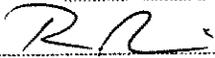


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REGISTRAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR Carlos d'Andrade
Souto E APROVADA P
COMISSÃO JULGADORA EM 10/ JULHO/2000


ORIENTADOR
PRESIDENTE DA BANCA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas
Rotativas através da Análise Modal Complexa

Autor : **Carlos d'Andrade Souto**
Orientador: **Prof. Dr. Milton Dias Júnior**

59/2000

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas Rotativas através da Análise Modal Complexa

**Autor : Carlos d'Andrade Souto
Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Júnior**

Curso: Engenharia Mecânica.
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 10 de julho de 2000
S.P. - Brasil

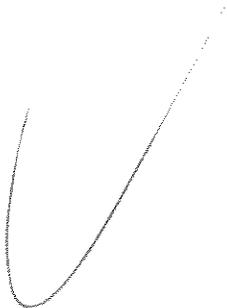
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

iii

UNICAMP

17/07/2000

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	50.899
V.	Es.
TOMBO BC/	43262
PROC.	16.278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	19/12/00
N.º CPD	



CM-00153448-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

So89e	<p>Souto, Carlos d'Andrade</p> <p>Estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da análise modal complexa / Carlos d'Andrade Souto.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.</p> <p>Orientador: Milton Dias Júnior</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Rotores - Dinâmica. 2. Análise modal. I. Dias Júnior, Milton. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
BIBLIOTECA DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DPM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas
Rotativas através da Análise Modal Complexa

Autor : Carlos d'Andrade Souto

Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Junior



Prof. Dr Robson Pederiva, Presidente
UNICAMP



Prof. Dr.Prof. Dr. João Antonio Pereira
FEIS - UNESP



Prof. Dr.Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini
FEM - UNICAMP

Campinas, 10 de Julho de 2000

Dedicatória

Dedico este trabalho a meu pai que sempre valorizou e incentivou a busca do conhecimento (in memoriam).

Agradecimentos

À minha mãe e minha irmã pelos inestimáveis apoio e estímulo.

Ao professor Milton Dias Júnior pela amizade, orientação e apoio nos momentos difíceis.

Aos professores Robson Pederiva e Kátia Lucchesi pela colaboração.

À Larisse por ter ajudado a tornar possível o começo desta caminhada.

A todos os amigos que tornaram a caminhada mais fácil.

Aos amigos do DPM e DMC pelo agradável convívio.

Ao CNPq pelo auxílio concedido em forma de bolsa.

Uma jornada de mil léguas começa com o primeiro passo.

Provérbio chinês

Resumo

SOUTO, Carlos d'Andrade, *Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas Rotativas através da Análise Modal Complexa*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000, 127p. Dissertação de Mestrado.

A aplicação dos conceitos da análise modal em máquinas rotativas apresenta grandes dificuldades de ordem prática devido às características dinâmicas, construtivas e operacionais específicas deste tipo de sistema. A formulação tradicional de análise modal, normalmente aplicada a estruturas estacionárias, não leva em conta uma importante característica das máquinas rotativas que é a existência de modos de precessão direta e retrógrada. Este trabalho analisa as particularidades da análise modal de máquinas rotativas e apresenta a formulação da análise modal complexa. Esta ferramenta de modelagem e análise de estruturas girantes baseia-se na utilização das coordenadas complexas para descrever o comportamento dinâmico do rotor. Através da decomposição de cada modo do sistema em dois sub-modos, um direto e um retrógrado, consegue-se identificar, com clareza, a forma da órbita e a direção com que cada estação do rotor descreve o seu movimento de precessão em torno da linha que une os mancais (posição não deformada do eixo). Outra importante ferramenta tratada neste trabalho é a Função de Resposta em Freqüência direcional (dFRF). Estas funções relacionam as componentes diretas e retrógradas dos sinais de excitação e resposta e permitem separar os modos de precessão diretas e retrógradas em diferentes dFRFs. Desenvolvem-se as expressões dos estimadores das dFRFs para o caso de excitações unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa. Os conceitos apresentados durante o trabalho são aplicados para rotores rígidos e flexíveis, apoiados sobre mancais isotrópicos e anisotrópicos. Um programa de elementos finitos, baseado na formulação complexa, foi desenvolvido para analisar rotores flexíveis.

Palavras Chave

– Rotores - Dinâmica, Análise modal.

Abstract

SOUTO, Carlos d'Andrade, *Dynamic Behavior of Rotating Machinery by Complex Modal Analysis*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000, 127p. Dissertação de Mestrado.

The application of modal analysis procedures on rotating machinery is not an easy task due to the specific dynamic behavior and operational conditions of these systems. The regular formulation of modal analysis ignores an important characteristic of rotating systems: the presence of the forward and backward modes. This work deals with the special features of modal analysis of rotating systems and presents the formulation of complex modal analysis. This powerful tool for modeling gyroscopic structures is based on the application of the complex coordinates to describe the dynamic behavior of rotors. The directivity of modes is taken into account by splitting each mode into two sub-modes, one forward and one backward. This procedure allows to easily identify the orbit shape and directivity that each station of the rotor describes during its whirl motion about the line connecting the bearings. Another important tool presented in this work is the directional Frequency Response Functions (dFRF). These functions relate the forward and backward components of the excitations and responses and allow the separation of the whirl modes in different dFRF. It is developed the dFRF estimations for systems excited by unidirectional, stationary bidirectional and rotating bidirectional excitations. All these concepts are applied on rigid and flexible rotors, supported by isotropic and anisotropic bearings. A finite element code, based on the complex formulation, was developed to analyze the flexible rotors.

Key Words

– Rotordynamics, Modal Analysis.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	3
	Objetivo	4
	Descrição do trabalho	4
<hr/>		
2	Revisão Bibliográfica	6
2.1	Introdução	6
2.2	Dificuldades da Análise Modal de Sistemas Rotativos	7
2.3	Revisão da Literatura	10
	2.3.1 Número de Medições Necessárias	10
	2.3.2 Técnicas de Excitação	12
	2.3.3 Medição da Resposta	17
3	Conceitos Básicos da Dinâmica de Rotores	
	Resumo do Capítulo	19
3.1	Introdução	19
3.2	Rotor de Jeffcott: Modelo de 2 GL	23

3.2.1 Sistema Isotrópico	23
3.2.2 Sistema Anisotrópico	32
4. Análise Modal de Máquinas Rotativas	43
Resumo do Capítulo	43
4.1 Introdução	43
4.2 Análise Modal Tradicional	45
4.2.1 Estruturas Estacionárias	45
4.2.2 Máquinas Rotativas	48
4.3 Análise Modal Complexa de Sistemas Rotativos	52
4.3.1 Vibração Livre	52
4.3.2 Vibração Forçada: Funções de Resposta em Frequência direcionais (dFRF)	58
4.3.3 Efeito da Isotropia nas Funções de Resposta em Frequência direcionais	65
4.3.4 Estudo do rotor de Jeffcott apoiado em suportes isotrópicos e anisotrópicos	68
4.3.4.1 Equações de Movimento: rotor de Jeffcott com 4 GL	69
4.3.4.2 Mancais Isotrópicos	75
4.3.4.3 Mancais Anisotrópicos	78
5 Estimação das Funções de Resposta em Frequência Direcionais	
Resumo do Capítulo	85
5.1 Introdução	85
5.2 Estimadores das FRF	86

5.3 Estimadores das dFRF	88
5.3.1 Excitação Unidirecional	88
5.3.2 Excitação Bidirecional Estacionária	89
5.3.3 Excitação Bidirecional Rotativa	93
6 Simulação dos Rotores Rígido e Flexível	
Resumo do Capítulo	95
6.1 Introdução	95
6.2 Rotor Flexível	96
6.2.1 Mancais Isotrópicos	98
6.2.2 Mancais Anisotrópicos	101
6.3 Estimação das Funções de Resposta em Frequência direcionais	109
6.3.1 Sistema Anisotrópico	109
6.3.1.1 Excitação Unidirecional	109
6.3.1.2 Excitação Bidirecional Estacionária	110
6.3.1.3 Excitação Unidirecional Rotativa	111
6.3.2 Sistema Quase Isotrópico	113
7 Comentários Finais	116
Referências Bibliográficas	118
Apêndice A	123

Lista de Figuras

3.1 Possíveis representações do rotor de Jeffcott: rotor flexível apoiado sobre mancais rígidos ou rotor rígido apoiado sobre mancais flexíveis	24
3.2 Esquema do rotor de Jeffcott desbalanceado	27
3.3 Posições relativas do centro geométrico do Disco, C, e do centro de massa, P, em função da rotação: (a) na faixa sub crítica; (b) na velocidade crítica e (c) na faixa super crítica.	30
3.4 Variação da relação entre as amplitudes das componentes diretas e retrógradas em função da velocidade de rotação do rotor	36
3.5 Resposta ao desbalanceo de um rotor de Jeffcott em suportes anisotrópicos	36
3.6 Variação da relação entre as amplitudes das componentes diretas e retrógradas em função da velocidade de rotação do rotor: (a) $c_y=0,2 c_z$; (b) $c_y=0,6 c_z$; (c) $c_y=0 c_z$;	39
3.7 Resposta ao desbalanceo do rotor anisotrópico de Jeffcott amortecido: (a) tubo orbital; (b) e (c) projeções dos deslocamentos nos planos ωz e ωy ; (d) e (e) vistas orbitais.	41
4.1 Coordenadas reais $y(t)$ e $z(t)$ e coordenada complexa $p(t)$	52
4.2 Esquema do rotor rígido apoiado sobre mancais flexíveis	70
4.3 Condições de desbalanceo do rotor: (a) desbalanceo dinâmico e (b) estático	71
4.4 Primeiros quatro modos de vibração do rotor rígido isotrópico	76

4.5 Magnitude e fase das Funções de Resposta em Frequência tradicional e direcionais	77
4.6 Funções de Resposta em Frequência $H_{y_1y_1}(\omega)$ para várias rotações	78
4.7 Primeiros quatro modos de vibração do rotor rígido anisotrópico	79
4.8 Magnitude e fase da FRF $H_{y_1y_1}(\omega)$ e das dFRF $H_{Pf_1Gf_1}(\omega)$ e $H_{Pb_1Gb_1}(\omega)$.	81
4.9 Magnitude da FRF $H_{y_1y_1}(\omega)$ e das dFRF $H_{Pf_1Gf_1}(\omega)$ e $H_{Pb_1Gb_1}(\omega)$ para várias rotações	82
4.10 Magnitude da FRF $H_{y_1y_1}(\omega)$ e das dFRF $H_{Pf_1Gf_1}(\omega)$ e $H_{Pb_1Gb_1}(\omega)$ para várias rotações	83
6.1 Modelo de elementos finitos do rotor flexível	97
6.2 Diagrama de Campbell do rotor isotrópico	98
6.3 Modos de vibração do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm	99
6.4 FRFs tradicionais do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm	102
6.5 dFRFs normais e reversas do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm	103
6.6 Diagrama de Campbell do rotor anisotrópico	104
6.7 Modos de vibração do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm	104
6.8 FRFs tradicionais do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm	107
6.9 dFRFs normais e reversas do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm	108
6.10 dFRFs normais $H_{Pf_1Gf_1}$ (direta) e $H_{Pb_1Gb_1}$ (retrógrada)	110
6.11 dFRFs reversas $H_{Pf_1Gb_1}$ e $H_{Pb_1Gf_1}$	110
6.12 dFRFs normas $H_{Pf_1Gf_1}$ (direta) e $H_{Pb_1Gb_1}$ (retrógrada)	111
6.13 dFRFs reversas $H_{Pf_1Gb_1}$ e $H_{Pb_1Gf_1}$	111
6.14 Varredura senoidal	112
6.15 dFRFs normas $H_{Pf_1Gf_1}$ (direta) e $H_{Pb_1Gb_1}$ (retrógrada)	113

6.16 dFRFs reversas H_{Pf1Gb1} e H_{Pb1Gf1}	113
6.17 dFRF reversa analítica	114
6.18 dFRFs reversas H_{Pf1Gb1} e H_{Pb1Gf1} · Excitação unidirecional	115
6.19 dFRFs reversas H_{Pf1Gb1} e H_{Pb1Gf1} · Excitação bidirecional estacionária	115
6.20 dFRFs reversas H_{Pf1Gb1} e H_{Pb1Gf1} · Excitação bidirecional rotativa	115

Lista de Tabelas

3.1 Classificação dos sistemas rotativos baseado nas características físicas do rotor e do estator e dependência temporal dos parâmetros da equação de movimento	21
4.1 Parâmetros modais do rotor rígido isotrópico. Rotação = 3000 rpm	76
4.2 Parâmetros modais do rotor rígido anisotrópico. Rotação = 3000 rpm	79

Capítulo 1

Introdução

Máquinas rotativas são sistemas mecânicos que possuem inúmeras aplicações, seja como componente principal ou como parte integrante dos mais variados tipos de equipamentos. Motores e geradores elétricos, turbinas hidráulicas, a vapor e a gás, bombas, compressores e ventiladores, são algumas das máquinas rotativas mais comuns.

O comportamento dinâmico de um sistema mecânico deve ser analisado ainda na fase de projeto para que se possa determinar se o sistema terá um desempenho adequado nas condições operacionais previstas. As frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração destes sistemas podem ser determinados analítica, numérica ou experimentalmente. Modelos numéricos com maior ou menor complexidade podem ser elaborados para calcular estes parâmetros modais (com exceção do amortecimento, em geral). Contudo, mesmo modelos numéricos bastante complexos devem ser confrontados, sempre que possível, com resultados experimentais - obtidos por intermédio da análise modal, por exemplo. Esta comparação entre os resultados numéricos e experimentais pode ter como objetivo apenas a confirmação do modelo proposto ou ainda para alterá-lo por meio de técnicas de ajuste de modelos.

No caso das máquinas rotativas, é necessária uma análise ainda mais cuidadosa pois o movimento de rotação do rotor influencia significativamente o comportamento dinâmico do sistema, tornando os parâmetros físicos do modelo dependentes da rotação da máquina.

Os ensaios de análise modal de estruturas estacionárias já são realizados desde a década de 60 e têm evoluído constantemente. A fundamentação matemática da análise modal tradicional assume, implicitamente, a não variância e simetria das matrizes dinâmicas do sistema e a obediência ao princípio da reciprocidade de Maxwell-Betti. Estas são características presentes na grande maioria das estruturas estacionárias (ou não rotativas).

No entanto, máquinas rotativas geralmente não obedecem a estas condições. Dispositivos como mancais e selos podem possuir rigidez e amortecimento anisotrópicos e acoplar os movimentos do rotor nas direções perpendiculares ao seu eixo de rotação. O efeito giroscópico também acopla os movimentos de rotação nestas direções, fazendo com que o princípio da reciprocidade não seja obedecido.

Como se sabe, o efeito giroscópico é dependente da velocidade de rotação do rotor. No caso de mancais hidrodinâmicos, os parâmetros de rigidez e amortecimento também são função da rotação. Portanto, é óbvio concluir que as frequências naturais e os modos de vibração de uma máquina rotativa também apresentem esta dependência com a velocidade de giro do rotor.

Os modos próprios do rotor sofrem influência direta da rigidez dos mancais e da rigidez do próprio eixo. Um rotor muito rígido suportado por mancais de baixa rigidez poderá apresentar modos de corpo rígido. Caso o rotor seja flexível e os mancais possuam uma elevada rigidez (quando comparada à rigidez do eixo), o sistema não apresentará modos de corpo rígido mas apenas modos de precessão do eixo, que podem ser comparados, grosseiramente, aos modos de vibração transversais de uma barra apoiada em suportes flexíveis. A rigidez do eixo e dos mancais deve, portanto, ser levada em conta na escolha do modelo numérico para análise do sistema rotativo, ou seja, utilizar um modelo de rotor rígido ou flexível. Em alguns casos, as características físicas do rotor também podem tornar o efeito giroscópico desprezível.

Nos modos de precessão, os centros geométricos de cada secção transversal do rotor descrevem órbitas elípticas em torno da linha que une os mancais. O rotor apresenta então um movimento de rotação que é a composição de duas respostas superpostas: a rotação do rotor em torno de si próprio (rotação própria ou *spin*) e o movimento de rotação do eixo defletido em torno da sua configuração não defletida (precessão ou *whirl*). A órbita pode ser descrita na mesma direção do movimento de rotação própria, constituindo um modo de precessão direta, ou *forward*, ou pode ter direção oposta, característica de um modo de precessão retrógrada, ou *backward*. Os

modos de precessão direta e retrógrada podem possuir frequências muito próximas entre si ou bastante distantes, dependendo das características do rotor e da velocidade de rotação da máquina.

A formulação matemática da análise modal tradicional foi adaptada na década de 80 para comportar as peculiaridades dinâmicas das máquinas rotativas, passando a considerar a não simetria das matrizes do sistema (efeito giroscópico) e a variação das suas características dinâmicas com a velocidade de rotação do eixo.

1.1 Motivação

Apesar de ter havido um grande avanço teórico na área de análise modal de sistemas rotativos, ainda existem muitas dificuldades de ordem prática.

Para se determinar experimentalmente os parâmetros modais de uma máquina rotativa é necessário excitar e medir as respostas resultantes em várias estações do eixo, e estes procedimentos devem ser repetidos para várias condições de rotação. Os dispositivos de excitação e medição devem interferir o mínimo possível com o movimento do eixo, sendo particularmente interessante o uso de dispositivos de excitação e transdutores para medição da resposta sem contato. Deve-se tomar cuidado para não excitar comportamentos não lineares ou instáveis do sistema. Além disso, de uma maneira geral, sempre estarão presentes inúmeros ruídos intrínsecos ao sistema, causados por defeitos em mancais de rolamento, desalinhamento, desbalanço, etc..

Uma etapa muito importante na análise de uma máquina rotativa é a identificação dos movimentos de precessão direta e retrógrada, pois estes movimentos afetam diretamente a vida útil do rotor. Os movimentos de precessão retrógrada causam alternância das tensões internas do eixo, o que pode levar a rupturas por fadiga. Embora a presença dos modos de precessão direta e retrógrada tenha sido amplamente investigado na literatura, a direção do movimento do modo é, geralmente, negligenciado nas formulações tradicionais de análise dinâmica de rotores.

Todos estes aspectos, e muitos outros que serão ressaltados durante o trabalho, fazem da análise modal de máquinas rotativas um desafio que tem chamado a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos.

Uma das mais novas ferramentas para o estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas é a análise modal complexa [Lee 90,91]. Este método de modelagem e análise de estruturas girantes é relativamente novo e apresenta inúmeras vantagens sobre os procedimentos normalmente utilizados para este fim, principalmente no que diz respeito à interpretação física dos modos de precessão direta e retrógrada do rotor. Através da formulação da análise modal complexa, os métodos tradicionais de extração de parâmetros, normalmente utilizados em estruturas estacionárias, também podem ser aplicados a sistemas rotativos.

Apesar das coordenadas complexas já terem sido utilizadas anteriormente na análise de sistemas rotativos, somente no final da década de 80 e início dos anos 90 que Chong-Won Lee [Lee 90,91] desenvolveu, matematicamente, a análise modal complexa. Esta técnica utiliza coordenadas complexas para descrever a direção dos modos de precessão, considerando cada modo como uma combinação de um sub-modo direto e outro retrógrado. A direção de precessão do modo resultante é definida pela “amplitude relativa” de cada um dos sub-modos. Consegue-se, desta forma, uma melhor compreensão física do comportamento dinâmico de um sistema rotativo. Os modos predominantemente diretos e retrógrados são separados em diferentes funções de resposta em frequência, as Funções de Resposta em Frequência direcionais, o que evita a superposição dos modos de precessão próximos e melhora o desempenho dos algoritmos de identificação de parâmetros.

Objetivo

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma visão geral dos procedimentos utilizados para análise modal de máquinas rotativas; discutir as dificuldades experimentais destas técnicas e, principalmente, implementar e analisar o potencial e as limitações da análise modal complexa no estudo de sistemas girantes.

Descrição do Trabalho

Apesar de se desenvolver, com rigor, toda a formulação matemática dos procedimentos apresentados, este trabalho tem como enfoque principal o estudo fenomenológico do

comportamento dinâmico das máquinas rotativas horizontais. Desta forma, para poder ressaltar estes aspectos físicos e ainda possibilitar a verificação do potencial dos métodos de análise modal apresentados, estudar-se-á apenas sistemas rotativos simples (com poucos graus de liberdade), mas que apresentem os fenômenos mais importantes das máquinas rotativas.

A seguir, faz-se uma breve descrição do conteúdo de cada um dos capítulos que compõem este trabalho:

- O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica mostrando as propostas de diversos autores para a realização de ensaios de análise modal em máquinas rotativas. São comparados os aspectos básicos da análise modal em sistemas estacionários e girantes.
- No Capítulo 3 apresenta-se uma breve revisão sobre os fundamentos básicos da dinâmica de rotores por meio de um sistema rotativo bastante simples: o rotor de Jeffcott modelado com dois graus de liberdade. Comparam-se as características das coordenadas reais e complexas na modelagem de sistemas rotativos simples.
- O Capítulo 4 apresenta as formulações das análises modal tradicional (para sistemas estacionários e girantes) e complexa. Aborda-se o uso das coordenadas complexas, os modos diretos e retrógrados, as Funções de Resposta em Freqüência direcionais e a sua relação com as Funções de Resposta em Freqüência tradicionais. É analisado um rotor rígido apoiado em mancais iso e anisotrópicos.
- O Capítulo 5 destina-se ao estudo dos diversos métodos de estimação das Funções de Resposta em Freqüência direcionais.
- O Capítulo 6 inclui os resultados das simulações. É analisado um rotor flexível pelo método dos elementos finitos através da análise modal complexa. Os métodos de estimação de Funções de Resposta em Freqüência direcionais são simulados e comparados.
- Capítulo 7 contém as conclusões obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho e alguns comentários sobre possíveis futuros desenvolvimentos nesta área.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, são comentados diversos trabalhos sobre análise modal em máquinas rotativas. As diferenças entre estruturas estacionárias e máquinas rotativas, suas implicações na análise modal e a extensão da formulação matemática da análise modal para máquinas rotativas são analisadas.

As peculiaridades dos ensaios de análise modal em máquinas rotativas são analisadas de acordo com trabalhos disponíveis na literatura.

2.1 Introdução

Os métodos clássicos de análise modal têm sido amplamente utilizados na identificação de parâmetros modais de diversos tipos de sistemas [Ewins 84]. Estas técnicas, em geral, fornecem resultados muito bons e confiáveis quando são aplicadas a estruturas estacionárias mas apresentam muitos problemas quando usadas para determinar as características vibratórias de máquinas rotativas [Ewins 98].

A aplicação de técnicas de análise modal em estruturas girantes tem atraído a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos. Contudo, este tipo de sistema possui características específicas que têm dificultado muito a implementação prática dos procedimentos propostos.

Como se sabe, componentes como mancais hidrodinâmicos e selos mecânicos, além do próprio efeito giroscópico, causam a não simetria das matrizes da equação de movimento de sistemas rotativos, o que resulta em um problema de autovalor não auto-adjunto. Nordmann foi

um dos primeiros pesquisadores a estudar sistemas rotativos não auto-adjuntos [Nordmann 82]. Esta característica das estruturas rotativas tem várias implicações teóricas e práticas.

Nas seções seguintes, apresentam-se as grandes dificuldades teóricas e experimentais na realização da análise modal em máquinas rotativas e descreve-se como tem sido a evolução das técnicas de ensaios modais destes tipos de sistemas. Esta revisão destaca alguns aspectos principais do tema, que são: qual é o número de medições necessária para se conseguir extrair todos os parâmetros modais do sistema, quais são as vantagens e desvantagens das diversas técnicas de excitação e medição e como tratar os dados, contaminados pelos ruídos harmônicos inerentes ao sistema, obtidos do ensaio de análise modal com a máquina em operação.

2.2 Dificuldades da Análise Modal de Sistemas Rotativos

Como já foi comentado anteriormente, as características dinâmicas das máquinas rotativas tornam difícil a utilização direta das técnicas de análise modal tradicionais, já bastante desenvolvidas para sistemas estacionários (não girantes), na identificação dos parâmetros modais de rotores. Apresenta-se, a seguir, uma relação das maiores dificuldades encontradas ao se realizar a análise modal de uma máquina ou componente rotativo (a maior parte delas serão discutidas com mais detalhes nas seções ou nos capítulos seguintes):

- em geral, no momento que uma máquina rotativa entra em operação, passa a atuar sobre o sistema a chamada aceleração de Coriolis, originada devido ao movimento de rotação do rotor em torno de outro eixo que não o de rotação própria. Estas acelerações dão origem às forças giroscópicas que têm duas características principais: a primeira é que elas são dependentes da velocidade de rotação da máquina. Isto faz com que a equação de movimento do sistema também seja função da velocidade de rotação. Conseqüentemente, os parâmetros modais – frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais – também variam com a rotação. Assim, para se poder caracterizar o comportamento dinâmico da máquina dentro da faixa de operação da mesma, é preciso realizar vários ensaios de análise modal, em várias rotações diferentes. Isto representa um aumento significativo de trabalho quando comparado ao procedimento utilizado para obtenção dos parâmetros modais de estruturas estacionárias.

- a segunda das características das forças giroscópicas é que elas podem ser modeladas e introduzidas na equação de movimento como matrizes anti-simétricas proporcionais à velocidade. Matematicamente, isto implica que o problema de autovalor passa a ser não auto-adjunto tornando-se necessários dois conjuntos de autovetores para se descrever o comportamento vibratório do sistema. Estes autovetores estão diretamente relacionados com os modos de precessão direta e retrógrada observados em um rotor. A implicação prática deste fenômeno é que, para se conseguir identificar experimentalmente estes modos, é necessário medir uma linha e uma coluna da matriz de Função de Resposta em Frequência do sistema, ou seja, é preciso movimentar o excitador ao longo de toda a máquina. Na maioria das vezes, este é um procedimento impossível de ser realizado em uma máquina real.
- o procedimento de análise modal pressupõe a aplicação de uma força conhecida e medição da resposta do sistema resultante desta excitação. Devido à rotação do rotor, torna-se bastante crítico o processo de aplicação da força conhecida. Isto ocorre porque, em geral, tem-se um equipamento excitador, que está parado, aplicando a excitação em um sistema girante. Considere, por exemplo, a utilização de um excitador eletrodinâmico ou um martelo para excitar a estrutura. No primeiro caso, é necessário utilizar um rolamento ou uma bucha para fazer a conexão entre o *shaker* e o eixo. Esta montagem pode alterar significativamente o comportamento dinâmico do sistema rotativo original. A aplicação da excitação externa com um martelo, por outro lado, induz uma considerável componente de força tangencial (devido ao atrito), não medida pelo transdutor de força, que pode comprometer totalmente os resultados da análise modal. Uma opção interessante para resolver este problema são os excitadores eletromagnéticos, ou mancais magnéticos ativos que tem como vantagens o fato de não requerer contato físico com a estrutura, permitindo uma medida precisa da força aplicada e possibilitando aplicar a excitação bidirecional;
- a medição da vibração resultante da máquina quando da aplicação da força externa conhecida é outra questão a ser considerada. As três possibilidades mais comuns são: os acelerômetros, que possuem o inconveniente de não poderem ser fixados diretamente sobre o eixo em rotação; os transdutores de deslocamento, que apresentam a vantagem de não alterarem as características da estrutura uma vez que não necessitam de contato físico com a mesma mas tem como desvantagem o fato de medirem o deslocamento relativo entre a

superfície de interesse e a sua base; e os velocímetros *doppler*, que apresentam-se como a opção mais promissora;

- uma grande dificuldade da análise modal de máquinas rotativas é que, em geral, os sinais de resposta medidos não são resultado apenas da aplicação da força externa conhecida mas também das forças internas presentes no sistema. Devido à presença de desbalanceamento, desalinhamento, mancais de rolamento defeituosos ou mancais hidrodinâmicos, muitas componentes harmônicas e sub-harmônicas são geradas internamente na máquina rotativa, contaminando os sinais de resposta. Esta característica faz com que o processamento de sinais provenientes de ensaios em máquinas rotativas necessite de um tratamento mais elaborado do que aqueles obtidos em testes com estruturas estacionárias.
- muitas máquinas rotativas apresentam simetria radial, o que resulta em frequências naturais repetidas ou muito próximas. Esta alta densidade modal dificulta bastante a aplicação dos métodos de extração de parâmetros da análise modal clássica. Nestes casos, pode ser necessário utilizar múltiplas excitações simultâneas para se poder separar estes modos.
- máquinas rotativas podem ter comportamentos lineares apenas em faixas limitadas de deflexões e de velocidades uma vez que dispositivos como selos e mancais hidrodinâmicos são grandes geradores de não-linearidades [Bently 86];
- a identificação dos movimentos de precessão direta e retrógrada é uma etapa muito importante na análise de uma máquina rotativa pois estes movimentos afetam diretamente a vida útil do rotor. Embora a presença dos modos de precessão direta e retrógrada tenha sido amplamente investigado na literatura, a direção do movimento do modo é, geralmente, negligenciado nas formulações tradicionais de análise dinâmica de rotores.

2.3 Revisão da Literatura

2.3.1 Número de Medições Necessárias

As vibrações do eixo de uma máquina rotativa são influenciadas diretamente pela velocidade de rotação. Com a rotação o efeito giroscópico acopla os deslocamentos nas direções perpendiculares ao eixo de rotação, fazendo com que cada modo de flexão em repouso seja substituído por um modo no qual o eixo sofre flexão e ao mesmo tempo gira em torno da sua posição não deformada. Nestes modos os deslocamentos de cada estação nas direções horizontal e vertical compoem órbitas elípticas, conforme mostrado por Azevedo e Weber, [Azevedo 92] configurando movimentos de precessão. Os modos de precessão podem ter a mesma direção da rotação do eixo (diretos ou “forward”) ou a direção oposta (retrógrados ou “backward”).

Para considerar o efeito giroscópico nas equações de movimento discretizadas que descrevem um rotor deve-se incluir a matriz giroscópica, que é anti-simétrica. Desta forma, ao contrário do que ocorre com estruturas estacionárias, as matrizes dinâmicas não são todas simétricas.

A formulação matemática de análise modal de estruturas estacionárias leva em conta a simetria das matrizes das equações de movimento discretizadas (e conseqüentemente da matriz das funções de resposta em frequência) no cálculo das respostas em frequência pela superposição modal. Apenas os autovetores à direita precisam ser calculados, pois o problema de auto valor originado da análise do caso de vibrações livres é auto-adjunto e conjunto de autovetores à esquerda é igual ao conjunto de autovetores à direita.

No caso das máquinas rotativas, a não simetria das matrizes das equações de movimento torna necessário obter os autovetores à esquerda e à direita para calcular as respostas em frequência por superposição modal, uma vez que o problema de auto valor correspondente é não auto adjunto e logo os autovetores à direita e à esquerda são diferentes. A matriz das funções de resposta em frequência também não é mais simétrica.

Considerando-se a presença do efeito giroscópico e um amortecimento genérico, as equações de movimento discretizadas para vibrações livres levam a um sistema de N equações diferenciais de segunda ordem, onde N é o número de graus de liberdade do modelo. O problema de autovalor correspondente também é de segunda ordem. Um sistema equivalente com $2N$

equações diferenciais de primeira ordem pode ser montado utilizando-se matrizes de estado. Os problemas de autovalores a serem resolvidos (à direita e à esquerda) passam a ser então de primeira ordem, para o qual muitos algoritmos já foram desenvolvidos.

Para se identificar os autovalores e autovetores à direita, basta identificar uma coluna da matriz das funções de resposta em frequência. Em estruturas que obedecem ao princípio da reciprocidade a matriz das funções de resposta em frequência é simétrica e os autovetores à direita e à esquerda são iguais. Logo, pode-se identificar uma linha ou uma coluna da matriz das FRF, para obter todos os parâmetros modais da estrutura.

Considerando-se apenas uma excitação e uma resposta, identificar uma coluna da matriz das FRF significa medir as respostas da estrutura em todos os graus de liberdade (um em cada ensaio), excitando-a sempre no mesmo grau de liberdade. Para identificar uma linha da matriz das FRF é necessário aplicar a excitação em cada um dos graus de liberdade medindo a resposta da estrutura em apenas um grau de liberdade. Como é muito mais trabalhoso mover e posicionar o dispositivo que aplica a excitação do que os sensores que medem as respostas, é sempre preferível identificar uma coluna e não uma linha da matriz das FRF.

As características dinâmicas das máquinas rotativas as tornam estruturas não simétricas do ponto de vista dinâmico e como foi dito anteriormente, para calcular suas respostas em frequência é necessário conhecer também os autovetores à esquerda.

Para identificar experimentalmente os autovetores à esquerda é necessário medir toda uma linha da matriz das FRF [Nordmann 82]. Assim sendo, para se identificar todos os parâmetros modais de uma máquina rotativa deve-se medir uma linha e uma coluna da matriz das FRF. Isto equivale a realizar $2N-1$ medições em um sistema com N graus de liberdade. Para uma estrutura estacionária com o mesmo número de graus de liberdade seriam suficientes N medições.

Além da maior carga de trabalho devido ao maior número de medições necessárias, a aplicação da excitação em várias estações do rotor é muitas vezes algo de difícil execução pela dificuldade de acesso a alguns pontos da máquina, principalmente no caso de máquinas operacionais.

Visando contornar este problema, Zhang et al, [Zhang 85] consideraram o caso de estruturas cujas matrizes das equações de movimento discretizadas não são simétricas. Particionando a matriz de rigidez dinâmica do modelo em partes simétricas e não simétricas o

autor mostrou que os autovetores à esquerda e à direita relacionam-se por meio da parte não simétrica da estrutura. Desde que certas condições sejam atendidas, os autovetores à esquerda podem ser considerados como uma combinação linear dos autovetores à direita, bastando então identificar apenas um conjunto de autovetores (à direita). Zhang e Lallement [Zhang 88], estenderam estas condições para máquinas rotativas axi-simétricas com e sem a inclusão do efeito giroscópico. Identificando-se experimentalmente os autovetores à direita e os autovalores e conhecendo-se a parte não simétrica da estrutura por meio de modelagem numérica ou de ensaios adicionais, pode-se calcular os autovetores à esquerda. Inversamente, identificando-se experimentalmente os dois conjuntos de autovetores e os autovalores pode-se identificar a parte não simétrica da estrutura.

Particionando os autovetores em seus componentes horizontais e verticais, Wang e Kirkhope, [Wang 94], mostraram que os autovetores de um sistema rotor-mancais com acoplamento exclusivamente giroscópico são reais na direção horizontal e puramente imaginários na direção vertical. Baseando-se nesta conclusão, Bucher et al, [Bucher 96] mostrou que os autovetores à direita e à esquerda possuem componentes horizontais idênticos enquanto que os componentes verticais são complexos conjugados (imaginários puros). Bucher desenvolveu também uma expressão para a matriz das FRF que permite que sistemas rotativos com acoplamento predominantemente giroscópico possam ser tratados como sistemas auto-adjuntos. Sistemas rotativos cujo amortecimento exerça pequena influência no acoplamento podem ser analisados da mesma forma considerando-se uma perturbação nos autovetores. Desta forma, somente os autovetores à direita precisam ser determinados para identificar o sistema, reduzindo muito o trabalho experimental.

2.3.2 Técnicas de Excitação

A aplicação de forças de excitação, sua medição com precisão e a medição das respostas é um outro aspecto importante dos ensaios de análise modal em máquinas rotativas. Embora seja possível excitar indiretamente o eixo aplicando forças externas aos mancais, o que é medido é a força aplicada à carcaça do mancal e não a força transmitida ao eixo. Além disso os mancais podem ser fontes de auto-excitações e comportamentos instáveis.

Quando em operação o rotor apresenta vibrações transversais causadas por desbalanço, desalinhamento dos mancais, curvatura do eixo, defeitos em mancais de rolamentos,

comportamentos instáveis de mancais hidrodinâmicos ou magnéticos, interações fluido-estrutura, etc. Alguns destes ou outros efeitos estarão presentes em maior ou menor grau nos regimes de operação da máquina, por mais cuidadosas que tenham sido a sua construção e montagem. Logo o rotor possui um nível de vibração intrinsecamente ligado ao seu movimento de rotação.

Nordmann, [Nordmann 82] utilizou a excitação impulsiva na identificação de um sistema rotativo com um rotor rígido montado em dois mancais hidrodinâmicos. A força excitadora foi aplicada com um martelo ao qual estava fixado um transdutor de força.

As vantagens da excitação impulsiva são a simplicidade dos dispositivos de excitação, a facilidade em deslocá-los de um ponto a outro do rotor, além de não ser necessário nenhum dispositivo que fique em contato permanente com o rotor. Como desvantagens podemos citar: a baixa repetibilidade, o espalhamento da energia em uma faixa limitada de frequência, baixa razão sinal ruído, a possibilidade de excitar comportamentos não lineares dos mancais pois pode ser necessário aplicar bastante energia no impacto e o surgimento de forças tangenciais não medidas (e que podem contaminar a resposta) devido ao contato do martelo com o eixo em rotação no instante do impacto.

Rogers e Ewins, [Rogers 89] utilizaram um excitador eletromagnético conectado a um dispositivo deslizante sobre o eixo (bucha ou mancal de rolamento) para aplicar a excitação em várias estações. É necessário que a bucha ou mancal não possua frequências naturais na faixa de interesse relativa ao rotor, que não haja deslocamento relativo entre os dois e que o dispositivo não altere significativamente as características dinâmicas do rotor. Segundo o autor a bucha revelou-se superior ao mancal de rolamento pois este último introduz ruídos harmônicos característicos do mancal na FRF enquanto que a bucha permitiu obter FRF com muito menos ruído. O uso deste tipo de dispositivo permite controlar melhor o sinal de excitação por meio do excitador eletromagnético. Podem ser utilizadas excitações do tipo aleatória ou varredura senoidal (ou ainda tipos de excitações que requerem sistemas especiais de controle e geração do sinal, como “stepped-sine”, pseudo aleatória, etc). A dificuldade em deslocar a bucha ao longo do eixo (principalmente em máquinas operacionais) e a alteração das características dinâmicas do rotor são as desvantagens. A medição da força de excitação é realizada por um transdutor de força posicionado entre a barra conectada ao “shaker” e a parte externa da bucha.

Posteriormente Bucher, Ewins e Robb [Bucher 96], utilizaram um mancal de rolamento deslizante ao longo do eixo para aplicar a excitação “stepped-sine” a um sistema rotativo. Foram conectados dois “shakers” posicionados nas direções horizontal e vertical à caixa que continha o rolamento, permitindo aplicar sinais senoidais de varredura “stepped-sine” simultaneamente nas duas direções perpendiculares ao eixo. Comparando as funções de resposta em frequência estimadas com um e com dois excitadores eletromagnéticos, os autores concluíram que uma estimativa mais precisa das FRF é obtido com o uso de duas excitações.

A varredura “stepped-sine” permite uma elevada razão sinal/ruído, concentra toda a energia em uma frequência de cada vez e evita excitar comportamentos não lineares do sistema o que pode ocorrer especialmente em excitações impulsivas. Como desvantagem, o ensaio será demasiadamente demorado devido à necessidade de varrer uma ampla faixa de frequências com a medição da resposta do sistema após um tempo mínimo de estabilização.

Bently e Muszynska, [Bently 86] desenvolveram um novo tipo de excitação harmônica assíncrona proporcionada por dispositivos especiais (discos com desbalanço controlado conectados a motores elétricos por meio de polias) para identificar diretamente os termos da matriz de rigidez dinâmica de um sistema rotativo. O disco é conectado por um mancal de rolamento à estação do eixo que se deseja excitar. Controlando-se a sua velocidade de rotação é possível varrer uma ampla faixa de frequências. A estação do rotor é excitada simultaneamente nas direções vertical e horizontal, configurando uma excitação bidirecional. A força é controlada e medida por meio de três grandezas: a velocidade angular do disco excitador, a massa de desbalanço e a excentricidade da massa em desbalanço. Deve-se considerar ainda o fato que a magnitude da força de excitação será proporcional ao quadrado da velocidade angular do disco excitador.

Um importante aspecto deste método de excitação é a capacidade de excitar modos de precessão diretos e retrógrados separadamente, o que não pode ser conseguido com os métodos comentados anteriormente que utilizam excitações unidirecionais. Os modos de precessão aparecem em pares direto e retrógrado geralmente muito próximos em frequência, o que dificulta a identificação dos parâmetros modais a partir das FRF obtidas experimentalmente. A separação destes modos em diferentes FRF permitiria uma identificação de parâmetros muito mais precisa.

O método também foi utilizado para identificar parâmetros não lineares em dispositivos como mancais hidrodinâmicos e selos em Muszynska et al, [Muszynska 93]. A suas grandes desvantagens são a complexidade do dispositivo de excitação (que tem de ser deslocado ao longo do eixo) de difícil utilização em máquinas reais e a colocação de um disco no eixo o que altera as características dinâmicas do rotor.

Os dispositivos de excitação citados anteriormente mantêm contato (mesmo que momentâneo) com o eixo em rotação. Mancais magnéticos podem ser utilizados para controle das vibrações transversais e também para aplicar forças ao eixo. Autores brasileiros utilizaram um mancal magnético conectado a um excitador eletromagnético tanto para excitar um rotor com eixo flexível obtendo as respostas em frequência, como para controlar a amplitude das vibrações transversais [Steffen 86].

Os mancais magnéticos surgem como tendência mais recente em dispositivos de excitação pois permitem a aplicação de forças sem contato com o eixo e podem ser utilizados tanto para controle de vibrações como para excitar o sistema em ensaios de análise modal o que abre a possibilidade de identificações e diagnósticos “on-line”. Permitem também utilizar uma ampla gama de tipos de excitação e aplicá-las nas direções horizontal e vertical separada ou conjuntamente. Tais dispositivos exigem contudo, uma sofisticada malha de controle.

Lee e Kim [Lee 92] utilizaram mancais magnéticos para controlar as vibrações de um sistema rotativo e para excitar o rotor em ensaios de análise modal medindo os deslocamentos transversais do sistema por meio de sensores de proximidade. Para medir as forças magnéticas aplicadas, um dinamômetro de três eixos foi acoplado ao eixo próximo ao mancal magnético. Os mancais magnéticos requerem um sistema de controle da corrente nos eletroímãs e de medição da posição do centro do eixo preciso pois a força eletromagnética linearizada na posição de equilíbrio depende destes dois fatores sendo dada por [Lee 92]:

$$f(t) = k_i i_c(t) + k_q q(t) \quad (2.1)$$

onde $i_c(t)$ é a corrente nos eletroímãs;

$q(t)$ é o espaço livre entre o eletroímã e a superfície do eixo (“air gap”);

k_i constante do eletroímã relativa a corrente de controle;

k_q constante do eletroímã relativa ao (“air gap”).

Os autores consideraram em seu trabalho o efeito da constante k_q desprezível, pois esta tinha um valor bastante pequeno em comparação com k_f . Contudo com o aumento do nível de vibração a variação do vão entre o magneto e a superfície do eixo pode se tornar mais significativa. Além disso, a constante k_q age como uma rigidez negativa injetando energia no sistema podendo causar instabilidades. Estes fatores devem ser levados em conta no projeto do mancal eletromagnético. A medição precisa dos deslocamentos do eixo e das forças aplicadas são extremamente importantes tanto para a malha de controle quanto para a identificação dos parâmetros modais.

A medição da força aplicada por um mancal magnético pode ainda ser feita de três outras maneiras [Förch 96]:

- Medição por sensores piezoelétricos: elementos piezoelétricos de quartzo são colocados entre o estator do mancal e a fundação para medir as forças verticais e horizontais, assumindo-se serem estas forças iguais às exercidas pelo mancal no eixo. A dificuldade em calibrar este tipo de sensores e a flexibilidade inerente à montagem são problemas intrínsecos a este método.
- Cálculo da força a partir da medição da corrente e do deslocamento: a equação (2.1) é utilizada para calcular o valor da força excitadora conhecendo-se o valor da corrente e do “air-gap”. Esta equação é uma linearização e só será uma boa aproximação para pequenos deslocamentos.
- Cálculo da força a partir da medição da densidade do fluxo magnético (B): a relação entre a força magnética e o fluxo magnético (B) é dada por [Förch 96]:

$$F(B) = \frac{B^2 A}{\mu_o} \quad (2.2)$$

onde B é o fluxo magnético;

A é a superfície do eletroímã;

μ_o é o coeficiente de permeabilidade do meio.

A equação (2.2) é sempre exata ao contrário de (2.1). Os autores utilizaram sensores Hall para medir o fluxo magnético dentro do mancal e obter uma medida mais precisa da força aplicada pelo mancal ao eixo no projeto MARS (Modal Analysis of Rotating Systems) [MARS synthesis report 96]. Como sinal de excitação foi utilizada a varredura “stepped-sine”. As excitações foram aplicadas simultaneamente nas direções horizontal e vertical (perpendiculares ao eixo) em duas estações, uma de cada vez. Duas excitações senoidais perpendiculares entre si e com a adequada diferença de fase são equivalentes ao tipo de excitação proposto por Muszynska para poder excitar e identificar separadamente modos diretos e retrógrados porém sem recorrer aos complexos dispositivos de excitação por desbalanço controlado (discos montados no eixo).

2.3.3 Medição da Resposta

Para a medição das respostas Nordmann [Nordmann 82], Rogers e Ewins [Rogers 89], Bently e Muszynska [Bently 86] e Förch [Förch 96] utilizaram sensores de deslocamento que apresentam a vantagem de poderem ser posicionados em várias estações do eixo. É necessário, contudo, que sejam fixados em uma base livre de vibrações (ou cujo nível de vibração seja muito inferior ao do eixo) uma vez que medem deslocamentos relativos. Este aspecto pode ser particularmente crítico em máquinas operacionais e pode ser necessário medir o deslocamento da base onde estão fixados os sensores (por meio de acelerômetros por exemplo) para subtraí-lo do deslocamento medido pelo sensor. Dois canais de um analisador de sinais teriam de ser disponibilizados para a medição da resposta em uma única estação do rotor [Rogers 89].

Bucher et al [Bucher 96] utilizaram acelerômetros fixados externamente à caixa do mancal deslizante (ao qual estão conectados os “shakers”) para medir as respostas do eixo. Tal arranjo tem como desvantagem óbvia o fato de que somente as respostas (nas direções vertical e horizontal) no “driving point” podem ser medidas a não ser que mais uma bucha seja adicionada ao eixo exclusivamente para portar os acelerômetros, o que significa alterar ainda mais a estrutura original. Outra desvantagem do uso de acelerômetros é a pequena intensidade do sinal em baixas frequências que pode ser crítico tendo em vista o ruído operacional da máquina.

Os sensores de deslocamento podem ser posicionados em várias estações do eixo simultaneamente. Tendo em conta as considerações acima, este tipo de sensor é mais adequado.

A excitação e medição das respostas de um disco flexível requer dispositivos mais complexos. Neste trabalho consideraremos apenas máquinas rotativas com discos rígidos.

Conforme já citado anteriormente, inúmeros fatores contribuem para a ocorrência de auto-excitações (desbalanço, desalinhamento, etc.) e conseqüentemente, de vibrações transversais em uma máquina rotativa. A resposta de um rotor a uma excitação aplicada incluirá necessariamente a resposta a estas auto-excitações, prejudicando a estimativa das FRF.

A auto excitação mais importante é o desbalanço, cuja freqüência é a mesma da rotação do eixo. Seu efeito em uma FRF aparece como um pico na freqüência de rotação, podendo ser acompanhado de alguns harmônicos (múltiplos inteiros da freqüência de rotação). Como o ruído em uma FRF causado pelo desbalanço possui uma freqüência fixa (supondo-se que a rotação do eixo é constante), podem ser adotadas algumas estratégias para eliminar este ruído, entre elas :

- Não utilizar os dados correspondentes à freqüência de rotação do eixo na identificação dos parâmetros modais. Pode ser difícil de ser realizado caso a freqüência de rotação esteja muito próxima da freqüência de algum modo [Rogers 89];
- Utilizar médias assíncronas no processamento do sinal de resposta, anulando o sinal na freqüência de rotação [Rogers 89];

Outra particularidade da análise modal em máquinas rotativas é a presença de modos de precessão diretos e retrógrados. Alguns autores desenvolveram formas de excitar distintamente os modos diretos e retrógrados por meio de excitações bidirecionais. Contudo, a formulação de análise modal, mesmo estendida para considerar a não simetria dinâmica das máquinas rotativas não permite distinguir estes modos.

A análise modal complexa foi desenvolvida por Lee e seus colaboradores especialmente para máquinas rotativas. Os vetores reais dos deslocamentos nas direções vertical e horizontal são combinados em um único vetor complexo. Este vetor é considerado juntamente com o seu complexo conjugado, mantendo o número de graus de liberdade do sistema quando descrito por coordenadas reais. As excitações são tratadas da mesma forma. Desta forma são utilizadas excitações e respostas bidirecionais (complexas). As excitações e as respostas podem ser diretas e retrógradas e são definidas funções de resposta em freqüência entre as excitações e as respostas complexas, as funções de resposta em freqüência direcionais, que permitem separar em diferentes FRF os modos diretos e retrógrados identificando-os claramente.

Capítulo 3

Conceitos Básicos da Dinâmica de Rotores

Resumo do Capítulo

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão sobre os fundamentos básicos da dinâmica de rotores. O objetivo é introduzir, qualitativamente, os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes. Para isto, utiliza-se um sistema rotativo bastante simples: o rotor de Jeffcott modelado com dois graus de liberdade. São analisadas as respostas livre e forçada; discute-se o fenômeno da auto centragem; apresenta-se o diagrama de Campbell e o conceito das velocidades críticas. Comparam-se as características das coordenadas reais e complexas na modelagem de sistemas rotativos simples.

3.1. Introdução

De acordo com a definição da ISO, um rotor é um corpo suspenso por um conjunto de suportes ou mancais que permitem-no girar livremente em torno de um eixo fixo no espaço [Genta 99]. Baseado nesta definição, pode-se listar inúmeros sistemas mecânicos que possuem rotores como componentes principais, tais como: bombas hidráulicas, compressores, turbinas, máquinas alternativas, motores elétricos, laminadores entre outros. Se nenhuma ressalva for feita

com relação ao tipo de suportes deste sistema, esta definição permite classificar como rotor até mesmo um veículo espacial que gira em torno de um eixo fixo no espaço. Este trabalho trata somente de rotores com mancais fixos. Será utilizada a denominação genérica de estator para todas as partes estacionárias (não girantes) da máquina.

Os elementos básicos de um rotor são: um eixo conectado a um disco suportado por mancais. Antes de se desenvolver o modelo de uma máquina rotativa, deve-se ter um bom conhecimento sobre as características do sistema a ser estudado bem como do tipo de análise que se deseja realizar. Ewins [Ewins 98] divide a área de análise dinâmica de sistemas rotativos em três grupos:

- dinâmica de rotores: estudo do rotor (eixo + discos rígidos) e seus mancais;
- componentes rotativos: estudo de componentes rotativos flexíveis (discos, palhetas, engrenagens, etc.)
- componentes estacionários: estudo da parte externa da máquina e seus suportes.

Neste trabalho, apenas os problemas de dinâmica de rotores serão considerados. Neste caso, o disco (ou discos) pode (e deve) ser considerado como um corpo rígido e pode ser tratado, matematicamente, como um ponto de massa e inércias polar e transversal concentradas. Se esta hipótese não for válida, ou seja, se o disco se comportar como um corpo flexível dentro da faixa de frequência de estudo, deve-se utilizar as ferramentas da análise de componentes rotativos para modelar este sistema.

Dentro da área de dinâmica de rotores, ainda é necessário fazer uma outra subdivisão que influencia diretamente no modelo a ser adotado para o estudo do sistema rotativo. Esta classificação - apresentada em [Lee 93], por exemplo - está baseada na simetria radial, ou não, do rotor e do estator. Assim, diz-se que o sistema rotativo é:

- Isotrópico se o rotor é axissimétrico e o estator é simétrico,
- Anisotrópico se o rotor é axissimétrico mas o estator é não simétrico,
- Assimétrico se o estator é simétrico mas o rotor é não axissimétrico e
- Geral se o rotor é não axissimétrico e o estator é não simétrico.

Apesar da grande maioria das máquinas rotativas encontradas na prática poderem ser enquadradas nos dois primeiros grupos, existirão situações em que o rotor não poderá ser tratado como sendo axissimétrico. Nestes casos, pode-se mostrar [Ewins 98, Irretier 99 e Genta 99] que, a equação de movimento que descreve o comportamento vibratório da máquina rotativa, escrita no sistema de referência inercial, apresenta matrizes cujos elementos variam periodicamente com o tempo. Este aspecto dificulta consideravelmente a análise dinâmica destes sistemas e exige uma redefinição (ou expansão) dos conceitos de frequência natural e formas modais, normalmente utilizados para sistemas com parâmetros constantes no tempo [Irretier 99]. Contudo, se o estator puder ser considerado simétrico, ou seja, se o sistema rotativo for classificado como assimétrico, ainda tem-se a opção de descrever o comportamento dinâmico do rotor no sistema de coordenadas fixo ao corpo. Neste caso, as equações de movimento voltam a ter parâmetros constantes e podem ser analisadas utilizando as técnicas e conceitos tradicionais de análise modal. A Tabela 3.1 apresenta, resumidamente, a classificação de rotores e as características das equações de movimento nos sistemas de referência inercial e rotativo. Neste trabalho, trata-se apenas dos sistemas rotativos com rotores axissimétricos.

Classificação	Características físicas		Parâmetros da equação de movimento	
	Rotor	Estator	Sistema Inercial	Sistema Rotativo
Isotrópico	Axissimétrico	Simétrico	Invariantes	Invariantes
Anisotrópico	Axissimétrico	Não simétrico	Invariantes	Periódicos
Assimétrico	Não axissimétrico	Simétrico	Periódicos	Invariantes
Geral	Não axissimétrico	Não simétrico	Periódicos	Periódicos

Tabela 3.1 – Classificação dos sistemas rotativos baseado nas características físicas do rotor e do estator e dependência temporal dos parâmetros da equação de movimento.

Existem ainda outros aspectos que devem ser levados em conta antes de se propor um modelo matemático para a máquina rotativa, tais como: características dos mancais e selos, acoplamentos das vibrações longitudinal, transversal e torsional, etc..

Como se sabe, o comportamento vibratório de uma máquina rotativa é função da velocidade de rotação de seu eixo/disco(s). Grande parte dos fenômenos físicos que diferenciam o comportamento dinâmico de um rotor em rotação do de uma estrutura estacionária pode ser observada mesmo nos sistemas rotativos mais simples. Existem diversos fatores que podem provocar estas diferenças mas talvez o mais importante deles seja o efeito giroscópico.

O rotor utiliza a maior parte da energia proveniente do seu acionamento para girar em torno de seu eixo longitudinal. Contudo, uma pequena parcela desta energia é transformada, entre outras coisas, em vibrações transversais. E são estas vibrações transversais de rotação em torno de eixos não coincidentes com o eixo de rotação própria do rotor que causam o surgimento da aceleração de Coriolis e, conseqüentemente, das forças giroscópicas. Este efeito acopla os movimentos do rotor nas direções transversais e sua intensidade é proporcional à velocidade angular do eixo. Isto faz com que as características dinâmicas do rotor (frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais) também variem com a velocidade de rotação.

Os modos de vibração de uma máquina rotativa podem ser descritos por movimentos de precessão nos quais cada ponto do rotor descreve uma órbita elíptica em torno da posição do eixo em equilíbrio estático. O efeito giroscópico faz com que cada modo de vibração do sistema em repouso transforme-se em modos de precessão direta – em que o movimento de precessão do centro do eixo em torno da linha que une os mancais é no mesmo sentido da rotação própria - ou de precessão retrógrada – em que o movimento de precessão do centro do eixo é no sentido oposto ao da rotação própria. Existem casos mais complexos em que os movimentos de precessão ocorrem na direção direta em alguns pontos do rotor e na direção retrógrada em outros [Genta 99]. Contudo, estes casos não serão analisados neste trabalho.

Dispositivos como mancais hidrodinâmicos também podem acoplar movimentos nas duas direções perpendiculares ao eixo de rotação própria e ter suas características de rigidez e amortecimento dependentes da rotação. Além da função óbvia de suportar o rotor, os mancais também podem ser projetados para dissipar a energia do sistema (amortecimento), reduzindo a amplitude das vibrações transversais causadas por imperfeições inerentes à montagem ou construção do rotor, tais como: desbalanço, desalinhamento dos mancais, defeitos em mancais de rolamento, curvatura do eixo entre outras. As características dos mancais influenciam diretamente no formato das órbitas descritas pelas diversas estações do rotor.

De uma forma geral pode-se dizer que um rotor pode sofrer três tipos de vibrações: longitudinais, torsionais e transversais. Em muitos casos, estas vibrações possuem pouco ou nenhum acoplamento entre si e podem ser estudadas separadamente. Neste trabalho considera-se apenas as vibrações transversais do rotor.

Como já foi mencionado, grande parte dos fenômenos que ocorrem em máquinas rotativas podem ser observados mesmo em sistemas bastante simples. A seguir, utiliza-se um rotor de Jeffcott¹ para demonstrar alguns destes fenômenos e introduzir alguns conceitos que serão úteis nos capítulos seguintes. A utilização das coordenadas complexas na modelagem de sistemas rotativos será discutida neste capítulo apenas de forma intuitiva e ilustrativa. Esta ferramenta será desenvolvida com um rigor matemático maior no Capítulo 4. Acredita-se que, desta forma, seja mais simples assimilar os conceitos físicos envolvidos na análise modal complexa de máquinas rotativas.

3.2. Rotor de Jeffcott: Modelo de 2GL

Inicialmente estudar-se-á as vibrações transversais de um rotor de Jeffcott de 2 graus de liberdade. Neste caso, o disco é considerado um ponto material fixo a um eixo sem massa. A rigidez do sistema pode ser considerada como sendo a rigidez dos suportes, do eixo ou da combinação de ambos. Os dois sistemas da Figura 3.1 apresentam os mesmos resultados, contanto que não seja considerado o amortecimento interno do eixo e que o sistema seja axissimétrico [Genta 99].

3.2.1. Sistema Isotrópico

Considera-se inicialmente o problema de vibração livre do rotor de Jeffcott não amortecido. Seja k a rigidez total nas direções y e z . Utilizando-se o sistema de coordenadas mostrado na Figura 3.1 tem-se que as equações de movimento do ponto P são:

$$\begin{aligned}m\ddot{y} + ky &= 0 \\m\ddot{z} + kz &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

¹ A formulação do rotor rígido foi desenvolvida originalmente por Laval embora seja atribuída frequentemente a Jeffcott. Por coerência com as referências bibliográficas consultadas utilizar-se-á neste trabalho a terminologia rotor de Jeffcott.

Cada uma das equações (3.1) equivale à equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade não amortecido. Supondo-se solução harmônica do tipo $e^{j\lambda_n t}$ para cada uma das direções y e z , obtém-se que:

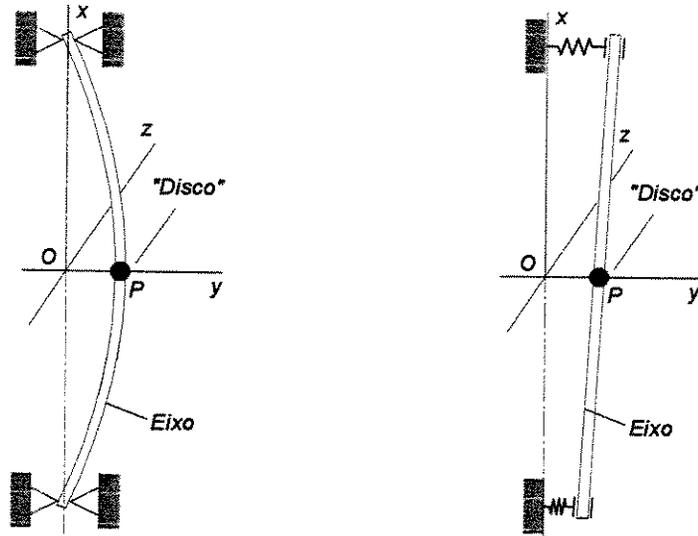


Figura 3.1 - Possíveis representações do rotor de Jeffcott: rotor flexível apoiado sobre mancais rígidos ou rotor rígido apoiado sobre mancais flexíveis.

$$\lambda_n = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.2)$$

Assim, a solução geral das equações (3.1) é:

$$\begin{aligned} y &= Y_1 e^{j\lambda_n t} + Y_2 e^{-j\lambda_n t} \\ z &= Z_1 e^{j\lambda_n t} + Z_2 e^{-j\lambda_n t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação (3.3) diz que o movimento do ponto P é formado pela combinação de dois movimentos harmônicos de mesma frequência ocorrendo nas direções y e z . Estes dois movimentos geram a trajetória do ponto P em torno do eixo que une os mancais. Esta trajetória pode ser elíptica, circular ou retilínea.

Dois aspectos importantes devem ser ressaltados ao analisar as equações (3.3). O primeiro é que λ_n é apenas a frequência natural de dois osciladores harmônicos vibrando em dois planos perpendiculares; e o seu sinal não tem nenhum significado físico. A existência do par complexo conjugado é matematicamente necessária para formação do movimento harmônico, como pode

ser facilmente verificado através das relações de Euler. O segundo aspecto importante é que o vetor $e^{j\lambda_n t}$, utilizado para descrever a solução (3.3), é um vetor rotativo no plano real-imaginário (Argand) e somente as componentes reais da solução (3.3) tem significado físico.

O movimento do rotor de Jeffcott também pode ser descrito utilizando-se coordenadas complexas. Para tanto, considera-se o eixo y como sendo o eixo real e o eixo z , o imaginário. Assim, pode-se definir que

$$p = y + iz. \quad (3.4)$$

Fisicamente, o vetor p pode ser interpretado como um vetor que gira no plano yz e que descreve a posição do ponto P a cada instante de tempo. Utilizando-se a definição (3.4), pode-se rescrever o sistema de equações (3.1) na forma:

$$m\ddot{p} + kp = 0. \quad (3.5)$$

Supondo novamente uma solução harmônica do tipo $p = Pe^{j\lambda_n t}$, obtém-se que a solução geral será da forma

$$p = P_1 e^{j\lambda_n t} + P_2 e^{-j\lambda_n t}, \quad (3.6)$$

sendo que λ_n é dado pela equação (3.2).

Apesar dos resultados obtidos utilizando-se as coordenadas reais ou complexas não dependerem das equações utilizadas (equações (3.1) e (3.5)), cada uma destas formulações ressaltam aspectos diferentes do sistema e os resultados não são exatamente equivalentes. A solução proposta para a equação (3.5) diz que o vetor p gira, no plano yz , com uma velocidade angular λ_n . Assim, ao contrário do que acontece com a formulação nas coordenadas reais em que λ_n é apenas a frequência natural dos osciladores harmônicos, aqui ela representa a velocidade real com que o ponto P descreve o seu movimento de precessão em torno da linha que une os mancais. Ainda mais: o sinal de λ_n indica o sentido em que este movimento de precessão ocorre.

Da equação (3.6) percebe-se que a vibração livre do ponto P será uma composição de dois movimentos circulares, com a mesma velocidade angular, ocorrendo em direções opostas: o primeiro na mesma direção da rotação própria do eixo (precessão direta) e o outro na direção oposta (precessão retrógrada). Em todo o desenvolvimento deste trabalho, a velocidade de rotação própria do rotor será considerada positiva.

As características do movimento de precessão (forma e direção da órbita) dependerão das condições iniciais. Ou, apresentando-se a questão sob um ponto de vista mais matemático, pode-se dizer que a relação entre $|P_1|$ e $|P_2|$ determina a direção do movimento de precessão bem como a forma da órbita. Assim:

- se $|P_1| > |P_2|$ o ponto P descreve um movimento de precessão direta de órbita elíptica,
- se $|P_1| < |P_2|$ o movimento é de precessão retrógrada e a órbita é elíptica,
- se $|P_1| = |P_2|$ o movimento é retilíneo,
- se $|P_1| \neq 0$ e $|P_2| = 0$ o movimento é de precessão direta e a órbita é circular e
- se $|P_2| \neq 0$ e $|P_1| = 0$ o movimento é de precessão retrógrada e a órbita é circular.

Baseado nestes resultados pode-se concluir claramente que o primeiro termo do lado direito da equação (3.6) representa um componente de precessão direta e o segundo, um componente de precessão retrógrada. O movimento completo é circular.

Percebe-se assim que uma das grande vantagens do uso das coordenadas complexas no estudo da dinâmica de rotores é a possibilidade de se identificar facilmente a direção dos movimentos de precessão, tanto no caso da resposta livre como também da resposta forçada.

Uma representação mais próxima do que acontece na prática pode ser obtida considerando que o ponto P, que é o centro de gravidade do rotor, não mais coincide com o centro geométrico do eixo, o ponto C. A Figura 3.2 ilustra esta nova configuração do sistema rotativo. A distância entre o centro de massa P e o centro geométrico do disco C é chamada de excentricidade. O ponto O é definido pela intersecção da linha que une os dois mancais e o plano do disco. Apesar da excentricidade ε ser pequena, ela causa o desbalanceamento estático $m\varepsilon$ que afeta significativamente o comportamento dinâmico do sistema.

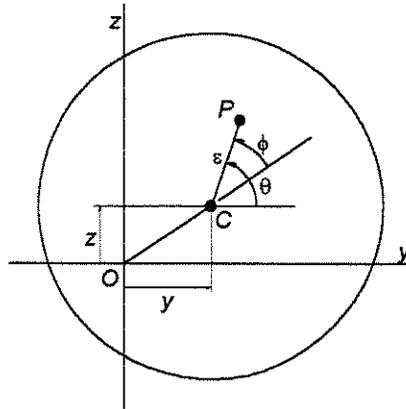


Figura 3.2 – Esquema do rotor de Jeffcott desbalanceado.

Assumindo-se que o ângulo θ seja conhecido, o sistema continua sendo de dois graus de liberdade e os deslocamentos do ponto P podem ser expressos em função dos deslocamentos y e z do ponto C através das relações:

$$\begin{aligned} y_P &= y + \varepsilon \cos(\theta) \\ z_P &= z + \varepsilon \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

As equações de movimento do eixo podem ser facilmente obtidas através da equação de Lagrange ou de Newton. Assim, considerando que a rotação do rotor é constante ($\dot{\theta} = \omega$), obtêm-se as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + ky &= m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t) \\ m\ddot{z} + kz &= m\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

O sistema homogêneo associado é o mesmo descrito pelas equações (3.1) e sua solução já foi apresentada nas equações (3.2) e (3.3). Para obter a solução particular, assume-se que:

$$y = Y \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad z = Z \sin(\omega t). \quad (3.9)$$

Derivando duas vezes as expressões (3.9) e substituindo nas equações (3.8) obtém-se:

$$Y = \frac{m\varepsilon\omega^2}{k - \omega^2} \quad \text{e} \quad Z = \frac{m\varepsilon\omega^2}{k - \omega^2} \quad (3.10)$$

Ou

$$Y = \varepsilon \frac{\omega^2}{\omega_{cr} - \omega^2} \quad \text{e} \quad Z = \varepsilon \frac{\omega^2}{\omega_{cr} - \omega^2}, \quad (3.11)$$

sendo $\omega_{cr} = \sqrt{k/m}$.

Analisando-se as relações (3.11) observa-se que, variando a velocidade de rotação do rotor de zero até valores muito altos (acima de ω_{cr}), a amplitude do movimento do rotor tende matematicamente para infinito, nas duas direções, à medida que $\omega \rightarrow \omega_{cr}$. Esta velocidade é chamada de velocidade crítica de flexão do rotor [Genta 99].

As equações (3.9) e (3.11) podem ser combinadas para obter a órbita que o ponto C descreve em torno do eixo que une os mancais. Contudo, sem fazer este tratamento adicional nos resultados fica difícil prever se o sentido com este movimento de precessão ocorre é coincidente (precessão direta) ou contrário (precessão retrógrada) à rotação própria do rotor.

Multiplicando-se a segunda equação em (3.8) por $j = \sqrt{-1}$ e adicionando-se à primeira, utilizando-se a relação (3.4) e as relações de Euler, obtém-se a equação do sistema nas coordenadas complexas:

$$m\ddot{p} + kp = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t}. \quad (3.12)$$

Supondo-se uma solução particular da forma $p = P_1 e^{j\omega t}$, conclui-se que:

$$P_1 = \varepsilon \frac{\omega^2}{\omega_{cr} - \omega^2} \quad (3.13)$$

Comparando-se as equações (3.13) e (3.6) nota-se claramente que a resposta ao desbalanço de um rotor de Jeffcott isotrópico é um movimento de precessão circular direta ($|P_1| \neq 0$ e $|P_2| = 0$), no plano yz, de velocidade igual à rotação do rotor. Uma vez que P_1 é real, os pontos O, C e P permanecem sempre alinhados (ângulo $\phi = 0^\circ$ ou $\phi = 180^\circ$). Como era de se esperar, a

condição de velocidade crítica de flexão do rotor é a mesma obtida utilizando-se as coordenadas reais.

Costuma-se definir duas faixas de velocidades do rotor: a primeira é chamada de sub-crítica e vai de zero até $\omega < \omega_{cr}$; a segunda é denominada super-crítica e inicia quando $\omega > \omega_{cr}$. Na faixa sub-crítica, quando $\omega \rightarrow \omega_{cr}$, a amplitude do movimento tende a infinito. Na faixa super-crítica, aumentando-se indefinidamente a velocidade de rotação ($\omega \rightarrow \infty$), a amplitude de vibração do rotor tende para o valor $-\varepsilon$. Fisicamente, isto significa que, com o aumento da rotação, o rotor tende a girar em torno do seu centro de massa P e não em torno do seu centro geométrico C. Este fenômeno é chamado de auto-centragem.

A introdução de amortecimento viscoso externo ao rotor é bastante simples. A equação de movimento para a resposta ao desbalanço do sistema amortecido, em coordenadas complexas, é:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} \quad (3.14)$$

e a equação do problema homogêneo associado é:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = 0 \quad (3.15)$$

Assumindo uma solução do tipo:

$$p = Pe^{st} \quad (3.16)$$

obtem-se a seguinte equação característica:

$$ms^2 + sc + k = 0, \quad (3.17)$$

cujas raízes têm a forma (considerando o sistema sub amortecido):

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d, \quad (3.18)$$

sendo $\xi = c/2\sqrt{mk}$ o fator de amortecimento, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ a frequência natural não amortecida e $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a frequência natural amortecida.

Assim, da equação (3.16), conclui-se que:

$$p = e^{-\xi\omega_n} (P_1 e^{j\omega_d t} + P_2 e^{-j\omega_d t}), \quad (3.19)$$

Como no caso do sistema não amortecido, o movimento de precessão do centro do rotor pode ser direto ou retrógrado, elíptico, circular ou retilíneo, dependendo das condições iniciais. Neste caso, contudo, os movimentos são amortecidos e decaem com o passar do tempo.

Supondo uma solução particular do tipo apresentado em (3.13), obtém-se que:

$$P_1 = \frac{m\varepsilon\omega^2}{(-m\omega^2 + j\omega c + k)} = \frac{\varepsilon\omega^{*2}}{(1 - \omega^{*2}) + j2\xi\omega^*} \quad (3.20)$$

Pode-se perceber através da equação (3.20) que a introdução do amortecimento não altera a forma (circular) ou a direção (precessão direta) da resposta ao desbalanceo do rotor. Contudo, a amplitude P_1 não é mais real, o que significa que o deslocamento do ponto C e a força externa aplicada (desbalanceo) não são mais, necessariamente, colineares. A Figura 3.3 ilustra a posição relativa dos pontos O, C e P para velocidades de rotação sub críticas, crítica e super críticas.

Facilmente calcula-se a amplitude e o ângulo de fase de P_1 :

$$\frac{|P_1|}{\varepsilon} = \frac{\omega^{*2}}{\sqrt{(1 - \omega^{*2})^2 + (2\xi\omega^*)^2}} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega^*}{1 - \omega^{*2}}. \quad (3.21)$$

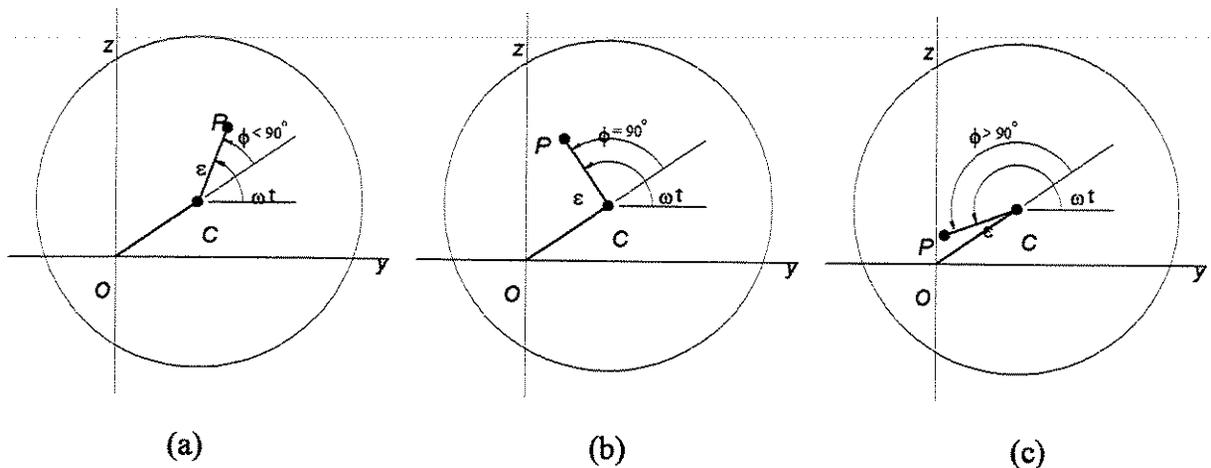


Figura 3.3 - Posições relativas do centro geométrico do disco, C, e do centro de massa, P, em função da rotação: (a) na faixa sub crítica, (b) na velocidade crítica e (c) na faixa super crítica.

Analisando-se a equação (3.21) pode-se concluir que a introdução do amortecimento não altera o fenômeno da auto-centragem. Derivando-se a primeira das equações (3.21) e igualando-se o resultado a zero obtém-se a velocidade crítica do rotor em função do amortecimento:

$$\omega_{cr} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}} \quad \text{para } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.22)$$

Como já foi mencionado, o desbalanceo (excitação síncrona) excita apenas o modo de precessão direta do rotor, para o caso de um rotor de Jeffcott isotrópico (amortecido ou não). Considere agora o caso de uma excitação harmônica não síncrona como a proposta por Bently e Muszynska [Bently 86]. Neste trabalho, os autores propõem a utilização de um dispositivo composto de uma polia desbalanceada montada no eixo do rotor e conectada por uma correia a um motor com controle de velocidades independente do acionamento do rotor. Sendo ω a rotação do rotor e ω_e a velocidade de rotação do dispositivo de excitação, pode-se escrever a relação que $\omega_e = \beta\omega$. Considerando o sistema não amortecido e supondo uma resposta ao desbalanceo do tipo

$$p = P e^{j\beta\omega t}, \quad (3.23)$$

obtém-se, facilmente, que a resposta do rotor de Jeffcott a esta excitação harmônica assíncrona é

$$p = \frac{m\varepsilon\beta^2\omega^2}{(-m\beta^2\omega^2 + k)} e^{j\beta\omega t} \quad (3.24)$$

Analisando-se a equação (3.24), percebe-se claramente que o rotor vai descrever uma órbita circular no seu movimento de precessão, cuja direção é definida pela direção da força de excitação assíncrona. Assim:

- se $\beta > 0$ (excitação assíncrona direta): o rotor apresenta um movimento de precessão circular direta ($P = P_1$ e $P_2 = 0$);
- se $\beta < 0$ (excitação assíncrona retrógrada): o rotor apresenta um movimento de precessão circular retrógrada ($P = P_2$ e $P_1 = 0$).

Logo, percebe-se que esta técnica de excitação é capaz de excitar os modos de precessão direta e retrógrada do rotor. Este resultado pode ser generalizado para sistemas rotativos isotrópicos mais complexos, mesmo aqueles em que o efeito giroscópico é significativo. A explicação para este fato é relativamente simples: a excitação harmônica não síncrona (ou síncrona, se $\beta = 1$) gerada pelo dispositivo, tem a mesma forma e frequência de apenas um dos modos e é ortogonal ao outro modo. Portanto, somente um dos modos será excitado por esta força. É importante ressaltar que este fato não se aplica para o caso de rotores anisotrópicos [Ewins 98], como será visto a seguir.

3.2.2. Sistema Anisotrópico

Analisa-se agora o rotor de Jeffcott anisotrópico, ou seja, um rotor axissimétrico apoiado sobre mancais com rigidez diferentes nas duas direções transversais y e z . Neste plano yz , o diagrama polar de rigidez dos suportes é uma elipse, chamada de elipse de elasticidade [Genta 99]. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que os eixos y e z coincidem com os eixos principais desta elipse. Neste caso, a equação de movimento do rotor desbalanceado, operando com velocidade de rotação ω constante, pode ser expressa na forma:

$$m\ddot{y} + k_y y = m\epsilon\omega^2 \cos\omega t \quad (3.25)$$

$$m\ddot{z} + k_z z = m\epsilon\omega^2 \sin\omega t$$

Ao contrário do caso isotrópico, as equações de movimento em cada uma das direção já não são idênticas, ou seja, já não possuem os mesmos coeficientes. Resolvendo o sistema homogêneo associado obtém-se duas frequências naturais diferentes:

$$\lambda_y = \pm\sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad \text{e} \quad \lambda_z = \pm\sqrt{\frac{k_z}{m}}. \quad (3.26)$$

Assim, a solução geral do sistema homogêneo é:

$$y = Y_1 e^{j\lambda_y t} + Y_2 e^{-j\lambda_y t} \quad \text{e} \quad z = Z_1 e^{j\lambda_z t} + Z_2 e^{-j\lambda_z t}. \quad (3.27)$$

Percebe-se que, como os parâmetros modais do sistema não são dependentes da rotação, as duas velocidades críticas do rotor serão coincidentes com as suas frequências naturais. Observando-se as equações (3.27) verifica-se que é bastante difícil prever qual é a órbita e a direção dos movimento de precessão utilizando-se as coordenadas reais.

Para se poder estudar a resposta livre deste sistema utilizando coordenadas complexas não basta apenas utilizar a relação (3.4), como ocorreu no caso isotrópico. É preciso, antes, definir os seguintes parâmetros [Genta 99]:

$$k_m = \frac{(k_y + k_z)}{2} \quad \text{e} \quad k_d = \frac{(k_y - k_z)}{2}. \quad (3.28)$$

Assim, a equação de movimento em coordenadas complexas pode ser escrita na forma:

$$m\ddot{p} + k_m p + k_d \bar{p} = 0, \quad (3.29)$$

sendo \bar{p} o complexo conjugado de p .

No caso isotrópico, foi proposta uma solução do tipo $p = Pe^{j\lambda_n t}$. Contudo, esta solução não é válida para o caso de rotor anisotrópico pois ela não é capaz de descrever completamente o comportamento dinâmico do sistema. Assim, propõe-se uma solução da forma:

$$p = P_1 e^{j\lambda_n t} + P_2 e^{-j\lambda_n t} \quad (3.30)$$

O motivo pelo qual foi escolhida uma solução deste tipo será descrito com mais detalhes no Capítulo 4.

Substituindo-se a solução proposta (3.30) e seu complexo conjugado na equação de movimento, obtém-se o seguinte sistema:

$$\left(-\lambda^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_m & k_d \\ k_d & k_m \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

Resolvendo-se o sistema (3.31) pode-se facilmente encontrar as frequências naturais apresentadas na equação (3.26). Substituindo-se estes valores das frequências naturais na solução proposta (3.30) e agrupando os termos obtém-se uma solução geral na forma:

$$p = P_{F1} e^{j\lambda_y t} + P_{B1} e^{-j\lambda_y t} + P_{F2} e^{j\lambda_z t} + P_{B2} e^{-j\lambda_z t}. \quad (3.32)$$

Substituindo-se os valores de λ_y e λ_z na equação (3.31) obtém-se as relações $P_1/\bar{P}_2 = -1$ e $P_1/\bar{P}_2 = 1$, respectivamente. É fácil concluir que, neste caso, $P_{B1}/\bar{P}_{B2} = -1$ e

$P_{F1}/P_{F2} = 1$. Assim, baseado no que foi apresentado anteriormente para o caso isotrópico, conclui-se que o movimento do rotor nos dois modos será retilíneo pois $|P_{B1}| = |P_{B2}|$ - para o primeiro modo (retrogrado) - e $|P_{F1}| = |P_{F2}|$ - para o segundo modo (direto).

O comportamento dinâmico do rotor de Jeffcott, apoiado sobre mancais anisotrópicos e sujeito a força de desbalanço, pode ser estudado utilizando-se as coordenadas complexas. Neste caso, equação de movimento assume a forma:

$$m\ddot{p} + k_m p + k_d \bar{p} = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} \quad (3.33)$$

Pelos mesmos motivos apresentados anteriormente, propõe-se um solução do tipo:

$$p = P_1 e^{j\omega t} + P_2 e^{-j\omega t} \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) e seu complexo conjugado na equação (3.33), chega-se a:

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k_m)P_1 + k_d \bar{P}_2 &= m\varepsilon\omega^2 \\ (-m\omega^2 + k_m)P_2 + k_d \bar{P}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Facilmente pode-se calcular as amplitudes das componentes direta e retrograda:

$$P_1 = \frac{(k_m - m\omega^2)m\varepsilon\omega^2}{(k_y - m\omega^2)(k_z - m\omega^2)} \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{-k_d m\varepsilon\omega^2}{(k_y - m\omega^2)(k_z - m\omega^2)} \quad (3.36)$$

Portanto, a resposta ao desbalanço é dada por:

$$p = \frac{m\varepsilon\omega^2}{(k_y - m\omega^2)(k_z - m\omega^2)} \left[(k_m - m\omega^2)e^{j\omega t} - k_d e^{-j\omega t} \right] \quad (3.37)$$

A análise das equações (3.36) e (3.37) fornece informações interessantes sobre o comportamento de um rotor anisotrópico sujeito à força harmônica síncrona do desbalanço:

- como era de se esperar, quando as rigidez nas duas direções são iguais, P_1 iguala-se ao valor apresentado na equação (3.13) - rotor isotrópico - e P_2 torna-se igual a zero.

- a amplitude da resposta ao desbalanço tenderá para o infinito em duas condições: quando a velocidade de rotação se aproximar de λ_y e de λ_z . Isto é facilmente obtido fazendo-se o denominador da equação (3.37) igual a zero. Logo, o sistema possui duas velocidades críticas.
- a componente retrógrada da resposta ao desbalanço só será nulo quando $k_d = 0$, ou seja, quando os suportes forem isotrópicos. Portanto, quando o rotor é não isotrópico, a força de desbalanço excita o modo de precessão retrógrada. Quando a velocidade de rotação do rotor for $\omega = \lambda_m = \sqrt{k_m/m}$, a contribuição do modo de precessão direta na resposta ao desbalanço será nulo. Neste caso, o sistema apresentará apenas um movimento de precessão retrógrada e a órbita será circular. Se $k_d \approx 0$, isto é, se os suportes forem levemente anisotrópicos, a componente retrógrada da resposta será muito pequena.
- como já foi mencionado, a direção do movimento de precessão do centro geométrico do disco é definida pelas amplitudes P_1 e P_2 das componentes direta e retrógrada, respectivamente. Para ilustrar este fato, considere um rotor com as seguintes características: $m = 1,0\text{kg}$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}\text{ m}$, $k_y = 1 \times 10^5\text{ N/m}$ e $k_z = 2 \times 10^4\text{ N/m}$; $\lambda_z = 141,42\text{rad/s}$, $\lambda_y = 316,23\text{rad/s}$ e $\lambda_m = 244,95\text{rad/s}$. A Figura 3.4 apresenta a variação da razão $|P_1|/|P_2|$ em função da rotação da máquina. Nota-se claramente que o movimento do rotor será de precessão retrógrada somente entre as duas velocidades críticas ($|P_1|/|P_2| < 1$). Com excessão da condição em que a rotação do rotor é igual a uma das frequências naturais λ_y e de λ_z , em que a órbita é retilínea, ou igual a λ_m , cuja órbita é circular, o ponto C sempre descreverá uma trajetória elíptica, seja de precessão direta ou retrógrada.

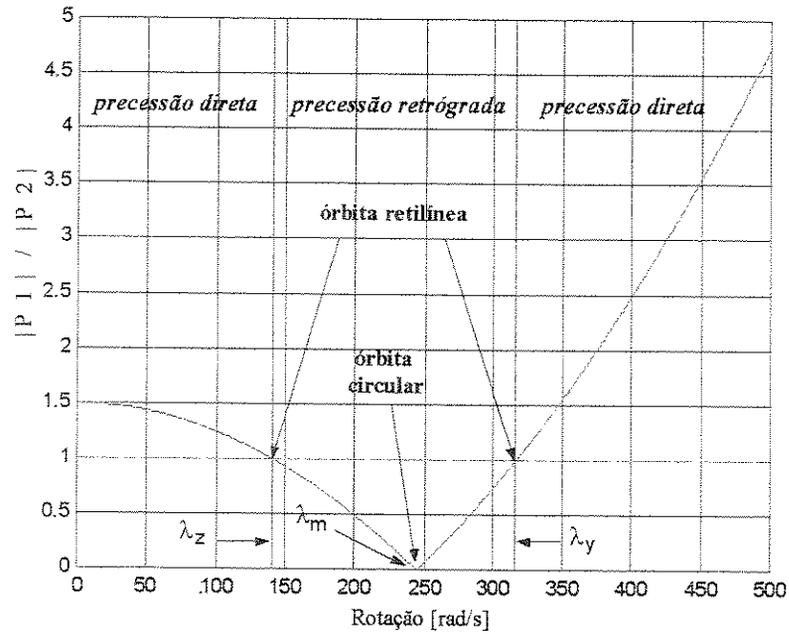


Figura 3.4 – Variação da relação entre as amplitudes das componentes direta e retrógrada em função da velocidade de rotação do rotor.

A Figura 3.5 mostra a resposta ao desbalanceamento adimensional ($|p|/e$) em função da rotação. Aqui fica claro a existência das duas velocidades críticas. Percebe-se também que o fenômeno da

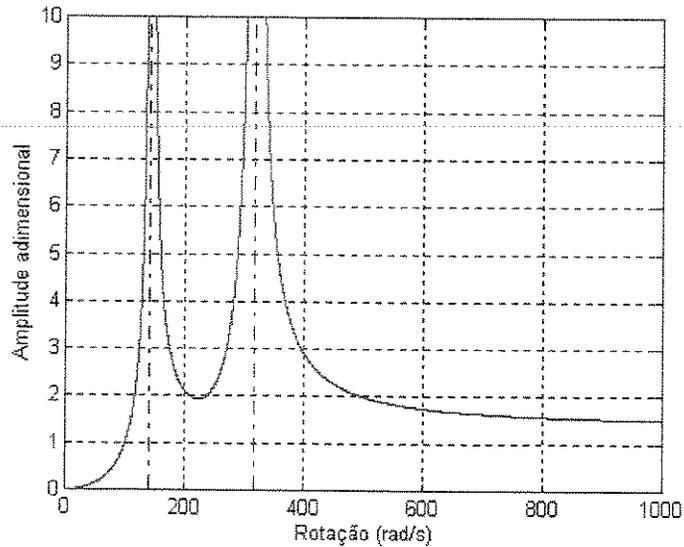


Figura 3.5 - Resposta ao desbalanceamento de um rotor de Jeffcott em suportes anisotrópicos.

auto centragem ocorre neste sistema. Da Figura 3.4, nota-se que a componente de precessão direta tem amplitude crescente na faixa de rotações supercríticas, quando comparada com a

componente de precessão retrógrada. Assim, o movimento de precessão do rotor, em altas velocidades, tenderá a ser circular, no mesmo sentido da rotação própria e de raio ε .

A identificação da forma das órbitas e da direção dos movimentos de precessão de cada seção do rotor é importante porque elas fornecem informações valiosas sobre o tipo de tensões a que o eixo está submetido. Analisando-se o comportamento vibratório do eixo a partir de um sistema de coordenadas fixo ao rotor, pode-se dizer que:

- se o rotor descreve um movimento de precessão direta com órbita circular, o eixo não sofre alteração do módulo nem da direção das tensões internas pois, para um observador neste sistema, o eixo não vibra; ele apresenta uma deformação fixa.
- se o rotor descreve um movimento de precessão direta com órbita elíptica, as tensões internas do eixo sofrem alteração de módulo mas não de direção - as tensões de tração e compressão não se alternam durante o movimento do rotor.
- se o rotor descreve um movimento de precessão retrógrada, as tensões internas do eixo sofrem alteração de módulo e de direção - as tensões no eixo se alternam em compressão e tração. Esta é a situação mais crítica para o rotor pois pode levar o eixo a uma ruptura prematura por fadiga.

A introdução de amortecimento externo pode ser feita definido-se os parâmetros c_m e c_d de maneira análoga a k_m e k_d :

$$c_m = (c_y + c_z)/2 \quad \text{e} \quad c_d = (c_y - c_z)/2. \quad (3.38)$$

Assim, a equação de movimento do rotor desbalanceado, em coordenadas complexas, será:

$$m\ddot{p} + c_m\dot{p} + c_d\dot{\bar{p}} + k_m p + k_d \bar{p} = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} \quad (3.39)$$

Supondo novamente uma solução do tipo apresentado na equação (3.34) e substituindo-a em (3.39), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + j\omega c_m + k_m)P_1 + (j\omega c_d + k_d)\bar{P}_2 &= m\varepsilon\omega^2 \\ (-m\omega^2 + j\omega c_m + k_m)P_1 + (j\omega c_d + k_d)\bar{P}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Resolvendo-se o sistema (3.40) e desenvolvendo os resultados obtidos, chega-se às seguintes expressões para as amplitudes das componentes direta e retrógrada:

$$P_1 = \frac{(k_m + j\omega c_m - m\omega^2)m\epsilon\omega^2}{(k_y + j\omega c_y - m\omega^2)(k_z + j\omega c_z - m\omega^2)} \text{ e } \bar{P}_2 = \frac{-(j\omega c_d + k_d)m\epsilon\omega^2}{(k_y + j\omega c_y - m\omega^2)(k_z + j\omega c_z - m\omega^2)}. \quad (3.41)$$

Substituindo-se os valores de P_1 e P_2 na equação (3.34), obtém-se a equação que descreve a resposta ao desbalanço do rotor de Jeffcott amortecido. Nota-se que, se o amortecimento externo for nulo, as expressões apresentadas em (3.41) reduzem-se àquelas mostradas na equação (3.36).

Com o intuito de analisar a influência do amortecimento no comportamento do rotor de Jeffcott quando sujeito à força de desbalanço, estudou-se um sistema com as mesmas características daquele utilizado anteriormente, no qual foi adicionado amortecimento externo nas direções y e z . As Figuras 3.6 apresentam a relação entre os módulos das componentes de precessão direta e retrógrada em função da rotação e do nível de amortecimento. Em cada um dos casos apresentados os valores adotados para c_y foram: 0, 25, 50, 100, 250 e 500Ns/m. Os valores de fatores de amortecimento na direção y correspondentes são apresentados na primeira coluna da tabela incluída em cada uma das Figuras 3.6. Manteve-se uma relação entre os amortecimentos nas direções y e z do tipo $c_z = \alpha c_y$. As Figuras 3.6(a), (b) e (c) correspondem a valores de α iguais a 0,2, 0,6 e 0, respectivamente. A segunda coluna das tabelas incluídas em cada uma destas figuras representa os fatores de amortecimento na direção z . Baseado nestas figuras, pode-se tirar algumas conclusões interessantes:

- a introdução do amortecimento externo provoca uma diminuição da faixa de rotações em que o rotor descreve um movimento de precessão retrógrada. Esta faixa será tanto menor quanto maior for o amortecimento do sistema.
- se o amortecimento externo for grande o suficiente, a força de desbalanço não será mais capaz de excitar o movimento de precessão retrógrada. Assim, em qualquer rotação, o movimento do centro geométrico do rotor será de precessão direta. Neste caso, a órbita descrita pelo ponto C nunca será retilínea pois $|P_1|/|P_2| \neq 1$ para qualquer valor de ω .
- a condição em que o rotor descreve um movimento de precessão com órbita circular deixará de existir se estiver presente amortecimento no sistema, por menor que seja ele.

- contudo, o fenômeno da auto centragem ainda ocorre – condição na qual a órbita tende para um movimento circular – mas esta tendência será cada vez mais lenta a medida que se aumenta o amortecimento externo.
- uma situação interessante ocorre quando o sistema é amortecido em apenas uma das direções. Um caso em que $c_z = 0$ está ilustrado na Figura 3.6(c). Percebe-se que, nesta situação, a introdução do amortecimento externo não provoca uma diminuição da faixa em que ocorre movimento de precessão retrógrada. Aumentar muito o amortecimento em apenas uma das direções faz com que o sistema tenda a apresentar apenas movimento retilíneo pois $|P_1|/|P_2| \approx 1$ para qualquer valor de rotação. A explicação física para este fato é bastante simples: quando se aumenta o amortecimento em uma determinada direção (y , por exemplo), aumenta-se também a resistência ao movimento do sistema nesta direção. Isto faz com que a amplitude da vibração em y seja muito menor do que aquela observada na direção z . Portanto, se o nível de amortecimento for muito elevado, o sistema vibrará, predominantemente, em z , num movimento retilíneo.

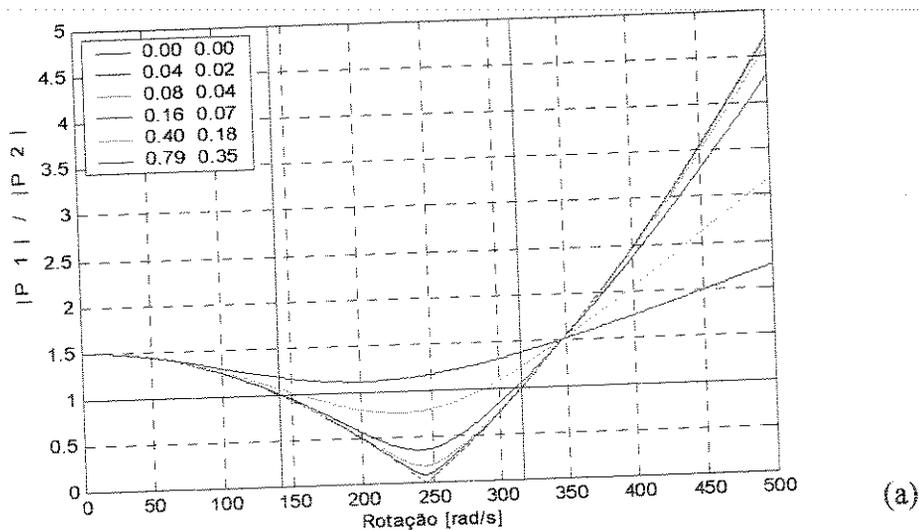
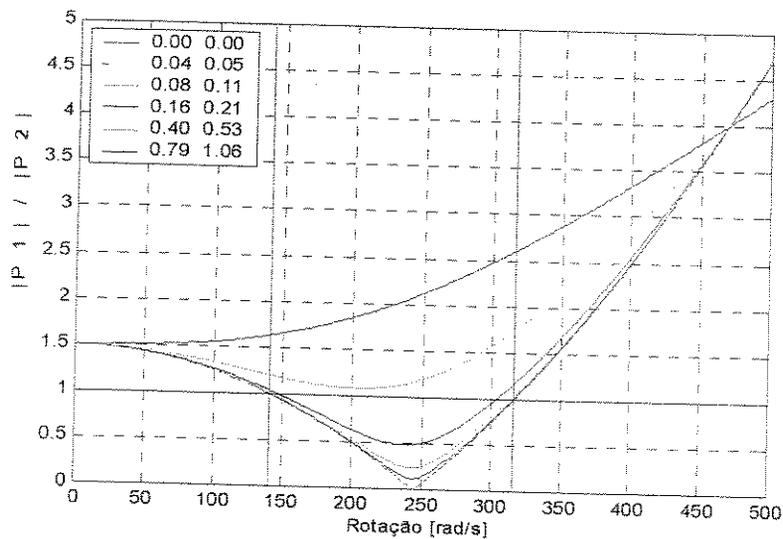
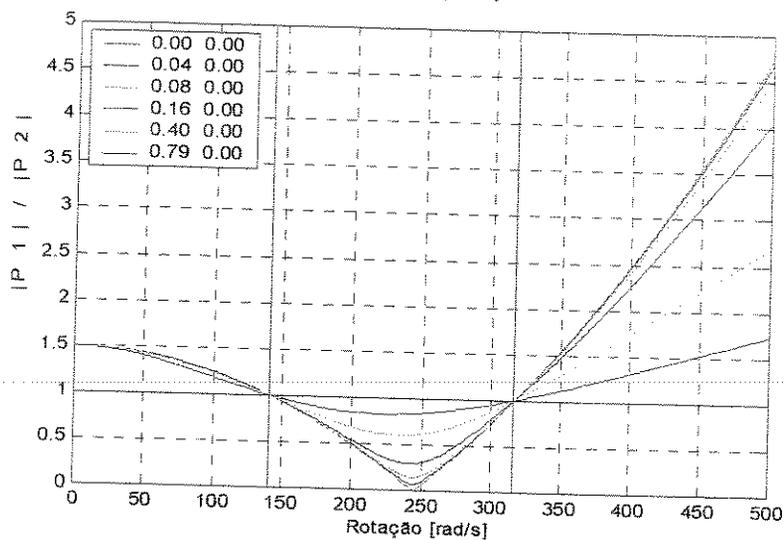


Figura 3.6 – Variação da relação entre as amplitudes das componentes direta e retrógrada em função da velocidade de rotação do rotor: (a) $c_y = 0,2c_z$, (b) $c_y = 0,6c_z$ e (c) $c_z = 0$.



(b)



(c)

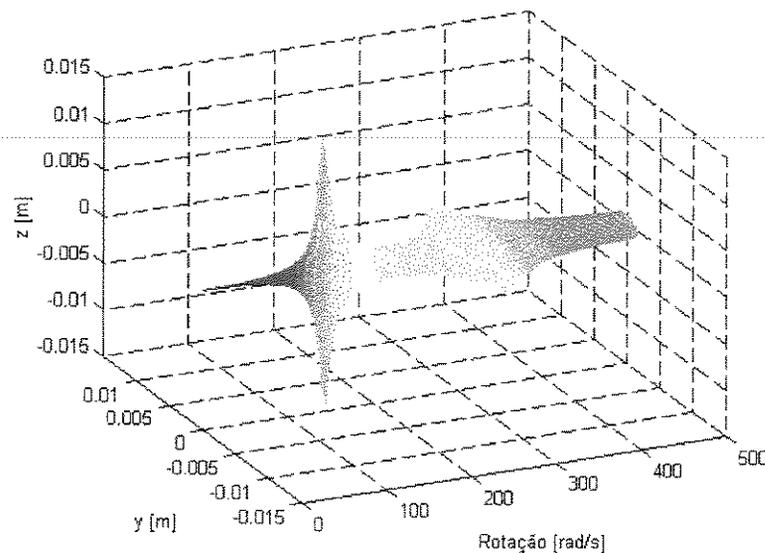
Figura 3.6 (cont) – Variação da relação entre as amplitudes das componentes direta e retrógrada em função da velocidade de rotação do rotor: (a) $c_y = 0,2c_z$, (b) $c_y = 0,6c_z$ e (c) $c_z = 0$.

A Figura 3.7 ilustra a resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcott com amortecimento externo. O sistema simulado é o mesmo utilizado nas análises precedentes. Os valores de amortecimento utilizados nas Figuras 3.7(a)-(d) são: $c_y = 50\text{Ns/m}$ e $c_z = 10\text{Ns/m}$. Na Figura 3.7(a), apresenta-se a órbita do movimento de precessão para cada valor de velocidade de rotação. Este gráfico é denominado tubo orbital [Genta 99].

Percebe-se, através das Figuras 3.7(b) e (c), que, devido ao desacoplamento dos movimentos nas direções y e z , cada uma das velocidades críticas só pode ser observada em uma das direções.

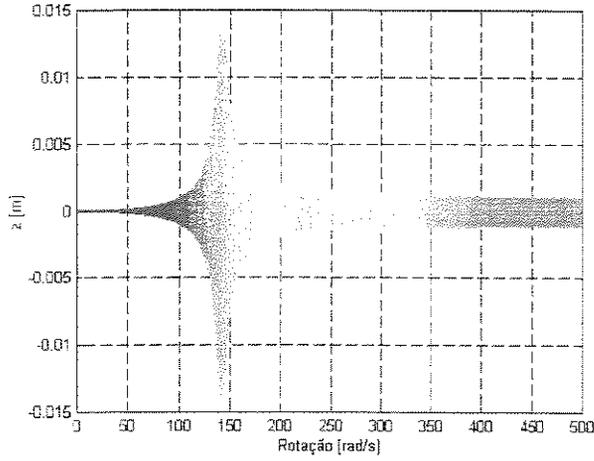
As Figuras 3.7(d) e (e) ressaltam um aspecto importante da introdução de amortecimento externo a um sistema rotativo anisotrópico. Estas figuras representam a projeção do tubo orbital no plano yz . Esta projeção é chamada de vista orbital. Os valores de amortecimento utilizados para a obtenção dos resultados apresentados nas Figura 3.7(d) e (e) são: (d) $c_y = 50\text{Ns/m}$ e $c_z = 10\text{Ns/m}$; (e) $c_y = 100\text{Ns/m}$ e $c_z = 60\text{Ns/m}$. Através destas figuras nota-se claramente que, nas velocidades críticas, a amplitude do movimento do rotor é limitada e os eixos principais da órbita elíptica do movimento de precessão não estão exatamente alinhados com os eixos de elasticidade do suporte. Comparando-se as Figuras 3.7(d) e (e) percebe-se que quanto maior o amortecimento do sistema, maior será esta inclinação.

Neste capítulo, estudou-se o comportamento dinâmico de uma rotor de Jeffcott através de um modelo de 2 graus de liberdade. Considerou-se o rotor como sendo apenas um ponto de massa, e portanto desprezou-se o efeito dos momentos de inércia sobre as características vibratórias do rotor. Na verdade, estes momentos de inércia podem influenciar significativamente o comportamento dinâmico da máquina rotativa uma vez que eles são responsáveis pelo surgimento dos momentos giroscópicos, que fazem com que as frequências naturais de flexão passem a ser dependentes da rotação do rotor. No capítulo seguinte, estuda-se o comportamento do rotor de Jeffcott através de um modelo de 4GL e considera-se o efeito das inércias de rotação.

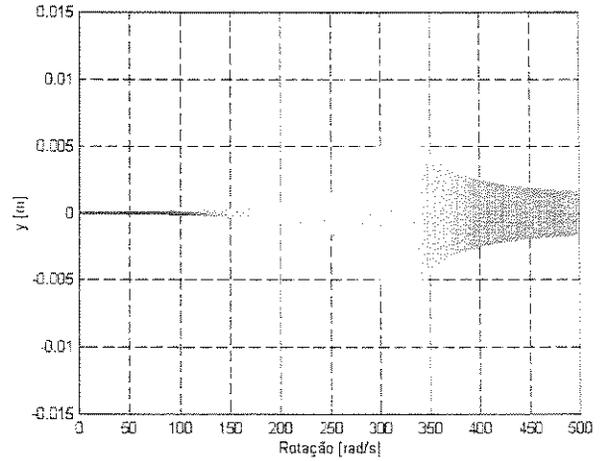


(a)

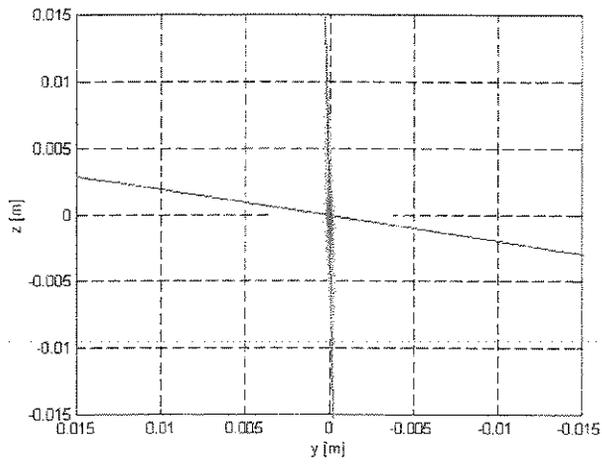
Figura 3.7 – Resposta ao desbalanço do rotor anisotrópico de Jeffcott amortecido: (a) tubo orbital; (b) e(c) projeções dos deslocamentos nos planos ωz e ωy ; (d) e (e) vistas orbitais.



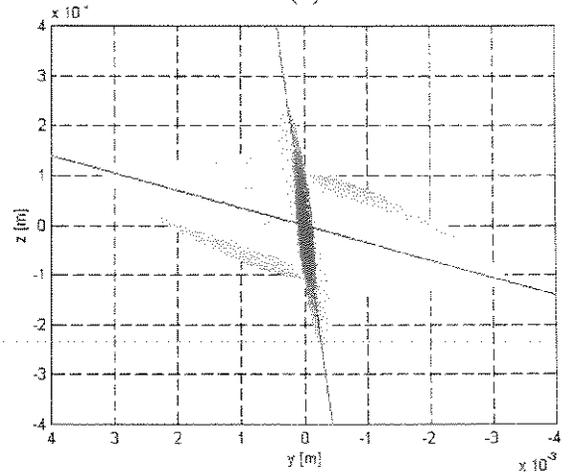
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 3.7 (cont)– Resposta ao desbalanceamento do rotor anisotrópico de Jeffcott amortecido: (a) tubo orbital; (b) e(c) projeções dos deslocamentos nos planos ωz e ωy ; (d) e (e) vistas orbitais.

Capítulo 4

Análise Modal de Máquinas Rotativas

Resumo do capítulo

Neste capítulo desenvolve-se, sucintamente, a formulação tradicional de análise modal para estruturas estacionárias e máquinas rotativas. São comentadas as diferenças entre estes dois sistemas e as suas implicações na análise modal analítica e experimental. Em seguida apresenta-se a formulação da análise modal complexa para máquinas rotativas. Introduce-se o conceito de sub-modos diretos e retrógrados. Apresenta-se a formulação da Função de Resposta em Frequência direcional (dFRF) e define-se as dFRFs normais e reversas. Estuda-se o efeito da isotropia dos mancais nas dFRFs. Ilustra-se os conceitos apresentados ao longo do capítulo através da análise do rotor de Jeffcott apoiado sobre mancais isotrópicos e anisotrópicos.

4.1. Introdução

A análise modal é um conjunto de procedimentos que visa determinar, analítica e/ou experimentalmente, os parâmetros modais de uma estrutura, ou seja, frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais.

Sob o ponto de vista analítico, o que se faz é elaborar um modelo matemático da estrutura, resolver o problema de autovalor associado e determinar os modos de vibração, os fatores de amortecimento e as frequência de ressonância da estrutura. As Funções de Resposta em Frequência podem ser calculadas através superposição modal dos modos naturais de vibração.

Experimentalmente, segue-se uma trajetória oposta (uma vez que não se dispõe do modelo do sistema). Uma força conhecida é aplicada à estrutura e são medidas as vibrações resultantes em diversos pontos. Através do processamento dos sinais de excitação e resposta, consegue-se estimar as respectivas Funções de Resposta em Freqüência. Com este conjunto de FRFs (ou Funções de Resposta ao Impulso), e utilizando-se um dos inúmeros algoritmos de extração de parâmetros, pode-se identificar as características modais da estrutura.

Em geral, as máquinas rotativas são estruturas relativamente complexas, contendo inúmeros dispositivos que podem ser difíceis de modelar (como selos, mancais, acoplamentos, etc.) e que podem sofrer desgaste durante a vida útil do equipamento (fazendo com que suas características físicas sejam alteradas). Por isso, é particularmente importante validar modelos numéricos de estruturas girantes com resultados experimentais, tanto na fase de projeto quanto durante a operação da máquina. As freqüências naturais devem ser determinadas para que se possa conhecer as velocidades críticas e as faixas de rotação seguras para operação em regime. Os modos de vibração do rotor permitem descrever o seu comportamento dinâmico em resposta a várias excitações.

A característica particular dos sistemas rotativos de apresentar modos de precessão direta e retrógrada, em muitos casos bastante próximos em freqüência entre si, torna difícil realizar uma identificação precisa dos parâmetros modais com os métodos da análise modal experimental tradicionais.

A análise modal complexa foi desenvolvida por Chong-Won Lee [Lee 90,91] para ser aplicada especificamente em máquinas rotativas. Esta formulação leva em conta a direção dos modos de precessão, através da utilização das coordenadas complexas e da divisão dos modos em sub-modos diretos e retrógrados. Da mesma forma que os modos, os sinais de excitação e as respostas medidas também são tratados com a notação complexa e divididos em componentes diretas e retrógradas. Para poder tratar estes sinais “complexos”, Lee desenvolveu as Funções de Resposta em Freqüência direcionais, que são capazes de separar, de forma clara, os modos de precessão direta e retrógrada. Esta ferramenta, além de possibilitar uma identificação mais precisa dos modos de precessão (pois diminui a densidade modal em cada dFRF), ainda pode ser utilizada para identificar a isotropia, ou não, do sistema analisado.

4.2. Análise modal tradicional

4.2.1. Estruturas estacionárias

A equação de movimento de um sistema não rotativo com amortecimento viscoso pode ser expressa da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [D]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

sendo que todas as matrizes têm ordem N e os vetores, ordem $N \times 1$. A matriz de massa, $[M]$, é simétrica e positivo definida e as matrizes de rigidez, $[K]$, e de amortecimento, $[D]$, são simétricas e semi-positivo definidas. Considerando-se o sistema homogêneo associado e uma resposta harmônica, chega-se ao seguinte problema de autovalor de segunda ordem:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{X\} = \{0\}. \quad (4.2)$$

Considerando-se a maior disponibilidade de algoritmos confiáveis para a resolução de problemas de autovalor de primeira do que de segunda ordem [Nelson 92], é mais interessante transformar a equação (4.2) em um problema de primeira ordem. Isto pode ser feito de duas formas [Datta 95]:

1. Redução a um problema de autovalor padrão:

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\}, \quad (4.3)$$

sendo

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[D] \end{bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\lambda x\} \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

$[0]$ é uma matriz de ordem N e $[I]$ é uma matriz identidade de ordem N .

Neste caso, se a matriz de massa for mal condicionada, pode-se ter problemas numéricos no cálculo de $[A]$ e, conseqüentemente, nos autovalores e autovetores, devido à inversão de $[M]$.

2. Redução a um problema de autovalor simétrico generalizado:

$$[A]\{y\} + [B]\{y\} = \{0\} \quad (4.5)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [D] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

O problema de autovalor pode ser escrito na forma:

$$(\lambda_r [A] + [B])\{\theta\}_r = \{0\}, \quad (4.7)$$

sendo λ_r , o r-ésimo autovalor e $\{\theta\}_r$, o autovetor associado.

Os $2N$ autovetores podem ser dispostos como as colunas de uma matriz, $[\theta]$, chamada matriz modal. É fácil provar que os autovetores são ortogonais entre si quando ponderados pelas matrizes $[A]$ e $[B]$ [Ewins 84]. Estas relações de ortogonalidade podem ser expressas da seguinte forma:

$$[\theta]^T [A] [\theta] = [a_r] \quad \text{e} \quad [\theta]^T [B] [\theta] = [b_r], \quad (4.8)$$

sendo $[a_r]$ e $[b_r]$ matrizes diagonais. Assim, o r-ésimo autovalor, λ_r , é dado por:

$$\lambda_r = -\frac{b_r}{a_r}. \quad (4.9)$$

Considerando-se uma força externa harmônica do tipo

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (4.10)$$

e uma resposta do sistema também harmônica, obtém-se, de (4.5):

$$(i\omega [A] + [B])\{y\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t}. \quad (4.11)$$

A matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRF), $[\alpha(\omega)]$, pode ser definida por:

$$[\alpha(\omega)] = (i\omega[A] + [B])^{-1}, \quad (4.12)$$

ou seja, a matriz das FRFs é igual a inversa da matriz de rigidez dinâmica. Apesar de poder-se calcular $[\alpha(\omega)]$ através da equação (4.12), este procedimento apresenta inúmeras desvantagens:

- ele é numericamente custoso pois é necessário inverter a matriz de rigidez dinâmica para cada frequência;
- este processo não permite que se calcule apenas uma (ou algumas) FRF; este método fornece toda a matriz das Funções de Resposta em Frequência do sistema (o que, na grande maioria das vezes, não é necessário);
- este procedimento não deixa claro qual é a contribuição de cada modo na resposta do sistema em determinado grau de liberdade.

Por estes motivos, é interessante desenvolver outro método para calcular as FRFs. Para isto, inverte-se ambos os lados da equação (4.12), pré multiplica-se o resultado por $[\theta]^T$ e pós multiplica-se por $[\theta]$, resultando em:

$$[\theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\theta] = [\theta]^T (i\omega[A] + [B]) [\theta]. \quad (4.13)$$

Utilizando-se as relações de ortogonalidade (4.8) e a expressão (4.9), obtém-se:

$$[\theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\theta] = (i\omega[a_r] + [b_r]) = [a_r] (i\omega[I] - [\Lambda]), \quad (4.14)$$

sendo $[\Lambda]$ uma matriz diagonal formada pelos autovalores dispostos na diagonal principal. Esta matriz é denominada matriz espectral. Se os autovetores forem normalizados de tal forma que sendo $[a_r] = [I]$ e, conseqüentemente, $[b_r] = -[\Lambda]$, a equação (4.14) torna-se:

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = (i\omega[I] - [\Lambda]), \quad (4.15)$$

sendo $[\Phi]$ a matriz modal formada pelos autovetores normalizados. Pré multiplicando-se ambos os lados da equação (4.15) por $[\Phi]^T$ e pós multiplicando-se o resultado por $[\Phi]^{-1}$, chega-se a:

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [\Phi]^{-T} (i\omega[I] - [\Lambda]) [\Phi]^{-1}. \quad (4.16)$$

Calculando-se a inversa de ambos os lados da equação (4.16), obtém-se

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] (i\omega[I] - [\Lambda])^{-1} [\Phi]^T \quad (4.17)$$

que é a expressão da matriz de Funções de Resposta em Frequência descrita em função dos parâmetros modais. A equação da receptância que relaciona uma excitação aplicada no grau de liberdade k com o deslocamento medido no grau de liberdade j é dada por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - \lambda_r} \quad (4.18)$$

Analisando-se a equação (4.18) conclui-se que é necessário realizar, no mínimo, N medições para se poder identificar todos os parâmetros modais [Ewins 84].

4.2.2. Máquinas rotativas

Até aqui foram consideradas estruturas descritas por matrizes de massa e rigidez simétricas e invariantes. Em geral, o modelo matemático de máquinas rotativas possui matrizes dependentes da rotação e não simétricas devido ao efeito dos mancais e das forças giroscópicas. Neste trabalho, considera-se que os mancais podem ser descritos por matrizes de rigidez constantes (independentes da rotação) e simétricas. Neste caso, a expressão geral da equação de movimento de um sistema rotativo é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [D(\Omega)]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.19)$$

sendo que $[D(\Omega)] = [C] - \Omega[G]$; $[C]$ é a matriz de amortecimento (simétrica); $[G]$ é a matriz giroscópica (anti simétrica, ou seja: $[G] = -[G]^T$) e Ω é a velocidade de rotação do rotor.

Transformando-se a equação (4.19) para a forma de estado, tem-se [Bucher 96]:

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{F\}, \quad (4.20)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [D(\Omega)] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

O fato da matriz giroscópica ser anti-simétrica faz com que os autovetores do problema não auto-adjunto (à esquerda) sejam diferentes dos autovetores do problema auto-adjunto (à direita). Assim, tem-se dois problemas de autovalor: o auto adjunto, dado por [Bucher 96]:

$$\lambda_i [A]\{R\}_i + [B]\{R\}_i = \{0\}; \quad (4.22)$$

e o não auto adjunto:

$$\lambda_i [A]^T \{L\}_i + [B]^T \{L\}_i = \{0\}, \quad (4.23)$$

sendo que λ_i é um autovalor;

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\varphi\}_i \\ \{\varphi\}_i \end{Bmatrix} \quad \text{é o autovetor à direita associado} \quad (4.24)$$

$$\{L\}_i = \begin{Bmatrix} -\lambda_i \{\phi\}_i \\ \{\phi\}_i \end{Bmatrix} \quad \text{é o autovetor à esquerda associado} \quad (4.25)$$

$\{\varphi\}_i$ é um autovetor à direita do sistema de segunda ordem e

$\{\phi\}_i$ é um autovetor à esquerda do sistema de segunda ordem.

Da mesma forma que ocorre em estruturas estacionárias, os autovalores e os autovetores serão complexos e aparecerão em pares complexos conjugados, contanto que o sistema seja subamortecido.

Como foi feito no caso de sistemas não rotativos, pode-se dispor os autovetores nas colunas de uma matriz formando assim a matriz modal. Para estruturas girantes, contudo, existirão duas matrizes modais: uma à direita ($[R]$) e outra à esquerda ($[L]$).

No caso de sistemas rotativos, devido a não simetria das matrizes, as propriedades de ortogonalidade dos autovetores se alteram. Normalizando-se os autovetores à direita e à esquerda apropriadamente, as relações de ortogonalidade podem ser expressas da seguinte forma:

$$[L]^T [A][R] = [I] \quad \text{e} \quad [L]^T [B][R] = -[\Lambda]. \quad (4.26)$$

Para se obter a expressão da Função de Resposta em Frequência de sistemas rotativos deve-se, primeiramente, expressar o vetor de estado como uma expansão dos autovetores à direita [Nordmann 84]:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \eta_i = [R]\{\eta\} \quad (4.27)$$

Substituindo-se a equação (4.27) em (4.20) e pré-multiplicando-se o resultado por $[L]^T$, tem-se que:

$$[L]^T [A][R]\{\dot{\eta}\} + [L]^T [B][R]\{\eta\} = [L]^T \{F\} \quad (4.28)$$

Das N primeiras linhas de (4.28) obtém-se N equações desacopladas do tipo [Bucher 96]:

$$\dot{\eta}_i(t) - \lambda_i \eta_i(t) = -\lambda_i \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (4.29)$$

Supondo-se uma excitação e uma resposta harmônica e da mesma frequência, tem-se que a resposta em frequência na i -ésima coordenada generalizada será dada por:

$$\eta_i(\omega) = \frac{-\lambda_i \{\phi\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \{f(\omega)\}. \quad (4.30)$$

Substituindo-se a equação (4.30) no vetor de estado da equação (4.27):

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \eta_i = [R]\{\eta\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \frac{\lambda_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \{f\} = \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \{\phi\}_i \\ \{\phi\}_i \end{array} \right\} \frac{\lambda_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \{f\}. \quad (4.31)$$

Considerando-se apenas a resposta em deslocamento (metade inferior do vetor $\{q\}$), obtém-se que:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \{f\} \quad (4.32)$$

Pode-se assim calcular a resposta em um grau de liberdade k devido a uma excitação em um grau de liberdade l . Para isso supõe-se um vetor de forças externas não nulo apenas no l -ésimo grau de liberdade do tipo [Nordmann 82]:

$$\{f(t)\} = \{0 \ 0 \ \dots \ f_l \ \dots \ 0 \ 0\}^T e^{j\omega t} \quad (4.33)$$

Sendo assim, facilmente se conclui que a resposta em frequência no grau de liberdade k é:

$$x_k = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \varphi_{ki} \phi_{li}}{\lambda_i - j\omega} f_l \quad (4.34)$$

Da equação (4.34) tem-se que a receptância entre os pontos l e k é dada por:

$$\alpha_{kl}(\omega) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \varphi_{ki} \phi_{li}}{\lambda_i - j\omega} \quad (4.35)$$

e a matriz de Funções de Resposta em Frequência será [Bucher 96]:

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \quad (4.36)$$

ou

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} + \frac{\bar{\lambda}_i \{\bar{\varphi}\}_i \{\bar{\phi}\}_i^T}{\bar{\lambda}_i - j\omega} \quad (4.37)$$

Pode-se perceber que, para calcular as FRFs através da superposição modal, é necessário identificar tanto os autovetores à direita e como os à esquerda. Sob o ponto de vista experimental,

isto implica na medição de $2N-1$ Funções de Resposta em Frequência, correspondentes a uma linha e uma coluna da matriz $[\alpha(\omega)]$, para cada rotação do rotor [Nordmann 84].

4.3. Análise modal complexa de sistemas rotativos

4.3.1. Vibração Livre

A representação do movimento do rotor nas direções transversais ao eixo de rotação através das coordenadas complexas já foi apresentada no Capítulo 3 para o caso de sistemas simples. Nesta seção, estes conceitos serão estendidos e formulados com um rigor matemático maior. No entanto, vale ressaltar que, independente do tamanho e da complexidade do sistema estudado, a interpretação física destas coordenadas complexas se mantém a mesma. Assim, considera-se novamente o vetor complexo $p(t)$, apresentado na equação (3.4) e reescrito aqui por conveniência [Kessler 99]:

$$p(t) = y(t) + jz(t) \quad (4.38)$$

A Figura 4.1 ilustra a relação entre as coordenadas reais, $y(t)$ e $z(t)$, e complexa, $p(t)$.

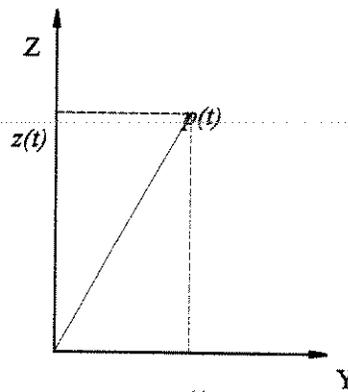


Figura 4.1 – Coordenadas reais $y(t)$ e $z(t)$ e coordenada complexa $p(t)$.

A equação (4.38) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p(t) \\ \bar{p}(t) \end{Bmatrix}, \quad (4.39)$$

sendo $\bar{p}(t)$ o complexo conjugado de $p(t)$. Expandindo-se $y(t)$ e $z(t)$ em séries de Fourier, tem-se [Kessler 99]:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= y(t) + jz(t) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Y_k e^{j\omega_k t} + \bar{Y}_k e^{-j\omega_k t} \right\} + j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Z_k e^{j\omega_k t} + \bar{Z}_k e^{-j\omega_k t} \right\} \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P_{fk} e^{j\omega_k t} + P_{bk} e^{-j\omega_k t} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

A equação (4.40) mostra que o movimento de um ponto no plano pode ser considerado como a superposição de vários movimentos harmônicos com diferentes frequências. Nelson [Nelson 92] mostrou que as respostas transversais de uma estação de um rotor devido a excitações genéricas também são descritas pela equação (4.40). Neste caso, cada componente harmônica que contribui para o movimento resultante é um modo de vibração. Conforme já foi mencionado, as órbitas descritas em cada estação de um rotor não amortecido em um modo de vibração têm o formato elíptico ou são elipses degeneradas [Azevedo 92]. No caso amortecido, estas órbitas tornam-se espirais-elípticas, ou seja, elipses cujas amplitudes decrescem com o passar do tempo, caso não haja mais força externa.

Analisando-se o movimento descrito por uma estação de um rotor em uma determinada frequência natural, obtém-se, da equação (4.40), que a forma modal pode ser dada por:

$$p(t) = P_f e^{j\Omega t} + P_b e^{-j\Omega t} \tag{4.41}$$

Percebe-se assim que o movimento bidimensional de um ponto do rotor pode ser interpretado como uma composição de dois sub-modos: o primeiro girando no mesmo sentido da rotação do rotor – precessão direta – e o segundo girando em sentido oposto – precessão retrógrada.

A equação (4.40) corresponde a um movimento harmônico elíptico no plano yz . Os coeficientes P_f e P_b definirão o formato da elipse que pode degenerar para um círculo ou para uma linha reta (movimento retilíneo), dependendo da relação entre P_f e P_b .

Considera-se agora as vibrações transversais de um rotor com n estações. Aplicando-se a transformação apresentada na equação (4.39) para cada uma destas estações e escrevendo-se o resultado na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix}, \quad (4.42)$$

sendo que a matriz de transformação de coordenadas $[T]$ e a sua inversa são dadas por:

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I(n)] & [I(n)] \\ -j[I(n)] & j[I(n)] \end{bmatrix} \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} [I(n)] & j[I(n)] \\ [I(n)] & -j[I(n)] \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

sendo $[I(n)]$ a matriz identidade de ordem N ; $\{y(t)\}$ e $\{z(t)\}$ vetores ordem $N \times 1$.

A mesma transformação pode ser aplicada ao vetor de forças:

$$\begin{Bmatrix} \{f_y(t)\} \\ \{f_z(t)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{g(t)\} \\ \{\bar{g}(t)\} \end{Bmatrix}. \quad (4.44)$$

Seja $\{q(t)\}$ o vetor de deslocamentos transversais de todas as estações do eixo:

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix}. \quad (4.45)$$

Substituindo-se as equações (4.42) e (4.45) na equação de movimento (4.1) e pré-multiplicando-se ambos os lados da equação resultante por $[T]^{-1}$, obtém-se que a equação de movimento para as coordenadas complexas será dada por:

$$[M_c] \begin{Bmatrix} \{\dot{\bar{p}}\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} + [D_c(\Omega)] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} + [K_c] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix}, \quad (4.46)$$

sendo

$$[M_c] = [T]^{-1}[M][T] \quad [D_c] = [T]^{-1}[D][T] \quad [K_c] = [T]^{-1}[K][T] \quad (4.47)$$

A equação de movimento (4.1) pode ser reescrita da seguinte forma [Kim 86]:

$$\begin{bmatrix} [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \{\ddot{q}(t)\} + \begin{bmatrix} [C_{yy}^b] & [C_{yz}^b] + [G] \\ [C_{zy}^b] - [G] & [C_{zz}^b] \end{bmatrix} \{\dot{q}(t)\} + \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [K_{yz}] \\ [K_{zy}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.48)$$

Utilizando-se as equações (4.47), (4.48) e (4.43), obtém-se:

$$\begin{aligned} [M_c] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ([M_{yy}] + [M_{zz}]) + j([M_{zy}] - [M_{yz}]) & ([M_{yy}] - [M_{zz}]) + j([M_{zy}] + [M_{yz}]) \\ ([M_{yy}] - [M_{zz}]) - j([M_{zy}] + [M_{yz}]) & ([M_{yy}] + [M_{zz}]) - j([M_{zy}] - [M_{yz}]) \end{bmatrix} \\ [D_c] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ([C_{yy}] + [C_{zz}]) + j([C_{zy}] - [C_{yz}] - 2[G]) & ([C_{yy}] - [C_{zz}]) + j([C_{zy}] + [C_{yz}]) \\ ([C_{yy}] - [C_{zz}]) - j([C_{zy}] + [C_{yz}]) & ([C_{yy}] + [C_{zz}]) - j([C_{zy}] - [C_{yz}] + 2[G]) \end{bmatrix} \\ [K_c] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ([K_{yy}] + [K_{zz}]) + j([K_{zy}] - [K_{yz}]) & ([K_{yy}] - [K_{zz}]) + j([K_{zy}] + [K_{yz}]) \\ ([K_{yy}] - [K_{zz}]) - j([K_{zy}] + [K_{yz}]) & ([K_{yy}] + [K_{zz}]) - j([K_{zy}] - [K_{yz}]) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Se o sistema for isotrópico, valem as condições [Lee, 93]:

$$\begin{aligned} [M_{yy}] &= [M_{zz}] = [M_1] & [M_{zy}] &= -[M_{yz}] = [M_2] \\ [C_{yy}] &= [C_{zz}] = [C_1] & [C_{zy}] &= -[C_{yz}] = [C_2] \\ [K_{yy}] &= [K_{zz}] = [K_1] & [K_{zy}] &= -[K_{yz}] = [K_2] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Assim, as equações (4.49) reduzem-se a:

$$\begin{aligned} [M_c] &= \begin{bmatrix} [M_1] + j[M_2] & [0] \\ [0] & [M_1] - j[M_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} \\ [D_c] &= \begin{bmatrix} [C_1] + j([C_2] - [G]) & [0] \\ [0] & [C_1] + j([C_2] - [G]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} \\ [K_c] &= \begin{bmatrix} [K_1] + j[K_2] & [0] \\ [0] & [K_1] - j[K_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

sendo [0] uma matriz nula de ordem $2N$.

Da mesma forma que foi feito na equação (4.41), pode-se escrever o deslocamento modal de cada uma das estações do rotor em função dos sub-modos diretos e retrógrados:

$$\{p(t)\} = \{pf(t)\} + \{pb(t)\} = \{P_f\}e^{st} + \{P_b\}e^{\bar{s}t}. \quad (4.52)$$

sendo $s = j\omega$. Calculando-se as derivadas de $\{p(t)\}$ e de seu complexo conjugado em relação ao tempo e substituindo-se os resultados na equação (4.46), obtém-se dois problemas de autovalores de segunda ordem:

$$\left[s^2[M_c] + s[C_c] + [K_c] \right] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

e

$$\left[s^2[M_c] + s[C_c] + [K_c] \right] \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

e $\{0\}$ é um vetor nulo de dimensão $2N$.

Pode-se mostrar que as equações (4.53) e (4.54) contém as mesmas informações sobre os sub-modos P_f e P_b do sistema, bastando, portanto, resolver apenas uma delas para obtê-los [Kessler 99].

Na equação (4.52), os vetores $\{pf(t)\}$ e $\{pb(t)\}$ são os componentes diretos (“forward”) e retrógrados (“backward”) dos deslocamentos nas N estações enquanto que os vetores $\{P_f\}$ e $\{P_b\}$ são os componentes diretos e retrógrados dos modos.

A direção de precessão de um modo não pode ser conhecida pelo sinal da parte imaginária dos autovalores de (4.53) uma vez que estes aparecem em pares complexos conjugados. No entanto, comparando-se as componentes dos sub-modos diretos e retrógrados (respectivamente $\{P_f\}$ e $\{P_b\}$), pode-se saber a direção dos movimentos de precessão.

Analisa-se agora o caso isotrópico a partir de (4.51) e (4.53). Neste caso, o problema de autovalor pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(s^2 \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (4.55)$$

Os autovalores do sistema serão as raízes da equação característica obtida do determinante:

$$\det \left(s^2 \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (4.56)$$

Neste caso, a equação característica é um polinômio de ordem $4N$ (N estações e 4 graus de liberdade por estação) cujas raízes incluem os modos diretos e retrógrados e os seus complexos conjugados.

Este problema de autovalor de ordem $4N$ pode ser desmembrado em dois problemas de autovalor de ordem $2N$:

$$\left(s^2 [M_{c1}] + s [D_{c1}] + [K_{c1}] \right) \{P_f\} + \left(s^2 [0] + s [0] + [0] \right) \{\bar{P}_b\} = \{0\} \quad (4.57)$$

e

$$\left(s^2 [0] + s [0] + [0] \right) \{P_f\} + \left(s^2 [M_{c2}] + s [D_{c2}] + [K_{c2}] \right) \{\bar{P}_b\} = \{0\}. \quad (4.58)$$

Os autovalores do primeiro termo da equação (4.57) e do segundo termo de (4.58) são calculados, respectivamente, a partir de :

$$\det \left(s^2 [M_{c1}] + s [D_{c1}] + [K_{c1}] \right) = 0 \quad (4.59)$$

e

$$\det \left(s^2 [M_{c2}] + s [D_{c2}] + [K_{c2}] \right) = 0 \quad (4.60)$$

que fornecem duas equações características, neste caso, dois polinômios de ordem $2N$.

Quando s assumir valores que são raízes de (4.59) obtém-se, da equação (4.58), que:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (4.61)$$

que corresponde a um modo direto.

Da mesma forma, quando s assumir valores que são raízes de (4.60) obtém-se, da equação (4.57), que:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix}, \quad (4.62)$$

que corresponde a um modo retrógrado.

Percebe-se então que, se o rotor for isotrópico, os modos do sistema serão puramente retrógrados ($\{P_f\}=\{0\}$) ou puramente diretos ($\{P_b\}=\{0\}$). Já para o caso de rotores anisotrópicos, os modos de precessão serão predominantemente diretos ou retrógrados. Assim, um modo será considerado direto se as componentes dos sub-vetores modais $\{P_f\}$ e $\{P_b\}$ obedecerem a relação $\{P_f\} \gg \{P_b\}$, e será considerado um modo retrógrado se $\{P_f\} \ll \{P_b\}$.

Estes resultados demonstram que a formulação complexa – através da decomposição de cada modo em sub-modos direto e retrógrado - possibilita uma melhor interpretação física dos movimentos de precessão, indicando a direção e o formato da órbita descrita por cada estação naquele modo.

4.3.2. Vibração Forçada: Funções de Resposta em Frequência direcionais (dFRF)

Considera-se agora o caso de vibrações forçadas. Aplicando-se às forças externas a mesma transformação aplicada aos deslocamentos, o vetor de forças complexas também pode ser expresso em termos dos seus componentes diretos e retrógrados:

$$\{g(t)\} = gf(t) + gb(t) = \{G_f\}e^{st} + \{G_b\}e^{\bar{s}t} = \{G_f\}e^{j\omega t} + \{G_b\}e^{-j\omega t} \quad (4.63)$$

Considerando-se excitação e resposta harmônicas, pode-se reescrever a equação (4.53) para o caso de vibrações forçadas:

$$[-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

Definindo-se

$$[B(\omega)] = [-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \quad (4.65)$$

tem-se que:

$$[B(\omega)] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

e a relação entre os vetores de deslocamento e excitação é então:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = [B(\omega)]^{-1} \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

A matriz $[H(\omega)]$ é a matriz das funções de resposta em frequência direcionais (dFRF) que relacionam excitações e respostas complexas.

Considerando-se agora excitações e respostas harmônicas e as suas transformadas de Laplace:

$$\begin{Bmatrix} \{PF(\omega)\} \\ \{\bar{P}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{PG}(\omega)] & [H_{P\bar{G}}(\omega)] \\ [H_{\bar{P}G}(\omega)] & [H_{\bar{P}\bar{G}}(\omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

As dFRF $H_{PG}(\omega)$ e $H_{P\bar{G}}(\omega)$ são chamadas de dFRF normais e relacionam, respectivamente, excitações diretas e respostas diretas e excitações retrógradas e respostas

retrógradas. As dFRF $H_{P\bar{G}}(\omega)$ e $H_{\bar{P}G}(\omega)$ são chamadas de dFRF reversas e relacionam, respectivamente, excitações retrógradas e respostas diretas e excitações diretas e respostas retrógradas [Lee 91].

A equação de movimento em coordenadas complexas (4.46) pode ser reescrita na forma de equação de estado:

$$[A_c]\{\dot{x}(t)\} - [B_c]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.69)$$

sendo:

$$[A_c] = \begin{bmatrix} [0] & [M_c] \\ [M_c] & [C_c] \end{bmatrix}; [B_c] = \begin{bmatrix} -[M_c] & [0] \\ [0] & [K_c] \end{bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \\ \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix}; \{f\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

Supondo forças externas e deslocamentos harmônicos obtém-se da equação (4.70):

$$(s[A] + [B])\{X\} = \{F\} \quad (4.71)$$

sendo $\{X\}$ o autovetor e $\{F\}$ o vetor de forças, dados por:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} s \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

Da equação (4.71), temos que a resposta forçada pode ser dada por:

$$\{X\} = (s[A_c] - [B_c])^{-1} \{F\} \quad (4.73)$$

A equação (4.73) para vibrações livres é:

$$(s[A_c] - [B_c])\{X\} = \{0\} \quad (4.74)$$

A não simetria das matrizes envolvidas nos leva a dois problemas de autovalor:

$$(s_i[A_c] - [B_c])\{R\}_i = \{0\} \quad (4.75)$$

e

$$\{L\}_i^T (s_i[A_c] - [B_c]) = \{0\}^T \quad (4.76)$$

Os autovetores à direita e à esquerda são, respectivamente [Kessler 99]:

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{r_i\} \\ \{r_i\} \end{Bmatrix} \quad e \quad \{L\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{l_i\} \\ \{l_i\} \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

sendo $\{r\}_i$ e $\{l\}_i$ são os autovetores à direita e à esquerda do problema de autovalor de segunda ordem cujas equações são:

$$[-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \{L_f\}^T \\ \{L_b\}^T \end{Bmatrix}^T [-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] = \begin{Bmatrix} \{0\}^T \\ \{0\}^T \end{Bmatrix}^T \quad (4.79)$$

e têm a forma [Kessler, 99]:

$$\{r\}_i = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix}_i \quad \{l\}_i = \begin{Bmatrix} \{L_f\} \\ \{L_b\} \end{Bmatrix}_i \quad (4.80)$$

A inversa da matriz de rigidez dinâmica $(s[A_c] - [B_c])^{-1}$ pode ser expandida em função dos autovetores à direita e à esquerda [Kessler 99]:

$$(s[A] - [B])^{-1} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\{R\}_i \{L\}_i^T}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{Bmatrix} \lambda_i \{r_i\} \\ \{r_i\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_i \{l_i\} \\ \{l_i\} \end{Bmatrix}^T}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_i^2 \{r\}_i \{l\}_i^T & \lambda_i \{r\}_i \{l\}_i^T \\ \lambda_i \{r\}_i \{l\}_i^T & \{r\}_i \{l\}_i^T \end{bmatrix}}{s - \lambda_i} \quad (4.81)$$

sendo $s \neq \lambda_i$.

De (4.81) e (4.72) tem-se que a resposta forçada pode ser dada por [Kessler 99]:

$$s \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \\ \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_i^2 \{r\}_i \{l\}_i^T & \lambda_i \{r\}_i \{l\}_i^T \\ \lambda_i \{r\}_i \{l\}_i^T & \{r\}_i \{l\}_i^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix}}{s - \lambda_i} \quad (4.82)$$

ou, considerando somente a parte relativa ao deslocamento:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{4n} \frac{\{r\}_i \{l\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \right] \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Considerando-se agora excitações e respostas não harmônicas e as componentes diretas e retrógradas das suas transformadas de Laplace, tem-se que as respostas em frequência são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \{PF(\omega)\} \\ \{\bar{P}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{4n} \frac{\{r\}_i \{l\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \right] \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix}, \quad (4.84)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} H_{PfGf}(\omega) & H_{PfGb}(\omega) \\ H_{PbGf}(\omega) & H_{PbGb}(\omega) \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{4n} \frac{\{r\}_i \{l\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \right]. \quad (4.85)$$

As Funções de Resposta em Frequência direcionais mostradas na equação (4.85) relacionam as excitações diretas e retrógradas com as respostas diretas e retrógradas. As dFRFs também podem ser calculadas a partir das FRFs comuns. Estas FRFs relacionam forças e respostas através da equação:

$$\begin{Bmatrix} \{Y(\omega)\} \\ \{Z(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{YY}(\omega) & H_{YZ}(\omega) \\ H_{ZY}(\omega) & H_{ZZ}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_Y(\omega)\} \\ \{F_Z(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

Aplica-se a transformada de Laplace à equação (4.52):

$$\{P(\omega)\} = \{PF(\omega)\} + \{PB(\omega)\} \quad (4.87)$$

e considera-se a transformação aplicada em (4.42) para as transformadas de Laplace dos vetores de deslocamento reais e complexos:

$$\begin{Bmatrix} \{Y(\omega)\} \\ \{Z(\omega)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{PF(\omega)\} \\ \{\bar{P}B(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

e para os vetores de forças externas:

$$\begin{Bmatrix} \{F_Y(\omega)\} \\ \{F_Z(\omega)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix}. \quad (4.89)$$

Substituindo-se as equações (4.89) e (4.88) em (4.86) e pré-multiplicando ambos os lados da equação resultante por $[T]^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \{PF(\omega)\} \\ \{\bar{P}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} [H_{YY}(\omega)] & [H_{YZ}(\omega)] \\ [H_{ZY}(\omega)] & [H_{ZZ}(\omega)] \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

Chega-se, finalmente, às seguintes relações:

$$\begin{aligned} 2[H_{PfGf}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] + [H_{ZZ}(\omega)] + j([H_{ZY}(\omega)] - [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PfGb}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] - [H_{ZZ}(\omega)] + j([H_{ZY}(\omega)] + [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PbGf}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] - [H_{ZZ}(\omega)] - j([H_{ZY}(\omega)] + [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PbGb}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] + [H_{ZZ}(\omega)] - j([H_{ZY}(\omega)] - [H_{YZ}(\omega)]) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Analisando-se as equações (4.91) pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} [\bar{H}_{PfGf}(\omega)] &= [H_{PbGb}(\omega)] \\ [\bar{H}_{PfGb}(\omega)] &= [H_{PbGf}(\omega)] \end{aligned} \quad (4.92)$$

Assim, pode-se considerar apenas duas das submatrizes em (4.92) para se identificar o sistema. Das equações (4.84) e (4.85) tem-se que:

$$\{PF(\omega)\} = \left[\begin{array}{cc} H_{PfGf}(\omega) & H_{PfGb}(\omega) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} GF(\omega) \\ GB(\omega) \end{array} \right\} \quad (4.93)$$

Como já foi mencionado, as dFRF que relacionam excitações e respostas de mesmo sentido (diretas ou retrógradas) são as dFRF normais e as que relacionam excitações e respostas de sentidos opostos são as dFRF reversas. As dFRF $[H_{PfGf}(\omega)]$ conterão apenas modos diretos e as dFRF $[H_{PbGb}(\omega)]$ conterão apenas modos retrógradados. Isto permite uma identificação experimental de parâmetros muito mais precisa, pois a superposição dos modos diretos e retrógradados (usualmente muito próximos em frequência) é evitada.

Para o caso das FRFs tradicionais, vale a relação:

$$[H_{ik}(-\omega)] = [\bar{H}_{ik}(\omega)], \quad (4.94)$$

sendo $i, k = y, z$. Esta relação mostra que uma Função de Resposta em Frequência contém as mesmas informações nos dois lados do eixo de frequência bastando portanto analisá-la em apenas um dos lados, usualmente o lado positivo.

Contudo, no caso das dFRFs, tem-se que [Lee 91]:

$$\begin{aligned} [\bar{H}_{PfGf}(-\omega)] &= [H_{PbGb}(\omega)] \\ [\bar{H}_{PfGb}(-\omega)] &= [H_{PbGf}(\omega)] \end{aligned} \quad (4.95)$$

Portanto, para as Funções de Resposta em Frequência direcionais, ambos os lados do eixo de frequência podem ser utilizados, separando os modos diretos e retrógradados em cada um dos lados. Neste trabalho, apenas o lado positivo do eixo das frequências foi utilizado, a exemplo de Kessler [Kessler 99], visando maior simplicidade e uma comparação mais fácil com as FRF comuns.

O número de medições necessárias para se conseguir identificar todos os parâmetros modais através da análise modal complexa é o mesmo que no caso da análise modal tradicional de máquinas rotativas.

4.3.3. Efeito da isotropia nas Funções de Resposta em Freqüência direcionais

Para avaliar-se o efeito da isotropia nas dFRF, primeiramente considera-se o sistema isotrópico cujas matrizes da equação de movimento nas coordenadas complexas são dadas pelas equações (4.51). Os autovetores à direita deste sistema já foram calculados e estão apresentados nas equações (4.61) e (4.62). Os autovetores à esquerda podem ser calculados através do problema de autovalor não auto-adjunto dado por:

$$\begin{Bmatrix} \{L_f\}^T \\ \{\bar{L}_b\}^T \end{Bmatrix}^T \left(s^2 \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} \{0\}^T \\ \{0\}^T \end{Bmatrix}^T \quad (4.96)$$

Esta equação pode ser dividida em:

$$\{L_f\}^T (s^2 [M_{c1}] + s [D_{c1}] + [K_{c1}]) + \{\bar{L}_b\}^T (s^2 [0] + s [0] + [0]) = \{0\}^T \quad (4.97)$$

e

$$\{L_f\}^T (s^2 [0] + s [0] + [0]) + \{\bar{L}_b\}^T (s^2 [M_{c2}] + s [D_{c2}] + [K_{c2}]) = \{0\}^T \quad (4.98)$$

De (4.97) e (4.98) conclui-se que os autovetores à esquerda de um rotor isotrópico têm a forma:

$$\begin{Bmatrix} \{L_f\} \\ \{\bar{L}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{L_f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

para um modo direto e

$$\begin{Bmatrix} \{L_f\} \\ \{\bar{L}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{L}_b\} \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

para um modo retrógrado.

A equação (4.85) pode ser expandida em função dos parâmetros $\{P_f\}$, $\{\bar{P}_b\}$, $\{L_f\}$ e $\{\bar{L}_b\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [H_{PfGf}(\omega)] & [H_{PfGb}(\omega)] \\ [H_{PbGf}(\omega)] & [H_{PbGb}(\omega)] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4n} \frac{\{r\}_i \{l\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \\ \sum_{i=1}^{4n} \frac{\{\bar{P}_b\}_i \{\bar{L}_b\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} & \{L_f\}^T \\ \{\bar{P}_b\} & \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i} \\ \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{L_f\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{L_f\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Rescrevendo-se a matriz das dFRF, equação (4.101), separando-se os modos diretos e retrógrados e considerando-se as formas dos vetores modais à direita, equações (4.61) e (4.62), e à esquerda, equações (4.99) e (4.100), tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [H_{PfGf}(\omega)] & [H_{PfGb}(\omega)] \\ [H_{PbGf}(\omega)] & [H_{PbGb}(\omega)] \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{L_f\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{0\}^T \\ \{0\} \{L_f\}^T & \{0\} \{0\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i^F} + \frac{\begin{bmatrix} \{0\} \{0\}^T & \{0\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{0\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i^B} \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Da equação (4.102) conclui-se claramente que, para rotores isotrópicos as dFRF das submatrizes $[H_{PfGb}(\omega)]$ e $[H_{PbGf}(\omega)]$, ou seja, todas as dFRF reversas, serão nulas. Este é um resultado importante e pode ser utilizado para identificar se o sistema é, ou não, isotrópico.

Considera-se agora um rotor isotrópico similar ao anterior mas cujas submatrizes da equação de movimento nas coordenadas complexas ainda obedeçam às seguintes condições:

$$[G] = [0], \quad [M_k] = [M_k^T], \quad [C_k] = [C_k^T], \quad [K_k] = [K_k^T], \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (4.103)$$

Sendo assim, a equação (4.51) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
 [M_c] &= \begin{bmatrix} [M_1] + j[M_2] & [0] \\ [0] & [M_1] - j[M_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} \\
 [D_c] &= \begin{bmatrix} [C_1] + j[C_2] & [0] \\ [0] & [C_1] + j[C_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} \\
 [K_c] &= \begin{bmatrix} [K_1] + j[K_2] & [0] \\ [0] & [K_1] - j[K_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

e, por consequência de (4.104), as submatrizes $[M_{c1}]$, $[M_{c2}]$, $[D_{c1}]$, $[D_{c2}]$, $[K_{c1}]$ e $[K_{c2}]$ são simétricas. Sendo este o caso, as equações (4.97) e (4.98) podem ser rescritas como:

$$(s^2[M_{c1}] + s[D_{c1}] + [K_{c1}])\{L_f\} + (s^2[0] + s[0] + [0])\{\bar{L}_b\} = \{0\} \tag{4.105}$$

e

$$(s^2[0] + s[0] + [0])\{L_f\} + (s^2[M_{c2}] + s[D_{c2}] + [K_{c2}])\{\bar{L}_b\} = \{0\} \tag{4.106}$$

Comparando as equações (4.57) e (4.58) com as equações (4.105) e (4.106) conclui-se que os vetores modais $\{r\}_i$ e $\{l\}_i$ devem ser proporcionais, ou seja:

$$\{l\}_i = K_i \{r\}_i \tag{4.107}$$

A constante de proporcionalidade K_i pode ser calculada assumindo-se como condições de ortogonalidade [Lee 91]:

$$\begin{aligned}
 \{l\}_i^T [A_c] \{r\}_j &= \delta_{ji} \\
 \{l\}_i^T [B_c] \{r\}_j &= \lambda_j \delta_{ji}
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

sendo δ_{ji} o delta de Dirac.

Logo, rotores isotrópicos que atendam às condições (4.103) podem ser identificados medindo-se apenas uma linha ou coluna da matriz das dFRF. A matriz giroscópica deve ser nula

ou desprezível para que as submatrizes sejam simétricas. Estas condições podem ser atendidas por rotores com elevada razão comprimento/diâmetro apoiados em mancais de rolamentos.

Finalmente, analisa-se as dFRF de rotores levemente isotrópicos. Neste caso, considera-se que, nos modos diretos, $\{P_f\} \gg \{P_b\}$ (ou $\{P_b\} = \{\varepsilon\} \cong \{0\}$); e nos modos retrógrados, $\{P_f\} \ll \{P_b\}$ (ou $\{P_f\} = \{\xi\} \cong \{0\}$). Analogamente, para os vetores modais à esquerda tem-se que: para os modos diretos, $\{L_b\} = \{\delta\} \cong \{0\}$; e para os retrógrados, $\{L_f\} = \{\kappa\} \cong \{0\}$. Assim, a partir de (4.101), chega-se a:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [H_{PfGf}(\omega)] & [H_{PfGb}(\omega)] \\ [H_{PbGf}(\omega)] & [H_{PbGb}(\omega)] \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{L_f\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\begin{bmatrix} \{P_f\} \{L_f\}^T & \{P_f\} \{\delta\}^T \\ \{\varepsilon\} \{L_f\}^T & \{\varepsilon\} \{\delta\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i^F} + \frac{\begin{bmatrix} \{\xi\} \{\kappa\}^T & \{\xi\} \{\bar{L}_b\}^T \\ \{\bar{P}_b\} \{\kappa\}^T & \{\bar{P}_b\} \{\bar{L}_b\}^T \end{bmatrix}}{j\omega - \lambda_i^B} \right) \end{aligned} \quad (4.109)$$

Conclui-se, portanto, que as dFRF reversas de rotores levemente anisotrópicos têm uma magnitude bem inferior às dFRF normais. Assim, rotores levemente isotrópicos podem ser tratados da mesma forma que rotores isotrópicos quanto à identificação dos autovetores à esquerda por meio da equação (4.107).

4.3.4. Estudo do rotor de Jeffcott apoiado em suportes isotrópicos e anisotrópicos

Com o intuito de ilustrar os conceitos apresentados nas seções anteriores, apresenta-se alguns exemplos de sistemas rotativos dos quais se identifica os parâmetros modais utilizando a formulação da análise modal complexa. Para tanto, utiliza-se um rotor de Jeffcott (rígido) apoiado sobre mancais flexíveis, cujas equações de movimento são deduzidas a seguir. Um rotor específico é analisado considerando-se suportes isotrópicos e anisotrópicos. Os dados geométricos e parâmetros físicos destes dois sistemas estão apresentados a seguir:

Eixo: Comprimento total = 0,75m;
Raio = 0,00125m;
Módulo de Elasticidade = 206,8e9N/m²;
Coeficiente de Poisson = 0,3;
Densidades = 7833kg/m³.

Disco: Raio externo = 0,07m;
Espessura = 0,02m;
Densidade = 7800kg/m³.

Mancais: $C_{yy} = C_{zz} = 5\text{Ns/m}$; $C_{yz} = C_{zy} = 0$; $K_{yz} = K_{zy} = 0$;
Rotor isotrópico: $K_{yy} = K_{zz} = 1\text{e}4\text{N/m}$;
Rotor anisotrópico: $K_{yy} = 1\text{e}4\text{N/m}$ e $K_{zz} = 9\text{e}3\text{N/m}$

4.3.4.1. Equações de Movimento: Rotor de Jeffcott com 4GL

As equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico de um rotor são bastante complexas, mesmo para o caso de rotor rígido. Estas equações podem ser obtidas tanto através dos conceitos da dinâmica clássica (equações de Newton-Euler) como da dinâmica analítica (equação de Lagrange). Nesta seção, deriva-se as equações de movimento de um rotor rígido através da formulação da mecânica analítica. Como esta é uma formulação já bastante conhecida, serão apresentados apenas os passos principais para a obtenção das equações de movimento. Um desenvolvimento mais detalhado destas equações pode ser encontrado em Kessler [Kessler 99], Genta [Genta 99] e suas referências.

Em geral, as equações de movimento de sistemas rotativos são altamente não lineares. Contudo, estas equações podem ser linearizadas se algumas hipóteses simplificadoras forem adotadas, tais como [Genta 99]:

- o rotor apresenta, em sua configuração não deformada, um eixo de rotação fixo e bem definido, que coincide com um dos seus eixos principais de inércia baricêntricos (isto implica dizer que o desbalanço é pequeno);
- os deslocamentos de translação e rotação devido à deformação do rotor são pequenos;

- o rotor é considerado axissimétrico (sistema isotrópico ou anisotrópico).

Sendo válidas estas hipóteses, considere o rotor ilustrado na Figura 4.2. Assume-se que toda a massa deste sistema esteja concentrada no disco, situado a uma distância a do mancal 1 e a uma distância b do mancal 2. O comprimento total do eixo é L . Considera-se que as direções y e z coincidam com os eixos principais dos elipsóides de elasticidade dos dois mancais. Portanto, a matriz de rigidez não apresenta termos de acoplamento entre estas duas direções. Os momentos principais de inércia do rotor são designados por: J_p – em torno do eixo de rotação própria (polar) e J_t – em torno de qualquer eixo do plano de rotação (transversal). Se $J_p > J_t$, o corpo é normalmente designado por disco e, se $J_p < J_t$, o rotor é chamado de rotor longo [Genta 99]. Finalmente, considera-se que o sistema possui desbalanço estático (ε) e dinâmico (χ), conforme ilustrado na Figura 4.3. O primeiro ocorre devido à não coincidência do centro geométrico do disco C com o centro de gravidade P . Quando o eixo de simetria do rotor não coincide com o eixo de rotação própria, tem-se o desbalanço dinâmico, χ , que é o ângulo formado entre estes dois eixos. Como o desbalanço estático não precisa estar, necessariamente, no mesmo plano do desbalanço dinâmico, assume-se que este último esteja defasado de um ângulo α do primeiro.

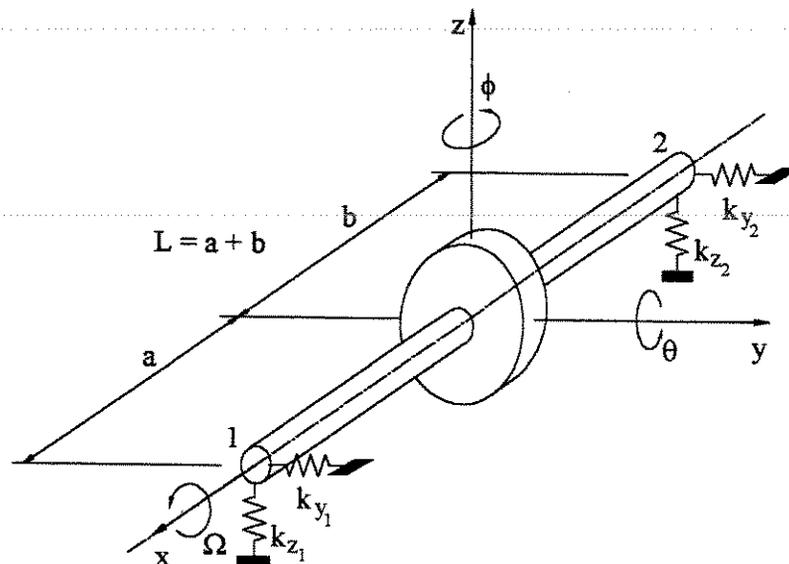


Figura 4.2 – Esquema do rotor rígido apoiado sobre mancais flexíveis.

Sejam $x_c, y_c, z_c, \psi, \theta$ e ϕ a posição e rotações do ponto C nas direções x, y e z , respectivamente. Com exceção da coordenada ψ , que representa a rotação própria do rotor, todos os outros deslocamentos são considerados pequenos.

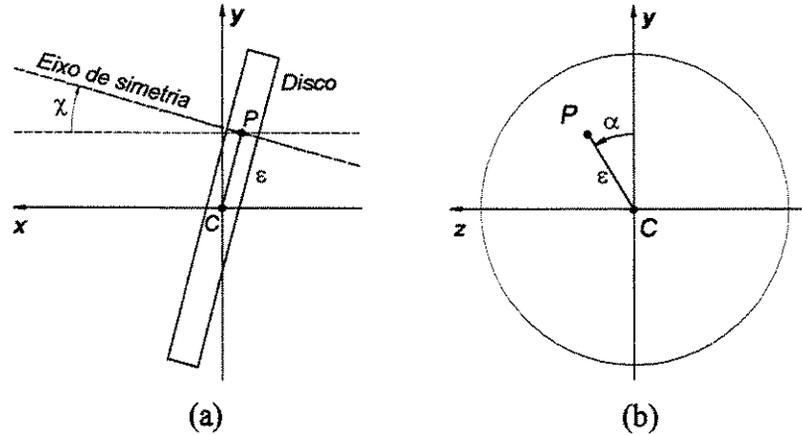


Figura 4.3 – Condições de desbalanço do rotor: (a) desbalanço dinâmico e (b) estático.

Utilizando-se os ângulos de Euler, obtém-se a posição absoluta do centro de gravidade do rotor em relação ao sistema de referência inercial com origem em O. Após a linearização, a posição de P pode ser expressa por:

$$\overline{PO} = \begin{cases} x_c + \varepsilon[\theta \operatorname{sen}(\psi + \alpha) - \phi \operatorname{cos}(\psi + \alpha)] \\ y_c + \varepsilon \operatorname{cos}(\psi + \alpha) \\ z_c + \varepsilon \operatorname{sen}(\psi + \alpha) \end{cases} \quad (4.110)$$

Derivando-se a equação (4.110), obtém-se a velocidade de translação absoluta do ponto P:

$$\vec{v}_P = \begin{cases} \dot{x}_c + \varepsilon[(\dot{\psi}\theta - \dot{\phi}) \operatorname{cos}(\psi + \alpha) + (\dot{\psi}\phi - \dot{\theta}) \operatorname{sen}(\psi + \alpha)] \\ \dot{y}_c - \varepsilon\dot{\psi} \operatorname{sen}(\psi + \alpha) \\ \dot{z}_c + \varepsilon\dot{\psi} \operatorname{cos}(\psi + \alpha) \end{cases} \quad (4.111)$$

A primeira parte do primeiro termo da equação (4.111) representa a velocidade de P na direção axial devido ao movimento do ponto C na mesma direção. A segunda parte é a velocidade de P devido à excentricidade e às rotações da seção transversal do eixo. Se a excentricidade e as rotações são consideradas pequenas, esta segunda parte pode ser considerada

desprezível se comparada à primeira [Genta 99]. Fazendo-se esta simplificação, pode-se escrever a energia cinética de translação do rotor como:

$$T_T = \frac{1}{2} m \{ \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 + \varepsilon^2 \dot{\psi}^2 + 2\varepsilon \dot{\psi} [-\dot{y}_c \sin(\psi + \alpha) + \dot{z}_c \cos(\psi + \alpha)] \} \quad (4.112)$$

Assumindo-se pequenos deslocamentos, pode-se escrever a velocidade angular absoluta do rotor da seguinte forma:

$$\vec{\Omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} [\chi \cos(\psi) + \varphi] + \dot{\phi} \chi \sin(\psi) + \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\psi) - \chi \dot{\psi} \\ -\dot{\theta} \sin(\psi) + \dot{\phi} \cos(\psi) \end{Bmatrix} \quad (4.113)$$

e a expressão da energia cinética de rotação torna-se:

$$T_R = \frac{1}{2} \{ J_t (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \chi^2 \dot{\psi}^2) + J_p (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \varphi) + 2\dot{\psi} \chi (J_p - J_t) [\dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\psi)] \} \quad (4.114)$$

Utilizando-se as expressões das energia cinética de translação e rotação do rotor e a equação de Lagrange, obtém-se as equações de movimento do sistema. As forças elásticas dos mancais podem ser introduzidas na equação de Lagrange no termo de energia potencial elástica ou como forças externas (generalizadas). É preciso ter cuidado ao se utilizar este procedimento para o cálculo das equações de movimento referentes aos graus de liberdade de rotação pois as forças generalizadas, neste caso, não são exatamente os momentos causados pelas forças dos mancais. Isto acontece porque o eixo em torno do qual a rotação θ ocorre não é nenhum dos eixos x , y ou z [Genta 99]. Tendo-se este fato em mente e considerando-se pequenos deslocamentos, obtém-se as seguintes equações de movimento¹:

¹ Estas equações de movimento do rotor rígido descritas em (4.115) são diferentes daquelas obtidas por Genta [Genta 99 – equações (4.59) e (4.61)], pois estas últimas apresentam erros de impressão.

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_c &= F_x \\
m\ddot{y}_c &= m\varepsilon[\ddot{\psi} \sin(\psi + \alpha) + \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \alpha)] + F_y \\
m\ddot{z}_c &= m\varepsilon[-\ddot{\psi} \cos(\psi + \alpha) + \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \alpha)] + F_z \\
(J_p + J_t \chi^2)\ddot{\psi} + \chi(J_p - J_t)[\ddot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\theta} \sin(\psi)] &= M_x \\
J_t \ddot{\theta} + J_p \dot{\psi} \dot{\phi} &= \chi(J_p - J_t)[- \dot{\psi} \cos(\psi) + \dot{\psi}^2 \sin(\psi)] + M_y \\
J_t \ddot{\phi} - J_p \dot{\psi} \dot{\theta} &= \chi(J_p - J_t)[- \dot{\psi} \sin(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)] + M_z
\end{aligned} \tag{4.115}$$

sendo F_x, F_y, F_z e M_x, M_y, M_z as componentes das forças e dos momentos aplicadas pelos mancais ao rotor, respectivamente.

Observando-se as equações (4.115), percebe-se claramente que o movimento axial (primeira equação) do rotor é desacoplado dos movimentos transversais. Se a rotação própria do rotor for constante, ou seja, se $\ddot{\psi} = 0$, a quarta equação se desacopla e o comportamento de flexão do eixo pode ser estudado independente dos movimentos axial e torsional.

Considerando que $\psi = \omega t$, obtém-se as equações de movimento que permitem estudar o comportamento de flexão do rotor de Jeffcott com velocidade constante:

$$\begin{aligned}
m\ddot{y}_c &= m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + F_y \\
m\ddot{z}_c &= m\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + F_z \\
J_t \ddot{\theta} + J_p \dot{\psi} \dot{\phi} &= \chi\omega^2 (J_p - J_t) \sin(\omega t) + M_y \\
J_t \ddot{\phi} - J_p \dot{\psi} \dot{\theta} &= -\chi\omega^2 (J_p - J_t) \cos(\omega t) + M_z
\end{aligned} \tag{4.116}$$

A obtenção das forças e momentos exercidas pelos mancais sobre o rotor é tarefa relativamente simples. Considerando-se as propriedades dos suportes 1 e 2 e as características geométricas do rotor apresentadas na Figura 4.2, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \\ F_z \\ M_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (k_{y_1} + k_{y_2}) & (ak_{y_1} - bk_{y_2}) & 0 & 0 \\ (ak_{y_1} - bk_{y_2}) & (a^2k_{y_1} + b^2k_{y_2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k_{z_1} + k_{z_2}) & -(ak_{z_1} - bk_{z_2}) \\ 0 & 0 & -(ak_{z_1} - bk_{z_2}) & (a^2k_{z_1} - b^2k_{z_2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_c \\ \varphi \\ z_c \\ \theta \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} K_{y_{11}} & K_{y_{12}} & 0 & 0 \\ K_{y_{21}} & K_{y_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{z_{11}} & -K_{z_{12}} \\ 0 & 0 & -K_{z_{21}} & K_{z_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_c \\ \varphi \\ z_c \\ \theta \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Substituindo-se a equação (4.117) em (4.116) chega-se, finalmente, as equações de movimento do sistema:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{z}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z}_c \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} K_{y_{11}} & K_{y_{12}} & 0 & 0 \\ K_{y_{21}} & K_{y_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{z_{11}} & -K_{z_{12}} \\ 0 & 0 & -K_{z_{21}} & K_{z_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_c \\ \varphi \\ z_c \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \\ -\chi\omega^2 (J_p - J_t) \cos(\omega t) \\ m\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \\ \chi(J_p - J_t) \sin(\omega t) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

Esta equação também pode ser escrita em função de um conjunto de coordenadas complexas. Para tanto, considere as coordenadas:

$$p_1 = y_c + jz_c \quad \text{e} \quad p_2 = \varphi_c - j\theta_c. \tag{4.119}$$

Utilizando-se as equações (4.118) e (4.119), pode-se escrever a equação de movimento para vibrações livres nas coordenadas complexas na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{\bar{p}}_1 \\ \ddot{\bar{p}}_2 \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{\bar{p}}_1 \\ \dot{\bar{p}}_2 \end{Bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} K_{m_{11}} & K_{m_{12}} & K_{d_{11}} & K_{d_{12}} \\ K_{m_{21}} & K_{m_{22}} & K_{d_{21}} & K_{d_{22}} \\ K_{d_{11}} & K_{d_{12}} & K_{m_{11}} & K_{m_{12}} \\ K_{d_{21}} & K_{d_{22}} & K_{m_{21}} & K_{m_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.120}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
K_{m_{11}} &= \frac{(K_{y_{11}} + K_{z_{11}})}{2} & K_{d_{11}} &= \frac{(K_{y_{11}} - K_{z_{11}})}{2} \\
K_{m_{12}} &= \frac{(K_{y_{12}} + K_{z_{12}})}{2} & K_{d_{12}} &= \frac{(K_{y_{12}} - K_{z_{12}})}{2} \\
K_{m_{21}} &= \frac{(K_{y_{21}} + K_{z_{21}})}{2} & K_{d_{21}} &= \frac{(K_{y_{21}} - K_{z_{21}})}{2} \\
K_{m_{22}} &= \frac{(K_{y_{22}} + K_{z_{22}})}{2} & K_{d_{22}} &= \frac{(K_{y_{22}} - K_{z_{22}})}{2}
\end{aligned} \tag{4.121}$$

A equação (4.121) foi utilizada para gerar os resultados das seções seguintes. Contudo, com o objetivo de facilitar a interpretação física, foi feita uma transformação de coordenadas nestas equações de movimento para que elas passassem a ser expressas em função das coordenadas de translação das duas extremidades do rotor (posição dos mancais) ao invés das coordenadas do CG do rotor (as duas de translação mais as duas de rotação).

4.3.4.2. Mancais isotrópicos

A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros modais, obtidos através da formulação da análise modal complexa, para o rotor de Jeffcott apoiado sobre mancais isotrópicos. Ao contrário do que acontece quando se utiliza coordenadas reais na modelagem de sistemas rotativos, em que é preciso pós-processar os dados dos vetores modais para se identificar quais são os modos de precessão direta e retrógrada, a formulação complexa já fornece este resultado de forma muito clara. Para tanto, basta comparar o módulo das componentes diretas (P_f) e retrógradas (\bar{P}_b) dos vetores modais, para cada estação do rotor. Assim, observando-se a terceira coluna da Tabela 4.1, percebe-se que $|P_{b1}| > |P_{f1}|$ e $|P_{b2}| > |P_{f2}|$, indicando que as duas estações descrevem movimentos de precessão retrógrada. Ainda mais: como $P_{fi} = 0$ para $i = 1,2$, a órbita descrita é circular! Adotando-se o mesmo procedimento, identifica-se, facilmente, a direção dos movimentos de precessão dos outros modos.

A Figura 4.4 ilustra as quatro primeiras formas modais do rotor de Jeffcott isotrópico.

Autovalores [rad/s]			
$-0,96 + 61,90j$	$-0,96 + 61,90j$	$-4,80 + 135,61j$	$-5,24 + 147,95j$
Frequências naturais [Hz]			
9,85	9,85	21,58	23,55
Vetores modais à direita ($\{P_{f1} \ P_{f2} \ \bar{P}_{b1} \ \bar{P}_{b2}\}^T$)			
0	1	0	1
0	1	0	-1
1	0	1	0
1	0	-1	0
Movimento de Precessão			
Retrógrado	Direto	Retrógrado	Direto

Tabela 4.1 – Parâmetros modais do rotor rígido isotrópico. Rotação = 3000 rpm.

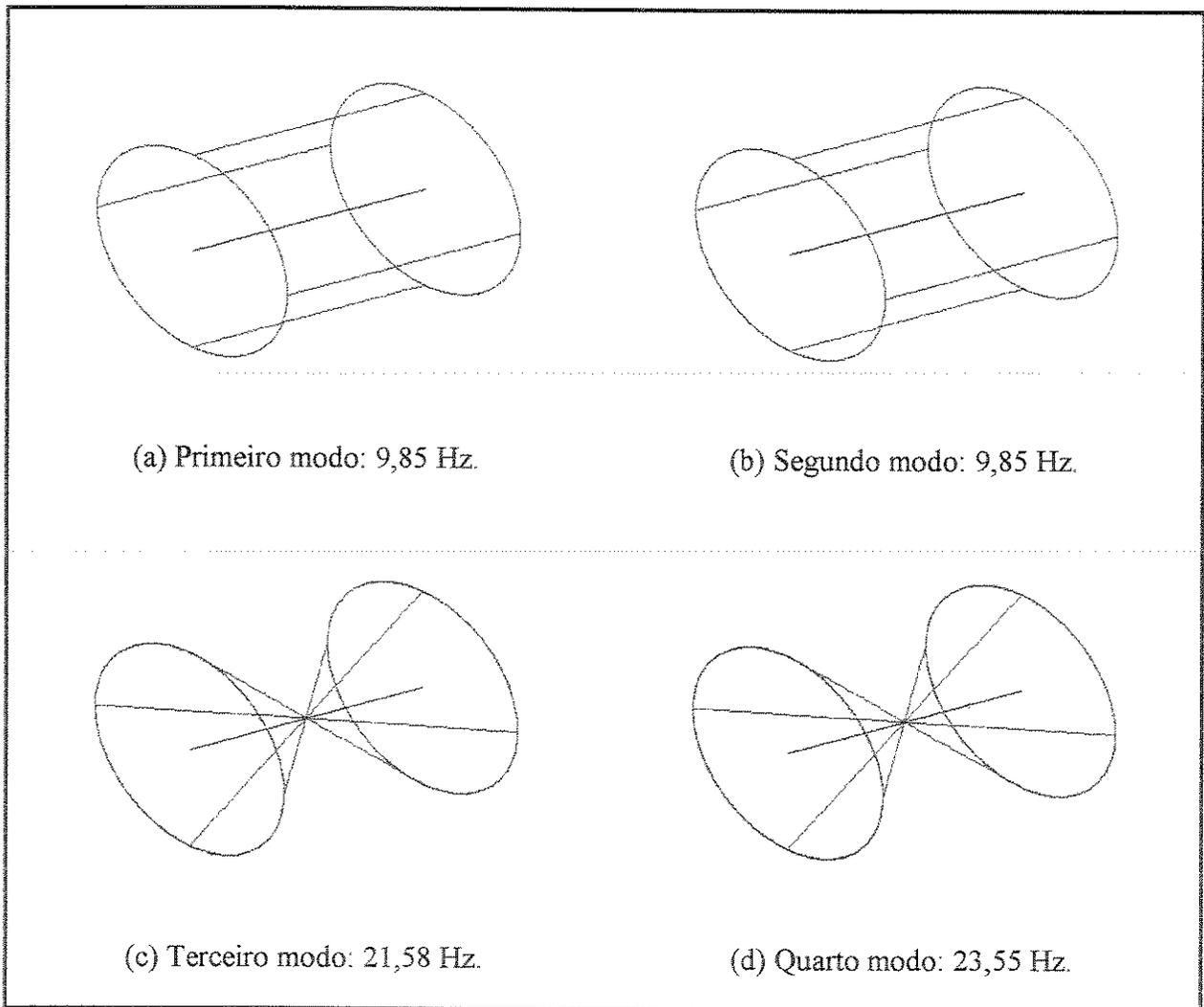


Figura 4.4 – Primeiros quatro modos de vibração do rotor rígido isotrópico.

A Figura 4.5 apresenta uma comparação das Funções de Resposta em Frequência tradicional e direcional. Observando-se somente a FRF, é impossível concluir que o primeiro pico corresponde, na verdade, a dois modos de mesma frequência: um direto e outro retrógrado. Por outro lado, cada uma das dFRFs normais (direta e retrógrada) apresentarão o mesmo pico, associado a apenas um modo, ou direto ou retrógrado.

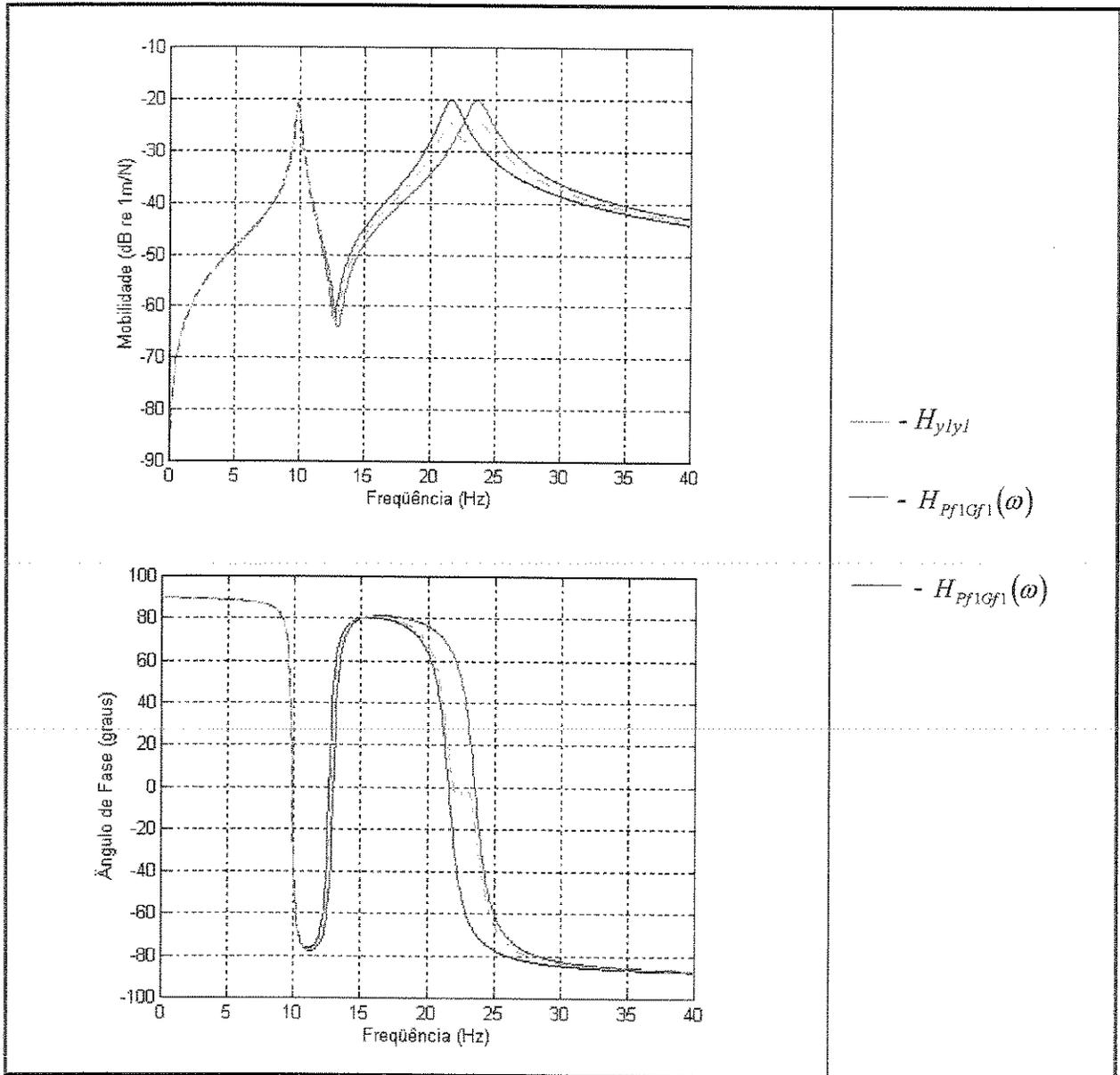


Figura 4.5 - Magnitude e fase das Funções de Resposta em Frequência tradicional e direcionais.

Esta característica pode ser observada mais claramente analisando-se o terceiro e quarto modos. A Figura 4.6 ilustra o comportamento da FRF com a variação da rotação. Percebe-se que,

neste caso, quanto menor a rotação do rotor, mais próximo estarão os picos correspondentes a estes dois modos. Se esta FRF for utilizada no processo de identificação de parâmetros modais, pode-se esperar algumas dificuldades devido à alta densidade modal. Se o experimento não for bem projetado - utilizando-se múltiplas excitações, por exemplo - é possível que não se consiga estimativas aceitáveis! No entanto, como as dFRFs conseguem separar os modos de precessão diretas e retrógradas em curvas diferentes (as dFRFs normais diretas e retrógradas, respectivamente), o processo de estimação de parâmetros será, com certeza, muito mais preciso.

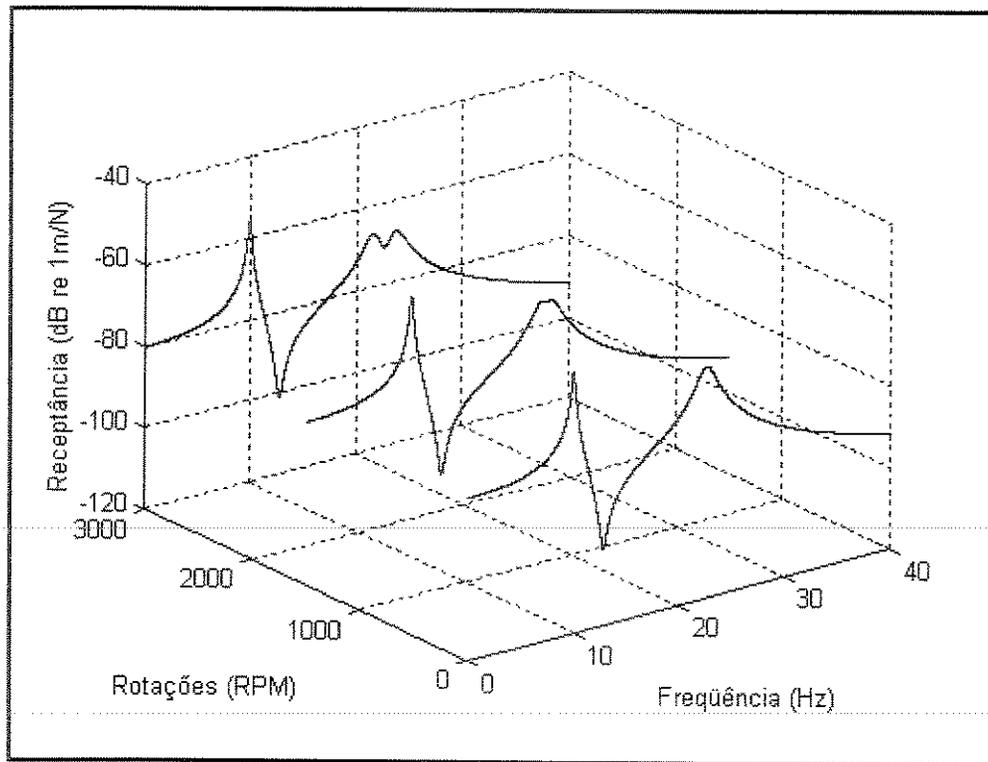


Figura 4.6 – Funções de Resposta Frequência $H_{Y1Y1}(\omega)$ para várias rotações.

4.3.4.3. Mancais anisotrópicos

A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros modais para o rotor de Jeffcott apoiado sobre mancais anisotrópicos enquanto que a Figura 4.7 ilustra as quatro primeiras formas modais do sistema. Adotando-se o mesmo procedimento utilizado no caso de mancais isotrópicos, pode-se identificar quais são os modos associados aos movimentos de precessão direta e retrógrada.

Autovalores [rad/s]			
$-0,96 + 58,72j$	$-0,96 + 61,90j$	$-4,83 + 130,98j$	$-52,2 + 145,31j$
Frequências naturais [Hz]			
9,35	9,85	20,85	23,13
Vetores modais à direita ($\{P_{f1} \ P_{f2} \ \bar{P}_{b1} \ \bar{P}_{b2}\}^T$)			
1	1	$0,2851 - 0,0089i$	-1
1	1	$-0,2851 + 0,0089i$	1
-1	-1	-1	$-0,2607 + 0,0082i$
1	-1	1	$0,2607 - 0,0082i$
Movimento de Precessão			
Retilíneo	Retilíneo	Retrógrado	Direto

Tabela 4.2 – Parâmetros modais do rotor rígido anisotrópico. Rotação = 3000 rpm.

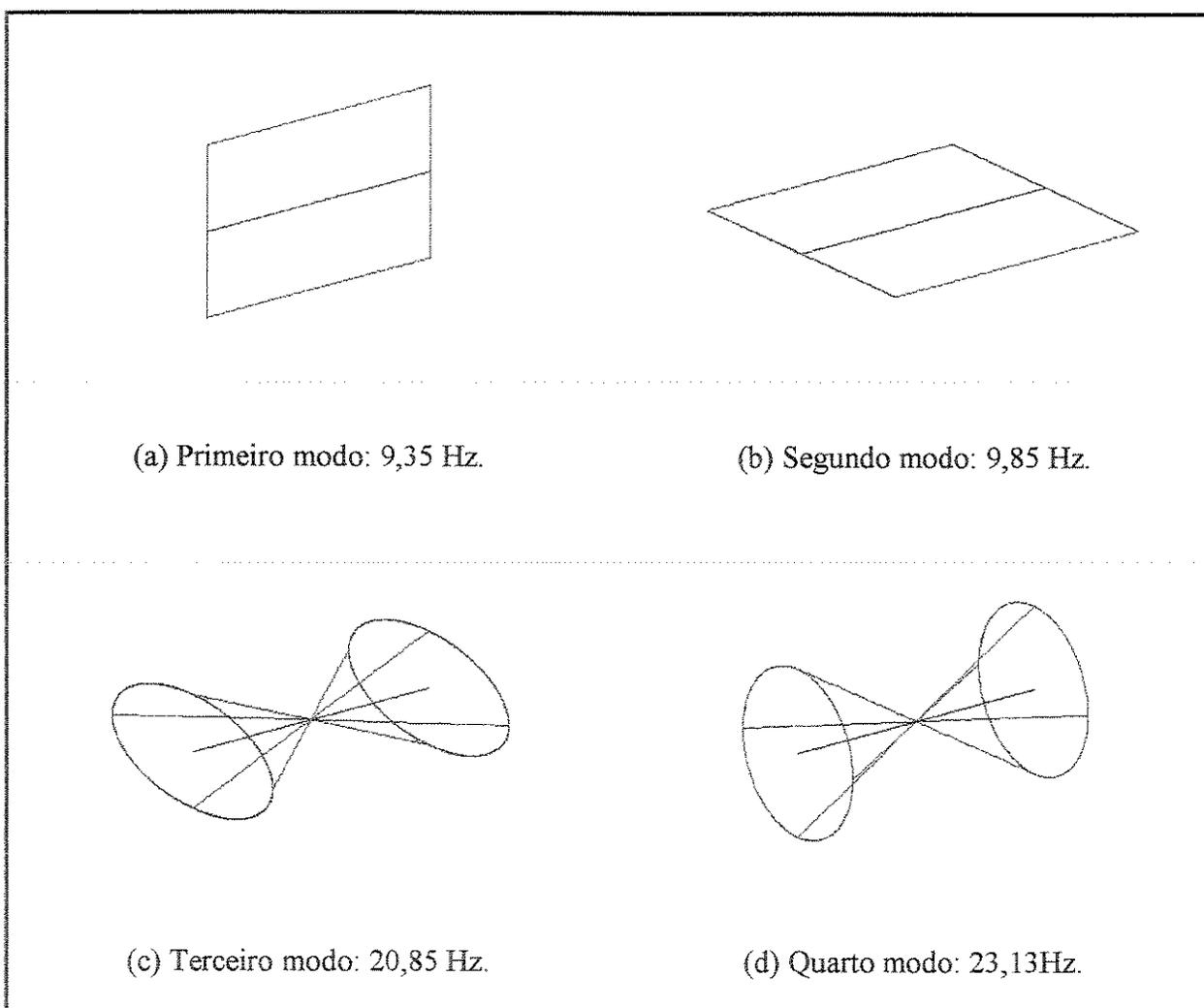


Figura 4.7 – Primeiros quatro modos de vibração do rotor rígido anisotrópico.

Considera-se, inicialmente, o primeiro modo do sistema (primeira coluna da Tabela 4.2). Comparando-se o módulo das componentes diretas e retrógradas deste vetor modal percebe-se que $|P_{b1}| = |P_{f1}|$ e $|P_{b2}| = |P_{f2}|$. Neste caso, não se pode dizer que o movimento de precessão seja direto ou retrógrado. Quando isto ocorre, como já foi salientado no Capítulo 3, a órbita da respectiva estação do rotor é retilínea, como mostra a Figura 4.7(a).

Analisando-se o quarto modo, nota-se que $|P_{b1}| < |P_{f1}|$ e $|P_{b2}| < |P_{f2}|$, indicando que as duas estações descrevem movimentos de precessão direta. Neste caso, nenhuma das componentes do vetor modal é nula, o que significa, fisicamente, que as órbitas descritas pelo eixo são elípticas.

Vale a pena ressaltar que, dependendo das características físicas e geométricas e das condições de operação da máquina, pode acontecer de existirem os chamados modos mistos [Genta 99]. Nestes modos, algumas estações do rotor descrevem a órbita num movimento de precessão direta e outros, em precessão retrógrada. A identificação destes modos, quando se utiliza as coordenadas reais, é bastante trabalhosa, principalmente se o sistema em estudo for complexo (rotores múltiplos, por exemplo). Através da análise modal complexa, esta identificação é bastante simples. Para facilitar ainda mais esta tarefa, desenvolveu-se [Han 99] o índice de forma e directividade, *SDI* (*shape and directivity index*), definido como:

$$-1 \leq SDI = \frac{|P_f| - |P_b|}{|P_f| + |P_b|} \leq 1 \quad (4.122)$$

A relação entre os valores do *SDI*, a forma da órbita e a direção do movimento de precessão é a seguinte:

- $SDI = -1$ precessão retrógrada circular;
- $-1 < SDI < 0$ precessão retrógrada elíptica;
- $SDI = 0$ movimento retilíneo;
- $0 < SDI < 1$ precessão direta elíptica;
- $SDI = 1$ precessão direta circular.

Analisando-se estas relações percebe-se que o sinal do SDI determina a direção do movimento de precessão enquanto que a forma da órbita é definida pelo seu valor absoluto.

A Figura 4.8 apresenta uma comparação das FRFs tradicional e direcional e as Figuras 4.9 e 4.10 ilustram o comportamento das dFRFs e da FRF em função da rotação. Observa-se agora que a FRF apresenta quatro picos distintos. Contudo, a densidade modal ainda é bastante alta o que pode acarretar as mesmas dificuldades no processo de extração de parâmetros comentadas anteriormente.

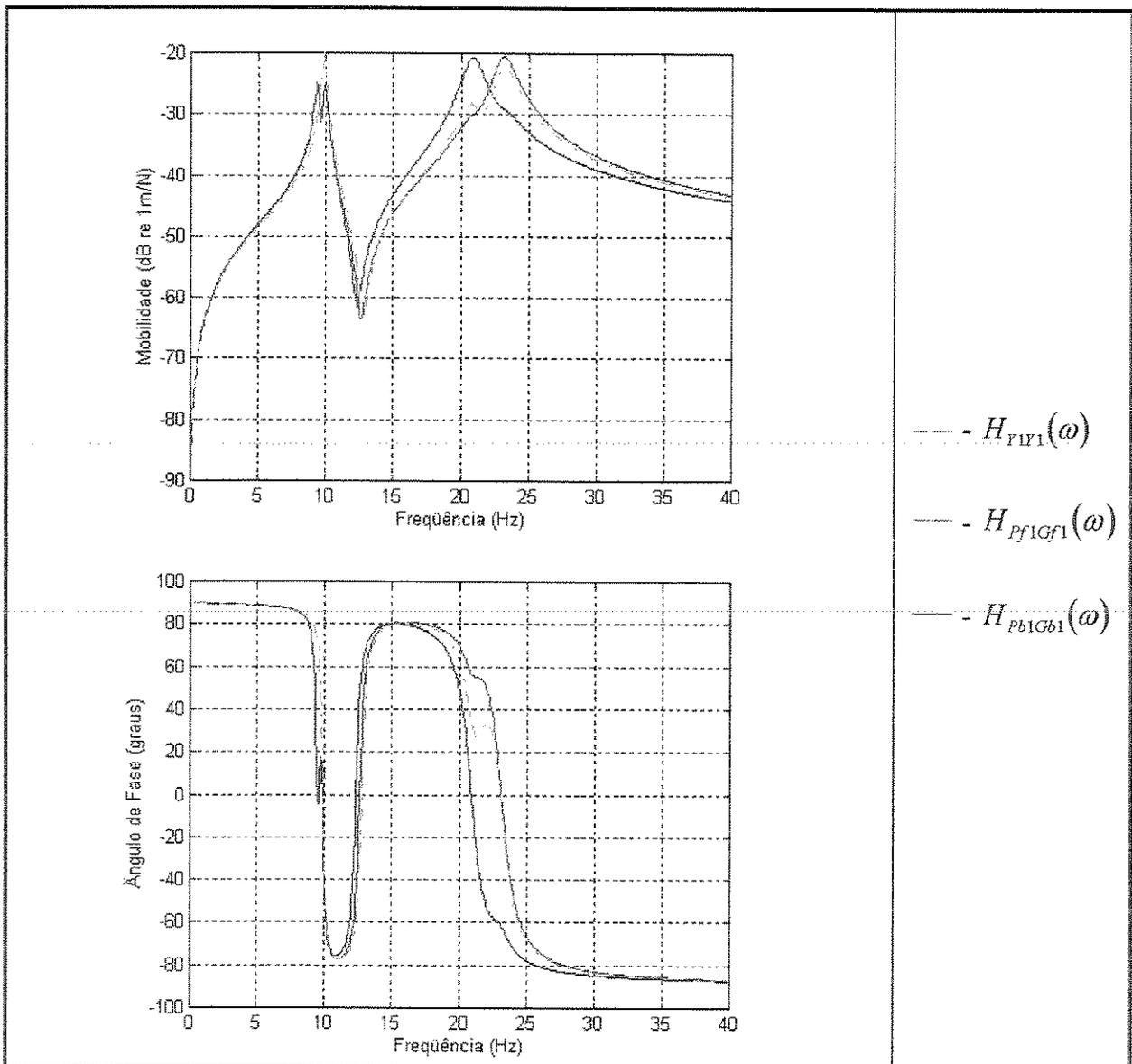


Figura 4.8 - Magnitude e fase da FRF $H_{Y1Y1}(\omega)$ e das dFRF $H_{Pf1Gf1}(\omega)$ e $H_{Pb1Gb1}(\omega)$.

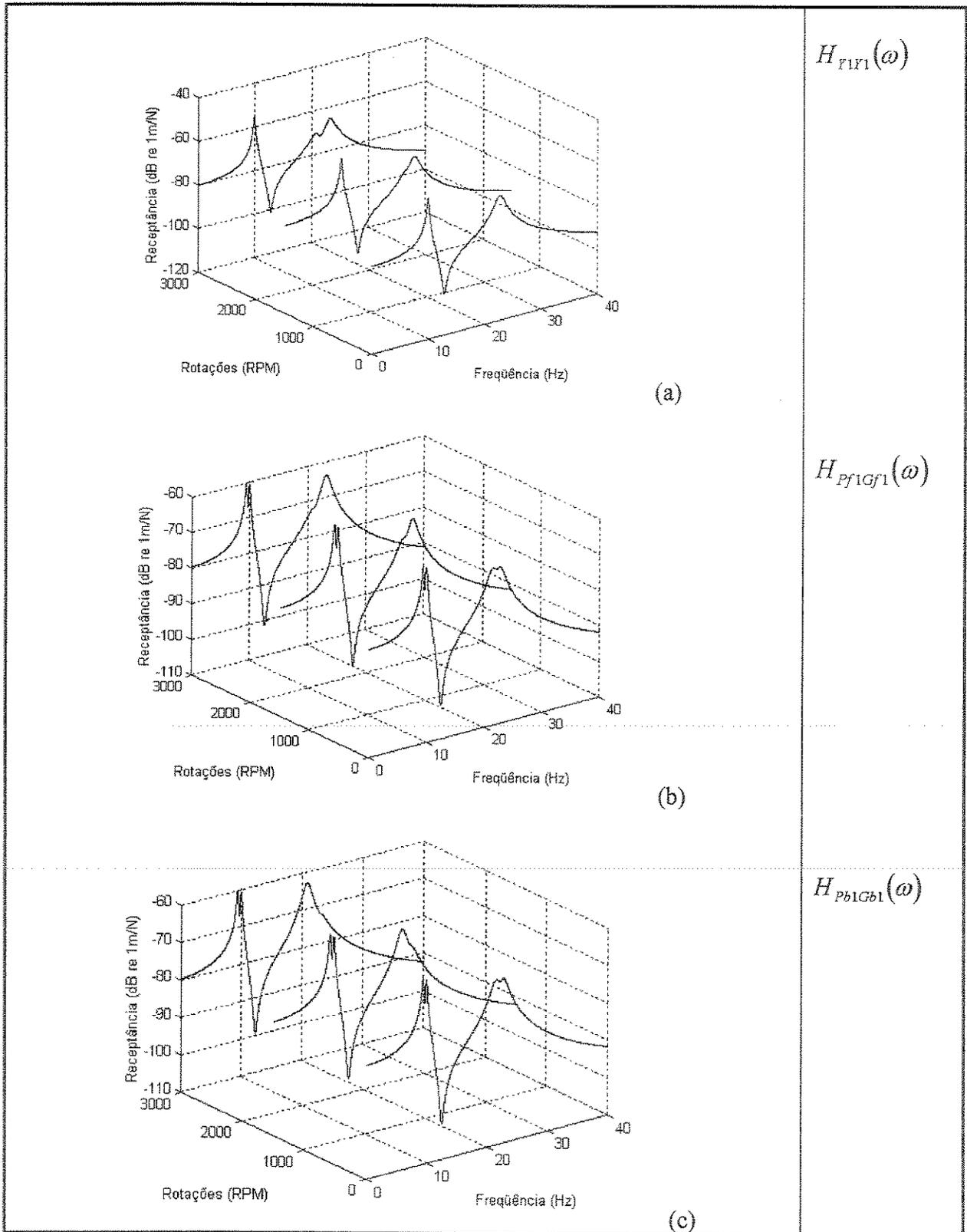


Figura 4.9 - Magnitude da FRF $H_{r1r1}(\omega)$ e das dFRF $H_{pf1Gf1}(\omega)$ e $H_{pb1Gb1}(\omega)$ para várias rotações.

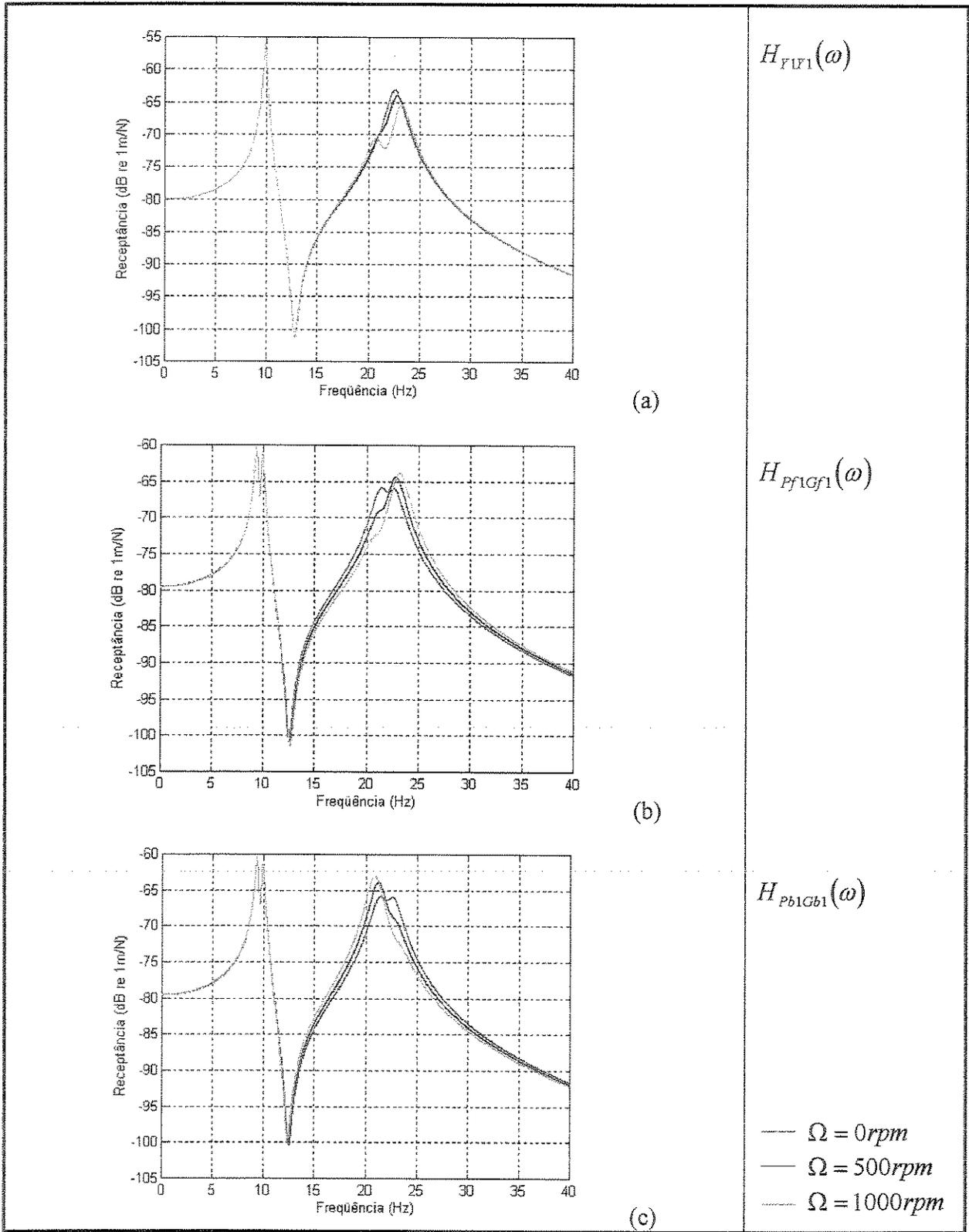


Figura 4.10 - Magnitude da FRF $H_{Y1V1}(\omega)$ e das dFRF $H_{Pf1Gf1}(\omega)$ e $H_{Pb1Gb1}(\omega)$ para várias rotações.

Ao contrário do que acontece no caso de rotores isotrópicos em que as dFRFs conseguem separar os modos de precessão diretas e retrógradas em curvas diferentes (as dFRFs normais diretas e retrógradas, respectivamente), quando os suportes são anisotrópicos, esta separação não acontece com tanta clareza. Observando a Figura 4.8 (terceiro e quarto modos), percebe-se que o segundo modo de precessão direta ainda aparece como dominante na dFRF normal direta H_{pf1Gf1} . Contudo, existe uma pequena contribuição do segundo modo de precessão retrógrada nesta dFRF. No caso da dFRF normal retrógrada H_{pb1Gb1} , a situação se inverte: o segundo modo de precessão retrógrada passa a ser dominante enquanto o segundo modo de precessão direta passa a aparecer com pequena intensidade. Através das Figuras 4.9 e 4.10 pode-se perceber que quanto maior a rotação, menor é a participação dos modos menos dominantes nas respectivas dFRFs. Vale a pena ressaltar que, no caso da FRF, os dois modos aparecem com, aproximadamente, a mesma intensidade.

Capítulo 5

Estimação das Funções de Resposta em Frequência Direcionais

Resumo do capítulo

Na análise modal complexa, os métodos de excitação e de estimação das Funções de Resposta em Frequência direcionais estão intrinsecamente ligados. Neste capítulo, analisa-se três métodos de estimação das dFRFs para os casos de excitação unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa.

5.1. Introdução

No Capítulo 4, desenvolveu-se as formulações de análise modal tradicional e complexa para sistemas rotativos. Em ambos os casos, assumiu-se que as excitações e as respostas eram harmônicas. Contudo, existem inúmeros outros tipos de excitações que podem ser utilizados para se conseguir extrair os parâmetros modais destes sistemas. Além do mais, todos os sinais medidos durante um experimento de análise modal estão contaminados por ruídos que, de uma forma geral, possuem uma característica essencialmente aleatória.

É simples definir a Função de Resposta em Frequência (receptância) como sendo a razão entre as Transformadas de Fourier dos sinais de resposta e de excitação. Da mesma forma, pode-se definir a dFRF normal direta (retrógrada) como sendo a relação entre a transformada de Fourier da componente direta (retrógrada) da força de excitação e da componente direta (retrógrada) das resposta do sistema em coordenadas complexas.

Apesar destas relações servirem como definição das FRFs e dFRFs, elas, certamente, não podem ser usadas como estimadores destas funções. Por este motivo, é necessário desenvolver novos estimadores das dFRFs da mesma forma que existem os estimadores H_1 , e H_2 para as FRFs.

Dependendo do tipo de excitação que se utiliza para a realização da análise modal experimental, pode-se obter as dFRFs diretamente a partir das FRFs. Contudo, em algumas situações, é mais preciso e aconselhável utilizar excitações como a bidirecional rotativa que permite a separação clara dos modos de precessão direta e retrógrada. Neste caso, as dFRFs não podem ser obtidas a partir das FRFs sendo, portanto, necessário reformular os estimadores tradicionais para poder tratar com os sinais complexos de excitação e resposta do sistema.

A seguir, apresenta-se uma breve revisão dos conceitos básicos de análise de sinais aleatórios e dos estimadores das Funções de Resposta em Frequência comuns. Na seção 5.3 desenvolve-se as expressões para os estimadores das Funções de Resposta em Frequência direcionais no caso das excitações unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa.

5.2. Estimadores das FRFs

Para se calcular a transformada de Fourier de um sinal $f(t)$, é preciso que este satisfaça a condição de Dirichlet [Ewins 84]. Uma vez que os sinais aleatórios não atendem a esta condição, é necessário que se utilize outros parâmetros para poder descrever as características destes sinais no domínio da frequência. Estes parâmetros são as funções de correlação (domínio do tempo) e as densidades espectrais (domínio da frequência).

As funções de auto-correlação e correlação cruzada entre dois sinais $f(t)$ (excitação, p.ex.) e $x(t)$ (resposta, p.ex.) são definidas, respectivamente, por [Bendat 80]:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t + \tau)dt \quad \text{e} \quad R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt, \quad (5.1)$$

$$R_{xf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)f(t + \tau)dt \quad \text{e} \quad R_{fx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)x(t + \tau)dt. \quad (5.2)$$

Uma vez que as funções de correlação obedecem à condição de Dirichlet, as suas transformadas de Fourier podem ser calculadas, fornecendo as densidades espectrais de potência e densidades espectrais cruzadas definidas, respectivamente, por [Bendat 80]:

$$S_{ff}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{e} \quad S_{xx}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5.3)$$

$$S_{xf}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{e} \quad S_{fx}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{fx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.4)$$

As equações (5.3) e (5.4) consideram todo o campo de frequências, positivo e negativo. Usualmente, trabalha-se apenas com as frequências não negativas e para isso são definidas as densidades espectrais de potência para frequências não negativas [Bendat 80]:

$$\begin{aligned} G_{ff}(\omega) &= 2S_{ff}(\omega) & G_{xx}(\omega) &= 2S_{xx}(\omega) & \text{para } \omega \geq 0 \\ G_{fx}(\omega) &= 2S_{fx}(\omega) & G_{xf}(\omega) &= 2S_{xf}(\omega) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$G_{ff}(\omega) = G_{xx}(\omega) = G_{fx}(\omega) = G_{xf}(\omega) = 0 \quad \text{para } \omega < 0 \quad (5.6)$$

A Função de Resposta em Frequência que relaciona os sinais $f(t)$ e $x(t)$ pode ser avaliada por meio de duas relações (estimadores) [Ewins 84]:

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad \text{e} \quad H_2(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} \quad (5.7)$$

Devido ao ruído presente nas medições dos sinais de excitação e resposta do sistema, estes dois estimadores, em determinadas faixas de frequência, podem não fornecer os mesmos resultados. Em frequências próximas às ressonâncias, por exemplo, o sinal de força (em um ensaio com excitador eletrodinâmico) será mais afetado pelos ruídos de medição, comprometendo a precisão do estimador H_1 . Já nas faixas de frequência próximas às anti-ressonâncias, o sinal da resposta será o mais afetado, piorando a precisão do estimador H_2 .

A função de coerência $\gamma(\omega)$, que relaciona os resultados destes dois estimadores, é definida por:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}, \text{ sendo } 0 \leq \gamma(\omega) \leq 1. \quad (5.8)$$

Além dos motivos apresentados anteriormente, existem diversas outras razões para que a função de coerência assuma valores menores que 1. Maiores detalhes podem ser obtidos em [McConnell 95].

5.3. Estimadores das dFRFs

5.3.1. Excitação Unidirecional

A técnica de excitação unidirecional utilizada na análise modal de máquinas rotativas não difere daquela normalmente empregada no teste modal de estruturas não girantes. Assim, pode-se obter as Funções de Resposta em Frequência tradicionais entre as entradas e saídas reais do sistema através dos estimadores apresentados anteriormente. A partir destas, pode-se calcular as Funções de Resposta em Frequência direcionais entre as excitações e respostas complexas através das expressões (já apresentadas no Capítulo 4 e rescritas aqui por conveniência):

$$\begin{aligned} 2[H_{PjGf}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] + [H_{ZZ}(\omega)] + j([H_{ZY}(\omega)] - [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PjGb}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] - [H_{ZZ}(\omega)] + j([H_{ZY}(\omega)] + [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PbGf}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] - [H_{ZZ}(\omega)] - j([H_{ZY}(\omega)] + [H_{YZ}(\omega)]) \\ 2[H_{PbGb}(\omega)] &= [H_{YY}(\omega)] + [H_{ZZ}(\omega)] - j([H_{ZY}(\omega)] - [H_{YZ}(\omega)]) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Na verdade, uma vez que $[\bar{H}_{PjGf}(\omega)] = [H_{PbGb}(\omega)]$ e $[\bar{H}_{PjGb}(\omega)] = [H_{PbGf}(\omega)]$, basta então conhecer apenas duas das quatro submatrizes do lado esquerdo das equações (5.9).

No caso de um rotor anisotrópico com N estações (planos de medição), este método exige a medição de $(8N-4)$ FRFs para se poder calcular uma linha (coluna) de $[H_{PjGf}(\omega)]$ mais uma

coluna (linha) de $[H_{P_f G_b}(\omega)]$. Se o rotor for isotrópico, as dFRFs reversas serão nulas e será necessário que se meça apenas $2N$ FRFs tradicionais.

A excitação unidirecional possui como desvantagem a dificuldade prática de se conseguir excitar o sistema em apenas uma direção, seja devido às forças tangentes causadas pela rotação do eixo ou por causa das componentes ortogonais devido a erros de posicionamento do excitador.

5.3.2. Excitação Bidirecional Estacionária

A excitação bidirecional estacionária é gerada por dois excitadores posicionados em um plano perpendicular ao eixo do rotor e atuando simultaneamente.

A relação entre as excitações complexas na estação i e a resposta complexa na estação k do rotor é dada pela equação (4.94) e tem a forma:

$$P_{f_k}(j\omega) = \begin{bmatrix} H_{P_{f_k} G_{f_k}}(j\omega) & H_{P_{f_k} G_{b_k}}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{f_i}(j\omega) \\ G_{b_i}(j\omega) \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Pós multiplicando ambos os lados da equação (5.10) por $\{\bar{G}_{f_i}(j\omega) \quad \bar{G}_{b_i}(j\omega)\}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} S_{G_{f_i} P_{f_k}}(j\omega) & S_{G_{b_i} P_{f_k}}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{P_{f_k} G_{f_k}}(j\omega) & H_{P_{f_k} G_{b_k}}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{G_{f_i} G_{f_i}}(j\omega) & S_{G_{b_i} G_{f_i}}(j\omega) \\ S_{G_{f_i} G_{b_i}}(j\omega) & S_{G_{b_i} G_{b_i}}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

ou ainda:

$$S_{G_{f_i} P_{f_k}}(j\omega) = H_{P_{f_k} G_{f_i}}(j\omega) S_{G_{f_i} G_{f_i}}(j\omega) + H_{P_{f_k} G_{b_i}}(j\omega) S_{G_{f_i} G_{b_i}}(j\omega), \quad (5.12)$$

$$S_{G_{b_i} P_{f_k}}(j\omega) = H_{P_{f_k} G_{f_i}}(j\omega) S_{G_{b_i} G_{f_i}}(j\omega) + H_{P_{f_k} G_{b_i}}(j\omega) S_{G_{b_i} G_{b_i}}(j\omega). \quad (5.13)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (5.12) e (5.13) para as dFRFs $H_{P_{f_k} G_{f_i}}(j\omega)$ e $H_{P_{f_k} G_{b_i}}(j\omega)$, conclui-se que:

$$H_{P_{f_k}G_{f_k}}(j\omega) = \frac{S_{G_{f_k}P_{f_k}}(j\omega)S_{G_{b_k}G_{b_k}}(j\omega) - S_{G_{f_k}G_{b_k}}(j\omega)S_{G_{b_k}P_{f_k}}(j\omega)}{S_{G_{f_k}G_{f_k}}(j\omega)S_{G_{b_k}G_{b_k}}(j\omega) - S_{G_{f_k}G_{b_k}}(j\omega)S_{G_{b_k}G_{f_k}}(j\omega)} \quad (5.14)$$

$$e \quad H_{P_{f_k}G_{b_k}}(j\omega) = \frac{S_{G_{b_k}P_{f_k}}(j\omega)S_{G_{f_k}G_{f_k}}(j\omega) - S_{G_{b_k}G_{f_k}}(j\omega)S_{G_{f_k}P_{f_k}}(j\omega)}{S_{G_{b_k}G_{b_k}}(j\omega)S_{G_{f_k}G_{f_k}}(j\omega) - S_{G_{f_k}G_{b_k}}(j\omega)S_{G_{b_k}G_{f_k}}(j\omega)}. \quad (5.15)$$

As expressões (5.14) e (5.15) são os estimadores das dFRFs normal e reversa entre as excitações e respostas complexas. No entanto, seria interessante que existisse uma função similar à função de coerência, definida na equação (5.8), que pudesse correlacionar as componentes diretas e retrógradas da excitação e da resposta complexa.

Com esta finalidade Lee e Joh [Lee 93] desenvolveram as densidades espectrais de potência para dois sinais complexos em função das densidades espectrais de potência das componentes real e imaginária de cada sinal.

Assim, considera-se inicialmente dois sinais complexos genéricos na forma:

$$u(t) = v(t) + jw(t) \quad e \quad l(t) = m(t) + jn(t) \quad (5.16)$$

sendo que $v(t)$, $w(t)$, $m(t)$ e $n(t)$ são sinais reais.

As densidades espectrais de potência entre estes sinais são dadas por [Lee 93]:

$$\begin{aligned} S_{lu}(j\omega) &= S_{mv}(j\omega) + S_{nw}(j\omega) + j\{S_{mw}(j\omega) - S_{nv}(j\omega)\} \\ S_{\bar{l}u}(j\omega) &= S_{mv}(j\omega) - S_{nw}(j\omega) + j\{S_{mw}(j\omega) + S_{nv}(j\omega)\} \\ S_{\bar{l}l}(j\omega) &= S_{mv}(j\omega) - S_{nw}(j\omega) - j\{S_{mw}(j\omega) + S_{nv}(j\omega)\} \\ S_{\bar{l}\bar{l}}(j\omega) &= S_{mv}(j\omega) + S_{nw}(j\omega) - j\{S_{mw}(j\omega) - S_{nv}(j\omega)\} \\ S_{uu}(j\omega) &= S_{vv}(j\omega) + S_{ww}(j\omega) + j\{S_{vw}(j\omega) - S_{wv}(j\omega)\} \\ S_{\bar{u}u}(j\omega) &= S_{vv}(j\omega) - S_{ww}(j\omega) + j\{S_{vw}(j\omega) + S_{wv}(j\omega)\} \\ S_{u\bar{u}}(j\omega) &= S_{vv}(j\omega) - S_{ww}(j\omega) - j\{S_{vw}(j\omega) + S_{wv}(j\omega)\} \\ S_{\bar{u}\bar{u}}(j\omega) &= S_{vv}(j\omega) + S_{ww}(j\omega) - j\{S_{vw}(j\omega) - S_{wv}(j\omega)\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

e satisfazem às relações:

$$S_{ik}(j\omega) = \overline{S_{ki}(j\omega)}, \quad S_{ii}(-j\omega) = \overline{S_{ii}(j\omega)}, \quad \text{sendo } i, k = u, \bar{u}, l, \bar{l} \quad (5.18)$$

A coerência entre dois sinais complexos é definida como [Lee 93]:

$$\gamma_{ik}(j\omega) = \frac{|S_{ik}(j\omega)|^2}{S_{ii}(j\omega)S_{kk}(j\omega)}, \quad \text{sendo } i, k = u, \bar{u}, l, \bar{l} \text{ e } 0 \leq \gamma_{ik}^2(j\omega) \leq 1 \quad (5.19)$$

Considera-se agora o caso mais específico em que os sinais complexos são a excitação aplicada e a resposta resultante do sistema. Estes sinais têm a seguinte forma:

$$p(t) = p_f(t) = y(t) + jz(t) \quad \text{e} \quad \bar{p}(t) = p_b(t) = y(t) - jz(t) \quad (5.20)$$

$$g(t) = g_f(t) = f_y(t) + jf_z(t) \quad \text{e} \quad \bar{g}(t) = g_b(t) = f_y(t) - jf_z(t) \quad (5.21)$$

sendo que $y(t)$, $z(t)$, $f_y(t)$ e $f_z(t)$ são sinais reais.

Fazendo-se $l, u = p_f, g_f$ e $\bar{l}, \bar{u} = p_b, g_b$ nas equações (5.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} S_{G_f P_f}(j\omega) &= S_{f_y y}(j\omega) + S_{f_z z}(j\omega) + j\{S_{f_y z}(j\omega) - S_{f_z y}(j\omega)\} \\ S_{G_b P_f}(j\omega) &= S_{f_y y}(j\omega) - S_{f_z z}(j\omega) + j\{S_{f_y z}(j\omega) + S_{f_z y}(j\omega)\} \\ S_{G_f P_b}(j\omega) &= S_{f_y y}(j\omega) - S_{f_z z}(j\omega) - j\{S_{f_y z}(j\omega) + S_{f_z y}(j\omega)\} \\ S_{G_b P_b}(j\omega) &= S_{f_y y}(j\omega) + S_{f_z z}(j\omega) - j\{S_{f_y z}(j\omega) - S_{f_z y}(j\omega)\} \\ S_{P_f P_f}(j\omega) &= S_{yy}(j\omega) + S_{zz}(j\omega) + j\{S_{yz}(j\omega) - S_{zy}(j\omega)\} \\ S_{P_b P_f}(j\omega) &= S_{yy}(j\omega) - S_{zz}(j\omega) + j\{S_{yz}(j\omega) + S_{zy}(j\omega)\} \\ S_{P_f P_b}(j\omega) &= S_{yy}(j\omega) - S_{zz}(j\omega) - j\{S_{yz}(j\omega) + S_{zy}(j\omega)\} \\ S_{P_b P_b}(j\omega) &= S_{yy}(j\omega) + S_{zz}(j\omega) - j\{S_{yz}(j\omega) - S_{zy}(j\omega)\} \\ S_{G_f G_f}(j\omega) &= S_{f_y f_y}(j\omega) + S_{f_z f_z}(j\omega) + j\{S_{f_y f_z}(j\omega) - S_{f_z f_y}(j\omega)\} \\ S_{G_b G_f}(j\omega) &= S_{f_y f_y}(j\omega) - S_{f_z f_z}(j\omega) + j\{S_{f_y f_z}(j\omega) + S_{f_z f_y}(j\omega)\} \\ S_{G_f G_b}(j\omega) &= S_{f_y f_y}(j\omega) - S_{f_z f_z}(j\omega) - j\{S_{f_y f_z}(j\omega) + S_{f_z f_y}(j\omega)\} \\ S_{G_b G_b}(j\omega) &= S_{f_y f_y}(j\omega) + S_{f_z f_z}(j\omega) - j\{S_{f_y f_z}(j\omega) - S_{f_z f_y}(j\omega)\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para se obter a coerência entre as entradas e respostas diretas e retrógradas basta fazer $i, k = p_f, p_b, g_f, g_b$ na equação (5.19). Assim, a coerência entre as excitações direta e retrógrada é dada por:

$$\gamma_{G_f G_b}^2(j\omega) = \frac{|S_{G_f G_b}(j\omega)|^2}{S_{G_f G_f}(j\omega) S_{G_b G_b}(j\omega)}. \quad (5.23)$$

Substituindo-se o resultado da equação (5.23) em (5.14) e (5.15), conclui-se que

$$H_{P_f G_f}(j\omega) = \frac{S_{G_f P_f}(j\omega)}{S_{G_f G_f}(j\omega)} \frac{1 - \frac{S_{G_b P_f}(j\omega) S_{G_f G_b}(j\omega)}{S_{G_f P_f}(j\omega) S_{G_b G_b}(j\omega)}}{1 - \gamma_{G_f G_b}^2(j\omega)} \quad (5.24)$$

e

$$H_{P_b G_b}(j\omega) = \frac{S_{G_b P_b}(j\omega)}{S_{G_b G_b}(j\omega)} \frac{1 - \frac{S_{G_f P_b}(j\omega) S_{G_b G_f}(j\omega)}{S_{G_b P_b}(j\omega) S_{G_f G_f}(j\omega)}}{1 - \gamma_{G_f G_b}^2(j\omega)} \quad (5.25)$$

Percebe-se que as equações (5.24) e (5.25) só serão válidas se:

$$\gamma_{G_f G_b}^2(j\omega) \neq 1, \quad \forall \omega, \quad (5.26)$$

que é equivalente a:

$$\gamma_{f_i, f_k}^2(j\omega) \neq 1 \quad \forall \omega. \quad (5.27)$$

Fisicamente, a equação (5.27) significa que as excitações nas direções vertical e horizontal não devem ser totalmente correlacionadas para nenhuma frequência analisada. Logo, as equações (5.24) e (5.25) poderão ser aplicadas a excitações bidirecionais estacionárias impulsivas ou aleatórias mas não para excitações harmônicas de mesma frequência, como é o caso da excitação bidirecional rotativa.

5.3.3. Excitação Bidirecional Rotativa

A excitação bidirecional rotativa, proposta por Muszynska e Bentley, pode ser gerada através de dois excitadores unidirecionais dispostos a 90° entre si e posicionados num plano perpendicular ao eixo de rotação da máquina. O movimento harmônico (de mesma frequência) que estes dois excitadores realizam são sincronizados de tal forma que a excitação resultante seja uma força rotativa radial que gira no mesmo sentido ou no sentido oposto à rotação do eixo. Isto faz com que este método de excitação seja capaz de excitar, separadamente, os modos de precessão direta e retrógrada do rotor.

Para ilustrar o procedimento, considera-se uma excitação harmônica simples¹. Neste caso, as forças nas direções y e z para gerar as excitações rotativas direta e retrógrada são:

$$\text{Excitação direta} \quad \left. \begin{array}{l} f_y(t) = \cos \omega \\ f_z(t) = \text{sen } \omega \end{array} \right\} \Rightarrow F_y(\omega) = jF_z(\omega) \quad (5.28)$$

$$\text{Excitação retrógrada:} \quad \left. \begin{array}{l} f_y(t) = \cos \omega \\ f_z(t) = -\text{sen } \omega \end{array} \right\} \Rightarrow F_y(\omega) = -jF_z(\omega) \quad (5.29)$$

A partir da equação (5.28) pode-se concluir que, se a excitação for direta:

$$G_b(\omega) = \bar{G}(\omega) = F_y(\omega) - jF_z(\omega) = 0 \quad \text{e} \quad G_f(\omega) = G(\omega) = F_y(\omega) + jF_z(\omega) \neq 0, \quad (5.30)$$

e, conseqüentemente:

$$S_{GbGb}(j\omega) = S_{GfGb}(j\omega) = S_{GbGf}(j\omega) = 0. \quad (5.31)$$

Analogamente, a partir da equação (5.29) pode-se concluir que, para uma excitação retrógrada:

¹ Este método também pode ser utilizado com a varredura senoidal ou excitações aleatórias de banda limitada. A dificuldade desta última é que a excitação deve ser selecionada de forma a excitar, separadamente, apenas os modos de precessão direta ou retrógrada do rotor [Lee 93]. De qualquer forma, os estimadores obtidos nesta seção são válidos para qualquer tipo de excitação bidirecional rotativa.

$$G_f(\omega) = G(\omega) = F_y(\omega) + jF_z(\omega) = 0 \quad \text{e} \quad G_b(\omega) = \bar{G}(\omega) = F_y(\omega) - jF_z(\omega) \neq 0, \quad (5.32)$$

e, conseqüentemente:

$$S_{GfGf}(j\omega) = S_{GfGb}(j\omega) = S_{GbGf}(j\omega) = 0. \quad (5.33)$$

Substituindo-se os resultados das equações (5.31) e (5.33) nas equações (5.12) e (5.13), obtém-se, respectivamente, que, se a excitação for puramente direta:

$$H_{Pf_kGf_k}(j\omega) = \frac{S_{Gf_kPf_k}(j\omega)}{S_{Gf_kGf_k}(j\omega)} \neq 0 \quad \text{e} \quad H_{Pf_kGb_k}(j\omega) = 0, \quad (5.34)$$

e, para excitações puramente retrógrada:

$$H_{Pf_kGb_k}(j\omega) = \frac{S_{Gb_kPf_k}(j\omega)}{S_{Gb_kGb_k}(j\omega)} \neq 0 \quad \text{e} \quad H_{Pf_kGf_k}(j\omega) = 0 \quad (5.35)$$

Vale a pena ressaltar que, se o rotor for isotrópico, a dFRF reversa $H_{Pf_kGb_k}(j\omega)$ também será nula.

Portanto, caso seja utilizada a excitação bidirecional rotativa no ensaio de análise modal de uma máquina rotativa, as dFRFs devem ser avaliadas através das equações (5.34) e (5.35). As respectivas coerências podem ser calculadas utilizando-se a equação (5.19).

Apesar de conceitualmente muito interessante, a excitação bidirecional rotativa apresenta como desvantagens a dificuldade no perfeito posicionamento dos excitadores - que pode causar o surgimento de componentes tangenciais à direção desejada - e a necessidade de um controle muito preciso no sincronismo dos excitadores.

Capítulo 6

Simulação dos Rotores Rígido e Flexível

Resumo do Capítulo

Neste capítulo apresenta-se o efeito da isotropia dos mancais sobre a forma da órbita dos movimentos de precessão das diversas estações de um rotor flexível e sobre as dFRFs normais e reversas. Em seguida, estima-se as dFRFs do rotor rígido anisotrópico através das técnicas de excitação apresentadas no Capítulo 5.

6.1. Introdução

Um rotor pode ser considerado como rígido se a deformação (ou energia potencial elástica) dos mancais for maior que 80 % da energia total de deformação do sistema [Gunter 92]. Outros autores [Nelson 92] aplicam uma definição diferente: se 70% da energia de deformação de um modo se concentra nos suportes, este pode ser considerado como um modo de corpo rígido.

Na seção 6.2 estuda-se, utilizando o método dos elementos finitos, um rotor flexível apoiados sobre mancais elásticos. Discute-se a questão da anisotropia dos mancais e sua influência nos modos, nas formas das órbitas e direções dos movimentos de precessão do rotor e nas Funções de Resposta em Frequência direcionais. São apresentados somente os três primeiros modos de precessão direta e retrógrada porque, na prática, poucas máquinas rotativas atingem a

terceira velocidade crítica [Bently 86]. Finalmente, na seção 6.3 trata-se dos procedimentos de estimação das dFRFs para cada uma das excitações apresentadas no Capítulo 5.

6.2. Rotor Flexível

Como já foi dito, simulações seguintes têm por objetivo avaliar o efeito da anisotropia dos mancais sobre a forma da órbita que cada estação do rotor descreve no seu movimento de precessão e sobre as Funções de Resposta em Frequência tradicional e direcional. Para tanto, utiliza-se um rotor flexível, apoiado sobre mancais elásticos, cujas características geométricas foram obtidas da referência [Lalanne 90]. Estuda-se os casos de mancais isotrópico e anisotrópico. As propriedades físicas do eixo, discos e mancais bem como as dimensões do vários componentes do sistema estão apresentados a seguir:

Eixo: Comprimento total = 1,3m;
 Raio = 0,05m;
 Módulo de Elasticidade = $200 \times 10^9 \text{N/m}^2$;
 Coeficiente de Poisson = 0,3;

Densidades = 7800kg/m^3 .

Discos: Raio externo do disco 1 (elemento 14) = 0,12m;
 Espessura do disco 1 (elemento 14) = 0,05m;
 Raio externo do disco 2 (elemento 15) = 0,2m;
 Espessura do disco 2 (elemento 15) = 0,05m;
 Raio externo do disco 3 (elemento 16) = 0,2m;
 Espessura do disco 3 (elemento 16) = 0,06m;
 Densidades = 7800kg/m^3 .

Mancais: $C_{yy} = C_{zz} = 100 \text{Ns/m}$; $C_{yz} = C_{zy} = 0$;
 $K_{yz} = K_{zy} = 0$;
 Rotor isotrópico: $K_{yy} = K_{zz} = 5 \times 10^7 \text{N/m}$;
 Rotor anisotrópico: $K_{yy} = 5 \times 10^7 \text{N/m}$ e $K_{zz} = 4 \times 10^7 \text{N/m}$

A Figura 6.1 mostra o modelo de elementos finitos do rotor flexível analisado. Uma vez que este sistema será estudado dentro de uma faixa de frequência que compreende apenas os seis primeiros modos, não é necessário que se tenha uma discretização maior do rotor.

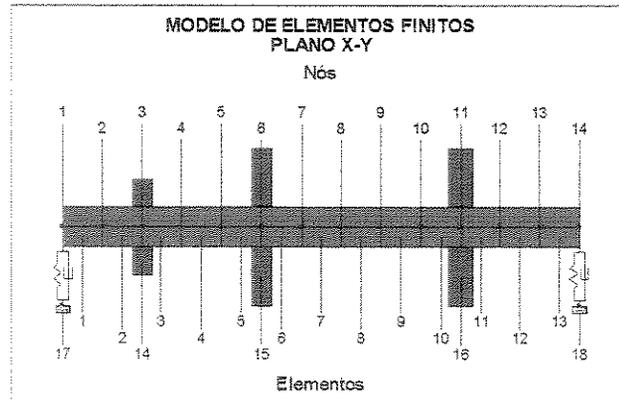


Figura 6.1 - Modelo de elementos finitos do rotor flexível.

O programa de elementos finitos desenvolvido para este estudo utiliza as matrizes propostas por Nelson em [Nelson 76] e apresentadas nos Apêndice A. Vale a pena comentar, no entanto, que é preciso ter cuidado na montagem das matrizes globais do sistema para que a transformação das coordenadas reais para as complexas seja feita de forma adequada.

Em geral, em um modelo de elementos finitos, o vetor dos graus de liberdade do sistema completo tem a forma:

$$\{q(t)\} = \{v_1(t) \ w_1(t) \ \alpha_1(t) \ \beta_1(t) \ \dots \ \dots \ v_n(t) \ w_n(t) \ \alpha_n(t) \ \beta_n(t)\}^T, \quad (6.1)$$

sendo que v_i e w_i são os deslocamentos da i -ésima estação do eixo nas direções y e z , respectivamente, e $\alpha_i(t)$ e $\beta_i(t)$ são os deslocamentos angulares da i -ésima estação em torno dos eixos y e z .

Contudo, para poder-se aplicar a transformação apresentada na equação (4.42), é preciso que este vetor esteja ordenado da seguinte maneira:

$$\{q(t)\} = \{v_1(t) \ \alpha_1(t) \ \dots \ v_n(t) \ \alpha_n(t) \ w_1(t) \ \beta_1(t) \ \dots \ w_n(t) \ \beta_n(t)\}^T, \quad (6.2)$$

Existem diversas maneiras de se fazer esta ordenação. Neste trabalho, a matriz global foi montada da forma tradicional e depois transformada para que o vetor dos graus de liberdade global assumisse a forma descrita pela equação anterior.

Uma vez reordenado os graus de liberdade, pode-se aplicar a transformação das coordenadas reais para as complexas, conforme apresentada pela equação (4.42). O vetor global de deslocamentos nas coordenadas complexas tem a forma:

$$\begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \left\{ \left\{ p_1 \quad \theta_1 \quad \dots \quad p_n \quad \theta_n \right\} \left\{ \bar{p}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{p}_n \quad \bar{\theta}_n \right\} \right\}^T \quad (6.3)$$

6.2.1. Mancais Isotrópicos

A Figura 6.2 apresenta o Diagrama de Campbell do rotor flexível na faixa de 0 a 50000rpm. Pode-se perceber que o efeito giroscópico tem uma influência bastante grande em todos os modos, sendo que esta é mais acentuada nos modos de maior frequência. Esta figura mostra também que, entre 40000 e 45000rpm, há um cruzamento entre as curvas correspondentes ao segundo modo de precessão direta e o terceiro de precessão retrógrada e entre as curvas do terceiro modo direto e o quarto modo de precessão retrógrada, respectivamente.

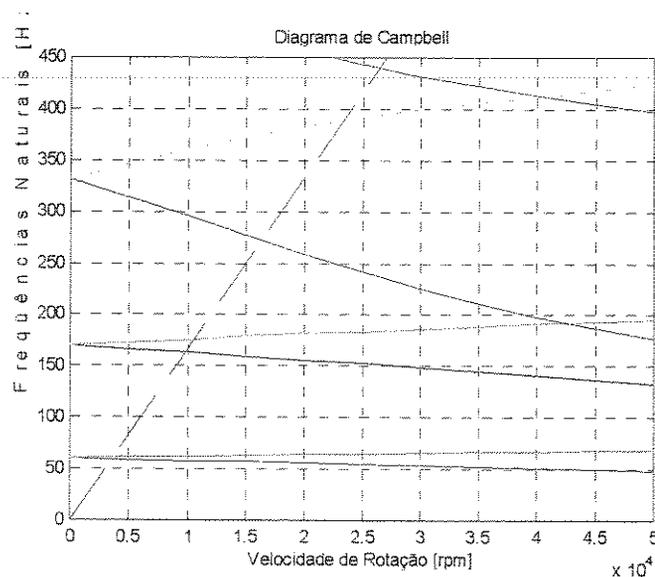


Figura 6.2 - Diagrama de Campbell do rotor isotrópico.

A Figura 6.3 apresenta as seis primeiras formas modais do rotor flexível apoiado sobre mancais isotrópicos bem com um gráfico contendo os valores do *Shape and Directivity Index* (*SDI*), já introduzido no Capítulo 4, para cada estação (nó) do rotor.

A partir desta figura é fácil perceber que, quando o sistema é isotrópico, os modos de precessão são puramente diretos, $SDI = 1$, ou puramente retrógrados, $SDI = -1$. Ainda mais, as órbitas das diversas estações do rotor serão circulares.

Vale a pena chamar a atenção para o valor do *SDI* para o nó 8 do quarto modo (segundo modo de precessão direta). Quando o deslocamento nodal, e algum modo, for praticamente nulo (ou nulo), os valores de P_f e P_b serão muito pequenos (zero). Neste caso, haverá imprecisão (indeterminação) no cálculo do *SDI*. Além de facilitar a visualização das órbitas dos modos de precessão, este índice também é utilizado para se determinar se o modo é de precessão direta ($SDI \geq 0$, para todas as estações), retrógrada ($SDI \leq 0$, idem), retilíneo ($SDI = 0$, idem) ou misto ($SDI \geq 0$ para algumas estações e $SDI \leq 0$ para outras). Por este motivo, sempre que os valores de P_f e P_b forem muito pequenos (ou nulos), assume-se que $SDI = 0$.

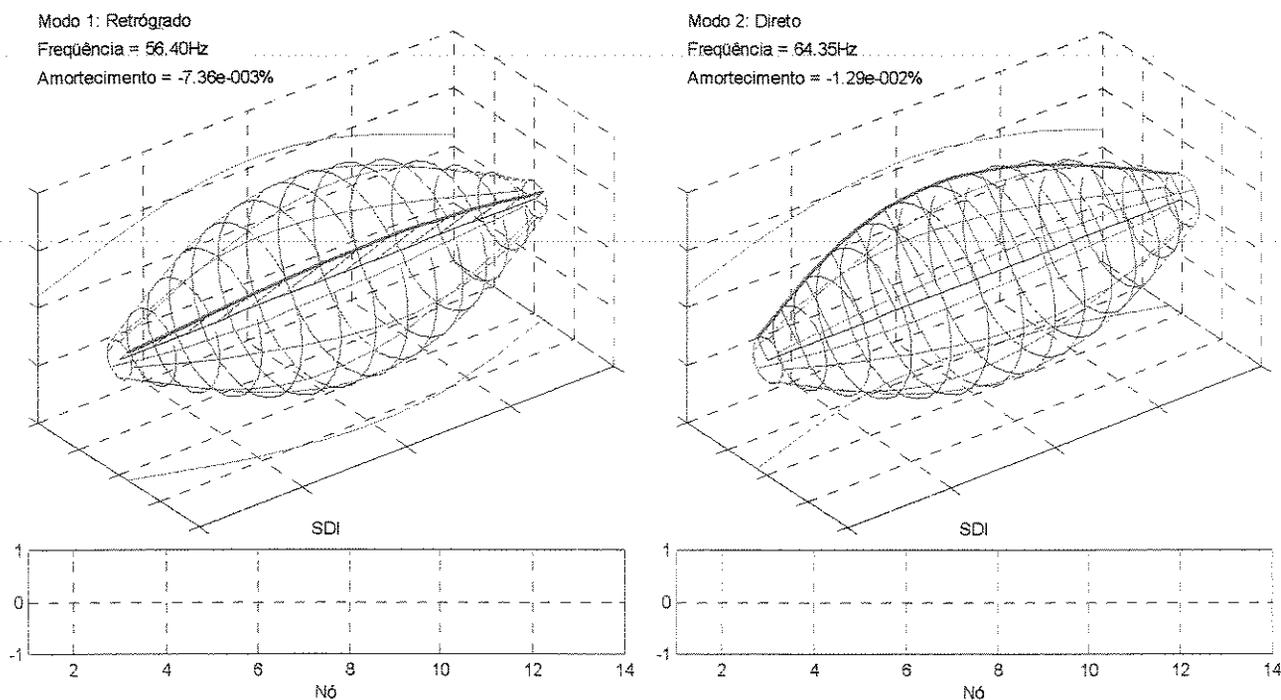
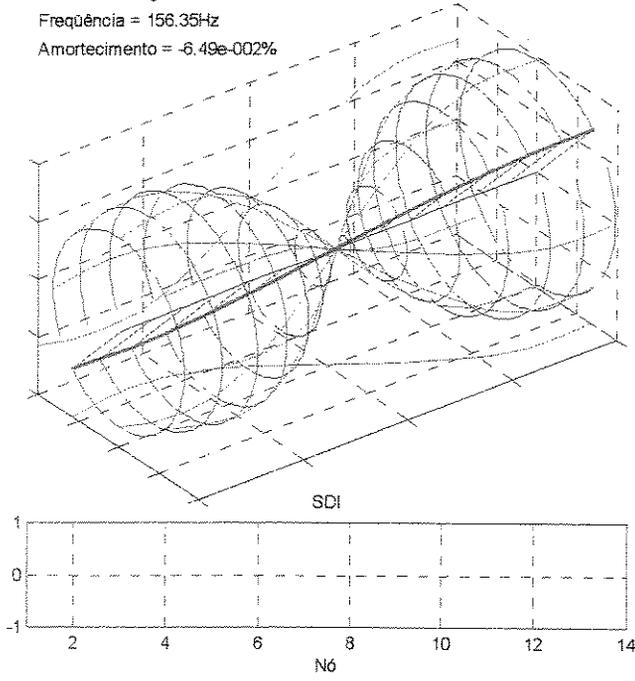
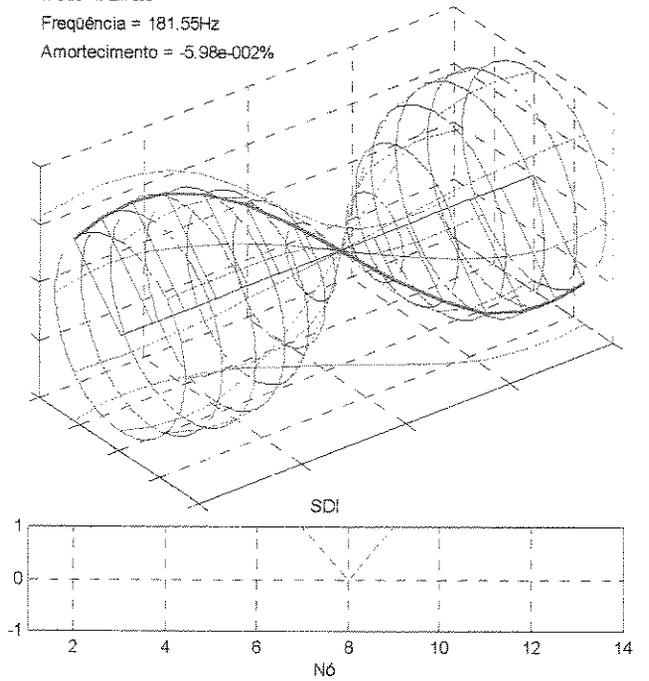


Figura 6.3 - Modos de vibração do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm.

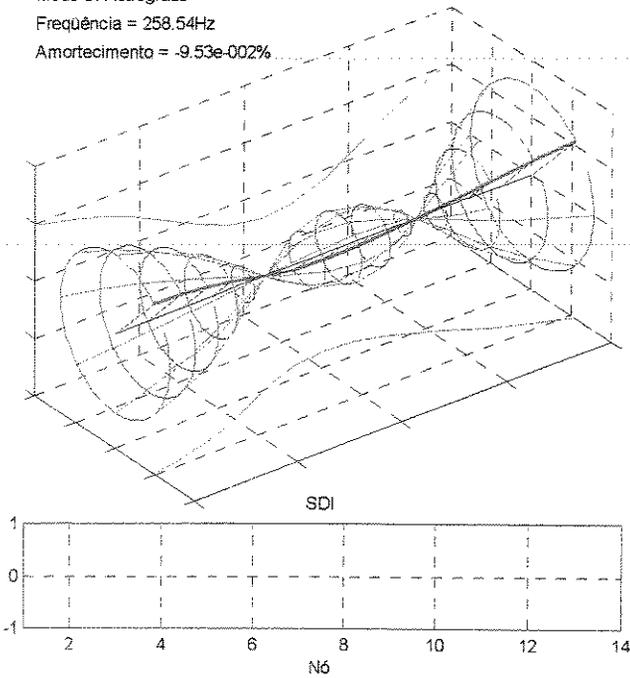
Modo 3: Retrógrado
Frequência = 156.35Hz
Amortecimento = -6.49e-002%



Modo 4: Direto
Frequência = 181.55Hz
Amortecimento = -5.98e-002%



Modo 5: Retrógrado
Frequência = 258.54Hz
Amortecimento = -9.53e-002%



Modo 6: Direto
Frequência = 382.72Hz
Amortecimento = -1.22e-001%

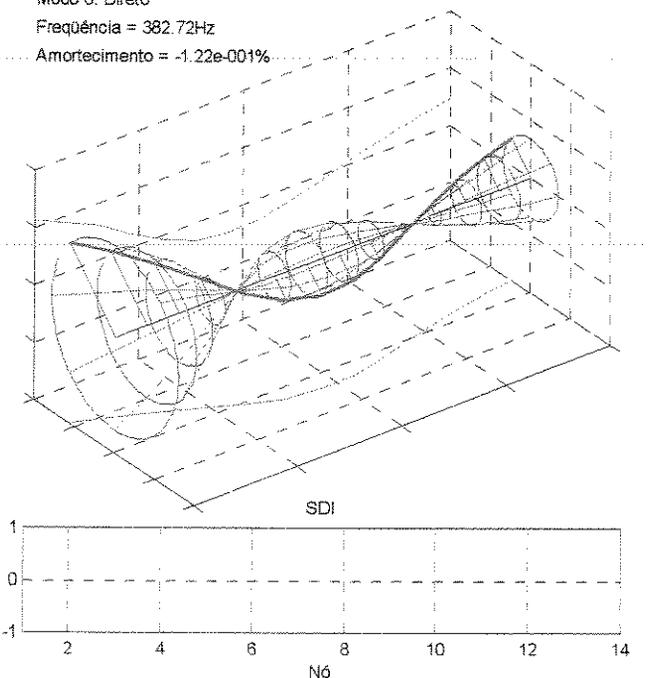


Figura 6.3 (cont.) - Modos de vibração do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm.

Algumas Funções de Resposta em Frequência comuns e direcionais, para o caso do rotor flexível apoiado sobre mancais isotrópicos, são mostradas nas Figuras 6.4 e 6.5, respectivamente. Analisando-se estes resultados pode-se concluir que:

- como era de se esperar, baseado na formulação desenvolvida no Capítulo 4, as dFRFs normais diretas incluem apenas os picos correspondentes aos modos de precessão direta enquanto as dFRFs normais retrógradas apresentam apenas os picos associados aos modos de precessão retrógrada;
- no caso de sistemas rotativos isotrópicos, as dFRFs reversas deveriam, teoricamente, ser nulas. Este fato pode ser constatado, a menos de alguns erros numéricos, através das amplitudes das dFRFs normais e reversa apresentadas na Figura 6.5;
- as FRFs comuns apresentam uma densidade modal maior que as dFRFs;
- a utilização das dFRFs no processo de estimação de parâmetros modais, além de possibilitar uma estimação mais precisa, ainda permite identificar a directividade dos modos, seja ele de precessão direta ou retrógrada. Não basta apenas assumir que o primeiro modo (o de frequência mais baixa) é de precessão retrógrada, o segundo, de precessão direta, o terceiro de precessão retrógrada e assim sucessivamente. Apesar deste raciocínio funcionar para este rotor (nesta rotação), ele não será válido para muitos outros sistemas / condições de operação. Por exemplo, se este mesmo rotor for estudado operando a 50000rpm, este procedimento deixará de ser válido.

6.2.2. Mancais Anisotrópicos

A Figura 6.6 apresenta o Diagrama de Campbell do rotor flexível, apoiado sobre mancais anisotrópicos, na faixa de 0 a 50000rpm. Neste caso também há o cruzamento das curvas correspondentes ao segundo modo de precessão direta e o terceiro de precessão retrógrada, observado no caso anterior.

A Figura 6.7 apresenta as seis primeiras formas modais do rotor flexível apoiado sobre mancais anisotrópicos e os gráficos do *SDI* para cada estação (nó) do rotor.

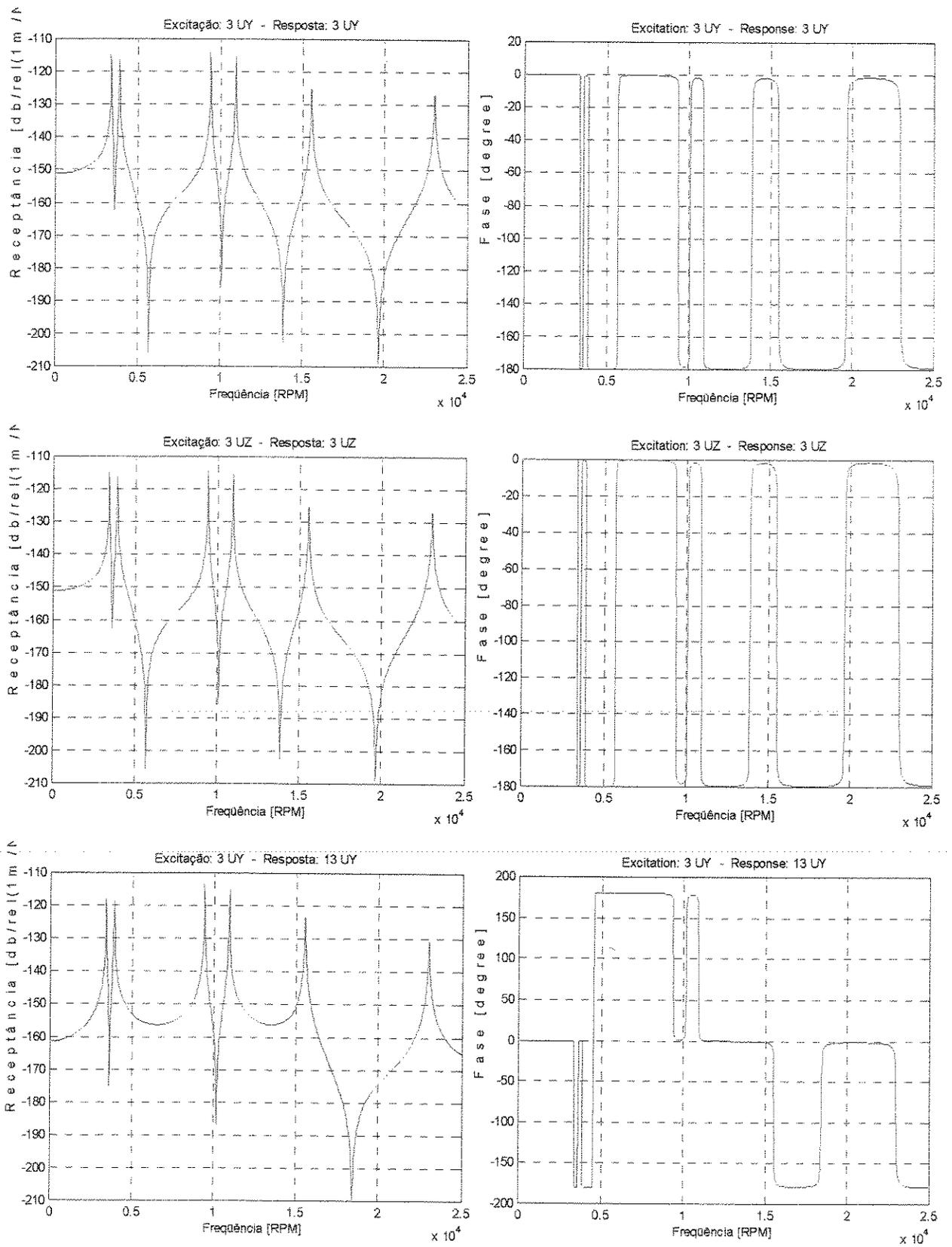


Figura 6.4 - FRFs tradicionais do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm

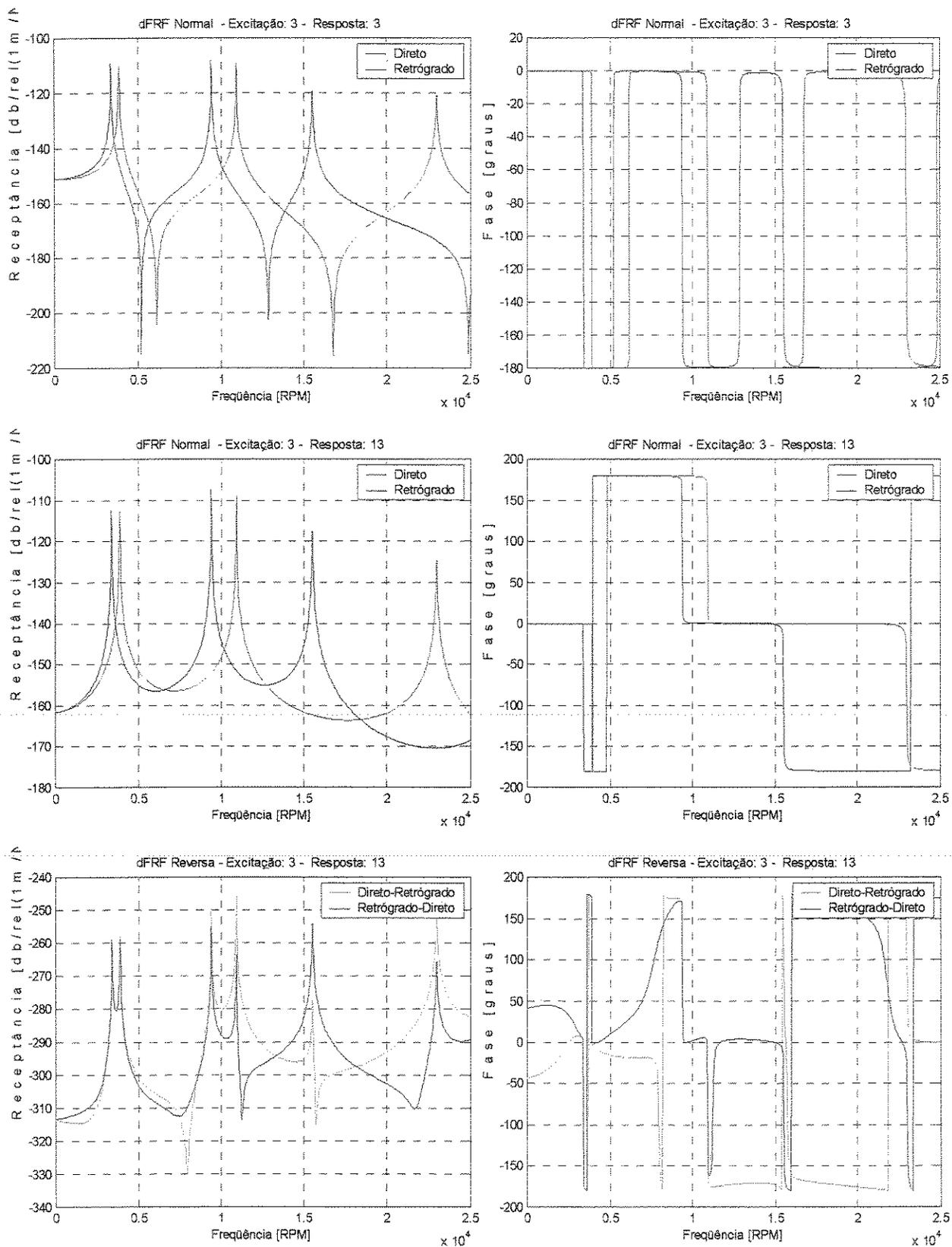


Figura 6.5 - dFRFs normais e reversas do rotor isotrópico. Rotação = 20000rpm

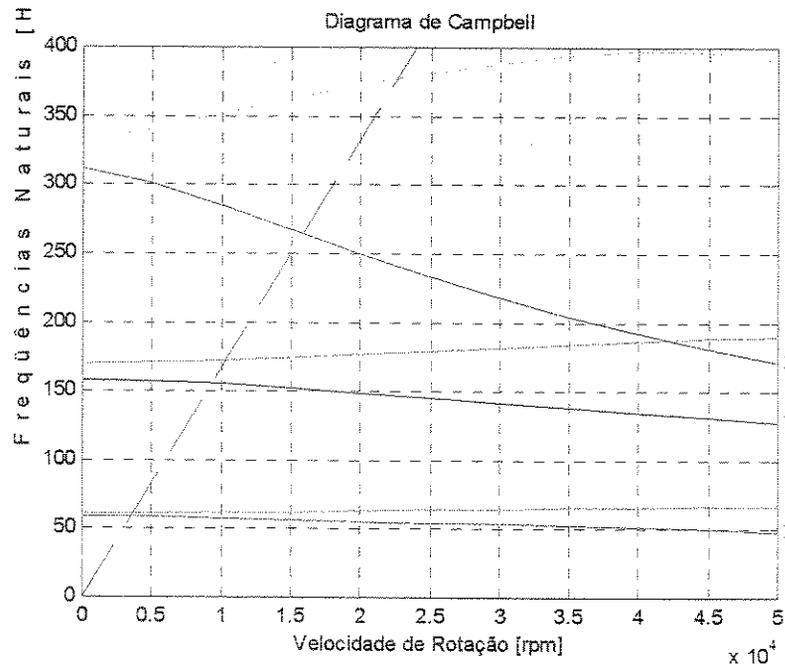


Figura 6.6 - Diagrama de Campbell do rotor anisotrópico.

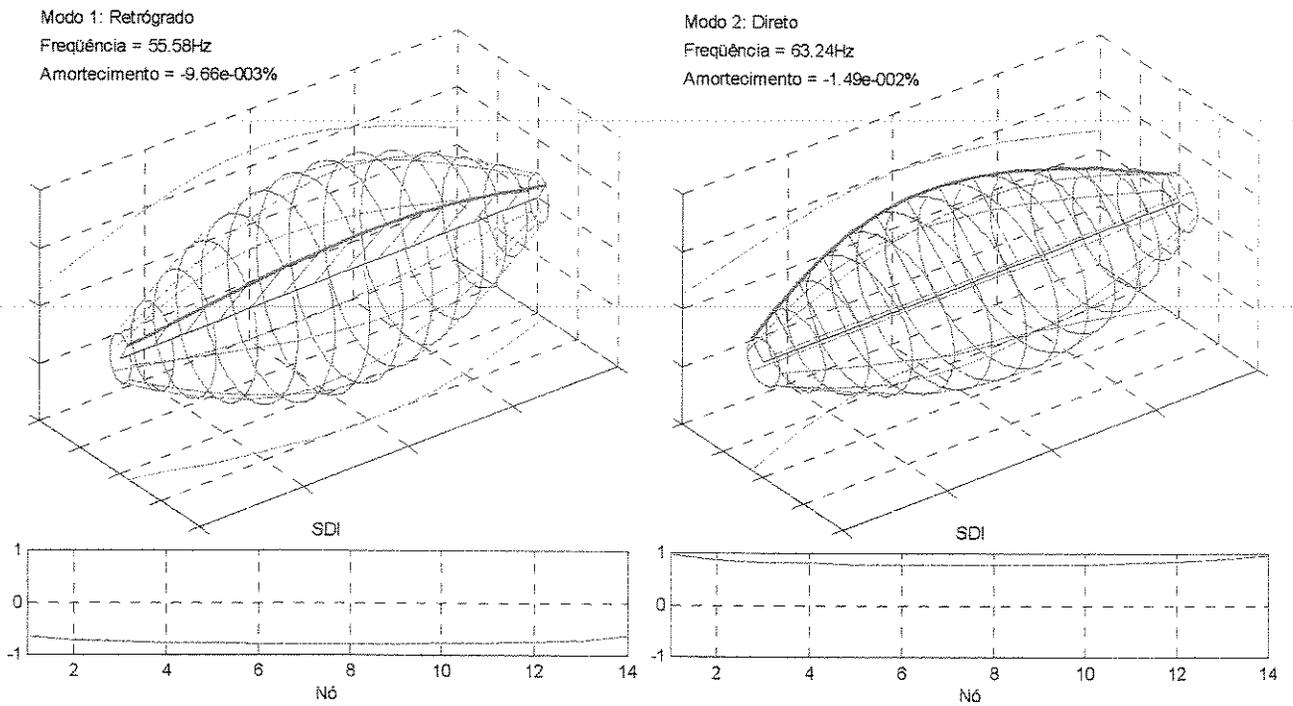
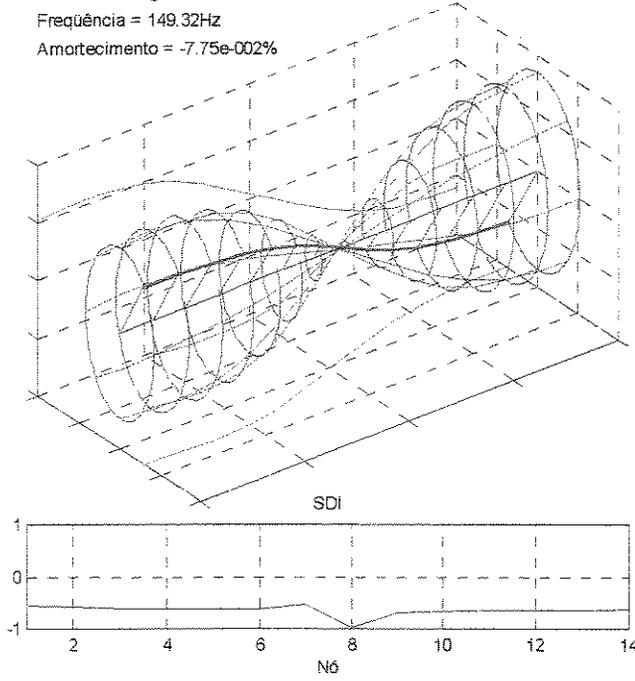
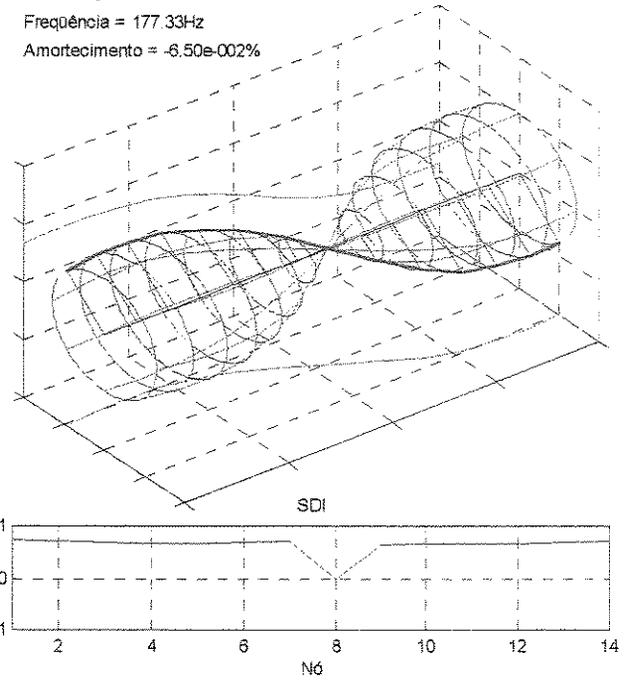


Figura 6.7 - Modos de vibração do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm.

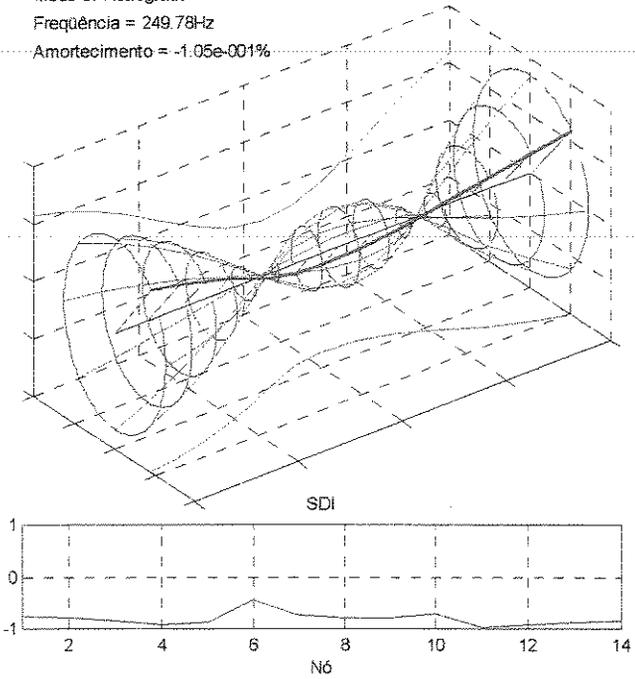
Modo 3: Retrógrado
 Frequência = 149.32Hz
 Amortecimento = -7.75e-002%



Modo 4: Direto
 Frequência = 177.33Hz
 Amortecimento = -6.50e-002%



Modo 5: Retrógrado
 Frequência = 249.78Hz
 Amortecimento = -1.05e-001%



Modo 6: Direto
 Frequência = 372.62Hz
 Amortecimento = -1.28e-001%

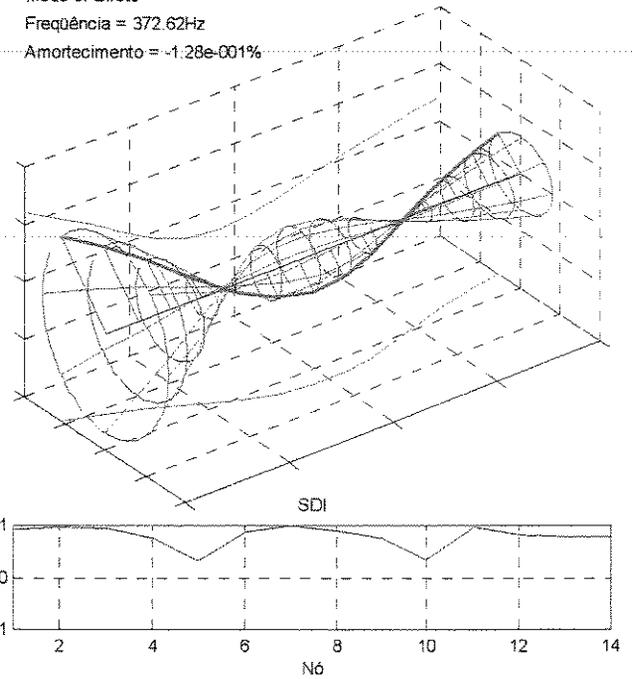


Figura 6.7 (cont.) - Modos de vibração do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm.

A partir desta figura percebe-se que, quando o sistema é anisotrópico, os modos de precessão não são mais puramente diretos ou puramente retrógrados. Ao contrário, cada modo é composto por um sub-modo direto e um sub-modo retrógrado. Isto resulta em órbitas elípticas ($0 < |SDI| < 1$) nas diversas estações do rotor. Percebe-se ainda que, em alguns modos, a forma das órbitas mudam de estação para estação.

Algumas Funções de Resposta em Frequência comuns e direcionais, para o caso do rotor flexível apoiado sobre mancais anisotrópicos, são mostradas nas Figuras 6.8 e 6.9, respectivamente. Analisando-se estes resultados pode-se concluir que:

- ao contrário do que ocorreu no caso anterior, as dFRFs normais diretas não só incluem os picos correspondentes aos modos de precessão direta mas também aqueles associados aos modos de precessão retrógrada. Já as dFRFs normais retrógradas apresentam os picos associados aos modos de precessão retrógrada mais aqueles correspondentes aos modos de precessão direta. Contudo, no caso das dFRFs normais diretas, os modos diretos terão amplitudes muito maiores que os de precessão retrógrada; e no caso das dFRFs normais retrógradas, ocorrerá o contrário;
- quando o sistemas rotativos é anisotrópicos, as dFRFs reversas não são mais nulas. No caso apresentado na Figura 6.9, as dFRFs reversas têm a mesma ordem de grandeza das dFRFs normais.

Foram analisadas várias configurações de mancais anisotrópicos sendo que todas apresentaram resultados similares àqueles apresentados aqui. Vale ressaltar que também foi simulado o caso de mancais com anisotropia somente nos termos de amortecimento. Neste caso, não se observou influência nas dFRFs normal e reversa.

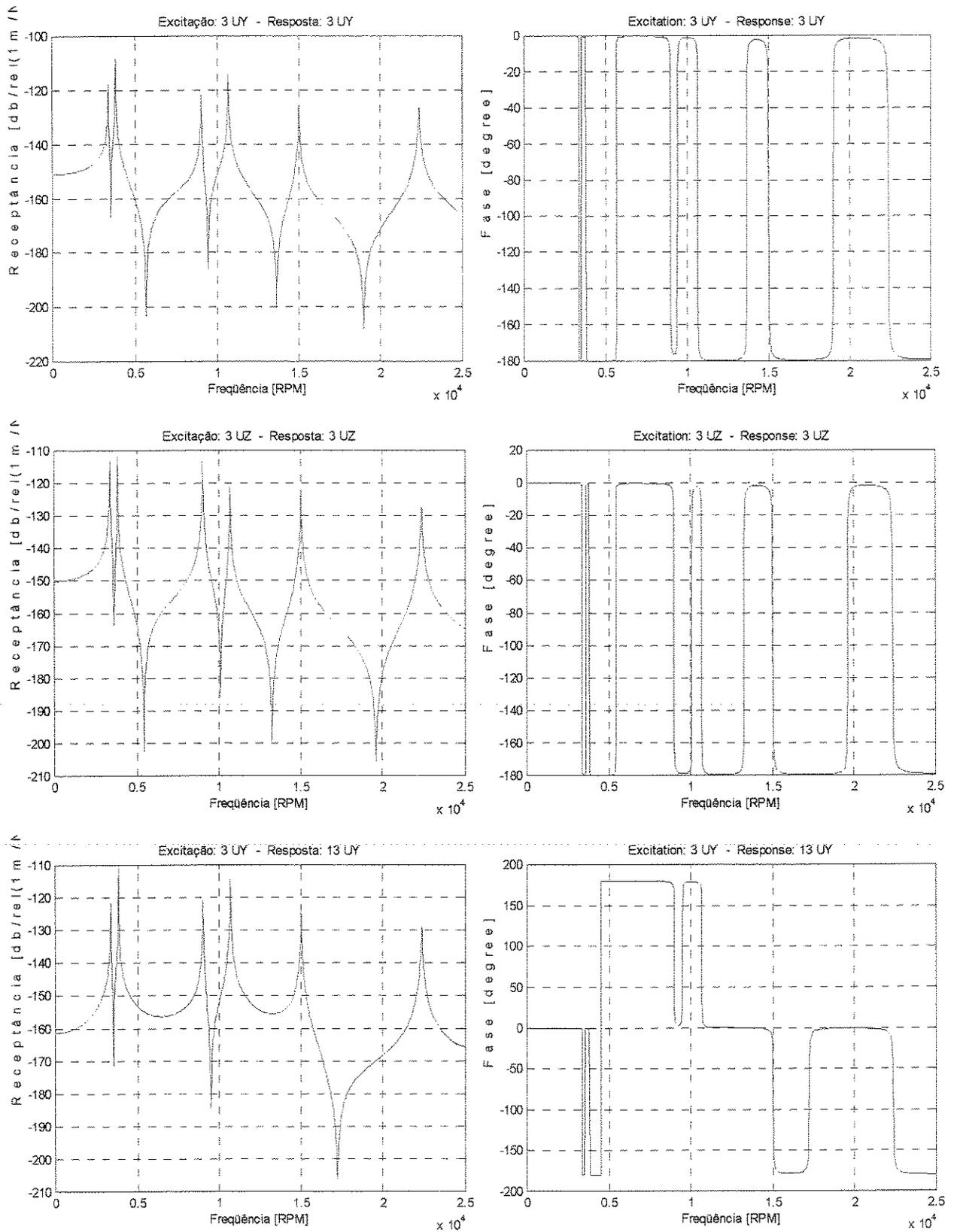


Figura 6.8 - FRFs tradicionais do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm

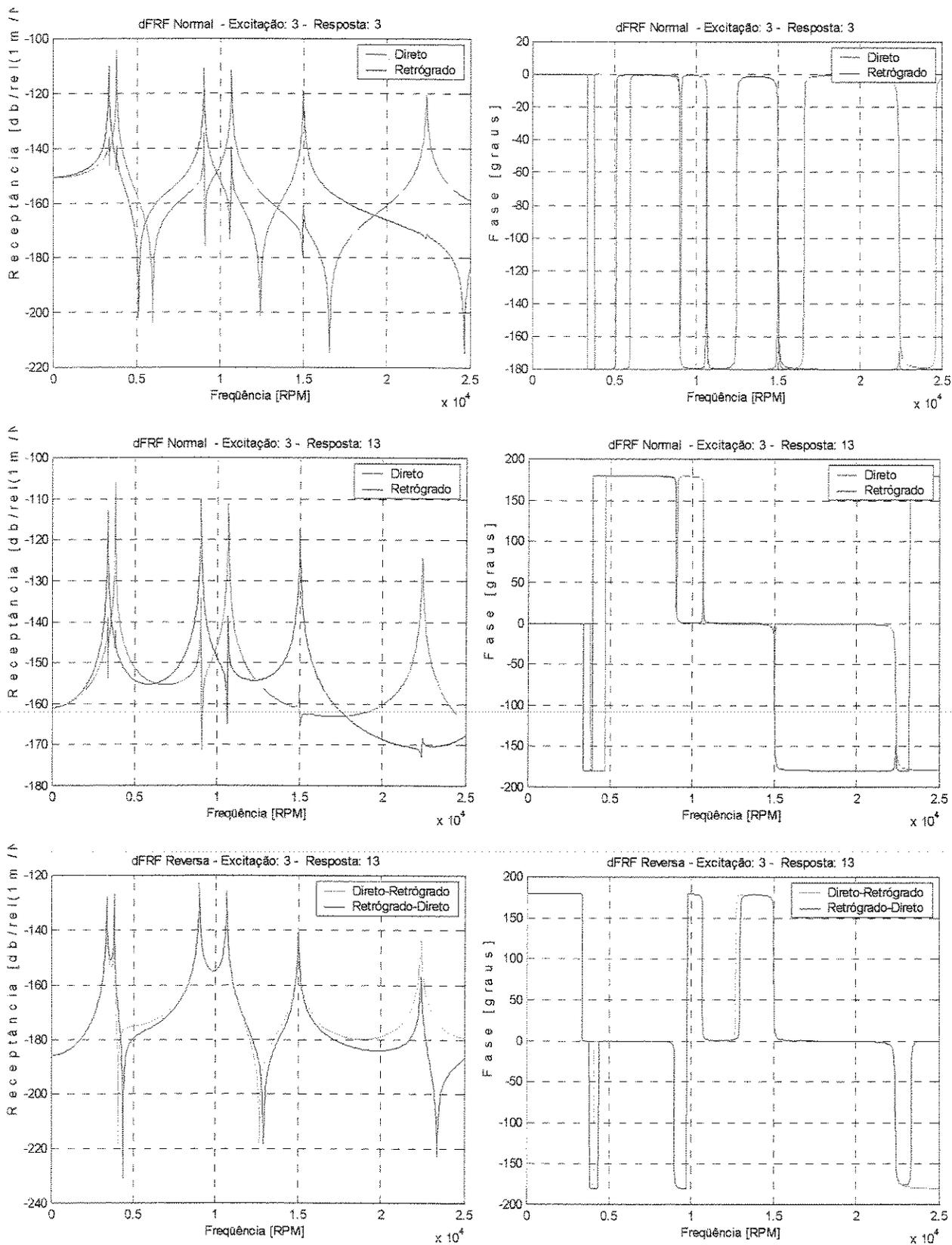


Figura 6.9 - dFRFs normais e reversas do rotor anisotrópico. Rotação = 20000rpm.

6.3. Estimação das Funções de Resposta em Frequência direcionais

As Funções de Resposta em Frequência direcionais do rotor rígido descrito na seção 6.1 são estimadas através dos três tipos de excitação propostos no Capítulo 5, que são: unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa. Em todos os casos, a velocidade de rotação do rotor foi fixada 1000 rpm.

Para a obtenção da resposta (velocidade) do sistema no tempo quando sujeito a cada uma destas excitações, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem [Cunha 93], já disponível no MATLAB. As densidades espectrais de potência dos sinais de excitação e resposta também foram calculadas utilizando funções pré-programadas do *toolbox* de processamento de sinais do MATLAB.

6.3.1. Sistema Anisotrópico

6.3.1.1. Excitação Unidirecional

As relações entre as Funções de Resposta em Frequência comuns e direcionais são dadas pelas equações (5.9). Estas equações permitem estimar as dFRFs através das FRFs. Para a obtenção de uma dFRF é necessário calcular quatro Funções de Resposta em Frequência: aplicando-se a força na direção y e medindo-se a resposta nas direções y e z e aplicando-se a força na direção z e medindo-se a resposta nas duas direções. As FRFs são calculadas através da função *tfe* do MATLAB que é baseada no estimador H_1 .

Foi utilizado um sinal de excitação do tipo aleatório. Calculou-se 67500 pontos da resposta do sistema (para a excitação aplicada em cada direção) usando um passo de integração de $2e-4$ s. Por se tratar de sinais aleatórios (excitação e resposta), utilizou-se janela do tipo *Hanning*. Foram realizadas quatro médias (sem *overlapping*), resultando em uma resolução em frequência de 0.1526 Hz. As dFRF obtidas são mostradas na figuras 6.10 e 6.11.

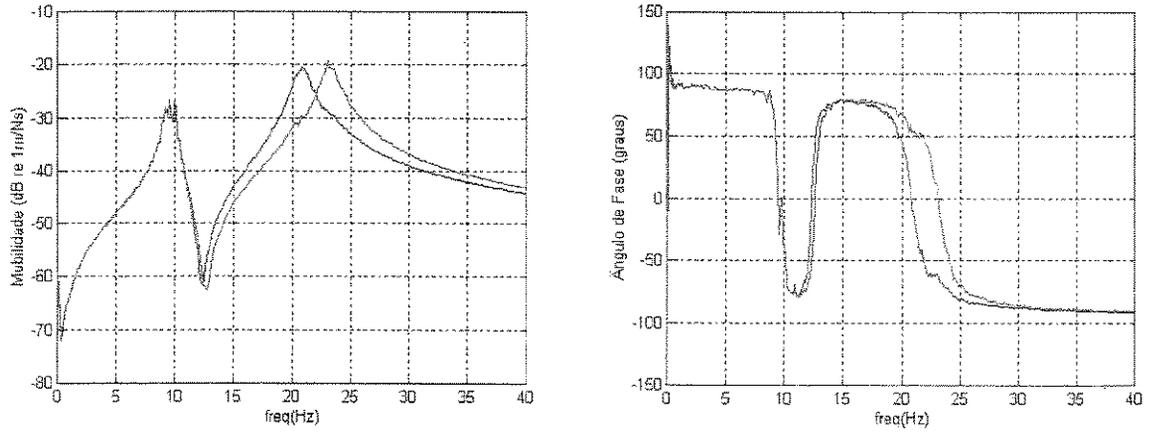


Figura 6.10- dFRFs normais. — H_{Pf1Gf1} (direta) e - - - H_{Pb1Gb1} (retrograda).

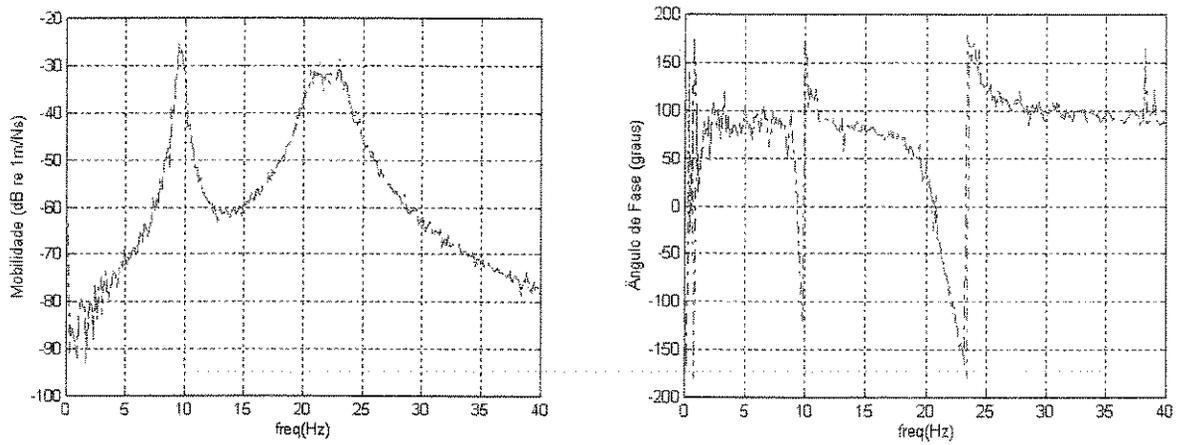


Figura 6.11- dFRFs reversas. - - - H_{Pf1Gb1} e - . - - H_{Pb1Gf1} .

6.3.1.2. Excitação bidirecional estacionária

Para estimar as funções de resposta em frequência direcionais de um rotor utilizando-se a excitação bidirecional estacionária é necessário aplicar ao rotor excitações complexas (bidirecionais), uma direta e uma retrógrada. As respostas às duas excitações são medidas e as densidades espectrais de potência dos sinais complexos são calculadas. As expressões para o cálculo das dFRFs entre uma excitação bidirecional e uma resposta complexa são dadas pelas equações (5.14) e (5.15). O valor de passo de integração, o número de médias e o tipo de janela são os mesmos que os adotados no caso da excitação unidirecional. As Figuras 6.12 e 6.13 mostram as dFRFs estimadas.

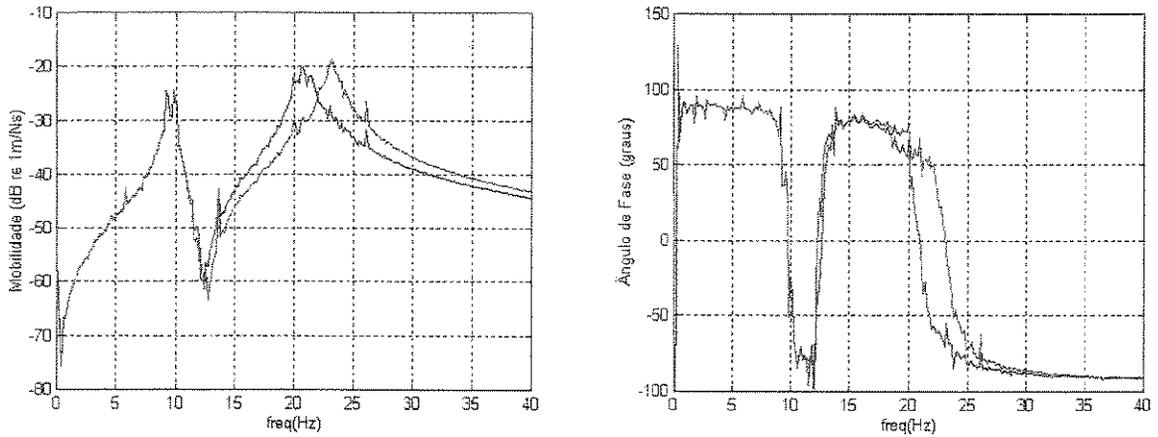


Figura 6.12- dFRFs normais. — H_{Pf1Gf1} (direta) e - - - H_{Pb1Gb1} (retrograda).

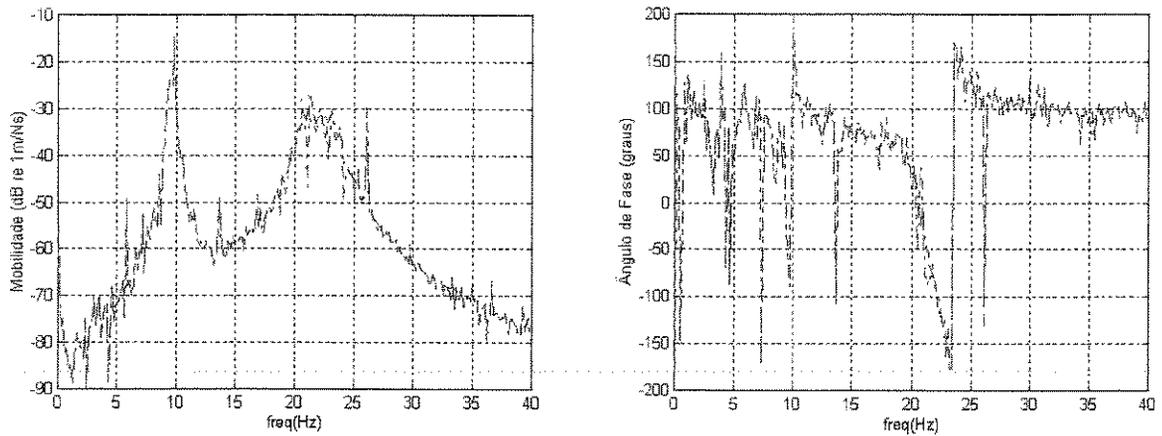


Figura 6.13- dFRFs reversas. - - - H_{Pf1Gb1} e - · - · H_{Pb1Gf1} .

6.3.1.3. Excitação bidirecional rotativa

A excitação bidirecional rotativa, proposta por Muszynska e Bentley, também pode ser utilizada na análise modal complexa. Conforme já foi discutido no Capítulo 5, as excitações horizontal e vertical devem estar defasadas de 90° entre si, para que se obtenha excitações bidirecionais puramente diretas ou puramente reversas. As expressões para as dFRFs utilizando este tipo de excitação são apresentadas nas equações (5.34) a (5.35).

Os sinais de excitação utilizados foram gerados pelas funções [McConnel 95]:

$$f_y(t) = \text{sen}(2\pi(f_1 + \mu t / 2)t + \alpha) \quad \text{e} \quad f_z(t) = \text{cos}(2\pi(f_1 + \mu t / 2)t + \alpha), \quad (6.4)$$

sendo $\mu = \frac{f_2 - f_1}{T_c}$ e f_1 e f_2 são, respectivamente, o início e o fim da faixa de frequências desejada; T_c é a duração do sinal e α é o ângulo de fase (considerado nulo na simulação).

Neste caso, considerou-se uma faixa de 0 a 40Hz, um tempo total de 6,5s e um passo de integração de 1,9837e-4. A Figura 6.14 mostra uma parte (de 0 a 4s) da varredura senoidal utilizada. As figuras 6.15 e 6.16 mostram as dFRF estimadas.

Comparando-se as dFRFs estimadas para os três tipos de excitações com aquelas obtidas através da superposição modal e apresentadas no Capítulo 4, percebe-se que para os dois primeiros métodos, as dFRFs normais são melhor estimadas que as dFRFs reversas. A excitação bidirecional rotativa mostrou-se mais eficaz para os dois tipos de dFRF, principalmente para a reversa. Na próxima secção é estudada a influencia da quase isotropia dos mancais na estimação das dFRF reversas.

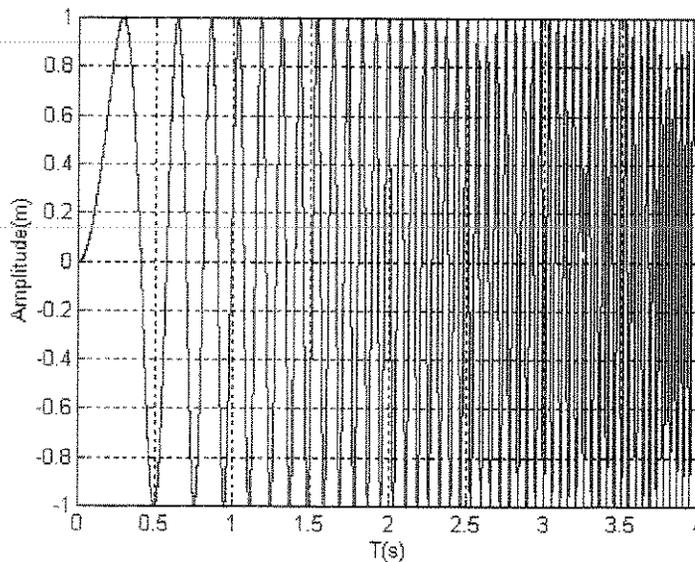


Figura 6.14 – Varredura senoidal.

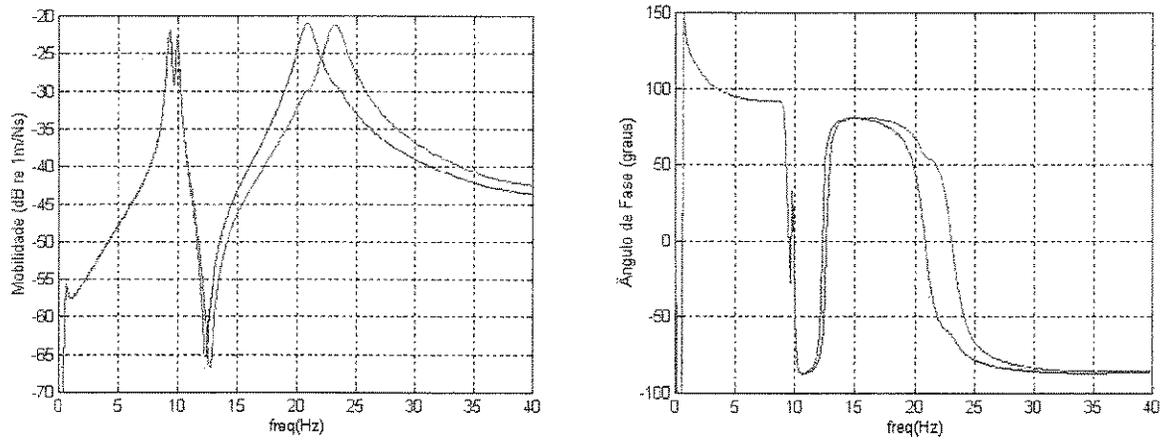


Figura 6.15- dFRFs normais. — H_{p1Gf1} (direta) e - - - H_{p1Gb1} (retrograda).

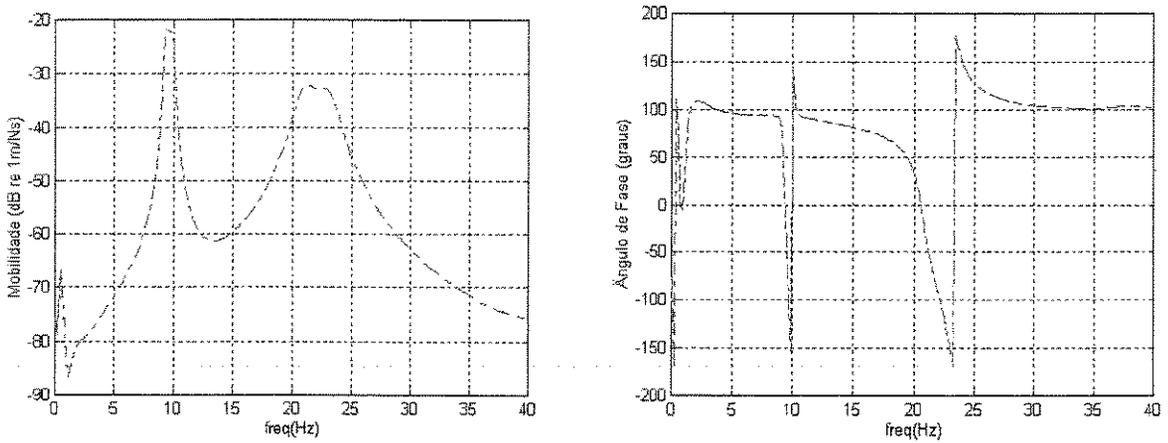


Figura 6.16- dFRFs reversas. - - - H_{p1Cb1} e — H_{p1Gf1} .

6.3.2. Sistema Quase Isotrópico

Conforme já foi comentado, as dFRF reversas de um rotor apoiado em mancais isotrópicos são nulas. Da mesma forma, mancais levemente anisotrópicos levarão a dFRFs reversas cujas magnitudes serão bastante inferiores às dFRFs normais. Se os estimadores apresentados no Capítulo 5 forem robustos, eles deverão ser capazes de estimar as dFRFs reversas mesmo na condição de quase isotropia dos mancais.

Com o intuito de testar o comportamento destes estimadores nesta condição limite, estudou-se o rotor rígido apoiado sobre mancais ligeiramente anisotrópicos. Neste caso, adotou-se $K_{yy} = 1e4N/m$ e $K_{zz} = 9990N/m$, ou seja, uma diferença de apenas 0,1%. Os dois mancais

foram considerados iguais, os valores do amortecimento foram mantidos e os termos de acoplamento dos mancais são nulos. Todos os parâmetros de integração e processamento dos sinais permaneceram constantes.

A Figura 6.17 mostra a dFRF reversa obtida através da solução do problema de autovalores e da superposição modal. As Figuras 6.18 a 6.20 apresentam as dFRFs reversas estimadas através das excitações unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa, respectivamente. Como pode-se perceber, as estimativas das dFRF reversas através da excitação bidirecional rotativa foram pouco afetadas pela condição de quase isotropia dos mancais enquanto que, para os outros dois casos (excitação unidirecional e bidirecional estacionária), as estimativas foram bastante ruins tanto em magnitude quanto em fase. Uma análise numérica mais aprofundada, o que foje ao escopo deste trabalho, seria necessária para investigar os diferentes desempenhos dos estimadores no caso quase isotrópico.

É importante mencionar que as condições simuladas são ideais, ou seja sem a presença de ruídos. Lee analisou por meio de simulações numéricas a presença de ruídos nos 3 tipos de excitação e concluiu que a excitação bidirecional estacionária é a menos afetada [Lee 93, 94]. Isto se explica pelas condições a que cada tipo de excitação deve atender (ver capítulo 5). No caso da excitação bidirecional estacionária, basta que as forças horizontal e vertical não sejam correlacionadas. A utilização de um transdutor de força bidirecional permite medir precisamente a força realmente aplicada ao eixo [Lee 93, 94].

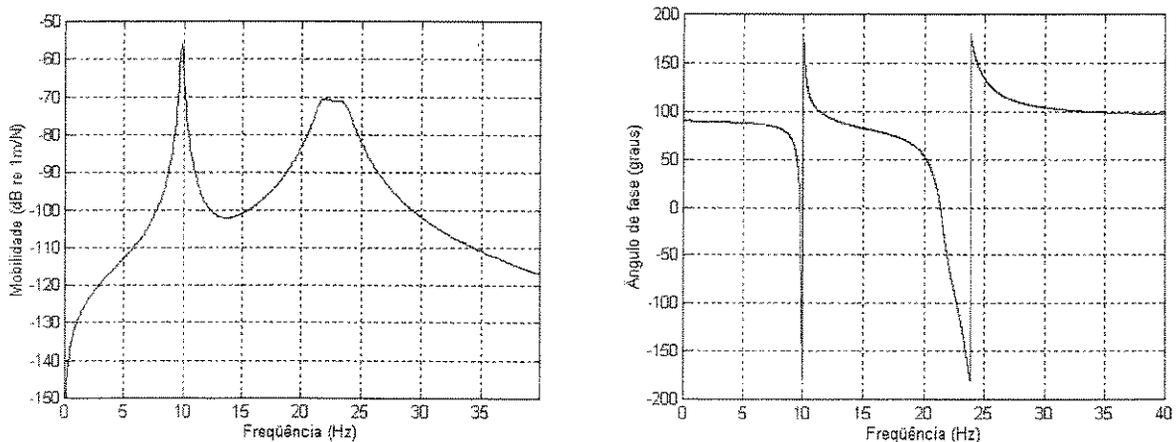


Figura 6.17 - dFRF reversa analítica.

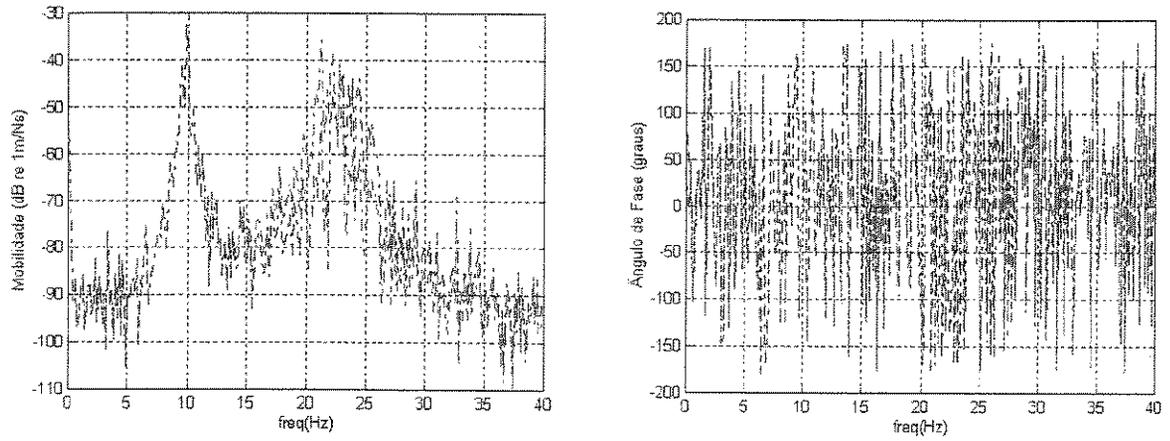


Figura 6.18- dFRFs reversas. --- H_{Pf1Gb1} e --- H_{Pb1Gf1} . Excitação unidirecional.

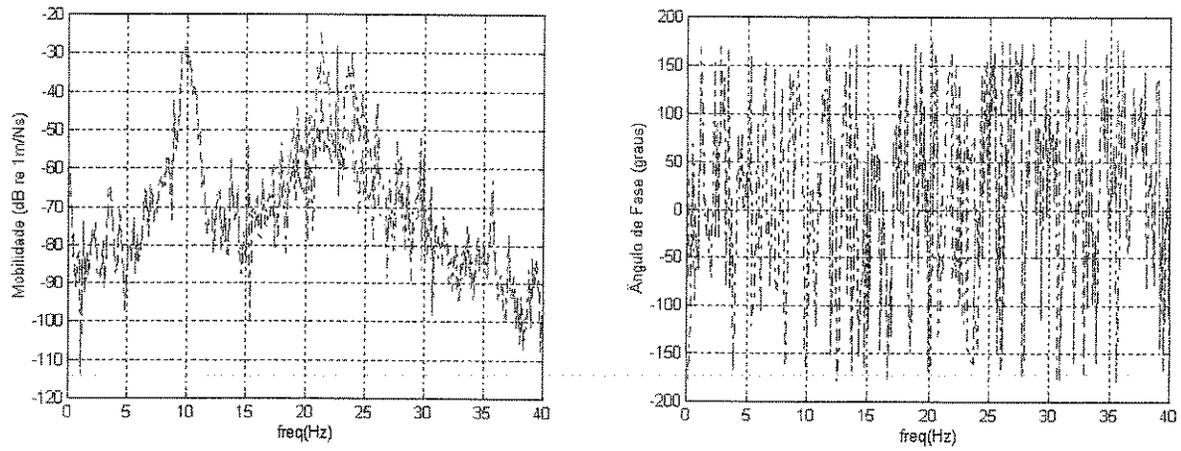


Figura 6.19- dFRFs reversas. --- H_{Pf1Gb1} e --- H_{Pb1Gf1} . Excitação bidirecional estacionária.

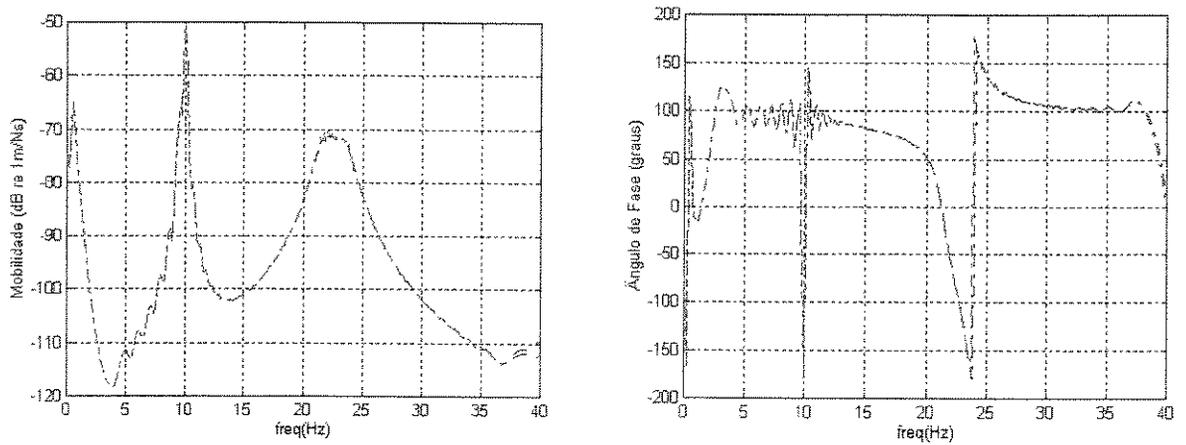


Figura 6.20- dFRFs reversas. --- H_{Pf1Gb1} e --- H_{Pb1Gf1} . Excitação bidirecional rotativa.

Capítulo 7

Comentários Finais

Neste trabalho foi apresentada a formulação da análise modal complexa de máquinas rotativas. Ao contrário dos métodos tradicionais de análise modal, esta técnica de modelagem e análise de estruturas girantes utiliza as coordenadas complexas para descrever o comportamento dinâmico do sistema. As vantagens da utilização deste conjunto de coordenadas na interpretação física dos fenômenos dinâmicos que ocorrem em uma máquina rotativa já são conhecidas desde a década de 80. Contudo, foi Chong-Won Lee quem sistematizou a transformação das coordenadas reais para as complexas e desenvolveu toda a formulação da análise modal complexa. Como foi mostrado durante o trabalho, esta ferramenta permite uma identificação clara dos movimentos de precessão direta e retrógrada descritos por cada uma das estações do rotor. Através da utilização do *shape and directivity index* pode-se identificar, com facilidade, não só a forma da órbita (elíptica, circular ou retilínea) como também a direção dos movimentos de precessão; tanto na forma modal como na resposta forçada do sistema.

Na formulação analítica apresentada no Capítulo 4 foi dada especial ênfase à análise de rotores flexíveis uma vez que os trabalhos consultados na revisão bibliográfica tratavam, em sua grande maioria, de modelos de rotores rígidos. Uma questão que não é muito bem explicada nos artigos pesquisados é se os graus de liberdade de rotação do modelo do rotor devem ser considerados na transformação das coordenadas reais para as complexas. Através da formulação e das simulações apresentadas pôde-se concluir que estas coordenadas devem ser mantidas no conjunto total de coordenadas do sistema. Contudo, as coordenadas complexas de rotação obtidas

a partir desta transformação não têm um significado físico tão claro como o dos graus de liberdade de translação.

Outra importante ferramenta explorada intensamente neste trabalho é a Função de Resposta em Frequência direcional, que relaciona as componentes diretas e retrógradas da excitação aplicada e da resposta do sistema. Através das dFRFs pode-se separar, em frequência, os modos de precessão direta dos modos de precessão retrógrada do rotor. Nos casos de rotores flexíveis (especialmente os rotores múltiplos), em que a densidade modal pode ser bastante alta (para determinadas faixas de frequência), esta é uma ferramenta muito útil no processo de estimação de parâmetros modais.

Foram apresentados e testados três estimadores das Funções de Resposta em Frequência direcionais para o caso de excitações unidirecional, bidirecional estacionária e bidirecional rotativa. As simulações mostraram que esta última apresenta melhores resultados, apesar de ser uma técnica de difícil implementação prática.

Existem algumas questões que não são cobertas com clareza e objetividade por nenhum dos trabalhos consultados e que podem ser temas de trabalhos de pesquisas futuros tais como:

- a não obediência ao princípio da reciprocidade e a existência dos modos de precessão direta e retrógrada são duas características das máquinas rotativas que precisam ser consideradas na escolha do método de estimação dos parâmetros modais. Além disso, muitos destes métodos devem ser reformulados para poderem tratar dos sinais de excitação e resposta complexos;
- com o auxílio da análise modal complexa e das ferramentas dela provenientes pode-se entender melhor a fenomenologia dos chamados modos mistos;
- utilização dos conceitos da análise modal complexa na modelagem de sistemas rotativos assimétricos e genéricos;
- modelagem de componentes flexíveis (discos, palhetas) através da análise modal complexa;
- atualização de modelos de máquinas rotativas;
- estudo de máquinas rotativas com variação de velocidade.

Referências Bibliográficas

- [Azevedo 92] AZEVEDO, H.R.T. DE; WEBER, H. I. Physical interpretation and some properties of complex eigenvectors in rotordynamics by a time domain approach In INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROTORDYNAMICS, 1992, Veneza, Itália Anais...
- [Bendat 80] BENDAT, J.; PIERSOL, A.G. Engineering applications of correlations and spectral analysis New York: John Willey & Sons, 1980.
- [Bently 86] BENTLY, D.E.; MUSZYNSKA, A. Modal testing and parameter identification of rotating shaft/fluid lubricated bearing system In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS, 4, 1986, Los Angeles: Anais...v.2 p.1393-1402
- [Bigret 84] BIGRET, R. Elements for the modal analysis of symmetric transfer matrix structures In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS, 2 1984, Orlando: Anais...v.2 p.1035-1042
- [Bucher 96] BUCHER; EWINS, D.J.; ROBB, A.A. Modal testing of rotating structures: difficulties, assumptions, and practical approach IMechE Conference Publications 1996, C500/007/96

- [Cunha 93] CUNHA, CRISTINA **Métodos numéricos para as engenharias e ciências aplicadas** Campinas: Editora da UNICAMP, 1993. Cap 7: Soluções Aproximadas para Equações Diferenciais Ordinárias, p. 185-214
- [Datta 95] DATTA, B.N. **Numerical linear algebra and applications** Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing, 1995
- [Ewins 84] EWINS, D.J. **Modal testing: theory and practice** Somerset: Research Studies Press Ltd., 1984 312p.
- [Ewins 98] EWINS, D.J. **Modal analysis for rotating machinery**. IFToMM, 1998, Darmstadt
- [Förch 96] FÖRCH, P., GÄHLER, C., NORDMANN, R., Modal testing in rotating machinery using active magnetic bearings INTERNATIONAL CONFERENCE ON VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 6, 1996, Oxford.
- [Genta 99] GENTA, G. **Vibrations of structures and machines: practical aspects** New York: Springer-Verlag, 1999. Cap. 4: Dynamic Behaviour of Rotating Machinery
- [Gunter 92] GUNTER, EDGAR, J.; JACKSON, CHARLES, Balancing of rigid and flexible rotors In EHRICH, FREDERIC, F. (Ed.). **Handbook of rotordynamics** New York: McGraw-Hill, , 1992. Cap 3, p.3.3
- [Han 99] HAN, YUN-SIK Directional Wigner distribution for order analysis in rotating/reciprocating machinery **Mechanical Systems and Signal Processing**, v13, n5, p.723-737, 1999

- [Irretier 99] IRRETIER, H. Mathematical foundations of experimental modal analysis in rotor dynamics **Mechanical Systems and Signal Processing**, v13, n2, p.183-191,1999
- [Joh 93] JOH,Y.D.; LEE,C.W. Excitation methods and modal parameter identification in complex modal testing of rotating machinery **The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis**, v.8 n.3, pp179-203, Jul. 1993.
- [Kessler 99] KESSLER, C. **Complex Modal Analysis of Rotating Machinery**. Cincinnati: Department of Mechanical, Industrial, and Nuclear Engineering, University of Cincinnati, 1999 108p. Tese(Doutorado)
- [Kim 86] KIM, Y.D.; LEE,C.W. Finite element analysis of rotor bearing systems using modal transformation matrix **Journal of Sound and Vibration**, v111, n3, p.441-456,1986
- [Lalanne 90] LALANNE, M.; FERRARIS,G. **Rotordynamics prediction in engineering** Chichester: John Willey & Sons, 1990 198p
- [Lee 90] LEE,C.W. A new modal testing in rotating **INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS**, 17, 1990, Kissimmee, Florida: Anais...v.1 pp148-154
- [Lee 91] LEE,C.W. A complex modal testing theory for rotating machinery **Mechanical Systems and Signal Processing**, v5, n2, p.119-137,1991
- [Lee 92] LEE,C.W.; KIM J.,S. Modal testing and suboptimal vibration control of flexible rotor bearing system by using a magnetic bearing **Transactions of ASME: Journal of DynamicSystems, Measurement, and Control**, v114 p.244-252 june 1992

- [Lee 93] LEE,C.W.; JOH,Y.D. Theory of excitation methods and estimation of frequency response functions in complex modal testing of rotating machinery **Mechanical Systems and Signal Processing**, v7, n1, p.57-74,1993
- [Lee 94] LEE,C.W.; JOH,C.Y. Development of the use of directional frequency response functions for the diagnosis of anisotropy and asymmetry in rotating machinery:theory **Mechanical Systems and Signal Processing**, v8, n6, p.665-678,1994
- [Lee 97] LEE,C.W.; LEE, SEOK-KU An efficient complex modal testing theory for asymmetric rotor systems: use of unidirectional excitation **Journal of Sound and Vibration**, v206, n3, p.327-338,1997
- [MARS 96] **Modal Analysis of Rotating Machinery (MARS) synthesis report**, p1-16, December 5, 1996
- [McConnell 95] MCCONNELL, K.G. **Vibrations testing – Theory and practice** New York: John Willey & Sons, 1995.
- [Nelson 76] NELSON, H., D., MCVAUGH, J.M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements **Transactions of ASME: Journal of Engineering for Industry**, p.593-600 may 1976
- [Nelson 92] NELSON, HAROLD D.;CRANDALL, STEPHEN H. Analytical prediction of rotordynamics response In: EHRICH, FREDERIC F. (Ed.) **Handbook of Rotordynamics** New York: McGraw-Hill, inc., 1992. Cap 2, p2.1-2.86
- [Nordmann 82] NORDMANN, R. Modal parameter identification and sensitivity analysis in rotating machinery. IFToMM, 1982, Roma: Anais... pp95-102

- [Rogers 89] ROGERS, P.J.; EWINS,D.J. Modal testing of an operating rotor system using a structural dynamics approach In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS, 7, 1989, Las Vegas : Anais...v.1 pp446-473
- [Steffen 86] STEFFEN JR.; V., LÉPORE N.; F.P., TEODORO, E.B. Response of a rigid disc mounted on a flexible shaft under non-linear excitations INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS, 4, 1986, Anais... pp1536-1539
- [Wang 94] WANG, W.; KIRKHOPE, J. New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor systems, part 1: Undamped Systems **Journal of Sound and Vibration**, v175, n2, p.159-170,1994
- [Zhang 85] ZHANG, Q.; LALLEMENT,G. Experimental determination of eigen solutions of non self-adjoint mechanical structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF MODAL ANALYSIS, 3, 1985, Orlando: Anais...v.1 pp768-774
- [Zhang 88] ZHANG, Q.; LALLEMENT,G; FILLOD, R. Relations between the right and left eigenvectors of non-symmetric structural models applications to rotors. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v2, n1, p.97-103,1988

Apêndice A

Matrizes dos elementos finitos

A.1. Elemento de disco

$$([M_T^d] + [M_R^d])\{\ddot{q}^d\} - \Omega[G^d]\{\dot{q}^d\} = \{Q^d\} \quad (\text{A.1})$$

sendo Ω a rotação do disco;

$\{Q^m\}$ o vetor de forças nodais externas ao mancal;

$\{q^d\}$ o vetor de deslocamentos do disco.

As matrizes do elemento de disco são:

$$[M_T^d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [M_R^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad [G^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

O desbalanço pode ser considerado como força externa ao disco fazendo:

$$\{Q^d\} = \{Q_c^d\} \cos \Omega t + \{Q_s^d\} \sin \Omega t \quad (\text{A.3})$$

$$[M_R^e] = \frac{\mu(R-r)^2}{120l} \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & & & & & & \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & & & & \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 36 & & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & & \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simetrica} \quad (\text{A.7})$$

$$[G^e] = \frac{2\mu(R-r)^2}{120l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & & & \\ -3l & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 & & & \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 3l & 0 & 0 & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{anti-simetrica} \quad (\text{A.8})$$

$$[K_B^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & & \\ 0 & -6l & 4l^2 & & & & & & \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & & & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & & \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simetrica} \quad (\text{A.9})$$

sendo l o comprimento do elemento de eixo;

μ a massa por unidade de comprimento do elemento de eixo;

R o raio externo;

r o raio interno;

E o módulo de elasticidade do material do eixo e

I o momento de inércia de área.

Analogamente ao elemento de disco, o desbalanço pode ser considerado por meio dos vetores de desbalanço:

$$\{Q^d\} = \{Q_c^e\} \cos \Omega t + \{Q_s^e\} \sin \Omega t \quad (\text{A.10})$$

Sendo:

$$\{Q_c^d\} = \mu \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{20} \varepsilon_{oy} l + \frac{3}{20} \varepsilon_{Ly} l \\ \frac{7}{20} \varepsilon_{oz} l + \frac{3}{20} \varepsilon_{Lz} l \\ -\frac{1}{20} \varepsilon_{oz} l^2 - \frac{1}{30} \varepsilon_{Lz} l^2 \\ \frac{1}{20} \varepsilon_{oy} l^2 + \frac{1}{30} \varepsilon_{Ly} l^2 \\ \frac{3}{20} \varepsilon_{oy} l + \frac{7}{20} \varepsilon_{Ly} l \\ \frac{3}{20} \varepsilon_{oz} l + \frac{7}{20} \varepsilon_{Lz} l \\ \frac{1}{30} \varepsilon_{oz} l^2 + \frac{1}{20} \varepsilon_{Lz} l \\ -\frac{1}{30} \varepsilon_{oy} l^2 - \frac{1}{20} \varepsilon_{Ly} l \end{array} \right\} \quad \{Q_s^d\} = \mu \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{7}{20} \varepsilon_{oz} l - \frac{3}{20} \varepsilon_{Lz} l \\ \frac{7}{20} \varepsilon_{oy} l + \frac{3}{20} \varepsilon_{Ly} l \\ -\frac{1}{20} \varepsilon_{oy} l^2 - \frac{1}{30} \varepsilon_{Ly} l^2 \\ -\frac{1}{20} \varepsilon_{oz} l^2 - \frac{1}{30} \varepsilon_{Lz} l^2 \\ -\frac{3}{20} \varepsilon_{oz} l^2 - \frac{7}{20} \varepsilon_{Lz} l^2 \\ \frac{3}{20} \varepsilon_{oy} l + \frac{7}{20} \varepsilon_{Ly} l \\ \frac{1}{30} \varepsilon_{oy} l^2 + \frac{1}{20} \varepsilon_{Ly} l^2 \\ \frac{1}{30} \varepsilon_{oz} l^2 + \frac{1}{20} \varepsilon_{Lz} l^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

e ε_{oy} e ε_{Ly} são os componentes horizontal e vertical do desbalanço em $x=0$ e ε_{oz} e ε_{Lz} são os componentes horizontal e vertical do desbalanço em $x=L$.

A.3.Elemento de mancal:

$$[C^m]\{\dot{q}^m\} + [K^m]\{q^m\} = \{Q^m\} \quad (\text{A.12})$$

sendo $\{Q^m\}$ o vetor de forças nodais externas ao mancal;

$\{q^m\}$ o vetor de deslocamentos do mancal

As matrizes do elemento de mancal são:

$$[K^m] = \begin{bmatrix} k_{VV}^m & k_{VW}^m \\ k_{WV}^m & k_{WW}^m \end{bmatrix}, \quad [C^m] = \begin{bmatrix} c_{VV}^m & c_{VW}^m \\ c_{WV}^m & c_{WW}^m \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

sendo VV a direção horizontal e WW a direção vertical em um sistema de coordenadas fixo ao mancal.