

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL [
TESE DEFENDIDA POR JOHN ELMER
CCASA INFANTES E APROVADA PEI
COMISSÃO JULGADORA EM 02/02/2000


ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ajuste de Modelos de Elementos Finitos Usando

Técnicas de Estimação de Parâmetros

Autor : **John Elmer Ccasa Infantes**
Orientador: **José Maria Campos Dos Santos**

12/00

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL - DMC

Ajuste de Modelos de Elementos Finitos Usando Técnicas de Estimação de Parâmetros

Autor : John Elmer Ccasa Infantes

Orientador: José Maria Campos Dos Santos

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico e Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2000
S.P. - Brasil

18/10/20

IDADE BC
 CHAMADA:
T/UNICAMP
C319a
 REC. 41342
 ROC. 278/00
 C ☐ D ☒
 REC. R\$ 11,00
 ATA 05-07-00
 * CPD

CM-00142354-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C319a Ccasa Infantes, John Elmer
Ajuste de modelos de elementos finitos usando técnicas iterativas de estimação de parâmetros / John Elmer Ccasa Infantes. --Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

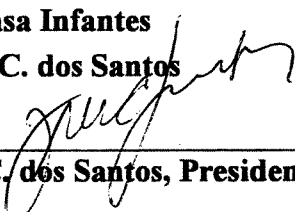
1. Estimativa de parâmetro. 2. Método dos elementos finitos. 3. Modelos matemáticos. 4. Análise modal. 5. Otimização matemática. I. Santos, José Maria Campos dos II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL - DMC
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

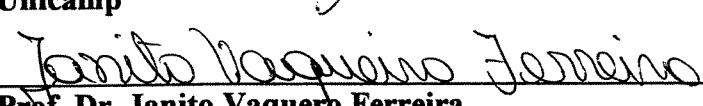
Ajuste de Modelos de Elementos Finitos Usando
Técnicas de Estimação de Parâmetros

Autor : John Elmer Ccasa Infantes

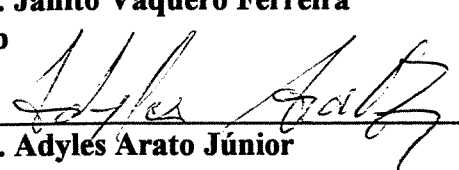
Orientador: José Maria C. dos Santos



Prof. Dr. José Maria C. dos Santos, Presidente
Unicamp



Prof. Dr. Janito Vaquero Ferreira
Unicamp



Prof. Dr. Adyles Arato Júnior
UNESP

Campinas, 2 de Fevereiro de 2000

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Maruja e Emiliano, a minha irmã Giovanna, a meu sobrinho Michael e a Marly com amor e carinho.

Agradecimentos

Meus agradecimentos estão dirigidos a CAPES pelo apoio financeiro concedido em forma de bolsa estudos.

Ao Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos, pela orientação, confiança e apoio oferecido durante toda a realização da presente dissertação.

A meus pais Emiliano e Maruja que sempre mantiveram a confiança, apoio, e fundamentalmente o carinho e amor oferecido apesar da distancia.

A minha irmã Giovanna e sobrinho Michael que sempre me deram a alegria necessária para seguir adiante.

Aos professores do DMC pelo ensino dado nestes anos.

A todos os amigos que de uma ou outra forma colaboraram comigo especialmente Janete, Blanca, Paula, João, Nilton e Daniel.

A Marly e à família Dos Santos Borgatto pelo carinho oferecido nos momentos difíceis.

A Deus por me acompanhar em todos os momentos e indicar o caminho a seguir nos momentos de indecisão na minha vida.

*“El sufrimiento es el tiempo que nos hace sentir el gusto
por la vida, acéptalo como compañero de camino,
abrázalo con el beso de la paz y saldrás victorioso”.
(anónimo)*

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Índice	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xvi
Nomenclatura	xviii
1 Introdução e Objetivos	1
2 Revisão Bibliográfica	4
2.1 Desenvolvimento histórico	4
2.2 Revisão da literatura	5
3 Fundamentos Teóricos	11
3.1 Marco teórico	11
3.2 Métodos iterativos usando dado modais	11
3.3 Comparação e correlação de modelos	12
3.4 Método da função objetivo	15
3.4.1 Cálculo da matriz de sensibilidade	16
3.4.2 Montagem do vetor dos dados medidos	20
3.4.3 Caso sobredeterminado	22
3.4.4 Caso subdeterminado	26
3.5 Método da variância mínima	27

3.6	Implementação computacional	33
4	Aplicações e Resultados	36
4.1	Aplicações do método da função objetivo	36
4.1.1	Exemplo simulado – caso sobredeterminado	36
4.1.2	Exemplo simulado – caso subdeterminado	58
4.1.3	Exemplo experimental	75
4.1.4	Análise modal experimental	76
4.1.5	Modelo de elementos finitos da viga experimental	79
4.2	Aplicação do método da variância mínima	99
4.2.1	Exemplo simulado	99
4.2.2	Exemplo experimental da viga	106
4.3	Observações dos resultados	118
5	Conclusões	119
	Referências Bibliográficas	121
	Apêndice A	125

Resumo

CCASA INFANTES, John Elmer, *Ajuste de Modelos Usando Técnicas Iterativas de Estimação de Parâmetros*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 127 p. Dissertação (Mestrado)

O presente trabalho trata do ajuste de modelos de elementos finitos aplicado a estruturas tipo viga. O modelo é ajustado utilizando-se duas técnicas iterativas de estimação de parâmetros: o método da função objetivo e o método da variância mínima. No primeiro caso a correlação é melhorada através de uma função objetivo que envolve a soma dos quadrados da diferença entre os dados medidos e os estimados. No segundo caso a correlação é melhorada incorporando o conhecimento estatístico através da introdução de matrizes variância. Uma formulação de sensibilidade é usada para determinar as derivadas dos autovalores e autovetores em relação aos parâmetros. Dois exemplos usando dados pseudo experimentais, e reais são apresentados a fim de ilustrar as potencialidades dos métodos. O primeiro exemplo consiste de uma viga cujas rigidezes no engaste são considerados como parâmetros a ajustar – caso sobredeterminado. No mesmo exemplo analisa-se o caso subdeterminado sendo que desta vez as rigidezes a flexão de cada elemento da viga discretizada são os parâmetros a ajustar. No segundo exemplo uma viga real engastada é utilizada onde os dados modais do modelo experimental foram obtidos medindo-se 10 funções de resposta em frequência.

Palavras chave

Ajuste de modelos, Estimação de parâmetros, Análise de sensibilidade, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

CCASA INFANTES, John Elmer, *Finite Element Model Updating Using Techniques Iterative of Estimate of Parameter*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 127 p. Dissertação (Mestrado)

The present work explore the finite element model update applied to a beam like structure. The model is refined by using two parameter estimation iterative techniques: objective function method and minimum variance method. In the first case the correlation is improved through an objective function that involves the sum of the squares of the difference between the measured data and the calculated ones. In the second case the correlation is improved incorporating the statistical knowledge by introducing the variance matrix. A sensitivity formulation is used to determine the derivative of the eigenvalue and eigenvector related to the parameters. In order to illustrate the potentialities of the methods two examples using experimental pseudo and real datas are presented. The first example consist of a clamped beam whose rigidities in the clamped are considered as parameters to adjust - case over-determined. In the same example it is analyzed a under-determined case, but at that time the flexural rigidity in each beam element are the parameters to be adjusted. In the second example a real clamped beam is used, were the modal data are obtained from 10 frequency response functions.

Key Words

Model Update, Parameter Estimation, Sensitivity Analysis, Finite Element Method.

Lista de Figuras

3.1	Diagrama sintetizado do algoritmo empregado no método da função objetivo.	34
3.2	Diagrama sintetizado do algoritmo empregado no método da variância mínima.	35
4.1	Modelos de Elementos Finitos utilizado (a) no processo de ajuste e (b) na geração dos dados pseudo experimentais.	37
4.2	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado sem ponderação: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	40
4.3	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos sem autovetores S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	41
4.4	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos com autovetores C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ e em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	42
4.5	FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros	

	estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado sem ponderação.	44
4.6	FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas S/A.	45
4.7	FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos C/A.	46
4.8	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	49
4.9	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	50
4.10	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	51
4.11	Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	52
4.12	FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e	

parâmetros S/A.	54
4.13 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros C/A.	55
4.14 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A.	56
4.15 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A.	57
4.16 (a) Modelo 1 – engaste rígido (b) Modelo 2 – engaste flexível.	58
4.17 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado sem ponderação modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	60
4.18 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado sem ponderação modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	61
4.19 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando parâmetros modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	62
4.20 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando parâmetros modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos	

parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	63
4.21 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Caso subdeterminado sem ponderação: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).	65
4.22 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Caso subdeterminado ponderando parâmetros: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).	66
4.23 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	68
4.24 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	69
4.25 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	70
4.26 Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	71
4.27 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros	

estimados. Caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).	73
4.28 FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Caso subdeterminado pond. medidas e est. inicial dos parâmetros: : modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).	74
4.29 Vista geral da montagem do teste experimental da viga.	75
4.30 Função de resposta em frequência típicas e suas respectivas coerências.	77
4.31 Diagrama de estabilização no processo de extração dos dados modais (8-512 Hz).	78
4.32 Diagrama de estabilização no processo de extração dos dados modais (512-1024 Hz).	78
4.33 Modelo do MEF da viga do teste experimental.	79
4.34 Resultados do exemplo experimental sem ponderação: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	82
4.35 Resultados do exemplo experimental ponderando dados medidos S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	83
4.36 Resultados do exemplo experimental ponderando dados medidos C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	84
4.37 FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental –sem ponderação.	86
4.38 FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental – ponderando dados medidos S/A.	87

4.39	FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental – ponderando dados medidos C/A.	88
4.40	Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	90
4.41	Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	91
4.42	Resultados do exemplo experimental ponderando medidas estimativa inicial dos parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	92
4.43	Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.	93
4.44	FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental – ponderando medidas e parâmetros S/A.	95
4.45	FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental – ponderando medidas e parâmetros C/A.	96
4.46	FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental – ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A.	97
4.47	FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros	

estimados. Exemplo experimental – ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A.	98
4.48 Resultados do exemplo simulado S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 – b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	101
4.49 Resultados do exemplo simulado C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 – b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	102
4.50 FRFs dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado S/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).	104
4.51 FRFs dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado C/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).	105
4.52 Resultados do exemplo experimental S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 – b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	107
4.53 Resultados do exemplo experimental C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 – b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	108
4.54 FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado S/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).	110
4.55 FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado C/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).	111
4.56 Resultados do exemplo experimental S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 – b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	113
4.57 Resultados do exemplo experimental C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 –	

b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.	114
4.58 FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado S/A: caso não correlacionado (a1 - c1), caso correlacionado (a2 - c2).	116
4.59 FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado C/A: caso não correlacionado (a1 - c1), caso correlacionado (a2 - c2).	117
A1 Dimensões do corpo de prova da chapa de alumínio em mm.	125
A2 Diagrama tensão – deformação de materiais típicos.	126
A3 Diagrama de tensão – deformação dos corpos de prova utilizados.	126
A4 Análise de regressão linear que determinará o módulo de elasticidade E	127

Lista de Tabelas

4.1	Comparação dos resultados iniciais do MEFLAB - ANSYS considerando a estimativa inicial dos parâmetros assim como valores pseudo experimentais obtido via MEFLAB.	37
4.2	Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os de Friswell e Mottershead 1995, para os casos sem ponderação e com ponderação nas medições.	38
4.3	Comparação dos valores pseudo experimentais com os valores ajustados para os casos com ponderação: nas medições e parâmetros; e nas medições e estimativa inicial dos parâmetros.	47
4.4	Comparação dos modelos 1 e 2 com o modelo pseudo experimental para os casos: sem ponderação e com ponderação nos parâmetros.	59
4.5	Comparação dos modelos 1 e 2 com o modelo pseudo experimental, para os casos: ponderando medições e parâmetros e ponderando medições e estimativa inicial dos parâmetros.	67
4.6	Equipamentos utilizados no experimento.	76
4.7	Frequências extraídas via AME.	79
4.8	Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos sem ponderação e ponderando as medições.	80
4.9	Comparação entre os valores experimentais e os valores ajustados para os casos: ponderando medições e parâmetros, e ponderando medições e estimativa inicial dos parâmetros.	81
4.10	Comparação dos valores dos dados pseudo experimentais com os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins)	

e correlacionado (Friswell).	99
4.11 Comparação dos valores dos dados medidos com os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins) e correlacionado (Friswell).	106
4.12 Comparação dos valores dos dados medidos com os valores ajustados usando o algoritmo da Mínima Variância para os casos não correlacionado (Collins) e correlacionado (Friswell).	112
A1 Media e desvio padrão do módulo de elasticidade E	127

Nomenclatura

A, B, C, Λ, Φ . . .	Letras maiúsculas em negrito representam grandezas matriciais.
a, b, c, λ, ϕ . . .	Letras minúsculas em negrito representam grandezas vetoriais.
$E[\]$	Valor esperado.
$Var(), \sigma^2$	Variância.
S	Matriz de sensibilidade.
W_ε, W_θ	Matrizes de ponderação das medidas e os parâmetros.
V_j	Matriz variância dos parâmetros ajustados.
V_ε	Matriz variância do erro das medições.
D	Matriz de correlação entre os parâmetros e o ruído das medições.
I	Matriz identidade.
θ	Vetor de parâmetros a ajustar.
z	Vetor de dados medidos.
J	Função objetivo.
H_{ij}	Função de resposta em frequência.
ω, f	Frequência em <i>Rad/seg</i> e <i>Hz</i> .
λ	Autovalor.
ψ	Autovetor sem normalizar.
Φ	Autovetores com normalização em massa.

∇_x

Gradiente.

$\| \cdot \|$

Norma.

T

Índice indicando a transposta.

$^+$

Índice indicando a pseudo inversa.

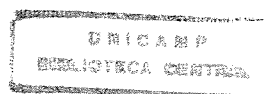
Capítulo 1

Introdução e Objetivos

Uma previsão precisa do desempenho dinâmico de estruturas e máquinas flexíveis exige a obtenção de modelos analíticos com um alto grau de precisão. Devido à própria complexidade destas estruturas, uma técnica comum de modelagem é obtida usando-se os métodos de análise numérica, tais como o método dos elementos finitos (MEF). Contudo, é bem conhecido que as características dinâmicas da estrutura real raramente coincidirão com aquelas obtidas dos modelos numéricos. Esforços recentes na direção da solução deste problema tem resultado no desenvolvimento e avaliação de métodos de ajuste ou refinamento de modelos estruturais (*model updating*).

O estudo do comportamento dinâmico de uma estrutura pode ser dividido em duas atividades a saber: predições analíticas e testes modais. Estas duas aproximações podem ser descritas por modelos matemáticos que possuam um número limitado de graus de liberdade ou modos, válidos dentro de uma faixa de frequência.

A ferramenta analítica mais amplamente usada é o método dos elementos finitos, enquanto os testes modais são consideradas como sendo seu correspondente experimental. Cada uma destas aproximações tem suas próprias vantagens e desvantagens, devido a diferentes limitações e considerações feitas.



Embora a variedade e eficiência das ferramentas de modelagem e análise por elementos finitos tenham sofrido um enorme crescimento, a confiabilidade e precisão das análises numéricas para o estudo de estruturas dinâmicas é ainda menor que a depositada nos dados experimentais¹. No entanto a informação obtida no modelo experimental é limitada e a validade do modelo está restrita a uma determinada faixa de frequência.

Para tentar capturar o real comportamento dinâmico das estruturas os elementos finitos incorporam no modelo diferentes escolhas adotadas, por exemplo: a discretização do domínio físico, o elemento finito pertinente, a representação das condições de contorno e juntas, entre outras. Contudo, cada um destes passos podem introduzir aproximações que contribuem para a deterioração da precisão e confiabilidade do modelo. Essencialmente, os resultados dinâmicos não modelados oriundos das não linearidades, dos mecanismos de amortecimento, dos efeitos de acoplamentos e das condições de contorno, assim como incertezas nas propriedades geométricas e do material, bem como erros de malhagem introduzem também grandes discrepâncias entre a estrutura e sua modelagem.

A análise modal experimental (AME), ou teste modal constitui-se em uma das mais versáteis técnicas de identificação de parâmetros e validação de modelos, através da qual pode ser obtidos os dados experimentais. Dado que os resultados da análise modal são obtidos a partir das características medidas diretamente no sistema real, os testes modais são assumidos como uma das aproximações mais corretas. Contudo, são também a mais problemáticas, por que diferentemente das medições das propriedades de massa ou dos coeficientes de influência estáticos, os testes modais tentam medir ou caracterizar o comportamento dinâmico da massa do amortecimento e da rigidez simultaneamente. Uma grande utilização dos testes modais é a verificação e/ou avaliação do modelo analítico comparando as características modais experimentais, tais como as frequências naturais e modos de vibrar, com aqueles obtidos pelo modelo analítico. Frequentemente acontece que o modelo analítico produz inicialmente características que não coincidem com os testes modais, conseqüentemente, o modelo analítico será ajustado até que os resultados concordem com os dos testes modais. O resultado é um modelo detalhado que pode ser usado para o estudo do comportamento do sistema sob diferentes

¹ Neste trabalho define-se como dados experimentais aqueles obtidos via AME ou teste modal.

condições de operação, carregamento e em situações em que a realização de um teste modal não é possível.

O objetivo fundamental do ajuste de modelos pode ser definido em forma pontual como o refinamento de um modelo analítico existente que represente a estrutura real em estudo dentro de uma faixa de frequência. Pode-se identificar alguns critérios que um bom modelo deve satisfazer. O modelo analítico terá que reproduzir:

- As propriedades modais em pontos medidos e não medidos.
- As funções de resposta em frequência (FRF) medidas e não medidas.
- As corretas conectividades.

O objetivo deste trabalho é avaliar a eficácia das técnicas iterativas de ajuste de modelos usando dados modais experimentais. Através de casos simulados e casos reais de estruturas tipo viga são avaliados os métodos da função objetivo e da variância mínima.

O presente trabalho foi organizado em 5 capítulos e 1 apêndice, os quais de maneira breve são descritos a seguir:

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica de 1968 a 1995 incluindo o tema principal do trabalho, técnicas iterativas de ajuste de modelos com dados modais experimentais, bem como alguns outros métodos iterativos que foram apresentados no decorrer deste período.

No capítulo 3, são apresentados os fundamentos teóricos sobre o qual se sustentam as técnicas da função objetivo e da variância mínima.

No capítulo 4, são apresentados e analisados os resultados obtidos após a aplicação dos métodos estudados aos exemplos simulados e experimentais.

No capítulo 5, apresentam-se as conclusões desta dissertação e algumas sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice A, é mostrado como foram realizados os ensaios de tração da barra de alumínio.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Desenvolvimento histórico

No final dos anos 60 e princípios dos 70 começaram as primeiras tentativas sistemáticas de interação entre os dados modais medidos (frequência e modos), no modelo experimental e os resultados obtidos no modelo analítico, com vistas a ajustar o modelo. No decorrer dos anos uma grande quantidade de trabalhos foram publicados sempre propondo novas e mais abrangentes técnicas visando a solução do problema de ajuste de modelos.

O primeiro levantamento dos trabalhos de modelagem matemática a partir dos dados modais foi realizado em 1969 por Young & On, citados em Lin & Ewins (1990), posteriormente Berman & Flannelly (1971), marcam o início das técnicas de ajuste de modelos via métodos de ajuste direto das matrizes de massa e rigidez (Métodos diretos). Com um enfoque diferente mas mantendo a mesma linha Baruch & Bar-Izhack (1978), Baruch (1978), Berman & Nagy (1983) Chen *et al.* (1983), Caeser (1986) entre outros são, citados nos trabalhos de Imregun & Visser (1991) e Mottershead & Friswell (1993) continuam desenvolvendo estes métodos.

Collins *et al.* (1974), usaram a estatística como base do ajuste de modelos. Este trabalho pode ser considerado como o início das técnicas iterativas, onde o processo de ajuste se desenvolve dentro de um ambiente de sensibilidade (Métodos iterativos de estimação de parâmetros ou de sensibilidade). Trabalhos posteriores são publicados por Friswell (1989),

Mottershead *et al.* (1992), Nalitoela *et al.* (1990-1992), e outros citados em Friswell & Mottershead (1995).

Em anos recentes, métodos usando as funções de resposta em frequência (FRF) têm-se mostrado como uma das técnicas mais promissórias no processo de ajuste. Martines (1981) iniciou o uso das FRFs no lugar dos parâmetros modais, como dados medidos. Posteriormente novos enfoques mas sempre fazendo uso das FRFs como dados medidos são apresentados por Natke (1988), Lin & Ewins (1990), Dos Santos & Arruda (1990), Friswell & Penny (1990), etc.

2.2 Revisão da literatura

Com o advento da tecnologia e devido ao grande desenvolvimento da informática e das técnicas computacionais, as simulações das respostas dinâmicas de sistemas mecânicos, têm-se tornado cada vez mais atrativas do ponto de vista econômico (tempo computacional). Porém grandes desvios são geralmente observados na comparação das respostas simuladas com aquelas medidas no sistema real. Este fato ocorre em grande parte devido a três motivos fundamentais: erros na modelagem, erros nos parâmetros do modelo e erros na ordem do modelo.

Os erros na modelagem ocorrem devido a simplificações matemáticas das equações que governam as leis físicas. Os erros nos parâmetros do modelo ocorrem devido ao fato de alguns dos valores dos parâmetros físicos da estrutura não são conhecidos. Finalmente os erros na ordem do modelo surgem na discretização de sistemas complexos e que podem resultar em modelos de ordem insuficiente.

Segundo Imregun & Visser (1991), o modelo é usualmente ajustado através de um processo que pode ser dividido em dois passos: localização dos erros e suas conseqüentes correções. As dificuldades na localização dos erros surgem devido:

- Ao número insuficiente de modos e coordenadas experimentais.
- A incompatibilidade no tamanho das malhas dos modelos experimentais e de elementos finitos

- A contaminação dos dados medidos com erros sistemáticos e aleatórios inerentes aos processos de medição.
- A sensibilidade dos métodos de ajuste à configuração sensor-atuador, seleção dos dados modais e normalização dos modos identificados.

Assim, as rotinas de ajuste no contexto geral procuram encontrar o conjunto de parâmetros do modelo matemático que minimizem as diferenças entre os dados medidos e os obtidos por modelos analíticos, ou do ponto de vista estatístico, procuram os valores mais prováveis dos parâmetros do modelo. A partir desta formulação geral um grande número de aplicações é encontrado para a solução de problemas nas áreas de Economia , Biologia e Engenharia.

Na atualidade, os métodos de ajuste podem ser classificados em dois grandes grupos: ajuste direto das matrizes e técnicas iterativas de estimação de parâmetros ou sensibilidade. Nesse sentido, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos como foi descrito anteriormente. Uma revisão dos artigos fornecendo uma visão geral das técnicas de ajuste pode ser encontrado nos trabalhos de Ibrahim & Saafan (1987), Heylen & Sas (1987), Imregum & Visser (1991) Mottershead & Friswell (1993) e Fiswell & Mottershead (1995).

Baruch & Bar-Itzhack (1978), e Baruch (1978), introduzem a base sobre a qual se fundamenta os métodos diretos de ajuste de modelos, através do ajuste das matrizes de massa e rigidez. Eles consideram a matriz de massa analítica como correta assim, os modos medidos são corrigidos de forma a serem ortogonais à matriz de massa analítica; a matriz de rigidez será ajustada minimizando a norma Euclidiana de uma matriz erro. Os multiplicadores de Lagrange são utilizados para forçar a satisfação da equação dinâmica e a simetria das matrizes de massa e rigidez.

Berman & Nagy (1983), usaram um método similar ao de Baruch. Neste caso os dados medidos são tomados como referência e as matrizes de massa e rigidez serão ajustadas. A matriz de massa é ajustada para garantir a ortogonalidade dos modos medidos e a matriz de rigidez é calculada usando a mesma equação que Baruch, mas com a matriz de massa ajustada.

Estes métodos têm a grande vantagem de reproduzir exatamente os dados medidos e de não requerer iterações, eliminando desta maneira as possibilidades de divergência e computação excessiva, mas requerem modelagem e medição com qualidade muito alta, assim como também as matrizes de massa e rigidez do modelo ajustado perdem significado físico e nem garante que estas matrizes sejam positivas definidas.

Em anos recentes os métodos baseados na sensibilidade têm adquirido popularidade devido a sua habilidade para reproduzir as corretas frequências naturais medidas e os modos de vibrar. Quase todos os métodos baseados na sensibilidade computam uma matriz de sensibilidade S , considerando-se as derivadas parciais dos parâmetros modais em relação às variáveis físicas do projeto ou com relação aos elementos variáveis da matriz via uma expansão em series de Taylor truncada. No cálculo desta matriz de sensibilidade existem vários trabalhos propondo novas técnicas as quais tentam sempre melhorar e otimizar o custo computacional para a obtenção das derivadas dos parâmetros modais.

Fox & Kappor (1968), propõem uma técnica para o cálculo da sensibilidade dos autovalores e autovetores em relação direta aos parâmetros estruturais. O método é aplicável a sistemas simétricos e só é requerido o conhecimento dos autovalores e seus respectivos autovetores associados. O cálculo da derivada dos autovalores é facilmente obtido derivando diretamente a equação $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\phi = 0$ e levando em conta as propriedades de ortogonalidade e simetria. Duas formulações para o cálculo dos autovetores são propostas: A primeira, parte do conhecimento de que a matriz $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})$ é singular de posto $(n - 1)$; utilizando-se os conceitos de dependência e independência linear, esta será modificada e convertida em uma matriz de posto pleno (n) , após o qual é facilmente obtida a matriz das derivadas. A segunda formulação considera que esta derivada pode ser expressa como uma combinação linear dos autovetores, toda vez que estes formam uma conjunto linearmente independente. Assim, qualquer subconjunto dele pode ser expresso como uma combinação linear dos outros.

Collins & Thomson (1969), propõem um outro método para determinar a sensibilidade dos autovalores e autovetores. Nele, a matriz de sensibilidade pode ser decomposta como o produto de duas matrizes (Collins *et al.* 1974). A primeira, relaciona as derivadas parciais dos autovalores

e autovetores ou deslocamentos modais com relação aos coeficientes de massa e rigidez, enquanto a segunda matriz, relaciona os elementos individuais da massa e rigidez com os parâmetros estruturais sob consideração. É importante observar que para o cálculo da sensibilidade dos autovalores só é requerido o conhecimento da matriz de massa e o correspondente autovetor associado, no entanto a sensibilidade dos autovetores requerem matriz modal completa, o qual é indesejável em problemas de grande porte.

Nelson (1976), apresenta um outro procedimento para calcular a sensibilidade dos autovalores e autovetores. Este método não é mais que uma extensão do método apresentado por Fox & Kappor (1968). Neste caso as derivadas dos parâmetros modais são validas tanto para sistemas simétricos, como não simétricos, assim o cálculo das derivada dos autovalores e autovetores a esquerda e direita são determinados.

Friswell & Mottershead (1995), apresentam o método da função objetivo como alternativa para o processo de ajuste. Nele, expressam os dados modais em relação aos parâmetros desconhecidos via uma expansão em series de Taylor truncada. Os parâmetros ajustados são obtidos pela minimização de uma determinada função objetivo. Duas considerações são levadas em conta: mais medidas que parâmetros e mais parâmetros que medidas. No primeiro caso, o sistema é sobredeterminado pois possui mais equações que incógnitas, levando a uma solução de mínimos quadrados. Para o segundo caso o sistema é subdeterminado levando a um problema de otimização, assim uma solução de mínima norma é utilizada. Em ambos os casos as medidas e os parâmetros são ponderados buscando desta forma levar em conta a experiência do engenheiro sobre algumas características inerentes as medições ou aos parâmetros melhorando o condicionamento numérico do problema.

Collins *et al.* (1972 - 1974), introduziram o método da mínima variância. Eles assumem que dados medidos (frequência e modos de vibrar) e parâmetros estimados são estatisticamente independentes ou não correlacionados e que cada um deles, possuem erros que podem ser representados por matrizes de variância. Similarmente ao método da função objetivo a expansão em séries de Taylor é usada e truncada após o termo linear, de forma a relacionar dados medidos

e parâmetros estimados. Assim, os parâmetros estimados são ajustados via um estimador de variância mínima (Lewis & Odell 1971).

Friswell (1989), apresentou um método similar ao desenvolvido por Collins *et al.* (1972-1974). Desta vez a correlação entre os dados medidos e os parâmetros estimados é levada em conta, pois embora os parâmetros estimados iniciais e o erro dos dados medidos sejam independentes (não correlacionados), os subsequentes parâmetros estimados, não o são mais. Assim, toda vez que as medições são usadas no processo de ajuste, os parâmetros estimados e os dados medidos estarão correlacionados. Portanto, neste processo o cálculo de uma matriz de correlação é incorporada.

Uma outra técnica de ajuste de modelos foi apresentada por Nalittle *et al.* (1990 - 1992), onde é proposta uma alternativa para evitar um problema subdeterminado, através da adição de massas e molas na estrutura. Assim, a estrutura real e sua modelagem teórica são perturbadas por esta adição. No processo de ajuste só os autovalores são usados, pois estes podem ser medidos com precisão maior que os autovetores. Portanto, os autovalores medidos antes e depois da adição das massas e molas são usados para ajustar os parâmetros via uma análise de sensibilidade. O sucesso desta técnica depende de que a perturbação seja suficiente para que haja variações significativas nas frequências naturais.

Os métodos vistos até agora fazem uso apenas dos dados modais (frequência e modos) extraídos das funções de resposta em frequência (FRF). Recentemente têm-se observado um interesse crescente no uso das FRFs como dados medidos, neste caso a extração dos autovalores e autovetores não são mais requeridos e as FRFs são usadas diretamente no processo de ajuste. Estas técnicas tem a vantagem de que cada FRF individual medida, contém maior informação dos modos dentro e fora da faixa de frequência de interesse. O problema é que o amortecimento tem que ser incluído no modelo de elementos finitos a fim de ter uma boa correspondência entre as FRFs medidas e as previstas analiticamente. Dois diferentes tipos de funções objetivo buscando minimizar a diferença das FRFs medidas e as obtidas analiticamente são em geral empregadas: o erro na entrada (*input error*) e o erro na saída (*output error*). O erro na entrada tem a vantagem de permitir a obtenção direta dos parâmetros do sistema, via um estimador de mínimos

quadrados, dado que o erro é função linear dos parâmetros, mas têm a desvantagem de que o estimador é polarizado com relação à existência de ruído na saída. Além disso apresenta a necessidade de se realizar medições em tantos graus de liberdade quantos forem os graus de liberdade do modelo dinâmico. O erro na saída têm a vantagem de que o modelo não é polarizado com relação à existência de ruído na saída e não requer a medição de todos os pontos, no entanto, têm a desvantagem de requerer a minimização de uma função objetivo não linear, o que traz consigo problemas de convergência e tempo computacional. Alguns trabalhos que usam este enfoque são citados em Mottershead & Friwell (1993) e Friswell e Mottershead (1995).

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

3.1 Marco teórico

Neste capítulo será apresentado uma revisão do desenvolvimento teórico utilizado pelos métodos de ajuste empregados no presente trabalho: o *método da função objetivo* e o *método da variância mínima*. No método da função objetivo (Friswell & Mottershead 1995) são considerados dois casos: sobredeterminado e subdeterminado. Em ambos os casos são propostas diversas hipóteses e restrições tentando obter uma boa correlação entre os dados medidos e os analiticamente obtidos, assim como melhorar o condicionamento numérico do problema. No método da variância mínima dois casos são estudados: o primeiro considera que os dados medidos e os parâmetros estimados são estatisticamente independentes, portanto não correlacionados (Collins *et al.*, 1974) e o segundo considera que existe correlação (Friswell 1989). O cálculo da matriz de sensibilidade é também apresentada (Fox & Kappor, 1968).

3.2 Métodos iterativos usando dados modais

Os métodos iterativos assim como todas as técnicas de ajuste de modelos, tem por objetivo fundamental melhorar a correlação entre os dados medidos e os dados previstos no modelo analítico. Estas técnicas foram desenvolvidas dentro de uma análise de sensibilidade onde um processo iterativo é requerido a fim de determinar que parâmetros estruturais reproduzem os dados modais. Assim, se a variação dos parâmetros em iterações sucessivas é pequena, uma boa

estimativa do modelo é avaliada. A correlação é determinada por uma função objetivo, a qual envolve frequências e modos. Estas funções objetivo são geralmente funções não lineares dos parâmetros, portanto a solução requer que o problema seja linearizado e otimizado iterativamente trazendo consigo possíveis problemas de convergência inerentes ao método.

Estes métodos permitem uma ampla seleção dos parâmetros a serem ajustados e ambos, parâmetros estimados e dados medidos, podem ser ponderados. Esta capacidade de ponderação torna o método mais eficiente e versátil, pois permite atribuir maior peso aos dados de maior confiança no modelo, além de melhorar o condicionamento numérico do problema.

Em princípio o procedimento de ajuste de modelos usa a diferença entre os autovalores e autovetores medidos e os analiticamente obtidos, a fim de identificar ou estimar aqueles parâmetros modais que afetam estas quantidades. Portanto, a sensibilidade dos autovalores e autovetores é requerida. Usualmente esta está na forma de uma matriz jacobiana cujos elementos são as derivadas parciais dos autovalores e autovetores com relação aos parâmetros a serem identificados. Embora vários métodos para a avaliação destas derivadas tenham sido desenvolvidos (Fox & Kappor, 1968; Collins *et al.*, 1969; Nelson, 1976; Zhang & Lallement, 1989; entre outros) a maior dificuldade é estabelecer o relacionamento entre os parâmetros sob consideração e os elementos individuais das matrizes de massa e rigidez do modelo. Para estruturas simples tais como, sistemas multi-corpos e vigas a formulação analítica das matrizes de massa e rigidez é facilmente avaliada, no entanto para estruturas complexas, a influencia de certos parâmetros nos elementos das matrizes de massa e rigidez do modelo não é tão óbvia. Além disso se o modelo utiliza matriz de massa consistente ou técnicas de síntese modal, o relacionamento entre os parâmetros e os elementos das matrizes de massa e rigidez são igualmente complicados.

3.3 Comparação e correlação de modelos

O conjunto de dados experimentais na grande maioria dos casos é incompleto; isto se deve ao fato de que o número de coordenadas e graus de liberdade que definem o modelo analítico superam as correspondentes coordenadas e graus de liberdade medidos do modelo experimental.

Contudo, as técnicas de ajuste de modelos requerem uma correspondência um a um entre os dois conjuntos de dados, logo o modelo analítico será reduzido ou o modelo experimental será expandido a fim de que tenham a mesma dimensão.

Muita pesquisa foi desenvolvida neste campo e assim alguns trabalhos foram apresentados por Guyan (1965), Paz (1974), Ocallaham (1989), Ocallaham *et al.* (1989), entre outros. No desenvolvimento do presente trabalho foi utilizada esta última técnica mais conhecida como método SEREP. Em geral, todas as técnicas de redução de modelos computam uma matriz de transformação $\mathbf{T}$, que reduz a matriz modal analítica segundo os graus de liberdade medidos no modelo experimental, logo para o método do SEREP a matriz $\mathbf{T}$ de transformação pode ser expressa como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_s \end{bmatrix} \Phi_m^+ \quad (3.1)$$

onde $\begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_s \end{bmatrix}$ é a matriz de autovetores do modelo analítico que inclui os graus de liberdade medidos (Φ_m) e não medidos (Φ_s) assim representados, e Φ_m^+ é a pseudo inversa da matriz analítica dos graus de liberdade medidos, que pode ser expressa como:

$$\Phi_m^+ = \left(\Phi_m^T \Phi_m \right)^{-1} \Phi_m^T \quad (3.2)$$

as novas matrizes de massa e rigidez para o modelo reduzido serão:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (3.4)$$

Para o caso da expansão de dados modais os graus de liberdade não medidos, do modelo experimental, podem ser estimados utilizando o modelo de elementos finitos. Assim os modos

medidos podem ser expressos como combinação linear dos seus correspondentes modos analíticos

$$[\Phi_{\text{exp}}]_m = [\Phi_a]_m \mathbf{T} \quad (3.5)$$

onde $[\Phi_a]_m$ são os autovetores analíticos dos graus de liberdade correspondentes aos medidos, e $[\Phi_{\text{exp}}]_m$ são os autovetores experimentais medidos, logo a matriz de transformação $\mathbf{T}$ será dada por:

$$\mathbf{T} = [\Phi_a]_m^+ [\Phi_{\text{exp}}]_m \quad (3.6)$$

assim os autovetores experimentais não medidos, podem se expressos por

$$[\Phi_{\text{exp}}]_s = [\Phi_a]_s \mathbf{T} \quad (3.7)$$

$[\Phi_a]_s$ denota os modos analíticos dos graus de liberdade não medidos.

3.3.1 Fator de correlação modal

O grau de correlação entre dois conjuntos de dados modais é muito importante para a comparação de dois modelos. Assim por exemplo a correlação entre os autovetores medidos e os obtidos por métodos analíticos pode ser determinada pelo fator de escala modal (*Modal Scale Factor – MSF*) que pode ser definido como o fator de proporcionalidade entre os autovetores medidos ou experimentais e seu correspondente analítico, (Allemang & Brown. 1982). O *MSF* é definido como:

$$MSF(\phi_{ai}, \phi_{mj}) = \frac{\phi_{ai}^T \phi_{mj}}{\phi_{mj}^T \phi_{mj}} \quad (3.8)$$

onde ϕ_{ai} representa o i -ésimo autovetor analítico e ϕ_{mj} o j -ésimo autovetor medido.

Uma outra forma de avaliar a correlação entre dados medidos e previstos pode ser feita usando-se o critério de confiança modal (*Modal Assurance Criterion - MAC*). Esta é uma das técnicas mais comuns de correlação, a qual estabelece a correlação entre os modos analíticos ϕ_{ai} e os medidos ϕ_{mj} , que pode ser definido como:

$$MAC(\phi_{ai}, \phi_{mj}) = \frac{|\phi_{ai}^T \phi_{mj}|}{(\phi_{ai}^T \phi_{ai})(\phi_{mj}^T \phi_{mj})} \quad (3.9)$$

Tanto no *MSF* como no *MAC* valores próximos de 1 indicam uma boa correlação entre os modos medidos e os analíticos e valores próximos de 0 indicam modos não correlacionados.

3.4 Método da função objetivo

O objetivo fundamental do método da função objetivo é maximizar a correlação entre os dados medidos e os parâmetros analíticos do modelo. Este método usa geralmente uma expansão em séries de Taylor truncada para expressar os dados modais em termos dos parâmetros estruturais. Assim, considerando matematicamente o comportamento dinâmico de uma função z com n variáveis $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n)$, o relacionamento entre a função z e a variável θ_n pode ser escrita como:

$$z(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n) = z(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3 \dots \bar{\theta}_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_i} \right)_{\theta_i=\bar{\theta}_i} (\theta_i - \bar{\theta}_i) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_i^2} \right)_{\theta_i=\bar{\theta}_i} (\theta_i - \bar{\theta}_i)^2 + \dots \quad (3.10)$$

Com a finalidade de produzir uma aproximação linear as series de Taylor são truncadas, além disso para pequenas diferenças entre θ_i (valor do parâmetro) e $\bar{\theta}_i$ (valor estimado do parâmetro) a Eq. (3.10) pode ser aproximada como:

$$z(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n) = z(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3 \dots \bar{\theta}_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_i} \right)_{\theta_i = \bar{\theta}_i} (\theta_i - \bar{\theta}_i) \quad (3.11)$$

logo, em forma matricial temos:

$$\delta \mathbf{z} = \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.12)$$

ou:

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z} &= \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j && \text{variação das medidas} \\ \delta \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_j && \text{variação dos parâmetros} \\ \mathbf{S} &= \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] && \text{matriz de sensibilidade ou Jacobiana} \end{aligned}$$

Da Eq. (3.13), o valor do parâmetro na j -ésima iteração é $\boldsymbol{\theta}_j$ e o resultado de saída baseado neste parâmetro é $\mathbf{z}_j$. Os parâmetros do vetor $\boldsymbol{\theta}$ representam os parâmetros atuais que tentam reproduzir os dados medidos. $\mathbf{S}_j$ é a matriz de sensibilidade que contém as derivadas dos autovalores e autovetores com relação aos parâmetros calculados através da estimativa de $\boldsymbol{\theta}_j$.

3.4.1 Cálculo da matriz de sensibilidade

O cálculo da sensibilidade dos autovalores e autovetores em relação aos parâmetros têm sido alvo de muita pesquisa e vários trabalhos foram apresentados nesse campo. Todos eles em geral tentam otimizar trabalhos anteriores, facilitando assim a obtenção destas derivadas e diminuindo o custo computacional.

Durante o desenvolvimento da presente dissertação foram analisadas as propostas de Collins *et al.* (1974) e Fox & Kappor (1968) para o análise de sensibilidade, sendo que escolho-se a técnica de Fox & Kappor, devido ao comportamento mais eficiente demonstrado durante o processo de ajuste.

A matriz de sensibilidade segundo Fox & Kappor (1968), pode ser expressa como a relação direta entre as derivadas parciais dos parâmetros modais (autovalores e autovetores) com relação aos parâmetros estruturais, assim:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Um breve resumo do desenvolvimento matemático da matriz de sensibilidade é apresentado a continuação.

Na dinâmica estrutural, o mecanismo preciso de amortecimento não é bem conhecido. Portanto, como o nível de amortecimento é usualmente baixo, este é omitido e assim a parte significativa do análise dinâmico envolve a solução do seguinte problema:

$$\mathbf{K}\psi_i = \lambda_i \mathbf{M}\psi_i \quad (3.15)$$

onde λ_i e ψ_i , autovalores e autovetores respectivamente, são determinados pela solução do problema de autovalores e autovetores, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ são as matrizes de massa e rigidez de ordem $n \times n$. A ordem n corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Logo assumindo que:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(\lambda_i, \theta) \equiv \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} \quad (3.16)$$

da Eq. (3.15) e (3.16), obtemos:

$$\mathbf{F}_i \psi_i = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

pré - multiplicando a Eq. (3.17) por ψ_i^T ,

$$\psi_i^T \mathbf{F}_i \psi_i = 0 \quad (3.18)$$

diferenciando a Eq. (3.18) em relação ao parâmetro θ ,

$$\frac{\partial \psi_i^T}{\partial \theta} \mathbf{F}_i \psi_i + \psi_i^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} \psi_i + \psi_i^T \mathbf{F}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

da Eq. (3.17), e dado que $\mathbf{F}_i$ é simétrica, o primeiro e terceiro termo da Eq. (3.19) são zero, portanto:

$$\psi_i^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} \psi_i = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

diferenciando a Eq. (3.16) obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \quad (3.21)$$

substituindo na Eq. (3.20) e lembrando que $\psi_i^T \mathbf{M} \psi_i = m_i$, obtemos finalmente:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} = \frac{1}{m_i} \psi_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right] \psi_i \quad (3.22)$$

Observar que a expressão anterior só envolve os autovalores e autovetores sob consideração, assim a solução completa do problema não é necessária para a obtenção das derivadas.

A derivada dos autovetores pode ser obtidas por duas formulações: a primeira é obtida diferenciando a Eq. (3.17) e a equação de ortogonalidade $\psi_i^T \mathbf{M} \psi_i = m_i$, obtendo-se respectivamente:

$$\mathbf{F}_i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} \psi_i \quad (3.23)$$

e

$$2\psi_i^T \mathbf{M} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = -\psi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \psi_i \quad (3.24)$$

$\mathbf{F}_i$ é uma matriz singular de posto $(n-1)$ se a solução do sistema Eq. (3.14) tiver autovalores distintos, além disso pode ser mostrado que a Eq. (3.24) é linearmente independente da Eq. (3.23), assim obtém-se um sistema sobredeterminado que pode ser escrito na forma particionada como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \hline 2\psi_i^T \mathbf{M} \end{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} \\ \hline \psi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \psi_i \quad (3.25)$$

pré-multiplicando a Eq. (3.25) por $[\mathbf{F}_i / \psi_i^T \mathbf{M}]^T$ obtemos a expressão da derivada dos autovetores.

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = -[\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mathbf{M} \psi_i \psi_i^T \mathbf{M}]^{-1} \left[\mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} + \mathbf{M} \psi_i \psi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right] \psi_i \quad (3.26)$$

A segunda formulação considera que devido ao fato de que os autovetores formam uma base completa de vetores, quaisquer componentes desta podem ser expressos como combinações lineares dos outros. De maneira similar a derivada dos autovetores, pode ser obtida como uma combinação linear dos autovetores do modelo analítico.

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \psi_j \quad (3.27)$$

onde o valor do coeficiente α_{ij} será determinado substituindo a Eq. (3.27) na Eq. (3.23) e premultiplicando por ψ_j^T . Assim:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \psi_j^T \mathbf{F}_i \psi_j = -\psi_j^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} \psi_i \quad (3.28)$$

a partir de onde obtemos:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{m_j (\lambda_j - \lambda_i)} \psi_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \right] \psi_i \quad \text{para } i \neq j$$

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2m_i} \psi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \psi_i \quad \text{para } i = j$$
(3.29)

Desta forma, duas formulações para o cálculo das derivadas dos autovetores foram apresentadas. Embora a primeira formulação tenha sido apresentada, esta não será utilizada no algoritmo de ajuste e sim a segunda, devido ao fato de ser computacionalmente mais eficiente.

3.4.2 Montagem do vetor dos dados medidos

Considere que as p primeiras frequências naturais e modos medidos sejam dadas por λ_{mi} e ϕ_{mi} , o i -ésimo autovalor e autovetor medido respectivamente. Assumindo que não exista amortecimento no sistema, o vetor de dados modais medidos $\mathbf{z}_m$ pode ser definido como:

$$\mathbf{z}_m = \begin{Bmatrix} \lambda_{m1} \\ \lambda_{m2} \\ \vdots \\ \lambda_{mp} \\ \phi_{m1} \\ \phi_{m2} \\ \vdots \\ \phi_{mp} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde as medidas dos autovalores e autovetores são assumidas terem sido obtidas através da análise modal experimental da estrutura. Por outro lado, no modelo analítico o vetor $\mathbf{z}$ pode ser definido por:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

onde λ_i e ϕ_i , representam os autovalores e autovetores analíticos correspondentes aos medidos.

As mais diferentes combinações dos autovalores e autovetores podem ser incluídas nos vetores $\mathbf{z}_m$ e $\mathbf{z}$ desde que a informação contida em um, corresponda àquela contida no outro. Por exemplo, se mais de um experimento é feito, dois ou mais valores de mesma quantidade podem ser incluídas no vetor de dados medidos, desde que exista uma respectiva correspondência um a um nos vetores de medidas e o analítico.

É importante levar em conta antes de iniciar o processo de ajuste, certas considerações a fim de garantir uma adequada correspondência entre os dados medidos e os preditos analiticamente (Friswell & Mottershead, 1995).

- As frequências naturais analíticas e experimentais precisam se referir ao mesmo modo. Ordená-las em forma ascendente não é suficiente, especialmente quando dois modos são próximos em frequência, ou quando a força de excitação ou acelerômetro são colocados num nó de um modo particular. Então, se o modo não é excitado o modo analítico não terá seu correspondente modo experimental. O *MAC* entre os modos experimentais e os analíticos garante a correspondência.

- Como a distribuição em massa do modelo analítico (MEF) e do modelo experimental podem ser diferentes, os modos podem não se encontrarem escalonados em forma consistente. Multiplicar os modos experimentais pelo fator de escala modal MSF resolve o problema.
- Se o amortecimento não está presente no modelo de elementos finitos, as frequências naturais são incluídas nas Eqs. (3.30) e (3.31). Neste caso, os termos λ_i são melhor representados pela frequência natural ao quadrado, e os modos reais são estimados a partir de modos complexos (Mitchel 1990, e Niedbal 1984). No caso em que o amortecimento seja incluído no modelo de elementos finitos, autovalores e modos complexos podem ser usados no vetor de medidas.

Os métodos das funções objetivo podem ser considerados como soluções gerais da Eq. (3.13), assim os valores dos parâmetros ajustados serão obtidos minimizando-se alguma função objetivo. Estas funções podem levar em conta diversas matrizes de ponderação, as quais permitem dar maior peso a dados que são de maior confiança, assim como melhorar o condicionamento numérico do problema. Em geral, na procura desta solução dois casos típicos se apresentam: *sobredeterminado* e *subdeterminado*.

3.4.3 Caso sobredeterminado

Neste caso, o número de dados medidos é maior que o número de parâmetros a ajustar ou matematicamente o número de equações é maior que o número de incógnitas. Este problema caracteriza o caso sobredeterminado, onde não existe solução exata para a Eq. (3.13). Assim, uma aproximação utilizando mínimos quadrados deve ser empregada a fim de minimizar a função objetivo:

$$J(\delta\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon \quad (3.32)$$

onde $\varepsilon = \delta \mathbf{z} - \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta}$ é o erro baseado nas medidas previstas com os parâmetros ajustados. Substituindo a expressão do erro na Eq. (3.32), teremos:

$$J(\delta \boldsymbol{\theta}) = \delta \mathbf{z}^T \delta \mathbf{z} - 2 \delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{S}_j^T \delta \mathbf{z} + \delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{S}_j^T \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.33)$$

Minimizar J em relação a $\delta \boldsymbol{\theta}$ significa:

$$\nabla J(\delta \boldsymbol{\theta}) = 0 = -\mathbf{S}_j^T \delta \mathbf{z} + \mathbf{S}_j^T \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.34)$$

resolvendo para $\delta \boldsymbol{\theta}$ teremos:

$$\delta \boldsymbol{\theta} = [\mathbf{S}_j^T \mathbf{S}_j]^{-1} \mathbf{S}_j^T \delta \mathbf{z} \quad (3.35)$$

assim, os parâmetros ajustados podem ser obtidos por:

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + [\mathbf{S}_j^T \mathbf{S}_j]^{-1} \mathbf{S}_j^T (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.36)$$

Neste caso, todas as medidas estão sendo igualmente ponderadas. Na prática em testes de vibrações típicos as frequências naturais e os modos são obtidos dentro de uma variação de 1% e 10%, respectivamente; assim em geral nas estruturas, os dados das frequências são mais confiáveis que os modos de vibrar. Esta relativa imprecisão pode ser incorporada no algoritmo, minimizando-se a função objetivo ponderada:

$$J(\delta \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \varepsilon \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{W}_\varepsilon$ é uma matriz de ponderação positiva definida, a qual permite dar uma relativa incerteza o grau de confiança nos dados medidos. A seleção destas matrizes se baseiam em estimar os desvios padrões, pois o desvio padrão dá uma estimativa quantitativa da incerteza dos

parâmetros. Embora a estimação destas quantidades seja difícil e sujeita a erros, uma alternativa efetiva é assumir valores arbitrários. Usualmente a matriz de ponderação é diagonal cujos elementos são dados pela recíproca da variância das correspondentes medições. A recíproca é usada devido ao fato que dados exatos tem pequenas variâncias por tanto requer de grandes ponderações no algoritmo de ajuste (Blakely & Walton, 1984).

Minimizando a Eq. (3.37), obtém-se a variação dos parâmetros:

$$\delta\theta = \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j \right]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} \quad (3.38)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j \right]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.39)$$

A fim de melhorar o condicionamento numérico das Eqs. (3.35) e (3.38) adiciona-se um termo à função objetivo, que irá ponderar as variações nos parâmetros. Neste caso, a variação nos parâmetros em cada iteração será limitada pela inclusão de um termo na função objetivo, logo:

$$J(\delta\theta) = \varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \varepsilon + \delta\theta^T \mathbf{W}_\theta \delta\theta \quad (3.40)$$

$\mathbf{W}_\theta$ é a matriz de ponderação dos parâmetros e é igualmente selecionada que a matriz $\mathbf{W}_\varepsilon$, substituindo-se $\varepsilon = \delta\mathbf{z} - \mathbf{S}_j \delta\theta$ na Eq. (3.40) e arranjando os termos, obtém-se:

$$J(\delta\theta) = \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - 2\delta\theta^T \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} + \delta\theta^T \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right] \delta\theta \quad (3.41)$$

Minimizando esta função objetivo em relação a $\delta\theta$ obtém-se a variação nos parâmetros como:

$$\delta\theta = \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} \quad (3.42)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.43)$$

No caso anterior ponderou-se as mudanças dos parâmetros a cada iteração. A ponderação completa dos parâmetros requer a inclusão das diferenças entre os parâmetros iniciais estimados e os parâmetros ajustados.. Assim, a nova função objetivo será dada por:

$$J(\delta\boldsymbol{\theta}) = \varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \varepsilon + \{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\}^T \mathbf{W}_\theta \{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\} \quad (3.44)$$

onde $\boldsymbol{\theta}_0$ é o vetor das estimativas iniciais dos parâmetros. Expandindo o segundo termo e substituindo o valor de ε obtém-se a função objetivo:

$$\begin{aligned} J(\delta\boldsymbol{\theta}) = & \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} + \{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_0\}^T \mathbf{W}_\theta \{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_0\} \\ & - 2\delta\boldsymbol{\theta}^T \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_\theta \{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_0\} \right] + \delta\boldsymbol{\theta}^T \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right] \delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Minimizando esta função com relação aos parâmetros obtém-se a variação nos parâmetros

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right]^{-1} \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_\theta \{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_0\} \right] \quad (3.46)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta \right]^{-1} \left[\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) - \mathbf{W}_\theta \{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_0\} \right] \quad (3.47)$$

Uma outra alternativa para melhorar o condicionamento numérico do problema é a normalização dos parâmetros, a fim de que seu valor inicial seja 1, pois na prática a ordem de grandeza (magnitude) dos parâmetros a ajustar podem ser ou não muito diferentes.

3.4.4 Caso subdeterminado

Quando o número de parâmetros é maior que o número de medidas, a solução da Eq. (3.13) será subdeterminada, dado que o número de equações é menor que o número de incógnitas. Tipicamente é esperado um número infinito de soluções, e um critério de solução terá que ser introduzido. Uma solução amplamente usada é dada pela “mínima norma”, logo o problema pode ser reformulado como um problema de otimização, isto equivale a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(\delta\theta) &= \frac{1}{2} \delta\theta^T \delta\theta \\ \text{Sujeito a } \delta\mathbf{z} &= \mathbf{S}\delta\theta \end{aligned} \quad (3.48)$$

A solução analítica pode ser obtida aplicando a regra dos multiplicadores de Lagrange e é dada por:

$$\delta\theta = \mathbf{S}^T [\mathbf{S} \mathbf{S}^T]^{-1} \delta\mathbf{z} \quad (3.49)$$

assim os parâmetros ajustados podem ser obtidos por:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{S}_j^T [\mathbf{S} \mathbf{S}^T]^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.50)$$

Uma solução mais ampla pode ser obtida introduzindo uma matriz de ponderação simétrica, positiva definida, pois como foi dito, usualmente em elementos finitos alguns parâmetros são estimados de forma mais precisa que outros, logo o novo problema será:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(\delta\theta) &= \frac{1}{2} \delta\theta^T \mathbf{W}_\theta \delta\theta \\ \text{Sujeito a } \delta\mathbf{z} &= \mathbf{S}\delta\theta \end{aligned} \quad (3.51)$$

resolvendo de forma análoga ao caso não ponderado, teremos:

$$\delta\theta = \mathbf{W}_{\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T [\mathbf{S}_j \mathbf{W}_{\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T]^{-1} (\delta\mathbf{z}) \quad (3.52)$$

os parâmetros ajustados serão:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{W}_{\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T [\mathbf{S}_j \mathbf{W}_{\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T]^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.53)$$

Uma alternativa para inversa generalizada, é explicitar as mudanças dos parâmetros bem como o erro das medições na função objetivo (Eqs. 3.40 e 3.44). Assim as Eqs. (3.43) e (3.47) podem ser empregadas no algoritmo.

3.5 Método da variância mínima

Estes métodos se caracterizam por utilizar as estatísticas como base do ajuste de modelos, neles se assume que os parâmetros estimados e as medições possuem erros, assim a qualidade das medições e dos parâmetros a serem ajustados podem ser expressos em termos de matrizes variância. Em geral, estes métodos podem ser considerados como métodos da função objetivo cujas matrizes de ponderação mudam em uma forma particular, de uma a outra iteração.

Segundo Friswell & Mottershead (1995), os métodos da variância mínima têm sua raiz no estimador de Bayesian, com a diferença de que um processo iterativo para ajustar o modelo é necessário devido que o modelo modal é função não linear dos parâmetros. De maneira similar ao método da função objetivo, o processo é desenvolvido dentro de uma análise de sensibilidade, onde a primeira ordem da expansão em séries de Taylor é empregada.

O relacionamento entre estes métodos e o estimador de Bayesian é mais em espírito que no cálculo prático. O estimador de Bayesian está baseado na fórmula de Bayes', que da uma função de densidade de probabilidade - *pdf* dos parâmetros, incluindo a informação das medições (o *pdf* a posteriori), em termos do *pdf* do parâmetro antes de ajustado (o *pdf* a priori). O estimador pode ser gerado a partir do *pdf* a posteriori, aplicando para isto vários caminhos, tais como a media do *pdf*. Na literatura, os *pdf* são assumidos Gaussianos que dependem unicamente da media e a

variância. Assim os parâmetros ajustados, estimados como os melhores, são aqueles que tem variância mínima.

Collins *et al.* (1972 1974), introduziram o método da variância mínima. Eles assumem que os dados medidos e os parâmetros são estatisticamente independentes, logo a correlação entre eles pode ser considerada zero. Friswell (1989), apresenta um método onde a correlação entre as medidas e os parâmetros é levada em conta, pois certamente não haverá correlação na primeira iteração, mas em iterações subseqüentes a correlação entre as medições e os parâmetros depende dos erros estimados nos elementos finitos.

Algumas hipóteses estatísticas consideradas são:

- $\mathbf{z}_m = \mathbf{z}(\mathbf{S}, \theta) + \varepsilon$ (erros aditivos nas medidas).
- $E[\varepsilon] = 0$ (média zero dos erros das medidas).
- $V(\mathbf{z}_i | \theta) = V_\varepsilon$ (variância dos erros constante.).
- $E[(\varepsilon_i - E[\varepsilon_i])(\varepsilon_j - E[\varepsilon_j])^T] = 0$ para $i \neq j$ (erro não correlacionado).
- ε tem distribuição normal.
- Conhecimento dos parâmetros estatísticos que descrevem ε .

Uma visão mais clara sobre as hipóteses apresentadas pode ser encontrada em Lewis & Odell (1979).

Segundo o método, o ruído nas medições é levado em conta, portanto, o vetor de dados medidos $\mathbf{z}_m$, pode ser expresso em função do vetor $\mathbf{z}$ predito analiticamente e o ruído das medições ε , logo:

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{z} + \varepsilon \quad (3.54)$$

Assumindo que o erro das medições e os parâmetros inicialmente estimados são normalmente distribuídos pela média temos:

$$E[\varepsilon] = 0 \quad , \quad E[\theta_j] = \theta \quad (3.55)$$

onde θ é o vetor atual de parâmetros ajustados, logo a matriz variância de ε e θ , pode ser especificada para análise estrutural como:

$$Var(\varepsilon) = E[\varepsilon \varepsilon^T] = V_\varepsilon \quad (3.56)$$

$$Var(\theta_j) = V_j \quad (3.57)$$

onde: $E[\]$: valor esperado
 V_ε : variância do erro das medições
 V_j : variância do vetor de parâmetros

Se a diferença entre os parâmetros estimado e o ajustado é pequena, então a primeira ordem das séries de Taylor é dada por:

$$z = z_j + S_j(\theta - \theta_j) \quad (3.58)$$

a correlação dos parâmetros estimados e o erro das medições D_j será:

$$D_j = E[\theta_j \varepsilon^T] \quad (3.59)$$

O objetivo agora é produzir um método iterativo que proporcione sucessivamente o valor da variância do parâmetro V_j , da variância do ruído das medições V_ε e a matriz de correlação entre os parâmetros estimados e o ruído das medições D_j , com a qual será estimado o parâmetro θ_{j+1} . No desenvolvimento destas equações dois enfoques são apresentados: caso não correlacionado, e caso correlacionado.

Usando a primeira estimativa do parâmetro θ_j se pode obter θ_{j+1} . Assim:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{G}(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.60)$$

$\mathbf{G}$ é uma matriz que pode ser definida como o caminho que minimiza a variância da diferença entre o parâmetro θ_{j+1} e θ_j , logo o valor esperado de θ_{j+1} será:

$$E[\theta_{j+1}] = E[\theta_j + \mathbf{G}(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)] \quad (3.61)$$

substituindo as Eq. (3.54) e (3.58), na Eq. (3.61) e considerando $\mathbf{G}$ constante temos:

$$E[\theta_{j+1}] = E[\theta_j] + \mathbf{G}\mathbf{S}_j E[\theta - \theta_j] + \mathbf{G}E[\epsilon] \quad (3.62)$$

logo, devido ao fato que a media do ruído é zero e a media dos parâmetro estimados é θ teremos:

$$E[\theta_{j+1}] = \theta \quad (3.63)$$

A matriz variância dos parâmetros ajustados será:

$$\mathbf{V}_{j+1} = E[(\theta_{j+1} - \theta)(\theta_{j+1} - \theta)^T] \quad (3.64)$$

substituindo a Eq. (3.60) na Eq. (3.64) e efetuando o produto teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+1} = & E[(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T] + E[(\theta_j - \theta)(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)^T] \mathbf{G}^T \\ & + \mathbf{G}E[(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)(\theta_j - \theta)^T] + \mathbf{G}E[(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)^T] \mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (3.65)$$

logo usando as Eqs. (3.56) até (3.59), pode-se obter:

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j + (\mathbf{D}_j - \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T) \mathbf{G}^T + \mathbf{G}(\mathbf{D}_j^T - \mathbf{S}_j \mathbf{V}_j) + \mathbf{G}(\mathbf{V}_{z_j}) \mathbf{G}^T \quad (3.66)$$

onde:

$$\mathbf{V}_{zj} = E[(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j)^T] = (\mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{S}_j \mathbf{D}_j - \mathbf{D}_j^T \mathbf{S}_j^T + \mathbf{V}_\varepsilon) \quad (3.67)$$

minimizando a Eq. (3.66) em relação a $\mathbf{G}$ com a finalidade de encontrar os valores de $\mathbf{G}$ que minimizam a variância $\mathbf{V}_{j+1}$, teremos:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{V}_j \mathbf{S} - \mathbf{D}_j) (\mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{S}_j \mathbf{D}_j - \mathbf{D}_j^T \mathbf{S}_j^T + \mathbf{V}_\varepsilon)^{-1} \quad (3.68)$$

Se a correlação entre os parâmetros e o ruído das medições é ignorada (Collins *et al.*, 1974), o valor de $\mathbf{D}_j$ é igual a zero para todo j , logo levando em conta esta consideração e substituindo a Eq. (3.68) nas Eqs. (3.60) e (3.66):

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T (\mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T + \mathbf{V}_\varepsilon)^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.69)$$

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T (\mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T + \mathbf{V}_\varepsilon)^{-1} \mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \quad (3.70)$$

Se a correlação entre os parâmetros estimados e o ruído das medições é considerada, o valor de $\mathbf{D}_j$ será levado em conta. Friswell (1989), considera que se os parâmetros estimados inicialmente são independentes do erro das medições, subseqüentes parâmetros estimados não são mais independentes devido ao fato das medições terem sido usadas no processo de ajuste, logo:

$$E[\theta_j \varepsilon^T] = \mathbf{D}_j \quad (3.71)$$

e $\mathbf{D}_0 = 0$ (estimativa inicial), então o novo valor da matriz de correlação é estimada por:

$$\mathbf{D}_{j+1} = E[\theta_{j+1} \varepsilon^T] \quad (3.72)$$

substituindo as Eqs. (3.56) a (3.60) na Eq. (3.71),

$$\mathbf{D}_{j+1} = \mathbf{D}_j - \mathbf{G}(\mathbf{S}_j \mathbf{D}_j - \mathbf{V}_\varepsilon) \quad (3.73)$$

assim, os parâmetros estimados ajustados, a matriz variância dos mesmos, e a matriz de correlação resultam de substituir a Eq. (3.67) nas Eqs. (3.60), (3.66) e (3.72)

$$\theta_{j+1} = \theta_j + (\mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{D}_j) \mathbf{V}_{zj}^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.74)$$

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j - (\mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{D}_j) \mathbf{V}_{zj}^{-1} (\mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{D}_j)^T \quad (3.75)$$

$$\mathbf{D}_{j+1} = \mathbf{D}_j - (\mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{D}_j) \mathbf{V}_{zj}^{-1} (\mathbf{S}_j \mathbf{D}_j^T - \mathbf{V}_\varepsilon) \quad (3.76)$$

onde:

$$\mathbf{V}_{zj} = \mathbf{S}_j \mathbf{V}_j \mathbf{S}_j^T - \mathbf{S}_j \mathbf{D}_j - \mathbf{D}_j^T \mathbf{S}_j^T + \mathbf{V}_\varepsilon \quad (3.77)$$

Ignorando a correlação entre os parâmetros estruturais e o ruído das medições nas Eqs. (3.74), (3.75), (3.76) e (3.77), estas efetivamente refletiram o caso apresentado por Collins *et al.* (1974), onde a correlação é ignorada.

É importante observar que a técnica da variância mínima, tem sucesso no caso sobredeterminado, desde que o ruído nas medições seja diferente de zero², pois se for assumido ruído zero nas medições ($\mathbf{V}_\varepsilon = 0$), o algoritmo na tentativa de reproduzir exatamente os dados medidos falha e os parâmetros estimados divergem. Uma alternativa de solução quando os dados são medidos com precisão é assumir que o ruído nas medições é muito pequeno. No caso subdeterminado os parâmetros não possuem suficientes graus de liberdade para reproduzir as medições portanto o algoritmo falha.

² Ruído zero nas medições indicam que os dados medidos foram obtidos com precisão ou $\varepsilon=0$

3.6 Implementação computacional

Os algoritmos do método da função objetivo e o método da variância mínima foram implementados em códigos computacionais utilizando o MATLAB (1994), versão 4.2. Para o cálculo da sensibilidade foi implementado o algoritmo de Fox & Kappor (1968), que mostrou-se eficiente e rápido para os exemplos avaliados. Foram também implementadas as técnicas de redução e expansão de dados modais apresentadas por Ocallaham *et al.* (1989), técnica mais conhecida como SEREP. O fator de escala modal MSF e o critério de confiança modal MAC foram utilizados na verificação da correlação dos dados modais medidos. Os cálculos do Método dos Elementos Finitos foram desenvolvidos dentro do ambiente computacional MEFLAB (Pavanelo, 1996). As avaliações do desempenho dos algoritmos foram feitas usando-se uma estrutura tipo viga com dados pseudo experimentais e reais.

Nas Figuras 3.1 e 3.2 estão mostrados os diagramas de fluxo dos algoritmos da função objetivo e variância mínima.

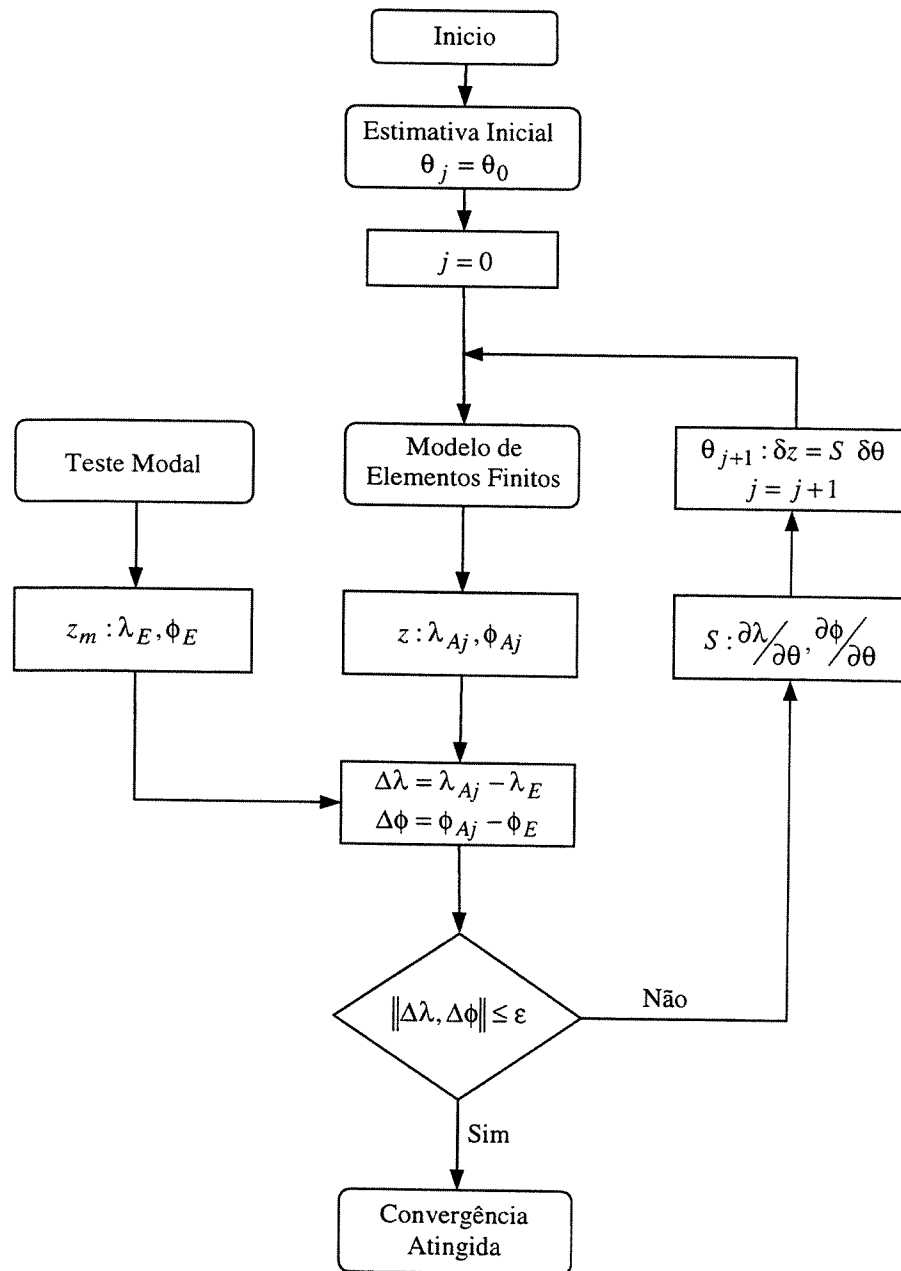


Figura 3.1 - Diagrama sintetizado do algoritmo empregado no método da função objetivo.

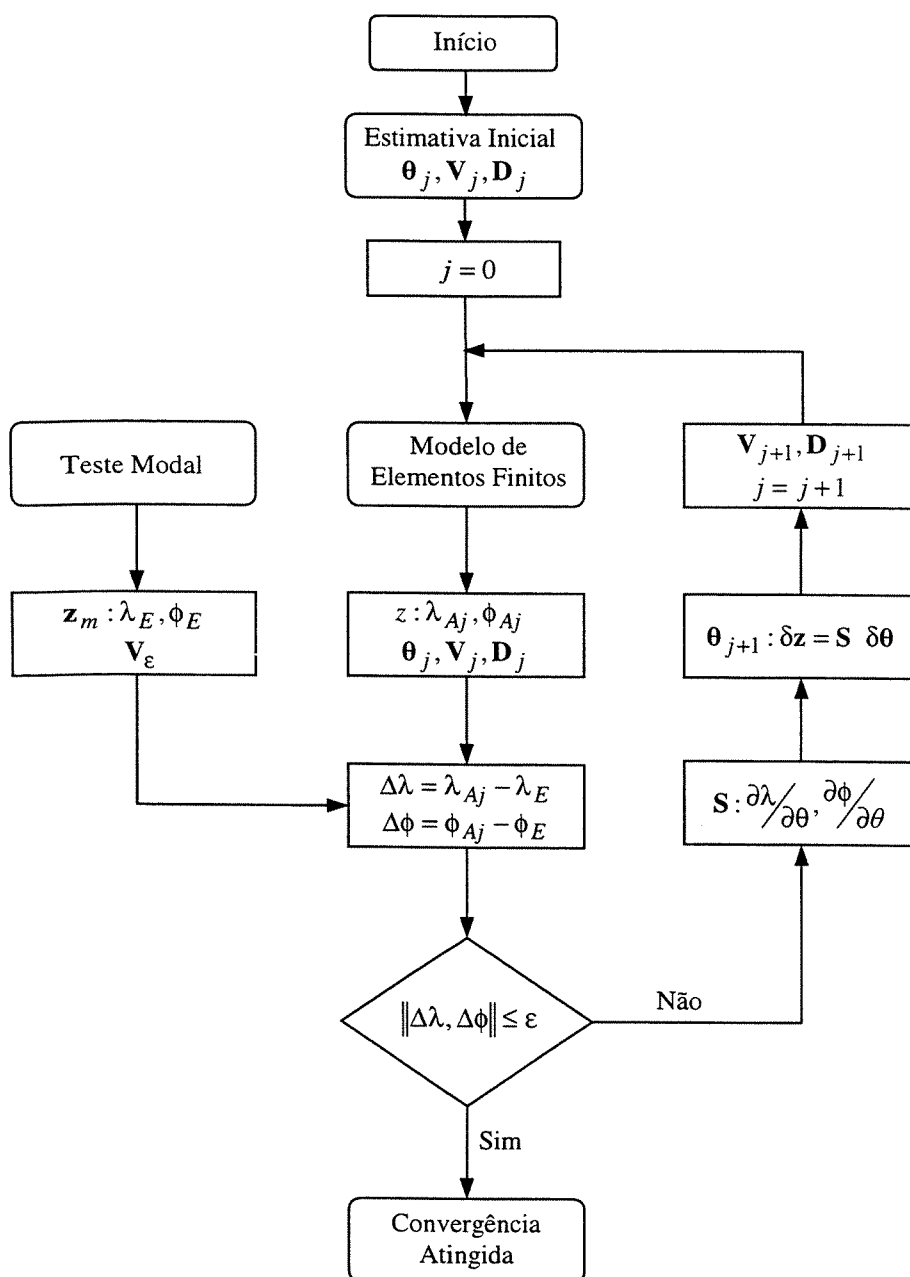


Figura 3.2 - Diagrama sintetizado do algoritmo empregado no método da variância mínima

Capítulo 4

Aplicações e Resultados

Com a finalidade de verificar os procedimentos e avaliar as capacidades das técnicas de ajuste apresentadas no Capítulo 3, estas foram aplicadas a problemas pseudo experimentais ou simulados e experimentais de uma estrutura tipo viga.

4.1 Aplicação do método da função objetivo

4.1.1 Exemplo simulado – caso sobredeterminado

A fim de permitir a comparação dos resultados obtidos, utilizou-se o mesmo modelo simulado por Friswell & Mottershead (1995). O modelo é mostrado na Figura 4.1-a, o qual consiste de uma viga de alumínio com uma extremidade engastada, cujas rigidezes translacional e rotacional no engaste são definidas como parâmetros a ajustar.

A viga tem 0,7m de comprimento com seção retangular de 0.05×0.025m. O modelo do MEF consiste de 7 elementos de viga de igual comprimento (Bernoulli-Euler) , com 2 graus de liberdade/nó (deslocamento e rotação) e um elemento de mola também com dois graus de liberdade (translacional e rotacional), colocado no engaste. Os dados pseudo experimentais são gerados a partir do mesmo modelo do MEF, mas com o dobro de elementos (Figura 4.1-b). Os parâmetros a serem ajustados são: a rigidez a flexão da viga (EI) e as rigidezes translacional (K_T) e rotacional (K_R) da mola.

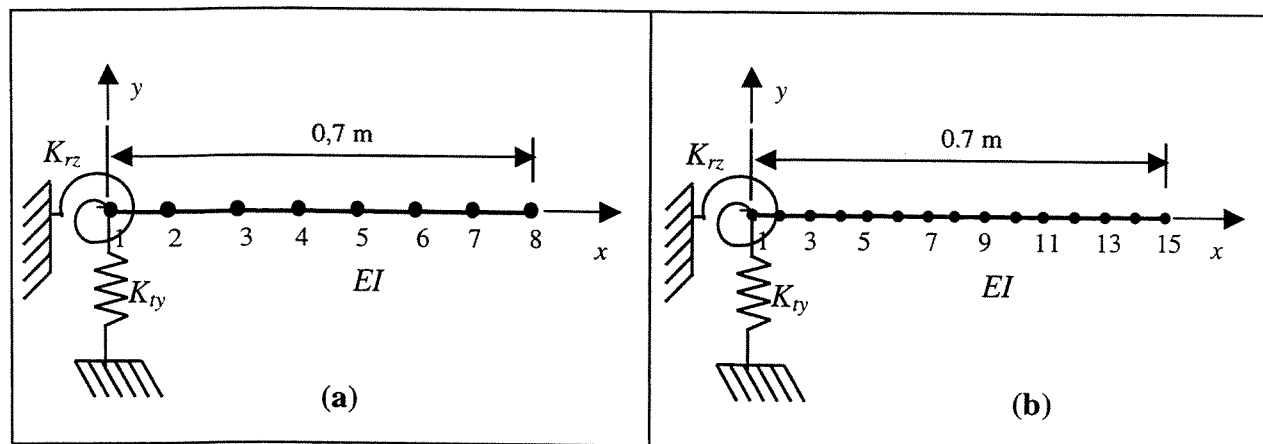


Figura 4.1 - Modelos de Elementos Finitos utilizado (a) no processo de ajuste e (b) na geração dos dados pseudo-experimentais.

A Tabela 4.1, mostra os valores dos parâmetros iniciais e as frequências naturais correspondentes às seis primeiras frequências naturais pseudo experimentais. O amortecimento é ignorado no modelo. Os valores das frequências apresentadas foram obtidos a partir do MEFLAB (Pavanello R., 1996) e comparadas com o ANSYS54 (Manual do ANSYS, 1997).

Parâmetros	Valor Inicial MEFLAB	Valor Inicial ANSYS	Erro % MEFLAB ANSYS	Valores Pseudo Experimental (MEFLAB)
Nº. gdl.	16	16		30
EI [N m ²]	4500	4500		4560
K_{ry} [N m ⁻¹]	2.00e7	2.00e7		4.00e7
K_{rz} [N m/rad]	5.00e4	5.00e4		10.00e4
$f1$ [Hz]	33,89	33,89	0	37,46
$f2$	220,60	220,86	0,12	236,75
$f3$	614,11	615,53	0,23	657,33
$f4$	1156,88	1160,71	0,33	1255,30
$f5$	1827,20	1835,46	0,45	1993,50
$f6$	2708,29	2626,00	0,65	2881,40

Tabela 4.1 – Comparação dos resultados iniciais do MEFLAB - ANSYS considerando a estimativa inicial dos parâmetros assim como valores pseudo experimentais obtido via MEFLAB.

As diferenças entre o ANSYS o MEFLAB são provenientes das diferentes formulações dos elementos de viga e do tipo de solução do autoproblema.

A Tabela 4.2, mostra uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com aqueles obtidos por Friswell & Mottershead, 1995. A tabela, apresenta os valores iniciais estimados, os valores ajustados e os valores pseudo experimentais. Para os valores ajustados são apresentados os resultados dos casos sem ponderação e ponderando as medidas pseudo experimentais. Neste ultimo caso duas avaliações são feitas uma só com os autovalores e outra incluindo-se os autovetores no vetor de dados medidos. Para o caso ponderado adotou-se um desvio padrão de 0,5% nos autovalores e de 10% autovetores. Deve ser observado que os valores ajustados foram obtidos usando-se apenas as 4 primeiras frequências naturais ($f1$ a $f4$), as outras frequências ($f5$ e $f6$) são usadas para quantificar a qualidade do modelo ajustado.

Valor Inicial f_i [Hz] EI [N.m ²] K_{η} [N/m] $K_{\tau z}$ [N.m/rad]		Valor Ajustado									Valor Pseudo Experimental
		Não Ponderado			Ponderando Medições						
					Sem Autovetores			Com Autovetores			
		Ccasa	Friswell	Erro %	Ccasa	Friswell	Erro %	Ccasa	Friswell	Erro %	
$f1$	33,89	37,44	37,44	0	37,46	37,46	0	37,47	37,47	0	37,46
$f2$	220,60	236,8	236,8	0	236,8	236,8	0	236,8	236,8	0	236,75
$f3$	614,12	657,3	657,3	0	657,3	657,3	0	657,2	657,2	0	657,34
$f4$	1156,88	1255	1255	0	1255	1255	0	1255	1255	0	1255,33
$f5$	1827,20	1997	1997	0	1998	1998	0	1998	1998	0	1993,49
$f6$	2708,30	2907	2907	0	2907	2907	0	2907	2907	0	2881,44
EI	4500	4592,8e3	4592	0,02	4577,8	4578	0	4573,9	4573	0,02	4560
K_{η}	2,00e7	3,764e7	3,767e7	0,26	3,808e7	3,809e7	0	3,822e7	3,826e7	0,26	4,00e7
$K_{\tau z}$	5,00e4	9,677e4	9,690e4	0,10	9,857e4	9,860e4	0	9,893e4	9,902e4	0,10	10,00e4

Tabela 4.2– Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os de Friswell e Mottershead 1995, para os casos sem ponderação e com ponderação nas medições.

Nos resultados apresentados pode-se observar que o caso ponderado melhora a correlação dos dados pseudo experimentais e os ajustados, isto se deve ao fato de que no caso não ponderado todos os dados estão sendo igualmente ponderados e na pratica as frequências mais altas tem maiores variâncias que as frequências mais baixas, portanto estas deverão ter uma menor influencia no processo de ajuste e isto se consegue com a ponderação. Nestes casos, a inclusão dos autovetores melhora também a correlação dos dados medidos e dos parâmetros, mas em geral isto depende do grau de confiança que se tem neles.

Como foi dito no Capítulo 3 a matriz de ponderação assumida W_ε é diagonal, cujos elementos são iguais ao recíproco da correspondente variância dos autovalores, e para o caso dos autovetores, é igual ao recíproco da variância do maior elemento em cada modo. Os resultados apresentados mostram uma boa concordância com os resultados da medição pseudo experimental, bem como com aqueles encontrados no trabalho de Friswell & Mottershead (1995).

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram:

- (a) A sensibilidade dos autovalores, sendo que na Figura 4.4 são adicionadas as sensibilidades dos autovetores. Como era de esperar a sensibilidade dos autovalores aumenta nas frequências mais altas, que no caso correspondem às últimos dados medidos e a sensibilidade dos autovetores apresenta um comportamento mais variável.
- (b) O erro percentual entre os valores das frequências pseudo experimentais e o valor das frequências ajustadas foram obtidas como segue:

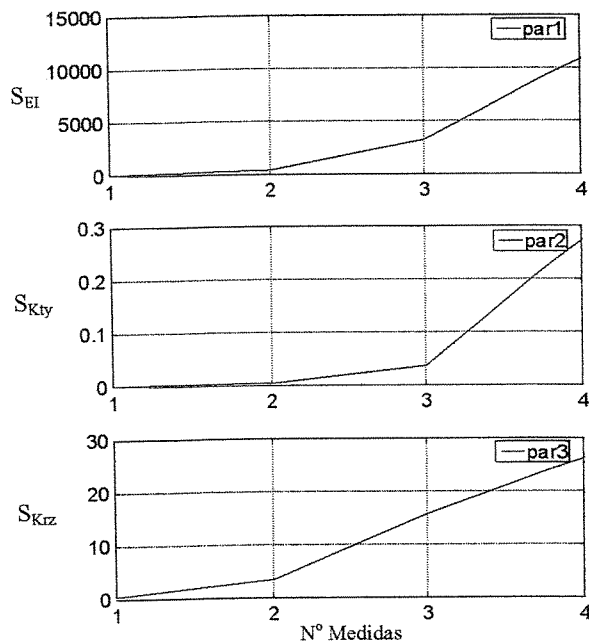
$$erro \% = \frac{f_{pse} - f_j}{f_{pse}} * 100 \quad (4.79)$$

- (c) O valor dos parâmetros ajustados a cada iteração.
- (d) O processo de convergência do vetor z_j de dados ajustados e do vetor dos parâmetros θ_j por iteração, sendo que a norma do erro da convergência de ambos é dada por:

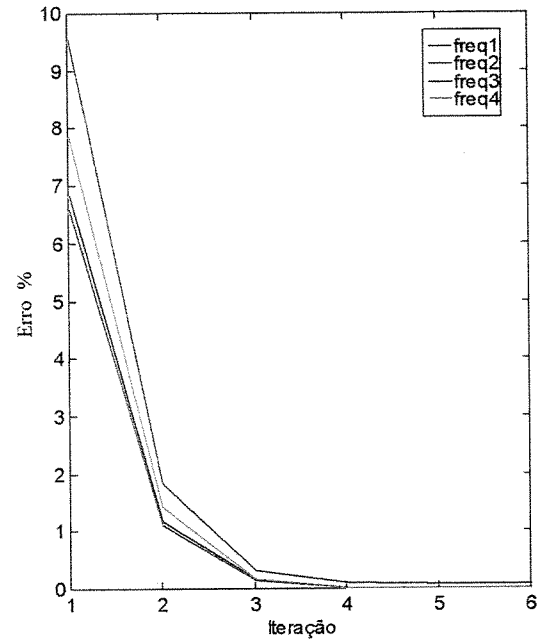
$$conv_z = \frac{\|z_{j+1} - z_j\|}{\|z_{j+1}\|} \quad (4.80)$$

$$conv_p = \frac{\|\theta_{j+1} - \theta_j\|}{\|\theta_{j+1}\|} \quad (4.81)$$

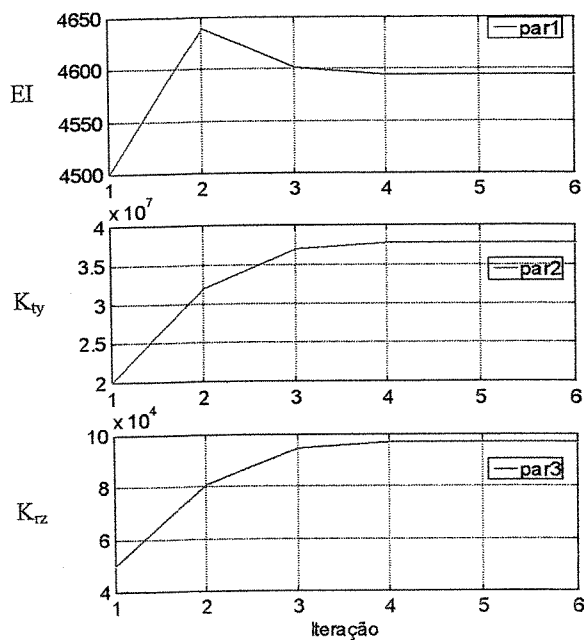
onde $conv_z$ e $conv_p$ é a norma do erro dos vetores de medidas z_j e parâmetros θ_j por iteração.



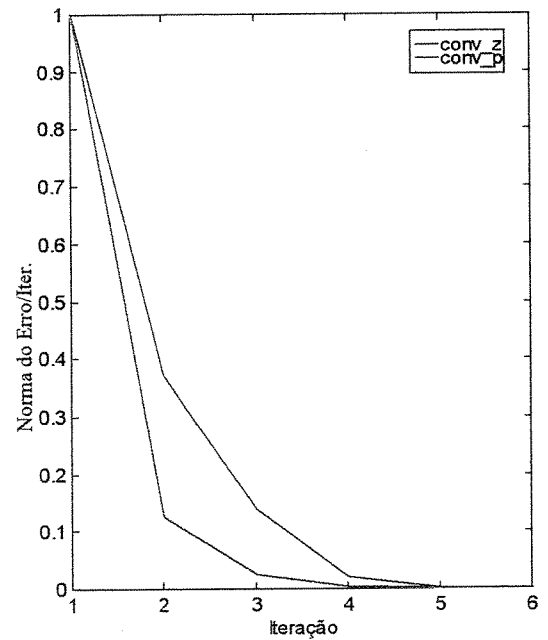
(a)



(b)

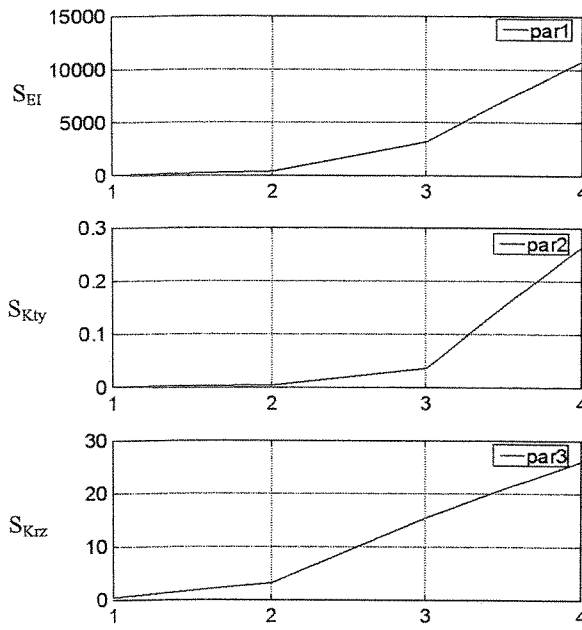


(c)

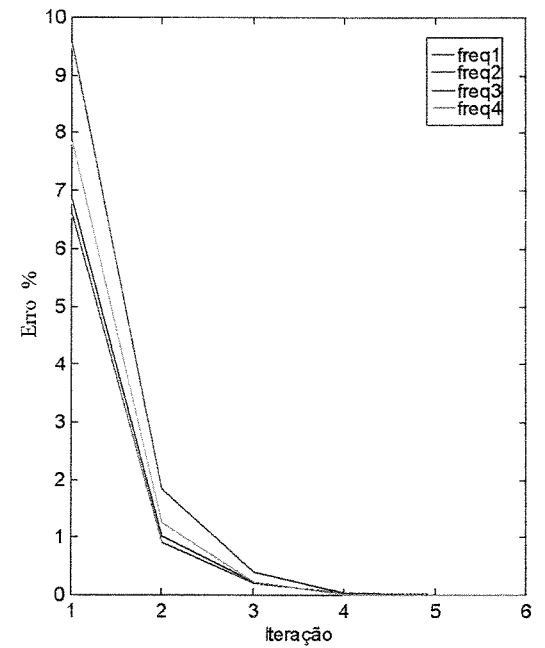


(d)

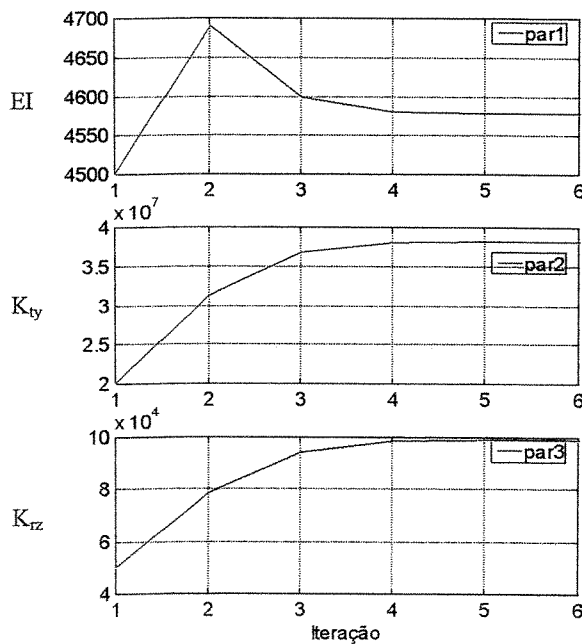
Figura 4.2 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado sem ponderação: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



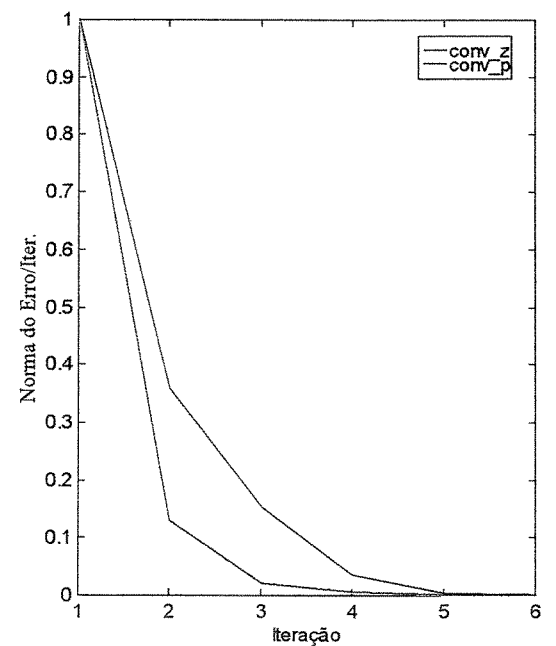
(a)



(b)

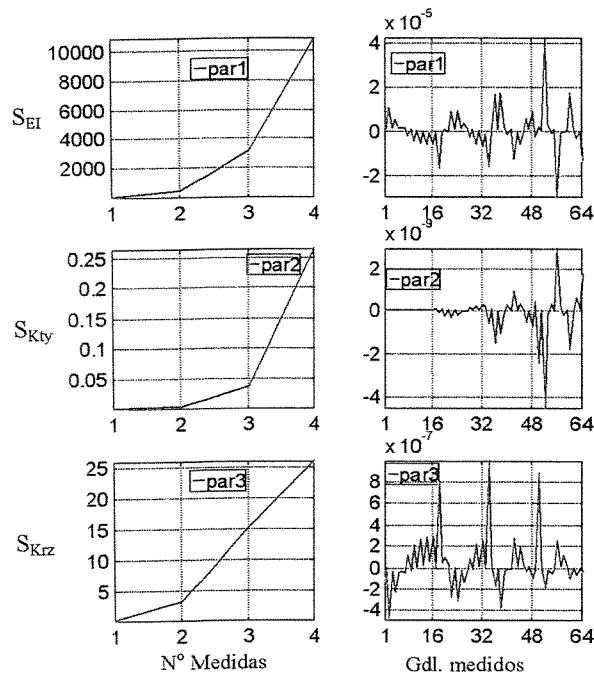


(c)

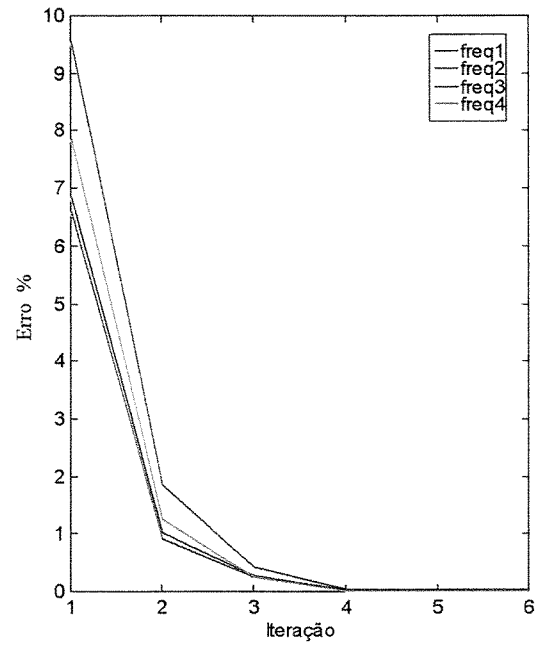


(d)

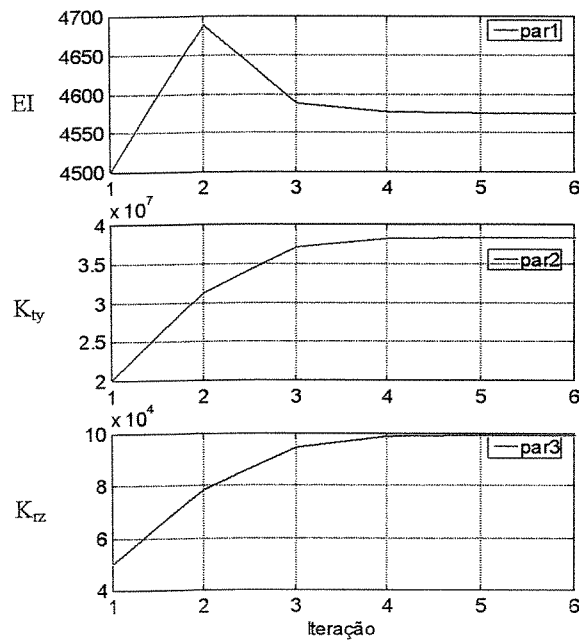
Figura 4.3 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos sem autovetores S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



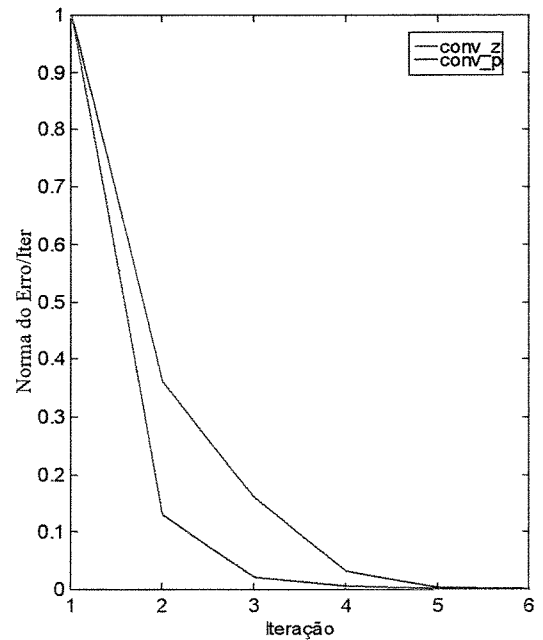
(a)



(b)



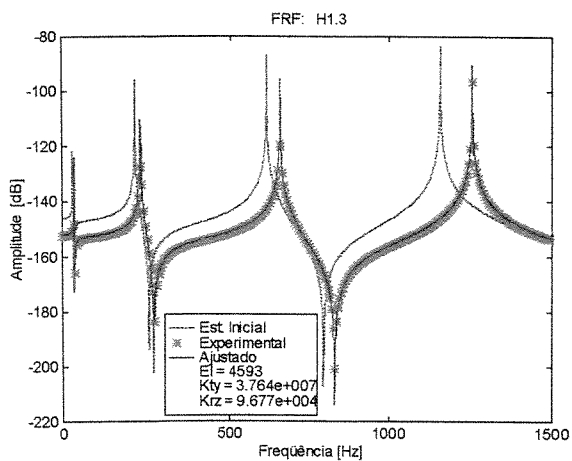
(c)



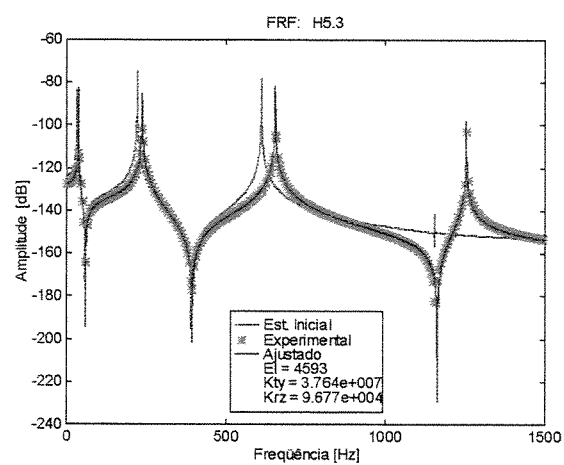
(d)

Figura 4.4 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos com autovetores C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ e em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

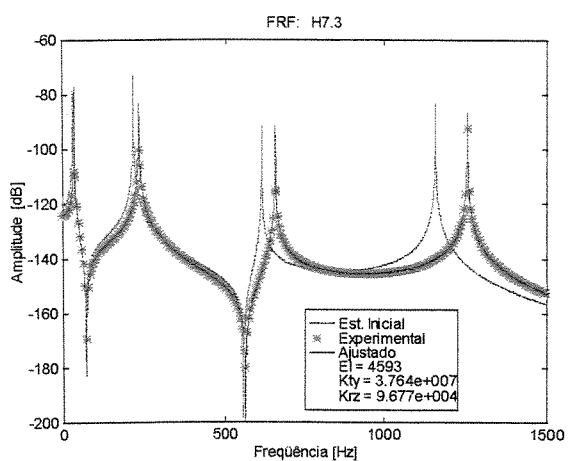
As Figuras 4.5, a 4.7, mostram a comparação entre as funções de resposta em frequência dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado bem como a que foi estimada com os parâmetros iniciais antes do ajuste, todas elas obtidas por superposição modal do modelo do MEF na faixa de frequências de DC – 1500 Hz para os casos sem ponderação e com ponderação nas medidas. Os resultados assim apresentados mostram uma boa concordância entre o modelo ajustado e o modelo pseudo experimental.



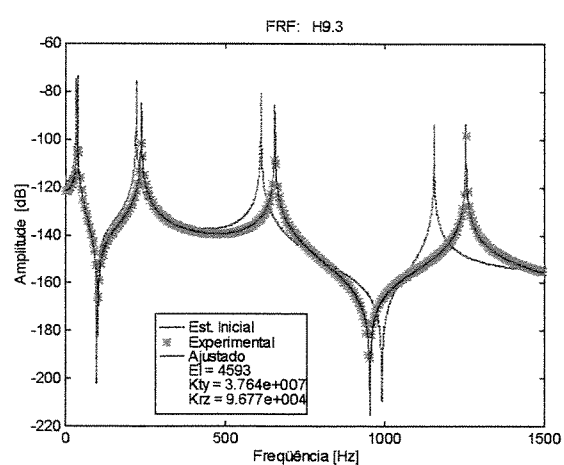
(a)



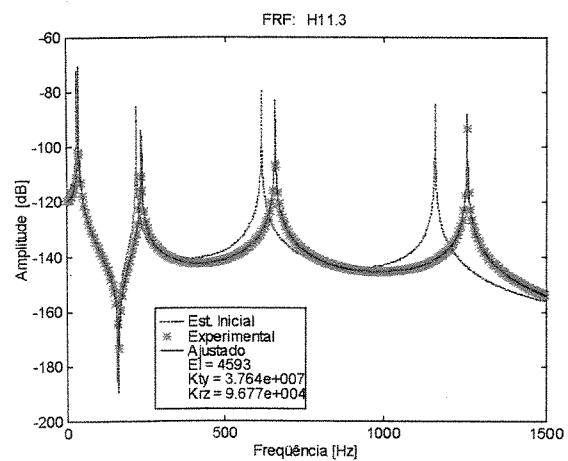
(b)



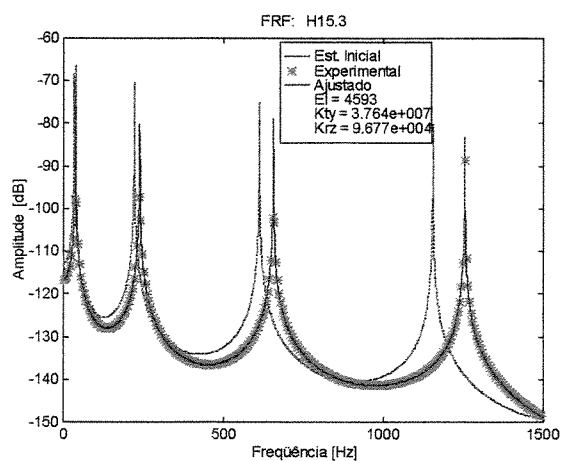
(c)



(d)



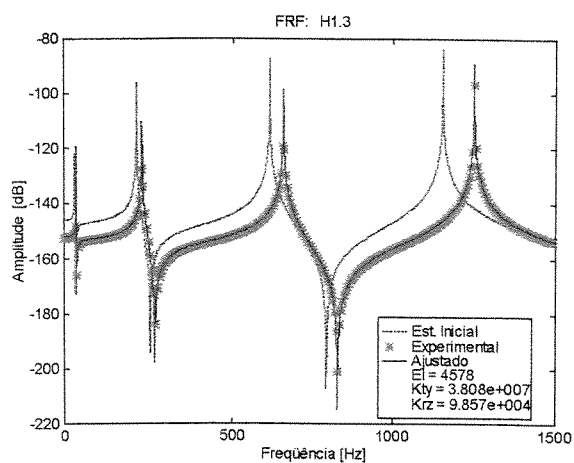
(e)



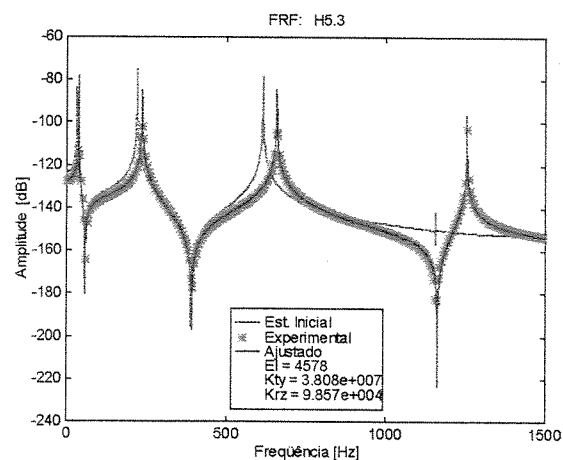
(f)

Figura 4.5 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.

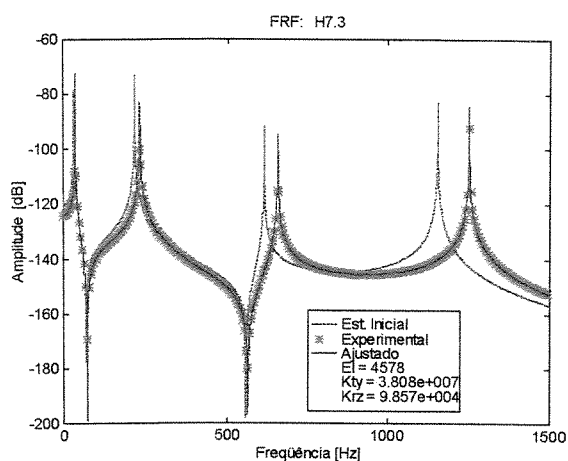
Exemplo simulado – caso sobredeterminado sem ponderação.



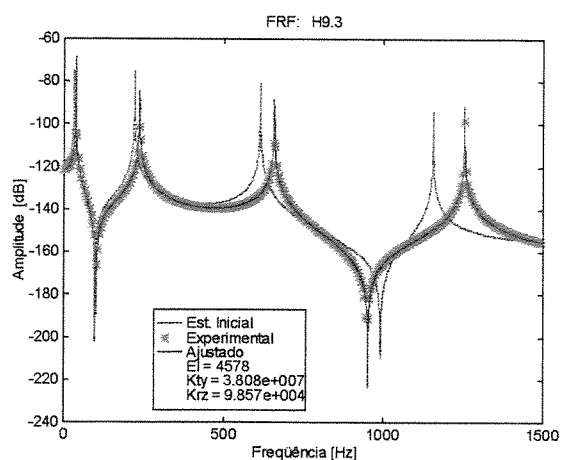
(a)



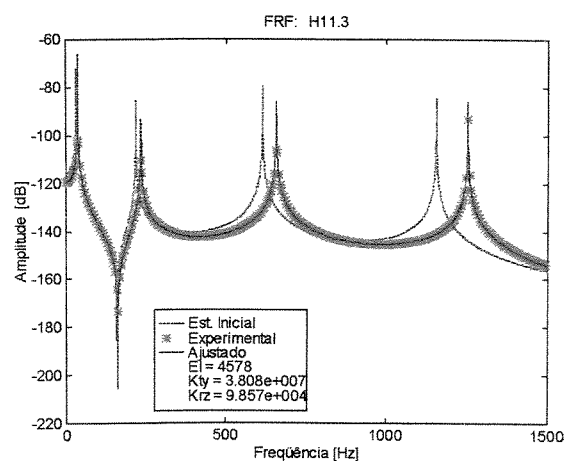
(b)



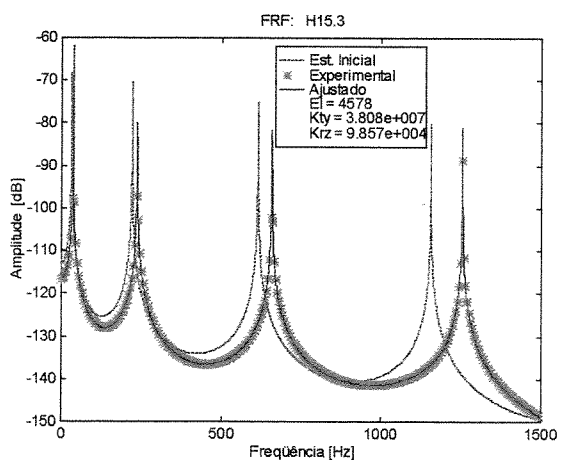
(c)



(d)

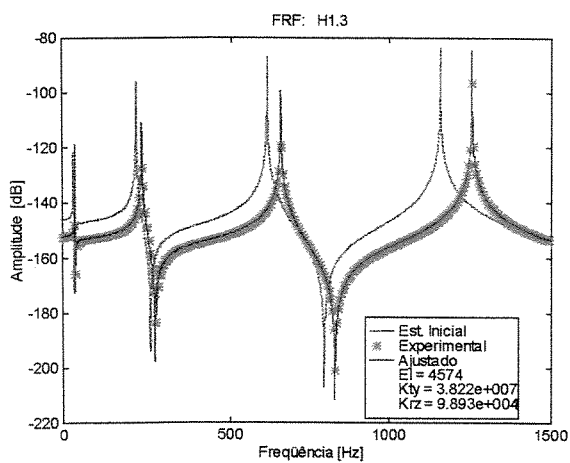


(e)

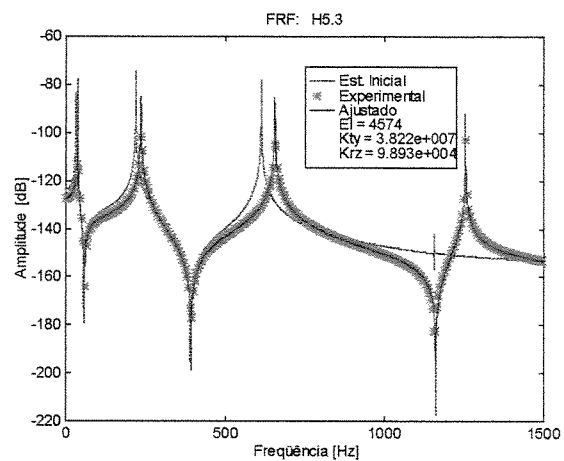


(f)

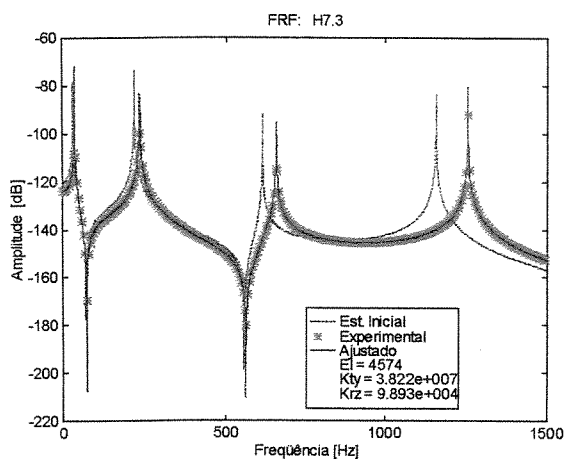
Figura 4.6 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas S/A.



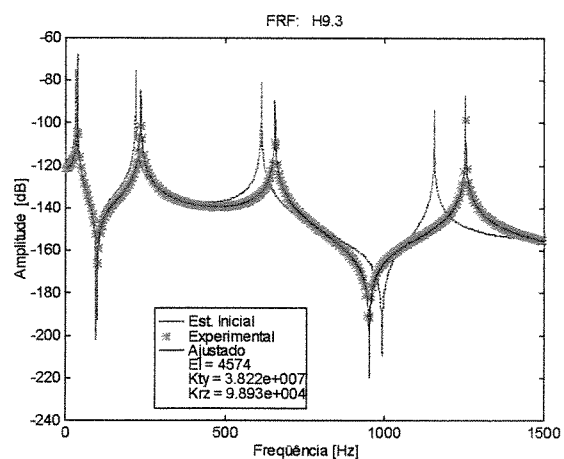
(a)



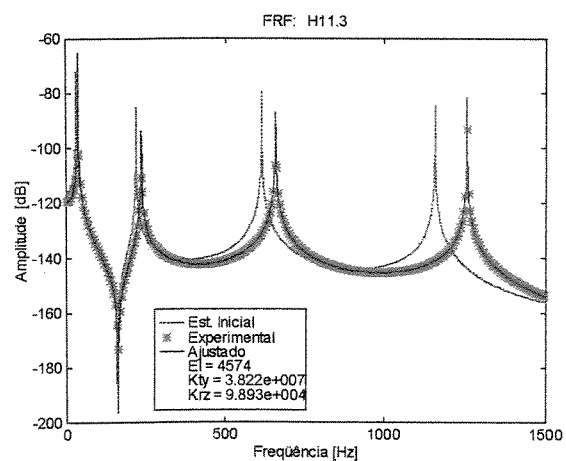
(b)



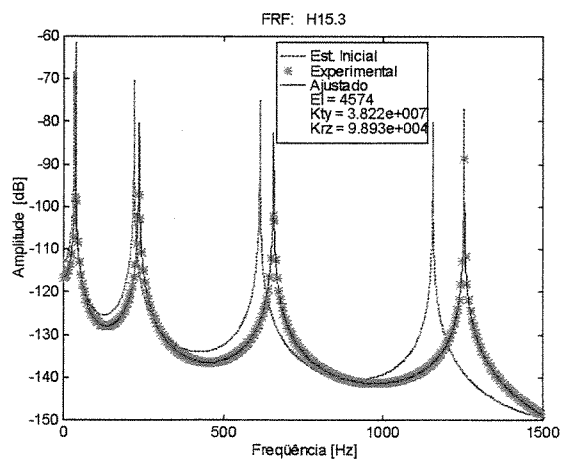
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.7 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.

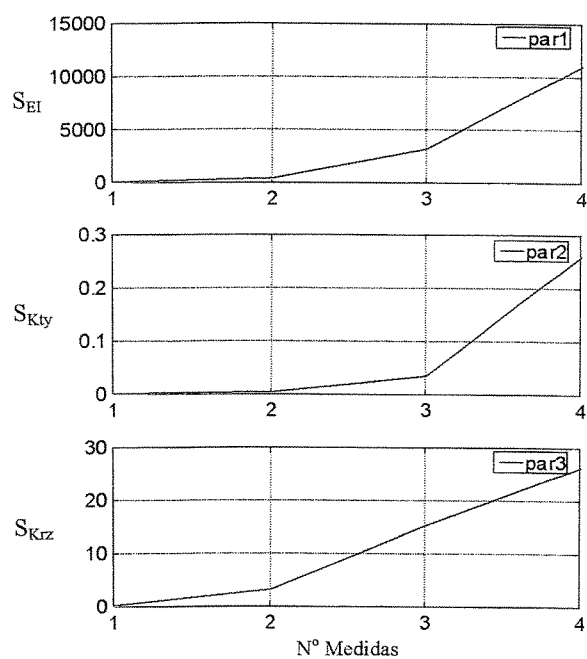
Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando dados medidos C/A.

Na Tabela 4.3 apresenta-se uma comparação dos valores medidos pseudo experimentais com os ajustados, para o caso com ponderação nas medições e nos parâmetros, e para o caso com ponderação nas medições e na estimativa inicial dos parâmetros. Em ambos os casos apresentam-se os resultados com e sem a inclusão dos autovetores no vetor das medições. Tal como nos casos anteriores adotou-se um desvio padrão de 0,5% e 10% nos autovalores e autovetores medidos, respectivamente, para todos os casos onde foi requerido. Para o caso ponderando medidas e parâmetros adotou-se o desvio padrão nos parâmetros de 0,6% para o EI e 20% para K_{ty} e K_{rz} , o desvio padrão para o caso ponderando medidas e a estimativa inicial dos parâmetros foi de 0,72% para o EI e 25% para K_{ty} e K_{rz} . Também neste caso os valores ajustados foram obtidos usando-se apenas as 4 primeiras frequências deixando-se as 2 últimas para serem usadas na quantificação da qualidade do modelo. Pode-se observar que para todos os casos, as frequências convergem para erros percentuais inferiores a 1%; assim como, em ambas tabelas os erros percentuais nas frequências $f5$ e $f6$, as quais não foram incluídas no procedimento de ajuste, apresentam valores inferiores a 1% indicando uma boa qualidade do modelo em reproduzir os dados medidos. Observa-se também que a inclusão dos autovetores em todos os casos melhora a correlação dos parâmetros do modelo pseudo experimental e o modelo ajustado. Na pratica, os autovetores são menos confiáveis que os autovalores, portanto a influencia deles no processo de ajuste depende do engenheiro ao dar as corretas ponderações.

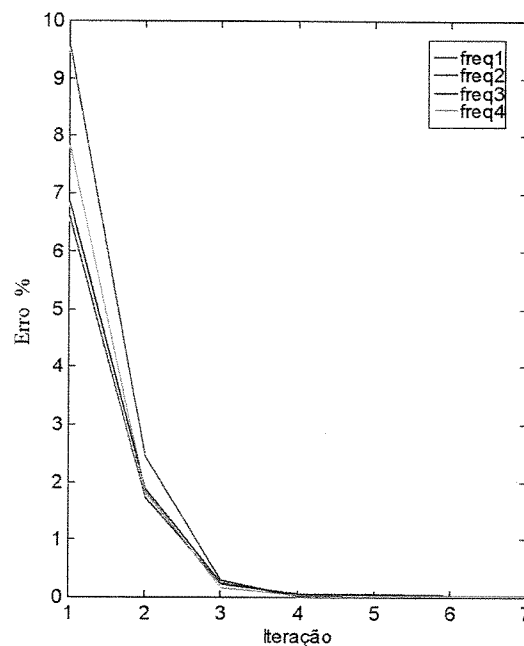
Valor Inicial f_i [Hz] EI [N.m ²] K_{ry} [N/m] K_{rz} [N.m/rad]		Valor Ajustado								Valor Pseudo experimental
		Ponderando Medições e Parâmetros				Ponderando Medições e Estimativa Inicial dos Parâmetros				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
$f1$	33,89	37,47	0,02	37,47	0,02	37,44	0,05	37,45	0,05	37,46
$f2$	220,60	236,72	0,01	236,71	0,01	236,54	0,09	236,54	0,09	236,75
$f3$	614,12	657,14	0,03	657,13	0,03	656,49	0,13	656,49	0,13	657,34
$f4$	1156,88	1255,53	0,02	1255,56	0,02	1253,62	0,14	1253,63	0,14	1255,33
$f5$	1827,20	1998,70	0,26	1998,83	0,26	1994,69	0,06	1994,71	0,06	1993,49
$f6$	2708,30	2907,36	0,90	2907,46	0,90	2902,11	0,71	2902,14	0,72	2881,44
EI	4500	4562,8	0,06	4560,8	0,02	4560,2	0,004	4559,9	0,002	4560
K_{ry}	2,00e7	3,863e7	3,50	3,870e7	3,25	3,805e7	4,75	3,806e7	4,75	4,00e7
K_{rz}	5,00e4	9,997e4	0,02	10,016e4	0,20	9,954e4	0,5	9,957e4	0,4	10,00e4

Tabela 4.3 – Comparação dos valores pseudo experimentais com os valores ajustados para os casos com ponderação: nas medições e parâmetros; e nas medições e estimativa inicial dos parâmetros

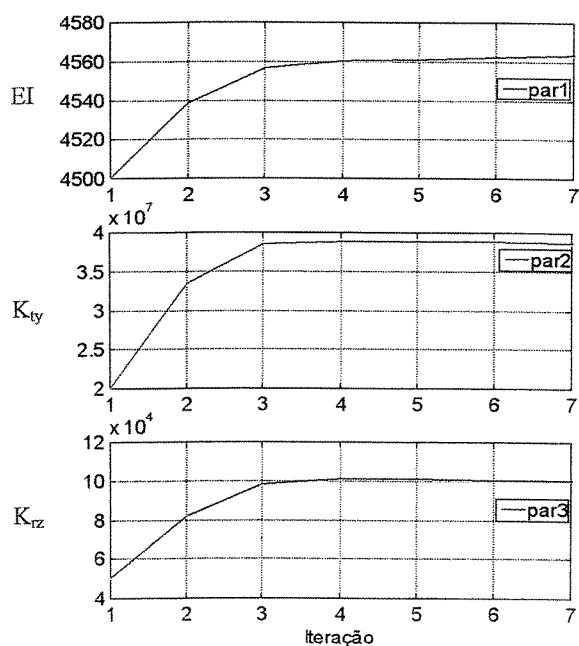
As figuras 4.8 a 4.11, mostram os resultados dos casos melhor condicionados do método da função objetivo. Assim, de maneira similar ao caso anterior apresenta-se (a) a sensibilidade dos autovalores e autovetores, (b) o erro % das frequências ajustadas em função ao número de iterações, (c) o valor do parâmetro a cada iteração e (d) o processo de convergência do vetor de dados ajustados $\mathbf{z}_j$ e vetor de parâmetros θ_j a cada iteração.



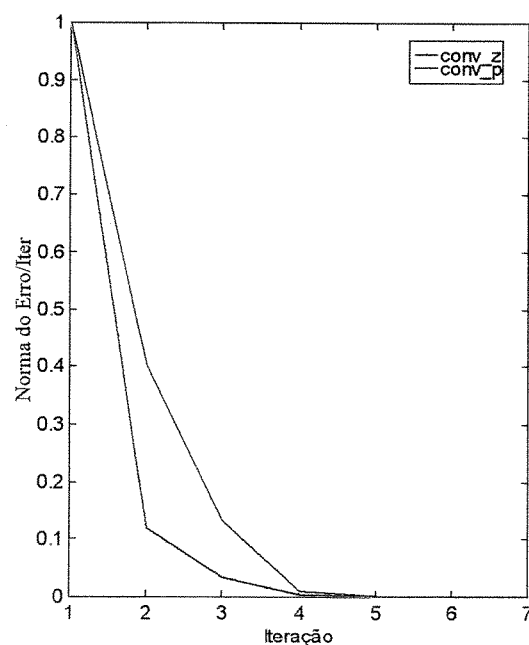
(a)



(b)

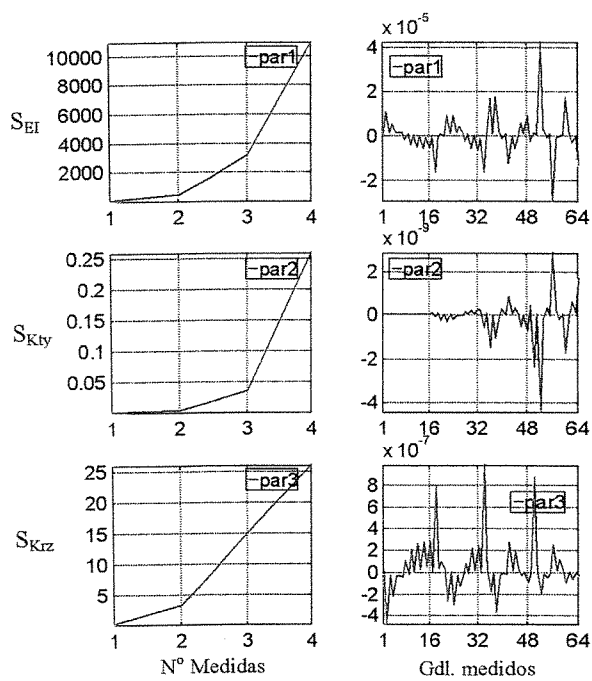


(c)

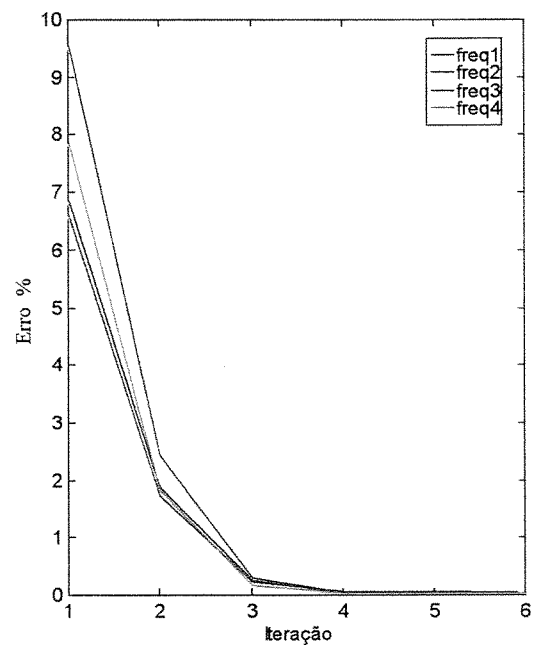


(d)

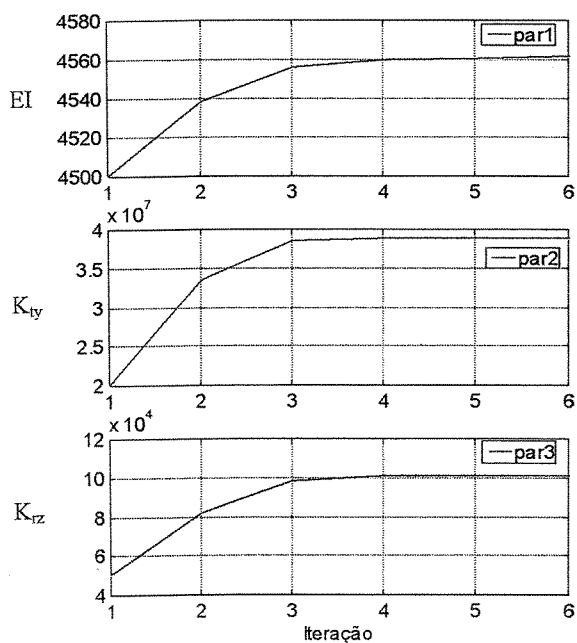
Figura 4.8 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros
S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) $\%$ Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



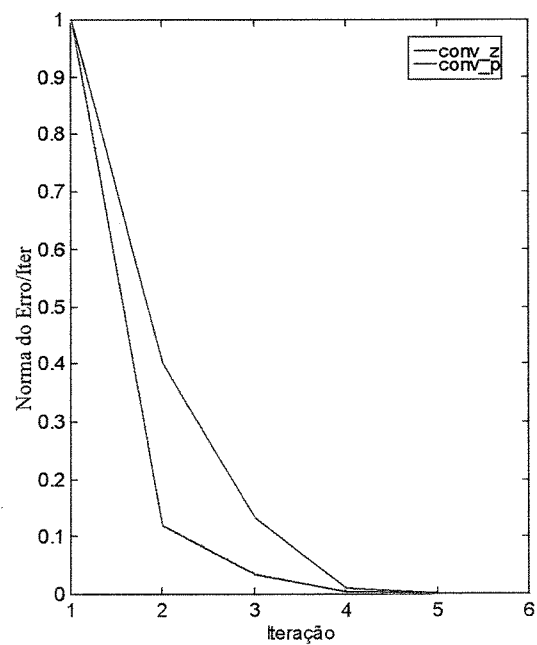
(a)



(b)

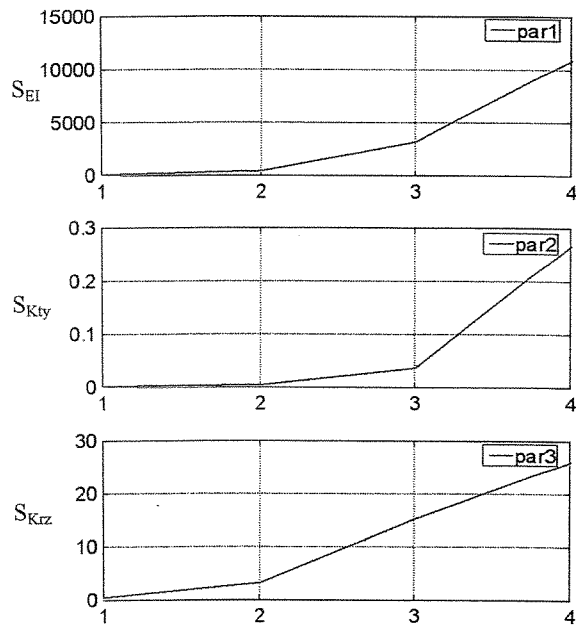


(c)

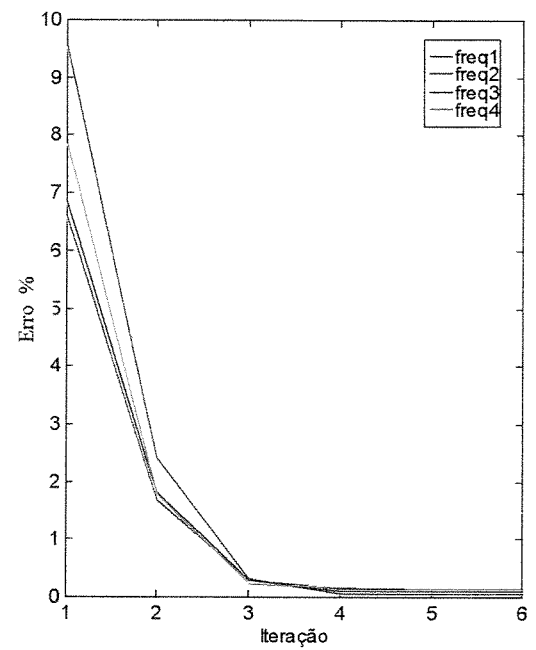


(d)

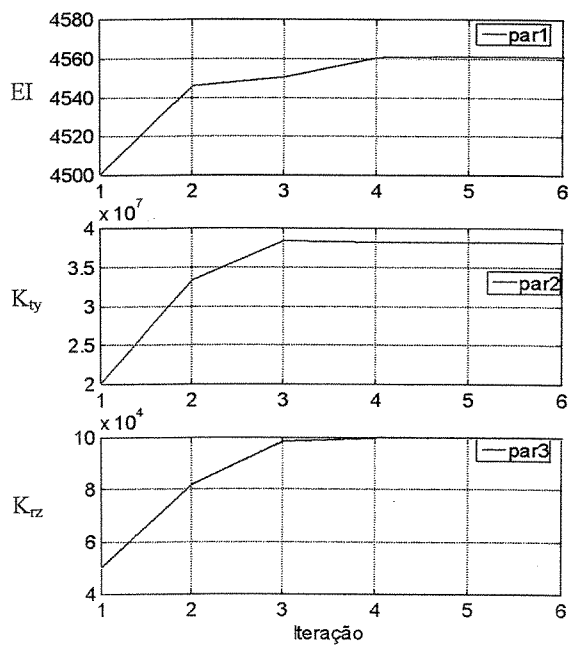
Figura 4.9 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros
C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



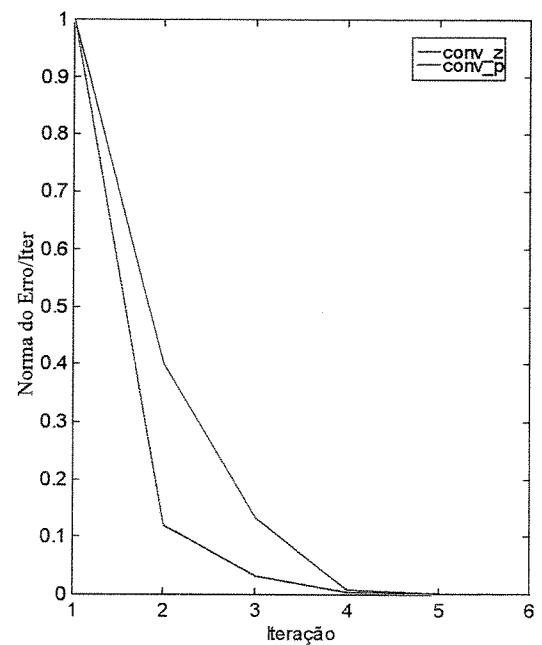
(a)



(b)

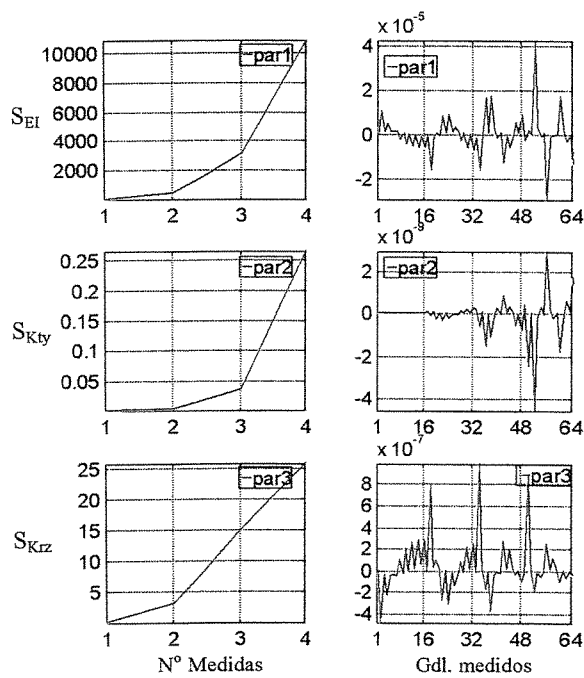


(c)

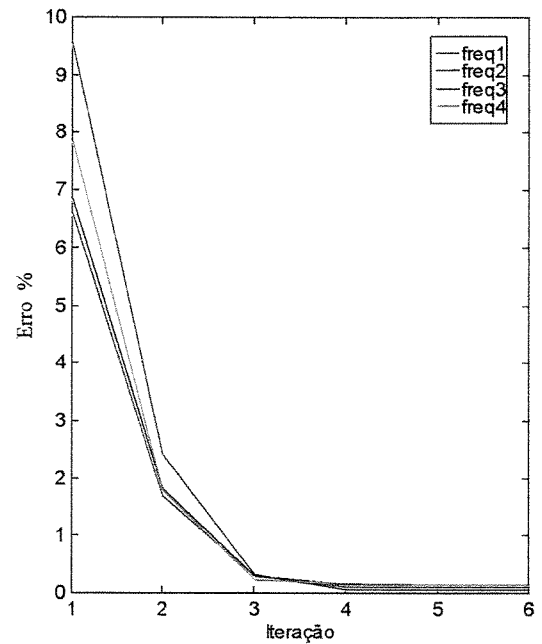


(d)

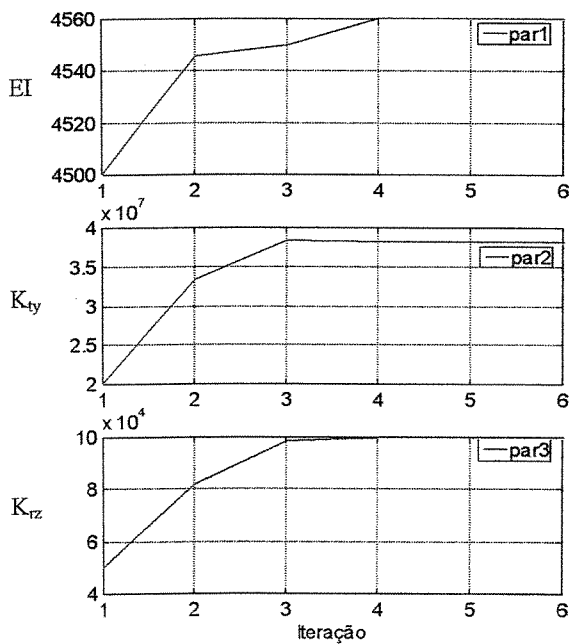
Figura 4.10 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



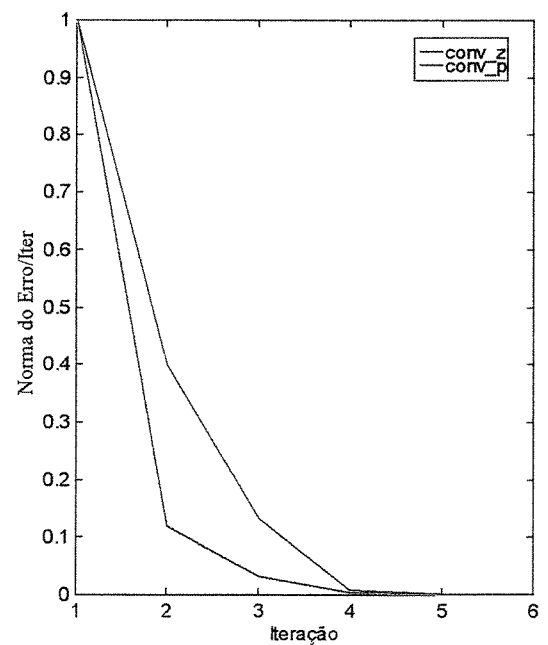
(a)



(b)



(c)

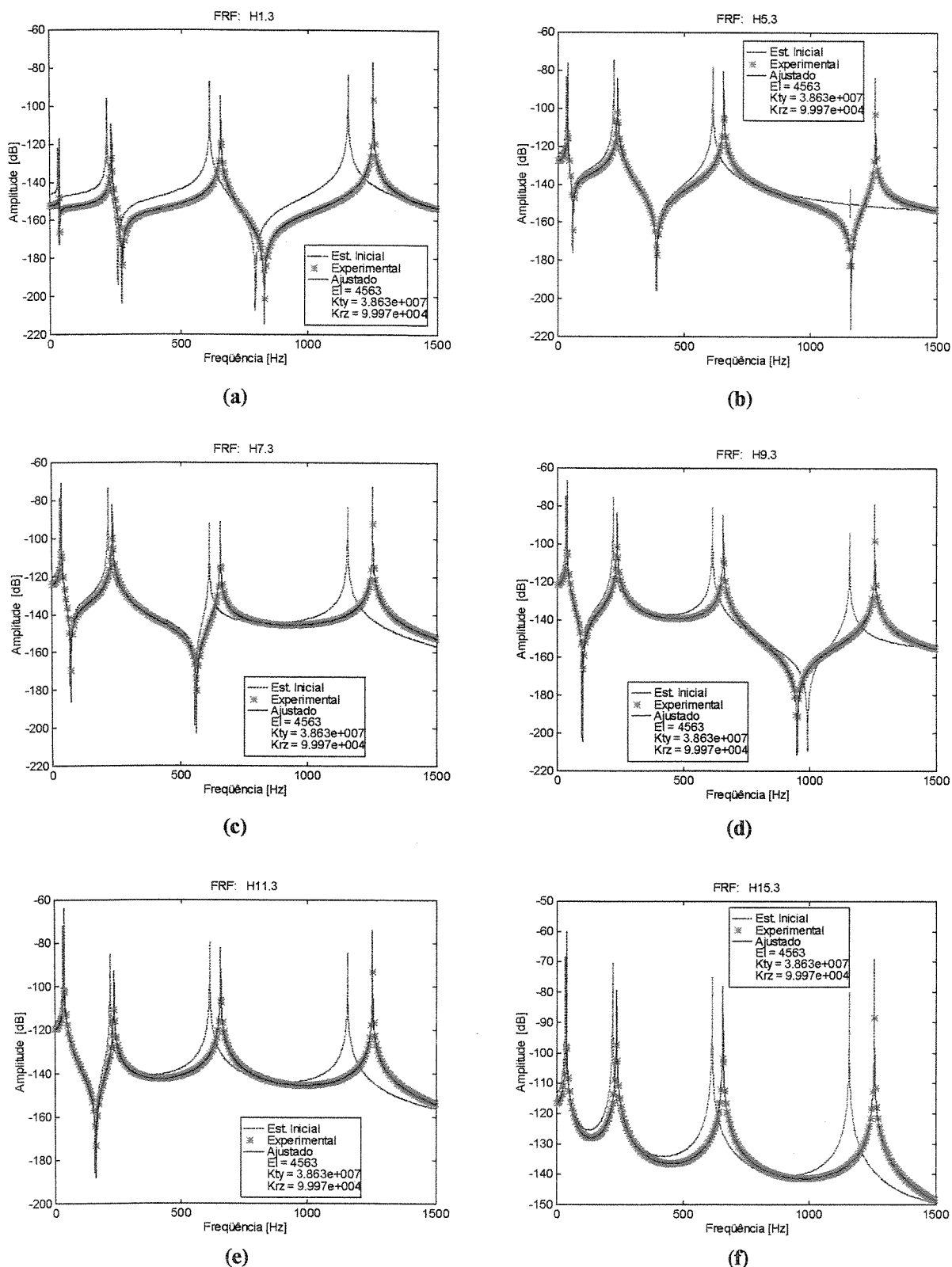


(d)

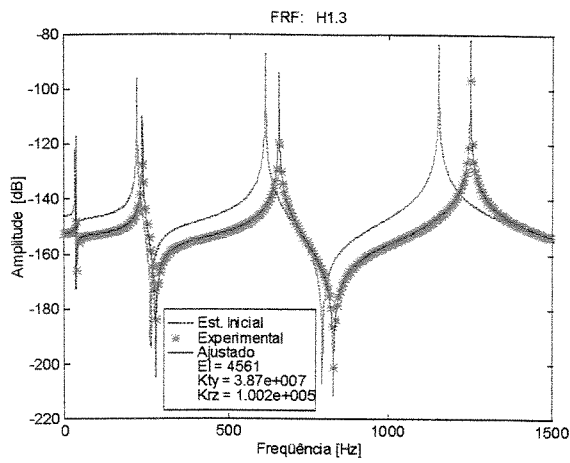
Figura 4.11 – Resultados do exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

Nas figuras anteriores pode-se ser observado que em todos os casos a sensibilidade dos autovalores é maior nas frequências mais altas, enquanto que a sensibilidade dos autovetores apresentam um comportamento mais variável. O erro percentual das frequências medidas, o valor do parâmetro e a norma do erro de $\mathbf{z}$ e θ apresentam um comportamento quase constante a partir da iteração nº 4. O algoritmo para dos casos assim apresentados se mostraram eficientes e rápidos em termos de convergência (7 iterações).

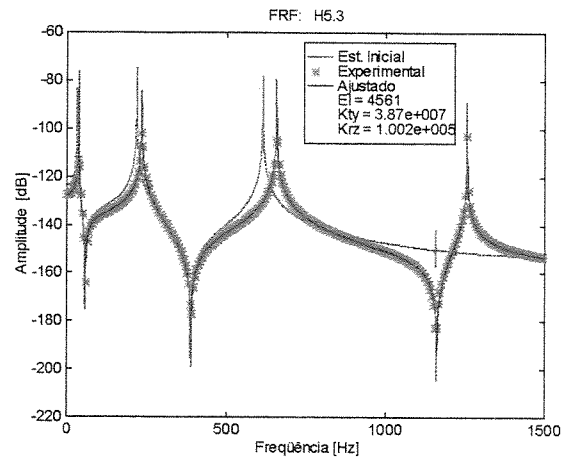
As figuras 4.12 a 4.15, mostram a comparação entre as funções de resposta em frequência dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado bem como a que foi estimada com os parâmetros iniciais antes do ajuste, todas elas obtidas por superposição modal do modelo do MEF na faixa de frequências de DC – 1500 Hz para os casos melhor condicionados do método da função objetivo. Os resultados assim apresentados, mostram uma boa concordância entre o modelo ajustado e o modelo pseudo experimental.



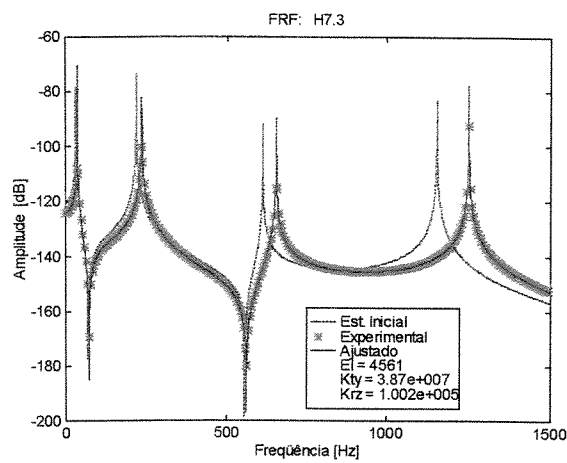
**Figura 4.12 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros S/A.**



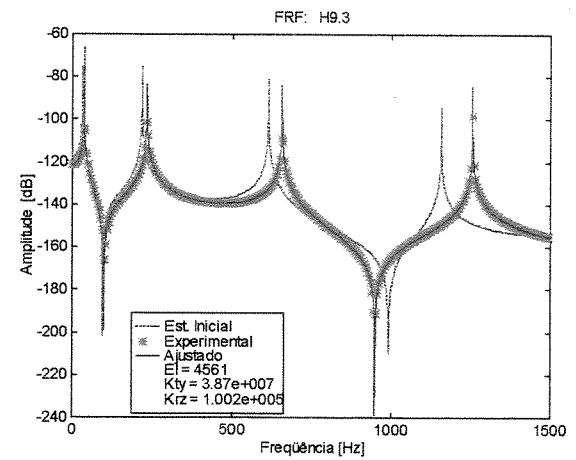
(a)



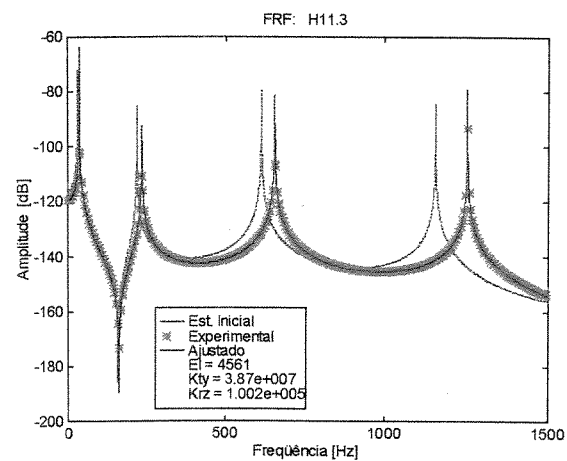
(b)



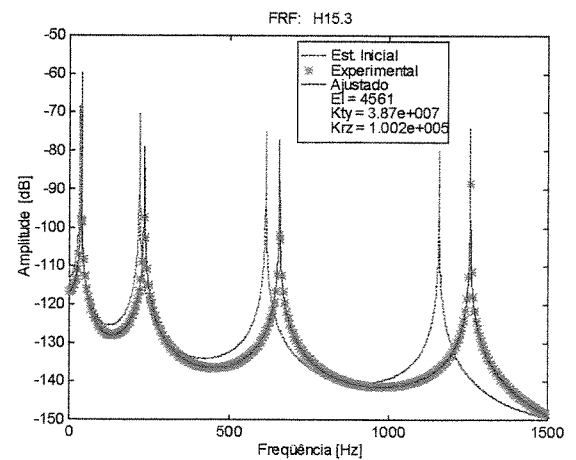
(c)



(d)



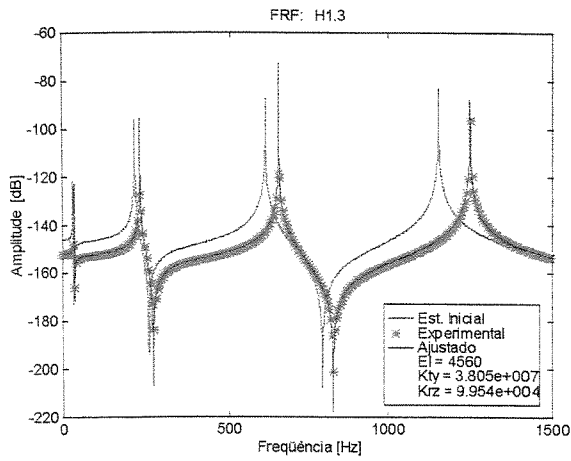
(e)



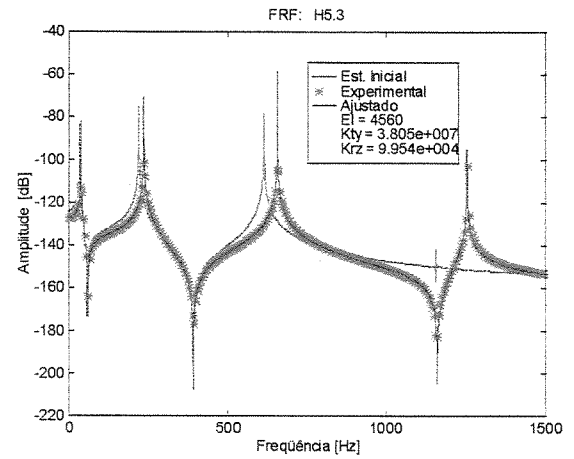
(f)

Figura 4.13 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.

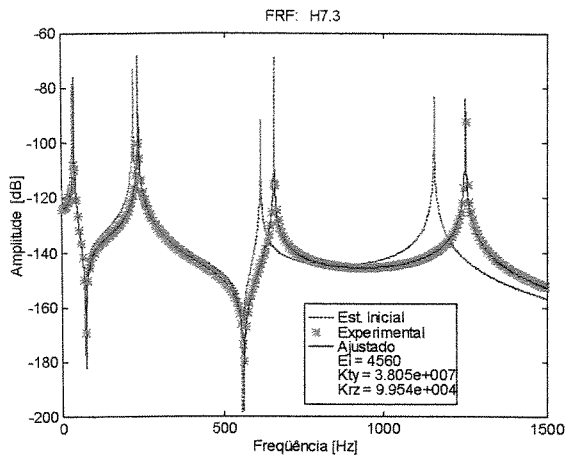
Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e parâmetros C/A.



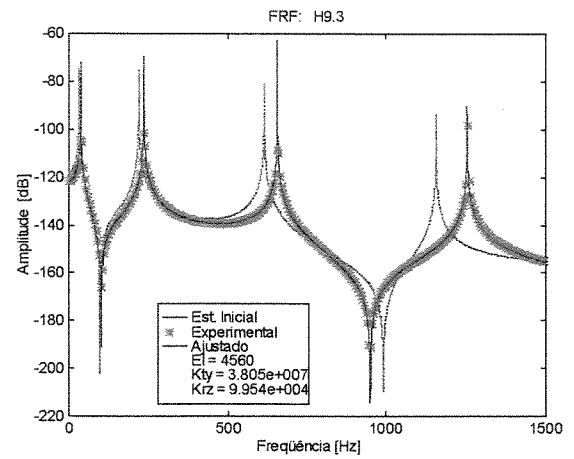
(a)



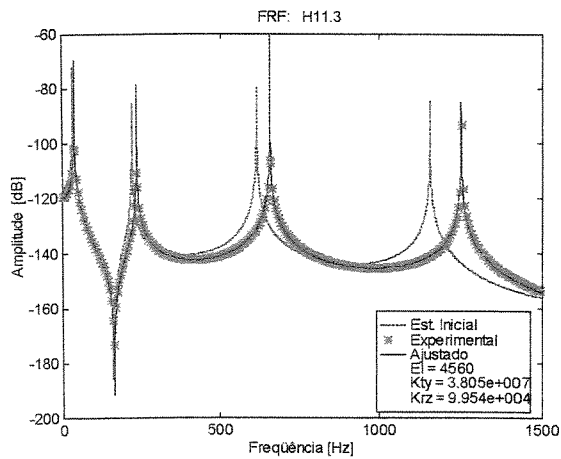
(b)



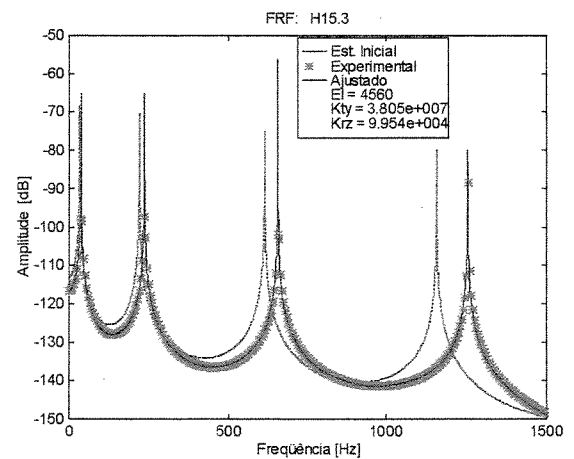
(c)



(d)

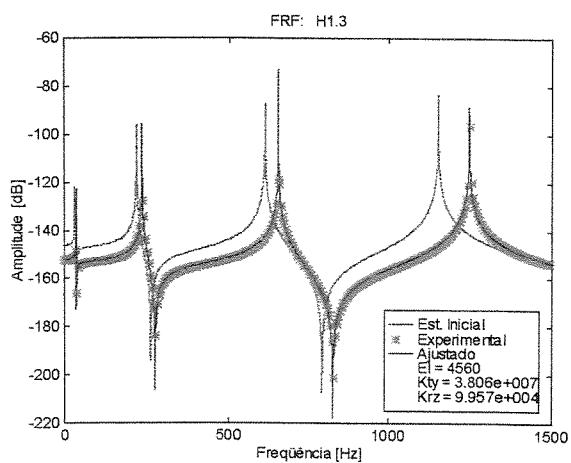


(e)

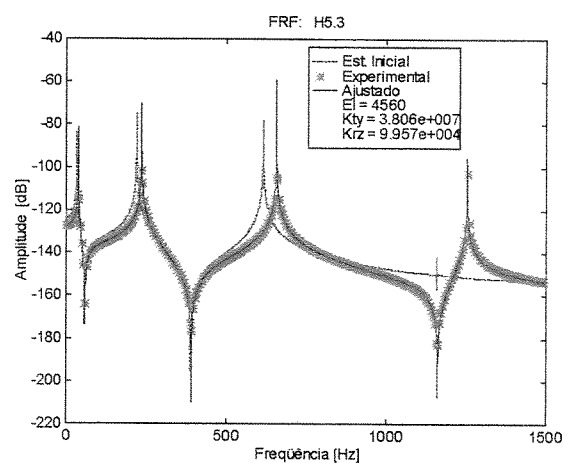


(f)

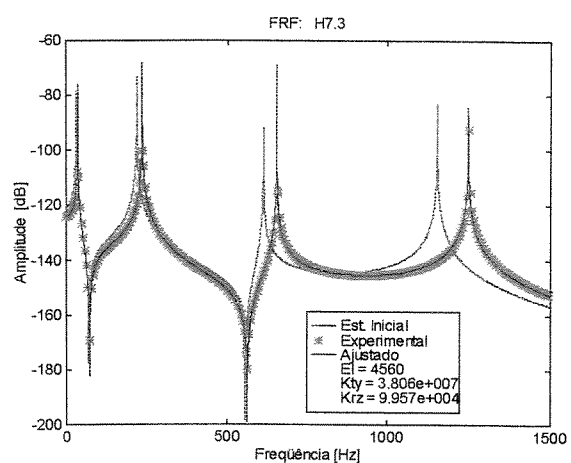
Figura 4.14 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A.



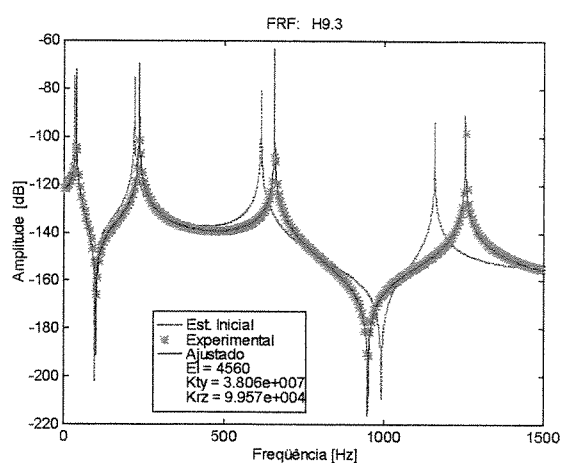
(a)



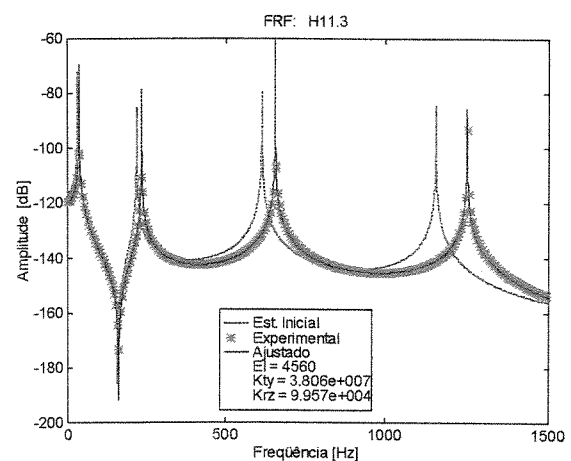
(b)



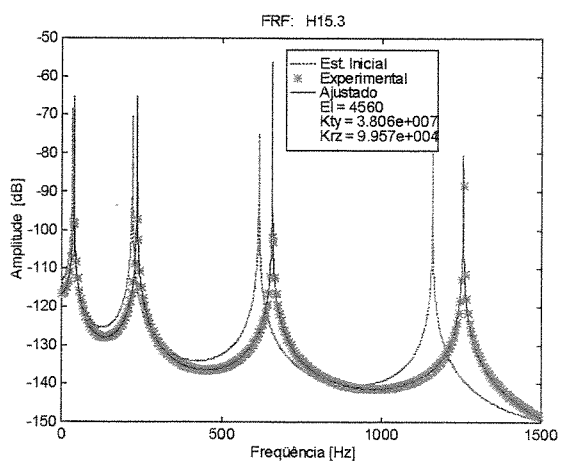
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.15 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado – caso sobredeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A.

4.1.2 Exemplo simulado – caso subdeterminado.

Quando o número de parâmetros é menor que o número de dados medidos o sistema se torna subdeterminado (mais incógnitas que equações). A fim de mostrar o método da função objetivo para este caso foram utilizados os mesmos dados dos modelo pseudo experimental (seção 4.1.1). Dois modelos de MEF são usados para o ajuste: o *modelo 1* composto de 7 elementos de viga, 2 graus de liberdade/no e com engaste rígido na extremidade fixa (Figura 4.16-a); o *modelo 2* com 7 elementos de viga, 2 graus de liberdade/no, e um elemento de mola colocado na extremidade fixa (Figura 4.16-b). Em ambos modelos os parâmetros a serem ajustados são as rigidezes a flexão EI de cada elemento de viga, portanto 7 são os parâmetros a serem ajustados. Pretende-se assim mostrar a potencialidade do método aplicado a um modelo com uma qualidade relativamente boa e outro com qualidade inferior.

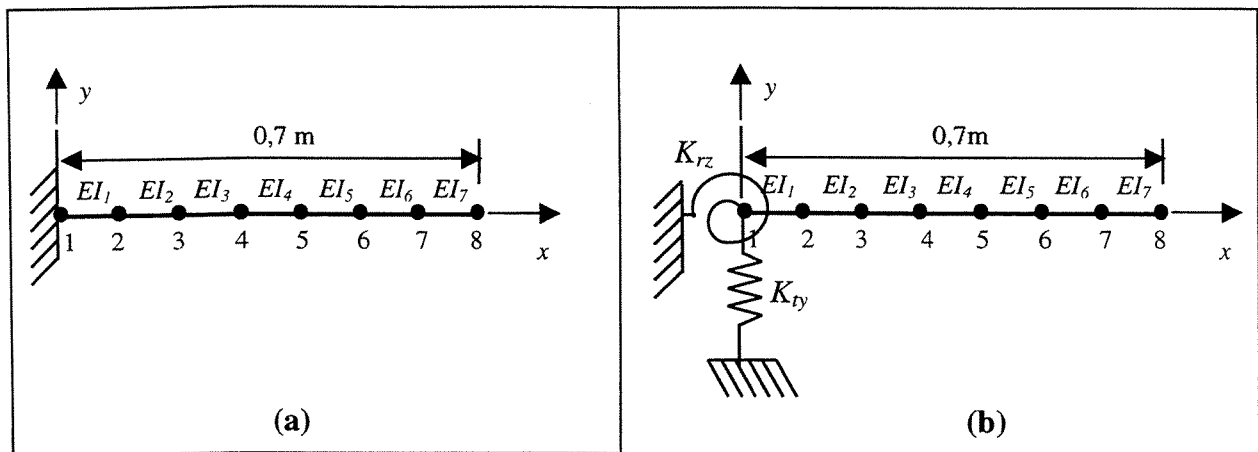


Figura 4.16 - (a) Modelo 1 – engaste rígido (b) Modelo 2 – engaste flexível.

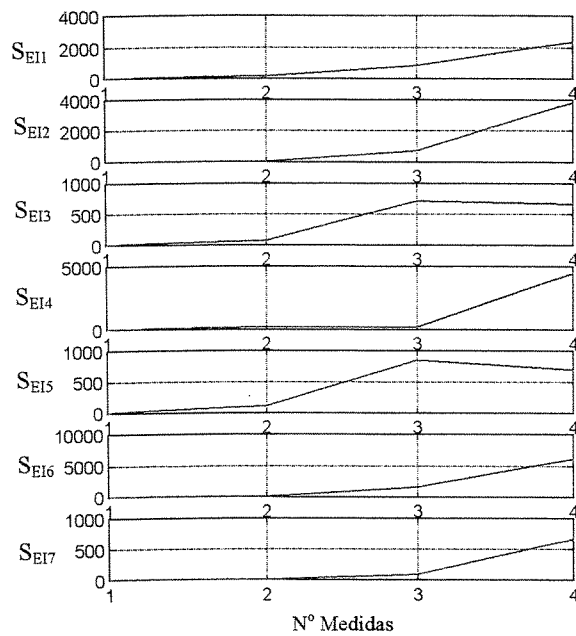
A Tabela 4.4 mostra uma comparação entre os dois modelos ajustados e o modelo pseudo experimental. Para os valores ajustados, são apresentados os casos sem ponderação e com ponderação nos parâmetros. Neste ultimo caso adotaram-se os desvios padrões nos parâmetros EI_1 a EI_7 para *modelo 1* de [1,45 1,55 1,3 1,6 1,5 1,55 1,5] %, e no *modelo 2* de [1,0 1,0 1,0 1,0 1,0 1,0 0,5] %. Como no caso sobredeterminado os valores ajustados foram obtidos usando-se apenas as 4 primeiras frequências naturais ($f1$ a $f4$), as outras frequências $f5$ e $f6$ são usadas para quantificar a qualidade do modelo. É importante esclarecer que o valor inicial apresentado na tabela é obtido considerando o *modelo 1*.

Valor Inicial f_i [Hz] EI_i [N.m ²]		Valor Ajustado								Valor
		Sem Ponderação				Ponderando Parâmetros				Pseudo experimental
		Modelo 1	Erro %	Modelo 2	Erro %	Modelo 1	Erro %	Modelo 2	Erro %	
$f1$	41,86	37,46	0	37,46	0	37,46	0	37,46	0	37,46
$f2$	262,34	236,75	0	236,75	0	236,75	0	236,75	0	236,75
$f3$	735,22	657,34	0	657,34	0	657,34	0	657,34	0	657,34
$f4$	1444,58	1255,33	0	1255,33	0	1255,33	0	1255,33	0	1255,33
$f5$	2401,27	2165,10	8,61	2002,23	0,44	2165,64	8,64	2002,60	0,46	1993,49
$f6$	3617,05	3263,96	13,28	2911,49	1,04	3265,67	13,33	2912,70	1,08	2881,44
EI_1	4500	3669,9	19,52	4593,5	0,73	3677,2	19,36	4593,2	0,73	4560
EI_2	4500	3323,0	27,13	4525,6	0,75	3295,4	27,73	4526,2	0,74	4560
EI_3	4500	4085,4	10,41	4525,3	0,76	4142,3	9,16	4525,3	0,76	4560
EI_4	4500	3412,5	25,16	4537,5	0,49	3415,7	25,09	4536,9	0,51	4560
EI_5	4500	4087,5	10,36	4621,8	1,36	4034,5	11,52	4624,4	1,41	4560
EI_6	4500	2995,8	34,30	4504,1	1,23	3004,7	34,11	4497,4	1,37	4560
EI_7	4500	4190,9	8,09	4446,5	2,49	4223,7	7,38	4483,6	1,68	4560

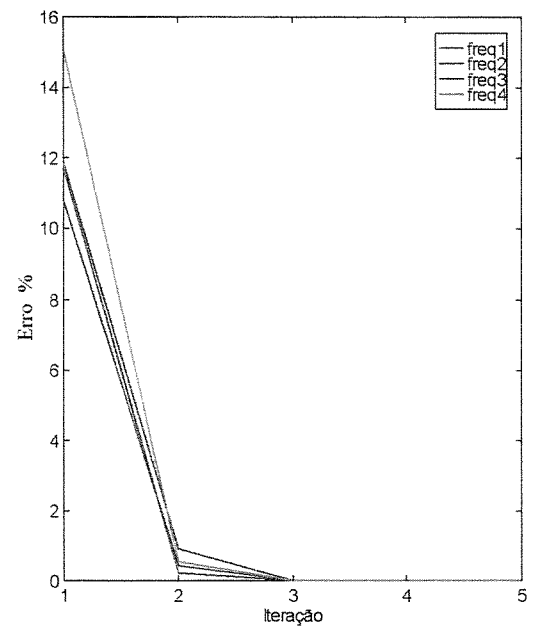
Tabela 4.4 – Comparação dos modelos 1 e 2 com o modelo pseudo experimental para os casos: sem ponderação e com ponderação nos parâmetros.

Como pode-se observar, ambas modelagens conseguem reproduzir com boa precisão os dados medidos. No *modelo 1*, embora os dados pseudo experimentais sejam reproduzidos fielmente, as frequências que não foram utilizadas no ajuste ($f5$ e $f6$) apresentam erros percentuais de até 13,33%, enquanto os parâmetros ajustados convergem para valores com erros da ordem de até 34,3%. Nos casos com o *modelo 2*, além de reproduzirem os dados medidos as frequências que não foram utilizadas no ajuste ($f5$ e $f6$) apresentam erros bem inferiores, da ordem de até 1,08% e os parâmetros ajustados erros razoáveis de até 2,5%.

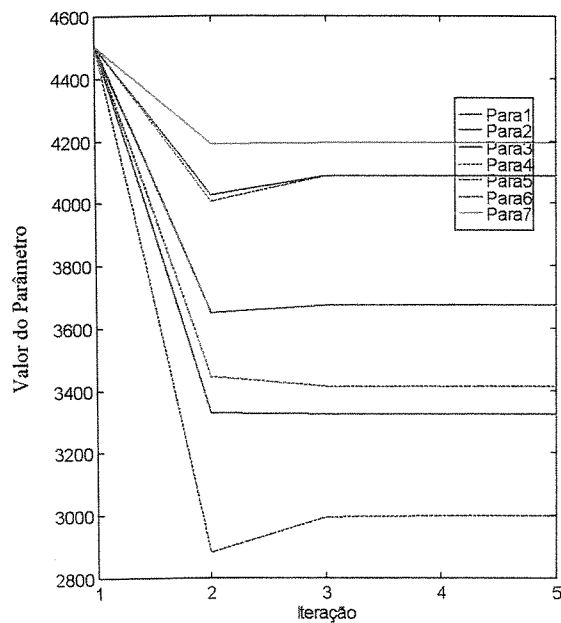
As figuras 4.17 até 4.20 mostram os resultados dos casos sem e com ponderação nos parâmetros: (a) sensibilidade dos autovalores, (b) o erro percentual das frequências medidas em função ao número de iterações, (c) o valor do parâmetro a cada iteração e (d) o processo de convergência do vetor de dados ajustados $\mathbf{z}_j$ e vetor de parâmetros θ_j a cada iteração.



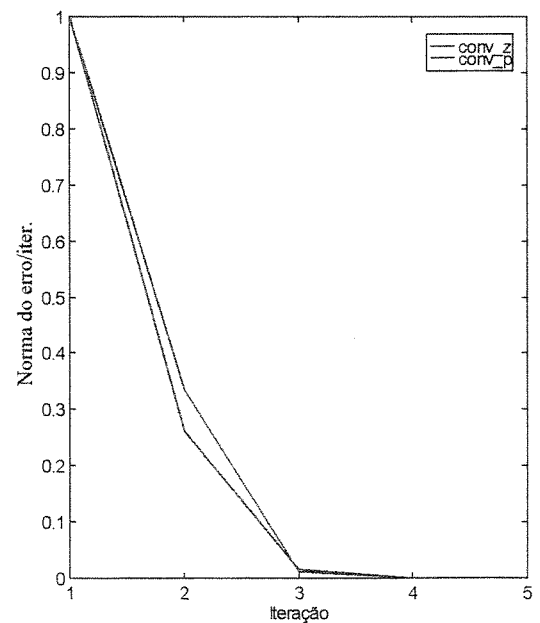
(a)



(b)

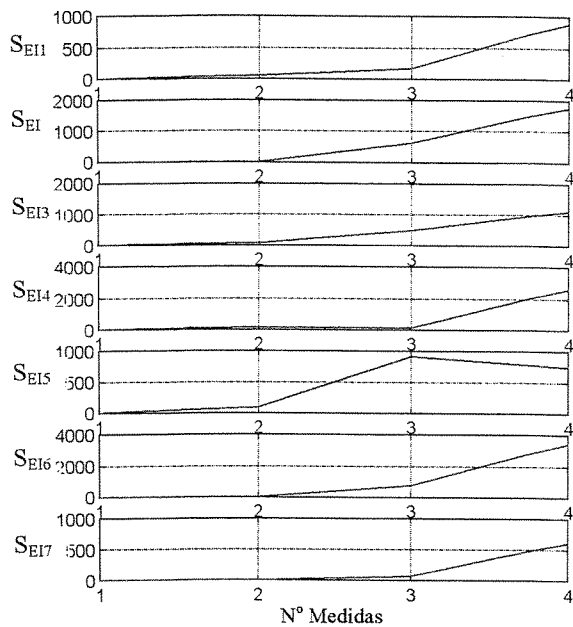


(c)

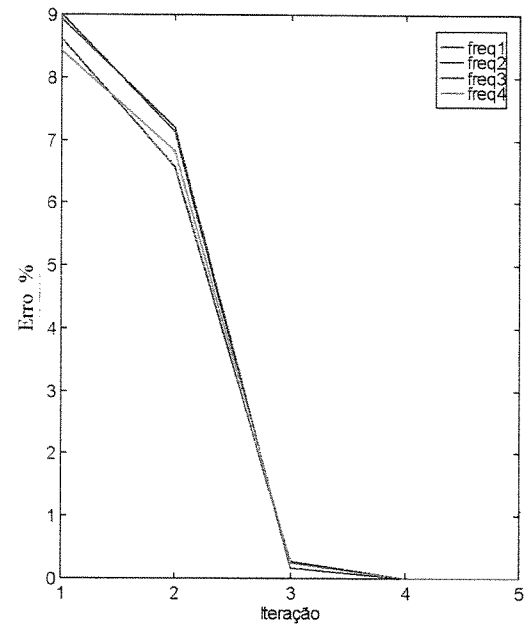


(d)

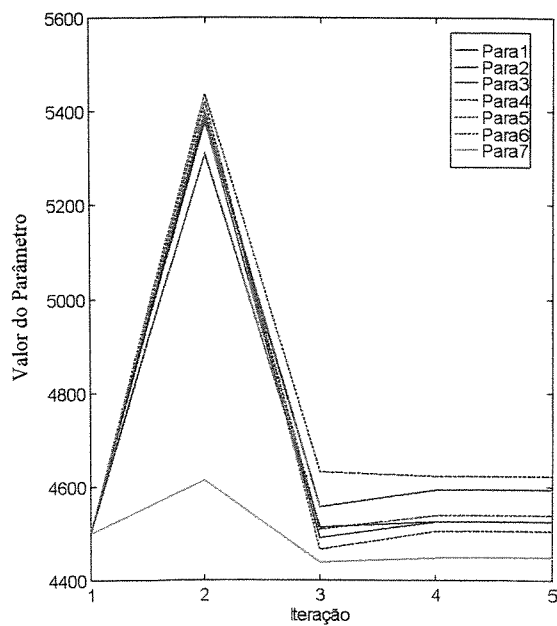
Figura 4.17 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado sem ponderação modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_i) em cada iteração.



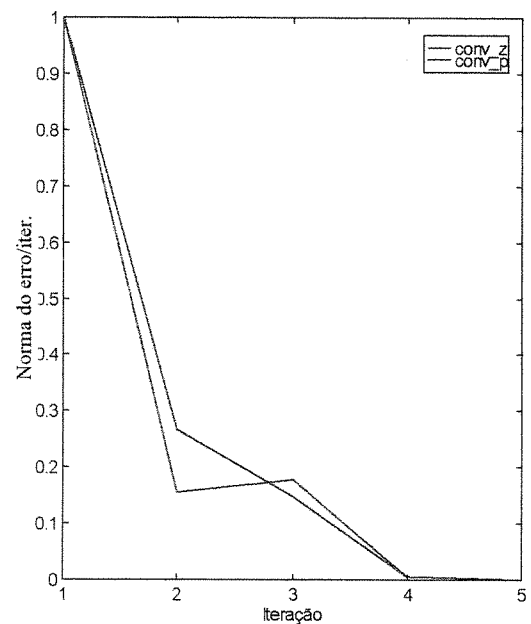
(a)



(b)

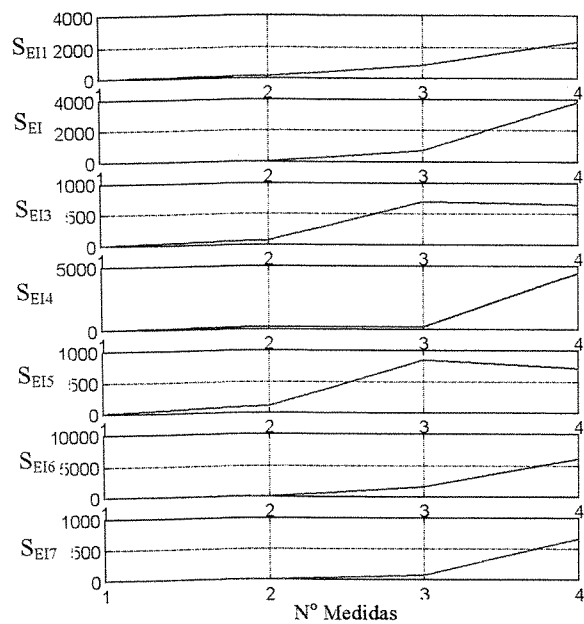


(c)

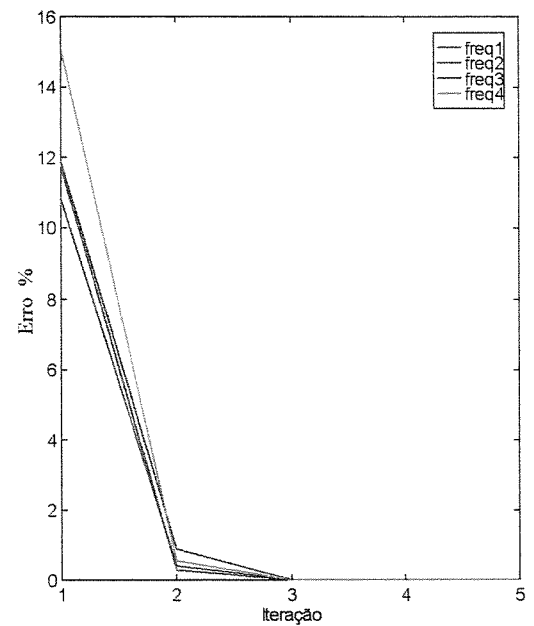


(d)

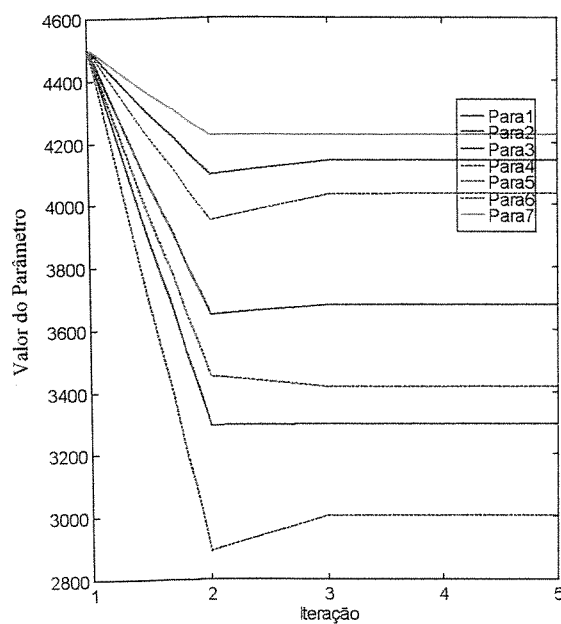
Figura 4.18 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado sem ponderação modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



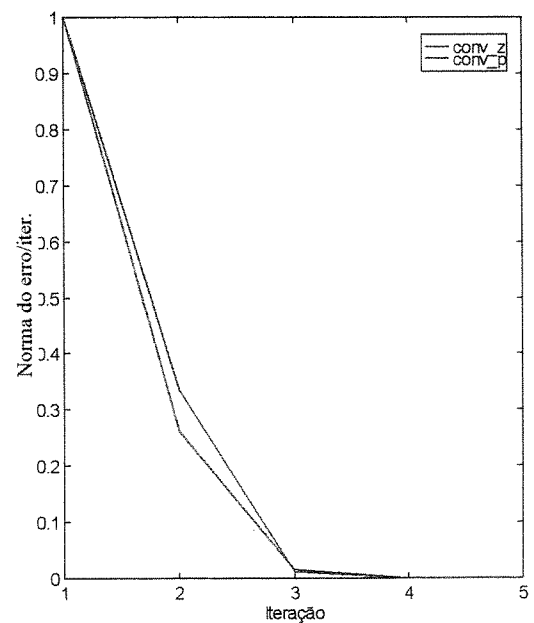
(a)



(b)

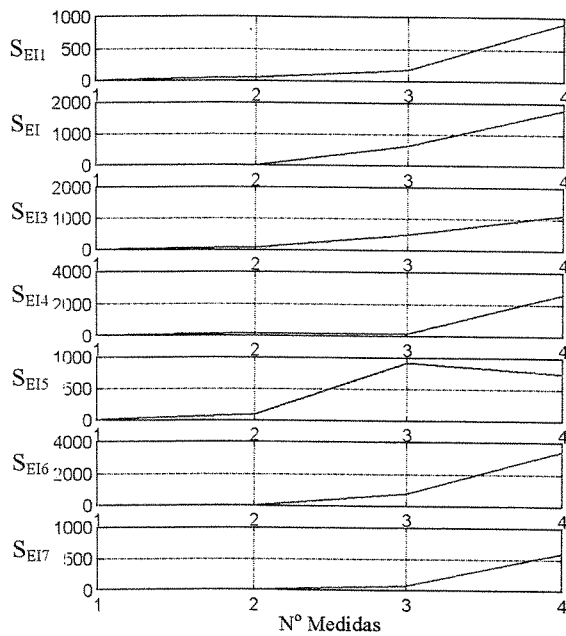


(c)

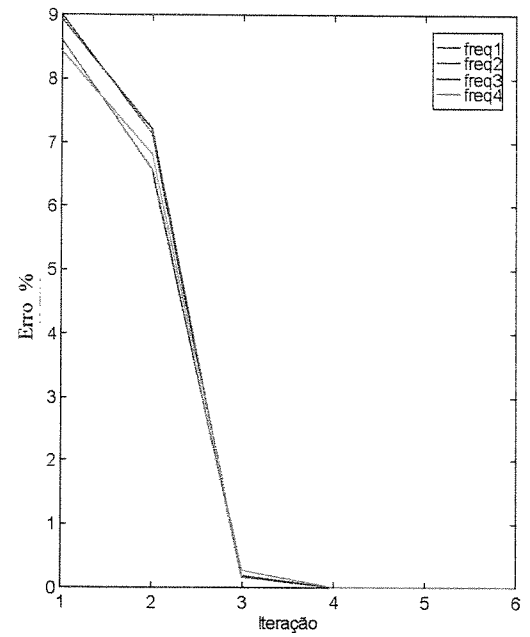


(d)

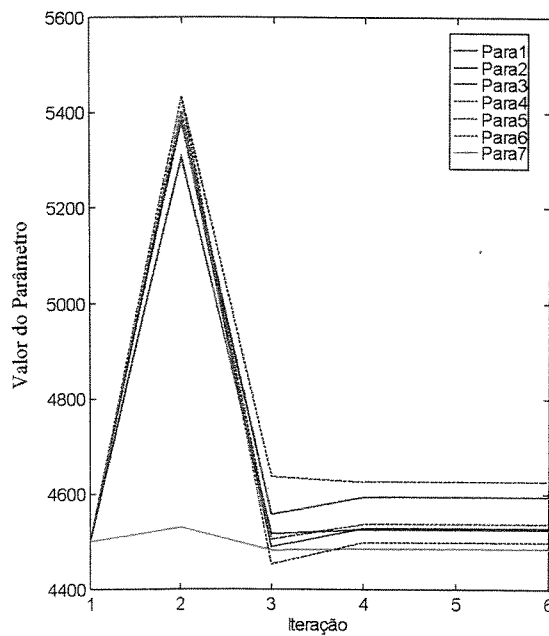
Figura 4.19 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando parâmetros modelagem 1:
 (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



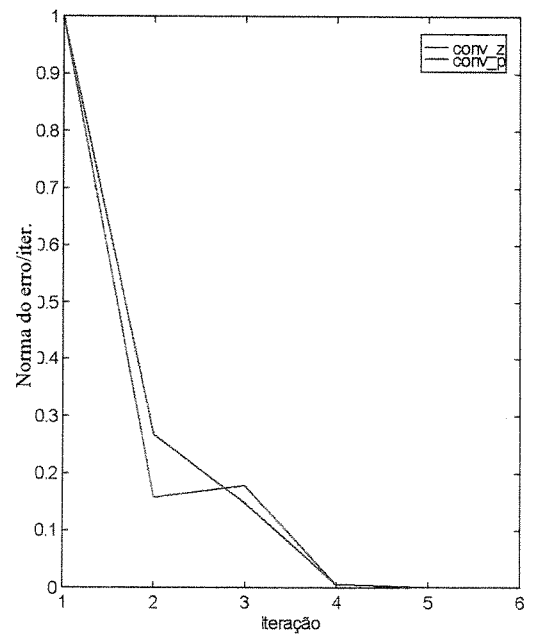
(a)



(b)



(a)

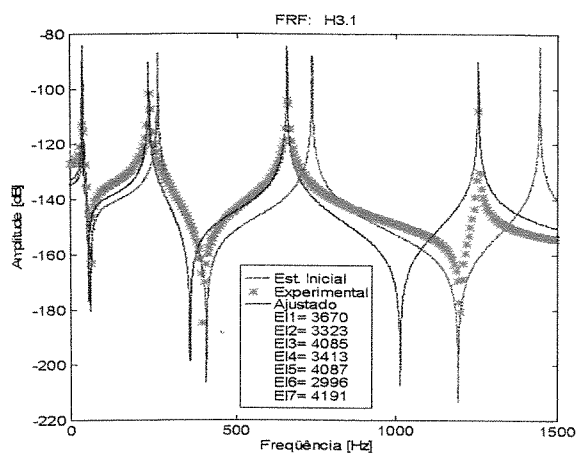


(b)

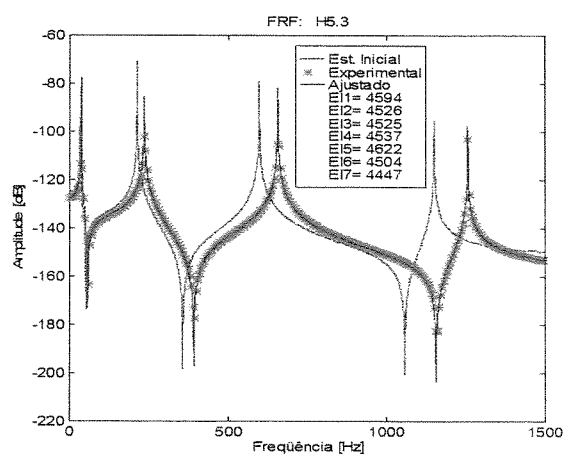
Figura 4.20 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando parâmetros modelagem 2:
 (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

As figuras anteriores em geral apresentam maiores sensibilidades nas frequências mais altas. O erro percentual das frequências medidas converge rapidamente para um valor do parâmetro, (iteração 3) mesmo sendo este errado (*modelo 1*). Assim o valor do parâmetro e a norma do erro de $\mathbf{z}$ e θ apresentam um comportamento quase constante a partir da iteração nº 3. O algoritmo para dos casos assim apresentados se mostraram eficientes e rápidos em termos de convergência (5 iterações).

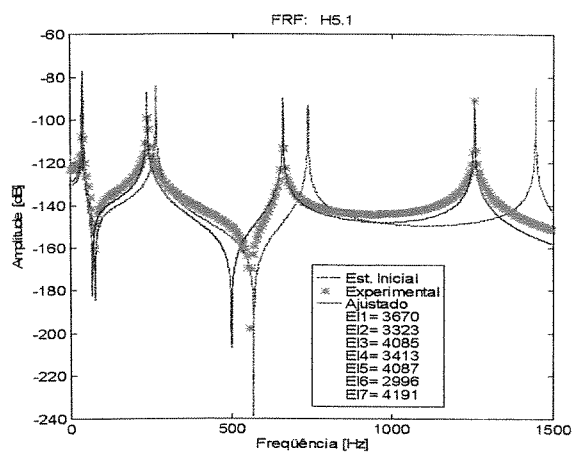
As figuras 4.21 e 4.22, mostram uma comparação das funções de resposta em frequência do modelo pseudo experimental e do modelo ajustado bem como a que foi estimada com os valores dos parâmetros iniciais do *modelo 1* ($a_1 - c_1$) e do *modelo 2* ($a_2 - c_2$). Como era de se esperar o *modelo 1* só apresenta uma boa concordância nos pontos próximos às frequências de ressonância, enquanto que as FRFs ajustadas com o *modelo 2* apresenta uma boa concordância com o modelo pseudo experimental em toda a faixa de frequências analisada.



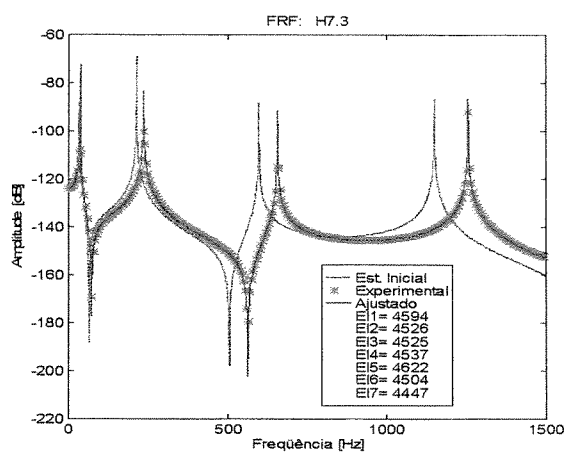
(a1)



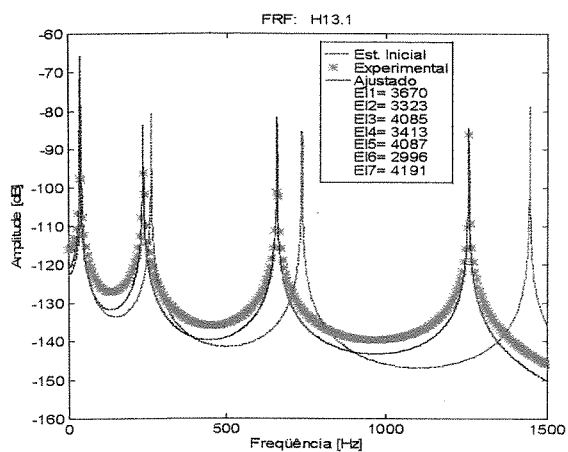
(a2)



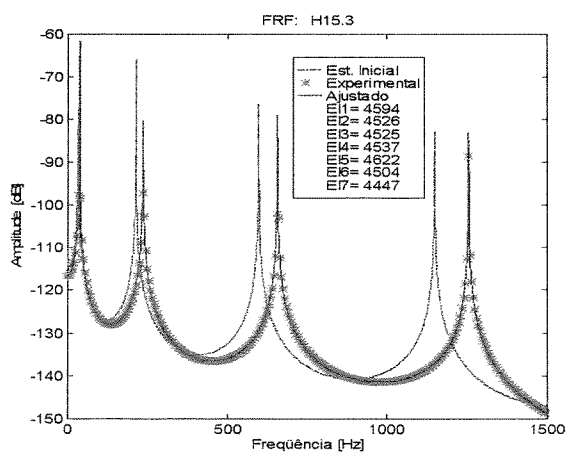
(b1)



(b2)

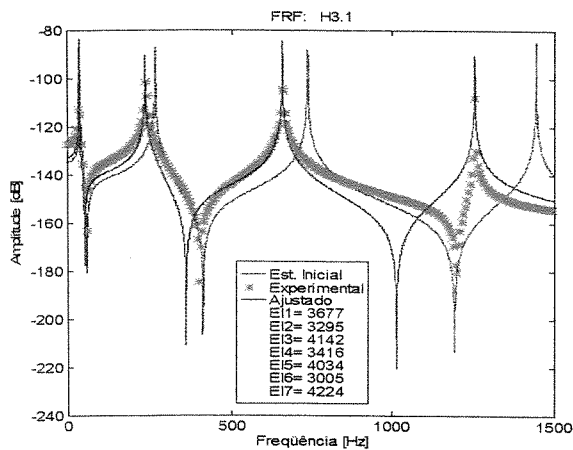


(c1)

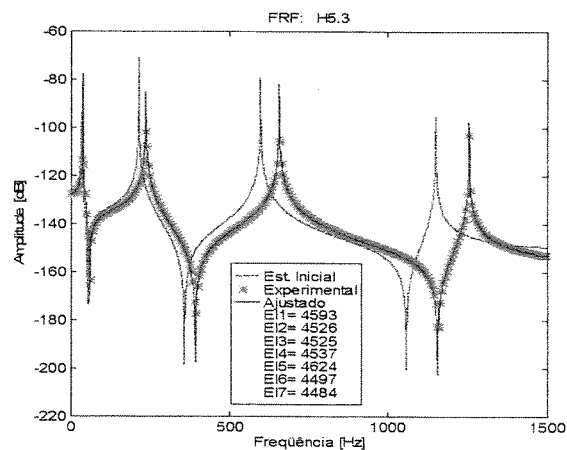


(c2)

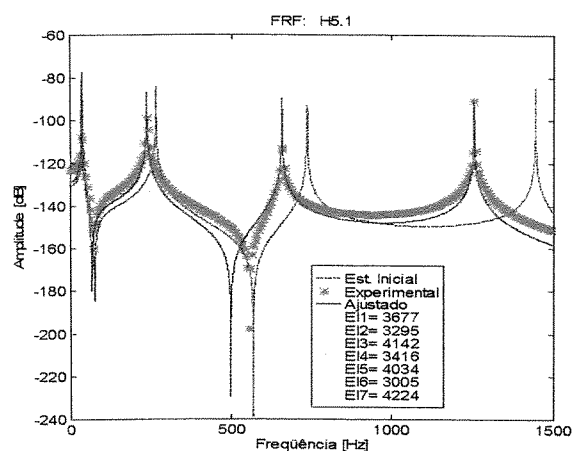
Figura 4.21 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Caso subdeterminado sem ponderação: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).



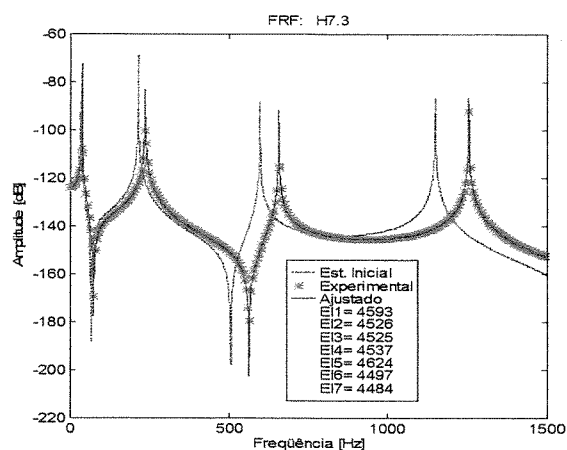
(a1)



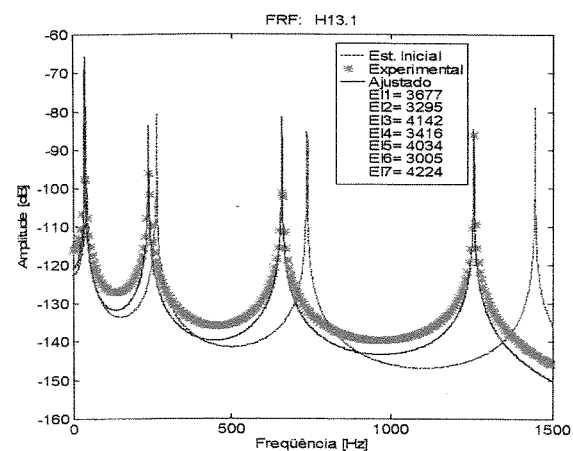
(a2)



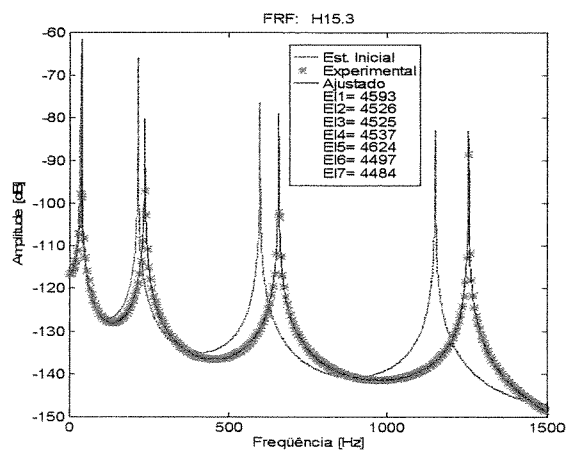
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 4.22 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Caso subdeterminado ponderando parâmetros: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).

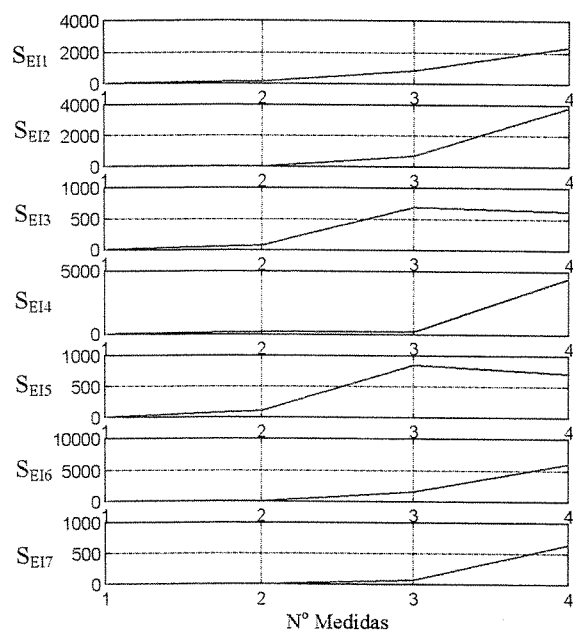
Na Tabela 4.5, são mostrados os resultados dos casos melhor condicionados: ponderando medições e parâmetros, e ponderando medições e estimativas iniciais dos parâmetros. Em ambos os casos o desvio padrão adotado nos dados medidos é de 0,5%, enquanto os desvios padrões dos parâmetros EI_1 a EI_7 no *modelo 1* foram de [1,45 1,55 1,3 1,6 1,5 1,55 1,5] % e para o *modelo 2* foram de [1,0 1,0 1,0 1,0 1,0 1,0 0,5] %.

Valor Inicial f_i [Hz] EI_i [N.m ²]		Valor Ajustado								Valor Pseudo experimental
		Ponderando Medições e Parâmetros				Ponderando Medições e Estimativas Iniciais dos Parâmetros				
		Modelo 1	Erro %	Modelo 2	Erro %	Modelo 1	Erro %	Modelo 2	Erro %	
f_1	41,86	37,46	1,11e-4	37,46	1,3e-4	37,52	0,14	37,39	0,21	37,46
f_2	262,34	236,75	4,81e-4	236,75	2,8e-3	237,19	0,19	236,18	0,24	236,75
f_3	735,22	657,33	1,28e-3	657,31	5,0e-3	660,47	0,48	656,03	0,20	657,34
f_4	1444,58	1255,35	1,38e-3	1255,43	8,2e-3	1260,25	0,39	1255,08	0,02	1255,33
f_5	2401,27	2166,84	8,70	2003,17	0,4853	2189,84	9,85	2001,03	0,38	1993,49
f_6	3617,05	3267,69	13,41	2912,90	1,0918	3295,71	14,38	2909,14	0,96	2881,44
EI_1	4500	3663,6	19,66	4585,7	0,56	3424,6	24,90	4540,9	0,42	4560
EI_2	4500	3309,9	27,41	4527,7	0,71	3605,6	20,93	4531,5	0,63	4560
EI_3	4500	4148,7	9,02	4548,5	0,25	4384,3	3,85	4532,9	0,59	4560
EI_4	4500	3418,7	25,03	4533,4	0,58	3480,3	23,68	4530,8	0,64	4560
EI_5	4500	4049,3	11,20	4610,5	1,11	4274,5	6,26	4535,5	0,54	4560
EI_6	4500	2992,6	34,37	4497,8	1,36	2875,4	36,94	4520,3	0,87	4560
EI_7	4500	4258,0	6,62	4495,3	1,42	4462,5	2,14	4500,4	1,31	4560

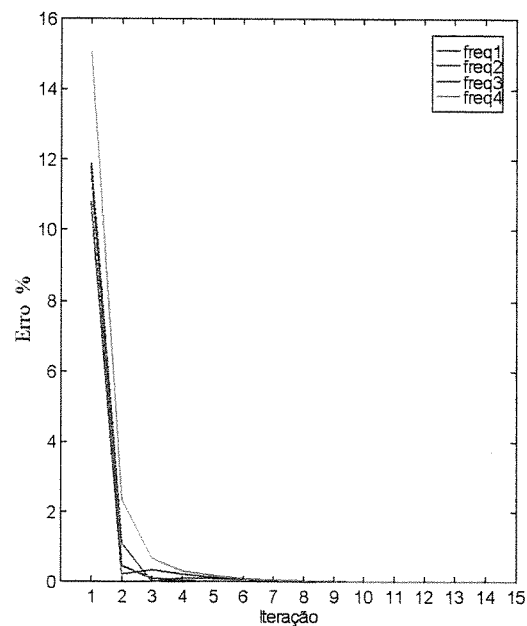
Tabela 4.5 – Comparação dos modelos 1 e 2 com o modelo pseudo experimental, para os casos: ponderando medições e parâmetros e ponderando medições e estimativa inicial dos parâmetros

Nos resultados apresentados na Tabela 4.5, pode-se observar que os casos melhor condicionados em todos os casos, não melhora significativamente a correlação entre parâmetros EI_i pseudo experimentais e os ajustados, nem os resultados das frequências ajustadas em relação àqueles obtidos na Tabela 4.4.

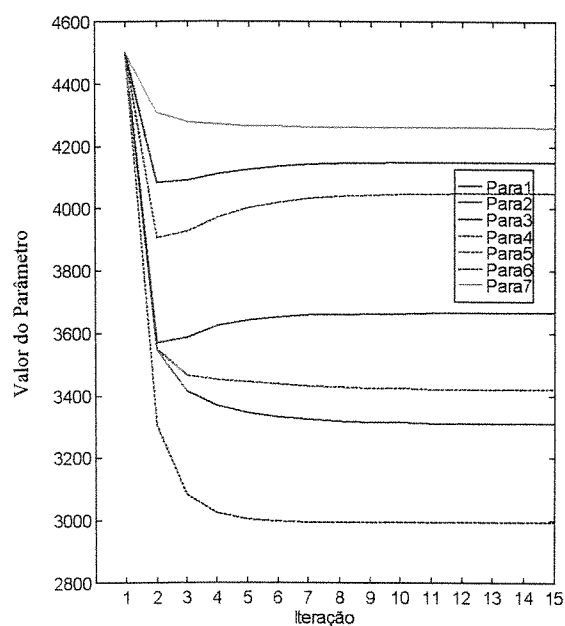
As figuras 4.23 até 4.26 mostram: (a) sensibilidade dos autovalores, (b) o erro % das frequências medidas em função ao número de iterações, (c) o valor do parâmetro a cada iteração e (d) o processo de convergência do vetor de dados ajustados $\mathbf{z}_j$ e vetor de parâmetros θ_j a cada iteração. Como era de se esperar o caso ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros apresenta um convergência mais rápida do que o método ponderando medidas e parâmetros.



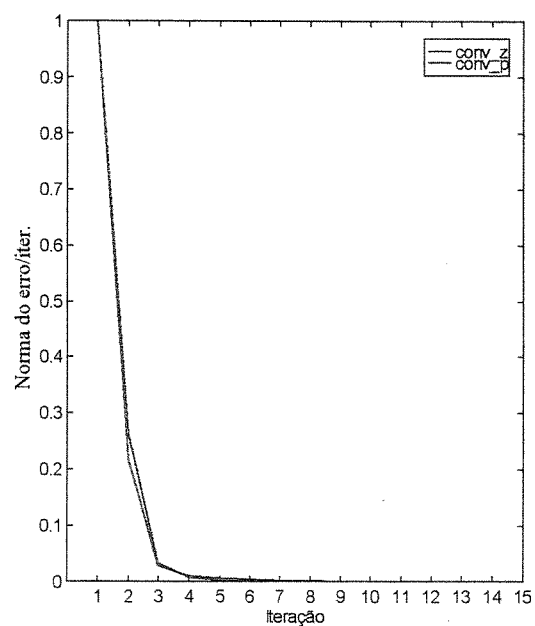
(a)



(b)

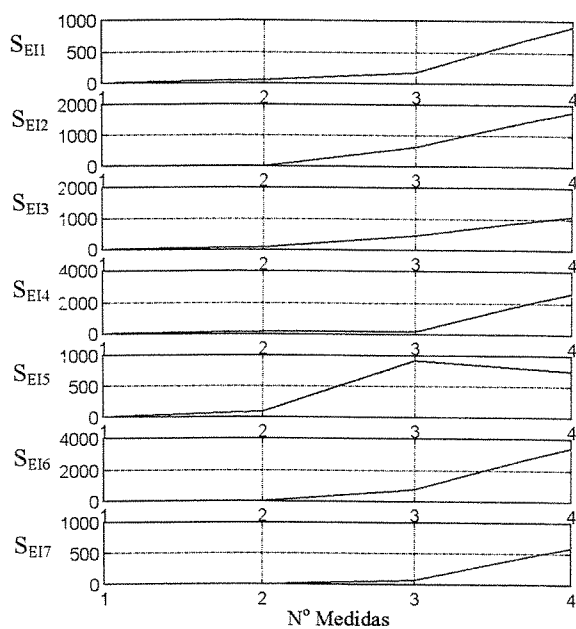


(c)

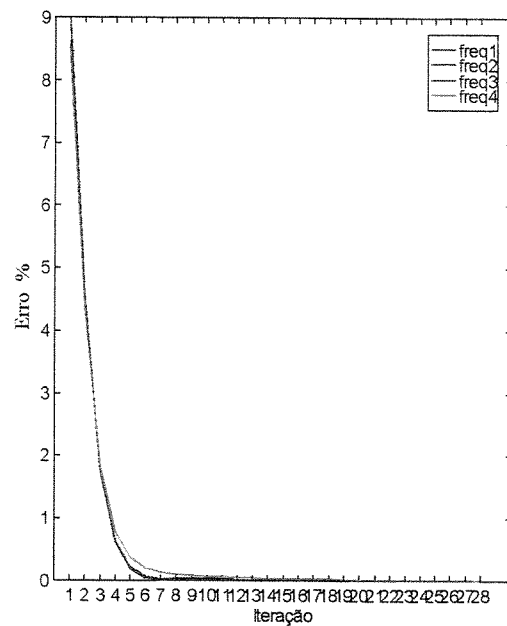


(d)

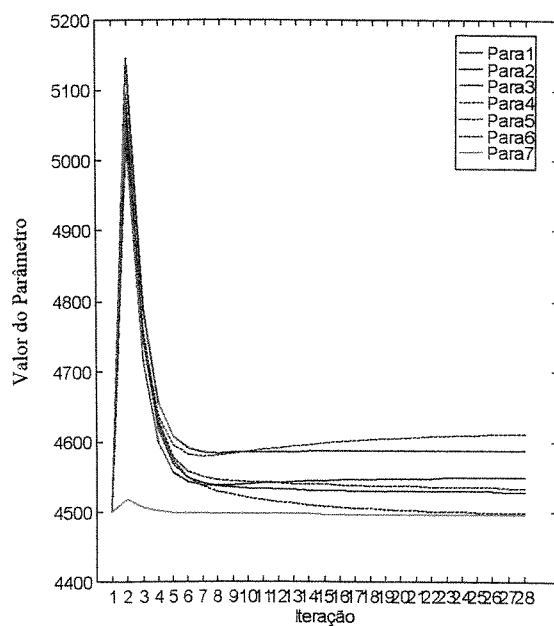
Figura 4.23 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros
modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das
freqüências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do
erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



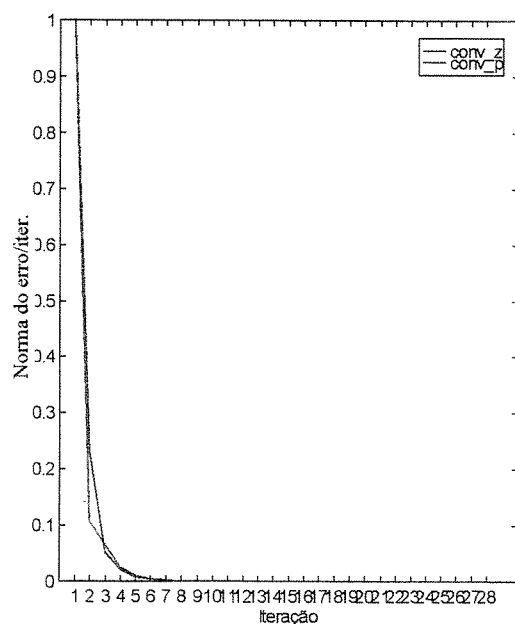
(a)



(b)

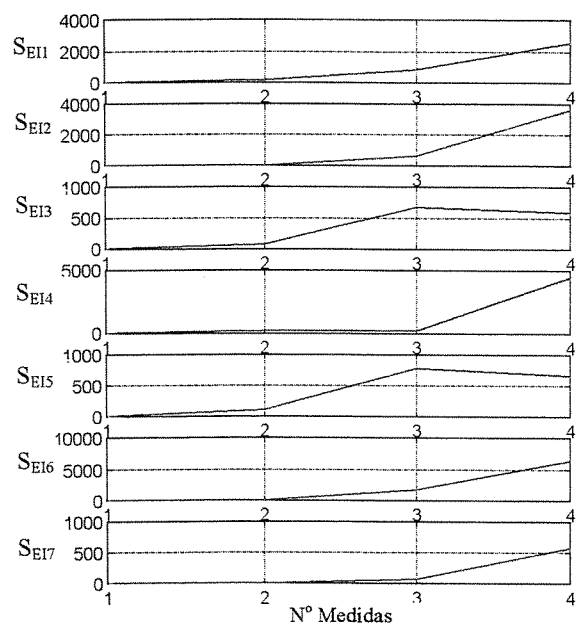


(c)

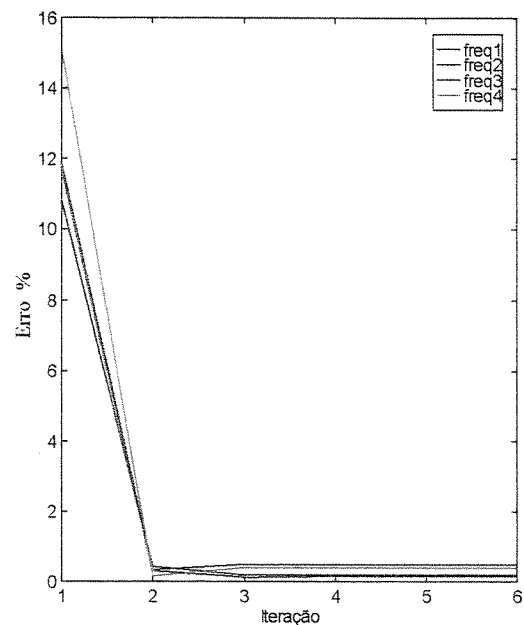


(d)

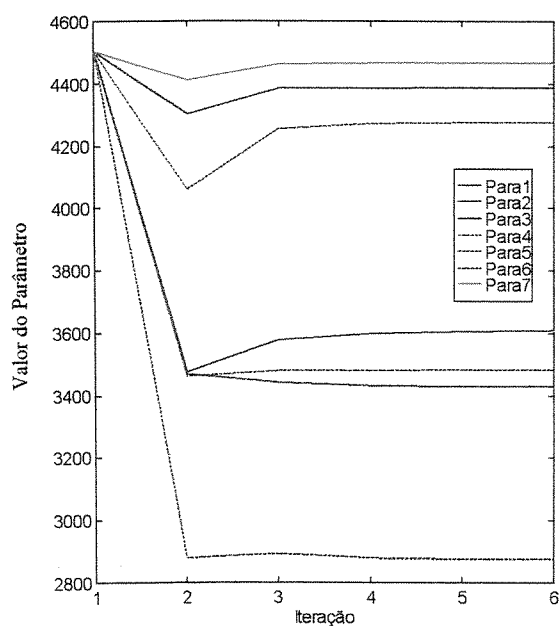
Figura 4.24 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros
modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das
freqüências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do
erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



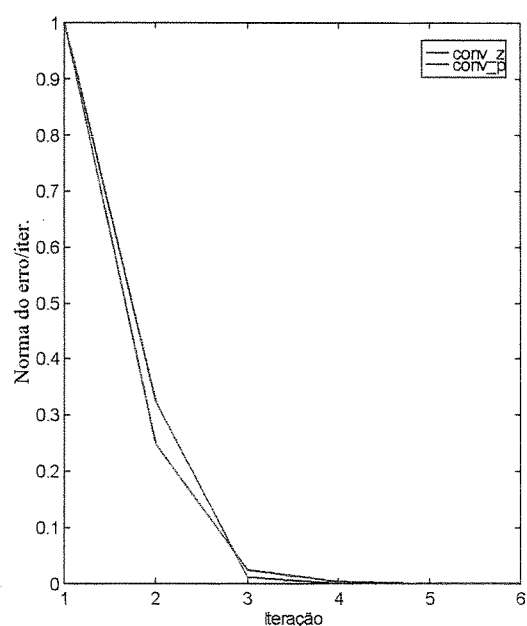
(a)



(b)

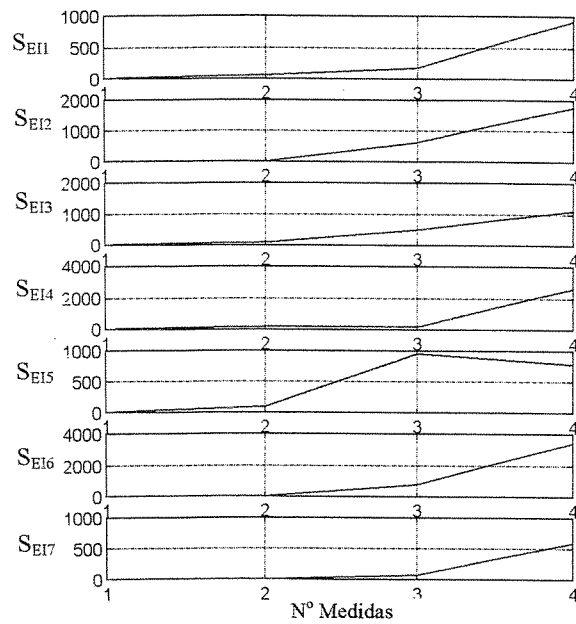


(c)

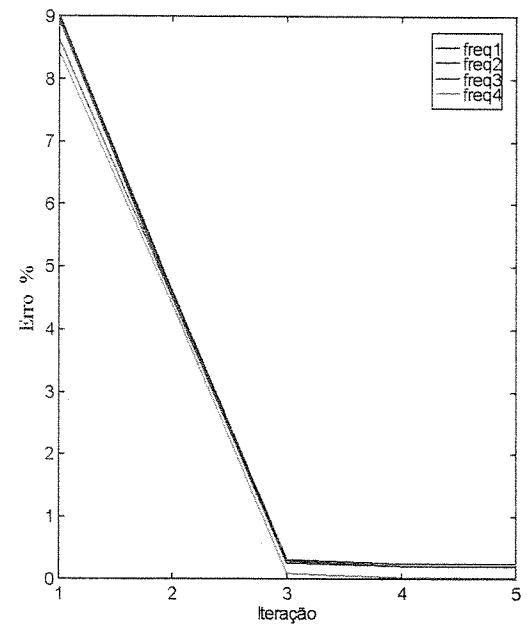


(d)

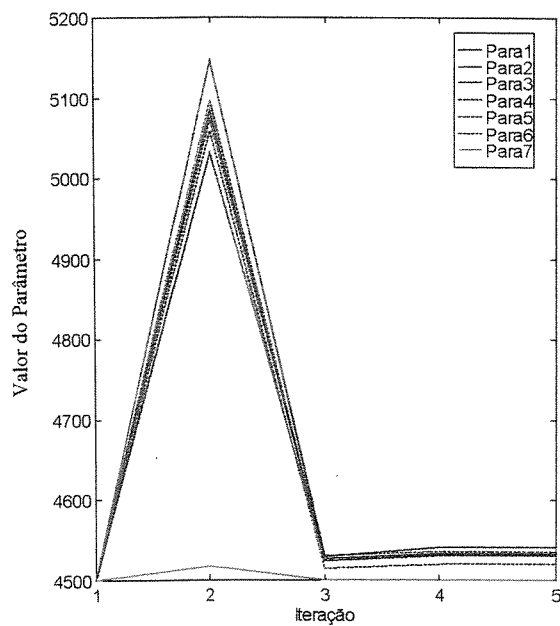
Figura 4.25 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros modelagem 1: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



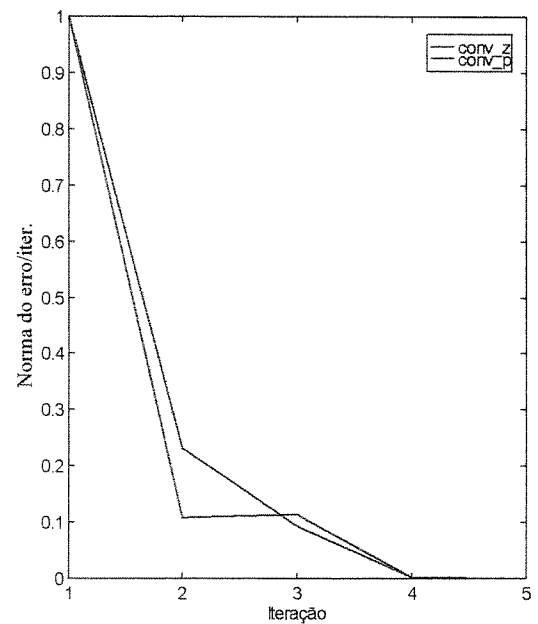
(a)



(b)



(c)

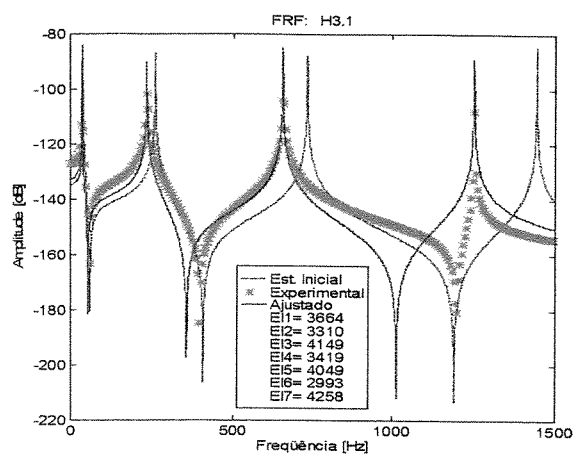


(d)

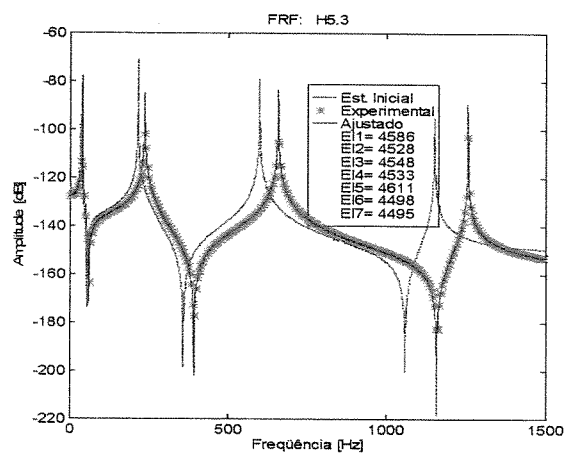
Figura 4.26 – Resultados do exemplo simulado – caso subdeterminado ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros modelagem 2: (a) Sensitividade de λ em função do nº de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do nº de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do nº de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

As figuras anteriores novamente apresentam maiores sensibilidades nas frequências mais altas. No *modelo 1* e *2* o erro percentual das frequências medidas converge no caso ponderando medidas e parâmetros, em forma mais lenta (máximo 28 iterações) enquanto que para o caso ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros, como era de se esperar, a convergência é bem mais rápida (máximo 6 iterações).

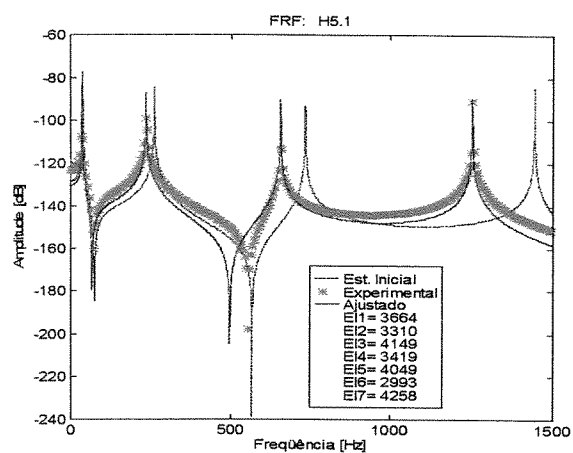
As figuras 4.27 e 4.28, mostram uma comparação das funções de resposta em frequência do modelo pseudo experimental e do modelo ajustado bem como a que foi estimada com os valores dos parâmetros iniciais do *modelo 1* (a1 – c1) e do *modelo 2* (a2 – c2). Uma vez mais o *modelo 2* apresenta uma boa concordância com as FRFs do modelo pseudo experimental em toda a faixa de frequências analisada, enquanto que o *modelo 1* só melhora ligeiramente em pontos próximos às frequências de ressonâncias.



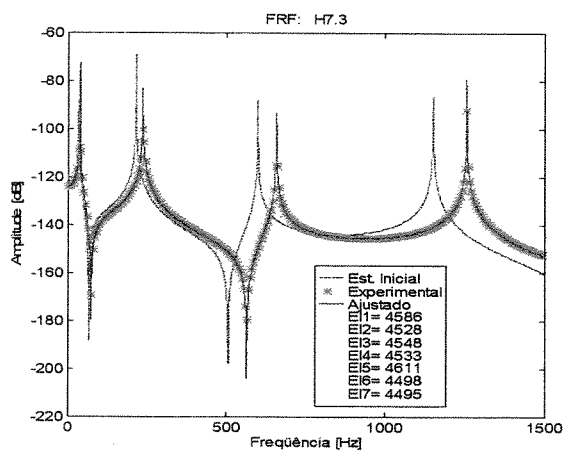
(a1)



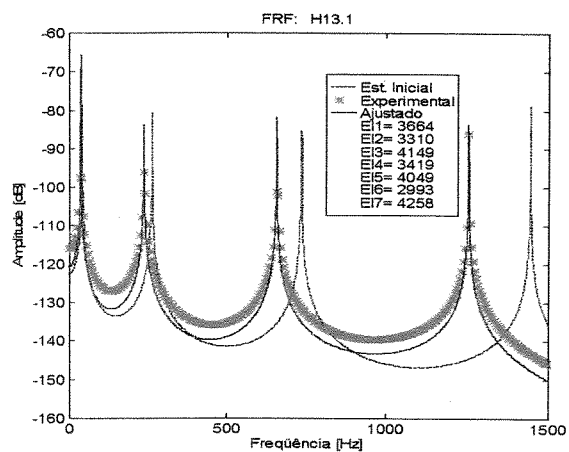
(a2)



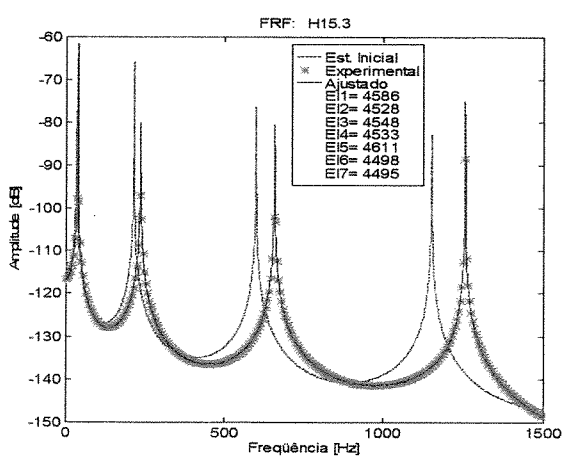
(b1)



(b2)

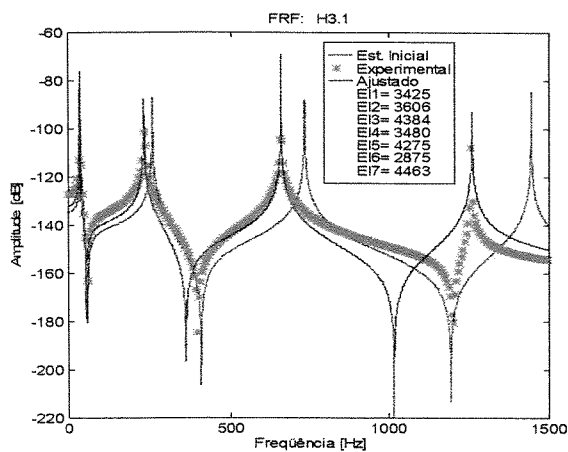


(c1)

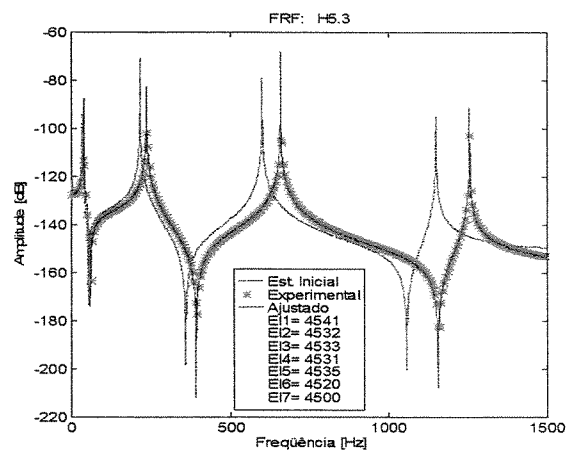


(c2)

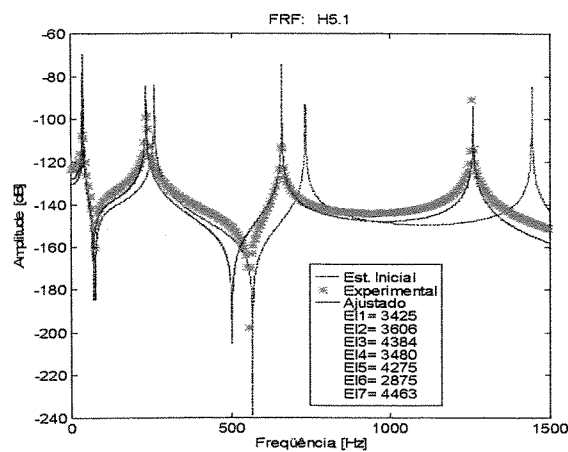
Figura 4.27 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Caso subdeterminado ponderando medidas e parâmetros: modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).



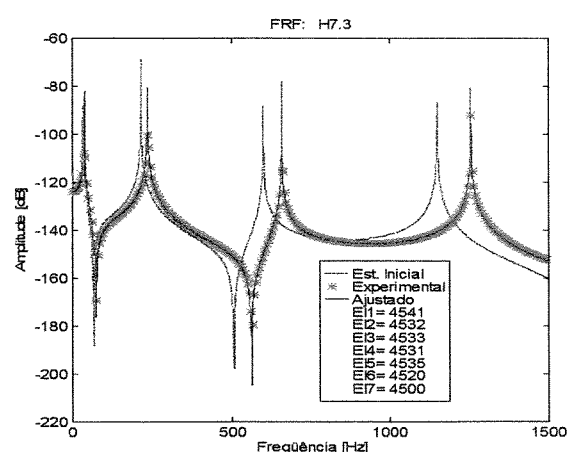
(a1)



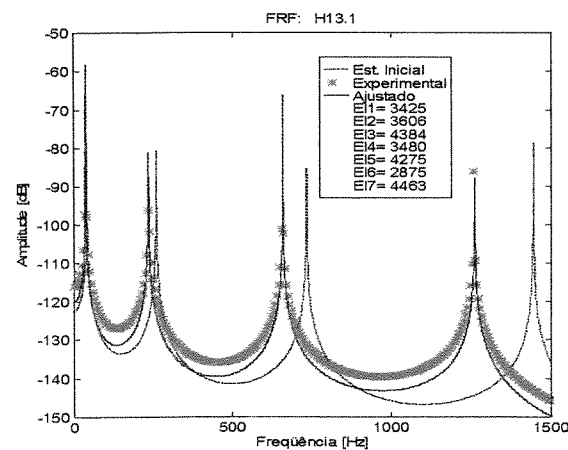
(a2)



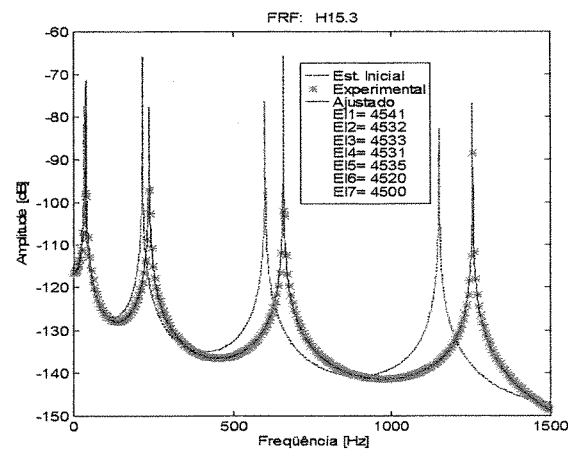
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 4.28 – FRFs dos dados pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Caso subdeterminado pond. medidas e est. inicial dos parâmetros: : modelo 1 (a1-c1), modelo 2 (a2-c2).

4.1.3 Exemplo experimental

Com o objetivo de verificar o desempenho do algoritmo de ajuste em um caso aplicado realizou-se um experimento similar ao simulado. Consiste de uma viga de alumínio engastada em uma extremidade, com 402,25mm de comprimento e seção transversal retangular de 25,60×3,30mm. A Figura 4.29 mostra uma vista geral da montagem experimental da viga.

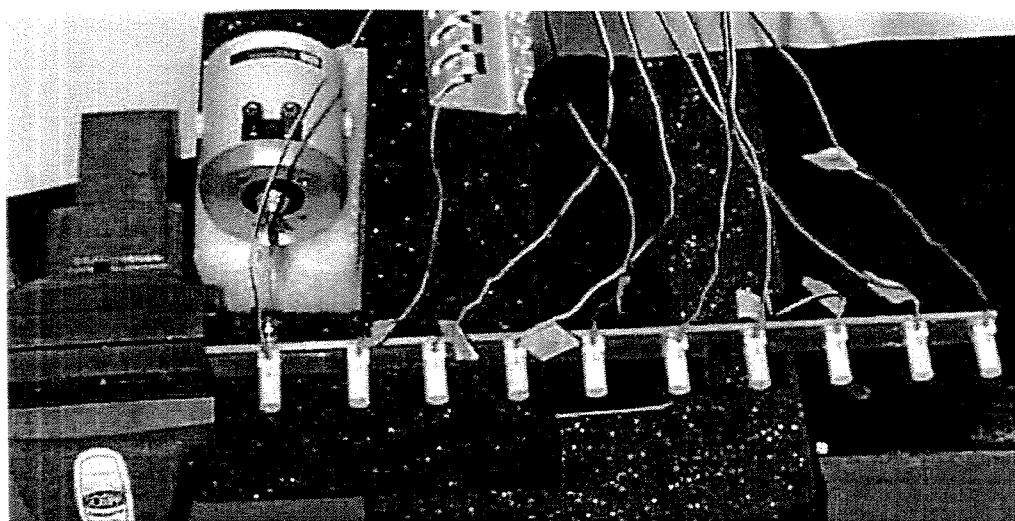


Figura 4.29 – Vista geral da montagem do teste experimental da viga

As medidas do modelo experimental foram realizadas com as FRFs de 10 pontos de medidas de aceleração (ao longo da linha neutra da viga) e uma referência da medida da força de excitação na faixa de frequências de DC-800 Hz. Os acelerômetros foram posicionados uniformemente a cada 40,2mm ao longo do comprimento da viga, enquanto o conjunto transdutor de força, *stinger* e excitador eletrodinâmico foi aplicado em um ponto a 40,2mm do engaste. O sistema foi excitado com um sinal de força aleatório. Na Tabela 4.6 estão apresentadas uma descrição mais detalhada dos equipamentos utilizados no experimento.

Equipamento	Modelo
Analizador Espectral	HP35650
Amplificador	LDS PA25E
Excitador Eletrodinâmico	LDS V201
Condicionador de Sinais	PCB Piezotronics 583A
Condicionador de Sinais	PCB Piezotronics 480E09
Transdutor de força	PCB Piezotronics 208A02
Acelerômetros	PCB 330A

Tabela 4.6 – Equipamentos utilizados no experimento.

4.1.4 Análise modal experimental

Com a finalidade de obter o conjunto dos dados modais medidos (frequências e modos de vibrar) do modelo experimental, foi requerida a realização da análise modal da viga. O processo da análise modal experimental (AME) pode ser dividido basicamente em duas etapas: a primeira etapa consiste na aquisição de dados (as FRFs), e a segunda consiste na estimação dos parâmetros ou extração dos dados modais medidos.

A aquisição de dados foi realizada com um analisador espectral (HP Spectrum Analyzer) onde obtiveram-se 10 FRFs. As aquisições foram feitas com 20 médias, com janela tipo Hanning e numa faixa de frequências de DC-800 Hz e discretização de 0.5 Hz. A extração dos dados modais, foi realizada com ajuda do Software LMS/CADA-PC (Manual do CADA-PC, 1994), o qual usa um algoritmo de identificação de mínimos quadrados com o método exponencial complexo.

Na Figura 4.30, são mostradas 3 FRFs medidas típicas e suas correspondentes coerências. Como se pode observar, a exceção dos trechos iniciais e finais da faixa de frequências, os resultados da coerência indicam uma boa qualidade da estimação das FRFs.

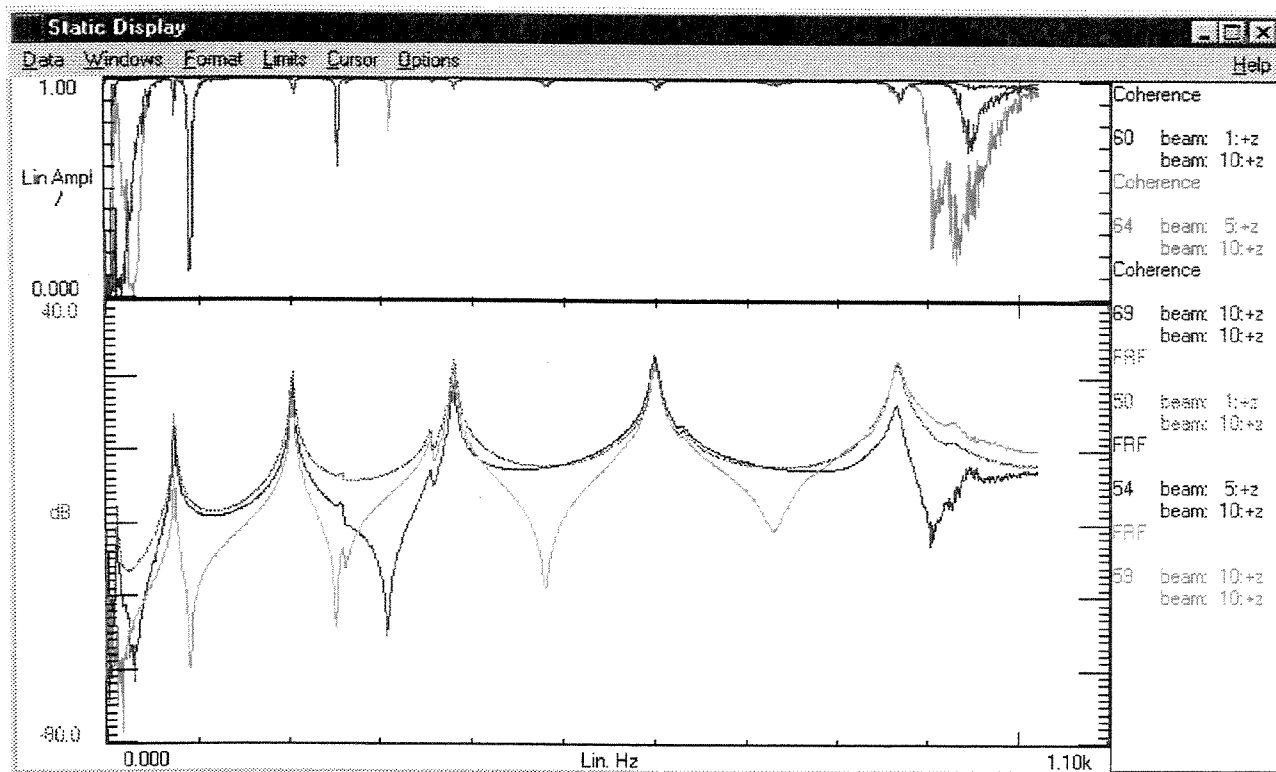


Figura 4.30 – Função de resposta em frequência típicas e suas respectivas coerências

As Figuras 4.31 e 4.32 mostram o diagrama de estabilização dos polos estimados e a seleção das frequências que representam os modos da estrutura, onde as letras “o” “f” e “s”, são indicadores que surgem em função da comparação dos parâmetros modais determinados na iteração atual e a anterior. O indicador *o* significa um novo polo; o indicador *f* significa que a frequência atual esta presente no modelo anterior; o indicador *s* significa um modo com idêntica frequência e amortecimento em relação ao modelo anterior (Manual do CADA-PC 1994).

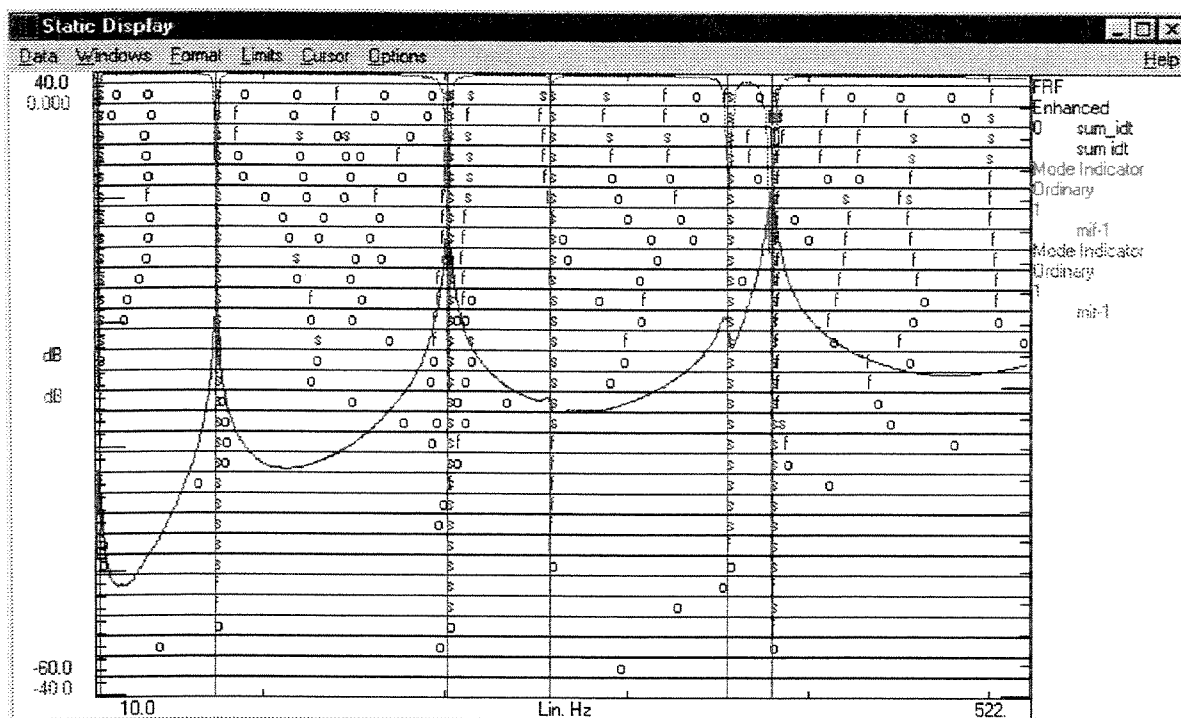


Figura 4.31 – Diagrama de estabilização no processo de extração dos dados modais (8-512Hz).

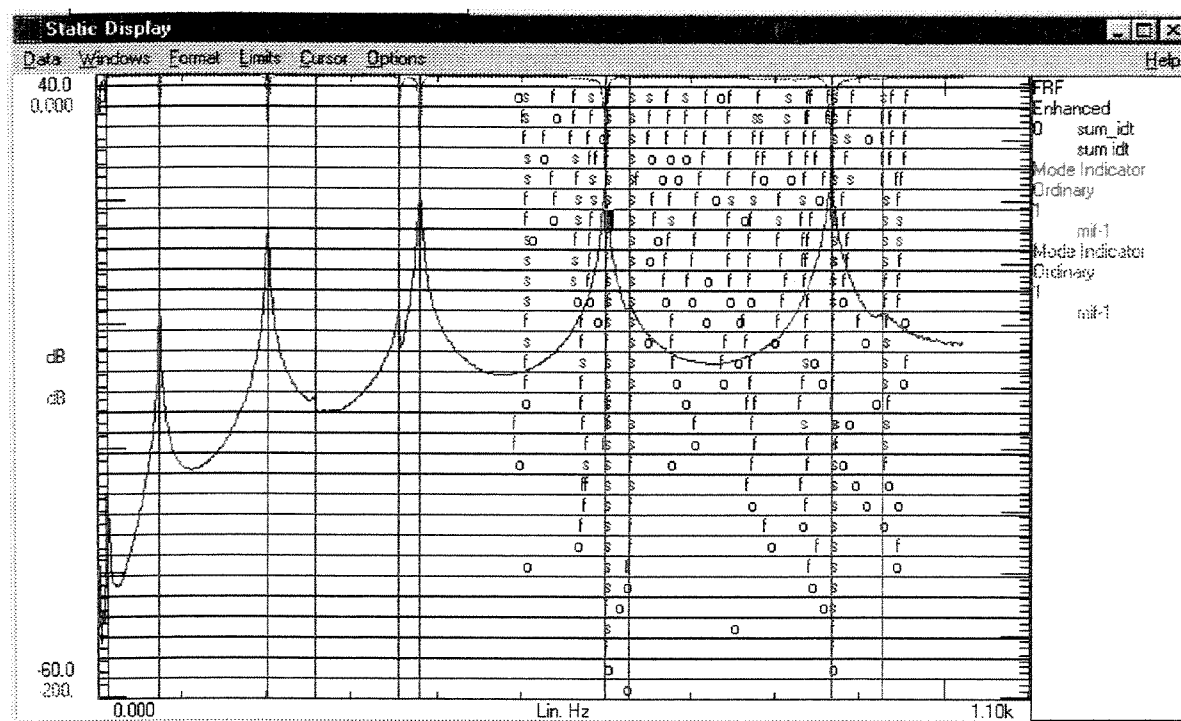


Figura 4.32 – Diagrama de estabilização no processo de extração dos dados modais (512-1024Hz).

A Tabela 4.7, mostra os valores das frequências naturais estimadas com os respectivos coeficientes de amortecimento modal. Pode-se observar também a presença de modos de torção que não foram utilizados no processo de ajuste mas que foram identificados na AME. A aparição dos modos de torção indicam que nem todos os acelerômetros foram colocados exatamente ao longo da linha neutra da viga.

Modo #	Frequência (Hz)	% Amortecimento Modal	Modo
1	11,92	4,74	Flexão
2	74,12	0,99	Flexão
3	201,32	0,55	Flexão
4	257,37	0,76	Torção
5	355,35	0,62	Torção
6	379,93	0,46	Flexão
7	598,24	0,32	Flexão
8	627,34	0,71	Torção
9	866,57	0,23	Flexão
10	928,17	1,15	Torção

Tabela 4.7 – Frequências extraídas via AME.

4.1.5 Modelo de elementos finitos da viga experimental

O Modelo da viga no MEF foi calculado no código computacional MEFLAB (Pavanello, 1996), onde realizou-se uma discretização com 10 elementos de viga (Bernoulli-Euler) de forma a obter os nós do modelo coincidentes com os pontos de medição. A fim de levar em consideração a massa de cada um dos 10 acelerômetros (3g cada) e do transdutor de força (30g) foram adicionados 11 elementos de massa concentrada nos nós correspondentes. A Figura 4.33 mostra um esboço do modelo do MEF.

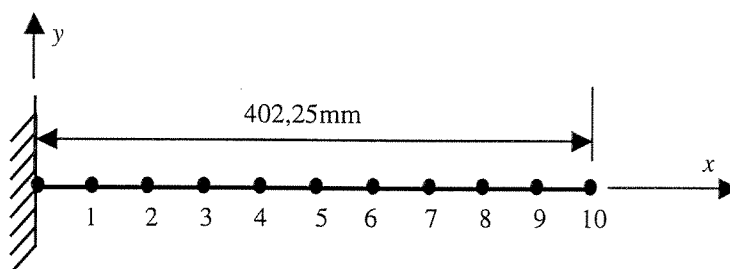


Figura 4.33 – Modelo do MEF da viga do teste experimental.

Utilizando as cinco primeiras frequências de flexão identificadas dentro da faixa de frequências analisada, e nos casos mencionados os modos de vibrar correspondentes, o modelo do MEF foi ajustado utilizando como base dois parâmetros: o módulo de elasticidade (E) e a densidade (ρ). Os valores medidos do módulo de elasticidade foram obtidos através de ensaio de tração com corpos de prova padronizados (vide Apêndice A) enquanto que a densidade foi estimada através do volume da viga calculado a partir de medições das dimensões com paquímetro e a massa do material medida em balança. Para os valores iniciais do E e ρ foram usados valores tabelados (Timoshenko, 1971). As Tabelas 4.8 e 4.9, mostram comparações entre os valores da estimativa inicial, os valores ajustados e os valores medidos. Tais resultados foram obtidos para os quatro casos dos métodos da função objetivo. Nos métodos com ponderação nas medições foram considerados desvios padrões de 0,5% nos autovalores e 10% nos autovetores medidos em todos os casos onde é requerido. Os desvios padrões dos parâmetros nos casos com ponderação nas medições e parâmetros, assim como no caso com ponderação nas medições e estimativa inicial dos parâmetros foi de 10% em E e ρ respectivamente.

Valor Inicial f_i [Hz] E [Pa] ρ [Kg/m ³]		Valor Ajustado						Valor Medido
		Sem Ponderar		Ponderando Medições				
		Sem Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
$f1$	14,32	11,77	1,27	11,86	0,50	11,86	0,51	11,92
$f2$	89,26	73,43	0,94	73,97	0,20	73,97	0,20	74,12
$f3$	244,12	201,94	0,31	203,06	0,86	203,05	0,86	201,32
$f4$	452,89	379,73	0,05	380,06	0,03	380,07	0,04	379,93
$f5$	707,98	598,27	0,005	596,91	0,22	596,95	0,22	598,24
$f6$	1050,24	880,76	1,64	880,82	1,64	880,85	1,65	866,57
E	71e9	6,216e10	1,47	5,729e10	6,53	5,735e10	6,36	6,13e10
ρ	2680	3792,4	23,12	3342,3	8,51	3346,7	8,64	3080

Tabela 4.8 – Comparação entre os valores medido ou experimentais e valores ajustados para os casos sem ponderação e ponderando as medições.

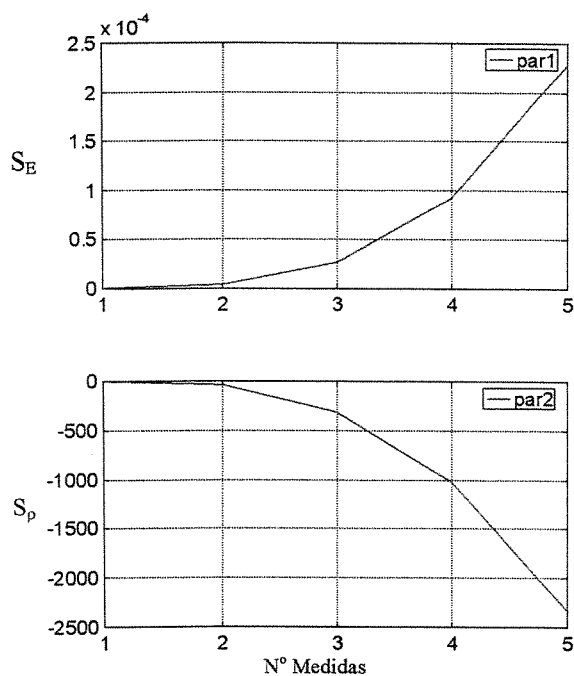
Deve ser observado que os valores ajustados foram obtidos usando-se as 5 primeiras frequências naturais ($f1$ a $f5$) e a frequências $f6$ é usada para quantificar a qualidade do modelo ajustado.

Valor Inicial f_i [Hz] E [Pa] ρ [Kg/m ³]		Valor Ajustado								Valor Medido
		Ponderando Medições e Parâmetros				Ponderando Medições e Estimativa Inicial dos Parâmetros				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
$f1$	14,32	11,86	0,50	11,86	0,51	11,87	0,43	11,87	0,44	11,92
$f2$	89,26	73,97	0,20	73,97	0,20	74,02	0,14	74,02	0,14	74,12
$f3$	244,12	203,06	0,86	203,05	0,86	203,12	0,89	203,11	0,89	201,32
$f4$	452,89	380,06	0,03	380,07	0,04	379,88	0,01	379,89	0,01	379,93
$f5$	707,98	596,91	0,22	596,95	0,22	596,34	0,32	596,38	0,31	598,24
$f6$	1050,24	880,81	1,64	880,85	1,65	880,35	1,59	880,38	1,59	866,57
E	71e9	5,729e10	6,53	5,735e10	6,36	5,650e10	7,83	5,654e10	7,83	6,13e10
ρ	2680	3341,9	8,47	3346,6	8,66	3274,8	6,32	3278,5	6,44	3080

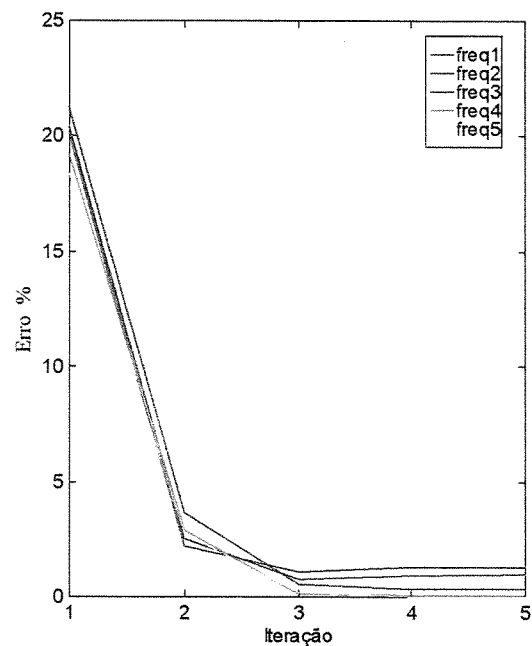
Tabela 4.9 – Comparação entre os valores medidos ou experimentais e os valores ajustados para os casos: ponderando medições e parâmetros, e ponderando medições e estimativa inicial dos parâmetros

Os resultados das Tabela 4.8 e 4.9, mostram como nos casos simulados, que em todos os casos a ponderação melhora a correlação entre os dados medidos e os ajustados. As frequências ajustadas ($f1 - f5$), apresentam em todos os casos ponderados erros inferiores a 1% em tanto que a frequência $f6$, não utilizada como dado medido no processo de ajuste e sim usada para avaliar a qualidade do modelo atinge erros de até 1.65%. Os casos ponderados não apresentam melhoras significativas um do outro mas quando comparados com o caso sem ponderar apresenta resultados mais razoáveis em termos de convergência dos parâmetros E e ρ .

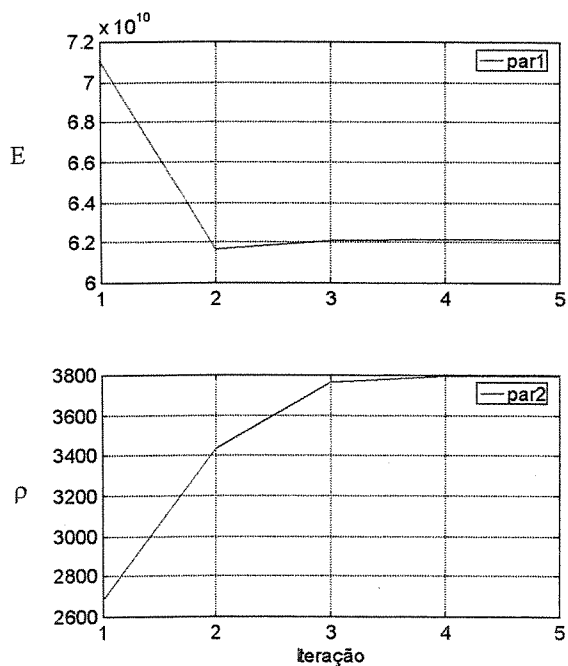
As figuras 4.34 ate 4.36 mostram os resultados dos casos sem ponderação e com ponderação nas medidas assim: (a) sensibilidade dos autovalores e autovetores, (b) o erro percentual das frequências medidas em função ao número de iterações, (c) o valor do parâmetro a cada iteração e (d) o processo de convergência do vetor de dados ajustados z_j e vetor de parâmetros θ_j a cada iteração.



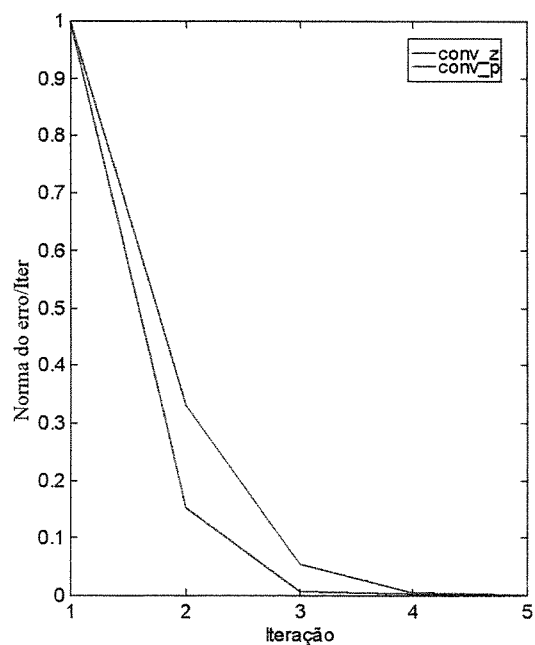
(a)



(b)

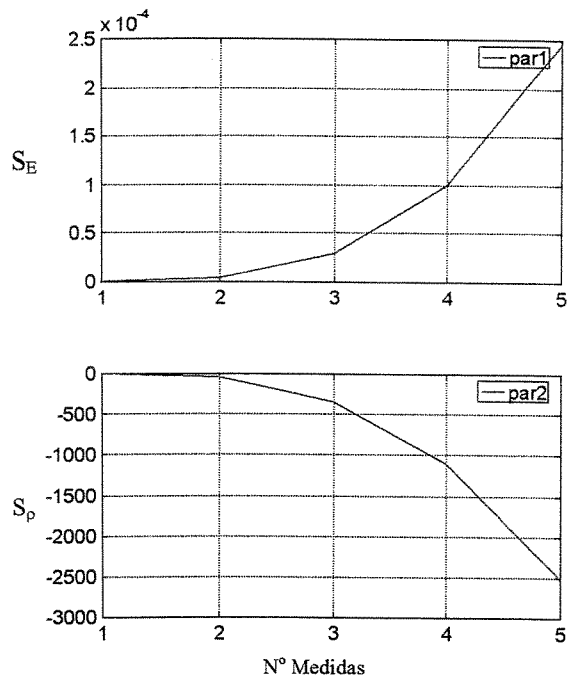


(c)

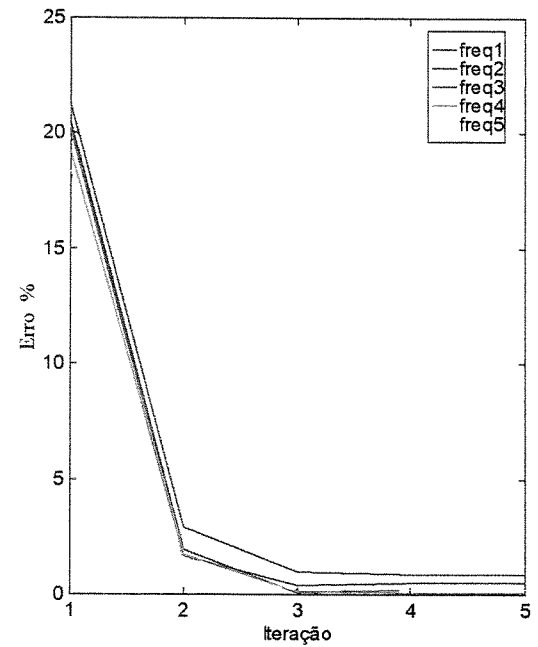


(d)

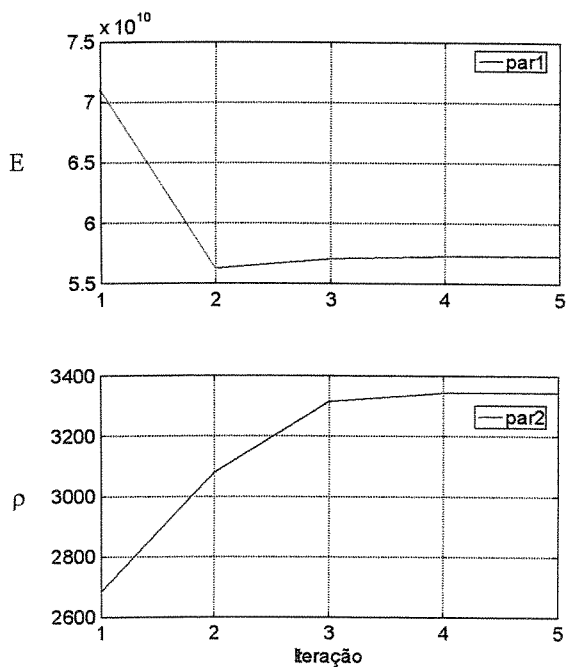
Figura 4.34 – Resultados do exemplo experimental sem ponderação: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



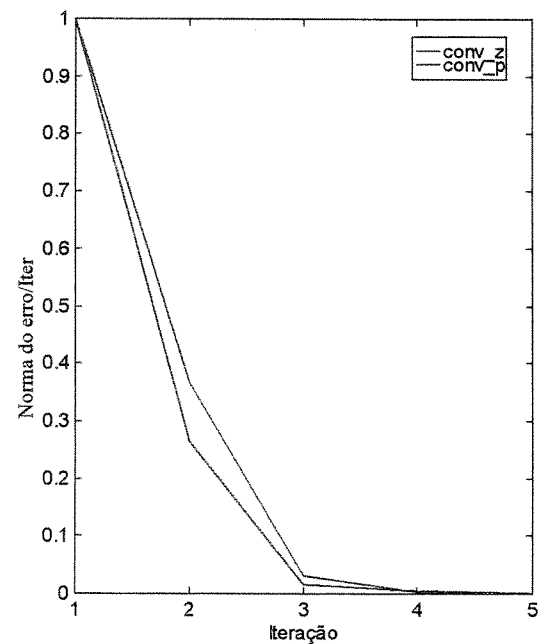
(a)



(b)

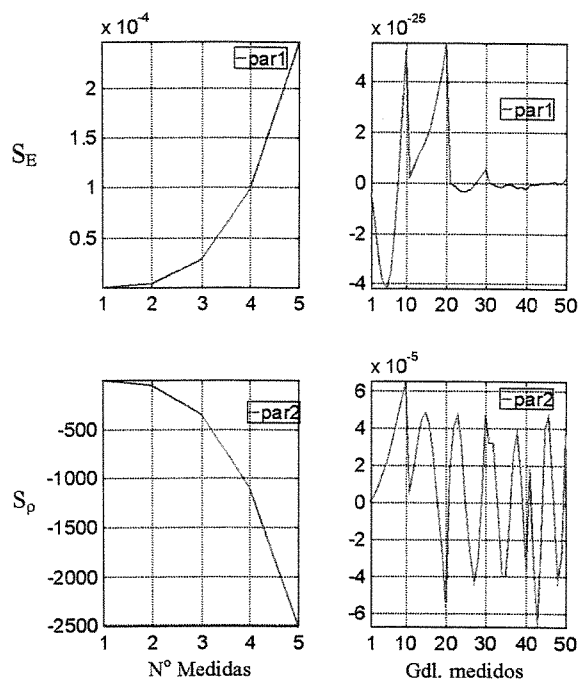


(c)

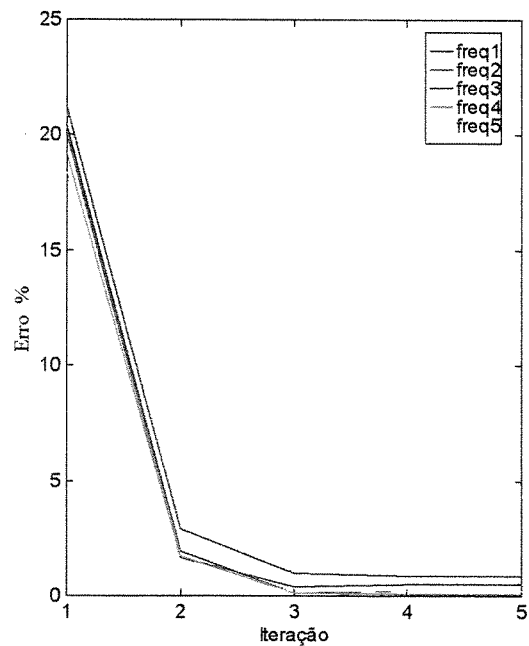


(d)

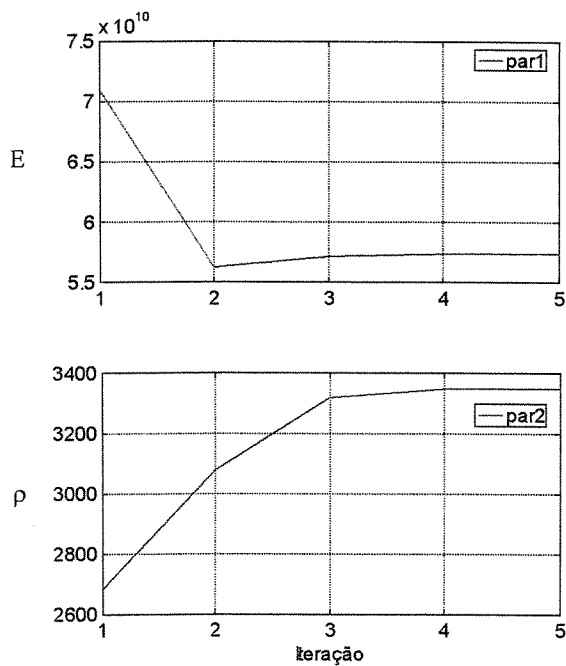
Figura 4.35 – Resultados do exemplo experimental ponderando dados medidos S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



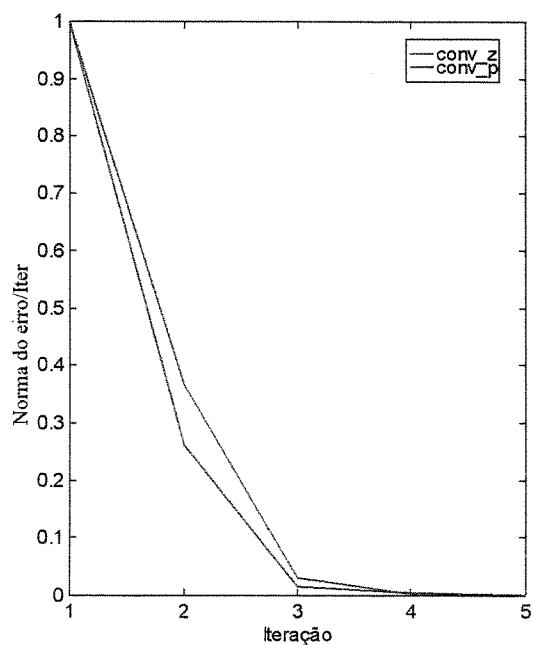
(a)



(b)



(c)

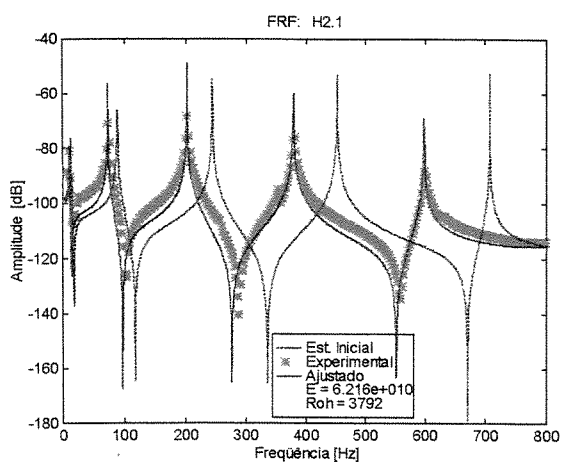


(d)

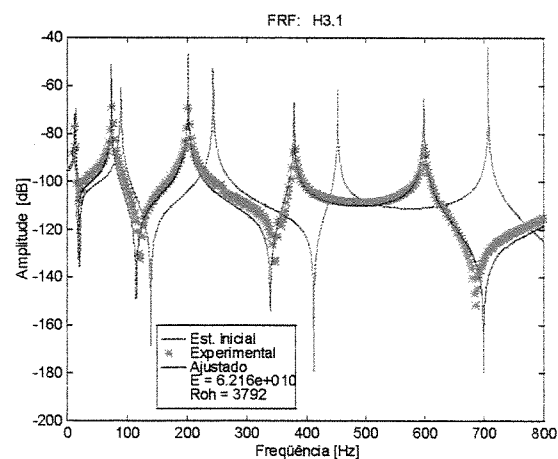
Figura 4.36 – Resultados do exemplo experimental ponderando dados medidos C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

Nas figuras anteriores de maneira similar aos casos simulados pseudo experimentais pode ser observado que em todos os casos a sensibilidade dos autovalores é maior nas frequências mais altas (em valor absoluto) e a sensibilidade dos autovetores apresentam sempre um comportamento mais variável. O erro percentual das frequências medidas, o valor do parâmetro e a norma do erro de $\mathbf{z}$ e θ apresentam um comportamento quase constante a partir da iteração nº 4. O algoritmo para dos casos assim apresentados se mostraram eficientes e rápidos em termos de convergência (5 iterações).

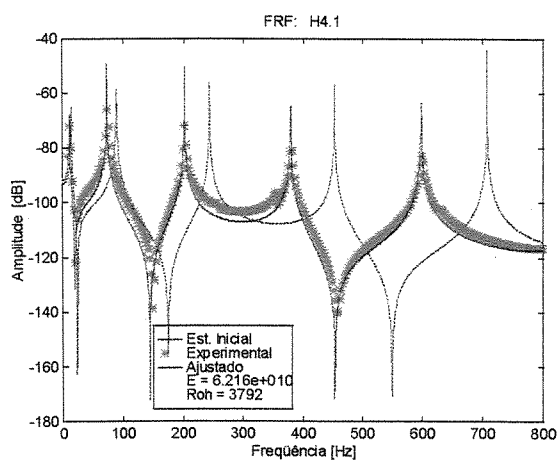
As figuras 4.37 e 4.39 mostram a comparação dos resultados obtidos para os casos sem ponderação e ponderando medidas entre as FRFs experimentais e as ajustadas, a qual foi obtida por superposição modal do modelo de MEF com os parâmetros ajustados, com resposta nos pontos 2, 3, 4, 5, 7, 8 e excitação no ponto 1 (Figura 4.29). Como era esperado, os resultados mostram uma aproximação razoável das FRFs experimental e ajustada. Esta discordância é gerada pela ausência de amortecimento no modelo do MEF, ao efeito de truncamento modal na superposição, à influência da inércia da geometria dos acelerômetros, assim como ao peso dos cabos de conexão.



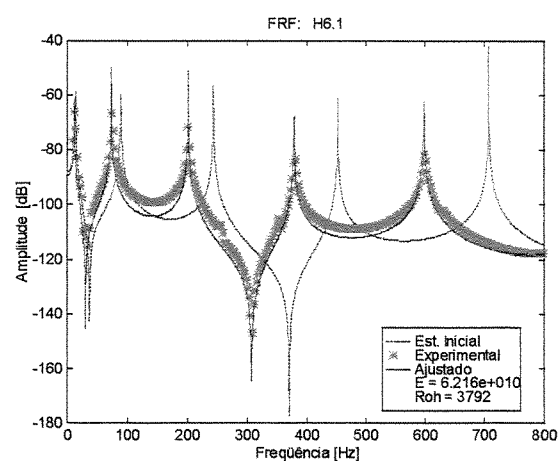
(a)



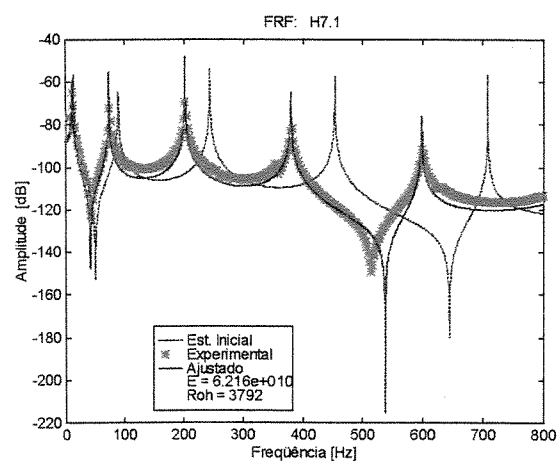
(b)



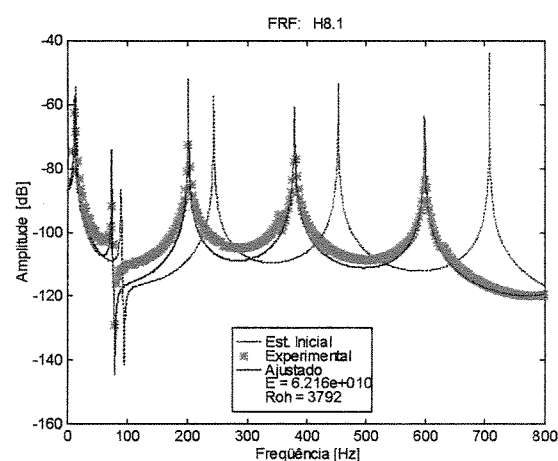
(c)



(d)

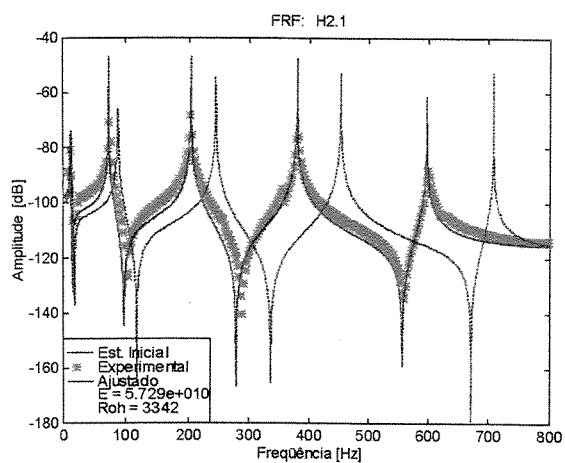


(e)

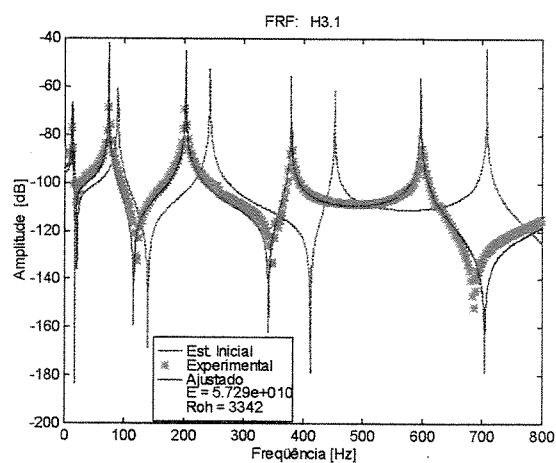


(f)

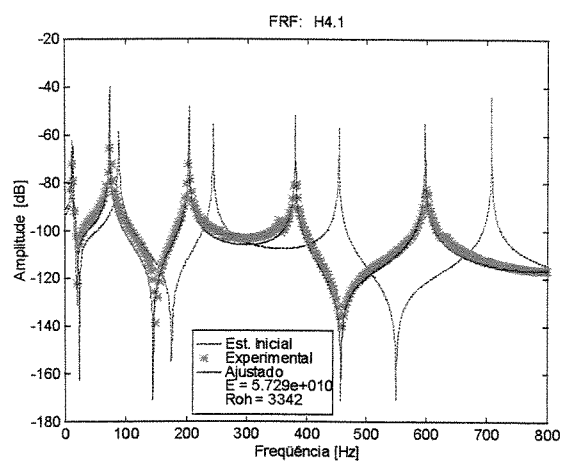
Figura 4.37 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo experimental –sem ponderação.



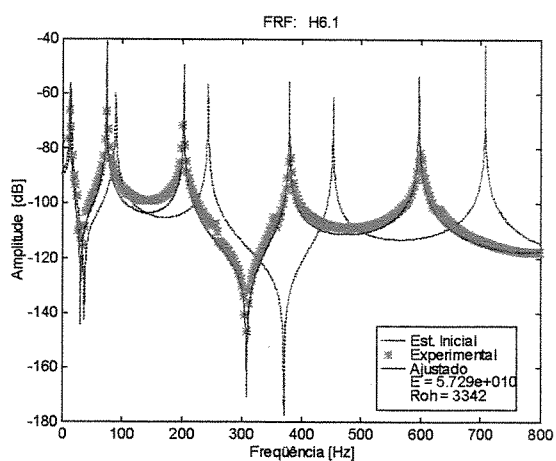
(a)



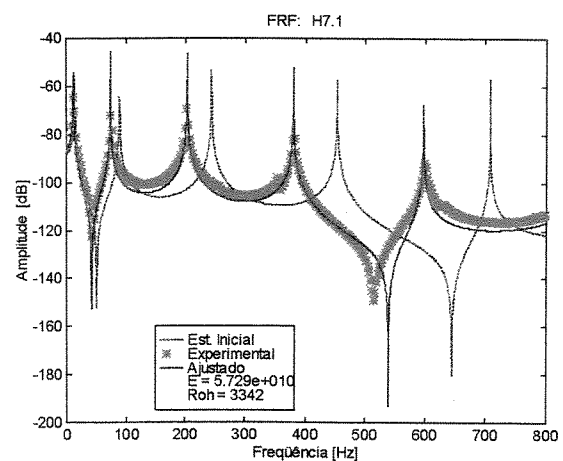
(b)



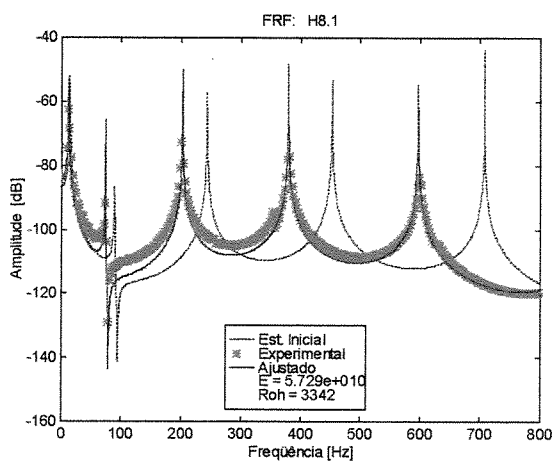
(c)



(d)

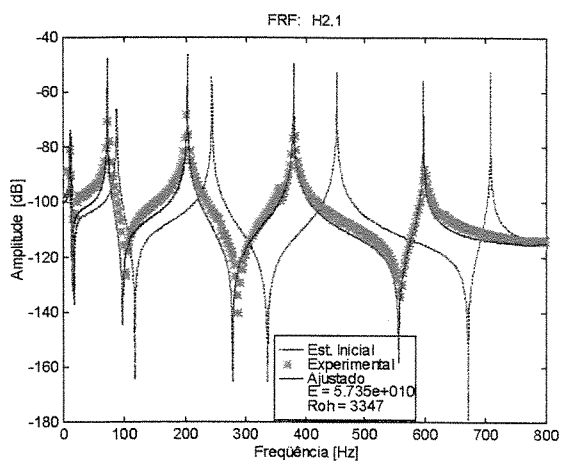


(e)

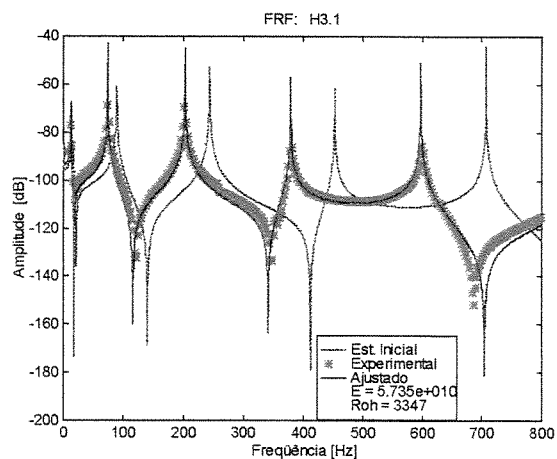


(f)

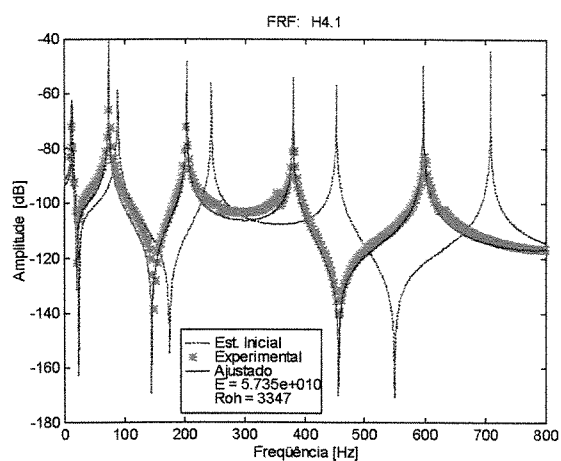
Figura 4.38 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo experimental – ponderando dados medidos S/A.



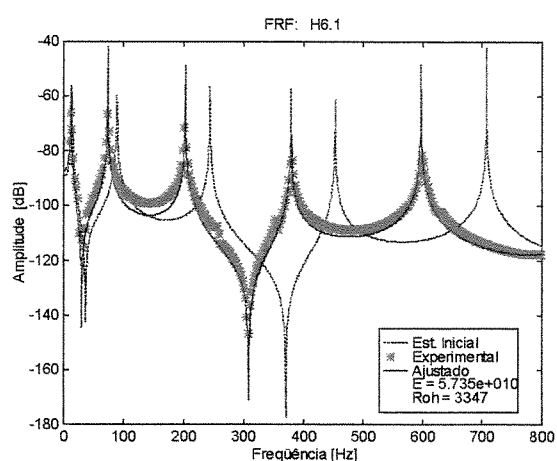
(a)



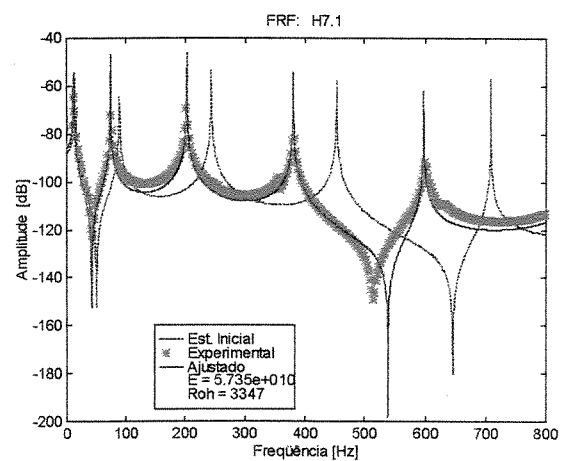
(b)



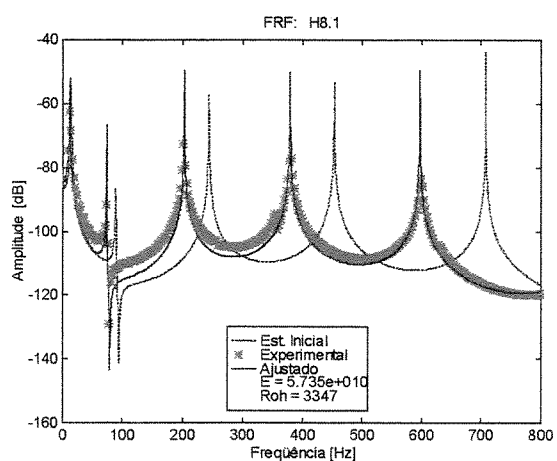
(c)



(d)



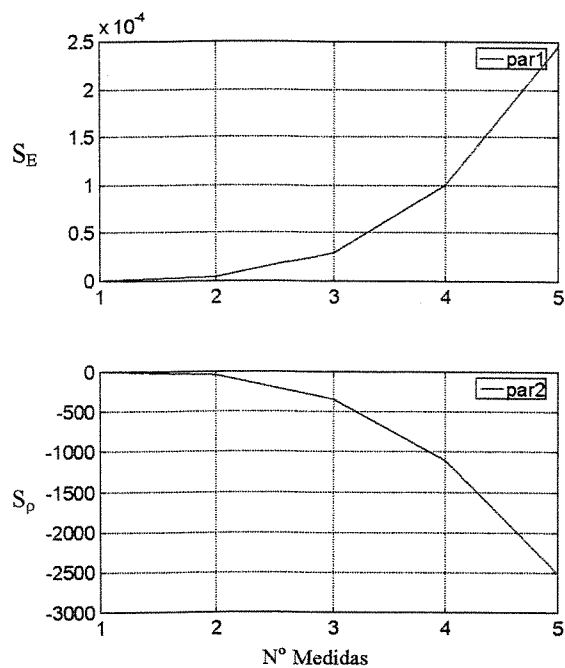
(e)



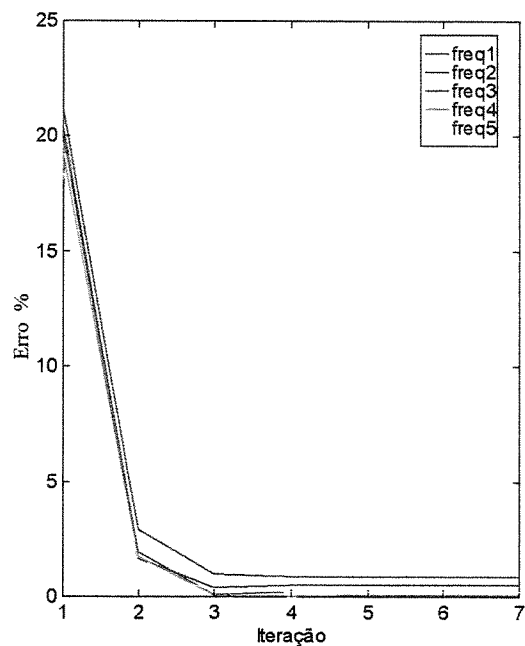
(f)

Figura 4.39 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo experimental – ponderando dados medidos C/A.

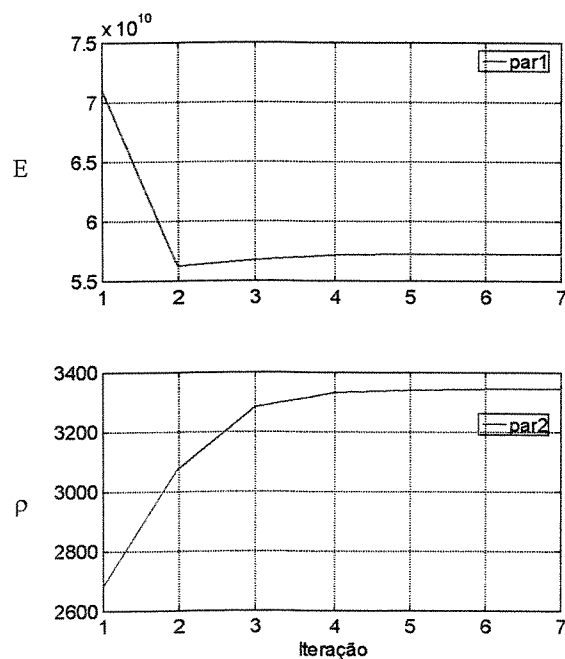
As figuras 4.40 ate 4.43, mostram os resultados dos casos ponderando medidas e parâmetros, e ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros assim: (a) sensibilidade dos autovalores e autovetores, (b) o erro percentual das frequências medidas em função ao número de iterações, (c) o valor do parâmetro a cada iteração e (d) o processo de convergência do vetor de dados ajustados $\mathbf{z}_j$ e vetor de parâmetros θ_j a cada iteração.



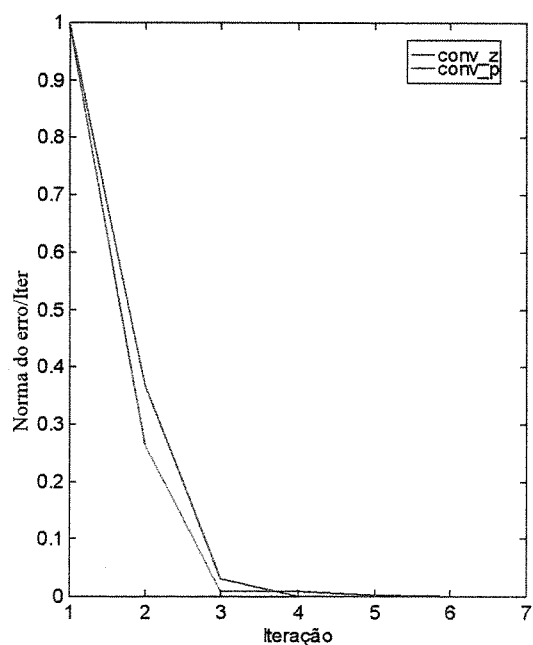
(a)



(b)

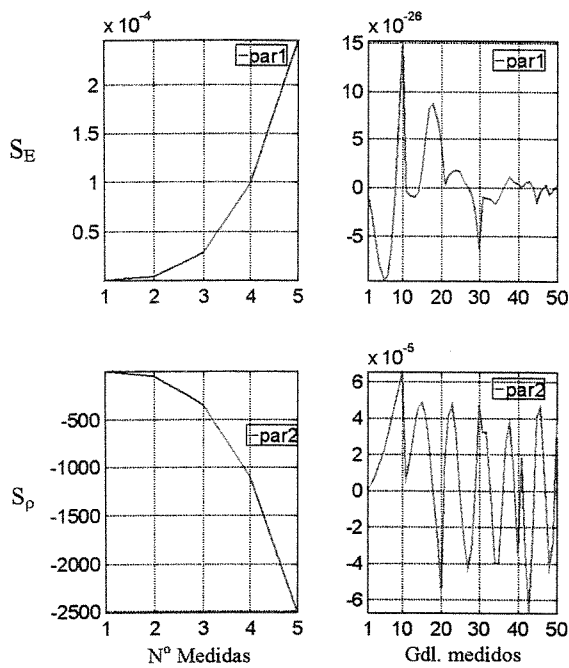


(c)

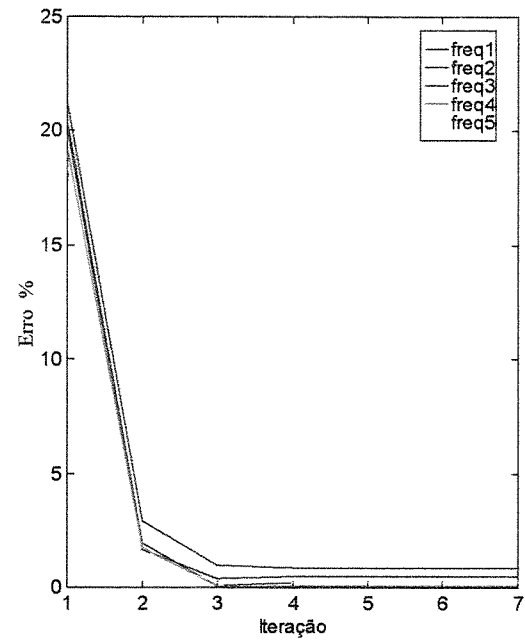


(d)

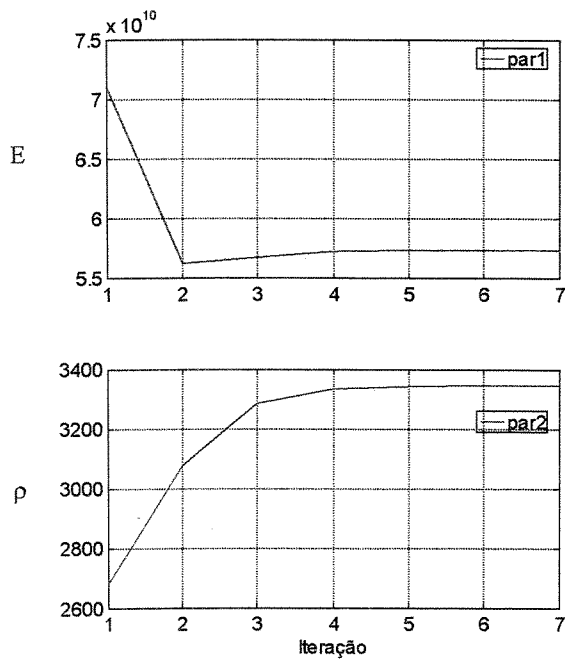
Figura 4.40 – Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



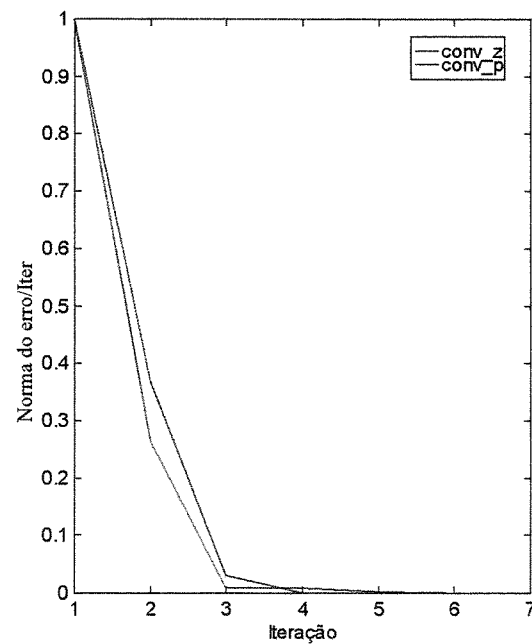
(a)



(b)

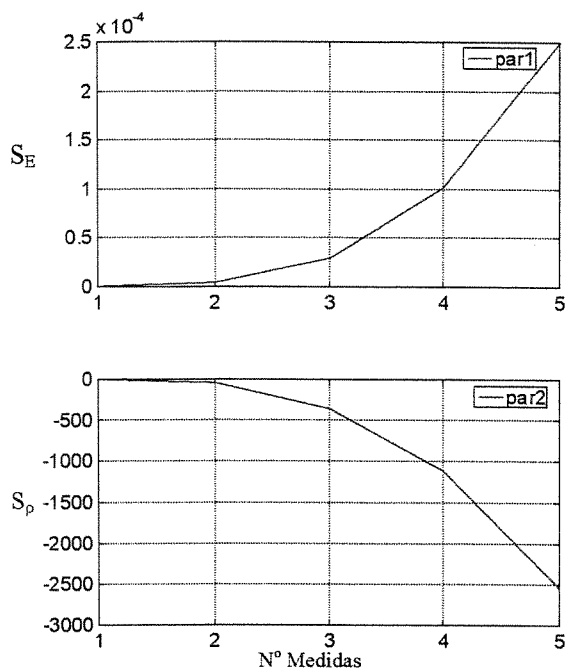


(c)

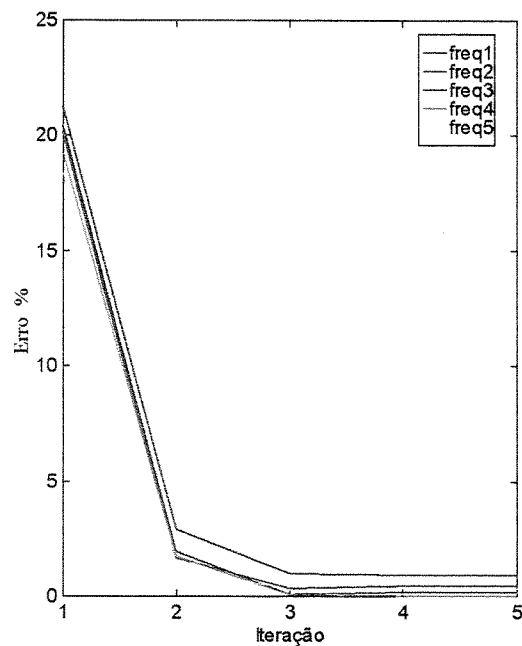


(d)

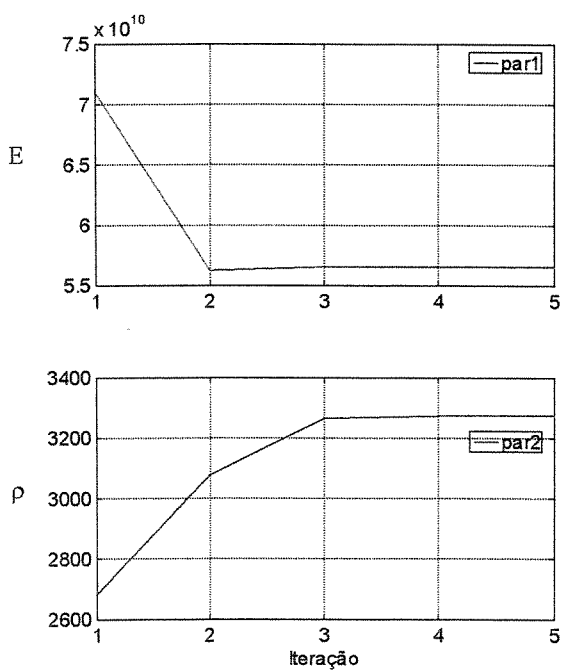
Figura 4.41 – Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



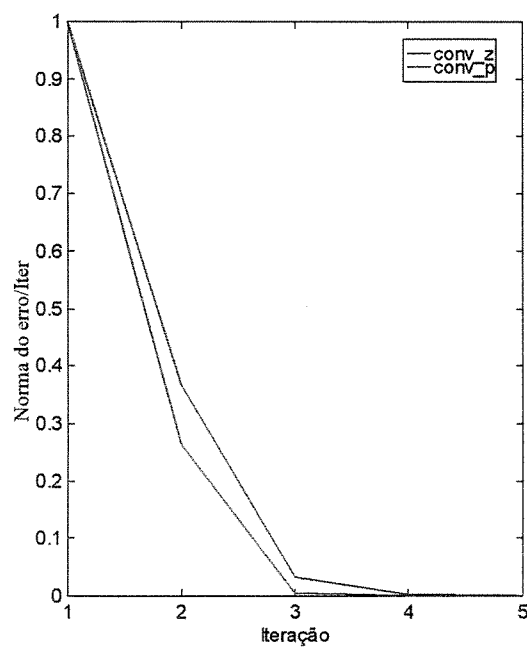
(a)



(b)

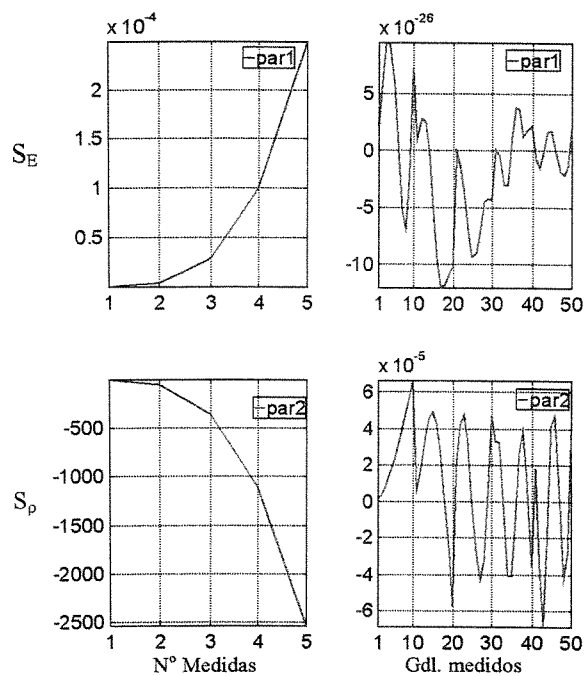


(c)

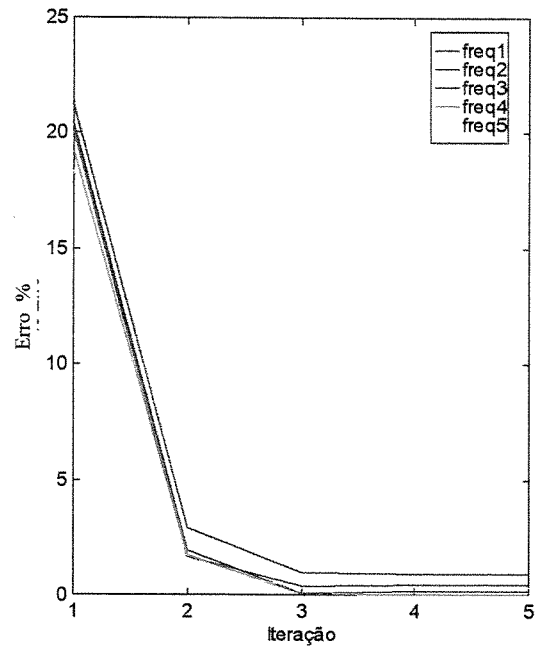


(d)

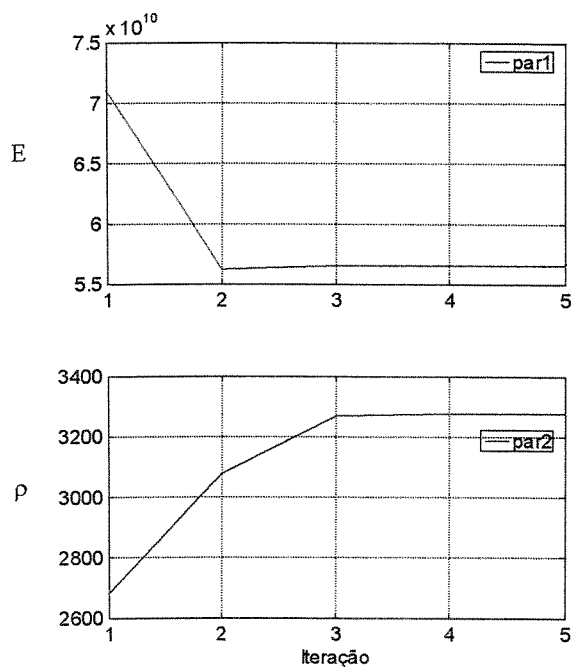
Figura 4.42 – Resultados do exemplo experimental ponderando medidas estimativa inicial dos parâmetros S/A: (a) Sensitividade de λ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.



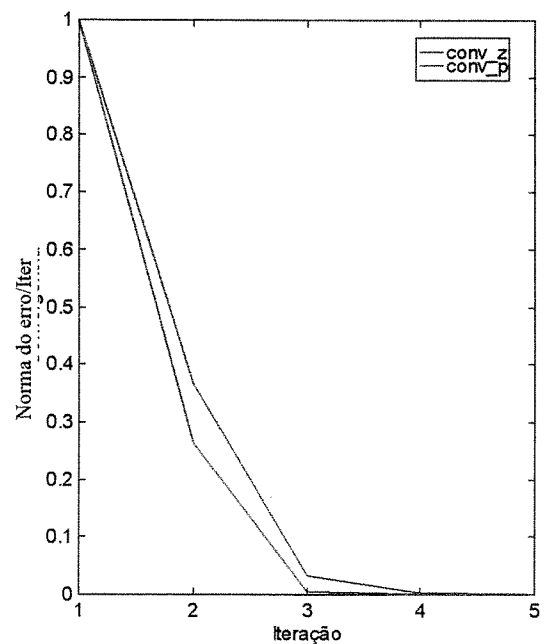
(a)



(b)



(c)

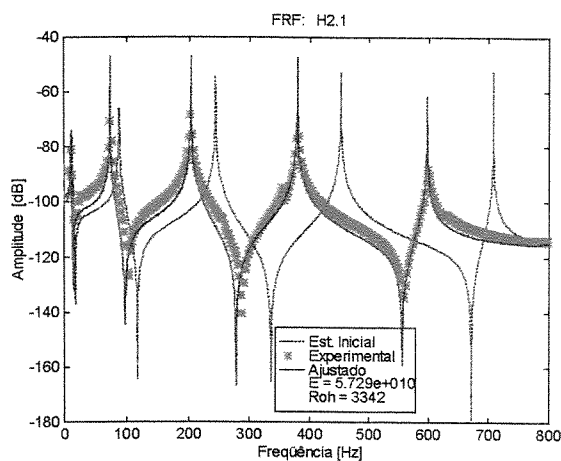


(d)

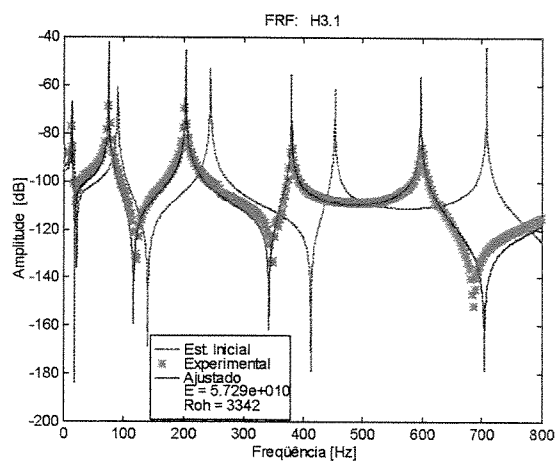
Figura 4.43 – Resultados do exemplo experimental ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A: (a) Sensitividade de λ e ϕ em função do n° de medidas na última iteração, (b) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (c) Valor do parâmetro em função do n° de iterações, (d) Norma do erro da convergência dos parâmetros (θ) e do vetor de dados ajustados (z_j) em cada iteração.

Nas figuras anteriores em todos os casos pode-se ser observado que a sensibilidade dos autovalores é maior nas frequências mais altas (em valor absoluto) e a sensibilidade dos autovetores apresentam sempre um comportamento mais variável. O erro percentual das frequências medidas, o valor do parâmetro e a norma do erro de $\mathbf{z}$ e θ apresentam um comportamento quase constante a partir da iteração nº 4. Os algoritmos para os casos assim apresentados mostraram-se eficientes e rápidos sendo que o caso ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros, mostrou-se um pouco mais eficiente em termos de convergência (5 iterações), quando comparado com o caso ponderando medidas e parâmetros (7 iterações).

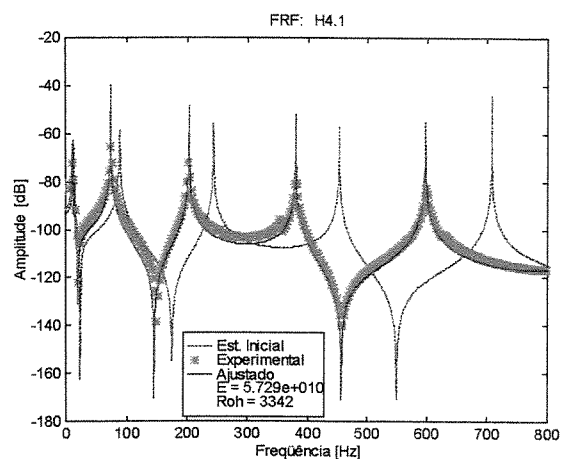
As figuras 4.44 e 4.47, mostram a comparação dos resultados obtidos para os casos ponderando medidas e parâmetros, e ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros entre as FRFs experimentais e as ajustadas, a qual foi obtida por superposição modal do modelo de MEF com os parâmetros ajustados, com resposta nos pontos 2, 3, 4, 5, 7, 8 e excitação no ponto 1. Novamente os resultados mostram uma aproximação razoável das FRFs apenas nas proximidades das frequências de ressonância. Esta discordância é gerada pela ausência de amortecimento no modelo do MEF, ao efeito de truncamento modal na superposição, à influência da inércia da geometria dos acelerômetros, assim como ao peso dos cabos de conexão.



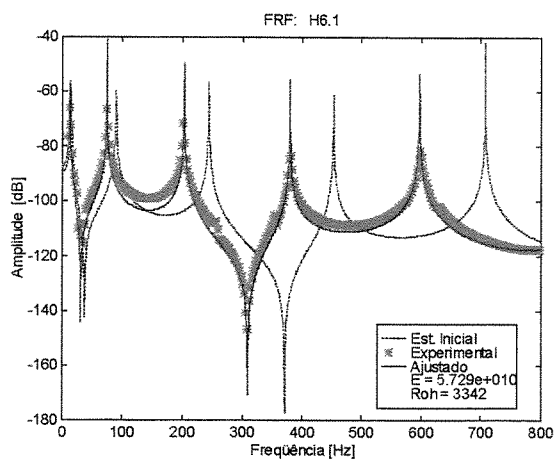
(a)



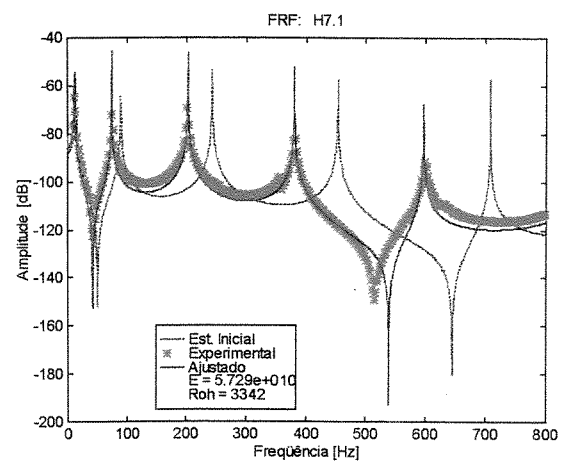
(b)



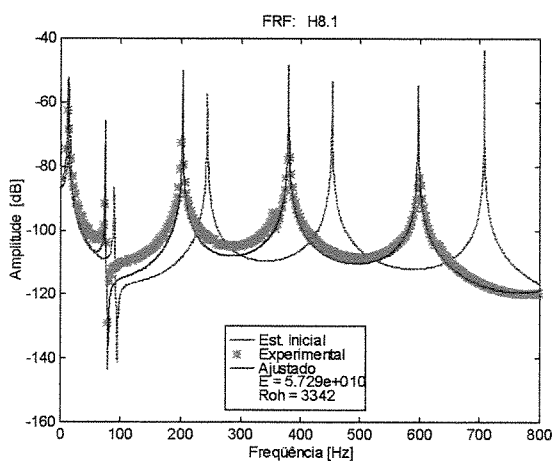
(c)



(d)



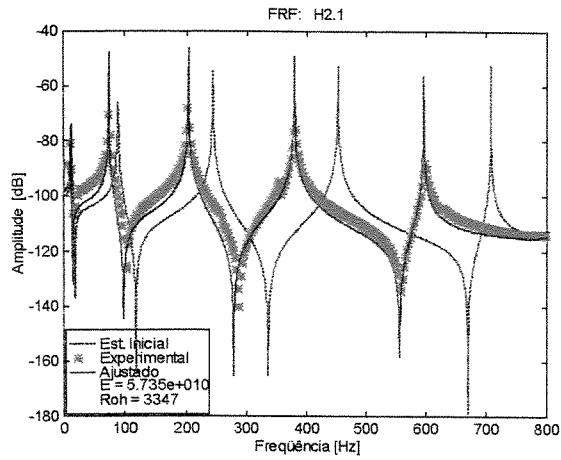
(e)



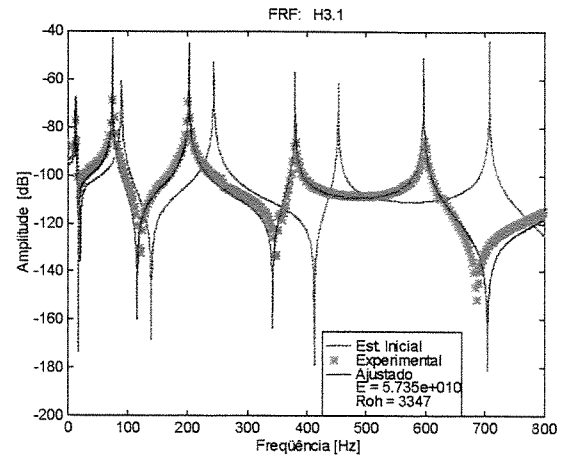
(f)

Figura 4.44 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.

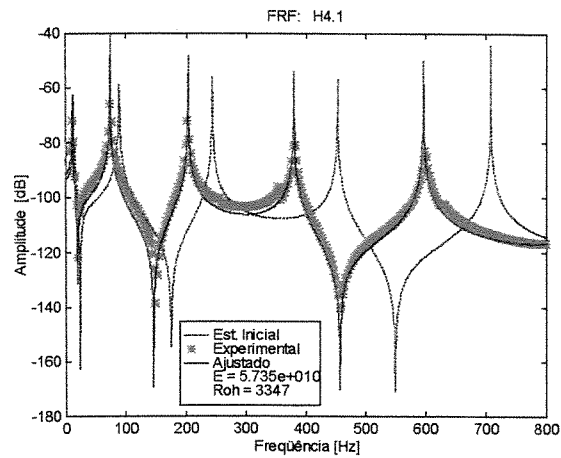
Exemplo experimental – ponderando medidas e parâmetros S/A.



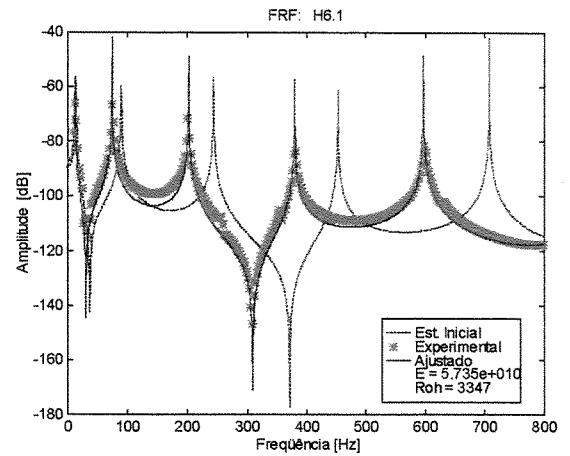
(a)



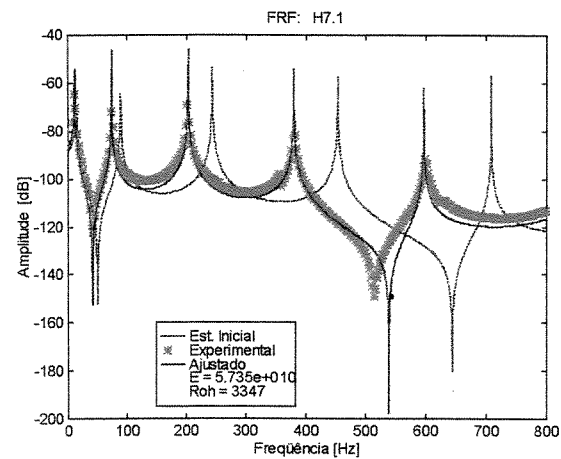
(b)



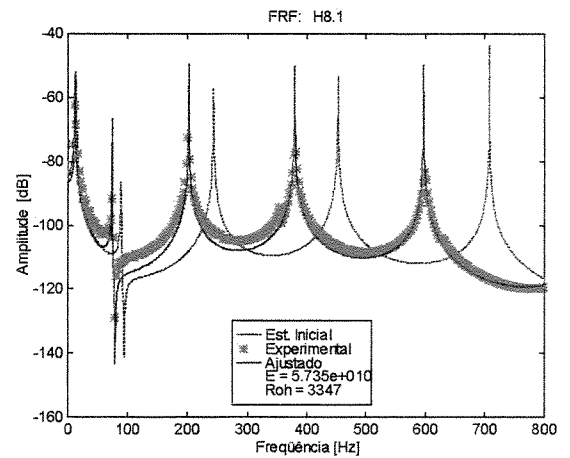
(c)



(d)



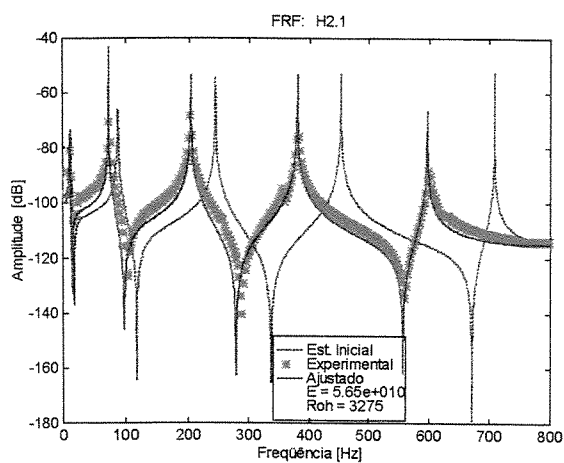
(e)



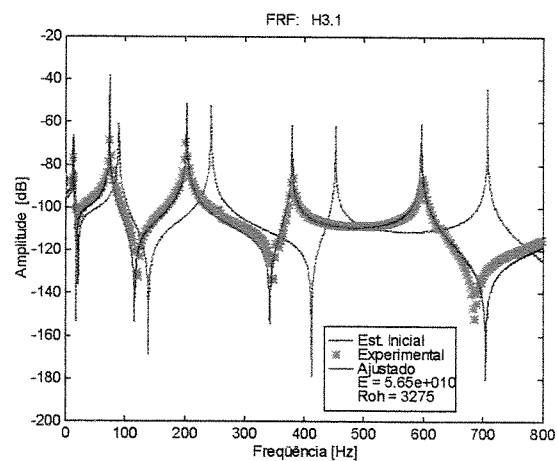
(f)

Figura 4.45 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.

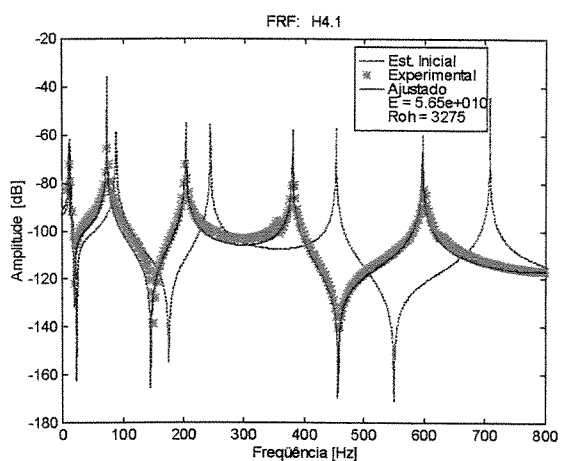
Exemplo experimental – ponderando medidas e parâmetros C/A.



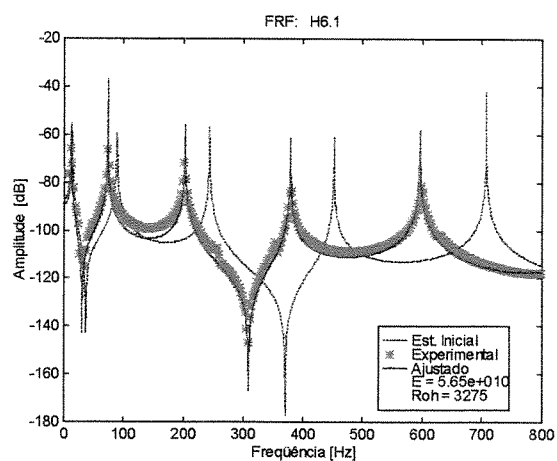
(a)



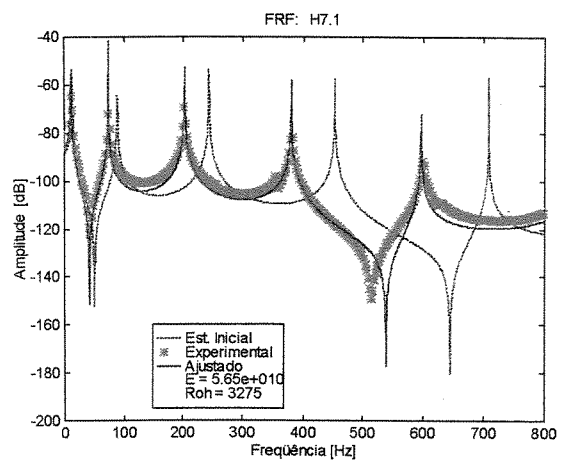
(b)



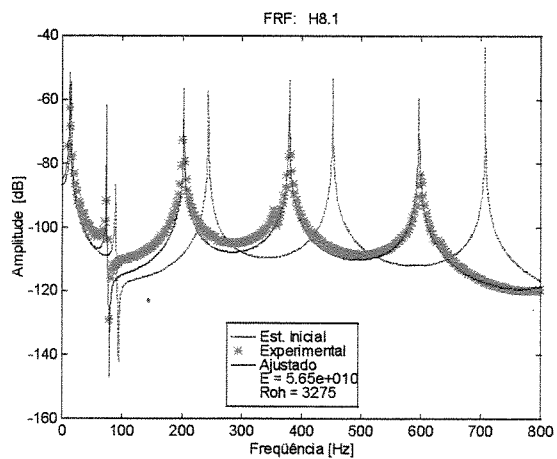
(c)



(d)

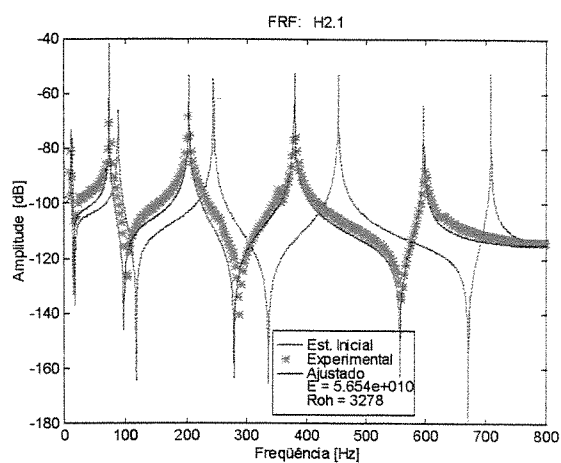


(e)

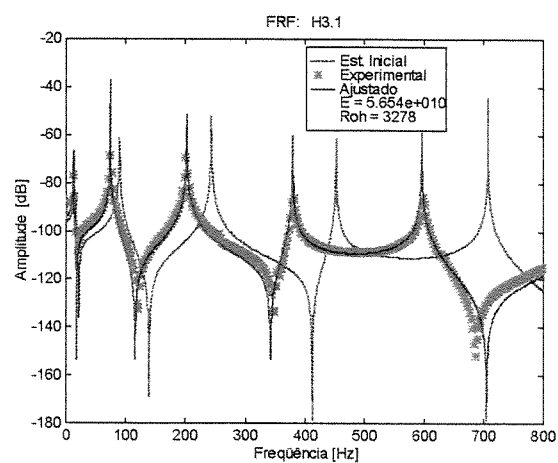


(f)

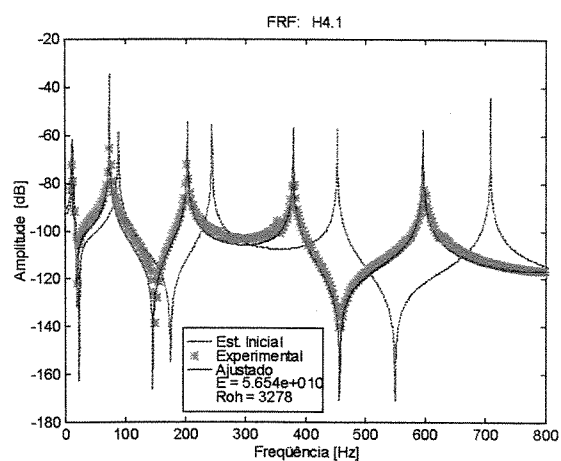
Figura 4.46 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo experimental – ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros S/A.



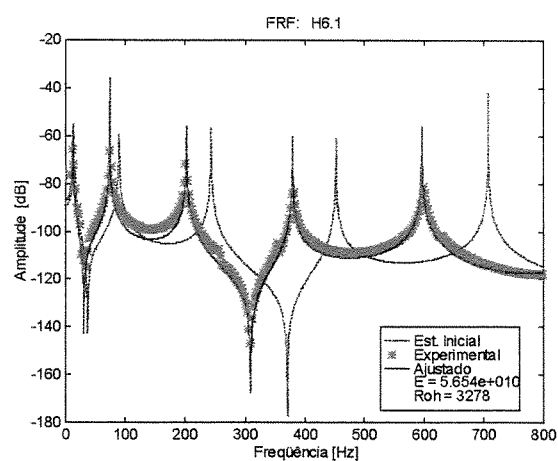
(a)



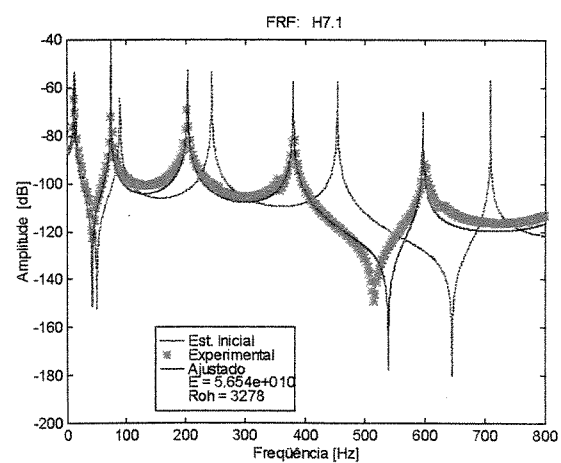
(b)



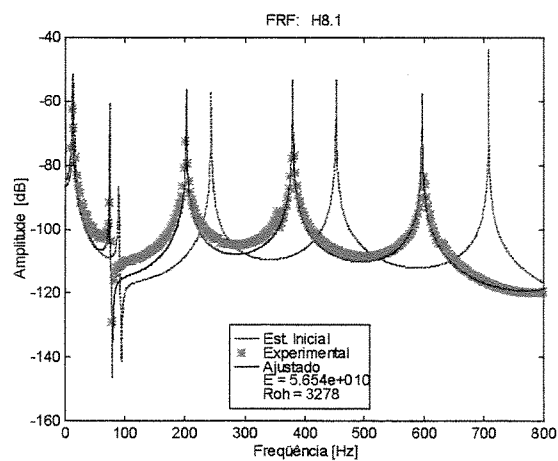
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.47 – FRFs dos dados experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados.
Exemplo experimental – ponderando medidas e estimativa inicial dos parâmetros C/A.

4.2 Aplicação do método da variância mínima

Dando continuidade ao desenvolvimento do trabalho e com a finalidade de utilizar desta vez o algoritmo da variância mínima no processo de ajuste de modelos, este será aplicado aos mesmos exemplos usados pelo método da função objetivo.

4.2.1 Exemplo simulado.

A Tabela 4.10 mostra uma comparação dos resultados obtidos com o método da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins *et al.*, 1974) e correlacionado (Friswell, 1989), aplicados ao exemplo simulado sobredeterminado (seção 4.1.1) onde os parâmetros a serem ajustados são: a rigidez a flexão EI e as rigidezes translacional K_{ry} e rotacional K_{rz} no engaste. Em ambos casos apresentam-se os resultados com e sem a inclusão dos autovetores no vetor de dados medidos. Os valores das variâncias assumidas foi de $1,0E-6$ em todos os autovalores e o desvio padrão nos autovetores e nos parâmetros foi igual a 10%.

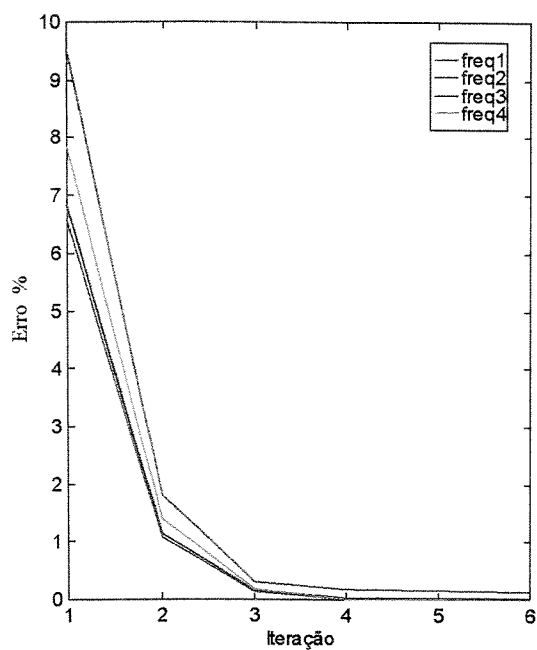
Valor Inicial f_i [Hz] EI [N.m ²] K_n [N/m] K_{r_z} [N.m/rad]		Valor Ajustado								Valor Pseudo experimental
		Método do Collins (Medições e parâmetros não correlacionados)				Método do Friswell (Medições e parâmetros correlacionados)				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
$f1$	33,89	37,41	0,14	37,41	0,15	37,44	0,07	37,44	0,07	37,46
$f2$	220,60	236,70	0,02	236,70	0,02	236,74	0	236,74	0	236,75
$f3$	614,12	657,34	0	657,34	0	657,34	0	657,34	0	657,34
$f4$	1156,88	1255,33	0	1255,33	0	1255,33	0	1255,33	0	1255,33
$f5$	1827,20	1997,20	0,19	1997,18	0,19	1997,30	0,19	1997,30	0,19	1993,49
$f6$	2708,30	2907,03	0,89	2907,07	0,89	2906,78	0,88	2906,78	0,88	2881,44
EI	4500	4602,2	0,93	4603,8	0,96	4593,00	0,72	4593,00	0,72	4560
K_{ry}	2,00e7	3,739e7	6,53	3,735e7	6,63	3,763e7	5,93	3,763e7	5,93	4,00e7
K_{r_z}	5,00e4	9,549e4	4,51	9,528e4	4,72	9,674e4	3,27	9,674e4	3,26	10,00e4

Tabela 4.10 – Comparação dos valores dos dados pseudo experimentais com os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins) e correlacionado (Friswell).

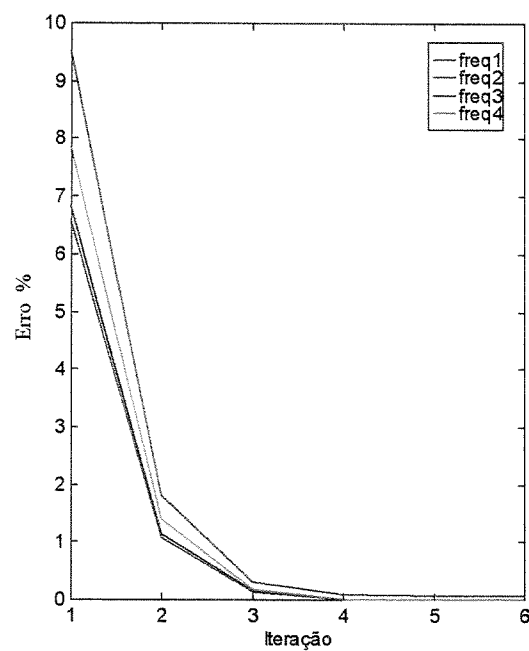
Nos resultados apresentados pode-se observar que o caso correlacionado apresenta ligeiras melhoras em termos das frequências e valores de convergência dos parâmetros quando comparados com o caso não correlacionado. Em ambos casos os dados medidos e os parâmetros

ajustados apresentam erros inferiores a 1% e 7% respectivamente. Embora o desvio padrão nos autovetores no método da função objetivo e a variância mínima seja a mesma, neste caso a inclusão deles no processo de ajuste não apresenta influencia nos resultados.

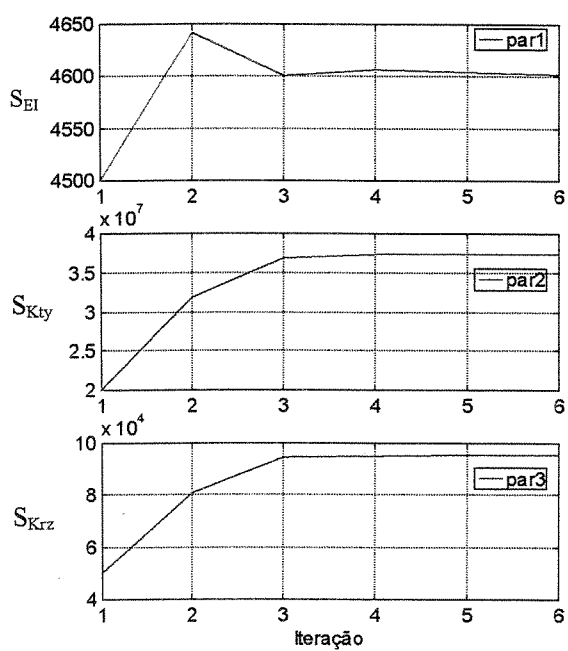
As figuras 4.48 e 4.49 mostram o processo de ajuste para caso não correlacionado (a1–b1) e correlacionado (a2–b2), os quais mostram o erro percentual das frequências e o valor do parâmetro a cada iteração.



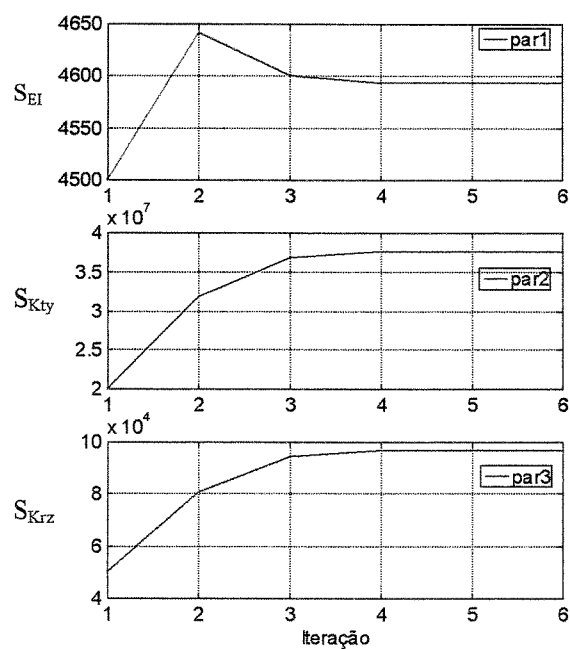
(a1)



(a2)



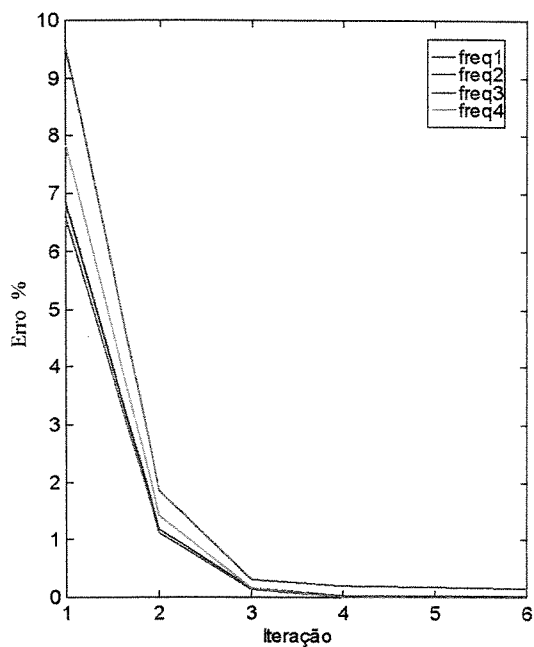
(b1)



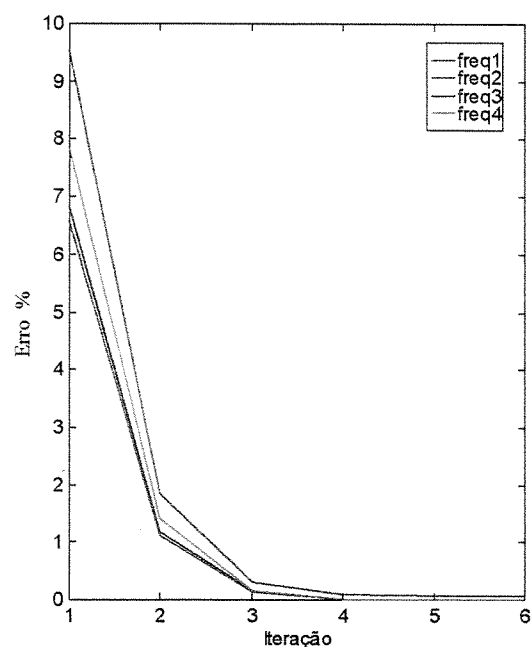
(b2)

Figura 4.48 – Resultados do exemplo simulado S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2)

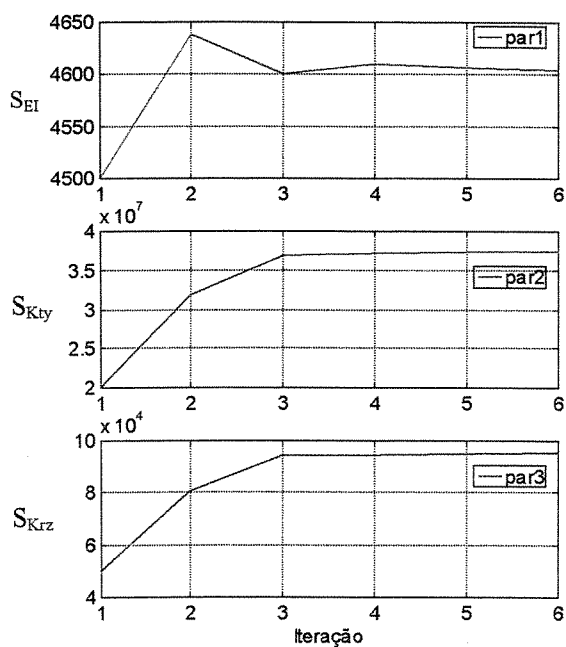
% Erro das freqüências em função do nº de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do nº de iterações.



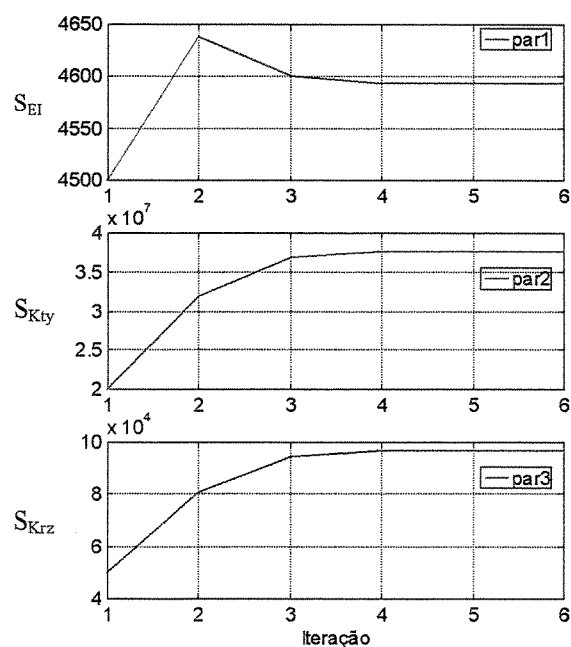
(a1)



(a2)



(b1)

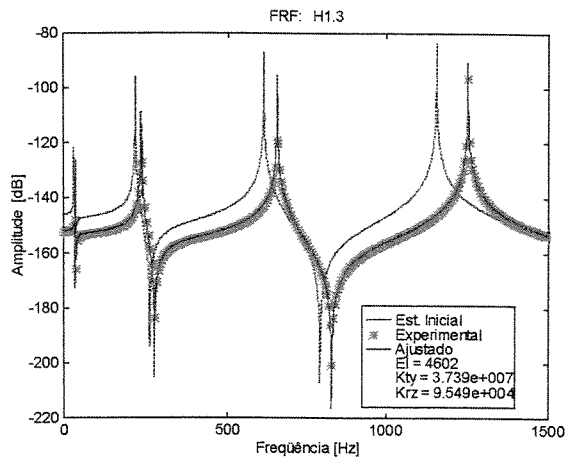


(b2)

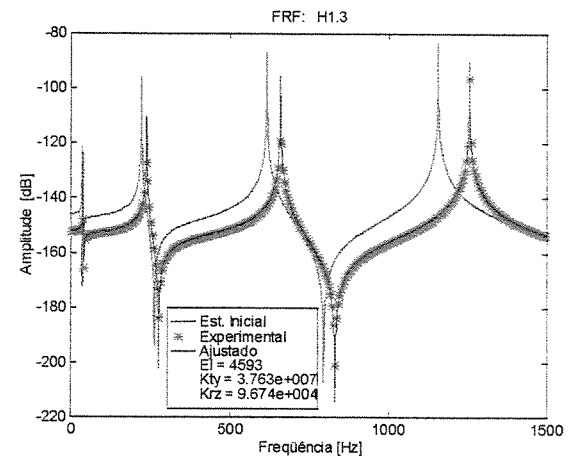
Figura 4.49 – Resultados do exemplo simulado C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.

Nas figuras anteriores pode-se observar em ambos casos uma rápida convergência do algoritmo em termos das frequências e parâmetros ajustados com e sem a inclusão dos autovetores. É importante destacar que embora as frequências apresentem erros % baixos o valor dos parâmetros poderia ser melhorado utilizando diferentes variâncias nos dados medidos.

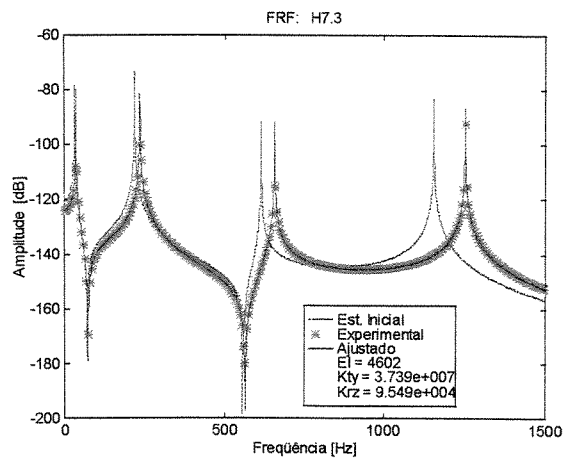
As Figuras 4.50 e 4.51, mostram uma comparação das FRFs dos modelos pseudo experimental e ajustado, obtidos por superposição modal do modelo de MEF na faixa de frequências de DC- 1500 Hz para o caso não correlacionado (a1-c1) e para o caso correlacionado (a2-c2). Em ambos casos pode-se observar uma boa concordância entre as FRFs pseudo experimentais e ajustadas.



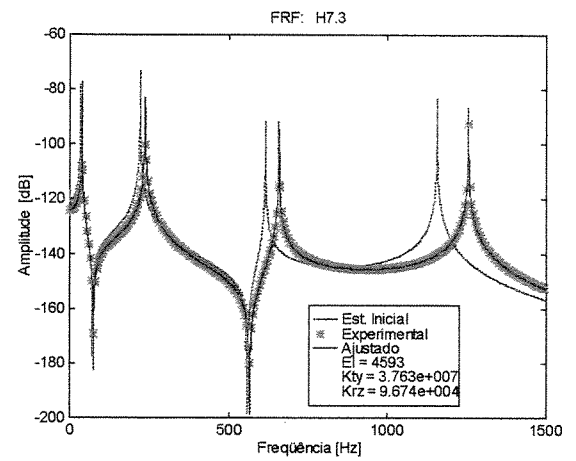
(a1)



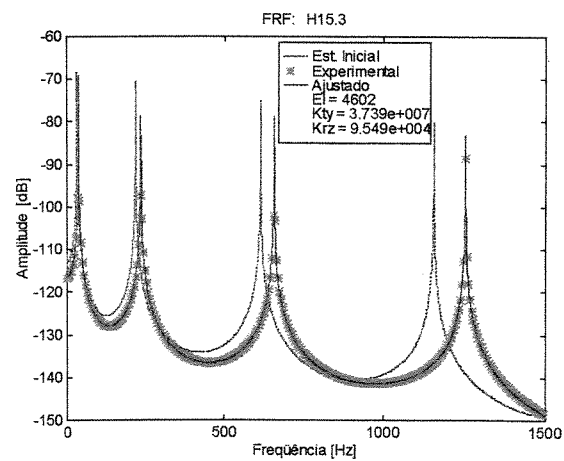
(a2)



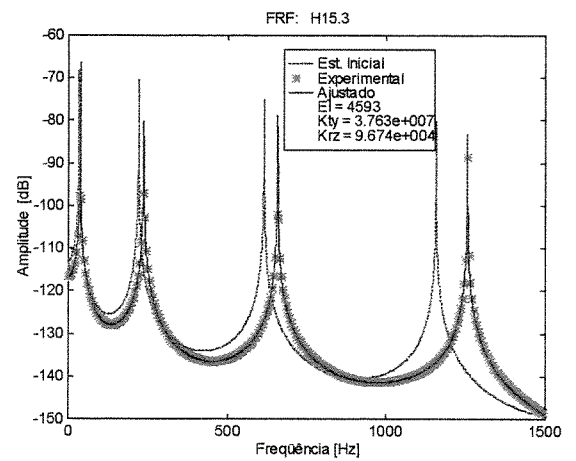
(b1)



(b2)

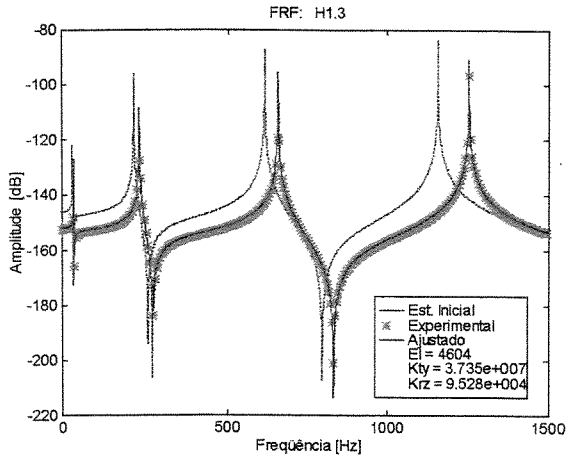


(c1)

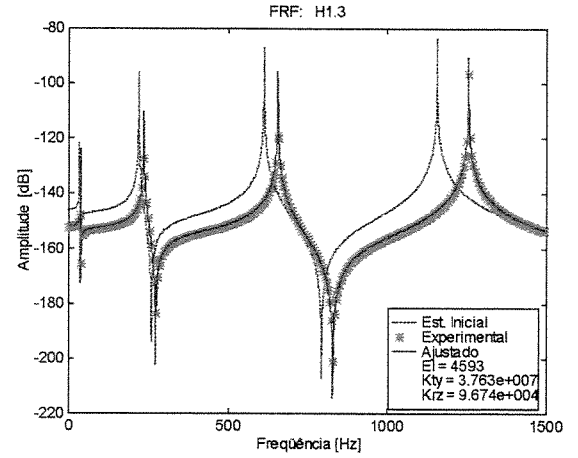


(c2)

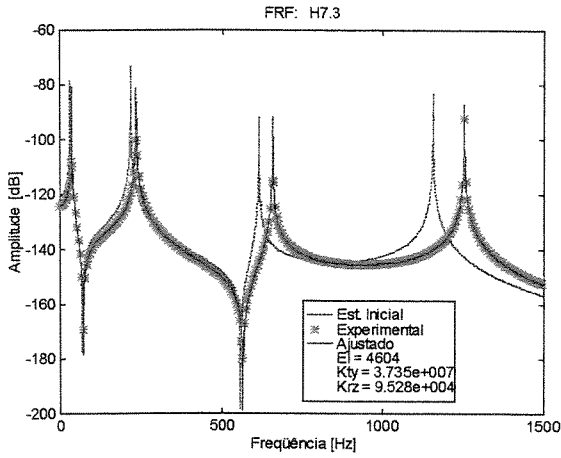
Figura 4.50 – FRFs dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado S/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).



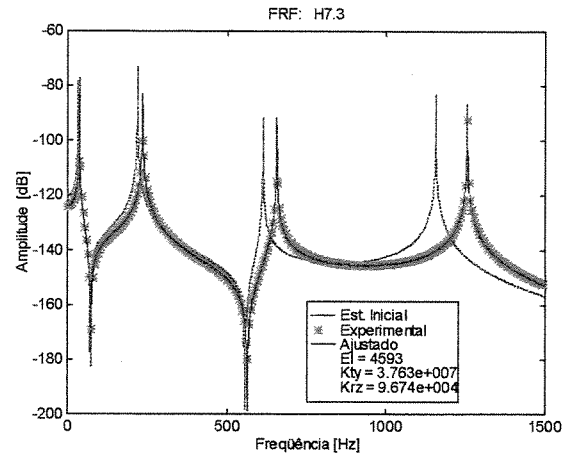
(a1)



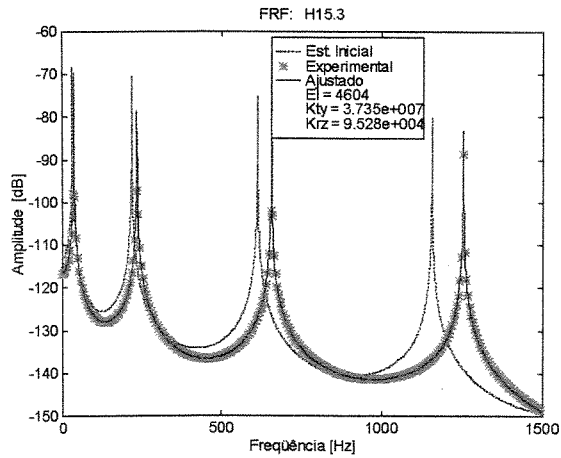
(a2)



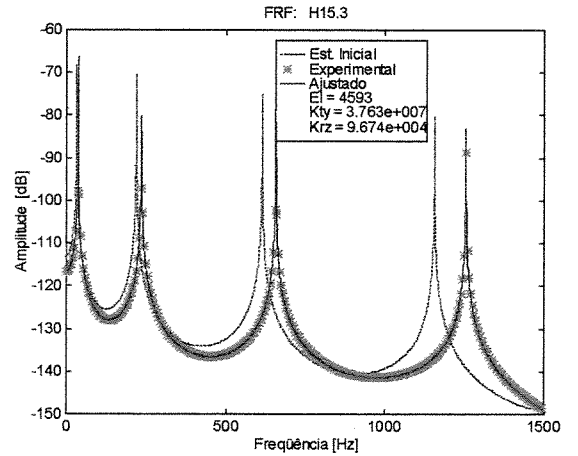
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 4.51 – FRFs dos dados medidos pseudo experimentais e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo simulado C/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).

4.2.2 Exemplo experimental da viga.

De maneira análoga ao método da função objetivo o algoritmo da mínima variância será utilizado para ajustar o exemplo experimental (seção 4.1.3) visto anteriormente. Assim a Tabela 4.11, mostra uma comparação entre os dados experimentais identificados via AME e os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima. Os parâmetros a serem ajustados são: o módulo de elasticidade E e a densidade ρ da viga. Só as 5 primeiras frequências naturais ($f1$ - $f5$) são utilizadas no processo de ajuste enquanto que $f6$ será utilizada para avaliar a qualidade do modelo. De maneira similar à técnica da função objetivo apresentam-se os resultados com e sem a inclusão dos autovetores no vetor de dados medidos. Nos casos não correlacionado e correlacionado foi considerado uma variância nos autovalores de $5,0E-4$ e o desvio padrão nos autovetores e nos parâmetros foi igual a 10%.

Valor Inicial f_i [Hz] E [Pa] ρ [Kg/m ³]		Valor Ajustado								Valor Medido
		Método do Collins (Medições e parâmetros não correlacionados)				Método do Friswell (Medições e parâmetros correlacionados)				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
f_1	14,32	11,77	1,27	11,77	1,27	11,77	1,27	11,77	1,27	11,92
f_2	89,26	73,42	0,94	73,43	0,94	73,43	0,94	73,43	0,94	74,12
f_3	244,12	201,94	0,31	201,94	0,31	201,94	0,31	201,94	0,31	201,32
f_4	452,89	379,73	0,05	379,73	0,05	379,73	0,05	379,73	0,05	379,93
f_5	707,98	598,27	0,005	598,27	0,005	598,27	0,005	598,27	0,005	598,24
f_6	1050,24	880,76	1,63	880,76	1,63	880,76	1,64	880,76	1,64	866,57
E	71e9	6,217e10	1,42	6,217e10	1,42	6,216e10	1,40	6,217e10	1,42	6,13e10
ρ	2680	3792,6	23,14	3792,1	23,12	3792,1	23,12	3792,1	23,12	3080

Tabela 4.11 – Comparação dos valores dos dados medidos com os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins) e correlacionado (Friswell)

Os resultados não mostram câmbios significativos nos dois métodos. O erro máximo nos dados medidos ajustados atinge valores de 1,27% e nos parâmetros chegam a valores de até 23,14%.

As figuras 4.52 e 4.53 mostram o processo de ajuste para caso não correlacionado (a1–b1) e correlacionado (a2–b2), os quais mostram o erro percentual das frequências e o valor do parâmetro a cada iteração.

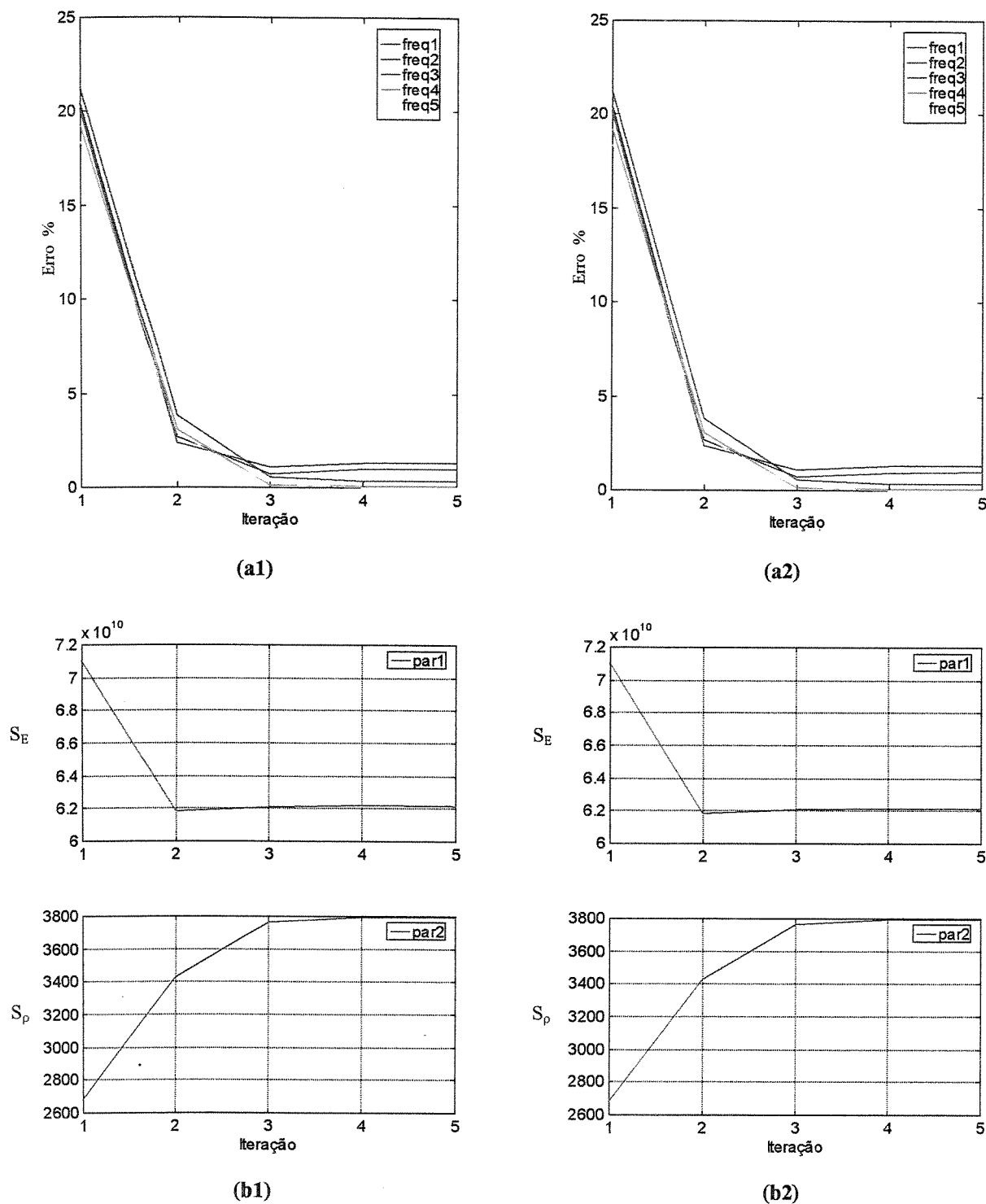


Figura 4.52 – Resultados do exemplo experimental S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado: (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.

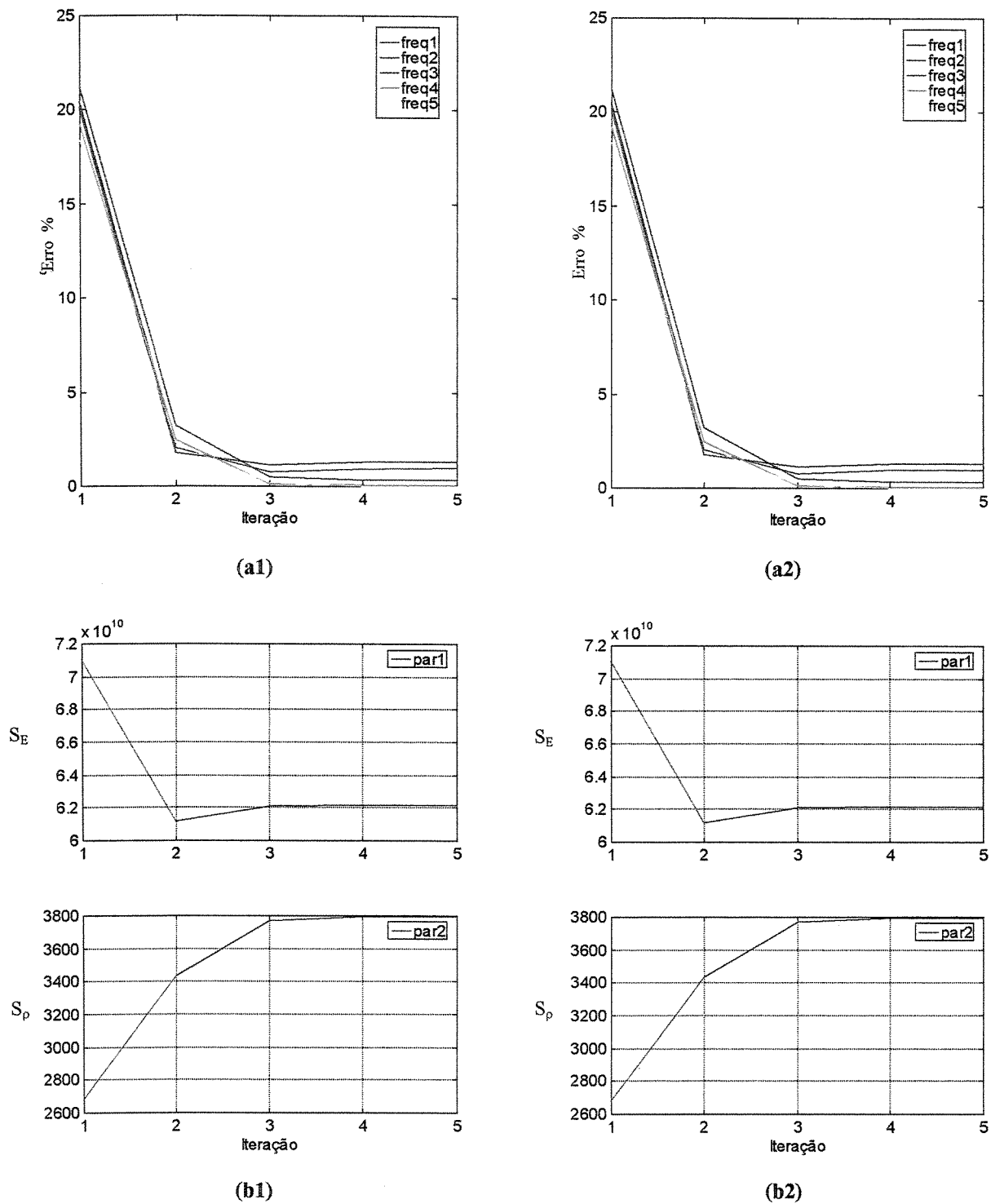
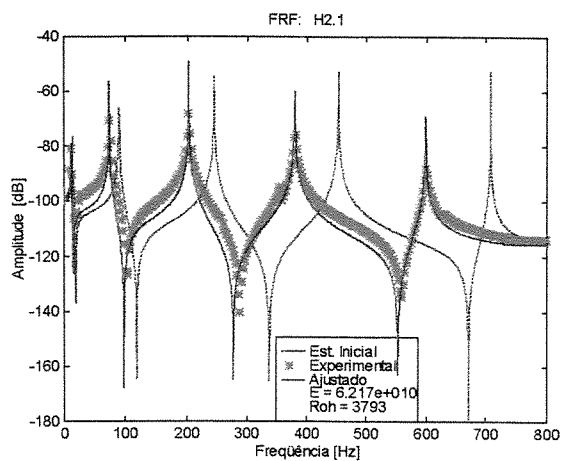


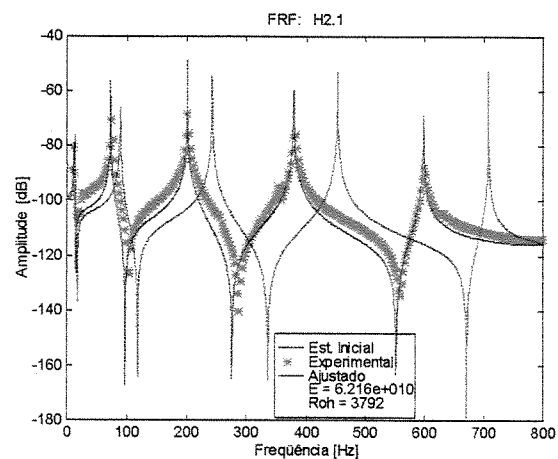
Figura 4.53 – Resultados do exemplo experimental C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.

Nas figuras anteriores pode-se observar nos casos não correlacionado e correlacionado uma rápida convergência do algoritmo em termos das frequências e parâmetros ajustados com e sem a inclusão dos autovetores.

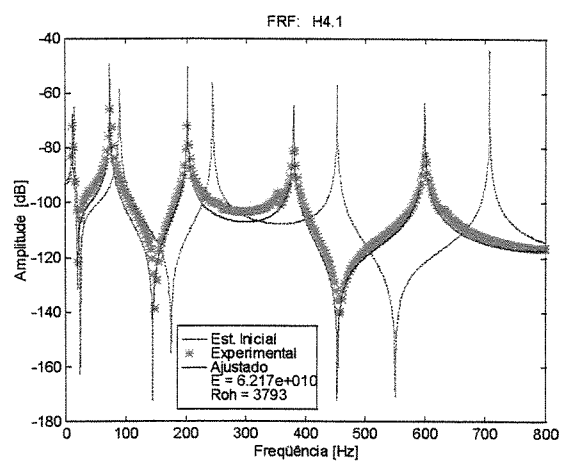
As Figuras 4.54 e 4.55 mostram uma comparação das FRFs dos dados medidos do modelo experimental e o modelo ajustado, obtidos por superposição modal do modelo de MEF na faixa de frequências de DC- 1500 Hz para o caso não correlacionado (a1 – c1) e para o caso correlacionado (a2 – c2). Embora os erros percentuais dos valores dos parâmetros p sejam altos o método consegue uma aproximação razoável das FRFs. Uma vez mais esta discordância é gerada pela ausência de amortecimento no modelo do MEF e ao efeito de truncamento modal na superposição, à influência da inércia da geometria dos acelerômetros, assim como ao peso dos cabos de conexão.



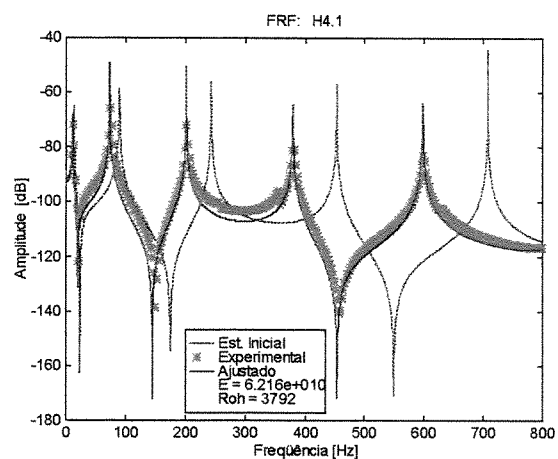
(a1)



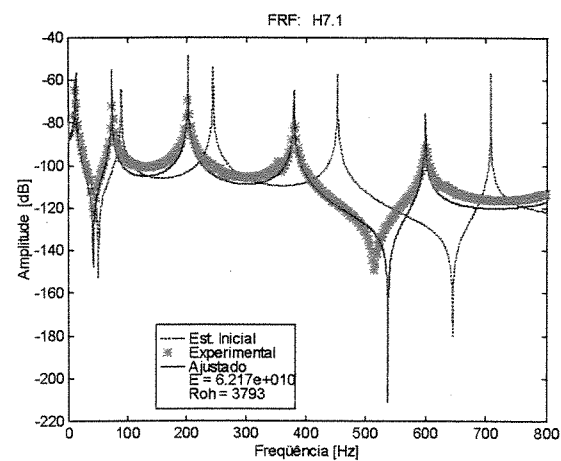
(a2)



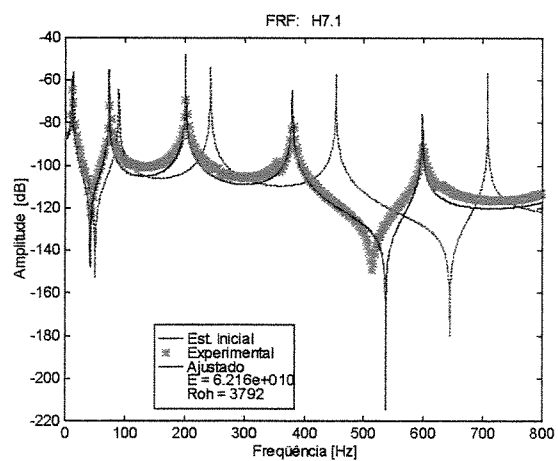
(b1)



(b2)

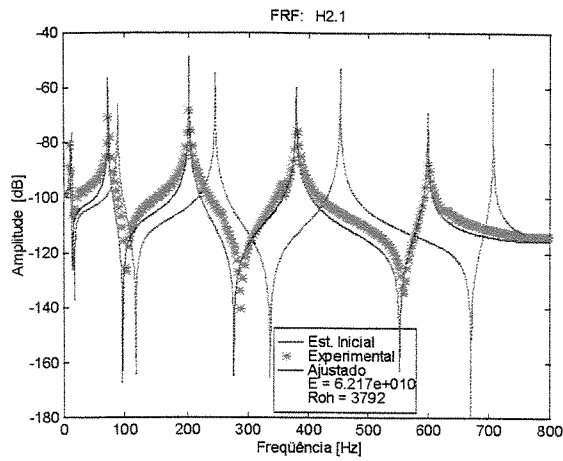


(c1)

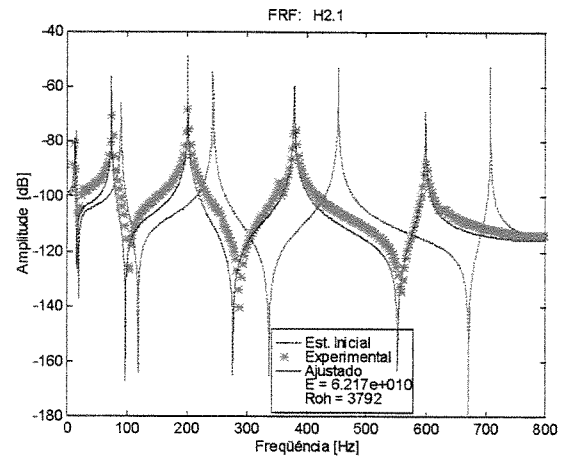


(c2)

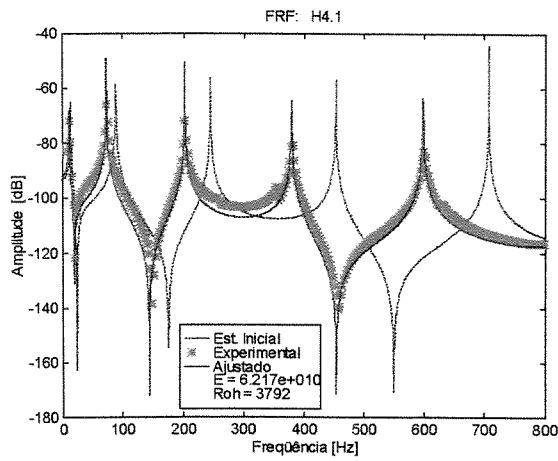
Figura 4.54 – FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental S/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).



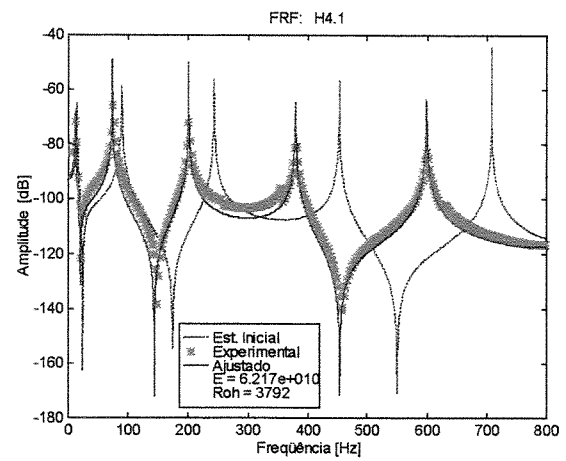
(a1)



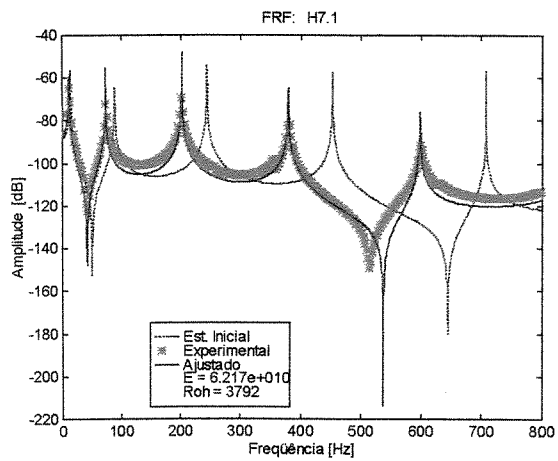
(a2)



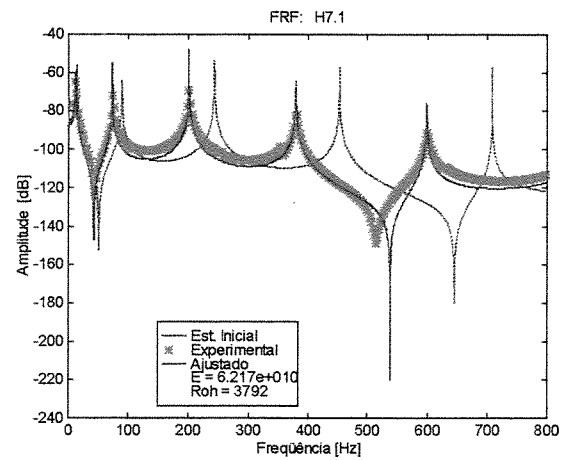
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 4.55 – FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental C/A: caso não correlacionado (a1 – c1), caso correlacionado (a2 – c2).

A Tabela 4.12, apresenta os resultados usando desta vez uma variância de $[5e-4 \ 5e-4 \ 5e-3 \ 5e-3 \ 5e-3]$ nos autovalores, pois as frequências mais baixas possuem menores variâncias e conservando os mesmos desvios padrões considerados anteriormente nos autovetores e parâmetros (10%).

Valor Inicial f_i [Hz] E [Pa] ρ [Kg/m ³]		Valor Ajustado								Valor Medido
		Método do Collins (Medições e parâmetros não correlacionados)				Método do Friswell (Medições e parâmetros correlacionados)				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
f_1	14,32	11,84	0,67	11,84	0,67	11,84	0,68	11,84	0,68	11,92
f_2	89,26	73,86	0,35	73,86	0,36	73,85	0,37	73,85	0,37	74,12
f_3	244,12	202,89	0,78	202,88	0,77	202,86	0,76	202,86	0,76	201,32
f_4	452,89	380,37	0,12	380,36	0,11	380,35	0,11	380,35	0,11	379,93
f_5	707,98	598,04	0,03	598,03	0,04	598,05	0,03	598,05	0,03	598,24
f_6	1050,24	881,70	1,72	881,68	1,71	881,68	1,71	881,68	1,71	866,57
E	71e9	5,906e10	3,792	5,907e10	3,78	5,914e10	3,65	5,914e10	3,65	6,13e10
ρ	2680	3493,2	11,83	3494,5	11,86	3500,9	12,02	3500,9	12,02	3080

Tabela 4.12 – Comparação dos valores dos dados medidos com os valores ajustados usando o algoritmo da variância mínima para os casos não correlacionado (Collins) e correlacionado (Friswell)

Como se pode observar a primeira frequência ajustada foi melhorada assim como os valores de convergência dos parâmetros (em termos de ρ). O erro máximo nos dados medidos ajustados é inferior a 1% e nos parâmetros o erro é de até 12,02%. Novamente os autovetores não influenciam o ajuste.

As figuras 4.56 e 4.57 mostram o processo de ajuste para caso não correlacionado (a1–b1) e correlacionado (a2–b2), os quais mostram o erro percentual das frequências e o valor do parâmetro a cada iteração.

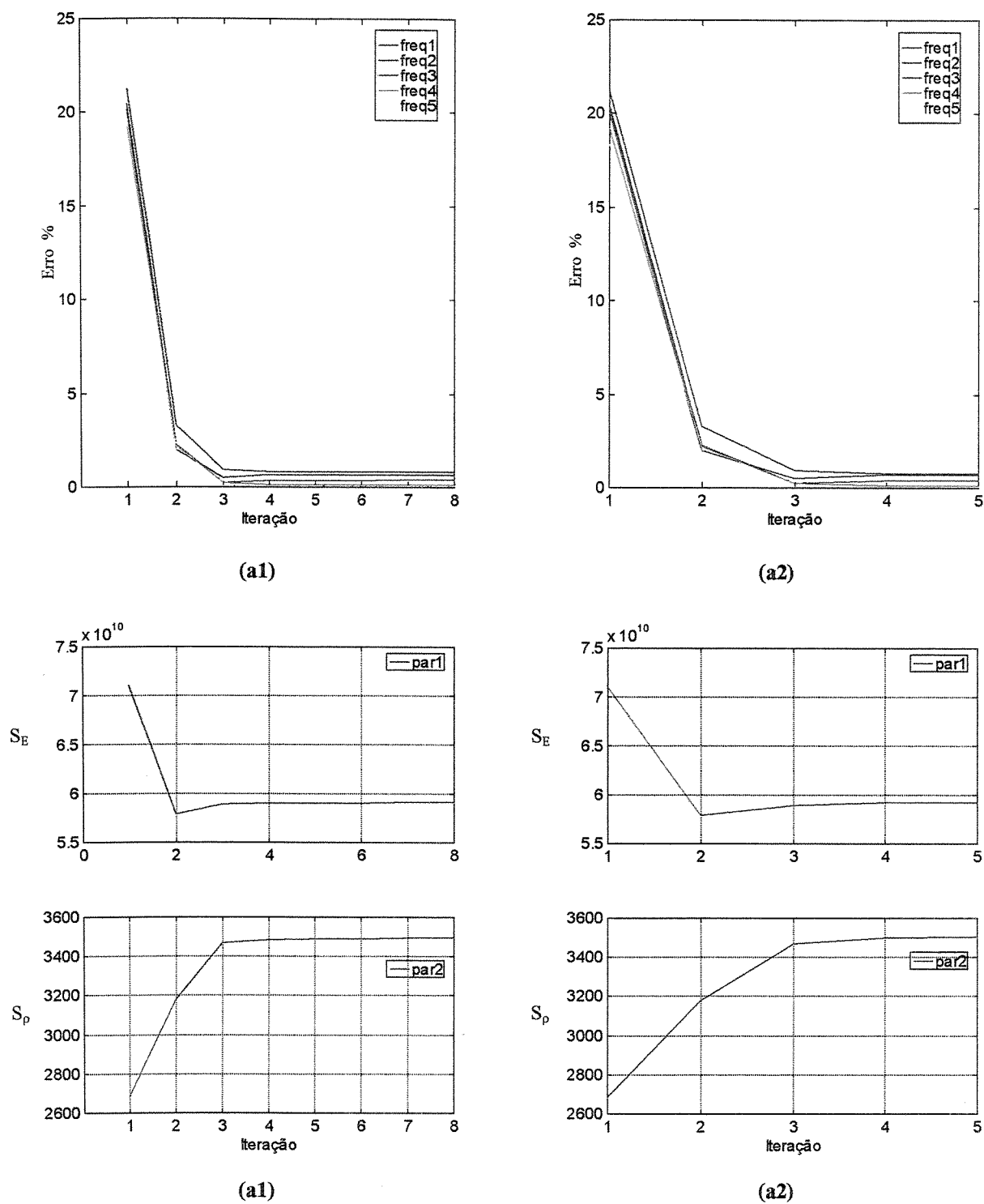
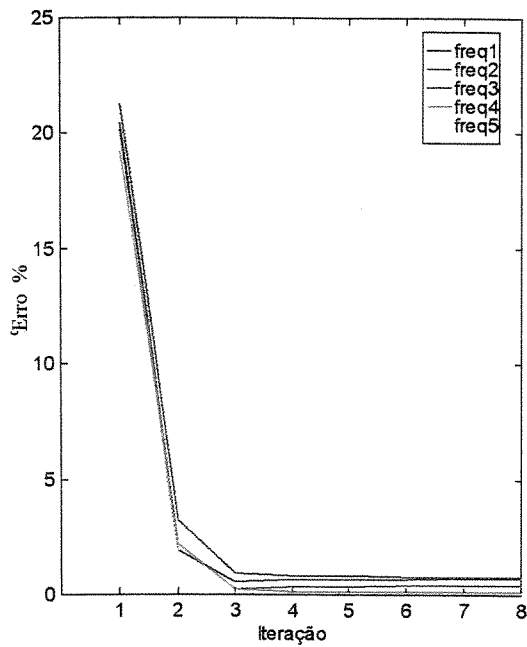
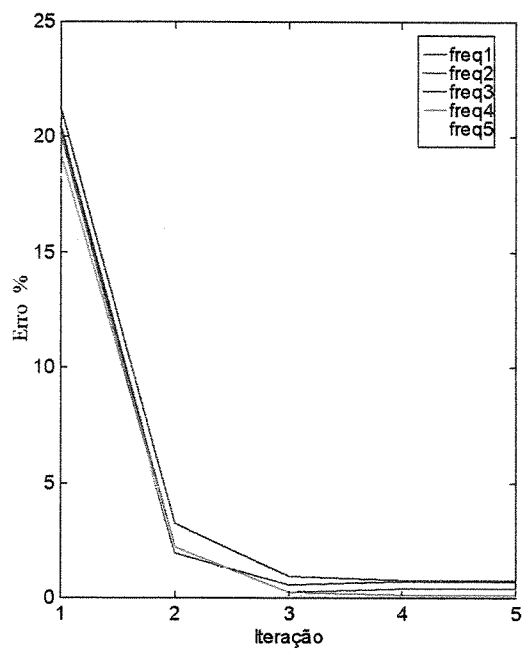


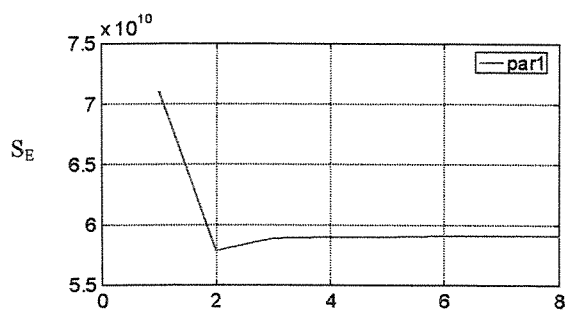
Figura 4.56 – Resultados do exemplo experimental S/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.



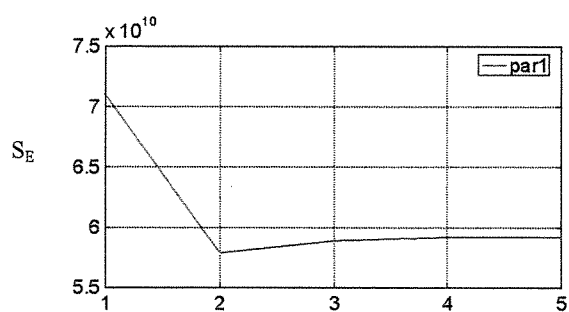
(a1)



(a2)



(b1)



(b2)

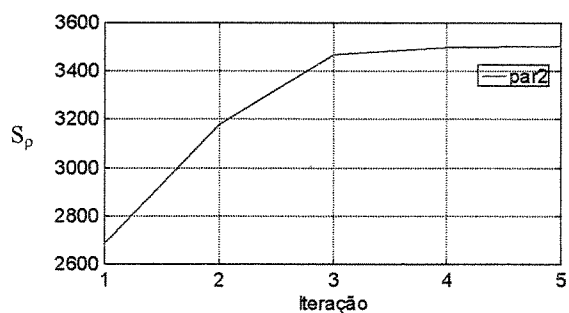
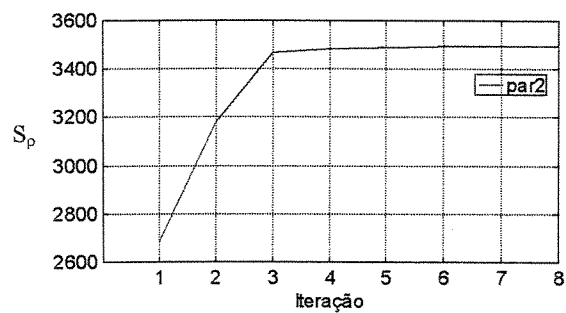
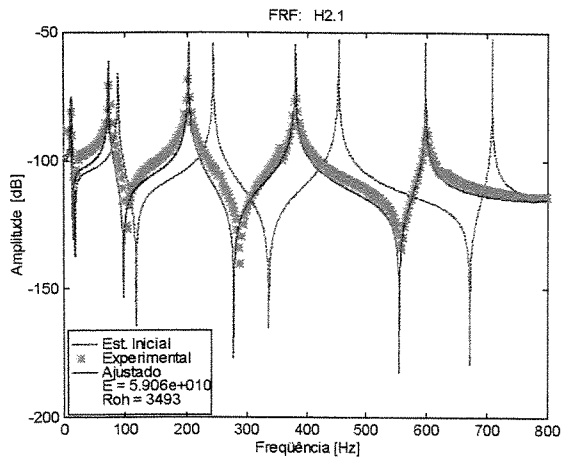


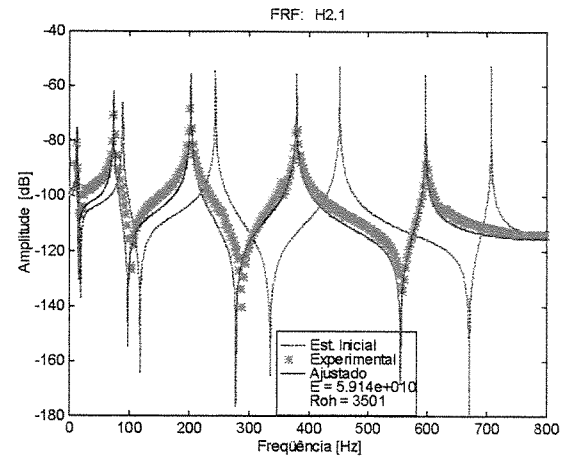
Figura 4.57 – Resultados do exemplo experimental C/A, caso não correlacionado e caso correlacionado (a1 – a2) % Erro das frequências em função do n° de iterações, (b1 - b2) Valor do parâmetro em função do n° de iterações.

Nas figuras anteriores pode-se observar que os novos desvios padrões assumidos nos dados medidos melhoram a correlação. Portanto o erro percentual das frequências medidas assim como o valor dos parâmetros apresentam valores de convergência mais razoáveis quando comparados com os resultados mostrados na Tabela 4.11. O número de iterações aumento (8 iterações).

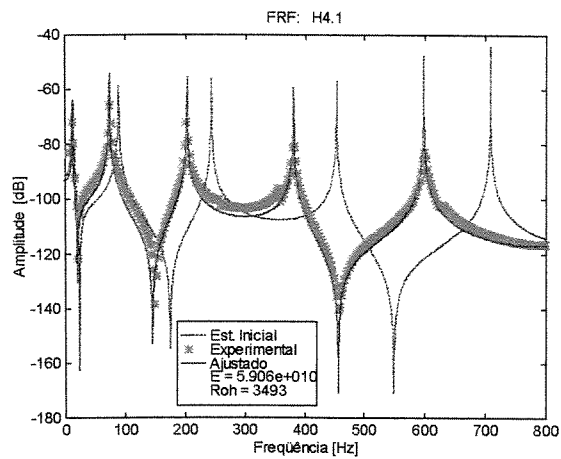
As Figuras 4.58 e 4.59 mostram uma comparação das FRFs dos dados medidos do modelo experimental e o modelo ajustado, obtidos por superposição modal do modelo de MEF na faixa de frequências de DC- 1500 Hz para o caso não correlacionado (a1 – c1) e para o caso correlacionado (a2 – c2). Assim a técnica da variância mínima consegue uma aproximação razoável das FRFs. Uma vez mais esta discordância é gerada pela ausência de amortecimento no modelo do MEF e ao efeito de truncamento modal na superposição, à influencia da inércia da geometria dos acelerômetros, assim como ao peso dos cabos de conexão.



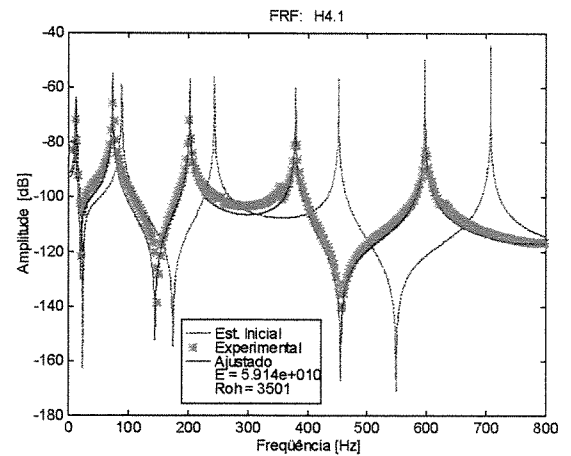
(a1)



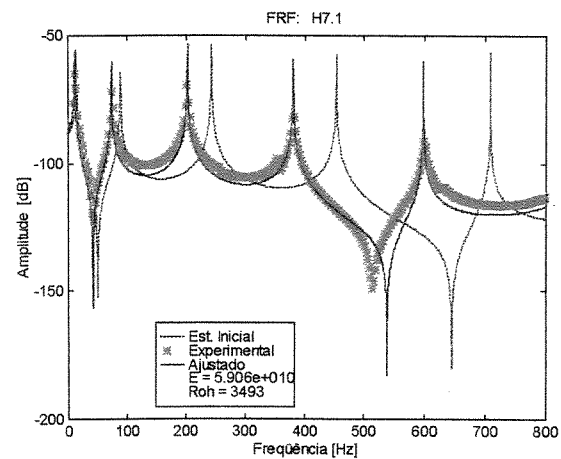
(a2)



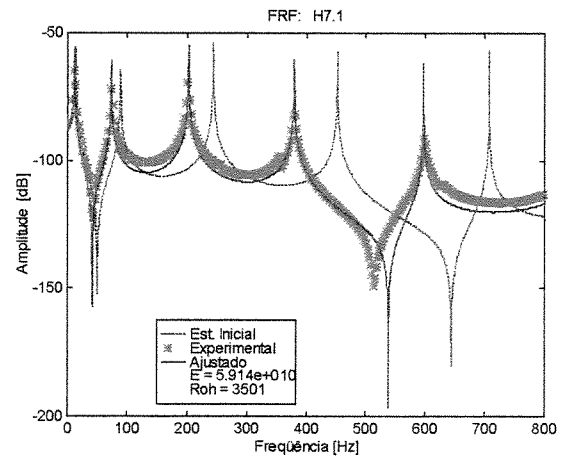
(b1)



(b2)

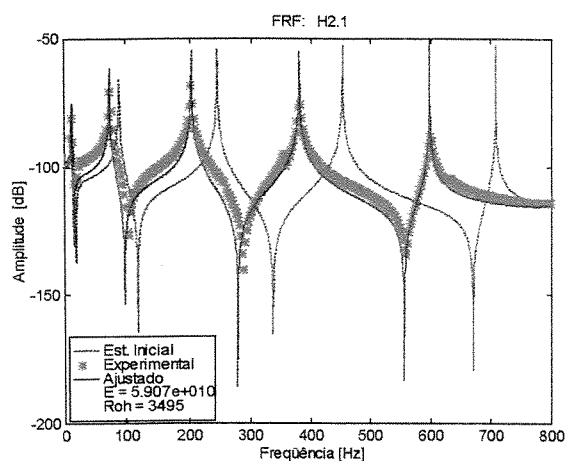


(c1)

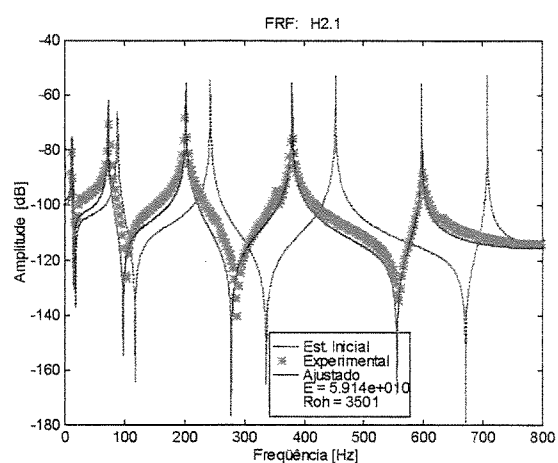


(c2)

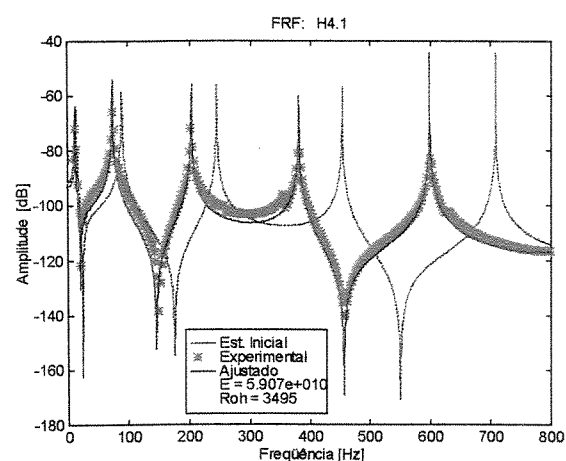
Figura 4.58 – FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental S/A: caso não correlacionado (a1 - c1), caso correlacionado (a2 - c2).



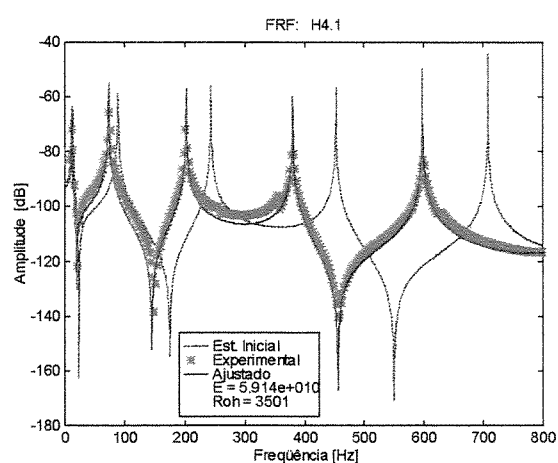
(a1)



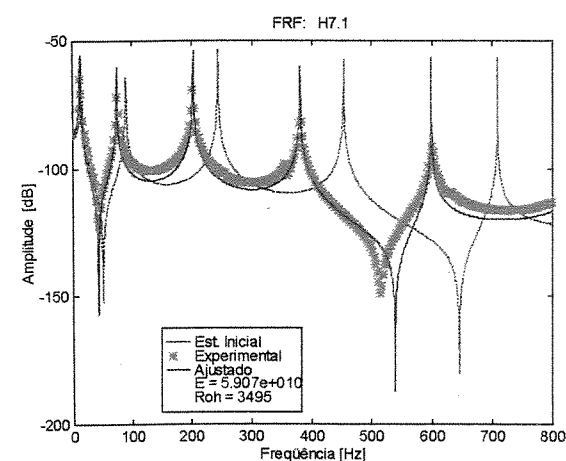
(a2)



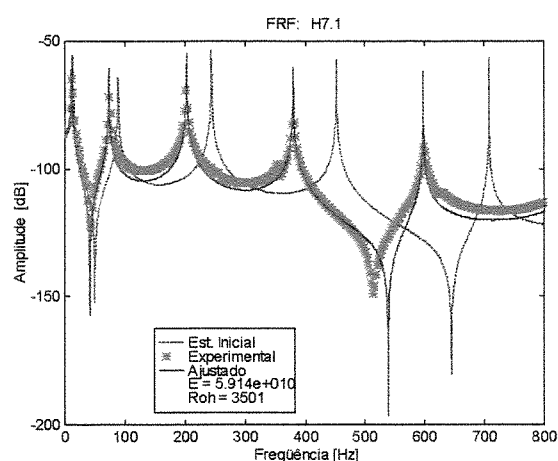
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 4.59 – FRFs dos dados experimentais medidos e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados. Exemplo experimental C/A: caso não correlacionado (a1 - c1), caso correlacionado (a2 - c2).

4.3 Observações dos resultados

Os algoritmos da função objetivo e mínima variância foram aplicados utilizando-se exemplos pseudo experimentais e reais. Nos dois casos obteve-se resultados satisfatórios.

Quando assumidas ponderações e variâncias adequadas, os métodos da função objetivo e variância mínima apresentam, em todos os casos, erros percentuais inferiores a 1% nos dados modais ajustados.

É importante observar que tanto para o método da função objetivo assim como para o método da variância mínima, as ponderações e variâncias assumidas são muito importantes para o sucesso destas técnicas, ponderações e variâncias inadequadas levariam a resultados que podem divergir ou convergir para valores errados dos parâmetros ajustados.

As frequências utilizadas para quantificar a qualidade do modelo são muito importantes pois elas permitem saber, com antecedência, se os resultados do modelo ajustado convergiram para o valor de parâmetro correto.

Capítulo 5

Conclusões

Dois algoritmos de ajuste de modelos do MEF usando técnicas iterativas baseadas na sensibilidade que relacionam os dados modais medidos e os parâmetros estimados foram analisados, implementados em códigos computacionais e avaliados: o método da função de penalidades e o método da variância mínima. As avaliações do desempenho dos algoritmos foram realizados usando-se uma estrutura simples tipo viga, com dados experimentais simulados e reais.

Nos exemplos analisados o método da função objetivo apresenta um melhor desempenho comparado com o método da variância mínima. Embora o método da variância mínima tenha recebido um interesse considerável e ser utilizado em pacotes de ajuste comerciais (Mottershead & Friswell, 1993), o método da função objetivo nos exemplos analisados apresenta um melhor desempenho tanto em termos dos valores de convergência como custo computacional.

No método da variância mínima confirma-se que a técnica do Friswell (1989) além de convergir mais rapidamente, reproduz melhor os dados medidos, toda vez que esta técnica leva em conta a correlação entre os dados medidos e os parâmetros estimados ajustados para cada iteração o qual não é considerado pela técnica de Collins *et al.* (1972-1974).

O algoritmo da sensibilidade dos parâmetros modais em relação aos parâmetros de ajuste (Fox & Kappor, 1969), foi implementado e mostrou-se eficiente e rápido para os exemplos avaliados.

Uma solução adequada ao problema de ajuste de modelos depende em grande parte da seleção dos parâmetros a ajustar, das restrições a impor assim como da técnica de ajuste a utilizar. Portanto não é garantida a existência de uma solução única. Valores iniciais que levem o problema para muito fora da região do mínimo farão com que os métodos divirjam ou convirjam para valores errados dos parâmetros.

É importante levar em conta uma determinada faixa de análise, onde as frequências influenciem aos parâmetros a serem ajustados. A experiência do engenheiro desempenha assim um papel importante, pois é ele que determina as estimativas iniciais dos parâmetros assim como as corretas ponderações e/ou variâncias.

A seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

Utilizar outras técnicas para a determinação da matriz de sensibilidade, pois modos próximos e/ou repetidos causaram problemas de mal condicionamento ou uma convergência lenta, e algoritmos como o de Fox & Kappor (1968) ou Nelson (1976), não poderão ser usados satisfatoriamente. Zhang & Lallement (1989) utilizam técnicas de modificação estrutural para separar os modos próximos e tornar o cálculo da matriz de sensibilidade em bem condicionada. Técnicas aproximadas, tais como diferenças finitas, podem e tem sido usadas para acelerar o cálculo destas derivadas aumentando sua eficiência computacional.

Comparar as técnicas analisadas com os métodos que utilizam diretamente as funções de resposta em frequência como dados medidos, evitando desta maneira a realização da extração das frequências e modos via AME. Assim, se poderá ter um maior discernimento sobre o comportamento destas técnicas de ajuste.

A aplicação destas técnicas na detecção de falhas estruturais.

Referências Bibliográficas

- Allemang, R. J., Brown, D. L. A correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of the I-Imac*, 1982.
- ANSYS54, Finite Element Analysis Program, Swanson Analysis System Inc, 1997.
- Baruch, M. Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests. *AIAA journal*, v.16, n.11, p.1208-1210, november 1978.
- Baruch, M., Bar-Itzhack. I. Y. Optimal weighted orthogonalization of measured modes . *AIAA journal*, v.16, n.4, p.346-351, april 1978.
- Berman, A. ,Flanelly, W. Theory of incomplete models of dynamics structures. *AIAA journal*, v.18, n.9, p.684-690, september 1971.
- Berman, A., Nagy, E. J. Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA journal*, v.21, n.8, p.1168-1173, August 1983.
- Blakely, K. D., Walton, W. B. Selection of measurement and parameter uncertainties for finite element model revision. International Modal Analysis Conference, 2, 1984, Orlando, Florida, *Proceedings*. p.82-88.
- Caeser, B. Update and identification of dynamic mathematical models. International Modal Analysis Conference, 5, 1986, Los Angeles, *Proceedings*, p.394-401.
- Chen, J. C., Garba, J. A. Analytical model improvement using modal test results. *AIAA journal*, v.18, n.9, p.684-690, september 1979.
- Chen, J. C., Kuo, C. P., Garba, J. A. Direct structural parameter identification by modal test results. *AIAA / ASME / ASCE / MAS Proc. 24th Struc. Dynam. And materials Conf.*, p.44-49, 1983.
- Collins, J. D. , Thomson, J. D. The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties. *AIAA Journal*, v.7, n.4, p.642-648, april 1969.

- Collins, J. D., Hart, G. C., Hasselman, T. K., Kennedy, B. Statistical identification of structures. *AIAA Journal*, v.12, n.2, p.185-190, february 1974.
- Collins, J. D., Young, J., Kiefling, L. Methods and applications of system identification in shock and vibration. *System Identification of Vibrating Structures*, presented at 1972 Winter Annual Meeting of the ASME, 1972. p.185-190.
- Ewins, D. J. *Modal testing: Theory and Practice*. Research Studies Press Ltd. 1995.
- Fox, R. L., Kappor, M. P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, v.6, n.12, p.2426-2429, december 1969.
- Friswell, M. I. The adjustment of structural parameters using a minimum variance estimator, *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, v.3, n.2, p.143-155, August 1989.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E. *Finite element model updating in structural dynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1995, 286p.
- Friswell, M. I., Penny, J. E. T. Updating model parameter from frequency domain data via reduced order models. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, v.4, n.5, p.377-391, 1990.
- Guyan, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, v.3, n.2, p.380, february 1965.
- Heylen, W., Sas, P. Review of model optimization techniques. International Modal Analysis Conference, 5, 1987, *Proceedings*, p.1177-1182.
- Ibrahim, S. R., Saafan, A. A. Correlation of analysis and test in modeling of structures assessment and review. International Modal Analysis Conference, 5, 1987, *Proceedings*, p.1651-1660.
- Imregum, M., Visser, W. J. A review of model updating techniques. *Shock and Vibration Digest*. v.23, n.1, p.9-20, 1991.
- Lewis, T. O., Odell, P. L. *Estimation Linear Models*, Prentice-hall, Englewood cliff, 1971, p.47-65.
- Lin, R. M., Ewins, D. J. Parameter estimation using FRF data. International Modal Analysis Seminar, 15, 1990, K. U. Leuven, september p.19-21.
- LMS-International, User Manual, rev 1.401, 1994.
- Martinez, D. R. Parameter estimation in structural dynamic models. *Sandia National Laboratories*, Report SAND80-0135, 315p, mar 1981.

- MATLAB, High- performance Numerical Computational and Visualization software, The Mathworks-Inc, 1994.
- Mitchell, L. D. Complex modes: A review. International Modal Analysis Conference, 8, 1990, Florida, *Proceedings*, p.891-899.
- Mottershead, J. E., Friswell, M. I. Model updating in structural dynamics: A Survey. *Journal of Sound and Vibration*, v.2, n.167, p.347-373, May 1993.
- Mottershead, J. E., Goh, E. L., Shao, W. On the treatment of discretisation errors in finite element model updating. International Modal Analysis Seminar, 17, 1992, K. U. Leuven, september p.1245-1262.
- Nalitolela, N. G., Penny, J. E. T., Friswell, M. I. A mass or stiffness addition technique for structural parameter updating. *International Journal of analytical and experimental modal analysis*, v.7, n.3, p.1567-168, july 1992.
- Nalitolela, N. G., Penny, J. E. T., Friswell, M. I. Updating structural parameters of a finite element model by adding mass or stiffness to the system. In: International Modal Analysis Conference, 8, 1990, Kissimere, Florida, 1990, *Proceedings*, p.836-842.
- Natke, H. G. Updating computational models in the frequency domain based on measured data: a survey. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v.3, n.1, p.28-35, 1988.
- Nelson, R. B. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA journal*, v.14, n.9, p.1201-1205, september 1976.
- Niedbal, N. Analytical determination of real modes from measured complex responses. Structural Dynamics and Materials Conference, 25, 1984, Palm Springs, may, p.292-295.
- O'Callahan, J. C. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. International Modal Analysis Conference, 7, 1989, Las Vegas, *Proceedings*, p.17-21.
- O'Callahan, J. C., Avitabile, P., Riemer, R. System equivalent reduction expansion process. International Modal Analysis Conference, 7, 1989, Las Vegas, *Proceedings*, p.29-37.
- Pavanello, R. Código computacional MEFLAB, Unicamp, 1996.
- Paz, M. Dynamic condensation method. *AIAA journal*, v.22, n.5, p.724-727, May 1984.
- Santos, J. M. C., Arruda, J. R.F. Finite element model updating using frequency response functions and component mode synthesis. 8 – Imac, p.1195-1201, 1990.
- The American Society for Testing and Materials- ASTM, E8M-97:Standard test for tension testing of metallic materials, 1997, p.77-97.

- Timoshenko, S. P., Gere, J. M. *Mecánica de Materiales*, Mexico D.F., Union Tipográfica Editorial Hispano-Americana, 1971, p.9.
- Zhang, Q., Lallement, G. Selective structural modifications: applications to the problems of eigensolutions sensitivity and model adjustment. *Mechanical System and Signal Processing*, v.3, n.1, p.55-69, 1989.

Apêndice A

Ensaio de tração da viga de alumínio

Com a finalidade de determinar o valor experimental do módulo de elasticidade da viga de alumínio utilizada no experimento, foi feito o ensaio de tração da mesma, com corpos de prova padronizados (Norma ASTM E8M - 97), cujas dimensões são mostradas na Figura A1.

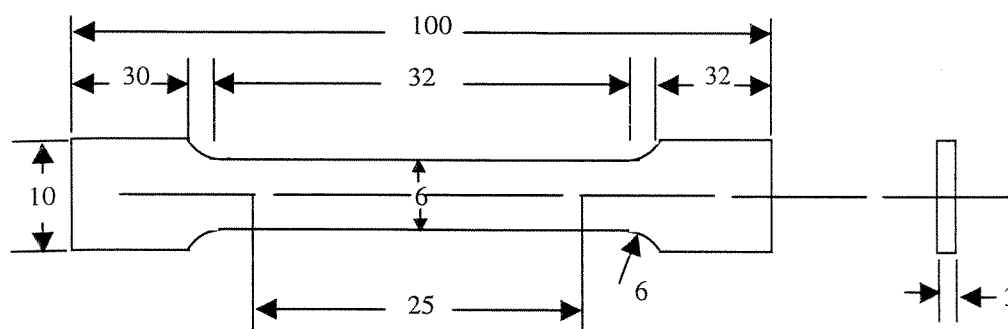


Figura A1 – Dimensões do corpo de prova da chapa de alumínio em mm.

Um diagrama típico de tensão – deformação está mostrado na Figura A2. O ponto A define o chamado limite elástico do material. A inclinação da linha OA é o módulo de elasticidade E . Fisicamente E representa a rigidez do material a um carregamento imposto.

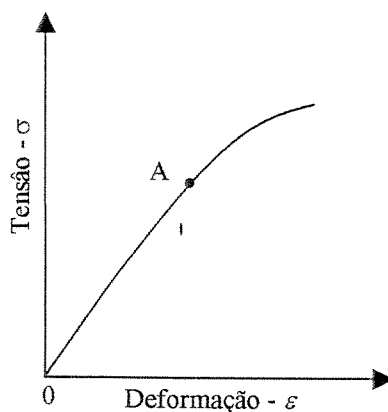


Figura A2 – Diagrama tensão – deformação de materiais típicos.

Com os dados obtidos dos 4 corpos de prova, pode-se traçar os diagramas de tensão – deformação, como visto na Figura A3.

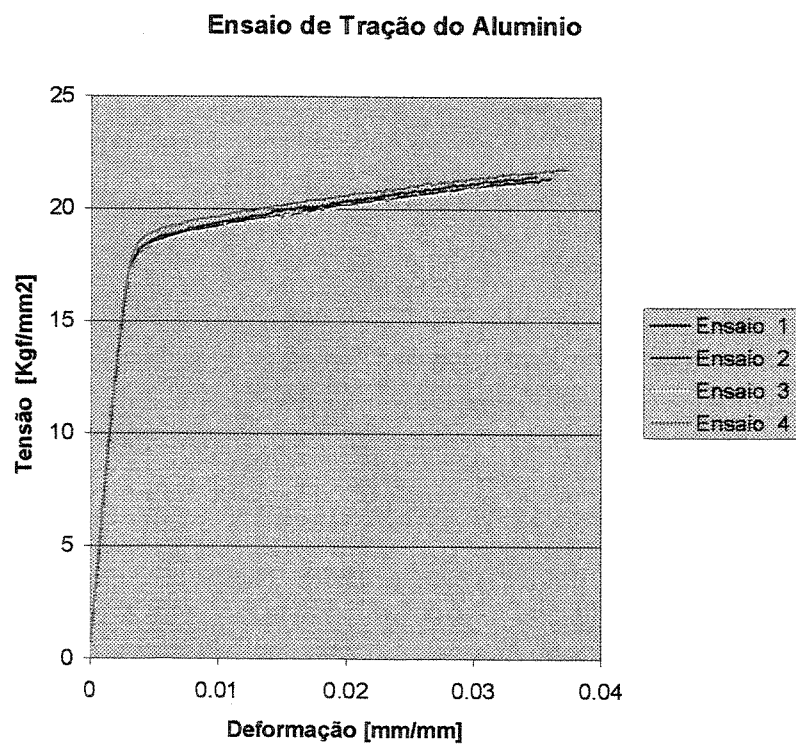


Figura A3 – Diagrama de tensão – deformação dos corpos de prova utilizados.

Assim, a Figura A4 mostra a regressão linear feita com a finalidade de determinar o módulo de elasticidade do alumínio, sendo que escolheu-se como limite de elasticidade o ponto a 15 Kgf/mm² no diagrama da Figura A3.

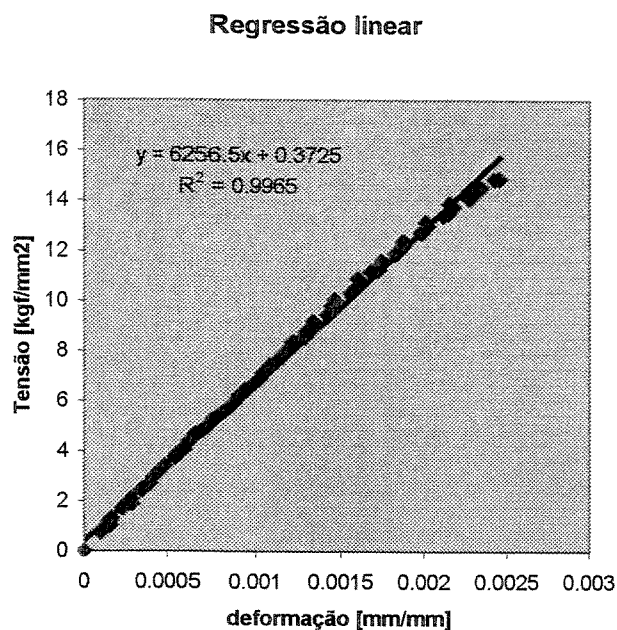


Figura A4 – Análise de regressão linear que determinará o módulo de elasticidade E .

A Tabela A1 mostra os resultados do ensaio e os desvios padrões obtidos.

	<i>kgf/mm²</i>	<i>GPa</i>
Média do E	6256,5	6,13
Desvio Pad.	144	1,42

Tabela A1 – Média e desvio padrão do módulo de elasticidade E .