

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
DESENVOLVIMENTO DE PROCESSOS QUÍMICOS

# Desenvolvimento de Modelo Numérico Tridimensional e Elíptico para o Estudo de Escoamentos no Interior de Dutos Cilíndricos.

Autor: Gabriela Cantarelli Lopes

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Nunhez

Co-Orientador: Dr. Everton Moraes Matos

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Química como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Campinas – São Paulo

Junho de 2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE  
ENGENHARIA E ARQUITETURA – BAE – UNICAMP

L881d                   Lopes, Gabriela Cantarelli  
Desenvolvimento de modelo numérico tridimensional e  
elíptico para o estudo de escoamentos no interior de dutos  
cilíndricos / Gabriela Cantarelli Lopes.- -Campinas, SP:  
[s.n.], 2008.

Orientador: José Roberto Nunhez  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Química.

1. Fluidodinâmica computacional (CFD). 2. Tubos. 3.  
Modelos matemáticos. 4. Turbulência. 5. Métodos dos  
volumes finitos. 6. Equações diferenciais parciais - soluções  
numéricas. I. Nunhez, José Roberto. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Química.  
III. Título.

Título em Inglês: Development of three-dimensional and elliptical numerical  
model for the study of fluid flow in cylindrical ducts

Palavras-chave em Inglês: Computational fluid dynamic, Cylindrical ducts,  
Three-dimensional and elliptical model, Turbulence,  
Coupled solution, Finite Volume Method

Área de concentração: Desenvolvimento de Processos Químicos

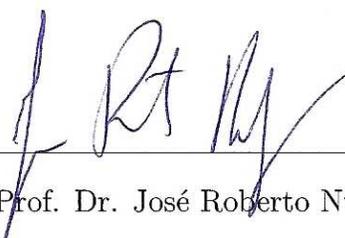
Titulação: Mestre em Engenharia Química

Banca examinadora: Marcos Akira D'avila, Waldir Pedro Martignoni

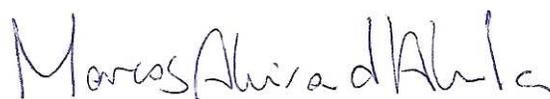
Data da defesa: 27/06/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Química

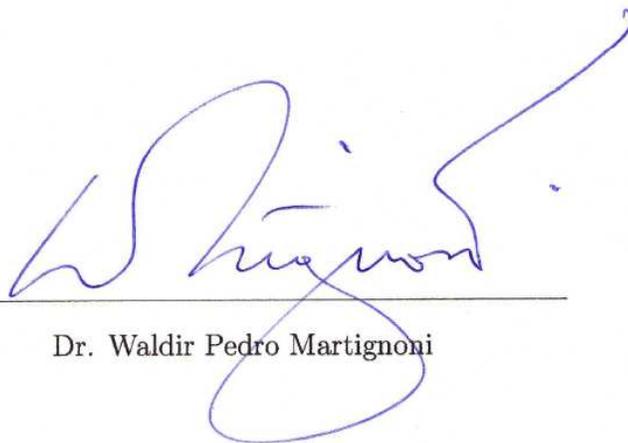
Dissertação de Mestrado defendida por Gabriela Cantarelli Lopes e aprovada em 27 de junho de 2008 pela banca examinadora constituída pelos doutores:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'J R N', written above a horizontal line.

Prof. Dr. José Roberto Nunhez

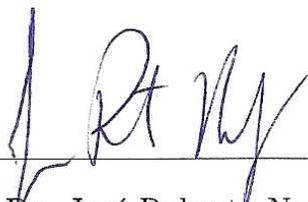
A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Marcos Akira d'Avila', written above a horizontal line.

Dr. Marcos Akira D'avila

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Waldir Pedro Martignoni', written above a horizontal line.

Dr. Waldir Pedro Martignoni

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação de Mestrado em Engenharia Química.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'J. R. Nunhez', is positioned above a horizontal line.

Prof. Dr. José Roberto Nunhez - Orientador

## Agradecimentos

Agradeço ao professor José Roberto Nunhez pela oportunidade de desenvolver um trabalho que me permitiu adquirir amplo conhecimento da fluidodinâmica computacional; ao professor Milton Mori, pela chance de participar do projeto desenvolvido no PQGe<sup>1</sup>, tendo contato com pessoas competentes e qualificadas; ao Everton, pela co-orientação e dedicação em meu aprendizado de métodos numéricos; ao Léo e ao Márcio, por estarem sempre dispostos a ajudar em tudo que precisei. Agradeço também à minha mãe pela torcida e pela motivação; ao meu pai pelo apoio e orientação na escolha da Engenharia Química que, sem querer, acabou sendo a realização de um sonho; à minha irmã Juliana, por ser um exemplo de inteligência e cultura, me motivando a seguir seus passos; à Vó Inha e à tia Cau pela paciência e pela compreensão; ao Ricardo por partilhar comigo todos os momentos, tornando-os especiais; aos meninos (Shanti e Túlio) por me trazerem sempre muita paz e alegria; à Janaina pela amizade desde sempre; à Ana, Marcela e Stella pela amizade e pela ótima companhia. Agradeço à todos os amigos do L-CFD<sup>2</sup>: Cezar, Alexandre, Márcio, Ellen, Diener, Sérgio, Daniel, Dani, Thiago, Jefferson.

---

<sup>1</sup>Laboratório de Pesquisa em Processos Químicos e Gestão Empresarial

<sup>2</sup>Laboratório de Fluidodinâmica Computacional

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a todas as pessoas que passaram pela minha vida e que fazem parte dela, e com as quais aprendi lições valiosas que seguirão norteando meu caminho para sempre.

## **Epígrafe**

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

– Leonardo da Vinci

## Resumo

Processos que envolvem escoamentos de fluidos no interior de dutos estão presentes em muitas aplicações industriais. Na indústria petroquímica um desses processos que vem se tornando cada vez mais importante é o craqueamento catalítico de frações pesadas do petróleo, já que as converte em frações leves e mais nobres. Por causa da crescente demanda mundial por gasolina e *GLP* e à sua alta rentabilidade para uma refinaria de petróleo, unidades de craqueamento catalítico em leito fluidizado (*FCC*) estão presentes em todo o mundo. Testes experimentais costumam ser usados no estudo dos fenômenos envolvidos nesse processo. Porém esse tipo de análise possui alto custo, que pode ser reduzido com o uso de simulações computacionais em seu estudo inicial. Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo tridimensional e elíptico, em linguagem *Fortran*, capaz de fornecer dados para a análise preliminar de escoamentos no interior de reatores de *FCC*. Na modelagem desses problemas são usadas equações diferenciais parciais, e essas não possuem solução analítica conhecida, sendo necessário o emprego de métodos numéricos para esse fim. Neste trabalho foi usado o *Método dos Volumes Finitos*, que tem a função de substituir as equações diferenciais parciais por equações algébricas aplicadas a pequenos volumes de controle finitos pertencentes ao domínio. Uma das maiores dificuldades encontradas no tratamento numérico de escoamentos incompressíveis é a determinação de um campo de pressão que satisfaça a Equação da Continuidade. Esse problema foi resolvido fazendo-se uso da abordagem acoplada de solução. Para análise do modelo foram obtidos perfis numéricos de velocidade e pressão para fluidos escoando em regimes laminar e turbulento, que foram validados usando-se os dados obtidos com a solução analítica das equações, por correlações (semi-) empíricas ou por dados experimentais, conforme cada um dos casos. Notou-se que o modelo representa muito bem casos laminares, e que nos casos turbulentos foi necessário um maior refino da malha próximo a parede do tubo. Também foram feitas simulações para que se pudessem observar as características tridimensionais, elípticas e transientes da modelagem do escoamento. De maneira geral o modelo se mostrou bastante rápido, convergindo em poucas iterações.

Palavras-Chave: Fluidodinâmica computacional; dutos cilíndricos; modelo tridimensional e elíptico; método dos Volumes Finitos; solução acoplada; turbulência.

## Abstract

Processes involving fluid flow in tubes are present in many industrial applications. In petrochemical industry one of these processes that are becoming more and more important is the fluid catalytic cracking of heavy petroleum fractions. This fact is due to the process capacity to convert heavy fractions in light and valuable ones. Because of the increasingly worldwide demand for gasoline and *LPG* and its high yield for a petroleum refinery, fluid catalytic cracking (*FCC*) units are present in the whole world. Experimental tests are used in the study of the phenomena involved in this process. However this kind of analysis has high cost which can be reduced by using computational simulations in its initial study. Thus, the aim of this work was the development of a three-dimensional and elliptical model in *Fortran* language in order to provide data for fluid flow preliminary analysis in *FCC* reactors. Partial differential equations were used in the modeling of these problems. These equations do not have known analytical solution, being necessary therefore the use of numerical methods. In this work the *Finite Volume Method* were applied with this purpose. This method has as a role to substitute the partial differential equations of the model for algebraic equations applied to small finite control volumes of the domain. One of the biggest difficulties found in the numerical treatment of incompressible fluid flows is the determination of a pressure field that satisfies the Continuity Equation. This problem was solved using the coupled solution approach. For model analysis, numerical velocity and pressure profiles for laminar and turbulent flows were obtained, that had been validated using the data obtained through the analytical solution of the equations, by empirical correlations or by experimental data, according to each one of the cases. The model represented well laminar cases, and in the turbulent ones the mesh had to be more refined near the tube wall. Other simulations were performed in analyzing the three-dimensional, elliptical and transient model characteristics. In general, the model was very fast, converging in a few iterations.

Keywords: Computational fluid dynamic; cylindrical ducts; three-dimensional and elliptical model; Finite Volume Method; coupled solution; turbulence.

# Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Nomenclatura	xiv
<b>1 Apresentação</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>3</b>
2.1 O processo <i>FCC</i> . . . . .	3
2.2 Fluidodinâmica Computacional . . . . .	6
2.3 Considerações Hidrodinâmicas . . . . .	7
2.4 Classificação Matemática de Escoamentos . . . . .	11
2.5 Turbulência . . . . .	11
<b>3 Modelagem Matemática</b>	<b>18</b>
3.1 Hipóteses do Modelo . . . . .	18
3.2 Equações de <i>Navier-Stokes</i> . . . . .	19
3.3 Modelo de Turbulência . . . . .	20
3.4 Condições de Contorno . . . . .	21

<b>4</b>	<b>Desenvolvimento Numérico</b>	<b>23</b>
4.1	Método Numérico . . . . .	23
4.2	Malha de Discretização . . . . .	24
4.3	Aproximação por Integral . . . . .	26
4.4	Funções de Interpolação . . . . .	27
4.5	Tratamento Pressão-Velocidade . . . . .	29
4.6	Aplicação das Condições de Contorno . . . . .	31
4.7	O Sistema de Equações Algébricas . . . . .	32
4.8	Passo de Tempo . . . . .	35
4.9	Estrutura do Programa . . . . .	36
4.10	Convergência . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Simulações e Análise dos Resultados</b>	<b>39</b>
5.1	Escoamentos em Regime Laminar . . . . .	39
5.2	Escoamentos em Regime Turbulento . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Coefficientes das equações algébricas</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

2.1	Configuração simplificada da região de entrada de um reator <i>riser</i> (ROSA, 2002). . . . .	4
2.2	Sistema de alimentação com angulação ajustável (CHEN, 2006). . . . .	5
2.3	Desenvolvimento do perfil de velocidade e variação da pressão na região de entrada de um escoamento em um duto (WHITE, 2003). . . . .	8
2.4	Comparação dos perfis de velocidade para escoamentos laminar (a) e turbulento (b) (WHITE, 2003) . . . . .	10
2.5	Representação de uma componente da velocidade num escoamento turbulento usando o conceito de média de <i>Reynolds</i> . . . . .	13
2.6	Partícula de fluido se movendo na direção ascendente como resultado da flutuação de velocidade nessa direção (ÇENGEL e CIMBALA, 2007). . . . .	14
2.7	Tensão de cisalhamento viscosa (laminar) e tensão de <i>Reynolds</i> (turbulenta) (Pope, 2000). . . . .	15
2.8	Regiões do escoamento em termos de $y^+$ . . . . .	17
4.1	Malha não uniforme na direção radial. . . . .	25
4.2	Esquematização da malha de discretização - plano $r\alpha$ . . . . .	25
4.3	Esquematização da malha de discretização - plano $zr$ . . . . .	25
4.4	Conexões espacial e temporal da variável $\phi$ na formulação totalmente implícita. . . . .	29
4.5	Esquematização do volume a oeste ( $W$ ) de um volume central ( $P$ ). . . . .	32
4.6	Estrutura da Matriz dos Coeficientes . . . . .	34
4.7	Algoritmo de resolução do problema. . . . .	37

5.1	Perfil de velocidade axial - plano $zr$ . . . . .	40
5.2	Desenvolvimento do perfil de velocidade axial ao longo do cilindro. . . . .	41
5.3	Perfis numérico e analítico de velocidade axial para $Re = 1 \times 10^3$ , na região plenamente desenvolvida. . . . .	42
5.4	Perfis numérico e analítico de velocidade axial para $Re = 2 \times 10^3$ , na região plenamente desenvolvida. . . . .	42
5.5	Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de <i>Darcy-Weisbach</i> para $Re = 1 \times 10^3$ ao longo do comprimento do cilindro. . . . .	43
5.6	Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de <i>Darcy-Weisbach</i> para $Re = 2 \times 10^3$ ao longo do comprimento do cilindro. . . . .	43
5.7	Desenvolvimento do perfil de velocidade radial ao longo do cilindro. . . . .	44
5.8	Vazões volumétricas nas seções transversais ao longo do comprimento do cilindro. . . . .	45
5.9	Vazão mássica resultante da aplicação dos valores numéricos das variáveis na equação de conservação de massa. . . . .	46
5.10	Geometria da região de entrada do tubo. . . . .	46
5.11	Desenvolvimento do perfil de velocidade axial para $Re = 1,6 \times 10^3$ usando geometria esquematizada na Figura 5.10. . . . .	47
5.12	Dados de velocidade axial e radial representados vetorialmente. . . . .	48
5.13	Perfil de velocidade de entrada inclinado. . . . .	48
5.14	Representação vetorial das componentes radial e angular da velocidade no plano. . . . .	49
5.15	Representação vetorial da velocidade no espaço. . . . .	49
5.16	Desenvolvimento do perfil de velocidade axial ao longo do tempo. . . . .	50
5.17	Queda de pressão - teste de independência de malha variando $nvz$ . . . . .	51
5.18	Queda de pressão - teste de independência de malha variando $nvr$ . . . . .	52
5.19	Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para $Re = 2 \times 10^4$ , e dados experimentais para $Re = 2,7281 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida. . . . .	53

5.20	Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para $Re = 4 \times 10^4$ , e dados experimentais para $Re = 4,8997 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida. . . . .	53
5.21	Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para $Re = 10 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida. . . . .	54
5.22	Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de <i>Darcy-Weisbach</i> para $Re = 2 \times 10^4$ ao longo do comprimento do cilindro.	55
5.23	Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de <i>Darcy-Weisbach</i> para $Re = 4 \times 10^4$ ao longo do comprimento do cilindro.	56
5.24	Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de <i>Darcy-Weisbach</i> para $Re = 10 \times 10^4$ ao longo do comprimento do cilindro.	56
5.25	Representação vetorial da velocidade do gásóleo vaporizado no interior de um reator <i>riser</i> . . . . .	58
5.26	Representação da queda de pressão no interior de um reator <i>riser</i> . . . . .	59

# Lista de Tabelas

5.1	Comprimentos de entrada hidrodinâmicos - laminar . . . . .	40
5.2	Comprimentos de entrada hidrodinâmicos (Equação 2.2) - turbulento .	54
5.3	Comprimentos de entrada hidrodinâmicos (Equação 2.3) - turbulento .	54
A.1	Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção axial- EQMz. . . . .	67
A.2	Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção radial - EQMr. . . . .	68
A.3	Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção angular - EQM $\alpha$ . . . . .	69
A.4	Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação da Continuidade. . . . .	70

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$a$	área [ $m^2$ ]
$A$	coeficientes das equações algébricas [ $kg/s$ ou $m^2$ ]
$A_\alpha$	área perpendicular à direção angular [ $m^2$ ]
$A_r$	área perpendicular à direção radial [ $m^2$ ]
$A_z$	área perpendicular à direção axial [ $m^2$ ]
$A^+$	constante de <i>van Driest</i>
$B$	vetor resposta do sistema de equações algébricas [ $kg.m/s^2$ ]
$D$	diâmetro do cilindro [ $m$ ]
$f$	fator de atrito, forças externas
$F$	força [ $N$ ]
$\vec{g}$	aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$k$	constante
$L$	comprimento do cilindro [ $m$ ]
$L_e$	comprimento de entrada hidrodinâmico [ $m$ ]
$l_m$	comprimento de mistura [ $m$ ]
$\dot{m}$	vazão mássica [ $kg/s$ ]
$P$	pressão [ $Pa$ ]

$Q$	vazão volumétrica [ $m^3/s$ ]
$r$	posição radial [ $m$ ]
$R$	raio do cilindro [ $m$ ]
$Re$	número de <i>Reynolds</i>
$t$	tempo [ $s$ ]
$T$	intervalo de tempo grande [ $s$ ] ou temperatura [ $K$ ]
$u_{max}$	velocidade máxima [ $m/s$ ]
$v$	vetor velocidade [ $m/s$ ]
$V$	volume [ $m^3$ ]
$\bar{v}$	velocidade média [ $m/s$ ]
$v'$	flutuação da velocidade [ $m/s$ ]
$v_z, u$	velocidade axial [ $m/s$ ]
$v_r, v$	velocidade radial [ $m/s$ ]
$v_\alpha$	velocidade angular [ $m/s$ ]
$v_\tau$	velocidade de atrito [ $m/s$ ]
$x$	posição ao longo do comprimento do cilindro [ $m$ ]
$y$	distância a partir da parede [ $m$ ]
$y^+$	distância adimensional da parede
$z$	posição axial [ $m$ ]

## Letras Gregas

$\alpha$	posição angular [ $m$ ]
$\delta$	metade da largura do canal ou do diâmetro do cilindro [ $m$ ]
$\epsilon$	rugosidade da parede [ $m$ ] ou quantidade residual

$\mu$	viscosidade [ $kg/(m.s)$ ]
$\mu_{ef}$	viscosidade efetiva [ $kg/(m.s)$ ]
$\mu_t$	viscosidade turbulenta [ $kg/(m.s)$ ]
$\phi$	variável genérica
$\rho$	massa específica [ $kg/m^3$ ]
$\sigma$	tensão normal [ $Pa$ ]
$\tau$	tensão de cisalhamento [ $Pa$ ]
$\tau_{turb}$	tensão turbulenta [ $Pa$ ]
$\tau_\omega$	tensão na parede [ $Pa$ ]
$\theta$	tempo relativo
$\zeta$	índice de esparsidade

## Subscritos

$e$	face leste do volume de controle
$w$	face oeste do volume de controle
$n$	face norte do volume de controle
$s$	face sul do volume de controle
$f$	face posterior do volume de controle
$b$	face anterior do volume de controle
$P$	centro do volume de controle
$E$	centro do volume de controle à leste do volume $P$
$W$	centro do volume de controle à oeste do volume $P$
$N$	centro do volume de controle à norte do volume $P$
$S$	centro do volume de controle à sul do volume $P$

$F$	centro do volume de controle à jusante do volume $P$
$B$	centro do volume de controle à montante do volume $P$

## Superescritos

0	tempo inicial
---	---------------

## Símbolos e Operadores

$\Delta$	operador de diferença
$\nabla$	gradiente
$\nabla \cdot$	divergente

## Siglas

<i>CFD</i>	<i>computational fluid dynamic</i>
<i>DNS</i>	<i>direct numerical simulation</i>
<i>FCC</i>	<i>fluid catalytic craking</i>
<i>GLP</i>	gás liquefeito do petróleo
<i>LES</i>	<i>large eddy simulation</i>
<i>LPG</i>	<i>liquefied petroleum gas</i>
<i>RANS</i>	<i>Reynolds averaged Navier-Stokes</i>

# Capítulo 1

## Apresentação

O escoamento de fluidos é um fenômeno de extrema importância para os engenheiros, já que está presente na maior parte das aplicações industriais, onde o escoamento no interior em tubos circulares é, sem dúvida, o mais comum deles. O estudo desses fenômenos pode ser feito experimentalmente, porém o alto custo que costuma estar envolvido nessa prática em determinados casos, tem impulsionado o uso de simulações computacionais em sua análise preliminar.

O intuito deste trabalho foi desenvolver uma ferramenta prática e completa, em linguagem *Fortran*, para o estudo de processos envolvendo escoamentos de fluidos no interior de tubos cilíndricos. Sua principal motivação, no entanto, foi o estudo do processo de craqueamento catalítico em leito fluidizado (*FCC*) em refinarias de petróleo, já que, por converter resíduos da destilação em produtos com maior valor agregado, é um processo comercialmente e ambientalmente muito importante. Existem atualmente pacotes comerciais capazes de realizar simulações desse tipo de escoamento. Porém o desenvolvimento de um simulador próprio traz vantagens como a maior rapidez nas simulações, por resolver um problema específico, e a fácil implementação de novos modelos não presentes nos *softwares* comerciais.

O modelo matemático que descreve o escoamento, neste trabalho, é tridimensional, elíptico e transiente. Para isso foram consideradas todas as componentes do vetor velocidade e os termos difusivos e temporais presentes nas equações de *Navier-Stokes*. Também não foram impostos planos de simetria no domínio do problema. Outra característica é a flexibilidade na definição da condição de entrada para a velocidade, permitindo a realização de simulações de escoamentos com diferentes perfis de velocidade de entrada. Dessa forma, o modelo desenvolvido permite uma análise

bastante completa do problema, possibilitando variações no sistema de alimentação do reator, bem como um estudo mais detalhado do escoamento em sua região de entrada, de processos de recirculação e formação de vórtices.

As equações do modelo foram aproximadas numericamente usando-se o *Método dos Volumes Finitos*, e o sistema de equações foi então resolvido para todas as variáveis simultaneamente, usando-se abordagem acoplada de solução. Foram usadas malhas de discretização estruturadas uniformes ou não. As funções de interpolação *upwind* e diferenças centrais foram empregadas para que as variáveis estivessem arranjadas de maneira co-localizada, e essas foram interpoladas temporalmente usando-se formulação totalmente implícita. Para escoamentos turbulentos foi adotado o conceito de viscosidade turbulenta, que foi calculada a partir da teoria de comprimento de mistura de *Prandtl*.

Nos capítulos seguintes o presente trabalho será detalhado de acordo com a seguinte estrutura: no Capítulo 2 é apresentada a revisão da teoria necessária à sua compreensão; em seguida, no Capítulo 3, são mostradas as equações diferenciais e algébricas usadas na modelagem do escoamento; o Capítulo 4 traz detalhes do tratamento numérico das equações diferenciais e o desenvolvimento do código em questão; por fim, são mostradas as simulações realizadas para fluidos em diferentes regimes de escoamento, bem como, a análise dos resultados e conclusões (Capítulos 5 e 6).

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

A seguir será feita uma revisão de assuntos e conceitos pertinentes à compreensão deste trabalho. A Seção 2.1 é dedicada à descrição do processo de craqueamento catalítico em leito fluidizado (*FCC*) em *risers*, bem como a geometria desse tipo de reator e suas condições de operação. Apesar de haver, neste capítulo, um tópico (Seção 2.2) referente ao processo de fluidodinâmica computacional (*CFD*), há um capítulo (Capítulo 4) destinado exclusivamente ao detalhamento da solução do problema, incluindo a descrição dos métodos numéricos usados, já que esta parte é fundamental no desenvolvimento deste trabalho. Na Seção 2.3 é feita uma análise qualitativa de escoamentos em regimes laminar e turbulento. São apresentadas também correlações analíticas e (semi-) empíricas que são usadas para a validação de parte dos resultados obtidos com o uso do modelo numérico. Com o intuito de ajudar na escolha no tratamento numérico do problema uma classificação matemática de escoamentos é mostrada na Seção 2.4. Por fim, na Seção 2.5, é apresentada a teoria sobre modelagem de processos turbulentos.

### 2.1 O processo *FCC*

O craqueamento catalítico em leito fluidizado (*FCC*) é uma das etapas do refino do petróleo que surgiu da necessidade de se agregar maior valor comercial a seus subprodutos. É um processo bastante lucrativo, já que converte o resíduo obtido na destilação em produtos de maior valor agregado, como a gasolina e o *GLP*. Segundo Chen (2006), cerca de 45% da produção mundial de gasolina é proveniente de unidades de *FCC*.

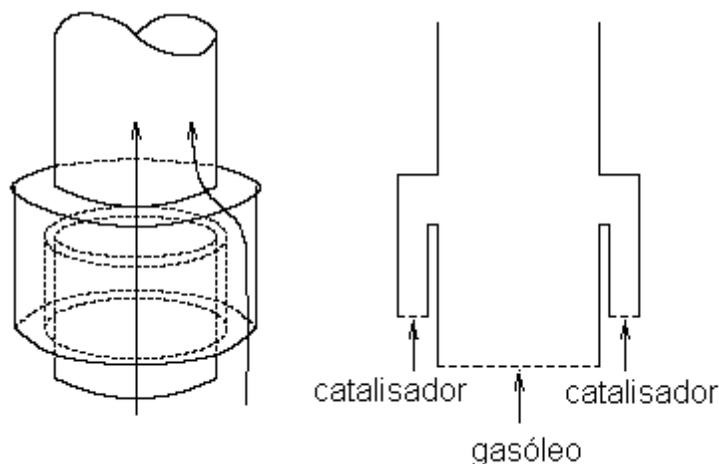


Figura 2.1: Configuração simplificada da região de entrada de um reator *riser* (ROSA, 2002).

O resíduo usado como carga nesse processo é conhecido como gasóleo e até alguns anos era composto por uma mistura de óleos leves e pesados obtidos no fracionamento a vácuo. No entanto, de acordo com Abadie (1997), a tendência mundial nos últimos anos é processar cargas as mais pesadas possíveis. Dessa forma, são usados atualmente gasóleos provenientes do processo de destilação atmosférica.

A reação de craqueamento ocorre em um reator cilíndrico vertical, conhecido como *riser*, que costuma ter diâmetro que pode variar entre  $0,2 - 2,0\text{ m}$  (ROSA, 2002) e altura de até  $40\text{ m}$ . Ele possui duas entradas distintas: uma para alimentação do gasóleo, e outra para a entrada do catalisador. Na Figura 2.1 está esquematizada uma configuração simplificada desta região, já que esse processo é feito por meio de bicos injetores de carga. O catalisador usado na reação de craqueamento é recuperado em um regenerador que fica acoplado ao *riser*.

Gotículas de gasóleo, na fase líquida, entram no reator carregadas por vapor d'água -  $0,5$  a  $3\%$  em massa da alimentação (HAN et al, 2000) - a cerca de  $300^\circ\text{C}$  (ROSA, 2002). O catalisador (proveniente do regenerador), que está a uma temperatura superior à temperatura de ebulição do gasóleo, é alimentado por outra entrada. Ao se misturarem, as duas correntes trocam calor e o gasóleo é vaporizado, e só então começa a ser craqueado.

A temperatura necessária para a vaporização e craqueamento de gasóleos provenientes da destilação a vácuo raramente ultrapassa  $550^\circ\text{C}$  (ABADIE, 1997). Já as cargas mais pesadas necessitam de temperaturas na faixa de  $680-710^\circ\text{C}$  (HAN et al, 2000).

O sistema de alimentação do *riser* é, segundo Chen (2006), de longe, o mais crítico componente a ser considerado no projeto de reatores de uma unidade *FCC*, já que a mistura entre as fases influencia muito no rendimento da reação. Como as reações de craqueamento ocorrem apenas após a vaporização do gasóleo alimentado, ele deve ser misturado ao catalisador quente, de forma que este forneça calor e o vaporize rapidamente, da maneira mais eficiente possível.

Embora a maioria das unidades modernas de *FCC* possuam um sistema de alimentação ajustado numa determinada angulação fixa, algumas delas vêm utilizando esses sistemas com angulação variável, como pode ser visto na Figura 2.2.

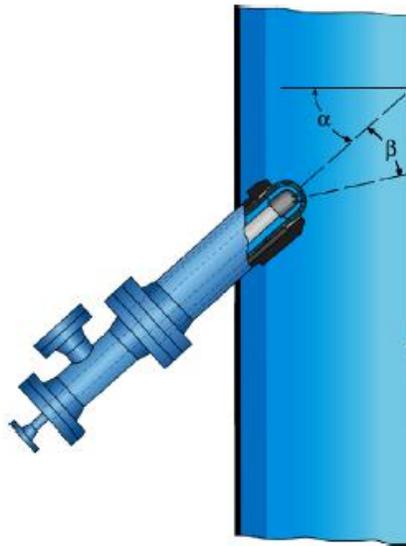


Figura 2.2: Sistema de alimentação com angulação ajustável (CHEN, 2006).

Theologos e Markatos (1993) usaram um modelo matemático tridimensional e bifásico para simular o processo de *FCC* em *risers*. Na entrada do reator estavam distribuídos ao longo de sua circunferência 8 bicos injetores de carga inclinados a  $60^\circ$ . Posteriormente esse trabalho foi continuado por Theologos et al (1997) com o estudo de entradas com 3 e 12 bicos injetores. Eles quiseram mostrar que a maneira como a alimentação é realizada influencia o desempenho do processo ao longo de todo o reator. Segundo os autores, devido à turbulência intensa e não homogeneidade do escoamento na região da entrada, balanços unidimensionais não podem ser aplicados nessa área. Eles afirmam que o uso de planos de simetria axial e radial impossibilita o estudo de escoamentos com essas características, já que anulam as componentes da velocidade normais a essas áreas.

Já Neri e Gidaspow (2000) simularam o escoamento no interior de um *riser*

usando uma modelagem transiente e bidimensional. O modelo foi usado na predição de escoamentos bifásicos, dando ênfase à geometria das regiões de entrada e saída e às características transientes das partículas. Eles também notaram que a imposição de simetria axial resulta numa distribuição errada das partículas, e que a correta representação da geometria na região de entrada é crucial na descrição da região inferior do *riser*.

## 2.2 Fluidodinâmica Computacional

A modelagem matemática de problemas que envolvem escoamentos de fluidos resulta muitas vezes em equações diferenciais parciais não lineares, que não têm solução analítica desconhecida. Na solução numérica de um problema desse tipo, cada equação que modela o fenômeno é convertida num conjunto de equações algébricas que será tanto maior quanto mais próximo se deseja que o resultado esteja do processo real. Na solução desse sistema de equações se torna necessário o auxílio computacional.

A fluidodinâmica computacional (*CFD - Computational Fluid Dynamics*) é uma das áreas da mecânica dos fluidos que usa métodos numéricos e algoritmos na solução e análise de problemas que envolvem escoamentos de fluidos. Estes estão presentes na maior parte dos processos industriais, e apesar de sua análise poder ser feita com o uso de testes experimentais, estudos que se baseiam somente nesse tipo de procedimento possuem um alto custo. Esse fator faz com que, cada vez mais, sejam usadas simulações computacionais na análise inicial desses processos.

Com o uso de técnicas de *CFD* parâmetros relevantes de um problema podem ser avaliados numericamente e alterados facilmente até que o resultado da simulação atenda às exigências do projeto. Em geral, o procedimento computacional na fluidodinâmica tem o intuito de fazer as investigações experimentais mais eficientes, a custos e tempos menores do que apenas utilizando técnicas empíricas.

Mercado et al (2001) desenvolveram em seu trabalho um modelo numérico usando técnicas de *CFD*. Seu trabalho envolveu a simulação de escoamentos turbulentos com troca térmica em tubos. As equações de fluxo que modelam esse fenômeno foram integradas numericamente usando um Método de Diferenças Finitas de quarta ordem na direção radial. Uma característica interessante dessa formulação é que para escoamentos em regime laminar o método é não-iterativo, o que torna a simulação muito mais rápida que a efetuada por pacotes convencionais de *CFD*.

Já Souza et al (2005) criaram um código numérico que tem como objetivo encontrar as condições de operação que minimizem a formação de coque durante o processo de craqueamento de frações pesadas do petróleo. Na integração das equações de conservação que modelam o sistema eles usaram o Método dos Volumes Finitos. Apesar de ter apresentado ótimos resultados quanto a hidrodinâmica do processo, esse modelo, assim como o desenvolvido por Mercado et al (2001), tem o uso limitado a escoamentos simples, já que nesses trabalhos a componente radial da velocidade foi considerada desprezível em relação à componente axial, e foi adotada simetria axial ao longo do cilindro.

## 2.3 Considerações Hidrodinâmicas

Impulsionado pela importância técnica de escoamentos em dutos, o estudo detalhado da natureza do desenvolvimento do escoamento em sua região de entrada tem se tornado fundamental (SPARROW, 1964 citado por MUNIZ, 1995).

No escoamento de um fluido que entra em um tubo circular com velocidade uniforme, as partículas que estão em contato com a superfície têm sua velocidade reduzida a zero. Essas partículas tendem a retardar o movimento das partículas da camada de fluido adjacente como resultado do atrito entre elas, e assim sucessivamente. Para que a vazão de massa através da seção transversal seja mantida constante, a velocidade do fluido na seção média do tubo é aumentada. Como resultado um gradiente de velocidade se desenvolve ao longo do tubo. O escoamento fluido passa, então, a possuir duas regiões distintas: a camada limite, onde as tensões de cisalhamento são elevadas provocando altos gradientes de velocidade, e uma região externa à camada limite, também conhecida como região de escoamento não-viscoso, onde tensões de cisalhamento são desprezíveis, não havendo variação de velocidade. O encolhimento da região de escoamento invíscido termina com a mistura da camada limite na linha do centro. Então os efeitos viscosos se estendem por toda a seção transversal e o escoamento é dito *plenamente desenvolvido*. A distância da entrada até onde essa condição é alcançada é chamada de *comprimento de entrada hidrodinâmico* ( $L_e$ ). A partir daí o perfil de velocidade não mais varia em relação ao comprimento do tubo ( $x$ ), a tensão na parede passa a ser constante e a queda de pressão decresce linearmente com  $x$ . Esses detalhes podem ser vistos na Figura 2.3.

Muniz (1995) estudou o desenvolvimento da camada limite na região de entrada de tubos de seção transversal circular para escoamentos em regime laminar. O

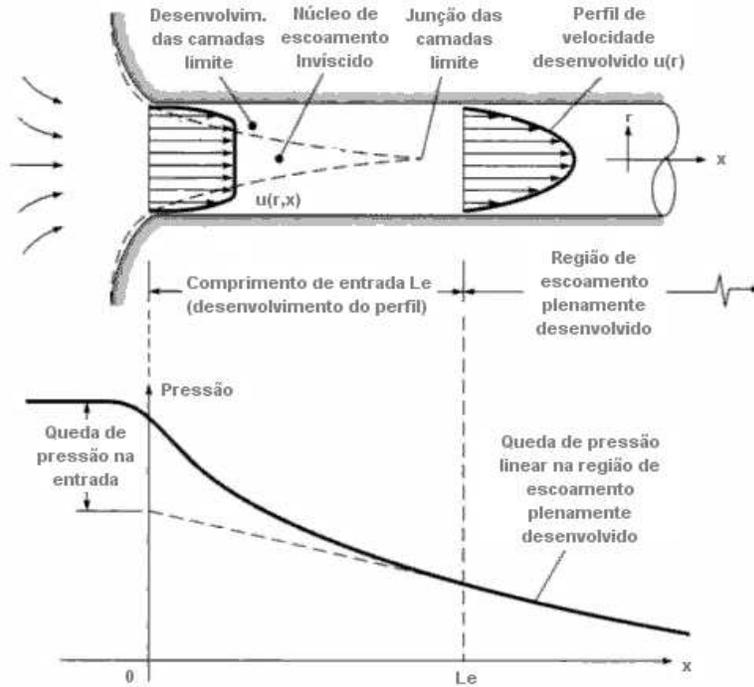


Figura 2.3: Desenvolvimento do perfil de velocidade e variação da pressão na região de entrada de um escoamento em um duto (WHITE, 2003).

tratamento numérico do problema foi feito usando o Método dos Volumes Finitos. Ele obteve valores de  $L_e$  para uma faixa de  $5 < Re < 10^3$  e os comparou com algumas correlações encontradas na literatura. O autor observou que a correlação proposta por Langhaar (1942), citado por Muniz (1995), apesar de não apresentar bons resultados para *Reynolds* muito baixos, pode servir como uma estimativa inicial para o cálculo do comprimento de entrada. Nessa correlação  $L_e$  é dado por:

$$\left(\frac{L_e}{D}\right)_{lam} = 0,0575 \cdot Re_D \quad (2.1)$$

Em escoamentos turbulentos, as camadas limites crescem rapidamente e  $L_e$  é relativamente menor do que no caso laminar. Para tubos de parede lisa, de acordo com White (2003), seu valor é de aproximadamente:

$$\left(\frac{L_e}{D}\right)_{turb} \approx 4,40 \cdot Re_D^{1/6} \quad (2.2)$$

Já Çengel e Cimbala (2007) sugerem o uso de outra correlação para o cálculo do comprimento de entrada para esse tipo de escoamento:

$$\left(\frac{L_e}{D}\right)_{turb} = 1,359 \cdot Re_D^{1/4} \quad (2.3)$$

O gradiente de pressão  $\Delta P = P_1 - P_2$ , associado ao escoamento interno simples (sem influência da gravidade e considerando apenas a componente axial da velocidade) de um fluido na região plenamente desenvolvida, a partir de uma posição axial  $x_1$  para uma posição final  $x_2$  pode ser estimado usando-se a equação de *Darcy-Weisbach* (INCROPERA e DEWITT, 2003):

$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot \bar{v}_z^2}{2 \cdot D} \cdot (x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $f$  é uma tensão de cisalhamento adimensional na parede (POTTER e WIGGERT, 2004) conhecida como fator de atrito de *Darcy*.

Para escoamentos laminares ( $Re < 2000$ ), o fator de atrito de *Darcy* é dado por:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (2.5)$$

Em escoamentos turbulentos, além de estar relacionado ao número de *Reynolds*, o fator de atrito é função da rugosidade da parede do tubo. Esses dados foram obtidos experimentalmente e podem ser encontrados graficamente no denominado *Diagrama de Moody*. Para escoamentos com  $Re > 4000$  os dados foram ajustados por Haaland (1983), citado por Johnson (1998), que chegou à seguinte correlação para esses casos:

$$f \approx \left\{ -0,782 \cdot \ln \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\epsilon}{3,7 \cdot D} \right)^{1,11} \right] \right\}^{-2} \quad (2.6)$$

em que  $\epsilon$  é a rugosidade da parede do tubo. Para tubos lisos  $\epsilon = 0$ .

Segundo Potter e Wiggert (2004) existe uma zona crítica ( $2000 < Re < 4000$ ) que acopla o escoamento turbulento ao laminar. Essa região pode apresentar um escoamento oscilante que existe alternativamente entre turbulento e laminar. Dessa forma não há uma correlação confiável para o fator de atrito para essa faixa de *Reynolds*.

Em escoamentos laminares o movimento do fluido é altamente ordenado, diferentemente de escoamentos turbulentos, onde o movimento é bastante irregular e caracterizado por flutuações de velocidade que resultam em perfis de velocidade mais planos do que no escoamento laminar (Figura 2.4).

O perfil de velocidade de um fluido incompressível escoando em regime laminar, com velocidade predominantemente axial, na região plenamente desenvolvida no

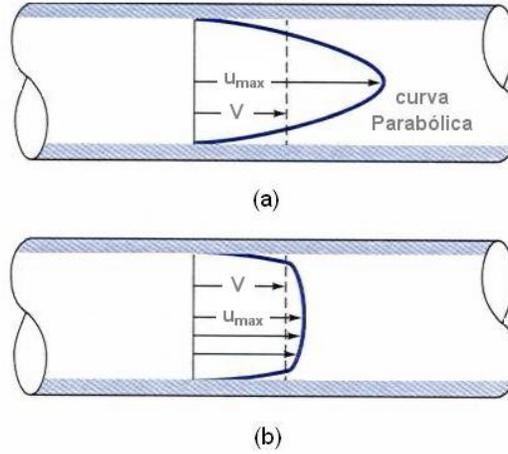


Figura 2.4: Comparação dos perfis de velocidade para escoamentos laminar (a) e turbulento (b) (WHITE, 2003)

interior de um cilindro horizontal em regime permanente (desprezando a influência da gravidade) pode ser determinado pela solução analítica da equação que modela esse fenômeno. Nesse caso a componente axial da velocidade depende apenas da posição radial ( $r$ ), como pode ser visto na Equação 2.7.

$$\frac{v_z(r)}{\bar{v}_z} = 2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

em que  $\bar{v}_z$  é a velocidade média do fluido sobre a seção transversal do tubo.

Para escoamentos turbulentos, operando nas mesmas condições descritas anteriormente, a distribuição de velocidades pode ser determinada utilizando-se uma correlação empírica denominada *lei de potência* (POTTER e WIGGERT, 2004):

$$\frac{v_z}{v_{z,max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.8)$$

em que,

$$v_{z,max} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \bar{v}_z \quad (2.9)$$

e,

$$n = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (2.10)$$

em que  $f$  é o fator de atrito de *Darcy*.

## 2.4 Classificação Matemática de Escoamentos

Problemas envolvendo escoamentos podem ser divididos em três classes: elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Essa classificação é feita com base no tipo de equação que rege o fenômeno em questão e, de acordo com Maliska (2004), apesar de ser um conceito puramente matemático, do ponto de vista numérico é muito importante, já que, conhecendo-se as características das equações é possível obter vantagens computacionais, como menor tempo de processamento e armazenamento de variáveis.

Problemas parabólicos e hiperbólicos podem ser resolvidos por um processo de marcha no tempo e/ou espaço. Nesses tipos de solução apenas condições de contorno a montante são necessárias. A diferença entre eles é que o processo de marcha parabólica se dá ao longo de uma coordenada (espacial ou temporal), enquanto que a hiperbólica se desenvolve em função das características do problema. Os termos convectivos das equações de *Navier-Stokes* são parabólicos uma vez que as variáveis envolvidas são transmitidas apenas no sentido da velocidade em uma dada direção.

Quando as informações físicas do problema são transmitidas em todas as direções coordenadas o problema é dito elíptico. Na solução desse tipo de problema duas condições de contorno são necessárias em cada sentido de uma dada coordenada. Termos difusivos e de pressão conferem características elípticas a um escoamento.

É possível um mesmo escoamento possuir mais de uma dessas características simultaneamente. As equações de conservação de quantidade de movimento transientes, considerando-se os efeitos viscosos em todas as direções coordenadas, por exemplo, são parabólicas no tempo e elípticas no espaço.

## 2.5 Turbulência

A maior parte dos escoamentos presentes em aplicações práticas se encontra sob condições turbulentas. A turbulência é um processo complexo, principalmente por ser tridimensional e instável, que tem grande influência nas características do fluxo. Ela ocorre quando as forças inerciais que atuam sobre o fluido se tornam significativas se comparadas às forças viscosas. Processos sob condições de fluxo turbulentas são industrialmente muito usados, já que, devido às flutuações aleatórias das propriedades do escoamento, aumentam significativamente a transferência de massa, momento e calor.

Alguns pesquisadores afirmam que é possível descrever escoamentos turbulentos

usando apenas as equações de *Navier-Stokes*, sem adicionar nenhuma outra informação. Essa abordagem é conhecida por *DNS* (“*Direct Numerical Simulation*”). Nesse tipo de simulação, para que se possam estudar todas as estruturas da turbulência, o domínio do problema deve ser dividido em volumes ainda menores que o tamanho dos menores vórtices. Assim, a magnitude dos recursos computacionais envolvidos nessas simulações é muito elevada, limitando sua aplicação ao estudo de escoamentos mais simples.

Similar à *DNS*, a Simulação de Grandes Escalas (“*Large Eddy Simulation*” - *LES*) é uma das abordagens aplicadas na solução numérica de escoamentos turbulentos. Essa técnica consiste na solução direta das equações nas regiões onde se encontram os maiores vórtices e na aplicação de modelo algébrico simples para a predição dos menores vórtices, o que diminui os recursos computacionais necessários para a simulação.

Apesar de fornecer detalhes da estrutura de escoamentos turbulentos, as simulações por *DNS* e *LES* requerem um refino muito grande da malha numérica e o uso de passos de tempos muito pequenos, o que as torna inviáveis ou desnecessárias em determinados casos.

Outra alternativa na solução de problemas turbulentos é a aproximação das flutuações turbulentas por um valor médio, o que dá origem a equações aproximadas conhecidas por “*Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) Equations*”. O uso das equações *RANS* reduz muito o esforço computacional se comparado às simulações *DNS* e *LES*. Apesar de fazer uso de modelos empíricos ou semi-empíricos para descrever o comportamento e os efeitos da tensão de *Reynolds*, essa abordagem fornece informações de como a turbulência afeta o escoamento médio, o que permite a identificação de mecanismos do transporte turbulento. Por isso é geralmente adotada na solução de problemas de engenharia.

Em um escoamento turbulento as três componentes do vetor velocidade são diferentes de zero. Na abordagem de média de *Reynolds* elas podem ser representadas como a soma de um valor médio no tempo e de uma flutuação devido a turbulência (Figura 2.5):

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad v_r = \bar{v}_r + v'_r \quad v_\alpha = \bar{v}_\alpha + v'_\alpha \quad (2.11)$$

Esse também é o caso de outras propriedades do escoamento, como a pressão ( $P = \bar{P} + P'$ ) e a temperatura ( $T = \bar{T} + T'$ ). O valor médio de uma propriedade  $\phi$  em determinado local é determinado pela média ao longo de um intervalo de tempo que seja suficientemente grande para que a média de tempo se equipare a uma constante

(ÇENGEL e CIMBALA, 2007):

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi dt \quad (2.12)$$

Assim, a flutuação turbulenta dessa propriedade é, em média, igual a zero ( $\overline{\phi'} = 0$ ).

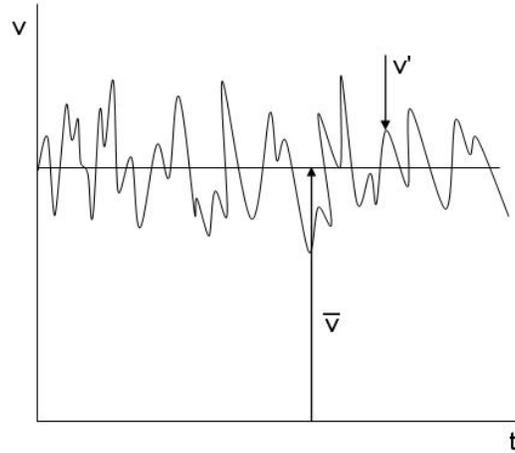


Figura 2.5: Representação de uma componente da velocidade num escoamento turbulento usando o conceito de média de *Reynolds*.

No escoamento turbulento de um fluido, num tubo horizontal, na direção axial, que tem  $\bar{v}_r$  e  $\bar{v}_\alpha$  iguais a zero, as flutuações destas componentes da velocidade fazem com que partículas do fluido passem de uma camada de fluido para outra camada adjacente, que se move a uma velocidade mais alta, causando um efeito retardador sobre ela. A componente da força resultante do movimento de uma partícula do fluido que passa por uma área  $dA$  com velocidade  $v'_r$  para a camada vizinha a ela (Figura 2.6) é dada por (POTTER e WIGGERT, 2004):

$$dF = -\rho \cdot v'_r \cdot dA \cdot v'_z \quad (2.13)$$

em que  $v'_z$  é a variação negativa da componente axial da velocidade devido à troca de quantidade de movimento e  $(\rho \cdot v'_r \cdot dA)$  é o fluxo de massa através da área.

Assim, a força de cisalhamento por unidade de área, devido ao movimento dos turbilhões das partículas de fluido, é dada por:

$$\frac{dF}{dA} = \rho \cdot v'_z \cdot v'_r \quad (2.14)$$

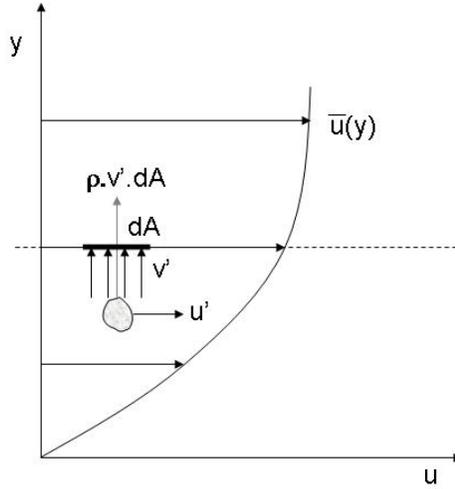


Figura 2.6: Partícula de fluido se movendo na direção ascendente como resultado da flutuação de velocidade nessa direção (ÇENGEL e CIMBALA, 2007).

em que  $(v'_z \cdot v'_r)$  é, na média, uma quantidade negativa, já que um  $v'_r$  positivo gera um  $v'_z$  negativo.

A média temporal dessa grandeza pode ser interpretada como sendo uma *tensão de cisalhamento turbulenta*, que é na verdade uma troca de quantidade de movimento, mas como tem o mesmo efeito de uma tensão, pode ser assim chamada (POTTER e WIGGERT, 2004). Assim:

$$\tau_{turb} = -\rho \cdot \overline{v'_z v'_r} \quad (2.15)$$

em que  $-\overline{v'_z v'_r}$  é conhecida como *tensão de Reynolds*.

Pode-se observar, nesse caso, que tanto  $\overline{v'_z v'_\alpha}$  como  $\overline{v'_r v'_\alpha}$  teriam seu valor igual a zero, já que a oscilação  $v'_\alpha$  não moveria partículas para uma camada de fluido com velocidade mais alta ou mais baixa.

Estudos mostram que a tensão de cisalhamento em escoamentos turbulentos, devido às flutuações de suas propriedades, é muito maior que em escoamentos laminares. Uma maneira de definir a tensão de cisalhamento total que age nesse tipo de escoamento é através da soma de uma componente laminar e outra turbulenta:

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} \quad (2.16)$$

em que a componente laminar (viscosa), que contribui para o atrito entre as camadas na direção do escoamento, é dada por  $\tau_{lam} = -\mu \, d\bar{v}/dr$ , e a componente turbulenta,

que representa o atrito entre as partículas do fluido, está relacionada às componentes de flutuação da velocidade, como é mostrado na Equação 2.15. Os valores relativos dessas componentes em função da distância relativa da parede podem ser vistos na Figura 2.7.

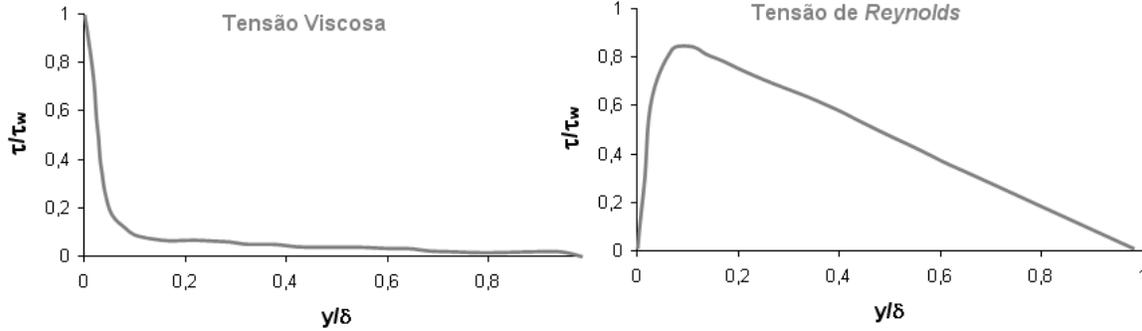


Figura 2.7: Tensão de cisalhamento viscosa (laminar) e tensão de *Reynolds* (turbulenta) (Pope, 2000).

Para modelar a *tensão de Reynolds* em termos dos gradientes de velocidade média diversas formulações semi-empíricas, conhecidas também como *Modelos de Turbulência*, foram desenvolvidas ao longo do tempo. A primeira tentativa de modelar fenômenos turbulentos foi proposta por Boussinesq, em 1877. Ele sugeriu que a tensão de cisalhamento turbulenta fosse modelada de forma análoga à tensão laminar, ou seja:

$$\tau_{turb} = -\rho \cdot \overline{v'_z v'_r} = \mu_t \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dy} \quad (2.17)$$

em que  $\mu_t$  é conhecida como *viscosidade turbulenta*. Diferentemente da viscosidade laminar, a viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento e não do fluido.

Dessa maneira, retomando a Equação 2.16, a tensão total sobre o fluido pode ser representada por:

$$\tau = (\mu + \mu_t) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2.18)$$

Foi possível, a partir daí, o estudo do escoamento turbulento como sendo laminar, porém modificando a viscosidade molecular a partir do conceito de viscosidade turbulenta.

Como já observado, no escoamento turbulento de um fluido, no interior de um cilindro, em que sua direção principal é a axial ( $\bar{v}_r = 0$ ;  $\bar{v}_\alpha = 0$ ), por causa das

flutuações turbulentas, partículas de fluido passam de uma camada para outra. O movimento do fluido na direção axial juntamente com esse movimento de mudança de camada na direção radial, faz com que vórtices sejam formados. Baseado no tamanho médio desses vórtices foi que, no início do século 19, Prandtl desenvolveu o conceito de *comprimento de mistura*  $l_m$ , e chegou na seguinte expressão para a estimativa da viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right| \quad (2.19)$$

O comprimento de mistura  $l_m$  não é uma constante. Ele pode ser função das características do escoamento e da distância que a porção de fluido se encontra da parede.

Como pode ser visto na Figura 2.7, perto da parede a tensão de *Reynolds* é zero e, conseqüentemente, a tensão total nesse local é igual apenas à contribuição viscosa (laminar). Dessa forma, nessa região, a viscosidade molecular e a componente viscosa da tensão são grandezas importantes. Para analisar o escoamento próximo à parede foram definidos parâmetros como a velocidade de atrito  $v_\tau$  e a distância adimensional da parede  $y^+$  em escalas viscosas:

$$v_\tau = \left( \frac{\tau_\omega}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

$$y^+ = \frac{\rho \cdot y \cdot v_\tau}{\mu} \quad (2.21)$$

em que  $\tau_\omega$  é a tensão de cisalhamento na parede, que pode ser definida em termos do fator de atrito de *Darcy*:

$$\tau_\omega = \frac{f \cdot \rho \cdot \bar{v}}{8} \quad (2.22)$$

Diferentes regiões, ou camadas, na região próxima à parede, podem ser definidas com base na magnitude de  $y^+$ . Por exemplo, na região viscosa de parede ( $y^+ < 50$ ) a viscosidade molecular tem efeito significativo sobre a tensão de cisalhamento. Esse efeito pode ser desprezado na região externa, em que  $y^+ > 50$ . Já na subcamada viscosa ( $y^+ < 5$ ), a tensão de Reynolds pode ser negligenciada, já que é muito pequena quando comparada à tensão viscosa (Figura 2.8). É importante observar que com o aumento do número de Reynolds há o encolhimento da região viscosa, já que as forças inerciais são cada vez maiores.

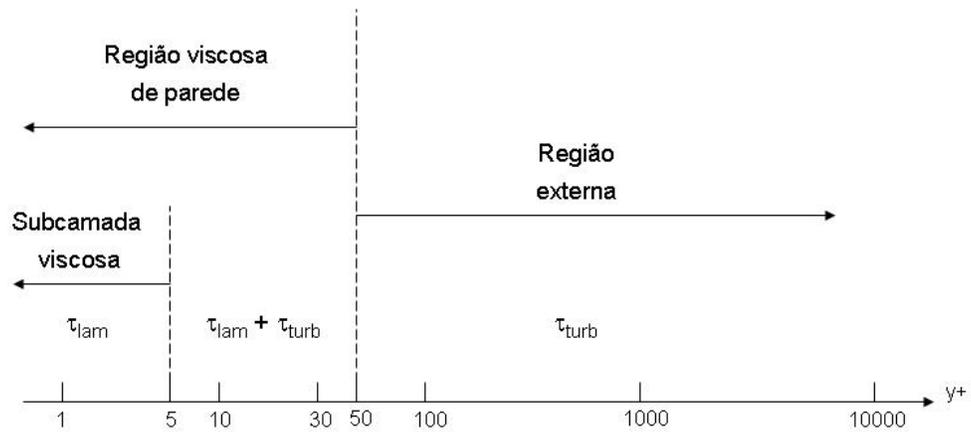


Figura 2.8: Regiões do escoamento em termos de  $y^+$ .

# Capítulo 3

## Modelagem Matemática

A modelagem matemática do problema foi feita usando-se as Equações de *Navier-Stokes*. A solução dessas equações fornece as variáveis necessárias para o estudo de escoamentos de fluidos. Como auxiliares no estudo de escoamentos turbulentos foram adotados modelos algébricos de turbulência de acordo com a influência das tensões viscosa e de *Reynolds* em determinadas regiões do escoamento.

### 3.1 Hipóteses do Modelo

As hipóteses consideradas na modelagem do fenômeno em questão foram:

- Fluido incompressível. Segundo Potter e Wiggert (2004), escoamentos de gases a baixas velocidades podem ser considerados incompressíveis quando o *Número de Mach*, que é definido pela divisão da velocidade do fluido pela velocidade do som nesse meio, for menor do que 0,3;
- Fluido *Newtoniano*, ou seja, a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação do fluido;
- Escoamento monofásico;
- Sistema isotérmico;
- A parede do cilindro é lisa (rugosidade igual a zero);
- O escoamento é transiente.

## 3.2 Equações de *Navier-Stokes*

Conhecidas como Equações de *Navier-Stokes*, a equação de conservação de massa e as três equações de conservação de quantidade de movimento compõe o sistema de equações fundamentais no cálculo das quatro incógnitas (as três componentes do vetor velocidade e a pressão) que descrevem o escoamento de fluidos. Elas são equações diferenciais parciais derivadas dos princípios de conservação de massa e quantidade de movimento.

A equação de conservação de massa, também conhecida como equação da Continuidade, escrita para um sistema genérico de coordenadas espaciais é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

Para fluido incompressível ( $\rho = \text{constante}$ ) e sistema de coordenadas cilíndricas, a Equação 3.1 pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.2)$$

em que  $v_z$ ,  $v_r$  e  $v_\alpha$  são as componentes do vetor velocidade nas direções axial, radial e angular, respectivamente.

As equações de conservação de quantidade de movimento, em cada uma das  $i$  coordenadas do espaço, podem ser representadas por:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (v_i \vec{v}) \right] = -\nabla P - \nabla \cdot \tau + \rho f_i \quad (3.3)$$

em que os termos do lado esquerdo da igualdade representam a variação da velocidade com o tempo dentro do volume de controle, e a troca de momento devido à convecção; e os termos do lado direito da igualdade representam o gradiente de pressão, o atrito viscoso e as demais forças externas que agem sobre o fluido, como o campo gravitacional, por exemplo.

Escrevendo a Equação 3.3 em coordenadas cilíndricas em cada uma das direções espaciais, considerando cilindro vertical, tem-se:

**Direção axial -  $z$ :**

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot v_r \cdot v_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (v_\alpha \cdot v_z)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (v_z \cdot v_z)}{\partial z} \right] = - \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] + \rho \cdot \vec{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.4)$$

**Direção radial -  $r$ :**

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot v_r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(v_\alpha \cdot v_r)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(v_z \cdot v_r)}{\partial z} - \frac{v_\alpha \cdot v_\alpha}{r} \right] =$$

$$- \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial \alpha} - \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.5)$$

**Direção angular -  $\alpha$ :**

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot v_r \cdot v_\alpha)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(v_\alpha \cdot v_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(v_z \cdot v_\alpha)}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\alpha}{r} \right] =$$

$$- \left[ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot \tau_{r\alpha})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{z\alpha}}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha} \quad (3.6)$$

em que  $P$  é a pressão,  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade,  $\mu$  é a viscosidade do fluido, e,  $\sigma_{ij}$  e  $\tau_{ij}$  são as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente, que agem sobre o fluido. Estas são dadas, para fluido newtoniano e em coordenadas cilíndricas, por:

$$\sigma_{rr} = -2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (3.7)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -2 \cdot \mu \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_r}{r} \right] \quad (3.8)$$

$$\sigma_{zz} = -2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$\tau_{r\alpha} = \tau_{\alpha r} = -\mu \cdot \left[ r \cdot \frac{\partial(v_\alpha/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} \right] \quad (3.10)$$

$$\tau_{\alpha z} = \tau_{z\alpha} = -\mu \cdot \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \alpha} \right] \quad (3.11)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \cdot \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (3.12)$$

### 3.3 Modelo de Turbulência

Como mostrado na Seção 2.5 do Capítulo 2, a viscosidade turbulenta foi calculada a partir da teoria de comprimento de mistura de *Prandtl*, que assume que,

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \quad (3.13)$$

O comprimento de mistura  $l_m$  foi calculado de acordo com as regiões definidas pela influência das tensões viscosa e de *Reynolds* em determinadas regiões do escoamento. Como pode ser visto na Figura 2.8 essas regiões são delimitadas em relação à distância adimensional da parede  $y^+$ . Foram usados, então, os seguintes modelos de turbulência:

- Na região externa ( $y^+ > 50$ ) foi usada a expressão proposta por *Nikuradse* (Rodi, 1984):

$$l_m = R \left[ 0,14 - 0,08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0,06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right] \quad (3.14)$$

- Na região viscosa intermediária ( $5 < y^+ < 50$ ), foi usado o modelo proposto por *van Driest* (Rodi, 1984):

$$l_m = k \cdot y \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{y^+}{A^+} \right) \right] \quad (3.15)$$

em que  $k$  e  $A^+$  são constantes e tem seu valor igual a, respectivamente, 0,41 e 26.

- Na subcamada viscosa ( $0 < y^+ < 5$ ) ou no ponto mais próximo da parede, em que o gradiente de velocidade é muito elevado, foi usada uma estimativa feita por *Prandtl* e *Kármán* (WHITE, 1991):

$$l_m = y^2 \quad (3.16)$$

A viscosidade efetiva foi, então, calculada por:

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_t \quad (3.17)$$

### 3.4 Condições de Contorno

A especificação das condições de contorno de um problema é necessária para que este possa ser resolvido. Existem dois tipos de condição de contorno:

1. **Dirichlet**: em que o valor da variável dependente é conhecido na fronteira;
2. **Neumann**: em que o gradiente dessa variável, normal à superfície, é conhecido.

Em problemas elípticos que envolvem escoamentos internos e incompressíveis podem ser especificadas as seguintes condições físicas de contorno:

- **Na Entrada:** o campo de velocidade é conhecido e o gradiente de pressão é zero;

$$v|_{z=0} = v_{entrada} \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.19)$$

- **Na Saída:** o campo de pressão é conhecido e o gradiente de velocidade é igual a zero;

$$P|_{z=L} = P_{saida} \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (3.21)$$

- **Na parede (sem deslizamento):** a velocidade do fluido é igual à velocidade da parede, ou seja, o fluido está parado. Como não há fluxo através da parede, o gradiente de pressão é nulo;

$$v|_{r=R} = 0 \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.23)$$

# Capítulo 4

## Desenvolvimento Numérico

Como mostrado no capítulo anterior, na modelagem matemática do problema em questão foram usadas as Equações de *Navier-Stokes*, que por serem equações diferenciais parciais não lineares têm solução analítica apenas para escoamentos simples operando em condições ideais. Assim, para tratar de problemas que envolvem escoamentos reais é necessário o emprego de métodos numéricos. O método numérico tem o papel de substituir a equação diferencial por um conjunto de equações algébricas que são aplicadas a um número discreto de locais no espaço e no tempo. À solução dessas equações está embutido um erro que é tanto menor quanto mais discretizado estiver o domínio do problema.

Todo o desenvolvimento numérico realizado neste trabalho, incluindo a descrição do método utilizado, sua aplicação, características, e a esquematização do algoritmo de solução, é apresentado nos tópicos a seguir.

### 4.1 Método Numérico

O ponto de partida na aplicação de qualquer método numérico é a determinação do modelo matemático que rege o fenômeno em questão, ou seja, das equações em sua forma diferencial e das condições de contorno do sistema. Deve-se então escolher um método que aproxime as equações diferenciais parciais por um sistema de equações algébricas aplicadas a um conjunto discreto de locais no espaço e no tempo. Existem diversos métodos com essa finalidade, mas os mais usados são *Diferenças Finitas*, *Volumes Finitos* e *Elementos Finitos*. Cada um desses, aplicados na resolução de um mesmo problema, acarretará no mesmo resultado desde que a malha de aplicação das

equações algébricas seja bastante refinada.

Neste trabalho foi usado o *Método dos Volumes Finitos* na discretização das equações diferenciais. Nessa abordagem o domínio do problema é subdividido em uma série de volumes de controle finitos sobre os quais devem ser aplicadas as equações aproximadas de forma que estas satisfaçam a conservação da propriedade em questão em cada um desses volumes. Essas equações podem ser obtidas, no *Método dos Volumes Finitos*, de duas maneiras distintas. Uma delas é a realização do balanço em questão sobre cada volume. A outra é integrar, no espaço e no tempo, a equação em sua forma diferencial sobre o volume elementar. Apesar dos dois procedimentos serem equivalentes, o mais indicado deles é o segundo, já que a dedução de equações diferenciais que representam determinados fenômenos pode não ser simples.

## 4.2 Malha de Discretização

A localização discreta no domínio sobre as quais as variáveis serão calculadas é definida por uma malha de discretização, que é essencialmente uma representação numérica da geometria do domínio como um número finito de subdomínios.

Foram usadas, neste trabalho, malhas estruturadas. Esse tipo de malha permite que os volumes em uma dada direção sejam numerados consecutivamente. Assim, a posição de qualquer ponto da malha pode ser identificada por índices  $(i, j, k)$ .

Para escoamentos turbulentos com altos valores de *Reynolds*, foram usadas malhas não uniformes na direção radial que expandem a partir da parede num fator fixo (Figura 4.1). Nesses casos seria computacionalmente dispendioso usar uma malha uniforme, já que esta deveria ser fina o bastante para capturar com precisão as características do fluxo próximo às paredes.

Em problemas tridimensionais cada volume discreto faz fronteira com outros seis volumes. Assim, na malha aplicada a um cilindro, um dado volume elementar  $P$  tem como vizinhos seus volumes a leste ( $E$ ), a oeste ( $W$ ), a norte ( $N$ ), a sul ( $S$ ), a jusante ( $F$ ) e a montante ( $B$ ), como pode ser visto nas Figuras 4.2 e 4.3. As letras minúsculas  $e, w, n, s, f, b$  representam as faces do volume  $P$ .

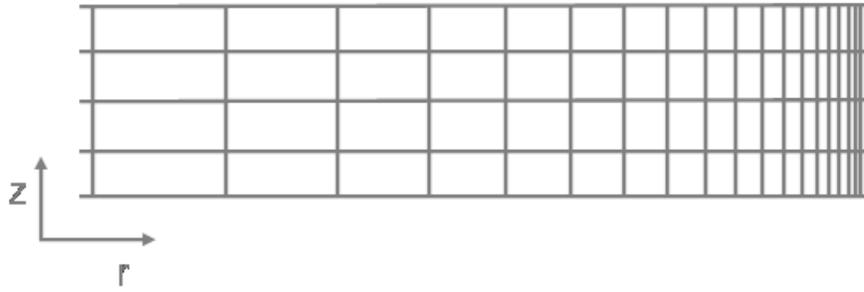


Figura 4.1: Malha não uniforme na direção radial.

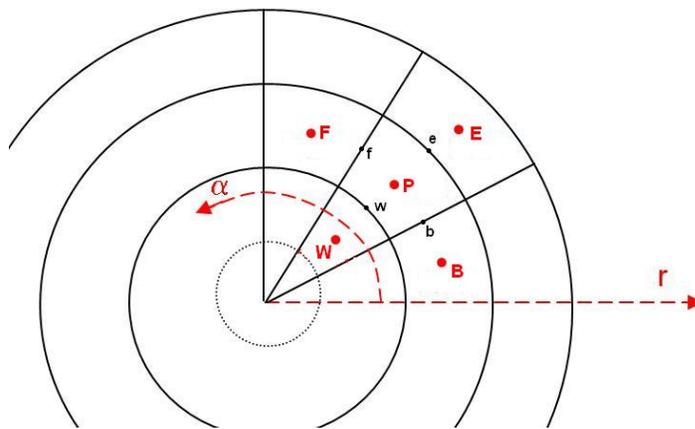


Figura 4.2: Esquematização da malha de discretização - plano  $r\alpha$ .

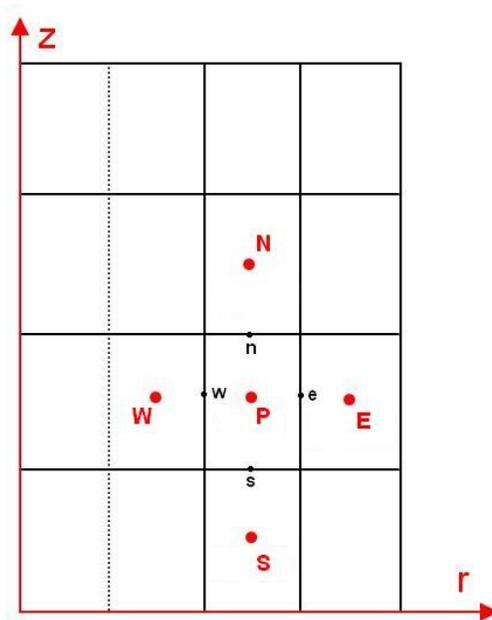


Figura 4.3: Esquematização da malha de discretização - plano  $zr$ .

### 4.3 Aproximação por Integral

Para um problema em três dimensões, o fluxo total que atravessa cada volume elementar deve ser igual a soma do fluxo que atravessa cada uma das seis faces do volume. Esse procedimento é equivalente ao processo de integração da equação diferencial sobre esse volume. Num escoamento em regime transiente ou quando se deseja usar um método de marcha pseudo-temporal, a equação deve também ser integrada no tempo.

Pode-se perceber que três classes de termos, em sua forma diferencial, se repetem nas equações de *Navier-Stokes* (Seção 3.2). A seguir será apresentada a integração desses termos, para a variável genérica  $\phi$ , de forma a obter sua localização discreta no tempo e no espaço.

#### **\* Termo transiente:**

Ao integrar a função  $f(t) = \partial\phi/\partial t$  no tempo a variável  $\phi$  é localizada temporalmente. Como essa função não é dependente de qualquer posição espacial, ao ser integrada no espaço,  $\phi$  é avaliada no centro ( $P$ ) do volume de controle, como pode ser visto a seguir.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot dV \cdot dt = \int_V (\phi - \phi^0) \cdot dV = (\phi|_P - \phi^0|_P) \cdot \Delta r \cdot \Delta z \cdot \Delta\alpha \cdot r|_P \quad (4.1)$$

em que o índice 0 indica que  $\phi$  está sendo avaliada no tempo imediatamente anterior ao atual. As variáveis no tempo atual são representadas sem qualquer índice. O termo  $(\Delta r \cdot \Delta z \cdot \Delta\alpha \cdot r|_P)$  representa o cálculo aproximado do volume  $dV$ .

#### **\* Termo convectivo:**

Um exemplo de um termo convectivo que é função da posição axial  $z$  foi representado pela função  $f(z) = \partial(\phi \cdot v_z)/\partial z$ . Essa função foi integrada de uma posição  $s$  (face sul do volume) até  $n$  (face norte do volume), e em seguida integrada no tempo. Por essa função não ser dependente do tempo, a variável  $\phi$  pode estar localizada em qualquer intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Essa escolha será feita na próxima seção deste capítulo, e aqui a variável fica avaliada num tempo relativo  $\theta$  que pode variar desde 0 (tempo anterior) até 1 (tempo atual). Essas informações estão mostradas na igualdade a seguir:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial(\phi \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dV \cdot dt &= \left[ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(\phi \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dz \cdot dt \right] \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P = \\
&\left\{ \int_t^{t+\Delta t} [(\phi \cdot v_z)|_n - (\phi \cdot v_z)|_s] dt \right\} \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P = \\
&[(\phi \cdot v_z)|_n^\theta - (\phi \cdot v_z)|_s^\theta] \cdot \Delta t \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P \quad (4.2)
\end{aligned}$$

O termo  $(\Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P)$  representa a área normal ao fluxo convectivo.

**\* Termo difusivo:**

O mesmo procedimento realizado na integração do termo convectivo é usado na integração dos termos difusivos, aqui exemplificados pela função  $f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$ :

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV dt &= \left[ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot dz \cdot dt \right] \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P = \\
&\left\{ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_n - \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_s \right] dt \right\} \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P = \\
&\left[ \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_n^\theta - \left( \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_s^\theta \right] \cdot \Delta t \cdot \Delta r \cdot \Delta \alpha \cdot r|_P \quad (4.3)
\end{aligned}$$

## 4.4 Funções de Interpolação

A integração das equações de conservação no volume de controle gerou termos com índices que representam a localização espacial e temporal das variáveis.

Para facilitar o controle dos índices das variáveis na implementação computacional foi usado, neste trabalho, o arranjo espacial co-localizado das variáveis, ou seja, tanto as grandezas vetoriais quanto as escalares devem estar localizadas no centro dos volumes de controle. Segundo Maliska (2004) o uso desse tipo de arranjo pode acarretar em problemas de estabilidade que podem surgir devido ao acoplamento entre a pressão e a velocidade. Como neste trabalho as equações do modelo foram resolvidas simultaneamente (como será apresentado na Seção 4.5), esse problema é descartado. Deve-se lembrar também que a integração dos termos convectivos e difusivos gerou variáveis avaliadas num tempo relativo  $\theta$ , que deve ser aqui determinado.

Assim, para que as variáveis estejam convenientemente localizadas no tempo e no espaço faz-se necessário o uso de funções de interpolação.

Na interpolação dos termos convectivos optou-se pelo uso do esquema “*upwind*”. Por trabalhar em função da direção do fluxo convectivo esse esquema de interpolação garante a positividade dos coeficientes das equações algébricas resultantes da aplicação procedimento de aproximação numérica. Essa escolha foi feita já que, de acordo com a maioria dos autores, coeficientes negativos podem conferir à solução do problema dificuldades tais como divergência e oscilações numéricas. Segundo Ferziger e Perić (1999), coeficientes positivos são importantes porque um aumento no valor da variável em um ponto da malha deve levar a um aumento (e não a diminuição) no valor da variável nos volumes vizinhos, desde que as outras condições permaneçam constantes. Existem outros esquemas de interpolação que conferem essa mesma característica aos coeficientes, porém, de acordo com Marchi (1993), o “*upwind*” além de dar à solução boa estabilidade, é o esquema de mais simples implementação. A aplicação da função “*upwind*” pode ser vista a seguir:

$$(\phi \cdot v)|_n = [v|_n, 0] \cdot \phi|_P - [-v|_n, 0] \cdot \phi|_N \quad (4.4)$$

em que, “[ $v|_n, 0$ ]” representa “o maior valor entre  $v|_n$  e 0”. Então, se  $v|_n > 0$  a igualdade dada pela Equação 4.4 se resume a:

$$(\phi \cdot v)|_n = v|_n \cdot \phi|_P \quad (4.5)$$

Caso contrário, se  $v|_n < 0$ :

$$(\phi \cdot v)|_n = v|_n \cdot \phi|_N \quad (4.6)$$

Ou seja, se a velocidade na face  $n$  for positiva, a variável  $\phi$  é avaliada no centro do próprio volume de controle, e, se for negativa,  $\phi$  estará localizada no centro do volume a norte do volume em que se está trabalhando.

Já aos termos difusivos e às variáveis que se encontram nas faces dos volumes de controle, foi aplicada a função de interpolação “diferenças centrais”. Exemplos do uso dessa função estão apresentados genericamente para a variável  $\phi$ , pelas Equações 4.7 e 4.8:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_n = \frac{\phi|_N - \phi|_P}{\Delta z} \quad (4.7)$$

$$\phi|_n = \frac{\phi|_N + \phi|_P}{2} \quad (4.8)$$

Como já observado, ao integrar uma dada função no tempo deve-se decidir em que posição temporal ela será avaliada. Uma maneira conveniente de representar uma variável  $\phi$  num tempo relativo  $\theta$  é dada pela função de interpolação:

$$\phi^\theta = \theta \cdot \phi + (1 - \theta) \cdot \phi^0 \quad (4.9)$$

em que  $0 < \theta < 1$ .

Neste trabalho foi usado  $\theta = 1$ . Para esse valor de  $\theta$ ,  $\phi^\theta = \phi$ , ou seja,  $\phi$  pode ser interpretada como se estivesse sendo tomada sempre no tempo atual. Essa formulação é conhecida como *totalmente implícita*, e implica que o cálculo da variável  $\phi$  no centro do volume  $P$  é feito com base no seu valor em  $P$  no tempo anterior e em seu valor nos volumes vizinhos no tempo atual, como está esquematizado na Figura 4.4 para um problema unidimensional.

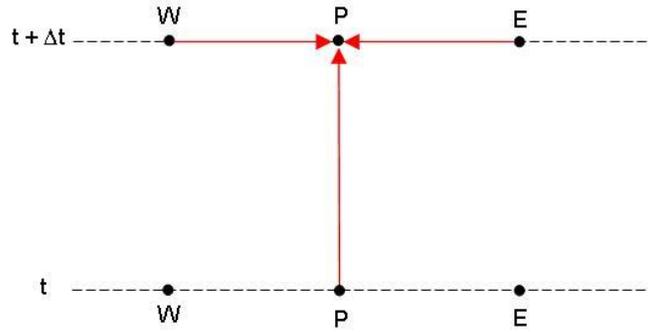


Figura 4.4: Conexões espacial e temporal da variável  $\phi$  na formulação totalmente implícita.

## 4.5 Tratamento Pressão-Velocidade

Uma das maiores dificuldades em se resolver numericamente as equações de *Navier-Stokes* está ligada à determinação de um campo de pressão que satisfaça a Equação da Continuidade para escoamentos incompressíveis. Essa dificuldade decorre do fato de que diferentemente das equações de momento, que possuem a função de determinar suas respectivas componentes da velocidade, a equação da continuidade não possui uma variável dominante. Assim, resta a ela o papel de determinar o campo de

pressão do sistema. Por não possuir termos de pressão, essa função se torna impossível se nenhum método for usado na modificação desse sistema de equações. Existem basicamente duas abordagens para resolver esse problema: o método acoplado e o segregado de solução das equações.

No método segregado não há uma equação explícita para a pressão. As equações de momento são resolvidas para um campo de pressão estimado. A pressão é então corrigida, e as velocidades recalculadas. Esse processo iterativo é feito até que o campo de pressão satisfaça a Equação da Continuidade.

Já o método acoplado trabalha com a criação de uma equação para a pressão a partir da Equação da Continuidade. A idéia básica nessa abordagem é fazer com que a pressão apareça também nessa equação, mas mantendo a presença das velocidades. Dessa forma as três equações de conservação de momento e a equação de conservação de massa passam a possuir termos de pressão e velocidade e são resolvidas simultaneamente para determinação de todas as incógnitas.

Hanby et al (1996) desenvolveram um trabalho em que compararam esses dois métodos. Eles observaram que método de solução acoplado convergiu em muito menos iterações que o método segregado (em geral em pelo menos uma ordem de magnitude). Porém o desempenho desse método foi pior quando o número de *Reynolds* foi aumentado.

A principal vantagem do uso do método segregado é que, quando comparado com o método acoplado, ele possui menor custo de armazenamento computacional e menor tempo de processamento (DENG e TANG, 2002). Porém, esse tipo de solução é conhecido por dificultar a convergência em escoamentos com grande presença de vórtices, onde o acoplamento entre as equações de momento radial e angular é forte (HANBY et al, 1996).

No atual trabalho foi empregada a solução acoplada da pressão e da velocidade. A mudança da equação da Continuidade foi feita partindo-se da discretização das equações de Navier-Stokes. Para cada uma das equações de conservação de momento a respectiva componente da velocidade avaliada na face até a qual a equação foi integrada (limite superior da integração) é isolada. Essas equações são então substituídas na equação de conservação de massa. Esse procedimento está ilustrado, a seguir, para um problema unidimensional:

A equação de conservação de quantidade de movimento arranjada em função

da velocidade na fronteira  $e$  do volume  $P$  é função das seguintes variáveis:

$$u_e = u_e(u_P, u_E, P_P, P_E) \quad (4.10)$$

E a equação de conservação de massa, para esse caso, pode ser convenientemente arranjada da seguinte maneira:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w = \rho \cdot \left[ a_e \cdot u_e - a_w \cdot \left( \frac{u_W + u_P}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.11)$$

Substituindo  $u_e$  da Equação 4.10 na Equação 4.11 chega-se a uma equação que depende das variáveis:

$$f = f(u_P, u_E, u_W, P_P, P_E) \quad (4.12)$$

em que  $f$  representa a equação da Continuidade modificada, que antes era função apenas da velocidade e agora também é função da pressão.

A vantagem em se usar a solução acoplada e direta do sistema de equações algébricas é que uma única matriz envolvendo todos os coeficientes é criada e todas as incógnitas são resolvidas simultaneamente. Assim, o problema do acoplamento entre as variáveis desaparece.

## 4.6 Aplicação das Condições de Contorno

Como foi visto até aqui, após dividir o domínio do problema em volumes elementares, integrar as equações que modelam o fenômeno sobre cada um desses volumes e aplicar as funções de interpolação, chega-se a um conjunto de equações algébricas. Porém estas equações são válidas apenas para os volumes internos do domínio. Para os volumes de fronteira o procedimento de obtenção das equações algébricas é similar ao realizado para os volumes internos, com a diferença de que nesses volumes devem ser aplicadas as condições de contorno, como é mostrado a seguir.

1. Para valor fixo e conhecido da variável na fronteira ( $\phi|_{front}$ ):
  - Na integração dos termos convectivos, em que o valor da variável deve ser avaliado na fronteira do volume, foi substituído ali o valor de  $\phi|_{front}$ , sem aplicação das funções de interpolação.

- Nos termos em que, após a integração, chegou-se ao gradiente da variável na fronteira do volume de controle, a função de interpolação Diferenças Finitas foi aplicada a meio volume. Ou seja,

$$\nabla \phi|_{front} = \frac{\phi|_{front} - \phi|_P}{d} \quad (4.13)$$

em que  $d$  é a distância da fronteira até o centro do volume.

2. Para valor fixo e conhecido do gradiente da variável na fronteira ( $\nabla \phi|_{front}$ ):

- Quando, após a integração, o valor da variável deve ser avaliado na fronteira, esta foi interpolada da seguinte maneira:

$$\phi|_{front} = \phi|_P + d \cdot \nabla \phi|_{front} \quad (4.14)$$

em que  $d$  é a distância da fronteira até o centro do volume.

- No caso em que o valor do gradiente da variável é avaliado na fronteira, seu valor foi simplesmente substituído ali.

A modelagem do problema foi efetuada tridimensionalmente de modo a garantir que simulações de escoamentos mais complexos, com perfis de velocidade de entrada variáveis, pudessem ser feitas. Dessa forma, não foi adotado nenhum plano de simetria e o valor da variável no volume a oeste dos volumes centrais foi tomado como sendo igual ao seu valor no volume diametralmente oposto, como está esquematizado na Figura 4.5.

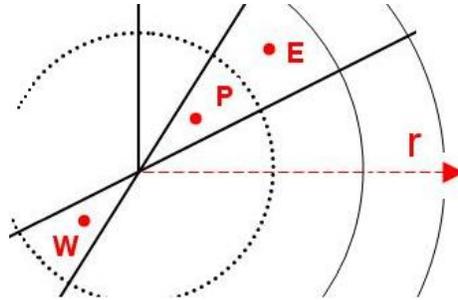


Figura 4.5: Esquemática do volume a oeste ( $W$ ) de um volume central ( $P$ ).

## 4.7 O Sistema de Equações Algébricas

Após integrar as equações que regem o fenômeno e aplicar as funções de interpolação convenientes para cada caso, chega-se a um sistema de equações algébricas. Cada uma dessas equações relaciona o valor da variável no centro do volume com seu

valor no centro dos volumes vizinhos e com as outras variáveis presentes no sistema, e têm o seguinte aspecto:

$$A_{\phi P} \cdot \phi_P = A_{\phi N} \cdot \phi_N + A_{\phi S} \cdot \phi_S + A_{\phi E} \cdot \phi_E + A_{\phi W} \cdot \phi_W + A_{\phi F} \cdot \phi_F + A_{\phi B} \cdot \phi_B + \sum_j \sum_i A_{\varphi j,i} \cdot \varphi_{j,i} + B_\phi \quad (4.15)$$

em que  $\phi$  é a variável principal,  $A$  são os termos que multiplicam as variáveis, o índice  $j$  indica as demais variáveis  $\varphi$  presentes,  $i$  são os volumes em que estas últimas são calculadas e  $B$  inclui os demais termos da equação, entre eles estão os valores das variáveis avaliadas no tempo anterior ao atual e as demais forças que atuam sobre o fluido.

Os coeficientes das equações resultantes do tratamento numérico das equações diferenciais, representadas pela Equação 4.15, são apresentados nas Tabelas A.1, A.2, A.3 e A.4 do Apêndice A.

Como cada equação diferencial dá origem a  $n$  equações algébricas (em que  $n$  é o número de volumes elementares em que o domínio é dividido), o número de equações algébricas será tanto maior quanto mais refinada for a malha.

As equações que modelam um problema tridimensional de um fluido monofásico escoando no interior de um cilindro são as três equações de conservação de quantidade de movimento e a equação da Continuidade. Dessa forma, se o domínio for dividido em  $n$  volumes, o número de equações algébricas resultantes será igual a  $4n$ . Nesse caso, as variáveis a serem calculadas são as três componentes da velocidade e a pressão. Como essas são estimadas para cada volume elementar, tem-se  $4n$  variáveis, e o sistema está, portanto, bem estabelecido.

Em cada uma das  $4n$  equações do sistema estão presentes, como variáveis ativas, todas as componentes do vetor velocidade e a pressão. E como já visto na seção 4.5, na solução acoplada entre pressão e velocidade há a criação de uma única matriz envolvendo todos os coeficientes, e o sistema é resolvido para todas as variáveis simultaneamente. Nesse caso o sistema linear pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} A^{v_z, v_z} & A^{v_z, v_r} & A^{v_z, v_\alpha} & A^{v_z, P} \\ A^{v_r, v_z} & A^{v_r, v_r} & A^{v_r, v_\alpha} & A^{v_r, P} \\ A^{v_\alpha, v_z} & A^{v_\alpha, v_r} & A^{v_\alpha, v_\alpha} & A^{v_\alpha, P} \\ A^{P, v_z} & A^{P, v_r} & A^{P, v_\alpha} & A^{P, P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_z \\ v_r \\ v_\alpha \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{v_z} \\ B_{v_r} \\ B_{v_\alpha} \\ B_P \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

em que  $A^{\phi\varphi}$  representa uma matriz composta dos coeficientes que multiplicam a variável

$\varphi$  da equação que tem  $\phi$  como sua variável principal.

Para um problema em que o domínio foi dividido em 100 volumes elementares, a matriz dos coeficientes tem a forma apresentada na Figura 4.6, que é meramente ilustrativa. A cor preta representa os elementos não nulos, enquanto a cor branca os nulos.

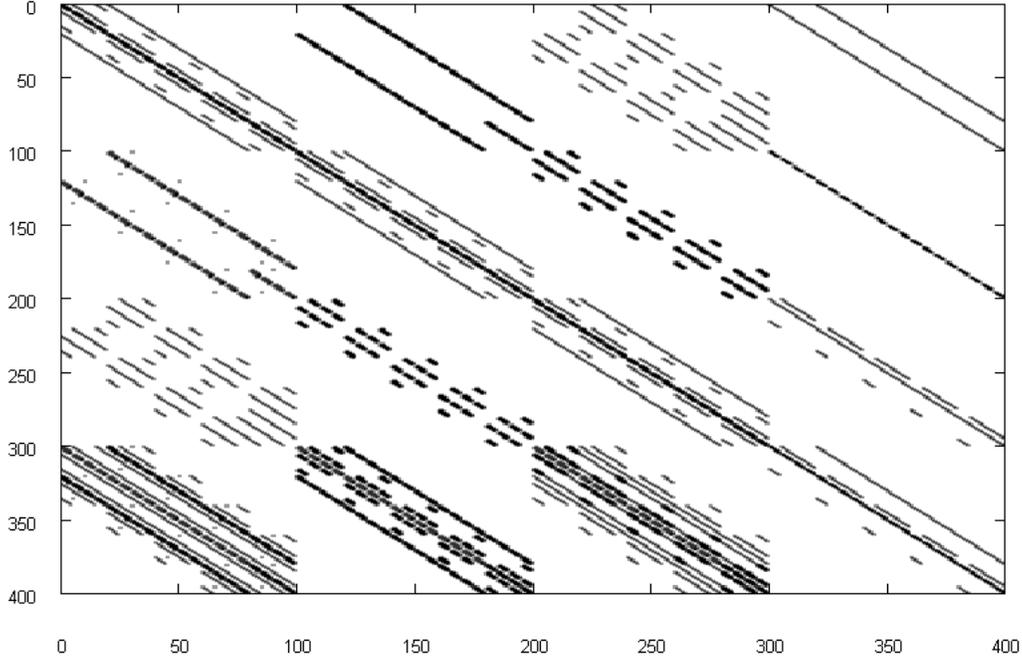


Figura 4.6: Estrutura da Matriz dos Coeficientes

Como se pode observar, a matriz dos coeficientes tem alto índice de esparsidade, que é definido por:

$$\zeta = \left[ 1 - \frac{\text{número de elementos não nulos}}{\text{número de elementos total}} \right] \quad (4.17)$$

Para o problema que possui a matriz dos coeficientes representada pela Figura 4.6,  $\zeta = 0,95$ . Isso significa que 95% dos elementos da matriz dos coeficientes são iguais a zero.

Assim o índice de esparsidade influi fortemente na escolha do método utilizado na resolução do sistema linear, que segundo Maliska (2004) é responsável por cerca de 60 a 70% do tempo computacional necessário para a solução de um determinado problema em mecânica dos fluidos. Ao empregar métodos diretos de solução, é necessário o manuseio de toda a matriz, incluindo os elementos nulos. Para se ter uma solução mais

precisa do problema em questão, o número de volumes de controle deve ser aumentado. Com isso, o sistema linear a ser resolvido aumenta igualmente em número de equações, porém o esforço computacional cresce de forma não linear, tornando seu uso inviável.

Métodos bastante indicados para a resolução de sistemas lineares esparsos são os métodos indiretos, como o método de decomposição LU incompleta, por exemplo. A idéia básica desse tipo de solução é encontrar uma matriz próxima à original, armazenando e trabalhando apenas com seus elementos não nulos. O sistema é então resolvido iterativamente, porém o tempo de solução é consideravelmente menor.

São encontradas atualmente *subrotinas* prontas, em linguagem *Fortran*, que fazem uso de métodos indiretos na solução de sistemas de equações. Porém, a maior parte delas só pode ser aplicada aos casos em que a matriz dos coeficientes possui elementos não nulos apenas em algumas diagonais pré definidas. Dessa forma, por causa da complexidade da matriz que compõe o sistema de equações algébricas neste trabalho, apesar da vantagem no uso desse tipo de método, foi usado o *Método de Decomposição LU* simples, que trabalha também com os coeficientes nulos da matriz na solução do sistema linear resultante. Uma *subrotina* que seja capaz de resolver esse sistema de equações usando um método indireto poderá ser implementada num trabalho futuro, fazendo com que seu tempo de solução seja bastante reduzido.

## 4.8 Passo de Tempo

Um fator de extrema importância na boa convergência do método numérico é a escolha de um passo de tempo ( $\Delta t$ ) apropriado.

Em problemas predominantemente convectivos uma boa estimativa para  $\Delta t$  é obtida pela divisão de uma escala de comprimento por uma escala de velocidade, como, por exemplo, do comprimento do domínio pela velocidade média do fluido (ANSYS CFX-Solver Theory Guide 11.0):

$$\Delta t = \frac{L}{\bar{v}} \quad (4.18)$$

Mesmo para o caso problemas estacionários, por não acarretar complicações adicionais, é importante manter o termo transiente nas equações que modelam o fenômeno. Nesse caso segue-se uma abordagem de transiente distorcido em que um procedimento de falsa marcha no tempo é aplicado, e  $\Delta t$  passa a funcionar como um fator de relaxação, facilitando a convergência numérica.

## 4.9 Estrutura do Programa

As equações de conservação de quantidade de movimento que modelam o fenômeno estudado neste trabalho são não-lineares. Como já visto, a aproximação numérica dessas equações dá origem a um sistema linear de equações. Porém a matriz dos coeficientes contém elementos dependentes das variáveis e precisa, portanto, ser atualizada ao longo das iterações, até que o resultado convirja.

Apesar de ter como motivação o estudo do processo *FCC* em *risers*, o código numérico desenvolvido neste trabalho permite a obtenção de dados de velocidade e pressão para qualquer fluido *newtoniano* e incompressível escoando em regimes laminar ou turbulento, com perfis de velocidade de entrada variáveis, no interior de dutos cilíndricos verticais ou horizontais. Dessa forma, as propriedades do fluido, a geometria do cilindro e o perfil de velocidades na entrada devem ser definidos antes de se iniciar o processo iterativo. Com esses dados, juntamente com o campo inicial das variáveis e sua estimativa para o tempo seguinte em todo o domínio do problema, é determinado o regime de escoamento sobre o qual o fluido está submetido. Se o escoamento é turbulento, calcula-se a viscosidade turbulenta com o uso dos modelos de turbulência, e a viscosidade do fluido é acrescida deste valor. E então os campos de velocidade e pressão em todo o domínio são calculados.

Para o caso transiente, o valor das variáveis, convergido para um tempo  $t_0 + \Delta t$ , retorna ao início do programa como sendo o novo campo inicial das variáveis, e a solução é obtida para o tempo seguinte até que o regime permanente seja atingido. O algoritmo que descreve esse processo iterativo e a partir do qual foi desenvolvido o código numérico do presente trabalho pode ser visto na Figura 4.7.

Se o interesse for apenas a solução do problema em regime permanente, pode-se avançar no tempo cada vez que o campo de variáveis for obtido. Esse procedimento resulta numa solução transiente distorcida, já que o problema não foi convergido para cada intervalo de tempo. A importância do uso dessa abordagem para problemas estacionários já foi ressaltada na seção anterior deste capítulo.

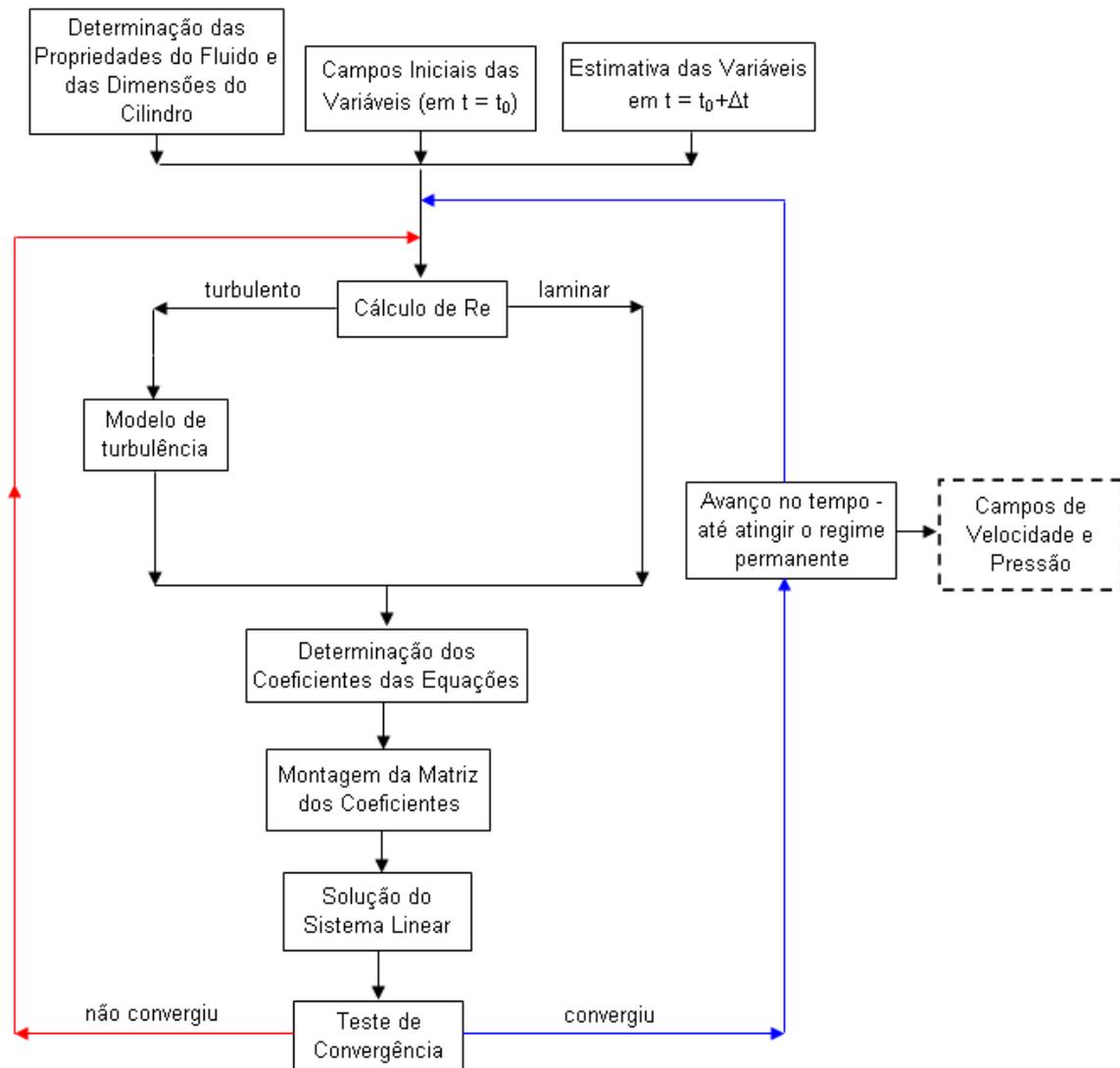


Figura 4.7: Algoritmo de resolução do problema.

## 4.10 Convergência

Diversos fatores podem influenciar na solução numérica de um problema, como, por exemplo, o refino da malha, a dimensão do intervalo de tempo e o uso de coeficientes de relaxação. Encontrar uma boa combinação desses parâmetros é fundamental para que o processo iterativo seja consistente e estável. Essas são as condições necessárias e suficientes para que haja convergência.

A solução de um problema é dita consistente quando a aproximação numérica gera resultados que reproduzem os obtidos diretamente pela equação diferencial, se as dimensões da malha e do tempo tendem a zero. Segundo Maliska (2004), quando o método dos volumes finitos é usado na obtenção das equações em sua forma discreta, o modelo numérico é sempre consistente. Já as instabilidades numéricas podem ocorrer devido a dificuldades no acoplamento entre as variáveis que podem fazer com que algumas delas evoluam mais rápido que as outras.

De acordo com Tu et al (2007), três aspectos são importantes para considerar que um processo iterativo alcançou a convergência:

1. Os balanços de massa e momento devem ser fechados;
2. Todas as equações discretizadas devem parecer ter convergido quando alcançarem uma determinada tolerância para todos os volumes locais;
3. A solução numérica não mais deve variar com iterações adicionais.

Assim é necessário que um critério de convergência, que decide quando esse processo irá parar, seja definido. Normalmente o processo iterativo continua até que níveis residuais se reduzam a uma quantidade particular  $\epsilon$ . Neste trabalho esse resíduo foi calculado, como sugerido por Maliska (2004), por:

$$\left| \frac{\phi_P - \phi_P^*}{\chi} \right| \leq \epsilon \quad (4.19)$$

em que o sobrescrito \* indica o valor da variável calculado na iteração anterior, e  $\chi$  é a diferença entre o maior e o menor valor da variável  $\phi$  ao longo do domínio do problema:

$$\chi = \phi_{max} - \phi_{min} \quad (4.20)$$

# Capítulo 5

## Simulações e Análise dos Resultados

Com a finalidade de validar o modelo numérico desenvolvido neste trabalho, foram realizadas simulações de escoamentos em regimes laminar e turbulento para vários valores de *Reynolds*. Nesses casos os perfis de velocidade axial de entrada do fluido eram uniformes com suas componentes radial e angular nulas e os escoamentos se deram no interior de tubos cilíndricos horizontais (para que os efeitos da gravidade pudessem ser desprezados). Esses resultados foram então validados usando-se a própria solução analítica das equações, por correlações (semi-) empíricas ou por dados experimentais, conforme cada um dos casos. Também foram feitas diferentes simulações para que se pudessem observar características tridimensionais, elípticas e transientes do escoamento, e a simulação de um escoamento com as especificações geométricas e operacionais comumente encontradas para reatores *riser* de unidades *FCC*.

O programa foi executado em computador com processador *Intel Pentium 4*, com  $2.8\text{GHz}$  de velocidade, e  $2\text{GB}$  de memória *RAM*. O tempo de processamento variou conforme a malha usada em cada caso, sendo de, no máximo, 45 horas para as malhas mais refinadas.

A descrição e resultados dessas simulações, bem como sua análise, serão apresentados a seguir.

### 5.1 Escoamentos em Regime Laminar

Simulações de escoamentos em regime laminar foram feitas para  $Re = 1 \times 10^3$  e  $Re = 2 \times 10^3$  em um tubo de  $20\text{cm}$  de diâmetro e  $30\text{m}$  de comprimento. Foram usadas malhas estruturadas uniformes contendo 1600 volumes (20 na direção axial, 20 na radial

e 4 na angular). Nos casos laminares não foram realizados estudos de independência de malha.

Na Figura 5.1 pode-se observar o perfil de velocidades, para  $Re = 2 \times 10^3$ , obtido após o sistema atingir o regime permanente. Essa simulação foi feita para um cilindro de 50 m de comprimento. A região de entrada hidrodinâmica, onde a velocidade ainda é função da posição ao longo do comprimento do cilindro, pode ser vista claramente.

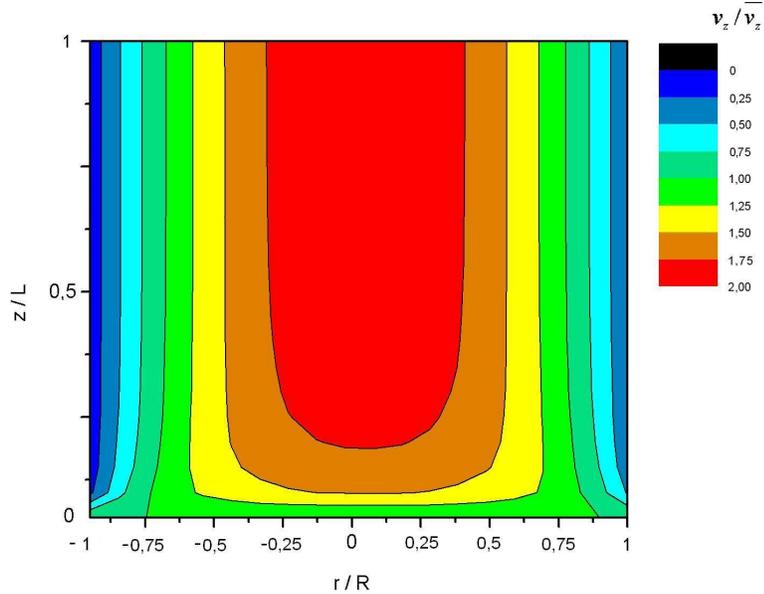


Figura 5.1: Perfil de velocidade axial - plano  $zr$

A partir da Equação 2.1 foram calculados os comprimentos de entrada hidrodinâmicos  $L_e$  para os dois valores de *Reynolds*:

Tabela 5.1: Comprimentos de entrada hidrodinâmicos - laminar

	$L_e/D$	$L_e(m)$	$L_e/L$
$Re = 1 \times 10^3$	57,5	11,5	0,38
$Re = 2 \times 10^3$	115,0	23,0	0,77

O desenvolvimento do perfil de velocidade obtido numericamente ao longo do comprimento do cilindro, para  $Re = 2 \times 10^3$ , pode ser visto na Figura 5.2. Pode-se notar que a partir de  $z/L = 0,75$  o perfil praticamente não mais varia, mostrando, portanto, que o limite entre a região de entrada e a região plenamente desenvolvida se encontra próximo desse local, e confirmando o valor de  $L_e/L$  apresentado na Tabela 5.1.

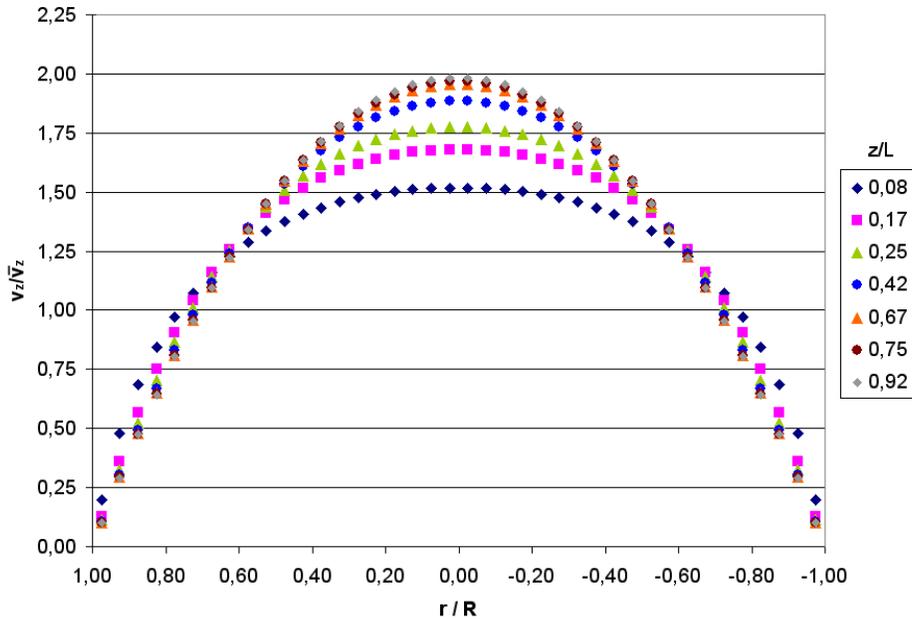


Figura 5.2: Desenvolvimento do perfil de velocidade axial ao longo do cilindro.

A validação dos dados numéricos de velocidade foi feita através da comparação com o resultado analítico (Equação 2.7). Já a pressão foi validada com o uso da Equação de *Darcy-Weisbach* e do fator de atrito de *Darcy* para escoamentos laminares (Equações 2.4 e 2.5).

Nas Figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os perfis de velocidade axial analíticos e obtidos pelo modelo numérico, para  $Re = 1 \times 10^3$  e  $Re = 2 \times 10^3$  respectivamente, em função do raio adimensional do cilindro, na região em que o escoamento é plenamente desenvolvido.

Já os dados de queda de pressão em função do comprimento adimensional do cilindro, para  $Re = 1 \times 10^3$  e  $Re = 2 \times 10^3$ , podem ser vistos nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Pode-se notar que a partir de um determinado valor de  $z/L$  a pressão relativa decresce linearmente com  $z$ , indicando que a partir daí o escoamento é plenamente desenvolvido. Essa característica também pôde ser observada na Figura 2.3, quando foi definida teoricamente a região de entrada hidrodinâmica. As linhas tracejadas, presentes nas Figuras 5.5 e 5.6, foram feitas a partir dos valores calculados pela Equação 2.1 e mostrados na Tabela 5.1. Elas delimitam a região de entrada e a região de escoamento plenamente desenvolvido, e apresentam boa concordância com os dados numéricos.

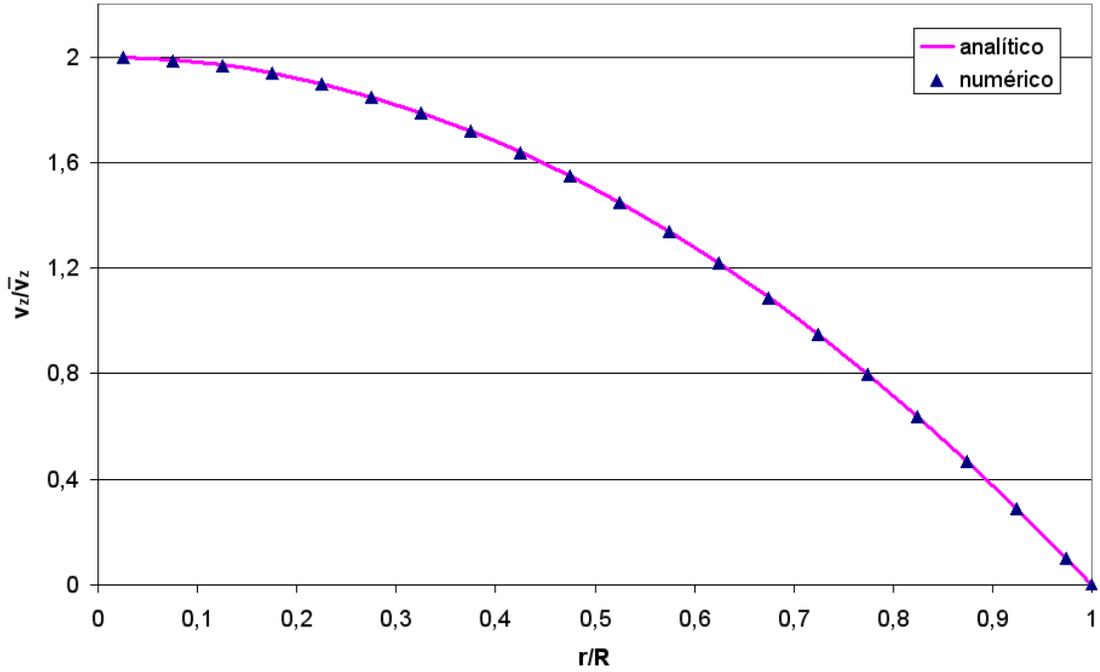


Figura 5.3: Perfis numérico e analítico de velocidade axial para  $Re = 1 \times 10^3$ , na região plenamente desenvolvida.

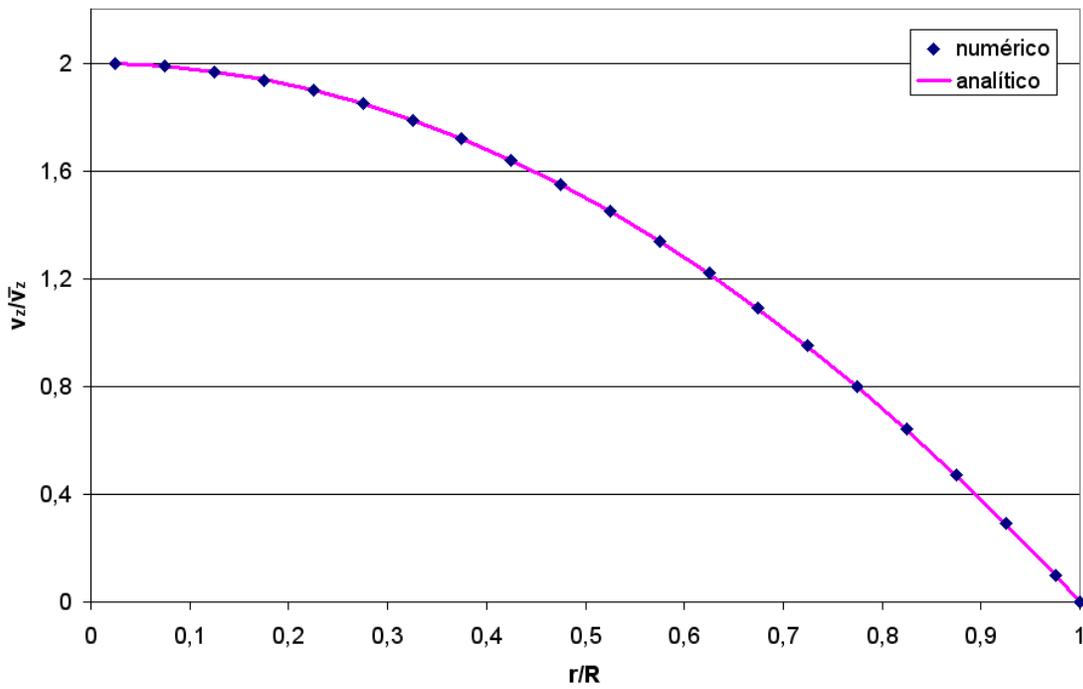


Figura 5.4: Perfis numérico e analítico de velocidade axial para  $Re = 2 \times 10^3$ , na região plenamente desenvolvida.

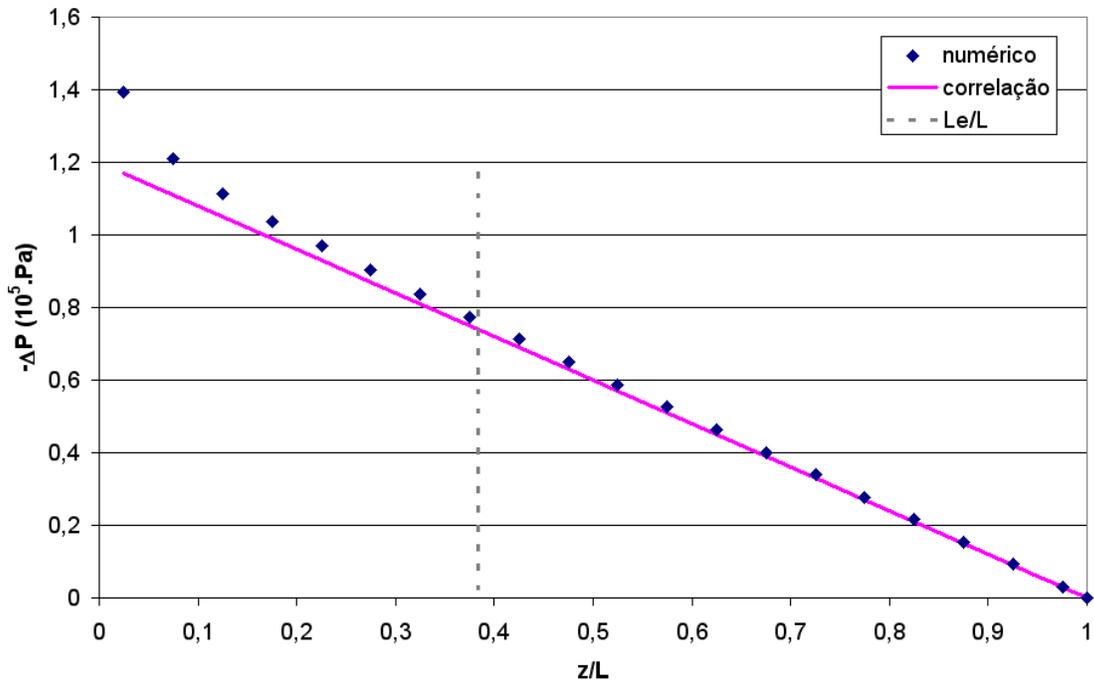


Figura 5.5: Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de *Darcy-Weisbach* para  $Re = 1 \times 10^3$  ao longo do comprimento do cilindro.

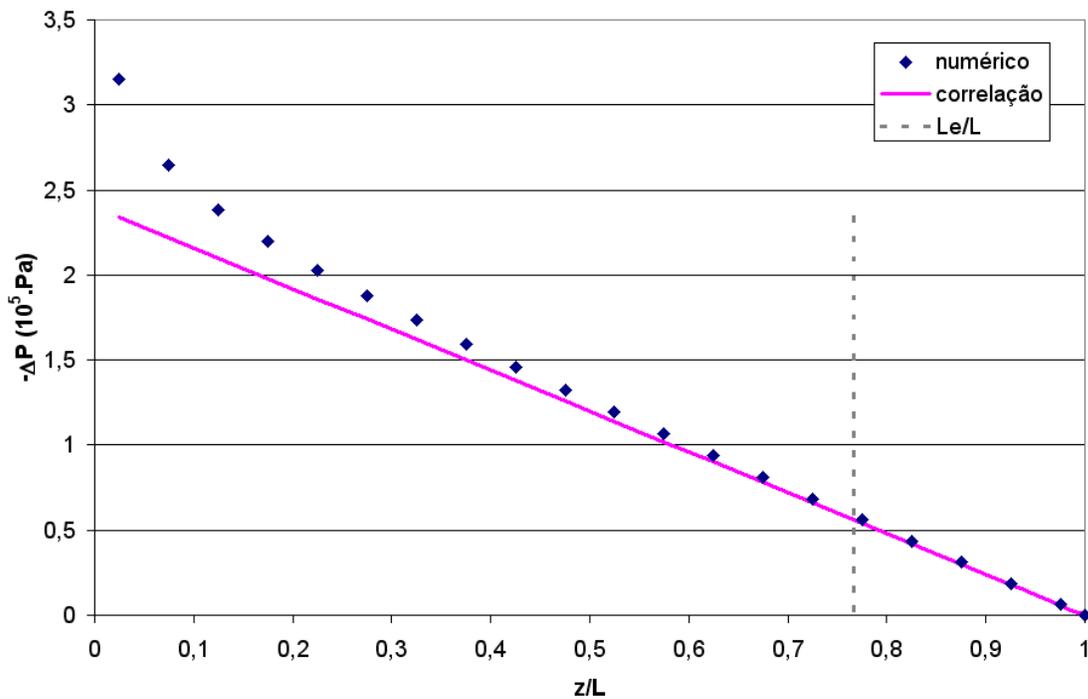


Figura 5.6: Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de *Darcy-Weisbach* para  $Re = 2 \times 10^3$  ao longo do comprimento do cilindro.

O desenvolvimento do perfil da componente radial da velocidade ao longo do comprimento adimensional do cilindro, para  $Re = 1 \times 10^3$ , pode ser visto na Figura 5.7. Pode-se notar que o valor da variável  $v_r$  é diferente de zero próximo à entrada do tubo. Esse mesmo comportamento também foi observado por outros autores como Muniz (1995) e Glodberg e Folk (1988), que realizaram estudos numéricos sobre a região de entrada hidrodinâmica. Apesar de estar presente na maior parte dos trabalhos envolvendo o estudo numérico de escoamentos com velocidade de entrada predominantemente axial, essa característica não é encontrada quando esses problemas são resolvidos analiticamente ou em dados empíricos. Próximo a entrada do cilindro os valores das componentes da velocidade deveriam tender à condição de contorno imposta nessa região. Glodberg e Folk (1988) afirmam que, por causa do rápido decaimento no valor da componente axial da velocidade quando o fluido entra em contato com a parede, onde é imposta condição de não deslizamento ( $v_z|_{r=R} = 0$ ), há uma compensação na variável  $v_r$ , causando esse desvio.

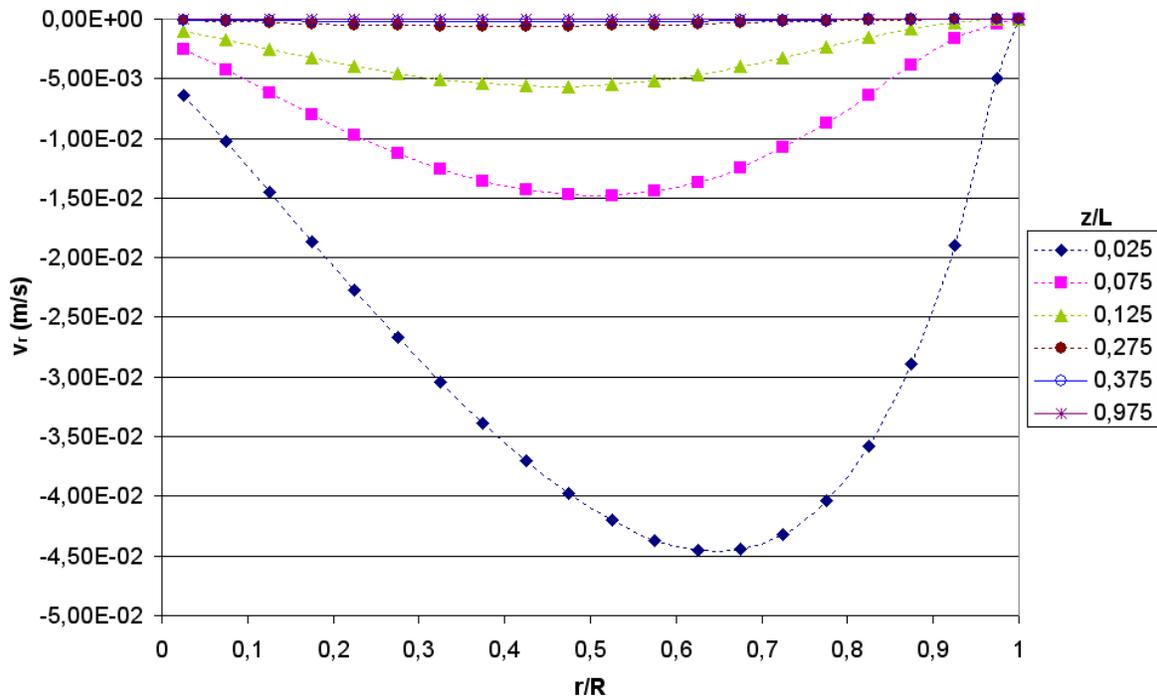


Figura 5.7: Desenvolvimento do perfil de velocidade radial ao longo do cilindro.

Ao calcular a vazão volumétrica nas seções transversais à direção do escoamento a partir dos dados de velocidade encontrados numericamente, observou-se outro desvio em relação à vazão de entrada próximo a essa região (Figura 5.8). Apesar de possuir pequena ordem de magnitude ( $< 0,4\%$ ), não influenciando no estudo do escoamento, esse erro pode ser justificado pelo comportamento numérico da componente radial da

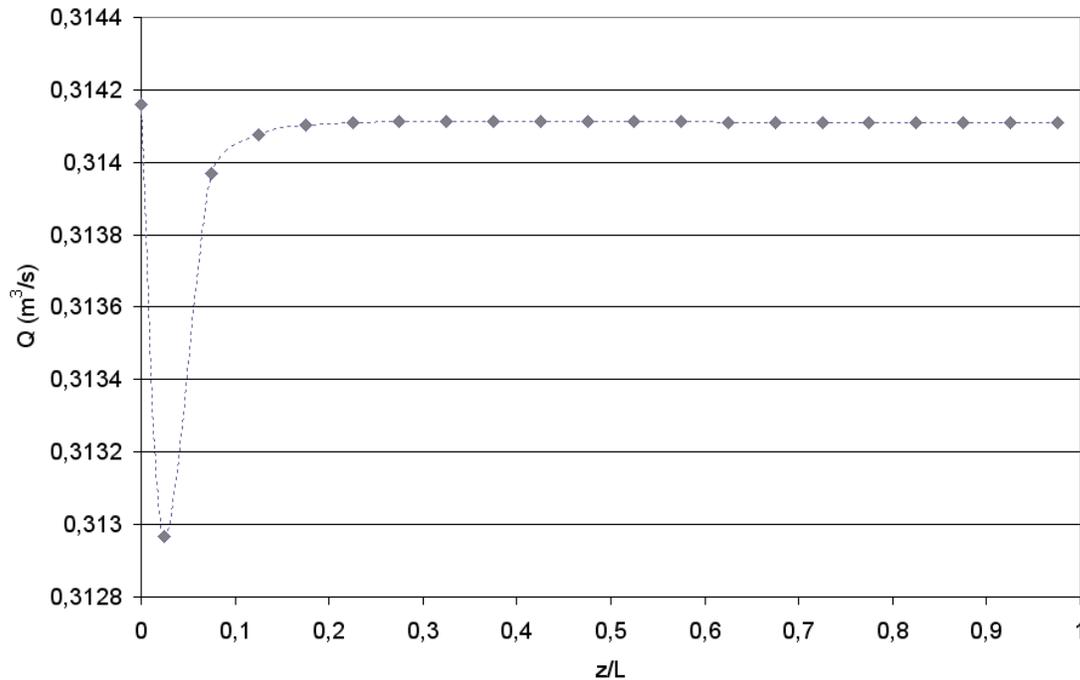


Figura 5.8: Vazões volumétricas nas seções transversais ao longo do comprimento do cilindro.

velocidade (Figura 5.7) na região de entrada.

Os valores numéricos das componentes da velocidade foram aplicados na equação de conservação de massa a fim de verificar seu fechamento. Mais uma vez foi observado um leve desvio nos volumes próximos à entrada, principalmente na região da parede do tubo, como pode ser visto na Figura 5.9. Esse fato pode ser, mais uma vez, explicado pela imposição da condição de velocidade nula na parede, fazendo com que haja uma diferença muito grande entre ela e a velocidade de entrada do fluido assim que o esse entra em contato com a superfície, provocando um pequeno desvio numérico.

Ainda em regime laminar, para  $Re = 1,6 \times 10^3$ , foi realizada uma simulação em que a entrada do cilindro representava  $1/3$  de seu diâmetro, como esquematizado na Figura 5.10. Nesse caso, o cilindro tinha  $20\text{ cm}$  de diâmetro e  $8\text{ m}$  de comprimento. Para que se pudesse analisar o resultado na região mais próxima à parede foi usada uma malha contendo 600 volumes (10 na direção axial, 15 na radial e 4 na angular) não uniforme na direção radial que se expandia a partir dali num fator fixo igual a 1,10.

O resultado dessa simulação pode ser visto na Figura 5.11, que mostra o desenvolvimento do perfil de velocidade axial, e onde nota-se a presença de valores negativos, e 5.12, em que pode-se perceber a formação de zonas de recirculação de fluido próximo

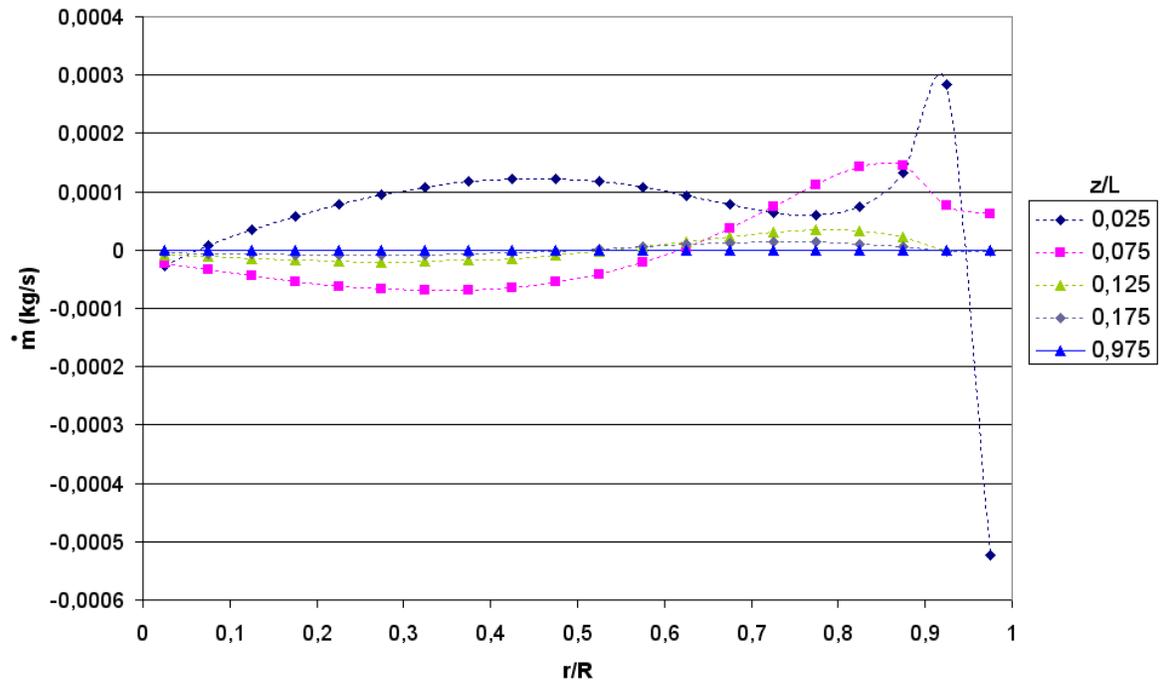


Figura 5.9: Vazão mássica resultante da aplicação dos valores numéricos das variáveis na equação de conservação de massa.

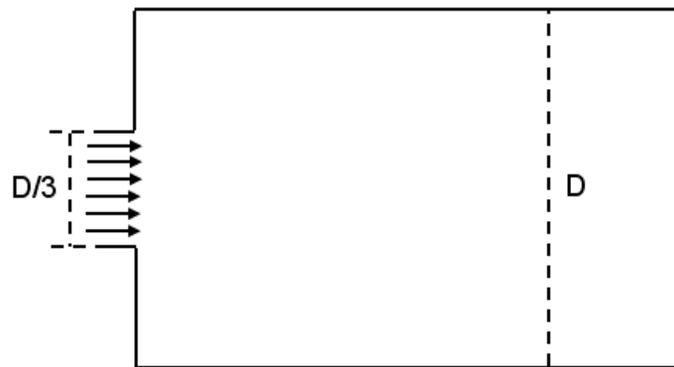


Figura 5.10: Geometria da região de entrada do tubo.

à entrada do tubo. Essa característica somente pode ser observada se o problema for tratado como sendo elíptico. Daí a importância de não desprezar os termos difusivos em sua modelagem.

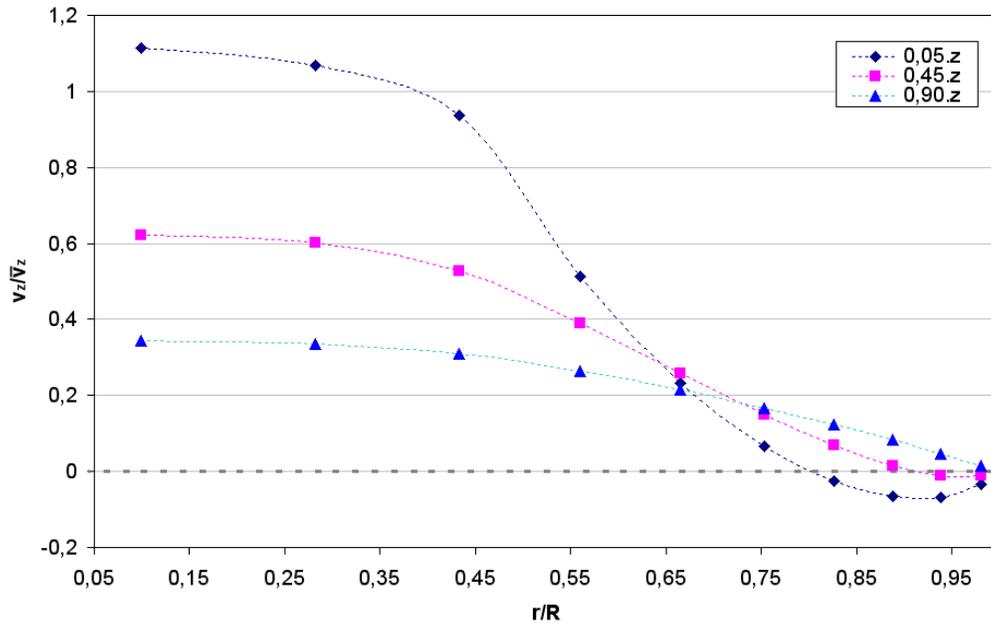


Figura 5.11: Desenvolvimento do perfil de velocidade axial para  $Re = 1,6 \times 10^3$  usando geometria esquematizada na Figura 5.10.

Foi realizada também uma simulação em que o perfil de velocidade de entrada era inclinado a  $80^\circ$  em relação à seção transversal do cilindro, possuindo componentes axial, radial e angular não nulas, como está esquematizado na Figura 5.13. Nesse caso o regime de escoamento era laminar com  $Re = 2 \times 10^3$  e foi usada uma malha não uniforme na direção radial se expandindo num fator de 1,20 a partir da parede, contendo 900 volumes (15 na direção axial, 15 na radial e 4 na angular). O tubo tinha 14,5 m de altura e 20 cm de diâmetro.

Na Figura 5.14 é mostrada a representação vetorial das componentes radial e angular da velocidade em um corte transversal do cilindro a 0,50 m da entrada. Nota-se que pelo problema ter sido modelado tridimensionalmente os resultados se mostram sem nenhuma simetria nesse caso. A representação espacial do vetor velocidade numa dada posição angular do domínio pode ser vista na Figura 5.15. Nesse caso percebe-se que os vetores possuem componentes nas três direções coordenadas.

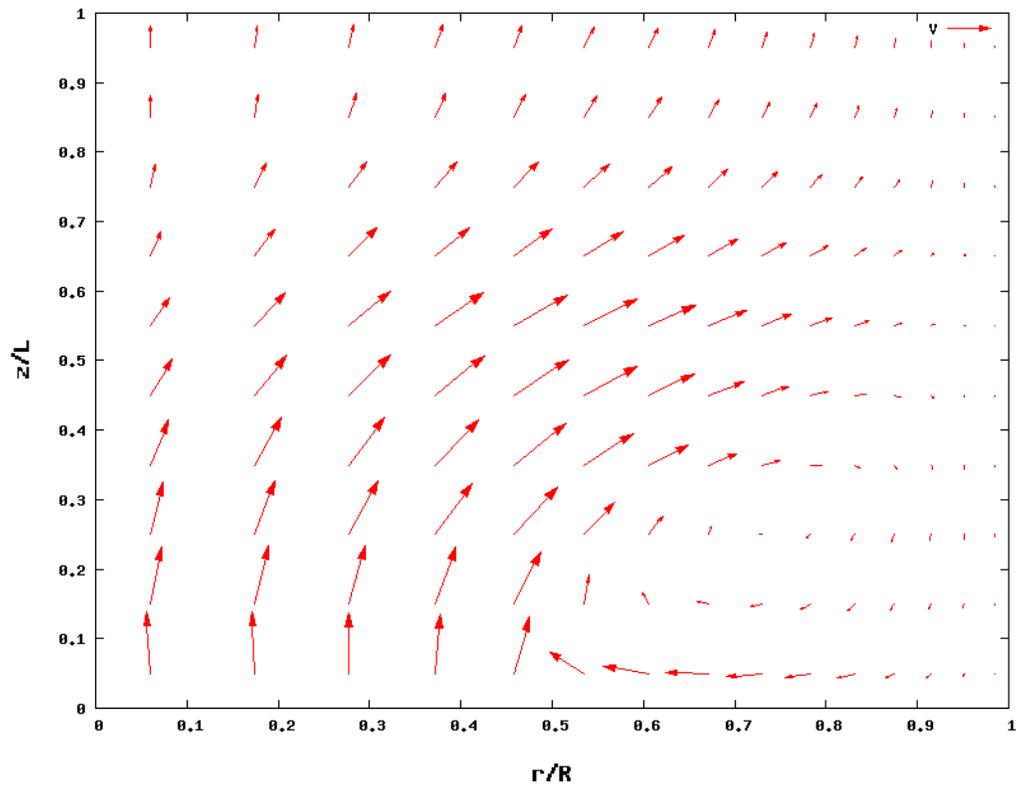


Figura 5.12: Dados de velocidade axial e radial representados vetorialmente.

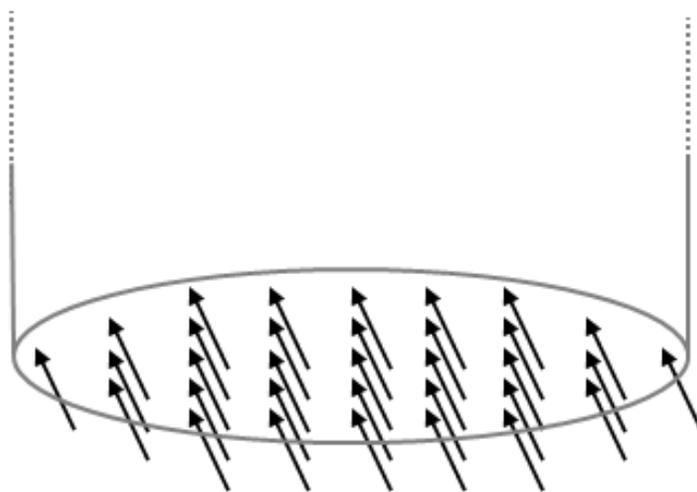


Figura 5.13: Perfil de velocidade de entrada inclinado.

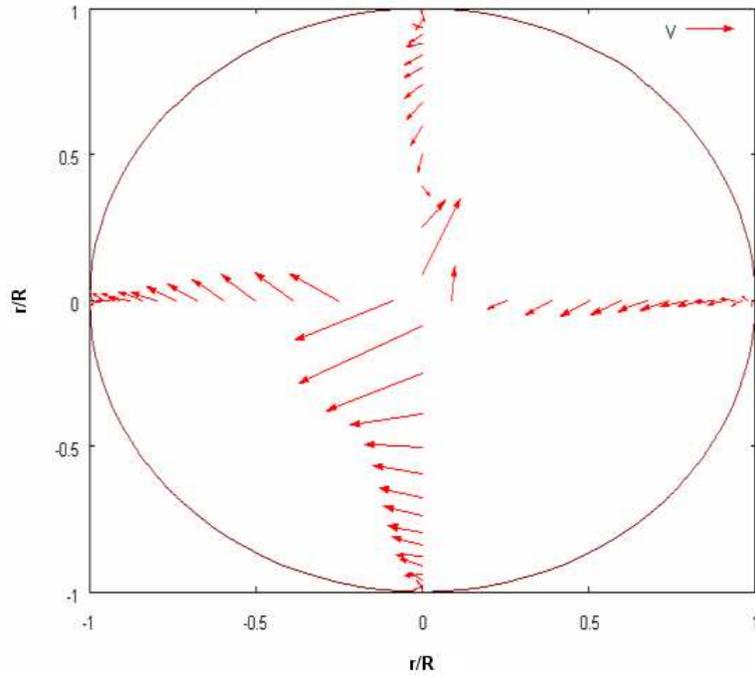


Figura 5.14: Representação vetorial das componentes radial e angular da velocidade no plano.

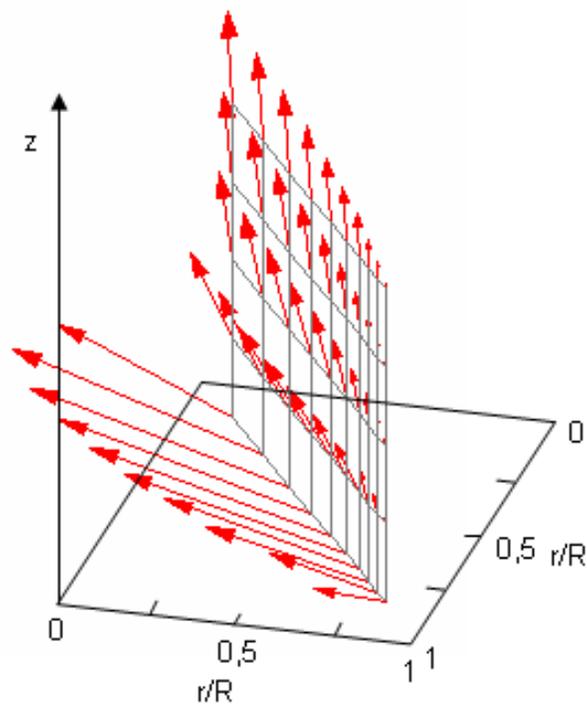


Figura 5.15: Representação vetorial da velocidade no espaço.

Para que se pudessem visualizar as características de um escoamento ao longo do tempo, e observar a aplicação do processo transiente real, foi feita uma simulação, para  $Re = 1 \times 10^3$ , em que o passo de tempo foi de  $0,1 s$ . Nesse caso o cilindro tinha  $20 cm$  de diâmetro e  $20 m$  de comprimento, e foi usada uma malha de discretização contendo 900 volumes (15 na direção axial, 15 na radial e 4 na angular). O desenvolvimento da velocidade axial no domínio com o tempo, até que o processo atingisse o regime permanente, pode ser visto na Figura 5.16. Deve-se notar que, conforme a cor se torna menos uniforme, o perfil fica menos achatado até que, em  $t = 0,9 s$ , atinge sua forma final (permanente).

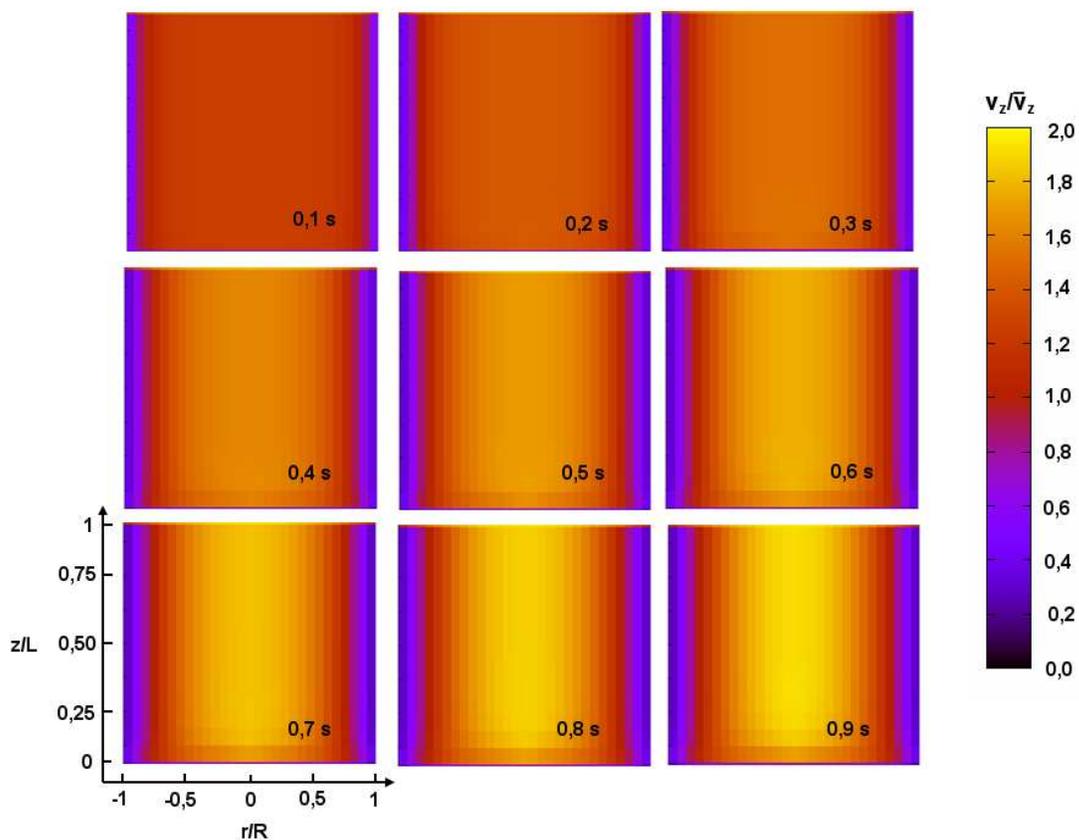


Figura 5.16: Desenvolvimento do perfil de velocidade axial ao longo do tempo.

## 5.2 Escoamentos em Regime Turbulento

Os escoamentos em regime turbulento foram simulados para  $Re = 2 \times 10^4$ ,  $Re = 4 \times 10^4$  e  $Re = 10 \times 10^4$ , no interior de um cilindro de 20 cm de diâmetro e 8 m de altura. Nesses casos, foram realizados testes de independência de malha. Esses testes, para  $Re = 4 \times 10^4$ , podem ser vistos nas Figuras 5.17 e 5.18, onde estão apresentados dados de queda de pressão obtidos em simulações em que o volume de controle foi discretizado usando-se malhas de diferentes tamanhos. Como pode-se observar a variação do número de volumes na direção axial pouco influencia no resultado numérico. Já o refino da malha na direção radial tem um efeito bastante significativo sobre o resultado.

Dessa maneira, nos casos em que  $Re = 2 \times 10^4$  e  $Re = 4 \times 10^4$ , foi estabelecido o uso de malhas uniformes contendo 704 volumes (8 na direção axial, 22 na radial e 4 na angular) e 1312 volumes (8 na direção axial, 41 na radial e 4 na angular), respectivamente. Na simulação do escoamento com  $Re = 10 \times 10^4$  foi usada uma malha não uniforme na direção radial que expandia a partir da parede num fator fixo igual a 1,03. Esta continha 1600 volumes (8 na direção axial, 50 na radial e 4 na angular).

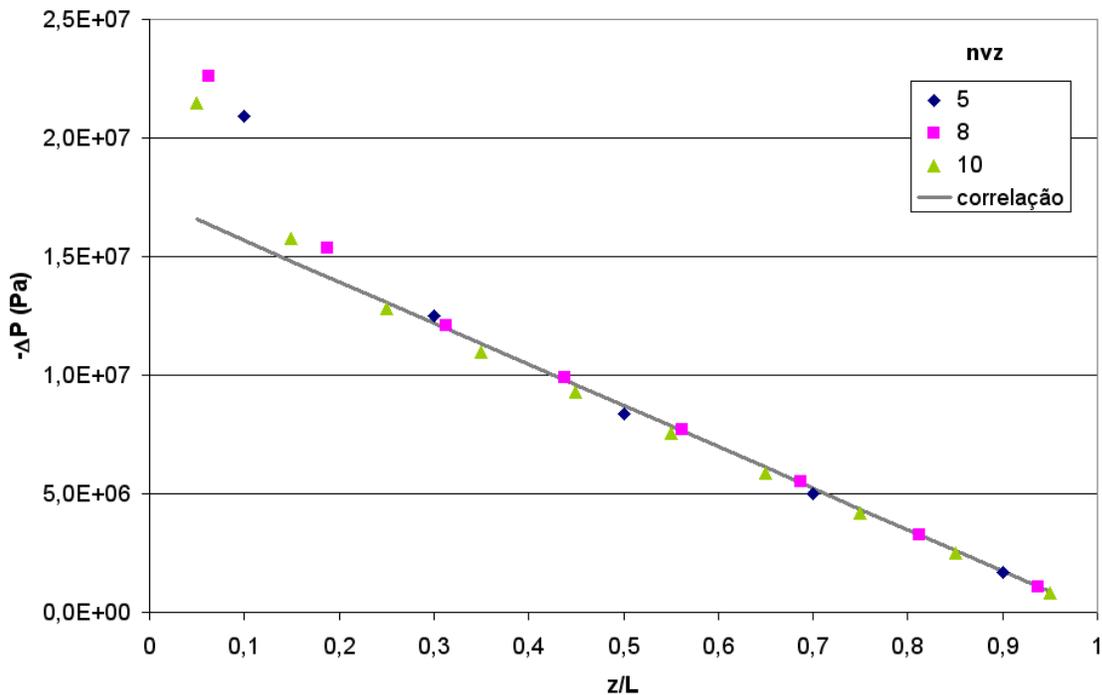


Figura 5.17: Queda de pressão - teste de independência de malha variando  $nvz$ .

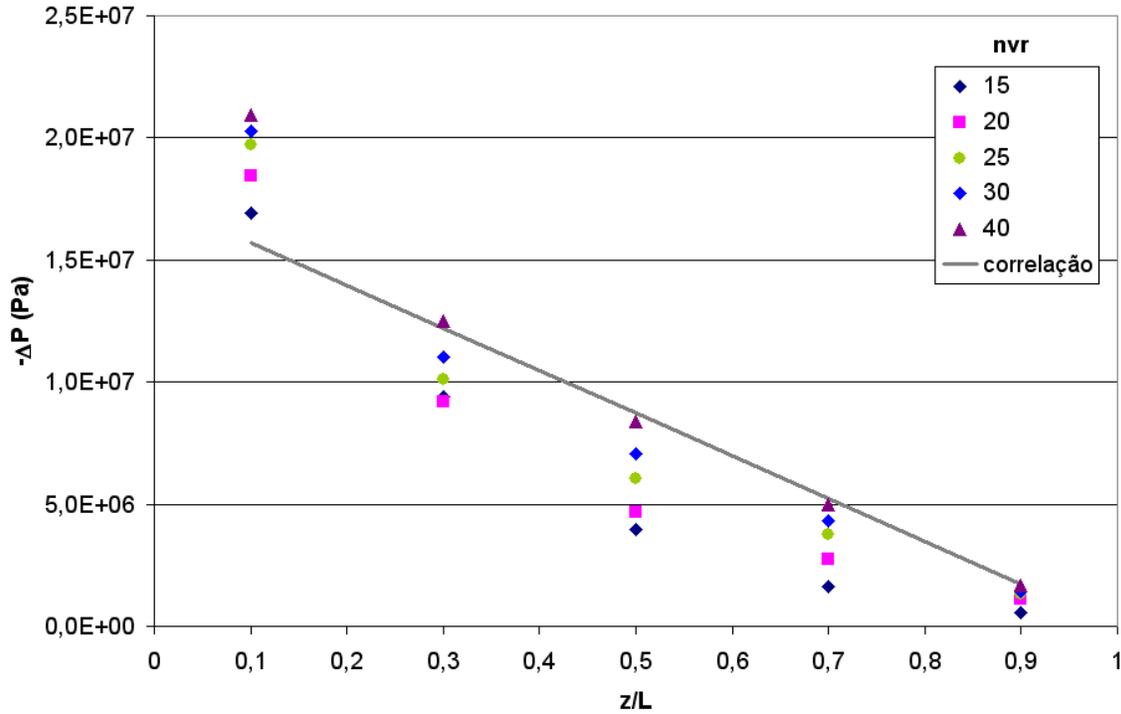


Figura 5.18: Queda de pressão - teste de independência de malha variando  $nvr$ .

Os dados obtidos para velocidade axial foram validados com os valores dessa variável calculados pela correlação empírica (lei de potência) dada pela Equação 2.8. Além disso, foram usados dados experimentais de escoamentos operando sob  $Re = 2,7281 \times 10^4$  e  $Re = 4,8997 \times 10^4$ , encontrados no trabalho de Haber (1966), citado por Souza et al (2006), na validação dos dados numéricos para os casos em que  $Re = 2 \times 10^4$  e  $Re = 4 \times 10^4$ .

Os perfis de velocidade axial obtidos nas simulações, os calculados pela correlação empírica e, para os casos descritos anteriormente, os dados experimentais, na região plenamente desenvolvida do escoamento, podem ser vistos nas Figuras 5.19, 5.20 e 5.21. Pode-se observar uma boa concordância entre os dados numéricos, os calculados pela lei de potência e os dados experimentais de Habber. Já no caso em que  $Re = 10 \times 10^4$  (Figura 5.21) observa-se um desvio entre os dados numéricos e os calculados pela correlação empírica, principalmente na região próxima a parede onde acredita-se ser necessário um maior refino da malha.

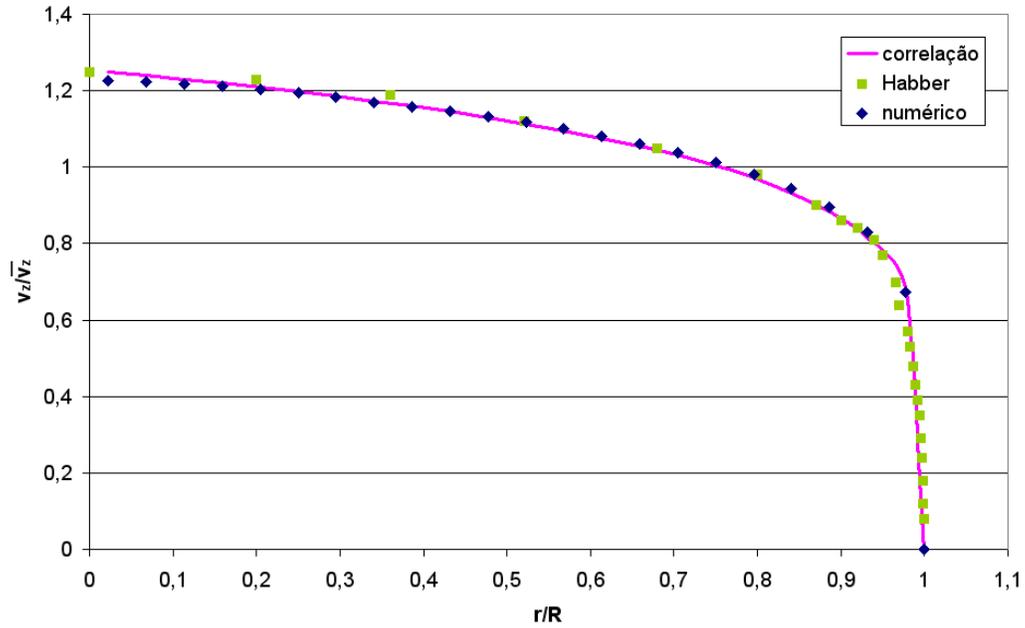


Figura 5.19: Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para  $Re = 2 \times 10^4$ , e dados experimentais para  $Re = 2,7281 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida.

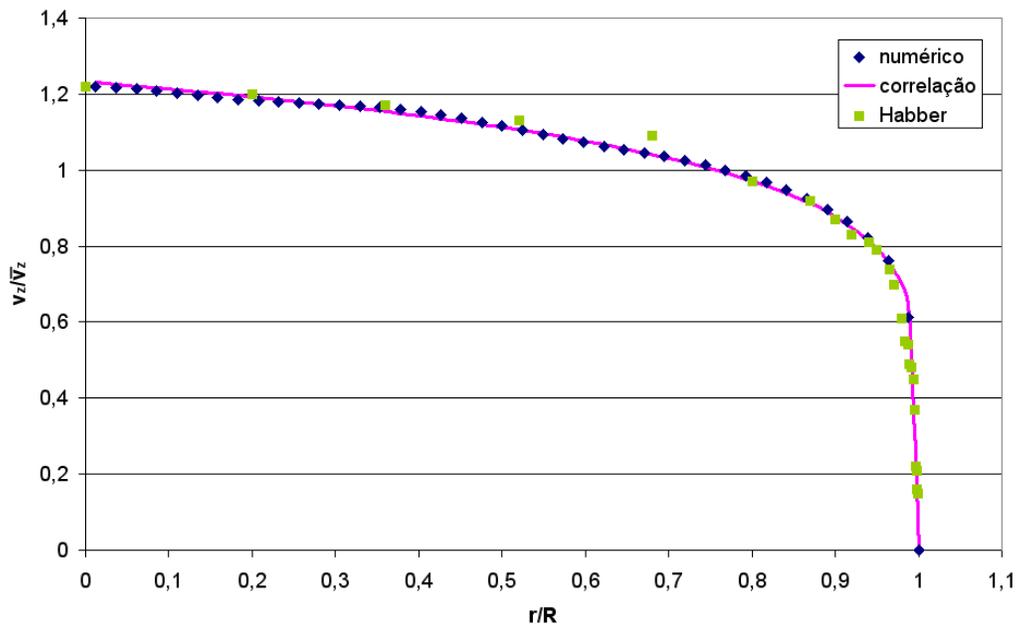


Figura 5.20: Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para  $Re = 4 \times 10^4$ , e dados experimentais para  $Re = 4,8997 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida.

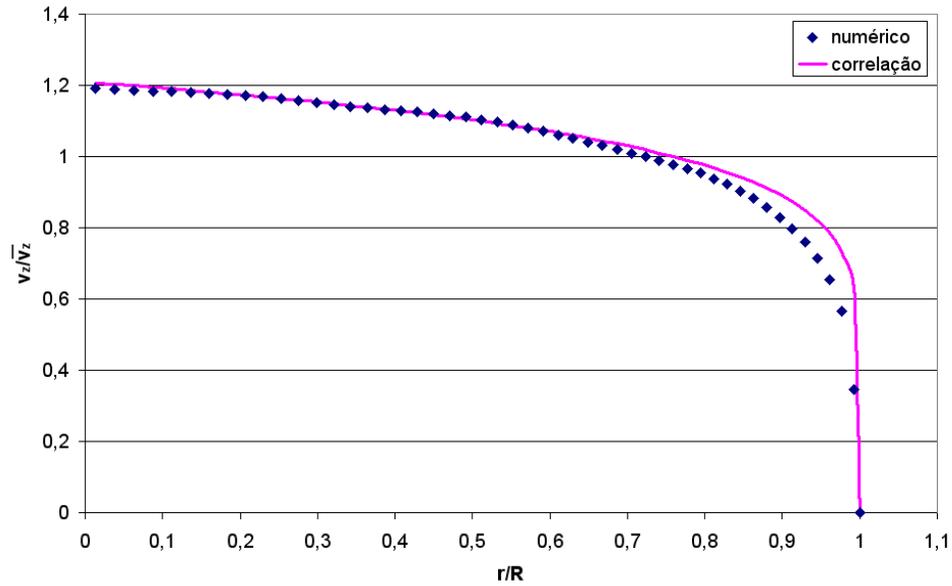


Figura 5.21: Perfis de velocidade axial numérico e obtido pela lei de potência para  $Re = 10 \times 10^4$ , na região plenamente desenvolvida.

A partir de duas diferentes correlações, dadas pelas Equações 2.2 e 2.3, encontradas nas obras de White (2003) e Çengel e Cimbala (2007), respectivamente, foram elaboradas as Tabelas 5.2 e 5.3 contendo os dados calculados para o comprimento de entrada hidrodinâmico para  $Re = 2 \times 10^4$ ,  $Re = 4 \times 10^4$  e  $Re = 10 \times 10^4$ .

Tabela 5.2: Comprimentos de entrada hidrodinâmicos (Equação 2.2) - turbulento

	$L_e/D$	$L_e(m)$	$L_e/L$
$Re = 2 \times 10^4$	22,9	4,6	0,57
$Re = 4 \times 10^4$	25,7	5,1	0,64
$Re = 10 \times 10^4$	30,0	6,0	0,75

Tabela 5.3: Comprimentos de entrada hidrodinâmicos (Equação 2.3) - turbulento

	$L_e/D$	$L_e(m)$	$L_e/L$
$Re = 2 \times 10^4$	16,2	3,2	0,40
$Re = 4 \times 10^4$	19,3	3,8	0,48
$Re = 10 \times 10^4$	24,2	4,8	0,60

Como nas simulações de escoamentos laminares a validação dos dados de pressão para as simulações de escoamentos em regime turbulento foi feita comparando-os aos valores obtidos com o uso da Equação de *Darcy-Weisbach* (Equação 2.4) e do fator de atrito de *Darcy*, desta vez ajustado para  $Re > 4 \times 10^3$  (Equação 2.6). Os dados de queda de pressão numéricos e os obtidos com o uso dessa correlação, para  $Re = 2 \times 10^4$ ,  $Re = 4 \times 10^4$  e  $Re = 10 \times 10^4$ , em função do comprimento adimensional do cilindro, são apresentados graficamente nas Figuras 5.22, 5.23 e 5.24, respectivamente. As linhas tracejadas verticais indicam os locais em que os escoamentos passam a ser plenamente desenvolvidos a partir dos valores calculados pelas Equações 2.2 e 2.3 (apresentados nas Tabelas 5.2 e 5.3). Os valores calculados pela Equação 2.3 parecem representar melhor os dados numéricos que os encontrados pela Equação 2.2.

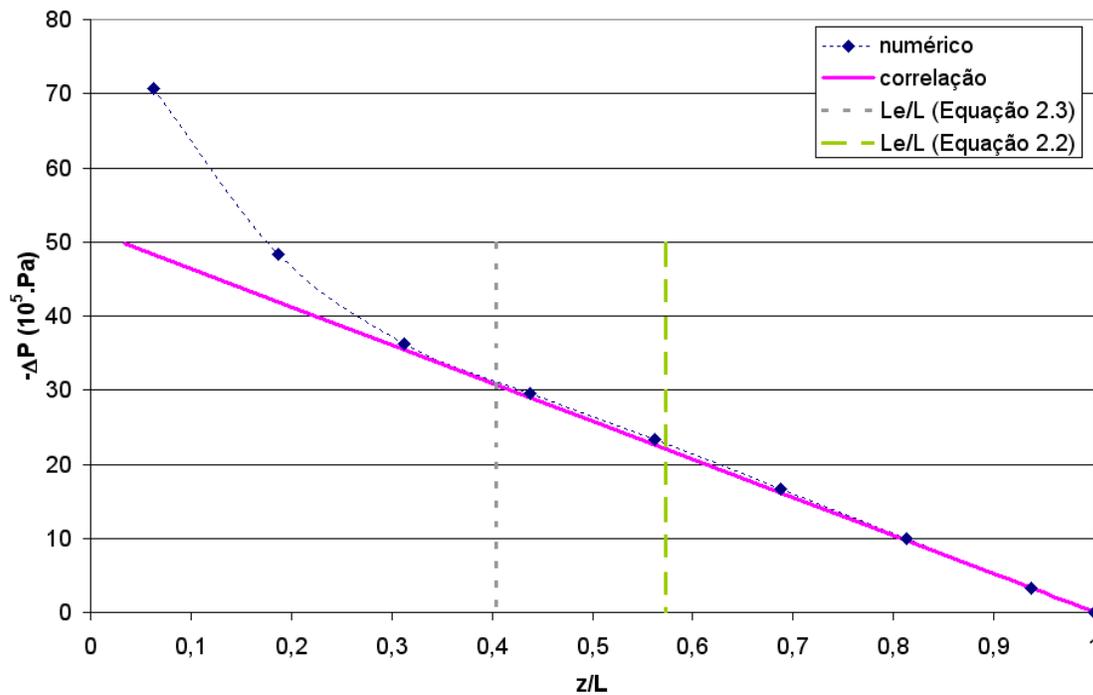


Figura 5.22: Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de *Darcy-Weisbach* para  $Re = 2 \times 10^4$  ao longo do comprimento do cilindro.

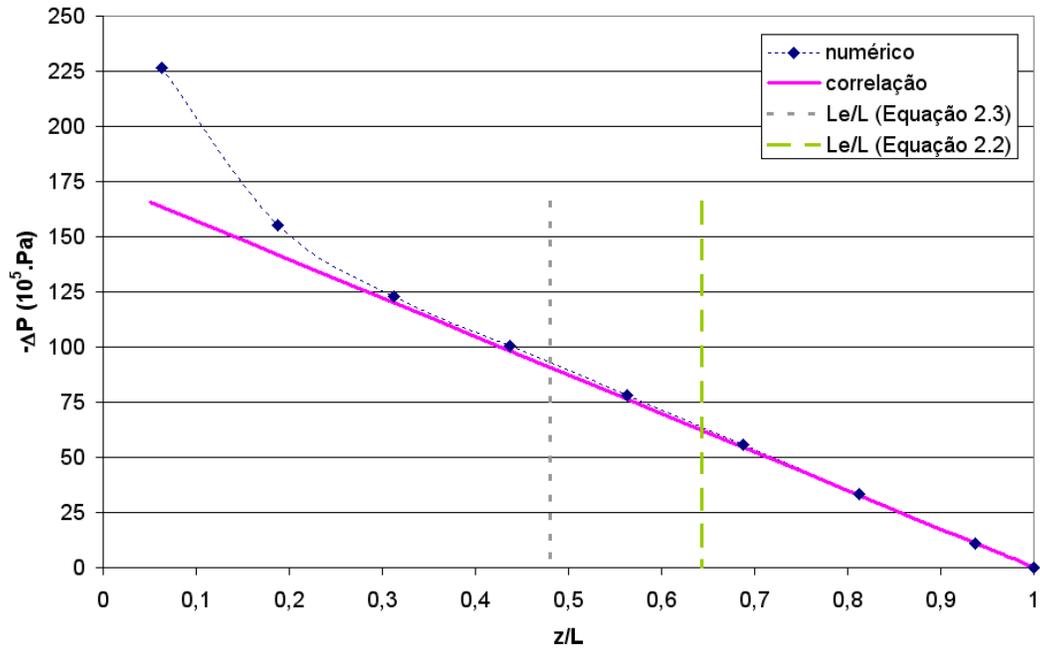


Figura 5.23: Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de *Darcy-Weisbach* para  $Re = 4 \times 10^4$  ao longo do comprimento do cilindro.

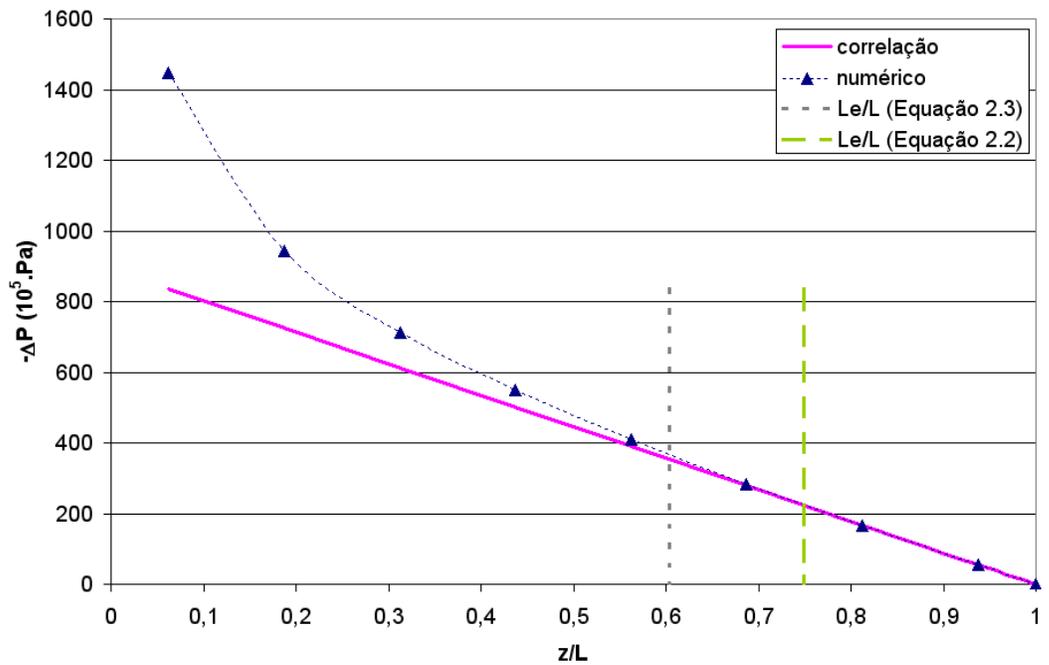


Figura 5.24: Dados de queda de pressão obtidos numericamente e pela Equação de *Darcy-Weisbach* para  $Re = 10 \times 10^4$  ao longo do comprimento do cilindro.

Para que se pudesse analisar as características do escoamento no reator *riser* de uma unidade *FCC*, foi realizada uma simulação em que o domínio do problema tinha a base dividida em duas regiões de entrada, como mostrado na Figura 2.1. Os perfis de velocidade de entrada foram considerados uniformes e se desenvolvendo a partir do local onde as duas correntes se encontram. Também a partir daí a altura do reator era de  $14,5\text{ m}$ , e seu diâmetro de  $0,20\text{ m}$ . O fluido foi alimentado na entrada principal (base do reator) com velocidade axial de  $5\text{ m/s}$  e, na entrada lateral, com velocidade radial de  $-2,5\text{ m/s}$ . Foi considerado que o fluido é um gásóleo proveniente da destilação a vácuo com ponto médio de ebulição de  $488^\circ\text{C}$ . Nessa temperatura a viscosidade cinemática estimada (ALTGELT e BODUSZYNSKI, 1994) para a fração obtida da destilação do petróleo cru *Arabian Heavy*, é de  $83\text{ cS}$  (ou  $8,3 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ). Nessas condições o escoamento se apresenta em regime turbulento com  $Re = 12.048$ . Foi usada uma malha com 900 volumes (15 na direção axial, 15 na radial e 4 na angular), não uniforme na direção radial que se expandia num fator de 1,20 a partir da parede.

Os dados obtidos de velocidade e de pressão, em relação ao raio e à altura do cilindro, estão representados nas Figuras 5.25 e 5.26, respectivamente.

Essa simulação não representa o processo real de escoamento no interior do reator *riser* de uma unidade de *FCC*, já que nesse caso não foram considerados fenômenos como troca térmica e interação com a fase particulada que também deveria estar presente na forma do catalisador da reação. Assim, esses dados não puderam ser validados e nem comparados com outros encontrados na literatura.

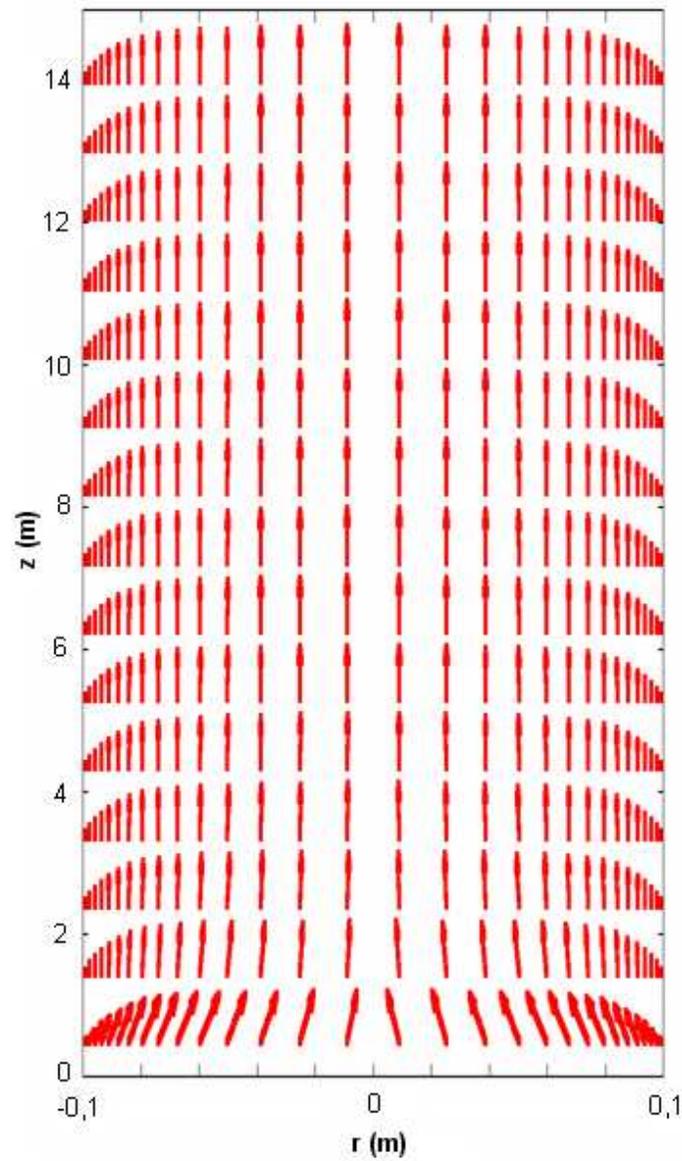


Figura 5.25: Representação vetorial da velocidade do gásóleo vaporizado no interior de um reator *riser*.

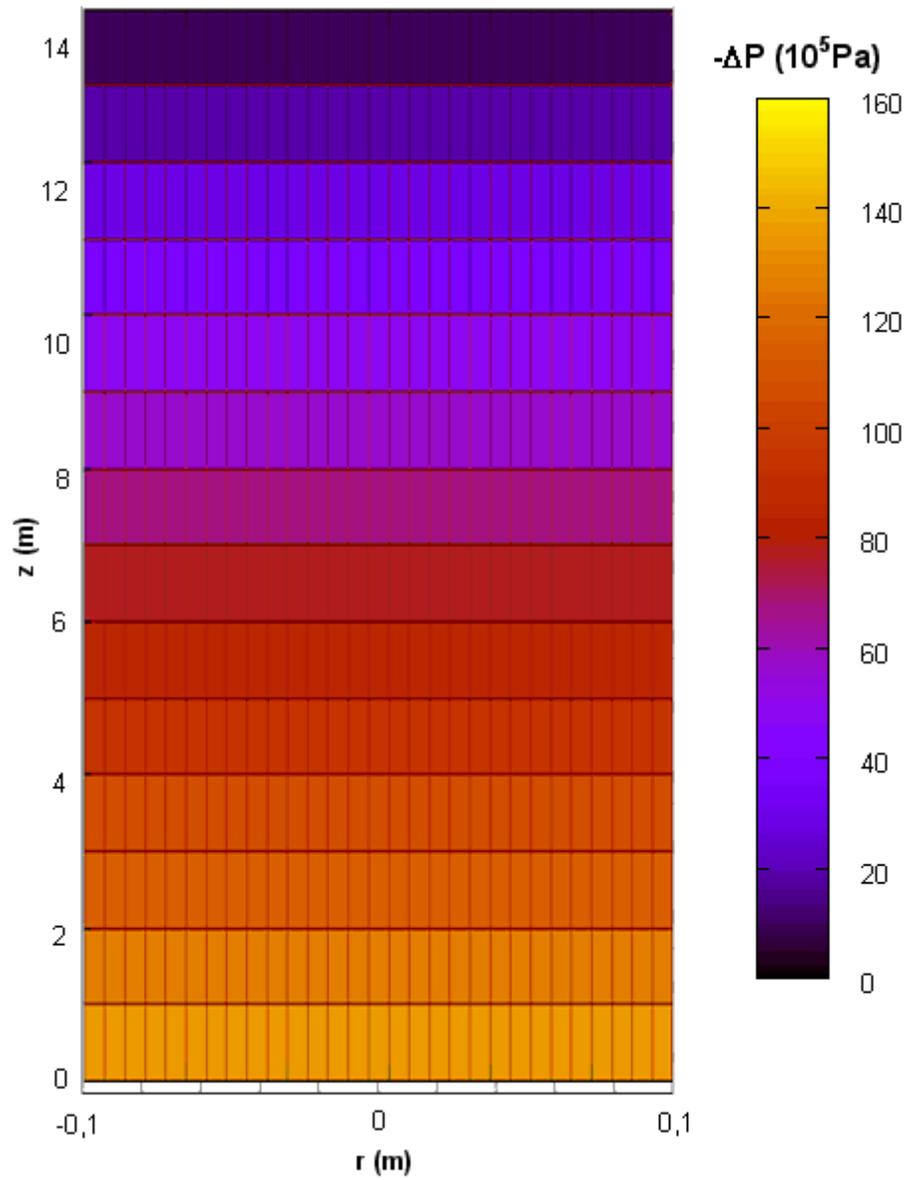


Figura 5.26: Representação da queda de pressão no interior de um reator *riser*.

# Capítulo 6

## Conclusões

Como pode ser observado nos resultados numéricos obtidos, o modelo representa muito bem casos laminares, nos quais não foi preciso grande refino da malha na direção radial. Já nos casos turbulentos, como esperado, quanto mais elevado o número de *Reynolds*, maior o refino necessário da malha, principalmente na região próxima à parede do tubo, onde ocorre a transição entre a região dominada pelos efeitos viscosos (próxima à superfície) e a região predominantemente turbulenta, fazendo com que ali o escoamento apresente características instáveis. Essas instabilidades aumentam ainda mais conforme o escoamento se torna mais turbulento, o que faz com que essa transição seja mais brusca. Apesar dos modelos de turbulência usados serem simples (modelos algébricos), os resultados obtidos nas simulações dos casos turbulentos, em que esses foram validados, foram bastante satisfatórios.

Na maior parte das simulações foram usadas malhas mais refinadas na direção radial do que nas demais direções. Dessa forma, em alguns casos, a razão de aspecto, que é definida como a divisão entre a maior e a menor aresta de um dado volume, é bastante grande. Isso significa que o volume é muito esticado para um dos lados. Alguns autores afirmam que o uso de malhas com razão de aspecto muito elevada podem provocar problemas na definição dos resultados ou na capacidade de convergência. Apesar disso, nos casos em que os resultados puderam ser validados, esses problemas não foram observados, indicando que na determinação numérica dos parâmetros de escoamentos simples, em tubos retos, e sem presença de zonas de recirculação, a proporção dos volumes da malha não é um fator limitante.

Com relação ao sistema de equações algébricas, notou-se que o número de coeficientes da matriz principal que o representa aumentava muito para malhas mais

refinadas, já que esse número é igual a quatro vezes o número de volumes em que o domínio é dividido. Dessa forma, ao se usar malhas muito refinadas, o armazenamento computacional e o tempo de solução se tornaram bastante elevados. Essa é uma das desvantagens da solução acoplada das equações usada nesse trabalho. Em contrapartida, como relatado por outros autores, observou-se que o número de iterações necessárias para que a solução convergisse, usando essa abordagem, foi muito pequeno, especialmente nos casos laminares. Assim, uma maneira de driblar o problema da necessidade do refino excessivo da malha, foi o uso de malhas não uniformes mais refinadas quando próximas às paredes.

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho possibilitou a realização de simulações de escoamentos no interior de dutos cilíndricos de forma prática, rápida e bastante completa. Por ser tridimensional e elíptico, permite ainda estudos de escoamentos com diferentes perfis de velocidade de entrada, análise de fenômenos difusivos e visualização de processos de recirculação e escoamentos rotacionais.

Deve ficar claro que, apesar da motivação deste trabalho ter sido o estudo do processo *FCC* em *risers*, o modelo não é adequado para esse fim. O processo de *FCC* é bastante complexo e difícil de ser completamente modelado, já que envolve diversos fenômenos como, troca térmica, reações químicas, adsorção, interação entre as fases, turbulência intensa, entre outros. Um passo importante no desenvolvimento de um simulador para esse caso já foi dado, que foi a criação de uma ferramenta que permite o estudo tridimensional de escoamentos fluidos. Esse simulador poderá ser melhorado, num trabalho futuro, com a incorporação de novas equações e modelos. As etapas para a adaptação do modelo atual para que seja possível simular com veracidade o processo de *FCC* estão listados a seguir:

- As equações de conservação de massa global e de quantidade de movimento devem ser aplicadas a cada uma das fases presentes no escoamento, incluindo termos de transferência entre as fases. No escoamento no interior de reatores *riser* estão presentes três fases, porém costuma-se usar modelos pseudo-homogêneos, em que são consideradas apenas duas fases: uma fase gasosa, composta por gotículas de gás-óleo e frações de hidrocarbonetos vaporizados misturadas ao vapor d'água; e uma fase particulada, que na abordagem *Euleriana* é considerada como contínua.
- Além dessas, devem também ser acrescentadas equações de conservação para cada espécie química presente no sistema.
- Devem também estar presentes equações de conservação de energia para as fases

fluida e particulada;

- Uma equação para prever a variação da massa específica da fase fluida, que não é constante nessas operações, também deve ser acrescentada;
- Como a área superficial das partículas de catalisador muda durante o processo de adsorção, necessita-se uma equação que preveja essa variação;
- Deve ser feito o acréscimo de uma equação para o cálculo do coeficiente de arraste entre as fases;
- Deve estar presente a Equação de continuidade entre as fases;
- Deve haver um modelo de adsorção, já que de acordo com Martignoni (1998), a adsorção de hidrocarbonetos no catalisador tem um importante efeito sobre a hidrodinâmica e a cinética química;
- Um modelo cinético, prevendo as reações de craqueamento que ocorrem no interior do reator. Normalmente é proposta uma rede cinética baseada em pseudo-componentes. Para isso usam-se técnicas de agrupamento de componentes em grupos de moléculas representativas conforme semelhança de suas propriedades;

Apesar do código desenvolvido parecer simples pela sua limitação no estudo de escoamentos presentes em aplicações práticas, o fato do modelo ser tridimensional e sem simplificações inerentes à imposição de planos de simetria fez com que o tratamento numérico das equações e sua implementação computacional fossem tarefas relativamente complexas. Dessa forma, foi possível o aprimoramento do conhecimento da linguagem *Fortran* e de estratégias de programação, além da aquisição de vasta compreensão de processos fluidodinâmicos e de seu tratamento numérico, já que esses conceitos foram extensamente trabalhados na teoria e na prática.

# Referências Bibliográficas

- ABADIE, E. Craqueamento Catalítico. PETROBRAS, 1997.
- ALTGELT, K. H.; BODUSZYNSKI, M. M. Composition and Analysis of Heavy Petroleum Fractions. Marcel Dekker Inc., 1994.
- ANSYS CFX-Solver Theory Guide. ANSYS CFX Release 11.0. 1996-2006 ANSYS Europe, Ltd.
- BAI, D.; ZHU, J.; JIN, Y.; YU, Z. Simulation of FCC catalyst regeneration in a riser regenerator. Chemical Engineering Journal, 71, 97-109 (1998).
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações. Mc-Grall Hill, 2007.
- CHEN, Y. Recents Advances in FCC technology. Powder Technology, v. 163, p. 2-8, 2006.
- DECKER, R. K. Modelagem e simulação tridimensional transiente do escoamento gás-sólido. Dissertação de Mestrado - UNICAMP, 2003.
- DENG, Q. H.; TANG, G. F. Special treatment of pressure correction based on continuity conservation in a pressure-based algorithm. Numerical Heat Transfer, Part B, v. 42, 73-92, 2002.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. Computacional Methods for Fluid Dynamics. Springer, 1999.
- FREIRE, A. P. S.; MENUT, P. P. M.; SU, J. TURBULÊNCIA. ABCM, 2002
- GOLDBERG, I. S.; FOLK, R. T. Solutions for steady and nonsteady entrance flow in a semi-infinite circular tube at very low reynolds numbers. SIAM J. Appl. Math. Vol.48, N.4, 1988.

- HAN, I.; CHUNG, C.; RIGGS, J. B. Modeling of a fluidized catalytic cracking process. *Computers and Chemical Engineering*, 24, 1681-1687 (2000).
- HANBY, R. F.; SILVESTER, D. J.; CHEN, J. W. A comparison of coupled and segregated iterative solution techniques for incompressible swirling flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.22, 353-373, 1996.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. Fundamentos de transferência de calor e de massa. LTC Editora. Quinta edição, 2003.
- JOHNSON, R. W. *The Handbook of Fluid Dynamics*. CRC Press, 1998.
- MACHADO, M. B. Modelagem Tridimensional da Dispersão de Poluentes em Rios. Tese de Doutorado - UNICAMP, 2006.
- MALISKA, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional. LTC Editora. Segunda edição, 2004.
- MARCHI, C. H. High order schemes for the solution of fluid flows without numerical dispersion. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v.15, n.3, 231-249, 1993.
- MARTIGNONI, W. P. Modelling and simulation of FCC riser reactors: an heterogeneous approach. Ph.D. Dissertation - University of Western Ontario, 1998.
- MERCADO, E. R. V.; SOUZA, V. C.; GUIRARDELLO, R.; NUNHEZ, J. R. Modeling flow and heat transfer in tubes using a fast CFD formulation. *Computers and Chemical Engineering*, v.25, 713-722, 2001.
- MUNIZ, L. A. R. Método dos Volumes Finitos Aplicados à Problemas de escoamentos Bidimensionais na Região de Entrada de Dutos Cilíndricos. Dissertação de Mestrado - UNICAMP, 1995.
- NERI, A.; GISAPOW, D. Riser Hydrodynamics: Simulation Using Kinetic Theory. *AIChE Journal*, v.46, n.1, 2000.
- POPE, S. B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C. *Mecânica dos Fluidos*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.
- RODI, W. Turbulence modelling. In *Turbulence models and their application in hydraulics*. Germany, 1984.

- ROSA, L. M. Simulação de Reações Químicas e Consumo de Calor em Risers. Dissertação de Mestrado - UNICAMP, 2002.
- SOUZA, B. A.; MATOS, E. M.; GUIRARDELLO, R.; NUNHEZ, J. R. Predicting coke formation due to thermal cracking inside tubes of petrochemical fired heaters using a fast CFD formulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v.51, 138-148, 2006.
- THEOLOGOS, K. N.; MARKATOS, N. C. Advanced Modeling of Fluid Catalytic Cracking Riser - Type Reactors. *AIChE Journal*, v.39, n.6, p.1007-1016,1993.
- THEOLOGOS, K. N.; NIKOU, I. D.; LYGEROS, A. I.; MARKATOS, N. C. Simulation and Design of Fluid Catalytic Cracking Riser - Type Reactors. *AIChE Journal*, v.43, n.2, 1997.
- TU, J.; YEOH, G. H.; LIU, C. *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Butterworth-Heinemann, 2007.
- WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. Mc Graw-Hill, 1991.
- WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. Mc Graw-Hill, 2003.

# Apêndice A

## Coeficientes das equações algébricas

Nas Tabelas A.1, A.2, A.3 e A.4, a seguir, são apresentados os coeficientes das equações resultantes do tratamento numérico das Equações de Conservação de Quantidade de Movimento e da Equação da Continuidade, representadas pela Equação A.1. Essa equação foi apresentada na Seção 4.7 deste trabalho, mas está reescrita a seguir para facilitar a visualização de seus coeficientes.

$$A_{\phi P} \cdot \phi_P = A_{\phi N} \cdot \phi_N + A_{\phi S} \cdot \phi_S + A_{\phi E} \cdot \phi_E + A_{\phi W} \cdot \phi_W + \\ A_{\phi F} \cdot \phi_F + A_{\phi B} \cdot \phi_B + \sum_j \sum_i A_{\varphi j, i} \cdot \varphi_{j, i} + B_{\phi} \quad (\text{A.1})$$

em que  $\phi$  é a variável principal,  $A$  são os termos que multiplicam as variáveis, o índice  $j$  indica as demais variáveis  $\varphi$  presentes,  $i$  são os volumes em que estas últimas são calculadas e  $B$  inclui os demais termos da equação.

Tabela A.1: Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção axial- EQMz.

Coeficiente	Variável	Valor
$A_{zP}$	$vz_P$	$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right] + \left( \frac{r_e}{r_P} \mu_e + \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + \left( \frac{1}{r_P^2} \mu_f + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + 2(\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{zN}$	$vz_N$	$\rho [-vz_n, 0] A_z + 2\mu_n \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{zS}$	$vz_S$	$\rho [vz_s, 0] A_z + 2\mu_s \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{zE}$	$vz_E$	$\rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r + \frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{zW}$	$vz_W$	$\rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r + \frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{zF}$	$vz_F$	$\rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha + \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{zB}$	$vz_B$	$\rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{zrN}$	$vr_N$	$\left( \frac{r_e}{r_P} \mu_e - \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{zrS}$	$vr_S$	$-\left( \frac{r_e}{r_P} \mu_e - \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{zrNE}$	$vr_{N,E}$	$\frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{zrSE}$	$vr_{S,E}$	$-\frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{zrNW}$	$vr_{N,W}$	$-\frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{zrSW}$	$vr_{S,W}$	$\frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha N}$	$v\alpha_N$	$\left( \frac{1}{r_P} \mu_f - \frac{1}{r_P} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha S}$	$v\alpha_S$	$-\left( \frac{1}{r_P} \mu_f - \frac{1}{r_P} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha NF}$	$v\alpha_{N,F}$	$\frac{1}{r_P} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha SF}$	$v\alpha_{S,F}$	$-\frac{1}{r_P} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha NB}$	$v\alpha_{N,B}$	$-\frac{1}{r_P} \mu_b \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{z\alpha SB}$	$v\alpha_{N,B}$	$\frac{1}{r_P} \mu_b \frac{A_\alpha}{4\Delta z}$
$A_{zPN}$	$P_N$	$-A_z$
$A_{zPP}$	$P_P$	$A_z$
$B_z$	-	$\rho v z_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \vec{g}_z \Delta V$

Tabela A.2: Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção radial - EQMr.

Coeficiente	Variável	Valor
$A_{rP}$	$vr_P$	$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right] + 2 \left( \frac{r_e}{r_P} \mu_e + \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + \left( \frac{1}{r_P^2} \mu_f + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + (\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z} + 2 \frac{\mu_P}{r_P^2} \Delta V$
$A_{rN}$	$vr_N$	$\rho [-vz_n, 0] A_z + \mu_n \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{rS}$	$vr_S$	$\rho [vz_s, 0] A_z + \mu_s \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{rE}$	$vr_E$	$\rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r + 2 \frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{rW}$	$vr_W$	$\rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r + 2 \frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{rF}$	$vr_F$	$\rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha + \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{rB}$	$vr_B$	$\rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{rzE}$	$vz_E$	$(\mu_n - \mu_s) \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{rzW}$	$vz_W$	$-(\mu_n - \mu_s) \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{rzEN}$	$vz_{E,N}$	$\mu_n \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{rzWN}$	$vz_{W,N}$	$-\mu_n \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{rzES}$	$vz_{E,S}$	$-\mu_s \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{rzWS}$	$vz_{W,S}$	$\mu_s \frac{A_z}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha P}$	$v\alpha_P$	$2\rho \frac{v\alpha_P^0}{r_P} \Delta V$
$A_{r\alpha E}$	$v\alpha_E$	$\left( \frac{1}{r_E} \mu_f - \frac{1}{r_E} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha W}$	$v\alpha_W$	$-\left( \frac{1}{r_W} \mu_f - \frac{1}{r_W} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha F}$	$v\alpha_F$	$-\mu_P \frac{1}{r_P^2} \Delta V$
$A_{r\alpha B}$	$v\alpha_B$	$\mu_P \frac{1}{r_P^2} \Delta V$
$A_{r\alpha EF}$	$v\alpha_{E,F}$	$\frac{1}{r_E} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha WF}$	$v\alpha_{W,F}$	$-\frac{1}{r_W} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha EB}$	$v\alpha_{E,B}$	$-\frac{1}{r_E} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{r\alpha WB}$	$v\alpha_{W,B}$	$\frac{1}{r_W} \mu_f \frac{A_\alpha}{4\Delta r}$
$A_{rPE}$	$P_E$	$-A_r$
$A_{rPP}$	$P_P$	$A_r$
$B_r$	-	$\rho vr_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{(v\alpha_P^0)^2}{r_P} \Delta V$

Tabela A.3: Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação de Quantidade de Movimento na direção angular - EQM $\alpha$ .

Coeficiente	Variável	Valor
$A_{\alpha P}$	$v\alpha_P$	$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right] + \left( \frac{r_e^3}{r_P^3} \mu_e + \frac{r_w^3}{r_P^3} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + 2 \left( \frac{1}{r_P^2} \mu_f + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + (\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z} + \rho \frac{vr_P^0}{r_P} \Delta V$
$A_{\alpha N}$	$v\alpha_N$	$\rho [-vz_n, 0] A_z + \mu_n \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{\alpha S}$	$v\alpha_S$	$\rho [vz_s, 0] A_z + \mu_s \frac{A_z}{\Delta z}$
$A_{\alpha E}$	$v\alpha_E$	$\rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r + \frac{r_e^3}{r_P^3} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{\alpha W}$	$v\alpha_W$	$\rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r + 2 \frac{r_w^3}{r_P^3} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r}$
$A_{\alpha F}$	$v\alpha_F$	$\rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha + 2 \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{\alpha B}$	$v\alpha_B$	$\rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha + 2 \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha}$
$A_{\alpha z F}$	$vz_F$	$(\mu_n - \mu_s) \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha z B}$	$vz_B$	$-(\mu_n - \mu_s) \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha z FN}$	$vz_{F,N}$	$\mu_n \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha z BN}$	$vz_{B,N}$	$-\mu_n \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha z FS}$	$vz_{F,S}$	$-\mu_s \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha z BS}$	$vz_{B,S}$	$\mu_s \frac{A_z}{4r_P \Delta \alpha}$
$A_{\alpha r P}$	$vr_P$	$-\rho \frac{v\alpha_P^0}{r_P} \Delta V + (\mu_f - \mu_b) \frac{A_\alpha}{r_P^2}$
$A_{\alpha r F}$	$vr_F$	$\left( \frac{r_e}{r_P^2} \mu_e - \frac{r_w}{r_P^2} \mu_w \right) \frac{A_r}{4\Delta \alpha} + \mu_f \frac{A_\alpha}{r_P^2}$
$A_{\alpha r B}$	$vr_B$	$-\left( \frac{r_e}{r_P^2} \mu_e - \frac{r_w}{r_P^2} \mu_w \right) \frac{A_r}{4\Delta \alpha} - \mu_b \frac{A_\alpha}{r_P^2}$
$A_{\alpha r FE}$	$vr_{F,E}$	$\frac{r_e}{r_P^2} \mu_e \frac{A_r}{4\Delta \alpha}$
$A_{\alpha r BE}$	$vr_{B,E}$	$-\frac{r_e}{r_P^2} \mu_e \frac{A_r}{4\Delta \alpha}$
$A_{\alpha r FW}$	$vr_{F,W}$	$-\frac{r_w}{r_P^2} \mu_w \frac{A_r}{4\Delta \alpha}$
$A_{\alpha r BW}$	$vr_{B,W}$	$\frac{r_w}{r_P^2} \mu_w \frac{A_r}{4\Delta \alpha}$
$A_{\alpha PF}$	$P_F$	$-A_\alpha$
$A_{\alpha PP}$	$P_P$	$A_\alpha$
$B_\alpha$	-	$\rho v\alpha_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{vr_P^0 v\alpha_P^0}{r_P} \Delta V$

Tabela A.4: Coeficientes da equação algébrica resultante do tratamento numérico da Equação da Continuidade.

Coeficiente	Variável	Valor
$A_{PzP}$	$vz_P$	$\frac{cd_P^z + cc_P^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z - \frac{A_z}{2}$
$A_{PzE}$	$vz_E$	$-\left( \frac{cd_E^z + cc_E^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cd_{z1}^r - cd_{z2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{PzW}$	$vz_W$	$-\left( \frac{cd_W^z + cc_W^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cd_{z1}^r - cd_{z2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{PzF}$	$vz_F$	$-\left( \frac{cd_F^z + cc_F^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cd_{z1}^\alpha - cd_{z2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PzB}$	$vz_B$	$-\left( \frac{cd_B^z + cc_B^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cd_{z1}^\alpha - cd_{z2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PzS}$	$vz_S$	$-\left( \frac{cd_S^z + cc_S^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{A_z}{2} \right)$
$A_{PzEN}$	$vz_{E,N}$	$-\left( \frac{cd_{z1}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{PzES}$	$vz_{E,S}$	$\frac{cd_{z2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{PzWN}$	$vz_{W,N}$	$\frac{cd_{z1}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{PzWS}$	$vz_{W,S}$	$-\left( \frac{cd_{z2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{PzFN}$	$vz_{F,N}$	$-\left( \frac{cd_{z1}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PzFS}$	$vz_{F,S}$	$\frac{cd_{z2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PzBN}$	$vz_{B,N}$	$\frac{cd_{z1}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PzBS}$	$vz_{B,S}$	$-\left( \frac{cd_{z2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PrP}$	$vr_P$	$\frac{cd_P^r + cc_P^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r - \frac{r _w}{r _P} \frac{A_r}{2} - \frac{cd_{rP2}^\alpha - cd_{rP1}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PrW}$	$vr_W$	$-\left( \frac{cd_W^r + cc_W^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r - \frac{r _w}{r _P} \frac{A_r}{2} \right)$
$A_{PrF}$	$vr_F$	$-\left( \frac{cd_F^r + cc_F^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r + \frac{cd_{rF}^\alpha + cd_{r1}^\alpha - cd_{r2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PrB}$	$vr_B$	$-\left( \frac{cd_B^r + cc_B^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r - \frac{cd_{rB}^\alpha + cd_{r1}^\alpha - cd_{r2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PrN}$	$vr_N$	$-\left( \frac{cd_N^r + cc_N^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r + \frac{cd_{r1}^z - cd_{r2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{PrS}$	$vr_S$	$-\left( \frac{cd_S^r + cc_S^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r - \frac{cd_{r1}^z - cd_{r2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{PrNE}$	$vr_{N,E}$	$-\left( \frac{cd_{r1}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{PrNW}$	$vr_{N,W}$	$\frac{cd_{r2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z$
$A_{PrSE}$	$vr_{S,E}$	$\frac{cd_{r1}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z$
$A_{PrSW}$	$vr_{S,W}$	$-\left( \frac{cd_{r2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{PrFE}$	$vr_{F,E}$	$-\left( \frac{cd_{r1}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$
$A_{PrFW}$	$vr_{F,W}$	$\frac{cd_{r2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PrBE}$	$vr_{B,E}$	$\frac{cd_{r1}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PrBW}$	$vr_{B,W}$	$-\left( \frac{cd_{r2}^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$

Coefficiente	Variável	Valor
$A_{P\alpha P}$	$v\alpha_P$	$\frac{cd_P^\alpha + cc_P^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha - \frac{1}{r _P} \cdot \frac{A_\alpha}{2} - \frac{cc_{\alpha P}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{P\alpha E}$	$v\alpha_E$	$-\left( \frac{cd_E^\alpha + cc_E^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha - \frac{cd_{\alpha 1}^r - cd_{\alpha 2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _E} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{P\alpha W}$	$v\alpha_W$	$-\left( \frac{cd_W^\alpha + cc_W^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha - \frac{cd_{\alpha 1}^r - cd_{\alpha 2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _W} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{P\alpha F}$	$v\alpha_F$	$\frac{cd_{\alpha F}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{P\alpha B}$	$v\alpha_B$	$-\left( \frac{cd_B^\alpha + cc_B^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha + \frac{1}{r _P} \cdot \frac{A_\alpha}{2} + \frac{cd_{\alpha B}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{P\alpha N}$	$v\alpha_N$	$-\left( \frac{cd_N^\alpha + cc_N^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha + \frac{cd_{\alpha 1}^z - cd_{\alpha 2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{P\alpha S}$	$v\alpha_S$	$-\left( \frac{cd_S^\alpha + cc_S^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha + \frac{cd_{\alpha 1}^z - cd_{\alpha 2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{P\alpha EF}$	$v\alpha_{E,F}$	$-\left( \frac{cd_{\alpha 1}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{P\alpha EB}$	$v\alpha_{E,B}$	$\frac{cd_{\alpha 2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{P\alpha WF}$	$v\alpha_{W,F}$	$\frac{cd_{\alpha 1}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{P\alpha WB}$	$v\alpha_{W,B}$	$-\left( \frac{cd_{\alpha 2}^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r \right)$
$A_{P\alpha NF}$	$v\alpha_{N,F}$	$-\left( \frac{cd_{\alpha 1}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{P\alpha NB}$	$v\alpha_{N,B}$	$\frac{cd_{\alpha 2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z$
$A_{P\alpha SF}$	$v\alpha_{S,F}$	$\frac{cd_{\alpha 1}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z$
$A_{P\alpha SB}$	$v\alpha_{S,B}$	$-\left( \frac{cd_{\alpha 2}^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z \right)$
$A_{PPP}$	$P_P$	$\frac{cP_N^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cP_E^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r + \frac{cP_F^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PPE}$	$P_E$	$\frac{cP_E^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r$
$A_{PPF}$	$P_F$	$\frac{cP_F^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha$
$A_{PPN}$	$P_N$	$\frac{cP_N^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z$
$B_P$	-	$-\left( \frac{cb^z}{cd_n^z + cc_n^z} \cdot A_z + \frac{cb^r}{cd_e^r + cc_e^r} \cdot \frac{r _e}{r _P} \cdot A_r + \frac{cb^\alpha}{cd_f^\alpha + cc_f^\alpha} \cdot \frac{1}{r _P} \cdot A_\alpha \right)$

em que,

$$cd_P^z = \left( \frac{r_e}{r_P} \mu_e + \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + \left( \frac{1}{r_P^2} \mu_f + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + 2(\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z}$$

$$cc_P^z = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right]$$

$$cd_n^z = 4 \cdot \mu_n \frac{A_z}{\Delta z} \quad cc_n^z = 2 \cdot \rho [-vz_n, 0] A_z$$

$$cd_E^z = \frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r} \quad cc_E^z = \rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r$$

$$cd_W^z = \frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r} \quad cc_W^z = \rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r$$

$$cd_F^z = \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} \quad cc_F^z = \rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha$$

$$cd_B^z = \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} \quad cc_B^z = \rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha$$

$$cd_S^z = 2 \cdot \mu_s \frac{A_z}{\Delta z} \quad cc_S^z = \rho [vz_s, 0] A_z$$

$$cd_{r1}^z = \frac{r_e}{r_P} \cdot \frac{\mu_e}{4 \cdot \Delta z} \cdot A_r \quad cd_{r2}^z = \frac{r_w}{r_P} \cdot \frac{\mu_w}{4 \cdot \Delta z} \cdot A_r$$

$$cd_{\alpha 1}^z = \frac{1}{r_P} \cdot \frac{\mu_f}{4 \cdot \Delta z} \cdot A_\alpha \quad cd_{\alpha 2}^z = \frac{1}{r_P} \cdot \frac{\mu_b}{4 \cdot \Delta z} \cdot A_\alpha$$

$$cP_N^z = A_z \quad cP_P^z = A_z$$

$$cb^z = \rho v z_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \vec{g}_z \Delta V$$

$$cd_P^r = \left( 4 \cdot \frac{r_e}{r_P} \mu_e + 2 \cdot \frac{r_w}{r_P} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + \left( \frac{1}{r_P^2} \mu_f + \frac{1}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + (\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z} + 2 \frac{\mu_P}{r_P^2} \Delta V$$

$$cc_P^r = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right]$$

$$cd_e^r = 4 \cdot \frac{r_e}{r_P} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r} \quad cc_e^r = 2 \cdot \rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r$$

$$cd_W^r = 2 \frac{r_w}{r_P} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r} \quad cc_W^r = \rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r$$

$$cd_F^r = \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} \quad cc_F^r = \rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha$$

$$cd_B^r = \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} \quad cc_B^r = \rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha$$

$$cd_N^r = \mu_n \frac{A_z}{\Delta z} \quad cc_N^r = \rho [-vz_n, 0] A_z$$

$$cd_S^r = \mu_s \frac{A_z}{\Delta z} \quad cc_S^r = \rho [vz_s, 0] A_z$$

$$cd_{z1}^r = \frac{\mu_n}{4 \cdot \Delta r} \cdot A_z \quad cd_{z2}^r = \frac{\mu_s}{4 \cdot \Delta r} \cdot A_z$$

$$cd_{\alpha 1}^r = \frac{\mu_f}{4 \cdot \Delta r} \cdot A_\alpha \quad cd_{\alpha 2}^r = \frac{\mu_b}{4 \cdot \Delta r} \cdot A_\alpha$$

$$cd\alpha_F^r = \frac{\mu_P}{r_P} \cdot \frac{1}{\Delta \alpha} \cdot \Delta V \quad cd\alpha_B^r = \frac{\mu_P}{r_P} \cdot \frac{1}{\Delta \alpha} \cdot \Delta V$$

$$cc_{\alpha P}^r = 2 \cdot v\alpha_P^0 \cdot \rho \cdot \frac{\Delta V}{r_P}$$

$$cP_E^r = A_r \quad cP_P^r = A_r$$

$$cb^r = \rho vr_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{(v\alpha_P^0)^2}{r_P} \Delta V$$

$$cd_P^\alpha = \left( \frac{r_e^3}{r_P^3} \mu_e + \frac{r_w^3}{r_P^3} \mu_w \right) \frac{A_r}{\Delta r} + \left( \frac{4}{r_P^2} \mu_f + \frac{2}{r_P^2} \mu_b \right) \frac{A_\alpha}{\Delta \alpha} + (\mu_n + \mu_s) \frac{A_z}{\Delta z}$$

$$cc_P^\alpha = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} + \rho \left[ \left( \frac{r_e}{r_P} [vr_e, 0] + \frac{r_w}{r_P} [-vr_w, 0] \right) A_r + \left( \frac{1}{r_P} [v\alpha_f, 0] + \frac{1}{r_P} [-v\alpha_b, 0] \right) A_\alpha + ([vz_n, 0] + [-vz_s, 0]) A_z \right]$$

$$\begin{aligned}
cd_f^\alpha &= 4 \cdot \frac{1}{r_P^2} \mu_f \frac{A_\alpha}{\Delta\alpha} \\
cd_E^\alpha &= \frac{r_e^3}{r_P^3} \mu_e \frac{A_r}{\Delta r} \\
cd_W^\alpha &= 2 \frac{r_w^3}{r_P^3} \mu_w \frac{A_r}{\Delta r} \\
cd_B^\alpha &= 2 \frac{1}{r_P^2} \mu_b \frac{A_\alpha}{\Delta\alpha} \\
cd_N^\alpha &= \mu_n \frac{A_z}{\Delta z} \\
cd_S^\alpha &= \mu_s \frac{A_z}{\Delta z} \\
cd_{z1}^\alpha &= \frac{1}{r_P} \cdot \frac{\mu_n}{4 \cdot \Delta\alpha} \cdot A_z \\
cd_{r1}^\alpha &= \frac{r_e}{r_P^2} \cdot \frac{\mu_e}{4 \cdot \Delta\alpha} \cdot A_r \\
cdr_{P1}^\alpha &= v\alpha_P^0 \frac{\Delta V \cdot \Delta t}{r_P} \\
cdr_F^\alpha &= \frac{\mu_f}{r_P^2} \cdot A_\alpha \\
cP_F^\alpha &= \frac{A_\alpha}{r_P} \\
cb^\alpha &= \rho v\alpha_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{vr_P^0 v\alpha_P^0}{r_P} \Delta V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cc_f^\alpha &= 2 \cdot \rho \frac{1}{r_P} [-v\alpha_f, 0] A_\alpha \\
cc_E^\alpha &= \rho \frac{r_e}{r_P} [-vr_e, 0] A_r \\
cc_W^\alpha &= \rho \frac{r_w}{r_P} [vr_w, 0] A_r \\
cc_B^\alpha &= \rho \frac{1}{r_P} [v\alpha_b, 0] A_\alpha \\
cc_N^\alpha &= \rho [-vz_n, 0] A_z \\
cc_S^\alpha &= \rho [vz_s, 0] A_z \\
cd_{z2}^\alpha &= \frac{1}{r_P} \cdot \frac{\mu_s}{4 \cdot \Delta\alpha} \cdot A_z \\
cd_{r2}^\alpha &= \frac{r_w}{r_P^2} \cdot \frac{\mu_w}{4 \cdot \Delta\alpha} \cdot A_r \\
cdr_{P2}^\alpha &= (\mu_f - \mu_b) \cdot \frac{A_\alpha}{r_P^2} \\
cdr_B^\alpha &= \frac{\mu_b}{r_P^2} \cdot A_\alpha \\
cP_P^\alpha &= \frac{A_\alpha}{r_P}
\end{aligned}$$