2	Gema de um politopo	64
6.3.3	Flags de um politopo	65
6.3.4	Identificando politopos por seus vértices	66
6.3.5	Obtendo vértices independentes de uma face	69
6.4	Esboço do algoritmo	70
6.4.1	Evitando computação redundante de elementos	71
6.5	Análise	72
6.5.1	Operações topológicas	72
6.5.2	Operações geométricas	72
6.5.3	Árvores de solução	73
6.6	Visualização dos resultados	74
6.6.1	Politopos de dimensão 3	74
6.6.2	Politopos de dimensão 4	76
7	Refinamento local de gemas	79
7.1	Subdivisão elementar em gemas	80
7.1.1	Subdividindo n -elementos em n -triangulações	80
7.1.2	Subdividindo elementos arbitrários em n -triangulações	82
7.2	Subdivisão elementar mínima	86
7.2.1	Subdivisões de triangulações linearmente realizáveis	87
8	Refinamento adaptativo de gemas	93
8.1	Refinamento adaptativo em triangulações	93
8.2	Algoritmo para refinamento colorido	95
8.3	Refinamento adaptativo com restrições de qualidade	99
8.3.1	Refinamento colorido com restrição de ângulos	101
9	Conclusões	107
9.1	Resultados	107
9.2	Extensões	107
A	Conceitos elementares de topologia	109
A.1	Espaço topológico	109
A.2	Continuidade e homeomorfismo	109
A.3	Topologia da reta real	110
A.4	Espaço produto	110

A.5 Subespaço	110
A.6 Vizinhança, fecho, interior e fronteira	111
A.7 Espaço quociente	111
A.8 Junção e cone de espaços topológicos	111
A.9 Espaço compacto	112
A.10 Cirurgia	113
A.11 Variedade	113
Índice Remissivo	115
Bibliografia	117

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de mapas. (a) Mapa sobre a “garrafa de Klein,” uma variedade topológica de dimensão 2. (b) Mapa sobre a esfera tridimensional \mathbb{S}^3 , consistindo das células do hipercubo. Neste último, entende-se que as faces devem ser coladas aos pares de modo a identificar todos os vértices com mesmo número.	1
1.2	Uma triangulação de Delaunay.	2
1.3	Uma triangulação bidimensional linear aproximando uma superfície.	3
1.4	(a) Uma gema 2-dimensional e (b) a triangulação colorida correspondente — entende-se aqui que as arestas externas estão identificadas aos pares conforme indicado. O espaço topológico subjacente a esta triangulação é a garrafa de Klein.	4
1.5	(a) Um mapa 2-dimensional e (b) sua subdivisão baricêntrica.	4
2.1	Um 2-mapa sobre a esfera \mathbb{S}^2	10
2.2	(a) Um mapa com um elemento c . (b) O fecho descolado $\kappa^\circ c$. (c) O mapa do fecho κ^*c	11
2.3	Cada um dos mapas em (a) e (b) tem um único 2-elemento A , que incide nas arestas r e s , que por sua vez incidem em num único vértice v . Apesar disso, eles não são isomorfos (e nem mesmo os espaços subjacentes são homeomorfos).	11
2.4	Dois mapas simpliciais bidimensionais.	14
2.5	(a) Um mapa (b) e uma colagem do mesmo pela função γ	15
2.6	Junção de mapas.	16
2.7	Um mapa (a) e uma subdivisão do mesmo (b).	18
2.8	Subdivisão baricêntrica de um mapa: (a) Um 2-elemento de um mapa. (b) O mesmo elemento com a fronteira subdividida. (c) A subdivisão da fronteira de \mathbb{B}^2 . (d) A subdivisão correspondente de \mathbb{B}^2 . (e) A subdivisão baricêntrica do 2-elemento.	19

3.1	(a) Uma 2-gema com quatro nós. (b) O grafo colorido correspondente a esta gema. As linhas pontilhadas, tracejadas e contínuas correspondem a arestas de cor 0, 1 e 2, respectivamente, como indicado pela legenda.	22
3.2	(a) Uma 2-triangulação colorida sobre o toro. (b) A gema correspondente.	23
3.3	(a) Uma 3-triangulação colorida com borda. (b) A gema correspondente.	24
3.4	(a) Uma $\{0, 1, 2\}$ -gema G . (b) Os $\{0, 1\}$ -resíduos de G	27
3.5	(a) Os $\{0, 1\}$ -resíduos da gema dada na figura 3.3(b). (b) As arestas $\{2, 3\}$ -coloridas que correspondem a estes resíduos.	27
3.6	(a) Uma 2-triangulação colorida e um vértice v . (b) A órbita de v . Note que cada triângulo incidente em v corresponde a uma aresta de $Orb(v)$, e cada aresta incidente a v corresponde a um vértice de $Orb(v)$	29
3.7	(a) Uma 2-gema G . (b) Uma triangulação representada por G . (c) Uma gema aumentada de G . (d) Uma 3-triangulação representada pela gema aumentada.	31
3.8	(a) Uma 2-gema G . (b) Uma triangulação colorida sobre o toro, representada por G . (c) A gema G' , que é a gema G aumentada com a cor 3. (d) Uma triangulação sobre o cone do toro, representada por G' . Entende-se aqui que as facetas dos tetraedros estão coladas conforme indicado pelas setas tracejadas.	35
4.1	(a) Uma 2-gema dada como um grafo colorido (b) os registros da estrutura de dados gema.	38
4.2	Aplicação dos operadores <code>MakeNode</code> e <code>Swap</code>	40
4.3	(a) Triangulação obtida após os <code>MakeNodes</code> . (b) Triangulação obtida após os <code>Swaps</code>	40
4.4	Aplicação do operador <code>Splice</code> : (a) A gema original. (b) resultado da aplicação de <code>Splice(v,w,0)</code> . (c) A triangulação representada pela gema original. (d) A triangulação após o <code>Splice</code>	44
4.5	As duas possíveis ordens de execução de <code>Splice(v₁,w₁,i)</code> e <code>Splice(v₂,w₂,i)</code> no caso (ii) da prova do teorema 4.4: (a) Quando não existem laços. (b) Quando $w_1 = w'_1$ e $w_2 \neq w'_2$ (o caso $w_1 \neq w'_1$ e $w_2 = w'_2$ é equivalente). (c) Quando $w_1 = w'_1$ e $w_2 = w'_2$	46
4.6	As duas possíveis ordens de execução de <code>Splice(v₁,w₁,i)</code> e <code>Splice(v₂,w₂,i)</code> no caso (ii) da prova do teorema 4.4.	47
4.7	(a) Gema G que sofre a cirurgia. As linhas tracejadas indicam as arestas que serão cortadas e coladas pelos <code>Splices</code> . (b) Triangulação representada pela gema G . Em destaque, as arestas da triangulação correspondentes às arestas da gema afetadas pela cirurgia.	47

4.8	(a) Gema G' resultante da cirurgia em G . (b) A triangulação representada pela gema G'	48
4.9	(a) A 2-gema H (com nós rotulados). (b) A triangulação representada por H	48
4.10	As arestas de H afetadas pela cirurgia: antes (a) e depois (b).	49
4.11	(a) Gema H' , resultante da cirurgia em H . (b) Triangulação representada por H'	50
5.1	(a) Um 2-mapa, (b) sua subdivisão baricêntrica e (c) a gema da subdivisão baricêntrica	51
5.2	(a) Um 2-mapa. (b) Sua subdivisão baricêntrica. (c) A gema da subdivisão baricêntrica. (d) Os $\{0,1\}$ -resíduos da gema. (e) As subdivisões baricêntricas das fronteiras descoladas dos 2-elementos do mapa original.	54
5.3	Um 2-mapa coeso M sobre uma superfície cilíndrica (sem as duas bases).	55
5.4	(a) As subdivisões baricêntricas das fronteiras descoladas dos 2-elementos do mapa M . (b) As gemas correspondentes.	55
5.5	(a) As subdivisões baricêntricas dos fechos descolados dos 2-elementos do mapa M . (b) A gemas correspondentes.	56
5.6	Gema resultante da operação GlueResidues	57
5.7	Subdivisão baricêntrica representada pela gema da figura 5.6.	57
6.1	O algoritmo gift-wrapping em três dimensões.	62
6.2	O ângulo $\theta(p)$ entre o hiperplano A e o semi-hiperplano α_p	62
6.3	Identificador geométrico: O politopo P é um cubo, e subdivisão baricêntrica do mapa $\mathcal{M}_\partial(P)$ contém um triângulo a . Se G representa $\Delta\mathcal{M}_\partial(P)$ e o nó w de G corresponde ao elemento a , $\text{Id}(w) = (v_0, v_1, v_2, v_3)$	67
6.4	Cubo.	74
6.5	12-faces.	75
6.6	Casco convexo de pontos próximos à esfera \mathbb{S}^2	75
6.7	Hipercubo.	76
6.8	24-célula.	77
7.1	(a) Uma 2-triangulação com um 2-elemento c . (b) Uma subdivisão elementar em c	79
7.2	Um esquema simples de subdivisão elementar de um triângulo que não se aplica a triangulações coloridas.	80
7.3	(a) Uma triangulação colorida sobre a esfera \mathbb{S}^2 fornecendo uma subdivisão de um triângulo. (b) A gema divisora correspondente.	81

7.4	Aplicação de subdivisão elementar em gemas: (a) Uma gema com um nó v . (b) O resultado da operação $\text{SubdivElem}(v, \mathbf{x}, \{0, 1, 2\})$, onde x é o nó externo da gema divisora da figura 7.3(b).	81
7.5	As triangulações representadas pela gemas das figuras 7.4(a) e (b).	82
7.6	(a) Uma 3-triangulação colorida com uma aresta c . (b) Uma subdivisão elementar de c pela inserção de dois novos vértices. A subdivisão foi estendida para os elementos incidentes em c , de forma que cada elemento do mapa resultante seja um simplexo.	82
7.7	Subdivisão elementar estendida: (a) A triangulação original com uma aresta c a ser subdividida. (b) A subdivisão K'_c da aresta c . (c) A junção da subdivisão K'_c com a órbita $Orb(c)$. (d) A substituição dos elementos contidos em $\kappa St(c)$ pela junção $K'_c \star Orb(c)$	83
7.8	A mesma subdivisão da figura 7.7, em termos de gemas: (a) A gema original, com o resíduo R correspondente à aresta c . (b) A gema divisora que especifica a subdivisão de c . (c) O produto da gema divisora com o resíduo R . (d) A gema resultante da cirurgia — que representa a triangulação da figura 7.7(d).	84
7.9	Exemplo de aplicação da operação SubdivElem : (a) Uma 3-triangulação com uma aresta c a ser subdividida. (b) A gema que representa a triangulação; e um nó v do resíduo correspondente a c . (c) Gema divisora para subdividir c em três arestas; e o nó externo x desta gema. (d) Produto da gema divisora com o $\{2, 3\}$ -resíduo correspondente a c , obtido pela operação $\text{Produto}(v, \{2, 3\}, x, \{0, 1\})$. (e) A gema resultante da cirurgia. (f) Triangulação resultante da subdivisão.	85
7.10	Gemas divisoras mínimas de dimensão um (a) dois (b) e três (c),(d).	86
7.11	(a) Uma gema G de quatro nós. (b) A triangulação \mathcal{T}_G , sobre um espaço homeomorfo ao plano projetivo real \mathbb{P}^2	87
7.12	Gemas cruz de dimensão (a) zero, (b) um, (c) dois e (d) três.	90
7.13	Subdivisão elementar de um triângulo utilizando a 2-gema cruz: (a) Gema original. (b) Gema subdividida. (c) Triangulação original. (c) Triangulação subdividida.	91
8.1	Uma função f sobre um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$	95
8.2	Uma aproximação da função f da figura 8.1 por uma triangulação linear.	95
8.3	Esquema de subdivisão Subdiv7 , com triângulos periféricos hachurados.	96
8.4	Esquemas de subdivisão utilizados no refinamento colorido.	96
8.5	A operação $\text{SubdivN}(t)$: (a) O triângulo t . (b) Aplicação de Subdiv7 no triângulo t . (c) Remoção dos triângulos periféricos.	97

8.6	Uma função gaussiana f sobre um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$	97
8.7	Exemplo de aplicação do refinamento adaptativo colorido na função da figura 8.6.	98
8.8	Interpolação linear S da função da figura 8.6 nos vértices da triangulação da figura 8.7(e).	99
8.9	Aplicação do algoritmo da bisseção de Rivara. Os triângulos marcados para subdivisão estão hachurados.	100
8.10	Esquemas de subdivisão utilizados no algoritmo de Bank.	100
8.11	Funcionamento da rotina <code>PropagarRefinamento</code> : (a) O triângulo t está marcado para subdivisão e é adjacente ao triângulo não marcado s . Há então uma chamada <code>PropagarRefinamento(s)</code> . Como s tem um vértice irregular, há uma chamada recursiva <code>PropagarRefinamento(s')</code> . (b) o triângulo s' é regular, portanto pode ser subdividido por <code>SubdivN</code> . (c) O triângulo s se tornou regular e pode então ser subdividido por <code>SubdivN</code>	102
8.12	Propagação do refinamento: o nível de cada triângulo (com exceção dos de nível 2) está indicado em seu interior. As setas tracejadas mostram uma cadeia de propagação do refinamento. Note que os triângulos visitados têm nível decrescente.	103
8.13	Regularidade de vértices e triângulos em cada tipo de subdivisão: os vértices regulares são escuros e os triângulos regulares estão hachurados.	104
8.14	Exemplo de aplicação do refinamento adaptativo colorido com restrição de ângulos na função da figura 8.6.	105
8.15	Aproximação linear por partes S da função da figura 8.6, na malha da figura 8.14(f).	106

Capítulo 1

Introdução

1.1 Mapas

Um *mapa n -dimensional* é uma partição de um espaço topológico n -dimensional em regiões simples (k -bolas para $0 \leq k \leq n$), com certas condições de regularidade e simplicidade de incidências. Veja a figura 1.1.

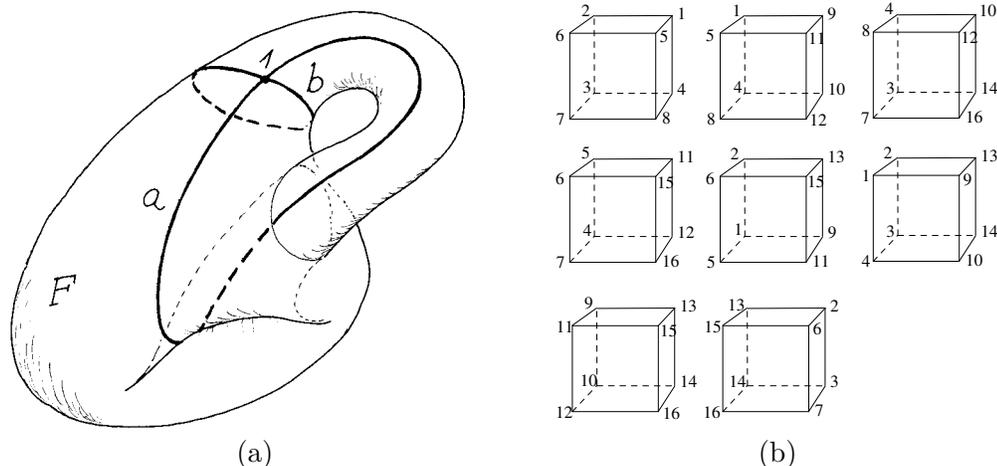


Figura 1.1: Exemplos de mapas. (a) Mapa sobre a “garrafa de Klein,” uma variedade topológica de dimensão 2. (b) Mapa sobre a esfera tridimensional S^3 , consistindo das células do hipercubo. Neste último, entende-se que as faces devem ser coladas aos pares de modo a identificar todos os vértices com mesmo número.

Mapas são uma generalização de diversos conceitos utilizados em áreas da matemática, computação e engenharia. Alguns dos exemplos mais comuns de utilização de mapas são diagramas de Voronoï, modelagem de sólidos e superfícies, mapas cartográficos e

segmentação de domínios tridimensionais, como imagens médicas e leituras de dados geológicos do solo.

Existem aplicações que utilizam mapas com topologia possivelmente complexa. Uma delas é a representação de *espaços de configurações* [39]. Um braço mecânico articulado, por exemplo, pode ter seu estado mapeado num espaço de dimensão igual ao número de graus de liberdade das articulações. Para que o braço possa ser movimentado sem colidir com obstáculos, é necessário criar um mapa que separe as posições realizáveis das não realizáveis no espaço de configurações. O planejamento do movimento pode então ser feito traçando um caminho de um estado inicial a um estado final passando apenas pelas regiões realizáveis do espaço.

Um exemplo menos óbvio de aplicação de mapas é a aceleração do traçado de raios utilizado em computação gráfica através do agrupamento de raios *semelhantes* [5]. Este agrupamento é feito mapeando os raios em um espaço topológico e subdividindo-o em pequenas regiões. Os raios são determinados pela posição do ponto de origem e sua direção, que pode ser expressa em dois ângulos. Os raios têm, portanto, cinco graus de liberdade, e devem ser mapeados em um espaço 5-dimensional, mais especificamente o $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$.

1.1.1 Triangulações

As triangulações são uma classe particularmente útil de mapas. Nesses mapas, todos os elementos, ou células, são simplexos, isto é, vértices, segmentos, triângulos, tetraedros, etc. Um exemplo clássico deste tipo de mapa é a triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos do \mathbb{R}^n . Veja a figura 1.2.

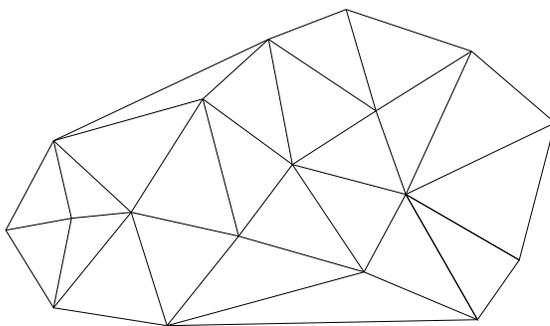


Figura 1.2: Uma triangulação de Delaunay.

Aplicações típicas de triangulações são a aproximação de funções e superfícies por malhas lineares ou polinomiais por partes, como malhas de Beziér. Veja a figura 1.3. A principal vantagem da utilização de triangulações nestes problemas é sua flexibilidade. Numa malha de quadriláteros lineares, por exemplo, um deslocamento de qualquer vértice requer que os

vértices vizinho sejam também deslocados, a fim de manter coplanares os quatro vértices de cada quadrilátero. Já numa triangulação linear por partes, os vértices podem ser deslocados independentemente.

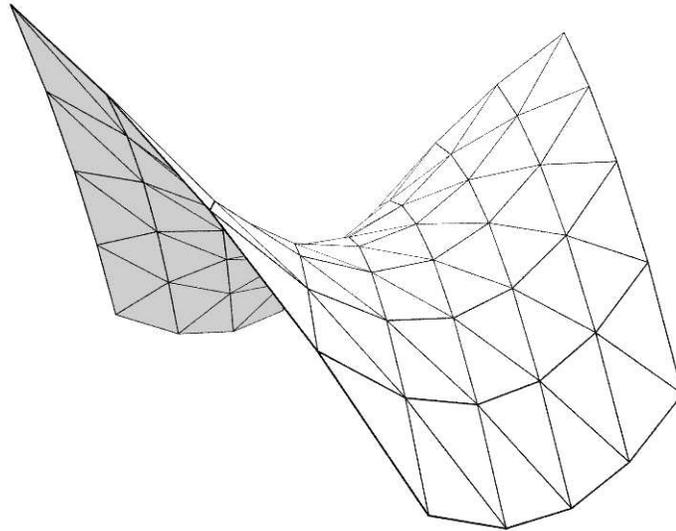


Figura 1.3: Uma triangulação bidimensional linear aproximando uma superfície.

1.2 Representação de mapas e triangulações

Uma prática aconselhável ao se representar de mapas em computadores é separar as informações topológicas (que indicam as relações de incidência entre elementos) das informações geométricas (como posições dos vértices, formato das arestas e faces, etc). Esta separação torna mais simples a implementação e depuração de algoritmos e a modelagem dos mapas.

Neste trabalho, vamos estudar a representação da topologia de triangulações e mapas em geral utilizando o conceito de *gema* (da sigla inglesa GEM, de *Graph Encoded Manifold*). Uma gema n -dimensional é simplesmente um grafo $(n + 1)$ -regular com arestas propriamente coloridas. Estes grafos foram introduzidos por um grupo liderado por Pezdana [45, 46, 25, 26, 27] como forma de representação de variedades topológicas, e posteriormente foram utilizados por Lins [40] para classificar variedades tridimensionais. Cada gema n -dimensional pode ser interpretada como uma *triangulação colorida* n -dimensional da seguinte forma: cada nó do grafo corresponde a um simplexo n -dimensional com os vértices propriamente coloridos e, para cada par de nós do grafo adjacentes por uma aresta de cor i , as facetos opostas ao vértice i dos simplexos correspondentes a esses nós devem ser coladas de modo a identificar vértices de mesma cor. Veja a figura 1.4.

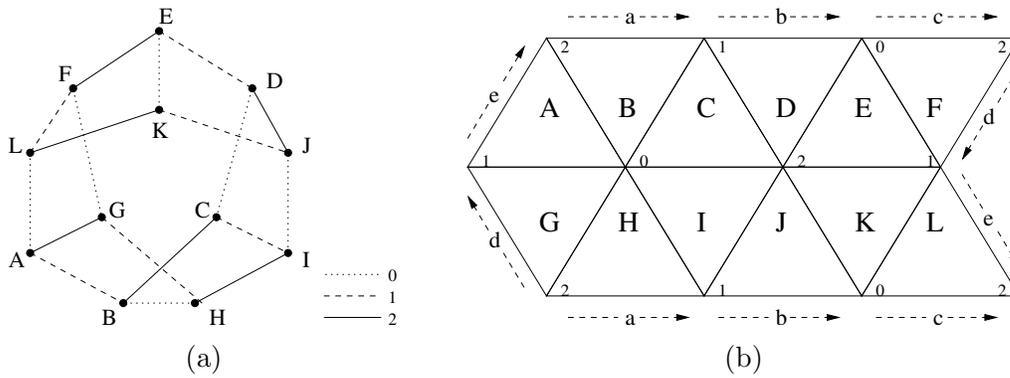


Figura 1.4: (a) Uma gema 2-dimensional e (b) a triangulação colorida correspondente — entende-se aqui que as arestas externas estão identificadas aos pares conforme indicado. O espaço topológico subjacente a esta triangulação é a garrafa de Klein.

Esta representação é extremamente simples e vale para qualquer dimensão n . Sua principal desvantagem, que tem desestimulado seu uso prático até o momento, é que as triangulações representadas são necessariamente coloridas. Por esta razão, gemas não podem ser utilizadas em problemas que lidam com triangulações *específicas*, como por exemplo encontrar a triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos. Além disso, a coloração dos vértices impõe restrições sobre a manipulação da topologia, já que qualquer alteração na triangulação deve garantir que a coloração continue válida. Um dos principais objetivos deste trabalho é desenvolver algoritmos para contornar esta limitação, e tornar as gemas competitivas com as representações atualmente em uso.

A aplicação mais óbvia de uma estrutura de dados baseada em gemas é a representação da *subdivisão baricêntrica* de mapas. A subdivisão baricêntrica é um esquema padrão de subdivisão que pode ser aplicado a qualquer mapa e que produz triangulações naturalmente coloridas. Veja a figura 1.5. Esta abordagem é utilizada nas estruturas de dados cell-tuple de Brisson [13] e n -G-maps de Lienhardt [35].

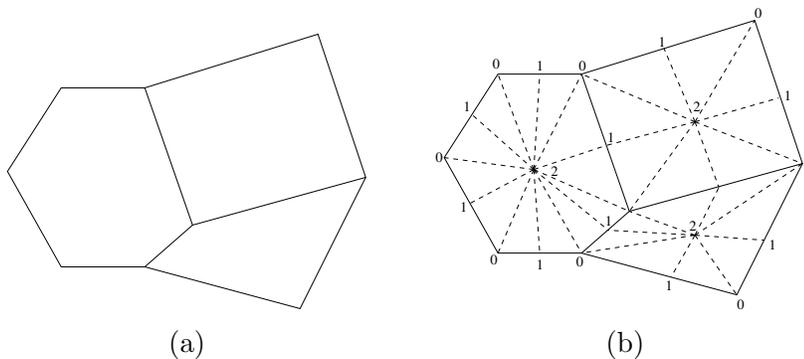


Figura 1.5: (a) Um mapa 2-dimensional e (b) sua subdivisão baricêntrica.

Nosso maior interesse, no entanto, está na utilização de triangulações coloridas que não são subdivisões baricêntricas de mapas, já que estas parecem ter recebido pouca atenção. Um exemplo de aplicação destas triangulações é a aproximação de superfícies por malhas triangulares; pois a topologia de tais malhas não é importante, contanto que ela seja uma boa aproximação para a superfície.

1.3 Trabalhos relacionados

1.3.1 Estruturas de dados representando mapas

Várias estruturas de dados foram desenvolvidas para representar mapas no computador, sendo que a maioria delas faz alguma restrição à dimensão ou à topologia.

Uma das primeiras estruturas de dados para representação de mapas bidimensionais foi introduzida em 1974 por Baumgart [9], e é chamada de *winged-edge*. Nesta estrutura, há registros para representar vértices, arestas e faces do mapa, sendo que a maior parte da informação topológica está associada às arestas. Cada registro de vértice contém um apontador para alguma aresta incidente, e cada registro de face contém um apontador para alguma aresta em seu perímetro. Os registros de aresta contêm apontadores para as duas faces e os dois vértices adjacentes, além de quatro apontadores para as arestas que compartilham uma face e um vértice adjacente. Estes últimos quatro apontadores são chamados de *asas* da aresta, e fornecem a informação necessária para percorrer o perímetro das faces e as arestas adjacentes aos vértices nas duas orientações possíveis.

Uma estrutura de dados amplamente utilizada é a *half-edge* [21], na qual, para cada aresta do mapa bidimensional são codificadas duas *semi-arestas* com orientações opostas. Neste esquema, cada semi-aresta contém referências para o vértice de origem, para a face da esquerda (levando em conta a orientação da semi-aresta) e para as semi-arestas anterior e posterior no percurso anti-horário do perímetro daquela face. Além disso, cada semi-aresta contém um apontador para sua semi-aresta oposta. A informação de orientação presente nas semi-arestas torna o percurso do mapa mais eficiente do que na estrutura de dados *winged-edge*.

Uma limitação comum às estruturas *winged-edge* e *half-edge* é a restrição a mapas sobre variedades orientáveis.

Mäntylä deu novo rumo a esta área ao desenvolver o Geometric Workbench [41]. A contribuição deste trabalho não está tanto na estrutura de dados (que é equivalente à estrutura *half-edge*) mas na redução de todas as operações topológicas sobre mapas a um pequeno conjunto de operações fundamentais, denominadas *operadores de Euler*, cuja correte e suficiência foram demonstradas matematicamente.

A estrutura de dados *quad-edge*, apresentada por Guibas e Stolfi [30], é extremamente

geral. Ela representa mapas em qualquer 2-variedade, orientável ou não, permite auto-interseção nas fronteiras das faces, e fornece uma visão simétrica do mapa e de seu dual. Nesta estrutura, cada aresta de um mapa é codificada como um grupo de quatro arestas *direcionadas e orientadas*, sendo elas as duas possíveis orientações desta aresta e as duas possíveis orientações da aresta dual. Cada uma destas arestas está em uma lista circular, que pode corresponder ao percurso do perímetro de uma face ou ao percurso das arestas adjacentes a um vértice. Cada aresta do mapa é, portanto, representada por um bloco de quatro partes, e cada parte contém um apontador para a próxima aresta na lista circular, além de um indicador de orientação formado por 3 bits. Nesta estrutura, vértices e faces são representados como listas circulares, ou anéis, de arestas. Para se obter o dual de um mapa, basta interpretar os vértices como faces e vice-versa. Na linha do Geometric Workbench, todas as operações topológicas sobre os mapas são reduzidas a duas operações fundamentais sobre a estrutura quad-edge: MAKEEDGE e SPLICE.

O trabalho de Dobkin e Laszlo [20] pode ser encarado como uma extensão da estrutura de dados quad-edge para mapas tridimensionais. Enquanto na estrutura quad-edge a unidade básica era a aresta, nesta estrutura, chamada de *facet-edge*, as informações topológicas estão associadas a pares de faces e arestas. Para cada par (face, aresta) há quatro maneiras possíveis de definir a orientação dentro da face e ao longo da aresta. Da mesma forma, há quatro orientações possíveis para o par no mapa dual. Sendo assim, cada par (face, aresta) do mapa é representado por um bloco de oito partes. Similarmente à estrutura quad-edge, estas partes estão inseridas em listas circulares, que correspondem a vértices ou a poliedros do mapa.

Abandonando a restrição dimensional, Brisson [13] apresentou uma estrutura de dados para modelar mapas em n -variedades, para qualquer $n \geq 0$. Uma *tupla-celular* (do termo inglês cell-tuple) é uma $(n + 1)$ -tupla na forma (C_0, \dots, C_n) , onde cada C_i é uma célula i -dimensional do mapa, e, para $i < n$, C_i faz parte da fronteira de C_{i+1} . A estrutura de dados *cell-tuple* armazena todas as tuplas-celulares do mapa, além de apontadores entre tuplas que diferem de apenas um elemento. Estes apontadores permitem percorrer o mapa eficientemente. Esta estrutura também permite obter o dual de um mapa simplesmente invertendo as suas tuplas-celulares, fazendo com que uma célula i -dimensional seja interpretada como uma célula $(n - i)$ -dimensional.

Outra abordagem para representar mapas de dimensão arbitrária, bastante semelhante à de Brisson, foi proposta por Lienhardt na mesma conferência [35]. Na estrutura de Lienhardt, chamada de *mapas n -dimensionais generalizados* ou *n - G -maps*, as unidades básicas são semi-arestas, chamadas de *dardos*. Os dardos são agrupados dois a dois, e cada par de dardos agrupado é chamado de *amarra*. Em um mapa n -dimensional, há n tipos de amarras: as amarras do tipo 0 unem dois dardos para formar uma aresta, as amarras do tipo 1 unem dois dardos para representar a adjacência entre arestas, as amarras do tipo

2 unem dardos para representar a adjacência entre faces e assim por diante. Os mapas são construídos, portanto, *amarrando* as células n -dimensionais da dimensão mais baixa até a mais alta.

Uma abordagem similar à de Brisson e Lienhardt foi descrita por André Guedes na sua tese de mestrado [29].

Existem ainda estruturas de dados especializadas em certos tipos de mapas. Uma delas é a *corner stitching*, desenvolvida por Ousterhout [44] para auxiliar o desenho de circuitos VLSI. Nesta estrutura, os mapas são bidimensionais, e todas as faces são retângulos com lados paralelos aos eixos de coordenadas. Esta restrição permite que a estrutura de dados seja bastante simplificada, e facilita as operações a serem realizadas no mapa.

A estrutura *spherical maps by corners* (SMC) de Andrade [1, 2] é especializada em *mapas esféricos*. Esta estrutura modela subdivisões da esfera \mathbb{S}^2 nos seguintes elementos: vértices, arestas (arcos de circunferências) e faces. Entre as aplicações desta estrutura está a implementação de SIGs (Sistemas de informação geográfica).

1.3.2 Estruturas de dados representando triangulações

A maneira mais comum de representar triangulações n -dimensionais, empregada por exemplo na biblioteca CGAL [12] e no software Triangle de Shewchuk [53], consiste em representar cada n -simplexo por um registro e utilizar ponteiros entre os registros para codificar as relações de adjacência entre os simplexos. Além dos ponteiros, para cada par de simplexos adjacentes é necessário manter alguns bits auxiliares indicando como as duas facetas devem ser coladas. Esta estrutura de dados é semelhante à que pretendemos utilizar em nosso trabalho, com a diferença que, nas triangulações coloridas, existe apenas uma maneira de dois simplexos compartilharem uma faceta específica, não havendo portanto necessidade de manter bits auxiliares.

Existem, no entanto, estruturas de dados bem mais sofisticadas para triangulações. Um exemplo é a estrutura proposta por Blandford et al. para representação compacta de triangulações de dimensão dois ou três [11]. Ao invés dos simplexos n -dimensionais, o bloco básico desta estrutura de dados são os simplexos de dimensão $n - 2$, isto é, vértices para 2-triangulações, e arestas para 3-triangulações. Cada $(n - 2)$ -simplexo é armazenado juntamente com seu link, representado pela lista dos vértices ao redor do simplexo. Os vértices da triangulação são numerados de forma a atribuir números próximos a vértices vizinhos. Isto permite que a representação do link de cada $(n - 2)$ -simplexo possa ser compactada, reduzindo significativamente a memória total utilizada pela triangulação. A implementação desta estrutura, no entanto, parece ser bastante complexa, principalmente ao tratar alterações na triangulação.

1.4 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- O capítulo 2 apresenta formalmente os mapas, triangulações, subdivisão baricêntrica, e vários conceitos relacionados.
- No capítulo 3 definimos o conceito de gemas e estudamos sua relação com as triangulações coloridas.
- No capítulo 4 apresentamos a estrutura de dados gema, bem como os operadores e algoritmos básicos para manipulação desta estrutura.
- No capítulo 5 estudamos as gemas que representam subdivisões baricêntricas de mapas.
- O capítulo 6 traz um exemplo prático de gemas representando a subdivisão baricêntrica de mapas. Trata-se da implementação de um algoritmo de casco convexo n -dimensional utilizando a estrutura de dados gema.
- No capítulo 7 estudamos o problema de realizar subdivisões locais em triangulações coloridas.
- O capítulo 8 apresenta um exemplo de aplicação de gemas para aproximação de funções sobre domínios bidimensionais utilizando refinamento adaptativo.
- O capítulo 9 apresenta nossas conclusões e sugestões para possíveis extensões dos resultados.

Capítulo 2

Mapas

2.1 Conceitos básicos

Vamos, primeiramente, definir o conceito de mapa. Supomos conhecidos os seguintes conceitos elementares de topologia: *espaço topológico*, *espaço compacto*, *conjuntos abertos e fechados*, *fecho*, *interior* e *fronteira* de conjuntos, *subespaço*, *espaço quociente*, *função contínua*, *homeomorfismo* e *variedade*. As definições e as notações utilizadas podem ser encontradas no apêndice A.

2.1.1 Mapas n -dimensionais

Definição 2.1 *Um n -mapa M é uma partição de um espaço topológico compacto, denotado por $|M|$, em regiões homeomorfas a k -bolas ($k \in \{0, \dots, n\}$), chamadas de k -elementos. Definimos ainda que o conjunto vazio é o único elemento de dimensão -1 de qualquer mapa. As relações de incidência entre os elementos de um mapa devem obedecer às seguintes condições:*

- (i) *O fecho de todo elemento de M é uma união de elementos de M .*
- (ii) *Todo elemento de M está contido no fecho de algum n -elemento de M .*
- (iii) *Para cada k -elemento $c \in M$ existe uma função contínua f de $\kappa\mathbb{B}^k$ sobre κc consistindo da união de um número finito de homeomorfismos sobre elementos de M , e tal que $f(\mathbb{B}^k) = c$.*

Os elementos de dimensão 0 e 1 de um mapa são também chamados de *vértices* e *arestas*.

Se g e h forem elementos de um mapa M tais que h incide em g , dizemos que g é uma k -face de h , onde k é a dimensão de g . Se a dimensão de h for $k + 1$, dizemos que g é uma

faceta de h . Note que, se g é face de h , toda face de g também é face de h . As relações de incidência fornecem, portanto, uma ordenação parcial nos elementos de M .

Veja a figura 2.1 por exemplo.

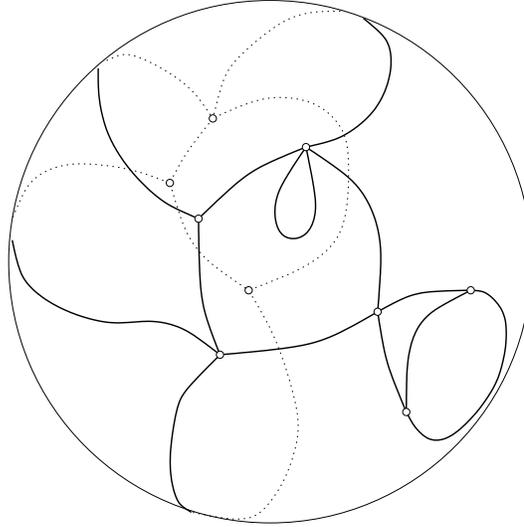


Figura 2.1: Um 2-mapa sobre a esfera S^2 .

Estrela de um elemento

Seja c um elemento de um mapa M . A *estrela* de c , denotada por $St(c)$, é a união de todos os elementos de M incidentes em c .

Mapa do fecho e da fronteira de um elemento

Seja c um k -elemento de um n -mapa M . O conjunto dos elementos de M contidos em κc é um k -mapa, chamado de *mapa do fecho de c* e denotado por κ^*c . O conjunto dos elementos de M contidos em ∂c é um $(k-1)$ -mapa, chamado de *mapa da fronteira de c* e denotado por ∂^*c .

Fecho e fronteira descolados de um elemento

Seja c um k -elemento de um n -mapa M , para $0 < k \leq n$, e seja f uma função de $\kappa\mathbb{B}^k$ sobre κc , que satisfaz a condição (iii) da definição 2.1. O *fecho descolado* de c é a partição $\kappa^\circ c$ de $\kappa\mathbb{B}^k$ consistindo dos componentes conexos da imagem inversa $f^{-1}(d)$ de cada i -face d de c . A *fronteira descolada* de c é a partição $\partial^\circ c$ de $\partial\mathbb{B}^k$ consistindo de todos os elementos de $\kappa^\circ c$ contidos em $\partial\mathbb{B}^k$. Veja a figura 2.2.

Prova-se que o fecho descolado de um k -elemento é um k -mapa, e que sua fronteira descolada é um $(k-1)$ -mapa.

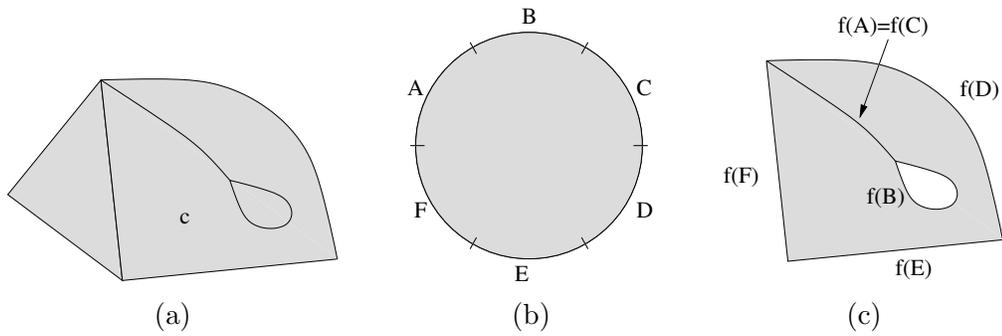
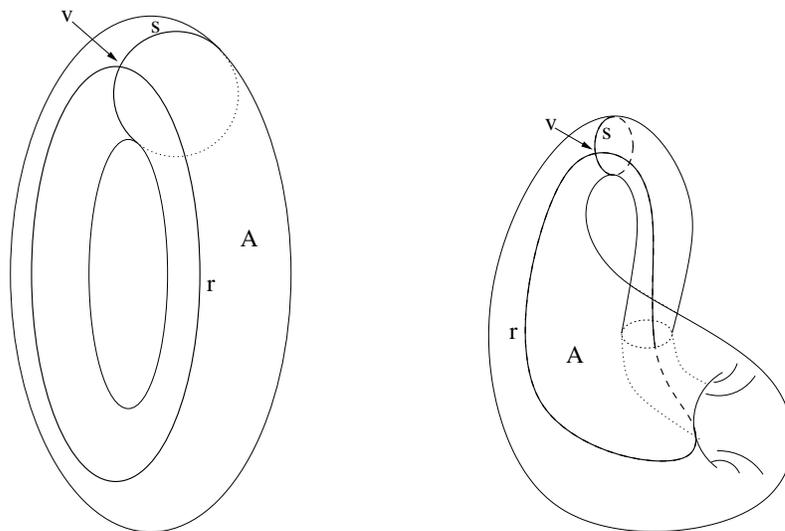


Figura 2.2: (a) Um mapa com um elemento c . (b) O fecho descolado $\kappa^o c$. (c) O mapa do fecho $\kappa^* c$.

2.1.2 Isomorfismo de mapas

Uma bijeção f entre os elementos de dois n -mapas M e M' é um *isomorfismo* se existe um homeomorfismo entre $|M|$ e $|M'|$ que mapeia cada elemento c de M no elemento $f(c)$ de M' . Quando existe tal isomorfismo, dizemos que os mapas M e M' são *isomorfos*.

É óbvio que um isomorfismo preserva todas as relações de incidência. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Isto é, se entre dois n -mapas existe uma correspondência 1-1 entre seus elementos que preserva as relações de incidência, ainda assim estes mapas podem ser não isomorfos. Veja os mapas da figura 2.3, por exemplo.



(a) Mapa sobre o toro $S^1 \times S^1$. (b) Mapa sobre a garrafa de Klein.

Figura 2.3: Cada um dos mapas em (a) e (b) tem um único 2-elemento A , que incide nas arestas r e s , que por sua vez incidem em num único vértice v . Apesar disso, eles não são isomorfos (e nem mesmo os espaços subjacentes são homeomorfos).

O isomorfismo entre mapas é certamente uma relação de equivalência. Um *mapa abstrato* é definido como uma classe de equivalência de mapas sob esta relação, isto é, o conjunto de todos os mapas que são isomorfos a um mapa dado.

2.1.3 Submapas

Definição 2.2 *Um k -submapa de um n -mapa M é um subconjunto de M consistindo de alguns k -elementos de M e de todas as faces destes elementos.*

Teorema 2.1 *Todo k -submapa de um n -mapa é um k -mapa.*

Prova: Seja M' um k -submapa do n -mapa M . Se o elemento c de M pertence a M' , toda face de c também pertence. Sendo assim, a união dos elementos de M' é um subconjunto fechado de $|M|$ e, logo, um espaço compacto. Além disso, podemos dizer que a primeira das três condições de incidência definidas na seção 2.1.1 é atendida.

A segunda condição de incidência é atendida pela definição de submapa, isto é, todo elemento de M' pertence ao fecho de algum k -elemento.

A terceira condição é consequência, de que $M' \subseteq M$ e que, se $d \in M'$, todo elemento de M que é face de d também pertence a M' . \square

Em particular, o mapa do fecho de um k -elemento c de M é um k -submapa de M ; e o mapa da fronteira de c é um $(k - 1)$ -submapa de M . Outro exemplo de k -submapa é o k -esqueleto de M , denotado por $Esq_k(M)$, que é o conjunto dos elementos de M com dimensão $\leq k$.

2.1.4 Mapas simples

Dizemos que um mapa M é *simples* se para cada k -elemento $c \in M$ existe um homeomorfismo de $\kappa\mathbb{B}^k$ sobre κc . Informalmente, M é simples se a fronteira de cada elemento não tem auto interseções.

Note que, num mapa simples, κ^*c é isomorfo a $\kappa^\circ c$ (e ∂^*c é isomorfo a $\partial^\circ c$) para todo elemento c .

Os mapas simples constituem uma classe importante de mapas pois sua topologia é totalmente representada pelas relações de incidência entre os elementos, conforme formalizado no teorema abaixo.

Teorema 2.2 *Sejam M e M' n -mapas simples. Se existe uma bijeção f mapeando k -elementos de M em k -elementos de M' , para $-1 \leq k \leq n$, tal que a de M incide em b de M se e somente se $f(a)$ incide em $f(b)$, então M e M' são isomorfos.*

Prova: Vamos construir indutivamente um homeomorfismo h de $|M|$ para $|M'|$ mapeando cada elemento c de M no elemento $f(c)$ de M' . Construímos primeiramente um homeomorfismo h_0 mapeando cada vértice v de M no vértice $f(v)$ de M' . Agora suponha que, para algum $k > 0$, já construímos um homeomorfismo h_{k-1} de $|E_{sq_{k-1}}(M)|$ para $|E_{sq_{k-1}}(M')|$ que mapeia cada j -elemento b de M no elemento $f(b)$ de M' , para $0 \leq j \leq k-1$. Seja então c um k -elemento de M e $c' = f(c)$ um k -elemento de M' . A função h_{k-1} restrita a ∂c é um homeomorfismo mapeando cada elemento d incidente em c no elemento $f(d)$ incidente em c' . Como κc e $\kappa c'$ são k -bolas, podemos estender o homeomorfismo entre ∂c e $\partial c'$ para um homeomorfismo entre κc e $\kappa c'$. Esta construção pode ser feita em todos os k -elementos de M , o que resulta num homeomorfismo h_k entre $|E_{sq_k}(M)|$ e $|E_{sq_k}(M')|$ mapeando cada j -elemento c de M no elemento $f(c)$ de M' , para $0 \leq j \leq k$. \square

2.1.5 Mapas linearmente realizáveis

Dizemos que um n -mapa M é *linear* se $|M| \subset \mathbb{R}^m$ para algum $m \geq 0$, e todo k -elemento de M , para $0 \leq k \leq n$, está contido num subespaço k -dimensional afim de \mathbb{R}^m (um ponto, uma reta, um plano, etc).

Um mapa M é *linearmente realizável*, ou *LR*, se ele é isomorfo a algum mapa linear.

2.1.6 Triangulações

Simplexo canônico

Sejam x_0, \dots, x_n os vetores unitários dos eixos de coordenadas de \mathbb{R}^{n+1} . O n -simplexo canônico, denotado por \mathcal{S}_n , é o casco convexo dos pontos x_0, \dots, x_n — ou seja, é o conjunto de vetores do \mathbb{R}^{n+1} cujas coordenadas são não negativas e somam 1. Note que \mathcal{S}_0 é um ponto, \mathcal{S}_1 um segmento, \mathcal{S}_2 um triângulo, \mathcal{S}_3 um tetraedro, etc. Em geral, \mathcal{S}_n é um politopo regular de dimensão n com $n+1$ facetas [19].

As *faces* de \mathcal{S}_n são definidas recursivamente como segue. A única face de dimensão -1 é o conjunto vazio; para $k \geq 0$, uma k -face de \mathcal{S}_n é o casco convexo de qualquer subconjunto de $\{x_0, \dots, x_n\}$ menos a união de todas as j -faces de \mathcal{S}_n , com $j < k$. Note que a n -face de \mathcal{S}_n não é \mathcal{S}_n , mas o interior de \mathcal{S}_n relativamente ao hiperplano que passa por x_0, \dots, x_n .

Mapas simpliciais

Um mapa M é *simplicial* se para cada k -elemento $c \in M$, com $0 \leq k \leq n$, existe uma função contínua do simplexo canônico \mathcal{S}_k sobre κc que é uma união de homeomorfismos

de faces de \mathcal{S}_k em faces de c . Veja figura 2.4.

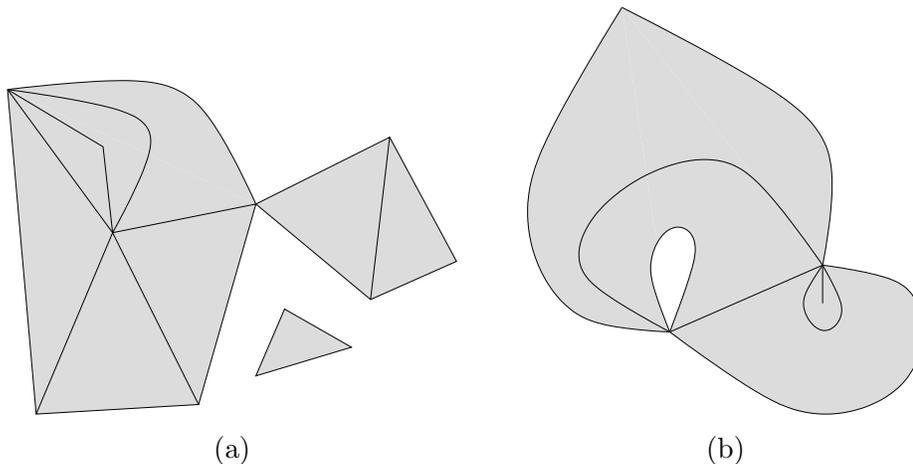


Figura 2.4: Dois mapas simpliciais bidimensionais.

Triangulações

Uma n -triangulação é um mapa simplicial simples. Em uma n -triangulação, todo k -elemento, para $0 \leq k \leq n$, tem exatamente $k + 1$ vértices distintos. O mapa simplicial dado na figura 2.4(a), por exemplo, é uma triangulação; já o da figura 2.4(b) não é.

2.2 Colagem de mapas

Definição 2.3 Uma função de colagem de um n -mapa M é uma sobrejeção contínua γ do espaço $|M|$ sobre um espaço compacto X que atende às seguintes condições.

- (i) A restrição de γ a cada elemento de M é um homeomorfismo.
- (ii) Sejam c_1 e c_2 elementos de M . Se existem $p_1 \in c_1$ e $p_2 \in c_2$ tais que $\gamma(p_1) = \gamma(p_2)$, então $\gamma[c_1] = \gamma[c_2]$.¹
- (iii) Para todo c de M , $\kappa\gamma[c] = \gamma[\kappa c]$.

Definição 2.4 A colagem de M por uma função de colagem γ é a coleção de subconjuntos de X dada por $\bigcup_{c \in M} \{\gamma[c]\}$.

Veja figura 2.5.

¹onde $f[X]$ denota $\{f(x) : x \in X\}$, para qualquer função f e qualquer subconjunto X de seu domínio.

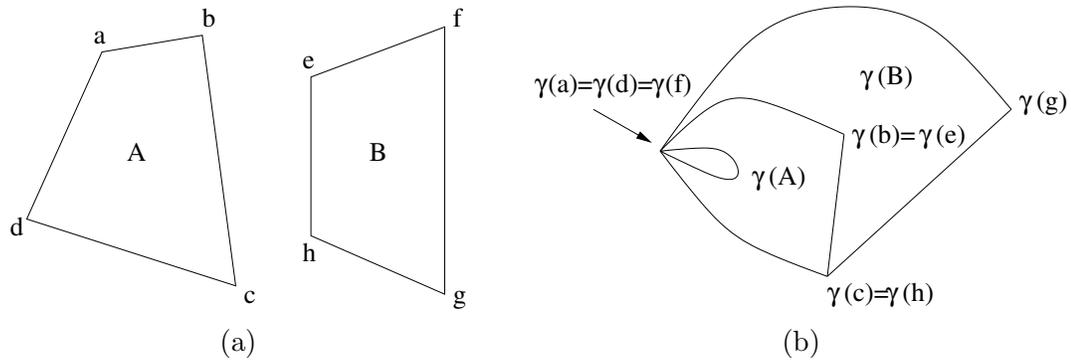


Figura 2.5: (a) Um mapa (b) e uma colagem do mesmo pela função γ .

Teorema 2.3 *A colagem M' de um n -mapa M por qualquer função de colagem $\gamma : |M| \rightarrow X$ é um n -mapa.*

Prova: Vamos primeiro mostrar que M' é uma partição de X em k -bolas, para $k \leq n$. Seja p um ponto qualquer de X e sejam q_1, \dots, q_m os pontos de $|M|$ cuja imagem em γ é p (a função γ é sobrejetora, logo mapeia ao menos um ponto de $|M|$ em p). Se c_1, \dots, c_m são os elementos de M contendo q_1, \dots, q_m , respectivamente, $\gamma[c_i]$ é igual para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Logo, o ponto p pertence a exatamente um elemento de M' e, conseqüentemente, M' particiona X . Para mostrar que cada elemento c de M' é uma bola, basta lembrar que c é a imagem de algum elemento b de M pela função γ , e que a restrição de γ a b (que é uma bola) é um homeomorfismo.

Agora mostramos que M' atende às restrições de incidência estabelecidas na definição de mapa (definição 2.1). Na prova de cada uma das condições, c é um elemento de M' e b é um elemento de M tal que $\gamma[b] = c$.

- (i) O fecho de b é uma união de elementos de M . Logo $\gamma[\kappa b]$, que pela definição 2.3 é igual a κc , é uma união de elementos de M' .
- (ii) Pela definição 2.1, o elemento b está contido no fecho de algum n -elemento a de M . Como $\gamma[\kappa a] = \kappa \gamma[a]$, $\gamma[b]$ está contido em $\kappa \gamma[a]$, isto é, c está contido no fecho do n -elemento $\gamma[a]$ de M' .
- (iii) Seja f a função contínua de $\kappa \mathbb{B}^k$ sobre κb que satisfaz a condição (iii) da definição 2.1. A composição $\gamma \circ f$ nos fornece uma função contínua de $\kappa \mathbb{B}^k$ sobre κc consistindo da união de um número finito de homeomorfismos sobre elementos de M' , e tal que $f(\mathbb{B}^k) = b$.

□

Note que se c é um elemento de um mapa M , $\partial^* c$ é uma colagem de $\partial^\circ c$.

2.3 Junção de mapas

A junção e o cone de espaços topológicos são conceitos conhecidos de topologia, e podem ser encontrados no apêndice A.

Nesta seção, X e Y são espaços topológicos compactos, e \approx denota a relação de equivalência sobre $X \times Y \times [0, 1]$ tal que $X \times Y \times [0, 1] / \approx = X \star Y$, isto é, $(x, y, z) \approx (x', y', z') \Leftrightarrow (x, y, z) = (x', y', z') \vee (x = x' \wedge z = z' = 0) \vee (y = y' \wedge z = z' = 1)$.

Definição 2.5 *Sejam M e N mapas sobre os espaços topológicos X e Y , respectivamente. A junção de M e N , denotada $M \star N$, é a coleção de subconjuntos de $|M| \star |N|$ dada por $\{(a, b)^* : a \in M, b \in N\}$, onde $(a, b)^*$ é igual a:*

- $a \times b \times (0, 1) / \approx$, se a e b são não vazios;
- $a \times Y \times \{0\} / \approx$, se $a \neq \emptyset$ e $b = \emptyset$;
- $X \times b \times \{1\} / \approx$, se $a = \emptyset$ e $b \neq \emptyset$;
- \emptyset , se $a = b = \emptyset$.

Em particular, se M é um mapa qualquer e N é um 0-mapa contendo um único vértice, a junção $M \star N$ é chamada de cone de M .

Veja a figura 2.6.

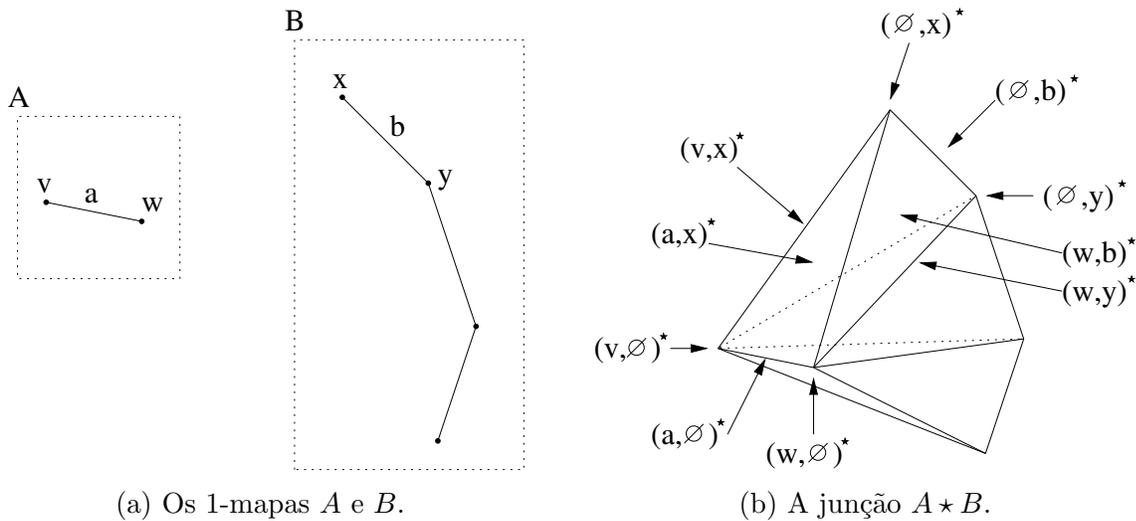


Figura 2.6: Junção de mapas.

A seguir, mostramos que a junção de dois mapas é também um mapa. Para isso, utilizamos o seguinte lema, que pode ser provado a partir das definições de produto e quociente de espaços topológicos.

Lema 2.1 *Se $(a, b)^*$ é um elemento da junção de mapas $M \star N$, o fecho de $(a, b)^*$ é igual ao conjunto $\bigcup \{(a', b')^* \in M \star N : a' \subseteq \kappa a, b' \subseteq \kappa b\}$.*

Teorema 2.4 *Se M é um m -mapa sobre o espaço X e N é um n -mapa sobre o espaço Y , a junção $M \star N$ é um $(m + n + 1)$ -mapa sobre o espaço $X \star Y$.*

Prova: Vamos primeiro mostrar que $M \star N$ é uma partição de $X \star Y$ em k -bolas. Seja r um ponto de $X \star Y$, e seja $(p, q, z) \in X \times Y \times [0, 1]$ tal que $[(p, q, z)]_{\approx} = r$. Se $z = 0$, r é o conjunto $\{(p, q', 0) : q' \in Y\}$, que está contido em $a \times Y \times \{0\}$, onde a é o elemento de M contendo p . Logo, r está contido num único elemento de $M \star N$, isto é, $(a, \emptyset)^*$. Se $z = 1$, o argumento é simétrico. Se $z \in (0, 1)$, r é o conjunto $\{(p, q, z)\}$, que está contido em $a \times b \times (0, 1)$, onde $p \in a \in M$ e $q \in b \in N$. Neste caso, r também está contido num elemento de $M \star N$, que é o $(a, b)^*$.

Cada elemento não vazio $(a, b)^*$ de $M \star N$ é homeomorfo ao elemento a de M (se $b = \emptyset$), ao elemento b de N (se $a = \emptyset$) ou ao produto $a \times b \times (0, 1)$. Sendo assim, todo elemento não vazio de $M \star N$ é homeomorfo a uma k -bola, para $0 \leq k \leq m + n + 1$.

Mostramos agora que $M \star N$ atende às condições de incidência dadas na definição de mapa (definição 2.1). Na prova de cada condição abaixo, $(a, b)^*$ é um elemento de $M \star N$.

- (i) Pelo lema 2.1, $\kappa(a, b)^*$ é uma união de elementos de $M \star N$.
- (ii) Sejam a' e b' elementos de M e N de dimensão m e n , respectivamente, tais que a' incide em a e b' incide em b . Pelo lema 2.1, $\kappa(a', b')^*$ contém $(a, b)^*$, logo $(a, b)^*$ é face de um $(m + n + 1)$ -elemento de $M \star N$.
- (iii) Vamos supor, primeiramente, que a e b sejam elementos não vazios de dimensões j e k , respectivamente. Sejam $f_a : \kappa\mathbb{B}^j \rightarrow \kappa a$ e $f_b : \kappa\mathbb{B}^k \rightarrow \kappa b$ funções satisfazendo a condição (iii) da definição 2.1. Definimos então a função f , da bola fechada $\kappa\mathbb{B}^j \star \kappa\mathbb{B}^k$ sobre $\kappa(a, b)^*$: se $r = [(p, q, z)]_{\approx}$ é um ponto de $\kappa\mathbb{B}^j \star \kappa\mathbb{B}^k$, $f(r) = [(f_a(p), f_b(q), z)]_{\approx}$. Esta definição é consistente, pois, se $[(p, q, z)]_{\approx} = [(p', q', z')]_{\approx}$, então $[(f_a(p), f_b(q), z)]_{\approx} = [(f_a(p'), f_b(q'), z')]_{\approx}$. Verifica-se então que f satisfaz a condição (iii) da definição de mapa.

No caso em que $a \neq \emptyset$ e $b = \emptyset$, existe um homeomorfismo h de κa sobre $\kappa(a, b)^*$ dado por $h(p) = [(p, q, 0)]_{\approx}$, onde q é qualquer ponto de Y . Logo, a composição $h \circ f_a$ é uma função de \mathbb{B}^j sobre $\kappa(a, b)^*$ satisfazendo a condição (iii) da definição 2.1. O caso em que $a = \emptyset$ e $b \neq \emptyset$ é simétrico.

□

Lema 2.2 *Se $(a, b)^*$ e $(a', b')^*$ são elementos da junção de mapas $M \star N$, $(a, b)^*$ incide em $(a', b')^*$ se e somente se a incide em a' e b incide em b' .*

Prova: Este fato segue diretamente do lema 2.1. \square

É simples verificar que a junção de dois mapas simples é também um mapa simples — e, em particular, a junção de duas triangulações é uma triangulação. Sendo assim, se os mapas M e N são simples, o lema 2.2 descreve a topologia de $M \star N$ em termos das topologias de M e N .

2.4 Subdivisão de mapas

Definição 2.6 *Uma subdivisão de um mapa M é um mapa M' tal que $|M'| = |M|$ e cada elemento de M é uma união de elementos de M' .*

Veja figura 2.7.

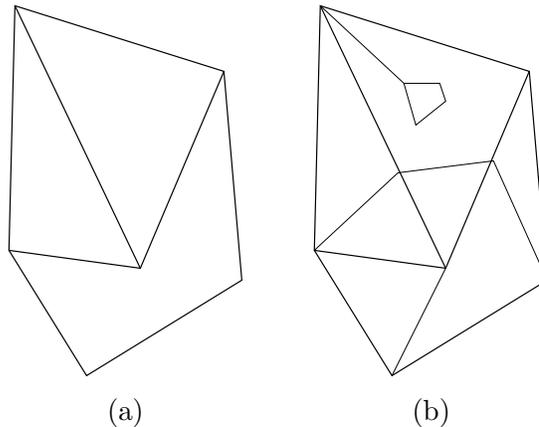


Figura 2.7: Um mapa (a) e uma subdivisão do mesmo (b).

2.4.1 Subdivisão baricêntrica

Apresentamos um esquema especial de subdivisão, chamado subdivisão baricêntrica, que pode ser aplicado a qualquer mapa. O mapa resultante de uma subdivisão baricêntrica é uma triangulação contendo a informação necessária para reconstruir a topologia do mapa original. Por esta razão, a subdivisão baricêntrica é muitas vezes utilizada na representação de mapas complexos, uma vez que a topologia de triangulações é mais muito mais simples do que mapas gerais.

A *subdivisão baricêntrica* de um n -mapa M é uma n -triangulação ΔM cuja topologia definimos recursivamente a seguir. A subdivisão baricêntrica do 0-esqueleto de M , $Esq_0(M)$, (o conjunto dos vértices) é o próprio $Esq_0(M)$. Suponha agora que conheçamos $\Delta Esq_{k-1}(M)$, para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. A subdivisão $\Delta Esq_k(M)$ contém todos os

elementos de $\Delta Esq_{k-1}(M)$ mais a subdivisão de cada k -elemento de M . Para cada k -elemento c de M , seja f a função de colagem de $\kappa\mathbb{B}^k$ sobre κc definida na seção 2.1.1. A imagem inversa de qualquer j -face b de c , com $j < k$, é um número finito de subconjuntos disjuntos de $\partial\mathbb{B}^k$, cada um destes homeomorfos a b por f . Para cada j -elemento t de $\Delta Esq_{k-1}(M)$ contido em ∂c e para cada componente t' de $f^{-1}(t)$, seja t^+ a união de todos os raios abertos que conectam o centro o de \mathbb{B}^k a pontos em t' . A subdivisão de c em $\Delta Esq_k(M)$ consiste nas imagens de tais conjuntos t^+ pela função f e no vértice $\{f(o)\}$, chamado de *baricentro de c* . Veja a figura 2.8.

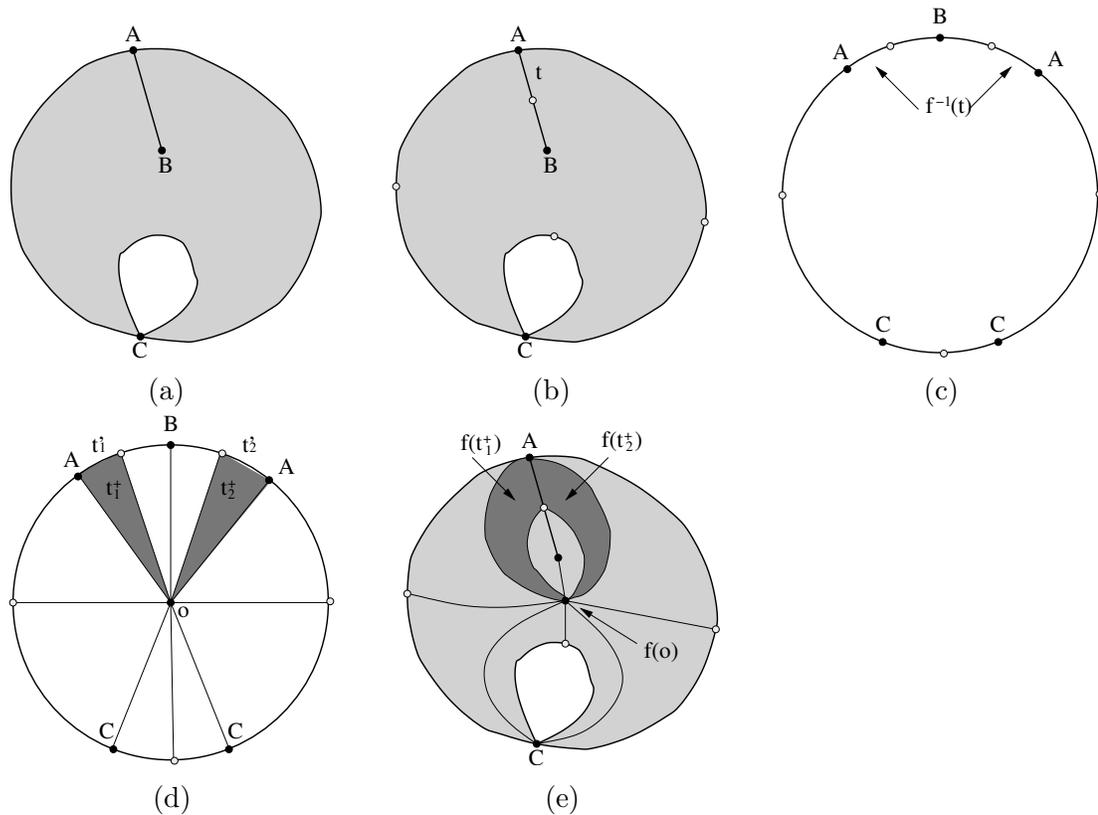


Figura 2.8: Subdivisão baricêntrica de um mapa: (a) Um 2-elemento de um mapa. (b) O mesmo elemento com a fronteira subdividida. (c) A subdivisão da fronteira de \mathbb{B}^2 . (d) A subdivisão correspondente de \mathbb{B}^2 . (e) A subdivisão baricêntrica do 2-elemento.

Tipos de vértices Observe que cada vértice de ΔM está contido em algum elemento de M . Dizemos que um vértice de ΔM é do *tipo k* se ele está contido num k -elemento de M . Note que os $j + 1$ vértices de qualquer j -elemento de ΔM têm tipos distintos entre si.

Vale notar também que, se ΔM é a subdivisão baricêntrica de um n -mapa M , podemos

obter cada k -elemento c de M , com baricentro $v \in \Delta M$, através da união de todos os elementos de ΔM incidentes em v e cujos vértices têm tipos pertencentes a $\{0, \dots, k\}$.

Capítulo 3

Gemas

As gemas surgiram nos trabalhos de Pezzana et al. [45, 46, 25, 26, 27] e Lins e Mandel [40, 37] como ferramenta teórica para representação de variedades. Em particular, Pezzana demonstrou que toda variedade n -dimensional admite uma triangulação cuja topologia pode ser codificada como uma gema. Nosso interesse principal, no entanto, é o uso de gemas como ferramenta prática de modelagem geométrica.

As estruturas de dados *cell-tuple* de Brisson [13] e *n-G-maps* de Lienhardt [35] são similares às gemas, e também permitem representar subdivisões baricêntricas de mapas em variedades com ou sem borda e em outros espaços topológicos trianguláveis.

Nesta dissertação, vamos interpretar as gemas de maneira mais geral (como triangulações gerais, ao invés de subdivisões baricêntricas de mapas). Em particular, as gemas que representam as estruturas *cell-tuple* e *n-G-maps* são subconjuntos próprios das gemas que consideramos neste trabalho.

3.1 Conceitos básicos

Nas definições a seguir, C é um subconjunto finito de \mathbb{N} e $n = |C| - 1$.

3.1.1 Triangulação colorida

Uma n -triangulação C -colorida (ou uma C -triangulação) é uma n -triangulação T cujos vértices são rotulados com os elementos do conjunto de cores C , de forma que para todo k -elemento c de T os $k + 1$ vértices de c têm cores distintas.

Seja c um k -elemento de uma C -triangulação T . Se $C' \subseteq C$ é o conjunto das cores dos vértices de c , dizemos que c é um C' -elemento de T . Cada face d de c tem um conjunto distinto de cores $C'' \subseteq C$; dizemos então que d é a C'' -face de c . Em particular, a \emptyset -face de c é o conjunto vazio, e a C' -face de c é o próprio c .

Isomorfismo de triangulações coloridas

Dizemos que duas triangulações C -coloridas T_1 e T_2 são *isomorfas* se existe um isomorfismo que preserva cores entre elas, isto é, se existe um isomorfismo $f : T_1 \rightarrow T_2$ tal que, para todo vértice v de T_1 , a cor de v é a mesma de $f(v)$.

3.1.2 Gemas como estruturas algébricas

Uma C -gema G é um par (V, ϕ) onde V é um conjunto finito de nós e ϕ é uma função que associa uma involução ϕ_i de V a cada $i \in C$. Se $|C| = n + 1$, dizemos também que G é uma n -gema.

Se v e w são nós de V e $\phi_i(v) = w$, dizemos que v e w são i -adjacentes. Neste caso, se $v \neq w$, dizemos que v é *fechado em i* ; se $v = w$, dizemos que v é *aberto em i* . Se todo nó de V é fechado em todo $i \in C$, dizemos que a gema é *fechada*, caso contrário, dizemos que ela é *aberta*.

A definição de gema acima é formalmente similar à definição dos n -G-maps de Lienhardt [35], exceto que as gemas atendem apenas ao primeiro dos axiomas de Lienhardt, " ϕ_i é uma involução para todo i ". O segundo axioma, " $\phi_i \phi_j$ é uma involução sempre que $j - i \geq 2$ ", é necessário somente para permitir que a estrutura de dados seja interpretada como a subdivisão baricêntrica de um mapa.

3.1.3 Gemas como grafos coloridos

Podemos interpretar uma C -gema (V, ϕ) como um grafo não dirigido com conjunto de vértices V e com arestas coloridas com as cores de C , de tal forma que existe uma aresta de cor i entre os nós v e $w \in V$ se e somente se v e w são i -adjacentes na gema. Esta interpretação se assemelha à definição de gemas usada por Lins [40], com a exceção que nossa definição permite grafos com laços. Veja a figura 3.1.

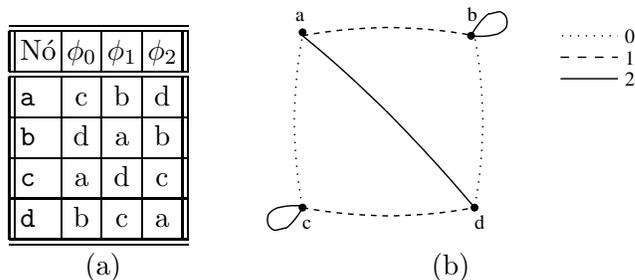


Figura 3.1: (a) Uma 2-gema com quatro nós. (b) O grafo colorido correspondente a esta gema. As linhas pontilhadas, tracejadas e contínuas correspondem a arestas de cor 0, 1 e 2, respectivamente, como indicado pela legenda.

Esta interpretação nos permite aplicar às gemas os conceitos da teoria dos grafos, como *passeio*, *caminho*, *conectividade*, etc.

D-conexidade

Um *D-passeio* em uma *C-gema*, para $D \subseteq C$, é um passeio com arestas coloridas com o conjunto D . Dizemos que dois nós são *D-conexos* se existe um *D-passeio* entre eles.

Isomorfismo entre gemas

Duas *C-gemas* $G = (V, \phi)$ e $G' = (V', \phi')$ são *isomorfas* sse existe uma bijeção ψ entre V e V' tal que, para cada $v \in V$ e cada $i \in C$, $\phi_i(v) = w$ se e somente se $\phi'_i(\psi(v)) = \psi(w)$. Em outras palavras, um isomorfismo entre gemas é um isomorfismo entre seus grafos que preserva a coloração das arestas.

Devido à restrição de coloração, um isomorfismo ψ entre as *C-gemas* conexas $G = (V, \phi)$ e $G' = (V', \phi')$ pode ser univocamente determinado por qualquer par de nós $v \in V$ e $v' = \psi(v)$: se $x \in V$ e $x = \phi_{i_1}(\phi_{i_2}(\dots\phi_{i_j}(v)\dots))$, para $i_1, i_2, \dots, i_j \in C$, então $\psi(x)$ é o nó dado por $\phi'_{i_1}(\phi'_{i_2}(\dots\phi'_{i_j}(v')\dots))$. Portanto, os demais pares $(u, \psi(u))$ do isomorfismo podem ser determinados por um algoritmo simples de percurso de grafos em tempo linear.

3.2 Gemas como triangulações

Toda *n-gema* pode ser interpretada como uma triangulação colorida, e determina completamente sua topologia. Informalmente, a gema é o dual de sua triangulação: cada nó representa um simplexo colorido e cada par de nós é *i*-adjacente sse os simplexos correspondentes compartilham a faceta oposta ao vértice *i*, de forma que os vértices de mesma cor são identificados. Veja as figuras 3.2 e 3.3.

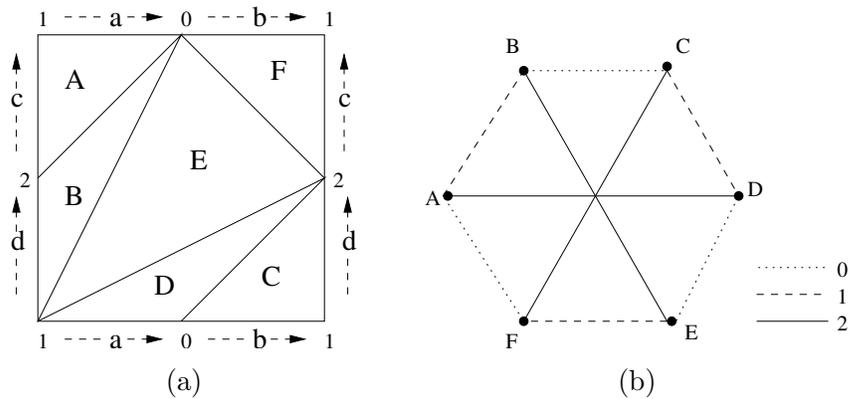


Figura 3.2: (a) Uma 2-triangulação colorida sobre o toro. (b) A gema correspondente.

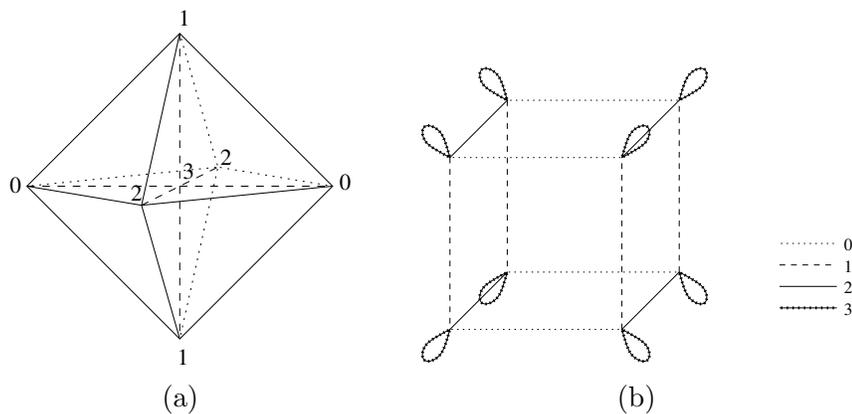


Figura 3.3: (a) Uma 3-triangulação colorida com borda. (b) A gema correspondente.

3.2.1 Triangulação canônica de uma gema

Formalmente, se $G = (V, \phi)$ é uma C -gema, com $|C| = n + 1$, sua *triangulação canônica* \mathcal{T}_G é obtida como segue. Seja \mathcal{S}_C o n -simplexo canônico, colorido com o conjunto C , de tal forma que o vértice x_i receba a i -ésima menor cor de C . Vamos denotar por $\mathcal{S}_{C:D}$ a D -face de \mathcal{S}_C , para qualquer $D \subseteq C$. Seja X o espaço topológico $V \times \mathcal{S}_C$, sendo V tomado com a topologia discreta, e seja $\hat{X} = \{\{v\} \times \mathcal{S}_{C:D} : v \in V, D \subseteq C\}$. Note que \hat{X} é uma triangulação C -colorida sobre o espaço X . Seja \sim uma relação em X tal que, para p_1 e $p_2 \in X$, $p_1 \sim p_2$ sse $p_1 = (v_1, q)$ e $p_2 = (v_2, q)$, onde $q \in \mathcal{S}_{C:D}$, para algum $D \subset C$, e v_1 e v_2 são nós i -adjacentes de V , para algum $i \in C \setminus D$. O fecho transitivo e reflexivo \approx de \sim é uma relação de equivalência. A triangulação canônica \mathcal{T}_G é a coleção de subconjuntos do espaço quociente X/\approx dada por $\bigcup_{c \in \hat{X}} \{[c]_{\approx}\}$, onde $[c]_{\approx}$ denota o conjunto das classe de equivalência de $c \subseteq X$ sob a relação \approx .

Teorema 3.1 *Se $G = (V, \phi)$ é uma C -gema, \mathcal{T}_G é uma C -triangulação.*

Prova: Seja γ a função de X para X/\approx dada por $\gamma(x) = [x]_{\approx}$. Vamos esboçar a prova de que γ é uma função de colagem de \hat{X} e, conseqüentemente, que \mathcal{T}_G é um mapa. O espaço X/\approx é compacto e a função γ é, por sua definição, contínua e sobrejetora. Por construção, se p_1 e p_2 são pontos do fecho de um elemento c de \hat{X} , $p_1 \approx p_2$ sse $p_1 = p_2$. Daí prova-se que a restrição de γ a κc , e também a c , é um homeomorfismo. Também por definição da relação \approx , se p_1 e p_2 são pontos de X contidos nos elementos c_1 e c_2 de \hat{X} , respectivamente, $p_1 \approx p_2$ sse $[c_1]_{\approx} = [c_2]_{\approx}$. Em outras palavras, se $\gamma(p_1) = \gamma(p_2)$, então $\gamma[c_1] = \gamma[c_2]$. Finalmente, se os D -elementos c_1 e c_2 de \hat{X} são equivalentes por \approx — isto é, $[c_1]_{\approx} = [c_2]_{\approx}$ — então, para cada $E \subseteq D$, as E -faces de c_1 e c_2 são equivalentes por \approx . Com isso prova-se que para todo c de \hat{X} , $\kappa\gamma[c] = \gamma[\kappa c]$.

Para mostrar que o mapa \mathcal{T}_G é uma C -triangulação basta lembrar que a restrição de γ ao fecho de cada C -elemento c de \hat{X} é um homeomorfismo levando D -faces de c em D -faces de $\gamma[c]$, para todo $D \subseteq C$. \square

Pela definição de \approx , para cada C -elemento c de \mathcal{T}_G existe um único C -elemento b de \hat{X} tal que $[b]_{\approx} = c$. Logo, existe uma bijeção τ entre V e os C -elementos de \mathcal{T}_G dada por $\tau(v) = [\{v\} \times \mathcal{S}_{\langle C \rangle}]_{\approx}$.

Teorema 3.2 *Se $G = (V, \phi)$ é uma C -gema, para quaisquer v e $w \in V$ e qualquer $D \subset C$, os elementos $\tau(v)$ e $\tau(w)$ de \mathcal{T}_G compartilham sua $(C \setminus D)$ -face sse v e w são D -conexos em G .*

Prova: Para provar esta afirmação, precisamos analisar a relação \approx no espaço $X = V \times \mathcal{S}_C$ utilizado na construção da triangulação canônica \mathcal{T}_G . Se $p = (v, q)$ e $p' = (v', q')$ são pontos de X , $p \approx p'$ sse existe uma sequência (w_1, \dots, w_k) de nós de V , com $k \geq 1$, tal que $v = w_1$, $v' = w_k$ e, para $1 \leq i \leq k - 1$, $(w_i, q_i) \sim (w_{i+1}, q_{i+1})$. Por definição, $(w_i, q_i) \sim (w_{i+1}, q_{i+1})$ sse q_i e q_{i+1} são o mesmo ponto de $\mathcal{S}_{C:D}$, para algum $D \subset C$, e w_i e w_{i+1} são j -adjacentes para algum $j \in C \setminus D$. Portanto, podemos dizer que $p \approx p'$ sse q e q' são o mesmo ponto de $\mathcal{S}_{C:D}$, para algum $D \subseteq C$, e v e v' são $(C \setminus D)$ -conexos.

Sendo assim, se v e w são nós D -conexos de V , com $D \subset C$, para cada ponto q de $\mathcal{S}_{\langle C \setminus D \rangle}$, $(v, q) \approx (w, q)$ e, conseqüentemente, $\tau(v)$ e $\tau(w)$ compartilham sua $(C \setminus D)$ -face.

Por outro lado, considere que os C -elementos $\tau(v)$ e $\tau(w)$ de \mathcal{T}_G compartilham sua $(C \setminus D)$ -face, para $D \subset C$. Esta face comum tem dimensão ≥ 0 , e logo contém ao menos um ponto p . Este ponto é uma classe de equivalência contendo os pontos (v, q) e (w, q) de X , onde $q \in \mathcal{S}_{\langle C \setminus D \rangle}$, o que implica que v e w são D -conexos. \square

3.2.2 Gemas representando triangulações

Dizemos que uma gema G representa uma triangulação T se T é isomorfa a \mathcal{T}_G . Podemos afirmar imediatamente que toda gema representa alguma triangulação (em particular, sua triangulação canônica) e que todas triangulações representadas por uma mesma gema são isomorfas.

Como as triangulações são mapas simples, sua topologia pode ser completamente especificada pelas relações de incidência entre os elementos. O seguinte corolário do teorema 3.2 nos fornece, portanto, outra caracterização das triangulações representadas por uma gema.

Corolário 3.1 *Uma C -gema G representa uma C -triangulação T se e somente se existe uma bijeção δ de V para os C -elementos de T tal que, para quaisquer nós v e $w \in V$*

e qualquer $D \subset C$, os C -elementos $\delta(v)$ e $\delta(w)$ compartilham sua D -face sse v e w são $(C \setminus D)$ -conexos em G .

Teorema 3.3 *Sejam $G = (V, \phi)$ e $G' = (V', \phi')$ C -gemas representando as C -triangulações T e T' , respectivamente, sendo $|C| > 1$. As gemas G e G' são isomorfas se e somente se as triangulações T e T' são isomorfas.*

Prova: Sejam δ e δ' as bijeções de V e V' para os C -elementos de T e T' , respectivamente, dadas pelo corolário 3.1.

Se G e G' são isomorfas, existe uma bijeção β de V para V' tal que os nós v e w de V são D -conexos, para $D \subseteq C$, sse $\beta(v)$ e $\beta(w)$ são D -conexos. A composição $\delta'\beta$ é uma bijeção de V para os C -elementos de T' tal que, para quaisquer v e $w \in V$ e qualquer $D \subset C$, os C -elementos $\delta'\beta(v)$ e $\delta'\beta(w)$ de T compartilham sua $(C \setminus D)$ -face sse v e w são D -conexos em G . Pelo corolário 3.1, G representa T' e, conseqüentemente, T e T' são isomorfos.

Por outro lado, se T e T' são isomorfos, podemos dizer que G representa T' . Neste caso, existe uma bijeção δ'' de V para os C -elementos de T' tal que, para quaisquer v e $w \in V$ e qualquer $D \subset C$, os C -elementos $\delta''(v)$ e $\delta''(w)$ de T' compartilham sua $(C \setminus D)$ -face sse v e w são D -conexos em G . Logo, se $|C| > 1$, para quaisquer v e $w \in V$ e qualquer $i \in C$, os C -elementos $\delta''(v)$ e $\delta''(w)$ de T' compartilham sua $(C \setminus \{i\})$ -face sse v e w são i -adjacentes em G . Portanto, se $|C| > 1$, a composição $\delta''^{-1}\delta' : V' \rightarrow V$ é um isomorfismo de G' para G . \square

3.3 Resíduos de uma gema

Além de codificar os C -elementos de uma C -triangulação e suas relações de adjacência, uma C -gema contém também informação sobre os elementos de menor dimensão e suas relações de incidência. Para descrever como obter esta informação, precisamos definir o conceito de *resíduo* de uma gema.

3.3.1 Definição de resíduo

Seja $G = (V, \phi)$ uma C -gema, e seja $D \subseteq C$. Um D -resíduo de G é uma D -gema G' que é um componente conexo de $(V, \phi|_D)$, onde $\phi|_D$ é a restrição de ϕ ao conjunto de cores D . Se $|D| = k + 1$, dizemos também que G' é um k -resíduo. Veja a figura 3.4.

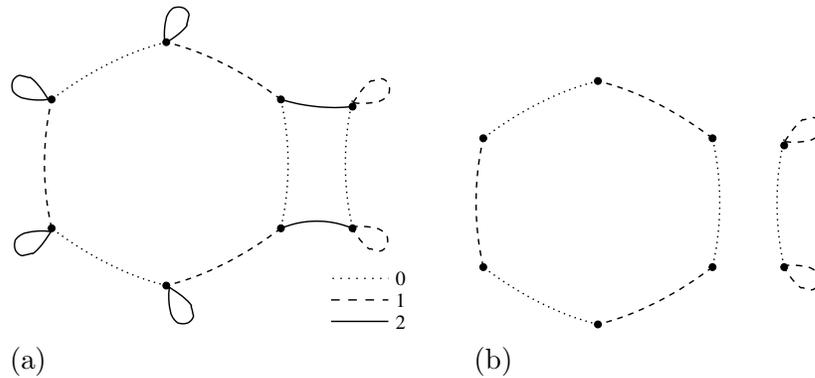


Figura 3.4: (a) Uma $\{0, 1, 2\}$ -gema G . (b) Os $\{0, 1\}$ -resíduos de G .

Dizemos que um D -resíduo de G é *próprio* se $D \neq C$, isto é, se ele não é um componente conexo de G . Vamos denotar por \hat{G} o conjunto de todos os resíduos de G , e por \hat{G}^- o conjunto dos resíduos próprios de G .

3.3.2 Relação entre resíduos e elementos da triangulação

Seja $G = (V, \phi)$ uma C -gema conexa. A bijeção τ de V para os C -elementos de \mathcal{T}_G pode ser estendida para uma função $\tau : \hat{G} \rightarrow \mathcal{T}_G$ da seguinte forma: para qualquer D -resíduo $R = (V', \phi')$ de G , $\tau(R)$ é a $(C \setminus D)$ -face do C -elemento $\tau(v)$, para qualquer $v \in V'$. Esta definição é consistente, já que, pelo teorema 3.2, para quaisquer nós v e w contidos no mesmo D -resíduo, $\tau(v)$ e $\tau(w)$ compartilham sua $(C \setminus D)$ -face. Veja a figura 3.5.

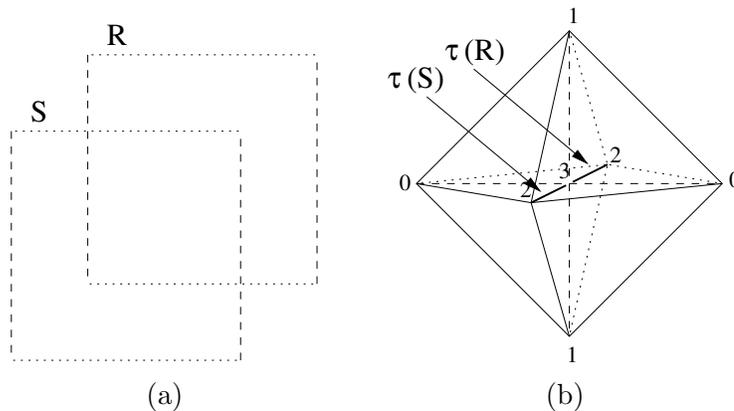


Figura 3.5: (a) Os $\{0, 1\}$ -resíduos da gema dada na figura 3.3(b). (b) As arestas $\{2, 3\}$ -coloridas que correspondem a estes resíduos.

Note que esta extensão de τ é consistente com a definição anterior desta função, isto é, todo \emptyset -resíduo de G é um único nó, que é mapeado para o mesmo C -elemento de \mathcal{T}_G pelas duas definições.

Lema 3.1 *Se $G = (V, \phi)$ é uma C -gema conexa, a função $\tau : \hat{G} \rightarrow \mathcal{T}_G$ é uma bijeção.*

Prova: Vamos primeiro mostrar que para cada D -elemento $a \in \mathcal{T}_G$, sendo $D \subseteq C$, existe um resíduo R de G tal que $\tau(R) = a$. Seja b um C -elemento de \mathcal{T}_G incidente em a , e seja $v \in V$ tal que $\tau(v) = b$. Então, se R é o $(C \setminus D)$ -resíduo de G contendo v , $\tau(R) = a$.

Agora vamos provar que, para quaisquer resíduos distintos R e $S \in \hat{G}$, $\tau(R) \neq \tau(S)$. Seja R um D -resíduo e S um D' -resíduo de G , com D e $D' \subseteq C$ e $R \neq S$. Se $D \neq D'$, $\tau(R)$ e $\tau(S)$ são certamente distintos, sendo assim vamos considerar $D = D'$. Note que, como G é conexa e $R \neq S$, $D \neq C$. Se v e w são nós de R e S respectivamente, eles não são D -conexos, logo, pelo teorema 3.2, $\tau(v)$ e $\tau(w)$ não compartilham sua $(C \setminus D)$ -face. Sendo assim, $\tau(R) \neq \tau(S)$. \square

Lema 3.2 *Se R e S são resíduos de uma C -gema conexa G , $\tau(R)$ é face de $\tau(S)$ se e somente se S é um resíduo de R .*

Prova: Seja R um D -resíduo de G e S um E -resíduo de G , sendo D e $E \subseteq C$.

Primeiramente, suponha que S é um resíduo de R , o que implica $E \subseteq D$. Se v é um nó de S , ele também é um nó de R . Sendo assim, $\tau(S)$ é a $(C \setminus E)$ -face de $\tau(v)$ e $\tau(R)$ é a $(C \setminus D)$ -face do mesmo C -elemento $\tau(v)$. Como $(C \setminus E) \supseteq (C \setminus D)$, é fácil perceber que $\tau(R)$ é face de $\tau(S)$.

Agora suponha que $\tau(R)$ é uma face de $\tau(S)$, o que implica $(C \setminus E) \supseteq (C \setminus D)$, i.e., $E \subseteq D$. Como todo C -elemento incidente em $\tau(S)$ também incide em $\tau(R)$, todo nó de S é também um nó de R . Portanto, S é um E -resíduo de R . \square

Note que, se G é uma C -gema desconexa, a função estendida $\tau : \hat{G} \rightarrow \mathcal{T}_G$ não é uma bijeção, já que todos os C -resíduos de G são mapeados para o único \emptyset -elemento de \mathcal{T}_G , que é o conjunto vazio. Porém, se restringirmos o domínio desta função para o conjunto \hat{G}^- dos resíduos próprios de G , obtemos uma bijeção. O lema abaixo é uma variante dos lemas 3.1 e 3.2 que se aplica a gemas não necessariamente conexas.

Lema 3.3 *Se $G = (V, \phi)$ é uma C -gema, a função $\tau : \hat{G}^- \rightarrow \mathcal{T}_G \setminus \{\emptyset\}$ é uma bijeção tal que, para quaisquer resíduos próprios R e S de G , $\tau(R)$ é face de $\tau(S)$ se e somente se S é um resíduo de R .*

O teorema abaixo é uma consequência direta do lema 3.3 e nos fornece outra caracterização das triangulações representadas por uma gema dada.

Teorema 3.4 *Uma C -gema G representa uma C -triangulação T se e somente se existe uma bijeção δ de \hat{G}^- para $T \setminus \{\emptyset\}$ tal que, para quaisquer R e S de \hat{G}^- , $\delta(R)$ é face de $\delta(S)$ se e somente se S é um resíduo de R .*

3.3.3 Órbita de um elemento

Seja T uma C -triangulação representada pela C -gema G , e seja c um D -elemento não vazio de T . A órbita de c , denotada por $Orb(c)$, é a triangulação canônica \mathcal{T}_R do $(C \setminus D)$ -resíduo R correspondente a c .

Note que $Orb(c)$ é uma $(C \setminus D)$ -triangulação, e que existe uma bijeção f que, para $D \subseteq E \subseteq C$, mapeia os E -elementos de T incidentes em c nos $(E \setminus D)$ -elementos de $Orb(c)$, preservando as relações de incidência, isto é, se a e b são elementos de T incidentes em c , a incide em b se e somente se $f(a)$ incide em $f(b)$.

Veja a figura 3.6.

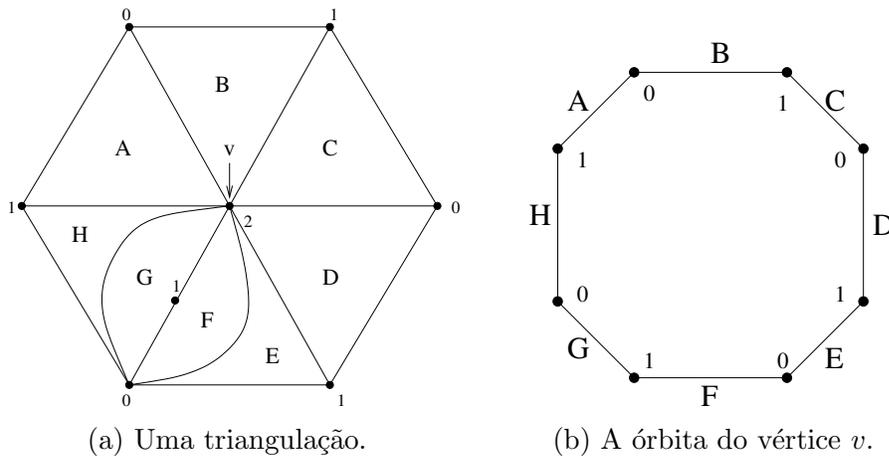


Figura 3.6: (a) Uma 2-triangulação colorida e um vértice v . (b) A órbita de v . Note que cada triângulo incidente em v corresponde a uma aresta de $Orb(v)$, e cada aresta incidente a v corresponde a um vértice de $Orb(v)$.

3.4 Produto de gemas

3.4.1 Definição formal

Sejam G uma C -gema e H uma D -gema, sendo $C \cap D = \emptyset$. O produto $G \times H$ é uma $(C \cup D)$ -gema tal que:

- (i) Para cada par de nós a de G e b de H , existe um nó (a, b) em $G \times H$.
- (ii) Para cada par de nós (a, b) e (c, d) de $G \times H$, e cada $i \in C$, $\phi_i(a, b) = (c, d)$ se e somente se $b = d$ e $\phi_i(a) = c$. Simetricamente, para cada $j \in D$, $\phi_j(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $\phi_j(b) = d$.

Este conceito é uma extensão natural do produto cartesiano de grafos [31] a grafos coloridos. A seguir relacionamos o produto de gemas e a junção de triangulações.

3.4.2 Junção de triangulações coloridas

Se M e N são triangulações coloridas com os conjuntos de cores disjuntos C e D , respectivamente, a *junção* de M e N , denotada $M \star N$, é definida da mesma forma que a junção das triangulações não coloridas correspondentes, com a exceção que cada vértice $(v, \emptyset)^*$ de $M \star N$ recebe a cor do vértice v de M , e cada vértice $(\emptyset, w)^*$ de $M \star N$ recebe a cor do vértice w de N . Sendo assim, $M \star N$ é uma $(C \cup D)$ -triangulação.

Teorema 3.5 *Se G e H são gemas conexas de cores C e D , respectivamente, sendo $C \cap D = \emptyset$, as $(C \cup D)$ -triangulações $\mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H$ e $\mathcal{T}_{G \times H}$ são isomorfas.*

Prova: Vamos mostrar que existe uma bijeção entre os elementos de $\mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H$ e $\mathcal{T}_{G \times H}$ que preserva as relações de incidência. Seja $f : \mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H \rightarrow \mathcal{T}_{G \times H}$ a função que leva o elemento $(a, b)^*$ de $\mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H$ no elemento $\tau(\tau^{-1}(a) \times \tau^{-1}(b))$ de $\mathcal{T}_{G \times H}$. Pelo lema 3.1, τ é uma bijeção, logo f também é uma bijeção.

Sejam $(a, b)^*$ e $(c, d)^*$ dois elementos de $\mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H$. Vamos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $(a, b)^*$ incide em $(c, d)^*$;
- (b) a incide em c e b incide em d ;
- (c) $\tau^{-1}(a)$ é resíduo de $\tau^{-1}(c)$ e $\tau^{-1}(b)$ é resíduo de $\tau^{-1}(d)$;
- (d) $\tau^{-1}(a) \times \tau^{-1}(b)$ é resíduo de $\tau^{-1}(c) \times \tau^{-1}(d)$;
- (e) $\tau(\tau^{-1}(a) \times \tau^{-1}(b))$ é face de $\tau(\tau^{-1}(c) \times \tau^{-1}(d))$.

Pelo lema 2.2, (a) \Leftrightarrow (b). As equivalências (b) \Leftrightarrow (c) e (d) \Leftrightarrow (e) seguem do lema 3.2. Já a equivalência (c) \Leftrightarrow (d) pode ser provada facilmente a partir da definição de produto de gemas.

Sendo assim, a bijeção f entre $\mathcal{T}_G \star \mathcal{T}_H$ e $\mathcal{T}_{G \times H}$ preserva as relações de incidência. \square

3.4.3 Gemas aumentadas

Se G é uma C -gema conexa, e $i \in \mathbb{N} \setminus C$, a *gema i -aumentada* de G é a $(C \cup \{i\})$ -gema dada pelo produto de $G \times I$, onde I é uma $\{i\}$ -gema contendo um único nó. Note que a triangulação canônica da gema I consiste de um único vértice v de cor i . Portanto, pelo teorema 3.5, a triangulação canônica da gema aumentada $G \times I$ é a junção de \mathcal{T}_G com $\{v\}$ — isto é, o cone de \mathcal{T}_G .

Em outras palavras, aumentar uma gema com uma cor equivale a acrescentar um vértice à triangulação canônica e estender radialmente os elementos desta triangulação ao novo vértice. Veja a figura 3.7.

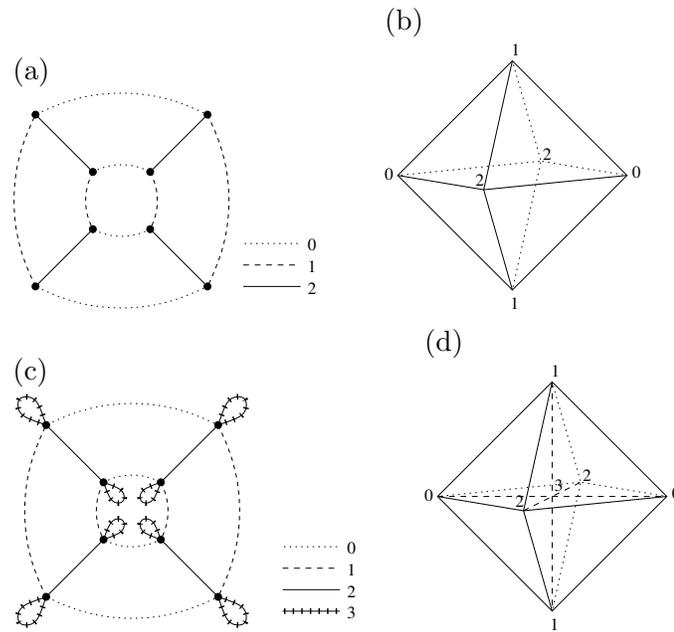


Figura 3.7: (a) Uma 2-gema G . (b) Uma triangulação representada por G . (c) Uma gema aumentada de G . (d) Uma 3-triangulação representada pela gema aumentada.

3.5 Triangulações representáveis pelas gemas

Nesta seção vamos determinar a classe de triangulações coloridas que são representáveis por gemas. Uma triangulação pertencente a esta classe é chamada de *triangulação coesa*. A característica essencial de uma n -triangulação coesa é que sua topologia pode ser inteiramente codificada pelas relações de adjacência dos n -elementos através de $(n - 1)$ -elementos. Informalmente, ela não pode ser desconectada (localmente) pela remoção de um elemento de dimensão $\leq n - 2$.

3.5.1 Triangulação coesa

Uma n -*triangulação coesa* é uma n -triangulação colorida M em que todo $(n - 1)$ -elemento é face de no máximo dois n -elementos, e para todo k -elemento a , com $0 \leq k \leq n - 2$, $St(a) \setminus a$ é conexo.

Os teoremas 3.6 e 3.7 a seguir expõem a relação entre gemas e triangulações coesas.

Teorema 3.6 *Toda triangulação coesa é representada por uma gema.*

Teorema 3.7 *Toda triangulação representada por uma gema é coesa.*

A fim de provarmos os teoremas 3.6 e 3.7 precisamos dos conceitos de k -estrela e k -cadeia.

Definição 3.1 *Seja T uma n -triangulação e seja a um j -elemento de T . A k -estrela de a , para qualquer $j \leq k \leq n$, é a união dos elementos de dimensão maior ou igual a k que incidem em a , e é denotada por $St_k(a)$. Note que $St_k(a)$ é a união das estrelas de todos os k -elementos incidentes em a , e que, para $j < n$, $St_{j+1}(a) = St(a) \setminus a$.*

Definição 3.2 *Seja T uma n -triangulação e seja a um j -elemento de T . Uma k -cadeia de a , para $j \leq k \leq n$, é uma sequência finita de k -elementos incidentes em a na qual dois k -elementos consecutivos têm estrelas com intersecção não vazia.*

O seguinte resultado é encontrado em textos de topologia geral [42].

Lema 3.4 *Se $\{A_1, A_2, \dots\}$ é uma coleção de subespaços conexos de um espaço topológico X tal que $A_i \cap A_{i+1}$ é não vazio para todo i , então $\bigcup A_i$ também é conexo.*

Lema 3.5 *Seja T uma n -triangulação contendo um j -elemento a e seja $k \in \{j, j+1, \dots, n\}$. Se a tem uma k -cadeia entre qualquer par de k -elementos incidentes em a , então a tem uma k -cadeia contendo todos os k -elementos incidentes em a .*

Prova: Se $l = (b_1, b_2, \dots, b_z)$ é uma k -cadeia de a , e c é um k -elemento incidente em a que não ocorre em l , basta tomarmos uma k -cadeia entre b_z e c e a concatenarmos a l para obter uma k -cadeia contendo l e c . Por indução no número de k -elementos incidentes em a , pode-se obter uma k -cadeia contendo todos os k -elementos incidentes em a . \square

Lema 3.6 *Seja T uma n -triangulação contendo um j -elemento a e seja $k \in \{j, j+1, \dots, n\}$. A k -estrela de a é conexa se e somente se para cada par de k -elementos b e c incidentes em a , existe uma k -cadeia de a entre b e c .*

Prova: Seja \sim uma relação binária definida no conjunto de k -elementos incidentes em a tal que $b \sim c$ se e somente se $St(b) \cap St(c) \neq \emptyset$. A relação \sim é reflexiva e simétrica, logo, seu fecho transitivo \approx é uma relação de equivalência. Se existe um par de k -elementos incidentes em a tal que não existe uma k -cadeia de a os conectando, então \approx define mais de uma classe de equivalência. Sendo assim, $H = \bigcup_{b \sim e} St(e)$ e $St_k(a) \setminus H$ são dois conjuntos não vazios abertos e disjuntos que particionam $St_k(a)$, e portanto $St_k(a)$ é desconexo.

Suponha, por outro lado, que para todo par de k -elementos incidentes em a existe uma k -cadeia de a os conectando. Seja l a k -cadeia de a dada pelo lema 3.5. Uma vez que a estrela de qualquer k -elemento em l é conexa, pelo lema 3.4, a união de todas estas estrelas, que é $St_k(a)$, é conexa. \square

Corolário 3.2 *Seja T uma n -triangulação e seja a um elemento de T . A $(n-1)$ -estrela de a é conexa se e somente se, para qualquer par de n -elementos b e c incidentes em a , existe uma sequência de n -elementos entre b e c na qual todo par de n -elementos consecutivos compartilha uma $(n-1)$ -face incidente em a .*

Prova: Isto segue do fato que tal sequência de n -elementos pode ser obtida de uma $(n-1)$ -cadeia de a , e vice-versa. \square

Lema 3.7 *Se T é uma n -triangulação na qual, para todo $k \in \{0, \dots, n-2\}$, cada k -elemento tem uma $(k+1)$ -estrela conexa, então a $(n-1)$ -estrela de tais elementos também é conexa.*

Prova: Seja a um k -elemento de T , sendo $0 \leq k < n-1$. Vamos provar por indução que a j -estrela de a , para todo $j \in \{k+1, k+2, \dots, n-2, n-1\}$, é conexa. O caso básico é que a $(k+1)$ -estrela de a é conexa, o que é garantido pela asserção do lema. Suponha então que, para algum $j \in \{k+1, k+2, \dots, n-2\}$, $St_j(a)$ é conexa. Devemos então provar que $St_{j+1}(a)$ é conexa.

Seja l uma j -cadeia contendo todos os j -elementos incidentes em a . Como as $(j+1)$ -estrelas dos elementos em l são conexas, pelo lema 3.4, o conjunto $\bigcup_{b \in l} St_{j+1}(b)$, que equivale a $St_{j+1}(a)$, é conexo. \square

Prova do teorema 3.6

Seja T uma C -triangulação coesa. Vamos construir uma C -gema $G = (V, \phi)$ que representa T . Definimos primeiramente V como o conjunto dos C -elementos de T . Para cada $i \in C$ definimos ϕ_i como uma involução de V tal que $\phi_i(a) = b$, para a e $b \in V$, se e somente se (i) a e b são C -elementos distintos compartilhando sua $(C \setminus \{i\})$ -face, ou (ii) a e b são o mesmo C -elemento cuja $(C \setminus \{i\})$ -face é face de apenas um C -elemento. Esta definição é consistente, já que todo $(n-1)$ -elemento de T é face de um ou dois n -elementos.

Vamos agora provar que G representa T . A bijeção δ entre V e os C -elementos de T é a própria identidade. Precisamos mostrar que para quaisquer nós v e w distintos de V , $\delta(v)$ e $\delta(w)$ compartilham sua D -face, para $\emptyset \subset D \subset C$, se e somente se existe um $(C \setminus D)$ -passeio entre v e w em G .

Seja c uma D -face compartilhada por $\delta(v)$ e $\delta(w)$, para $\emptyset \subset D \subset C$. Se $\dim(c) = n-1$, $St_{n-1}(c) = St(c)$, que é conexa; se $\dim(c) < n-1$, o lema 3.7 garante que $St_{n-1}(c)$ é conexa. Então, pelo lema 3.2, existe uma sequência de C -elementos contendo c , entre $\delta(v)$ e $\delta(w)$, na qual cada par de C -elementos consecutivos compartilha uma $(n-1)$ -face contendo c . Esta sequência fornece um $(C \setminus D)$ -passeio entre v e w em G .

Por outro lado, se existe um $(C \setminus D)$ -passeio entre os nós v e w em G , para cada par de nós x e y consecutivo neste passeio, $\delta(x)$ e $\delta(y)$ compartilham sua D -face, logo v e w também compartilham sua D -face. \square

Prova do teorema 3.7

Seja G uma C -gema e seja T uma C -triangulação representada por G .

Primeiro mostramos que todo $(n - 1)$ -elemento de T é face de no máximo dois n -elementos. Todo $(C \setminus \{i\})$ -elemento c de T , para qualquer $i \in C$, é face de um C -elemento $\delta(v)$, sendo v um nó de G . Se $\phi_i(v) = v$, c é face de apenas um C -elemento, caso contrário, c é face de dois C -elementos.

Agora provamos que a $(n - 1)$ -estrela de qualquer k -elemento a de T , para $0 \leq k \leq d - 2$, é conexa, i.e., $St(a) \setminus a$ é conexo. Seja a um D -elemento de T , sendo $D \subset C$ e $|D| \leq |C| - 2$, e seja R o $(C \setminus D)$ -resíduo de G correspondente a a . O resíduo R é conexo, logo existe um $(C \setminus D)$ -passeio entre qualquer par de nós em R . Estes passeios fornecem a seqüências de n -simplexos necessárias pelo corolário 3.2 para garantir a conexidade de $St_{d-1}(a)$. \square

3.5.2 Triangulações sobre variedades e não-variedades

É fácil perceber que toda triangulação colorida sobre uma variedade compacta com ou sem borda é uma triangulação coesa e, conseqüentemente, é representada por uma gema. Mais especificamente, toda triangulação colorida sobre uma variedade compacta sem borda (resp. com borda) é representada por uma gema fechada (resp. aberta).

Há, entretanto, triangulações coesas cujos espaços subjacentes não são variedades. Se tomarmos, por exemplo, uma 2-gema representando uma triangulação sobre um toro e a aumentarmos com uma cor, obteremos o cone do toro, que não é uma variedade tridimensional. Veja a figura 3.8.

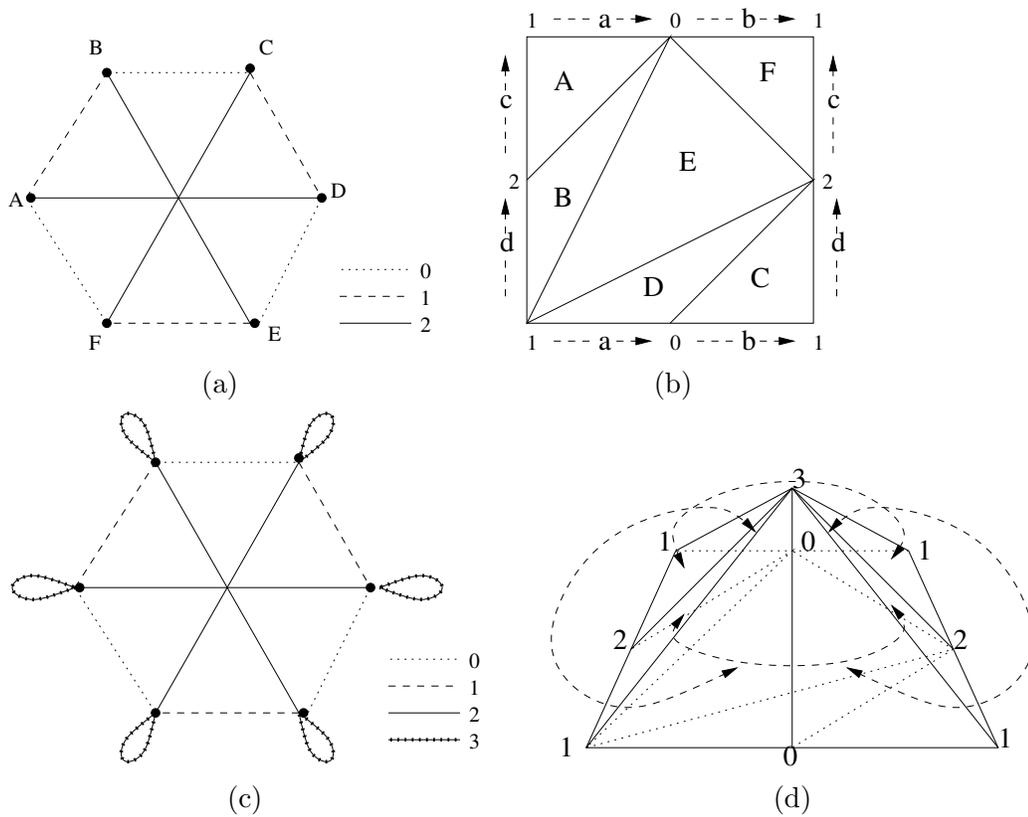


Figura 3.8: (a) Uma 2-gema G . (b) Uma triangulação colorida sobre o toro, representada por G . (c) A gema G' , que é a gema G aumentada com a cor 3. (d) Uma triangulação sobre o cone do toro, representada por G' . Entende-se aqui que as facetas dos tetraedros estão coladas conforme indicado pelas setas tracejadas.

Capítulo 4

A estrutura de dados gema

Em uma n -triangulação arbitrária, existem $n!$ formas distintas de se colar uma faceta específica de um n -elemento a uma faceta específica de outro n -elemento. Portanto, em estruturas de dados usadas para codificar a topologia de n -triangulações genéricas, é necessário armazenar $\lceil \log_2(d!) \rceil$ bits, para cada par de n -elementos adjacentes, a fim de codificar esta informação [30, 20]. Outra alternativa é recomputar esta informação a cada passo, quando a estrutura é percorrida [34]. Já em uma triangulação colorida, a restrição sobre a coloração dos vértices remove a necessidade desta informação, uma vez que dois elementos podem compartilhar uma faceta específica apenas de uma forma. A *estrutura de dados gema* faz uso desta restrição para simplificar significativamente o repertório de operadores topológicos elementares.

4.1 A estrutura

Nossa estrutura de dados representa uma C -gema, para $C = \{0, 1, \dots, n\}$, onde n é uma constante pré-definida. Os registros desta estrutura correspondem aos nós da gema. Cada registro r contém $n + 1$ ponteiros `r.adj[0..n]` para outros registros, representando as funções ϕ_0, \dots, ϕ_d . Cada registro r pode também conter informações não topológicas específicas da aplicação, denotadas por `data(r)` (veja a figura 4.1). No que segue, de modo geral, usaremos $\phi_i(r)$ como sinônimo de `r.adj[i]`, e não faremos distinção entre um registro e um ponteiro para esse registro.

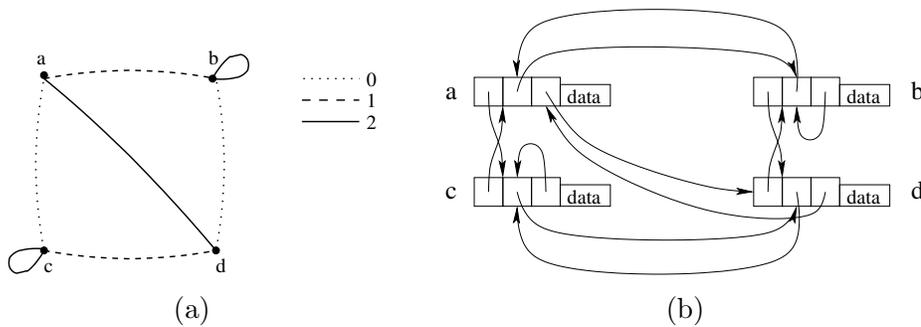


Figura 4.1: (a) Uma 2-gema dada como um grafo colorido (b) os registros da estrutura de dados gema.

A única restrição nesta estrutura é que, se o ponteiro i do registro r aponta para o registro r' , então o ponteiro i de r' aponta para r .

4.1.1 Representando resíduos

Se temos a estrutura de dados de uma C -gema, para $C = \{0, 1, \dots, n\}$, qualquer resíduo desta gema pode ser representado pelo par (r, D) , onde r é um dos registros do resíduo e D é o seu conjunto de cores. Vamos denotar por $\mathcal{G}(r, D)$ a D -gema contendo o registro r .

4.1.2 Limitações

O fato que gemas podem representar apenas triangulações coloridas é uma grande restrição. Tome por exemplo uma 1-triangulação consistindo num ciclo de arestas intercaladas por vértices. Esta triangulação é colorível somente se o número de vértices é par. Já no caso bidimensional, se a estrela de algum vértice contém um ciclo com um número ímpar de triângulos, ela não pode ser colorida.

Por esta razão, gemas não podem ser usadas em problemas que requerem triangulações *específicas*, e.g. construir a triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos.

4.1.3 Aplicações

Apesar de sua restrição a triangulações coloridas, as gemas são adequadas a muitas aplicações. Uma delas é a representação da divisão baricêntrica de mapas gerais, que exploramos no capítulo 5. No capítulo 6 utilizamos esta abordagem em um algoritmo para construção do casco convexo de um conjunto de pontos no \mathbb{R}^n .

Gemas podem também ser utilizadas como triangulações adaptativas, por exemplo, para construir malhas triangulares que aproximam superfícies. Note que não importa se tal malha é uma triangulação colorida ou não, contanto que ela seja uma boa aproximação para a superfície. Este tipo de aplicação é ilustrado no capítulo 8.

4.2 Operações básicas de manipulação

Introduzimos três operações básicas para construir e manipular qualquer gema.

MakeNode(): cria um novo registro r tal que $\phi_i(r) = r$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Esta operação pode ser interpretada como a criação de um n -elemento a que não compartilha suas faces com nenhum outro n -elemento.

DeleteNode(v): É a operação inversa de **MakeNode**, que toma um registro v com $\phi_i(v) = v$ para todo $i \in \{0, \dots, d\}$, e libera o espaço de armazenamento ocupado.

Swap(v, w, i): onde v e w são registros e $i \in \{0, \dots, n\}$. Esta operação consiste simplesmente em trocar os valores dos ponteiros $\phi_i(v)$ e $\phi_i(w)$ entre si.

Note que esta operação é sua própria inversa, e se $v = w$ ela não tem efeito.

Teorema 4.1 *Se $\{\phi_i(v)\} \cup \{\phi_i(w)\} = \{v\} \cup \{w\}$, a operação **Swap**(v, w, i) preserva a consistência da gema.*

Prova: Precisamos mostrar que, após a aplicação do **Swap**, para todo nó x e toda cor i da gema, $\phi_i(\phi_i(x)) = x$.

Note que a única modificação realizada por este **Swap** ocorre nos apontadores i -coloridos de v e w . Se $\{\phi_i(v)\} \cup \{\phi_i(w)\} = \{v\} \cup \{w\}$, então podemos afirmar (i) $\phi_i(v) = v$ e $\phi_i(w) = w$, ou (ii) $\phi_i(v) = w$ e $\phi_i(w) = v$. No primeiro caso, **Swap** executa $\phi_i(v) \leftarrow w$ e $\phi_i(w) \leftarrow v$; no segundo caso, **Swap** executa $\phi_i(v) \leftarrow v$ e $\phi_i(w) \leftarrow w$.

Em ambos os casos, temos $\phi_i(\phi_i(v)) = v$ e $\phi_i(\phi_i(w)) = w$ após a aplicação de **Swap**, portanto, a consistência da gema é preservada. \square

Dizemos que uma chamada do **Swap** é *válida* se ela atende à pré-condição dada no teorema acima, mantendo a consistência da gema. O efeito de uma chamada válida de **Swap**(v, w, i) na triangulação \mathcal{T}_G é colar as $(C \setminus \{i\})$ -facetas dos elementos $\tau(v)$ e $\tau(w)$ se elas estão "descoladas", e vice-versa.

Teorema 4.2 *Qualquer gema pode ser construída através de uma sequência de **MakeNodes** e **Swaps** válidos.*

Prova: Seja G uma gema. Se executarmos **Swap**(v, w, i) para todo par de nós distintos v e w de G que são i -adjacentes para algum i , obtemos uma coleção de nós isolados. Se executarmos então **DeleteNode**(v) para cada nó v , obtemos uma gema vazia.

Para construirmos a gema G , basta aplicarmos a sequência inversa das operações utilizadas para destruí-la, que é uma sequência de `MakeNodes` seguida por uma sequência de `Swaps` válidos. \square

Considere, por exemplo, as seguintes chamadas de `MakeNode` e `Swap`, supondo que o número de cores da gema é três.

```

a = MakeNode();
b = MakeNode();
c = MakeNode();
d = MakeNode();
e = MakeNode();
Swap(a,b,0);
Swap(d,e,1);
Swap(d,c,0);
Swap(b,c,1);
Swap(c,b,2);

```

As chamadas do `MakeNode` fornecem uma gema como a da figura 4.2(a). Após as chamadas do `Swap`, obtemos a gema da figura 4.2(b). As triangulações obtidas após as chamadas do `MakeNode` e do `Swap` estão na figura 4.3.

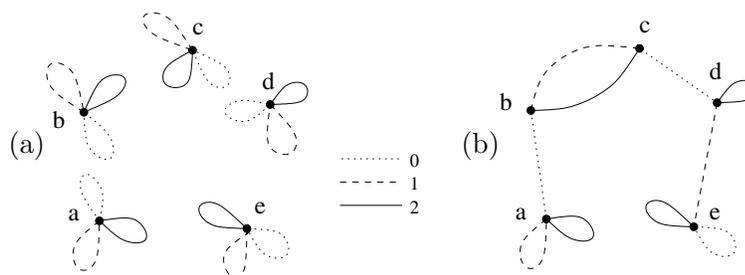


Figura 4.2: Aplicação dos operadores `MakeNode` e `Swap`.

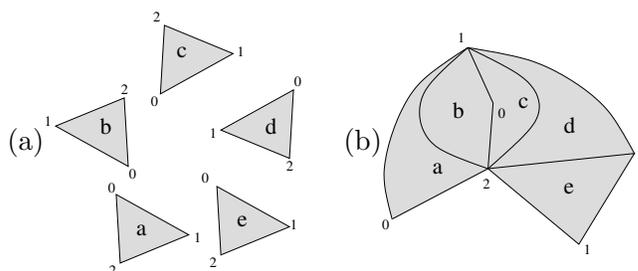


Figura 4.3: (a) Triangulação obtida após os `MakeNodes`. (b) Triangulação obtida após os `Swaps`.

4.3 Operações de mais alto nível

4.3.1 Percorrendo a triangulação de uma gema

Seja M uma C -triangulação representada por uma gema G . Cada C -elemento de M é designado por um ponteiro para o nó correspondente da gema. Mais genericamente, um D -elemento a de M , para qualquer $D \subseteq C$, é designado por um par (v, D) , onde v é um nó do $(C \setminus D)$ -resíduo correspondente a a . Pelo lema 3.1, cada par (v, D) se refere a um único D -elemento de M .

Dada esta forma de representação, descrevemos duas operações para percorrer a gema. A operação $\text{getFace}(p, E)$, consiste em, dado um D -elemento a de M , designado pelo par $p = (v, D)$, e um conjunto de cores $E \subseteq D$, obter a E -face de a . O resultado desta operação é simplesmente o par (v, E) .

A operação $\text{EnumStar}(p, D)$ consiste em, dado um E -elemento b de M , designado pelo par $p = (w, E)$, e um conjunto de cores $D \supseteq E$, enumerar os D -elementos de M que têm b como face — isto é, contidos na estrela de b . Pelo lema 3.2, isto equivale a enumerar os $(C \setminus D)$ -resíduos contidos no $(C \setminus E)$ -resíduo correspondente a b , o que pode ser feito através de uma busca em profundidade.

Por exemplo, se c é um vértice designado pelo par $(v, \{0\})$ numa 3-triangulação de cores $\{0, 1, 2, 3\}$, a enumeração das arestas $\{0, 1\}$ -coloridas incidentes em c equivale à enumeração dos $\{2, 3\}$ -resíduos contidos no resíduo $\mathcal{G}(v, \{1, 2, 3\})$.

O algoritmo esboçado abaixo implementa a enumeração de sub-resíduos. Seus parâmetros são um nó w e dois conjuntos de cores C_1 e C_2 , tais que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Seu efeito é a enumeração dos C_1 -resíduos contidos no resíduo $\mathcal{G}(w, C_1 \cup C_2)$.

Enumerar(w :nó, C_1, C_2 :conjuntos de cores)

1. pilha1 $\leftarrow \emptyset$;
2. pilha2 $\leftarrow \emptyset$;
3. empilhar(pilha1, w);
4. Enquanto pilha1 $\neq \emptyset$ ou pilha2 $\neq \emptyset$ faça
5. Se pilha1 = \emptyset faça
6. $x \leftarrow$ desempilha(pilha2);
7. Se x não está marcado faça
8. reportar(x, C_1);
9. Senão
10. $x \leftarrow$ desempilha(pilha1);
11. Se x não está marcado faça
12. marcar(x);
13. Para cada cor i de C_1 faça
14. empilhar(pilha1, $\phi_i(x)$)
15. Para cada cor i de C_2 faça
16. empilhar(pilha2, $\phi_i(x)$)

Verifica-se que esta busca visita cada nó do resíduo $\mathcal{G}(w, C_1 \cup C_2)$, porém apenas o primeiro nó visitado de cada C_1 -resíduo é reportado.

4.3.2 Cirurgia

Apresentamos agora uma operação de nível mais alto, chamada **Cirurgia**. Esta operação tem efeito semelhante a uma cirurgia de espaços topológicos (veja o apêndice A), e é utilizada para construir e manipular gemas. Sua implementação utiliza o operador **Splice**, apresentado a seguir.

Operador Splice

Assim como o **Swap**, a operação **Splice** é notável por sua simplicidade e poder de expressão. Sua implementação é dada a seguir:

Splice(v, w :nós, i :cor):

- $v' \leftarrow \phi_i(v)$;
- $w' \leftarrow \phi_i(w)$;
- Swap**(v', w', i);
- Swap**(v, w, i);

Note que as duas chamadas do **Swap** não são necessariamente válidas. Ainda assim, devido à forma como as duas chamadas do **Swap** se sucedem, a consistência da gema é mantida, conforme explicitado no seguinte teorema.

Teorema 4.3 *A operação Splice mantém a consistência da gema para quaisquer parâmetros.*

Prova: Vamos examinar esta operação nos casos em que o conjunto $\{v\} \cup \{w\} \cup \{\phi_i(v)\} \cup \{\phi_i(w)\}$ tem pelo menos três nós distintos. A tabela 4.1 mostra, em cada caso, o efeito das duas chamadas do **Swap** sobre os apontadores. Nestes casos, o primeiro **Swap** cria um único ciclo de apontadores, e o segundo **Swap** separa este ciclo, mantendo a consistência da gema.

Nos casos restantes, isto é, se o conjunto $\{v\} \cup \{w\} \cup \{\phi_i(v)\} \cup \{\phi_i(w)\}$ tiver no máximo dois elementos distintos, esta operação não tem efeito. \square

Note que, assim, como o **Swap**, a operação **Splice** é sua própria inversa. Além disso, a ordem dos nós passados como parâmetros não importa, isto é, o efeito da operação $\text{Splice}(v,w,i)$ é o mesmo de $\text{Splice}(w,v,i)$.

O **Splice** pode ser visto como uma operação de "cortar e colar", semelhante à operação **SPLICE** da estrutura de dados quad-edge [30]. Veja a figura 4.4.

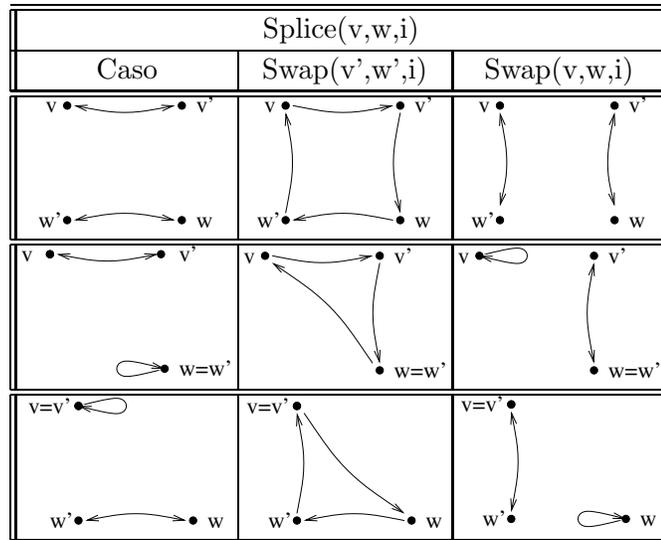


Tabela 4.1: Efeito da operação **Splice** sobre os apontadores.

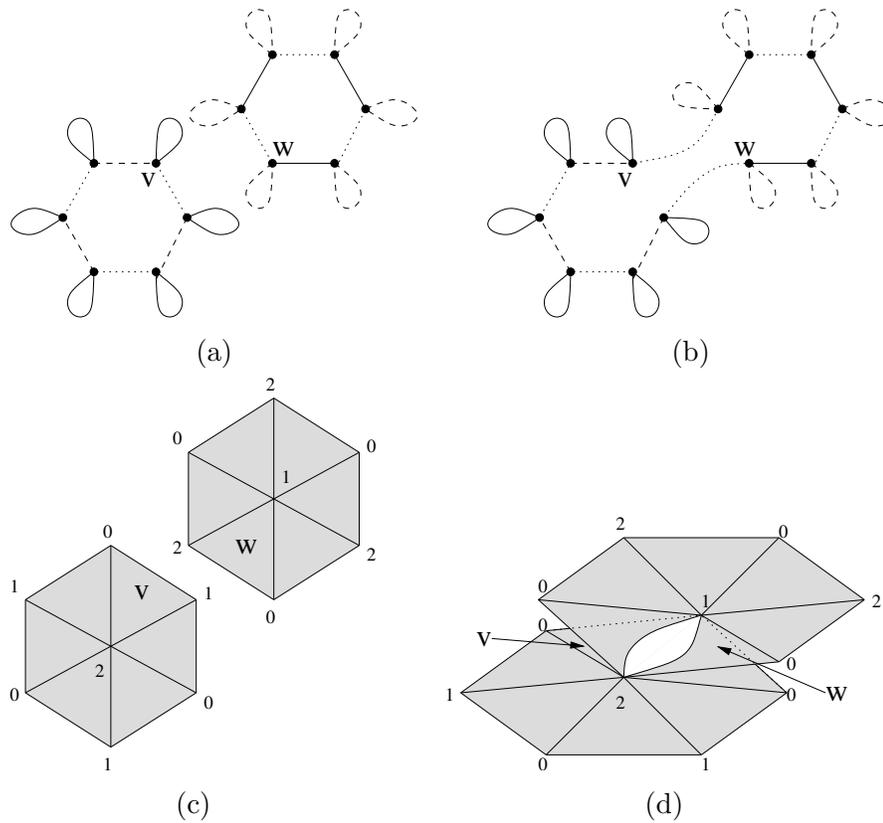


Figura 4.4: Aplicação do operador **Splice**: (a) A gema original. (b) resultado da aplicação de **Splice**($v, w, 0$). (c) A triangulação representada pela gema original. (d) A triangulação após o **Splice**.

Implementação da cirurgia

A operação de cirurgia de gemas é simplesmente uma sequência de **Splices**. O parâmetro desta operação é um conjunto L de triplas (v, w, i) , onde v e w são nós distintos, i é uma cor da gema e, se (v_1, w_1, i) e (v_2, w_2, i) são elementos distintos de L , $\{v_1, w_1\} \cap \{v_2, w_2\} = \emptyset$. A implementação da cirurgia é a seguinte.

Cirurgia(L :conjunto de triplas)

Para cada (v, w, i) de L faça

Splice(v, w, i);

O teorema a seguir garante que esta operação é bem definida.

Teorema 4.4 *O resultado da operação **Cirurgia**(L) é o mesmo para qualquer ordem de execução dos **Splices**.*

Prova: Seja S uma ordenação do parâmetro L . Verifica-se por indução que é possível obter qualquer outra ordenação S' a partir de S , apenas com trocas de pares consecutivos. Sendo assim, para provar este teorema, basta mostrar que para quaisquer triplas distintas (v_1, w_1, i_1) e (v_2, w_2, i_2) de L , a execução consecutiva das operações $\text{Splice}(v_1, w_1, i_1)$ e $\text{Splice}(v_2, w_2, i_2)$ tem o mesmo efeito nas duas ordens possíveis.

Se $i_1 \neq i_2$, é claro que os conjuntos de ponteiros alterados por cada Splice são disjuntos e, logo, a ordem de execução é irrelevante. Vamos então considerar que $i_1 = i_2 = i$. Denotamos por v'_1, w'_1, v'_2, w'_2 os nós i -adjacentes a v_1, w_1, v_2, w_2 , respectivamente, antes da execução dos Splices . Os conjuntos dos nós que têm seus i -ponteiros afetados pelas operações $\text{Splice}(v_1, w_1, i)$ e $\text{Splice}(v_2, w_2, i)$ são respectivamente $\{v_1, w_1, v'_1, w'_1\}$ e $\{v_2, w_2, v'_2, w'_2\}$. Os casos que precisamos considerar são os seguintes:

- (i) $\{v_1, w_1, v'_1, w'_1\} \cap \{v_2, w_2, v'_2, w'_2\} = \emptyset$: Neste caso, os conjuntos dos ponteiros afetados por cada Splice são disjuntos. Logo, o resultado é o mesmo para as duas ordens de execução.
- (ii) $|\{v_1, w_1, v'_1, w'_1\} \cap \{v_2, w_2, v'_2, w'_2\}| = 2$: Note que os conjuntos $\{v_1, w_1\}$ e $\{v_2, w_2\}$ são necessariamente disjuntos. Vamos então supor, sem perda de generalidade, que $v_1 = v'_2$, $v_2 = v'_1$, $w_1 \neq w'_2$ e $w_2 \neq w'_1$ (os casos restantes são obtidos trocando v_1 e w_1 entre si e/ou v_2 e w_2 entre si). A figura 4.5(a) ilustra este caso na ausência de laços; e as figuras 4.5(b) e (c) ilustram este caso quando existem laços em w_1 ou w_2 . Nestes três sub-casos, as duas ordens de execução dos Splices são equivalentes.
- (iii) $|\{v_1, w_1, v'_1, w'_1\} \cap \{v_2, w_2, v'_2, w'_2\}| = 4$: Isto ocorre se $(v_1, w_1, v'_1, w'_1) = (v'_2, w'_2, v_2, w_2)$ ou $(v_1, w_1, v'_1, w'_1) = (w'_2, v'_2, w_2, v_2)$ (estes dois casos são equivalentes). Veja na figura 4.6 que as duas ordens de execução dos Splices são equivalentes.

Os casos em que $|\{v_1, w_1, v'_1, w'_1\} \cap \{v_2, w_2, v'_2, w'_2\}| = 1$ ou 3 são impossíveis. \square

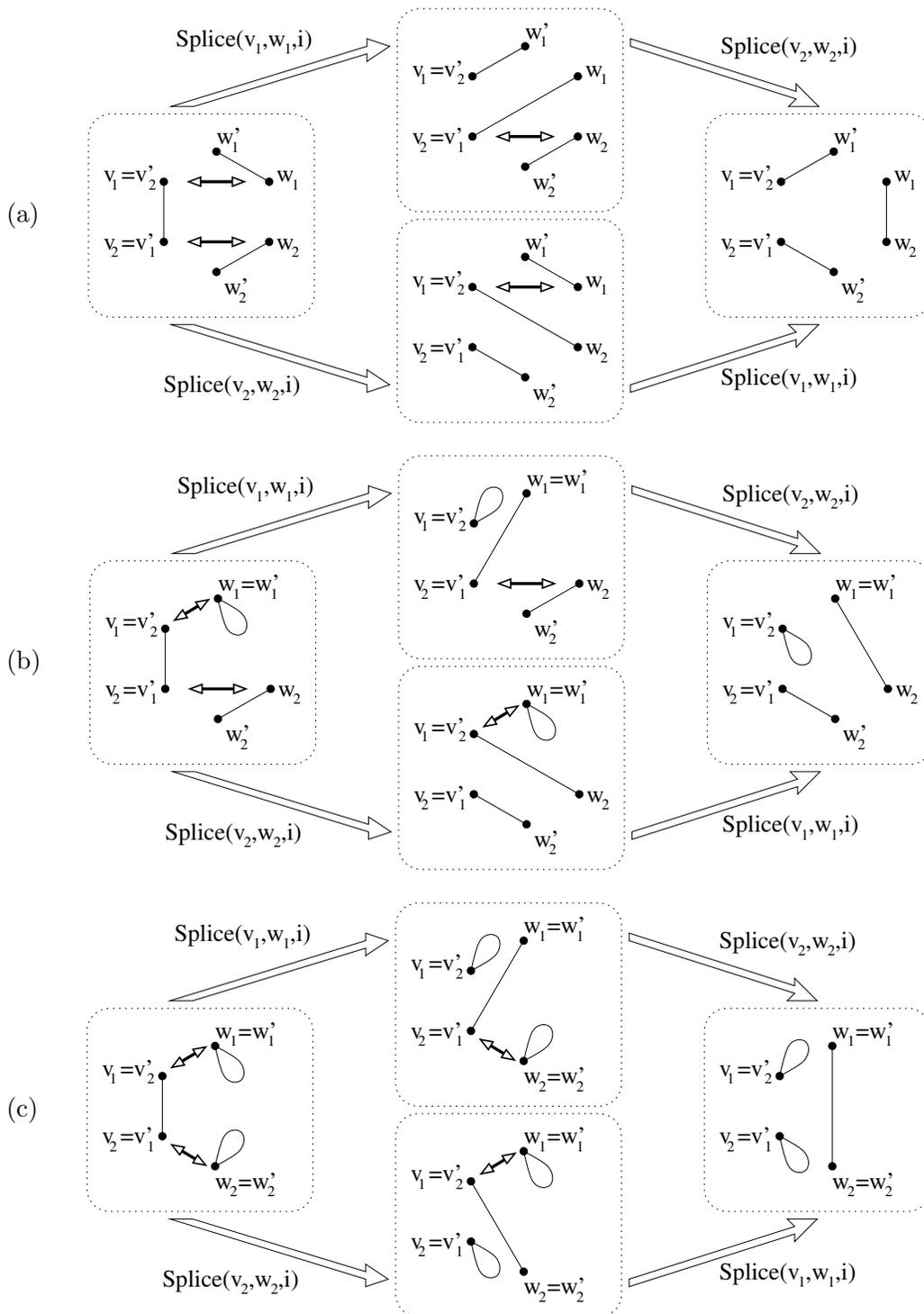


Figura 4.5: As duas possíveis ordens de execução de $\text{Splice}(v_1, w_1, i)$ e $\text{Splice}(v_2, w_2, i)$ no caso (ii) da prova do teorema 4.4: (a) Quando não existem laços. (b) Quando $w_1 = w_1'$ e $w_2 \neq w_2'$ (o caso $w_1 \neq w_1'$ e $w_2 = w_2'$ é equivalente). (c) Quando $w_1 = w_1'$ e $w_2 = w_2'$.

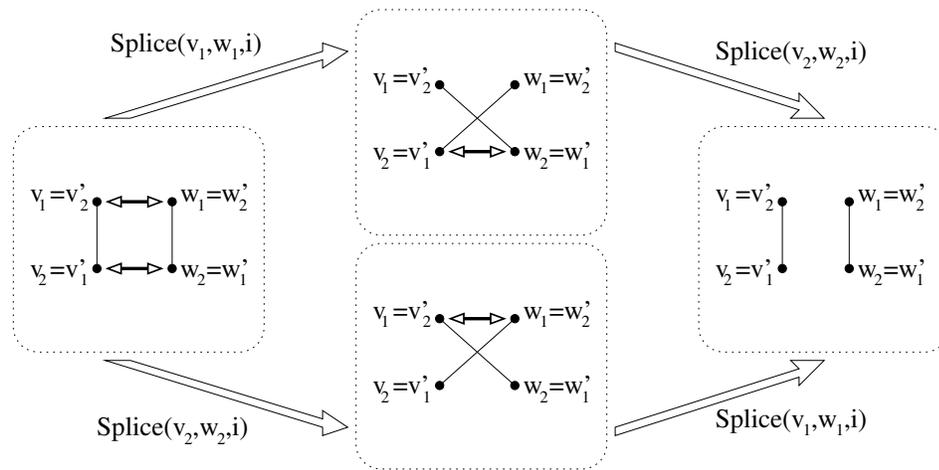


Figura 4.6: As duas possíveis ordens de execução de $\text{Splice}(v_1, w_1, i)$ e $\text{Splice}(v_2, w_2, i)$ no caso (ii) da prova do teorema 4.4.

Exemplos de aplicação de cirurgia

Exemplo 1 Considere a $\{0, 1, 2\}$ -gema G dada pela figura 4.7(a). Esta gema tem dois componentes conexos, um deles contendo os nós a, b, c e d , e o outro contendo os nós a', b', c' e d' . A triangulação representada por G é dada na figura 4.7(b). Vamos então realizar uma cirurgia em G através da operação *Cirurgia*, passando como parâmetro o conjunto $\{(a, b', 0), (a, c', 1), (a, d', 2)\}$. A gema G' resultante é dada na figura 4.8(a), e a triangulação representada é dada na figura 4.8(b).

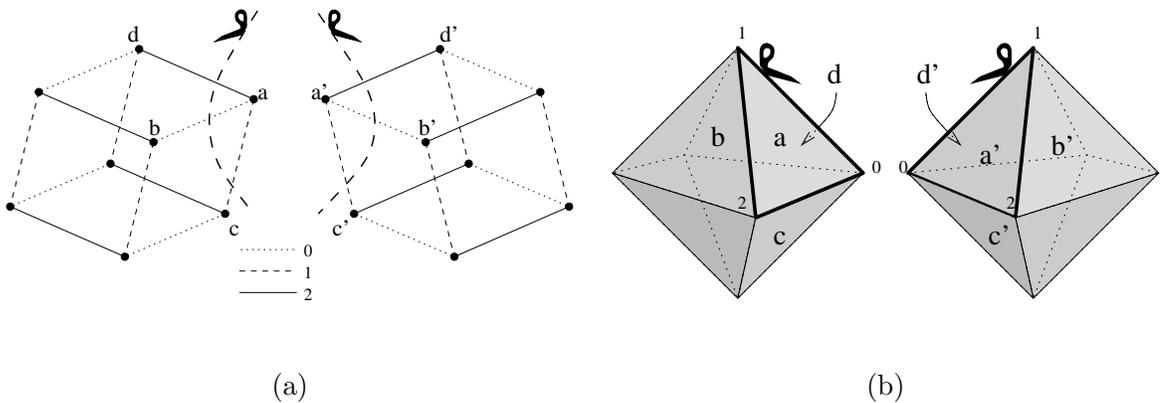


Figura 4.7: (a) Gema G que sofre a cirurgia. As linhas tracejadas indicam as arestas que serão cortadas e coladas pelos *Splices*. (b) Triangulação representada pela gema G . Em destaque, as arestas da triangulação correspondentes às arestas da gema afetadas pela cirurgia.

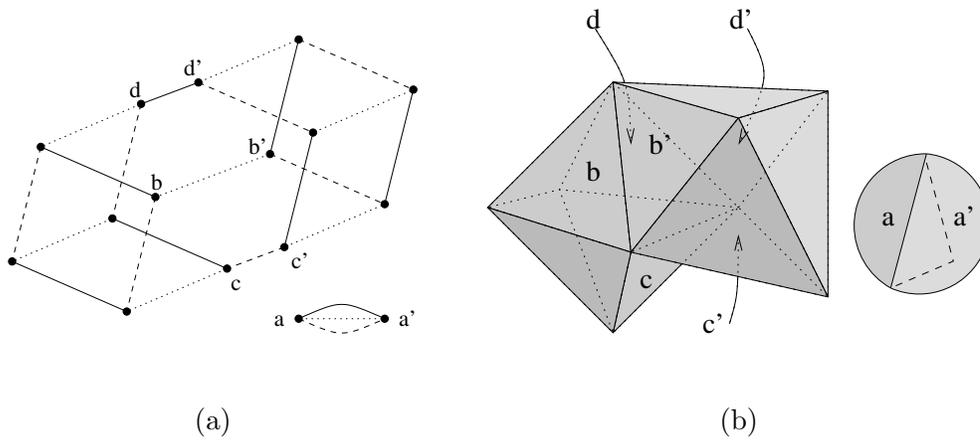


Figura 4.8: (a) Gemma G' resultante da cirurgia em G . (b) A triangulação representada pela gema G' .

Exemplo 2 Considere agora a 2-gemma H dada pela figura 4.9(a), que representa a triangulação da figura 4.9(b). Vamos realizar a operação $\text{Cirurgia}(L)$, sendo

$$L = \{(c, q, 0), (c, r, 2), (b, o, 1), (b, p, 2), (d, t, 0), (d, s, 1)\}.$$

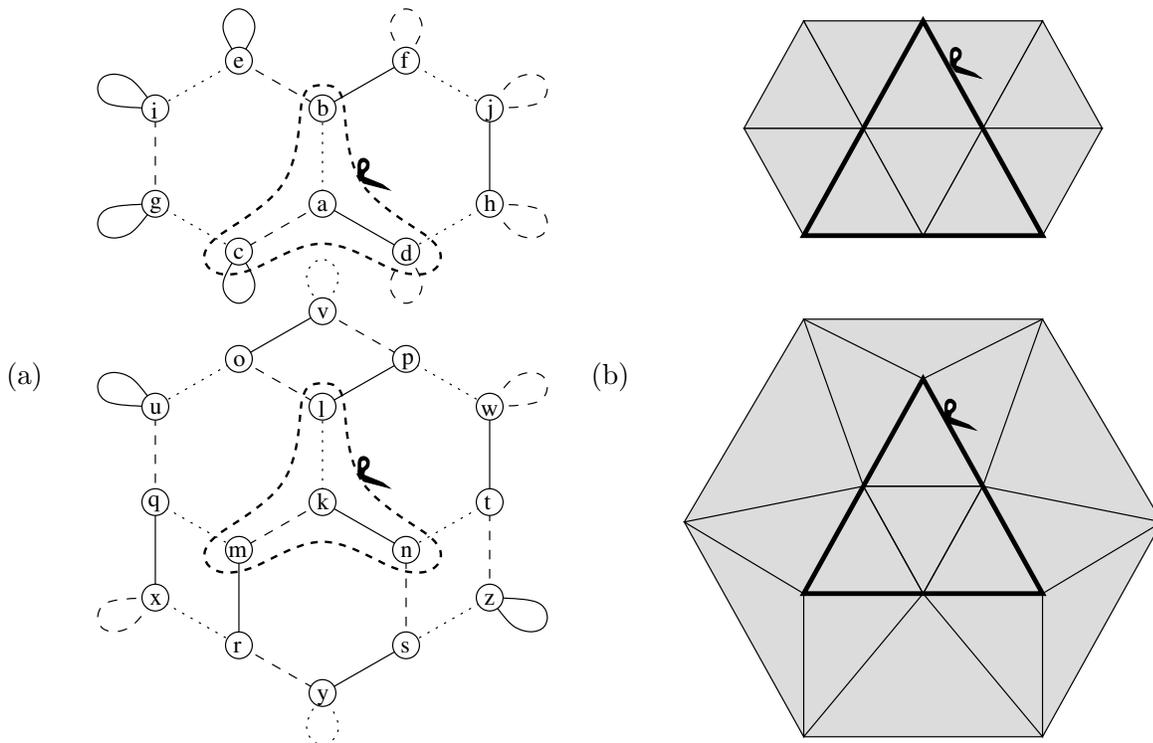


Figura 4.9: (a) A 2-gemma H (com nós rotulados). (b) A triangulação representada por H .

A figura 4.10 mostra as arestas da gema H que são afetadas por esta cirurgia. Veja o resultado da cirurgia na figura 4.11.

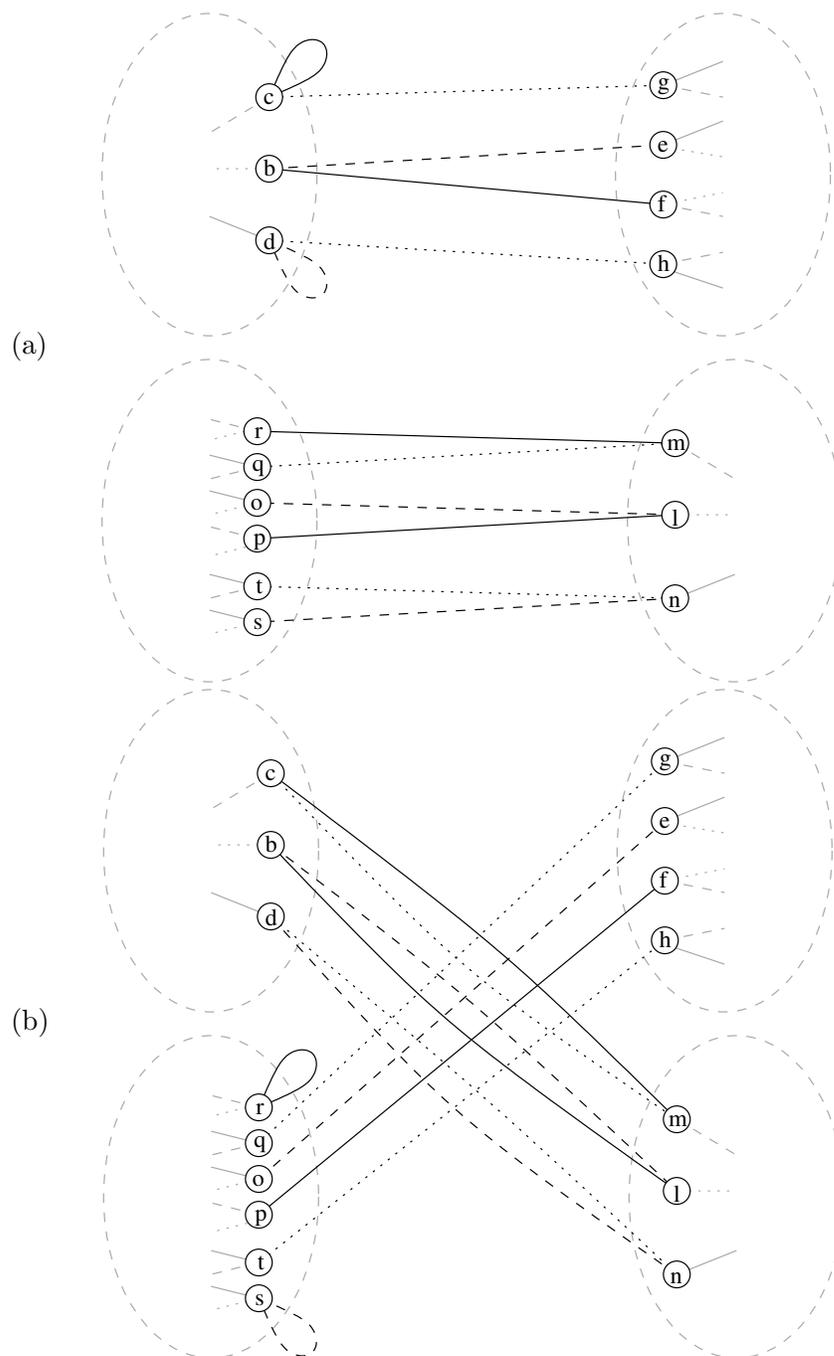


Figura 4.10: As arestas de H afetadas pela cirurgia: antes (a) e depois (b).

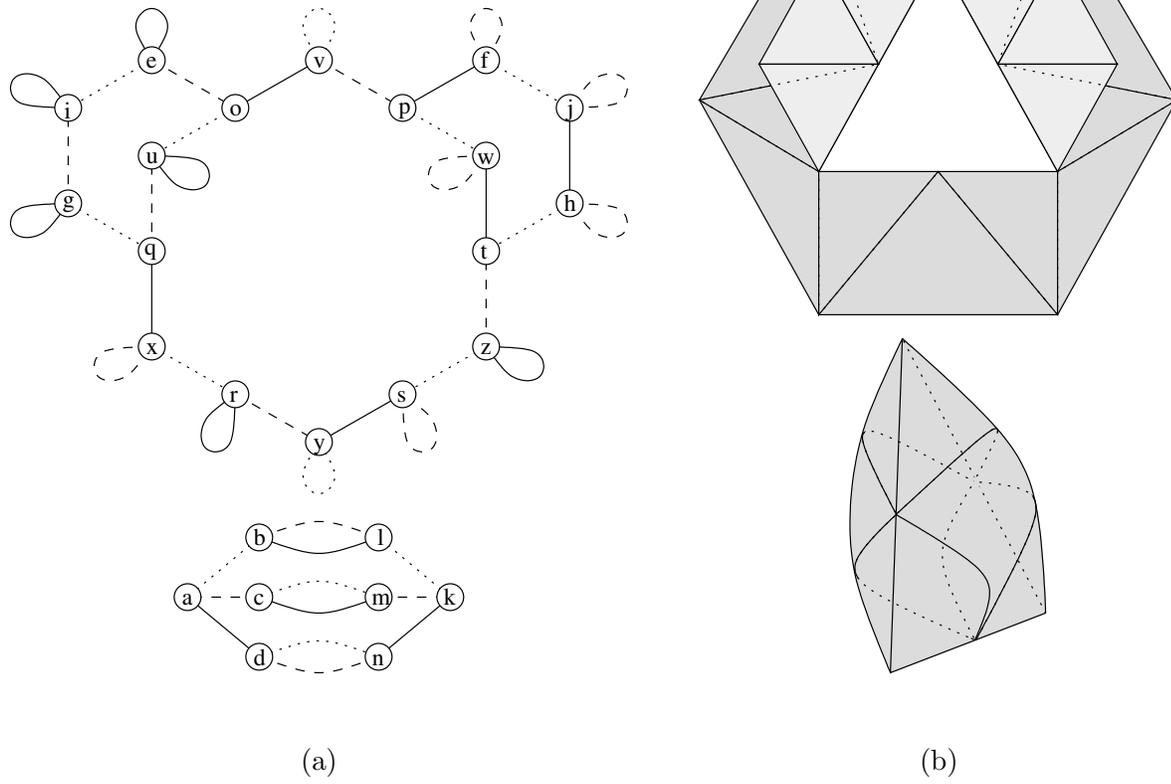


Figura 4.11: (a) Gema H' , resultante da cirurgia em H . (b) Triangulação representada por H' .

Capítulo 5

Gemas como representação de mapas

Neste capítulo, estudamos a representação de subdivisões baricêntricas de mapas utilizando gemas. Veja a figura 5.1. Esta representação é equivalente à estrutura de dados *cell-tuple* de Brisson [13], e é aplicável a mapas simples ou não-simples, sobre variedades com ou sem borda, orientáveis ou não.

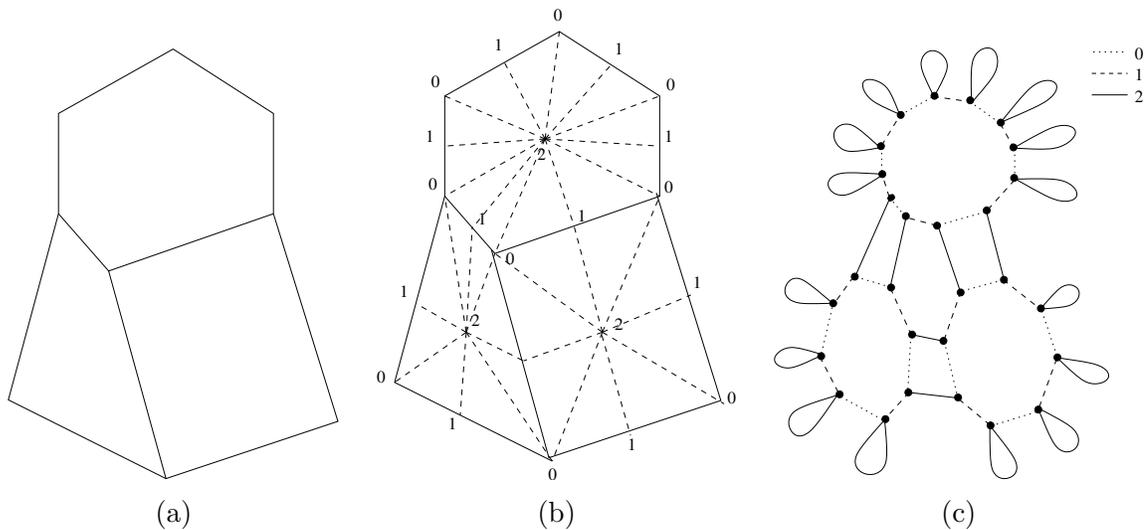


Figura 5.1: (a) Um 2-mapa, (b) sua subdivisão baricêntrica e (c) a gema da subdivisão baricêntrica

5.1 Gemas representando subdivisões baricêntricas

Como observado na seção 2.4.1, as triangulações produzidas por subdivisões baricêntricas de mapas são implicitamente coloridas: se o vértice v da subdivisão baricêntrica ΔM está contido num k -elemento do n -mapa M , então v tem cor k . Note que o conjunto de cores dos vértices de ΔM é $\{0, \dots, n\}$.

Se a subdivisão baricêntrica ΔM de um n -mapa M é uma triangulação coesa, então existe uma n -gema que a representa. Neste caso, dizemos que o mapa M é *coeso*. Se M é uma mapa sobre uma variedade com ou sem borda, ΔM é uma triangulação colorida sobre uma variedade com ou sem borda. Sendo assim, todo mapa sobre uma variedade compacta com ou sem borda é coeso.

As gemas que representam a subdivisão baricêntrica de algum mapa são chamadas de *gemas baricêntricas*. Não existe uma caracterização capaz de diferenciar as gemas baricêntricas das não baricêntricas. Parte do problema de decidir se uma gema é ou não baricêntrica consiste enumerar os possíveis elementos do mapa representado e decidir se cada um deles é topologicamente equivalente a uma bola — com a fronteira possivelmente colada em si mesma — ou, em outras palavras, se sua fronteira descolada é uma esfera. Infelizmente, não se conhece uma caracterização combinatória para esferas de dimensão três.

Os n -G-maps de Lienhardt [35] são uma generalização das gemas baricêntricas que possuem uma caracterização precisa: um n -G-map é uma $\{0, \dots, n\}$ -gema $(V), \phi$ tal que, para $0 \leq i < i+1 < j \leq n$, $\phi_i \phi_j$ é uma involução. Esta definição leva a um conceito de mapa mais geral do que o dado na seção 2.1.1, permitindo elementos que não são bolas topológicas. Porém, as subdivisões baricêntricas dos n -G-maps são um subconjunto próprio das triangulações coloridas coesas.

5.1.1 Interpretando as gemas baricêntricas

Assim como os resíduos de gemas gerais fornecem informações sobre os elementos da triangulação representada e as relações de incidência, uma interpretação adequada dos resíduos de uma gema baricêntrica permite a reconstrução dos elementos do mapa representado e de suas relações de incidência.

O seguinte lema nós diz obter as relações de incidência de um mapa através de sua subdivisão baricêntrica.

Lema 5.1 *Seja M um n -mapa e seja c_1, c_2, \dots, c_k uma lista de elementos de M em ordem crescente de dimensão. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, seja v_i o vértice de ΔM contido em c_i . A subdivisão baricêntrica ΔM tem um elemento incidente nos vértices v_1, v_2, \dots, v_k se e somente se, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, c_i é face de c_{i+1} .*

Prova: Vamos primeiramente supor que, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, c_i é face de c_{i+1} e então provar por um argumento indutivo que ΔM tem um elemento incidente nos vértices v_1, v_2, \dots, v_k . A hipótese de indução é que ΔM tem um elemento b incidente nos vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} . Pela construção da subdivisão baricêntrica, ΔM tem ao menos

um elemento c que é a união dos raios abertos que conectam v_k a b . O elemento c de ΔM incide nos vértices v_1, v_2, \dots, v_k .

Vamos supor, por outro lado, que ΔM tem um elemento incidente nos vértices v_1, v_2, \dots, v_k . Vamos provar por indução que, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, c_i é face de c_{i+1} . A hipótese de indução é que c_i é face de c_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k-2\}$. Pela construção da subdivisão baricêntrica, se ΔM tem uma aresta incidindo nos vértices v_{k-1} e v_k , c_{k-1} é face de c_k . \square

Um corolário deste lema é que dois elementos c_1 e c_2 de um mapa M são incidentes se e somente se existe uma aresta em ΔM entre os vértices v_1 e v_2 , contidos em c_1 e c_2 respectivamente.

O teorema abaixo descreve a correspondência entre os elementos de um mapa e os resíduos da gema que representa a subdivisão baricêntrica deste mapa.

Teorema 5.1 *Seja M um n -mapa coeso e seja G a C -gema que representa ΔM , sendo $C = \{0, \dots, n\}$. Existe uma bijeção f entre os k -elementos de M e os $(C \setminus \{k\})$ -resíduos de G , para $0 \leq k \leq n$, tal que o elemento b de M incide num elemento c se e somente se os resíduos $f(b)$ e $f(c)$ compartilham algum nó.*

Prova: A bijeção entre os k -elementos de M e os $(C \setminus \{k\})$ -resíduos de G é dada pela bijeção entre os k -elementos de M e os vértices k -coloridos de ΔM , e pelo lema 3.1. A relação entre incidência de elementos e intersecção de resíduos é dada pelo lema 3.2 e pelo lema 5.1. \square

O teorema abaixo mostra como um $\{0, \dots, n-1\}$ -resíduo de uma n -gema baricêntrica descreve a topologia do elemento correspondente.

Teorema 5.2 *Seja M um n -mapa contendo um n -elemento c , e seja G a gema representando ΔM . O $\{0, \dots, n-1\}$ -resíduo de G correspondente ao elemento c representa a subdivisão baricêntrica da fronteira descolada de c .*

Prova: Sejam a e b dois elementos de $\Delta \kappa^\circ c$ incidentes no centro o de \mathbb{B}^n , e sejam a' e b' as facetas de a e b , respectivamente, pertencentes à fronteira descolada de c . Como a e b são as uniões dos raios abertos conectando o ponto o aos pontos de a' e b' , respectivamente, podemos afirmar que a incide em b se e somente se a' incide em b' . Sendo assim, existe uma bijeção f dos elementos de $\Delta \kappa^\circ c$ incidentes em o para os elementos de $\Delta \partial^\circ c$ que preserva as relações de incidência.

Seja v o vértice de ΔM contido no elemento c de M e seja γ a função de colagem de $\kappa^\circ c$ sobre κc . Pela definição de subdivisão baricêntrica, o conjunto dos elementos de ΔM contidos em κc é uma colagem de $\Delta \kappa^\circ c$ pela função γ . Como a função γ restrita a \mathbb{B}^n é

um homeomorfismo, existe uma bijeção g dos elementos de $\Delta\kappa^\circ c$ incidentes em o para os elementos de ΔM incidentes em v que preserva as relações de incidência.

Sendo assim, existe um isomorfismo $g \circ f^{-1}$ entre $\Delta\partial^\circ c$ e a órbita de v em ΔM . Podemos dizer então que o resíduo de G correspondente a c representa $\Delta\partial^\circ c$. \square

Veja a figura 5.2

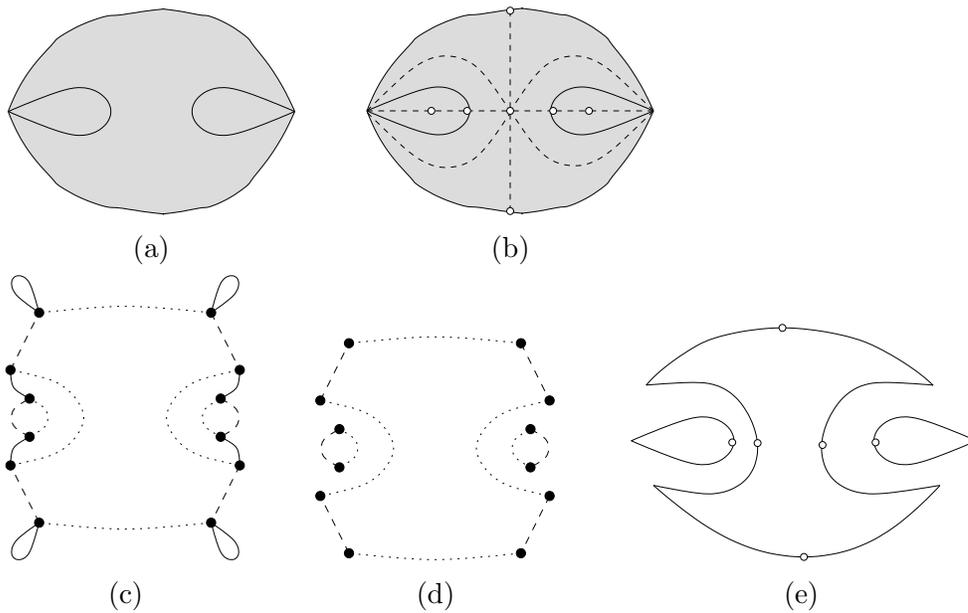


Figura 5.2: (a) Um 2-mapa. (b) Sua subdivisão baricêntrica. (c) A gema da subdivisão baricêntrica. (d) Os $\{0, 1\}$ -resíduos da gema. (e) As subdivisões baricênticas das fronteiras descoladas dos 2-elementos do mapa original.

5.2 Construindo gemas baricênticas

Nesta seção mostramos uma maneira recursiva de construir gemas baricênticas. Esta abordagem será usada no algoritmo para construção de cascos convexos no capítulo 6.

Suponha que desejamos representar o n -mapa coeso M por uma gema. Primeiramente, para cada n -elemento c de M , construímos recursivamente a $(n - 1)$ -gema G_c que representa a subdivisão baricêntrica da fronteira descolada de c , isto é $\Delta\partial^\circ c$. Veja as figuras 5.3 e 5.4.

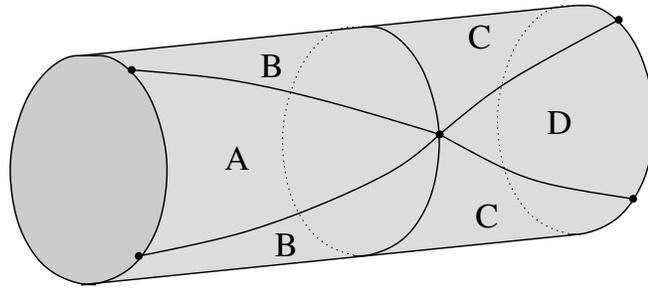


Figura 5.3: Um 2-mapa coeso M sobre uma superfície cilíndrica (sem as duas bases).

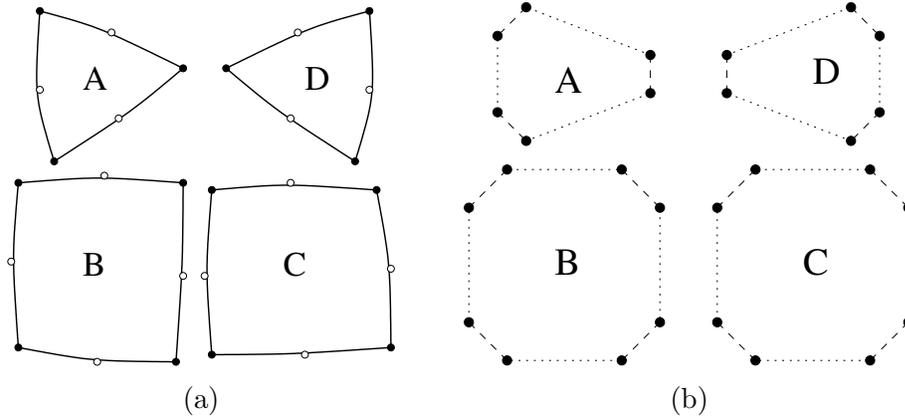


Figura 5.4: (a) As subdivisões baricêntricas das fronteiras descoladas dos 2-elementos do mapa M . (b) As gemas correspondentes.

Em seguida, para cada n -elemento c de M , obtemos a n -gema G_c^+ que representa a subdivisão baricêntrica do fecho descolado de c , isto é $\Delta\kappa^\circ c$, que é um mapa isomorfo ao cone de $\Delta\partial^\circ c$. Como vimos na seção 3.4.3, a gema G_c^+ que representa $\Delta\kappa^\circ c$ é a gema n -aumentada de G_c , isto é, se $G_c = (V, \phi)$, então $G_c^+ = (V, \phi^+)$, sendo que ϕ^+ restrita a $\{0, \dots, n-1\}$ equivale a ϕ , e ϕ_n^+ é a identidade de V . Como cada registro r da gema já é criado com $\phi_i(r) = r$ para todo $i \in 0, \dots, n$, a tarefa de aumentar uma gema não requer, na verdade, nenhuma operação. Veja a figura 5.5.

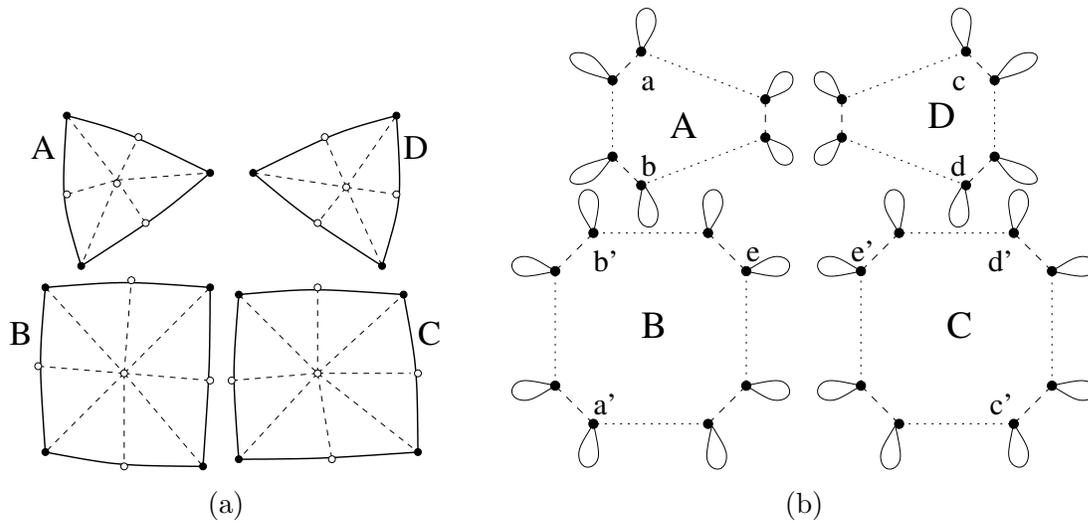


Figura 5.5: (a) As subdivisões baricêntricas dos fechos descolados dos 2-elementos do mapa M . (b) A gemas correspondentes.

Seja então M' o n -mapa consistindo de todos esses fechos descolados. Para obtermos M , precisamos fazer a colagem das fronteiras desses fechos descolados. Esta colagem é feita identificando pares de $(n-1)$ -elementos distintos de M' que tenham fronteiras descoladas isomorfas.

Esta operação, em termo de gemas, equivale a tomar dois $\{0, \dots, n-2\}$ -resíduos distintos R_1 e R_2 , isomorfos entre si por ψ , e, para cada nó w de R_1 , fazer com que $\phi_n(w) \leftarrow \psi(w)$ e $\phi_n(\psi(w)) \leftarrow w$. Definimos então a operação **GlueResidues**.

GlueResidues(a, b, k): os parâmetros a e b são registros das $(k-1)$ -gemas baricêtricas distintas G e H tais que a e b determinam um isomorfismo ψ entre G e H .

Esta operação aplica **Swap**($x, \psi(x), k+1$) para cada registro x de G , o que pode causar dois efeitos distintos, dependendo do estado original da gema:

- (i) Se, para cada registro x de G , $\phi_{k+1}(x) = x$ e $\phi_{k+1}(\psi(x)) = \psi(x)$, então $\phi_{k+1}(x) \leftarrow \psi(x)$ e $\phi_{k+1}(\psi(x)) \leftarrow x$.
- (ii) Se, para cada registro x de G , $\phi_{k+1}(x) = \psi(x)$ e $\phi_{k+1}(\psi(x)) = x$, então $\phi_{k+1}(x) \leftarrow x$ e $\phi_{k+1}(\psi(x)) \leftarrow \psi(x)$.

Assim como **Swap**, **GlueResidues** é sua própria inversa.

Considere, por exemplo, as seguintes chamadas da operação **GlueResidues** sobre a gema da figura 5.5(b).

`GlueResidues(a,a',1)`
`GlueResidues(b,b',1)`
`GlueResidues(c,c',1)`
`GlueResidues(d,d',1)`
`GlueResidues(e,e',1)`

A gema resultante é ilustrada na figura 5.6, e a subdivisão baricêntrica representada está na figura 5.7.

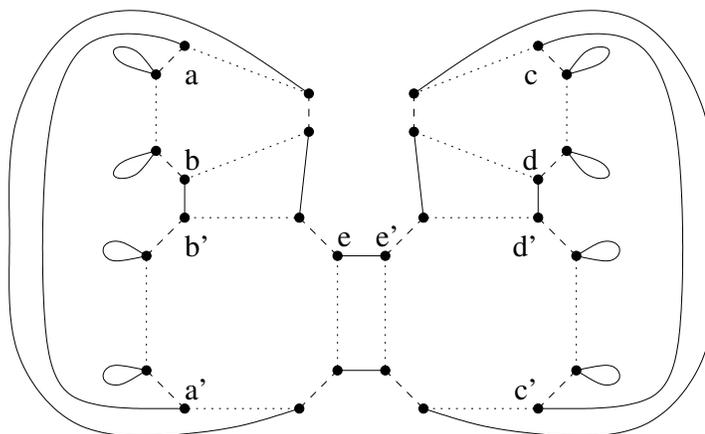


Figura 5.6: Gema resultante da operação `GlueResidues`.

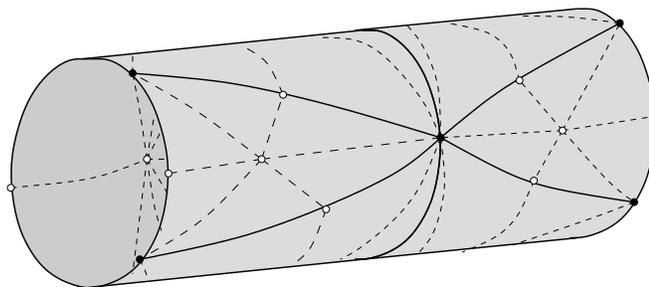


Figura 5.7: Subdivisão baricêntrica representada pela gema da figura 5.6.

Capítulo 6

Algoritmo de casco convexo

Este capítulo descreve uma aplicação da estrutura de dados gema como representação da subdivisão baricêntrica de um mapa. Trata-se de um programa que constrói o casco convexo de um conjunto de pontos no \mathbb{R}^n , para qualquer $n \geq 1$, e o representa como uma gema.

O *casco convexo* $\text{conv}(S)$ de um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^n$ é o menor conjunto convexo contendo S [43]. O conceito de casco convexo é não somente natural e intuitivo como também de grande importância em aplicações práticas [56, 36, 17]. Por esta razão, o problema de calcular o casco convexo já foi estudado por diversos autores e vários algoritmos foram propostos.

No caso planar, podemos citar os algoritmos de Graham [28], a marcha de Jarvis [33], algoritmos de divisão e conquista [10, 47], o QuickHull [22] e o algoritmo de cadeias monótonas de Andrew [3]. Alguns desses algoritmos se generalizam para conjuntos de pontos tridimensionais, como os de divisão e conquista, e o QuickHull. No caso de dimensões arbitrárias, citamos o algoritmo Gift-wrapping de Chand e Kapur [15] e o algoritmo de shelling de Seidel [52], que são generalizações da marcha de Jarvis, o Beneath-beyond de Seidel [51] e o algoritmo incremental de Chazelle [16].

O desafio de nossa implementação é tratar a ocorrência de mais do que $k + 1$ pontos contidos no mesmo espaço k -dimensional — por exemplo, 3 pontos co-lineares, 4 pontos co-planares, etc. Muitos algoritmos geométricos supõe que os pontos de entrada estão sempre em posições *não degeneradas*. Algoritmos de varredura, por exemplo, podem exigir que nenhum par de pontos compartilhe a mesma coordenada x ; e muitos algoritmos de construção de diagrama de Voronoi supõe que 4 pontos de entrada nunca estão sobre a mesma circunferência, etc. Esta suposição simplifica o algoritmo, eliminando a necessidade de tratar muitos casos especiais.

Entretanto, há muitas aplicações práticas (geralmente envolvendo dados com coordenadas inteiras), em que tais casos "degenerados" não são apenas possíveis mas alta-

mente prováveis. Nessas situações, pode-se usar o *método de perturbações*, introduzido por Edelsbrunner [23] e elaborado por outros autores como Yap [57] e Emiris [24]. Esta técnica consiste em adicionar valores infinitesimais simbólicos às coordenadas dos pontos, permitindo que algoritmos simples, desenvolvidos sem considerar casos degenerados, continuem funcionando mesmo na presença de tais casos.

A principal desvantagem deste método é que o resultado final do algoritmo depende da perturbação aplicada, e pode conter detalhes degenerados — como dois vértices na mesma posição, triângulos de área zero, etc. Apesar de válidos na versão perturbada do problema, esses detalhes não são aceitáveis para a aplicação. Outra desvantagem deste método é que a manipulação das perturbações pode aumentar consideravelmente a complexidade das primitivas geométricas.

O algoritmo de casco convexo que descrevemos a seguir *não* usa perturbações para lidar com os casos degenerados. Ao invés disso, ele detecta a ocorrência de faces não simpliciais e as mantém no casco convexo construído. Os pontos de entrada têm coordenadas inteiras e os cálculos geométricos são realizados com aritmética exata.

6.1 Conceitos básicos do problema

6.1.1 Polítopos convexos

O casco convexo de um conjunto finito de pontos do \mathbb{R}^n é chamado de *politopo convexo*, ou simplesmente *politopo*. Um *k-politopo* é um politopo de dimensão k .

Dizemos que um hiperplano $h \subset \mathbb{R}^n$ *suporta* um conjunto de pontos $S \in \mathbb{R}^n$ se $h \cap S \neq \emptyset$ e S está contido em um dos semi-espacos fechados determinados por h .

Definição 6.1 *Seja P um n -politopo. $F \subseteq P$ é uma face de P se F é \emptyset , ou o próprio P , ou a intersecção de P e um hiperplano de suporte. Se a face F tem dimensão k , dizemos que ela é uma k -face de P . As faces de dimensão 0, 1 e $n - 1$ são chamadas de vértices, arestas e facetas, respectivamente.*

Seja P o casco convexo de um conjunto finito de pontos S . Verifica-se que cada face F de P é o casco convexo de um subconjunto de S , sendo portanto, um politopo. Isto implica que F tem suas próprias faces, que são também faces de P .

6.2 O algoritmo Gift-wrapping

6.2.1 Visão geral

O programa descrito neste capítulo implementa uma versão recursiva do algoritmo *gift-wrapping*, descrito por Chand e Kapur [15] e analisado por Swart [55]. Este algoritmo se baseia na observação de que cada $(n - 2)$ -face de um n -politopo P é face de exatamente duas facetas de P . Sua idéia é basicamente encontrar uma faceta inicial do casco convexo e então proceder, de uma faceta para uma faceta adjacente, até que todo casco convexo esteja computado.

Em nossa implementação os cálculos geométricos são realizados com aritmética exata e todos os pontos têm coordenadas inteiras. Sendo assim, a entrada do algoritmo é um conjunto S de pontos no \mathbb{Z}^n . A saída do algoritmo é uma descrição da fronteira do casco convexo $P = \text{conv}(S)$.

Durante a execução do algoritmo, mantemos um conjunto K de facetas de P já determinadas. Também mantemos um conjunto Q com as $(n - 2)$ -faces de P que são facetas de apenas um elemento de K .

O primeiro passo do algoritmo consiste em determinar um hiperplano H_1 que suporte S e contenha n pontos independentes de S , e construir recursivamente o casco convexo de $H_1 \cap S$, que é uma faceta F_1 de P (um conjunto de n pontos é *independente* se seu casco convexo tem dimensão $n - 1$). O conjunto K é iniciado com o politopo F_1 , e o conjunto Q com as facetas de F_1 . O restante do algoritmo é uma iteração em que repetem os seguintes passos até que o conjunto Q seja vazio. A figura 6.1 ilustra estes passos.

- (1) Escolher um $(n - 2)$ -politopo R de Q . Veja a figura 6.1(a). Vamos chamar de F o $(n - 1)$ -politopo contido em K que tem R como faceta.
- (2) Encontrar geometricamente um hiperplano H que suporte S contendo R e pelo menos um ponto de S não contido em F . Veja a figura 6.1(b) (os pontos b e c estão em H).
- (3) Computar recursivamente o casco convexo de $H \cap S$, que é uma faceta F' de P . Veja a figura 6.1(c).
- (4) Adicionar F' ao conjunto K .
- (5) Atualizar o conjunto Q , adicionando as facetas de F' que não estavam em Q , e removendo as facetas de F' que já estavam em Q .

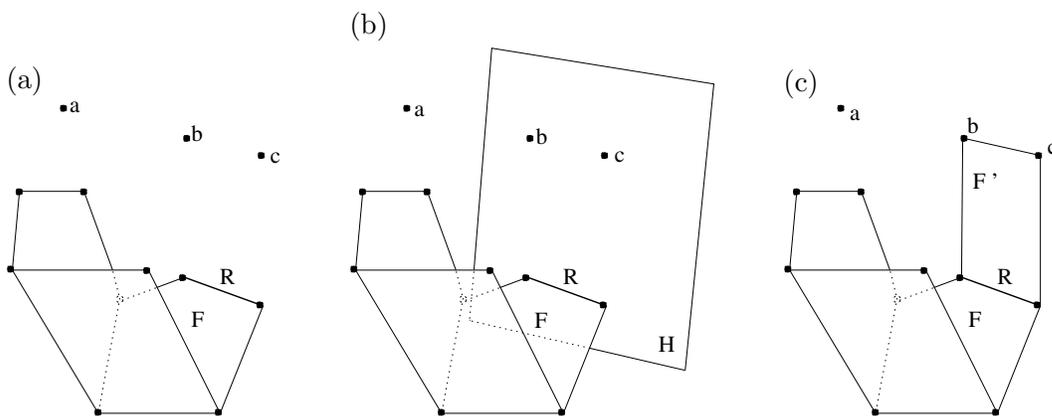


Figura 6.1: O algoritmo gift-wrapping em três dimensões.

6.2.2 Encontrando a faceta adjacente

A principal operação geométrica deste algoritmo é o passo (2): dada uma faceta F do casco convexo P e uma faceta R de F , encontrar o hiperplano H contendo a faceta F' de P tal que $F' \neq F$ e R é face de F' .

Seja A o hiperplano de F e seja p um ponto de S não contido em A . Vamos denotar por α_p o semi-hiperplano contendo p cuja fronteira contém R . O ângulo convexo entre α_p e F será denotado por $\theta(p)$. A figura 6.2 mostra um exemplo para o caso 3-dimensional.

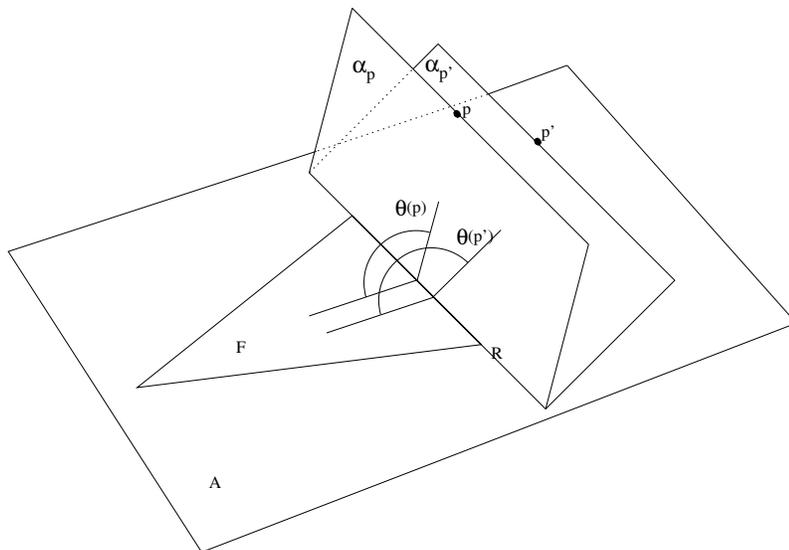


Figura 6.2: O ângulo $\theta(p)$ entre o hiperplano A e o semi-hiperplano α_p .

O hiperplano de suporte H que estamos procurando contém R e o ponto $p \in S$ que maximiza $\theta(p)$. Em nossa implementação, a comparação entre ângulos é feita da seguinte forma.

Seja B um hiperplano qualquer, distinto de A , que também contenha a face R . Os hiperplanos A e B são definidos pelos polinômios afins (de grau um) A e B nas coordenadas de um ponto genérico p tal que $A(p) = 0$ se e somente se $p \in A$ e $B(p) = 0$ se e somente se $p \in B$. Podemos escolher os sinais de A e B para que $A(p) \geq 0$ para qualquer $p \in S$, e $B(q) \geq 0$ para qualquer $q \in F$.

É simples mostrar que, para quaisquer p e $q \notin A$, $\theta(p) < \theta(q)$ se e somente se $\frac{B(p)}{A(p)} > \frac{B(q)}{A(q)}$. Portanto, cada comparação é feita em $O(n)$ operações, e encontrar o ponto p que maximiza $\theta(p)$ leva tempo $O(v \cdot n)$, onde $v = |S|$.

Os coeficientes do polinômio $A(p)$ que define o hiperplano A podem ser obtidos tomando $n - 1$ pontos independentes r_1, r_2, \dots, r_{n-1} em R e um ponto t de F , e avaliando o determinante simbólico

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{---} & r_1 & \text{---} \\ & & \vdots & \\ 1 & \text{---} & r_{n-1} & \text{---} \\ 1 & \text{---} & t & \text{---} \\ 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{vmatrix}$$

onde os X_i são variáveis simbólicas representando as coordenadas do ponto genérico p . O hiperplano B pode ser obtido de maneira similar, exceto que t é substituído por qualquer ponto de S não contido em A .

Note que podemos manipular a matriz de forma a zerar os valores da primeira coluna, com exceção do primeiro e do último. Portanto temos que computar um determinante $n \times n$ para o primeiro coeficiente, e n determinantes $(n - 1) \times (n - 1)$ para os outros coeficientes. Como cada determinante $k \times k$ pode ser computado ser fazer divisões em tempo $O(k^4)$ [50], cada hiperplano exige $O(n^4)$ operações.

Em nosso algoritmo, denotamos por $\text{AdjacentFacet}(S, A, B)$ a operação que toma o conjunto de pontos S e os hiperplanos A e B e produz o hiperplano H .

6.2.3 Encontrando a faceta inicial

Definimos agora a operação $\text{InitialFacet}(S)$ que determina um hiperplano de suporte de S contendo pelo menos n pontos independentes. A idéia é encontrar sucessivos hiperplanos de suporte de S , cada um contendo pelo menos um ponto independente a mais do que o anterior, até encontrarmos um hiperplano contendo uma faceta de $\text{conv}(S)$.

Primeiramente, encontramos um ponto p_0 de S com o menor valor de x_0 , onde x_0, x_1, \dots, x_n são as coordenadas do espaço. O primeiro hiperplano de suporte, chamado de H_1 , é o hiperplano normal ao eixo \vec{x}_0 que contém p_0 .

Vamos então supor que encontramos o hiperplano de suporte H_{i-1} . O hiperplano de suporte H_i é obtido da seguinte forma. Se H_{i-1} contém i pontos independentes de

S , então $H_i = H_{i-1}$. Caso contrário, encontramos um ponto q de S não contido em H_{i-1} e criamos um hiperplano B contendo q e $H_{i-1} \cap S$, paralelo aos eixos $\vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n$. Então, o hiperplano H_i é dado por $\text{AdjacentFacet}(S, H_{i-1}, B)$. Este passo realiza $O(n^4)$ operações para encontrar o hiperplano B e $O(vn)$ operações na rotina AdjacentFacet .

Finalmente, H_n é um hiperplano de suporte de S contendo n pontos independentes de S . Esta rotina toma tempo $O(n(n^4 + vn))$.

6.3 Representando politopos por gemas

6.3.1 Mapa de um politopo

Seja P um n -politopo. O *mapa de P* , denotado por $\mathcal{M}(P)$, é um n -mapa sobre P definido da seguinte forma: para cada k -face F de P ($0 \leq k \leq n$), existe um k -elemento em $\mathcal{M}(P)$ que é o interior da face F em relação ao k -espaço afim que a contém. Prova-se que os elementos de $\mathcal{M}(P)$ satisfazem as condições de incidência dadas na definição de mapa, na seção 2.1.1.

Dado o mapa de um n -politopo P , as faces de P podem ser obtidas como os fechados dos elementos de $\mathcal{M}(P)$. Sendo assim, o mapa $\mathcal{M}(P)$ carrega toda a estrutura combinatória do politopo.

O *mapa da fronteira* de um n -politopo P , denotado por $\mathcal{M}_\partial(P)$, é o $(n-1)$ -esqueleto de $\mathcal{M}(P)$, isto é, o conjunto dos elementos de $\mathcal{M}(P)$ de dimensão $\leq n-1$.

Lema 6.1 *Se $\mathcal{M}(P)$ é o mapa de um n -politopo P , e b e c são k -elementos distintos de $\mathcal{M}(P)$, para $0 \leq k \leq n$, então todas as faces compartilhadas por b e c , se existirem, são faces de algum j -elemento de $\mathcal{M}(P)$, para $j < k$.*

Prova: Como kb e kc são k -faces distintas do politopo convexo P , a intersecção entre kb e kc é o conjunto vazio ou uma j -face E de P , sendo $0 \leq j < k$. Se e é o j -elemento de $\mathcal{M}(P)$ correspondente a E , todas as faces compartilhadas por b e c são faces de e' . \square

6.3.2 Gema de um politopo

Um n -politopo P é uma n -variedade com borda, e sua fronteira é uma $(n-1)$ -variedade. Logo, os mapas $\mathcal{M}(P)$ e $\mathcal{M}_\partial(P)$ são coesos, e suas subdivisões baricêntricas podem ser representadas por gemas. Note que a $(n-1)$ -gema G que representa $\Delta\mathcal{M}_\partial(P)$ é fechada.

Em nossa aplicação, cada registro da gema mantém no campo *data* uma referência para o vértice de cor 0 do n -simplexo correspondente, que é um dos pontos do conjunto de entrada S . Os vértices de cor $\neq 0$ de $\Delta\mathcal{M}(P)$ não são utilizados nas operações geométricas e não precisam ser explicitamente representados.

Nosso algoritmo constrói a gema do casco convexo de forma recursiva, como mostrado na seção 5.2.

6.3.3 Flags de um politopo

O conceito de *flag*, introduzido nesta seção, é utilizado na exposição e na análise do algoritmo de casco convexo.

Definição 6.2 *Seja $\mathcal{M}(P)$ o mapa de um n -politopo P . Um (j, k) -flag de P , para $0 \leq j \leq k \leq n$, é uma tupla $(F_j, F_{j+1}, \dots, F_{k-1}, F_k)$ de elementos de $\mathcal{M}(P)$ tal que F_k é um k -elemento do mapa e, para $j \leq i < k$, F_i é uma i -face de F_{i+1} . Os $(0, n)$ -flag de P são chamados simplesmente de flags.*

Vamos mostrar que existe uma correspondência entre os flags de um politopo e os nós da gema que o representa.

Teorema 6.1 *Seja P um n -politopo. Existe uma correspondência 1-1 entre os flags de P e os n -elementos de $\Delta\mathcal{M}(P)$ tal que, se (F_0, F_1, \dots, F_n) é o flag correspondente ao n -elemento c de $\Delta\mathcal{M}(P)$, então, para cada i em $\{0, \dots, n\}$, o vértice i -colorido de c está contido em F_i .*

Este teorema, na verdade, vale para qualquer mapa simples (mas não vale para mapas em geral). Sua prova requer o seguinte lema auxiliar.

Lema 6.2 *Se M é um n -mapa simples, nenhum par de k -elementos de ΔM compartilha todos os $k + 1$ vértices, para qualquer $k \in \{0, \dots, n\}$.*

Prova: Este lema é óbvio para $k = 0$. Suponha que ele valha para $k < j$, sendo $j < n$. Sejam a e b dois j -elementos de ΔM que compartilham o vértice v de tipo j , e sejam a' e b' as $(j - 1)$ -faces de a e b , respectivamente, opostas ao vértice v . Pela definição de subdivisão baricêntrica, v está contido em um j -elemento c de M . Como a função de colagem γ de $\kappa\mathbb{B}^j$ para κc é um homeomorfismo, para cada i -elemento d de $\Delta Esq_{j-1}(M)$ contido em ∂c , $\gamma^{-1}(d)$ é um único componente conexo, portanto, d é face de um único j -elemento de $\Delta Esq_j(M)$ contido em c . Sendo assim, as $(j - 1)$ -faces a' e b' são distintas. Como $Esq_{j-1}(M)$ é simples, a' e b' não compartilham todos os vértices. \square

Prova do teorema 6.1

Seja b um n -elemento de $\Delta\mathcal{M}(P)$, e seja $f(b) = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ uma tupla tal que F_i é o i -elemento de $\mathcal{M}(P)$ contendo o vértice i -colorido de b . Pelo lema 5.1, esta tupla é um flag de P . Se b e c são n -elementos distintos de $\Delta\mathcal{M}(P)$, pelo lema 6.2 eles não compartilham todos os vértices. Logo $f(b)$ e $f(c)$ são flags distintos.

Seja (F_0, F_1, \dots, F_n) um flag de P . Pelo lema 5.1, existe um n -elemento em $\Delta\mathcal{M}(P)$ cujos vértices estão contidos nos elementos F_0, F_1, \dots, F_n de $\mathcal{M}(P)$.

Sendo assim, cada n -elemento de $\Delta\mathcal{M}(P)$ corresponde a um flag de P , e vice-versa. \square

Se G é a gema que representa o mapa $\Delta\mathcal{M}(P)$, existe uma correspondência 1-1 entre os nós de G e os flags de P . Vamos denotar por $Flag_k(v)$ o $(0, k)$ -flag correspondente ao nó v de G . Se P é um n -politopo, o $(0, n)$ -flag de v será denotado simplesmente por $Flag(v)$.

6.3.4 Identificando politopos por seus vértices

Durante a execução do algoritmo é necessário checar se a faceta F de determinado n -politopo e a faceta F' de outro n -politopo são o mesmo $(n-1)$ -politopo. A única maneira de fazer esta verificação é através das referências aos vértices de cor 0, contidos nos campos *data* dos registros a gema.

Um algoritmo óbvio, mas nada eficiente, para verificar estes vértices consiste em obter os conjuntos dos valores dos campos *data*, para o resíduo correspondente a F e o resíduo correspondente a F' , e compará-los. Isto exige percorrer cada um dos resíduos e armazenar os valores dos campos *data* de uma forma adequada para fazer a comparação.

Nesta seção mostramos uma forma de eleger um nó específico da gema para cada face F do politopo, o *nó representante* de F , e como comparar estes nós de forma eficiente.

Identificador geométrico de nós

Seja P um n -politopo e seja G a gema que representa $\Delta\mathcal{M}_\partial(P)$. O *identificador geométrico* de um nó w de G , denotado por $\text{Id}(w)$ é a tupla (v_0, v_1, \dots, v_n) , onde $v_0 = \text{data}(w)$, $v_1 = \text{data}(\phi_0(w))$, \dots , $v_n = \text{data}(\phi_0(\phi_1(\dots\phi_{n-1}(w)\dots)))$. Veja a figura 6.3. A idéia é que o vértice de cor 0 do simples $\tau(w)$ é v_0 ; e em geral, o vértice de cor i de $\tau(w)$ está no sub-espaco afim gerado por v_0, v_1, \dots, v_i . Vamos denotar por $\text{Id}_k(w)$ o *identificador geométrico parcial*, consistindo dos primeiros $k+1$ vértices de $\text{Id}(w)$.

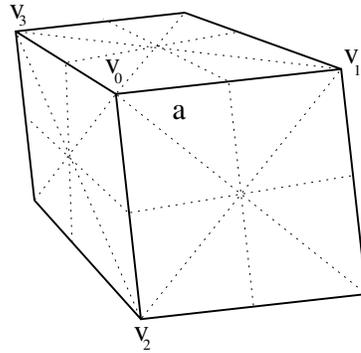


Figura 6.3: Identificador geométrico: O politopo P é um cubo, e subdivisão baricêntrica do mapa $\mathcal{M}_\delta(P)$ contém um triângulo a . Se G representa $\Delta\mathcal{M}_\delta(P)$ e o nó w de G corresponde ao elemento a , $\text{Id}(w) = (v_0, v_1, v_2, v_3)$.

Lema 6.3 *Seja G uma n -gema representando a subdivisão baricêntrica do mapa $\mathcal{M}(P)$ de um n -politopo P , e seja w um nó de G . Se $\text{Id}(w) = (v_0, \dots, v_n)$ e $\text{Flag}(w) = (F_0, \dots, F_n)$ então, para $0 \leq i \leq n$, os vértices v_0, \dots, v_i são faces de F_i , e para $0 \leq j \leq n-1$, o vértice v_{j+1} não é face de F_j .*

Prova: Seja δ a bijeção entre os nós de G e os elementos de $\Delta\mathcal{M}(P)$. Primeiro daremos uma prova indutiva de que os vértices v_0, \dots, v_i são faces de F_i .

Base: v_0 é o vértice 0-colorido do n -elemento $\delta(w)$. Logo, a face F_0 é o próprio v_0 .

Hipótese: v_0, \dots, v_{i-1} são faces de F_{i-1} .

Passo: Pela definição de *flags*, F_{i-1} é uma face de F_i . Sendo assim, os vértices v_0, \dots, v_{i-1} são faces de F_i . Seja x o nó de G dado por $\phi_0(\dots \phi_{i-1}(w) \dots)$ e seja $\text{Flag}(x) = (F'_0, \dots, F'_n)$. O vértice v_i é o vértice de cor 0 de $\delta(x)$, logo $F'_0 = v_i$. Pela caracterização da triangulação representada por uma gema dada no corolário 3.1, os elementos $\delta(w)$ e $\delta(x)$ compartilham o vértice de cor i , que é o baricentro de F_i e F'_i . Logo, $F_i = F'_i$. Como F'_0 é face de F'_i , v_i é face de F_i .

Agora damos uma prova indutiva de que v_{j+1} não é face de F_j .

Base: v_{j+1} não é face de F_0 .

Seja x o nó de G dado por $\phi_1(\dots \phi_j(w) \dots)$. Os n -elementos $\delta(w)$ e $\delta(x)$ compartilham o vértice 0-colorido v_0 . Como $x \neq \phi_0(x)$, os elementos $\delta(\phi_0(x))$ e $\delta(x)$ não compartilham o vértice de cor 0. Uma vez que o vértice 0-colorido de $\delta(\phi_0(x))$ é v_{j+1} , v_0 e v_{j+1} são distintos.

Hipótese: o vértice v_{j+1} não é face de F_{j-1} .

Passo: Seja x o nó $\phi_j(w)$. Vamos chamar de F'_j o elemento de $\mathcal{M}(P)$ contendo o vértice j -colorido de $\delta(x)$. Como $x \neq w$, $\delta(x)$ e $\delta(w)$ não compartilham o vértice de cor j , logo, $F'_j \leq F_j$. Uma vez que $\delta(x)$ e $\delta(w)$ compartilham o vértice $(j-1)$ -colorido, que é o baricentro de F_{j-1} , os elementos F_j e F'_j compartilham a faceta F_{j-1} .

Seja então y o nó de G dado por $\phi_0(\cdots\phi_{j-1}(x)\cdots)$. O vértice v_{j+1} é o vértice 0-colorido de $\delta(y)$. Os elementos $\delta(x)$ e $\delta(y)$ compartilham o vértice de cor j , logo v_{j+1} é face de F'_j . Pelo lema 6.1 as únicas faces compartilhadas por F_j e F'_j são F_{j-1} e suas faces. Pela hipótese de indução, v_{j+1} não é face de F_{j-1} , logo v_{j+1} não é face de F_j . \square

Lema 6.4 *Sejam P e P' duas k -faces de um n -politopo, para $0 \leq k \leq n-1$, e sejam G e G' as gemas representando $\Delta\mathcal{M}_\partial(P)$ e $\Delta\mathcal{M}_\partial(P')$. Se w e w' são nós de G e G' respectivamente tais que $\text{Id}_k(w) = \text{Id}_k(w')$, então $\text{Flag}_k(w) = \text{Flag}_k(w')$.*

Prova: Sejam $\text{Id}_k(w) = \text{Id}_k(w') = (v_0, \dots, v_k)$. Digamos que $\text{Flag}(w) = (F_0, \dots, F_k)$ e $\text{Flag}(w') = (F'_0, \dots, F'_k)$. Os elementos F_0 e F'_0 são o vértice v_0 , portanto são o mesmo elemento. Vamos assumir que já verificamos que os elementos F_{i-1} e F'_{i-1} são iguais. Pelo lema 6.3, F_i é um i -elemento de $\mathcal{M}(P)$ incidente em v_i e F_{i-1} , e F'_i é um i -elemento de $\mathcal{M}(P')$ incidente em v_i e F'_{i-1} (que é igual a F_{i-1}). Pelo lema 6.1, dois i -elementos distintos do mapa de um politopo compartilham duas faces x e y se x é face de y ou y é face de x . Como v_i não é face de F_{i-1} , $F_i = F'_i$. \square

Coincidência entre gemas

Se G e G' são gemas representando a subdivisão baricêntrica do mesmo mapa $\mathcal{M}_\partial(P)$, existe um único isomorfismo ψ entre G e G' que preserva a informação no campo *data*, isto é, $\text{data}(x) = \text{data}(\psi(x))$ para cada nó x de G . Dizemos que tal isomorfismo é uma *coincidência* entre G e G' . Note que, para cada nó x de G , x e $\psi(x)$ correspondem ao mesmo flag de $\mathcal{M}(P)$.

Teorema 6.2 *Sejam P e P' duas k -faces de um n -politopo, para $0 \leq k \leq n-1$, e sejam G e G' as gemas representando $\Delta\mathcal{M}_\partial(P)$ e $\Delta\mathcal{M}_\partial(P')$. Se w e w' são nós de G e G' respectivamente, então $\text{Id}_k(w) = \text{Id}_k(w')$ se e somente se w e w' determinam uma coincidência entre G e G' , o que implica $P = P'$.*

Prova: Se $P = P'$ e a coincidência entre G e G' mapeia w em w' , é trivial que $\text{Id}_k(w) = \text{Id}_k(w')$.

Se $\text{Id}_k(w) = \text{Id}_k(w')$, pelo lema 6.4, $\text{Flag}_k(w) = \text{Flag}_k(w')$, o que implica $P = P'$. Como cada flag de $\mathcal{M}(P)$ (ou $\mathcal{M}(P')$) corresponde a um k -elemento de $\Delta\mathcal{M}(P)$ (ou $\Delta\mathcal{M}(P')$), os nós w e w' correspondem ao mesmo k -elemento de $\Delta\mathcal{M}(P)$. Isto significa que w e w' determinam uma coincidência entre G e G' . \square

Ordenação pela tupla de vértices

Seja G a gema representando a subdivisão baricêntrica do mapa $\mathcal{M}_\partial(P)$ do n -politopo P , e seja S o conjunto dos vértices de P . Se fixarmos uma ordenação arbitrária no conjunto S , podemos ordenar os nós de G por ordem lexicográfica dos identificadores geométricos. Isto é, se w e w' são nós de G tais que $\text{Id}(w) = (v_0, \dots, v_n)$ e $\text{Id}(w') = (v'_0, \dots, v'_n)$, então $\text{Id}(w) < \text{Id}(w')$ se, para algum $i \in \{0, \dots, n\}$, $v_0 = v'_0, v_1 = v'_1, \dots, v_{i-1} = v'_{i-1}$ e $v_i < v'_i$.

Definição 6.3 *O nó representante de uma gema G , denotado por $\text{Rep}(G)$, é o nó com menor identificador geométrico.*

Teorema 6.3 *Sejam P_1 e P_2 duas k -faces de um n -politopo P , para $0 \leq k \leq n-1$, e sejam G_1 e G_2 as gemas representando $\Delta\mathcal{M}_\partial(P_1)$ e $\Delta\mathcal{M}_\partial(P_2)$. Os identificadores geométricos $\text{Id}(\text{Rep}(G_1))$ e $\text{Id}(\text{Rep}(G_2))$ são iguais se e somente se $P_1 = P_2$.*

Prova: Se $\text{Id}(\text{Rep}(G_1)) = \text{Id}(\text{Rep}(G_2))$, pelo teorema 6.2, $P_1 = P_2$.

Se $P_1 = P_2$, existe uma coincidência entre G_1 e G_2 , portanto, o conjunto dos identificadores geométricos dos nós de G_1 é idêntico ao conjunto dos identificadores geométricos dos nós de G_2 . Sendo assim, $\text{Id}(\text{Rep}(G_1)) = \text{Id}(\text{Rep}(G_2))$. \square

Nosso algoritmo obtém o nó representante do casco convexo identificando recursivamente os nós representantes das gemas de suas facetas e escolhendo aquele com identificador geométrico mínimo.

6.3.5 Obtendo vértices independentes de uma face

O identificador geométrico de um nó também fornece uma solução simples para o problema de obter um conjunto de $k+1$ vértices independentes (isto é, um conjunto de vértices cujo casco convexo tem dimensão k) de um k -elemento do mapa de um politopo.

Teorema 6.4 *Seja G a gema representando a subdivisão baricêntrica do mapa $\mathcal{M}_\partial(P)$ de um n -politopo P . Para qualquer nó w de G , os vértices de $\text{Id}_k(w) = (v_0, \dots, v_k)$ são independentes, para $0 \leq k \leq n$.*

Prova: Para $0 \leq i < k$, os vértices v_0, \dots, v_i estão contidos em um mesmo i -elemento F_i , enquanto que o vértice v_{i+1} não está contido. Como P é convexo, v_{i+1} não pertence ao espaço afim gerado por v_0, \dots, v_i (isto é, v_{i+1} não é uma combinação afim dos vértices de F_i). Sendo assim, por um argumento indutivo, se v_0, \dots, v_i é um conjunto de vértices independentes, o conjunto v_0, \dots, v_{i+1} também é. \square

6.4 Esboço do algoritmo

Nosso algoritmo é apresentado abaixo na rotina recursiva $\text{ConvexHull}(S, n)$, que recebe um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^n$ e devolve a gema G que representa $\Delta\mathcal{M}_\partial(\text{conv}(S))$. Além do nó representante de G , esta rotina retorna uma lista com os nós representantes dos $(n - 2)$ -resíduos de G , que são as gemas das facetas de P .

$\text{ConvexHull}(S:\text{conjunto de pontos}, n:\text{dimensão do espaço})$

1. $H \leftarrow \text{InitialFacet}(S)$
2. $S' \leftarrow (S \cap H) \downarrow \mathbb{R}^{n-1}$
3. $(f, Q) \leftarrow \text{ConvexHull}(S', n - 1)$
4. $K \leftarrow \{f\}$
5. $\text{Representante} \leftarrow f$
6. Enquanto $(Q \neq \emptyset)$
7. Escolha um nó r de Q
8. $(v_0, \dots, v_{n-1}) \leftarrow \text{Id}_{n-1}(r)$
9. $p \leftarrow$ um ponto de S não coplanar a $\text{Id}_{n-1}(r)$
10. $A \leftarrow \text{Hiperplano}(v_0, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}; p)$
11. $B \leftarrow \text{Hiperplano}(v_0, \dots, v_{n-2}, p; v_{n-1})$
12. $H \leftarrow \text{AdjacentFacet}(S, A, B)$
13. $S' \leftarrow (S \cap H) \downarrow \mathbb{R}^{n-1}$
14. $(f, Q') \leftarrow \text{ConvexHull}(S', n - 1)$
15. Adicione f a K
16. Para cada nó r' de Q'
17. Se existe um r'' em Q tal que $\text{Id}_{n-2}(r') = \text{Id}_{n-2}(r'')$
18. $\text{GlueResidues}(r', r'', n - 2)$
19. Remova r'' de Q
20. Senão
21. Adicione r' a Q
22. Se $(\text{Id}_{n-1}(f) < \text{Id}_{n-1}(\text{Representante}))$
23. $\text{Representante} \leftarrow f$
24. Retorne $(\text{Representante}, K)$

Denotamos por $\text{Hiperplano}(p_0, p_1, \dots, p_n; q)$ a operação que fornece os coeficientes de um hiperplano H contendo os $n + 1$ pontos independentes p_0, p_1, \dots, p_n e tal que $H(q) > 0$.

Supomos que a entrada S contém pelo menos $n + 1$ pontos independentes. Caso contrário, S deve está contido em um subespaço k -dimensional V de \mathbb{R}^n , com $k < n$; neste caso, pode-se obter o casco convexo escolhendo qualquer projeção de V em \mathbb{R}^k e

chamando $\text{ConvexHull}(S', k)$ no conjunto projetado S' .

Na rotina ConvexHull , K é o conjunto das facetas já determinadas, ou, mais precisamente, o conjunto dos nós representantes das gemas destas facetas. O conjunto Q contém os nós representantes dos $(n - 2)$ -elementos que são faces de somente um elemento de K . O conjunto Q pode ser mantido em uma árvore de busca balanceada ordenada pelos identificadores geométricos. A complexidade da busca, inserção e remoção de um elemento nesta árvore é $O(n \cdot \log |Q|)$, já que cada comparação toma tempo $O(n)$.

Também é necessário implementar o caso trivial da recursão, que lida com pontos em \mathbb{R}^1 . Fazemos agora alguns comentários adicionais sobre passos específicos do algoritmo.

Passos 2 e 13: Antes da chamada recursiva de ConvexHull , os pontos de S contidos no hiperplano de suporte H são projetados no espaço \mathbb{R}^{n-1} , e.g. através da remoção de qualquer coordenada cujo eixo não é paralelo a H .

Passos 10 e 11: Pelo teorema 6.4, os vértices de $\text{Id}_{n-1}(r)$ são independentes. Pelo lema 6.3, os pontos v_0, \dots, v_{n-1} são vértices de um $(n - 1)$ -politopo F de K , e os pontos v_0, \dots, v_{n-2} são vértices de uma faceta R de F . Então, o hiperplano A contém o $(n - 1)$ -politopo F , e a interseção de A e B contém o $(n - 2)$ -politopo R .

Passo 17: Pelos teoremas 6.2 e 6.3, $\text{Id}_{n-2}(r') = \text{Id}_{n-2}(r'')$ se e somente se r' e r'' determinam uma coincidência entre as gemas $\mathcal{G}(r', \{0, \dots, n - 2\})$ e $\mathcal{G}(r'', \{0, \dots, n - 2\})$, que são os $\{0, \dots, n - 2\}$ -resíduos contendo r' e r'' . Neste caso, os elementos do casco convexo representados por estes resíduos são o mesmo elemento.

Passo 18: Neste passo, colamos os $(n - 1)$ -politopos representados por $\mathcal{G}(r', \{0, \dots, n - 1\})$ e $\mathcal{G}(r'', \{0, \dots, n - 1\})$ através de sua faceta coincidente. Isto é feito pela operação $\text{GlueResidues}(r', r'', n - 2)$ utilizando a coincidência determinada por r' e r'' entre esses dois resíduos.

Passos 22 e 23: Estes passos são responsáveis por encontrar o nó representante da gema do casco convexo.

6.4.1 Evitando computação redundante de elementos

Note que este algoritmo computa uma k -face F do casco convexo P uma vez para cada (k, n) -flag de P contendo F . Isto significa que todas as k -faces de P , com $k < n - 1$, são reconstruídas várias vezes. Este esforço redundante pode ser evitado através de uma técnica de programação dinâmica, que consiste em armazenar as soluções já computadas

em uma estrutura de dados que pode ser consultada antes de cada chamada da rotina `ConvexHull`.

Em nossa implementação, mantemos uma *árvore de soluções* AS_k para cada dimensão k entre 1 e $n - 2$. Cada nó da árvore AS_k corresponde a uma chamada da rotina `ConvexHull`, e contém a entrada e a saída desta chamada, que são os $k + 1$ primeiros pontos independentes de entrada, o nó representante da gema resultante e os nós representantes das facetas. As árvores são ordenadas pela entrada. O tempo tomado por cada consulta ou inserção na árvore AS_k é $O(k \cdot \log(f_k(P)))$, onde $f_k(P)$ é o número de k -faces de P .

6.5 Análise

Nesta seção, vamos denotar por $f_k(P)$ o número de k -faces do casco convexo P , e por v o número de pontos de entrada. Utilizaremos o teorema abaixo [14] para analisar a complexidade de nosso algoritmo no pior caso.

Teorema 6.5 *Qualquer n -politopo convexo com v vértices tem $O(v^{\lfloor n/2 \rfloor})$ flags.*

Este teorema implica que o número de k -faces de P , e também o número de j -faces de qualquer k -face de P , para $0 \leq j \leq k \leq n$, é $O(v^{\lfloor n/2 \rfloor})$.

Vamos separar a análise em três partes: as operações topológicas, as operações geométricas e a manutenção das árvores de solução.

6.5.1 Operações topológicas

Seja m o número de nós da gema produzida. O número de `MakeNodes` executados é m e o número de `Swaps` executados é $\frac{mm}{2}$. O número de nós da gema produzida é igual ao número de flags do casco convexo, que é $O(v^{\lfloor n/2 \rfloor})$. Portanto, o tempo tomado pelas operações topológicas é $T_{topo} = O(nv^{\lfloor n/2 \rfloor})$.

6.5.2 Operações geométricas

A rotina `ConvexHull` é chamada uma vez para cada k -face de P , para $2 \leq k \leq n$. Vamos analisar a instância de `ConvexHull` correspondente à k -face F , sendo $S' = S \cap F$. Primeiramente, há uma chamada à rotina `InitialFacet` com parâmetro S' , que toma tempo $O(k(k^4 + vk))$, considerando que $|S'| = O(v)$. Para cada faceta restante de F , há duas chamadas à rotina `Hiperplano`, tomando tempo $O(k^4)$, e uma chamada a `AdjacentFacet`, tomando tempo $O(vk)$. Para cada $(k - 2)$ -face de F , há duas buscas, uma inserção e uma remoção do conjunto Q . O tempo utilizado para manter Q é $O(f_{k-2}(F) \log f_{k-2}(F))$, que

pelo teorema 6.5 pode ser escrito como $O(f_{k-2}(F)k \log v)$. Portanto, o tempo tomado por estas operações nesta instância é $O(f_{k-1}(F)(k^4 + vk) + f_{k-2}(F)k \log v)$.

O tempo gasto em todas as k -faces de P é

$$T_{geo}^{(k)} = O \left(\sum_{k\text{-face } F \text{ de } P} (f_{k-1}(F)(k^4 + vk) + f_{k-2}(F)k \log v) \right) \quad (6.1)$$

Pelo teorema 6.5, podemos reescrever $T_{geo}^{(k)}$ como

$$T_{geo}^{(k)} = O(v^{\lfloor n/2 \rfloor} ((k^4 + vk) + k \log v)) \quad (6.2)$$

O tempo total tomado pelas operações geométricas é

$$T_{geo} = \sum_{k=2}^n T_{geo}^{(k)} = O(v^{\lfloor n/2 \rfloor} ((n^5 + vn^2) + n^2 \log v)) \quad (6.3)$$

6.5.3 Árvores de solução

O número de consultas à árvore de solução para cada k -face F de P , para $1 \leq k \leq n-2$, é o número de $(k+1)$ -faces de P contendo F . Portanto, o tempo total gasto em consultas às árvores de solução é

$$O \left(\sum_{k=1}^{n-2} v^{\lfloor n/2 \rfloor} n^2 \log v \right) \quad (6.4)$$

O tempo gasto inserindo nós nas árvores de solução é

$$O \left(\sum_{k=1}^{n-2} f_k(P) n^2 \log v \right) \quad (6.5)$$

Portanto, o tempo total gasto nas árvores de solução é

$$T_{arv} = O(v^{\lfloor n/2 \rfloor} n^3 \log v) \quad (6.6)$$

O resultado principal desta seção é apresentado no seguinte teorema.

Teorema 6.6 *A gema do casco convexo de v pontos no \mathbb{R}^n pode ser computada em tempo $O(v^{\lfloor n/2 \rfloor} (n^5 + vn^2 + n^3 \log v))$.*

6.6 Visualização dos resultados

O algoritmo descrito neste capítulo foi implementado e testado em vários conjuntos de pontos, com dimensão variando entre 2 e 6. Para averiguar se a implementação funcionava corretamente, geramos imagens dos polítopos resultantes nos casos de dimensão 3 e 4.

Após obtermos a gema de cada politopo, enumeramos os resíduos de cor $\{0, \dots, n\} \setminus \{2\}$, de forma a obter as faces bidimensionais. Utilizamos então um traçador de raios para gerar imagens desta coleção de faces. Cada face foi desenhada como um polígono semi-transparente e cada aresta foi desenhada como um segmento opaco.

A seguir, apresentamos algumas das imagens geradas.

6.6.1 Polítopos de dimensão 3

Cubo

O cubo na figura 6.4(a) é o casco convexo do conjunto de pontos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. A figura 6.4(b), é o casco convexo deste conjunto de pontos rodado pela matriz

$$M_{rot3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Estes dois poliedros ilustram a capacidade de nosso algoritmo para lidar com faces não simpliciais.

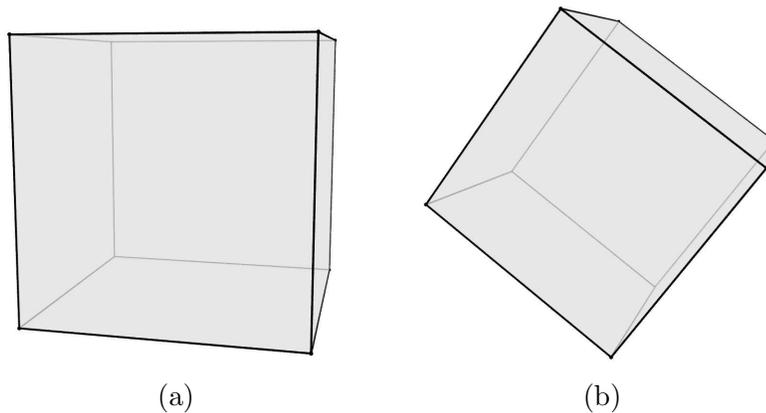


Figura 6.4: Cubo.

12-faces

O poliedro da figura 6.5 é um outro exemplo de casco convexo com faces não simpliciais. A entrada que produziu este politopo é o conjunto de 14 pontos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$. Este poliedro tem 12 losangos como facetas.

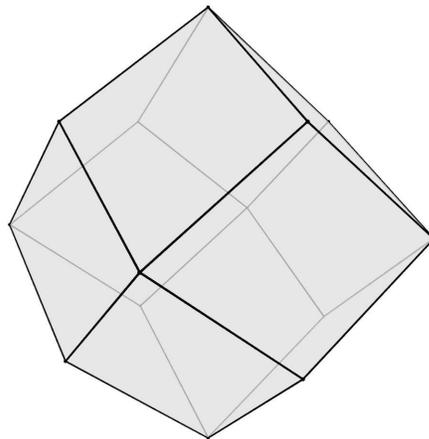
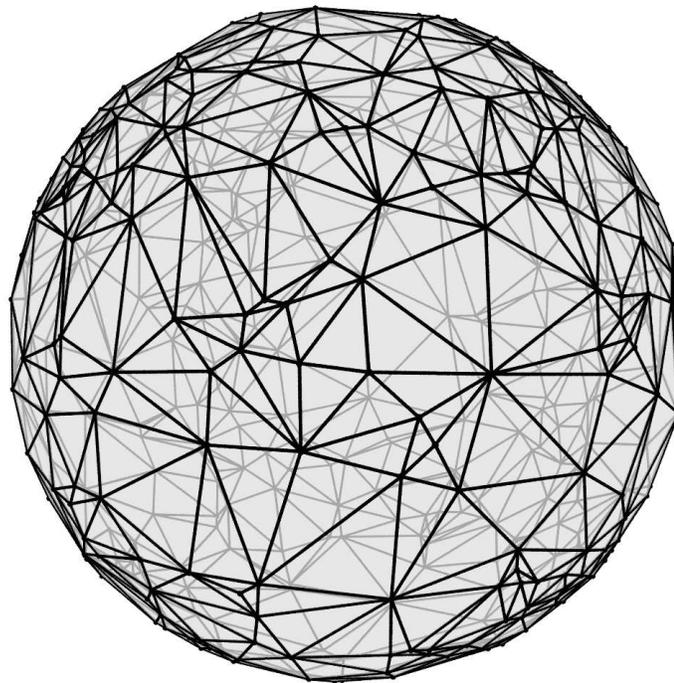


Figura 6.5: 12-faces.

Pontos sobre a esfera \mathbb{S}^2

O politopo da figura 6.6 é o casco convexo de um conjunto de 500 pontos do \mathbb{Z}^3 , sendo cada um deles uma aproximação de um ponto posicionado aleatoriamente sobre a esfera dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1000^2$.

Figura 6.6: Casco convexo de pontos próximos à esfera \mathbb{S}^2 .

6.6.2 Polítopos de dimensão 4

No caso dos polítopos de dimensão quatro, é preciso projetar os vértices no espaço \mathbb{R}^3 antes de utilizar o traçador de raios. Empregamos então a seguinte transformação não-linear sobre as coordenadas x, y, z e w dos vértices dos polítopos:

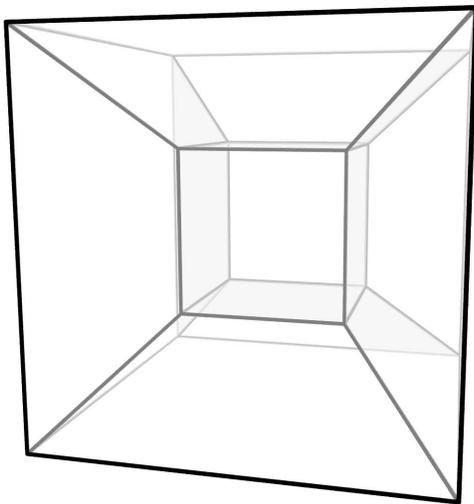
$$T(x, y, z, w) = \frac{1}{1 + Dw} (x, y, z)$$

onde D é uma constante entre 0,005 e 0,05 tal que $w > -\frac{1}{D}$ para todo vértice.

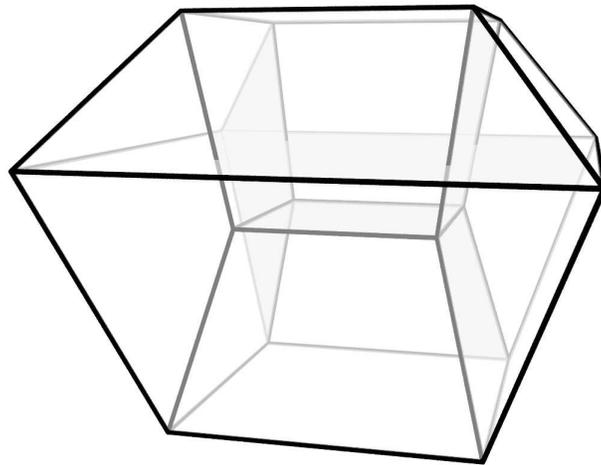
Hipercubo

O hipercubo é a generalização do cubo para dimensões maiores que três. Na figura 6.7(a) vemos o hipercubo que é o casco convexo do conjunto de pontos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. A figura 6.7(b), é o casco convexo deste conjunto de pontos rodado pela matriz

$$M_{rot4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

Figura 6.7: Hipercubo.

24-célula

O 24-célula, ilustrado na figura 6.8 é um politopo 4-dimensional regular que tem 24 octaedros como facetas. Seus vértices são os seguintes: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$.

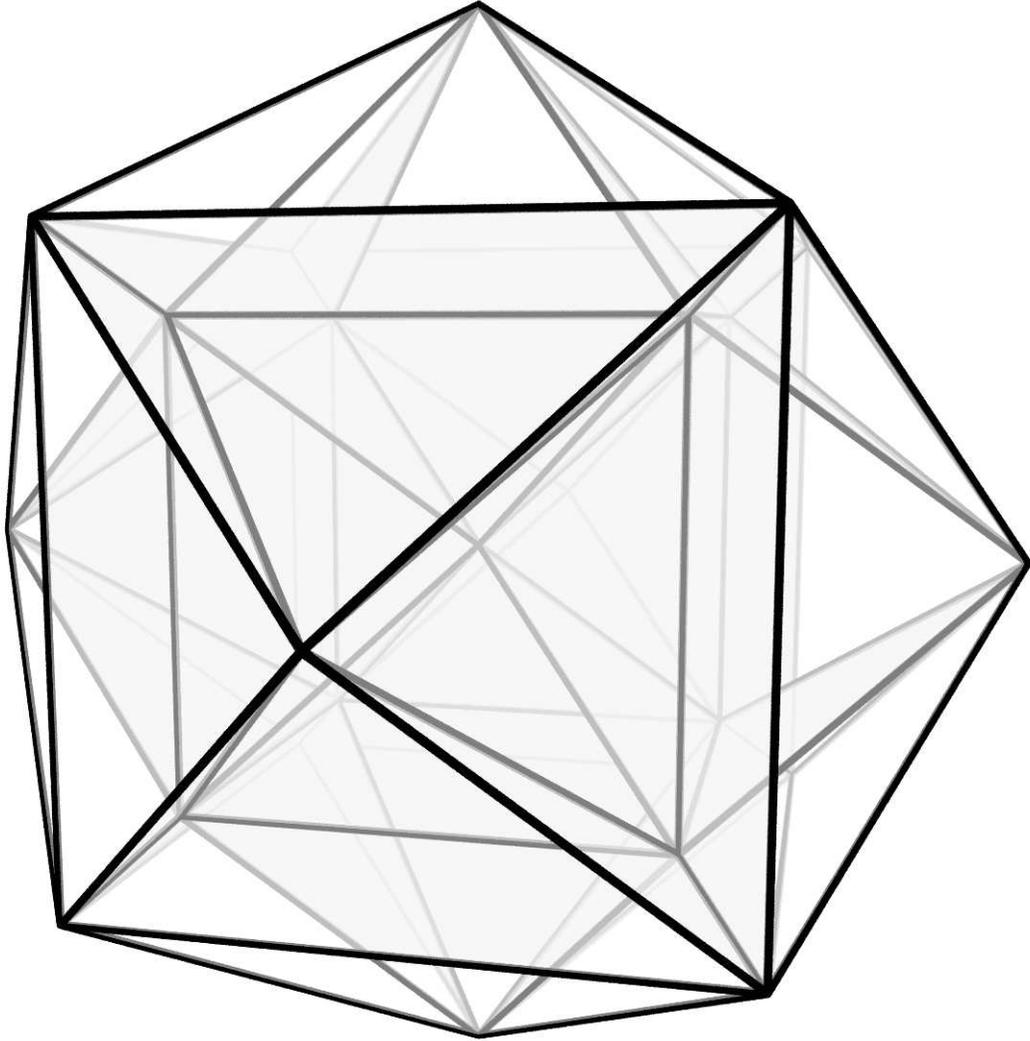


Figura 6.8: 24-célula.

Capítulo 7

Refinamento local de gemas

Neste capítulo, vamos restringir o conceito de subdivisão de mapas a triangulações. Isto é, uma subdivisão de uma triangulação T é uma triangulação T' tal que $|T'| = |T|$ e cada elemento de T é uma união de elementos de T' . Além disso, uma subdivisão de uma triangulação colorida T é uma triangulação colorida T' que preserva as cores de T , isto é, se o vértice v de T' pertence à triangulação original T , sua cor é a mesma em T e T' .

Em muitas aplicações, como o refinamento adaptativo de triangulações para aproximação de superfícies, é necessário realizar subdivisões locais em triangulações. Ao contrário dos esquemas de subdivisão global — como a subdivisão baricêntrica — as subdivisões locais afetam apenas uma pequena parte da triangulação. No caso mais simples, esta subdivisão afeta um único elemento da triangulação, e é chamada de *subdivisão elementar*. Uma subdivisão elementar de uma n -triangulação T em um n -elemento c é uma subdivisão T' de T que contém $T \setminus \{c\}$ mas não contém c . Veja a figura 7.1.

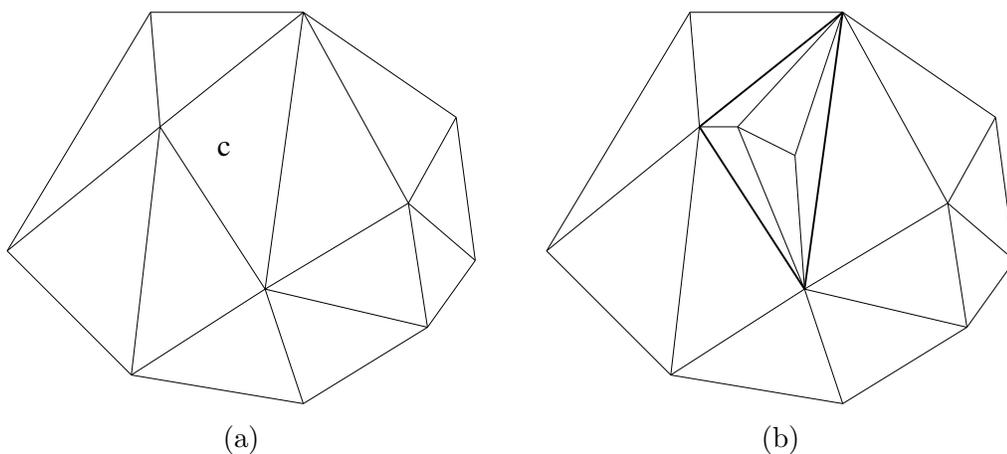


Figura 7.1: (a) Uma 2-triangulação com um 2-elemento c . (b) Uma subdivisão elementar em c .

Em geral, esquemas de subdivisão elementar para triangulações arbitrárias não são necessariamente aplicáveis a triangulações coloridas. Veja a figura 7.2.

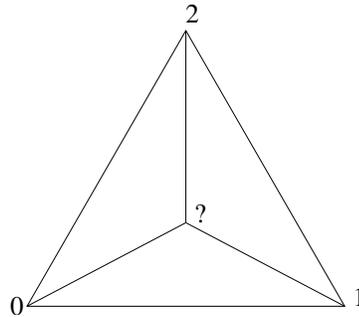


Figura 7.2: Um esquema simples de subdivisão elementar de um triângulo que não se aplica a triangulações coloridas.

Na próxima seção, especificamos, em termos de gemas, uma operação de subdivisão elementar específica para triangulações coloridas e, em seguida, apresentamos uma extensão desta operação que subdivide elementos de *dimensão arbitrária* em uma triangulação colorida. Na seção seguinte, descrevemos subdivisões elementares mínimas, isto é, que adicionam um número mínimo de novos nós à gema.

7.1 Subdivisão elementar em gemas

7.1.1 Subdividindo n -elementos em n -triangulações

Seja T uma n -triangulação coesa representada por uma n -gema $G = (V, \phi)$. Suponha que seja necessário subdividir o n -elemento c de T , correspondente ao nó v de V , de forma a obter uma triangulação refinada T' .

Primeiramente, precisamos especificar a subdivisão de c , isto é, o subconjunto dos elementos de T' contidos em c . Uma maneira simples de obter tal subdivisão é tomar uma n -triangulação com mais de dois n -elementos sobre a esfera \mathbb{S}^n e interpretar um dos n -elementos como uma face externa. Na verdade, qualquer subdivisão de c pode ser obtida desta forma. Veja a figura 7.3(a).

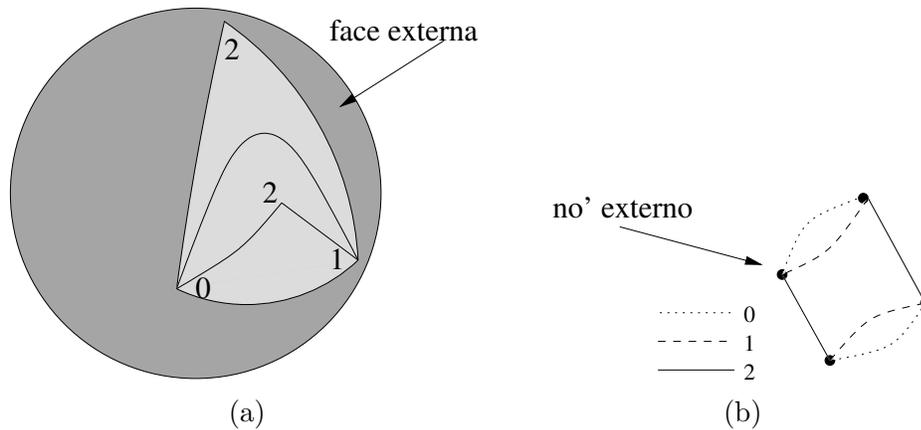


Figura 7.3: (a) Uma triangulação colorida sobre a esfera \mathbb{S}^2 fornecendo uma subdivisão de um triângulo. (b) A gema divisora correspondente.

Dizemos que uma C -gema com mais de dois nós representando uma triangulação sobre a esfera $\mathbb{S}^{|C|-1}$ é uma C -gema *divisora*. O nó da gema divisora correspondente à face externa é chamado de *nó externo*. Veja a figura 7.3(b).

Definimos abaixo a operação de subdivisão elementar, que toma o nó v da C -gema G e o nó externo x de uma C -gema divisora, e realiza uma cirurgia para obter a gema refinada.

SubdivElem(v, x :nós, C :conjunto de cores):
 $L \leftarrow \{(v, \phi_i(x), i) : i \in C\}$;
 Cirurgia(L);

Veja as figuras 7.4 e 7.5.

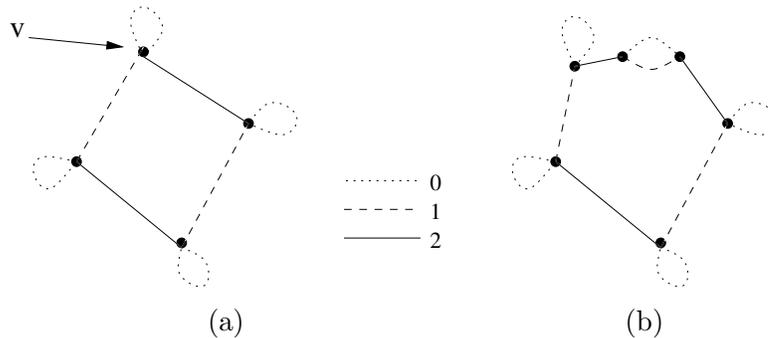


Figura 7.4: Aplicação de subdivisão elementar em gemas: (a) Uma gema com um nó v . (b) O resultado da operação $\text{SubdivElem}(v, x, \{0, 1, 2\})$, onde x é o nó externo da gema divisora da figura 7.3(b).

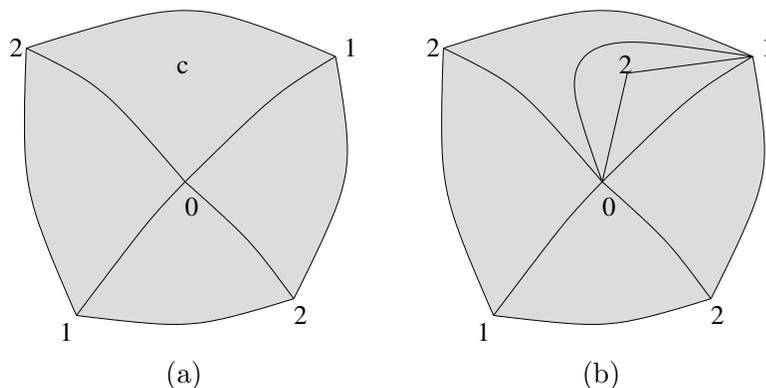


Figura 7.5: As triangulações representadas pela gemas das figuras 7.4(a) e (b).

7.1.2 Subdividindo elementos arbitrários em n -triangulações

Vamos estender o conceito de subdivisão elementar de modo a possibilitar a subdivisão local de qualquer D -elemento c de uma C -triangulação, para $D \subseteq C$. Neste caso, para que a subdivisão resultante seja uma triangulação, é necessário estender a subdivisão de c para sua estrela. Veja a figura 7.6.

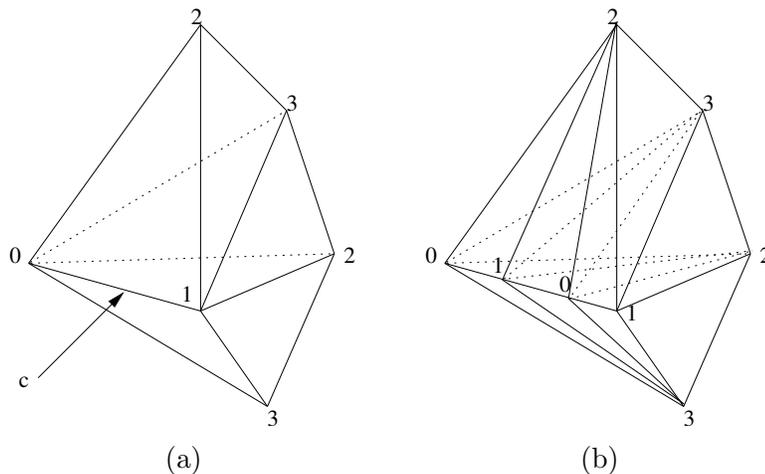


Figura 7.6: (a) Uma 3-triangulação colorida com uma aresta c . (b) Uma subdivisão elementar de c pela inserção de dois novos vértices. A subdivisão foi estendida para os elementos incidentes em c , de forma que cada elemento do mapa resultante seja um simplexo.

Apresentamos a extensão da operação `SubdivElem` que realiza a subdivisão de um D -elemento c qualquer na C -triangulação representada por uma gema. Esta operação toma um nó v do $(C \setminus D)$ -resíduo correspondente a c e um nó x de uma D -gema divisora. Sua implementação é dada abaixo.

SubdivElem(v, x :nós, C, D :conjuntos de cores):

$p \leftarrow \text{Produto}(v, C \setminus D, x, D)$;

$L \leftarrow \{(w, \phi_i(\psi(w)), i) : w \in \mathcal{G}(v, C \setminus D), i \in D\}$;

Cirurgia(L);

Onde $\text{Produto}(v_1, C_1, v_2, C_2)$ denota a operação que produz a $(C_1 \cup C_2)$ -gema $\mathcal{G}(v_1, C_1) \times \mathcal{G}(v_2, C_2)$ (isto é, o produto entre o C_1 -resíduo contendo v_1 e o C_2 -resíduo contendo v_2) e retorna o nó (v_1, v_2) ; e ψ é o isomorfismo entre os resíduos $\mathcal{G}(v, C \setminus D)$ e $\mathcal{G}(p, C \setminus D)$ determinado pelos nós v e p .

Esta implementação admite a seguinte interpretação. Seja K_c o submapa da triangulação original T consistindo dos elementos contidos no fecho do D -elemento c a ser subdividido, e seja K'_c a subdivisão de K_c especificada pela gema divisora. O produto da gema divisora com o resíduo correspondente a c equivale a à junção de K'_c com a órbita de c . A cirurgia, então, substitui os elementos de T dados por $K_c \star \text{Orb}(c)$ (isto é, os elementos contidos no fecho da estrela de c) pela junção $K'_c \star \text{Orb}(c)$. Veja as figuras 7.7, 7.8 e 7.9.

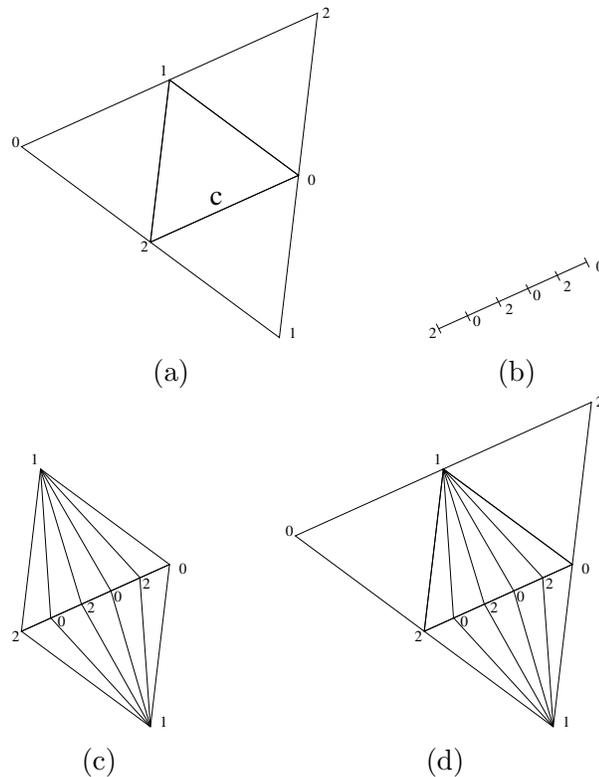


Figura 7.7: Subdivisão elementar estendida: (a) A triangulação original com uma aresta c a ser subdividida. (b) A subdivisão K'_c da aresta c . (c) A junção da subdivisão K'_c com a órbita $\text{Orb}(c)$. (d) A substituição dos elementos contidos em $\kappa\text{St}(c)$ pela junção $K'_c \star \text{Orb}(c)$.

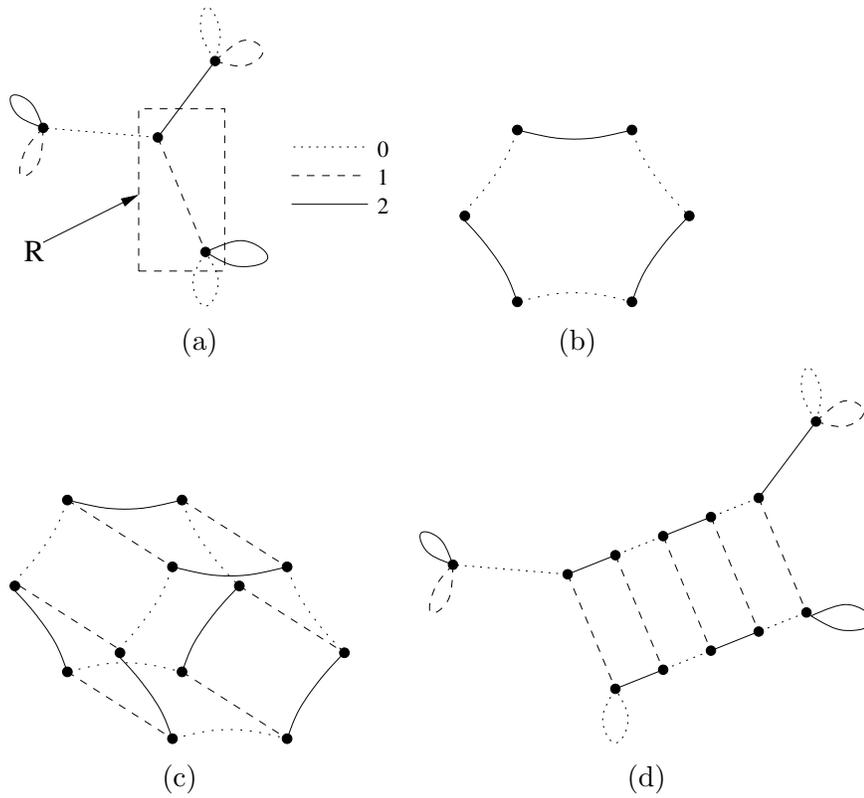


Figura 7.8: A mesma subdivisão da figura 7.7, em termos de gemas: (a) A gema original, com o resíduo R correspondente à aresta c . (b) A gema divisora que especifica a subdivisão de c . (c) O produto da gema divisora com o resíduo R . (d) A gema resultante da cirurgia — que representa a triangulação da figura 7.7(d).

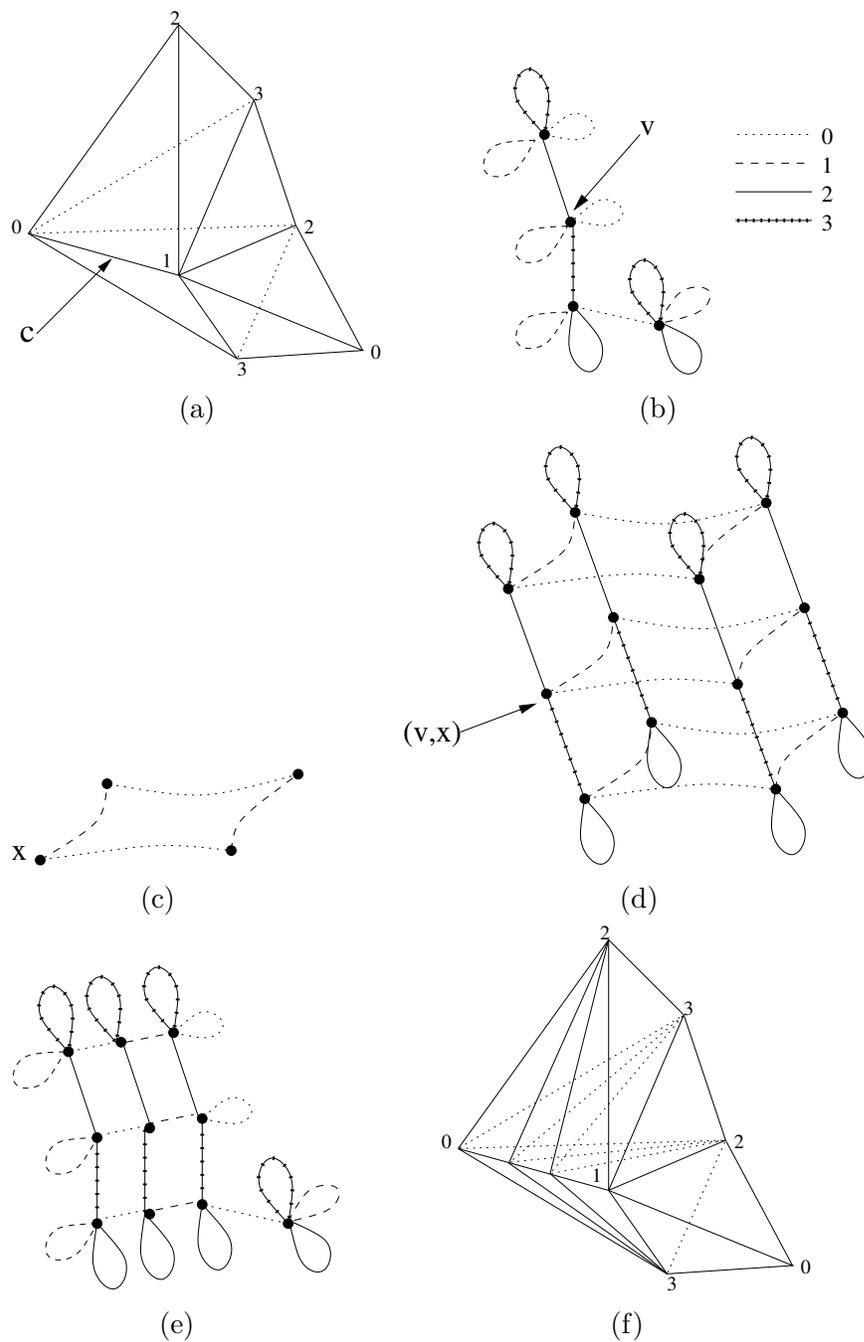


Figura 7.9: Exemplo de aplicação da operação `SubdivElem`: (a) Uma 3-triangulação com uma aresta c a ser subdividida. (b) A gema que representa a triangulação; e um nó v do resíduo correspondente a c . (c) Gema divisora para subdividir c em três arestas; e o nó externo x desta gema. (d) Produto da gema divisora com o $\{2, 3\}$ -resíduo correspondente a c , obtido pela operação $\text{Produto}(v, \{2, 3\}, x, \{0, 1\})$. (e) A gema resultante da cirurgia. (f) Triangulação resultante da subdivisão.

7.2 Subdivisão elementar mínima

Desejamos saber como realizar uma subdivisão elementar adicionando o menor número possível de nós à gema. Este número é proporcional ao número de nós da gema divisora menos dois. Mais especificamente, se i é o número de nós do resíduo correspondente ao elemento subdividido e j é o número de nós da gema divisora, a gema resultante da subdivisão tem $i(j - 2)$ nós a mais do que a original.

Uma *subdivisão elementar mínima* é feita utilizando uma gema divisora com um número mínimo de nós. Vamos mostrar que o número mínimo de nós de uma gema divisora de qualquer dimensão é quatro.

Lema 7.1 *Qualquer C -gema fechada, sendo $|C| \geq 1$, tem um número par de nós.*

Prova: Para toda cor i de C , cada $\{i\}$ -resíduo da gema tem exatamente dois nós. Portanto, o número de nós é necessariamente par. \square

Como qualquer gema divisora tem mais do que dois nós e é fechada (pois a esfera não tem bordas), o número mínimo de nós de uma gema divisora de qualquer dimensão é quatro.

Para qualquer $n \geq 1$ podemos construir uma n -gema sobre a esfera \mathbb{S}^n com apenas quatro nós, da seguinte forma. Seja $C = D \cup E$ o conjunto de cores da gema, sendo D e E não vazios e disjuntos. Sejam então G_D e G_E gemas fechadas de cores D e E , respectivamente, com dois nós cada. Obviamente, as triangulações representadas por G_D e G_E são subdivisões de esferas. A C -gema divisora mínima é dada pelo produto $G_D \times G_E$. Veja a figura 7.10.

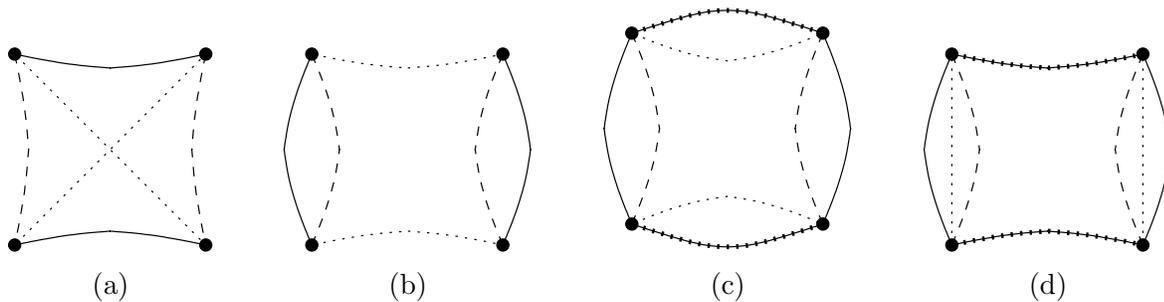


Figura 7.10: Gemas divisoras mínimas de dimensão um (a) dois (b) e três (c),(d).

Esta construção produz $2^n - 1$ n -gemas distintas, para cada $n \geq 1$. Para provarmos que estas gemas são divisoras, precisamos do seguinte lema.

Lema 7.2 *Se G_1 e G_2 são gemas com conjuntos de cores disjuntos representando triangulações sobre esferas, a gema $G_1 \times G_2$ também representa uma triangulação sobre a esfera.*

Prova: A triangulação canônica $\mathcal{T}_{G_1 \times G_2}$ é isomorfa à junção $\mathcal{T}_{G_1} \star \mathcal{T}_{G_2}$; e o espaço subjacente de $\mathcal{T}_{G_1} \star \mathcal{T}_{G_2}$ é homeomorfo a $|\mathcal{T}_{G_1}| \star |\mathcal{T}_{G_2}|$. Como os espaços $|\mathcal{T}_{G_1}|$ e $|\mathcal{T}_{G_2}|$ são homeomorfos a esferas, sua junção também é homeomorfa a uma esfera [32]. \square

Observe que há gemas com quatro nós que não são divisoras válidas, pois não representam triangulações sobre a esfera. Veja a figura 7.11.

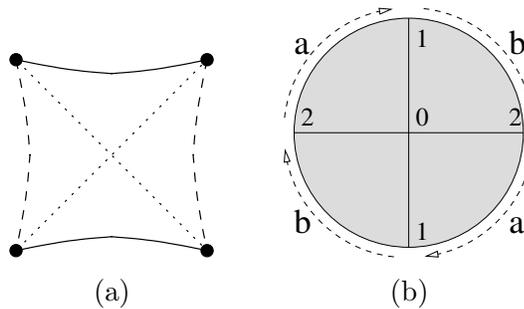


Figura 7.11: (a) Uma gema G de quatro nós. (b) A triangulação \mathcal{T}_G , sobre um espaço homeomorfo ao plano projetivo real \mathbb{P}^2 .

As figuras 7.4 e 7.5 mostram um exemplo de subdivisão utilizando a 2-gema divisora mínima da figura 7.10(b).

7.2.1 Subdivisões de triangulações linearmente realizáveis

Em muitas aplicações, é necessário subdividir triangulações LR, e espera-se que o resultado desta subdivisão seja também LR. Nesta seção vamos explorar subdivisões elementares de triangulações LR representadas por gemas.

O teorema abaixo fornece uma caracterização simples de triangulações LR.

Teorema 7.1 *Uma n -triangulação T é LR se e somente se, para quaisquer $k+1$ vértices distintos v_0, \dots, v_k , sendo $0 \leq k \leq n$, existe no máximo um k -elemento de T incidente em v_0, \dots, v_k .*

Prova: Se T é uma triangulação linear, todos os vértices de T são pontos de \mathbb{R}^m , para algum $m \geq 0$, e o fecho de cada elemento de T é o casco convexo de seus vértices. Sendo assim, se c e d são k -elementos distintos de T , eles não podem compartilhar todos seus $k+1$ vértices. Em outras palavras, para quaisquer $k+1$ vértices distintos v_0, \dots, v_k de T , existe

no máximo um k -elemento de T incidente em v_0, \dots, v_k . Obviamente, esta propriedade vale também para as triangulações isomorfas às lineares, isto é, as triangulações LR.

Considere, por outro lado, que T é uma n -triangulação em que nenhum par de k -elementos distintos, para $0 \leq k \leq n$ compartilha seus $k + 1$ vértices. Vamos descrever como obter uma triangulação linear T' isomorfa a T . Sejam v_0, \dots, v_m os vértices de T e sejam x_0, \dots, x_m os vetores unitários dos eixos de coordenadas de \mathbb{R}^{m+1} . Para cada $i \in \{0, \dots, m\}$, a triangulação T' tem um vértice $f(v_i)$ posicionado em x_i e, para cada k -elemento de T , com vértices $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1}}$, a triangulação T' tem um k -elemento dado por $\left\{ \alpha_1 \cdot f(v_{i_1}) + \alpha_2 \cdot f(v_{i_2}) + \dots + \alpha_{k+1} \cdot f(v_{i_{k+1}}) : \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j = 1, \alpha_j > 0 \right\}$. Note que T' é um submapa do n -esqueleto do simplexo canônico \mathcal{S}_m e, logo, é uma n -triangulação linear. A função $f : T \rightarrow T'$ é uma bijeção que preserva as relações de incidência, sendo assim T e T' são isomorfos. \square

Podemos transcrever o teorema acima em termos de gemas, dizendo que uma n -gema é LR, isto é, representa uma triangulação LR, se para quaisquer $k + 1$ $(n - 1)$ -resíduos distintos R_0, \dots, R_k ($0 \leq k \leq n$), o número de $(n - k - 1)$ -resíduos contidos simultaneamente em R_0, \dots, R_k é no máximo um.

Prova-se que, se G é uma gema LR, uma subdivisão elementar de G é LR se e somente se a gema divisora é LR. Note que as gemas divisoras mínimas de dimensão maior que um dadas na seção 7.2 não são LR. A 2-gema dada pela figura 7.10(b), por exemplo, tem um único $\{0, 1\}$ -resíduo R_1 e um único $\{0, 2\}$ -resíduo R_2 , e número de $\{0\}$ -resíduos contidos simultaneamente em R_1 e R_2 é dois.

Fornecemos agora um limite inferior para o número de nós de uma gema divisora LR e, em seguida, apresentamos uma classe de gemas que atinge esse limite.

Lema 7.3 *Seja G uma C -gema LR e seja $D \subseteq C$. Se R é um D -resíduo de G , cada nó de R pertence a um $(C \setminus D)$ -resíduo distinto de G .*

Prova: Digamos que $n = |C| - 1$, isto é, G é uma n -gema. Suponha que v e w sejam nós distintos de R pertencentes ao mesmo $(C \setminus D)$ -resíduo R' de G . Para cada i de C , seja R_i o $(C \setminus \{i\})$ -resíduo de G contendo v . Como G é LR, o nó w não pode estar contido simultaneamente em todos os $(n - 1)$ -resíduos do conjunto $\{R_i | i \in C\}$.

Note porém que, para cada i de C , se $i \in D$, R' está contido em R_i , logo w está contido em R_i ; por outro lado, se $i \in C \setminus D$, R está contido em R_i , logo w também está contido em R_i . Temos portanto uma contradição. \square

Lema 7.4 *Se G é uma C -gema LR e fechada, para cada $i \in C$, G tem no mínimo dois $(C \setminus \{i\})$ -resíduos.*

Prova: Sejam v e w nós de G ligados por uma aresta de cor i . Como G é fechada, v e w são distintos. Pelo lema 7.3, v e w pertencem a $(C \setminus \{i\})$ -resíduos distintos de G . Sendo assim, o número de $(C \setminus \{i\})$ -resíduos de G é no mínimo dois. \square

Teorema 7.2 *Se G é uma n -gema LR e fechada, o número mínimo de nós de G é 2^{n+1} .*

Prova: Damos uma prova por indução. Primeiramente, note que qualquer 0-gema fechada tem no mínimo dois nós. Suponha agora que, para algum $n > 1$, qualquer $(n-1)$ -gema LR e fechada tem no mínimo 2^n nós. Seja então G uma C -gema LR e fechada, sendo $|C| = n + 1$. Todos os $(n-1)$ -resíduos de G são LR e fechados, portanto, pela hipótese de indução, eles têm no mínimo 2^n nós. Pelo lema 7.4, para qualquer i de C , G tem dois ou mais $(C \setminus \{i\})$ -resíduos. Sendo assim, G tem no mínimo 2^{n+1} nós. \square

Gemas cruz

Definimos agora uma classe de gemas que representam triangulações LR sobre a esfera e que têm um número mínimo de nós. Uma C -gema cruz é uma C -gema $G = (V, \phi)$ onde V é a coleção de todos subconjuntos de C e tal que, para quaisquer D_1 e D_2 de V , $\phi_i(D_1) = D_2$ se e somente se $(D_1 \setminus D_2) \cup (D_2 \setminus D_1) = \{i\}$. Veja a figura 7.12 abaixo.

O nome *gema cruz* se deve ao fato de essas gemas representarem triangulações isomorfas aos mapas das fronteiras dos politopos cruz, isto é, o quadrado, o octaedro, o hiperoctaedro, etc.

É óbvio, por sua definição, que o número de nós de uma n -gema cruz é 2^{n+1} . Vamos agora mostrar que tais gemas podem ser usadas como gemas divisoras LR.

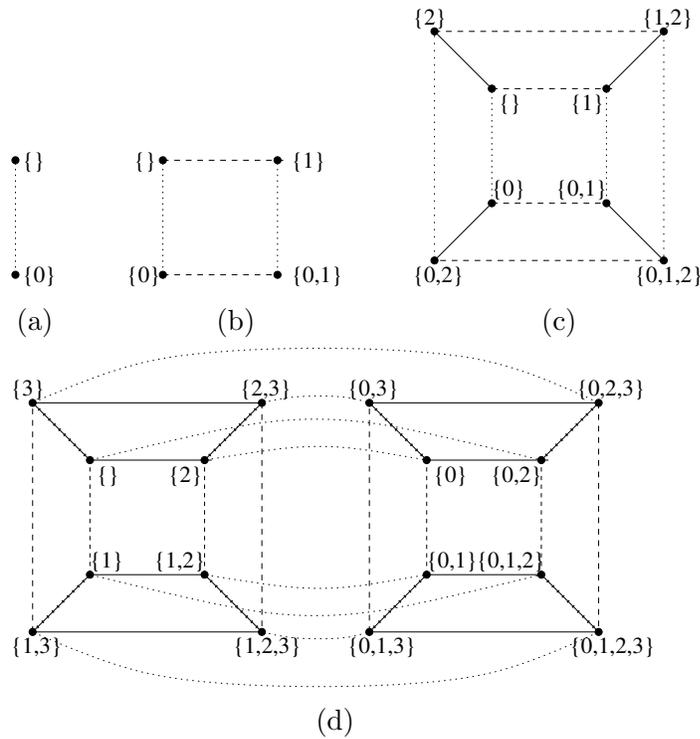


Figura 7.12: Gemas cruz de dimensão (a) zero, (b) um, (c) dois e (d) três.

Teorema 7.3 *Toda n -gema cruz representa uma triangulação sobre a esfera \mathbb{S}^n .*

Prova: Este fato é facilmente provado por uma indução utilizando o lema 7.2. \square

Teorema 7.4 *Toda gema cruz é LR.*

Prova: Seja G uma C -gema cruz, sendo $n = |C| - 1$. Precisamos mostrar que, para quaisquer $k + 1$ $(n - 1)$ -resíduos R_0, \dots, R_k distintos de G , sendo $0 \leq k \leq n$, o número de $(n - k - 1)$ -resíduos contidos simultaneamente em R_0, \dots, R_k é no máximo um.

Note que se algum par de resíduos dentre R_0, \dots, R_k tem a mesma coloração, então não existe nenhum nó de G compartilhado por R_0, \dots, R_k . Sendo assim, cada R_i tem uma coloração distinta $C \setminus \{j_i\}$, sendo $j_i \in C$. Pela simetria das gemas cruz, podemos supor, sem perda de generalidade, que os nós de cada resíduo R_i são os subconjuntos de C que contêm a cor j_i . Desta forma, os nós compartilhados por R_0, \dots, R_k são os subconjuntos de C contendo as cores j_0, \dots, j_k . Note que, para cada par D_1, D_2 destes subconjuntos, $(D_1 \setminus D_2) \cup (D_2 \setminus D_1) \subseteq C \setminus \{j_0, \dots, j_k\}$. Sendo assim, os resíduos R_0, \dots, R_k compartilham exatamente um $(C \setminus \{j_0, \dots, j_k\})$ -resíduo. \square

Veja a figura 7.13.

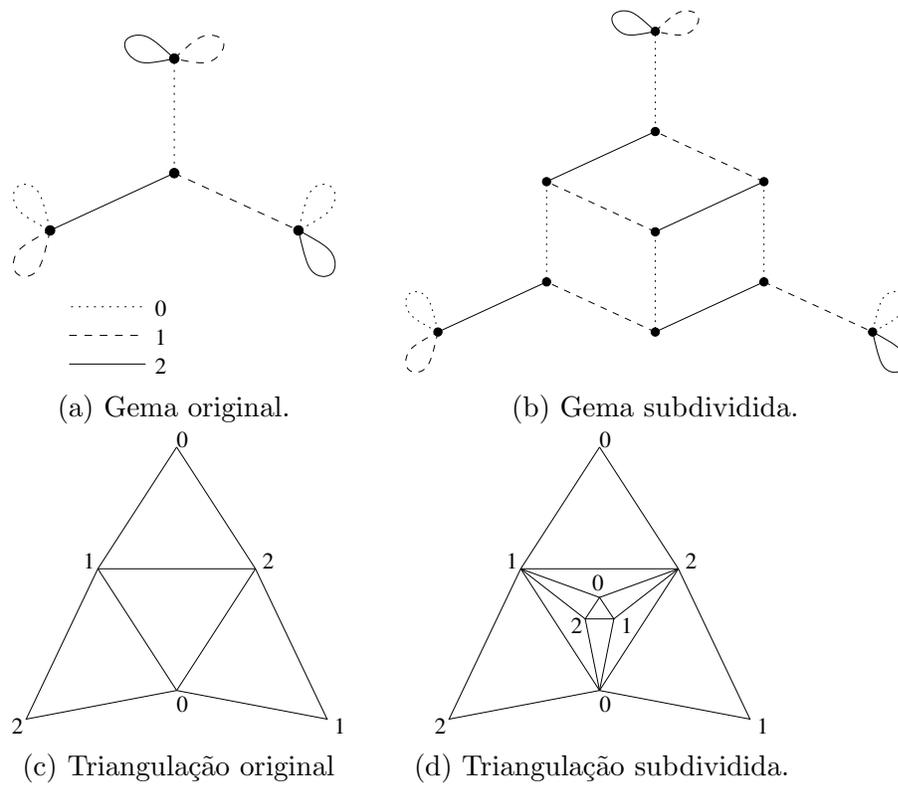


Figura 7.13: Subdivisão elementar de um triângulo utilizando a 2-gema cruz:
 (a) Gema original. (b) Gema subdividida. (c) Triangulação original. (d) Triangulação subdividida.

Capítulo 8

Refinamento adaptativo de gemas

Neste capítulo, tratamos o problema de refinamento adaptativo de triangulações. Este problema nos permite apresentar uma aplicação prática de gemas não baricêntricas, bem como das subdivisões elementares apresentadas no capítulo anterior. Apresentamos também uma aplicação que utiliza o refinamento adaptativo para aproximar uma função contínua de duas variáveis por uma triangulação linear.

8.1 Refinamento adaptativo em triangulações

O problema que estamos tratando consiste informalmente em, dada uma n -triangulação M e um critério Ψ que indica se um elemento precisa ser subdividido, produzir uma subdivisão de M em que todos os elementos atendam o critério Ψ . Uma boa solução para este problema produz subdivisões em que o aumento do número de elementos em relação à triangulação original é relativamente pequeno. Além disso, pode-se impor outros critérios para medir a qualidade da triangulação produzida. No caso de triangulações bidimensionais, por exemplo, um critério comum é a medida do ângulo interno mínimo (ou máximo) dos triângulos.

Um exemplo prático deste tipo de problema é a aproximação de funções utilizando o método dos elementos finitos [54]. Este método requer a construção de uma malha (uma triangulação linear) sobre um domínio pré-determinado, que é então utilizada na obtenção de uma aproximação polinomial por partes (*spline*) da solução. Tipicamente, este processo se inicia com a construção de uma triangulação grosseira sobre o domínio, e então se intercalam passos de avaliação de erros e refinamento da triangulação. Avaliação de erros fornece o critério de subdivisão utilizado no passo de refinamento. A iteração destes dois passos cessa quando os erros de aproximação da solução estiverem dentro de um limite pré-determinado.

A idéia geral do refinamento adaptativo está expressa no código abaixo.

RefinamentoAdaptativo(Ψ :critério de subdivisão; \mathcal{D} :domínio)

1. $T_0 \leftarrow n$ -triangulação inicial sobre \mathcal{D}
2. $i \leftarrow 0$
3. Repita
4. Marcar os elementos de T_i que não atendem ao critério Ψ
5. Se não existe elemento marcado em T_i , parar a repetição
6. $T_{i+1} \leftarrow \text{Refinar}(T_i)$
7. $i \leftarrow i + 1$
8. Retorne T_i

No caso mais geral, qualquer elemento de dimensão positiva pode ser marcado para subdivisão, não importando se suas faces ou elementos incidentes são também marcados. A operação **Refina** deve então subdividir todos os elementos marcados, e também os elementos não marcados que têm alguma face marcada.

Na prática, porém, marca-se apenas os elementos de determinada dimensão — tipicamente os n -elementos. Neste caso, um n -elemento da triangulação é marcado sse ele ou alguma de suas faces não atende ao critério Ψ . A operação **Refina**, então, subdivide um i -elemento c , para $1 \leq i \leq n$, se todos os n -elementos incidentes em c estão marcados.

É razoável supor que o critério Ψ seja consistente, significando que, se o n -elemento s está contido no n -elemento t , $\Psi(t) \Rightarrow \Psi(s)$. Sendo assim, no algoritmo de refinamento, um n -elemento s da triangulação T_i precisa ser avaliado pelo critério Ψ somente se s foi produzido pela subdivisão de um n -elemento $t \supset s$ de T_{i-1} .

Neste capítulo, exemplificamos a aplicação dos algoritmos de refinamento através do cálculo de aproximações de uma função f sobre um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Vamos considerar apenas aproximações por splines de grau um (funções lineares por partes) contínuos. Neste modelo, o spline S é completamente determinado pelos seus valores nos vértices da malha. Vamos supor também que a aproximação S deve ser uma interpolação, isto é, $S(v) = f(v)$ para cada vértice v da malha. Após construirmos uma triangulação grosseira T_0 sobre \mathcal{D} aplicamos o algoritmo de refinamento adaptativo com o seguinte critério de subdivisão: se t é um triângulo da triangulação com vértices v_a , v_b e v_c , e $p = \alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c$ é uma combinação convexa destes vértices, t deve ser subdividido se $|f(p) - (\alpha f(v_a) + \beta f(v_b) + \gamma f(v_c))| > \epsilon$, para alguma constante ϵ pré-definida. Após certo número de iterações, obtemos uma triangulação T_k em que nenhum triângulo precisa ser subdividido. A aproximação linear de f no domínio \mathcal{D} é obtida deslocando cada vértice v de T_k do ponto $(x_v, y_v, 0)$ para $(x_v, y_v, f(x_v, y_v))$. Veja as figuras 8.1 e 8.2.

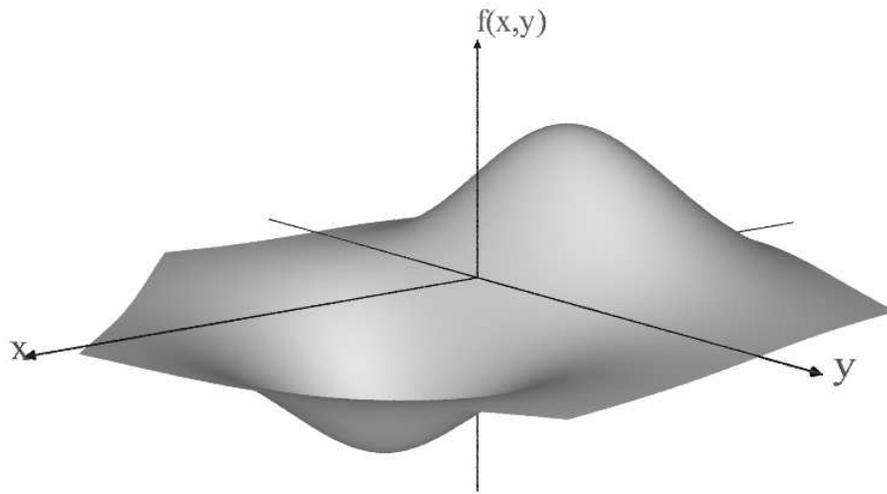


Figura 8.1: Uma função f sobre um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.

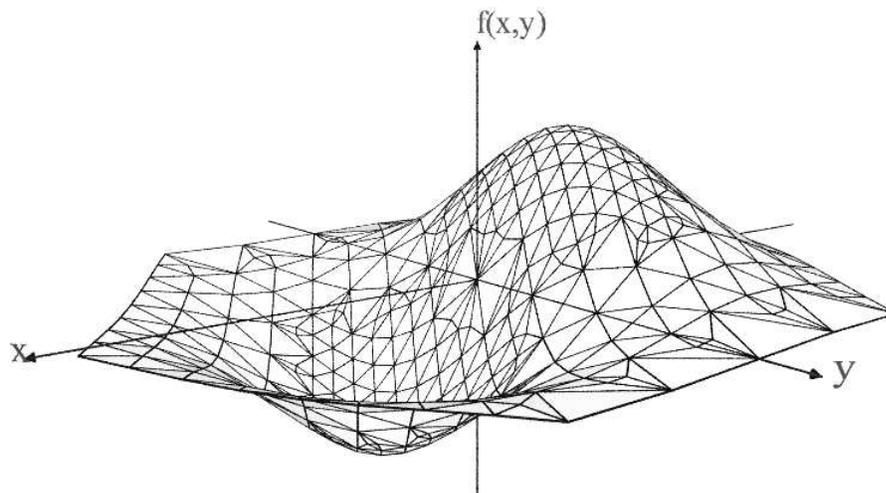


Figura 8.2: Uma aproximação da função f da figura 8.1 por uma triangulação linear.

8.2 Algoritmo para refinamento colorido

Nesta seção, descrevemos uma implementação da rotina `Refina` para triangulações bidimensionais coloridas. Esta implementação subdivide os triângulos marcados e também as arestas que são faces de dois triângulos marcados. A operação topológica utilizada em nosso algoritmo é chamada de `SubdivN`, e é especificada a seguir.

Vamos chamar de *Subdiv7* o esquema de subdivisão de um triângulo colorido t em sete partes, conforme ilustra a figura 8.3. Note que esta é a subdivisão elementar de um

triângulo colorido utilizando a 2-gema cruz.

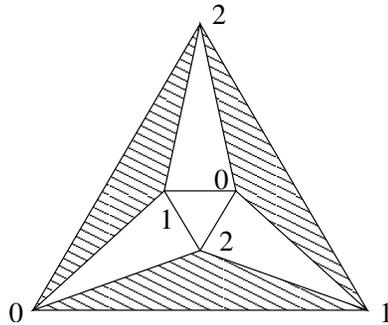


Figura 8.3: Esquema de subdivisão Subdiv7, com triângulos periféricos hachurados.

Se p é um triângulo gerado por uma subdivisão do tipo Sibdiv7 do triângulo t , e p incide numa aresta e de t , dizemos que p é um *triângulo periférico*. Neste caso, dizemos que e é a *aresta externa* de p , e o vértice de p oposto a e é o *vértice interno* de p .

Vamos chamar de $RP(p)$ a operação que remove o triângulo periférico p da triangulação e posiciona seu vértice interno no ponto médio de sua aresta externa. A aplicação desta operação em um, dois ou três triângulos periféricos da subdivisão Subdiv7 resulta, respectivamente, nas subdivisões Subdiv6, Subdiv5 e Subdiv4, dadas na figura 8.4.

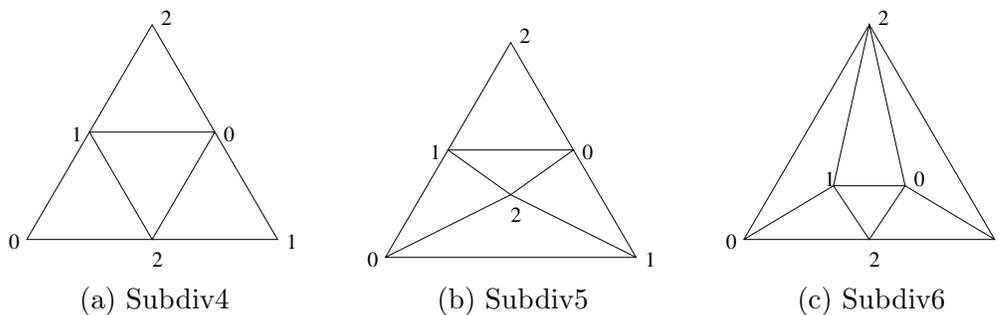


Figura 8.4: Esquemas de subdivisão utilizados no refinamento colorido.

Operação SubdivN(t) A operação $SubdivN(t)$ aplica a subdivisão Subdiv7 no triângulo t e, para cada triângulo periférico $p \subset t$, faz: (i) se a aresta externa de p pertence à borda da triangulação, $RP(p)$; (ii) se existe outro triângulo periférico p' adjacente à aresta externa de p , $RP(p)$ e $RP(p')$. Veja figura 8.5.

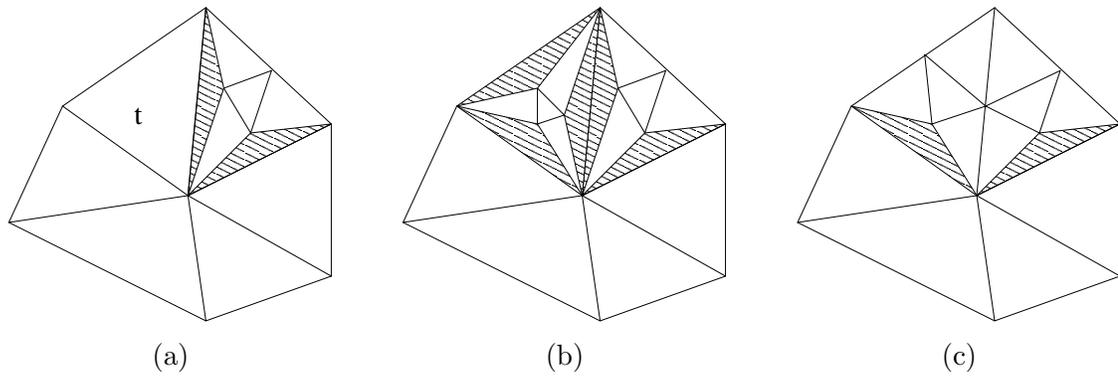


Figura 8.5: A operação $\text{SubdivN}(t)$: (a) O triângulo t . (b) Aplicação de Subdiv7 no triângulo t . (c) Remoção dos triângulos periféricos.

A implementação da rotina `Refina` para triangulações coloridas é dada a seguir.

`Refinar(T :triangulação)`

1. $T' \leftarrow T$
2. Para cada triângulo t de T' marcado para subdivisão faça
3. `SubdivN(t)`
4. Retorne T'

Ilustramos a seguir a execução do algoritmo de refinamento colorido sobre a função da figura 8.6. A figura 8.7 mostra os passos do algoritmo, indicando em escuro os triângulos marcados para subdivisão. A figura 8.8 mostra o spline interpolador para a malha final.

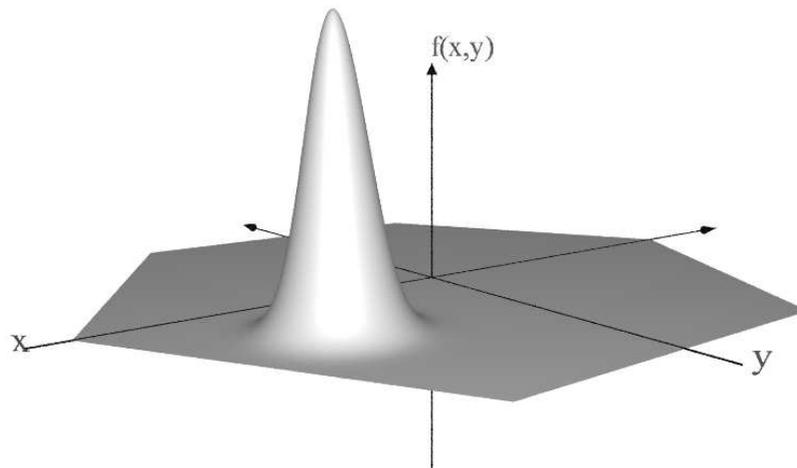


Figura 8.6: Uma função gaussiana f sobre um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.

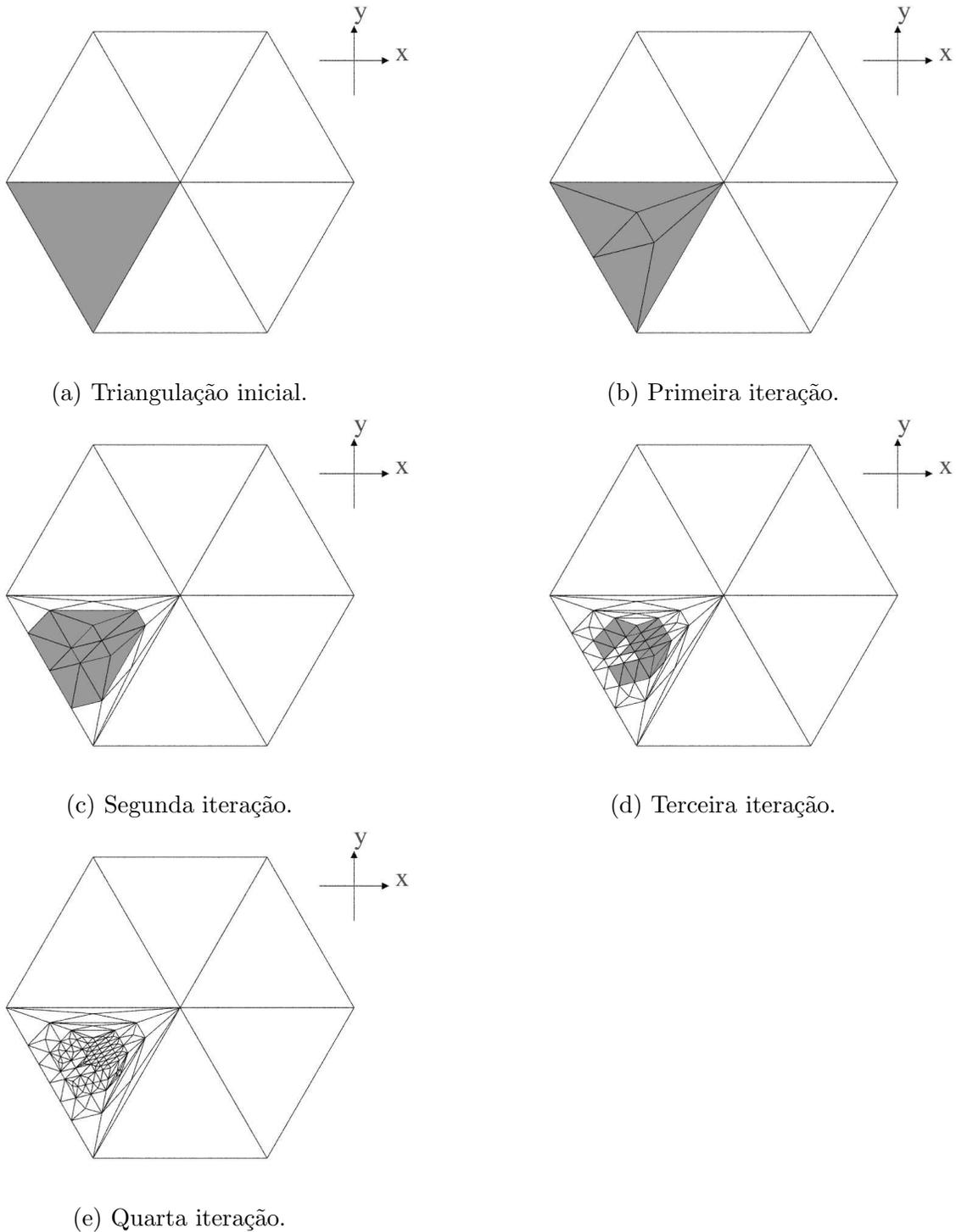


Figura 8.7: Exemplo de aplicação do refinamento adaptativo colorido na função da figura 8.6.

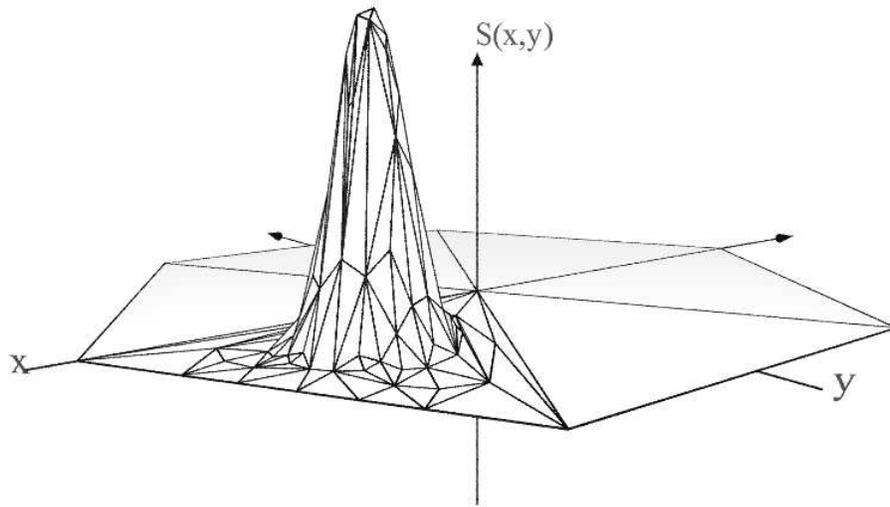


Figura 8.8: Interpolação linear S da função da figura 8.6 nos vértices da triangulação da figura 8.7(e).

8.3 Refinamento adaptativo com restrições de qualidade

Em geral, o desempenho de métodos numéricos para aproximação de funções é afetado diretamente pelo formato dos elementos da triangulação utilizada. Afirma-se, em particular, que métodos numéricos baseados em splines têm convergência mais lenta e/ou produzem resultados menos precisos quando a triangulação utilizada têm ângulos muito pequenos [18] ou muito grandes [6].

Motivados por esta afirmação, vários autores descreveram esquemas de refinamento para triangulações bidimensionais que fornecem alguma garantia quanto aos ângulos internos dos triângulos gerados. Rivara [48] apresentou algumas alternativas para o caso bidimensional baseadas na bisseção de triângulos. Um de seus métodos mais populares subdivide cada triângulo marcando posicionando uma nova aresta entre o ponto médio de sua aresta mais longa e vértice oposto. Estas subdivisões podem gerar vértices extras nos triângulos adjacentes, que são também marcados para subdivisão. Sendo assim, as bisseções se propagam pela triangulação até que não haja mais triângulos com vértices extras. Veja a figura 8.9. Rivara provou que esta propagação termina após um número

finito de bisseções. Este método garante que, ao final do processo de subdivisão, o ângulo mínimo da triangulação é maior ou igual à metade do ângulo mínimo da triangulação original.

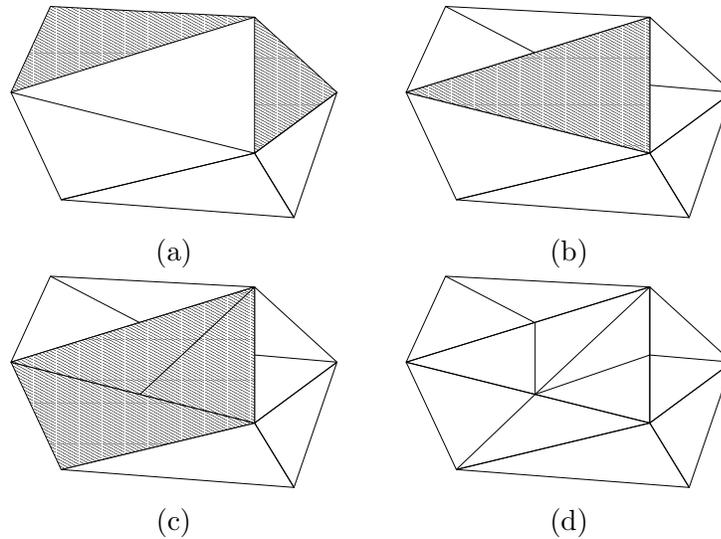


Figura 8.9: Aplicação do algoritmo da bisseção de Rivara. Os triângulos marcados para subdivisão estão hachurados.

Outro esquema de subdivisão para triangulações bidimensionais é o refinamento regular de Bank et al. [7]. Neste esquema, os triângulos marcados para subdivisão são subdivididos *regularmente* conectando-se os pontos médios de suas arestas, como na figura 8.10(a), o que resulta em quatro triângulos similares ao original. Os triângulos não marcados que têm pelo menos duas arestas subdivididas em decorrência da subdivisão de triângulos adjacentes são também submetidos a esta subdivisão regular. Já os triângulos não marcados que têm apenas uma aresta subdividida são submetidos a uma bisseção, conectando-se o ponto médio da aresta dividida ao vértice oposto, como na figura 8.10(b).

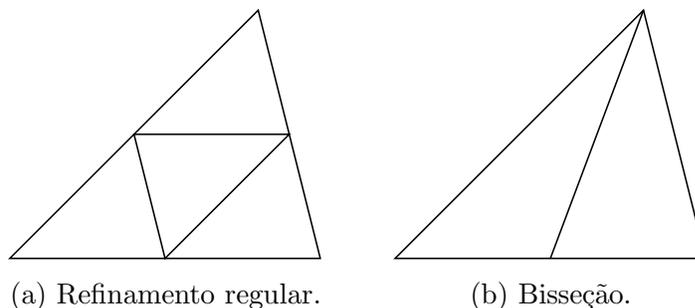


Figura 8.10: Esquemas de subdivisão utilizados no algoritmo de Bank.

Antes da próxima iteração da operação **Refinar**, os triângulos bissectados são novamente unidos e marcados para subdivisão. Esta precaução garante que cada triângulo em M_{i+1}

seja ou similar a algum triângulo de M_0 ou uma bisseção de um triângulo similar a um triângulo de M_0 . Desta forma, os ângulos internos dos triângulos não se aproximam de 0 ou π , qualquer que seja o número de iterações da subdivisão.

Já no caso tridimensional, é muito mais difícil garantir a qualidade da triangulação gerada pela subdivisão de tetraedros. Há, porém, grandes esforços para se contornar este problema [8, 38, 49].

8.3.1 Refinamento colorido com restrição de ângulos

No algoritmo de refinamento colorido da seção 8.2, não há garantia quanto ao formato dos triângulos na triangulação final. Em geral, aplicações sucessivas da rotina `Refinar` produzem ângulos cada vez mais próximos de zero e π .

Descrevemos então uma implementação alternativa da rotina `Refinar` para 2-triangulações coloridas, baseada no algoritmo de refinamento de Bank [7], que mantém os ângulos internos dos triângulos longe de zero e π . Esta adaptação se fundamenta no fato de que triângulos coloridos podem ser submetidos ao refinamento regular de Bank, que equivale ao esquema `Subdiv4`. A bisseção de triângulo, no entanto, não é possível em triangulações coloridas, e precisa ser substituída por `Subdiv6`. Vamos utilizar também o esquema `Subdiv5` para triângulos não marcados com duas arestas bissectadas. Assim como em nosso algoritmo de refinamento anterior (seção 8.2), a única operação topológica utilizada será `SubdivN`.

Nosso algoritmo requer que alguns campos auxiliares sejam vinculados aos elementos da triangulação e que estas informações sejam preservadas entre as iterações do refinamento. A cada triângulo t , adicionamos um campo indicando se t é periférico. A cada vértice v , adicionamos um campo indicando se v é *regular* ou *irregular*, segundo o seguinte critério: se v é um vértice da triangulação inicial, v é regular; se v é um vértice interno de algum triângulo periférico, v é irregular; e se v é um vértice interno deslocado pela operação `RP` para o ponto médio entre dois vértices regulares, v é regular.

Descrevemos abaixo nossa versão da operação `Refinar` que produz uma triangulação M_{i+1} a partir da triangulação M_i .

Refinar(T :triangulação)

1. $T' \leftarrow T$
2. Para cada triângulo t de T' marcado para subdivisão faça
3. Para cada triângulo s adjacente a t faça
4. Se s não está marcado e não é periférico
5. PropagarRefinamento(s)
6. SubdivN(t)
7. Retorne T'

Se t é um triângulo marcado, e s é um triângulo não marcado adjacente a t , nosso algoritmo executa a operação `PropagarRefinamento(s)`, que tem duas funções: tornar todos os vértices de s regulares através de uma chamada recursiva adequada; e subdividir s pela operação `SubdivN(s)`, de forma que o esquema de subdivisão resultante em t seja o `Subdiv4`. Veja a figura 8.11.

`PropagarRefinamento(s :triângulo)`

1. Se s tem um vértice irregular v
2. $p \leftarrow$ triângulo periférico incidente em v
3. $s' \leftarrow$ triângulo adjacente a p por sua aresta externa
4. `PropagarRefinamento(s')`
5. `SubdivN(s)`

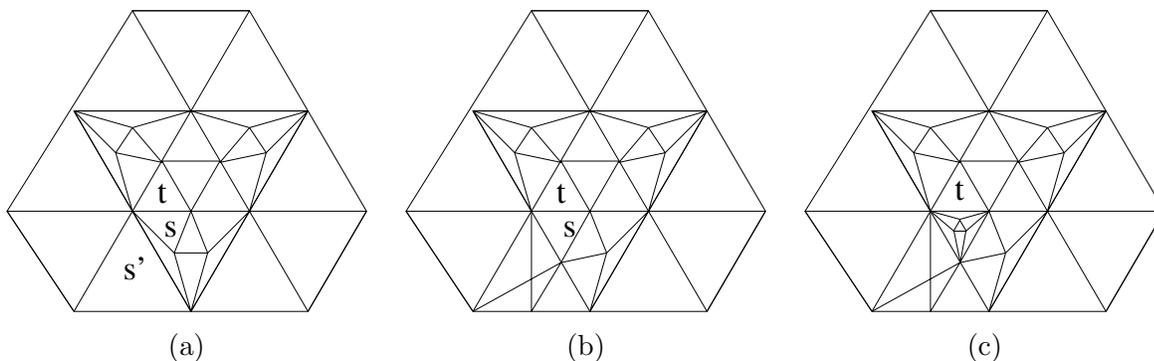


Figura 8.11: Funcionamento da rotina `PropagarRefinamento`: (a) O triângulo t está marcado para subdivisão e é adjacente ao triângulo não marcado s . Há então uma chamada `PropagarRefinamento(s)`. Como s tem um vértice irregular, há uma chamada recursiva `PropagarRefinamento(s')`. (b) o triângulo s' é regular, portanto pode ser subdividido por `SubdivN`. (c) O triângulo s se tornou regular e pode então ser subdividido por `SubdivN`.

Vamos agora chamar a atenção para alguns pontos relevantes do algoritmo e mostrar como ele garante a qualidade dos triângulos.

Seja M uma triangulação obtida pelo nosso algoritmo. Podemos definir o *nível* de um triângulo t em M , denotado $niv(t)$, seguinte forma: se t é um triângulo da triangulação inicial, $niv(t) = 0$; se t foi criado por uma operação **SubdivN** num triângulo t' , $niv(t) = niv(t') + 1$.

Observação 8.1 *Seja t um triângulo marcado para subdivisão, adjacente a um triângulo não marcado s_0 . Se a chamada da operação **PropagarRefinamento** sobre s_0 gera uma cadeia de chamadas recursivas sobre os triângulos s_1, s_2, \dots, s_k , então, para $1 \leq i \leq k$, $niv(s_i) < niv(s_{i-1})$ (veja figura 8.12). Isto garante que a propagação vai parar — no pior caso, num triângulo de nível zero — e que a propagação não afeta os triângulos marcados, já que estes nível máximo na iteração atual.*

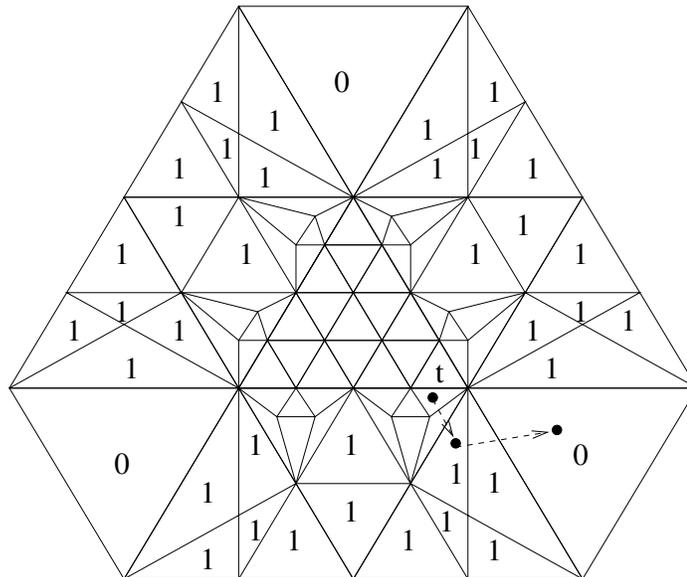


Figura 8.12: Propagação do refinamento: o nível de cada triângulo (com exceção dos de nível 2) está indicado em seu interior. As setas tracejadas mostram uma cadeia de propagação do refinamento. Note que os triângulos visitados têm nível decrescente.

Se um triângulo tem três vértices regulares, dizemos que ele é *regular*; caso contrário, ele é *irregular*.

Observação 8.2 *Supondo que o predicado Ψ seja consistente, a rotina **Refinar** aplica a operação **SubdivN**(s) apenas em triângulos regulares. Sendo assim, cada triângulo de M_i é regular ou é resultante de uma subdivisão do tipo **Subdiv5** ou **Subdiv6** em um triângulo regular. Veja a figura 8.13.*

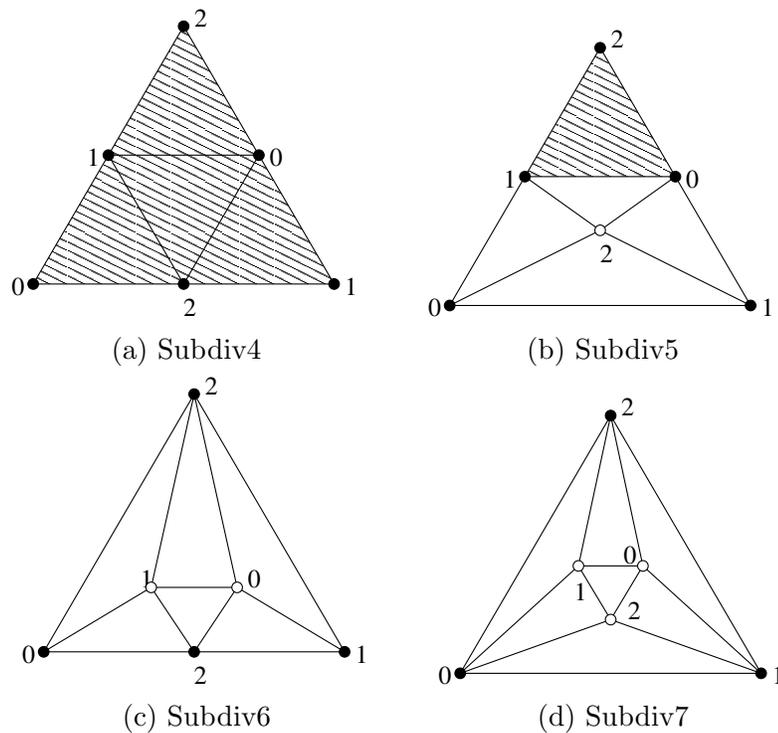


Figura 8.13: Regularidade de vértices e triângulos em cada tipo de subdivisão: os vértices regulares são escuros e os triângulos regulares estão hachurados.

Note que os triângulos regulares gerados por Subdiv4 e Subdiv5 são semelhantes ao triângulo original.

Observação 8.3 Se t_0 é um triângulo de M_0 e t é um triângulo de M_i contido em t_0 , existe uma sequência t_0, t_1, \dots, t_j de triângulos tal que $t_j = t$ e, para $1 \leq k \leq j$, t_k é um triângulo regular resultante de uma subdivisão do tipo Subdiv4 ou Subdiv5 de t_{k-1} . Sendo assim, t é semelhante a t_0 .

A partir destas observações, podemos concluir que qualquer triângulo da triangulação M_i é semelhante a algum triângulo de M_0 , ou é resultante de uma subdivisão Subdiv5 ou Subdiv6 em um triângulo semelhante a algum triângulo de M_0 .

Ilustramos a seguir a execução do refinamento colorido com propagação sobre a função f da figura 8.6. Os triângulos escuros são aqueles marcados para subdivisão. A figura 8.15 mostra o spline interpolador de f na malha resultante.

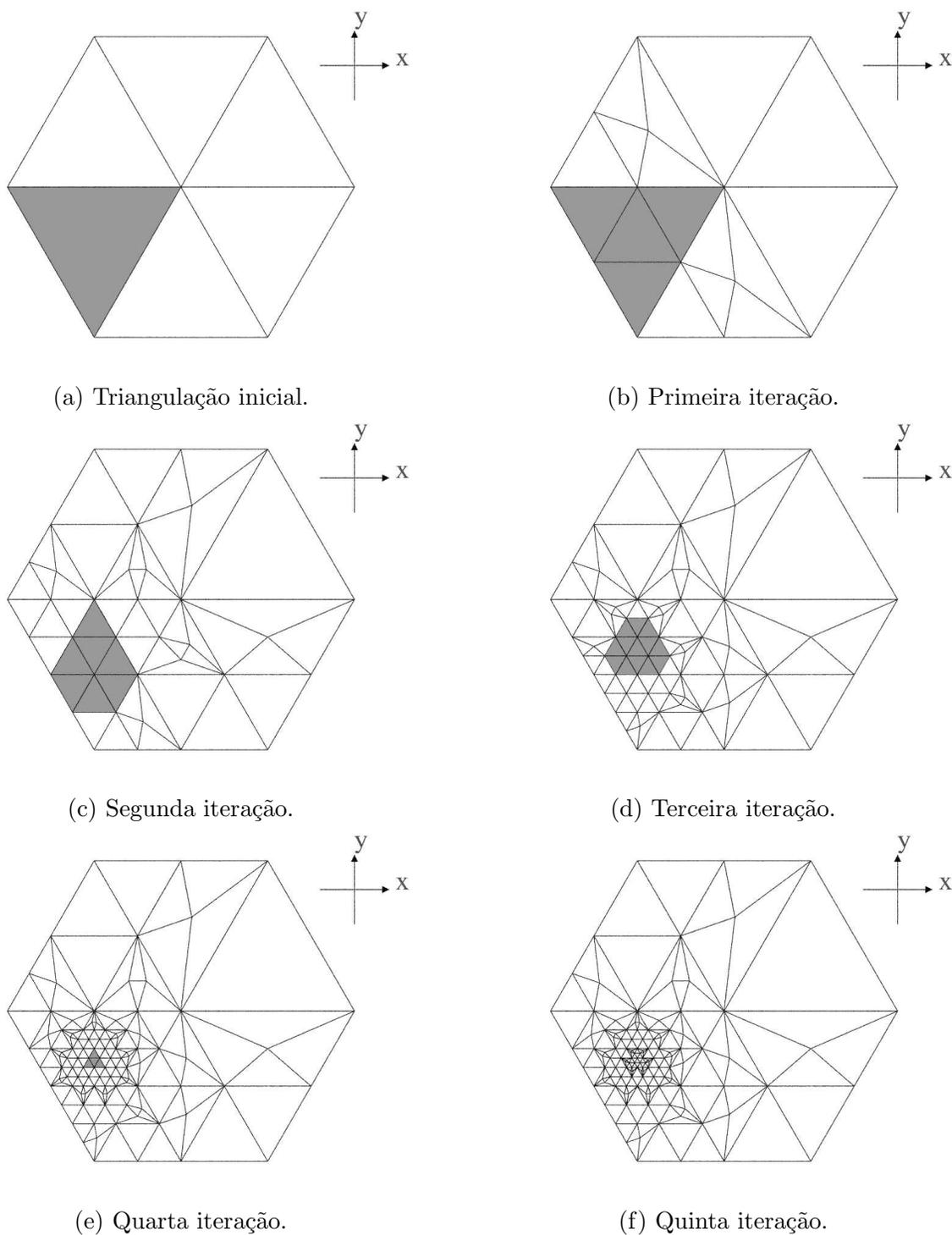


Figura 8.14: Exemplo de aplicação do refinamento adaptativo colorido com restrição de ângulos na função da figura 8.6.

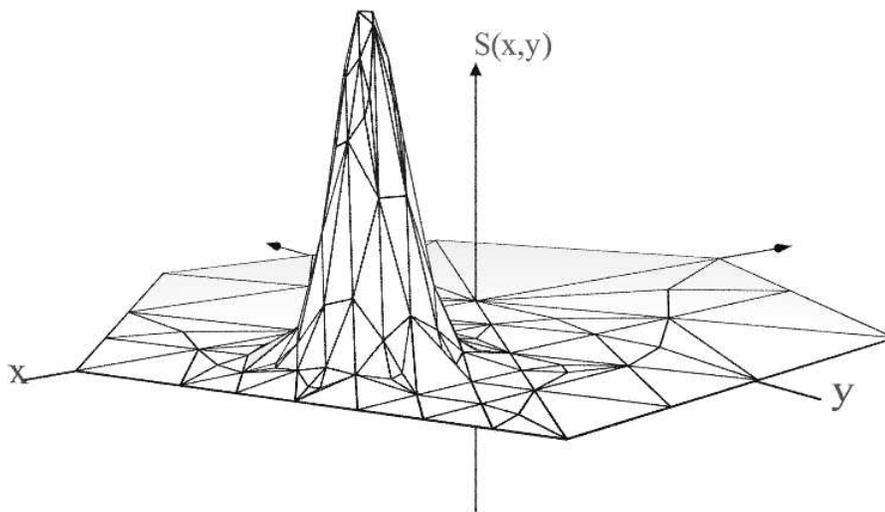


Figura 8.15: Aproximação linear por partes S da função da figura 8.6, na malha da figura 8.14(f).

Capítulo 9

Conclusões

9.1 Resultados

A estrutura de dados gema oferece grandes vantagens para a modelagem de triangulações. Uma delas é a diversidade dos espaços topológicos permitidos: espaços de dimensão arbitrária, orientáveis ou não, com ou sem bordas e mesmo certos espaços que não são variedades. Outra vantagem desta estrutura é a facilidade de implementação. Tanto os operadores de manipulação e percurso quanto os algoritmos básicos são extremamente simples, o que leva a códigos concisos e elegantes.

A principal desvantagem desta estrutura é sua restrição a triangulações coloridas, que torna inviável sua utilização em certas aplicações, como a construção de triangulações de Delaunay, por exemplo. No entanto, como vimos nos capítulos 6 e 8, as gemas podem ser utilizadas em aplicações práticas, tanto como representação de subdivisões baricêntricas de mapas, como no caso mais geral de representação de triangulações coloridas.

Um dos principais resultados deste trabalho foi mostrar que, apesar de não serem tão facilmente subdivididas, as triangulações coloridas admitem uma grande variedade de esquemas de refinamento. No capítulo 7 estudamos especificamente a subdivisão elementar, e apresentamos um algoritmo conciso em termos de gemas para executar tal subdivisão em qualquer dimensão. Já no capítulo 8, mostramos que é possível utilizar gemas em algoritmos de refinamento adaptativo de triangulações bidimensionais e que se pode, inclusive, adotar esquemas com restrições de qualidade sobre os triângulos.

9.2 Extensões

Uma questão interessante, que não foi totalmente estudada em nosso trabalho, é a vinculação de informações geométricas à estrutura de dados gema. Em nossas aplicações,

as gemas são utilizadas para representar n -triangulações linearmente realizáveis, caso em que as informações geométricas se resumem ao posicionamento dos vértices. Sendo assim, cada registro da estrutura de dados carrega $n + 1$ apontadores para os vértices do simplexo correspondente. No caso mais geral, pode ser necessário anexar informações a elementos de maior dimensão, como formato de arestas, faces, etc. A solução mais óbvia seria adicionar a cada registro $\binom{n+1}{k+1}$ apontadores para as k -faces do simplexo correspondente. Como isto acarretaria num aumento significativo do tamanho dos registros, pode ser necessário explorar outras alternativas.

Outro possível tópico de extensão é o refinamento adaptativo de gemas para triangulações de maior dimensão. Em nosso algoritmo de refinamento adaptativo bidimensional, utilizamos um esquema de subdivisão baseado na subdivisão elementar pela gema cruz e na remoção de triângulos periféricos que aparentava ser generalizável para dimensões superiores. Entretanto, ao aplicarmos a mesma técnica a triangulações tridimensionais, verificamos que as arestas originais dos tetraedros não eram subdivididas, o que muitas vezes impedia que o refinamento iterativo chegasse a uma triangulação satisfatória. Seria interessante então investigar outros esquemas de subdivisão aplicáveis a triangulações de dimensão três ou maior.

Outro problema de interesse prático é a transformação econômica de n -triangulações arbitrárias em n -triangulações coloridas por subdivisão de alguns elementos. A subdivisão baricêntrica resolve este problema, mas ao custo de multiplicar por $(n + 1)!$ o número de n -elementos da triangulação. Por outro lado, algumas triangulações podem ser coloridas sem subdivisão. É razoável esperar que existam algoritmos eficientes que resolvem o problema com um número pequeno (embora não ótimo) de subdivisões — digamos, da ordem do número original de n -elementos.

Apêndice A

Conceitos elementares de topologia

Apresentamos aqui alguns conceitos básicos de topologia utilizados neste trabalho. Para maiores detalhes, recomendamos textos introdutórios de topologia [4, 42, 32].

A.1 Espaço topológico

Um *espaço topológico* é um par (X, \mathcal{T}) onde X é um conjunto não vazio e \mathcal{T} é uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo às seguintes condições:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$;
- $X \in \mathcal{T}$;
- se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ então $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$;
- se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ e \mathcal{A} é finito então $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

A coleção \mathcal{T} é a *topologia* do espaço (X, \mathcal{T}) , e os membros de \mathcal{T} são os *conjuntos abertos* do mesmo. Se $U \in \mathcal{T}$, seu complemento $X \setminus U$ é um *conjunto fechado* do espaço.

No resto deste apêndice vamos supor que (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico.

A.2 Continuidade e homeomorfismo

Uma função f de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) para um espaço topológico (X', \mathcal{T}') é dita *contínua* se e somente se a pré-imagem $f^{-1}[A]$ de qualquer conjunto aberto A de (X', \mathcal{T}') for um conjunto aberto de (X, \mathcal{T}) .

Um *homeomorfismo* entre dois espaços (X, \mathcal{T}) e (X', \mathcal{T}') é uma função bijetora contínua f de (X, \mathcal{T}) para (X', \mathcal{T}') cuja inversa f^{-1} é também contínua. Se tal função existe, dizemos que os dois espaços são *homeomorfos* ou *topologicamente equivalentes*, e escrevemos $(X, \mathcal{T}) \sim (X', \mathcal{T}')$.

Uma *propriedade topológica* é uma propriedade de pontos e subconjuntos de um espaço (X, \mathcal{T}) que pode ser definida apenas em termos dos conjuntos abertos de \mathcal{T} (e das operações de teoria de conjuntos). Um exemplo de propriedade topológica é a *conexidade*. Dizemos que um espaço (X, \mathcal{T}) é *conexo* se não existe nenhum subconjunto próprio e não vazio de (X, \mathcal{T}) que é ao mesmo tempo fechado e aberto. Obviamente, um homeomorfismo preserva todas as propriedades topológicas de pontos e subconjuntos de pontos.

A.3 Topologia da reta real

Um dos exemplos mais importantes de espaço topológico é $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, onde \mathbb{R} é o conjunto dos números reais, e um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ se e somente se U é uma união de intervalos abertos de \mathbb{R} . A coleção $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ é a *topologia padrão* de \mathbb{R} .

A.4 Espaço produto

Se (X_1, \mathcal{T}_1) e (X_2, \mathcal{T}_2) são espaços topológicos, o *espaço produto* $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$ é o par $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$, sendo que um subconjunto $U \subseteq X_1 \times X_2$ pertence a \mathcal{T} se e somente se para todo ponto p de U existem $U_1 \in \mathcal{T}_1$ e $U_2 \in \mathcal{T}_2$ tais que $p \in U_1 \times U_2 \subseteq U$.

O produto de espaços topológicos é associativo (através de homeomorfismo) e, portanto, esta definição pode ser estendida a produtos múltiplos $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$ e a potências $(X, \mathcal{T})^n$. Desta forma obtemos, por exemplo, a topologia padrão do espaço cartesiano \mathbb{R}^n .

A.5 Subespaço

Seja Y um subconjunto não vazio de X , e seja $\mathcal{T}(Y)$ a coleção $\{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$. Prova-se que $(Y, \mathcal{T}(Y))$ também é um espaço topológico; ele é o *subespaço* de (X, \mathcal{T}) *induzido* por Y . A coleção $\mathcal{T}(Y)$ é a topologia de Y relativa a (ou induzida por) (X, \mathcal{T}) .

O conceito de subespaço nos permite construir facilmente muitos espaços topológicos interessantes: qualquer subconjunto do \mathbb{R}^n é automaticamente um espaço topológico, com a topologia induzida pela topologia padrão do \mathbb{R}^n . Em particular, o subespaço de \mathbb{R}^n induzido por $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ é chamado de *n-bola* e denotado por \mathbb{B}^n ; o subespaço de \mathbb{R}^n induzido por $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ é

chamado de *n-bola fechada* e denotado por $\kappa\mathbb{B}^n$; e o subespaço de \mathbb{R}^{n+1} induzido por $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ é chamado de *n-esfera* e denotado por \mathbb{S}^n . Vale observar que \mathbb{B}^n é homeomorfo a \mathbb{R}^n .

A.6 Vizinhança, fecho, interior e fronteira

Se p é um ponto de X , e V é um subconjunto de X tal que $p \in U \subseteq V$ para algum conjunto aberto U de \mathcal{T} , então dizemos que V é uma *vizinhança* de p na topologia \mathcal{T} . Mais geralmente, se A é um subconjunto de X , dizemos que V é uma vizinhança de A em \mathcal{T} se V for uma vizinhança de todo ponto p de A .

Se $A \subseteq X$, dizemos que um ponto $p \in X$ pertence ao *interior* de A na topologia \mathcal{T} , se e somente se A é uma vizinhança de p relativa a \mathcal{T} . Por outro lado, dizemos que p pertence ao *fecho* de A relativo a \mathcal{T} se toda vizinhança de p encontra A . Vamos denotar o interior e o fecho de A por ιA e κA , respectivamente. A *fronteira* de A , denotada por ∂cZ , é o subconjunto de X dado por $\kappa A \setminus \iota A$.

A.7 Espaço quociente

Se \approx é um relação de equivalência sobre o conjunto X , o *espaço quociente* $(X, \mathcal{T})/\approx$ é um espaço topológico (X', \mathcal{T}') , onde X' é o conjunto X/\approx das classes de equivalência de X por \approx ; e \mathcal{T}' é a coleção de todos os conjuntos A/\approx , para todo $A \in \mathcal{T}$ que é união de classes de X/\approx .

O espaço quociente pode também ser definido em termos de funções: se $f : X \rightarrow X/\approx$ é a função que mapeia cada ponto de X em sua classe de equivalência pela relação \approx , o conjunto U do espaço quociente $(X, \mathcal{T})/\approx$ é aberto se e somente se sua pré-imagem $f^{-1}[U]$ é um conjunto aberto do espaço (X, \mathcal{T}) .

Um exemplo importante de espaço quociente é o *espaço projetivo (real)* \mathbb{P}^n , que é o quociente da esfera \mathbb{S}^n pela relação de equivalência \approx , onde $p \approx q$ sse $p = q$ ou $p = -q$.

A.8 Junção e cone de espaços topológicos

Se E_1 e E_2 são espaços topológicos, a *junção* de E_1 e E_2 , denotada por $E_1 \star E_2$, é o espaço topológico definido por $(E_1 \times E_2 \times I)/\approx$, onde I é o intervalo $[0, 1]$ com a topologia padrão e \approx é a relação em $E_1 \times E_2 \times I$ tal que $(a_1, a_2, x) \approx (b_1, b_2, y)$ se e somente se

- $(a_1, a_2, x) = (b_1, b_2, y)$; ou
- $a_1 = b_1$ e $x = y = 0$; ou

- $a_2 = b_2$ e $x = y = 1$;

Na prática, este quociente contrai $E_1 \times E_2 \times \{0\}$ para E_1 e $E_1 \times E_2 \times \{1\}$ para E_2 .

Intuitivamente, pode-se construir $E_1 \star E_2$ tomando a união disjunta destes espaços e traçando um segmento de cada ponto de E_1 para cada ponto de E_2 . A junção de duas bolas \mathbb{B}^n e \mathbb{B}^m , por exemplo, é homeomorfa à bola \mathbb{B}^{n+m+1} , e a junção de duas esferas \mathbb{S}^n e \mathbb{S}^m é homeomorfa à esfera \mathbb{S}^{n+m+1} [32].

Em particular, se E_2 é um espaço topológico contendo um único ponto, a junção $E_1 \star E_2$ é chamada de *cone* de E_1 . Por exemplo, o cone da bola fechada $\kappa\mathbb{B}^n$ é homeomorfo a $\kappa\mathbb{B}^{n+1}$, e o cone da esfera \mathbb{S}^n é homeomorfo a $\kappa\mathbb{B}^{n+1}$.

A.9 Espaço compacto

Uma *cobertura aberta* de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é uma coleção C de conjuntos abertos de (X, \mathcal{T}) cuja união é X . Se uma subcoleção $C' \subseteq C$ é também uma cobertura de (X, \mathcal{T}) diz-se que C' é uma *subcobertura* de C .

Um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é *compacto* se e somente se qualquer cobertura aberta de (X, \mathcal{T}) possuir uma subcobertura finita. O espaço \mathbb{R}^n não é compacto, mas $\kappa\mathbb{B}^n$ e \mathbb{S}^n são compactos.

No caso particular de um subespaço (A, \mathcal{T}_A) de \mathbb{R}^n induzido por um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, (A, \mathcal{T}_A) é compacto se e somente se A é fechado e limitado. Na reta real \mathbb{R} , por exemplo, o intervalo unitário fechado $[0, 1]$ induz um subespaço compacto, mas o mesmo não pode ser dito dos conjuntos \mathbb{Z} dos inteiros (que não é limitado) e do intervalo $[0, 1)$ (que não é fechado).

Pode-se provar as seguintes propriedades sobre espaços compactos:

- Um espaço (X, \mathcal{T}) é compacto sse todo subconjunto infinito $X' \subseteq X$ tem um *ponto de acumulação* p — isto é, um ponto $p \in X$ tal que toda vizinhança de p em (X, \mathcal{T}) contém algum ponto de $A \setminus \{p\}$.
- Se (X, \mathcal{T}) é um espaço compacto e $U \subseteq X$ é um conjunto fechado, o subespaço de (X, \mathcal{T}) induzido por U é compacto.
- Se (X_1, \mathcal{T}_1) e (X_2, \mathcal{T}_2) são espaços compactos, o produto $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$ é compacto.
- Se (X, \mathcal{T}) é um espaço compacto e \approx é uma relação de equivalência sobre X , o espaço quociente $(X, \mathcal{T}) / \approx$ é compacto.
- Se (X_1, \mathcal{T}_1) e (X_2, \mathcal{T}_2) são espaços compactos, a junção $(X_1, \mathcal{T}_1) \star (X_2, \mathcal{T}_2)$ é compacta.

A.10 Cirurgia

Seja E um espaço topológico e sejam A e B conjuntos abertos de E tais que $\kappa A \cap \kappa B = \emptyset$ e existe um homeomorfismo $f : \partial A \rightarrow \partial B$. Chamamos de *cirurgia* de E o espaço dado por $(E \setminus (A \cup B)) / \approx$, onde \approx é a relação de equivalência em $(E \setminus (A \cup B))$ dada por $p \approx q \Leftrightarrow (p = q) \vee (f(p) = q) \vee (f(q) = p)$. Por exemplo, se E é a esfera \mathbb{S}^2 e A e B são discos abertos de E , o resultado da cirurgia é um toro ou uma garrafa de Klein, dependendo do homeomorfismo f entre as fronteiras de A e B .

A.11 Variedade

Uma *variedade topológica n -dimensional* (ou n -variedade) é um espaço topológico no qual todo ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a \mathbb{B}^n . Os espaços \mathbb{R}^n , \mathbb{B}^n , \mathbb{S}^n , a superfície de um toro e o plano projetivo são exemplos típicos de variedades.

Uma extensão deste conceito é a *variedade com borda*. Uma n -variedade com borda contém *pontos de interior* e *pontos de borda*. Todo ponto de interior tem uma vizinhança homeomorfa à bola \mathbb{B}^n ; e todo ponto de borda p tem uma vizinhança homeomorfa à "semi-bola" $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1, x_1 \geq 0\}$ por um homeomorfismo que leva p ao ponto $(0, 0, \dots, 0)$. Um exemplo de variedade com borda é a n -bola fechada $\kappa\mathbb{B}^n$.

Índice Remissivo

- AdjacentFacet, 63
- aresta, 9
- Cirurgia, 44
- $conv(S)$, casco convexo, 59
- D -conexidade, 23
- DeleteNode, 39
- espaço topológico, 109
 - $X \star Y$, junção de, 111
 - $X \times Y$, produto de, 110
 - X/\approx , quociente de, 111
- face, 9
- faceta, 10
- κc , fecho, 111
- $\kappa^\circ c$, fecho descolado, 10
- flag, 65
- ∂c , fronteira, 111
- $\partial^\circ c$, fronteira descolada, 10
- $\mathcal{G}(r, D)$, 38
- gema, 22
 - aumentada, 30
 - baricêntrica, 52
 - coincidência de, 68
 - cruz, 89
 - isomorfismo de, 23
 - nó da, 22
 - produto de, 29
 - representando uma triangulação, 25
- GlueResidues(a, b, k), 56
- Id(w), identificador geométrico, 66
- InitialFacet, 63
- isomorfismo de mapa, 11
- MakeNode, 39
- mapa, 9
 - colagem de, 14
 - esqueleto de, 12
 - junção de, 16
 - linearmente realizável, LR, 13
 - simples, 12
 - subdivisão de, 18
- ∂^*c , mapa da fronteira, 10
- $\mathcal{M}_\partial(P)$, mapa da fronteira do politopo, 64
- κ^*c , mapa do fecho, 10
- $\mathcal{M}(P)$, mapa do politopo, 64
- Orb(c), órbita, 29
- politopo, 60
- resíduo, 26
- simplexo canônico, 13
- Splice, 42
- St(c), estrela, 10
- SubdivElem, 81, 82
- subdivisão baricêntrica, ΔM , 18
- SubdivN, 96
- submapa, 12
- Swap, 39
- triangulação, 14

coesa, 31

colorida, 21

vértice, 9

variedade, 113

Referências Bibliográficas

- [1] M. V. A. Andrade and J. Stolfi. Exact algorithms for circles on the sphere. *International J. of Computational Geometry & Applications*, 11(3):267–290, June 2001.
- [2] Marcus Vinícius Alvim Andrade. *Representação e Manipulação Exatas de Mapas Esféricos*. PhD thesis, Institute of Computing, University of Campinas, March 1999. (In Portuguese).
- [3] A. M. Andrew. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Inf. Process. Lett.*, 9(5):216–219, 1979.
- [4] A. V. Arkhangel'skiĭ and L. S. Pontryagin. *General Topology I*, volume 17 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 1990.
- [5] J. Arvo and D. Kirk. Fast ray tracing by ray classification. In *Proc. 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '87)*, pages 55–64. ACM Press, 1987.
- [6] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Analysis*, 13:214–227, 1976.
- [7] R. E. Bank, A. H. Sherman, and A. Weiser. Refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement. In R. Stepleman et al., editor, *Scientific Computing*, pages 3–17. IMACS/North-Holland, 1983.
- [8] E. Bänsch. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. *Impact of Computing in Science and Engineering*, 3:181–191, 1991.
- [9] B. G. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. In *Proc. 1975 AFIPS National Computer Conference*, volume 44, pages 589–596, 1975.
- [10] J. L. Bentley and M. I. Shamos. Divide and conquer for linear expected time. *Inf. Process. Lett.*, 7(2):87–91, 1978.

- [11] D. K. Blandford, G. E. Blelloch, D. E. Cardoze, and C. Kadow. Compact representations of simplicial meshes in two and three dimensions. In *12th International Meshing Roundtable*, 2003.
- [12] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, S. Pion, M. Teillaud, and M. Yvinec. Triangulations in CGAL. *Computational Geometry*, 22(1–3):5–19, 2002.
- [13] E. Brisson. Representing geometric structures in d dimensions: Topology and order. *Proc. 5th Annual ACM Symp. on Computational Geometry*, pages 218–227, June 1989.
- [14] H. Brönnimann. Degenerate convex hulls on-line in any fixed dimension. In *SCG '98: Proc. 14th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 249–258, 1998.
- [15] D. R. Chand and S. S. Kapur. An algorithm for convex polytopes. *J. ACM*, 17(1):78–86, 1970.
- [16] B. Chazelle. An optimal convex hull algorithm in any fixed dimension. *Discrete and Computational Geometry*, 10:377–409, 1993.
- [17] Y.-K. Choi, X. Li, F. Rong, W. Wang, and S. Cameron. Computing the minimum directional distance between two convex polyhedra. Technical Report TR-2006-01, University of Hong Kong, 2006.
- [18] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [19] H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley, 1961.
- [20] D. P. Dobkin and M. J. Laszlo. Primitives for the manipulations of three-dimensional subdivisions. In *Proc. 3rd ACM Symp. on Comp. Geometry*, pages 86–99, June 1987.
- [21] C. M. Eastman and S. F. Weiss. Tree structures for high dimensionality nearest neighbor searching. *Information Systems*, 7(2), 1982.
- [22] W. F. Eddy. A new convex hull algorithm for planar sets. *ACM Trans. Math. Softw.*, 3(4):398–403, 1977.
- [23] H. Edelsbrunner and E. P. Mücke. Simulation of simplicity: A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. In *Proc. 4th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 118–133, 1988.
- [24] I. Z. Emiris and J. F. Canny. An efficient approach to removing geometric degeneracies. In *Proc. 8th ACM Symp. on Computational Geometry*, pages 74–82, 1992.

- [25] M. Ferri. Una rappresentazione delle n -varietà topologiche triangolabili mediante grafi $(n+1)$ -colorati. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 13-B:250–260, 1976.
- [26] M. Ferri and C. Gagliardi. Crystallisation moves. *Pacific J. Math.*, 100:85–103, 1982.
- [27] M. Ferri, C. Gagliardi, and L. Grasselli. A graph-theoretical representation of PL-manifolds – a survey on crystallizations. *Aequationes Mathematicae*, 31:121–141, 1986.
- [28] R. L. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Inf. Process. Lett.*, 1(4):132–133, 1972.
- [29] André Luiz Pires Guedes. Representação de variedades combinatórias de dimensão n . Master's thesis, COPPE/Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, January 1995. In Portuguese.
- [30] L. J. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the manipulations of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. *ACM Transactions on Graphics*, 4(2):74–123, April 1985.
- [31] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [32] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [33] R. A. Jarvis. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Inf. Process. Lett.*, 2(1):18–21, 1973.
- [34] D.-T. Lee and B. J. Schachter. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *Int. J. Computer Information Science*, 9:219–242, 1980.
- [35] P. Lienhardt. Subdivisions of n -dimensional spaces and n -dimensional generalized maps. *Proc. 5th Annual ACM Symp. on Computational Geometry*, pages 228–236, June 1989.
- [36] M. Lin and D. Manocha. Collision and proximity queries. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. 2003.
- [37] S. Lins. Graph-encoded maps. *Journal of Combinatory Theory (B)*, 32:171–181, 1982.
- [38] A. Liu and B. Joe. Quality local refinement of tetrahedral meshes based on bisection. *SIAM J. on Scientific Computing*, 16(6):1269–1291, November 1995.

- [39] A. A. Maciejewski and J. J. Fox. Path planning and the topology of configuration space. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(4), August 1993.
- [40] A. Mandel and S. Lins. Graph-encoded 3-manifolds. *Discrete Mathematics*, 57:261–284, 1985.
- [41] M. Mäntylä. An inversion algorithm for geometric models. In *Proc. SIGGRAPH '82*, pages 51–59. ACM Press, 1982.
- [42] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
- [43] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [44] J. Ousterhout. Corner stitching: A data-structuring technique for vlsi layout tools. *IEEE Transactions on CAD/ICAS*, January 1984.
- [45] M. Pezzana. Atlanti minimali di varietà differenziabili compatte. *Boll. Un. Mat. Ita.*, 6:749–752, 1968.
- [46] M. Pezzana. Sulla struttura topologica delle varietà compatte. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Moderna*, 23:269–277, 1974.
- [47] F. P. Preparata and S. J. Hong. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions. *Commun. ACM*, 20(2):87–93, 1977.
- [48] M.-C. Rivara. Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices. *SIAM J. Numer. Analysis*, 21(3):604–613, June 1984.
- [49] M.-C. Rivara and C. Levin. A 3-d refinement algorithm suitable for adaptive multi-grid techniques. *Communications in Applied Numerical Methods*, 8:281–290, 1992.
- [50] G. Rote. Division-free algorithms for the determinant and the pfaffian: Algebraic and combinatorial approaches. *Lecture Notes in Computer Science*, 2122:119–135, 2001.
- [51] R. Seidel. A convex hull algorithm optimal for point sets in even dimensions. Technical report, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, Canada, 1981.
- [52] R. Seidel. Constructing higher-dimensional convex hulls at logarithmic cost per face. In *STOC '86: Proc. 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 404–413. ACM Press, 1986.

- [53] J. R. Shewchuk. Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator. In *Proc. 1st Workshop on Applied Computational Geometry*, pages 124–133, may 1996.
- [54] G. Strang and G. J. Fix. *An analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.
- [55] G. Swart. Finding the convex hull facet by facet. *Journal of Algorithms*, 6:17–48, 1985.
- [56] S. Teller, C. Fowler, T. Funkhouser, and P. Hanrahan. Partitioning and ordering large radiosity computations. *Computer Graphics*, 28(Annual Conference Series):443–450, 1994.
- [57] C.-K. Yap. Symbolic treatment of geometric degeneracies. *J. Symb. Comput.*, 10(3–4):349–370, 1990.