

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Maria Fernanda
Longuim Pegoraro E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21 12 00.

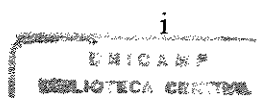
mpf
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO
HIERÁRQUICO, PARA ANÁLISE DE PLACAS E
CASCAS, A PARTIR DO ELEMENTO
ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO**

Autor: **Maria Fernanda Longuim Pegoraro**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

86/00



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO HIERÁRQUICO, PARA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS, A PARTIR DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO

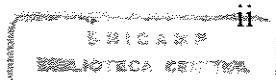
**Autor: Maria Fernanda Longuim Pegoraro
Orientador: Loir Afonso Moreira**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Projeto Mecânico**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000
S.P. - Brasil

**UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE**



UNIDADE	BO
N.º CHAMADA:	TI UNICAMP
	P349d
V.	Ex.
TOMBO BC/	44473
PROC.	16-392/01
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	16/05/01
N.º CPD	

CM-00155183-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P349d

Pegoraro, Maria Fernanda Longuim

Desenvolvimento de um elemento finito hierárquico, para análise de placas e cascas, a partir do elemento isoparamétrico triangular quadrático / Maria Fernanda Longuim Pegoraro.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Loir Afonso Moreira.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

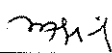
1. Método dos elementos finitos. 2. Placas (Engenharia). 3. Cascas (Engenharia). I. Moreira, Loir Afonso. II.. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

Desenvolvimento de um elemento finito hierárquico, para análise de placas e cascas, a partir do elemento isoparamétrico triangular quadrático.

Autora: Maria Fernanda Longuim Pegoraro
Orientador: Loir Afonso Moreira



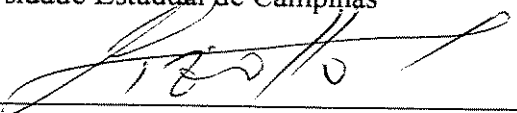
Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



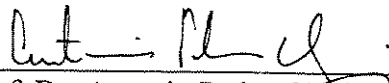
Prof. Dr. Fernando Iguti
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Junior
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Isaias Vizotto
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Antonio Pedro Clávis
Universidade Federal de Uberlândia

Campinas, 21 de dezembro de 2000

Dedicatória

Ao meu marido, Luiz Fernando, por ter acreditado em mim e no meu trabalho e por ser um exemplo de dedicação. À você, todo o meu amor, respeito e admiração.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, pela orientação, amizade e compreensão em um momento delicado de minha vida pessoal.

À administração da FEM, seus funcionários e professores, pela agradável convivência de trabalho.

Ao CNPQ pelo seu apoio financeiro.

Ao amigo Armando Diório Filho, pela ajuda computacional e por sua amizade.

Ao meu querido professor e amigo, Sr. Walter Rabello, pela correção no Abstract desta tese, por sua amizade e dedicação.

À minha irmã e amiga, Maria Rita Longuim, pela colaboração na correção dos textos deste trabalho, por seu amor e companheirismo em todos os momentos de minha vida.

Ao meu querido filho, Luiz Fernando Longuim Pegoraro, pela sua colaboração e compreensão em todo o período desta obra.

Aos meus sobrinhos e cunhados, pelo amor, carinho, apoio e incentivo.

À todos os meus amigos da Fundação Bezerra de Menezes, pelo exemplo, carinho, esperança e dedicação.

Acima de tudo e de todos, a Deus, meu Senhor, pela vida e pela oportunidade de acabar este trabalho.

Resumo

PEGORARO, Maria Fernanda Longuim, *Desenvolvimento de um elemento finito hierárquico, para análise de placas e cascas, a partir do elemento isoparamétrico triangular quadrático*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 220 p. Tese (Doutorado)

Inicia-se este trabalho com o desenvolvimento de um elemento finito isoparamétrico triangular quadrático, considerando-se a análise de placa e casca a partir de suas superfícies médias. Esta formulação, mostra-se eficiente pela sua simplicidade e, principalmente, pela possibilidade de se considerar o efeito das tensões de cisalhamento ao longo da espessura do elemento.

Posteriormente, apresenta-se, a partir do elemento isoparamétrico, uma formulação hierárquica baseada no conceito da aproximação do tipo p . Esta formulação resulta em um sistema computacional interessante, visto que em uma reanálise, obtida através do refinamento do tipo p , todos os resultados anteriormente encontrados podem ser reaproveitados.

Mostram-se, em seguida, vários exemplos de aplicação da formulação e seus resultados, para placas, cascas e vigas com diversas configurações de carregamento e contorno concluindo-se, principalmente, que a formulação hierárquica desenvolvida é capaz de diminuir a característica de rigidez excessiva, encontrada, particularmente, nas situações de placas e cascas finas.

Palavras Chave

Elemento Finito, Elemento Finito Hierárquico

Abstract

PEGORARO, Maria Fernanda Longuim, *Development of a finite hierarchical element for analysis of plates and shells, starting from quadratic isoparametric triangular element*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 220 p. Tese (Doutorado)

This work begins with the development of one isoparametric triangular quadratic element, considering the analysis of plate and shell starting from their mid-surfaces. This formulation proves itself efficient by its simplicity and mainly by the possibility of considering the effect of shear stresses along the thickness of the element.

Afterwards, is shown starting from the isoparametric element, one hierarchical formulation based upon the concept of the approximation of type p . The formulation results in an interesting computational system, being that in one reanalysis obtained through the refinement of type p , all the results found before may be reutilized.

It is shown immediately, various examples of application of the formulation and its results for plates, shells and beams with many configurations of loading and contour concluding, principally, that a developed hierarchical formulation is able to diminish a characteristic of excessive stiffness, found, particularly in situations of thin plates and shells.

Key Words

Finite Element, Hierarchical Finite Element

Índice

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Placas finas com pequenas deformações ($t / a < 0,05$).....	1
1.2 Placas moderadamente grossas com pequenas deformações ($t / a \geq 0,05$).....	2
1.3 Objetivo	3
2 DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO, PARA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS	4
2.1 Definição da geometria do elemento.....	4
2.1.1 Introdução.....	4
2.1.2 Determinação dos pontos situados sobre a superfície média do elemento.....	6
2.1.3 Determinação dos pontos situados fora da superfície média.....	9
2.1.4 Definição da geometria do elemento de casca.....	15
2.2 Campo de deslocamento.....	19
2.2.1 Introdução.....	19
2.2.2 Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca, considerando-se o elemento isoparamétrico.....	24
2.3 Estado de deformação específica.....	32

2.3.1	Introdução.....	32
2.3.2	Estado de deformação específica segundo o sistema de referência local (x' , y' , z').....	36
2.4	Determinação das propriedades características do elemento isoparamétrico.....	48
2.4.1	Introdução.....	48
2.4.2	Determinação das características do elemento de casca.....	51
2.4.3	Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca.....	57
2.4.3.1	Determinação da submatriz $[K_{ij}]$	58
2.4.4	Determinação do vetor de carga do elemento isoparamétrico: $\{f^e\}$	73
2.4.4.1	Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$	74
2.4.4.2	Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$	78
3	DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO DO TIPO HIERÁRQUICO, A PARTIR DO ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO	
3.1	Introdução.....	82
3.2	Determinação do campo de deslocamento.....	83
3.3	Estado de deformação específica para o elemento subparamétrico.....	95
3.4	Determinação das propriedades características do elemento subparamétrico.....	102
3.4.1	Determinação da matriz de rigidez do elemento.....	102
3.4.1.1	Determinação da submatriz $[K_{ii}]$	104
3.4.1.2	Determinação da submatriz $[K_{i,mn}]$	104
3.4.1.3	Determinação da submatriz $[K_{kj,mn}]$	112

3.4.1.4	Determinação da submatriz $[K_{kj,l}]$	117
3.4.1.5	Determinação da submatriz $[K_{im}]$	119
3.4.1.6	Determinação da submatriz $[K_{kj,m}]$	126
3.4.1.7	Determinação da submatriz $[K_{km}]$	131
3.4.1.8	Determinação da submatriz $[K_{kl}]$	136
3.4.1.9	Determinação da submatriz $[K_{k,mn}]$	137
3.4.2	Determinação do vetor de carga do elemento.....	138
3.4.2.1	Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$	138
3.4.2.2	Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo no elemento: $\{f_b^e\}$	143
4	DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA.....	149
4.1	Introdução.....	149
4.2	Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global do sistema.....	151
4.3	Resolução do sistema estrutural.....	155
4.3.1	Determinação do sistema de equações lineares.....	155
4.3.1.1	Sistema isoparamétrico.....	155
4.3.1.2	Sistema hierárquico.....	156
4.3.2	Resolução do sistema de equações lineares.....	157
4.3.3	Reanálise do sistema de equações lineares.....	161
4.3.4	Programa Computacional	162
5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	165
5.1	Introdução.....	165
5.2	Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída e perpendicular ao seu plano.....	166
5.2.1	Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados.....	166
5.2.2	Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	168

5.2.3	Placa quadrada engastada em seus lados.....	170
5.2.4	Placa retangular engastada em seus lados.....	171
5.3	Placa submetida à ação de uma carga concentrada perpendicular ao seu plano.....	173
5.3.1	Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados.....	173
5.3.2	Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	174
5.3.3	Placa quadrada engastada em seus lados.....	176
5.3.4	Placa retangular engastada em seus lados.....	177
5.4	Vigas retas em balanço.....	178
5.5	Placas circulares e cascas.....	181
5.5.1	Placa circular engastada submetida a carga distribuída.....	181
5.5.2	Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.....	182
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	184

Lista de Figuras

1.1	(a) Elemento sólido tridimensional, (b) elemento de casca obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.....	2
2.1	Elemento de casca, sua superfície média e os nós i a ela associados.....	5
2.2	Variação das coordenadas de área.....	5
2.3	Nó i e ponto O , pertencentes à superfície média do elemento e o sistema cartesiano de referência (X, Y, Z) , denominado global.....	6
2.4	“Mapeamento” da superfície média do elemento de casca.....	8
2.5	Vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média e os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes a ela.....	11
2.6	Versor $\vec{v}_3$, normal à superfície média do elemento no ponto O , e versor $\vec{v}_{3i}$, normal a esta superfície no nó i	13
2.7	Espessura t_i do elemento de casca no nó i e os vetores $\vec{m}_i$ e $\vec{m}$	14
2.8	Vetor $\vec{R}$ que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.....	16
2.9	“Mapeamento” tridimensional do elemento de casca.....	18
2.10	Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O	19
2.11	Nó i e o sistema de referência local (x', y', z') a ele associado.....	23
2.12	Deslocamento $\vec{\delta}_i$, apresentado pelo nó i	25
2.13	Deslocamento $\vec{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto P	26
2.14	Elemento de casca com um ponto genérico Q	33
2.15	Sistema de referência local (x', y', z') associado ao ponto O	37
2.16	Estado de tensão no ponto Q	48

3.1	Elementos da família triangular: a) linear, b) quadrático e c) cúbico, onde p representa o grau do polinômio completo utilizado na expansão.....	83
3.2	Definição dos lados do elemento triangular.....	84
3.3	Triângulo de Pascal, apresentando os termos necessários para se Ter um polinômio completo de até sexto grau.....	85
3.4	Expansão cúbica obtida com o uso das funções de forma hierárquicas de grau 3	85
3.5	Variação da função de forma M_{31} , de 3º grau, sobre o lado 1 do elemento.....	86
3.6	Variação da função de forma M_{32} , de 3º grau, sobre o lado 2 do elemento.....	86
3.7	Variação da função de forma M_{33} , de 3º grau, sobre o lado 3 do elemento.....	87
3.8	Termos obtidos através da função de forma hierárquica M_3 , dada pela equação (3.6).....	88
3.9	Variação da função de forma, do tipo bolha, sobre o elemento.....	89
4.1	Programação convencional e programação baseada em objetos	162
4.2	Fluxograma do programa computacional	163
4.3	Fluxograma da formulação isoparamétrica e hierárquica do programa computacional	164
5.1	Malha de discretização de 12 elementos.....	167
5.2	Malha de discretização de 12 elementos.....	169
5.3	Malha de discretização de 32 elementos.....	170
5.4	Malha de discretização de 32 elementos.....	172
5.5	Malha de discretização de 16 elementos.....	173
5.6	Malha de discretização de 34 elementos.....	175
5.7	Malha de discretização de 34 elementos.....	176
5.8	Vigas submetidas a diferentes carregamentos.....	179
5.9	Malhas de discretização para as 3 vigas consideradas.....	179
5.10	Malha de discretização de 45 elementos.....	181
5.11	Casca cilíndrica de cobertura.....	183

Lista de Tabelas

5.1	Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a	168
5.2	Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a , sendo a o lado maior da placa	169
5.3	Placa quadrada engastada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a	171
5.4	Placa retangular engastada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a , sendo a o lado maior da placa.....	172
5.5	Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a	174
5.6	Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a	175

5.7	Placa quadrada engastada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a	177
5.8	Placa retangular engastada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a	178
5.9	Viga submetida à flexão pura.....	180
5.10	Viga submetida à flexão no plano.....	180
5.11	Viga submetida a flexão fora do plano.....	180
5.12	Placa circular.....	182
5.13	Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.....	183

Capítulo 1

Introdução

Uma casca é um corpo sólido no qual uma de suas dimensões é consideravelmente menor do que as outras duas, conforme Feodosyev [30].

Considera-se, como sua superfície média, aquela que se encontra equidistante de suas superfícies limites: superior e inferior. Da mesma forma, a dimensão normal ao plano médio e compreendida entre essas superfícies limites é a espessura t da casca. O comportamento desses corpos depende muito da relação que se estabelece entre essa espessura t e suas outras duas dimensões.

Se a superfície média de uma casca é um plano, a casca é chamada de placa. As placas são classificadas de acordo com o tipo do seu contorno externo. Sendo assim, as placas podem ser: quadradas, circulares, retangulares, trapezoidais, etc. Igualmente, se a superfície média forma parte de uma esfera, cone ou cilindro, a casca é designada como esférica, cônica ou cilíndrica, respectivamente.

As cascas possuem um amplo campo de aplicação na engenharia como componentes estruturais, sendo, portanto, o seu comportamento de grande interesse.

Dependendo da relação entre a sua espessura t e a sua dimensão característica a , as placas e as cascas podem, de uma maneira geral, ser classificadas da seguinte forma, segundo Timoshenko et al. [31]:

- Placas e cascas finas, com pequenas deformações, quando a relação t/a for menor do que $1/20$ ($t/a < 0,05$);
- Placas e cascas moderadamente grossas, com pequenas deformações, quando a relação t/a for maior ou igual a $1/20$ ($t/a \geq 0,05$).

1. 1 - Placas e cascas finas com pequenas deformações ($t/a < 0,05$):

Supondo-se que as deflexões apresentadas por essas placas e cascas sejam pequenas quando comparadas com a sua espessura t , pode-se considerar as seguintes hipóteses de Kirchhoff [18], relativas ao comportamento dessas estruturas:

- 1 Qualquer elemento reto da placa ou casca, que inicialmente é normal ao seu plano médio, permanece normal à sua superfície média após a deformação, mantendo o seu comprimento inicial inalterado. Esta hipótese proporciona a possibilidade de desconsiderar-se as *tensões de cisalhamento* atuantes na direção da espessura, assim como de negligenciar a *deformação*

específica nesta direção;

- 2 As *tensões normais* à superfície média da placa ou casca são pequenas em relação às outras tensões e, portanto, podem ser desconsideradas. Sendo assim, pode-se ignorar a *energia de deformação* correspondente a estas tensões.

1.2 - Placas e cascas moderadamente grossas com pequenas deformações ($t/a \geq 0,05$):

Se as deflexões apresentadas pela placa ou casca moderadamente grossa, quando solicitadas transversalmente, são pequenas em comparação com a sua espessura, conforme a hipótese básica de Reissner [16], não é mais possível desconsiderar as *tensões de cisalhamento* que atuam na direção de sua espessura. Isto deve-se ao fato de que, após a deformação, os elementos retos da placa ou casca que anteriormente eram normais à superfície média, passam a não ser mais perpendiculares a ela. Todavia, o comprimento desses elementos permanece inalterado, e portanto, ignora-se a *deformação normal* na direção de sua espessura, da mesma forma que para o caso de placas e cascas finas.

Em 1970, Ahmad et. al., conforme relatado por Moreira [4], apresentou uma formulação baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, de acordo com a figura 1.1. Tal formulação admite que o elemento da placa inicialmente normal à sua superfície média, após a deformação não mais permanece perpendicular à mesma. Sendo assim, é possível, então, considerar as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, conforme a hipótese de Reissner para placas moderadamente grossas.

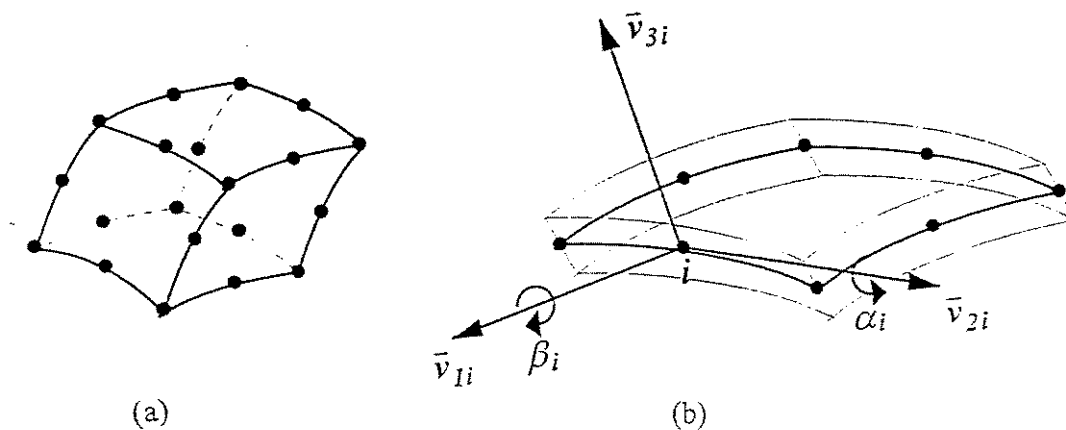


Figura 1.1 - (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.

Nessa formulação, a definição da **geometria do elemento**, é dada considerando-se as coordenadas dos nós, i , situados na superfície média e os versores nodais $\bar{v}_{3i}$, que definem os pontos situados fora desta superfície.

Com relação ao **campo de deslocamento**, admitem-se 5 graus de liberdade por nó: Os deslocamentos u_i , v_i , e w_i , em relação ao sistema de referência global, e as rotações: α_i , e β_i , do versor $\bar{v}_{3i}$ em torno de dois outros versores: $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$, normais a ele, conforme observa-se na figura 1.1.

Obtém-se a matriz de rigidez do elemento através da integração numérica da expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta$$

Os resultados encontrados com a formulação proposta por Ahmad mostraram-se excelentes com relação a placas e cascas moderadamente grossas. Todavia, o mesmo não ocorreu para placas e cascas finas, conforme Zienkiewicz et al. [55]. Observou-se que com a diminuição da espessura do elemento, sua rigidez aumentava em demasia e os resultados obtidos não eram confiáveis.

Desde então muitos autores têm pesquisado esse tipo de elemento e feito propostas para melhorar o seu comportamento, principalmente no que se refere a placas finas.

1.3 - Objetivo:

O objetivo desse trabalho é o de apresentar uma formulação hierárquica, que se mostre eficiente na análise de placas e cascas, especialmente, no que se refere a placas e cascas finas. Partindo-se, portanto, de um elemento isoparamétrico triangular quadrático, diferente do elemento de Ahmad, pretende-se refinar a solução obtida por esse elemento, pela introdução de polinômios de terceira ordem. A formulação hierárquica desempenha uma função importante no sistema computacional, uma vez que tendo ocorrido uma determinada análise, para uma dada aproximação, os dados gerados pela mesma podem ser reaproveitados em aproximações de ordem superior, o que resulta em um ganho computacional considerável. Da mesma forma, a formulação exposta admite a aplicação de expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes.

Capítulo 2

DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO, PARA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS

2.1 - DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

2.1.1 - Introdução

Considere-se um elemento de casca, conforme apresentado pela figura 2.1, com seus respectivos nós i , de 1 a 6, situados em sua superfície média. Apresenta-se também nesta figura o sistema de referência local, constituído das coordenadas de área: L_1 , L_2 e L_3 , assim como a coordenada linear ζ , na direção da espessura do elemento, a qual varia entre -1 e $+1$, de tal forma a definir as faces externas do elemento.

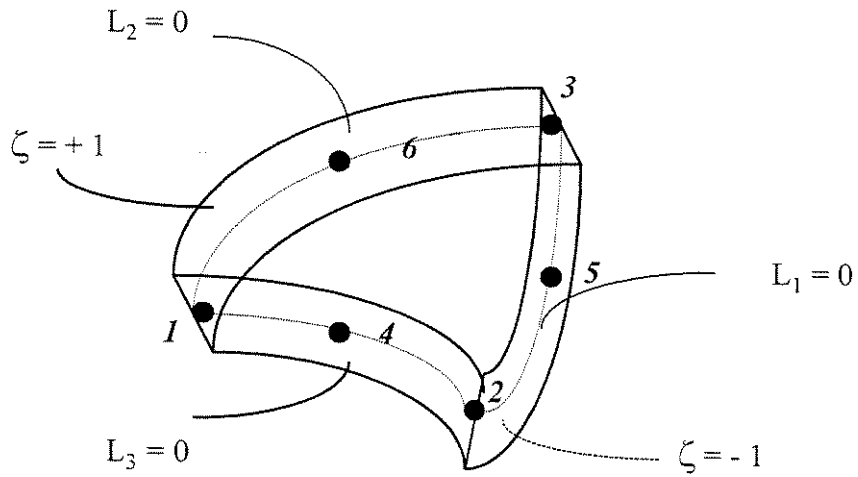


Figura 2.1 - Elemento de casca, sua superfície média e os nós i a ela associados

A variação das coordenadas de área, L_1 , L_2 e L_3 , em relação aos nós i , de 1 a 6, são apresentadas pela figura 2.2:

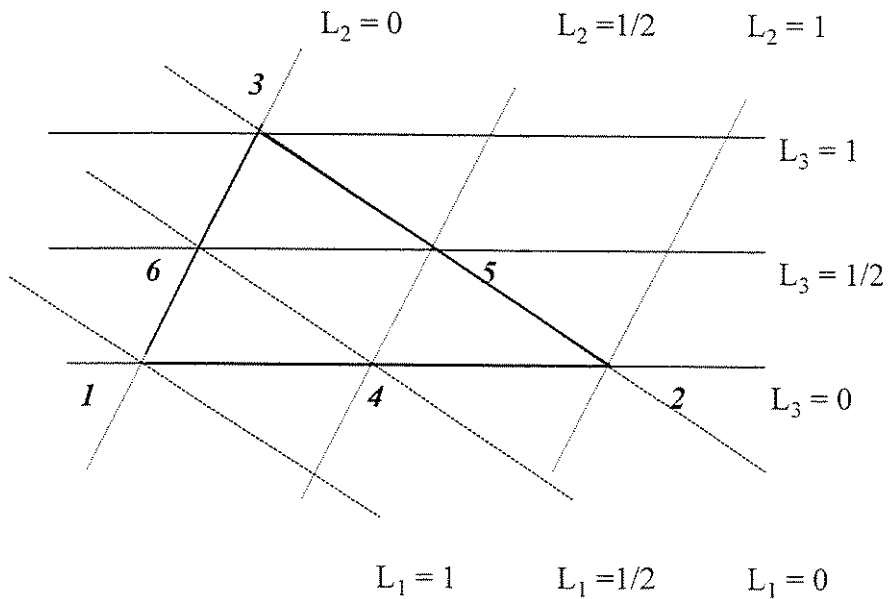


Figura 2.2: Variação das coordenadas de área

2.1.2 - Determinação dos pontos situados sobre a superfície média do elemento

Conforme mostra a figura 2.3, associando-se ao elemento de casca um sistema de referência cartesiano (X, Y, Z), denominado global, um nó i , genérico de sua superfície média, será determinado pelo vetor $\bar{\mathbf{r}}_i$ com componentes x_i , y_i e z_i , de acordo com os eixos X, Y e Z. Portanto,

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

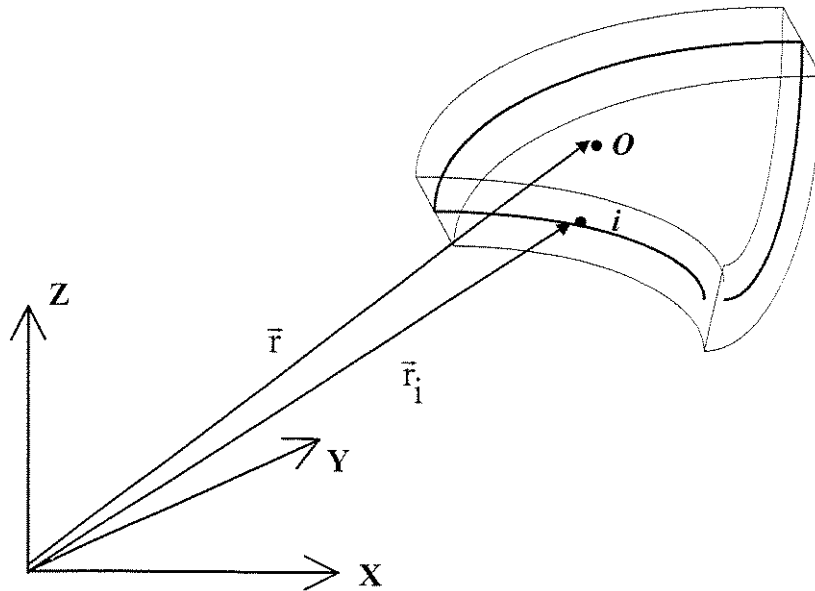


Figura 2.3: Nó i e ponto O , pertencentes à superfície média do elemento e o sistema cartesiano de referência (X, Y, Z), denominado global.

Com relação ao ponto $\mathbf{O}$, genérico, da superfície média, o mesmo será dado pelo vetor $\bar{\mathbf{r}}$ que pode ser interpolado através dos vetores $\bar{\mathbf{r}}_i$ e das funções de forma $\mathbf{N}_i$ de cada nó desta superfície, segundo Coons [19] e Forrest [20]. Sendo assim:

$$\bar{\mathbf{r}}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \quad (2.2)$$

As funções de forma $\mathbf{N}_i$, para o elemento triangular quadrático, são dadas da seguinte maneira :

$$N_1(L_1) = (2L_1 - 1) \cdot L_1 \quad (2.3)$$

$$N_2(L_2) = (2L_2 - 1) \cdot L_2 \quad (2.4)$$

$$N_3(L_1, L_2) = (2L_3 - 1) \cdot L_3 = (1 - 2L_1 - 2L_2) \cdot (1 - L_1 - L_2) \quad (2.5)$$

$$N_4(L_1, L_2) = 4L_1 \cdot L_2 \quad (2.6)$$

$$N_5(L_1, L_2) = 4L_2 \cdot L_3 = 4L_2(1 - L_1 - L_2) \quad (2.7)$$

$$N_6(L_1, L_2) = 4L_1 \cdot L_3 = 4L_1(1 - L_1 - L_2) \quad (2.8)$$

onde: $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ e portanto: $L_3 = 1 - L_1 - L_2$

Segundo o sistema de referência global, se as componentes do vetor $\bar{\mathbf{r}}$ são x, y e z , então a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbf{r}}(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} x(L_1, L_2) \\ y(L_1, L_2) \\ z(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
x(L_1, L_2) &= N_1(L_1).x_1 + N_2(L_2).x_2 + N_3(L_1, L_2).x_3 + N_4(L_1, L_2).x_4 \\
&+ N_5(L_1, L_2).x_5 + N_6(L_1, L_2).x_6 = \sum_{i=1}^6 N_i.x_i
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
y(L_1, L_2) &= N_1(L_1).y_1 + N_2(L_2).y_2 + N_3(L_1, L_2).y_3 + N_4(L_1, L_2).y_4 \\
&+ N_5(L_1, L_2).y_5 + N_6(L_1, L_2).y_6 = \sum_{i=1}^6 N_i.y_i
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
z(L_1, L_2) &= N_1(L_1).z_1 + N_2(L_2).z_2 + N_3(L_1, L_2).z_3 + N_4(L_1, L_2).z_4 \\
&+ N_5(L_1, L_2).z_5 + N_6(L_1, L_2).z_6 = \sum_{i=1}^6 N_i.z_i
\end{aligned} \tag{2.12}$$

As equações (2.10), (2.11) e (2.12), fornecem, dessa forma, as coordenadas x , y e z de um ponto genérico situado sobre a superfície média do elemento de casca. Estas equações fazem, então, o “mapeamento” da superfície média do elemento de casca, do espaço local para o espaço cartesiano, como mostra a figura 2.4.

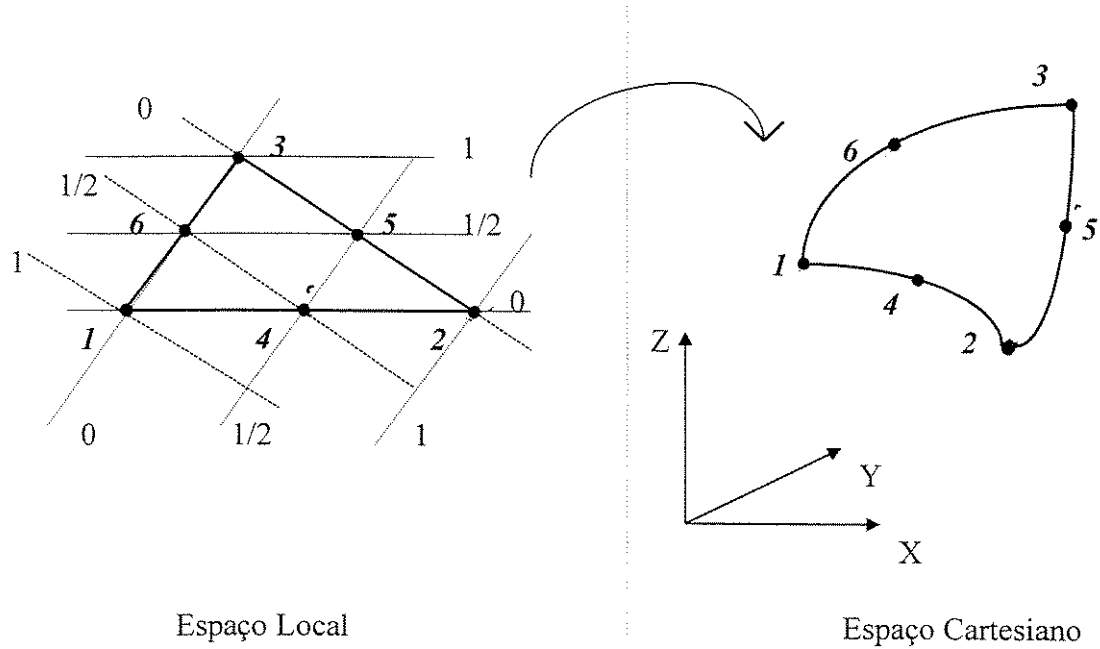


Figura 2.4 - “Mapeamento” da superfície média do elemento de casca

2.1.3 - Determinação dos pontos situados fora da superfície média

Conforme apresenta a figura 2.5, definindo-se no ponto $\mathbf{O}$ um vetor $\bar{\mathbf{r}}_3$, normal à superfície média nesse ponto, determinado a partir do produto vetorial de dois vetores $\bar{\mathbf{r}}_1$ e $\bar{\mathbf{r}}_2$ tangentes a esta superfície e obtidos, conforme Leithold [5], através de:

$$\bar{\mathbf{r}}_1(L_1, L_2) = \frac{\partial \mathbf{r}(L_1, L_2)}{\partial L_1} \quad (2.13)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2(L_1, L_2) = \frac{\partial \mathbf{r}(L_1, L_2)}{\partial L_2} \quad (2.14)$$

Dessa forma:

$$\bar{\mathbf{r}}_3(L_1, L_2) = \bar{\mathbf{r}}_1(L_1, L_2) \wedge \bar{\mathbf{r}}_2(L_1, L_2) \quad (2.15)$$

Considere-se agora como componentes do vetor $\bar{\mathbf{r}}_1$: r_{11} , r_{12} e r_{13} , segundo, respectivamente, os eixos X , Y e Z do sistema de referência global e da mesma forma as componentes: r_{21} , r_{22} e r_{23} para o vetor $\bar{\mathbf{r}}_2$. Sendo assim e com o auxílio da expressão (2.9), pode-se escrever que:

$$\bar{\mathbf{r}}_1(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} r_{11}(L_1, L_2) \\ r_{12}(L_1, L_2) \\ r_{13}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial L_1} \left(\sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\bar{r}_2(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} r_{21}(L_1, L_2) \\ r_{22}(L_1, L_2) \\ r_{23}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial L_2} \left(\sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

ou ainda:

$$r_{11}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot x_i \quad (2.18)$$

$$r_{12}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot y_i \quad (2.19)$$

$$r_{13}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot z_i \quad (2.20)$$

$$r_{21}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot x_i \quad (2.21)$$

$$r_{22}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot y_i \quad (2.22)$$

$$r_{23}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot z_i \quad (2.23)$$

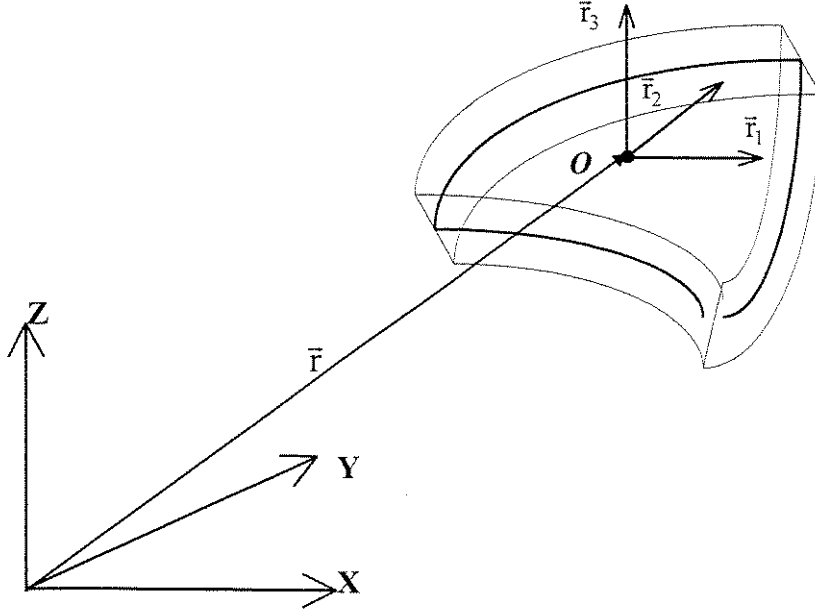


Figura 2.5 - Vetor $\bar{r}_3$, normal à superfície média e os vetores $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$, tangentes a ela.

Associando-se ao sistema de referência global, os três vetores unitários $\bar{i}$, $\bar{j}$ e $\bar{k}$, que formam uma base para o espaço vetorial tridimensional, pode-se assim escrever para o vetor $\bar{r}_3$, com o auxílio da expressão (2.15):

$$\bar{r}_3(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} r_{31}(L_1, L_2) \\ r_{32}(L_1, L_2) \\ r_{33}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{11}(L_1, L_2) & r_{12}(L_1, L_2) & r_{13}(L_1, L_2) \\ r_{21}(L_1, L_2) & r_{22}(L_1, L_2) & r_{23}(L_1, L_2) \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

Resolvendo-se a expressão (2.24), chega-se a:

$$\bar{r}_3(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} r_{31}(L_1, L_2) \\ r_{32}(L_1, L_2) \\ r_{33}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} r_{12}(L_1, L_2) \cdot r_{23}(L_1, L_2) - r_{13}(L_1, L_2) \cdot r_{22}(L_1, L_2) \\ r_{13}(L_1, L_2) \cdot r_{21}(L_1, L_2) - r_{11}(L_1, L_2) \cdot r_{23}(L_1, L_2) \\ r_{11}(L_1, L_2) \cdot r_{22}(L_1, L_2) - r_{12}(L_1, L_2) \cdot r_{21}(L_1, L_2) \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

Substituindo-se as componentes dos vetores $\bar{r}_2$ e $\bar{r}_3$, na equação (2.25), pelos seus respectivos valores que se encontram nas expressões (2.18) a (2.23), chega-se a:

$$r_{31}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial L_2} \cdot (y_i z_j - z_i y_j) \quad (2.26)$$

$$r_{32}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial L_2} \cdot (z_i x_j - x_i z_j) \quad (2.27)$$

$$r_{33}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial L_2} \cdot (x_i y_j - y_i x_j) \quad (2.28)$$

Determinando-se o vetor $\bar{r}_3$, pode-se assim, conforme apresenta a figura 2.6, definir em um ponto O , o versor $\bar{v}_3$, normal à superfície média e dado por:

$$\bar{v}_3(L_1, L_2) = \frac{\bar{r}_3(L_1, L_2)}{\|\bar{r}_3(L_1, L_2)\|} \quad (2.29)$$

onde $\|\bar{r}_3(L_1, L_2)\|$ é o módulo do vetor $\bar{r}_3(L_1, L_2)$ e obtido da seguinte forma:

$$\|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| = \sqrt{r_{31}^2(L_1, L_2) + r_{32}^2(L_1, L_2) + r_{33}^2(L_1, L_2)} \quad (2.30)$$

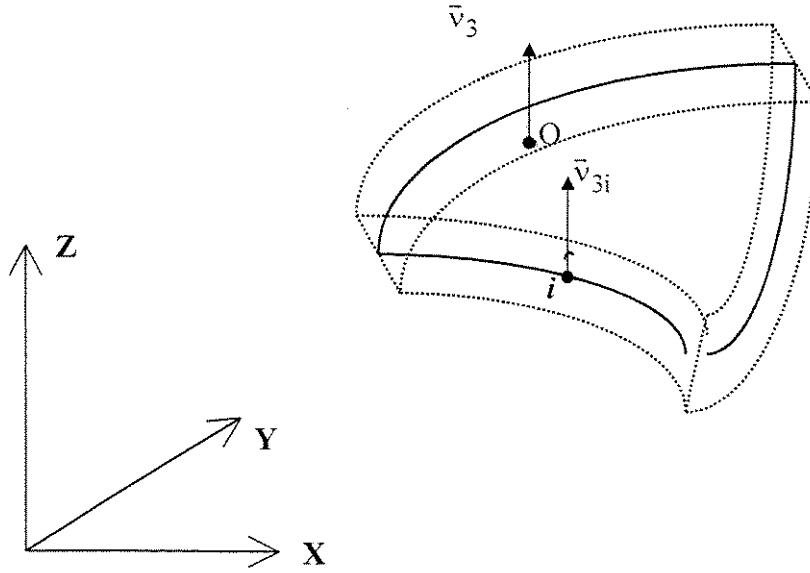


Figura 2.6 - Versor $\bar{v}_3$, normal à superfície média do elemento no ponto O , e versor $\bar{v}_{3i}$, normal a esta superfície no nó i .

Considerando-se como componentes do versor $\bar{v}_3$: v_{31} , v_{32} e v_{33} segundo o sistema de referência global, a equação (2.29) pode ser reescrita como:

$$\bar{v}_3(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} v_{31}(L_1, L_2) \\ v_{32}(L_1, L_2) \\ v_{33}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{r}_3(L_1, L_2)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(L_1, L_2) \\ r_{32}(L_1, L_2) \\ r_{33}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

ou ainda,

$$v_{31}(L_1, L_2) = r_{31}(L_1, L_2) / \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \quad (2.32)$$

$$v_{32}(L_1, L_2) = r_{32}(L_1, L_2) / \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \quad (2.33)$$

$$v_{33}(L_1, L_2) = r_{33}(L_1, L_2) / \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \quad (2.34)$$

Em relação ao nó i , de coordenadas L_{1i} e L_{2i} , o versor $\bar{v}_{3i}$ (figura 2.6), normal à superfície média neste nó, pode ser dado por:

$$\bar{v}_{3i} = \bar{v}_3(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.35)$$

e as suas componentes v_{31i} , v_{32i} e v_{33i} segundo o sistema de referência global X , Y e Z , respectivamente por:

$$v_{31i} = v_{31}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.36)$$

$$v_{32i} = v_{32}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.37)$$

$$v_{33i} = v_{33}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.38)$$

Conforme apresenta a figura 2.7, sendo t_i a espessura do elemento de casca no nó i , determina-se qualquer ponto P ao longo desta espessura através do vetor $\bar{m}_i$, obtido da seguinte maneira:

$$\bar{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.39)$$

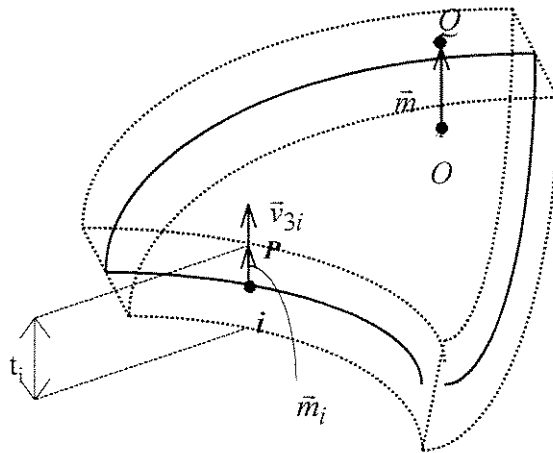


Figura 2.7 - Espessura t_i do elemento de casca no nó i e os vetores $\bar{m}_i$ e $\bar{m}$.

Determinando-se o vetor $\bar{m}_i$, pode-se agora encontrar o vetor $\bar{m}$, que define qualquer ponto $\mathbf{Q}$ fora da superfície média (figura 2.7). Sendo assim, o vetor $\bar{m}$, em um determinado ponto $\mathbf{O}$ desta superfície, o qual possui as coordenadas L_1 e L_2 constantes (L_{10}, L_{20}), só muda, neste caso, em relação à coordenada ζ . O vetor $\bar{m}$ deve, portanto, ser interpolado a partir dos vetores $\bar{m}_i$ e das funções de forma N_i de cada nó desta superfície:

$$\bar{m}(\zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{m}_i \quad (2.40)$$

Através da equação (2.39) obtém-se o valor do vetor $\bar{m}_i$, e substituindo-o na equação (2.40), encontra-se :

$$\bar{m}(\zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.41)$$

O vetor $\bar{m}$, como mostra a figura 2.7, define os pontos situados fora da superfície média do elemento, de tal forma que, quando $\zeta = +1$, o ponto encontra-se na superfície superior e quando $\zeta = -1$, tem-se um ponto da superfície inferior.

2.1.4 - Definição da geometria do elemento de casca

Conforme mostra a figura 2.8, a posição de qualquer ponto do elemento de casca é dada pelo vetor $\bar{R}$, o qual é obtido através da soma de dois outros vetores: o vetor $\bar{r}$, que define a posição de qualquer ponto da superfície média e o vetor $\bar{m}$, que define a posição de um ponto genérico fora desta superfície. Portanto,

$$\bar{R}(L_1, L_2, \zeta) = \bar{r}(L_1, L_2) + \bar{m}(\zeta) \quad (2.42)$$

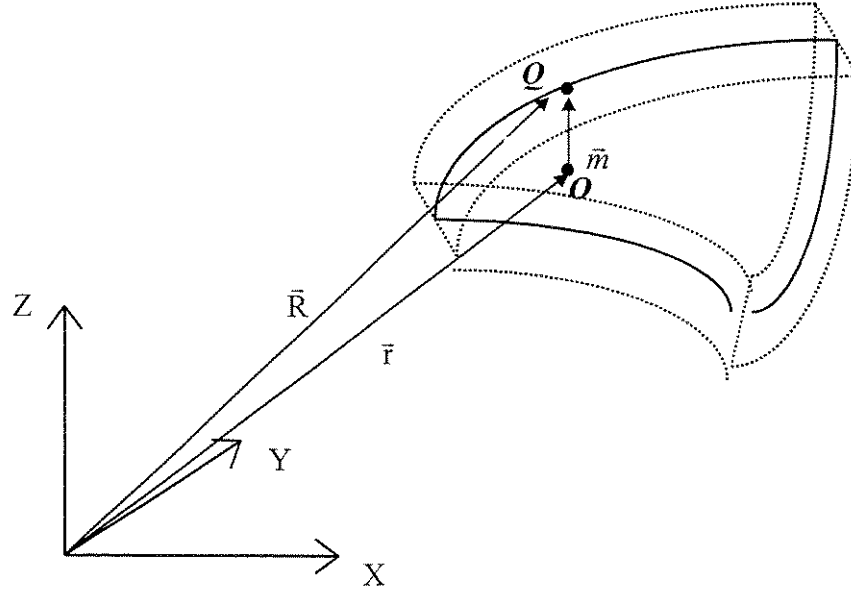


Figura 2.8 - Vetor $\bar{R}$ que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca

Considerando-se agora os valores dos vetores $\bar{r}$ e $\bar{m}$, dados pelas equações (2.9) e (2.41), respectivamente e substituindo-os na expressão (2.42), encontra-se:

$$\bar{R}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (2.43)$$

Se x , y e z são as coordenadas do vetor $\bar{R}$, segundo o sistema de referência global, assim como v_{31i} , v_{32i} e v_{33i} são as componentes do versor $\vec{v}_{3i}$, pode-se reescrever a equação (2.43) da seguinte forma:

$$\bar{R}(L_1, L_2, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(L_1, L_2, \zeta) \\ y(L_1, L_2, \zeta) \\ z(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

ou ainda,

$$x(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (2.45)$$

$$y(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (2.46)$$

$$z(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (2.47)$$

Portanto, as equações (2.45), (2.46) e (2.47) fornecem as coordenadas x , y e z de um ponto genérico do elemento de casca.

A figura 2.9 apresenta o “mapeamento” do elemento de casca, do espaço local para o espaço cartesiano, onde para cada ponto de coordenadas L_1 , L_2 e ζ no espaço local, corresponde um ponto de coordenadas x , y e z , no espaço cartesiano.

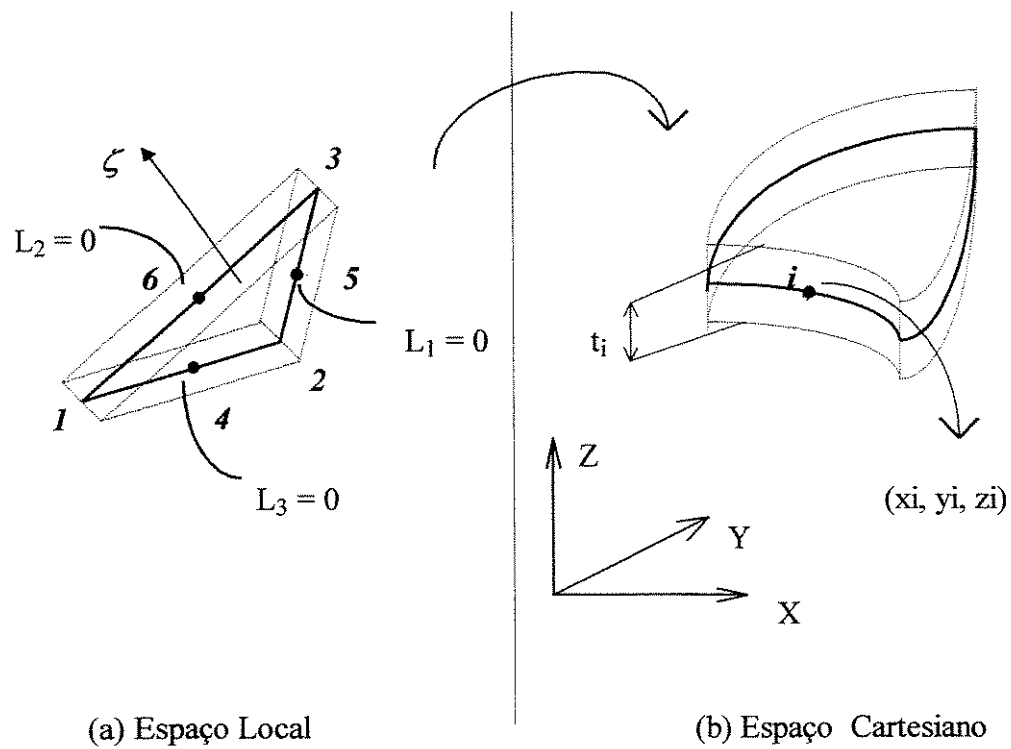


Figura 2.9 - “Mapeamento” tridimensional do elemento de casca

2.2 - CAMPO DE DESLOCAMENTO

2.2.1 - Introdução

A figura 2.10 apresenta em um ponto O qualquer da superfície média do elemento de casca, a definição de um sistema cartesiano de referência local, composto dos eixos x' , y' e z' , com seus respectivos versores: $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$.

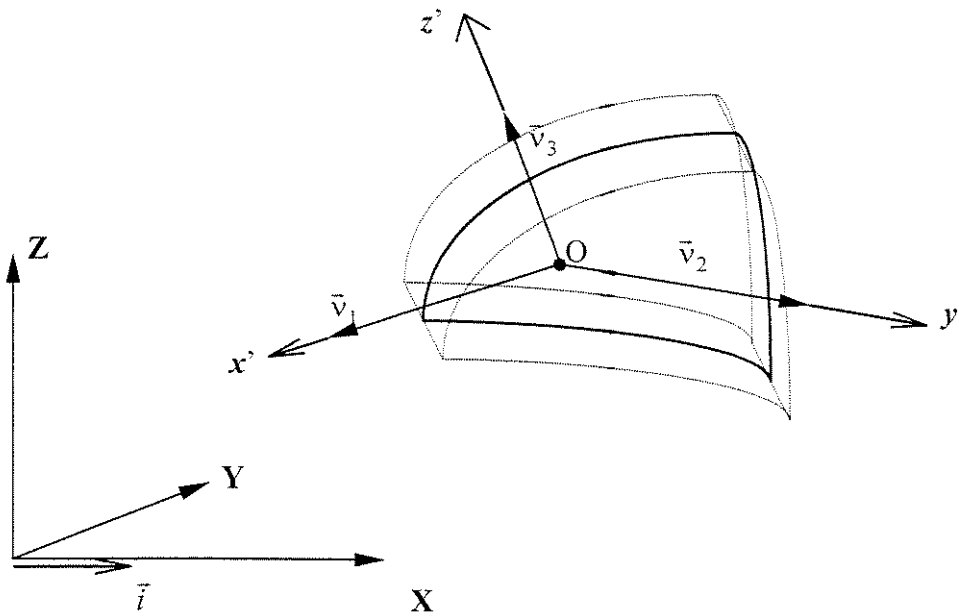


Figura 2.10 - Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O .

A definição do versor $\bar{v}_3$, normal à superfície média do elemento, já foi dada anteriormente através da equação (2.29). Quanto aos versores $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, tangentes à superfície média, os mesmos podem ser obtidos através das seguintes relações:

$$\vec{v}_1(L_1, L_2) = \frac{\vec{i} \wedge \vec{v}_3(L_1, L_2)}{\|\vec{i} \wedge \vec{v}_3(L_1, L_2)\|} \quad (2.48)$$

onde:

$\vec{i}$ é o versor da direção X do sistema de referência global e que pode, no caso de coincidência entre $\vec{i}$ e $\vec{v}_3$, ser substituído pelo versor $\vec{j}$ da direção Y .

Sendo assim, para a determinação de $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2(L_1, L_2) = \vec{v}_3(L_1, L_2) \wedge \vec{v}_1(L_1, L_2) \quad (2.49)$$

Definindo-se: $\vec{V}_1(L_1, L_2) = \vec{i} \wedge \vec{v}_3(L_1, L_2)$ e levando-se em conta as componentes do versor $\vec{i} (1, 0, 0)$, segundo o sistema de referência global X, Y, Z , e as componentes v_{31}, v_{32} e v_{33} do versor $\vec{v}_3$, o vetor $\vec{V}_1$ será dado por:

$$\vec{V}_1(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} V_{11}(L_1, L_2) \\ V_{12}(L_1, L_2) \\ V_{13}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_{31}(L_1, L_2) & v_{32}(L_1, L_2) & v_{33}(L_1, L_2) \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

Resolvendo-se a expressão acima, as componentes do vetor $\vec{V}_1$, podem ser dadas da seguinte forma:

$$V_{11}(L_1, L_2) = 0 \quad (2.51)$$

$$V_{12}(L_1, L_2) = -v_{33}(L_1, L_2) \quad (2.52)$$

$$V_{13}(L_1, L_2) = v_{32}(L_1, L_2) \quad (2.53)$$

Considerando-se como componentes do versor $\bar{v}_1 : v_{11}, v_{12}$ e v_{13} , a equação (2.48) pode ser reescrita como segue:

$$\bar{v}_1(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} v_{11}(L_1, L_2) \\ v_{12}(L_1, L_2) \\ v_{13}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} \cdot \begin{Bmatrix} V_{11}(L_1, L_2) \\ V_{12}(L_1, L_2) \\ V_{13}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

onde:

$$\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\| = \sqrt{V_{11}^2(L_1, L_2) + V_{12}^2(L_1, L_2) + V_{13}^2(L_1, L_2)} \text{ é o módulo do vetor } \bar{V}_1(L_1, L_2).$$

As componentes do versor $\bar{v}_1(L_1, L_2)$, substituindo-se os valores do vetor $\bar{V}_1(L_1, L_2)$, podem ainda ser escritas da seguinte forma:

$$v_{11}(L_1, L_2) = \frac{V_{11}(L_1, L_2)}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} = 0 \quad (2.55)$$

$$v_{12}(L_1, L_2) = \frac{V_{12}(L_1, L_2)}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} = \frac{-v_{33}(L_1, L_2)}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} \quad (2.56)$$

$$v_{13}(L_1, L_2) = \frac{V_{13}(L_1, L_2)}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} = \frac{v_{32}(L_1, L_2)}{\|\bar{V}_1(L_1, L_2)\|} \quad (2.57)$$

Considerando-se também o versor $\bar{v}_2$, de componentes: v_{21} , v_{22} e v_{23} , segundo o sistema de referência global e após a determinação do versor $\bar{v}_1$, pode-se agora, executar o produto vetorial dado pela expressão (2.49):

$$\bar{v}_2(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} v_{21}(L_1, L_2) \\ v_{22}(L_1, L_2) \\ v_{23}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_{31}(L_1, L_2) & v_{32}(L_1, L_2) & v_{33}(L_1, L_2) \\ v_{11}(L_1, L_2) & v_{12}(L_1, L_2) & v_{13}(L_1, L_2) \end{vmatrix} \quad (2.58)$$

obtendo-se:

$$\bar{v}_2(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} v_{21}(L_1, L_2) \\ v_{22}(L_1, L_2) \\ v_{23}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(L_1, L_2)v_{13}(L_1, L_2) - v_{12}(L_1, L_2) v_{33}(L_1, L_2) \\ v_{33}(L_1, L_2)v_{11}(L_1, L_2) - v_{31}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) \\ v_{31}(L_1, L_2)v_{12}(L_1, L_2) - v_{32}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

ou :

$$v_{21}(L_1, L_2) = v_{32}(L_1, L_2) \cdot v_{13}(L_1, L_2) - v_{12}(L_1, L_2) \cdot v_{33}(L_1, L_2) \quad (2.60)$$

$$v_{22}(L_1, L_2) = v_{33}(L_1, L_2) \cdot v_{11}(L_1, L_2) - v_{31}(L_1, L_2) \cdot v_{13}(L_1, L_2) \quad (2.61)$$

$$v_{23}(L_1, L_2) = v_{31}(L_1, L_2) \cdot v_{12}(L_1, L_2) - v_{32}(L_1, L_2) \cdot v_{11}(L_1, L_2) \quad (2.62)$$

Portanto, as equações (2.55), (2.56), (2.57), (2.60), (2.61), (2.62), (2.32), (2.33) e (2.34), determinam as componentes dos versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$, os quais definem o sistema de referência local (x' , y' e z'), associado ao ponto O .

Conforme mostra a figura (2.11), tendo-se em conta o nó i de coordenadas L_{1i} e L_{2i} , o sistema de referência local a ele associado será dado pelos seguintes versores:

$$\bar{v}_{1i} = \bar{v}_1(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.63)$$

$$\bar{v}_{2i} = \bar{v}_2(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.64)$$

$$\bar{v}_{3i} = \bar{v}_3(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.65)$$

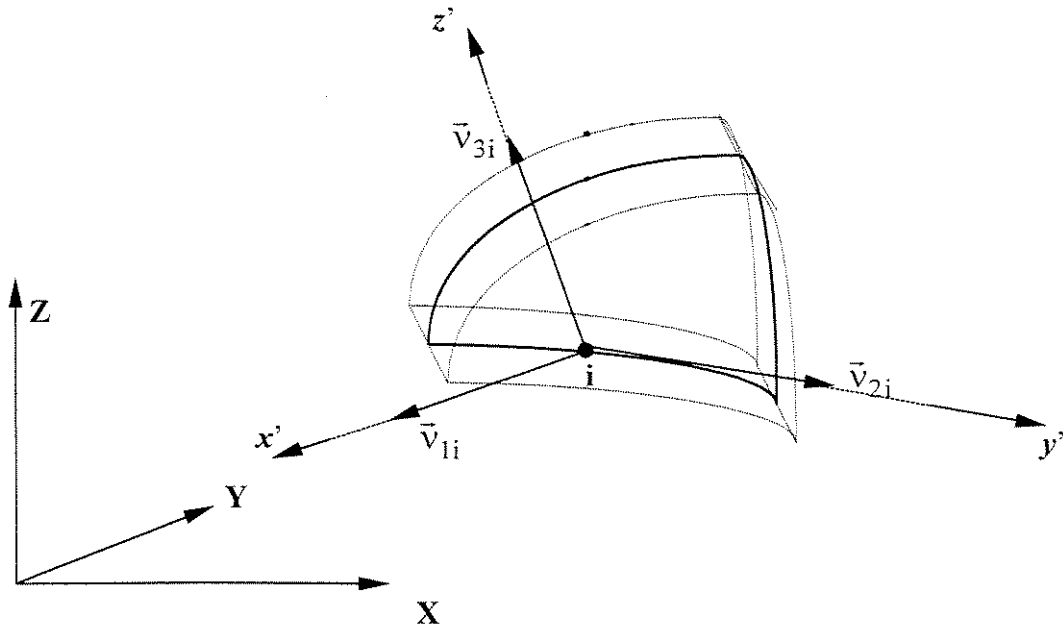


Figura 2.11 - Nó i e o sistema de referência local (x', y', z') a ele associado.

Com relação às componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$, as mesmas serão definidas, segundo o sistema de referência global, por:

$$v_{11i} = v_{11}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.66)$$

$$v_{12i} = v_{12}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.67)$$

$$v_{13i} = v_{13}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.68)$$

$$v_{21i} = v_{21}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.69)$$

$$v_{22i} = v_{22}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.70)$$

$$v_{23i} = v_{23}(L_{1i}, L_{2i}) \quad (2.71)$$

Quanto ao versor $\bar{v}_{3i}$, as suas coordenadas já foram obtidas anteriormente e são dadas pelas expressões: (2.36), (2.37) e (2.38). Sendo assim, as componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$, $\bar{v}_{2i}$ e $\bar{v}_{3i}$ que definem o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao nó i , são dadas pelas equações: (2.66) a (2.71), (2.36) a (2.38).

2.2.2 - Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca, considerando-se o elemento isoparamétrico.

De acordo com a figura (2.12), tendo o elemento de casca se deformado em função de uma solicitação qualquer, o seu nó i , genérico e situado em sua superfície média, apresentará um deslocamento $\bar{\delta}_i$, cujas coordenadas nas direções X , Y e Z do sistema de referência global são, respectivamente: u_i , v_i e w_i .

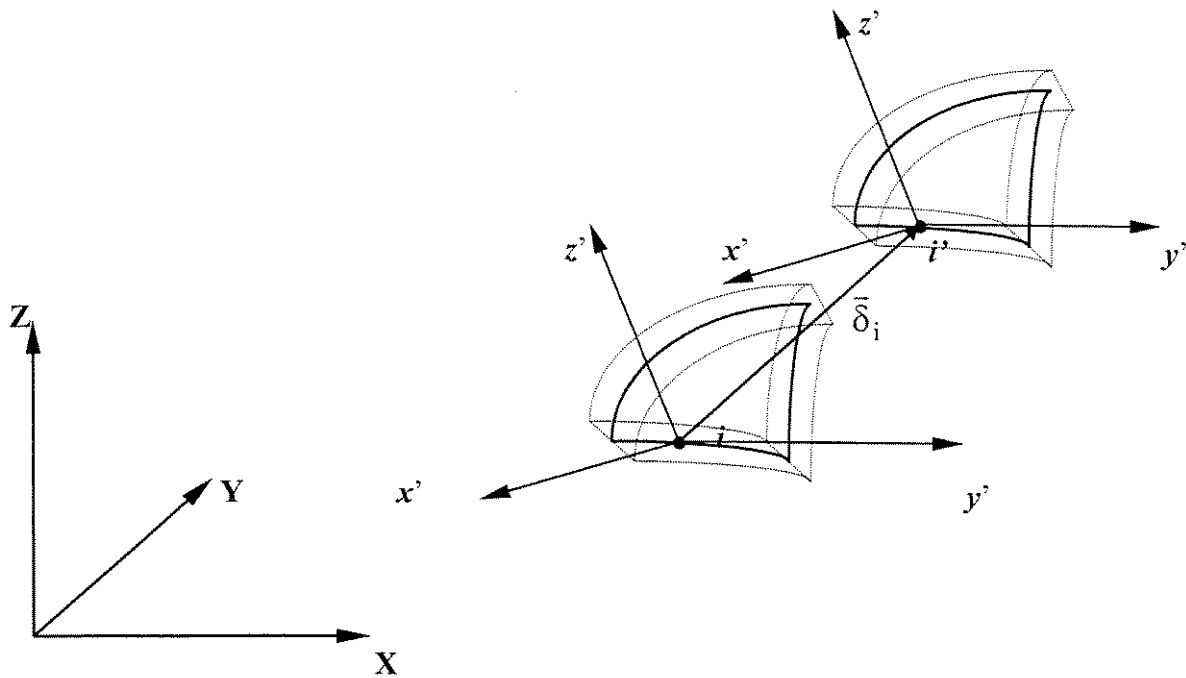


Figura 2.12 - Deslocamento $\bar{\delta}_i$, apresentado pelo nó i .

Conforme o modelo cinemático de *Reissner* [16], o qual possibilita considerar, também, as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, se um elemento reto da casca é normal a sua superfície média, após a deformação, ele conserva-se reto, mantém seu comprimento inicial ($\epsilon_z = 0$), entretanto, não permanece mais normal àquela superfície. Sendo assim, o estado de deformação específica do elemento de casca, com relação ao sistema de referência local (x', y', z') , deverá conter as seguintes componentes: $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$.

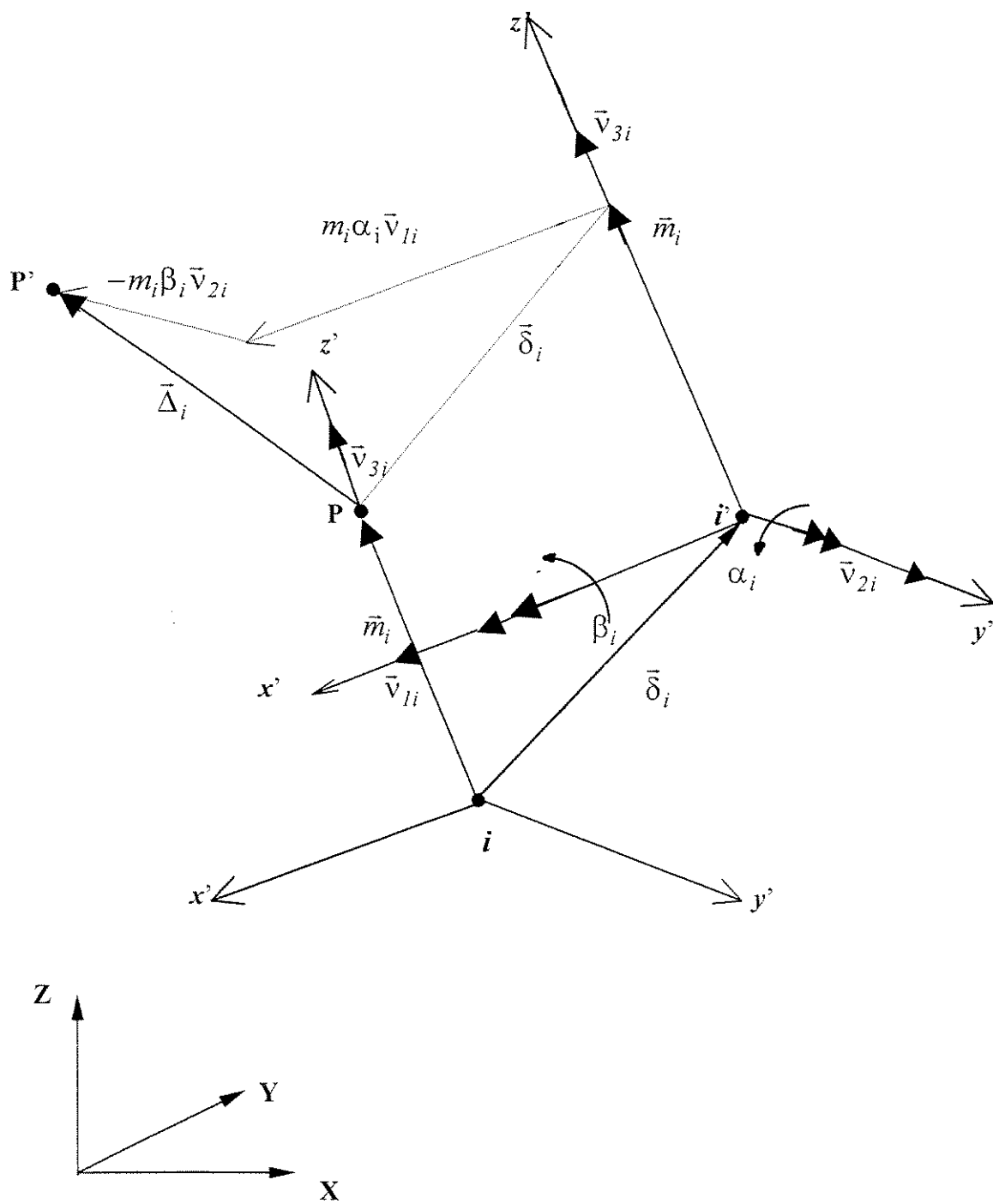


Figura 2.13 - Deslocamento $\vec{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto P.

Portanto, considerando-se o vetor $\bar{m}_i$, como se verifica através das figuras (2.7) e (2.13), perpendicular à superfície média e definindo o ponto **P** fora desta superfície, após a deformação ele deverá permanecer reto, não mais normal àquela superfície e manter seu comprimento inicial. Dessa forma, para o caso mais geral de sollicitação, o vetor $\bar{m}_i$ deverá apresentar duas rotações: α_i e β_i ao redor dos eixos y' e x' , respectivamente, como mostra a figura (2.13). Sendo assim e de acordo com esta figura, o ponto **P** assume a posição **P'**, indicando em consequência deste fato, um deslocamento $\bar{\Delta}_i$, o qual, admitindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações, será dado por:

$$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i + m_i \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - m_i \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (2.72)$$

sabendo-se que m_i é o módulo do vetor $\bar{m}_i$, o qual, conforme verifica-se através da expressão (2.39) é definido por:

$$m_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \quad (2.73)$$

Substituindo-se a equação (2.73) na expressão (2.72), chega-se a:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (2.74)$$

Portanto, a equação (2.74) permite determinar o deslocamento apresentado por qualquer ponto **P** ao longo da espessura t_i do nó i . Sendo assim, o deslocamento $\bar{\Delta}$ de um ponto **Q** qualquer do elemento de casca poderá ser interpolado através dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma N'_i de cada nó da superfície média, segundo Zienkiewicz et al. [9]:

$$\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N'_i \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (2.75)$$

Admitindo-se o elemento como sendo do tipo isoparamétrico, as funções de forma N'_i , são iguais àquelas utilizadas para interpolar a geometria do elemento e são dadas através das equações (2.3) a (2.8). Dessa forma,

$$N'_i = N_i \quad (2.76)$$

e reescrevendo-se a equação (2.75), obtém-se:

$$\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (2.77)$$

Substituindo-se, agora, a equação (2.74) na expressão (2.77), resulta:

$$\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (2.78)$$

Considerando-se como componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$: u , v e w , respectivamente nas direções **X**, **Y** e **Z** do sistema de referência global, a equação (2.78) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(L_1, L_2, \zeta) \\ v(L_1, L_2, \zeta) \\ w(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

ou ainda:

$$u(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{11i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{21i} \quad (2.80)$$

$$v(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{12i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{22i} \quad (2.81)$$

$$w(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{13i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{23i} \quad (2.82)$$

Através das funções de forma, equações (2.3) a (2.8), obtém-se os termos da expansão polinomial, conforme mostra a figura (2.14).

1	...	cte.
L ₁ L ₂	...	1º grau
L ₁ ² L ₁ L ₂ L ₂ ²	...	2º grau

Figura 2.14 - Termos da expansão polinomial para o elemento triangular quadrático.

Observa-se pela figura (2.14) que a expansão polinomial satisfaz os critérios de convergência, ou seja, além de ter garantida a continuidade C°, apresenta o termo constante e possui o polinômio do primeiro grau.

As equações (2.80) a (2.82) podem, também, ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(L_1, L_2, \zeta) \\ v(L_1, L_2, \zeta) \\ w(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 [N_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

sendo que $[N_i(L_1, L_2, \zeta)]$ é uma matriz (3x5), composta das funções de forma N_i e dos parâmetros referentes ao nó i : espessura t_i e componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[N_i(L_1, L_2, \zeta) \right] = & \begin{bmatrix} N_i(L_1, L_2) & 0 & 0 & \zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \\ 0 & N_i(L_1, L_2) & 0 & \zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \\ 0 & 0 & N_i(L_1, L_2) & \zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ & & & -\zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ & & & -\zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ & & & -\zeta \cdot N_i(L_1, L_2) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (2.84)
\end{aligned}$$

Considerando-se, agora, $\{a_i\}$ como sendo uma matriz coluna (5x1), constituída dos deslocamentos e rotações relativos ao nó i :

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

pode-se, então, reescrever a equação (2.83) da seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(L_1, L_2, \zeta) \\ v(L_1, L_2, \zeta) \\ w(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = [[N_1(L_1, L_2, \zeta)], [N_2(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [N_i(L_1, L_2, \zeta)], \dots, \\ \dots, [N_6(L_1, L_2, \zeta)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_6\} \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

Observa-se, assim, que para cada nó i da superfície média do elemento de casca, corresponde cinco graus de liberdade: três translações (u_i , v_i e w_i) e duas rotações (α_i e β_i).

Pode-se, também, reescrever a equação (2.86) na forma compacta:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (2.87)$$

onde, $\{u\}$ é uma matriz coluna (3x1), composta pelos deslocamentos: $u(L_1, L_2, \zeta)$, $v(L_1, L_2, \zeta)$ e $w(L_1, L_2, \zeta)$, $[N]$ é uma matriz (3x30), constituída das funções de forma N_i e $\{a\}$ é uma matriz coluna (30x1), constituída dos deslocamentos e rotações nodais: u_i , v_i , w_i , α_i e β_i .

2.3 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

2.3.1 - Introdução

Conforme mostra a figura 2.15, um ponto $\mathbf{Q}$ qualquer do elemento de casca, sujeito a uma solicitação genérica, apresenta segundo o sistema de referência global $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, o seguinte *estado de deformação específica*, segundo Przemieniecki [14]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.89)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.90)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.91)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.92)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.93)$$

considerando-se que $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto $\mathbf{Q}$ em relação ao mesmo sistema de referência. Entretanto, conforme apresenta as equações (2.80), (2.81) e (2.82), u , v e w são funções das coordenadas de área $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, e da coordenada linear ζ , assim como também as coordenadas do ponto $\mathbf{Q}$: x , y e z , de acordo com as expressões (2.45), (2.46) e (2.47). Sendo assim, utilizando-se a regra da derivação

em cadeia, pode-se obter as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas globais x, y e z , através da seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{A}_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{A}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiano da transformação, dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial y}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial z}{\partial \mathcal{A}_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial y}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial z}{\partial \mathcal{A}_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

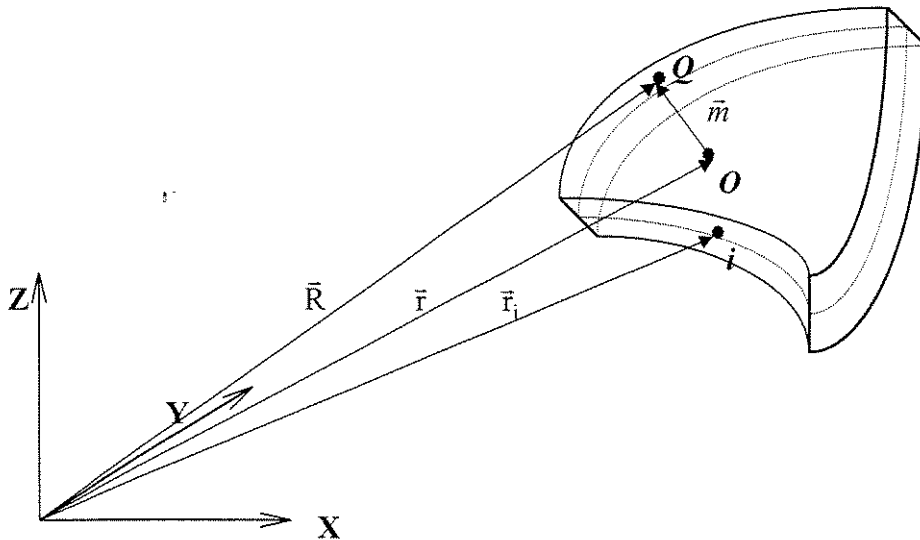


Figura 2.14 - Elemento de casca com um ponto genérico Q .

Considerando-se que as coordenadas do vetor $\bar{\mathbf{R}}$ são x , y e z , de acordo com o sistema de referência global, assim como : $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{m}}$ (equação 2.42), pode-se então, reescrever a expressão (2.95) da seguinte forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathcal{L}_1} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathcal{L}_2} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{m}})}{\partial \mathcal{L}_1} \\ \frac{\partial(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{m}})}{\partial \mathcal{L}_2} \\ \frac{\partial(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{m}})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathcal{L}_1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \mathcal{L}_1} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathcal{L}_2} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \mathcal{L}_2} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Considerando-se que:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \mathcal{L}_1} = \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \mathcal{L}_2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \zeta} = \bar{\mathbf{0}} \quad (2.97)$$

pode-se reescrever a equação (2.95) como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathcal{L}_1} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathcal{L}_2} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_1 \\ \bar{\mathbf{r}}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}_3 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

onde $\bar{\mathbf{r}}_1$ e $\bar{\mathbf{r}}_2$ são os vetores tangentes à superfície média do elemento de casca, os quais podem ser obtidos através das equações (2.13) e (2.14) e $\bar{\mathbf{V}}_3$ é um vetor normal a essa superfície dado por:

$$\bar{V}_3(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.99)$$

Admitindo-se que V_{31} , V_{32} e V_{33} são as coordenadas do vetor $\bar{V}_3$, segundo o sistema de referência global, pode-se reescrever a equação (2.99) como:

$$\bar{V}_3(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} V_{31}(L_1, L_2) \\ V_{32}(L_1, L_2) \\ V_{33}(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

Sendo assim,

$$V_{31}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (2.101)$$

$$V_{32}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (2.102)$$

$$V_{33}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (2.103)$$

Tendo-se determinado a matriz Jacobiano da transformação, pode-se, agora, obter a sua matriz inversa, dada por:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 & \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiano, obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|J| = \bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) = r_{11}(L_1, L_2) \cdot [r_{22}(L_1, L_2)V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2)V_{32}(L_1, L_2)] \\
- r_{12}(L_1, L_2) \cdot [r_{21}(L_1, L_2)V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2)V_{31}(L_1, L_2)] \\
+ r_{13}(L_1, L_2) \cdot [r_{21}(L_1, L_2)V_{32}(L_1, L_2) - r_{22}(L_1, L_2)V_{31}(L_1, L_2)]
\end{aligned}
\tag{2.105}$$

onde as coordenadas dos vetores $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ são dadas pelas equações (2.18) a (2.23) e as do vetor $\bar{V}_3$ através das expressões (2.101) a (2.103).

2.3.2 - Estado de deformação específica segundo o sistema de referência local (x', y', z')

Admitindo-se um ponto $\mathcal{Q}$ qualquer do elemento de casca, conforme apresenta a figura (2.15), o seu *estado de deformação específica* em relação ao sistema de referência local (x', y', z'), associado ao ponto $\mathcal{O}$, será dado por:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \tag{2.106}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \tag{2.107}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \tag{2.108}$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \tag{2.109}$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \tag{2.110}$$

onde u' , v' e w' são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q , com relação ao sistema de referência local.

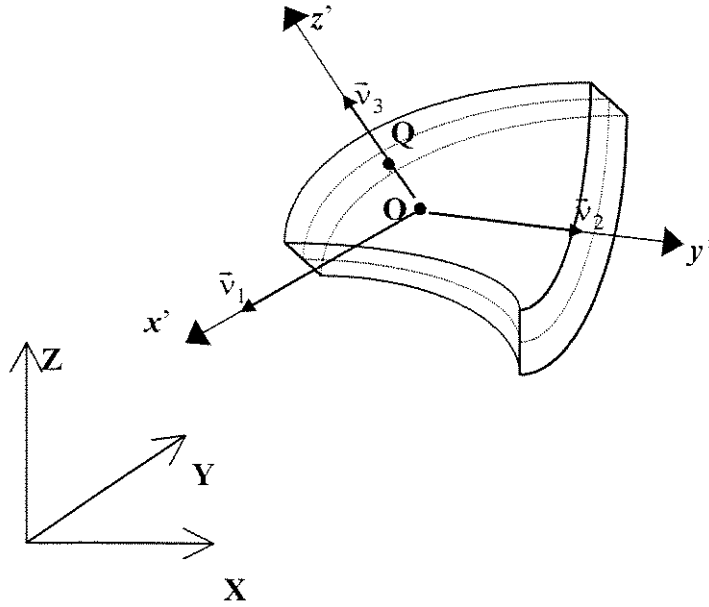


Figura 2.15 - Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O .

Verifica-se, entretanto, que para determinar-se este *estado de deformação específica* é necessário obter as derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às coordenadas locais (x', y', z') . Isto torna-se possível através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (2.111)$$

na qual $[\theta]$ é uma matriz quadrada constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Portanto:

$$[\theta] = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] \quad (2.112)$$

onde $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$ são dados, respectivamente, pelas equações (2.54), (2.59) e (2.31).

Substituindo-se a equação (2.94) na expressão (2.111), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{A}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{A}_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{A}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{A}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (2.113)$$

Utilizando-se as equações (2.104) e (2.112), pode-se escrever que:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot [\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 \quad \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 \quad \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2] \quad (2.114)$$

ou ainda:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Todavia, $(\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3)$ e $(\vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1)$ são vetores tangentes à superfície média e $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ é um vetor normal a ela, o que resulta:

$$\vec{v}_3 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{v}_3 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = 0 \quad (2.116)$$

Sendo assim,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

onde:

$$A_{11}(L_1, L_2) = \vec{v}_1(L_1, L_2) \cdot (\vec{r}_2(L_1, L_2) \wedge \vec{V}_3(L_1, L_2)) \quad (2.118)$$

$$A_{21}(L_1, L_2) = \vec{v}_2(L_1, L_2) \cdot (\vec{r}_2(L_1, L_2) \wedge \vec{V}_3(L_1, L_2)) \quad (2.119)$$

$$A_{12}(L_1, L_2) = \vec{v}_1(L_1, L_2) \cdot (\vec{V}_3(L_1, L_2) \wedge \vec{r}_1(L_1, L_2)) \quad (2.120)$$

$$A_{22}(L_1, L_2) = \vec{v}_2(L_1, L_2) \cdot (\vec{V}_3(L_1, L_2) \wedge \vec{r}_1(L_1, L_2)) \quad (2.121)$$

$$A_{33}(L_1, L_2) = \vec{v}_3(L_1, L_2) \cdot (\vec{r}_1(L_1, L_2) \wedge \vec{r}_2(L_1, L_2)) = \vec{v}_3(L_1, L_2) \cdot \vec{r}_3(L_1, L_2) \quad (2.122)$$

O apêndice B apresenta os resultados dos produtos: escalar e vetorial das equações (2.118) a (2.122).

Portanto, a equação (2.113) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Efetuada-se a expressão (2.123), encontram-se as derivadas necessárias para a definição do *estado de deformação específica* do ponto $\mathbf{Q}$, com relação ao sistema de referência local. Desta forma:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot v_{11} & A_{11} \cdot v_{12} & A_{11} \cdot v_{13} & A_{12} \cdot v_{11} & A_{12} \cdot v_{12} & A_{12} \cdot v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \cdot v_{21} & A_{21} \cdot v_{22} & A_{21} \cdot v_{23} & A_{22} \cdot v_{21} & A_{22} \cdot v_{22} & A_{22} \cdot v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \cdot v_{11} & A_{21} \cdot v_{12} & A_{21} \cdot v_{13} & A_{22} \cdot v_{11} & A_{22} \cdot v_{12} & A_{22} \cdot v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot v_{21} & A_{11} \cdot v_{22} & A_{11} \cdot v_{23} & A_{12} \cdot v_{21} & A_{12} \cdot v_{22} & A_{12} \cdot v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \cdot v_{31} & A_{21} \cdot v_{32} & A_{21} \cdot v_{33} & A_{22} \cdot v_{31} & A_{22} \cdot v_{32} & A_{22} \cdot v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot v_{31} & A_{11} \cdot v_{32} & A_{11} \cdot v_{33} & A_{12} \cdot v_{31} & A_{12} \cdot v_{32} & A_{12} \cdot v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.129)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33} \cdot v_{11} & A_{33} \cdot v_{12} & A_{33} \cdot v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33} \cdot v_{21} & A_{33} \cdot v_{22} & A_{33} \cdot v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (2.131)$$

Sendo assim e de acordo com as equações (2.106) a (2.110), chega-se a:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot v_{11} & A_{11} \cdot v_{12} & A_{11} \cdot v_{13} & A_{12} \cdot v_{11} & A_{12} \cdot v_{12} & A_{12} \cdot v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.132)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \cdot v_{21} & A_{21} \cdot v_{22} & A_{21} \cdot v_{23} & A_{22} \cdot v_{21} & A_{22} \cdot v_{22} & A_{22} \cdot v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_1} & \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial v}{\partial \mathcal{L}_2} & \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.133)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (A_{21} \cdot v_{11} + A_{11} \cdot v_{21}) & (A_{21} \cdot v_{12} + A_{11} \cdot v_{22}) & (A_{21} \cdot v_{13} + A_{11} \cdot v_{23}) \\ (A_{22} \cdot v_{11} + A_{12} \cdot v_{21}) & (A_{22} \cdot v_{12} + A_{12} \cdot v_{22}) & (A_{22} \cdot v_{13} + A_{12} \cdot v_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} & \frac{\partial v}{\partial L_1} & \frac{\partial w}{\partial L_1} & \frac{\partial u}{\partial L_2} & \frac{\partial v}{\partial L_2} & \frac{\partial w}{\partial L_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.134)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot v_{31} & A_{11} \cdot v_{32} & A_{11} \cdot v_{33} & A_{12} \cdot v_{31} & A_{12} \cdot v_{32} & A_{12} \cdot v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} & \frac{\partial v}{\partial L_1} & \frac{\partial w}{\partial L_1} & \frac{\partial u}{\partial L_2} & \frac{\partial v}{\partial L_2} & \frac{\partial w}{\partial L_2} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33} \cdot v_{11} & A_{33} \cdot v_{12} \\ A_{33} \cdot v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (2.135)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \cdot v_{31} & A_{21} \cdot v_{32} & A_{21} \cdot v_{33} & A_{22} \cdot v_{31} & A_{22} \cdot v_{32} & A_{22} \cdot v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} & \frac{\partial v}{\partial L_1} & \frac{\partial w}{\partial L_1} & \frac{\partial u}{\partial L_2} & \frac{\partial v}{\partial L_2} & \frac{\partial w}{\partial L_2} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33} \cdot v_{21} & A_{33} \cdot v_{22} \\ A_{33} \cdot v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (2.136)$$

As equações (2.132) a (2.136) podem também ser dadas na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} & \frac{\partial v}{\partial L_1} & \frac{\partial w}{\partial L_1} & \frac{\partial u}{\partial L_2} & \frac{\partial v}{\partial L_2} & \frac{\partial w}{\partial L_2} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (2.137)$$

onde:

$$[d(L_1, L_2)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Os elementos da matriz $[d(L_1, L_2)]$, são apresentados no apêndice B.

Para a determinação do *estado de deformação específica* no ponto $\mathbf{Q}$, segundo o sistema de referência global, obtêm-se, agora, as derivadas dos deslocamentos globais $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com relação as coordenadas L_1 , L_2 e ζ , levando-se em consideração as equações (2.80), (2.81) e (2.82):

$$\frac{\partial \mathbf{u}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \mathbf{u}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{21i} \cdot \beta_i \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \mathbf{v}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{22i} \cdot \beta_i \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \mathbf{w}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{23i} \cdot \beta_i \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \mathbf{u}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{21i} \cdot \beta_i \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \mathbf{v}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{22i} \cdot \beta_i \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \mathbf{w}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \mathbf{v}_{23i} \cdot \beta_i \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (2.145)$$

$$\frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (2.146)$$

$$\frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (2.147)$$

As equações (2.139) a (2.147) também podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^6 [G_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right\} \quad (2.148)$$

onde $[G_i(L_1, L_2, \zeta)]$ é uma matriz (9x5), dada por:

$$\begin{aligned}
\left[G_i(L_1, L_2, \zeta) \right] = & \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & 0 & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & 0 & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (2.149)
\end{aligned}$$

sendo que as expressões das derivadas das funções de forma são apresentadas no apêndice A.

Utilizando-se a equação (2.148) na expressão (2.137), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [G_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 [B_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2.151)$$

na qual $[B_i(L_1, L_2, \zeta)]$ é uma matriz (5x5), dada por:

$$[B_i(L_1, L_2, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} \\ B_{31i} & B_{32i} & B_{33i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} \\ B_{41i} & B_{42i} & B_{43i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \\ B_{51i} & B_{52i} & B_{53i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Os elementos da matriz $[B_i(L_1, L_2, \zeta)]$ são apresentados no apêndice B.

A equação (2.151) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} B_1(L_1, L_2, \zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(L_1, L_2, \zeta) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} B_i(L_1, L_2, \zeta) \end{bmatrix} \cdots \right. \\
\left. \cdots \begin{bmatrix} B_6(L_1, L_2, \zeta) \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_6\} \end{Bmatrix} \quad (2.153)$$

ou ainda, de maneira compacta:

$$\{\varepsilon'\} = [B].\{a\} \quad (2.154)$$

onde,

- * $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5x1), constituída das deformações específicas e distorções no ponto $\mathbf{Q}$, segundo o sistema de referência local;
- * $[B]$ é uma matriz (5x30), constituída da derivada das funções de forma;
- * $\{a\}$ é uma matriz coluna (30x1), constituída dos deslocamentos nodais: $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_i$ e das rotações α_i e β_i .

2.4 - DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO

2.4.1 - Introdução

A figura 2.16 apresenta o estado de tensão em um ponto Q qualquer do elemento de casca, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O , o qual é representado pela figura 2.16.

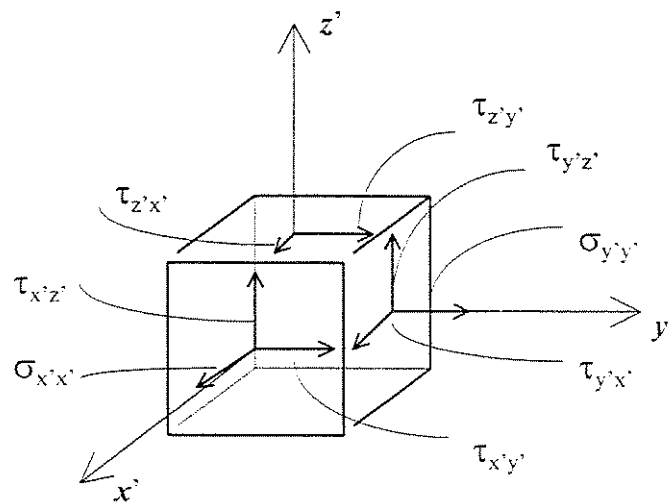


Figura 2.16 - Estado de tensão no ponto Q .

Conforme mostra a figura 2.16, admite-se a tensão normal $\sigma_{z'z'}$ nula, de acordo com as hipóteses básicas de Kirchhoff [18], por ser esta desprezível em relação às demais tensões.

O estado de deformação específica no ponto $\mathbf{Q}$, segundo o sistema de referência local (x' , y' , z'), considerando-se o material do elemento de casca homogêneo, isotrópico e elástico linear, é obtido através da *Lei de Hooke Generalizada*, segundo Timoshenko [12]:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'x'} - \nu \cdot \sigma_{y'y'}) \quad (2.155)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'y'} - \nu \cdot \sigma_{x'x'}) \quad (2.156)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'y'} \quad (2.157)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'z'} \quad (2.158)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{y'z'} \quad (2.159)$$

onde, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e ν o seu coeficiente de Poisson.

As equações (2.155) a (2.159) podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (2.160)$$

ou ainda, na forma compacta:

$$\{\varepsilon'\} = [\mathcal{D}'] \cdot \{\sigma'\} \quad (2.161)$$

Na expressão (2.161), $[\varnothing']$ é uma matriz quadrada (5x5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5x1), composta das tensões atuantes no ponto $\underline{Q}$, de acordo com o sistema de referência local (x', y', z') .

Resolvendo-se a expressão (2.161) para as tensões, tem-se:

$$\{\sigma'\} = [\varnothing']^{-1} \cdot \{\varepsilon'\} \quad (2.162)$$

ou então:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (2.163)$$

Na equação (2.163), $[D']$ é a matriz inversa de $[\varnothing]$, dada por:

$$[D'] = [\varnothing']^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

Observando-se que a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento de casca e de placa não é uniforme, mas aproximadamente parabólica, segundo Volterra et al. [13], adota-se uma constante k de valor igual a 1,2 na matriz $[D']$, nos termos relacionados com as tensões de cisalhamento $\tau_{x'z'}$ e $\tau_{y'z'}$, com o objetivo de considerar-se este efeito. Portanto:

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

Substituindo-se a expressão (2.154) na equação (2.163), chega-se a:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (2.166)$$

2.4.2 - Determinação das características do elemento de casca

Admite-se o elemento de casca sujeito a forças de superfície $\bar{q}$, com componentes $q_{x'}$, $q_{y'}$ e $q_{z'}$, em relação ao sistema de referência local (x', y', z') , assim como a forças de corpo $\bar{b}$, cujas componentes em relação a esse sistema de referência são: $b_{x'}$, $b_{y'}$ e $b_{z'}$. Dessa forma, se em função do carregamento atuante, os deslocamentos u' , v' e w' apresentados pelos pontos do elemento, sofrerem, respectivamente, os incrementos $\delta u'$, $\delta v'$ e $\delta w'$, os quais são denominados *deslocamentos virtuais*, o estado de deformação específica desses pontos (equações 2.84 a 2.89), sofrerá os seguintes incrementos, designados *deformações específicas virtuais*:

$$\delta \varepsilon_{x'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \quad (2.167)$$

$$\delta \varepsilon_{y'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial y'} \quad (2.168)$$

$$\delta\gamma_{x'y'} = \frac{\partial\delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial\delta v'}{\partial x'} \quad (2.169)$$

$$\delta\gamma_{x'z'} = \frac{\partial\delta u'}{\partial z'} + \frac{\partial\delta w'}{\partial x'} \quad (2.170)$$

$$\delta\gamma_{y'z'} = \frac{\partial\delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial\delta w'}{\partial y'} \quad (2.171)$$

Sendo assim, como resultado dos *deslocamentos virtuais*, o *trabalho virtual*, δW , realizado pelas forças de superfície e de corpo, será obtido, conforme Przemieniecki [14], por:

$$\delta W = \int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV \quad (2.172)$$

onde:

$\{\delta u'\}$ é uma matriz coluna (3x1) composta pelos deslocamentos: $\delta u'$, $\delta v'$ e $\delta w'$. Portanto:

$$\{\delta u'\} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (2.173)$$

$\{q'\}$ é uma matriz coluna (3x1) constituída pelas componentes das forças de superfície:

$q_{x'}$, $q_{y'}$ e $q_{z'}$. Dessa forma:

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (2.174)$$

$\{\mathbf{b}'\}$ é uma matriz coluna (3x1) constituída pelas componentes das forças de corpo: $\mathbf{b}_{x'}$, $\mathbf{b}_{y'}$ e $\mathbf{b}_{z'}$. Sendo assim:

$$\{\mathbf{b}'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (2.175)$$

Da mesma forma, a *energia de deformação virtual*, δU , acumulada no elemento de casca, como consequência do estado de tensão em seus pontos e do estado de deformação específica virtual, correspondente, será dada, conforme Przemieniecki [14], por:

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (2.176)$$

onde:

$\{\delta \varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5x1) composta das deformações específicas virtuais:

$$\{\delta \varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{x'} \\ \delta \varepsilon_{y'} \\ \delta \gamma_{x'y'} \\ \delta \gamma_{x'z'} \\ \delta \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (2.177)$$

$\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5x1) constituída das tensões atuantes nos pontos do elemento, conforme o sistema de referência local (x' , y' , z'):

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (2.178)$$

Portanto, empregando-se o *princípio dos trabalhos virtuais*, conforme Przemieniecki [14], chega-se a:

$$\delta W = \delta U \quad (2.179)$$

ou então:

$$\int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV = \int_V \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (2.180)$$

Verifica-se que, com o auxílio da equação (2.87), encontram-se os deslocamentos $\{u\}$, segundo o sistema de referência global. Entretanto, necessita-se dos deslocamentos $\{u'\}$, em relação ao sistema de referência local. Sendo assim, pode-se fazer a seguinte transformação:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (2.181)$$

onde $[\theta]$ já foi definido anteriormente através da expressão (2.112).

Da mesma forma, pode-se escrever que:

$$\{q'\} = [\theta]^T \cdot \{q\} \quad (2.182)$$

e

$$\{b'\} = [\theta]^T \cdot \{b\} \quad (2.183)$$

sendo que:

$\{q\}$ = forças de superfície em relação ao sistema de referência global;

$\{b\}$ = forças de corpo segundo o sistema de referência global.

Considerando-se a equação (2.181), os deslocamentos virtuais $\{\delta u'\}$ podem ser dados, segundo Zienkiewicz et al. [9], por:

$$\{\delta u'\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{\delta a\} \quad (2.184)$$

Da mesma forma, levando-se em conta a expressão (2.154), as deformações específicas virtuais, $\{\delta \varepsilon'\}$, podem ser dadas, conforme Zienkiewicz et al. [9], por:

$$\{\delta \varepsilon'\} = [B] \cdot \{\delta a\} \quad (2.185)$$

Nas equações (2.184) e (2.185), $\{\delta a\}$ é a matriz coluna, composta pelos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.

Substituindo-se as expressões (2.166), e (2.182) a (2.185) na equação (2.180), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \\ \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \end{aligned} \quad (2.186)$$

Sabendo-se que $[\theta]$ é uma matriz quadrada que possui colunas ortonormais, pode-se escrever, conforme Lipschutz [15], que:

$$[\theta] \cdot [\theta]^T = [I] \quad (2.187)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Portanto, a equação (2.186) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (2.188)$$

sabendo-se ainda que $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes para as integrações na área e no volume:

$$\{\delta a\}^T \left(\int_A [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV \right) = \{\delta a\}^T \left(\int_V [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot dV \right) \cdot \{a\} \quad (2.189)$$

Considerando-se que a expressão (2.189) é válida para qualquer deslocamento $\{\delta a\}^T$, encontra-se:

$$\int_A [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \left(\int_V [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot dV \right) \cdot \{a\} \quad (2.190)$$

onde:

$$\int_A [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA = \{f_q^e\} \quad (2.191)$$

e

$$\int_V [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \{f_b^e\} \quad (2.192)$$

A expressão (2.191) é uma matriz coluna (30x1), correspondente às forças de superfície e a equação (2.192) também é uma matriz coluna (30x1), relativa às forças de corpo.

Da mesma forma:

$$\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV = [K^e] \quad (2.193)$$

sendo que $[K^e]$ é uma matriz quadrada e simétrica (30x30), denominada **matriz de rigidez** do elemento. Portanto, pode-se reescrever a expressão (2.190) como segue:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} = \{f^e\} \quad (2.194)$$

na qual $\{f^e\}$ é, dessa forma, o **vetor de carga** do elemento, correspondente às forças de superfície e de corpo.

2.4.3 - Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca

O diferencial de volume, dV , da equação (2.193), a qual possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento, é dado segundo o sistema de referência global ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$). Sendo assim:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.195)$$

Considerando-se que os termos da matriz $[B]$ são funções das coordenadas de área L_1 e L_2 , assim como da coordenada linear, ζ , o diferencial de volume, dV , deve ser definido também segundo este sistema de referência. Pode-se, todavia, efetuar a transformação necessária através de um procedimento padrão que envolve o determinante, $|J(L_1, L_2)|$, da matriz Jacobiano (expressão (2.95)). Este determinante é dado a partir da equação (2.105). Portanto, conforme Kaplan [17]:

$$dV = |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.196)$$

Utilizando-se a expressão anterior, a equação (2.193) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$[K^e] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.197)$$

Substituindo-se a matriz [B] na expressão (2.197), chega-se a:

$$[K^e] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_1(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_l(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_6(L_1, L_2, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot [D'] \cdot \left[[B_1(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_j(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_6(L_1, L_2, \zeta)] \right] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.198)$$

Resolvendo-se a equação anterior, determina-se a *matriz de rigidez* do elemento, dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{1j}] & \dots & [K_{16}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{2j}] & \dots & [K_{26}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{i1}] & [K_{i2}] & \dots & [K_{ij}] & \dots & [K_{i6}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{61}] & [K_{62}] & \dots & [K_{6j}] & \dots & [K_{66}] \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

2.4.3.1 - Determinação da submatriz $[K_{ij}]$

Conforme mostra a equação (2.198), a submatriz $[K_{ij}]$ será definida pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 [B_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \cdot [D'] \cdot [B_j(L_1, L_2, \zeta)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.200)$$

Considerando-se ainda as expressões (2.152) e (2.165), reescreve-se a equação anterior:

$$[K_{ij}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i}) \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i}) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11j} & B_{12j} \\ B_{21j} & B_{22j} \\ B_{31j} & B_{32j} \\ B_{41j} & B_{42j} \\ B_{51j} & B_{52j} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc}
B_{13j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15j} \\
B_{23j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25j} \\
B_{33j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35j} \\
B_{43j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44j} + \frac{t_i}{2} C_{44j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45j} + \frac{t_i}{2} C_{45j} \\
B_{53j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54j} + \frac{t_i}{2} C_{54j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55j} + \frac{t_i}{2} C_{55j}
\end{array} \right] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.201)
\end{aligned}$$

Resolvendo-se a expressão (2.201), encontra-se:

$$\left[K_{ij} \right] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

na qual:

$$\begin{aligned}
k_{11} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41j} + B_{51i} \cdot B_{51j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.203)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41j} + B_{52i} \cdot B_{51j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.204)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& + \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41j} + B_{53i} \cdot B_{51j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.205}$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{41j} + B_{54i} \cdot B_{51j}) \\
& + \left. (C_{44i} \cdot B_{41j} + C_{54i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.206}$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{41j} + B_{55i} \cdot B_{51j}) \\
& + \left. (C_{45i} \cdot B_{41j} + C_{55i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.207}$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42j} + B_{51i} \cdot B_{52j}) \Big\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.208}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42j} + B_{52i} \cdot B_{52j}) \Big\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.209}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42j} + B_{53i} \cdot B_{52j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.210}$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{42j} + B_{54i} \cdot B_{52j}) \right. \\
& \left. + (C_{44i} \cdot B_{42j} + C_{54i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.211}$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{42j} + B_{55i} \cdot B_{52j}) \right. \\
& \left. + (C_{45i} \cdot B_{42j} + C_{55i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.212}$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43j} + B_{51i} \cdot B_{53j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.213}$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43j} + B_{52i} \cdot B_{53j}) \right\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.214}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23j} \right. \right. \\
& + \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33j} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43j} + B_{53i} \cdot B_{53j}) \Big\} \\
& \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.215}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{23j} \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33j} \Big] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot \left[\zeta (B_{44i} \cdot B_{43j} + B_{54i} \cdot B_{53j}) \right. \\
& + \left. \left. (C_{44i} \cdot B_{43j} + C_{54i} \cdot B_{53j}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.216}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{23j} \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33j} \Big] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot \left[\zeta (B_{45i} \cdot B_{43j} + B_{55i} \cdot B_{53j}) \right. \\
& + \left. \left. (C_{45i} \cdot B_{43j} + C_{55i} \cdot B_{53j}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.217}$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{24j} \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{34j} \Big] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot \left[\zeta (B_{41i} \cdot B_{44j} + B_{51i} \cdot B_{54j}) \right. \\
& + \left. \left. (B_{41i} \cdot C_{44j} + B_{51i} \cdot C_{54j}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.218}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{24j} \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{34j} \Big] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot \left[\zeta (B_{42i} \cdot B_{44j} + B_{52i} \cdot B_{54j}) \right. \\
& + \left. \left. (B_{42i} \cdot C_{44j} + B_{52i} \cdot C_{54j}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.219}$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{24j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{43i} \cdot B_{44j} + B_{53i} \cdot B_{54j}) \\
& \left. + (B_{43i} \cdot C_{44j} + B_{53i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.220}$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{24j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{44j} + B_{54i} \cdot B_{54j}) \\
& + \zeta (B_{44i} \cdot C_{44j} + B_{54i} \cdot C_{54j}) + (C_{44i} \cdot C_{44j} + C_{54i} \cdot C_{54j})] + \\
& \left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{44i} \cdot B_{44j} + C_{54i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.221}$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{24j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{44j} + B_{55i} \cdot B_{54j}) \\
& + \zeta (B_{45i} \cdot C_{44j} + B_{55i} \cdot C_{54j}) + (C_{45i} \cdot C_{44j} + C_{55i} \cdot C_{54j})] + \\
& \left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{45i} \cdot B_{44j} + C_{55i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.222}$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{25j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{41i} \cdot B_{45j} + B_{51i} \cdot B_{55j}) \\
& \left. + (B_{41i} \cdot C_{45j} + B_{51i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.223}$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{25j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{42i} \cdot B_{45j} + B_{52i} \cdot B_{55j}) \\
& \left. + (B_{42i} \cdot C_{45j} + B_{52i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.224}$$

$$\begin{aligned}
k_{35} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{25j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{43i} \cdot B_{45j} + B_{53i} \cdot B_{55j}) \\
& \left. + (B_{43i} \cdot C_{45j} + B_{53i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.225}$$

$$\begin{aligned}
k_{45} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{25j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{45j} + B_{54i} \cdot B_{55j}) \\
& + \zeta (B_{44i} \cdot C_{45j} + B_{54i} \cdot C_{55j}) + (C_{44i} \cdot C_{45j} + C_{54i} \cdot C_{55j})] + \\
& \left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{44i} \cdot B_{45j} + C_{54i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.226}$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = E \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 & \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{25j} \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{45j} + B_{55i} \cdot B_{55j}) \\
& + \zeta (B_{45i} \cdot C_{45j} + B_{55i} \cdot C_{55j}) + (C_{45i} \cdot C_{45j} + C_{55i} \cdot C_{55j})] + \\
& \left. \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{45i} \cdot B_{45j} + C_{55i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{2.227}$$

Sendo assim, para obter-se a *matriz de rigidez*, a integração na direção da coordenada linear ζ será feita analiticamente, com o objetivo de reduzir o tempo de computação e para as coordenadas de área $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, a integração será numérica, considerando-se o processo da *quadratura de Gauss*, segundo Zienkiewicz et al. [9]. Portanto, levando-se em conta que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\ \int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\ \int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= 2/3\end{aligned}\tag{2.228}$$

e assumindo-se que L_{1p} e L_{2p} sejam as coordenadas de área do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, conforme Zienkiewicz et al. [9], as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned}k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{11j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{21j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot \right. \\ \left. \left(B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p\end{aligned}\tag{2.229}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{11j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{21j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \\
\cdot \left(B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \Bigg\} \\
\cdot \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.230}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{11j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{21j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \\
\cdot \left(B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \Bigg\} \\
\cdot \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.231}$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot \left[\left(C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] \\
\cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.232}$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot \left[\left(C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] \\
\cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.233}$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{12j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{22j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\
\left. \cdot \left(B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\
\frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.234}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{12j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{22j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\
\left. \cdot \left(B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\
\frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.235}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{12j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{22j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\
\left. \cdot \left(B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\
\frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.236}$$

$$k_{42} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot \left[C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.237)$$

$$k_{52} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot \left[C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.238)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{13j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{23j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\ \left. \cdot \left(B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.239)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{13j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{23j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\ \left. \cdot \left(B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.240)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m & \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{13j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
& + \left(\nu B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{23j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
& + \left. \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \right. \\
& \cdot \left(B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \Bigg\} \\
& \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.241}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot & \left[C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \\
& \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.242}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot & \left[C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \\
& \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.243}$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot & \left[B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \\
& \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.244}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot & \left[B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \\
& \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.245}$$

$$k_{34} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot \left[B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.246)$$

$$k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{14i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{24i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{14j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{14i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{24i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{24j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \right. \\ \left. \cdot \left[\left(B_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{t_j \cdot t_i}{4k(1+\nu)} \left(C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.247)$$

$$k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{15i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{25i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{14j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{15i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{25i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{24j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{34j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \\ \cdot \left[\left(B_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] + \\ \frac{t_j \cdot t_i}{4k(1+\nu)} \left(C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.248)$$

$$k_{15} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot \left[\left(B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.249)$$

$$k_{25} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot \left[(B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55j}(L_{1p}, L_{2p})) \right] \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.250)$$

$$k_{35} = \frac{E}{4k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot \left[(B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55j}(L_{1p}, L_{2p})) \right] \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.251)$$

$$k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{14i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{24i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{15j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\nu B_{14i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{24i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{25j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{35j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \right. \\ \left. \cdot \left[\left(B_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{55j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{t_j \cdot t_i}{4k(1+\nu)} \left(C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\ \frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot \left[\left(B_{15i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu B_{25i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{15j}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
+ \left(\nu B_{15i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{25i}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \cdot B_{25j}(L_{1p}, L_{2p}) \\
+ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{35j}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \\
\cdot \left[\left(B_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{55j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right] \\
+ \left. \frac{t_j \cdot t_i}{4k(1+\nu)} \left(C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45j}(L_{1p}, L_{2p}) + C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55j}(L_{1p}, L_{2p}) \right) \right\} \\
\frac{1}{2} \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{2.253}$$

2.4.4 - Determinação do vetor de carga do elemento

Isoparamétrico: $\{f^e\}$

Verifica-se através das equações (2.191) e (2.192), as quais definem o vetor de carga do elemento, que o diferencial de volume (dV), assim como o diferencial de área (dA), são dados com relação ao sistema de referência global, divergindo portanto dos elementos da matriz $[N]$, que são funções das coordenadas de área L_1 e L_2 . Sendo assim, torna-se necessário que os diferenciais de área e de volume sejam dados segundo este sistema de referência.

O diferencial de volume já foi definido anteriormente através da expressão (2.196) e para a obtenção do diferencial de área, utiliza-se o procedimento padrão, através do módulo do vetor $\bar{r}_3(L_1, L_2)$, normal à superfície média: $\|\bar{r}_3(L_1, L_2)\|$, dado pela equação (2.30). Portanto, conforme Kaplan [17]:

$$dA = \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \tag{2.254}$$

2.4.4.1 - Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento : $\{f_q^e\}$

Considerando-se, por simplicidade, a carga distribuída na superfície média do elemento, onde $\zeta = 0$, os deslocamentos de interesse estarão relacionados com os pontos desta superfície. Sendo assim, a submatriz $[N_i(L_1, L_2, \zeta)]$, dada pela equação (2.84) e que compõe a matriz $[N]$ da expressão (2.191), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[N_i(L_1, L_2, \zeta)] = [N_i(L_1, L_2)] = \begin{bmatrix} N_i(L_1, L_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i(L_1, L_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(L_1, L_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.255)$$

Considere-se, ainda, que a carga distribuída associada ao nó i seja $\bar{q}_i$, com componentes q_{xi} , q_{yi} e q_{zi} , de acordo com o sistema de referência global (X , Y , Z). Portanto, a carga distribuída na superfície média do elemento, $\bar{q}$, poderá ser interpolada utilizando-se as funções de forma N_i , dadas pelas equações (2.3) a (2.8):

$$\bar{q}(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{q}_i \quad (2.256)$$

Supondo-se que as componentes de $\bar{q}$ segundo o sistema de referência global sejam q_x , q_y e q_z , a equação (2.256) torna-se:

$$\bar{q}(L_1, L_2) = \{q(L_1, L_2)\} = \begin{Bmatrix} q_x(L_1, L_2) \\ q_y(L_1, L_2) \\ q_z(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.257)$$

ou:

$$q_x(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot q_{xi} \quad (2.258)$$

$$q_y(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot q_{yi} \quad (2.259)$$

$$q_z(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot q_{zi} \quad (2.260)$$

Levando-se em conta que $\{q_i\}$ é uma matriz coluna (5x1), composta por:

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.261)$$

onde q_{xi} , q_{yi} e q_{zi} são as componentes da carga distribuída relativa ao nó i , segundo o sistema de referência global. As expressões anteriores podem, também, ser dadas da seguinte forma matricial:

$$\{q(L_1, L_2)\} = \begin{Bmatrix} q_x(L_1, L_2) \\ q_y(L_1, L_2) \\ q_z(L_1, L_2) \end{Bmatrix} = [[N_1] \cdots [N_i] \cdots [N_6]] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_6\} \end{Bmatrix} \quad (2.262)$$

Considerando-se as expressões (2.254), (2.255) e (2.262), a equação (2.191) pode ser reescrita como:

$$\left\{f_q^e\right\} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} [N_1]^T \\ \vdots \\ [N_i]^T \\ \vdots \\ [N_6]^T \end{bmatrix} \cdot \left[[N_1] \cdots [N_j] \cdots [N_6] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_j\} \\ \vdots \\ \{q_6\} \end{Bmatrix} \cdot \|\vec{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.263)$$

Portanto, resolvendo-se a equação (2.263) chega-se ao vetor de carga do elemento, relativo à ação da carga distribuída sobre suas faces externas:

$$\left\{f_q^e\right\} = \begin{Bmatrix} \{f_{q1}\} \\ \vdots \\ \{f_{qi}\} \\ \vdots \\ \{f_{q6}\} \end{Bmatrix} \quad (2.264)$$

2.4.4.1.1 - Determinação de $\{f_{qi}\}$:

A submatriz $\{f_{qi}\}$ está associada ao nó i do elemento de casca e é dada por:

$$\{f_{qi}\} = \int_0^1 \int_0^1 [N_i]^T \cdot \sum_{j=1}^6 [N_j] \cdot \{q_j\} \cdot \|\vec{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.265)$$

ou, levando-se em conta as expressões (2.255) e (2.261):

$$\{f_{qi}\} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=1}^6 \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.266)$$

Resolvendo-se a equação (2.266), chega-se a:

$$\{f_{qi}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (2.267)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{xj} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.268)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{yj} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.269)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{zj} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.270)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (2.271)$$

Utilizando-se a integração numérica em relação às coordenadas de área L_1 e L_2 , com m sendo o número total de pontos de integração, as equações (2.268) a (2.271) podem ser reescritas como:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{xj} \cdot \left\| \vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot W_p \quad (2.272)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{yj} \cdot \left\| \vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot W_p \quad (2.273)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot \sum_{j=1}^6 N_j \cdot q_{zj} \cdot \left\| \vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot W_p \quad (2.274)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (2.275)$$

2.4.4.2 - Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo : $\{f_b^e\}$

Admitindo-se como componentes da força de corpo $\vec{b}$: b_x , b_y e b_z , de acordo com o sistema de referência global e utilizando-se as expressões (2.86), (2.87) e (2.196), pode-se reescrever a equação (2.192) como se segue:

$$\{f_b^e\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_1(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_6(L_1, L_2, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.276)$$

Resolvendo-se a equação anterior, encontra-se o vetor de carga do elemento referente à ação das forças de corpo:

$$\{f_b^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{b1}\} \\ \vdots \\ \{f_{bi}\} \\ \vdots \\ \{f_{b6}\} \end{Bmatrix} \quad (2.277)$$

2.4.4.2.1 - Determinação de $\{f_{bi}\}$:

A submatriz $\{f_{bi}\}$ refere-se ao nó i , genérico, do elemento de casca e é dada por:

$$\{f_{bi}\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ \zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{11i} & \zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{12i} & \zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{21i} & -\zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{22i} & -\zeta \cdot N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \nu_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.278)$$

Efetuada-se a equação anterior chega-se a:

$$\{f_{bi}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (2.279)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 N_i \cdot b_x \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.280)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 N_i \cdot b_y \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.281)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 N_i \cdot b_z \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.282)$$

$$f_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot (v_{11i} b_x + v_{12i} b_y + v_{13i} b_z) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.283)$$

$$f_5 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[-\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot (v_{21i} b_x + v_{22i} b_y + v_{23i} b_z) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (2.284)$$

Utilizando-se a expressão (2.228), pode-se, agora, efetuar a integração analítica na direção ζ , assim como a integração numérica em relação às coordenadas de área $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$. Sendo m o número total de pontos de integração, reescreve-se as equações (2.280) a (2.284) da seguinte forma:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot b_x \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot W_p \quad (2.285)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot b_y \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.286)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m N_i \cdot b_z \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (2.287)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (2.288)$$

Capítulo 3

DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO DO TIPO HIERÁRQUICO, A PARTIR DO ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR QUADRÁTICO

3.1 - INTRODUÇÃO

Com o objetivo de aproximar-se mais da **solução exata** de um problema qualquer, busca-se o refinamento da **solução aproximada**, o qual pode ocorrer, de forma geral, através:

1. da criação sucessiva de malhas mais refinadas, introduzindo-se novos elementos, mas com redução da dimensão característica ***h*** dos elementos (refinamento tipo ***h***);
2. do aumento do grau ***p*** do polinômio utilizado na solução aproximada (refinamento tipo ***p***);
3. do refinamento do tipo ***r***, que seria uma combinação entre o refinamento do tipo ***h*** mais o refinamento do tipo ***p***.

No presente trabalho, admite-se para o refinamento da solução aproximada, uma malha constante e aumento sucessivo na ordem ***p*** do elemento, ou seja, refinamento do tipo ***p*** . Entretanto, quando se utilizam as funções de forma padrão, como as apresentadas pelas equações (2.3) a (2.8), para cada mudança na ordem ***p*** da expansão, há um aumento correspondente no número de nós do elemento, conforme mostra a figura 3.1 . Dessa forma, novas funções de

forma devem ser geradas, o que leva, conseqüentemente, todos os seus cálculos a serem refeitos, inutilizando-se assim, os cálculos efetuados anteriormente ao refinamento. De acordo com o que foi exposto, seria conveniente considerar a aproximação como uma *série*, na qual as funções de forma fossem independentes do número de nós do elemento, reutilizando-se os termos já existentes e mantendo-os inalterados.

Sendo assim, pode-se aumentar o grau da expansão considerada, de forma a aproveitar a aproximação original, empregando-se *funções de forma hierárquicas*, as quais representam, simplesmente, um refinamento de ordem superior, conforme Zienkiewicz et al. [8].

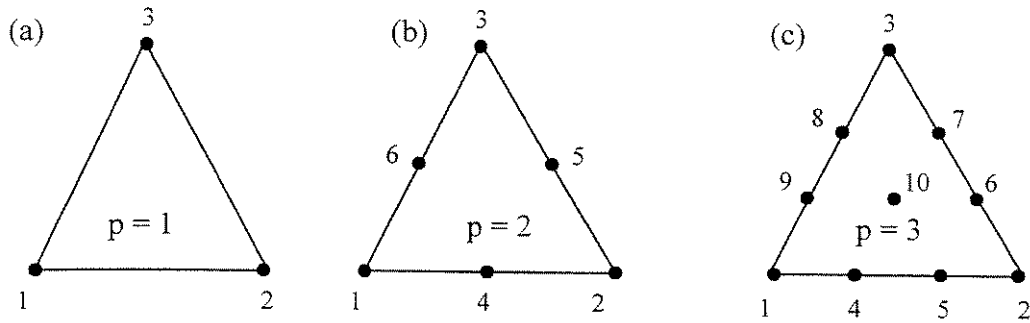


Figura 3.1 - Elementos da família triangular: a) linear, b) quadrático e c) cúbico [9], onde p representa o grau do polinômio completo utilizado na expansão.

3.2 - DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTO

Dessa forma, pode-se obter o *refinamento* da expansão quadrática apresentada pela equação do deslocamento (2.78), adicionando-se à mesma as funções de forma hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$, de ordem superior a dois, as quais são definidas a partir dos lados do elemento. Nessa função, k refere-se ao grau p do polinômio utilizado na expansão, assumindo neste trabalho o valor 3, estando este associado a cada um dos lados j do elemento, que variam de 1 a 3, conforme

apresenta a figura 3.2 . Portanto, a equação (2.78), obtida anteriormente para o elemento isoparamétrico, pode ser reescrita para o elemento do tipo hierárquico, da seguinte forma:

$$\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} + \sum_{j=1}^3 M_{kj} \cdot \bar{\delta}_{kj} \quad (3.1)$$

onde o termo $\bar{\delta}_{kj}$ da expressão (3.1) é um vetor constituído de parâmetros hierárquicos associados aos lados do elemento, sem significado físico, o que também não se faz necessário, segundo Zienkiewicz et al. [8].

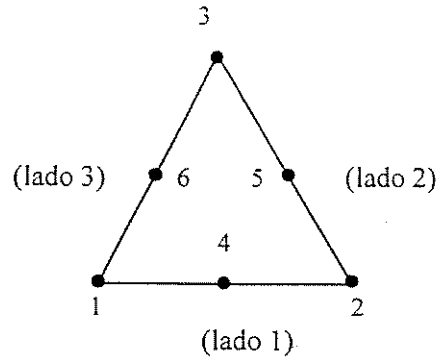


Figura 3.2 - Definição dos lados do elemento triangular.

Igualmente, a figura 3.3 apresenta os termos necessários para que se possa ter um polinômio completo de até sexto grau, através do triângulo de Pascal, conforme Zienkiewicz et al. [8]:

		1					... constante
		L_1		L_2			... 1° grau
		L_1^2		$L_1 L_2$		L_2^2	... 2° grau
	L_1^3		$L_1^2 L_2$		$L_1 L_2^2$		L_2^3 ... 3° grau
	L_1^4		$L_1^3 L_2$		$L_1^2 L_2^2$		$L_1 L_2^3$... 4° grau
	L_1^5		$L_1^4 L_2$		$L_1^3 L_2^2$		$L_1^2 L_2^3$... 5° grau
L_1^6		$L_1^5 L_2$		$L_1^4 L_2^2$		$L_1^3 L_2^3$	$L_1^2 L_2^4$... 6° grau

Figura 3.3 - Triângulo de Pascal, apresentando os termos necessários para se ter um polinômio completo de até sexto grau.

Logo, as funções de forma hierárquicas de terceiro grau, associadas a cada um dos lados do elemento, conforme definição dada pela figura 3.2, são:

$$M_{31}(L_1, L_2) = 3 \cdot (-L_1^2 L_2 + L_1 L_2^2) \quad (3.2)$$

$$M_{32}(L_1, L_2) = 3 \cdot (2L_1^3 - 3L_1^2 L_2 + L_2 + L_1^2 L_2 + 3L_1 L_2^2 - 2L_1 L_2) \quad (3.3)$$

$$M_{33}(L_1, L_2) = 3 \cdot (-2L_1^3 + 3L_1^2 L_2 - L_1 - 3L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2 + 2L_1 L_2) \quad (3.4)$$

as quais, adicionadas a expansão quadrática anteriormente obtida e mostrada pela figura 2.14, resultam em um polinômio completo de 3° grau, como o apresentado na figura 3.4.

		1		cte.
	L_1		L_2	1° grau
	L_1^2		$L_1 L_2$	2° grau
L_1^3		$L_1^2 L_2$		$L_1 L_2^2$3° grau

Figura 3.4 - Expansão cúbica obtida com o uso das funções de forma hierárquicas de grau 3.

Observa-se pela figura mostrada anteriormente, que, além do polinômio completo de 3º grau, a mesma não apresenta termos parasíticos, ou seja, termos de ordem superior à expansão pretendida. Mostra-se também nas figuras 3.5 a 3.7, a representação da variação das funções de forma hierárquicas utilizadas sobre o elemento.

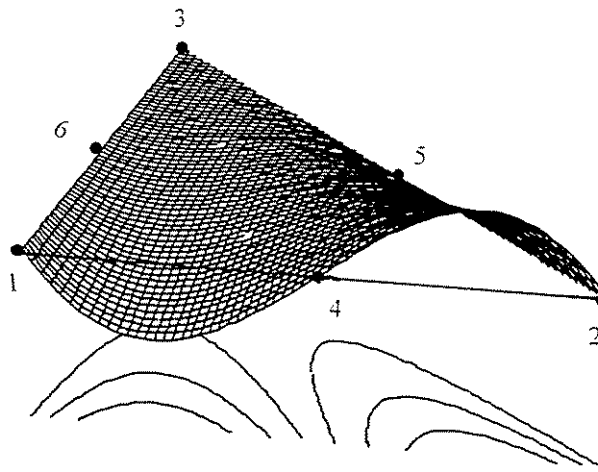


Figura 3.5 – Variação da função de forma M_{31} , de 3º grau, sobre o lado 1 do elemento.

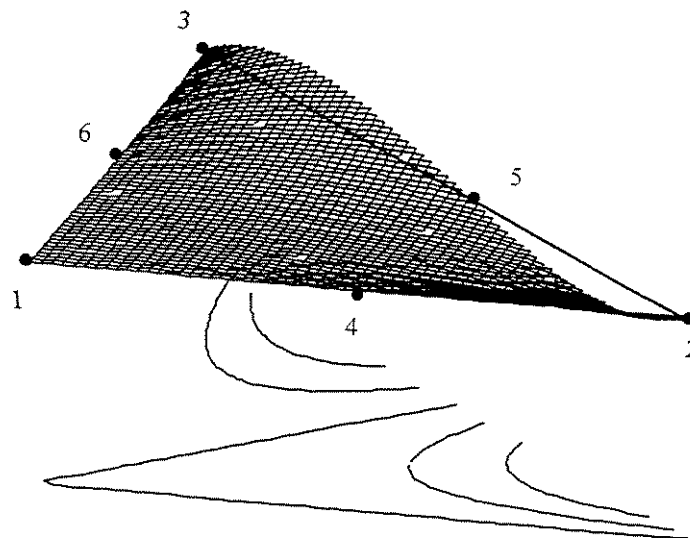


Figura 3.6 – Variação da função de forma M_{32} , de 3º grau, sobre o lado 2 do elemento.

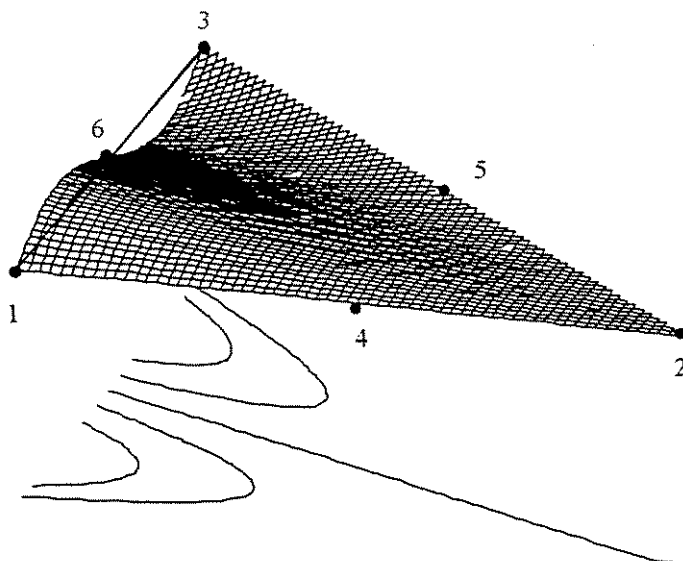


Figura 3.7 – Variação da função de forma M_{33} , de 3º grau, sobre o lado 3 do elemento.

Todavia, conforme relatado por Zienkiewicz et al. [8], o número de funções de forma hierárquicas definidas a partir dos lados do elemento, poderiam vir a ser insuficientes para determinar um polinômio completo de grau p . Sendo assim, funções de forma hierárquicas internas (funções do tipo bolha), as quais resultam no valor zero por todo o contorno do elemento, necessitariam ser introduzidas, nesse caso, de forma a poderem completar os termos ausentes para determinado polinômio de grau p . Portanto, apesar de as mesmas não se mostrarem necessárias, *a priori*, optou-se pelo uso dessas funções, neste trabalho, para futuras *comparações e conclusões*.

Diante do exposto, foi introduzida a função de forma hierárquica do tipo bolha, ou seja, $M_k(L_1, L_2)$. Essa função está associada ao elemento e k , neste caso, refere-se ao grau do polinômio adotado, o qual vale 3. Desta forma, o deslocamento $\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta)$, dado pela equação (3.1), pode ser dado agora por:

$$\bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} + \sum_{j=1}^3 M_{kj}(L_1, L_2) \bar{\delta}_{kj} + M_k(L_1, L_2) \bar{\delta}_k \quad (3.5)$$

onde o termo $\bar{\delta}_k$ da expressão (3.5) é um vetor constituído de parâmetros hierárquicos associados ao elemento.

A função de forma hierárquica do terceiro grau, do tipo bolha, associada ao elemento, seria dada então pela seguinte expressão:

$$M_3(L_1, L_2) = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \quad (3.6)$$

A figura 3.8 apresenta os termos da expansão gerada pela função de forma hierárquica definida pela equação (3.6), assim como a figura 3.9 mostra a representação da variação da mesma sobre o elemento.

$$\begin{array}{ll} L_1 L_2 & \dots 2^\circ \text{ grau incompleto} \\ L_1^2 L_2 & L_1 L_2^2 \quad \dots 3^\circ \text{ grau incompleto} \end{array}$$

Figura 3.8 - Termos obtidos através da função de forma hierárquica M_3 , dada pela equação (3.6).

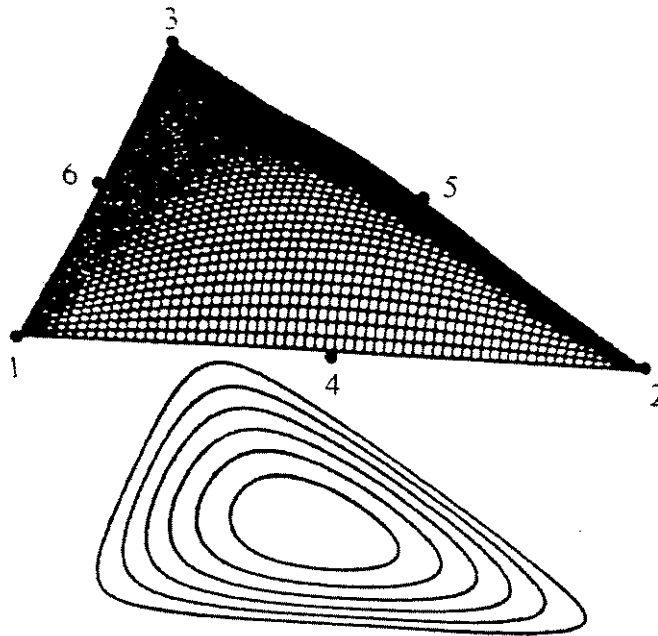


Figura 3.9 – Variação da função de forma, do tipo bolha, sobre o elemento.

Para obter-se uma definição conveniente do campo de deslocamento, o mesmo deve satisfazer os critérios de convergência a seguir expostos e verificados através da figura 3.4, a saber, conforme Desai [1]:

1. *A função deslocamento deve possibilitar a consideração dos deslocamentos de corpo rígido do elemento.* Observando-se que tal estado requer uma condição de deformação específica nula e que a mesma é obtida pela derivada primeira dessa função deslocamento, necessita-se então, que a expansão polinomial apresente o termo constante;

2. *A função deslocamento deve possibilitar a consideração do estado de deformação constante do elemento.* A necessidade desse requerimento deve-se à condição de elementos infinitesimais apresentarem, individualmente, deformação aproximadamente constante. A solicitação apresentada pode ser alcançada empregando-se na expansão polinomial o polinômio de 1º. grau.
3. *Os deslocamentos devem ser compatíveis entre elementos adjacentes, o que significa que os mesmos devem se deformar sem causar aberturas, sobreposição ou descontinuidades entre si.* Sendo assim, as funções de forma utilizadas devem ser contínuas na interface entre elementos, ou seja, funções de continuidade C^0 . Esse critério também será satisfeito, caso os parâmetros hierárquicos ($\bar{\delta}_{kj}$), que estão associados aos lados do elemento, apresentem o mesmo valor no elemento adjacente, garantindo portanto, a unicidade da aproximação em relação ao lado em questão, segundo Zienkiewicz et al. [8].

Considerando-se como componentes dos parâmetros hierárquicos ($\bar{\delta}_{kj}$): $\mathbf{a}_{kj}$, $\mathbf{b}_{kj}$ e $\mathbf{c}_{kj}$, assim como de ($\bar{\delta}_k$): $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ e $\mathbf{c}_k$, segundo respectivamente os eixos X , Y e Z do sistema de referência global, a equação 3.5 para o deslocamento $\bar{\Delta}$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(L_1, L_2, \zeta) = & \sum_{i=1}^6 N_i \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \\ & + \sum_{j=1}^3 M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} + M_k(L_1, L_2) \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ou então:

$$\begin{aligned}
u(L_1, L_2, \zeta) = & \sum_{i=1}^6 N_i \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{11i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{21i} \\
& + \sum_{j=1}^3 M_{kj}(L_1, L_2) a_{kj} + M_k(L_1, L_2) a_k
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
v(L_1, L_2, \zeta) = & \sum_{i=1}^6 N_i \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{12i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{22i} \\
& + \sum_{j=1}^3 M_{kj} b_{kj} + M_k(L_1, L_2) b_k
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
w(L_1, L_2, \zeta) = & \sum_{i=1}^6 N_i \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot v_{13i} - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot v_{23i} \\
& + \sum_{j=1}^3 M_{kj} c_{kj} + M_k(L_1, L_2) c_k
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Pode-se ainda reescrevê-las como:

$$\begin{Bmatrix} u(L_1, L_2, \zeta) \\ v(L_1, L_2, \zeta) \\ w(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 [N_i(L_1, L_2, \zeta)] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^3 [M_{kj}(L_1, L_2)] \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} + [M_k(L_1, L_2)] \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

para a qual $[M_{kj}(L_1, L_2)]$ é uma matriz (3x3) composta pelas funções de forma hierárquicas M_{kj} de grau k associada aos lados j do elemento, ou seja:

$$[M_{kj}(L_1, L_2)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(L_1, L_2) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

e $[M_k(L_1, L_2)]$ é uma matriz (3x3) composta pelas funções de forma hierárquicas M_k de grau k e associadas ao elemento:

$$[M_k(L_1, L_2)] = \begin{bmatrix} M_k(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(L_1, L_2) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A matriz $[N_i(L_1, L_2, \zeta)]$, (3×5) , é definida pela equação (2.84) e a matriz coluna $\{a_i\}$, (5×1) , é determinada pela equação (2.85). Da mesma forma, $\{a_{kj}\}$ é uma matriz coluna (3×1) , constituída dos parâmetros hierárquicos associados aos lados do elemento como mostrado a seguir:

$$\{a_{kj}\} = \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

e $\{a_k\}$, uma matriz coluna (3×1) , formada por parâmetros hierárquicos associados ao elemento, definido como:

$$\{a_k\} = \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

A equação (3.11) também pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} u(L_1, L_2, \zeta) \\ v(L_1, L_2, \zeta) \\ w(L_1, L_2, \zeta) \end{Bmatrix} = \left[[N_1(L_1, L_2, \zeta)] [N_2(L_1, L_2, \zeta)] \dots [N_i(L_1, L_2, \zeta)] \dots [N_6(L_1, L_2, \zeta)] \right. \\
\left. [M_{31}(L_1, L_2)] \dots [M_{kj}(L_1, L_2)] \dots [M_k(L_1, L_2)] \right] \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_6\} \\ \{a_{31}\} \\ \vdots \\ \{a_{kj}\} \\ \vdots \\ \{a_k\} \end{Bmatrix}$$

(3.16)

ou ainda de uma maneira compacta:

$$\{u\} = [N]\{a\}$$

(3.17)

onde:

- $\{u\}$ é uma matriz coluna (3x1) constituída dos deslocamentos $u(L_1, L_2, \zeta)$, $v(L_1, L_2, \zeta)$ e $w(L_1, L_2, \zeta)$, respectivamente nas direções **X**, **Y** e **Z**, do sistema de referência global;
- $[N]$ é uma matriz (3x42) constituída das funções de forma $N_i(L_1, L_2)$, dadas pelas equações (2.3) a (2.8), das funções hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$, dadas pelas equações (3.2) a (3.4) e $M_k(L_1, L_2)$, definida pela equação (3.6);
- $\{a\}$ é uma matriz coluna (42x1) constituída dos deslocamentos e rotações em relação ao nó i : u_i , v_i , w_i , α_i e β_i , assim como dos parâmetros hierárquicos: a_{kj} , b_{kj} , c_{kj} , a_k , b_k e c_k .

Observa-se também na equação (3.16), que se as funções utilizadas para avaliar os deslocamentos $\{u\}$ restringirem-se às funções $[N_i]$, ou seja, $[M_{kj}(L_1, L_2)] = [M_k L_1, L_2] = [0]$, o elemento é chamado *isoparamétrico* (conforme apresentado pela equação 2.86). Caso contrário, fazendo-se uso das funções hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$ e $M_k(L_1, L_2)$, a expansão adotada para interpolar o campo de deslocamento é de ordem maior do que a adotada para interpolar a geometria e tal elemento é chamado, portanto, de *subparamétrico*, conforme Zienkiewicz et al. [9].

3.3 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA PARA O ELEMENTO SUBPARAMÉTRICO

Para a obtenção do *estado de deformação específica* no ponto genérico **Q** do elemento de casca, segundo o sistema de referência local (x' , y' e z'), deve-se considerar agora o item 2.3 assim como também as relações dadas pelas equações (3.8) a (3.10). Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot a_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot a_k \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot b_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot b_k \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot c_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot c_k \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot a_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot a_k \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot b_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot b_k \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} = & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial M_{kj}(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot c_{kj} + \frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot c_k \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (3.26)$$

onde k , nesse caso, é igual a 3.

As equações (3.18) a (3.26) também podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(L_1, L_2, \zeta)}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^6 [G_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^3 [Gl_{kj}(L_1, L_2)] \cdot \begin{pmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{pmatrix} + [Ge_k(L_1, L_2)] \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

(3.27)

onde $[G_i(L_1, L_2, \zeta)]$ é uma matriz (9x5), dada por (2.149), $[Gl_{kj}(L_1, L_2)]$ é uma matriz (9x3), dada por:

$$\left[Gl_{kj}(L_1, L_2) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} \\ \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e $\left[Ge_k(L_1, L_2) \right]$ é uma matriz (9x3), dada por:

$$\left[Ge_k(L_1, L_2) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_k}{\partial L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_k}{\partial L_1} \\ \frac{\partial M_k}{\partial L_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_k}{\partial L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Introduzindo-se as equações (3.28) e (3.29) na expressão (2.137), chega-se a:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{x'} \\ \mathcal{E}_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [G_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [Gl_{kj}(L_1, L_2)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [Ge_k(L_1, L_2)] \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Definindo-se a seguir:

$$[B_i(L_1, L_2, \zeta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [G_i(L_1, L_2, \zeta)] \quad (3.31)$$

$$[Bl_{kj}(L_1, L_2)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [Gl_{kj}(L_1, L_2)] \quad (3.32)$$

$$[Be_k(L_1, L_2)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(L_1, L_2)] \cdot [Ge_k(L_1, L_2)] \quad (3.33)$$

a equação (3.30) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{x'} \\ \mathcal{E}_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 [B_i(L_1, L_2, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^3 [Bl_{kj}(L_1, L_2)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} + [Be_k(L_1, L_2)] \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

onde $\left[B_i(L_1, L_2, \zeta)\right]$ é uma matriz (5x5) dada pela equação (2.152) e seus elementos são apresentados no apêndice **B**. Da mesma forma, $\left[Bl_{kj}(L_1, L_2)\right]$ e $\left[Be_k(L_1, L_2)\right]$ são matrizes (5x3) definidas por:

$$\left[Bl_{kj}(L_1, L_2)\right] = \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{12kj} & Bl_{13kj} \\ Bl_{21kj} & Bl_{22kj} & Bl_{23kj} \\ Bl_{31kj} & Bl_{32kj} & Bl_{33kj} \\ Bl_{41kj} & Bl_{42kj} & Bl_{43kj} \\ Bl_{51kj} & Bl_{52kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\left[Be_k(L_1, L_2)\right] = \begin{bmatrix} Be_{11k} & Be_{12k} & Be_{13k} \\ Be_{21k} & Be_{22k} & Be_{23k} \\ Be_{31k} & Be_{32k} & Be_{33k} \\ Be_{41k} & Be_{42k} & Be_{43k} \\ Be_{51k} & Be_{52k} & Be_{53k} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

e seus componentes são expostos no apêndice **C**.

Portanto, a equação (3.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c} [B_1(L_1, L_2, \zeta)], [B_2(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_i(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_6(L_1, L_2, \zeta)], [Bl_{31}(L_1, L_2)], \\ \\ [Bl_{kj}(L_1, L_2)], \dots, [Be_k(L_1, L_2)] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_6\} \\ \{a_{31}\} \\ \vdots \\ \{a_{kj}\} \\ \vdots \\ \{a_k\} \end{Bmatrix}$$

(3.37)

ou ainda:

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\}$$

(3.38)

onde:

- $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz (5x1) constituída das deformações específicas apresentadas no ponto $\mathbf{Q}$, segundo o sistema de referência local (x', y', z') : $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{y'z'}$ e $\gamma_{x'z'}$;
- $[B]$ é uma matriz (5x42) constituída das derivadas das funções de forma N_i , M_{kj} e M_k ;
- $\{a\}$ é uma matriz coluna (42x1) constituída dos deslocamentos: u_i , v_i , w_i , α_i e β_i , assim como também dos parâmetros hierárquicos: a_{kj} , b_{kj} , c_{kj} , a_k , b_k e c_k .

3.4 - DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DO *ELEMENTO SUBPARAMÉTRICO*

Conforme já foi mencionado anteriormente no item 3.2, na consideração do *elemento subparamétrico* para o presente trabalho, deve-se fazer uso das funções de forma hierárquicas. Sendo assim, as propriedades características desse elemento são determinadas com o auxílio das expressões $M_{kj}(L_1, L_2)$ e, para efeito de comparações e conclusões, das funções $M_k(L_1, L_2)$, dadas por (3.2) a (3.4), e (3.6), assim como pelo item 2.4.

3.4.1 - Determinação da matriz de rigidez do elemento

A equação (2.193), a qual possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento:

$$[K^e] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta$$

pode ser reescrita para o elemento subparamétrico substituindo-se a matriz [B], com o auxílio dado pelas equações (2.152), (3.35) e (3.36), como se apresenta a seguir:

$$\begin{aligned}
[K^e] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} [B_1(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_6(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ [Bl_{31}(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [Bl_{kj}(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [Be_k(L_1, L_2, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot [D'] \left[[B_1(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_i(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [B_6(L_1, L_2, \zeta)] \right. \\
& \left. [Bl_{31}(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [Bl_{kj}(L_1, L_2, \zeta)], \dots, [Be_k(L_1, L_2, \zeta)] \right] \cdot \\
& |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned}
\tag{3.39}$$

Considerando-se a resolução da equação acima, encontrar-se-á a matriz de rigidez do elemento, a qual será dada por:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [K_{11}] \cdots [K_{1l}] \cdots [K_{16}] & [K_{1,31}] \cdots [K_{1,mn}] \cdots [K_{1,33}] & [K_{1m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [K_{i1}] \cdots [K_{il}] \cdots [K_{i6}] & [K_{i,31}] \cdots [K_{i,mn}] \cdots [K_{i,33}] & [K_{im}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [K_{61}] \cdots [K_{6l}] \cdots [K_{66}] & [K_{6,31}] \cdots [K_{6,mn}] \cdots [K_{6,33}] & [K_{6m}] \end{bmatrix} \\
[K^e] = & \begin{bmatrix} [K_{31,1}] \cdots [K_{31,l}] \cdots [K_{31,6}] & [K_{31,31}] \cdots [K_{31,mn}] \cdots [K_{31,33}] & [K_{31,m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [K_{kj,1}] \cdots [K_{kj,l}] \cdots [K_{kj,6}] & [K_{kj,31}] \cdots [K_{kj,mn}] \cdots [K_{kj,33}] & [K_{kj,m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [K_{33,1}] \cdots [K_{33,l}] \cdots [K_{33,6}] & [K_{33,31}] \cdots [K_{33,mn}] \cdots [K_{33,33}] & [K_{33,m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [K_{k1}] \cdots [K_{kl}] \cdots [K_{k6}] & [K_{k,31}] \cdots [K_{k,mn}] \cdots [K_{k,33}] & [K_{k,m}] \end{bmatrix} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

3.4.1.1 - Determinação da submatriz $[K_{il}]$

A submatriz $[K_{il}]$ está relacionada com os nós i e l , ambos variando de 1 a 6, sendo que a mesma caracteriza o *elemento isoparamétrico*. Essa submatriz já foi determinada anteriormente no item 2.4.3.1.

3.4.1.2 - Determinação da submatriz $[K_{i,mn}]$

A submatriz $[K_{i,mn}]$ caracteriza o acoplamento entre o *elemento isoparamétrico* com o *elemento hierárquico*, concernente ao refinamento dos seus lados. Nessa submatriz, i refere-se aos nós do elemento, os quais variam de 1 a 6. Da mesma forma, m está relacionado ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3, assim como n relaciona-se com o lado do elemento, variando de 1 a 3.

Essa submatriz pode ser definida da seguinte forma:

$$[K_{i,mn}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [B_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \cdot [D'] \cdot [Bl_{mn}(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.41)$$

Considerando-se agora, as equações: (2.152), (2.165) e (3.35), a equação anterior pode ser reescrita como:

$$[K_{i,mn}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i}) \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i}) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} Bl_{11mn} & Bl_{12mn} & Bl_{13mn} \\ Bl_{21mn} & Bl_{22mn} & Bl_{23mn} \\ Bl_{31mn} & Bl_{32mn} & Bl_{33mn} \\ Bl_{41mn} & Bl_{42mn} & Bl_{43mn} \\ Bl_{51mn} & Bl_{52mn} & Bl_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.42)$$

A partir da resolução da equação anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} K_{i,mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11i,mn} & K_{12i,mn} & K_{13i,mn} \\ K_{21i,mn} & K_{22i,mn} & K_{23i,mn} \\ K_{31i,mn} & K_{32i,mn} & K_{33i,mn} \\ K_{41i,mn} & K_{42i,mn} & K_{43i,mn} \\ K_{51i,mn} & K_{52i,mn} & K_{53i,mn} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

ou ainda:

$$K_{11i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{11mn}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Bl_{21mn}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{31mn} \cdot B_{31i} + Bl_{41mn} \cdot B_{41i} + Bl_{51mn} \cdot B_{51i}) \right] \right\} J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.44)$$

$$K_{12i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{12mn}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Bl_{22mn}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot B_{31i} + Bl_{42mn} \cdot B_{41i} + Bl_{52mn} \cdot B_{51i}) \right] \right\} J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.45)$$

$$K_{13i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{13mn}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Bl_{23mn}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{33mn} \cdot B_{31i} + Bl_{43mn} \cdot B_{41i} + Bl_{53mn} \cdot B_{51i}) \right] \right\} J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.46)$$

$$K_{21i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{11mn}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Bl_{21mn}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{31mn} \cdot B_{32i} + Bl_{41mn} \cdot B_{42i} + Bl_{51mn} \cdot B_{52i}) \right] \right\} J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.47)$$

$$K_{22i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{12mn}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Bl_{22mn}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot B_{32i} + Bl_{42mn} \cdot B_{42i} + Bl_{52mn} \cdot B_{52i}) \right] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.48)$$

$$K_{23i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{13mn}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Bl_{23mn}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{33mn} \cdot B_{32i} + Bl_{43mn} \cdot B_{42i} + Bl_{53mn} \cdot B_{52i}) \right] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.49)$$

$$K_{31i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{11mn}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Bl_{21mn}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{31mn} \cdot B_{33i} + Bl_{41mn} \cdot B_{43i} + Bl_{51mn} \cdot B_{53i}) \right] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.50)$$

$$K_{32i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{12mn}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Bl_{22mn}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot B_{33i} + Bl_{42mn} \cdot B_{43i} + Bl_{52mn} \cdot B_{53i}) \right] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.51)$$

$$K_{33i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[Bl_{13mn}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Bl_{23mn}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{33mn} \cdot B_{33i} + Bl_{43mn} \cdot B_{43i} + Bl_{53mn} \cdot B_{53i}) \right] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.52)$$

$$K_{41i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{11mn}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Bl_{21mn}(\nu B_{14i} + B_{24i}) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31mn} \cdot B_{34i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{41mn}(\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) + Bl_{51mn}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i})] \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
K_{42i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{12mn}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Bl_{22mn}(\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32mn} \cdot B_{34i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{42mn} \cdot (\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) \\
+ Bl_{52mn}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i})] \left. \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
K_{43i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{13mn}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Bl_{23mn}(\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33mn} \cdot B_{34i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{43mn} \cdot (\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) \\
+ Bl_{53mn}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i})] \left. \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
K_{51i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{11mn}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Bl_{21mn}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31mn} \cdot B_{35i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{41mn} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \\
+ Bl_{51mn}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i})] \left. \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
K_{52i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{12mn}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Bl_{22mn}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32mn} \cdot B_{35i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{42mn} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \\
+ Bl_{52mn}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i})] \left. \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
K_{53i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot [Bl_{13mn}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Bl_{23mn}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33mn} \cdot B_{35i}] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} [Bl_{43mn} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \\
+ Bl_{53mn}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i})] \left. \right\} |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Igualmente ao item 2.4.3, utilizando-se a equação (2.228), a integração na direção da coordenada linear ζ será feita analiticamente, e para as coordenadas de área L_1 e L_2 , a integração será numérica, considerando-se novamente o processo da *quadratura de Gauss*, segundo Zienkiewicz et al. [9].

Admitindo-se L_{1p} e L_{2p} , como sendo as coordenadas de área do ponto de integração p , Wp o fator de ponderação, associado a este ponto e mh , o número total de pontos de integração, as integrais anteriores tornam-se:

$$K_{11i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\ \left. Bl_{21mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. \left[k \cdot Bl_{31mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{41mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + Bl_{51mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\} \quad (3.59)$$

$$K_{12i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\ \left. Bl_{22mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. \left[k \cdot Bl_{32mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{42mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + Bl_{52mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\} \quad (3.60)$$

$$K_{13i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\ \left. Bl_{23mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. \left[k \cdot Bl_{33mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{43mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. + Bl_{53mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
K_{21i,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
& Bl_{21mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \\
& \left[k \cdot Bl_{31mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{41mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \\
& \left. \left. + Bl_{51mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
K_{22i,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
& Bl_{22mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \\
& \left[k \cdot Bl_{32mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{42mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \\
& \left. + Bl_{52mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
K_{23i,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
& Bl_{23mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \\
& \left[k \cdot Bl_{33mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{43mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \\
& \left. + Bl_{53mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
K_{31i,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
& Bl_{21mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \\
& \left[k \cdot Bl_{31mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{41mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \\
& \left. + Bl_{51mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
K_{32i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Bl_{22mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Bl_{32mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{42mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Bl_{52mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
K_{33i,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Bl_{23mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Bl_{33mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Bl_{43mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Bl_{53mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
K_{41i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{41mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\
\left. \left. Bl_{51mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
K_{42i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{42mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\
\left. \left. Bl_{52mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
K_{43i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{43mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\
\left. \left. Bl_{53mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$K_{51i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{41mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Bl_{51mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.71)$$

$$K_{52i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{42mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Bl_{52mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.72)$$

$$K_{53i,mn} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Bl_{43mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Bl_{53mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.73)$$

3.4.1.3 - Determinação da submatriz $[K_{kj,mn}]$

A submatriz $[K_{kj,mn}]$ caracteriza o *elemento hierárquico*, concernente ao refinamento dos seus lados. Nessa submatriz, k e m estão relacionados ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3, assim como j e n relacionam-se com os lados do elemento, variando de 1 a 3.

A submatriz em questão pode ser determinada como a seguir:

$$[K_{kj,mn}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{kj}(L_1, L_2) \right]^T \cdot [D'] \cdot [Bl_{mn}(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.74)$$

Levando-se em conta as equações: (2.165) e (3.35), a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\left[K_{kj,mn} \right] &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{21kj} & Bl_{31kj} & Bl_{41i} & Bl_{51kj} \\ Bl_{12kj} & Bl_{22kj} & Bl_{32kj} & Bl_{42kj} & Bl_{52kj} \\ Bl_{13kj} & Bl_{23kj} & Bl_{33kj} & Bl_{43kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
&\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Bl_{11mn} & Bl_{12mn} & Bl_{13mn} \\ Bl_{21mn} & Bl_{22mn} & Bl_{23mn} \\ Bl_{31mn} & Bl_{32mn} & Bl_{33mn} \\ Bl_{41mn} & Bl_{42mn} & Bl_{43mn} \\ Bl_{51mn} & Bl_{52mn} & Bl_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot \zeta \\
&\hspace{15cm} (3.75)
\end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação anterior, chega-se a:

$$\left[K_{kj,mn} \right] = \begin{bmatrix} K_{11kj,mn} & K_{12kj,mn} & K_{13kj,mn} \\ K_{21kj,mn} & K_{22kj,mn} & K_{23kj,mn} \\ K_{31kj,mn} & K_{32kj,mn} & K_{33kj,mn} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
K_{11kj,mn} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{11mn} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Bl_{21mn} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
&\quad \left. (k Bl_{31mn} \cdot Bl_{31kj} + Bl_{41mn} \cdot Bl_{41kj} + Bl_{51mn} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \\
&\hspace{15cm} (3.77)
\end{aligned}$$

$$K_{12kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{12mn} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Bl_{22mn} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot Bl_{31kj} + Bl_{42mn} \cdot Bl_{41kj} + Bl_{52mn} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.78)$$

$$K_{13kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{13mn} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Bl_{23mn} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{33mn} \cdot Bl_{31kj} + Bl_{43mn} \cdot Bl_{41kj} + Bl_{53mn} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.79)$$

$$K_{21kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{11mn} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Bl_{21mn} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{31mn} \cdot Bl_{32kj} + Bl_{41mn} \cdot Bl_{42kj} + Bl_{51mn} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.80)$$

$$K_{22kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{12mn} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Bl_{22mn} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot Bl_{32kj} + Bl_{42mn} \cdot Bl_{42kj} + Bl_{52mn} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.81)$$

$$K_{23kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{13mn} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Bl_{23mn} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{33mn} \cdot Bl_{32kj} + Bl_{43mn} \cdot Bl_{42kj} + Bl_{53mn} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.82)$$

$$K_{31kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{11mn} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Bl_{21mn} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{31mn} \cdot Bl_{33kj} + Bl_{41mn} \cdot Bl_{43kj} + Bl_{51mn} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.83)$$

$$K_{32kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Bl_{12mn} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Bl_{22mn} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBl_{32mn} \cdot Bl_{33kj} + Bl_{42mn} \cdot Bl_{43kj} + Bl_{52mn} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.84)$$

$$K_{33kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Bl_{13mn} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Bl_{23mn} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. (k Bl_{33mn} \cdot Bl_{33kj} + Bl_{43mn} \cdot Bl_{43kj} + Bl_{53mn} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.85)$$

Admitindo-se a integração analítica na direção ζ e a integração numérica para as coordenadas de área L_1 e L_2 , sendo mh o número total de pontos de integração, as equações anteriores resultam em:

$$K_{11kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Bl_{21mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{31mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Bl_{41mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{51mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.86)$$

$$K_{12kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Bl_{22mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{32mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Bl_{42mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{52mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
K_{13kj,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
& Bl_{23mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{33mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
& \left. Bl_{43mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{53mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
K_{21kj,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
& Bl_{21mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{31mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
& \left. Bl_{41mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{51mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
K_{22kj,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
& Bl_{22mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{32mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
& \left. Bl_{42mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{52mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
K_{23kj,mn} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
& Bl_{23mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{33mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
& \left. Bl_{43mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{53mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
K_{31kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{11mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
Bl_{21mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
\frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{31mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
\left. Bl_{41mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{51mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
K_{32kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{12mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
Bl_{22mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
\frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{32mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
\left. Bl_{42mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{52mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
K_{33kj,mn} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Bl_{13mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
Bl_{23mn}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\
\frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{33mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\
\left. Bl_{43mn}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Bl_{53mn}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.94}$$

3.4.1.4 - Determinação da submatriz $[K_{kj,l}]$

A submatriz $[K_{kj,l}]$, assim como a submatriz $[K_{i,mn}]$, caracteriza o acoplamento entre o *elemento isoparamétrico* com o *elemento hierárquico*, concernente ao refinamento dos seus lados. Nessa submatriz, l refere-se aos nós do elemento, os quais variam de 1 a 6. Da mesma forma, k está relacionado ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3 e j relaciona-se com o lado do elemento, variando de 1 a 3.

Sendo assim, essa submatriz pode ser definida da seguinte forma:

$$\left[K_{kj,l} \right] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[B l_{kj} (L_1, L_2) \right]^T \cdot [D] \cdot \left[B_l (L_1, L_2) \right] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta = \left[K_{i,mn} \right]^T \quad (3.95)$$

lembrando-se que $[K_{i,mn}]$ encontra-se determinada no ítem 3.4.1.2.

3.4.1.5 - Determinação da submatriz $[K_{im}]$

A submatriz $[K_{im}]$ caracteriza a junção entre o *elemento isoparamétrico* e a parte do *elemento hierárquico*, relativa ao refinamento do elemento. Nessa submatriz, i refere-se ao nó, que varia de 1 a 6 e m refere-se ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3.

Esta submatriz pode ser definida como a seguir:

$$[K_{im}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [B_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \cdot [D'] \cdot [B_m(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.96)$$

Levando-se em conta as equações: (2.165) e (3.36), a equação anterior pode ser reescrita como:

$$[K_{im}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \left(\zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} \right) \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & \left(\zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \right) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} Be_{11m} & Be_{12m} & Be_{13m} \\ Be_{21m} & Be_{22m} & Be_{23m} \\ Be_{31m} & Be_{32m} & Be_{33m} \\ Be_{41m} & Be_{42m} & Be_{43m} \\ Be_{51m} & Be_{52m} & Be_{53m} \end{bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.97)$$

Resolvendo-se a equação anterior, pode-se escrever que:

$$[K_{im}] = \begin{bmatrix} K_{11im} & K_{12im} & K_{13im} \\ K_{21im} & K_{22im} & K_{23im} \\ K_{31im} & K_{32im} & K_{33im} \\ K_{41im} & K_{42im} & K_{43im} \\ K_{51im} & K_{52im} & K_{53im} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

ou ainda:

$$K_{11im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{11m}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Be_{21m}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot B_{31i} + Be_{41m} \cdot B_{41i} + Be_{51m} \cdot B_{51i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.99)$$

$$K_{12im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Be_{22m}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot B_{31i} + Be_{42m} \cdot B_{41i} + Be_{52m} \cdot B_{51i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.100)$$

$$K_{13im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m}(B_{11i} + \nu B_{21i}) + Be_{23m}(\nu B_{11i} + B_{21i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot B_{31i} + Be_{43m} \cdot B_{41i} + Be_{53m} \cdot B_{51i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.101)$$

$$K_{21im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{11m}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Be_{21m}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot B_{32i} + Be_{41m} \cdot B_{42i} + Be_{51m} \cdot B_{52i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.102)$$

$$K_{22im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Be_{22m}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot B_{32i} + Be_{42m} \cdot B_{42i} + Be_{52m} \cdot B_{52i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.103)$$

$$K_{23im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m}(B_{12i} + \nu B_{22i}) + Be_{23m}(\nu B_{12i} + B_{22i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot B_{32i} + Be_{43m} \cdot B_{42i} + Be_{53m} \cdot B_{52i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.104)$$

$$K_{31im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{11m}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Be_{21m}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot B_{33i} + Be_{41m} \cdot B_{43i} + Be_{51m} \cdot B_{53i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.105)$$

$$K_{32im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Be_{22m}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot B_{33i} + Be_{42m} \cdot B_{43i} + Be_{52m} \cdot B_{53i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.106)$$

$$K_{33im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m}(B_{13i} + \nu B_{23i}) + Be_{23m}(\nu B_{13i} + B_{23i}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot B_{33i} + Be_{43m} \cdot B_{43i} + Be_{53m} \cdot B_{53i}) \right] J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned}
K_{41im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \left[Be_{11m}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Be_{21m}(\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31m} \cdot B_{34i} \left. \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{41m} \cdot (\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) \right. \\
& \left. \left. + Be_{51m}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i}) \right] \right\} \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
K_{42im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \left[Be_{12m}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Be_{22m}(\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32m} \cdot B_{34i} \left. \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{42m} \cdot (\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) \right. \\
& \left. \left. + Be_{52m}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i}) \right] \right\} \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
K_{43im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \left[Be_{13m}(B_{14i} + \nu B_{24i}) + Be_{23m}(\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33m} \cdot B_{34i} \left. \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{43m} \cdot (\zeta \cdot B_{44i} + C_{44i}) \right. \\
& \left. \left. + Be_{53m}(\zeta \cdot B_{54i} + C_{54i}) \right] \right\} \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned}
K_{51im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \left[Be_{11m}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Be_{21m}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31m} \cdot B_{35i} \left. \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{41m} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \right. \\
& \left. \left. + Be_{51m}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i}) \right] \right\} \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned}
K_{52im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \left[Be_{12m}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Be_{22m}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \right. \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32m} \cdot B_{35i} \left. \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{42m} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \right. \\
& \left. \left. + Be_{52m}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i}) \right] \right\} \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}
K_{53im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \left[Be_{13m}(B_{15i} + \nu B_{25i}) + Be_{23m}(\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33m} \cdot B_{35i} \right] + \frac{t_i(1-\nu)}{4k} \left[Be_{43m} \cdot (\zeta \cdot B_{45i} + C_{45i}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{53m}(\zeta \cdot B_{55i} + C_{55i}) \right] \right\} J(L_1, L_2) \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta
\end{aligned} \quad (3.113)$$

Para as equações anteriores, a integração na direção da coordenada linear ζ será feita analiticamente, e para as coordenadas de área L_1 e L_2 , a integração será numérica.

Admitindo-se L_{1p} e L_{2p} , como sendo as coordenadas de área do ponto de integração p , Wp o fator de ponderação, associado a este ponto e mh , o número total de pontos de integração, as integrais em questão tornam-se:

$$\begin{aligned}
K_{11im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{21m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{31m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{41m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{51m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot J(L_{1p}, L_{2p}) \right\} \cdot Wp
\end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}
K_{12im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{22m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{32m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{42m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{52m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot J(L_{1p}, L_{2p}) \right\} \cdot Wp
\end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned}
K_{13im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{13m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{23m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{11i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{21i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{33m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{31i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{43m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{41i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{53m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{51i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
K_{21im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{21m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{31mn}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{41m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{51m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
K_{22im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{22m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{32m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{42m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{52m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}
K_{23im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{13m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{23m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{12i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{22i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{33m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{32i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{43m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{42i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{53m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{52i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}
K_{31im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{21m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{31m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{41m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{51m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
K_{32im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{22m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{32m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{42m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{52m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
K_{33im} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{13m}(L_{1p}, L_{2p}) \left[B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + \nu \cdot B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{23m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot \left[\nu \cdot B_{13i}(L_{1p}, L_{2p}) + B_{23i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\
\left. \left[k \cdot Be_{33m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{33i}(L_{1p}, L_{2p}) + Be_{43m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{43i}(L_{1p}, L_{2p}) \right. \right. \\
\left. \left. + Be_{53m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot B_{53i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned}
K_{41im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{41m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\
\left. \left. Be_{51m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned}
K_{42im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{42m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\
\left. \left. Be_{52m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot Wp \right\}
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$K_{43im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{43m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{44i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Be_{53m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{54i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.125)$$

$$K_{51im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{41m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Be_{51m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.126)$$

$$K_{52im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{42m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Be_{52m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.127)$$

$$K_{53im} = \frac{E}{k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{t_i}{4} \cdot \left\{ \left[Be_{43m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{45i}(L_{1p}, L_{2p}) + \right. \right. \\ \left. \left. Be_{53m}(L_{1p}, L_{2p}) \cdot C_{55i}(L_{1p}, L_{2p}) \right] \right\} \cdot |J(L_{1p}, L_{2p})| \cdot Wp \quad (3.128)$$

3.4.1.6 - Determinação da submatriz $[K_{kj,m}]$

A submatriz $[K_{kj,m}]$ caracteriza a junção entre o *elemento hierárquico*, no que diz respeito ao refinamento de seus lados, e o *elemento hierárquico*, no que se refere ao refinamento do elemento. Nessa submatriz, k é o grau do polinômio adotado no refinamento, valendo 3, j está relacionado ao lado do elemento, o qual varia de 1 a 3 e m que também é o grau do polinômio, o qual é igual a 3.

Esta submatriz pode ser definida como a seguir:

$$[K_{kj,m}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [Bl_{kj}(L_1, L_2)]^T \cdot [D'] \cdot [Be_m(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.129)$$

Levando-se em conta as equações: (3.35) e (3.26), a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 [K_{kj,m}] &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{21kj} & Bl_{31kj} & Bl_{41i} & Bl_{51kj} \\ Bl_{12kj} & Bl_{22kj} & Bl_{32kj} & Bl_{42kj} & Bl_{52kj} \\ Bl_{13kj} & Bl_{23kj} & Bl_{33kj} & Bl_{43kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
 &\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Be_{11m} & Be_{12m} & Be_{13m} \\ Be_{21m} & Be_{22m} & Be_{23m} \\ Be_{31m} & Be_{32m} & Be_{33m} \\ Be_{41m} & Be_{42m} & Be_{43m} \\ Be_{51m} & Be_{52m} & Be_{53m} \end{bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot \zeta
 \end{aligned}
 \tag{3.130}$$

A equação anterior, uma vez resolvida, torna-se:

$$[K_{kj,m}] = \begin{bmatrix} K_{11kj,m} & K_{12kj,m} & K_{13kj,m} \\ K_{21kj,m} & K_{22kj,m} & K_{23kj,m} \\ K_{31kj,m} & K_{32kj,m} & K_{33kj,m} \end{bmatrix}
 \tag{3.131}$$

ou ainda:

$$K_{11kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{11m} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Be_{21m} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot Bl_{31kj} + Be_{41m} \cdot Bl_{41kj} + Be_{51m} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.132)$$

$$K_{12kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{12m} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Be_{22m} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot Bl_{31kj} + Be_{42m} \cdot Bl_{41kj} + Be_{52m} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.133)$$

$$K_{13kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{13m} (Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) + Be_{23m} (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot Bl_{31kj} + Be_{43m} \cdot Bl_{41kj} + Be_{53m} \cdot Bl_{51kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.134)$$

$$K_{21kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{11m} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Be_{21m} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot Bl_{32kj} + Be_{41m} \cdot Bl_{42kj} + Be_{51m} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.135)$$

$$K_{22kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{12m} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Be_{22m} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot Bl_{32kj} + Be_{42m} \cdot Bl_{42kj} + Be_{52m} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.136)$$

$$K_{23kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{13m} (Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) + Be_{23m} (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot Bl_{32kj} + Be_{43m} \cdot Bl_{42kj} + Be_{53m} \cdot Bl_{52kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.137)$$

$$K_{31kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{11m} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Be_{21m} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot Bl_{33kj} + Be_{41m} \cdot Bl_{43kj} + Be_{51m} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.138)$$

$$K_{32kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Be_{22m} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. (kBe_{32m} \cdot Bl_{33kj} + Be_{42m} \cdot Bl_{43kj} + Be_{52m} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.139)$$

$$K_{33kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m} (Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) + Be_{23m} (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. (kBe_{33m} \cdot Bl_{33kj} + Be_{43m} \cdot Bl_{43kj} + Be_{53m} \cdot Bl_{53kj}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.140)$$

Admitindo-se, agora, a integração analítica na direção ζ e a integração numérica para as coordenadas de área L_1 e L_2 , sendo mh o número total de pontos de integração, as equações anteriores resultam em:

$$K_{11kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.141)$$

$$K_{12kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned}
K_{13kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Bl_{11kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{21kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Bl_{31kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{41kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{51kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot \Big| J(L_1, L_2) \Big| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}
K_{21kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot \Big| J(L_1, L_2) \Big| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}
K_{22kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot \Big| J(L_1, L_2) \Big| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.145}$$

$$\begin{aligned}
K_{23kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Bl_{12kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{22kj}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Bl_{32kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{42kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{52kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot \Big| J(L_1, L_2) \Big| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}
K_{31kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \right. \\
\left. \left. Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned}
K_{32kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \right. \\
\left. \left. Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}
K_{33kj,m} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Bl_{13kj}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{23kj}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Bl_{33kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{43kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \right. \\
\left. \left. Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Bl_{53kj}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.149}$$

3.4.1.7 - Determinação da submatriz $[K_{km}]$

A submatriz $[K_{km}]$ caracteriza o *elemento hierárquico*, no que diz respeito ao refinamento do elemento. Nessa submatriz, k e m são o grau do polinômio utilizado no refinamento e ambos valem 3.

Esta submatriz pode ser definida como a seguir:

$$[K_{km}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [Be_k(L_1, L_2)]^T \cdot [D'] \cdot [Be_m(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.150)$$

Levando-se em conta a equação (3.36), a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$[K_{km}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} Be_{11k} & Be_{21k} & Be_{31k} & Be_{41k} & Be_{51k} \\ Be_{12k} & Be_{22k} & Be_{32k} & Be_{42k} & Be_{52k} \\ Be_{13k} & Be_{23k} & Be_{33k} & Be_{43k} & Be_{53k} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Be_{11m} & Be_{12m} & Be_{13m} \\ Be_{21m} & Be_{22m} & Be_{23m} \\ Be_{31m} & Be_{32m} & Be_{33m} \\ Be_{41m} & Be_{42m} & Be_{43m} \\ Be_{51m} & Be_{52m} & Be_{53m} \end{bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.151)$$

A equação anterior, uma vez resolvida, torna-se:

$$[K_{km}] = \begin{bmatrix} K_{11km} & K_{12km} & K_{13km} \\ K_{21km} & K_{22km} & K_{23km} \\ K_{31km} & K_{32km} & K_{33km} \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

ou ainda:

$$K_{11km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{11m} (Be_{11k} + \nu Be_{21k}) + Be_{21m} (\nu Be_{11k} + Be_{21k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (k Be_{31m} \cdot Be_{31k} + Be_{41m} \cdot Be_{41k} + Be_{51m} \cdot Be_{51k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.153)$$

$$K_{12km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(Be_{11k} + \nu Be_{21k}) + Be_{22m}(\nu Be_{11k} + Be_{21k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot Be_{31k} + Be_{42m} \cdot Be_{41k} + Be_{52m} \cdot Be_{51k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.154)$$

$$K_{13km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m}(Be_{11k} + \nu Be_{21k}) + Be_{23m}(\nu Be_{11k} + Be_{21k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot Be_{31k} + Be_{43m} \cdot Be_{41k} + Be_{53m} \cdot Be_{51k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.155)$$

$$K_{21km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{11m}(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) + Be_{21m}(\nu Be_{12k} + Be_{22k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot Be_{32k} + Be_{41m} \cdot Be_{42k} + Be_{51m} \cdot Be_{52k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.156)$$

$$K_{22km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) + Be_{22m}(\nu Be_{12k} + Be_{22k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot Be_{32k} + Be_{42m} \cdot Be_{42k} + Be_{52m} \cdot Be_{52k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.157)$$

$$K_{23km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{13m}(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) + Be_{23m}(\nu Be_{12k} + Be_{22k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{33m} \cdot Be_{32k} + Be_{43m} \cdot Be_{42k} + Be_{53m} \cdot Be_{52k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.158)$$

$$K_{31km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{11m}(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) + Be_{21m}(\nu Be_{13k} + Be_{23k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{31m} \cdot Be_{33k} + Be_{41m} \cdot Be_{43k} + Be_{51m} \cdot Be_{53k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.159)$$

$$K_{32km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \left[Be_{12m}(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) + Be_{22m}(\nu Be_{13k} + Be_{23k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot (kBe_{32m} \cdot Be_{33k} + Be_{42m} \cdot Be_{43k} + Be_{52m} \cdot Be_{53k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.160)$$

$$K_{33km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[Be_{13m}(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) + Be_{23m}(\nu Be_{13k} + Be_{23k}) + \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \right. \\ \left. (k Be_{33m} \cdot Be_{33k} + Be_{43m} \cdot Be_{43k} + Be_{53m} \cdot Be_{53k}) \right] |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.161)$$

Admitindo-se novamente a integração analítica na direção ζ e a integração numérica para as coordenadas de área L_1 e L_2 , sendo mh o número total de pontos de integração, as equações anteriores resultam em:

$$K_{11km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Be_{31k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{41k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{51k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.162)$$

$$K_{12km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Be_{31k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{41k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{51k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.163)$$

$$K_{13km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \right. \\ Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \left[\nu \cdot Be_{11k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{21k}(L_{2p}, L_{1p}) \right] + \\ \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \left[k \cdot Be_{31k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{41k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \right. \\ \left. Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{51k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \right] \left. \right\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned}
K_{21km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Be_{32k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{42k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{52k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.165}$$

$$\begin{aligned}
K_{22km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Be_{32k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{42k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{52k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.166}$$

$$\begin{aligned}
K_{23km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{12k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{22k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Be_{32k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{42k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{52k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.167}$$

$$\begin{aligned}
K_{31km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{11m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{21m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[k \cdot Be_{33k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{31m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{43k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{41m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{53k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{51m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned}
K_{32km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{12m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{22m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
\frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[& k \cdot Be_{33k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{32m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{43k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{42m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{53k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{52m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned}
K_{33km} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} \Big\{ & Be_{13m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + \nu \cdot Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
& Be_{23m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big[\nu \cdot Be_{13k}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{23k}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] + \\
\frac{(1-\nu)}{2k} \cdot \Big[& k \cdot Be_{33k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{33m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{43k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot \\
& Be_{43m}(L_{2p}, L_{1p}) + Be_{53k}(L_{2p}, L_{1p}) \cdot Be_{53m}(L_{2p}, L_{1p}) \Big] \Big\} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot Wp
\end{aligned} \tag{3.170}$$

3.4.1.8 - Determinação da submatriz $[K_{kl}]$

A submatriz $[K_{kl}]$ caracteriza a junção entre a parte do *elemento hierárquico*, relativa ao refinamento do elemento e o *elemento isoparamétrico*. Nessa submatriz, k refere-se ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3 e l refere-se ao nó, que varia de 1 a 6.

Esta submatriz pode ser definida como a seguir:

$$[K_{kl}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 [Be_k(L_1, L_2)]^T \cdot [D'] \cdot [Bl(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta = [K_{im}]^T \tag{3.171}$$

sendo que a submatriz $[K_{im}]$ já foi obtida anteriormente no ítem 3.4.1.5.

3.4.1.9 - Determinação da submatriz $[K_{k,mn}]$

A submatriz $[K_{k,mn}]$ caracteriza a junção entre a parte do *elemento hierárquico*, relativa ao refinamento do elemento e a parte desse mesmo elemento, correspondente ao refinamento de seus lados. Nessa submatriz, k e m referem-se ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3. Da mesma forma, j refere-se ao lado do elemento, variando de 1 a 3.

Esta submatriz pode ser definida como a seguir:

$$[K_{k,mn}] = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 [Be_k(L_1, L_2)]^T \cdot [D'] \cdot [Bl_{mn}(L_1, L_2)] \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta = [K_{kj,m}]^T \quad (3.172)$$

sendo que a submatriz $[K_{kj,m}]$ já foi obtida anteriormente no item 3.4.1.6.

3.4.2 - Determinação do vetor de carga do elemento

Anteriormente, no item 2.4.4, determinou-se o vetor de carga somente associado ao *elemento isoparamétrico*. Agora, considerar-se-á para a resolução desse vetor o refinamento do elemento, admitindo-se para esse fim as funções de forma hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$ e $M_k(L_1, L_2)$.

3.4.2.1 - Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$

Conforme o item 2.4.4, no qual $\{f_q^e\} = \int_A [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA$ e $dA = \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2$, considerando-se a carga distribuída na superfície média do elemento, onde $\zeta = 0$, assim como as funções de forma hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$ e $M_k(L_1, L_2)$, pode-se reescrever a equação (2.263) da seguinte forma:

$$\{f_q^e\} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} [N_1(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [N_i(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [N_6(L_1, L_2)]^T \\ [M_{31}(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [M_{kj}(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [M_{33}(L_1, L_2)]^T \\ [M_k(L_1, L_2)]^T \end{bmatrix} \cdot [[N_1(L_1, L_2)] \dots [N_l(L_1, L_2)] \dots [N_6(L_1, L_2)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_l\} \\ \vdots \\ \{q_6\} \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.173)$$

ou seja:

$$\{f_q^e\} = \left\{ \{fq_1\} \dots \{fq_i\} \dots \{fq_6\} \{fq_{31}\} \dots \{fq_{kj}\} \dots \{fq_{33}\} \{fq_k\} \right\}^T \quad (3.174)$$

a qual representa o vetor de carga correspondente à ação da carga distribuída sobre a superfície média do elemento.

3.4.2.1.1 - Determinação da submatriz: $\{fq_i\}$

A submatriz $\{fq_i\}$ está relacionada ao nó i , o qual varia de 1 a 6, sendo que a mesma caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento isoparamétrico*. Essa submatriz já foi determinada anteriormente na seção 2.4.4.1.1.

3.4.2.1.2 - Determinação da submatriz: $\{fq_{kj}\}$

A submatriz $\{fq_{kj}\}$ caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento hierárquico*, no que se refere ao refinamento dos seus lados. Nessa submatriz, k está relacionado ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3, assim como j relaciona-se com os lados do elemento, variando de 1 a 3.

A submatriz em questão pode ser determinada como a seguir:

$$\{fq_{kj}\} = \int_0^1 \int_0^1 [M_{kj}(L_1, L_2)]^T \cdot \sum_{l=1}^6 [N_l(L_1, L_2)] \cdot \{q_l\} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.175)$$

ou, levando-se em conta as expressões (3.12), (2.254) e (2.255):

$$\{fq_{kj}\} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} M_{kj}(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(L_1, L_2) \end{bmatrix} \cdot \sum_{l=1}^6 \begin{bmatrix} N_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.176)$$

Resolvendo-se a equação anterior, chega-se a:

$$\{fq_{kj}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (3.177)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{xl} \cdot \|\vec{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.178)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{yl} \cdot \|\vec{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.179)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{zl} \cdot \|\vec{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.180)$$

Utilizando-se a *integração numérica* em relação às coordenadas de área L_1 e L_2 , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores podem ser reescritas como:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{xl} \cdot \|\vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p})\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.181)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{yl} \cdot \|\vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p})\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.182)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{zl} \cdot \|\vec{r}_3(L_{1p}, L_{2p})\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.183)$$

3.4.2.1.3 - Determinação da submatriz: $\{fq_k\}$

A submatriz $\{fq_k\}$ caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento hierárquico*, no que se refere ao refinamento do elemento. Nessa submatriz, k está relacionado ao grau da expansão utilizada no refinamento, o qual vale 3.

Essa submatriz pode ser determinada como a seguir:

$$\{fq_k\} = \int_0^1 \int_0^1 [M_k(L_1, L_2)]^T \cdot \sum_{l=1}^6 [N_l(L_1, L_2)] \cdot \{q_l\} \cdot \|\tilde{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.184)$$

ou, levando-se em conta as expressões (3.13), (2.254) e (2.255):

$$\{fq_k\} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} M_k(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(L_1, L_2) \end{bmatrix} \cdot \sum_{l=1}^6 \begin{bmatrix} N_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\tilde{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.185)$$

Resolvendo-se a equação anterior, chega-se a:

$$\{fq_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (3.186)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{xl} \cdot \|\tilde{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.187)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{yl} \cdot \|\tilde{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.188)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{zl} \cdot \|\tilde{r}_3(L_1, L_2)\| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (3.189)$$

Procedendo-se, agora, com a *integração numérica* em relação às coordenadas de área L_1 e L_2 , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores podem ser reescritas como:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{xl} \cdot \left\| \bar{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.190)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{yl} \cdot \left\| \bar{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.191)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(L_1, L_2) \cdot \sum_{l=1}^6 N_l \cdot q_{zl} \cdot \left\| \bar{r}_3(L_{1p}, L_{2p}) \right\| \cdot \frac{1}{2} \cdot W_p \quad (3.192)$$

3.4.2.2 - Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo no elemento : $\{f_b^e\}$

Admitindo-se como componentes da força de corpo $\bar{b}$: b_x , b_y e b_z , de acordo com o sistema de referência global e empregando-se as expressões das funções de forma hierárquicas $M_{kj}(L_1, L_2)$ e $M_k(L_1, L_2)$, pode-se reescrever a equação (2.276) para o *elemento do tipo hierárquico* como se segue:

$$\{f_b^e\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 \begin{bmatrix} [N_1(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_6(L_1, L_2, \zeta)]^T \\ [M_{31}(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [M_{kj}(L_1, L_2)]^T \\ \vdots \\ [M_{33}(L_1, L_2)]^T \\ [M_k(L_1, L_2)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.193)$$

Resolvendo-se a equação anterior, encontra-se o vetor de carga do elemento referente à ação das forças de corpo:

$$\{f_b^e\} = \begin{Bmatrix} \{fb_1\} \\ \vdots \\ \{fb_i\} \\ \vdots \\ \{fb_6\} \\ \{fb_{31}\} \\ \vdots \\ \{fb_{kj}\} \\ \vdots \\ \{fb_{33}\} \\ \{fb_k\} \end{Bmatrix} \quad (3.194)$$

3.4.2.2.1 - Determinação de $\{fb_i\}$:

A submatriz $\{fb_i\}$ refere-se ao nó i , o qual varia de 1 a 6. A referida submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento isoparamétrico*, tendo sido determinada anteriormente através do item 2.4.4.2.1.

3.4.2.2.2 - Determinação de $\{fb_{kj}\}$:

Esta submatriz está relacionada com o grau k do polinômio empregado na expansão, o qual vale 3, e lado j do elemento, sendo que esse varia de 1 a 3. A mesma caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento hierárquico*, no que se refere ao refinamento de seus lados. Portanto:

$$\{fb_{kj}\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [M_{kj}(L_1, L_2)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.195)$$

Utilizando-se a expressão (3.12), encontra-se:

$$\{fb_{kj}\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{kj}(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(L_1, L_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.196)$$

Efetuada-se a equação anterior chega-se a:

$$\{fb_{kj}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (3.197)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 M_{kj} \cdot b_x \cdot \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.198)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 M_{kj} \cdot b_y \cdot \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.199)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 M_{kj} \cdot b_z \cdot \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.200)$$

Utilizando-se a expressão (2.228), pode-se, agora, efetuar a integração analítica na direção ζ , assim como a integração numérica em relação às coordenadas de área $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$. Sendo hm o número total de pontos de integração, reescreve-se as equações anteriormente dadas da seguinte forma:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj} \cdot b_x \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.201)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj} \cdot b_y \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.202)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj} \cdot b_z \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.203)$$

3.4.2.2.3 - Determinação de $\{fb_k\}$:

Esta submatriz está relacionada com o grau k do polinômio empregado na expansão, o qual vale 3. A mesma caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento hierárquico*, no que se refere ao refinamento do elemento. Portanto:

$$\{fb_k\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 [M_k(L_1, L_2)] \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.204)$$

Utilizando-se a expressão (3.13), encontra-se:

$$\{fb_k\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_k(L_1, L_2) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(L_1, L_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(L_1, L_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.205)$$

Efetuando-se a equação anterior chega-se a:

$$\{fb_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (3.206)$$

onde:

$$f_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 M_k \cdot b_x \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.207)$$

$$f_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 M_k \cdot b_y \cdot |J(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.208)$$

$$f_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^1 M_k \cdot b_z \cdot \left| J(L_1, L_2) \right| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \cdot d\zeta \quad (3.209)$$

Da mesma forma realizada anteriormente, pode-se, agora, efetuar a integração analítica na direção ζ , assim como a integração numérica em relação às coordenadas de área $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$. Sendo hm o número total de pontos de integração, reescreve-se as equações (3.207) a (3.209), da seguinte forma:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_k \cdot b_x \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.210)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_k \cdot b_y \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.211)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_k \cdot b_z \cdot \left| J(L_{1p}, L_{2p}) \right| \cdot W_p \quad (3.212)$$

Capítulo 4

DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

4.1 - INTRODUÇÃO:

Tendo-se obtido as equações para todos os elementos de uma forma individual, é preciso, agora, reuní-las de forma que o equilíbrio se verifique por todo o sistema.

Observando-se que as condições de equilíbrio já foram impostas para o elemento, quando da consideração do Princípio dos Trabalhos Virtuais, necessita-se, portanto, estabelecer a condição de equilíbrio para todos os nós do sistema discretizado, de forma a alcançar-se a solução completa do conjunto.

Lembrando-se que:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f^e\}$$

e considerando-se determinados a matriz de rigidez $[K^e]$ e o vetor de carga $\{f^e\}$, para cada elemento que faz parte do conjunto, resta desse modo, unir essas equações algébricas de forma que as condições de equilíbrio para cada nó do sistema discretizado sejam levadas em conta.

Se as condições de equilíbrio de um típico nó i , são estabelecidas, cada componente do vetor de cargas $\{f_i\}$, tem que ser igualada à soma das componentes de força que contribuem para os elementos do conjunto e que se encontram neste nó. Sendo assim, e considerando-se todas as componentes, tem-se:

$$\{f_i\} = \sum_{e=1}^m \{f_i^e\} \quad (4.1)$$

para a qual m é o número total de elementos que compõem o sistema.

Observando-se que $\{f_i^e\}$ é o vetor de carga correspondente ao elemento isoparamétrico, verifica-se a necessidade de proceder da mesma forma para o elemento hierárquico, em relação às componentes de $\{f_{kj}^e\}$ e $\{f_k^e\}$, os quais foram determinados pelo ítem 3.4.2. Portanto:

$$\{f_{kj}^e\} = \sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} \quad (4.2)$$

e

$$\{f_k^e\} = \sum_{e=1}^m \{f_k^e\} \quad (4.3)$$

Sendo assim, pode-se escrever para cada elemento e do sistema:

$$\begin{aligned} \{f_i^e\} = & [K_{i1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{in}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{i,31}^e] \cdot \{a_{31}\} + \dots + [K_{i,3l}^e] \cdot \{a_{3l}\} + [\bar{K}_{i1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} \\ & + \dots + [\bar{K}_{im}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \{f_{kj}^e\} = & [K_{kj,1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{kj,n}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{kj,31}^e] \cdot \{a_{31}\} + \dots + [K_{kj,3l}^e] \cdot \{a_{3l}\} + [\bar{K}_{kj,1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} \\ & + \dots + [\bar{K}_{kj,m}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \{f_k^e\} = & [K_{k1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{kn}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{k,31}^e] \cdot \{a_{31}\} + \dots + [K_{k,3l}^e] \cdot \{a_{3l}\} + [\bar{K}_{k1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} \\ & + \dots + [\bar{K}_{km}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

nas equações acima, tem-se que:

- $\mathbf{n}$ = número total de nós do sistema;
- $\mathbf{l}$ = número total de lados do sistema;
- $\{a_1\}, \dots, \{a_n\}$ = deslocamentos nodais correspondentes aos nós do sistema;
- $\{a_{31}\}, \dots, \{a_{3l}\}$ = parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento dos lados do sistema;
- $\{\bar{a}_1\}, \dots, \{\bar{a}_m\}$ = parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento dos elementos do sistema;
- $[K_{i1}^e], \dots, [K_{in}^e]$ = submatrizes relacionadas ao elemento isoparamétrico;

- $[K_{i,31}^e], \dots, [K_{i,3l}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico em relação ao refinamento dos lados do sistema;
- $[\bar{K}_{i1}^e], \dots, [\bar{K}_{im}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico relacionada com o refinamento dos elementos do conjunto;
- $[K_{kj,1}^e], \dots, [K_{kj,n}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento dos lados do sistema e o elemento isoparamétrico;
- $[K_{kj,31}^e], \dots, [K_{kj,3l}^e] =$ submatrizes correspondentes ao elemento hierárquico no que se refere ao refinamento dos lados do sistema;
- $[\bar{K}_{kj,1}^e], \dots, [\bar{K}_{kj,m}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento dos lados do sistema e a parte do elemento hierárquico no que se refere ao refinamento dos elementos do sistema;
- $[\bar{K}_{k1}^e], \dots, [\bar{K}_{kn}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico relacionada com o refinamento dos elementos do sistema e o elemento isoparamétrico;
- $[\bar{K}_{k,31}^e], \dots, [\bar{K}_{k,3l}^e] =$ submatrizes que caracterizam o acoplamento entre parte do elemento hierárquico relacionada com o refinamento dos elementos do sistema e aquela concernente ao refinamento dos lados do sistema;
- $[\bar{K}_{k1}^e], \dots, [\bar{K}_{km}^e] =$ submatrizes correspondentes ao elemento hierárquico no que se refere ao refinamento dos elementos do sistema.

4.2 - Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global do sistema

O **vetor de carga global** pode ser encontrado através da substituição das equações (4.4), (4.5) e (4.6), respectivamente nas equações (4.1), (4.2) e (4.3), como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \{f_1^e\} = & \left(\sum_{e=1}^m [K_{i1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{in}^e] \right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{i,31}^e] \right) \cdot \{a_{31}\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{i,3l}^e] \right) \cdot \{a_{3l}\} \\ & + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{i1}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{im}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{f_i^e\} &= (\sum_{e=1}^m [K_{i1}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{in}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [K_{i,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{i,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{i1}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{im}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{f_n^e\} &= (\sum_{e=1}^m [K_{n1}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{nn}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [K_{n,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{n,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{n1}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{nm}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{f_{31}^e\} &= (\sum_{e=1}^m [K_{31,1}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{31,n}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [K_{31,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{31,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{31,1}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{31,m}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} &= (\sum_{e=1}^m [K_{kj,1}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{kj,n}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [K_{kj,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{kj,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,1}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,m}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{f_{3l}^e\} &= (\sum_{e=1}^m [K_{3l,1}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{3l,n}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [K_{3l,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [K_{3l,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{3l,1}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{3l,m}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^m \{\bar{f}_1^e\} &= (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e]) \cdot \{a_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1n}^e]) \cdot \{a_n\} + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,31}^e]) \cdot \{a_{31}\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,3l}^e]) \cdot \{a_{3l}\} \\ &\quad + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e]) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + (\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e]) \cdot \{\bar{a}_m\}\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_k^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kn}^e] \right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,31}^e] \right) \cdot \{a_{31}\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,3l}^e] \right) \cdot \{a_{3l}\} \\ &+ \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{km}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_m^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mm}^e] \right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,31}^e] \right) \cdot \{a_{31}\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,3l}^e] \right) \cdot \{a_{3l}\} \\ &+ \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mm}^e] \right) \cdot \{\bar{a}_m\} \end{aligned}$$

(4.7)

As equações descritas anteriormente são as **equações de equilíbrio do sistema**, as quais podem ser abreviadas da seguinte forma, conforme Desai [1]:

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (4.8)$$

Sendo assim, encontra-se como segue:

- a **matriz de rigidez global do sistema**, $[K]$:

$$[K] = \sum_{e=1}^m [K^e] \quad (4.9)$$

- o **vetor de carga global do sistema**, $\{f\}$:

$$\{f\} = \sum_{e=1}^m \{f^e\} \quad (4.10)$$

As equações (4.9) e (4.10) ainda podem ser dadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
[K] = & \begin{bmatrix}
\sum_{e=1}^m [K_{11}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{1n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{1,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{1,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [K_{i1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{in}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{i,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{i,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{i1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{im}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [K_{n1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{nn}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{n,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{n,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{n1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{nm}^e] \\
\\
\sum_{e=1}^m [K_{31,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{31,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{31,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{31,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{31,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{31,m}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [K_{kj,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{kj,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{kj,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{kj,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,m}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [K_{3l,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{3l,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{3l,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [K_{3l,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{3l,1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{3l,m}^e] \\
\\
\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1n}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kn}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{km}^e] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mn}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,31}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,3l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \cdots \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mm}^e]
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\{f\} = & \left[\sum_{e=1}^m \{f_1^e\} \cdots \sum_{e=1}^m \{f_i^e\} \cdots \sum_{e=1}^m \{f_n^e\} \quad \sum_{e=1}^m \{f_{31}^e\} \cdots \sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} \cdots \sum_{e=1}^m \{f_{3l}^e\} \quad \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_1^e\} \cdots \right. \\
& \left. \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_k^e\} \cdots \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_m^e\} \right]^T
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Da mesma forma, o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos do sistema, $\{a\}$, pode ser definido como:

$$\{a\} = \left[\{a_1\} \cdots \{a_i\} \cdots \{a_n\} \{a_{31}\} \cdots \{a_{kj}\} \cdots \{a_{3l}\} \{\bar{a}_1\} \cdots \{\bar{a}_k\} \cdots \{\bar{a}_m\} \right]^T \quad (4.13)$$

O método desenvolvido e apresentado pelas equações (4.11), (4.12) e (4.13) é muito conveniente, porque tão logo um coeficiente para um dado elemento seja achado, o mesmo pode ser imediatamente colocado no local apropriado para a resolução computacional do sistema. Com este propósito, define-se um esquema de numeração que identifique todos os nós, lados e elementos que compõem o corpo a ser analisado. Através dessa representação, determina-se a *conectividade* da malha de elementos.

4.3 - Resolução do sistema estrutural

4.3.1 - Determinação do sistema de equações lineares

4.3.1.1 - Sistema isoparamétrico

Para a resolução do sistema estrutural, é necessário que o sistema de equações lineares, definido pela expressão 4.8, seja solucionado para os **deslocamentos**, ou seja, deve-se obter o vetor de deslocamentos $\{a\}$. A princípio, com este propósito, resolve-se o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \quad (4.14)$$

Na equação anterior, $\{a_{iso}\}$ é constituído somente de seus deslocamentos nodais (rotações e translações), sem consideração dos parâmetros hierárquicos. Da mesma forma, a *matriz de rigidez* e o *vetor de carga* não possuem formulação hierárquica.

Portanto:

$$[K_{iso}] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m [K_{11}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^m [K_{1n}^e] \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^m [K_{n1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^m [K_{nn}^e] \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\{f_{iso}\} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^m \{f_1^e\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m \{f_n^e\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

e:

$$\{a_{iso}\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

sendo que n é o número total de variáveis isoparamétricas (deslocamentos nodais).

4.3.1.2 - Sistema hierárquico

Resolvendo-se o sistema isoparamétrico e tendo este não apresentado a solução de forma satisfatória, pode-se fazer, a seguir, a primeira reanálise do sistema, através do refinamento dos seus lados, com a introdução da *formulação hierárquica* dada no capítulo 3. Sendo assim, o primeiro refinamento da solução é introduzido com as *funções de forma hierárquicas do terceiro grau*:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,hier1}] \\ [K_{hier1,iso}] & [K_{hier1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{hier1}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{hier1}\} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

nessa expressão, como a aproximação é refinada, as matrizes obtidas pela análise anterior ($[K_{iso}]$, $\{f_{iso}\}$) reocorrem e não precisam ser recomputadas.

Considerando-se que n_1 é o número total de *parâmetros hierárquicos* introduzidos na primeira reanálise do sistema, tem-se que:

- $[K_{iso,hier1}]$ é uma matriz $(n \times n_1)$, responsável pelo acoplamento entre o sistema isoparamétrico e hierárquico que ocorre nesse primeiro refinamento;
- $[K_{hier1}]$ é uma matriz $(n_1 \times n_1)$, correspondente ao sistema hierárquico;
- $\{f_{hier1}\}$ é o vetor de carga $(n_1 \times 1)$ associado ao sistema hierárquico;
- $\{a_{hier1}\}$ é o vetor $(n_1 \times 1)$ constituído pelas variáveis hierárquicas.

Desejando-se nova reanálise, a mesma pode ser obtida através das funções de forma de terceiro grau do tipo bolha:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,hier1}] & [K_{iso,hier2}] \\ [K_{hier1,iso}] & [K_{hier1}] & [K_{hier1,hier2}] \\ [K_{hier2,iso}] & [K_{hier2,hier1}] & [K_{hier2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{hier1}\} \\ \{a_{hier2}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{hier1}\} \\ \{f_{hier2}\} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

onde $[K_{iso}]$, $[K_{hier1}]$, $[K_{iso,hier1}]$, $\{f_{iso}\}$ e $\{f_{hier1}\}$ foram obtidos pelas análises anteriores.

Se n_2 é o número total de *parâmetros hierárquicos* introduzidos na segunda reanálise do sistema, tem-se que:

- $[K_{iso,hier2}]$ é uma matriz $(n \times n_2)$, responsável pelo acoplamento entre o sistema isoparamétrico e hierárquico que ocorre nesse refinamento;
- $[K_{hier2}]$ é uma matriz $(n_2 \times n_2)$, correspondente ao sistema hierárquico;
- $\{f_{hier2}\}$ é o vetor de carga $(n_2 \times 1)$ associado ao sistema hierárquico;
- $\{a_{hier2}\}$ é o vetor $(n_2 \times 1)$ constituído pelas variáveis hierárquicas.

Observa-se pelo exposto, que para cada reanálise, é somente necessário calcular as submatrizes relacionadas às novas variáveis hierárquicas introduzidas, reaproveitando-se, dessa forma, todo o cálculo computacional já efetuado e portanto, um ganho computacional considerável.

4.3.2 - Resolução do sistema de equações lineares

Uma vez tendo-se determinado o sistema de equações lineares dado por $[K] \cdot \{a\} = \{f\}$, equação 4.8, as mesmas só poderão ser resolvidas após terem acrescentadas as condições de contorno, as quais modificam o sistema de equações lineares inicialmente definido. As condições de contorno são as restrições impostas à estrutura e que equilibram o carregamento. Sem elas, a matriz $[K]$ seria singular, conforme Desai [1]. Uma maneira de se impor essas restrições é a de transformar a linha e coluna de $[K]$ correspondente àquela condição nula, com excessão da posição diagonal, a qual recebe o valor 1.

Da mesma forma, o valor desejado para o deslocamento em questão é inserido no vetor de carga, sendo que este pode ser zero, no caso de apoio, ou diferente de zero, para o caso de recalque diferencial de fundação, como um exemplo, segundo Desai [1].

Posteriormente à introdução das condições de contorno, procede-se com a resolução do sistema de equações resultante. Com tal objetivo, utilizou-se o algoritmo de Cholesky, conforme Caputo [33], o qual consiste na seguinte decomposição:

$$[K_{iso}] = [L_{iso}] \cdot [T_{iso}] \quad (4.20)$$

onde $[L_{iso}]$ é uma matriz auxiliar do tipo triangular inferior dada por:

$$[L_{iso}] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{j1} & l_{j2} & \cdots & l_{ji} & l_{jj} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{ni} & l_{nj} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e $[T_{iso}]$ uma matriz auxiliar do tipo triangular superior, a seguir definida:

$$[T_{iso}] = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1i} & t_{1j} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & t_{2i} & t_{2j} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_{ij} & \cdots & t_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & t_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Da mesma forma, $[K_{iso}]$, como sendo a matriz já alterada dada por:

$$[K_{iso}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{j1} & k_{j2} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

na qual n refere-se ao número de deslocamentos nodais.

Considerando-se que:

$$\{f_{iso}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

e que:

$$\{a_{iso}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

ou seja, o vetor de carga global após a introdução das condições de contorno e o vetor de deslocamentos nodais final; pode-se escrever que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{iso} \\ T_{iso} \end{bmatrix}}_{[K_{iso}]} \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \quad (4.26)$$

Definindo-se l_{ij} como sendo os coeficientes da matriz triangular inferior $[L_{iso}]$ e t_{ij} como os da matriz triangular superior $[T_{iso}]$, os mesmos podem ser dados por:

$$t_{ii} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.27)$$

$$l_{i1} = k_{i1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.28)$$

$$l_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot t_{mj} \quad \begin{cases} j > 1 \\ j \leq i \end{cases} \quad (4.29)$$

$$t_{1j} = \frac{k_{1j}}{k_{11}} \quad \begin{cases} j > 1 \\ j = (i+1), \dots, n \end{cases} \quad (4.30)$$

$$t_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(j-1)} \frac{l_{im} \cdot t_{mj}}{l_{ii}} \quad j > i \quad (4.31)$$

Tem-se ainda que:

$$[T_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{s_{iso}\} \quad (4.32)$$

onde $\{s_{iso}\}$ é uma matriz auxiliar, de componentes s_i , as quais são definidas como:

$$s_i = \frac{f_i - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot s_m}{l_{ii}} \quad (4.33)$$

O esquema dado pela equação 4.32, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1i} & t_{1j} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & t_{2i} & t_{2j} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_{ij} & \cdots & t_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & t_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ s_j \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

onde, se $i = n$:

$$a_n = s_n \quad (4.35)$$

e

$$a_i = s_i - \sum_{m=(i+1)}^n t_{im} \cdot a_m \quad (4.36)$$

Portanto, a partir das expressões (4.35) e (4.36), encontram-se os deslocamentos nodais procurados.

4.3.3 - Reanálise do sistema de equações lineares

Na reanálise utilizada para o *refinamento do sistema isoparamétrico* anteriormente descrito, com a introdução das *novas variáveis hierárquicas* de quantidade definida como n_i , é necessário somente calcular os novos termos l_{ij} e t_{ij} , os quais estão relacionados com essas variáveis hierárquicas adicionais. Sendo assim:

$$t_{ii} = 1 \quad \{ i = (n+1), \dots, (n+n_1) \} \quad (4.37)$$

$$l_{i1} = k_{i1} \quad \{ i = (n+1), \dots, (n+n_1) \} \quad (4.38)$$

$$l_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot t_{mj} \quad \begin{cases} j > 1, \dots, (n+n_1) \\ i = (n+1), \dots, (n+n_1) \end{cases} \quad (4.39)$$

$$t_{1j} = \frac{k_{1j}}{k_{11}} \quad \{ j = (n+1), \dots, (n+n_1) \} \quad (4.40)$$

$$t_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(j-1)} \frac{l_{im} \cdot t_{mj}}{l_{ii}} \quad \begin{cases} i = 2, \dots, [(n+n_1)-1] \\ j = (n+1), \dots, (n+n_1) \end{cases} \quad (4.41)$$

$$s_i = \frac{f_i - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot s_m}{l_{ii}} \quad i = (n+1), \dots, (n+n_1) \quad (4.42)$$

Observa-se pelas equações dadas anteriormente que todos os coeficientes l_{ij} , t_{ij} e s_i , calculados na análise anterior, permanecem inalterados e são reaproveitados.

As próximas reanálises, se assim desejadas, podem ser feitas utilizando-se as mesmas expressões (4.37) a (4.42). De uma maneira geral, para a *i-ésima* reanálise, com as novas n_i variáveis hierárquicas introduzidas, pode-se reescrever:

$$t_{ii} = 1 \quad \{ i = [(n+n_1+\dots+n_{i-1})+1], \dots, (n+n_1+\dots+n_{i+1}+n_i) \} \quad (4.43)$$

$$l_{i1} = k_{i1} \quad \{ i = [(n+n_1+\dots+n_{i-1})+1], \dots, (n+n_1+\dots+n_{i+1}+n_i) \} \quad (4.44)$$

$$l_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot t_{mj} \quad \begin{cases} j > 1, \dots, (n + n_1 + n_{i-1} + n_i) \\ i = [(n + n_1 + n_{i-1}) + 1], \dots, (n + n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i) \end{cases} \quad (4.45)$$

$$t_{1j} = \frac{k_{1j}}{k_{11}} \quad \{ j = [(n + n_1 + n_{i-1}) + 1], \dots, (n + n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i) \} \quad (4.46)$$

$$t_{ij} = k_{ij} - \sum_{m=1}^{(j-1)} \frac{l_{im} \cdot t_{mj}}{l_{ii}} \quad \begin{cases} j > 1, \dots, (n + n_1 + n_{i-1} + n_i) \\ i = [(n + n_1 + n_{i-1}) + 1], \dots, (n + n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i) \end{cases} \quad (4.47)$$

$$s_i = \frac{f_i - \sum_{m=1}^{(i-1)} l_{im} \cdot s_m}{l_{ii}} \quad \{ i = [(n + n_1 + \dots + n_{i-1}) + 1], \dots, (n + n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i) \} \quad (4.48)$$

4.3.4 - Programa Computacional

Após a definição da formulação mostrada anteriormente, buscou-se a sua implementação em linguagem de computação C⁺⁺, com a programação baseada em objetos, ou a OOP (Object - Oriented Programming). Em C⁺⁺, esses objetos são chamados classes, conforme a teoria dada em Swan [56].

Considerando-se a programação convencional, os dados são passados de uma função para outra função; na programação baseada em objetos, as classes encapsulam dados e funções, da forma apresentada a seguir:

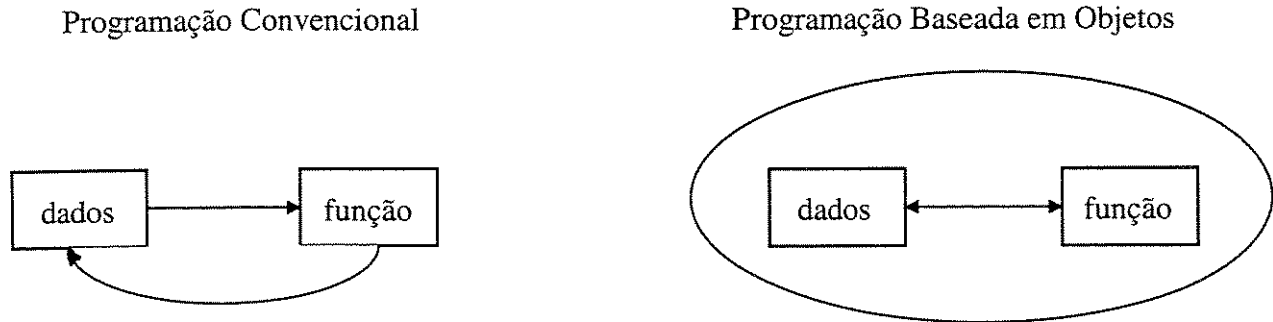


Figura 4.1 - Programação Convencional e Programação Baseada em Objetos

Sendo assim, o programa foi desenvolvido de forma que um arquivo de projeto manipulasse as classes de interesse.

Os dados do sistema a ser analisado: coordenadas e incidências nodais, tipos e valores de carregamentos e restrições nodais foram passados para o programa através de arquivos - textos.

Um arquivo - fonte principal dirigiu esses dados, as propriedades do material e também o tipo de análise requerida (análise do elemento isoparamétrico ou hierárquico), para a classe responsável em:

- Montar a matriz de rigidez global $[K]$;
- Montar o vetor de carga global $\{f\}$;
- Inserir as restrições de apoio;
- Passar $[K]$ e $\{f\}$ para a classe encarregada da resolução do sistema de equações lineares, através do algoritmo de Cholesky. Os resultados obtidos dessa resolução eram enviados para um arquivo - texto.

O fluxograma do programa computacional é apresentado através das figuras 4.2 e 4.3.

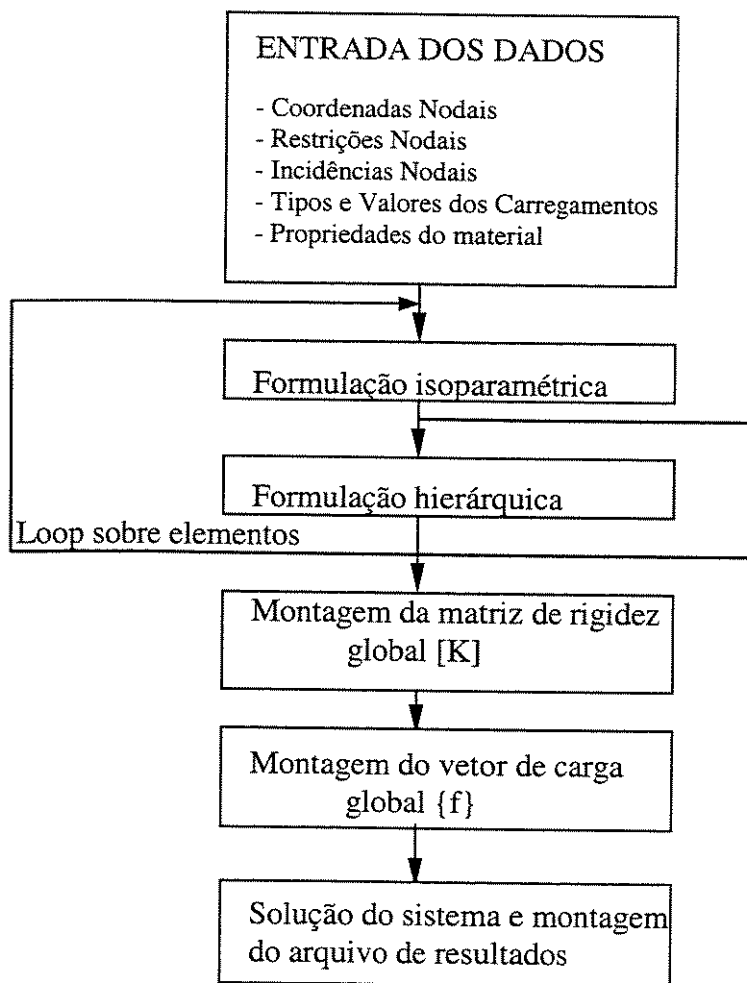


Figura 4.2 - Fluxograma do programa computacional

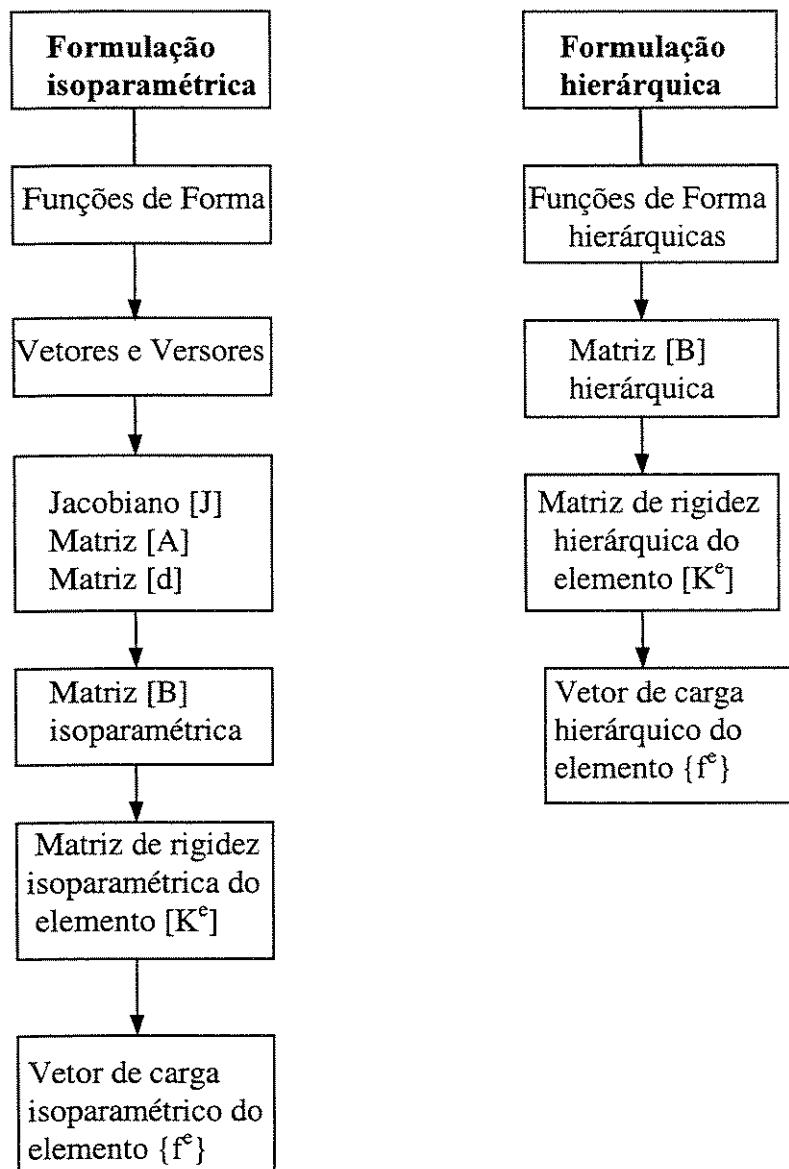


Figura 4.3 - Fluxograma da formulação isoparamétrica e hierárquica do programa computacional

Capítulo 5

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 - INTRODUÇÃO:

Os exemplos de aplicação do elemento proposto, ou seja, elemento triangular hierárquico a partir do elemento isoparamétrico triangular quadrático, têm seus resultados apresentados nas tabelas que se seguem, para várias configurações de condições de contorno e de carregamento. Esses resultados referem-se à análise estática de placas, sejam quadradas ou retangulares, assim como para casca e vigas. Nos exemplos em questão, variou-se a espessura das estruturas, no caso das placas, conforme indicado em suas respectivas tabelas.

Considerando-se o objetivo deste trabalho, de refinar a solução obtida pelo elemento isoparamétrico pela introdução de polinômios de 3ª ordem, optou-se pela escolha de malhas de discretização grosseiras, de tal forma que o refinamento hierárquico pudesse ser observado.

Verificou-se, a princípio, qual seria o número de pontos de integração necessário para obter-se um melhor desempenho por parte do elemento.

Sendo assim, após tal verificação, optou-se por iniciar os exemplos com os elementos isoparamétricos ($p=2$), com integração consistente (3 pontos de integração).

Observou-se que considerando o refinamento hierárquico de 3º grau ($p=3$), o melhor desempenho do elemento ocorria utilizando-se 3 pontos de integração para o acoplamento quadrático-cúbico e 6 pontos de integração para o acoplamento cúbico-cúbico.

Considerando-se a bolha de terceiro grau, utilizou-se 3 pontos para o acoplamento quadrático-cúbico, 6 pontos de integração para o acoplamento cúbico-bolha de 3º grau e 6 pontos de integração para o acoplamento bolha de 3º grau - bolha de 3º grau.

Resolveu-se primeiramente os exemplos para o elemento *isoparamétrico* ($p=2$) e, em seguida, prosseguiu-se com o refinamento da solução obtida através da introdução dos polinômios de terceiro grau ($p=3$), associados aos lados do elemento, assim como da bolha de terceiro grau, associada ao elemento. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento.

O procedimento descrito, refere-se a todos os exemplos analisados, onde **D** é definido como sendo a *rigidez da placa* dada por Timoshenko et al. [31]:

$$D = \frac{E.t^3}{12.(1-\nu^2)} \quad (5.1)$$

Nesta expressão, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material da placa, ν seu coeficiente de Poisson e t , a espessura da placa.

Para placas moderadamente grossas, no caso de não se ter solução analítica disponível, os resultados serão comparados com aqueles encontrados utilizando-se o programa ANSYS - versão 5.2 (elemento STIF93).

5.2 - Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída e perpendicular ao seu plano

5.2.1 - Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados

No caso da placa quadrada, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t / a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator qa^4/D , para o qual q é o valor da carga distribuída e D é dado pela equação (5.1).

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria de Elasticidade Tridimensional, segundo Pagano [43].

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se, primeiramente, para verificar a convergência do elemento isoparamétrico malhas de discretização de 8, 12, 14 e 16 elementos. Os resultados desta análise de convergência para a relação $t/a = 0,010$ são apresentadas no gráfico 5.1

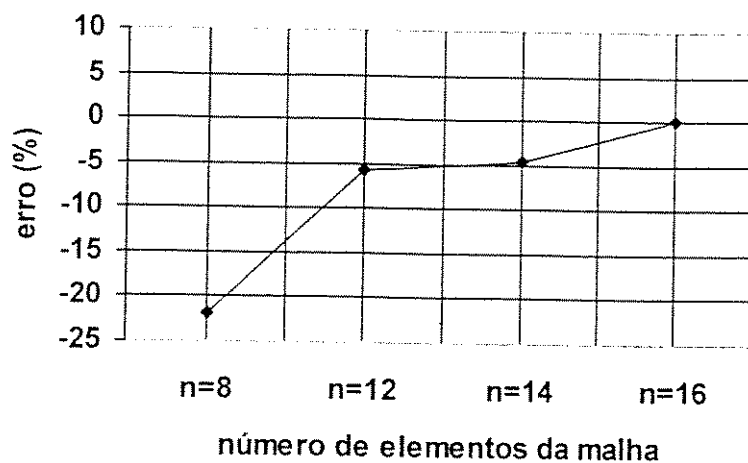


Gráfico 5.1 - Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento da malha para o elemento isoparamétrico

A tabela 5.1 mostra o refinamento hierárquico obtido a partir do elemento isoparamétrico com a malha de discretização de 12 elementos apresentada na figura 5.1

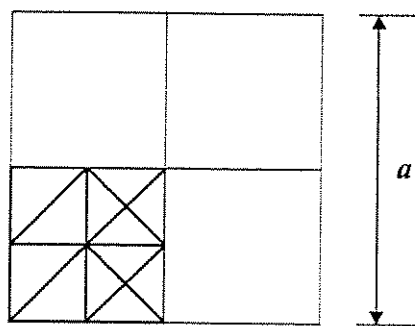


Figura 5.1 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa

Tabela 5.1 - Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Solução Exata: α [43]	Elemento proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3º grau	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro
0,005	0,004060	0.003762	-7.3%	0.003773	-7.1%	0.003776	-7.0%
0,010	0,004061	0.003831	-5.7%	0.003845	-5.3%	0.003851	-5.2%
0,050	0,004111	0.004158	1.1%	0.004175	1.6%	0.004183	1.7%
0,100	0,004263	0.004547	6.7%	0.004575	7.3%	0.004581	7.5%
$w_c = \frac{\alpha \cdot q \cdot a^4}{D}$							

Observa-se através da tabela 5.1 que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3º grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Observa-se também um bom comportamento para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$).

5.2.2 - Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados

Para a placa retangular, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t/a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado maior.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator qb^4/D , para o qual q é o valor da carga distribuída, D é dado pela equação (5.1) e b o seu lado menor.

Posteriormente, estes resultados são comparados com aqueles da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 4x4 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 12 elementos, conforme mostra a figura 5.2.

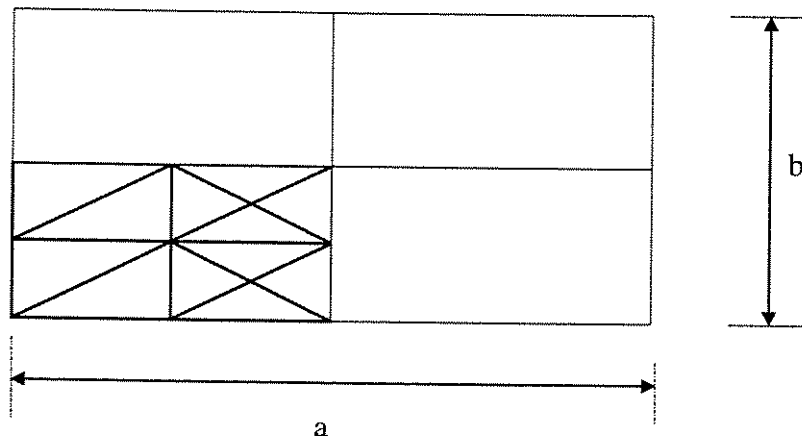


Figura 5.2 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa

Tabela 5.2 - Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a , sendo a o lado maior da placa.

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos α	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro
0,005	0.010130 ⁽¹⁾	0.009702	-4.2%	0.009749	-3.8%	0.009772	-3.5%
0,010	0.010130 ⁽¹⁾	0.009884	-2.4%	0.009913	-2.1%	0.009952	-1.8%
0,050	0.010470 ⁽²⁾	0.010759	2.8%	0.010805	3.2%	0.010833	3.5%
0,100	0.011451 ⁽²⁾	0.012137	6.0%	0.012238	6.9%	0.012256	7.0%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$; $a / b = 2$) -Timoshenko et al. [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\alpha \cdot q \cdot b^4}{D}$							

Verifica-se através da tabela 5.2, que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), mostra uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um bom desempenho.

5.2.3 - Placa quadrada engastada em seus lados

Para essa placa, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t / a), nas quais t refere-se a espessura da placa e a ao seu lado.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator qa^4/D , para o qual q é o valor da carga distribuída e D é dado pela equação (5.1).

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 32 elementos, conforme mostra a figura 5.3.

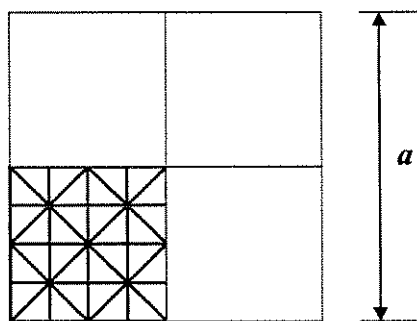


Figura 5.3 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa.

Tabela 5.3 - Placa quadrada engastada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos α	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3º grau	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro
0,005	0.001260 ⁽¹⁾	0.001061	-15.8%	0.001070	-15.1%	0.001083	-14.0%
0,010	0.001260 ⁽¹⁾	0.001140	-9.5%	0.001149	-8.8%	0.001158	-8.1%
0,050	0.001327 ⁽²⁾	0.001311	-1.2%	0.001313	-1.0%	0.001315	-0.9%
0,100	0.001504 ⁽²⁾	0.001501	-0.2%	0.001502	-0.1%	0.001503	-0.1%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$) - Timoshenko et al. [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\alpha \cdot q \cdot a^4}{D}$							

A tabela 5.3 mostra que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico ($p=3$ e bolha do 3º grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um ótimo desempenho.

5.2.4 - Placa retangular engastada em seus lados

Para a placa retangular, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t/a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado maior.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator qb^4/D , para o qual q é o valor da carga distribuída, D é dado pela equação (5.1) e b o seu lado menor.

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 32 elementos, conforme mostra a figura 5.4.

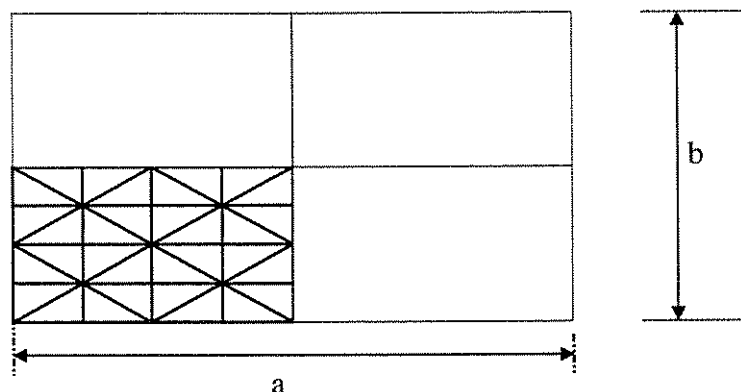


Figura 5.4 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa.

Tabela 5.4 - Placa retangular engastada em seus lados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a , sendo a o lado maior da placa.

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos α	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3º grau	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro
0,005	0.002540 ⁽¹⁾	0.002360	-7.1%	0.002376	-6.5%	0.002392	-5.8%
0,010	0.002540 ⁽¹⁾	0.002458	-3.2%	0.002470	-2.7%	0.002481	-2.3%
0,050	0.002892 ⁽²⁾	0.002886	-0.2%	0.002887	-0.2%	0.002890	-0.1%
0,100	0.003947 ⁽²⁾	0.003947	0.0%	0.003947	0.0%	0.003953	0.1%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$; $a / b = 2$) -Timoshenko [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\alpha \cdot q \cdot b^4}{D}$							

Analisando-se a tabela 5.4, verifica-se que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3º grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um bom comportamento.

5.3 - Placa submetida à ação de uma carga concentrada perpendicular ao seu plano

5.3.1 - Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados

No caso da placa quadrada, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t/a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator Pa^2/D , para o qual P é o valor da carga concentrada e D é dado pela equação (5.1).

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 16 elementos, conforme mostra a figura 5.5.

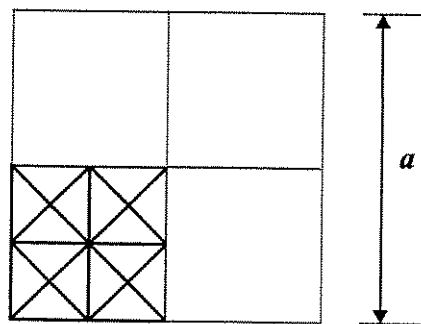


Figura 5.5 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa.

Tabela 5.5 - Placa quadrada apoiada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos β	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro
0,005	0.011600	0.010904	-6.0%	0.010935	-5.7%	0.010948	-5.6%
0,010	0.011600	0.011074	-4.5%	0.011127	-4.1%	0.011152	-3.9%
0,050	0.012135	0.012276	1.2%	0.012304	1.4%	0.012350	1.8%
0,100	0.013751	0.014067	2.3%	0.014197	3.2%	0.014289	3.9%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$) - Timoshenko et al. [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\beta \cdot P \cdot a^2}{D}$							

Verifica-se através da tabela 5.5, que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico ($p=3$ e bolha do 3° grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um comportamento satisfatório.

5.3.2 - Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados

Para a placa retangular, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t/a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado maior.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator Pb^2/D , para o qual P é o valor da carga concentrada, D é dado pela equação (5.1) e b o seu lado menor.

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 34 elementos, conforme mostra a figura 5.6.

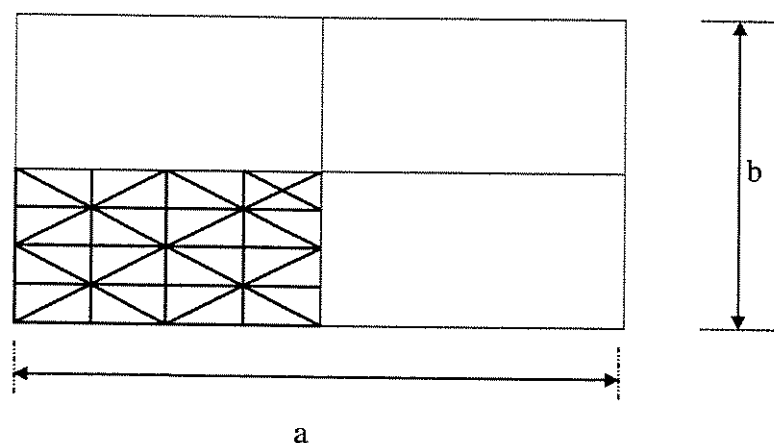


Figura 5.6 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa.

Tabela 5.6 - Placa retangular apoiada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos β	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro
0,005	0.016510 ⁽¹⁾	0.015303	-7.3%	0.015392	-6.8%	0.015440	-6.5%
0,010	0.016510 ⁽¹⁾	0.015824	-4.2%	0.015926	-3.5%	0.015984	-3.2%
0,050	0.018631 ⁽²⁾	0.018830	1.1%	0.018974	1.8%	0.019075	2.4%
0,100	0.024985 ⁽²⁾	0.025132	0.6%	0.025685	2.8%	0.025986	4.0%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$; $a/b = 2$) -Timoshenko [31] (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93) $w_c = \frac{\beta \cdot P \cdot b^2}{D}$							

Verifica-se através da tabela 5.6, que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um bom comportamento.

5.3.3 - Placa quadrada engastada em seus lados

Para essa placa, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t / a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator Pa^2/D , para o qual P é o valor da carga concentrada e D é dado pela equação (5.1).

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al.[31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 34 elementos, conforme mostra a figura 5.7.

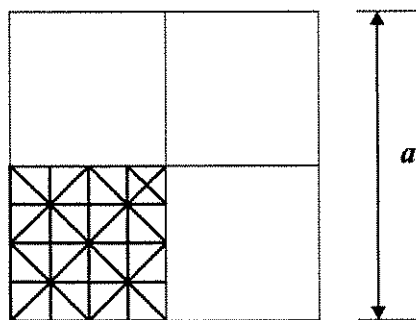


Figura 5.7 - Malha de discretização correspondente a um quarto da placa.

Tabela 5.7 - Placa quadrada engastada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos β	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro
0,005	0.005600 ⁽¹⁾	0.004762	-15.0%	0.004812	-14.1%	0.004854	-13.3%
0,010	0.005600 ⁽¹⁾	0.005097	-9.0%	0.005141	-8.2%	0.005178	-7.5%
0,050	0.006166 ⁽²⁾	0.006097	-1.1%	0.006119	-0.8%	0.006145	-0.3%
0,100	0.007835 ⁽²⁾	0.007746	-1.1%	0.007843	0.1%	0.007916	1.0%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$) - Timoshenko et al. [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\beta \cdot P \cdot a^2}{D}$							

A tabela 5.7 mostra que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um bom comportamento.

5.3.4 - Placa retangular engastada em seus lados

Para a placa retangular, apresentam-se os resultados encontrados para o comportamento da estrutura para diferentes relações (t/a), nas quais t se refere à espessura da placa e a , ao seu lado maior.

As deflexões w_c no centro da placa, são apresentadas como resultado e normalizadas com relação ao fator Pb^2/D , para o qual P é o valor da carga concentrada, D é dado pela equação (5.1) e b o seu lado menor.

Posteriormente, estes resultados são comparados com aquele da Teoria Clássica de Kirchhoff, segundo Timoshenko et al. [31], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$) e, para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se a malha de discretização, composta por elementos quadriláteros quadráticos, de 6x6 elementos. A comparação com o modelo numérico, dá-se em virtude dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 34 elementos, conforme mostra a figura 5.6.

Tabela 5.8 - Placa retangular engastada em seus lados e submetida a uma carga concentrada central. Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a .

$\frac{t}{a}$	Valores Comparativos β	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro
0,005	0.007220 ⁽¹⁾	0.006089	-15.7%	0.006192	-14.2%	0.006247	-13.5%
0,010	0.007220 ⁽¹⁾	0.006571	-9.0%	0.006673	-7.6%	0.006733	-6.7%
0,050	0.009438 ⁽²⁾	0.009197	-2.6%	0.009316	-1.3%	0.009412	-0.3%
0,100	0.016017 ⁽²⁾	0.015258	-4.7%	0.015797	-1.4%	0.016094	0.5%
(1) Solução analítica para placas finas ($\nu = 0.3$; $a / b = 2$) -Timoshenko [31]							
(2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF 93)							
$w_c = \frac{\beta.P.b^2}{D}$							

Observa-se através da tabela 5.8 que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico ($p=3$ e bolha do 3° grau), apresenta uma redução na sua característica de rigidez nos casos de placas finas ($t/a < 0.050$), como se pretendia inicialmente. Considerando-se as placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um ótimo comportamento.

5.4 - Vigas retas em balanço

Para essa análise foram consideradas três vigas retas em balanço submetidas a diferentes condições de carregamento: *flexão pura* (plano xy), *flexão no plano* (carregamento na direção do eixo y do plano xy) e *flexão fora do plano* (carregamento na direção do eixo z, perpendicular ao plano xy), conforme mostra a figura 5.8.

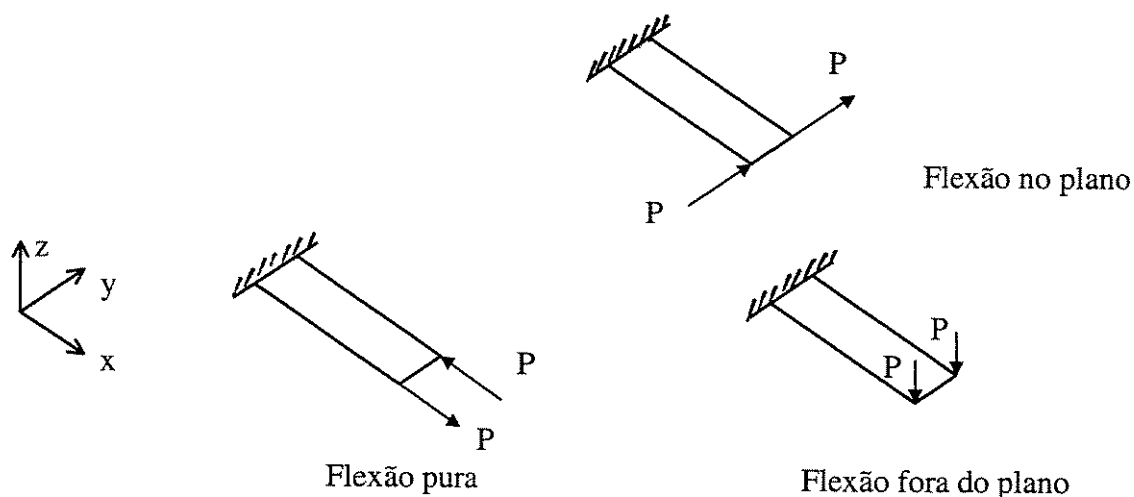


Figura 5.8 - Vigas submetidas a diferentes carregamentos

As vigas foram submetidas a forças P de valor 5.0 para o caso de *flexão pura* e de valor 0.5 para os casos de *flexão no plano e fora dele*.

Desconsideram-se as unidades de medidas empregadas nas dimensões das vigas, assim como de suas constantes elásticas, da mesma forma que em Macneal et al. [54]. Logo, adotaram-se os seguintes valores: comprimento = 6.0, largura = 0.2, espessura = 0.1, módulo de elasticidade $E = 1.0 \times 10^7$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

As malhas de discretização utilizadas são apresentadas pela figura 5.9, para suas respectivas solicitações e os resultados encontrados são apresentados nas tabelas que se seguem, os quais são comparados à solução analítica de cada problema, dada por Macneal et al. [54].

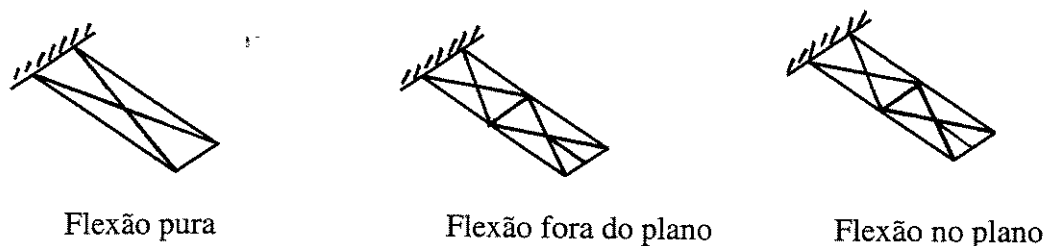


Figura 5.9 - Malhas de discretização para as 3 vigas consideradas.

Tabela 5.9 - *Viga submetida à flexão pura*

Solução Exata: flecha	Elemento Proposto					
	p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.02703	0.0270	0.1%	0.027058	0.1%	0.027058	0.1%

A tabela 5.9 mostra que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta um comportamento satisfatório em relação à solução analítica da viga submetida à flexão pura.

Tabela 5.10 - *Viga submetida à flexão no plano*

Solução Exata: flecha	Elemento Proposto					
	p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.1081	0.101401	6.2%	0.102239	5.4%	0.102334	5.3%

Observa-se pela tabela 5.10 que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta um bom comportamento em relação à solução analítica da viga submetida à flexão no plano.

Tabela 5.11 - *Viga submetida à flexão fora do plano*

Solução Exata: flecha	Elemento Proposto					
	p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.43210	0.400562	7.3%	0.400391	7.3%	0.400526	7.3%

Verifica-se através da tabela 5.11 que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta um comportamento satisfatório em relação à solução analítica da viga submetida à flexão fora do plano.

5.5 - Placas circulares e cascas

5.5.1 - Placa circular engastada submetida a carga distribuída

Apresenta-se nesse exemplo, uma placa circular engastada na borda e submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular ao seu plano.

Considerando-se a simetria geométrica e de carregamento modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se uma malha de discretização de 45 elementos, conforme mostra a figura 5.10.

O resultado apresenta-se como a deflexão no centro da placa (w_c), o qual é comparado com aquele da teoria clássica de Kirchhoff para placas finas, segundo Timoshenko et al. [31].

Características da placa:

raio = 4,0 cm;

espessura = 0,004 cm;

módulo de elasticidade = $2,1 \cdot 10^6$ kgf/cm²

coeficiente de Poisson = 0,3

carga distribuída = -0,001 kgf/cm²

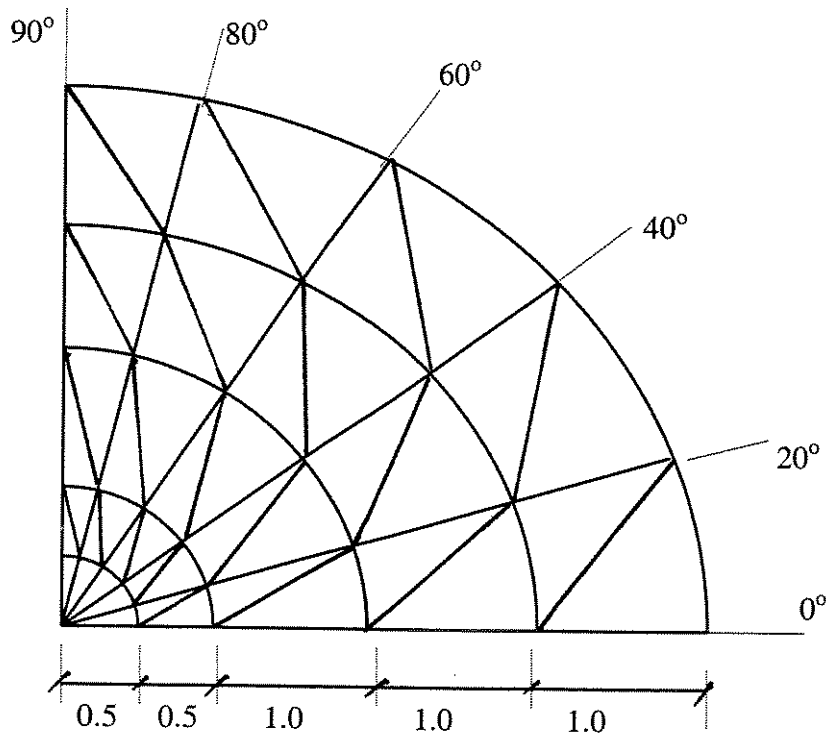


Figura 5.10 - Malha de discretização de 45 elementos.

Tabela 5.12 - Placa circular

Solução Exata: w_c cm	Elemento Proposto					
	p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
	w_c (cm)	Erro	w_c (cm)	Erro	w_c (cm)	Erro
-0.325	-0.272179	-16.2%	-0.274659	-15.5%	-0.277244	-14.7%

Observa-se pela tabela 5.12 que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=3 e bolha do 3° grau), apresenta um desempenho satisfatório em relação à solução analítica da placa circular.

5.5.2 - Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio

A casca de cobertura mostrada na figura 5.11 foi solucionada considerando-se como carregamento somente a ação do seu peso próprio e como condição de contorno do problema, foram empregados diafragmas rígidos em duas de suas extremidades, conforme indicado.

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca; foram utilizados 32 elementos em sua malha de discretização. A figura 5.3 mostra a projeção no plano da malha empregada.

Como resultado, de acordo com o sistema de referência global, apresentam-se as deflexões w_1 , w_2 e w_3 , nos nós 1, 2 e 3 respectivamente, dadas na tabela 5.13. Os valores encontrados são comparados às soluções analíticas obtidas por Macneal et al. [54].

raio = 25 ft
 comprimento = 50.0 ft;
 espessura = 0.25 ft;
 módulo de elasticidade = 4.32×10^5 k/ft²
 coeficiente de Poisson = 0.0
 peso próprio = -0,3599 k/ft³

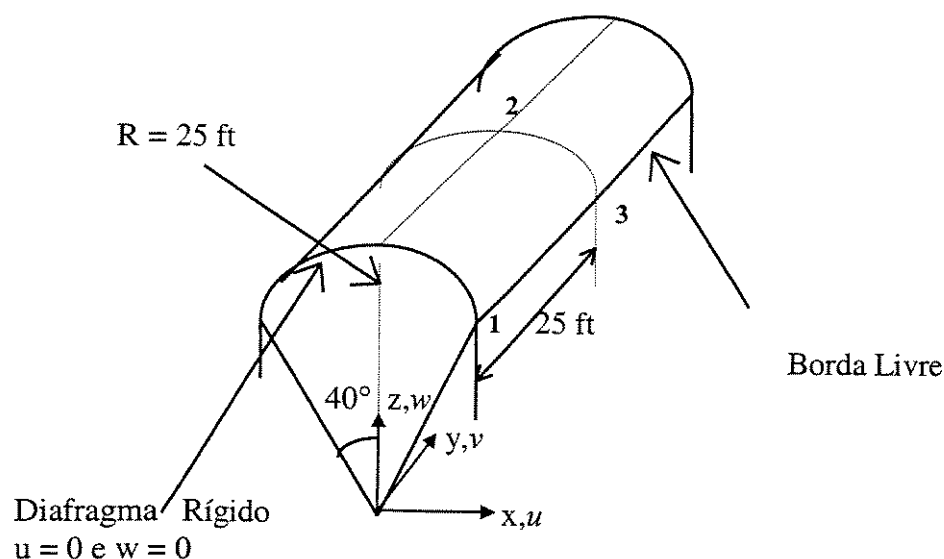


Figura 5.11 - Casca cilíndrica de cobertura.

Tabela 5.13 - Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio

Deflexão	Solução Exata: (ft)	Elemento Proposto					
		p = 2		p = 3		bolha 3° grau	
		Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro
v_1	-0.01250	-0.011636	-6.9%	-0.012358	-1.1%	-0.012560	0.5%
w_2	+0.04510	+0.035753	-20.7%	+0.037890	-16.0%	+0.039384	-12.7%
w_3	-0.30080	-0.265677	-11.7%	-0.280879	-6.6%	-0.287597	-4.4%

A tabela 5.13 mostra que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico ($p=3$ e bolha do 3° grau), apresenta um bom comportamento em relação à solução analítica da casca cilíndrica de cobertura.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

De acordo com o que foi pesquisado, é necessário primeiramente afirmar que, para o elemento triangular, não se pode fazer uso de um sistema de versores locais qualquer. Diferentemente do que ocorre com o elemento quadrilateral, é determinante, neste caso, a escolha de um sistema de versores locais obtido a partir da fixação de um versor na direção X ou Y do sistema de referência global, conforme definido pelo item 2.2.1 do Capítulo 2.

A formulação apresentada, analisando-se um elemento de placa ou casca a partir de sua superfície média, mostra-se eficiente pela sua simplicidade e principalmente pela possibilidade de se considerar o efeito das tensões de cisalhamento ao longo da espessura do elemento.

A natureza hierárquica da formulação resulta em um sistema computacional interessante, visto que em uma reanálise, obtida através do refinamento do tipo p , todos os resultados anteriormente encontrados podem ser reaproveitados.

Considerando-se os resultados apresentados no Capítulo 5, assim como os objetivos deste trabalho, pode-se concluir que, de um maneira geral, a formulação hierárquica desenvolvida é capaz de diminuir a característica de rigidez excessiva encontrada particularmente nas situações de placas e cascas finas.

Pode-se concluir, também, que apesar da função de forma do tipo bolha não ser necessária para complementar a expansão polinomial obtida, conforme o triângulo de Pascal, foi com a sua introdução que se obtiveram os melhores resultados.

Dentre os temas possíveis para a continuação deste trabalho sugere-se, principalmente, o estudo e a implementação de novas funções de forma hierárquicas de 4º grau, estudo e implementação de elemento finito para análise dinâmica de placas e cascas, estudo e implementação de elemento finito para análise de estabilidade de placas e cascas, estudo da influência da integração numérica nos elementos finitos do tipo hierárquico para análise de placas e cascas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. S. Desai, J. F. Abel, *Introduction to the Finite Element Method*, A Numerical Method for Engineering Analysis, Litton Educational Publishing, Inc., 1972.
- [2] D. P. Billington, *Thin Shell Concrete Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1965.
- [3] G. S. Ramaswamy, *Design and Construction of Concrete Shell Roofs*, McGraw-Hill, Inc., 1968.
- [4] L. A. Moreira, *Um Elemento Finito Paramétrico Hierárquico para Análise de Placas*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 1992. Tese (Doutorado).
- [5] L. Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2, Editora Harper & Row do Brasil Ltda., 1977.
- [6] L. G. Jaeger, *Elementary Theory of Elastic Plates*, A. Wheaton & Co., Exeter, 1964.
- [7] M. A. Pierossi, *Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Estática de Placas e Cascas*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 1995. Dissertação (Mestrado).
- [8] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan, *Finite elements and approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

- [9] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method*, 4th. Ed., McGraw-Hill Book Co., London, 1989.
- [10] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, William Clowes & Sons, Limited, London.
- [11] R. Szilard, *Theory and analysis of plates*, Classical and numerical methods, Prentice - Hall, Inc., New Jersey, 1974.
- [12] S. P. Timoshenko, *Resistência dos Materiais*, volume I, 3a. ed., Ao Livro Técnico S/A, Rio de Janeiro, 1969.
- [13] E. Volterra, J. H. Gaines, *Advanced strength of materials*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1971.
- [14] J. S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill Book Co., London, 1968.
- [15] S. Lipschutz, *Algebra Linear*, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1972.
- [16] E. Reissner, *On the theory of bending of plates*, J. Math. Phys., 184-191, 1944.
- [17] W. Kaplan, *Advanced calculus*, Addison-Wesley Publ. Co., 1971.
- [18] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*, Bd. 1, Mechanik, 1876.
- [19] S. A. Coons, *Surfaces for computer aided design of space form*, M.I.T. Project MAC, MAC-TR-41, 1967.

- [20] A. R. Forrest, *Curves and Surfaces for computer aided design*, Computer aided design Group, Cambridge, England, 1968.
- [21] Szabo, B. A., Babuska, I. *Finite Element Analysis*. New York: Wiley Interscience, 1991.
- [22] Carnevali, P., Morris R. B., Tsuji, Y., Taylor G., *New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis*. Int. J. Numer. Methods Engrg., v. 36, p. 3759-3779, 1993.
- [23] Shephard, M. S., Dey S., Flaherty J. E. *A straightforward structure to construct shape functions for variable p-order meshes*. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., v. 147, p. 209-233, 1997.
- [24] Sherwin, S. J., Karniadakis, G. *A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods*. Int. J. Numer. Methods Engrg., v. 38, p. 3775-3802, 1995.
- [25] Webb, J. P., Abouchacra R., *Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials*. Int. J. Numer. Methods Engrg. , v.38, p. 245-257, 1995.
- [26] Babuska, I., Szabo, B. A., Katz I. N. *The p-version of the finite element method*. SIAM J. Numer. Anal., v. 18, p.515-545, 1981.
- [27] Dunavant, D. A., *High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle*. Int. J. Numer. Methods Engrg., v. 28, p. 1891-1908, 1985.
- [28] Babuska, I., Griebel, M., Pitkaranta, J. *The problem of selecting the shape functions for p-type finite elements*. Int. J. Numer. Methods Engrg., v. 28, p. 1891-1908, 1989.

- [29] Szabo, B. A., Peano, A. G. *Hierarchic finite elements*, in: Kardestuncer, H., Norrie, D. H., *Finite Element Handbook*. New York: McGraw-Hill, p. 2227-2233, 1987.
- [30] Feodosyev, V., *Strength of Materials*. Second edition , 1973.
- [31] Timoshenko, S. P., Woinowsky - Krieger, S., *Theory of plates and Shells*, 2nd. ed., McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1959.
- [32] Fernandes, G. Batiston, *Introdução à Teoria das Placas Elásticas* - Notas de Aula - Universidade Estadual de Campinas - Limeira - 1974.
- [33] Caputo, H. P., *Matemática para a Engenharia*, Rio de Janeiro, 1969.
- [34] Kreyszig, E. - *Advanced Engineering Mathematics* - 5^a edition.
- [35] Kolman, B., *Introductory Linear Algebra with Applications* - 6^a edition .
- [36] Whiteman, *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Ed., Academic, New York, 1981.
- [37] Nogueira Jr., A. C., *Desenvolvimento de Um Elemento Finito do Tipo Hierárquico para Análise Estática de Placas e Cascas a Partir do Elemento Superparamétrico Quadrilateral Linear*. Universidade Estadual de Campinas - 1997 - Dissertação (Mestrado).
- [38] ANSYS - *Engineering Analysis System* - User's manual, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, 1989.

- [39] Zienkiewicz, O.C., Gago J. P., Kelly, D. W., *The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis*, Computers & Structures, **16**, pp53-65 - 1983.
- [40] B.A. Szabó and G.I. Sahrman, *Hierarchic Plate and Shell Models Based on p-Extension*, Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering, **26**, 1855-1881, 1988.
- [41] Peano, A., *Conforming Approximations for Kirchhoff Plates and Shells*, Int. J. Num. Meths. Eng., **14**, 1273-1291, 1979.
- [42] Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., Sardella, L., *Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis*, Computers & Structures, **10**, pp333-342 - 1979.
- [43] N. J. Pagano, *Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates*, J. Comp. Mater., **4**, 20-34, 1970.
- [44] Papadopoulos, P., Taylor, R. L., *A Triangular Element Based on Reissner - Mindlin Plate Theory*, Int. J. Num. Meths. Eng., **30**, 1029-1049, 1990.
- [45] Garnet, H., Pifko, A. B., *An Efficient Triangular Plate Bending Finite Element for Crash Simulation*, Computers & Structures, **16**, pp371-379 - 1983.
- [46] Dhatt, G., Marcotte L., Matte, Y, *A New Triangular Discrete Kirchhoff Plate / Shell Element*, Int. J. Num. Meths. Eng., **23**, 453-470, 1986.
- [47] Batoz, J.L., Katili, I., *On a Simple Triangular Reissner / Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints*, Int. J. Num. Meths. Eng., **35**, 1603-1632, 1992.

- [48] Katori, H., Nishimura, T., *Non-conforming triangular finite element based on Mindlin plate theory*, Computer Meths. in Appl. Mechanics and Eng., **104**, 173-186, 1993
- [49] Batoz, J.L., Bathe, K. J., Ho, L. W., *A study of three-node triangular bending elements*, Int. J. Num. Meths. Eng., **15**, 1771-1812, 1980.
- [50] Kosmaika, J. B., *An accurate shear-deformable six-node triangular plate element for laminated composite structures*, Int. J. Num. Meths. Eng., **37**, 431-455, 1994.
- [51] Oñate, E., Zarate, F., Flores, F., *A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis*, Int. J. Num. Meths. Eng., **37**, 2569-2582, 1994.
- [52] Zienkiewicz, O. C., Lefebvre, D., *A robust triangular plate bending element of the Reissner - Mindlin type*, Int. J. Num. Meths. Eng., **26**, 1169-1184, 1988.
- [53] Oñate, E., Zienkiewicz, O. C., Suarez, B., Taylor, R. L., *A general methodology for deriving shear constrained Reissner - Mindlin plate elements*, Int. J. Num. Meths. Eng., **33**, 345-367, 1992.
- [54] Macneal, R.H., Harder, R.L., *Finite Elements in Analysis and Designs*. A proposed standar set of problems to test finite element accuracy., n.1, p.3-20, 1985.
- [55] O. C. Zienkiewicz, J. Too and R. L. Taylor, *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*, Int. J. Numer. Methods, Eng. 3, 375-390, 1971.
- [56] Swan, T. , *Aprendendo C++*, Editora Campus, 1993

APÊNDICE A

DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE FORMA DO ELEMENTO TRIANGULAR QUADRÁTICO

$$\frac{\partial N_1(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 4L_1 - 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial N_2(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial N_3(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 4(L_1 + L_2) - 3 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial N_4(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 4L_2 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial N_5(L_1, L_2)}{\partial L_1} = -4L_2 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial N_6(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 4(1 - 2L_1 - L_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial N_1(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 0 \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial N_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 4L_2 - 1 \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial N_3(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 4(L_1 + L_2) - 3 \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial N_4(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 4L_1 \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial N_5(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 4(1 - L_1 - 2L_2) \quad (A.11)$$

$$\frac{\partial N_6(L_1, L_2)}{\partial L_2} = -4L_1 \quad (A.12)$$

APÊNDICE B

ELEMENTOS DAS MATRIZES: [A (L₁,L₂)], [d (L₁,L₂)], [B_i (L₁,L₂)] e [B_{l_{kj}} (L₁,L₂)]

B.1 - Elementos da matriz [A (L₁,L₂)]

$$\begin{aligned} A_{11}(L_1, L_2) = & v_{11}(L_1, L_2) \cdot (r_{22}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2)) \\ & - v_{12}(L_1, L_2) \cdot (r_{21}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2)) \\ & + v_{13}(L_1, L_2) \cdot (r_{21}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2) - r_{22}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2)) \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(L_1, L_2) = & v_{21}(L_1, L_2) \cdot (r_{22}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2)) \\ & - v_{22}(L_1, L_2) \cdot (r_{21}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2) - r_{23}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2)) \\ & + v_{23}(L_1, L_2) \cdot (r_{21}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2) - r_{22}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2)) \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} A_{12}(L_1, L_2) = & v_{11}(L_1, L_2) \cdot (r_{13}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2) - r_{12}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2)) \\ & - v_{12}(L_1, L_2) \cdot (r_{13}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2) - r_{11}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2)) \\ & + v_{13}(L_1, L_2) \cdot (r_{12}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2) - r_{11}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2)) \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\begin{aligned} A_{22}(L_1, L_2) = & v_{21}(L_1, L_2) \cdot (r_{13}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2) - r_{12}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2)) \\ & - v_{22}(L_1, L_2) \cdot (r_{13}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2) - r_{11}(L_1, L_2) \cdot V_{33}(L_1, L_2)) \\ & + v_{23}(L_1, L_2) \cdot (r_{12}(L_1, L_2) \cdot V_{31}(L_1, L_2) - r_{11}(L_1, L_2) \cdot V_{32}(L_1, L_2)) \end{aligned} \quad (B.4)$$

$$A_{33}(L_1, L_2) = v_{31}(L_1, L_2) \cdot r_{31}(L_1, L_2) + v_{32}(L_1, L_2) \cdot r_{32}(L_1, L_2) + v_{33}(L_1, L_2) \cdot r_{33}(L_1, L_2) \quad (B.5)$$

Nas equações (B.1) a (B.5), as componentes do versor $\bar{v}_1$ são dadas pelas equações (2.51), (2.52) e (2.53), as do versor $\bar{v}_2$ através das expressões (2.56), (2.57) e (2.58), assim como as do vetor $\bar{r}_3$, através das equações (2.26), (2.27) e (2.28).

B.2 - Componentes da matriz [d (L₁,L₂)]

$$d_{11}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) \quad (B.6)$$

$$d_{12}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{12}(L_1, L_2) \quad (B.7)$$

$$d_{13}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) \quad (B.8)$$

$$d_{14}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) \quad (B.9)$$

$$d_{15}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{12}(L_1, L_2) \quad (B.10)$$

$$d_{16}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) \quad (B.11)$$

$$d_{21}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{21}(L_1, L_2) \quad (B.12)$$

$$d_{22}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{22}(L_1, L_2) \quad (B.13)$$

$$d_{23}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{23}(L_1, L_2) \quad (B.14)$$

$$d_{24}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{21}(L_1, L_2) \quad (B.15)$$

$$d_{25}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{22}(L_1, L_2) \quad (B.16)$$

$$d_{26}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{23}(L_1, L_2) \quad (B.17)$$

$$d_{31}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) + A_{11}(L_1, L_2) v_{21}(L_1, L_2) \quad (B.18)$$

$$d_{32}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{12}(L_1, L_2) + A_{11}(L_1, L_2) v_{22}(L_1, L_2) \quad (B.19)$$

$$d_{33}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) + A_{11}(L_1, L_2) v_{23}(L_1, L_2) \quad (B.20)$$

$$d_{34}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) + A_{12}(L_1, L_2) v_{21}(L_1, L_2) \quad (B.21)$$

$$d_{35}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{12}(L_1, L_2) + A_{12}(L_1, L_2) v_{22}(L_1, L_2) \quad (B.22)$$

$$d_{36}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) + A_{12}(L_1, L_2) v_{23}(L_1, L_2) \quad (B.23)$$

$$d_{41}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{31}(L_1, L_2) \quad (B.24)$$

$$d_{42}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{32}(L_1, L_2) \quad (B.25)$$

$$d_{43}(L_1, L_2) = A_{11}(L_1, L_2) v_{33}(L_1, L_2) \quad (B.26)$$

$$d_{44}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{31}(L_1, L_2) \quad (B.27)$$

$$d_{45}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{32}(L_1, L_2) \quad (B.28)$$

$$d_{46}(L_1, L_2) = A_{12}(L_1, L_2) v_{33}(L_1, L_2) \quad (B.29)$$

$$d_{47}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{11}(L_1, L_2) \quad (B.30)$$

$$d_{48}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{12}(L_1, L_2) \quad (B.31)$$

$$d_{49}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{13}(L_1, L_2) \quad (B.32)$$

$$d_{51}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{31}(L_1, L_2) \quad (B.33)$$

$$d_{52}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{32}(L_1, L_2) \quad (B.34)$$

$$d_{53}(L_1, L_2) = A_{21}(L_1, L_2) v_{33}(L_1, L_2) \quad (B.35)$$

$$d_{54}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{31}(L_1, L_2) \quad (B.36)$$

$$d_{55}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{32}(L_1, L_2) \quad (B.37)$$

$$d_{56}(L_1, L_2) = A_{22}(L_1, L_2) v_{33}(L_1, L_2) \quad (B.38)$$

$$d_{57}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{21}(L_1, L_2) \quad (B.39)$$

$$d_{58}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{22}(L_1, L_2) \quad (B.40)$$

$$d_{59}(L_1, L_2) = A_{33}(L_1, L_2) v_{23}(L_1, L_2) \quad (B.41)$$

B.3 - Componentes da matriz [$B_i(L_1, L_2)$]

$$B_{11i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{14} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (B.42)$$

$$B_{21i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{24} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (B.43)$$

$$B_{31i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{34} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (B.44)$$

$$B_{41i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{44} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.45})$$

$$B_{51i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{54} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.46})$$

$$B_{12i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{15} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.47})$$

$$B_{22i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{25} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.48})$$

$$B_{32i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{35} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.49})$$

$$B_{42i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{45} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.50})$$

$$B_{52i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{55} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.51})$$

$$B_{13i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{16} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.52})$$

$$B_{23i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{26} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.53})$$

$$B_{33i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{36} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.54})$$

$$B_{43i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{46} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.55})$$

$$B_{53i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + d_{56} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right) \quad (\text{B.56})$$

$$B_{14i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{11}v_{11i} + d_{12}v_{12i} + d_{13}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{14}v_{11i} + d_{15}v_{12i} + d_{16}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.57})$$

$$B_{24i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{21}v_{11i} + d_{22}v_{12i} + d_{23}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{24}v_{11i} + d_{25}v_{12i} + d_{26}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.58})$$

$$B_{34i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{31}v_{11i} + d_{32}v_{12i} + d_{33}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{34}v_{11i} + d_{35}v_{12i} + d_{36}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.59})$$

$$B_{44i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{41}v_{11i} + d_{42}v_{12i} + d_{43}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{44}v_{11i} + d_{45}v_{12i} + d_{46}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.60})$$

$$B_{54i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{51}v_{11i} + d_{52}v_{12i} + d_{53}v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{54}v_{11i} + d_{55}v_{12i} + d_{56}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.61})$$

$$B_{15i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{11}v_{21i} + d_{12}v_{22i} + d_{13}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{14}v_{21i} + d_{15}v_{22i} + d_{16}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.62})$$

$$B_{25i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{21}v_{21i} + d_{22}v_{22i} + d_{23}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{24}v_{21i} + d_{25}v_{22i} + d_{26}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.63})$$

$$B_{35i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{31}v_{21i} + d_{32}v_{22i} + d_{33}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{34}v_{21i} + d_{35}v_{22i} + d_{36}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.64})$$

$$B_{45i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{41}v_{21i} + d_{42}v_{22i} + d_{43}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{44}v_{21i} + d_{45}v_{22i} + d_{46}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.65})$$

$$B_{55i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial L_1} (d_{51}v_{21i} + d_{52}v_{22i} + d_{53}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} (d_{54}v_{21i} + d_{55}v_{22i} + d_{56}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.66})$$

$$C_{44i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{47} v_{11i} + d_{48} v_{12i} + d_{49} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.67})$$

$$C_{54i}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{57} v_{11i} + d_{58} v_{12i} + d_{59} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.68})$$

$$C_{45i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{47} v_{21i} + d_{48} v_{22i} + d_{49} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.69})$$

$$C_{55i}(L_1, L_2) = -\frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{57} v_{21i} + d_{58} v_{22i} + d_{59} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.70})$$

APÊNDICE C

FUNÇÕES DE FORMA HIERÁRQUICAS E SUAS DERIVADAS

As *funções de forma hierárquicas* inseridas neste trabalho, assim como também as suas derivadas em relação às coordenadas de área L_1 e L_2 , encontram-se apresentadas a seguir:

- Funções de Forma $M_{kj}(L_1, L_2)$ e suas derivadas, para as quais, k refere-se ao grau do polinômio utilizado na expansão e j que está associado ao lado do elemento:

◇ Funções de Forma do terceiro grau:

◆ Para o **lado 1** do elemento:

$$M_{31}(L_1, L_2) = 3.(-L_1^2 L_2 + L_1 L_2^2) \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial M_{31}(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 3.(L_2^2 - 2L_1 L_2) \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial M_{31}(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 3.(-L_1^2 + 2L_1 L_2) \quad (C.3)$$

♦ Para o lado 2 do elemento:

$$M_{32}(L_1, L_2) = 3.(2L_2^3 - 3L_2^2 + L_2 + L_1^2 L_2 + 3L_1 L_2^2 - 2L_1 L_2) \quad (C.4)$$

$$\frac{\partial M_{32}(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 3.(3L_2^2 - 2L_2 + 2L_1 L_2) \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial M_{32}(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 3.(1 + L_1^2 + 6L_2^2 - 2L_1 - 6L_2 + 6L_1 L_2) \quad (C.6)$$

♦ Para o lado 3 do elemento:

$$M_{33}(L_1, L_2) = 3.(-2L_1^3 + 3L_1^2 - L_1 - 3L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2 + 2L_1 L_2) \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial M_{33}(L_1, L_2)}{\partial L_1} = 3.(-1 - 6L_1^2 - L_2^2 + 6L_1 + 2L_2 - 6L_1 L_2) \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial M_{33}(L_1, L_2)}{\partial L_2} = 3.(-3L_1^2 + 2L_1 - 2L_1 L_2) \quad (C.9)$$

- Função de Forma $M_k(L_1, L_2)$ e suas derivadas, ou seja, função do tipo bolha, na qual, k refere-se ao grau do polinômio utilizado na expansão, ou seja, 3:

$$M_k(L_1, L_2) = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \quad (C.10)$$

$$\frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_1} = L_2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 - L_2^2 \quad (C.11)$$

$$\frac{\partial M_k(L_1, L_2)}{\partial L_2} = L_1 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 - L_1^2 \quad (C.12)$$

Componentes da matriz [$Bl_{kj}(L_1, L_2)$]

$$Bl_{11kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{14} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.13)$$

$$Bl_{21kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{24} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.14)$$

$$Bl_{31kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{34} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.15)$$

$$Bl_{41kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{44} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.16)$$

$$Bl_{51kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{54} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.17)$$

$$Bl_{12kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{15} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.18)$$

$$Bl_{22kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{25} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.19)$$

$$Bl_{32kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{35} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.20)$$

$$Bl_{42kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{45} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.21)$$

$$Bl_{52kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{55} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.22)$$

$$Bl_{13kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{16} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.23)$$

$$Bl_{23kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{26} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.24)$$

$$Bl_{33kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{36} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.25)$$

$$Bl_{43kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{46} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.26)$$

$$Bl_{53kj}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_1} + d_{56} \frac{\partial M_{kj}}{\partial L_2} \right) \quad (C.27)$$

Componentes da matriz [$Be_k(L_1, L_2)$]

$$Be_{11k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{14} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.28)$$

$$Be_{21k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{24} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.29)$$

$$Be_{31k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{34} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.30)$$

$$Be_{41k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{44} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.31)$$

$$Be_{51k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{54} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.32)$$

$$Be_{12k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{15} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.33)$$

$$Be_{22k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{25} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.34)$$

$$Be_{32k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{35} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.35)$$

$$Be_{42k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{45} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.36)$$

$$Be_{52k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{55} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.37)$$

$$Be_{13k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{16} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.38)$$

$$Be_{23k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{26} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.39)$$

$$Be_{33k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{36} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.40)$$

$$Be_{43k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{46} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.41)$$

$$Be_{53k}(L_1, L_2) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial M_k}{\partial L_1} + d_{56} \frac{\partial M_k}{\partial L_2} \right) \quad (C.42)$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE