

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

Área de Concentração:

Desenvolvimento de Processos Químicos

**MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADOS À PROBLEMAS DE  
ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS NA REGIÃO DE ENTRADA DE  
DUTOS CILÍNDRICOS**

Por: LUIS ANTONIO RESENDE MUNIZ

Orientador: PROF. DR. MILTON MORI

Tese submetida à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Química - UNICAMP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Química.

Abril/1995

Campinas - SP



Esta versão corresponde à redação final da dissertação de mestrado, defendida por Luis Antonio Rezende Muniz e aprovada pela comissão julgadora em abril de 1995.



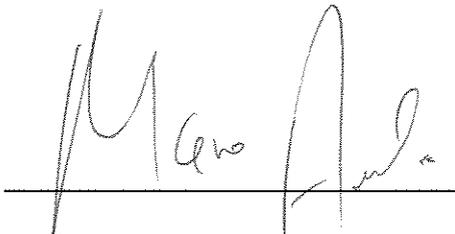
---

Prof. Dr. Milton Mori  
(orientador)

Tese defendida e aprovada, em 28 de abril de 1995, pela banca examinadora  
constituída pelos professores:

  
Prof. Dr. Milton Mori

  
Prof. Dr. Cláudio Augusto Oller Nascimento

  
Prof. Dr. Marco Aurélio Cremasco

Aos meus pais, pelo exemplo de  
perseverança e integridade sempre demonstrados.

## **Agradecimentos:**

Gostaria de agradecer o apoio sempre presente (mesmo quando à distância), dado pela minha família, em particular meus irmãos João e Ana Cláudia, Patrícia e minhas avós Antônia e Belinha.

Expresso meu profundo respeito e gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Milton Mori, que se mostrou compreensivo e amigo durante a minha permanência da UNICAMP.

Agradeço aos meus colegas do Laboratório de Modelagem e Simulação de Processos Químicos Ernesto, Daniel, Takeo, Jailson, José Antonio e Andréia, e em especial a Evandro Steffani pelo auxílio e discussões na fase inicial da tese e a Henry Meier pela grande contribuição prestada na fase final do trabalho. Meu muito obrigado ao meu “xará” Luis Antonio Menin pelo “eternos” esclarecimentos sobre o uso do sistema UNIX.

A Ana Rosa pelo amor e compreensão.

Um agradecimento especial àqueles do convívio mais íntimo, nas duas “repúblicas” por onde passei; Lurdinha e Mônica; Daiton e Ana Cláudia, além de Sandra e Rosana, que tiveram que me “suportar” nos momentos difíceis.

Agradeço ainda àqueles que contribuíram de forma direta ou indireta ao andamento do trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	01
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	05
2.1. O Escoamento na Região de Entrada de Dutos .....	05
2.1.1. Soluções analíticas .....	06
2.1.2. Trabalhos experimentais .....	07
2.1.3. Soluções numéricas .....	08
2.2. O Método dos Volumes Finitos .....	10
3. MODELAGEM MATEMÁTICA .....	13
3.1. Situação Física .....	13
3.2. A Conservação da Massa .....	14
3.3. A Conservação da Quantidade de Movimento .....	15
3.4. Condições de Contorno .....	15
3.4.1. Velocidade axial .....	16
3.4.2. Velocidade radial .....	17
3.4.3. Pressão .....	17
3.5. Adimensionalização do Sistema de Equações .....	19
4. O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS .....	23
4.1. O Método Numérico .....	23
4.2. Discretização da Equação da Continuidade .....	25
4.3. Discretização da Equação do Momento .....	27
4.3.1. Direção axial .....	27
4.3.2. Direção radial .....	30
4.4. Considerações sobre a Malha Deslocada .....	31
4.5. Esquemas de Interpolação .....	32
4.5.1. Diferença central .....	32
4.5.2. <i>Upwind</i> .....	36
4.5.3. Solução exata .....	39

4.5.4. O esquema exponencial .....	41
4.5.5. O esquema híbrido .....	44
4.5.6. Lei de potência .....	46
4.5.7. Forma generalizada .....	47
4.6. Substituição das Condições de Contorno .....	49
4.6.1. A entrada do tubo .....	50
4.6.2. A parede do tubo .....	50
4.6.3. A condição de simetria .....	50
4.6.4. A saída do tubo .....	54
5. O ALGORITMO SIMPLE .....	55
5.1. O Acoplamento Pressão-Velocidade .....	56
5.2. A Equação de Correção para Pressão .....	58
5.2.1. Discursão da equação de correção para pressão .....	62
6. SIMULAÇÃO .....	64
6.1. Geração da Malha .....	64
6.1.1. A função objetivo .....	66
6.2. Escolha do Esquema de Interpolação .....	69
6.3. As Vantagens da Adimensionalização .....	71
6.4. Simulações .....	73
6.4.1. Análise das simulações .....	73
6.4.1.1. a condição de contorno .....	84
6.4.1.2. propostas de correlações para o comprimento de entrada .....	86
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	91

APÊNDICE I: O MÉTODO DA T.D.M.A.

APÊNDICE II: O ALGORITMO COMPLEX

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## NOMENCLATURA:

- a - coeficiente da equação axial do momento na forma discretizada;  
A - coeficiente generalizado para o termo difusivo;  
b - coeficiente da equação radial do momento na forma discretizada;  
c - coeficiente da equação para correção da pressão;  
d - difusividade;  
D - diâmetro do tubo;  
Erro - erro relativo percentual médio  
F - fluxo de massa;  
FO - função objetivo;  
FR - fator de concentração da malha na direção radial;  
FZ - fator de concentração da malha na direção axial;  
J - fluxo total;  
L - comprimento do tubo;  
Le - comprimento de entrada;  
NI - número de iterações;  
NPT - número de pontos totais da malha;  
NR - número de pontos da malha na direção radial;  
NZ - número de pontos da malha na direção axial;  
p - pressão;  
P - número de Peclet  $P = \frac{\rho u L}{\mu}$ ;  
p\* - pressão adimensional;  
p' - correção de pressão;  
r - posição radial;  
R - raio do tubo;  
Re - número de Reynolds  $Re = \frac{\rho u_o D}{\mu}$ ;  
r\* - posição radial adimensional;  
Sc - coeficiente linear do termo fonte;  
Sp - coeficiente angular do termo fonte;  
t - tempo;  
u - componente axial de velocidade;  
u<sub>o</sub> - velocidade média do escoamento;

- $u_{\infty}$  - componente axial de velocidade fora da camada limite;
- $u^*$  - velocidade axial adimensional ou estimada;
- $v$  - componente radial de velocidade;
- $v^*$  - velocidade radial adimensional ou estimada;
- $z$  - posição axial;
- $z^*$  - posição axial adimensional;
- $\alpha$  - fator de relaxação para a componente axial de velocidade;
- $\beta$  - função da posição axial;
- $\Delta r$  - distância radial entre dois pontos da malha para a variável considerada;
- $\Delta z$  - distância axial entre dois pontos da malha para a variável considerada;
- $\phi$  - variável genérica sobre a qual se faz um balanço de conservação;
- $\mu$  - viscosidade absoluta;
- $\nu$  - viscosidade cinemática;
- $\rho$  - massa específica;
- $\sigma$  - posição axial adimensional universal  $\sigma = \frac{2z}{Re D}$ ;

## **RESUMO**

Neste trabalho é feito um estudo do método dos volumes finitos, no que se refere às suas características e particularidades. É feita uma abordagem rigorosa para a condição de simetria e faz-se uma comparação com o procedimento convencional. É feita uma análise de diversos esquemas de interpolação, através de simulações e aponta-se o melhor entre eles, para o caso em consideração. O problema físico em questão é o desenvolvimento da camada limite na região de entrada de tubos de seção transversal circular, para escoamento em regime laminar. São obtidos os comprimentos de entrada para uma vasta faixa de números de Reynolds, porém mantido em escoamento laminar. Os resultados obtidos são comparados com o de outros autores. São propostas algumas correlações para se obter o comprimento de entrada em função do número de Reynolds, provando-se a não validade das diversas correlações lineares propostas. Um método de otimização (COMPLEX) é utilizado para a determinação dos parâmetros da malha a ser utilizada.

### **Palavras Chaves:**

Volumes Finitos - Simple - Camada Limite - Comprimento de Entrada - Complex.

# CAPÍTULO 1

## 1. INTRODUÇÃO

Os problemas em mecânica dos fluidos, em geral, envolvem escoamentos cujas condições não mudam ao longo do seu eixo. Para estas condições, encontram-se na literatura métodos adequados para avaliar e prever os parâmetros significativos.

Em muitos sistemas reais estas condições nem sempre são obtidas. No caso de escoamentos na região de entrada de dutos cilíndricos, uma camada limite se forma na superfície interna do tubo e vai ocupando partes cada vez maiores da área de escoamento, à medida que os valores de  $z$  vão aumentando (vide figura 1.1). Em algum valor de  $z$  a camada limite ocupa toda a área. O perfil de velocidades, a partir deste ponto, não muda ao longo do eixo e o escoamento é dito ser completamente desenvolvido. A distância entre a entrada do tubo até o ponto em que o perfil de velocidade está completamente desenvolvido é denominado de comprimento de entrada e simbolizado como  $L_e$ . Observe que a velocidade do fluido fora da camada limite aumenta com  $z$ , como é requerido para satisfazer a equação da continuidade, uma vez que o fluido vai progressivamente sentindo o efeito da parede e sua velocidade vai diminuindo nas regiões adjacentes a ela. A velocidade no centro do tubo, finalmente, atinge o valor de  $2 u_0$  para escoamento laminar completamente desenvolvido. O comprimento de entrada adimensional foi expresso, inicialmente, como uma função linear com o número de Reynolds, primeiro por Boussinesq (1981)

$$\frac{Le}{D} = 0.03 Re \quad (1.1)$$

e depois por Langhaar (Langhaar 1942) como

$$\frac{Le}{D} = 0.0575 x Re \quad (1.2)$$

onde D representa o diâmetro interno do tubo.

O presente trabalho tem como objetivo aplicar o método dos volumes finitos ao escoamento de um fluido na região de entrada de um tubo de comprimento infinito, para escoamento laminar. Entende-se por comprimento infinito como um comprimento axial do tubo muito maior que o seu diâmetro e que garante o regime de escoamento completamente desenvolvido na sua saída. Utilizou-se na modelagem as equações da continuidade e de Navier-Stokes, utilizando-se o método dos volumes finitos para a discretização das equações diferenciais. Para a solução do conjunto de equações algébricas geradas pela discretização das equações diferenciais utilizou-se o método da T.D.M.A. (*Tri Diagonal-Matrix Algorithm*). Existe a necessidade de se utilizar técnicas de relaxação para a obtenção de convergência no processo. Foi utilizado o algoritmo SIMPLE (Patankar 1980) para a solução do problema.

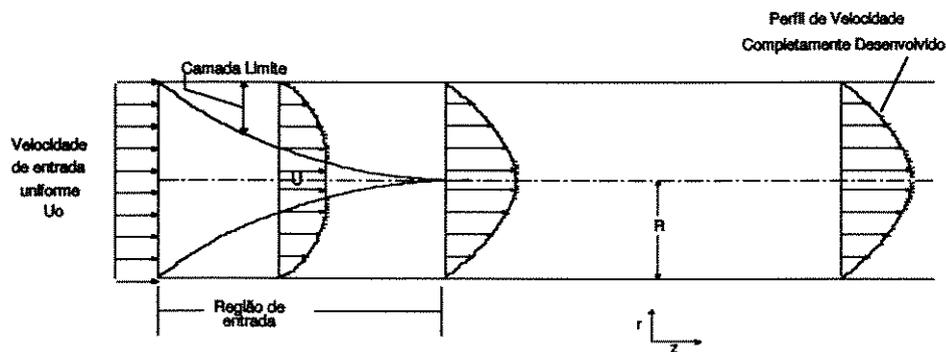


Figura 1.1 - Modelo físico do escoamento na região de entrada de tubo.

Dentre os principais objetivos do trabalho destacam-se:

- I. Estudo do método dos volumes finitos aplicado a problemas de escoamento bidimensionais;
- II. Estudo da influência dos diversos esquemas de interpolação utilizados na discretização das equações;

- 
- III. Proposição de uma metodologia mais rigorosa, aplicada ao método dos volumes finitos, para substituição da condição de simetria;
  - IV. Aplicação do método de otimização COMPLEX (Box 1965) para determinação dos parâmetros da malha;
  - V. Obtenção do comprimento de entrada para diversos números de Reynolds e comparação destes com os da literatura;
  - VI. Proposição de correlações para predição do comprimento de entrada, com validade para o regime laminar.

No capítulo 2 será apresentada uma rápida revisão bibliográfica dos trabalhos envolvendo resoluções do problema físico em questão e as diversas formas de abordagem ao caso, assim como um breve histórico do método dos volumes finitos.

O capítulo 3 traz a modelagem matemática desenvolvida para atacar o problema, com as equações da continuidade e do movimento, assim como as condições de contorno pertinentes.

No capítulo 4, o método dos volumes finitos é apresentado e ele é aplicado para o problema. Os esquemas de interpolação também são introduzidos e analisados desde o seu desenvolvimento.

O acoplamento entre pressão e velocidade para que se possa utilizar as três equações para as três variáveis desconhecidas ( $p$ ,  $u$  e  $v$ ) e o algoritmo SIMPLE vêm apresentados no capítulo 5.

O capítulo 6 traz os resultados obtidos por simulação, sendo apresentados os perfis de velocidades axial e radial, bem como os perfis de pressão, para alguns casos representativos escolhidos.

## **CAPÍTULO 2**

### **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Este capítulo está dividido em duas partes, a primeira das quais trata do problema do escoamento na região de entrada de tubos com conformação geométrica cilíndrica e de seção transversal uniforme. Neste ponto, são revistas soluções apresentadas com abordagens analíticas, experimentais e numéricas. Na segunda parte é feita uma revisão bibliográfica envolvendo o método dos volumes finitos, seu desenvolvimento e algumas aplicações.

#### **2.1. O ESCOAMENTO NA REGIÃO DE ENTRADA DE DUTOS**

Mais uma vez, será feita uma subdivisão deste tópico em três outros, diferenciando o tipo de tratamento dado ao problema, analítico, experimental ou numérico.

Muitos trabalhos têm sido apresentados, principalmente a partir do final da década de 60, com o avanço tecnológico dos computadores. "Em vista da importância técnica de escoamento em dutos, tem havido um interesse considerável na determinação detalhada da natureza do desenvolvimento do escoamento na região de entrada. Entretanto, mesmo para condições laminares, o problema da velocidade para a região de entrada não permite uma solução exata. As dificuldades na análise são devidas às não-linearidades dos termos de inércia, os quais aparecem na equação do movimento" (Sparrow, 1964). Em vista disto, várias aproximações são propostas, permitindo uma solução analítica para o problema.

### 2.1.1. Soluções Analíticas

O primeiro tratamento teórico sobre o assunto data de 1891, e foi realizado por Boussinesq, o qual propôs que a solução fosse obtida via séries de perturbações da distribuição de velocidade do escoamento completamente desenvolvido (Sparrow, 1964). Convém porém, realizar uma última subdivisão, separando as diversas formas de aproximações analíticas em três classes:

(a) Neste método de análise aplica-se a representação integral das equações da continuidade e do movimento à camada limite, que se desenvolve ao longo das paredes do tubo. O perfil de velocidade é escrito como um polinômio, de acordo com o método padrão de Karman-Pohlhausen. Esta aproximação foi feita primeiro por Schiller e depois por Campbell e Slattery (Sparrow, 1964).

(b) Uma segunda aproximação subdivide a região de entrada em duas zonas. Na zona perto da entrada do tubo um modelo da camada limite é proposto. Na zona afastada da entrada do tubo uma solução é obtida via séries de perturbações do perfil de velocidade da região completamente desenvolvida. Asthana e Mohanty (Asthana, 1978) utilizou-se de tal procedimento.

(c) A outra forma de se atacar o problema fundamenta-se na linearização dos termos de inércia da equação do movimento. Com isto, o modelo da camada limite não precisa ser postulado. As soluções para velocidade assim obtidas são contínuas através da seção transversal e ao longo de todo o comprimento, desde a entrada até a região completamente desenvolvida. Langhaar (Langhaar 1942) foi o primeiro a apresentar tal tipo de abordagem. Ele considera que a pressão é uma função da variável axial apenas. Além disto, ele despreza o termo de dispersão axial, além de desprezar completamente a componente radial de velocidade. O termo inercial da equação do momento é linearizado por

sendo  $\beta$  uma função apenas da posição axial.

Esta expressão para linearização é válida nos seguintes pontos:

$$\frac{Du}{Dt} = \nu \beta^2 u$$

- 1) Para  $\beta=0$ , tem-se o regime completamente desenvolvido;
- 2) Na parede, independente de  $\beta$ , a equação é satisfeita, uma vez que  $u$  e  $Du/Dt$  são nulos;
- 3) A equação é satisfeita em qualquer ponto do centro do tubo, onde

$$\frac{du}{dz} = \nu \beta^2$$

- 4) A equação é satisfeita em todos os pontos da entrada, onde a espessura da camada limite tende a zero.

Ela não é válida, porém, dentro da camada limite.

Desta forma, o perfil de velocidades resultante é obtido através de famílias de funções de Bessel.

Mais tarde, Sparrow et al. (Sparrow 1964) também propuseram um método de linearização para a equação do movimento. As aproximações devidas a este último são semelhantes às de Langhaar, porém a forma de linearização é mais razoável, sendo válida para toda a faixa do escoamento. Este procedimento, porém, exige um tratamento matemático muito "pesado", sendo a solução de Langhaar mais fácil de ser reproduzida, além de apresentar bons resultados, sob o ponto de vista qualitativo.

### 2.1.2. Trabalhos Experimentais

As informações mais confiáveis a cerca de um processo físico, em geral, são obtidas através de medidas experimentais. Deve-se lembrar porém, que os instrumentos de medidas não são livres de erros e que neste problema pequenos desvios no valor da velocidade, muda, de forma significativa, o valor do comprimento de entrada. Na literatura foi encontrado apenas

referências aos trabalhos experimentais, sendo o mais difundido, aquele referente a Nikuradse(Tietjens, 1934).

### 2.1.3. Soluções Numéricas

Uma predição teórica é muito mais consequência de um modelo matemático do que de um modelo físico. No problema em questão, o modelo matemático consiste de um conjunto de equações diferenciais parciais, não-lineares, cujos métodos da matemática clássica não permitem resolver de uma forma rigorosa. Além do mais, estas soluções contêm séries infinitas, funções especiais, etc., tal que sua avaliação numérica pode exigir um considerável esforço computacional. Foi utilizado o "software" ISIM, que resolve equações diferenciais ordinárias, via Euler ou Runge-Kutta de 4a ordem, para reproduzir o artigo de Asthana e Monthany (Asthana, 1978). Foi necessário cerca de 20 horas para completar a simulação, para um único caso, em um Pc-486, 33 mHz.

Felizmente o desenvolvimento de métodos numéricos e a disponibilidade e evolução dos computadores, mantêm a "promessa" da implicação de que um modelo matemático pode resolver a maioria dos problemas práticos. Uma idéia preliminar de uma solução numérica pode ser

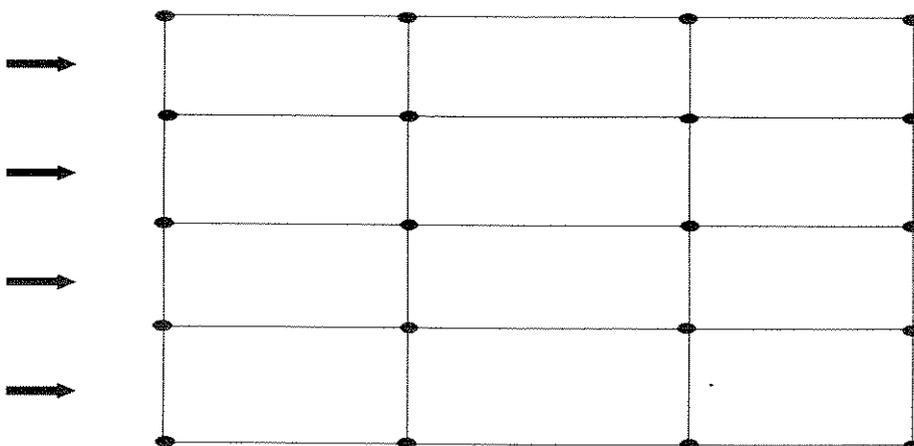


Figura 2.1 - Representação de uma malha para solução numérica.

obtida através da figura 2.1.

Suponha que é desejado conhecer o campo de velocidade no domínio apresentado. Pode ser suficiente conhecer os valores das velocidades em pontos discretos do domínio. Um método possível é imaginar uma malha que preencha todo o domínio e obter os valores da velocidade nos pontos da malha. Pode-se, então, construir e resolver equações algébricas para estas velocidades desconhecidas. As simplificações inerentes ao uso de equações algébricas, ao invés de equações diferenciais é que fazem dos métodos numéricos uma poderosa ferramenta para a solução de equações diferenciais.

Diversos trabalhos apresentam a solução do problema por via numérica. Friedmann et al (Friedmann, 1968) utilizam um método de diferenças finitas para resolver o escoamento laminar na região de entrada de tubos. Na sua modelagem não são utilizadas as variáveis primitivas e sim a vorticidade.

Atkinson et al (Atkinson, 1969) usam um método de elementos finitos para escoamentos a baixos números de Reynolds. Na modelagem ele parte da fundamentação de que a dissipação viscosa deve ser mínima para escoamentos lentos.

Del Giudice (Del Giudice, 1979) e Dombrowski et al (Dombrowski, 1993) resolvem a equação completa de Navier-Stokes usando métodos de elementos finitos. Goldberg e Folk (Goldberg 1988) e Mehrotra e Patience (Mehrotra, 1990) usam métodos de diferenças finitas, para o mesmo caso, sendo que este último estende a modelagem para fluidos não-newtonianos. Steffani (Steffani, 1993) resolveu o problema através do método de colocação ortogonal em elementos finitos.

O problema de escoamento na região de entrada de dutos não tem sido estudado apenas sob o prisma industrial, mas também "como um importante veículo para a evolução e avaliação de procedimentos de solução numérica para equações diferenciais parciais, não-lineares, por exemplo, a equação de Navier-Stokes" (Atkinson, 1969). No presente trabalho, o método dos volumes finitos é aplicado, podendo-se com isto realizar um estudo detalhado do mesmo.

---

## 2.2. O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

O método dos volumes finitos é uma classe do método de diferenças finitas. O domínio de cálculo é subdividido em um número de volumes de controle. As equações discretizadas representam a conservação integral através de cada volume de controle.

As principais características do método dos volumes finitos são a simplicidade da derivação e a facilidade com que as equações discretizadas podem ser interpretadas em termos físicos. A equação diferencial básica expressa um balanço através de um volume de controle infinitesimal; a equação discretizada pelo método dos volumes finitos é simplesmente a representação finita da equação diferencial.

O método começou a ser difundido em 1972, com o artigo publicado por Patankar e Spalding (Patankar, 1972). Ainda neste artigo, o método é tratado como um método de diferenças finitas, com uma formulação via volumes de controle. O principal propulsor do desenvolvimento do método foi a escassez de procedimentos de cálculo para escoamentos tridimensionais. Miller (Miller, 1971) descreveu tal procedimento, mas não incorporou as vantagens das particularidades do escoamento parabólico<sup>1</sup>, tornando-se desnecessariamente complexo e requerendo um excessivo esforço computacional.

Em problemas de escoamento têm-se como variáveis dependentes pressão e velocidade. Em (Patankar, 1972) obtém-se a pressão através de combinações entre a equação da continuidade e do movimento, sendo este jogo de variáveis e equações denominado de acoplamento pressão-velocidade. No algoritmo SIMPLE, este acoplamento permite o cálculo da pressão em todas as direções. Em (Patankar, 1972) porém, apenas as variações laterais da pressão são calculadas pelo acoplamento pressão-velocidade. A queda de pressão na direção do fluxo principal é feita

---

<sup>1</sup>No escoamento parabólico:

- a) Existe uma direção de fluxo predominante, isto é, nesta direção não ocorre fluxo reverso;
- b) a difusão de momento, calor, massa, etc, nesta direção é desprezível;
- c) o campo de pressão posterior ao escoamento tem pouca importância nas condições do escoamento anterior (no espaço)

baseando-se no mesmo procedimento realizado no modelo da camada limite. Esta é uma consequência de se explorar a natureza parabólica do escoamento.

Como será visto em detalhes no capítulo 4, no procedimento sugerido por Patankar, utiliza-se um artifício que é o deslocamento das malhas. Desta forma pressão e velocidades são calculados em pontos distintos da malha. Com isto evita-se que no cálculo iterativo, ocasionalmente, a pressão apresente um comportamento oscilatório e que mesmo assim, o campo de velocidade resultante satisfaça a equação da continuidade. É que o gradiente de pressão, na equação do momento, é calculada por pontos alternados da malha, no caso de não deslocamento. Como a queda de pressão na direção principal do escoamento é calculada "fora" do procedimento, não existe a necessidade de deslocamento da componente de velocidade nesta direção. Este deslocamento só aparece em (Patankar, 1981). Neste artigo o algoritmo SIMPLE<sup>2</sup> é apresentado, juntamente com uma nova versão para ele, o SIMPLER. A diferença fundamental entre o SIMPLE e o SIMPLER, assim como diversos outros algoritmos propostos (PISO (Jang, 1986), SIMPLEC (Doormaal, 1984), etc.) é a maneira pela qual se dá o acoplamento pressão-velocidade.

Uma outra característica do método dos volumes finitos é que a sua solução tende a ser sempre iterativa. Na verdade, o procedimento numérico para se resolver equações diferenciais parciais, em dinâmica dos fluidos, tendem a ser iterativas por três principais razões:

- a) As equações são não-lineares;
- b) a pressão mantém as equações da continuidade e do momento fortemente ligadas;
- c) uma solução direta das equações discretizadas, mesmo quando lineares, consomem muito tempo.

Por tanto, Patankar tenta, já na formulação, forçar o procedimento a ser iterativo:

- a) As não-linearidades da equação do momento são introduzidas em coeficientes que multiplicam as velocidades nos respectivos pontos, sendo os coeficientes calculados por valores da iteração anterior;
- b) no acoplamento da pressão com a velocidade, usam-se formas aproximadas da equação do

---

<sup>2</sup>O algoritmo SIMPLE será discutido em detalhes no capítulo 5.

momento;

c) a solução das equações discretizadas são obtidas por dois passos do método da T.D.M.A<sup>3</sup>.

Estas três "jogadas" de Patankar introduzem alguns erros quando comparados com a solução direta. Estes erros, porém, são do mesmo tipo que qualquer erro de truncamento em diferenças finitas, em geral até menor (Leonard, 1994), e pode ser reduzido a um nível aceitável pelo uso de pequenos passos.

---

<sup>3</sup>O método da T.D.M.A. é apresentado no apêndice I.

## CAPÍTULO 3

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA

#### 3.1. SITUAÇÃO FÍSICA

O problema físico a ser modelado trata do escoamento de um fluido através de um tubo liso em escoamento laminar. Neste capítulo faz-se a modelagem matemática e as condições de contorno são apresentadas. Na entrada do tubo tem-se um perfil uniforme de velocidade. Este perfil vai se modificando ao longo do eixo de escoamento devido à condição de não deslizamento na superfície sólida (paredes do tubo) e ao aumento da velocidade no centro, de forma a satisfazer à conservação da massa. Uma camada limite vai se formando e ocupando áreas de escoamento cada vez maiores. Esta mudança ocorre até que se atinja o comprimento  $Le$ , a partir do qual, diz-se que o fluido está em escoamento laminar completamente desenvolvido<sup>1</sup> e o perfil é o bem conhecido perfil parabólico (Bird, 1960 ),

$$u = \frac{Re\mu}{\rho R} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

neste ponto a camada limite ocupa toda a área de escoamento e este comportamento pode ser visto na figura 3.1.

Para um escoamento isotérmico e sem grandes quedas de pressão pode-se considerar o fluido como sendo incompressível e com viscosidade constante. O escoamento é axisimétrico e permanente. Baseando-se nestas hipóteses, o modelo matemático para este caso já está bem desenvolvido na literatura (Bird, 1960) de forma que o seu desenvolvimento torna-se desnecessário.

---

<sup>1</sup>O comprimento de entrada é determinado quando a velocidade na linha de centro atinge 99% da velocidade máxima, ou seja,  $1.98 u_0$ .

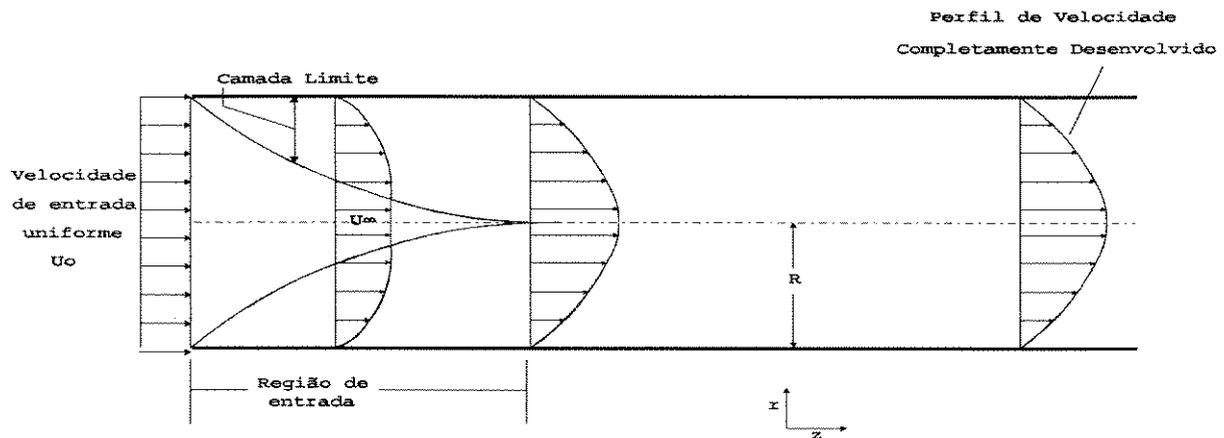


Figura 3.1 - Modelo físico da região de entrada no tubo.

### 3.2. A CONSERVAÇÃO DA MASSA

O balanço de massa aplicado ao sistema, no qual se obtém a equação da continuidade fornece, em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial}{\partial z}(u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \tag{3.2}$$

e o seu desenvolvimento encontra-se em qualquer livro básico de mecânica dos fluidos (Bird, ), não sendo pois necessário deter-se nela.

### 3.3. A CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

As equações de conservação da quantidade de movimento ou momento, seguem a conhecida equação de Navier-Stokes. Para coordenadas cilíndricas e na direção axial tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho uu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v u) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.3)$$

para a direção radial

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v v) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (3.4)$$

### 3.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO

O sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, gerado pelos balanços de massa e da quantidade de movimento, exige um número de condições de contorno diferente para cada variável, dependendo da ordem da equação diferencial em relação à variável analisada, a fim de que ele possa ser resolvido satisfatoriamente.

Para a componente axial de velocidade são necessárias duas condições de contorno para a coordenada axial e duas para a coordenada radial. Números de condições de contorno semelhantes são requeridas pela velocidade radial. A pressão, entretanto, requer uma condição

de contorno para cada coordenada,

### 3.4.1. Componente axial de velocidade

As condições de contorno para a velocidade axial são facilmente estabelecidas:

1. A velocidade de entrada é fixada pelo número de Reynolds e como neste ponto apenas a velocidade axial contribui com a vazão, em  $z = 0$  a velocidade axial é conhecida para todo o raio, sendo a própria velocidade média ( $u = u_0$ );
2. Na saída, o escoamento é completamente desenvolvido e portanto não existem mudanças no seu perfil ao longo do eixo axial, ou seja, a derivada parcial da velocidade axial em relação à coordenada axial é nula ( $du/dz = 0$ );
3. Na parede do tubo, de acordo com a condição de não deslizamento em superfícies sólidas, a velocidade é zero ( $u = 0$ );
4. De acordo com a condição de simetria, a derivada parcial da velocidade axial em relação à coordenada radial, no centro do tubo, é zero ( $du/dr = 0$ ).

Desta forma, as exigências quanto às condições de contorno para a velocidade axial estão satisfeitas.

### 3.4.2. Componente radial de Velocidade

As condições de contorno para a velocidade radial são:

1. Na entrada do tubo existe apenas a velocidade axial, portanto o valor da velocidade radial é zero ( $v = 0$ );
2. Na saída do tubo, o perfil se encontra completamente desenvolvido e requer velocidade radial nula ( $v = 0$ );
3. Na parede do tubo, pela condição de não deslizamento, a velocidade radial também é zero ( $v = 0$ );
4. No centro do tubo assume-se que a velocidade radial vale zero. Esta consideração baseia-se em diversos trabalhos apresentados na literatura (Asthana 1978, Dombrowski 1993). Existe também uma conveniência numérica ao se assumir tal condição de contorno, o que será avaliado mais adiante ( $v = 0$ ).

### 3.4.3. Pressão

A pressão requer apenas duas condições de contorno, sendo uma para cada coordenada:

1. A pressão na entrada do tubo tem seu valor fixado. Na verdade, o que importa para cálculos de escoamento incompressível é o valor da queda de pressão e não o seu valor absoluto, de forma que este valor da pressão na entrada pode ser um número qualquer, para fins de cálculo ( $p = p_0$ );

2. No centro do tubo utiliza-se a condição de simetria e portanto a derivada da pressão em relação à coordenada radial vale zero para todas as posições axiais ( $dp/dr = 0$ ).

A tabela 3.1 traz um resumo das condições de contorno.

**Tabela 3.1** - Condições de contorno.

<i>Em <math>r=0</math>;</i>	<i>em <math>r=R</math>;</i>	<i>em <math>z=0</math>;</i>	<i>em <math>z=L</math></i>
$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$	$u = 0$	$u = u_o$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
$v = 0$	$v = 0$	$v = 0$	$v = 0$
$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$	-	$p = p_o$	-

Tem-se portanto um sistema de três equações diferenciais e três incógnitas  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Este sistema de equações não permite solução analítica exata devido às não linearidades presentes. Será utilizado o método dos volumes finitos para integrar as equações através de volumes de controle, gerando com isto equações discretizadas, que serão equações algébricas e resolvidas pelo método da TDMA.

Antes, porém, é conveniente adimensionalizar as três equações do sistema, por vantagens computacionais (precisão da máquina) e de simulação (estudo paramétrico).

### 3.5. ADIMENSIONALIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para efetuar a adimensionalização começa-se definindo as seguintes variáveis:

$$\begin{array}{lll}
 1. r^* = r/R & \Rightarrow & r = r^* R \\
 2. z^* = z/R & \Rightarrow & z = z^* R \\
 3. u^* = u/u_0 & \Rightarrow & u = u^* u_0 \\
 4. v^* = v/u_0 & \Rightarrow & v = v^* u_0 \\
 5. p^* = p/(\rho u_0^2) & \Rightarrow & p = \rho u_0^2 p^*
 \end{array}$$

#### EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial}{\partial z}(u) = 0 \quad (3.2)$$

Utilizando as variáveis adimensionais:

$$\frac{1}{r^* R} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* R u_0 v^*) + \frac{\partial}{\partial z^*}(u^* u_0) = 0 \quad (3.5)$$

simplificando,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (u^*) = 0 \quad (3.6)$$

### EQUAÇÃO DO MOMENTO AXIAL

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (3.3)$$

Substituindo as variáveis adimensionais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{R \partial z^*} (\rho u_o^2 u^* u^*) + \frac{1}{R r^*} \frac{\partial}{R \partial r^*} (\rho R r^* u_o^2 v^* u^*) &= -\frac{\rho u_o^2}{R} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ &+ \left[ \frac{\partial^2 (\mu u_o u^*)}{R^2 \partial z^{*2}} + \frac{1}{R r^*} \frac{\partial}{R \partial r^*} \left( \mu R r^* \frac{\partial}{R \partial r^*} (u_o u^*) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

rearrumando os termos,

$$\begin{aligned} \frac{\rho u_o^2}{R} \frac{\partial}{\partial z^*} (u^* u^*) + \frac{\rho u_o^2}{R} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^* u^*) &= -\frac{\rho u_o^2}{R} \left( \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 \left( \frac{\mu u_o}{R^2} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right)}{\partial z} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\mu u_o}{R^2} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Multiplicando a equação (3.8) por  $R^2/(\mu u_o)$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u_o R}{\mu} \frac{\partial}{\partial z^*} (u^* u^*) + \frac{\rho u_o R}{\mu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^* u^*) = - \frac{\rho u_o R}{\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \\ + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou melhor,

$$Re \frac{\partial}{\partial z^*} (u^* u^*) + Re \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^* u^*) = - Re \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (3.10)$$

### EQUAÇÃO DO MOMENTO RADIAL

O mesmo pode ser aplicado para a equação do momento na direção radial. Considerando-se dispensável o desenvolvimento de mais uma adimensionalização. A equação final é apresentada de imediato,

$$Re \frac{\partial}{\partial z^*} (u^* v^*) + Re \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r v^* v^*) = - Re \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) \quad (3.11)$$

Precisa-se, agora, redefinir as condições de contorno, para as variáveis adimensionais. Esta mudança de variáveis é feita de imediato através das suas definições, sendo os resultados apresentados na tabela 3.2.

As vantagens de tal procedimento serão apresentadas no capítulo 6.

Serão suprimidos os asteriscos para as variáveis adimensionais, com o objetivo de tornar as equações mais concisas.

**Tabela 3.2** - Condições de contorno para as variáveis adimensionais

<i>Em <math>r^*=0</math>;</i>	<i>em <math>r^*=1</math>;</i>	<i>em <math>z^*=0</math>;</i>	<i>em <math>z^*=L/R</math></i>
$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} = 0$	$u^* = 0$	$u^* = 1$	$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0$
$v^* = 0$	$v^* = 0$	$v^* = 0$	$v^* = 0$
$\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0$	-	$p^* = \frac{P_o}{\rho u_o^2}$	-

## CAPÍTULO 4

### 4. O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Como já foi dito, a solução numérica de uma equação diferencial consiste em fornecer resultados para determinados pontos do domínio de cálculo, denominados de pontos da malha. "Desta forma, substitui-se a informação contínua, contida na solução exata da equação diferencial, por valores discretos. Assim, discretiza-se a distribuição da variável dependente e é apropriado referir-se a esta classe de métodos numéricos como métodos de discretização" (Patankar 1980).

As equações algébricas envolvendo os valores desconhecidos das variáveis dependentes nos pontos da malha, doravante chamados de equações discretizadas, são derivadas da equação diferencial que governa a variável dependente. Nesta derivação deve-se assumir um perfil para a variável dependente entre os pontos da malha. Desta forma, à medida em que se aumenta o número de pontos da malha, eles tornam-se mais pertos uns dos outros, e os detalhes das considerações do perfil assumido tornam-se de pouca importância.

Para uma dada equação diferencial as equações discretizadas possíveis não são únicas, apesar de se esperar o mesmo resultado, quando o número de pontos usados for suficientemente grande. As diferenças vêm do perfil assumido e do tipo de discretização usada.

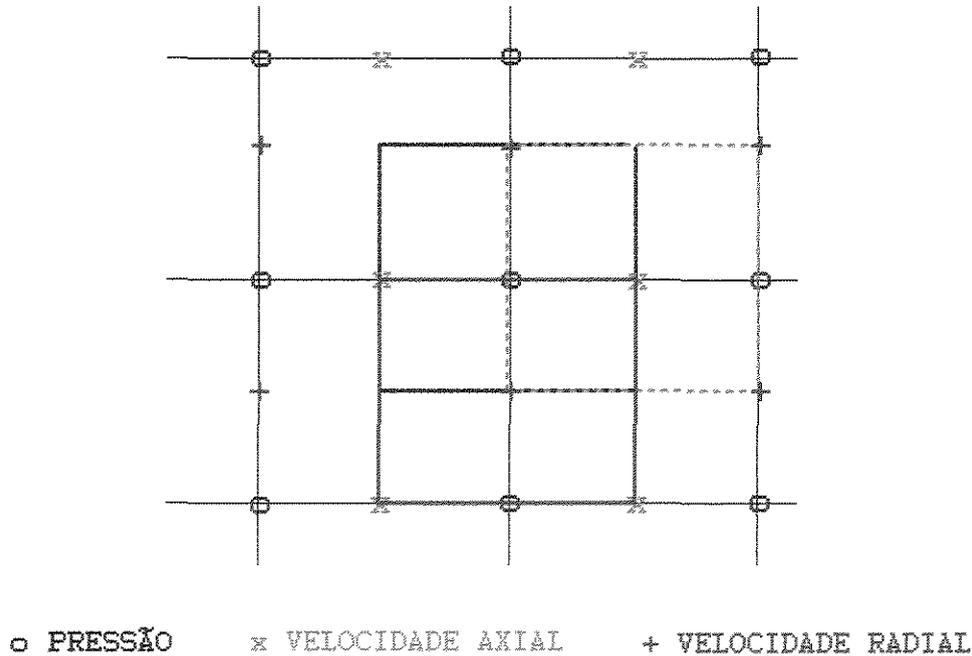
No presente estudo a discretização segue o método dos volumes finitos, proposto em 1972 por Patankar e Spalding (Patankar 1972). Vários perfis serão assumidos e faz-se uma comparação das performances de cada um deles.

#### 4.1. O MÉTODO NUMÉRICO

No método numérico a ser descrito, o objetivo é calcular os valores das variáveis dependentes em um conjunto de pontos escolhidos, chamados de pontos da malha. As equações

variáveis (equações discretizadas) são derivadas por integração das equações diferenciais governantes através de subdomínios que englobam cada ponto da malha. Estes subdomínios serão referidos como volumes de controle. Para realizar estas integrações deve-se assumir perfis expressando o comportamento das variáveis entre os pontos da malha.

Neste trabalho utiliza-se as malhas deslocadas (Patankar 1981), onde as velocidades e a



**Figura 4.1** - Esquema das malhas deslocadas.

pressão encontram-se em pontos diferentes na malha, conforme pode ser visto na figura 4.1. As propriedades do fluido são calculadas nos mesmos pontos que a pressão. Mais a frente, quando a estratégia e os requerimentos do método numérico estiverem mais evidenciados, serão apresentadas algumas vantagens em se utilizar malhas deslocadas.

"A característica mais atraente da formulação dos volumes finitos é que a solução resultante deve implicar que a conservação integral de quantidades como massa, momento e energia é exatamente satisfeita através de qualquer grupo de volumes de controle e, é claro,

através de todo o domínio de cálculo. Esta característica existe para qualquer número de pontos, e não apenas no caso limite em que o número de pontos torna-se muito grande. Então, mesmo para uma malha grosseira, a solução exibe balanços integrais exatos" (Patankar, 1980).

O método será aplicado às equações apresentadas no capítulo 3.

## 4.2. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas apresenta-se conforme (3.2)

$$\frac{\partial}{\partial z}(u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (3.2)$$

ou

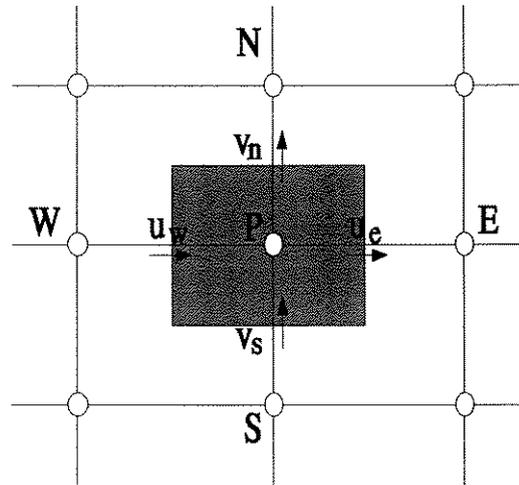
$$r \frac{\partial}{\partial z}(u) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (4.1)$$

Integrando através do volume de controle apresentado na figura 4.2 e considerando que  $v_n$ ,  $v_s$ ,  $u_e$  e  $u_w$  prevalecem sobre todas as suas respectivas faces no volume de controle,

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r}(\rho rv) dr dz = \int_w^e (\rho rv)|_s^n dz = \quad (4.2)$$

$$(\rho rv)|_s^n (z_e - z_w) = [(\rho rv)_n - (\rho rv)_s](z_e - z_w)$$

Integrando o outro termo,



**Figura 4.2** - Volume de controle para integração da equação da continuidade.

$$\int_s^n \int_w^e r \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) dz dr = \int_s^n r(\rho u)|_w^e dr = \tag{4.3}$$

$$(\rho u)|_w^e \frac{r^2}{2} \Big|_s^n = [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \left( \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \right)$$

sendo  $\frac{r_n + r_s}{2} = r_p$  a equação (4.3) fica,

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \left[ \left( \frac{r_n + r_s}{2} \right) (r_n - r_s) \right] = [(\rho r_p u)_e - (\rho r_p u)_w] (r_n - r_s) \tag{4.4}$$

temos então que,

$$\rho_n r_n v_n (z_e - z_w) - \rho_s r_s v_s (z_e - z_w) + \rho_e r_p u_e (r_n - r_s) - \rho_w r_p u_w (r_n - r_s) = 0 \tag{4.5}$$

Seguindo as mesmas considerações serão discretizadas as equações do momento.

### 4.3. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOMENTO

#### 4.3.1. Direção axial

A equação do momento na direção axial, em coordenadas cilíndricas, pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial z}(uu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rvu) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.3)$$

ou

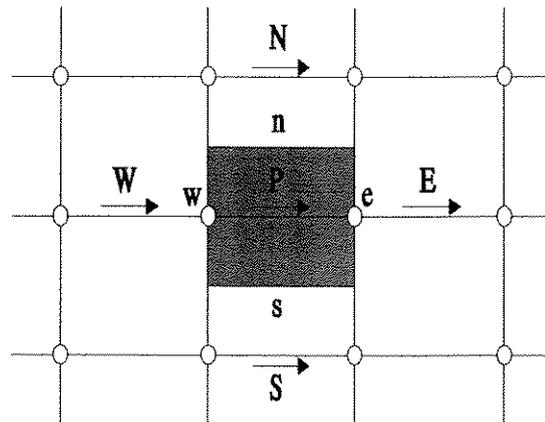
$$r \frac{\partial}{\partial z}(uu) + \frac{\partial}{\partial r}(rvu) = -r \frac{\partial p}{\partial z} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.6)$$

Integrando (4.6) através do volume de controle apresentado na figura 4.3:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r}(rvu) dr dz = \int_w^e rvu|_s^n dz \quad (4.7)$$

Assumindo que a velocidade axial é constante na face do volume de controle, sendo o restante da integral o fluxo de massa na direção radial através das faces do volume de controle, a equação (4.7) é igual a

$$(rv)_n(z_e - z_w)u_n - (rv)_s(z_e - z_w)u_s \quad (4.8)$$



**Figura 4.3** - Volume de controle para integração da equação axial do momento.

Integrando o termo convectivo na direção axial

$$\int_s^n \int_w^e r \frac{\partial}{\partial z} (uu) dz dr = \int_s^n r(uu)|_w^e dr \tag{4.9}$$

A integral de  $(\rho ru) dr$  representa o fluxo de massa na direção axial através das faces do volume de controle. Com isto foi eliminada a não linearidade presente para a velocidade axial e o termo remanescente é considerado constante através das faces do volume de controle. A equação (4.9) é igual a

$$[u_e u_e - u_w u_w] \left( \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \right) \tag{4.10}$$

utilizando o raio medio  $r_p$  (4.10) fica igual a

$$(r_p \mu)_e (r_n - r_s) u_e - (r_p \mu)_w (r_n - r_s) u_w \tag{4.11}$$

Integrando o termo referente à pressão:

$$\int_s^n \int_w^e -r \frac{\partial p}{\partial z} dz dr = \int_s^n -r p|_w^e dr \quad (4.12)$$

Considerando que a pressão é constante em cada face, ou seja, independe da posição radial no volume de controle, a equação (4.12) é igual a

$$-(p_e - p_w) \left( \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \right) \quad (4.13)$$

Avaliando agora o termo da difusivo radial,

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr dz = \int_w^e \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_s^n dz \quad (4.14)$$

considerando que  $\frac{\partial u}{\partial r}$  prevalece sobre face do volume de controle (4.14) é igual a

$$\left[ \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_n - \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_s \right] (z_e - z_w) \quad (4.15)$$

Integrando o termo difusivo axial,

$$\int_s^n \int_w^e r \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dz dr = \int_s^n r \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_w^e dr \quad (4.16)$$

Considerando que nas faces perpendiculares à direção axial  $\frac{\partial u}{\partial z}$  mantém-se constante,

tem-se para a equação (4.16),

$$\frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \left[ \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_e - \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_w \right] = \left[ \left( \frac{r_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_e - \left( \frac{r_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_w \right] (r_n - r_s) \quad (4.17)$$

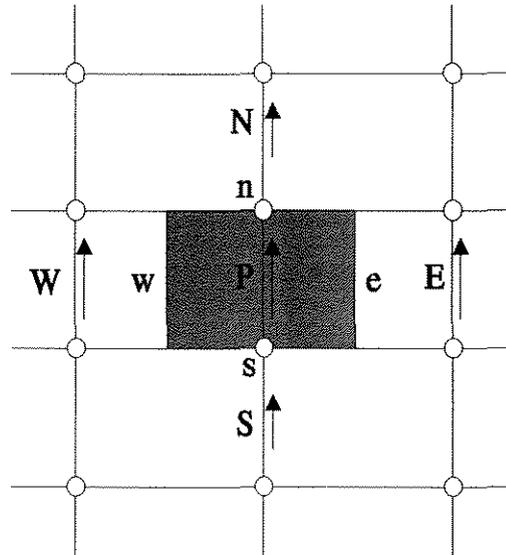
A equação do momento pode então ser escrita como,

$$\begin{aligned} & (rv)_n(z_e - z_w)u_n - (rv)_s(z_e - z_w)u_s + (r_P\mu)_e(r_n - r_s)u_e - \\ & (r_P\mu)_w(r_n - r_s)u_w = (p_w - p_e)r_P(r_n - r_s) + \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_n(z_e - z_w) \\ & \left( \frac{r}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_s(z_e - z_w) + \left( \frac{r_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_e(r_n - r_s) - \left( \frac{r_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \right)_w(r_n - r_s) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Após a integração, os termos referentes ao balanço de forças ficam explícitos.

#### 4.3.2. Direção Radial

Seguindo os mesmos passos desenvolvidos na seção 4.3.1, fazendo considerações semelhantes àsquelas ali realizadas e integrando a equação (3.4) através do volume de controle mostrado na figura 4.4, pode-se facilmente chegar a



**Figura 4.4** - Volume de controle para integração da equação radial do momento.

$$\begin{aligned}
 & (rv)_n(z_e - z_w)v_n - (rv)_s(z_e - z_w)v_s + (r_P\mu)_e(r_n - r_s)v_e \\
 & - (r_P\mu)_wv_w = (p_s - p_n)r_P(z_e - z_w) + \left(\frac{r}{Re} \frac{\partial v}{\partial r}\right)_n(z_e - z_w) + \quad (4.19) \\
 & - \left(\frac{r}{Re} \frac{\partial v}{\partial r}\right)_s(z_e - z_w) + \left(\frac{r_P}{Re} \frac{\partial v}{\partial z}\right)_e(r_n - r_s) - \left(\frac{r_P}{Re} \frac{\partial v}{\partial z}\right)_w(r_n - r_s)
 \end{aligned}$$

#### 4.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE A MALHA DESLOCADA

É chegado o momento de discutir a estratégia das malhas deslocadas. Olhando para a equação (4.5) torna-se evidente a primeira vantagem. Com o deslocamento das malhas os termos de velocidade, que aparecem na equação da continuidade, e precisam ser calculadas nas faces do volume de controle, não precisam de interpolações, já que nestes pontos foram colocados pontos para as velocidades. Sem o deslocamento, não se teria velocidades nas faces e um

---

esquema de interpolação seria necessário. Com isto, economizou-se quatro interpolações.

Na equação do momento as necessidades de interpolações não se reduzem a zero, como para conservação da massa, mas as diferenças também são sensíveis. Os termos referentes ao fluxo (parte convectiva) necessitam de interpolação, o que não seria diferente no caso do não deslocamento das malhas. Porém, para se avaliar as derivadas (termo difusivo) a aproximação é bem mais simples no caso em questão.

Outro fator preponderante é que, com o deslocamento das malhas, a força motriz para o deslocamento, na equação do momento, é exatamente a diferença de pressão, que aliás estão localizadas justamente nas faces do volume de controle. Com isto evita-se o problema de comportamento de onda<sup>1</sup> para o campo de pressão. Este comportamento pode advir do caráter iterativo de solução.

## 4.5. ESQUEMAS DE INTERPOLAÇÃO

Olhando as equações (4.18) e (4.19) pode-se notar que é necessário assumir um perfil para as velocidades axial e radial de modo que os termos convectivos e difusivos possam ser avaliados.

### 4.5.1. Diferença central

Como uma primeira opção parece natural assumir um perfil linear para as velocidades, em ambas as direções. Desta forma, tem-se para a equação axial do momento:

---

<sup>1</sup> Para maior detalhes ver exemplo no livro de Patankar (Patankar 1980, pg. 118).

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{2} (u_N + u_P) & ; & & u_s &= \frac{1}{2} (u_P + u_S) \\
 u_e &= \frac{1}{2} (u_E + u_P) & ; & & u_w &= \frac{1}{2} (u_P + u_W) \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e &= \frac{u_E - u_P}{\Delta z_e} & ; & & \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w &= \frac{u_P - u_W}{\Delta z_w} \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_n &= \frac{u_N - u_P}{\Delta r_n} & ; & & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s &= \frac{u_P - u_S}{\Delta r_s}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

A equação (4.18) com este arranjo fica:

$$\begin{aligned}
 (rV)_n (z_e - z_w) \frac{1}{2} (u_N + u_P) &- (rV)_s (z_e - z_w) \frac{1}{2} (u_P + u_S) + \\
 (r_P u)_e (r_n - r_s) \frac{1}{2} (u_E + u_P) &- (r_P u)_w (r_n - r_s) \frac{1}{2} (u_P + u_W) = \\
 (D_w - D_e) r_P (r_n - r_s) + \left(\frac{r}{Re}\right)_n (z_e - z_w) \left(\frac{u_N - u_P}{\delta r_n}\right) &- \left(\frac{r}{Re}\right)_s (z_e - z_w) \left(\frac{u_P - u_S}{\delta r_s}\right) \\
 + \left(\frac{r_P}{Re}\right)_e (r_n - r_s) \left(\frac{u_E - u_P}{\delta z_e}\right) &- \left(\frac{r_P}{Re}\right)_w (r_n - r_s) \left(\frac{u_P - u_W}{\delta z_w}\right)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Definindo os fluxos como

$$\begin{aligned}
 F_n &= (rV)_n (z_e - z_w) & ; & & F_s &= (rV)_s (z_e - z_w) \\
 F_e &= (r_P u)_e (r_n - r_s) & ; & & F_w &= (r_P u)_w (r_n - r_s)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

e as difusividades,

$$\begin{aligned}
 d_n &= \frac{r_n (z_e - z_w)}{Re \Delta r_n} & ; & & d_s &= \frac{r_s (z_e - z_w)}{Re \Delta r_s} \\
 d_e &= \frac{r_P (r_n - r_s)}{Re \Delta z_e} & ; & & d_w &= \frac{r_P (r_n - r_s)}{Re \Delta z_w}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Com estas novas definições pode-se reescrever a equação (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{F_n}{2} (u_N + u_P) - \frac{F_s}{2} (u_P + u_S) + \frac{F_e}{2} (u_E + u_P) - \frac{F_w}{2} (u_P + u_W) = \\ (p_w - p_e) r_P (r_n - r_s) + d_n (u_N - u_P) - d_s (u_P - u_S) + d_e (u_E - u_P) - d_w (u_P - u_W) \end{aligned} \quad (4.24)$$

agrupando os termos

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{F_n}{2} + d_n \right) + \left( -\frac{F_s}{2} + d_s \right) + \left( \frac{F_e}{2} + d_e \right) + \left( -\frac{F_w}{2} + d_w \right) \right] u_P = \\ (p_w - p_e) r_P (r_n - r_s) + \left( -\frac{F_n}{2} + d_n \right) u_N + \left( \frac{F_s}{2} + d_s \right) u_S \\ + \left( -\frac{F_e}{2} + d_e \right) u_E + \left( \frac{F_w}{2} + d_w \right) u_W \end{aligned} \quad (4.25)$$

A equação (4.25) pode ser escrita ainda como,

$$a_P u_P = a_N u_N + a_S u_S + a_E u_E + a_W u_W + a \quad (4.26)$$

Sendo os coeficientes determinados pela equação (4.27)

O termo entre parêntesis na equação (4.27) é a equação da continuidade e, desde que ela seja satisfeita, é igual a zero. Se assim for

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.28)$$

Este esquema pode levar a resultados incoerentes, uma vez que ele viola uma das regras básicas do método dos volumes finitos (Patankar, 1980), a saber:

$$\begin{aligned}
 a_N &= d_n - \frac{F_n}{2} \\
 a_S &= d_s + \frac{F_s}{2} \\
 a_E &= d_e - \frac{F_e}{2} \\
 a_W &= d_w + \frac{F_w}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + (F_n - F_s + F_e - F_w) \\
 a &= (D_w - D_e) r_P (r_n - r)_S
 \end{aligned}$$

**"REGRA 1:** Consistência nas faces do volume de controle. Quando a face é comum a dois volumes de controle adjacentes, o fluxo através dela deve ser representada pela mesma expressão, nas equações discretizadas para os dois volumes de controle.

**REGRA 2:** Coeficientes positivos. A maioria das situações de interesse serão tais que o valor de uma variável dependente em um ponto da malha é influenciado pelos pontos vizinhos apenas através de processos de convectivos e difusivos. Daí que, um aumento no valor da variável em um ponto da malha deve, com as outras condições mantidas constantes, levar a um aumento (e não uma diminuição) no valor do ponto vizinho da malha.

**REGRA 3:** Coeficiente de linearização do termo fonte negativo. Se for considerada a definição do coeficiente [...], mesmo que os coeficientes vizinhos sejam positivos, o coeficiente do ponto central  $a_p$  pode se tornar negativo via o termo  $S_p$ . É claro que o perigo pode ser completamente eliminado fazendo-se com que  $S_p$  não seja positivo. Então, formula-se a regra 3 como segue:

*Quando o termo fonte é linearizado como  $a = S_c + S_p \phi_p$ , o coeficiente  $S_p$  deve sempre ser menor ou igual a zero.*

**REGRA 4:** Somatório dos coeficientes da vizinhança. Frequentemente as equações diferenciais

governantes contêm apenas as derivadas das variáveis dependentes. Então, se  $\phi$  representa a variável dependente, as funções  $\phi$  e  $\phi+C$  (onde  $C$  é uma constante aleatória) satisfazem a equação diferencial. Esta propriedade da equação diferencial deve também ser refletida na equação discretizada.[...] Então, a sentença da regra 4 é:

$$a_p = \sum a_{nb}$$

*para situações onde a equação diferencial continua a ser satisfeita depois que uma constante é adicionada à variável dependente".*

Assim pode ser visto que se  $|F| > 2d$  aparecem coeficientes negativos na equação (4.27), violando com isso, a regra 2. Deve-se portanto, tentar um outro esquema de interpolação.

#### 4.5.2. *Upwind*

"O esquema *Upwind* reconhece que o ponto fraco da formulação preliminar é a consideração de que a propriedade transportada pelo movimento do fluido,  $\phi_e$ , na interface, é calculada pela média entre  $\phi_E$  e  $\phi_P$ , e propõe uma melhor descrição. A formulação do termo difusivo permanece inalterada, mas o termo convectivo é calculado a partir da seguinte consideração:

O valor de  $\phi$  na interface é igual ao valor de  $\phi$  no ponto da malha (entre os quais está a face) do lado em que vem o fluxo" (Patankar, 1980).

ou seja,

$$\begin{aligned} u_e &= u_P & \text{se } F_e > 0 \\ u_e &= u_E & \text{se } F_e < 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Em outras palavras, se o fluxo é positivo (vem do ponto P para o ponto E), o valor da

variável na face do volume de controle é igual ao valor no ponto da malha de onde vem o fluxo, no caso, de P. Se o fluxo é negativo (vem do ponto E para o ponto P), o valor da variável na face vai ser igual ao valor dela em E.

O termo convectivo na equação do momento fica,

$$\begin{aligned} F_e u_e &= F_e u_P & \text{se } F_e > 0 \\ F_e u_e &= F_e u_E & \text{se } F_e < 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

ou de modo compacto,

$$F_e u_e = u_P \llbracket F_e, 0 \rrbracket - u_E \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.18)

$$\begin{aligned} &u_P \llbracket F_n, 0 \rrbracket - u_N \llbracket -F_n, 0 \rrbracket - u_S \llbracket F_s, 0 \rrbracket + u_P \llbracket -F_s, 0 \rrbracket + u_P \llbracket F_e, 0 \rrbracket - \\ &u_E \llbracket F_e, 0 \rrbracket - u_W \llbracket F_w, 0 \rrbracket + u_P \llbracket -F_w, 0 \rrbracket = (p_w - p_e) \tau_P (\tau_n - \tau_s) \\ &+ d_n (u_N - u_P) - d_s (u_P - u_S) + d_e (u_E - u_P) - d_w (u_P - u_W) \end{aligned} \quad (4.32)$$

rearranjando,

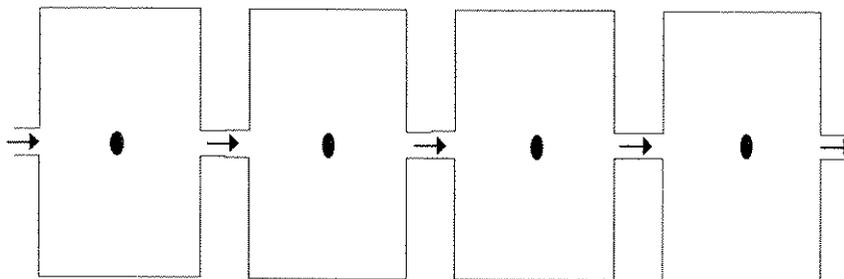
$$\begin{aligned} &(\llbracket F_n, 0 \rrbracket + d_n + \llbracket -F_s, 0 \rrbracket + d_s + \llbracket F_e, 0 \rrbracket + d_e + \llbracket -F_w, 0 \rrbracket + d_w) u_P \\ &= (p_w - p_e) \tau_P (\tau_n - \tau_s) + (\llbracket -F_n, 0 \rrbracket + d_n) u_N + (\llbracket F_s, 0 \rrbracket + d_s) u_S \\ &\quad + (\llbracket -F_e, 0 \rrbracket + d_e) u_E + (\llbracket F_w, 0 \rrbracket + d_w) u_W \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pode-se agora reescrever a equação (4.33) da mesma forma que a equação (4.26), os

coeficientes porém, são dados por

$$\begin{aligned}
 a_N &= D_n + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \\
 a_S &= D_s + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \\
 a_E &= D_e + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \\
 a_W &= D_w + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + (F_n - F_s + F_e - F_w) \\
 a &= (p_w - p_e) I_P (r_n - r_s)
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Nesta formulação é evidente que não pode aparecer nenhum coeficiente negativo. Uma



**Figura 4.5** - Ilustração do esquema upwind via associação tanque-tubo

boa explicação para o sentido físico do esquema *Upwind* é dado em (Patankar 1980) e ilustrado na figura 4.5 (Patankar, 1980).

Pode-se pensar que os volumes de controle sejam tanques agitados conectados em séries

por pequenos tubos. O escoamento através dos tubos representa convecção, enquanto que condução (de calor) através das paredes do tanque representa a difusão. Como os tanques são agitados, cada um contém um fluido com temperatura uniforme. Então, é apropriado supor que o fluido escoando em cada tubo tenha a temperatura que prevalece no tanque de onde ele está vindo. Normalmente, o fluido no tubo não "sabe" nada sobre o tanque da frente, ao qual ele está indo, mas deve carregar consigo, todas as informações do tanque do qual ele vem.

### 4.5.3. A Solução Exata

Para o caso unidimensional, a equação de Navier-Stokes pode ser resolvida exatamente, considerando  $\mu$  e o fluxo constantes. Se um domínio  $0 \leq z \leq L$  for usado, com as condições de contorno:

em

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad \phi = \phi_0 \\ z = L & \quad \phi = \phi_L \end{aligned}$$

A solução exata é (Patankar 1980):

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{Pz}{L}\right) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (4.35)$$

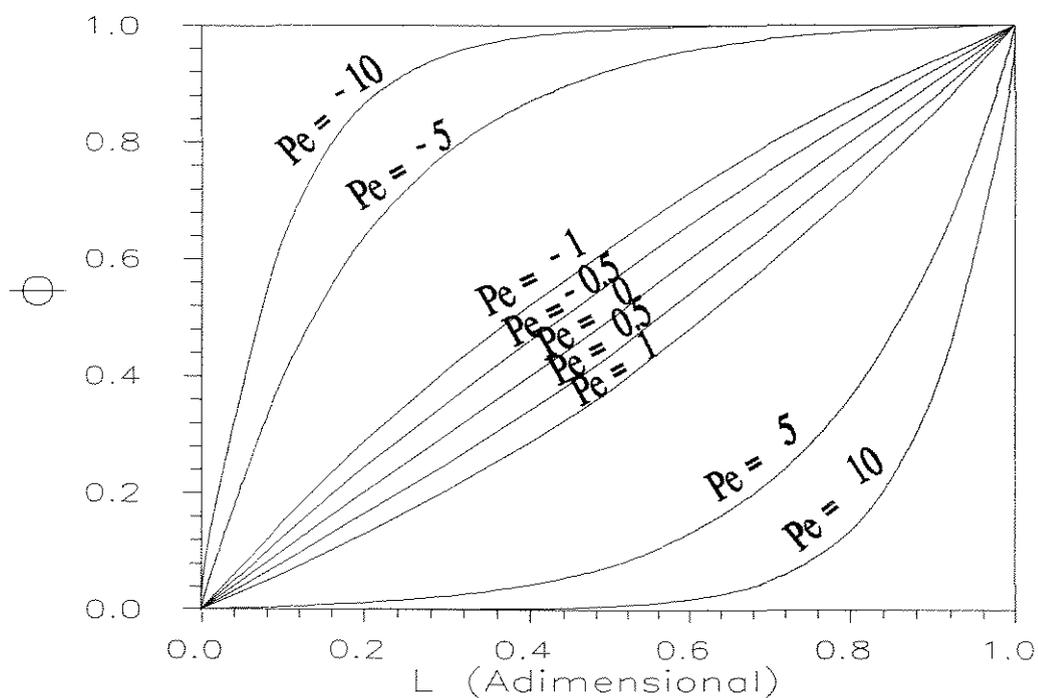
onde  $P$  é o número de Peclet definido por

$$P = \frac{\rho u L}{\Gamma} \quad (4.36)$$

Pode ser visto que  $P$  é a razão entre as forças de convectivas e difusivas.

A natureza da solução exata pode ser entendida, olhando-se a figura 4.6, onde a variação

de  $\phi \sim z$  é plotada para diferentes números de Peclet. Quando  $P = 0$ , tem-se um caso em que estão envolvidos apenas fenômenos difusivos e a variação é linear. À medida em que se aumenta o módulo de  $P$ , o desvio em relação a uma aproximação linear vai se acentuando. Para um valor positivo (e alto) de Peclet, observa-se que o valor de  $\phi$  em  $z = L/2$  é, em prática, igual ao valor de  $\phi$  em  $z = 0$ . Quando Peclet é negativo e com um valor grande (em módulo), o valor de  $\phi$  em  $z = L/2$  é igual ao valor de  $\phi$  em  $z = L$ . Isto equivale a dizer que o esquema *Upwind* é obedecido quando o valor de  $|P|$  é grande.



**Figura 4.6** - Comportamento de uma variável qualquer em função do comprimento, para o caso unidimensional.

A partir da figura 4.6 pode-se fazer uma análise dos esquemas anteriormente apresentados:

- 1 - Fica claro que o esquema da diferença central só é válido para  $|P|$  pequeno, no máximo ao redor de 1.
- 2 - Quando o  $|P|$  é grande, o esquema *Upwind* é válido para representar o termo convectivo.
- 3 - Quando o  $|P|$  é grande, o valor de  $d\phi/dz$ , em  $z = L/2$ , é praticamente igual a zero. Então a difusão está praticamente ausente. O esquema *Upwind* porém, calcula ela por um perfil linear, superestimando-a.

#### 4.5.4. O Esquema Exponencial

Será desenvolvido agora, o esquema exponencial, que parte do perfil exato da variável  $\phi$ , para situação unidimensional. Seja o fluxo total  $J$ , composto pelo termo convectivo e o termo difusivo,

$$J = (\rho u \phi) - \mu \left( \frac{d\phi}{dz} \right) \quad (4.37)$$

sendo que a equação do momento fornece

$$\left( \frac{dJ}{dz} \right)_p = 0 \quad (4.38)$$

integrando

$$J_e - J_w = 0 \quad (4.39)$$

Do perfil exato para  $\phi$  (4.35) temos

$$\phi_e = \phi_P + (\phi_E - \phi_P) \frac{\exp\left(\frac{PZ}{\Delta Z}\right)_e - 1}{\exp(P_e) - 1} \quad (4.40)$$

então

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_e = \frac{d}{dz} \left\{ \phi_P + (\phi_E - \phi_P) \frac{\exp\left(\frac{PZ}{\Delta Z}\right)_e - 1}{\exp(P_e) - 1} \right\} \quad (4.41)$$

diferenciando

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_e = (\phi_E - \phi_P) \frac{P_e}{\Delta Z} \left\{ \frac{\exp\left(\frac{PZ}{\Delta Z}\right)_e}{\exp(P_e) - 1} \right\} \quad (4.42)$$

substituindo (4.42) em (4.37)

$$J_e = (\rho u)_e \phi_e + \mu_e (\phi_P - \phi_E) \frac{P_e}{\Delta Z} \frac{\exp\left(\frac{PZ}{\Delta Z}\right)_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (4.43)$$

Fazendo as devidas substituições, pode-se escrever a equação (4.43) como

$$J_e = F_e \left[ \phi_P + (\phi_E - \phi_P) \frac{\exp\left(\frac{P_e \Delta Z_e}{\Delta Z}\right)}{\exp(P_e) - 1} \right] + \left(\frac{\mu P}{\Delta Z}\right)_e (\phi_P - \phi_E) \frac{\exp\left(\frac{P \Delta Z}{\Delta Z}\right)_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (4.44)$$

rearranjando,

$$J_e = F_e \phi_P - F_e (\phi_P - \phi_E) \frac{\exp\left(\frac{P \Delta Z}{\Delta Z}\right)_e}{\exp(P_e) - 1} + \quad (4.45)$$

$$\frac{F_e (\phi_P - \phi_E)}{\exp(P_e) - 1} F_e (\phi_P - \phi_E) \frac{\exp\left(\frac{P \Delta Z}{\Delta Z}\right)_e}{\exp(P_e) - 1}$$

ou,

$$J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (4.46)$$

substituindo em (4.39)

$$\begin{aligned} J_e - J_w &= F_e \phi_P + \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \phi_P - \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \phi_E \\ &- F_w \phi_W + \frac{F_w}{\exp(P_w) - 1} \phi_W - \frac{F_w}{\exp(P_w) - 1} \phi_P = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

rearranjando,

$$\left( F_e + \frac{F_e}{e^{(P_e)} - 1} - \frac{F_w}{e^{(P_w)} - 1} \right) \phi_P = \frac{F_e}{e^{(P_e)} - 1} \phi_E + \left( F_w - \frac{F_w}{e^{(P_w)} - 1} \right) \phi_W \quad (4.48)$$

pode-se escrever que

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (4.49)$$

com os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{e^{P_e} - 1} \\ a_W &= \frac{F_w e^{P_w}}{e^{P_w} - 1} \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Este esquema garante, para o caso unidimensional, a resposta exata, independente do número de Peclet. Entretanto, ela não é garantida, quando estendida para a situação bidimensional.

#### 4.5.5 O Esquema Híbrido

Para se observar a conexão entre o esquema exponencial e o esquema híbrido, desenvolvido por Spalding (Spalding 1972), plotando-se o coeficiente  $a_E$ , ou melhor, a sua forma adimensional  $a_E/d_c$ , em função do número de Peclet:

$$\frac{a_E}{d_c} = \frac{P_e}{e^{P_e} - 1} \quad (4.51)$$

a variação de  $a_E/d_c$  com  $Pe$  é mostrada na figura 4.7. Tem-se :

- |         |                          |                             |
|---------|--------------------------|-----------------------------|
| 1. Para | $Pe \rightarrow \infty$  | $a_E/d_c \rightarrow 0$ ;   |
| 2. Para | $-Pe \rightarrow \infty$ | $a_E/d_c \rightarrow -Pe$ ; |
| 3. Para | $Pe \rightarrow 0$       | $a_E/d_c = 1 - Pe/2$        |

As três linhas representando estes casos limites são apresentadas na figura (4.7) e formam um envelope, representando uma aproximação razoável à curva exata. O esquema híbrido usa estas três linhas retas, tal que:

1. Para  $Pe < -2$   $a_E/d_e = -Pe$  ;
2. Para  $-2 \leq Pe \leq 2$   $a_E/d_e = 1 - Pe/2$  ;
3. Para  $Pe > 2$   $a_E/d_e = 0$

Estas expressões podem ser rearranjadas em uma forma mais compacta

$$a_E = d_e \left[ \left[ -Pe, 1 - \frac{Pe}{2}, 0 \right] \right] = \left[ \left[ -F_e, d_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right] \right] \quad (4.52)$$

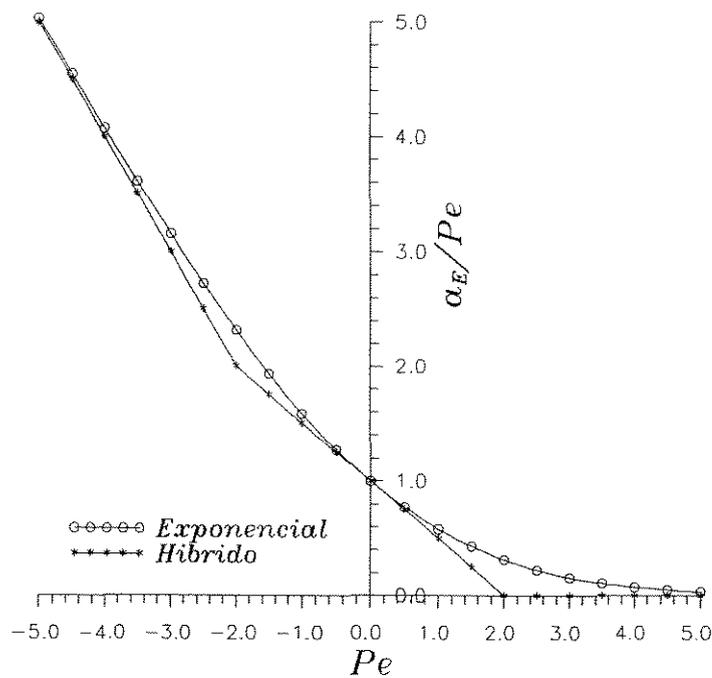


Figura 4.7 - Representação do esquema híbrido.

Teria-se então,

$$\begin{aligned}
 a_E &= \left[ -F_e, d_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right] \\
 a_W &= \left[ F_w, d_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right] \\
 a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w)
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

#### 4.5.6. Lei de Potência

Pode ser visto na figura 4.7 que o desvio do esquema híbrido em relação à curva exata é maior em torno de  $Pe = \pm 2$ . Também parece prematuro considerar o efeito da difusão igual a zero, logo que  $Pe$  passa de 2. Uma melhor aproximação à curva exata é dada pelo esquema da lei de potências (Patankar 1981).

Apesar de ser mais complicado, ele fornece uma representação extremamente boa do comportamento exponencial e requer um esforço computacional menor que este último. A aproximação à curva exata, pelo esquema da lei de potências pode ser visto assim,

1. Para  $Pe < -10$   $a_E/d_c = -Pe$  ;
2. Para  $-10 \leq Pe < 0$   $a_E/d_c = (1 + 0.1 Pe)^5 - Pe$ ;
3. Para  $0 \leq Pe \leq 10$   $a_E/d_c = (1 - 0.1 Pe)^5$  ;
4. Para  $Pe > 10$   $a_E/d_c = 0$

ou

$$\begin{aligned}
 a_E &= d_e \left[ 0, \left( 1 - \frac{0.1 |F_e|}{D_e} \right)^5 \right] + \llbracket 0, -F_e \rrbracket \\
 a_W &= d_w \left[ 0, \left( 1 - \frac{0.1 |F_w|}{D_w} \right)^5 \right] + \llbracket 0, -F_w \rrbracket \\
 a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w)
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

Na tabela 4.1 encontra-se uma comparação numérica entre os esquemas apresentados, para o caso unidimensional, onde o esquema exponencial pode ser tomado como exato.

#### 4.5.7. Forma Generalizada

Como se deseja comparar os diversos esquemas de interpolação, sob o ponto de vista computacional, é importante que se escreva os coeficientes da equação discretizada sob uma forma generalizada, a qual foi apresentada em (Patankar 1980) :

$$\begin{aligned}
 a_E &= d_e A(|P_e|) + \llbracket 0, -F_e \rrbracket \\
 a_W &= d_w A(|P_w|) + \llbracket 0, F_w \rrbracket \\
 a_N &= d_n A(|P_n|) + \llbracket 0, -F_n \rrbracket \\
 a_S &= d_s A(|P_s|) + \llbracket 0, F_s \rrbracket
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

A tabela 4.2 apresenta  $A(P_e)$  para os diversos esquemas de interpolação

**Tabela 4.1** - Comparação dos valores dos coeficientes dados pelos esquemas exponencial, híbrido e da lei de potências.

<b>Número de Peclet</b>	<b>Esquema Exponencial</b>	<b>Esquema Híbrido</b>	<b>Esquema da Lei de Potências</b>
- 14.0	14.0000	14.0000	14.0000
- 10.0	10.0005	10.0000	10.0000
- 6.0	6.0149	6.0000	6.0102
- 5.0	5.0339	5.0000	5.0312
- 4.0	4.0746	4.0000	4.0778
- 3.0	3.1572	3.0000	3.1681
- 2.0	2.3130	2.0000	2.3277
- 1.0	1.5820	1.5000	1.5905
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
1.0	0.5820	0.5000	0.5905
2.0	0.3130	0.0000	0.3277
3.0	0.1572	0.0000	0.1681
4.0	0.0746	0.0000	0.0778
5.0	0.0339	0.0000	0.0312
6.0	0.0149	0.0000	0.0102
10.0	0.0005	0.0000	0.0000
14.0	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 4.2 - Forma generalizada para os coeficientes da equação discretizada.

Esquema de Interpolação	Fórmula para A( P )
Diferença Central	$1 - 0.5 \times  P $
<i>Upwind</i>	1
Híbrido	$[0, 1 - 0.5  P ]$
Lei de Potências	$[0, (1 - 0.1 \times  P )^5]$
Exponencial (Exato)	$P / [\exp( P ) - 1]$

Agora que já é possível calcular os coeficientes das equações do momento de uma forma geral, as equações para o momento axial e radial são finalmente apresentadas,

$$a_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + a \quad (4.56)$$

$$b_P v_P = b_E v_E + b_W v_W + b_N v_N + b_S v_S + b \quad (4.57)$$

#### 4.6. SUBSTITUIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para fechar o problema, será necessário substituir as condições de contorno, de forma que se obtenha equações algébricas para elas. Uma nova estratégia para as condições de contorno, no método dos volumes finitos, é montada, sendo os resultados avaliados no capítulo 6.

#### 4.6.1. A Entrada do Tubo

Na entrada do tubo as condições de contorno estão estabelecidas por:

1.  $u = 1$
2.  $v = 0$
3.  $p = p_0 - \rho u_0^2$

Estas condições de contorno não trazem nenhuma dificuldade ao serem aplicadas, uma vez que as variáveis tem o seu valor especificado na fronteira.

#### 4.6.2. A Parede do Tubo

As condições de contorno na parede do tubo também não oferecem problemas ao serem substituídas pois, mais uma vez, os valores das variáveis neste contorno também possuem valores especificados,

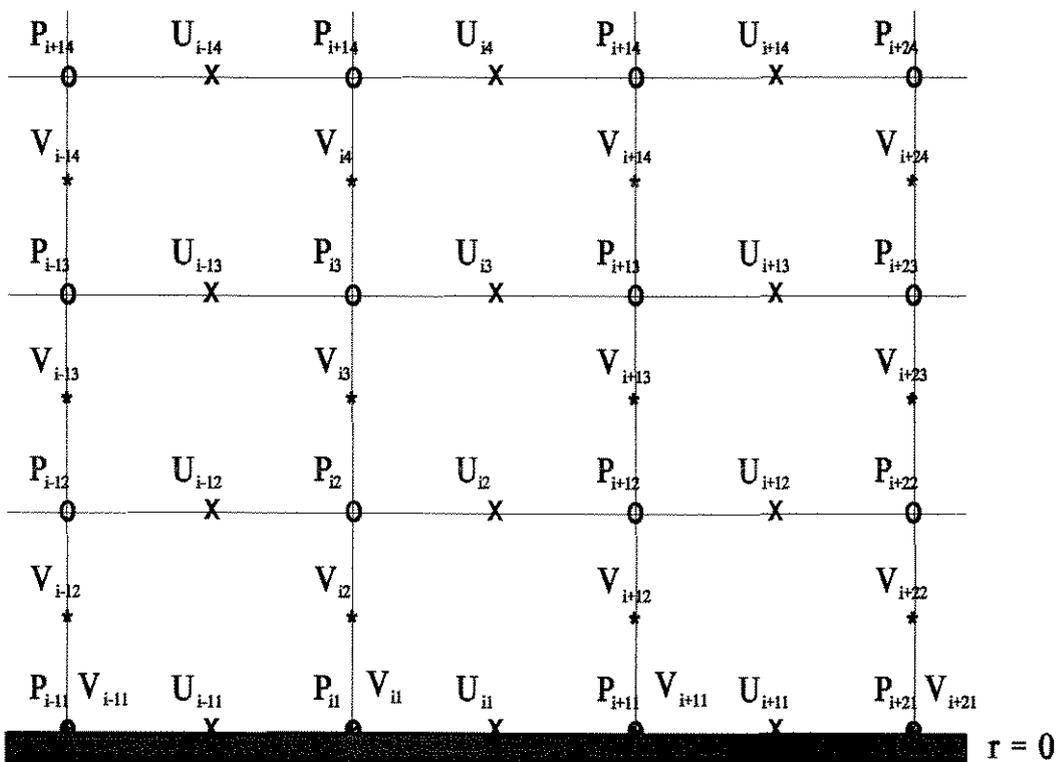
1.  $u = 0$
2.  $v = 0$

#### 4.6.3. A Condição de Simetria

Aqui é introduzida a inovação quanto à condição de contorno. Devido à condição de simetria, o centro do tubo está sujeito às seguintes condições de contorno:

1.  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$
2.  $v = 0$
3.  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$

Tradicionalmente, estas condições de contorno são aplicadas de forma aproximada.



**Figura 4.8** - Representação matricial da malha próximo a  $r = 0$ .

Tomando a figura 4.8 como referência para os índices que serão indicados, a forma convencional de aplicação da condição de simetria segue abaixo:

1. A derivada radial da componente axial de velocidade é representada por:

$$u(i,1) = u(i,2)$$

2. A derivada radial da pressão da mesma forma:

$$p(i,1) = p(i,2)$$

3. A componente radial de velocidade é representada por:

$$v(i,1) = 0$$

Tal aproximação vai sendo minimizada à medida em que se refina a malha, pois como a derivada no centro é nula, quanto mais próximo do centro mais  $u(i,1)$  se aproxima de  $u(i,2)$ . Pode-se também concentrar a malha na região vizinha ao ponto  $r = 0$  e minimizar a aproximação. Tal procedimento porém, tende a trazer instabilidades ao método, dificultando a convergência e os resultados não são de todo satisfatório. O que se propõe, é uma discretização da equação no contorno, com a substituição das condições de simetria. Como a derivada radial da pressão é muito pequena, para todo o raio, preferiu-se adotar a estratégia convencional para esta variável, restando apenas a condição de simetria para a velocidade axial. Reescrevendo a equação (4.18)

$$\begin{aligned} & (IV)_n (z_e - z_w) u_n - (IV)_s (z_e - z_w) u_s + (I_P u)_e (I_n - I_s) u_e - \\ & (I_P u)_w (I_n - I_s) u_w = (p_w - p_e) I_P (I_n - I_s) + \\ & \left( \frac{I}{Re} \frac{\partial u}{\partial I} \right)_n (z_e - z_w) + \left( \frac{I_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial Z} \right)_e (I_n - I_s) - \left( \frac{I_P}{Re} \frac{\partial u}{\partial Z} \right)_w (I_n - I_s) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Lembrando que no centro  $r_s = v_s = 0$ , que  $r_p = r_n/2$  e que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s = 0$$

A equação (4.18) fica,

$$\begin{aligned} u_e \frac{r_n^2}{2} u_e - u_w \frac{r_n^2}{2} u_w + (rv)_n (z_e - z_w) u_n = (p_w - p_e) \frac{r_n^2}{2} \\ + \frac{r_n^2}{2 Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e - \frac{r_n^2}{2 Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w + \frac{r_n}{Re} (z_e - z_w) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_n \end{aligned} \quad (4.58)$$

Aplicar-se-á o esquema upwind para poder generalizar uma expressão para os coeficientes das equações discretizadas, em seguida. Então a equação (4.58) fica

$$\begin{aligned} \left[ u_e \frac{r_n^2}{2}, 0 \right] u_p - \left[ -u_e \frac{r_n^2}{2}, 0 \right] u_E - \left[ u_w \frac{r_n^2}{2}, 0 \right] u_w + \\ \left[ -u_w \frac{r_n^2}{2}, 0 \right] u_p + \left[ (rv)_n (z_e - z_w), 0 \right] u_p - \\ \left[ -(rv)_n (z_e - z_w), 0 \right] u_N = (p_w - p_e) \frac{r_n^2}{2} + \left\{ \frac{r_n^2}{2 Re (z_e - z_w)} \right\} u_E \\ - \left\{ \frac{r_n^2}{2 Re (z_e - z_w)} \right\} u_p - \left\{ \frac{r_n^2}{2 Re (z_e - z_w)} \right\} u_p + \left\{ \frac{r_n^2}{2 Re (z_e - z_w)} \right\} u_w \\ + \left\{ \frac{r_n (z_e - z_w)}{Re r_n} \right\} u_N - \left\{ \frac{r_n (z_e - z_w)}{Re r_n} \right\} u_p \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \llbracket F_{e'} \rrbracket + \llbracket -F_{w'} \rrbracket + \llbracket F_{e'} \rrbracket + \frac{r_n^2}{2\text{Re}(z_e - z_w)} + \frac{r_n^2}{2\text{Re}(z_e - z_w)} + \frac{r_n(z_e - z_w)}{\text{Re}r_n} \right\} u_P = \\
& (P_w - P_e) \frac{r_n^2}{2} + \left\{ \llbracket -F_{e'} \rrbracket + \frac{r_n^2}{2\text{Re}(z_e - z_w)} \right\} u_E + \left\{ \llbracket F_{w'} \rrbracket + \frac{r_n^2}{2\text{Re}(z_e - z_w)} \right\} u_W \quad (4.60) \\
& + \left\{ \llbracket F_{n'} \rrbracket + \frac{r_n(z_e - z_w)}{\text{Re}r_n} \right\} u_N
\end{aligned}$$

Ou seja, todos os coeficientes são mantidos iguais, com exceção feita a  $a_s = 0$ . Pode-se portanto escrever os coeficientes utilizando-se de todos os esquemas de interpolação, lembrando porém de fixar  $a_s$  como zero.

#### 4.6.4. A Saída do Tubo

Na saída do tubo temos como condições de contorno:

1.  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
2.  $v = 0$

Como o comprimento do tubo é muito grande, a ponto de garantir o perfil completamente desenvolvido na saída do tubo, não se incorre em erro utilizar a metodologia convencional nesta fronteira, ou seja,

1.  $u(L, r) = u(L-1, r)$
2.  $v(L, r) = 0$

Uma comparação entre a metodologia proposta e a convencional é feita no capítulo 6. O próximo capítulo traz o algoritmo SIMPLE, utilizado na solução de problemas de escoamento e que introduz o acoplamento da pressão com a velocidade.

## CAPÍTULO 5

### 5. O ALGORITMO SIMPLE

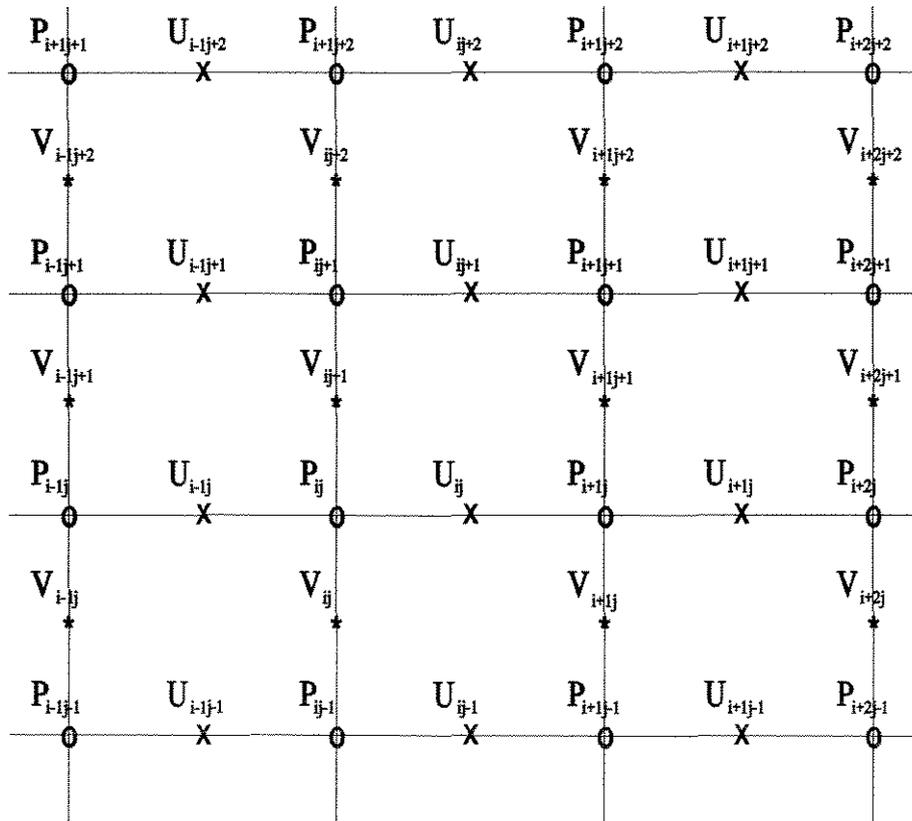
As equações do momento discretizadas, (4.56) e (4.57), só podem ser resolvidas quando o campo de pressão é dado ou de alguma forma estimado. A menos que o campo de pressão seja o correto, o campo de velocidades resultante não irá satisfazer a equação da continuidade. Tal "campo de velocidades imperfeito" baseado num campo de pressão estimado  $p^*$ , será denotado por  $u^*$  e  $v^*$ . Este campo de velocidades asterisco será resultado da solução das seguintes equações discretizadas:

$$a_P \mu_P^* = (p_w^* - p_e^*) r_P \Delta r + a_E \mu_E^* + a_W \mu_W^* + a_N \mu_N^* + a_S \mu_S^* + a \quad (5.1)$$

$$b_P \nu_P^* = (p_s^* - p_n^*) r_P \Delta z + b_E \nu_E^* + b_W \nu_W^* + b_N \nu_N^* + b_S \nu_S^* + b \quad (5.2)$$

Será mais conveniente, para maior clareza, escrever as velocidades em uma forma matricial, conservando os índices alfabético para a posição radial. Os coeficientes também estarão em uma forma matricial. Para uma visualização, a figura 5.1 indica as posições das velocidade e dos raios com os seus respectivos índices.

O objetivo agora é encontrar um meio de melhorar o campo de pressão estimado  $p^*$ , tal que o campo de velocidade asterisco resultante irá progressivamente estar mais perto de satisfazer a equação da continuidade. A isto chama-se de acoplamento pressão-velocidade e existe na literatura diversas formas de se fazer este acoplamento (Patankar, 1981; Doormaal, 1984; Jang, 1986). Neste trabalho segue-se o SIMPLE, sugerido por Patankar (Patankar, 1981) e que encontra vasta aplicação na literatura.



**Figura 5.1** - Representação matricial das componentes de pressão e velocidade com malhas deslocadas.

### 5.1. O ACOPLAMENTO PRESSÃO - VELOCIDADE

Como proposta, a pressão correta é obtida por:

$$p = p^* + p' \quad (5.3)$$

onde  $p'$  será chamado de correção da pressão. Depois, precisa-se saber como as componentes de

velocidade  $u$  e  $v$  podem ser introduzidas de uma maneira similar:

$$u = u^* + u' \quad (5.4)$$

$$v = v^* + v' \quad (5.5)$$

O desenvolvimento será feito sobre a variável  $u$ , sendo que para a velocidade radial a extensão é imediata.

Subtraindo (4.56) de (5.1) tem-se:

$$a_{ij}u'_{ij} = (p'_{ij} - p'_{i+1j})r_P \Delta r + a_{i+1j}u'_{i+1j} + a_{i-1j}u'_{i-1j} + a_{ij+1}u'_{ij+1} + a_{ij-1}u'_{ij-1} \quad (5.6)$$

Neste ponto, toma-se a liberdade de eliminar os termos que contêm  $u'$  do lado direito da equação (5.6). Uma discussão extensiva desta ação será apresentada mais adiante. Por enquanto é melhor não se ater a este movimento, ou simplesmente olha-lo como uma conveniência computacional. O resultado fica:

$$a_{ij}u'_{ij} = (p'_{ij} - p'_{i+1j})r_P \Delta r \quad (5.7)$$

e portanto,

$$u'_{ij} = \frac{(p'_{ij} - p'_{i+1j})r_P \Delta r}{a_{ij}} \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em (5.4),

$$u_{ij} = u_{ij}^* + \frac{(p_{ij}' - p_{i+1j}')r_P \Delta r}{a_{ij}} \quad (5.9)$$

Fica claro portanto, como a velocidade asterisco é corrigida, em resposta às correções de pressão, para gerar o valor correto de  $u$ .

A fórmula para correção de velocidade para a componente radial pode ser escrita de forma similar:

$$v_{ij} = v_{ij}^* + \frac{(p_{ij-1}' - p_{ij}')r_P \Delta z}{b_{ij}} \quad (5.10)$$

## 5.2. A EQUAÇÃO DE CORREÇÃO PARA PRESSÃO

Tenta-se, agora, transformar a equação da continuidade em uma equação para correção da pressão.

Substituindo-se, na equação da continuidade (4.5), todas as componentes de velocidade pelas correções de velocidade (5.9) e (5.10) temos:

$$\begin{aligned} & \rho \Delta z r_n \left[ v_{ij+1}^* + \frac{(p_{ij}' - p_{i+1j}')r_n \Delta z}{b_{ij+1}} \right] - \rho \Delta z r_s \left[ v_{ij}^* + \frac{(p_{ij-1}' - p_{ij}')r_s \Delta z}{b_{ij}} \right] + \\ & \rho \Delta r r_P \left[ u_{ij}^* + \frac{(p_{ij}' - p_{i+1j}')r_P \Delta r}{a_{ij}} \right] - \rho \Delta r r_P \left[ u_{i-1j}^* + \frac{(p_{i-1j}' - p_{ij}')r_P \Delta r}{a_{i-1j}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

rearranjando,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\rho(r_n \Delta z)^2}{b_{\bar{y}+1}} + \frac{\rho(r_s \Delta z)^2}{b_{\bar{y}}} + \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{\bar{y}}} + \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{i-1j}} \right] p'_{\bar{y}} = \\ & \frac{\rho(r_n \Delta z)^2}{b_{\bar{y}+1}} p'_{\bar{y}+1} + \frac{\rho(r_s \Delta z)^2}{b_{\bar{y}}} p'_{\bar{y}-1} + \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{\bar{y}}} p'_{i+1j} + \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{i-1j}} p'_{i-1j} \\ & + \rho r_s \Delta z v_{\bar{y}}^* - \rho r_n \Delta z v_{\bar{y}+1}^* + \rho r_p \Delta r u_{i-1j}^* - \rho r_p \Delta r u_{\bar{y}}^* \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pode-se escrever a equação (5.12) conforme as equações (4.54) e (4.55). Assim:

$$c_{\bar{y}} p'_{\bar{y}} = c_{i+1j} p'_{i+1j} + c_{i-1j} p'_{i-1j} + c_{\bar{y}+1} p'_{\bar{y}+1} + c_{\bar{y}-1} p'_{\bar{y}-1} + c \quad (5.13)$$

Sendo os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} c_{i+1j} &= \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{\bar{y}}} \\ c_{i-1j} &= \frac{\rho(r_p \Delta r)^2}{a_{i-1j}} \\ c_{\bar{y}+1} &= \frac{\rho(r_n \Delta r)^2}{b_{\bar{y}+1}} \\ c_{\bar{y}} &= \frac{\rho(r_s \Delta r)^2}{b_{\bar{y}}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$c = \rho r_s \Delta z v_{\bar{y}}^* - \rho r_n \Delta z v_{\bar{y}+1}^* + \rho r_p \Delta r u_{i-1j}^* - \rho r_p \Delta r u_{\bar{y}}^*$$

Pode ser visto da equação (5.14) que o termo  $c$  na equação da correção da pressão é o negativo da equação da continuidade discretizada, equação (4.5), avaliada em termos das velocidades asterisco. Quando  $c$  vale zero, significa que as velocidades asterisco satisfazem a

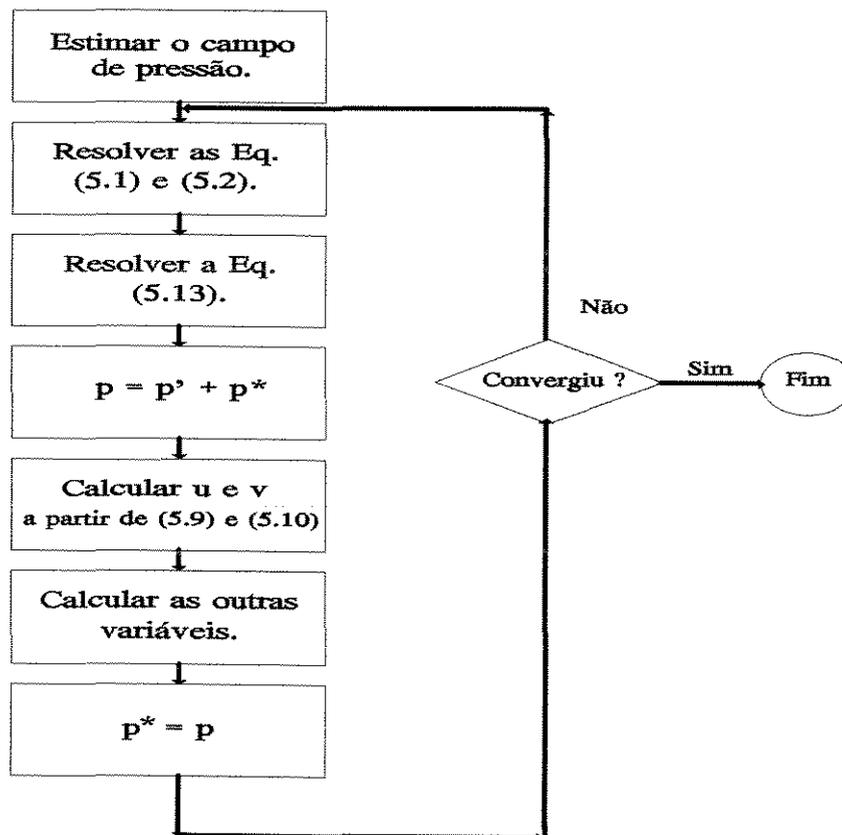


Figura 5.2 - Diagrama de blocos do algoritmo SIMPLE.

---

equação da continuidade e nenhuma correção na pressão é necessário. O termo  $c$  representa então, uma "fonte de massa", a qual a correção de pressão (através de suas correções de velocidades acopladas) devem eliminar.

Por agora, foi formulada todas as equações necessárias para a obtenção das componentes de velocidade e pressão. O algoritmo para a completa solução do problema pode ser visto em (Patankar, 1980), o qual foi denominado como SIMPLE (*Semi - Implicit Method for Pressure - Linked Equations*). O diagrama de blocos encontra-se na figura 5.2 e pode ser resumido como:

1. Estimar um campo de pressão;
2. Resolver as equações do momento para obter  $u^*$  e  $v^*$ ;
3. Resolver a equação para  $p'$ ;
4. Calcular  $p$  da equação (5.3);
5. Calcular  $u$  e  $v$  dos seus valores asterisco, usando para isto as fórmulas de correção de velocidade (5.9) e (5.10);
6. Resolver as equações discretizadas para outras variáveis;
7. Tratar a pressão corrigida  $p$ , como uma nova estimativa da pressão  $p^*$ , retornar ao passo 2 e repetir o processo até que a convergência seja obtida.

### 5.2.1. Discursão da Equação de Correção da Pressão

Será lembrado que no início do capítulo decidiu-se que os termos com velocidade asterisco seriam eliminados do lado direito da equação (5.6). É chegada a hora de explicar a motivação para isto e afirmar que nenhum dano foi gerado com esta ação.

1. Se fossem mantidos os termos, eles deveriam ser expressos em termos das correções de pressão e das correções de velocidade nas vizinhanças dos termos eliminados. Estas vizinhanças trariam as suas, e assim por diante. No final, a fórmula de correção da velocidade iria envolver a correção de pressão em todos os pontos do domínio de cálculo e a equação de correção da pressão resultante, tornaria-se inimaginável. Poderia-se ir por este caminho, e resolver todo o conjunto de equações de uma só vez, mas esta foi uma rota que Patankar decidiu não seguir. Este trabalho também não seguiu pois isto implicaria em uma exigência de memória computacional muito grande, o que ao certo inviabilizaria o trabalho atual e suas pretensões futuras. A omissão do termo referido permitiu que a equação de correção da pressão tivesse a mesma forma geral que as equações do momento, que é a forma geral para qualquer equação de conservação, para o método dos volumes finitos.

2. A palavra *Semi - implicit* no nome SIMPLE foi usada com o conhecimento da omissão do termo em questão. Ele representa uma influência indireta, ou implícita, da correção de pressão na velocidade; correções de pressão próximas, podem alterar as velocidades vizinhas e então causar uma correção na velocidade do ponto em consideração. Ao não se incluir esta influência, trabalha-se com um esquema que é apenas parcialmente, e não totalmente, implícito.

3. A omissão de qualquer termo seria inaceitável se a solução final não correspondesse à solução verdadeira. Acontece que a solução convergida pelo método SIMPLE, não contém erro algum resultante da omissão dos termos de velocidade asterisco. Na solução convergida, obtém-se um campo de pressão, cujo campo de velocidade asterisco correspondente satisfaz a equação da continuidade. Os detalhes da construção da equação para  $p$ , tornam-se então, irrelevantes.

4. É interessante focar a atenção à iteração final, depois da qual declara-se a convergência.

---

Tendo-se  $p^*$ , resultante da iteração posterior, resolve-se a equação do momento para se obter  $u^*$  e  $v^*$ . Deste campo de velocidade, calcula-se a fonte de massa  $c$ , da equação de correção da pressão. Desde que esta é a última iteração, o valor de  $c$  será praticamente zero, para todo o volume de controle. Então  $p^* = 0$  em todos os pontos do domínio é uma solução aceitável, e as velocidades e pressão asterisco serão, elas mesmas, as velocidades e pressões corretas. Então,  $p^* = 0$  em todos os pontos do domínio significa que o campo de pressão correto foi obtido, e que a solução atual de  $p^*$  não é necessária durante a iteração final. Obviamente, a solução final convergida é independente de qualquer aproximação feita na derivação da equação de  $p^*$  - uma equação que não é usada na solução final.

5. A fonte de massa  $c$ , serve como um bom indicador de convergência. As iterações devem continuar até que o valor de  $c$  seja suficientemente pequeno, em todos os pontos.

6. A taxa de convergência do procedimento, entretanto, irá depender da formulação particular da equação para  $p$ . Se muitos termos são omitidos poderá ocorrer divergência.

7. As equações de correção da pressão são propensas à divergência, a menos que seja usado subrelaxação. Este assunto e o método de solução indireta do sistema de equações estão contidos no Apêndice I.

## CAPÍTULO 6

### 6. SIMULAÇÃO

Partindo-se do algoritmo SIMPLE, desenvolvido no capítulo 5, foi implementada uma rotina de cálculo para computadores, em linguagem FORTRAN. O programa foi rodado em uma estação de trabalho SUN-SPARC STATION para número de Reynolds variados. As simulações concentraram-se à número de Reynolds moderados, onde as aproximações da camada limite ou de "creeping flow" não são válidas, impossibilitando um tratamento analítico representativo.

#### 6.1. GERAÇÃO DA MALHA

Antes de efetuar as simulações era necessário fixar alguns parâmetros genéricos do programa a saber:

1. Número de Pontos da Malha na Direção Axial (NZ)
2. Número de Pontos da Malha na Direção Radial (NR)

O método clássico utilizado para determinação de tais parâmetros consiste em ir aumentando o número de pontos da malha até que os resultados não sofram mais alterações com número de pontos maiores, a menos de uma tolerância. Desta forma é preciso que se realize uma série de simulações até que se atinja o objetivo. Não deve ser esquecida a interdependência dos resultados com o número de pontos na direção axial e/ou radial.

3. Fator de Concentração da Malha na Direção Axial (FZ)
4. Fator de Concentração da Malha na Direção Radial (FR)

Estes dois parâmetros são decorrentes da opção de se utilizar malhas variáveis. A malha pode estar mais concentrada em determinadas regiões do domínio (veja figura 6.1) de acordo com a conveniência. É desejado que ela se concentre nas regiões de maior gradiente, garantindo com isto, uma maior reprodutibilidade do comportamento da função. Conhecendo-se de antemão o comportamento das variáveis pode-se concentrar a malha nestas regiões, porém fica difícil definir quão concentrada seria esta malha. Neste programa, pode-se concentrar a malha na entrada ou

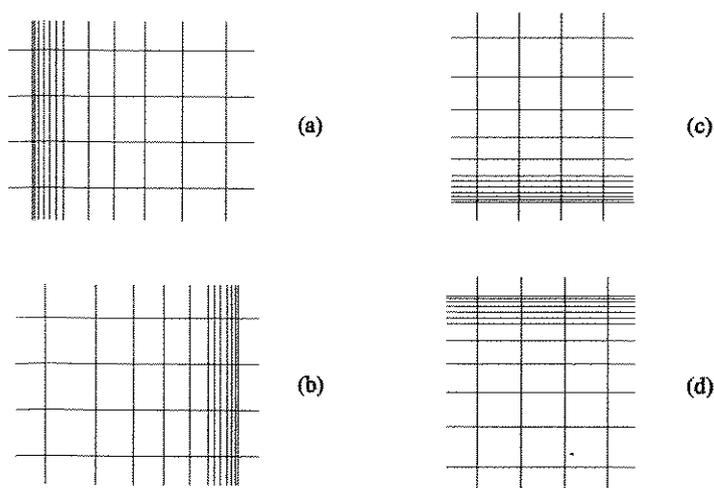
na saída do tubo e na parede ou no centro do mesmo. O tamanho de cada volume de controle, em uma determinada direção, é dado como segue:

$$\begin{aligned}\Delta z_i &= \Delta z_{i-1} \times FZ \\ \Delta r_j &= \Delta r_{j-1} \times FR\end{aligned}\tag{6.1}$$

### 5. Fator de Relaxação para a Velocidade Axial (a)

No método iterativo de solução adotado, é necessário o uso de fatores de relaxação para que seja atingida a convergência. Todas as variáveis calculadas foram subrelaxadas, mas a única que mostrou influência no número total de iterações, e portanto no tempo final de execução, foi a velocidade axial. Fixar tal variável num valor ótimo por simples tentativa e erro é dificultado pelo fato dela fornecer vários pontos de mínimo local para o número de iterações (veja figura 6.2). Além disso ele depende do número de pontos usados, assim como dos fatores de concentração da malha.

Devido às dificuldades em se fixar os cinco parâmetros em valores ótimos pelo procedimento convencional, foi procurado uma metodologia mais científica, através das



**Figura 6.1** - Disponibilidade de concentração da malha: (a) na entrada do tubo; (b) na saída do tubo; (c) no centro do tubo; (d) na parede do tubo.

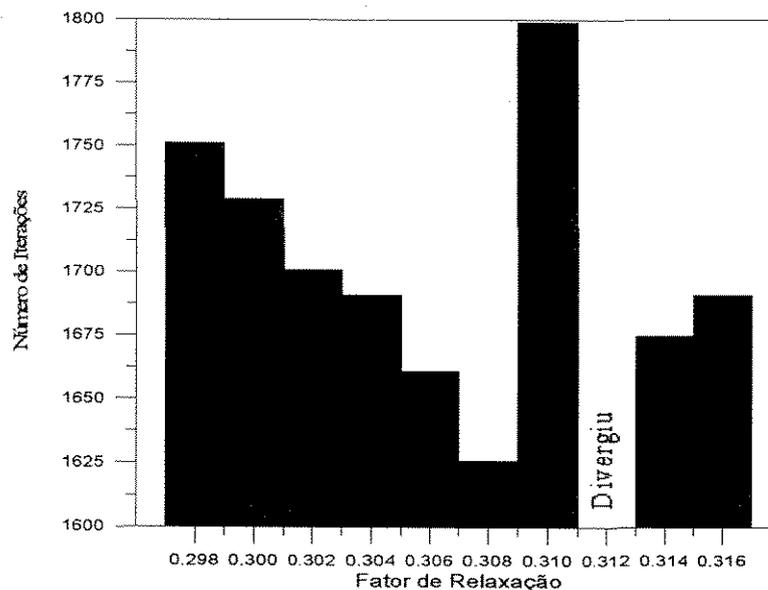
ferramentas legadas pela matemática. Veio a idéia de se utilizar o método de otimização COMPLEX<sup>1</sup> para a fixação dos parâmetros em seus valores ótimos. Precisava-se agora, relacionar tais parâmetros com o tempo de execução e a exatidão da resposta obtida.

### 6.1.1. A Função Objetivo

O número de pontos totais ( $NPT = NZ \times NR$ ) e o número de iterações (NI) foram escolhidos como representantes do tempo computacional. Faltava agora, quantificar a exatidão das respostas.

O perfil de velocidade esperado para a saída do tubo é o perfil parabólico, pois lá, o escoamento encontra-se em regime completamente desenvolvido. O erro relativo percentual médio obtido entre a simulação e a solução exata foi utilizado para quantificar a exatidão.

O passo seguinte foi relacionar os três novos parâmetros de forma que o seu valor mínimo representasse uma condição ótima entre as duas grandezas conflitantes exatidão x tempo computacional. Conflitantes porque para que se consiga maiores exatidões deve-se aumentar o



**Figura 6.2** - Variação do número de iterações com o fator de relaxação. Malha 25x30 e  $Re=100$ .

<sup>1</sup>O algoritmo do método encontra-se no apêndice II.

número de pontos totais da malha, com prejuízos para o tempo computacional.

Através de alguns testes foi possível avaliar a ordem de grandeza dos diversos termos envolvidos. O erro relativo percentual médio girava em torno de 0.1 - 0.2%, enquanto que para uma malha representativa o número de pontos totais girava em torno de  $10^3$  com números de iterações também nesta ordem de grandeza. Foi proposta então a função objetivo:

$$FO = \left( NPT + \frac{NI}{5} \right) \times 1 \times 10^{-5} + Erro$$

Desta forma, quando o erro atingia um certo valor tolerável ( $\approx 0.12\%$ ), aumentando-se o número de pontos a diminuição do erro era irrelevante e o número de pontos mais o número de iterações, com os seu devido peso, passava a atuar como importantes na minimização da função objetivo. Chegou-se afinal aos seguintes valores para a malha:

1. Número de pontos na direção axial : 20
2. Número de pontos na direção radial : 49
3. Fator de concentração axialmente : 1.20
4. Fator de concentração radialmente : 1.00
5. Fator de relaxação da velocidade axial : 0.32

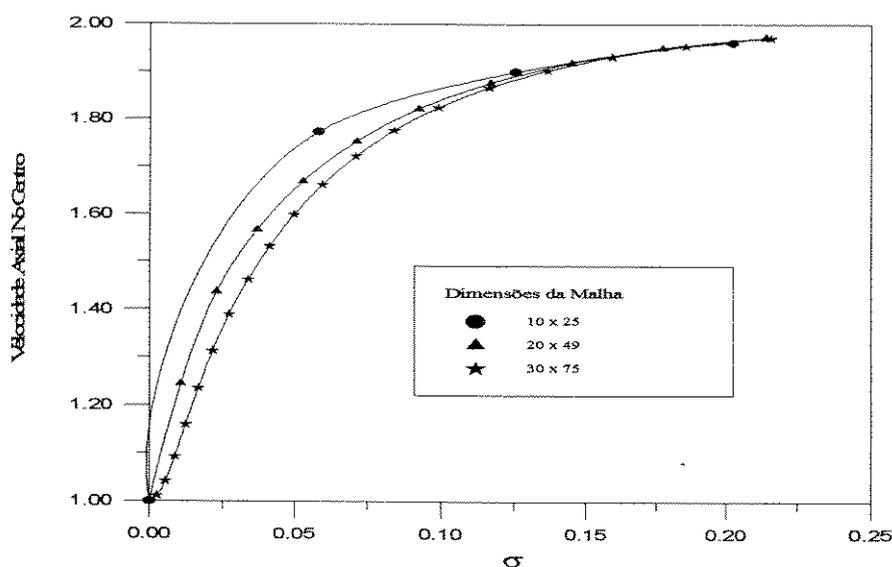


Figura 6.3 - Análise de convergência da malha.

O critério de parada para o programa, nas simulações, consistiu em que o termo de geração de massa da equação de correção da pressão fosse menor do que  $10^{-8}$ . Este número foi obtido após simulações com diversas tolerâncias e observou-se a partir de qual não havia mudanças nos resultados de velocidade e pressão.

Como garantia de que a malha obtida era a ótima, ou ao menos obtida de forma ótima, simulou-se para um mesmo caso ( $Re=100$ ), mas usando número de pontos diferentes do obtido pelo COMPLEX. Foi usada uma malha com 50% de pontos a menos e outra com 50% a mais, em ambas as direções e observou-se os resultados. A figura 6.3 traz a velocidade no centro do tubo em função de um parâmetro adimensional ( $\sigma = 2Z/Re R$ ), que é uma representação da posição axial. Além disto, a tabela 6.1 apresenta o resultado de parâmetros importantes para escolha da malha, como número de iterações, tempo computacional e comprimento de entrada. A partir destes dados pode-se dizer que a malha 20 x 49 apresenta resultado satisfatório. Dependendo da precisão com que se queira fazer a análise, pode-se utilizar uma malha menor, com considerável ganho no tempo de cpu. Este problema, contudo, é muito sensível ao valor da velocidade no centro do tubo, de forma que optou-se pela malha anteriormente referida. A diferença entre  $\sigma$  para uma malha 50% maior é de cerca de 1%, enquanto para a malha 50% menor, este número gira em torno de 5%.

**Tabela 6.1** - Análise de convergência da malha escolhida. Simulações para  $Re = 100$ .

Malha	Tempo de cpu (min)	Número de iterações	$\sigma =$ $(2xZ)/(RxRe)$
10 x 25	1.29	1057	0.2233
20 x 49	17.69	3285	0.2344
30 x 75	87.43	7311	0.2372

## 6.2. ESCOLHA DO ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO

Tendo sido definida a malha, passou-se a analisar os esquemas de interpolação estudados no capítulo 4. Fez-se uma série de simulações para variados números de Reynolds e os resultados foram comparados entre si e com outros encontrados na literatura. A tabela 6.2 traz estes resultados. Os valores de  $Le/D$  foram obtidos por interpolação utilizando-se para isto o software DAMFOR, desenvolvido no Laboratório de Modelagem e Simulação de Processos Químicos da Faculdade de Engenharia Química da UNICAMP, o qual utiliza o método *spline* modificado (Nunhez, 1990). Com ele determinou-se o valor de  $L/D$  para o qual a velocidade axial adimensional no centro do tubo vale 1.98, ou seja, 99% da velocidade máxima no perfil completamente desenvolvido.

**Tabela 6.2** - Valores de  $Le/D$  para os diversos esquemas de interpolação.

Nº de Reynolds	Diferença Central	Upwind	Híbrido	Lei de Potência	Exponencial	Dombroski et al (1993)
10	0.765	0.851	0.776	0.782	0.781	0.883
50	2.671	3.140	3.069	3.066	3.066	2.984
100	4.769	5.927	5.865	5.860	5.860	5.745
150	6.833	8.668	8.611	8.607	8.607	8.504
200	8.941	11.413	11.352	11.350	11.350	11.241
300	13.221	16.933	16.857	16.856	16.857	16.685
400	17.531	22.477	22.385	22.385	22.384	22.271
500	21.858	28.036	27.926	27.925	27.925	27.665

Os resultados obtidos pelo esquema da diferença central mostram-se discrepantes em relação aos outros, exceto para número de Reynolds baixos, o que já era esperado pela análise dos esquemas de interpolação feita no capítulo 4 (número de Reynolds faz o papel de Peclet para transferência de momento). O esquema *Upwind* mostra bons resultados, principalmente para número de Reynolds maiores, podendo ser usado em uma análise que não exija tanta precisão do campo de velocidade quanto na determinação do comprimento de entrada em tubos cilíndricos. Os esquemas híbrido, de lei de potência e o exponencial mostram perfeita concordância entre si. A partir de uma comparação entre o esquema de lei de potência e o exponencial, parece que este último, desenvolvido para o caso unidimensional, realiza uma ótima performance, também no caso bidimensional.

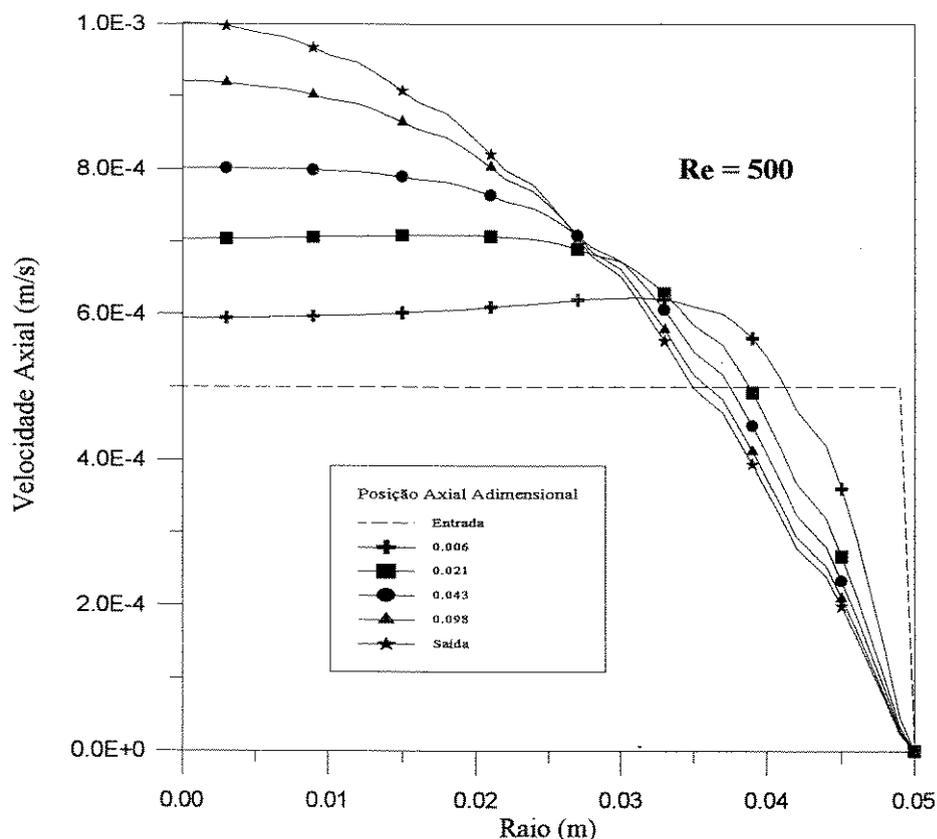
**Tabela 6.3** - Tempos de cpu e número de iterações para os diversos esquema de interpolação

Esquema	Tempo de cpu (min)	Nº de iterações
Diferença central	45.50	9287
<i>Upwind</i>	16.19	3285
Híbrido	17.69	3423
Lei de Potência	51.97	3405
Exponencial	33.72	5341

Da tabela 6.3 pode-se escolher o esquema de interpolação a ser utilizado nas simulações, baseando-se nos tempos de cpu e no número de iterações requeridos para se atingir a convergência. O esquema *upwind* e o híbrido requerem um esforço computacional semelhante, mas devido à maior confiabilidade dos resultados obtidos pelo híbrido, óptima-se por este entre os dois. Entre as três opções remanescentes (híbrido, lei de potência e exponencial) a confiabilidade das três são semelhantes, mas as grandes diferenças entre os tempos computacionais não deixam dúvida de que o esquema híbrido é o mais indicado para as simulações a serem realizadas.

### 6.3. AS VANTAGENS DA ADIMENSIONALIZAÇÃO

Antes de passar para a simulação, convém mostrar as vantagens da adimensionalização. Em primeiro lugar, a ordem de grandeza da velocidade calculada era uma função do número de Reynolds, o que acarretava instabilidades numéricas, principalmente para número de Reynolds baixos. A velocidade radial em certos casos girava em torno de  $10^{-20}$ , fugindo assim da precisão numérica da máquina. Estes problemas de instabilidade podem ser vistos na figura 6.4, que mostra os perfis de velocidade axial em função do raio para diversas posições axiais. A figura 6.5 mostra os perfis obtidos para o mesmo caso, porém com o modelo adimensionalizado. Fica claro que o problema de instabilidade que ocorre na figura 6.4 desaparece por completo, com a simples adimensionalização do modelo.

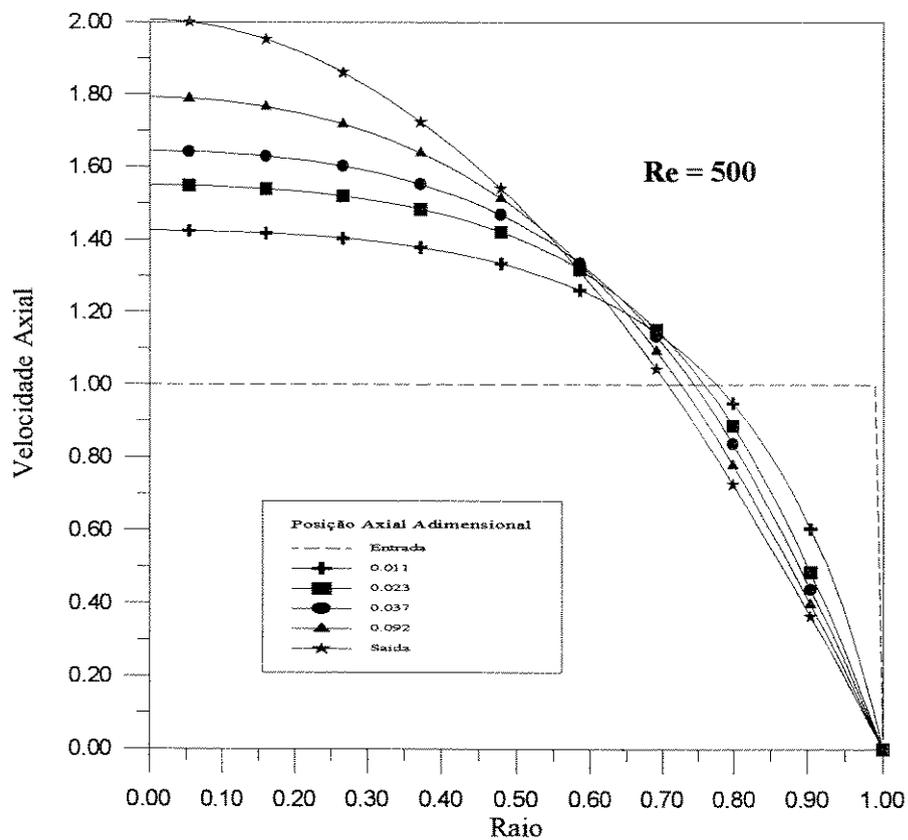


**Figura 6.4** - Perfis da componente axial de velocidade para vários valores de  $\sigma$  utilizando o modelo não adimensionalizado. Simulação para  $Re = 500$ .

**Tabela 6.4** - Comparação do esforço computacional das duas formas do modelo. Simulação realizada para  $Re = 1000$ .

Modelo	Tempo de cpu (min)	Nº de iterações
Não adimensionalizado	37.96	4485
Adimensionalizado	17.69	3423

Outra importante vantagem é que o modelo não adimensionalizado, devido às instabilidades, requer fatores de relaxação muito pequenos, o que leva a tempos computacionais elevados. A tabela 6.4 traz uma comparação do número de iterações e do tempo de cpu para as



**Figura 6.5** - Perfis da componente axial de velocidade para vários valores de  $\sigma$  utilizando o modelo adimensional. Simulação para  $Re = 500$ .

duas formas do modelo, ficando evidente mais esta vantagem da adimensionalização.

## 6.4. SIMULAÇÕES

As simulações foram realizadas em uma estação de trabalho SUN-SPARC STATION e para a malha escolhida, obteve-se um tempo de cpu médio em torno de 17 minutos para cada simulação. Varreu-se uma faixa de número de Reynolds de zero a mil.

### 6.4.1. Análise das Simulações

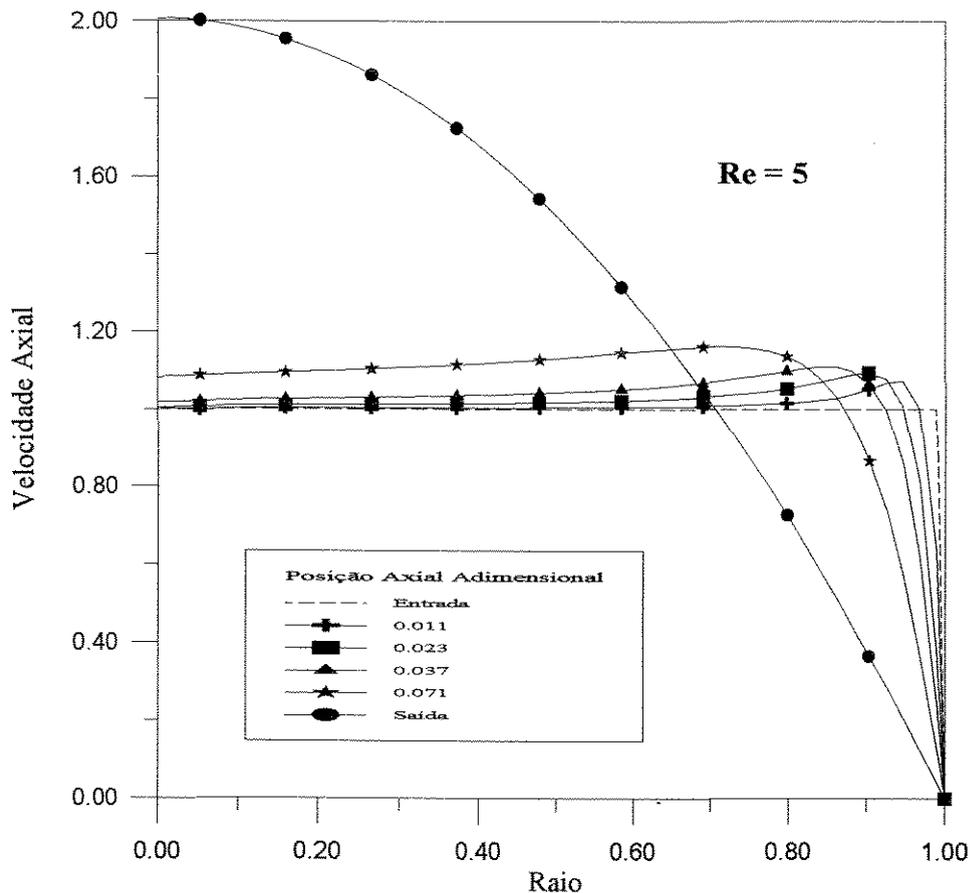


Figura 6.6 - Desenvolvimento dos perfis da componente axial de velocidade ao longo do eixo de escoamento. Simulações para  $Re = 5$ .

Foram escolhidos alguns casos para graficar, sendo estes representantes de escoamentos a números de Reynolds baixo, moderado e alto, porém mantidos em regime laminar. As figuras 6.6, 6.7 e 6.8 mostram o desenvolvimento dos perfis de velocidade em função do raio, ao longo do eixo de escoamento. É interessante notar que o máximo de velocidade, nas regiões adjacentes à entrada do tubo, não ocorre no centro deste, principalmente para números de Reynolds baixos. Este fato foi observado em quase todos os trabalhos apresentados na literatura. Uma explicação provável para o fenômeno é que nas regiões muito próximas à entrada, o fluido perto da parede começa a "sentir" o efeito dela, diminuindo a sua velocidade. Na região central, estes efeitos ainda estão longe de serem sentidos e o perfil reto inicial mudou muito pouco. Os máximos de velocidade, com isto, aparecem perto da parede, de forma a satisfazer a equação da continuidade. Segundo Friedmann et al (Friedmann 1968) "para número de Reynolds muito grandes, o perfil

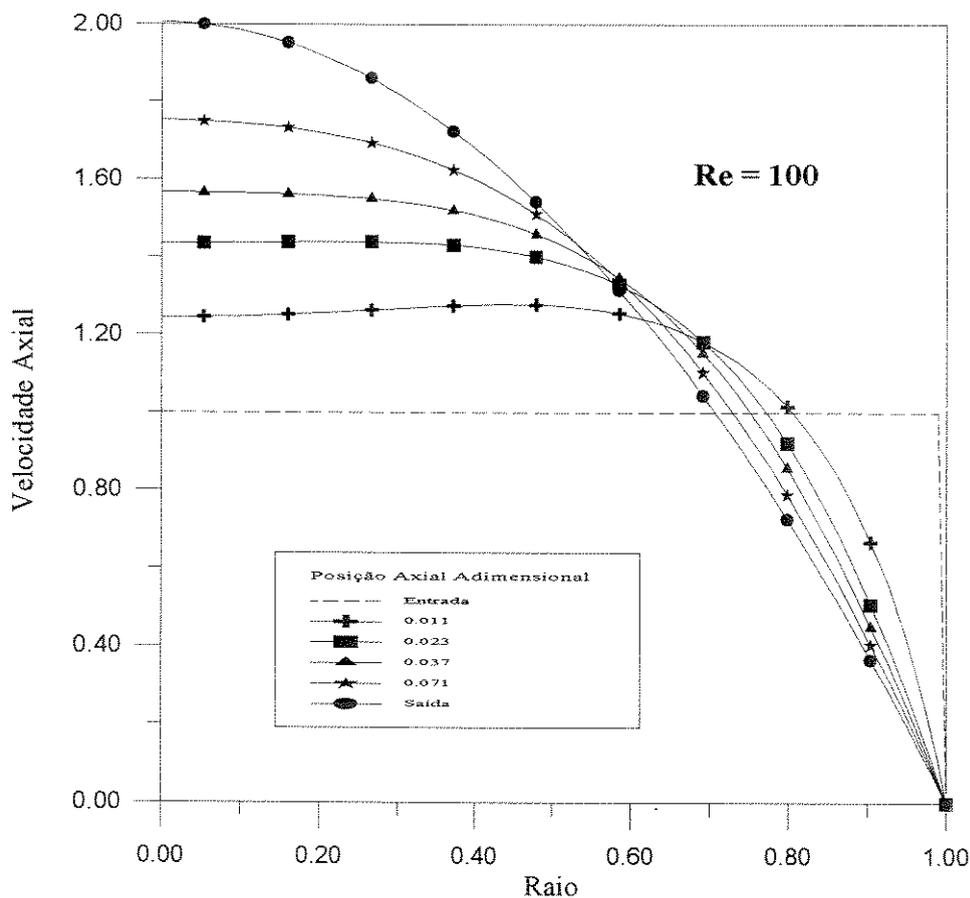


Figura 6.7 - Desenvolvimento dos perfis da componente axial de velocidade. Simulação para  $Re = 100$ .

de velocidade uniforme inicial pode ser mantido através de um longo trecho a partir da abertura do tubo. Os máximos do perfil de velocidade são então puxados para a parede do tubo." ainda segundo ele "para valores menores de Reynolds não somos presumivelmente capazes de manter o perfil uniforme inicial, em escoamento no estado estacionário". É verdade que o comprimento, no qual escoamentos com Reynolds elevados mantêm o perfil reto inicial, é maior que para Reynolds baixos, assim com o são seus respectivos comprimentos de entrada. Porém, como frisa o próprio Friedmann "[...] na aproximação da camada limite - as equações do movimento tem uma solução de similitude em termos de  $z/(rxRe), r$ . Nestas coordenadas a faixa axial das "dobras" dos perfis de velocidade tornam-se desprezivelmente pequenas". Isto é verdade, quando se trata apenas de escoamentos a Reynolds elevados, como pode ser visto, comparando-se as figuras 6.6 e 6.8. Para Reynolds baixos o escoamento completamente desenvolvido é obtido a

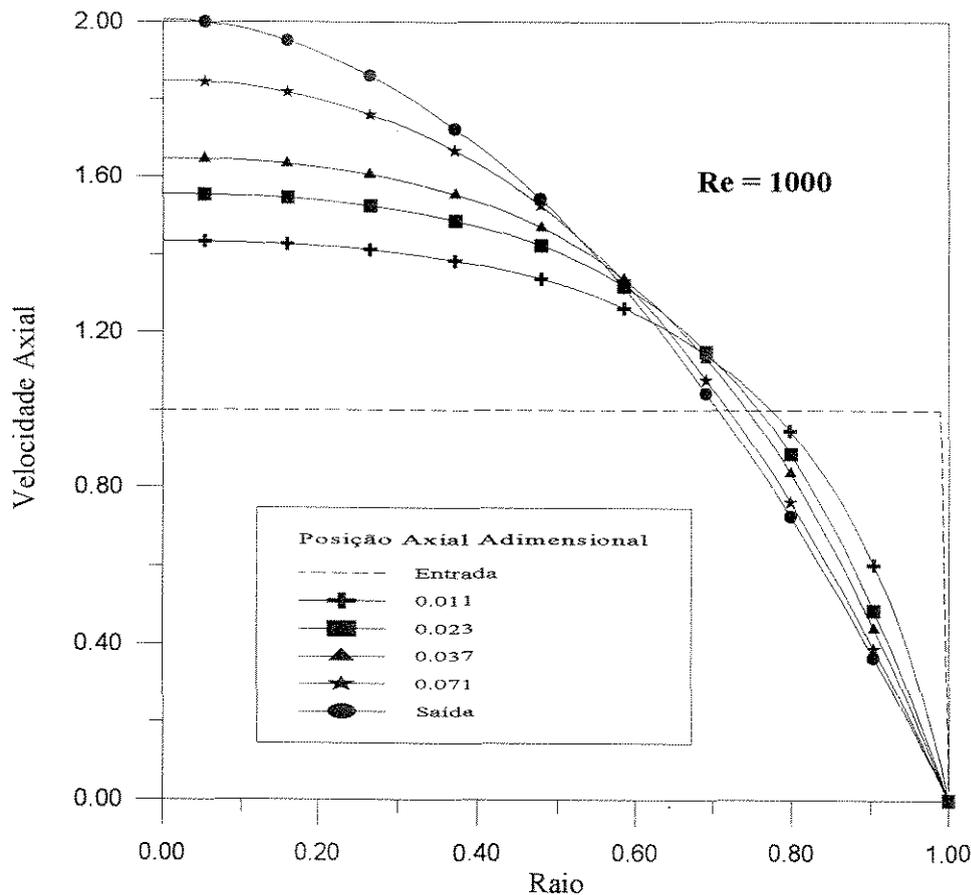


Figura 6.8 - Desenvolvimento dos perfis da componente axial de velocidade ao longo do eixo de escoamento. Simulação para  $Re = 1000$ .

um pequeno trecho da entrada do tubo, porém quando os perfis são plotados em termos do parâmetro de similaridade  $z/(rxRe)$ , ou melhor  $2xz/(rxRe) = \sigma$ , percebemos que para Reynolds baixos os máximos, deslocados do centro, são mais frequentes. A figura 6.15 mostra a tendência a universalidade dos perfis de velocidade para número de Reynolds elevados.

O cruzamento dos perfis de velocidade são requeridos para satisfazer a equação da continuidade, uma vez que a velocidade no centro vai aumentando, a velocidade na região próxima à parede vai diminuindo.

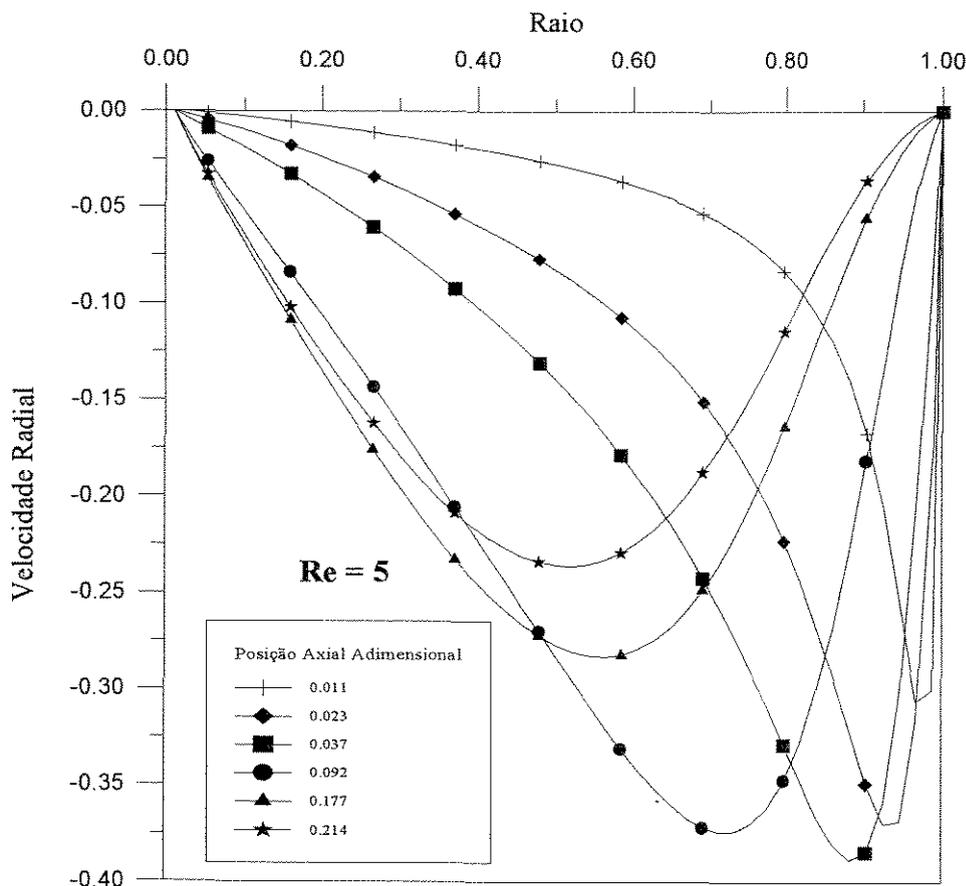
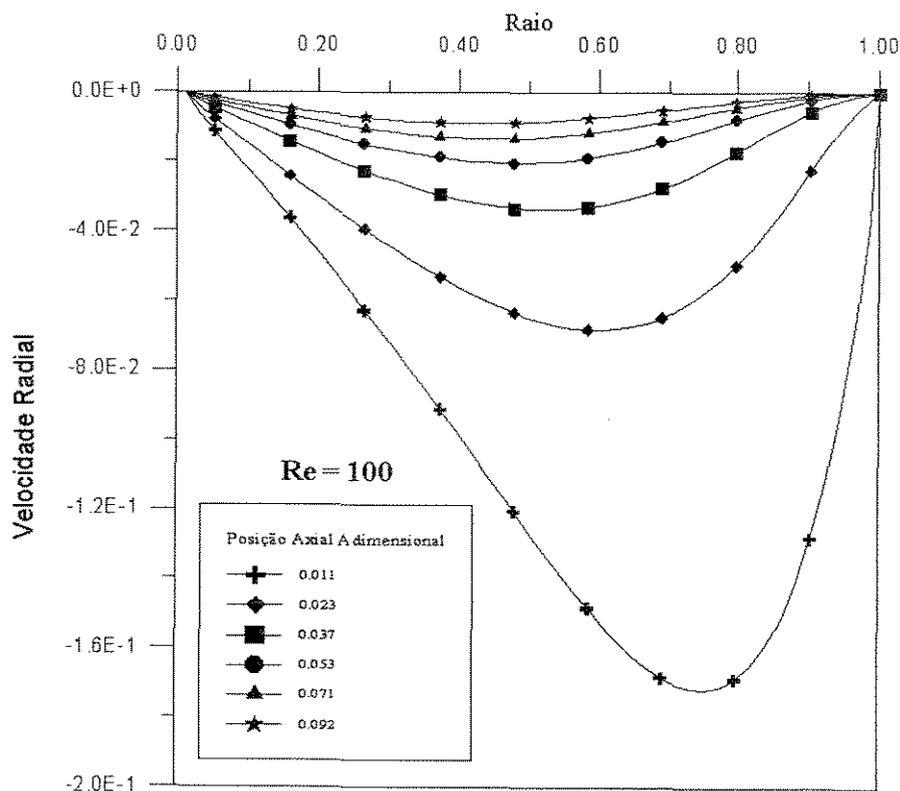


Figura 6.9 - Desenvolvimento dos perfis da componente radial de velocidade. Simulação para  $Re = 5$ .

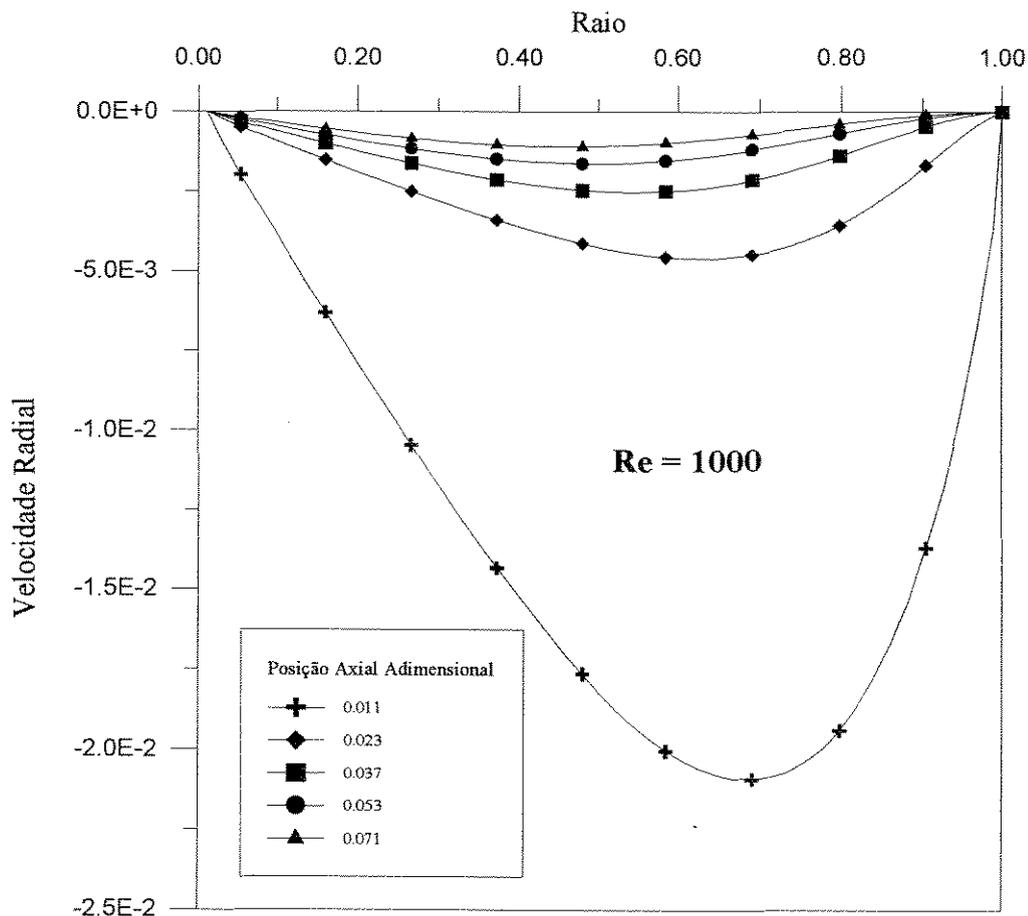
A figura 6.9 traz o desenvolvimento dos perfis de velocidade radial ao longo do eixo de escoamento, representado por  $\sigma$ , para o caso de escoamento lento. Este perfil está de acordo com o perfil de velocidade radial apresentado por Dombrowski et al (Dombrowski, 1993) para Reynolds zero. O comportamento deve ser seguido para qualquer número de Reynolds baixo. A figura 6.10 traz os perfis para número de Reynolds moderado, seguindo a tendência dos perfis apresentados por Goldberg e Folk (Goldberg, 1988). Para Reynolds elevados, os perfis seguem aproximadamente igual aos de Reynolds moderados, conforme pode ser visto na figura 6.11. Pode-se notar que a influência da velocidade radial no escoamento a número de Reynolds elevado é bem menor. Ela reduz-se a valores bem próximos a zero a valores de  $\sigma$  bem menores do que para Reynolds baixos, e mesmo para Reynolds moderados, validando, deste modo, uma das



**Figura 6.10** - Perfis radiais de velocidade radial ao longo do eixo de escoamento. Simulação para  $Re = 100$

aproximações da camada limite para escoamento a Reynolds grandes.

As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 trazem os perfis radiais de pressão para várias posições axiais. A queda de pressão ao longo do tubo, pode ser observada fixando-se em uma posição radial e observando como varia a pressão ao longo de  $z$  (ou  $\sigma$ ). Pode-se observar mais uma vez que as aproximações da camada limite não são válidas para escoamentos lentos. A figura 6.12 mostra que o gradiente radial de pressão não pode ser desprezado, para Reynolds baixos por um longo trecho de escoamento. Para Reynolds 100 e bem perto da entrada do tubo, o gradiente radial da pressão também não deve ser desprezado, sendo a aproximação da camada limite uma abordagem apenas razoável para este caso. Para Reynolds elevados, como o da figura 6.14, praticamente não existe gradiente radial de pressão, sendo esta teoria, aplicável, no que se refere



**Figura 6.11** - Desenvolvimento dos perfis da componente radial de velocidade ao longo do eixo de escoamento. Simulação para  $Re = 1000$ .

às considerações quanto a pressão. A partir deste gráfico pode-se ver também que na entrada do tubo a queda de pressão não é constante, como no caso do escoamento completamente desenvolvido. Ele vai diminuindo até alcançar este valor. Este resultado é esperado, e apesar de se encontrar poucas explicações na literatura, a qual se restringem a constatar o fato, se for observado o trabalho de Hagen (Tietjens 1934), ele supôs que parte da perda de carga total é usada para fornecer energia cinética ao fluido, enquanto a outra parte é necessária para suprir a resistência devida à fricção. Assim, logo na entrada, o termo de aceleração da corrente livre é bastante pronunciado, fazendo com que o termo responsável pelo ganho de energia cinética seja grande, acarretando um acréscimo na queda de pressão predita para escoamento completamente desenvolvido (apenas forças viscosas). À medida em que avançamos no comprimento axial, a

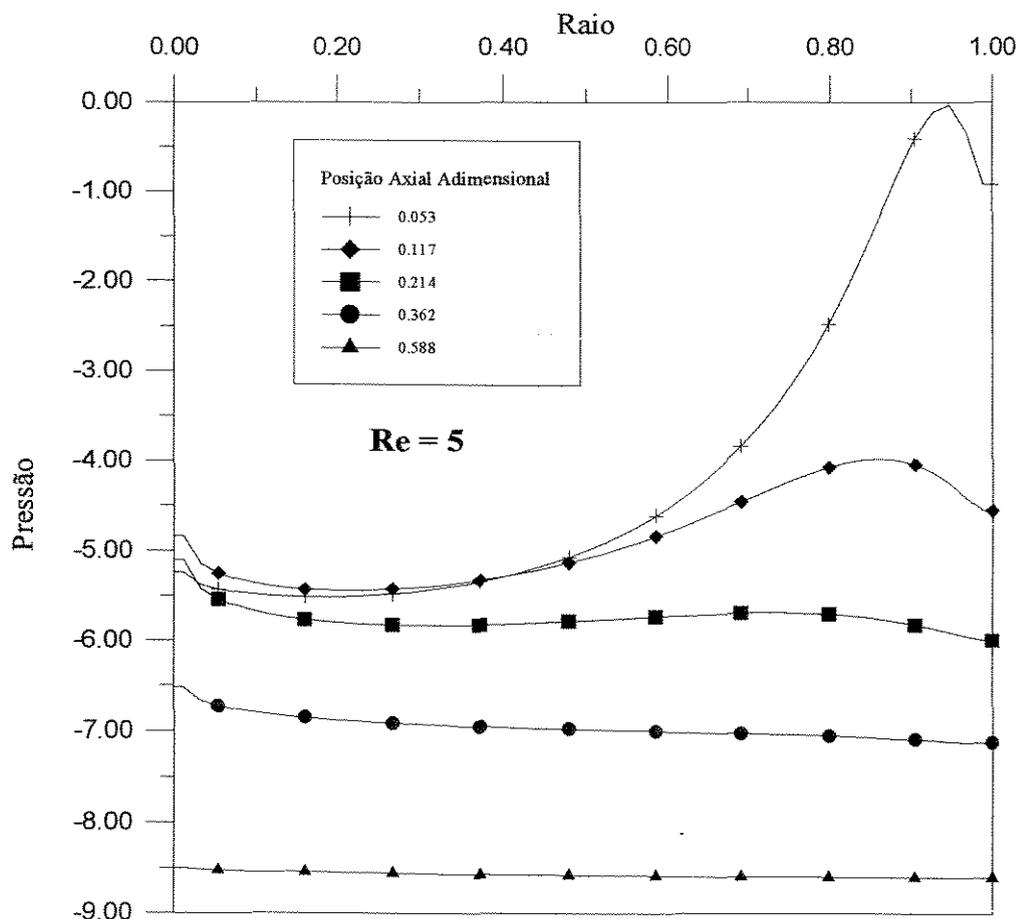


Figura 6.12 - Perfis radiais de pressão ao longo do eixo de escoamento. Simulação para  $Re = 5$ .

aceleração vai diminuindo, o acréscimo na queda de pressão para escoamento completamente desenvolvido vai diminuindo até que, quando ele é atingido, não existe mais variação da velocidade axial em relação a coordenada axial e o ganho em energia cinética vale zero, passando a queda de pressão a ser constante.

A tabela 6.5 traz uma comparação entre o comprimento de entrada, obtido por simulação, com o de outros trabalhos apresentados na literatura. Baseado nestes resultados e em diversas formas de correlações sugeridas em (Dombrowski 1993) é proposta uma nova correlação para determinação do comprimento de entrada para tubos cilíndricos, estendendo sua faixa de validade de Reynolds igual a 500 para 1000.

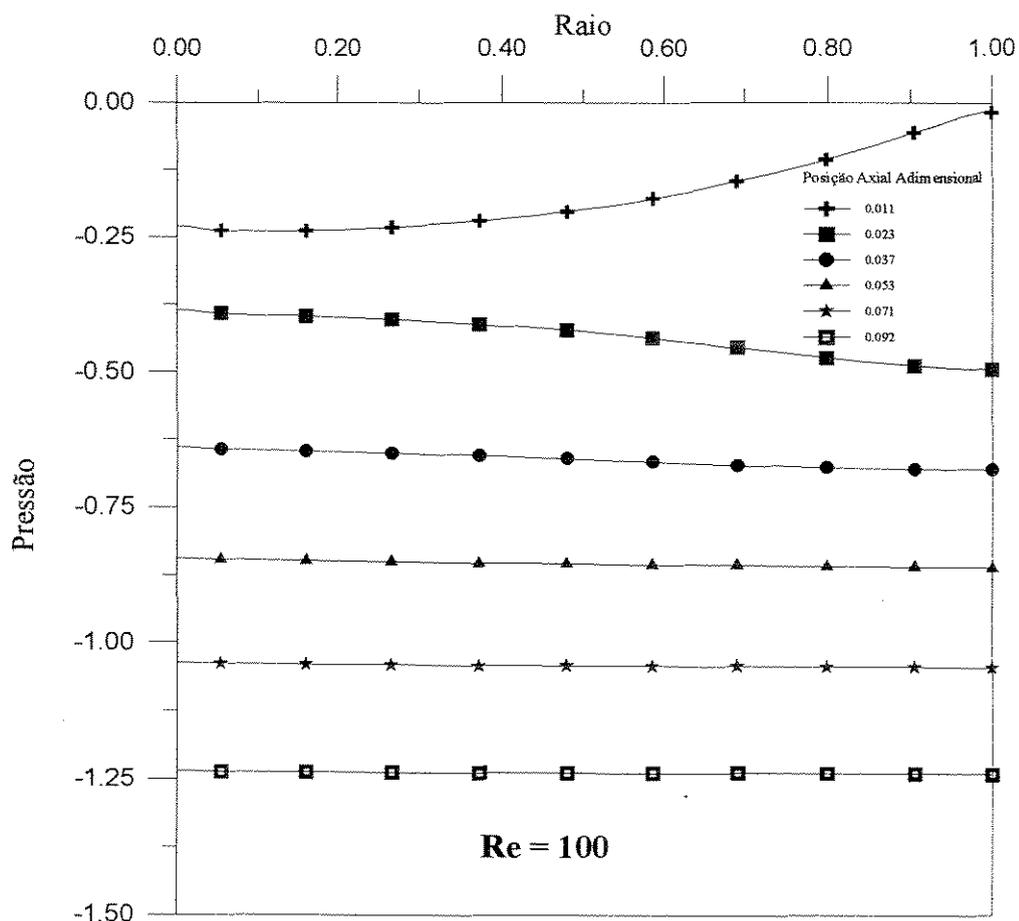


Figura 6.13 - Perfis de pressão ao longo do eixo de escoamento. Simulação para Re = 100.

**Tabela 6.5** - Comparação entre os valores de  $Le/D$  obtidos por diversos trabalhos.

Re	$Le/D$ Este Trabalho	$Le/D$ SIMPLE	$Le/D$ Dombrowski (1993)	$Le/D$ Friedmann (1968)	$Le/D$ Langhaar (1942)
5	0.605	-	0.714	-	0.288
10	0.776	-	0.883	0.880	0.575
20	1.310	-	1.377	1.350	1.150
30	1.891	-	1.921	-	1.725
40	2.486	-	2.483	2.440	2.300
50	3.069	-	2.984	-	2.875
100	5.865	6.421	5.745	5.650	5.750
150	8.611	9.469	8.504	8.475	8.625
200	11.352	12.548	11.241	11.300	11.500
300	16.857	18.600	16.685	16.800	17.250
400	22.385	24.639	22.271	22.400	23.000
500	27.926	30.631	27.665	28.000	28.750
750	41.805	-	-	-	43.125
1000	55.700	-	-	-	57.500

Nota-se que as aproximações efetuadas por Langhaar penaliza os seus resultados, servindo no entanto como uma estimativa inicial para o comprimento de entrada. O SIMPLE refere-se ao tratamento convencional dado às condições de contorno e pode-se assim, ver a sensível melhoria nos resultados advindos de uma substituição mais adequada das condições de contorno (uma discussão mais detalhada será dada adiante). Os resultados provenientes deste

trabalho concordam com os resultados numéricos de Foumeny e Friedmann, com excessão para número de Reynolds muito baixos. A tabela 6.6 mostra os mesmos resultados da tabela acima, porém ao invés de  $Le/D$  ela apresenta os valores de  $\sigma_e = (2xLe/(rxRe))$ . O tratamento analítico mostra uma tendência a universalização dos perfis de velocidade adimensionais em função de  $\sigma$  e portanto uma universalização para  $\sigma_e$ , quando o número de Reynolds são suficientemente elevados para permitir um aproximação de camada limite. Os resultados de Langhaar (equação 1.2), quando observados sob este prisma, mostram uma similaridade em  $\sigma_e$  para toda a faixa de Reynolds e o valor de 0.23 é elevado, mesmo para Reynolds grandes. É esperado um comportamento assintótico para  $\sigma_e$ , o que é observado nos outros trabalhos. Os resultados de Foumeny, entretanto, mostra uma pequena oscilação entre Reynolds 300 e 500, o que é no mínimo curioso. O comportanto dos resultados obtidos por Friedmann parece mais coerente, não fosse a aproximação em degrau a partir de Reynolds 100.

A figura 6.15 traz a velocidade no centro do tubo, em função da variável adimensional  $\sigma = (2xz)/(RxRe)$ , e que varia com a posição axial. Este fator mostra uma tendência a

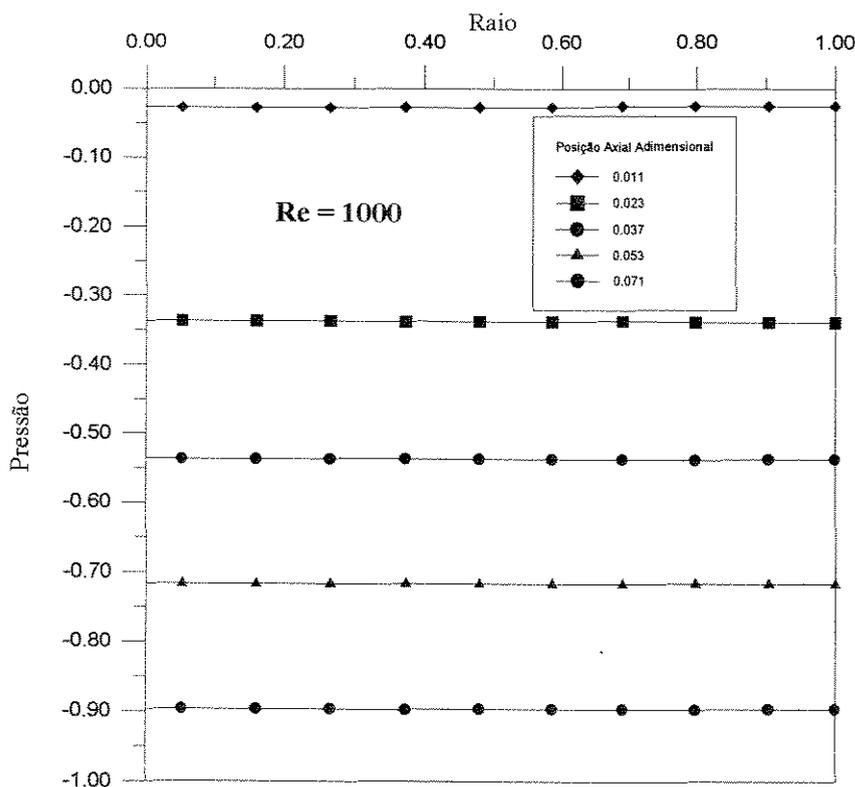


Figura 6.14 -Perfis radiais de pressão ao longo do eixo de escoamento. Simulação para  $Re = 1000$ .

universalidade com o número de Reynolds à medida que este vai aumentando, conforme apontado por Friedmann. Langhaar utiliza  $\sigma$  num gráfico semelhante ao da figura 6.15 e encontra que este é independente do número de Reynolds. Desta forma, ele obtém uma relação linear entre  $Le/D$  e número de Reynolds ( $Le/D = 0.0575 \times Re$ ). Isto é devido às aproximações de linearização dos termos convectivos, de não considerar a variação radial da pressão, não utilizar a equação do momento radial. As aproximações feitas por ele são válidas no caso em que o número de Reynolds é alto, e onde a universalidade do parâmetro  $\sigma$  é válida.

A figura 6.16 faz uma comparação do desenvolvimento da velocidade axial no centro do tubo obtido neste trabalho com o de outros provenientes da literatura.

**Tabela 6.6** - Comparação entre os valores de  $\sigma_e$  obtidos por diversos trabalhos.

Re	$\sigma_e$ Este Trabalho	$\sigma_e$ SIMPLE	$\sigma_e$ Dombrowski (1993)	$\sigma_e$ Friedmann (1968)	$\sigma_e$ Langhaar (1942)
5	0.4840	-	0.5712	-	0.2300
10	0.3104	-	0.3532	0.3520	0.2300
20	0.2620	-	0.2754	0.2700	0.2300
30	0.2521	-	0.2561	-	0.2300
40	0.2486	-	0.2483	0.2440	0.2300
50	0.2455	-	0.2387	-	0.2300
100	0.2346	0.2568	0.2298	0.2260	0.2300
150	0.2296	0.2525	0.2268	0.2260	0.2300
200	0.2270	0.2510	0.2248	0.2260	0.2300
300	0.2248	0.2480	0.2225	0.2240	0.2300
400	0.2239	0.2464	0.2227	0.2240	0.2300
500	0.2234	0.2450	0.2213	0.2240	0.2300
750	0.2230	-	-	-	0.2300
1000	0.2280	-	-	-	0.2300

Pode-se observar que a solução obtida segue o comportamento da solução analítica (Langhaar, 1942), mas os valores desta, em função das simplificações já descritas, são apenas aproximadas. Os resultados mostram boa concordância com as soluções numéricas (Friedmann, 1968 e Asthana, 1978) e também com os dados obtidos experimentalmente por Nikuradse (Tietjens, 1934).

#### 6.4.1.1. A Condição de Contorno

Os resultados reportados nas tabelas 6.4 e 6.5 mostram a grande melhoria proveniente da substituição da condição de contorno via discretização das equações no centro. Os desvios relativos entre o procedimento proposto e o tradicional gira em torno de 10%. As simulações

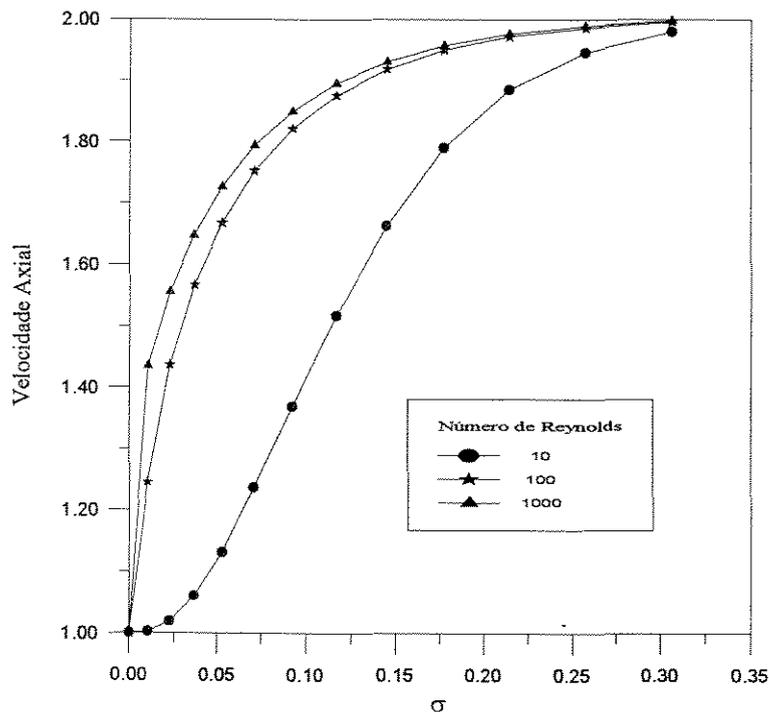


Figura 6.15 - Tendência à universalidade dos perfis de velocidade no centro do tubo, com o aumento do número de Reynolds.

realizadas pelo SIMPLE convencional durava em média 10 minutos, ou seja, uma redução de cerca de 40% no tempo de computação. Este aumento no esforço computacional é devido a adição do ponto singular  $r=0$ , o que provoca instabilidades no sistema, aumentando a sua tendência à divergência, exigindo com isto um fator de relaxação menor, aumentando assim o número de iterações requeridas. Esta tendência à instabilidade foi sentida também concentrando a malha em torno do centro, de forma a se obter pontos mais perto dele. Isto porém em nada melhorava os resultados uma vez que em se fazendo isto a região de gradientes radiais de velocidade elevados (perto da parede) ficavam com a malha mais grossa e o fator de relaxação tinha que ser diminuído para que se atingesse a convergência, com o conseqüente aumento no número de iterações e tempo de computação.

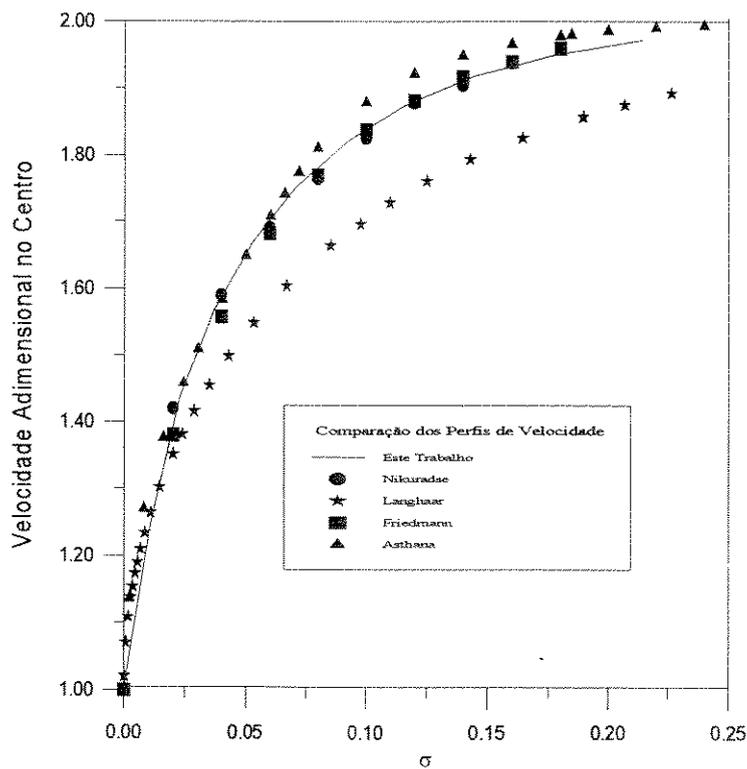


Figura 6.16 - Comparação dos perfis de velocidade no centro do tubo, por diversos autores..

### 6.4.1.2. Propostas de Correlações para o Comprimento de Entrada

Baseando-se em modelos de correlações apresentados na literatura (Dombrowski 1993) são propostas algumas correlações para a determinação do comprimento de entrada, para escoamento laminar em dutos cilíndricos. A escolha entre elas deve ser ponderada em razão da precisão requerida e da complexidade da correlação. Para o ajuste dos parâmetros foi utilizado o "software" ESTATÍSTICA e foi utilizado o método de Rosenbrock e quasi-Newton.

A expressão (6.2) é baseada na universalidade dos perfis de velocidade (Langhaar 1942)

$$\frac{Le}{D} = 0.0603 \times Re \quad (6.2)$$

A equação (6.3) é um novo ajuste da correlação proposta por Emery e Chen (Emery, 1968), onde o valor 0.6 corresponde à declividade de  $Le/D \times Re$  no limite em que o número de Reynolds tende a zero (Dombrowski 1993) e 0.0557 ao valor desta declividade quando Reynolds tende a infinito ( $Re=1000$  obtido via simulação). Com isto forçou-se que nos limites a função fosse bem representada.

$$\frac{Le}{D} = \frac{0.6}{(1 + 0.153 \times Re)} + 0.0557 \times Re \quad (6.3)$$

A equação (6.4) é um ajuste da proposição feita por Dombrowski et al (Dombrowski 1993) e mais uma vez os valores 0.6 e 0.0557 aparecem pelo mesmo motivo descrito.

$$\frac{Le}{D} = 0.6 \frac{-1}{1 + 0.437 \times Re} - 0.861 \exp(-0.00086 \times Re) + 0.0557 \times Re \quad (6.4)$$

A tabela 6.7 traz os resultados obtidos por estas correlações, enquanto as figuras 6.17 a 6.22 os trazem em representação gráfica. Fica evidente que a abordagem realizada pela aproximações da solução da camada limite, resultando em um perfil universal de velocidades não é válido, já que os desvios obtidos pela correlação linear apresentam desvios acentuados em

relação aos valores obtidos por simulação. A equação (6.3) traz um erro médio em torno de 2 a 3%, e um erro máximo de 7%. A equação (6.4) fornece um erro médio de 1.5%, com um erro máximo de 3.5%, sendo o desvio calculado por:

$$\text{Desvio} = \frac{Le/D_{corr} - Le/D_{sim}}{Le/D_{sim}} \times 100$$

Onde

$Le/D_{sim}$  =  $Le/D$  obtido via simulação e  $Le/D_{corr}$  =  $Le/D$  obtido pela correlação.

**Tabela 6.7** - Comparação entre os valores de  $Le/D$  obtidos pelas correlações propostas com os obtidos via simulação.

$Re$	$Le/D$ Simulação	$Le/D$ Eq.(6.2)	Desvio Eq.(6.2)	$Le/D$ Eq.(6.3)	Desvio Eq.(6.3)	$Le/D$ Eq.(6.4)	Desvio Eq.(6.4)
5	0.605	0.302	-50.08	0.618	2.15	0.595	-1.65
10	0.776	0.603	-22.29	0.794	2.32	0.803	3.48
20	1.310	1.207	-7.86	1.262	-3.66	1.322	0.92
30	1.891	1.810	-4.28	1.778	-5.98	1.869	-1.16
40	2.486	2.414	-2.90	2.312	-7.00	2.424	-2.49
50	3.069	3.017	-1.69	2.854	-7.01	2.983	-2.80
100	5.865	6.034	2.88	5.607	-4.40	5.791	-1.26
150	8.611	9.052	5.12	8.380	-2.68	8.606	-0.06
200	11.352	12.068	6.31	11.159	-1.70	11.421	0.61
300	16.857	18.103	6.88	16.723	-0.79	17.049	1.14
400	22.385	24.138	7.83	22.290	-0.42	22.673	1.29
500	27.926	30.172	8.04	27.859	-0.24	28.292	1.31
750	41.805	45.258	8.26	41.780	-0.06	42.325	1.24
1000	55.700	60.344	8.34	55.704	0.01	56.337	1.14

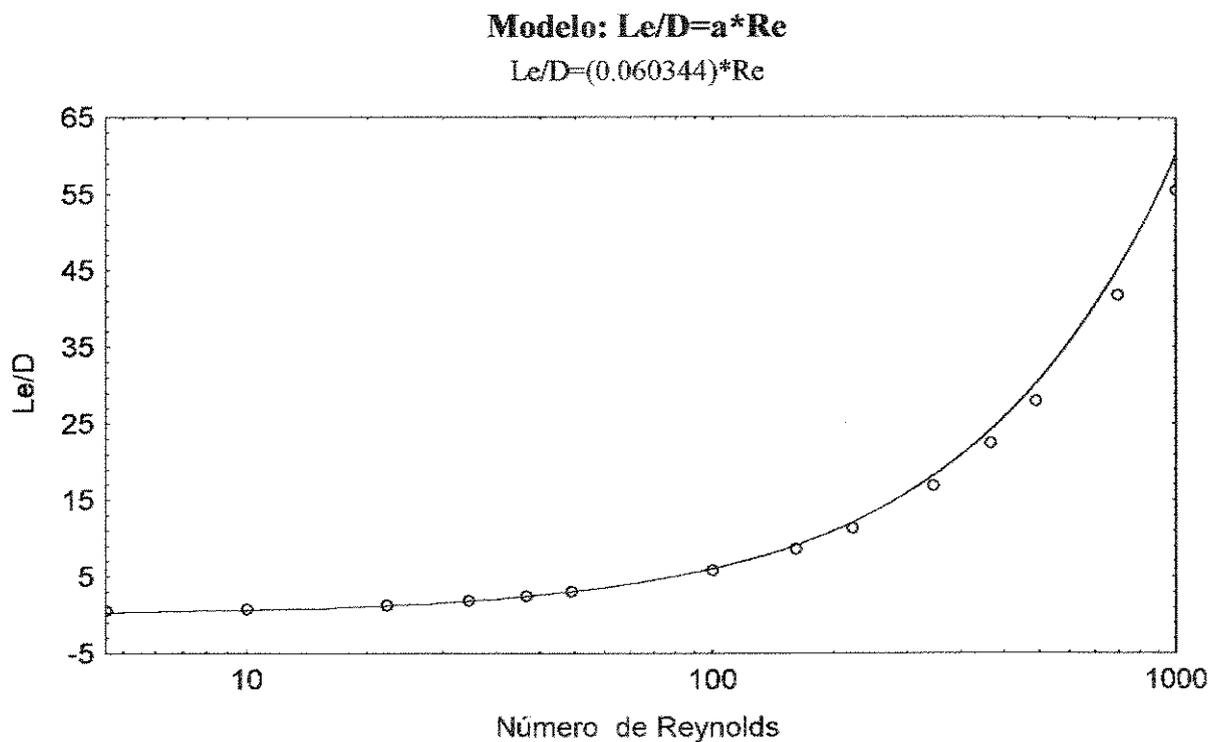


Figura 6.17 - Predição do comprimento de entrada em função do número de Reynolds

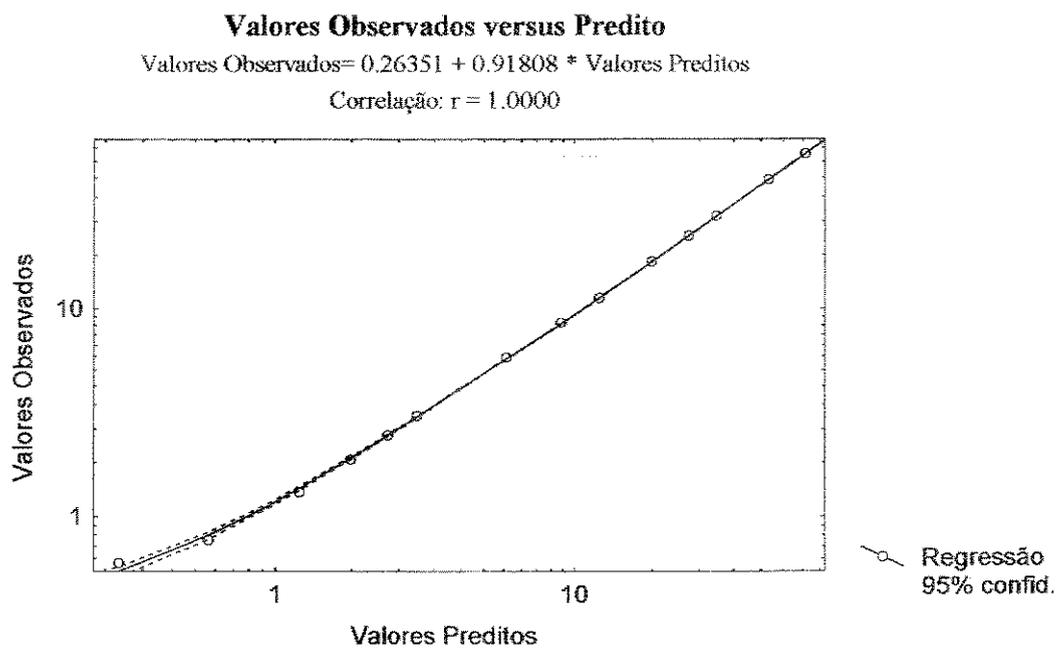


Figura 6.18 - Desvio entre os valores do comprimento de entrada preditos e os obtidos por simulação.

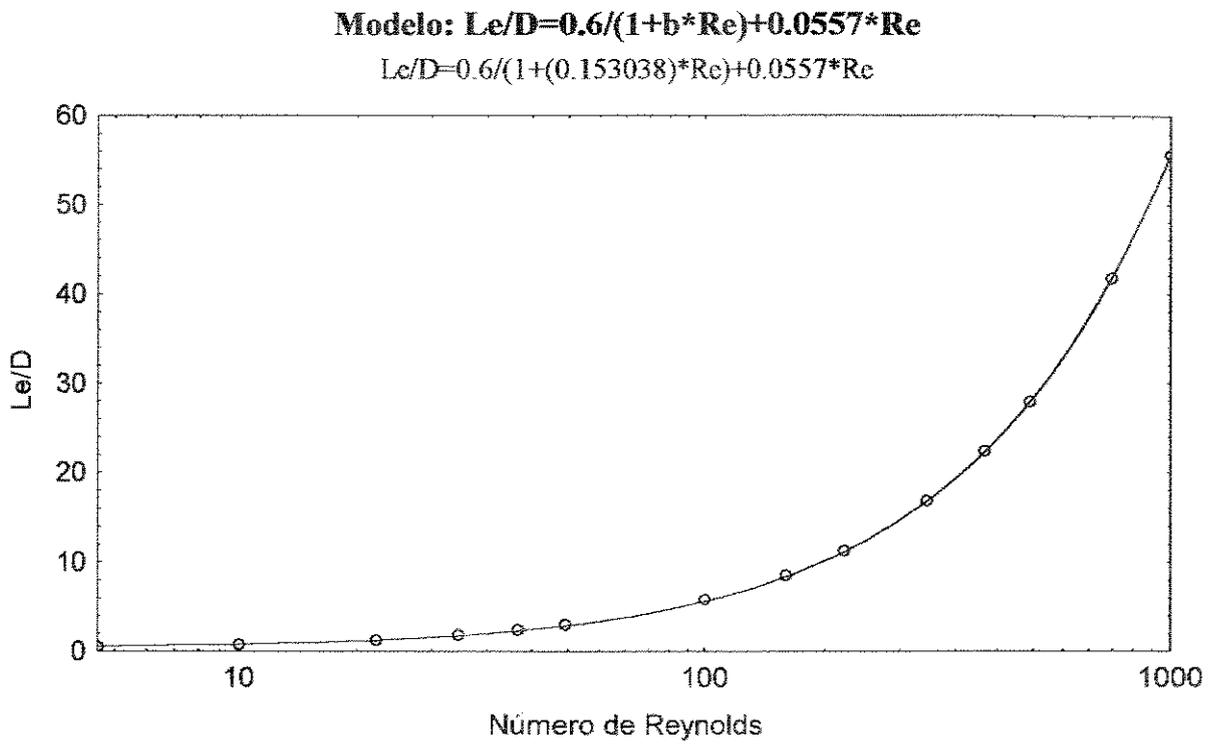


Figura 6.19 - Predição do comprimento de entrada em função do número de Reynolds

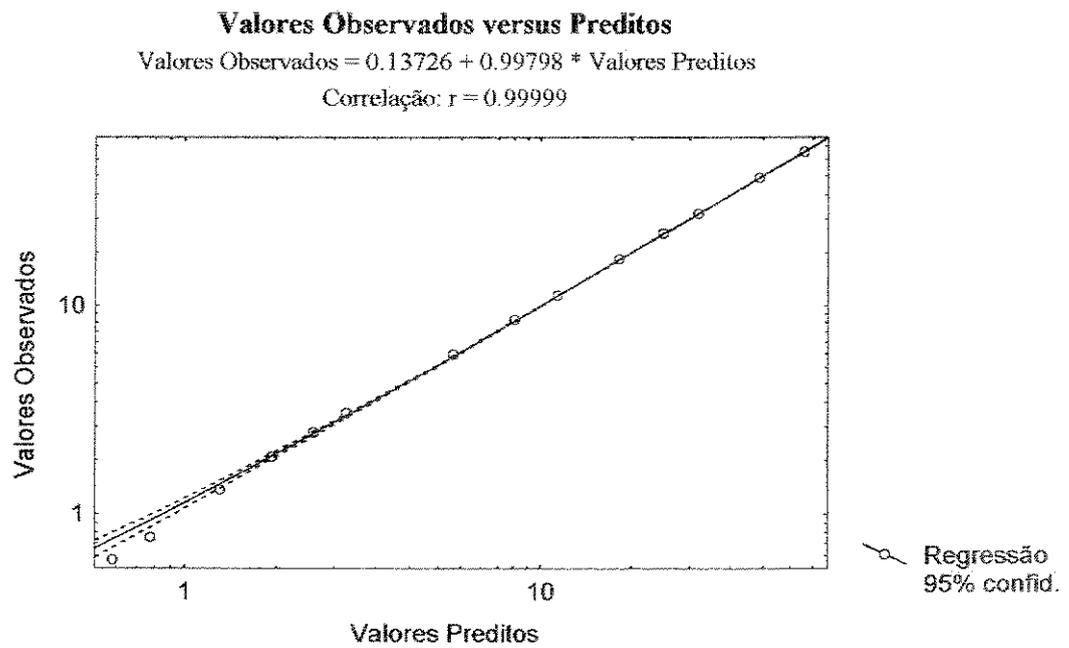


Figura 6.20 - Desvio entre os valores do comprimento de entrada preditos e os obtidos por simulação.

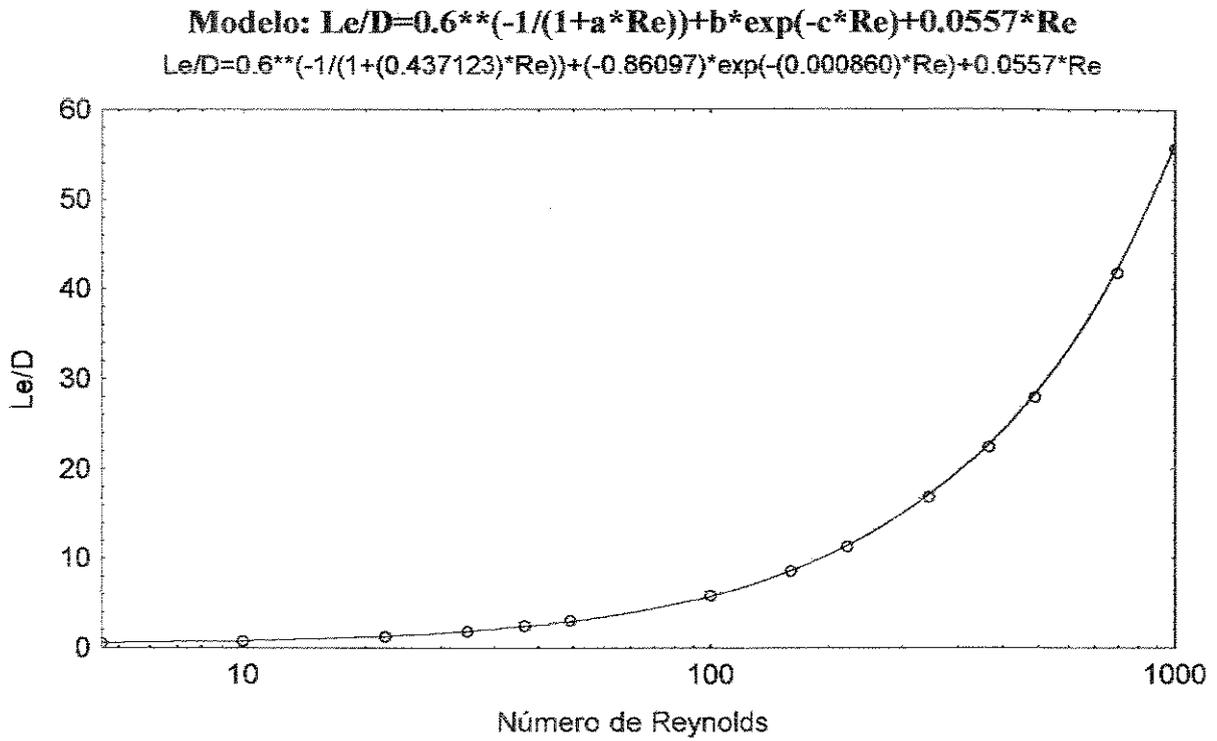


Figura 6.21 - Predição do comprimento de entrada em função do número de Reynolds

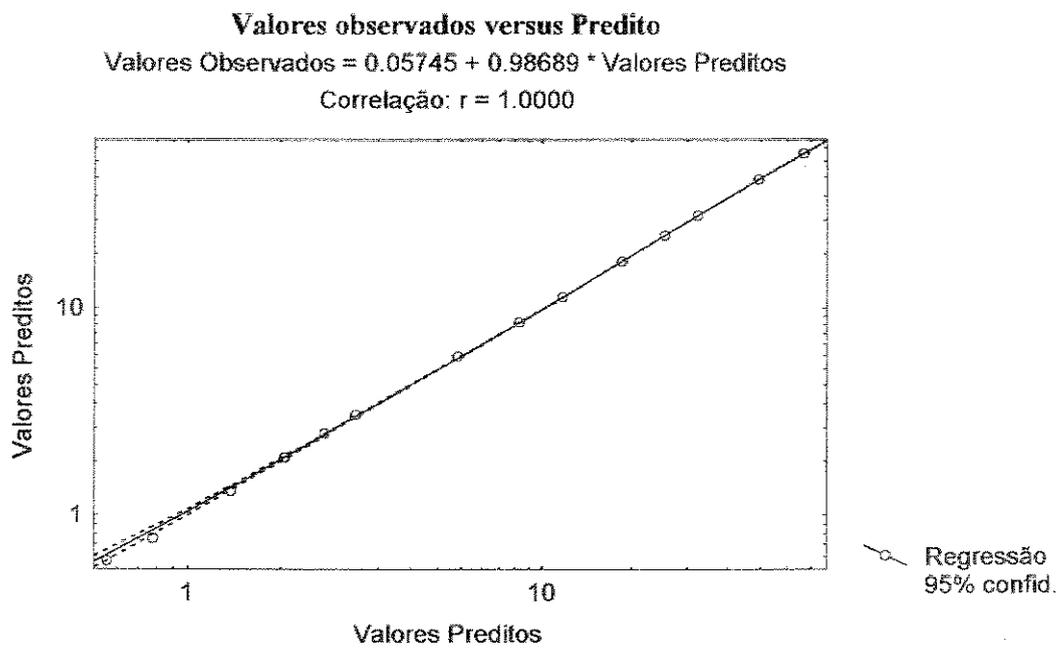


Figura 6.22 - Desvio entre os valores do comprimento de entrada preditos e os obtidos por simulação.

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Foi possível, a partir deste trabalho, obter uma maior familiaridade com o método dos volumes finitos, adquirindo uma melhor compreensão das suas características e peculiaridades. Com o estudo dos esquemas de interpolação utilizados na discretização das equações do modelo, algumas observações interessantes puderam ser extraídas:

1. O método da diferença central, conforme esperado, apresenta resultados sem confiabilidade. Além disto, ele requer um número elevadíssimo de iterações para alcançar a convergência; em consequência, apesar de exigir um esforço computacional, por iteração, semelhante ao *upwind* e ao híbrido, consome um tempo de cpu muito maior que estes últimos.

2. O esquema de lei de potência, sugerido por Patankar, traz resultados semelhantes ao *upwind*, híbrido e exponencial, mas é o que requer maior tempo de cpu e exige maior esforço computacional, mesmo quando comparado com o exponencial.

3. O esquema exponencial, desenvolvido para o caso unidimensional, apresentou excelentes resultados para o caso bidimensional.

4. A adição da discretização das equações governantes ao eixo de simetria, apesar das instabilidades decorrentes da presença do ponto singular  $r = 0$ , trouxe uma melhoria significativa aos resultados, quando comparados com aqueles obtidos via procedimento convencional.

5. O método de otimização utilizado para geração da malha e determinação dos seus parâmetros, contornou uma fase tediosa e muitas vezes ineficiente para aqueles que trabalham com simulação. Uma malha ótima foi gerada, dentro das restrições impostas ao programa.

6. Para o fator de relaxação, com a abordagem rigorosa da condição de simetria, é sugerido utilizá-lo em torno de 0.3 e não mais 0.85 conforme sugerido por Patankar (Patankar, 1980).

7. O método apresentou resultados para o comprimento de entrada compatíveis com aqueles reportados na literatura e mostrou um comportamento mais estável do que os de Dombrowski e os de Friedmann, claramente vistos quando se compara o parâmetro  $\sigma$ .

---

8. Pôde-se estender a faixa de validade das correlações para comprimento de entrada, apresentadas por Dombrowski 1993, até Reynolds 1000, sendo a equação 6.4 a mais confiável. Fica evidente, pela equação 6.2, que a dependência linear proposta nos primeiros trabalhos (Boussinesq e Langhaar 1942) não é válida, principalmente para Reynolds baixos.

São apresentadas, agora, algumas sugestões de continuação para este trabalho:

1. Estudo da influência do deslocamento da malha e/ou volumes de controle. Ao se deslocar a malha e os volumes de controle, na integração, apenas um ponto, para cada variável, entra em todos os balanços (Meier, 1994). Com isto, as equações de conservação só serão satisfeitas no limite em que o número de pontos da malha for muito grande.
2. Estudo comparativo entre os principais algoritmos para acoplamento pressão velocidade.
3. Extensão do programa à sistemas com geometria diferente e/ou com escoamento turbulento.
4. Aplicação do método a problemas de escoamento com fluidos não-newtonianos.

## APÊNDICE I

### O MÉTODO DA T.D.M.A.

A solução das equações discretizadas pode ser obtida pelo método da T.D.M.A. (*Tri Diagonal-Matrix Algorithm*), ou algoritmo de Thomas.

Será desenvolvida a idéia do método para a situação unidimensional, a qual é facilmente estendida para o caso bidimensional.

Tem-se:

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (\text{A-1})$$

A variável  $\phi_i$  é relacionada às variáveis vizinhas  $\phi_{i+1}$  e  $\phi_{i-1}$ . Para levar em conta a forma especial das equações no contorno,  $c_1 = 0$  e  $b_N = 0$ , tal que  $\phi_0$  e  $\phi_{N+1}$  não terão nenhuma função. Se  $\phi_1$  é dado,  $a_1 = 1$ ;  $b_1 = 0$ ;  $c_1 = 0$  e  $d_1$  é o valor de  $\phi_1$ .

Estas condições implicam que  $\phi_1$  é conhecido em termos de  $\phi_2$ . Quando  $i=2$  a relação é entre  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ . Mas desde que  $\phi_1$  pode ser expresso em termos de  $\phi_2$ , esta relação reduz-se a  $\phi_2$  e  $\phi_3$ . Em outras palavras,  $\phi_2$  pode ser expresso em termos de  $\phi_3$ . Este processo de substituição pode continuar até  $\phi_N$ , que é expresso formalmente em termos de  $\phi_{N+1}$ . Mas como  $\phi_{N+1}$  não tem significado, obtém-se o valor numérico de  $\phi_N$ . Com isto, pode-se, através de substituições retroativas obter os valores de  $\phi_{N-1}$ ,  $\phi_{N-2}$  até  $\phi_1$ . Esta é a essência da T.D.M.A. Será apresentado o procedimento para a obtenção das relações de recorrência para se chegar às substituições.

Supondo que no processo de substituição tem-se,

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{A-2})$$

logo depois de haver obtido

$$\phi_{i-1} = P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{A-3})$$

Substituindo A-3 em A-1

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i(P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (\text{A-4})$$

que pode ser rearranjada de forma a parecer com a equação A-2. Em outras palavras, os coeficientes  $P_i$  e  $Q_i$  são:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{A-5})$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{A-6})$$

Estas são as relações de recorrência, uma vez que elas fornecem  $P_i$  e  $Q_i$  em termos de  $P_{i-1}$  e  $Q_{i-1}$ . Para começar o processo de recorrência, pode-se notar que a equação A-1 para  $i=1$  é da forma da equação A-2. Então os valores de  $P_1$  e  $Q_1$  são dados por,

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad e \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{A-7})$$

No outro extremo da sequência de  $P_i$  e  $Q_i$ ,  $b_N = 0$ . Isto leva a  $P_N = 0$  e então, a equação A-2 fica,

$$\phi_N = Q_N \quad (\text{A-8})$$

Chega-se ao ponto de partir para a substituição retroativa através da equação A-2.

$$\Phi_P = \frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + a}{a_P} \quad (\text{A-10})$$

$$\Phi_P = \Phi_P^* + \left( \frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + a}{a_P} - \Phi_P^* \right) \quad (\text{A-11})$$

onde o conteúdo entre parêntesis representa a mudança em  $\Phi_P$  produzida por uma iteração. Esta mudança pode ser modificada pela introdução de um fator de relaxação  $\alpha$ .

$$\Phi_P = \Phi_P^* + \alpha \left( \frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + a}{a_P} - \Phi_P^* \right) \quad (\text{A-12})$$

ou melhor,

$$\frac{a_P}{\alpha} \Phi_P = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + a + (1 - \alpha) \frac{a_P}{\alpha} \Phi_P^* \quad (\text{A-13})$$

Quando se atinge a convergência, isto é,  $\Phi_P$  torna-se igual a  $\Phi_P^*$ , implica que o valor de  $\Phi$  convergido satisfaz a equação original. Qualquer esquema de relaxação deve possuir esta propriedade; a solução final, apesar de ser obtida através de fatores de relaxação arbitrários, deve satisfazer a equação discretizada final.

Quando o fator de relaxação estiver entre 0 e 1, seu efeito é o de subrelaxação, isto é, os valores de  $\Phi_P$  mantêm-se pertos de  $\Phi_P^*$ . Quando  $\alpha$  é maior que, tem-se um caso de aceleração.

Não existe nenhuma regra para a escolha do melhor valor de  $\alpha$ . O valor ótimo depende de diversos fatores como a natureza do problema, o número de pontos da malha, o espaçamento da malha e do procedimento iterativo usado. Normalmente, o ajuste de  $\alpha$  é feito, baseando-se na experiência e de simulações exploratórias, para problemas diversos.

## A P Ê N D I C E    I I

### O   A L G O R I T M O   C O M P L E X

A proposta do algoritmo COMPLEX é encontrar o mínimo (ou máximo) de uma função multivariável, não linear e sujeita a restrições de desigualdades não lineares.

Neste método é usada uma técnica de pesquisa sequencial, mas não requer o cálculo de derivadas. O procedimento procura encontrar um mínimo global, uma vez que o conjunto de pontos iniciais são espalhados randomicamente na região permitida. Os passos do algoritmo são:

1. É gerado um "Complex" original consistindo de  $N+1$  pontos, onde  $N$  é o número de variáveis independentes;
2. Os pontos selecionados devem satisfazer as restrições;
3. A função objetivo é avaliada em cada ponto. O ponto tendo o valor mais alto é substituído por:

$$x_{i,j}(\text{novo}) = \alpha(x_{i,c} - x_{i,j}(\text{velho})) + x_{i,c}$$

onde  $\alpha$  é recomendado como 1.3 (Kuester 1973);

4. Se o ponto continua a fornecer o maior valor da função, em tentativas repetidas, ele é movido à metade da distância em relação ao centróide dos pontos remanescentes ( $x_{i,c}$ );
5. O novo ponto é avaliado em relação às restrições e é ajustado conforme 4 se elas são violadas;
6. Se não há diferença nos valores da função objetivo em cada ponto (a menos de uma tolerância), assume-se convergência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Asthana, S.B.L. & Mohanty, A.K.; 1978, "Laminar Flow in the Entrance Region of a Smooth Pipe." *J. Fluid Mech.*, 90 - Parte 3 , pg. 433.
2. Atkinson, B.; Brocklebanck, M.P.; Card, C.C.H. & Smith, J.M.; 1969, "Low Reynolds Number Developing Flow." *AIChE J.*, Jul., pg. 548.
3. Bird, R.B.; Stewart, W.E. & Lightfoot, E.N.; 1960, "Transport Phenomena" Wiley International Edition, N.Y.
4. Box, M.J.; 1965, "A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods." *Computer J.*, 8, pg. 42.
5. Del Giudice, J.; 1979, "Step-by-Step Analysis of Flow Development in Ducts." *Num. Heat Transfer*, 2, pg. 291.
6. Dombrowski, O.S.; Foumeny, E.A. & Riza, A.; 1993, "The Influence of Reynolds Number on the Entry Length and Pressure Drop for Laminar Pipe Flow." *The Canadian J. Chem. Eng.*, 71., june, pg. 472.
7. Doornaal, J.P. & Raithby, G.D.; 1984, "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows." *Numerical Heat Transfer*, 7, pg. 147.
8. Emery, A.F. & Chen, C.S.; 1968, "An Experimental Investigation of Possible Methods to Reduce Laminar Entry Lengths." *ASME J. Basic Eng.*, 90., 153.

9. Friedmann, M; Gillis, J. & Liron, N; 1968, "A Laminar Flow in a Pipe at Low and Moderate Reynolds Numbers." *Appl. Sci. Res.*, 19, pg. 426.
10. Goldberg, I.S. & Folk, R.T.; 1988, "Solutions for Steady and non-Steady Entrance Flow Reynolds Numbers." *SIAM J. Appl. Math.*, 48, N° 4, pg. 770.
11. Jang, D.S.; Jetli, R. & Acharya, S; 1986, "Comparison of the Piso, Simpler and Simplec Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems." *Num. Heat Transfer*, 10, pg. 209.
12. Kuester, J.L. & Mize, J.H.; 1973, "Optimization Techniques with Fortran" McGraw-Hill Book Company, N.Y.
13. Langaar, H.L.; 1942, "Steady Flow in the Transition Length of a Stright Tube." *J. Appl. Mech.*, Jun, pg. A55.
14. Leonard, B.P.; 1994, "Comparison of Truncation Error of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Convection Terms." *Appl. Math. Modelling*, 18, pg. 46.
15. Mehrotra, A.K. & Patience, G.S.; 1990, "Unified Entry Length for Newtonian and Power-Law Fluids in Laminar Pipe Flow." *The Canadian J. Chem. Eng.*, 68, pg. 529.
16. Meier, H.F.; 1994, *Conversas particulares*.
17. Miller, J.A.; 1971, "Laminar Incompressible Flow in the Entrance Region of Ducts of Arbitrary Section." *J. Engng. Power*, Jan, pg.113.

18. Muniz, L.A.R. & Mori, M.; 1994, "Método dos Volumes Finitos Aplicados à Problemas Bidimensionais de Escoamento em Dutos Cilíndricos." Anais do XXII ENEMP, Florianópolis, S.C. (a ser publicado).
19. Muniz, L.A.R. & Mori, M.; 1995, "Finite Volume Method Analysis - an Application to the Development of Boundary Layers." aceito para The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, Germany, July 3-7.
20. Muniz, L.A.R. & Mori, M., "Finite Volume Method Analysis - an Application to the Development of Boundary Layers." Revista Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (submetido).
21. Nunhez, J.R.; 1990, "Método Spline Modificado: Acoplamento do Método da Máxima Verossimilhança ao Método Spline." Tese de Mestrado - FEQ/UNICAMP.
22. Patankar, S.V.; 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" Hemisphere Publishing Corporation, N.Y.
23. Patankar, S.V.; 1981, "A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations." Numerical Heat Transfer, 4, pg.409.
24. Pantakar, S.V. & Spalding, D.B.; 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flow." Int. J. Heat Mass Transfer, 15, pg. 1787.
25. Spalding, D.B.; 1972, "A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives." Int. J. Num. Methods Eng., 4, pg. 551.

26. Sparrow, E.M.; Lin, S.H. & Lundgren, T.S.; 1964, "Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts." *The Physics of Fluids*, 7, N° 3, pg. 338.

27. Steffani, E.; 1993, "Método de Colocação Ortogonal em Elementos Finitos Aplicado a Problemas Bidimensionais na Região de Entrada de Tubos." Tese de Mestrado - FEQ/UNICAMP.

28. Tietjens, O.G.; 1934, "Applied Hydro- and Aeromechanics." McGraw-Hill Book Co., N.Y.

# **FINITE VOLUME METHOD APPLIED TO A BIDIMENSIONAL FLOW IN THE ENTRANCE REGION OF TUBES**

## **“ABSTRACTS”**

In this work is done a study of the Finite Volume Method, concerning about its characteristics and particularities. A rigorous approach is done for the symmetry conditions. A comparison between this procedure and the conventional one is done. The physic problem is the development of the boundary layer in the entrance region of tubes with circular cross sections, in laminar flow. The entry length are obtained for a large range of Reynolds numbers, sustained in laminar flow. The results are compared with other workers. Some correlations are proposed in order to correlate the entry length to Reynolds numbers, and it proves that the correlations are non linear. An optimization method (COMPLEX) is taken in the parameters determination for the grid used.