

DEFESA FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR WILLIAM PORTILHO  
DE PAIVA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 12/07/2000  
  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Análise de Problemas de Trincas Interfaciais Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Autor: William Portilho de Paiva  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

63/2000

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SECÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

# **Análise de Problemas de Trincas Interfaciais Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Autor: William Portilho de Paiva  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000  
S. P. – Brasil

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SECÃO CIRCULANTE

2000/9630

iii

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	P 166 a
V.	Ex
TOMBO BC/	43360
PROC.	278/2000
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	03/01/2001
N.º CPD	



CM-00153246-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P835a  
166

Portilho de Paiva, William

Análise de problemas de trincas interfaciais usando o método dos elementos de contorno / William Portilho de Paiva.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Paulo Sollero

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Mecânica da fratura. 3. Materiais compostos. I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Problemas de Trincas Interfaciais  
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Autor: William Portilho de Paiva  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE



---

Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente



---

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas



---

Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior  
Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 17 de julho de 2000

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à Queren, minha querida sobrinha.

## **Agradecimentos**

Agradeço:

À Deus pelo Dom da Vida.

Aos meus pais, pela atenção dispensada em todos os momentos.

Aos professores da FATEC-SO, na pessoa do professor Ibero Luis Martins, pelo incentivo à pós graduação.

Ao professor Paulo Sollero pela acolhida, pela proposta do tema e acompanhamento do trabalho.

A todos os professores do Departamento de Mecânica Computacional, que de uma forma ou outra contribuíram com este trabalho.

A todos os colegas do departamento, pela amizade e companhia.

Em especial ao Éder, ao Frederico e ao Pedro, pelas preciosas horas de discussão tanto no período das disciplinas quanto na elaboração deste trabalho.

O apoio financeiro recebido da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, que tornou possível a realização deste trabalho.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

Então grita o profeta da Vitória:  
Que mais forte arrebente a tempestade!

Canção do Albatroz,  
de Máximo Gorki

## Resumo

Portilho de Paiva, William, *Análise de Problemas de Trincas Interfaciais Usando o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000 86 p. Dissertação (Mestrado).

Esta dissertação apresenta um procedimento para a determinação dos fatores de intensidade de tensão devido a presença de trincas na interface de um componente bimaterial. O procedimento faz uso do método dos elementos de contorno baseado na formulação para problemas bidimensionais isotrópicos, carregados em modo I ou modo misto. Utilizou-se o método das sub-regiões para descrever cada um dos diferentes subdomínios, representados por cada um dos materiais. O domínio é dividido em duas sub-regiões e na interface são impostas condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças, com exceção da região correspondente à trinca. O sistema de equações para o domínio completo é escrito adicionando-se o sistema de equações de cada sub-região. O procedimento proposto usa uma formulação direta de elementos de contorno juntamente com elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície para melhor descrever o campo de tensões na ponta da trinca. Os fatores de intensidade de tensão são calculados através de equações dadas na literatura. O trabalho apresenta exemplos numéricos de chapas carregadas puramente em modo I ou em modo misto (modos I e II acoplados). Esses exemplos mostram um estudo de convergência dos resultados devido ao refinamento de malha no qual se constata que os resultados dos problemas de trincas interfaciais pouco dependem da discretização do modelo, apresentando bons resultados mesmo para malhas grosseiras. Através da comparação dos resultados deste trabalho com resultados disponíveis na literatura mostra-se que existe uma boa concordância entre ambos.

### Palavras Chave

- Método dos Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura, Materiais Compósitos, Trincas Interfaciais.

## Abstract

Portilho de Paiva, William, *Analysis of Interfacial Cracks Problems Using the boundary Element Method*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000 86 p. Dissertação (Mestrado).

This thesis presents a procedure for computation of stress intensity factors due to the presence of interfacial cracks in bimaterial components. The procedure makes use of boundary elements method based on the formulation for bidimensional isotropic problems loaded either in mode I or in mixed mode. The method of subregions was used to describe each one of the different subdomains, represented by each material. The domain is divided in two subregions. Conditions of displacement continuity and tractions equilibrium are imposed at the interface, except in the corresponding crack region. The system of equations for the full domain is written adding the system of equations for each subregion. The considered procedure uses a direct boundary element formulation together with traction singular quarter point elements that is very accurate to describe the stress field at crack tip. The stress intensity factors are computed using equations given in the literature. Analysis of results convergence due to mesh refinement is carried out. It is shown that the results have little dependence on the model discretization and good results are obtained even when a coarse mesh is used. A comparison between the results obtained in this work and those from literature show that they are in good agreement.

### Key Words

- Boundary Elements Method, Fracture Mechanic, Composite Materials, Interfacial Cracks.

# Índice

<b>Lista de figuras .....</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de tabelas .....</b>	<b>xiv</b>
<b>Introdução e revisão bibliográfica .....</b>	<b>1</b>
1.1. Introdução e objetivos.....	1
1.2. Revisão bibliográfica.....	4
<b>Introdução aos materiais compósitos .....</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução .....	7
2.2 Definição e considerações preliminares .....	7
2.3 Características gerais dos materiais compósitos .....	8
2.4 Classificações de materiais compósitos.....	10
2.5 Comportamento mecânico .....	11
2.6 Falhas de materiais compósitos.....	15
2.7 Vantagens e desvantagens do uso de materiais compósitos .....	19
2.8 Aplicações.....	20
<b>Princípios de elasticidade e mecânica da fratura .....</b>	<b>22</b>
3.1 Introdução .....	22
3.2 Revisão de elasticidade.....	23
3.2.1 Equilíbrio de estado de tensão.....	24
3.2.2 Compatibilidade de deslocamentos .....	27
3.2.3 Equações de Navier para elasticidade.....	30

3.2.4	Solução de Kelvin.....	32
3.3	Mecânica da fratura .....	32
3.3.1	Definição e considerações preliminares.....	34
3.3.2	Fratura em material compósito.....	35
3.3.3	Campos de deslocamentos e tensões na ponta da trinca .....	36
3.3.4	Fator de intensidade de tensão.....	39
3.3.5	Oscilação da singularidade na ponta da trinca .....	39
<b>Método dos Elementos de Contorno.....</b>		<b>42</b>
4.1	Introdução .....	42
4.2	Soluções fundamentais .....	43
4.3	O teorema de Betti e a identidade de Somigliana .....	45
4.4	Elementos de contorno .....	50
4.4.1	Elementos de contorno quadrático contínuo .....	50
4.4.2	Elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície... 53	
4.5	Integração sobre o elemento que contém o ponto fonte .....	57
4.6	Formulação de sub-regiões .....	64
<b>Resultados numéricos e discussões .....</b>		<b>67</b>
5.1	Introdução .....	67
5.2	Chapa bimaterial infinita com trinca interfacial carregada remotamente em modo misto .....	68
5.3	Chapa homogênea de largura finita com trinca central .....	74
5.4	Chapa bimaterial finita com trinca interfacial central .....	77
<b>Conclusões e propostas para trabalhos futuros .....</b>		<b>80</b>
6.1	Conclusões .....	80
6.2	Propostas para trabalho futuros.....	81
<b>Referências .....</b>		<b>83</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Trinca interfacial em um laminado .....	1
Figura 2.1: Compósito unidirecional.....	11
Figura 2.2: Mecanismos de falhas em materiais compósitos. ....	16
Figura 2.3: Volumes equivalentes. ....	17
Figura 3.1: (a) Tensões nas faces de um cubo conforme o sistema de coordenadas adotado; (b) Momento aplicado sobre aresta do cubo.....	24
Figura 3.2: Condições de contorno em um sólido. ....	26
Figura 3.3: Deformação normal.....	27
Figura 3.4: Deformação de cisalhamento.....	28
Figura 3.5: Os três modos primários de carregamento de um corpo trincado.....	34
Figura 3.6: Corpos de prova para ensaio de delaminação conforme ASTM D 5528.....	36
Figura 3.7: Coordenadas locais na ponta da trinca .....	37
Figura 3.8: Comportamento oscilatório da singularidade da tensão e do deslocamento próximo à ponta de uma trinca interfacial.....	40
Figura 4.1: Ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy.....	48
Figura 4.2: Elemento de contorno quadrático isoparamétrico.....	51
Figura 4.3: (a) Elemento quadrático padrão; (b) Elemento singular de ponto a um quarto.....	53
Figura 4.4: O raio $r$ entre o pontos campo e o ponto fonte é dado por $x - x^*$ .....	58
Figura 4.5: Integração quando o ponto fonte pertence ao elemento.....	60
Figura 4.6: Divisão de um domínio em duas sub-regiões .....	64
Figura 5.1: Comprimento dos elementos em relação ao comprimento da trinca.....	68
Figura 5.2: Chapa bimaterial infinita com trinca na interface sujeita a tensões normais.....	68
Figura 5.3: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas; (b) Malha deformada.....	70

Figura 5.4: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações $l/a$ para relação entre módulos de elasticidade $\mu_2 / \mu_1 = 1$ . . . . .	72
Figura 5.5: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações $l/a$ para relação entre módulos de elasticidade $\mu_2 / \mu_1 = 5$ . . . . .	72
Figura 5.6: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações $l/a$ para relação entre módulos de elasticidade $\mu_2 / \mu_1 = 20$ . . . . .	73
Figura 5.7: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações $l/a$ para relação entre módulos de elasticidade $\mu_2 / \mu_1 = 100$ . . . . .	73
Figura 5.8: Chapa homogênea de largura finita com trinca na interface sujeita a tensões normais uniaxiais . . . . .	74
Figura 5.9: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas; (b) Malha deformada. . . . .	75
Figura 5.10: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações $l/a$ para material homogêneo. . . . .	76
Figura 5.11: Chapa bimaterial de dimensões finitas com trinca na interface sujeita a tensões normais uniaxiais. . . . .	77
Figura 5.12: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas. (b) Malha deformada. . . . .	78

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes (Nabarrete, 1998).....	9
Tabela 5.1: Fatores de intensidade de tensão normalizados para uma trinca interfacial em uma chapa bimaterial infinita sujeita a carregamento remoto. ....	71
Tabela 5.2: Discretização adotada nas linhas da interface. ....	75
Tabela 5.3: Fatores de intensidade de tensão para uma trinca interfacial em uma chapa homogênea de largura finita, sujeita a carregamento uniaxial remoto. ....	76
Tabela 5.4: Fatores de intensidade de tensão normalizados para uma trinca central em uma chapa bimaterial de largura finita sob carregamento uniaxial.....	79

# Capítulo 1

## Introdução e revisão bibliográfica

### 1.1. Introdução e objetivos

Os objetivos deste trabalho são relacionados ao desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno voltada para a análise elastostática de tensões em componentes mecânicos bidimensionais. Inicialmente, a matéria prima considerada será composta por duas lâminas de materiais isotrópicos coladas um ao outro formando um laminado, que pode conter uma ou mais descontinuidades, chamadas trincas, na interface entre os materiais (figura 1.1).

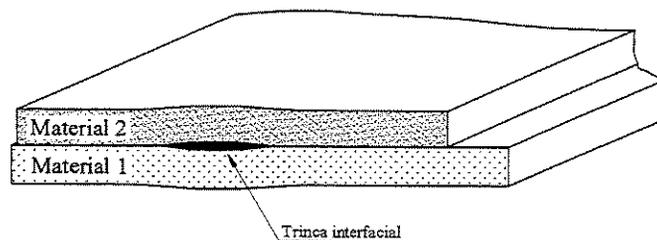


Figura 1.1: Trinca interfacial em um laminado.

À matéria-prima acima mencionada é dado o nome de compósito. São definidos como materiais compósitos aqueles formados por dois ou mais materiais distintos, chamados fases, que

apresentam uma interface bem definida entre si quando vistos numa escala macroscópica. As fases, também chamadas constituintes, podem ser metálicas, cerâmicas ou poliméricas. No presente trabalho considera-se que os materiais usados são compósitos laminados, os quais, inicialmente, serão considerados isotrópicos.

A motivação para o desenvolvimento dessa formulação advém da crescente utilização dos materiais compósitos, em especial daqueles de origem polimérica, devido às suas excelentes propriedades. A princípio com utilização restrita à indústria aeroespacial, atualmente a utilização de compósitos vem se estendendo aos mais diversos ramos industriais, dentre os quais podem se destacar as indústrias automobilística, de construção civil, marítima, eletroeletrônica, de materiais esportivos e de lazer, de segurança e defesa.

Como qualquer material empregado em construções mecânicas, os compósitos também estão sujeitos aos esforços decorrentes dos carregamentos que lhes são aplicados e também a falhas oriundas dos processos de fabricação, de esforços acima daqueles inicialmente previstos, de envelhecimento ou desgaste da estrutura, etc. Dentre os vários modos de falha a que um material compósito pode estar sujeito o mais importante é a delaminação, que é o descolamento entre suas lâminas. Este descolamento ocorre através da propagação de uma trinca interfacial que pode ser analisada no âmbito da mecânica da fratura. Em princípio a ocorrência de trincas deve ser evitada ou limitada de forma que seu crescimento não venha a comprometer o desempenho do componente. Uma vez que dificilmente uma estrutura estará livre da presença de trincas seu projeto inicial ou plano de inspeção após estar em serviço deve levar em conta uma estimativa de sua resistência a essas falhas, que podem ser simuladas com o auxílio de programas baseados em ferramentas numéricas tais como o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno.

O método dos elementos de contorno tem se mostrado bastante apropriado para a modelagem de componentes contendo trincas e nesse panorama insere-se a formulação desenvolvida, o qual também pode ser usado para cálculos de componentes não trincados, sejam eles bimateriais ou não.

A aplicação da mecânica da fratura tem tido grande aceitação na predição de falhas em estruturas metálicas e vários métodos de teste tem sido desenvolvido para determinar a tenacidade à fratura  $K_{Ic}$  e curvas de resistência à propagação de trincas para os casos onde a propagação estável da trinca é possível. Além disso, no decorrer dos anos, tem se avançado na elaboração de procedimentos de projeto levando em conta a mecânica da fratura em casos de propagação de trincas por fadiga os quais são baseados em inspeções periódicas para monitoramento de trincas visíveis e previsão da vida residual usando critérios de crescimento de trincas. Com base nos métodos desenvolvidos para estruturas metálicas, várias aproximações tem sido feitas para adequar sua aplicação na prevenção de falhas em compósitos contendo trincas ou entalhes passantes. Os problemas de trincas na interface de um material compósito formados por materiais dissimilares são de importância prática muito grande e tem sido analisado por vários pesquisadores.

Inicialmente foi criado um programa computacional, escrito em linguagem C, usando a técnica de programação procedimental, no qual uma formulação de elementos de contorno para análise elastostática usando elementos constantes foi implementada. Esse programa serviu de suporte para o desenvolvimento de um segundo programa, no qual foram implementados os elementos quadráticos, a técnica de sub-regiões e os elementos de ponto a um quarto, sendo isso um dos objetivos deste trabalho. O programa desenvolvido é compilável e tem o código fonte acessível. Isso torna o código aberto e lhe dá a característica de ser facilmente alterado, o que possibilita a sua expansão através da implementação de novas rotinas que contemplem os casos ainda não previstos, quais sejam, novos elementos, soluções fundamentais ou esquemas de cálculos.

A formulação implementada faz uso da técnica de sub-regiões, para a modelagem dos subdomínios do meio bimaterial, e dos elementos de contorno de ponto a um quarto, para descrever os campos de tensões e deslocamentos na ponta da trinca. Uma rotina de formatação de dados foi incluída, com o objetivo de facilitar a entrada de dados por parte do usuário. A entrada de dados pode ser feita de duas formas: digitando-as num arquivo texto ou usando uma interface gráfica, desenvolvida especialmente para este fim. A geometria do problema é passada ao programa informando-se apenas os pontos iniciais e finais de cada linha, e no momento da

discretização, é necessário apenas informar número de elementos em cada linha. O programa, automaticamente, localiza a ponta da trinca, onde coloca elementos de ponto a um quarto.

## 1.2. Revisão bibliográfica

Os conceitos de mecânica da fratura elástica linear para trincas interfaciais em materiais isotrópicos foram revistos por Rice (1988) que introduziu as bases para que sua interpretação no campo da mecânica da fratura elástica linear tivesse o mesmo sentido físico dos procedimentos estabelecido para os corpos homogêneos quando a zona de contato mecânico ou de resposta não linear do material na ponta da trinca é pequena.

Hamoush e Ahmad (1989) apresentaram um método numérico para análise do fator de intensidade de tensão em modo misto de uma trinca interfacial entre dois materiais isotrópicos dissimilares baseado no método dos elementos finitos e na aproximação da integral de fechamento da trinca em conjunto com as relações fundamentais da mecânica da fratura. O método calcula a taxa de liberação de energia de deformação total e permite o cálculo dos fatores de intensidade de tensão em modos I e II através da imposição de soluções auxiliares conhecidas. Sugeriram ainda que o método apresentado também poderia ser utilizado em conjunto com o método dos elementos de contorno.

O método dos elementos de contorno usando a estratégia de sub-regiões e elementos de ponto a um quarto foi proposto por Tan e Gao (1990) para tratar problemas de trincas interfaciais em corpos bimateriais em duas dimensões. Em três dimensões, alguns problemas de trincas interfaciais em corpos bimateriais com axi-simetria também foram analisados por Tan e Gao (1991) que, da mesma forma, aplicaram o método dos elementos de contorno usando sub-regiões e elementos de ponto a um quarto.

Algumas aplicações do método dos elementos de contorno para a análise de adesão em juntas coladas de corpos bimateriais, tensão residual e fator de intensidade de tensão, calculado por técnicas de extrapolação, em trincas interfaciais foram apresentadas por Yuuki e Xu (1994). Além da solução de Kelvin, também implementaram a solução de Hatenyi como solução fundamental, que não necessita de discretização da interface, quando esta for uma linha reta, por

satisfazer exatamente as condições de adesão perfeita na interface para juntas compostas de dois materiais isotrópicos.

He *et al.* (1994) apresentou um elemento quadrático isoparamétrico singular, chamado de “ $\alpha$ -point” na língua inglesa, para a análise de trincas que terminam em uma interface, ou seja, normal à interface entre dois materiais homogêneos elásticos. A singularidade da deformação próximo à ponta da trinca é captada por esse elemento que tem seu nó central deslocado. A estratégia é baseada nos elementos de ponto a um quarto, porém nesse caso a posição do nó central é definida por um ajuste polinomial de acordo com a relação singular desejada.

Um material compósito pode apresentar descolamento na interface entre uma fibra e a matriz, quando sujeito a um carregamento na direção transversal em relação à direção das fibras. Esse descolamento pode ser tratado como uma trinca e, normalmente, tem comprimento suficientemente longo, na direção das fibras, para que condições de estado plano de deformação perpendicular ao eixo das fibras possam ser consideradas. Isso possibilita o estudo do problema de crescimento de uma trinca na direção circunferencial. Paris *et al.* (1996) estudaram este problema e caracterizaram o dano originado pela falta de uma adesão completa entre fibra e matriz realizando análise de tensão em nível micromecânico de uma secção transversal de uma fibra parcialmente descolada da matriz e apresentaram uma análise numérica usando o método dos elementos de contorno no estudo de uma trinca em forma de arco na interface de uma única fibra em uma matriz infinita.

Zhao e Botsis (1996) realizaram estudos experimentais de resistência, propagação de trinca e evolução do descolamento fibra-matriz em compósitos laminados unidirecionais. Foram usados corpos de provas compactos em tração em várias situações em que variaram os materiais da matriz e das fibras, o diâmetro e o espaçamento das fibras, com o carregamento sempre coincidindo com a direção das fibras, levantando os dados experimentais usados por Beldica e Botsis (1996) na comparação com os resultados de fator de intensidade de tensão obtidos numericamente pelo método dos elementos de contorno para analisar os mesmos problemas usando modelos discretos, onde a matriz e as fibras são modeladas, e modelos homogeneizados, onde as propriedades das fibras e da matriz são combinadas em um único material homogêneo.

A análise do problema de uma trinca de forma circular formada pelo rompimento de uma fibra elástica isolada em uma matriz elástica infinita de um compósito usando uma aproximação pela equação integral que governa o problema e outra pelo método dos elementos de contornos foi mostrada por Selvadurai (1996).

Um método para análise de problemas de mecânica da fratura elástica linear que envolvem bímateriais anisotrópicos usando a formulação de elementos de contorno sem a necessidade de se empregar sub-regiões foi proposto por Pan e Amadei (1999). Nesta formulação a equação integral de deslocamento é aplicada somente ao contorno não trincado e a equação integral de força de superfície é aplicada somente em uma das faces da trinca eliminando a necessidade de se discretizar a interface exceto na região da trinca.

# Capítulo 2

## Introdução aos materiais compósitos

### 2.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a definição de material compósito e uma visão geral sobre suas características tais como propriedades mecânicas e composição. Também serão abordados os casos em que esses materiais são aplicados, as vantagens e desvantagens em que isso implica.

### 2.2 Definição e considerações preliminares

A palavra compósito significa constituído de duas ou mais partes, portanto, um material que tenha dois ou mais materiais constituintes distintos, também chamados fases, pode ser considerado como um material compósito. No entanto esta definição é muito vaga e pode abranger, por exemplo, os materiais metálicos, pois em geral são constituídos por vários elementos de liga, ou os plásticos, que recebem grande número de aditivos e pigmentos em sua composição. Dessa forma, procura-se estreitar um pouco mais esta classificação considerando-a válida somente quando as fases constituintes têm diferenças significativas entre suas propriedades físicas e as propriedades do compósito resultante sejam sensivelmente diferentes das propriedades de seus constituintes isolados. Tais diferenças geralmente serão mais evidentes quando uma das fases estiver em forma de lâminas ou fibras, representando mais de 10% do volume total do material e a relação entre as propriedades mecânicas dos constituintes for igual ou maior que 5 (Agarwal e Broutman, 1990).

Resumidamente, pode-se dizer que compósitos são materiais constituídos por dois ou mais materiais quimicamente distintos, quando vistos numa escala macroscópica, os quais apresentam uma interface bem definida separando-os.

As primeiras aplicações de materiais compósitos que se tem notícia são atribuídas aos egípcios que, supõe-se, foram os precursores do uso de madeira compensada, do papel-machê e dos tijolos de barro reforçados com palha. Atualmente nota-se que não há limites quando se combinam diferentes materiais com o objetivo de produzir um compósito buscando um material no qual as vantagens se reforcem e evitando aqueles onde as desvantagens se combinem (Staab, 1998).

Os compósitos formam, atualmente, uma importante classe de materiais de engenharia que oferece propriedades mecânicas excepcionais, flexibilidade de projeto e facilidade de fabricação únicas. Vantagens adicionais incluem alta relação entre resistência e peso, resistência à corrosão, excelente resistência à fadiga e níveis de isolamento acústico acima dos apresentados pelos metais (Agarwal e Broutman, 1990).

## 2.3 Características gerais dos materiais compósitos

São características apresentadas por este tipo de material: baixa massa específica aliada a resistência e rigidez específicas altas, grande resistência à fadiga, possibilidade de escolha da direção de maior resistência, versatilidade de projeto, grande variedade de possibilidade de combinações de constituintes, grande resistência à corrosão, estabilidade dimensional, baixa transmissão de ruídos, vida longa, pequena quantidade de energia requerida durante o processo de fabricação.

Os constituintes de um compósito são, geralmente, arrançados de forma que uma ou mais fases descontínuas são embebidas em uma fase contínua. A fase contínua é chamada de matriz e a descontínua é chamada de reforço pois, normalmente, é muito mais resistente que a fase contínua.

Dentre as várias classes de matrizes podem ser citadas as poliméricas, cujas resinas mais comumente utilizadas são: a epóxi, a fenólica e a poliéster. Dentre os reforços mais comumente utilizados estão as fibras de vidro, de Kevlar, de grafite e de boro, as quais podem ter o diâmetro variando desde milésimos de milímetro até alguns centímetros. A tabela abaixo resume as propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes para efeito de comparação.

Tabela 2.1: Propriedades básicas de alguns metais, fibras e matrizes (Nabarrete, 1998).

	Material	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	E MPa	G MPa	$\nu$	$\sigma_{rup.}$ MPa	$\epsilon$ %	$T_{máx.}$ °C
Metais	Aço	7800	205000	79000	0,3	400 a 1600	1,8 a 10	800
	Liga de Al	2800	75000	29000	0,3	450	10	350
Reforços	Vidro E	2600	81000	33000	0,22	2600	4,9	700
	Vidro S	2500	89000	37000	0,2	4400	5,7	700
	Kevlar 49	1450	130000	12000	0,4	3600	2,8	200
	Carbono HR	1750	230000	40000	0,3	3300	1,4	>3000
	Carbono HM	1900	390000	21000	0,4	2400	0,6	>3000
Matrizes	Epóxi	1200	4500	1600	0,4	130	2	90 a 200
	Poliéster	1200	4000	1400	0,4	80	2,5	60 a 200

Como normalmente os valores teóricos de resistência mecânica dos materiais são muito maiores que aqueles reais obtidos na prática credita-se esta disparidade à presença de imperfeições e falhas nos materiais. Como a população de falhas e defeitos em um sólido é proporcional às suas dimensões, a redução destas implica em uma redução da ocorrência de defeitos. Com base nisso percebe-se que ao transformar determinado material em fibra reduz-se muito o volume em relação à área, resultando na diminuição da quantidade de defeitos que poderia estar presentes no material com conseqüente aumento de sua resistência mecânica (Agarwal e Broutman, 1990).

Entretanto, a utilização de fibras diretamente como material de construção mecânica é, de certa forma, impraticável devido à possibilidade destas se embramarem e torcerem e, também, à dificuldade de dar-lhes uma forma particular e ainda transmitir e distribuir o carregamento entre si. Quando associadas a uma matriz para formar um compósito, as fibras são unidas pela matriz que as mantém dispostas de maneira organizada. A matriz também é responsável pela transferência do carregamento às fibras, por protegê-las de ataques do meio, por facilitar o manuseio e assegurar a forma do componente mecânico.

O comportamento mecânico dos materiais compósitos é complexo e determinado, principalmente, pelas fibras. As fibras são fornecidas na forma de fios, mantas, tecidos e fios picados. Dependendo de como seus constituintes são combinados as características do compósito podem variar enormemente quando fabricados por diferentes processos ainda que materiais constituintes idênticos sejam utilizados. Isto ocorre porque o processo afeta diretamente a microestrutura do produto final (Sih, 1987; Staab, 1998).

As propriedades físicas e mecânicas dos compósitos são dependentes das propriedades, geometria e concentração dos constituintes. Aumentando o volume de reforço a resistência e a rigidez do material podem ser aumentadas até um limite a partir do qual tornam a diminuir devido ao volume de reforço ser tão grande que o volume de matriz se torna insuficiente para mantê-los separados e eles perdem a adesão entre si. A adesão entre as fibras e a matriz é muito importante pois o comportamento mecânico dos compósitos é, também, dependente da interação fibra-matriz.

No projeto de um componente de material compósito ainda deve ser levado em conta, além das propriedades do reforço e da matriz, o arranjo geométrico que define a disposição do reforço na matriz, a fração de volume de cada um dos constituintes na mistura, o carregamento ao qual o componente será submetido quando em operação e o ambiente em que estará trabalhando.

## 2.4 Classificações de materiais compósitos

Os materiais compósitos podem ser classificados de várias formas conforme sua característica preponderante. Tomando como referência o reforço estes podem ser classificados como reforçados por partículas ou como reforçados por fibras. Conforme a disposição do reforço na matriz obtém-se um material unicamada, multicamada, unidirecional, etc. Porém, não são estas as únicas variáveis que vão influenciar o comportamento do material, pois suas propriedades vão depender da forma final do componente fabricado, da geometria das fibras, das dimensões das fibras, da distribuição, do volume, do alinhamento e da concentração das fibras na matriz. Devido a tantas variáveis é possível moldar ou construir um sistema compósito adequado e perfeitamente ajustado a uma aplicação em particular, o que, no entanto, pode ocasionar variações enormes em suas propriedades (Noor, 1992).

Tomando como ponto de partida o sistema compósito mais simples de ser estudado temos o compósito unidirecional, que consiste de fibras paralelas inserida em uma matriz (figura 2.1).

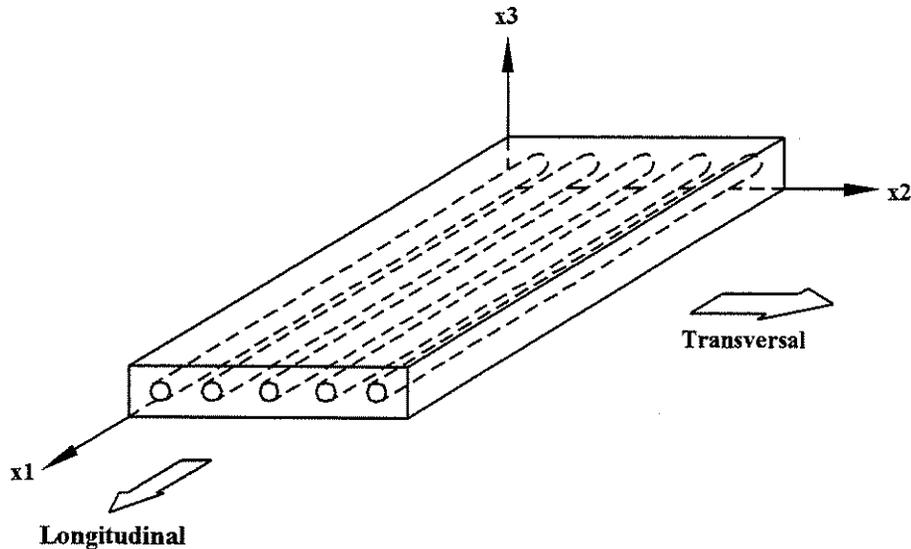


Figura 2.1: Compósito unidirecional.

Este sistema é chamado de lâmina. Um compósito laminado é um sistema formado por várias lâminas disposta em uma seqüência de orientação conveniente, tal que o laminado resultante apresente as características desejadas.

## 2.5 Comportamento mecânico

O comportamento mecânico dos materiais compósitos é determinado, principalmente, pelas fibras. Em outras palavras, um dos fatores determinantes das propriedades dos compósitos é a fração de volume que é nada mais que a porcentagem de fibras contida em um volume representativo de material. Alternativamente, em alguns casos, a fração de peso também é usada. O volume total do material é igual ao volume de fibras mais o volume da matriz, expresso por:

$$v_c = v_f + v_m. \quad (2.1)$$

Assim, o volume de fibra presente no compósito é dado por

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad (2.2)$$

e o volume de matriz é dado por

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (2.3)$$

Nas equações (2.1), (2.2), (2.3) e nas que se seguem,  $c$  representa o compósito,  $f$  representa a fibra e  $m$  representa a matriz. Assim,  $v_c$  é o volume de compósito,  $v_f$  é o volume de fibra e  $v_m$  é o volume de matriz.  $V_m$  ou  $V_f$  é a fração de volume de matriz ou fibra.

Levando em conta o peso específico  $\rho$  de cada material e substituindo  $v$  por  $w$ , onde  $w = \rho \cdot v$ , e substituindo  $V$  por  $W$ , onde  $W = \rho \cdot V$ , nas equações (2.1), (2.2) ou (2.3) obtém-se a fração de peso. Dessa forma a equação (2.1) fica escrita da seguinte forma

$$\rho_c \cdot v_c = \rho_f \cdot v_f + \rho_m \cdot v_m \quad (2.4)$$

o que permite escrever as seguintes relações entre peso e volume:

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot V_f \quad (2.5)$$

$$W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \cdot V_m \quad (2.6)$$

$$V_f = \frac{\rho_c}{\rho_f} \cdot W_f \quad (2.7)$$

$$V_m = \frac{\rho_c}{\rho_m} \cdot W_m \quad (2.8)$$

Para materiais compostos por mais de dois constituintes as equações (2.5) ou (2.6) podem ser escritas conforme (2.9)

$$W_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \cdot V_i \quad (2.9)$$

e, da mesma forma, as equações (2.7) ou (2.8) resultam em (2.10)

$$V_i = \frac{\rho_c}{\rho_i} \cdot W_i \quad (2.10)$$

A contribuição das propriedades das fibras e da matriz nas propriedades médias dos compósitos é proporcional à fração do volume. A relação entre suas propriedades é chamada regra das misturas. Para dois constituintes calcula-se a tensão total do compósito usando a seguinte relação:

$$\sigma_c = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m \quad (2.11)$$

e para um compósito formado por mais de dois constituintes,

$$\sigma_c = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot V_i \quad (2.12)$$

com  $n$  sendo o número de constituintes do material.

O mesmo ocorre com o módulo de elasticidade, que pode ser dado por

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \quad (2.13)$$

para um compósito formado por dois constituintes. Para um caso geral, (2.13) resulta em (2.14)

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_i \cdot V_i. \quad (2.14)$$

Da equação (2.14) obtém-se:

$$\frac{E_c}{E_m} = \left( \frac{E_f}{E_m} - 1 \right) \cdot V_f + 1. \quad (2.15)$$

Uma vez que as razões entre a tensão e o módulo de elasticidade de cada parte são iguais,

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_c}{E_c}, \quad (2.16)$$

então

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_m} = \frac{E_f}{E_m} \quad (2.17)$$

e

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{E_f}{E_c}. \quad (2.18)$$

Como a tensão é dada por

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.19)$$

sendo  $F$  a força aplicada e  $A$  a área resistente, substituindo (2.19) em (2.16), (2.17) ou (2.18) encontra-se uma relação entre a força aplicada em cada um dos constituintes dada por:

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m} = \frac{E_f}{E_m} \cdot \frac{V_f}{V_m} \quad (2.20)$$

ou

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_f \cdot A_f + \sigma_m \cdot A_m} = \frac{\frac{E_f}{E_m}}{\frac{E_f}{E_m} + \frac{V_m}{V_f}} \quad (2.21)$$

Outro fator importante a ser observado é o volume de vazios, que é dado por:

$$V_v = \frac{\rho c_i - \rho c_r}{\rho c_i}, \quad (2.22)$$

onde  $V_v$  é o volume de vazios,  $\rho c_i$  é o peso específico teórico do compósito ideal e  $\rho c_r$  é o peso específico do compósito real.

Se o material apresentar um volume de vazios menor que 1% pode ser considerado bom. Um volume de vazios de 5% ou mais compromete seriamente o material (Agarwal e Broutman, 1990). A preocupação com relação a existência de vazios leva a considerações sobre as trincas e fraturas nos compósitos cuja crescente utilização requer um maior conhecimento dos mecanismos de fratura que possibilite uma utilização segura.

## 2.6 Falhas de materiais compósitos

As falhas internas em materiais compósitos geralmente iniciam-se muito antes que qualquer mudança em sua aparência ou comportamento macroscópico possa ser observada.

As falhas em compósitos podem ser melhor expressas em termos de danificação sobre uma área ou volume. Em geral os processos de fratura em compósitos são complexos. Estudos

realizados em vários sistemas compósitos têm mostrado que, durante a fratura, diversos mecanismos podem ocorrer simultânea e cumulativamente. Dentre estes mecanismos podem ser citados: as trincas na matriz; rompimentos e deslizamentos das fibras; separação entre as fibras e a matriz, chamados descolamentos; separação entre as lâminas de um compósito laminado, chamado delaminação; etc. (figura 2.2).

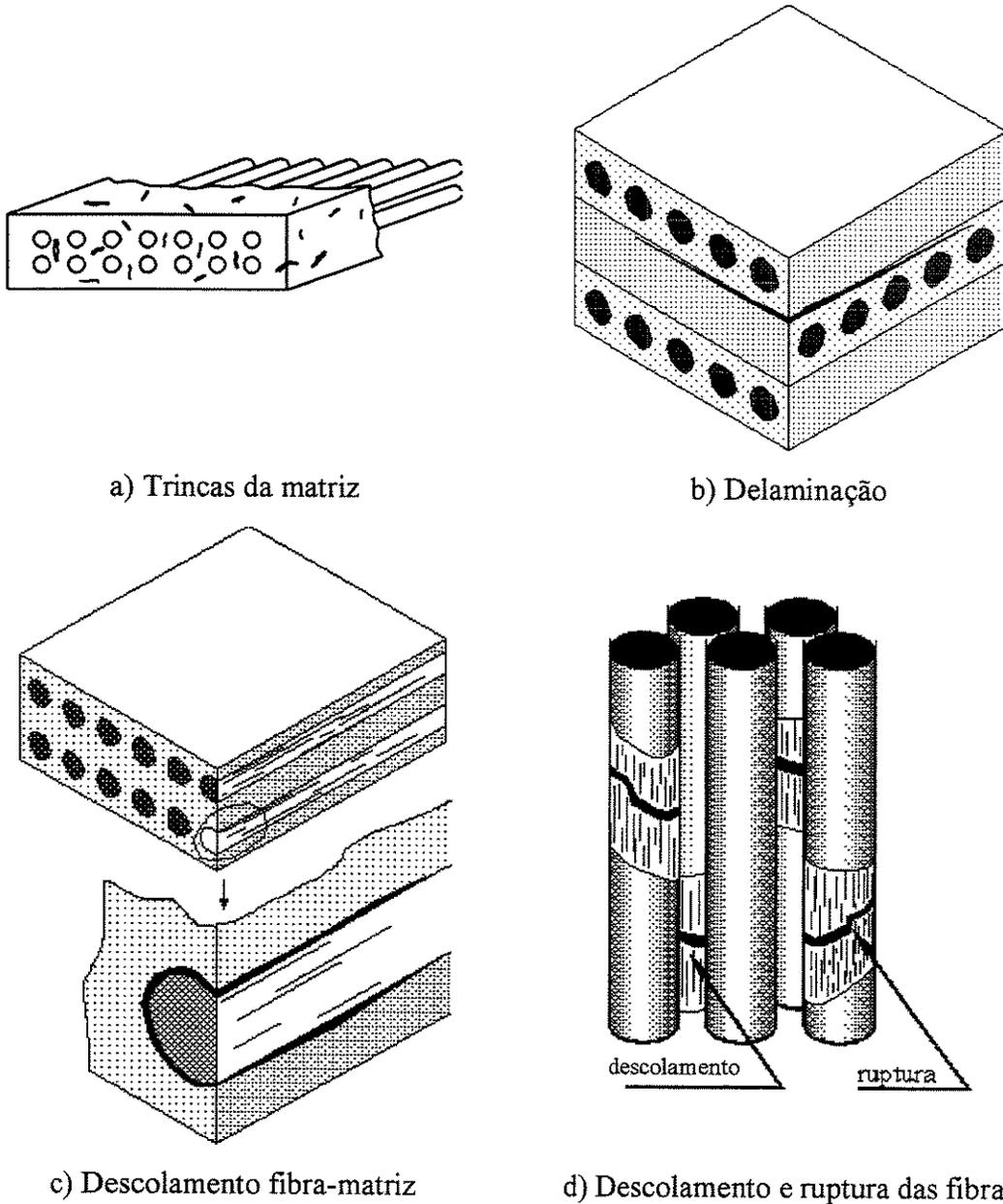


Figura 2.2: Mecanismos de falhas em materiais compósitos.

O objetivo da análise dos mecanismos de fratura é a predição do carregamento crítico para o início do crescimento de uma fratura em um corpo contendo uma trinca de um certo tamanho e sob um conjunto de cargas aplicadas. Nos materiais compósitos a aplicação dos mecanismos de fratura tem esbarrado em muitas dificuldades. Isto acontece porque a fratura nestes materiais é fortemente dependente da ordem de laminação, orientação das lâminas e relações constitutivas (Kim e Dharan, 1989).

A resistência do material compósito depende do estado de tensão-deformação-danificação que é caracterizado pela fração das fibras rompidas (razão entre o número de elementos rompidos pelo total dos elementos estruturais) e pelo comprimento relativo (razão entre o comprimento médio dos descolamentos pelo comprimento total das fibras) em um volume  $V$  definido. Supondo dois casos: o compósito danificado da figura 2.3.a e o volume com partes eliminadas da figura 2.3.b são equivalentes.

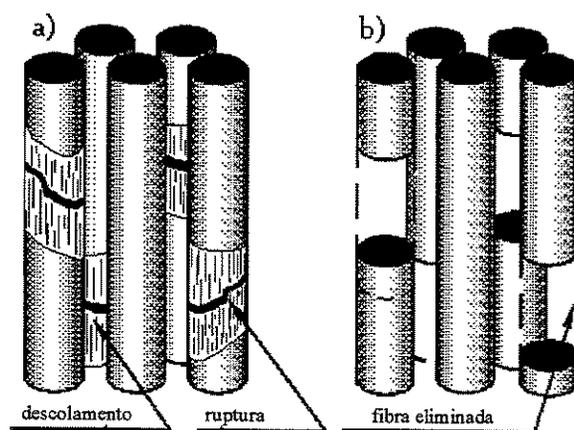


Figura 2.3: Volumes equivalentes.

Os compósitos laminados de fibra de alta resistência e rigidez com matrizes de polímeros de alta dureza, por exemplo, têm considerável interesse comercial desde que ofereçam uma vantagem de peso considerável sobre os materiais convencionais, o que é um resultado muito natural numa estrutura na qual estas propriedades estão disponíveis no plano do laminado. Porém o mesmo não ocorre nas outras direções, para as quais a resistência e rigidez caem a valores próximos às características da matriz. No projeto de estruturas é conveniente, e muito interessante, explorar estas propriedades no plano em que estão disponíveis, entretanto, algumas formas de carregamento induzem falhas entre as camadas do material, que são chamadas

delaminações, que são freqüentemente os fatores limitantes da estrutura (Williams, 1987). Uma das grandes desvantagens dos compósitos laminados é exatamente essa tendência à delaminação. Em compósitos formados por matrizes frágeis a delaminação pode se propagar ainda mais rapidamente quando comparada com trincas perpendiculares ao plano do laminado. A nucleação e crescimento da delaminação pode reduzir consideravelmente a rigidez e a tensão de compressão dos compósitos.

Uma maneira de aumentar a resistência à delaminação dos compósitos é aumentar a resistência da matriz. Entretanto isto pouco contribui para um aumento da resistência se a adesão entre as fibras e a matriz não é muito boa, pois a resistência à fratura interlaminar é altamente dependente deste fator. Assim algumas formas alternativas de aumentar a resistência à fratura interlaminar são: aumentar a adesão por meio de um tratamento superficial da fibra por meio de alterações químicas e modificação da secção da fibra de cilíndrica para triangular, quadrada, hexagonal ou até em forma de estrela, com o objetivo de se ter uma maior área de contato entre as fibras e a matriz (Sih, 1987). Em condições de carregamento de tração transversal, por exemplo, a qualidade da interface fibra-matriz pode influenciar o surgimento e propagação de trincas de delaminação.

Um exemplo são os compósitos de fibras naturais em matrizes sintéticas que normalmente apresentam uma química superficial que é incompatível com uma boa adesão. Alterações na superfície da fibra podem ser feitas para melhorar esta situação, porém há restrições de ordem econômica que não podem ser desprezadas. É necessário que isso seja considerado no desenvolvimento de uma nova estrutura, uma vez que é muito comum a falha na interface fibra-matriz, isto é, quando a fibra impregnada em uma resina não se rompe mas simplesmente se descola da matriz e desliza para fora do envelope adesivo (Allan, 1986).

A delaminação geralmente ocorre nas regiões com maiores concentrações de resinas, entre as camadas de um laminado e podem surgir como defeitos de fabricação ou podem ser criadas devido a coalescência de pequenos vazios na interface, ou devido a impactos de objetos estranhos durante a vida do componente, ou devido a campos de tensões peculiares próximos a descontinuidades geométricas da peça como arestas livres, furos, degraus, trincas transversais ou juntas coladas (MIL-HDBK-17, 1997).

## 2.7 Vantagens e desvantagens do uso de materiais compósitos

Os compósitos reforçados com fibras já têm se firmado como excelentes materiais de construção mecânica. Um exemplo é a substituição das ligas de alumínio convencionais por compósitos reforçados com fibras de carbono, que superam as propriedades mecânicas das ligas de alumínio em cerca de três vezes, em aplicações aeronáuticas. Além disso a fabricação de qualquer componente em compósito consome muito menos energia que a fabricação do mesmo componente em alumínio uma vez que um quilograma de material compósito requer somente um sétimo da energia necessária para a produção do mesmo componente usando alumínio. Outra grande vantagem dos compósitos sobre os metais mais comumente utilizados é que estes não sofrem corrosão.

Por outro lado componentes fabricados com compósitos têm alguns inconvenientes: a matéria-prima em si é mais cara que a maioria dos metais comumente utilizados o que eleva o preço do componente; a reparação de peças danificadas é mais difícil; apresentam níveis de qualidade muito baixos ao serem reciclados. Infelizmente, os materiais compósitos, quando danificados, apresentam ainda um outro problema: embora componentes fabricados com compósitos sejam capazes de absorver energias de impacto consideravelmente maiores que similares fabricados com metais, quando falham apresentam uma fratura frágil, isto é, falham sem aviso. Assim, um impacto forte pode separar a matriz da fibra sem produzir sinais externamente visíveis. Isso aponta, posteriormente, para uma falha de um componente aparentemente intacto, ao contrário daqueles fabricados com metais, que ao serem submetidos a impactos se deformam, o que, em termos de segurança, é interessante, pois possibilita a detecção visual da falha.

Um grande problema enfrentado pelas companhias aéreas é a manutenção de suas aeronaves. Embora o material laminado normalmente permaneça não danificado exteriormente, finas camadas se separam umas das outras no interior do material. Granizo ou pássaros batendo contra aeronaves são, algumas vezes, suficientes para iniciar esse processo. Infelizmente, nestes casos, a peça inteira deve ser trocada, encarecendo a manutenção do equipamento. Entretanto a

troca da peça é necessária apenas nos casos em que o componente é de muita responsabilidade, pois, pelo lado da indústria automobilística, é muito comum a execução de reparos em partes de componentes com grande sucesso.

## 2.8 Aplicações

Atualmente os compósitos reforçados com fibras são rotineiramente usados nas mais diversas aplicações: aeroespaciais, automobilísticas, na construção civil, em plataformas marítimas, contêineres e tubulações, na fabricação de materiais esportivos e de lazer, na fabricação de artigos de segurança e defesa, de aparelhos eletrônicos e eletrodomésticos.

A utilização de materiais compósitos tem crescido muito nos últimos anos, começando a ganhar um caráter de otimização estrutural devido as suas características de alta resistência mecânica aliada ao baixo peso específico, o que vem ampliando seu campo de aplicação. Além da indústria aeroespacial que foi uma das primeiras a utilizá-los, outra indústria que vem aumentando sua utilização é a automobilística. Já nos anos 50 compósitos de fibra de vidro e epóxi começaram a ser utilizados pela Citroën na fabricação do D-19 com uma produção anual de 70.000 veículos e também pela General Motors na fabricação do Corvette, com uma produção anual de 10.000 veículos (Nabarrete, 1998).

Nos anos 60 começaram a ser introduzidos os primeiros compósitos em aviões de passageiros. A princípio eram usados compósitos de fibra de vidro em painéis. A partir de 1980 o Airbus A310 passou a utilizar “spoilers”, lemes para estabilizadores verticais e outras partes estruturais fabricados com compósitos reforçados com fibras de carbono que representam cerca de 8% de contribuição no peso estrutural total da aeronave, enquanto no A320 essa contribuição é de 12% chegando a 16% no A340 (Hilgert, 1994).

Na Alemanha já se projetam cabines de locomotivas feitas totalmente de compósito reforçado com fibras de carbono em matriz epóxi, reduzindo seus pesos para cerca de um terço em comparação com as fabricadas em aço.

No Brasil a indústria automobilística faz uso maciço de compósitos na construção de autopeças como pára-choques, capôs, e até cabines para as linhas de ônibus e caminhões. Além das vantagens já citadas em termos de peso e resistência as cabines de compósitos têm ainda outros pontos positivos: são mais silenciosas que suas concorrentes em aço, graças às melhores propriedades de absorver sons dos materiais compósitos e ao contrário das fabricadas com aço, não apresentam corrosão.

# Capítulo 3

## Princípios de elasticidade e mecânica da fratura

### 3.1 Introdução

Este capítulo introduz os conceitos básicos da teoria da elasticidade e sua aplicação na análise da mecânica da fratura. Este trabalho faz uso da teoria da elasticidade linear clássica, a qual é baseada em duas suposições de linearidade: linearidade física e linearidade geométrica. A primeira assume que a equação constitutiva dada pela relação tensão-deformação é linear. A segunda assume que as deformações podem ser representadas linearmente em termos de gradientes de deslocamentos conforme o tensor de deformação infinitesimal de Cauchy. As equações básicas da elasticidade linear são o ponto de partida para a obtenção das integrais de contorno requeridas pelo método dos elementos de contorno.

As convenções da notação indicial e de tensores cartesianos serão empregadas neste trabalho, salvo nos casos em que o contrário for mencionado. De acordo com a notação indicial a somatória está implícita pela repetição de índices, eliminando o símbolo  $\Sigma$ , e a vírgula precedendo um índice indica uma derivada parcial com relação a este índice como em  $\sigma_{ij,j} \equiv \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ . Nos problemas tridimensionais os índices variam de 1 a 3 e indicam os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. O delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  é uma matriz especial, cujos componentes são: 1 se  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ .

Os modos de deformação da trinca são revistos neste capítulo onde também serão introduzidos os fatores de intensidade de tensão como condições limitantes do campo de tensões próximo à ponta da trinca.

## 3.2 Revisão de elasticidade

Na mecânica dos sólidos necessita-se considerar estados de tensão e deformação no corpo. Ambos são inter-relacionados pelas equações constitutivas, que procuram descrever o comportamento do material, e estabelecem as relações entre tensão e deformação.

Partindo da definição de tensão  $\sigma = F/A$  sendo  $F$  a força aplicada ao corpo e  $A$  a área resistente, considera-se um cubo unitário de um dado material colocado em um sistema de coordenadas de forma que suas faces estejam alinhadas com os eixos do sistema e sujeito às tensões aplicadas em suas faces conforme a figura 3.1.a.

Verifica-se então que a tensão aplicada em cada um dos planos das faces do cubo tem três componentes. Dessa forma pode-se verificar que o estado de tensão ao qual o corpo está submetido é descrito em termos de nove variáveis dentre as quais três são componentes normais ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ ) e seis componentes tangenciais ou de cisalhamento ( $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ ). Na notação utilizada o primeiro sufixo indica a direção normal ao plano em que a tensão atua e o segundo a direção que ela atua (Brebba e Domínguez, 1989; Cruse, 1998). O estado de tensão em um ponto em termos dos componentes de tensão é definido por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Aplicando-se momentos sobre as arestas do cubo conforme a figura 3.1.b pode se mostrar que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.2)$$

Isso significa que o tensor de tensões é simétrico. A condição de simetria reduz o número de variáveis de nove para seis de forma que o estado de tensão em um volume elementar de um corpo tridimensional sujeito a um carregamento pode ser definido em termos de seis componentes de tensão (Brebbia e Domínguez, 1989; Cruse, 1998).

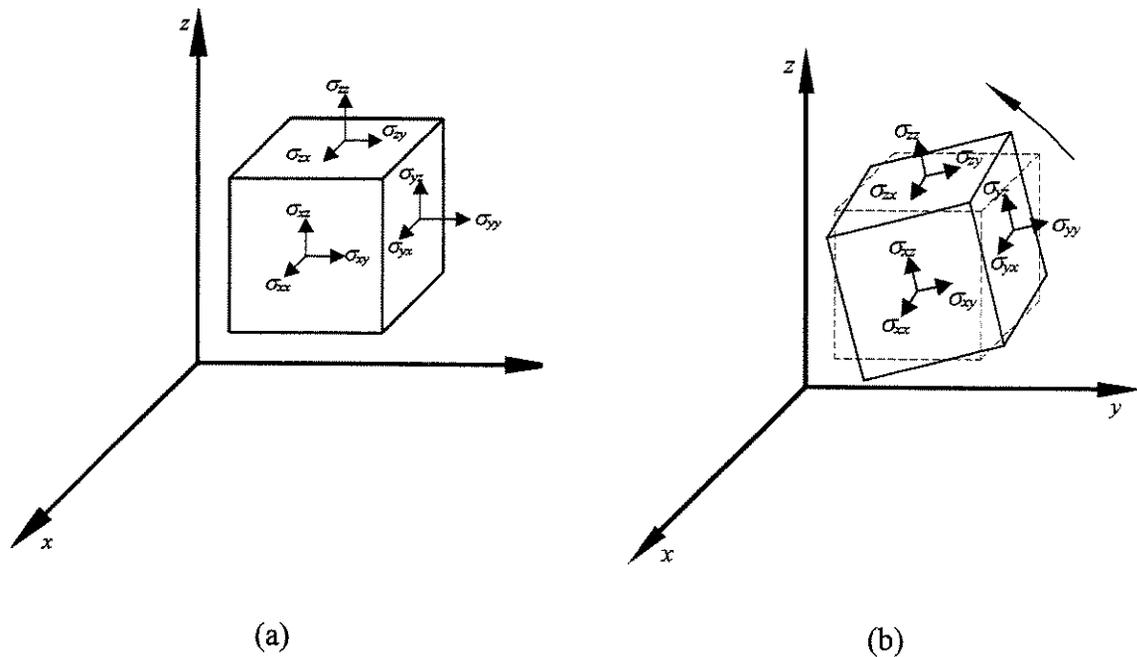


Figura 3.1: (a) Tensões nas faces de um cubo conforme o sistema de coordenadas adotado; (b) Momento aplicado sobre aresta do cubo.

Dois importantes requisitos físicos de (I) equilíbrio de estado de tensão e (II) compatibilidade de deslocamentos, apontam para relações diferenciais envolvendo tensões e deformações.

### 3.2.1 Equilíbrio de estado de tensão

Na ausência de forças de corpo como força da gravidade ou forças centrífugas, o equilíbrio na direção de cada eixo do sistema de coordenadas resulta nas três equações de equilíbrio apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Usando a notação indicial podemos representar as três equações de equilíbrio (3.3) em uma só, conforme mostrado a seguir

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0\tag{3.4}$$

ou ainda,

$$\sigma_{ij,j} = 0.\tag{3.5}$$

Os componentes de tensão quando projetados em um elemento diferencial de contorno  $\partial V$  produzem forças de superfície, denotadas por  $t_i$ , tais que

$$\begin{aligned}t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3\end{aligned}\tag{3.6}$$

sendo  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  cossenos diretores da normal  $\mathbf{n}$  com relação aos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  dados por

$$\begin{aligned}n_1 &= \cos(n, x_1) \\ n_2 &= \cos(n, x_2) \\ n_3 &= \cos(n, x_3)\end{aligned}\tag{3.7}$$

As equações (3.6) podem ser escritas em notação indicial

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \text{ em } \Gamma. \quad (3.8)$$

Considerando um corpo  $\Omega$  delimitado por um contorno  $\Gamma$ , assume-se que os deslocamentos são conhecidos em  $\Gamma_1$  e as forças de superfície são conhecidas em  $\Gamma_2$  (Brebbia e Domínguez, 1989).

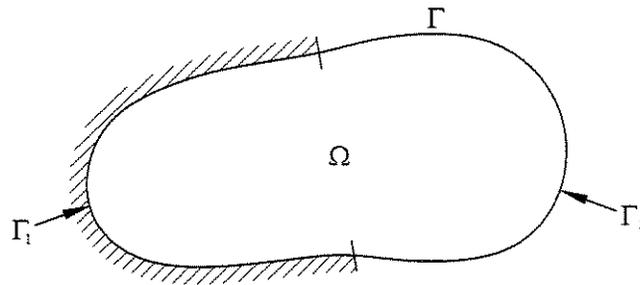


Figura 3.2: Condições de contorno em um sólido.

As forças de superfície são chamadas condições de contorno naturais do problema, assim

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \bar{t}_1 \\ t_2 &= \bar{t}_2 \\ t_3 &= \bar{t}_3 \end{aligned} \right\} \text{ em } \Gamma_2. \quad (3.9)$$

Essas condições implicam que as forças de superfície aplicadas devem estar em equilíbrio com os componentes de reações na superfície, isto é,

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_2. \quad (3.10)$$

Uma vez que é mais fácil aplicar condições de contorno em termos de deslocamentos que em termos de deformações, em  $\Gamma_1$  as seguintes condições essenciais podem ser definidas

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1 \\ u_2 &= \bar{u}_2 \\ u_3 &= \bar{u}_3 \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \quad (3.11)$$

onde  $\bar{u}$  são valores prescritos. Notar que o contorno  $\Gamma$  é igual a  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ .

### 3.2.2 Compatibilidade de deslocamentos

As deformações do contorno são funções dos deslocamentos que tem componentes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  em cada ponto. Quando um corpo sofre uma deformação devido a ação de tensões as alterações em sua geometria é descrita em termos dos vetores de deformação  $\mathbf{u}$ . Normalmente considera-se essa deformação muito pequena quando comparada com a menor dimensão do corpo (Cruse, 1998).

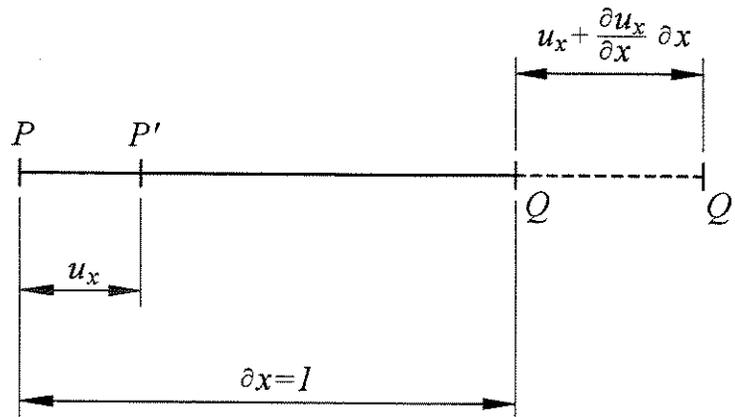


Figura 3.3: Deformação normal.

A deformação normal é um alongamento unitário em uma dada direção que, em termos de engenharia, é dada por

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.12)$$

sendo  $l = \partial x$  e  $\Delta l = Q' - P'$  conforme a figura 3.3. Uma vez que a deformação é muito pequena,

$$\Delta l = \frac{\partial u_x}{\partial x} \partial x, \quad (3.13)$$

então a deformação normal na direção  $x$  é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} \partial x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.14)$$

e semelhantemente, deformação normal na direção  $y$  é dada por

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3.15)$$

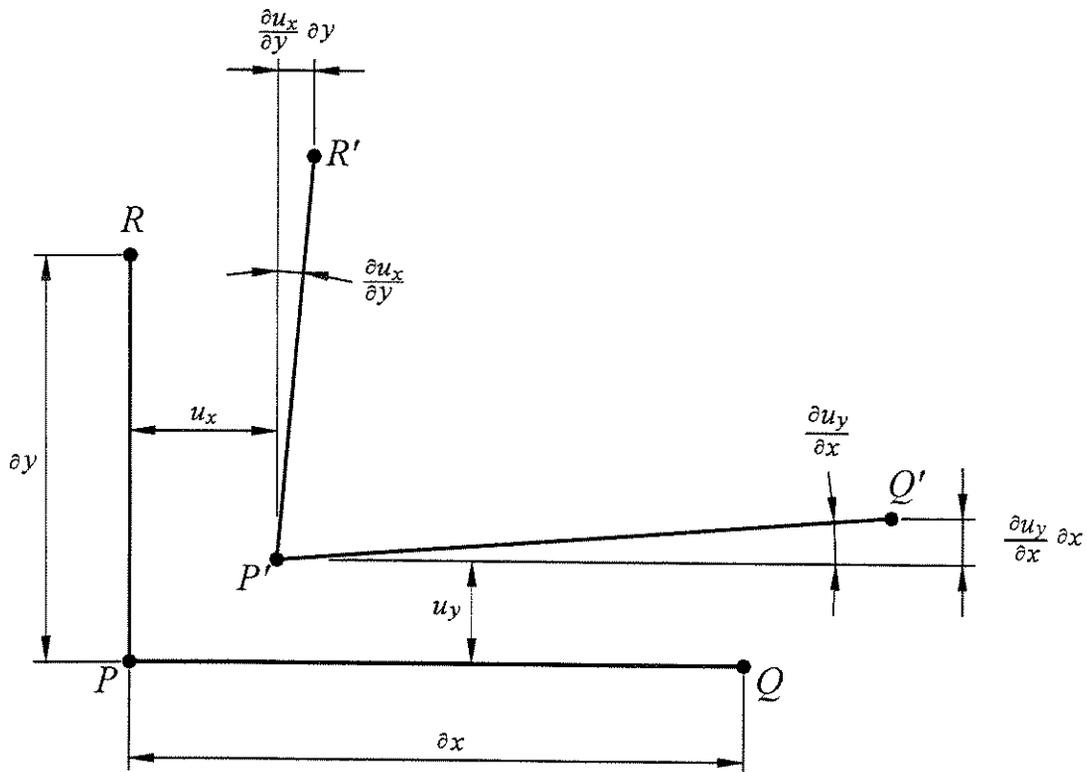


Figura 3.4: Deformação de cisalhamento.

As deformações devido ao cisalhamento podem ser descritas como alterações do ângulo entre dois segmentos de retas orientados nas direções  $x$  e  $y$ . A figura 3.4 mostra três pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  tomados sobre um corpo que, ligados por segmentos de retas, formam, inicialmente, um ângulo reto no ponto  $P$ . Após a deformação os pontos são chamados  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$  e os novos segmentos de retas por eles definidos não formam mais um ângulo reto em  $P'$ . As deformações resultantes do cisalhamento são definidas como a média da soma dos ângulos formados entre os segmentos de reta antes e depois da deformação, ou seja,

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

é a média da soma dos ângulos formados entre  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$  e entre  $\overline{PR}$  e  $\overline{P'R'}$  (Cruse, 1998).

As deformações normal e de cisalhamento descritas pelas equações (3.14), (3.15) e (3.16) podem ser escritas conforme a notação indicial.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.17)$$

Assim como o tensor de tensões, o tensor de deformações dado por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

é simétrico, de forma que

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (3.19)$$

Pode-se verificar que a equação (3.17) é perfeitamente aplicável nos casos de deformação normal. Tomando-se como exemplo a equação (3.14) pode-se ver facilmente que

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (3.20)$$

Para garantir uma solução única para os deslocamentos  $u_i$ , as componentes de deformação  $\varepsilon_{ij}$  não podem ser dadas arbitrariamente mas devem satisfazer certas condições de integrabilidade ou compatibilidade. Essas condições podem ser obtidas pela eliminação de  $u_i$  nas equações dadas em (3.17) através da diferenciação desta com relação a  $x_k$  e  $x_l$  e trocando a ordem da derivada, resultando na equação de compatibilidade de deslocamentos dada por

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial y_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3.21)$$

ou

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Equações de Navier para elasticidade

As propriedades de um material em particular são introduzidas usando a lei de Hooke. A relação entre tensões e deformações para um material elástico e isotrópico é dada pela lei de Hooke que declara que as componentes da tensão normal,  $\sigma_{ii}$ , são linearmente relacionadas com as componentes da deformação normal  $\varepsilon_{ii}$ . Conhecendo as constantes de Lamé  $\mu$  e  $\nu$ , expressas em termos dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal e do coeficiente de Poisson  $\nu$ , dadas por (Cruse, 1998)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.23)$$

e

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.24)$$

pode-se escrever as deformações e tensões em termos de  $E$  e  $\nu$ . Em coordenadas cartesianas são representadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], & \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}. \quad (3.26)$$

A relação inversa das equações (3.26) é dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (3.27)$$

Substituindo as equações (3.17) nas equações (3.27) e, por sua vez, substituindo-as nas equações de equilíbrio (3.5), e usando a notação indicial, chega-se a (Aliabadi e Rooke, 1991; Kane, 1994)

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} = 0 \quad (3.28)$$

que são as equações de equilíbrio escrita em termos de deslocamentos, chamadas de equações da elasticidade de Navier.

### 3.2.4 Solução de Kelvin

A solução de Kelvin para as equações de Navier envolve a resposta de um meio elástico, isotrópico, homogêneo, infinito, tridimensional a uma carga pontual, ou seja, relaciona uma carga unitária  $e_j(x^*)$  aplicada em um ponto  $x^*$  com os deslocamentos e forças de superfícies produzidos em outro ponto  $x$ , dada por

$$u_i(x) = U_{ij}(x, x^*) e_j(x^*) \quad (3.29)$$

e

$$t_i(x) = T_{ij}(x, x^*) e_j(x^*). \quad (3.30)$$

Ambos os tensores de deslocamento  $U_{ij}$  e tração  $T_{ij}$  são singulares. Maiores detalhes podem ser vistos no capítulo 4, na seção que trata das soluções fundamentais.

## 3.3 Mecânica da fratura

A fratura em materiais sólidos estruturais, tais como madeiras, metais ou compósitos é geralmente iniciada por alguma falha do tipo trinca ou entalhe, a qual é causadora de altas tensões em seu entorno. A ocorrência de trincas em peças ou componentes gera elevados custos pois sua presença aumenta o tempo e os esforços despendidos na manutenção e reparo de componentes, e que, se negligenciada, pode levar à fratura do componente e conseqüentemente a falha da estrutura, que pode até colocar em risco vidas humanas. Em 1982 relatório divulgado pelo Departamento de Comércio dos Estados Unidos trazia uma estimativa que apontava para custos de falhas devido a fraturas em torno de 120 bilhões de dólares, o que representava cerca de

4% do Produto Interno Bruto do país naquele ano, o que torna de grande importância a tentativa de se entender melhor os mecanismos de fratura com o objetivo de reduzir seus efeitos (Duga, 1983).

Uma vez que é quase impossível estar livre da ocorrência de trincas, é interessante estudar seus mecanismos e propor procedimentos para quantificar e prever o comportamento de estruturas trincadas sob condições de trabalho. As trincas podem estar presentes como pequenas falhas no estágio de manufatura do material, podem surgir durante a fabricação do componente ou podem ser resultado de danificações por fadiga, impacto, corrosão, etc., da estrutura final.

Normas e procedimentos sistemáticos para caracterizar trincas e seus efeitos e para prever se, e quando, elas poderão comprometer a segurança durante a vida operacional da estrutura são objetivos de estudo de um ramo da engenharia, chamado mecânica da fratura que tem surgido como valiosa ferramenta para análises de projetos e para estabelecer níveis de tolerância aos danos e defeitos presentes no material. A presença de uma trinca em uma estrutura normalmente induz altas concentrações de tensão na ponta da trinca. A mecânica da fratura provê meios pelos quais o campo de tensões na ponta da trinca, bem como as deformações elásticas podem ser caracterizadas. Sua principal função é a caracterização e predição do fator de intensidade de tensão.

A mecânica da fratura pode ser dividida, basicamente, em cinco categorias de acordo com as características do material estudado. Os materiais que apresentam comportamento linear elástico, não dependente do tempo, nos quais as deformações plásticas na ponta da trinca são tão pequenas quando comparadas com as dimensões da trinca que podem ser desprezadas, são estudados no âmbito da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Os materiais que apresentam comportamento não dependente do tempo, nos quais as deformações plásticas já não podem ser desconsideradas são objetos de estudo da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). Os materiais que apresentam comportamento dependente do tempo podem ser enquadrados na Mecânica da Fratura Dinâmica, Mecânica da Fratura Viscoelástica ou na Mecânica da Fratura Viscoplasticidade.

O enunciado fundamental da Mecânica da Fratura Elástica Linear postula que o comportamento da trinca (quando ocorrerá o crescimento instável da trinca) é determinado, unicamente, pelo valor do fator de intensidade de tensão. No caso de carregamento cíclico, o fator de intensidade de tensão indica o quão rápido será esse crescimento. Na mecânica da fratura elástica linear as deformações não elásticas na vizinhança da ponta da trinca devidas à concentração de tensão são consideradas pequenas quando comparadas com o comprimento da trinca e outras dimensões características (Banerjee, 1994).

A modelagem do comportamento da ponta da trinca faz uso de três modelos primários de deformação de corpos trincados de acordo com o tipo do carregamento aplicado ao componente. Estes três modelos são caracterizados por três movimentos cinemáticos independentes das superfícies inferiores e superiores da trinca uma em relação a outra e são mostrados na figura 3.5. Eles são referenciados como modo de abertura ou modo I, quando as duas superfícies são separadas por forças que as puxam em sentidos contrários devido à tensão normal; modo de escorregamento, cisalhamento ou modo II, quando uma das superfícies da trinca escorrega sobre a outra ao longo da linha da trinca (direção  $x_1$ ) devido às tensões no plano e modo de rasgamento ou modo III, quando uma das superfícies da trinca escorrega sobre a outra em direção perpendicular a linha da trinca (direção  $x_3$ ) devido aos esforços cortantes (Hertzberg, 1996).

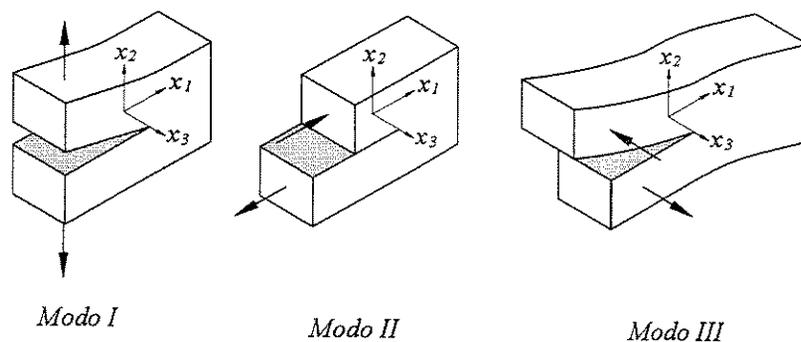


Figura 3.5: Os três modos primários de carregamento de um corpo trincado.

### 3.3.1 Definição e considerações preliminares

O primeiro critério de fratura foi proposto por Griffith e baseava-se na primeira lei da termodinâmica, que postulava que a redução na energia de deformação devido a propagação de uma trinca é usada para criar novas superfícies de trinca. A taxa de liberação de energia de

deformação,  $\mathcal{G}$ , é definida como a redução na energia de deformação (ou aumento na energia potencial) devido a uma extensão infinitesimal da trinca. Uma propagação catastrófica da trinca ocorre quando esta taxa atinge um valor crítico,  $\mathcal{G}_c$ . Para uma trinca passante de comprimento  $2a$  em uma chapa sujeita a tensões de tração, a taxa de liberação de energia pode ser expressa em termos de  $a$  e das propriedades do material.

O critério proposto por Griffith contemplava somente o primeiro modo (modo I). Irwin mostrou que as tensões na ponta da trinca podem ser expressas por um conjunto de equações de três parâmetros cujos valores típicos governam o fenômeno do crescimento instável da trinca.  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , chamados de fator de intensidade de tensão em modo I, modo II e modo III são funções das dimensões da peça e das cargas aplicadas. O conceito de falha baseado no valor crítico do fator da intensidade de tensão tem se mostrado equivalente àquele proposto por Griffith em termos de taxa de liberação de energia crítica ( $\mathcal{G}_{Ic}$ ,  $\mathcal{G}_{IIc}$ ,  $\mathcal{G}_{IIIc}$ ). Irwin também sugeriu o uso do valor crítico da taxa de liberação de energia total como parâmetro que governa a falha, conquanto que a falha ocorra de maneira similar a propagação de trinca.

### 3.3.2 Fratura em material compósito

Os compósitos laminados reforçados com fibra são superiores aos metais tradicionais em muitos aspectos devido às suas características de alta resistência e rigidez específica. Entretanto o maior problema para estes materiais é a delaminação e o descolamento entre a fibra e a matriz. Tanto a delaminação quanto o descolamento podem ser vistos como trincas interfaciais, a primeira como trinca na interface entre duas lâminas e o segundo como trinca na interface fibra-matriz. A resistência à fratura interfacial para materiais compósitos reforçados com fibra é a caracterização da resistência isolada mais importante de seus comportamentos mecânicos.

A qualidade da interface fibra-matriz influencia o surgimento e propagação de trincas de delaminação. A resistência ao crescimento da trinca tem sido caracterizado pela tenacidade à fratura ou pela taxa crítica de liberação de energia, sob modos I, II, III e condições de carregamento em que estes aparecem combinados. As condições de carregamento em modo I são usadas como um teste básico para avaliar as propriedades de adesão fibra-matriz. Uma viga engastada é um dos tipos de corpos de prova mais usados para a determinação da taxa crítica de

liberação de energia  $G_c$  devido à sua geometria simples e apresentar um crescimento de trinca estável em carregamento sob controle de deslocamento (Ricards *et al.*, 1996). A figura 3.6 mostra um corpo de prova proposto pela ASTM (D 5528) para o ensaio de um viga engastada em modo I.

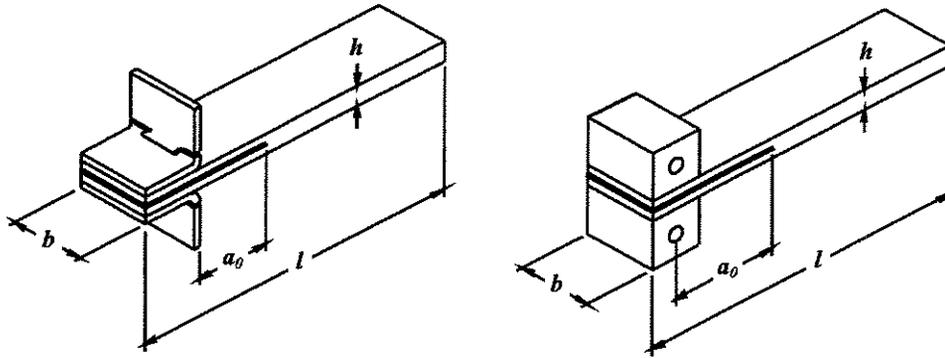


Figura 3.6: Corpos de prova para ensaio de delaminação conforme ASTM D 5528.

Uma trinca interlaminar inicial é introduzida em uma chapa de compósito laminado unidirecional colocando-se um filme de material antiaderente de espessura de 40  $\mu\text{m}$  entre as camadas (Ricards *et al.*, 1996). Na figura 3.6  $a_0$  é o comprimento do filme usado para introduzir a pré-trinca de delaminação em modo I.  $b$ ,  $h$ ,  $l$  e outras dimensões são dadas pela norma. Dois blocos de alumínio são colados em cada lado do laminado em direção paralela à trinca por meio dos quais a carga é aplicada.

### 3.3.3 Campos de deslocamentos e tensões na ponta da trinca

O conhecimento dos campos de deslocamento e tensão é essencial para a análise da resistência residual de um corpo bimaterial contendo uma trinca. As deduções das relações analíticas para os campos de deslocamento e tensão na vizinhança de uma trinca interfacial entre materiais dissimilares é bem documentada na literatura (Tan e Gao, 1990). A figura 3.7 apresenta uma trinca interfacial entre os materiais I e II de um corpo bimaterial. Sistemas locais de coordenadas polares e cartesianas são fixados na ponta da trinca.

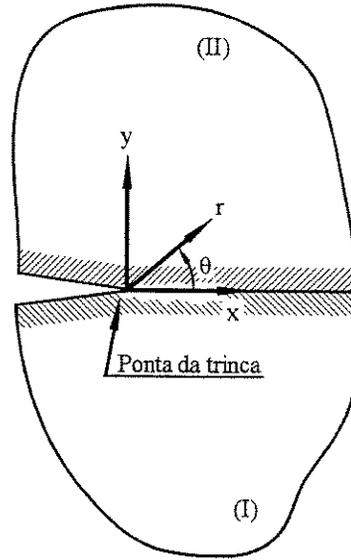


Figura 3.7: Coordenadas locais na ponta da trinca .

No sistema de coordenadas adotado define-se a parte da interface que permanece colada como  $\theta = 0^\circ$  e as superfícies criadas pela trinca como  $\theta = -\pi$  para a face pertencente ao material I e  $\theta = \pi$  para a face pertencente ao material II.

Definindo deslocamentos e tensões complexos escritos na forma

$$u_\alpha = u_{\alpha r} + i u_{\alpha \theta} \quad (3.31)$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha r} + i \sigma_{\alpha \theta} \quad (3.32)$$

$$\sigma_{\alpha \theta} = \sigma_{\alpha \theta} + i \sigma_{\alpha r} \quad (3.33)$$

e usando o método dos potenciais, os campos de deslocamento e tensão na ponta da trinca interfacial são dados por (Tan e Gao, 1990)

$$u_1 = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{2\sqrt{2\pi}\mu_1(1+\gamma)^\lambda} \left\{ \bar{K}r^\lambda \left[ \kappa_1 e^{i(\lambda-1)\varphi} - \gamma e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \lambda \bar{K}r^{\bar{\lambda}} \left[ e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.34)$$

$$u_2 = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{2\sqrt{2\pi}\mu_2(1+\gamma)^\lambda} \left\{ \bar{K}r^\lambda \left[ \kappa_2 \gamma e^{i(\lambda-1)\varphi} - e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \lambda \gamma \bar{K}r^{\bar{\lambda}} \left[ e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{1r} = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{\sqrt{2\pi}(1+\gamma)} \left\{ \bar{K}r^{\lambda-1} \left[ e^{i(\lambda-1)\varphi} - \gamma e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \bar{K}r^{\bar{\lambda}-1} \left[ \lambda e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - (\bar{\lambda}-2) e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{2r} = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{\sqrt{2\pi(1+\gamma)}} \left\{ \bar{K}r^{\lambda-1} \left[ \gamma e^{i(\lambda-1)\varphi} - e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \gamma K r^{\bar{\lambda}-1} \left[ \lambda e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - (\bar{\lambda}-2) e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.37)$$

$$\sigma_{1\theta} = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{\sqrt{2\pi(1+\gamma)}} \left\{ \bar{K}r^{\lambda-1} \left[ e^{i(\lambda-1)\varphi} - \gamma e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \bar{\lambda} K r^{\bar{\lambda}-1} \left[ e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{2\theta} = \frac{\cosh(\pi\zeta)}{\sqrt{2\pi(1+\gamma)}} \left\{ \bar{K}r^{\lambda-1} \left[ \gamma e^{i(\lambda-1)\varphi} + e^{-i(1+\lambda)\varphi} \right] + \bar{\lambda} \gamma K r^{\bar{\lambda}-1} \left[ e^{-i(1-\bar{\lambda})\varphi} - e^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \right\} \quad (3.39)$$

Nas equações (3.34) a (3.39), a barra define o conjugado complexo,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma, \quad (3.40)$$

e

$$\gamma = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1} \quad (3.41)$$

sendo  $\mu_\alpha$  o módulo de elasticidade transversal para cada um dos materiais.

Para o estado plano de deformação,  $\kappa$  é dado por

$$\kappa = 3 - 4\nu_\alpha \quad (3.42)$$

e para o estado plano de deformação, por

$$\kappa = \frac{3 - \nu_\alpha}{1 + \nu_\alpha}, \quad (3.43)$$

sendo  $\nu_\alpha$  o coeficiente de Poisson para cada um dos materiais. O fator de intensidade de tensão complexo  $K$  é definido por

$$K = K_I + iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{\theta\theta} + i\tau_{r\theta}) \Big|_{\theta=0}. \quad (3.44)$$

Ainda,

$$\lambda = \frac{1}{2} + i\zeta. \quad (3.45)$$

### 3.3.4 Fator de intensidade de tensão

Os fatores de intensidade de tensão são coeficientes das singularidades de tensão na ponta da trinca definidos como

$$K_I = \sigma_{11} \sqrt{2\pi r} = K_{II} = \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \quad (3.46)$$

e

$$K_{II} = \sigma_{12} \sqrt{2\pi r}. \quad (3.47)$$

Nos problemas onde o corpo analisado é bimaterial os fatores de intensidade de tensão são acoplados e o comportamento da ponta da trinca é caracterizada por um fator de intensidade de tensão complexo conforme pode ser observado na equação (3.44). Sua separação em modos I ou II é possível somente em circunstâncias limitadas onde os materiais sejam suficientemente similares (Rice, 1988).

### 3.3.5 Oscilação da singularidade na ponta da trinca

Da mesma forma que em meios homogêneos, trincas na interface entre dois materiais induzem campos de tensão singulares na ponta da trinca. Porém, constata-se a partir das equações (3.34) a (3.39), que os campos de tensão e deslocamento na ponta de uma trinca interfacial apresentam, ainda, um comportamento oscilatório com as tensões variando entre valores positivos e negativos tendendo ao infinito, como mostrado na figura (3.8).

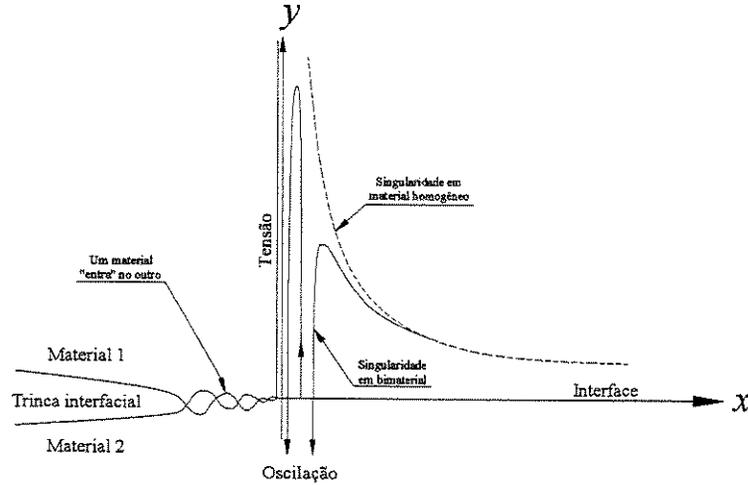


Figura 3.8: Comportamento oscilatório da singularidade da tensão e do deslocamento próximo à ponta de uma trinca interfacial.

A distribuição de tensão próximo à ponta de uma trinca na interface entre dois materiais elásticos isotrópicos pode ser definida como (Yuuki e Xu, 1994)

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{a}\right)^{i\psi} \quad (3.48)$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os fatores de intensidade de tensão para uma trinca interfacial,  $a$  é o comprimento total da trinca e  $\psi$  é uma constante do meio bimaterial definida pelas propriedades dos materiais que o compõe dada por

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{\kappa_2 + 1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \right) \quad (3.49)$$

sendo  $\kappa_i$  dado por

$$\kappa_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & \text{(para estado plano de deformação)} \\ \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & \text{(para estado plano de tensão)} \end{cases} \quad (3.50)$$

$\mu$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson para cada material. Se  $\psi \neq 0$  significa que os materiais possuem propriedades elásticas diferentes e, neste caso, a tensão apresenta uma singularidade oscilatória. O deslocamento também apresenta um comportamento oscilatório como se uma face da trinca penetrasse na outra. Tais problemas são discutidos por Rice (1988).

# Capítulo 4

## Método dos Elementos de Contorno

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação básica do método dos elementos de contorno para elastostática em meios isotrópicos. É desenvolvida a equação integral de contorno a partir do teorema de Betti, e detalhada a obtenção da solução fundamental, a partir da resolução do problema de Kelvin. É mostrada como a integração numérica é realizada, tanto nos casos em que as integrais são regulares como nos casos em que possuem uma singularidade fraca. O método das sub-regiões é apresentado e detalhado. Finalmente, a formulação para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície é mostrado.

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido já há várias décadas e através dos anos vem se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Sua aplicação em mecânica da fratura tem sido objeto de estudos desde o início dos anos 70. Esta trajetória pode ser vista em Aliabadi (1997) e Cruse (1998). Esse método tem sido aplicado com sucesso em problemas elásticos lineares em domínios contendo defeitos ou não. Os defeitos, internos ou superficiais, quando não incluem nenhuma área ou volume e através dos quais o deslocamento é descontínuo são definidos como trincas.

## 4.2 Soluções fundamentais

A formulação de equações integrais de contorno para elastostática a ser descrita adiante requer o conhecimento de soluções para problemas de elasticidade. Nesses problemas as propriedades do material consideradas são as mesmas do componente que se quer analisar, mas correspondente a um domínio infinito carregado com uma carga pontual unitária. Essa é a solução fundamental da elastostática, ou solução de Kelvin para as equações de Navier (Brebbia e Domínguez, 1989).

Se as equações de equilíbrio são expressas em termos de componentes de deslocamento chega-se a equação de Navier. Considere-se a equação (3.5), aqui repetida

$$\sigma_{ij,j} = 0.$$

Substituindo a equação (3.27) que relaciona tensão e deformação dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right]$$

na equação (3.5) e em seguida substituindo a equação (3.17) dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

nas duas anteriores obtém-se, como resultado, as equações de Navier, ou equações de equilíbrio em termos de deslocamentos

$$\left( \frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,\dot{j}} + u_{i,\dot{j}} = 0. \quad (4.1)$$

ou

$$\mu u_{i,\dot{j}} + (\mu + \lambda) u_{j,\dot{i}} = 0 \quad (4.2)$$

As equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos são chamadas equações de elasticidade de Navier. As quinze relações mostradas anteriormente (três equações de equilíbrio, seis relações tensão-deformação e seis equações constitutivas) foram reescritas em somente 3 equações diferenciais parciais de segunda ordem envolvendo três deslocamentos  $u_i$ , desconhecidos. O inconveniente é que essas equações são acopladas, isto é, cada uma das três equações envolve deslocamentos nas três direções, como pode ser visto a seguir (Kane, 1994)

$$\mu u_{1,11} + \mu u_{1,22} + \mu u_{1,33} + u_{1,11} (\mu + \lambda) + u_{2,21} (\mu + \lambda) + u_{3,31} (\mu + \lambda) = 0 \quad (4.3)$$

Dentre as várias aproximações disponíveis para desacoplar as equações de Navier está a aproximação pelo vetor de Galerkin. Nessa aproximação o componente  $u_i$  dos deslocamentos na equação (4.2) é substituída na equação (4.3) por uma expressão envolvendo a derivada segunda de um vetor de Galerkin  $G$  (Brebbia e Domínguez, 1989; Kane, 1994)

$$u_i = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,im} \quad (4.4)$$

O deslocamento em qualquer ponto do domínio, devido a uma carga pontual, considerando cada direção como independente, pode ser escrita como

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i \quad (4.5)$$

onde  $u_{ij}^*$  representa o deslocamento em qualquer ponto na direção  $j$  quando uma carga pontual é aplicada em um ponto “ $k$ ” na direção  $i$ . De acordo com a equação (4.4) pode-se escrever

$$u_{ij}^* = G_{ij,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,jm} \quad (4.6)$$

sendo  $G_{ij}$  o  $j$ -ésimo componente do vetor de Galerkin em qualquer ponto quando uma carga unitária é aplicada em “ $k$ ” na direção  $i$ , dado por

$$G_{ij} = G\delta_{ij} \quad (4.7)$$

sendo

$$G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.8)$$

de forma que a solução fundamental para problemas bidimensionais em estado plano de deformação em termos de deslocamento é dada por

$$U_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right]. \quad (4.9)$$

As forças de superfície no contorno  $\Gamma$  com normal  $\mathbf{n}$  podem ser escritas como

$$t_j^* = t_{ij}^* e_i \quad (4.10)$$

sendo

$$T_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (4.11)$$

A formulação detalhada das soluções fundamentais pode ser vista em Brebbia e Domínguez (1989) e Kane (1994).

### 4.3 O teorema de Betti e a identidade de Somigliana

A solução de uma equação integral de contorno é o objetivo do método dos elementos de contorno. A identidade de Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane, 1994). O teorema de Betti declara que o trabalho que um conjunto de forças de superfície  $t_i$  e forças de

corpo, em equilíbrio, aplicadas em um sistema, exerce nos deslocamentos de um segundo sistema  $u_i^*$ , é igual ao trabalho que as forças de superfície  $t_i^*$  e forças de corpo deste segundo sistema exerce nos deslocamentos  $u_i$  do primeiro. O símbolo (\*) denota o segundo sistema (Kane, 1994). O teorema de Betti pode ser derivado como segue.

A relação tensão-deformação (3.27) para o material isotrópico linear pode ser escrita como

$$(1+\nu)\sigma_{ij} = E\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (4.12)$$

para o primeiro sistema e

$$(1+\nu)\sigma_{ij}^* = E\left(\varepsilon_{ij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}^*\delta_{ij}\right). \quad (4.13)$$

para o segundo sistema.

Multiplicando a equação (4.12) que relaciona tensão e deformação para o primeiro sistema, pela deformação  $\varepsilon_{ij}^*$  do segundo sistema e, também, a equação (4.13) que relaciona tensão e deformação para o segundo sistema pela deformação  $\varepsilon_{ij}$  do primeiro sistema e subtraindo uma da outra resulta

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij} = 0. \quad (4.14)$$

Devido aos tensores de tensões serem simétricos, implica que

$$\sigma_{ij}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^*\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (4.15)$$

e por estarem em equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} = 0. \quad (4.16)$$

Das equações (4.15) e (4.16) pode-se obter

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) = 0 \quad (4.17)$$

e a integração sobre todo o corpo resulta em

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) \partial \Omega = 0. \quad (4.18)$$

Usando o teorema da divergência de Gauss, na ausência de forças de corpo, a seguinte integral sobre o contorno  $\Gamma$  pode ser obtida

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) \mathbf{n}_j dS = \int_{\Gamma} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = 0 \quad (4.19)$$

que é conhecida como teorema recíproco de Betti, onde  $\Gamma$  é o contorno do corpo.

A identidade de Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane, 1994) dada por

$$u_i(x^*) + \int_{\Gamma} T_{ij}(x^*, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x^*, x) t_j(x) d\Gamma(x). \quad (4.20)$$

O primeiro sistema será tomado como aquele a ser resolvido e o segundo como aquele cuja solução é conhecida. A solução de Kelvin é singular e o campo de deslocamento  $u_i^*(x)$ , devido a uma carga pontual concentrada  $e_j^*(x^*)$  é dado por

$$u_i^*(x) = U_{ij}(x, x^*) e_j^*(x^*) \quad (4.21)$$

sendo  $U_{ij}$  é a solução fundamental dada por (4.9).

A força de superfície correspondente à carga pontual é dada por

$$t_i^*(x) = T_{ij}(x, x^*) e_j^*(x^*) \quad (4.22)$$

sendo  $T_{ij}$  dado pela equação (4.11).

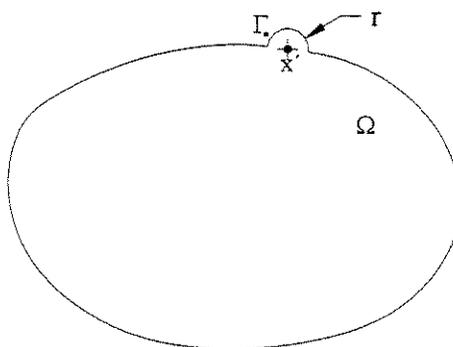


Figura 4.1: Ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy.

Substituindo as equações (4.9) e (4.11) na equação (4.19) resulta

$$\int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} e_j^* - u_i T_{ij} e_j^*) d\Gamma = 0 \quad (4.23)$$

para  $x^*$  no domínio  $\Omega$ , onde  $\Gamma^*$  é igual ao contorno  $\Gamma$  menos a calota de raio  $r$ , devido a ampliação do contorno para determinação do valor principal de Cauchy, mostrada na figura 4.1.

A equação (4.23) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\left[ \int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} - u_i T_{ij}) d\Gamma \right] e_j^* = 0 \quad (4.24)$$

e como  $e_j^*$  são vetores base, em qualquer sistema de coordenadas, e podem assumir quaisquer valor, então para que a equação (4.24) seja verdadeira (igual a zero) a expressão entre colchetes deve ser zero. Então

$$\int_{\Gamma^*} (t_i U_{ij} - u_i T_{ij}) d\Gamma = 0 \quad (4.25)$$

Considerando a pequena calota, a equação (4.25) toma a seguinte forma

$$-u_j(x^*) + \int_{\Gamma^*} [t_i(x) U_{ij}(x, x^*) - u_i(x) T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0. \quad (4.26)$$

A equação (4.26) é aplicada para pontos localizados no interior do corpo. Assumindo que este ponto tende para o contorno tem-se uma contribuição extra  $c_{ij}$  na integração da matriz  $T_{ij}$ , que para pontos sobre um contorno suave vale

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (4.27)$$

e a equação (4.26) pode ser escrita como

$$-c_{ij}(x^*) u_j(x^*) + \int_{\Gamma^*} [t_i(x) U_{ij}(x, x^*) - u_i(x) T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0 \quad (4.28)$$

Uma solução analítica para a equação (4.28) dificilmente será encontrada e uma solução numérica se faz necessária. Para isso o contorno  $\Gamma$  é dividido em  $n$  elementos de contorno  $\Gamma_e$  e a equação (4.28) pode ser escrita como

$$-c_{ij}(x^*) u_j(x^*) + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} [t_i(x) U_{ij}(x, x^*) - u_i(x) T_{ij}(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0. \quad (4.29)$$

A equação (4.29) é aplicada em cada um dos nós do elemento de tal forma que a equação integral de contorno é transformada em um sistema linear de equações algébricas

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (4.30)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  contém as integrais das soluções fundamentais de forças de superfície  $T_{ij}$  e de deslocamentos  $U_{ij}$ , e os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  contém todas as forças de superfícies e deslocamentos conhecidos ou não. Através de algumas manipulações algébricas podemos isolar as incógnitas em um vetor  $\mathbf{f}$  de forma que o sistema (4.29) possa ser representado por

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (4.31)$$

onde uma única solução pode ser obtida.

## 4.4 Elementos de contorno

Elementos constantes, lineares e quadráticos são os tipos de elementos de contorno mais usados em aplicações de elasticidade. A principal limitação do uso de elementos constantes e lineares é que eles não representam muito bem geometrias curvas. Neste trabalho serão apenas utilizados elementos de contorno quadráticos, pois estes, além de poderem representar mais facilmente contornos curvos, ainda interpolam melhor altos gradientes de deslocamentos, forças de superfície e tensões, o que é bastante desejável na modelagem de problemas de fratura.

### 4.4.1 Elemento de contorno quadrático contínuo

Os elementos de contorno quadrático contínuos são versáteis e eficientes para modelar contornos curvos. Os vetores de forças de superfície e deslocamentos nodais,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, para um elemento quadrático contínuo podem ser dados por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 & 0 \\ 0 & N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 & 0 \\ 0 & N_c^1 & 0 & N_c^2 & 0 & N_c^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_1^3 \\ t_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

O elemento de contorno quadrático contínuo mostrado na figura 4.2 tem todos os valores associados a ele, simbolizados por  $v$ . Esses valores incluem coordenadas geométricas  $x_i$ , os seis componentes dos deslocamentos  $u_i$  e os seis componentes das forças de superfícies  $t_i$ .

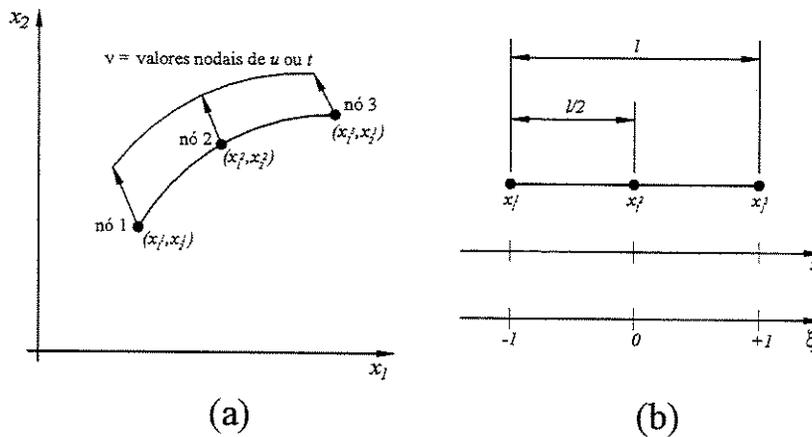


Figura 4.2: Elemento de contorno quadrático isoparamétrico.

A variação da resposta entre os nós é descrita usando-se funções de interpolações polinomiais simples, dadas por

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\
N_2 &= 1-\xi^2 \\
N_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi+1)
\end{aligned}
\tag{4.34}$$

onde  $\xi$  é a coordenada homogênea ao longo do elemento (figura 4.2.b).

A avaliação das integrais ao longo da equação de contorno (4.20) requer o uso de um jacobiano dado por

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \frac{\partial \Gamma_e}{\partial \xi}
\tag{4.35}$$

assim,

$$\partial \Gamma_e = J(\xi) \partial \xi
\tag{4.36}$$

Substituindo (4.32), (4.33) e (4.36) em (4.29) a equação integral de contorno pode ser expressa como

$$-c_{ij}u_j + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} [U_{ij}(\xi', x(\xi)) N_c^n(\xi) t_i - T_{ij}(\xi', x(\xi)) N_c^n(\xi) u_i] J(\xi) \partial(\xi) = 0
\tag{4.37}$$

As integrais sobre o elemento na equação (4.37) pode ser avaliada pelo esquema de quadratura de Gauss unidimensional padrão. A equação (4.37) é então aplicada seqüencialmente para cada nó, no processo chamado colocação nodal. Em cada direção de cada nó há um componente de deslocamento e força de superfície.

#### 4.4.2 Elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície

Conforme as equações (3.36) a (3.39), o campo de tensões próximo à ponta da trinca apresenta um comportamento do tipo  $1/\sqrt{r}$ , com uma singularidade na ponta da trinca. A menos que se faça o uso de uma malha bastante refinada, este tipo de comportamento não pode ser modelado com o uso de elementos quadráticos padrões. Porém, se os campos de deslocamentos e forças de superfície forem interpolados com funções de forma que já apresentam o seu tipo de comportamento, uma boa modelagem é obtida, mesmo com uma malha pouco refinada.

Muitos tipos de elementos foram propostos para a modelagem de problemas de fratura, conforme pode ser visto em Aliabadi e Rooke (1991). Conforme mostrado por Martínez e Domínguez (1984) para problemas simétricos e por Smith (1988) para problemas com carregamento em modo misto, o elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície apresenta pouca dependência da discretização utilizada, o que não ocorre com outros tipos de elementos, analisados por esses autores. Neste trabalho foi utilizado o elemento de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície, cuja formulação será apresentada a seguir.

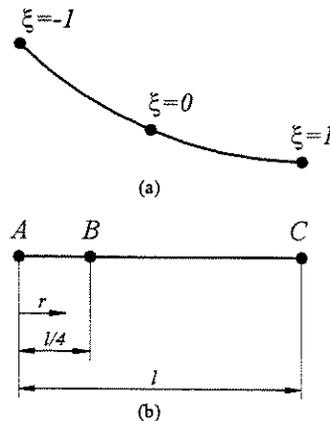


Figura 4.3: (a) Elemento quadrático padrão; (b) Elemento singular de ponto a um quarto.

Se um elemento quadrático padrão tem a geometria retilínea e o ponto central colocado a um quarto de seu comprimento  $l$ , uma relação simples entre  $r$  e  $\xi$  pode ser encontrada. Considerando que  $r$  pode ser representado por

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3, \quad (4.38)$$

sendo  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  dados pelas funções de forma (4.34), pode se escrever as seguintes relações

$$r = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)0 + (1-\xi^2)\frac{1}{4}l + \frac{1}{2}(\xi+1)l = (1+\xi)(1-\xi)\frac{1}{4}l + (\xi+1)\frac{1}{2}\xi l$$

$$\frac{r}{l} = (1+\xi)\left[(1-\xi)\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi\right] = (1+\xi)\left(\frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} + \frac{\xi}{2}\right) = (1+\xi)\left(\frac{1}{4} + \frac{\xi}{4}\right) = \frac{(1+\xi)^2}{4}$$

$$(1+\xi)^2 = \frac{4r}{l} \rightarrow 1+\xi = \sqrt{\frac{4r}{l}}$$

das quais se obtém a seguinte equação

$$\xi = 2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1 \quad (4.39)$$

que será substituída nas funções de forma dadas por (4.34).

Substituindo (4.39) na primeira função de forma  $N_1$ , tem-se

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\xi^2 - \xi}{2} = \frac{\left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)^2 - \left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)}{2} = \\ &= \frac{4\frac{r}{l} - 4\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 - 2\sqrt{\frac{r}{l}} + 1}{2} = \frac{4\frac{r}{l} - 6\sqrt{\frac{r}{l}} + 2}{2} \end{aligned}$$

que resulta em

$$\bar{N}_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1 \quad (4.40)$$

Da mesma maneira, a função de forma  $N_2$  pode ser obtida de

$$N_2 = 1 - \xi^2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}.$$

Assim,

$$\bar{N}_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} \quad (4.41)$$

Substituindo a equação (4.39) na função de forma  $N_3$ ,

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{\xi^2 + \xi}{2} = \frac{\left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1\right)}{2} = \\ &= \frac{4\frac{r}{l} - 4\sqrt{\frac{r}{l}} + 2\sqrt{\frac{r}{l}}}{2} = \frac{4\frac{r}{l} - 2\sqrt{\frac{r}{l}}}{2} \end{aligned}$$

chega-se a

$$\bar{N}_3 = 2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}}. \quad (4.42)$$

Para maior clareza, as três funções de forma dadas pelas equações (4.40) a (4.42), modificadas para incluir a singularidade  $\sqrt{r}$ , obtidas para elementos de ponto a um quarto, são mostradas a seguir:

$$\bar{N}_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1$$

$$\bar{N}_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}$$

$$\bar{N}_3 = 2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}}$$

Conforme equação (4.33) as forças de superfície  $t_i$  podem ser dadas por

$$t_i = \bar{N}_1 t_A + \bar{N}_2 t_B + \bar{N}_3 t_C . \quad (4.43)$$

Substituindo as funções de forma (4.40) a (4.42) em (4.43), conforme mostrado a seguir,

$$t_i = \left(2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1\right) t_A + \left(-4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}\right) t_B + \left(2\frac{r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}}\right) t_C$$

$$t_i = 2\frac{r}{l} t_A - 3\sqrt{\frac{r}{l}} t_A + t_A - 4\frac{r}{l} t_B + 4\sqrt{\frac{r}{l}} t_B + 2\frac{r}{l} t_C - \sqrt{\frac{r}{l}} t_C$$

$$t_i = t_A - 3\sqrt{\frac{r}{l}} t_A + 4\sqrt{\frac{r}{l}} t_B - \sqrt{\frac{r}{l}} t_C + 2\frac{r}{l} t_A - 4\frac{r}{l} t_B + 2\frac{r}{l} t_C$$

chega-se a

$$t_i = a_1 + a_2 \sqrt{\frac{r}{l}} + a_3 \frac{r}{l} \quad (4.44)$$

onde os termos independentes são substituídos por  $a_1$ , os termos em função de  $\sqrt{r/l}$  por  $a_2$  e os termos em função de  $r/l$  por  $a_3$ , dados por:

$$a_1 = t_A \quad (4.45)$$

$$a_2 = -3 t_A + 4 t_B - t_C \quad (4.46)$$

$$a_3 = 2 t_A + -4 t_B + 2 t_C \quad (4.47)$$

Tomando a equação (4.44) e multiplicando-a por  $\sqrt{l/r}$  a equação de tração com singularidade de forças de superfície é obtida.

$$t_i = a_1 \sqrt{\frac{l}{r}} + a_2 + a_3 \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (4.48)$$

Ao usar elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície na ponta da trinca, tanto as forças de superfícies quanto os deslocamentos serão corretamente representados.

Os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados de várias maneiras, sendo a mais direta usando os valores nodais de forças de superfície. Relacionando a equação (4.48) com as equações dos campos de tensões na ponta da trinca interfacial dadas por (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39), a seguinte equação pode ser obtida

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\pi l}}{\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{(\bar{t}_1^A)^2 + (\bar{t}_1^A)^2} \quad (4.49)$$

## 4.5 Integração sobre o elemento que contém o ponto fonte

As soluções fundamentais dadas pelas equações (4.9) e (4.11) são dadas em função do raio  $r$  (figura 4.4) entre o ponto fonte e o ponto campo.

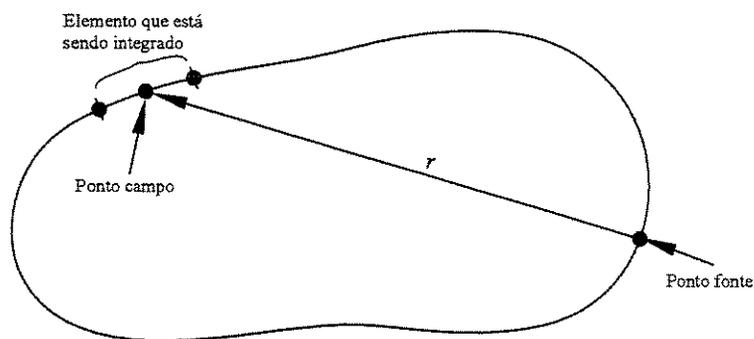


Figura 4.4: O raio  $r$  entre o pontos campo e o ponto fonte é dado por  $x - x^*$ .

Observa-se uma condição singular quando o ponto fonte e o ponto campo estão no mesmo elemento. Na matriz  $\mathbf{H}$  isso é resolvido de forma relativamente simples, aplicando-se a consideração de corpo rígido. Assumindo um deslocamento de corpo rígido unitário na direção de um dos eixo do sistema de coordenadas cartesianas, as forças de superfície devem ser zero:

$$\mathbf{H}\mathbf{I}^q = 0 \quad (4.50)$$

sendo  $\mathbf{I}$  um vetor de deslocamentos unitários na direção  $q$  e zero nas demais. Então pode-se ter

$$\mathbf{H}^{ii} = -\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad (4.51)$$

o qual resulta na diagonal da matriz  $\mathbf{H}$ . Em (4.51) os índices não implicam em soma.

O tratamento da singularidade da matriz  $\mathbf{G}$  é mais complexo. Na integração observa-se que o raio apresenta uma parte singular e uma parte não singular, sendo que no primeiro caso usa-se Gauss logarítmico e no segundo usa-se quadratura de Gauss padrão. O desmembramento do raio em parte singular e não singular é mostrada a seguir. A solução fundamental de deslocamentos dada por (4.9) é singular quando  $r$  tende a zero, sendo  $r$  dado por

$$r = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}. \quad (4.52)$$

Os pontos de integração (pontos de Gauss)  $x$  e  $y$  sobre o elemento são dados por

$$x = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 \quad (4.53)$$

$$y = y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 \quad (4.54)$$

sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  os nós do elemento.

Substituindo as funções de forma (4.34) em (4.53) e (4.54) resulta em

$$x = \frac{1}{2} \xi^2 x_1 - \frac{1}{2} \xi x_1 + x_2 - \xi^2 x_2 + \frac{1}{2} \xi^2 x_3 + \frac{1}{2} \xi x_3. \quad (4.55)$$

Colocando os termos comuns em evidência, a equação (4.55) pode ser reescrita para os pontos fonte e campo:

$$x = \frac{\xi^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2} (x_3 - x_1) + x_2 \quad (4.56)$$

$$x^* = \frac{\xi_0^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi_0}{2} (x_3 - x_1) + x_2. \quad (4.57)$$

O raio  $r$ , dado por  $x - x^*$ , é então calculado:

$$x - x^* = \left[ \frac{\xi^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2} (x_3 - x_1) + x_2 \right] - \left[ \frac{\xi_0^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi_0}{2} (x_3 - x_1) + x_2 \right]$$

$$x - x^* = \frac{\xi^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) - \frac{\xi_0^2}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\xi}{2} (x_3 - x_1) - \frac{\xi_0}{2} (x_3 - x_1) + x_2 - x_2$$

colocando em evidencia e usando fatoração, chega-se a:

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0) [ (\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1 ] \quad (4.58)$$

Usando o elemento quadrático padrão, que tem o nó central exatamente no meio do elemento, tem se

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{l}{2} \\ x_3 &= x_1 + l \end{aligned} \quad (4.59)$$

conforme pode ser visto na figura 4.5.

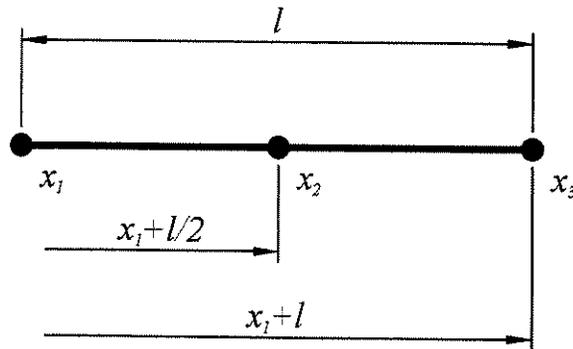


Figura 4.5: Integração quando o ponto fonte pertence ao elemento.

Reescrevendo (4.58) em termos de  $x_1$

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0) \left[ (\xi + \xi_0) \left( x_1 - 2x_1 - 2\frac{l}{2} + x_1 + l \right) + x_1 + l - x_1 \right] \quad (4.60)$$

obtem-se

$$x - x^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)l. \quad (4.61)$$

Assim, se o elemento quadrático for o padrão, tem-se

$$(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1 = l_x, \quad (4.62)$$

ou seja, independentemente das coordenadas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e de qual seja o ponto fonte, esta parte é sempre igual ao comprimento do elemento na direção  $x$ . Da mesma forma,

$$y - y^* = \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)[(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1] \quad (4.63)$$

com

$$(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1 = l_y \quad (4.64)$$

para elementos quadráticos padrões.

Voltando à equação de  $r$  dada por (4.52),  $\ln(r)$  em (4.9) pode ser deduzido conforme segue

$$\begin{aligned} \ln(r) &= \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}l_x\right)^2 + \left(\frac{\xi - \xi_0}{2}l_y\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 l_x^2 + \left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 l_y^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 (l_x^2 + l_y^2)} = \frac{\xi - \xi_0}{2} \underbrace{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}_{=l} = \underbrace{\frac{\xi - \xi_0}{2}}_{\text{parte singular}} \cdot \underbrace{l}_{\text{parte não singular}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Escrevendo (4.65) na forma geral

$$\ln(r) = \ln \sqrt{\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)^2 \left\{ [(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1]^2 + [(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1]^2 \right\}}$$

ou

$$\ln(r) = \ln\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) + \ln \sqrt{[(\xi + \xi_0)(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_3 - x_1]^2 + [(\xi + \xi_0)(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1]^2} \quad (4.66)$$

Na equação (4.66) a primeira parcela é a parte onde a singularidade deve ser tratada. A segunda possui valor constante e igual ao comprimento do elemento, conforme já demonstrado, para o elemento quadrático padrão adotado. Obviamente a segunda parcela nunca é singular, pois o comprimento do elemento é sempre maior que zero.

A integração logarítmica da parte singular é dada por

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i. \quad (4.67)$$

Uma vez que os limites da integral da parte singular é de -1 a 1 e na integração logarítmica é de 0 a 1, uma transformação de coordenadas se faz necessária.

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) d\xi \rightarrow \int_0^1 \ln(\eta) |J| d\eta \quad (4.68)$$

Conforme a localização do ponto fonte,  $\xi_0$ , recebe os seguintes valores:

$\xi_0 = -1$  quando o ponto fonte é o primeiro nó do elemento;

$\xi_0 = 0$  quando o ponto fonte é o segundo nó do elemento;

$\xi_0 = 1$  quando o ponto fonte é o terceiro nó do elemento.

Quando o ponto fonte é o primeiro nó

$$\eta = \frac{\xi - \xi_0}{2} = \frac{\xi - (-1)}{2} = \frac{\xi + 1}{2} \rightarrow \xi = 2\eta - 1 \quad (4.69)$$

e

$$\eta = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}, \quad \partial \eta = \frac{\partial \xi}{2} \rightarrow \partial \xi = 2 \partial \eta \rightarrow J = 2. \quad (4.70)$$

Quando o ponto fonte é o segundo nó, a integral é dividida em duas partes, uma do primeiro ao segundo nó e outra do segundo ao terceiro

$$GW = \int_{nó1}^{nó3} N u^* |J| \partial \xi + \int_{nó1}^{nó2} N u^* |J| \partial \xi + \int_{nó2}^{nó3} N u^* |J| \partial \xi \quad (4.71)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\xi \rightarrow \partial \eta_1 = -\partial \xi \rightarrow J_1 = -1 \\ \eta_2 &= 0 \\ \eta_3 &= \xi \rightarrow \partial \eta_3 = \partial \xi \rightarrow J_3 = 1. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Finalmente, quando o ponto de colocação é o terceiro nó,

$$\eta = \frac{\xi - 1}{2} = \xi = 2\eta + 1 \quad (4.73)$$

e

$$\eta = \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}, \quad \partial \eta = \frac{\partial \xi}{2} \rightarrow \partial \xi = 2 \partial \eta \rightarrow J = 2. \quad (4.74)$$

## 4.6 Formulação de sub-regiões

A análise estrutural pelo método dos elementos de contorno algumas vezes requer que o domínio seja dividido/particionado em mais de uma região. Isso pode ocorrer devido a presença de trincas na estrutura, ou devido a existência de diferentes materiais no domínio, como na análise de interface de chapas laminadas. A derivação da formulação de multidomínio ou sub-regiões é uma extensão direta dos procedimentos de elementos de contorno descritas nas seções anteriores (Sollero, 1994).

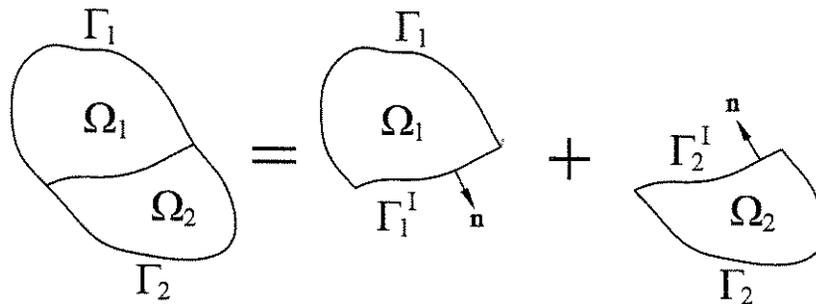


Figura 4.6: Divisão de um domínio em duas sub-regiões

Considere por simplicidade que o corpo é particionado em duas sub-regiões  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (os sobrescritos indicam a sub-região e não implicam em soma) separados por uma interface  $I$  como mostrado na figura 4.6. Os deslocamentos  $\mathbf{u}^I$  e as forças de superfície  $\mathbf{t}^I$  no contorno  $\Gamma^I$  de cada subdomínio devem satisfazer a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio das forças de superfície que podem ser expressas como

$$\mathbf{u}_1^I(x) = \mathbf{u}_2^I(x) \equiv \mathbf{u}^I \quad (4.75)$$

e

$$\mathbf{t}_1^I(x) = -\mathbf{t}_2^I(x) \equiv \mathbf{t}^I \quad (4.76)$$

onde  $\mathbf{u}^I$  e  $\mathbf{t}^I$  são somente incógnitas ao longo da interface  $I$ .

O sistema de equações (4.30) quando aplicado à sub-região  $I$  resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

e quando aplicado à sub-região 2, resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^I \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

Combinando as equações (4.77) e (4.78) o seguinte sistema pode ser obtido

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^I \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

impondo a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças de superfícies, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^I & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_2^I & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^I \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.80)$$

Sendo desconhecidos os deslocamentos e as forças de superfície na interface, o sistema resultante pode ser reordenado conforme mostrado a seguir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & -\mathbf{G}_1^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^I & \mathbf{G}_2^I & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}^I \\ \mathbf{t}^I \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.81)$$

Finalmente após a substituição das condições de contorno, o sistema resultante pode ser reordenado como dado.

$$\overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{G}} \overline{\mathbf{t}} \quad (4.82)$$

Esse sistema de equações é similar ao sistema da equação (4.30), com exceção de que as matrizes  $\overline{\mathbf{H}}$  e  $\overline{\mathbf{G}}$  agora apresentam blocos de zeros.

Convém salientar que, embora a formulação de sub-regiões seja bem simples, a implementação é bem complexa. Uma rotina de formatação de prévia de dados muito bem planejada se faz necessária, sem a qual a implementação pode se tornar quase impossível.

# Capítulo 5

## Resultados numéricos e discussões

### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos da aplicação da formulação desenvolvida nos capítulos anteriores. O objetivo dos exemplos apresentados é demonstrar a aplicabilidade do método em problemas reais e assegurar que seus resultados estão em boa concordância com resultados da literatura. O primeiro problema trata de uma trinca central na interface de uma chapa bimaterial infinita, o qual tem solução analítica. Dessa forma os resultados obtidos pela solução analítica podem ser usados para comparação com aqueles obtidos numericamente. O segundo exemplo traz o problema de uma chapa de largura finita, sujeita a tensões normais uniaxiais aplicadas remotamente, o qual também tem resultados mostrados na literatura, que podem ser usados para verificar a veracidade dos dados numéricos. Embora o problema seja de trinca interfacial, neste segundo exemplo os materiais considerados são os mesmos. Por último, é analisada uma chapa de dimensões finitas constituída de dois materiais com trinca interfacial. Os resultados para esse problema são comparados com resultados numéricos obtidos por outros autores e mostram boa concordância. Em todos os exemplos numéricos os resultados são mostrados para diferentes malhas e pode ser constatada a pouca dependência dos resultados em relação à malha utilizada.

Nas análises numéricas realizadas investigou-se o efeito das mudanças nas relações entre os módulos dos materiais na precisão dos resultados obtidos. Também foi investigado o efeito do

comprimento  $l$  dos três elementos da ponta da trinca com relação ao tamanho  $a$  da trinca (figura 5.1).

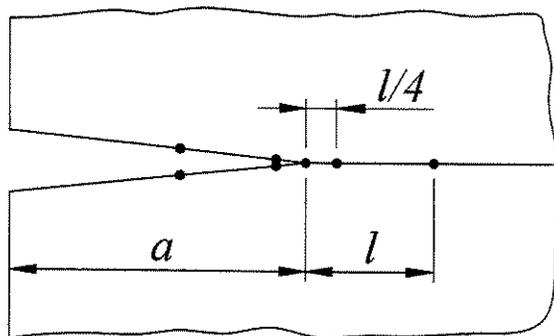


Figura 5.1: Comprimento dos elementos em relação ao comprimento da trinca.

## 5.2 Chapa bimaterial infinita com trinca interfacial carregada remotamente em modo misto

A figura 5.2 mostra o problema físico considerado: uma trinca central, de comprimento  $2a$ , na interface de uma chapa bimaterial infinita. A chapa está sujeita a tensões normais aplicadas remotamente. Na análise numérica, entretanto, foi considerada uma chapa finita, porém, assumiu-se que uma relação entre o comprimento da trinca e as dimensões da chapa de 20 vezes seria suficiente para que as condições de carregamento remoto pudessem ser consideradas. Também foi assumido estado plano de deformação.

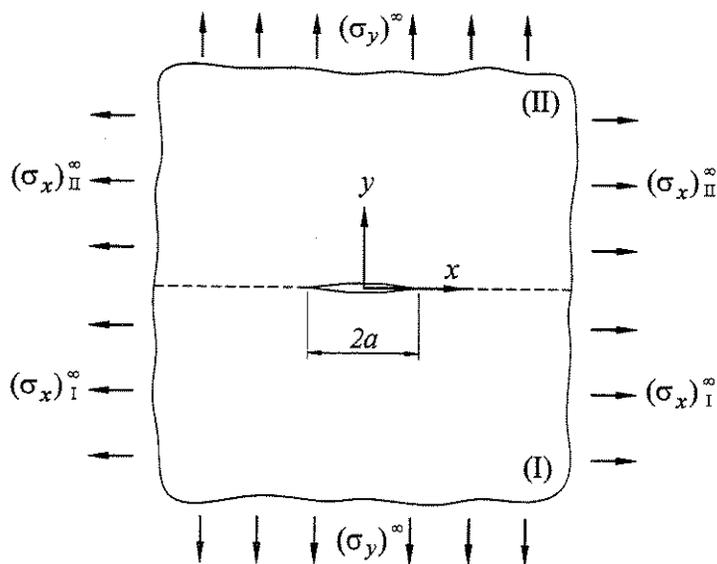


Figura 5.2: Chapa bimaterial infinita com trinca na interface sujeita a tensões normais.

Para garantir a condição de continuidade das deformações  $\varepsilon_{xx}$  na interface do material a tensão  $(\sigma_x)_{II}^\infty$  aplicada foi considerada como

$$(\sigma_x)_{II}^\infty = \frac{E_2}{E_1}(\sigma_x)_I^\infty + \left[ \nu_2 - \frac{E_2}{E_1}\nu_1 \right] (\sigma_y)^\infty \quad (5.1)$$

sendo  $E_1$  e  $E_2$  os módulos de elasticidade dos materiais I e II respectivamente.

Devido a simetria somente metade do problema físico foi modelado. A figura 5.3.a mostra a malha de elementos de contorno empregada, bem como as condições de contorno aplicadas. A discretização adotada nos casos em que a relação  $l/a$ , entre o comprimento  $l$  do elemento e o comprimento  $a$  da trinca, varia de 0,06 a 0,15 foram usados 6 elementos na interface, sendo o comprimento dos dois primeiros elementos mais próximos da ponta da trinca igual a  $0,15a$ . O comprimento adotado para os demais elementos da interface foi sempre o dobro do elemento anterior, a partir do segundo elemento da ponta da trinca. Essa regra também foi utilizada na discretização das faces da trinca, onde foram usados 4 elementos. As linhas que formam a simetria foram discretizadas usando-se 4 elementos de comprimentos variáveis, sendo o menor próximo à ponta da trinca. Nos casos em que a relação  $l/a$  era 0,04 foram aplicadas as mesmas regras descritas acima, usando-se 6 elementos na interface, 5 elementos nas faces da trinca e 5 elementos nas linhas de simetria. Da mesma forma, onde a relação  $l/a$  era 0,02, foram usados 7 elementos na interface, 6 elementos nas faces da trinca e 5 elementos nas linhas de simetria.

Foram analisadas quatro diferentes relações entre  $\mu_2$  e  $\mu_1$  e para cada uma dessas relações o comprimento do elemento da ponta da trinca foi variado de  $0,02a$  a  $0,15a$ . A tabela 5.1 apresenta os valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão  $(K_0/\bar{K})_I$ , sendo  $\bar{K}$  dado por

$$\bar{K} = (\sigma_y)^\infty \sqrt{\pi a}, \quad (5.2)$$

obtidos da análise do método usando a equação para forças de superfície conforme

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\pi l}}{\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{(\bar{t}_1^A)^2 + (\bar{t}_1^B)^2}. \quad (5.3)$$

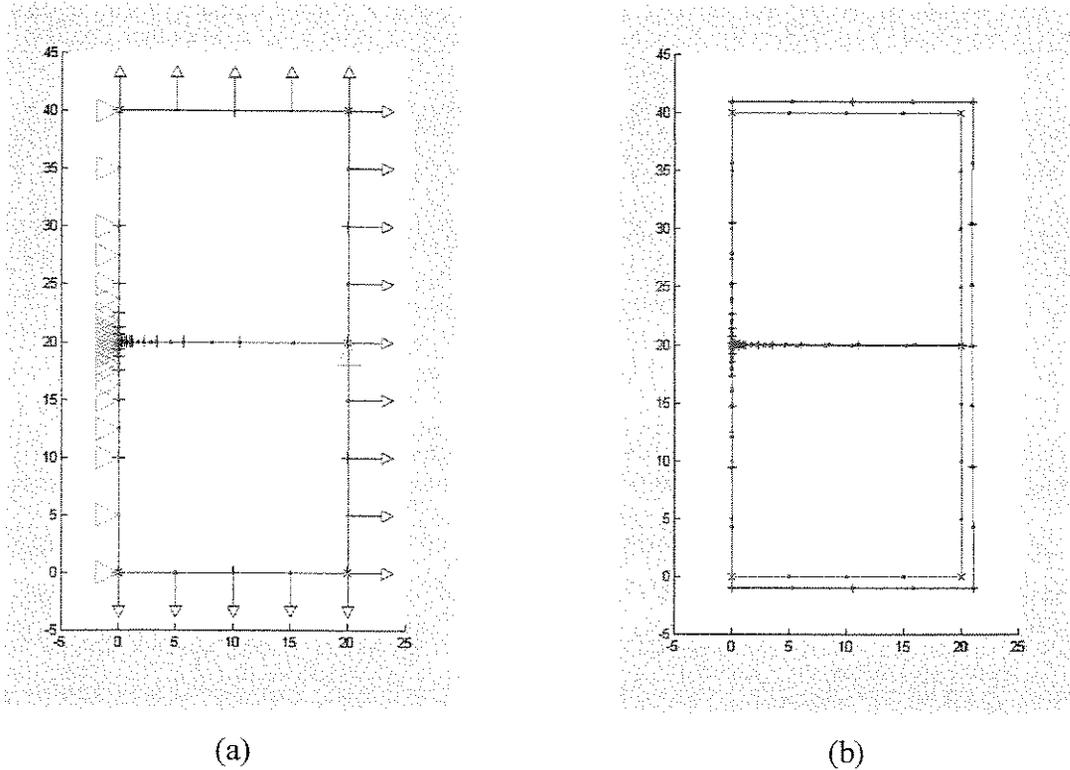


Figura 5.3: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas; (b) Malha deformada.

A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos neste trabalho, para o problema proposto neste exemplo, juntamente com outros resultados encontrados na literatura. Observa-se na tabela 5.1 que, para uma mesma discretização os menores erros são obtidos com  $l$  entre  $0,06a$  e  $0,08a$ . Blandford *et al.* (1981) recomenda, para um erro menor que 3 por cento, que a relação entre o comprimento do elemento da ponta da trinca e o comprimento da trinca seja  $0,05 \leq l/a \leq 0,25$ . Já Martínez e Domínguez (1984) sugerem um valor para  $l/a$  em torno de  $0,1$ . Em qualquer dos dois casos observa-se que os dados apresentados estão de acordo com aqueles apresentados na literatura. Observa-se porém que, conforme aumenta  $\mu_2/\mu_1$ , para um mesmo erro, é necessário um  $l/a$  menor.

A solução analítica  $(K_0 / \bar{K})_{analítico}$  foi dada por Rice e Sih (1965). Tan e Gao (1990) apresentaram resultados numéricos  $(K_0 / \bar{K})_T$  usando elementos singulares de ponto a um quarto

### Fatores de intensidade de tensão $\mu_2/\mu_1 = 1$

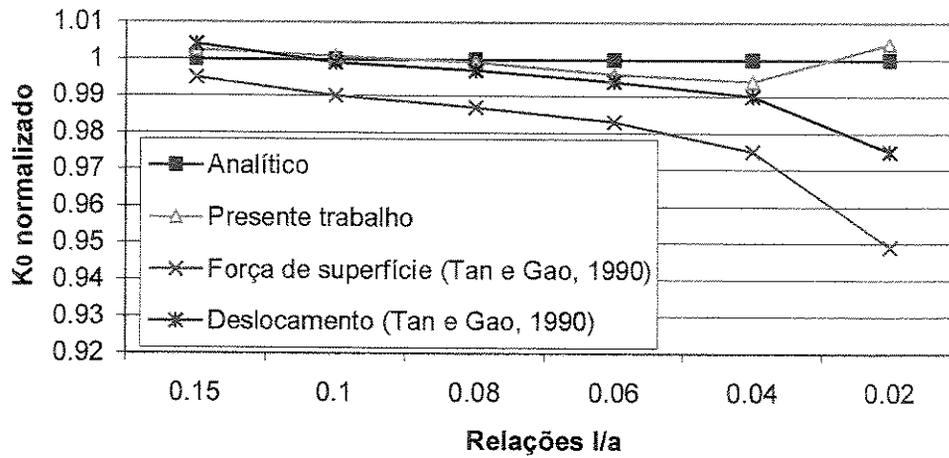


Figura 5.4: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações  $l/a$  para relação entre módulos de elasticidade  $\mu_2 / \mu_1 = 1$ .

### Fatores de intensidade de tensão $\mu_2/\mu_1 = 5$

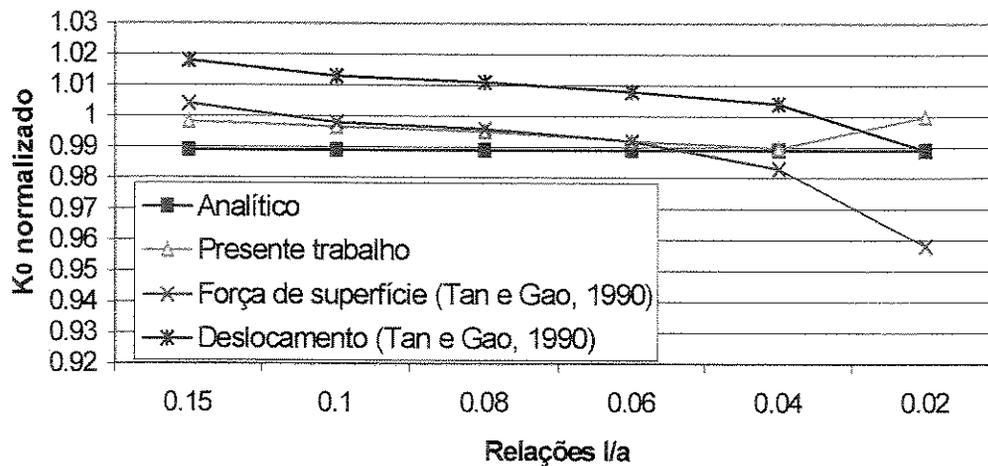


Figura 5.5: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações  $l/a$  para relação entre módulos de elasticidade  $\mu_2 / \mu_1 = 5$ .

para forças de superfície e  $(K_0/\bar{K})_D$  usando elementos singulares de ponto a um quarto para deslocamentos. A coluna ERRO corresponde à relação entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados analíticos.  $ERRO_T$  correspondem aos erros entre os resultados obtidos por Tan e Gao (1990) usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície e os resultados analíticos. Por fim,  $ERRO_D$  correspondem aos erros entre os resultados obtidos por Tan e Gao (1990) usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de deslocamentos e os resultados analíticos.

Tabela 5.1: Fatores de intensidade de tensão normalizados para uma trinca interfacial em uma chapa bimaterial infinita sujeita a carregamento remoto.

$\frac{\mu_2}{\mu_1}$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_{analítico}$	$\frac{l}{a}$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)$	ERRO $\Delta\%$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_T$	$ERRO_T$ $\Delta\%$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_D$	$ERRO_D$ $\Delta\%$
1	1,000	0,15	1,0025	0,25	0,995	-0,5	1,004	0,4
		0,10	1,0007	0,07	0,990	-1,0	0,999	-0,1
		0,08	0,9992	-0,08	0,987	-1,3	0,997	-0,3
		0,06	0,9960	-0,40	0,983	-1,7	0,994	-0,6
		0,04	0,9942	-0,59	0,975	-2,5	0,990	-1,0
		0,02	1,0044	0,44	0,949	-5,1	0,975	-2,5
5	0,989	0,15	0,9981	0,92	1,004	1,5	1,018	2,9
		0,10	0,9965	0,76	0,998	0,9	1,013	2,4
		0,08	0,9950	0,61	0,996	0,7	1,011	2,2
		0,06	0,9919	0,30	0,992	0,2	1,008	1,9
		0,04	0,9897	0,07	0,983	-0,6	1,004	1,5
		0,02	0,9999	1,10	0,958	-3,2	0,989	0
20	0,980	0,15	0,9891	0,92	1,004	2,5	1,022	4,3
		0,10	0,9876	0,77	0,999	2,0	1,017	3,8
		0,08	0,9862	0,63	0,997	1,7	1,015	3,6
		0,06	0,9832	0,33	0,993	1,3	1,012	3,3
		0,04	0,9806	0,06	0,979	-0,1	1,008	2,9
		0,02	0,9906	1,09	0,961	-2,0	0,992	1,2
100	0,976	0,15	0,9838	0,80	1,006	3,1	1,024	4,9
		0,10	0,9823	0,65	1,001	2,6	1,017	4,2
		0,08	0,9810	0,51	0,999	2,3	1,015	4,0
		0,06	0,9781	0,21	0,995	1,9	1,012	3,7
		0,04	0,9754	-0,07	0,987	1,2	1,006	3,0
		0,02	0,9853	0,99	0,963	-1,3	0,985	0,9

A tendência dos resultados pode ser vista nos gráficos mostrados nas figuras 5.4 a 5.7 plotados a partir dos dados apresentados na tabela 5.1. Cada uma das figuras apresenta os dados referentes a uma relação entre os modos de elasticidade.

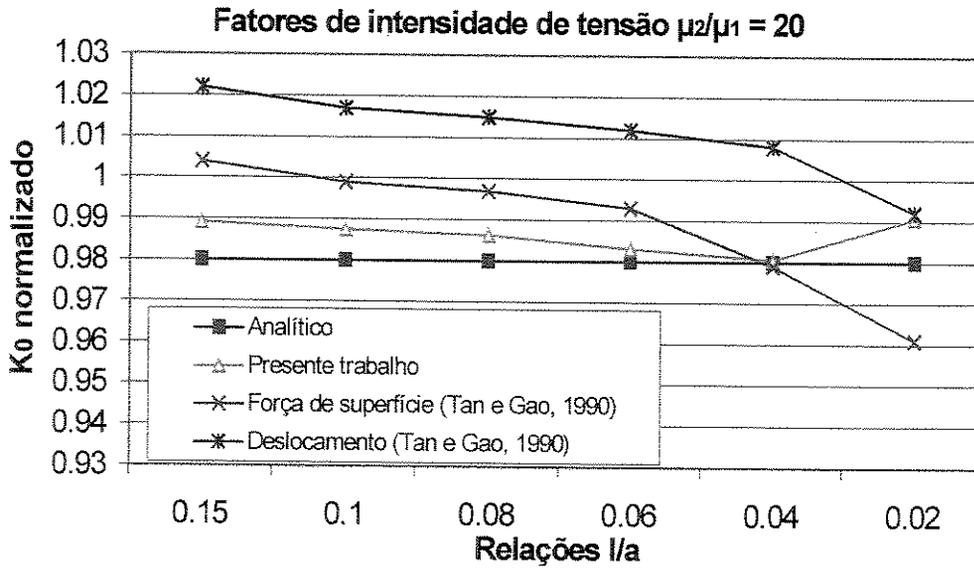


Figura 5.6: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações  $l/a$  para relação entre módulos de elasticidade  $\mu_2 / \mu_1 = 20$ .

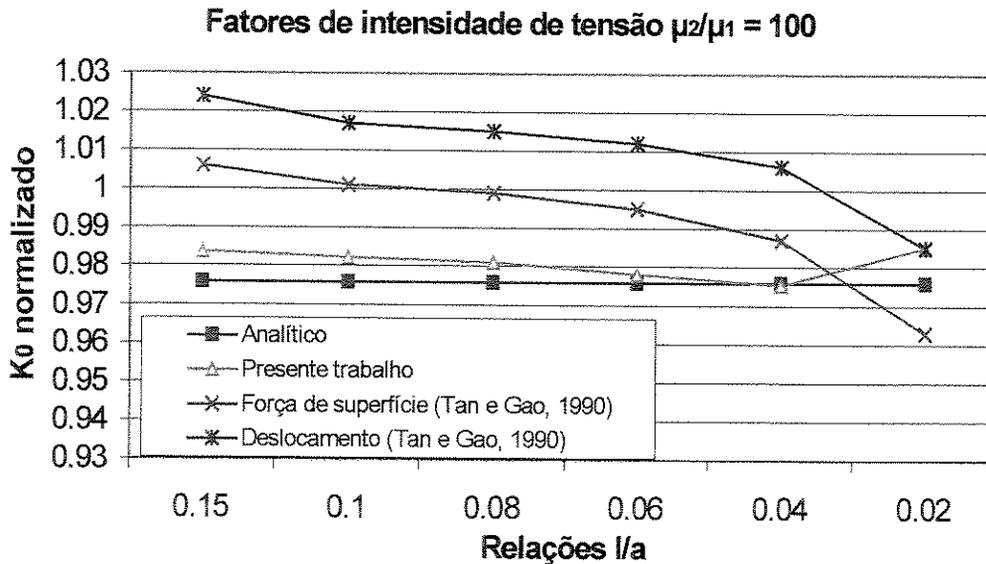


Figura 5.7: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações  $l/a$  para relação entre módulos de elasticidade  $\mu_2 / \mu_1 = 100$ .

Pode-se verificar que tanto nos casos em que as relações entre as propriedades dos materiais foram variadas quanto naqueles em que a relação entre comprimentos do elemento e da trinca foram variadas, em geral, o erro está abaixo de 1% em relação ao valor analítico. Também pode ser notado que em todos os casos os resultados obtidos neste trabalho apresentam erros

menores que os apresentados por Tan e Gao (1990). Talvez o fato de terem usado precisão simples e o presente trabalho usar precisão dupla explique esses resultados melhores.

### 5.3 Chapa homogênea de largura finita com trinca central

Para se verificar a concordância dos resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos por Isida (1962) através de uma expansão em série de potências com 36 termos, foi modelado uma chapa homogênea de largura finita e comprimento infinito contendo uma trinca central.

O problema físico de uma trinca central, de comprimento  $2a$ , na interface de uma chapa de largura finita é mostrado na figura 5.8. A tira está sujeita a tensões normais uniaxiais aplicadas remotamente. Assumiu-se que, se o comprimento de uma chapa for 4 vezes maior que sua largura, pode ser considerado infinito. Foi considerado estado plano de deformação.

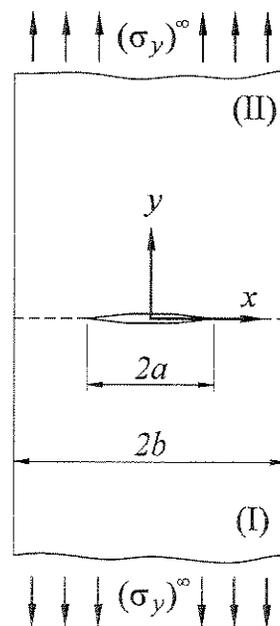


Figura 5.8: Chapa homogênea de largura finita com trinca na interface sujeita a tensões normais uniaxiais.

Devido a simetria somente metade do problema físico foi modelado. A figura 5.9 mostra a malha de elementos de contorno empregada e também as condições de contorno e simetria

consideradas. A tabela 5.2 traz o número de elementos usados na interface e nas faces da trinca em cada uma das relações  $a/b$  verificadas. O restante da malha não foi alterado.

Tabela 5.2: Discretização adotada nas linhas da interface.

Relação $a/b$	Nº de elementos na interface	Nº de elementos na face da trinca
0,1	6	5
0,2	5	4
0,3		
0,4		
0,5	3	4
0,6		
0,7	2	4
0,8		

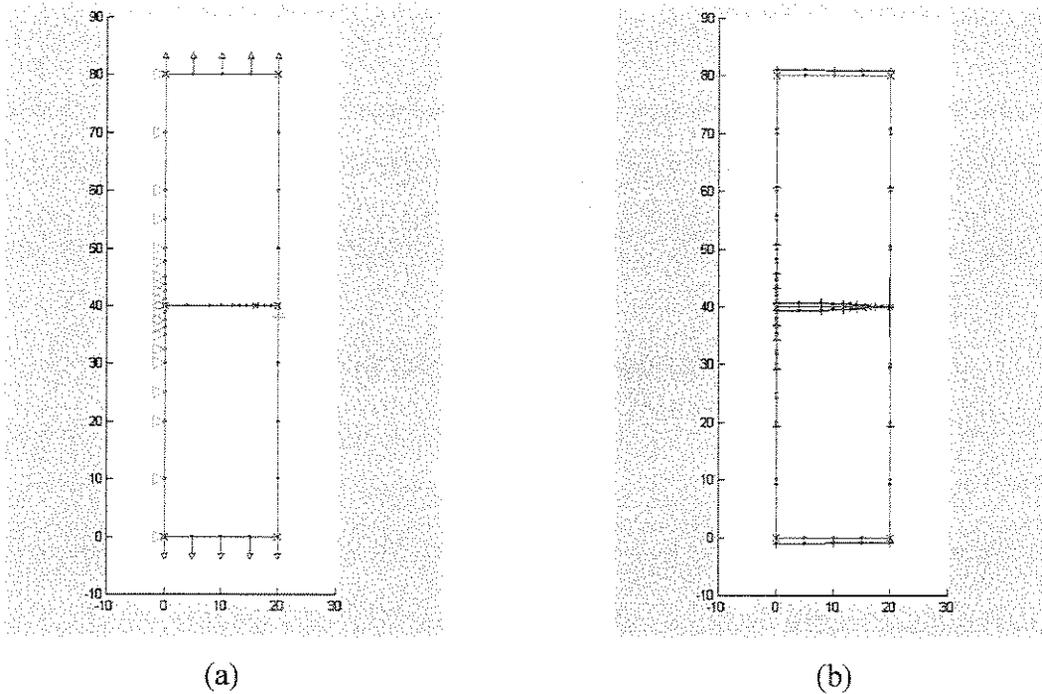


Figura 5.9: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas; (b) Malha deformada.

A tabela 5.3 apresenta os valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão  $(K_0 / \bar{K})_l$ , sendo  $\bar{K}$  dado por

$$\bar{K}_l = \sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right) \quad (5.4)$$

conforme expansão em série de potências de  $(a/b)^2$  usando 36 termos, conforme apresentada por Isida (1962). Verifica-se que os resultados obtidos apresentam, em sua maioria, um erro menor que 1%, exceto para as relações  $a/b = 0,7$  e  $a/b = 0,8$ . O aumento do erro neste caso é devido a diminuição das relações entre a largura e o comprimento da chapa, e o comprimento da trinca.

Tabela 5.3: Fatores de intensidade de tensão para uma trinca interfacial em uma chapa homogênea de largura finita, sujeita a carregamento uniaxial remoto.

a/b	$K_0$	$K_{Isida}$	$\left(\frac{K_0}{K}\right)$	Erro Δ%
0,1	25,4321	25,2167	1,0085	0,8542
0,2	36,6269	36,3211	1,0084	0,8418
0,3	46,2735	45,9212	1,0077	0,7673
0,4	55,9213	55,6171	1,0055	0,5471
0,5	66,6209	66,5144	1,0016	0,1601
0,6	79,6439	80,0221	0,9953	-0,4726
0,7	96,9942	98,6962	0,9828	-1,7244
0,8	124,8905	128,7510	0,9700	-2,9984

No gráfico apresentado na figura 5.10, obtido a partir da tabela 5.3, pode se observar a tendência dos resultados.

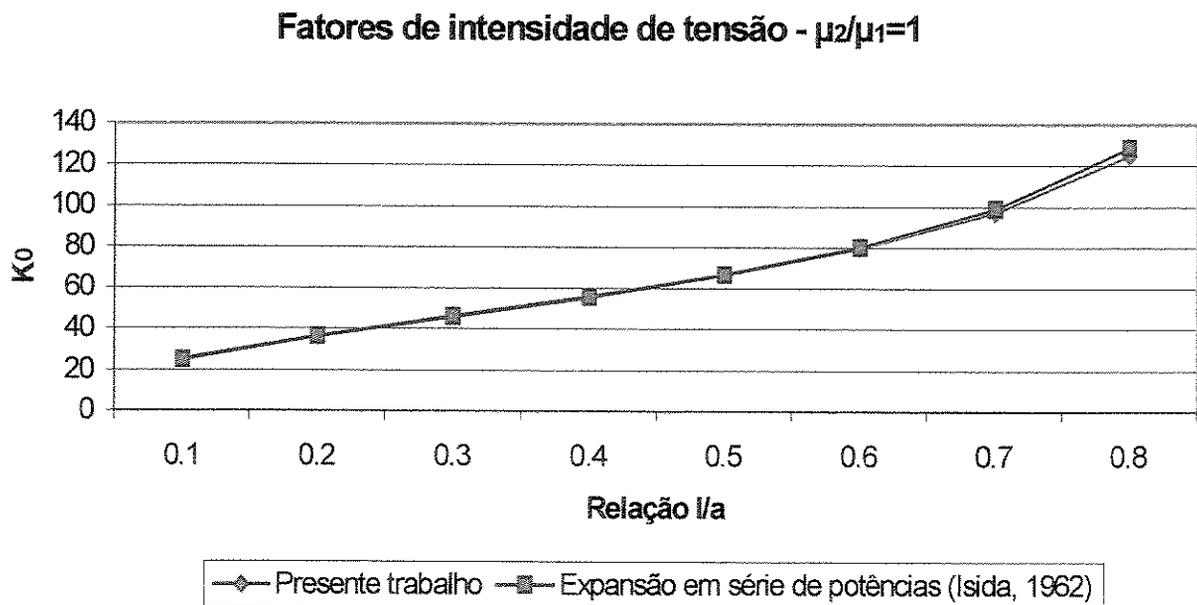


Figura 5.10: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão em função das relações  $l/a$  para material homogêneo.

## 5.4 Chapa bimaterial finita com trinca interfacial central

O terceiro problema analisado é o de uma chapa bimaterial de dimensões finitas contendo uma trinca central interfacial, de comprimento  $2a$ , sujeita a tensões uniaxiais remotas. Os materiais da chapa analisada neste exemplo são considerados dissimilares, com relações  $\mu_1/\mu_2$  variando de 1 a 100. Consideraram-se os coeficientes de Poisson  $\nu_1=\nu_2=0,3$ . Estudou-se também os valores dos fatores de intensidade de tensão em função do tamanho da trinca. A figura 5.11 mostra o problema físico, no qual a geometria considerada foi  $h/b = 1$  para  $a/b$  variando de 0,1 a 0,4. No modelo numérico considerou-se  $b = 20$ .

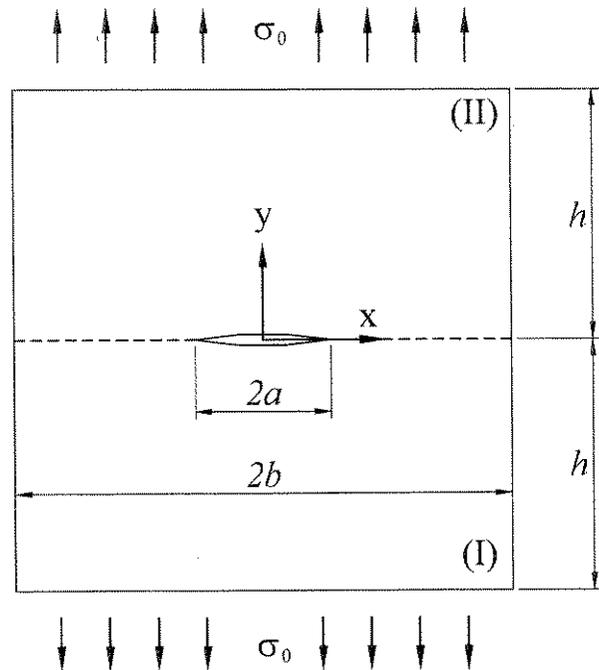


Figura 5.11: Chapa bimaterial de dimensões finitas com trinca na interface sujeita a tensões normais uniaxiais.

Devido a simetria somente metade do problema físico foi modelado. A figura 5.12.a mostra a malha de elementos de contorno empregada, bem como as condições de contorno aplicadas.

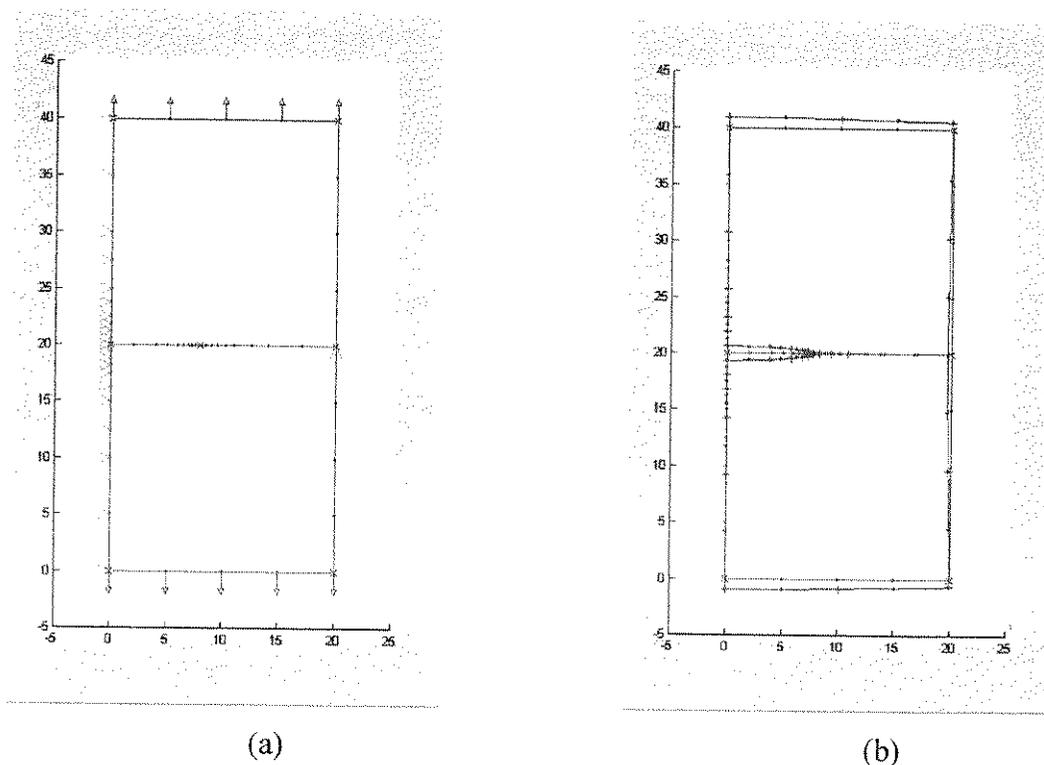


Figura 5.12: (a) Discretização e condições de contorno aplicadas. (b) Malha deformada.

Na discretização adotada no caso em que a relação  $l/b$ , entre o comprimento  $l$  do elemento e a largura  $b$  da chapa era  $0,01$  foram usados 6 elementos na interface e 5 elementos nas faces da trinca. Nos demais casos em que  $l/b$  foi variado de  $0,2$  a  $0,4$  foram usados 5 elementos na interface e 4 nas faces da trinca.

Na tabela 5.4, a coluna  $(K_0 / \bar{K})$  traz os resultados obtidos neste trabalho juntamente com os obtidos por Tan e Gao (1990) usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície  $(K_0 / \bar{K})_T$  e elementos de ponto a um quarto com singularidade de deslocamentos  $(K_0 / \bar{K})_D$ . Neste caso não foi encontrado na literatura consultada solução analítica ou por expansão em série, motivo pelo qual julgou-se melhor não calcular erros relativos, uma vez que os dados disponíveis para comparação são, também, numéricos. Todavia observa-se que os resultados obtidos neste trabalho estão bastante próximos daqueles obtidos por Tan e Gao (1990).

Tabela 5.4: Fatores de intensidade de tensão normalizados para uma trinca central em uma chapa bimaterial de largura finita sob carregamento uniaxial.

$\frac{a}{b}$	$\frac{\mu_2}{\mu_1}$	$\frac{l}{a}$	$\left(\frac{K_0}{\bar{K}}\right)_1$	Tan e Gao (1990)	
				Com elemento de ponto a um quarto com singularidade em força de superfície	Com elemento de ponto a um quarto com singularidade em deslocamento
0.1	1	0.10	1.0229	1.019	1.023
		0.06	1.0197	1.012	1.019
	10	0.10	0.9804	1.013	1.019
		0.06	0.9778	1.006	1.015
	100	0.10	0.9464	0.991	0.976
		0.06	0.9440	0.984	0.991
0.2	1	0.10	1.0646	1.053	1.052
		0.06	1.0617	1.046	1.048
	10	0.10	1.0162	1.039	1.036
		0.06	1.0138	1.033	1.032
	100	0.10	0.9786	1.014	1.013
		0.06	0.9765	1.007	1.009
0.3	1	0.10	1.1329	1.102	1.100
		0.06	1.1313	1.102	1.095
	10	0.10	1.0741	1.076	1.071
		0.06	1.0730	1.070	1.067
	100	0.10	1.0303	1.046	1.042
		0.06	1.0294	1.039	1.038
0.4	1	0.10	1.2258	1.173	1.168
		0.06	1.2245	1.166	1.163
	10	0.10	1.1528	1.130	1.123
		0.06	1.1519	1.123	1.118
	100	0.10	1.1006	1.092	1.088
		0.06	1.1000	1.085	1.083

## Capítulo 6

# Conclusões e propostas para trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um procedimento para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão para trincas interfaciais em corpos bimateriais compostos por diferentes materiais isotrópicos. O procedimento baseia-se no método dos elementos de contorno e faz uso da técnica de sub-regiões para modelar cada um dos diferentes materiais que compõem o corpo.

Os fatores de intensidade de tensão foram calculados a partir dos valores de forças de superfície nodais obtidos através de elementos de ponto a um quarto com singularidade de forças de superfície, por ser um elemento que descreve o comportamento  $1/\sqrt{r}$  verificado na ponta da trinca. Dessa forma a superfície da trinca pode ser modelada com uma malha relativamente grossa. Os estudos de convergência de malha mostram que os resultados são pouco dependentes da discretização, porém verificou-se que uma boa relação entre o comprimento de um elemento e o comprimento dos elementos adjacentes está entre 1 e 2.

No caso da modelagem de chapas infinitas pode ser mostrado que modelando-se uma chapa cujas dimensões são cerca de 20 vezes o comprimento da trinca, consegue-se uma boa concordância com os resultados analíticos para chapa infinitas apresentados na literatura.

Em problemas sem restrições de deslocamentos há a necessidade de restringir os deslocamentos em alguns nós para se evitar movimentos de corpo rígido do modelo. Deve ser tomado um cuidado especial para que estas restrições não influenciem os resultados obtidos, procurando aplicá-las de acordo com as condições de simetria dos problemas.

Tanto o cálculo do fator de intensidade de tensão em modo I como em modo misto mostraram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura. De acordo com os resultados mostrados neste trabalho pode se concluir que a abordagem utilizada é adequada para o tratamento de problemas de meios bimateriais contendo trincas interfaciais, podendo os materiais serem iguais ou mesmo com uma diferença bastante acentuada entre as constantes elásticas dos materiais.

Pode se dizer que a abordagem adotada apresenta-se como bastante vantajosa no que diz respeito a tempo de processamento e memória requerida, embora esses fatores não fossem tão importantes nos problemas aqui tratados devido a sua simplicidade, devido a dois fatos: o método dos elementos de contorno necessita de discretização apenas no contorno e na interface dos materiais e bons resultados podem ser obtidos mesmo quando uma malha bastante grosseira for utilizada, conforme mostrado no presente trabalho.

## 6.2 Propostas para trabalho futuros

Como propostas para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa sugere-se:

- estender a aplicação do programa para materiais ortotrópicos e anisotrópicos pela inclusão de soluções fundamentais que contemplem esses casos;
- estender a aplicação do programa para estudos de propagação de trincas interfaciais;
- estender a aplicação do programa para problemas de dinâmica através do uso de formulações de elementos de contorno para elastodinâmica;
- estender a aplicação do programa para problemas tridimensionais;
- implementar condições de compatibilidade na interface que permitam a modelagem representar a presença de adesivos na interface.

O programa pode ter suas capacidades estendidas mediante:

- implementação de rotina de formatação de dados que contemple geometrias curvas;
- implementação de um esquema de discretização variável incremental mais eficiente (baseado numa progressão, por exemplo);
- conversão do código para programação orientada a objeto.

# Referências

- Agarwal, B. D., Broutman, L. J. (1990) "*Analysis and performance of fiber composites*", 2ª edição, A Wiley-Interscience publication, New York.
- Aliabadi, M. H. (1997) "*A new generation of boundary element methods in fracture mechanics*", International Journal of Fracture n° 86 pg. 91-125.
- Aliabadi, M. H.; Rooke, D. P. (1991) "Numerical fracture mechanics", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Allan, G. G. , (1986) "*Modification of fiber surfaces*", Composites Systems From Natural And Synthetic Polymers – Material Science Monographs n° 36 pg. 47-58.
- American Society for Testing Materials, publication D5528-94, ASTM, Pa, 1994.
- Banerjee, P. K. (1994) "*The boundary element methods in engineering*", McGraw-Hill Book Company, England.
- Beldica, C.; Botsis, J. (1996) "*Experimental and numerical studies in mode I composites part II – numerical results*", International Journal of Fracture n° 82 pg. 175-192.
- Blandford, G. E. (1981) "*Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method*", International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 17 pg. 387-404.

- Brebbia, C. A.; Domínguez, J. (1989) *“Boundary elements – An introductory course”*, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Cruse, T. A. (1998) *“Boundary element analysis in computational fracture mechanics”*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Duga, J. J. *et al.* (1983) *“The economic effects of fracture in the United States”*, NBS Special Publication 647-2, United States Department of Commerce, Washington, DC, Março de 1983.
- Hamoush, S. A.; Ahmad, S. H. (1989) “Mode I and mode II stress intensity factors for interfacial cracks in bimaterial media”, *Engineering Fracture Mechanics* vol. 33 n° 3 pg. 421-427.
- He, W. J.; Bolander Jr., J. E.; Lin, D. S.; Ding, H. J. (1994) *“A boundary element for crack analysis at a bimaterial interface”*, *Engineering Fracture Mechanics* vol. 49 n° 3 pg. 405-410.
- Hertzberg, R. W. (1996) *“Deformation and fracture mechanics of engineering materials”*, John Wiley & Sons Inc, New York.
- Hilgert, R. (1994) “Lightweight engineering for aerospace”, High Tech Report, Daimler Benz, Stuttgart, n° 4, pg. 48-57.
- Kane, J. A. (1994) *“Boundary element analysis in engineering continuum mechanics”*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kim, W. C., Dharan, K. H. (1989) *“A fracture control plan for composite structures”*, *Engineering Fracture Mechanics* vol. 34 n° 2 pg. 305-324.
- Martínez, J.; Domínguez, J. (1984) *“Short communication on the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations”*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 20 pg. 1941-1950.

- MIL-HDBK-17-1E (1997) US Department of Defense (DOD), US Federal Aviation Administration (FAA) “*Guidelines for Characterization of Structural Materials*” vol. 1 cap. 6 pg. 6.65.
- Murakami, Y. *et al.* (1987) “*Stress intensity factors handbook*”, Pergamon Press, Oxford.
- Nabarrete, A. (1998) “*Materiais compostos aplicados a componentes automotivos*”, Revista Pesquisa & Tecnologia – FEI, nº 17, pg. 3-10.
- Pan, E.; Amadei, B. (1999) “*Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimetals*”, Engineering Analysis with Boundary Elements nº 23 pg. 683–691.
- Paris, F.; Caño, J. C.; Varna, J. (1996) “*The fiber-matrix interface crack – a numerical analysis using boundary elements*”, International Journal of Fracture nº 82 pg. 11-29.
- Ricards, R. *et al.* (1996) “*Mode I, mode II and mixed mode I/II interlaminar fracture toughness of GFRP influenced by fiber surface treatment*”, Mechanics of Composite Materials, Vol. 32, nº 5, pg. 439-462.
- Rice, J. R. (1988) “*Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*”, Journal of Applied Mechanics vol. 55 pg. 98-103.
- Rice, J. R.; Sih, G. C. (1965) “*Plane problems of cracks in dissimilar media*”, Journal of Applied Mechanics nº 32 pg. 418-423.
- Selvadurai, A. P. S. (1996) “*On integral equation approaches to the mechanics of fibre-crack interaction*”, Engineering Analysis with Boundary Elements nº 17 pg. 287-294.
- Sih, G. C. (1987) “*Microstructure and damage dependence of advanced composite material behavior*”, Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms pg. 1-23.

- Smith, R. N. L. (1988) "*The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method*", Engineering Analysis, June 1988, vol. 5 n° 2 pg. 75-80.
- Sollero, P. (1994) "*Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method*", Ph. D. Thesis, Wessex Institute of Technology.
- Tan, C. L.; Gao, Y. L. (1990) "*Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method*", Engineering Fracture Mechanics vol. 36 n° 6 pg. 919-932.
- Tan, C. L.; Gao, Y. L. (1991) "*Axisymmetric boundary integral equation analysis of interface cracks between dissimilar materials*", Computational Mechanics n° 7 pg. 381-396.
- Williams, J. G. (1987) "*Fracture tests for mixed mode failure of composites laminates*", Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms pg. 61-70.
- Yuuki, R.; Xu, J. Q. (1994) "*Boundary element analysis of dissimilar materials and interface crack*", Computational Mechanics n° 14 pg. 116-127.
- Zhao, D.; Botsis, J. (1996) "*Experimental and numerical studies in mode I composites part I – experimental results*", International Journal of Fracture n° 82 pg. 153-174.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE