

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE ARTES

FERNANDO DA SILVA RAMOS

**“GEOMETRIA E HABILIDADE DE ROTAÇÃO MENTAL: UMA
EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM TRANSFORMAÇÕES
ISOMÉTRICAS NO DESIGN”**

**Tese apresentada ao Instituto de Artes
da Universidade de Campinas, para
obtenção do título de Doutor em Artes**

Área de Concentração:

Artes Visuais

Orientador:

Prof. Dr. Haroldo Gallo

CAMPINAS

2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE ARTES DA UNICAMP**

R147g	Ramos, Fernando da Silva. Geometria e habilidade de rotação mental: Uma experiência de ensino com Transformações Isométricas no Design / Fernando da Silva Ramos. – Campinas, SP: [s.n.], 2012. Orientador: Haroldo Gallo. Tese(doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Artes. 1. Geometria. 2. Cognição. 3. Artes gráficas. 4. Educação. 5. Simetria. I. Gallo, Haroldo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Artes. III. Título. (em/ia)
-------	---

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Geometry and mental rotation skill: An experience of teaching with Isometric Transformations in Design

Palavras-chave em inglês (Keywords):

Geometry

Cognition

Graphic arts

Educação

Symmetry

Área de Concentração: Artes Visuais

Titulação: Doutor em Artes.

Banca examinadora:

Haroldo Gallo [Orientador]

Ernesto Giovanni Boccara

Núbia Bernardi

José Vaidergorn

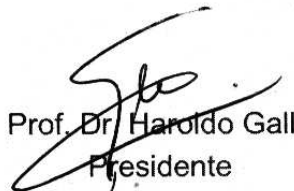
Geraldo Vespaziano Puntoni

Data da defesa: 23-02-2012

Programa de Pós-Graduação: Artes

Instituto de Artes
Comissão de Pós-Graduação

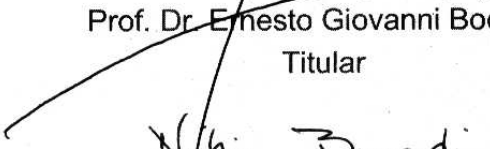
Defesa de Tese de Doutorado em Artes, apresentada pelo Doutorando Fernando da Silva Ramos - RA 11005 como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor, perante a Banca Examinadora:



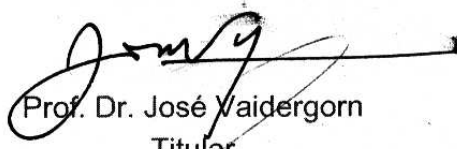
Prof. Dr. Haroldo Gallo
Presidente



Prof. Dr. Ernesto Giovanni Boccara
Titular



Profa. Dra. Nubia Bernardi
Titular



Prof. Dr. José Vaidergorn
Titular



Prof. Dr. Geraldo Vespaziano Puntoni
Titular

Dedico este trabalho

ao

Centro

da

Mandala

e a todos que, em algum tempo, me apontaram sua direção.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Dr. Brasília da Silva Ramos (*in memoriam*) de quem aprendi o valor do estudo, e à minha mãe, Anastásia Boaski da Silva Ramos, de quem aprendi o valor da persistência.

À minha mulher, Ana Paula Caldas Machado, pelo amor, apoio incondicional e compreensão nos longos períodos de ausência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Haroldo Gallo, pela preciosa oportunidade, confiança e ensinamentos.

Aos Profs. Drs. Wilson Flório e Núbia Bernardi, pela dedicação e seriedade dos comentários, na banca de qualificação.

Ao Prof. Dr. Sebastião de Amorim, pelo auxílio de importância inestimável com a organização metodológica dos dados, e pelas horas de agradáveis conversas.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Duarte Seabra, pela abertura e disponibilidade em esclarecer aspectos dos testes psicométricos, em especial o MRT.

Ao Prof. Dr. Marcos Akira D'ávila, pelos exercícios de confrontação das hipóteses.

À coordenação do design, e direção da Facamp, pela estrutura e apoio material ao desenvolvimento do experimento.

Aos alunos do segundo ano de 2010, pela seriedade na participação no experimento.

Ao amigo e companheiro de pós graduação Thiago José Cóser, que me apontou ao estado da arte das relações entre arte e tecnologia.

Aos alunos do design da Facamp, Felipe Blanco e Alex Gyurkovicz Artacio, a quem devo parte das imagens e diagramação desta tese, pela disponibilidade e competência.

“Não entre aquele que não souber geometria”
(Frase inscrita sobre a porta da academia de Platão)

RESUMO

A geometria tem sido, ao longo da história, disciplina prescritiva de uma extensa série de atividades científicas e artísticas, e modernamente, sabe-se que é fundamento para diversas profissões como arquitetura, design, engenharias, química, física, geologia, astronomia, etc. Apesar da importância reconhecida, seu ensino regular ao longo da vida acadêmica do indivíduo tem passado por muitas transformações (nem sempre para melhor) desde a segunda metade do século XX, e é hoje, assunto complexo e controverso no Brasil e no mundo. Entretanto, parece consensual entre os pesquisadores que a capacidade de visualização - que para a Psicologia Cognitiva, está categorizada entre as habilidades espaciais do indivíduo - pode ser positivamente afetada através do treinamento adequado em geometria. Tal vocação é muitas vezes descrita como seu maior potencial e principal justificativa para seu ensino sistemático.

Esta pesquisa descreve um experimento que envolveu um grupo de sessenta alunos de um curso de bacharelado em design, onde procurou-se compreender o impacto causado sobre sua capacidade cognitiva de rotação mental, a partir da administração de uma série de conceitos e exercícios relacionados ao tópico das Transformações Isométricas. Os estudantes foram divididos em duas turmas, e receberam instruções distintas em relação ao uso dos meios expressivos. A primeira turma exercitou-se utilizando exclusivamente recursos bidimensionais, enquanto a segunda o fez incluindo exercícios com manipulativos físicos tridimensionais. Os desempenhos cognitivo e conceitual foram avaliados através de dois testes respectivamente: O MRT (*mental rotation test*) e TS (teste de simetria), e os dados analisados estatisticamente.

A pesquisa procura assim, evidências que contribuam no sentido de esclarecer algumas das relações possíveis entre tópicos em geometria, cognição e método pedagógico.

ABSTRACT

Along history, geometry has been the prescriptive discipline of a large range of scientific and artistic activities. It is known to be the base of several professions such as architecture, design, engineering, chemicals, physics, geology, astronomy, etc.

In spite of its acknowledged importance, its regular teaching throughout an individual's academic life has gone through many changes (not always for better) since the second half of the 20th century and it is nowadays a complex and controvert subject in Brazil and worldwide. Nevertheless, researchers seem to agree that the ability of visualizing – which is classified among the individual's spatial skills from the Cognitive Psychology standpoint - might be positively affected by means of appropriate training in geometry. Many times such vocation is described as a major potential and main justification for its systematic teaching.

This research outlines an experiment which involved a group of sixty pupils of a design bachelor's program and aims at trying to understand the impact caused on their mental rotation cognitive ability as from the administration of a range of concepts and exercises related to Isometric Transformations. The students were set out into two groups and received different instructions regarding the use of means of expression. The first group performed exercises using uniquely bidimensional resources, while the second group's exercises included as well activities containing 3D physical manipulatives. The cognitive and conceptual performances were evaluated by two tests, respectively, MRT (mental rotation test) and TS (Symmetry Test), and all data were statistically analyzed.

This study, thus, seeks for evidences that may contribute to clarify some of the possible relationships between topics in geometry, cognition, and the pedagogical method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Os cinco sólidos platônicos associados aos quatro elementos mais a quintecência, mostrado por Kepler em Harmonice Mundi, de 1619. – (Extraída de http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa1/dig.htm)	32
Figura 2 – Postulado das paralelas	34
Figura 3 – Constituição estrutural da ciência visual – (Extraída de BERTOLINE, 1998, p. 184).....	49
Figura 4 – Torso feminino, fotografia de Dominik Fritz – (Extraída de http://mrblue.gfxartist.com/artworks/108759 acessado em 10/07/2011)	61
Figura 5 – Mandala	61
Figura 6 – Padrões extraídos do livro A gramática do Ornamento (OWEN, 2010)	62
Figura 7 – 17 Padrões Cristalográficos Bidimensionais ou Papéis de parede – Extraída de http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/symmetry/wallpapers.htm acessado em 10/03/2011)	64
Figura 8 – 7 tipos de Frisos – (Disponível em http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/symmetry/friezes.htm acessado em 10/03/2011)	65
Figura 9 – Rosáceas ou Rosetas – (Disponível em http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/symmetry/rotations.htm acessado em 10/03/2011)	65
Figura 10 – Mosaico cerâmico no palácio de Alhambra – (Disponível em http://jager.startholland.com/?trd=yrihi-21.shtml acessado em 10/08/2011)	66
Figura 11 – Desenhos de Escher - palácio de Alhambra	67
Figura 12 – Desenhos de Escher - palácio de Alhambra	68
Figura 13 – Divisão regular do plano com figuras humanas, para Circulação (1938)	68
Figura 14 – Situação das operações isométricas no mapa de tópicos em geometria	69
Figura 15 – Em uma operação dilatativa, o tamanho da imagem é alterado, mas as proporções são mantidas	70
Figura 16 – Mapa taxonômico das transformações geométricas.....	72

Figura 17 – Morfologia da Simetria – (Extraída de WALLSCHLAEGER; BUSIC, 1992, P.447).....	74
Figura 18 – Mapa das Transformações Isométricas (rígidas)e Não-Isométricas (não-rígidas).....	75
Figura 19 – bijeção entre os conjuntos X e Y	76
Figura 20 – Elementos de uma transformação isométrica por translação sobre o plano	78
Figura 21 – Elementos de uma transformação isométrica por translação no espaço	79
Figura 22a – Elementos de uma transformação isométrica por rotação sobre o plano	80
Figura 22b – Elementos de uma transformação isométrica por rotação no espaço	81
Figura 23 – Reflexão.....	82
Figura 24 – Elementos de uma transformação isométrica por reflexão sobre o plano	82
Figuras 25 e 26 – Elementos de uma transformação isométrica por reflexão no espaço	83
Figura 27 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702).....	97
Figura 28 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702).....	98
Figura 29 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702).....	99
Figura 30 – Questão-Tipo do teste MRT	102
Figura 31 – Wohlschlaeger e Wohlschlaeger (1998, p.401) - O aparato foi montado utilizando um computador 2000B AMIGA e um estereoscópio especial de 55 cm de comprimento. O estereoscópio foi usado para fornecer informações sobre a profundidade das imagens.....	106
Figura 32 – (ADAMS et al, p.1270) - O participante rotaciona manualmente a figura através de um joystick	107

Figura 33 – Wiedenbauer, Schmid e Osmani (2007, p. 26). Modelo referente e modelo manipulável. Aparato de treinamento de rotação manual virtual	108
Figura 34 - Mental Rotation Task IDesk – Ambiente de realidade virtual no treinamento da habilidade de rotação mental – (disponível em http://www.youtube.com/watch?v=FclPrrXI5zg&feature=player_embedded)...	110
Figura 35 – Robert e Chevrier (2003, p.1139) - Uma questão do MRT reproduzida sobre catolina e posta verticalmente sobre uma base. Da esquerda para a direita, o referente e cada uma das quatro alternativas, nomeadas A, B, C e D.....	111
Figura 36 – Robert e Chevrier (2003, p.1140) - A mesma questão do MRT é reproduzida através de uma maquete tridimensional, com os elementos suportados e alinhados por uma base. Da esquerda para a direita, o referente e cada uma das quatro alternativas, nomeadas A, B, C e D	112
Figura 37 – Forma primitiva manipulada em ambiente virtual. (Disponível em http://www.caddit.net/plm-software/t-flex_cad.php)	116
Figura 38- Geometria com manipulativos: Alunos do ensino fundamental. (Disponível em http://emebruymf.blogspot.com/2011/06/jogos-com-materias-manipulativos.html).....	119
Figura 39 – Geometria com manipulativos: Estudantes do ensino médio. (Disponível em http://www.ufs.br/?pg=noticia&id=252).....	122
Figura 40 – Geometria com manipulativos: Jardim da infância (Disponível em http://www.ehow.com/info_8118631_ideas-teaching-geometry.html).....	124
Figura 41 – Geometria com manipulativos: Alunos de design	125
Figura 42 – Gabinete de Baracs – Um laboratório dinâmico de composição geométrica através dos manipulativos físicos (BARACS, 1988, p.127)	128
Figura 43 – Baracs demonstrando o modelo de um poliedro com vértices móveis. (BARACS, 1988, p.119).....	129
Figura 44 – Polígonos com “orelhas” planificados são ligados por elásticos de borracha, de modo a formarem poliedros. (Disponível em http://www.ellison.com/idea/5424/elastic-geometrics).....	130
Figura 45 – Este recurso permite a composição de vasta família de sólidos. (Disponível em http://www.ellison.com/idea/5424/elastic-geometrics)	130
Figura 46 – Materiais físicos manipuláveis utilizados no experimento desta pesquisa: a opção por poucos, baratos e acessíveis.....	131
Figura 47 – Materiais utilizados pela ‘TURMA A’	137

Figura 48 – Ambiente de trabalho da ‘TURMA A’	137
Figura 49 – Materiais utilizados pela ‘TURMA B’	137
Figura 50 – Ambiente de trabalho da ‘TURMA B’	137
Figura 51 – Estrutura do ensaio	138
Figura 52 – Simetria Axial em pintura rupestre. Criar formas simétricas parece ser uma orientação natural do homem	139
Figuras 53, 54 e 55 – Programa ‘Arte & Matemática’ produzido pela TV Cultura e apresentado pelo Prof. Luiz Barco.....	140
Figura 56 – Enunciado do exercício 1, apresentado em sala.....	141
Figura 57 – Planta que utiliza a simetria como estratégia de desenvolvimento - Imagem mostrada na aula	143
Figura 58 – Simetria axial da borboleta - Imagem mostrada na aula	143
Figura 59 – Logotipos cujas concepções utilizaram conceitos da simetria. - Imagens mostradas na aula	143
Figura 60 – GIFS animados descrevendo as seguintes transformações sobre o plano: Reflexão, Rotação, Translação e Reflexão Deslizante (Disponível para visualização em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26s3.html)	144
Figura 61 – Conceitos, elementos e notações das operações isométricas de Translação. Rotação, Reflexão e Reflexão Deslizante	144
Figura 62 – Exercício 2: Duas pranchas tamanho A3, com três situações propostas para cada operação isométrica estudada na aula.....	144
Figura 63 – Fotografias autorais que os alunos apresentaram como resposta ao enunciado do EXERCÍCIO 1	146
Figura 64 – Enunciado do Exercício 3: “Perder Simetria”	147
Figura 65 – Imagens retiradas das três animações apresentadas em aula, na fase preparatória à execução da tarefa . – (Disponível em Vídeo 1 – Dancing Triangles – Origem Desconhecida - Vídeo 2 – Tringles http://www.youtube.com/watch?v=YlxCGuzUWmE acesso em 20/06/2011 - Vídeo 3 – Notes on a tringle - http://www.youtube.com/watch?v=1ztf05S5oL4&feature=related acesso em 20/06/2011).....	147

Figura 66 – Materiais utilizados pelo grupo de controle	148
Figura 67 – O modelo deveria ser recortado, e decomposto em 16 triângulos retângulos isóceles, e rearticulado sobre a malha do gabarito, criando um motivo assimétrico.....	149
Figura 68 – Formulação de um MOTIVO, derivado da articulação dos 16 triângulos dentro da malha do gabarito.....	149
Figuras 69, 70 e 71 – Desenvolvimento do exercício 4 da etapa 1 (enunciado no anexo 6.)	150
Figura 72 – Folha de estudos da Etapa 1 - trabalho de aluno.....	151
Figura 73 – Dentre todos os estudos, quatro motivos são selecionados....	151
Figuras 74 e 75 – O cubo de isopor foi marcado em suas faces segundo seus vértices e pontos médios e, em seguida, fragmentado em seis prismas.....	152
Figuras 76, 77 e 78 – Dois prismas triangulares e um prisma quadrado são utilizados para conceber um motivo. As linhas sobre a superfície delimitam o grafismo.	153
Figura 79 - Participantes do grupo de tratamento no ambiente da oficina....	154
Figuras 80 e 81 – Etapa 1 do exercício 4 em andamento.....	154
Figuras 82, 83 e 84 – Após a criação do motivo, é solicitado do aluno projetar suas seis vistas sobre gabarito fornecido.....	155
Figura 85 – Símbolos e notações da translação, reflexão e rotação sobre o plano.	156
Figura 86 – Motivo selecionado na etapa 2 do exercício 4.....	157
Figura 87 – O motivo selecionado é aplicado sobre 4 gabaritos pré-definidos.....	157
Figura 88 – O motivo gerado na etapa 1.	158
Figura 89 – O motivo referente é triplicado, sendo uma cópia idêntica e duas refletidas.	158
Figuras 90 e 91 – Etapa 2 em andamento.....	159
Figura 92 – O aluno é solicitado a utilizar o motivo na criação livre de seus rapports.....	160
Figura 93 – Estudos da etapa 3.....	161

Figura 94 - Motivo utilizado.....	162
Figuras 95 e 96 - Folha de apresentacao final (trabalho de aluno)	162
Figuras 97 e 98 – Etapa 3 tem início a partir do posicionamento do motivo.	163
Figura 99 – A primitiva original após as transformações.....	164
Figura 100 – Casa Guardiola, 1998 - Peter Eisenmann.....	164
Figura 101 – Casa Guardiola - Desenvolvimento formal. [W3]	164
Figura 102 – Sequência de operações sobre o cubo: Subtração e translações.....	164
Figura 103 – Neste exemplo o motivo é rotacionado em torno de um eixo a uma amplitude de 90° criando uma imagem.....	165
Figura 104 – Sólido resultante da operação de rotação.	165
Figuras 105 e 106 - Sólidos resultantes da operação de rotação	166
Figuras 107, 108, 109 e 110 – O sólido resultante da primeira operação é refletido a partir do estabelecimento de um eixo plano resultando no rapport tridimensional.	167
Figuras 111, 112, 113, 114 – Andamento da Etapa 4.	167
Figura 115 – Primeira folha do enunciado do teste MRT	168
Figura 116 – Primeira folha do enunciado do teste de Simetria.....	168
Figura 117 – Distribuição dos dados por Gênero, Testes e Momentos.....	179
Figura 118 – Exercícios 1 e 2 do teste ‘Conhecimentos em Simetria’.....	198
Figura 119 – Exercícios 3 e 4 do teste ‘Conhecimentos em Simetria’.....	199
Figura 120 – Casa Guardiola. 1988. Peter Eisenman - (Disponível em http://thedesigndspace.net/art/gallery/main.php/visionary/guardiolaHouseEisenman.j pg.html).....	278
Figura 121 - Quatro instantes da transformação, que envolve a utilização sistemática de duas operações de isometria: translações e rotações, através do alinhamento das vistas superior e lateral esquerda. (Disponível em http://cricinterdonato.altervista.org/peter%20vector.html).....	280

Figura 122 - A linha aparece como resultado da translação de um ponto arbitrário, estabelecendo uma altura - no eixo Z.....	282
Figura 123 - A linha translada a mesma extensão de seu comprimento, e forma um plano quadrado, somando à altura, uma largura - no eixo X	282
Figura 124 - O plano bidimensional translada sobre o eixo Y perpendicular, à mesma razão de sua largura e altura, gerando um cubo.....	282
Figura 125 - No interior do cubo branco, gera-se um semelhante de menor volume - vermelho, alinhado ao original por um vértice e três arestas.....	282
Figura 126 - Do cubo branco, subtrai-se o vermelho. O forma do poliedro resultante justifica o chamado diagrama em “L”.....	283
Figura 127 - O poliedro rotaciona 90° em sentido horário, em torno de um eixo Z vertical, que passa pelo seu centro geométrico. Esta operação inverte as posições relativas de X e Y.....	283
Figura 128 - O poliedro se duplica e translada ao longo do eixo Y, na extensão necessária a coincidir o vértice externo do L do poliedro duplicado, com o ponto médio da aresta do poliedro original.....	283
Figura 129 - O poliedro sofre nova translação ao longo do eixo X, na mesma extensão da observada na operação anterior.....	283
Figura 130 - O poliedro duplicado sofre nova translação, ao longo do eixo Z, na mesma extensão das duas translações anteriores.....	284
Figura 131 - A imagem sublinha os planos internos do poliedro original, e indica a posição dos eixos X, Y e Z, em torno dos quais a compisição será transformada.....	284
Figura 132 - Indica-se a posição do eixo Z, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.....	284
Figura 133 - A composição sofre uma ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo Z.....	284

Figura 134 - Indica-se a posição do eixo X, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.....	285
Figura 135 - A composição sofre uma nova ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo X.	285
Figura 136 - Indica-se a posição do eixo Y, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.....	285
Figura 137 - A composição sofre uma nova ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo Y.....	285
Figura 138 - A posição dos eixos X,Y e Z no primeiro quadrante, visto a partir da isométrica superior direita.....	286
Figura 139 - O cubo integral, sem a ação de nenhuma operação.....	286
Figura 140 – Sequência de operações sobre o cubo: Subtração e translações.....	287
Figura 141- A primitiva original após as transformações.....	287
Figura 142 - Vista superior do cubo subtraído	288
Figura 143 - Vista superior do sólido após a primeira translação.....	288
Figura 144 - Vista lateral esquerda do cubo subtraído.....	288
Figura 145 - Vista lateral esquerda do sólido após a primeira translação.....	288
Figura 146 - Vista superior do sólido após a segunda translação.....	289
Figura 147 - Vista superior do sólido após a terceira translação.....	289
Figura 148 - Vista lateral esquerda do sólido após a segunda translação.....	289
Figura 149 - Vista lateral esquerda após a terceira translação.....	289
Figura 150 - Vista superior do posicionamento dos eixos O e O'.....	290

Figura 151 - Vista superior da primeira rotação da imagem a partir do eixo O.....	290
Figura 152 - Vista lateral esquerda do posicionamento dos eixos O e O'	290
Figura 153 - Vista lateral esquerda da segunda rotação a partir do eixo O' ...	290
Figura 154 - A primeira rotação ocorre na vista superior e utiliza o eixo O para transformar a imagem em 4,00° no sentido horário.....	291
Figura 155 - A segunda, ocorre a partir da vista lateral, e utiliza o eixo O' para rotacionar a imagem em 4,00° no sentido anti-horário.....	291
Figura 156 - vista lateral esquerda	291
Figura 157 - vista superior.....	291
Figura 158 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128).....	293
Figura 159 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128).....	294
Figura 160 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128).....	294
Figura 161 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128).....	295

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Descrição da amostra “Turma A” (Grupo de Controle)	136
Tabela 2 - Descrição da amostra “Turma B” (Grupo de Tratamento)	136
Tabela 3 - Ambientes em relação a turmas e aulas	137
Tabela 4 - Resultados do exercício 1	145
Tabela 5 – Distribuição hierárquica dos dados por Teste, Momento, Grupo e Gênero	172
Tabela 6 - Distribuição absoluta acumulada e acumulada reversa dos alunos por nota no MRT, tanto no pré-teste como no pós-teste.	175
Tabela 7 - Comparação dos resultados no pré e pós testes do MRT. O Teste “t de student” revela ganho significativo no desempenho médio	176
Tabela 8 - Estatísticas básicas do MRT, relacionando Grupos e Momentos...	178
Tabela 9 - Sumário de médias do MRT, relacionando Gênero, Grupos e Momentos.....	180
Tabela 10 - Análise da variância dos resultados no MRT.....	183
Tabela 11 - Distribuição absoluta acumulada e acumulada reversa dos alunos por nota no TESTE DE SIMETRIA, tanto no pré-teste como no pós-teste.....	186
Tabela 12 - Comparação dos resultados no pré e pós testes do TESTE DE SIMETRIA. O Teste “t de student” revela ganho significativo no desempenho médio	187
Tabela 13 - Estatísticas Básicas do TS, relacionando Grupos e Momentos...	189
Tabela 14 - Sumário de médias do MRT, relacionando Gênero, Grupos e Momentos.....	191
Tabela 15 - Teste MRT e Teste de Simetria: Estatísticas Básicas.....	193

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Distribuição da Amostra Total em intervalos de médias, nos dois momentos do Teste MRT	173
Gráfico 2 - Gráfico de dispersão dos 60 alunos no teste MRT: Pós-Teste versus Pré-Teste	174
Gráfico 3 - Gráfico de dispersão dos alunos com relação às notas nos pré e pós testes do MRT, diferenciando os alunos nos grupos de controle e tratamento	177
Gráfico 4 - Gráfico de dispersão do MRT no Grupo de Controle, diferenciados por gênero	182
Gráfico 5 - Gráfico de dispersão do MRT no Grupo de Tratamento, diferenciados por gênero	182
Gráfico 6 - Distribuição da Amostra Total em intervalos de médias, nos dois momentos do Teste de Simetria	184
Gráfico 7 - Distribuição da Amostra Total em relação ao desempenho individual, nos dois momentos do TS	185
Gráfico 8 - Gráfico de dispersão dos alunos com relação às notas nos pré e pós testes do TESTE DE SIMETRIA, diferenciando os alunos nos grupos de controle e tratamento	188
Gráfico 9 - Gráfico de dispersão do TS no Grupo de Controle, diferenciados por gênero	190
Gráfico 10 - Gráfico de dispersão do TS no Grupo de Tratamento, diferenciados por gênero	190
Gráfico 11 - Distribuição da totalidade dos participantes, em relação ao delta de sua média no Teste MRT e Teste de Simetria	192
Gráfico 12 - Gráfico de dispersão do Grupo de Controle, em relação aos deltas do MRT e TS, diferenciados por gênero	194
Gráfico 13 - Gráfico de dispersão do Grupo de Tratamento, em relação aos deltas do MRT e TS, diferenciados por gênero	194

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	BIDIMENSIONAL
3D	TRIDIMENSIONAL
AR	<i>AUGMENTED REALITY</i>
FACAMP	FACULDADES DE CAMPINAS
HRM	HABILIDADE DE ROTAÇÃO MENTAL
HVE	HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL
MMM	MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA
MRT	<i>MENTAL ROTATION TEST</i>
NCTM	<i>NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS</i>
PCN	PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS
TG	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA
TS	TESTE DE SIMETRIA
VR	<i>VIRTUAL REALITY</i>

SUMÁRIO

PARTE I	01
1. Apresentação	03
2. Introdução	09
2.1. Delimitações da pesquisa	11
2.2. Objetivos	16
2.2.1. Objetivos gerais	16
2.2.2. Objetivos específicos	16
2.3. Justificativas e relevância	17
2.4. Hipóteses	19
2.5. Estratégias metodológicas	21
2.5.1. Revisão bibliográfica	22
2.5.2. Tratamento empírico	22
2.5.3. Codificação dos dados	23
2.6. Organização da pesquisa	24
3. Sobre a geometria e seu estudo	31
3.1. Ensino institucional de geometria: Um pálido passado recente	37
3.2. O ensino de geometria nas artes: Resgate de sua natureza visual	45
4. Transformações geométricas e geometria	55
4.1. Relações entre os sentidos de ordem e simetria	60
4.2. Transformações geométricas	69
4.2.1. Categorias das transformações geométricas	71
4.3. Transformações isométricas (rígidas) no plano e espaço	76
4.3.1. Translação no plano	78
4.3.2. Translação no espaço	79
4.3.3. Rotação no plano	80
4.3.4. Rotação no espaço	81
4.3.5. Reflexão no plano	82
4.3.6. Reflexão no espaço	83
5. Geometria e cognição	85
5.1. Aptidão espacial	89
5.2. Geometria e aptidão espacial	94
5.3. Habilidade de rotação mental	96
5.4. Estratégias cognitivas e testes psicométricos	101
5.5. MRT – Mental Rotation Test	101
5.5.1. Procedimentos gerais de aplicação do teste	102
5.5.2. Pontuação	103
5.6. Desenvolvimento da habilidade de rotação mental	104

6. Geometria e meios expressivos	113
6.1. Revolução pelo computador	114
6.2. Manipulativos físicos	119
6.2.1. Manipulativos físicos no ensino de geometria	119
6.2.2. Manipulativos físicos no ensino do design e arquitetura	125
6.2.3. Manipulativos físicos no contexto desta pesquisa	131
PARTE II	133
7. Descrição do tratamento	135
7.1. Disposições gerais	135
7.2. Descrição da amostra	136
7.3. Requisitos necessários	136
7.4. Ambiente e recursos	137
7.5. Descrição esquemática do experimento	138
7.6. Fase I – Aulas 1 a 4 – Estruturação conceitual	139
7.6.1. Aula 1 – Turmas A e B	140
7.6.2. Aula 2 – Turmas A e B	142
7.6.3. Aula 3 – Turmas A e B	143
7.6.4. Aula 4 – Turmas A e B	145
7.7. Fase II – Aulas 5 a 8 – Aplicação do Experimento	148
7.7.1. Aula 5 – Turma A – Exercício 4 – Etapa 1	149
7.7.2. Aula 5 – Turma B – Exercício 4 – Etapa 1	152
7.7.3. Aula 6 – Turma A – Exercício 4 – Etapa 2	156
7.7.4. Aula 6 – Turma B – Exercício 4 – Etapa 2	158
7.7.5. Aula 7 – Turma A – Exercício 4 – Etapa 3	160
7.7.6. Aula 7 – Turma B – Exercício 4 – Etapa 3	163
7.7.7. Aula 8 – Turmas A e B	168
8. Resultados experimentais e análise estatística	169
8.1. Introdução	169
8.2. Condições gerais do experimento	170
8.3. Organização dos dados	172
8.4. Análise estatística do MRT	173
8.5. Análise estatística do Teste de Simetria (TS)	184
8.6. Análise estatística comparativa entre o MRT e o TS	192
8.7. Ressalvas ao método de aferição	196
8.8. TS – “Teste de Simetria”	196
9. Conclusões e considerações finais	201
9.1. Conclusão	201
9.1.1. Considerações gerais sobre a condição da educação no Brasil, e resultados preliminares do experimento	201
9.1.2. Estruturação de um currículo de geometria orientado ao Design	203

9.1.3. A Habilidade de Rotação Mental e a Geometria das Transformações	205
9.1.4. A habilidade de rotação mental e os manipulativos	207
9.1.5. A habilidade de rotação mental entre gêneros	209
9.2. Trabalhos futuros	210
9.3. Considerações finais	211

Referências bibliográficas	213
---	------------

Bibliografia estendida: A geometria do design	231
--	------------

ANEXOS	249
---------------------	------------

Anexo 1. Termo de consentimento livre e esclarecido – Estudante	249
Anexo 2. Teste de conhecimentos sobre simetria	250
Anexo 3. Operações isométricas sobre o plano	252
Anexo 4.	253
Exercício “isometrias” translação e reflexão transladada	253
Exercício “isometrias” reflexão e rotação	255
Anexo 5. Turmas “A” e “B” – Exercício 3 – “Perder a simetria”	255
Anexo 6. Turma “A” – Exercício 4 – Etapa 1 – “Perder a simetria no plano”	256
Anexo 7. Turma “B” – Exercício 4 – Etapa 1 – “Perder a simetria no espaço”	259
Anexo 8. Turma “A” – Exercício 4 – Etapa 2 – “Operações e notações”	262
Anexo 9. Turma “B” – Exercício 4 – Etapa 2 – “Operações e notações”	266
Anexo 10. Turma “A” – Exercício 4 – Etapa 3 – “Criar simetrias no plano”	267
Anexo 11. Turma “B” – Exercício 4 – Etapa 3 – “Criar simetrias no espaço”	273
Anexo 12. A arquitetura de Peter Eisenman: A casa Guardiola (...)	275
Anexo 13. Poly-Kit – Os manipulativos físicos de Janos Baracs	295

PARTE I

DISPÕE O MANANCIAL TEÓRICO-CONCEITUAL

COMPÕE-SE DAS SEGUINTESE SEÇÕES:

- SEÇÃO 1 – APRESENTAÇÃO
- SEÇÃO 2 – INTRODUÇÃO
- SEÇÃO 3 – SOBRE A GEOMETRIA E SEU ESTUDO
- SEÇÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA
- SEÇÃO 5 – GEOMETRIA E COGNIÇÃO
- SEÇÃO 6 – GEOMETRIA E MEIOS EXPRESSIVOS

1. APRESENTAÇÃO

Li certa vez em algum dos livros do pensador italiano Pietro Ubaldi, que para que se possa entender adequadamente um livro, o leitor deveria conhecer bem o reverso da medalha, ou seja, as condições em que estava seu autor no período em que o escreveu. Parece oportuno que conte algo sobre a trajetória desta pesquisa, antes mesmo que se desenvolva o conteúdo que lhe dá forma e propósito.

As questões que motivaram esta tese de doutorado encontram lastro nas experiências e percursos vividos durante o mestrado, muito embora não se possa dizer que atual pesquisa seja uma continuidade da pesquisa anterior. Durante o mestrado, meu interesse foi relacionar o conceito de arquétipo - segundo os significados que esta palavra encontra no sistema da psicologia analítica de C. G. Jung - ao conceito de forma, no sentido de sua sintaxe organizacional, através da caracterização de um arranjo regular de simetria radial, mais conhecido através da palavra sânscrita 'mandala'.

A este tipo específico de conformação expressiva, tem sido relacionado - ao longo de toda a história da civilização e independentemente do contexto cultural - a um significado indissociável com os sentidos simbólico e universal de ordem, centro e totalidade. A geometria aqui, embora codificável enquanto prescrição sistemática de certos padrões de regularidade (pois descreve invariavelmente uma rotação em torno de um eixo central), não se apresenta através de sua dimensão axiomática, como o sistema lógico que ganhou contorno final através do grego Euclides por volta de 300 a.C., mas trata-se de um eloqüente sistema de metáforas capaz de relacionar a ordem psíquica de um artista ou de uma cultura a uma ordem formal específica, cuja estrutura é passível de mensuração e análise.

Após um período de coleta e organização de 'diagramas mandálicos' prospectados ao longo da história da arte, pareceu-me claro que certos condicionantes da forma gerada podiam ser impressos nos meios expressivos a

partir de uma espécie de tensão psíquica compartilhada por toda a humanidade, e que pode ser melhor compreendida através do conceito junguiano de inconsciente coletivo. A partir deste ponto, gravou-se fortemente a impressão de que em certos casos, o artista não está totalmente livre no sentido de que seu gosto pessoal não é imperativo no processo criativo, mas trabalha como coordenador da forma impulsionado por motivações inconscientes que se expressam através de arranjos estruturais de natureza geométrica. A constatação de que a geometria tem, se não várias, certamente mais de uma dimensão, e que aquele seu aspecto a que somos expostos (ainda que brevemente) no período do ensino formal durante as aulas de matemática, nem de longe é o mais relevante aos estudos da estética e da composição artística, é que trouxeram as principais indagações que apontaram os rumos desta pesquisa.

O resultado final desta tese pouco tem a ver com o projeto original submetido à banca de seleção do programa de pós-graduação, a não ser pelo sólido interesse entre os vínculos entre arte e geometria. A metáfora de um arranjo geométrico representativo da ordem universal expresso pela mandala – foco do interesse no período do mestrado - encontrou novas expressões no conjunto teórico das geometrias não-euclidianas, em especial na geometria fractal. Assim, os primeiros movimentos de seleção bibliográfica foram guiados pela busca de referências sobre como a produção artística contemporânea tem utilizado a matriz conceitual deste novo campo de estudos originado na matemática, na concepção de formas complexas, para em um segundo momento, propor sua introdução em cursos de graduação nas artes, arquitetura e design.

Entretanto, dois anos após o início da pesquisa, o projeto original sofreu uma alteração radical em seus rumos, em virtude de uma proposta de trabalho na qual me deparei com a demanda de oferecer um curso de geometria a estudantes de graduação de design, desdobrado em três módulos. O período de um ano que se seguiu, trouxe a preciosa oportunidade de encarar as demandas concretas da estruturação de um programa, e selecionar, dentro de um vasto universo de

tópicos e métodos, os mais adequados ao repertório prévio dos alunos e ao perfil da instituição. A tarefa pareceu semelhante ao início de um projeto de arquitetura, em que se depara com uma folha branca sobre a prancheta, no qual se é acompanhado apenas por seu próprio repertório de conhecimentos, um conjunto de condicionantes e certa vertigem.

A primeira constatação que faço, em tom de confissão e não sem certo constrangimento, é que não sinto ter recebido ao longo de minha educação formal, lições consistentes desta disciplina, absolutamente necessária à prescrição, fundamentação, descrição, concepção e manipulação da forma e suas propriedades, e no entanto, hoje sou responsável por apresentar aos estudantes o potencial operativo da geometria em seu repertório projetual. Do pouco que vi a esse respeito ao longo de minha trajetória no ensino formal, desconfio que a escolha dos tópicos e a formatação didática revelavam a motivação principal das instituições e do modelo educacional: a preparação para a disputa por vagas no ensino superior, através do vestibular.

Ao longo da graduação, a geometria que vi foi a descritiva (GD), importante por lançar as bases fundamentais da interdependência representativa entre o plano bidimensional e o espaço tridimensional, abrindo campo ao desenvolvimento das disciplinas de desenho técnico e projeto. Tratou-se de tópico muito útil e importante certamente, mas insuficiente se formos capazes de reconhecer o amplitude do potencial que o estudo da geometria pode oferecer nos processos criativos de projeto, e especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento das qualidades cognitivas. Neste momento surge a primeira indagação: a falta de um estudo sistemático da disciplina de geometria ao longo de uma vida acadêmica, como foi meu caso, reflete apenas uma constelação infeliz de circunstâncias a qual me vi exposto, ou ilustra um preocupante padrão do ensino institucional?

Trata-se de um fenômeno atípico, restrito às especificidades de um caso isolado, ou ilustra a rotina de uma realidade mais abrangente?

Iniciando a pesquisa, e como um primeiro resultado sistemático, constatei que o ensino formal de geometria tem descrito uma trajetória irregular, tendo mesmo atravessado em um passado recente longo período de ostracismo e subutilização. Isso por si só, é capaz de explicar que, longe de ser a exceção, minhas deficiências formativas tendem a ser regra entre os profissionais de minha geração e mesmo de gerações anteriores e posteriores; isso não só no Brasil, mas também em outros lugares do mundo “respeitáveis”, como Europa e Estados Unidos. A diferença é que no Brasil, os efeitos se agravam em virtude da qualidade e o alcance do sistema de ensino. Uma visita à comunidade dos pesquisadores do ensino da matemática trouxe informações inquietantes.

Verificou-se por exemplo, que durante o período que foi de 1971 a 1998, em razão das diretrizes oficiais responsáveis por orientar os programas dos cursos de matemática nos ensinos fundamental e secundário, o ensino das construções geométricas deixou de ser obrigatório no Brasil, o que equivale dizer que foi, na prática, ignorado por 27 anos. É razoável imaginar que, uma vez que não tenha havido necessidade de ensinar aos alunos os conteúdos relacionados à geometria, os cursos de formação de professores de matemática tenham naturalmente enfraquecido sua ênfase nesta área, em favor de outras circunstancialmente mais valorizadas e tidas como prioritárias, como a álgebra. Assim, não só os alunos do fundamental tiveram deficiências formativas, mas também seus educadores, e mesmo os educadores dos educadores. Não é simples imaginar a extensão dos danos que esta cadeia de despreparos produziu, causando inclusive, reflexos da formação dos profissionais e professores dos cursos de criação. Assim como eu, gerações de arquitetos e designers tiveram que investigar através do autodidatismo e experimentalismo, aspectos da linguagem expressiva fundamentais ao exercício de suas profissões.

A re-inserção da geometria entre as disciplinas obrigatórias do currículo, parece ter despertado a comunidade acadêmica para o atual estágio de atraso, e para a pertinência do debate atual. Ao que parece, em virtude deste seu recente histórico de sub-valorização, bem como pelas transformações profundas que a tecnologia vem promovendo nas antigas maneiras de se ensinar e aprender, as questões que se relacionam à geometria passaram a figurar na ordem do dia.

Conceber um programa de geometria orientado ao design é um processo que pode levar anos, e envolver muitos movimentos de avanços e retrocessos, reavaliações, adaptações, enxugamentos e estiramentos. Tão importante quanto perseguir um formato adequado, é compreender a natureza dinâmica e exploratória do processo, pois geometria é um termo que aceita muitas definições, e envolve uma infinidade de aspectos conceituais, técnicos, culturais e metodológicos; definitivamente não há uma cultura ou roteiro estabelecido ou seguro que possam guiar a seleção de tópicos, nem tão pouco preestabelecer procedimentos metodológicos padrão.

A tarefa exige cuidados que não devem considerar nunca menos que um bom conhecimento da natureza do currículo da faculdade onde se ensina, uma visão ampla do conjunto, recursos e estratégias com potencial exploratório na área da estética, o que se faz esgueirando-se e interagindo com outras competências, e sobretudo disposição à experimentação de um múltiplo e diversificado conjunto de ferramentas didáticas, capazes de trazer o proveito de suas especificidades técnicas e cognitivas. Na evolução deste processo, o que parece prioritário ao professor é ter a disposição de se desenvolver na capacidade de mover-se com certo conforto nos domínios da matemática, para assim, poder reconhecer dentre as inúmeras possibilidades, os tópicos que para o designer podem ter relevância, e os que eventualmente não tem.

As circunstâncias às quais me vi exposto a partir de Fevereiro de 2009 solicitavam grande empenho de tempo e trabalho na formatação dos cursos, e à medida que as questões relacionadas ao ensino/aprendizagem da geometria foram sendo amadurecidas, mais compreendia que os rumos desta pesquisa deveriam ser alterados, de maneira que melhor acomodassem minha nova perspectiva sobre a questão - mais sensível e informada sobre seu potencial e importância nos processos criativos - ao tempo que restava para o cumprimento do programa. A mudança nos rumos traria riscos que não passaram despercebidos, pois implicaria em um re-trabalho no estabelecimento do campo de pesquisa, bem como na seleção de novas fontes bibliográficas. Entretanto por outro lado, pareceu uma boa estratégia otimizar os resultados da pesquisa intensa motivada pela necessidade de minha demanda profissional, incorporando-a a esta pesquisa, como se fizessem parte de um mesmo empenho.

O interesse pela geometria fractal e seus desdobramentos no ambiente de ensino/aprendizagem, foram adiados para outro momento em um futuro próximo, pois a vivência em sala demonstrou a necessidade de que certos conteúdos e métodos, mais essenciais e básicos, estivessem melhor consolidados e proporcionados ao repertório dos alunos (pelo menos em um primeiro momento).

Assim, os últimos três anos, nos quais os percursos desta pesquisa e a vivência com meus alunos estiveram interligados, foram prolíficos em descobertas e experimentações, e algumas delas são apresentadas neste volume.

SEÇÃO 2 – INTRODUÇÃO

Em termos gerais, esta pesquisa procura discutir os processos de ensino/aprendizagem da geometria, localizando-a no conjunto de conhecimentos que fundamentam a formação em design e procurando compreender as extensões de seu impacto sobre o repertório criativo e cognitivo de estudantes.

Sabe-se que a geometria é uma área do conhecimento bastante antiga, e que por isso, teve ao longo da história de seu desenvolvimento, suas dimensões e significados continuamente transformados. Ao precisá-la entre as disciplinas prescritivas da formação do designer, pretende-se sublinhar sua presciência sobre os processos criativos de geração, organização e descrição da forma, através do reconhecimento de seu potencial visual. Em outras palavras, este trabalho procura situar a geometria no campo do conhecimento das teorias visuais, em associação direta a outros conhecimentos assimilados da teoria da comunicação e percepção, física aplicada, psicologia da cognição, processos de manufatura e fatores humanos, entre outros.

Esta perspectiva, na qual a geometria é associada a outras disciplinas e domínios do conhecimento, contribuindo à conformação de uma *ciência visual*, colabora com a expansão dos domínios de sua aplicabilidade concreta, no mundo real no qual as pessoas vivem e se deslocam, e especialmente, enriquece o repertório teórico e ferramental de um amplo grupo de profissionais ligados à criação, no qual incluem-se, além dos designers, também artistas plásticos e arquitetos.

Outra dimensão relativa ao estudo da geometria que interessa a este trabalho, é sua potencial influência sobre o incremento de certas capacidades cognitivas como a habilidade de visualização espacial, e mais especificamente, a habilidade de rotação mental, considerada fundamental para a prática criativa.

Parte-se da premissa de que as capacidades cognitivas humanas são treináveis e podem dilatar-se. Diversos estudos, como se verá ao longo do trabalho, associam o estudo da geometria através de manipulativos (físicos e virtuais) ao desenvolvimento das habilidades de visualização espacial; neste sentido, mais do que uma ferramenta conceitual, seu estudo sistemático contribuiria para a ampliação de certos aspectos da inteligência.

Ao situar a geometria no ambiente de ensino/aprendizagem da formação em design segundo as reflexões e termos descritos acima, a pesquisa pretende trazer ao primeiro plano a preocupação com suas questões programáticas e didáticas. Em se tratando de área com tão amplo conteúdo, isso significa estabelecer parâmetros à seleção dos tópicos e os modos de adequados de apresentá-los, numa sequência criteriosa que leve em conta o perfil do curso e dos estudantes, mas que não descuide da fundamentação teórica.

O cuidado ao discernir o propósito para o qual a geometria está sendo ensinada é fundamental. Há, por exemplo, diferenças nos propósitos do ensino de geometria entre alunos de bacharelado em design e matemática, que se refletem, entre outras coisas, sobre a ênfase que se dá ao rigor das notações, termos empregados e demonstrações. Não faz sentido expor alunos de design a uma abordagem excessivamente axiomática, mas por outro lado, não se pode perder de vista os benefícios que seu estudo sistemático pode trazer no sentido de fundamentar as ações criativas sobre bases mais sólidas, para assim, contornar o risco de tornar seu ensino em um conjunto de meras atividades recreativas.

Ao assumir a centralidade do caráter visual da geometria aplicada ao design, e prescrever o desenvolvimento das capacidades cognitivas espaciais como seu propósito mais alto, constatou-se a necessidade de situar tais afirmações sobre fundamentos consistentes. Propôs-se assim, um experimento que fosse capaz de gerar dados empíricos capazes de pôr à prova tais conceitos, de maneira a amadurecê-los e validá-los.

2.1. DELIMITAÇÕES DA PESQUISA.

Ao falar sobre o ensino de geometria - ainda que não seja necessário em primeira instância tratá-lo no corpo de uma área de conhecimento ou a um nível da escolaridade específicos - situa-se o debate sobre um campo de margens largas cujos referentes históricos no Brasil e no mundo são relativamente bem conhecidos, devido sobretudo ao empenho dos educadores matemáticos na revitalização do significados e importância da geometria, especialmente a partir da segunda metade da década de 80. Esta pesquisa se interessa em percorrer este percurso e assinalar certos pontos relevantes que conformaram o estágio atual do debate, sem que entretanto se detivesse para além do que pareceu necessário.

Seguindo rumo a um recorte mais específico do problema do ensino da geometria, a pesquisa situou o debate ao círculo de educadores visuais preocupados com processos criativos na gênese da forma. Este empenho procurou nexos entre conteúdos programáticos e abordagens metodológicas, pareadas através de publicações em livros, artigos e *websites*, no sentido de avaliar semelhanças, particularidades, modalidades, dificuldades, condicionantes, atividades, questionamentos e preocupações comuns aos pensadores do processo. O produto desta fase procura contribuir ao esclarecimento do lugar do conhecimento em geometria, sem que isso represente a rigidez de um lugar fixo e inflexível, incapaz de articular-se e rearticular-se com outros conteúdos, segundo as inúmeras circunstâncias à que os processos de ensino/aprendizagem estão sujeitos. Desta forma, a partir do que se apurou e tendo por base o modelo de Wallschlaeger e Busic (1992), propôs-se um mapa no sentido de relacionar categorias de vínculo com a gênese da forma - como atributos, configuração, organização, representação e estrutura - a um conjunto de tópicos originais da geometria; um mapa capaz de situar e balizar o pesquisador em suas escolhas e recortes. Como foi dito, não se trata de um modelo rígido, pois certamente é capaz de acomodar novas categorias e novos tópicos, e é realista e desejável que se

desenvolva, mas trata-se do resultado de um primeiro empenho por uma visão de síntese.

Sendo assim, a partir deste mapa de referências inicial, a pesquisa trata de recortar e descrever um destes tópicos: as **Transformações Geométricas**, mais especificamente, as **Isometrias** no plano e espaço. A opção por delimitar a atenção ao tópico das transformações geométricas quando diversos outros igualmente interessantes foram reconhecidos, encontra razões em primeiro lugar, na revisão da bibliografia, que o destaca como um dos principais, constando de uma forma ou de outra no conteúdo da maior parte dos programas consultados. Mesmo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) para matemática, ao sublinhar a importância no trabalho sobre a forma e o espaço como fundamentais ao propósito de desenvolver habilidades cognitivas relacionadas à capacidade de visualização, reforça o lugar de destaque das transformações geométricas:

“(...) destaca-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para introduzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes” (PCN, 1998, p. 51)

De acordo ainda com os PCN, em alinhamento com outros programas educacionais ao redor do mundo, as Transformações Geométricas são um tópico a ser administrado desde os primeiros anos da escolaridade, e é recomendado que tenha sua complexidade ampliada à medida que se avança a níveis mais adiantados. No design, trata-se de conhecimento central para o aprofundamento do conceito de **simetria**, pois estabelece seus parâmetros taxonômicos e operativos.

Outra razão importante para a escolha deste tópico, é a semelhança que seus elementos e procedimentos operacionais compartilham com os processos cognitivos associados à **habilidade de rotação mental**, igualmente apontada pela bibliografia consultada, como capacidade fundamental ao exercício do design. A habilidade de rotação mental (HRM), é uma função cognitiva complexa, descrita como a capacidade de formar uma imagem mental, retê-la por alguns instantes e transformá-la através de uma intenção consciente. Esclarece-se que transformação aqui não implica deformação, mas a alteração das coordenadas de seus pontos através de uma rotação, ou giro. Em outras palavras, rotação mental implica em imaginar algo (como um sólido), ser capaz de fixar mentalmente esta imagem, para então girá-la e desenvolvê-la neste espaço imaginado.

A rotação mental foi um conceito introduzido por Shepard e Metzler (1971), com a publicação de *Mental Rotation of Three-Dimensional Objects*¹. A partir deste interesse, desenvolveram-se maneiras de avaliar esta habilidade através de testes psicométricos como o Mental Rotation Test (MRT), buscou-se entender suas implicações na dinâmica cerebral, através da neurociência e tratou-se de investigar aparatos que auxiliem seu desenvolvimento e incremento.

Amparada pelas pesquisas destes últimos 40 anos nesta área, esta tese aposta que certos exercícios de transformação geométrica são capazes de impactar de maneira relevante a habilidade de rotação mental dos estudantes, pois tratam-se de atividades de equivalência funcional². Tais pesquisas são ainda

¹ Disponível em: <https://www.cs.virginia.edu/cs150/ps/ps3/mental-rotation.pdf> acessado em 22/06/2011

² Equivalência funcional é a hipótese que sugere que quando vemos um objeto, por exemplo, e depois pensamos nele, ativamos a mesma área do cérebro - RUMELHART, D. E. ; NORMAN, D. A. - **Representation in memory**. In: A TKINSON, R. C.; HERRNSTEIN, R. J.; LINDZEY, G.; LUCE, R. D. (eds.). *Stevens' handbook of experimental psychology*. 2th edition. New York: John Wiley & Sons, pp. 511-587. 1988.

prolíficas em estabelecer relações com instrumentos manipulativos, desenvolvidos com o intuito de avaliar e desenvolver a HRM. Entretanto, constatou-se que tais recursos são em sua maioria, aparatos de bancada nos laboratórios de pesquisa, e que o desenvolvimento de meios capazes de se proceder tais verificações em um ambiente escolar, ainda é incipiente e carente de experimentos. Uma dificuldade que pode ser ressaltada é o fato destes meios investigativos serem dispositivos de realidade virtual, cuja tecnologia ainda é pouco acessível e cara.

Raras iniciativas, até onde pôde-se aferir, estudaram sistematicamente a manipulação de **objetos físicos reais** com o objetivo específico de avaliar e desenvolver a HRM, e considerando a maior facilidade e acesso que se tem, de forma geral, a estes recursos - especialmente em cursos de design, que costumam ter oficinas arranjadas para o fim de manipulação de materiais – parece natural utilizar a oportunidade desta pesquisa para contribuir com este foco ainda pouco explorado.

Assim, nos desdobramentos desta associação entre geometria, cognição e manipulativos físicos, lançam-se as principais questões ainda carentes de conclusões, cuja resposta serão buscadas:

- O estudo do tópico da geometria “transformações geométricas”, é capaz de auxiliar consideravelmente (com relevância estatística) o desenvolvimento da habilidade de rotação mental em estudantes de design?

Esta tese aposta que independentemente do método didático empregado, e levando em consideração as semelhanças operativas entre uma rotação mental e uma rotação física, o ensino sistemático das condições teóricas e conceituais vinculadas à geometria através das transformações geométricas, fornece elementos e esclarece procedimentos capazes de influir sobre a HRM do

indivíduo. A resposta a esta questão só poderá ser conhecida ao final da pesquisa, e deverá considerar os dados relativos ao desempenho da totalidade dos participantes do experimento, que neste caso foi de 60 alunos.

Um desdobramento natural da questão anterior expõe um segundo interesse, a ser investigado:

- Uma prática de estudos das transformações geométricas que inclua em seus processos metodológicos o uso de manipulativos físicos tridimensionais reais, é capaz de ser mais efetiva ao desenvolvimento da habilidade de rotação mental, se comparada a outra que utilize apenas recursos bidimensionais?

Neste caso, a expectativa é que se comprove o melhor desempenho dos alunos que utilizaram a manipulação de objetos físicos tridimensionais, considerando, entre outras razões, a semelhança dimensional que estabelece com as representações do teste psicométrico utilizado na avaliação do desempenho dos participantes (*Mental Rotation Test*), que utiliza a comparação de projeções de sólidos tridimensionais rotacionados e refletidos para averiguar a congruência em relação a um modelo. Para construir um argumento capaz de comprovar esta expectativa, o experimento divide a totalidade dos participantes em dois grupos, a quem são administrados dois métodos distintos, segundo a natureza do material didático.

2.2. OBJETIVOS

Entre os objetivos gerais e específicos desta tese, destacam-se os seguintes:

2.2.1. OBJETIVOS GERAIS

- Descrever uma visão panorâmica da geometria e seu estudo, segundo sua importância histórica e configurações nos modelos educacionais.
- Operar pela revisão bibliográfica objetivando o mapeamento de um conjunto de tópicos em geometria, com ênfase nos seus aspectos visuais, e mais especificamente no estudo das simetrias.
- A partir deste mapeamento, selecionar um tópico específico em geometria (Transformações Isométricas, neste caso), e refletir sobre os processos de adaptação dos conceitos axiomáticos e abstratos da matemática, a uma linguagem mais adequada ao estudante de design.
- Refletir sobre as relações entre geometria, capacidades cognitivas e meios expressivos, a partir de métodos estruturados que enfatizam a manipulação de materiais físicos reais.

2.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conceber, sistematizar e descrever detalhadamente dois cursos a serem aplicados a duas turmas de alunos de design, em concordância com a base teórica das transformações isométricas, através de um conjunto de atividades organizadas sob a forma de ementa, enunciados, planos de aula, descrição dos tratamentos e comentários sobre os resultados e avaliações.

- A partir dos dois cursos estruturados, aplicá-los sob a forma experimento, no sentido de avaliar a eficiência do estudo da geometria sobre o desenvolvimento da HRM dos participantes.
- A partir da comparação entre os resultados obtidos nos dois cursos, discernir quantitativamente a evolução da HRM, segundo a utilização de distintos meios expressivos.
- Observar a existência de diferença entre gêneros, no desenvolvimento da HRM, segundo a utilização de distintos meios expressivos.

2.3. JUSTIFICATIVAS E RELEVÂNCIA

Espera-se que esta tese possa contribuir com os interesses de pesquisadores dedicados ao ensino de geometria em suas implicações estéticas. Parece haver entre os acadêmicos designers e arquitetos - cujos interesses voltam-se à metodologia de projeto e linguagem visual - um despertar aos desdobramentos benéficos que os assuntos relacionados ao aprendizado sistemático da geometria.

O interesse expresso desta pesquisa em debater a reformulação dos currículos de geometria, relacionando-o ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo em um ambiente de ensino/aprendizado, alinha-a às pesquisas atuais no Brasil e no mundo. Uma vez que, segundo verificou-se, a retomada do prestígio do ensino da geometria é movimento relativamente recente (20-30 anos) e em virtude das revoluções técnicas e tecnológicas terem vivido forte aceleração no mesmo período, experimenta-se um ambiente efervescente nas discussões, pois novos dados são incluídos dinamicamente, e os conceitos estão sob constantes reacomodações. Procura-se assim contribuir com argumentos capazes de reforçar conclusões anteriores, de maneira a estabilizá-las como parâmetros confiáveis, bem como através de novos elementos e reflexões.

Nesta pesquisa, habilidade de rotação mental é avaliada segundo condições que, até onde se apurou, não foram extensamente investigadas por outros pesquisadores. As principais diferenças estão entre o ambiente no qual controla-se a amostra e a natureza dimensional dos manipulativos empregados.

Grande parte da literatura com a qual se deparou, emprega artefatos de treinamento desenvolvidos sob a bancada dos laboratórios, tornando-os inadequados à utilização de grandes grupos, como nas salas de aula, por exemplo. Muitas tecnologias como a estereoscopia, a realidade virtual (VR) e a Realidade Aumentada (RA), embora promissoras e capazes de resultados expressivos ainda são muito caras e necessitam de condições ambientais muito específicas para produzirem resultados.

Procurou-se assim, avaliar o emprego de manipulativos físicos reais de baixo custo, no treinamento da HRM dos alunos de design, em sala de aula e em oficina de materiais.

Ademais, merecem relevo dois outros resultados produzidos no sentido de ilustrar aspectos sobre a classificação, seleção e apresentação de tópicos da geometria, o que nem sempre é óbvio para pesquisadores não matemáticos:

O primeiro pode ser reconhecido através do que se batizou “Mapa de Tópicos em Geometria” apresentado ao final da Seção 2, no qual alinham-se interesses naturais da geometria a aspectos sintáticos da forma. Seu propósito é operar como um guia esquemático de associações entre matemática e linguagem visual, de maneira a facilitar a relação de competências e saberes voltados à estruturação de programas e atividades em sala de aula.

O segundo resultado, foi a geração de imagens gráficas fluentes e claras, capazes de ilustrar conceitos matemáticos percebidos muitas vezes como

impenetráveis, em razão da aridez dos sistemas notativos e vocabulário específico naturais na literatura matemática.

Este empenho transparece em especial nos seções 3 e 4, através da apresentação de imagens gráficas inéditas, dirigidas a ilustrar a estrutura dos elementos das TGs sob as condições de cada um dos três operadores recortados (translação, rotação e reflexão), bem como na seção 6, que descreve o tratamento experimental, que mereceu diagramação favorável à apresentação do discurso imagético.

2.4. HIPÓTESES

Esta pesquisa declara duas *hipóteses* centrais e um *interesse* a constatar. As *hipóteses* implicam em questões contestáveis, cujas nuances foram pouco relatadas pela literatura disponível, carecendo assim de argumentos e dados capazes de esclarecê-las. *Interesses* aqui, são questões já postas a prova em considerável quantidade de pesquisas prévias, e cujas respostas já estão consolidadas, mas que entretanto, justificam-se aqui no sentido de estabelecer um parâmetro de investigação das hipóteses centrais.

A primeira hipótese, interessa-se pelas equivalências entre o conteúdo teórico conceitual das transformações isométricas segundo sua procedência operativa, bem como pelos processos cognitivos ligados à habilidade de rotação mental, e pode ser descrita através do seguinte enunciado:

1. O estudo sistemático do tópico da geometria ‘transformações geométricas’, é capaz de auxiliar consideravelmente o desenvolvimento da habilidade de rotação mental em alunos de design.

Aceita-se o postulado de que o estudo sistemático da geometria, na medida que opera pela estruturação dos espaços bi e tridimensionais, é capaz de influir sobre a habilidade de visualização do indivíduo.

O campo de interesse específico desta relação se faz recortando a geometria no tópico das Transformações Isoméricas, bem como a habilidade de visualização, através do foco sobre a habilidade de rotação mental. O pareamento entre estas duas sub-sessões de suas áreas justifica-se, a despeito das diferenças de natureza existencial entre os processos mental e físico, através do reconhecimento de semelhanças operacionais entre os dois, afinal, rotacionar um objeto real e rotacionar uma imagem mental são procedimentos perfeitamente capazes de descrição através dos mesmos parâmetros geométricos; assim pressupõe-se que o conhecimento prévio sobre os elementos e leis que descrevem as operações isométricas, podem influir consideravelmente sobre o ganho da habilidade de rotação mental.

A segunda hipótese refere-se a influência do material didático sobre a ganho na habilidade espacial do estudante, e pode ser descrita através do seguinte enunciado:

2. Uma prática de estudo que inclua em seus processos metodológicos, o uso de manipulativos físicos tridimensionais, pode ser mais efetiva na promoção da habilidade de rotação mental, que outra que utilize apenas o desenho.

Neste caso, postula-se que a geometria como aspecto visual da matemática. Parte-se do pressuposto de que a didática vinculada a seu ensino tende a ser eficiente na mesma medida em que se é capaz de reconhecer este fato, e tirar proveito dele. Os meios expressivos são diversos, e de cada um pode enumerar-se qualidades e deficiências; assim, uma estratégia que inclua mais de um tipo de meio expressivo, traz consigo maiores possibilidades de visualização e compreensão daquilo que se projeta. A utilização de manipulativos físicos deve

ser promovida na qualidade de recurso particularmente útil aos processos de ensino/aprendizagem, pois a manipulação de objetos reais guarda relações diretas com processos mentais análogos; portanto, em uma relação causal direta, ao treinar certo conteúdo programático em geometria por meio de objetos físicos espaciais, é possível ativar o progresso de capacidades cognitivas espaciais.

Além das duas hipóteses, o *interesse* declarado relaciona-se com a diferença entre gêneros no desempenho da HRM, e apresenta a seguinte formulação:

1. Confirma-se a tendência observada em outros estudos, do melhor desempenho dos homens comparativamente às mulheres, em atividades que envolvam habilidades de visualização espacial?

Espera-se observar, conforme prediz a literatura, a comprovação estatística esta tendência.

2.5. ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS

As estratégias metodológicas são explicadas em três sessões. A primeira procedendo pela descrição dos principais grupos de interesse da seleção bibliográfica, a segunda através da sucinta descrição do experimento de campo, utilizado como meio de obtenção dos dados brutos relativos ao rendimento dos participantes, e por fim a codificação dos dados, refinados e organizados estatisticamente de modo a fornecer subsídios às conclusões sobre os principais pressupostos desta tese.

2.5.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

As referências bibliográficas podem ser agrupadas segundo os interesses descritos abaixo:

- Compreensão da evolução dos aspectos conceituais da geometria ao longo da história, bem como sua importância sobre seu saber prescritivo em distintas áreas científicas.
- Os aspectos condicionantes do ensino formal da geometria no século XX, especialmente a partir de sua segunda metade até o estágio atual, no Brasil e no mundo.
- A geometria segundo seu potencial relacionado aos estudos das ciências visuais e artes.
- A geometria das transformações, segundo o arcabouço conceitual e teórico da matemática e suas implicações no estudo da simetria.
- A psicologia cognitiva, em especial seus ramos que estudam as habilidades de visualização espacial e rotação mental.
- Meios expressivos em cursos de criação, com ênfase sobre os manipulativos físicos reais.

2.5.2 TRATAMENTO EMPÍRICO

Os detalhes pertinentes sobre o experimento serão expostos em seção exclusiva. Entretanto, suas linhas gerais podem ser assim definidas:

Como estratégia metodológica de aplicação dos cursos e avaliação do rendimento dos participantes, optou-se pela realização de oito encontros semanais, com duração aproximada de 1:40 hs cada um, com a presença

controlada de um grupo de **60 alunos** no terceiro semestre de design, com idades variando dos 18 aos 20 anos.

A turma de 60 alunos, foi dividida em dois grupos:

O “**Grupo A**” foi chamado “**Controle**”, contou com **29** participantes, dos quais 12 homens e 17 mulheres, e trabalhou exclusivamente através do desenho e meios bidimensionais de investigação.

O “**Grupo B**” foi chamado “**Tratamento**”, contou com **31** participantes, dos quais 15 homens e 16 mulheres, e trabalhou em metade dos encontros através do desenho e meios bidimensionais de investigação, e na outra metade, utilizando meios tridimensionais.

2.5.3. CODIFICAÇÃO DOS DADOS.

Dois índices foram medidos através de testes específicos: A Habilidade de Rotação Mental (HRM) foi obtida por meio do ***Mental Rotation Test*** (MRT), segundo modelo proposto por Vanderberg & Kuse (1978), enquanto o suposto conhecimento prévio em geometria foi avaliado através de teste específico denominado **Teste de Simetria** (TS). Ambos foram aplicados em dois momentos – antes do início do experimento e após sua conclusão) com o objetivo de quantificar as variações, na forma de Pré-Teste e Pós-Teste.

A significância dos índices foi avaliada através do teste ***t de student***. A análise estatística pareou os resultados de ambos os grupos (Controle ou Tratamento), segundo os momentos (pré ou pós testes), gênero (masculino ou feminino), e tipo de teste (MRT ou TS).

2.6. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

O trabalho está organizado em duas partes: Parte I – que corresponde às seções 1, 2, 3, 4, 5, e 6 a Parte II, que corresponde às seções 7, 8 e 9.

A Parte I é de natureza teórico-conceitual, e seu conteúdo procura desenvolver uma correlação coerente entre o estudo de geometria e suas implicações sobre o estudo das ciências visuais e ciências da cognição.

A Parte II reforça a necessidade de quantificar as afirmações à maneira de um experimento de campo, bem como a sistematização estatística dos dados, portanto é de natureza prática e prescreve complemento à Parte I.

A contar a partir desta seção 2, cujo propósito é apresentar o trabalho em suas linhas gerais, o conteúdo da tese está distribuído em mais sete seções:

Seção 3 - Sobre a geometria e seu estudo.

São três os principais momentos desta seção.

Em um primeiro momento, a pesquisa propõe-se situar a geometria sob uma perspectiva histórica, segundo suas naturezas simbólica e axiomática. São comentadas obras representativas destas visões como o *Timeu* de Platão e Os *Elementos* de Euclides, e como esta última fundamentou o paradigma estrutural do método científico que perdurou até meados do século XIX, quando então foi questionada a partir da superação do postulado das paralelas pelas pesquisas de Gauss, Bolyai e Lebachevsky.

Em um segundo momento, a geometria é observada através dos aspectos condicionantes de seu ensino formal, com ênfase no período do pós II Guerra, com a emergência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), e como esta, é

apontada - ao contrario do que pretendiam seus defensores - como co-responsável pelo obscurecimento da disciplina até meados dos anos 80, quando iniciaram-se movimentos pela reafirmação da geometria como conhecimento imprescindível a um amplo conjunto de áreas do conhecimento, e pelo reconhecimento de seu potencial no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.

O terceiro momento trata de aproximar a geometria das ciências visuais, localizando a discussão ao papel de seu ensino em cursos de criação como arquitetura e design, a partir do reconhecimento de suas propriedades visuais. A prospecção de tópicos potencialmente úteis a este fim se faz através de uma revisão bibliográfica, em que se reconhece a recorrência dos temas na literatura disponível e seus vínculos com as demais disciplinas dedicadas ao estudo dos processos criativos.

Seção 4 – Transformações geométricas e simetria.

Do conjunto de tópicos relacionados na seção anterior, procede-se um recorte selecionando-se um específico – *As Transformações Isométricas* – como referência inicial ao trabalho de prospecção de um conteúdo matemático, com vistas à sua adaptação ao ambiente de ensino do design.

A seleção deste tópico é justificada em parte, pela proximidade com o tópico das **simetrias**, como categoria descrita pela Sintaxe Visual da Forma. Certos valores estéticos como ordem e regularidade são diretamente associados ao conceito de simetria, e neste caso, liga-se à geometria das transformações pelo caráter prescritivo de seus métodos operativos, cujo domínio é essencial como instrumental de projeto.

Procede-se por fim, através da descrição da taxonomia das transformações geométricas, recortando o campo nas transformações isométricas e focando nas

operações de translação, reflexão e rotação, segundo suas circunstâncias dimensionais (se no plano ou no espaço). Os elementos constituintes de cada uma das três operações são descritos segundo o comportamento de seus arranjos, e demonstrados tanto esquematicamente através de referências gráficas (aproximando-a do design), como através de sua grafia notativa, natural da matemática.

Seção 5 – Geometria e cognição.

Partindo de uma introdução que procura estabelecer parâmetros ao conceito de inteligência - tratada como predicado da mente, e fracionável em categorias de habilidades (ou capacidades cognitivas) - a tese utiliza o repertório da psicologia cognitiva para aproximar-se do conceito de aptidão espacial, e mais especificamente da habilidade de rotação mental, como uma sua derivação imediata.

Numerosas pesquisas vinculam o desenvolvimento das habilidades espaciais ao estudo sistemático da geometria. Esta seção trata de descrever textual e graficamente, as semelhanças entre os procedimentos mentais solicitados nas ações medidas por testes psicométricos como o MRT, aos elementos operativos descritos pelas transformações isométricas, no sentido de reforçar a validade do pressuposto de que certos procedimentos de treinamento com propósitos ao desenvolvimento da HRM podem ser incrementados à medida que melhor se conhece os aspectos geométricos envolvidos.

São então apresentadas pesquisas recentes sobre o treinamento da HRM procedidas através de dispositivos manipulativos, especialmente os baseados na Realidade Virtual (VR), e assinala-se a percepção de que muito pouco neste sentido foi pesquisado, considerando a manipulação de objetos físicos reais como meio investigativo.

Seção 6 – Geometria e meios expressivos.

A tendência ao uso do computador como meio de investigação e geração da forma é tratado como irreversível e reconhecido como ‘o tema’ de boa parte das pesquisas acadêmicas interessadas nos métodos de produção e educação em design e arquitetura. O relevo do debate sobre as relações entre ensino e tecnologia é justificado, e envolve a geometria sob diversas frentes, como a utilização de meios tecnológicos como recurso pedagógico de seu ensino. Outros interesses empenham-se em observar o impacto deste meio sobre a constituição dos programas, na medida que algumas de suas especialidades mais consolidadas, como a geometria descritiva e a projetiva, têm seu lugar questionado entre as disciplinas prescritivas, devido à emergência dos meios tecnológicos. As implicações do computador são percebidas igualmente no que se refere ao seu lugar entre os meios expressivos, na medida que seu uso extensivo tende a comprimir a importância de outros meios, incontestáveis em um passado próximo, como o desenho e os manipulativos físicos reais.

O interesse então recai sobre estes últimos – os manipulativos físicos reais - à medida que se procura ressaltar considerações sobre as pertinências cognitivas, programáticas, econômicas e operacionais de sua utilização em todas as fases do aprendizado em geometria, e em especial, ao estudo do design. A configuração de tais idéias presta-se ao esclarecimento das diferenças entre os procedimentos adotados para os grupos de Controle e Tratamento, dentro do contexto do experimento de campo, descrito no anexo, dentro do contexto do experimento de campo, descrito na seção seguinte.

Seção 7 – Descrição do tratamento.

Procura-se descrever o experimento, segundo sua estrutura organizativa geral, configurada no sentido de obter dados brutos que possam ser refinados, a fim de esclarecer os principais pressupostos desta tese.

São descritos assim, de maneira gráfica e textual, os critérios de composição da amostra, as condições para a validação de uma participação, os ambientes e recursos utilizados em cada um dos grupos, e os conteúdos de cada uma das duas fases e cada um dos oito encontros.

A **Fase I** comporta a primeira metade das aulas (idênticas para os dois grupos), dedicadas a coletar os dados dos pré-testes, e a proceder a apresentação dos conteúdos básicos sobre operações isométricas e suas relações com o estudo da simetria. A **Fase II** comporta a segunda metade das aulas, em que procede-se a diferenciação entre meios investigativos, e coleta-se os dados do pós-testes.

Cada um dos encontros é descrito nesta pesquisa, em uma sessão individual, e prescreve uma mesma estrutura:

1. **Objetivos** específicos e gerais; 2. **descrição analítica**, no sentido de declarar o método empregado e o conteúdo apresentado; 3. **Atividades aos alunos** (os enunciados são integralmente apresentados nos anexos deste relatório). 4. **Comentários**, a fim de declarar alguma observação ou ocorrência circunstancial do encontro.

Seção 8 – Resultados experimentais e análise estatística.

Os resultados relativos a cada um dos dois testes são descritos ao longo desta seção separadamente, compartilhando a mesma estrutura de organização sequencial dos gráficos e tabelas. Primeiro são apresentadas as análises relativas

ao Mental Rotation Test; em seguida são apresentadas as análises relativas ao Teste de Simetria, e por fim, os dados do MRT e TS são emparelhados e apresentados em associação.

Os elementos estatísticos são apresentados de forma a comparar os resultados obtidos nos testes, partindo de agrupamentos mais amplos, em que busca-se sobretudo a compreensão do comportamento do conjunto dos participantes, seguindo em direção `as análises mais aproximadas e refinadas, em que identifica-se a posição de cada um dos indivíduos em cada um dos dois momentos (pré e pós testes) de ambos os testes (MRT e TS), segundo seu gênero (masculino e feminino), bem como o grupo ao qual pertence (controle ou tratamento).

Seção 9 – Conclusões e considerações finais

A sessão 9 foi dedicada a expor conclusões sobre os resultados obtidos, considerações `as circunstâncias do experimento, ressalvas em relação ao método, e orientações ao desenvolvimento futuro desta e outras pesquisas.

As considerações expostas nesta seção seguiram uma sequência coerente `a estrutura da tese, segundo as áreas do conhecimento envolvidas, entre elas, as condições gerais da educação no Brasil, a estruturação de um currículo de geometria orientado ao design, e aspectos dos possíveis impactos do ensino das transformações isométricas e da utilização dos manipulativos físicos sobre a habilidade de rotação mental.

SEÇÃO 3 - SOBRE A GEOMETRIA E SEU ESTUDO

Em publicações de todos os níveis dedicadas ao estudo da geometria, não é raro encontrar logo nos primeiros parágrafos uma aproximação de seu sentido mais geral, feita através da etimologia. A palavra Geometria vem do grego antigo: *Geo* (terra) e *Metria* (medida). Assim compreendida, significa “medida da terra”, e explica-se que tal expressão deve-se aos antigos egípcios - de quem os povos gregos herdaram os primeiros fundamentos desta ciência - pois tratava-se de um conhecimento aplicado à necessidade concreta de repartir as terras agricultáveis após o recuo das águas no Nilo, quando chegava ao fim seu período de cheias.

Geometria como ‘medida da terra’, imprime em seu significado o aspecto mais concreto de seu estudo. Assim concebida, como ciência a serviço das mensurações e ferramenta necessária ao estabelecimento e compreensão das estruturas e formas do mundo físico (natural e construído), teve seu desenvolvimento orientado de maneira que viesse a tornar-se fundamento para a construção do edifício científico, segundo o qual, uma afirmação tem valor quando pode ser demonstrada logicamente.

Outra dimensão central ao estudo da geometria na antiguidade – esta de natureza intuitiva e simbólica - ligava seu estudo à filosofia e às ciências naturais, com preocupações existenciais como a busca por repostas sobre as origens do cosmos, e como este se ordena e sustenta. Lawlor (1996, p.6), explica que para pensadores clássicos da envergadura de Platão, a linguagem da geometria e dos números era concisa e essencial, e por isso, adequada aos debates filosóficos.

No diálogo *Timeu*, Platão descreve parte de sua cosmologia. Timeu é neste caso, um discípulo de Sócrates, que por ser estudioso da astronomia, é solicitado a discursar sobre o nascimento do mundo. Assim, apresenta um conjunto de conceitos filosóficos e teorias, que giram em torno das origens do homem (microcosmo) e do universo (macrocosmo), bem como a conformação do mundo natural. Segundo tal concepção, há uma espécie de simetria nas associações

entre o mundo abstrato e ideal (das idéias eternas e imutáveis) e o mundo sensível e das formas visíveis (que se transformam), pois vinculam-se em relações de interdependência e influências mútuas.

“(...) o Timeu diz que o mundo foi constituído a partir dos quatro elementos e posto em harmonia através da proporção, para que, como sumo fim, obtivesse amizade”

(LOPES, 2009, p.18)

Os quatro elementos aos quais se refere Platão são os constituintes da materialidade física do mundo: Fogo, Terra, Ar e água, e a eles estão associados quatro poliedros respectivamente: Tetraedro, hexaedro, Octaedro e icosaedro. Um quinto poliedro, o dodecaedro, é associado à quintessência, do qual todo o universo é derivado. Revela-se assim, o reflexo do divino sobre a matéria.

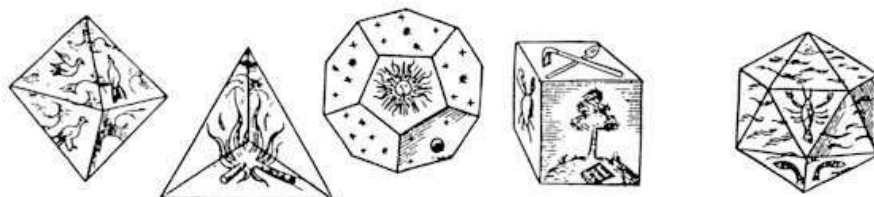


Figura 1 – Os cinco sólidos platônicos associados aos quatro elementos mais a quintecência, mostrado por Kepler em *Harmonice Mundi*, de 1619.
(da esquerda para a direita: ar, fogo, quintecência, terra e água)

A fonte destas e de outras associações que situam interdependências entre domínios e reinos aparentemente tão díspares, não está no empirismo experimental, mas na dimensão das idéias puras. Como diz Lawlor (1996, p.6), referindo-se à geometria como atividade mental intuitiva, “os *diagramas matemáticos* podem ser contemplados como momentos de imobilidade que

revelam uma contínua e intemporal ação universal, geralmente oculta à nossa percepção sensorial”.

A regularidade, propriedade fundamental à construção do sentido de ordem, é percebida como valor *per se*, capaz de imprimir-se tanto na natureza ideal das entidades geométricas, quanto no comportamento do universo tangível, na qualidade de expressão de uma mesma vontade criadora. Uma consciência original.

Concepções como esta tornaram-se estranhas aos matemáticos contemporâneos que parecem ter excluído de seus repertórios, conceitos caros aos geômetras da antiguidade, como “arquétipo” e “símbolo” - que migraram a outras áreas do conhecimento, como a psicologia - pois contrastam com a noção contemporânea que se tem da geometria, associada que está à exatidão.

O principal relato que se faz da geometria através do raciocínio puro, sem qualquer vinculação com o mundo físico, foi feito por Euclides de Alexandria, em torno de 300 a.C.. Euclides compilou no tratado *Os Elementos*, todo conhecimento acumulado pelos matemáticos gregos até então. Sobre uma base comum estruturada por 23 definições, 5 postulados (ou axiomas), e 5 ‘noções comuns’, Euclides demonstrou um conjunto de 465 teoremas dispostos em 13 livros organizados por tópicos. Embora tenha sido uma espécie de organizador, e nenhuma descoberta relativa a seu conteúdo possa ser atribuída a ele, a estrutura dedutiva do sistema que concebeu foi revolucionária, e tornou-se o modelo de lógica científica que perdura até hoje, como comenta Mlodinow:

“ o método implica em, primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo assim a compreensão mutua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos apresentados de forma clara os axiomas ou postulados (estes termos são intercambiáveis) de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não

declarados. Finalmente, deduzir as conseqüências lógicas do sistema empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados”

MLODINOW (2005, p.40)

Apesar da grandiosidade e importância do tratado, houve ao longo da história, uma controvérsia envolvendo o quinto postulado, mais conhecido como o “postulado das paralelas”. Como observa Mlodinow (2005, p.46), o próprio Euclides não parecia sentir-se totalmente a vontade com ele, pois aparentemente, evitava usá-lo sempre que possível. Essencialmente, este postulado diz o seguinte:

“Se uma linha reta encontra duas outras retas e com elas formam de um mesmo lado ângulos internos em que a soma é menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas encontrar-se-ão no lado que formam ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.”

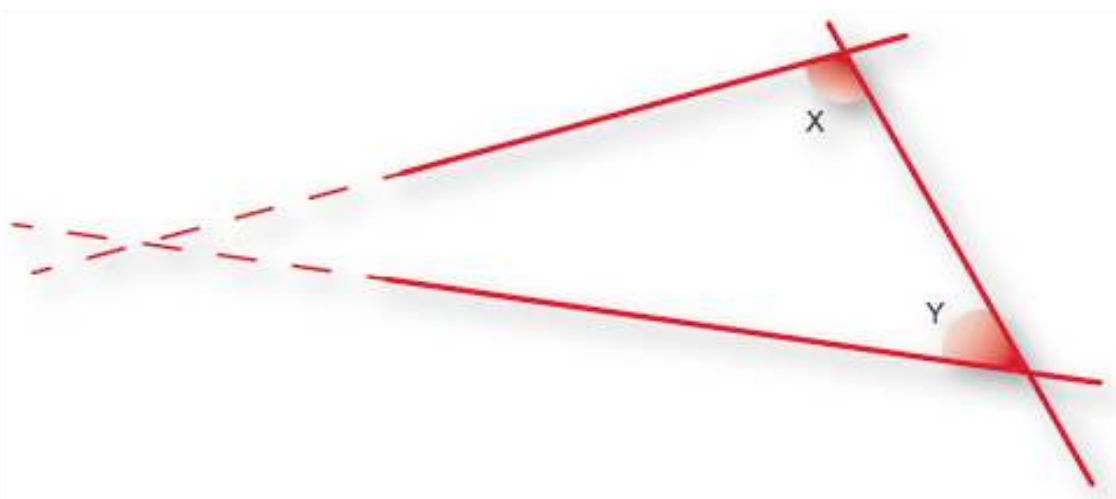


Figura 2 – Postulado das paralelas.

Os matemáticos de todos os séculos mostraram-se incomodados com o *status* de postulado desta afirmação, pois não parecia tão elegante e conciso quanto os quatro demais, e desta maneira, deveria ser submetida à demonstração ao modo de um teorema. Os geômetras perceberam a localização desta fragilidade:

“Durante os 2000 anos seguintes foram feitas inúmeras tentativas neste sentido. Nenhuma delas resultou, como se sabe. Em muitas delas, o matemático que fazia a tentativa acabava por aceitar implicitamente como postulado uma afirmação equivalente ao postulado das paralelas. Caía assim num erro que era descoberto posteriormente”.

(VELOSO, 2000, p.345)

Muitas destas tentativas de desconstruir o quinto postulado, o faziam através da revisão de sua formulação. Uma delas lhe dava a seguinte redação:

“Dada uma linha e um ponto externo (um ponto que não esteja na linha), há exatamente uma outra linha reta (no mesmo plano) que passa pelo ponto externo e é paralela à linha dada”

MLODINOW (2005, p.40)

Em 1823, em um evento que poderia ser chamado ‘sincrônico’, o alemão descendente de húngaros Johann Bolyai e o russo Nikolay Lobachevsky publicaram, praticamente ao mesmo tempo, uma proposição que finalmente parece desbancar o quinto postulado. Explicaram que por um ponto externo a uma reta, é possível que se passe muitas retas paralelas à reta de referencia. É sabido que o gênio matemático alemão Carl Gauss havia chegado aos mesmos resultados alguns anos antes, mas que no entanto, não havia se motivado a

publicá-los. Havia sido descoberta a '*geometria hiperbólica*'; a primeira de uma série de concepções do espaço, que em seu conjunto, são denominadas '*geometrias não-euclidianas*'.

As noções geométricas descritivas dos espaços curvos, concebidas por Gauss, Bolyai e Lobachewsky, renunciaram que a velha matriz euclidiana perdesse sua vitalidade, e não era mais capaz de estruturar e suportar integralmente o impulso que as novas concepções científicas exigiam, representando uma ruptura com muitos dos paradigmas sobre os quais a física clássica vinha se apoiando, e pavimentando o terreno que sustentaria no início do século seguinte, modelos revolucionários como os espaços quadridimensionais de Einstein.

A comunidade científica percebeu que pode ser enganoso o pressuposto de que um modelo apenas seja capaz de explicar a realidade em todos seus aspectos, e que também os modelos se sucedem quando o predecessor apresenta sinais de saturação. Como escreve Mlodinow "*O postulado das paralelas não pode ser demonstrado dentro do sistema de Euclides. Assim, o espaço curvo (...) era inevitável*" (2005, p.264).

Os *Elementos* legaram à humanidade um modelo do espaço vetorial, que permaneceu incontestável até meados da metade do século XIX. Não é pouca coisa. A isto equivale dizer, por exemplo, que toda matriz conceitual utilizada por Newton na fundamentação de seus *Principia Mathematica*, na qual descreve a lei da gravitação universal, já era conhecida pelos gregos há mais de 2.000 anos, e seu estudo continua absolutamente fundamental e justificado atualmente; pode-se medir esta importância, considerando-se que todo conhecimento necessário para colocar um foguete em órbita da terra, é derivado da matriz geométrica euclidiana. Entretanto, se aparentemente este modelo é muito eficaz no sentido de nos relacionarmos com a escala do universo mais próxima de nós mesmos, o mesmo não vale para escalas interplanetárias, em que as distâncias são medidas em

milhões de quilômetros e em anos-luz, nem para escalas sub-atômicas, muito reduzidas.

O modelo de Euclides culminou no mecanicismo de Descartes e Newton, segundo o qual o universo é governado por leis matemáticas exatas, precisas e imutáveis, e o previsível comportamento de suas partes podem ser comparados ao funcionamento de uma máquina, enquanto que no modelo descrito através da teoria geral da relatividade, segundo Hawking (2001,p.21), *“Einstein descobriu que suas equações não tinham uma solução que descrevesse um universo estático, inalterável no tempo”*, abrindo frente a concepções que descrevem o cosmos como um organismo em desenvolvimento, que como escreve Capra (1996, p. 25), implica em um todo integrado, e não como uma coleção de partes dissociadas.

A rica historia da geometria seguiu desde os gregos clássicos através de um roteiro tortuoso de avanços e retrocessos, cuja complexidade, como diz Veloso (2000, p.342), *“apenas os especialistas são capazes de condensar, sem deturpar”*, e sendo assim, esta introdução não pode pretender outra coisa senão inventariar algumas idéias e intuições que reforcem o sentido de que, em comum – esteja preocupada em compreender galáxias ou átomos - a ciência tem na matemática, e mais especificamente, na geometria, uma de suas principais ferramentas de conhecimento e desenvolvimento, e que por isso é fundamental tratá-la como um bem cultural da humanidade, e olhar adequadamente para a questão de seu ensino.

3.1. ENSINO INSTITUCIONAL DE GEOMETRIA: UM PÁLIDO PASSADO RECENTE.

No dinâmico desenvolvimento científico do século XX, interesses antes tratados como competências amplas, foram desmembrados em territórios menores, específicos, de maneira que pudessem ser desenvolvidos com maior

assertividade, velocidade e profundidade, e sabe-se da importância central que os fundamentos da geometria têm sobre um vasto e variado conjunto de áreas do conhecimento. Muitos de seus principais tópicos são hoje, saberes prescritivos fundamentais para disciplinas como a química, física, engenharias, geologia, computação, arquitetura e design.

Parece natural esperar-se que os sistemas de educação formal, reconhecendo a importância da geometria, sejam capazes de proporcionar adequadamente seu espaço dentro do conjunto de disciplinas formativas. Entretanto, infelizmente, não tem sido bem assim.

O ensino da geometria nas escolas e instituições viveu ao longo do século XX, em todo o mundo, um período de cristalização e declínio motivados por uma desorientação generalizada sobre suas linhas gerais, bem como sobre a constituição dos currículos e métodos de exposição dos conceitos. Embora o desenvolvimento das ciências dedutivas tenham se acelerado nos 50 primeiros anos do século passado, seguindo os passos das profundas transformações sociais, políticas e econômicas em todo o mundo, o ensino da geometria continuou fundamentado quase que exclusivamente no estudo das demonstrações dos teoremas euclidianos, como se fazia no século XIX.

Havia no mundo, no período do pós-segunda guerra, uma efervescente discussão sobre as reformas curriculares motivadas pelo dinamismo da economia, e pela polarização entre os blocos políticos, que tendia à valorização do ensino das ciências naturais e matemática, como ferramentas do desenvolvimento tecnológico.

No Brasil, de acordo com Burigo (1989, p.26), a década de 50, especialmente a segunda metade, o processo acelerado de industrialização e urbanização encontrou, tanto no governo Vargas quanto no de Juscelino, uma

política educacional despreparada, embora muito sensível aos anseios populares por reformas, especialmente no ensino secundário, como maneira de ascender ao ensino superior.

O ambiente consensual entre os educadores matemáticos, foi expresso através das atas dos primeiros congressos de nível nacional ocorridos a partir de 1950, de que algo precisava ser feito, uma vez que o quadro era desolador. O ensino da geometria era pautado por um currículo cristalizado pela axiomática da geometria euclidiana, considerada excessivamente rigorosa, pouco estimulante e totalmente desvinculada do mundo concreto:

“ A aula expositiva era a regra, sendo que nem sequer a resolução de exercícios pelos alunos na sala de aula era uma prática generalizada. Quando era feita, o que se apresentava aos alunos eram exercícios padronizados (...). As demonstrações dos teoremas eram expostas pelo professor e decoradas pelos alunos, para apresentação nas provas. Os recursos Didáticos utilizados não iam além do giz, quadro negro e livro texto, se houvesse.”

(BURIGO, 1989, p. 40)

Este período transição de quinze anos, compreendido entre 1950 a 1965, preparou terreno para o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que ganhava força em todo o mundo, na segunda metade dos anos sessenta como resposta à percepção da ineficiência e impropriedade deste modelo, e como meio de preparação do grande contingente à realidade técnico-tecnológica que se projetava para o futuro através do ensino superior. A abordagem proposta pelos defensores do programa do MMM, propunha um modelo baseado na noção de espaço vetorial, pois envolvia um número bastante menor de termos primitivos e de axiomas, liberando o ensino da geometria do que parecia à época, um excesso

de dedicação às demonstrações, em atividades entediantes e demasiadamente abstratas, descoladas da realidade do mundo real.

Apesar da pertinência do diagnóstico traçado pelos bourbakistas¹, como o matemático francês Dieudonné, que reconheceu no currículo matemático métodos e conteúdos aos quais chamou *escroquerie*, também o MMM não foi capaz de trazer uma solução definitiva às questões do ensino da geometria. Pelo contrário, reconhece-se que a malversação das propostas do MMM catalisou o processo de degradação no qual precipitou-se o ensino de matemática, em especial a geometria. Entre os motivos que justificam esta afirmação, entram na lista, de acordo com Veloso:

“a ausência de lugar para a geometria no edifício bourbakista da matemática, a não ser como subproduto da álgebra linear” e “que algumas atividades interessantes de geometria – como as construções geométricas – foram a certa altura transferidas para a Educação Visual, onde são encaradas naturalmente, sem qualquer perspectiva geométrica (...)” (VELOSO, 2000, p.22-23).

O ensino tornou-se formal e distanciado das questões práticas e da visualização. Segundo aponta o PCN (1998, p.19) *“a linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas”*.

¹ **Nicolas Bourbaki** é o pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, escreveram uma série de livros que expunham a matemática avançada moderna, que começaram a ser editados em 1935. Com o objetivo de fundamentar toda a matemática na teoria dos conjuntos, o grupo lutou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos ao longo dos tempos.

No Brasil, o ideário da Matemática Moderna faz-se sentir enfaticamente, a partir da promulgação da *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, a LDBEN nº 5692/71 em 1971, ao decretar a não obrigatoriedade do ensino de construções geométricas, deixando a critério do professor sua consideração ou não no currículo de matemática. Assim, como tudo o que é obrigatório é também prioritário, a geometria, como conhecimento específico da matemática, perdeu importância e espaço.

“(...) havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outros núcleos de disciplinas optativas, as quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. As escolas tinham a liberdade de construir a sua grade curricular apenas dentro da parte diversificada. As instituições escolares deveriam seguir as determinações da legislação escolar, que impunham a integração da Educação Artística, em todas as séries dos cursos de 1º e 2º graus do ensino básico. O Desenho tornara-se uma disciplina optativa da parte diversificada do currículo. Deste modo, após a promulgação da lei, muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas, ensinadas na disciplina Desenho Geométrico”. (ZUIN s.d.)

Somente em 1998, com 27 anos de defasagem portanto, após o reconhecimento da comunidade dos professores de matemática do óbvio equívoco que aquelas idéias representavam, o currículo de matemática volta a incorporar as construções geométricas, da quinta à oitava séries do ensino fundamental, com a publicação em 1998 dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC).

As razões que levaram as políticas educacionais a diminuir o tamanho da geometria, até praticamente extingui-la do currículo por tanto tempo, não são totalmente claras.

Há quem enxergue nas motivações das políticas educacionais pós LDBEN nº 5692/71, certo colorido ideológico, e reconheça neles indícios do cerceamento deliberado à informação e meios de desenvolvimento, provocados por uma classe dominante, em prejuízo à massa da população. Segundo os defensores desta perspectiva, o ensino da geometria, relacionado historicamente com o desenvolvimento das capacidades intelectuais e dos raciocínios dedutivo e lógico, provocariam nas classes da base da pirâmide social, questionamentos que colocariam em risco a ordem estabelecida. A geometria continuaria sendo ensinada apenas em algumas escolas vocacionadas a atender os filhos da elite.

“.. grupos especialmente selecionados da sociedade, matriculados nas escolas de elite, não excluíram determinados saberes escolares, mesmo com as reformas da legislação escolar. Cada classe social, hierarquicamente dividida, tem acesso a um determinado tipo de conhecimento já estratificado” (YOUNG, 2002)

De fato, a promulgação da LDBEN nº 5692/71 coincide com um período histórico brasileiro que não é lembrado como exemplo de respeito aos valores individuais e democráticos. Sabe-se pela profusão de exemplos na história, que para regimes totalitários, tudo o que está associado à palavra *esclarecimento*, é paranoicamente perseguido, e no Brasil não foi diferente. Por outro, regimes totalitários também não costumam ser reconhecidos pela capacidade gerencial e visão estratégica de médio e longo prazos. Certamente não havia a clareza que se tem hoje, das relações diretas entre desenvolvimento econômico/tecnológico e educação. É cabível imaginar que a mesma incompetência e obtusidade que levaram o governo brasileiro a tantas matrizes de desenvolvimento equivocadas tenha sido responsável pela simplificação do currículo.

Ao final dos anos setenta, os reflexos dos equívocos provocados pela MM

fizeram-se sentir ao redor do mundo, e em primeiro lugar nos EUA. Em 1980, o NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*, publica um documento intitulado “Agenda para a ação”, no qual listava uma série de princípios que influenciaram programas para o ensino da matemática por todo o mundo, e serviriam na década seguinte como importante referência para a publicação no Brasil, dos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998, cujo objetivo declarado é a revisão dos currículos e a orientação dos professores e especialistas em educação matemática, e que na prática, coloca na pauta do debate o ensino da forma e do espaço com suas implicações nas habilidades de visualização, destacando tópicos como as transformações geométricas (isometrias e homotetias).

De acordo com os PCN, tal campo de problemas envolvem três objetos de naturezas diferentes:

- “1. O espaço físico, ele próprio - ou seja, o domínio das materializações;*
- 2. A geometria, concebida como modelização desse espaço físico - domínio das figuras geométricas;*
- 3. O(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais - domínio das representações gráficas.”*

(PCN, 1998, 122)

Ainda segundo o PCN, a esses objetos correspondem três questões relativas à aprendizagem que são ligadas e interagem umas com as outras. São elas:

- “1. A do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial;*
- 2. A da elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo;*
- 3. A de codificação e de decodificação de desenhos.”*

(PCN, 1998, 123)

A incorporação destas diretrizes nos currículos e a exposição das fragilidades do sistema educacional, como o despreparo dos professores e as dificuldades em proporcionar condições de trabalho equânimes em um país tão desigual, acendeu o debate sobre as questões do ensino da geometria e seu futuro, à medida que procura compreender seu estágio atual.

As consequências provocadas por tantas oscilações no ensino da geometria, representaram não apenas uma distorção na formação cognitiva e intelectual de diversas gerações de estudantes, mas também uma atrofia na formação dos professores de matemática, uma vez que pela natural lógica dos cursos de bacharelado, se não há para quem ensinar, também não há porque aprender.

Muitos dos professores de matemática atuais, não estudaram nem superficialmente, tópicos fundamentais a diversas profissões, como por exemplo geometria espacial ou geometria descritiva. Como se sabe, cada um destes dois tópicos abre-se numa rede complexa de sub-temas ricos em possibilidades, em virtude das conexões que fazem com a realidade concreta do mundo e outras áreas. Perde-se assim preciosa oportunidade de seduzir através da curiosidade, e estimular enquanto cria-se condições para descobertas.

Criou-se uma cadeia de despreparos que tem origem nos formadores dos formadores nos cursos de bacharelado, e que se reflete na qualidade de uma grande categoria de profissionais, que tem que lidar com a geometria por força de suas competências específicas.

A sensação hoje parece ser, como era de se esperar, que ainda não se chegou a termo sobre o que se ensinar e de que maneira fazê-lo. Verifica-se pelos livros didáticos do fundamental, que não se ensinam muitos tópicos, há predomínio absoluto da álgebra sobre a visualização, e a metodologia raramente supera os limites do desenho sobre papel. No segundo grau, este pequeno e difuso repertório é comprimido, simplificado e apresentado aos estudantes através

de uma visão parcial de suas possibilidades. Pode-se descrevê-la como um compêndio de fórmulas voltadas a calcular áreas, volumes, secções e extensões, com a preocupação clara e única de facilitar o desempenho no processo seletivo do vestibular. Outros aspectos da geometria, como modelo de compreensão do mundo real, ou seu potencial como ferramenta promotora e desenvolvidora de habilidades cognitivas e criatividade, raramente são exploradas.

A solução para os dilemas curriculares não parece passar pelas instâncias que publicam os parâmetros oficiais, limitados a lançar diretrizes genéricas, e nem devem contar com a sensibilidade do sistema particular de ensino, focado que está no lucro e muito satisfeito em ter o estudante como cliente, e por isso mesmo, dedicado a satisfazê-lo em seu objetivo mais imediato que é o acesso ao ensino superior.

Quase cinco décadas de políticas confusas e mal fundamentadas, minguaram a cultura geométrica, obrigando educadores matemáticos e não matemáticos, como arquitetos e designers, a um esforço de auto-didatismo. Há um vasto campo do conhecimento que, embora tão antigo quanto a civilização ocidental, precisa ser (re)construído.

3.2. O ENSINO DE GEOMETRIA NAS ARTES²: UM RESGATE DE SUA NATUREZA VISUAL.

Veloso concorda com a percepção de que há um movimento crescente de difusão de novas idéias sobre a geometria e seu ensino, e cuida ele mesmo de

² De acordo com Dondis, o esforço de classificação das artes visuais nas polaridades belas-artes e artes aplicadas implica em grade obstáculo, pois ao longo da história, a definição se desloca e modifica, e que os mais constantes fatores de diferenciação costumam ser a utilidade e a estética. Assim por artistas qualificam-se não só os artistas plásticos, mas também arquitetos e designers.

citar algumas fontes, entre publicações e sites na *internet*, no livro *Geometria: Temas Actuais*:

“ (...) o movimento de regresso da geometria é um fato inequívoco no panorama mundial da matemática e do seu ensino, (...). Caracteriza-se neste momento por uma grande vitalidade nas iniciativas e propostas, as quais vão surgindo naturalmente, de forma não sistemática, e com níveis de qualidade e maturidade muito diversificados.” (VELOSO, 2000)

Entretanto, tal regresso é recente, e seu deslocamento ainda levará algum tempo para fazer-se sentir. Profissionais e educadores de hoje, de formações distintas - matemáticos e artistas - sentem hoje os reflexos de suas carências formativas na geometria.

Como medir o impacto desta cadeia de despreparos? E principalmente, como contorná-la no sentido de superá-la?

Os educadores matemáticos reconhecem na geometria uma vocação às artes, por sua visualidade intrínseca e vínculo indissociável com os sentidos de regularidade, padrão, proporção e ordem. Contudo parecem ser raros os capazes de superar sua natureza abstrata, a ponto de transcender os aspectos de sua operacionalidade, de modo a sublinhar seu potencial em atividades de criação formal; desta condição, podem resultar abordagens artificiais e pouco realistas, além de comprometer uma desejável interface com outras disciplinas, nos cursos de graduação.

Já os artistas parecem ser igualmente seduzidos pelas conectividades, coerências e propriedades perceptivas inerentes às formas geométricas, mas parecem prostrar-se frente à perspectiva de empreender o esforço que uma compreensão mais profunda de seu repertório metodológico pode demandar. Isto

quando não refratam-na como reação sobre um suposto risco de representar controle e limitação sobre o ato criativo. Designers mais maduros compreendem sua importância e se ressentem da ausência de uma formação melhor estruturada, ainda que frequentemente falte clareza daquilo que se sente falta.

No que diz respeito ao seu ensino formal, percebe-se muitas vezes no trato pedagógico dos colegas professores, que o desenvolvimento dos programas esbarram em um pobre repertório de modelos e processos, com a apropriação de certas noções vagas como simetria, proporção e modulação, sem dar-se conta que são expressões e conceitos egressos dos domínios da matemática, e que portanto, poderiam ser melhor descritos e utilizados, se alguns de seus fundamentos fossem melhor conhecidos.

Os critérios de preparação dos programas e seleção de tópicos parecem amparar-se pelas questões encontradas ao longo de suas próprias experiências profissionais, sem muita inclinação e simpatia aos termos e literatura matemáticos. A metodologia nestes casos, tende a envolver demonstrações de estratégias pessoais, que replicam acertos e erros, conhecimentos e desconhecimentos, personalizando funções que deveriam caber a um sistema de referências capaz de capacitar os alunos a desenvolverem e representarem suas idéias, de maneira a transformarem matrizes conceituais em hipóteses de projeto.

Elam (2001, p.5), relata que *“tem visto excelentes idéias conceituais sofrer durante a etapa de realização, em grande parte devido ao desconhecimento dos princípios visuais da composição geométrica, por parte dos designers”*. De fato, ao associar geometria aos princípios visuais de uma composição, Elam toca no cerne do debate:

A ADEQUADA EXPLORAÇÃO PEDAGÓGICA DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS NA ARTES, PARECE PASSAR PELA GEOMETRIA, EM VIRTUDE DE SUA NATUREZA VISUAL.

A experiência artística, suportada também pela arquitetura e pelo design, é fortemente influenciada pelo sentido da visão, pela natureza direta da informação que dela provém. Dondis (1997) pondera que *“a utilização de dados visuais para transmitir informações representa a máxima aproximação que podemos obter com relação à verdadeira natureza da realidade”*.

Dondis nomeia ainda o processo formativo de artistas, por assim dizer, visuais, como **alfabetismo visual**. Segundo esta perspectiva, a palavra alfabetismo aplica-se no sentido de que - a exemplo da linguagem verbal que conta com conceitos, regras, códigos e símbolos estruturados em modelos (idiomas) de maneira que possam ser compreendidos e compartilhados por um grupo - também a linguagem visual compartilha dos mesmos pressupostos na estruturação de uma sintaxe bem articulada, passível de decomposição de seus elementos constitutivos para fins de análise e compreensão.

O designer Bruno Munari compartilha desta perspectiva, enquanto destaca algumas diferenças:

“Compreender comunicação visual é como aprender uma língua, língua feita só de imagens, mas imagens que têm o mesmo significado para as pessoas em todas as nações, portanto de todas as línguas. Linguagem visual é uma linguagem, talvez mais limitada do que a falada, mas certamente mais direta (...)”

(MUNARI, 2006, p.58)

Nas disciplinas artísticas, cujo escopo de atividades implica em um currículo formativo amplo e eclético, a sintaxe da linguagem visual envolve grande número de saberes distribuídos entre diversas áreas do conhecimento. A responsabilidade pela constituição do “idioma visual” e de seu instrumental investigativo, recai sobre um conjunto de disciplinas teóricas e práticas,

simbioticamente ordenadas e de tantas categorias quantas forem necessárias, a fim de abranger os aspectos social, filosófico, técnico/tecnológico e estético de suas competências.

Bertoline (1998), utiliza a expressão **Visual Science** (Ciência Visual), para descrever uma emergente área do conhecimento, cujos fundamentos filosóficos podem formar um corpo único de conhecimentos, e seria formado principalmente por três áreas: psicologia cognitiva (ênfase na habilidade de visualização espacial), nas ciências visuais (*imaging*), e na geometria.

Tais relações podem ser compreendidas a partir da figura abaixo:

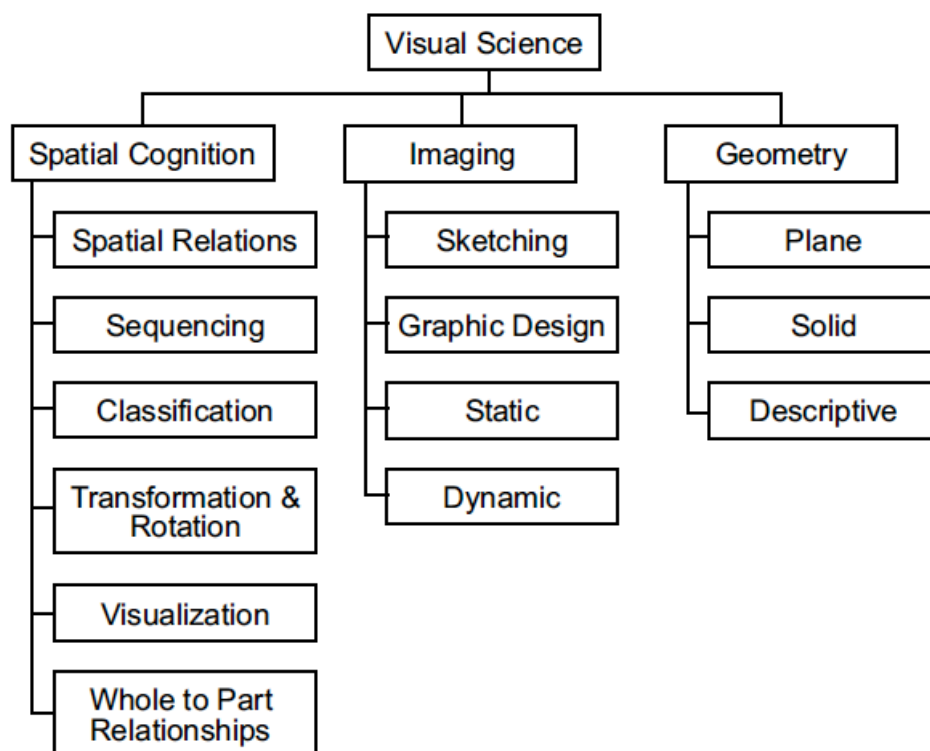


Figura 3 – Constituição estrutural da ciência visual (BERTOLINE, 1998, p.184)

Tal encontro entre saberes, segundo esta perspectiva, se dá especialmente em torno do computador, pois a computação gráfica representa uma *nova renascença*, para as artes visuais.

A cognição espacial é um processo mental, no qual o indivíduo “percebe, retém, evoca, cria, edita e comunica imagens espaciais” (BERTOLINE, 1998, p. 184). Em síntese, corresponde à habilidade de construir, manipular e interpretar imagens mentais. Uma vez que as habilidades visuais implicam diretamente na qualidade da produção de um artista em diversos níveis, o desenvolvimento destas qualidades cognitivas devem ser o objetivo prioritário de qualquer estatuto de ensino relacionado às linguagens visuais. A geometria seria assim, a ferramenta de investigação mais adequada, na medida que reflete sobre “*as propriedades, relações e mensurações de pontos, planos e sólidos*”. (BERTONINE, 1998, P. 185).

Apesar do mérito em reconhecer a justa estatura da geometria como disciplina prescritiva do processo criativo, e classificá-la como parte do tripé que sustenta os estudos das artes visuais, Bertoline é econômico ao expandir a geometria em sub-áreas de estudo, e as categoriza apenas como **plana** (dedicada ao estudo das formas planas como círculos e polígonos), **sólida** (dedicada às formas tridimensionais, como cilindros, cones e cubos), e a **descritiva** (que analisa e soluciona distancias e relações espaciais).

Há certamente outros tópicos na geometria que se desdobram a partir dos mencionados por Bertoline, e mesmo outras sub-áreas de igual importância, que não foram lembradas.

Na mesma linha, Kappraff (2001, xii) reforça o sentido atual da importância da geometria, ao afirmar que “*a matemática serve como fundamento para a “ciência do design*”, na medida que oferece uma gramática do espaço comum a artistas e cientistas, e serve como ponto de convergência a atividades aparentemente tão diferentes quanto a arquitetura e a química. A descrição que

faz da estrutura se saberes relacionados à geometria é bastante mais ampla que a de Bertoline, e incrementa a lista de tópicos incluindo estudos sobre proporção, similaridades, transformações geométricas e simetria, gráficos, divisão regular do plano e do espaço e etc.

Wallschlaeger e Busic (1992), chamam de **estudos visuais** o modelo que relaciona uma estrutura de organização e planejamento sistemático de pesquisa, chamada por eles de *problem-solving process*, aos processos de investigação da forma, chamado por eles de *form generation model*, cujo objetivo é tornar claros e compreensíveis os caminhos que conduzem à criação formal em duas e três dimensões.

Seu modelo, chamado *Problem-Solving Process/Form Generation Model*, “organiza e categoriza os **elementos visuais** utilizados na geração da forma e identifica os conceitos básicos obtidos das teorias da comunicação e da percepção visual” (WALLSCHLAEGER e BUSIC, 1992, p.ix).

Assim, denominam como *Processo de geração da forma*, um amplo conjunto de subcategorias organizadas por interesses amplos, como teorias da percepção e comunicação, elementos visuais da forma, fatores humanos, estrutura e materiais.

Os tópicos da geometria neste caso não estão identificados ou individualizados como um destes subgrupos, mas diluem-se neles segundo seus atributos, como suportes teóricos e operacionais prescritivos ao estudo da forma. Sua distribuição envolve a compreensão das propriedades intrínsecas das entidades geométricas, como suas representações gráficas, sua influência na criação e organização das entidades formais, bem como a maneira como relacionam-se na conformação dos espaços bi e tridimensionais.

O modelo está descrito da página seguinte, segundo foi publicado por Wallschlaeger e Busic (1992, p. xviii), e tem como objetivo declarado, “auxiliar

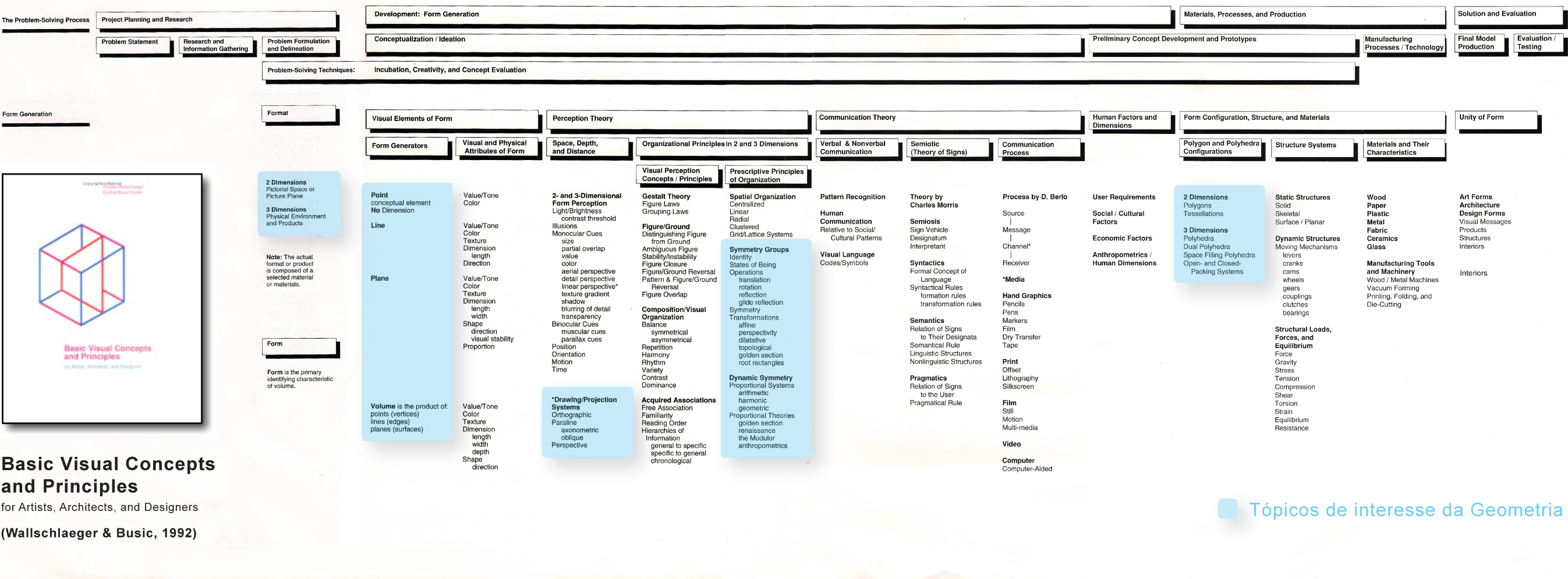
professores e estudantes moverem-se através de um exercício mais eficiente e efetivo, na concepção de formas bi e tridimensionais” (WALLSCHLAEGER e BUSIC, 1992, p.10). Seus autores declaram que foi derivado de uma pesquisa extensa de materiais relacionados à arte, arquitetura e design, bem como textos e publicações sobre percepção visual, comunicação e teoria da informação, que somam um total de mais de trinta obras, das quais, muitas constam nesta bibliografia. Como resultado efetivo do processo de seleção e organização destas referências bibliográficas e de outras que foram agregadas, foram escritas resenhas de algumas destas obras, organizadas nesta pesquisa na **bibliografia estendida**. Esclarece-se que não se tratam de análises longas, e que procurou-se antes de tudo, certo mapeamento de pesquisadores e agrupamento segundo foco temático.

As marcações em azul³ no *Problem-Solving Process/Form Generation Model*, referem-se ao reconhecimento do conteúdo associado ao estudo da geometria, enquanto o modelo⁴ denominado *Mapa de Tópicos em Geometria*, é derivado do modelo original, e tem como propósito como o nome sugere, ser uma compilação dos tópicos em geometria e seus vínculos com as propriedades da forma, como seus atributos, configurações, organização, representação e sistemas estruturais.

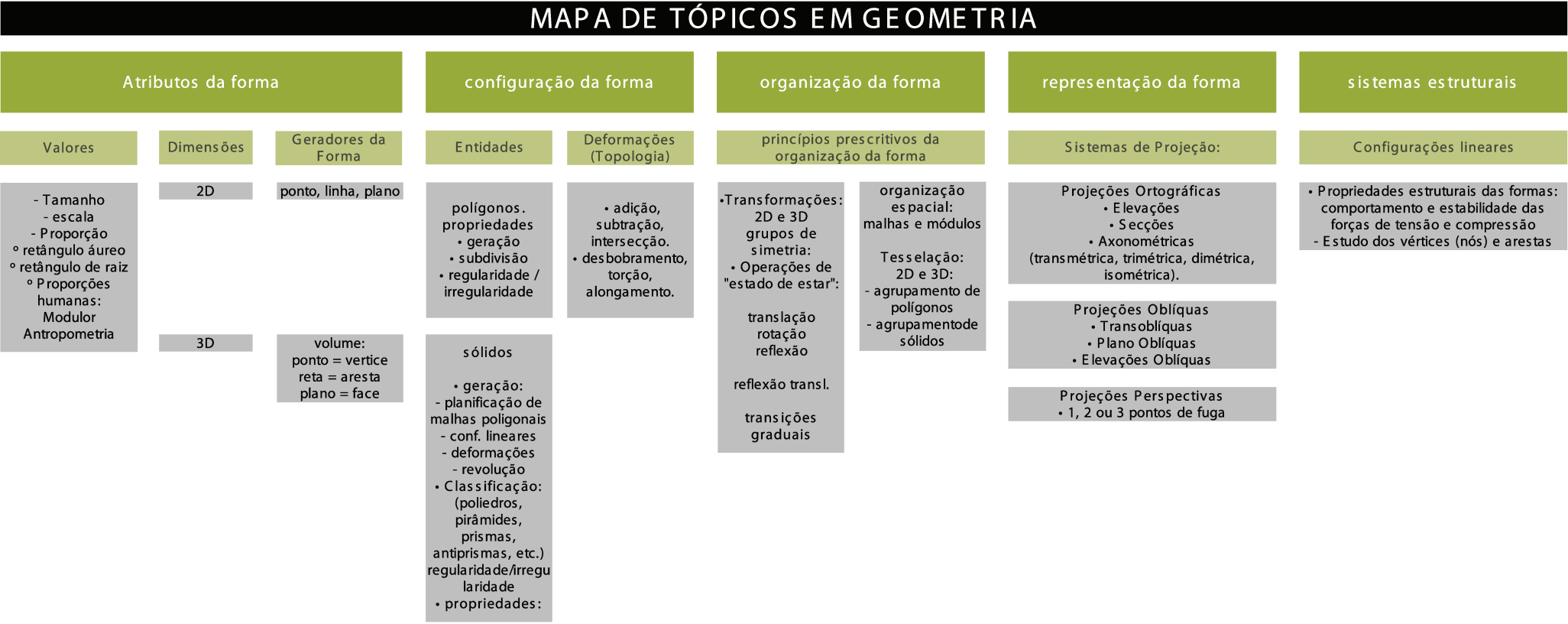
³ Marcações do autor

⁴ Modelo produzido pelo autor

PROBLEM-SOLVING PROCESS/FORM GENERATION MODEL



Tópicos de interesse da Geometria



SEÇÃO 4 - TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA

A reforma proposta pelo Movimento da Matemática Moderna, cuja aceitação ao redor do mundo foi ampla e em grande parte, constituída dos mesmos conteúdos ensinados pela matemática escolar tradicional, entretanto, segundo Kline (1976, p108 *apud* LUZ, 2007, p.54), houve o acréscimo de novos tópicos, especialmente no que se refere à teoria dos conjuntos, derivando para o estudo das congruências, matrizes, álgebra das matrizes, entre outros.

Dieudonné, do grupo Bourbaki, reitera a importância central da inserção de novos tópicos, em especial o conjunto de conhecimentos relacionados às **transformações geométricas**. No entanto, como descreve Veloso (2000, p.22) seu modelo de axiomática com ênfase excessiva na álgebra e no espaço vetorial, irrelevando valores como a intuição investigativa e a visualização, acabaram por agravar ainda mais as condições do ensino da geometria:

“a ausência de lugar para a geometria no edifício bourbakista da matemática, a não ser como subproduto ou “parente pobre” da álgebra linear; o próprio relevo que muito justamente o M.M. queria atribuir às transformações geométricas perdeu-se com a abordagem formal, como aplicações, que foi adoptada, fazendo tabua rasa do seu eminente carácter intuitivo”

(VELOSO, 2000, p.23)

O movimento de renovação do ensino da geometria, que se fez sentir em meados da segunda metade dos anos oitenta, como reação aos desdobramentos indesejáveis da M.M., resultou na publicação, em 1989, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) nos EUA, de um conjunto de diretrizes, dentre

as quais está o ensino das **transformações geométricas**, apontada como adequada ao estímulo e desenvolvimento das habilidades visuais:

“(...) o currículo da matemática deve incluir o estudo da geometria de uma, duas e três dimensões em situações variadas, de forma que possam visualizar e representar figuras geométricas com especial atenção ao desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, e explorar as transformações das figuras geométricas”

(NCTM, 1989, p.112)

O estudo das transformações geométricas e simetrias, segundo a NCTM, passa a ser indicado a todas as fases do ensino formal (K-12)¹, no sentido de reconhecer, analisar e operar situações que envolvam escalas, posições, orientações, similaridade, congruência, coordenadas, vetores, matrizes, reflexões, translações e rotações. [W10].

No Brasil, a pertinência do estudo das transformações geométricas é grafada nos PCN de 1998, ao reconhecê-la como chave para o vínculo entre o estudo da geometria e situações concretas do mundo natural, como o estudo das simetrias a partir das operações isométricas (reflexão, rotação e translação), bem como para a consolidação do conceito de congruência:

“Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura

¹ “K” significa kindergarten, e equivale ao jardim da infância brasileiro, enquanto o grau “12”, corresponde ao 3º ano do ensino médio brasileiro.

transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias).” (PCN, 1998, p. 63)

Para pesquisadores e professores que concebem a geometria como a Ciência do Espaço, através da qual se investiga e constrói modelos projetados e se compreende o mundo natural, as transformações geométricas instrumentalizam operações que fundamentam o estudo da simetria, desde o nível mais elementar aos mais complexos.

“forma e dimensão, juntamente com a simetria, deveriam constituir a espinha dorsal do ensino da geometria”. (VELOSO, 2000, p.)

Leopold (2003) reforça o sentido de que a seleção de bons tópicos em geometria é sempre parte de um conjunto de interesses necessários à formação de um bom curso, e compartilha esta responsabilidade com a metodologia, que deve preocupar-se com os recursos de expressão. Na articulação de bons programas e metodologias, deve haver um professor guiado pela convicção de que a função primordial da geometria é o desenvolvimento de faculdades cognitivas do estudante, e não seu abastecimento por fórmulas ou experiências recreativas desconexas. E isto se faz através de enunciados capazes de estimular entre outras habilidades, a visualização mental.

Assim, Leopold enumera quatro princípios fundamentais que devem organizar um programa de geometria orientado ao ensino de arquitetura e design:

1. *“O exercício das habilidades de visualização espacial é objetivo fundamental da educação geométrica.*

2. *Formas geométricas e transformações, fornecem as bases para o design.*
3. *Os métodos de representação devem ser incluídos a fim de compreensão da percepção visual e comunicação de objetos espaciais.*
4. *Conhecimento geométrico fornece a base da manipulação de softwares, afim de produzirem-se simulações e animações através da nova mídia.” (LEOPOLD, 2003, pp 101-102).*

Ao conjugar as *transformações* no item 2 de sua lista de princípios, Leopold está na verdade referindo-se ao tópico *transformações geométricas*, e trata-o nominalmente como base conceitual ao estudo do design, por entender que vincula-se intimamente ao estudo das simetrias.

Kappraff (1983), descreve as linhas gerais de um curso semestral cujo propósito principal foi apresentar a geometria como ferramenta de criação a jovens do terceiro ano de arquitetura. Em síntese, cumpre dizer que seu modelo envolve exercícios de curta duração entremeados pelo reforço de certas noções da geometria, organiza-se a partir do cumprimento de três objetivos conceituais, e compõe-se de quatro etapas metodológicas:

São os três objetivos:

- Apresentar aos estudantes algumas ferramentas matemáticas para o design espacial.
- Através da matemática, sugerir algumas idéias novas e interessantes para o design espacial.
- Mostrar aos estudantes que o design espacial não é inteiramente aleatório, mas restrito a certas propriedades matemáticas do espaço.

São as quatro etapas:

- A primeira etapa consiste em explorar alguns elementos da geometria sobre o plano.
- A segunda etapa explora a geometria em 3 dimensões.
- A terceira etapa aborda alguns aspectos geométricos do conceito de estrutura.
- A quarta etapa investiga aplicações matemáticas voltadas à organização da complexidade.

No ponto em que o interesse volta-se à organização de formas complexas, seu curso aborda a simetria a partir de suas noções matemáticas, sublinhando as operações que deixam um conjunto de pontos invariantes no espaço (isometrias). (KAPPRAFF, 1983, p. 45).

No modelo de Wallschlaeger e Busic (1992), as transformações geométricas compõem uma categoria que se configura através de recursos voltados à solução de problemas relacionados à forma, no sentido de sua ordem visual, e que por isso, são chamados princípios prescritivos da organização visual.

Tais princípios são prescritivos porque organizam estruturas e formas no plano bidimensional e no espaço tridimensional, e sendo assim, o estudo das transformações geométricas nas artes devem associar-se a uma ampla categoria de arranjos, governados exatamente pela manipulação sistemática das operações geométricas, como por exemplo, as organizações radiais, lineares, e em grid (pavimentações).

A sequência desta seção ocupa-se em descrever algumas das relações possíveis entre tais sistemas organizacionais, o sentido de ordem da simetria atrelada à arte, e o repertório conceitual descrito pelo tópico das transformações geométricas.

4.1. RELAÇÕES ENTRE OS SENTIDOS DE ORDEM E SIMETRIA.

*“Deus, Vossa grande simetria,
Que a mim um grande prazer colocou,
De onde minhas tristezas escapam,
Em todos os trincados dias,
Que tenho em formas agudas gasto,
Dê-me uma coisa perfeita.”*

Anna Wickham²

Para Weyl (1997, p.17), *“O sentido de simetria é a idéia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos”*. A beleza é assim envolta em simetria, e o uso desta palavra indica algo bem proporcionado e balanceado, como um tipo de concordância entre várias partes capazes de integrar uma unidade.

Na concepção quase poética de Wade, o conceito de simetria é amplo e ilimitado, e não lugar onde seus princípios não possam penetrar:

“Os princípios da simetria são caracterizados por uma quietude que está além das turbulências do mundo; ainda, de um jeito ou de outro, eles estão sempre envoltos em transformações, distúrbios ou movimentos”. (WADE, 2006, p.1).

Há certa disseminação deste significado do termo. Alguém pode identificar sem dificuldades a existência de simetria no corpo humano ou em uma mandala, ainda que não saiba classificá-la, apontar diferenças, nem tampouco descrever suas regras gerais. Este sentido geral que nos orienta a definir um

² (WEYL apud Wickham), “Envoi”, em *The Comtemplative Quarry*, Harcourt, Brace and Co. 1921

objeto como sendo simétrico, parece vir do reconhecimento de alguns atributos compositivos como regularidade e repetição, ficando a cargo da matemática, a tarefa de interpretar e sistematizar estas noções intuitivas .

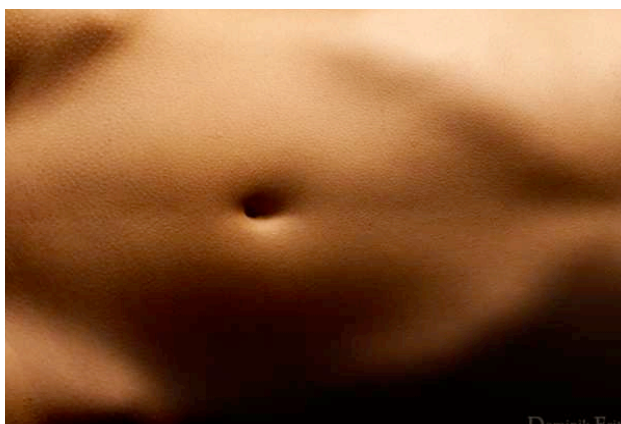


Figura 4 – Torso feminino



Figura 5 - Mandala

Dentre os inumeráveis casos de intersecção entre matemática e arte ao longo da história, em suas manifestações nas mais diversas culturas, talvez poucas tenham sido mais reconhecidas, divulgadas, descritas e retratadas quanto a simetria.

O tratado *A Gramática do Ornamento* (JONES, 2010), expõe uma coleção de mais de 2.350 padrões produzidos por 20 culturas, desde tribos selvagens aos gregos e romanos, demonstrando o caráter universal da aplicabilidade da simetria nas manifestações artísticas. De acordo com o autor:

“O segredo do sucesso de todos os ornamentos é a produção de um efeito amplo e geral pela repetição de alguns elementos simples. A variedade deve ser buscada mais no arranjo de diversas partes de um desenho do que na multiplicidade das formas variadas”. (JONES, 2010, p.35):

Sua afirmação decorre da percepção de que para a simetria ornamental, a reprodução sistemática de módulos originais (motivos ou *rappports*), operada sob determinadas regras e critérios matemáticos é uma estratégia capaz de produzir uma variedade infinita de padrões e formações.



Figura 6 – Padrões extraídos do livro A gramática do Ornamento (OWEN, 2010)

Tais regras e critérios encontram par no mundo natural, e como observa Weyl (1997, p.91) são reconhecidas especialmente no arranjo de átomos de um cristal.

A Cristalografia, uma ciência nascente em 1891, utiliza conceitos egressos da matemática para edificar o sistema estrutural de seus conceitos e de representação. Através do estudo da configuração espacial das moléculas dos minerais, tem importância destacável no desenvolvimento do estudo da *Teoria Elementar dos Grupos*, cujo modelo de classificações mantém implicações diretas sobre as pesquisas dedicadas a compreender a geração e organização da forma.

No estudo da simetria ornamental, o tema é apresentado sob as categorias dos ***Padrões, Frisos e rosáceas***. Uma vez que estão saturados de regularidades simétricas - assim como as moléculas dos minerais, podem compartilhar dos mesmos modelos sistemáticos de classificação e análise.

Veloso considera este tópico de peculiar importância pelo potencial que representa ao ensino/aprendizado da geometria das transformações, estando ao lado do estudo dos poliedros, os objetos básicos que a geometria tem a seu dispor:

“A idéia é que os padrões e pavimentações, seja lá o que forem, existem na realidade, que envolvem simetrias axiais, rotações e translações e que estas sim, são noções matemáticas que necessitam ser precisadas.” (VELOSO, 2000, p.191)

A classificação e descrição dos padrões planos tem sido amplamente divulgada através de livros, teses e páginas na internet, e podem ser descritos graficamente pelas três categorias abaixo:

Papéis de Parede.

Existem 17 Padrões Cristalográficos Bidimensionais, ou Papéis de Parede, periódicos existentes nas duas dimensões (largura e altura do plano)

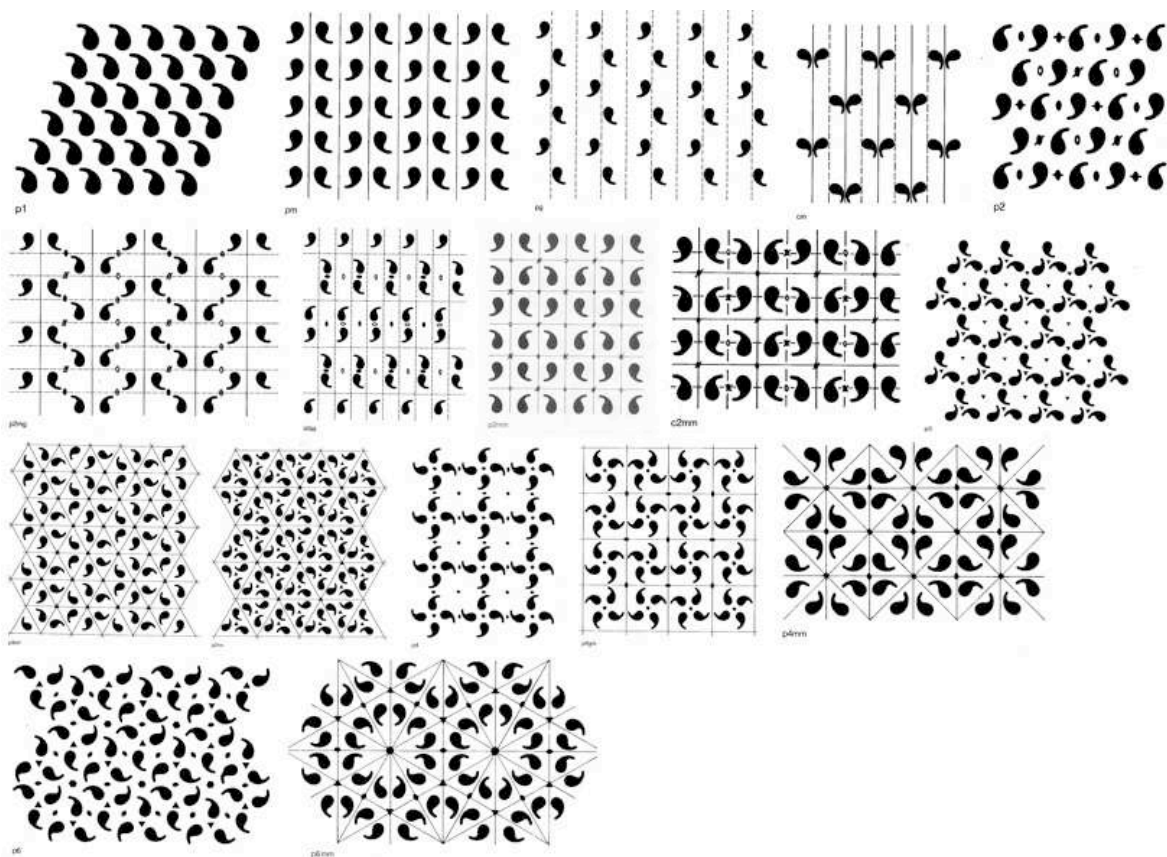


Figura 7 – 17 Padrões Cristalográficos Bidimensionais ou Papéis de parede

Frisos

Frisos são cobrimentos do plano de uma região do espaço de longitude infinita, mas com altura finita limitada por retas paralelas, através da combinações de rotações, translações e reflexões.

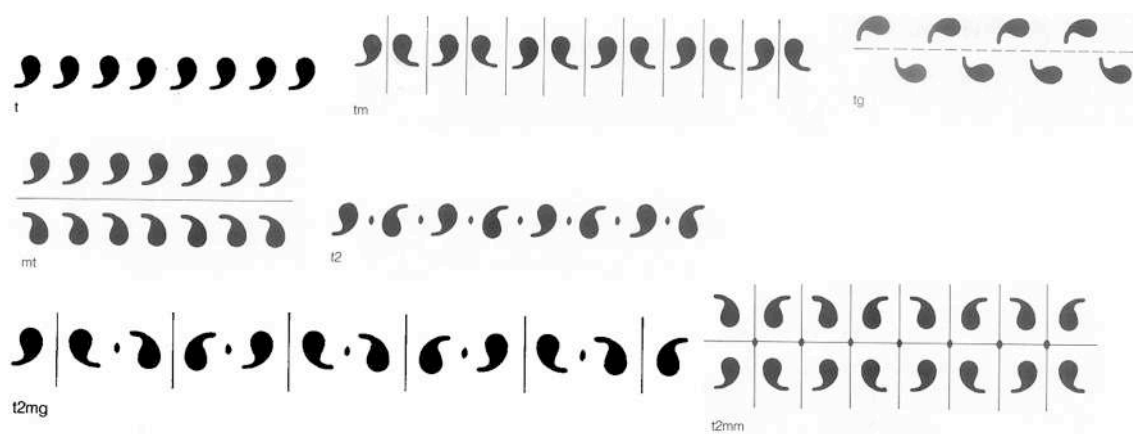


Figura 8 – 7 tipos de *Frisos*

Rosáceas

Rosáceas, ou Rosetas, formam um grupo de simetria chamada 'rotacional', desenvolve o motivo em torno de um centro pontual, e não possui translações.

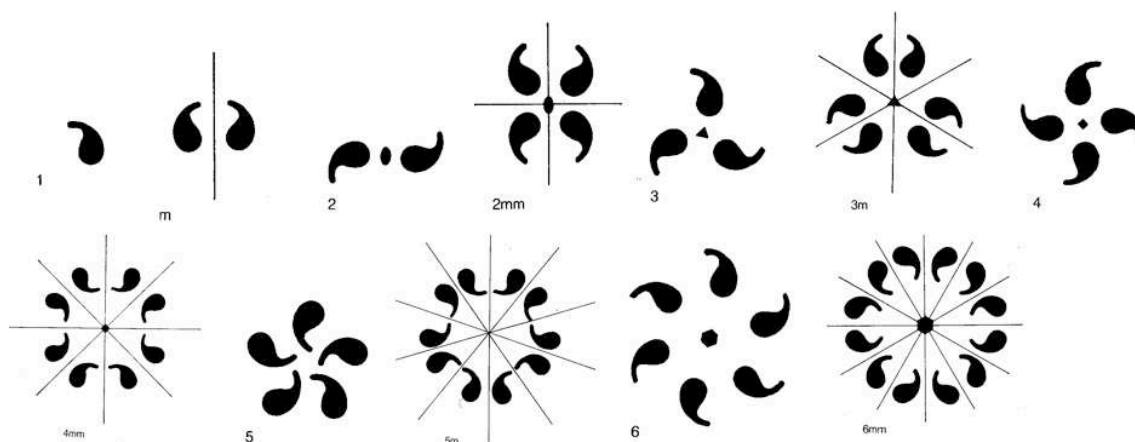


Figura 9 – *Rosáceas ou Rosetas*

A arte geométrica islâmica mais do que qualquer outra, foi capaz de tirar proveito das propriedades destas operações muitos séculos antes de ter sido sistematicamente classificada e organizada segundo a categorização dos 17 grupos de simetria no plano, legando-nos alguns dos mais exuberantes exemplos de padrões decorativos e artísticos da história. Sobre este encontro entre a matemática e a arte, Kaplan escreveu o seguinte:

“Algo que sabemos com certeza, é que os padrões islâmicos são em sua natureza, profundamente matemáticos. Os mais representativos deles, são pequenas jóias da geometria, transmitindo uma espécie de inevitabilidade do design, que não condiz com o trabalho duro requerido para decifrá-los. Os artesãos que os desenvolveram eram iniciados em geometria”. (KAPLAN, 2002, p.46)

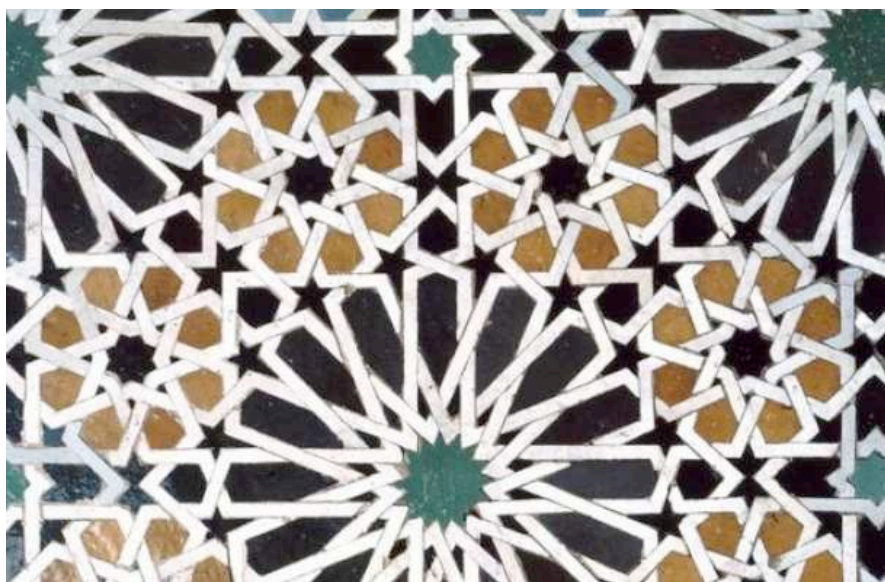


Figura 10 – Mosaico cerâmico no palácio de Alhambra.

A profusão, diversidade, regularidade e exatidão das formas simétricas regradas pela geometria na arte islâmica, inscritos nos padrões cerâmicos do palácio de Alhambra, chamaram a atenção do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, mais do que a exuberância de seus pátios e jardins, ou a elegância dos espaços e colunas.

Em seu caderno de desenhos, gravou anotações e traçados minuciosos que deram origem a uma série de gravuras nas quais associou seu universo de fantasias ao estudo das transformações das malhas regulares. A estrutura da superfície criou a base para três grupos de gravuras: Metamorfoses, ciclos e aproximação ao infinito.

“Esta (a estrutura da superfície) começa com o interesse na divisão regular da superfície, estimulado em especial pela visita a Alhambra. Depois de um estudo intenso que a ele, como não matemático, lhe custou muito esforço, elaborou um sistema completo para a divisão regular duma superfície plana, que mais tarde viria a despertar a admiração de cristalógrafos e matemáticos”. (ERNST, 1991, p. 20)

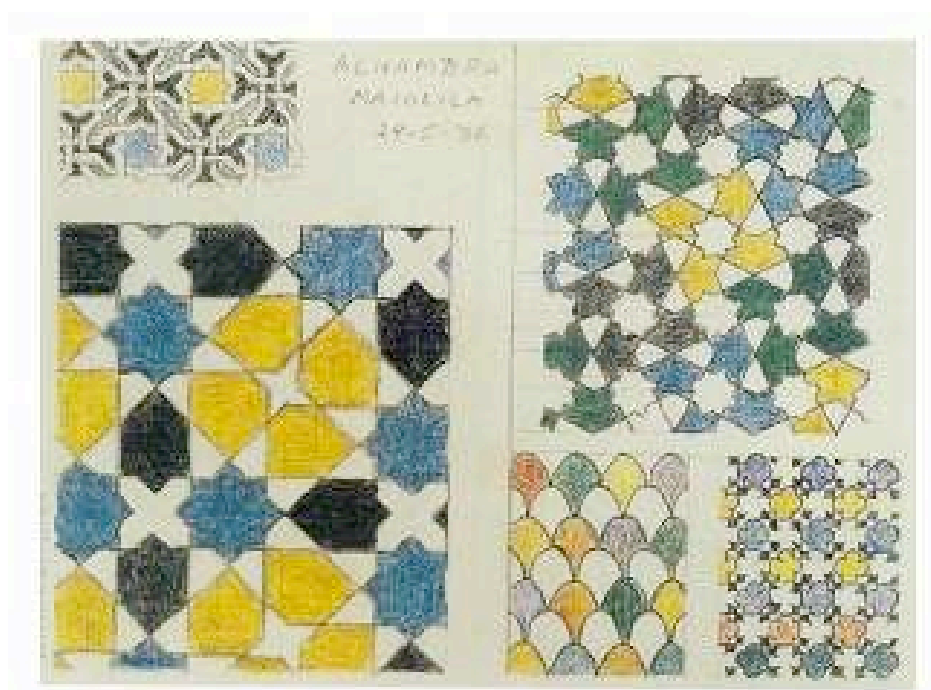


Figura 11 –
Desenhos de
Escher feitos em
sua visita ao
palácio de
Alhambra.

Escher procedeu uma extensa e metódica classificação gráfica das operações de transformação sobre malhas, a partir de uma indicação de seu meio irmão, um geólogo, de um artigo de Polya sobre simetria (KAPLAN, 2002, P.117).

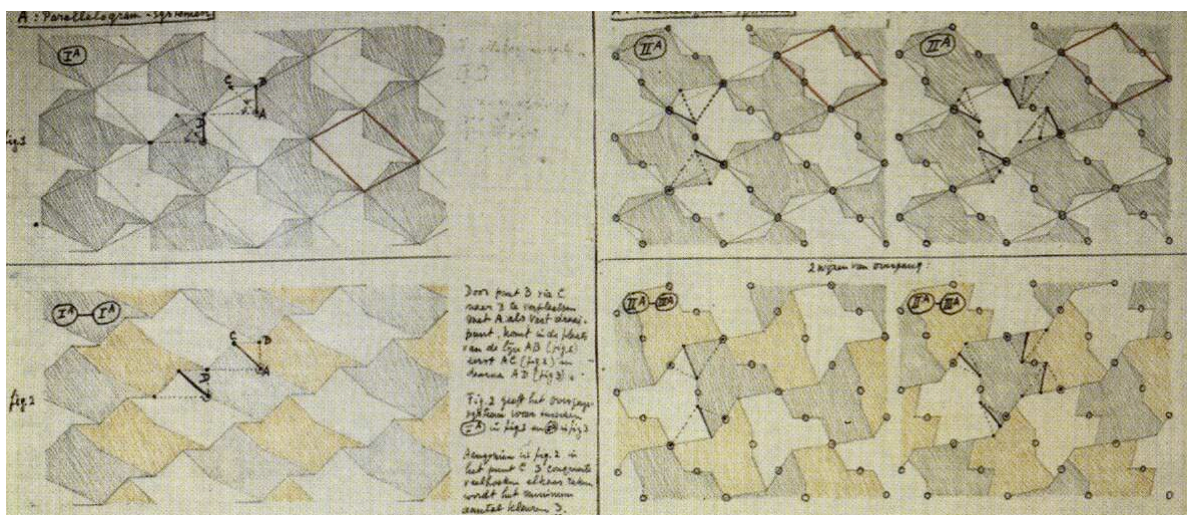


Figura 12 – Desenhos de Escher feitos em sua visita ao palácio de Alhambra.

Sua compreensão sobre os fundamentos da teoria matemática ligada às **transformações geométricas**, na forma de **translações, reflexões, rotações e reflexões transladadas**, abriu espaço ao desenvolvimento de um trabalho profundamente criativo e inesperado, no qual, não é exagero afirmar, reinventou a arte geométrica, ao atribuir símbolos reconhecíveis, como formas animais e humanas, onde havia apenas as formas poligonais da arte islâmica.

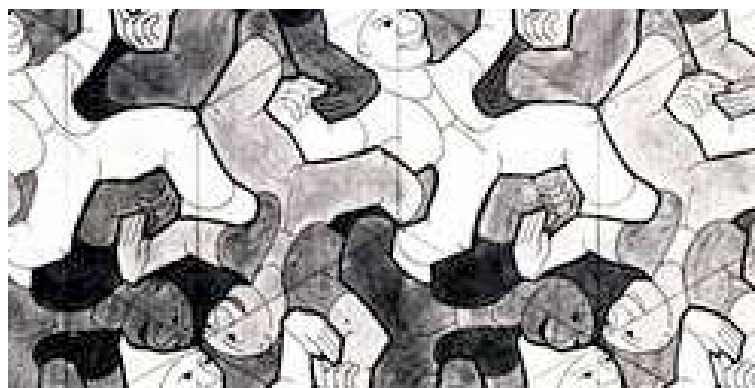


Figura 13 – Divisão regular do plano com figuras humanas, para Circulação (1938).

4.2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

De acordo com o **Mapa de Tópicos em Geometria**, as *Transformações Geométricas* prescrevem princípios para a **organização da forma**.

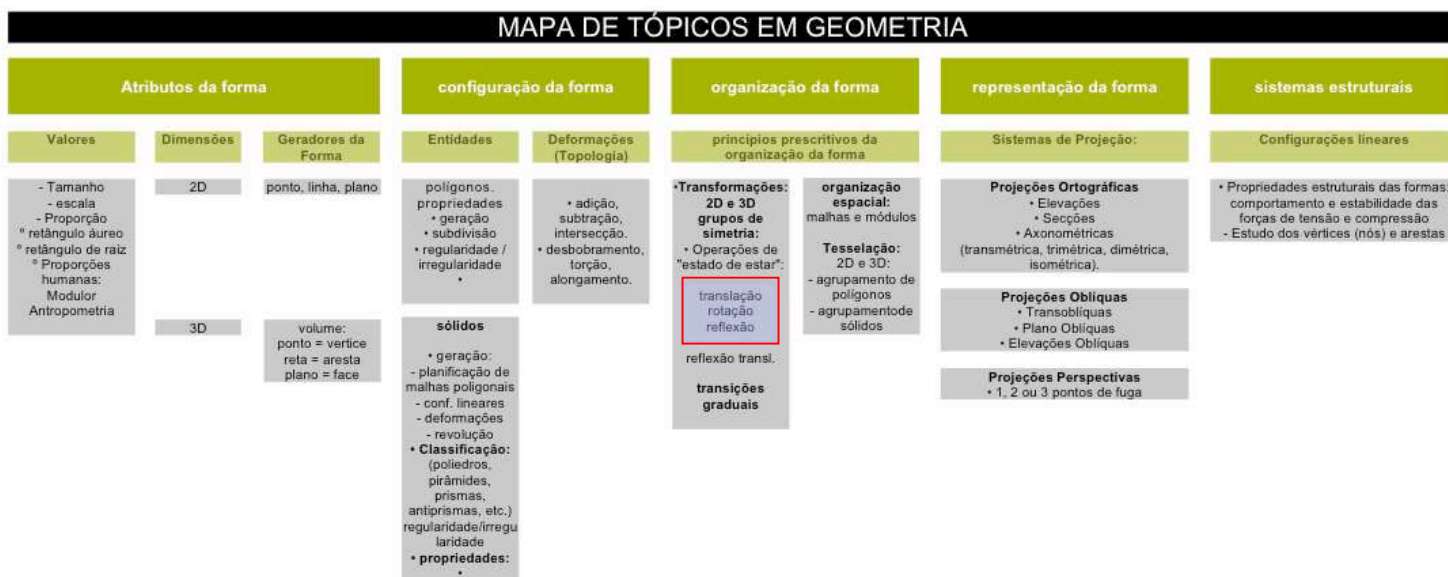


Figura 14 – Situação das operações isométricas no mapa de tópicos em geometria.

A palavra transformação traz consigo um conjunto amplo de significados na língua portuguesa, e seu uso coloquial é habitualmente diferente da significação que tem na matemática. Tal como é comumente utilizada, pode induzir o pesquisador não matemático à compreensão de que trata-se de um fenômeno no qual o sujeito da operação sofre alterações de tal ordem que suas características morfológicas tornam-se essencialmente distintas das iniciais. Imagens ilustrativas como as de uma larva que se transforma em borboleta ou uma semente que transforma-se em árvore, induzem naturalmente a associação entre transformação e metamorfose. A superação desta noção talvez deva ser a primeira coisa a se fazer. Por certo que a transformação geométrica de uma forma no plano ou de um

objeto no espaço implica em sua modificação, mas mais adequado seria pensar que esta se dá em função de seu reposicionamento, sua escala, medidas ou proporções, sem que implique necessariamente em sua desfiguração. Como observa e exemplifica Mitchell (2008, p.125), quando sujeito a uma transformação, um objeto é modificado mas continua sendo uma instância do mesmo tipo; se alteramos a cor de uma casa, ela ainda continua sendo uma casa, ou se retiramos o motor de um automóvel este não deixa de ser um automóvel. As propriedades essenciais de um objeto continuam inalteradas, mesmo após a alteração de algumas de suas propriedades acidentais.

O designer opera criativamente sobre a forma organizando, transmitindo e desenvolvendo-a segundo seu repertório e critérios pessoais, e isto implica concretamente em manipulações onde se incluem giros, reproduções seriadas, estiramentos, reduções e ampliações, distorções, prolongamentos e espelhamentos.

Ao manipular um escalímetro por exemplo, em um dos procedimentos mais comuns da prática projetual, o designer opera uma transformação não isométrica por dilatação. Neste caso, há uma alteração do tamanho da imagem em relação ao objeto original, que pode ser maior ou menor, mas que obedece a um sistema em que suas proporções são preservadas.

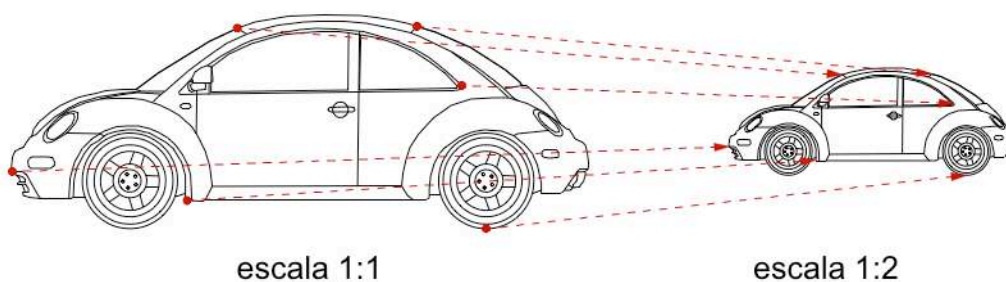


Figura 15 – Em uma operação dilatativa, o tamanho da imagem é alterado, mas as proporções são mantidas.

Mesmo o procedimento corriqueiro de se alterar a escala de desenho, traz consigo um conhecimento que tem suas bases na geometria; isto ilustra sua universalidade. Contudo, a questão que se coloca não é apresentar a geometria e os conceitos que lhe advém estritamente como habilidades instrumentais, mas também como promotora de métodos de raciocínio sistemático do projeto em design.

O propósito das próximas páginas é apresentar as Transformações Geométricas segundo sua estrutura taxonômica, no sentido de ilustrar a amplitude de seu estudo. No momento seguinte, o foco recai sobre as operações isométricas de translação, reflexão e rotação, através da descrição de sua constituição operativa sobre o plano e no espaço.

4.2.1. CATEGORIAS DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Não se trata de um sistema absolutamente fechado. Novos dados são continuamente somados à medida que novas pesquisas evoluem. Forma-se desta maneira, a partir dos contínuos desdobramentos, uma rede de grupos e sub-grupos, ramificações e desdobramentos que podem representar um verdadeiro novelo emaranhado, cuja ponta pode demandar considerável empenho, para ser encontrada.

O universo das *transformações geométricas* é muito vasto por trazer consigo um sem número de ricas possibilidades, como observa Bastos (2007, p.24). Cada qual com nomes e propriedades próprias que podem ser alinhadas e descritas através do reconhecimento da estrutura comum que compartilham.

A compreensão desta hierarquia, em visão de síntese, constitui-se em recurso bastante útil para a compreensão de suas relações e organização de seu estudo. Mitchell (2008, p.132) descreve desta maneira a taxonomia das *transformações geométricas*:

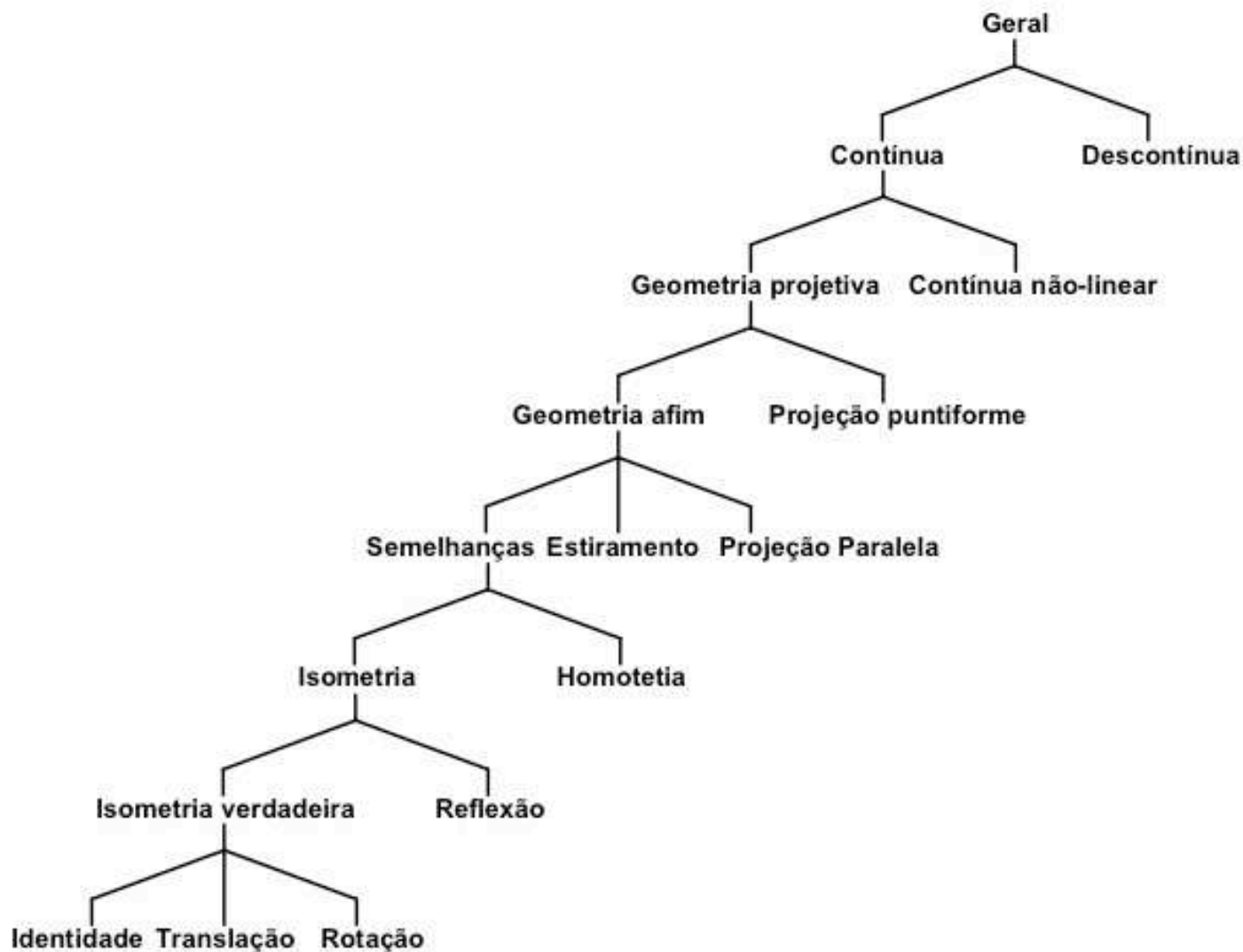


Figura 16 – Mapa taxonômico das transformações geométricas

Para Charles Wallschlaeger e Cynthia Busic-Snyder, professores do departamento de design industrial da *Ohio State University*, a compreensão dos principais conceitos e princípios da simetria, é imprescindível à formação do estudante de design, na medida que representam um importante sistema de organização da forma, e por oferecem soluções a problemas complexos da organização visual.

Para Bastos, do grupo de trabalho de geometria da APM³, trata-se de um assunto amplo, com possibilidades raramente exploradas além de seu caráter introdutório:

“Para além das transformações que melhor conhecemos – as isometrias e semelhanças – temos um sem numero de exemplos de transformações isométricas, com as quais os nossos alunos poderiam tomar contacto, não para conhecer os seus nomes ou enumerar as suas propriedades, mas para se aperceberem da riqueza desta área da geometria e de que, tal como noutros temas matemáticos, há uma estrutura comum por trás de tanta diversidade”. (BASTOS, 2007: 23).

Neste sentido, é necessário entender a morfologia da simetria, que é o conjunto de significados prescritivos ou mecânicos da organização ou agrupamento da forma (WALLSCHLAEGER; BUSIC, 1992, P.433)

Este conjunto teórico, chamado **Morfologia da Simetria**, relaciona e articula sua variedade através de três conceitos básicos: 1. Transformações de Simetria, 2. Operações de Simetria e 3. Estados de Ser da Simetria. Estas

³ Associação de Professores de Matemática de Portugal <<http://www.apm.pt/portal/index.php>>

relações são apresentadas sob a forma de uma tabela que oferece uma visão sintética, sobre a qual pode-se iniciar a investigação:

MORFOLOGIA DA SIMETRIA		
Transformação	Estado de Ser	Operação (ação)
Isométrica	Congruente	Identidade
---	---	Translação
---	---	Rotação
---	---	Reflexão
---	---	Reflexão deslizante
Não-Isométrica	Projetiva	Afinidade / Perspectiva
Não-Isométrica	Dilatativa	Dilatação
Não-Isométrica	Topologica	Topologia

Figura 17 – Morfologia da Simetria
(extraída de WALLSCHLAEGER; BUSIC, 1992, P.447)

Este modelo morfológico, como definem Wallschlaeger e Busic (1992, P.447), foi desenvolvido para ser utilizado como um método de análise dedutivo para se compreender os componentes estruturais das formas existentes. Assim, descrevem as formas em termos da natureza da **Transformação** (a mudança na figura), a **Operação** (a ação específica que governa a mudança) e o **Estado de Ser** (que é o estado relativo da imagem em comparação à figura original).

Os grupos de figuras são classificados segundo suas invariâncias, e por invariâncias, devemos tomar a igualdade ou congruência na estrutura da figura durante o processo. Desta maneira, classifica-se as transformações a partir das propriedades que elas preservam.

A figura abaixo é um recorte reduutivo no modelo proposto por Michell, descrito na figura 16, na medida que categoriza as transformações entre as **isométricas** e as **não-isométricas**. É comum encontrar na literatura as designações **rígidas** e **não-rígidas** respectivamente para as mesmas transformações (SERRA, 2003, p.358).

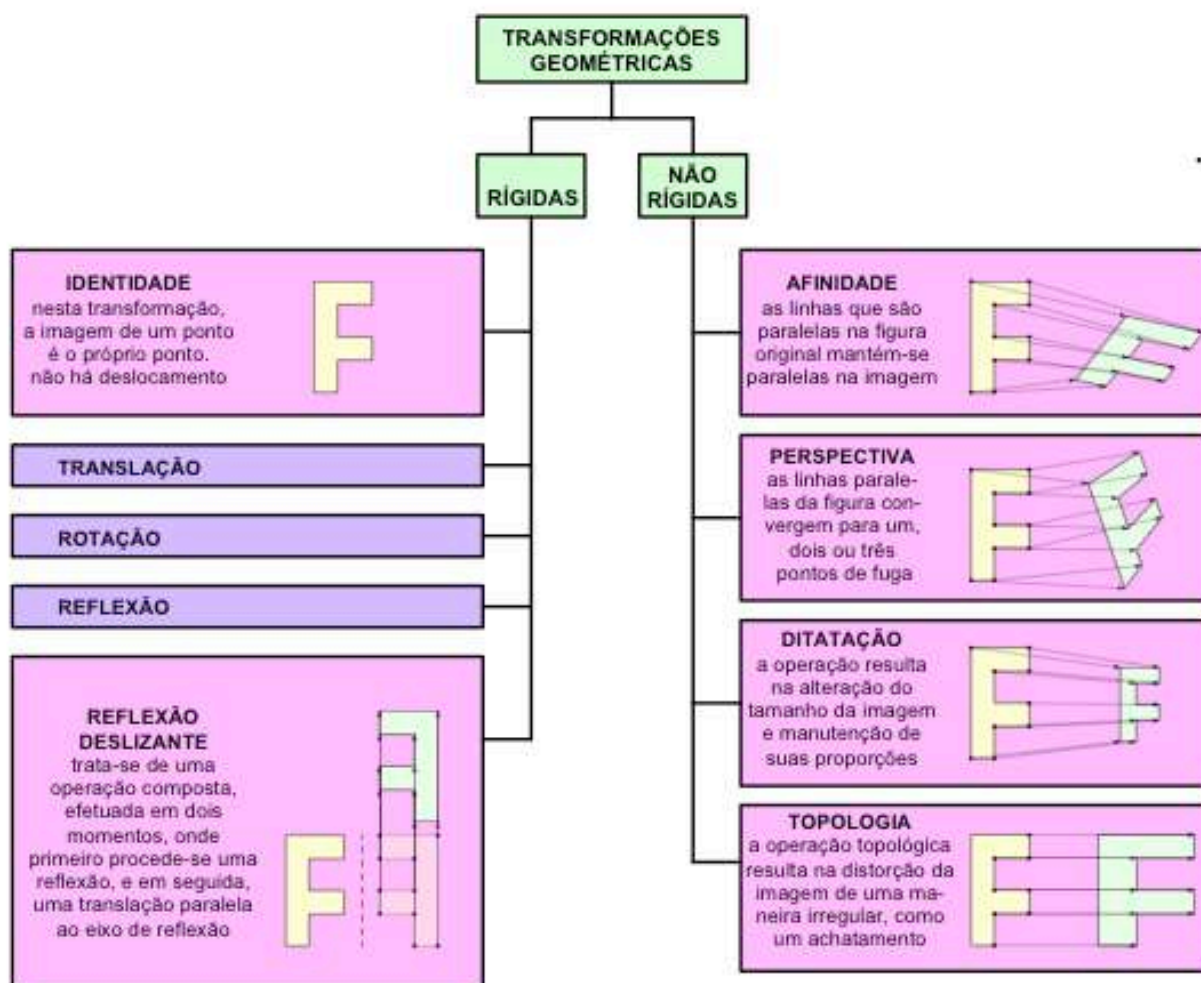
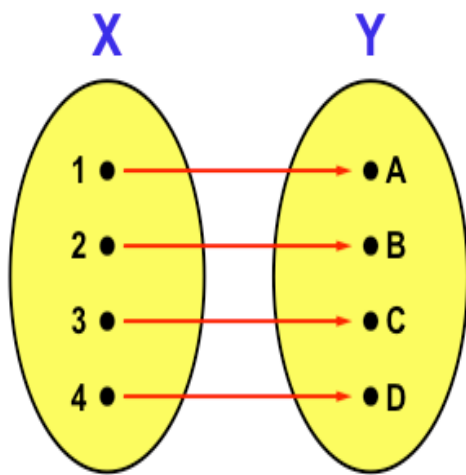


Figura 18 – Mapa das Transformações Isométricas (rígidas)e Não-Isométricas (não-rígidas)

4.3. OPERAÇÕES ISOMÉTRICAS (RÍGIDAS) NO PLANO E ESPAÇO.



Uma definição sucinta segundo termos matemáticos (BASTOS 2007, p.24; MABUCHI 2000, p.21; BILAC 2008; p.16) qualifica uma transformação geométrica como uma função bijetiva de um espaço (ou de um conjunto de pontos) sobre si mesmo. Na teoria dos conjuntos, dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se existe uma bijeção entre eles.

Figura 19 – bijeção entre os conjuntos X e Y.

Um desdobramento desta definição, ainda utilizando notações e formatação matemáticas, explica a *transformação geométrica* nos seguintes termos:

*“Para designar as transformações geométricas usaremos letras maiúsculas, em **negrito** e em **itálico**, como R^4 , S , T , ...*

Uma transformação geométrica em R é uma função T , definida para todos os pontos de R , nas seguintes condições:

*a) a cada ponto P de R T faz corresponder um (e um só) ponto $T(P)$ de R , (muitas vezes designado simplesmente por P' e chamado *imagem ou transformado de P por meio de T*);*

b) se P e Q são dois pontos distintos de R , então P' e Q' são dois pontos distintos (de R) (ou seja, a dois pontos distintos

⁴ R define a dimensão do espaço no qual se opera. R^2 indica operação sobre o plano, enquanto R^3 indica operação no espaço tridimensional. Uma vez que a noção de isometria no plano e no espaço são idênticas, para esta descrição, basta que se indique a dimensão pela letra R sem sufixo. No texto original, a descrição é feita na descrição das operações sobre o plano ($R2$)

correspondem sempre duas imagens distintas);

c) para qualquer ponto V de R , existe sempre um ponto U de R tal que V é a imagem de U por meio de T (ou seja, todo o ponto de R é imagem de um ponto de R).

(APM – TA02.)⁵

Em uma transformação, há sempre uma correspondência um a um de pontos, $P \rightarrow P'$, em que para cada ponto do plano ou do espaço associa-se outro. Aproxima-se desta maneira, de dois importantes conceitos: o de **imagem** e o da **correspondência** entre pontos.

A imagem de um ponto **P**, após uma transformação de qualquer tipo, é chamada **P'** (lê-se “P linha”). Para cada ponto de uma figura original **corresponde** a um ponto de sua respectiva **imagem**.

Matematicamente, isometrias são definidas como transformações que preservam distancias entre os pontos e tornam uma figura invariante (KAPPRAFF, 2001, P.383; MABUCHI, 2000, p.22). Como consequência da preservação das distancias, o tamanho e a forma do objeto também são preservados em sua imagem respectiva, através de um ponto, linha ou plano. No caso das transformações não-isométricas, as distâncias não são preservadas e não há correspondência “ponto a ponto” entre o objeto e sua imagem. A preservação das semelhanças visuais são suficientes o bastante para permitir qualidades comparativas.

⁵ Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa - **TA02. Transformações geométricas: introdução** – disponível em http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/03sessoes_presenciais2.html - acessado em 10/02/2011

4.3.1. TRANSLAÇÃO NO PLANO

Trata-se do tipo mais simples de transformação isométrica. Equivale a deslizar uma figura sobre o plano em linha reta, em qualquer direção, tomando-se o cuidado para não haver nenhum giro. Neste caso, todos os pontos movem-se ao longo de linhas paralelas a fim de formar a imagem. Todos os pontos que formam a imagem são eqüidistantes de seus correspondentes da figura original (tem a mesma magnitude).

Na figura **X** abaixo, a translação é a transformação geométrica que faz corresponder o ponto original **P** à sua imagem **P'**, segundo uma direção e uma grandeza.

Os dois elementos da figura Y podem ser considerados translações um do outro. Stevens (1999, p.4) reforça a importância desta idéia, pois cada operação corresponde a uma via de mão dupla. Cada operação transforma o segundo elemento no primeiro, assim como o primeiro elemento no segundo. Não há pontos fixos em uma translação.

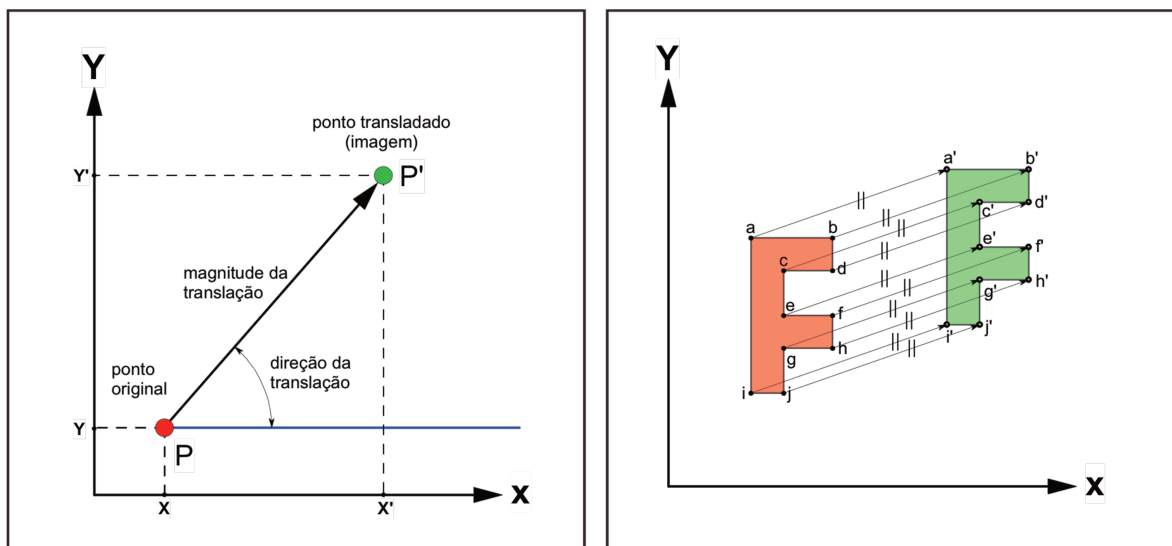


Figura 20 – Elementos de uma transformação isométrica por translação sobre o plano

4.3.2. TRANSLAÇÃO NO ESPAÇO

A descrição da transformação por translação no espaço ($\mathbb{R}^3$), no que diz respeito aos elementos e condições, é essencialmente a mesma que se faz para uma translação no plano ($\mathbb{R}^2$).

Na Translação, ao contrário do que ocorre na Rotação e na Reflexão, não há ponto fixo ou mediadores. A magnitude m (distância entre ponto original P e sua imagem P') e a direção do deslocamento, é dada por um vetor v em $\mathbb{R}^3$.

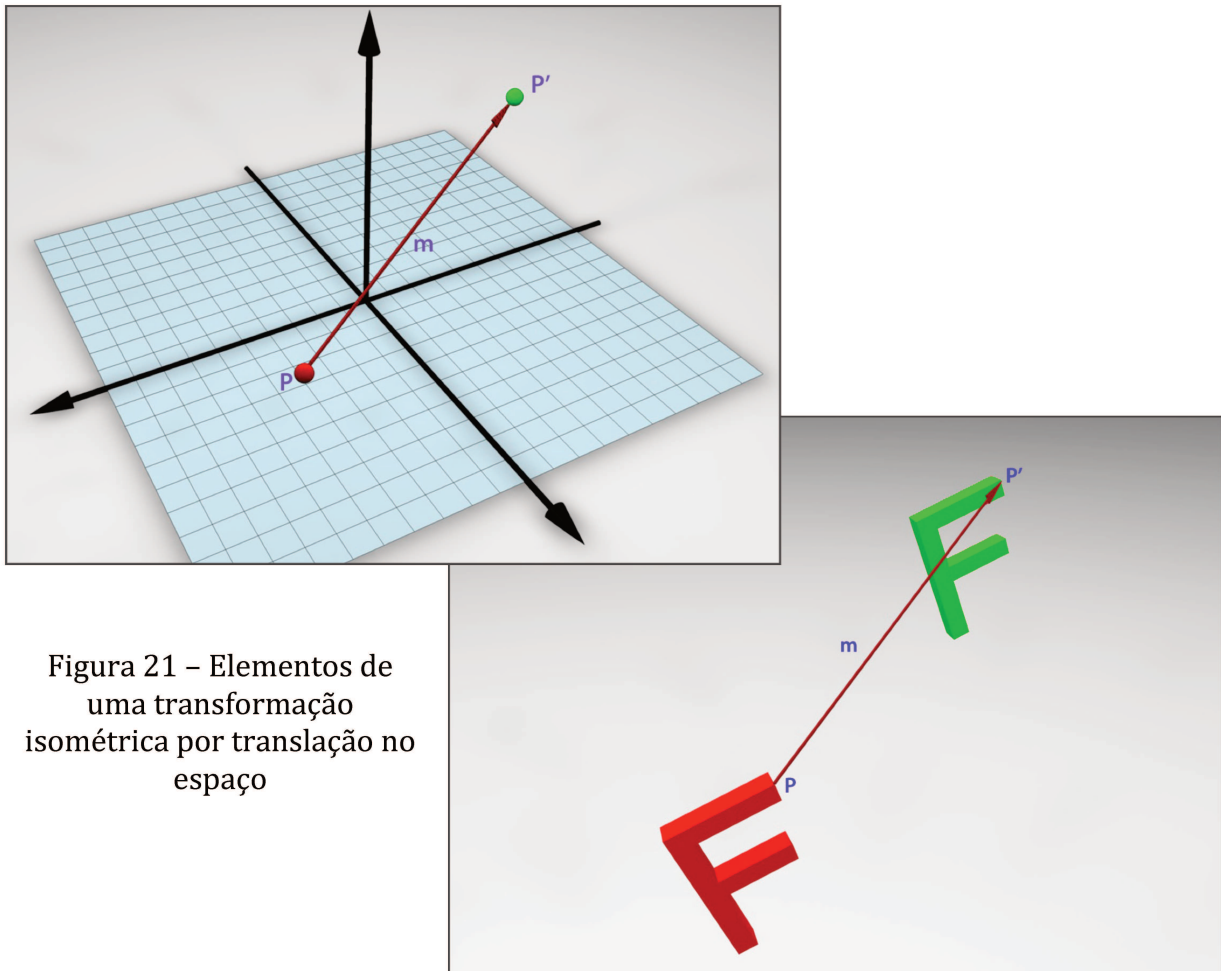


Figura 21 – Elementos de uma transformação isométrica por translação no espaço

4.3.3. ROTAÇÃO NO PLANO

No plano (R^2), a rotação é uma operação de simetria que gira a figura em torno de um centro (ou pivô) predeterminado. Todos os pontos da figura giram em torno de um **ponto** fixo em idêntico valor em graus. O intervalo entre a figura original e sua imagem rotacionada, valorada em graus (ângulo da rotação), determina o valor da rotação. Caso se dê no sentido anti-horário, o valor da rotação é descrita por ângulos positivos, enquanto deslocamentos rotacionais que se desenvolvam no sentido horário, assumem valores negativos.

A figura X ilustra uma rotação com centro no ponto **C** de amplitude positiva (ângulo da rotação θ), de maneira a transformar o ponto **P** em sua imagem **P'**. A condição é que o segmento **CP** seja igual ao segmento **CP'**.

O ponto **C** é o único ponto fixo na operação

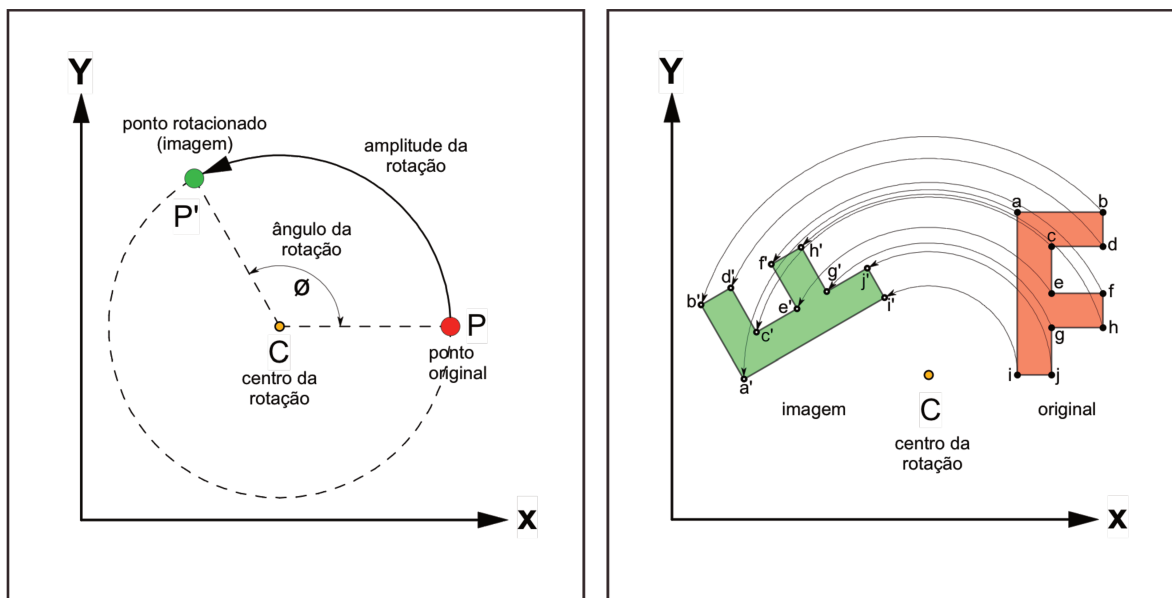


Figura 22a – Elementos de uma transformação isométrica por rotação sobre o plano

4.3.4. ROTAÇÃO NO ESPAÇO

No espaço ($\mathbb{R}^3$), o eixo não é mais um ponto como no caso da rotação no plano; o giro ocorre em torno de uma **reta**, ou em termos matemáticos, um **eixo orientado**. O diagrama abaixo descreve os elementos e as condições de uma rotação no espaço.

Tenha-se um eixo r que intercepta perpendicularmente um plano α , em dado ponto C .

Uma rotação espacial (em $\mathbb{R}^3$) deixa fixos os pontos situados em r (invariantes), e faz corresponder a um determinado ponto P situado no plano, uma imagem correspondente P' , de maneira que a distancia entre C e P seja da mesma magnitude de C e P' (raio da rotação).

O ângulo orientado da rotação θ estabelece a amplitude da rotação, é dado em graus por PCP' .

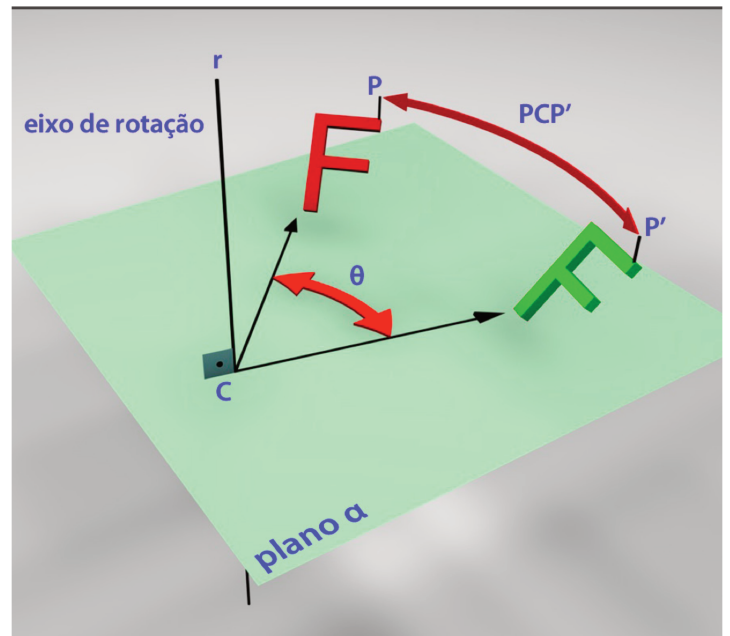
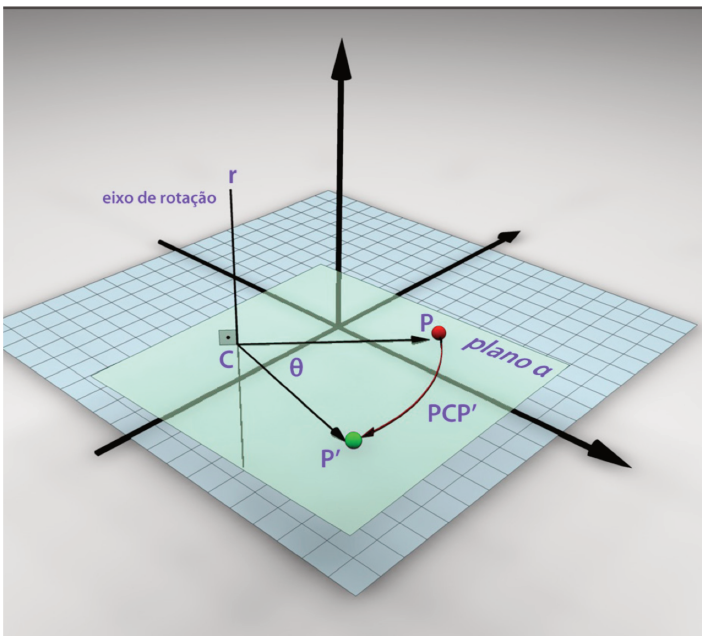
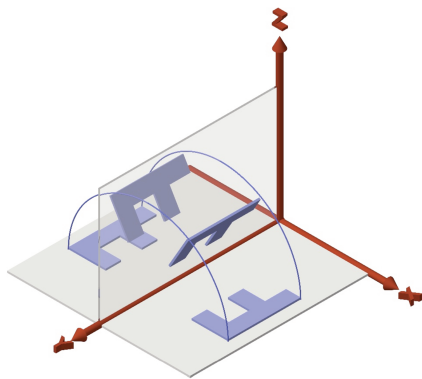


Figura 22b – Elementos de uma transformação isométrica por rotação no espaço

4.3.5. REFLEXÃO NO PLANO



Reflexão é uma operação que rotaciona o mapeamento de pontos da figura para fora de seu plano, em 180° . O resultado é uma imagem espelhada.

No caso de figuras planas, o eixo é uma linha que pode ser posicionada em qualquer posição relativa à figura.

Figura 23 – Reflexão

O posicionamento do eixo de reflexão em relação à figura determina a posição da imagem refletida. A distância entre o ponto original e o eixo de reflexão bem como o ângulo de incidência, são preservados entre o ponto refletido (imagem) e o eixo de reflexão, dado por um segmento de **reta E**. Assim, pode-se dizer que no caso da situação ilustrada pela figura X, $PE=PE'$ e E é mediatriz de PP' .

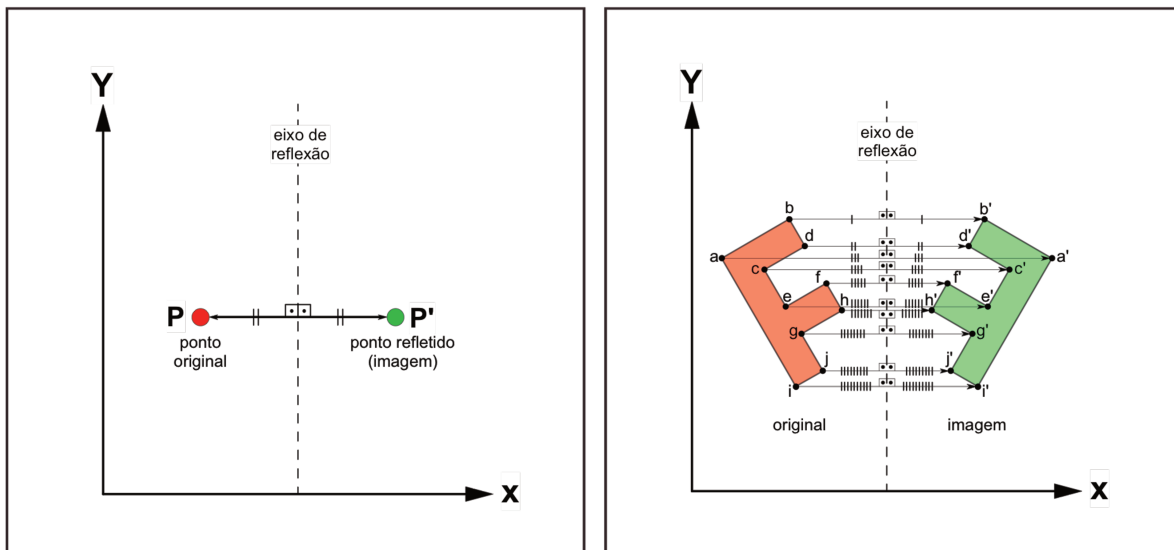


Figura 24 – Elementos de uma transformação isométrica por reflexão sobre o plano

4.3.6. REFLEXÃO NO ESPAÇO

No espaço (R^3), o eixo não é mais uma reta como no caso da reflexão no plano; o espelhamento dá-se através de um **plano**, que exerce a função de mediador da transformação. O diagrama abaixo descreve os elementos e as condições de uma reflexão no espaço.

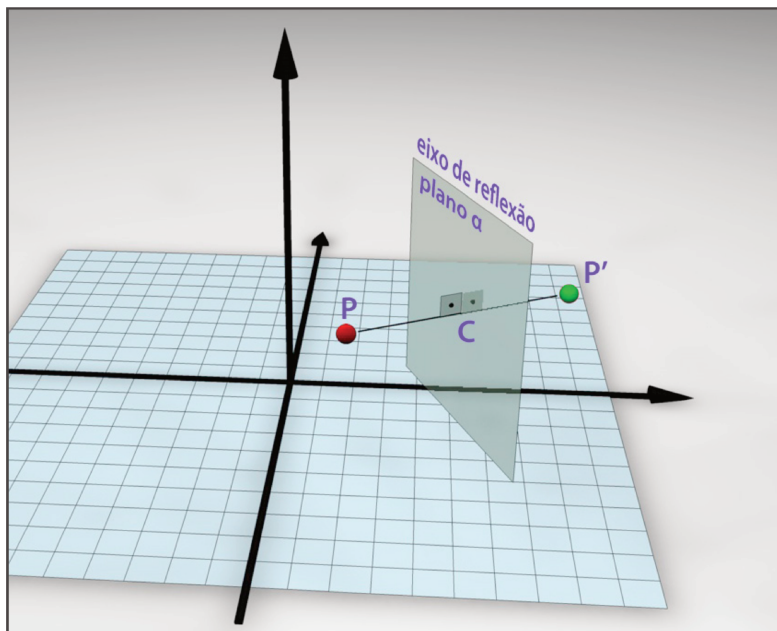


Figura 25

Os pontos fixos da reflexão (invariantes) estão no plano α .

Assim como ocorre na reflexão em R^2 (sobre o plano), a distância entre o ponto original P e o ponto refletido P' (imagem) é preservada, e dada por um segmento de reta que incide perpendicularmente ao plano de reflexão α .

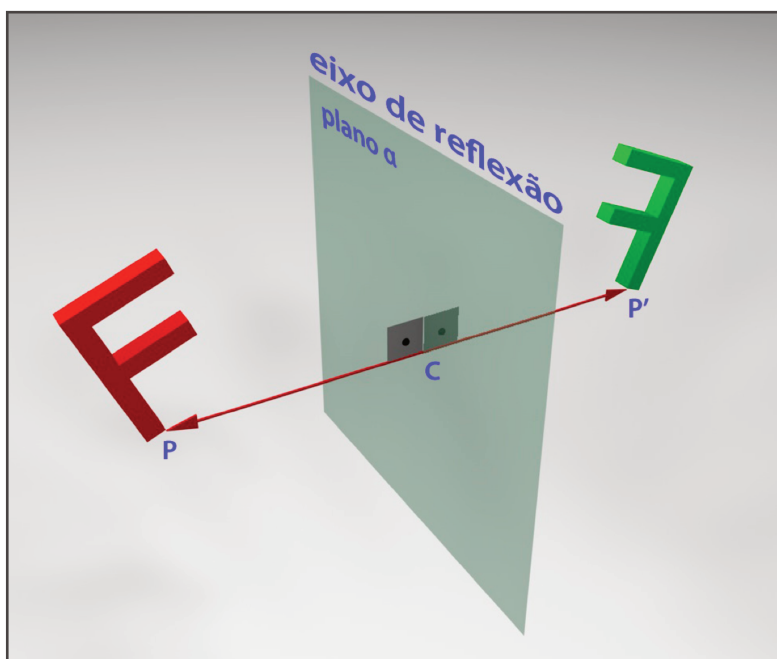


Figura 26

Figuras 25 e 26 – Elementos de uma transformação isométrica por reflexão no espaço

SEÇÃO 5 – GEOMETRIA E COGNIÇÃO

Uma compreensão genérica do conceito de criatividade é de que consiste na habilidade de agregar alguma originalidade à percepção daquilo a que se contempla, ou ainda, ser capaz de acessar uma perspectiva alternativa, inusitada, ao sentido óbvio das coisas.

Outra interpretação mais ou menos idealizada do processo criativo pode levar a crer que as nuances cognitivas que distinguem as pessoas sejam resultado exclusivo da capacidade inata de acessar dimensões mais profundas do inconsciente, de onde brotariam imagens reveladoras. Neste caso, ser ou não criativo seria questão de dom; de predisposição. Albert Einstein, um exemplo de mente criativa na ciência, lançou certa mística ao fenômeno, ao cunhar frases onde revela que seus processos, muitas vezes envolvem a alteração da qualidade perceptiva:

“Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade se me revela.” Albert Einstein¹

Pode ser que seja em parte assim, que pessoas notáveis pela criatividade tenham tirado a sorte grande e nascido com tais habilidades. Entretanto, o alcance inato não resume o fenômeno. É bem aceita a tese de que as capacidades cognitivas podem ser dilatadas através do estímulo e treinamento adequados.

A palavra cognição tem raiz latina, *cognitio*, e significa aprendizado, ou (aquisição de) conhecimento através da percepção. Esta descrição contudo, parece ser insuficiente atualmente, pois seu emprego supera o significado do conhecimento-informação e avizinha-se do conhecimento-qualidade adquirida, como um mecanismo de conversão e assimilação daquilo que somos capazes de

¹ <http://www.pensador.info/frases_de_albert_einstein/> acessado em 08/03/2010

compreender, para nosso modo de ser interno.

Sternberg (2008) esclarece que as origens da preocupação do homem sobre como pensamos ou compreendemos nossos próprios processos de pensar e compreender não tem marco claro na história, mas pode-se atribuir sua fundamentação à associação entre duas importantes matrizes de compreensão da mente humana: a filosofia e a fisiologia. A filosofia, na medida que estuda os problemas fundamentais relacionados à existência, ao conhecimento, à verdade, à mente e à linguagem, e a fisiologia como ramo de estudo das múltiplas funções mecânicas, químicas e bioquímicas da matéria viva.

A capacidade cognitiva, ou inteligência, seria assim, resultado da associação de fatores externos e internos, na medida que vincula um conjunto de características psicológicas inatas (herdadas pela hereditariedade), àquelas adquiridas (resultante das experiências pessoais).

Quando transpõe-se à área da psicologia, o conceito de inteligência ganha novos contornos e interpretações, e parece não haver consenso em torno de uma definição ou modelo taxonômico. Há quem sustente que trata-se de um predicado da mente que influi de maneira ‘global’ sobre as capacidades do indivíduo, enquanto outros compreendem que trata-se de um conjunto de aptidões, talentos e habilidades que podem ser isolados e compreendidos individualmente.

No início do século XX, no momento em que a psicologia começava sua trajetória como disciplina científica autônoma, Charles Spearman² cunhou a expressão ‘*fator g*’, como índice para descrever sua percepção de que a inteligência é uma habilidade única e geral. Seu método de investigação incluía uma bateria de testes de aptidão, e a partir da análise dos resultados que obteve, observou que o indivíduo que apresentava bons resultados em um aspecto cognitivo, tendia a apresentar bons resultados em diversos outros também, e esta

² SPEARMAN, C. 1904. - **General intelligence, objectively determined and measured** - Classics in the History of Psychology - <http://psychclassics.yorku.ca/Spearman/>

lógica valia também para aqueles que não apresentavam bons resultados.

Em 1938, o psicólogo Louis L. Thurstone³ ofereceu uma teoria diferente de inteligência. Em vez de vê-la como uma habilidade única geral, sua teoria centrou-se em sete diferentes *habilidades mentais primárias*⁴, abrindo campo para novas pesquisas, que incorporaram novas variáveis, argumentos e novos critérios para medi-las estatisticamente e organizá-las.

De acordo com Thurstone, as habilidades mentais primárias são as seguintes: **habilidade verbal, habilidade numérica, fluência verbal, rapidez de percepção, raciocínio indutivo, visualização especial e memória**. (ALVES. 1983. p.10-11)

Posteriormente, novos modelos estruturaram-se em torno das premissas principais de Thurstone, reagrupando, ampliando, rebatizando, ou por vezes criticando, seus métodos analíticos e categorizações. Um destes modelos foi a *teoria das múltiplas inteligências*⁵ de Howard Gardner. Publicada pela primeira vez em 1983, tornou-se referência importante às pesquisas contemporâneas sobre a inteligência.

Suas pesquisa propôs de início, a exemplo de Thurstone, um conjunto de sete categorias cognitivas: As inteligências **lógico-matemática, linguística, musical, corporal cinestésica, espacial, interpessoal e intrapessoal**. Entretanto esta lista parece ser dinâmica. Segundo o próprio Gardner em publicações recentes⁶, podem ser incorporadas ao seu conjunto original, novas categorias como a inteligência naturalística, que explicaria a capacidade do indivíduo de se relacionar com a natureza, e a pictórica (ou pictográfica), que relaciona-se com a habilidade de desenhar.

As diversas versões que se agrupam em torno do conceito da preexistência

³ THURSTONE, Louis L. - **Primary mental abilities**. University of Chicago Press. Chicago. 1938.

⁴ Human Intelligence – Historical influences, current controversies, teaching resources – Indiana University - <http://www.indiana.edu/~intell/lthurstone.shtml>

⁵ GARDNER, Howard. - *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Basic Books. New York. 1983.

⁶ Sobre a teoria das inteligências múltiplas - <http://www.oestrangeiro.net/psicologia/27-teoria-das-inteligencias-multiplas-de-gardner>

das múltiplas propriedades individualizáveis da mente são modernamente estudadas dentro de uma sub-disciplina da psicologia conhecida como *psicologia cognitiva*. Embora tenha sido resultado de convergências conceituais que tiveram início com os estudos de Thurstone em 1938, considera-se que obra que ‘estabeleceu e batizou o campo’ foi *Cognitive Psychology* de 1967, escrita por Ulrich Neisser (SCHULTZ; SCHULTZ. 1981).

Sobre a psicologia cognitiva, seus pressupostos e métodos, escreveu Neisser (2009), em publicação recente:

“Na psicologia cognitiva, a mente humana é concebida como um sistema estruturado para a manipulação da informação. De acordo com a maioria das teorias cognitivas, a informação recolhida pelos sentidos é analisada, armazenada, recodificados, e posteriormente utilizada de diversas maneiras; estas atividades são chamados de processos de informação. Eles não precisam ser representados na consciência; a psicologia cognitiva considera muito pouco a introspecção consciente. Em vez disso, as experiências são projetadas para tirar proveito dos vários indicadores objetivos de processamento das informações: tempo de reação, seleção da resposta, desempenho em testes de memória, e assim por diante. Análises matemáticas e lógicas de tais dados são utilizadas para construir modelos dos processos subjacentes.”

(NEISSER. 2009) [W8]

Assim, psicologia cognitiva dedica-se ao estudo de uma multiplicidade de tópicos, que serão tantos e tenderão multiplicar-se tão extensamente em sub-tópicos, quantos forem os cientistas capazes de compreender e isolar as manifestações da mente humana. De acordo com Sternberg (2008), os psicólogos cognitivos investigam as bases biológicas da cognição, bem como a atenção, a consciência, a percepção, a memória, a imaginação, a linguagem, a solução de problemas, a criatividade, a tomada de decisões, o raciocínio, as mudanças na

cognição em termos de desenvolvimento que ocorrem durante a vida, a inteligência humana, a inteligência artificial e vários outros aspectos do pensamento humano.

Segundo explicam Spinillo e Roazzi (1989), em virtude desta amplitude de interesses, o psicólogo cognitivo tende a encontrar-se em inter-relação com o campo de atuação de outros profissionais, como aos psicólogos clínicos, sociais, esportivos, de tráfego, educacionais, entre outros. Na área da educação por exemplo, podem dedicar-se a oferecer, através de mensurações, visões reveladoras sobre aptidões ou déficits em aprendizagem, pensamento, raciocínio, formação de conceitos, memória e inteligência.

Os críticos que propõem cautela à adesão incondicional às promessas e métodos da psicologia cognitiva, as ressalvas mais comuns, sustentam que resultados estatisticamente satisfatórios podem não ter correspondência direta com os estados psicológicos do indivíduo (LOHMAN. 1993). Assim, psicólogos e educadores devem ter muita atenção ao relacionar resultados de determinados testes psicométricos a projeções sobre o sucesso acadêmico ou profissional.

É fundamental manter-se viva a perspectiva de que os testes medem aspectos fracionados das capacidades cognitivas humanas, e sua popularização na 'cultura psicológica' e profusão em meios como a internet, parecem sugerir que nem todos foram criados de maneira adequada.

5.1. APTIDÃO ESPACIAL

A aptidão espacial, é uma das capacidades mais estudadas na psicologia cognitiva, e está intimamente ligada à capacidade de manipulação de imagens visuais. Zimmermann e Cunningham⁷ (1991 *apud* COSTA. 2000.) argumentam

⁷ ZIMMERMANN, W. & CUNNINGHAM, S. Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? IN W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp 1-7). Washington: MAA. 1991

que o conceito de visualização tem raízes na matemática, e envolvem aspectos históricos, filosóficos psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes, pois pode assumir diferentes conotações: algumas vezes está ligada à mente do indivíduo, outras está restrito a algum meio, e ainda em outras, a visualização é definida como um processo para viajar entre estes dois domínios (COSTA. 2000. P.169).

De acordo com Carroll (1993 *apud* PRIETO & VELASCO. 2006.), a aptidão espacial foi definida como a capacidade de formar, reter, recuperar e transformar mentalmente imagens visuais. Desta maneira, há na verdade diversas habilidades visuais, e cada uma enfatizando aspectos distintos do processamento da imagem (LOHMAN. 1993).

No intuito de compreender sua anatomia, Choi (2001 *apud* SEABRA. 2009. p 28), descreve que a aptidão espacial compreende três categorias distintas de habilidades: rotação mental, percepção espacial e visualização espacial. A esta lista podem somar-se ainda a orientação espacial e as relações espaciais (KAUFMANN; SCHMALSTIEG, 2003 *apud* SEABRA 2009. p.29).

Lohman (1993), esclarece que tais categorização devem-se à ênfase nos processos implicados, e que tais diferenças dão-se através de quatro hipóteses multifatoriais:

1. Velocidade na operação de transformação.
2. Habilidade em gerar e reter as representações mentais que conservem a configuração.
3. A quantidade de informações visuais-espaciais que podem ser mantidas em um estado ativo.
4. A sofisticação e flexibilidade de estratégias disponíveis para a resolução de tais tarefas.

De acordo com Clements e Battista (1992, p.454), estas habilidades não são homogêneas na media da população mundial, e apresentam diferenças significativas entre grupos raciais e culturais. Entretanto, os autores esclarecem

que tais estudos carecem de maior fundamentação. Por outro lado, as diferenças na aptidão espacial entre gêneros tem sido extensivamente estudadas na literatura cognitiva, e dão conta de serem naturalmente mais desenvolvidas nos homens do que nas mulheres (VOYER et al, 1995. Apud RIZZO et al 1998).

As explicações para esta constatação contudo são controversas, e de acordo com Velasco e Kawano (2000) envolvem variáveis evolucionárias, etárias, biológicas, culturais e sociais.

A visão evolucionária⁸ ampara-se na percepção que ainda somos essencialmente idênticos aos nossos ancestrais pré-históricos, e nossa espécie habituou-se, ao longo de milhares de gerações, a relegar ao homem a tarefa de caçar em expedições longas, em territórios desconhecidos em que os pontos de referência eram mais escassos, enquanto as mulheres ficavam mais tempo buscando alimento próximas de casa, onde os pontos de referência eram mais seguros.

Outros estudos de matriz biológica, explicam que tais diferenças são em parte explicadas por fatores hormonais, como o início da menopausa, administração de estrógeno e testosterona e o período do ciclo menstrual (RIZZO et al. 1998. p. 214).

Velasco e Kawano (2000), apesar das possíveis razões que implicam nas diferenças cognitivas entre gêneros, levantam uma importante questão sobre a possibilidade de treinamento, e conseqüente incremento da aptidão espacial. Seria esta inteligência um dom masculino? Seu argumento minimiza a importância de tais dados na medida em que deposita grande confiança na capacidade de transformação das habilidades através do trabalho dirigido a este fim, e cita Eliot (1987, p.165), a fim de respaldar seu ponto de vista:

“A maioria das pesquisas que provê evidências de diferenças relativas ao sexo em testes espaciais são baseadas em tendências mais do que

⁸ http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/sex/articles/spatial_tests.shtml

em padrões definitivos de diferenças, com mais variação no desempenho usualmente associada às diferenças individuais do que em diferenças relativas ao sexo propriamente.” (ELIOT, 1987, p. 165)

O treinamento da aptidão espacial é uma necessidade, pois tem sido relacionada como fundamental a um grupo amplo de atividades humanas, com reflexos sobre a atuação corriqueira das práticas diárias, como dirigir um carro ou jogar futebol. Sorby (1999 *apud* SEABRA 2009), argumenta que trata-se de habilidade essencial para o exercício de um conjunto de mais de 80 profissões. Segundo Harris (1981 *apud* CLEMENTS & BATTISTA), o *US Employment Service* considera que para a maior parte das ocupações técnicas e científicas, como projetista aeroespacial, desenhista, arquiteto, engenheiro, médico e matemático, é requisito que o indivíduo tenha esta habilidade em níveis igual ou maior a noventa por cento.

Um estudo desenvolvido por Davies e Talbot⁹ (*apud* EISEMBERG, 1999, p.1), em que foram investigados os processos criativos de trinta e cinco designers industriais britânicos, descreve a aptidão espacial como uma habilidade comum: *“frequentemente descreveram facilidade em criar imagens mentais (...) como um multisensorial e dinâmico sketch pad; utilizando rotações mentais e escaneamento de imagens”* (pp. 17-25).

A performance em matemática de alto nível também está amplamente relacionada à aptidão espacial. Cole (1998 *apud* RIZZO et al, 1998), cita uma entrevista do astrofísico Stephen Hawking ao Los Angeles Times, na qual descreve que em seu processo de investigação, traduz a matemática para a geometria, e transforma as formas geométricas em sua cabeça. Albert Einstein descreve a dinâmica de seu pensamento de maneira quase idêntica:

⁹ DAVIES, R.; and TALBOT, R.J. - Experiencing Ideas: Identity, Insight, and the Imago. *Design Studies*. pp. 17-25. 1987.

“As palavras, ou a linguagem tal como é descrita ou falada, não parecem desempenhar nenhum papel em meu mecanismo de pensamento. As entidades psíquicas que parecem atuar como elementos no pensamento são certos signos e certas imagens mais ou menos claras, que podem ser voluntariamente reproduzidos e combinados.” Albert Einstein. (PIGNATARI, 1981, p. 32; GARDNER. 1983, p.190)

O pensamento criativo parece nutrir-se desta aptidão. Isto notadamente inclui as áreas da arquitetura, design, artes e engenharias, pois a natureza das atividades solicita dos profissionais destas áreas conhecimento sobre o espaço e a forma, bem como as combinações entre eles e sua representação.

Em reconhecimento à importância da aptidão especial entre as qualidades imprescindíveis a arquitetos e designers, é comum que instituições de ensino que ofereçam estes cursos em nível de graduação apliquem em seu processo de seleção provas de conhecimento específico, em busca de indícios que confirmem a vocação natural do candidato à profissão, através da produção de desenhos e maquetes. Leopold (2005, p.44) contudo, afirma que a maior parte dos ingressantes universitários destas áreas, têm esta habilidade mal desenvolvida. Seus estudos ao longo dos anos, envolvendo a aplicação de testes cognitivos, em estudantes de arquitetura e engenharia lhe respaldam esta convicção, chegando mesmo à inquietante observação de um viés de piora nos índices ao longo dos anos.

Velasco e Kawano (2000) endossam esta percepção e apresentam como possíveis razões para a configuração desta situação, a mudança nos hábitos infanto-juvenis devido a incorporação de interesses virtuais prontos, que exigem pouco esforço cognitivo, bem como falhas na formação acadêmica atual, que tende a valorizar atividades pedagógicas insuficientes, que demonstram uma preocupação prioritariamente focada em atender as demandas do mercado de

trabalho.

É desta maneira, fundamental que os educadores preocupem-se com esta questão, e inspirados pela visão de que estão imersos em um sistema em crise, esforcem-se por encontrar caminhos e metodologias de ensino que priorizem o desenvolvimento do estudante segundo uma concepção mais integral e estrutural. Como diz Naranjo (2005), uma educação sensata tem que prestar-se a algo mais do que informar.

5.2. GEOMETRIA E APTIDÃO ESPACIAL

Freudenthal (1973 *apud* COSTA. 2000.) sustenta que a geometria pode ser compreendida em dois níveis: Um mais elevado e outro mais baixo. No nível mais elevado, ela é uma disciplina da matemática axiomáticamente organizada; no mais baixo, a geometria é essencialmente a compreensão do espaço em que se vive, respira e move.

Se na primeira descrição, a geometria configura-se ordenada e cientificamente estudada através de um extenso currículo de interesses, há na segunda, o reconhecimento de uma dimensão que a relaciona à espacialidade do mundo concreto e real, com o qual o indivíduo interage, e que exerce forte influência sobre seus sentidos e aptidões. Assim, a despeito de haver ou não conhecimento prévio sobre conceitos científicos sofisticados, o ser humano parece dotado de uma habilidade natural, resultado dos longos processos evolutivos, de lidar experimental e intuitivamente com a geometria, pois em sua noção mais geral, esta define-se como o estudo das relações espaciais.

Velasco e Kawano (2000), no sentido de esclarecer aspectos importantes acerca do conceito de espaço, dão ênfase à diferenciação entre espaço físico e espaço psicológico. Segundo a descrição dos autores, o espaço físico prescinde da existência da mente humana, e é relativo ao objeto concreto, mensurável e

vetorizado. Já o espaço psicológico implica em atributos da mente que permitem ao indivíduo a possibilidade de prever, estimar e julgar a relação entre eventos ou objetos. Desta forma, seguem os autores, a discussão recai sobre a dualidade da percepção direta *versus* percepção indireta, de maneira que somos capazes de perceber os objetos diretamente, através dos nossos sentidos, como a visão, audição e tato, ou indiretamente, a partir da admissão que os atributos espaciais residem nos objetos, e não nas sensações.

Sob a perspectiva da educação matemática, Usiskin (1994 *apud* CLEMENTS & BATTISTA, 1992.), descreve que a compreensão espacial tratada pela geometria, pode ser categorizada em quatro dimensões: 1. Visualização, desenho e construção de figuras, 2. Estudo dos aspectos espaciais do mundo físico, 3. Uso como veículo para a representação de conceitos matemáticos 'não-visuais', e 4. Representação como um sistema matemático formal. Destas quatro categorias, as três primeiras envolvem o uso de aptidões espaciais.

Numerosos estudos (CLEMENTS & BATTISTA, 1992; LEOPOLD, 2005; SEABRA, 2009; PRIETO & VELASCO, 2006; OLKUN, 2003; RODRIGUES & RODRIGUES, 2001), têm vinculado o estudo de tópicos da geometria ao desenvolvimento da aptidão espacial. A geometria descritiva, as transformações geométricas e o estudo dos sólidos têm recorrentemente figurado em citações, como atividades ricas neste sentido, pela natureza de seu programa, que demandam do indivíduo considerável capacidade de abstração. Como bem observa Olkun (2003), as representações de um objeto tridimensional por meio de diagramas bidimensionais, sejam projeções ortográficas ou perspectivas, demandam boa capacidade de visualização e domínio das convenções. Neste sentido, o treinamento adequado em geometria, onde estas convenções possam ser apresentadas, pode fornecer o contexto necessário para que as habilidades vinculadas à aptidão espacial possam ser exercitadas.

5.3. HABILIDADE DE ROTAÇÃO MENTAL

Uma das habilidades vinculadas à aptidão espacial é a rotação mental.

Genericamente, uma operação de rotação em um ambiente físico pode ser descrita como o deslocamento circular de uma entidade em torno de um eixo; se o espaço for bidimensional, este eixo é um ponto. No caso do espaço tridimensional, uma linha.

No mundo físico ainda, a maior parte das manipulações que fazemos com objetos, são combinações de múltiplas rotações e translações. Ao levar um garfo do prato à boca por exemplo, criamos um movimento complexo que poderia ser descrito por um conjunto destas operações sucessivas no espaço.

Uma rotação mental, tida como habilidade cognitiva, é portanto a capacidade de um indivíduo em emular mentalmente o deslocamento de uma imagem tridimensional, em torno de um eixo central. O início das pesquisas desta habilidade se deu com a publicação do artigo *Mental Rotation of Three-Dimensional Objects*¹⁰, por Shepard e Metzler (1971). O trabalho descreve a aplicação de um experimento que consiste em apresentar em pares, uma série de desenhos em perspectiva de sólidos compostos pela justaposição de dez cubos, de maneira que fossem comparados e julgados como congruentes ou diferentes.

Os objetos congruentes (ou corretos) são descritos através de posições diferentes, resultantes de operações de rotação, enquanto os diferentes (distratores), ou não congruentes, retratavam o modelo após sofrer uma transformação por reflexão associada a uma rotação.

¹⁰ Disponível em: <https://www.cs.virginia.edu/cs150/ps/ps3/mental-rotation.pdf> acessado em 22/06/2001

As imagens abaixo foram extraídas do artigo original.

“A figura ‘A’ apresenta um par de sólidos idênticos que diferem por uma rotação de 80° no plano da imagem. Na figura ‘B’, o par idêntico difere por uma rotação de 80° na profundidade, enquanto a figura ‘C’ apresenta um par diferente, onde nenhuma rotação pode fazê-los congruentes” (SHEPARD & METZLER, 1971, p.702)

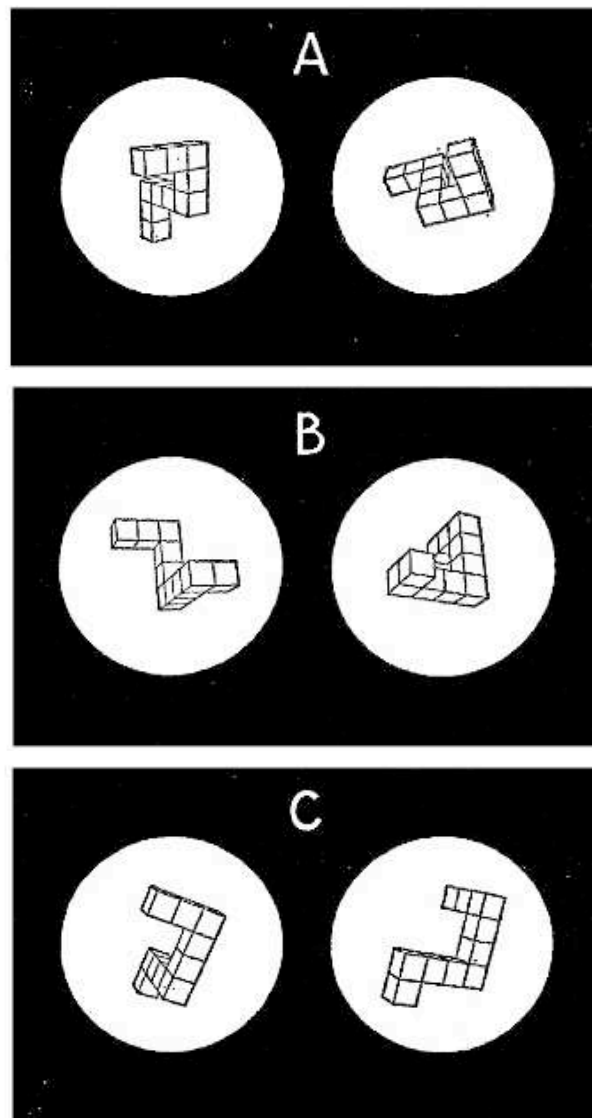


Figura 27 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702)

A figura abaixo emula a transformação do par “B” ilustrado acima na figura X. O sólido referente é rotacionado em torno de um eixo de rotação a uma amplitude de 80° , dando origem a uma imagem congruente (azul).

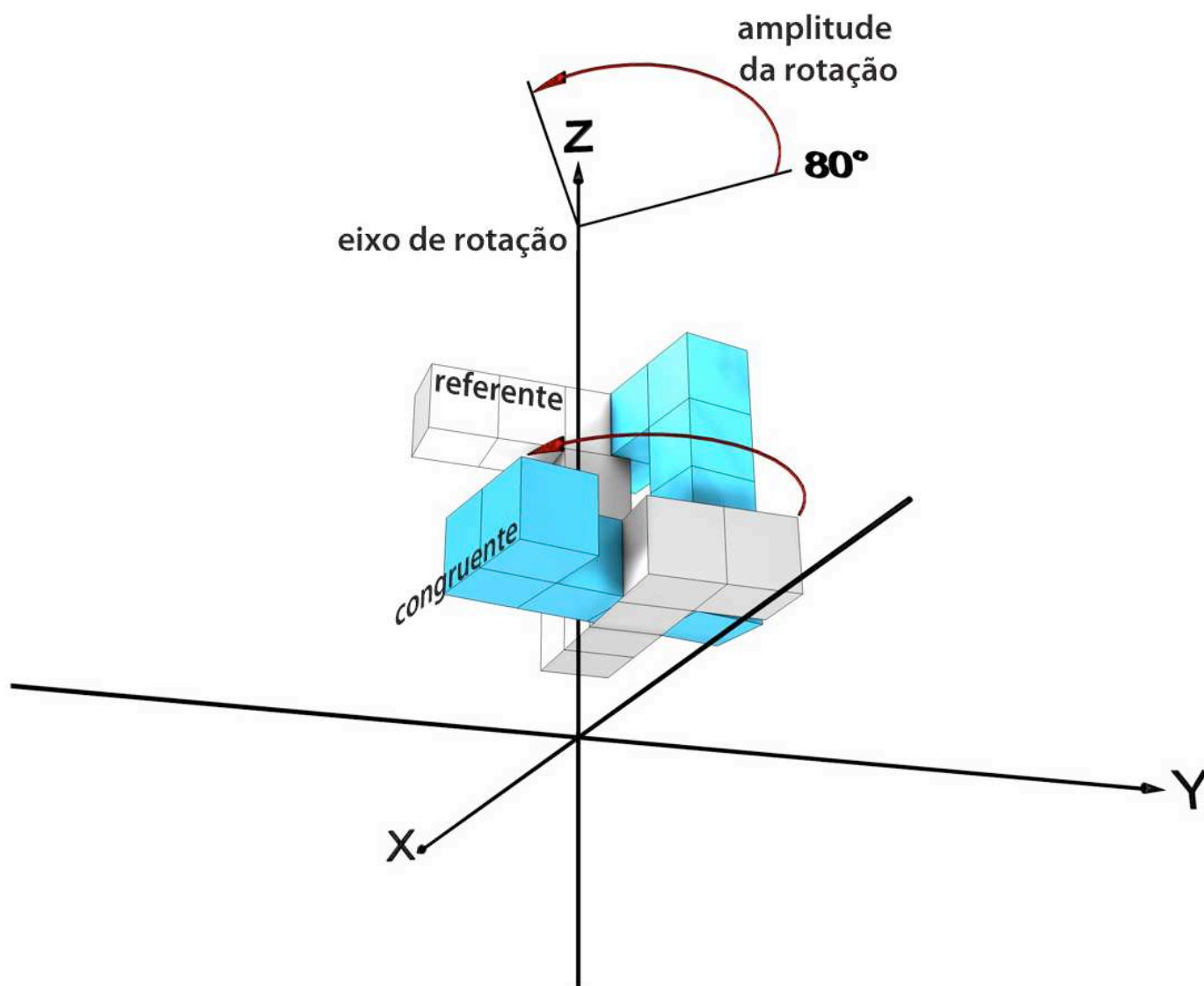


Figura 28 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702)

A figura abaixo ilustra a transformação por reflexão, operada sobre o **referente** na geração **distrator**. Não há congruência possível entre ambos se a operação mental envolver apenas uma rotação.

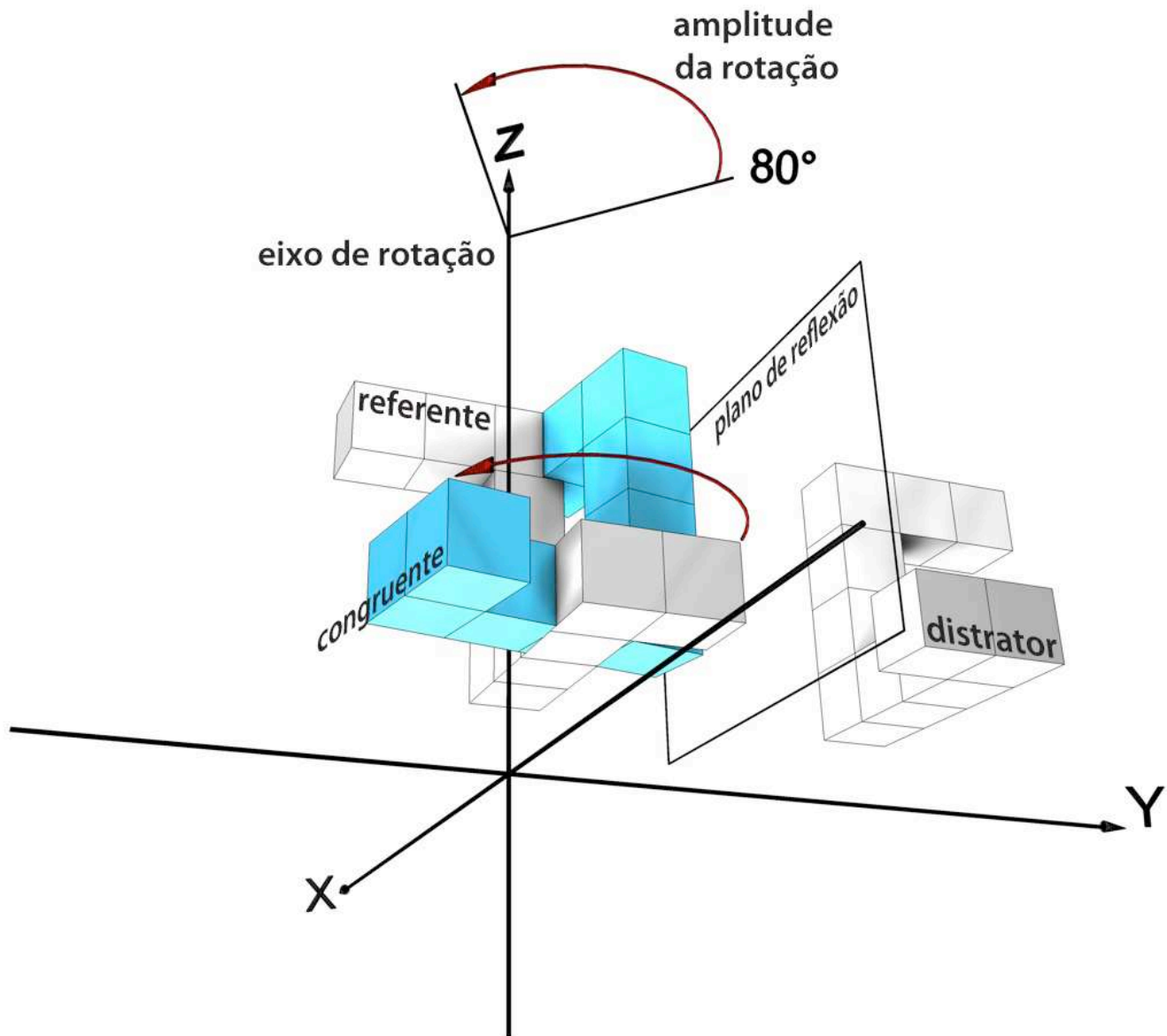


Figura 29 – Exemplo dos pares de desenhos apresentados no artigo de Shepard e Metzler (1971, p.702)

Os pesquisadores observaram através dos resultados, que o tempo de reação (RT) para tomar uma decisão se as imagens eram iguais ou diferentes, formava uma função linear quase perfeita com a diferença angular entre modelo e imagem transformada.

“O tempo necessário para reconhecer que dois desenhos em perspectiva retratam objetos com a mesma forma tridimensional mesmo é uma função linearmente crescente da diferença angular nas orientações retratadas entre os dois objetos”. (SHEPARD & METZLER. 1971)

Quanto mais rotacionadas estão as imagens em relação ao referente, mais tempo o indivíduo leva para reconhecê-las como congruentes. Shepard observou que a cada 50° de rotação sofrida pelo modelo, implica no acréscimo de um segundo na velocidade de sua resposta, sugerindo que há uma velocidade constante na taxa de rotação mental.

A percepção da existência de uma relação tão íntima entre tempo e precisão das respostas acabou por configurar a matriz dos testes de rotação mental, que são sempre aplicados em condições de velocidade.

De acordo com Carrol (1993 *apud* VELASCO & KAWANO. 2000), a habilidade de rotação mental configura, juntamente com a habilidade de visualização, os dois principais fatores da aptidão espacial, e as diferenças entre as tarefas relacionadas aos testes de medição representam duas dimensões de desempenho que se correlacionam: velocidade e complexidade. De acordo com Sternberg (2000 *apud* Covre *et al*, 2005, p.41), a observação da relação intrínseca entre velocidade e complexidade na rotação mental comprova a hipótese de sua equivalência funcional, pois trata-se das mesmas operações que se esperaria de uma pessoa que estivesse fazendo uma rotação de objetos físicos no espaço: a rotação é mais lenta quando os ângulos são maiores.

5.4. ESTRATÉGIAS COGNITIVAS E TESTES PSICOMÉTRICOS

A psicologia cognitiva apóia-se grandemente na crença de que o conjunto de características psicológicas e cognitivas de um indivíduo, como seu conhecimento, habilidades e atitudes, é passível de mensuração.

De acordo com Pasquali (2001), este campo, chamado psicometria, é validado a partir da construção de instrumentos de medição e de um repertório teórico capaz de fundamentá-los. Um teste psicométrico é um procedimento sistemático dedicado a observar um determinado comportamento e descrevê-lo com a ajuda de escalas numéricas ou categorias fixas. Em outras palavras, segundo Silva¹¹ trata-se fundamentalmente uma mensuração objetiva e padronizada de uma amostra de comportamento, através de questionários, escalas, gráficos e índices.

A análise cuidadosa das respostas a tais testes têm estimulado investigações, e contribuído para a conformação de uma teoria acerca das estratégias cognitivas. Geiser *et al* (2006, p.262), explicam que a análise das estratégias dão conta da existência de dois tipos delas: A primeira, envolve procedimentos espaciais mais elaborados, nos quais inclui-se a rotação mental, é chamada 'holística'. A segunda, é chamada 'analítica' ou 'verbal', em virtude de envolver prioritariamente o raciocínio em detrimento da manipulação mental dos objetos.

5.5. MRT - Mental Rotation Test

O MRT é um dos testes de aferição de aptidão espacial mais utilizados por psicólogos cognitivos e pesquisadores da área da educação. (SHIINA *et al*. 2001)

Sua versão original foi desenvolvida pelos pesquisadores Vandenberg e Kuse (1978), a partir uma adaptação do modelo proposto por Shepard e Metzler (1971).

¹¹ SILVA, V. G - Os Testes Psicológicos e as suas Práticas - <http://www.algosobre.com.br/psicologia/os-testes-psicologicos-e-as-suas-praticas.html>

O princípio que estabelece a comparação entre sólidos formados pela justaposição de 10 cubos, com três inflexões de 90°, é mantido, assim como a natureza das transformações geométricas operadas sobre eles.

A principal diferença está na quantidade de alternativas a que se deve comparar o modelo referente. Neste caso, este deve ser comparado a quatro alternativas.

A imagem abaixo exemplifica uma questão do MRT:

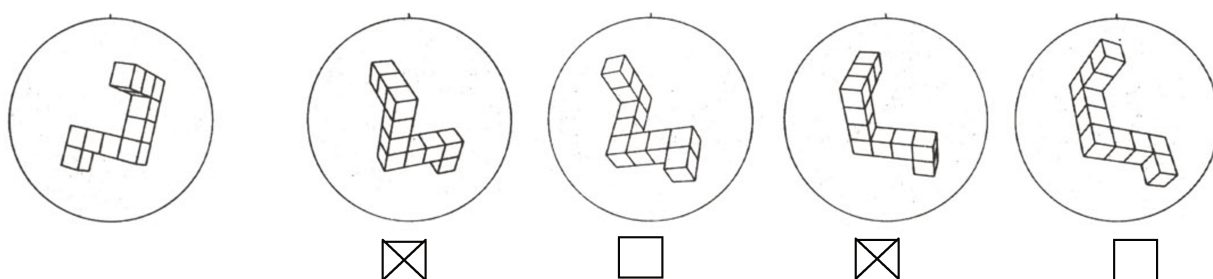


Figura 30 – Questão-Tipo do teste MRT

A figura à esquerda corresponde ao modelo referente, que deve ser comparado às quatro figuras similares posicionadas à direita. Duas delas correspondem à mesma figura em versões rotacionadas, enquanto as outras duas são imagens refletidas e rotacionadas ou *distractors*. O indivíduo tem portanto duas alternativas corretas e deve assinalar as duas.

5.5.1. Procedimentos gerais de aplicação do teste.

O teste compõe-se de duas partes: A primeira refere-se às instruções, onde estão descritas as orientações que o indivíduo deve considerar para resolver as questões, bem como esclarecimentos acerca do tempo disponível e dos critérios de pontuação. A segunda parte refere-se às questões propriamente ditas.

Recomenda-se que o condutor da teste conduza uma leitura atenta da primeira parte, na qual é proposto uma espécie de simulado com três questões-

tipo, com o propósito de habituar o indivíduo ao formato geral do teste. Não há um tempo definido para a aplicação deste primeiro contato.

A segunda parte do teste é composta por vinte questões similares, divididas em dois blocos de dez questões cada um. Os autores propõem que o tempo limite dedicado à solução de cada bloco seja cronometrado em cinco minutos. Ao final da primeira bateria de dez questões ou terminados os primeiros cinco minutos, o indivíduo deve aguardar até a orientação do condutor do teste para o início da segunda bateria. Deve-se, segundo orientação dos autores, permitir-se um intervalo de dois minutos entre as duas baterias.

Caso o participante tenha concluído a segunda etapa antes do término dos cinco minutos, e tenha deixado alguma questão inconclusa na primeira etapa, é permitido que utilize este tempo remanescente para concluí-las ou revisá-las.

5.5.2. Pontuação

Uma vez que as vinte questões apresentam duas alternativas corretas cada, a pontuação máxima do teste alcança um máximo de quarenta pontos. A recomendação de Shepard e Metzler (1971 *apud* SEABRA 2009), é que considere-se correta apenas a questão em que as duas alternativas corretas forem assinaladas, e não creditar nenhum ponto em qualquer outro caso, como forma de desestimular as ‘adivinhações’. Seabra (2009, p.41) observa também que outra maneira possível de administrar a pontuação é considerar um ponto para cada uma das alternativas corretas, mas zerar a questão nos casos em que houver uma correta e uma errada assinaladas na mesma questão. Assim a anulação automática da opção correta pela opção errada, teria efeitos sobre a tentação de ‘chutar’ as respostas.

5.6. DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE ROTAÇÃO MENTAL.

No processo de entendimento das propriedades físicas de um objeto com o qual nos deparamos pela primeira vez e não conhecemos, é natural, segundo Sutton e Williams (2007, p.2), que procuremos rotacioná-lo considerando o maior número de perspectivas possível, e rotação aqui é tomada no sentido real da manipulação física. Se o objeto for demasiado grande para ser manipulado manualmente, nossa alternativa imediata é circundá-lo. Entretanto, para grande parte do processo em design, quando nenhum objeto físico existe, os procedimentos investigativos se dão inicialmente na mente para logo em seguida, se compromissarem com o papel, tela ou materialidade de objetos sólidos. Há, segundo esta perspectiva, um vínculo natural entre a manipulação concreta do mundo - considerada estratégia de conhecimento - e os recursos mentais compatíveis com estas estratégias.

Desde a introdução do conceito de rotação mental feito por Shepard e Metzler em 1971, diversos estudos utilizaram esta fundamentação inicial, no desenvolvimento de novas idéias que colaboram com a hipótese de que a rotação mental guarda muitas semelhanças com a rotação física. Conforme observam Covre *et al* (2005, p.42):

“As evidências de que isso ocorre podem ser percebidas em tarefas simultâneas de rotação motora compatíveis com as de rotação mental, que resultam na redução de erros e de tempo de reação. Ao contrário, tarefas simultâneas de rotação motora conflitante com a mental causam interferência, aumentando significativamente o tempo de resposta e o número de erros”

Diversos estudos que foram desenvolvidos a partir da matriz conceitual descrita pela pesquisa original de Shepard e Metzler (1971), comprovam que a habilidade de rotação mental pode ser desenvolvida através do treinamento.

A hipótese de que a transformação mental de imagens é em parte estimulada por processos motores, é sustentada por Wexler *et al* (1998, p.77); seu experimento utilizou um dispositivo virtual, no qual elementos do *Shepard task*¹² podiam ser manipulados dinamicamente através de um *joystick* no sentido horário e anti-horário. De acordo com os pesquisadores, a observação de alguns dos resultados amparam seus pressupostos:

1.Quando as rotações manipuladas foram congruentes com a resposta da rotação mental, os tempos foram mais rápidos e houve menos erros, do que quando as rotações manipuladas foram incongruentes; 2.Quando as rotações foram congruentes, o ângulo no qual os participantes rotacionaram suas imagens mentais equivalem ao ângulo de rotação manipulado pelo *joystick*. 3. A velocidade da rotação manual afetou a velocidade da rotação mental, e quando a primeira foi mais rápida, a segunda também o foi.

Conclusões semelhantes encontraram Wohlschlaeger e Wohlschlaeger (1998, p. 397), a partir dos resultados de dois experimentos que envolveram comparações de performances a partir de rotações amparadas por manipulações virtuais e rotações mentais. Observou-se que os tempos de reação para ambos procedimentos – rotação mental e rotação manipulada – foram influenciados pela amplitude da rotação

¹² O “*Shepard Task*” como ficou conhecido, envolve a comparação entre “estímulos” um modelo referente a duas imagens semelhantes que diferem por uma rotação, e eventualmente por uma reflexão (congruentes e distratores); o indivíduo é instado a decidir se duas versões dos modelos referentes são ou não congruentes, e a estratégia mais comum para proceder esta decisão é uma rotação.

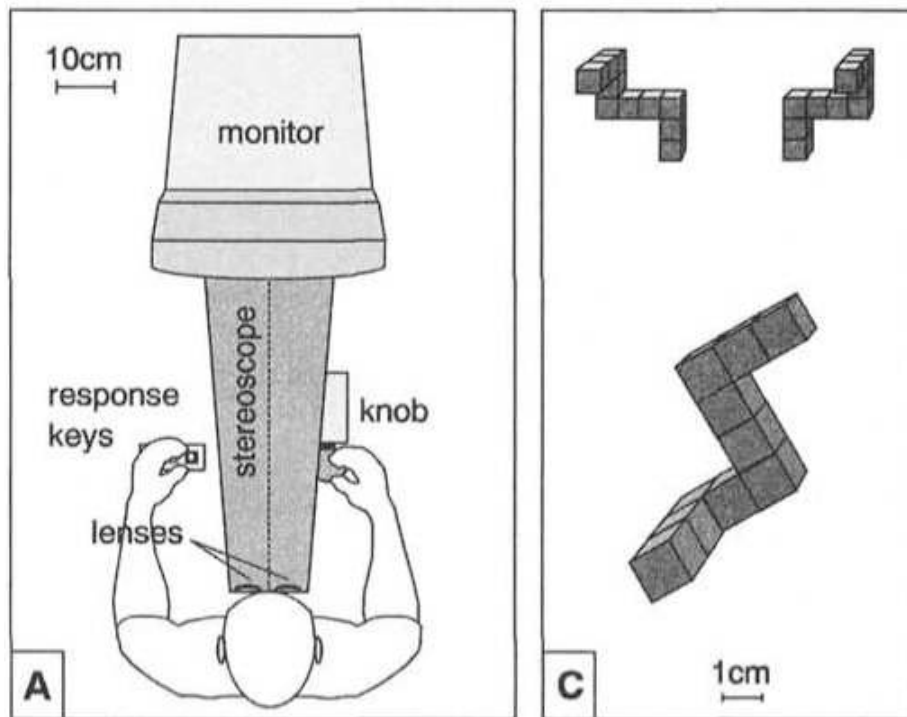


Figura 31 – Wohlschlaeger e Wohlschlaeger (1998, p.401) - O aparato foi montado utilizando um computador 2000B AMIGA e um estereoscópio especial de 55 cm de comprimento. O estereoscópio foi usado para fornecer informações sobre a profundidade das imagens.

A conclusões semelhantes aos de Wohlschlaeger e Wohlschlaeger (1998), para quem processos de desenvolvimento da rotação mental e manual são isomórficos compartilhando semelhanças e podem estar relacionados ao planejamento de ações motoras, chegaram Adams *et al*, através de um experimento no qual os participantes foram convidados a girar um *joystick* nos sentidos horário ou anti-horário, de maneira a julgar se os blocos do *Shepard Task* eram congruentes ou distratores (figuras refletidas).

Observaram (p. 1269), que quando o resultado da rotação manual foi congruente com a rotação mental requerida, o tempo de resposta foi mais ágil e houve menos erros, enquanto que quando o resultado da rotação manual foi incongruente com o referente, o tempo de manipulação foi maior, e mais erros

ocorreram. Portanto, a velocidade e precisão da rotação manual afetam diretamente os índices da rotação mental.



Figura 32 – (ADAMS et al, p.1270) - O participante rotaciona manualmente a figura através de um joystick.

A hipótese da efetividade de treinamentos da habilidade de rotação mental através de rotações manuais em ambientes virtuais, motivou a pesquisa Wiedenbauer, Schmid e Osmann (2007); amparados pelos pressupostos de Wexler *et al* (1998) para quem a rotação mental é assumida como uma rotação manual “dissimulada”, deve-se treinar o processo de rotação em si, sem que se tenha a memória como base.

Foi montado um aparato utilizando um monitor de 17 polegadas e um software 3D sob o comando de um *joystick* incorporado a uma caixa de papelão, capaz de manipular os blocos do *Shepard Task*. O teste foi chamado de VMRT (*virtual mental rotation test*), e a exemplo do MRT original, os participantes eram

solicitados a girar as figuras de comparação de forma a serem comparadas à figura referente.

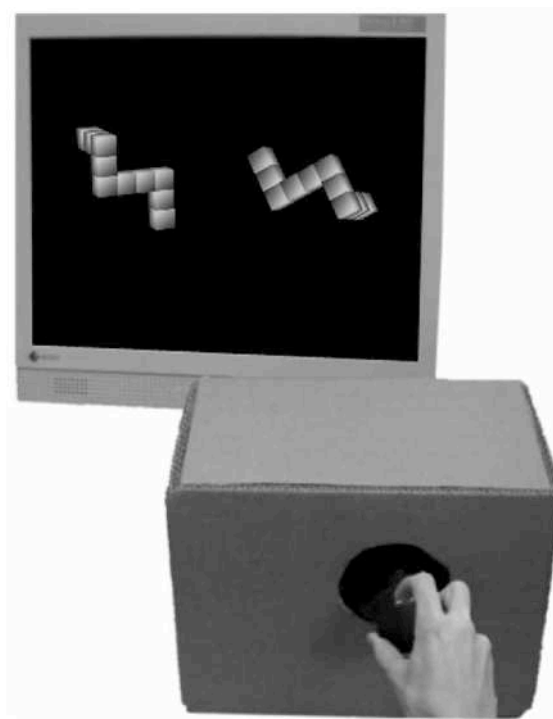


Figura 33 – Wiedenbauer, Schmid e Osmann (2007, p. 26). Modelo referente e modelo manipulável. Aparato de treinamento de rotação manual virtual

Pesquisas recentes têm sinalizado que o treinamento das habilidades espaciais vêm incorporando tecnologias sofisticadas como a Realidade Virtual (*Virtual Reality* ou VR) e a Realidade Aumentada (*Augmented Reality* ou AR), embora estas aplicações sejam ainda bastante vagas, e muito pouco tenha sido proposto e sistematizado.

“Nenhuma aplicação de VR/AR (virtual reality/augmented reality) foi desenvolvida para o ensino médio ou superior, cuja proposta principal tenha sido o desenvolvimento das habilidades espaciais. Dificilmente encontram-se publicações na literatura que

esclareçam maneiras de transferir o que se conhece sobre VR/AR para o mundo real”.

(KAUFMANN et al, 2005, p.65):

Nesta área, sublinha-se a pesquisa de Rizzo *et al* (1998, p.213), por ser uma das primeiras referências da utilização da realidade virtual na avaliação e reabilitação dos processos funcionais e cognitivos humanos. O foco, neste caso, foi o desenvolvimento de uma ferramenta de treinamento da habilidade de rotação mental, a ser utilizada nas áreas da neuropsicologia, com o propósito de reabilitar pessoas com lesões cerebrais, distúrbios neurológicos e dificuldades de aprendizagem. De acordo com Miller *et al* (1997 *apud* Rizzo 1998, p.214), as habilidades espaciais são uma variável importante no diagnóstico de doenças neurológicas como a demência. Pesquisas nesta área apontam que vítimas de Alzheimer apresentam decréscimo da ordem de 84 % na orientação espacial. Rizzo *et al* (1998) amparam-se nas conclusões de Wohlschlager e Wohlschlager (1998) no que se refere às íntimas relações entre a habilidade de rotação mental e a prática de rotação de objetos manipuláveis, para fundamentar seus pressupostos de que a utilização do *Shepard Task* em ambientes virtuais (*virtual environments* ou VE), é capaz de incrementar ainda mais a HRM se comparada a outros métodos, devido à combinação do maior controle e descrição dos estímulos (figuras referentes) , possibilitando maior precisão nas respostas e caracterização nos processos cognitivos envolvidos.

Rizzo *et al* (1998, p.215), descrevem desta maneira seu sistema de realidade virtual:

“O sistema VRSR (Virtual Reality Spatial Rotation), utiliza um dispositivo de prototipagem virtual ImmersaDesk, onde são empregados óculos estéreo e dispositivos de rastreamento

Magnético na mão e na cabeça. Este sistema de projeção oferece um tipo de VR semi-imersivo; possui uma tela de 4,0 x 5,0 metros, cujo tamanho e posição permitem uma visão de grande angular, e uma capacidade de se olhar para baixo e para frente.

(...) Os estímulos aparecem 'como um holograma' tridimensional que flutua sobre o plano de projeção. O participante é apresentado a um par de blocos (referente e manipulável), de maneira que consiga sobrepor-los, manipulando um controle manual esférico (cyberprop)''

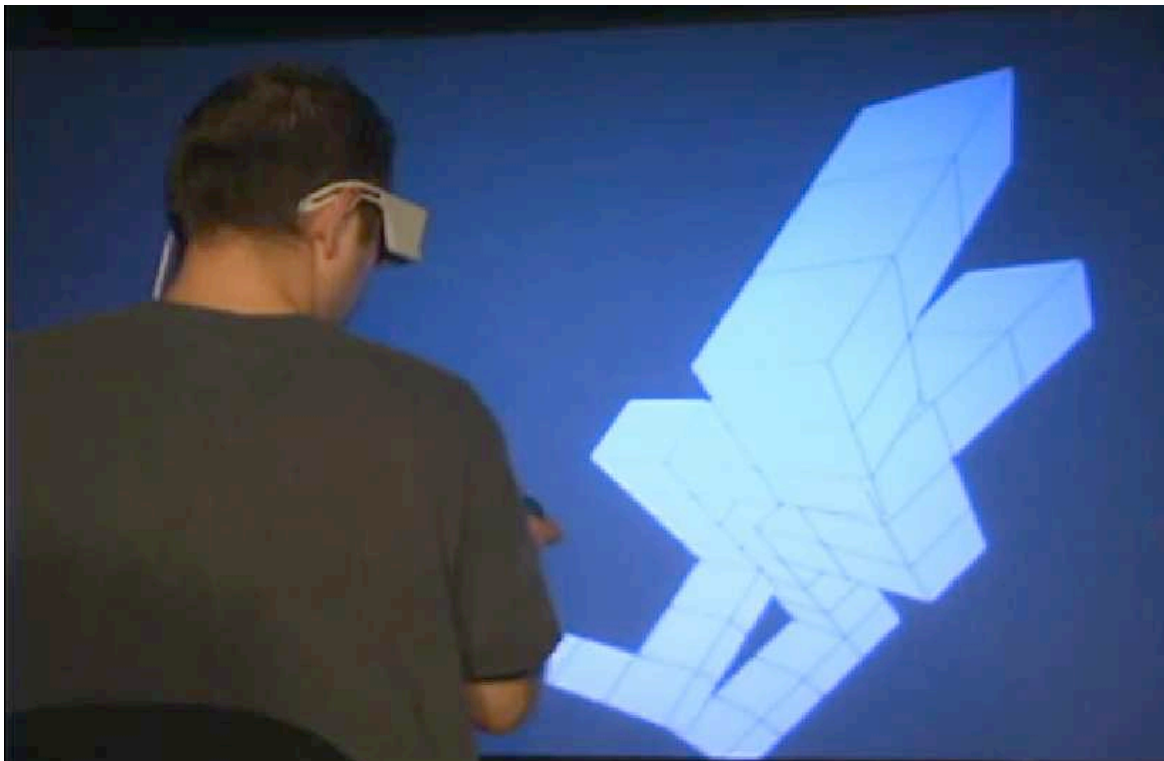


Figura 34 - Mental Rotation Task IDesk – Ambiente de realidade virtual no treinamento da habilidade de rotação mental

Apesar da literatura abundante dedicada a comprovar as relações entre práticas de treinamento com a habilidade de rotação mental, através dos

paradigmas das *Shepard Tasks*, percebe-se que descrevem experimentos cujos procedimentos visuais e motores emulam objetos tridimensionais por meio de projeções bidimensionais virtuais, manipulados através do giro de *joysticks* ou botões, que guardam pouca semelhança com os processos reais de manipulação de um objeto real.

Poucos estudos na verdade, dão conta da utilização de objetos tridimensionais reais no treinamento e avaliação da habilidade de rotação mental. Um destes estudos procura novas evidências à questão do gênero, que tem atestado maior desempenho na velocidade e precisão dos homens em testes de rotação mental. Robert e Chevrier (2003, p.1136), compararam dois métodos de comparação entre modelo referente e as quatro alternativas: o primeiro reproduzia as questões *tipo*, tais como foram propostas no mental rotation test (MRT) por Vandenberg e Kuse (1978), com projeções bidimensionais feitas com linhas, de um objeto tridimensional, enquanto que o segundo método reproduzia os mesmos elemento do teste original (referente e alternativas) em uma construção tridimensional real, alinhadas sobre uma base física.

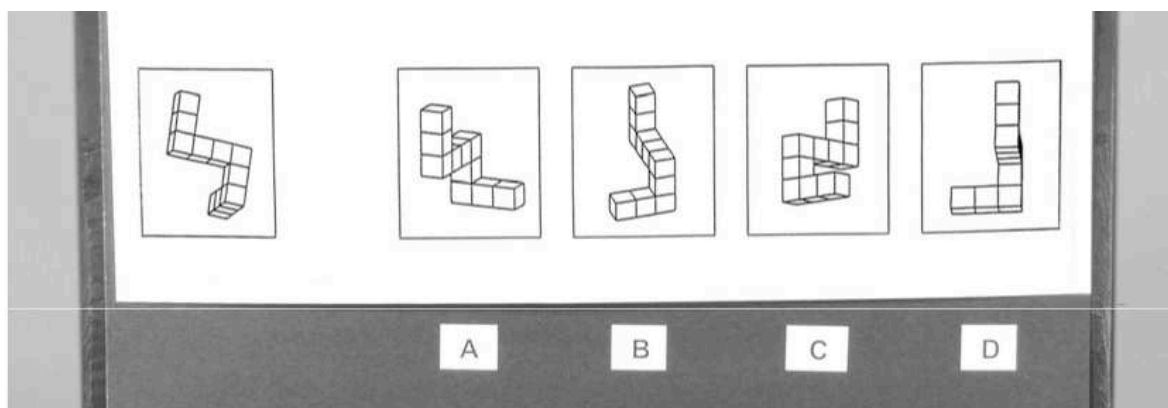


Figura 35 – Robert e Chevrier (2003, p.1139) - Uma questão do MRT reproduzida sobre catolina e posta verticalmente sobre uma base. Da esquerda para a direita, o referente e cada uma das quatro alternativas, nomeadas A, B, C e D

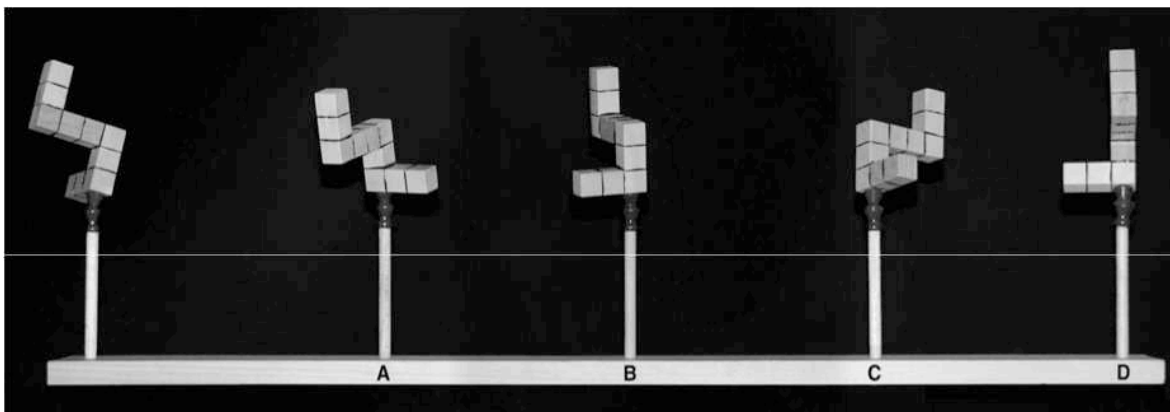


Figura 36 – Robert e Chevrier (2003, p.1140) - A mesma questão do MRT é reproduzida através de uma maquete tridimensional, com os elementos suportados e alinhados por uma base. Da esquerda para a direita, o referente e cada uma das quatro alternativas, nomeadas A, B, C e D

Os resultados (ROBERT & CHEVRIER, 2003, p.1142), dão conta de que, independentemente do sexo, o teste apresentado sob condições da maquete física real mostrou-se benéfico, pois aumentou a precisão e reduziu o tempo de resposta. É provável que os objetos reais tenham acelerado tanto a análise das configurações globais do modelo quanto a orientação de suas extremidades. Para as pesquisadoras, isso teria sido particularmente crucial no que diz respeito ao plano de profundidade, uma vez que imagens bidimensionais falham na disparidade binocular, tornando a interpretação em três dimensões mais difícil.

SEÇÃO 6 - GEOMETRIA E MEIOS EXPRESSIVOS.

A dimensão abstrata do processo criativo é essencialmente imaterial, imagética, dinâmica e volátil, carecendo assim de domínios expressivos concretos para registrar-se e fazer-se compreender. A necessidade de produzir resultados que reflitam seus desempenhos, solicita dos estudantes que sejam capazes de expressar suas idéias e experiências no domínio de suas qualidades psicomotoras, relacionando assim, as questões da educação ligadas aos **meios expressivos** - como a seleção do material didático e a tecnologia das ferramentas (se analógicas ou digitais) - à discussão que se faz sobre cognição.

Esta seção reflete sobre algumas questões, clássicas e atuais, da utilização de manipulativos, localizando-a sob a perspectiva do ensino da geometria, bem como sob suas funções no processo criativo.

Com o surgimento das novas tecnologias, passou a fazer sentido admitir que os manipulativos podem ter ao menos duas categorias iniciais, segundo sua dimensão existencial: se **virtuais** – resultado da projeção de imagens digitais, ou **físicos**, dotados das propriedades materiais reais – tangíveis com as mãos. O interesse aqui é sublinhar considerações sobre as propriedades, possibilidades e limitações do segundo tipo: Os **manipulativos físicos reais**. Entretanto isso se faz inicialmente através do reconhecimento da emergência do computador, que influenciou de maneira importante tanto sobre o ensino como na prática profissional, em todas as áreas, provocando uma re-acomodação dos lugares de outros métodos tradicionais, como o desenho e a maquete.

O próximo empenho é apresentar considerações da presença dos manipulativos físicos entre os recursos didáticos do professor de geometria no ensino básico, para em seguida, enfocá-los no contexto dos cursos de criação. O trabalho de Janos Baracs (1988) é brevemente descrito como uma das primeiras e importantes pesquisas nesta área.

6.1. REVOLUÇÃO PELO COMPUTADOR

O computador ocupa hoje, grande espaço na discussão sobre os meios de representação e investigação disponíveis ao artista. Podemos medir a velocidade das transformações que ocorreram, e as que ainda se prenunciam, tendo em vista a vitalidade dos debates que tem cercado o tema. Ainda que seja uma 'novidade' – se comparada à preexistência dos métodos tradicionais, como o desenho e os manipulativos físicos - não restam dúvidas de que o computador chegou para ficar. Há 15 anos, a discussão dava conta da revolução sobre os processos produtivos dos projetos nos escritórios e ambientes pedagógicos, à medida que os softwares CAD¹ com saídas às impressoras de grande porte (*plotters*), replicavam facilidades gráficas com baixo custo e precisão. Isso não foi pouco, e relegou à condição de relíquias, ferramentas tradicionais - e até então fundamentais - como normógrafos, esquadros e canetas de tinta nanquim. Mas ainda assim, pouco mais representavam do que pranchetas eletrônicas, onde a mesma lógica de construção dos desenhos tradicionais – por rebatimento de vistas - se replicava no ambiente virtual.

Rapidamente – na medida da evolução dos processadores - percebeu-se as possibilidades perceptivas motivadas pela possibilidade de excursionar pelo ciberespaço, sem limites, fronteiras ou dimensões. A evolução das interfaces associa hoje modelos virtuais a impressoras tridimensionais, capazes de dar saída a modelos físicos sofisticados, menos limitados a materiais, escalas e finalidades.

Frente às novas ferramentas e métodos potencialmente tão promissores, antigos hábitos e disciplinas tiveram que ser revistos e requalificados. O ensino de algumas sub-especialidades como a geometria descritiva e a geometria projetiva, antes tidas como fundamentais, são hoje questionadas. A transposição do plano bidimensional ao espaço tridimensional e vice-versa, através dos sistemas

¹ CAD é a sigla de Computer-aided design, e define um modelo de utilização do computador no processo de criação e documentação de projetos, baseado em ambientes vetoriais.

projetivos, que pelos métodos tradicionais consumiam tempo considerável e eram tratados quase como peças artísticas *per se*, levam hoje segundos, de maneira consideravelmente mais precisa e versátil, diminuindo a necessidade de um treinamento longo nos métodos geométricos.

A favor da tecnologia, argumenta-se que sua influência sobre as atividades expressivas ligadas ao processo criativo relacionadas à geometria, representaram considerável economia de recursos (dinheiro e tempo). Há de considerar-se também o caráter lúdico do ambiente virtual, decorrente de seu dinamismo, pois não se pode minimizar a importância de vincular o aluno a determinados conteúdos e práticas através da sedução afetiva, sobretudo quando se trata de um tema que costumava ser cansativo, lento e monótono.

De acordo com Leopold (2005) o fato dos procedimentos de estudo da geometria descritiva terem estado sempre muito associados ao uso de esquadros e compasso, tem levado inúmeras instituições de ensino de engenharia (e outros cursos como arquitetura e design)² ao redor do mundo a substituir a geometria pelo treinamento nos sistemas CAD, mas a situação atual leva a crer que a compreensão de seus principais conceitos é mais importante agora do que já foi antes; segundo a compreensão da pesquisadora, o caminho natural é que a geometria descritiva do passado, tida como linguagem comum aos projetistas, transforme-se em um sistema de signos, incluindo-se em uma teoria da comunicação, e seja entendida como a percepção e comunicação visuais dos objetos espaciais.

Uma perspectiva, menos seduzida pela tecnologia portanto, reconhece e considera as óbvias facilidades oferecidas pelo computador, contudo reduz sua importância à questão da produtividade, e que esta praticidade constitui na realidade, um excesso, na medida em que pouco contribui para o exercício mental

² Nota do autor

necessário para o desenvolvimento do raciocínio espacial enquanto habilidade cognitiva, qualidade fundamental para o exercício do design. Mais do que isso: A não necessidade de reflexão sobre parte das ações, e insubmissão ao tempo necessário para que uma qualidade cognitiva mais complexa possa ser assimilada, acaba resultando na não assimilação de qualidades cognitivas, na razão direta do potencial permitido pela ferramenta.

Clements, entretanto, não reduz o potencial do computador ao ganho produtivo; ao contrario, considera que a “*facilidade manipulativa, clareza e flexibilidade*” (1999, p. 49) das representações, podem auxiliar fortemente, tanto a assimilação dos conceitos matemáticos, como sustentar importantes ganhos cognitivos. Na mesma linha, Bastos *et al* (2009, p.23) ponderam que os softwares de geometria dinâmica e os *applets* são recursos decisivos no sentido de proporcionar a todos – professores e alunos - “*imagens e manipulações que, noutros tempos, só os grandes geômetras tinham acesso pelo poder da sua imaginação*”.

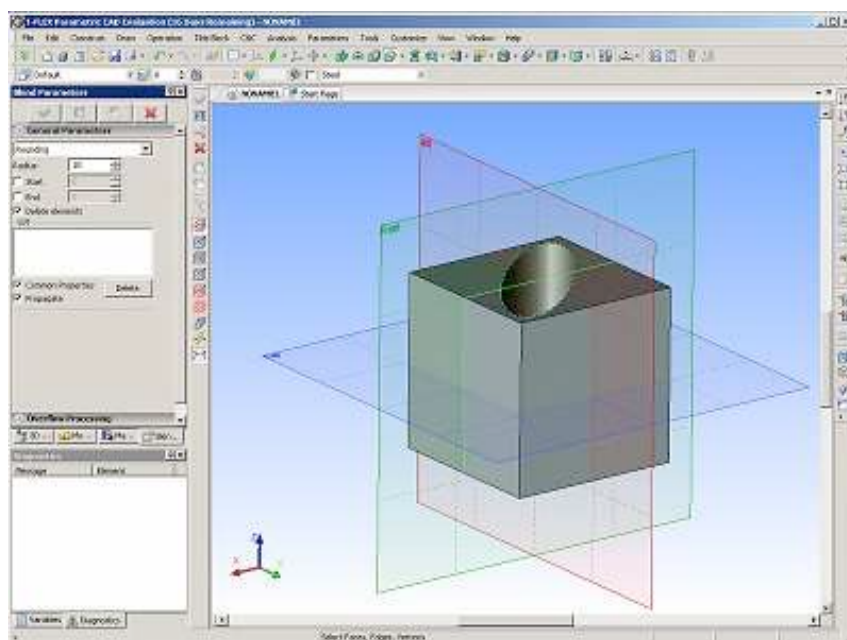


Figura 37 – Forma primitiva manipulada em ambiente virtual.

Não se quer aqui incursionar mais profundamente nas questões relacionadas ao uso do computador, e nem tampouco sobre a geometria descritiva - citada aqui apenas como exemplo - pois não são esses os propósitos desta pesquisa; o que se pretende é dar visibilidade e amplitude ao impacto que os meios tecnológicos provocaram sobre os processos de se investigar e representar a forma, na medida que forçou a re-acomodação de métodos antes bastante consolidados.

Práticas tradicionais no ensino do design e arquitetura como o desenho e a construção de modelos físicos tridimensionais, perderam território como opções no repertório expressivo das disciplinas – cada vez mais numerosas e comprimidas - e tiveram suas especificidades postas em xeque em razão da praticidade, precisão e velocidade naturais dos meios tecnológicos. Faz sentido construir maquetes físicas, se o foto-realismo das renderizações demandam esforço tão menor e são tão mais baratas? Saber desenhar expressivamente tornou-se desnecessário para o exercício destas profissões?

A reflexão sobre o impacto da tecnologia na dinâmica do ensino/aprendizagem, tem forçado uma saudável revisão das qualidades intrínsecas de cada meio expressivo, provocando a (re)tomada do debate pelo espaço adequado que lhes cabe nos processos criativos. A euforia provocada pelos entusiastas das possibilidades tecnológicas, é contrastada por aqueles que percebem que uma adesão irrefletida ao computador, pode implicar em um nocivo risco de desequilíbrio qualitativo entre os meios expressivos. Parte do desafio pedagógico, parece consistir no reconhecimento das potenciais particularidades de cada recurso, e na inversão da tendência inercial do aluno de compreender os métodos e códigos de concepção e representação da forma, como conjuntos de informações individuais, isolados e dissociados de um conjunto mais amplo, cujo

efeito mais visível é a valorização e eleição prematura de um instrumento preferencial, em detrimento dos demais.

Parece importante que se amplie a percepção do lugar específico de cada modalidade expressiva, assumindo suas qualidades particulares como partes de um conjunto orgânico e sistêmico. Os conteúdos singulares, que conferem individualidade e autonomia aos meios expressivos, devem ser capazes de transcender os limites de uma polarização excessiva, abrindo possibilidades a enxergarem-se como inter-dependentes e complementares. Aos aspectos mais concretos das ferramentas, materiais, técnicas, linguagens e códigos de representação, devem ser aderidas considerações sobre, digamos, a natureza fenomenológica do processo. *“Como vejo as coisas? Como as coisas se estruturam ou ocupam o espaço? Como o outro vê e representa o mesmo espaço que eu vejo? Como eu vejo o mesmo espaço, com os mesmos elementos se eu me deslocar ou mudar a direção do meu olhar?”* (Cidade, 2007).

Diante de tais colocações, e em observação aos pressupostos assumidos na estruturação das hipóteses desta pesquisa, descritos na introdução, a continuação desta seção dedicar-se-á especialmente à compreensão daqueles meios expressivos conhecidos como *manipulativos físicos*, ou *manipulativos concretos*.

6.2. MANIPULATIVOS FÍSICOS

“Eu escuto e esqueço. Eu vejo e me lembro. Eu faço e eu compreendo”

Confúcio.

6.2.1. MANIPULATIVOS FÍSICOS NO ENSINO DE GOMETRIA



Figura 38- Geometria com manipulativos: Alunos do ensino fundamental

Como foi exposto na seção 1, o debate em torno das questões relacionadas ao ensino de geometria em todos os níveis do ensino formal, traz à tona a importância de reverem-se amplamente conteúdos programáticos e métodos pedagógicos, de maneira que possam ser sanadas as inúmeras deficiências das práticas tradicionais, e revitalizar seu significado na vida concreta das pessoas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998 (p.123), observam que práticas cotidianas como a leitura de um mapa e a localização de um edifício ou uma rua na cidade, solicitam certa sistematização das habilidades espaciais, e

se relacionam diretamente com o repertório da geometria associado ao estudo da forma e do espaço. É necessário para tanto, que este estudo se dê de maneira eficiente, e que seja capaz por exemplo, de envolver práticas que incluam a construção de maquetes como incremento às representações desenhadas:

“As maquetes, por exemplo, têm por objetivo, de um lado, contribuir para melhorar as imagens visuais dos alunos e, de outro, favorecer a construção de diferentes vistas do objeto pelas mudanças de posição do observador, frequentemente indispensáveis na resolução de problemas que envolvem a localização e movimentação no espaço”.

(PCN, 1998, p. 123)

Clements e Battista (1992, p.449), descrevem que a maior parte dos estudos que se dedicam ao tema do ensino de geometria na formação regular do estudante, sublinham a importância do uso dos manipulativos para a construção e representação dos conceitos geométricos.

“A utilização de manipulativos parece permitir aos estudantes a experimentação de suas idéias, bem como examinar e refletir sobre elas, e modificá-las. Esta abordagem física parece manter o interesse do estudante, e assisti-los na criação de definições e novas conjecturas, bem como auxiliá-los em estabelecer novos ‘insights’ sobre novas relações”. (CLEMENTS e BATTISTA, 1992, p.449)

De acordo com Suydam e Higgins³ (*apud* POST. 1981.), que procederam uma compilação de pesquisas sobre o tema para o *Science Information Reference Center of Ohio State University (ERIC)*, é possível avaliar que em um sentido geral, os manipulativos são efetivos em incrementar o conhecimento em matemática dos estudantes em todos os níveis de seu aprendizado:

“(...) através de uma variedade de tópicos, estudos em todos graus reforçam a importância do uso dos materiais manipulativos. Estudos adicionais dão suporte ao uso combinado com imagens. (...) A utilização ativa dos manipulativos parece ser importante em todos os níveis do ensino fundamental.” (1976, p.60)

Post (1981) contudo, observa que Suydam e Higgins, estabelecem uma óbvia ressalva, como condição para que os manipulativos sejam efetivos: que sejam ‘bem utilizados’. Mas o que é fazer bom uso deste recurso? Quais são as condições que necessariamente devem ser atendidas? Suydam e Higgins sugerem atenção aos seguintes aspectos:

“Materiais Manipulativos devem ser utilizados com freqüência ao longo de todo programa de matemática, de uma maneira consistente com os objetivos do programa.

Materiais manipulativos devem ser utilizados conjuntamente a outros meios, incluindo imagens, diagramas, textos, filmes e materiais similares.

Materiais manipulativos devem ser utilizados de maneira apropriada aos tópicos matemáticos, e os tópicos devem ser ajustados para tirar proveito do uso dos manipulativos.

³ SUYDAM, M. N.; HIGGINS, J. L. - Review and Synthesis of Studies of Activity-Based Approaches to Mathematics Teaching. Final Report, NIE Contract No. 400-75-0063, September. 1976.

Manipulativos devem ser utilizados conjuntamente em abordagens exploratórias e indutivas.

Os materiais empregados devem ser os mais simples possíveis.

Materiais manipulativos devem ser utilizados em programas que encorajem resultados que possam ser assimilados simbolicamente.” (SUYDAN & HIGGINS, 1976, pp. 92-94 apud POST. 1981.)



Figura 39 – Geometria com manipulativos: Estudantes do ensino médio.

Apesar da importância relativa que se possa dar aos manipulativos, os apontamentos acima parecem indicar que seu uso por si só não garante nada, e que a efetividade pedagógica de seu potencial depende de outros fatores.

Raphael e Wahlstrom⁴ (apud CLEMENTS e BATTISTA. 1992. p. 449), reforçam esta perspectiva: “o uso dos manipulativos não é suficiente (...) os estudantes devem ser guiados a refletir sobre seu uso e vinculá-los a seus conceitos informais”.

Clements reitera este entendimento (1999, p.49), e considera que tais recursos podem assumir significativa importância no início do processo, na medida que despertam interesse e provocam o sentido de investigação, mas que é fundamental que os alunos sejam capazes de refletir sobre suas ações através da ação do professor, que é quem pode vincular a experiência concreta a um programa de conceitos abstratos.

POST (1981), cita a teoria de Bruner⁵ do pensamento representativo, que descreve que um determinado conceito se desenvolve linearmente, partindo do nível concreto em direção ao abstrato, através de três modos - o experimental, o icônico e o simbólico – para ponderar que, uma vez que os manipulativos são apenas parte do processo e não um fim em si mesmo, os mecanismos intelectuais utilizados na transição do modo de experimentação aos outros, devem ser o principal interesse dos pesquisadores e professores. Isto significa, ainda de acordo com Post, a necessidade de se estabelecer uma associação, ou isomorfismo, entre dois modos de se representar uma idéia, pois ao manipular concretamente as entidades físicas, o aluno deve compreender a natureza simbólica e abstrata dos conceitos matemáticos envolvidos, e ser capaz de criar um vínculo associativo entre eles.

⁴ RAPHAEL, D.; WAHLSTROM, M. - The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.20, pp.173-190. 1989.

⁵ BRUNER, J. S. - Toward a Theory of Instruction. Cambridge: Harvard University Press, 1966.

Castelnuovo⁶ (1970 *apud* PASSOS⁷), ao tratar do assunto da utilização dos materiais concretos com vistas ao ensino da matemática no ensino básico, enfatiza que a idéia fundamental da ação é que ela deve ser reflexiva:

“(...) que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer à ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também.”



Figura 40 – Geometria com manipulativos: Jardim da infância

⁶ CASTELNUOVO, E. Didática de la Matemática Moderna. México: Trillas, 1970.

⁷ PASSOS, C. L. B. - RECURSOS DIDÁTICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA – disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr19-Carmen.doc>

6.2.2. MANIPULATIVOS FÍSICOS NO ENSINO DO DESIGN E ARQUITETURA.



Figura 41 – Geometria com manipulativos: Alunos de design

O ensino de arquitetura e design deve implicar em um conjunto de experiências diversificadas, que incluam aprendizagens sobre múltiplos meios expressivos, em virtude da natureza múltipla do processo de projeto.

No ambiente instrucional destes cursos, uma oficina suficientemente estruturada e equipada é um recurso valioso por oferecer a possibilidade de investigação de uma grande diversidade de técnicas e materiais. As disciplinas voltadas exclusivamente a preparar e orientar os alunos no manuseio e compreensão do comportamento dos materiais e processos, costumam envolver diversos semestres, especialmente no design, onde a preparação de protótipos funcionais costumam ter grande importância devido seu canal imediato com a indústria. Além disso, disciplinas de projeto bem concebidas dificilmente deixam

de associar os alunos a atividades que envolvam uma ligação direta à construção de protótipos, *mockups* ou maquetes⁸.

Neste caso, a investigação tridimensional não tem somente a função de avaliar ou ilustrar conceitos estéticos ou simbólicos através da materialidade, mas também questões muito diretas em relação à funcionalidade, exequibilidade e viabilidade dos artefatos. No design, como demanda necessária à caracterização profissional, o estudante tem por força da especialidade, que dedicar-se a compreender um conjunto de matérias primas e suas propriedades físicas e funcionais, bem como sua operacionalidade em um contexto de produção industrial; e uma boa compreensão deve passar necessariamente pela manipulação destes materiais.

“ No decorrer do projeto de um produto, mais especificamente a partir da etapa de geração de conceitos, necessitamos com certa freqüência avaliar as soluções propostas. Estas avaliações podem compreender aspectos de uso sejam eles ergonômicos – como o dimensionamento de uma peça; ou estético-simbólicos – como as proporções das partes, aplicação de cor; aspectos de funcionamento, como a avaliação de um encaixe ou a posição de um trinco ou de uma dobradiça; aspectos relativos à fabricação, etc. Para tal, a construção de modelos torna-se fundamental no sentido de minimizar a possibilidade de erros na configuração do produto e, conseqüentemente, prejuízos na fabricação de moldes e ferramentas” (LIMA, 2006).

⁸ De acordo com Lima (2006), a produção em uma oficina de design pode ser classificada segundo as seguintes definições: Protótipo: Modelo em escala natural (1:1), com material igual ou semelhante ao especificado no projeto. *Mock-Up*: Modelo em escala natural (1:1), com material diferente ao especificado no projeto. Maquete: Modelo em escala reduzida ou ampliada, com qualquer material.

De acordo com Wallschlaeger e Busic (1992), a construção de modelos físicos podem ajudar professores e alunos de design, arquitetura e artes a alcançar mais efetividade e eficiência na investigação bi e tridimensional, através de pinturas, esculturas, gráficos e construções estruturais. Trata-se portanto de recurso imprescindível do processo de projeto/geração da forma, e deve envolver conhecimentos técnicos na utilização de ferramentas e materiais.

“A maneira como designers, arquitetos e artistas combinam as diversas técnicas e materiais com elementos visuais e atributos físicos, conceitos perceptuais, configurações da forma e estrutura, determinam o sucesso do resultado formal”. (WALLSCHLAEGER e BUSIC, 1992, p. 11)

Outra referencia importante é o canadense *Structural Topology Reseach Group*. Tratou-se de um grupo interdisciplinar composto por matemáticos e engenheiros, formado entre 1974 e 1977, que floresceu nos anos 80. A partir dos 90's, foi gradualmente se dispersando até encerrar suas atividades. Sua proposta fundamental era vincular a matemática, em especial a geometria, às questões formais e teóricas da arquitetura e engenharia. Os principais tópicos de sua pesquisa foram os poliedros, a modulação do espaço e a rigidez das estruturas.

As múltiplas atividades incluíam a publicação de um periódico bilíngüe, francês e inglês, chamado *Topologie Structurale/Structural Topologie*. Teve um total de 22 edições entre 1979 e 1997⁹.

⁹ (1) Uma página hospedada no sítio da UPC - *Universitat Politecnica da Catalunya* disponibiliza os arquivos digitalizados no formato PDF, de todos os números publicados:

<http://upcommons.upc.edu/revistes/handle/2099/27> <acesso em 17/07/2009>

Janos Baracs esteve na linha de frente deste grupo, e seu trabalho foi em grande parte, orientado a refletir sobre o uso dos manipulativos. Segundo ele, quando se fala sobre percepção espacial, fala-se sobre o espaço físico, social e outros tipos de espaço (BARACS, 1988, p.118). Quando são estudados através de modelos espaciais aproximam o trabalho do professor e dos alunos ao do escultor, e são imprescindíveis ao reconhecimento de suas propriedades.



Figura 42 – Gabinete de Baracs – Um laboratório dinâmico de composição geométrica através dos manipulativos físicos (BARACS, 1988, p.127)

Baracs (1988, p.126) observa que a execução de alguns dos modelos podem mesmo solicitar um tempo excessivo e ainda serem inconvenientemente rígidos. Para contornar tais limitações na sala de aula, acostumou-se a criar recursos como o ilustrado na figura abaixo, cuja flexibilidade implica na possibilidade de sua contínua transformação, alterando-lhe ângulos, comprimentos, simetrias e diversas outras propriedades.

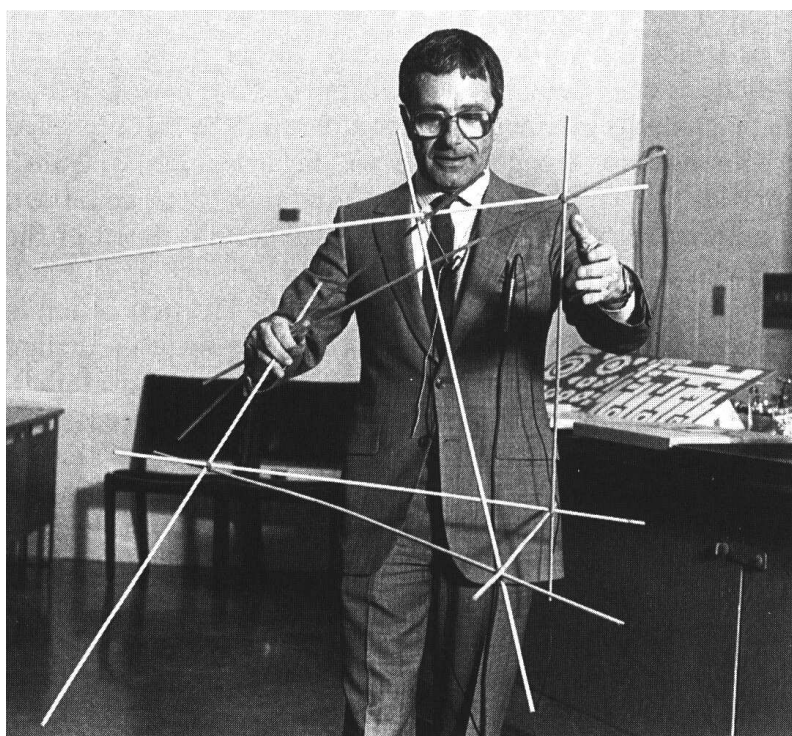


Figura 43 – Baracs demonstrando o modelo de um poliedro com vértices móveis.
(BARACS, 1988, p.119)

A facilidade de manuseio, baixos custos e acessibilidade, são qualidades prezadas por bons manipulativos. Neste sentido, Baracs lançou o Poly-Kit¹⁰. Trata-se de quatro folhas de papelão picotados contendo a planificação de polígonos, com dobras dedicadas a juntar as partes através de elásticos, contribuindo para a construção simples e a baixo custo, de um ampla família de

¹⁰ Uma descrição mais completa e ilustradas sobre o Poly-Kit está apresentada no Anexo X.

poliedros. Este recurso abre espaço para o estudo da geometria espacial, desde os princípios mais básicos, como a categorização dos poliedros segundo suas propriedades formais, até conceitos mais refinados como o estudo das simetrias. Imagens de uma versão comercial¹¹ baseada na idéia original do *Poly-Kit*, ilustram a simplicidade do conceito:

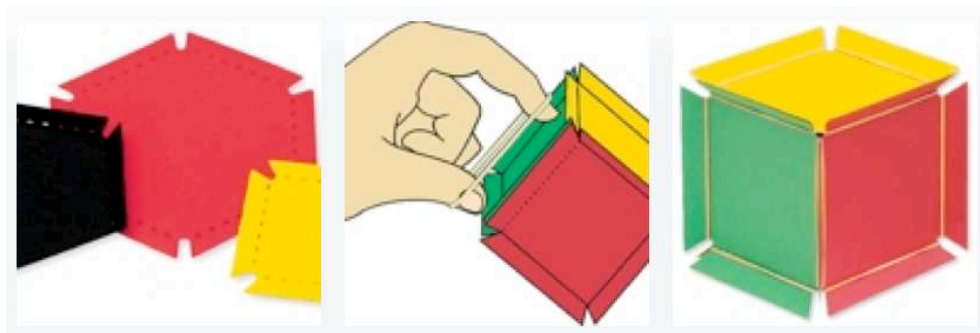


Figura 44 – Polígonos com “orelhas” planificados são ligados por elásticos de borracha, de modo a formarem poliedros.



Figura 45 – Este recurso permite a composição de vasta família de sólidos

¹¹ <http://www.ellison.com/idea/5424/elastic-geometrics> <acessado em 20/11/2011>

6.2.3. MANIPULATIVOS FÍSICOS NO CONTEXTO DESTA PESQUISA.

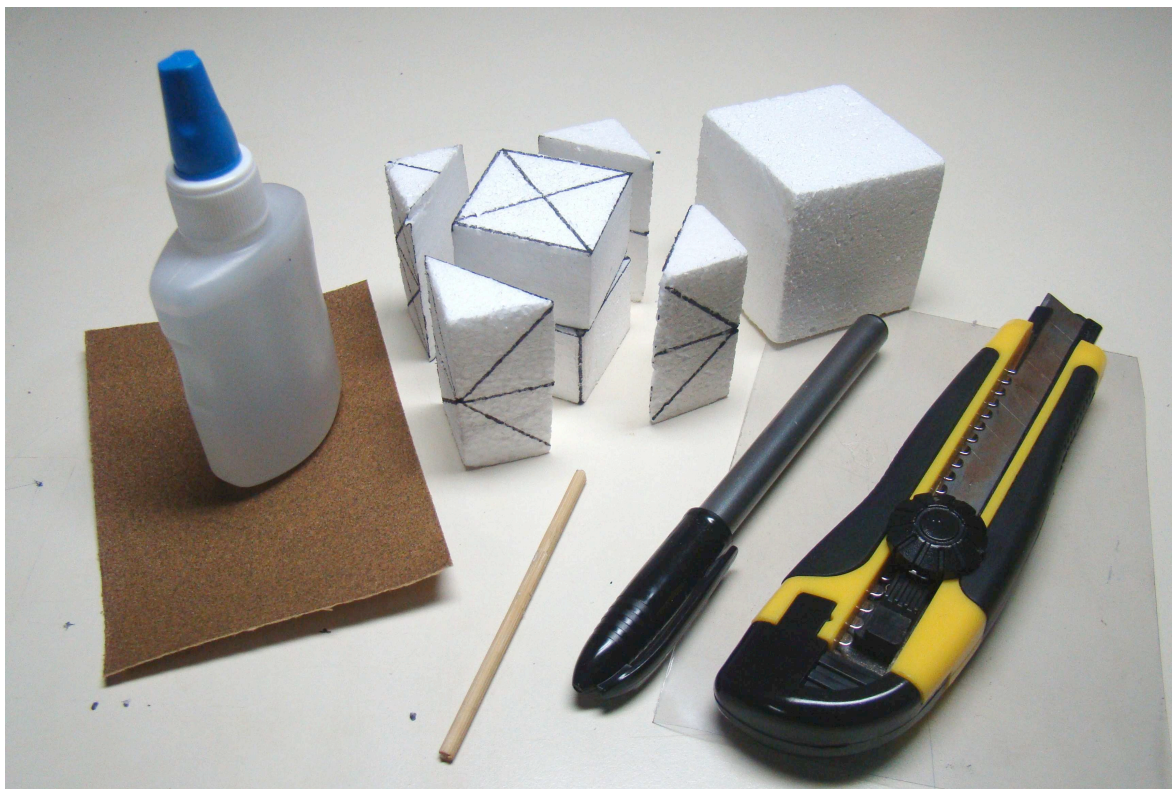


Figura 46 – Materiais físicos manipuláveis utilizados no experimento desta pesquisa: a opção por poucos, baratos e acessíveis.

Conforme foi anunciado na Introdução, um dos interesses principais desta pesquisa é avaliar a possível superioridade de métodos didáticos que utilizam meios físicos sobre outros que não utilizam.

Apesar da facilidade de acesso a uma oficina de materiais bem equipada, a limitada disponibilidade de tempo, o caráter experimental dos encontros, e a consideração pelos conselhos de Baracs, optou-se pelo uso de materiais de baixo custo, fácil manuseio e de fácil acesso. A favor da objetividade e maior controle sobre o experimento – que observou cada aluno individualmente - houve também pouca diversidade de materiais, no sentido de envolver poucos e simples

processos. De acordo com o planejamento, cada trabalho individual envolveria em condições ideais¹², dois cubos de isopor de alta densidade nas medidas de 5 x 5 x 5 cm, uma caneta de tinta permanente (retroprojeto), um palito de madeira (espeto de churrasco), uma lâmina tamanho A5 de acetato, e alguns mililitros de cola para isopor. Como ferramentas de trabalho, foram usados apenas estilete e lixa. Evidentemente houve mais consumo de material, especialmente de isopor, pois alguns cortes resultaram tortos e imprecisos.

Uma utilização do *Poly-Kit* em seu módulo nº 1 teria sido uma opção bastante interessante, e está na lista de desdobramentos futuros desta pesquisa, mas seriam necessários acesso a uma *laser-cutter*, algumas folhas de papelão tipo panamá ou paraná de 1,0 mm, e o arquivo vetorizado das planificações. Neste caso teria, sido conveniente que se apresentasse preliminarmente a geometria dos sólidos, mas este é um tópico da geometria espacial que merece igual tratamento ao que se investe à geometria das transformações, e não pareceu justo apresentá-lo superficialmente.

Outra possibilidade operacional é a que apresenta Linton (1985, p.28), para quem os princípios básicos da construção de objetos tridimensionais em quaisquer materiais, envolvem métodos de corte, dobra, solda, lixamento, furação, construção de gabaritos, e apesar de cada ferramenta e material envolver suas especificidades, os processos básicos de manuseio são essencialmente os mesmos. Assim, pareceu adequado tirar proveito da correspondência do natural interesse no manuseio experimental de materiais, ao qual estão habituados os estudantes de design, e as condicionantes do experimento.

¹² Condições ideais implicaria no “não erro” de nenhum procedimento, com eventuais descartes e necessidades de materiais elementos sobressalentes.

PARTE II

VALIDAÇÃO DOS ARGUMENTOS

COMPÕE-SE DAS SEGUINTESE SEÇÕES:

- SEÇÃO 7 – DESCRIÇÃO DO TRATAMENTO.
- SEÇÃO 8 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISE ESTATÍSTICA.
- SEÇÃO 9 – CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.

SEÇÃO 7: DESCRIÇÃO DO TRATAMENTO

7.1. Disposições Gerais

O experimento envolveu duas turmas de alunos de terceiro semestre do curso de Design das Faculdades de Campinas (FACAMP), e ocorreu dentro das aulas regulares da disciplina Geometria III, no período de 23/02/2011 a 13/04/2011.

Na FACAMP, a disciplina Geometria III é o último módulo de geometria, que conta ainda com dois precedentes – Geometria I e Geometria II – oferecidos respectivamente nos dois semestres do primeiro ano, pelo mesmo professor, autor desta pesquisa. Cada um dos módulos de geometria conta com dezoito aulas com duração de 1:40 horas semanais.

As aulas ocorreram sempre no mesmo dia (quartas-feiras), das 8:00 às 9:40 horas para a *Turma A*, e das 10:00 às 11:40 horas para a *Turma B*.

O curso completo proporcionou as mesmas experiências a todos os alunos. Ambas as turmas cumpriram os dois programas e experimentaram os mesmos enunciados, entretanto, o fizeram de modo alternado.

Enquanto a *Turma A* exercitava os conceitos das transformações geométricas sobre o plano através do desenho, a *Turma B* exercitava os mesmos conceitos no espaço tridimensional, através de manipulação de objetos. Ao fim desta etapa, que descreveu o mesmo período de tempo para ambas as turmas, foi feita a troca entre os programas. A *Turma A* teve a oportunidade de exercitar-se através de manipulativos físicos, enquanto a *Turma B*, através de desenhos.

O experimento foi aplicado na primeira metade do curso, ao longo das oito primeiras aulas, e foi dividido em **duas fases de quatro aulas** cada, resultando em um total aproximado de **13 horas e vinte minutos**.

Cada um dos oito encontros foi registrado através de filmes, fotografias e gravação de voz, de maneira que tanto as explicações teóricas, bem como as reações e respostas dos estudantes pudessem ser analisadas e avaliadas, tendo em vista as questões didáticas do conteúdo, administração do tempo, e atitudes dos envolvidos.

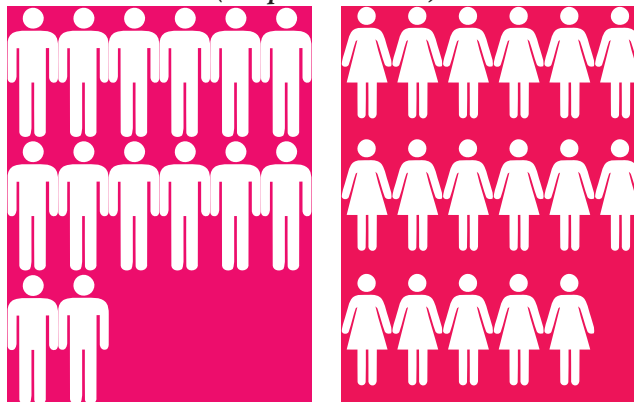
7.2. Descrição da Amostra

A divisão dos alunos em duas turmas foi aleatória, e promovida pela secretaria da instituição. Isto ocorre naturalmente em determinadas disciplinas, seguindo critérios que equilíbrio numérico entre homens e mulheres e ordem alfabética.

Assim, as turmas foram denominadas ‘**TURMA A**’ e ‘**TURMA B**’ pela própria instituição. Vale reforçar todos os alunos participantes do curso, fazem parte da mesma turma de ingressantes em 2010, estando em tese, no mesmo estágio do curso e tendo sido submetidos ao mesmo conjunto de informações e experiências prévias.

TURMA A

*Tabela 1 - Descrição da amostra “Turma A”
(Grupo de Controle)*



	Homens	Mulheres	Total
Início	14	17	31
Término	12	17	29
Desistências	2	0	

7.3. Requisitos Necessários

Os pré-requisitos obrigatórios para considerar a participação do estudante apta às estatísticas do experimento foram:

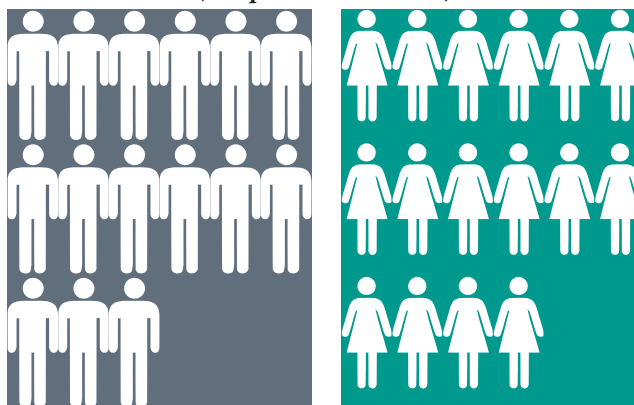
1. O limite de faltas estabelecido em no máximo duas no total de oito aulas (portanto um mínimo de 75,0 % de presenças).
2. O cumprimento de todas as três etapas (100% das tarefas realizadas) descritas nas aulas 5, 6 e 7 da fase II.
3. Participação nos testes MRT e Conhecimentos em Simetria

A **turma A** contou inicialmente com **31** alunos, dos quais **29** chegaram ao final do experimento tendo cumprido todos os pré-requisitos obrigatórios.

A **turma B** contou inicialmente com **31**, dos quais os mesmos **31** chegaram ao final do experimento tendo cumprido todos os pré-requisitos obrigatórios.

TURMA B

*Tabela 2 - Descrição da amostra “Turma B”
(Grupo de Tratamento)*



	Homens	Mulheres	Total
Início	15	16	31
Término	15	16	31
Desistências	0	0	

7.4. Ambientes e Recursos

O curso não contava com acesso a computadores ou internet.

As aulas aconteceram no **ateliê de desenho**, com pranchetas individuais, régua paralela e projetor multimídia, e na **oficina de protótipos e maquetes** com recursos e ferramentas adequadas à manipulação e transformação de inúmeros materiais.

A utilização dos espaços e seus recursos potenciais, foi assim distribuída ao longo das oito aulas do experimento. Na tabela abaixo, a letra **A** indica o uso do ateliê, enquanto **O** indica o uso da oficina.

Tabela 3 - Ambientes em relação a turmas e aulas

Aulas	1	2	3	4	5	6	7	8
Turma A	A	A	A	A	A	A	A	A
Turma B	A	A	A	A	O	O	O	A

MATERIAIS

AMBIENTE

TURMA "A"

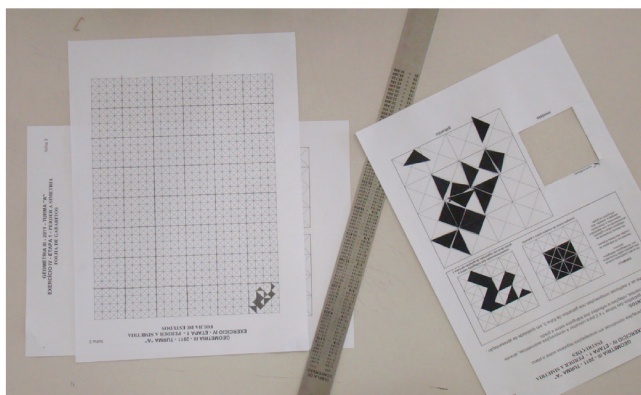


Figura 47 – Materiais utilizados pela ‘TURMA A’



Figura 48 – Ambiente de trabalho da ‘TURMA A’

TURMA "B"



Figura 49 – Materiais utilizados pela ‘TURMA B’



Figura 50 – Ambiente de trabalho da ‘TURMA B’

7.5. Descrição esquemática do experimento

O organograma abaixo mostra a organização do ensaio, através da sequência de conteúdos respectivos a cada uma das **oito aulas**, ligados de maneira distinta às duas **Turmas (A e B)**, e categorizados em **duas fases** segundo sua natureza conceitual ou prática.

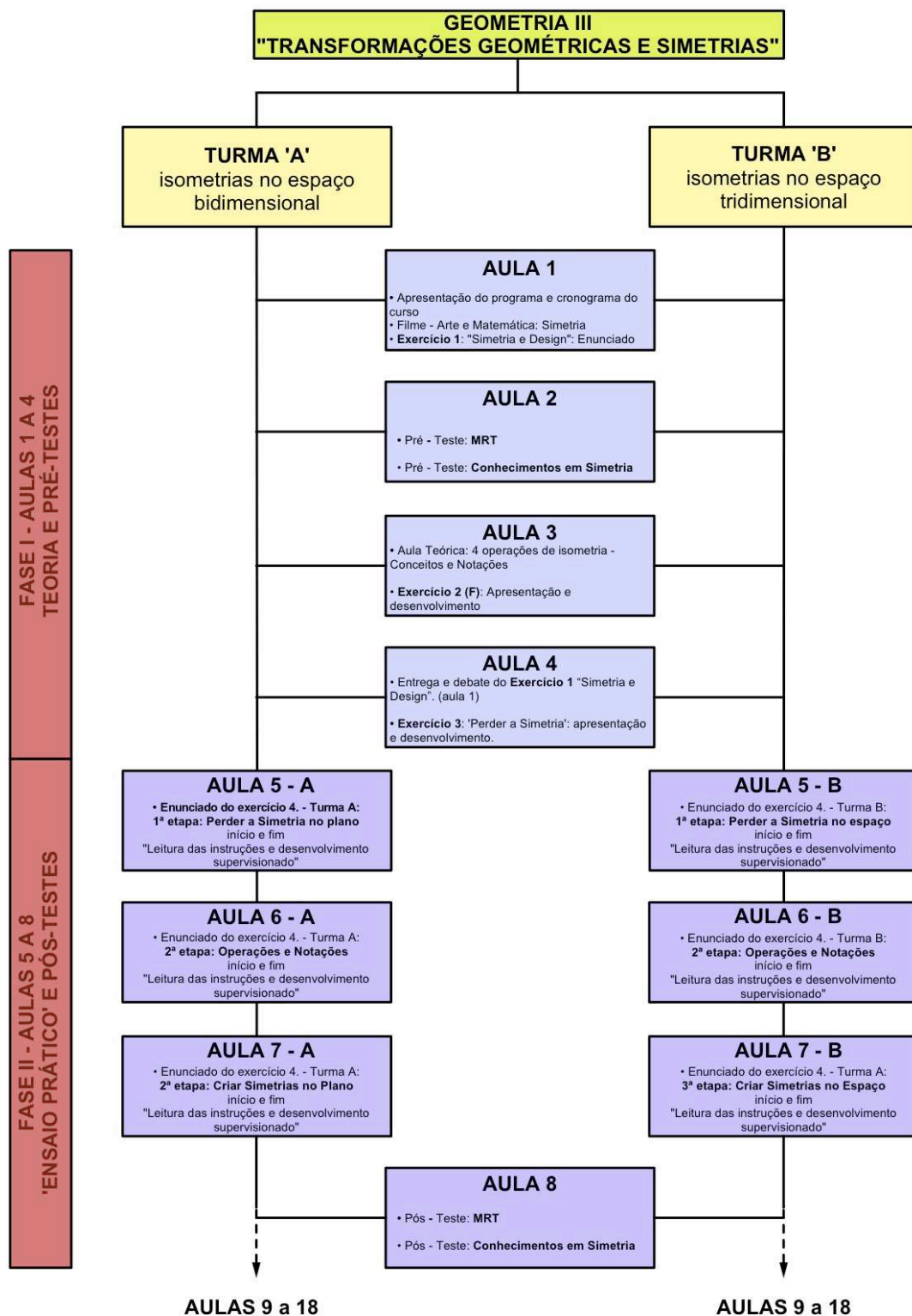


Figura 51 – Estrutura do ensaio

7.6. FASE I

AULAS 1 A 4

ESTRUTURAÇÃO CONCEITUAL

A 'Fase I', com duração de **quatro aulas**, compreendeu a aplicação dos dois pré-testes, a apresentação e exercitação dos principais conceitos relacionados às transformações geométricas e simetria. As quatro primeiras aulas foram idênticas às Turmas A e B.

As preocupações fundamentais nesta fase foram as seguintes:

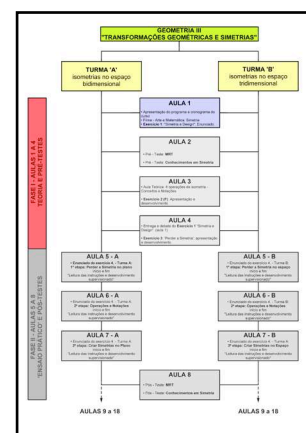
- Apresentar o universo das formas, sob a perspectiva da recorrência da simetria no mundo natural e nas manifestações artísticas.
- Chamar a atenção do estudante de design para a simetria como estratégia de projeto.
- Diferenciar composições e objetos simétricos dos não simétricos.
- Apresentar as formulações conceituais das quatro principais operações de isometria (rotação, reflexão, translação e reflexão deslizante), através de sua configuração, nomenclatura e notações egressas da matemática.
- Exercitar os conceitos mais básicos das quatro principais operações de transformação, através de operações sobre a mesma forma, sobre o plano.

As aulas ocorreram na sala de aula, e os materiais requeridos foram: Os enunciados impressos, lápis preto, caneta esferográfica, hidrocor, estilete e papel vegetal.



Figura 52 – Simetria Axial em pintura rupestre. Criar formas simétricas parece ser uma orientação natural do homem

7.6.1. AULA 1 TURMAS A E B



Objetivos

A primeira aula teve como propósito principal a apresentação do curso, do tema e do cronograma das atividades.

Descrição Analítica

Os estudantes souberam que o 'tema' da disciplina seria o estudo da simetria, bem como que haveria a organização de atividades teria relações com a pesquisa acadêmica desenvolvida pelo professor; entretanto, houve bastante atenção para que as reais expectativas e hipóteses do experimento não fossem divulgadas, de modo que não se incorresse no risco de contaminar o experimento com a *ameaça social desmotivação ressentida e rivalidade compensatória*, descrita por Seabra (2009, p.113) como o risco inerente de movimentos psicológicos indesejáveis, como desmotivação e descomprometimento de um grupo ou parte dele, resultado de um juízo de valores, quando este pressente que há diferenças no tratamento em relação a outro grupo.

Assim, foram informados que, embora a ordem dos encaminhamentos entre as turmas A e B, fosse sofrer uma bifurcação a partir da quinta aula, foi dada a garantia que todos teriam ao final do curso, acumulado o mesmo conjunto de atividades e oportunidades.

Uma aula de 20 minutos utilizando recursos áudio-visuais, procurou alinhar o conceito de simetria a diversas manifestações artísticas dispostas sobre



Figura 53



Figura 54

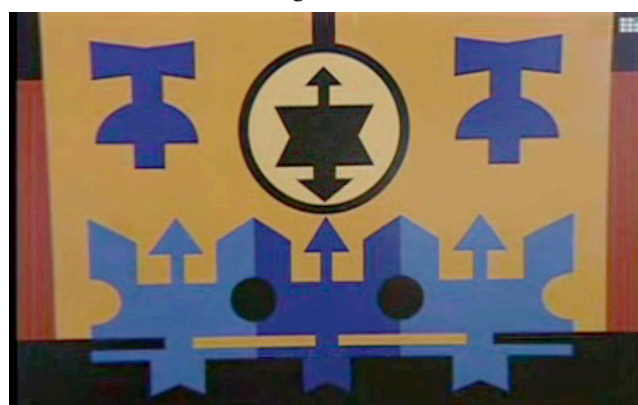


Figura 55

Figuras 53, 54 e 55 – Programa 'Arte & Matemática' produzido pela TV Cultura e apresentado pelo Prof. Luiz Barco.

diferentes suportes, como música, poesia, artes visuais, design e arquitetura.

Esta explanação precedeu o vídeo “Simetrias” da série *arte e matemática*¹ da TV Cultura, apresentado neste momento exatamente por seu caráter universal e introdutório.

Proposta para os alunos

Ao final da apresentação solicitou-se das turmas um primeiro envolvimento concreto com o tema, através do enunciado do **EXERCÍCIO Nº 1: SIMETRIA e DESIGN**. A tarefa foi solicitada oralmente, e pedia que se buscasse ilustrar o entendimento sobre a simetria presente em produção de design (gráfico, produto, arquitetônico).

Não foi pedido que justificassem as escolhas, nem que se explicasse a simetria presente, a fim que a seleção da produção pudesse registrar o repertório teórico dos alunos da maneira mais espontânea possível.

O meio expressivo escolhido foi a fotografia, em razão da disponibilidade da tecnologia necessária para processamento das imagens, da rapidez no registro e baixo custo de impressão.

A tarefa consistiu na seleção de **cinco imagens** fotografadas, produzidas pelo próprio aluno em preto e branco (não valia imagem trazida de outra fonte), impressas cada uma em folha A4, para apresentação na **aula 4**. O tema ‘Simetria no Design’ sugere uma resposta à capacidade de reconhecimento dos termos gerais da forma de um objeto ou composição simetricamente organizados.

EXERCÍCIO Nº 1 “SIMETRIA NO DESIGN”

DATA DA ENTREGA: 16/03/2011

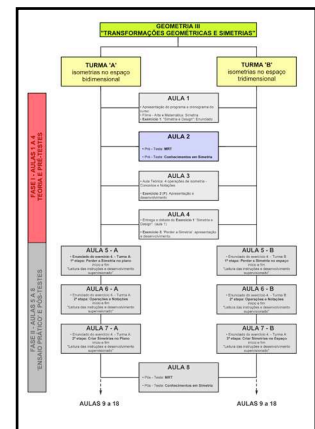
O Trabalho é **individual**.

Cada aluno produzirá **5 posters** no formato **A4** com fotos **PB**, de maneira a retratar o princípio da **SIMETRIA** em objetos de design

Figura 56 – Enunciado do exercício 1, apresentado em sala.

¹ Série de 13 episódios produzida pela TV Cultura e apresentada pelo professor da USP Luiz Barco, em que a Matemática e a Arte são tratadas no domínio de seus encontros. Disponível para download no seguinte endereço eletrônico: < http://www.dominio-publico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20794 > acessado em 15/11/2010

7.6.2. AULA 2 TURMAS A E B



Objetivos

Aplicação de dois pré-testes. O **MRT** e **Conhecimentos em Simetria**:

1. **MRT (Mental Rotation Test)**, cuja descrição está detalhada na sub-seção 5.5. O propósito deste teste é medir nos alunos, a habilidade cognitiva conhecida como Habilidade de Rotação Mental.

2. **Conhecimentos em Simetria**: Presume-se que boa parte dos estudantes já tenha tido contato com este tópico, entretanto é igualmente possível que outros tantos, não. Assim, o teste foi proporcionado a medir o conhecimento prévio que os estudantes trouxeram do assunto. O teste aplicado, bem como as reflexões sobre as questões e respostas dos estudantes estão na sub-seção 8.8.

Descrição Analítica

Os alunos foram avisados na aula anterior que haveria uma atividade ‘importantíssima’, absolutamente fundamental para o andamento do curso, e que portanto, evitassem a todo custo faltar.

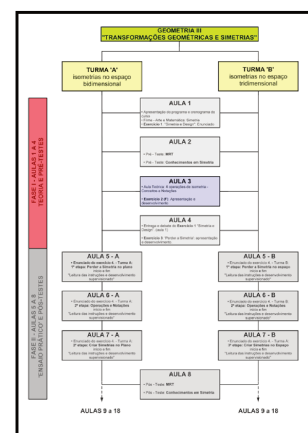
Os testes foram aplicados no horário de aulas, no mesmo dia para os dois grupos, sendo o professor, autor deste trabalho, o responsável pela administração de ambos. Antes da aplicação dos testes, os estudantes foram esclarecidos sobre sua natureza, seu propósito acadêmico, sua não-obrigatoriedade (e consequentemente que não implicaria na composição da avaliação oficial da disciplina), e o compromisso de que os resultados individuais, bem como a identificação dos participantes, não seriam publicamente divulgados.

Um **termo de consentimento livre e esclarecido**¹ foi adaptado a partir de um modelo genérico², (está descrito no anexo 1), lido e assinado por cada um dos alunos antes do início dos testes. Sublinhe-se que nenhum aluno se recusou a participar.

¹ “Trata-se o Consentimento Livre e Esclarecido de uma decisão voluntária, realizada por pessoa autônoma e capaz, após um processo informativo e deliberativo, visando à aceitação de um tratamento específico ou experimentação, sabendo da natureza do mesmo, das suas consequências e dos seus riscos. A emissão dessa decisão vem incorporada no documento Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).” - <<http://jus.uol.com.br/revista/texto/8803/consentimento-livre-e-esclarecido-na-pesquisa-envolvendo-seres-humanos>> acesso em 17/07/2011.

² <http://www.cep.ufam.edu.br/documents/TCLE%20-%20Exemplo%2011.pdf>

7.6.3. AULA 3 TURMAS A E B



Objetivos

Apresentar as isometrias no contexto mais amplo do tópico das Transformações Geométricas, segundo seus parâmetros matemáticos.

Mostrar um conjunto de imagens selecionadas do mundo natural e da produção humana nas áreas do design, arquitetura e artes, e analisar sua organização através dos elementos das simetrias.



Figura 57 – Planta que utiliza a simetria como estratégia de desenvolvimento - Imagem mostrada na aula



Figura 58 – Simetria axial da borboleta - Imagem mostrada na aula



Figura 59 – Logotipos cujas concepções utilizaram conceitos da simetria. - Imagens mostradas na aula

Descrição Analítica

Os elementos e condições das quatro operações (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) são explicados em apresentação no *PowerPoint*, através de imagens cinéticas (*GIFS* animados), no sentido de estabelecer um reconhecimento rápido e imediato.

Segue-se uma descrição mais detida, amparada pelas imagens apresentadas na seção 3, e por um impresso distribuído (anexo 3), focando essencialmente a distinção e nomenclatura dos principais elementos das transformações sobre o plano: Orientações das imagens (pontos ou figuras transformadas) em relação aos motivos (pontos ou figuras nas posições originais), pontos fixos (eixos – linha ou ponto), congruência, amplitude, etc.

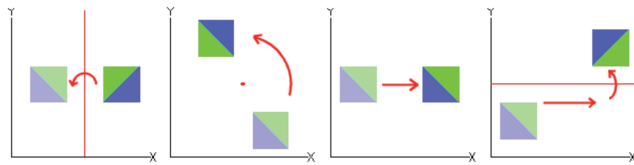


Figura 60 – *GIFS animados*³ descrevendo as seguintes transformações sobre o plano: Reflexão, Rotação, Translação e Reflexão Deslizante

Proposta para os alunos

A fixação destes conceitos é tratada na sequência da aula, imediatamente após a apresentação teórica, através do ‘**exercício 2**’ ou exercício dos **F** (anexo 4), como ficou popularizado entre os alunos. A tarefa mostrou-se rica na oportunidade de identificação dos elementos e das operações, evidenciando aspectos interessantes da exploração, como a diferenciação entre os resultados produzidos sobre uma mesma figura, através de operações sistemáticas e reguladas por regras.

³ Disponível para visualização em: <<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26s3.html>>

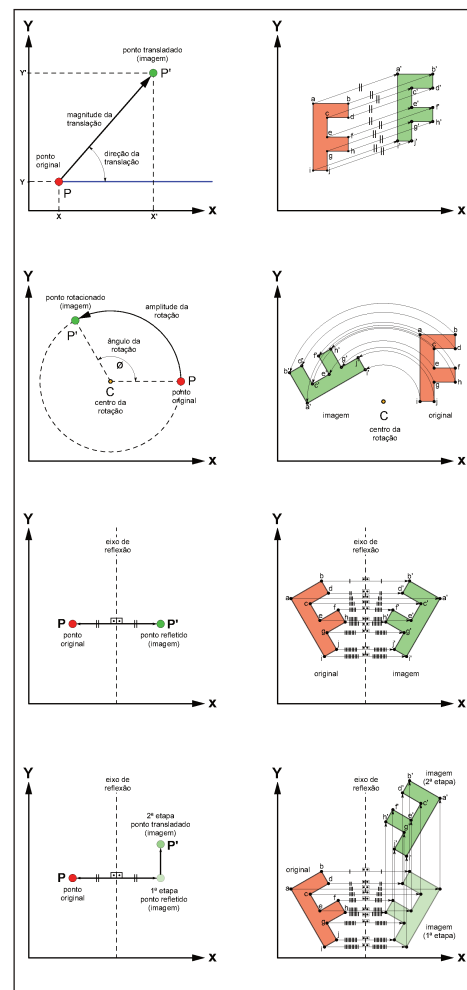


Figura 61 – Conceitos, elementos e notações das operações isométricas de Translação, Rotação, Reflexão e Reflexão Deslizante

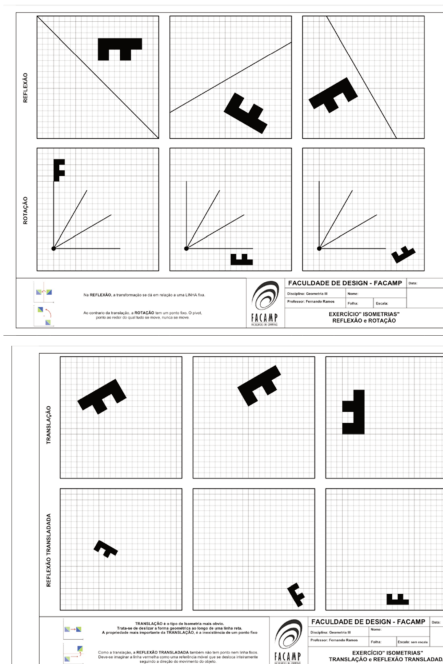


Figura 62 – Exercício 2: Duas pranchas tamanho A3, com três situações propostas para cada operação isométrica estudada na aula.

**GEOMETRIA III
"TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIAS"**

TURMA A
Isometrias no espaço bidimensional

AULA 1
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias proprias e impróprias
Isometrias proprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULA 2
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias impróprias: reflexão em um ponto, reflexão axial, reflexão em uma reta, rotação

AULA 3
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias próprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULA 4
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias impróprias: reflexão em um ponto, reflexão axial, reflexão em uma reta, rotação

AULA 5 - A
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias próprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULA 6 - A
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias impróprias: reflexão em um ponto, reflexão axial, reflexão em uma reta, rotação

AULA 7 - A
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias próprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULA 8
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias impróprias: reflexão em um ponto, reflexão axial, reflexão em uma reta, rotação

TURMA B
Isometrias no espaço bidimensional

AULA 5 - B
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias próprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULA 6 - B
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias impróprias: reflexão em um ponto, reflexão axial, reflexão em uma reta, rotação

AULA 7 - B
Isometrias no plano e no espaço
Isometrias próprias: translação, reflexão axial, reflexão em um ponto, reflexão em uma reta, rotação

AULAS 9 a 18

Apresentar o conceito de não-simetria através da investigação prática do **Exercício 3: “Perder Simetria”** e da apresentação de vídeos selecionados.

Descrição Analítica

O enunciado do **exercício 1** não solicitava nem justificativa nem explicações pelas escolhas.

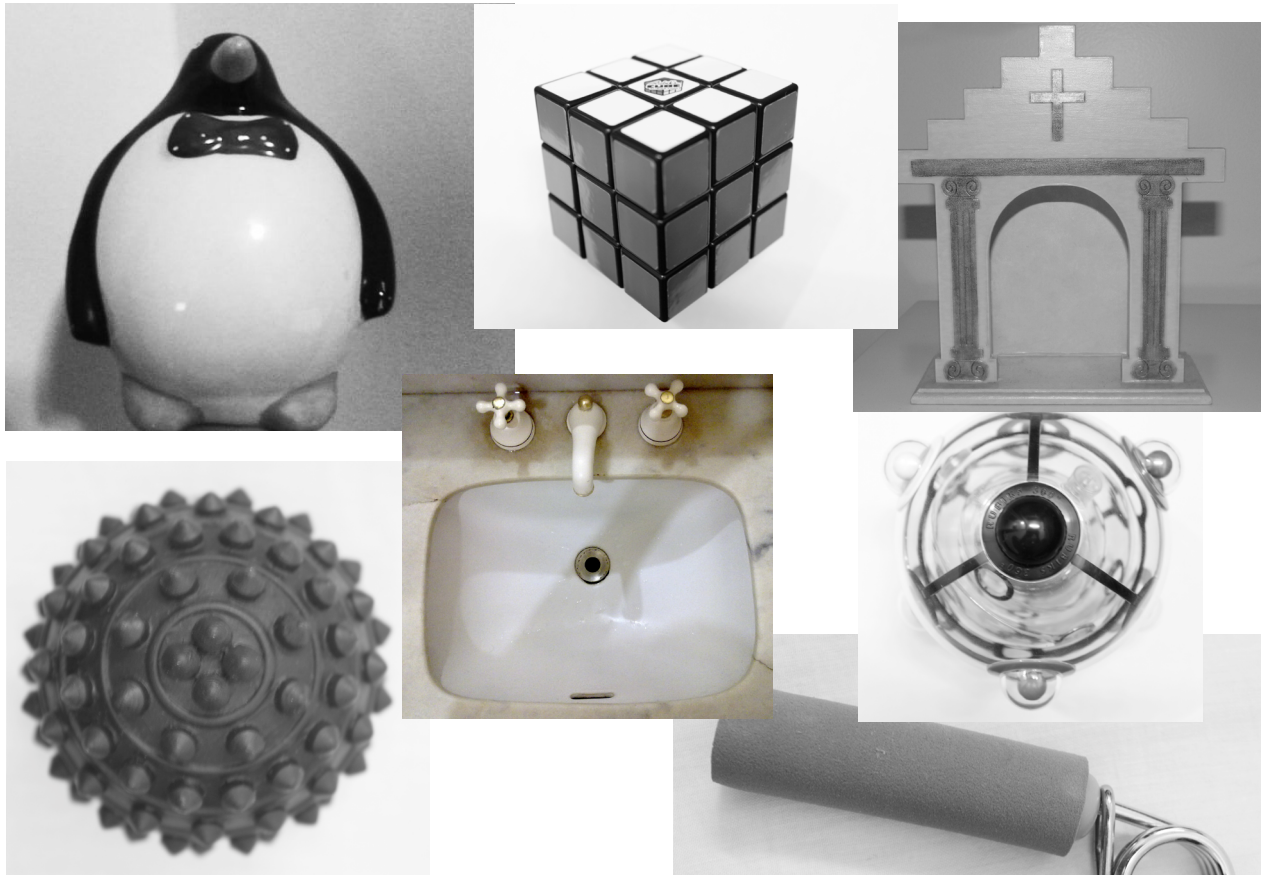
Como resultado geral, as duas turmas juntas apresentaram um conjunto de 252 fotografias. A distribuição das fotos em categorias de operações, ilustra a associação espontânea entre simetria e a operação de reflexão, o que confirma as palavras do professor Eduardo Veloso (2000, p.181): “*A palavra simetria tem estado associada entre nós, sobretudo no ensino da geometria, com simetria axial (...)*”.

A pesquisa espontânea, ilustra que mais de 90% dos alunos que associam o conceito de simetria com a operação de reflexão. É um número bastante expressivo. Em concordância com o professor Veloso, trata-se de uma tendência que devemos nos esforçar por superar, pois o universo de possibilidades das simetrias é consideravelmente mais amplo.

A tabela abaixo dá números a esta percepção:

Tabela 4 - Resultados do exercício 1

	Total de fotos	Reflexões	Rotações	Translações
Incidência	252	228	20	4
Percentual	100%	90,5%	7,9%	1,6%



Atividade para os alunos

O **Exercício 3: Perder Simetria** é, em certa medida o oposto do **Exercício 1: Simetria e Design**, e por isso justifica-se esta tarefa neste momento do curso, pois entende-se que o estudo de seu oposto, traz um reforço positivo à absorção do sentido da simetria; e mais do que o sentido, traz acesso à ferramenta conceitual que **demonstra** esta percepção:

“O reconhecimento da função e posicionamento do **eixo de simetria**”

Nesta tarefa, o eixo em questão é a **linha**, justamente a mais ‘popular’ entre os estudantes, que sobre o plano, associa-se à operação de reflexão,.

O enunciado⁴ (Figura 56 - pg 141) é curto, as regras são poucas, e a demonstração das hipóteses implica em um trabalho de investigação e descoberta das diversas hipóteses.

A tarefa implicava em decompor o quadrado em

⁴ Esta tarefa foi retirada e parcialmente adaptada da Apostila “Visualização e Geometria nos primeiros anos, pp. 54 a 56” [W9]



Figura 63 – Fotografias autorais que os alunos apresentaram como resposta ao enunciado do **EXERCÍCIO 1**

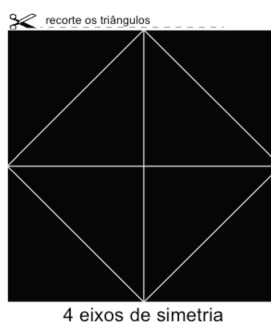
GEOMETRIA III - 2011 EXERCÍCIO 3 - "PERDER SIMETRIA"

A figura ao lado é composta por 8 triângulos retângulos isóceles e possui 4 eixos de simetria.

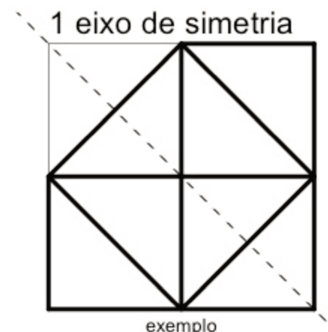
Recorte a figura nas linhas brancas

Retire os triângulos de modo a obter figuras com menor número de eixos de simetria.

Desenhe nos gabaritos abaixo as diferentes figuras que encontrar e identifique os eixos de simetria.



4 eixos de simetria



exemplo

Figura 64 – Enunciado do Exercício 3: "Perder Simetria"

oito triângulos retângulos isóceles, encontrar novas formas simétricas a partir da manipulação das peças que caibam dentro da forma original, e categorizá-las segundo a quantidade de eixos de simetria, e registrá-las sobre os gabaritos.

A manipulação dos triângulos implica em 'transformá-los livremente' – sem necessidade de reflexão sobre o ato – através de giros, espelhamentos e deslizamentos.

Antes da liberação para execução da tarefa, foram exibidas aos alunos três animações envolvendo transformações de triângulos sobre o plano, com o propósito de 'inspirar' a atividade:

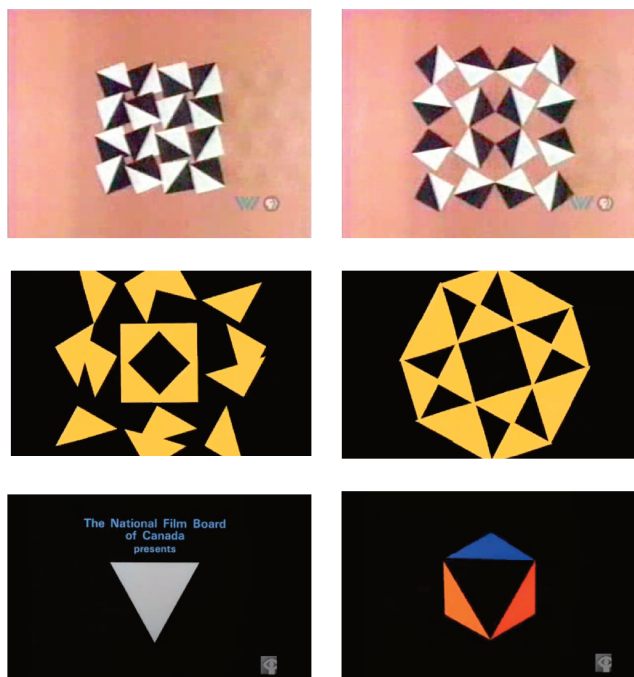


Figura 65 – Imagens retiradas das três animações apresentadas em aula, na fase preparatória à execução da tarefa .

Comentários

Durante as apresentações do exercício 1, o professor pediu aos alunos que soubessem identificar o tipo e a localização do eixo de simetria, que o fizessem. Foram poucos os casos em que não se souberam responder. As respostas reticentes deveram-se aos exemplos que podiam ser associados a mais de um tipo de operação, como translações e reflexões.

Video 1 – Dancing Triangles – Origem Desconhecida

Video 2 – Tringles <<http://www.youtube.com/watch?v=YIxCGuzUWmE>> acesso em 20/06/2011

Video 3 – Notes on a tringle - <http://www.youtube.com/watch?v=1ztfo5S5oL4&feature=related> acesso em 20/06/2011

7.7. FASE II

AULAS 5 A 8

APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO

Na Fase II, com duração de quatro aulas, a continuação dos estudos sobre as propriedades da simetria tomou rumos distintos para as duas turmas. Cada uma delas participou de três sessões (aulas 5, 6 e 7), correspondentes às **três etapas** do desenvolvimento do **Exercício 4**. Nos dois casos, as tarefas das três etapas foram proporcionadas a terem início e fim na mesma aula, e compartilharam o mesmo subtítulo:

- Aula 5 - Etapa 1: Perder a Simetria.
- Aula 6 - Etapa 2: Operações e Notações.
- Aula 7 - Etapa 3: Criar com Simetria.

As diferenças nas tarefas apresentadas às turmas A e B, não estiveram no conteúdo de seus programas, pois estes guiaram-se essencialmente pelo mesmo roteiro conceitual em suas três etapas, pois focaram a atenção aos mesmos fundamentos das três operações isométricas.

Diferiram portanto, na dimensão do espaço em que se investigou a forma resultante da recursividade sistemática das operações sobre uma forma matriz, bem como o método expressivo utilizado, como se descreverá adiante.

O último encontro desta fase (aula 8) foi dedicado aos pós-testes.



Figura 66 – Materiais utilizados pelo grupo de controle

7.7.1.

AULA 5 TURMA A

EXERCÍCIO 4
ETAPA 1

Objetivos

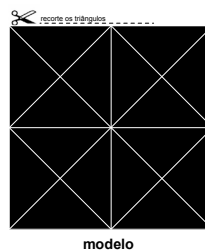
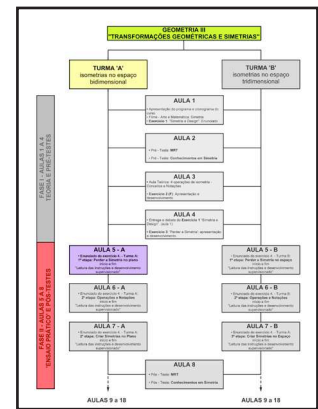
Apresentar os termos gerais, objetivos e cronograma do Exercício 4 e suas três etapas de desenvolvimento. Apresentar o enunciado e desenvolver a **Etapa 1 – Perder Simetria** (anexo 6)

Descrição Analítica

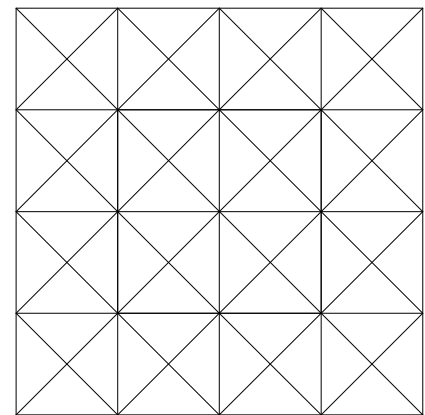
A *Etapa 1* do Exercício 4 tem a mesma denominação do Exercício 3 proposto na aula 4: **Perder a Simetria**. As duas tarefas são na verdade uma continuação natural do curso, que deve a cada passo agregar uma solicitação mais complexa e extensa ao estágio precedente, sem entretanto significar um salto abrupto. Há entretanto uma diferença importante entre significados na palavra perder, nos dois casos:

No Exercício 3, a expressão perder a simetria implica em diminuir os eixos de reflexão progressivamente através das hipóteses encontradas. Do máximo de quatro eixos, presentes no quadrado, a expectativa é que o aluno se depare com as demais dezesseis hipóteses: as duas conformações com dois eixos, as dez com um eixo, e as três sem nenhum eixo de simetria. Perder portanto, significa neste caso a categorização de sua simetria em ordens que vão de zero a quatro.

Na etapa 1 do Exercício 4 entretanto, perder simetria implica em esperar que o aluno tenha a capacidade de reconhecer a completa ausência de simetria, inexistente exatamente pela impossibilidade de haver congruência entre a reflexão de uma metade



modelo



gabarito

Figura 67 – O *modelo* deveria ser recortado, e decomposto em 16 triângulos retângulos isósceles, e rearticulado sobre a malha do *gabarito*, criando um *motivo* assimétrico.

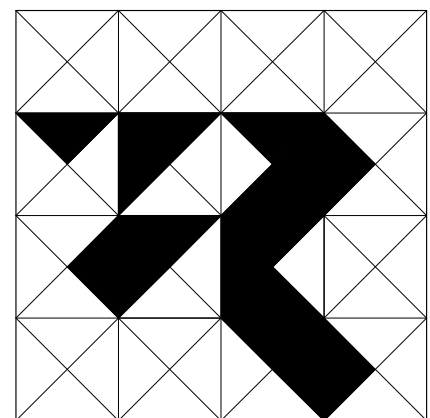


Figura 68 – Formulação de um *MOTIVO*, derivado da articulação dos 16 triângulos dentro da malha do gabarito.

da figura sobre outra, mediada por um eixo que neste caso, é uma linha.

A Etapa 1 da Turma A foi apresentada e desenvolvida no Ateliê de Desenho, pois manteve a mesma linguagem expressiva utilizada nas exercitações da Fase I, notadamente os manipulativos bidimensionais recortados, e o desenho ordenado em malhas.

Atividades para os alunos

O manipulativo (quadrado segmentado) neste caso, envolvia 16 triângulos retângulos isóceles que deveriam ser reordenados sobre uma malha regular de 64 módulos do mesmo triângulo. Esta estratégia visou a agilidade nas investigações entre as inúmeráveis possibilidades de conformação.

As soluções encontradas deveriam ser transpostas à folha de estudos (folha dois do enunciado), com uma hachura simples, sem necessidade de qualidade de apresentação. Foi estimulado que ocupassem a maior área possível da folha, pois quanto mais estudos fossem produzidos e registrados mais chances teria o aluno de perceber a amplitude das hipóteses possíveis.

A tarefa conclui-se com a transposição de quatro das soluções encontradas para um campo composto por quatro gabaritos, selecionadas a partir de um critério abstrato e pessoal do aluno, em que deveria pesar o potencial estético e associativo das composições.

Comentários

O enunciado parece ter sido bem compreendido pelos alunos, e poucas (mas importantes) dúvidas foram lançadas. Algumas das perguntas que se escutou:

“Todos os 16 triângulos precisam ser usados, ou posso fazer com menos?”

“Posso estudar direto na folha?” (sem utilizar os triângulos recortados)

“Quanto estudos preciso fazer?” (hipóteses registradas na malha da folha de estudos).

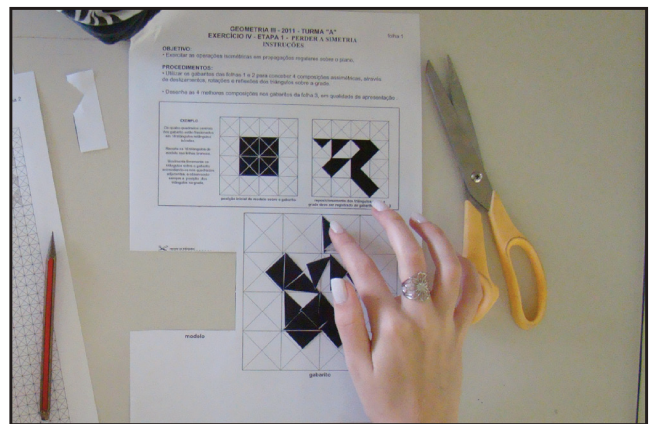


Figura 69

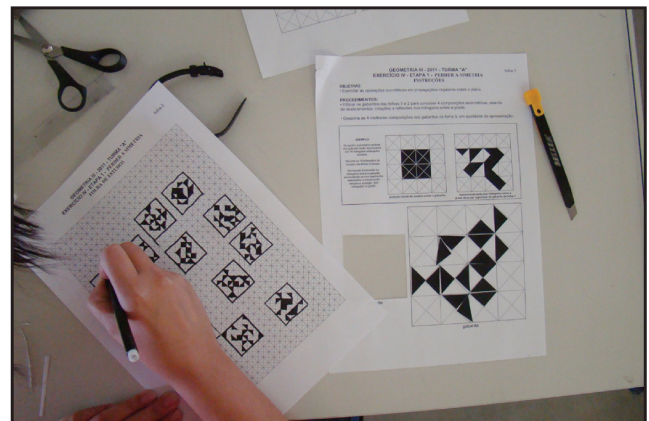


Figura 70

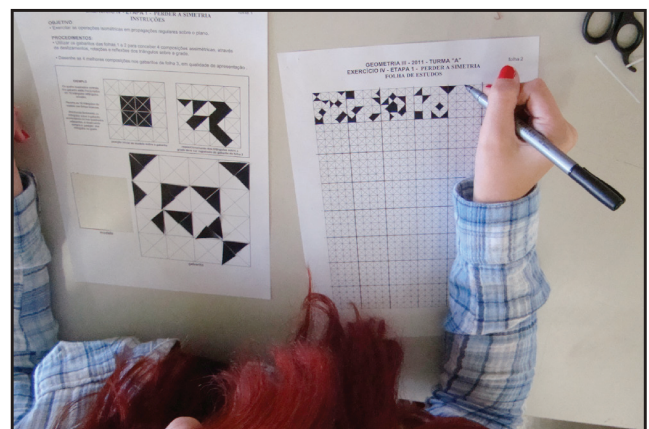


Figura 71

Figuras 69, 70 e 71 – Desenvolvimento do exercício 4 da etapa 1 (enunciado no anexo 6.)

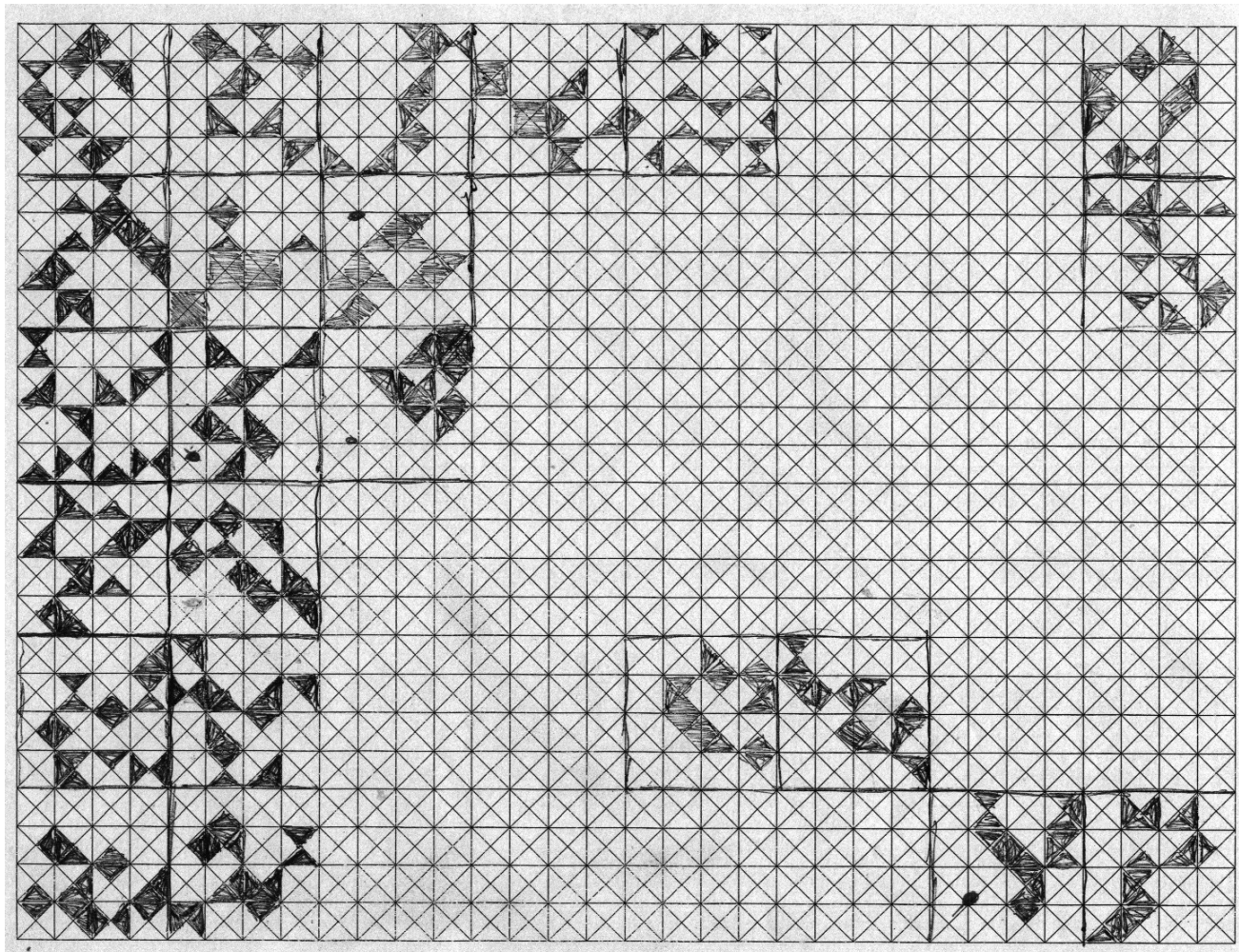
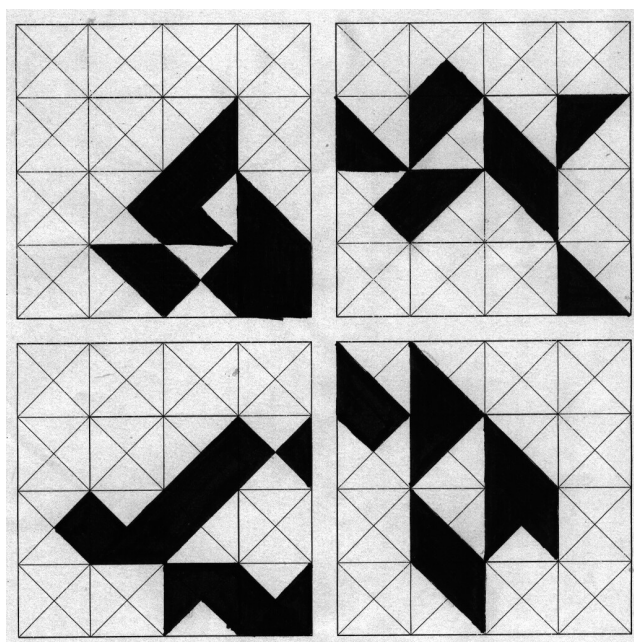


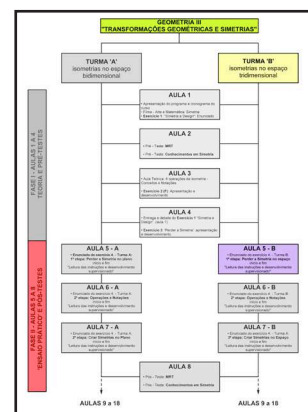
Figura 72 – Folha de estudos da Etapa 1 - trabalho de aluno.



*Figura 73 – Dentre todos os estudos, quatro **motivos** são selecionados.*

7.7.2. AULA 5 TURMA B

EXERCÍCIO 4
ETAPA 1



Objetivos

Apresentar os termos gerais, objetivos e cronograma do Exercício 4 e suas três etapas de desenvolvimento.

Apresentar o enunciado e desenvolver a Etapa 1 – Perder Simetria (anexo 7).

Estabelecer parâmetros para o uso dos materiais e ferramentas da oficina.

Descrição Analítica

Aqui há novidades para professor e alunos. Mudam o ambiente de trabalho e os meios expressivos. A Turma B da Geometria III vai à oficina, e o que se manipula e organiza, são prismas de isopor, não mais folhas de papel.

O modelo manipulativo que para a turma A é bidimensional (poligonal) e tem a forma de um quadrado fracionado em dezesseis triângulos retângulos isóceles, assume na Etapa 1 da Turma B, a forma poliédrica de um cubo (tridimensional), cujas faces são fracionadas em oito triângulos do mesmo tipo.

O fracionamento de cada uma das seis faces do hexaedro serve a dois propósitos: 1. Estabelece o vínculo de continuidade com o Exercício 3 da fase I, pois tratam-se ambos, de quadrados fracionados em triângulos, e 2. Cria uma malha espacial que dá parâmetros às secções e junções que se fará na sequência da tarefa.

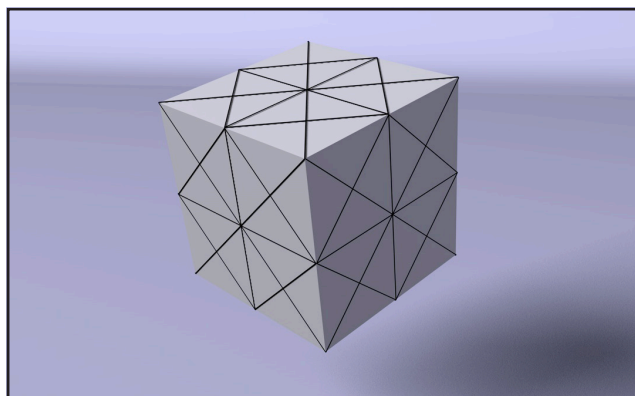


Figura 74

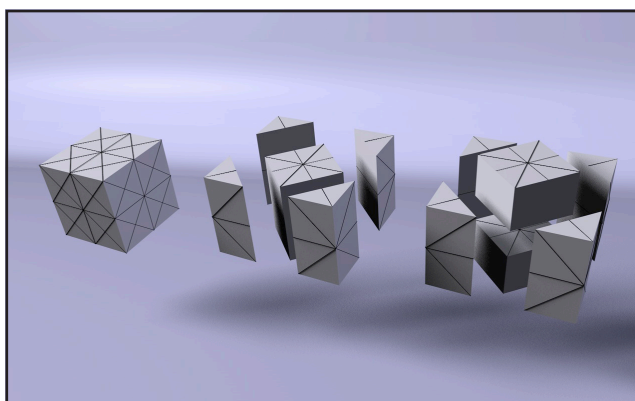


Figura 75

Figuras 74 e 75 – O cubo de isopor foi marcado em suas faces segundo seus vértices e pontos médios e, em seguida, fragmentado em seis prismas.

Um aspecto que sobressai quando se comparam as metas e procedimentos entre as Etapas 1 de ambas as turmas, é a quantidade de motivos solicitados.

Enquanto à Turma A foi proposta a criação de quatro motivos sobre os quais se operará a partir da Etapa 2, à Turma B solicitou-se apenas um, e isso deve-se ao tempo natural que cada método exige. A demanda da Turma B é mais demorada, pois implica não apenas qualidades mentais capazes de compreender os conceitos, mas certa atenção aos aspectos físico-construtivos dos materiais implicados. Supõe-se que este aspecto artesanal de processamento dos materiais, embora mais demorado, possa contribuir para o incremento da Habilidade de Rotação Mental dos alunos

Atividades para os alunos

O enunciado traz instruções ilustradas de seis procedimentos sucessivos e identificados, que estabelecem parâmetros para a criação de uma maquete de isopor pintado – um sólido irregular - cuja configuração formal e grafismo da superfície, não apresentem nenhum eixo de simetria em nenhuma de vistas ortogonais.

Após a leitura conjunta de todo o enunciado e do estabelecimento das metas desta etapa, os alunos recebem um kit contendo os materiais necessários para o desenvolvimento da tarefa, formado por: Blocos cúbicos de isopor⁵ nas medidas 5,0 x 5,0 x 5,0 cm, uma caneta de tinta permanente, um estilete de lâmina grossa, uma lâmina de acrílico, um tubo de cola de isopor (este último dividido entre três ou quatro alunos).

O primeiro passo foi utilizar uma régua graduada e a caneta de tinta permanente, para desenhar o traçado segundo as instruções do enunciado, em cada uma das seis superfícies do cubo.

No passo seguinte, o aluno utilizou o estilete para sectionar o cubo em cinco partes, truncando quatro de suas arestas paralelas, ou em outras palavras, cortando

⁵ O estritamente necessário por aluno seriam 2 cubos, entretanto, pareceu prudente ter um reserva excedente em virtude dos erros de execução, e necessidade de refazimento das tarefas.

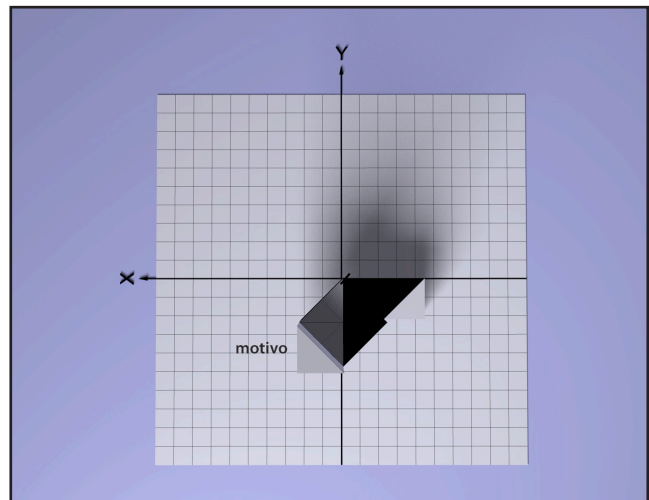


Figura 76

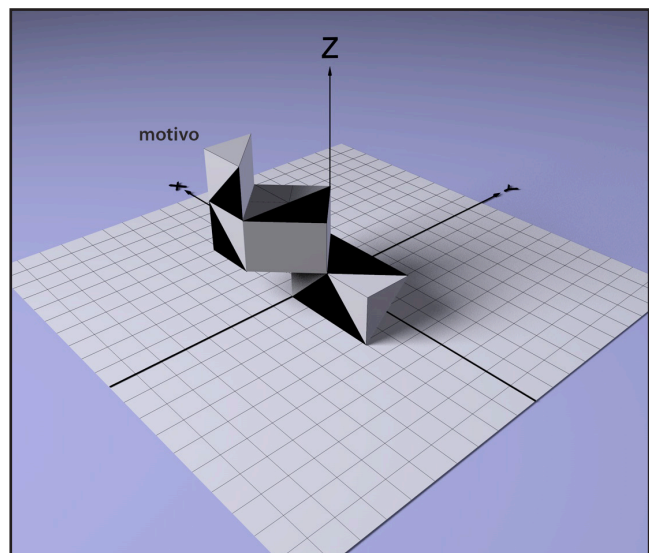


Figura 77

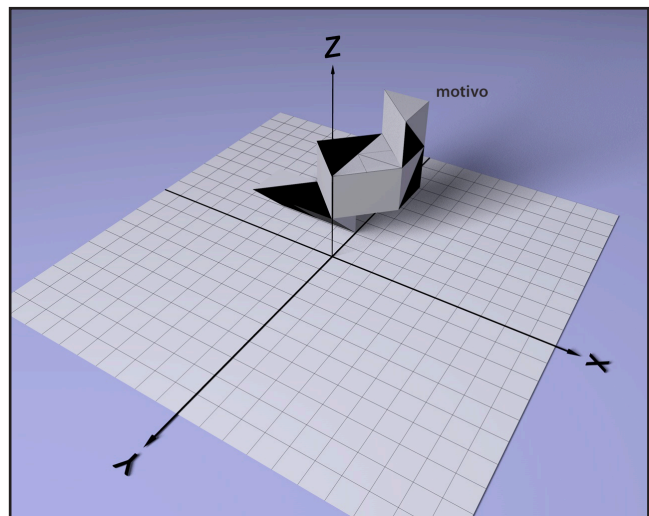


Figura 78

*Figuras 76, 77 e 78 – Dois prismas triangulares e um prisma quadrado são utilizados para conceber um **motivo**. As linhas sobre a superfície delimitam o grafismo.*

os quatro triângulos dos cantos. As formas resultantes foram quatro prismas de base triangular, e outro prisma de base quadrada. Este último sofreu ainda novo corte, paralelamente às faces quadradas, resultando deste procedimento, dois prismas de base quadrada com metade do volume do anterior. A imagem seguinte ilustra a sequência dos procedimentos 1, 2 e 3.

No procedimento 4, o aluno utiliza dois dos quatro prismas triangulares e um dos dois prismas quadrados resultantes dos procedimentos anteriores para montar uma maquete utilizando os três sólidos.

O aluno pôde manipular as peças livremente, livre da preocupação de sistematizar ou conceituar sua ação, entretanto foram propostos dois parâmetros obrigatórios, equivalentes aos propostos ao mesmo estágio da outra turma: 1. Que o resultado final da composição não tivesse nenhum eixo de simetria, e 2. Que houvesse congruência entre as formas gravadas na superfície dos sólidos; em outras palavras, que os triângulos de uma peça encaixassem-se apenas com triângulos de mesma orientação das demais peças, e que o mesmo valesse para os retângulos dos prismas de base quadrada.

O procedimento 5 pedia do aluno, que utilizasse a caneta permanente e criasse um grafismo na superfície da maquete a partir da pintura da malha.

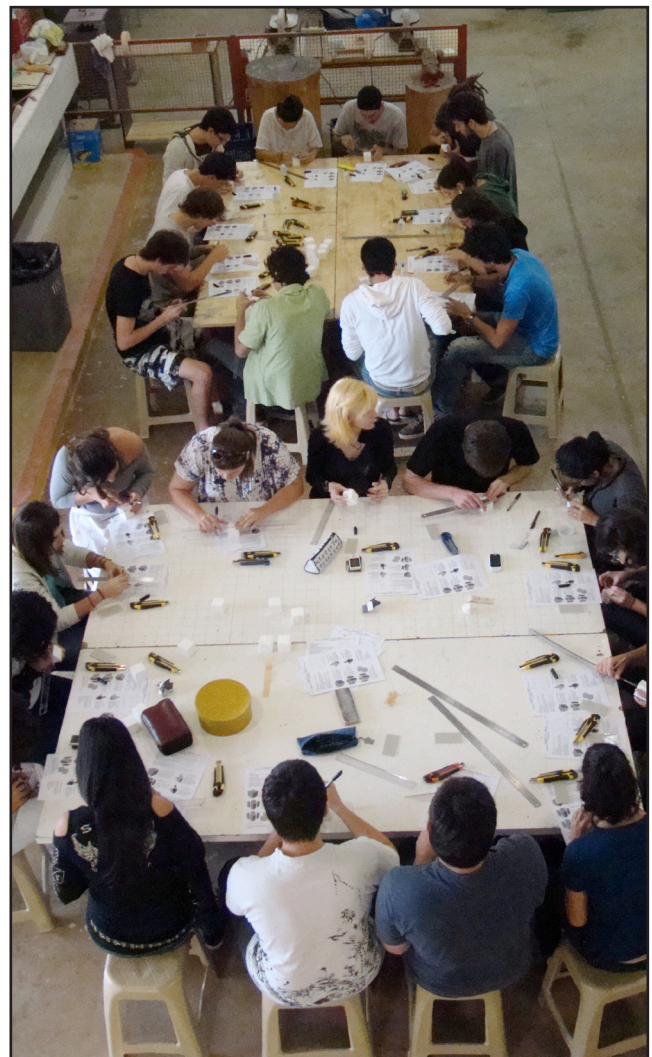


Figura 79 - Participantes do grupo de tratamento no ambiente da oficina.

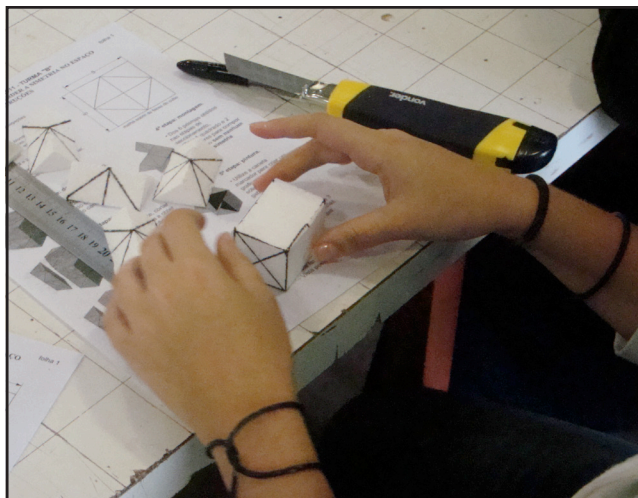


Figura 80

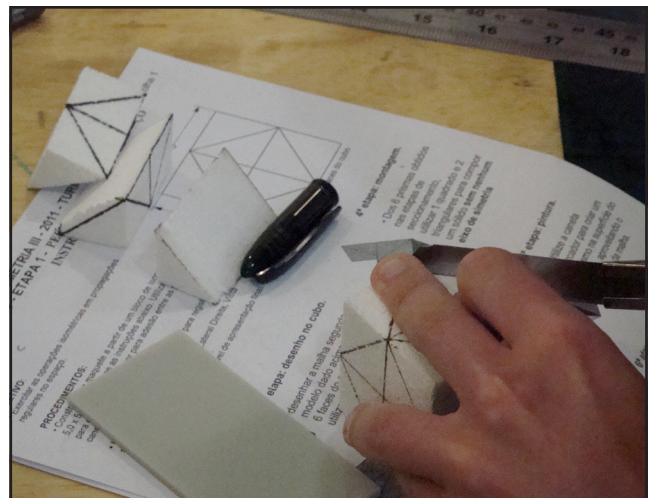


Figura 81

Figuras 80 e 81 – Etapa 1 do exercício 4 em andamento.

Após a conclusão da construção da maquete, chamada a partir de agora de motivo (em sincronia com outra turma), o aluno tratou de desenhar suas seis vistas ortogonais principais, sobre duas malhas fornecidas no enunciado, chamadas gabarito 1 e gabarito 2. Este procedimento (o sexto e último desta etapa), procurou envolver o aluno no reconhecimento da forma que criou, e também dar-lhe a oportunidade de comprovar através do reconhecimento das projeções sobre o plano, que não há nenhum eixo de simetria.

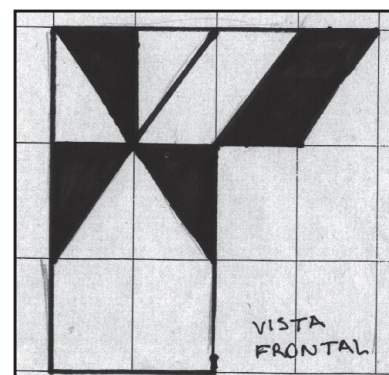


Figura 82

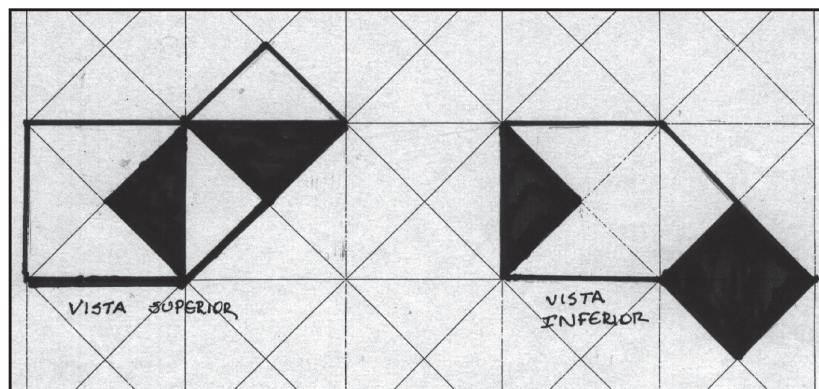


Figura 83

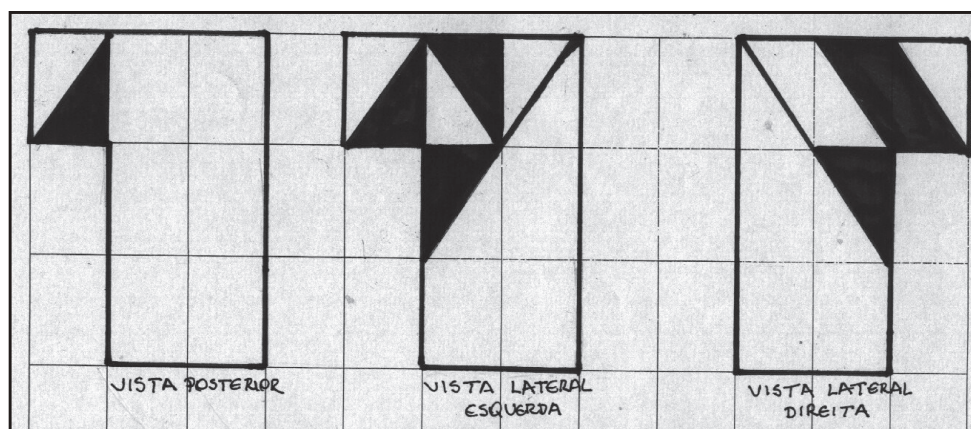


Figura 84

Figuras 82, 83 e 84 –
Após a criação do motivo,
é solicitado do aluno
projetar suas seis vistas
sobre gabarito fornecido.

Comentários

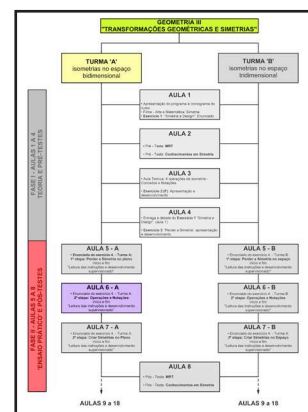
Houve alguma preocupação por parte dos alunos quanto à qualidade da execução de suas tarefas. Ouviu-se algumas lamúrias do tipo “Tá ficando torto!”, ou ainda “Já tinha que vir cortado!”

Percebeu-se que ainda havia certa hesitação em assumir uma conformação final para a maquete, tendo sido o professor bastante solicitado a confirmar se havia ou não eixos de simetria em alguma das vistas.

O procedimento de desenhar as vistas sobre os gabaritos fornecidos também requereu alguma atenção, pois não foram raros os alunos que solicitaram atenção individual para compreender a ocasião de se usar uma ou outra malha.

7.7.3. AULA 6 TURMA A

EXERCÍCIO 4
ETAPA 2



Objetivos

1. Apresentar um conjunto de símbolos, notações e convenções relacionados às três principais operações isométricas sobre o plano (translação, reflexão e rotação).
2. Explorar uma estratégia de composição gráfica que utiliza sequências pré-definidas de múltiplas operações combinadas, a partir de um módulo sobre uma malha plana.

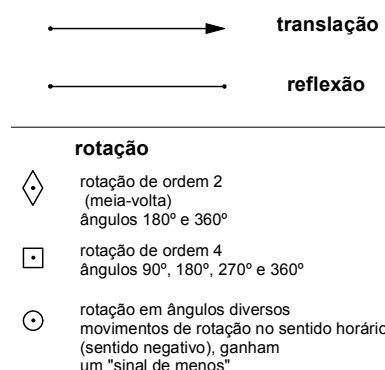


Figura 85 – Símbolos e notações da translação, reflexão e rotação sobre o plano.

Descrição Analítica

Na Etapa 2, o aluno utiliza UM entre os quatro arranjos selecionados na etapa anterior, e o utiliza como **motivo** na geração de padrões, ou *rappports*. A novidade está na apresentação de um conjunto de informações e procedimentos, importantes no sentido de identificar em projeto, cada uma das três principais transformações isométricas, e aplicá-las sistematicamente através de sequências.

Os parâmetros simbólicos apresentados no enunciado encontram similaridade⁶ com o padrão de notações mais utilizado internacionalmente. A operação de translação por exemplo, é registrada através de uma seta que indica a orientação (direção) e a amplitude (extensão) sobre o plano, no qual se desenvolve a transformação.

A operação de reflexão é representada por um segmento de reta (linha) com terminações nas suas extremidades.

A rotação acompanha uma notação mais extensa, que varia de acordo com a amplitude (giro em graus) e sua ordem (quantidade de imagens resultantes através da transformação do motivo).

⁶ Utiliza-se a palavra similaridade em virtude de haver pequenas diferenças na literatura, no que diz respeito à presença ou não de texto, e terminações em setas e retas

Atividades para os alunos

O enunciado fornece quatro ‘mapas’, organizando uma sequência mista de operações sobre uma malha de triângulos. Assim, o *motivo* selecionado da etapa anterior resulta na *Etapa 2*, em quatro novos *rapports*.

Os alunos são estimulados a compôr os padrões sem auxílio de qualquer recurso de apoio, como transparências por exemplo, de maneira a exercitar a capacidade de visualização necessária ao reposicionamento do *motivo* sobre o plano, contando apenas com a referência da malha.

O processo completo permite que o aluno constate a versatilidade deste método, capaz de criar uma infinidade de padrões a partir de um mesmo *motivo* básico, através da alteração do posicionamento dos eixos e amplitudes, bem como através do reordenamento da sequência das operações.

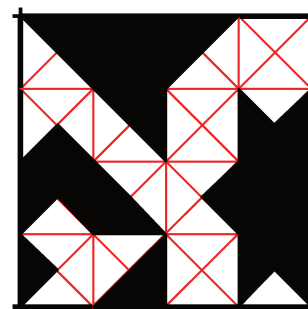


Figura 86 – Motivo selecionado na etapa 2 do exercício 4.

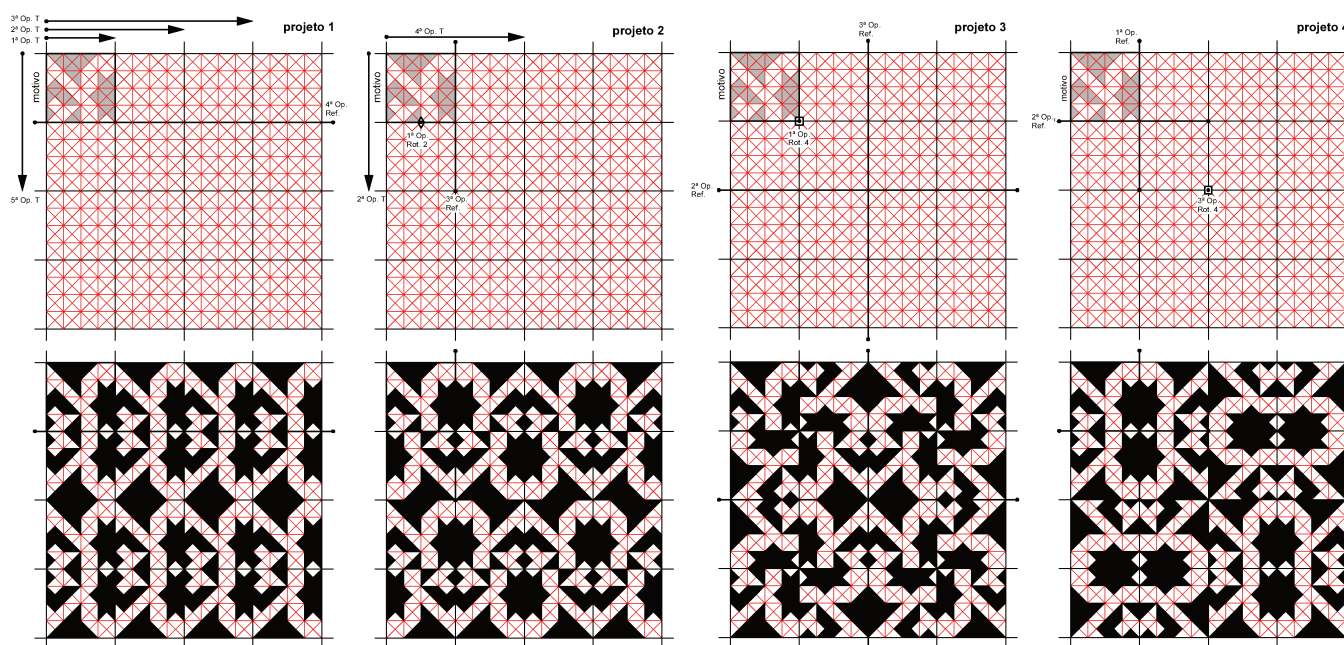


Figura 87 – O motivo selecionado é aplicado sobre 4 gabaritos pré-definidos.

Comentários

Houve um contratempo inesperado nesta aula. Oito ausências foram motivadas em razão de uma entrega de trabalhos iminente em outra disciplina. A preocupação com a boa continuidade do experimento motivou o professor a subir o tom e marcar uma “entrega parcial” na aula seguinte, sujeita a avaliação, com o propósito de reforçar o compromisso por parte dos alunos.

Os alunos presentes não tiveram dificuldades em cumprir a meta, pois o tempo disponibilizado pareceu bem proporcionado.

7.7.4. AULA 6

TURMA B

EXERCÍCIO 4
ETAPA 2

Objetivos

Exercitar as operações de transformações isométricas no espaço, a partir da forma resultante na Etapa 1.

Descrição Analítica

O propósito da Etapa 2 do Exercício 4 oferecido à Turma B, é equivalente ao da Turma A, no referente à produção de imagens a partir da transformação um motivo, entretanto a ênfase dada ao domínio das notações e terminologias é menor, sendo este aspecto tratado com mais apuro na etapa seguinte.

O foco principal foi dado à construção física das três novas maquetes, que demandaram considerável concentração e dedicação por parte dos alunos.

A demanda estabelecia que o aluno construísse uma cópia idêntica da maquete original e ainda duas outras que fossem cópias refletidas. Para isso foi necessário que fosse capaz de observar e compreender o objeto, o que se fez através de sua manipulação física. Nesta etapa, o ato de manipular fisicamente os materiais passa a requerer do aluno uma atenção mais aguda e maior disponibilidade à reflexão crítica, pois a liberdade de ação fica atrelada às condicionantes de cada operação isométrica e aos atributos específicos do motivo (poliedro criado na etapa precedente).

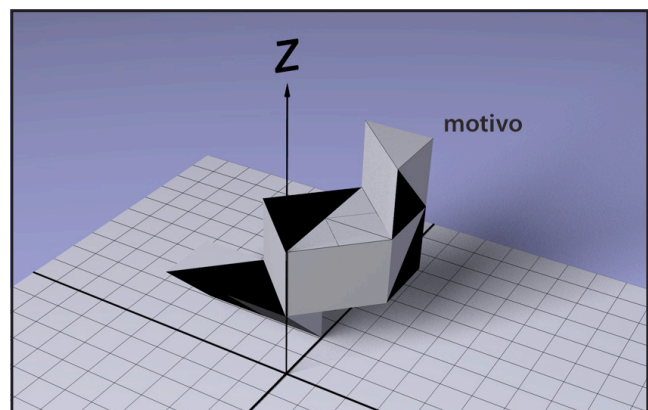
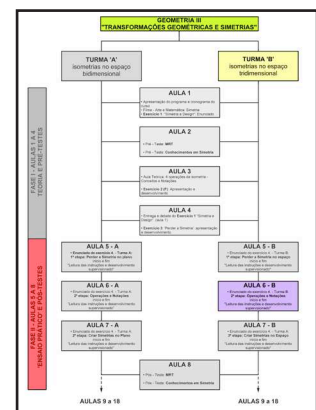


Figura 88 – O motivo gerado na etapa 1.

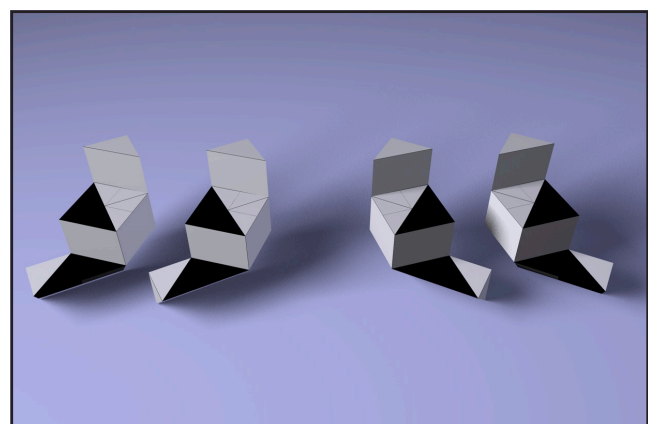


Figura 89 – O motivo referente é triplicado, sendo uma cópia idêntica e duas refletidas.

Atividades para os alunos

Os alunos utilizaram a metade que restou do processamento do cubo na Etapa 1, e valeram-se de ainda mais um, para alcançar a meta final e obter um conjunto de quatro maquetes constituído assim, por dois pares refletidos. Tanto morfologia quanto grafismo de superfície foram considerados.

Após a leitura conjunta do enunciado bastante ilustrado, os alunos puseram-se a executar as tarefas naturalmente, pois tratavam-se de continuidade da aula anterior.

Também a exercitação do conceito de reflexão no espaço, algo que surge pela primeira vez no curso neste momento, não pareceu causar estranhamento nos alunos, que aparentemente souberam adequar o conceito exercitado nas tarefas bidimensionais da Fase I.

Importante ressaltar que houve também a evocação do Teste MRT, por parte do professor. A semelhança entre o que se fez mentalmente no teste e o que se fez manualmente no exercício foi veementemente reforçada. Trata-se essencialmente do mesmo processo comparativo entre um motivo referente e suas imagens, que em ambos os casos ou eram idênticos ou refletidos.

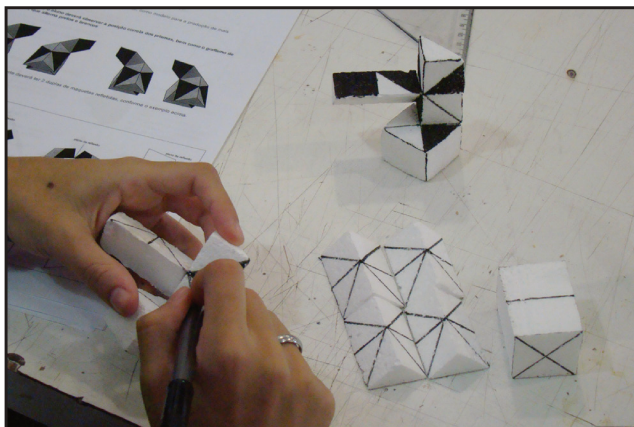


Figura 90

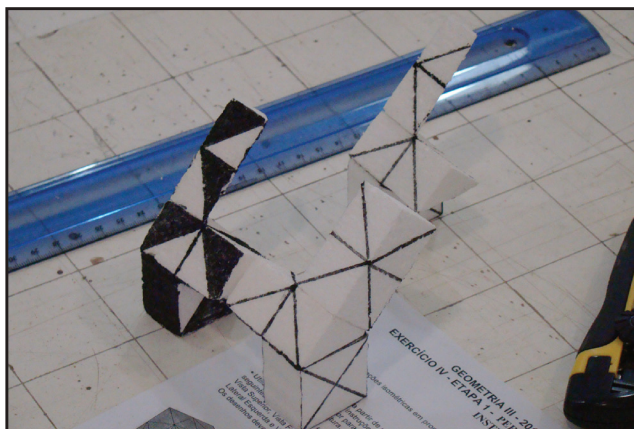


Figura 91

Figuras 90 e 91 – Etapa 2 em andamento.

Comentários

A exemplo do que ocorreu com a Turma A, houve ausências também entre a Turma B, igualmente motivadas pela entrega de trabalhos em outra disciplina; entretanto a evasão foi menor, pois apenas quatro alunos faltaram. Talvez a notícia do aparente 'mal humor' do professor tenha se espalhado entre uma aula e outra.

Os alunos pareceram sentir-se mais seguros e acostumados com a atividade no que diz respeito tanto ao meio expressivo, bem como em relação aos conceitos geométricos. Houve pouca procura pelo professor, e as intercorrências não merecem nota.

7.7.5. AULA 7

TURMA A

EXERCÍCIO 4
ETAPA 3

Objetivos

Exercitar a aplicação das operações isométricas de translação, reflexão e rotação, através de projetos gráficos pessoais que utilizem como método, o conjunto de normas, símbolos e notações apresentados na *Etapa 2*.

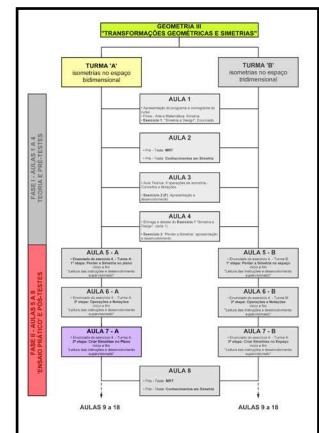
Descrição Analítica

A *Etapa 3* correspondeu à **última tarefa** prática do experimento envolvendo trato com a geometria, pois a aula seguinte foi para ambas as turmas, devotada à entrega do total das tarefas desenvolvidas nas três etapas do *Exercício 4*, bem como aos **Pós-Testes** do MRT e do **CONHECIMENTOS EM SIMETRIA**.

Esta etapa é uma espécie de síntese da compreensão por parte do aluno, do conjunto de conceitos e práticas exercitados no curso. Por isso, o desenvolvimento das tarefas implicou para ambas as turmas, na necessidade da dedicação de um tempo mais extenso.

Sendo assim, não houve cobrança para que a tarefa fosse concluída até o final da aula, como ocorreu nas duas etapas anteriores. Os alunos puderam concluí-la em intervalos de tempos livres que tiveram ao longo da semana.

A expectativa é que à medida que segue combinando os **módulos simples** de maneira regular



PASSO 1

identifique o motivo
(modulo de origem)

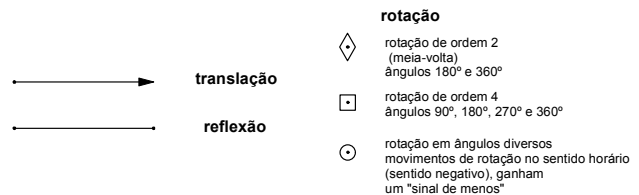
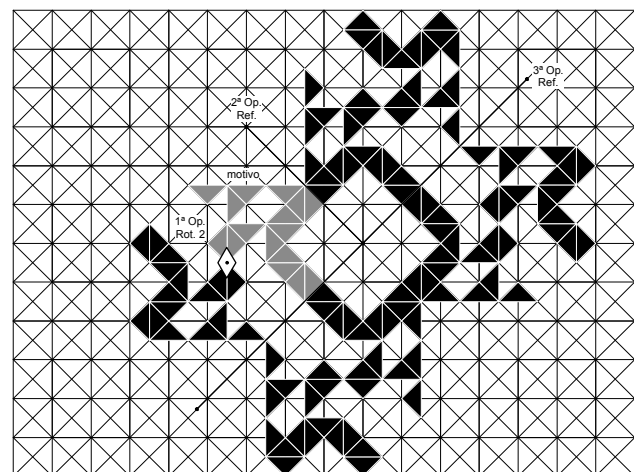
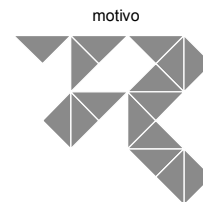


Figura 92 – O aluno é solicitado a utilizar o **motivo** na criação livre de seus *rapports*.

e sistemática, identificando e nomeando cada passo do desenvolvimento do projeto, o aluno possa perceber o potencial uso da geometria como ferramenta na concepção de **formas cada vez mais complexas**.

Atividades para os alunos

Para a Turma A, a Etapa 3 consistiu nos seguintes procedimentos:

O aluno elege **dois** dos quatro **motivos** alcançados na **Etapa 1**, e os importa para as duas **folha de estudos** disponibilizadas pelo enunciado. Cada um destes dois **motivos** dará origem a **três composições**.

Cada composição deverá ser formada por uma sequência de **três operações** sucessivas e cumulativas, o que implica dizer que uma operação considera sempre integralmente o resultado da operação anterior, como **motivo** referente à geração de uma nova **imagem**.

O professor introduz o método do “papel vegetal” que consiste em reproduzir os motivos sobre um papel translúcido para operar com mais agilidade sobre a malha. Se por um lado este procedimento possa implicar em um destensionamento das funções cognitivas mais relacionadas à lógica, por outro habilita o aluno a uma visualização mais dinâmica do processo. A posição dos eixos podem ser rapidamente experimentados, alterados, descartados ou assumidos, conferindo mais liberdade criativa à tarefa.

O sistema de símbolos referente a cada operação determinado à forma de legenda, é informado na folha de instruções. O sistema de notações ganhou novo dado. Ao lado dos símbolos específicos de cada operação, apresentados na etapa anterior (**Etapa 2**), foi solicitado que se anotasse textualmente a sequência de operações. Por exemplo, se uma composição foi resultado, nesta ordem, de uma translação, uma rotação de ordem 2 e uma reflexão, o aluno deveria

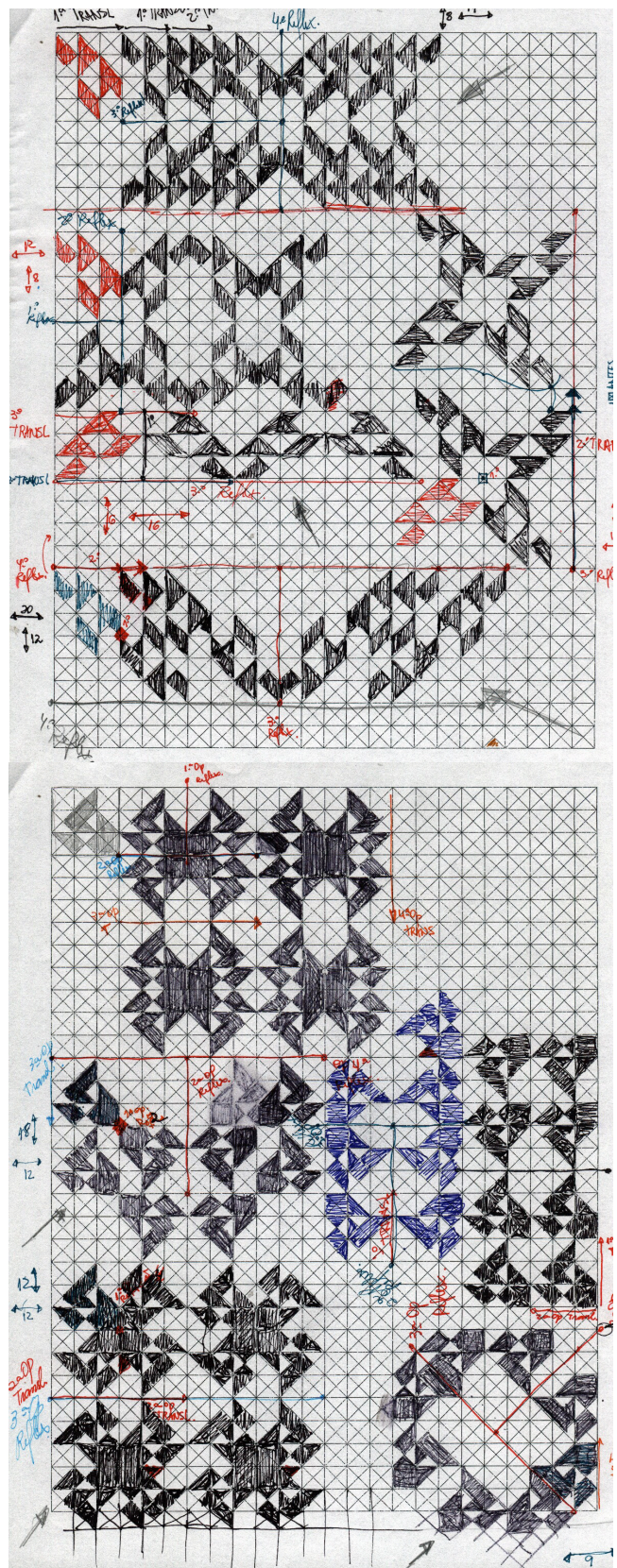


Figura 93 – Estudos da etapa 3.

anotar **1º Op. – T** (indicando que a primeira operação foi uma translação), **2º Op. – Rot. 2** (indicando que a segunda operação é uma rotação de ordem 2), e finalmente **3º Op. – Ref** (indicando que a terceira operação é uma reflexão).

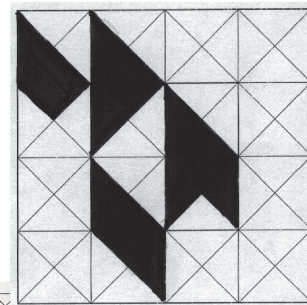


Figura 94 -
Motivo utilizado

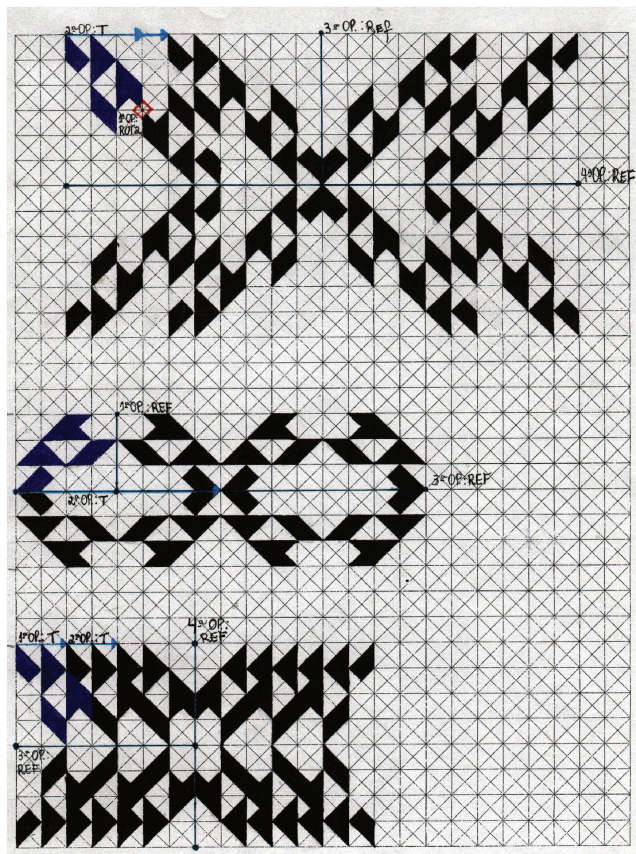


Figura 95

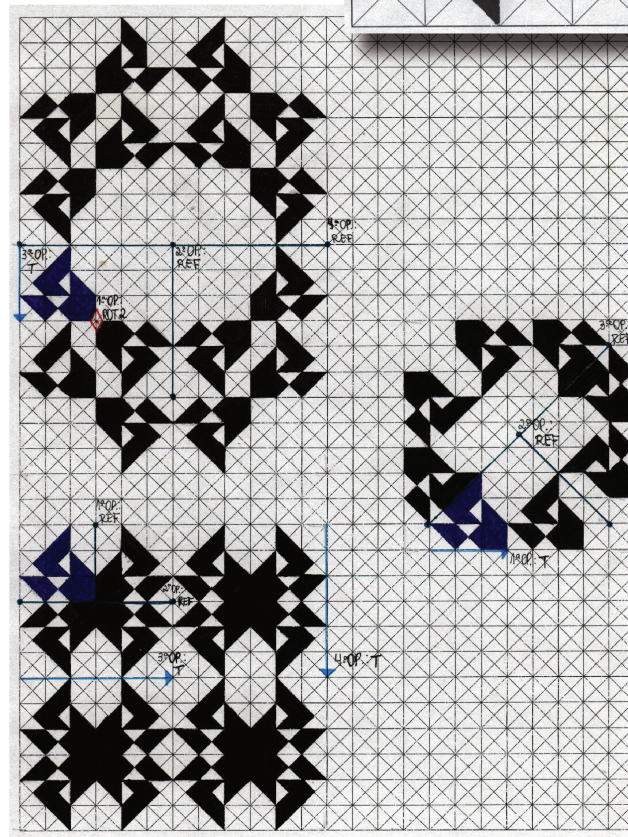


Figura 96

Figuras 95 e 96 - Folha de apresentacao final (trabalho de aluno)

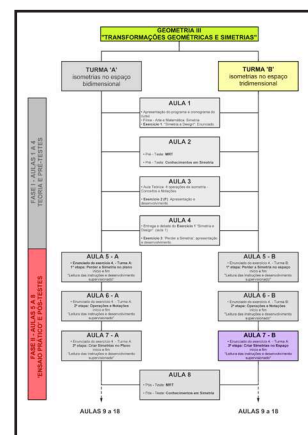
Comentários

Houve alguma confusão sobre a finalidade das folhas de estudos. Alguns alunos entenderam que poderiam pular esta etapa e partir direto para a conclusão do projeto, trabalhando sobre as folhas de apresentação.

O propósito das folhas de estudos é transparecer a diversidade de padronagens que se pode obter ao transformar um mesmo *motivo* através de estratégias distintas. Com esse propósito, foi divulgado pelo professor que os trabalhos seriam avaliados considerando o desenvolvimento do processo – o que envolve explorar amplamente as folhas de estudos - e não apenas pelos resultados registrados nas folhas de apresentação.

7.7.6. AULA 7 TURMA B

EXERCÍCIO 4
ETAPA 3



Objetivos

O objetivo geral desta etapa é consolidar a compreensão das operações, notações, elementos e prerrogativas conceituais das transformações geométricas no espaço tridimensional, através da manipulação de materiais no ambiente de uma oficina de design.

Descrição Analítica

A materialidade do isopor foi um complicador para o caso da rotação, implicando em um empenho maior do professor para apresentar esta operação no espaço, do que foi para o caso da *Turma A*, onde o conceito foi apresentado sobre o plano.

Sobre o plano, a transparência do papel vegetal permite que *motivo* e *imagem* “tomem o mesmo corpo” no momento que precede a transformação, podendo ocupar o mesmo espaço através da sobreposição. O mesmo não permite o isopor.

Explicar as operações transformação no espaço tridimensional físico pode, como foi neste caso, implicar em solicitar do aluno um certo grau de abstração, pois uma vez que não se pode contar com a sobreposição dos corpos, a congruência entre *motivo* e *imagem*, deve ser compreendida sem demonstração.

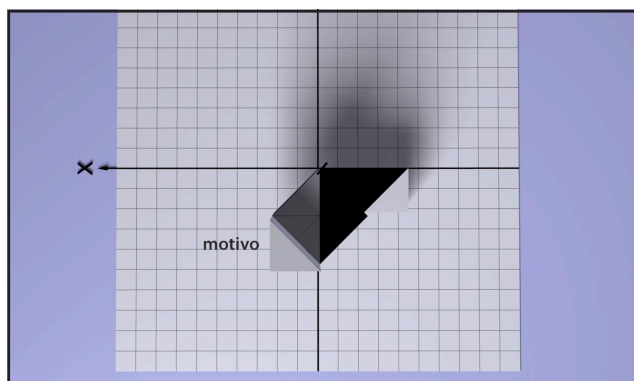


Figura 97

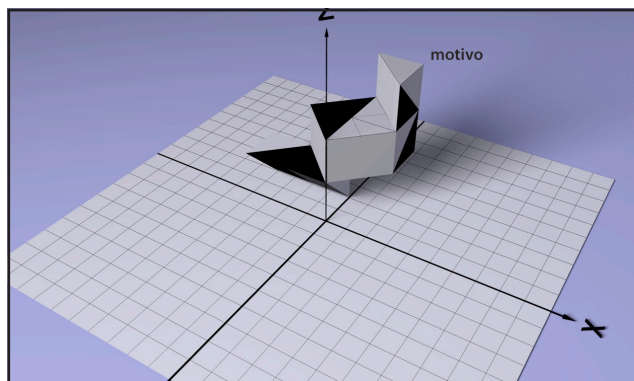


Figura 98

Figuras 97 e 98 – Etapa 3 tem início a partir do posicionamento do motivo.

A maneira de contornar em parte esta limitação foi a apresentação de uma aula concebida e desenvolvida a partir em uma animação publicada no *site* youtube.com, por Rodrigo Herrera Velazco [W3]. O vídeo, batizado *Desarrollo Morfológico* reconstrói digitalmente da obra de autoria do arquiteto americano Peter Eisenmann, conhecida como **Casa Guardiola**, através de operações sucessivas de transformações, interpenetrações, adições e subtrações, a partir da mesma primitiva utilizada no exercício 4: O **cubo**.

As semelhanças entre as duas circunstâncias entre a demanda do exercício e o conteúdo do vídeo permitiram sua associação em complemento.

A aula expôs a *Casa Guardiola* como obra representativa da importância do tópico estudado, na medida que descreve como o processo de composição de formas complexas pode envolver uma sequência de ações ordenadas e regulamentadas por certos critérios e conceitos que podem ser melhor dominados a partir do estudo da geometria. A partir da *decoupage* do vídeo em seus primeiros momentos, foi criada uma sequência de imagens e gráficos a fim de permitir a compreensão dos primeiros passos da composição, que envolveram subtração, translação e rotação. A fundamentação conceitual da aula, bem como a íntegra das imagens e gráficos criados para esse fim, estão no Anexo 12.

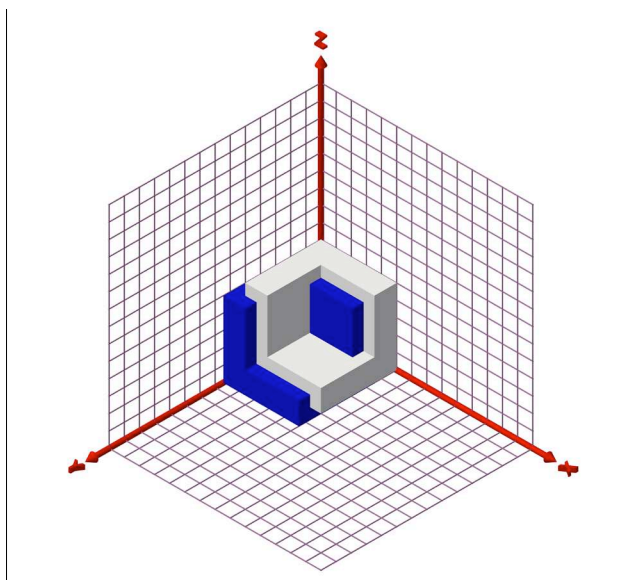


Figura 99 – A primitiva original após as transformações.

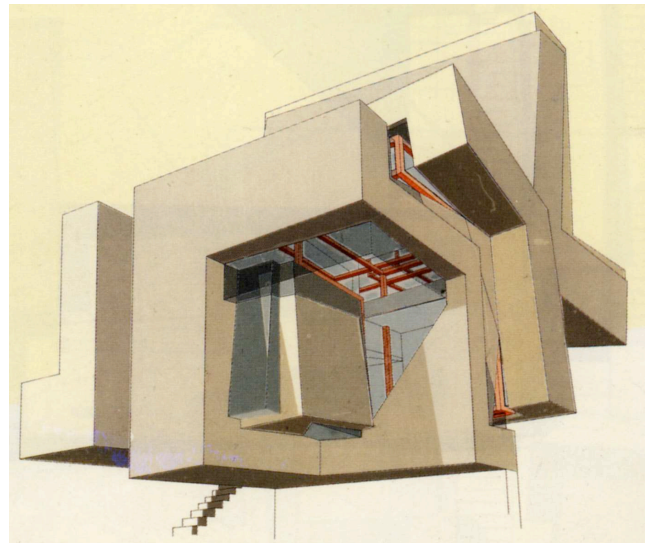


Figura 100 – Casa Guardiola, 1998 - Peter Eisenmann

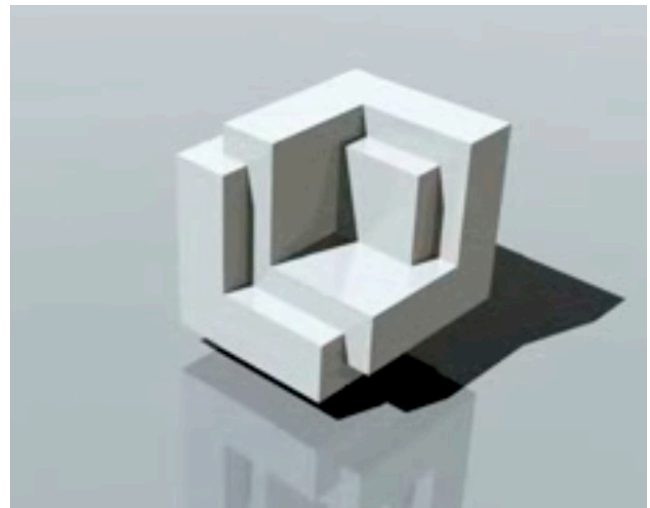


Figura 101 – Casa Guardiola - Desenvolvimento formal. [W3]

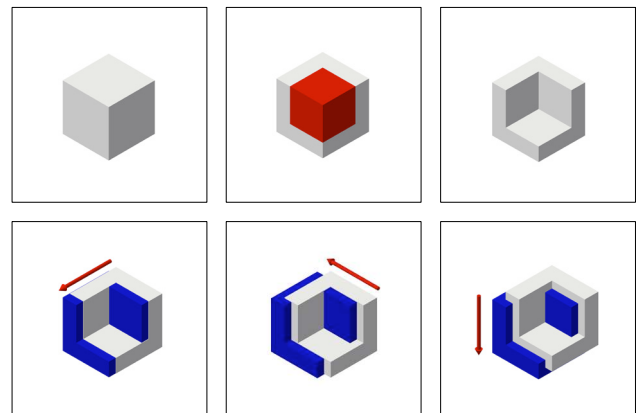


Figura 102 – Sequência de operações sobre o cubo: Subtração e translações.

Atividades para os alunos

As duas etapas precedentes envolveram a modelagem a partir de um cubo - uma forma primitiva altamente simétrica (13 eixos de simetria) - seccionado em partes que recombinaram-se, e originaram dois pares maquetes espelhadas, ou refletidas. Cada passo da concepção e construção dos módulos foi permeado pelo método geométrico; os conceitos geométricos envolvidos, como a perda da simetria, congruência e operações isométricas, foram evidenciados à medida que **as partes** de uma maquete final **foram sendo construídas**.

O procedimento proposto na *Etapa 3* demandou do aluno o desenvolvimento de **uma maquete final**, através da articulação das **quatro maquetes parciais**. Os critérios utilizados para o ordenamento dos sólidos foram pessoais do aluno, mas a liberdade estava condicionada a considerarem os parâmetros conceituais de duas operações isométricas consecutivas e distintas: Uma **reflexão** e uma **rotação**. Isto significa que sobre o *motivo* concebido na *Etapa 1*, incidiria uma primeira transformação (rotação ou reflexão), para que em seguida, incidisse sobre o conjunto resultante, nova transformação – novamente uma rotação ou reflexão, que fosse diferente da anterior.

O eixo de rotação seria identificado por um palito de bambu, e o plano de reflexão, por um acetato transparente. A maquete foi sendo concebida enquanto **as partes foram sendo organizadas**.

A tarefa que encerra a *Etapa 3*, e consequentemente o Exercício 4, é a produção de um memorial descritivo. Sua formatação segue o modelo proposto no enunciado, no qual há dois campos de descrição das operações aplicadas: Um verbal, redigido em palavras e outro imagético, registrado em fotografia; em ambos, espera-se que o aluno demonstre capacidade em identificar, interpretar e descrever os principais elementos e procedimentos de cada transformação implicada.

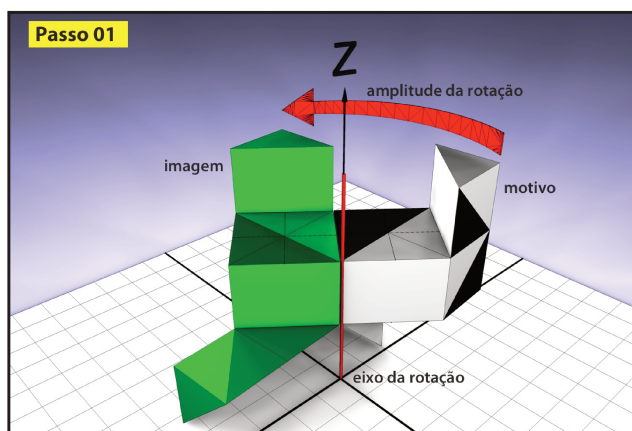


Figura 103 – Neste exemplo o motivo é rotacionado em torno de um eixo a uma amplitude de 90° criando uma imagem.

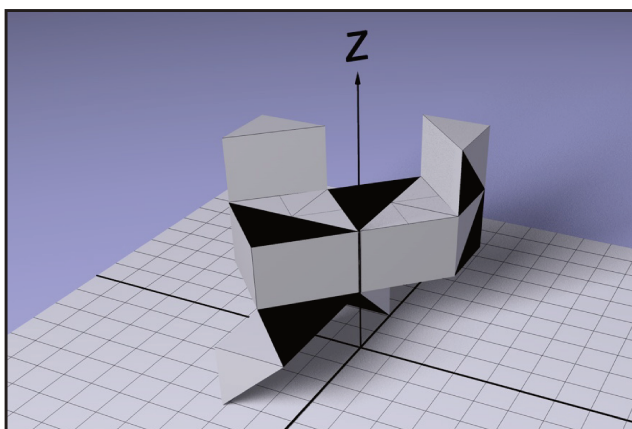


Figura 104 – Sólido resultante da operação de rotação.

Comentários

A despeito da aula teórica e do exemplo da Casa Guardiola, houve certa dificuldade em abstrair a **congruência** das maquetes parciais idênticas, especialmente a rotação, em razão de sua materialidade, e este conceito especificamente pareceu ser mais facilmente compreendido através da sobreposição dos desenhos feitos em transparências, ou no ambiente virtual natural do computador.

A maior parte dos erros decorreram da incapacidade do aluno em reconhecer entre o *motivo* e sua *imagem* respectiva, a **congruência** de seus vértices e arestas, de maneira a tornar-lhe **invariantes** os pontos comuns, através do posicionamento dos eixos de simetria.

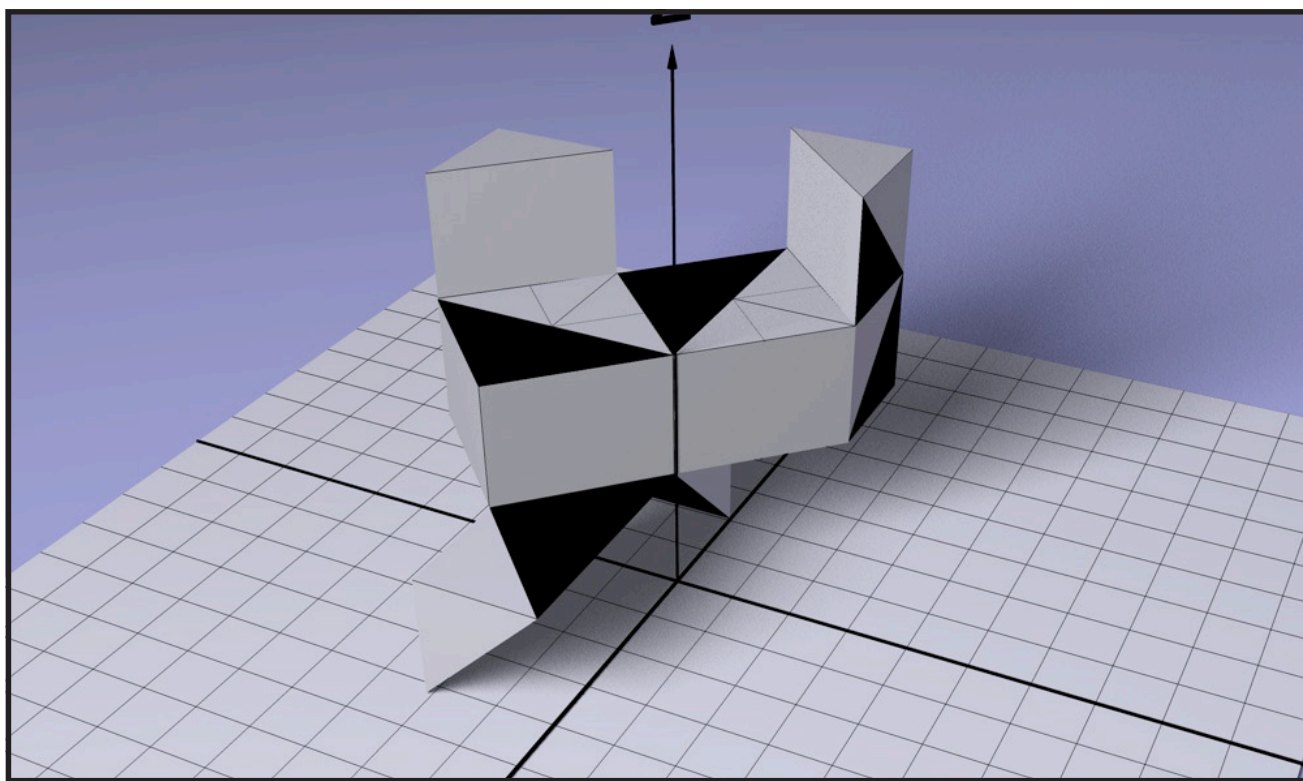


Figura 105

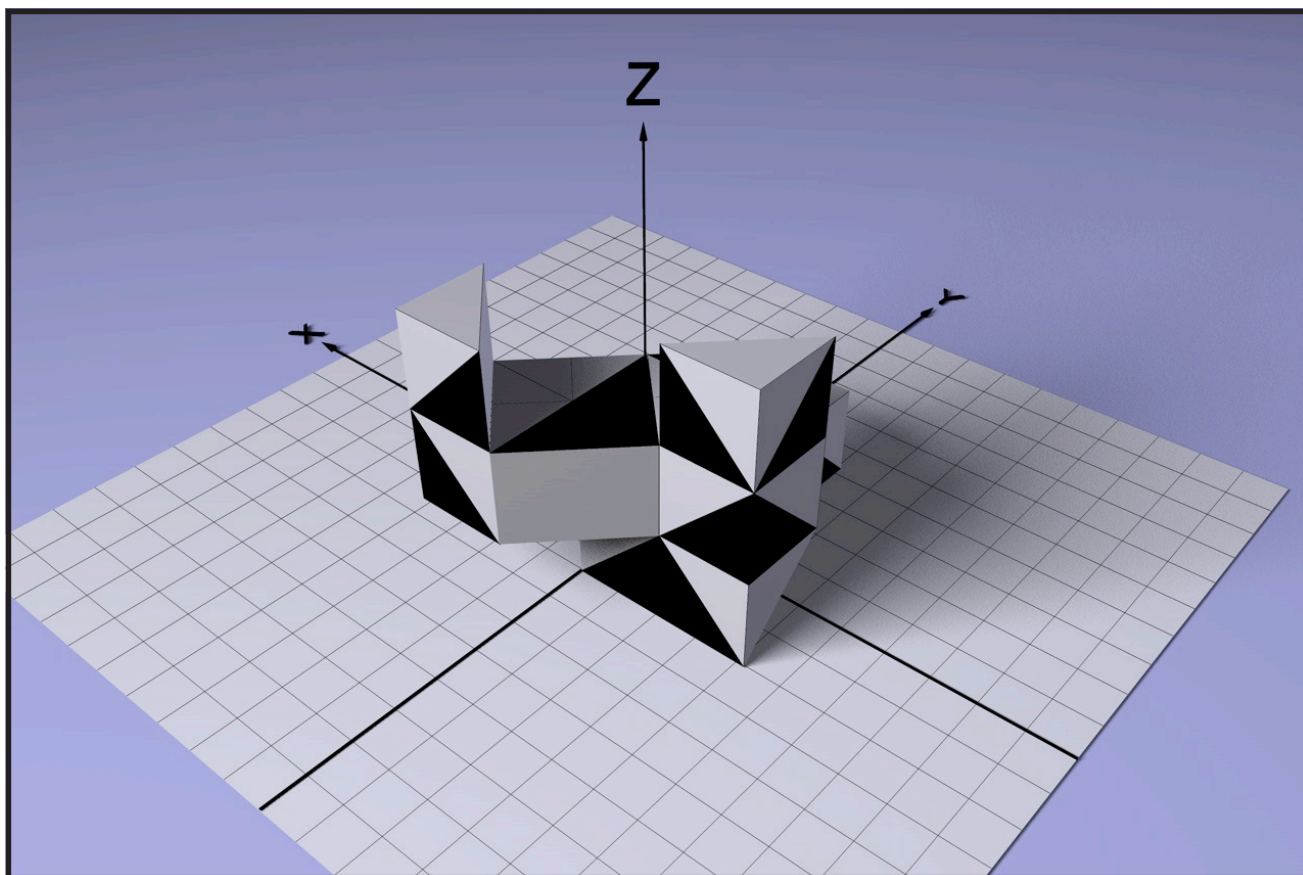


Figura 106

Figuras 105 e 106 - Sólidos resultantes da operação de rotação

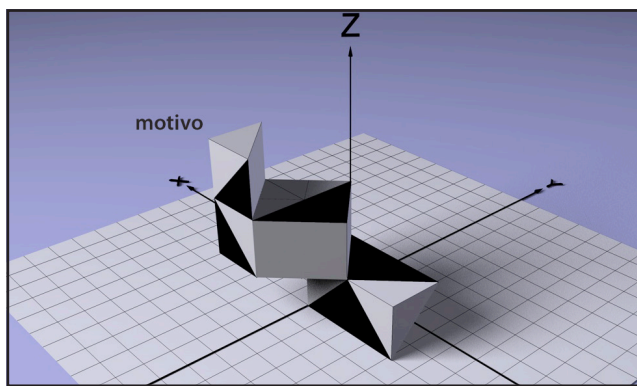


Figura 107

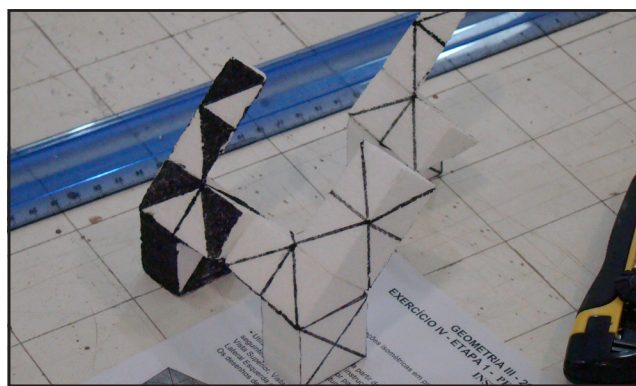


Figura 111

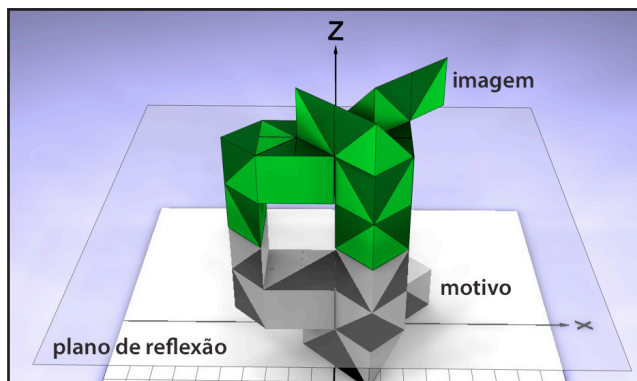


Figura 108

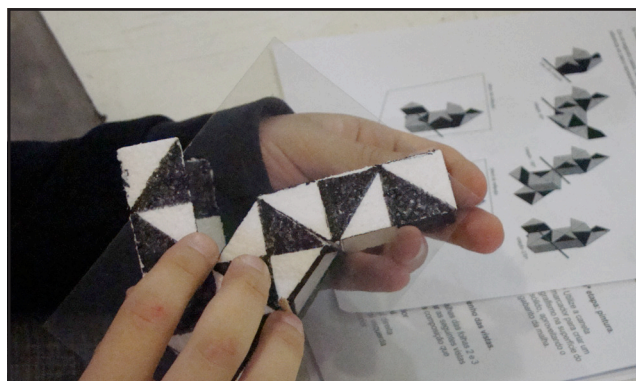


Figura 112

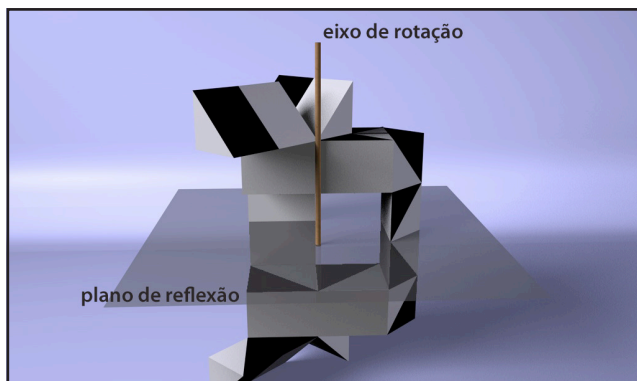


Figura 109

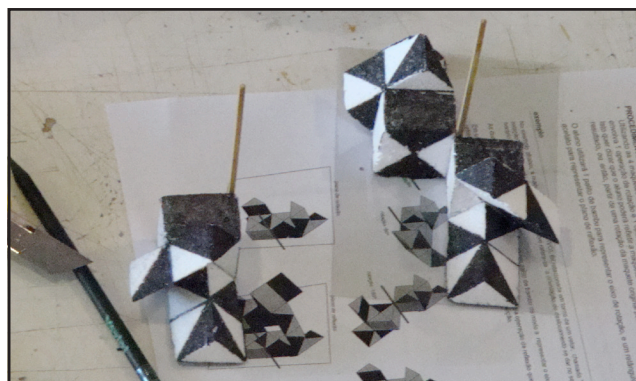


Figura 113

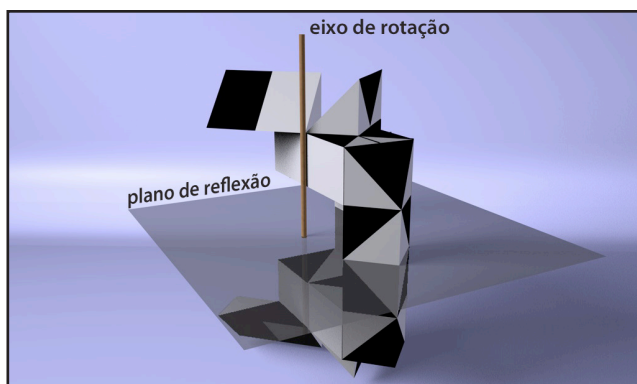


Figura 110

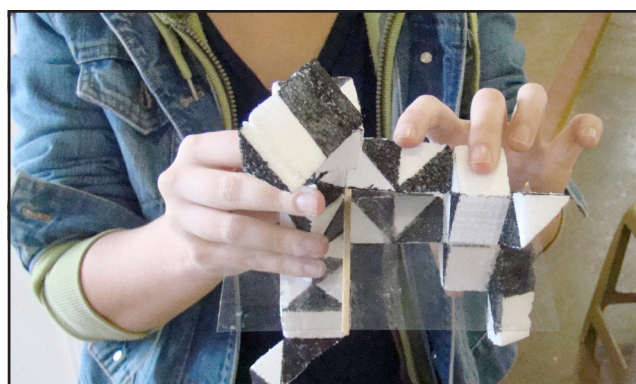


Figura 114

Figuras 107, 108, 109 e 110 – O sólido resultante da primeira operação é refletido a partir do estabelecimento de um eixo plano resultando no rapport tridimensional.

Figuras 111, 112, 113, 114 – Andamento da Etapa 4.

7.7.7. AULA 8 TURMAS A E B

Objetivos

Aplicação dos dois pós-testes. O **MRT** e **Conhecimentos em Simetria**.

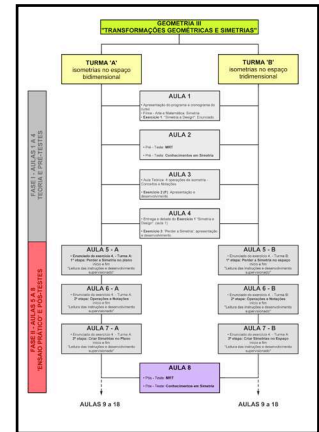
Descrição Analítica

Não houve novidades para os alunos. Ambos os testes foram idênticos aos aplicados na aula 2. O sentido de importância da presença dos alunos foi reforçado em razão da possibilidade de criar um retrato da validade do método, bem como pela oportunidade do aluno receber o retorno de seu desempenho.

Assim, não houve nenhuma impugnação de participação motivada pela ausência nos pós-testes. A presença foi de 100% nas duas turmas, entre os alunos que participaram dos pré-testes.

A exemplo do que ocorreu nos pré-testes, foram aplicados no horário de aulas, no mesmo dia para os dois grupos, sendo o professor, autor deste trabalho, o responsável pela administração de ambos.

Nesta aula ainda, logo após os testes, a duas turmas entregaram os trabalhos relativos à *Etapa 3*, iniciados na semana anterior.



MRT - Mental Rotation Test

Identificação: _____ Idade: _____

Este é um teste para mensurar a sua habilidade de observar o desenho de um objeto e encontrar o mesmo em um conjunto de objetos similares. A única diferença entre o objeto original (à esquerda) e os outros é que estes são apresentados em ângulos diferentes (rotacionados). Um exemplo deste princípio é apresentado abaixo, onde um mesmo objeto é mostrado em diferentes posições. Olhe para qualquer um deles e veja que, a única diferença é que estão representados em ângulos diferentes.

Abaixo estão dois desenhos de um novo objeto. Eles não podem fazer parte dos cinco desenhos acima. Você não deve confundir-lhes com os objetos acima, pois são diferentes. Olhe atentamente.

Agora vamos ver um exemplo das questões do teste. Para todas as questões, existe um objeto à esquerda. Você deve determinar entre as alternativas, quais os dois objetos que representam o objeto da esquerda. Em qualquer uma das questões do teste, duas das quatro alternativas representam o mesmo objeto da esquerda. Você deve marcar os objetos corretos.

Vá para a próxima página

Adapted by S. C. Vandenberg, University of Colorado, July 15, 1971.
Revised instructions by H. Crawford, U. of Wyoming, September, 1979.
Images digitized and reprinted by Susanna Douglas, University of Texas, March, 1996.
This is a public domain document and does not require copyright permission.

Figura 115 – Primeira folha do enunciado do teste MRT

NOME COMPLETO: _____ DATA: _____

TESTE DE CONHECIMENTOS SOBRE SIMETRIA
TEMPO LIMITE: 20 MINUTOS

ATENÇÃO:
Os exercícios 1 e 2 são sobre **Simetria Axial**
Os exercícios 3 e 4 são sobre **Simetria de rotação**

1 Para cada figura abaixo, determinar qual das figuras possui simetria em relação a uma linha (simetria axial).

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
a) A figura é simétrica em relação 'a linha'?					
b) Quantas linhas de simetria tem a figura?					
c) Desenhe todas as linhas de simetria existentes.					

2 Complete cada uma das figuras dadas, para criar uma figura que seja simétrica em relação 'a linha'.

2.1	2.2	2.3
2.4	2.5	

Figura 116 – Primeira folha do enunciado do teste de Simetria.

SEÇÃO 8 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISE ESTATÍSTICA

8.1. INTRODUÇÃO

Esta seção divulga os resultados obtidos através da aplicação dos testes MRT e TS.

Para análise dos dados, foi utilizado o **teste t de student para dados emparelhados**, e sua organização considerou os seguintes fatores para cada um dos dois testes:

1. Os Grupos (Grupo de Controle e Grupo de Tratamento)
2. Os Momentos (Pré-Teste e Pós-Teste)
3. Os Gêneros (Masculino e Feminino)

Com base na múltipla articulação destes fatores, e com vistas a fornecer argumentos quantitativos voltados a esclarecer as principais questões propostas nesta tese, as médias individuais e coletivas são apresentadas na forma de gráficos e tabelas comentados, de acordo com seguinte ordem:

1. MRT
2. TS
3. MRT x TS

O MRT e a habilidade cognitiva que ele afere, estão apresentados na seção 5.

O TS está apresentado segundo sua constituição na sub-seção 8.8., e em seu enunciado integral no Anexo 2

8.2. CONDIÇÕES GERAIS DO EXPERIMENTO

O experimento envolveu uma amostra de 60 estudantes, distribuídos em dois grupos:

1. **Grupo de Controle** (Turma A) composto por 29 participantes, divididos por gênero em dois sub-grupos: 12 homens e 17 mulheres.

2. **Grupo de Tratamento** (Turma B) composto por 31 participantes, divididos por gênero em dois sub-grupos: 15 homens e 16 mulheres.

Ambos grupos receberam formação conceitual e exercitaram-se no tópico *Transformações Geométricas*; entretanto, enquanto a **Grupo de Controle** utilizou apenas meios bidimensionais ao longo de todo o experimento (Fase I + Fase II), o **Grupo de Tratamento**, valeu-se de meios bidimensionais na Fase I, e de manipulativos físicos tridimensionais, na Fase II.

Com o objetivo de compreender o alcance do impactos causados na capacidade cognitiva de rotação mental, bem como no nível de conhecimentos gerais sobre as transformações geométricas em ambos os grupos, foram utilizados **dois testes**, em dois momentos, na forma de **Pré Teste e Pós Teste**:

1. O teste psicométrico **MRT** (*Mental Rotation Test*), cujo limite de pontuação é 40, foi utilizado para medir as possíveis variações decorrentes da distinção entre os meios investigativos, sobre a HRM (Habilidade de Rotação Mental) dos estudantes.

2. Para medir o nível de compreensão sobre o conteúdo teórico do tópico das transformações geométricas, utilizou-se **TS** (Teste de Simetria), cujo limite é de 21 pontos.

A partir do processamento do resultado dos testes em seus dois momentos (pré e pós-testes), foi gerada uma base de dados que ordenou as notas obtidas por cada um dos 60 participantes, agrupando os resultados por gênero e por grupo (controle e tratamento).

Os resultados relativos a cada um dos dois testes são descritos ao longo desta seção separadamente, compartilhando a mesma estrutura de organização sequencial dos gráficos e tabelas. Primeiro são apresentadas as análises relativas ao Mental Rotation Test; em seguida são apresentadas as análises relativas

ao Teste de Simetria, e por fim, os dados do MRT e TS são emparelhados e apresentados em associação.

Os elementos estatísticos são apresentados de forma a comparar os resultados obtidos nos testes, partindo de agrupamentos mais amplos, em que busca-se sobretudo a compreensão do comportamento do conjunto dos participantes, seguindo em direção `as análises mais aproximadas e refinadas, em que identifica-se a posição de cada um dos indivíduos em cada um dos dois momentos de ambos os testes, segundo seu gênero, bem como o grupo ao qual pertence (controle ou tratamento).

Desta maneira, os dados são alinhados e categorizados de forma a fornecer os subsídios estatísticos necessários à investigação `as duas hipóteses desta tese:

1. O estudo sistemático do tópico da geometria ‘transformações geométricas’, é capaz de auxiliar consideravelmente o desenvolvimento da habilidade de rotação mental em alunos de design.

2. Uma prática de estudo que inclua em seus processos metodológicos, o uso de manipulativos físicos tridimensionais, pode ser mais efetiva na promoção da habilidade de rotação mental, que outra que utilize apenas o desenho.

Duas outras questões de interesse puderam ainda ser investigadas a partir da depuração dos dados:

1. Confirma-se a tendência observada em outros estudos, da superioridade de desempenho masculino sobre o feminino, em atividades que envolvam habilidades de visualização espacial?

2. O que se pode afirmar sobre o desempenho do aluno ao compararmos suas médias no MRT e TS?

8.3. ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

Os dados básicos completos, correspondentes às quatro notas (MRT e TS, pré e pós), relativas a cada um dos sessenta estudantes participantes, estão apresentadas no anexo X. A tabela abaixo apresenta um esquema hierárquico apropriado, apresentado as médias daquelas notas ordenadas em subgrupos correspondentes.

Tabela 5 – Distribuição hierárquica dos dados por Teste, Momento, Grupo e Gênero

TESTE MRT					
PONTUAÇÕES MÉDIAS EM HIERARQUIA					
TESTE / MOMENTO / GRUPO / GÊNERO					
Médias das Notas			Diferenças entre Médias		
Teste	Momento	Grupo	Gênero		
TESTES DO EXPERIMENTO	MRT	pré	♀	20,7	9,5
			C	24,6	
		T	♂	30,2	4,0
			♀	21,4	
		pós	♂	25,4	7,0
			C	31,2	
	TS	pré	♀	12,4	-0,1
			C	12,3	
		T	♂	12,3	2,0
			♀	12,8	
		pós	♂	14,8	2,0
			C	14,7	
	MRT	pré	♀	28,3	7,0
			C	31,2	
		T	♂	35,3	0,6
			♀	28,3	
		pós	♂	28,9	-2,7
			C	28,5	
TS	pré	♀	13,9	-0,1	
		C	14,7		
	T	♂	15,9	0,6	
		♀	14,3		
	pós	♂	14,9	-0,1	
		C	14,6		

LEGENDA:

MRT: Mental Rotation Test

TS: Teste de Simetria

pré: Pré-Teste

pós: Pós-Teste

C: Grupo de Controle

T: Grupo de Tratamento

♀ Gênero Feminino

♂ Gênero Masculino

8.4. ANÁLISE ESTATÍSTICA DO MRT



Gráfico 1 - Distribuição da Amostra Total em intervalos de médias, nos dois momentos do Teste MRT

O gráfico acima retrata o desempenho dos participantes no Teste MRT, segundo o intervalo de notas nos pré e pós testes. De acordo com o modelo de classificação proposto por Shinna *et al* (2002), a capacidade de rotação mental pode ser descrita em três categorias - baixa, média e alta - de acordo com o intervalo de pontuação alcançado no MRT.

Alta HRM: > 35 pontos

Média HRM: ≥ 15 e ≤ 34 pontos

Baixa HRM: ≤ 14 pontos

Comparados os momentos, percebe-se um nítido deslocamento do número de participantes em direção aos intervalos de pontuações mais altas. O total de participantes com alta habilidade de rotação mental, saltou de 10 indivíduos no pré-teste para 23 no pós-teste. Um crescimento de 130,0%.

Nas zonas de pontuação mais baixa HRM, a concentração de indivíduos caiu de 13 indivíduos no pré-teste para 4 no pós-teste.

TESTE MRT
EVOLUÇÃO DAS NOTAS INDIVIDUAIS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
TODOS OS ALUNOS

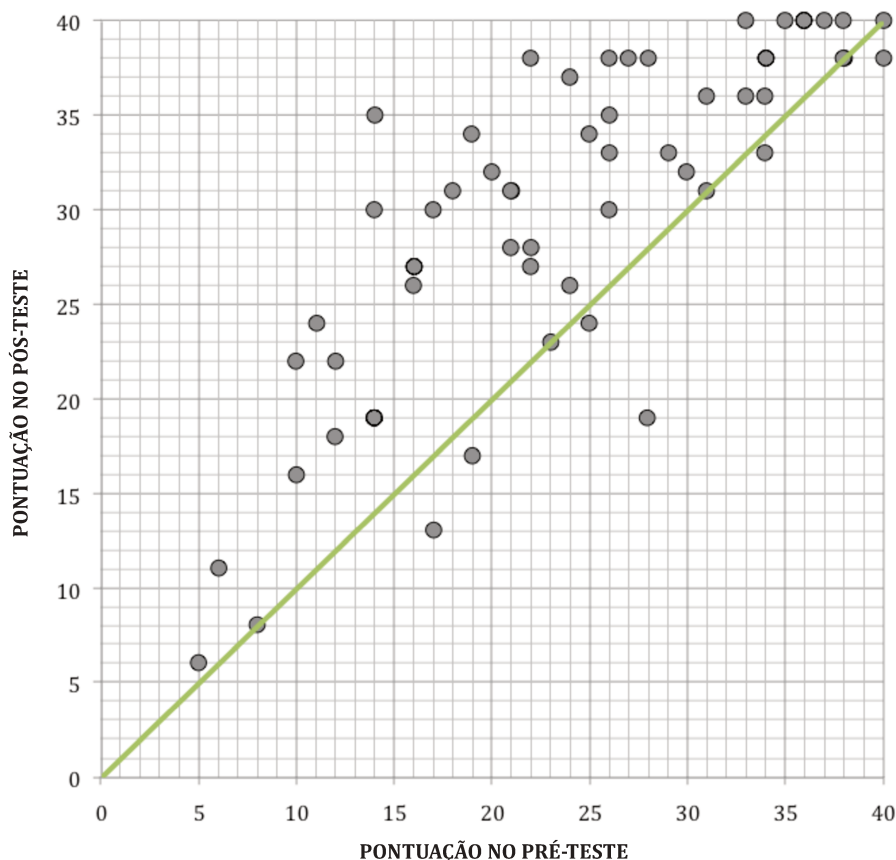


Gráfico 2 - Gráfico de dispersão dos 60 alunos no teste MRT: Pós-Teste versus Pré-Teste

O gráfico de dispersão acima distribui a totalidade dos participantes do experimento (grupos de controle e tratamento) de acordo com o desempenho individual no teste MRT. Cada ponto cinza representa um participante, e sua posição no plano indica seu desempenho específico.

O eixo vertical (Y) indica a pontuação obtida pelo aluno no pós-teste, enquanto o eixo horizontal (X) indica a pontuação no pré-teste. O eixo diagonal $X=Y$. Os pontos localizados sobre a linha, representam os alunos que tiraram a mesma nota no pré e pós testes. Os pontos acima da linha diagonal, correspondem aos alunos que tiveram melhor desempenho no pós-teste do que no pré-teste, sugerindo melhoria na HRM durante o curso. O contrário ocorre com os alunos representados pelos pontos abaixo da diagonal.

A ampla predominância dos pontos acima da diagonal, sugere efeito positivo do treinamento durante o curso.

Nota MRT	Pré			Pós			Frequência Pré & Pós
	frequência	Frequência acumulada	60 – frequência acumulada	frequência	Frequência acumulada	60 – frequência acumulada	
0	0	0	60	0	0	60	0
1	0	0	60	0	0	60	0
2	0	0	60	0	0	60	0
3	0	0	60	0	0	60	0
4	0	0	60	0	0	60	0
5	1	1	59	0	0	60	1
6	1	2	58	1	1	59	2
7	0	2	58	0	1	59	0
8	1	3	57	1	2	58	2
9	0	3	57	0	2	58	0
10	2	5	55	0	2	58	2
11	1	6	54	1	3	57	2
12	2	8	52	0	3	57	2
13	0	8	52	1	4	56	1
14	5	13	47	0	4	56	5
15	0	13	47	0	4	66	0
16	3	16	44	1	5	55	4
17	2	18	42	1	6	54	3
18	1	19	41	1	7	53	2
19	2	21	39	4	11	49	6
20	1	22	38	0	11	49	1
21	3	25	35	0	11	49	3
22	3	28	32	2	13	47	5
23	1	29	31	1	14	46	2
24	2	31	29	2	16	44	4
25	2	33	27	0	16	44	2
26	4	37	23	2	18	42	6
27	1	38	22	3	21	39	4
28	2	40	20	2	23	37	4
29	1	41	19	0	23	37	1
30	1	42	18	3	26	34	4
31	2	44	16	4	30	30	6
32	0	44	16	2	32	28	2
33	2	46	14	3	35	25	5
34	4	50	10	2	37	23	6
35	1	51	9	2	39	21	3
36	2	53	7	3	42	18	5
37	1	54	6	1	43	17	2
38	4	58	2	10	53	7	14
39	0	58	2	0	53	7	0
40	2	60	0	7	60	0	9

Tabela 6 - Distribuição absoluta acumulada e acumulada reversa dos alunos por nota no MRT, tanto no pré-teste como no pós-teste.

Notar que 7 alunos alcançaram a nota máxima no pós-teste, enquanto que apenas 2 fizeram o mesmo no pré-teste.

Tabela 7 - Comparação dos resultados no pré e pós testes do MRT. O Teste “t de student” revela ganho significativo no desempenho médio

Notas Medias						
	Pré	Pós	delta	erro padrão	t de Student	p
MRT	23,97	28,82	5,85	0,7375	7,932	0,00000

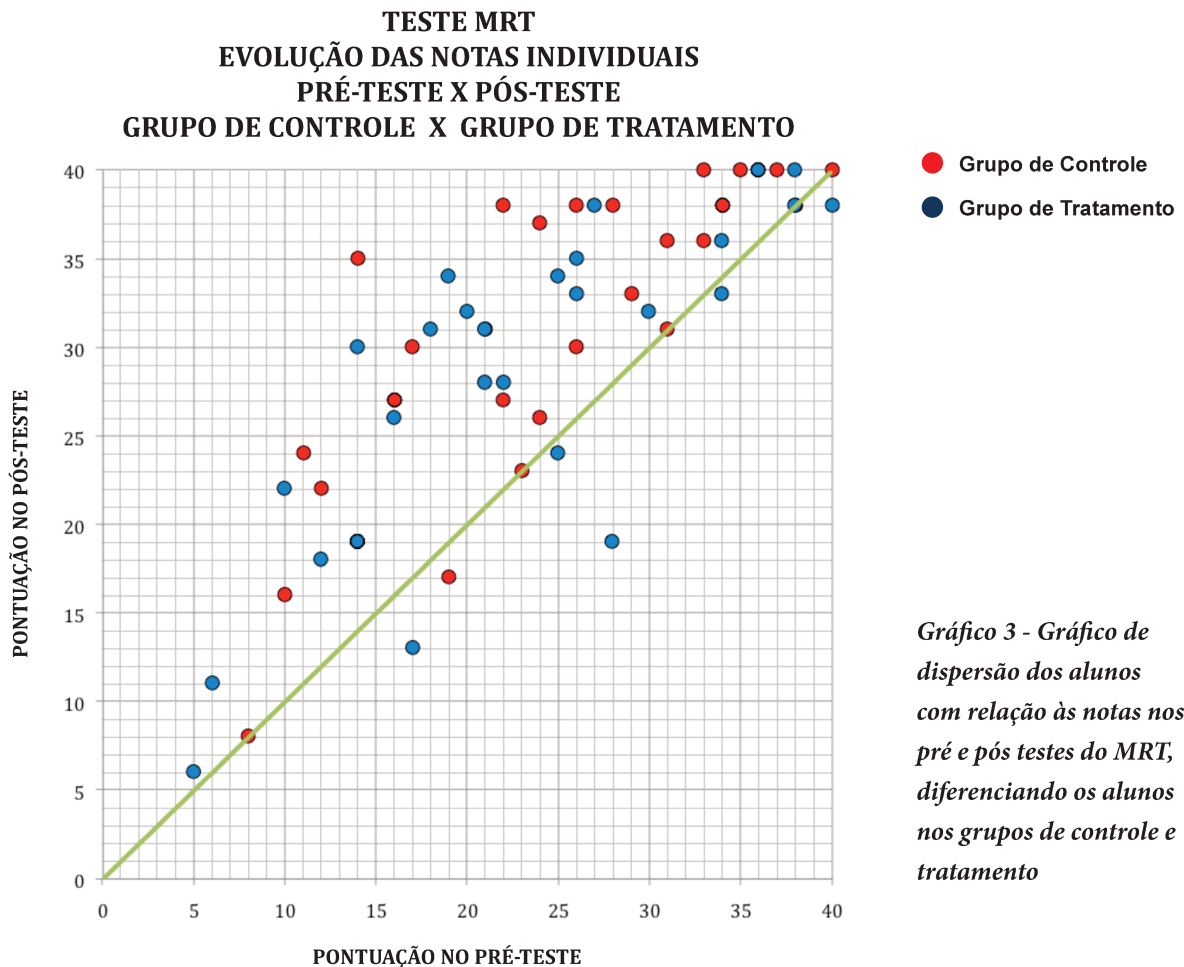
Os dados da tabela acima apontam a evolução dos participantes no teste MRT, considerado a soma dos indivíduos pertencentes aos dois grupos, cuja nota média saltou de 23,97 pontos no pré teste para 29,82 pontos no pós teste. O ganho de 5,85 pontos corresponde a um crescimento de 24,4 %.

A significância estatística das diferenças foi avaliada através do teste **t de student** para dados emparelhados.

O elevado valor da estatística **t de student** revela elevado nível de significancia estatística da diferença de desempenho dos alunos nos dois momentos.

Considerando que a variação nas médias gerais do MRT, entre pré e pós testes, indica, em tese, a extensão do impacto da experiência de ensino/aprendizagem sobre a capacidade cognitiva de rotação mental dos estudantes, e tendo como fundamento os índices estatísticos, pode-se assim concluir que, **a primeira hipótese do trabalho pode ser confirmada:**

“O estudo do tópico da geometria ‘transformações geométricas’, é capaz de auxiliar consideravelmente o desenvolvimento da habilidade de rotação mental em alunos de design”.



O gráfico acima relaciona a totalidade dos participantes do experimento, distintos pelo grupo ao qual pertencem. O grupo de controle é representado por pontos vermelhos e o de tratamento, por pontos azuis.

A comparação das diferenças de desempenho entre os grupos de controle e tratamento implica em comparar os dois métodos de estudo das Transformações Geométricas, e por isso, fornece fundamentos para avaliar a segunda hipótese da tese:

“Uma prática de estudo que inclua em seus processos metodológicos, o uso de manipulativos físicos tridimensionais, pode ser mais efetiva na promoção da HRM, se comparada a outra que utilize apenas recursos bidimensionais”.

O grupo de controle, apresentou um delta de 6,55 pontos na média, saltando de 24,62 pontos no pré teste para 31,17 pontos no pós teste, o que corresponde a uma variação nitidamente significativa de 26,6 % ($p=0,006$).

O grupo de tratamento, apresentou um delta de 5,2 pontos na media, saltando de 23,35 pontos no pré teste para 28,55 no pós teste, o que corresponde a uma variação igualmente significativa de 22,3% ($p=0,039$).

Para que a hipótese se confirmasse, seria necessária uma diferença entre médias considerável a favor do grupo de tratamento. Isso não só não ocorreu como ainda houve pequena variação não significativa, a favor do grupo de controle (4,3 %).

Desta maneira, com base nos dados estatísticos do teste MRT, **não se pode afirmar** que haja superioridade de um método sobre outro, no sentido do incremento da HRM.

Tabela 8 - Estatísticas básicas do MRT, relacionando Grupos e Momentos.

**TESTE MRT
PONTUAÇÕES MÉDIAS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPOS DE CONTROLE E TRATAMENTO**

Grupo	Pré	Pós	delta	t de Student	p
Controle	24,62	31,17	6,55	2,86	0,006
Tratamento	23,35	28,55	5,19	2,11	0,039
geral	23,97	28,82	5,85		

O diagrama abaixo reorganiza a hierarquia dos dados obtidos no **MRT**, desdobrando-os em uma sequência que considera o gênero, o grupo e o momento.

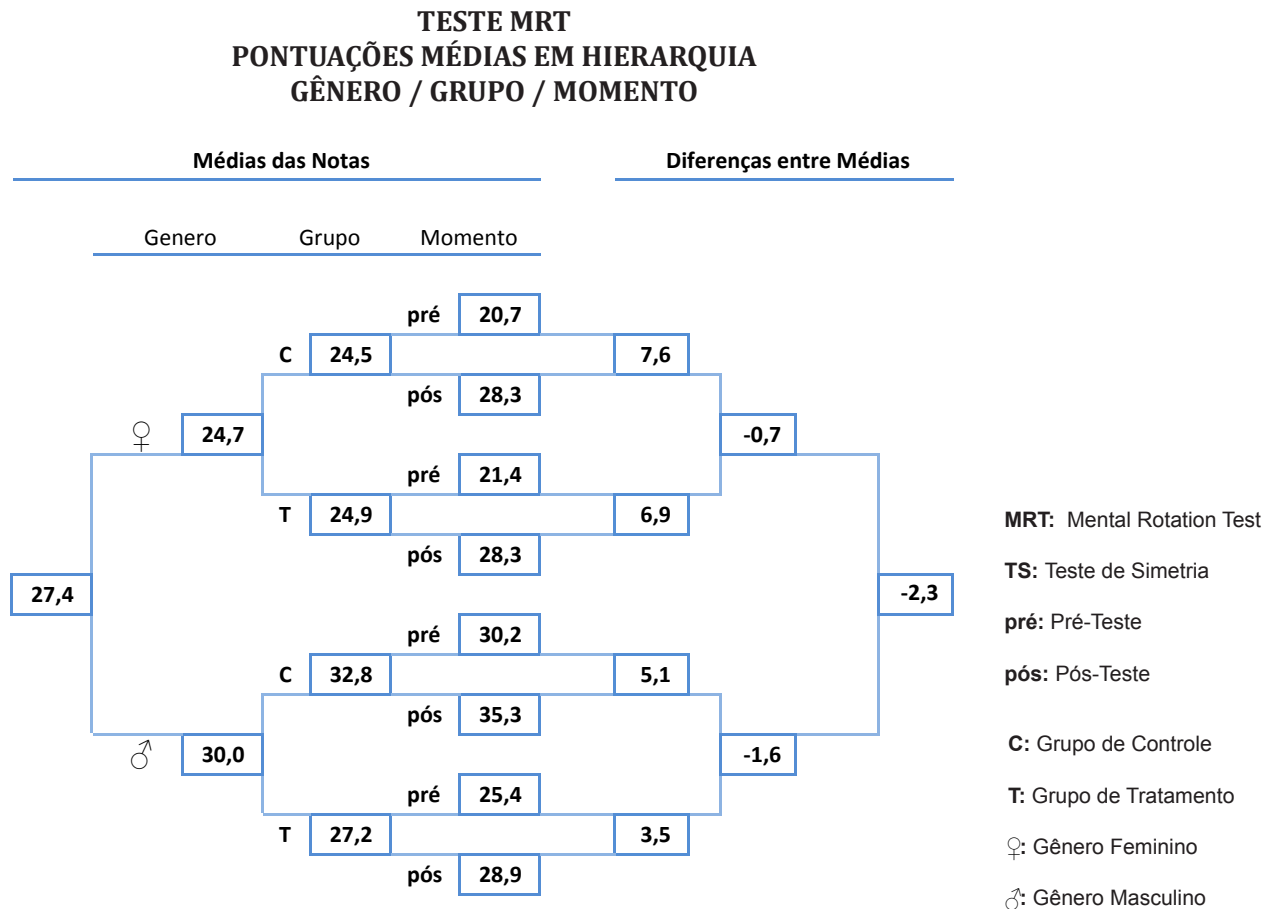


Figura 117 – Distribuição dos dados por Gênero, Testes e Momentos

Ao analisar os resultados do **MRT** a partir das diferenças entre os gêneros, pode-se compreender melhor a variação das médias entre os grupos, bem como comprovar a afirmação presente em outros estudos da mesma natureza, que afirmam um melhor desempenho masculino sobre o feminino, em tarefas que impliquem a Habilidade de Visualização Espacial.

As **mulheres** de ambos os grupos, apresentaram um desenvolvimento homogêneo nos dois momentos do teste **MRT**, tendo mesmo atingido índices muito semelhantes.

No grupo de controle, a variação média entre os momentos foi de 7,6 pontos (20,3 pontos no pré-teste e 28,3 no pós), significando uma variação de 36,7 %, enquanto no grupo de tratamento, a variação média foi de 6,9 pontos (21,4 pontos no pré-teste e 28,3 no pós), significando uma variação de 32,2 %. A diferença de 0,7 pontos na média entre as duas (ou 4,5 %), não tem significância estatística.

Chama ainda a atenção, o fato da pontuação média das mulheres no pós teste de ambos os grupos ser exatamente a mesma: 28,3 pontos.

Os **homens** de ambos os grupos também apresentaram desenvolvimento homogêneo se comparados seus resultados em ambos momentos do teste.

No grupo de controle, a pontuação média saltou de 30,2 no pré teste para 35,3 pontos no pós teste, implicando em um acréscimo na média de 5,1 pontos; uma variação de 16,9 %. No grupo de tratamento, a pontuação média saltou de 25,4 pontos no pré teste para 28,9 no pós teste, implicando em um acréscimo na média de 3,5 pontos, ou de 13,8 % de variação. A pequena diferença de 3,1%, sem significância estatística, ilustra que ambos os grupos tiveram, uma variação homogênea na ampliação de suas médias.

Entretanto, diferentemente do que ocorreu com as mulheres na comparação de rendimento nos grupos de controle e tratamento, entre os homens as médias alcançadas nos dois momentos do teste não apresentaram homogeneidade.

Tabela 9 - Sumário de médias do MRT, relacionando Gênero, Grupos e Momentos.

TESTE MRT - SUMÁRIO DE MÉDIAS PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE GRUPO E GÊNERO						
Grupo	Controle		Tratamento		Contr. + Trat.	
	pré	pós	pré	pós	pré	pós
♀	20,7	28,3	21,4	28,3	21,05	28,3
♂	30,2	35,3	25,4	28,9	27,8	32,1
♀ + ♂	25,45	31,8	23,4	28,6	24,4	30,2

No pré-teste, os homens do grupo de controle alcançaram a média de 30,2 pontos, enquanto no grupo de tratamento, a média foi de apenas 25,4 pontos. Uma diferença de 4,8 pontos correspondente a 18,9 % do valor inicial. No pós-teste esta diferença se intensificou. Enquanto o grupo de controle foi a 35,3 pontos na média, o grupo de tratamento foi a 28,9, descrevendo uma diferença de 6,4 pontos, ou 22,1 %.

Comparadas as médias masculinas entre os dois grupos, observa-se que o grupo de controle alcançou uma média geral de 32,8 pontos, enquanto o grupo de tratamento, 27,2 pontos. Isto implica numa diferença de **20,6 %** na média, o que é bastante significativo se comparado à população feminina, para quem a diferença entre grupos de controle e tratamento foi de apenas **4,5 %**.

E esta diferença poderia ter sido ainda maior, se o teste MRT oferecesse um intervalo de pontuação mais extenso. Quatro homens do grupo de controle atingiram o patamar máximo de 40 pontos, enquanto apenas um fez o mesmo no grupo de tratamento. Isso reflete certo grau de imprecisão do instrumento de medição, que certamente influenciou nos resultados, pois limitou o desempenho de 10% da população total ao limite de 40 pontos.

As diferenças de desempenho entre grupos de controle e tratamento podem, em parte, ser compreendidas pelo comportamento não homogêneo dos homens. Ainda que a composição dos grupos tenha agrupado apenas alunos da mesma turma, e seguido um método aleatório que considerou ordem alfabética e equilíbrio numérico entre gêneros, a população masculina do grupo de controle possui inerentemente, neste experimento, uma maior HRM que a população masculina do grupo de tratamento.

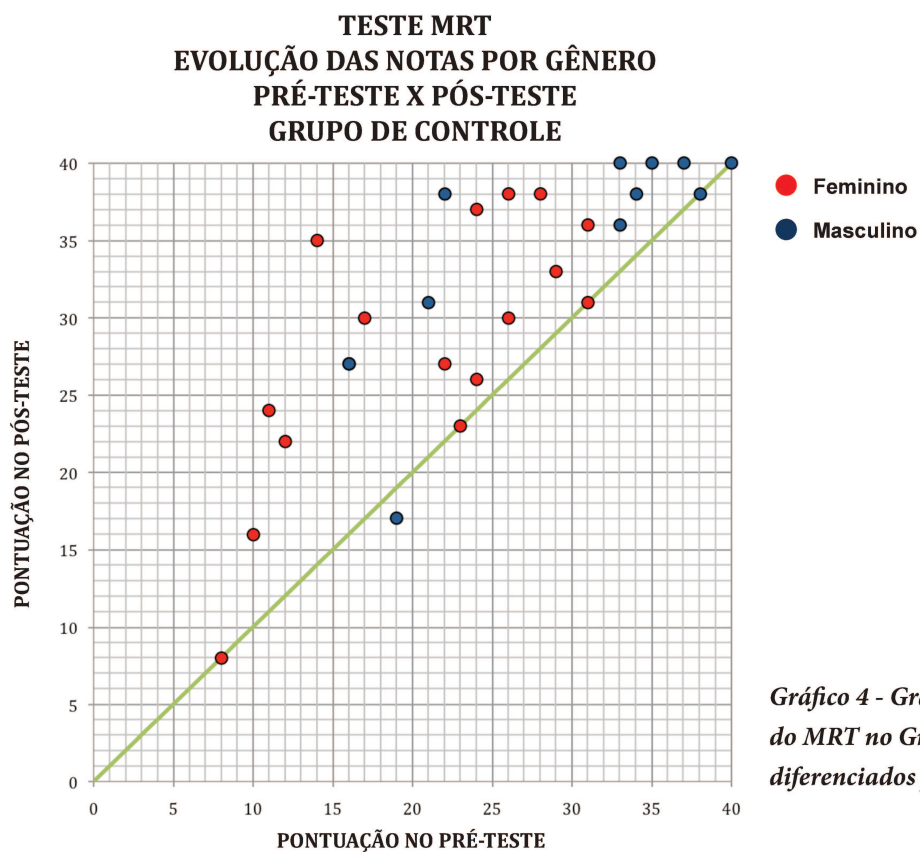


Gráfico 4 - Gráfico de dispersão do MRT no Grupo de Controle, diferenciados por gênero

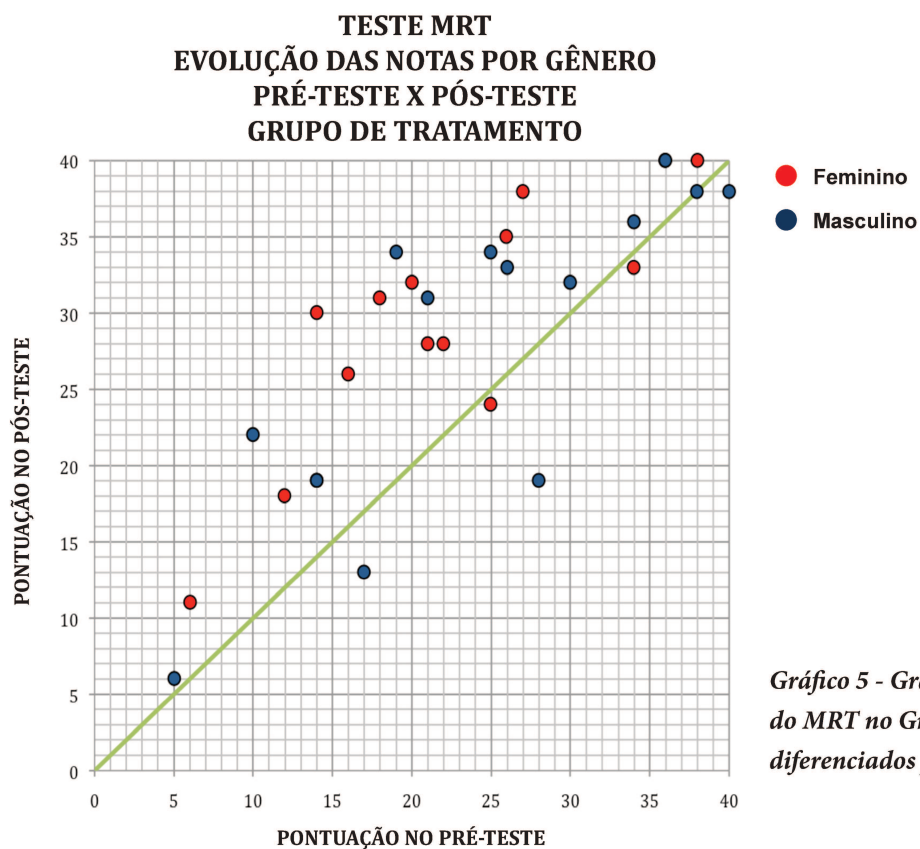


Gráfico 5 - Gráfico de dispersão do MRT no Grupo de Tratamento, diferenciados por gênero

Tabela 10 - Análise da variância dos resultados no MRT

Fonte	g.l.	SQ	F	p
Sexo	1	44,12	2,4	0,124
Turma	1	9,36	0,58	0,446
Teste	1	73,63	4,89	0,029
Sexo*Turma	1	0,79	0,05	0,829
Sexo*teste	1	0,25	0,06	0,805
Turma*teste	1	18,93	1,37	0,244
Sexo*Turma*teste	1	20,78	1,23	0,269
Erro	112	1886,0		
Total	119	2053,9		

A tabela acima sumariza a variância dos resultados obtidos no Teste MRT. Com exceção de do fator **Teste** (com $p=0,029$), os demais fatores (Sexo e Turma - ou Gênero e Grupo) e todas as interações, não revelaram influência significativa no desempenho.

8.5. ANÁLISE ESTATÍSTICA DO TESTE DE SIMETRIA

TS - TESTE DE SIMETRIA DISTRIBUIÇÃO DAS NOTAS EM INTERVALOS PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE TODOS OS ALUNOS

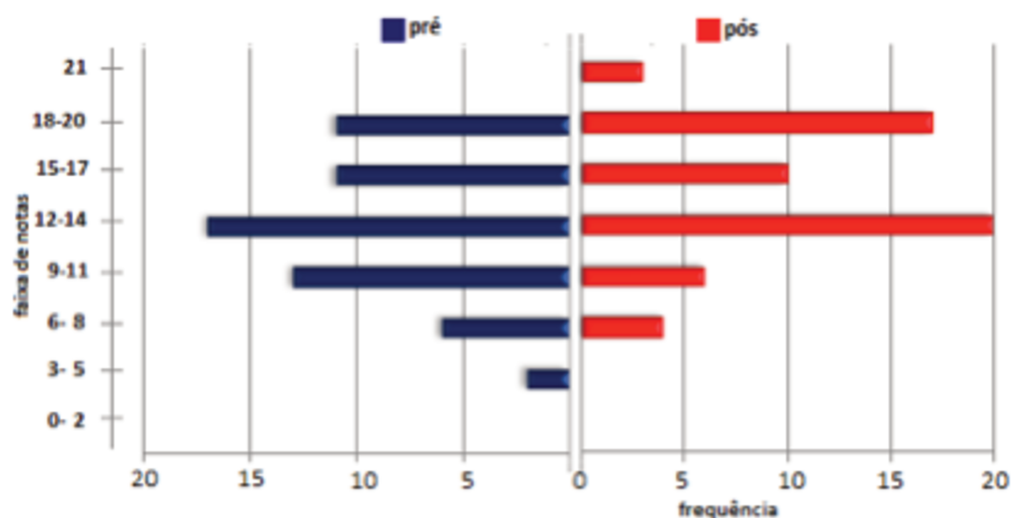


Gráfico 6 - Distribuição da Amostra Total em intervalos de médias, nos dois momentos do Teste de Simetria

O gráfico acima retrata o desempenho da amostra total, no Teste de Simetria, através do intervalo de notas nos pré e pós testes.

Comparados os dois momentos, percebe-se pequena variação entre as populações situadas no intervalo 12 a 17 questões: De 28 participantes (46,6% do total) no pré teste, para 30 participantes (50,0% do total).

No entanto, as zonas mais baixas da pontuação, situadas entre 0 e 11 pontos, a frequência sofreu uma desejável diminuição. De 21 participantes no pré teste (35,0% do total), para 10 participantes no pós teste (16,6% do total). Uma diferença de 18,4 %.

Esta diferença ressurgiu nas faixas mais altas da pontuação, criando uma inexistente até então.

O intervalo de 18 a 21 pontos concentrava no pré teste, 11 participantes (18,3% do total), e passou para 20 participantes no pós teste (33,3% do total).

**TESTE DE SIMETRIA
EVOLUÇÃO DAS NOTAS INDIVIDUAIS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
TODOS OS ALUNOS**

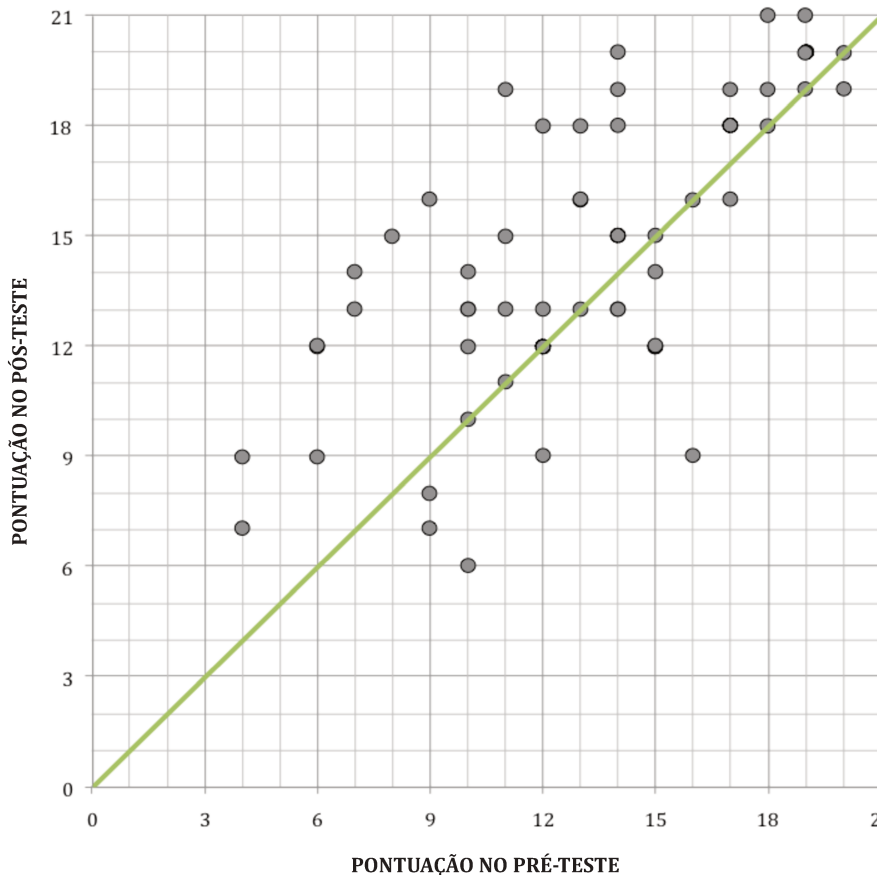


Gráfico 7 - Distribuição da Amostra Total em relação ao desempenho individual, nos dois momentos do TS

O gráfico acima distribui a totalidade dos participantes do experimento (grupos de controle e tratamento) de acordo com o desempenho individual no teste de simetria (TS). Cada ponto cinza representa um participante, e sua posição no plano indica seu desempenho específico.

Percebe-se uma tendência de flutuação dos indivíduos em direção à metade superior do gráfico, mostrando desempenho no pós teste, ainda que tenha havido número significativo de participantes (19 alunos) que permaneceram estagnados com a mesma nota, ou que apresentaram decréscimo (31,6%).

Tabela 11 - Distribuição absoluta acumulada e acumulada reversa dos alunos por nota no TESTE DE SIMETRIA, tanto no pré-teste como no pós-teste.

Nota TS	Pré			Pós			Frequência Pré & Pós
	frequência	Frequência acumulada	60 – frequência acumulada	frequência	Frequência acumulada	60 – frequência acumulada	
0	0	0	60	0	0	60	0
1	0	0	60	0	0	60	0
2	0	0	60	0	0	60	0
3	0	0	60	0	0	60	0
4	2	2	58	0	0	60	2
5	0	2	58	0	0	60	0
6	3	5	55	1	1	59	4
7	2	7	53	2	3	57	4
8	1	8	52	1	4	56	2
9	3	11	49	4	8	52	7
10	6	17	43	1	9	51	7
11	4	21	39	1	10	50	5
12	6	27	33	9	19	41	15
13	4	31	29	8	27	33	12
14	7	38	22	3	30	30	10
15	5	43	17	5	35	25	10
16	2	45	15	5	40	20	7
17	4	49	11	0	40	20	4
18	3	52	8	6	46	14	9
19	5	57	3	6	52	8	11
20	3	60	0	5	57	3	8
21	0	60	0	3	60	0	3

Tabela 12 - Comparação dos resultados no pré e pós testes do TESTE DE SIMETRIA. O Teste “t de student” revela ganho significativo no desempenho médio

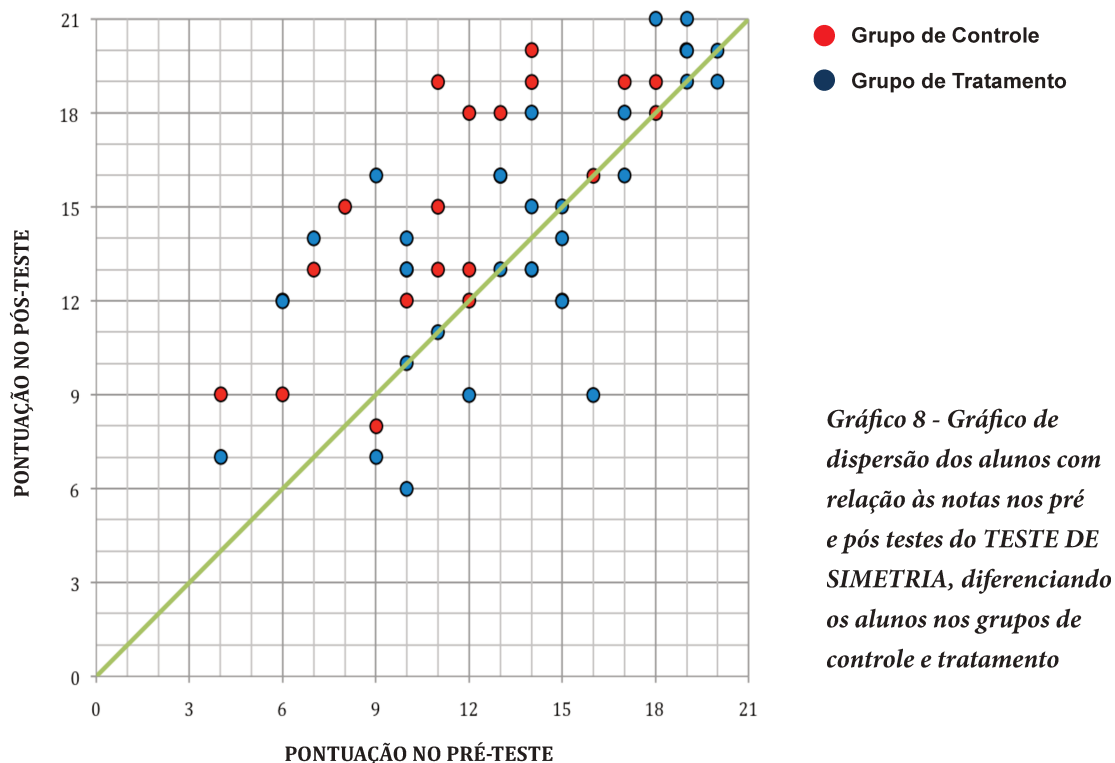
Notas Medias						
	Pré	Pós	delta	erro padrão	t de Student	p
TS	13,08	14,65	3,10	0,4001	3,916	0,0001

Os dados da tabela acima apontam a evolução dos participantes no **Teste de Simetria**, considerada a totalidade dos indivíduos pertencentes aos dois grupos, cuja nota média saltou de 13,08 pontos no pré-teste para 14,65 pontos no pós-teste, de um total possível de 21 pontos.

O ganho de 1,57 pontos corresponde a um crescimento de 12,0 %.

O teste t de student para dados emparelhados resultou em $t = 3,916$, com nível de significância estatística $p = 0,01\%$ (isto é, a probabilidade da diferença de médias ser igual ou superior a 3,10 meramente por flutuação aleatória natural, é de apenas 0,0001, ou seja, há nítida evidência estatística de que, no Teste de Simetria, o desempenho no pós teste foi melhor que no pré teste.

TS - TESTE DE SIMETRIA
EVOLUÇÃO DAS NOTAS INDIVIDUAIS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPO DE CONTROLE X GRUPO DE TRATAMENTO



No gráfico acima, distingue-se o comportamento do grupo de controle (pontos vermelhos), e do grupo de tratamento (pontos azuis)

A maior concentração de pontos acima da diagonal ($Y=X$), revela melhores resultados no pós-teste que no pré-teste, entretanto percebe-se considerável deslocamento de indivíduos do grupo de tratamento para baixo do eixo diagonal, o que ilustra uma tendencia de regressão da média no momento do pós teste.

Dos 10 alunos que apresentaram no pós-teste, um resultado pior que no pré-teste, 9 são do Grupo de Tratamento. Dos 9 que ficaram sobre a diagonal, apresentando resultados iguais nos pré e pós testes, 6 são do Grupo de Tratamento.

Na tabela abaixo, o sumário estatístico.

O grupo de controle apresentou um delta de 2,38 pontos na média; um ganho nitidamente significativo de 19,3% ($p=0,0000$), entre o pré-teste e o pós-teste.

O ganho do grupo de tratamento, de 1,23 pontos na média (8,9 % do total), não foi significativo estatisticamente ($p=0,112$).

Tabela 13 - Estatísticas Básicas do TS, relacionando Grupos e Momentos.

**TESTE DE SIMETRIA - PONTUAÇÕES MÉDIAS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPOS DE CONTROLE E TRATAMENTO**

Grupo	Pré	Pós	delta	t de Student	p
Controle	12,34	14,72	2,38	4,81	0,000
Tratamento	13,77	14,58	0,81	1,23	0,112
geral	13,08	14,65	1,57		

Este resultado, surpreendente no início, tem uma interpretação interessante.

Uma vez que o treinamento a que foi submetido o Grupo de Controle envolveu exclusivamente figuras planas, este pareceu melhor preparado ao formato do Teste de Simetria, apresentando melhores resultados no pós teste do que o Grupo de Tratamento, que recebeu parte do treinamento utilizando modelos tridimensionais.

TESTE DE SIMETRIA
EVOLUÇÃO DAS NOTAS POR GÊNERO
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPO DE CONTROLE

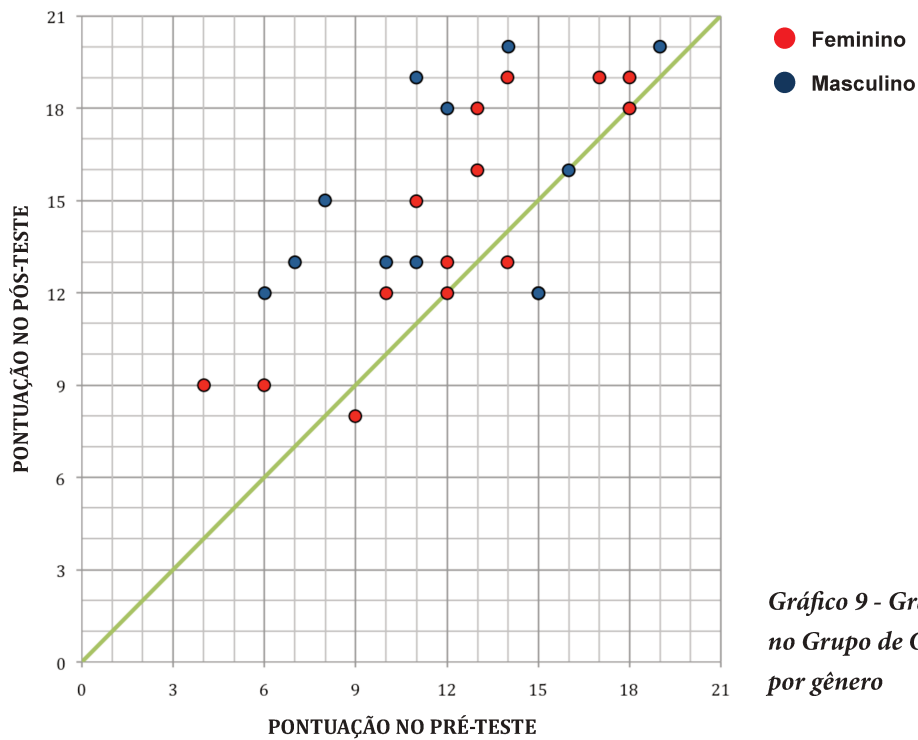


Gráfico 9 - Gráfico de dispersão do TS no Grupo de Controle, diferenciados por gênero

TESTE DE SIMETRIA
EVOLUÇÃO DAS NOTAS POR GÊNERO
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPO DE TRATAMENTO

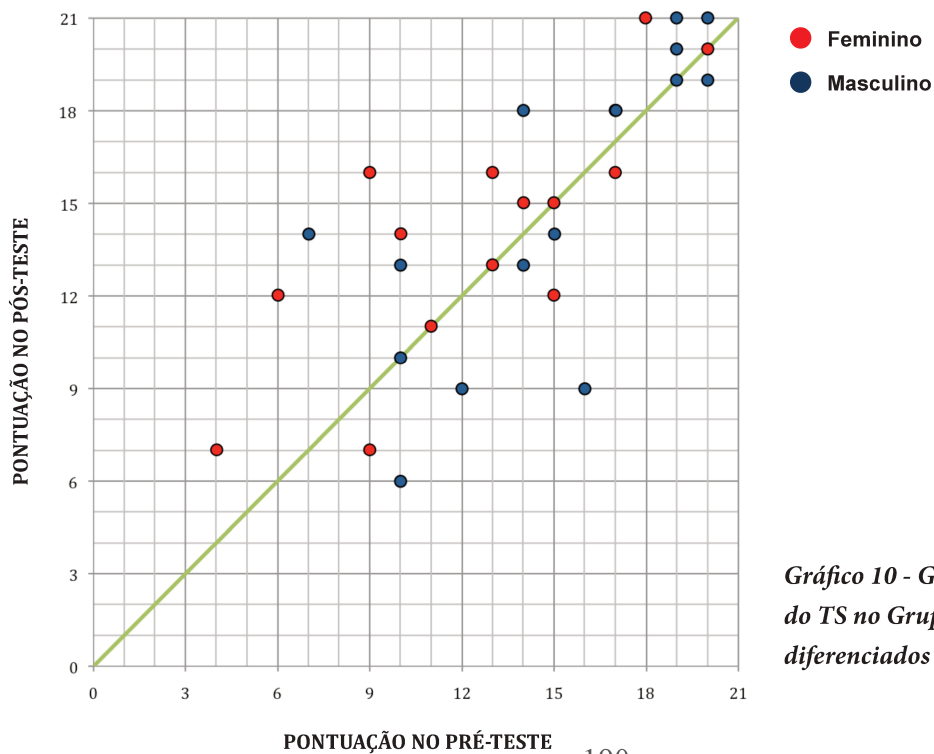


Gráfico 10 - Gráfico de dispersão do TS no Grupo de Tratamento, diferenciados por gênero

Mais uma vez, a exemplo do que ocorreu no MRT, o comportamento da população feminina manteve-se homogêneo.

O delta feminino do grupo de controle foi de 1,53 pontos, (12,35 pontos na média do pré teste, para 13,88 no pós teste), enquanto no grupo de tratamento, o delta feminino foi de 1,44 pontos (de 12,81 no pré, para 14,25 no pós teste).

Novamente, a exemplo da tendencia observada no teste MTR, houve uma diferença significativa entre as populações masculinas.

Os homens do grupo de controle acertaram em média, 3,59 questões a mais no pós teste, saltando de 12,33 para 15,92 pontos, enquanto na população masculina do grupo de controle, o acréscimo pontos na média foi muito mais modesto: apenas 0,13 pontos, indo de 14,80 no pré-teste para 14,93 no pós-teste.

Enquanto as médias da população feminina dos grupos de controle e tratamento ascenderam 12,4% e 11,6% respectivamente, retratando uma evolução homogênea com variação de apenas 1,2%, a população masculina dos grupos de controle e tratamento ascenderam 29,1% e 0,9% respectivamente, indicando uma variação significativa estatisticamente de 28,2 %.

Tabela 14 - Sumário de médias do MRT, relacionando Gênero, Grupos e Momentos.

**TESTE DE SIMETRIA - SUMÁRIO DE MÉDIAS
PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE
GRUPO E GÊNERO**

	Controle		Tratamento		C & T	
	pré	pós	pré	pós	pré	pós
F ♀	12,35	13,88	12,81	14,25	12,58	14,06
M ♂	12,33	15,92	14,80	14,93	13,70	15,37
M&F	12,34	14,72	13,77	14,58	13,08	14,65

8.6. ANÁLISE ESTATÍSTICA COMPARATIVA ENTRE O MENTAL ROTATION TEST (MRT) E O TESTE DE SIMETRIA (TS)

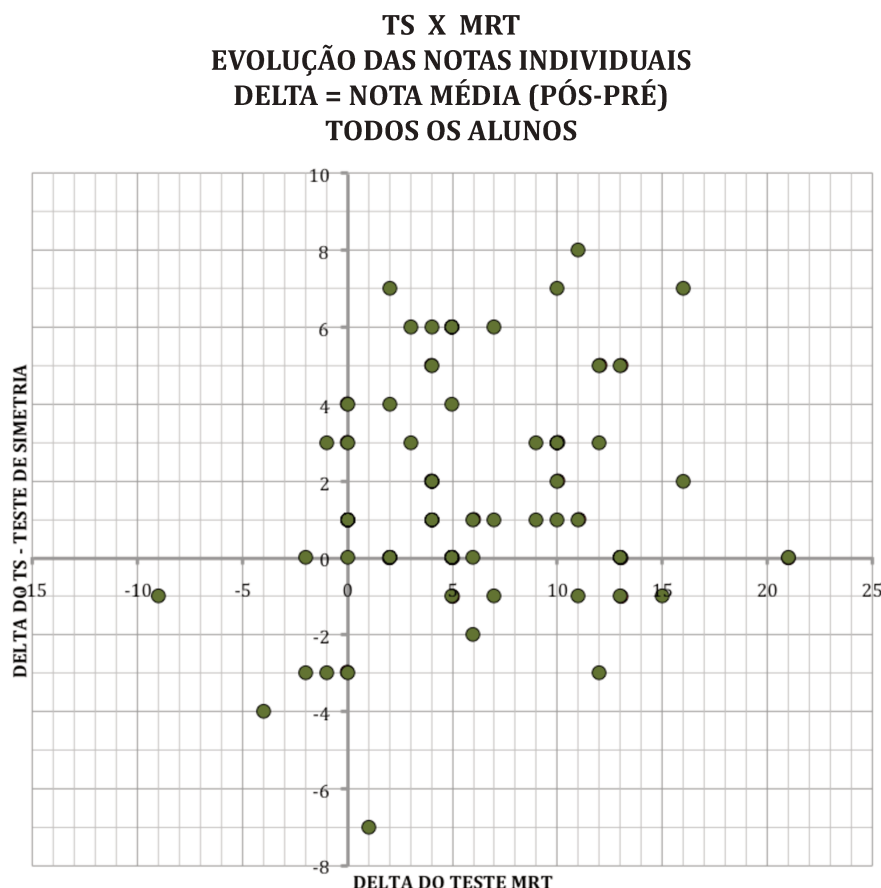


Gráfico 11 - Distribuição da totalidade dos participantes, em relação ao delta de sua média no Teste MRT e Teste de Simetria

O gráfico acima relaciona o desempenho da totalidade dos participantes, em ambos os testes (TS e MRT), através de seus deltas (diferença entre a nota obtida pelo indivíduo entre pré e pós-teste).

O eixo horizontal do gráfico mostra a evolução na pontuação dos participantes no MRT. Percebe-se que o delta máximo obtido por um indivíduo isolado foi de 21 pontos, enquanto que a maior retração foi de 9 pontos. A maior concentração de pontos do lado direito ao eixo vertical, que marca precisamente o ponto em que o delta do MRT é nulo, indica a predominância de resultados positivos.

O eixo vertical indica a evolução na pontuação dos participantes no TS. Neste caso, o delta máximo equivale a 8 pontos, enquanto a maior retração na nota foi de 7 pontos.

O eixo horizontal, neste caso marca precisamente o ponto em que a evolução na pontuação no TS foi nula. Desta maneira, a maior concentração de indivíduos na parte superior do gráfico indica que, a exemplo do que houve com o MRT, houve predominância de resultados positivos.

Como decorrência da predominância dos resultados positivos de ambos os testes, percebe-se nitidamente uma maior concentração de pontos no primeiro quadrante do gráfico (acima do eixo horizontal e à direita do eixo vertical), **indicando uma correlação positiva entre os dois avanços.**

Tabela 15 - Teste MRT e Teste de Simetria: Estatísticas Básicas

Notas Medias						
	Pré	Pós	delta	erro padrão	t de Student	p
MRT	23,97	28,82	5,85	0,7375	7,932	0,00000
TS	13,08	14,65	3,10	0,4001	3,916	0,0001

TS X MRT
EVOLUÇÃO DAS NOTAS POR GÊNERO
DELTA = NOTA MÉDIA (PÓS-PRÉ)
GRUPO DE CONTROLE

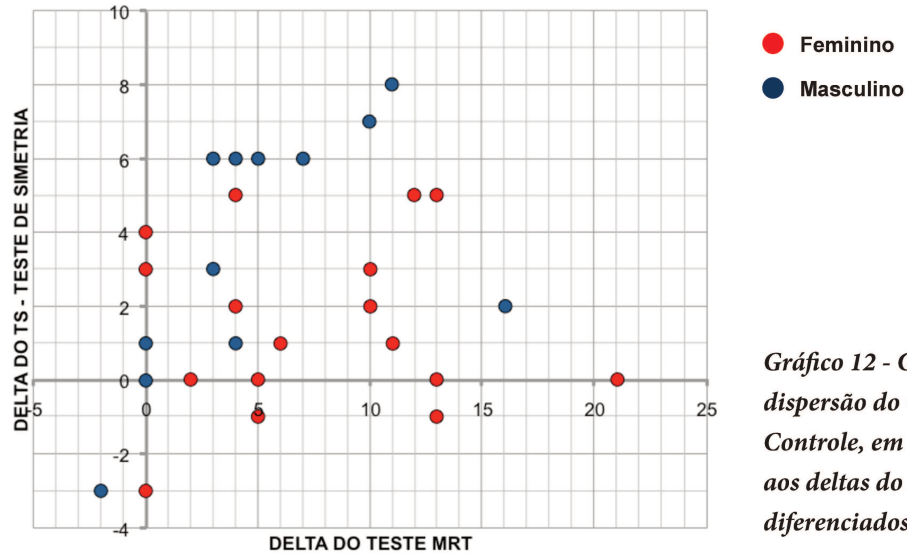


Gráfico 12 - Gráfico de dispersão do Grupo de Controle, em relação aos deltas do MRT e TS, diferenciados por gênero

TS X MRT
EVOLUÇÃO DAS NOTAS POR GÊNERO
DELTA = NOTA MÉDIA (PÓS-PRÉ)
GRUPO DE TRATAMENTO

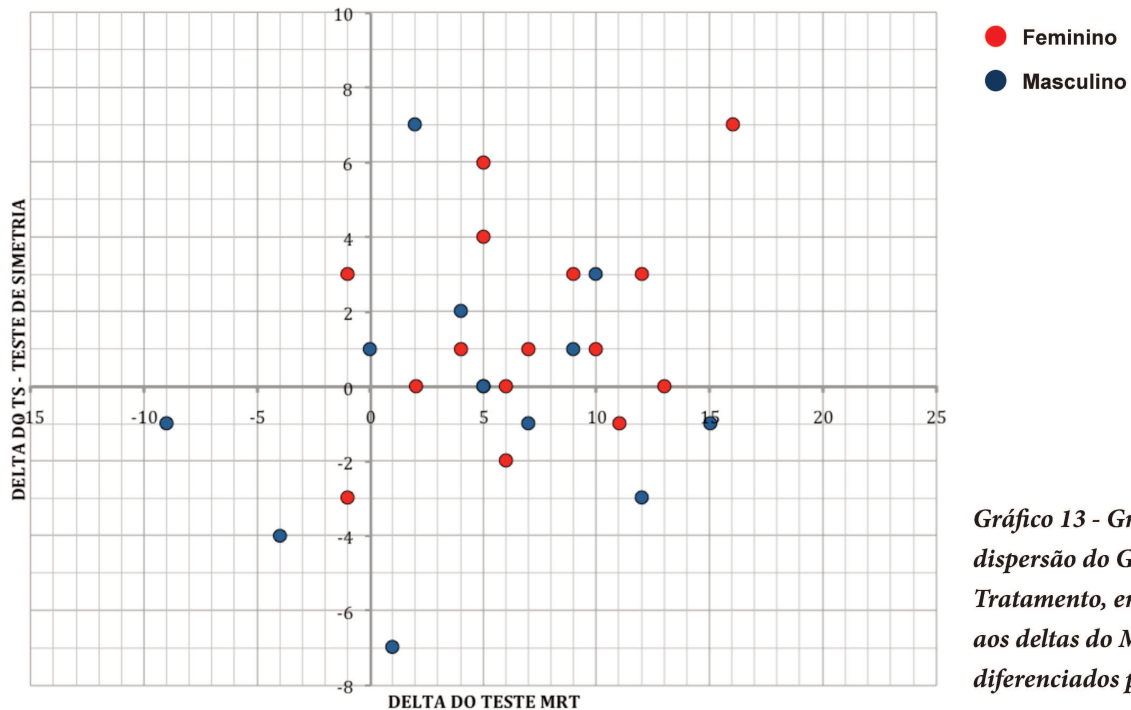


Gráfico 13 - Gráfico de dispersão do Grupo de Tratamento, em relação aos deltas do MRT e TS, diferenciados por gênero

O cruzamento entre os deltas no MRT e TS, quando aparecem categorizados por grupo e gênero como nos dois gráficos da página anterior, traz evidências em relação à homogeneidade das amostras.

Enquanto as mulheres em ambos os grupos estão distribuídas em nuvens de conformação bastante semelhantes, demonstrando homogeneidade em ambos os testes, o mesmo não ocorre com os homens.

A principal diferença é percebida entre os participantes homens no TS.

Os gráficos indicam que seis participantes homens do grupo de controle apresentaram no TS, um delta na faixa entre 6 e 8 pontos, e que apenas um do grupo de tratamento obteve o mesmo aproveitamento. Os números se invertem quando se olha para a parte baixa dos gráficos; enquanto que apenas um homem teve variação negativa entre os participantes do grupo de controle, no grupo de tratamento foram seis.

Como compreender um desempenho tão diferente entre os participantes homens em ambos os testes, e ainda mais acentuadamente no TS?

A primeira consideração leva a investigar a seleção dos grupos, de maneira a procurar causas de um possível risco à homogeneidade. Para prevenir tal risco, é aconselhável que o critério privilegie a aleatoriedade, sem alunos veteranos. Neste experimento, este processo ficou a cargo da própria secretaria acadêmica da instituição, que o faz considerando a necessidade de equilíbrio numérico absoluto, equilíbrio numérico entre gêneros, e ordem alfabética. Nenhum critério qualitativo, como rendimento acadêmico, foi considerado. Portanto não se pode atribuir as diferenças de rendimento ao **fator seleção**.

Uma segunda consideração conduz a ressalvas à constituição do Teste de Simetria, pois, uma vez que suas questões foram apresentadas em formulário impresso, aproxima-se do formato do meio expressivo explorado pelo grupo de controle, pois que este envolveu, nas Fases I e II do experimento, exclusivamente o trabalho sobre papel. Assim é razoável admitir que o grupo de controle, estando melhor preparado a reconhecer o conjunto teórico das transformações geométricas sobre o plano, tenha tido melhor desempenho no TS do que o grupo de tratamento, que exercitou-se na maior parte do tempo sobre um suporte tridimensional, que em nada se parece com as questões do teste.

Esta consideração pode explicar a diferença comparativa do rendimento entre os testes, que embora tenham apresentado evolução estatisticamente significativa em ambos, foi mais pronunciada no MRT. Entretanto, o desempenho homogêneo das mulheres, que como já foi demonstrado, apresentou diferença no rendimento de apenas 1,2 % em favor do grupo de controle, contrasta fortemente com os resultados nitidamente heterogêneos dos homens, que apresentaram variação de 28,2 % em favor do grupo de controle. Tal diferença no rendimento dos gêneros descarta o **fator teste** como responsável pela oscilação.

Uma terceira consideração levaria em conta a ocorrência de um evento externo à condução do curso, o que não foi detectado, levando o descarte do **fator história**.

Uma quarta consideração levaria a considerar a possibilidade estatística de que a amostra masculina do grupo de tratamento é comparativamente, menos apta às atividades que solicitam a HRM, como são os casos do MRT e TS.

8.7. RESSALVAS AO MÉTODO DE AFERIÇÃO

Uma ressalva importante ao método de avaliação, decorre do fato de que com testes limitados a número pequeno de questões, com muitos participantes tendo desempenho próximo do ótimo já no pré-teste, os melhores alunos ficam condenados a um progresso avaliado muito pequeno, ou nulo.

Assim, um aluno que obteve nota máxima no pré-teste (40 no Mental Rotation Test, e 21 no Teste de Simetria), está condenado a, na melhor das hipóteses, mostrar progresso nulo no pós-teste.

Esta condição leva a uma avaliação truncada por cima na sua avaliação no pós-teste, o que por sua vez, acarreta uma sub-avaliação do progresso alcançado pelo aluno entre os dois momentos.

8.8. TS – “TESTE DE SIMETRIA”

O PCN de 1998 propõe que as transformações geométricas, tanto as rígidas como as não rígidas (homotetias), sejam apresentadas formalmente aos estudantes no 4º ciclo¹ do ensino fundamental, de maneira que “se consolide a noção de

1 Equivalentes às antigas 7ª e 8ª séries do ginásial.

congruência das figuras planas” (BILAC, 2008, p.15), ampliando sua capacidade em compreender enunciados, terminologias e técnicas convencionais, no trato com a forma e o espaço. Entretanto, este tópico pode (e deve!) ser admitido nas práticas do ensino formal em todas as fases.

Tais recomendações são acompanhadas por propostas que valorizam a liberdade do professor em escolher estratégias pessoais que melhor se adaptem às suas inclinações e possibilidades, de maneira a distanciar sua didática de uma abordagem excessivamente formal e axiomática. Pode-se assim esperar que o tratamento recebido neste tópico da geometria flutue entre extremos, a considerar que alguns podem nem sequer saber do que se trata.

O **Teste de Simetria** (anexo 2) portanto, verifica o conhecimento prévio em alguns dos principais fundamentos das transformações isométricas, que os alunos trazem do ensino fundamental.

Sua concepção e construção toma por conta teste similar, chamado *symmetry test*, aplicado por Leikin, Berman e Zalavsky (2000), com o igual propósito de medir este conhecimento específico em alunos de graduação em matemática. Este também aborda as operações de reflexão e rotação.

Aplicado em duas etapas a exemplo do MRT, em um pré-teste no início do ensaio, e em um pós-teste após à apresentação teórica dos conceitos e da aplicação dos experimentos práticos, o teste objetiva também produzir dados que possam aferir se houve, e de que ordem foi o ganho adquirido neste conhecimento específico. “*Como a habilidade de reconhecer objetos simétricos e operar sobre as operações de transformação, bem como a disposição dos estudante para este topico foram alteradas?*” (LEIKIN et al., 2000, p. 25)

Do *symmetry test*, o teste conhecimento em simetria toma emprestado a estrutura conceitual e a íntegra das questões 1 e 2.

Ambos são compostos por dois grupos de exercícios segundo os conceitos das operações de reflexão (simetria axial) e da rotação (simetria central), e observam os seguintes aspectos:

- A capacidade interpretativa dada pelo reconhecimento da presença ou não da simetria em formas poligonais simples, feita através do desenho do eixo na posição correta (questões 1 e 3)
- As capacidades dedutiva e construtiva de operar sobre formas simples, uma vez afirmados os eixos de simetria (questões 2 e 4).

As questões 1 e 2 tratam de **simetria axial**, associada a operação geométrica **reflexão**, e à **linha**, como configuração formal de seu eixo. O enunciado cruza portanto três expressões capazes de identificar a ação do teste.

A questão 1 organiza um conjunto de cinco quadriláteros, sendo um trapézio e quatro paralelogramas: (1.1. Trapézio Isóceles, 1.2. Paralelogramo oblíquângulo, 1.3. losango, 1.4. retângulo e 1.5. quadrado). Deles o aluno foi guiado a deduzir a presença da simetria, através de um roteiro que compreende a seguinte sequencia: a) A figura é simétrica em relação à linha? b) Quantas linhas de simetria tem a figura? O item “c” compreende uma ação construtiva na medida que solicita o desenho das linhas na posição dos eixos de simetria.

Na questão 2, os eixos de reflexão são dados pela linhas em traço forte, em relação a outras cinco formas poligonais simples (respectivamente os itens 2.1 a 2.5), e do aluno espera-se que as complete, de maneira a torná-las simétricas.

1 Para cada figura abaixo, determinar qual das figuras possui simetria em relação a uma **linha**.

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
a) A figura é simétrica em relação 'a linha?					
b) Quantas linhas de simetria tem a figura?					
c) Desenhe todas as linhas de simetria existentes.					

2 Complete cada uma das figuras dadas, para criar uma figura que seja simétrica em relação 'a **linha**.

2.1 	2.2 	2.3
2.4 	2.5 	

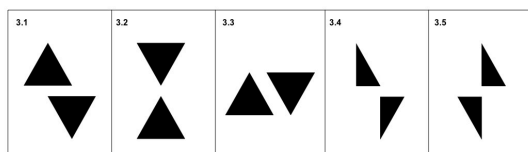
Figura 118 – Exercícios 1 e 2 do teste ‘Conhecimentos em Simetria’

As questões 3 e 4 tratam de **simetria central**, associada à operação geométrica **rotação**, e ao **ponto**, como configuração de seu eixo.

A questão 3 associa 5 pares de triângulos (itens 3.1 a 3.5 de triângulos eqüiláteros e, 3.4 e 3.5 de triângulos retângulos)¹, em que o aluno, a exemplo do procedimento da questão 1, é solicitado a identificar a presença ou não da simetria na organização dos triângulos, com a marcação de um ponto na posição correta do eixo de rotação. Todos os pares são simétricos em relação ao ponto, à exceção do item 3.4 que não são congruentes por serem reflexões rotacionadas, o que constitui em um conhecimento adicional e dificultador.

Na questão 4, a exemplo do que ocorre na questão 2, o eixo é claramente identificado em afirmação à presença da simetria central, e o que se solicita do aluno é a capacidade em transformar as formas de uma posição original a outra sugerida, como se acompanhassem o giro do ponteiro de um relógio, em um total de seis situações (4.1a, 4.2a, 4.2b, 4.3a, 4.3a e 4.3b)²

3 Marque com uma caneta a posição do **ponto** que serve como eixo da rotação das figuras, se houver



4 Desenhe as figuras que faltam, de maneira que sejam simétricas aos modelos, em relação ao **ponto** dado.

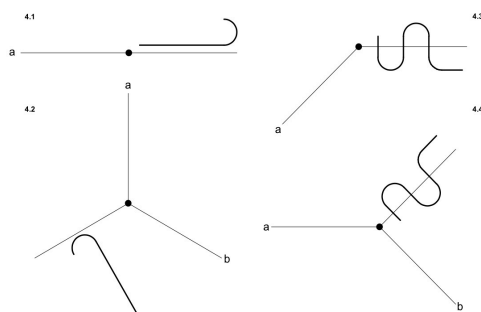


Figura 119 – Exercícios 3 e 4 do teste ‘Conhecimentos em Simetria’

Ao final do teste, um campo solicita do aluno uma avaliação qualitativa que o classifique em termos do grau de esforço empreendido em: Muito fácil, fácil, médio, difícil e muito difícil. O aluno deveria ainda descrever a experiência através de *comentários finais livres*.

¹ A conformação dos itens 2.1, 3.4 e 3.5 foram emprestados do item 1.11 do caderno de exercícios do livro Handbook of regular patterns. An introduction to symmetry in two dimensions (STEVENS, 1999, p. 9)

² Embora nenhum dos exercícios seja uma transcrição fiel, a configuração geral foi tomada de empréstimo junto aos exercícios 224 a 226 do livro Geometria para desenho industrial. (WILMER; PEREIRA, 1978, pp. 117-119)

SEÇÃO 9 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

9.1. CONCLUSÕES

9.1.1. Considerações gerais sobre a condição da educação no Brasil, e resultados preliminares do experimento

Percebe-se hoje, talvez com mais clareza do que em qualquer outra época, a reciprocidade entre qualidade do ensino e desenvolvimento econômico e social. Em um passado recente, o exemplo dos ‘tigres asiáticos’, evidenciaram estas relações com espantosas taxas de crescimento associadas a programas educacionais bem estruturados e direcionados à produção de bens de consumo. A presente pesquisa não se interessa pela compreensão nem comparação entre modelos educacionais, mas parece importante ressaltar que, por aqui no Brasil, se já fomos capazes de reconhecer tais relações e traçar diagnósticos mensurando nosso *status* entre outras nações, ainda não descobrimos maneiras eficazes de planejar ações eficazes e implementá-las.

O EFAGMR (*Education For All Global Monitoring Report*) da UNESCO (*United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization*) publicado em 2010¹, classifica o Brasil na 88ª posição no EDI² (*Educational Development Index*), atrás de outros países sul-americanos, como Paraguai, Equador e Bolívia. No PISA³ (*Programme for International Student Assessment*) de 2009, o Brasil atingiu

¹ <http://www.unesco.org/new/en/education/themes/leading-the-international-agenda/efareport/reports/2010-marginalization/> <acesso em 15/12/2011>

² <http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/HQ/ED/GMR/pdf/gmr2010/gmr2010-annex-01-edi.pdf> <acesso em 15/12/2011>

³ PISA: em português, **programa para avaliação internacional de estudantes**, padronizada, que foi desenvolvida em conjunto pelas economias participantes e dirigida a alunos com a idade de 15 anos. O programa PISA é uma iniciativa da OCDE. 74 países participaram na avaliação de 2009. Quatro avaliações foram até agora realizadas (em 2000, 2003, 2006 e 2009). Os dados para a avaliação que teve lugar em 2009

a 57º colocação em matemática, em um ranking que teve a China como primeira colocada. O índice alcançado pelo Brasil o categoriza em companhia de Argentina, Jordânia, Colômbia e Albânia⁴.

Tais constatações servem para ilustrar em linhas gerais, o estado de penumbra do ensino brasileiro. Apesar do modesto viés de evolução que vem se verificando através dos índices internacionais nos últimos anos, a maior parte dos estudantes brasileiros ainda chega ao final do ensino médio com um conhecimento frágil sobre a maior parte dos assuntos do currículo. No que se refere ao estudo da geometria, não bastasse o baixo nível geral, a situação foi agravada por seu longo período de ostracismo no currículo da matemática, de vinte e sete anos, entre 1971 (promulgação da LDBEN nº 5692/71) e 1998 (publicação dos PCN de 1998), conforme foi tratado na Seção 2.

Uma observação pertinente a esta tese, em referência a estes índices, datas e eventos, é que se estimarmos a média etária dos participantes do experimento desta pesquisa em 18 a 20 anos, deduz-se que tinham entre 5 e 7 anos em 1998, coincidindo com o período de seu ingresso no ensino básico. Podem assim, ser considerados a primeira geração de estudantes pós-PCN. Considerando também realista que haja um descompasso entre a promulgação das diretrizes gerais e sua implementação na sala de aula, e que as *transformações geométricas* são conteúdos fundamentais destas novas diretrizes, a pesquisa interessou-se em produzir alguns dados sobre o conhecimento prévio dos participantes no tópico das transformações geométricas, em duas oportunidades:

foram dados a conhecer em 07 de dezembro de 2010. Os testes são normalmente realizados a um número de estudantes que varia entre os 4.500 e os 10.000, em cada país. - http://www.portais.ws/?page=art_det&ida=7653 <acesso em 15/12/2011>

⁴ <http://educacao.uol.com.br/ultnot/2010/12/07/pisa-2009-em-matematica-pais-alcancou-57-colocacao.jhtm>

No primeiro exercício, descrito na sub-seção 7.6.1, pediu-se aos estudantes que reconhecessem o predicado da simetria em objetos de design; aferiu-se que, à exceção de poucas confusões relacionadas ao enunciado, a maioria significativa o fez com precisão. Outro aspecto do resultado, comprova que a tendência antes apontada por Veloso (2000, p.181), de forte correspondência entre o conceito de simetria e a operação isométrica de reflexão, em detrimento de outras operações (90,5 %, como mostra a tabela 4).

A segunda fonte de dados - mais refinados – chega através do Pré-Teste do TS (Teste de Simetria), no qual os estudantes respondem questões envolvendo operações isométricas de reflexão e rotação, sob a forma de formulário impresso. A nota média entre os 60 participantes foi de 13,08 pontos (em um máximo de 21), correspondendo a um total de 60,5 % de aproveitamento. Isso permite admitir que, amparados pelo domínio teórico ou guiados intuitivamente, os participantes foram capazes de reconhecer os principais elementos constituintes do tópico em estudo, e operar criteriosamente sobre formas bidimensionais, antes mesmo de receberem as primeiras aulas do curso, o que pode ser um bom indício sobre a evolução do ensino de geometria nos níveis do fundamental e médio.

9.1.2. Estruturação de um currículo de geometria orientado ao Design

O *Mapa de Tópicos em Geometria* é exemplo daqueles resultados espontâneos, não projetados, perseguidos nem declarados de início, e que surgem como plataformas ao lançamento e estruturação do argumento. Seu aparecimento foi uma reação à sensação de instabilidade que se experimentou ao vislumbrar a imensidão do território, e a necessidade de categorizá-lo e recortá-lo. Ficou claro desde o início, que a procura de modelos que sirvam como referências estáveis, fixas ou imutáveis é estrada curta à frustração. Só é possível estabelecer relações entre conhecimentos, se admitirmos desde o início que o posicionamento

de cada elemento é sempre relativo, e sujeito a intercâmbios e expansões.

Jamais foi intenção entrar no debate sobre a pertinência ou não da adoção de modelos de metodologia de projeto, ou sobre a suposta anatomia de suas etapas. A escolha do modelo *Problem-Solving Process/Form Generation Model*, de Wallschlaeger e Busic (1992), deveu-se sobretudo pelo amplo número de variáveis envolvidas. Esta extensão permitiu que se enxergasse ali, um conjunto de variáveis capaz de se reorganizar pela base comum da geometria .

Este mapa, assim como é natural aos mapas, serviu como primeiro parâmetro aos movimentos que conformaram esta pesquisa, mas outras referências vindas de outros quadrantes do conhecimento influenciaram igualmente seus rumos; o trabalho de SEABRA (2009), especialmente sua revisão bibliográfica, foi determinante no sentido de uma primeira e abrangente descrição da habilidade de visualização espacial, sua expansão em sub-categorias de especialização, bem como alguns dos métodos e testes psicométricos desenvolvidos para medi-las.

A seleção das Transformações Geométricas se deu em uma das encruzilhadas nas quais as áreas do conhecimento costumam se encontrar, através do reconhecimento 'fisionômico' que se estabeleceu com as tarefas do MRT.

Como decorrência do interesse de prospecção e tradução da geometria a um idioma compreensível aos dedicados a atividades de criação, outros legados desta pesquisa - como resultantes de sua estruturação programática - podem ser assim relacionados:

- Requalificação gráfica e esquemática (a partir da sub-seção 4.3), das condições elementares das três principais operações isométricas (translação, rotação e reflexão), uma vez a literatura que se encontrou à

disposição, é prolífica em exemplos voltados à geometria ensinada nos primeiros anos, ou à descrição excessivamente ‘matemática’, indo de um extremo de simplificação a outro de rigor notativo. Procurou-se assim, uma solução adequada em equilibrar rigor matemático à intuitividade visual.

- O experimento é apresentado com o maior número de detalhes e informações que se pôde oferecer, como um código aberto a interferências e reconstruções por futuros pesquisadores. Todos os enunciados, atividades e testes (à exceção do MRT, cujo acesso se faz mediante aquisição comercial), estão publicados na Seção 7 e nos Anexos.

9.1.3. A Habilidade de Rotação Mental e a Geometria das Transformações

A formulação da primeira hipótese partiu de duas constatações:

1. Uma rotação mental pode ser descrita como uma transformação geométrica no sentido de sua estrutura operativa, e identifica-se em primeiro lugar na qualidade de **isométrica**, por conservar os mesmos ângulos da figura original, e em segundo lugar, como uma rotação, pois sua ação implica em **girar** o objeto referente em torno de um eixo fixo, sob certa amplitude medida em graus.

2. São diversas as habilidades cognitivas, bem como são diversas as sub-habilidades que delas se expandem. Verifica-se que a partir de cada sub-categoria cognitiva como a HRM, brota nova ramificação de sub-especialidades. Uma destas sub-especialidades diz respeito aos testes psicotécnicos, e verifica-se igualmente, que há diversos deles desenvolvidos para medir a HRM. Mesmo para o MRT (utilizado nesta pesquisa), há uma série de derivações nascidas das condições específicas das pesquisas, ou do aspecto da HRM que se quer conhecer melhor.

Como foi visto na Seção 5, o MRT afere a rotação mental através da velocidade e precisão com que o participante conclui suas tarefas. A velocidade seleciona participantes que, justamente por não terem a habilidade de rotacionar mentalmente, utilizam outros meios cognitivos, como o raciocínio dedutivo e lógico, que costumam ser mais lentos para a solução deste tipo de problema, enquanto a precisão lhe solicita a capacidade de observar a preexistência de uma condição descrita pela geometria como **congruência**. Ao operar pela rotação, o indivíduo é capaz de comparar os estímulos (figuras) e aferir se são iguais (congruentes), ou diferentes (reflexões). Uma reflexão é também uma operação isométrica, à medida que está sujeita às mesmas leis e rearticula os mesmos elementos constituintes de outras operações isométricas. O MRT utiliza como estímulos portanto, figuras transformadas isometricamente através das operações de rotação e reflexão.

Estas observações suscitaram os primeiros pressupostos a serem investigados por esta pesquisa: Ao assumir como postulado que o estudo sistemático da geometria incide positivamente sobre as habilidades de visualização espacial é possível supor que o treino de rotação de figuras e objetos - reconhecendo elementos, construindo conceitos, formulando conjecturas e refletindo sobre a ação - exerça impacto sobre a HRM, pois em tese, ao reconhecer e operar os elementos constituintes descritos pela geometria, tais como a localização correta do eixo, a direção do deslocamento e sua amplitude, espera-se que o desempenho do indivíduo se amplie. Nasceu assim a primeira hipótese declarada:

“O estudo sistemático do tópico da geometria ‘transformações geométricas’, é capaz de auxiliar consideravelmente o desenvolvimento da habilidade de rotação mental em alunos de design”.

A avaliação dos resultados do MRT demonstrou o desenvolvimento de 24,4% na média alcançada sobre a **totalidade** dos participantes, o que estatisticamente é considerado nitidamente significativo, confirmando assim a hipótese. Ressalva-se o método de avaliação, ao destacar que o avanço poderia ter sido até mais expressivo, não tivesse ocorrido o ameaça de saturação (*ceiling effect*), tendo em vista que 6 participantes (10% do total), alcançaram o máximo de pontos (40 pontos) no pós-teste do MRT.

Os dados apresentados na sub-seção 7.5 das análises estatísticas, relacionam o desempenho da totalidade dos participantes em ambos os testes (TS *versus* MRT), através de seus deltas (diferença entre a nota obtida pelo indivíduo entre pré e pós-teste), reforçando o sentido de correlação positiva entre os dois avanços.

Apesar da constatação inequívoca do impacto positivo do treinamento de geometria sobre a HRM, ressalva-se também que o experimento não fornece dados suficientes a avaliar se este deveu-se, na amplitude verificada, em virtude dos pressupostos apresentados acima, ou se apresentaria resultados análogos caso tivesse sido administrado outro tópico da geometria igualmente relevante, como a geometria dos sólidos ou geometria descritiva, por exemplo.

9.1.4. A habilidade de rotação mental e os manipulativos.

De acordo com o que foi exposto na Seção 5, a questão *tipo* do MRT implica no reconhecimento das posições relativas de figuras espaciais, projetadas sobre um plano. Ao comparar o referente às quatro alternativas, o indivíduo o faz em tese, primeiro através da recomposição mental de tais figuras, para em seguida transformá-las.

A prefiguração 3D dos estímulos, conforme apresentados no MRT, estabelece o ponto de apoio do pressuposto desta pesquisa que se interessa pela

natureza dimensional dos materiais de exercitação, e se tais diferenças são importantes a ponto de imprimirem diferenças sobre a HRM dos participantes. Estimou-se preliminarmente que, ao criar-se condições de exercitação através de manipulativos físicos reais, sua natureza tridimensional (à semelhança dos estímulos projetados do MRT) implicaria em maior facilidade operativa de rotação mental.

Divididos em dois grupos, chamados Controle e Tratamento, exercitaram-se em parte com materiais de desenho e com materiais físicos reais, respectivamente. Desta maneira estabeleceu-se a segunda hipótese declarada:

“Uma prática de estudo que inclua em seus processos metodológicos, o uso de manipulativos físicos tridimensionais, pode ser mais efetiva na promoção da habilidade de rotação mental, que outra que utilize apenas o desenho”.

A avaliação no MRT verificou uma variação na pontuação de 24,62% no Grupo de Controle e 22,3% no Grupo de Tratamento. Para que a hipótese fosse comprovada, o desempenho do Grupo de Tratamento deveria ter sido significativamente superior ao do Grupo de Controle, o que não se confirmou; ao contrario disso, o desempenho do Grupo de Tratamento foi ligeiramente inferior. Desta maneira não se pode afirmar, com base nos resultados encontrados, que um método expressivo seja superior a outro.

Pode-se ressaltar o resultado, considerando a extensão do experimento. A separação entre métodos ocorreu em sua Segunda Fase, e compreendeu, excetuando a aula dedicada à aplicação dos dois pós-testes, a três encontros de 1:40 hs cada um. Presume-se que o número de encontros possa ter sido pequeno, que o tempo dedicado a cada encontro tenha sido curto, e que o intervalo entre os encontros possa ter sido grande, a ponto de permitir que alguma eventual

diferença pudesse se pronunciar.

9.1.5. A habilidade de rotação mental entre gêneros

A estrutura dos dados de desempenhos individuais dos 60 participantes, permitiu agrupá-los e alinhá-los segundo interesses diversos. Um destes interesses declarados, embora não tenha sido formulado como hipótese, procurou observar o comportamento das médias segundo o gênero dos participantes. A literatura cognitiva, segundo Parsons *et al* (2004, p.555), tem apresentado no estudo da habilidade de rotação mental, uma das maiores e mais consistentes diferenças entre sexos, em favor do gênero masculino. Assim, esta tese preocupou-se em avaliar esta tendência sob os resultados obtidos através do experimento.

Comparados homens e mulheres no Grupo de Controle, constatou-se uma diferença. Enquanto as mulheres alcançaram a média de 28,3 pontos no pós-teste do MRT, os homens alcançaram 35,3 pontos. Uma diferença significativa de 7,0 pontos, ou 17,5% dos pontos válidos. Entretanto, a mesma tendência não foi observada no Grupo de Tratamento, presumivelmente devido à amostra não homogênea dos homens. As mulheres do Grupo de Tratamento alcançaram um desempenho bastante próximo das mulheres do Grupo de Controle, obtendo mesmo a mesma média no pós-teste (28,3 pontos), entretanto, entre os homens, embora tenha havido desenvolvimento de 13,8 % entre o pré e o pós teste, a media final registrou apenas uma ligeira superioridade sobre a população feminina, alcançando apenas 28,9 pontos.

9.2. TRABALHOS FUTUROS

O campo de estudos que liga a geometria aos processos criativos é amplo; praticamente ilimitado. O mapa de tópicos que se prefigurou ao final da Seção 3, comportará certamente no futuro, a partir daquela matriz, novas linhas e colunas a relacionar linguagem visual ao ferramental operativo da geometria, agregando novas referências inexistentes ali, como as geometrias não euclidianas, bem como desdobramentos e nuances sobre os tópicos já listados.

O experimento aqui apresentado, deverá ser reformulado e condensado a fim de relacionar as *Transformações* a temas ‘clássicos’ do design, como a divisão regular do plano através da organização dos padrões em frisos, rosáceas e papéis de parede; nesta linha, o estudo do trabalho do artista gráfico gráfico M.C. Escher já se mostrou especialmente produtivo e estimulante em outras oportunidades.

O estudo das operações isométricas no espaço tridimensional real mostrou-se muito estimulante e promissor. A concepção do conjunto de atividades para treinamento do Grupo de Tratamento foi incomparavelmente mais trabalhosa do que a preparação do material para o Grupo de Controle, pois definitivamente não há material farto de referências na literatura para atividades físicas para este tópico. Alguns recursos manipulativos mais comuns, como espelhos e folhas transparentes são mais utilizados no estudo das transformações sobre o plano, e tem sido pouco aproveitados para apresentar as propriedades dos sólidos e do espaço 3D. Também sob este aspecto, acredita-se que esta tese possa servir como parâmetro para futuros ensaios e experimentos.

O trabalho pioneiro de Janos Baracs com manipulativos, apresentado na Seção 6, é referência sólida de como operar sobre o meio físico com propósitos didáticos. Suas pesquisas com o poly-kit e outros experimentos construtivos, indicam ser oportuno iniciar o estudo das propriedades do espaço 3D utilizando manipulativos físicos, de modo a facilitar sua compreensão e em favor das múltiplas coerências que mantém entre si. Entretanto é fundamental que tais

conceitos possam ser reconstruídos e treinados também no ambiente virtual, por tratar-se de ferramenta expressiva consolidada entre estudantes e profissionais. Este caminho ‘deve’ aproximar as disciplinas de geometria e informática, de maneira que haja uniformidade entre expressões, no sentido de identificar no conjunto de comandos operativos dos diversos *softwares*, os mesmos elementos constituintes descritos pela geometria das transformações.

9.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Como foi declarado no Prefácio, o desenvolvimento desta pesquisa se deu ao mesmo tempo em que seu autor se empenhava em compreender a extensão, limites e vizinhanças da geometria enquanto disciplina autônoma; movimento este, fruto da demanda concreta de ensiná-la como conhecimento organizado a turmas de estudantes de design. De lá para cá, todo estudo dedicado, do preparo das aulas ao empenho nesta pesquisa, foi feito como uma só atividade. Parte do conteúdo desta tese é resultado direto dos questionamentos e descobertas neste período intenso de imersão.

O estudo da geometria em áreas delimitadas pelo interesse na estética, como o design, por exemplo, solicita um empenho especialmente custoso aos professores não-matemáticos, em virtude de sua pouca intimidade com o universo teórico e notativo da matemática, e por isso, é compreensível a pouca inclinação da maioria a seu estudo sistemático. Entretanto, fica muito claro que o custo do despreparo é a superficialidade com que conceitos centrais ao estudo da sintaxe da forma, como a simetria - para citar o exemplo que vem desta pesquisa - são apropriados a seus repertórios. A apropriação de certas noções matemáticas alarga as conexões com as questões relacionadas à estética, e favorece a inclusão de outros conhecimentos como a psicologia cognitiva – para citar outro exemplo que vem desta pesquisa – o que é significativamente importante, pois o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos estudantes, como a visualização

espacial, enchem de significado e relevância qualquer estudo.

Por fim, espera-se que esta tese possa ser compreendida como uma contribuição para o movimento de regresso da geometria a seu estado de legítima importância entre os saberes formativos do estudante, e em especial, nos processos criativos.

É necessário que, assim como diz Veloso (2000, p.37), afastemo-nos da “pequena geometria”, presente no atual programa de tópicos reduzidos e simplificados, rumo à “grande geometria” de tópicos globalizantes:

“Devemos caminhar para que um dia o ponto de partida não sejam os métodos de resolução de problemas (...), mas sim os próprios problemas e questões inerentes à compreensão do espaço, como a simetria, a forma e a dimensão”. (VELOSO, 2000, pp. 37-38)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, D. M., STULL, A. T., ROEWER, I., HEGARTY, M. – Effects of using mental and manual rotation training on mental and rotation performance.

<<http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2011/papers/0299/paper0299.pdf>> . Acessado em 20/11/2011.

ADÁNEZ, Gerardo P.; VELASCO, Angela D. **Construção de um teste de visualização a partir da psicologia cognitiva. Desenho cognitivo de um teste de visualização.** Avaliação psicológica. volume1, nº1, p. 39-47, 2002.

ALMEIDA, I. A. C.; RODRIGUES, M. H. W. L.; BELLEMAIN, F. – **Construções geométricas com lápis e papel ou utilizando software gráfico: Que mudanças ocorrem quando se opta por uma dessas mídias?** – Anais do IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro. 2008.

ALVES Dulce G. - **A Fundação Carlos Chagas e a medida de nível intelectual nos exames vestibulares.** IN Educação e Seleção. Vol.8. p. 9-17. 1983.

ANDRADE, Andréa F.; KUSMENKOVSKY, Andreliz B.; CARDOSO, Josiane S.; JACON, Mirian L. **A modalidade D no conceito de simetria.** XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Anais do GRAPHICA 2007, Curitiba, 2007.

APM – Associação de professores de matemática – Escola superior de educação de Lisboa. Textos de apoio. **TA02. Transformações geométricas: introdução.** Disponível em <http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/05textos_de_apoio.html> acesso em 07/03/2011

ARNHEIN, R. – **Contemplation and creativity**. In Toward a psychology of art. University of California Press. Califórnia. 1966

BALWIN, J. **Bucky Works: Buckminster Fuller's Ideas for Today**. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1996

BARACS, J. **Poly-Kit**. Université du Québec à Montréal. Structural Topology n° 1. Montreal, 1979.

_____. **Poly-Kit**. Université du Québec à Montréal. Structural Topology n° 3. Montreal, 1979.

_____. **Spatial Perception and Creativity**. IN **Shaping Space – A Polyhedral Approach**. SENECHAL, Marjorie, FLECK, George (editors). Birkhauser Boston Inc. Boston. 1988

BASTOS, R. **Transformações Geométricas**. Notas sobre o ensino da geometria – Grupo de Trabalho de Geometria da APM. Educação Matemática n° 94. Setembro/Outubro. 2007.

BASTOS, R., VELOSO, E. FIGUEIRINHAS, S. – **Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis**. Educação e Matemática, n°101, 2009.

BERTOLINI, G. R. – **Visual Science: An Emerging Discipline**. Journal for Geometry and Graphics. Vol. 2. N° 2. pp. 181-187. 1998

BILAC, Cristina Ulian. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géometre**. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC. São Paulo. 2008.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Ed Edgar Blucher. São Paulo. 1996

BRANDÃO, O.C.S. – **Sobre fazer projeto e aprender a fazer projeto**. Tese de Doutorado. FAU USP. São Paulo. 2008.

BURIGO, E. Z. – **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos dos anos 60.** Mestrado em educação. UFRS. Porto Alegre. 1989.

CAPRA, F. – **A teia da vida.** Ed. Cultrix. São Paulo. 1996

CARROLL, J. B. – **Human cognitive abilities: a survey of factor-analytic studies.** Cambridge University Press. New York. 1993.

CASTELNUOVO, Emma. **Um método activo no ensino da geometria intuitiva.** IN **Gazeta de Matematica.** Livraria Sá da Costa. Lisboa. 1947

CHING, Francis D.K. – **Arquitetura, Forma, Espaço e Ordem.** Martins Fontes. São Paulo. 2002

_____. – **Representação Gráfica para Arquitetura.** Bookman. Porto Alegre. 2000

_____. – **Representação Gráfica para Desenho e Projeto.** Ediciones G. Gili. Barcelona. 2001

CIDADE, Daniela M. – **Desenho de Observação: Uma reflexão sobre o ensino do desenho na formação do arquiteto na era da informatização.** Graphica. 2007

CLEMENTS, D. H. – **‘Concrete’ manipulatives, concrete ideas.** In Contemporary Issues in Early Childhood, Vol.1, N°1, 1999

CLEMENTS D. H.; BATTISTA, M. **Geometry and Sapatial Reasoning.** IN **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** Grouws, D. (Ed.). New York. 1992

COMAS, Carlos Eduardo. – **Projeto arquitetônico: Disciplina em crise, disciplina em renovação.** Carlos Eduardo Comas: organizador; Jorge Czajkowski, Elvan Silva, Rogério de Castro Oliveira, Edson da Cunha Mahfuz,

Alfonso Corona Martinez, colaboradores. Projeto editores associados Ltda. São Paulo, 1986

COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. 2000. Disponível em: < <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf> > . Acesso em 20/06/2011

COSTA, Lúcio. - **O ensino do desenho**. Programa para a reformulação do ensino de desenho no curso secundário, por solicitação do ministro Capanema. 1940. Disponível em <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ip000001.pdf>> Acessado em 03/03/2011

COSTA, Maria da C. M. da – **Modelo de pensamento visual-espacial: Transformações geométricas no início da escolaridade**. Tese de doutorado em Ciências de Educação – Especialidade de Teoria Curricular e Ensino das Ciências pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

_____. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. Escola Superior de Coimbra, 2000. Disponível em <<http://www.epce.org.pt/semcc.pdf>> acesso em 06/11/2009

COVRE, P.; MACEDO, E. C.; CAPOVILLA, F. C.; SCHWARTZMAN, J. S. – **Movimentos oculares e padrões de busca visual em tarefas de rotação mental**. Psico-USF. Vol. 10. pp 41-49. 2005.

CRITCHLOW, Keith. – **Order in Space**. Thames & Hudson. New York. 2000

CROMWELL, Peter R. – **Polyhedra**. Cambridge University Press. Cambridge. 1997.

DIAS, Paulo. **As voltas com noções e aptidões geométricas no cubo**. Escola secundária da Moita. Novembro/Dezembro. 2007

DOCZI, Gyorgy – **O Poder dos Limites : Harmonias e proporções na Natureza , Arte e Arquitetura**. Ed. Mercuryo. São Paulo. 1990

DONDIS, Donis A. - **Sintaxe da linguagem visual**. Martins Fontes. São Paulo. 1997.

EISENBERG A. N. – An educational program for paper sculpture: **A case study in the design of software to enhance children's spatial cognition**. Doctorate Thesis of Philosophy Department of Computer Science. University of Colorado. 1999.

EISENMAN, Peter. – **Diagram Diaries**. Thames & Hudson. London, 1999

ELAM, Kimberly. – **Geometry of Design**. Princeton Architectural Press. New York. 2001

ELIOT, J. – **Models of psychological space: Psychometric, developmental and experimental approaches**. Springer-Verlag. New York 1987.

EMMER, Michele - **The Visual Mind II**. The MIT Press. Massachussets. 2005.

ERNST, B. – **O espelho mágico de M.C. Escher**. Taschen. Berlin, 1991

EWBANK, W. A. **What? Why? When? How? The Mathematics Laboratory.**, NCTM: Arithmetic Teacher, Alberta, USA. 1977.

FEIJS, L.; BARTNECK, C. **Teaching geometric principles to design students**. Digital Culture & Education. 1:2, 104 – 115. 2009. Disponível em <http://www.digitalcultureandeducation.com/uncategorized/bartneck-2009-html/> acesso em 20/01/2011

FLORIO, W. **O Uso de Ferramentas de Modelagem Vetorial na Concepção de uma Arquitetura de Formas Complexas**. Tese de Doutorado – Faculdade de Arquitetura e Urbanismo FAUUSP, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005.

FLORES, C. – **Olhar, saber representar – sobre a representação em perspectiva**. Musa editora. São Paulo. 2007.

GABRIEL, J. François: Editor – **Beyond the Cube. The Architecture of Space Frames and Polyhedra**. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1997

GASPAR, Maria Terezinha Jesus. – **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos, e a formação de professores**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. UNESP. Rio Claro. 2003

GEISER, C.; LEHMANN, W.; EID, M. – **Separating “rotators” from “nonrotators” in the rotations test: A multigroup latent class analysis**. Multivariate behavior research. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 2006

GONÇALVES, Marly de Menezes. – **O uso do computador como meio para a representação do espaço: Estudo de caso na área de ensino do Digital & Virtual Design**. Tese de doutorado em arquitetura. FAU-USP. Área de concentração: Design e Arquitetura.

GOUVEIA, A. P. S. – **O croqui do arquiteto e o ensino do desenho**. Tese de Doutorado. FAU USP. São Paulo. 1998.

GREET H, Gail – **Elements of Design**. Princeton Architectural Press. New York. 2002.

GROAT, L.; WANG, D. – **Architectural research methods**. John Wiley & sons. New York. 2001.

GUILLOT A.; COLLET C. - **Relationship Between Spatial Abilities, Mental Rotation and Functional Anatomy Learning**. IN **Advances in health sciences education**. Volume 12, Number 4, 491-507. 2007.

HART, George W, PICCIOTTO, Henri. – **Zome Geometry: Hands-on learning with Zome Models**. Key Curriculum Press. Emeryville. 2001.

HARRIS, L.J. – **Sex-related variations in spatial skill**. In LIBEN, L.S.; PATTERSON, A.H.; NEWCOMBE, N. (Eds.), *Spatial representation and behaviour across the life span*. pp. 83-125. Academic Press. New York. 1981

HAWKING, S. – **O universo numa casca de noz**. Ed. Mandarim. São Paulo. 2001

HEJDUK, John, DILLER, Elisabeth, LEWIS, Diane, SHKAPICH, Kim – **Education of an Architect**. Rizzoli, New York, 1988

HOLDEN, Alan. – **Shapes, Space and Symmetry**. Columbia University Press. New York. 1971.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. – **Como usar a geometria dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias**. Anais do XXVI Congresso da SBC. Campo Grande. 2006.

JANUARIO, G. - **Materiais Manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos**. Monografia (Especialização) – CEPPE – Universidade Guarulhos, 2008.

JONES, K. (2000), **Critical Issues in the Design of Geometry Curriculum**. In: Bill Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education*. Auckland, New Zeland: University of Auckland. pp 75-90.

JONES, O. – **A gramática do ornamento**. Ed. SENAC. São Paulo. 2010

JULIÁN, Fernando, ALBARRACÍN, Jesús. - **Desenho para designers industriais**. Editorial Estampa. Barcelona. 2005.

JUNG, C. G. – **O homem e seus símbolos**. Nova Fronteira. Rio de Janeiro. 2001

KAIL, R., PARK, Y. S. – Impact of practice on speed of mental rotation. *Journal of Experimental Child Psychology*. Nº 49. pp. 227-244. 1990

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo Poliedros**. EDUNFF. Niterói. 2003

KAPLAN, Craig S. – **Computer Graphics and Geometric Ornamental Design**. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Philosophy. University of Washington. 2002.

KAPPRAFF, Jay. - **A course in the Mathematics of Design**. Structural Topology nº 8, 1983

_____. – **Connections: The geometric bridge between art and science**. World Scientific Publishing Co. Singapore. 2001.

KAUFMANN, H.;STEINBUGL, K.;DUNSER, A.; GLUCK, J. – **General Training of spatial abilities by geometry education in augmented reality**. Annual Review of CyberTherapy and Telemedicine: A Decade of VR. vol. 3. pp. 65-76. 2005

KEPES, Gyorgy: Organizador – **Module, Proportion, Symmetry, Rhythm**. George Braziller, Inc. New York. 1966

KEPES, Gyorgy: Organizador – **Structure in Art and in Science**. George Braziller. New York. 1965

KLINE, M. – **O fracasso da matemática moderna**. Ed. Ibrasa. São Paulo. 1976

KREMER, Ron. – **Exploring With Squares and Cubes**. Dale Saymour Publications. Palo Alto. 1989.

LAWLOR, Robert. – **Geometria Sagrada**. Edições Prado. Madrid. 1996

LEIKIN, R., BERMAN, A., ZASLAVSKY, O. - **Learning through teaching: The case of symmetry**. Mathematics Educational Research Journal. Vol. 12. Nº 1. P18-36. 2000

LEITE, S. V. A. – **O simbolismo dos padrões geométricos da arte islâmica**. Ateliê Editorial. Cotia, 2007.

LEOPOLD, Cornélie. - **Geometry education for developing spatial visualization abilities of engineering students**. The journal of Polish society for geometry and engineering graphics. Vol. 15. pp 39 – 45. 2005.

LEOPOLD, Cornélie. - **Principles of a Geometry Program for Architecture – Experiences, Examples and Evaluations**. Journal for Geometry and Graphics. Volume 7, Nº 1, 101 – 110. 2003

LIDWELL, William, HOLDEN, Kritina, BUTLER, Jill. – **Universal Principles of Design**. Rockport Publishers Inc. Massachusetts, 2003

LIMA, Marco A. M. – **Introdução aos materiais e processos para designers**. Editora Ciência Moderna. Rio de Janeiro. 2006

LINTON, Harold. – **Color Model Environments: Color and Light in Three Dimensional Design**. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1985.

LOHMAN, D.F. – **Spatial abilities as traits, processes and knowledge**. In R.J. Sterberg (Organização), Advances in a psychology of human intelligence. vol.4. NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale. 1988

LOPES, R. P. N. - **O Timeu de Platão: mito e texto. Estudo teórico sobre o papel do mito-narrativa fundacional e tradução anotada do texto**. Dissertação de Mestrado em Cultura Clássica. Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra. Coimbra. 2009

LORENZATO, S. A. - **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sergio Aparecido (Org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Autores Associados. Campinas. p. 3-37. 2006.

LORENZATO, S. A. – **Malba Tahan, um precursor**. Educação Matemática em revista. In Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Nº 16, pp. 63-66. 2004

LUPTON, Ellen, ABBOTT MILLER, J. – **ABC da Bauhaus**. Cosac Naif. São Paulo. 2008.

LUZ, V. A. – **Um estudo sobre o ensino das transformações geométricas: Da reforma da matemática moderna aos dias atuais**. Mestrado em educação matemática. PUC/SP. São Paulo. 2007

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas: A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares, nem à formação de professores**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo. 2000.

MITCHELL, William J. – **A lógica da arquitetura: projeto, computação e cognição**. Tradução: Gabriela Celani. Editora UNICAMP. Campinas. 2008

MLODINOW, Leonard – **A janela de Euclides**. Geração Editorial. São Paulo. 2005

MOISSET, Inés. – **Fractales y formas arquitectónicas**. I+P division editorial. Córdoba. 2003

MUNARI, Bruno – **Design e Comunicação Visual**. Ed. Martins Fontes. São Paulo. 2006.

NARANJO, C. – **Mudar a educação para mudar o mundo**. Editora Esfera. São Paulo. 2005

NASCIMENTO, R. A.; GIUNTA, M. A. B.; NEVES, A. F. – **Desenho geométrico sob o enfoque da geração e organização da forma**. Disponível em <http://www.mariaantoniabenutti.sitepessoal.com/_FILES/type_files_115.pdf>. Acessado em 15/08/2011.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) - **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, VA. 1989.

OEI, Loan, DE KEGEL, Cecile. - **The Elements of Design**. Thames & Hudson. New York. 2002.

OLIVEIRA, Liliene L.; VELASCO, Angela D.; **O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá**. XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Anais do GRAPHICA 2007, Curitiba, 2007.

OLKUN, S. - **Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities**. International Journal of Mathematics Teaching and Learning. 2003. – Disponível em <<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/sinanolkun.pdf>> Acessado em 21/06/2011

PARSONS, T. D.; LARSON, P.; KRATZ, K.; THIEBAUX, M. BLUESTEIN, B. BUCKWALTER, J. G.; RIZZO, A. A. – **Sex differences in mental rotation in a virtual environment**. Neuropsychologia nº 42. pp. 555-562. 2004

PASQUALI, L (Org.) **Técnicas de exame psicológico** – TEP. Manual. Vol. I: Fundamentos das técnicas psicológicas. Casa do Psicólogo / CFP. São Paulo. 2001.

PAVANELLO, Regina M. **Porque ensinar/aprender geometria?** In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc> Acesso em: 20/01/ 2010.

PCN – **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC. 1998

PCN – De 1º a 4º series. **Parâmetros Curriculares Nacionais Fáceis de Entender**. Disponível em http://www.nce.ufrj.br/ginape/iga502/Material_aulas/PCN%20matematica%201-4.pdf Acesso em 25/01/2011

PEARCE, Peter, PEARCE, Susan. – **Experiments in Form. A foundation course in three-dimensional design**. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1980.

PICCIOTTO, Henri. **Geometry Labs**. Key Curriculum Press. Emeryville. 1999

PIGNATARI, Décio. **Semiótica da Literatura e da Arte**. Editora Cultrix. São Paulo. 1981.

PIPES, Alan. – **Drawing for designers**. Lawrence King Publishing. London. 2007

POST, T. - **The Role of Manipulative Materials in the Learning of Mathematical Concepts**. In Selected Issues in Mathematics Education National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation. pp. 109-131. Berkeley. CA. 1981.

PRENIS, John: editor – **The dome builder's handbook**. Running Press. Philadelphia. 1973.

PRIETO, G.; VELASCO, A. D. – **Visualização especial, raciocínio indutivo e rendimento acadêmico em desenho técnico**. Revista semestral da ABRAPEE. Vol.10. Nº 1. p. 11-19. 2006

RAMOS, Fernando S. – **Forma e arquétipo: Um estudo sobre a mandala**. Dissertação de Mestrado em Artes. UNICAMP. 2006

RIZZO, A., BUCKWALTER, J.G., BOWERLY, T., McGEE, J.S., van der ZAAG, C, et al – **Virtual environments for assessing and rehabilitating cognitive/funcional performance: A review of projects at the USC integrated media system Center**. Presence: Teleoperators and virtual environments, nº 10, pp. 359-374. 2001

RIZZO, A.; BUCKWALTER, J. G.; LARSON, P. ROOYEN, A. V.; KRATZ, K.; NEUMANN, U.; KESSELMAN, C.; THIEBAUX, M. – **Preliminary findings on a virtual environment targeting human mental rotation/spatial habilities**. Proc. 2nd Euro. Conf. Disability, Virtual Reality & Assoc. Tech., Skövde, Sweden, 1998

ROBERT, M., CHEVRIER, E. – **Does men's advantage in mental rotation persist when three-dimensional objects are either felt or seen?** Memory & Cognition. Nº 31(7). pp. 1136-1145. 2003

ROCHA, Carlos S. – **Plasticidade do papel e Design**. Plátano Editora. Lisboa. Data não informada.

RODRIGUES, Maria H. W. L.; RODRIGUES, Daniel W. L. **Conjugando recursos para desenvolver o “pensamento geométrico”**. Revista Escola de Minas. vol.54. nº 1. Ouro Preto. Jan/Mar. 2001

RODRIGUES, Daniel Wyllie Lacerda. – **O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design**. Tese de Doutorado em Design, PUC-Rio. Rio de Janeiro. 2008

SÁ, Ricardo. – **Edros**. Projeto Editores Associados Ltda. São Paulo, 1982

SÁ, Daniele N. C. – **Os processos projetuais na arquitetura de Peter Eisenman**. SlgraDi. 2009.

SAMARA, Thomthy. – **Grid: Construção e Desconstrução**. Cosac Naif. São Paulo. 2007

SCHULTZ, Sydney E.; SCHULTZ, Duane. – **História da Psicologia Moderna**. Editora Cutrex. São Paulo. 1981.

SEABRA, Rodrigo D.; SANTOS, Eduardo S. **Avaliando a aptidão especial de estudantes em um curso de geometria gráfica**. XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Anais do GRAPHICA 2007, Curitiba, 2007. Disponível em <http://rodrigoduarte.pcc.usp.br/Artigos/Artigo2%20-%20Graphica_2007.pdf> acesso em 20/01/2011

SEABRA, Rodrigo D.; SANTOS, Eduardo S. **Uso de formulários eletrônicos para aplicação online dos testes MRT, MCT e TVZ**. XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Anais do GRAPHICA 2007, Curitiba,

2007. Disponível em
<http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/USODEFORMULARIOS.pdf> acesso
em 20/01/2011

SEABRA, Rodrigo D. - **Uma ferramenta em realidade virtual para o desenvolvimento da habilidade de visualização especial**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica de São Paulo. São Paulo. 2009

SENECHAL, M.; FLECK, G. Editors – **Shapping Space: A polyhedral Approach**. Birkhauser. Boston. 1988.

SERRA, Michael. – **Discovering Geometry: An Investigative Approach**. Key Curriculum Press. Emeryville. 2003.

SHEPARD, R. N.; METZLER, J. – **Mental rotation of three dimensional objects**. Science. New Series. Vol.17. nº 3972. p. 701-703. 1971.

SHIINA, K.; SAITO, Takaaki.; SUZUKI, K.; **Analysis of problem solvin process of a mental rotations test – Performance in Shepard-Metzler tasks**. Journal for geometry and graphics. Vol.1, Nº 2,185-193. 1997

SHIINA, K.; SUZUKI, K.; **Design of modified mental rotations test and its error analysis**. Journal for geometry and graphics. Vol.3, Nº 2, 211 - 218. 1999

SHIINA, K.; SHORT, Dennis R.; Miller, Craig L.; SUZUKI, K.; **Development of software to record solving process of a mental rotations test**. Journal for geometry and graphics. Vol.5, Nº 2,193 – 202. 2002.

SILVA, V. G. - **Os Testes Psicológicos e as suas Práticas**. Disponível em <http://www.algosobre.com.br/psicologia/os-testes-psicologicos-e-as-suas-praticas.html> Acessado em 21/06/2011

SORBY, S. A. – **Developing 3-D spatial visualization skills**. Engeneering Design Graphics Journal. Vol. 63. Nº2. p. 21-32. 1999

SPINILLO, Alina G.; ROAZZI, Antônio. – **A atuação do psicólogo na área cognitiva: reflexões e questionamentos**. IN **Psicologia, Ciência e Profissão**. Vol. 9. Nº3. 1989.

STERNBERG, Robert J. - **Psicologia Cognitiva**. Editora Artmed. Porto Alegre. 2008.

STEVENS, Peter S. – **Handbook of regular patterns. An introduction to symmetry in two dimensions**. MIT Press. Massachusetts. 1999.

SUTTON, K., WILLIAMS, A. – **Spatial cognition and its implication for design**. International association of societies of design research. 2007

TAHAN, M. (SOUZA, J. C. M.) – **Didática da Matemática**. Ed. Saraiva. São Paulo. 1962.

TEIXEIRA, Fábio G.; SILVA, Régio P.; SILVA, Tânia L. K.; HOFFMANN, Anelise T. **Implementação da aprendizagem baseada em projetos na geometria descritiva**. XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Anais do GRAPHICA 2007, Curitiba, 2007.

USISKIN, Z. **Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar** IN **Aprendendo e Ensinando Geometria**. LINDQUIST, Mary Montgomery, SHULTE, Alberto P. (org. Editora Atual S/A. São Paulo. 1994

VANDENBERG, S. G.; KUSE, A. R. – **Mental Rotations, a group test of three-dimensional spatial visualization**. Perceptual and motor skills. Vol.47. p. 599-604. 1978.

VELASCO, A. D.; KAWANO, A. **A aptidão especial é um dom?**. Projeto Teia do Saber – Metodologias de ensino da matemática. UNESP. 2000. Disponível em <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/AulasModulo03-pdf/AptidaoEspacial.PDF>. Acesso em 22/01/2011.

VELASCO, A. D.; KAWANO, A. **Avaliação da aptidão especial em estudantes de engenharia como instrumento de diagnóstico do desempenho do desenho técnico.** Boletim técnico da EPUSP. São Paulo. 2002

VELOSO, Eduardo. **Geometria: Temas Actuais: materiais para professores.** Instituto de Inovação Educacional. Lisboa. 2000.

VOYER, D.; VOYER, S.; BRYDEN, M.P. – **Magnitude of sex differences in spatial habilities: a meta-analysis and consideration of critical variables.** – Psychological Bulletin. 117. p.250-270. 1995

WADE, D. – **Symmetry. The ordering principle.** Walker and Company. New York. 2006.

WALLSCHLAEGER, Charles; BUSIC S. Cynthia. – **Basic Visual Concepts and Principles.** Wm C. Brown Publishers. Massachusetts. 1992

WEXLER, M., KOSSLYN, S. M., BERTHOZ, A. – **Motor process in mental rotation.** Cognition 68. pp. 77-94. 1998

WEYL, H. – **Simetria.** Edusp. São Paulo. 1997

WIENDERBAUER, G., SCHMID, J., OSMANN, P. J. – **Manual training of mental roation.** European Journal of Cognitive Psychology. Nº 19. Psychology Press. 2007.

WILMER, Celso, PEREIRA, Maria Regina Ferraz. – **Geometria para desenho industrial.** Editora Interciência LTDA. Rio de Janeiro. 1978.

WOHLSCHLAEGER, A., WOHLSCHLAEGER, A. **Mental and manual rotation.** Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. Nº 24. PP. 397-412. 1998

WONG, Wucius. - **Princípios de forma e desenho.** Editora Martins Fontes. São Paulo, 1998

_____. - **Principles of Form and Design**. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1993.

_____. – **Principles of Three Dimensional Design**. Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1977.

_____. - **Principles of Two Dimensional Design**. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1972.

YÉVENES, Gracia G. G. - **Huellas y De-simetrías. Espacios entramados en la Discontinuidad** – Tese de Doutorado – Universidade politecnica de Valencia. Faculdade de Bellas Artes – Valencia - 2003

YOUNG, Michael F. D. **Uma abordagem do estudo dos programas enquanto fenômenos do conhecimento socialmente organizado**. In: Gracio, Sérgio & STOER, Stephen (Orgs.) Sociologia da Educação-II: antologia, a construção social das práticas educativas. Portugal: Livros Horizonte, 1982.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações**. GT 19 – Educação Matemática

ENDEREÇOS ELETRÔNICOS NA WWW.

[W1] - The Geometry Junkyard. Symmetry and Group Theory - (acessado em 05/09/2010)

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/sym.html>

[W2] - Wolfram Website . Symmetry. (acessado em 10/09/2010).

<http://mathworld.wolfram.com/Symmetry.html>

[W3] - Desarrollo Morfológico – Casa Guardiola (acessado em 10/09/2010)

<http://www.youtube.com/watch?v=JAH97LcQ2Cs>

[W4] - Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa: Transformações Geométricas e Simetria (acessado em 05/10/2010)

http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/index.html

[W5] – **Learning Design: Teaching Transformation Geometry in Secondary Schools** (acessado em 27/02/2011)

http://wikieducator.org/LearningDesign:Teaching_Transformation_Geometry_in_Secondary_Schools

[W6] - LOHMAN, David F. - **Habilidade espacial e G** - Trabalho apresentado no primeiro Seminário de Spearman, da Universidade de Plymouth, 21 de julho de 1993

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.111.7385&rep=rep1&type=pdf>

(acesso em 10/06/2011)

[W7] - Human Intelligence – Historical influences, current controversies, teaching resources - <http://www.indiana.edu/~intell/lthurstone.shtml> - acesso em 20/06/2011

[W8] - NEISSER, Ulric. - **cognitive psychology**. *Grolier Multimedia Encyclopedia*. 2009. Grolier Online. 17 July 2009 <
http://www.justanswer.com/uploads/Kereya/2009-07-17_054616_Grolier_Online_Cognitive.pdf >. (acesso em 20/06/2011)

[W9] – **Visualização e Geometria nos Primeiros Anos** – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos. http://turmadofrancisco.ccems.pt/Documentos/Docentes/207_m_visualgeo_eselx2007.pdf (acesso em 02/02/2011).

[W10] – NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – Geometry Standard. < <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=314#apply>> (acesso em 20/11/2011).

BIBLIOGRAFIA ESTENDIDA: A GEOMETRIA DO DESIGN

Tem ganhado impulso nos últimos 20 anos, a publicação de livros, teses e artigos dedicados a descrever métodos de projeto e modelos pedagógicos que evidenciam os aspectos visuais da matemática, através da estratégia de relacionar tópicos da geometria a expressões artísticas diversas, entretanto percebe-se que boa parte dos temas são comuns a todos os livros. Isto explica-se em parte, pelo fato de exercerem influências mútuas; muitos dos livros mais recentes utilizaram os mais antigos como fonte de inspiração e referência bibliografia básica, e é natural que disso resultem semelhanças nos formatos e organização.

Algumas destas fontes exploram as diferenças entre os programas de arquitetura, design e artes, e conseguem contribuir com didáticas mais focadas e precisas, sugerindo temas e métodos, e exercendo forte influência sobre educadores que os adotam. É comum observar como determinados exercícios enunciados circulam entre as diversas escolas. Alguns podem sofrer alterações como esforço de adaptação ou fusão, mas conservam um *DNA* que evidencia suas origens, e permite rastreamento e entendimento sob quais fontes e influências estão os educadores, e consequentemente, os cursos de graduação.

As próximas páginas descrevem em curtas resenhas algumas destas fontes com as quais o autor desta pesquisa se deparou. Adverte-se o leitor, que não as anotações não têm o propósito de serem longas nem formais, pois refletem um estágio da pesquisa no qual a preocupação foi mapear e organizar pesquisadores e métodos. A decisão por apresentá-las neste volume considerou que pode ser interessante como uma espécie de bibliografia estendida, ao agrupar as obras

segundo seus focos temáticos, a despeito da pouca profundidade e possíveis lacunas.

GEOMETRIA É MATEMÁTICA.



Geometria: Temas Actuais. materiais para professores. (VELOSO, 2000)

O público alvo original deste livro, são os professores de matemática. O professor Eduardo Veloso é matemático, e como educador, percebe a importancia de contar a seus alunos, a progresso histórico da disciplina de geometria, bem como sugerir-lhes caminhos e servir-lhes de dicas, na construção de seus programas didáticos.

O autor conhece os riscos de um trato rigoroso, por isso comenta os assuntos de uma forma bastante atraente e coloquial, o que facilita imensamente a compreensão pelos pesquisadores não-matemáticos, o que é **fundamental**.

Percebe-se empenho explícito em explorar o viés artístico da geometria.

Os tópicos são diversos, mas não se tem a pretensão de envolver o universo inteiro: Trata da geometria de Euclides e das que não são, como a fractal, de conceitos abstratos como forma e dimensão, de operadores como as transformações geométricas, de sistemas de representação como as projeções e perspectivas, dos sistemas de simetria como os padrões, frisos, pavimentações, das formas planas espaciais feitas de polígonos e poliedros, entre outros.

A história da geometria é contada em etapas, e aparece em todos os capítulos, e culmina nas últimas páginas, numa cronologia, que nos dá uma visão

sobre seu desenvolvimento ao longo dos séculos.

Ao longo do livro o autor recorre, frequentemente, a programas de geometria dinâmica, como é o caso do Geometer's Sketchpad que, segundo ele, são "*instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas atividades de exploração, investigação e descoberta em geometria e na matemática em geral*". (VELOSO. 2000. p.92). Há sempre o cuidado de introduzir diversas notas que fornecem numerosas indicações bibliográficas para os leitores que pretenderem saber mais sobre os temas propostos, assim como endereços da Internet.

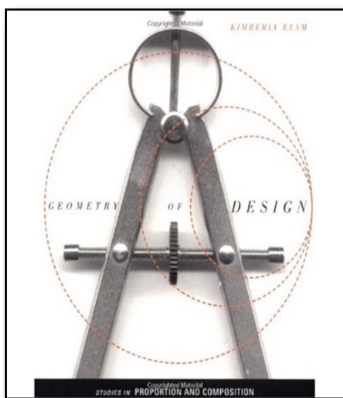
Trata-se em síntese, de um livro precioso e referencia de primeira ordem.

GEOMETRIA É PROPORÇÃO.

O estudo dos sistemas de proporção constitui-se em um campo muito bem definido das possibilidades relacionais entre geometria e linguagem visual, e talvez seja talvez o método mais antigo de se fugir da arbitrariedade e buscar parâmetros para o belo e harmonioso. Uma proporção é em matemática, sempre a expressão de uma razão; a divisão de uma quantidade por outra. Na geometria, dá-se através da comparação quantitativa entre as partes de um conjunto. É o que se dá por exemplo, quando compara-se a extensão do lados entre um retângulo. Se sua altura for duas vezes menor que a largura, grafa-se sua proporção como sendo 1:2.

A antiguidade de seu uso, e as coerências que compartilham com o mundo natural, fazem da proporção áurea e dos retângulos de raiz, provavelmente os mais utilizados e estudados ao longo da história, pode-se dizer, até os dias de hoje, tendo sido igualmente importante para regular as obras de Fídias e Le Corbusier.

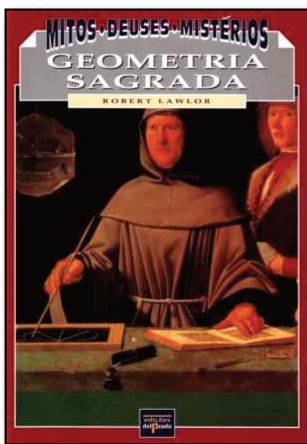
Assim é de se esperar que haja grande numero de publicações sobre este tópico. Três visões sobre estes sistemas de foram referencia para este trabalho:



Geometria do Design: Estudos em Proporção e Composição.

Se a geometria organiza e descreve a forma, e a forma é o terreno onde o design se realiza. O livro de Kimberly Elam (2001) faz uma análise dos *grids*, diagramas e traçados que estruturam obras na arquitetura, design gráfico e design industrial, encontrando relações comuns que reforçam a universalidade e versatilidade deste

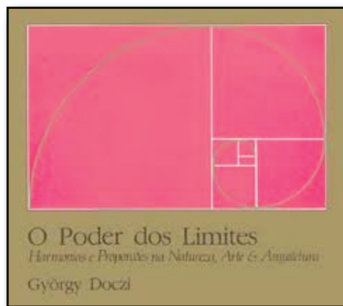
método através dos tempos. Faz-se o inevitável vínculo das proporções com o mundo natural; estão lá as conchas em caracol, os peixes e o corpo humano nas esculturas gregas, e nos desenhos de Leonardo da Vinci e Durer. Mas o interesse maior do livro recai sobre a análise das obras de design gráfico, produto e arquitetura, desde o modernismo até a contemporaneidade, segundo a sensibilidade de seus artistas aos sistemas de proporção.



A Geometria Sagrada (LAWLOR, 1996).

A *Geometria Sagrada* trata a geometria e os sistemas de proporção a partir de uma dimensão simbólica, e confere ênfase à arte antiga como reflexo da geometria como meio de conhecimento filosófico e do mundo natural; uma busca do imutável, daquilo que traz consigo a noção de verdade em meio a um universo confuso de perpétuos fluxos de acontecimentos, e seus reflexos sobre a materialidade do mundo.

Há uma atenção especial dedicada às demonstrações, tanto algébricas como geométricas, em meio a um caderno de práticas, com proposições que exploram as formas regulares e suas subdivisões.



O Poder dos Limites (DOCZI, 1990) Gyorgy Doczi é arquiteto, e define sinteticamente o caráter da profissão como o trabalho com as proporções. O livro reflete sobre os processos básicos da formação dos padrões no mundo natural, que operando dentro de limites restritos, criam variedades ilimitadas de formas e harmonias. Descreve a geometria destas relações como áreas fronteiriças `a ciência, arte, religião e filosofia. Traz uma sequência de belos diagramas de análise, ligando a estratégia de crescimento e organização de eventos naturais e organismos vivos `a pureza abstrata das formas geométricas. Em um segundo momento, verifica como a percepção destas ordens e padrões tem sido apropriados em obras artísticas de todas as naturezas.

GEOMETRIA É ORDEM

Critchlow (2000) descreve no prefácio de sua obra **Order in Space**, as seguintes considerações sobre suas principais motivações:

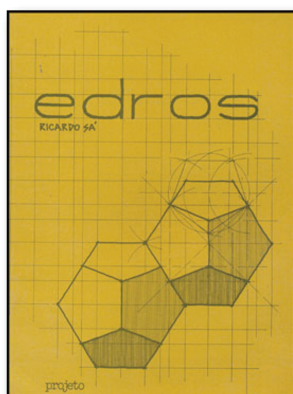


“O material contido neste livro representa uma maneira de abordar a ordem no espaço. O incremento compreensão sobre a ordem espacial parece corresponder diretamente a própria evolução do homem tida como estado de ser da consciência. Em primeiro lugar, como ferramenta de orientação, o ‘onde’ das coisas, e eventualmente tornando-se o ‘como’ inerente das coisas”. (CRITCHLOW, 2000, p.3)

A geometria é descrita, nesta e outras obras, através das definições do plano e do espaço, suas propriedades, elementos e nomenclatura, em descrições anatômicas das entidades isoladas ou em agrupamentos, em seu sentido abstrato e destituído de qualquer contexto concreto de aplicações ou simbólico

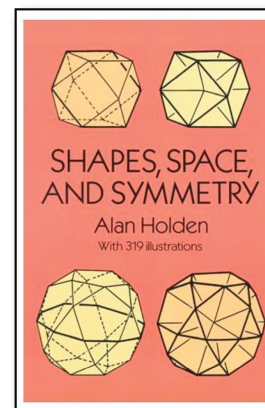
Procedem a organização e classificação metódica de padrões, pelo estudo das propriedades da divisão regular do plano e do espaço, na formação de malhas regulares e semi-regulares.

Os objetos de estudo são constituídos por polígonos e poliedros expressos por familiaridades e afinidades, como no conjunto de prismas, anti-prismas, sólidos platônicos (regulares) e arquimedianos (semi-regulares), e muitas outras que nascem dos procedimentos de tuncamentos e intersecções.



Edros (SÁ, 1982) é um livro importante por diversas razões. É o único nesta categoria editado em Português apesar de ter sido editado em 1982; não é excessivamente algébrico, e apresenta desenhos técnicos precisos apesar de informais. Talvez não por acaso, o autor de Edros é graduado em arquitetura, mas aos 33 anos, por ter sido contratado pela Embraer, aproximou-se da mecânica e da cinemática, e geometria segundo ele, foi disciplina fundamental aos seus estudos. Em sua bibliografia relaciona diversas obras de mineralogia e cristalografia.

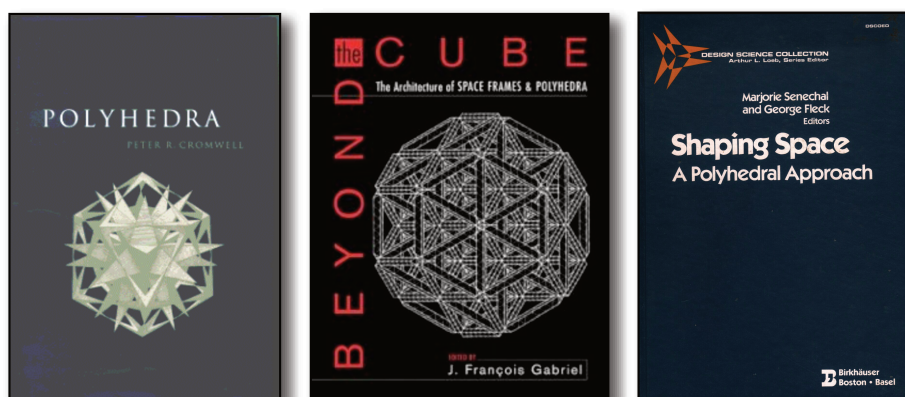
Shapes, Space and Symmetry (Holden, 1971) deixa claro já no prefácio, o autor esclarece sua crença em que, para se investigar o universo tridimensional e o espaço, o bom caminho é o da construção física de modelos tridimensionais. O livro é um compêndio fotográfico de inúmeros sólidos, metodicamente cortados e montados em papelão e arame, e organizados por categorias e qualidades espaciais. Seu foco é o estudo dos poliedros através da



propriedade da simetria.

São assuntos pouco explorados nos demais livros que encontrei, o que faz dele uma referência de primeira ordem. Encontrei diversas referências a ele no corpo de diversos volumes da minha bibliografia.

Três outras organizações de artigos alinham-se com os principais tópicos desta categoria, mas que somam artigos descritivos de experiências didáticas e métodos de projeto, e artigos que contextualizam o estudo dos poliedros nas pesquisas de diversas áreas, como química, cristalografia, design, astronomia, filosofia e matemática. São eles: **Polyhedra** (CROMWELL, 1997) **Beyond the Cube. The Architecture of Space Frames and Polyhedra** (GABRIEL, 1997), e **Shaping Space: A polyhedral approach** (SENECHAL; FLECK, 1988)



Um dos artigos é ***Spatial Perception and Creativity***, (BARACS, 1988 in SENECHAL; FLECK, 1988)

O professor Janos Baracs pertenceu ao *Structural Topology Research Group*, um grupo canadense cuja existência se deu entre 1979 e meados da segunda metade dos anos 90, que teve como principal objetivo, estudar as relações entre percepção espacial e a criatividade.

Assim como percepção espacial seja uma área de estudos demasiado ampla, que implica em prospectar aspectos sociais, físicos e outros espaços, Baracs estabelece seu campo em investigar a criatividade em seus aspectos

morfológicos, através de uma sequência de ações traduzidas em termos da geometria. Sua proposição expressa é “*promover um vínculo mais forte entre geometria e o design criativo*” (BARACS, 1988, p.130), e enxerga como principais obstáculos, exatamente a pouca predisposição de artistas e arquitetos à compreensão de sua gramática:

“como bem descreve o cristalógrafo soviético Shubnikov, eles tem horror às palavras lei, simetria, geometria e ordem; em seus lugares, preferem harmonia, beleza, estilo, ritmo e unidade, apesar dos significados destas palavras diferirem muito pouco”. (BARACS, 1988, p.131)

Neste artigo, descreve suas experiências didáticas no ensino de processos criativos em morfologia, traduzidos em termos de geometria, aplicados a estudantes de arquitetura e artistas.

Dois são os maiores interesses neste texto:

1. Oferecer argumentos em defesa da necessidade de manipular-se modelos geométricos como estratégia pedagógica. Tanto melhor a estratégia quanto as ferramentas permitirem a exposição progressiva em complexidade, de propriedades dos sólidos e do espaço.

2. Oferecer um modelo conceitual organizado em diagramas, capaz de descrever as distintas fases que se desenvolvem entre a apresentação de um artefato espacial e a percepção deste artefato.

De acordo com Baracs, o processo pode ser distribuído em três fases: 1. Criação de uma imagem (*Image*), 2. Imaginação analítica (*imagery*) e 3. Imaginação criativa (*imagination*).

A fase um está relacionada ao plano senso-motor, mais especificamente ao sentido da visão: à sensação espacial e ao discernimento das imagens.

A fase dois relaciona-se à compreensão do espaço. Compreensão é aqui dita em uma esfera analítica e mental. Esta fase desenvolve-se em três ações

contínuas: Visualização (observação), estruturação (abstração) e transfiguração (comunicação).

A fase três descreve o processo de intervenção. O processo criativo propriamente dito. A exemplo da fase dois, também estrutura-se a partir de três ações contínuas: Determinação (construção), classificação (organização) e aplicação (variação).

O detalhamento de como se dão as articulações entre fases, bem como a apresentação de cada um dos diversos diagramas de ações, é demasiado longo e não cabe no escopo deste trabalho, mas é pertinente apresentar o diagrama síntese de seu modelo:

GEOMETRIA É VISUALIZAÇÃO

Três livros do arquiteto e professor Francis D. K. Ching são referências obrigatórias à introdução básica ao vocabulário do projeto de arquitetura e design: **1. Arquitetura: Forma, Espaço e Ordem** (CHING, 2002) e **2. Representação Gráfica para Desenho e Projeto** (CHING, 2001) e **3. Representação Gráfica em arquitetura** (CHING, 2000).



Ching é minucioso. Este traço reflete-se no cuidado com que descreve os assuntos que ensina. Seus desenhos são precisos, limpos e elegantes, e ilustram todos os seus livros. O desenho é a grande ferramenta deste professor; editou diversos livros no assunto, e pode-se dizer que conhece bem os seus segredos.

Sua abordagem é prolífica em demonstrar o vínculo entre desenho e geometria. Seja na descrição dos elementos e conceitos do plano e espaço ou na modelagem/organização da forma, e tenha caráter técnico ou expressivo.

Na introdução do primeiro livro, o autor assim o define:

“(...) este livro está voltado, portanto, `a ampliação e enriquecimento de um vocabulário de projeto através do estudo de seus elementos e princípios essenciais e da exploração de um amplo rol de soluções a problemas arquitetônicos..” (CHING, 2002).

O sumario dividido em 7 capítulos principais: 1. Elementos Primários; 2. Forma; 3. Forma e Espaço; 4. Organização; 5. Circulação; 6. Proporção e Escala; 7. Princípios.

O interesse relativo `a geometria integra todos os capítulos, entretanto nos dois primeiros capítulos, sua presença é mais evidente: “Elementos Primários”, que vai da página 4 `a 30, apresenta os conceitos de ponto, linha, plano e volume. Em “Forma”, que vai da página 35 `a 86, descreve suas propriedades, distingue regularidade e irregularidade enquanto conceitos geométricos, mostra categorias de transformação através da deformação, subtração e adição, bem como sua organização em malhas.

O segundo livro trata essencialmente do da questão do desenho e organização de seus múltiplos aspectos, em 3 capítulos: 1. Desenho de observação, 2. Sistemas de desenhos e 3. Desenhos com base na imaginação.

Especialmente interessante é o sub-capítulo 3 do capítulo 2, intitulado “Forma e Estrutura”, que vai da página 65 `a 79. Demonstra como se pode investigar a forma, desenhando-se com base em malhas geométricas. Adições, subtrações e transformações são alcançadas a partir da modulação de prismas cubóides, gerando uma malha espacial referencial, de vértices e arestas.

Segundo Ching, a representação gráfica é inseparável do processo de projeto. Representação gráfica em arquitetura (CHING, 2000) é amplo nos tópicos. Da geometria, traz boa explicação sobre os sistemas de projeção e os vincula aos desenhos de representação sejam eles para fins de apresentação, ou fundamentos para o desenho técnico.

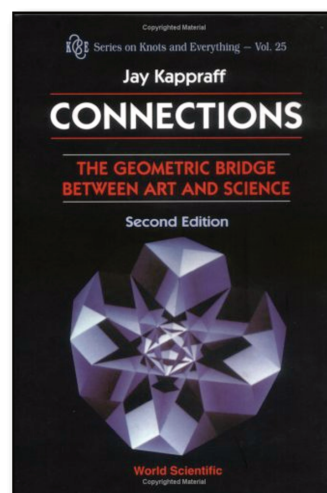
GEOMETRIA É CIÊNCIA DO DESIGN.

“O que é a ciência do design? É um assunto que tem se desenvolvido a partir das perspectivas comuns entre o designer e o cientista, por vezes em concordância, e `as vezes por conta própria, e pode ser considerada como ponte entre a arte e a ciência.” (KAPPRAFF. 2001: xii)

Ciência do Design explica a associação das artes com as ciências exatas numa espécie de encontro entre forças opostas. Na etimologia do termo, a matemática traz a reboque a palavra ciência, pois pode emprestar seu amplo repertório de categorizações, especializações e demonstrações, tão caro ao método científico. O aspecto inusitado, social e criativo, fica a cargo da palavra design.

As publicações tendem a adotar certo tom generalista, do tipo ‘de tudo um pouco’, mas nem por isso merecem o rótulo de superficiais. Pelo contrario, acertam na medida da busca em que se vê o ‘pesquisador híbrido’ (o artista-geometra ou o geômetra-artista).

O professor Jay Kappraff, (KAPPRAFF, 2001) em seu livro cujo título pode ser traduzido livremente do inglês por **Conexões: A ponte geométrica entre arte e**



ciência, publicado pela primeira vez em 1990, compilou amplo conjunto de tópicos relacionados à geometria e seu estudo associado às ciências visuais. No prefácio, o autor apresenta-se como um matemático cujos interesses o levaram a ensinar em cursos de arquitetura e design. Relata que teve a compreensão, apenas depois de anos de atividades e pesquisas, que estava redescobrando um campo do conhecimento chamado “Ciência do Design” (*Design Science*), que traz a geometria como ponto de tangência (ou ponte) entre arte e ciência que ora se encontram e se interpenetram, ora mantém suas autonomias.

O autor cita alguns nomes como expoentes deste movimento: o inventor e arquiteto Buckminster Fuller foi o primeiro, e quem ‘batizou’ o campo; o físico-químico Arthur Loeb um dos primeiros a reconhecer a autonomia desta disciplina, comum à arte, arquitetura, química, biologia, engenharia, computação gráfica e matemática, e que tem como objetivo principal, o estudo e exploração da gramática geométrica do espaço.

Vale a pena citar textualmente uma frase do autor, ainda no prefácio:

“..foi apenas na conclusão neste livro que eu descobri o que ele realmente é: em um nível, ele é uma coleção de tópicos especiais da antiga e moderna geometria. Em outro, introduz o leitor às muitas maneiras que a geometria é utilizada em belos trabalhos de design e estruturas. Num nível mais profundo, demonstra a importância da geometria em intermediar a unidade e harmonia do mundo natural, e a capacidade humana de perceber esta ordem”.

O livro é na realidade o resultado das experiências didáticas anteriores do autor. Sua formatação teve impulso na percepção de que pesquisadores de diversas áreas como a matemática, arquitetura e cientistas da computação, vinham aproximando-se através de interesses comuns:

“os arquitetos estavam tentando encontrar caminhos para

romper os limites do repertório das formas arquitetônicas, procurando por uma linguagem para expressar certas noções vagas, como ‘simetria’, ‘complexidade’ e ‘sistemas ideais’, e finalmente dispuseram-se a desenvolver determinadas competências matemáticas necessárias para tornar as tarefas arquitetônicas mais operacionais.

Matemáticos estavam tentando encontrar algumas aplicações interessantes para tópicos abstratos da matemática como a teoria de grupos, topologia e teoria gráfica, e em virtude disso, despertaram o interesse por redescobrir as Raízes geométricas de seus interesses.

Os cientistas da computação viram nos estudantes de arquitetura como potenciais usuários de suas pesquisas, especialmente na computação gráfica.” (KAPPRAFF, 1983).

A percepção destes interesses mútuos levou Kappraff (1983) a publicar o artigo ***A course in the Mathematics of Design***, onde descreve as linhas gerais de um curso semestral cujo propósito principal foi apresentar a geometria como ferramenta de criação a jovens do terceiro ano de arquitetura.

Em síntese, cumpre dizer que seu modelo envolve exercícios de curta duração entremeados pelo reforço de certas noções da geometria, organiza-se a partir do cumprimento de três objetivos conceituais, e compõe-se de quatro etapas metodológicas:

São os três objetivos:

- Apresentar aos estudantes algumas ferramentas matemáticas para o design espacial.
- Através da matemática, sugerir algumas idéias novas e interessantes para o design espacial.
- Mostrar aos estudantes que o design espacial não é inteiramente aleatório, mas restrito a certas propriedades matemáticas do espaço.

São as quatro etapas:

- A primeira etapa consiste em explorar alguns elementos da geometria sobre o plano.
- A segunda etapa explora a geometria em 3 dimensões.
- A terceira etapa aborda alguns aspectos geométricos do conceito de estrutura.
- A quarta etapa investiga aplicações matemáticas voltadas à organização da complexidade.



Na obra ***Basic Visual Concepts and Principles***, Wallschlaeger e Busic (1992), relacionam os **estudos visuais** como parte de um modelo que relaciona uma estrutura sistemática de organização planejamento de pesquisa, chamada por eles de *problem-solving process*, aos processos de investigação da forma, chamado por eles de *form generation model*, cujo objetivo é tornar claros e compreensíveis os caminhos que conduzem à criação formal em duas e três

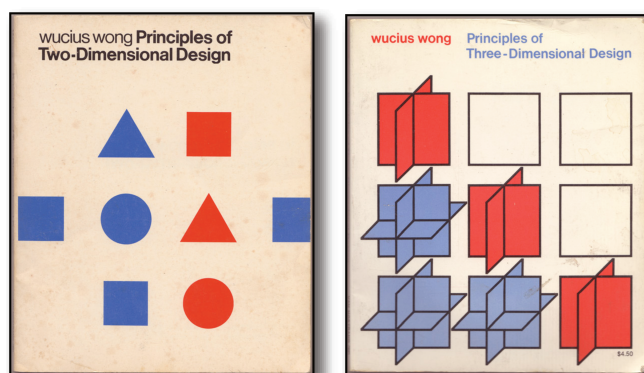
dimensões.

Assim, o modelo chamado *Problem-Solving Process/Form Generation Model*, “organiza e categoriza os **elementos visuais** utilizados na geração da forma e identifica os conceitos básicos obtidos das teorias da comunicação e da percepção visual” (WALLSCHLAEGER e BUSIC, 1992, p.ix).

Um amplo organograma descrito nas páginas xvi à xix, representa um dos principais legados da obra. Através dele, os tópicos e disciplinas do conhecimento, envolvidas na questão da criação em arquitetura, design e arte são categorizados e organizados segundo a natureza de seu vínculo. Esta formatação permite uma compreensão sintética da estrutura, que por ser ampla e complexa, não é fácil de

se apreender em sua totalidade. O modelo admite a geometria como uma das principais disciplinas que fundamentam os estudos da linguagem visual, embora não a individualize como área do conhecimento.

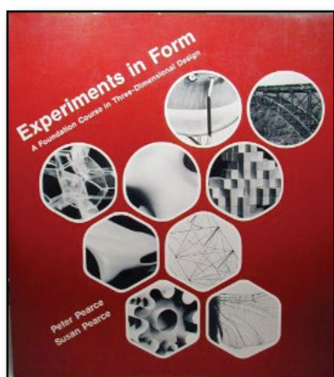
Principles of two-dimensional design (WONG, 1972) e **Principles of three-dimensional design** (WONG, 1977).



O autor, que tem sido professor em cursos de artes e design, apresenta uma coletânea de trabalhos desenvolvidos por alunos, a partir de uma seleção de conceitos e tópicos.

Não se preocupa nem se detém aos pormenores de cada tópico que adota. Sua estratégia parece incluir um conjunto de belos gráficos e sucintos textos explicativos, numa sequência que vai da geração da forma a partir das relações entre seus constituintes básicos ponto, linha e plano, volume passando por prismas e anti-prismas até os poliedros, contudo como disse, sem preocupações maiores em avançar com categorizações ou incluir demonstrações formais da matemática.

Algumas das composições chamam a atenção pela exuberância, e parecem deixar entrever uma crença do autor de que a complexidade vem através do arranjo de formas simples, entretanto, faz falta uma inserção mais profunda em alguns dos trabalhos, numa espécie de estudo metodológico que fizesse uma aproximação gradual entre o recorte esquemático e o resultado final.



Experiments in Form. A foundation course in three-dimensional design (PEARCE; PEARCE, 1980)

Os autores são professores de cursos de Design.

Peter Pearce escreveu também o livro “*Structure in Nature is a Strategy for Design*” (MIT Press, 1978), e define design como “o ato deliberado de criar ou dar forma como solução para um problema para o qual, se solicita um resultado físico”. Segundo sua visão, o bom designer cria soluções alinhadas com os métodos da natureza, que busca fundamentalmente a funcionalidade, adaptação e ser energeticamente conservativa. Assim, previne-se a arbitrariedade das formas, e orienta-se a fim de obter-se maior performance, refletida na otimização dos materiais, energia e recursos humanos.

O livro divide-se em 3 partes:

Os autores tomam uma forma referência e expandem a análise de diversos aspectos de sua estrutura, explorando-a minuciosamente. Assim, na primeira parte, detêm-se a aprofundar os significados e aplicações dos conceitos, como a existencia das forças intrínsecas e extrínsecas, formadoras e presentes em qualquer sistema natural ou criado pelo homem, cuja articulação e síntese devem ser buscadas pelo bom designer.

Na segunda, descreve um método de investigação dos conceitos descritos na primeira etapa, através da exploração de uma sequencia de maquetes em técnicas e materiais distintos, que revelam a adoção de distintas estratégias para problemas de projeto. A questão do equilíbrio das forças é o tema central que governa os oito arranjos, de esferas, polígonos, planos horizontais e verticais, cubos e arestas espaciais.

Na Terceira, traz uma coleção de imagens a dar exemplo da geometria na natureza, em produtos de design e sistemas construtivos.

TESES DE DOUTORADO

Dentre as teses, sublinha-se duas:

- 1. O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design (RODRIGUES, 2008)**
- 2. Uma ferramenta em realidade virtual para desenvolvimento da habilidade de visualização espacial (SEABRA, 2009)**

O primeiro aspecto a chamar a atenção, são as datas de conclusão de ambas: 2008 e 2009. Sendo muito contemporâneas com a presente pesquisa, colaboram com o registro da emergência do tema e de sua atualidade. Tratam-se igualmente de pesquisas acadêmicas, e o irmanamento entre temas as tornam referencias naturais.

A tarefa do professor Rodrigues é ensinar geometria em um curso superior de design, e sua tese reflete sua convicção (com a qual compartilha-se) na necessidade de tratar-se de uma atividade lúdica, estimulante, inesperada, e capaz de despertar curiosidade e interesse dos alunos. Assim, propõe como linha de pesquisa, a exploração do potencial matemático dos jogos de desafio, pois que trazem naturalmente consigo estes predicados.

Dedica-se então a demonstrar a geometria que há em destes jogos (alguns disponíveis no mercado), e como podem ser utilizados no contexto pedagógico.

Já no trabalho do professor Seabra, as referencias principais dão-se na comparação entre meios de aprendizagem. Utiliza as aulas de geometria descritiva para ingressantes nos cursos de engenharia, a fim de observar o impacto de uma ferramenta didática baseada em técnicas de realidade virtual, em especial a estereoscopia, sobre sua capacidade de visualização espacial,.

A exemplo da presente pesquisa, a estratégia metodológica envolve a comparação entre ferramentas, (perceptivas para o caso de Seabra e expressivas

neste caso), assim como a medição do impacto sobre a habilidade de visualização espacial se dá por meio de testes cognitivos.

ANEXO 1

Termo de consentimento livre e esclarecido – Estudante

Eu, _____
estudante do curso de Design das Faculdades de Campinas - FACAMP, concordo em participar de um teste de visualização espacial, aplicado na disciplina Geometria III.

Obtive os esclarecimentos necessários sobre a natureza científica e pedagógica do teste, cujo objetivo é avaliar a habilidade de rotação mental.

Fui informado que meus dados pessoais serão mantidos em sigilo, assim como o resultado individual de meu rendimento. Os resultados gerais do teste serão utilizados para medir a eficiência de estratégias pedagógicas adotadas na disciplina, bem como gerar dados para publicações em literatura científica especializada.

Estou ciente de que minha participação é voluntária, e que não servirá para efeitos de avaliação formal do curso de Geometria III, portanto, não haverá nenhuma espécie de prejuízo caso decida abandonar o teste.

A realização desta atividade se dará em horário normal de aulas.

Poderei entrar em contato com o responsável pelo teste – XXXXXXXX – pelo telefone (XX) XXXX XXXX, ou pelo email XXXX@XXXX.com, sempre que julgar necessário, a fim de obter maiores esclarecimentos.

Este termo de consentimento é feito em duas vias, sendo que uma permanecerá em meu poder, e outra com o pesquisador responsável.

Campinas, _____ de _____ de 2011

Participante

Pesquisador Responsável

ANEXO 2

NOME COMPLETO:

DATA:

TESTE DE CONHECIMENTOS SOBRE SIMETRIA

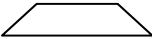
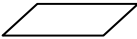
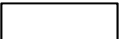
TEMPO LIMITE: 20 MINUTOS

ATENÇÃO:

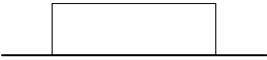
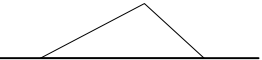
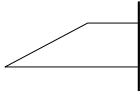
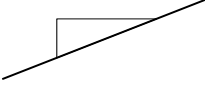
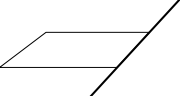
Os exercícios **1 e 2** são sobre **Simetria Axial - reflexão**

Os exercícios **3 e 4** são sobre **Simetria Central - rotação**

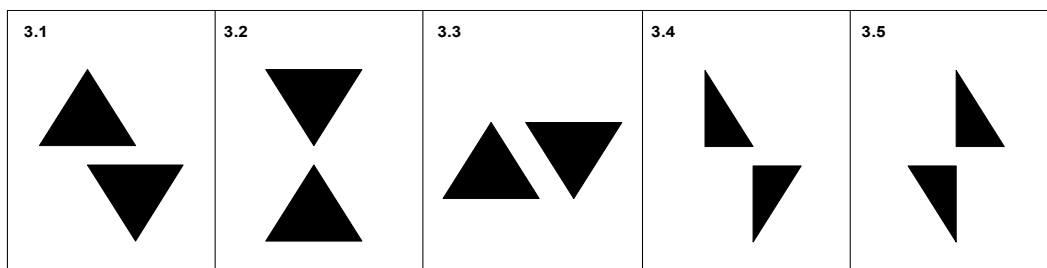
- 1** Para cada figura abaixo, determinar qual das figuras possui simetria em relação a uma **linha**.

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
					
a) A figura é simétrica em relação a linha?					
b) Quantas linhas de simetria tem a figura?					
c) Desenhe todas as linhas de simetria existentes.					

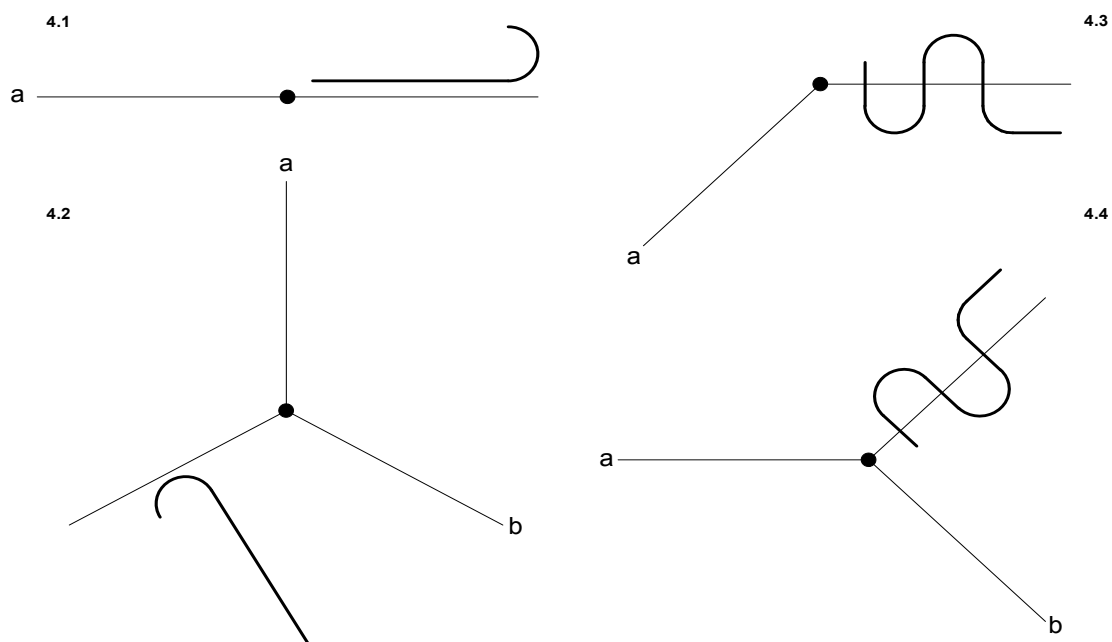
- 2** Complete cada uma das figuras dadas, para criar uma figura que seja simétrica em relação a **linha**.

2.1 	2.2 	2.3 
2.4 	2.5 	

- 3 Marque com uma caneta a posição do **ponto** que serve como eixo da rotação das figuras, se houver



- 4 Desenhe as figuras que faltam, de maneira que sejam simétricas aos modelos, em relação ao **ponto** dado.



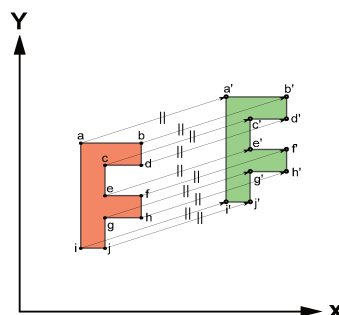
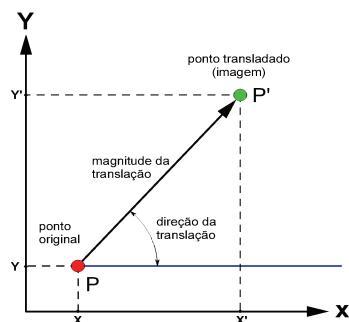
Na sua opinião, o teste foi MUITO FÁCIL, FÁCIL, MÉDIO, DIFÍCIL ou MUITO DIFÍCIL?

COMENTÁRIOS FINAIS LIVRES:

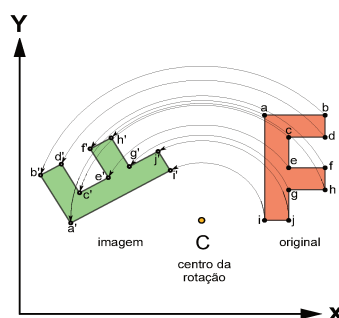
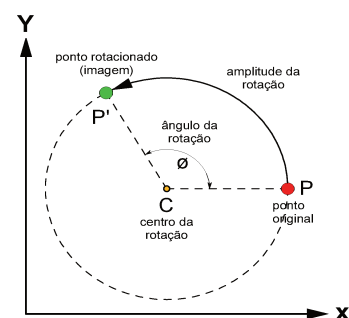
GEOMETRIA III - PROF. FERNANDO RAMOS.

OPERAÇÕES ISOMÉTRICAS SOBRE O PLANO

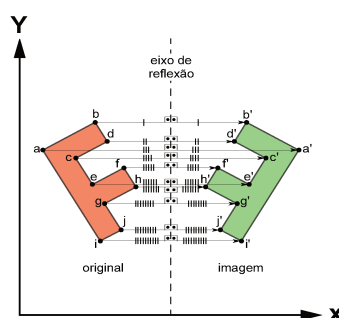
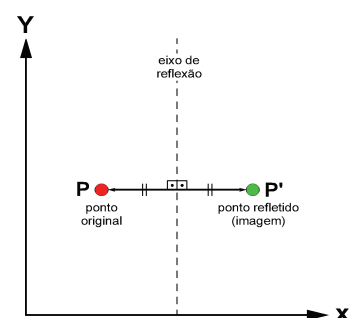
TRANSLAÇÃO



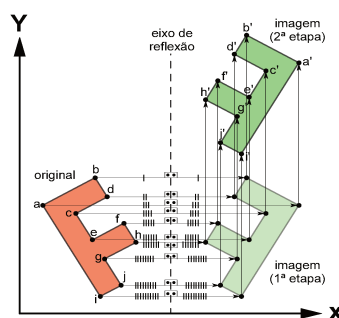
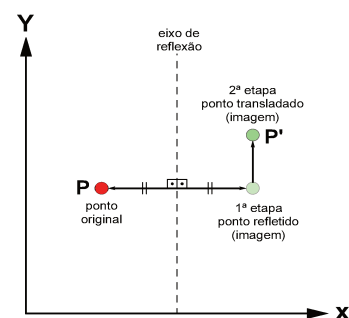
ROTAÇÃO

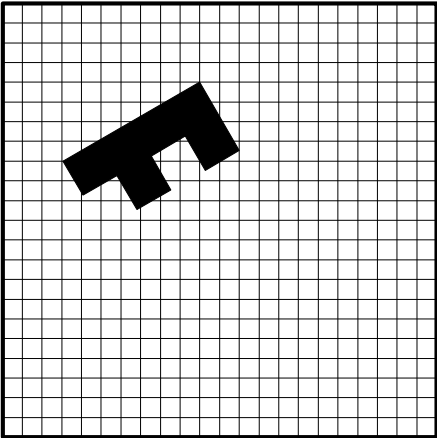
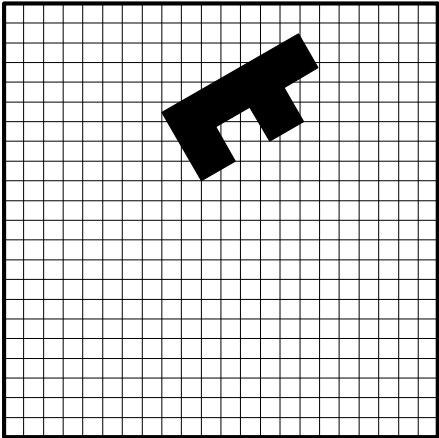
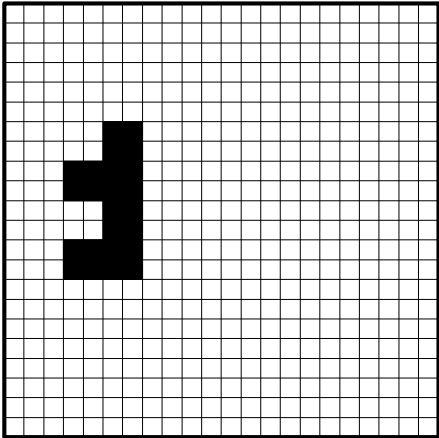
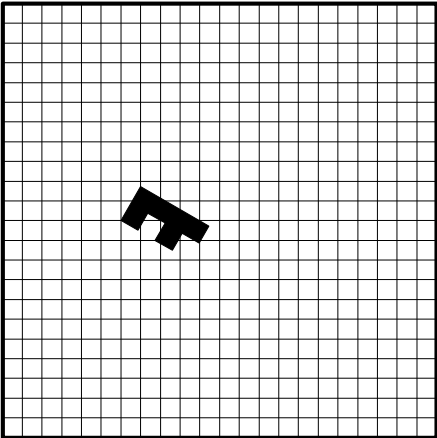
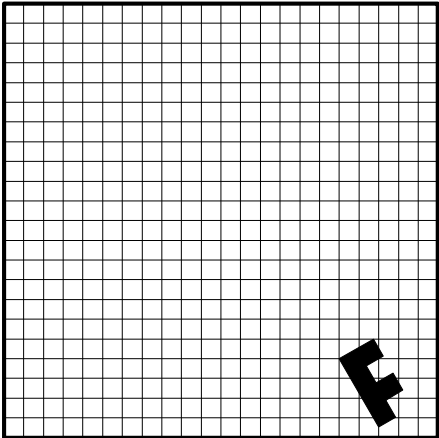
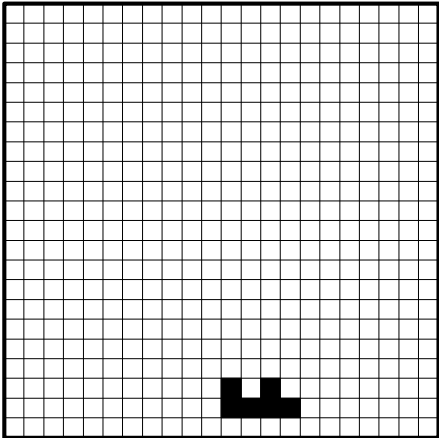


REFLEXÃO



REFLEXÃO TRANSLADADA



	TRANSLAÇÃO		
REFLEXÃO TRANSLADADA			
			
		TRANSLAÇÃO é o tipo de Isometria mais obvio. Trata-se de deslizar a forma geométrica ao longo de uma linha reta. A propriedade mais importante da TRANSLAÇÃO, é a inexistência de um ponto fixo	
		Como a TRANSLAÇÃO, a REFLEXÃO TRANSLADADA também não tem ponto nem linha fixos. Deve-se imaginar a linha vermelha como uma referência móvel que se desloca inteiramente seguindo a direção do movimento do objeto.	

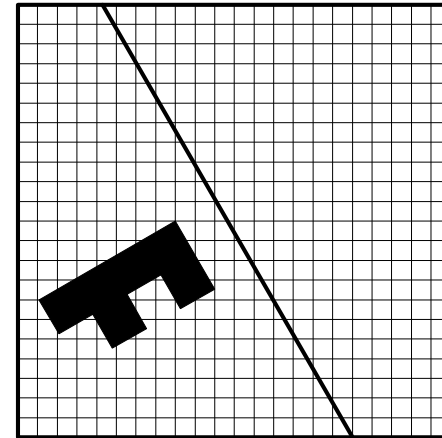
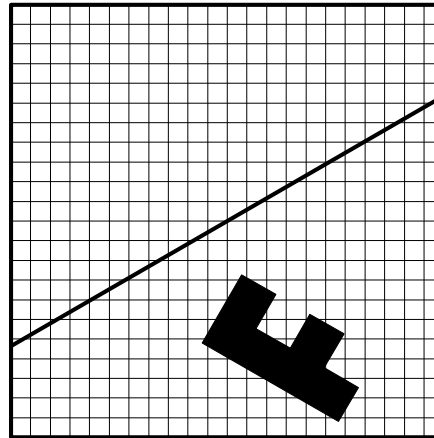
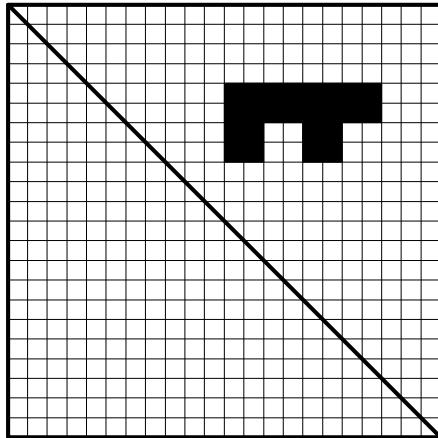


FACAMP
FACULDADES DE CAMPINAS

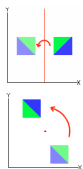
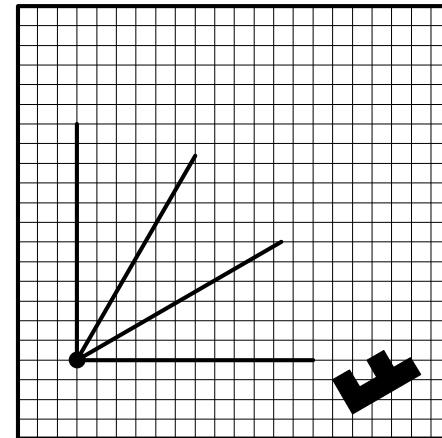
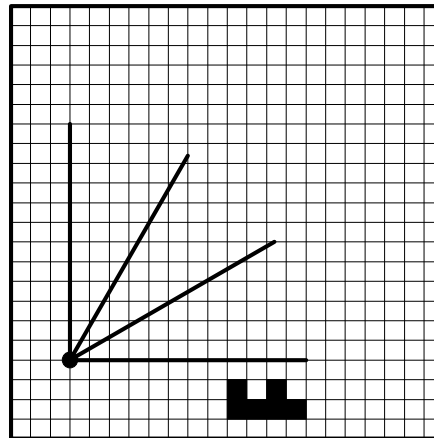
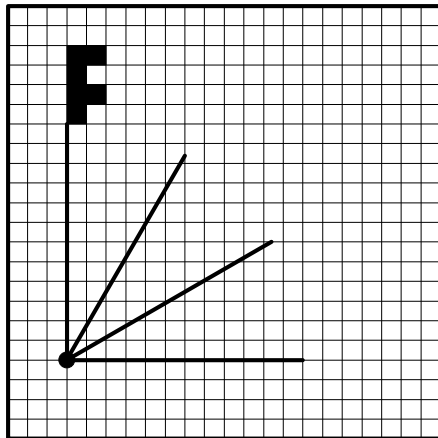
FACULDADE DE DESIGN - FACAMP			Data:
Disciplina: Geometria III	Nome:		
Professor: Fernando Ramos	Folha:	Escala: sem escala	

EXERCÍCIO" ISOMETRIAS"
TRANSLAÇÃO e REFLEXÃO TRANSLADADA

REFLEXÃO



ROTAÇÃO



Na **REFLEXÃO**, a transformação se dá em relação a uma **LINHA** fixa.

Ao contrário da translação, a **ROTAÇÃO** tem um ponto fixo. O pivot, ponto ao redor do qual tudo se move, nunca se move.



FACULDADE DE DESIGN - FACAMP

Data:

Disciplina: Geometria III

Nome:

Professor: Fernando Ramos

Folha:

Escala:

**EXERCÍCIO" ISOMETRIAS"
REFLEXÃO e ROTAÇÃO**

ANEXO 5

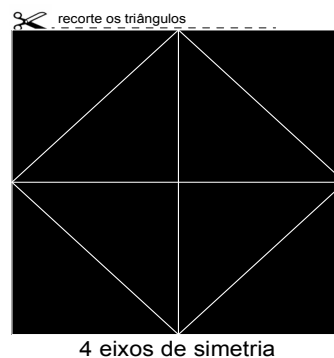
GEOMETRIA III - 2011 - TURMAS "A" e "B" EXERCÍCIO 3 - "PERDER A SIMETRIA"

A figura ao lado é composta por 8 triângulos retângulos isósceles e possui 4 eixos de simetria.

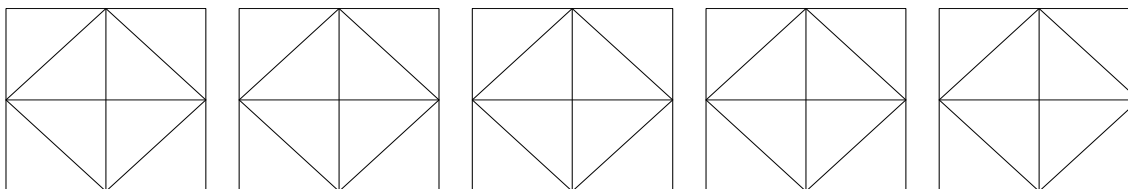
Recorte a figura nas linhas brancas

Retire os triângulos de modo a obter figuras com menor número de eixos de simetria.

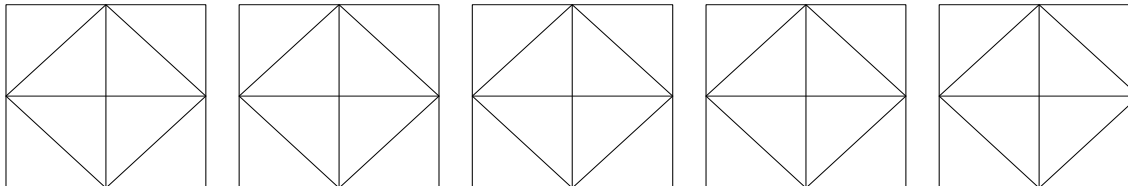
Desenhe nos gabaritos abaixo as diferentes figuras que encontrar e identifique o número de eixos de simetria.



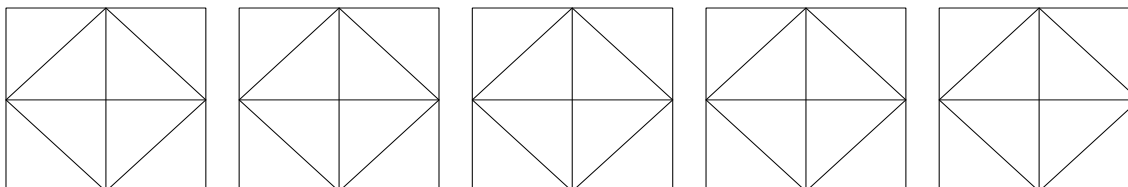
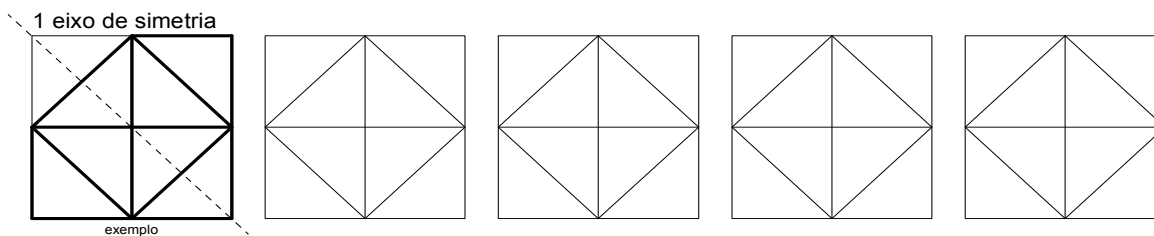
4 eixos de simetria



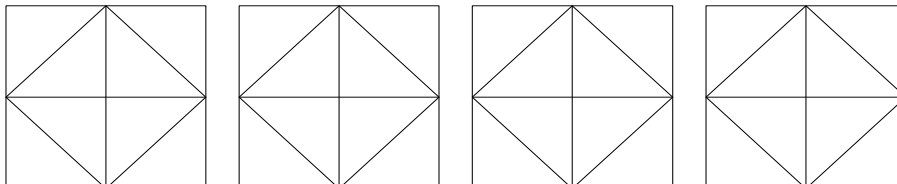
2 eixos de simetria



1 eixo de simetria



nenhum eixo de simetria



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A" EXERCÍCIO 4 - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO PLANO" INSTRUÇÕES

folha 1

OBJETIVO:

• O quadrado é um polígono regular altamente simétrico (quatro eixos). O objetivo nesta etapa é fragmentá-lo e utilizar suas partes a fim de obter um conjunto de composições harmoniosas e sem nenhum eixo de simetria.

PROCEDIMENTOS:

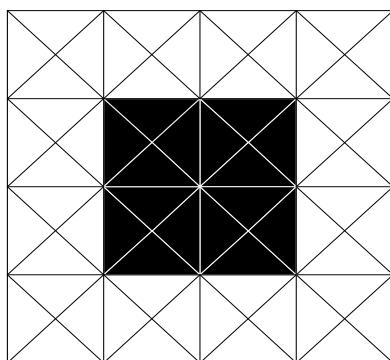
- Recortar o quadrado **modelo** e utilizar a malha do gabarito da folha 1 para deslizar, rotacionar e refletir os 16 triângulos. O exemplo abaixo ilustra o procedimento.
- Utilizar a folha 2 (folha de estudos) para registrar com desenhos, as soluções encontradas.
- Utilizar a folha 3 (folha de gabaritos) para selecionar as 4 melhores composições registradas na folha 2.

EXEMPLO

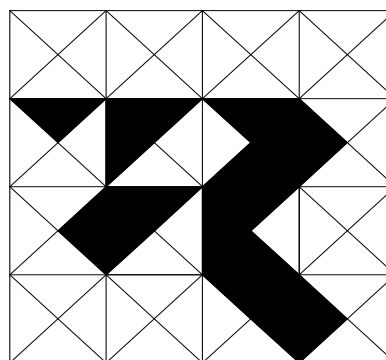
Os quatro quadrados centrais dos gabarito estão fracionados em 16 triângulos retângulos isósceles.

Recorte os 16 triângulos do modelo nas linhas brancas.

Movimente livremente os triângulos sobre o gabarito acomodando-os nos quadrados adjacentes, e observando sempre a posição dos triângulos na grade.



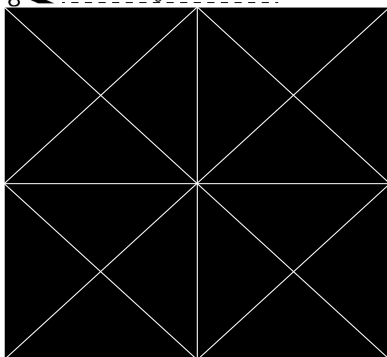
posição inicial do modelo sobre o gabarito



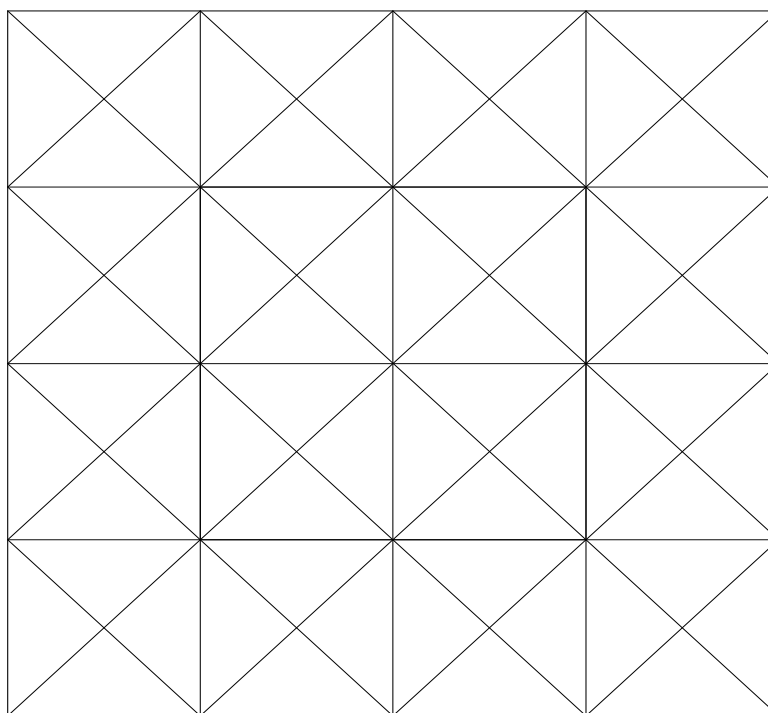
reposicionamento dos triângulos sobre a grade deve ser registrado do gabarito da folha 3



recorte os triângulos



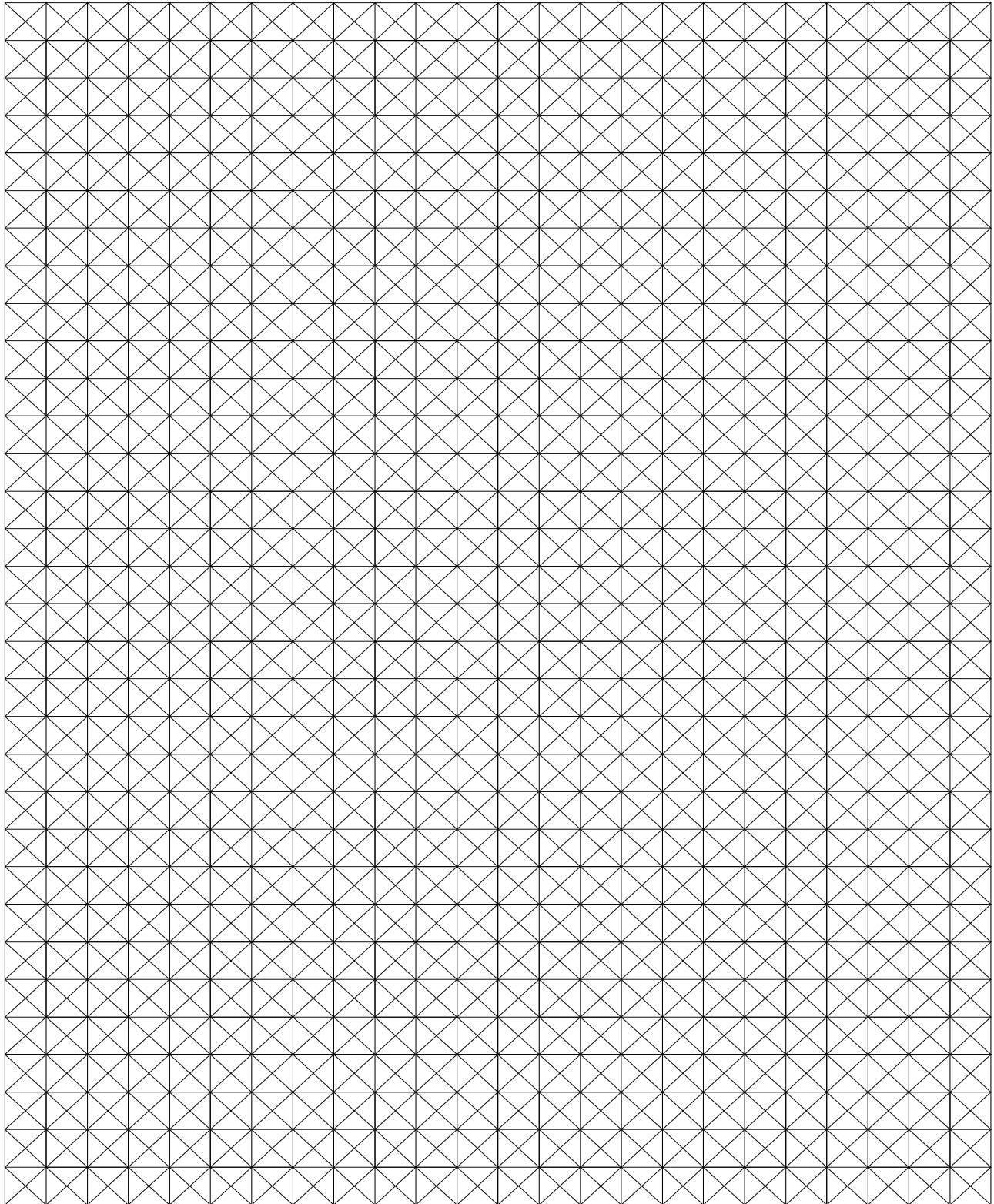
modelo



gabarito

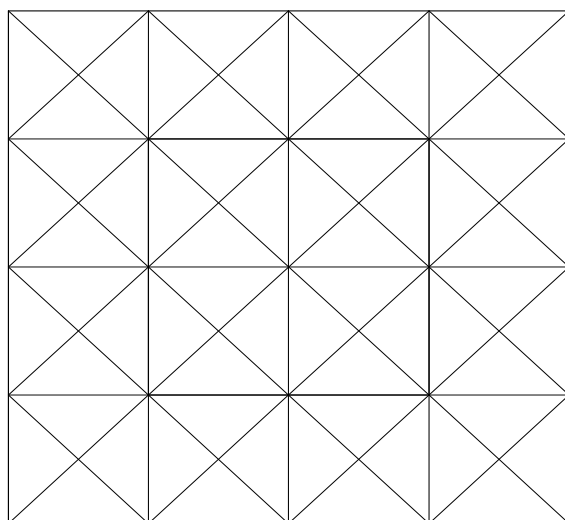
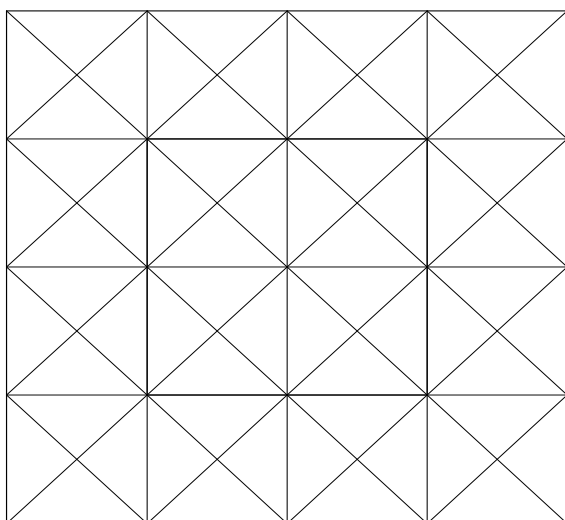
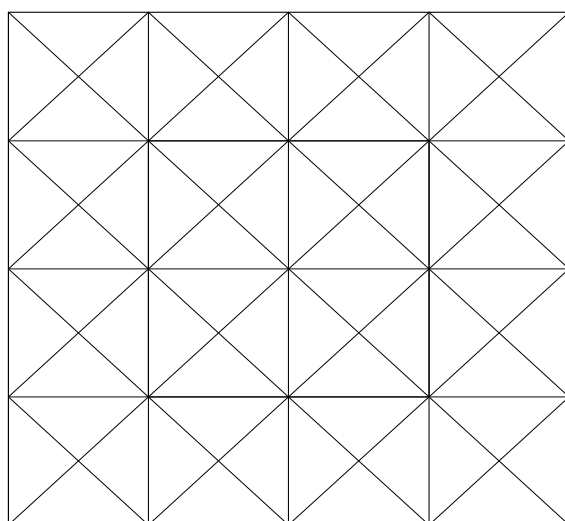
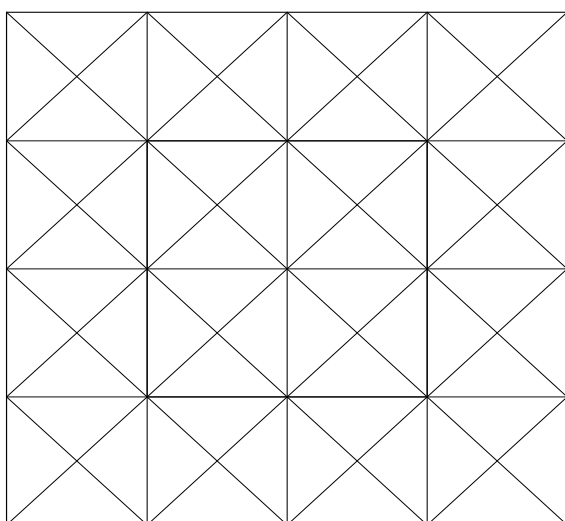
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO PLANO"
FOLHA DE ESTUDOS

folha 2



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO PLANO"
FOLHA DE GABARITOS

folha 3



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B"

EXERCÍCIO 4 - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO ESPAÇO"

INSTRUÇÕES

folha 1

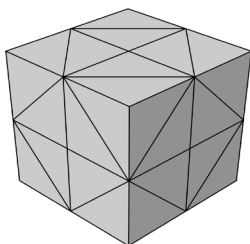
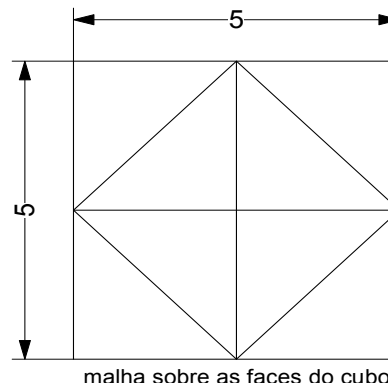
OBJETIVO:

• O **cubo** é um poliedro regular e altamente simétrico (13 eixos). O objetivo nesta etapa é fragmentá-lo segundo as instruções, e utilizar suas partes a fim de obter uma composição harmoniosa que não possua nenhum eixo de simetria.

PROCEDIMENTOS:

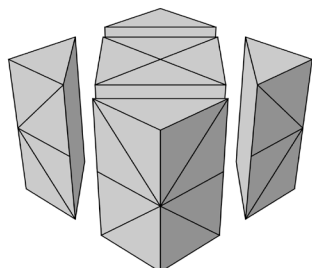
• Construir uma maquete a partir de um cubo de isopor de 5,0 x 5,0 x 5,0 cm conforme as instruções abaixo. Utilizar estilete para corte, cola para isopor para adesão entre as partes, e caneta marcador para pintura.

• Utilizar os gabaritos das folhas 2 e 3 para registrar as seguintes vistas da maquete:
Vista Superior, Vista Frontal, Vista Lateral Direita, Vista Lateral Esquerda e Vista Posterior.
Os desenhos devem estar em nível de apresentação final.



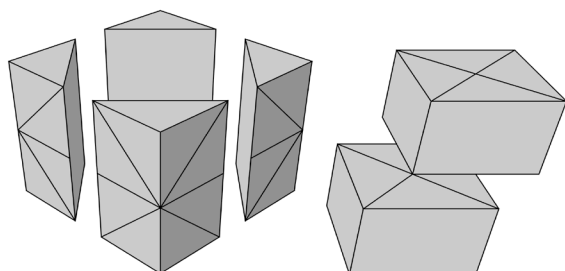
Procedimento 1: desenho no cubo.

desenhar a malha segundo o modelo dado acima, sobre as 6 faces do cubo de isopor, utilizando caneta permanente.



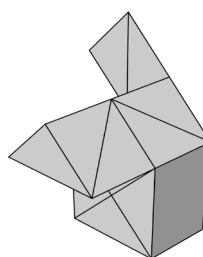
Procedimento 2: 1º seccionamento.

Utilizando o estilete, cortar o bloco de maneira a obter 4 prismas de base triangular, e 1 de base quadrada



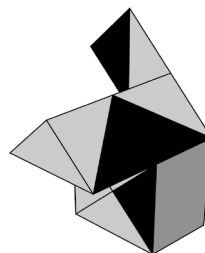
Procedimento 3: 2º seccionamento

• O prisma de base quadrada é seccionado em duas partes iguais, na metade de sua altura.



Procedimento 4: montagem.

• Dos 6 prismas obtidos nas etapas de seccionamento, utilizar 1 quadrado e 2 triangulares para compor um sólido **sem nenhum eixo de simetria**



Procedimento 5: pintura.

• Utilize a caneta permanente para criar um grafismo na superfície do sólido, aproveitando o gabarito da malha.

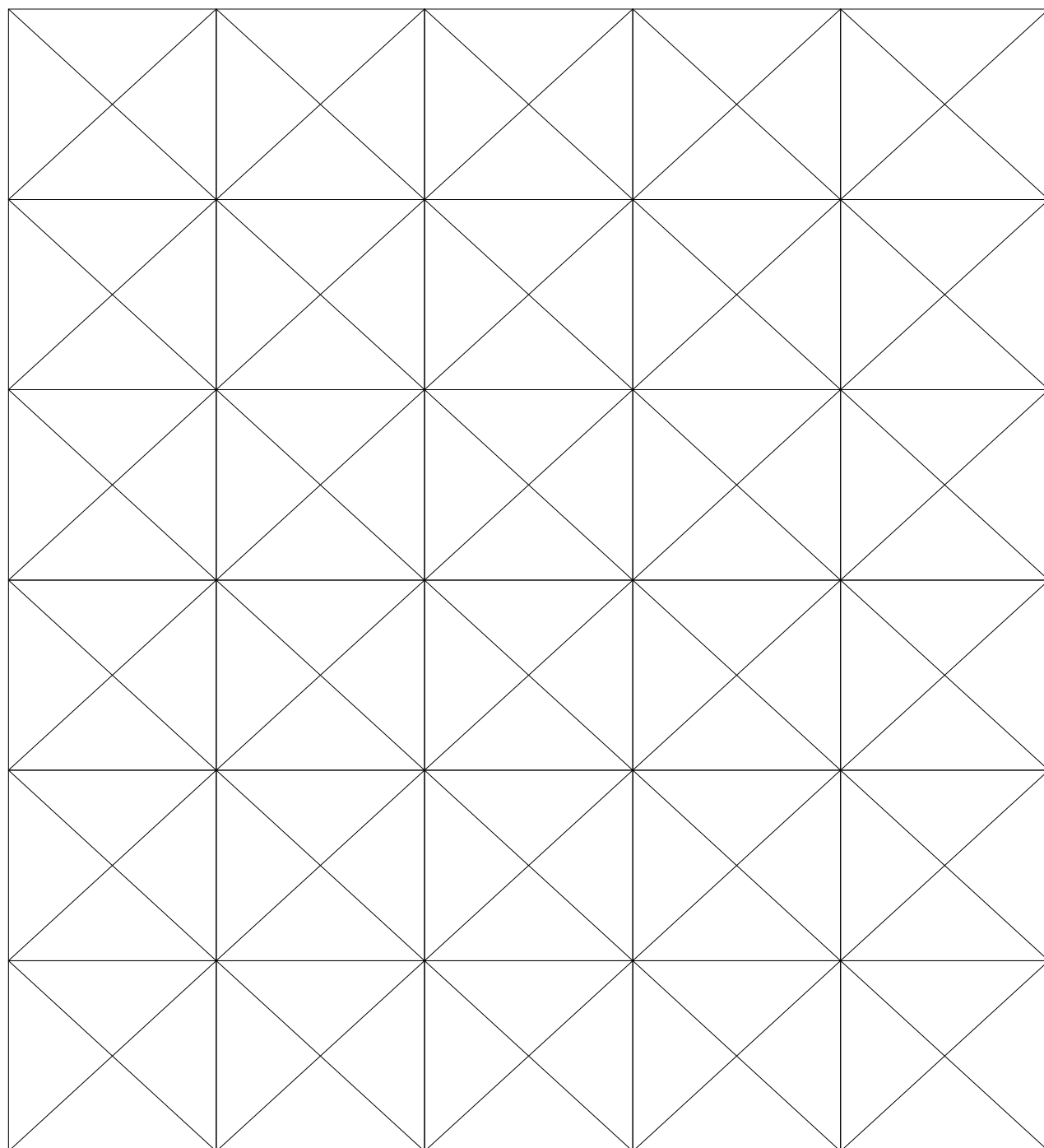
Procedimento 6: desenho das vistas.

• Utilize as malhas das folhas 2 e 3 para desenhar as seguintes vistas ortogonais da composição que criou:

- Vista superior
- Vista frontal
- Vista lateral direita
- Vista lateral esquerda
- Vista posterior

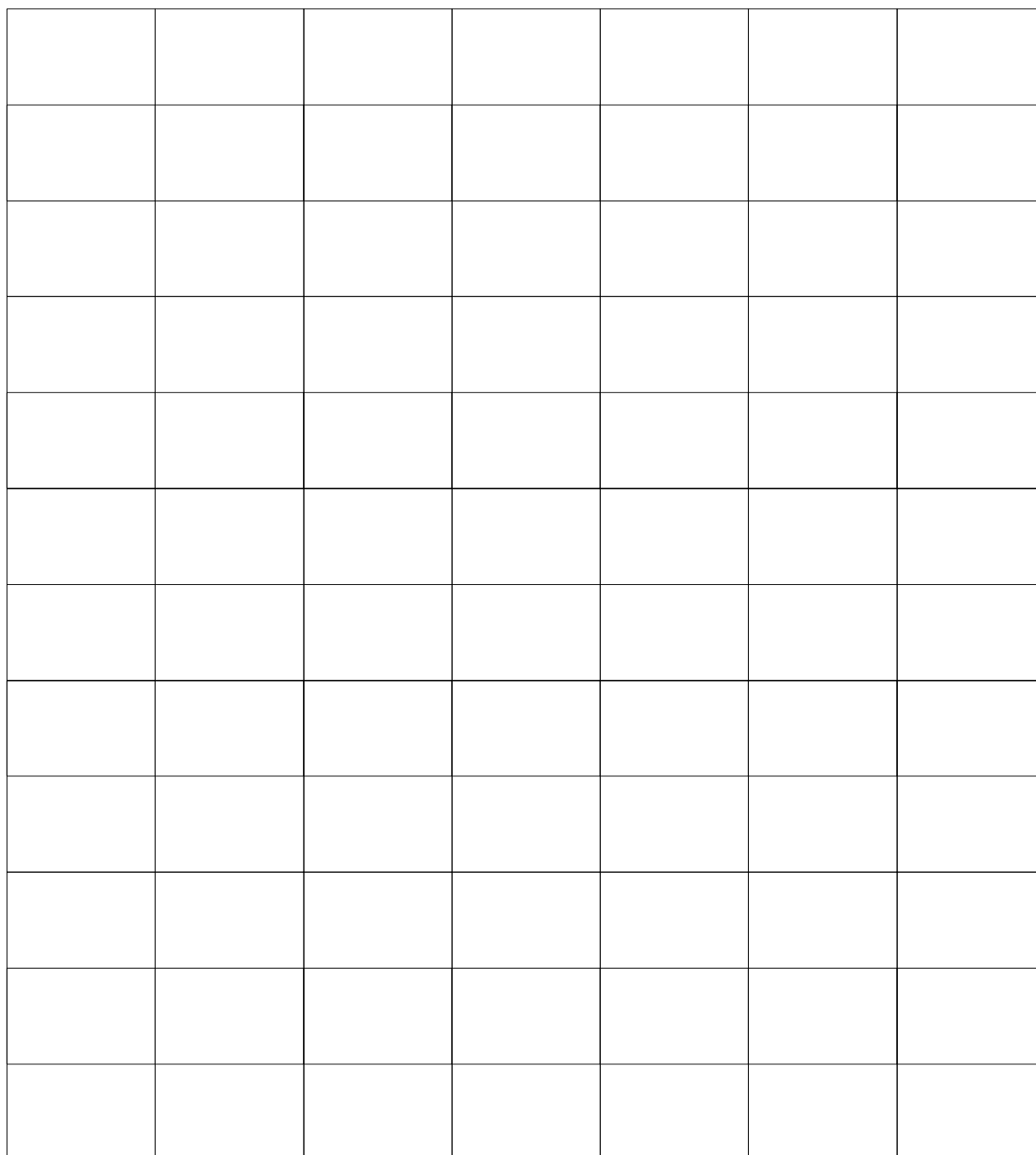
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B"
EXERCÍCIO IV - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO ESPAÇO"
GABARITO 1

folha 2



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B"
EXERCÍCIO IV - ETAPA 1 - "PERDER A SIMETRIA NO ESPAÇO"
GABARITO 2

folha 3



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 2 - "OPERAÇÕES E NOTAÇÕES"
INSTRUÇÕES

folha 1

O **ENUNCIADO** DA ETAPA 2 É COMPOSTO POR QUATRO FOLHAS:

- Folha 1:** Enunciado, instruções gerais e tabela de símbolos gráficos de representação projetual.
Folha 2: Quatro exemplos de organização de operações sequenciadas sobre uma malha.
Folha 3: Folha dos Projetos 1 e 2
Folha 4: Folhas dos Projetos 3 e 4

OS **OBJETIVOS** DA ETAPA 2 SÃO:

1. Apresentar as notações e símbolos das operações de Translação, Reflexão e Rotação sobre o plano.
2. Explorar uma estratégia de composição gráfica que utiliza sequências pré-definidas de múltiplas operações combinadas, a partir de um módulo sobre uma malha plana.

OS **PROCEDIMENTOS** PARA O CUMPRIMENTO DA ETAPA 2 SÃO:

1. O aluno deverá escolher UM dos quatro módulos encontrados na ETAPA 1, e o reproduzirá nas malhas dos projetos 1, 2, 3 e 4, nos campos reservados aos **motivos**, como indicado nos exemplos da folha 2.
2. Cada operação está indicada por um símbolo gráfico e por suas letras iniciais. Assim, uma Translação vem acompanhada pela letra **T**, uma reflexão pelas letras **Ref.**, e uma rotação, por **Rot.** Os símbolos gráficos correspondentes estão descritos na tabela no final da folha.
3. As operações são descritas através de uma sequência numerada.
Por exemplo, uma sequência de operações indicada desta maneira: 1ª Op. T, 2ª Op. Ref, 3ª Op. Rot. 2, indica que sobre o **motivo**, o aluno deverá aplicar primeiro uma translação na direção e amplitude indicadas pela seta, em segundo uma reflexão acompanhando a orientação do eixo, e por último, uma rotação de ordem 2 a partir do centro indicado.

**Símbolos de
representação
das operações
de isometria**

—————▶ **translação**

—————• **reflexão**

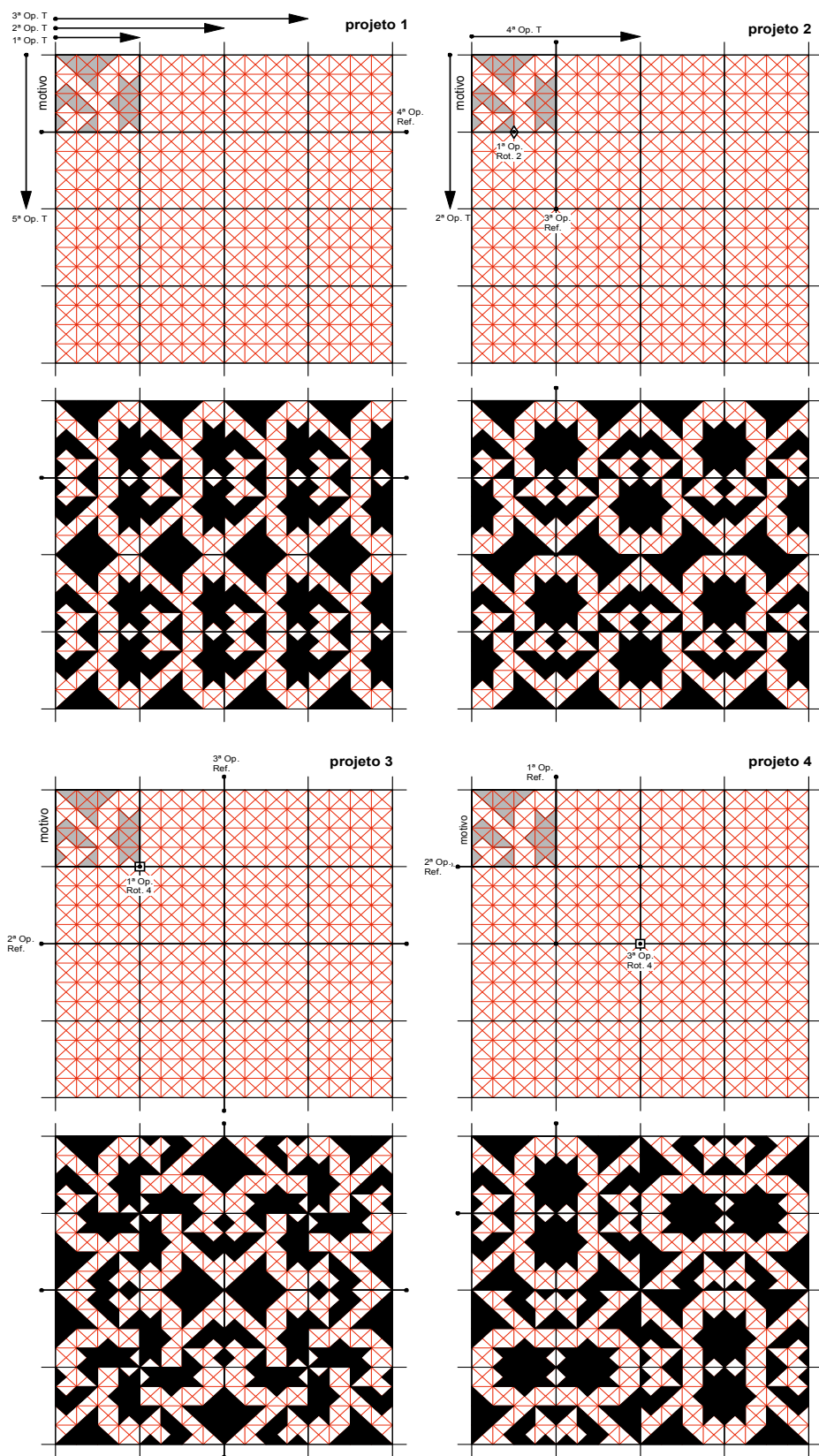
rotação (centros)

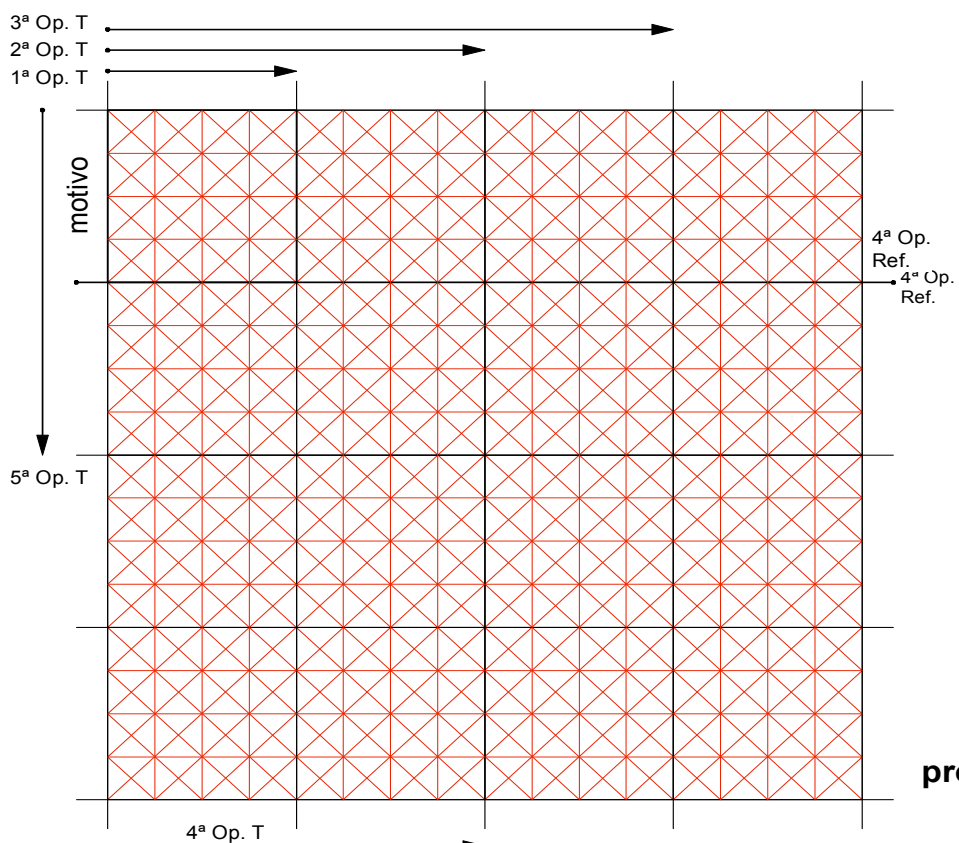
◊ rotação de ordem 2
(meia-volta)
ângulos 180° e 360°

◻ rotação de ordem 4
ângulos 90°, 180°,
270° e 360°

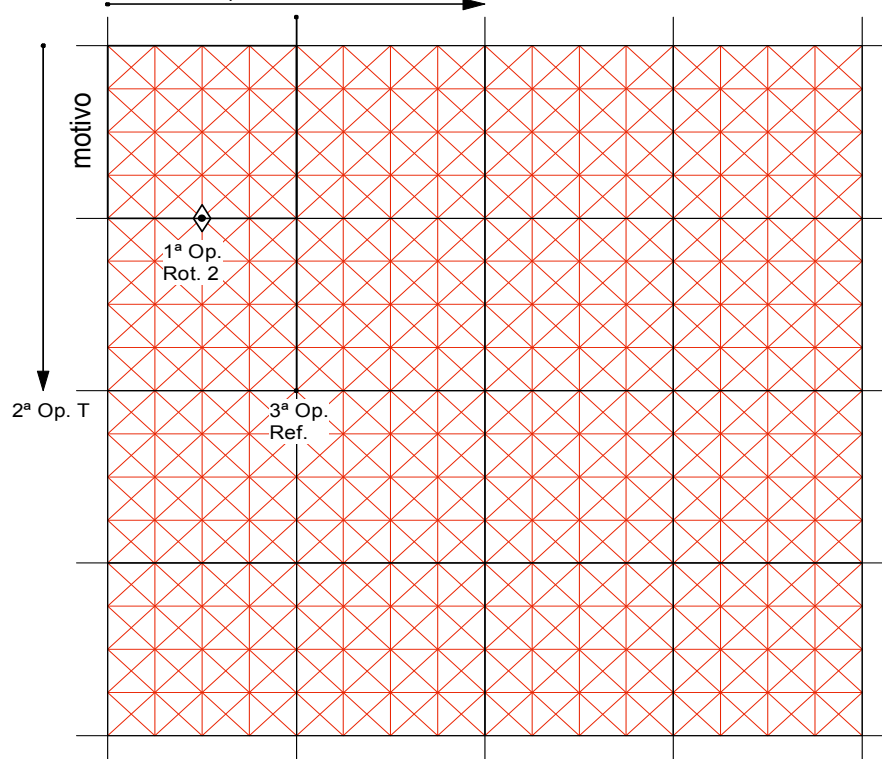
NOME:

DATA:

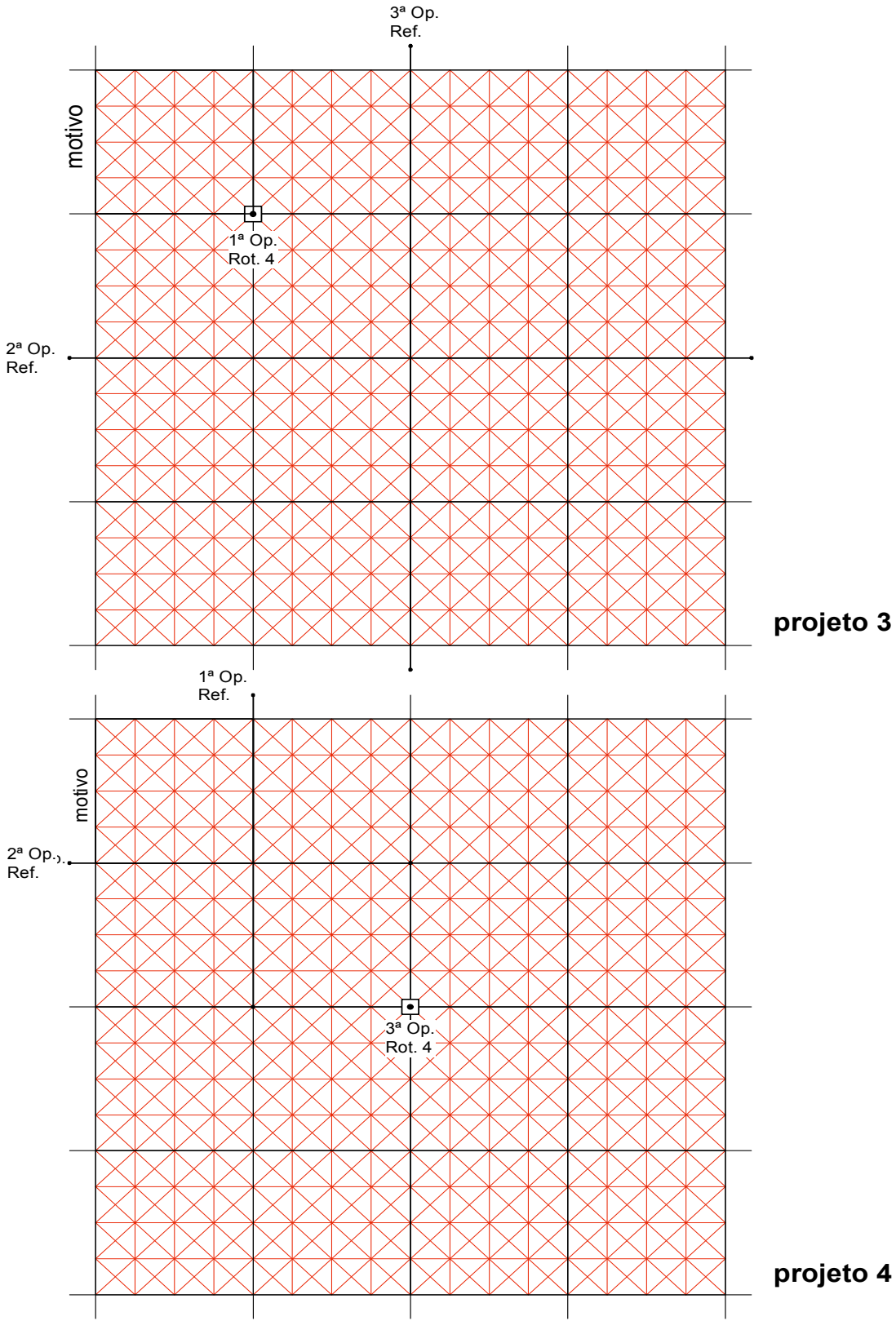




projeto 1



projeto 2



ANEXO 9

GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B" EXERCÍCIO 4 - ETAPA 2 - "OPERAÇÕES E NOTAÇÕES" INSTRUÇÕES

OBJETIVO:

- Exercitar a compreensão sobre as três principais operações isométricas, bem como suas notações gráficas (símbolos de representação) correspondentes.

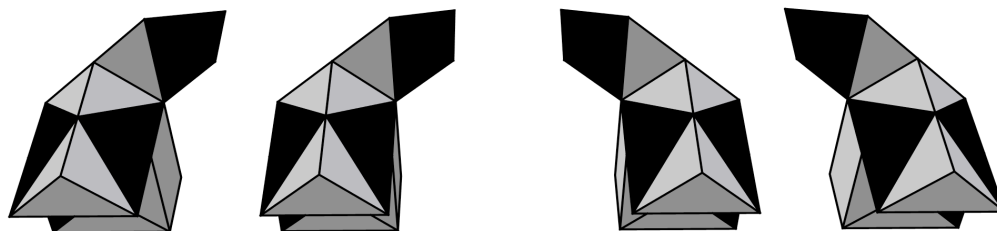
PROCEDIMENTOS:

- O aluno utilizará a maquete produzida na etapa anterior (motivo), como modelo para a produção de mais

3 maquetes (imagens), sendo:

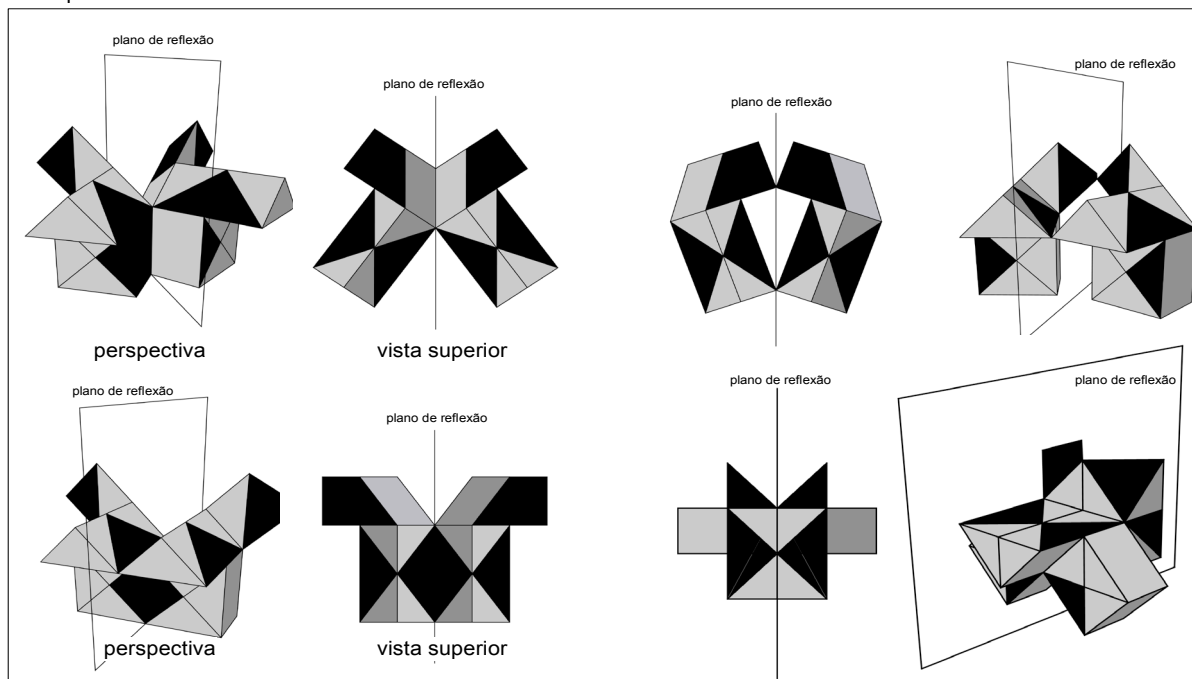
- 1 cópia idêntica
- 2 cópias refletidas

- Para realizar a tarefa, o aluno deverá observar a posição correta dos prismas, bem como o grafismo de de sua superfície, que alterna pretos e brancos



Ao final, o estudante deverá ter 2 duplas de maquetes refletidas, conforme o exemplo acima.

Exemplos de reflexão.



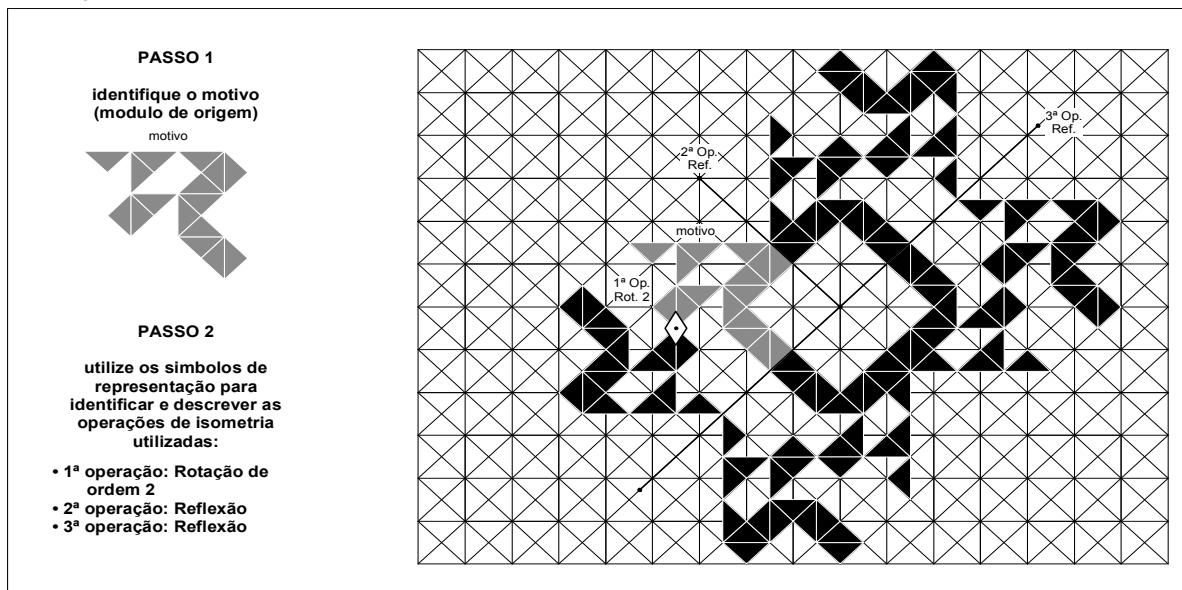
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
INSTRUÇÕES

OBJETIVO:

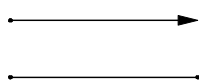
- Criar projetos gráficos através das três operações isométricas principais, de maneira sistemática e cumulativa
- Descrever e ordenar cada uma das operações envolvidas na criação dos projetos, segundo a normatização sugerida.

PROCEDIMENTOS:

- Dos 4 motivos criados na Folha 3 da ETAPA 1, o aluno escolherá os 2 que apresentem o melhor potencial plástico.
- Para cada um dos 2 motivos escolhidos, o aluno criará 3 composições em que utilize uma sequência de no mínimo 3 operações isométricas, que podem se repetir duas ou mais vezes:
 - Translações (**T**)
 - Rotações (**Rot**)
 - Reflexões (**Ref**)
- As operações devem ser representadas na malha, através do sistema de símbolos descritos no final da página.
- O aluno poderá fazer uso de papel transparente (vegetal, manteiga ou acetato), e desenhará os arranjos nos gabaritos das folhas 2 e 3.
- Deverão ser usadas as 2 folhas de estudo (folhas 3 e 4) para ensaios e rascunhos, e as 2 folhas de apresentação (folhas 5 e 6), para o *layout* final.

EXEMPLO

**Símbolos de
representação
das operações
de isometria**



translação

reflexão

rotação

rotação de ordem 2
(meia-volta)
ângulos 180° e 360°



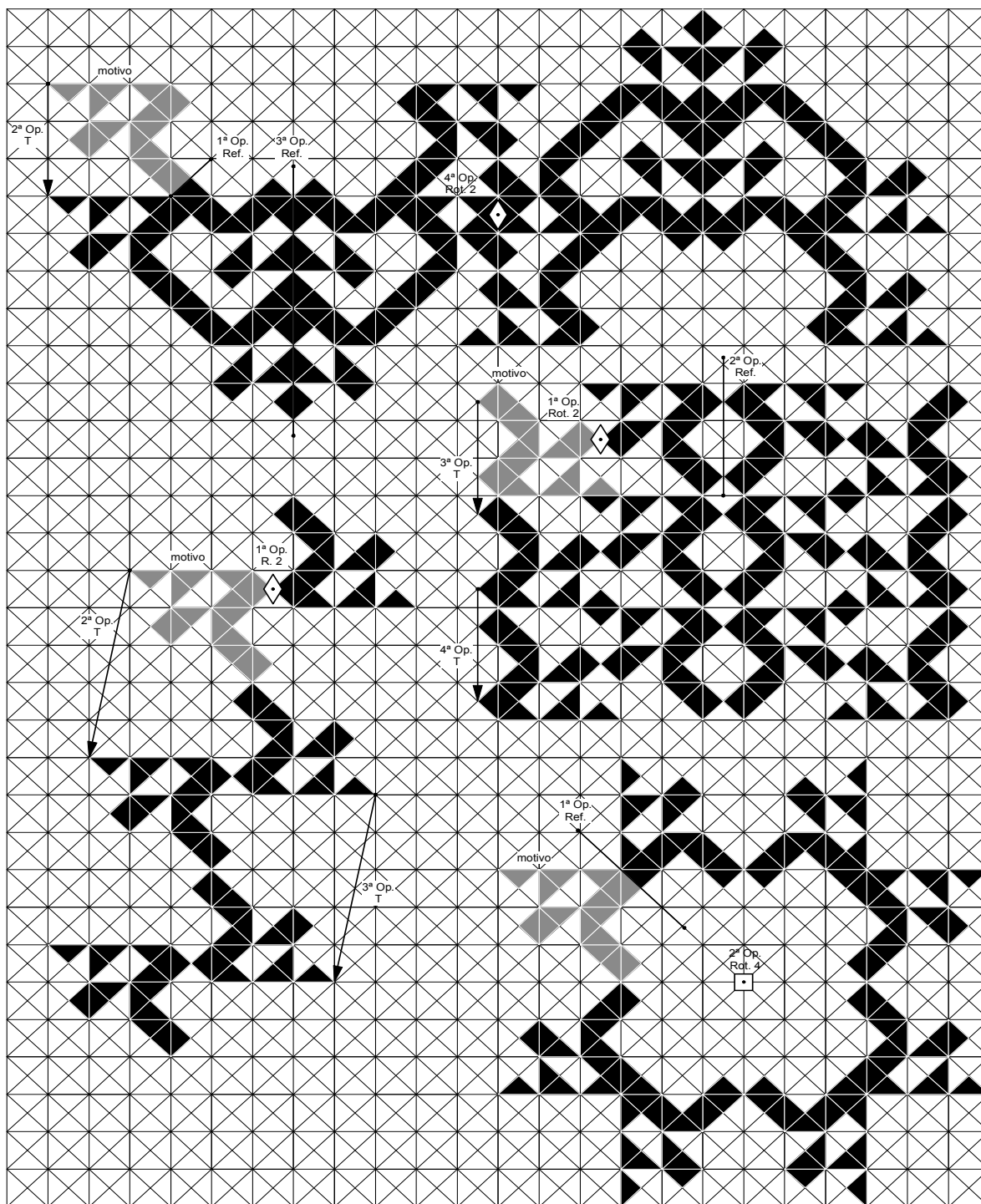
rotação de ordem 4
ângulos 90°, 180°, 270° e 360°



rotação em ângulos diversos
movimentos de rotação no sentido horário
(sentido negativo), ganham
um "sinal de menos"

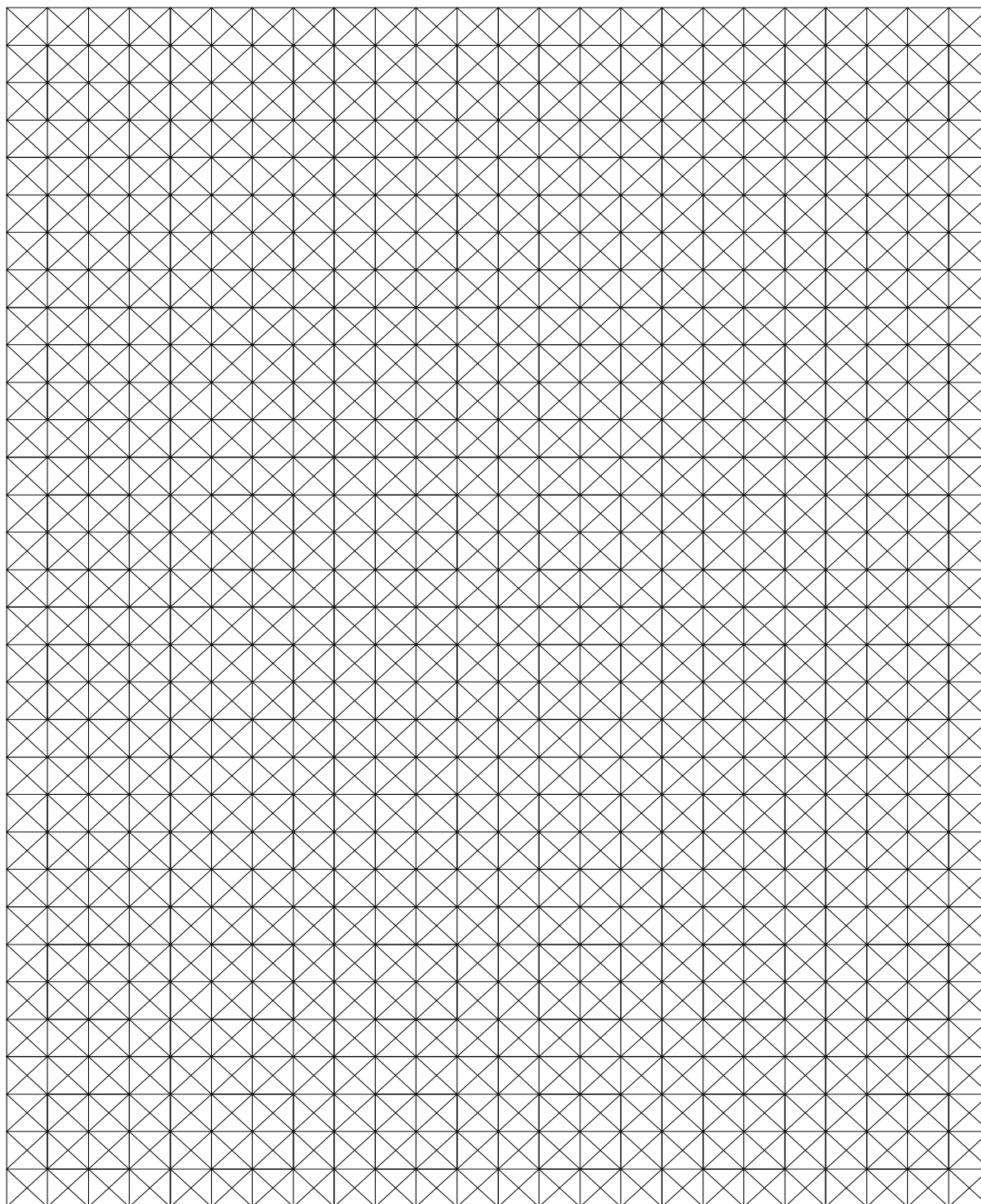
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
FOLHA DE EXEMPLOS

folha 2



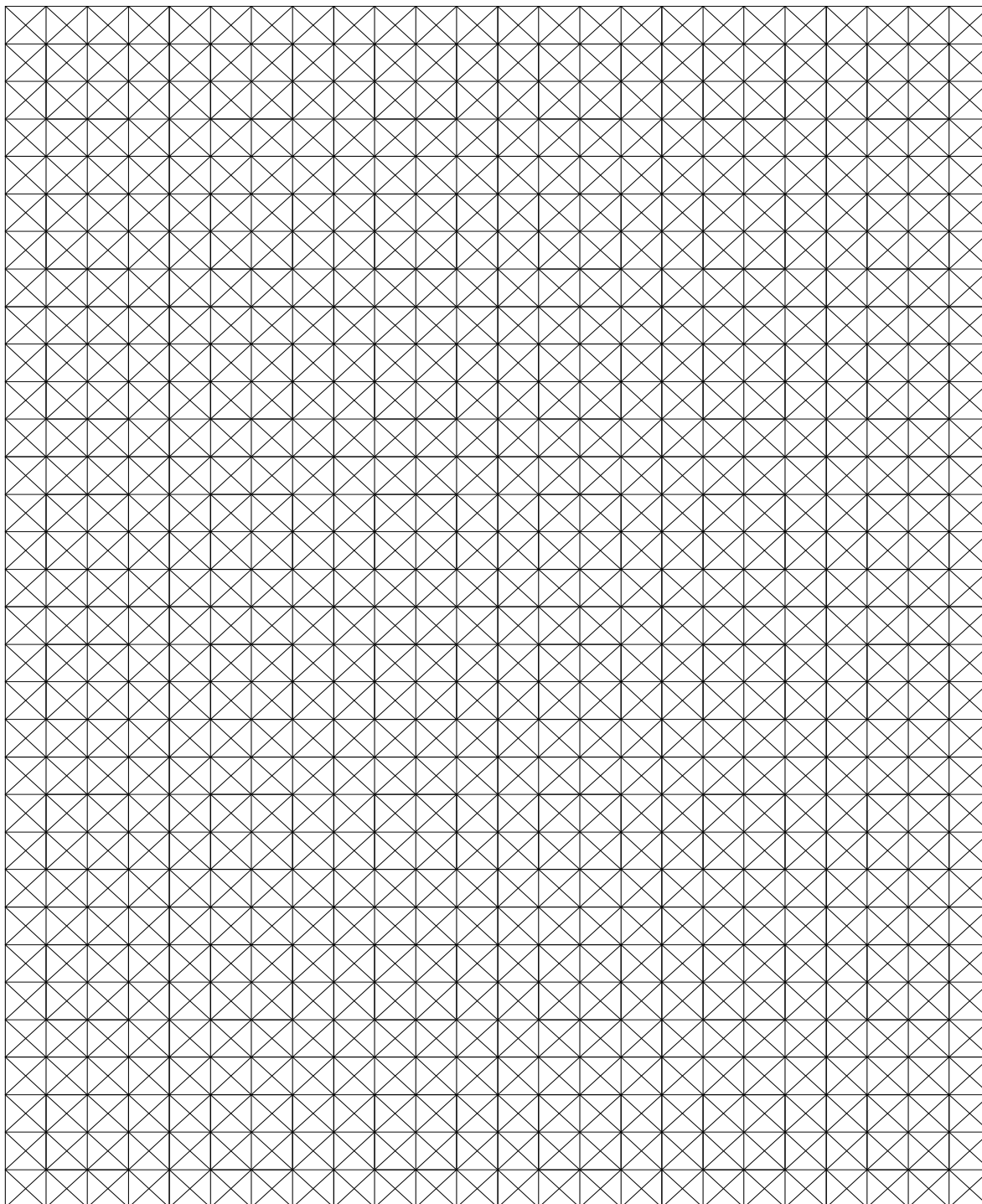
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
FOLHA DE ESTUDOS

folha 3



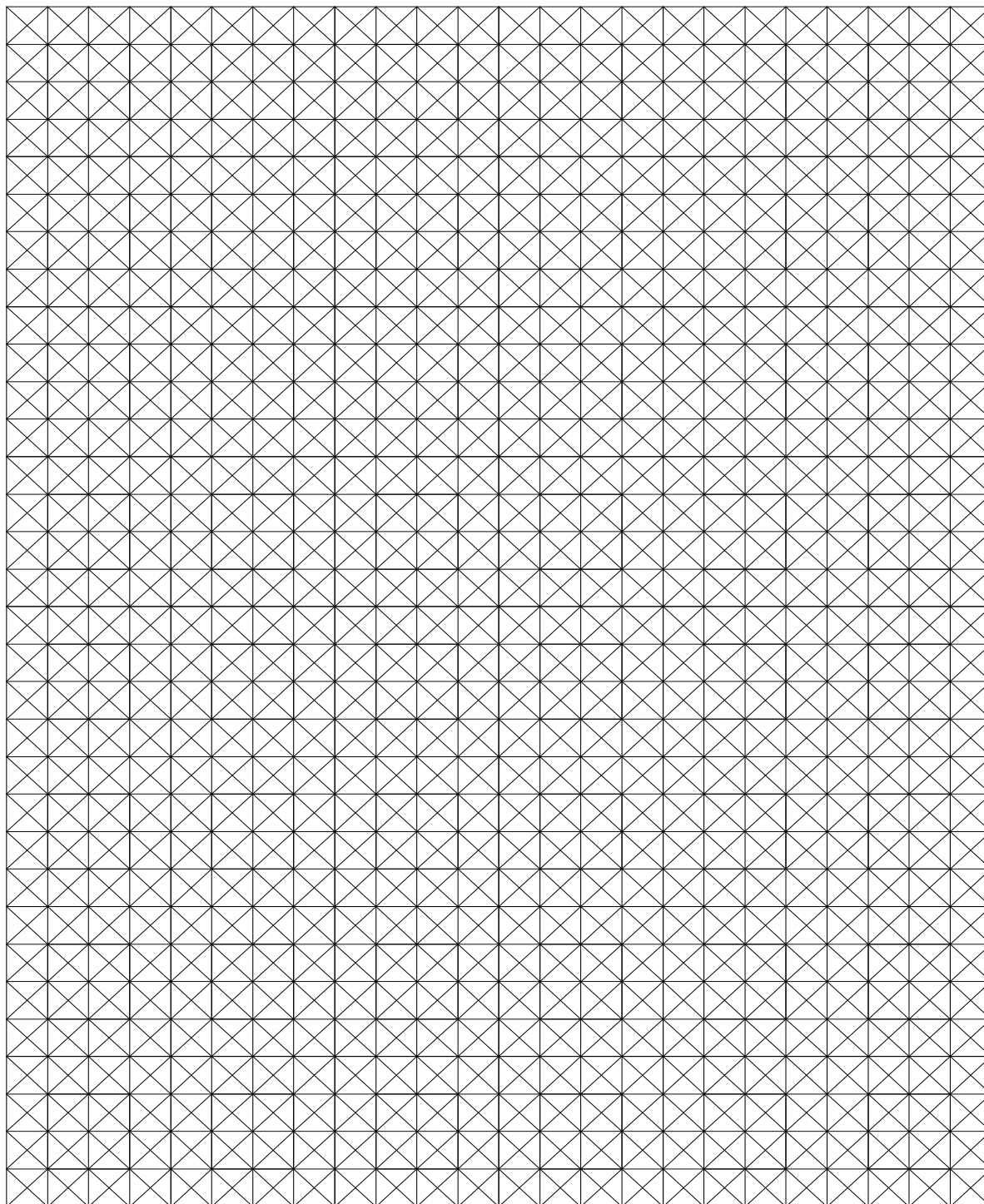
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
FOLHA DE ESTUDOS

folha 4



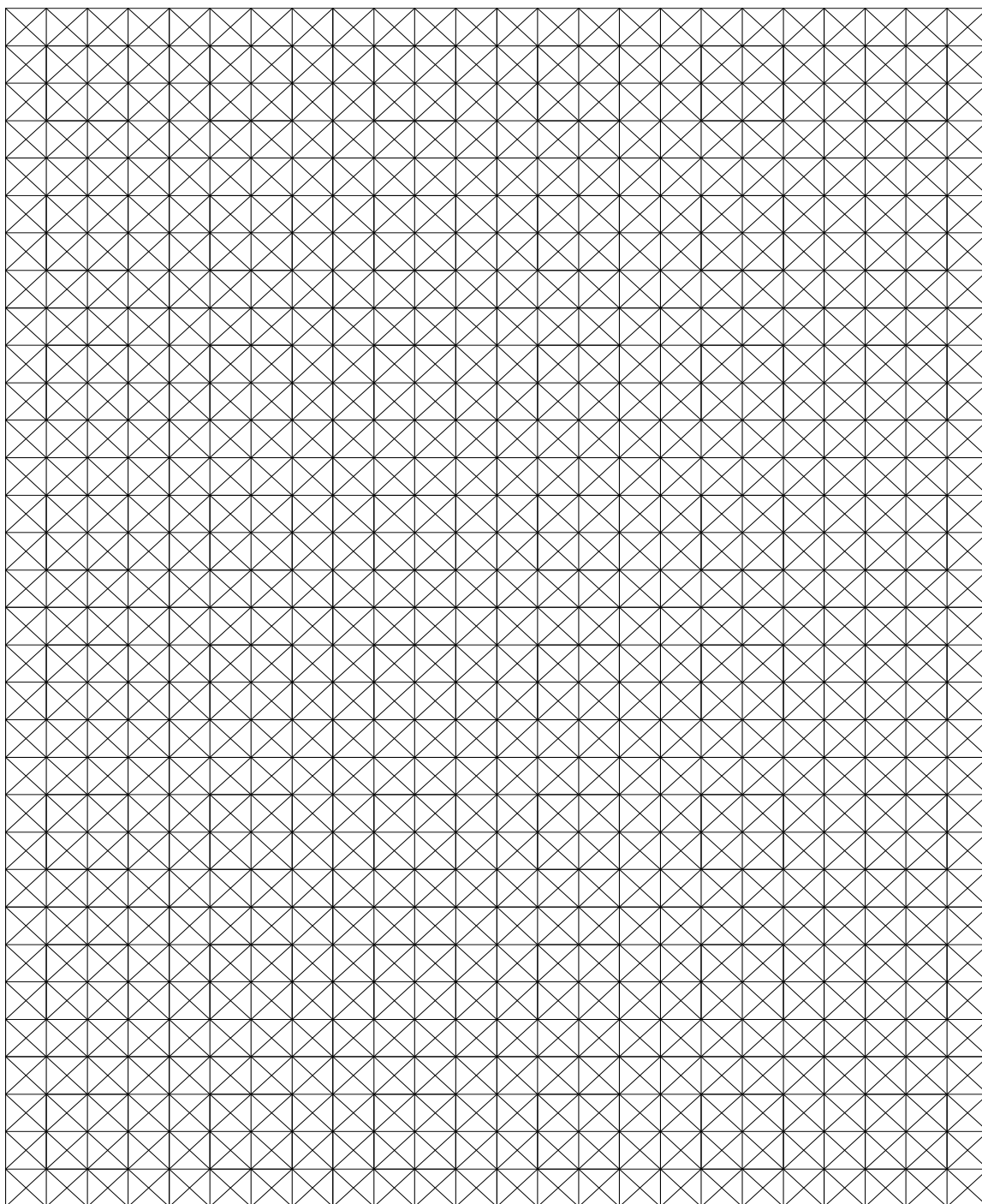
GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
FOLHA DE APRESENTAÇÃO - MOTIVO 1

folha 5



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "A"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO PLANO"
FOLHA DE APRESENTAÇÃO - MOTIVO 2

folha 6



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO ESPAÇO"
INSTRUÇÕES

OBJETIVO:

- Consolidar a compreensão das operações, notações, elementos e prerrogativas conceituais das transformações geométricas no espaço tridimensional.

PROCEDIMENTOS:

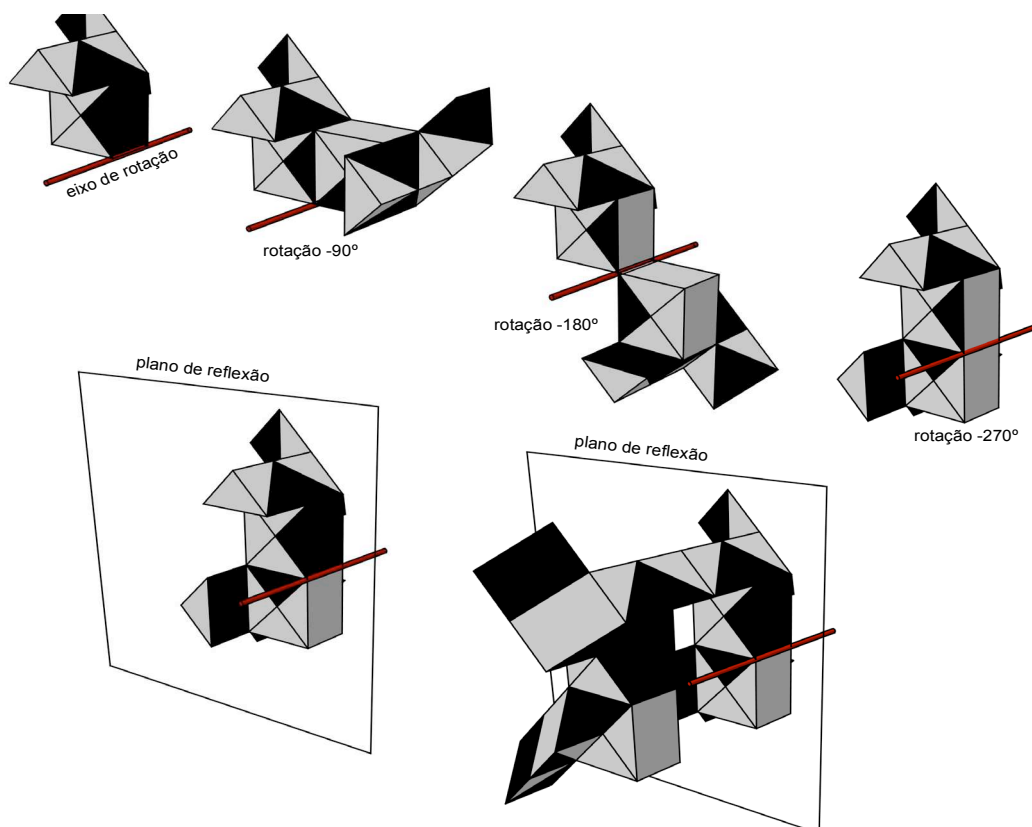
- Utilizando as 4 maquetes (motivo e imagens) desenvolvidas na etapa 2, o aluno criará uma composição que envolva 1 operação de rotação e 1 operação de reflexão, não necessariamente nesta ordem.
Isto quer dizer que o aluno poderá refletir a maquete original (motivo), para depois rotacionar o resultado, ou então, partir de uma rotação da maquete original para depois refletir o resultado.
- O aluno utilizará 1 palito de bambu para representar o eixo de rotação, e um retângulo de acetato para representar o plano de reflexão.

exemplo

No exemplo abaixo, a maquete original (ou MOTIVO), foi rotacionada em torno de um vetor, chamado "eixo de rotação" em um ângulo de -270° (o valor negativo refere-se à orientação do deslocamento se dar no sentido horário).

As duas peças são coladas uma na outra, bem como um palito de bambu de modo a representar o eixo de rotação.

Em um segundo passo, as 2 peças são fixadas às outras 2, através de uma operação de reflexão que se dá em referência ao plano representado pelo acetato, que será colado na composição.



GEOMETRIA III - 2011 - TURMA "B"
EXERCÍCIO 4 - ETAPA 3 - "CRIAR SIMETRIAS NO ESPAÇO"
RELATÓRIO (modelo)

NOME:

DESCRIÇÃO DAS OPERAÇÕES:

Passo 1:

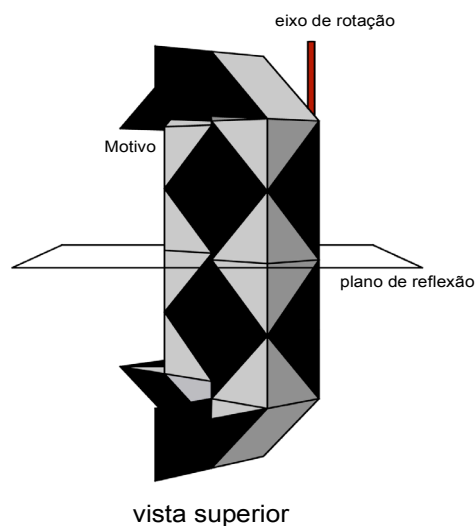
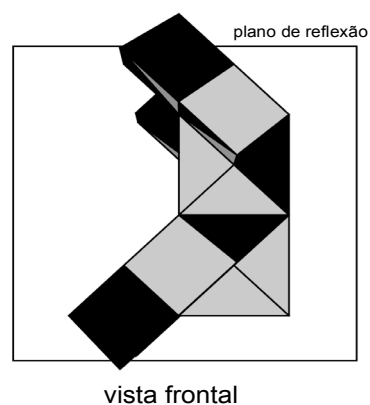
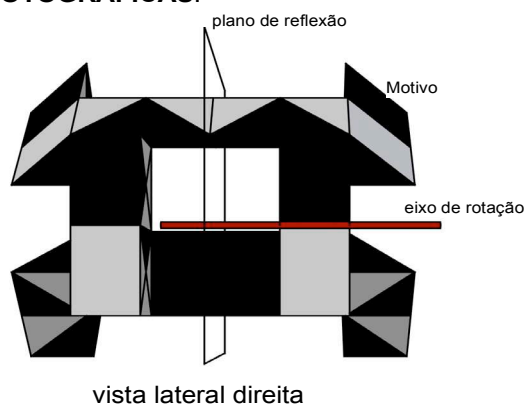
Estabelecido o eixo de rotação em uma das arestas do MOTIVO, cria-se uma imagem a uma amplitude $\varnothing = -270^\circ$ do objeto original. Nas Vistas Fotográficas abaixo, o eixo de rotação está representado pelo palito de bambu.

Passo 2:

O objeto é espelhado através de um plano que encosta em duas de suas superfícies.

O plano de reflexão é representado nas Vistas Fotográficas abaixo por uma lâmina de acetato transparente

VISTAS FOTOGRÁFICAS:



A arquitetura de Peter Eisenman: A casa Guardiola como exemplo da utilização sistemática das operações geométricas sobre o cubo, no método projetual que visa a exploração do conceito de complexidade, construído a partir da modelagem de formas primitivas.

Introdução

A arquitetura antiga, de caráter universal, expressada ao longo de séculos de desenvolvimento artístico através de múltiplas culturas, especialmente na arquitetura de templos, traz consigo a noção comum da unidade como ponto de partida do processo projetual.

Robert Lawlor explica como isso pode ser concebível a partir da óptica do arquiteto-geômetra antigo, não preso `as exigências axiomáticas da geometria euclidiana, nem `as suas noções utilitárias:

*“A antiga geometria não repousa em axiomas ou presunções apriorísticas. Contrariamente aos euclidianos e `a geometria mais recente, o ponto de vista do antigo pensamento geométrico não é uma rede de definições ou de abstrações intelectuais, mas uma mediação sobre uma unidade metafísica, seguida de uma tentativa por simbolizar visualmente e contemplar a ordem pura e formal que surge desta incompreensível unicidade. É o enfoque do ponto de partida da atividade geométrica o que separa radicalmente o que podemos denominar de geometria sagrada, da mundana `a secular. A geometria antiga começa com o **um**, enquanto as matemáticas e a geometria modernas começam com o **zero**” (LAWLOR, 1996: 16)*

O **um** tem significado especial na matemática simbólica. O arquétipo do **um**, traz consigo as noções abstratas da totalidade de um sistema, seu centro, e as partes derivadas desta totalidade. A *arquitetura simbólica*, reflete-se desta forma, como metáfora da ordem universal. O ato criativo mais alto, como o que se expressava através das artes e arquitetura, seguia o método da divisão criteriosa de uma unidade básica.

Lawlor segue explicando sua visão sobre a dimensão simbólica da geometria no desenvolvimento das primeiras expressões artísticas da humanidade:

“Quem utilize figuras geométricas para descrever o início da criação deve tentar mostrar como uma unidade absoluta pode tornar-se multiplicidade e diversidade. A geometria tenta recuperar da infinita informidade, o movimento ordenado, conferindo-lhe uma série de formas inter-relacionadas, e ao recriar esse misterioso passo para o dois, torna-o simbolicamente visível (...).

*A unidade cria dividindo-se a si mesma, e isso se pode simbolizar geometricamente de várias formas diferentes, segundo se representa graficamente a unidade original. A unidade se pode representar apropriadamente como um **círculo**, mas a verdadeira incomensurabilidade do círculo indica que esta figura pertence a um nível de símbolos que está além do razoável e da medida. A unidade pode ser concebível como **quadrado** que, em sua simetria perfeita, também representa o todo e se presta `a medida compreensível”.*
(LAWLOR, 1996: 23)

É curioso observar que, apesar do discurso contemporâneo ter se tornado mais intrincado e complexo, os designers e arquitetos teóricos tem tratado de reformular continuamente a mesma questão do pensamento diagramático.

Na arquitetura internacional, nomes de peso como Peter Eisenman, Zaha Hadid, Frank O. Gehry e Rem Koolhaas, ganharam projeção ao reformular o conceito de diagrama na investigação da forma e do espaço, associando-o `as suportes digitais - que podem trazer consigo ferramentas de acesso e manipulação das geometrias não-euclidianas - e áreas do pensamento dedicadas `a compreensão do conceito de complexidade. Para o teórico de arquitetura Robert Somol (LACOMBE, 2007), Eisenman merece destaque:

(...) (Eisenman) exerce o papel, mais que renovador, no sentido especulativo mais enérgico da palavra, um inquisidor da cultura arquitetônica”. (LACOMBE, 2007)

No contexto de sua construção teórica, desenvolvida em grande parte por ocasião de sua tese de doutorado, Eisenman utiliza o cubo e as retículas ortogonais cúbicas, como ponto de partida de suas estratégias projetuais, como atesta Sá (2009)

“ A representação arquitetônica e sua materialidade vinculam-se ao registro das transformações e alterações na retícula ortogonal, os denominados processos projetuais, responsáveis na visão do arquiteto, pela autonomia arquitetônica. As especulações em torno da espacialidade cúbica de Peter Eisenman podem ser apreendidas a partir dos vínculos existentes entre os procedimentos representacionais de sua arquitetura e as estratégias presentes no construtivismo, Suprematismo e Neoplasticismo, notadamente a procura, entre os fragmentos do objeto, de um campo instável e descontínuo de representação.” (SÁ, 2009)

A circunstanciação de Eisenman nesta pesquisa, deve-se à importância exercida pelos diagramas conceituais e formas básicas sobre sua pesquisa e processo criativo.

O interesse pelas *formas primitivas*, (como diria um operador de software gráfico), bem como as retículas modulares, explicam o interesse, pois podem ser entendidas como entidades dotadas de características e potencialidades próprias, com formas e estruturas descritíveis pela geometria.

Em suas obras experimentais, o cubo é eleito como unidade fundamental. A forma primitiva predileta. O cubo é transformado através de uma sequência de operações sistemáticas de duplicações seccionamentos, rotações, reflexões, adições, intersecções e subtrações.

“Estas casas tomam como elemento modular básico o cubo, observando a dois tipos de variações: Em primeiro lugar, a observação e localização de formas no cubo, pelo esvaziamento dos diedros internos, a partir de seus eixos longitudinal e transversal, de maneira que surge a forma em “L”. Em segundo lugar, obtém

variações mediante a combinação da unidade modular com outras unidades mediante superposições, deslizamentos e giros, a partir igualmente dos eixos longitudinal e axial.” (YÉVENES, 2003, p.54)

Casa Guardiola. Análise formal

Para examinar mais de perto como isso se dá, elege-se o projeto da Casa Guardiola como estudo de caso, a fim de dissecar sua configuração formal e sublinhar a geometria envolvida.

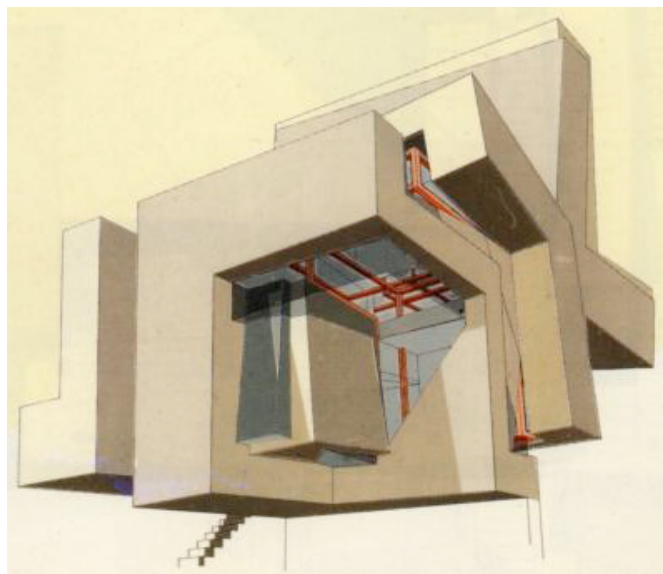


Figura 120 – Casa Guardiola. 1988. Peter Eisenman

<http://thedesigndspace.net/art/gallery/main.php/visionary/guardiolaHouseEisenman.jpg.html>

Na evolução do discurso conceitual e a metodológico de sua obra, que pode ser organizada em três fases - 1. Malha Ortogonal, 2. Transição, 3. Os diagramas (EISENMAN, 1999) - a Casa Guardiola está situada na segunda, (momento em que o computador passa a mediar seus processos investigativos), seguinte ao primeiro período de experimentações através dos meios tradicionais de representação, que resultou na produção das célebres casas numeradas.

A escolha foi também inspirada por um vídeo publicado no site *youtube.com*,

pelo estudante espanhol de doutorado Rodrigo Herrera Velazco. No vídeo¹ oferece uma descrição pessoal do desenvolvimento morfológico da obra, por meio de uma animação digital.

Segundo Velazco², sua motivação não foi investigar a sistemática do

1 – <http://www.youtube.com/watch?v=JAH97LcQ2Cs> - acessado em 10/09/2010.

2 Houve uma rápida troca de emails com o autor do vídeo, nos quais foram esclarecidos alguns aspectos de sua produção. A seguir, a transcrição literal das mensagens:

Fernando Ramos escreveu em 13/09/2010

Prezado Rodrigo,

Permita-me escrever em Português.

Meu nome é Fernando Ramos, e estou cursando um doutorado em artes na Universidade de Campinas – Brasil. Meu interesse é pesquisar o ensino de geometria em cursos de criação, como design e arquitetura.

Assisti o vídeo que publicou no youtube, chamado “Desarrollo Morfológico”, em que diseca a evolução formal da Casa Guardiola, e lhe digo que será muito útil em minha pesquisa, resultando em um item do último capítulo.

A partir de seu vídeo, poderei descrever o processo criativo de Eisenman, sob o ponto de vista das operações geométricas de isometria. Usarei os screenshots para enumerar translações, rotações e reflexões, como estratégia metodológica para se alcançar a forma complexa. Naturalmente, mencionarei seu trabalho e dedicarei os devidos créditos. Portanto, gostaria de saber o seguinte:

1. As informações que lista no fim do vídeo são suficientes para referenciar seu trabalho?

2. Você publicou algo como uma análise das operações que utilizou para a produção do vídeo?

Atenciosamente,

Arq. Fernando Ramos

Rodrigo Velazco escreveu em 13/09/2010:

Hola Fernando,

No hay ningun problema que me escribas en portugues, te he entendido todo... yo te escribiré en español sino te va bien.

Encantado de conocerte, respecto de lo que me preguntas:

1.

Autor del Video: Rodrigo Herrera Velazco

Video: Peter Eisenman - Casa Guardiola: Desarrollo morfológico

Curso de Representación gráfica asistida por ordenador (2004-2005).

Profesores: Manuel J. Luque, Maria Isabel Ruiz, Joan Font.

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona

Barcelona

2004

Ver pagina web: <http://www.youtube.com/watch?v=JAH97LcQ2Cs>

2. No he publicado nada respecto al analisis de operaciones, de todas formas hice un analisis de las operaciones. En esta pagina tengo algunas imagenes del analisis que hice:

<http://www.rhvc.blogspot.com/>

(si quieres ocupar las imagenes que salen en esta pagina no hay ningun problema)

El video fue un ejercicio practico que no dieron para hacer, donde propuse hacer este video relacionado con el proceso de desarrollo formal.

EL proceso morfologico que se ve en el video es una interpretación propia, basandome en el dibujo que hace P.Eisenman (aquellos dibujos de dicen "Elevation" y "Plan")

No sé si te sirva, ahora estoy terminando el Doctorado en el Depto de Expresion Grafica del ETSAB.

Mi tesis tiene relación con la tecnica del morphing, y la tecnica la estoy aplicando con las casas Usonian de F.Lloyd Wright.

En youtube tengo algunos videos de los primeros ensayos, no he querido colgar los ultimos videos, porque estan mucho mas desarrollados y porque no quiero mostrarlos antes de entregar la tesis.

Si necesitas mas informacion, sobre la Casa Guardiola, ya sean plantas, elevaciones o secciones. Avisame porque las tengo scaneadas de La Croquis del año 1988.

Si tienes tu tesis pronto a entregar, envíamela para verla...

Si quieres ver mi tesis, yo creo que por Octubre ya la tendré casi lista...

Estamos en contacto.

Un saludo.

Rodrigo.

conhecimento geométrico envolvido no processo, mas como exercício de desenho de representação, já que partiu dos gráficos de vistas rebatidas sobre planos (vistas superiores e elevações), para gerar uma animação digital. A despeito das diferentes motivações das pesquisas, chama a atenção o reconhecimento que seu potencial ilustrativo, vem em grande parte da grande capacidade descritiva das transformações, feitas a partir das operações de isometria.

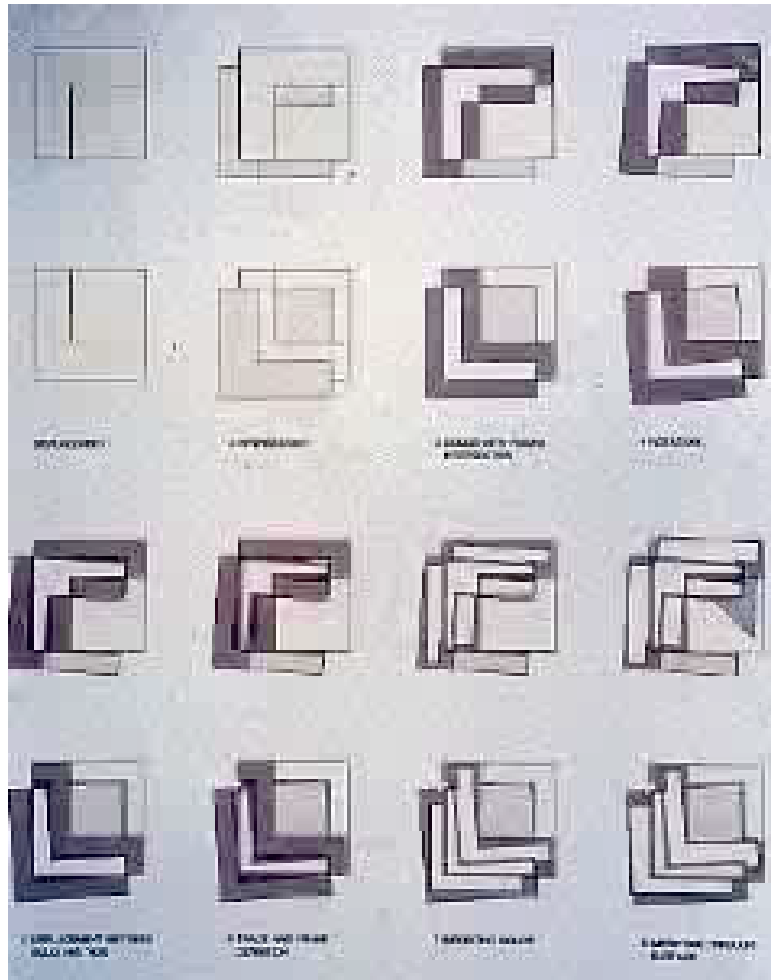


Figura 121 - Quatro instantes da transformação, que envolve a utilização sistemática de duas operações de isometria: translações e rotações, através do alinhamento das vistas superior e lateral esquerda.

A investigação é conduzida pelo interesse em compreender os caminhos de seus processos criativos relacionados à forma, como sua conformação, geração e organização, bem os procedimentos que lhe amparam. Neste sentido, a

evolução da obra é dissecada cronologicamente, `a medida que são observadas as transformações, de maneira que as estratégias possam ser expostas e comentadas.

Não se pretende seccionar e analisar a totalidade do vídeo, pois compreende-se que implicaria em esforço desnecessário, uma vez que as operações geométricas que se busca sublinhar tendem a repetir-se. Sendo assim, procede-se um alinhamento das observações feitas a partir do vídeo, às vistas ortogonais ilustrativas do início do processo (EISENMAN, 1999: 122).

As próximas páginas ilustram a análise feita em três tempos:

1. A partir de *screenshots* da animação de Velazco.
2. A partir de uma modelagem feita pelo autor, relacionando as formas ao 1º quadrante do diedro espacial, e representando as transformações por perspectivas isométricas.
3. Através das notações próprias da geometria, nas vistas superior e lateral esquerda.

Casa Guardiola. *Decoupage* do vídeo



Figura 122 - A linha aparece como resultado da translação de um ponto arbitrário, estabelecendo uma altura - no eixo Z

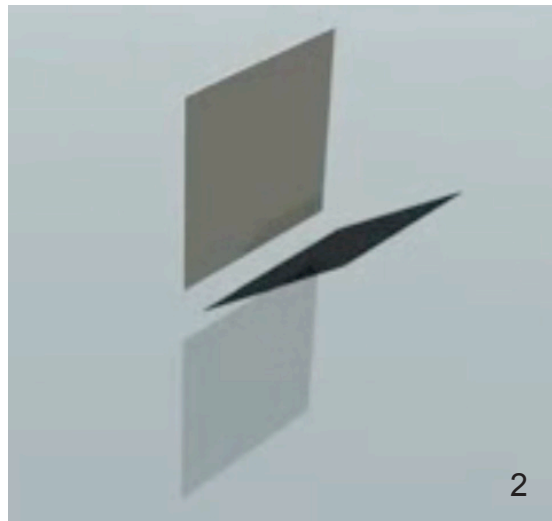


Figura 123 - A linha translada a mesma extensão de seu comprimento, e forma um plano quadrado, somando à altura, uma largura - no eixo X

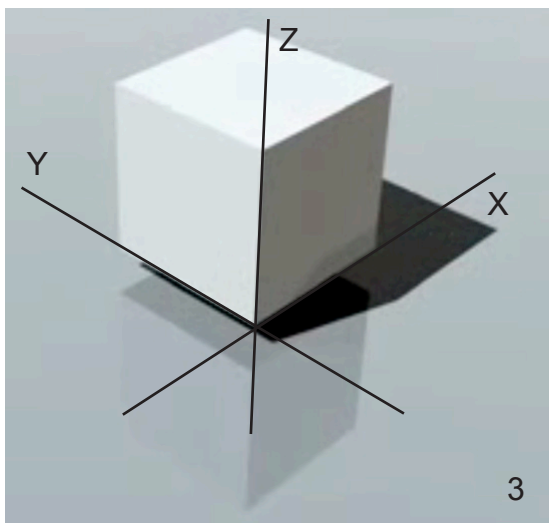


Figura 124 - O plano bidimensional translada sobre o eixo Y perpendicular, à mesma razão de sua largura e altura, gerando um cubo.

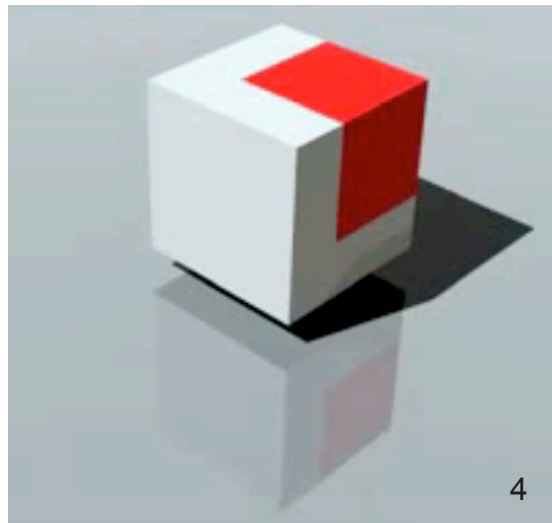


Figura 125 - No interior do cubo branco, gera-se um semelhante de menor volume - vermelho, alinhado ao original por um vértice e três arestas.

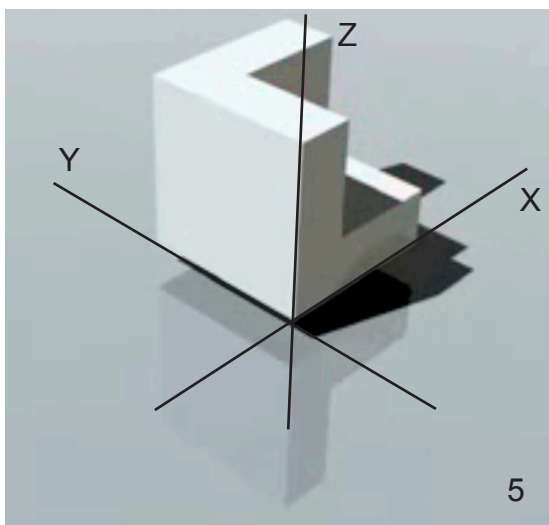


Figura 126 - Do cubo branco, subtrai-se o vermelho. O forma do poliedro resultante justifica o chamado diagrama em “L”.

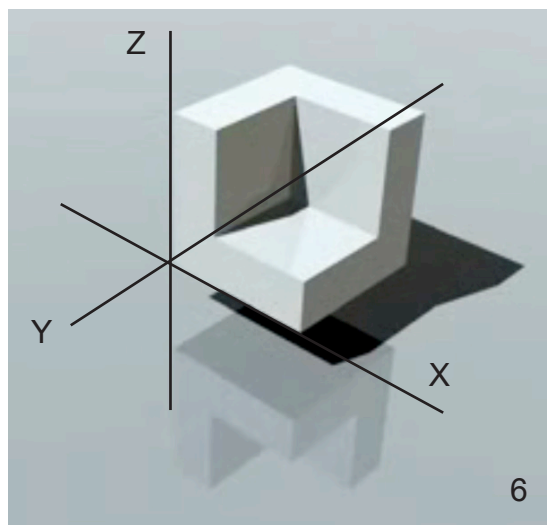


Figura 127 - O poliedro rotaciona 90º em sentido horário, em torno de um eixo Z vertical, que passa pelo seu centro geométrico. Esta operação inverte as posições relativas de X e Y

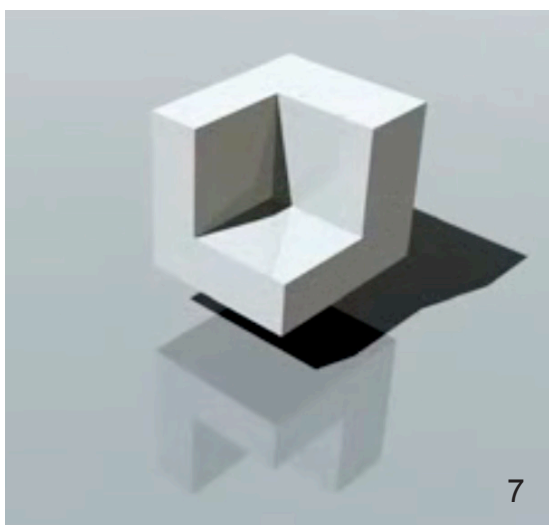


Figura 128 - O poliedro se duplica e translada ao longo do eixo Y, na extensão necessária a coincidir o vértice externo do L do poliedro duplicado, com o ponto médio da aresta do poliedro original.

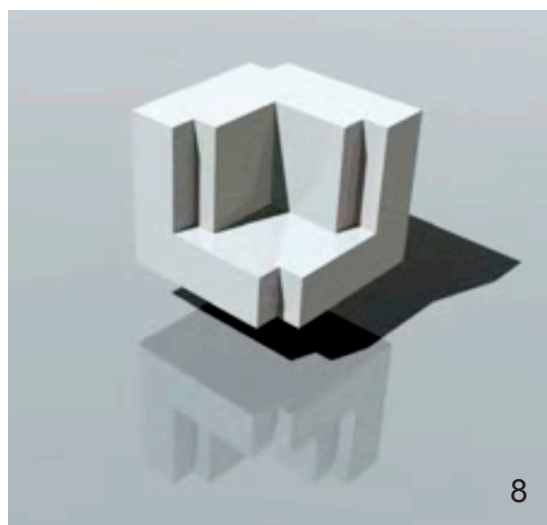


Figura 129 - O poliedro sofre nova translação ao longo do eixo X, na mesma extensão da observada na operação anterior.

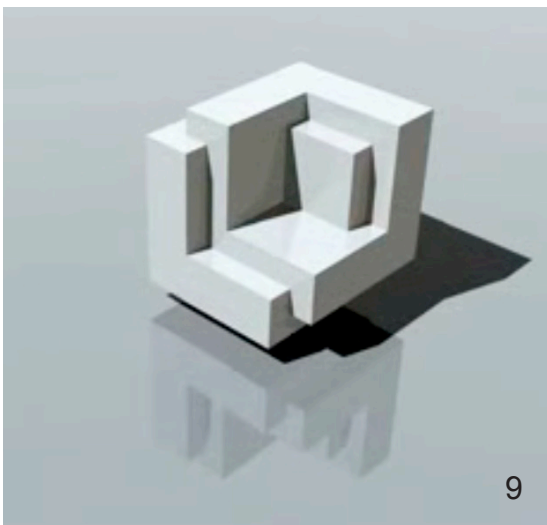


Figura 130 - O poliedro duplicado sofre nova translação, ao longo do eixo Z, na mesma extensão das duas translações anteriores

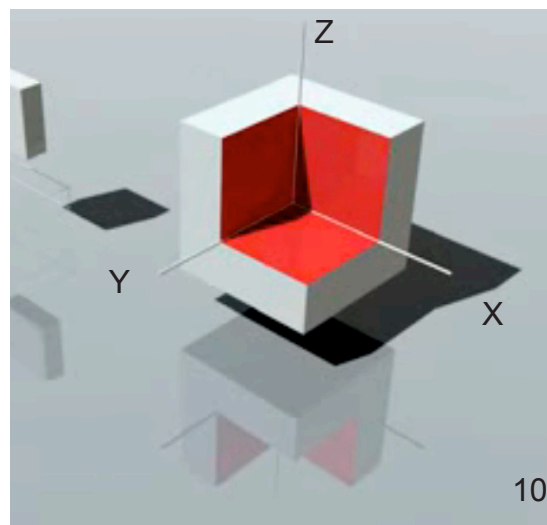


Figura 131 - A imagem sublinha os planos internos do poliedro original, e indica a posição dos eixos X, Y e Z, em torno dos quais a composição será transformada.

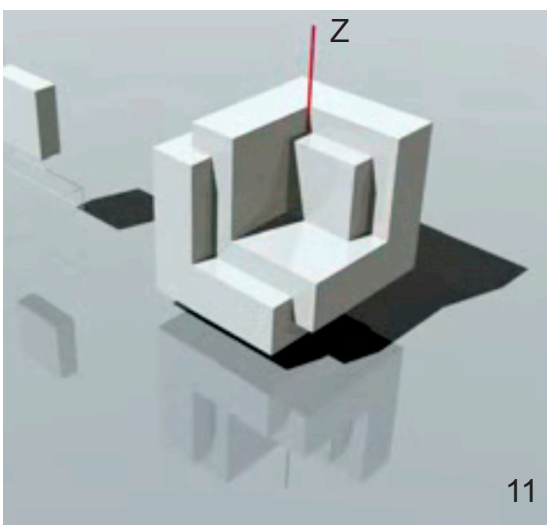


Figura 132 - Indica-se a posição do eixo Z, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.

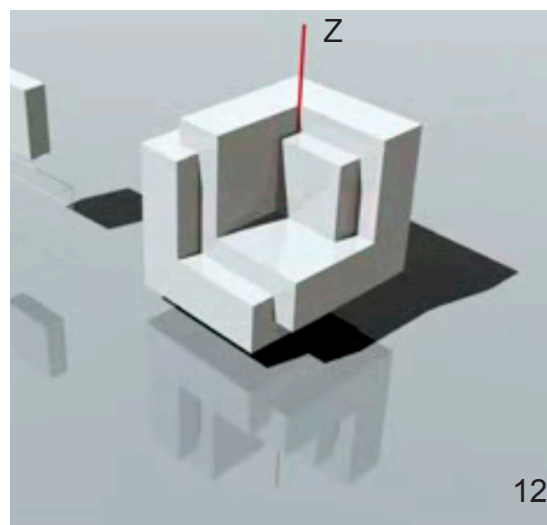


Figura 133 - A composição sofre uma ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo Z.

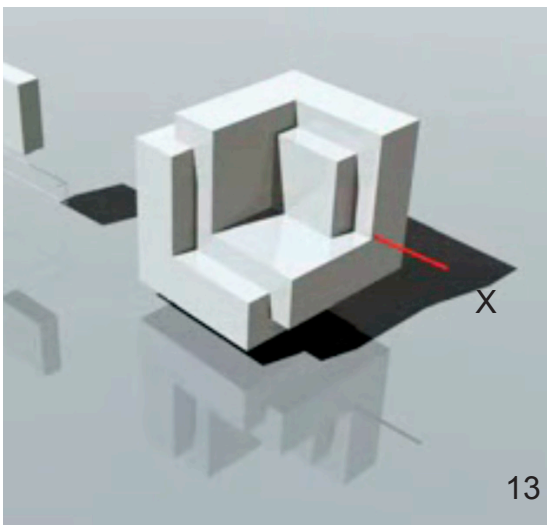


Figura 134 - Indica-se a posição do eixo X, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.

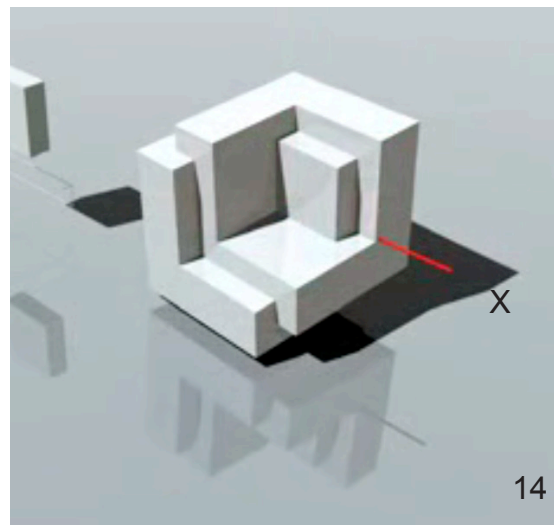


Figura 135 - A composição sofre uma nova ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo X.

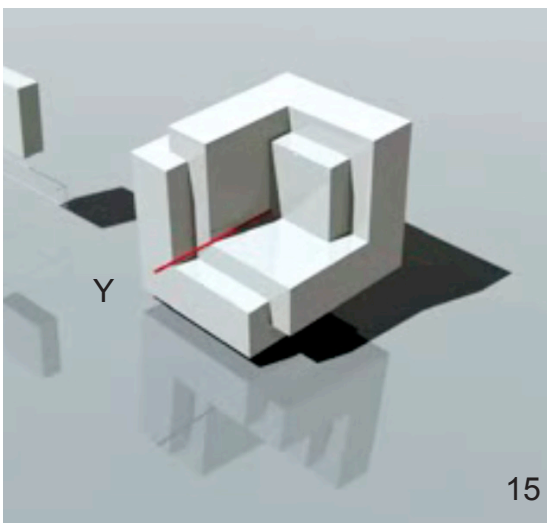


Figura 136 - Indica-se a posição do eixo Y, em torno do qual a composição sofrerá a primeira rotação.

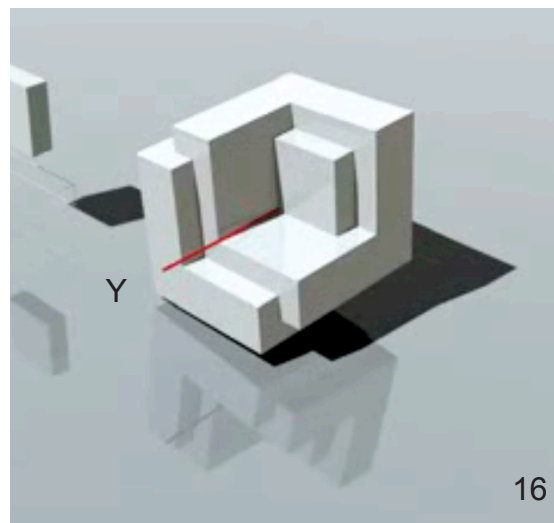


Figura 137 - A composição sofre uma nova ligeira rotação (aproximadamente 4°), em torno do eixo Y.

Casa Guardiola. Transformações no 1º quadrante cartesiano

Figura 138 - A posição dos eixos X,Y e Z no primeiro quadrante, visto a partir da isométrica superior direita.

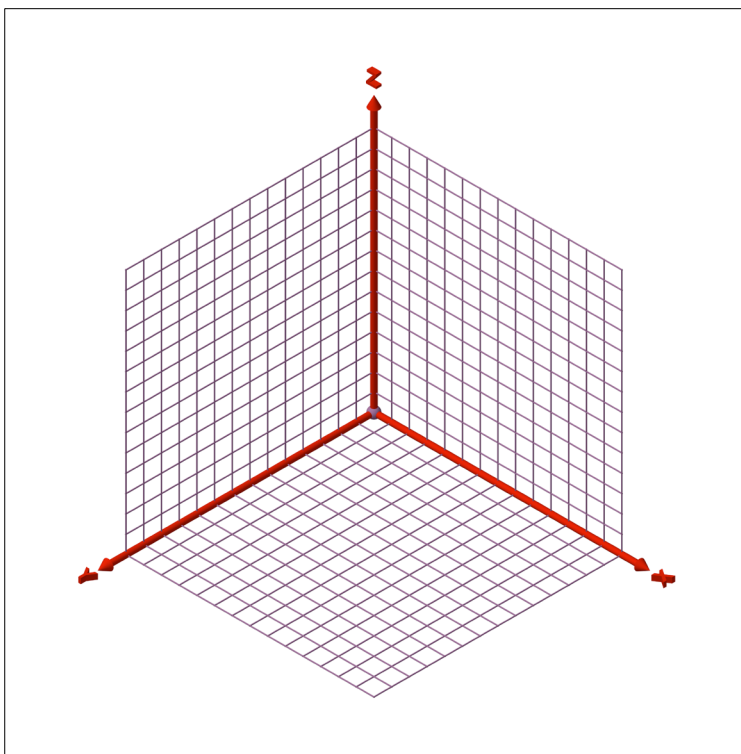
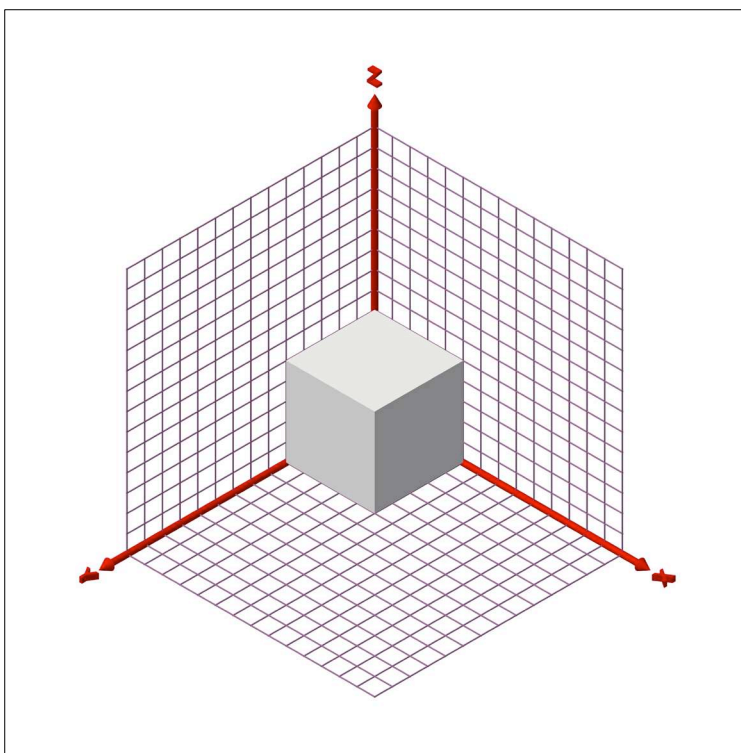


Figura 139 - O cubo integral, sem a ação de nenhuma operação.



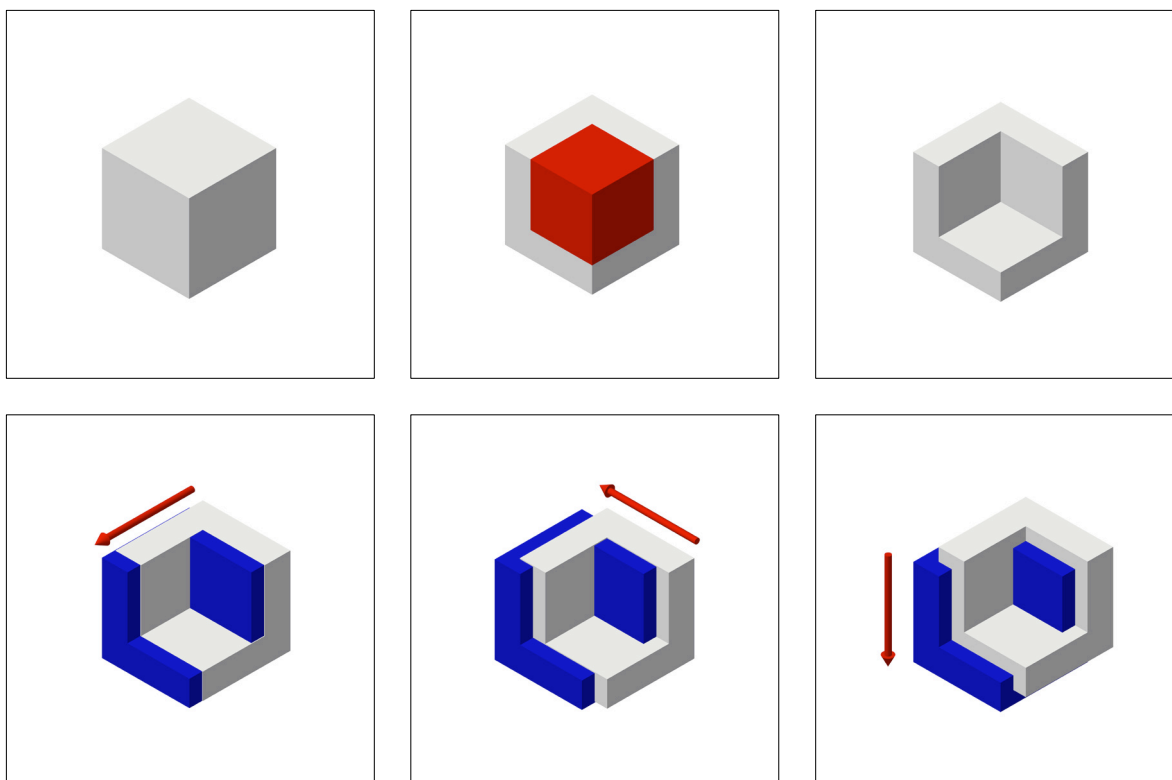


Figura 140 – Sequência de operações sobre o cubo: Subtração e translações.

A sequência ilustrada pela figura 140 mostra a subtração do cubo original por um outro de volume menor, criando a matriz que será transformada sistematicamente pelas operações de isometria.

As 3 primeiras são translações, cujo resultado é ilustrado pela figura 141.

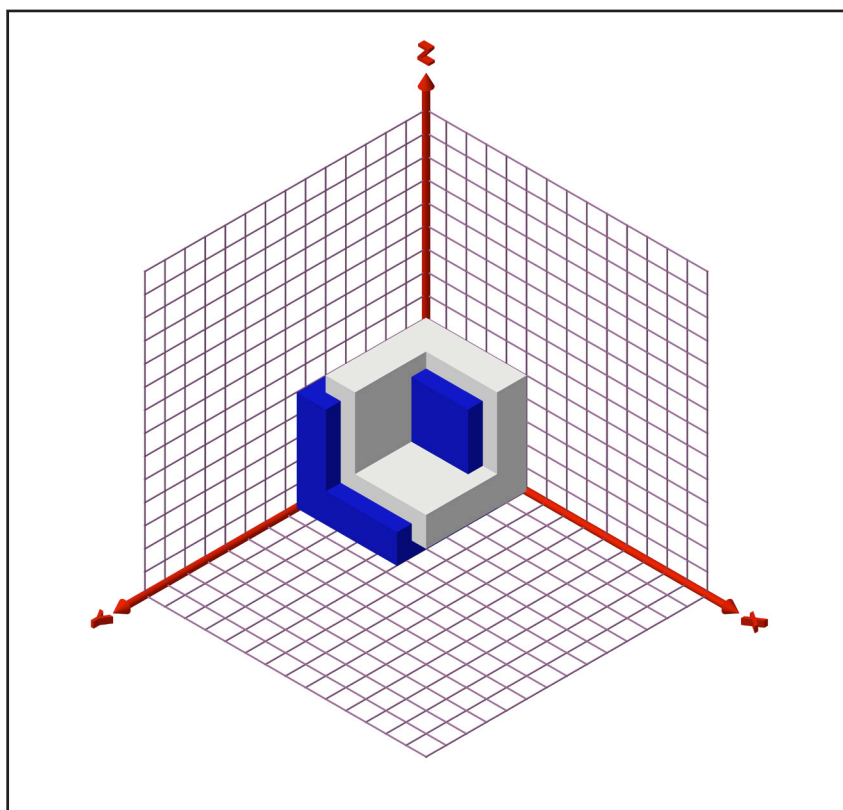


Figura 141- A primitiva original após as transformações.

Casa Guardiola. Análise geométrica a partir das projeções planas

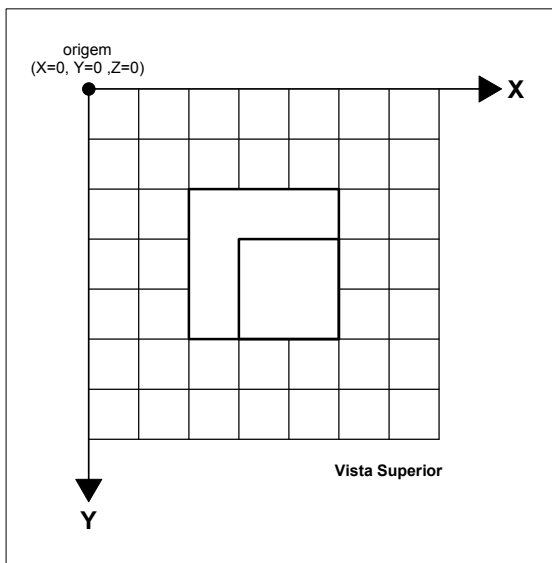


Figura 142 - Vista superior do cubo subtraído

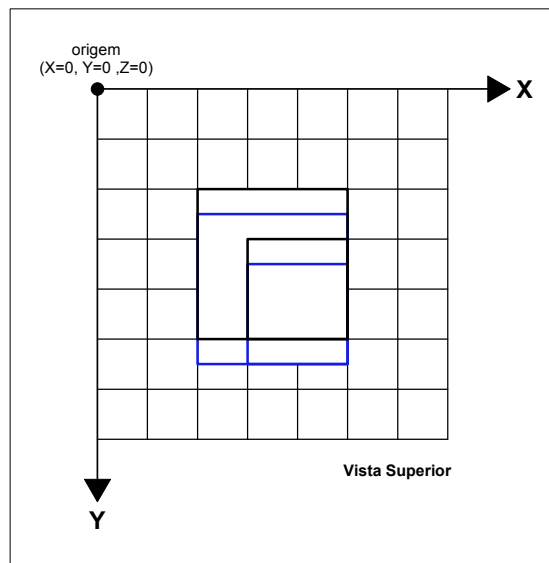


Figura 143 - Vista superior do sólido após a primeira translação

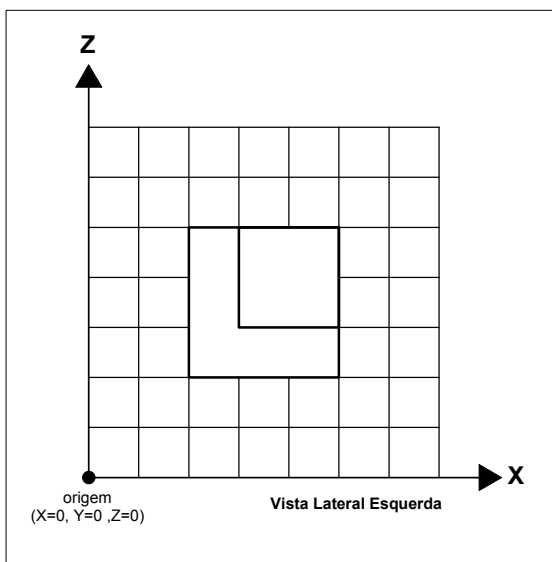


Figura 144 - Vista lateral esquerda do cubo subtraído

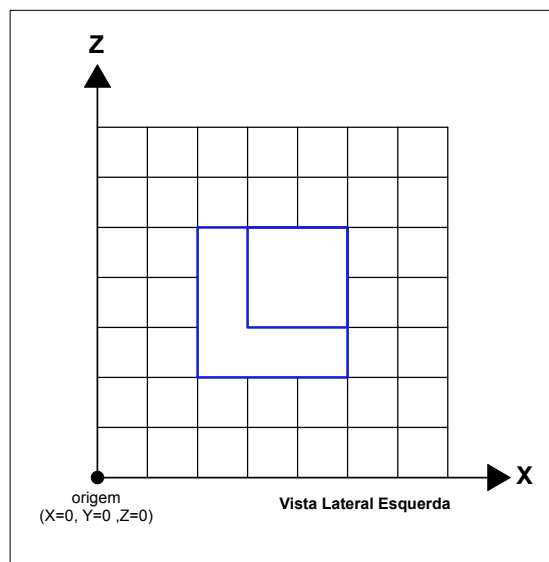


Figura 145 - Vista lateral esquerda do sólido após a primeira translação

As figuras alinham-se na vertical, nas vistas superior e lateral esquerda, respectivamente. As figuras 142 e 144 ilustram o cubo subtraído, enquanto as 143 e 145, mostram a primeira das 3 translações introdutórias. A cópia duplicada do cubo, ou imagem, é deslocada sobre o plano horizontal XY, ao longo do eixo Y em seu sentido negativo.

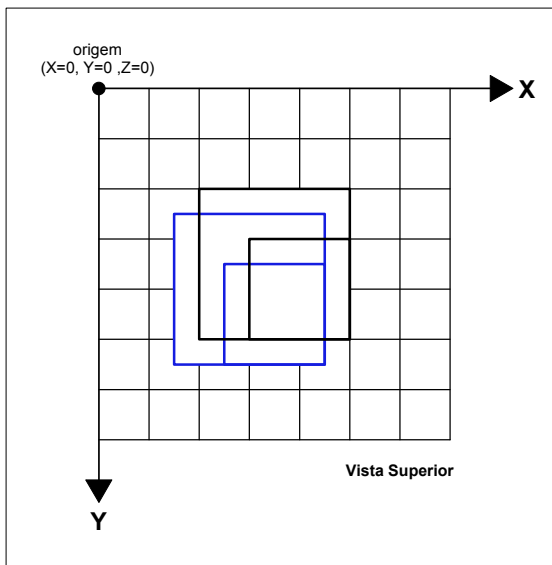


Figura 146 - Vista superior do sólido após a segunda translação

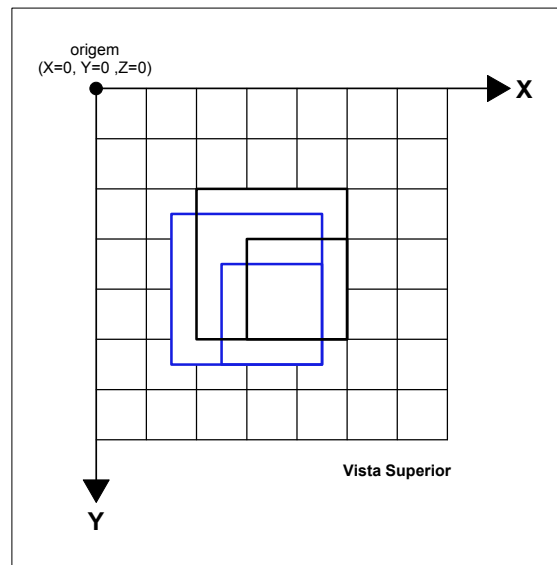


Figura 147 - Vista superior do sólido após a terceira translação

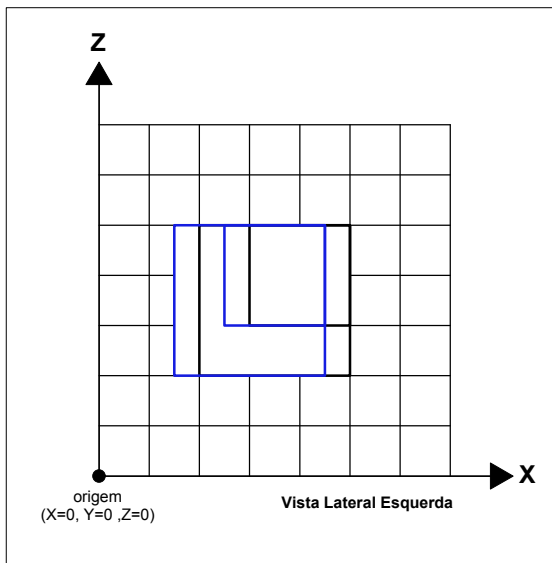


Figura 148 - Vista lateral esquerda do sólido após a segunda translação

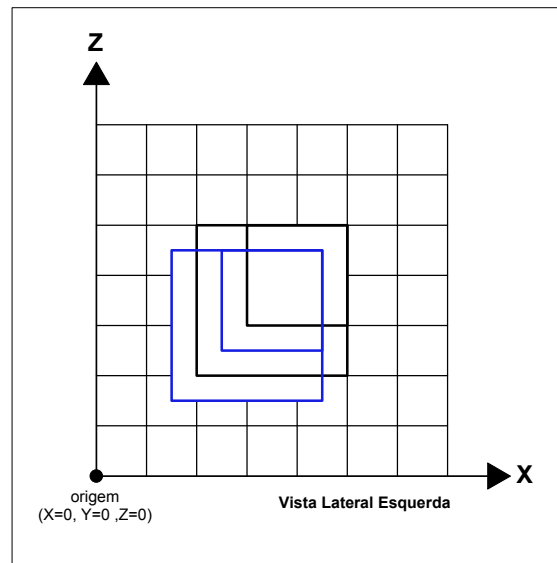


Figura 149 - Vista lateral esquerda do sólido após a terceira translação

Figuras 146 e 148 - Segunda translação. A imagem translada sobre o plano XY, ao longo do eixo X em seu sentido negativo.

Figuras 147 e 149 - Terceira translação. A imagem translada sobre o plano vertical XZ, ao longo do eixo Z em seu sentido negativo.

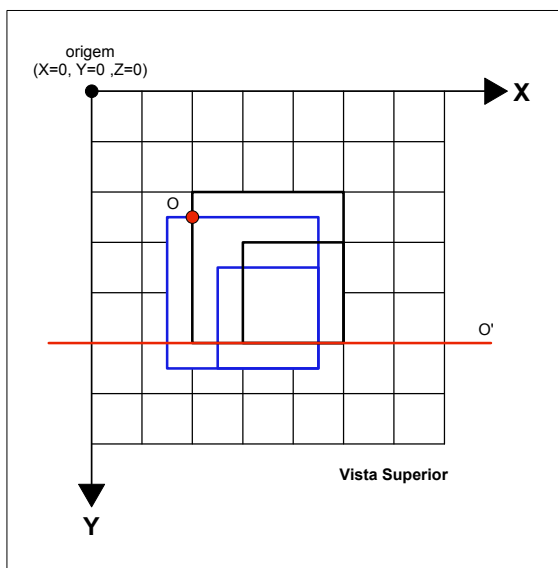


Figura 150 - Vista superior do posicionamento dos eixos O e O'

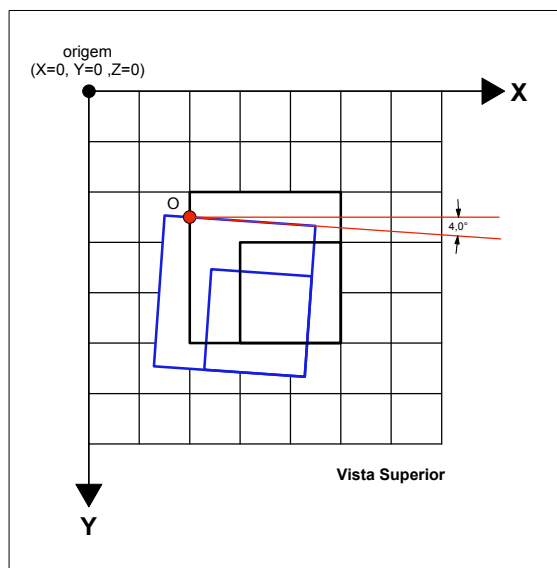


Figura 151 - Vista superior da primeira rotação da imagem a partir do eixo O

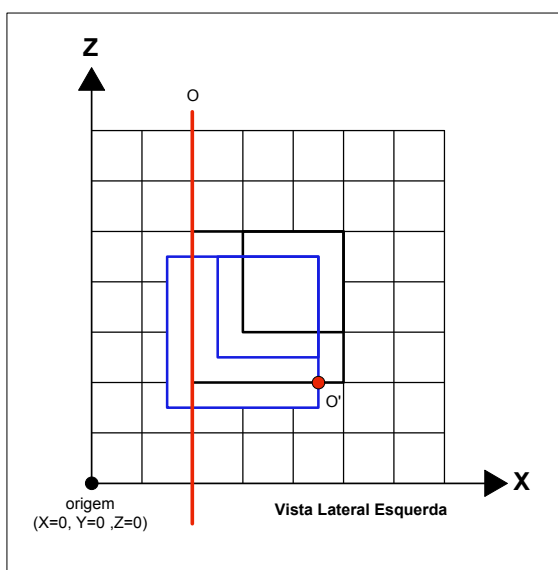


Figura 152 - Vista lateral esquerda do posicionamento dos eixos O e O'

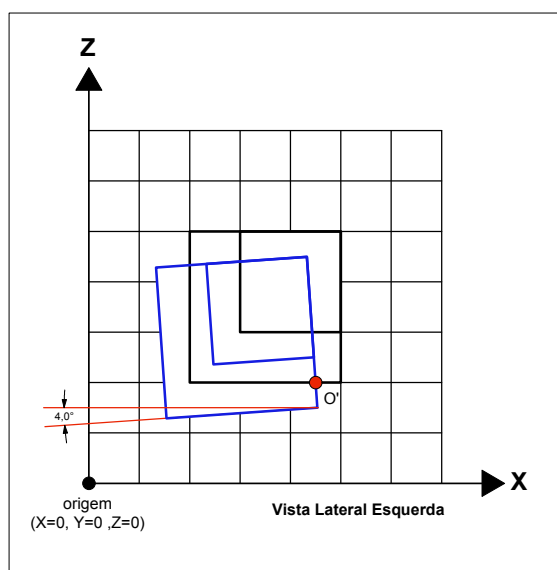


Figura 153 - Vista lateral esquerda da segunda rotação a partir do eixo O'

Estabelecidos os dois eixos O e O', procede-se duas rotações sobre a imagem resultante das translações precedentes. As figuras 150 e 152 ilustram a posição dos eixos nas vistas superior e lateral esquerda.

A primeira rotação ocorre na vista superior e utiliza o eixo O para transformar a imagem em 4,00° no sentido horário. O processo está ilustrado pela figura 151.

A segunda, ocorre a partir da vista lateral, e utiliza o eixo O' para rotacionar a imagem em 4,00° no sentido anti-horário.

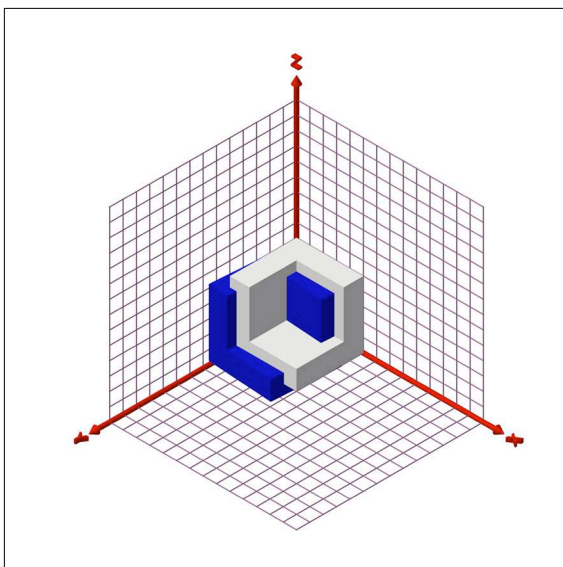


Figura 154 - A primeira rotação ocorre na vista superior e utiliza o eixo O para transformar a imagem em $4,00^\circ$ no sentido horário.

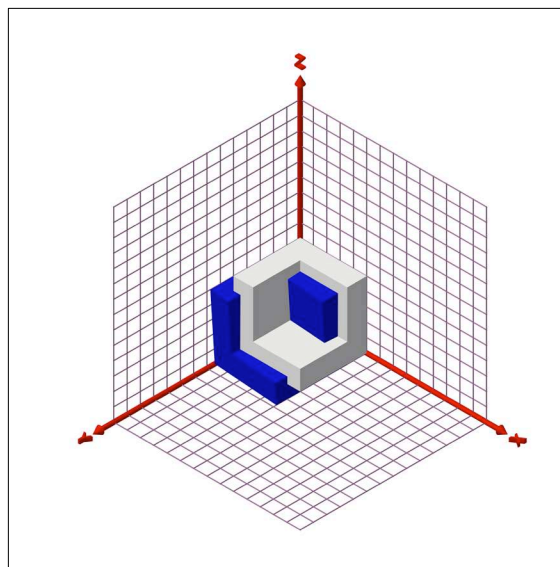


Figura 155 - A segunda, ocorre a partir da vista lateral, e utiliza o eixo O' para rotacionar a imagem em $4,00^\circ$ no sentido anti-horário.

Esta é a configuração final da primeira etapa de operações.

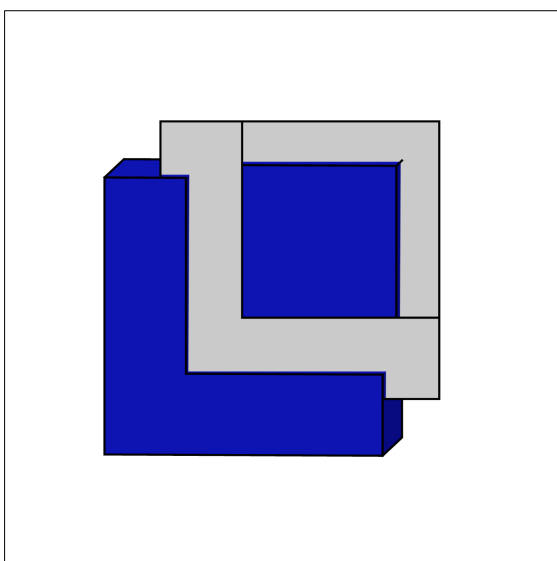


Figura 156 - vista lateral esquerda

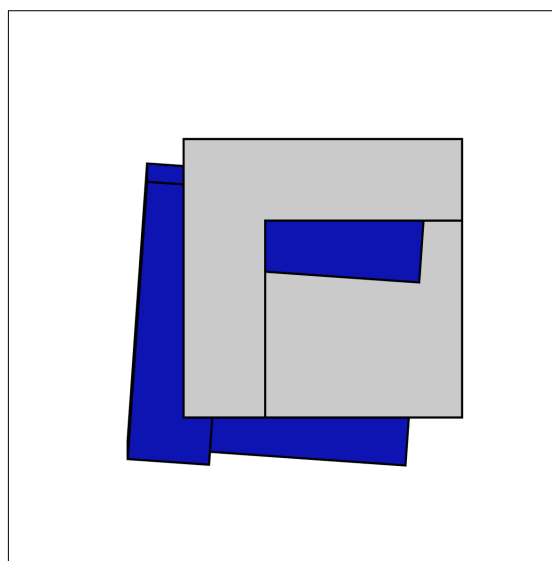


Figura 157 - vista superior

POLY-KIT – OS MANIPULATIVOS FÍSICOS DE JANOS BARACS

No primeiro número da *Topologie Structurale/Structural Topologie*, um curto artigo do engenheiro estrutural húngaro Janos Baracs, apresentou o manipulativo Poly-Kit (BARACS, 1979, nº1), que anunciava a possibilidade de construção de todos os poliedros regulares e semi-regulares, alguns prismas e anti-prismas, alguns dos duais dos poliedros semi-regulares, bem como os cinco paraleloedros preenchedores do espaço. E isso sem usar cola ou instrumento de corte, por apenas US\$ 10,00 (taxas postais inclusas).

O kit consistia de sessenta folhas idênticas de papelão leve, medindo 325 x 390 mm, contendo, um conjunto de planificações do tipo corte e dobra de 18 polígonos regulares e semi-regulares escolhidos criteriosamente. Cada polígono continha abas em suas arestas, e a montagem dos sólidos se fazia unindo estas abas com elásticos. O artigo ainda trazia um modelo reduzido da folha de polígonos.

No mesmo ano, a edição número três do mesmo periódico, reforçava a importância circunstancial desta ferramenta, com novo anúncio do Kit (BARACS, 1979, nº 3), e desta vez divulgando a preparação de um manual de instruções de quarenta páginas, a fim de servir como suporte aos usuários novatos.

No artigo intitulado *Spatial Perception and Creativity*, publicado no livro *Shaping Space – A Polyhedral Approach* (BARACS, 1988), Baracs identifica a dificuldade em criar-se imagens como o maior impedimento à compreensão das propriedades dos sólidos e do espaço, e sublinha a importância de se contar com um bom conjunto de ferramentas manipulativas, capazes de proporcionar agilidade na construção de modelos e experimentos em geometria criativa.

Novamente o Poly-Kit é mencionado como aliado importante em seus cursos de matemática aplicada ao design, como um estágio prévio às experiências construtivas em escala ampliada. Neste texto, a versão original aparece multiplicada em possibilidades formais, apresentando um total de quatro Kits capazes de compreender um conjunto muito maior de sólidos espaciais.

Quatro Kits foram assim apresentados (BARACS, 1988):

- **Poly-Kit nº 1: Poliedros Métricos.**

Trata-se do conjunto pioneiro, primeiro da série. Capaz de permitir a construção dos cinco poliedros regulares, os treze poliedros semi-regulares, seis das famílias de prismas e anti-prismas, quatro dos duais dos poliedros semi-regulares, os cinco paraleloedros, e todos os demais poliedros com faces regulares.

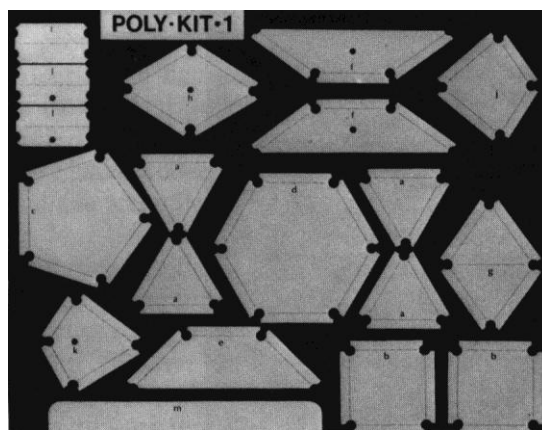


Figura 158 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128)

- **Poly-Kit nº 2: Poliedros preenchedores do espaço.**

Criado a permitir uma rápida conformação dos 5 paraleloedros e demais poliedros de faces regulares, capazes de tesselar o espaço sem

falhas de continuidade. Há uma conexão especial nos polígonos que facilitam a conexão de duas ou mais faces ao redor de uma aresta.

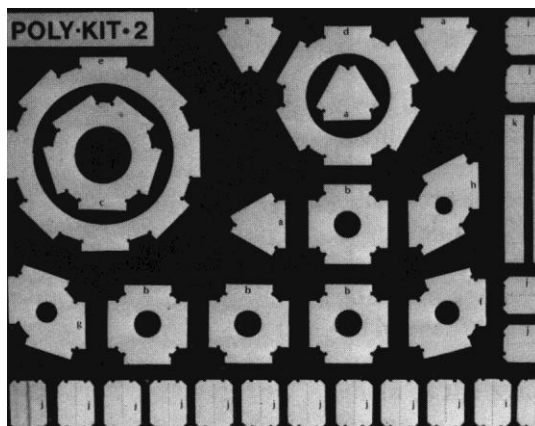


Figura 159 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128)

- **Poly Kit nº 3: Poliedros Afins. (Zonoedros)¹**

Este kit foi concebido de maneira a permitir a montagem de uma infinita família de poliedros conhecida como Zonoedros. Os modelos permitem movimentos afins do zonoedro estudado, mantendo sua simetria central durante as deformações.

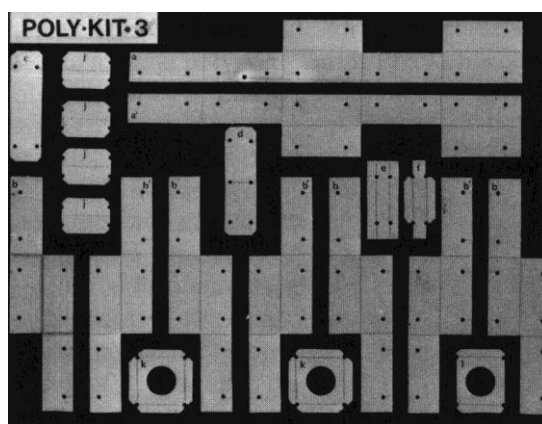


Figura 160 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128)

¹ Zonoedros são poliedros convexos cujas faces são paralelogramos

- **Poly-Kit nº 4: Rigidez geométrica dos grides**

Esta versão serve a dois propósitos: Pode ser usado para demonstrar a rigidez geométrica das malhas regulares, e na construção de poliedros projetados sobre uma esfera.

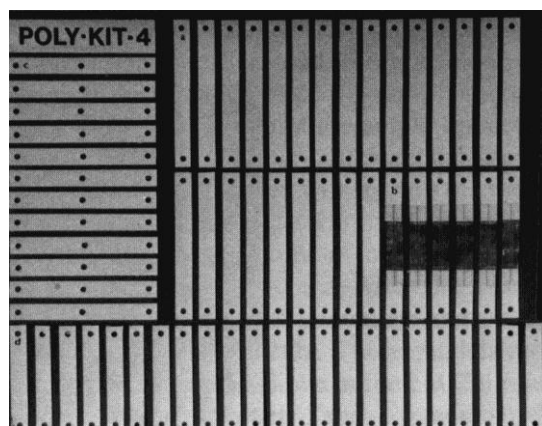


Figura 161 – Poly-Kit nº1 (BARACS, 1988, p.128)

Este conjunto não está mais à disposição do mercado. Não com este nome, pelo menos.

Seus princípios foram assimilados por empresas especializadas na fabricação de produtos pedagógicos e geometria recreativa, e foram transformados em brinquedos educativos vendidos, sobretudo no mercado norte americano, recomendado a crianças e jovens do ensino fundamental.