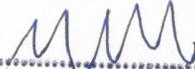


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR ..CARLOS.. ALEXANDRE.....  
OLIVEIRA.. DE... SOUZA..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM ..31.. / ..07.. / ..09..



ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelagem Numérica por Elementos de Contorno 3D de Juntas Coladas  
em Estruturas Aeronáuticas de Material Compósito**

Autor: **Carlos Alexandre Oliveira de Souza**  
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**  
Co-orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**

80/2009

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Modelagem Numérica por Elementos de Contorno 3D de Juntas Coladas  
em Estruturas Aeronáuticas de Material Compósito**

Autor: **Carlos Alexandre Oliveira de Souza**  
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**  
Co-orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009  
S.P-Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So89m Souza, Carlos Alexandre Oliveira de  
Modelagem numérica por elementos de contorno 3D  
de juntas coladas em estruturas aeronáuticas de material  
compósito / Carlos Alexandre Oliveira de Souza. --  
Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientadores: Paulo Sollero, Éder Lima de  
Albuquerque.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Adesivos. 2. Anisotropia. 3. Métodos dos  
Elementos de Contorno. 4. Materiais compostos. I.  
Sollero, Paulo. II. Albuquerque, Éder Lima de. III.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Numerical modeling of bonded joints in aircraft structures of  
composite material using 3D boundary element method

Palavras-chave em Inglês: Adhesives, Anisotropy, Boundary element method,  
Composite materials

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Euclides Mesquita Neto, Eduardo Martins Sampaio

Data da defesa: 31/07/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

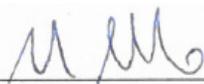
**Modelagem Numérica por Elementos de Contorno 3D de Juntas Coladas  
em Estruturas Aeronáuticas de Material Compósito**

Autor: **Carlos Alexandre Oliveira de Souza**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

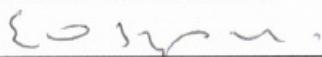
Co-orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



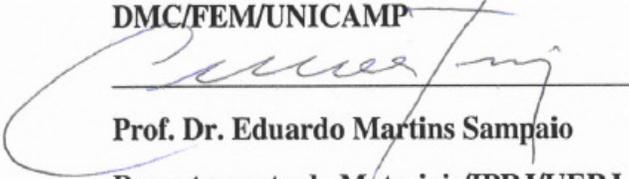
**Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente**

**DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Euclides Mesquita Neto**

**DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Eduardo Martins Sampaio**

**Departamento de Materiais/IPRJ/UERJ**

Campinas, 31 de Julho de 2009.

*À minha pequena Bia:  
De tudo, ao meu amor serei atento  
Antes, e com tal zelo, e sempre, e tanto  
Que mesmo em face do maior encanto  
Dele se encante mais meu pensamento.*

*Quero vivê-lo em cada vão momento  
E em seu louvor hei de espalhar meu canto  
E rir meu riso e derramar meu pranto  
Ao seu pesar ou seu contentamento.*

*E assim, quando mais tarde me procure  
Quem sabe a morte, angústia de quem vive  
Quem sabe a solidão, fim de quem ama*

*Eu possa dizer do meu amor (que tive):  
Que não seja imortal, posto que é chama  
Mas que seja infinito enquanto dure*

***Vinícius de Moraes***

*“A Ciência explica o que é, a Engenharia cria o que nunca foi. A Matemática não é Ciência nem Engenharia. Física e Química são Ciências, mas não Engenharia”.*  
**Joseph Edward Shigley**

*“Somos aquilo o que repetidamente fazemos. A excelência não é, portanto, um modo de agir, mas, um hábito”.*  
**Aristóteles**

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a minha querida tia Ana Maria, que foi a primeira pessoa quem acreditou no meu potencial e sem a qual nada teria acontecido, pois, ela plantou a semente da árvore que gerou este fruto.

Agradeço a minha amada mãe Waldirene, pelo amor incondicional que nutre por mim, o qual o tempo e a distância não conseguiram abalar.

Agradeço a toda a minha família por toda a motivação e confiança que tiveram em mim. Em especial a minha amada avó Edith e aos meus tios: Luís Carlos e Valdício, pelas palavras carinhosas e encorajadoras; e em memória do meu padrinho: Raimundo Nonato Mello cujo suporte foi essencial em uma fase difícil da minha vida.

Agradeço ao meu amigo Ernesto Seiychi Tsukuda por ter me ajudado em um momento decisivo da minha vida, e por ser um exemplo de ser humano e de profissional a ser seguido.

Agradeço ao meu amigo Abenilson Ferreira, pela amizade sincera e verdadeira, e por tantos momentos agradáveis que passamos desde a época do IBGE.

Agradeço ao meu orientador Dr. Paulo Sollero, pela orientação e por todo o suporte que me proporcionou desde a minha chegada a Campinas, e ao meu co-orientador Dr. Éder Lima de Albuquerque pelas sugestões e revisões do meu relatório e deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos da honorável equipe PrOfIcLaN: Gustavo Myrria (“*Pato*”), Andrei Souza (“*Poodle*”), Walter Nakano (“*Vavá*”), Moisés Bastos (“*Balboa*”) e Rodrigo Silva (“*Rodrigaum*”), pela eterna amizade e por todos os momentos memoráveis que passamos juntos durante todos esses anos.

Agradeço em especial ao amigo Anderson Gabriel Santiago (“*Mr. Anderson*”) por tantas dúvidas tiradas e conversas produtivas, além da valiosa amizade.

Agradeço aos amigos da FEM/UNICAMP: Marcel Sato (“*Kamikase*”), Martim Mauler, Renan Ozelo (“*Renanzão*”), Renan dos Santos (“*Renanzinho*”), Rafael Venturini (“*Rafones*”), René Quispe (“*Descartes*”), Rafael Morini (“*Ruffles*”), Marcelo Cavaguti (“*Kavagoat*”), Ricardo, Alberto, Leonardo Machado (“*Bacalhau*”), Paulo Lee (“*Jet*”), William (“*Leibniz*”), Labaki (“*Obama*”), Fábio (“*101 Dálmatas*”) e Hairton, pela amizade e por tornarem minha adaptação a Campinas menos sofrida.

Agradeço ao Departamento de Mecânica Computacional pela estrutura e a todos os Professores da FEM/UNICAMP, que ministraram as disciplinas cursadas por mim, cujas aulas foram de primordial importância para o sucesso deste trabalho.

Agradeço a *Air Force Office of Scientific Research* (AFOSR) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho. OBS: Esses apoios não ocorreram simultaneamente.

# Resumo

Carlos Alexandre Oliveira de Souza, *Modelagem Numérica por Elementos de Contorno 3D de Juntas Coladas em Estruturas Aeronáuticas de Material Compósito*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 97 p. Dissertação (Mestrado).

Na indústria aeronáutica é comum o uso de juntas coladas, rebitadas e parafusadas na união de componentes ou partes estruturais. O projeto de juntas coladas é baseado em análise para a determinação das tensões normais e cisalhantes no adesivo e do campo de deslocamentos ao longo da junta.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional, utilizando o software Matlab<sup>®</sup>, para resolver numericamente o problema de juntas coladas sobrepostas (*lap joints*) de material compósito no contexto 3D. O método numérico empregado para a resolução das equações diferenciais que regem o problema é o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e a Técnica das Sub-Regiões.

Para a implementação são considerados elementos retangulares constantes e descontínuos, isto é, os elementos não compartilham graus de liberdade. É utilizada nesse trabalho a Solução Fundamental para Anisotropia plena obtida por meio da Transformada de Radon que já foi anteriormente implementada por Santiago (2008). Além da Solução Fundamental Anisotrópica, também é implementada uma função contendo a Solução Fundamental Isotrópica com o objetivo de validar o código através de resultados analíticos disponíveis na literatura para este caso.

*Palavras chaves:* Adesivos, Anisotropia, Método dos Elementos de Contorno, Materiais Compostos.

# Abstract

Carlos Alexandre Oliveira de Souza, *Numerical Modeling of Bonded Joints in Aircraft Structures of Composite Material using 3D Boundary Element Method*. Campinas, Mechanical Engineering Faculty, University of Campinas, 2009. Dissertation (Master Degree).

The use of bonded, riveted and bolted joints to assemble components or structural parts is inevitable in aeronautic industries. The design of bonded joints is based upon analyses to estimate peeling and shear stresses in the adhesive and the displacement field along the bonded region.

The objective of this work is to develop a computational tool using the Matlab<sup>®</sup> software to solve numerically the bonded lap joints problem in composite materials for aeronautical structures in 3D context. The numerical method to be employed for solving governing differential equations is the Boundary Element Method (BEM) and Sub-Regions Technique.

For this implementation, rectangular constants and discontinuous elements were considered, which means that nodes don't share degrees of freedom. In this work is used the Fundamental Solution for Anisotropy obtained by Radon transform which was previously implemented by Santiago (2008). Besides the Anisotropic Fundamental Solution, also is implemented a function containing the Isotropic Fundamental Solution with the objective of validating the code with analytical results available in literature for this case.

*Key words:* Adhesives, Anisotropy, Boundary Element Method, Composite Materials.

# Sumário

<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1. Materiais Compósitos.....	2
1.2. Evolução do Método dos Elementos de Contorno.....	5
1.3. Objetivos do trabalho.....	7
1.4. Descrição do trabalho.....	7
<b>2. Revisão Bibliográfica</b>	<b>9</b>
2.1. Introdução.....	9
2.2. Juntas coladas.....	14
2.3. Revisão da Formulação Analítica.....	18
2.3. Modelo em Estado Plano de Deformação.....	23
2.4. Modelo 3D em Elementos Sólidos.....	24
<b>3. O Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>25</b>
3.1. Preliminares Matemáticas.....	27
3.1.1. O teorema de Gauss-Green.....	27
3.1.2. O teorema da divergência.....	31
3.1.3. A segunda identidade de Green.....	32

3.1.4. A função delta de Dirac.....	33
3.2. Formulação do MEC aplicado à Mecânica dos Sólidos.....	36
3.3. Discretização do Problema em Elementos de Contorno.....	42
<b>4. A Solução Fundamental</b>	<b>47</b>
4.1. Solução Fundamental Isotrópica.....	47
4.1.1. O vetor de Galerkin.....	48
4.1.2. Problemas tridimensionais.....	49
4.2. Solução Fundamental Transversalmente Isotrópica.....	51
4.3. Solução Fundamental Anisotrópica 3D.....	54
4.3.1. Soluções fundamentais da elastoestática.....	54
4.3.2. Esquema de interpolação para a solução fundamental anisotrópica.....	56
4.3.3. A transformada de Radon.....	57
4.3.4. Cálculo da solução fundamental anisotrópica.....	62
4.4. Integração Numérica – Quadratura de Gauss.....	65
<b>5. O Método das Sub-Regiões</b>	<b>70</b>
<b>6. Implementação Computacional e Resultados</b>	<b>76</b>
6.1. Geração de Malha.....	77
6.2. Definição e Leitura dos Dados.....	79
6.3. Reordenamento das Matrizes de Influência e Aplicação das Condições de Contorno..	80
6.4. Modelo analítico de Goland e Reissner.....	81

6.5. Validação.....	83
6.5.1. Análise 1: aderentes isotrópicos.....	84
6.5.2. Análise 2: aderentes transversalmente isotrópicos.....	86
<b>7. Considerações Finais</b>	<b>90</b>
7.1. Conclusões.....	90
7.2. Trabalhos Futuros.....	91
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>92</b>

# Lista de Figuras

1.1. Exemplo de estrutura aeronáutica com materiais compósitos	4
2.1. Distribuição das tensões de flexão $\sigma_z$ para os modelos de Goland e Reisser e Hart-Smith	10
2.2. Junta colada sobreposta ( <i>lap joint</i> ): aderentes, adesivo e superfície de colagem	15
2.3. Junta colada do tipo sobreposta	16
2.4. Junta colada do tipo sobreposta com aderentes chanfrados	16
2.5. Junta colada de topo	16
2.6. Junta colada do tipo <i>scarf</i>	16
2.7. Junta colada do tipo sobreposta dupla	17
2.8. Junta colada do tipo chanfrada	17
2.9. Junta colada do tipo <i>strap</i>	17
2.10. Tensões atuantes na junta colada do tipo sobreposta	18
2.11. Elemento diferencial de uma configuração adesivo-aderente	20
2.12. Modelo 2D estado plano de deformação	23
2.13. Modelo 3D sólido, deformação e distribuição das tensões normais e cisalhamento	24
3.1. Área usada para deduzir o teorema de Gauss-Green	28
3.2. Volume usado para deduzir o teorema de Gauss-Green no contexto 3D	30
3.3. Ilustração de carga concentrada	33
3.4. Dois exemplos da função pulso retangular unitário	34
3.5. Representação de um elemento de quatro nós no sistema de coordenadas intrínseco	44
3.6. Gráficos das Funções de Forma $N_1$ a $N_4$	44

4.1. Cálculo de $G_{mk}^u$ por interpolação Lagrangiana linear e cúbica	56
4.2. Transformada de Radon e sua inversa	58
4.3. Círculo unitário que surge da intersecção da esfera unitária com o plano $z_i x_i = 0$	60
4.4. Versor $Z_i$ como combinação linear dos versores $\alpha_i$ e $\beta_i$	63
4.5. Limites de integração e pontos de Gauss	66
5.1. Corpo composto por três sub-domínios sujeito a carregamentos e vinculações	71
6.1. Fluxograma do programa para análise de juntas coladas por sub-regiões	77
6.2. Malha de elementos quadrilaterais com quatro nós geométricos	78
6.3. Refinamento da malha na região central longitudinal da geometria	78
6.4. Estrutura da matriz que contém os elementos das interfaces	79
6.5. Divisão das matrizes $[H]$ e $[G]$ para aplicação das condições de contorno	81
6.6. Modelo geométrico considerado na análise	83
6.7. Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com aderentes isotrópicos	85
6.8. Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de adesivo	85
6.9. Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de aderentes	86
6.10. Distribuição de tensão de cisalhamento com aderentes Transversalmente Isotrópicos	87
6.11. Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de adesivo	88
6.12. Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de aderentes	88
6.13. Comparação das tensões de cisalhamento no adesivo para os dois tipos de aderentes	89

# Lista de Tabelas

2.1. Equações analíticas de juntas coladas	20
4.1. Comparação entre Newton-Cotes e a quadratura de Gauss	66
6.1. Dimensões geométricas dos modelos propostos	84
6.2. Propriedades para o modelo com aderentes isotrópicos	84
6.3. Propriedades para o modelo com aderentes Trans. Isso	87

# Lista de Símbolos

## Letras latinas

$N_i$	- Funções de forma
$t_i$	- Vetor de forças de superfície
$u_i$	- Vetor de deslocamentos lineares
$C_{ijkl}$	- Tensor de propriedades materiais
$n_i$	- Versor normal a um plano
$e_i$	- Versores da base canônica
$t_{ij}^*$	- Solução fundamental para forças de superfície
$u_{ij}^*$	- Solução fundamental para deslocamentos
$b_i$	- Forças de corpo
$\hat{f}(\alpha, x_i)$	- Transformada de Radon
$r$	- Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
$E$	- Módulo de Young
$[H]_s, [G]_s$	- Matrizes de influência referentes a sub-região $s$

## Letras gregas

$\alpha, \beta, \rho$	- Constantes
$\sigma_{ij}$	- Tensor de tensões
$\tau_i$	- Tensões de cisalhamento
$\varepsilon_{ij}$	- Tensor de deformações
$\delta_{ij}$	- delta de Kronecker
$\xi$	- Ponto fonte, pontos de Gauss
$\Omega$	- Domínio do problema
$\Gamma$	- Contorno do problema
$\lambda, \mu$	- Constantes de lamé
$\nu$	- Razão de Poisson

## Abreviações

MEC - Método dos Elementos de Contorno

MEF - Método dos Elementos Finitos

MDF - Método das Diferenças Finitas

EIC - Equação Integral de Contorno

# Capítulo 1

## Introdução

Na indústria aeronáutica é comum a utilização de material compósito na fabricação de estruturas primárias e componentes estruturais. Por se tratarem de estruturas complexas, é inevitável a utilização de juntas parafusadas, rebitadas ou coladas na união de um componente estrutural ao outro.

Em qualquer tipo de estrutura sabe-se que na região de junta ou ligação entre os membros estruturais existem concentrações de tensões, sendo, portanto, uma região com alto potencial de falha. Em estruturas fabricadas em material compósito, a união entre os membros estruturais com utilização de juntas parafusadas ou rebitadas está associada a grandes dificuldades, pelo fato de serem componentes laminados que eventualmente podem apresentar acoplamentos entre as tensões e elevados fatores de concentração de tensões, Daniel e Ishai (1994). Assim, na maior parte dos casos, a união deve ser feita com adesivo, no qual chamamos de junta colada. A aplicação de adesivos em colagem de partes estruturais em material compósito vem sendo realizada há décadas e este método para unir diferentes materiais tem crescido ultimamente. Com o desenvolvimento de adesivos a base de resina sintética, de equipamentos e técnicas de colagem é possível unir uma grande variedade de materiais diferentes, proporcionando alta resistência e durabilidade a esta união. Adesivo é definido como uma substância capaz de unir ou colar objetos através de sua superfície, na qual chamamos de superfície de colagem. Ele tem como função unir duas ou mais partes estruturais, possui suas próprias características mecânicas e químicas, é considerado um elemento fundamental no processo de colagem, pois é através dele que as cargas

são transferidas entre as partes coladas de uma estrutura. A junta colada apresenta algumas vantagens sobre as tradicionais juntas parafusadas ou rebitadas, tais como, eficiência na transferência de tensões entre aderente e adesivo, melhor acabamento, melhor vedação, eficiência aerodinâmica e um importante item na área aeronáutica que é a redução de peso. Em contrapartida, existem algumas limitações das juntas coladas em relação às demais: as juntas coladas apresentam resistência direcional, isto é, os adesivos resistem a cargas cisalhantes e são pouco resistentes a cargas de tração; as superfícies de colagem devem estar perfeitamente limpas e livres de óleos e gorduras; existe a dificuldade para a desmontagem da junta para uma eventual inspeção. Além disso, as juntas coladas não apresentam completa resistência após a fabricação e necessitam de um rigoroso controle de qualidade na manufatura, pois não existem ensaios não-destrutivos confiáveis para verificar a qualidade da junta depois de pronta.

## **1.1. Materiais Compósitos**

Materiais anisotrópicos são materiais que apresentam propriedades mecânicas que variam com a direção. Este comportamento ocorre principalmente em materiais que possuem fibras contínuas não entrelaçadas e com uma orientação predominante imersa numa matriz de modo a melhorar sua eficiência estrutural. A associação de dois ou mais materiais distintos dá-se o nome de materiais compósitos. Porém, esta definição incluiria uma grande parte dos materiais, tais como aços, ligas metálicas, plásticos e cerâmicos. Uma definição mais elaborada para materiais compósitos foi dada por Agarwal e Broutman (1990). Por esta definição, os materiais compósitos são aqueles constituídos por dois ou mais materiais associados de maneira que os materiais constituintes formem fases distintas, sendo que um dos constituintes encontra-se na forma de fibras ou pequenas placas, a razão de volume entre as fases constituintes é maior que 10% e as propriedades mecânicas, principalmente rigidez e resistência, de um dos constituintes é pelo menos cinco vezes maior que as do outro. Dentre os materiais usados em Engenharia, os compósitos apresentam a maior relação de rigidez por densidade, também chamada de rigidez específica, e resistência mecânica por densidade, também chamada de resistência mecânica específica. Além disso, alguns compósitos apresentam boa performance em faixas de temperatura não alcançadas pelos materiais mais comuns em projetos de Engenharia. Devido à imensa variedade de combinações e arranjos das fibras, os engenheiros têm à sua disposição materiais

para um grande número de projetos que exijam características muito específicas, sejam elas rigidez, resistência mecânica, densidade, amortecimento, condutividade térmica, elétrica ou qualquer outra propriedade do material.

Embora o crescimento do uso de materiais compósitos tenha acontecido de maneira mais significativa a partir da segunda metade do século XX, estes materiais já vêm sendo empregados desde a Idade Antiga. Por exemplo, o livro de Êxodus, do Antigo Testamento, cita que, por volta de 800 A.C, os hebreus usavam palhas picadas de vegetais fibrosos na fabricação de tijolos de argila. Além dos hebreus, na América do Sul e Central algumas tribos indígenas aparentemente também usavam fibras vegetais em suas cerâmicas. Estes usos de reforços fibrosos, entretanto, eram, mais provavelmente, para diminuir os danos causados pelo aparecimento de trincas durante a secagem da argila do que para se obter um reforço estrutural. Vários séculos depois foram desenvolvidos compósitos estruturais como concretos reforçados por aços, polímeros reforçados por fibras de vidro ou grafite e muitos outros tipos de associações de materiais.

Pode-se afirmar que a natureza possui uma grande quantidade de materiais compósitos, a maior parte deles de alta performance. No corpo humano, por exemplo, os ossos são laminados fibrosos multidirecionais. Os ossos são constituídos de camadas de fibras de colágeno reforçadas por fosfato de cálcio ( $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ). A madeira, que é constituída de fibras de celulose em uma matriz de lignina, é outro material fibroso encontrado na natureza. A madeira tem alta resistência na direção das fibras, aliadas a baixa densidade e baixa condutividade térmica.

Atualmente, os pneumáticos representam uma das aplicações mais freqüentes de materiais compósitos. Nos pneumáticos os fios metálicos são unidirecionalmente colocados numa matriz de borracha, conferindo-lhes uma resistência bastante superior à da matriz na direção de solicitação da pressão circunferencial.

Na indústria moderna, primeiramente foram usados laminados de vidro em estruturas aeroespaciais secundárias. Porém, no começo dos anos 60, começou a produção de filamentos de boro, carbono e grafite, que são mais resistentes que seus precedentes de vidro. Hoje a indústria aeroespacial ainda é a principal usuária de materiais compósitos em projetos, conforme mostra a figura 1.1, porém este uso foi estendido para outras indústrias tais como automotiva, construção civil e eletroeletrônica.

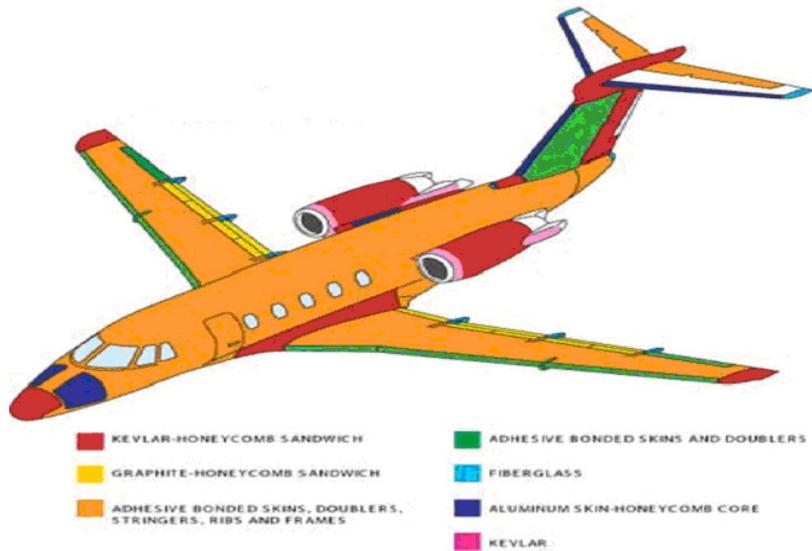


Figura 1.1 - Exemplo de estrutura aeronáutica com materiais compósitos

Com o aumento do número de projetos com materiais compósitos surgiu a necessidade de calcular tensões e deformações em estruturas de materiais anisotrópicos. Esta tarefa é mais complicada do que nos materiais isotrópicos (materiais cujas propriedades mecânicas não variam com a direção), pois a anisotropia aumenta o número de variáveis do problema. Soluções analíticas para problemas anisotrópicos restringem-se a um pequeno número de problemas de domínio simples. No caso de estruturas, o domínio torna-se bastante complexo, sendo que seu tratamento só é possível através de métodos numéricos ou experimentais. Com a evolução dos computadores, os métodos numéricos passaram a ser utilizados para uma faixa bem maior de problemas. Dentre os métodos numéricos que mais se destacaram no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. Embora a obtenção de uma formulação de elementos de contorno seja matematicamente mais trabalhosa que a de elementos finitos, os elementos de contorno, possuem características bastante desejáveis para a modelagem de muitos problemas, tais como: (1) conseguem modelar bem problemas de alto gradiente de tensão e deformação e (2) somente o contorno é discretizado.

## 1.2. Evolução do Método dos Elementos de Contorno

Embora a idéia de redução na dimensionalidade do problema pelo uso de formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, através do trabalho de Somigliana (1885), o método dos elementos de contorno, na forma que é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois. As equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas as outras na formulação direta do método dos elementos de contorno, foram apresentadas nos trabalhos de Rizzo (1967) e Cruse e Rizzo (1968). Desde então, o método dos elementos de contorno se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada (Brebbia e Dominguez, 1989, Dominguez, 1993 e Ramachandran, 1994).

A primeira formulação do método dos elementos de contorno para problemas anisotrópicos foi proposta por Rizzo e Shyppy (1970). Uma importante contribuição foi dada por Cruse e Swedlow (1971) que propuseram uma solução fundamental para materiais anisotrópicos em termos de funções de variáveis complexas. A partir deste trabalho, a solução fundamental no espaço complexo tem sido bastante usada nas mais diferentes aplicações do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos (Sollero e Aliabadi (1993), Deb e Banerjee (1990), Deb (1996), Albuquerque e Sollero (1998) e Kogl e Gaul (2000)). Vogel e Rizzo (1973) apresentaram a primeira aplicação do método dos elementos de contorno na análise de problemas anisotrópicos tridimensionais. Wilson e Cruse (1978) também analisaram problemas anisotrópicos tridimensionais com uma formulação que demanda menos esforço computacional que a apresentada por Vogel e Rizzo (1973).

Uma das primeiras aplicações do método dos elementos de contorno em problemas de fratura em materiais anisotrópicos foi apresentado por Snyder e Cruse (1975) que usaram funções de Green para modelar uma trinca no centro de uma chapa anisotrópica. Procedimentos similares foram usados por Chan e Cruse (1986), Kamel e Liaw (1991) e Liaw e Kamel (1991).

Problemas com trinca apresentam dificuldades extras quando tratados com elementos de contorno. Não se pode trata-los considerando o domínio como apenas uma região e com a aplicação direta do método dos elementos de contorno pois a coincidência de nós nas interfaces das trincas causa uma degeneração das equações integrais (Cruse, 1988). Quando se tem um problema de fratura simétrica, torna-se possível transforma-lo em um problema equivalente, de

modo que uma parte do domínio, que contém apenas uma das faces da trinca, seja modelada (Martinez e Dominguez, 1984). Porém, em problemas gerais de fratura, esta transformação nem sempre é possível. Várias técnicas foram desenvolvidas para resolver o problema dos nós coincidentes. Dentre as mais importantes estão: A função de Green para problemas de fratura, o método dos deslocamentos descontínuos, o método das sub-regiões e o método dos elementos de contorno dual. O método da função de Green para problemas de fratura utiliza uma solução fundamental calculada em um domínio infinito que já contém a trinca (Snyder e Cruse, 1975). Desta forma, a discretização da trinca não é necessária. Porém sua aplicação é restrita a trincas de geometria simples, no interior do domínio e livre de forças de superfície nas bordas da trinca. Recentemente, Telles *et al.* (1995) propuseram calcular as funções de Green de forma numérica, que tornou possível aplicar o método a trincas curvas. No método dos deslocamentos descontínuos as trincas são modeladas como uma única linha de elementos descontínuos e novas variáveis, as descontinuidades de deslocamento, são introduzidas ao problema (Crouch, 1976). No método das sub-regiões são introduzidos contornos artificiais no interior do domínio (Blandford *et al.*, 1981), o que dificulta a modelagem de problemas de fratura e a implementação de rotinas automáticas de propagação de trinca. Este método, embora seja difícil de implementar rotinas de propagação, é especialmente indicado para problemas de bi-materiais, como é o caso de juntas coladas por adesivo. O método das sub-regiões e elementos de ponto a um quarto com singularidades de forças de superfície foram usados por Tan e Gao (1992) para a análise de trincas em materiais ortotrópicos. Doblare *et al.* (1990) usaram o método das sub-regiões na análise de propagação de trincas em materiais ortotrópicos. Sollero e Aliabadi (1993) analisaram problemas elastoestáticos bidimensionais em materiais anisotrópicos usando o método das sub-regiões e estenderam o método da integral  $J$  independente do percurso para problemas de fratura em materiais anisotrópicos. Albuquerque *et al.* (1999b) usaram o método das sub-regiões para a análise de problemas de fratura elastodinâmica em materiais anisotrópicos.

O método dos elementos de contorno dual foi apresentado por Portela *et al.* (1992) para problemas estáticos, bidimensionais e em materiais isotrópicos e por Mi e Aliabadi (1992) para problemas tridimensionais em materiais isotrópicos. Este método permite o tratamento de problemas de fratura em geral, sem a necessidade de se introduzir interfaces artificiais no domínio e sem a introdução de novas variáveis ao problema, sendo bastante apropriado para problemas de propagação pois refazer a malha torna-se uma tarefa bastante simples. Para

problemas elastoestáticos anisotrópicos, o método dos elementos de contorno dual foi apresentado por Sollero e Aliabadi (1995). Aliabadi e Sollero (1998) aplicaram o método dos elementos de contorno dual na análise de propagação de trincas em laminados ortotrópicos. Mais recentemente, Albuquerque *et al.* (1999a) estenderam o uso do método dos elementos de contorno dual para problemas elastodinâmicos em materiais anisotrópicos. Aliabadi (1997b) apresentou uma revisão das publicações em que o método dos elementos de contorno dual foi aplicado na análise de problemas de fratura. Uma revisão de todas as formulações do método dos elementos de contorno aplicado a problemas de fratura foi apresentada por Aliabadi (1997a).

### 1.3. Objetivos do trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional, utilizando o software Matlab<sup>®</sup>, para resolver numericamente o problema de juntas coladas sobrepostas (*lap joints*) de material compósito no contexto 3D. Devido ao fato deste tipo de junta colada ser amplamente utilizada na indústria aeronáutica, um dos aderentes pode ser considerado como sendo uma estrutura aeronáutica de material compósito na qual é colada uma outra chapa também de compósito. O método numérico empregado para a resolução das equações diferenciais que regem o problema é o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método das Sub-Regiões. Este trabalho foi desenvolvido com base em programas previamente implementados por pesquisadores do GMCB (Grupo de Modelagem Computacional de Materiais Compósitos e Biomédicos) sob a orientação do Professor Paulo Sollero.

### 1.4. Descrição do trabalho

Este texto conta com oito capítulos assim estruturados:

**Capítulo 1:** Introdução. O propósito deste capítulo é fazer uma breve explanação sobre o tema, justificativa do método escolhido e fornecer uma visão geral do problema.

**Capítulo 2:** Revisão Bibliográfica. Neste capítulo é feita uma revisão de literatura sobre juntas coladas e uma breve revisão da formulação analítica empregada neste tipo de problema.

**Capítulo 3:** O Método dos Elementos de Contorno. Aqui serão apresentados os conceitos básicos do método, a formulação, comparação com outros métodos numéricos, vantagens, desvantagens e a aplicação do método à mecânica dos sólidos.

**Capítulo 4:** A Solução Fundamental. Aqui são discutidas as soluções fundamentais para materiais isotrópicos, transversalmente isotrópicos e anisotrópicos. Com ênfase na solução fundamental para anisotropia plena que é obtida a partir da transformada de Radon. Também é discutido neste capítulo a integração numérica por quadratura de Gauss que é essencial no MEC.

**Capítulo 5:** O Método das Sub-Regiões. Apresentação e formulação do método das sub-regiões utilizado para modelar o problema de juntas coladas neste trabalho.

**Capítulo 6:** Implementação Computacional e Resultados. Neste capítulo é discutido o programa de elementos de contorno desenvolvido e são apresentados os resultados obtidos.

**Capítulo 7:** Considerações Finais. Conclusão do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1. Introdução

Um dos primeiros trabalhos teóricos sobre juntas coladas do tipo sobreposta (Goland e Reisser, 1944), considera ambos os aderentes e o adesivo como materiais isotrópicos e lineares elásticos. Este trabalho foi o primeiro a considerar o efeito produzido pela excentricidade no caminho da carga, pelo fato de se tratar de uma junta não balanceada. O trabalho leva em consideração a influência de parâmetros que contribuem para a resistência da junta colada, tais como comprimento de colagem e espessuras de aderentes e adesivos. Estes parâmetros influenciam na determinação das tensões normais ao plano da junta, em especial nas extremidades da colagem, no qual são chamadas de tensões normais ( $\sigma_z$ ) ou tensões de descasque (*peel*). O trabalho de Goland e Reisser (1944) foi aprimorado por Hahn (1960, 1961a e 1961b) que leva em consideração a utilização de aderentes com espessuras diferentes. Kuenzi e Stevens (1963) estudaram a diferença no comportamento mecânico de juntas coladas do tipo sobreposta quando são utilizados adesivos rígidos e flexíveis. Kutscha (1969) implementou computacionalmente o trabalho de Goland e Reisser e fez estudos da variação de parâmetros de juntas, tais como: comprimento de colagem e espessura de aderentes e adesivos.

Os trabalhos mencionados acima contribuíram significativamente para o entendimento do comportamento mecânico da junta colada do tipo sobreposta, mas segundo Hart-Smith (1973a e

1973b) estes trabalhos apresentam deficiência na determinação das tensões de flexão nas extremidades da colagem, como mostra a figura 2.1. Esta figura mostra que as tensões  $\sigma_x$  na borda livre devem ser nulas e isto não é verificado no trabalho de Goland e Reisser. Segundo Hart-Smith, a teoria proposta por Goland e Reisser seria válida apenas para juntas coladas com comprimento de colagem curto e sujeitas a cargas leves.

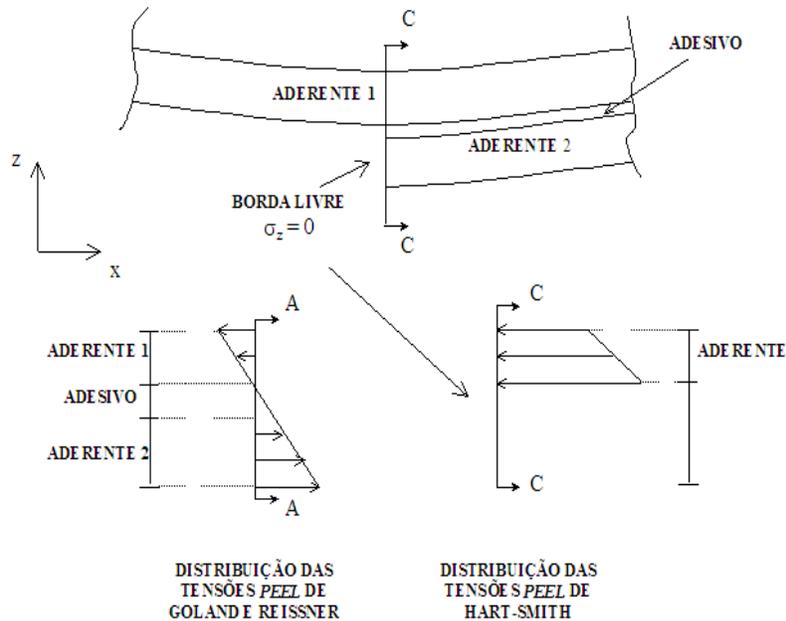


Figura 2.1 - Distribuição das tensões de flexão  $\sigma_z$  para os modelos de Goland e Reisser e Hart-Smith.

Em seus trabalhos, Hart-Smith elimina a deficiência na determinação das tensões de flexão nas extremidades da colagem através da elaboração de novas equações de equilíbrio para diferentes setores da junta e de novas condições de contorno para as extremidades, apresentando o estudo sobre os principais fatores que devem ser considerados no projeto de uma junta colada do tipo sobreposta. Hart-Smith apresenta gráficos de eficiência da junta considerando diversos parâmetros, tais como: a razão entre a espessura dos aderentes e comprimento de colagem, a disposição das lâminas para o caso de aderentes em material composto e espessura de adesivo.

Segundo Hart-Smith, três modos de falha são predominantes em uma junta colada sobreposta. O primeiro modo, e o mais predominante, é a falha do aderente nas extremidades da colagem devida a tensões provocadas pela carga no plano e ao momento provocado pela

excentricidade da junta. O segundo modo, e o menos predominante, é a falha da camada de adesivo devida a tensões cisalhantes. O terceiro modo pode ser manifestado por duas formas e está associado às tensões normais; para o caso de aderentes espessos em material metálico, a falha acontece pelo rompimento do adesivo nas extremidades da junta devido às tensões normais  $\sigma_z$ . Para o caso de aderentes em laminados de material composto, a resistência a tensões interlaminares é bem menor do que a resistência à tração do adesivo, sendo assim ocorre a falha dos aderentes nas extremidades de colagem por delaminação. O estudo feito por Hart-Smith mostra também o cuidado que se deve ter ao testar experimentalmente uma junta colada: não se deve levar em conta como parâmetro principal de resistência da junta as tensões de cisalhamento calculadas simplesmente dividindo a carga de falha pela área colada, pois a carga de falha não é proporcional ao comprimento de colagem.

Grayley (1978) apresentou um procedimento baseado em dados experimentais de curvas de tensão-deformação cisalhante em adesivos para estimar a resistência da junta colada tipo sobreposta dupla. Este procedimento considera o adesivo trabalhando somente em cisalhamento e os aderentes somente em membrana, ambos em material isotrópico e linear elástico. Sendo assim, as tensões normais  $\sigma_z$  no adesivo não são consideradas, pois neste tipo de junta os efeitos destas tensões são insignificantes pelo fato de ser uma junta balanceada. Este método tem a vantagem de estimar rapidamente a carga máxima de tração ou compressão que a junta suporta para um determinado valor admissível de deformação cisalhante no adesivo, podendo este valor ser deformação permanente ou não. Tendo calculado a carga máxima admissível para um determinado valor de deformação, este valor deve ser verificado com o valor máximo admissível dos aderentes, não podendo ultrapassá-lo. A desvantagem deste método está na necessidade de se ter a curva tensão versus deformação cisalhante para cada tipo de adesivo e a limitação do uso do método somente a juntas duplas sobrepostas balanceadas.

Em outro trabalho, Grayley (1980) elaborou curvas que possibilitam a determinação das tensões máximas de cisalhamento e normal  $\sigma_z$ , em regime elástico, em juntas coladas do tipo dupla sobreposta sujeitas a carregamento de tração ou compressão. Neste método tanto os aderentes quanto o adesivo são considerados de material isotrópico e linear elástico. A vantagem deste procedimento, além da rapidez de se determinar as tensões, é de não precisar de uma curva tensão versus deformação para cada tipo de adesivo, além da possibilidade de utilizar juntas sobrepostas duplas não-balanceadas.

King (1978) elaborou um procedimento para a determinação da distribuição da tensão de cisalhamento em adesivo de juntas sobreposta e sobreposta *multi-step*, sujeitas a carregamento de tração, compressão e cisalhamento, aplicados no plano da junta nos aderentes. A técnica leva em conta a propriedade plástica do adesivo e assume que os aderentes se comportam elasticamente em membrana e são rígidos em flexão, podendo também considerar os aderentes como laminados de material ortotrópico. Sendo os aderentes rígidos em flexão, as tensões normais  $\sigma_z$  não são consideradas e conseqüentemente a distribuição das tensões normais  $\sigma_x$  é uniforme ao longo da espessura dos aderentes, isto é, os aderentes apresentam apenas tensões de membrana. Pelo fato do método não considerar o efeito de flexão na junta devido a momento fletor aplicado ou devido a excentricidade da carga, o método de análise proposto por King (1978) deve ser apenas utilizado em juntas balanceadas do tipo sobreposta dupla ou *multi-step*. Em juntas onde o efeito de flexão é importante, no caso de juntas sobrepostas, a técnica irá subestimar o nível de tensão para uma dada carga aplicada e, portanto, superestimar a capacidade de carga na junta.

Mortensen (1998) desenvolveu um método de análise de juntas coladas que foi implementado no programa comercial de cálculo de juntas ESAComp 2.2. Neste método os aderentes são modelados como vigas ou placas em flexão cilíndrica e utiliza a teoria clássica de laminação (Daniel e Ishai, 1998). Os aderentes são painéis laminados em material compósito, podendo também considerar o uso de aderentes em laminados assimétricos e não-balanceados. Para a modelagem do adesivo, duas opções de modelo constitutivo de material são consideradas, o modelo linear elástico e o modelo elasto-plástico, sendo o último comum na maioria dos adesivos.

As equações que governam o problema são obtidas pelas relações constitutivas e cinemáticas dos aderentes (*Kirchhoff-Love*) e adesivo; estas equações são substituídas nas equações de equilíbrio deduzidas para a junta. As equações de equilíbrio são obtidas dividindo-se a junta em três regiões, a primeira e a segunda são as regiões dos aderentes fora da colagem e a terceira é a região de colagem que contém os dois aderentes e o adesivo. As equações que governam o problema são 16 equações diferenciais de primeira ordem que são integradas pelo método *multi-segment* (Mortensen, 1998) tendo como solução as tensões no adesivo, o campo de deslocamentos e os esforços ao longo da junta.

A validação do modelo de junta colada desenvolvido por Mortensen (1998) foi feita por comparação dos resultados obtidos com um modelo 2D de elementos finitos, utilizando ambos os

aderentes e o adesivo em material isotrópico e linear elástico. Os resultados comparados são as distribuições das tensões normais  $\sigma_z$  e cisalhantes no adesivo e o campo de deslocamentos ao longo da junta.

Em outro trabalho sobre juntas coladas, Thomsen e Mortensen (2002a) mostram a influência dos efeitos de acoplamento no projeto de juntas devido ao uso de aderentes feitos em laminados assimétricos e não balanceados. Este trabalho mostra também a comparação das tensões normais no adesivo quando considerado o aderente como vigas ou placas em flexão cilíndrica.

Andruet (1998) desenvolveu dois modelos de elementos finitos para modelagem de juntas coladas, sendo o primeiro 2D e o segundo 3D. Estes elementos foram formulados para serem implementados no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, por apresentarem não linearidade geométrica em suas respectivas formulações. Ambos os elementos são formulados como sendo um elemento de junta completo, isto é, cada elemento possui os aderentes e o adesivo implementados. No elemento 2D, os aderentes são representados como viga de *Euler-Bernoulli* e a camada de adesivo utiliza a teoria de estado plano de tensão-deformação. Os nós dos aderentes estão ligados de forma rígida aos nós pertencentes ao adesivo através de equações de restrições. Já no modelo 3D, os aderentes são representados como placas de *Kirchhoff-Love* e o adesivo como sólido, também no elemento 3D, equações de restrições foram utilizadas para a ligação dos nós dos aderentes aos nós do adesivo. Os materiais do adesivo e aderente, para ambos os elementos, são considerados isotrópicos e lineares elásticos. Por se tratar de um problema de não linearidade geométrica, visto que juntas coladas do tipo sobreposta apresentam em alguns casos grandes deslocamentos, as equações obtidas na formulação destes elementos são solucionadas pelo método de Newton-Raphson. A técnica possibilita a construção de modelos de juntas de quaisquer tipos, possibilitando ainda a simulação de trincas e delaminações.

Chihdar e Pang (1993; 1996) baseados na teoria de placas laminadas ortotrópicas propuseram um modelo analítico para a determinação das tensões e deformações elásticas em juntas coladas do tipo sobreposta. O modelo proposto considera a flexibilidade dos aderentes ao cisalhamento transversal, portanto aderentes espessos podem ser utilizados nesta técnica. Por assumirem estado plano de tensão-deformação tanto para os aderentes como para o adesivo, apenas laminados unidirecionais ou cruzados são considerados. Os resultados obtidos com este

método foram comparados com modelos 2D feitos no programa comercial de elementos finitos Algor.

Tahmasebi (2001) propôs uma técnica de modelagem de junta colada do tipo sobreposta utilizando o programa comercial de elementos finitos MSC. Nastran. Nesta técnica os aderentes podem ser considerados como laminados de material isotrópico e ortotrópico. Elementos de casca (CQUAD4) são utilizados para a modelagem dos aderentes e elementos de mola (CELAS) para a modelagem do adesivo. Dois tipos de rigidez são atribuídos aos elementos de mola que simulam o adesivo, a primeira rigidez é para a simulação das tensões normais  $\sigma_z$  e a segunda rigidez é para o cisalhamento. A ligação dos elementos de mola que simulam o adesivo aos elementos de placa que simulam os aderentes é feita através de equações de restrição.

## 2.2. Juntas coladas

O adesivo é o elemento que diferencia a junta colada das demais juntas, é definido como uma substância de material polimérico capaz de unir duas superfícies e preveni-las de uma eventual separação pela atuação de cargas. O adesivo é considerado estrutural quando o nível de carga necessário para separar as partes coladas, no qual chamamos de aderentes, é substancial.

As vantagens e limitações das juntas coladas podem ser avaliadas pela comparação com as tradicionais juntas rebitadas e parafusadas. As principais vantagens das juntas coladas sobre as demais são:

- Maior resistência à fadiga;
- Melhor eficiência na transferência de tensões entre os aderentes;
- União de materiais diferentes;
- Menor peso;
- Maior vedação;
- Melhor acabamento;
- Melhor eficiência aerodinâmica.

Em juntas coladas, o carregamento é transferido de um aderente para outro através do adesivo. A região de interface entre os aderentes e o adesivo é chamada de superfície de colagem, como mostra a figura 2.2. A distribuição do carregamento na superfície de colagem não é feita de maneira uniforme, existem concentrações de tensões nas extremidades. Sabe-se que o nível de

concentração de tensões em juntas coladas é menor que nas juntas rebitadas e parafusadas, daí sua superioridade na resistência à fadiga. Em contrapartida, as juntas coladas apresentam algumas desvantagens em relação às demais, tais como:

- ◆ As superfícies a serem coladas devem estar perfeitamente limpas;
- ◆ O adesivo pode ser atacado pelo meio ambiente;
- ◆ Não existem ensaios não destrutivos confiáveis para verificar a integridade e eficiência das juntas coladas;
- ◆ As juntas não podem ser desmontadas com facilidade.

Os adesivos utilizados em juntas coladas apresentam grande resistência em cisalhamento, mas são pouco resistentes a tensões de tração, em particular tensões normais  $\sigma_z$ , daí a necessidade de projetar juntas com o mínimo efeito dessas tensões. Em geral, quanto mais complexa for a geometria da junta colada menor será a existência das tensões normais  $\sigma_z$ . A junta colada mais simples, e a mais problemática devido a excentricidade no caminho da carga, é a junta do tipo sobreposta, mostrada na figura 2.2.

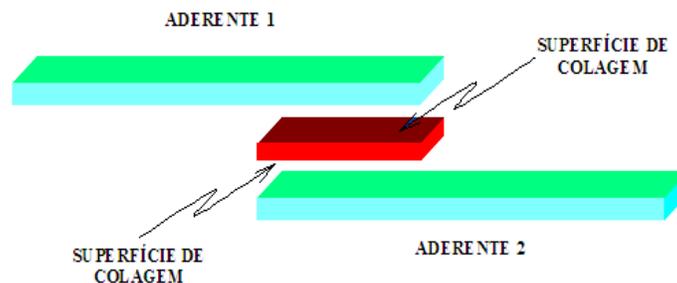


Figura 2.2 - Junta colada sobreposta (*lap joint*): aderentes, adesivo e superfície de colagem.

Os tipos de juntas coladas mais utilizados em estruturas aeronáuticas são apresentados nas figuras 2.3 a 2.6.



Figura 2.3 - Junta colada do tipo sobreposta.

A junta tipo sobreposta, figura 2.3, tem a vantagem da facilidade de fabricação e como grande desvantagem a excentricidade no caminho da carga, provocando flexão e conseqüentemente elevadas tensões normais  $\sigma_z$  no adesivo.

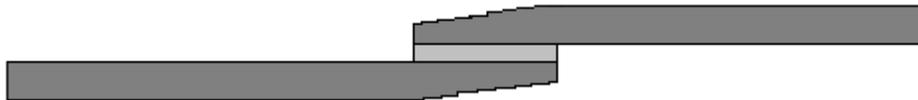


Figura 2.4 - Junta colada do tipo sobreposta com aderentes chanfrados.

A junta sobreposta chanfrada, figura 2.4, tem a vantagem sobre a junta sobreposta de diminuir as tensões normais  $\sigma_z$  no adesivo; em contrapartida sua fabricação é bem mais complicada, pois existe a dificuldade na usinagem dos aderentes para a formação dos chanfros.



Figura 2.5 - Junta colada de topo.

A figura 2.5 mostra a junta colada de topo. Este tipo de junta apresenta ótimo acabamento e não altera a espessura da região colada, mas tem o problema do adesivo ser mais solicitado em tração ou compressão, tornando este tipo de junta muito frágil, já que o adesivo é melhor utilizado em cisalhamento.



Figura 2.6 - Junta colada do tipo *scarf*.

A figura 2.6 mostra a junta colada do tipo *scarf*. Assim como a junta de topo este tipo de junta apresenta ótimo acabamento e não altera a espessura da região colada, além de ser mais eficiente por solicitar parcialmente o adesivo em cisalhamento quando a junta estiver sujeita a carga de tração ou compressão. Porém se a junta sofrer flexão este tipo de construção pode ser problemático por induzir tensões normais  $\sigma_z$  excessivas no adesivo.

As figuras 2.7 a 2.9 mostram os tipos de juntas coladas de forma mais complexa. Estas juntas são utilizadas em casos especiais, onde há a exigência de alta resistência e/ou dificuldade na transição geométrica das partes coladas.

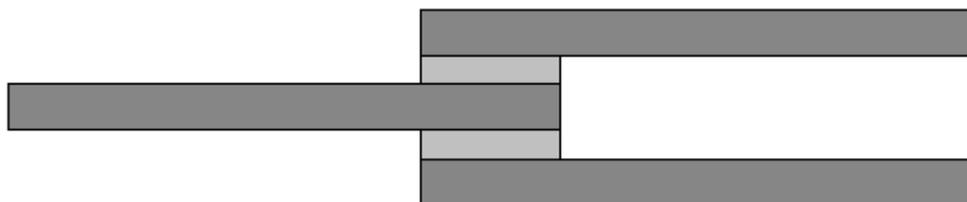


Figura 2.7 - Junta colada do tipo sobreposta dupla.

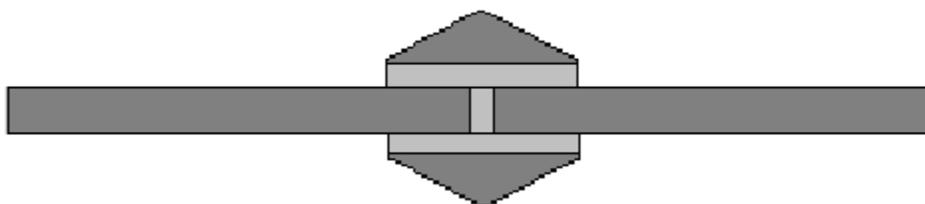


Figura 2.8 - Junta colada do tipo chanfrada.



Figura 2.9 - Junta colada do tipo *strap*.

No projeto de juntas coladas, existe a necessidade de estimar o nível de tensões e esforços no adesivo e nos aderentes. De uma forma geral, sabe-se que o papel do adesivo em juntas coladas ou em qualquer outra aplicação é transferir o carregamento entre as partes coladas por cisalhamento e resistir a estes esforços. No entanto, em alguns tipos de juntas o adesivo não está sujeito apenas a esforços cisalhantes; ele está também submetido a esforços de tração e compressão, o que causa preocupação, pois sabemos que adesivos são frágeis quando submetidos a estes esforços. A junta colada do tipo sobreposta, figura 2.3, apresenta um nível acentuado de esforços de tração no adesivo, devido ao caminho da carga, que propicia o surgimento de momento secundário e induz tensões de tração no adesivo (tensões normais  $\sigma_z$ ). A figura 2.10 mostra uma junta colada sobreposta sujeita a tração e ilustra o aparecimento das tensões normais  $\sigma_z$  e cisalhamento no adesivo.

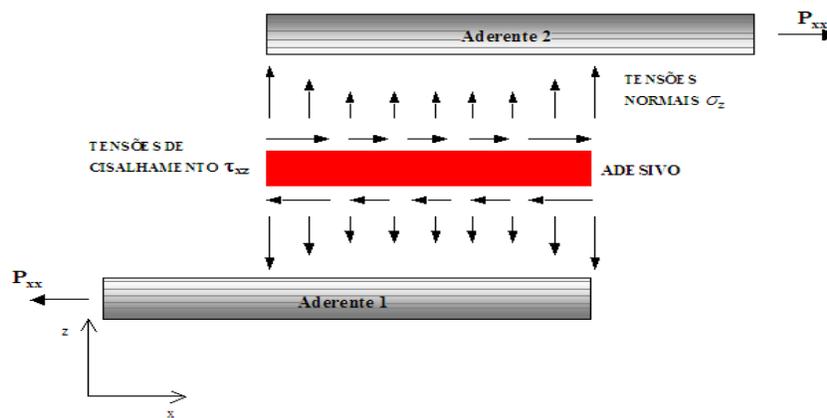


Figura 2.10 - Tensões atuantes na junta colada do tipo sobreposta.

### 2.3. Revisão da Formulação Analítica

Conforme discutido no início deste capítulo, em 1944 Goland e Reissner apresentaram uma teoria sobre o comportamento de juntas coladas. Esta teoria foi posteriormente modificada por outros autores. Renton e Vinson (1974), por exemplo, modificaram a formulação de Goland e Reissner para incluir alongamento na espessura e cisalhamento transversal nos aderentes, o qual permitiu empregar a condição de cisalhamento zero nos finais da região colada. Renton e Vison

(1974) e outros trataram os aderentes como materiais anisotrópicos o que permitiu analisar aderentes de material compósito. Estas teorias posteriores em geral trataram o adesivo de forma similar a Goland e Reissner (1944).

Entretanto, Ojalvo e Eidinoff (1978) apontaram que a dedução das equações básicas usadas por Goland e Reissner (1944) foi baseada em uma relação de tensão de cisalhamento-deslocamento, para o adesivo, incompleta. Eles modificaram as equações básicas de Goland e Reissner (1944) e compararam a teoria original e revisada. Carpenter (1980) posteriormente apontou que ambos, Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978), na dedução das equações diferenciais de tensão no adesivo, fizeram escolhas arbitrárias de quais equações combinar a fim de obter essas equações diferenciais resultantes. Ele re-deduziu as equações diferenciais básicas. As deduções de Carpenter (1980) produziram equações diferenciais que através da escolha apropriada de coeficientes arbitrários se reduzem aquelas de Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978).

Ambas as teorias de Goland e Reissner e a teoria revisada de Ojalvo e Eidinoff são baseadas nas seguintes suposições:

1. As tensões diretas longitudinais no adesivo são desprezíveis quando comparadas com aquelas nos aderentes.
2. Os aderentes deformam como materiais finos clássicos em estado plano de tensão ou em estado plano de deformação, ou seja, as seções planas permanecem planas e as seções transversais se deformam na direção normal às superfícies médias individuais.
3. As deflexões longitudinais e transversais no adesivo variam linearmente através da espessura do adesivo entre os aderentes. Para um sistema de coordenadas  $x-z$ , como mostrado na figura 2.11, se  $u$  é o deslocamento na direção  $x$ ,  $w$  é o deslocamento na direção  $z$  e o subscrito  $i$  se refere à quantidade na interface do adesivo com o aderente  $i$ , então  $u = (u_1 + u_2) / 2 + (u_1 - u_2)z / h$ .

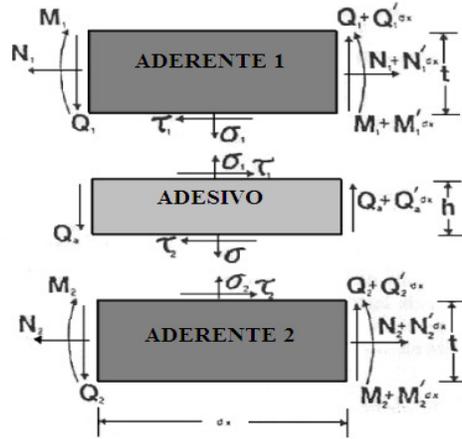


Figura 2.11 – Elemento diferencial de uma configuração adesivo-aderente

4. A razão de Poisson para o adesivo é zero.

A tabela 2.1 sintetiza as equações de equilíbrio e as equações de força-deslocamento baseadas nas suposições acima para o elemento diferencial de uma configuração aderente-adesivo, como mostrado na figura 2.11.

Tipo de equação	Aderente 1	Aderente 2	Adesivo
Equilíbrio de forças verticais	$Q_1' - \sigma_1 = 0$ (2.1)	$Q_2' + \sigma_2 = 0$ (2.6)	$Q_a' = \sigma_2 - \sigma_1$ (2.11)
Equilíbrio de momentos	$M_1' + Q_1 - \frac{t}{2} \tau_1 = 0$ (2.2)	$M_2' + Q_2 - \frac{t}{2} \tau_2 = 0$ (2.7)	$Q_a = \tau_0 h$ (2.12)
Equilíbrio de forças horizontais	$N_1' - \tau_1 = 0$ (2.3)	$N_2' + \tau_2 = 0$ (2.8)	$\tau_1 = \tau_2$ (2.13)
Força-deslocamento	$u_1' = \frac{1}{Et} \left( \frac{6M_1}{t} + N_1 \right)$ (2.4)	$u_2' = \frac{1}{Et} \left( \frac{-6M_2}{t} + N_2 \right)$ (2.9)	$\tau_a = G_a \left[ \frac{u_1 - u_2}{h} + \alpha_1 \left( \frac{w_1' + w_2'}{2} \right) + \alpha_2 \frac{z}{h} (w_1' - w_2') \right]$ (2.14)
Relações de tensão-deslocamento	$w_1'' = \frac{12M_1}{Et^3}$ (2.5)	$w_2'' = \frac{12M_2}{Et^3}$ (2.10)	$\sigma_a = \frac{E_a}{h} (w_1 - w_2)$ (2.15)

Tabela 2.1 – Equações analíticas de juntas coladas (Carpenter, 1980)

Derivando a equação (2.15) na tabela 2.1 quatro vezes e substituindo as equações (2.1), (2.2), (2.5), (2.7), (2.10) e (2.14), obtém-se:

$$\sigma_a^{iv} - \frac{6\alpha_2\lambda^2\beta}{c^2}\sigma_a'' + \frac{\rho^2}{c^4}\sigma_a = 0 \quad (2.16)$$

onde:

$$\rho^2 = \frac{24E_a c^4}{Et^3 h} \quad (2.17)$$

$$\lambda^2 = \frac{G_a c^2}{Eth} \quad (2.18)$$

$$\beta = \frac{h}{t} \quad (2.19)$$

$2c$  = comprimento da zona colada.

$\alpha_2$  = uma constante que depende da equação de tensão-deslocamento usada para o adesivo.

$E_a$  = Módulo de elasticidade do adesivo.

$G_a$  = Módulo de cisalhamento do adesivo.

$E$  = Módulo de elasticidade dos aderentes.

A tensão de cisalhamento média no adesivo também pode ser expressa como:

$$\tau_0 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{2} \quad (2.20)$$

Nota-se aqui que fazendo  $\alpha_2 = 0$  na equação (2.16) (uma relação de tensão de cisalhamento-deslocamento incompleta) obtém-se a equação diferencial de tensão normal

conforme proposto por Goland e Reissner (1944), enquanto que fazendo  $\alpha_2 = 1$  obtém-se a equação diferencial de Ojalvo e Eidinoff (1978). A escolha de  $\alpha_2 = 1$  produz, da equação (2.14), uma tensão de cisalhamento que varia linearmente através da espessura do adesivo, o que viola a equação (2.13) (equilíbrio das forças horizontais no adesivo), enquanto a escolha de  $\alpha_2 = 0$  produz uma tensão de cisalhamento constante através da espessura do adesivo o que satisfaz a equação (2.13).

Assim, com respeito a tensão normal, a teoria de Goland e Reissner (1944) é deficiente porque viola a equação de tensão de cisalhamento-deslocamento para o adesivo, enquanto que a teoria de Ojalvo e Eidinoff (1978) é deficiente porque viola o equilíbrio das forças horizontais para o adesivo.

Derivando a equação (2.20) três vezes e substituindo as equações (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.14), a equação (2.12) vezes uma constante arbitraria  $\alpha_3$ , a equação (2.11) vezes  $(1 - \alpha_3)$ , obtém-se:

$$\tau_0''' - \frac{\lambda^2}{c^2} \theta \tau_0' = 0 \quad (2.21)$$

onde

$$\theta = 8 + 6\alpha_1\beta + 6\alpha_3\beta + 6\alpha_1\alpha_3\beta^2 \quad (2.22)$$

e onde  $\alpha_1$  é uma constante que depende da suposição de tensão-deslocamento feita para o adesivo.

A equação diferencial para tensão de cisalhamento, equação (2.21), depende de  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ . Fazendo  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ , ou

$$\alpha_1 = 1 \text{ e } \alpha_3 = -1/(1 - \beta) \quad (2.23)$$

obtém-se a equação diferencial de Goland e Reissner (1944), enquanto  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$  produz a equação diferencial de Ojalvo e Eidinoff (1978). Ambas as equações diferenciais para tensão de

cisalhamento de Goland e Reissner (1944) e de Ojalvo e Eidinoff (1978) podem ser desenvolvidas usando uma relação de tensão de cisalhamento-deslocamento completa (pois  $\alpha_2$  não entra na equação diferencial e  $\alpha_1$  pode ser considerado 1).

### 2.3. Modelo em Estado Plano de Deformação

Uma das aproximações utilizadas na simulação de juntas coladas por elementos finitos é o uso do estado plano de deformações (Gould, 1983). Esta teoria é utilizada quando uma das dimensões de um corpo é muito maior do que as outras duas, sendo assim, dependendo das dimensões da junta sua largura pode ser considerada infinita.

A modelagem de juntas coladas por elementos finitos que considera o estado plano de deformação tem a vantagem de ser um modelo 2D de fácil construção e computacionalmente econômico. As desvantagens residem na impossibilidade da simulação de juntas onde a largura tem a mesma ordem de tamanho do comprimento, quando existe diferença entre os coeficientes de Poisson dos aderentes e adesivos e quando há cisalhamento no plano, presente em laminados não-balanceados.

O modelo consiste na utilização de elementos quadriláteros ou triangulares para a modelagem dos aderentes e adesivos. A figura 2.12 mostra um modelo de elementos finitos feito em estado plano de deformação sujeita a uma carga de tração distribuída  $P_{xx}$  com a respectiva deformação, distribuição de tensões normais  $\sigma_z$  e cisalhamento  $\tau_{xz}$ .

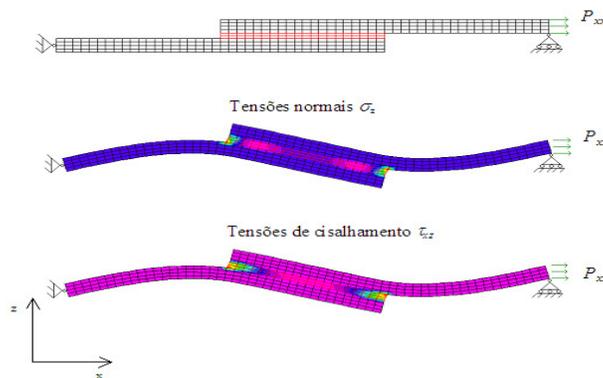


Figura 2.12 - Modelo 2D estado plano de deformação (Jesus, 2003)

Pela figura 2.12 fica claro que a distribuição das tensões normais  $\sigma_z$  e cisalhantes  $\tau_{xz}$  não são uniformes ao longo da superfície de colagem e apresentam valores máximos nas extremidades.

## 2.4. Modelo 3D em Elementos Sólidos

A modelagem de juntas coladas utilizando elementos sólidos 3D tem a vantagem de simular qualquer tipo de junta mostrada nas figuras anteriores, pois a geometria da junta é inteiramente representada por elementos 3D, tanto na largura quanto no comprimento. Este tipo de modelagem também possibilita a captura de efeitos de borda. Em contrapartida, este tipo de modelagem de elementos finitos apresenta elevado número de graus de liberdade, principalmente quando os aderentes são laminados, pois as camadas são muito finas tornando o modelo extremamente refinado para evitar problemas de razão de aspecto de elementos (razão entre a maior e menor dimensão do elemento). A figura 2.13 apresenta um modelo de elementos finitos 3D de elementos sólidos com deformação, cargas, condições de contorno e a distribuição das tensões normais  $\sigma_z$  e cisalhantes  $\tau_{xz}$ .

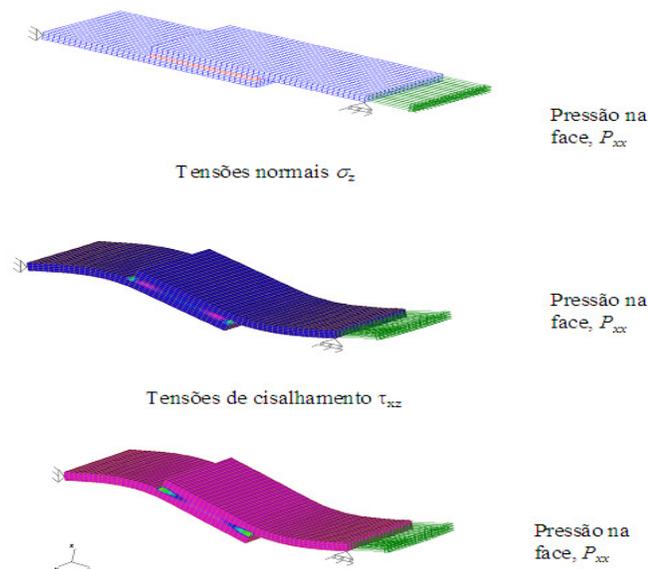


Figura 2.13 - Modelo 3D sólido, deformação e distribuição das tensões normais e cisalhamento (Jesus, 2003).

# Capítulo 3

## O Método dos Elementos de Contorno

Para a solução de certos problemas são necessários métodos numéricos, ou seja, soluções aproximadas. Isto devido à complexidade do problema, ou até mesmo a impossibilidade de uma solução analítica.

A maioria dos fenômenos físicos pode ser descrita por equações diferenciais ordinárias, envolvendo apenas uma dimensão, ou parciais envolvendo duas ou mais dimensões. Para a solução numérica de equações diferenciais podem ser citados o Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). A seguir são descritas vantagens e desvantagens relacionadas a cada método (Kane, 1994; Pouzada, 1999):

- Método das Diferenças Finitas:

- ◆ Vantagens:

1. Extremamente geral;
2. Extensivamente usado em Mecânica dos Fluidos;
3. Não requer integração numérica;
4. Matrizes esparsas;
5. Trata não homogeneidades;
6. Menor tempo para desenvolvimento de formulação.

◆ Desvantagens:

1. Requer malhas estruturadas;
2. Não é apropriado para tratar domínios infinitos;
3. Requer malhas refinadas;
4. Dificuldade em modelar contorno e condições de contorno.

• Método dos Elementos Finitos:

◆ Vantagens:

1. Tecnologia bem desenvolvida;
2. Usado extensivamente em Mecânica dos Sólidos, Térmica e Fluidos e Eletromagnetismo;
3. Integração de funções simples;
4. Matrizes esparsas;
5. Modela contornos e condições de contorno naturalmente;
6. Não requer malhas estruturadas e possibilita mesclar vários tipos de elementos.

◆ Desvantagens:

1. Necessita de malhas de domínio;
2. Requer relações integrais de funcionais ou resíduos ponderados na sua formulação;
3. Dificuldade em tratar domínios infinitos;
4. Resolução dos gradientes de resposta bastante relacionado ao refinamento da malha.

• Método dos Elementos de Contorno:

◆ Vantagens:

1. Modela contorno e condições de contorno naturalmente;
2. Requer apenas malhas de contorno;
3. Usado em Mecânica Estrutural, Térmica, Acústica, Elastodinâmica, Mecânica dos Fluidos e Eletromagnetismo;
4. Ideal para domínios infinitos;

5. Resolução do gradiente de resposta não relacionado ao refinamento da malha do volume;
6. Matrizes esparsas em blocos, se utilizado sub-regiões;
7. Algumas vezes pode ser a única alternativa para certos problemas.

◆ Desvantagens:

1. Requer relações integrais, além da transformação para equações de contorno usando soluções fundamentais;
2. Requer integração numérica de funções complexas;
3. Matrizes não simétricas em geral;
4. Tecnologia em desenvolvimento (quando comparado com o MEF, por exemplo);
5. Dificuldade em se tratar não homogeneidades.

Nas próximas seções será apresentada a formulação para as Equações Integrais de Contorno (EIC's) e a formulação do MEC.

### **3.1. Preliminares Matemáticas**

Esta seção tem por objetivo deduzir algumas relações matemáticas de importância absolutamente crítica para a dedução e entendimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Elas serão usadas nas seções posteriores deste capítulo para transformar as equações diferenciais governantes dos problemas da mecânica do contínuo em equações integrais de contorno equivalentes.

#### **3.1.1. O teorema de Gauss-Green**

O teorema de Gauss-Green é uma identidade fundamental que relaciona uma integral de área da derivada de uma função escalar a uma integral de linha da função ao redor do contorno dessa área. Para deduzir essa relação, considera-se a área plana mostrada na figura 3.1, deseja-se desenvolver uma relação para a integral de área da primeira derivada da função  $f$  com respeito a

$x$ . A integral de área pode ser escrita como uma integral dupla, primeiro com respeito a  $x$  e depois com respeito a  $y$ .

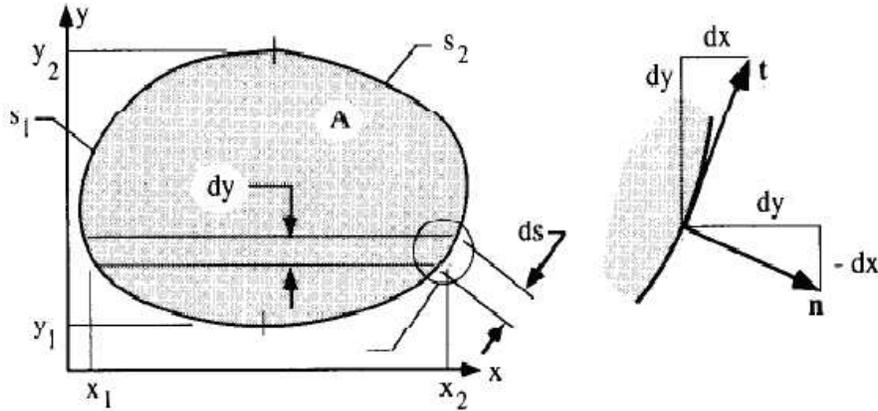


Figura 3.1 – Área usada para deduzir o teorema de Gauss-Green (Kane, 1994)

O *teorema fundamental do cálculo* pode então ser usado para trocar a integração da derivada da função pela integração da própria função, avaliada em seus limites superior e inferior. Esses limites em  $x$  ocorrem na superfície localizados nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ .

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_y \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right\} dy = \int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dy \quad (3.1)$$

A geometria diferencial mostrada no detalhe A da figura 3.1 pode então ser usada para trocar  $dy$  na equação (3.1) por uma expressão envolvendo o elemento linear  $ds$ . Essa consideração envolve as componentes do vetor normal unitário no contorno. Seja o vetor tangente unitário  $\vec{t}$  dado por:

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{e}_2 \quad (3.2)$$

onde  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são os vetores unitários da base canônica do sistema de coordenadas cartesiano adotado. Como o vetor normal unitário  $\vec{n}$  é perpendicular ao vetor tangente unitário  $\vec{t}$ , então o produto escalar de  $\vec{t}$  com  $\vec{n}$  é igual a zero:

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$$

Conseqüentemente, o produto vetorial do vetor tangente unitário  $\vec{t}$  e o versor canônico  $\vec{e}_3$  é igual ao vetor normal unitário  $\vec{n}$ :

$$\vec{t} \times \vec{e}_3 = \vec{n}$$

Logo:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds} \vec{e}_1 - \frac{dx}{ds} \vec{e}_2 = n_x \vec{e}_1 + n_y \vec{e}_2 \quad (3.3)$$

Portanto:

$$\frac{dy}{ds} = n_x \Rightarrow dy = n_x ds \quad (3.4)$$

Substituindo a expressão (3.4) em (3.1) obtém-se:

$$\int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dy = \int_{s_2} f(x_2) n_x ds - \int_{s_1} f(x_1) n_x ds \quad (3.5)$$

Nesta expressão o arco  $s_1$  está no lado esquerdo do contorno total  $s$ , e o arco  $s_2$  está no lado direito de  $s$ . Notando que a componente  $n_x$  em  $s_1$  é negativa, pode-se combinar ambos os termos da equação (3.5) em uma única expressão:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f n_x ds \quad (3.6)$$

Nesta equação, a convenção assumida é que a integração é feita sobre a superfície inteira e a normal está apontando para fora do domínio. Uma simples troca entre os eixos  $x$  e  $y$  pode ser feita para mostrar que a seguinte relação também é verdadeira:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA = \int_s f n_y ds \quad (3.7)$$

Estes argumentos podem ser repetidos em um contexto 3D com a ajuda da figura 3.2 para obter resultados completamente análogos. Dessa vez, o teorema de Gauss-Green relaciona a integral de volume de uma derivada com uma integral de superfície da mesma função. Nesta equação,  $x_i$  e  $n_i$  podem ser  $x$ ,  $y$  ou  $z$  e  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  dependendo do valor de  $i$ .

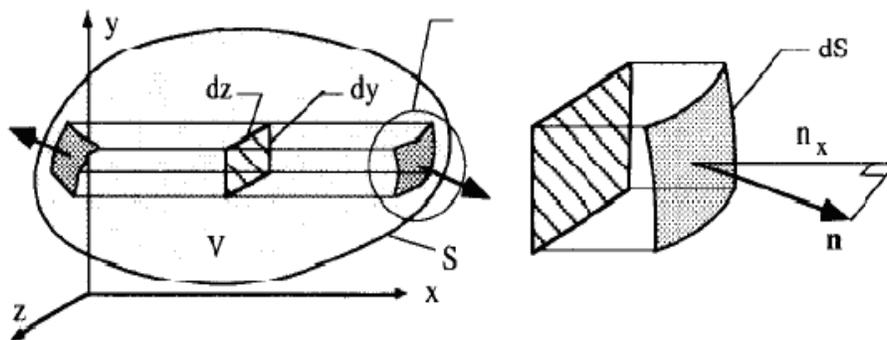


Figura 3.2 – Volume usado para deduzir o teorema de Gauss-Green no contexto 3D (Kane, 1994).

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_z \int_y \left\{ \int_x \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dydz = \int_z \int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dydz$$

ou

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_A f n_x ds; \text{ e geralmente } \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_A f n_i ds \quad (3.8)$$

### 3.1.2. O teorema da divergência

O teorema da divergência é uma leve variação do teorema de Gauss-Green. De fato para deduzi-lo basta aplicar o teorema de Gauss-Green em uma função vetorial  $\vec{f}_i$ , ou seja:

$$\int_V \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} dV = \int_s \vec{f}_i \vec{n}_i ds \quad (3.9)$$

Aplicando a relação acima com  $i = 1, 2, 3$  e somando os resultados, obtém-se:

$$\int_V \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_s (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) ds$$

ou

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{f}) dV = \int_s (\vec{f} \cdot \vec{n}) ds \quad (3.10)$$

A equação (3.10) define a divergência de uma função vetorial como a combinação das derivadas mostradas. Deve-se notar que a equação (3.9) também pode ser usada para representar o teorema da divergência se a convenção de soma de Einstein é assumida. Essa convenção estabelece que, quando dois índices são repetidos em um único termo, isso implica que os termos

devem ser somados sobre a variação dos índices. Um exemplo dessa convenção é mostrado abaixo, onde a variação dos índices é 1, 2, 3.

$$f_j n_j = \sum_{j=1}^3 f_j n_j = f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3$$

### 3.1.3. A segunda identidade de Green

Esta relação pode ser deduzida usando o teorema da divergência subtraindo as duas identidades deduzidas abaixo. A primeira identidade é deduzida fazendo  $\vec{f}$  igual ao seguinte produto de uma função escalar  $b$  e o gradiente de outra função  $a$ .

$$\vec{f} = b \nabla a$$

o divergente de  $\vec{f}$  será:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \cdot \left( b \frac{\partial a}{\partial x_1} \vec{e}_1 + b \frac{\partial a}{\partial x_2} \vec{e}_2 + b \frac{\partial a}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial b}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial x_2} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial b}{\partial x_3} \frac{\partial a}{\partial x_3} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{f} = \nabla a \cdot \nabla b + b \nabla^2 a \tag{3.11}$$

onde

$$\nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}$$

Substituindo os resultados acima na equação (3.10), obtém-se:

$$\int_V (\nabla a \cdot \nabla b + b \nabla^2 a) dV = \int_s (b \nabla a \cdot \vec{n}) ds \quad (3.12)$$

Esta relação pode ser escrita de novo com os valores de  $a$  e  $b$  trocados:

$$\int_V (\nabla b \cdot \nabla a + a \nabla^2 b) dV = \int_s (a \nabla b \cdot \vec{n}) ds \quad (3.13)$$

Agora basta subtrair a equação (3.13) da equação (3.12) para obter a segunda identidade de Green. Quando se faz isso, os termos envolvendo os produtos dos dois gradientes se cancelam. Desta forma as funções  $a$  e  $b$  são tratadas de forma simétrica nesta identidade.

$$\int_V (b \nabla^2 a - a \nabla^2 b) dV = \int_s (b \nabla a \cdot \vec{n} + a \nabla b \cdot \vec{n}) ds \quad (3.14)$$

### 3.1.4. A função delta de Dirac

Existem muitas instâncias em engenharia onde excitações são idealizadas como ocorrendo em um ponto. Cargas concentradas em mecânica dos sólidos e fontes concentradas de geração de energia em análise térmica são dois exemplos. Fisicamente, existem problemas definidos com esse conceito, em sua forma pura. Na nossa imaginação, quando nós pensamos em uma carga pontual, nós estamos provavelmente pensando em uma carga *relativamente concentrada*, como ilustrado na figura 3.3:

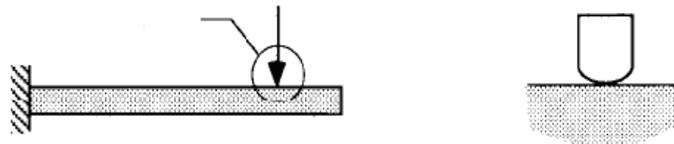


Figura 3.3 – Ilustração de carga concentrada (Kane, 1994)

A qualidade da nossa idealização da carga pontual obviamente depende apenas de quão fechado olhamos a resposta diretamente no ponto de aplicação da fonte de excitação. A carga pontual na viga funciona bem apenas para determinar o cisalhamento e o momento resultante no membro e para a deflexão grossa usando teoria de flexão. Uma análise de contato 3D é necessária, de qualquer forma, para obter informações detalhadas sobre a resposta do objeto submetido diretamente à carga. No limite como o raio de curvatura da carga transferida pelo dispositivo rígido mostrado na figura 3.3 tende a zero, as tensões se tornarão ilimitadas e o material falhará. Desta forma, essa é a situação mais próxima do conceito teórico ideal de fonte pontual. No mais, temos que entender a impossibilidade do material de suportar tal excitação tão intensa e localizada. Finalmente, nós devemos admitir que fontes concentradas são matematicamente muito utilizadas, mas, são abstrações totalmente artificiais, as quais nós podemos usar para resolver problemas práticos.

Para construir uma descrição matemática de uma fonte de excitação pontual, considera-se a função menos exótica mostrada na figura 3.4:

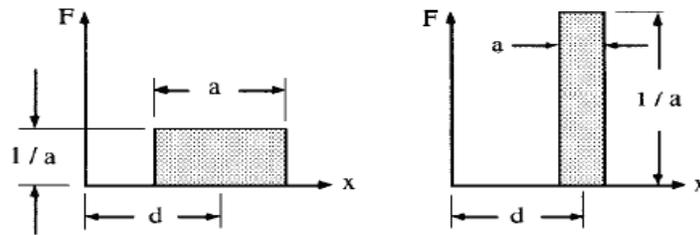


Figura 3.4 – Dois exemplos da função pulso retangular unitário (Kane, 1994)

Essa função pode ser chamada de pulso retangular unitário centrado em  $d$  de largura  $a$ . Essa função é configurada de forma que a sua integral (área) seja igual a unidade sobre qualquer domínio onde a função é definida. Ela é definida da seguinte forma:

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0; & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}; & d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0; & x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Agora pode-se definir a *função delta de Dirac* como o limite da função pulso retangular unitário com  $a$  tendendo a zero:

$$\delta(x-d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a) \quad (3.16)$$

Dessa forma a função delta de Dirac também pode ser definida como:

$$\delta(x-d) = \begin{cases} 0; & x \neq d \\ \infty; & x = d \end{cases} \quad (3.17)$$

Essa função se comporta como uma fonte pontual. Isso quer dizer, como a região sobre a qual a função atua fica cada vez menor, a intensidade (valor) cresce de tal forma que a resultante (integral efetuada) da função permanece constante.

A propriedade de seleção da função delta de Dirac é a propriedade chave usada no método dos elementos de contorno. Essa propriedade envolve a integral do produto da função delta de Dirac com alguma outra função  $g$ . Dessa forma, dá para deduzir a propriedade de seleção considerando a integração do produto de  $g$  e o pulso retangular no limite, visto que a largura do pulso se torna extremamente pequena.

$$I(d, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)F(x, d, a)dx = \int_{d-a/2}^{d+a/2} g(x)F(x, d, a)dx$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(d, a) = \left\{ g(\alpha) \frac{1}{a} \right\} a = g(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x-d)dx \quad (3.18)$$

O último passo na dedução acima é a aplicação direta do *teorema do valor médio* do cálculo integral. Este teorema estabelece que o valor de uma integral definida sobre um dado intervalo é igual ao valor do integrando avaliado em algum ponto  $\alpha$  dentro do intervalo considerado. No limite, como  $a$  tende a zero,  $\alpha$  se aproxima de  $d$ . Portanto a propriedade de seleção pode ser dada pela expressão abaixo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x-d) = g(d) \quad (3.19)$$

A propriedade de seleção da função delta de Dirac estabelece que o produto da função delta por outra função, integrada sobre um domínio no qual a função delta é definida é igual ao valor da função no ponto onde a função delta é aplicada. Dessa forma, a função delta, quando envolvida em um processo de integração com outra função, seleciona o valor da outra função no ponto onde a função delta é aplicada. Obviamente, se a função delta não é aplicada no domínio de integração, então o resultado da integração é zero.

### 3.2. Formulação do MEC aplicado à Mecânica dos Sólidos

Para problemas de elasticidade linear, três equações descrevem o equilíbrio do corpo e outras três a compatibilidade cinemática. A saber:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.21)$$

Na equação (3.20)  $b_i$  são as forças de corpo resultantes do peso próprio, de reações químicas no corpo ou devido a campos eletromagnéticos, e  $\sigma_{ij,j}$  é o divergente do tensor de tensões. O vetor  $u_i$  na equação (3.21) é o vetor de deslocamento linear. Há também as equações constitutivas, que relacionam as tensões com os deslocamentos. De uma forma geral, são escritas da seguinte forma (Fung & Tong, 2001):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.21) em (3.22) tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (3.23)$$

A equação (3.22) é também conhecida como lei de Hooke generalizada. Em relação ao tensor  $C_{ijkl}$ , devido a simetria de tensões e deslocamentos, é possível escrever as equações (3.24) e (3.25) respectivamente, enquanto pela forma quadrática da energia de deformação, permite escrever a equação (3.26).

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (3.24)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.25)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.26)$$

Assim, tendo a simetria do tensor  $C_{ijkl}$ , ao invés de oitenta e uma constantes, restam apenas vinte e uma componentes a serem determinadas e a lei de Hooke é escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2213} & C_{2232} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3312} \\ & & & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ & & & & C_{2323} & C_{2312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

*simétrico*

Outra equação fundamental para a Mecânica dos Sólidos é o tensor de Cauchy. Ele determina as forças de superfície em uma determinada direção  $t_i$  em um dado ponto, relacionando o estado de tensão descrito pelo tensor  $\sigma_{ij}(x)$  com o versor normal  $n_j(x)$ :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.28)$$

Para a obtenção das EIC's será utilizado aqui a técnica dos resíduos ponderados. A equação (3.20) é ponderada por uma função  $w$  qualquer e integrada no domínio. Assim:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

Sendo que a função  $w$  é arbitrária, as três equações, ponderadas por funções  $w$  diferentes, podem ser somadas e assim, a equação (3.29) fica (Kane, 1994):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w_i d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação (3.30):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} w_i d\Omega = \int_{\Omega} \left( [\sigma_{ij} w_i]_{,j} - \sigma_{ij} w_{i,j} \right) d\Omega \quad (3.31)$$

Aplicando o teorema de Gauss-Green, o primeiro termo do lado direito da igualdade fica:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} w_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_i n_j d\Gamma \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.32) e (3.31) em (3.30) e rearranjando os termos:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_i n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

Finalmente, aplicando o conceito do tensor de Cauchy no primeiro termo da equação (3.33):

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

A equação (3.34) pode ser interpretada como uma equação integral de equilíbrio, pois relaciona termos de forças de superfície, forças de corpo e tensões. Lembrando da equação (3.23), escolhendo a função  $w_i = u_i^*$ , onde  $u_i^*$  é um campo de deslocamentos arbitrário, e integrando por partes o segundo termo da equação (3.34):

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} \left[ (u_k u_{i,j}^*)_{,l} - u_k u_{i,jl}^* \right] d\Omega \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) em (3.34) e aplicando as relações (3.10) (teorema da Divergência), (3.20) (equações de equilíbrio) e (3.28) (tensor de Cauchy), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} (b_i u_i^* - b_i^* u_i) d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

A equação (3.36) é o análogo em Mecânica dos Sólidos da segunda identidade de Green, também conhecida como teorema da reciprocidade de Betti (Gaul et al., 2003).

Fazendo  $b_i = 0$ :

$$\int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (3.37)$$

Como já discutido, o objetivo do MEC é, em última análise, evitar o cálculo de integrais no domínio do problema. Para que isto aconteça, deve-se escolher uma função ponderadora tal que, dado um operador diferencial  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} w_i^* = \delta(x-d) \quad (3.38)$$

onde  $\delta(x-d)$  é a função delta de Dirac, que representa uma carga concentrada, conforme discutido na Seção 3.1.4.

A função  $w_i^*$  é chamada solução fundamental e constitui um desafio e algumas vezes um limitante para o desenvolvimento do método. Para problemas de elasticidade isotrópica, a solução fundamental para deslocamentos e conseqüentemente para forças de superfície, é obtida resolvendo o problema de Kelvin (Kane, 1994), no qual uma das abordagens clássicas para a solução do problema é a aplicação do vetor de Galerkin, que é usado para desacoplar as equações diferenciais que regem o problema (equações de Navier). Já para problemas transversalmente

isotrópicos, ou seja, isotrópicos por planos, Pan & Chou (1976) apresentam uma formulação geral para o problema posteriormente trabalhada por Loloi (2000) para implementações computacionais e tratamento de singularidades. Este equacionamento utiliza escolha de diferentes funções para a composição da solução fundamental de deslocamentos e de forças de superfície. Mais detalhes sobre estas soluções fundamentais e a formulação para problemas com anisotropia plena serão discutidos com maior abrangência no Capítulo 4 desta dissertação.

Neste momento, deve-se observar que, em consequência da aplicação de uma força  $F$  na direção  $i$ , implica em um campo de deslocamentos  $u_j$ , então, se as forças são aplicadas nas três direções simultaneamente, os deslocamentos são a superposição das componentes referentes a cada excitação:

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_{11}^* e_1 + u_{12}^* e_2 + u_{13}^* e_3 \\ u_2^* &= u_{21}^* e_1 + u_{22}^* e_2 + u_{23}^* e_3 \\ u_3^* &= u_{31}^* e_1 + u_{32}^* e_2 + u_{33}^* e_3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

O conjunto de equações (3.39) pode ser generalizado para uma direção qualquer, sendo  $n_k$  o versor associado a esta direção e o sub-índice  $i$  a direção na qual está aplicada a carga pontual:

$$u_i^* = u_{ik}^* n_k \quad (3.40)$$

Escolhe-se  $b_k^* = \delta(x - \xi) n_k$ , que é a representação de uma carga pontual de módulo unitário aplicada na direção  $n_k$  e  $\xi$  é o ponto onde está aplicada a carga (ponto de colocação). O tensor de tensões passa a ser um tensor de ordem 3, isto porque para cada carga pontual  $b_k^*$  é associado um estado de tensão  $\sigma_{ij}^*$ , e assim o tensor de Cauchy fica:

$$t_{ik}^* = \sigma_{ijk}^* n_j \quad (3.41)$$

Substituindo os termos  $u_i^*$  e  $t_i^*$  em (3.37) por seus respectivos tensores ( $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$ ):

$$\int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma = \int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega \quad (3.42)$$

Substituindo  $b_j^*$  por  $\delta(x - \xi)n_j$  e usando a propriedade de seleção da função delta de Dirac (3.19), a equação (3.42) fica:

$$\int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma = \int_{\Omega} \delta(x - \xi)n_j u_j d\Omega = u_j(\xi)n_j \quad (3.43)$$

Agora, alinhando o vetor  $n_i$  com os eixos coordenados cartesianos, o termo  $u_j(\xi)n_j$  passa a ser apenas  $u_j(\xi)$ , pois apenas  $j$ -ésima componente na direção do eixo  $x_i$  não é zero. Assim a equação (3.43) passa a ser apenas:

$$\int_{\Gamma} (t_j u_{ij}^* - u_j t_{ij}^*) d\Gamma = u_i(\xi) \quad (3.44)$$

Observando a equação (3.44), chamada de identidade de Somigliana, nota-se que a integral no domínio do problema desaparece, porém agora é necessário obter o valor para a função  $u_i(\xi)$ .

A propriedade de seleção da função delta de Dirac (3.19) permite determinar o valor de  $u_i(\xi)$  em duas situações:

$$u_i(\xi) = \begin{cases} u_i & \text{se } \xi \in \Omega \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega \end{cases} \quad (3.45)$$

Resta determinar para a situação quando  $\xi \in \Gamma$ . Brebbia & Domingues (1998) mostram que, para contornos suaves, o valor de  $u_i(\xi)$  é dado por:

$$u_i(\xi) = -\frac{1}{2}u_i \quad (3.46)$$

Para uma superfície qualquer, Beer (2001) mostra que tal valor é uma função do ângulo entre as superfícies conectadas ao nó:

$$u_i(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \notin \Omega \\ u_i & \xi \in \Omega \\ -u_i \frac{1}{2} & \xi \in \Gamma \rightarrow \text{localizado em uma parte suave de } \Gamma \\ -u_i \frac{\Delta\theta}{2\pi} & \xi \in \Gamma \rightarrow \text{localizado em um canto de } \Gamma \end{cases} \quad (3.47)$$

Ou ainda, definindo  $c(\xi)u_i = u_i(\xi)$  sendo:

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \notin \Omega \\ 1 & \xi \in \Omega \\ -\frac{1}{2} & \xi \in \Gamma \rightarrow \text{localizado em uma parte suave de } \Gamma \\ -\frac{\Delta\theta}{2\pi} & \xi \in \Gamma \rightarrow \text{localizado em um canto de } \Gamma \end{cases} \quad (3.48)$$

### 3.3. Discretização do problema em Elementos de Contorno

Todo o desenvolvimento das EIC's até agora foi feito de forma exata, isto é, nenhuma simplificação foi feita ou nenhum valor foi aproximado. Entretanto, para problemas reais de engenharia serão necessárias aproximações para que se possa descrever o modelo físico e geométrico. A discretização do fenômeno analisado e da geometria do problema é feita utilizando funções de forma. Neste trabalho, as funções de forma são lineares para elementos descontínuos (os elementos não compartilham nós) .

O uso de elementos descontínuos implica em uma maior facilidade para montagem das matrizes de influência e no caso de sub-regiões ainda permite aplicar condições de contorno na interface. A maior desvantagem está no fato de que elementos descontínuos geram, para uma

malha com o mesmo número de elementos, resultados menos refinados do que os elementos contínuos.

As funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  devem obedecer aos seguintes requisitos:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}; \quad (3.49)$$

$$\sum_{n=1}^{N_{nos}} N_n(\xi, \eta) = 1; \quad (3.50)$$

Onde  $N_{nos}$  é o número de nós presentes no elemento e  $\delta_{ij}$  é o chamado delta de Kronecker definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.51)$$

Tendo em vista as propriedades (3.49) e (3.50), as funções de forma para o elemento em coordenadas intrínsecas mostrado na figura 3.5 são:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.52)$$

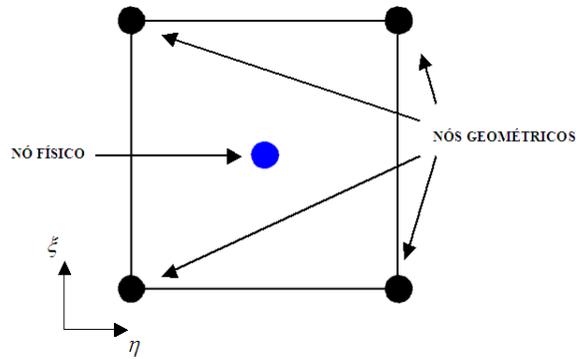


Figura 3.5 – Representação de um elemento de quatro nós no sistema de coordenadas intrínseco

A figura 3.6 ilustra os gráficos das funções  $N_1$  a  $N_4$ .

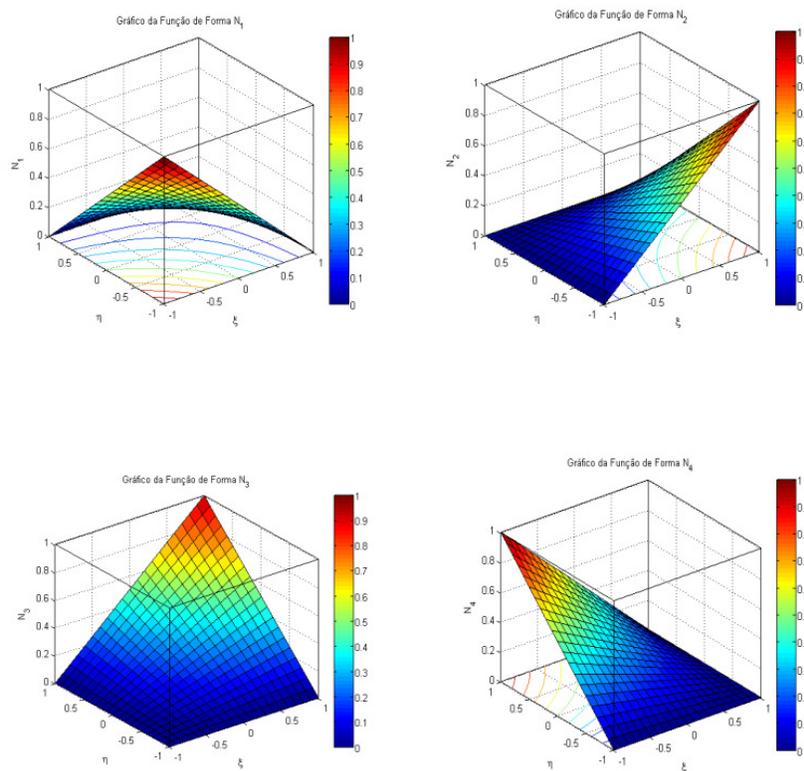


Figura 3.6 – Gráficos das Funções de Forma  $N_1$  a  $N_4$

O conjunto de equações (3.52) é usado para mapear a geometria do problema. Se o mesmo conjunto de equações é usado para modelar tanto o fenômeno físico quanto a geometria, este é então chamado de elemento isoparamétrico, o que não é o caso aqui, já que o fenômeno físico é considerado constante no elemento. A quantidade física constante é expressa da seguinte forma:

$$v = v_n \quad (3.53)$$

Na equação (3.53)  $v$  pode ser tanto as coordenadas nodais como forças de superfície ou deslocamentos. O somatório varia de um até o número de nós presentes no elemento, no caso, oito.

Para um problema 3D, existem seis incógnitas por nó: três forças de superfície e três deslocamentos. Assim, a grandeza vetorial pode ser expressa em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Nota-se que as funções de forma para o nó físico valem um, pois, trata-se de um elemento constante.

Desta forma, a Equação Integral de Contorno para  $N$  elementos pode ser escrita como:

$$c(\xi)u_i = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) t_j^n - t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) u_j^n d\Gamma_e \quad (3.55)$$

Sendo  $t_j^n$  e  $u_j^n$  constantes em  $\Gamma_e$ , a equação (3.55) pode ser reescrita na forma:

$$c(\xi)u_i + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e u_j^n = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e t_j^n \quad (3.56)$$

Definindo:

$$H_{ij}^e = \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e + c(\xi)\delta_{ij} \quad (3.57)$$

$$G_{ij}^e = \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) d\Gamma_e \quad (3.58)$$

A equação (3.56) passa a ser:

$$\sum_{e=1}^N H_{ij}^e u_j^e = \sum_{e=1}^N G_{ij}^e t_j^e \quad (3.59)$$

e em forma matricial:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (3.60)$$

Os vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$  contém deslocamentos e forças de superfície prescritos e incógnitas. Desta forma, as condições de contorno em  $\{u\}$  e  $\{t\}$  podem ser multiplicadas pelas respectivas colunas de  $[H]$  e  $[G]$  e agrupadas em um único vetor  $\{b\}$ , enquanto as incógnitas do problema são reagrupadas em um outro vetor  $\{x\}$ . As colunas das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  também são reordenadas e o sistema final é escrito na forma  $[A]\{x\} = \{b\}$ .

# Capítulo 4

## A Solução Fundamental

Conforme discutido no capítulo 3, a solução fundamental é a base da formulação do Método dos Elementos de Contorno. Ela nada mais é do que a solução particular da equação diferencial que corresponde à aplicação de uma carga ou fonte concentrada (delta de Dirac). Sem a solução fundamental o desenvolvimento da formulação do MEC direto se tornaria inviável, pois, ela é usada como função ponderadora na técnica dos resíduos ponderados e essencial na transformação das integrais de domínio em integrais de contorno.

Neste capítulo serão discutidos o tratamento de problemas elastoestáticos de materiais constitutivamente isotrópicos, transversalmente isotrópicos e a solução para anisotropia 3D.

### 4.1. Solução Fundamental Isotrópica

Como mencionado acima, a existência de uma solução que represente uma carga concentrada tem um papel importante na formulação do MEC.

Para um problema isotrópico, a equação (3.22) pode ser escrita como se segue:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.1)$$

Sendo  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé que podem ser escritas como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

Substituindo a equação (4.1) em (3.20), obtém-se as equações de Navier:

$$\frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + b_i = 0 \quad (4.4)$$

A equação de Navier pode agora ser escrita para uma força pontual unitária aplicada no corpo em um ponto  $\xi$ , como:

$$\frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \delta(x-\xi)e_i = 0 \quad (4.5)$$

As soluções das equações governantes devido a uma força pontual são comumente chamadas de soluções fundamentais. Existem muitas formas de obter uma solução para a equação governante acima. Aqui são apresentados os métodos baseados no vetor de Galerkin.

#### 4.1.1. O vetor de Galerkin

A técnica mais popular para deduzir as soluções fundamentais é através do uso do vetor de Galerkin,  $G_i$ . Nesta seção, a abordagem do vetor de Galerkin será usada para obter as soluções fundamentais devido a uma força pontual unitária em um meio infinito. A solução para uma força concentrada em um meio infinito, isotrópico, foi originalmente deduzida por Lord Kelvin, e é conhecida como solução fundamental de Kelvin. Os deslocamentos são expressos em termos do vetor de Galerkin, de acordo com Kane (1994), como:

$$u_i^* = G_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,ik} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5) obtém-se:

$$\mu G_{i,kkj} - \frac{\mu}{2(1-\nu)} G_{k,ikj} + \frac{\mu}{(1-\nu)} \left( G_{j,kkj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,jkj} \right) + \delta(x-\xi) e_i = 0 \quad (4.7)$$

a qual pode ser simplificada para:

$$\mu G_{i,kkj} + \delta(x-\xi) e_i = 0 \quad (4.8)$$

uma vez que  $G_{k,ikj} = G_{k,jki}$ ,  $G_{j,kkj} = G_{k,jjk}$  e  $G_{k,jkj} = G_{k,jki}$ . A equação (4.8) pode também ser escrita como:

$$\mu \nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \delta(x-\xi) e_i = 0 \quad (4.9)$$

Aliabadi (2002) mostra que fazendo  $F_i = \nabla^2 G_i$ , então a equação (4.9) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 F_i + \frac{1}{\mu} \delta(x-\xi) e_i = 0 \quad (4.10)$$

#### 4.1.2. Problemas tridimensionais

A solução de (4.10) é bem conhecida da teoria de potencial e é dada por:

$$F_i = \frac{1}{4\pi\mu r} e_i \quad (4.11)$$

para problemas tridimensionais. O vetor de Galerkin é dado por:

$$G_i = \frac{1}{8\pi\mu r} e_i \quad (4.12)$$

Substituindo as derivadas de (4.12) e (4.6) obtém-se:

$$u_i^* = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ r_{,kk} e_i - \frac{1}{2(1-\nu)} r_{,ik} e_k \right] \quad (4.13)$$

Agora notando que  $r_{,ik} = (\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}) / r$  e  $r_{,kk} = 2 / r$ , a equação (4.13) pode ser reescrita como:

$$u_i^* = \frac{1}{16\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} e_j \right] \quad (4.14)$$

O vetor de deslocamentos passa a ser um tensor de ordem 2, isto porque para cada carga pontual é associado um estado de deformação e assim a equação (4.14) fica:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (4.15)$$

onde  $u_{ij}^*(\xi, x)$  representa o deslocamento na direção  $j$  em um ponto  $x$  devido a uma força pontual unitária agindo na direção  $i$  em  $\xi$ . A solução fundamental para tração é obtida de (4.14), através das relações de deslocamento-deformação e tensão deformação, e considerando que  $t_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$ , tem-se que:

$$t_i^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} \right] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} e_j \quad (4.16)$$

onde  $n_j$  representa as componentes do vetor normal que aponta para fora do domínio em um ponto campo  $x$ . Novamente, devido ao mesmo motivo dado para a solução de deslocamento, a equação (4.16) pode ser escrita como:

$$t_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \right\} \quad (4.17)$$

onde  $t_{ij}^*(\xi, x)$  representa a tração na direção  $j$  em um ponto  $x$  devido a uma força pontual unitária agindo na direção  $i$  em  $\xi$ .

É importante observar que, tanto  $u_{ij}^*$  quanto  $t_{ij}^*$ , possuem singularidades de ordem  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$  respectivamente. Isto se torna um ponto importante no desenvolvimento do método, uma vez que, quando o ponto fonte coincide com o ponto campo, se faz necessário um tratamento adequado das integrais. A solução fundamental para  $u_{ij}^*$  possui singularidade fraca, portanto, pode ser tratada concentrando os pontos de Gauss no ponto fonte. No entanto,  $t_{ij}^*$  possui singularidade forte, com isso, deve ser tratada no sentido do Valor Principal de Cauchy. Para resolver este problema, deve-se lembrar que tanto para o desenvolvimento das EIC's, quanto para o desenvolvimento do MEC, não foi, em momento algum, citada a aplicação de nenhuma condição de contorno. Sendo assim, a equação (3.60) é uma equação que descreve o estado geral do modelo analisado, sem nenhuma suposição quanto às condições de contorno. Em outras palavras, depende apenas da geometria e das características materiais do problema.

Assim, para o cálculo dos valores singulares de  $[H]$  que ocorrem na diagonal principal da matriz, é aplicado o argumento do corpo rígido. Este consiste em aplicar um deslocamento unitário, pois isto não induz tensões no corpo,  $\{t\} = \{0\}$  (Carrion, 2002) e a equação (3.60) fica:

$$H_{(i)(i)} = -\sum_j H_{ij} \quad (4.16)$$

## 4.2. Solução Fundamental Transversalmente Isotrópica

Esta formulação é utilizada para o tratamento de problemas como modelagem de ossos e madeira, uma vez que ambos são materiais compósitos constituídos por fibras contínuas imersas em uma matriz. Alguns autores apresentam soluções alternativas para o problema

transversalmente isotrópico. Entretanto, estas são condicionadas a certos requisitos e portanto, muito limitadas.

Pan & Chou (1976) apresentam uma solução bastante geral, que posteriormente foi trabalhada por Loloi (2000) para implementações computacionais. De acordo com Santiago (2008), esta solução, quando comparada à formulação para anisotropia plena, se mostra de difícil programação, pois envolve uma seqüência de chaves de escolha para determinar o conjunto de equações a serem utilizadas em um determinado caso.

A solução para deslocamentos é:

$$u_{ij}^* = \sum_{n=1}^3 \gamma_n F_n^{(ij)} \quad (4.17)$$

Segue que:

$$u_{ij,l}^* = \sum_{n=1}^3 \gamma_n F_{n,l}^{(ij)} \quad (4.18)$$

A solução para forças de superfície é obtida utilizando a relação entre deformação deslocamentos em (4.18), aplicando a Lei de Hook e por fim, o tensor de Cauchy.

Os coeficientes  $\gamma_n$  são constantes, e podem ser encontrados em Loloi (2000), onde o autor também aponta que são possíveis as seguintes situações que devem ser consideradas:

1.  $v_1 \neq v_2$  : Problema não degenerativo.
2.  $v_1 = v_2$  : Problema degenerativo.

Para a primeira situação, as funções  $F_n^{(ij)}$  são:

$$\begin{aligned}
F_n^{(ij)} &= \frac{\delta_{ij}}{R_n^*} - \frac{r_i r_j}{R_n R_n^{*2}} \\
F_n^{(i3)} &= \text{sign}(r_3) \frac{r_i}{R_n R_n^*} \\
F_n^{(33)} &= \frac{1}{R_n} \\
F_3^{(11)} &= \frac{1}{R_3^*} - \frac{r_2^2}{R_3 R_3^*} \\
F_3^{(22)} &= \frac{1}{R_3^*} - \frac{r_1^2}{R_3 R_3^*} \\
F_3^{(12)} &= F_3^{(21)} = \frac{r_1 r_2}{R_3 R_3^{*2}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Sendo:

$$r_i = (x_i - \xi_i) \tag{4.20}$$

$$R_n = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \nu_n^2 r_3^2} \tag{4.21}$$

$$R_n^* = R_n + \text{sign}(r_3) \nu_n r_3 \tag{4.22}$$

e

$$\text{sign}(r_3) = \begin{cases} -1 & r_3 < 0 \\ 1 & r_3 > 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

### 4.3. Solução Fundamental Anisotrópica 3D

A formulação de elementos de contorno deduzida anteriormente se mantém para a elastoestática e para a elastodinâmica no domínio da frequência, assim como para materiais anisotrópicos. Para aplicar o método em um problema particular, precisa-se da correspondente solução fundamental. Para materiais isotrópicos, existem expressões analíticas relativamente simples para a solução fundamental cuja implementação é imediata. Por outro lado, para a solução fundamental anisotrópica estática e dinâmica só existem expressões integrais (Bacon et al. (1980), Wang e Achenbach (1994, 1995)), e elas possuem um alto custo computacional, como pode ser visto em Schlar (1994) e Kogl (2000). Isso é uma grande desvantagem, uma vez que o cálculo da solução fundamental consome grande parte do tempo computacional para a montagem das matrizes  $[H]$  e  $[G]$ . Além do mais, é importante que o cálculo da solução fundamental seja eficiente. A seguir, é descrito primeiro algumas propriedades comuns entre as soluções fundamentais isotrópica e anisotrópica 3D para a elastoestática.

#### 4.3.1. Soluções fundamentais da elastoestática

As soluções fundamentais da elastoestática são funções do vetor distância,  $r_i = x_i - \xi_i$ , entre o ponto campo  $x$  e o ponto fonte  $\xi$ . Conforme visto na seção 4.1, para um material isotrópico, a solução fundamental  $u_{mk}^*$  e sua primeira derivada  $u_{mk,l}^*$  são dadas por:

$$u_{mk}^*(r_i) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{mk} + r_{,m}r_{,k} \right] \quad (4.24)$$

$$u_{mk,l}^*(r_i) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} (\delta_{ml}r_{,k} + \delta_{kl}r_{,m} - (3-4\nu)\delta_{mk}r_{,l} - 3r_{,m}r_{,k}r_{,l}) \quad (4.25)$$

Como pode ser confirmado facilmente, obtém-se para a derivada parcial do vetor distância:

$$r_i = \frac{r_i}{r} = r_i^0 \quad (4.26)$$

onde  $r_i^0$  é um vetor unitário apontando na direção de  $r_i$ . Introduzindo coordenadas esféricas  $(r, \theta_1, \theta_2)$ , observa-se que:

$$r_i(r, \theta_1, \theta_2) = r.r_i^0(\theta_1, \theta_2) \quad (4.27)$$

ou seja,  $r_i = r_i^0$  depende somente da direção de  $r_i$ , mas não de seu comprimento. Pode-se ainda escrever a solução fundamental isotrópica e sua derivada como segue:

$$u_{mk}^*(r, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{r} G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2) \quad (4.28)$$

$$u_{mk,l}^*(r, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{r^2} G_{mkl}^u(\theta_1, \theta_2) \quad (4.29)$$

com isso, obtém-se para a solução de tração:

$$t_{mi}^*(r, \theta_1, \theta_2) = C_{ijkl} u_{mk,l}^*(r, \theta_1, \theta_2) n_j = \frac{1}{r^2} G_{mij}^t(\theta_1, \theta_2) n_j \quad (4.30)$$

com

$$G_{mij}^t(\theta_1, \theta_2) = C_{ijkl} G_{mkl}^u(\theta_1, \theta_2) \quad (4.31)$$

Conforme citado na seção 4.1 a solução fundamental de deslocamento  $u_{mk}^*$  contém uma singularidade fraca  $1/r$ , e a solução de tração  $t_{mk}^*$  uma singularidade forte  $1/r^2$ . As funções  $G^u$  e  $G^t$  são regulares e dependem somente de duas variáveis: o ângulo polar  $\theta_1$  e ângulo azimutal  $\theta_2$ .

Em materiais isotrópicos elásticos, as funções  $G_{mk}^u$ ,  $G_{mkl}^u$ , etc, conforme introduzido acima, são conhecidas na forma fechada exata, logo, sua implementação em um código de Elementos de Contorno é direta e eficiente. Na análise anisotrópica, as soluções fundamentais também são dadas por (4.28) a (4.31). Porém, as funções  $G_{mk}^u$  não são expressas na forma fechada e sim na forma de complicadas expressões integrais que tem que ser resolvidas numericamente, de forma que esse cálculo consome muito tempo. Entretanto, usando-se um esquema de interpolação adequado, conforme descrito a seguir, pode-se aumentar bastante a velocidade do cálculo, de forma que o custo computacional final seja apenas um pouco maior do que quando se usa a solução fundamental isotrópica.

### 4.3.2. Esquema de interpolação para a solução fundamental anisotrópica

Uma vez que  $G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2)$  são funções apenas de duas variáveis – o ângulo polar  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$  e o ângulo azimutal  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$  - todos os valores possíveis de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão localizados dentro de uma área retangular no plano  $\theta_1 - \theta_2$ . Como mostrado na figura 4.1, pode-se subdividir esta área em uma malha retangular regular e armazenar os valores de  $G_{mk}^u$  nos pontos da malha  $\theta_1^m$  e  $\theta_2^n$  em um vetor correspondente. Desta forma, qualquer valor desejado arbitrariamente no plano  $\theta_1 - \theta_2$  pode ser obtido pela interpolação de Lagrange dos valores armazenados.

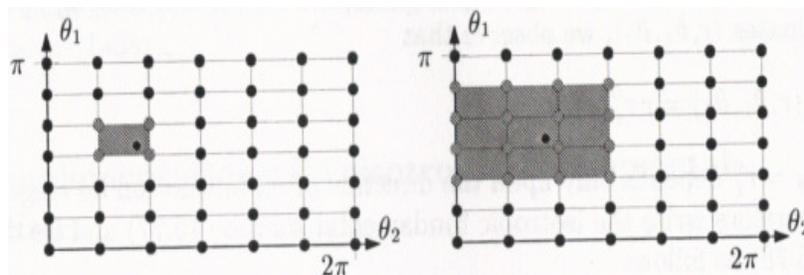


Figura 4.1 – Cálculo de  $G_{mk}^u$  por interpolação Lagrangiana linear e cúbica (Gaul, 2003)

Isso não representa nenhum problema uma vez que as funções  $G_{mk}^u$  são regulares. Usando (4.28) e (4.29), ou seja, multiplicando pelos termos  $1/r$  e  $1/r^2$ , obtém-se a solução fundamental  $u_{mk}^*$  e sua derivada  $u_{mk,l}^*$ . Isso conduz à solução fundamental para tração:

$$t_{mk}^* = C_{ijkl} u_{mk,l}^* n_j \quad (4.32)$$

Alternativamente, pode-se armazenar as funções  $G_{mij}^t$ , o que aumenta a velocidade de cálculo da solução fundamental de tração, mas requer maior espaço de armazenamento.

O esquema descrito acima foi primeiro introduzido por Wilson e Cruse (1978), que sugeriu o uso de interpolação Lagrangiana cúbica empregando uma malha de  $33 \times 65$  pontos. Usando interpolação linear, a velocidade de execução pode ser aumentada bastante, mas, em compensação exige-se muito mais espaço de armazenamento, uma vez que é necessária uma malha bem mais refinada para conseguir uma precisão comparável. O esquema proposto por Wilson e Cruse (1978) foi um bom compromisso entre eficiência computacional e espaço de armazenagem naquela época. No entanto, computadores com *hardware* modernos permitem resolver problemas de valores de contorno muito maiores do que em três décadas atrás, uma vez que o espaço de armazenamento necessário para a malha de interpolação se torna desprezível quando comparado aos sistemas matriciais, enquanto a eficiência computacional se torna uma questão mais importante.

### 4.3.3. A transformada de Radon

A solução fundamental anisotrópica para a elastoestática,  $u_{mk}^*$  é definida como:

$$C_{ijkl} u_{mk,lj}^*(x, \xi) = -\delta_{im} \delta(x, \xi) \quad (4.33)$$

Para um material anisotrópico geral, o tensor constitutivo  $C_{ijkl}$  contém 21 constantes elásticas independentes, conforme mostrado no capítulo 3, o que torna possível obter  $u_{mk}^*$  na forma fechada exata. No entanto, uma representação integral relativamente simples da solução

fundamental e sua derivada pode ser obtida empregando-se a transformada de Radon (também conhecida como *transformada plane wave*), a qual é descrita em detalhes por Gel'fand *et al.* (1966) e Bacon *et al.* (1980).

A transformada de Radon de uma função  $f(x_i)$  é definida por:

$$\hat{f}(\alpha, z_i) \equiv \mathfrak{R}\{f(x_i)\} = \int_{\Omega} f(x_i) \delta(\alpha - z_i x_i) d\Omega \quad (4.34)$$

onde a integração é feita sobre o plano  $z_i x_i = \alpha$ , o qual é “filtrado” do espaço total pela função delta de Dirac, conforme mostra a figura 4.2.

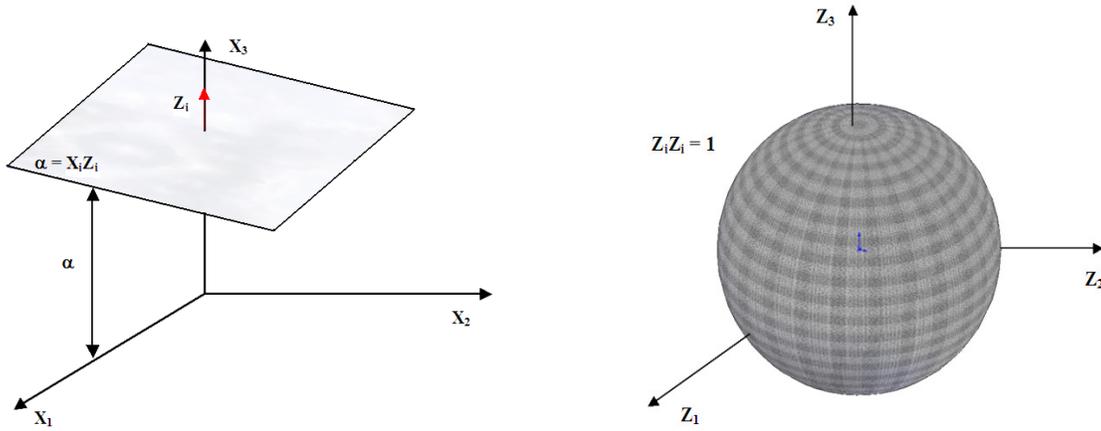


Figura 4.2 – Transformada de Radon e sua inversa. Integração sobre o plano  $z_i x_i = \alpha$  e sobre uma esfera unitária  $z_i z_i = 1$

A inversa da transformada é dada por:

$$f(x_i) = \mathfrak{R}^{-1}\{\hat{f}(\alpha, z_i)\} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i = 1} \left[ \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha = z_i x_i} d\Gamma(z_i) \quad (4.35)$$

onde a integração é feita sobre a superfície de uma esfera unitária, também mostrada na figura 4.2.

A transformada de Radon possui as seguintes propriedades (Bacon *et al.* (1980)):

- Homogeneidade:  $\mathfrak{R}\{f(k\alpha, kz_i)\} = \frac{1}{|k|} \mathfrak{R}\{f(\alpha, z_i)\}$  (4.36)

- Linearidade:  $\mathfrak{R}\{c_1 f + c_2 g\} = c_1 \mathfrak{R}\{f\} + c_2 \mathfrak{R}\{g\}$  (4.37)

- Transformação de derivadas:  $\mathfrak{R}\left\{\frac{\partial^n f}{\partial x_i \partial x_j \dots}\right\} = z_i z_j \dots \frac{\partial^n \mathfrak{R}\{f\}}{\partial \alpha^n}$  (4.38)

- Transformação do delta de Dirac:  $\mathfrak{R}\{\delta(x_i)\} = \delta(\alpha)$  (4.39)

Para calcular a solução fundamental anisotrópica elastoestática, aplica-se a transformada de Radon na equação (4.33), o que produz:

$$C_{ijkl} z_j z_l \frac{\partial^2 \hat{u}_{km}^*(\alpha, z_n)}{\partial \alpha^2} = -\delta(\alpha) \delta_{im} \quad (4.40)$$

Definindo o tensor:

$$M_{ik}^{zz} = C_{ijkl} z_j z_l \quad (4.41)$$

e multiplicando (4.40) pela sua inversa  $(M_{jm}^{zz}(z_i))^{-1}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_{jm}^*(\alpha, z_n)}{\partial \alpha^2} = -(M_{jm}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(\alpha) \quad (4.42)$$

A solução fundamental  $u_{jm}^*$  é agora obtida aplicando-se a inversa da transformada de Radon (4.35). Isso é imediato no presente caso uma vez que o integrando da transformada inversa está pronto e é dado por (4.42). Dessa forma, chega-se em:

$$u_{jm}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_{z_i z_i = 1} (M_{jm}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i) d\Gamma(z_i) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{z_i z_i = 1} (M_{jm}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i^0) d\Gamma(z_i) \quad (4.43)$$

onde  $r_i^0 = r_i / r$  é um vetor unitário, e foi empregado a propriedade da função delta de Dirac:

$$\delta(z_i r_i) = \delta(r z_i r_i^0) = \frac{1}{r} \delta(z_i r_i^0) \quad (4.44)$$

Devido a propriedade de seleção da função delta de Dirac, a integral sobre a esfera unitária  $z_i z_i = 1$  se reduz a uma integral sobre um círculo unitário:

$$u_{jm}^* = \frac{1}{8\pi^2 r} \oint_{\varphi} (M_{jm}^{zz}(z_i(\varphi)))^{-1} d\varphi \quad (4.45)$$

Este círculo unitário é dado pela intersecção da esfera unitária com o plano  $z_i r_i^0 = 0$ , o qual é o argumento da função delta de Dirac em (4.44), conforme mostra a figura 4.3.

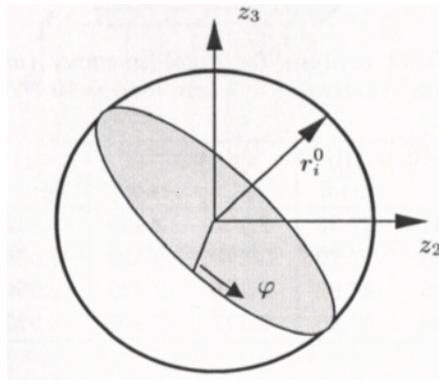


Figura 4.3 – Círculo unitário que surge da intersecção da esfera unitária  $z_i z_i = 1$  com o plano

$$z_i x_i = 0 \quad (\text{Gaul, 2003})$$

A primeira e a segunda derivada da solução fundamental anisotrópica  $u_{jm}^*$  dada em (4.43) foi deduzida por Barnett (1972) e é dada por:

$$u_{jm,s}^* = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \oint_{\varphi} (-r_s^0 (M_{jm}^{zz})^{-1} + z_s F_{jm}) d\varphi \quad (4.46)$$

e

$$u_{jm,st}^* = \frac{1}{8\pi^2 r^3} \oint_{\varphi} (2r_s^0 r_t^0 (M_{jm}^{zz})^{-1} - 2(z_s r_t^0 + z_t r_s^0) F_{jm} + z_s z_t E_{jm}) d\varphi \quad (4.47)$$

com os tensores:

$$D_{nq} = M_{nq}^{r^0 z} + M_{nq}^{z r^0} \quad (4.48)$$

$$F_{jm} = (M_{jn}^{zz})^{-1} + D_{nq} (M_{qm}^{zz})^{-1} \quad (4.49)$$

$$E_{jm} = F_{jn} D_{nq} (M_{qm}^{zz})^{-1} + (M_{jn}^{zz})^{-1} D_{nq} F_{qm} - 2(M_{jn}^{zz})^{-1} M_{nq}^{r^0 r^0} (M_{qm}^{zz})^{-1} \quad (4.50)$$

onde

$$M_{ik}^{z r^0} = C_{ijkl} z_j r_l^0 \text{ e } M_{ik}^{r^0 z} = C_{ijkl} r_j^0 z_l \quad (4.51)$$

A solução fundamental anisotrópica elastoestática deduzida nesta seção é válida para materiais como diferentes graus de anisotropia e é também aplicável para materiais isotrópicos, o que cairia no caso da solução em forma fechada exata descrita na seção 4.3.1.

#### 4.3.4. Cálculo da solução fundamental anisotrópica

Na seção anterior foi mostrado como a solução fundamental anisotrópica elastoestática pode ser calculada com eficiência utilizando-se um esquema de interpolação apropriado. Neste processo, armazena-se os valores das funções  $G_{mkl}^u$  nos pontos do grid de interpolação no plano  $\theta_1 - \theta_2$ . A dedução da solução fundamental anisotrópica é feita usando a transformada de Radon, conforme foi descrito na seção anterior. Portanto, tem-se que:

$$G_{mk}^u = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{\varphi} (M_{mk}^{zz})^{-1} d\varphi \quad (4.52)$$

$$G_{mkl}^u = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{\varphi} (-r_i^0 (M_{mk}^{zz})^{-1} + z_l F_{mk}) d\varphi \quad (4.53)$$

onde os tensores que aparecem nos integrandos são dados no espaço  $z_i$  da transformada de Radon por:

$$M_{ik}^{ab} = C_{ijkl} a_j b_l \quad (4.54)$$

$$F_{jm} = (M_{jn}^{zz})^{-1} (M_{nq}^{r^0z} + M_{nq}^{zr^0}) (M_{qm}^{zz})^{-1} \quad (4.55)$$

Em  $M_{ik}^{ab}$ , os vetores marcados pelos super-índices  $a$  e  $b$  são trocados pelos vetores  $z_i$  e  $r_i^0$  como indicado. As integrais são calculadas sobre o círculo unitário que resulta da intersecção da esfera unitária  $|z_i z_i| = 1$  com o plano  $z_i r_i^0 = 0$  como foi mostrado na figura 4.3, na seção anterior, onde:

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r} = \frac{x_i - \xi_i}{|x_i - \xi_i|} \quad (4.56)$$

é um vetor unitário apontando do ponto fonte  $\xi_i$  para o ponto campo  $x_i$ .

Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta_1, \theta_2)$ , o vetor distância  $r_i$  é dado por:

$$[r_i] = r \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow [r_i^0] = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Nota-se que o vetor unitário  $r_i^0$  depende somente dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , de forma que pode-se expressar o vetor  $z_i$  ao longo do círculo unitário – sobre o qual é feita a integração – em termos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Para este fim, primeiro determina-se dois vetores mutuamente ortogonais  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  que pertencem ao plano  $z_i r_i^0 = 0$  de forma que  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e  $r_i^0$  formem sistema de coordenadas ortonormal, como mostra a figura 4.4:

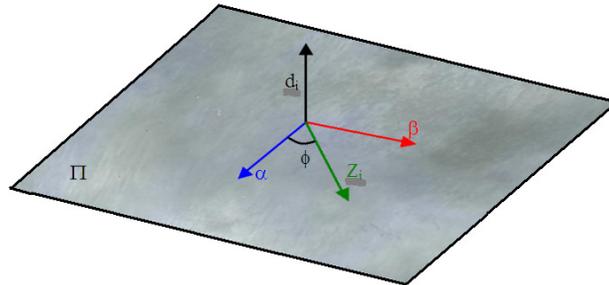


Figura 4.4 – Versor  $Z_i$  como combinação linear dos versores  $\alpha_i$  e  $\beta_i$

Pode-se escolher:

$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

o qual é ortonormal a  $r_i^0$  como pode ser confirmado facilmente. Logo o vetor  $\beta_i$  é dado por:

$$[\beta_i] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

com isso obtém-se para  $z_i$  ao longo da circunferência do círculo:

$$z_i(\varphi, \theta_1, \theta_2) = \alpha_i(\theta_1, \theta_2) \cos \varphi + \beta_i(\theta_1, \theta_2) \sin \varphi \quad (4.60)$$

onde os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são constantes durante a integração sobre  $\varphi$ .

Para calcular a integral em (4.52), deve-se expressar o tensor  $M_{mk}^{zz}(z_i(\varphi))$  dado por (4.54) em termos de  $\varphi$ . Definindo a matriz:

$$B(\alpha_i) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

pode-se escrever em notação matricial:

$$M^{ab} = B^T(b_i)CB(a_i) \quad (4.62)$$

onde  $C$  é uma matriz  $6 \times 6$  que contém as componentes do tensor de elasticidade  $C_{ijkl}$ . Os vetores  $a_i$  e  $b_i$  são novamente vetores mudos de forma que:

$$M^{zz}(\varphi) = B^T(z_i(\varphi))CB(z_i(\varphi)) \quad (4.63)$$

o cálculo da inversa  $(M^{zz})^{-1}$  é imediato e pode-se escrever (4.52) em notação matricial:

$$G^u(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{\varphi} [M^{zz}(z_i(\varphi, \theta_1, \theta_2))]^{-1} d\varphi \quad (4.64)$$

onde a integral pode ser resolvida numericamente usando quadratura de Gauss conforme será descrito na próxima seção.

Para o cálculo da solução fundamental de tração, utiliza-se a função  $G_{mkl}^u$  dada em (4.53).

Em notação matricial obtém-se:

$$G_l^u = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{\varphi} (-r_l^0 (M^{zz})^{-1} + z_l F) d\varphi \quad (4.65)$$

onde

$$G_l^u = \begin{bmatrix} G_{11l}^u & G_{12l}^u & G_{13l}^u \\ G_{21l}^u & G_{22l}^u & G_{23l}^u \\ G_{31l}^u & G_{32l}^u & G_{33l}^u \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

e a matriz  $F$  é dada por:

$$F = (M^{zz})^{-1} (M^{r^0z} + (M^{r^0z})^T) (M^{zz})^{-1} \quad (4.67)$$

#### 4.4. Integração Numérica – Quadratura de Gauss

Como visto na Seção 4.3, a solução fundamental para anisotropia plena possui uma integração numérica no núcleo. Isto é indesejável, pois torna o processo de obtenção das matrizes [H] e [G] ainda mais dispendioso. Nesta seção serão apresentadas algumas técnicas para melhorar o desempenho do processo de obtenção da solução fundamental.

A idéia da quadratura de Gauss é utilizar um polinômio que interpole a função em alguns pontos do intervalo de integração, considerando que o tamanho dos intervalos foram otimizados para se integrar de maneira exata um polinômio de mais alta ordem possível com um mínimo de pontos. A tabela 4.1 mostra uma comparação entre as integrações numéricas baseadas nas fórmulas de Newton-Cotes (regra dos trapézios, regra de Simpson) e a quadratura de Gauss:

Nº de pontos	Grau do polinômio integrado de forma exata	
	Newton-Cotes	Quadratura de Gauss
1	0	1
2	1	3
3	2	5
4	3	7
$n + 1$	$n$	$2n + 1$

Tabela 4.1 – Comparação entre Newton-Cotes e a quadratura de Gauss

Através da tabela 4.1 conclui-se facilmente que a quadratura de Gauss converge mais rapidamente e com um menor número de pontos de integração. Por esse motivo é a técnica de integração numérica mais utilizada atualmente.

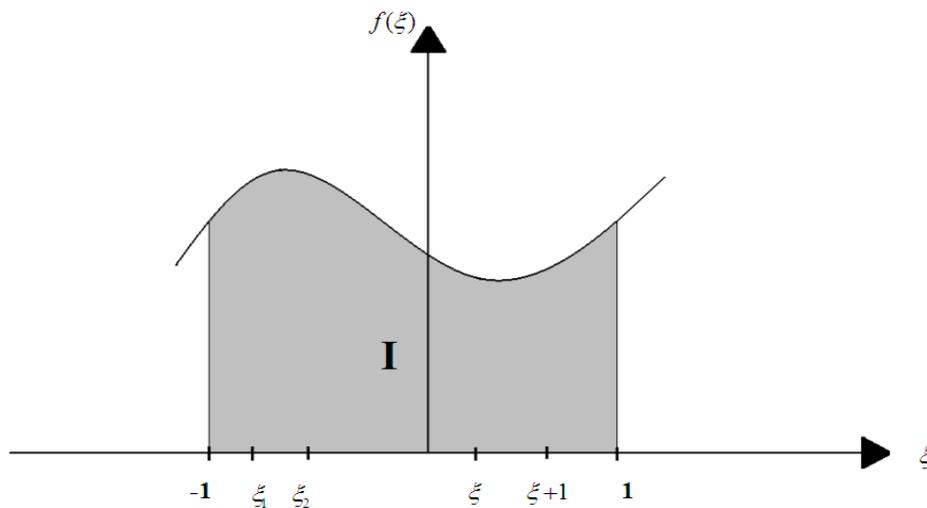


Figura 4.5 – Limites de integração e pontos de Gauss

Como em toda integração numérica a integral é aproximada por um somatório e conforme mostra a figura 4.7 a quadratura de Gauss é efetuada sob o intervalo  $[-1, 1]$ .

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NPG} f(\xi_i) w_i \quad (4.68)$$

onde  $\xi_i$  são os pontos de Gauss,  $w_i$  os pesos de Gauss e  $NPG$  o número de pontos de Gauss.

Como as tabelas disponíveis na literatura fornecem os pontos e pesos de Gauss sempre no intervalo de  $[-1, 1]$ , torna-se necessário fazer uma mudança de variável de forma que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (4.69)$$

Fazendo uma interpolação linear ao longo do intervalo:

$$x = a\xi + b \quad (4.70)$$

$$\begin{cases} x(\xi = -1) = x_1 \\ x(\xi = 1) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a(-1) + b \\ x_2 = a(1) + b \end{cases} \quad (4.71)$$

Resolvendo o sistema (4.71) obtém-se:

$$a = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (4.72)$$

$$b = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (4.73)$$

Logo:

$$x = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi + (x_1 + x_2)] \quad (4.74)$$

Finalmente, derivando (4.74) com relação a  $\xi$ , tem-se:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (\text{Jacobiano}) \quad (4.75)$$

Portanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{NPG} f\left(\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi_i + (x_1 + x_2)]\right) \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{2} \cdot w_i \quad (4.76)$$

Para os casos onde se precisa utilizar mais pontos e pesos de Gauss do que os fornecidos nas tabelas da literatura, pode-se obtê-los a partir do polinômio de Legendre (Hughes, 2000):

$$P_N(\xi) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\xi^N} (\xi^2 - 1)^N \quad (4.77)$$

E os pesos  $w_n$  são obtidos:

$$w_n = \frac{2}{\left[ (1 - \xi_n^2) P_N'(\xi_n)^2 \right]} \quad (4.78)$$

$$P_N'(\xi) = \frac{d}{d\xi} (P_N) \Big|_{\xi=\xi_n} \quad (4.79)$$

A quantidade de pontos de Gauss utilizada para a integração numérica varia de acordo com o grau de anisotropia do problema. De acordo com Santiago (2008) para um material isotrópico sugere-se entre 6 a 8 pontos de Gauss. Para um material transversalmente isotrópico, obtém-se valores razoáveis com o uso de 16 a 25 pontos de Gauss. Para materiais com um grau

ainda mais acentuado de anisotropia, são sugeridos de 20 a 30 pontos de Gauss para a integração do tensor  $G_{ij}^u$  e de 30 a 40 pontos para a integração do tensor  $G_{ij,k}^t$ .

Deve-se observar que os tensores  $G_{mk}^u$  e  $G_{mk,s}^t$  não dependem de  $r$ , isto é, o cálculo dos tensores não depende das propriedades geométricas do problema, apenas das constantes elásticas. Gaul et al. (2003) sugere que pode-se obter de forma antecipada os valores para  $G_{mk}^u$  e  $G_{mk,s}^t$  para diferentes valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para um mesmo material para uma posterior interpolação. Os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_1 \leq \pi \\ 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \end{aligned}$$

As integrais são realizadas para cada par ordenado  $(\theta_1, \theta_2)$ . Tal abordagem pode parecer confusa em um primeiro momento, sendo que, dependendo do refinamento da malha de elementos de contorno, o processo para obtenção dos valores de  $G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2)$  e  $G_{mk,s}^t(\theta_1, \theta_2)$  pode se tornar mais dispendioso que realizar a integração diretamente no núcleo do problema. Entretanto, uma vez obtidas as malhas para um determinado material, estas poderão ser utilizadas em qualquer outra análise para geometrias diferentes, fazendo com que o cálculo de  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  passe a ser apenas um processo de interpolação.

# Capítulo 5

## O Método das Sub-Regiões

Os procedimentos para soluções descritos até agora são aplicáveis somente para domínios homogêneos, já que a solução fundamental usada assume que as propriedades do material não mudam dentro do domínio sendo analisado. Existem muitas situações, entretanto, onde esta suposição não é verdadeira. Por exemplo, em um solo, o módulo de elasticidade pode mudar com a profundidade ou, ainda, podem ter várias camadas de solo com diferentes propriedades. Para alguns tipos especiais de não-homogeneidades é possível deduzir as soluções fundamentais, por exemplo, se as propriedades do material variam linearmente com a profundidade (Beer, 2001). Entretanto, tais soluções fundamentais são normalmente complicadas e possuem um custo computacional significativo. Em casos onde se tem camadas ou zonas de diferentes materiais, como no caso de juntas coladas por adesivo, pode-se usar o método das sub-regiões.

O método de sub-regiões é empregado em problemas nos quais as propriedades materiais variam ao longo da estrutura, conforme citado acima, ou quando é necessária uma otimização do armazenamento dos elementos das matrizes  $[H]$  e  $[G]$ , uma vez que, como será apresentado mais adiante neste capítulo, estas matrizes exibem esparsidade por blocos. Neste trabalho é usado um modelo com três sub-regiões, um para o aderente superior, um para a camada de adesivo e outro para o aderente inferior. Um modelo genérico deste tipo pode ser exemplificado como mostra a figura 5.1, onde o domínio é dividido em três sub-domínios.

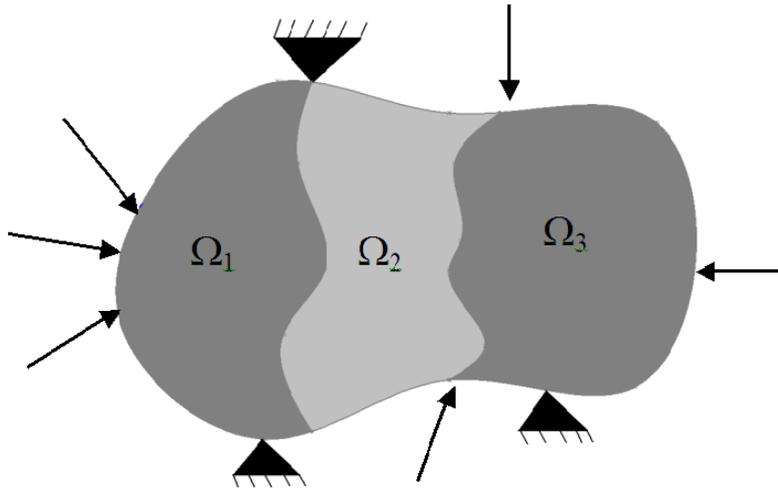


Figura 5.1: Corpo composto por três sub-domínios sujeito a carregamentos e vinculações

Para o equacionamento do método de sub-regiões, será considerado o uso de elementos descontínuos que são usados neste trabalho.

Supondo então que o modelo apresentado seja discretizado por elementos constantes, de acordo com Aliabadi (2002), as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  podem ser escritas para cada domínio individualmente, sendo cada uma delas uma matriz quadrada, ou seja, cada ponto fonte gera um conjunto de seis equações com seis incógnitas (três deslocamentos e três forças de superfície).

$$[H]_1 \{u\}_1 = [G]_1 \{t\}_1 \quad (5.1)$$

$$[H]_2 \{u\}_2 = [G]_2 \{t\}_2 \quad (5.2)$$

$$[H]_3 \{u\}_3 = [G]_3 \{t\}_3 \quad (5.3)$$

Cada matriz pode, então, ser dividida da seguinte forma:

$$[H]_s = [H_E \quad H_I]_s \quad (5.4)$$

$$[G]_s = [G_E \quad G_I]_s \quad (5.5)$$

O sub-índice  $E$  representa os elementos que não estão na interface, ou seja, as variáveis que pertencem apenas a uma sub-região,  $I$  o conjunto de variáveis relacionadas aos elementos da interface e a sub-região em questão. O sistema modificado fica:

$$[H_E \quad H_I]_s \begin{Bmatrix} u_E \\ \dots \\ u_I \end{Bmatrix}_s = [G_E \quad G_I]_s \begin{Bmatrix} t_E \\ \dots \\ t_I \end{Bmatrix}_s \quad (5.6)$$

Na interface, é possível escrever relações de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamentos:

$$\{t_I\}_1 + \{t_I\}_2 = \{t\}_A \quad (5.7)$$

$$\{t_I\}_2 + \{t_I\}_3 = \{t\}_A \quad (5.8)$$

$$\{u_I\}_1 = \{u_I\}_2 = \{u\}_A \quad (5.9)$$

$$\{u_I\}_2 = \{u_I\}_3 = \{u\}_A \quad (5.10)$$

Sendo  $\{t\}_A$  e  $\{u\}_A$  condições pré-estabelecidas de forças de superfície e deslocamentos impostas na interface.

Neste ponto, podem ser adotadas duas formas para a solução do problema de acordo com Santiago (2008):

1. Pré-multiplicando (5.5) por  $[G]_s^{-1}$ , o que equivale a encontrar a matriz de rigidez  $[K]$  no MEF:

$$[K]_s = [G]_s^{-1} [H_E \quad H_I]_s \quad (5.11)$$

$$[K]_s = \begin{bmatrix} K_{EE} & K_{EI} \\ K_{IE} & K_{II} \end{bmatrix}_s \quad (5.12)$$

$$[K]_s \begin{Bmatrix} u_E \\ \dots \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_E \\ \dots \\ t_I \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Esta operação é realizada para  $s = 1, 2$  para as sub-regiões 1 e 2 e de forma análoga para as sub-regiões 2 e 3. Os dois sistemas são acoplados, ficando:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{EE}^1 & K_{EI}^1 & 0 \\ K_{IE}^1 & K_{II}^1 + K_{II}^2 & K_{IE}^2 \\ 0 & K_{IE}^2 & K_{EI}^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Os termos de (5.13) são rearranjados de forma a separar incógnitas de condições prescritas:

$$[K]\{x\} = \{f\} \quad (5.15)$$

2. Na segunda abordagem, as matrizes das sub-regiões 1 e 2 são acopladas aplicando as equações (5.6) e (5.8) em (5.4) e (5.5), e de forma análoga para as sub-regiões 2 e 3:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^2 & G_I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_I^3 & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_I \\ t_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_I^2 & H_E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_E^2 & H_I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_I^3 & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I \\ u_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Deve-se notar que, ao contrário do que ocorre no MEF, as contribuições dos elementos/nós da interface não são somadas. As colunas de  $[H]_E$  e  $[H]_I$  ainda são rearranjadas de forma a separar as incógnitas em  $\{t\}$  e  $\{u\}$  das condições de contorno impostas:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_E^{1N} & G_I^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_I^2 & G_E^{2N} & G_E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_E^2 & G_E^{2N} & G_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_I^3 & G_E^{3N} & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_E^{1N} \\ t_I \\ t_I \\ t_I \\ t_E^{3N} \\ t_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_E^{1D} & H_I^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_I^2 & H_E^{2D} & H_E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_E^2 & H_E^{2D} & H_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_I^3 & H_E^{3D} & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_E^{1D} \\ u_I \\ u_I \\ u_I \\ u_I \\ u_E^{3D} \\ u_E^3 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Onde o super índice  $N$  e  $D$  se referem as condições de contorno de Neumann e Dirichlet respectivamente. Por fim, as condições de contorno são impostas e as colunas rearranjadas, ficando:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 & -H_E^1 & -H_I^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 & 0 & -H_I^2 & -H_E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^2 & G_I^2 & 0 & -H_E^2 & -H_I^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_I^3 & G_E^3 & 0 & -H_I^3 & -H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^2 \\ t_I \\ u_I \\ u_E^2 \\ u_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_E^{1N} & 0 & H_E^{1D} & 0 \\ 0 & -G_E^{2N} & 0 & H_E^{2D} \\ -G_E^{2N} & 0 & H_E^{2D} & 0 \\ 0 & -G_E^{3N} & 0 & H_E^{3D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^{1N} \\ t_E^{2N} \\ u_E^{2D} \\ u_E^{3D} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Neste trabalho foi adotado o segundo método por não utilizar inversão matricial e determinar as incógnitas da interface diretamente.

O uso de elementos descontínuos implica em uma série de vantagens, como maior facilidade na montagem das matrizes e aplicação das condições de contorno e, quando usado em análises de sub-regiões não há necessidade de se tratar quinas e cantos nas interfaces. Outra vantagem importante dos elementos descontínuos com relação aos elementos contínuos é que no caso destes últimos existe uma grande complexidade em acoplar as matrizes. Embora a formulação seja simples, Paiva (2000) ressalta que a implementação é um processo extremamente complexo, sendo necessário um tratamento prévio de dados.

## Capítulo 6

### Implementação Computacional e Resultados

A implementação computacional do método dos elementos de contorno nesse trabalho foi realizada através do software MatLab<sup>®</sup> 7.1. O programa de elementos de contorno desenvolvido é constituído de etapas básicas como:

- ◆ definição e leitura de dados do problema a ser analisado, como geometria, propriedades do material, condições de contorno e discretização (feita no Ansys);
- ◆ construção das matrizes  $H$  e  $G$  de influência de elementos de contorno;
- ◆ armazenagem de dados para o cálculo de sub-regiões;
- ◆ reordenação das matrizes  $H$  e  $G$ ;
- ◆ aplicação das condições de contorno;
- ◆ montagem do sistema linear de equações  $A.x = b$ ;
- ◆ resolução do sistema linear, obtendo-se o vetor de soluções;
- ◆ reordenação do vetor solução segundo as condições de contorno;
- ◆ visualização dos resultados obtidos, através de gráficos;

Os principais módulos do programa são mostrado no fluxograma da figura 6.1.

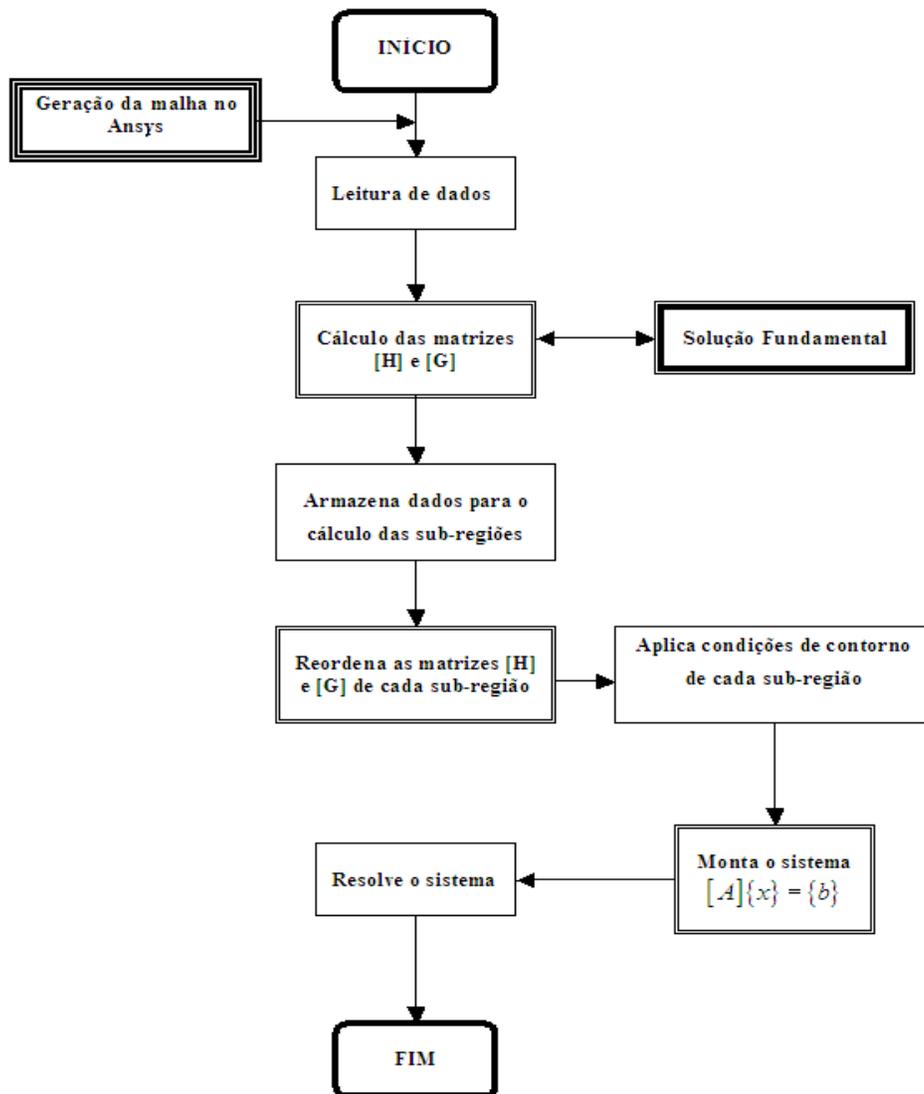


Figura 6.1: Fluxograma do programa para análise de juntas coladas por sub-regiões

A seguir são detalhados alguns módulos do programa desenvolvido:

### 6.1. Geração da Malha

Mesmo no MEC onde é necessário discretizar apenas a superfície (contorno) do sólido, gerar uma malha 3D um pouco mais refinada na mão, se torna um trabalho extremamente

enfado e suscetível a erros. Por esse motivo, neste trabalho foi usado o software comercial de Elementos Finitos Ansys para geração da malha. A figura 6.2 mostra uma das malhas geradas com os elementos de casca *Shell Elastic 4node63* do Ansys:

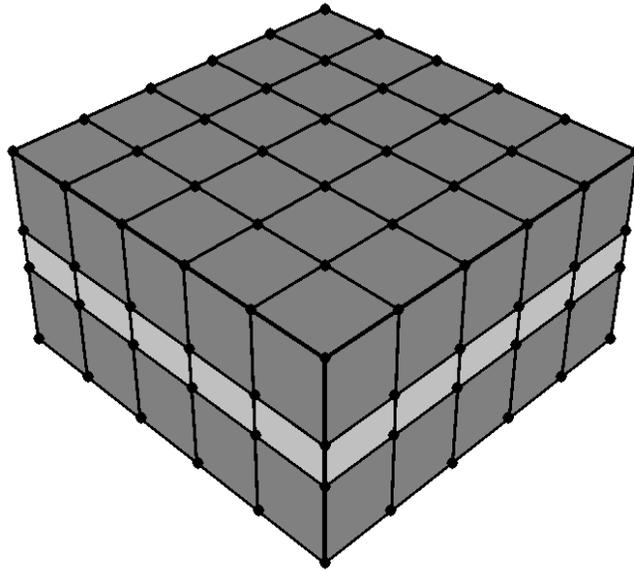


Figura 6.2: Malha de elementos quadrilaterais com quatro nós geométricos

Como a geometria analisada é simétrica, nota-se que as tensões obtidas não variam ao longo da largura da junta, e sim apenas ao longo do comprimento da zona colada. Por esse motivo fez-se um refinamento da malha apenas nos elementos que passam na parte longitudinal central da geometria, como mostra a figura 6.3, com o objetivo de obter maior precisão nos resultados.

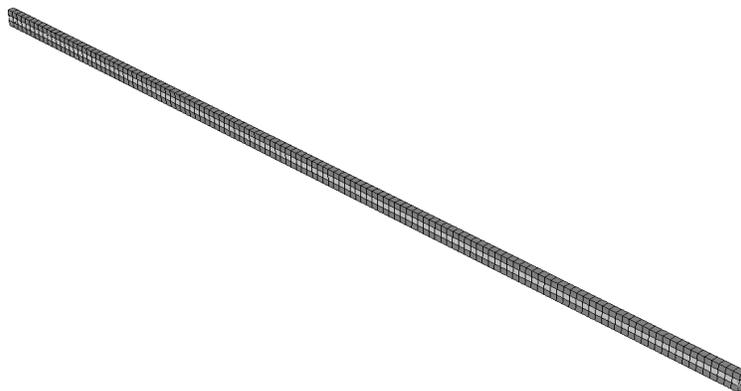


Figura 6.3: Refinamento da malha na região central longitudinal da geometria

Depois de criado o modelo geométrico e gerada a malha, o Ansys fornece um arquivo contendo o número de cada elemento, as coordenadas dos nós e a conectividade entre eles. Essas informações podem, então, ser usadas no arquivo de dados de entrada do programa de elementos de contorno desenvolvido neste trabalho.

## 6.2. Definição e Leitura dos Dados

Para a leitura de dados, é necessário um arquivo contendo as informações do problema e também um arquivo contendo os elementos pertencentes a interface de cada sub-região. A geometria é definida pela matriz *coord*, que contém as coordenadas de todos os nós geométricos dos elementos. A conectividade entre os nós é definida pela matriz *connect* e as condições de contorno pela matriz *bc*, na qual as três primeiras colunas contém os valores prescritos de deslocamento ou força de superfície, a quarta coluna se refere ao tipo de condição de contorno (deslocamento ou tensão) e a quinta coluna se refere ao elemento no qual está aplicada determinada condição de contorno. As propriedades dos materiais de cada sub-região, tais como módulos de elasticidade e razão de Poisson, são armazenados na matriz *mprop*. Nesse tipo de análise também é necessário uma matriz contendo os elementos da interface entre cada sub-região. Um modelo simplificado da estrutura dessa matriz é mostrado na figura 6.4:

	S1	S2	S3
S1	<b>0</b>	ELEMENTOS PERTENCENTES ÀS SUB-REGIÕES 1 E 2	<b>0</b>
S2	ELEMENTOS PERTENCENTES ÀS SUB-REGIÕES 2 E 1	<b>0</b>	ELEMENTOS PERTENCENTES ÀS SUB-REGIÕES 2 E 3
S3	<b>0</b>	ELEMENTOS PERTENCENTES ÀS SUB-REGIÕES 3 E 2	<b>0</b>

Figura 6.4: Estrutura da matriz que contém os elementos das interfaces

### 6.3. Reordenamento das Matrizes de Influência e Aplicação das Condições de Contorno

As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  são reordenadas da mesma forma. A matriz  $[G]$  diz respeito às variáveis de forças de superfície, esta matriz é formada tendo um conjunto de colunas relacionadas a um único elemento. Desta forma, pode-se encontrar as colunas referentes a um determinado elemento usando as seguintes expressões de acordo com Santiago (2008).

$$l_{\text{inf}} = (N\_nodes\_el) \times (gdl) \times (N\_el) - ((N\_nodes\_el) \times (gdl) - 1) \quad (6.1)$$

$$l_{\text{sup}} = (N\_nodes\_el) \times (gdl) \times (N\_el) \quad (6.2)$$

onde  $(N\_nodes\_el)$  é o número de nós por elemento,  $(gdl)$  é o número de graus de liberdade e  $(N\_el)$  é a numeração do elemento.

Isto é, a localização da primeira coluna relacionada a um determinado elemento na matriz é dada por (6.1) e a última coluna dada por (6.2). Com esta informação, é possível reorganizar as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  de forma a satisfazer a equação (5.5).

As matrizes, após terem suas colunas rearranjadas, são acopladas umas às outras e, para aproveitar a esparsidade do sistema, é utilizada a função *sparse.m*, que armazena apenas os termos não nulos, com isso, finalmente as matrizes de influência com sub-regiões terão uma estrutura semelhante a mostrada na figura 6.5 para a aplicação das condições de contorno:

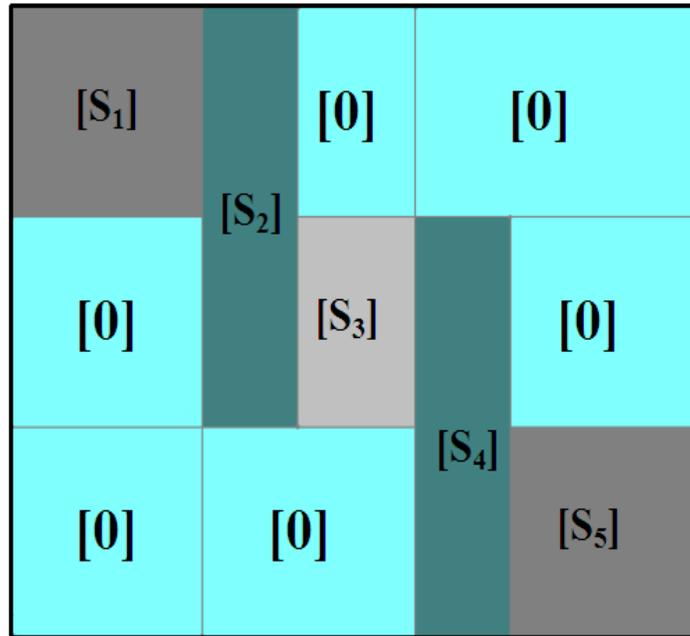


Figura 6.5: Divisão das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  para aplicação das condições de contorno

As matrizes  $[S_1]$ ,  $[S_3]$  e  $[S_5]$  se referem à primeira, segunda e terceira sub-região respectivamente. As matrizes  $[S_2]$  e  $[S_4]$  contém os elementos comuns à interface. Após a aplicação das condições de contorno, as colunas remanescentes de  $[H]$  e de  $[G]$  são reagrupadas para formar a matriz  $[A]$ , dando origem ao sistema  $[A]\{x\} = \{b\}$ . Por fim, o sistema é resolvido usando o *solver* do software MatLab<sup>®</sup>.

#### 6.4. Modelo analítico de Goland & Reissner

A linha de carregamento excêntrica de uma junta sobreposta simples causa um momento fletor ( $M$ ), e uma força transversal ( $V$ ) que são aplicadas nos finais da junta, junto com a carga por unidade de largura ( $\bar{P}$ ). Por causa desse momento fletor, a junta irá sofrer uma rotação, alterando a direção da linha de carga com a tendência de alinhar as forças na mesma linha. Como a junta rotaciona, o momento fletor diminuirá, surgindo, então, um problema geométrico não-linear onde os efeitos de grandes deflexões nos aderentes devem ser considerados.

Os primeiros a considerar esses efeitos foram Goland e Reissner (1944). Eles usaram um fator de momento fletor ( $\kappa$ ) e de força transversal ( $\kappa'$ ) que relaciona a carga aplicada por unidade de largura ( $\bar{P}$ ) ao momento fletor ( $M$ ) e a força transversal ( $V$ ) nos finais da região colada, de acordo com as seguintes equações:

$$M = \kappa \frac{\bar{P}t}{2} \quad (6.3)$$

$$V = \kappa' \frac{\bar{P}t}{c} \quad (6.4)$$

onde  $t$  é a espessura dos aderentes ( $t_1 = t_2$ ), e  $c$  é a metade do comprimento da zona colada. Se a junta não sofrer rotação, ou seja, para cargas aplicadas muito pequenas, os fatores  $\kappa$  e  $\kappa'$  diminuirão e, conseqüentemente, o momento fletor e a força transversal diminuirão também. Goland e Reissner (1944) levaram em consideração o efeito das grandes deflexões dos aderentes, mas assumiram que os aderentes eram integrais, com uma camada de adesivo infinitamente fina. A expressão para o fator de momento fletor é:

$$\kappa = \frac{\cosh(u_2 c)}{\cosh(u_2 c) + 2\sqrt{2} \sinh(u_2 c)} \quad (6.5)$$

onde

$$u_2 = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{2}} \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\bar{P}}{tE}} \quad (6.6)$$

onde  $E$  é o módulo de Young dos aderentes e  $\nu$  seus coeficientes de Poisson. Neste trabalho foram analisadas apenas as tensões de cisalhamento nas interfaces adesivo/aderentes. A expressão para estas tensões de cisalhamento é:

$$\tau = \frac{1}{8} \frac{\bar{P}}{c} \left\{ \frac{\beta c}{t} (1 + 3\kappa) \frac{\cosh((\beta c / t)(x / c))}{\sinh(\beta c / t)} + 3(1 - \kappa) \right\} \quad (6.7)$$

onde

$$\beta^2 = 8 \frac{G_a t}{E t_a} \quad (6.8)$$

A origem das coordenadas longitudinais é o meio da interface.

## 6.5. Validação

Para validação foram feitas duas análises, uma com material isotrópico e outra com material transversalmente isotrópico (compósito). Foram considerados modelos de juntas coladas sobrepostas, com aderentes quadrados na região colada, tracionadas no aderente superior com uma força de 1 kN e engastadas no aderente inferior, conforme mostra a figura 6.6:

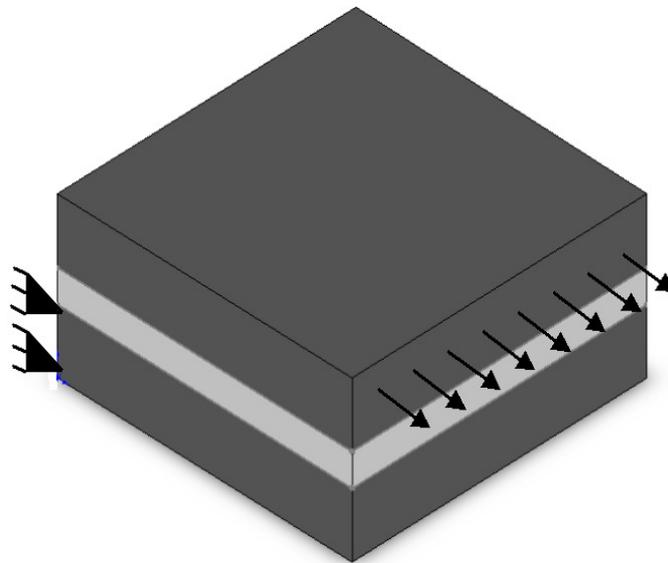


Figura 6.6: Modelo geométrico considerado na análise

A tabela 6.1 lista as dimensões geométricas do modelo usado:

Dimensão	Valor (mm)
Comprimento da zona colada	10
Largura da junta	10
Espessura dos aderentes	2
Espessura do adesivo	1

Tabela 6.1: Dimensões geométricas dos modelos propostos.

### 6.5.1. Análise 1: aderentes isotrópicos

Na primeira análise os aderentes foram considerados isotrópicos. Esse problema tem solução analítica, possibilitando a comparação entre essa solução e a solução numérica obtida. A tabela 6.2 lista as propriedades dos materiais

Propriedade	Aderentes	Adesivo
$E$	70 GPa	4.82 GPa
$\nu$	0.3	0.4

Tabela 6.2: Propriedades para o modelo com aderentes isotrópicos

A figura 6.7 apresenta os resultados para a distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo, comparando o resultado numérico via MEC com o resultado analítico de Goland e Reissner (1944). Pode ser notado uma boa concordância entre as curvas.

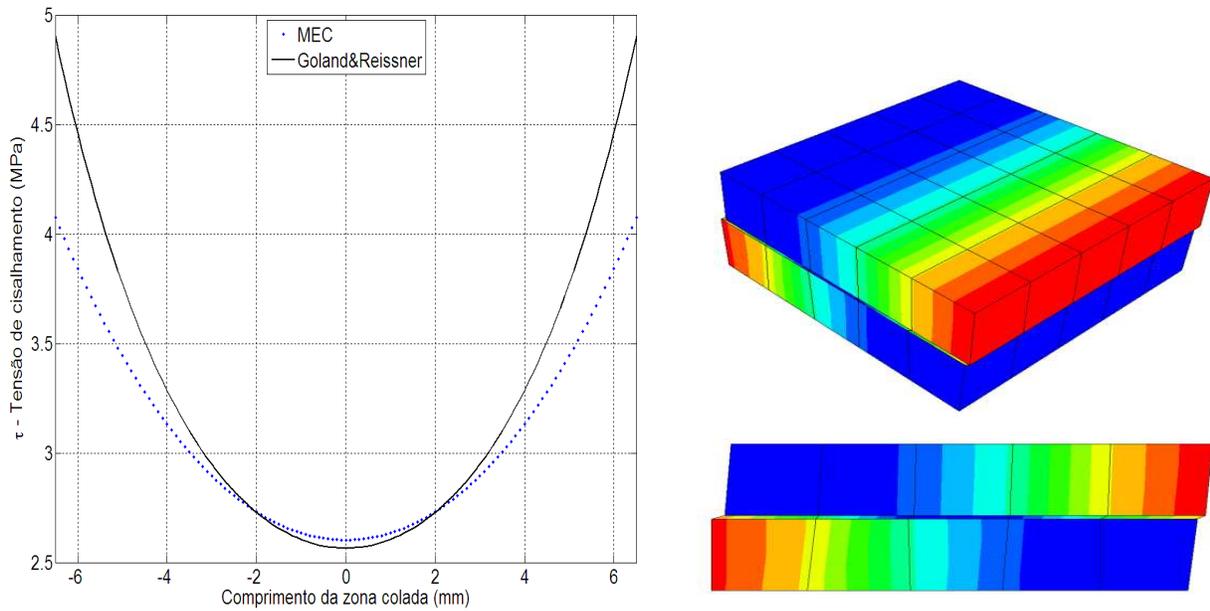


Figura 6.7 – Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com aderentes isotrópicos

A figura 6.8 mostra as curvas de tensão de cisalhamento obtidas para quatro valores diferentes da espessura do adesivo:

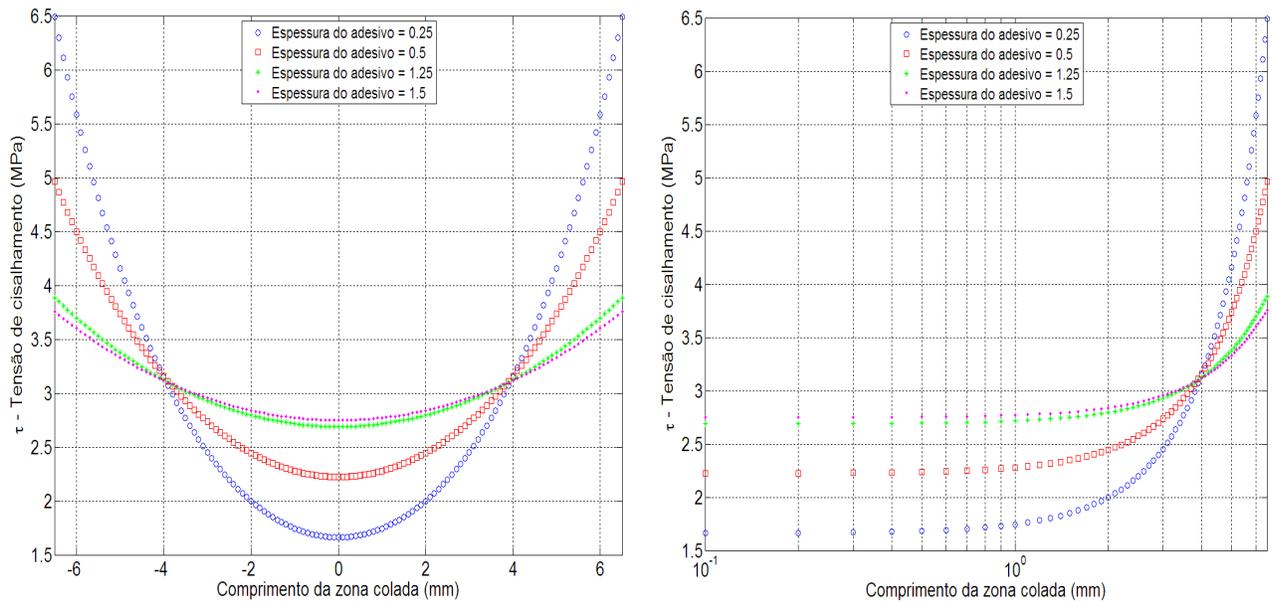


Figura 6.8 – Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de adesivo em escala linear (esquerda) e em escala logarítmica (direita).

Nota-se que os valores das tensões máximas nas bordas da junta diminuem conforme aumenta-se a espessura do adesivo.

A figura 6.9 mostra as curvas de tensão de cisalhamento obtidas para quatro valores diferentes da espessura dos aderentes:

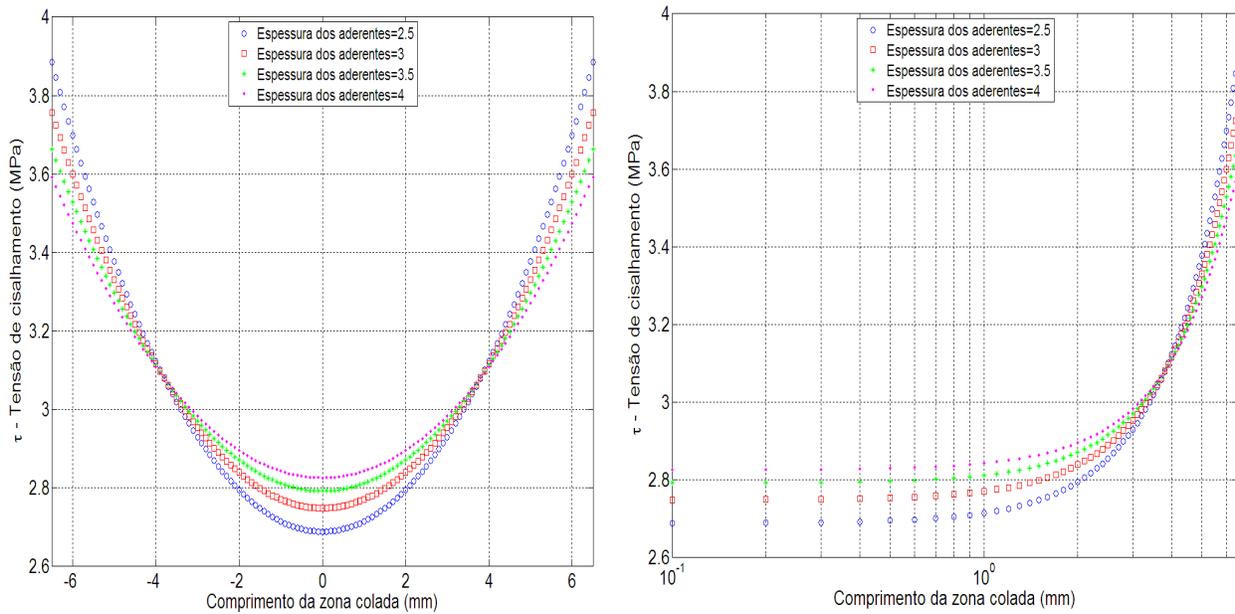


Figura 6.9 – Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de aderentes em escala linear (esquerda) e em escala logarítmica (direita).

Nota-se que os valores das tensões máximas nas bordas da junta diminuem conforme aumenta-se a espessura dos aderentes. Observa-se ainda que o material isotrópico é menos sensível à variações na espessura dos aderentes do que à variações na espessura do adesivo.

### 6.5.2. Análise 2: aderentes transversalmente isotrópicos

Nesta segunda análise os aderentes foram considerados transversalmente isotrópicos, simulando um material compósito. A tabela 6.3 lista as propriedades do material transversalmente isotrópico, as propriedades do adesivo são as mesmas da primeira análise.

Propriedade	Aderentes Trans. Iso
$E_1$	2 GPa
$E_2$	1 GPa
$\nu_1$	0.3
$\nu_2$	0.2
Rotação	30°

Tabela 6.3: Propriedades para o modelo com aderentes Transversalmente Isotrópicos .

A figura 6.10 apresenta os resultados para a distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com os aderentes transversalmente isotrópicos:

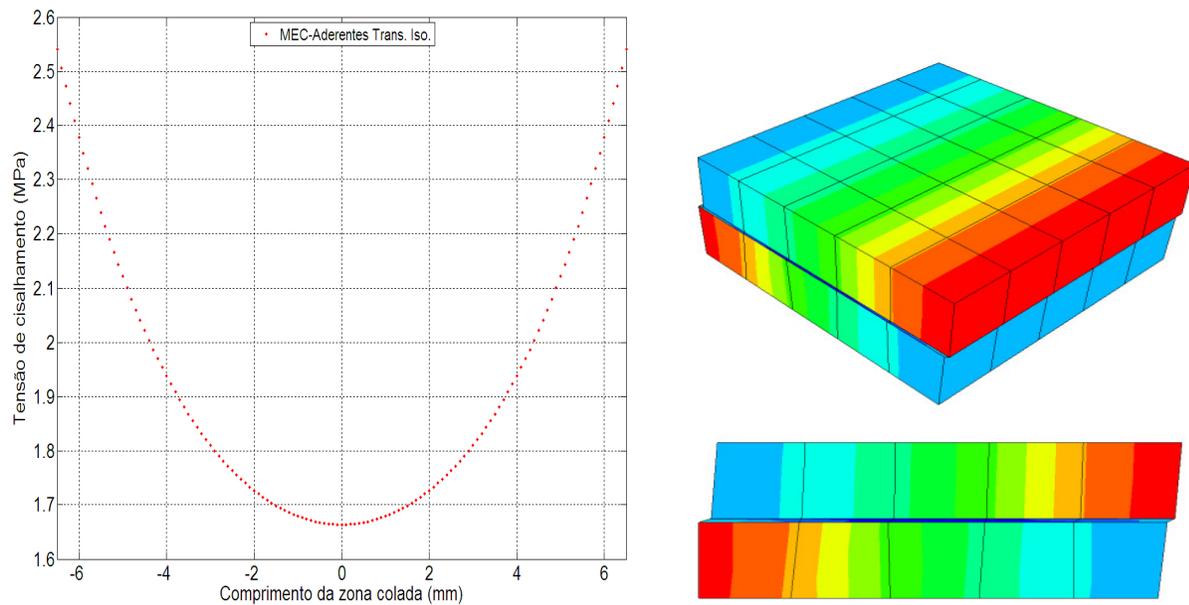


Figura 6.10 – Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com aderentes Transversalmente Isotrópicos.

A figura 6.11 mostra as curvas de tensão de cisalhamento obtidas pelo MEC para quatro valores diferentes da espessura do adesivo para o material transversalmente isotrópico:

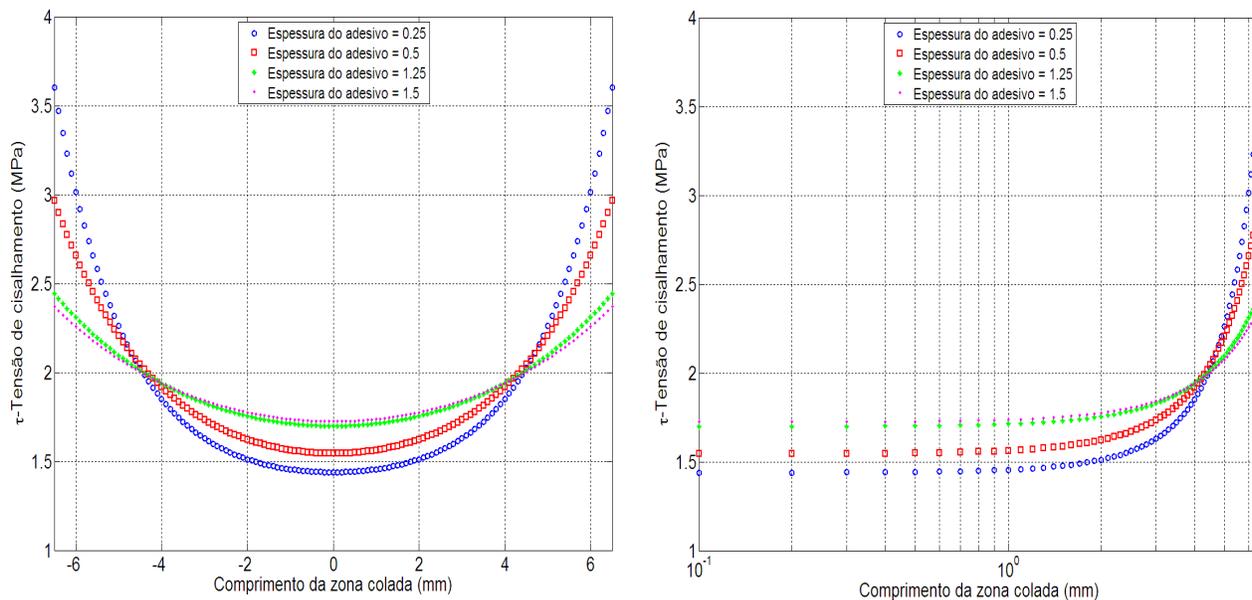


Figura 6.11 – Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de adesivo em escala linear (esquerda) e em escala logarítmica (direita).

A figura 6.12 mostra as curvas de tensão de cisalhamento obtidas pelo MEC para quatro valores diferentes da espessura dos aderentes transversalmente isotrópicos:

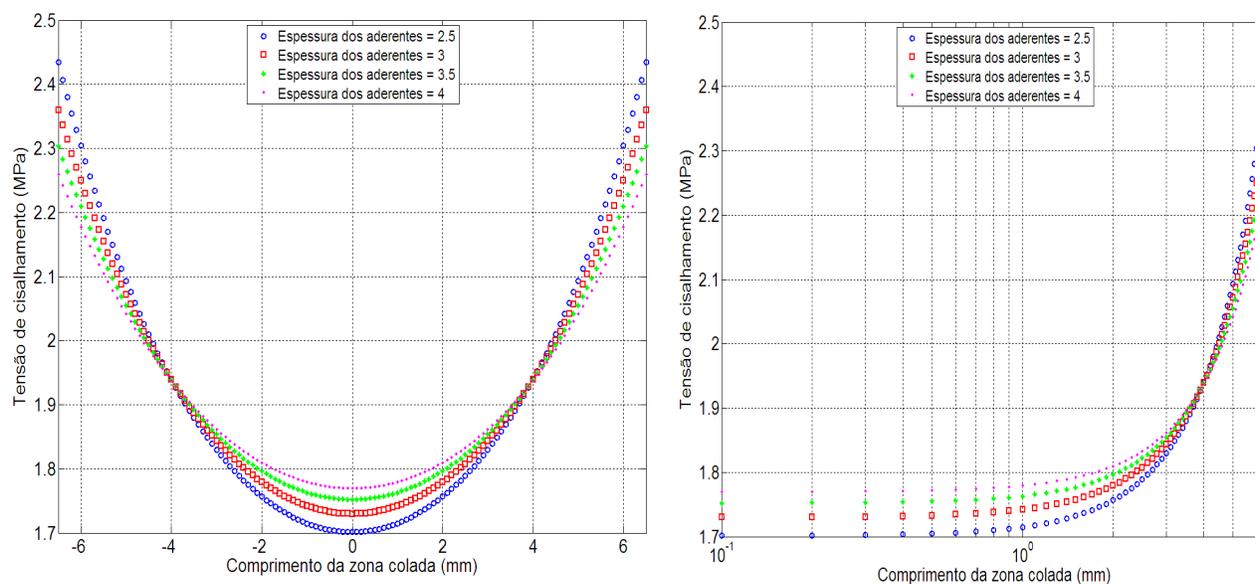


Figura 6.12 – Distribuição de tensão de cisalhamento para quatro espessuras de aderentes em escala linear (esquerda) e em escala logarítmica (direita).

A figura 6.13 mostra a distribuição de tensões de cisalhamento para aderentes isotrópicos pelo método analítico de Goland e Reissner (1944) e pelo MEC e para aderentes transversalmente isotrópicos pelo MEC, todos no mesmo sistema de coordenadas para efeito de comparação.

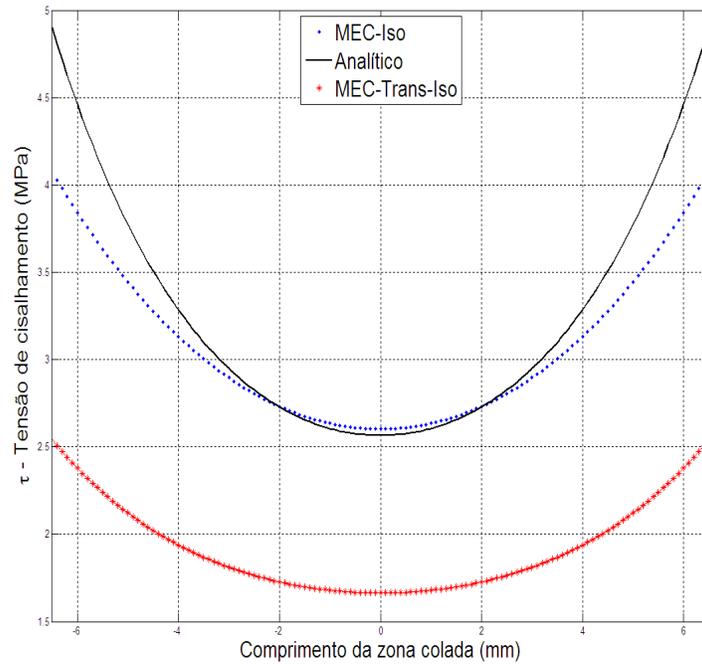


Figura 6.13– Comparação das tensões de cisalhamento no adesivo para os dois tipos de aderentes

Nota-se das análises realizadas que nas juntas com aderentes transversalmente isotrópicos (compósito), as tensões de cisalhamento nas extremidades da junta atingem níveis menores do que nas juntas com aderentes isotrópicos, além disso, elas se mostram menos sensíveis às variações de espessura, de aderentes e adesivos, do que as juntas com aderentes isotrópicos.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

### 7.1. Conclusões

Como pode ser visto, o *software* MatLab<sup>®</sup> apresentou-se como uma ferramenta adequada para a implementação dos métodos numéricos apresentados nesse trabalho. As facilidades oferecidas podem ser resumidas na presença de funções pré-programadas, que facilitam operações matriciais e a visualização gráfica de resultados. No entanto, por apresentar programação interpretada, sua velocidade de processamento mostrou-se expressivamente menor que a de outras linguagens, tais como o Fortran, C ou C++.

O programa 3D implementado mostrou-se adequado na análise do problema de juntas coladas, apresentando um código claro, comentado, facilitando a compreensão do funcionamento. Também possibilita uma entrada de dados amigável, sendo que a alteração de características de um problema, como a geometria ou a malha de elementos, pode ser feita de maneira relativamente rápida. Além disso, o programa oferece uma visualização gráfica eficiente dos resultados, como por exemplo, a distribuição das tensões de cisalhamento nas interfaces.

A solução fundamental anisotrópica se mostrou adequada para simular materiais compósitos, visto que as soluções fundamentais isotrópicas e transversalmente isotrópicas são apenas casos particulares da mesma.

Por fim, o método das sub-regiões também se mostrou adequado na análise de juntas coladas, já que neste tipo de problema existem, no mínimo, dois materiais envolvidos. Os resultados obtidos se mostraram coerentes com os resultados disponíveis na literatura.

## **7.2. Trabalhos Futuros**

Para continuação dos trabalhos nesta linha de pesquisa, sugerem-se os seguintes temas:

- ◆ Reescrever o código em uma linguagem mais eficiente, como Fortran, C ou C++, visando melhorar o tempo de cálculo;
- ◆ Modificar o código e o módulo de sub-regiões possibilitando análises com malhas com vários tipos de elementos, isto é, uso de elementos quadrilaterais e triangulares em uma mesma malha, facilitando a geração de malhas para futuras análises;
- ◆ Inclusão de um módulo para tratamento de juntas coladas sujeitas a carregamento dinâmico;
- ◆ Desenvolvimento de um pós-processador que permita visualizar campos de tensões e deformações com mapas de cores, como no caso dos programas comerciais de MEF.
- ◆ Implementação de um gerador de malha que possibilite a modelagem de juntas coladas com geometrias complexas.

## Referências Bibliográficas

Agarwal, B. D & Broutman, L. J. (1990). *Analysis of performance of fiber composites*. John Wiley and Sons Inc., New York.

Andruet, R. H., 1998, *Special 2-D and 3-D Geometrically Nonlinear Finite Elements for Analysis of Adhesively Bonded Joints*, Phd Thesis, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg-Virginia.

Albuquerque, E. L. (2001). *Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Albuquerque, E. L. & Sollero, P. (1997). *Boundary element analysis applied to dynamic crack problems*. In XVII Int. Conf. Dynamic Problems in Mechanics (pp. 277-279). Angra dos Reis, Brasil: ABCM.

Aliabadi, M. H. (2002). *The Boundary Element Method - Vol. 2 - Applications in Solids and Structures*. John Wiley & Sons.

Beer, G. (2001). *Programing the Boundary Element Method - An Introduction to Engineers*. John Wiley & Sons.

Carpenter, W. C. (1980). *Stresses in bonded connections using Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.

Chihdar, Y., and PANG, S., 1996. *Stress-Strain Analysis of Single-Lap Composite Joints Under Tension*. Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 118, pp. 247- 255.

Chihdar, Y., and PANG, S., 1993. *Stress-Strain Analysis of Adhesive-Bonded Single- Lap Composite Joints Under Cylindrical Bending*. Composite Engineering, Vol. 8, pp. 1051- 1063.

Cruse, T. A. & Rizzo, F. J. (1968). *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problems*. J. of Mathematic Analysis Applied, 22:244-259.

Cruse, T. A. & Sweldlow, J. L. (1971). *Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites*. Technical report, Carnegie-Mellon University.

Daniel, I. M. & Ishai, O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, New York.

Deb, A. (1996). *Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings*. Computers and Structures, 58, 715 – 726.

Deb, A. & Banerjee, P. K. (1990). *Bem for general anisotropic 2d elasticity using particular integrals*. Communications in Applied Numerical Methods, 6, 111-119.

Fung, Y. C. & Tong, P. (2001). *Classical and Computational Solid Mechanics (Advanced Series in Engineering Science)*. World Scientific.

Goland, M. & Reissner, E. (1944). *The stresses in cemented joints*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 66, pp. A17-A27.

Gao, X.-W. & Davies, T. (2002). *Boundary Element Programing in Mechanics*. Cambridge University Press.

Gaul, L., Kögl, M., & Wagner, M. (2003). *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer.

Grayley, M. E., 1978. *Shear stresses in the adhesives in bonded joints. Single step double Lap joints loaded in tension. ESDU 78042.*

Grayley, M. E., 1980. *Elastic stresses in the adhesive in single step double lap bonded joints. ESDU 80011.*

Hart-Smith, L. J. (1973a). *Adhesive-bonded double lap joints. NASA CR112237*, Douglas Aircraft Company, Long Beach.

Hart-Smith, L. J. (1973b). *Adhesive-bonded double lap joints. NASA CR 112236*, Douglas Aircraft Company, Long Beach.

Hahn, K. (1960). *Photostress investigation of bonded lap joints, Part I – Theoretical Analysis*. Douglas Aircraft Company, Research Report SM-40001.

Hahn, K. & Fouser, D. F. (1961). *Stress Distribution in Adherends of Bonded lap Joints, Part I - Theoretical analysis and Part II – Analysis of experimental data*. Douglas Aircraft Company, Research Report SM-40010.

Hartmann, F. (1989). *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. Springer.

Hughes, T. J. R. (2000). *The Finite Element Method: Linear and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Science.

Jesus, A. (2003). *Modelo de Elementos Finitos para Simulação de Juntas Sobrepostas Coladas em Compósitos Laminados*. Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

Kane, J. H. (1994). *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, Inc.

King, C. , 1978. *Inelastic shear stresses and strains in the adhesives bonding lap joints loaded in tension or shear*. ESDU 79016.

Loloi, M. (2000). *Boundary integral equation solution of three-dimensional elastostatic problems in transversely isotropic solids using closed-form displacement fundamental solutions*. Int. J. Numer. Meth. Engng, John Wiley & Sons, Ltd., 48, 823 – 842.

Mantic, V. & París, F. (1995). *Explicit formulae of the integral kernels and c-matrix*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 15, 283 – 288.

Mortensen, F. (1998). *Development of Tools for Engineering Analysis and Design of High-Performance FRP-Composite Structural Elements*. Phd Thesis, Aalborg University, Aalborg East.

Mortensen, F. & Thomsen, O. T. (2002a). *Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach*. Composite Science and Technology, Vol. 62, pp. 1011-1031.

Mortensen, F. & Thomsen, O. T. (2002b). *Coupling effects in adhesive bonded joints*. Composite Science and Technology, Vol. 56, pp. 165-174.

Noritomi, P. Y. (2000). *Desenvolvimento de um programa base em elementos de contorno para aplicações a análises mecânicas tridimensionais em bioengenharia*. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Noritomi, P. Y. (2006). *Desenvolvimento de uma Metodologia para Análise de Bioengenharia em Ossos Compactos com Remodelagem Óssea Superficial pelo Método dos Elementos de Contorno 3D em Meios Transversalmente Isotrópicos*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Ojalvo, I. & Eidinoff, H. (1978). *Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints*. AIAA J.

Paiva, W. P. (2000). *Análise de problemas de trincas interfaciais usando o método dos elementos de contorno*. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Pan, Y. C. & Chou, T. W. (1976). *Point force solution for an infinite transversely isotropic solid*. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 43, 608–612.

Pouzada, E. V. S. (1999). *Estudo da Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Propagação em Estruturas Guiantes*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (POLI/USP).

Renton, W. J. & Vison, J. R. (1974). *The Analysis and Design of Anisotropic bonded Joints*. Journal of Applied Mechanics, Air Force Office of Sci. Res.

Santiago, A. G. (2008). *Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub-Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Somigliana, C. (1885). *Sopra l' equilibrio di un corpo elástico isotropo. il Nuovo Cimento*, pages 17-20.

Schlar, N. A. (1994). *Anisotropic Analysis Using Boundary Elements*. Computational Mechanics Publications.

Shigley, J. E. (2005). *Projeto de Engenharia Mecânica*. Bookman, 7ª edição.

Sollero, P. & Aliabadi, M. H. (1993). *Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method*. Int. J. of Fracture, 64, 269 – 284.

Tahmasebi, F. (2001) . *Software tools for analysis of bonded joints*. NASA/GSFCCode 542.

Vable. M. & Maddi. J. R. (2005). *Boundary element analysis of adhesively bonded joints*. International Journal of Adhesion & Adhesives.

Vogel, S. M. & Rizzo, F. J. (1973). *An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems*. J. of Elasticity, 3, 203 – 216.

Wilson, R. B. & Cruse, T. A. (1978). *Efficient implentation of anisotropic three dimensional boundary integral equation stress analysis*. Int. J. Numer. Meth. Engn, 12, 1383 – 1397.