

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Antonio Pedro Clapis
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 06/08/1999


ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Um Método Heurístico de Otimização de Forma de Componentes Estruturais no Estado Plano de Elasticidade Linear

Autor: Antonio Pedro Clapis
Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti

23/99

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Um Método Heurístico de Otimização de Forma de Componentes Estruturais no Estado Plano de Elasticidade Linear

Autor: Antonio Pedro Clapis

Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1999
S. P. - Brasil

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	C534m
V.	Ex.
TOMBO BC/	41958
PROC.	278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	30-02-00
N.º CPD	

CM-00144422-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C534m

Clapis, Antonio Pedro

Um método heurístico de otimização de forma de componentes estruturais no estado plano de elasticidade linear. / Antonio Pedro Clapis.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Fernando Iguti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização estrutural. 2. Programação heurística. I. Iguti, Fernando. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

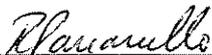
TESE DE DOUTORADO

Um Método Heurístico de Otimização de Forma de Componentes Estruturais no Estado Plano de Elasticidade Linear

Autor: Antonio Pedro Clapis
Orientador: Fernando Iguti



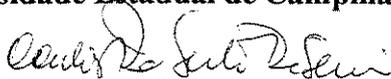
Prof. Dr. Fernando Iguti
Universidade Estadual de Campinas



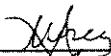
Prof. Dr. Renato Pavanello
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Loir Afonso Moreira
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro
Universidade Federal de Uberlândia



Prof. Dr. Marcus Antônio Viana Duarte
Universidade Federal de Uberlândia

Campinas, 06 de Agosto de 1999

Dedicatória:

Dedico à minha esposa **Carmen** e aos meus filhos **Luana** e **Rafael** pelo apoio em todos os momentos deste trabalho.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fernando Iguti, que durante todos estes longos anos de orientação esteve sempre me incentivando e com sua sabedoria, dando-me os devidos ensinamentos e a esperança que culminou com a conclusão deste trabalho.

Aos meus parentes de Campinas: Edsonia, Carlos, Rosa, Marcio e todos os sobrinhos que sempre me acolheram com muito carinho.

Aos colegas e amigos: João Fuga, Cleudmar, Edson, Jordan, Juan, Kaled, Carlson, Urtiga e tantos outros que diretamente compartilharam comigo em todos os momentos festivos e acadêmicos.

Aos professores do DMC (Departamento de Mecânica Computacional) que sempre estiveram presentes nas minhas idas e vindas à UNICAMP, agradeço de modo especial a atenção do Renato, José Maria, Arruda, Euclides, Douglas, Pablo e da secretária Fátima.

A todo o corpo docente do DEEME / UFU que tornou possível a minha saída para doutorado e pelo apoio durante a confecção da tese, especialmente aos amigos Valder, Sonia, Francisco e Ricardo, que em alguns momentos colocaram-me à disposição toda a sua experiência na intenção de ajudarem o máximo possível nos momentos onde tudo parecia travado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES), pela ajuda financeira recebida durante o período de afastamento.

Resumo

CLAPIS, Antonio Pedro, *Um Método Heurístico de Otimização de Forma de Componentes Estruturais no Estado Plano de Elasticidade Linear*, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, 1999, Tese (Doutorado).

Nos últimos trinta anos pesquisadores tem procurado desenvolver métodos matemáticos e ou numéricos, na busca de se otimizar a configuração geométrica de uma dada estrutura. Como a análise estrutural é uma parte integrante do processo de otimização de forma, o progresso da otimização estrutural muitas vezes depende fundamentalmente do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos. Partindo-se então do pressuposto que a discretização do modelo geometricamente e fisicamente tem sentido, pode-se implementar um algoritmo iterativo de busca da forma ótima de um elemento estrutural utilizando-se um principio heurístico de desenvolvimento. Extrapolam-se um método de homogeneização do erro de discretização por elementos finitos no domínio para a homogeneização da densidade de energia de deformação por distorção (von Mises) dos elementos, onde o critério de convergência é a máxima densidade de energia de distorção permitida. Um código numérico em linguagem Fortran F32 é implementado. O programa tem como principal característica a utilização de dois modelos estruturais com graus de liberdade bem distintos (modelo físico e modelo geométrico). No modelo geométrico efetua-se a relocação dos nós da discretização por elementos finitos tendo como objetivo a melhor homogeneização possível da densidade de energia de deformação por distorção do elemento. A avaliação da potencialidade do método é feita através da otimização de algumas estruturas citadas na literatura e, com os resultados obtidos verifica-se a eficiência e a razão de convergência do método proposto.

Palavras Chave

Otimização Estrutural, Programação Heurística

Abstract

CLAPIS, Antonio Pedro, *A Heuristic Method of the Structural Components Shape Optimization in Plane Estate of Linear Elasticity*, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, 1999, Tese (Doutorado).

In the past thirty years researchers have sought to develop mathematical methods and/or numerical methods to optimize the geometric configuration of a structure. Since structural analysis is part of the process of shape optimization, this success in our approach depends on the development of an adequate finite element model. Assuming that the geometrical and physical discretization of the model is established, it is possible to implement an iterative algorithm to seek the optimal shape of a structural component using a heuristic principle. A method the balancing the error of each element in the plane stress state is extrapolated. This method is used to balance the energy of distortion deformation function (von Mises) of each element and the criterion to stop is the maximum distortion energy function in the uniaxial tension test. A numerical code using Fortran F32 language is implemented. The main characteristic of this code is the execution of two distinct structural modules (physical and geometric model). In the geometric model the nodes are relocated considering the homogenization the distortion deformation energy density per element. The potentiality of the proposed method is evaluated through some examples from the literature. With the results the efficiency and the convergence of the method are checked.

Key Words

Structural Optimization, Heuristic Programming

Índice

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos e metodologia	3
1.3 Descrição do trabalho	7
2 Elemento Plano Triangular Hierárquico	11
2.1 Coordenadas de área ou naturais	11
2.2 Funções de forma hierárquicas	13
2.3 Formulação do elemento triangular hierárquico de grau 2	18
2.4 Forças nodais equivalentes hierárquicas $\{f_h\}$	22
2.4.1 Carregamento ao longo do lado	22
2.4.2 Carregamento ao longo da área	25
2.5 Exemplos de aplicação	26
2.5.1 Carga nodal equivalente ao longo da área e constante	26
2.5.2 Carga nodal equivalente ao longo do lado e quadrática	27
2.5.3 Carga nodal equivalente ao longo do lado e linear	28
3 Módulo Adaptativo	32
3.1 Introdução	32
3.2 Formulação do modelo proposto	34

3.3	Etapas do gradiente conjugado	40
3.4	Método da relocação nodal (Método r)	41
3.5	Exemplo de aplicação	43
4	Otimização de Forma	45
4.1	Revisão	45
4.1.1	Otimização de forma utilizando MEF	45
4.1.2	Tensões octaédricas	48
4.2	Formulação da energia de deformação por distorção	52
4.2.1	Crítério da densidade da energia de distorção	52
4.2.2	Algoritmo proposto	54
5	Exemplos de Aplicação	57
5.1	Exemplo 1	
	PLACA TRACIONADA	57
5.2	Exemplo 2	
	PLACA COM TRANSIÇÃO	61
5.3	Exemplo 3	
	FURO SOB TENSÃO BIAXIAL	66
5.4	Exemplo 4	
	BALANÇO COM MOMENTO	70
5.5	Exemplo 5	
	VIGA SOBRE QUATRO APOIOS	73
5.6	Exemplo 6	
	PÓRTICO	75
5.7	Exemplo 7	
	COLUNA DE AUTO ESTRADA	79
6	Conclusões e Sugestões	82
6.1	Conclusões	82
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	83

7 Apêndices e Referências Bibliográficas	85
7.1 Apêndice A	85
7.2 Apêndice B - Busca unidimensional – Método da secante	93
7.3 Apêndice C - Método do gradiente conjugado	96
7.3.1 Direções conjugadas	96
7.3.2 Teorema das direções conjugadas	96
7.3.3 Método do gradiente conjugado	97
7.4 Bibliografia	99

Lista de Figuras

1.1	Problema de otimização de forma: (a) Forma ótima para malha uniforme, (b) Forma ótima com malha adaptada pelo método r , (c) Forma ótima com malha adaptada pelo método h	(6)
1.2	Fluxograma do algoritmo automático de otimização de malha	(9)
1.3	Fluxograma do algoritmo automático de otimização de forma	(10)
2.1	Elemento finito triangular, coordenadas de área	(11)
2.2	Barra uniforme elástica solicitada por forças de corpo prescritas. Problema unidimensional.....	(14)
2.4	Elemento triangular com carga ao longo do lado: (a) variação linear ao longo do lado 1-2, (b) coordenadas locais parametrizadas	(22)
2.5	Representação do campo de deslocamentos	(23)
2.6	Exemplos de cargas distribuídas ao longo do lado: (a) constante e (b) quadrática	(25)
2.7	Viga sob peso próprio e diagrama de deslocamentos na direção x	(29)
2.8	Viga com cisalhamento na extremidade livre	(30)
2.9	Viga em balanço com carregamento distribuído constante e vertical	(31)
3.1	Deslocamentos hierárquicos do elemento triangular	(35)
3.2	Forças nodais equivalentes: (a) pressão negativa, (b) versores normais aos lados	(36)
3.3	Esquemas gráficos da norma do desbalanceamento e sua derivada primeira.....	(39)
3.4	Geometria das malhas iniciais e malhas finais com a escala dos erros por elemento	(43)
4.1	Planos octaédricos no sistema de coordenadas principais	(49)
4.2	Componentes da tensão normal e cisalhante do vetor tensão um plano arbitrário	(50)
4.3	Elementos representando o estado de tensão de um ponto: (a) elemento original com um dos planos octaédricos, (b) estado plano de tensões	(51)
4.4	Esquema das etapas do algoritmo de otimização de forma	(56)

5.1	Malha e condições de contorno do modelo físico e um quarto da placa tracionada	...(58)
5.2	Modelos geométricos de discretização da placa tracionada(59)
5.3	Forma otimizada da placa tracionada com as condições do modelo geométrico 1. 6 iterações(60)
5.4	Forma otimizada com as condições de contorno do modelo geométrico 2. 18 iterações(60)
5.5	Parâmetros iniciais para uma placa com transição(61)
5.6	Discretizações e condições de contorno: (a) modelo físico e (b) modelo geométrico	...(62)
5.7	Metade da placa: forma inicial e forma final em função das variações das tensões por elemento(63)
5.8	Forma final da placa em função da energia de distorção(64)
5.9	Otimização da forma da placa: (a) novo modelo geométrico e (b) forma final(65)
5.10	Placa quadrada com furo sob estado de tensão biaxial(66)
5.11	Discretização de um quarto da placa: (a) modelo físico e (b) modelo geométrico(67)
5.12	Forma otimizada na região do furo sob campo de tensão biaxial(68)
5.13	Malha mais refinada: (a) forma inicial e (b) forma final(69)
5.14	Viga em balanço com momento na extremidade livre(70)
5.15	Discretizações e condições de contorno dos modelos físicos e geométricos(71)
5.16	Duas otimizações de forma da viga em balanço(72)
5.17	Viga esbelta sobre quatro apoios rígidos(73)
5.18	Discretização da metade da estrutura: (a) modelo físico e (b) modelo geométrico(74)
5.19	Forma final otimizada da parte tracionada da viga(74)
5.20	Condições iniciais do pórtico(75)
5.21	Modelo físico e modelo geométrico do pórtico(76)
5.22	Formas intermediárias do pórtico: (a) iteração 4 e (b) iteração (8)(77)
5.23	Forma otimizada do pórtico(78)
5.24	Seção transversal da coluna de uma auto estrada(79)
5.25	Discretizações da coluna de uma auto estrada: (a) modelo físico e (b) modelo geométrico(80)
5.26	Coluna de auto estrada: forma ótima (28 iterações)(81)
7.1	Esquema gráfico do método da secante(93)

7.2 (a) intervalo de confiança e (b) derivada 1ª da função(94)
7.3 Intervalo de confiança: (a) derivada positiva e (b) derivada negativa(95)

Lista de Tabelas

2.1	Comparação dos dados obtidos, numéricos e analíticos	(29)
2.2	Comparação de dados. Lineares, hierárquicos e analíticos	(30)
2.3	Comparação numérica e analítica dos dados obtidos	(31)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O conceito de otimização não é novo sendo na verdade tão velho quanto o homem. Desde o desenvolvimento da primeira roda de modo grosseiro, nós temos continuamente refinado e desenvolvido nossos projetos. Isto é a essência da otimização.

O projeto em engenharia é um processo iterativo no qual o mesmo é continuamente modificado através da busca de um grupo de critérios implementados geralmente pelos engenheiros. Uma maneira de se fazer isto tradicionalmente é o chamado de método de tentativa e erro, no qual o projetista usa toda sua experiência e intuição para conduzir as etapas de um dado projeto. A vantagem deste é que se tem a cada passo o domínio completo sobre a qualidade do projeto.

Para o caso de problemas complexos, esta facilidade de alternativas mudanças torna-se mais difícil e, portanto neste caso, existe a necessidade de uma nova ferramenta para se orientar em uma dada modificação.

Vanderplaats [1982] afirma que a invenção básica ou o conceito do desenvolvimento é um processo criativo mas que é difícil para formalizar ou quantificar. Entretanto, continua, o processo de desenvolvimento do projeto sobre o produto útil é o que nós podemos definir como uma otimização.

Os princípios básicos da otimização foram estabelecidos há dois ou três séculos atrás, porém a otimização matemática pura era raramente usada na prática devido à alta idealização da técnica. Desde que a otimização é um processo iterativo requerendo grande poder computacional, a aplicação real na engenharia de métodos de otimização pode somente agora ser factível devido à alta performance dos computadores digitais. Atualmente as aplicações de otimização abrangem uma grande área dentro das ciências das engenharias, onde uma das principais é a busca de um projeto estrutural otimizado.

Para um projeto específico pode existir um número de soluções, o qual satisfaz algumas condições impostas inicialmente. No entanto a proposta do método de otimização é: em vez de se produzir simplesmente um projeto viável, nós poderemos pesquisar entre todos os possíveis e determinar um único ótimo. Logo surge então uma definição para um projeto de otimização: usando técnicas matemáticas determinar um projeto ótimo, o qual satisfaz um grupo de critérios definidos pelo projetista.

Os problemas de otimização podem ser agrupados em três categorias: otimização dimensional, otimização topológica e otimização de forma. A dimensional determina valores para as variáveis de projeto tais como, a espessura, a área da seção transversal e o momento de inércia do componente estrutural. Durante esta otimização a forma permanece inalterada. A topológica basicamente, de modo grosseiro, pode-se afirmar que leva em conta a questão onde deve ou não deve existir material. Nishiwaki [1998] utiliza este tipo de ferramenta para obter a estrutura ótima considerando a flexibilidade da mesma. A metodologia é baseada no conceito de energia, comum para a formulação da flexibilidade e do método de homogeneização.

Uma importante classe de problemas na otimização estrutural é a otimização de forma, o qual se baseia na seleção de parâmetros geométricos da estrutura. Estes parâmetros geométricos os quais podem modificar-se durante os passos do projeto, são chamados de variáveis de projeto ou variáveis de forma; os quais controlam os contornos internos e externos das formas dos modelos. Além destas variáveis existem dois termos freqüentemente usados em otimização: a função custo ou objetivo e as restrições.

O objetivo conforme a seu próprio significado pode ser por exemplo a minimização do peso, a mínima concentração de tensão, a mínima energia de deformação, etc. As restrições são todos os critérios no qual o projeto está submetido. Como exemplo na otimização de forma, as tensões de uma dada estrutura não devem exceder a tensão de escoamento.

Visto que a forma das estruturas está continuamente mudando no processo de sua otimização, deve-se ter as seguintes preocupações nas mudanças do contorno: como manter uma adequada malha de elementos finitos, como aumentar a precisão na análise de sensibilidade, como impor restrições corretas e como utilizar métodos de otimização adequados aos problemas de otimização de forma.

Logo existe um grande interesse nos desenvolvimento de projetos em engenharia, principalmente Mecânica e Aeroespacial, na resolução do problema de otimização de forma, em que a fronteira do domínio constitui uma incógnita.

Beneficiando-se das técnicas e no desenvolvimento que se tem verificado na programação matemática, nos métodos de representação gráfica e modelagem geométrica e nos programas de elementos finitos, muitos pesquisadores tem abordado o tema em questão.

1.2 Objetivos e metodologia

Como a análise estrutural é uma parte integrante do sistema de otimização de forma, o progresso da otimização estrutural muitas vezes depende fundamentalmente do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos. Vários fatores afetam a confiabilidade do modelo de elementos finitos dentre os quais podem ser citadas a discretização do modelo, o tipo de elemento, as propriedades dos materiais e os parâmetros de análise do problema. Em todas as análises numéricas que usam este tipo de ferramenta a questão mais comum é a geração e re-geração das malhas em busca da precisão das soluções.

Kikuchi [1986] define que o método adaptativo de elementos finitos proporciona uma capacidade de análise iterativa que dá uma posição estimada de erros de aproximação tal que os usuários podem controlar qualitativamente os modelos. Baseado nisto, um procedimento

adaptativo automático gerador de malhas de elementos finitos otimizadas, não só aumenta a produtividade do engenheiro como também implica em maior confiabilidade das soluções.

Os métodos adaptativos atualmente utilizados pelos pesquisadores são: o Método r , que conserva fixo o número de graus de liberdade; o Método h , que refina os elementos da malha com a introdução de mais elementos; o Método p , que aumenta a ordem das polinomiais de interpolação e os métodos que combinam h com p e p com r .

Uma eficiente formulação do elemento é particularmente importante nestes problemas onde muitas malhas podem ser geradas na busca da solução de um problema específico. Elementos triangulares têm um papel importante nos métodos adaptativos numa análise com o método dos elementos finitos, Peraire [1987], Roberti [1987] e Zienkiewicz [1989]. Possuem uma polinomial completa e, portanto, oferecem certas vantagens sobre os elementos quadrilaterais os quais empregam polinomiais incompletas, Shephard [1981] [1986], Serpa [1991] e Zienkiewicz [1971]. Observa-se, ainda, pelas discussões em Zienkiewicz [1983], em Szabo [1981] e Lawrence [1991], que as vantagens do elemento triangular aumentam com o uso da formulação hierárquica.

A formulação hierárquica possui os seguintes méritos: utiliza soluções prévias na busca de um refinamento, permite um esquema simples de iteração na solução para refinamentos sucessivos, melhora o condicionamento da matriz de rigidez e nos fornece um imediato estimador de erro. A propriedade de melhorar o condicionamento da matriz de rigidez é atribuída por pesquisadores ao fato que os graus de liberdade hierárquicos são perturbações adicionadas as soluções, obtidas com funções de forma de ordem mais baixa. Por isso a matriz resultante é mais diagonal do que a que se obteria utilizando a formulação clássica. Logo a diferença entre o máximo e o mínimo autovalor da matriz de rigidez normalmente é menor em uma formulação hierárquica.

O erro inerente na solução de elementos finitos tem duas partes, Kelly [1983]; a primeira parte é proporcional ao erro da segunda derivada dos deslocamentos no interior do elemento e, é atribuído ao fato de que a solução satisfaz a equação de continuidade somente de uma forma geral e não para cada ponto do domínio. A segunda, e geralmente a parte mais dominante do erro

para elementos com ordem p baixo, é causado por descontinuidades na primeira derivada dos deslocamentos nos contornos do elemento, já que somente a continuidade no deslocamento é imposta através das interfaces entre elementos.

Fancelo [1992] seguindo a linha proposta por Zienkiewicz [1987] implementou um programa para estimar o erro de aproximação e gerar um novo formato da malha, ambos orientados pela adaptação do tipo h , de modo a obter uma uniformidade do erro no domínio. Um método de estimar o erro a posteriori em problemas bi e tridimensionais é apresentado por Ohtsubo [1992]. O mesmo usa um elemento isoparamétrico com uma função de ordem um grau superior a ordem original, denominado-o de elemento “esperto”. Uma geração adaptativa da malha é baseada na distribuição deste erro.

Uma aplicação típica do método adaptativo é o problema de otimização de forma de estruturas linearmente elásticas. Se por exemplo formos otimizar a placa da figura 1, de modo a minimizar a concentração de tensão e utilizarmos uma malha uniforme, a forma ótima é muito oscilatória e é fisicamente sem sentido, figura 1.1(a). Com a aplicação da adaptividade o problema pode ser resolvido conforme mostram as figuras 1.1(b) e 1.1(c). A razão desta oscilação é que para o “ótimo” muitas malhas são muito distorcidas especialmente próximo a mudança rápida da seção, Kikuchi [1987].

Discutir à luz das hipóteses da formulação a sua potencialidade na busca de implementar numericamente um estimador de erro, de tal maneira que se automatize numericamente a otimização de malhas, é o primeiro objetivo desta tese. Utilizando-se do método adaptativo desenvolvido anteriormente, estendeu-se a implementação numérica para a otimização de forma atingindo-se o segundo objetivo deste trabalho. Diante das observações e sugestões conhecidas implementou-se numericamente um algoritmo que utiliza um conjunto de regras e métodos iterativos que visam à descoberta, a invenção ou a resolução destes problemas o qual representa exatamente a definição de um Método Heurístico.

Utilizou-se um estimador de erro de discretização dos elementos usando como base a norma da energia de deformação, correspondentes às variáveis hierárquicas. Apesar de algumas

limitações tais como: distorção do elemento, complexidade geométrica e o problema da convergência, Cheng [1993] mostrou que dependendo da discretização inicial o método r é muito eficaz além de ser a mais simples de ser implementado. Desta maneira é que escolheu-se como método adaptativo o Método r , o qual prediz um novo formato da malha de forma tal que se possa controlar a uniformidade do erro ao longo do modelo bem como compará-lo a um certo valor admissível.

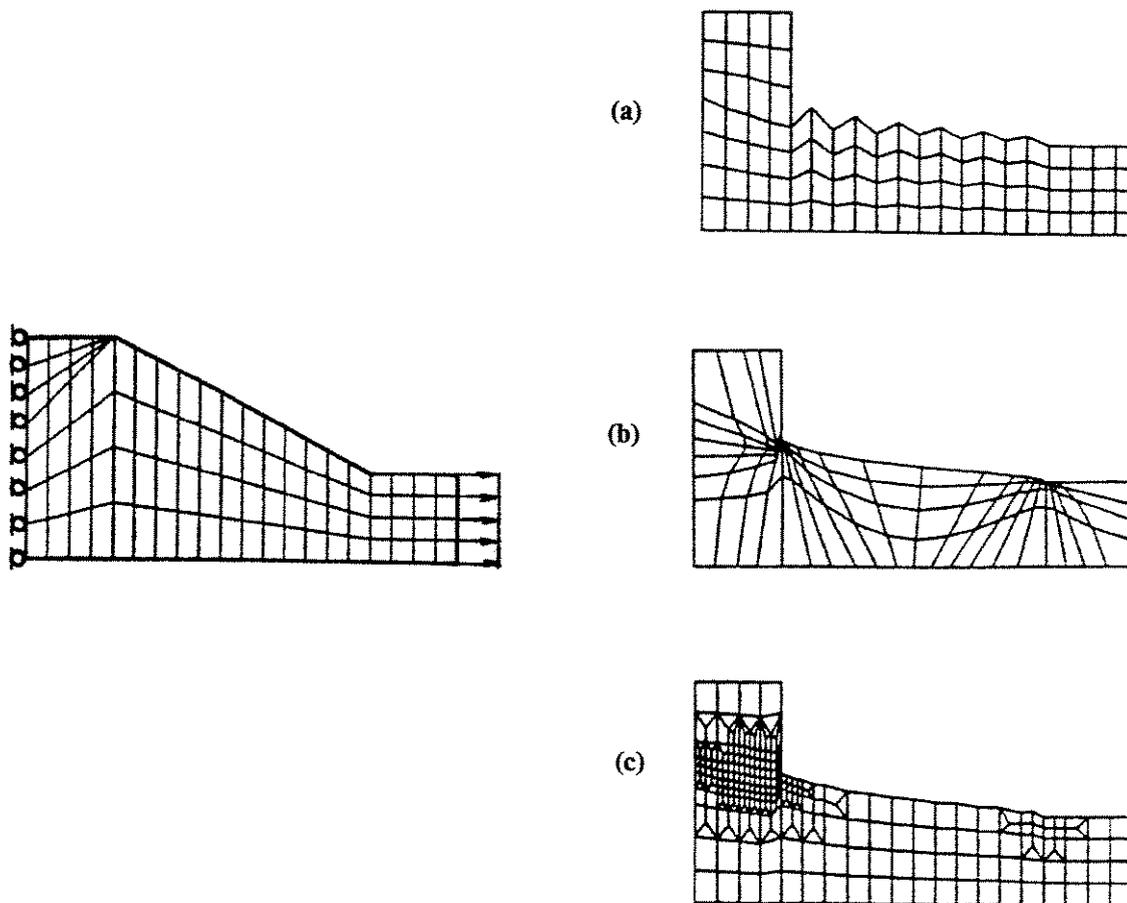


Figura 1.1 - Problema de otimização de forma: (a) Forma ótima para malha uniforme, (b) Forma ótima com malha adaptada pelo método r , (c) Forma ótima com malha adaptada pelo método h .

A mudança da forma obedece basicamente o critério da energia de deformação por distorção (von Mises) onde, a óptimalidade ou a falha é a máxima energia de distorção no ensaio uni axial de tração. A justificativa do uso deste critério deve-se ao fato de o mesmo envolver

todas as componentes de tensão no estado tri axial e, predizer o escoamento de materiais metálicos dúcteis sob carregamentos combinados com maior precisão do que qualquer outra teoria conhecida, Juvinall [1967].

Assim como a otimização da malha baseia-se no equilíbrio do desbalanceamento do erro de discretização dos elementos, heurísticamente, a otimização de forma também é implementada numericamente usando a mesma idéia mas, agora utilizando o princípio do desbalanceamento da energia de deformação por distorção dos elementos.

O primeiro código numérico implementado em linguagem FORTRAN Power Station, figura 1.2, permite através de um módulo adaptativo, estimar o erro em problemas bidimensionais, utilizando elementos triangulares hierárquicos com funções de forma de grau 2. Automaticamente, segundo a formulação, verifica-se se existe uma homogeneidade do erro ao longo dos elementos e, caso esta não ocorra, os nós livres, pré estabelecidos, serão deslocados em função da diferença de gradiente do erro reiniciando-se uma nova análise do modelo físico com um novo modelo de discretização mais otimizado.

O segundo fluxograma, confeccionado com a mesma linguagem FORTRAN, figura 1.3, calcula a energia de deformação de distorção por elemento finito e busca iterativamente a forma ótima: após a solução do modelo físico a forma é alterada através de uma nova equação de equilíbrio, com a matriz de rigidez levando em conta as variáveis livres da forma. Estas variáveis, solução da nova equação de equilíbrio, tendo agora como vetor carregamento os desbalanceamentos das energias de distorção, modificam o contorno baseando-se nas novas condições geométricas do contorno.

1.3 Descrição do trabalho

Este trabalho está dividido em sete (7) capítulos cujos conteúdos resumem-se à seguir:

Capítulo 1 : Inicia-se com um breve relato dos motivos pelos quais este tema de pesquisa foi abordado e desenvolvido referenciando-se nos momentos oportunos as principais bibliografias consultadas. Os objetivos marcantes que foram estabelecidos e a metodologia empregada

também fazem parte deste capítulo, citando-se para efeito de comparação alguns objetivos de pesquisas publicadas. Em seguida apresenta-se esta descrição do trabalho.

Capítulo 2 : Apresenta-se um desenvolvimento da formulação do elemento finito triangular hierárquico, dando-se ênfase ao uso das coordenadas de área, a obtenção das funções de forma hierárquicas, forças equivalentes nodais e ao desenvolvimento das equações de equilíbrio, principalmente no que se refere ao vetor gradiente e montagem da matriz de rigidez global com os termos hierárquicos. Para se avaliar a veracidade da implementação proposta, utiliza-se alguns exemplos simples de aplicação.

Capítulo 3 : O módulo adaptativo de malhas de elementos finitos é tratado neste capítulo. Uma breve introdução referendando alguns pesquisadores da área, a formulação do modelo proposto com base na energia de deformação das variáveis hierárquicas, alguns comentários sobre o método de relocação nodal e um exemplo de validação do método proposto, compõem este módulo.

Capítulo 4 : Este descreve a formulação usada para a otimização de forma no estado plano de tensões. Faz-se uma introdução citando-se a bibliografia existente em otimização de forma, dando-se enfoque para a definição do Método Heurístico. Apresenta-se ainda a formulação analítica da energia de deformação por distorção e os passos do algoritmo proposto para otimizar a forma de elementos estruturais usuais da literatura.

Capítulo 5 : Avalia e compara-se o modelo proposto através de sete (07) exemplos de aplicação, quase todos tradicionais e encontrados na pesquisa bibliográfica que trata do assunto em questão.

Capítulo 6 : As sugestões e conclusões sobre o assunto, bem como as dificuldades encontradas para desenvolver o tema, são delineadas com algumas indicações de futuros trabalhos.

Capítulo 7 : São apresentados alguns apêndices tratando de informações importantes utilizadas neste trabalho e a bibliografia pesquisada e referendada apresenta-se em ordem alfabética.

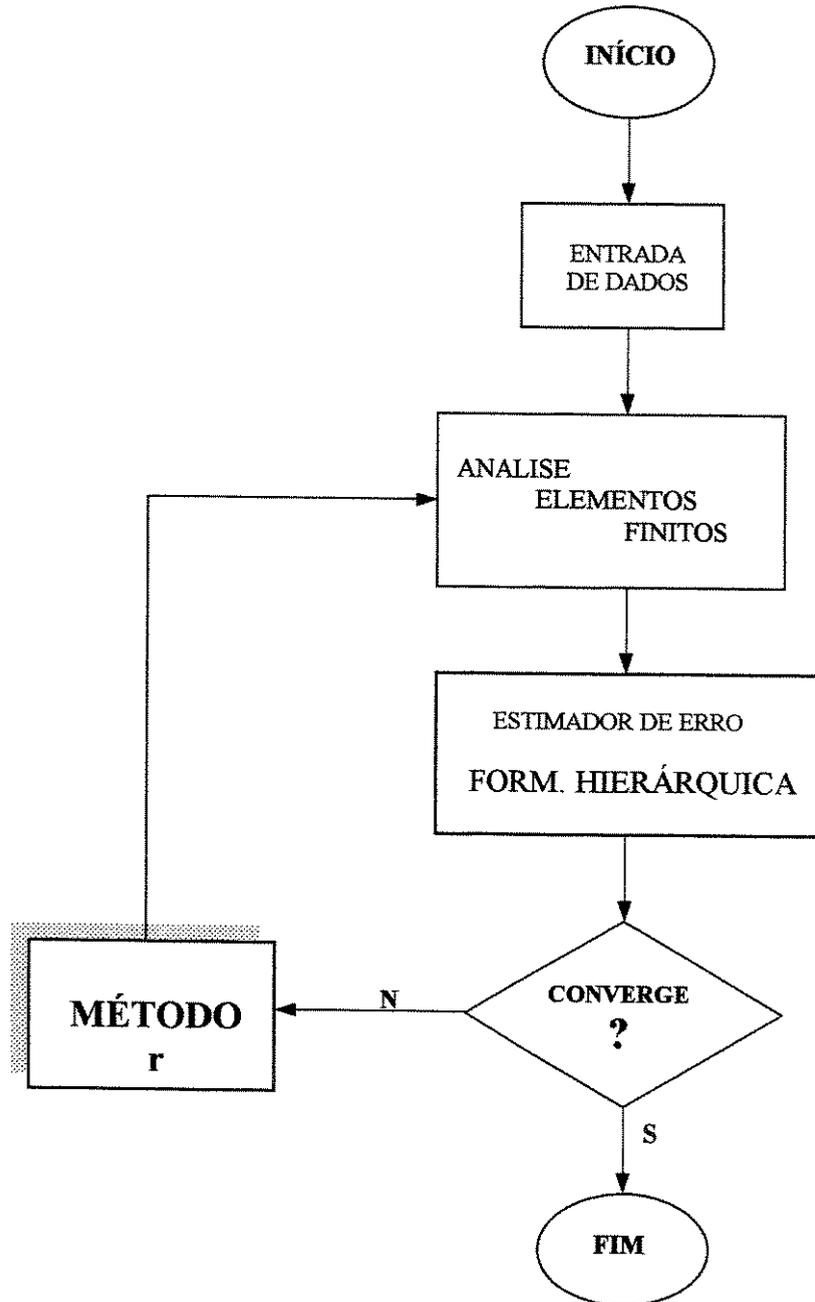


Figura 1.2 - Fluxograma do algoritmo automático de otimização de malha

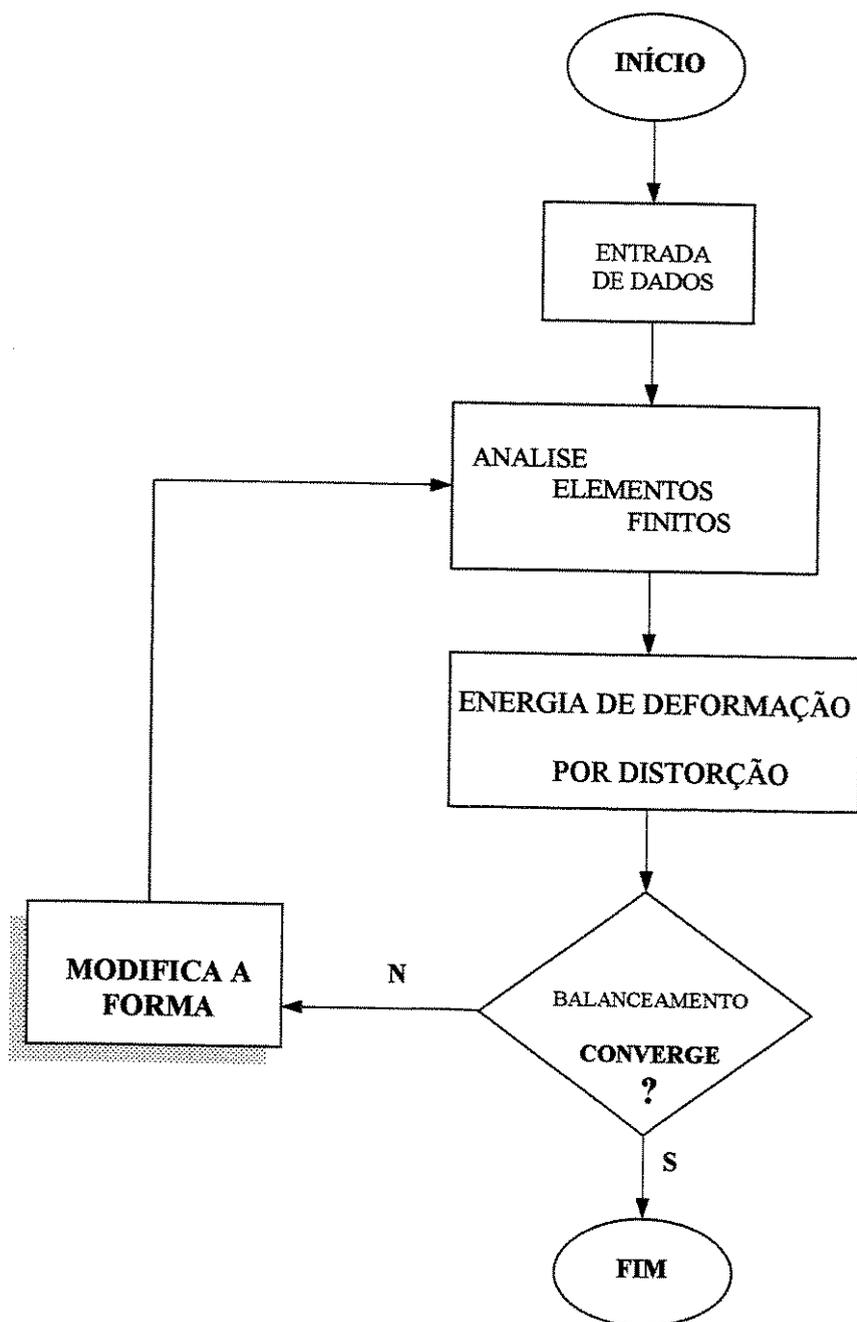


Figura 1.3 - Fluxograma do algoritmo automático de otimização de forma

Capítulo 2

Elemento Finito Plano Triangular Hierárquico

2.1 Coordenadas de área ou naturais

Na figura 2.1, o parâmetro L_1 , é chamado de coordenada de área porque seu valor dá a razão da área da região subtriangular A_1 , com a área do triângulo completo A . É chamado de coordenadas naturais porque o sistema de coordenadas é parametrizado (adimensionalizado).

Fazendo-se $A = \frac{b h}{2}$ e $A_1 = \frac{b s}{2}$ tem-se que a razão $\frac{A_1}{A}$ toma a seguinte forma

$$\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1 \quad \text{ou} \quad A_1 = A L_1 \quad (2.1)$$

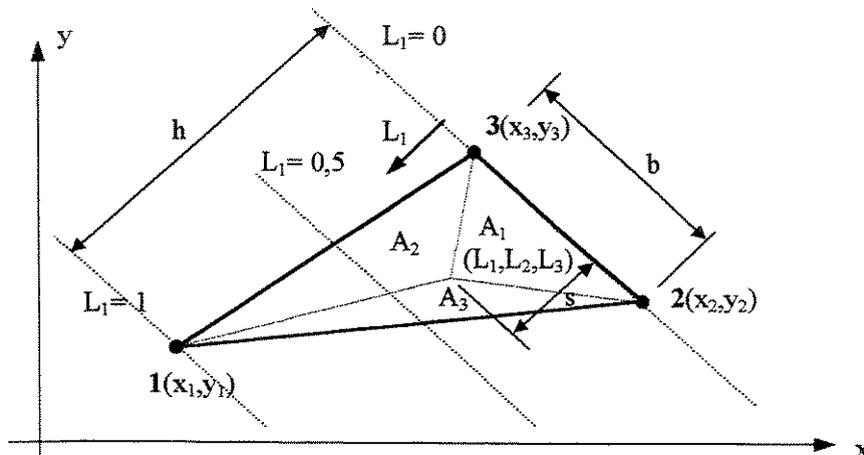


Figura 2.1 - Elemento finito triangular, coordenadas de área.

Como $A = A_1 + A_2 + A_3$ e analogamente à equação (2.1) tem-se $A_2 = A L_2$; $A_3 = A L_3$ conclui-se que

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (2.2)$$

A equação (2.1) pode ser escrita como $L_1 = \frac{2A_1}{2A}$ e expandindo o termo $2A_1$ tem-se

$$2A_1 = (x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \quad (2.3)$$

onde x e y são as coordenadas do ponto considerado.

Substituindo (2.3) em (2.1) obtém-se

$$L_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (2.4)$$

logo pode-se representar matricialmente as coordenadas de área generalizadas para o triângulo como:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Então as coordenadas de área para um elemento triangular linear são as próprias funções de forma, e estes dois grupos de entidades podem ser intercambiáveis. A vantagem do uso do sistema de coordenadas de área é a existência de uma fórmula de integração exata que simplifica a obtenção das integrais de área, Segerlind [1984]. Esta fórmulação vale:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A \quad (2.6)$$

2.2 Funções de forma hierárquicas

O campo de deslocamentos (\hat{v} , \hat{u}) para qualquer ponto do elemento finito triangular linear, figura 2.1, é dado em termos dos deslocamentos nodais, por

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 \\ 0 & [N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

onde $[N]$ é a matriz função de forma em termos das coordenadas de área e vale

$$[N] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3] \quad (2.8)$$

sendo que cada termo de $[N]$ corresponde aos deslocamentos de cada vértice do triângulo.

Então a equação (2.7) pode ser escrita agora em termos das coordenadas de área como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(L_1, L_2, L_3) \\ \hat{v}(L_1, L_2, L_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N](L_1, L_2, L_3) & 0 \\ 0 & [N](L_1, L_2, L_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

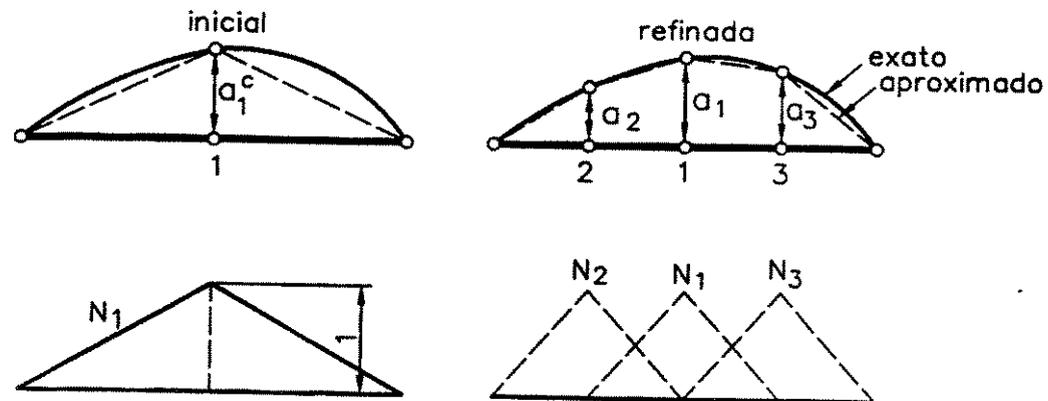
Porém alguns problemas com as funções de forma padrões ocorrem quando existe a necessidade de se usar um elemento mais refinado. Novas funções de forma terão que ser geradas e todos os cálculos terão que ser refeitos. Seria uma grande vantagem evitar esta dificuldade de modo que a função de forma não dependeria do número de nós da malha. Isto é alcançado através das funções de forma hierárquicas.

O conceito de hierárquico é bem ilustrado para o problema unidimensional (barra elástica)

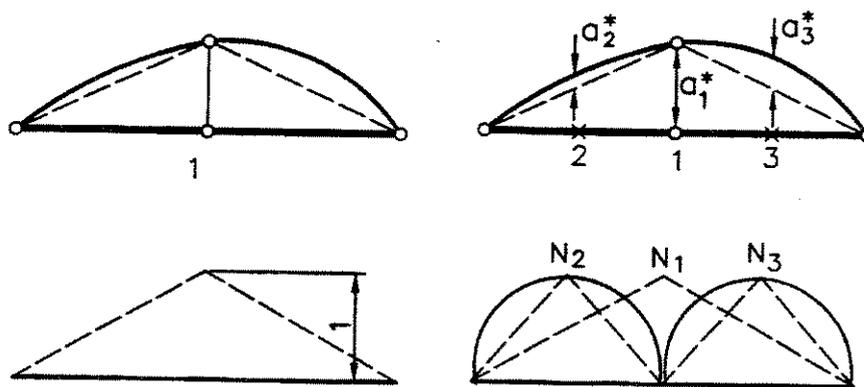
conforme mostra a figura 2.2. Por simplicidade supõem-se que as propriedades elásticas são constantes e as forças de corpo variam de tal forma que produzem a solução exata com deslocamentos zeros nas extremidades. São mostrados duas malhas e assume-se uma interpolação linear entre os pontos nodais.

Para a forma padrão e para a forma hierárquica a malha inicial, grosseira, nos dá

$$K_{11}^c a_1^c = f_1 \quad (2.10)$$



(a) aproximação padrão



(b) aproximação hierárquica

Figura 2.2 - Barra uniforme elástica solicitada por forças de corpo prescritas. Problema unidimensional

Para a malha mais refinada com a adição de dois nós, teremos, com a função de forma padrão, o seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^F & K_{12}^F & 0 \\ K_{21}^F & K_{22}^F & K_{23}^F \\ 0 & K_{32}^F & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Claramente observa-se que os coeficientes não são os mesmos e as novas equações terão que ser resolvidas. Usando as funções de forma hierárquicas, resulta numa equação similar e consegue-se uma idêntica aproximação, mas o significado dos parâmetros $a_1 = a_1^*$ é agora diferente, como mostra a figura 2.2.

Sempre uma função de forma idêntica ocorre para a primeira variável, logo

$$K_{11}^F = K_{11}^c \quad (2.12)$$

Além disso, para o caso particular, os coeficientes fora da diagonal são nulos e a equação final para o elemento refinado fica:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^c & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^F & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Esta diagonalidade geralmente ocorre em problemas unidimensionais, mas em geral matrizes obtidas através das funções de forma hierárquicas são aproximadamente diagonais e, então, implicam num melhor condicionamento do que as funções padrões.

Voltando-se a figura 2.1, observa-se que ao longo do lado 1-2, L_3 é nulo e, portanto temos

$$(L_1 + L_2)_{1-2} = 1 \quad (2.14)$$

Se ξ , medido ao longo do lado 1-2, é a coordenada usual não dimensional do tipo usado para derivar as funções hierárquicas para elementos unidimensionais, pode-se escrever

$$L_1|_{1-2} = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad L_2|_{1-2} = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad \xi = (L_2 - L_1)_{1-2} \quad (2.15)$$

Com isto pode-se gerar funções de forma hierárquicas sobre o triângulo generalizando as funções de forma unidimensionais. Por exemplo, usando as expressões

$$N_p(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{p!} (\xi^p - 1) & p \rightarrow \text{par} \\ \frac{1}{p!} (\xi^p - \xi) & p \rightarrow \text{impar} \end{cases} \quad (2.16)$$

e associando-se ao lado 1-2, a polinomial de grau p , com $p \geq 2$, fica

$$N_{p(1-2)} = \begin{cases} \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_1 + L_2)] & p \rightarrow \text{par} \\ \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_2 - L_1)(L_1 + L_2)^{p-1}] & p \rightarrow \text{impar} \end{cases} \quad (2.17)$$

onde para $p = 2$, tem-se:

$$N_{2(1-2)} = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) = -2 L_1 L_2 \quad (2.18)$$

ou de outra forma mais elegante pode-se escrever

$$N_{2(1-2)} = \frac{1}{2} (1-\xi^2) = 2 L_1 L_2 . \quad (2.19)$$

Analogamente tem-se para os outros lados do triângulo as respectivas funções de forma

$$N_{2(2-3)} = 2 L_2 L_3 \quad \text{e} \quad N_{2(3-1)} = 2 L_1 L_3 \quad (2.20)$$

Observa-se através da equação (2.15) que estas funções de forma são nulas nos nós 1 e 2. Além disso é fácil mostrar que $N_{p(1-2)}$ é zero ao longo dos lados 3-1 e 2-3 do triângulo, e então deste modo garantir a continuidade C_0 de aproximação dos deslocamentos. A figura 2.3 apresenta uma função quadrática típica para o elemento triangular.

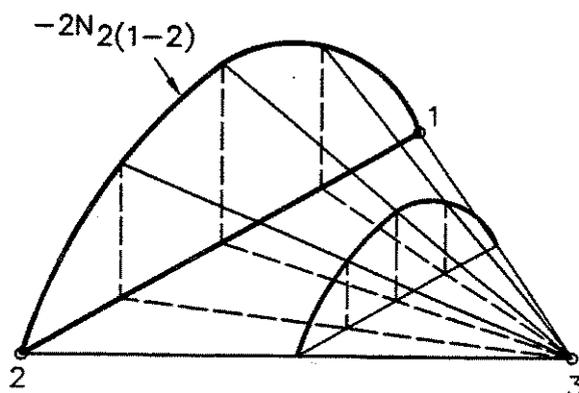


Figura 2.3 - Função de forma hierárquica quadrática, elemento triangular

Como cada termo de (2.8) corresponde ao deslocamento do vértice do elemento triangular e associando-se com o elemento hierárquico descrito tem-se a seguinte função de forma

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_\alpha \ N_\beta \ N_\gamma] = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ 2L_1L_2 \ 2L_2L_3 \ 2L_1L_3] \quad (2.21)$$

onde os três primeiros termos estão associados aos graus de liberdade anteriores e os três últimos termos estão associados aos novos graus de liberdade para cada lado do elemento, nas direções x e y, Babuska [1979].

2.3 Formulação do elemento triangular hierárquico de grau 2

A expressão da energia de deformação é dada por

$$U = \frac{1}{2} \iint \varepsilon^T D \varepsilon t \, dx \, dy \quad (2.22)$$

onde D é a matriz elasticidade, ε é o vetor das deformações, ou vetor gradiente, e vale

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{u}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{v}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{u}_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

As coordenadas globais para qualquer ponto no elemento são dadas em termos das coordenadas de área por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Desenvolvendo-se pela “regra da cadeia” obtemos,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial y} \quad (2.26)$$

onde, para os componentes referentes ao campo hierárquico, sabendo-se que

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_{23}}{2A} ; \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_{31}}{2A} ; \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_{12}}{2A}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{x_{32}}{2A} ; \quad \frac{\partial a_2}{\partial y} = \frac{x_{13}}{2A} ; \quad \frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{x_{21}}{2A}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad , \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

tem-se

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_2 y_{23} + L_1 y_{31});$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_3 y_{31} + L_2 y_{12});$$

$$\frac{\partial N_\gamma}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_3 y_{23} + L_1 y_{12})$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_1 x_{13} + L_2 x_{32});$$

$$\frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_2 x_{21} + L_3 x_{13});$$

$$\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_1 x_{21} + L_3 x_{32});$$

e desenvolvendo a Equação (2.22), tem-se para o vetor das deformações a seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 & a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 & d & 0 & e & 0 & f \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} & d & a & e & b & f & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

onde

$$a = 2(L_2 y_{23} + L_1 y_{31});$$

$$b = 2(L_2 y_{12} + L_3 y_{31});$$

$$c = 2(L_1 y_{12} + L_3 y_{23});$$

$$d = 2(L_1 x_{13} + L_2 x_{32});$$

$$e = 2(L_2 x_{21} + L_3 x_{13});$$

$$f = 2(L_1 x_{21} + L_3 x_{32});$$

A = área do elemento;

α e β = campos de deslocamentos hierárquicos.

Substituindo (2.27) em (2.22) e desenvolvendo algebricamente a equação (2.21) observa-se que os coeficientes de rigidez originais permanecem preservados, sendo isto um dos méritos da formulação hierárquica conforme afirma Zienkiewicz [1983]. Todos os coeficientes adicionados à matriz de rigidez original foram calculados analiticamente pois as integrais são relativamente simples, sendo que este desenvolvimento está apresentado no Apêndice A.

Agora, as equações de equilíbrio iniciais

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (2.28)$$

aparecem então com os termos adicionais previamente calculados e, remontando-se as novas linhas e colunas correspondentes aos novos graus de liberdade, ficam:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{nh} \\ \mathbf{K}_{hn} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_n \\ \bar{\mathbf{u}}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_h \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Desta forma a matriz \mathbf{K} permanece invariável, possibilitando a recuperação de alguns coeficientes computacionais na ocorrência de refinamento. Isto já é uma das vantagens de se usar o elemento hierárquico. Além disso pode-se considerar $\bar{\mathbf{u}}_n = \bar{\mathbf{u}}$ como uma primeira aproximação razoável da solução, que se pode utilizar como início de um processo iterativo de resolução, é o que comentam em seus trabalhos Zienkiewicz [1989] e Bugeda [1991]. Esta primeira aproximação obtém-se mediante as seguintes equações:

$$\bar{\mathbf{u}}_n = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_n \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{K}_{hh}^{-1} (\mathbf{f}_h - \mathbf{K}_{hn} \bar{\mathbf{u}}) \quad (2.30)$$

Desejando-se melhorar a solução pode-se repetir o ciclo,

$$\bar{\mathbf{u}}_n = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_n - \mathbf{K}_{hn} \bar{\mathbf{u}}_h) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{K}_{hh}^{-1} (\mathbf{f}_h - \mathbf{K}_{hn} \bar{\mathbf{u}}) \quad (2.31)$$

A formulação apresentada foi implementada numericamente e resultou na confecção de várias rotinas computacionais eficientes e precisas para solucionar o problema físico, cálculo dos deslocamentos, com exemplos tradicionais simples. Na verdade, o modelo apresentado foi avaliado com a intenção de que o mesmo seria uma base sólida para a implementação de um estimador de erro de discretização e como consequência implementar o refinamento adaptativo de elementos finitos.

2.4 Forças nodais equivalentes hierárquicas $\{ f_h \}$

2.4.1 Carregamento ao longo do lado

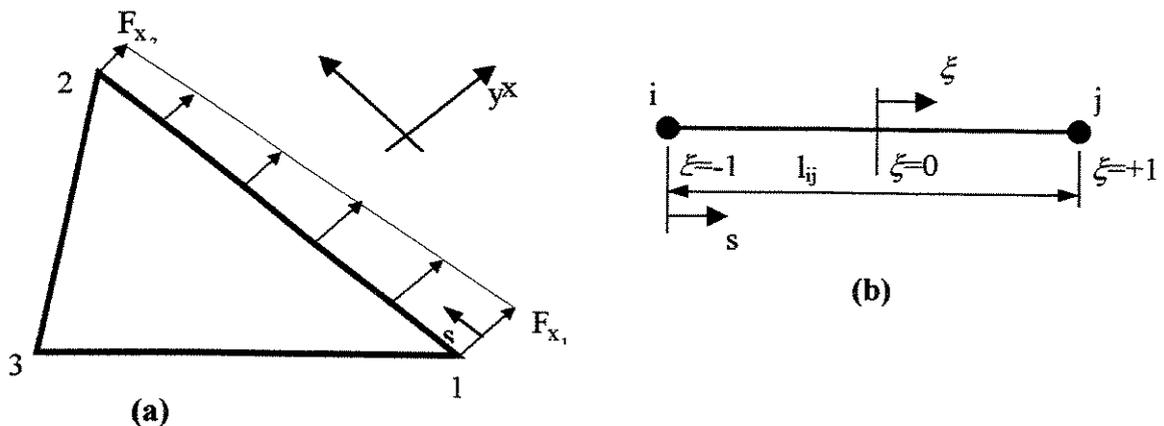


Figura 2.4 - Elemento triangular com carga ao longo do lado: (a) variação linear ao longo do lado 1-2; (b) coordenadas locais parametrizadas

Na figura 2.4(b) as coordenadas locais parametrizadas $\xi = [-1 + 1]$, ao longo do lado $(i - j)$, podem ser escritas como

$$s = \frac{l_{ij}}{2} (\xi + 1). \quad (2.32)$$

A interpolação do campo de deslocamentos $u(s)$, ao longo do lado $(i - j)$, denominado $u(\xi)$ e representado na figura 2.5, vale:

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + (1-\xi^2) \alpha_{ij} \quad (2.33)$$

onde $\begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix}$ representa a interpolação nodal e $(1-\xi^2)$ representa a interpolação hierárquica.

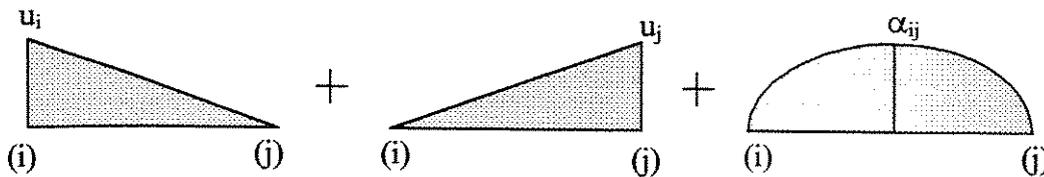


Figura 2.5 - Representação do campo de deslocamentos

Reportando-se a figura 2.4(a) a interpolação das forças distribuídas ao longo do lado $(i - j)$ permite uma variação quadrática e vale:

$$f_x(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{Bmatrix} + (1-\xi^2) F_x \quad (2.34)$$

onde F_x é a carga distribuída ao longo do lado $(i - j)$.

Como as forças nodais equivalentes são as forças concentradas, que produzem o mesmo trabalho que as forças distribuídas quando aplicadas aos nós, o vetor das forças nodais equivalentes pode ser obtido a partir do trabalho realizado pela força $f_x(\xi)$, agindo sobre $u(\xi)$ ao longo de um lado ($i - j$),

$$W = \int_0^{l_{ij}} u(s) f_x(s) ds = \frac{l_{ij}}{2} \int_{-1}^{+1} u(\xi) f_x(\xi) d\xi \quad (2.35)$$

$$\text{ou } W = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \alpha_{ij} \end{Bmatrix}^T \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} (1-\xi)/2 \\ (1+\xi)/2 \\ (1-\xi^2) \end{Bmatrix} \left[\frac{(1-\xi)}{2} \quad \frac{(1+\xi)}{2} \quad (1-\xi^2) \right] d\xi \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \\ F_x \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

Resolvendo-se a integral da equação (2.36), obtém-se para o trabalho a seguinte expressão

$$W = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \alpha_{ij} \end{Bmatrix}^T l_{ij} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 8/15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \\ F_x \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde o vetor força equivalente para o lado do elemento triangular fica o seguinte

$$\{F\}_{eq} = l_{ij} \begin{Bmatrix} \frac{F_{xi}}{3} & \frac{F_{xj}}{6} & \frac{F_x}{3} \\ \frac{F_{xi}}{6} & \frac{F_{xj}}{3} & \frac{F_x}{3} \\ \frac{F_{xi}}{3} & \frac{F_{xj}}{3} & \frac{8F_x}{15} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Para o caso de carregamento constante, figura 2.6(a), se $F_{x_i} = F_{x_j} = Q$ e $F_x = 0$ obtém-se para o lado (i - j):

$$\{F\}_{\text{eq}} = Q l_{ij} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

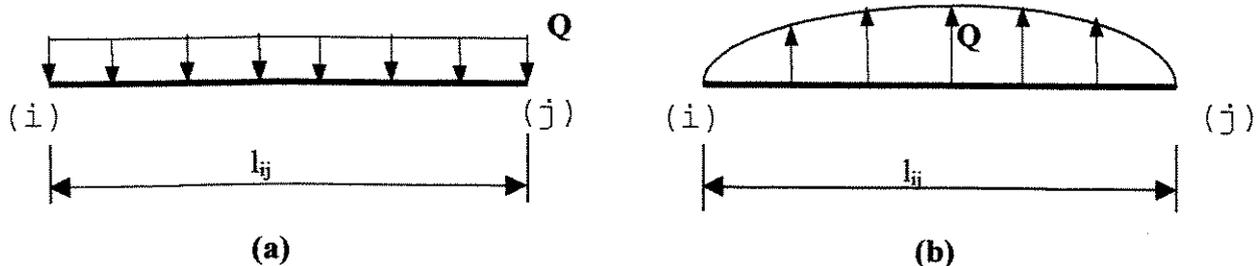


Figura 2.6 - Exemplos de cargas distribuídas ao longo do lado: (a) constante e (b) quadrática

Para o caso de carregamento quadrático ao longo do lado, como por exemplo o esforço de cisalhamento, figura 2.6(b), se $F_{x_i} = F_{x_j} = 0$ e $F_x = Q$ tem-se para o lado (i - j);

$$\{F\}_{\text{eq}} = Q l_{ij} \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 8/15 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

2.4.2 Carregamento ao longo da área

A integral da equação (2.36) será modificada substituindo-se por uma integral da carga distribuída ao longo da área do elemento, $Q(x,y)$, dependente das funções de forma em coordenadas de área, equação (2.21).

Então o vetor das forças nodais equivalentes ao longo da área fica,

$$\{F\}_{eq} = \iint_A \begin{Bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \\ N_\alpha(x, y) \\ N_\beta(x, y) \\ N_\gamma(x, y) \end{Bmatrix} Q(x, y) dx dy . \quad (2.41)$$

Para o caso de $Q(x, y) = Q = \text{constante}$, tem-se

$$\{F\}_{eq} = Q \iint_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ 2 L_1 L_2 \\ 2 L_2 L_3 \\ 2 L_1 L_3 \end{Bmatrix} dx dy \quad (2.42)$$

e usando-se as fórmulas de integração polinomial sobre o triângulo obtém-se o vetor força equivalente:

$$\{F\}_{eq} = Q A \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

2.5 Exemplos de aplicação

2.5.1 Carga nodal equivalente ao longo da área e constante

A figura 2.7 apresenta uma das aplicações do modelo onde analisa-se uma viga sujeita ao carregamento de peso próprio, com espessura unitária, coeficiente de Poisson zero e módulo de

elasticidade igual a 10. Foram usados 8 elementos triangulares lineares com grau hierárquico dois e os resultados obtidos quando comparados com os da solução analítica mostram uma ótima eficiência do modelo numérico proposto, conforme apresenta-se na tabela 2.1. Convém salientar que as unidades não influem na verificação da veracidade dos resultados.

2.5.2 Carga nodal equivalente ao longo do lado e quadrática

Outra aplicação para avaliação do modelo implementado trata-se de analisar uma viga, de seção transversal retangular, com cisalhamento aplicado na extremidade livre da mesma. A figura 2.8 apresenta as características dimensionais da viga, geometria da malha e o carregamento equivalente nodal. Adotou-se o módulo de elasticidade $E = 10000$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e a espessura $t=1$.

O valor de $Q = 1.5$ foi calculado de tal forma que nos dê uma resultante unitária na face livre baseando-se na formulação analítica,

$$(F = \frac{2}{3} Q l_{ij}). \quad (2.44)$$

A tabela 2.2 mostra, para os deslocamentos em y dos nós da linha superior da viga, que os resultados do modelo hierárquico são bastante satisfatórios o que não ocorre com o modelo linear. O erros nos nós, referentes aos resultados hierárquicos em relação a solução analítica, variam de 0,56% para a extremidade livre até 1,45% no engaste, provando que o elemento proposto simula bem, para o caso do carregamento quadrático distribuído ao longo do lado, mesmo utilizando-se de uma malha grosseira na região dos maiores erros relativos. Observa-se que, a luz dos resultados obtidos, o elemento hierárquico mostra exatamente o quanto está se errando caso queira-se usar somente o elemento linear.

2.5.3 Carga nodal equivalente ao longo do lado e linear

Uma viga em balanço com uma carga distribuída constante, Q , aplicada na face superior está representada esquematicamente na figura 2.9. A mesma mostra um modelo discretizado com 20 elementos finitos triangulares lineares e hierárquicos de grau 2. A espessura da viga é unitária e as propriedades do material são módulo de elasticidade $E = 10000$ e coeficiente de Poison $\nu = 0,3$.

Os resultados numéricos obtidos quando comparados à solução analítica mostram-se novamente satisfatórios, implicando na obtenção de uma grande confiabilidade na implementação numérica proposta, podendo ser a mesma utilizada no trabalho que segue. A tabela 2.3 representa esta comparação para os nós localizados na borda superior da viga e observa-se que os erros relativos calculados com relação aos resultados analíticos, em análise estrutural, são bastante aceitáveis.

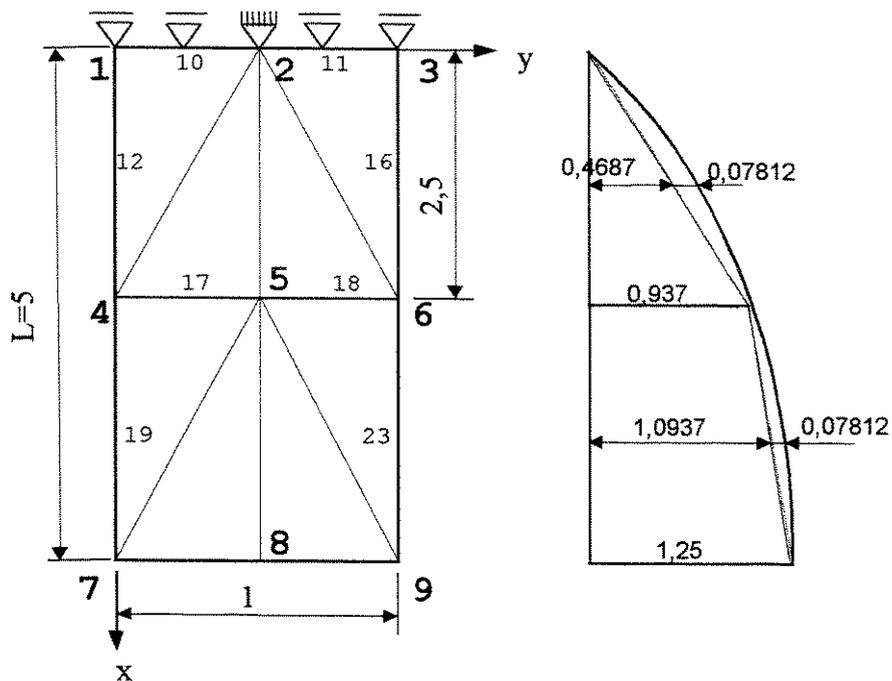


Figura 2.7 - Viga sob peso próprio e diagrama de deslocamentos na direção x

NÓ	x	Linear (\bar{u})	Proposto (\bar{u})	Analítico
4	2,50	0,93742	0,93750	0,93750
7	5,00	1,25000	1,25000	1,25000

Tabela 2.1 - Comparação dos dados obtidos, numéricos e analíticos.

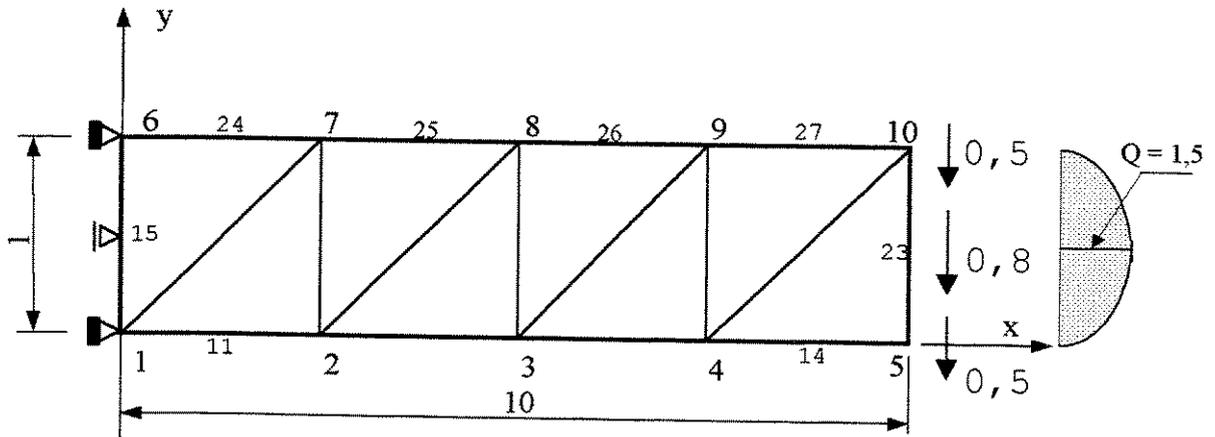


Figura 2.8 - Viga com cisalhamento na extremidade livre

NÓ	x	Linear (\bar{u})	Proposto (\bar{u})	Analítico
7	2,50	-0,003148	-0,033877	-0,03437
8	5,00	-0,01088	-0,12393	-0,1250
9	7,50	-0,02167	-0,25147	-0,2531
10	10,00	-0,03388	-0,39776	-0,4000

Tabela 2.2 - Comparação de dados. Lineares, hierárquicos, e analíticos.

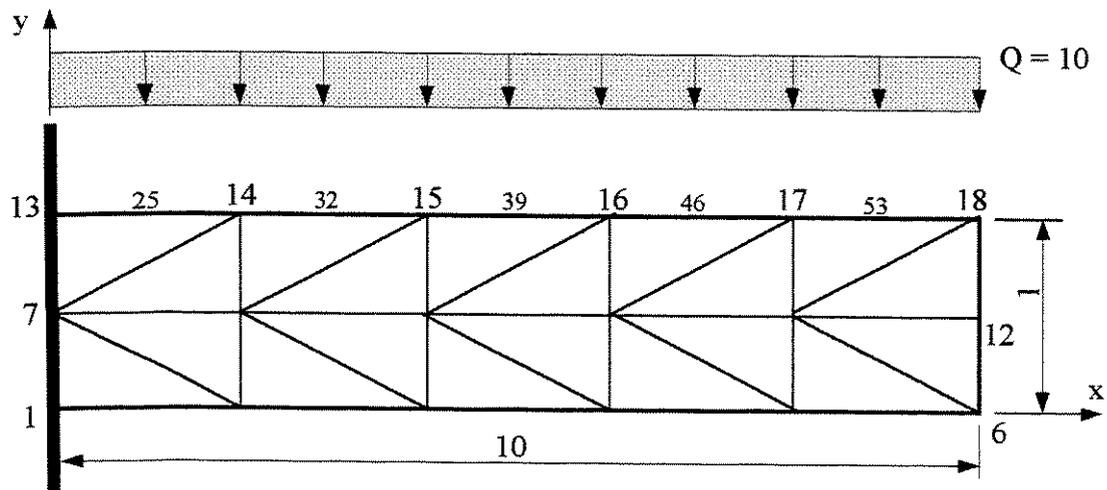


Figura 2.9 - Viga em balanço com carregamento distribuído constante e vertical.

NÓ	x	Linear (\bar{u})	Proposto (\bar{u})	Analítico	Erro relativo %
14	2,0	-0,20405	-1,041498	-1,0480	0,62
15	4,0	-0,65014	-3,618349	-3,6500	0,87
16	6,0	-1,2329	-7,070264	-7,1280	0,81
17	8,0	-1,8750	-10,918380	-11,0080	0,81
18	10,0	-2,5299	-14,876190	-15,0000	0,83

Tabela 2.3 - Comparação numérica e analítica dos dados obtidos.

Capítulo 3

Módulo Adaptativo

3.1 Introdução

Como o conceito do método dos elementos finitos é baseado na discretização do contínuo, o mesmo não nos fornece uma solução exata necessitando, a veracidade da solução, de um grande grau no refinamento do modelo. Sendo este processo não muito cômodo e existindo ainda a limitação computacional, esse tipo de análise torna-se muitas vezes um tanto restrita.

As técnicas de remalhagem aparecem como aquelas que a partir de informações obtidas com uma determinada malha inicial, pode-se gerar outras totalmente novas e mais adequadas para se obter os resultados com a precisão requerida.

A geração de malhas de elementos finitos utilizadas nos cálculos se baseiam na intuição e na experiência prévia do engenheiro calculista, porém sem a utilização de critérios objetivos, pode-se obter resultados sem as aproximações desejadas. Como o método dos elementos finitos tem sido uma importante ferramenta para a resolução de problemas estruturais em geral, existe a necessidade de propostas confiáveis para estimar-se, à posteriori, o erro nos domínios discretizados. A maioria destas apresentam-se como maneiras distintas de minimizar o erro existente nas soluções numéricas quando comparadas com as soluções exatas dos problemas.

Ao obter-se uma solução em elementos finitos é conveniente conhecer não só a magnitude do erro associado a mesma como também a forma mais eficaz de melhorá-la em caso de não ser satisfatória. Para isto existem dois tipos de informação: os indicadores e os estimadores de erro. Um indicador proporciona informação sobre onde refinar uma certa malha, enquanto que um

estimador de erro da uma aproximação da medida de erro global existente em um determinado elemento ou região.

A utilização de indicadores de erro é conveniente para realizar refinamentos hierárquicos a partir de uma malha inicial pois sua informação permite escolher quais são os graus de liberdade que adicionados à mesma permitem melhorar a solução de forma mais rápida e precisa. Quando do uso da técnica de remalhagem o que se precisa é a informação sobre o erro existente sobre cada elemento para o qual se dispõe de um estimador de erro.

Pesquisas recentes tem sido produzidas nesta área como Kelly [1983], Gago [1983] e Babuska [1984] que propõe: um trabalho de teoria e métodos para estimar o erro em problemas de segunda ordem, estratégias de refinamento utilizando o método p de convergência e por fim propõem um algoritmo de pós processamento.

Dentre os méritos de se usar uma formulação hierárquica, um deles é o de providenciar um estimador de erro imediato da solução. Este erro pode ser definido como

$$e = u - \hat{u} \quad (3.1)$$

onde u e \hat{u} são as soluções exatas e aproximadas respectivamente. Por ser uma definição puramente local torna-se inoperante se o problema for considerado completo, além de não mostrar se satisfaz as equações de equilíbrio. Por esta razão Zienkiewicz [1983] e seus colaboradores introduziram um medidor de erro mais global, denominado como a norma do erro.

$$\|e\|_E^2 = \int_{\Omega} e^T L e \, d\Omega \quad (3.2)$$

onde L é um operador diferencial linear. A equação (3.2) pode ser rescrita em termos do residual r , satisfazendo as equações iniciais,

$$\|e\|_E^2 = - \int_{\Omega} e^T r \, d\Omega \quad (3.3)$$

onde $r = -L e$. A dificuldade com os métodos que incluem o residual é que os mesmos são muito complexos e os seus resultados envolvem um grande esforço computacional.

A estratégia de remalhagem depende do critério que se utilize para decidir quando os resultados são suficientemente exatos. Basicamente, o que se pretende é que a partir dos resultados obtidos com uma certa malha de elementos finitos, e do estimador de erro, determinar qual seria o tamanho do elemento para obter uma malha que produza resultados com um nível de erro restrito a um certo valor e que além disso seja “ótima” segundo um determinado critério. Uma forma muito usual de limitar a norma de energia do erro é fixar um certo percentual da energia total de deformação.

Uma malha de elementos finitos será considerada ótima, geralmente, quando a norma do erro é a mesma para todos os elementos, sendo que como o método dos elementos finitos é baseado na minimização da energia potencial total, torna-se natural estimar-se o erro de discretização em um modelo também baseando-se na norma desta energia.

3.2 Formulação do modelo proposto

O erro por elemento pode ser estimado, em termos da norma da energia de deformação, correspondente às variáveis hierárquicas como:

$$\|e\|_e^2 = \{\bar{u}_h\}^T [K_{hh}] \{\bar{u}_h\} \quad (3.4)$$

onde $\{\bar{u}_h\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{array} \right\}$ (3.5)

são os novos graus de liberdade hierárquicos introduzidos, conforme mostra a figura 3.1.

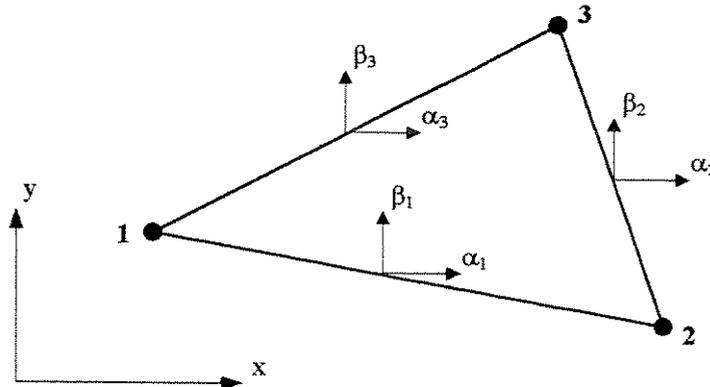


Figura 3.1 - Parâmetros hierárquicos do elemento triangular

Desta forma a nova equação de equilíbrio passa a ser

$$[K_{hh}] \{\bar{u}_h\} = \begin{Bmatrix} f_{\alpha_1} \\ f_{\beta_1} \\ f_{\alpha_2} \\ f_{\beta_2} \\ f_{\alpha_3} \\ f_{\beta_3} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

O erro pode ser distribuído de modo equivalente pelos nós do elemento linear, como resultantes de uma pressão interna ou externa negativa, p , conforme o esquema da figura 3.2.

O versor \bar{n}_1 , normal ao lado 1-2 (l_{1-2}), figura 3.2(b), pode ser obtido do produto vetorial:

$$\bar{n}_1 = \bar{k} \wedge \frac{\bar{l}_{1-2}}{\|\bar{l}_{1-2}\|} \quad (3.7)$$

onde $\bar{l}_{1-2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$

$$e \quad \|\vec{l}_{1-2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

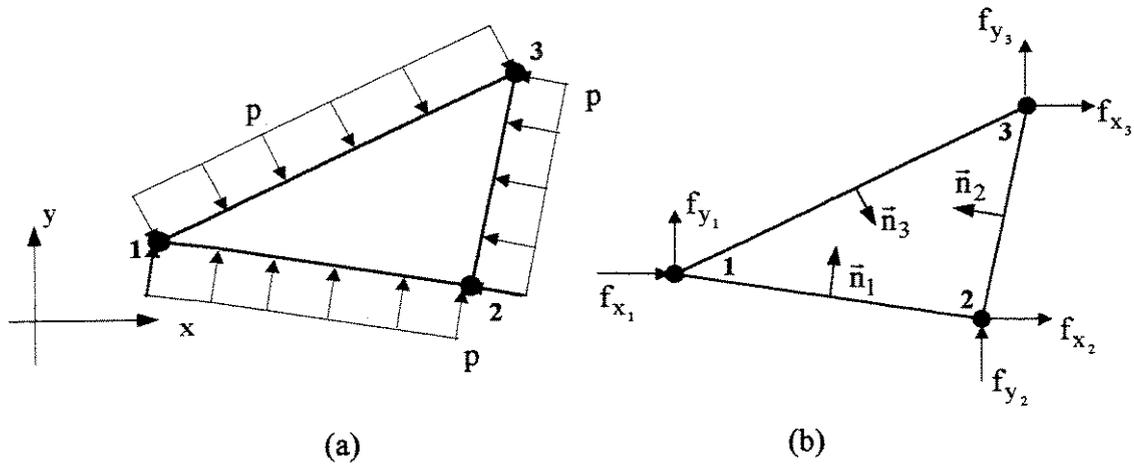


Figura 3.2 - Forças nodais equivalentes. (a) pressão negativa, (b) vetores normais aos lados

Logo, fazendo-se as operações vetoriais e algébricas sobre a equação (3.7), obtém-se

$$\vec{n}_1 = \frac{(x_2 - x_1)\vec{j} - (y_2 - y_1)\vec{i}}{|\vec{l}_{1-2}|} \quad (3.8)$$

e analogamente, tem-se para os outros vetores

$$\vec{n}_2 = \frac{(x_3 - x_2)\vec{j} - (y_3 - y_2)\vec{i}}{|\vec{l}_{2-3}|} \quad (3.9)$$

e

$$\vec{n}_3 = \frac{(x_1 - x_3)\vec{j} - (y_1 - y_3)\vec{i}}{|\vec{l}_{3-1}|} \quad (3.10)$$

Consequentemente as forças nodais equivalentes (f_{x_i}, f_{y_i}) ; $i = 1, 2, 3$, são obtidas de:

$$f_{x_i} = \frac{pl_j}{2} (\vec{i} \cdot \vec{n}_j)$$

$$f_{y_k} = \frac{pl_k}{2} (\vec{j} \cdot \vec{n}_k)$$
(3.11)

onde

$$j=1,2,3$$

$$k=1,2,3$$

$$l_1 = |\vec{l}_{1-2}|$$

$$l_2 = |\vec{l}_{2-3}|$$

$$l_3 = |\vec{l}_{3-1}|$$

Efetuando-se os produtos escalares,

$$\begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \\ f_{x_3} \\ f_{y_3} \end{Bmatrix} = \frac{p}{2} \begin{Bmatrix} y_{32} \\ x_{23} \\ y_{13} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ x_{12} \end{Bmatrix}$$
(3.12)

onde $x_{ij} = x_i - x_j$

$y_{ij} = y_i - y_j$

Desta forma o vetor força nodal equivalente por elemento devido ao erro ou vetor desbalanceamento do erro por nó móvel, fica:

$$\{D\}_e = \|e\|_e^2 \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Impondo-se as condições geométricas de que a forma do contorno não deve ser alterada e levando-se em conta a superposição dos vetores $\{D\}_e$ para todos os elementos, obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global, $\{D\}_G$.

Tem-se portanto novas condições de contorno e conseqüentemente uma nova equação de equilíbrio global. A direção $\{d\}_0$ do movimento dos nós com uma ou duas direções livres para se moverem pode ser obtido de,

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_G \quad (3.14)$$

onde

$[K]_0$ é a matriz de “rigidez” escalonada obtida do modelo geométrico.

Portanto, $\{d\}_0$, passa a ser uma “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade do erro de discretização,

$$\text{MINIMIZAR}_{\lambda} \quad \left\| \{D(\{x\} + \lambda \{d\}_0)\} \right\| \quad (3.15)$$

onde $\{x\}$ é o vetor de coordenadas dos nós móveis.

Deve-se salientar que a matriz de rigidez devido ao erro nada mais é do que a matriz de rigidez global inicial, a menos de uma constante, a qual é função das novas condições de contorno impostas ao modelo.

A Figura 3.3 mostra, graficamente em desenho esquemático, a norma do vetor desbalanceamento e a sua derivada primeira, em função de um fator de escala escolhido de modo que a malha seja viável, observando-se que a função passa por um mínimo local.

Através de uma busca unidimensional, utilizando-se o método da secante (Apêndice B), calcula-se o fator de escala (λ^*), o qual minimizará a expressão (3.15). Como com a realocação nodal, a densidade do erro de discretização também se altera, o processo de busca é realizado de modo iterativo com a análise do modelo físico discretizado.

O programa executa automaticamente o balanceamento dos erros entre os elementos usando o método do gradiente conjugado, Fletcher-Reeves [1964], ver Apêndice C, para gerar novas direções de busca no caso de não haver convergência numa determinada direção. A condição de ótimo para o problema é que o erro de discretização seja uniformemente distribuído ao longo de todo o domínio.

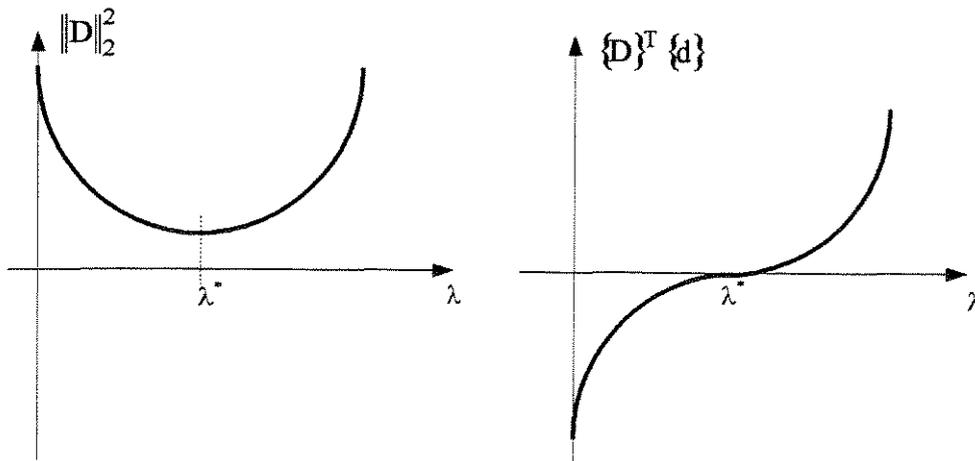


Figura 3.3 - Esquemas gráficos da norma do desbalanceamento e sua derivada primeira.

Sendo assim o algoritmo proposto tem os seguintes passos:

- (1) implementação do modelo físico
- (2) resolução do novo modelo físico
- (3) implementação do modelo geométrico

- (4) otimização da malha
 (5) repete-se de (2) a (4) até a convergência

3.3 Etapas do gradiente conjugado

O algoritmo do método do gradiente conjugado, aplicado para as variáveis do problema em questão possui as seguintes etapas:

Passo 1.

Geração da direção de procura $\{d\}_0$

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_0$$

Passo 2.

Busca unidimensional -----> λ_0

$$\{x\}_1 = \{x\}_0 + \lambda_0 \{d\}_0$$

Passo 3.

Nova direção de procura $\{d\}_1$

$$[K]_0 \{p\}_1 = \{D\}_1 \rightarrow \{p\}_1$$

$$\{d\}_1 = \{p\}_1 + \alpha_0 \{d\}_0$$

$$\alpha_0 = \frac{\{p\}_1^T (\{D\}_1 - \{D\}_0)}{\{d\}_0^T (\{D\}_1 - \{D\}_0)}$$

Passo 4.

Busca unidimensional com $\{d\}_1$ -----> λ_1

$$\{x\}_2 = \{x\}_1 + \lambda_1 \{d\}_1$$

Passo 5.

Nova direção de procura $\{d\}_2$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]_0 \{p\}_2 &= \{D\}_2 \rightarrow \{p\}_2 \\
 \{d\}_2 &= \{p\}_2 + \alpha_1 \{d\}_1 \\
 \alpha_1 &= \frac{\{p\}_2^T (\{D\}_2 - \{D\}_1)}{\{d\}_1^T (\{D\}_2 - \{D\}_1)}
 \end{aligned}$$

Passo 6.

Iteração (i+1)

Nova direção de procura $\{d\}_{i+1}$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]_0 \{p\}_{i+1} &= \{D\}_{i+1} \rightarrow \{p\}_{i+1} \\
 \{d\}_{i+1} &= \{p\}_{i+1} + \alpha_i \{d\}_i \\
 \alpha_i &= \frac{\{p\}_{i+1}^T (\{D\}_{i+1} - \{D\}_i)}{\{d\}_i^T (\{D\}_{i+1} - \{D\}_i)}
 \end{aligned}$$

Passo 7.

Fazer o teste de ortogonalidade:

$$\{d\}_{i+1}^T [\mathbf{K}]_0 \{d\}_i \text{ deve ser nulo}$$

3.4 Método de relocação nodal (Método r)

O método r é o mais antigo dos métodos adaptativos. Oliveira [1971] estudou o problema de otimização de malha considerando as coordenadas nodais e procurando tanto variáveis como funções que satisfazem as condições de contorno. Logo em seguida Turcke [1974], Felippa [1976] [1977], Melosh [1977] e Shepard [1980] também publicaram sobre este assunto. Estes se basearam na idéia que cada elemento finito deve partilhar uma igual quantidade da energia de deformação para problemas lineares elásticos. As vantagens e as desvantagens da otimização da malha através de reposicionamento dos pontos nodais dos elementos finitos (Método r) são discutidos por Cheng [1993].

Babuska [1978] [1980] [1981] [1982] [1983], coloca em seus trabalhos que esta idéia da igual distribuição da energia de deformação em cada elemento, no caso de analisar-se um

problema de fratura mecânica (uma trinca), implicará em área zero para os elementos próximos ao vértice da trinca. Isto é, neste caso, todos os nós em torno da ponta da trinca movem-se para esta e passam a partilhar das mesmas coordenadas tornando o método adaptativo em regime de colapso. Kikuchi [1986] aponta esta desvantagem do método quando analisa uma placa fina elástica com uma trinca.

Outra dificuldade encontrada no método de aproximação através de relocação nodal, é achar uma maneira de mover a malha que procura não destruir a convexidade dos elementos, principalmente quando se trata de elementos quadrilaterais.

Conclui-se portanto que mesmo com as análises sendo com um grande número de elementos na discretização, as iterações podem somente melhorar as soluções mas não necessariamente, para soluções precisas. Em resumo o Método r possui as seguintes características importantes: conserva o número de graus de liberdade fixo, produz um mau condicionamento numérico devido a sua limitação inerente de distorcer os elementos e, sua formulação envolve geralmente funções não lineares.

Diante de tudo isto, para se optar pela escolha do método de relocação nodal para adaptar malhas de elementos finitos, tem-se que levar em conta alguns requisitos para torna o algoritmo de reposicionamento robusto, Cheng [1983]. Estes requisitos são os seguintes:

- (1) a geometria deve ser preservada durante o reposicionamento,
- (2) as condições de contorno devem ser as mesmas entre iterações,
- (3) o reposicionamento deve produzir uma malha que seja válida,
- (4) um suficiente grau de suavidade deve ser mantido na malha resultante e
- (5) a convergência deve ser garantida.

Neste trabalho a proposta para o uso de um método r baseado na homogeneização do erro, tem como justificativa desenvolver um método onde a relocação dos nós seja mais sensível do que quando o método é baseado na homogeneização da energia de deformação dos elementos. Nesse último caso a mobilidade dos nós se mostra demasiado lenta, Serpa [1991].

3.5 Exemplo de aplicação

São apresentados duas soluções numéricas de uma placa com carregamento aplicado na direção x , semelhante ao exemplo 2.5.1, com o objetivo de mostrar a efetividade do modelo proposto. As duas avaliações têm as mesmas características de geometria, material, carregamento e condições de contorno, diferindo somente na malha inicial de discretização, conforme mostra a Figura 3.4.

Para o caso adotou-se: módulo de elasticidade unitário, coeficiente de Poisson zero, força de corpo constante como carregamento e espessura unitária. Não se especifica nenhum sistema de unidades por serem os resultados independentes do mesmo.

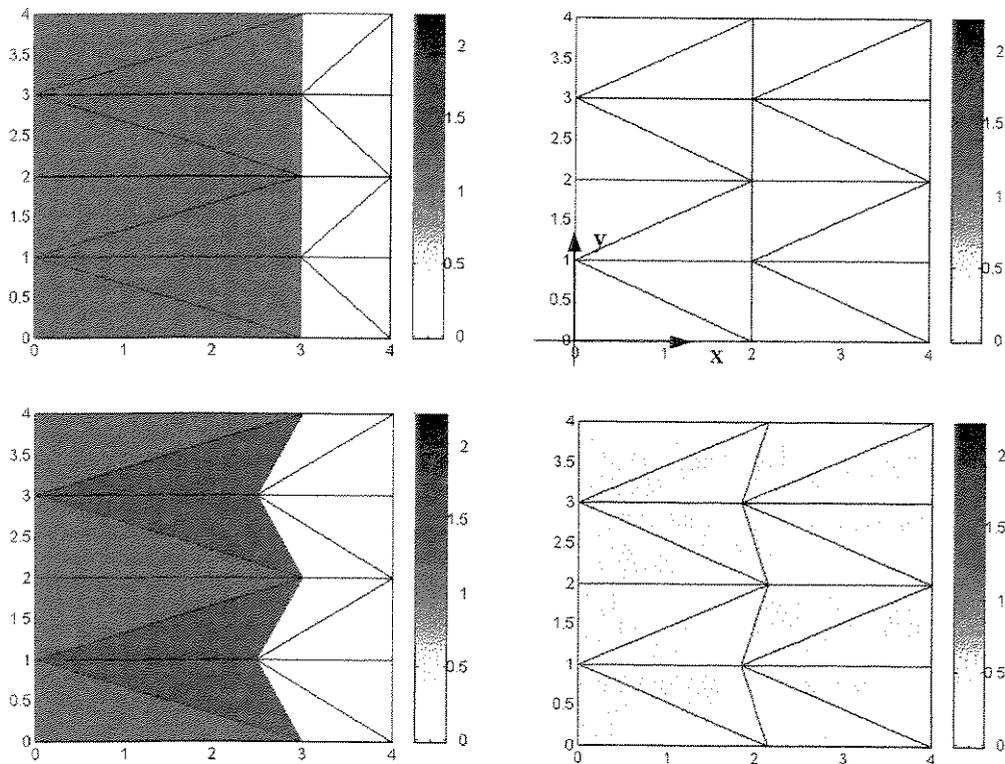


Figura 3.4 – Geometria das malhas iniciais e malhas finais com a escala dos erros por elemento.

Utilizou-se uma discretização de 16 elementos finitos triangulares lineares e hierárquicos no modelo. Deve salientar que de acordo com a formulação analítica dos deslocamentos na direção x para o caso, a mesma possui grau 2, o que não seria simulado caso o elemento triangular fosse linear simplesmente.

Os resultados mostram que tanto para a malha inicial regular como para a malha com uma pequena distorção, a convergência para o balanceamento do erro é satisfatório com uma iteração e nove iterações respectivamente. Convém salientar que foram plotados somente os erros na direção x , visto que na outra direção os valores são próximos de zero, já que não foi considerado carregamento na direção y .

Ficou caracterizado na avaliação do algoritmo adaptativo que existe um problema de convergência quando do uso de malhas iniciais fortemente distorcidas, devendo-se isto talvez ao não uso dos elementos cruzados da matriz de rigidez, os quais levam em conta o acoplamento da interface entre elementos.

Sendo assim, sugere-se para a equação (49) a seguinte formulação:

$$\|e\|_e^2 = \{\bar{u}_n - \bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}_n - \bar{u}\} + 2 \{\bar{u}_h\}^T [K_{hn}] \{\bar{u}_n\} + \{\bar{u}_h\}^T [K_{hh}] \{\bar{u}_h\} \quad (3.16)$$

onde:

\bar{u} = vetor deslocamento com análise linear

\bar{u}_n = vetor deslocamento com análise usando o elemento hierárquico

\bar{u}_h = parâmetros hierárquicos obtidos da solução do sistema de equações



Capítulo 4

Otimização de Forma

4.1 Revisão

A teoria matemática de otimização começou no século XVII. As condições necessárias para problemas sem restrições foram agrupadas por Euler, e problemas restritos por Lagrange. Em 1638, Galileo Galilei discutiu a forma ótima de uma viga, e mais tarde uma coluna elástica ótima foi formulada por Lagrange. Historicamente existiram muitos estudiosos que se dedicaram a otimização, entre eles estão Newton, Bernoulli, Hamilton, Lagrange e Euler.

Infelizmente, a solução matematicamente exata pode ser obtida somente para problemas idealizados de modo bem simples, porém na prática os problemas são mais complexos. No entanto a teoria de otimização matemática fornece a base para uma otimização numérica aproximada, sendo por isso um importante campo de pesquisas.

Os métodos para solução dos problemas de modelagem da forma vão desde cálculos variacionais até técnicas experimentais empregando modelos fotoelásticos. Porém muitos destes trabalhos são baseados no emprego de programação matemática acoplados com a análise de elementos finitos da estrutura. Haftka [1986] faz um levantamento sobre as pesquisas e publicações em otimização de forma estrutural até 1986.

4.1.1 Otimização de forma utilizando MEF

Desde que a maioria dos problemas estruturais não podem ser resolvidos analiticamente, engenheiros pesquisam métodos alternativos, mais precisamente métodos numéricos, onde estes

empregam vários conceitos de aproximações para obter a solução numérica de um problema. Nas últimas décadas, o método dos elementos finitos (MEF) tem sido uma ferramenta poderosa para análise estrutural e muitos pesquisadores produziram grandes obras tais como: Bathe [1982], Becker [1981], Segerlind [1984], Desai [1979]. Dentro do contexto da otimização de forma está embutido a análise estrutural e com isto geralmente o MEF é o mais usado para este fim.

Schmit [1960] foi a primeira pessoa que publicou uma aproximação geral de otimização estrutural, o qual indicava a possibilidade de agrupar MEF com a programação matemática não linear para um projeto ótimo estrutural. Seguiram depois outras publicações Kicher [1968], Gellatly [1966] e Schmit [1971]. A introdução da programação matemática acoplado com MEF foi um marco na história das soluções práticas de otimização estrutural. Uma das primeiras aproximações de otimização de forma foi apresentada por Zienkiewicz e Campbell [1973], onde eles utilizavam elementos finitos para o modelo e as variáveis de projeto eram os nós do contorno. A solução numérica do problema de otimização era obtido por uma programação linear seqüencial, e o método diferencial direto para a análise de sensibilidades.

Desde então muitas pesquisas tem sido realizadas no campo da otimização de forma usando o MEF, Queau [1980], Kristensen [1976], Spillers [1981], Pedersen [1982], Botkin [1981] [1985], Epsing [1985] e Grandhi [1989]. A análise, via MEF, da concentração de tensões caracterizou o método apresentado por Schnack [1979]. Componentes elásticos bidimensionais convergiram para um ótimo geral no trabalho de Tvergaard [1975] onde, as aproximações eram avaliadas para o mínimo volume e tensões mínimas. Oda [1977] [1981], desenvolveu a técnica para a forma no limite de resistência, também apresentou o método de transformação do modelo na otimização, o qual é baseado na tensão proporcional e na transformação proporcional dos elementos finitos que constituem o contorno.

Ramakrishnan [1975] usou uma formulação similar de Zienkiewicz e Campbell, mas utilizou a função penalidade. O método de projeção do gradiente para corpos elásticos bidimensionais foi apresentado por Chun [1978], usando o método de análise de sensibilidade apresentado por Rousselet [1981] e o método da projeção do gradiente por Haug [1979].

O método com critérios de otimalidade foi introduzido primeiramente por Prager [1967] para sistemas discretos. Fleury [1979] e Braibant [1986] introduziram a formulação dual no método usando critérios de otimalidade. Kunar [1976] usou o critério da tensão total para minimizar o peso. Dems [1978] [1984] e Mroz [1983] apresentaram uma aproximação geral completa de um projeto de forma ótima usando o método dos critérios de otimalidade e o cálculo variacional, sendo que as condições de otimalidade são geradas por um sistema de carga conservativo e não conservativo. As formulações variacionais para otimização de forma podem ser encontradas em Kikuchi [1983] e Olhoff [1987].

Xicheng [1997] divide o problema de otimização estrutural em dois subproblemas. O primeiro consiste da minimização da massa da estrutura, com os parâmetros dimensionais como variáveis de projeto. O segundo consiste na minimização da avaliação de uma função de restrição, com os parâmetros da forma como variáveis independentes de projeto. As fases são executadas alternativamente com somente uma reanálise sendo efetuada em cada ciclo.

Ding [1987] utilizando a técnica de aproximação híbrida em combinação com o método dual e programação matemática, na otimização de forma de estruturas elásticas bidimensionais com ótimas espessuras para algumas partes fixas. Concluiu que este tipo de otimização dimensional é mais simples do que otimização de forma. Belegundu [1993] afirma que apesar de existirem infinitas maneiras para se mudar a forma de um componente, pode se utilizar como o primeiro passo da otimização de forma a combinação de formas básicas afetando somente as variáveis de forma.

Dias [1998] utiliza a técnica do MEF em conjunto com uma técnica de programação não linear para otimizar a forma de um sólido plano, minimizando com isso seu peso com restrições de tensões e deslocamentos. O modelo de otimização considera uma forma geométrica fechada em R^2 com o contorno definido por curvas B-Splines, cujas funções de base garantem a suavidade evitando-se assim as concentrações de tensões. As variáveis de projeto, $x \in R^n$, determinam a forma deste contorno.

Na mesma linha associando programação matemática com MEF, o trabalho apresentado

por Herskovits [1999] e outros, utiliza algoritmos baseados em técnicas de ponto interior na otimização de forma de componentes mecânicos. Estes algoritmos definem, iterativamente, direções viáveis e de descida em relação as restrições e função-custo de problema de otimização.

Também vale salientar que a otimização estrutural evolucionária ou otimização topológica de estruturas está sendo atualmente uma grande fonte de pesquisa, principalmente em problemas estruturais de grande complexidade. Encontra-se no trabalho de Chu [1996] que ao fim de cada análise via elementos finitos, avalia um coeficiente de sensibilidade (número sensitivo), o qual indica a mudança da rigidez da estrutura devido a remoção de cada elemento . Os elementos que menos influem nesta mudança de rigidez são subsequenteemente removidos ou quase que totalmente desprezados. Nishiwaki [1998] utiliza a otimização de forma topológica de “compliant mechanisms”¹ usando o método da homogeneização o qual foi proposto por Bendsoe and Kikuchi [1988].

Um modelo de elementos finitos de grande precisão deve ser conseguido através de um esquema de refinamento adaptativo usando gradientes da energia de deformação, ou de sua densidade para identificar quais regiões requerem refinamento da malha e, o mesmo deve conter uma estratégia de adaptatividade para evitar a formação de elementos distorcidos . A intuição leva-nos ao acoplamento dos conceitos de malhas otimizadas e forma ótima de projeto, garantindo a veracidade dos resultados através de um critério de otimalidade .

O critério de otimalidade pode ser matematicamente rigoroso ou fisicamente intuitivo. Critérios rigorosos de otimalidade são derivados matematicamente, usando métodos variacionais. Como exemplo de critério intuitivo, pode se estipular que a tensão tangencial ou a densidade da energia de deformação seja uniforme ao longo do contorno.

4.1.2 Tensões octaédricas

Plano octaédrico é aquele cujas normais fazem ângulos iguais com cada um dos eixos

¹ *Compliant mechanism é relativamente uma nova classe de mecanismo sem junta, o qual utiliza a deformação elástica como início de movimento.*

principais de tensões. Então os planos com a normal $n = (n_1, n_2, n_3) = 1/\sqrt{3} |(1,1,1)$, no sistema de coordenadas principais são chamados de planos octaédricos. Nota-se pela Figura 4.1 que existem oito planos octaédricos, ABC, A'BC, A'B'C', AB'C', ABC', A'BC', A'B'C, AB'C.

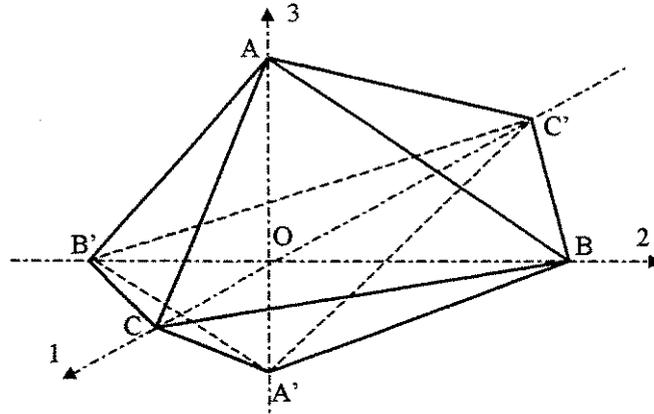


Figura 4.1 - Planos octaédricos no sistema de coordenadas principais

Referindo-se aos eixos principais de tensões, 1, 2, e 3 o tensor tensão σ_{ij} é escrito como

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A componente normal do vetor tensão para o ponto O associado com qualquer direção, n , pode ser obtido pela fórmula de Cauchy para tensões:

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (4.2)$$

ou

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad (4.3)$$

A tensão normal na face do octaedro será:

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.4)$$

Ficando então os valores das tensões normais atuando nos planos octaédricos, dados em termos das tensões principais por:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (4.5)$$

A Figura 4.2 mostra-nos um desenho esquemático das componentes de tensão normal e cisalhante do vetor tensão em um plano qualquer n . Pode-se escrever então

$$S_n^2 = (\overset{n}{T})^2 - \sigma_n^2 \quad (4.6)$$

onde $\overset{n}{T} = \sigma_{ij}n_j$

Como sabe-se que

$$(\overset{n}{T})^2 = (\overset{n}{T}) \cdot (\overset{n}{T}) = (\overset{n}{T}_i) \cdot (\overset{n}{T}_i) = (\sigma_{ij}n_j)(\sigma_{ik}n_k) = \sigma_{ij}\sigma_{ik}n_jn_k \quad (4.7)$$

e substituindo-se em (4.6) tem-se

$$\tau_{oct} = (\overset{n}{T}_{oct})^2 - \sigma_{oct}^2 \quad (4.8)$$

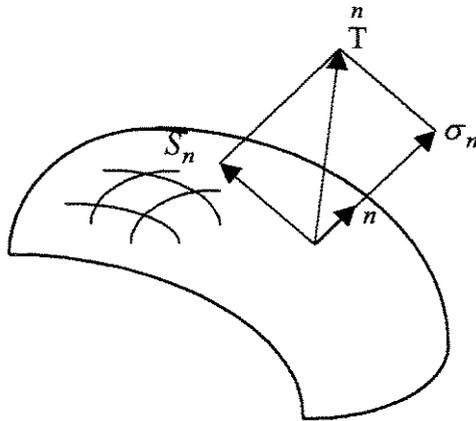


Figura 4.2 - Componentes da tensão normal e cisalhante do vetor tensão num plano arbitrário

Usando (4.7) para calcular $(T_{oct})^2$ obtêm-se

$$\tau_{oct}^2 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (4.9)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2 \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sabendo-se que $\frac{1}{2} |\tau_{12}|$, $\frac{1}{2} |\tau_{31}|$, $\frac{1}{2} |\tau_{23}|$, são as tensões principais de cisalhamento,

τ_{oct} pode ser expressa como

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} \quad (4.11)$$

onde $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ são as tensões principais de cisalhamento.

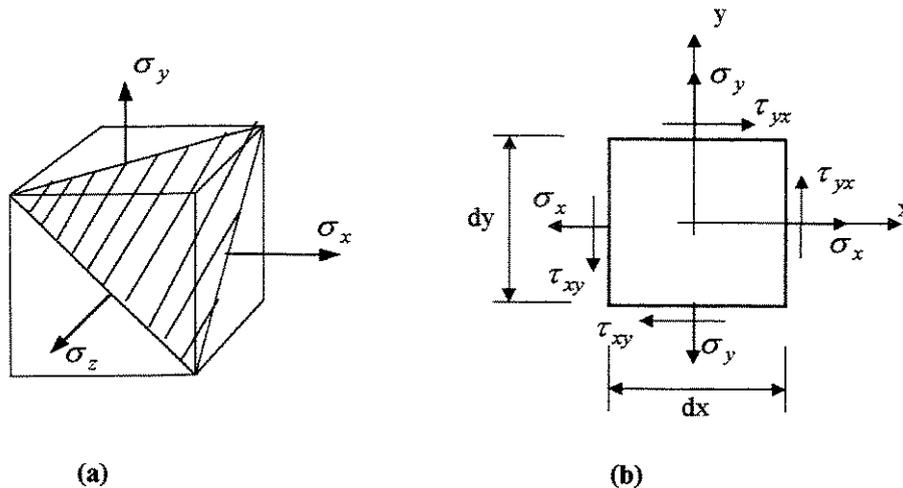


Figura 4.3 - Elementos representando o estado de tensão de um ponto, (a) elemento original com um dos planos octaédricos; (b) estado plano de tensões

De acordo com o desenvolvimento encontrado em Chen [1982], página 85, pode-se expressar a Equação (4.10) em termos das tensões normais como

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (4.12)$$

Para o estado plano de tensões, Figura 4.3, onde $\sigma_z = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, a Equação (4.12) fica

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)} \quad (4.13)$$

4.2 Formulação da energia de deformação por distorção

4.2.1 Critério da densidade da energia de distorção

O critério da máxima densidade de energia de distorção, equivalente ao critério de von Mises, estabelece que a densidade da energia de deformação distorcional unitária, no ponto mais crítico de uma peça, não deve exceder densidade da energia de deformação distorcional unitária no limite elástico, no ensaio de tração (ou compressão).

A densidade de energia de deformação distorcional é aquela energia associada com a mudança de forma do corpo. A densidade de energia de deformação total U_0 pode ser dividida em duas partes: uma que causa a mudança volumétrica U_V e a outra que causa a distorção U_D , ver Boresi [1992].

Em termos das tensões principais infinitesimais a densidade de energia de deformação pode ser escrita como:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (4.14)$$

Com manipulações matemáticas apropriadas a Equação (4.14) nos fornece

$$U_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18 K} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12 G} \quad (4.15)$$

onde $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ é o módulo volumétrico e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de cisalhamento. O primeiro membro da Equação (4.15), corresponde a densidade de energia de deformação associada a mudança pura de volume. O segundo é a densidade de energia de distorção e vale:

$$U_D = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12 G} \quad (4.16)$$

Substituindo-se (4.10) em (4.16) obtém-se a seguinte equação que representa a densidade de energia de deformação por distorção:

$$U_D = \frac{3(1+\nu)}{2E} \tau_{oct}^2 \quad , \quad (4.17)$$

onde para a máxima energia de distorção para no estado uniaxial de tensão ($\sigma_1 = \sigma_{yp}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) tem-se:

$$U_{D_{max}} = \frac{\sigma_{yp}^2}{6G} \quad \text{ou} \quad U_{D_{max}} = \frac{\tau_{yp}^2}{2G} \quad (4.18)$$

onde

σ_{yp} = tensão de escoamento no teste uniaxial

τ_{yp} = tensão de escoamento no teste de torção

4.2.2 Algoritmo proposto

Baseando-se no significado da palavra heurístico, conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou a resolução de problemas, é proposto um método de otimização de forma com base no método de otimização de malha delineado no capítulo anterior. Enquanto o método adaptativo proposto leva em consideração o desbalanceamento do erro de discretização do modelo, a formulação da otimização de forma leva em conta a homogeneização da densidade de energia de deformação por distorção dos elementos finitos. O critério de otimalidade utilizado foi o da máxima densidade de energia de deformação por distorção.

A densidade de energia de distorção é considerada como uma pressão de compressão hidrostática agindo nos lados do elemento triangular, no sentido de diminuir a área do mesmo. Assim é de se esperar que os elementos com menor energia migrem para as áreas onde as densidades de energia são maiores.

Considere-se U_D^e como uma pressão agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura. O vetor das forças nodais equivalentes, $\{D\}_e$, para um elemento triangular linear é dado por,

$$\{D\}_e = U_D^e \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Da superposição dos vetores $\{D\}_e$ para todos os elementos obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global, $\{D\}_G$. A direção $\{d\}_0$ do movimento dos nós pode ser obtido de,

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_G \quad (4.20)$$

onde $[K]_0$ é a matriz de “rigidez” escalonada obtida do modelo geométrico.

Portanto, $\{d\}_0$, passa a ser uma “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade de energia de distorção,

$$\underset{\alpha}{\text{MINIMIZAR}} \left\| \{D(\{x\} + \alpha \{d\}_0)\} \right\| \quad (4.21)$$

onde $\{x\}$ é o vetor das coordenadas nodais dos nós livres para realocarem-se nas duas ou em uma das direções.

Como com a mudança da forma da estrutura, a distribuição da densidade de energia de distorção também se altera, o processo de busca é realizado iterativamente com a análise do modelo físico discretizado.

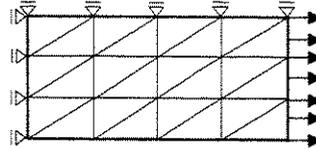
O algoritmo proposto terá os seguintes passos:

- (1) implementação do modelo físico,
- (2) resolução do novo modelo físico,
- (3) implementação de um modelo geométrico (função das variáveis de forma),
- (4) otimização da forma,
- (5) repete-se de (2) a (4) até a convergência

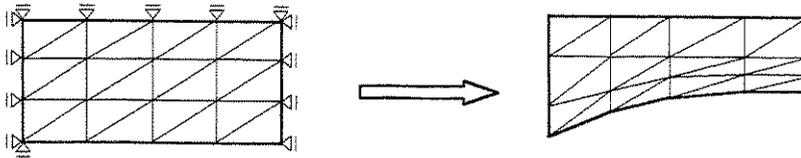
Apresenta-se a seguir, na figura 4.4, o esquema dos principais passos do algoritmo proposto.

1º ciclo

(2) resolver o problema fisico inicial

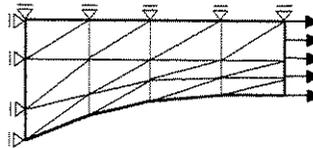


(4) com o carregamento sendo a distribuição da energia de distorção, resolver



2º ciclo

(2) novo problema fisico



(4) novo problema geométrico

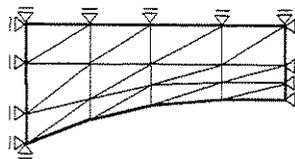


Figura 4.4 – Esquema do algoritmo de otimização de forma

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

Os exemplos escolhidos para a avaliação do método, são em sua maioria freqüentemente encontrados na literatura que trata o assunto otimização de forma. Abordam o problema usando técnicas e objetivos diferentes mas fornecem dados de comparação para avaliar a eficiência do trabalho proposto.

Utilizou-se para o processamento um micro computador Pentium 90, com 48 Mega bits de memória RAM, o qual se comportou muito bem quanto ao tempo gasto em cada análise, chegando a uma ordem de poucas horas para os casos com maior numero de elementos.

Toda a parte de pré-processamento, ou seja a geração dos modelos iniciais de elementos finitos triangulares foi executado com o auxílio do programa SHAPE (Integrated System for Structural Finite Element Analysis), versão acadêmica e a parte de pós-processamento (saídas gráficas), através da confecção de alguns programas usando o MATLAB.

5.1 Exemplo 1

PLACA TRACIONADA

A figura 5.1, devido a sua dupla simetria, mostra somente um quarto do modelo físico e a figura 5.2 somente um quarto dos modelos geométricos de uma placa de espessura 1 mm submetida à tração de 125 N/mm^2 , com módulo de elasticidade $E=2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. O domínio foi discretizado com 348 elementos triangulares lineares e 201 nós.

O deslocamento com a forma inicial, na extremidade da placa, obtido pelo modelo proposto é de 0.04976 mm, sendo o mesmo obtido analiticamente pela expressão:

$$u_x = \frac{P L}{E A},$$

onde P é a carga aplicada total (5000 N), L é o comprimento da viga (80 mm) e A é a área da seção transversal (40 mm²).

Utilizou-se como critério de parada a máxima energia de deformação por distorção do elemento a qual, depende somente das características do material e, no caso vale 0,33. As figuras 5.3 e 5.4 apresentam a forma ótima de um quarto do modelo da estrutura para dois casos diferentes de restrições quanto as variáveis de forma nos modelos geométricos. A diferença está somente em liberar ou não o nó do canto inferior esquerdo, destacado nas figuras, fazendo com que as tensões variem ao longo do comprimento quando o mesmo está travado e, as tensões permaneçam constantes quando o citado nó está livre para realocar-se.

De acordo com as figuras observa-se que o modelo proposto se comportou muito bem pois a forma otimizada, de acordo com os critérios estabelecidos, convergiu para uma geometria que fisicamente era de se esperar. Apesar de apresentar-se como um modelo simples de implementação, na bibliografia relacionada com o assunto, não encontra se exemplos similares para efeito de comparação.

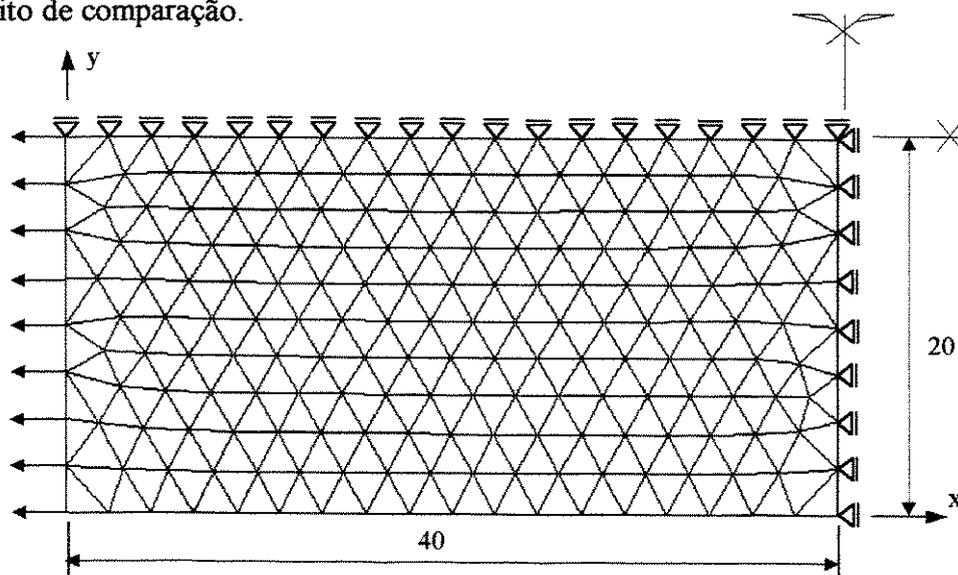
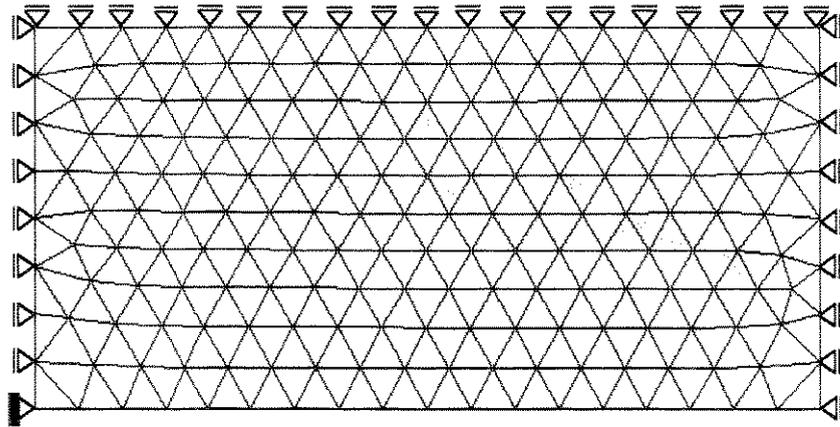
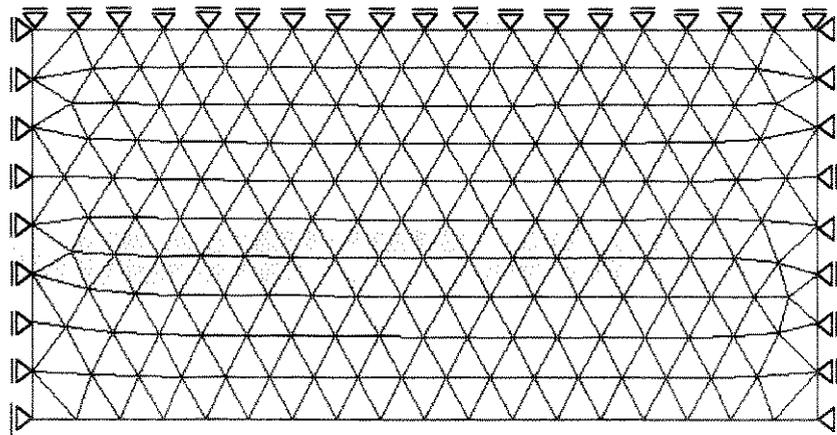


Figura 5.1 - Malha e condições de contorno do modelo físico de um quarto da placa tracionada



(a) Modelo geométrico 1



(b) Modelo Geométrico

Figura 5.2 - Modelos geométricos de discretização da placa tracionada

Observa-se na figura 5.4 uma grande diferença na escala de cores, apesar dos valores obtidos para as densidades de energia de deformação por distorção nos elementos serem aproximadamente iguais. Isto se deve ao fato de que utiliza-se no programa em linguagem MATLAB uma mesma escala de cores para qualquer caso que se deseja analisar.

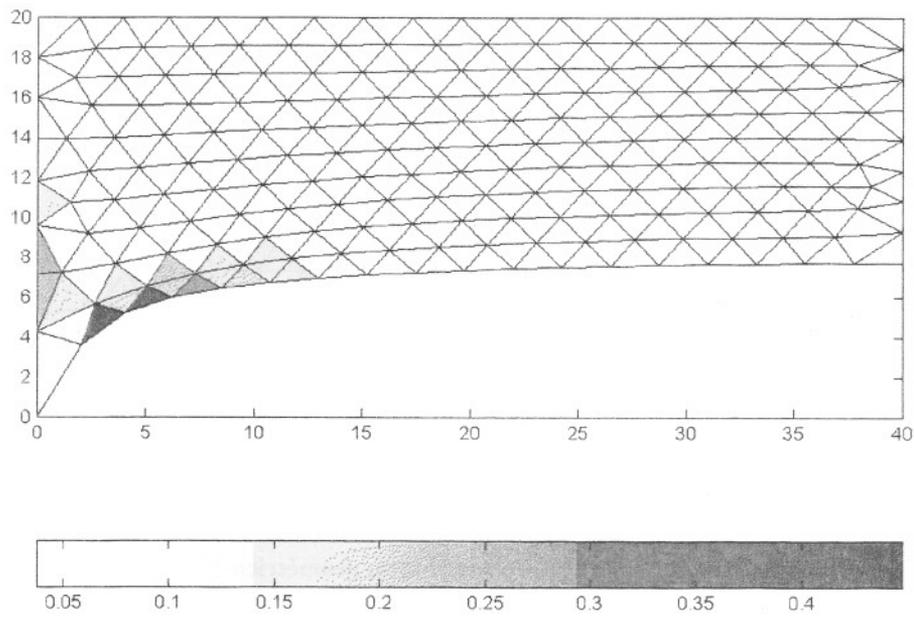


Figura 5.3 - Forma otimizada da placa tracionada com as condições do modelo geométrico 1.
6 iterações

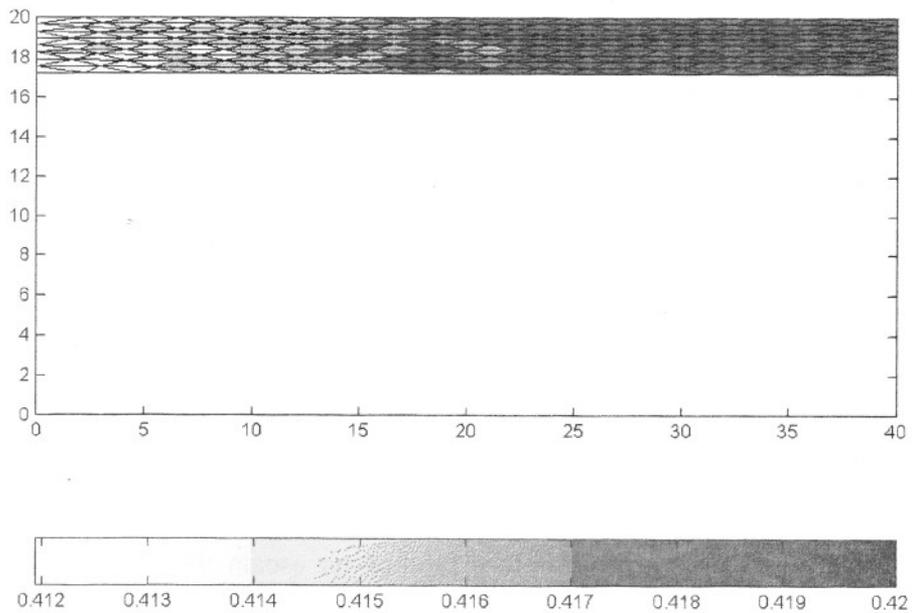


Figura 5.4 - Forma otimizada com as condições de contorno do modelo geométrico 2.
18 iterações

5.2 Exemplo 2

PLACA COM TRANSIÇÃO

Placa submetida à um carregamento de tração, de 50 N/mm^2 onde se deseja obter um contorno ótimo para a zona de transição, figura 5.5. Utilizou-se dois critérios de parada: um deve ser em função de que a tensão equivalente na região a ser otimizada seja próximo do valor previsto na seção estreita da peça e, o outro o critério da máxima energia de distorção. Devido a simetria do modelo somente metade da placa é analisada utilizando-se uma malha de 138 nós e 229 elementos finitos triangulares lineares, com módulo de elasticidade $E=2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e espessura $t=1,0 \text{ mm}$. A figura 5.6 esquematiza os modelos discretizados em elementos finitos na análise numérica: modelo físico e modelo geométrico.

Anido, Herskovits, Feijóo e Taroco [1990] analisaram o mesmo modelo, utilizando como função custo a função erro quadrático para as tensões no contorno móvel, tornando um problema de mínimos quadrados não linear. Zhao [1990] utilizando o método dos elementos de contorno também otimiza um modelo similar.

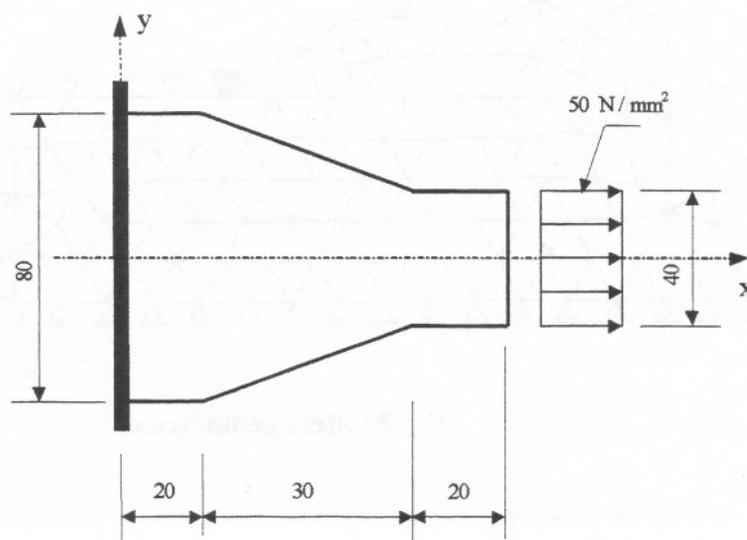
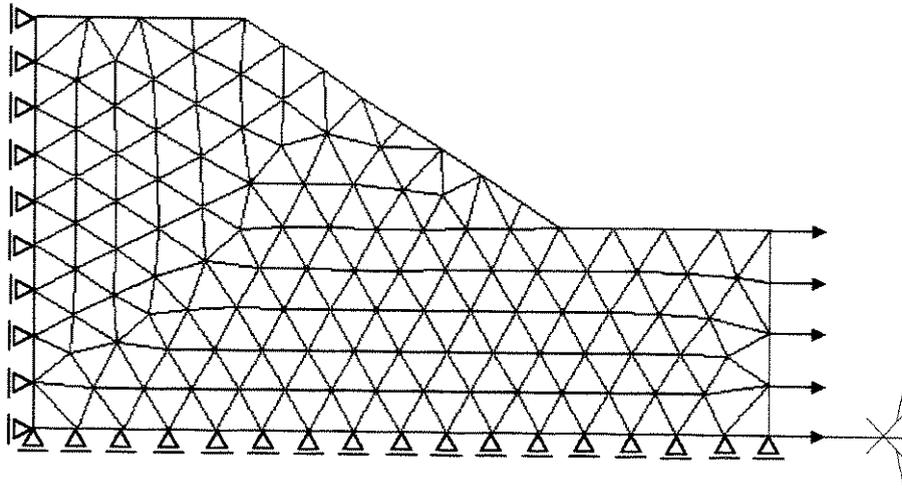
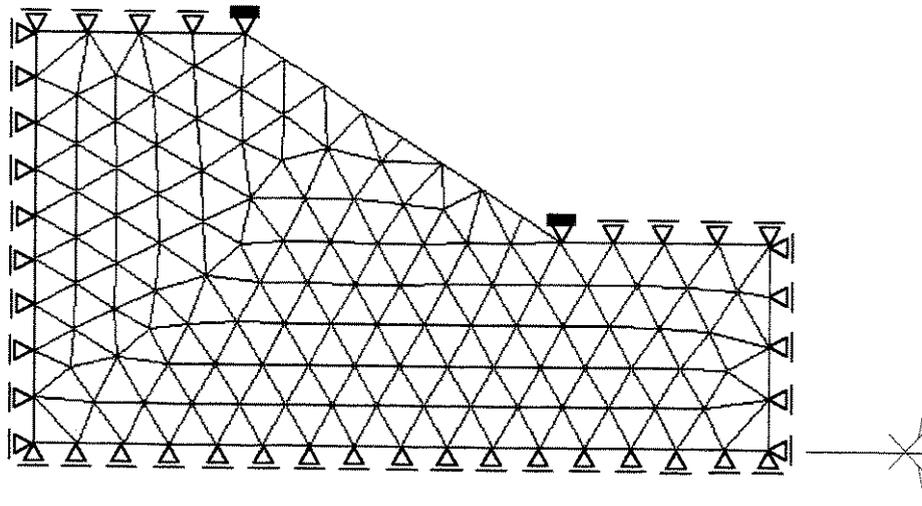


Figura 5.5 - Parâmetros iniciais para uma placa com transição



(a) Modelo físico



(b) Modelo geométrico

Figura 5.6 - Discretizações e condições de contorno: a) modelo físico e b) modelo geométrico

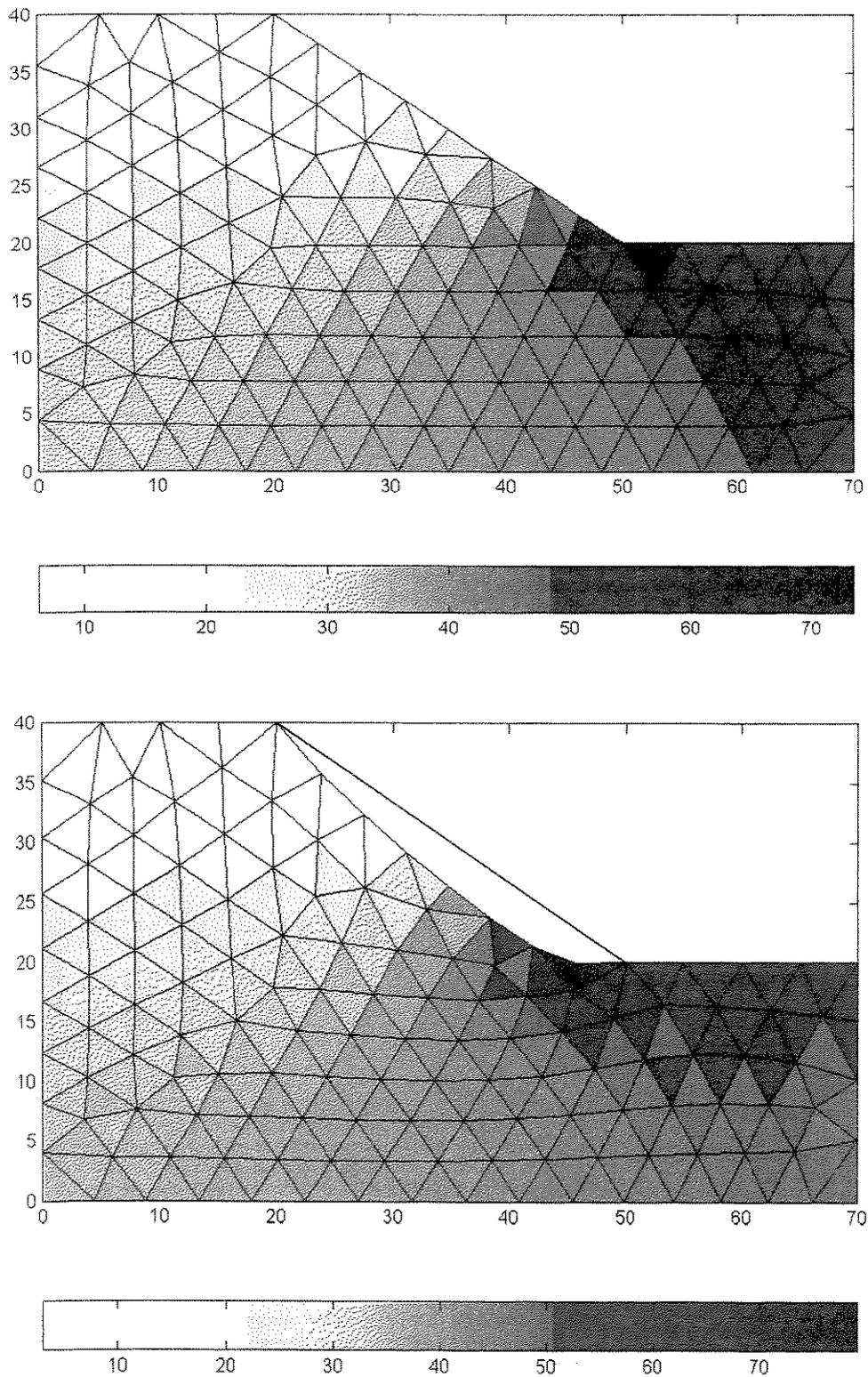


Figura 5.7 - Metade da placa: forma inicial e forma final em função da variações das tensões por elemento.

Observa-se na figura 5.7 que a obtenção da forma utilizando o primeiro critério de parada nos fornece uma melhor concordância entre os contornos na região de transição da viga, acarretando assim um fator de concentração de tensão menor. A convergência para este critério de parada atingiu um número relativamente pequeno de iterações avaliando-se desta maneira, de modo satisfatório, a rapidez do método proposto. As tensões iniciais equivalentes na região de transição valendo 47,75 N/mm² e 51,95 N/mm² passam, após duas iterações, a ter os valores 49,75 N/mm² e 50,95 N/mm², ou seja passam de uma relação 1,09 para 1,02.

A figura 5.8 mostra a forma final, após 4 iterações, utilizando o segundo critério pré estabelecido, alterando a forma da estrutura de tal maneira que nos induz a liberar, no modelo geométrico, os nós da parte superior do lado estreito da placa, conforme apresenta-se na figura 5.9(a). Com isto a forma acompanha aproximadamente o fluxo de tensões devido a forma geométrica, ao carregamento e as condições de contorno da placa. A forma otimizada pelo critério da energia de distorção é apresentada na figura 5.9(b), após 18 iterações.

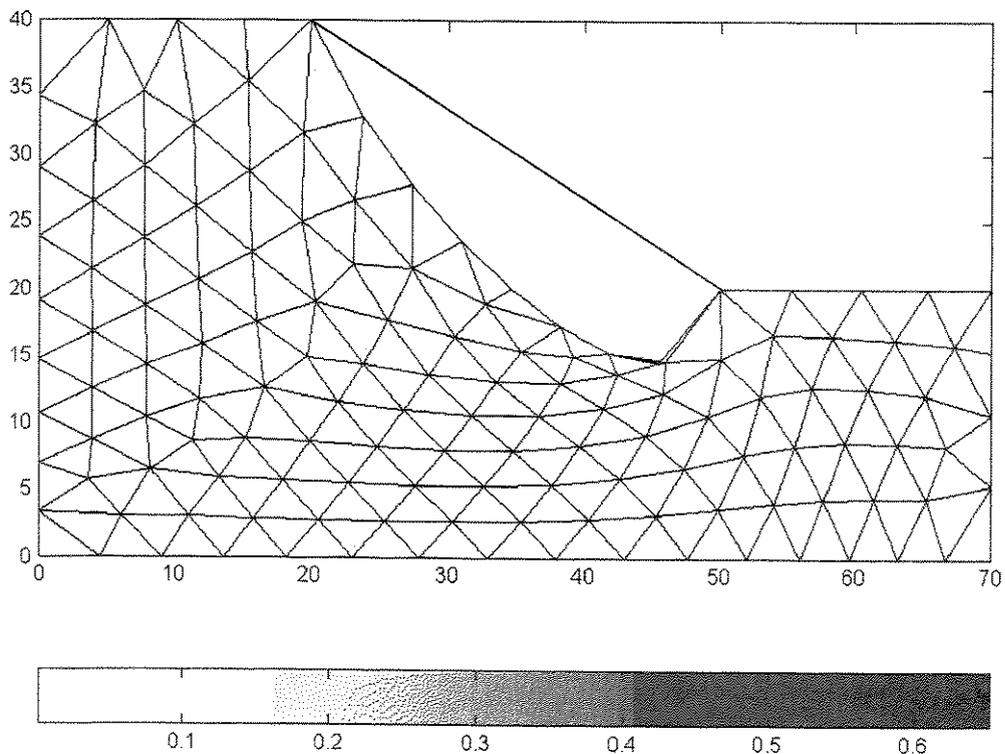


Figura 5.8 - Forma final da placa em função da energia de distorção

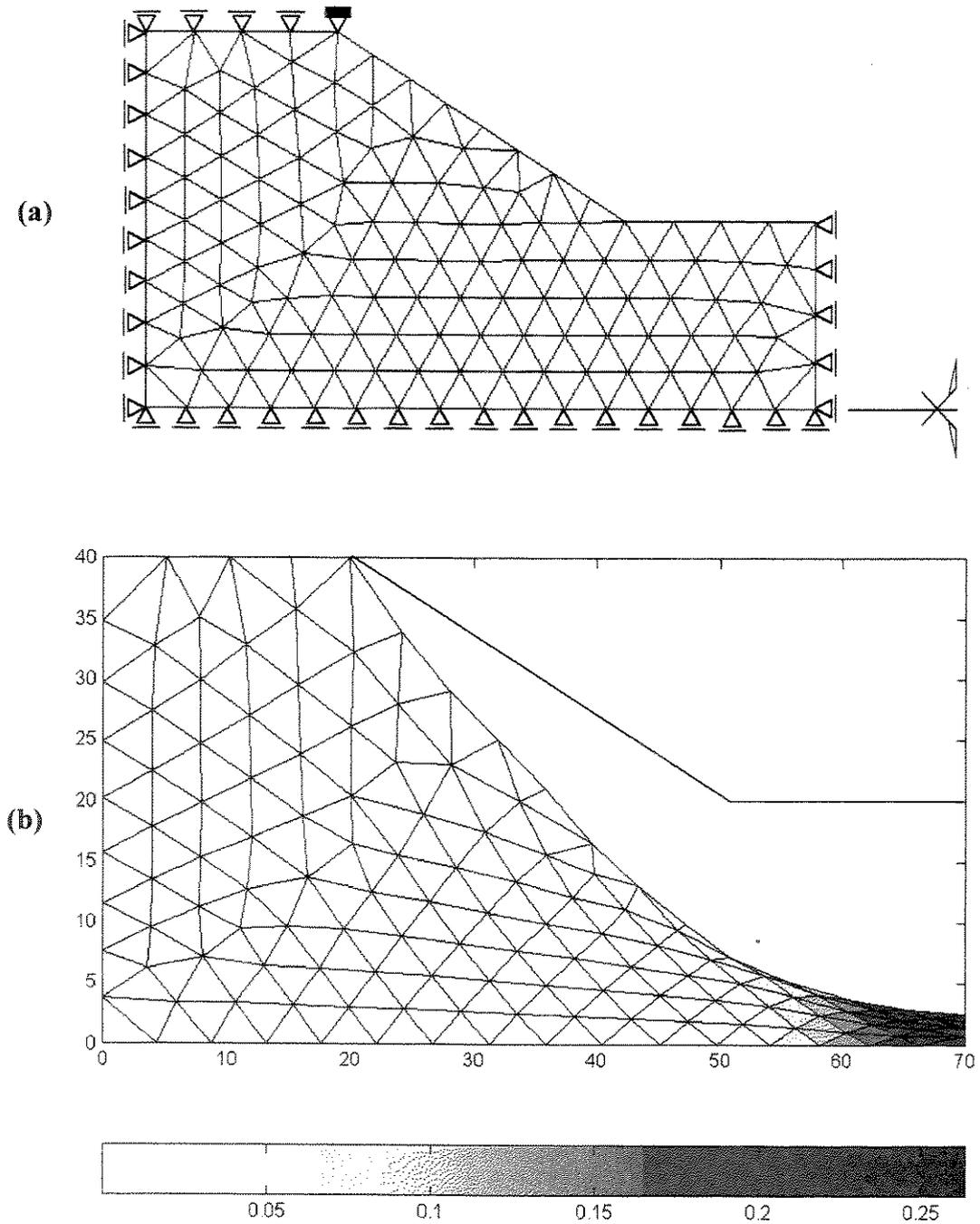


Figura 5.9 - Otimização da forma da placa: (a) novo modelo geométrico e (b) forma final

5.3 Exemplo 3

FURO SOB TENSÃO BIAXIAL

Placa quadrada com um furo quadrado no centro, submetida a um carregamento distribuído de tração nas direções x e y , com magnitudes iguais a 30 N/mm^2 , conforme a figura 5.10. Devido à simetria do problema utilizou-se apenas um quarto da placa, com uma discretização de 84 elementos triangulares lineares sob análise no estado plano de tensões. Outros dados utilizados: $E=2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0,3$ e $t=1,0 \text{ mm}$. Neste caso a malha foi gerada de modo condizente com o fluxo de tensões a fim de se fazer uma verificação do comportamento da adaptividade na região onde se quer melhorar a forma, ver figura 5.11.

Na montagem do modelo geométrico, no contorno, todos os nós são livres para moverem-se em pelo menos uma direção, exceto os nós do contorno do furo, os quais são livres nas direções x e y . Estas novas condições de contorno são impostas com o objetivo de otimizar-se a forma na região da concentração de tensões. Sabe-se que a forma ótima para o carregamento em questão, considerando placa infinita, é circular, enquanto se as cargas forem diferentes nas direções x e y a nova forma passa a ser uma elipse, Zhao [1990]. Anido, Herskovits, Feijóo e Taroco [1990] também analisaram este problema clássico de otimização.

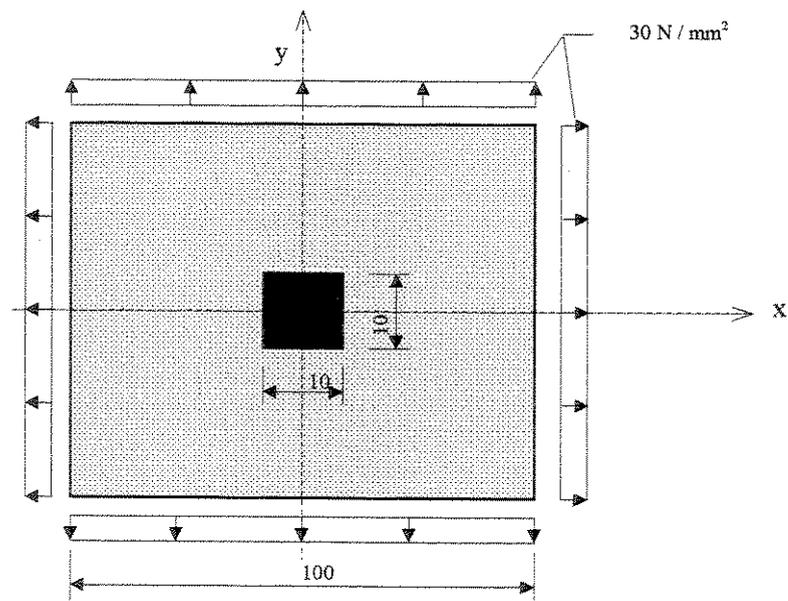
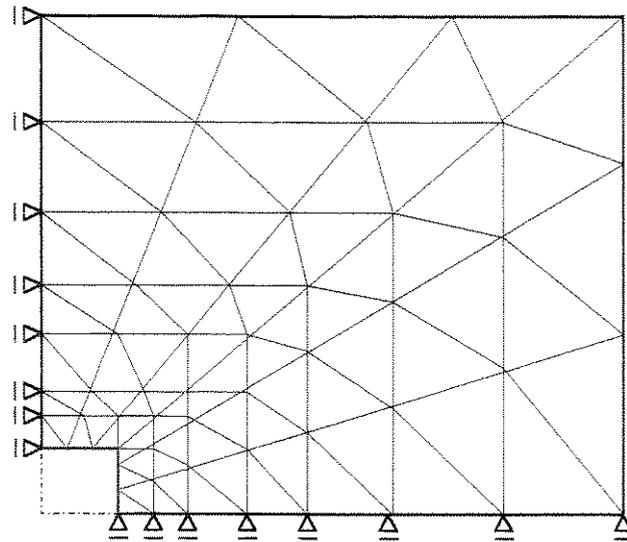
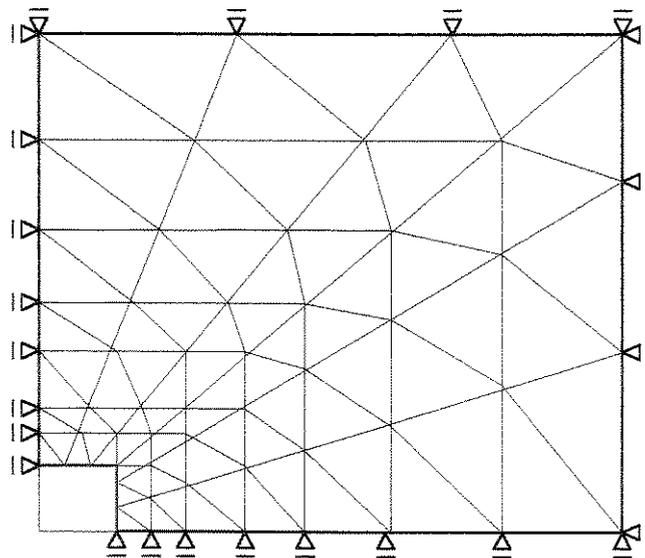


Figura 5.10 - Placa quadrada com furo sob estado de tensão biaxial.



(a) modelo físico



(b) modelo geométrico

Figura 5.11 - Discretização de um quarto da placa : a) modelo físico e b) modelo geométrico

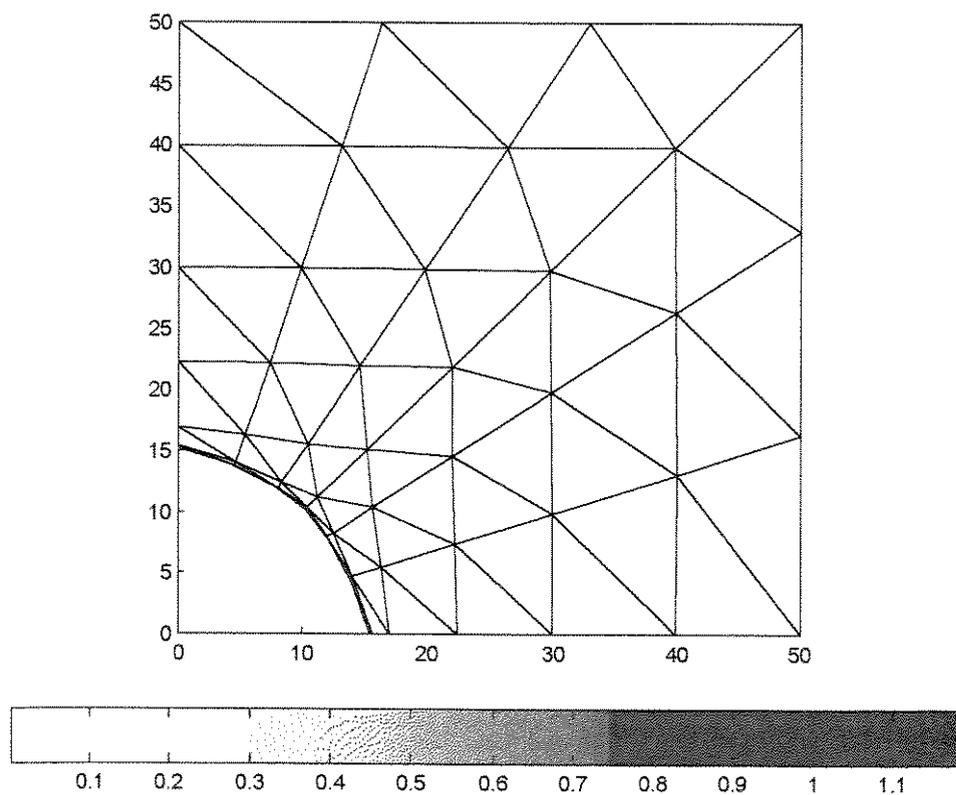


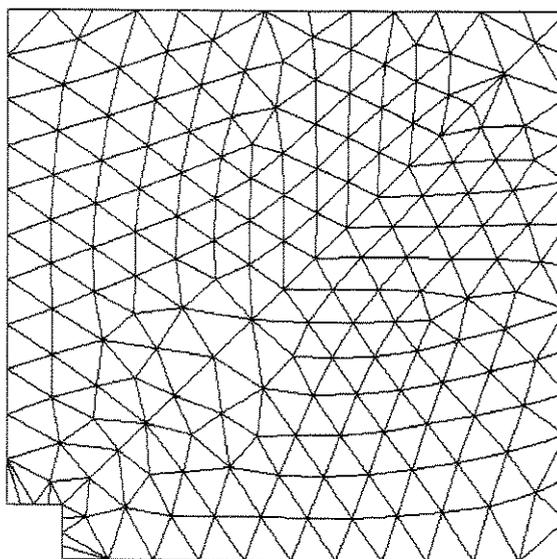
Figura 5.12 - Forma otimizada na região do furo sob campo de tensão biaxial

Observa-se, na figura 5.12, que realmente após 50 iterações a forma do furo quadrado passa para aproximadamente um círculo, convergindo para a parada devido a grande distorção dos elementos na região do furo.

Com o objetivo de comparar-se resultados, implementou-se uma malha mais refinada com 207 nós e 356 elementos, mostrado esquematicamente na figura 13(a). Observa-se inicialmente que, enquanto a malha não for simétrica com relação ao carregamento, a mesma promove uma

convergência mais demorada. Conforme já citado anteriormente, existe grande necessidade de otimização do “grid” na região a ser otimizada, pois observa-se na figura 13(b) que houve uma grande distorção nos elementos vizinhos ao furo não convergindo para uma otimização da forma, como era de se esperar. Conclui-se assim que somente o refinamento não basta sem a preocupação de melhorar-se a malha na região considerada.

(a) Forma inicial



(b) Forma final

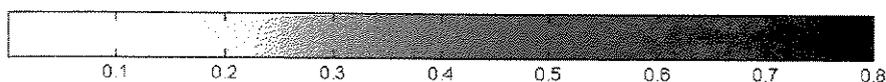
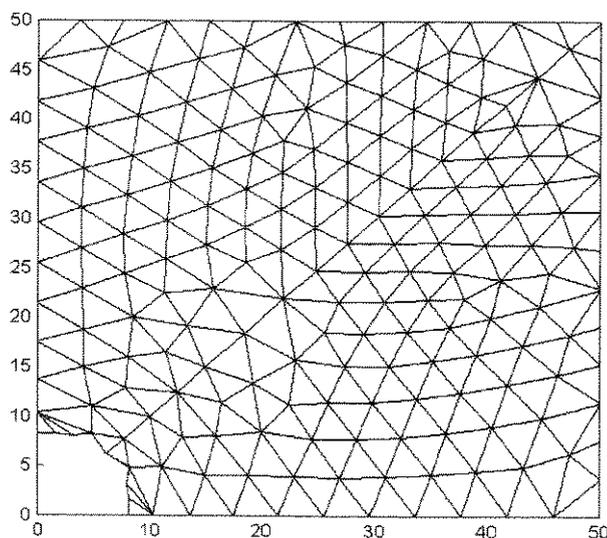


Figura 5.13 - Malha mais refinada: (a) forma inicial e (b) forma final

5.4 Exemplo 4

BALANÇO COM MOMENTO

A figura 5.14 mostra-nos as dimensões e as condições de carregamento de uma viga engastada com um momento fletor M , aplicado à extremidade livre da barra com o valor de 300 KNmm. A mesma foi analisada sob o estado plano de tensões com o domínio discretizado em 340 elementos triangulares lineares. Foram considerados dois tipos de modelos geométricos liberando ou não liberando as variáveis de forma na extremidade fixa, conforme mostra-se nas figuras 5.15(b) e 5.15(c).

Após os dois processamentos, observou-se que o critério de parada sendo a máxima energia de deformação por distorção dos elementos, leva-nos as duas forma otimizadas apresentadas na figura 5.16. Como o momento aplicado é constante ao longo do comprimento da viga, é de se esperar que a forma ótima seja uma seção transversal constante observando-se que isto realmente ocorre para o modelo proposto.

Ding [1987], fazendo uso de uma comparação entre as otimizações de forma e dimensional avaliou um exemplo bastante semelhante, onde o mesmo otimizou a forma fixando regiões da estrutura bidimensional que deverão possuir espessuras otimizadas.

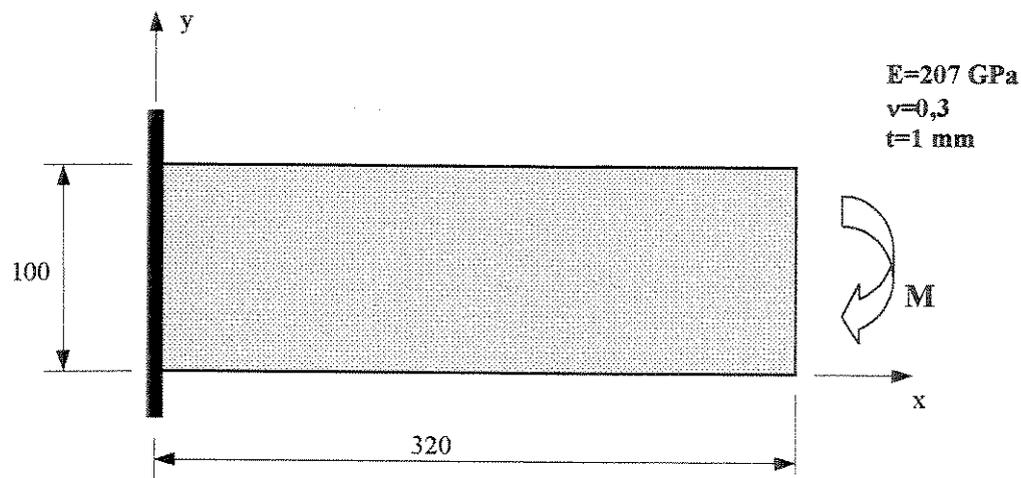
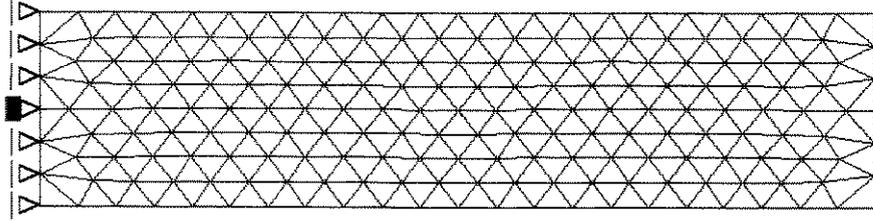
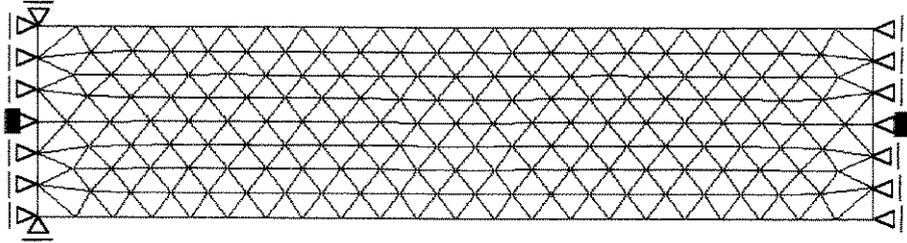


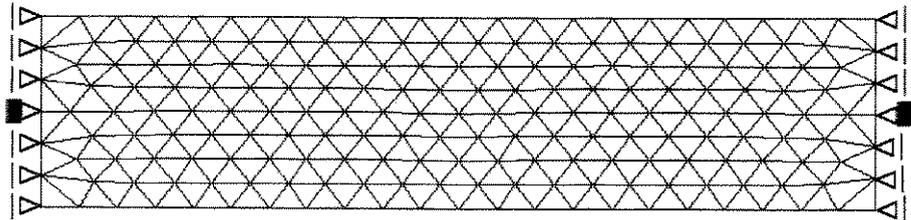
Figura 5.14 - Viga em balanço com momento na extremidade livre



(a) Modelo físico



(b) Modelo geométrico 1



(c) Modelo geométrico 2

Figura 5.15 - Discretizações e condições de contorno dos modelos físico e geométricos.

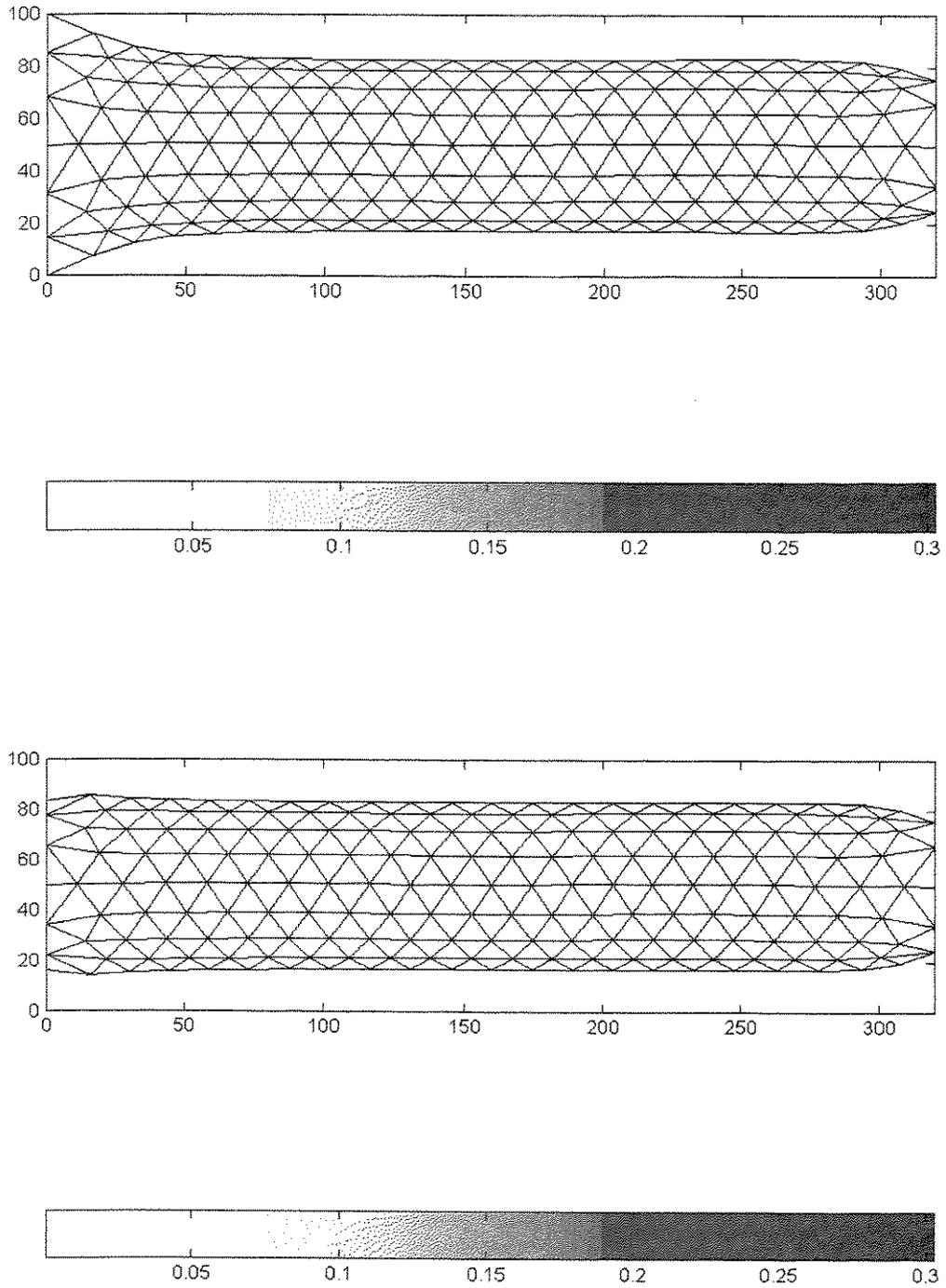


Figura 5.16 - Duas otimizações de forma da viga em balanço

5.5 Exemplo 5

VIGA SOBRE QUATRO APOIOS

O projeto inicial de uma viga sobre 4 apoios é mostrado na figura 5.17. O corpo da mesma, com dimensões de 100x20x1 milímetros, é suportado por 4 apoios sólidos e devido a simetria da estrutura analisou-se somente metade do modelo. Novamente, os nós do contorno para as restrições geométricas, figura 5.18(b) são livres em uma direção com exceção nos intervalos entre os apoios, onde os mesmos são livres para se moverem nas duas direções.

Um exemplo similar foi considerado por Chu [1996], onde utilizou-se um indicador de sensibilidade, o qual mostra a mudança de rigidez na remoção de cada elemento. Em função deste indicador elimina-se ou introduz para os elementos que não efetuaram a última mudança na rigidez da estrutura um módulo de elasticidade quase nulo. Observa-se pela figura 5.19, obtida através do MATLAB e após processar dez(10) iterações, uma grande semelhança na busca das formas finais otimizadas mesmo sendo os modelos bem diferentes nas discretizações e na forma geométrica, já que Chu utilizou uma malha de 64 x 40 elementos quadrilaterais em uma viga parede, contra uma malha de 134 nós e 214 elementos triangulares lineares na análise de uma viga esbelta para o modelo proposto.

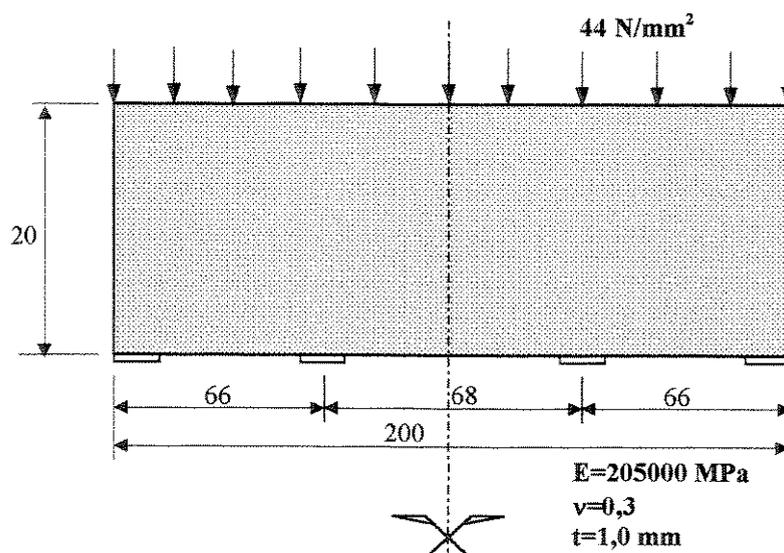
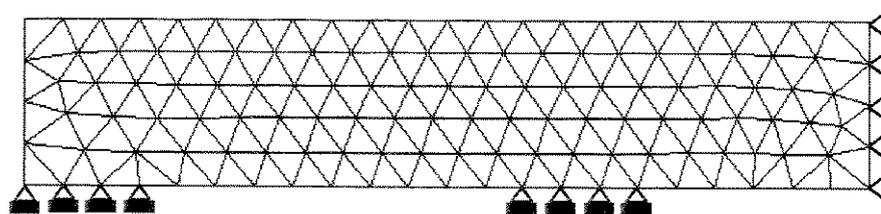
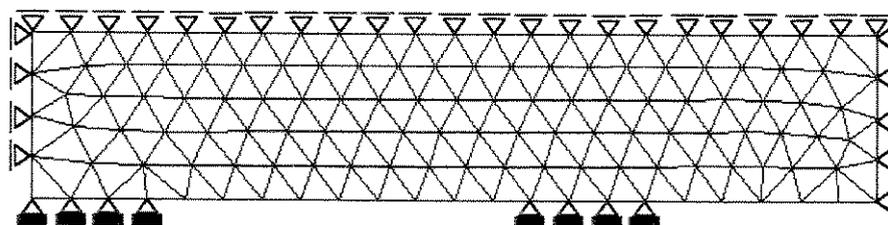


Figura 5.17 - Viga esbelta sobre quatro apoios rígidos



(a)



(b)

Figura 5.18 - Discretização da metade da estrutura: (a) Modelo físico e (b) Modelo geométrico

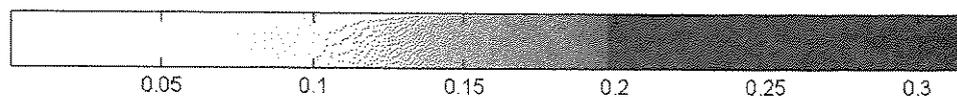
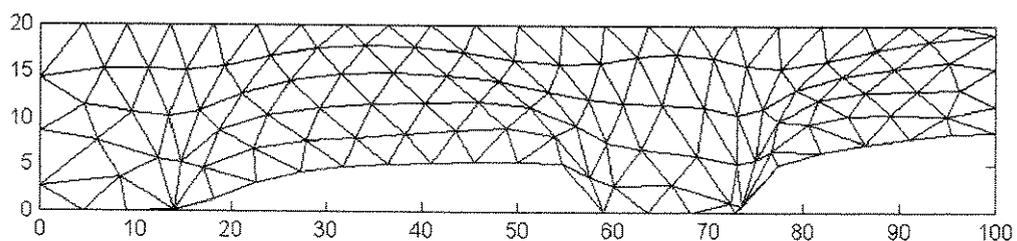


Figura 5.19 - Forma final otimizada da parte tracionada da viga.

5.6 Exemplo 6

PÓRTICO

A forma inicial da estrutura de um pórtico, as condições de carregamento e as condições de apoio estão representados na figura 5.20. A malha inicial contém 158 nós e 253 elementos, figura 5.21(a), é adotado a hipótese de tensões planas, a espessura do pórtico é de 10 mm, a carga distribuída é 25 N/mm, o módulo de elasticidade 205.000 MPa, o coeficiente de Poisson 0,30 e espessura da estrutura constante de 10 mm.

A forma ótima final, figura 5.22, apresenta-se de maneira similar ao resultado obtido por Dias e outros [1998], onde estes utilizam um algoritmo do ponto interior baseando-se no método de Herskovits e critério de parada é a tensão de Von Mises, para pontos chaves previamente determinados. A figura 23 foi obtida com o critério da máxima densidade de energia de distorção.

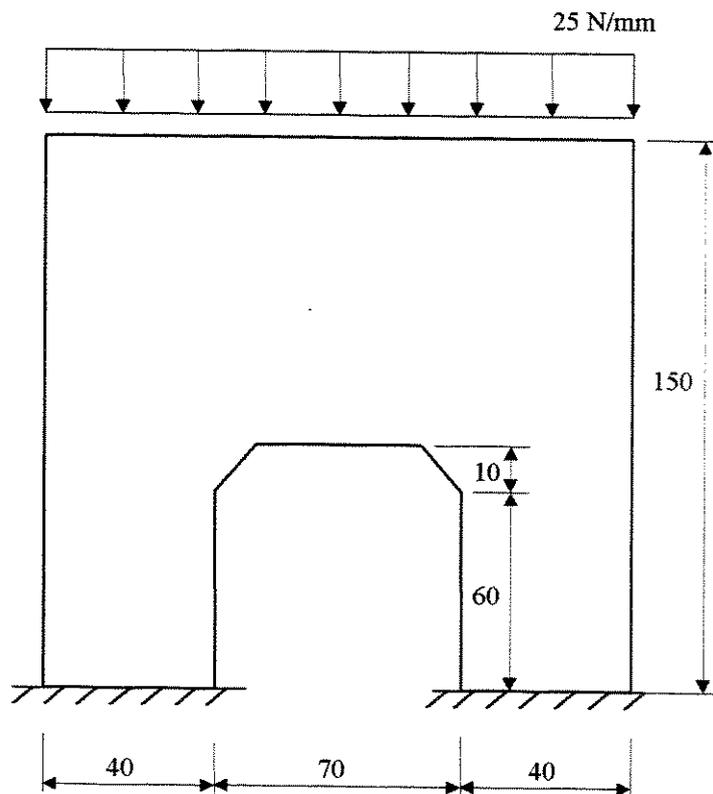


Figura 5.20 - Condições iniciais do pórtico.

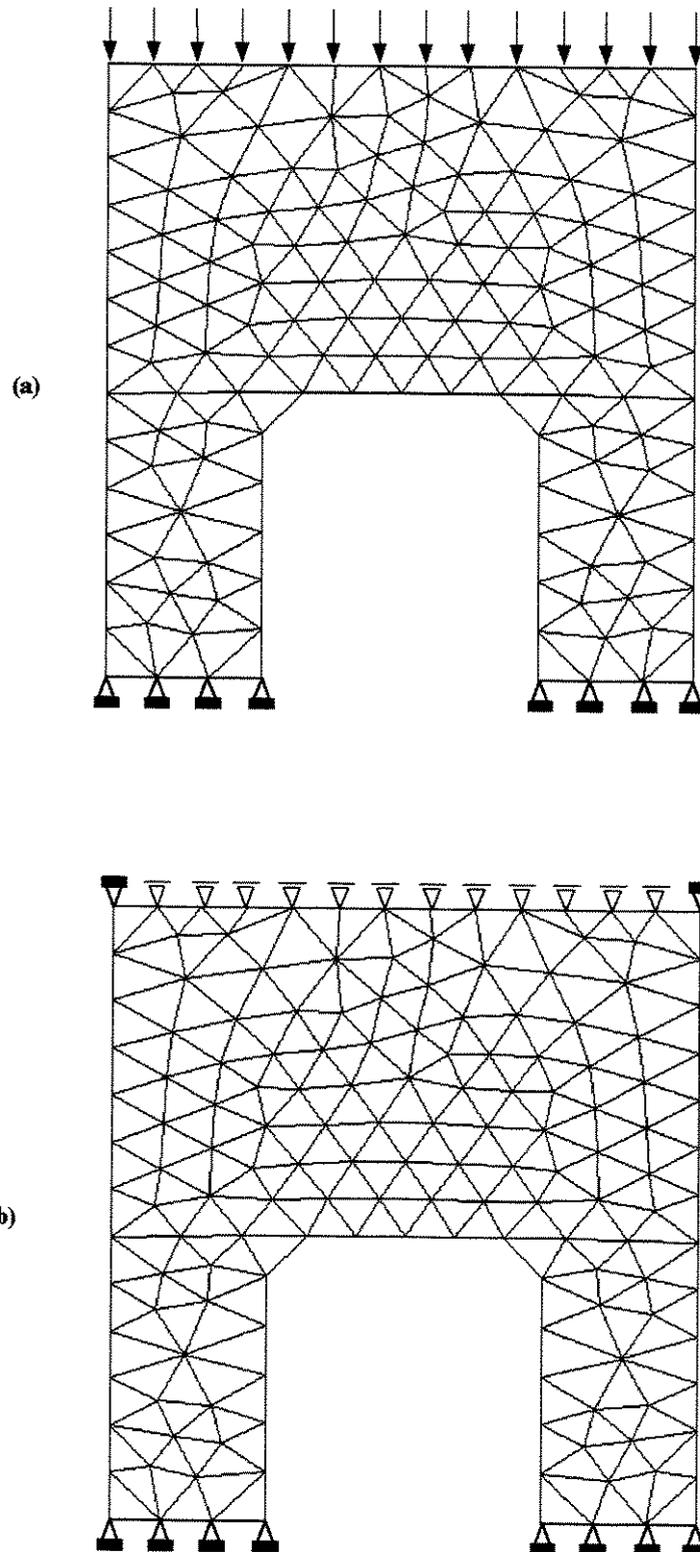


Figura 5.21 - Modelo físico e modelo geométrico do pórtico.

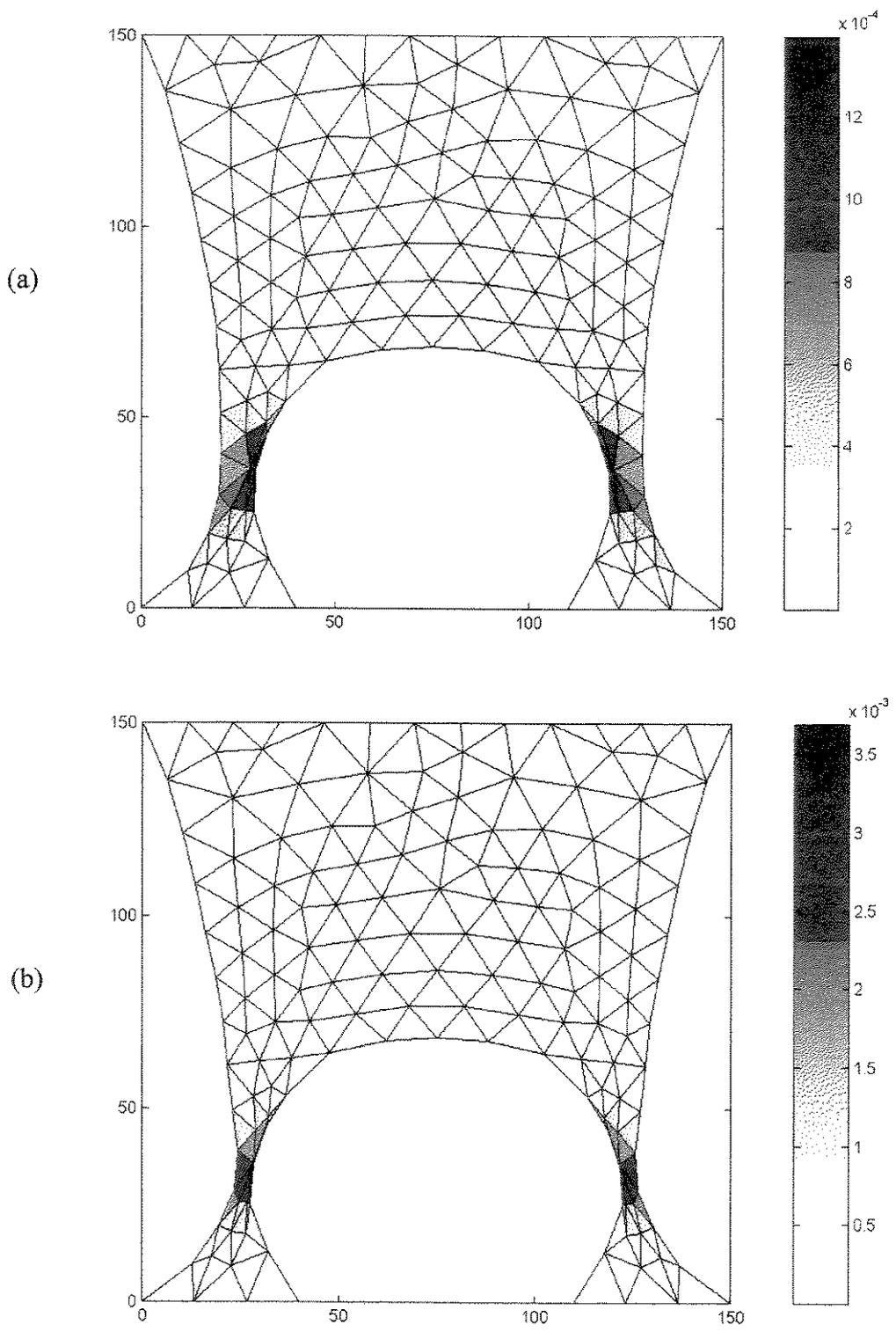


Figura 5.22 – Formas intermediárias do pórtico: (a) iteração 4 e (b) iteração 8

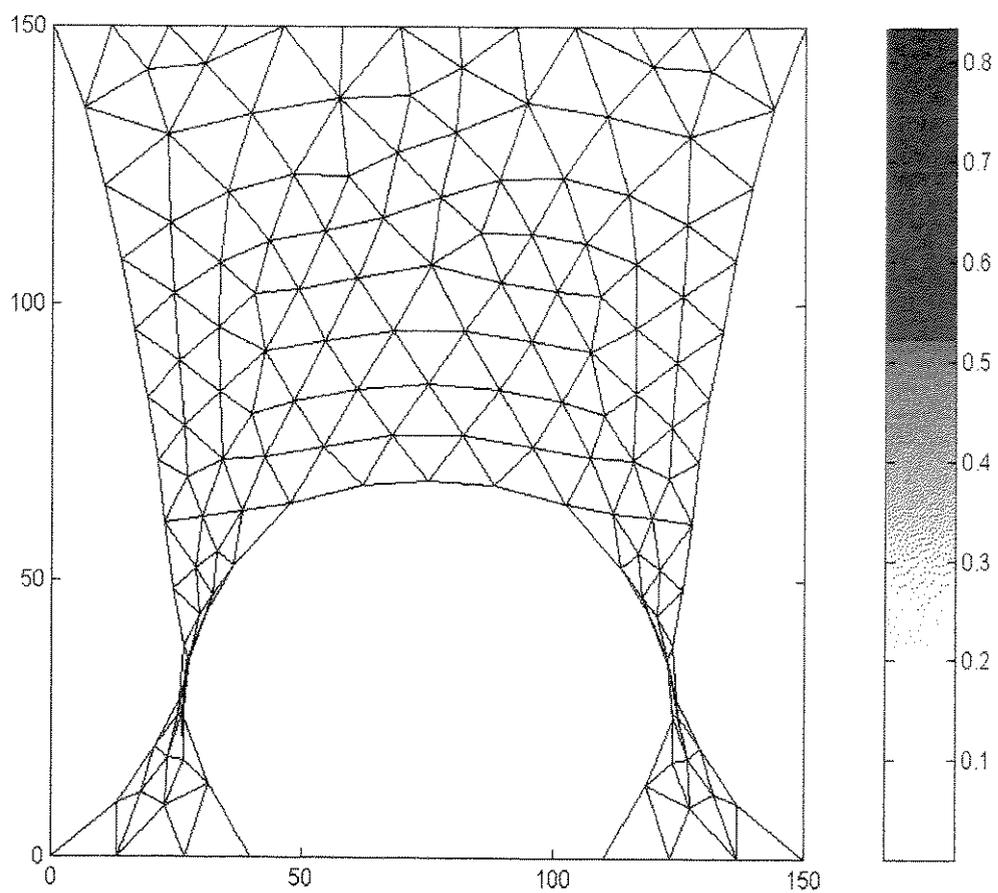


Figura 5.23 - Forma otimizada final do pórtico, iteração 16.

5.7 Exemplo 7

COLUNA DE AUTO ESTRADA

O projeto da forma de uma das colunas da pista de uma determinada auto estrada é considerado neste exemplo. Oda [1977], Kikuchi [1986] e Rossow [1976] utilizam deste mesmo tipo de estrutura para avaliarem seus trabalhos na busca da forma ideal ou melhorada.

A figura 5.24 mostra-nos as características de projeto, considerando-se para efeito de somente avaliar o método proposto, que a estrutura é de aço em vez de concreto armado que usualmente é utilizado para confeccionar-se um componente estrutural deste porte. Logo os dados adotados são: módulo de elasticidade 205000 MPa, coeficiente de Poisson 0,30 e espessura constante da estrutura de 1000 mm.

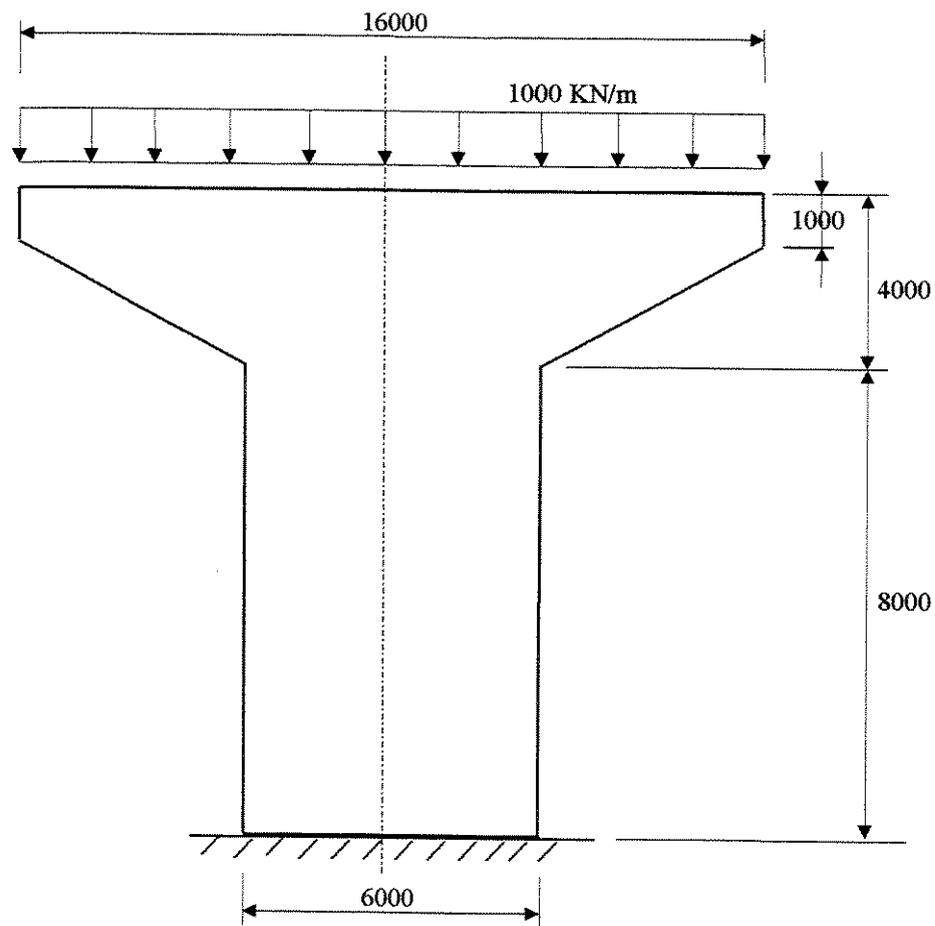


Figura 5.24 - Seção transversal da coluna de uma auto estrada

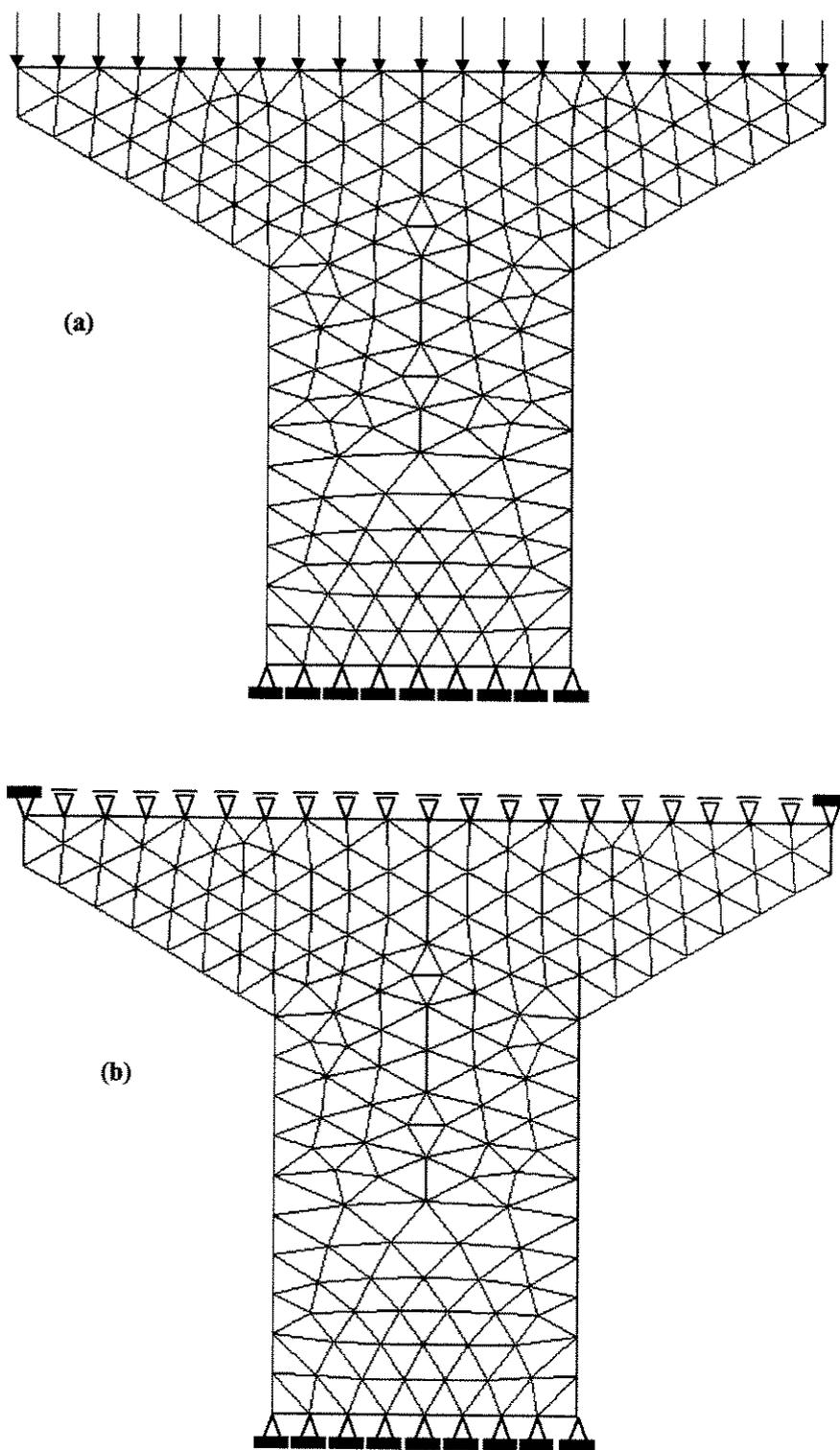


Figura 5.25 - Discretizações da coluna: (a) modelo físico e (b) modelo geométrico

Convém salientar que o critério da energia de distorção (von Mises) leva em conta o escoamento, o que não é apropriado para o caso quando se usa um material frágil como o concreto, onde o mais apropriado talvez seria utilizar um critério de ruptura.

Os modelos de elementos finitos foram discretizados com 186 nós e 306 elementos triangulares lineares. A figura 5.25 apresenta os modelos utilizados para o caso em questão, ressaltando-se que a malha deve ser de preferência, simétrica com relação ao eixo de simetria vertical da estrutura.

Após 28 iterações, considerando-se o estado plano de tensões, chega-se a forma otimizada conforme mostra-se na figura 5.26. Nota-se uma grande redução da altura da mesa na seção transversal da coluna, bem como observa-se uma melhor concordância do contorno na região onde existe uma alta concentração de tensões.

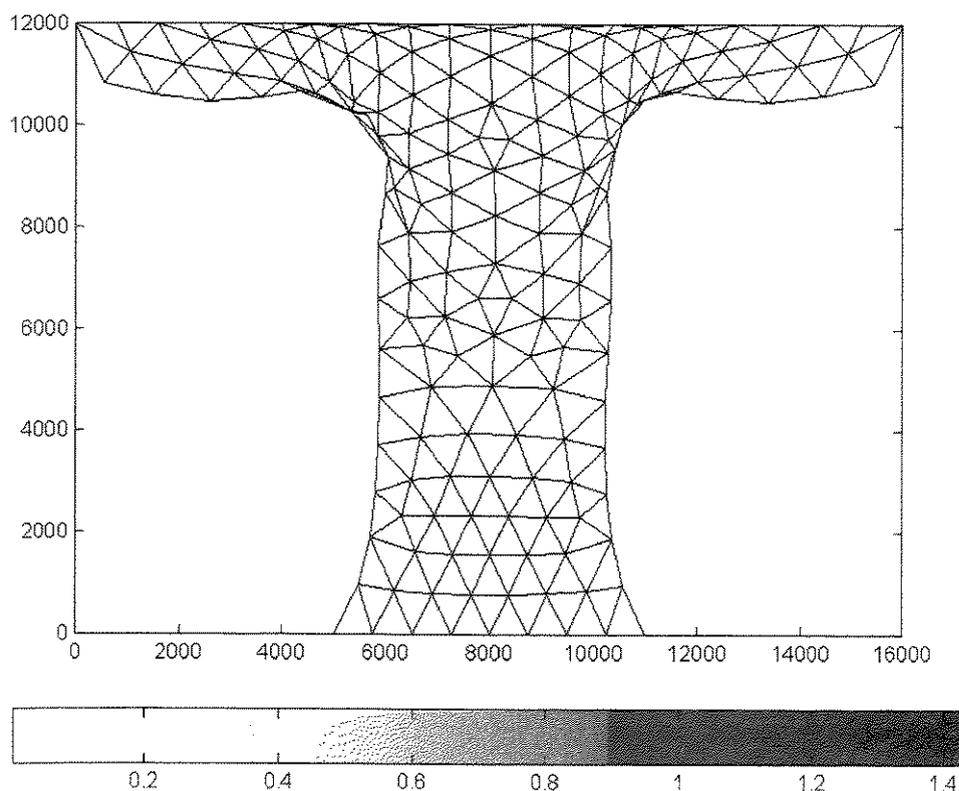


Figura 5.26 - Coluna de auto estrada: forma ótima (28 iterações).

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

6.1 Conclusões

O problema de otimização de forma foi formulado como um problema utilizando um método iterativo consistente mas, baseado num princípio de bom senso (método heurístico), não numa formação puramente de otimização matemática, acoplado ao método dos elementos finitos, no qual o MEF foi basicamente a ferramenta principal que nos levou a atingir os objetivos previamente estabelecidos.

A teoria básica do método de elementos finitos, utilizando-se elemento triangular linear hierárquico, para o módulo adaptativo, foi apresentada tal que os leitores possam ter uma visão bastante clara e geral do problema proposto.

O método da relocação nodal (método r) satisfaz o objetivo para o qual ele foi programado, ou seja, diante de suas virtudes e desvantagens do seu uso, o mesmo levou-nos na direção de além de balancear-se o erro de discretização, também equilibrar a energia de deformação por distorção dos elementos finitos.

Toda a programação numérica teve como programa principal o software ANAFIN onde acoplou-se ao mesmo subrotinas em linguagem de programação FORTRAN, com alocação dinâmica para armazenamento das variáveis reais e inteiras em vetores separados, afim de torná-lo uma ferramenta de auxílio na resolução dos problemas enfrentados.

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL

SEÇÃO CIRCULANTE

Como contribuição principal propôs-se um método de relocação de nós para otimização de malha baseado no critério de homogeneização de erros de discretização. Para otimizar a forma do elemento estrutural propôs-se que a relocação dos nós da discretização pelo método dos elementos finitos seja feito baseado na homogeneização da energia de distorção entre os elementos.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Apesar do problema de otimização de forma ter sido amplamente investigado nas últimas décadas, existe muito a ser desenvolvido ainda nesta área. As tendências futuras para pesquisa e aplicações tem sido abordados por muitos pesquisadores, conforme observei quando da participação no STRUCTURAL OPTIMIZATION 93 – The World Congress on Optimal Design of Structural Systems e na School Structural Optimization (1993), os dois eventos na cidade do Rio de Janeiro. Estas perspectivas de futuro foram confirmadas mais recentemente em Buenos Aires, no IV World Congress on Computational Mechanics (1998).

Diante de tudo segue abaixo algumas sugestões relativas ao que se pesquisou nos trabalhos e na experiência adquirida durante a confecção desta tese.

- ◆ Alterar o algoritmo implementado de tal forma que a otimização da malha seja adaptada iterativamente com o algoritmo de mudança de forma, a cada iteração, ou a partir de um certo número de iterações previamente fixado.
- ◆ Estender o problema de análise de estruturas elásticas bidimensionais para problemas elásticos 3-D.
- ◆ Utilizar um préprocessador como interface para confecção dos modelos iniciais

- ◆ Como todas as saídas gráficas foram confeccionadas através do programa MATLAB, pode-se sugerir para trabalhos futuros, uma implementação numérica utilizando a própria linguagem de programação do MATLAB.

Capítulo 7

Apêndices e Referências Bibliográficas

7.1 Apêndice A

Através de um programa computacional que executa operações literais, facilmente obtém-se as integrais da equação (2.22), Capítulo 2. Com isto os elementos adicionais da matriz de rigidez, os quais aparecem quando da introdução dos “nós” hierárquicos, tanto os cruzados como os próximos a diagonal são obtidos analiticamente.

Usando a notação $K_{i,j}$ onde, i indica a linha e j indica a coluna, segue abaixo os componentes adicionais na matriz de rigidez quando o elemento finito escolhido é o triangular linear hierárquico com grau 2.

Sabendo-se que a matriz elasticidade vale:

$$D = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

e usando-se os termos adotados no Capítulo 2:

$$\begin{aligned}
 a &= 2(L_2 y_{23} + L_1 y_{31}); \\
 b &= 2(L_2 y_{12} + L_3 y_{31}); \\
 c &= 2(L_1 y_{12} + L_3 y_{23}); \\
 d &= 2(L_1 x_{13} + L_2 x_{32}); \\
 e &= 2(L_2 x_{21} + L_3 x_{13}); \\
 f &= 2(L_1 x_{21} + L_3 x_{32})
 \end{aligned}$$

tem-se para o termo adicionado:

$$K_{1,7} = \frac{t}{4A} \int_A [2 * l_{11}(L_1 y_{31} + L_2 y_{23}) y_{23} + 2 * l_{33}(L_1 x_{13} + L_2 x_{32}) x_{32}] dx dy$$

Aplicando-se a fórmula

$$\int_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A$$

tem-se

$$\int_A L_1 dx dy = \frac{1!}{(1+2)!} 2A = \frac{A}{3}$$

$$\int_A L_2 dx dy = \frac{1!}{(1+2)!} 2A = \frac{A}{3}$$

onde substituindo-se as mesmas e executando-se as operações algébricas obtém-se:

$$K_{1,7} = K_{7,1} = -\frac{t}{6A} (l_{11} y_{12} y_{23} + l_{33} x_{21} x_{32})$$

Analogamente, usando-se a mesma formulação para integração, tem para as linhas de 1 a 6 as seguintes expressões:

$$K_{1,8} = K_{8,1} = -\frac{t}{6A} (l_{12} x_{21} y_{23} + l_{33} y_{12} x_{32})$$

$$K_{1,9} = K_{9,1} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{23}^2 + l_{33}x_{32}^2)$$

$$K_{1,10} = K_{10,1} = -\frac{t}{6A} (l_{12} + l_{33})x_{32}y_{23}$$

$$K_{1,11} = K_{11,1} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}y_{23} + l_{33}x_{13}x_{32})$$

$$K_{1,12} = K_{12,1} = -\frac{t}{6A} (l_{12}x_{13}y_{23} + l_{33}y_{31}x_{32})$$

$$K_{2,7} = K_{7,2} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{12}x_{32} + l_{33}x_{21}y_{23})$$

$$K_{2,8} = K_{8,2} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}x_{21} + l_{33}y_{23}y_{12})$$

$$K_{2,9} = K_{9,2} = K_{1,10}$$

$$K_{2,10} = K_{10,2} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}^2 + l_{33}y_{23}^2)$$

$$K_{2,11} = K_{11,2} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{31}x_{32} + l_{33}x_{13}y_{23})$$

$$K_{2,12} = K_{12,2} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{13}x_{32} + l_{33}y_{31}y_{23})$$

$$K_{3,7} = K_{7,3} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}y_{12} + l_{33}x_{13}x_{21})$$

$$K_{3,8} = K_{8,3} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{31}x_{21} + l_{33}x_{13}y_{12})$$

$$K_{3,9} = K_{9,3} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}y_{23} + l_{33}x_{13}x_{32})$$

$$K_{3,10} = K_{10,3} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{31}x_{32} + l_{33}x_{13}y_{23})$$

$$K_{3,11} = K_{11,3} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}^2 + l_{33}x_{13}^2)$$

$$K_{3,12} = K_{12,3} = -\frac{t}{6A} (l_{12} + l_{33})y_{31}x_{13}$$

$$K_{4,7} = K_{7,4} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{12}x_{13} + l_{33}y_{31}x_{21})$$

$$K_{4,8} = K_{8,4} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{13}x_{21} + l_{33}y_{31}y_{12})$$

$$K_{4,9} = K_{9,4} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{23}x_{13} + l_{33}y_{31}x_{32})$$

$$K_{4,10} = K_{10,4} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}x_{13} + l_{33}y_{23}y_{31})$$

$$K_{4,11} = K_{11,4} = K_{3,12}$$

$$K_{4,12} = K_{12,4} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{13}^2 + l_{33}y_{31}^2)$$

$$K_{5,7} = K_{7,5} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{12}^2 + l_{33}x_{21}^2)$$

$$K_{5,8} = K_{8,5} = -\frac{t}{6A} (l_{12} + l_{33})y_{12}x_{21}$$

$$K_{5,9} = K_{9,5} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{23}y_{12} + l_{33}x_{32}x_{21})$$

$$K_{5,10} = K_{10,5} = -\frac{t}{6A} (l_{12}x_{32}y_{12} + l_{33}y_{23}x_{21})$$

$$K_{5,11} = K_{11,5} = -\frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}y_{12} + l_{33}x_{13}x_{21})$$

$$K_{5,12} = K_{12,5} = -\frac{t}{6A} (l_{12}x_{13}y_{12} + l_{33}y_{31}x_{21})$$

$$K_{6,7} = K_{7,6} = K_{5,8}$$

$$K_{6,8} = K_{8,6} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{21}^2 + l_{33}y_{12}^2)$$

$$K_{6,9} = K_{9,6} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{23}x_{21} + l_{33}y_{12}x_{32})$$

$$K_{6,10} = K_{10,6} = -\frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}x_{21} + l_{33}y_{23}y_{12})$$

$$K_{6,11} = K_{11,6} = -\frac{t}{6A} (l_{12}y_{31}x_{21} + l_{33}y_{12}x_{13})$$

$$K_{6,12} = K_{12,6} = -\frac{t}{6A}(l_{11}x_{13}x_{21} + l_{33}y_{12}y_{31})$$

Para o cálculo das linhas seguintes utiliza-se as seguintes integrais:

$$\int_A L_1^2 dx dy = \int_A L_2^2 dx dy = \frac{2!}{(2+2)!} 2A = \frac{A}{6}$$

$$\int_A L_1 L_2 dx dy = \frac{1!}{(1+1+2)!} 2A = \frac{A}{12}$$

$$K_{7,7} = \frac{t}{4A^2} \int_A \left[4 * l_{11} (L_1 y_{31} + L_2 y_{32})^2 + 4 * l_{33} (L_1 x_{13} + L_2 x_{32})^2 \right] dx dy$$

ou

$$K_{7,7} = \frac{t}{6A} \left[l_{11} (y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{23}y_{31}) + l_{33} (x_{32}^2 + x_{13}^2 + x_{32}x_{13}) \right]$$

$$K_{7,8} = K_{8,7} = \frac{t}{12A} (l_{12} + l_{33}) (y_{12}x_{21} + y_{31}x_{13} + y_{23}x_{32})$$

$$K_{7,9} = K_{9,7} = \frac{t}{6A} (l_{11}y_{23}y_{12} + l_{33}x_{32}x_{21})$$

$$K_{7,10} = K_{10,7} = \frac{t}{12A} (l_{12} + l_{33}) (y_{23}x_{21} + y_{12}x_{32})$$

$$K_{7,11} = K_{11,7} = \frac{t}{6A} (l_{11}y_{31}y_{12} + l_{33}x_{13}x_{21})$$

$$K_{7,12} = K_{12,7} = \frac{t}{12A} (l_{12} + l_{33}) (y_{12}x_{13} + y_{31}x_{21})$$

$$K_{8,8} = \frac{t}{6A} \left[l_{11} (x_{32}^2 + x_{13}^2 + x_{32}x_{13}) + l_{33} (y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{23}y_{31}) \right]$$

$$K_{8,9} = K_{9,8} = K_{7,10}$$

$$K_{8,10} = K_{10,8} = \frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}x_{21} + l_{33}y_{23}y_{12})$$

$$K_{8,11} = K_{11,8} = K_{7,12}$$

$$K_{8,12} = K_{12,8} = \frac{t}{6A} (l_{11}x_{13}x_{21} + l_{33}y_{31}y_{12})$$

$$K_{9,9} = \frac{t}{6A} \left[l_{11} (y_{12}^2 + y_{31}^2 + y_{12}y_{31}) + l_{33} (x_{21}^2 + x_{13}^2 + x_{21}x_{13}) \right]$$

$$K_{9,10} = K_{10,9} = K_{7,8}$$

$$K_{9,11} = K_{11,9} = \frac{t}{6A} (l_{11}y_{23}y_{31} + l_{33}x_{32}x_{13})$$

$$K_{9,12} = K_{12,9} = \frac{t}{12A} (l_{12} + l_{33})(y_{31}x_{32} + y_{23}x_{13})$$

$$K_{10,10} = \frac{t}{6A} \left[l_{11} (x_{21}^2 + x_{13}^2 + x_{21}x_{13}) + l_{33} (y_{12}^2 + y_{31}^2 + y_{12}y_{31}) \right]$$

$$K_{10,11} = K_{11,10} = K_{9,12}$$

$$K_{10,12} = K_{12,10} = \frac{t}{6A} (l_{11}x_{32}x_{13} + l_{33}y_{23}y_{31})$$

$$K_{11,11} = \frac{t}{6A} \left[l_{11} (y_{23}^2 + y_{12}^2 + y_{12}y_{23}) + l_{33} (x_{32}^2 + x_{21}^2 + x_{21}x_{32}) \right]$$

$$K_{11,12} = K_{12,11} = \frac{t}{12A} (I_{12} + I_{33})(y_{23}x_{32} + y_{31}x_{13} + y_{12}x_{21})$$

$$K_{12,12} = \frac{t}{6A} \left[I_{11}(x_{32}^2 + x_{21}^2 + x_{21}x_{32}) + I_{33}(y_{23}^2 + y_{12}^2 + y_{12}y_{23}) \right]$$

7.2 Apêndice B

Busca unidimensional – Método da secante

O método da secante combina o método de Newton com um esquema de eliminação por região para achar a raiz de uma equação $f'(x) = 0$, caso esta exista, em um intervalo $[a, b]$. Supondo-se que o interesse está em achar o ponto de estacionaridade de $f(x)$ e tem-se dois pontos x_i e x_{i-1} no intervalo $[a, b]$, tal que suas derivadas são de sinais contrários.

O algoritmo da secante então aproxima a função $f'(x)$ como uma linha secante (uma linha reta ligando os dois pontos) e determina o próximo ponto onde a linha secante de $f'(x)$ se anula, ver figura 7.1. Então, a próxima aproximação para o ponto estacionário x^* é dado por:

$$z = R - \frac{f'(R)}{f'(R) - f'(L)}(R - L)$$

onde as condições de mínimo de $f'(x)$ são

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$$

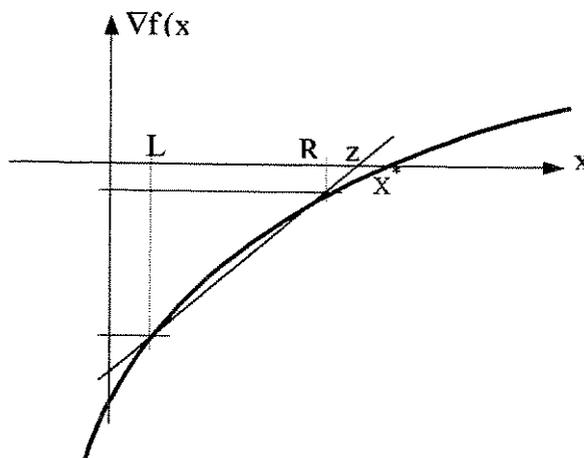


Figura 7.1 - Esquema gráfico do método da secante

Pode-se implementar o seguinte algoritmo:

1º Passo

◆ Construção das rotinas que calculam a função e derivada primeira da função,

$$y = f(x)$$

$$y' = \frac{df(x)}{dx}$$

conforme mostra a figura 46.

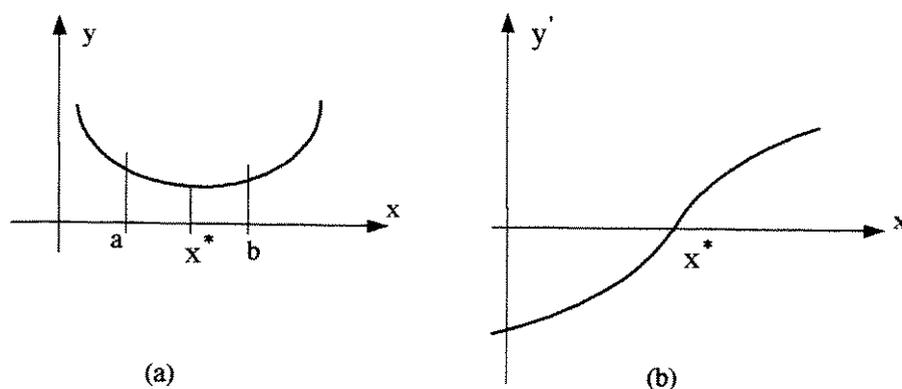


Figura 7.2 - (a) intervalo de confiança e (b) derivada 1ª da função

Definir os seguintes parâmetros:

- ◆ Intervalo de confiança $[a,b]$
- ◆ Número máximo de iterações
- ◆ Critério de convergência (ξ)

2º Passo

Testar o intervalo de confiança:

A raiz está no intervalo?

SIM ----> continue

NÃO ----> entrar com novo intervalo $[a,b]$

3º Passo

Fazendo-se:

$$x_1 = a; x_2 = b$$

tem-se para o novo ponto x_3 :

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)} f'(x_1)$$

Se $|f'(x)| \leq \xi$ convergiu, então $x^* \approx x_3$

4º Passo

Montar novo intervalo de confiança:

a) se $y'(x_3)y'(x_2) < 0$ então $x^* \in [x_3, x_2]$ figura 47(a)

b) se $y'(x_1)y'(x_3) < 0$ então $x^* \in [x_1, x_3]$ figura 47(b)

Testes adicionais para o intervalo de confiança:

- ◆ Se $y'(x_1)y'(x_2) \leq 0$ provavelmente $x^* \in [x_1, x_2]$
- ◆ Se $\frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{(x_2 - x_1)} > 0$ -----> ponto de mínimo
- ◆ Se $\frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{(x_2 - x_1)} < 0$ -----> ponto de máximo

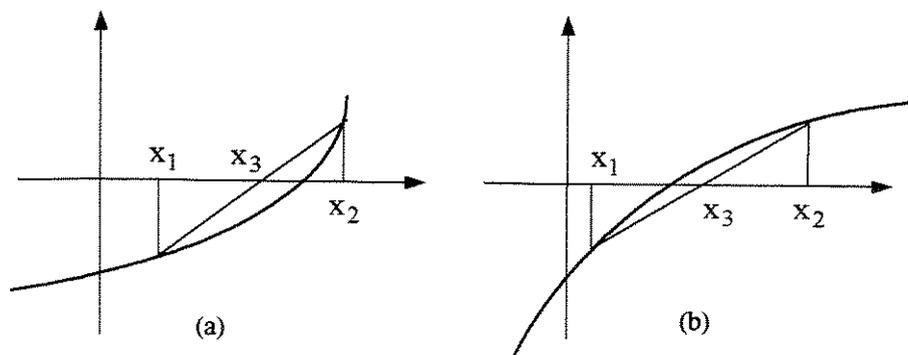


Figura 7.3 - Intervalo de confiança: (a) derivada positiva e (b) derivada negativa.

7.3 Apêndice C

Método do gradiente conjugado

7.3.1 Direções conjugadas

Dada uma matriz simétrica Q , dois vetores d_1 e d_2 são ditos Q -ortogonais, ou conjugados com relação a Q , se

$$d_1^T Q d_2 = 0.$$

Esta noção de Q -ortogonalidade é útil na solução do problema quadrático

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

onde Q é definida positiva. Convém salientar que a solução única para este problema é também a solução única para a equação linear

$$Q x = b,$$

e portanto que o problema de minimização quadrática é equivalente para o problema de equação linear.

7.3.2 Teorema das direções conjugadas

Seja $\{d_i\}_{i=0}^{n-1}$, um conjunto de vetores Q -conjugados não nulos. Para qualquer x_0 pertencente ao espaço E^n , a seqüência $\{x_k\}$ que é gerada conforme

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad k \geq 0$$

$$\text{com } \alpha_k = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_k}$$

$$\text{e } \mathbf{g}_k = \mathbf{Q} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}$$

converge para a solução única, \mathbf{x}^* , de $\mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ após n iterações, isto é, $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*$.

7.3.3 Método do gradiente conjugado

Dentre todos os métodos de otimização irrestrita, em situações onde as derivadas possam ser calculadas facilmente, o algoritmo dos gradientes conjugados é às vezes conveniente. Similar ao método das direções conjugadas, as direções são determinadas sequencialmente em cada iteração do método. Na iteração k , avalia-se o gradiente atual e adiciona-se a ele uma combinação linear das direções anteriores, para obter-se uma nova direção conjugada ao longo da qual se pesquisará.

São três razões que fazem esse método bastante atrativo. Primeiro, salvo no caso de obtermos a solução em menos de n passos, o gradiente será sempre não nulo e linearmente independente de todas as direções anteriores. A segunda é a simplicidade do método. De fato embora o método seja menos eficiente do que o de Fletcher-Powell (steepest descent method), ele requer muito menos armazenamento, o que é uma vantagem significativa quando o número de variáveis n for grande. Terceiro, como as direções são baseadas nos gradientes, o processo progride bem em direção à solução em cada iteração. Isso não acontece necessariamente com qualquer método de direções conjugadas, onde o progresso pode ser devagar até nas últimas iterações.

Especificamente a teoria requer a construção de direções conjugadas a partir de direções linearmente independentes, e a construção de direções ortogonais. Abaixo segue um algoritmo do gradiente conjugado:

Passo 1.

Inicie com qualquer $\mathbf{x}_0 \in E^n$. Com o contador $k=0$, selecione o parâmetro de convergência ε e calcule

$$d_0 = -g_0 = -\nabla f(x_0) = b - Qx_0$$

Checar para ver se $\|g_0\| < \varepsilon$. Se isto ocorrer, então pare. Caso isto não ocorra, vá para o passo 4.

Passo 2.

Compute o gradiente da função objetivo

$$g_k = \nabla f(x_k)$$

Se $\|g_k\| < \varepsilon$, então pare; senão continue.

Passo 3.

Calcular a direção conjugada nova

$$g_{k+1} = g_k - \alpha_k Qd_k$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k} d_k$$

Passo 4.

Compute $\alpha_k = \alpha$ tal que minimize $f(x_k + \alpha d_k)$

$$\alpha_k = \frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

Passo 5.

Mude a variável de projeto

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

Aumente o contador $k=k+1$ e volte ao passo 2.

7.4 Bibliografia

- Anido [1990] J. C. L. Anido, J. Herskovits, R. A. Feijóo e E. O. Taroco, "Otimização da forma de corpos elásticos planos para redução de concentração de tensões", Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC, relatório 37/90, Rio de Janeiro, nov., 1990.
- Aurélio [1988] A. B. H. Ferreira, "Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa", editora Nova Fronteira, 1ª edição, 1988.
- Babuska [1978] I. Babuska, W. C. Rheinboldt, "A-posteriori error estimates for the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 12, 1597-1615 (1978).
- Babuska [1978] I. Babuska, W. C. Rheinboldt, "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (1978) 736-754.
- Babuska [1979] I. Babuska, I. N. Katz and B. A. Szabo, "Hierarchic families for the p-version of the finite element method", *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, IMACS, Dept. of Computer Science, Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA, 1979, pp 278-286.
- Babuska [1980] I. Babuska, W. C. Rheinboldt, "Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method", in: J. T. Oden, ed., *Computational Methods in Nonlinear Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1980) 67-109.
- Babuska [1981] I. Babuska, M. R. Dorr, "Error estimates for the combined h and p version of the finite element method", *Numer. Math.*, 25 (1981) 257-277.
- Babuska [1982] I. Babuska, B. Szabó, "On the rates of convergence of the finite element method", *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, 18 (1982) 323-341.

- Babuska [1983] I. Babuska, A. Miller, M. Vogelius, "Adaptive methods and error estimation for elliptic problems of structural mechanics", in: I. Babuska, J. Chandra and J. E. Flaherty, eds., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations* (SIAM, Philadelphia, PA, 1983) 57-73.
- Babuska [1984] I. Babuska and A. Miller, "The post-processing approach in finite element method: part III – A *posteriori* error estimates and adaptive mesh selection", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 20, 2311-2324 (1984).
- Bathe [1982] K. J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall Inc., 1982.
- Becker [1982] E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden, "Finite Elements", vols. I – VI, Prentice-Hall Inc., Englewood, New Jersey, 1981.
- Belengundu [1988] A. D. Belengundu, S. D. Rajan, "A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 (1988), 87-106, North-Holland.
- Bendsøe [1988] M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design a homogenization method", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 71, pp. 197-224, 1988.
- Boresi [1922] A. P. Boresi, R. J. Schmidt, O. M. Sidebottom, "Advanced Mechanics of Materials", fifth edition, John Wiley & Sons, 1992.
- Botkin [1981] M. E. Botkin, "Shape optimization of plate and shells structures", *AIAA*, vol. 20, No. 2, 1981.

- Botkin [1985] M. E. Botkin, R. J. Yang, J. A. Bennet, "Shape optimization of three-dimensional stamped and solid automotive components, the optimum shape", Int. Symposium, General Motors Research Labs., Warren, Michigan, 1985.
- Braibant [1986] C. Fleury, V. Braibant, "Structural optimization. A new dual method using mixed variables", Int. J. Numer. Meth. Engng., 23, 1986, pp. 409-428.
- Bugeda [1991] G. Bugeda, "Estimacion y corrección del error en el análisis estructural por el MEF", Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria, monografía 9, 1991.
- Chen [1982] Wai-Fah Chen, A. F. Saleeb, "Constitutive Equations for Engineering Materials", John Wiley & Sons, vol. 1: Elasticity and Modeling, 1982.
- Cheng [1983] J. Cheng, "Adaptive grid optimization for structural analysis-Geometry-based approach", Comp. Meths. in Applied Mech. and Eng., 107 (1983), 1-22.
- Cheng [1993] Jung-Ho Cheng, "Adaptative grid optimization for structural analysis - Geometry - based approach", Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng., 107 (1993) 1-22.
- Chun [1978] Y. W. Chun, E. J. Haug, "Two dimensional shape optimal design", Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 13(5), 1978, pp. 311-336.
- Dems [1978] K. Dems, Z. Mroz, "Multiparameter structural shape optimization by finite element method", Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 13, 1978, pp. 247-263.

- Dems [1983] K. Dems, Z. Mroz, "Variational approach by means of adjoint system to structural optimization and sensitivity analysis", *Int. J. Solids Structures*, 19, pp. 677-692, 1983.
- Desai [1979] C. S. Desai, "Elementary Finite Element Method", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1979.
- Dias [1998] G. P. Dias, J. Herskovits, F. A. Rochinha, "Simultaneous shape optimization and nonlinear analysis of elastic solids", *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- Ding [1987] Y. Ding, "Shape optimization of two-dimensional elastic structures with optimal thicknesses for fixed parts", *Computers & Structures*, vol. 27, No. 6, pp. 729-743, 1987.
- Epsing [1985] B. J. Epsing, "A CAD approach to minimum weight design problem", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 21, 1985, pp 1049-1066.
- Fancelo [1992] E. A. Fancelo e R. A. Feijóo, "Adapte: Estimador de erro para problemas planos em elasticidade linear", *Relatório de pesquisa e desenvolvimento nº 19/92, LNCC, Rio de Janeiro*, 1992.
- Fellippa [1976] C. A. Fellippa, "Numerical experiments in finite element grids by direct energy search", *Appl. Math. Modelling*, 1 (1976), 93-96.
- Fellippa [1977] C. A. Fellippa, "Numerical experiments in finite element grid optimization by direct energy search", *Appl. Math. Modelling*, 1 (1977), 239-244.
- Fletcher [1964] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients", *Computer J.*, 149-154 (1964).

- Fleury [1979] C. Fleury, "Structural weight optimization by dual method of convex programming", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 14, No. 12, 1979, pp. 1761-1783.
- Gago [1983] J. P. de S. R. Gago, D. W. Kelly and O. C. Zienkiewicz, "A *posteriori* error analysis and adaptive processes in the finite element method: part II – Adaptive mesh refinement", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 19, 1621-1656 (1983).
- Gellatly [1966] R. A. Gellatly, R. H. Gallagher, "A procedure for automated minimum weight structural design", *Aero. Quart.*, 17, 1966, Part 1, pp. 216-230, Part 2, pp. 332-342.
- Grandhi[1989] R. V. Grandhi, K. B. Bowman, "Structural optimization for static aerolastic performance", *Computer Aided Optimum Design* (ed. C. A. Brebbia and S. Hernandez), CMP and Springer-Verlag, 1980.
- Haftka [1986] R. T. Haftka and R. V. Grandhi, "Structural shape optimization – A survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57 (1986), 91-106.
- Haug [1979] E. J. Haug, J. S. Arora, "Applied Optimal Design", John Wiley and Sons, 1979.
- Herskovits [1999] J. Herskovits, G. P. Dias, G. Santos, C. M. M. Soares, "Shape structural optimization with an interior point mathematical programming algorithm", relatório de Pesquisa e Desenvolvimento Nº 2, LNCC/CNPq, 1999.

- Juvinall [1967] R. C. Juvinall, "Engineering Considerations of Stress, Strain, and Strength", McGraw-Hill Book Company, 1967.
- Kelly [1983] D. W. Kelly, J. P. de Gago J. R., O. C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A-posteriori and adaptive processes in the finite element method: Part I – Error analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, 1593-1619 (1983).
- Kicher [1968] T. P. Kicher, "Structural Synthesis of Integrally stiffened cylinders", *J. of Spacecraft and Rockets*, vol. 5, 1968, pp. 62-67.
- Kikuchi [1983] N. Kikuchi, J. E. Taylor, "Optimal modification of shape for two-dimensional elastic bodies", *J. Struct. Mech.*, vol. 11(1), 1983, pp. 111-135.
- Kikuchi [1986] N. Kikuchi, K. Y. Chung, T. Torigaki, J. E. Taylor, "Adaptative finite elements methods for shape optimization of linearly elastic structures", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 57 (1986) 67-89.
- Kikuchi [1986] N. Kikuchi, "Adaptive grid-design methods for finite element analisys", *Comp. Meths. in Applied Mech. and Eng.*, 55 (1986), 129-160.
- Kikuchi [1987] N. Kikuchi and T. Torigaki, "Adaptative finite element methods in Computer Aided Engineering", 9th Brasilian Congress of Mechanical Engineering, Florianópolis, SC, 1987.
- Kristensen 1976] E. S. Kristensen, N. F. Madsen, "On the optimum shape of fillet in plates subjected to multiple in-plane loading cases", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 10, 1976, pp. 1007-1019.

- Kunar [1976] R. R. Kunar, A. S. L. Chan, "A method for the configurational optimization of structures", *Comput. Meth. App. Mech. Engng.*, vol. 1, 1976, pp. 331-350.
- Melosh [1977] R. J. Melosh and P. V. Marcal, "An energy basis for mesh refinement of structural continua", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11 (1977), 1083-1091.
- Mroz [1983] Z. Mroz, K. Dems, "On optimal shape design of elastic structures", *Optimization Method in Structural Design* (eds. H. Eschenauer and N. Olhoff), 1983, pp. 224-243.
- Nha Chu [1996] D. Nha Chu, Y. M. Xie, A. Hira and G. P. Steven, "Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints", *Finite elements in analysis and design*, 21 (1996), 239-251.
- Nishiwaki [1988] S. Nishiwaki, M. I. Frecker, S. Min, N. Kikuchi, "Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 42, 535-559 (1998).
- Oda [1977] J. Oda, K. Yamazaki, "On a technique to obtain an optimum strength shape by the finite element method", *Bulletin of JSME*, vol. 20, 1977, pp. 1524-1532.
- Oda [1981] J. Oda, K. Yamazaki, "Pattern transformation method for shape optimization in its application to spoked rotary disks", *Int. Symposium on Optimum Structural Design*, Tucson, Arizona, 1981, pp. 4.29-4.35.
- Ohtsubo [1992] H. Ohtsubo and Kitamura, "Numerical investigation of element-wise a *posteriori* error estimation in two and three dimensional elastic problems", *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, 34, 969-977 (1992).

- Olhoff [1987] N. Olhoff, "Structural Optimizatio by variational methods", Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems (ed. C. A. Mota Soares), Springer-Verlag, 1987, pp. 87-164.
- Oliveira [1971] E. R. A. Oliveira, "Optimization of finite element solution", in: Proc. 3rd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- Pedersen [1982] P. Pedersen, C. L. Laursen, "Design for optimum stress concentration by finite element method and linear programming", J. Struct. Mech., 10, 1982, pp. 375-391.
- Peraire [1987] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "Adaptive remeshing for compressible flow computations", J. Comp. Phys., 72, 449-466 (1987).
- Prager [1967] W. Prager, R. T. Shield, "A general theory of optimal plastic design", J. Appl. Mech., vol. 34, 1967, pp. 184-186.
- Queau [1980] J. P. Queau, Ph. Trompette, "Two dimensional shape optimal design by the finite element method", Int. J. Numer. Meth. Engng., 15, pp. 1603-1612, 1980.
- Ramakrishnan [1975] C. V. Ramakrishnan, A. Francavilla, "Structural shape optimization using penalty function", J. Struct. Mech., vol. 3(4), 1975, pp. 403-432.
- Roberti [1987] P. Roberti and M. A. Melkanoff, "Self-adaptive stress analysis based on stress convergence", Int. J. Num. Methods Eng., 24, 1973-1992 (1987).

- Rousselet [1981] B. Rousselet, E. J. Haug, "Design sensitivity analysis of shape variations", Optimization of Distributed Parameter Structures (eds. Haug E. J., Cea J.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherland, 1981, pp. 1397-1442.
- Rossow [1976] M. P. Rossow, J. E. Taylor, "An optimal structural design algorithm using optimality criteria", Society Engineering Science, 13th Annual Meeting, Hampton, VA, 1976.
- Schmit [1960] L. A. Schmit, "Structural design by systematic synthesis", Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computations, ASCE, New York, 1960, pp. 105-122.
- Schmit [1971] L. A. Schmit, "Structural Synthesis 1959-1969. A decade of progress", Proc. Japan-US Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, University of Alabama Press, 1971.
- Schnack [1979] E. Schnack, "An optimization procedure for stress concentration by the F. E. technique", Int. J. Numer. Mech. Engng., vol. 14, 1979, pp. 115-124.
- Segerlind [1984] L. J. Segerlind, "Applied Finite Element Analysis", 2nd edition, John Wiley & Sons, 1984.
- Serpa [1991] L. A. Serpa, "Otimização de malhas de elementos finitos pelo método da relocação dos nós na elasticidade linear", Tese de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1991.
- Shephard [1980] M. S. Shephard, R. H. Gallagher and J. F. Abel, "The synthesis of near-optimum finite element meshes with interactive computer graphics", Int. J. Num. Meth. Eng., 15 (1980), 1021-1039.

- Shephard [1981] M. S. Shephard, "Approaches to automatic generation and control of finite element meshes", *Appl. Mech. Rev.*, 41, 169-185 (1981).
- Shephard [1986] M. S. Shephard, "Adaptive finite element analysis and CAD", in Babuska et al (eds.), *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, New York, 1986.
- Spillers [1981] W. S. Spillers, S. Singh, "Shape optimization: finite element examples", *J. Struct. Div. ASCE.*, 107, 1981, pp. 2015-2025.
- Szabo [1981] B. A. Szabo, P. K. Basu and D. A. Dunavant, "Quality control in finite element analysis", *Proc. Int. Conf. on Computing in Civil Engineering*, New York, May, 1981, pp 15-26.
- Turcke [1974] D. J. Turcke and G. M. McNeice, "Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study", *Comput. & Structures*, 4 (1974), 499-519.
- Tvergaard [1975] V. Tvergaard, "On the optimum shape of fillet in a flat bar with restrictions", *Optimization in Structural Design* (eds.: A. Sawczuk and Z. Mroz), Springer-Verlag, New York, 1975, pp. 181-195.
- Vanderplaats [1982] G. N. Vanderplaats, "Structural optimization – Past and Future", *AIAA journal*, vol 20, n^o 7, july, 1982.
- Xicheng [1997] W. Xicheng, D. Kennedy, F. W. Williams, "A two-level decomposition method for shape optimization of structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 40, 75-88, 1997.

- Zhao [1990] Z. Zhao, "Shape design sensitivity analysis and optimization using the boundary element method", Thesis submitted for the Degree of the Doctor of Philosophy of the Council for National Academic Awards, Computational Mechanics Institute, Wessex Institute of Technology, Southampton, September, 1990.
- Zienkiewicz [1971] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, "Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 3, 275-290, 1971.
- Zienkiewicz [1973] O. C. Zienkiewicz, J. S. Campbell, "Shape optimization and sequential linear programming", in: R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, eds., *Optimum Structural Design* (Wiley, London, 1973) Chapter 7.
- Zienkiewicz [1981] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, J. P. de S. R. Gago and I. Babuska, "Hierarchical finite element approaches adaptive refinement and error estimates", *Proc. MAFELAB*, 1981, Brunel University.
- Zienkiewicz [1983] O. C. Zienkiewicz, J. P. de S. R. Gago and D. W. Kelly, "The hierarchical concept in finite element analysis", *Comp. Struct.*, 16, 53-65 (1983).
- Zienkiewicz [1987] O. C. Zienkiewicz and J. S. Zhu, "A simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 24, 337-357, 1987.
- Zienkiewicz [1989] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu and N. G. Gong, "Effective adaptive h-p procedures for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 24, 337-357, (1989).
- Zienkiewicz [1989] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The finite element method", fourth edition, vol. 1, McGraw-Hill Book Company, 1989.