

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR EDSON ANTONIO CAPELO SOUSA

..... E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 05 / 08 / 99.

Euclides M. Neto

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Métodos dos Elementos Finitos
e Elementos de Contorno Aplicados a
Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes:
Pré-requisitos para o Acoplamento**

Autor: **Edson Antonio Capello Sousa**
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

34/99



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Métodos dos Elementos Finitos
e Elementos de Contorno Aplicados a
Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes:
Pré-requisitos para o Acoplamento**

**Autor: Edson Antonio Capello Sousa
Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos**

Tese de doutorado apresenta à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 1999
S.P. - Brasil**

UNIDADE BC
 N.º CHAMADA:
TI/UNICAMP
So 85m
 V. Ex.
 TOMBO BC/ 41075
 PROC 278/0.0
 C ☐ D ☒
 PREÇO 19511,00
 DATA 13-06-00
 N.º CPD

CM-00140604-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

So85m Sousa, Edson Antonio Capello
 Método dos elementos finitos e elementos de contorno
 aplicados a problemas visco-elastodinâmicos transientes:
 pré-requisitos para o acoplamento / Edson Antonio
 Capello Sousa.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Método de
 elementos de contorno. 3. Viscoelasticidade. 4.
 Dinâmica dos corpos rígidos. 5. Green, Funções de. 6.
 Interação solo-estrutura. 7. Fourier, Transformações de.
 I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual
 de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
 Título.

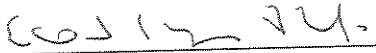
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
ENGENHARIA DE MATERIAIS

TESE DE DOUTORADO

Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de
Contorno Aplicados a Problemas Visco-
Elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos para o
Acoplamento

Autor : Edson Antonio Capello Sousa

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
FEM / UNICAMP



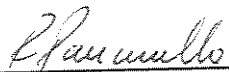
Prof. Dr. Humberto Breves Coda
EESC / USP - São Carlos



Prof. Dr. Lauro Henrique Mello Chueiri
FE / UNESP - Bauru



Prof. Dr. Fernando Iguti
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP

Campinas, 05 de agosto de 1999

Para Fernanda e Bruno

*Se todas as crianças tivessem as mesmas oportunidades,
elas seriam tão alegres quanto eles, e o mundo seria melhor*

Agradecimentos

A todas as pessoas que me ajudaram nesta conquista, presto minha homenagem:

Aos meus pais pela dedicação que tiveram por mim em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto pela orientação técnica transmitida.

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti pelos auxílios técnicos e sobretudo um grande amigo.

Ao Prof. Dr. Alcides Padilha, que sempre me incentivou.

À Marcia, minha querida irmã, que me deu um apoio imprescindível.

A todos os professores e colegas do DMC pelos quais tenho grande apreço.

À Renata Mantovani pela paciência e compreensão.

Aos colegas do departamento na Unesp, que acreditaram em mim.

À Giorgia Savi, que sempre me deu muito carinho.

A todas as pessoas que passaram na minha vida, e de forma direta ou indireta, me ensinaram alguma coisa.

*A busca da perfeição extrapola
os limites do homem*

Resumo

Capello Sousa, Edson Antonio, *Métodos Elementos Finitos e Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos para o Acoplamento*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 234 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho desenvolveu-se a formulação para acoplamento do método do Elementos Finitos e Elementos de Contorno para solução de problemas dinâmicos transientes em meios viscoelásticos. A formulação do MEF transiente viscoelástico, foi realizada diretamente no domínio do tempo, utilizando o conceito de integrais hereditárias. Na formulação do MEC, a resposta transiente é obtida, através de uma inversão numérica de domínio, a partir da solução estacionária do problema, sendo que, esta última é proveniente das funções de influência do semi-espaço. Nos exemplos apresentados, o MEF viscoelástico é aplicado em estruturas de barra e viga, onde os problemas visco-elastodinâmicos e quase-estáticos foram verificados, enquanto o MEC é utilizado para analisar a resposta dinâmica de uma estrutura rígida com e sem massa sobre o solo viscoelástico. Alguns exemplos verificam a eficiência da inversão numérica aplicada na formulação do MEC. Os resultados obtidos são bastante satisfatórios, e as soluções podem ser estendidas para outras pesquisas, como análise do comportamento de estruturas viscoelásticas mais complexas e soluções de outros problemas dinâmicos envolvendo o semi-espaço.

Palavras Chave

- Viscoelasticidade Dinâmica, Análise Transiente, Elementos Finitos, Elementos de Contorno, Funções de Green, Interação dinâmica solo-estrutura, Inversa Numérica da Transformada de Fourier

Abstract

Capello Sousa, Edson Antonio, *Finite Elements and Boundary Elements Methods for Applied the Transient Dynamic Viscoelastic Problem: Pre-requisite for Coupling*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 234 p. Ph.D Thesis

In this work, the formulation for coupling the Finite Element Method (FEM) and the Boundary Element Method (BEM) was developed for transient dynamic viscoelastic problems. The FEM transient viscoelastic formulations was developed directly in time domain, using the hereditary integrals concept. In the BEM formulations, the transient response is obtained through numerical inversion of domain, using the stationary solution. The stationary solution is obtained from the influence functions of half-space. In the demonstrated examples, the viscoelastic FEM is applied to plane bar and beam structures, where visco elastodynamic and quasi-static problems were verified. On the other hand, the BEM is used to analyse the transient dynamic response of a rigid structure, with and without mass, over a viscoelastic soil. Some other examples verify the efficiency of the numerical inversion applied for BEM formulations. The obtained results were satisfactory, and the proposed technique can be extended to other research applications as the study of complex viscoelastic structures behavior, and other dynamic problems involving half-space solutions.

Key Words

- Dynamic viscoelasticity, Transient Analysis, Finite Element, Boundary Element, Green Function, Dynamic Soil-structure Interaction, Numerical Inverse of Fourier Transform.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Nomenclatura	xiv
1 Introdução	1
2 Revisão da Literatura	12
2.1 Viscoelastodinâmica e Elementos Finitos	13
2.2 Método dos Elementos de Contorno Transiente	20
2.3 Inversão Numérica das Transformada de Laplace e Fourier	23
2.4 Acoplamento entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno	27
3 Teoria da Viscoelasticidade / Modelos Constitutivos Viscoelásticos	35
3.1 Introdução à Viscoelasticidade - Conceitos Básicos	35
3.2 Modelos Viscoelásticos - Módulo de Relaxação e Módulo de Fluência	38
3.2.1 Modelo de Kelvin	39
3.2.2 Modelo de Maxwell	42
3.2.3 Modelos Generalizados	44
3.3 Equação Constitutiva Viscoelástica Linear	48
3.4 Avaliação do Módulo de Relaxação e Módulo de Fluência	52
4 Representação Integral para Formulação Viscoelástica	54
4.1 Princípio da Superposição de Boltzmann e Representação Integral de Stieltjes	54
4.2 Forma Integral da Relação Constitutiva Tensão-Deformação Unidimensional	60
4.2.1 Exemplos Numéricos - Equação Constitutiva	61
4.3 Forma Integral da Equação de Equilíbrio	65
4.3.1 Implementação Numérica da Equação de Equilíbrio na Forma Integral	66
4.3.2 Exemplos Numéricos - Equação de Equilíbrio	70
5 Formulação da Solução para Equação de Equilíbrio Integro-Diferencial do Problema Viscoelastodinâmico Transiente	78

5.1 Equação de Equilíbrio Dinâmico Transiente - Representação Integral	78
5.2 Integração das Funções de Relaxação	90
5.3 Formulação de Elementos Finitos	96
5.4 Resultados e Discussões da Formulação Integral	108
5.4.1 Problema Contínuo Viscoelástico - Elemento de Barra	108
5.4.2 - Problema Contínuo Viscoelástico - Viga Plana	115
6. Formulação de Elementos de Contorno / Função de Green Estacionária	123
6.1 Definição do Problema Elastodinâmico e Viscoelastodinâmico Estacionário	123
6.2 Função de Green - Propagação de Ondas em Meio Contínuo Viscoelástico	130
6.2.1 Definição das Grandezas Adimensionais	133
6.2.2 Superposição das Funções de Flexibilidades Complexas	134
6.3 Elementos de Contorno Viscoelástico Estacionário	136
6.3.1 Formulação da Equação Integral de Contorno	136
6.3.2 Discretização da Equação Integral de Contorno - MEC	138
6.4 Inclusão da Solução para Fundação Rígida nas Formulações de Green e do MEC	140
6.4.1 Resposta da Fundação Rígida e Funções de Green	143
6.4.2 Resposta da Fundação Rígida e o MEC	148
6.5 Inclusão da Propriedade de Inércia na Resposta da Fundação Rígida	150
6.5.1 Resposta da Fundação Rígida Com Inércia e as Funções de Green	153
6.5.2 Resposta da Fundação Rígida Com Inércia e o MEC	158
7 Formulação de Elementos de Contorno / Função de Green - Resposta Transiente	160
7.1 Formulação para Solução Transiente	162
7.1.1 Formulação da equação integral no domínio transformado de Laplace	162
7.1.2 Formulação da equação integral no domínio transformado de Fourier	165
7.2 Exemplos Numéricos - Avaliação da Transformada Inversa Numérica	168
7.3 Exemplos Numéricos - Problema Dinâmico Solo-Estrutura	182
7.4 Exemplos Numéricos - Problema Dinâmico Solo-Estrutura - Inércia da Fundação	197
8 Conclusões e Discussões Finais	209
Referências Bibliográficas	213
Apêndice	228

Lista de Figuras

3.1 Modelo Viscoelástico de Kelvin	39
3.2 Modelo Viscoelástico de Maxwell	41
3.3 Modelo Generalizado de Maxwell em Série	44
3.4 Modelo Generalizado de Kelvin em Paralelo	46
3.5 Função Heaviside	52
4.1 Exemplo de Modelo Viscoelástico - Modelo Kelvin-Maxwell	54
4.2 Relação Tensão-Deformação Viscoelástica	55
4.3 Princípio da Superposição de Boltzmann	57
4.4 Variável Tensão Aproximada por uma Série de Tensões Constantes	57
4.5 Módulo de Fluência para o Modelo de Kelvin	62
4.6 Módulo de Fluência para o Modelo de Maxwell	63
4.7 Módulo de Relaxação para o Modelo de Maxwell	64
4.8 Verificação da Solução Numérica da Equação de Equilíbrio Viscoelástica	71
4.9 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin - Carregamento Constante	72
4.10 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin - $\eta = 1$.	73
4.11 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin - $\eta = 5$.	74
4.12 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - Carregamento Constante	75
4.13 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - $\eta \rightarrow 0$.	76
4.14 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - $\eta \rightarrow \infty$	76
4.15 Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - η variável	77
5.1 Integração Numérica do Método de Newmark para Aceleração Média	80
5.2 Modelo de Maxwell	90
5.3 Modelo de Kelvin-Maxwell	93
5.4 Barra Engastada com Excitação Longitudinal	96
5.5 Viga Engastada com Excitação Transversal e DCL de um Elemento Infinitesimal da Viga Deformada devido a uma Força por Unidade de Comprimento	104
5.6 Modelo de Maxwell e Modelo de Três Parâmetros	109
5.7 Vibração Livre sem Amortecimento	109
5.8 Vibração Ressonante sem Amortecimento	110

5.12 Estrutura Viscoelástica e Efeito de Inércia - Modelo de Três Parâmetros	114
5.13 Modelo de Maxwell	116
5.14 Modelo Sólido de Três Parâmetros	116
5.15 Deslocamento Dependente do Tempo no Centro da Viga para o Modelo de Maxwell e Modelo de Três Parâmetros	117
5.16 Deflexão da Linha Neutra para o Modelo Sólido de Três Parâmetros	118
5.17 Deflexão da Linha Neutra para o Modelo Fluido de Maxwell	119
5.18 Deslocamento Dependente do Tempo no Centro da Viga - Efeito de Inércia	120
5.19 Comparação do Deslocamento Dependente do Tempo, no Centro da Viga para o Modelo Fluido de Maxwell e a Análise Elastodinâmica	121
5.20 Comparação do Deslocamento Dependente do Tempo, no Centro da Viga para o Modelo de Três Parâmetros e a Análise Elastodinâmica	121
6.1 Modelo Viscoelástico de Kelvin	127
6.2 Carregamento Normal e Tangencial na Superfície do Semi-Espaço Viscoelástico	130
6.3 Discretização das Tensões no Solo sob a Fundação	134
6.4 Domínio do Solo Discretizado e a Interação com o Corpo Rígido	141
6.5 Diagrama de Corpo Livre da Fundação Rígida com Massa	150
7.1 Convergência da Função Pulso Retangular	169
7.2 Pulso Retangular obtido através da Inversa Numérica da Transformada de Fourier	171
7.3 Função de Impedância do Sistema	172
7.4 Pulso Retangular Duração de 50 segundos	173
7.5 Resposta Estacionária Final do Sistema - Pulso Retangular 50 s	173
7.6 Solução Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por um Pulso Retangular de duração 50 segundos	174
7.7 Pulso Retangular de Duração 20 segundos	175
7.8 Resposta Estacionária Final do Sistema - Pulso Retangular 20 s	176
7.9 Solução Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por um Pulso Retangular de duração 20 segundos	176
7.10 Resposta Impulsiva - Vibração Livre Amortecida do Sistema	178
7.11 Função Excitação Senóide	179
7.12 Resposta Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por uma Senóide Discretização 2048 pontos	179
7.13 Resposta Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por uma Senóide Discretização 4096 pontos	180
7.14 Problema Interação Dinâmica Solo-Estrutura	182
7.15 Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Deslocamento Vertical	184
7.16 Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Deslocamento Horizontal	184
7.17 Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Rotação	185
7.18 Excitação Vertical - Função Pulso Retangular	185
7.19 Resposta ao Impulso Vertical	187
7.20 Resposta ao Impulso Vertical - Tempo de Análise	187
7.21 Resposta ao Impulso Vertical - Convergência	188
7.22 Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Tempo de Análise	188

7.23 Resposta ao Impulso Vertical - Validação da Solução	189
7.24 Resposta a Excitação Harmônica Vertical	190
7.25 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Convergência	191
7.26 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Validação	192
7.27 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Validação	192
7.28 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Tempo de Análise	193
7.29 Função Resposta em Frequência Vertical	194
7.30 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Frequência de Excitação - $A_0 = 1$.	195
7.31 Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Frequência de Excitação - $A_0 = 0.5$	196
7.32 - Problema Interação Dinâmica Solo-Estrutura - Inércia da Fundação	197
7.33 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 1$	199
7.34 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 5$	199
7.35 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 20$	200
7.36 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 50$	201
7.37 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 1$	202
7.38 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 5$	202
7.39 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 20$	203
7.40 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 50$	204
7.41 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Fundação Com e Sem Massa	205
7.42 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Baixa Influência da Inércia	206
7.43 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Efeito da Variação da Inércia	207
7.44 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Tempo de Análise	208

Nomenclatura

Letras Latinas

a - meia largura da fundação rígida	[m]
A_0 - frequência adimensional	
C_1 - velocidade de propagação de onda de pressão	[m/s]
C_2 - velocidade de propagação de onda de cisalhamento	[m/s]
CC - matriz de compatibilidade cinemática do corpo rígido	
$E(t)$ - módulo de Relaxação	[N/m ²]
EQ - matriz de equilíbrio de forças do corpo rígido	
$G_{ijkl}(t)$ - Tensor de Relaxação dependente do tempo	
$\bar{G}_{ij}^e, \bar{H}_{ij}^e$ - matriz de influência dos elementos	
$\bar{H}_{wz}, \bar{H}_{uz}$ e $\bar{H}_{wx}$ - funções de flexibilidade	
$H(t)$ - função Heaviside	
$J(t)$ - módulo de Fluência	[m ² /N]
K - matriz de rigidez global do MEF	
K_0, K_1 e K_2 - funções de Bessel modificada	
M - matriz de massa global do MEF	
s - variável do domínio de Laplace	
$\bar{u}_{ij}^*, \bar{t}_{ij}^*$ - solução fundamental em deslocamentos e tensão	
$\bar{W}_p, \bar{U}_p$ - funções de influência	

Letras Gregas

μ, λ - constantes de Lamé	
ζ - coeficiente de amortecimento material	
ν - coeficiente de Poison	
η - coeficiente de viscosidade	
δ - delta de Dirac	
ω - frequência (variável do domínio de Fourier)	[rad/s]
β - relação constante de rigidez e coeficiente de viscosidade	

Superescritos

- - define a variável no domínio de Fourier
- ^ - define a variável no domínio de Laplace
- * - variável complexa

Subscritos

- o - define a variável no tempo $t=0$.
- i , j - índice em notação indicial

Abreviações

- DSSI - dynamic soil-structure interaction
- FRF - função resposta em frequência
- MEC - método dos elementos de contorno
- MEF - método dos elementos finitos

Siglas

- DMC - Departamento de Mecânica Computacional

Capítulo 1

Introdução

O crescente avanço que os recursos computacionais tem produzido, sobre qualquer área que se aplique, é inegável nos dias atuais. Técnicas numéricas, tal como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), beneficiam-se fortemente deste progresso. O MEF tem se consagrado como uma potencial ferramenta para solução de problemas na mecânica aplicada. O grande número de pesquisas envolvendo este método, resultou em formulações conceitualmente muito bem estabelecidas, ver Zienkiewicz, 1991, Bathe, 1982 e Hughes, 1987, passando a ser indispensável e a fazer parte de um número muito grande de programas comerciais. Sua aplicação em áreas importantes como mecânica estrutural estática e dinâmica, transferência de calor, termodinâmica, viscoelasticidade, plasticidade, etc, tornou-o extensivamente utilizado nas indústrias, sendo muito apreciado por pesquisadores e engenheiros.

Na área de mecânica dos sólidos, o MEF possui consideráveis vantagens na solução de análises numéricas lineares e não-lineares, Bathe, 1982. Suas principais qualidades são observadas na modelagem de estruturas com não homogeneidades e geometrias complexas, na facilidade para impor as condições que definem um dado problema físico (condições de contorno e iniciais), na relativa familiaridade e facilidade de compreensão de suas formulações matemáticas, o que permite sua extensão para soluções de problemas mais complexos, como os não lineares, e ainda em uma quase padronização das suas implementações numéricas, que facilita a construção de um código computacional interativo.

Entretanto, alguns tipos de problemas ainda trazem dificuldades para o método, tais como a análise de modelos tri-dimensionais, onde a discretização exige uma grande capacidade de armazenamento e processamento computacional. Outras soluções de visível restrição para o método, são aquelas envolvendo modelagens de domínios que se estendem ao “infinito”, pois sendo um método caracterizado pela malha finita, este é um problema de difícil solução por ele. Isto é particularmente importante para problemas elastodinâmicos, onde ocorre o fenômeno de propagação de ondas. Quando trata-se de domínios infinitos, como o solo, existem ondas que se propagam para o infinito, sem serem refletidas, e que carregam consigo energia retirada do meio. Este fenômeno é chamado de amortecimento geométrico. Quando faz-se o modelo dinâmico de propagação de ondas no meio contínuo, através de uma malha finita, surge implicações relacionadas com a reflexão de ondas provocadas pelo truncamento da malha, visto que esta é uma característica inerente ao método. Algumas tentativas foram feitas, a fim de adaptar o método para estas soluções, como alteração das condições de contorno do problema, por Richart em 1970, ajustes na malha do modelo, por Hadjian *et all* e Luco *et all*, ambos em 1974. Porém, a solução de maior sucesso foi apresentada por Bettess em 1977, Medina e Penzien em 1982, e Medina e Taylor, em 1983, desenvolvendo os chamados elementos infinitos.

Face às dificuldades da limitação da malha finita aplicada à um domínio infinito, alguns métodos numéricos, tentando superá-las, se desenvolveram muito durante as últimas décadas. O destaque maior foi a evolução do Método dos Elementos de Contorno. Inicialmente aplicado a problemas elastoestático e potencial, como apresentado nos trabalhos de Rizzo, 1967, e Cruse e Rizzo, 1975, em breve tornou-se uma eficiente ferramenta computacional para outras áreas da mecânica aplicada, como elastodinâmica Mansur, 1983, Manolis e Beskos, 1988, interação dinâmica fluido-solo-estrutura, Brebbia, 1984, mecânica da fratura, Cruse, 1979, acústica Ciskowski, 1991, transferência de calor Wrobel, 1992, entre outras.

A principal diferença entre os métodos é que, um caracteriza-se por ser um “método de domínio” (MEF) e o outro por ser um “método de contorno” (MEC). Isto é, no MEF necessita-se discretizar toda a região a ser analisada, enquanto o MEC exige apenas a discretização do contorno desta, quando se trata de problemas lineares. Isto garante ao MEC algumas vantagens

sobre o MEF. Primeiramente, reduz o problema em uma dimensão. Ou seja, em problemas tri-dimensionais apenas a superfície necessita ser avaliada, problemas bi-dimensionais solucionam-se com a resposta sobre uma linha, e em uni-dimensionais exige-se alguns pontos escalares para se obter a solução. Desta forma, o custo de armazenamento de dados e o esforço de geração de malha são bastante reduzidos. E apesar de que, em alguns casos específicos, isto não resulte em um custo computacional total inferior, frequentemente, facilita a geração da malha para o modelo numérico.

Entretanto, onde o MEC se sobrepõe em relação ao MEF, é na solução de problemas que envolvem domínios infinitos, os quais o MEF possui grandes dificuldades de solucioná-los. Diferente do MEF, o MEC possui características típicas para aplicações em meio infinito, pois este não exige que todo o domínio infinito seja modelado, mas somente uma parte de seu contorno. Para o problema de propagação de ondas em meios ilimitados o MEC fornece uma alternativa muito eficiente. A formulação do método incorpora naturalmente o amortecimento geométrico, responsável por uma das formas de retirada de energia do sistema.

Mas, apesar de toda evolução do MEC, torna-se difícil acreditar que é este um método somente com vantagens sobre o MEF. Existem algumas desvantagens do MEC quando comparado ao MEF. A formulação envolvida no MEC utiliza equações integrais e funções matemáticas com problemas de singularidades, de difícil solução numérica. Enquanto o MEF geralmente é formulado a partir de equações diferenciais que governam o problema a ser resolvido. A teoria matemática associada ao MEF é mais difundida, e pesquisadores e engenheiros possuem maior familiaridade com a mesma. Normalmente, aplica-se o MEC para meios homogêneos, pois quando trata-se de meios envolvendo não homogeneidades materiais, por exemplo, pode-se utilizar técnicas de subestruturação, as quais tornam a solução semelhante a do MEF, deixando de existir o grande atrativo do método, que é a solução através da discretização apenas do contorno. As formulações de Elementos de Contorno necessitam das soluções fundamentais ou funções de Green, as quais estão disponíveis para alguns casos clássicos, restritos normalmente à problemas lineares. No âmbito da análise não-linear o MEF ainda reina incontestemente.

Da análise desenvolvida acima sobre os dois métodos, torna-se consenso que ambos, Elementos Finitos e Elementos de Contorno, possuem vantagens e desvantagens dependendo do problema a ser analisado. Desta forma, para tornar realidade uma formulação que aproveite as qualidades dos dois métodos, o acoplamento entre eles parece ser uma idéia promissora, como explicitado no título do trabalho de Zienkiewicz *et al*, 1977, um dos primeiros trabalhos a sugerir o acoplamento: “*Marriage à la Mode - The Best of Both Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)*”. Algumas dificuldades no acoplamento surgem devido as suas diferentes formulações, ou seja, o MEF é formulado a partir de equações diferenciais enquanto o MEC utiliza equações integrais. A formulação mais usual do MEF utiliza apenas uma variável no seu sistema de equações final, por exemplo deslocamentos no caso elastoestático, enquanto o MEC resulta em duas variáveis, deslocamentos e tensões; e outra diferença é que o MEF gera matrizes simétricas e em banda enquanto o MEC gera matrizes não simétricas e cheias. Apesar de que, neste último caso, existem alguns problemas em que pode-se determinar matrizes simétricas para a formulação de Elementos de Contorno.

Após o trabalho de Zienkiewicz, 1979, importantes trabalhos desenvolveram o acoplamento para aplicações específicas. Brebbia e Georgiou, 1979, aplicaram o acoplamento para solução de problemas da elastoestática. Kobayashi e Kawakami, 1985, e Kobayashi e Kishima, 1985, analisaram a interação dinâmica entre estrutura e o solo não homogêneo, enquanto, Gaitanaros e Karabalis, 1988, solucionaram problemas de fundação flexível tridimensional, ambos no domínio da frequência. Karabalis e Beskos, 1985, e Spyrakos e Beskos, 1986, estudaram interação dinâmica solo-estrutura no domínio do tempo. Estorff e Antes, 1991, aplicaram o acoplamento para problemas de interação dinâmica fluido-estrutura no domínio do tempo.

Uma boa aplicação para o acoplamento entre o MEF e o MEC está na análise de problemas que envolvem dois domínios de características diferentes, sendo que um domínio envolveria estruturas de geometria complexa, não homogeneidades e até mesmo não -linearidades, enquanto o outro seria representado por uma região homogênea com propriedades lineares. Em particular, a área da Interação Dinâmica Solo Estrutura (DSSI) parece um campo ideal para a aplicação das duas formulações em conjunto. Neste caso, o MEF deveria modelar o domínio limitado,

representado por uma estrutura que poderia ter complexidades próprias de uma estrutura mecânica real, e o MEC trataria o domínio infinito, representado pelo solo homogêneo.

Muitas aplicações do MEF e do MEC para problemas da DSSI são desenvolvidas no domínio da frequência, porém, soluções transientes (domínio do tempo) parecem mais gerais, pois pode-se obter respostas a excitações transientes, e não apenas excitações harmônicas como ocorre nas formulações em regime estacionário (domínio da frequência). Deste forma, para se obter respostas transientes, deve-se permitir que as formulações do MEF e do MEC solucione problemas transientes.

Nas análises transientes para tratar problemas da DSSI, o MEF também deve modelar a estrutura, para obter a resposta transiente desta, enquanto o MEC deve modelar o solo para caracterizar a propagação de onda em um meio infinito. Nessas formulações transientes, tanto para o MEF quanto para o MEC, a principal dificuldade que surge é a incorporação do efeito do amortecimento estrutural ou material. Diferentemente do problema estacionário, esta dificuldade surge pois, a introdução de um mecanismo interno de retirada de energia, dado por um fator de amortecimento, produz modificações na equação de equilíbrio dinâmico do sistema, inserindo termos envolvendo a velocidade de propagação de ondas, e que gera complicações na solução destas equações e dificuldades de obtenção da resposta final no tempo. Deve-se descrever separadamente, a influência que o efeito do amortecimento interno traz sobre as formulações do MEF e do MEC transientes.

Sendo a parte da estrutura mecânica modelada pelo Elementos Finitos, os problemas dinâmicos de estruturas frequentemente são solucionados considerando-se apenas o efeito da rigidez e inércia do sistema. A incorporação, em um modelo, do amortecimento estrutural, tende a tornar a modelagem mais realista. Na verdade diversos fenômenos somente podem ser analisados a partir da introdução de um modelo de amortecimento nos sistemas dinâmicos. Existem várias formas de se realizar a modelagem do amortecimento material em estruturas. Uma das mais comuns é através de uma combinação linear entre a rigidez e a inércia do sistema, ponderados por coeficientes numéricos. Definindo um mecanismo de dissipação, chamado de amortecimento

proporcional. Neste caso, através da análise modal da estrutura, pode-se obter parâmetros que definem um amortecimento material proporcional às matrizes de rigidez e massa. Esta aproximação tem a vantagem de permitir a decomposição modal da equação de movimento, facilitando a solução do sistema de equações, apesar de não estar associado a qualquer sentido físico real.

Uma abordagem alternativa, para se introduzir amortecimento em sistemas elásticos, é dada pela representação integral das equações constitutivas viscoelásticas, descrita em termos da integral de convolução de Stieltjes, como mostrado em Gurtin, 1962. Esta representação está, de fato, associada ao problema físico da dissipação, pois o mecanismo de dissipação é representado através das funções de relaxação e fluência, Findley *et al*, 1976. Estas funções permitem a definição de qualquer modelo dissipativo linear e podem ser determinadas experimentalmente ou através de modelos viscoelásticos teóricos. Os modelos teóricos mais comuns são os de Maxwell, Kelvin e a associação destes.

Existem pelo menos duas formulações para solucionar os problemas envolvendo materiais viscoelásticos. A primeira é através de equações diferenciais e a outra é através da formulação integral. A primeira, em grande parte, é desenvolvida utilizando-se da transformada de Laplace. A segunda, utiliza o conceito de integrais hereditárias, juntamente com a função de relaxação para representar as características dos materiais viscoelásticos. O MEF pode ser formulado para solução de problemas dinâmicos viscoelásticos transientes utilizando-se deste conceito de integrais hereditárias. Neste caso, o amortecimento material é introduzido na formulação através da representação integral das equações constitutivas viscoelásticas. Como resultado desta formulação, obtém-se um sistema de equações integro-diferenciais, que devem ser solucionados diretamente no domínio do tempo. Acrescenta-se ainda que este tipo de formulação, podem ser aplicadas sem qualquer alteração para solução de problemas quase-estáticos, onde os efeitos de inércia do sistema são desconsiderados.

Uma vez que o MEF está modelando a estrutura, para completar a solução do problema dinâmico solo-estrutura (DSSI), a formulação do MEC deve ser aplicada para a modelagem do

solo. Neste caso, necessita-se também de uma solução transiente para o problema. As soluções transientes no MEC, também, apesar de mais gerais, são mais difíceis de serem obtidas, independentemente do problema a ser analisado. Muitas pesquisas com o MEC aplicadas à DSSI tem sido feitas utilizando a formulação transiente desenvolvida diretamente no domínio do tempo. Outras procuram estas soluções, utilizando-se técnicas de transformação integral, relacionando as variáveis no domínio da frequência e no domínio do tempo.

Qualquer dessas soluções possuem qualidades inerentes à formulação e aplicação. Uma vantagem que pode ser encontrada nas soluções que utilizam a transformação integral de domínio é que esta pode incluir, com mais facilidade, meios viscoelásticos e permitem a obtenção de soluções para problemas visco-elastodinâmicos transientes. A vantagem se verifica quando observa-se a dificuldade que existe na obtenção de soluções fundamentais, diretamente no domínio do tempo, e que incorporem o comportamento viscoelástico do meio. Sendo que, este não é um problema das soluções fundamentais ou funções de Green para problemas viscoelásticos, obtidas no domínio da frequência. Isto ocorre pois as soluções fundamentais de problemas viscoelásticos obtidas no domínio da frequência necessariamente devem ser desenvolvidas no domínio das variáveis complexas, o que pode ser tratada matematicamente sem grandes dificuldades. Entretanto, o procedimento para obtenção dessas soluções no domínio do tempo, obtida através de uma inversão analítica, é bastante complicado matematicamente, uma vez que esta inversão deve ser realizada através de uma integral sobre o domínio complexo. Todavia, para se obter a resposta transiente final, surge a necessidade de se fazer uma transformação inversa do domínio da frequência para o domínio do tempo.

As técnicas numéricas de transformação inversa de domínios, para problemas estruturais dinâmicos, desenvolvem-se basicamente de duas formas, ou através da transformada de Laplace ou da transformada de Fourier. A maior complicação que surge na utilização da formulação através da transformação integral de domínio, está no retorno da solução para o domínio original do tempo. A realização analítica da transformação integral inversa é, na maioria dos casos, muito difícil de ser desenvolvida. Uma alternativa para se obter a inversão de domínio, seria realizá-la numericamente.

Se a formulação é desenvolvida no domínio da variável de Laplace, deve-se utilizar a inversão numérica da Transformada de Laplace. Muitos trabalhos apresentam formas de se obter estas inversões numéricas de Laplace. Entretanto, para problemas dinâmicos, os métodos reconhecidos como os mais eficientes, são os de Durbin, 1974, e Crump, 1976. Quando a formulação é desenvolvida no domínio de Fourier, a inversão numérica é obtida empregando a transformada de Fourier inversa, baseada na tão conhecida FFT (Fast Fourier Transform), que foi primeiramente apresentada por Cooley e Tukey em 1965.

Deve-se observar, que para utilizar o procedimento de inversão numérica de domínio, é indispensável que se obtenha as soluções estacionárias de forma eficiente e com grande precisão. O grupo de pesquisa, no qual o autor deste trabalho se insere, tem trabalhado extensivamente nesta direção, disponibilizando muitas soluções estacionárias para vários problemas físicos. Pode-se destacar algumas aplicações, como problemas de poroelasticidade, Campos, 1995, interação dinâmica solo-fluido-estrutura, Carvalho, 1995, funções de Green aplicadas a interação dinâmica solo-estrutura, Romanini, 1995, elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos, Barros, 1997, interação dinâmica solo-estrutura através do MEC, Pontes, 1992, acoplamento MEF-MEC para elastodinâmica, Capello Sousa, 1992, entre outros.

Finalmente, após concluir as formulações do MEF modelando a estrutura e a do MEC modelando o solo, pode-se obter a resposta final do problema dinâmico solo-estrutura com uma solução conjunta entre os dois métodos, obtida através do acoplamento MEF-MEC.

OBJETIVO DO PRESENTE TRABALHO

O objetivo deste trabalho é pesquisar a solução de problemas visco-elastodinâmicos transientes através dos Métodos Elementos Finitos e Elementos de Contorno. A aplicação da formulação deve ser feita para obter a resposta dinâmica do problema de interação dinâmica solo-estrutura. O MEF deve modelar a estrutura viscoelástica, com o auxílio do conceito de equações integrais hereditárias. Enquanto, o MEC deve modelar o solo viscoelástico, a partir da solução

dinâmica estacionária e transformada para o domínio do tempo, através de uma transformação de domínio obtida numericamente.

ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO

O conteúdo deste trabalho está dividido basicamente em três partes bem definidas. Na primeira parte apresenta-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos utilizando-se a representação integral das equações constitutivas para o meio viscoelástico. Esta formulação resulta em equações integro-diferenciais. Na sequência apresenta-se o algoritmo desenvolvido para integração direta no tempo destas equações.

A segunda parte deste trabalho diz respeito à obtenção da resposta transiente de estruturas bi-dimensionais rígidas, com e sem massa apoiadas em um semi-espaco viscoelástico (problema da DSSI). A resposta transiente é obtida por uma inversão numérica, para o domínio do tempo, partindo da solução do problema estacionário, determinada no domínio da frequência. As soluções no domínio da frequência foram obtidas pela superposição de funções de influência, cuja metodologia configura uma versão indireta do Método dos Elementos de Contorno. A terceira etapa consiste nas discussões dos pré-requisitos para se obter o acoplamento das duas formulações para análise do problema de interação dinâmica solo-estrutura viscoelástica transiente.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica cobrindo os temas a serem tratados ao longo do trabalho. Isto é, desenvolve-se um levantamento bibliográfico do estado da arte para o Método dos Elementos Finitos aplicados a problemas visco-elastodinâmicos, o Método dos Elementos de Contorno transientes, as formas de inversões numéricas das transformadas de Laplace e Fourier para se obter soluções transientes partindo da respostas no domínio transformado e finalmente o acoplamento entre Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

O capítulo 3 apresenta uma introdução a teoria da viscoelasticidade linear, onde define-se alguns conceitos básicos de viscoelasticidade, caracterização de modelos viscoelásticos e equações constitutivas viscoelásticas.

No capítulo 4, apresenta-se a representação integral das equações constitutivas viscoelásticas, definida pela integral de Stieltjes e o princípio da superposição de Boltzmann. Nas seções 4.2 e 4.3 estes dois conceitos são aplicados para avaliar o comportamento de modelos viscoelásticos e solucionar a equação de equilíbrio para o problema dinâmico quase-estático.

No capítulo 5, a representação integral é incluída na equação de equilíbrio dinâmico envolvendo o termo de inércia, resultando em uma equação de equilíbrio integro-diferencial (seção 5.1 e 5.2). Na seção 5.3, esta equação integro-diferencial é então discretizada aplicando-se a formulação de Elementos Finitos, e na seção 5.4 aplica-se a formulação obtida para solucionar o problema dinâmico de estruturas viscoelásticas envolvendo elementos estruturais de barra e viga.

O capítulo 6 é dedicado a uma revisão da formulação de Elementos de Contorno e Funções de Green aplicadas na solução de problemas visco-elastodinâmicos no domínio da frequência. Apresenta-se também a formulação do problema de interação dinâmica solo-estrutura (DSSI), onde a estrutura é considerada rígida com e sem massa.

No capítulo 7, é apresentada a forma para se obter a resposta transiente do meio contínuo, a partir da solução no domínio transformado. Esta resposta é obtida através de técnicas de transformada inversa numérica. Na seção 7.1, discute-se as técnicas numéricas aplicadas a transformada de Laplace e Fourier. Na seção 7.2 é verificada e observada a eficiência da inversão numérica da Transformada de Fourier. Na seção 7.3 são obtidos os resultados numéricos para o problema de interação dinâmica de uma estrutura rígida e o solo viscoelástico. Estes resultados são validados e discutidos, comparando-os com os resultados presentes na bibliografia. E em seguida, na seção 7.4, o problema da seção anterior é analisado incluindo o efeito de inércia da fundação.

E, finalmente, no cap. 8, as conclusões e discussões são apresentadas, mostrando as contribuições que o trabalho pôde trazer, juntamente com as potencialidades das formulações apresentadas para os métodos dos Elementos Finitos e Contorno, na solução de problemas

dinâmicos transientes viscoelásticos. É observado nas conclusões, que a formulação pode ser estendida para obter o acoplamento entre os métodos. Discute-se também, as perspectivas e possíveis avanços que este trabalho deixa para futuras pesquisas.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Face a forma que o trabalho se desenvolveu, necessitando de vários assuntos diferentes a serem aplicados na formulação final do problema, esta revisão da literatura está dividida em três partes distintas. Inicialmente, obteve-se uma literatura relacionada aos problemas visco-elastodinâmicos e as formulações do Método dos Elementos Finitos para solucionar estes tipos de problemas.

Em seguida procurou-se apresentar o estado da arte para o Método dos Elementos de Contorno aplicados a problemas elastodinâmicos transientes. Duas formas particulares de se desenvolver este tipo de formulação foram observadas na bibliografia. Primeiramente, através da formulação de Elementos de Contorno transiente, diretamente no domínio do tempo e em seguida a obtenção da resposta transiente através de uma inversão numérica de domínio. Juntamente, com esta última parte da bibliografia, foi registrado os principais trabalhos, apresentando formulações diferentes para a inversão numérica de domínio.

Finalmente, fez-se um levantamento bibliográfico abordando as formas utilizadas para desenvolver o acoplamento entre os métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

2.1 Visco-elastodinâmica e o Método dos Elementos Finitos

A utilização de estruturas com comportamento viscoelástico tem crescido muito nos últimos anos. Estes materiais encontram uma potencial aplicação quando deseja-se construir estruturas que devam estar sujeitas a solicitações dinâmicas. Em estruturas aeronáuticas, por exemplo, deseja-se obter a redução de vibrações, que ocorrem de forma freqüente sobre estas estruturas. Em outras situações, tais como ocorrem em plantas industriais, deseja-se obter a isolação de estruturas que possam estar interagindo com outros equipamentos mecânicos. Neste caso, utiliza-se fundações ou bases de isolação compostas de materiais viscoelásticos, para instalações dessas máquinas industriais.

Existem duas dificuldades principais a serem superadas nas análises dinâmicas de estruturas viscoelásticas. A primeira delas é a determinação, de forma eficiente e segura, das suas propriedades dinâmicas, pois as propriedades dinâmicas das estruturas viscoelásticas, muitas vezes são dependentes da freqüência de excitação. Por outro lado, uma vez determinadas as propriedades dinâmicas destas estruturas, em muitos casos a modelagem e obtenção das respostas dinâmicas são complexas pois suas respostas dependem de muitos fatores externos, tais como a geometria da estrutura, a freqüência de excitação a que a estrutura está submetida, as variações de temperatura, entre outras. Importantes trabalhos apresentam estudos na tentativa de melhorar as modelagens de estruturas viscoelásticas através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Estes trabalhos devem ser discutidos a seguir.

O Método dos Elementos Finitos tem sido bastante eficiente na solução de problemas dinâmicos viscoelásticos. Porém, a forma de representar as propriedades de amortecimento interno ou amortecimento estrutural das estruturas viscoelásticas na formulação do MEF pode comprometer a eficiência da modelagem.

Algumas análises dinâmicas de estruturas viscoelásticas podem ser feitas diretamente no domínio da freqüência. Entretanto, estas análises limitam-se a carregamentos harmônicos e deslocamentos (deformações) também harmônicos. As respostas no domínio da freqüência são

importantes pois possibilitam avaliar o efeito do amortecimento, principalmente, quando deseja-se reduzir amplitudes ressonantes em estruturas mecânicas. Na análise no domínio da frequência, a formulação permite que o módulo de elasticidade, dependente do tempo, seja representado na forma de variável complexa, onde a parte real caracteriza o comportamento elástico, e a razão entre a parte real e a parte imaginária define o fator de perda, que representa o amortecimento estrutural viscoelástico. Alguns trabalhos podem ser citados, onde tentativas foram feitas para solucionar o problema estacionário viscoelástico. Yamada *et al*, 1974, obteve a solução diretamente no domínio da frequência, através da solução de autovalores e autovetores, para analisar a resposta em frequência de vigas e barras. Entretanto, o método da resposta em frequência direta, apresentado no trabalho, demanda um custo computacional alto quando analisa-se grandes estruturas. Johnson *et al*, 1981, propõe então a utilização do método da energia de deformação modal, para obter a resposta estacionária, a fim de estudar o comportamento de estruturas de vigas com materiais compostos. Nesta aproximação, é assumido que os modos não amortecidos da estrutura composta com material viscoelástico podem ser tratados como se fossem puramente elásticos, com um módulo de rigidez definido através de uma variável real. Em sua análise o autor também avalia o efeito da frequência de excitação sobre o fator de perda do material composto, o qual está diretamente associado a energia de deformação modal.

Wilde e Cardon, 1989, exploram em seu trabalho a vantagem da utilização direta de resultados experimentais, obtidos para avaliação das propriedades viscoelásticas dependentes do tempo, utilizando-se de uma formulação estacionária. Este fato possui no mínimo uma importância nas soluções dinâmicas viscoelásticas, pois eliminam as aproximações existentes quando as propriedades materiais dependentes do tempo são representadas através de modelos viscoelásticos clássicos, tais como os modelos de Maxwell ou de Kelvin. De forma semelhante, Yiu, 1993, direciona sua formulação para uma aplicação direta na solução de problemas de engenharia envolvendo estruturas dinâmicas viscoelásticas. Define-se a propriedade de amortecimento viscoelástico através de uma matriz de amortecimento diagonalizada, o que facilita sensivelmente a obtenção da solução matemática do problema.

Macé, 1994, apresenta uma nova formulação para viga composta com materiais viscoelásticos. Em sua teoria para viga composta é definida uma compatibilidade de deslocamentos e de tensões que ocorrem nas interfaces entre o material viscoelástico e as placas externas, incorporando o efeito do amortecimento viscoelástico na estrutura completa. A análise no domínio da frequência é a mesma apresentada no trabalho de Johnson *et all*, 1981.

Como observado nos trabalhos anteriores, as soluções dos problemas dinâmicos viscoelásticos no domínio transformado, podem ser definidas obtendo-se a resposta em frequência direta, avaliando-se o problema de autovalores e autovetores, ou pelo método da energia de deformação modal. Nestes dois casos, as soluções computacionais são difíceis de serem obtidas, pois estas soluções dependem fortemente da geometria da estrutura a ser analisada, as quais dificultam a definição dos autovalores e autovetores mais importantes para a análise. A fim de reduzir a quantidade de parâmetros envolvidos na análise da estrutura real, Bagley e Torvik, 1983, propõem uma forma alternativa para se obter a resposta em frequência. Através de derivadas fracionais para representar a relação constitutiva tensão-deformação, obtém-se uma redução dos parâmetros físicos envolvidos na determinação das propriedades mecânicas viscoelásticas. A formulação possui ainda a vantagem de evitar a transformada de Laplace para obter a resposta em frequência, pois esta transformação, em alguns casos, exige algumas particularizações no problema real.

As análises dinâmicas estacionárias também são muito utilizadas para avaliar as propriedades físicas viscoelásticas dependentes da frequência. O fator de perda que caracteriza o amortecimento estrutural é a propriedade mais difícil de ser representada nos materiais viscoelásticos. Alguns trabalhos foram feitos na tentativa de determinar o efeito da variação do fator de perda em função da frequência, tal como nos trabalhos de Grinenko e Mokeev, 1989, analisando o problema de um cilindro revestido por material viscoelástico, Rao *et all*, 1992, avaliando placas compostas com materiais viscoelásticos e Rikards *et all*, 1993, analisando vigas viscoelásticas.

As análises no domínio da frequência muitas vezes não permitem um estudo do comportamento dinâmico geral da estrutura, pois não representa a resposta do sistema em tempo

real, isto é, para alguns problemas existem dificuldades em representar a solução transiente, partindo da resposta no domínio da frequência. Portanto, uma avaliação mais completa do comportamento dinâmico da estrutura deve ser feita no domínio do tempo. Em estruturas elásticas, de forma geral, as análises transientes são particularmente complexas. Quando associadas às estruturas viscoelásticas, essas soluções tornam-se ainda mais difíceis. Muitas pesquisas estão sendo desenvolvidas com o objetivo de determinar as respostas transientes de estruturas viscoelásticas. As análises feitas em regime transiente podem ser divididas basicamente em duas formas distintas: àquelas que utilizam as transformadas de Laplace ou Fourier, para auxiliar na resposta do sistema, obtendo a resposta final através de uma transformada inversa; e as soluções que são obtidas diretamente no domínio do tempo, sem a utilização de qualquer tipo de transformação de domínio.

Holzlöhner, 1974, utiliza a transformada de Laplace para obter a solução dinâmica transiente. A formulação parte da relação constitutiva viscoelástica na forma de operador diferencial, onde é aplicado o método dos Elementos Finitos, como realizado nas análises dos problemas quase-estáticos. Nesta equação é inserido o termo de inércia, representada pela matriz de massa do MEF. Esta equação é então resolvida através da transformada de Laplace. Após a obtenção da equação no domínio transformado de Laplace, pode-se inserir as propriedades viscoelásticas complexas, e em seguida obter a solução no domínio de Laplace. Através de uma inversão numérica da transformada de Laplace obtém-se a resposta no domínio do tempo. Neste trabalho observa-se que a inversão numérica deve ser feita cuidadosamente, uma vez que esta inversão depende muito do tipo de problema a ser analisado. As inversões numéricas de Laplace são freqüentes na solução dos problemas viscoelásticos. Porém, estas inversões numéricas são bastantes distintas quando analisa-se o fenômeno de fluência de um material viscoelástico, caracterizando o problema quase-estático, ou quando analisa-se o fenômeno de vibrações com o amortecimento representado pela propriedade viscoelástica do material. Neste último caso, isto é quando estuda-se o fenômeno de vibrações de estruturas viscoelásticas, deve-se ter maior cuidado nas inversões numéricas, uma vez que estas inversões freqüentemente dependem dos autovalores obtidos na solução. A solução apresentada no trabalho de Holzlöhner destaca-se por possuir uma menor dependência dos autovalores na sua solução numérica. Isto torna a solução mais geral, pois

possibilita obter respostas de estruturas mais complexas onde um maior número de autovalores estão envolvidos.

Golla e Hughes, 1985, utilizam o processo de análise no domínio transformado de Laplace e obtém a resposta transiente através da transformada inversa, semelhante ao procedimento apresentado por Holzlöhner. Entretanto, através de um sistema que o autor denomina de coordenada de dissipação permite-se obter a matriz de elemento viscoelástico que pode ser inserida diretamente na formulação do MEF.

Chen, 1995, propõe um método híbrido utilizando a transformada de Laplace e o MEF para obter a solução viscoelástica. Na formulação, os momentos fletores e forças cortantes estão relacionados ao gradiente de deslocamentos da viga através de propriedades elásticas dependentes do tempo, tornando estas relações em conformidade com a relação constitutiva tensão-deformação viscoelástica. Estas funções de carregamento são inseridas no princípio variacional de Hamilton para obter a formulação do MEF. Em seguida pode-se utilizar a transformada de Laplace para obter a resposta estacionária e novamente uma inversão numérica permite a obtenção da resposta no domínio do tempo.

Mehl e Miles, 1995, analisam o problema de uma viga com propriedades viscoelásticas. Para obter a solução dinâmica no domínio do tempo utilizam a transformada de Fourier inversa (FFT). As respostas são obtidas no domínio da frequência e no domínio do tempo. É apresentado também uma alternativa para obter a solução simultaneamente com o auxílio do programa de elementos finitos ANSYS. Sogabe *et al*, 1996, utilizam também a FFT para analisar o problema de propagação de ondas em uma estrutura plana.

A solução dinâmica viscoelástica utilizando método de transformação de domínio demanda na maioria das vezes de um custo computacional alto e em alguns casos, pode introduzir alguns erros numéricos no processo de inversão da transformada. Desta forma, a utilização de soluções direta na variável tempo, tornam-se mais gerais e permitem analisar os fenômenos que ocorrem em uma estrutura dinâmica de forma mais completa.

Padorecki, 1986, apresenta uma forma de modelar a estrutura viscoelástica através do método dos elementos finitos espaço-tempo, para estudar a vibração longitudinal em estruturas de barras. Na sua formulação não é feita qualquer transformação de domínio, obtendo-se a resposta diretamente na variável tempo. O método consiste em criar uma matriz de rigidez definida por um superelemento, onde as propriedades do material viscoelástico estão representadas nesta matriz.

A maioria das soluções diretas no domínio do tempo são desenvolvidas através da solução da integral de convolução de Stieltjes. Neste caso, o mecanismo de dissipação, representando o amortecimento material, é introduzido na formulação através das funções de relaxação ou fluência dos materiais viscoelásticos escritas para a variável tempo. Estas funções podem ser determinadas, tanto experimentalmente quanto através da escolha de um modelo matemático (modelo de Maxwell ou modelo de Kelvin) para representar o fenômeno de dissipação do sistema.

Chen e Lin, 1982, apresentam uma formulação baseada no método dos elementos finitos incremental, idealizada por Yagawa *et al*, 1977, para problemas quase-estáticos. Na formulação apresentada é definido que a deformação total que ocorre em cada passo de tempo é dada pela soma de parte de deformação elástica e parte da deformação viscoelástica representadas em cada passo de tempo. Portanto, a equação constitutiva inserida na formulação variacional de Elementos Finitos representa uma relação tensão-deformação, que impõe uma composição de deformações elásticas e viscoelásticas. As deformações viscoelásticas são definidas através da relação constitutiva tensão-deformação e o modelo viscoelástico envolvido, como ocorrem nas soluções dos problemas quase-estáticos. Essas deformações em conjunto com as deformações elásticas podem ser superpostas nos passos de tempos seguintes. Portanto, a formulação apresenta uma forma iterativa, onde resolve-se um conjunto de equações algébricas. O autor avalia o comportamento de vigas viscoelásticas através da formulação de Elementos Finitos para tensão plana.

Com base nesta mesma formulação incremental Rencis *et al*, 1990, analisam o problema de uma viga viscoelástica. No elemento de viga, Rencis utiliza o esquema de integração de Lobatto, o

qual é uma forma avançada do tradicional método de integração de Gauss. Isto permite uma melhor convergência da solução do problema viscoelástico, com um menor custo computacional.

Wang e Tsai, 1988, apresentam outra forma para solucionar o problema dinâmico viscoelástico diretamente no domínio do tempo. A partir da teoria de placas de Mindlin, os momentos fletores e forças cortantes são associados ao gradiente de deslocamentos, onde o ponto principal desta formulação está em representar esta relação força deslocamentos definindo-a em conformidade com a equação constitutiva viscoelástica. Isto se faz inserindo nesta relação força-deslocamento as propriedades viscoelásticas dependentes do tempo. Estas definições de momentos fletores e forças cortantes são então inseridas no princípio variacional de Hamilton para obter a formulação do MEF viscoelástico. Através do método das diferenças finitas obtém-se a integração numérica da integral de convolução presente na equação constitutiva viscoelástica.

Deve-se observar que qualquer uma das soluções apresentadas para obter a resposta dinâmica no domínio do tempo dependem basicamente da solução numérica da integral de convolução existente na definição da equação constitutiva viscoelástica. Isto impõe um custo computacional relativamente alto, pois a resposta em um dado passo de tempo depende de todos os passos de tempo anteriores, exigindo que se armazene todas as informações de deslocamentos, velocidades e acelerações definidas nos passos anteriores. Yi *et al*, 1993, utiliza o princípio variacional de Hamilton para obter a forma de Elementos Finitos dinâmico viscoelástico. Entretanto, esta formulação ainda exige que se conheça as variáveis dependentes do tempo em todos os passos de tempo anteriores ao passo de tempo que deve ser avaliado, o que não traz qualquer vantagem, quanto aos recursos computacionais exigidos, sobre os métodos apresentados anteriormente. Para superar esta dificuldade, os autores utilizam-se de uma forma recursiva a fim de avaliar os pontos no tempo dependendo apenas de dois passos de tempo anteriores, reduzindo o custo computacional da solução. A função de relaxação pode ser descrita em termos das séries de Prony-Dirichlet, a fim de ser introduzida na matriz de rigidez do sistema. Neste trabalho é analisado o problema dinâmico de placas, com amortecimento representado através do material viscoelástico.

2.2 Método dos Elementos de Contorno Transiente

Independente da técnica numérica de modelagem, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno, Método das Diferenças Finitas, etc, que deseja-se proceder, a obtenção de soluções transientes freqüentemente podem ser desenvolvidas através de três procedimentos: a) determinação da solução harmônica seguida pela reconstituição da resposta transiente usando síntese de Fourier; b) solução do problema no domínio transformado de Laplace, seguido de uma transformação inversa para obter a resposta no domínio do tempo; e c) formulação no domínio do tempo e solução em conjunto com esquema de integração direta no tempo. Nos dois primeiros casos (a e b) limita-se a soluções de problemas lineares, enquanto no terceiro caso (c) pode-se estender o procedimento para soluções não-lineares.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem se tornado um importante método na análise em Engenharia para problemas elastodinâmicos lineares. Como observado na introdução deste trabalho, sua popularidade pode ser atribuída principalmente a redução da dimensionalidade do problema, alta precisão, pois as soluções são semi-analíticas, e a introdução automática das condições de radiação em meios infinitos. Sendo que o método é pesquisado mais extensivamente para problemas estacionários, encontra-se nas soluções de problemas no domínio do tempo, um vasto campo de pesquisa a ser aplicado o método.

A formulação de Elementos de Contorno aplicada a problemas dinâmicos no domínio da freqüência está bem mais estabelecida do que no domínio do tempo. Pesquisas desenvolvendo o MEC no domínio do tempo estão ainda por ser exploradas, embora reconhece-se como muito mais atrativas do que aquelas em problemas estacionários, especialmente para soluções não lineares.

Um dos primeiros trabalhos a solucionar problemas elastodinâmicos transientes bi-dimensionais foram de Cruse, 1968, e de Cruse e Rizzo, 1968, onde o problema dinâmico de um semi-espço elástico com cargas transientes é formulado no domínio transformado de Laplace

utilizando o MEC e então obtém-se os resultados no domínio do tempo empregando a técnica de inversão numérica de Papoulis, 1957. Uma extensão deste trabalho foi desenvolvida por Manolis e Beskos, 1981, onde é estudado o efeito da concentração de tensão dinâmica em uma cavidade plana. Neste caso, é utilizado o algoritmo de Durbin, 1974, para realizar a inversão numérica de Laplace. Utilizando as idéias apresentadas por Cruse e Rizzo, e aplicando neste caso o algoritmo de Durbin, o autor apresenta uma solução mais geral, a qual não está restrita à problemas elastodinâmicos mais simples, onde as respostas são obtidas para espaços de tempos relativamente curtos. Estas restrições se devem unicamente ao método de inversão numérica de Papoulis, utilizado nos trabalhos de Cruse.

Com uma formulação direta no tempo, sem inversão de domínio da frequência para o tempo, uma das primeiras soluções de problemas transientes bi-dimensionais, foram apresentadas nos trabalhos de Mansur, 1983 e Antes, 1985. Ambas formulações utilizam um algoritmo passo-a-passo no tempo para obter a resposta transiente. Entretanto, a precisão de suas formulações sofrem dos seguintes problemas, como observado por Israil e Banerjee, 1990b: complexidade matemática resultante do tratamento das funções Heaveside nos núcleos das funções, suposições simplificadoras para variáveis espaciais tratando-a com variações constantes, modelagem da geometria do contorno utilizando segmentos de linhas retas, e inadequado tratamento das laterais e cantos do contorno do modelo. Todavia, estes foram pioneiros com a primeira geração do MEC implementado para problemas transientes bi-dimensionais diretamente no tempo.

Spyrakos e Beskos, 1986, obtiveram a resposta de uma fundação rígida de superfície e engastada para carregamento dinâmico transiente e ondas sísmicas incidentes na fundação através da formulação de Elementos de Contorno no domínio do tempo. Posteriormente, Spyrakos e Antes, 1986, fizeram uma verificação, comparando a eficiência da sua formulação com aquela apresentada no trabalho anterior. Para comparar os métodos, avaliaram as respostas dinâmicas transientes para o problema de fundação rígida de superfície. Neste trabalho, é mostrado que, o método da reciprocidade, por Spyrakos e Beskos, demanda uma perda maior de tempo de cálculo, comparado com o método dos resíduos ponderados, por Spyrakos e Antes. Deve-se observar que

a forma apresentada neste último trabalho, é uma melhora na formulação de outro trabalho, anteriormente publicado por Antes em 1985.

Posteriormente, utilizando também o método da reciprocidade, Israil e Banerjee, 1990a e 1990b, apresentam algumas simplificações na formulação do MEC no domínio do tempo associado ao uso de elementos quadráticos isoparamétricos, que permitem uma maior precisão e generalidade da solução, tal como solução de problemas com multi-domínios. Neste trabalho, ainda é utilizado um conjunto de funções de interpolação para a variável temporal, sendo esta linear para a variável deslocamento e constante para a variável tensão.

Mais recentemente, Coda e Venturini, 1995, apresentam algumas melhoras na solução do problema elastodinâmico transiente, procurando minimizar o efeito das singularidades nas soluções fundamentais transiente. Posteriormente, Wang *et all*, 1996, utiliza um procedimento de solução no tempo com funções quadráticas. Isto é, neste procedimento são adotadas uma variação temporal quadrática para os núcleos de deslocamentos e variação temporal constante para os núcleos de tensões, e ainda a variação do campo espacial é assumida quadrática (elementos quadráticos). Em seguida, Wang *et all*, 1997, estendem esta mesma formulação utilizando um conjunto de funções de interpolação quadrática e linear, para a variação temporal dos deslocamentos e das tensões, respectivamente. Nos dois trabalhos, utilizam o teorema da reciprocidade para a formulação de Elementos de Contorno transiente, e demonstram a eficiência da formulação analisando o problema de propagação de onda transiente elastodinâmica bi-dimensional em uma barra retangular.

A menos do trabalho de Manolis e Beskos, 1981, as demais publicações apresentadas anteriormente para o Método dos Elementos de Contorno transiente, são desenvolvidas diretamente no domínio do tempo. Em princípio esta opção de formulação tem como objetivo desenvolver uma forma mais adequada para soluções de problemas não-lineares. Entretanto, algumas dificuldades surgem na utilização destas formulações. A primeira, é a complexidade matemática existente, principalmente no que se refere as integrações de funções singulares, que algumas vezes geram erros numéricos difíceis de ser contornados. E a segunda, está associada a

indisponibilidade de soluções fundamentais ou funções de Green para alguns problemas, pois existe uma grande dificuldade de sintetizar estas funções para problemas mais complexos. De forma diferente, neste aspecto as soluções estacionárias são bastante disponíveis e foram extensivamente testadas, produzindo resultados numéricos de qualidade muito boa e eficientes, para muitos problemas aplicados.

2.3 Inversão Numérica das Transformadas de Laplace e Fourier

Uma forma alternativa de se obter as soluções transientes, quando na ausência de soluções fundamentais ou funções de Green, pode ser partindo-se das respostas em regime estacionário (domínio de Fourier) ou no domínio transformado de Laplace, e então proceder a inversão numérica da solução obtida.

Algumas técnicas de inversão numérica do domínio de Laplace se tornaram freqüentes na obtenção de soluções transientes. Divididos em categorias, dependendo do tipo do método, como por exemplo, o método da colocação, a expansão em funções ortogonais e a utilização das séries de Fourier, pode-se citar alguns trabalhos principais.

Utilizando métodos da colocação e interpolação, existem o método de Schapery, 1962, e o método de Stehfest, 1969. O método de Schapery, originou a idéia para o método de multidos de Cost e Becker, 1970. Estes métodos são freqüentemente utilizados em problemas de viscoelasticidade para solução de problemas quase-estáticos.

A segunda categoria é baseado na expansão de funções ortogonais, como polinômios de Legendre e polinômios de Laguerre. Papoulis, 1957, baseia-se em uma expansão de polinômios de Legendre, enquanto Weeks, 1966 e Piessens, 1970, utilizaram os polinômios de Laguerre para formular a inversão numérica de Laplace. Os trabalhos de Papoulis e Weeks são bastante referenciados na bibliografia.

E finalmente, uma última categoria que pode-se caracterizar alguns métodos, é através da expansão em séries de Fourier ou em alguns casos identificado como métodos baseados na transformada de Fourier. Esta é onde se aglutina a maior parte dos métodos de inversão numérica de Laplace, pois são mais eficientes especialmente na inversão de funções complicadas e solução de problemas dinâmicos transientes. Primeiramente, quem utilizou este tipo de técnica foi Dubner e Abate, 1968, que definem a transformada inversa de Laplace expandindo a solução através da série de Fourier descrita por cossenos, para obter a inversão numérica. Com uma conotação bastante computacional, utilizou-se ainda da formulação apresentada no trabalho de Cooley e Tukey, 1965, para desenvolver o seu método. Deve-se observar que foi a forma de Cooley e Tukey que deu origem a tão conhecida FFT (Fast Fourier Transform).

Posteriormente, Durbin, 1974, apresenta uma nova formulação, onde pode-se identifica-lo como um método modificado de Dubner e Abate. Em sua formulação é apresentada realmente uma eficiente melhora sobre o método de Dubner e Abate, o qual é baseado na série de Fourier descrita por cossenos. Durbin, por sua vez, utiliza a série de Fourier, combinando ambos os termos em senos e cossenos da série, isto é, faz uma combinação das transformadas de Fourier em seno e cosseno. Durbin observa que o erro numérico torna-se independente do tempo t , ao invés de ser exponencial em t , como no caso anterior. Outro fato na modificação esta na utilização de um período $2T$ da série trigonométrica, o que torna a inversão aplicável a funções mais complicadas. E finalmente o ponto mais importante de sua formulação, é obtê-la em uma forma final onde pode ser utilizada a transformada de Fourier rápida (FFT) para obter a inversão, e que sugestivamente o autor identifica como FLIT (Fast Laplace Inverse Transform).

Outros dois trabalhos publicados apresentam melhoras nas formulações iniciadas por Dubner e Abate. No método de Crump, 1976, duas diferenças podem ser destacadas do método de Dubner e Abate. A primeira é que a série de Fourier que aproxima a função inversa possui mais termos envolvendo funções senos e cossenos, e não é composta apenas por termos de cossenos como no caso de Dubner e Abate. A segunda é que está incorporada na sua formulação algumas transformações sobre a aproximação da série que a fazem convergir mais rapidamente. Este método é bastante citado nas publicações para solução de problemas viscoelásticos. Mais

recentemente, Honig e Hirdes, 1984, fazem algumas adaptações na método de Durbin a fim de aumentar a sua convergência, ampliando ainda os problemas físicos que o método pode solucionar.

Dois trabalhos avaliam as diferenças entre os métodos de inversão numérica de Laplace. Davies e Martin, 1979 e Narayanan e Beskos, 1982, fizeram uma boa discussão analisando os principais métodos aplicados a problemas lineares dependentes do tempo, onde é apresentado alguns resultados mostrando as vantagens e desvantagens entre eles. Observa-se que alguns métodos são mais ou menos eficientes do que outros, dependendo do problema a ser avaliado. Os métodos baseados na expansão da série de Fourier são extensivamente utilizados na solução de problemas dinâmicos transientes, devido a sua generalidade, alta precisão e eficiência computacional.

Existem infinitudes de aplicações da transformada de Laplace numérica na área de propagação de ondas, dinâmica estrutural, viscoelasticidade, condução de calor, fluido dinâmica, entre outras áreas da mecânica aplicada. Alguns trabalhos envolvendo a formulação de Elementos de Contorno podem ser acrescentados neste estudo bibliográfico.

Badmus *et all*, 1993, utilizou o método de Schapery e em outro trabalho Rajapakse e Senjuntichai, 1993, utilizaram a inversão proposta por Stehfest, para solucionar o problema de poroelasticidade. Abousleiman e Cheng, 1994, trataram o problema de fluxo de Stokes estacionário e não estacionário com o auxílio do método de Stehfest. Tanaka *et all*, 1993, avaliou o fator de intensidade de tensão dinâmica com a formulação do MEC no domínio transformado de Laplace e através do método de Durbin obteve a resposta no domínio do tempo. Enquanto, Polyzos *et all*, 1994, e Georgiadis *et all*, 1995, solucionaram o mesmo problema para placas viscoelásticas obtendo a resposta transiente com método de Crump. Nishigaki, 1996, aplicou as idéias dos algoritmos de inversão numérica de Laplace baseado na transformada de Fourier rápida para resolver o problema de acústica.

Neste contexto, para finalizar, pode-se enriquecer este estudo bibliográfico incluindo alguns trabalhos específicos na área de mecânica estrutural dinâmica transiente. Como já observado no início deste levantamento bibliográfico, Cruse, 1968, Cruse e Rizzo, 1968, e Manolis e Beskos, 1981, foram um dos primeiros trabalhos a utilizarem o auxílio das técnicas de inversão numérica de Laplace, para problemas dinâmico transiente com o MEC. Utilizaram o método de Papoulis e o método de Durbin, respectivamente. Em seguida, Manolis, 1983, apresenta um estudo comparativo entre três formulações com o Método dos Elementos de Contorno transientes, uma diretamente no domínio do tempo, e outras duas no domínio transformado de Laplace e Fourier, as quais exigem uma inversão numérica, sendo que, nestes casos utilizou-se o método de Durbin para realizar a inversão. Sua formulação de Elementos de Contorno é aplicada para analisar uma cavidade em um meio infinito.

Ahmad e Manolis, 1987, formularam o MEC em conjunto com a inversão numérica de Laplace de Durbin para estudar o comportamento dinâmico de estruturas tri-dimensionais. Em problemas de interação dinâmica solo estrutura (DSSI), Ahmad e Banerjee, 1988, avaliou o problema de semi-espaco elastodinâmico bi-dimensional com MEC para mutli-domínios e utilizou a mesma inversão de Durbin, para obter a solução transiente. Passaris e Kostoglou, 1992, avaliou o problema elastodinâmico bi-dimensional transiente para análise de túneis subterrâneos, também utilizando o método de Durbin.

Em outras formulações de problemas dinâmicos transientes o algoritmo de Durbin é utilizado com sucesso. Mais recentemente, Liu e Antes, 1995, estendeu a formulação do MEC para problema dinâmico solo-estrutura viscoelástica. Stamos e Beskos, 1995, utilizaram o MEC para analisar grandes estruturas subterrâneas tri-dimensionais. E Mohammadi e Karabalis, 1995, utilizam a metodologia de inversão de Laplace com transformada de Fourier juntamente com uma formulação de acoplamento dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

Analizando as publicações apresentadas na literatura de problemas dinâmicos transientes com inversão de Laplace, pode-se observar que o método de Durbin é efetivamente utilizado para estes problemas com muito sucesso. A alta precisão do algoritmo esta bem documentada na

bibliografia. A única desvantagem do método é que sua formulação, utiliza dados como variáveis complexas, que aumenta substancialmente o custo computacional da inversão.

2.4 Acoplamento entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno

Os acoplamentos do MEF-MEC apresentados nos trabalhos utilizam em sua maioria, formas bastante semelhantes ou oriundas dos trabalhos de Karabalis e Beskos, 1985 e Spyrakos e Beskos, 1986 . Estes foram um dos primeiros autores que trataram problemas bi e tridimensionais utilizando a combinação MEF-MEC para interação solo-estrutura. As fundações flexíveis são modeladas com o MEF e o solo é modelado com o MEC. Entretanto suas formulações foram simplificadas pela suposição de que na interface entre a fundação e o solo não havia atrito, isto é, as condições de contorno relaxadas entre a fundação e o solo. E ainda muitos dos seus resultados foram obtidos para cargas harmônicas (passando para o domínio do tempo) e com fundações consideradas sem massa. Baseado nesta formulação, Estorff e Prabucki, 1988 e 1990, desenvolveram uma aproximação MEF-MEC no domínio do tempo mais geral para solucionar problemas elastodinâmicos.

Nestes trabalhos, bem como na maioria dos trabalhos que fazem o acoplamento MEF-MEC, o acoplamento é desenvolvido tratando a subregião dos elementos de contorno como sendo do domínio de elementos finitos (super-elemento), transformando a relação tração-deslocamento do subdomínio dos elementos de contorno para uma relação força-deslocamento, tal como nos elementos finitos, as quais são montadas juntamente com as equações obtidas para a subregião de elementos finitos. Esta combinação é chamada de "FE-approach" e sua principal vantagem é que a parte do sistema acoplado pode ser facilmente incorporado em programa de elementos finitos já existente.

No primeiro destes trabalhos de Estorff e Prabucki, 1988, é feita uma comparação entre os resultados obtidos pela combinação MEF-MEC com as soluções do MEF e do MEC obtidas separadamente. São apresentados dois exemplos utilizando os métodos, um com o domínio retangular semi-infinito e o outro com uma fundação sobre um semi-espaco elástico, ambos

excitados por cargas dinâmicas verticais e horizontais. Em todas as respostas dinâmica dos modelos é mostrado claramente a convergência das respostas quando utilizado o MEF-MEC combinados e o MEC separadamente, onde o MEC, sempre está modelando a parte do domínio infinito do sistema. Por outro lado, como esperado, percebe-se a divergência da resposta do sistema quando os exemplos são solucionados apenas pelo MEF, pois neste caso, a modelagem não consegue levar em conta a dissipação de energia do meio infinito.

A análise com domínios retangulares semi-infinitos são repetidas posteriormente em outro trabalho Estorff e Prabucki, 1990, porém com uma análise maior de exemplos. Neste trabalho são usados modelos de massa discreta e contínua, mostrando que não há divergência dos resultados. Portanto, conclui-se que pode-se utilizar o sistema de massa discreta, pois esta condição de modelagem da massa, exige um custo computacional menor. Outra análise feita neste trabalho é a utilização de elementos quadráticos para o domínio dos elementos finitos a fim de verificar a influência sobre a resposta, quando não há uma compatibilidade dos nós na interface dos domínios acoplados. Este problema pode ser evitado quando utiliza-se elementos lineares para modelar tanto o domínio do MEF quanto o domínio do MEC.

A mesma análise é feita por Estorff, 1992 com algumas variações nos modelos retangulares semi-infinitos. São solucionados problemas com as regiões elásticas retangulares acopladas a outras regiões elásticas ou a regiões com fluido, a fim de mostrar aplicabilidade, precisão e eficiência das técnicas. Para fazer a validação das técnicas é comparado os modelos sólido-sólido e sólido-fluido, sendo o sólido modelado pelo MEF e sólido infinito ou fluido infinito modelado pelo MEC, com os modelos utilizando apenas o MEC na discretização. Novamente é encontrada uma ótima convergência dos resultados.

A primeira aplicação feita neste trabalho é para verificar a precisão dos métodos, variando o grau de aproximação dos elementos. Inicialmente, utiliza-se elementos lineares para o dois domínios combinados, permitindo desta forma, haver a consistência dos graus de liberdade na interface. Em seguida, elementos finitos quadráticos combinados com elementos de contorno lineares são utilizados. Esta análise é de grande importância, pois muitas vezes o número de

elementos de contorno que permite uma boa eficiência, em computadores de médio porte, é limitado, e sendo assim, para analisar sistemas muito complicados, muitas vezes esses computadores não são suficientes. Observa-se nos resultados que em todos os casos a violação da consistência dos nós na interface apresenta diferenças insignificantes nas respostas. Em outra análise é mostrado que uma malha grosseira para o domínio do MEC não influencia a resposta quando trata-se dos problemas sólido-sólidos, mas apresenta influências maiores para os modelos sólido-fluidos.

É sabido que o MEF possui dificuldades em modelar um domínio infinito, devido a reflexão de ondas nas laterais da malha. Diferentemente o MEC consegue representar essas radiações de ondas. Porém, deve-se observar que os elementos de contorno também devem ser finitos para representar o modelo, ou seja é feito um truncamento da malha de elementos de contorno para representar o domínio infinito. Isto pode levar a erros de truncamento nos pontos extremos da malha, sobre os quais deve-se ter cuidado quando analisa-se os resultados obtidos. Estorff, 1992, faz um estudo através de várias discretizações, a fim de avaliar a influência desses truncamentos e o grau de precisão dessas discretizações. Os resultados mostram que a variação da discretização no domínio de elemento de contorno altera muito pouco a convergência para a solução do problema sólido-sólido, mas possui uma influência mais forte para o problema sólido-fluido. É mostrado ainda que, as discretizações do domínio de elementos finitos não influenciam a convergência dos resultados. Resultados semelhantes a estes para os domínios retangulares semi-infinitos e problemas com sólido-fluido são apresentados no trabalho de Estorff e Antes, 1991. Neste trabalho é analisado a pressão hidrodinâmica na interface entre o sólido e fluido, mostrando que a pressão é mais sensível do que os deslocamentos, a erros provenientes das aproximações numéricas. Uma última análise feita neste trabalho é quanto ao custo computacional gasto na solução dos problemas através destas técnicas de acoplamentos. Observa-se dos resultados, que o número de elementos usados para modelar o sistema, influenciam fortemente o tempo computacional. Para as configurações de modelo analisadas no trabalho, os cálculos feitos com a utilização do MEC modelando o problema sozinho, sempre tiveram um custo computacional maior do que quando acopla-se o MEC com o MEF. Isto porque, para se obter uma boa convergência com a utilização do modelo de Elementos de Contorno apenas, deve-se ampliar a

discretização da malha, o que aumenta o custo computacional, na geração das matrizes de influência.

Até o presente momento discute-se apenas os resultados utilizados para representar modelos simples. Na realidade, a grande aplicação da técnica acoplada MEF-MEC é utilizada para solucionar problemas de solo-estrutura com características na maioria das vezes complexas, tais como o estudo de propagação de ondas no solo, onde existe a presença de trincheiras, inclusões como túneis, barragens, solos estratificados, etc.

Um trabalho importante na área é o de Estorff *et al*, 1990, o qual estuda problemas de cargas transientes em semi-espaço elástico homogêneo e de um solo estratificado. Algumas observações são feitas pelo autor na solução dos problemas utilizando a combinação MEF-MEC no domínio do tempo e da frequência.

Um problema comum é a análise do comportamento dinâmico de um semi-espaço excitado por uma carga transiente. Neste caso a carga é aplicada em um determinado ponto da superfície do semi-espaço e então mede-se os deslocamentos de outro ponto, diferente deste onde a carga está aplicada. Isto permite a verificação do processo de acoplamento comparando as respostas com os resultados encontrados para o mesmo problema modelado pelo MEC. Os trabalhos de Estorff e Prabucki, 1990 e Estorff *et al*, 1990 apresentam esta verificação. Em uma análise tri-dimensional, Coda, 1995, também obtém a solução transiente para o semi-espaço, avaliando a interação solo-estrutura através do acoplamento MEF-MEC. A sua formulação é desenvolvida diretamente no domínio do tempo.

Utilizando uma formulação semelhante a estes trabalho citados anteriormente Estorff e Kausel, 1989, analisa uma fundação sobre um meio semi-infinito. Os resultados dos deslocamentos obtidos com a excitação de uma fundação rígida sem massa e flexíveis são comparados. São analisados também o que ocorre com a variação da massa de uma fundação flexível, pois uma fundação com massa tem suas próprias frequência de ressonância, as quais influenciam no comportamento dinâmico do sistema acoplado.

O isolamento de vibrações de estruturas ocasionadas por ondas transmitidas através do solo é um importante problema de Engenharia que pode ser resolvido por meio de trincheiras. A combinação do MEF e do MEC é uma ferramenta muito eficiente para investigar esses sistemas: discretizando a trincheira e uma pequena porção do meio contínuo por elementos finitos, torna-se muito fácil variar a profundidade e as propriedades do material que preenche a trincheira. O elemento de contorno, por sua vez, deverá modelar o restante do meio contínuo. E ainda, o problema da causalidade que é observado no caso da utilização do elemento de contorno apenas, (apresentado em detalhes no trabalho de Estorff *et al*, 1990, não ocorre neste caso. Estorff e Kausel, 1989, mostram, por exemplo, que uma trincheira totalmente vazia não necessariamente reduz os deslocamentos da superfície do solo, por causa da perda de rigidez na vizinhança da trincheira. Portanto, seu uso para problemas de isolamento de vibrações pode ser questionável em alguns casos.

O comportamento dinâmico de estruturas subterrâneas como túneis e escavações tem sido estudada com bastante frequência por pesquisadores. Problemas elastodinâmicos com cavidades cilíndricas, esféricas ou elípticas possuem muitas vezes soluções analíticas. Porém soluções de geometrias complexas ou ainda com materiais elásticos, tornam indispensáveis a utilização de métodos numéricos. Deste forma como na maioria dos casos onde são considerados os domínios infinitos, deve-se considerar a modelagem com a utilização de elementos de contorno ou o método combinado MEF-MEC. A fim de mostrar como o processo de acoplamento pode solucionar esses problemas complexos, Estorff e Kausel, 1989, modelam um túnel retangular próximo da superfície do solo. É mostrado a influência da presença do túnel na resposta dinâmica de um ponto na superfície do semi-espaço, onde ocorre a excitação.

Em outro trabalho de Estorff, 1991, esta análise é feita com mais detalhe, fez-se uma variação de parâmetros como as dimensões da inclusão e relação da rigidez da inclusão e do solo. As estruturas modeladas por elementos finitos normalmente são estruturas elásticas que podem estar em contato colado sobre o solo ou muitas vezes engastadas no solo. Neste mesmo trabalho de Estorff discute-se o comportamento dinâmico de um bloco elástico com massa, representando a

estrutura sobre o solo e, excitado dinamicamente por uma carga transiente. O bloco em alguns exemplos possui uma pequena parte engastada ao solo. Toda parte do bloco é modelado com elementos finitos para deformação plana e o restante do solo é modelado por elementos de contorno. O trabalho mostra a influência da rigidez do bloco e do solo na resposta dinâmica do sistema. Outro efeito importante sobre a resposta do sistema, também analisado neste trabalho, é quanto a influência das dimensões do bloco: relação altura e largura do bloco, e o efeito do engastamento do bloco no solo; relação profundidade da parte engastada e a largura do bloco.

Em muitos estudos de interação solo-estrutura, uma estrutura é considerada desprezando-se os efeitos causados por sistemas adjacentes. Entretanto, em muitos casos as máquinas estão próximas de outras máquinas e esses efeitos adjacentes não podem ser desconsiderados. Estas fundações, que não são diretamente excitadas por uma carga dinâmica, chamada de fundação passiva, podem ser influenciadas significativamente pela propagação de ondas através do solo, oriundas da fundação que está sendo excitada, ou da fundação ativa. Além disto, a presença desta fundação próxima, influencia na vibração da fundação excitadora, através da reflexão de ondas pelo solo. Este estudo, tanto do comportamento do bloco que está sendo excitado, quanto do bloco que não recebe cargas dinâmicas externas, são analisados neste trabalho de Estorff, 1991.

Finalmente, uma outra aplicação da forma combinada MEF-MEC é a solução de problemas práticos envolvendo fluido-estrutura. Uma análise primária foi discutida anteriormente para um domínio retangular semi-infinito utilizando fluido-estrutura. A aplicação mais comum utilizando fluido estrutura são as análises em barragens de água, afim de assegurar-se que a barragem não falhe na ocorrência de um terremoto. Estorff e Antes, 1991, discutem a resposta dinâmica de um ponto sobre a barragem e a pressão dinâmica de um ponto da barragem em função do nível de água. Em ambos os casos a barragem é excitada por uma carga transiente.

No contexto de um trabalho que se desenvolve utilizando-se de várias técnicas de solução de problemas dinâmicos, a idéia fundamental foi desenvolver uma metodologia que suprisse algumas necessidades, que os métodos teriam para solução de problemas desta natureza. Na revisão bibliográfica apresentada, observa-se um consenso que as formulações diretamente no domínio do

tempo, são mais gerais, independentemente do método que se utiliza. Entretanto, enquanto que para o MEF, esta é uma forma mais viável, para permitir soluções mais gerais, para o MEC, esta solução sofre de alguns complicadores, principalmente com relação a obtenção de soluções fundamentais transientes, como observado nas discussões anteriores.

No que se refere a formulação de Elementos Finitos viscoelástico, o trabalho de Yagawa *et al*, 1977, apresenta a idéia inicial do procedimento incremental para problemas quase-estáticos. Esta forma incremental para problemas viscoelásticos, apresenta-se nos trabalhos publicados, sempre aplicada na solução da integral de convolução de Stieltjes. Outros autores seguiram este procedimento, a fim de estender esta formulação do problema quase-estático para o problema dinâmico e aplicam integradores diferenciais para obter a solução da equação de equilíbrio dinâmico. Neste trabalho, o que se faz é formular a solução da equação de equilíbrio dinâmico, a qual chamamos de equação integro-diferencial, de tal forma que se minimize as variáveis do problema dependentes dos passos de tempo anterior. Pois isto está intrínseco a forma incremental, quando aplicada na solução da integral de convolução do problema viscoelástico, e está presente em todos os trabalhos analisados nesta bibliografia.

Quanto a formulação desenvolvida para a solução do Elemento de Contorno transiente, o ponto fundamental é a utilização da solução através da transformação de domínio. Deve-se observar que esta pode não ser a forma mais geral, mas em soluções de problemas lineares, parece ser a formulação mais viável, em virtude das inúmeras dificuldades das soluções direta no tempo, já extensivamente discutidas neste trabalho. As soluções utilizando-se inversão de domínio é uma técnica bastante difundida na aplicação de inúmeros problemas de engenharia, mas são principalmente desenvolvidas através de formas analíticas de inversão. Para as respostas dinâmicas com o MEC, Cruse e Rizzo, 1968, iniciaram a utilização deste procedimento, utilizando inversões numéricas. Seguida por inúmeros autores, observa-se que a eficiência da solução, depende fundamentalmente da técnica de inversão numérica utilizada e cuidados na aplicação desta inversão. Neste trabalho, buscou-se utilizar a forma considerada mais eficiente de inversão tanto para domínio de Laplace (método de Durbin) quanto para o domínio de Fourier (FFT- Fast Fourier Transform) para se obter a solução dinâmica transiente. Deve-se observar que em muitos

trabalhos avaliados na bibliografia, as soluções dependiam muito dos recursos computacionais exigidos, o que as tornavam ineficientes. Com os imprescindíveis cuidados na aplicação das inversões e facilidade de recursos computacionais para avaliá-las, pode-se mostrar neste trabalho, que essas técnicas produzem respostas bastante eficientes. Acrescenta-se a isto, a utilização de soluções estacionárias com alta precisão numérica, pois estas são os pontos de partida para a obtenção da resposta transiente através da inversão. Este é um fator preponderante na escolha da formulação apresentada neste trabalho, uma vez que o grupo de pesquisa vem desenvolvendo estas soluções por alguns anos. Portanto neste trabalho, as soluções estacionárias utilizadas, bem como a forma de aplicação da inversão numérica aos problemas avaliados, são diferentes daquelas encontradas na revisão bibliográfica presente.

E finalmente, as formulações do MEF e do MEC podem ser utilizadas para obter uma resposta através do acoplamento entre os métodos. Entretanto, devido a forma como estas soluções transientes foram obtidas, não permitem uma imediata associação entre os métodos tal como ocorre nas soluções estacionárias. Na bibliografia apresentada, os trabalhos apresentam diferentes formas de obter o acoplamento entre o Elementos Finitos e Elementos de Contorno. Porém, em todos os casos, as formulações dos dois métodos obtidas separadamente, são desenvolvidas no mesmo domínio, isto é, no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Neste trabalho, a formulação do MEF é desenvolvida totalmente no domínio do tempo, enquanto o MEC é desenvolvido no domínio estacionário e sua resposta é transformada para o tempo. Esta forma de obtenção das soluções independentes, exige que o acoplamento seja desenvolvido de forma diferente daquelas tradicionalmente apresentadas na bibliografia aqui presente.

Capítulo 3

Teoria da Viscoelasticidade / Modelos Constitutivos Viscoelásticos

3.1 Introdução à Viscoelasticidade - Conceitos Básicos

O estudo da teoria da viscoelasticidade linear é relativamente mais complexo do que os estudos tradicionalmente apresentados na teoria da elasticidade linear.

Pode-se considerar viscoelástico um material que se comporta com variações nas deformações em resposta a uma tensão aplicada. Isto é, quando aplica-se uma tensão sobre um material, este deveria manter constante sua deformação até que as tensões se modifiquem. Porém como o material tem um comportamento viscoelástico, as deformações dependem do tempo de aplicação da carga para continuar deformando. Portanto, quanto maior o tempo de aplicação da carga (tensão), maior serão as deformações e vice-versa. Desta forma um material viscoelástico se difere do material elástico pois as deformações não estão relacionadas diretamente às tensões aplicadas, mas também ao tempo de aplicação das tensões.

Estes efeitos estão associados ao fenômeno de fluência (“creep”) quando o material está submetido a tensões constantes e ao fenômeno da relaxação quando submetido a deformações constantes. O fenômeno de fluência pode ser explicado como uma acomodação entre as camadas (ou partículas) de um material submetido a um nível de tensão. De forma semelhante a relaxação reduz os níveis de tensão do material devido às deformações iniciais.

Deve-se observar também que muitos materiais comportam-se como linear ou quase linear quando submetidos a baixos níveis de tensões enquanto que este mesmo material pode se

comportar como não linear quando submetidos a níveis superiores de tensões. Alguns fenômenos comuns em viscoelasticidade são:

- elasticidade instantânea;
- fluência sob tensão constante;
- relaxação de tensão sob deformação constante;
- recuperação instantânea;
- recuperação defasada (“delayed”).

Um conceito fundamental no desenvolvimento da teoria da viscoelasticidade é o conceito de integrais de convolução de Stieltjes. Estas integrais permitem caracterizar a relação constitutiva viscoelástica tensão-deformação. A convolução de Stieltjes muitas vezes pode ser representada na forma da integral de convolução de Riemann. Esta última frequentemente utilizada em problemas solucionados diretamente no domínio do tempo. A compreensão desses conceitos básicos é imprescindível no desenvolvimento da solução de problemas em viscoelasticidade.

Existem duas formas de representar a equação constitutiva viscoelástica, que são a forma de operador diferencial e a forma de operador integral. A forma de operador diferencial exige a transformação de domínio na solução dos problemas, tradicionalmente as transformações são desenvolvidas através das transformadas de Laplace. A forma de operador integral permite escrever a relação constitutiva diretamente na variável tempo, tornando-se portanto uma forma mais geral onde a propriedade material dependente do tempo é utilizada diretamente na relação tensão-deformação, não necessitando de transformações de domínio. A formulação viscoelástica na forma integral, por definição, utiliza das integrais de convolução para definir as equações constitutivas.

Neste capítulo será apresentado um estudo detalhado dos conceitos básicos e propriedades matemáticas envolvidas na convolução de Stieltjes. Posteriormente deve ser solucionado numericamente a equação constitutiva viscoelástica tensão-deformação. As propriedades materiais envolvidas na relação constitutiva são determinadas através dos modelos viscoelásticos, tais como os modelos viscoelásticos mais comuns, que são os modelos de Kelvin e modelos de Maxwell. A determinação dessas propriedades materiais dependentes do tempo, isto é, os módulos de

Relaxação e os módulos de Fluência dos modelos viscoelásticos, também está apresentada na análise.

Finalmente, é formulada a equação de equilíbrio para o problema viscoelástico unidimensional, utilizando-se os modelos viscoelásticos avaliados anteriormente para representar o comportamento do material. As características viscoelásticas desses modelos são definidas em função de seus parâmetros de rigidez e amortecimento.

3.2 Modelos Viscoelásticos - Módulo de Relaxação e Módulo de Fluência

Elementos Básicos: Mola e Amortecimento

Em todos os modelos as molas são lineares e o amortecimento viscoso é linear. A mola pode ser representada por:

$$\sigma = R \epsilon \quad (3.1)$$

onde R representa a constante de mola ou o módulo de Young. Deve-se observar que a mola possui elasticidade instantânea. Um amortecedor viscoso linear pode ser representado por:

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.2)$$

onde η é conhecido como coeficiente de viscosidade. A equação estabelece que a taxa de deformação ou velocidade de deformação ($\dot{\epsilon}$) é proporcional a tensão. Isto significa que o material se deformará continuamente em uma razão constante quando está sujeita a um passo de tempo constante. Ou seja, a cada passo de tempo, mesmo que a tensão se mantenha constante, o material viscoelástico continua a se deformar, o que difere do material elástico (mola elástica) que uma vez atingida uma dada tensão não mais se deforma até que esta tensão tenha uma variação.

A deformação pode ser representado pela função delta Dirac ($\delta(t)$), onde $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ e $\delta(t) = \infty$ para $t = 0$. Assim a tensão resultante relacionada a deformação pode ser representada por,

$$\sigma(t) = \eta \epsilon_0 \delta(t) \quad (3.3)$$

Observa-se que a tensão infinita é impossível, portanto é também impossível impor instantaneamente qualquer deformação finita ao amortecedor.

Dois modelos mais comuns para representar o material viscoelástico, dos quais pode-se fazer uma composição para obter variados tipos de representações dos materiais viscoelásticos, são os modelos de Maxwell e Kelvin.

- Modelo de Maxwell - representado por uma mola e um amortecedor colocados em série.
- Modelo de Kelvin - representado por uma mola e um amortecedor colocados em paralelo.

Deve-se notar que nem o modelo de Maxwell, nem o modelo de Kelvin representam o comportamento de muitos materiais viscoelástico. O modelo de Kelvin não representa a deformação independente do tempo tanto no carregamento quanto no descarregamento, nem descreve a deformação permanente após o descarregamento. O modelo de Maxwell modela a recuperação não dependente do tempo e não modela o decréscimo da velocidade de deformação sob tensão constante. Ambos os modelos mostram a velocidade de deformação finita, sendo que a velocidade de deformação para muitos materiais é muito rápida, resultando grandes deformações, o que não permite caracterizar o problema com uma teoria de viscoelasticidade linear.

- Modelo de Burgers ou modelo de quatro elementos - representado por uma associação entre os modelos de Maxwell e Kelvin colocados em série.

3.2.1 Modelo de Kelvin

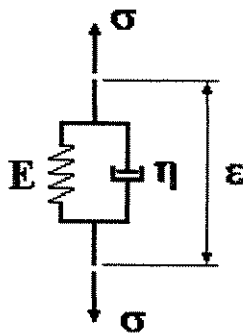


Fig. 3.1 - Modelo Viscoelástico de Kelvin

Será deduzido o Módulo de Relaxação e o Módulo de Fluência para o Modelo de Kelvin.

- Condições de Equilíbrio Cinemático:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (3.4)$$

- Condições de Equilíbrio de Forças:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \text{ e ainda } \begin{matrix} \sigma_1 = E\varepsilon \\ \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon} \end{matrix} \quad (3.5)$$

Portanto pode-se utilizar a equação de equilíbrio de forças para escrever,

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \Rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.6)$$

Esta é a equação diferencial para o modelo viscoelástico de Kelvin. Pode-se aplicar a transformada de Laplace sobre a equação acima, que resulta,

$$\hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s + E/\eta} \right) \frac{1}{\eta} \hat{\sigma} \quad (3.7)$$

onde s é a variável do domínio de Laplace.

A função tensão dependente do tempo é definida como uma função constante, tal como $\sigma(t) = \sigma_o H(t)$, onde $H(t)$ é a função Heaviside. A transformada de Laplace desta função resulta $\hat{\sigma} = \frac{\sigma_o}{s}$. Substituindo esta na equação da deformação, obtem-se,

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sigma_o}{\eta} \left[\left(\frac{1}{s + E/\eta} \right) \frac{1}{s} \right] \quad (3.8)$$

ou manipulando-se esta equação pode-se obter,

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sigma_o}{E} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s + E/\eta \right)} \right) \quad (3.9)$$

Aplicando então a transformada de Laplace inversa, sobre a variável “ s ”, na equação acima, obtém-se a equação no domínio do tempo,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} \left(1 - e^{-E/\eta t} \right) \Rightarrow \varepsilon(t) = \left(\frac{1 - e^{-E/\eta t}}{E} \right) \sigma_o \quad (3.10)$$

Portanto define-se a Módulo de Fluência $J(t)$ para o modelo de Kelvin, como sendo,

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1 - e^{-E/\eta t}}{E} \right) \sigma_o \Rightarrow J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-E/\eta t} \right) \quad (3.11)$$

Em seguida pode-se obter a Módulo de Relaxação $E(t)$ para o mesmo modelo de Kelvin.

Parte-se da relação de tensão e deformação no domínio transformado, relação $\hat{\varepsilon}(s)$ e $\hat{\sigma}(s)$,

isto é, $\hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s + E/\eta} \right) \frac{1}{\eta} \hat{\sigma}$.

Pode-se então isolar a tensão,

$$\hat{\sigma} = (\eta s + E)\hat{\varepsilon} \quad (3.12)$$

Utiliza-se neste ponto uma deformação constante para obter as tensões resultantes desta deformação. A deformação e sua respectiva transformada de Laplace é definida como,

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}$, que pode ser substituída na relação tensão-deformação,

$$\hat{\sigma} = \left(\eta \varepsilon_0 + E \varepsilon_0 \frac{1}{s} \right) \Rightarrow \hat{\sigma} = \varepsilon_0 \left(\eta + \frac{E}{s} \right) \quad (3.13)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa tem-se,

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 (\eta \delta(t) + E) \Rightarrow \sigma(t) = (E + \eta \delta(t)) \varepsilon_0 \quad (3.14)$$

E finalmente define-se a Módulo de Relaxação $E(t)$ para o modelo de Kelvin,

$$E(t) = E + \eta \delta(t) \quad (3.15)$$

onde $\delta(t)$ é a função Delta de Dirac.

A equação 3.15, define uma característica importante no modelo de Kelvin, onde não é possível determinar a tensão em função de uma deformação inicial. Isto ocorre pois o segundo termo que define a função de Relaxação $E(t)$ (3.15), esta associado a função delta de Dirac $\delta(t)$. Isto representa uma tensão infinita, quando aplicada uma deformação instantânea sobre o modelo. Desta forma, apesar de definida matematicamente, não é possível na prática, determinar uma deformação inicial instantânea sobre uma estrutura viscoelástica representada pelo modelo de Kelvin.

3.2.2 Modelo de Maxwell

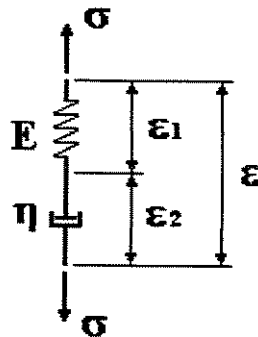


Fig. 3.2 - Modelo Viscoelástico de Maxwell

Deve-se seguir os mesmos procedimentos utilizados anteriormente para determinar o Módulo de Relaxação e o Módulo de Fluência para os modelos utilizados nos problemas viscoelásticos.

- Condições de Equilíbrio Cinemático

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \Rightarrow \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\end{aligned}\tag{3.16}$$

- Condições de Equilíbrio de Forças

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon_1 \\ \sigma &= \eta\dot{\varepsilon}_2\end{aligned}\tag{3.17}$$

Das condições de equilíbrio cinemático pode-se definir a equação diferencial do problema. Deve-se observar que para se utilizar a primeira delas, isto é, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ deveria ser conhecido ε_2 através da definição de $\dot{\varepsilon}_2$, o que é uma tarefa difícil, pois necessita-se conhecer o comportamento de $\dot{\varepsilon}_2$ para executar uma integração no tempo sobre este termo. Mas, se for utilizado a segunda das relações ($\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$) a formulação torna-se mais imediata pois pode-se utilizar $\dot{\varepsilon}_1$ e $\dot{\varepsilon}_2$ diretamente das condições de equilíbrio de forças. Portanto,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\tag{3.18}$$

das condições de equilíbrio de forças $\sigma = E\varepsilon_1 \Rightarrow \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_1$ e $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}_2$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}\tag{3.19}$$

Portanto esta é a equação diferencial a ser solucionada. Pode-se aplicar a transformada de Laplace nesta equação, para obtê-la no domínio de Laplace, isto é,

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{E}\hat{\sigma} + \frac{\hat{\sigma}}{s\eta} \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s\eta}\right)\hat{\sigma}\tag{3.20}$$

Pode-se utilizar a tensão $\sigma(t)$ como sendo uma tensão constante no tempo, isto é, $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, onde $H(t)$ é a função Heaviside. A transformada de Laplace desta função pode ser obtida como, $\hat{\sigma} = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{s} \right\} \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s}$

Substituindo a tensão acima na equação do domínio transformado pode-se obter,

$$\hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s\eta}\right)\hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s\eta}\right)\frac{\sigma_0}{s} \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s} + \frac{\sigma_0}{\eta} \frac{1}{s^2}\tag{3.21}$$

e utilizando a Transformada de Laplace inversa, tem-se,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \Rightarrow \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \sigma_0 \quad (3.22)$$

Finalmente define-se o Módulo de Fluência para o modelo de Maxwell dependente do tempo $J(t)$, como sendo,

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \quad (3.23)$$

Em seguida pode-se obter a relação de $\sigma(t)$ para $\varepsilon(t)$ constante, afim de definir o módulo de Relaxação para o modelo de Maxwell.

Da equação diferencial, $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$, obtem-se a Transformada de Laplace, $\hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s\eta} \right) \hat{\sigma}$

A função de entrada neste caso será $\varepsilon(t)$ constante no tempo, isto é, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$, e sua transformada é dada por $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}$, que pode ser substituído na equação do domínio transformado de Laplace,

$$\hat{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 E}{\left(\frac{sE}{E} + \frac{E}{\eta} \right)} \Rightarrow \hat{\sigma} = \varepsilon_0 E \left(\frac{1}{s + \frac{E}{\eta}} \right) \quad (3.24)$$

Obtem-se então a transformada de Laplace inversa da equação final,

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E \left\{ e^{-\frac{E}{\eta} t} \right\} \Rightarrow \sigma(t) = E e^{-\frac{E}{\eta} t} \varepsilon_0 \quad (3.25)$$

E finalmente, define-se o Módulo de Relaxação para o modelo de Maxwell $E(t)$,

$$E(t) = E e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (3.26)$$

Foram obtidas as funções de Relaxação e Fluência para os dois modelos de Kelvin e Maxwell separadamente. No apêndice, são deduzidas essas funções para dois modelos viscoelásticos compostos, sendo que um destes modelos compostos devem ser utilizados na avaliação dos exemplos deste trabalho.

3.2.3 Modelos Generalizados

Modelo de Maxwell generalizado - sistema em série

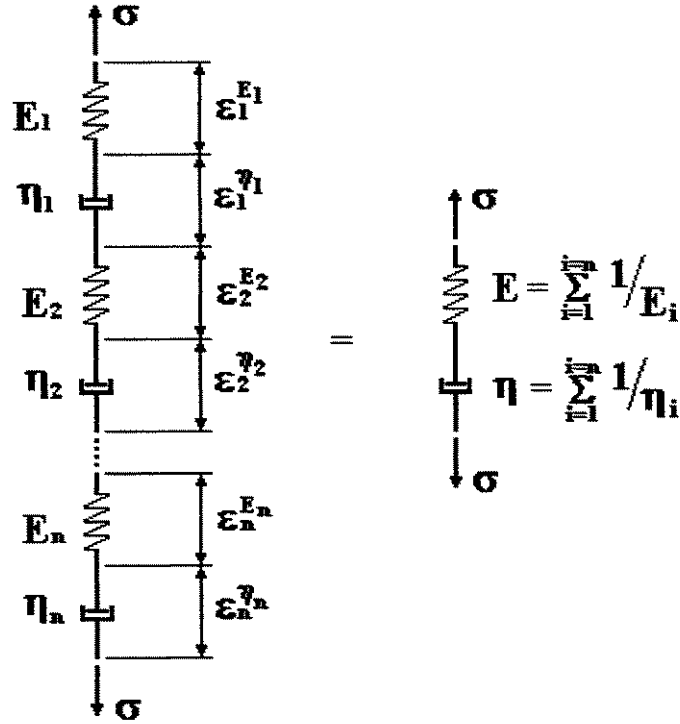


Fig. 3.3 - Modelo Generalizado de Maxwell em Série

Para sistemas em série define-se:

- Condições de Equilíbrio Cinemático -

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{E_1} + \varepsilon_1^{\eta_1} + \varepsilon_2^{E_2} + \varepsilon_2^{\eta_2} + \dots + \varepsilon_n^{E_n} + \varepsilon_n^{\eta_n} \quad (3.27)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1^{E_1} + \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} + \dot{\varepsilon}_2^{E_2} + \dot{\varepsilon}_2^{\eta_2} + \dots + \dot{\varepsilon}_n^{E_n} + \dot{\varepsilon}_n^{\eta_n} \quad (3.28)$$

- Condições de Equilíbrio de forças -

$$\sigma = \sigma_1^{E_1} = \sigma_1^{\eta_1} = \sigma_2^{E_2} = \sigma_2^{\eta_2} = \dots = \sigma_n^{E_n} = \sigma_n^{\eta_n} \quad (3.29)$$

Define-se também,

$$\sigma_1^{E_1} = E_1 \varepsilon_1^{E_1}, \quad \sigma_2^{E_2} = E_2 \varepsilon_2^{E_2}, \dots, \quad \sigma_n^{E_n} = E_n \varepsilon_n^{E_n} \quad (3.30)$$

$$\dot{\sigma}_1^{E_1} = E_1 \dot{\varepsilon}_1^{E_1}, \quad \dot{\sigma}_2^{E_2} = E_2 \dot{\varepsilon}_2^{E_2}, \dots, \quad \dot{\sigma}_n^{E_n} = E_n \dot{\varepsilon}_n^{E_n} \quad (3.31)$$

e ainda,

$$\sigma_1^{\eta_1} = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1}, \quad \sigma_2^{\eta_2} = \eta_2 \dot{\varepsilon}_2^{\eta_2}, \dots, \quad \sigma_n^{\eta_n} = \eta_n \dot{\varepsilon}_n^{\eta_n} \quad (3.32)$$

Utilizando a segunda equação de equilíbrio cinemático pode-se escrever,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1^{E_1}}{E_1} + \frac{\sigma_1^{\eta_1}}{\eta_1} + \frac{\dot{\sigma}_2^{E_2}}{E_2} + \frac{\sigma_2^{\eta_2}}{\eta_2} + \dots + \frac{\dot{\sigma}_n^{E_n}}{E_n} + \frac{\sigma_n^{\eta_n}}{\eta_n} \quad (3.33)$$

Pode-se então agrupar os termos de rigidez e os termos de amortecimento na equação acima,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1^{E_1}}{E_1} + \frac{\dot{\sigma}_2^{E_2}}{E_2} + \dots + \frac{\dot{\sigma}_n^{E_n}}{E_n} + \frac{\sigma_1^{\eta_1}}{\eta_1} + \frac{\sigma_2^{\eta_2}}{\eta_2} + \dots + \frac{\sigma_n^{\eta_n}}{\eta_n} \quad (3.34)$$

Das condições de equilíbrio de forças,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1^{E_1} = \sigma_1^{\eta_1} = \sigma_2^{E_2} = \sigma_2^{\eta_2} = \dots = \sigma_n^{E_n} = \sigma_n^{\eta_n} \\ \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}_1^{E_1} = \dot{\sigma}_1^{\eta_1} = \dot{\sigma}_2^{E_2} = \dot{\sigma}_2^{\eta_2} = \dots = \dot{\sigma}_n^{E_n} = \dot{\sigma}_n^{\eta_n} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Portanto, pode-se substituir estas relações na equação de $\dot{\varepsilon}$,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \dots + \frac{1}{E_n} \right) + \sigma \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \dots + \frac{1}{\eta_n} \right) \quad (3.36)$$

Desta forma, o sistema em série para o modelo de Maxwell pode ser representado de forma geral como,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} + \sigma \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \quad (3.37)$$

onde $E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i}$ = rigidez equivalente de todos elementos de rigidez

$\eta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i}$ = amortecimento equivalente de todos elementos viscoelásticos

Portanto pode-se concluir que vários modelos de Maxwell representados em série, apresentam exatamente o mesmo comportamento de um modelo de Maxwell equivalente, onde a rigidez equivalente e o amortecimento equivalente são dados pela soma em série de todos elementos de rigidez e amortecimento.

Modelo de Kelvin generalizado - sistema em paralelo

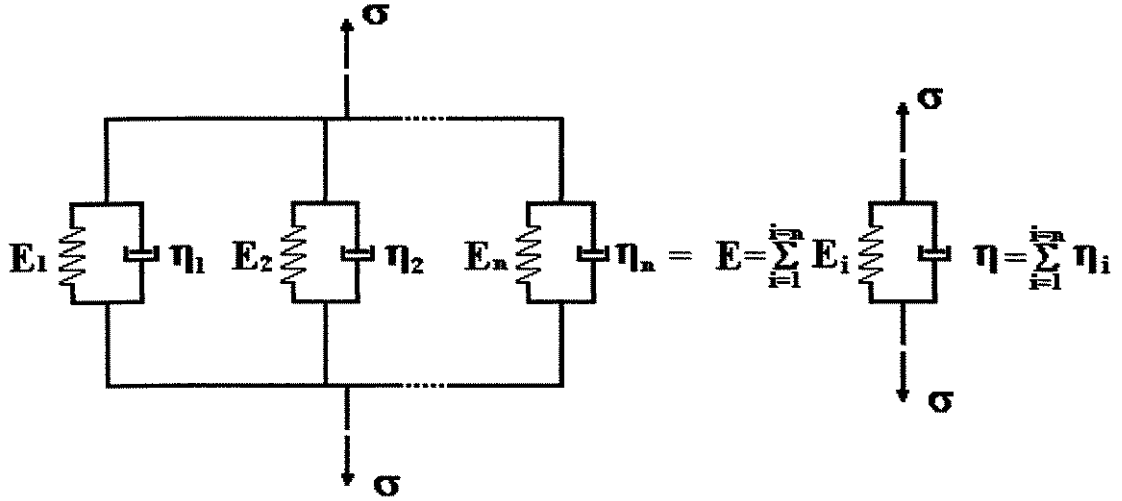


Fig. 3.4 - Modelo Generalizado de Kelvin - Sistema em Paralelo

Para sistemas em paralelo define-se:

- Condições de Equilíbrio Cinemático -

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{E_1} = \varepsilon_1^{\eta_1} = \varepsilon_2^{E_2} = \varepsilon_2^{\eta_2} = \dots = \varepsilon_n^{E_n} = \varepsilon_n^{\eta_n} \quad (3.38)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1^{E_1} = \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} = \dot{\varepsilon}_2^{E_2} = \dot{\varepsilon}_2^{\eta_2} = \dots = \dot{\varepsilon}_n^{E_n} = \dot{\varepsilon}_n^{\eta_n} \quad (3.39)$$

- Condições de Equilíbrio de forças -

$$\sigma = \sigma_1^{E_1} + \sigma_1^{\eta_1} + \sigma_2^{E_2} + \sigma_2^{\eta_2} + \dots + \sigma_n^{E_n} + \sigma_n^{\eta_n} \quad (3.40)$$

Pode-se também definir as relações de σ e ε ,

$$\sigma_1^{E_1} = E_1 \varepsilon_1^{E_1}, \quad \sigma_2^{E_2} = E_2 \varepsilon_2^{E_2}, \dots, \quad \sigma_n^{E_n} = E_n \varepsilon_n^{E_n} \quad (3.41)$$

$$\sigma_1^{\eta_1} = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1}, \quad \sigma_2^{\eta_2} = \eta_2 \dot{\varepsilon}_2^{\eta_2}, \dots, \quad \sigma_n^{\eta_n} = \eta_n \dot{\varepsilon}_n^{\eta_n} \quad (3.42)$$

que pode ser substituído na equação de σ ,

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1^{E_1} + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} + E_2 \varepsilon_2^{E_2} + \eta_2 \dot{\varepsilon}_2^{\eta_2} + \dots + E_n \varepsilon_n^{E_n} + \eta_n \dot{\varepsilon}_n^{\eta_n} \quad (3.43)$$

e substituindo as relações de equilíbrio cinemático, resulta,

$$\begin{aligned} \sigma &= (E_1 + E_2 + \dots + E_n) \varepsilon + (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) \dot{\varepsilon} \Rightarrow \\ \sigma &= \varepsilon \sum_{i=1}^n E_i + \dot{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \eta_i \end{aligned} \quad (3.44)$$

Portanto vários modelos de Kelvin dispostos em paralelo possuem o mesmo comportamento de um modelo de Kelvin equivalente, obtido pela soma em paralelo de todos os elementos de rigidez e amortecimento.

Conclui-se que os modelos generalizados de Maxwell, quando dispostos em série ou os modelos generalizados de Kelvin, quando dispostos em paralelo, possui exatamente o mesmo comportamento quando utiliza-se apenas um elemento equivalente para cada modelo, respectivamente

De forma contrária, observa-se ainda que quando utiliza-se uma disposição em paralelo para os elementos do modelo de Maxwell ou uma disposição em série para os elementos do modelo de Kelvin, torna-se mais complexa a obtenção de uma sistema equivalente. Porém, nestes casos utilizam-se os mesmos procedimentos descritos anteriormente, isto é, através das condições de equilíbrio cinemático e equilíbrio de forças do sistema, pode-se obter um sistema equivalente. Detalhes adicionais dos modelos viscoelásticos pode ser visto em Findley, 1976.

3.3 Equação Constitutiva Viscoelástica Linear

Forma de Operador Diferencial

Pode-se escrever uma relação de σ (tensão - $\sigma(t)$) e ε (deformação - $\varepsilon(t)$) como:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (3.45)$$

onde P e Q são operadores diferenciais lineares definidos como,

$$P = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad Q = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (3.46)$$

Desta forma, utiliza-se o operador diferencial linear sobre a equação constitutiva para escrever,

$$P\sigma = p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \dots + p_r \frac{\partial^r \sigma}{\partial t^r} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \dots + q_r \frac{\partial^r \varepsilon}{\partial t^r} = Q\varepsilon \quad (3.47)$$

Como representado anteriormente, a transformada de Laplace aplicada a esta equação resulta,

$$\hat{P}(s)\hat{\sigma} = (p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_rs^r)\hat{\sigma} = (q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_rs^r)\hat{\varepsilon} = \hat{Q}(s)\hat{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\frac{\hat{Q}(s)}{\hat{P}(s)} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \quad (3.48)$$

Esta é uma função algébrica da variável de Laplace “s”, que uma vez definidas as constantes p 's e q 's, permite obter uma relação entre $\sigma(s)$ e $\varepsilon(s)$. Desta forma, em princípio, através da relação entre $\sigma(s)$ e $\varepsilon(s)$, pode-se fazer a transformada de Laplace inversa para obter uma relação entre $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$, que caracteriza o comportamento viscoelástico do material. Estas funções entre σ e ε , no domínio do tempo, são definidas como módulo de Relaxação $E(t)$ ou módulo de Fluência $J(t)$. Para o caso linear, isto é possível, pois p 's e q 's, na equação 3.47, são independentes da tensão e deformação, mas podem depender do tempo.

Deve-se observar que os modelos comumente utilizados para representar modelos mecânicos, tais como os modelos de Maxwell e de Kelvin, podem ser definidos através desta

equação geral 3.47. Isto é, define-se as constante p 's e q 's para obter a representação de cada modelo. Por exemplo, para o modelo de Maxwell define-se,

$p_0 = 1, p_1 = \frac{\eta}{E}, q_1 = \eta$ e os demais termos nulos, que resulta,

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\epsilon} \quad (3.49)$$

que caracteriza o modelo de Maxwell ou ainda pode-se determinar os parâmetros,

$p_0 = 1, p_1 = E, q_1 = \eta$ e os demais termos nulos, que resulta,

$$p_0\sigma = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (3.50)$$

para caracterizar o modelo de Kelvin. Estas equações 3.49 e 3.50, resultam nas mesmas relações obtidas para esses modelos nas seções 3.2.1 e 3.2.2.

Porém, a utilização de apenas três termos, p_0, p_1, q_1 ou p_0, q_0, q_1 , para definir as equações constitutivas dos modelos, não são capazes de representar corretamente o comportamento de materiais reais. Estabelecendo mais termos da equação 3.47 pode ser uma forma de representar melhor o comportamento materiais viscoelásticos reais.

Entretanto, quando um grande número desses parâmetros torna-se necessário para descrever realmente o comportamento de um material qualquer, algumas vezes, não se consegue avaliá-los de forma experimental passando a ser impossível determinar esses coeficientes para muitos materiais reais.

Por outro lado, existem formas mais prática e precisas de se definir as equações constitutivas de materiais viscoelásticos. Da equação (3.48), tem-se a relação tensão-deformação no domínio transformado,

$$\frac{\hat{Q}(s)}{\hat{P}(s)} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}} \Rightarrow \hat{\epsilon} = \hat{K}(s) \hat{\sigma} \quad (3.51)$$

onde $\hat{K}(s)$ definido em funções dos polinômios $\hat{P}(s)$ e $\hat{Q}(s)$, pode ser dado por uma soma de frações parciais do tipo $\hat{K}_i(s) = \frac{a_i}{b_i + s}$ e a relação constitutiva resulta,

$\hat{\varepsilon}(s) = \sum_{i=1}^p \hat{K}_i(s) \hat{\sigma}(s)$. Mas da definição da integral de convolução para a transformada de Laplace obtém-se,

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^p K_i(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (3.52)$$

onde a transformada inversa de $\hat{K}_i(s) = \frac{a_i}{b_i + s}$ é dada por,

$$K_i(t-\tau) = a_i \exp[b_i(t-\tau)] \quad (3.53)$$

Desta forma, a_i e b_i são mais facilmente determinados, na forma da equação (3.53), através de experimentos, do que p_i e q_i na forma de equação diferencial da equação (3.47). Isto ocorre pois, os parâmetros a_i e b_i estão associados a uma expressão algébrica (3.53), enquanto os parâmetros p_i e q_i estão associados a uma equação diferencial (3.47), que é mais difícil de ser solucionada quando deseja-se avaliar os termos constantes envolvidos em cada termo da equação diferencial.

E ainda, quando necessita-se de uma número muito grande de parâmetros, pode-se aproximar $\sum_{i=1}^p K_i(t-\tau)$ por,

$$\sum_{i=1}^p K_i(t-\tau) = R(t-\tau) \quad (3.54)$$

onde, em princípio, $R(t-\tau)$ é mais fácil de ser obtida experimentalmente.

Forma de Operador Integral

Como observado na seção anterior a equação constitutiva, isto é relação tensão-deformação pode ser descrita através de operadores diferenciais. Porém, algumas dificuldades surgem para definir os parâmetros do modelo constitutivo.

Esta relação tensão-deformação também pode ser descrita através de um operador integral, isto é, na forma de integrais hereditárias. A vantagem da forma integral sobre os operadores diferenciais é a flexibilidade de medir realmente as propriedades viscoelásticas do material, como já observado. A representação integral também pode ser estendida para incluir outras análises na formulação, como envelhecimento material, efeito de temperatura, entre outros efeitos de não-linearidades.

Esta abordagem, através da representação integral, utilizando a definição das integrais de convolução de Stieltjes e o princípio da superposição de Boltzmann é objeto de estudo e aplicação neste trabalho e será descrita com mais detalhes no próximo capítulo.

3.4 Avaliação do Módulo de Relaxação e Módulo de Fluência

Módulo de Fluência

Através de um teste Fluência de pode-se definir o Módulo de Fluência. A função no tempo pode ser dado por: $\sigma = \sigma_0 H(t)$, onde $H(t)$ é a função unitária Heaviside. Também chamada de função passo unitário e é definida como,

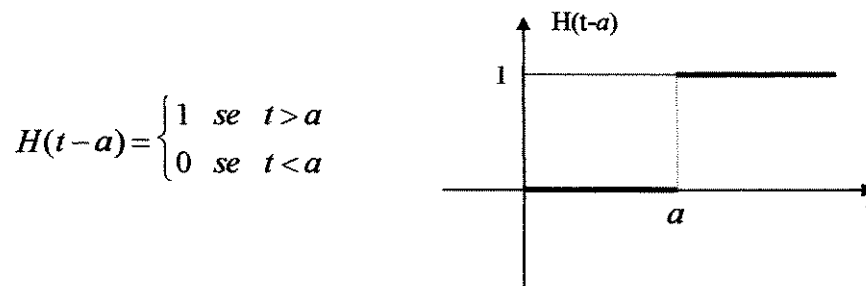


Fig. 3.5 - Função Heaviside

Para um material linear, a relação tensão-deformação pode ser dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) \Rightarrow J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0 \quad (3.55)$$

onde $J(t)$ é chamado de Módulo de Fluência. O Módulo de Fluência é uma propriedade do material e está associada a flexibilidade de um material elástico. Isto é o Módulo de Fluência é uma propriedade dependente do tempo, o que caracteriza o material viscoelástico. Desta forma esta propriedade deve ser definida para cada material analisado. Um exemplo desta propriedade são os modelos de Maxwell e modelo de Kelvin que caracterizam propriedades materiais distintas.

Módulo de Relaxação

Para definir o módulo de Relaxação através de um teste de relaxação, mantém-se a deformação constante definida também através da função Heaviside $H(t)$, isto é: $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ e mede-se as tensões $\sigma(t)$.

Para um material com comportamento linear tem-se:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) \Rightarrow E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (3.56)$$

onde $E(t)$ é chamada de módulo de relaxação. Tal como o Módulo de Fluência, esta é uma propriedade material e pode também ser apresentada através dos modelos de Maxwell e de Kelvin.

Capítulo 4

Representação Integral para Formulação Viscoelástica

4.1 Princípio da Superposição de Boltzmann e Representação Integral de Stieltjes

Para compreender o princípio da superposição de Boltzmann analisa-se alguns passos no desenvolvimento da tensão no tempo. O modelo composto Kelvin-Maxwell, mostrado na figura 4.1, pode ser utilizado na análise, para representar o comportamento viscoelástico de uma estrutura. Neste modelo, E_0 e E_1 definem a rigidez e η_1 define a propriedade viscoelática do material.

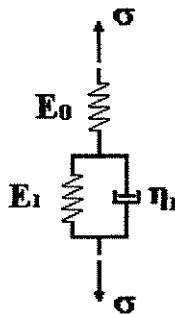


Fig. 4.1 - Exemplo de Modelo Viscoelástico - Modelo Kelvin-Maxwell

A análise inicia-se aplicando-se uma dada tensão σ_0 no instante $t = 0$ e verifica-se graficamente o que ocorre para este primeiro caso.

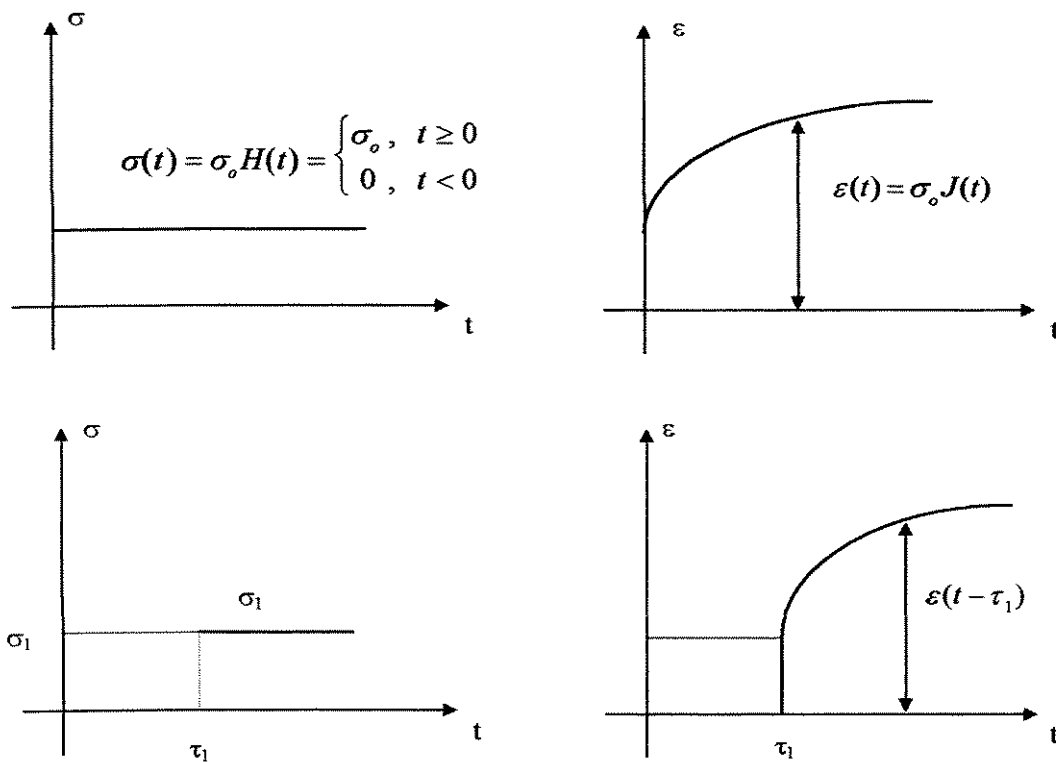


Fig. 4.2 - Relação Tensão-deformação viscoelástica

Observa-se, nesta primeira situação (caso 1), gráfico superior da figura 4.2, que a tensão é aplicada a partir do tempo $t = 0$, e mantém-se constante durante o tempo de aplicação. O salto inicial de deformação caracterizando uma deformação instantânea, mostrado no gráfico da resposta da deformação em função do tempo, ocorre pois o modelo do material analisado (figura 4.1), possui uma mola (modelo de rigidez - E_0) disposta em série com os demais elementos do sistema. Desta forma, quando aplica-se uma tensão inicial, (tempo $t = 0$), o sistema se deforma instantaneamente. Se o material tivesse apenas o comportamento elástico poderia se observar que o nível de deformação apresentado seria dado em função da tensão e não deveria variar posteriormente com o tempo, enquanto a tensão se mantivesse constante. Como o comportamento viscoelástico depende do tempo, através da propriedade de Fluência ($J(t)$) as deformações continuam crescendo após a aplicação da tensão constante no tempo.

No segundo (caso 2), gráfico inferior da figura 4.2, uma nova tensão constante no tempo é aplicada ao material, porém com uma defasagem de tempo $t = \tau_1$. Deve-se observar que o material antes de $t = \tau_1$ não está submetido a nenhum nível de tensão. A tensão neste caso é dada por:

$$\sigma(t) = \sigma_1 H(t - \tau_1) = \begin{cases} \sigma_1, & t \geq \tau_1 \\ 0, & t < \tau_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Desta forma a deformação também responde com a mesma defasagem e é dada por,

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t - \tau_1) H(t - \tau_1) = \begin{cases} \sigma_1 J(t - \tau_1), & t \geq \tau_1 \\ 0, & t < \tau_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Observa-se que a deformação também responde como no caso 1. Isto é, quando a tensão é aplicada no instante $t = \tau_1$ haverá uma deformação instantânea, que posteriormente deve aumentar após este instante pois a função $J(t - \tau_1)$ varia representando o efeito de viscoelasticidade.

Pode-se observar também o que ocorre quando vários níveis de tensões são aplicados em cada passo de tempo. Neste caso, como o material tem comportamento viscoelástico linear, pode-se aplicar o princípio da Superposição de Boltzmann, a fim de representar o comportamento final do sistema. O princípio de Boltzmann define que a deformação em qualquer instante após $t = \tau_1$ é dada pela soma das deformações nos instantes em que cada uma destas forem aplicadas separadamente. Isto é, a deformação final deve ser a deformação representada pelo caso 1 somada a deformação representada pelo caso 2.

O Módulo de Fluência $J(t)$ depende do tempo, com isto a propriedade de flexibilidade, relacionando a tensão-deformação, varia com o tempo, e isto será computado nas deformações quando calcula-se as deformações em cada intervalo de tempo. Isto é para $t < \tau_1$ o Módulo de Fluência é dado por $J(t)$, e para $t > \tau_1$ é definido por $J(t - \tau_1)$. Graficamente, figura 4.3, representa-se os dois casos em um terceiro caso.

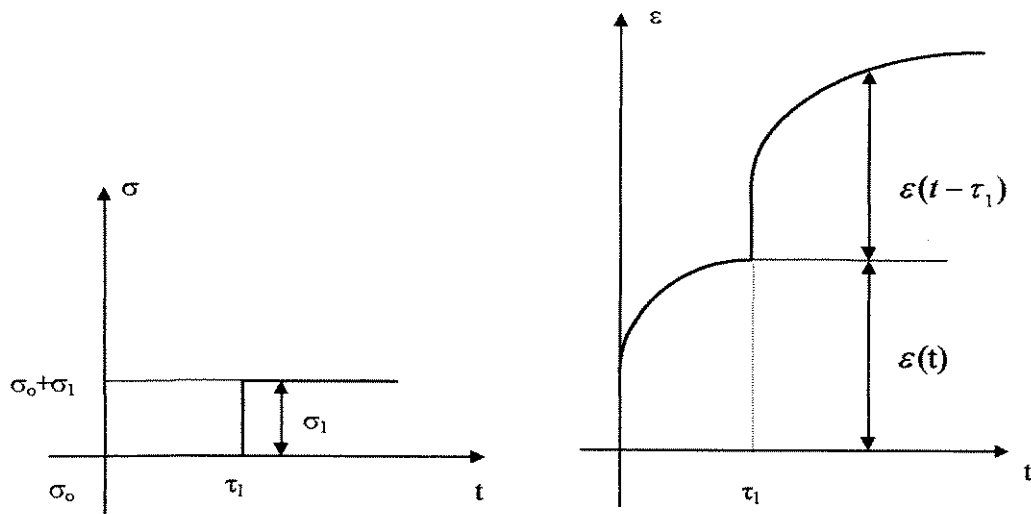


Fig. 4.3 - Princípio da Superposição de Boltzmann

Se a tensão $\sigma(t)$ é variável no tempo pode-se representar esta tensão como uma soma de tensões constantes em cada intervalo de tempo, definindo desta forma uma tensão média em cada intervalo de tempo. Esta representação é feita no gráfico da figura 4.4, abaixo.

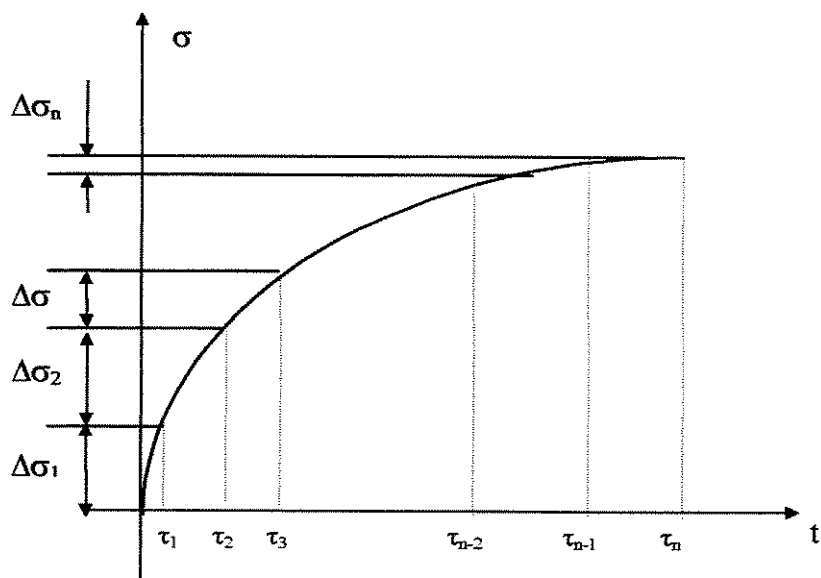


Fig. 4.4 - Variável Tensão Aproximada por uma Série de Tensões Constantes

A função tensão no tempo é dada por:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i H(t - \tau_i) \quad (4.3)$$

O princípio da Superposição de Boltzmann estabelece que a soma das deformações resultantes de cada componente de tensão constante é igual a deformação total resultante das tensões combinadas, ou da função tensão. Portanto pode-se definir a deformação em função da soma das tensões aplicadas.

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(t - \tau_i) = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i J(t - \tau_i) H(t - \tau_i) \quad (4.4)$$

Quando define-se o número de passos no tempo tendendo a infinito, a representação de somatório pode ser transformado em representação integral.

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) H(t - \tau) d(\sigma(\tau)) \quad (4.5)$$

Observando que τ é sempre menor do que o tempo t no intervalo de integração, isto implica

$$\text{que } H(t - \tau) \text{ será sempre igual a 1, pois } H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{p/ } t > \tau \\ 0 & \text{p/ } t < \tau \end{cases}$$

Observa-se ainda que se σ é diferenciável, a equação acima pode ser reescrita como,

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.6)$$

resultando na relação constitutiva deformação-tensão na forma integral, onde $J(t)$ é o módulo de fluência.

Este mesmo procedimento pode ser utilizado novamente, neste caso, aplicando-se uma variação na deformação, dando um salto na deformação e mantendo-a constante. Determina-se então a variação da tensão em função do tempo, enquanto a deformação permanece constante. Assim o princípio da superposição de Boltzmann pode ser aplicado novamente no desenvolvimento, porém, substituindo tensão por deformação e vice-versa. E a variável $J(t)$, módulo de Fluência, deve ser substituída por $E(t)$, módulo de Relaxação. O resultado representa a relaxação da tensão quando uma deformação é definida. A relação tensão-deformação é dada por,

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.7)$$

onde $E(t)$ é o módulo de relaxação.

As relações constitutivas 4.6 e 4.7, pode ser reconhecida através da definição da integral de convolução de Stieltjes. Na realidade, estas relações derivam da exata associação entre a integral

de Stieltjes e a integral de Riemann. A teoria matemática da integral de Stieltjes é apresentada de forma bastante rigorosa por Gurtin e Sternberg, 1962, e proporciona uma importante ferramenta para deduzir as relações de integral de convolução envolvida nas formas integrais das formulações de viscoelasticidade. Estas definições podem ser utilizadas para apresentar outras variações das relações constitutivas, apresentadas na próxima seção.

4.2 Forma Integral da Relação Constitutiva Tensão-Deformação Unidimensional

A forma da convolução da integral de Stieltjes, pode ser utilizada para definir a relação constitutiva tensão-deformação viscoelástica, ver Christensen, 1982 e para teoria das integrais de Stieltjes, ver Gurtin e Sternberg, 1962. Isto é,

$$\sigma_x(t) = E(t) * d\varepsilon_x(t) \quad (4.8)$$

onde σ_x e ε_x representam as tensões e deformações respectivamente. A função $E(t)$ representa a propriedade material dependente do tempo que caracteriza material viscoelástico, chamada de Módulo de Relaxação.

Como definido anteriormente pela integral de Stieltjes, esta convolução pode ser redefinida por,

$$\sigma_x(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) d\varepsilon_x(\tau) \Rightarrow$$

$$\sigma_x(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.9)$$

Quando existe uma descontinuidade no instante $t=0$, isto é quando o processo de integração inicia-se no tempo zero, pode redefinir esta integral através de uma condição inicial. Isto é, $\varepsilon(t) = 0$ para $t < 0$,

$$\sigma_x(t) = E(t)\varepsilon_x(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.10)$$

As propriedades da integral de Stieltjes podem ser utilizadas para redefinir esta relação tensão-deformação. Pode-se utilizar,

$$\sigma_x(t) = E(t) * d\varepsilon_x(t) = \varepsilon_x(t) * dE(t) \quad (4.11)$$

e isto permite definir,

$$\sigma_x(t) = \varepsilon_x(t)E_0 + \int_0^t \varepsilon_x(t-\tau) \frac{\partial E(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.12)$$

Observe que neste caso a parte definida por E_0 é constante no tempo e representa o comportamento elástico do material e a parte que esta dentro da integral de convolução representa o comportamento viscoelástico do material, isto é, representa a propriedade dependente do tempo.

Pode-se apresentar ainda uma relação deformação tensão dada por,

$$\varepsilon_x(t) = J(t) * d\sigma_x(t) \quad (4.13)$$

Neste caso a função $J(t)$ é chamado de Módulo de Fluência. Utilizando-se a mesma notação apresentada anteriormente, pode-se definir a relação deformação -tensão viscoelástica como,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma_x(\tau) \Rightarrow \\ \varepsilon_x(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

ou utilizando as condições iniciais para $t=0$,

$$\varepsilon_x(t) = J(t)\sigma_x(0) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.14)$$

ou utilizando as propriedades da integral de Stieltjes,

$$\varepsilon_x(t) = \sigma_x(t)J(0) + \int_0^t \sigma_x(t-\tau) \frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.15)$$

4.2.1 - Exemplos Numéricos - Equação Constitutiva

A equação constitutiva é avaliada utilizando-se os modelos viscoelásticos apresentados anteriormente, no capítulo 3. Como definido anteriormente, a equação constitutiva pode ser definida de duas formas, tais como,

$$\sigma_x(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.16)$$

onde $E(t)$ foi definido como Módulo de Relaxação, e a equação constitutiva também pode ser definida por,

$$\varepsilon_x(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.17)$$

onde $J(t)$ foi definido como Módulo de Fluência.

Deve-se observar que para determinação do módulo de Relaxação e do módulo de Fluência dos modelos apresentados anteriormente, como os modelos de Kelvin e Maxwell, utilizam-se as funções tensão ($\sigma(t)$) constante para determinar o módulo de Fluência ou a função ($\varepsilon(t)$) deformações constantes para determinar o módulo de Relaxação.

Portanto, para este primeiro caso pode-se utilizar a equação constitutiva para avaliar numericamente o módulo de Fluência. Para determinar o módulo define-se a tensão dependente do tempo constante no tempo, $\sigma(t) = \sigma_0$. A figura 4.5 apresenta o módulo de Fluência para o modelo de Kelvin, que foi determinado anteriormente e é dado pela função,

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$

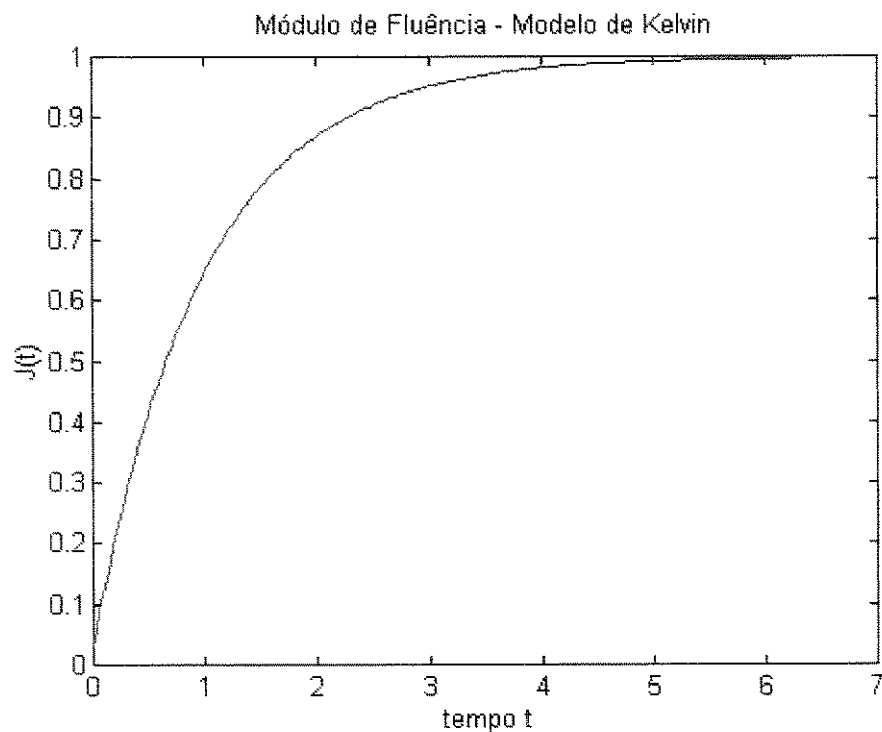


Fig. 4.5 - Módulo de Fluência para o Modelo de Kelvin

O módulo de Fluência para o modelo de Maxwell é avaliado e apresentado na figura 4.6, abaixo, e pode ser obtido pela equação,

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t$$

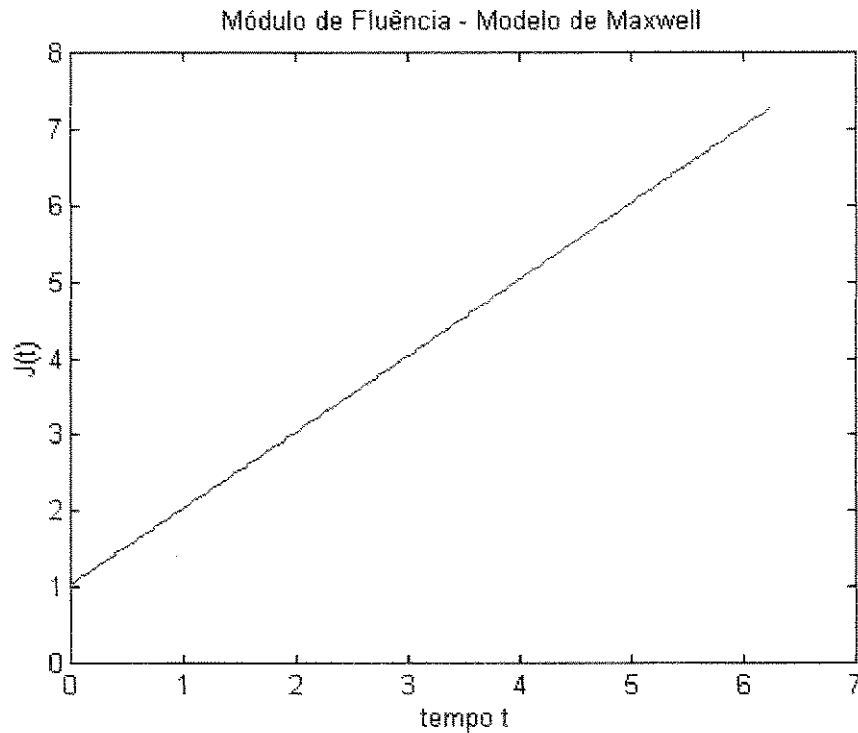


Fig. 4.6 - Módulo de Fluência para o Modelo de Maxwell

Os módulos de Relaxação também podem ser avaliados numericamente, através da relação constitutiva tensão-deformação, dada pela equação 4.16. Para se obter os módulos de Relaxação deve-se definir a função deformação $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ e observa-se a tensão obtida na resposta

Para o modelo de Kelvin, o módulo de Relaxação é representado por

$$J(t) = E + \eta \delta(t)$$

Desta forma, a tensão é diretamente proporcional a deformação e a derivada da deformação no tempo. Nesta análise a deformação deve permanecer constante em qualquer tempo, definindo uma tensão constante em qualquer passo de tempo. Portanto, para este caso não necessita-se plotar o módulo de Relaxação para o modelo de Kelvin.

A figura 4.7 mostra o módulo de Relaxação obtido numericamente para o modelo de Maxwell e que pode ser dado pela equação $E(t) = E e^{-\frac{E}{\eta}t}$

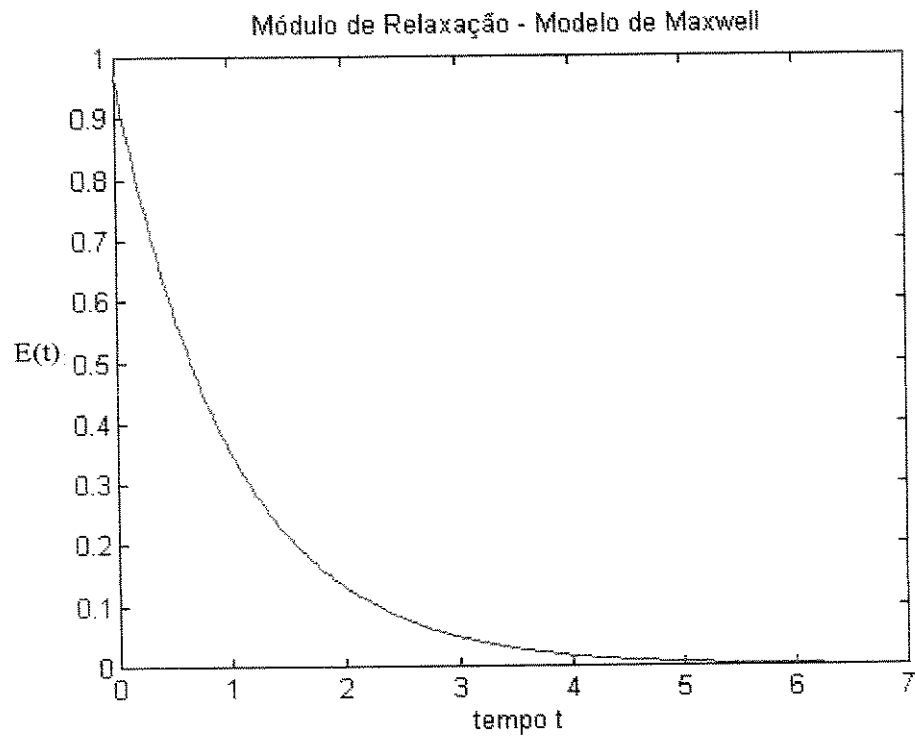


Fig. 4.7 - Módulo de Relaxação para o Modelo de Maxwell

4.3 Forma Integral da Equação de Equilíbrio

A equação de equilíbrio estático para o problema unidimensional é dada pela equação diferencial,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x = 0 \quad (4.18)$$

onde σ_x é a tensão em qualquer ponto x da estrutura e F_x são forças distribuídas por unidade de volume na estrutura.

A relação constitutiva viscoelástica tensão-deformação, definida anteriormente pode ser escrita na forma integral como,

$$\sigma_x(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.19)$$

onde $E(t)$ é a propriedade material dependente do tempo e $\varepsilon(t)$ é a deformação adimensional da estrutura. Esta relação pode ser substituída na equação de equilíbrio para resultar,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right) + F_x = 0 \Rightarrow \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial^2 \varepsilon_x(\tau)}{\partial x \partial \tau} d\tau + F_x = 0 \quad (4.20)$$

Mas, define-se a relação deformação-deslocamento como,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (4.21)$$

Substituindo esta condição de compatibilidade cinemática acima na equação de equilíbrio, resulta a equação de equilíbrio em termos de deslocamentos, isto é,

$$\int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u_x(\tau)}{\partial x^2} \right) d\tau + F_x = 0 \quad (4.22)$$

Desta forma, pode-se solucionar esta equação de equilíbrio unidimensional para obter os deslocamentos $u_x(t)$ na estrutura. As propriedades materiais dependentes do tempo $E(t)$ podem ser representadas pelos modelos viscoelásticos analisados anteriormente, como o modelo de Kelvin e Maxwell. A força F_x representa a força aplicada na direção longitudinal de uma estrutura de barra unidimensional. A seguir deve-se avaliar numericamente esta equação afim de analisar o que ocorre com o comportamento da estrutura em função dos modelos viscoelásticos utilizados.

4.3.1 - Implementação Numérica da Equação de Equilíbrio na Forma Integral

A equação de equilíbrio na sua forma integral (4.22), pode ser solucionada numericamente, para obter as deformações ou os deslocamentos da estrutura viscoelástica submetida a uma força dependente do tempo. Por simplicidade, supõe-se na equação 4.22, que o sistema é representado por uma barra unidimensional com apenas 1 grau de liberdade, onde aplicando-se uma força na extremidade livre pode-se medir a deformação nesta mesma extremidade.

Neste caso, a força distribuída por unidade de volume F_x se transforma em uma força aplicada na extremidade e distribuída sobre a área. Isto resulta em uma tensão constante em todo o comprimento da barra. Desta forma, a distribuição de tensão sobre o comprimento também permanece constante. Portanto, elimina-se a derivada segunda sobre o deslocamento na equação 4.22, isto é,

$$\int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u_x(\tau)}{\partial x^2} \right) d\tau + F_x = 0 \Rightarrow \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u_x(\tau)}{\partial x} \right) d\tau + F_L = 0$$

onde neste ponto F_L representa uma força na extremidade da barra por unidade de área. Uma vez que os deslocamentos também estão sendo avaliados apenas na extremidade da barra, a variação destes deslocamentos sobre o comprimentos podem ser redefinidos para $x=L$, podendo-se então representar a derivada parcial, $\frac{\partial u_x(\tau)}{\partial x}$ em uma forma discreta, isto é,

$$\frac{\Delta u_x(\tau)}{\Delta x} = \frac{u_{x=L}(\tau) - u_{x=0}(\tau)}{L - 0} = \frac{u_L(\tau)}{L} = \frac{u(\tau)}{L}$$

E ainda, tomando-se uma área constante para todo o comprimento da barra, a força F_L distribuída por unidade de área, resulta apenas em uma força concentrada F aplicada na extremidade da barra.

Desta forma, a relação 4.22 pode ser redefinida como,

$$\frac{A}{L} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau = F \quad (4.23)$$

onde A é a área de seção transversal do elemento de barra unidimensional, L o comprimento total deste elemento, F é uma força concentrada na extremidade e u(t) é o deslocamento nesta mesma extremidade (x=L). Define-se ainda que A e L são unitários.

Em seguida, considere uma força F(t) dependente do tempo aplicada sobre a estrutura, onde a função desta força F(t) é conhecida. O módulo de relaxação E(t) de qualquer modelo viscoelástico também é definido. Desta forma, deve-se apenas obter os deslocamentos u(t). Seguindo alguns passos para obter os deslocamentos dependentes do tempo, pode-se observar como esta solução se procede.

O tempo deve ser discretizado em N passos de tempo, isto é, $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$. As funções F(t) e E(t), devem ser conhecidas para cada um destes passos de tempo. A integral da equação 4.23 pode ser definida na forma discreta como,

$$\sum_{i=1}^n \Delta u_i E(t-\tau_i) H(t-\tau_i) = F(t_i) \quad (4.24)$$

onde H(t) é a função Heaviside, mas como t é sempre maior do que τ_i , esta função é constante e igual a unidade. A definição da integral discreta pode ser definida para cada passo de tempo. A força em cada passo de tempo, é definida como constante, dada por,

$$F(t_i) = \frac{F(t_i) + F(t_{i-1})}{2} \quad (4.25)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Os passos que seguem, mostram o procedimento para se obter a resposta, para os deslocamentos, da equação de equilíbrio estático (4.23), representada na forma discreta na equação 4.24. Deve-se observar que esta forma de solução do problema viscoelástico é uma contribuição importante deste trabalho, uma vez que apesar ter como objetivo obter a solução de problemas quase-estáticos em estruturas viscoelásticas, esta apresentada aqui, é desenvolvida de forma a permitir sua extensão na formulação do problema dinâmico viscoelástico, desenvolvida nos capítulos seguintes.

Os passos desta solução do problema quase-estático, a fim de obter a forma final discreta os deslocamentos, são os seguintes:

- passo 1:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} E(t_1 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= F(t_1) \Rightarrow \\
\left(\frac{E(t_1 - t_1) + E(t_1 - t_0)}{2} \right) (u(t_1) - u(t_0)) &= F(t_1) \Rightarrow \\
\left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) (u(t_1) - u(0)) &= F(t_1) \Rightarrow \\
u(t_1) &= \left[F(t_1) + \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) u(0) \right] / \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

- passo 2:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_2} E(t_2 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= F(t_2) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} E(t_1 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} E(t_2 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau = F(t_2) \Rightarrow \\
\left(\frac{E(t_2 - t_1) + E(t_2 - t_0)}{2} \right) (u(t_1) - u(t_0)) &+ \left(\frac{E(t_2 - t_2) + E(t_2 - t_1)}{2} \right) (u(t_2) - u(t_1)) = F(t_2) \Rightarrow \\
\text{mas } t_2 - t_1 &= t_1, \quad t_2 - t_0 = t_2; \quad t_2 - t_2 = 0, \text{ isto é,} \\
\left(\frac{E(t_1) + E(t_2)}{2} \right) (u(t_1) - u(t_0)) &+ \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) (u(t_2) - u(t_1)) = F(t_2) \Rightarrow \\
u(t_2) &= \left[F(t_2) - \left(\frac{E(t_1) + E(t_2)}{2} \right) (u(t_1) - u(t_0)) + \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) u(t_1) \right] / \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2} \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

- passo 3:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_3} E(t_3 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= F(t_3) \Rightarrow \\
\int_{t_0}^{t_1} E(t_3 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau &+ \int_{t_1}^{t_2} E(t_2 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_2}^{t_3} E(t_3 - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau = F(t_3) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{E(t_3 - t_1) + E(t_3 - t_0)}{2}\right)(u(t_1) - u(t_0)) + \left(\frac{E(t_3 - t_2) + E(t_3 - t_1)}{2}\right)(u(t_2) - u(t_1)) + \left(\frac{E(t_3 - t_3) + E(t_3 - t_2)}{2}\right)(u(t_3) - u(t_2)) = F(t_3) \Rightarrow$$

mas, novamente $t_3 - t_1 = t_2$, $t_3 - t_0 = t_3$; $t_3 - t_2 = t_1$, $t_3 - t_1 = t_2$; $t_3 - t_3 = 0$, $t_3 - t_2 = t_1$ isto é,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E(t_2) + E(t_3)}{2}\right)(u(t_1) - u(t_0)) + \left(\frac{E(t_1) + E(t_2)}{2}\right)(u(t_2) - u(t_1)) + \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2}\right)(u(t_3) - u(t_2)) = F(t_3) \Rightarrow \\ &u(t_3) = \left[F(t_3) - \left(\frac{E(t_2) + E(t_3)}{2}\right)(u(t_1) - u(t_0)) - \left(\frac{E(t_1) + E(t_2)}{2}\right)(u(t_2) - u(t_1)) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2}\right)u(t_2) \right] / \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pode-se definir o valor médio da função de relaxação em cada passo de tempo, isto é,

$$\text{passo 1 - } t_0 \rightarrow t_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \left(\frac{E(0) + E(t_1)}{2}\right)$$

$$\text{passo 2 - } t_1 \rightarrow t_2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = \left(\frac{E(t_1) + E(t_2)}{2}\right)$$

$$\text{passo 3 - } t_2 \rightarrow t_3 \quad \Rightarrow \quad E_3 = \left(\frac{E(t_2) + E(t_3)}{2}\right)$$

As relações 4.25, 4.26 e 4.27, podem ser redefinidas como,

$$u(t_1) = (F(t_1) + E_1 u(0)) / E_1$$

$$u(t_2) = (F(t_2) - E_2 (u(t_1) - u(t_0)) + E_1 u(t_1)) / E_1$$

$$u(t_3) = (F(t_3) - E_3 (u(t_1) - u(t_0)) - E_2 (u(t_2) - u(t_1)) + E_1 u(t_2)) / E_1$$

que podem ser reorganizadas para facilitar a implementação,

$$\Delta u_1 = u(t_1) - u(0) = F(t_1) / E_1$$

$$\Delta u_2 = u(t_2) - u(t_1) = (F(t_2) - E_2 (u(t_1) - u(t_0))) / E_1$$

$$\Delta u_3 = u(t_3) - u(t_2) = (F(t_3) - E_3 (u(t_1) - u(t_0)) - E_2 (u(t_2) - u(t_1))) / E_1$$

ou na forma de um somatório,

$$\Delta u_i = \left(F(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} E_{i-j+1} \Delta u_j \right) / E_i \quad (4.29)$$

onde $i = 2, 3, \dots, n$, e $\Delta u_1 = F(t_1)/E_1$.

A equação 4.29 pode então ser implementada para obter a solução da equação de equilíbrio na forma integral (4.22) discretizada.

4.3.2 - Exemplos Numéricos - Equação de Equilíbrio

Alguns exemplos podem ser analisados através da solução numérica da equação de equilíbrio. Pode-se utilizar uma força aplicada na extremidade de uma barra, e dependente do tempo. As respostas dos deslocamentos são obtidos para a extremidade da barra e as propriedades materiais viscoelásticas são representadas pelos modelos estudados anteriormente.

Neste primeiro caso, o objetivo é apenas validar o processo de integração numérica da solução apresentada na equação (4.29). Desta forma, o efeito de amortecimento foi eliminado, podendo-se utilizar tanto o modelo de Kelvin, quanto o modelo de Maxwell, desde que o fator de amortecimento seja minimizado. Portanto, a resposta da figura 4.8, representa apenas o comportamento elástico da estrutura.

Para validar a resposta numérica, pode-se aplicar uma força dependente do tempo, que represente uma resposta conhecida para os deslocamentos na extremidade da barra. Nesta validação da integração proposta anteriormente, o deslocamento obtido na extremidade da barra é dado pela função seno, e é comparado com a função analítica ($\text{fanl}(t)$), isto é, $\text{fanl}(t) = u_L(t) = \text{sen}(t)$, mostrado na figura 4.8. O tempo total de observação é de 2π segundos, com discretização no tempo $\Delta t = 2\pi/100$ segundos, ou seja, com $n = 100$ passos de discretização no tempo.

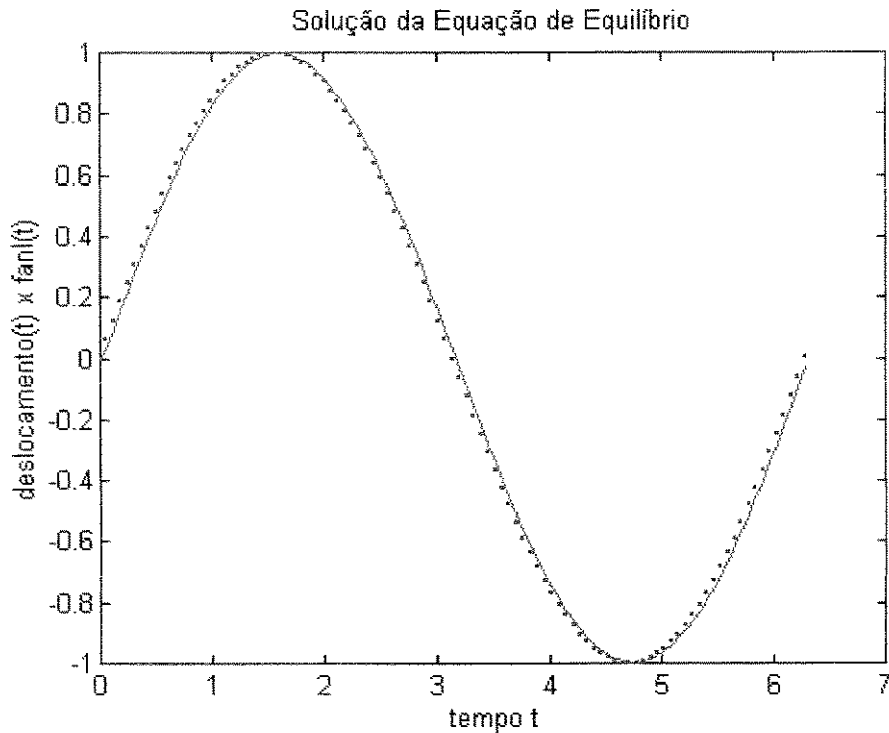


Fig. 4.8 - Verificação da Solução Numérica da Equação de Equilíbrio Viscoelástica

Deve-se observar que, dependendo da complexidade da função obtida na resposta do sistema, isto é, respostas que oscilam bastante em um curto período de tempo ou possuem fortes variações de amplitudes, a definição da discretização no tempo Δt , pode necessariamente ser maior. Para os casos avaliados posteriormente, foram utilizados a discretização do tempo com $n = 100$ passos, pois esta discretização mostrou-se suficiente para se obter uma boa convergência das respostas.

As análises das respostas a serem obtidas por alguns tipos de carregamentos e os modelos de Kelvin e Maxwell estarão voltadas para o comportamento da função deslocamento em função das variações dos fatores de amortecimento do sistema. Pois, quando se pode variar a rigidez do sistema, o comportamento da resposta é bem conhecido, representando um comportamento elástico do sistema. Quando o amortecimento é variado, influencia diretamente o comportamento viscoelástico do sistema. Desta forma, é este comportamento viscoelástico que está sendo enfocado nestes estudos.

Na primeira análise a ser desenvolvida pode-se avaliar o comportamento dos deslocamentos quando aplica-se uma força constante na extremidade da estrutura representada pelo modelo de

Kelvin. Avalia-se então as respostas quando varia-se o amortecimento da estrutura. Quando aplica-se uma força constante para o modelo de Kelvin, resulta que os deslocamentos em função do tempo devem-se ampliar até o valor constante dado pela reação da mola contra a amplitude máxima da força externa que está sendo aplicada. E ainda, a velocidade com que este sistema responde até se estabilizar em um deslocamento constante depende do fator de amortecimento existente no meio. Este efeito pode ser observado no gráfico abaixo. Quando o fator de amortecimento é baixo, os deslocamentos tendem mais rapidamente a estabilizar no valor máximo ($u_L(t) = 1.$). Se o fator de amortecimento cresce, $\eta=0.5$ e $\eta=1.0$, o tempo de relaxação da estrutura é maior, exigindo um tempo maior para o deslocamento máximo a ser atingido, como pode ser observado no gráfico figura 4.9.

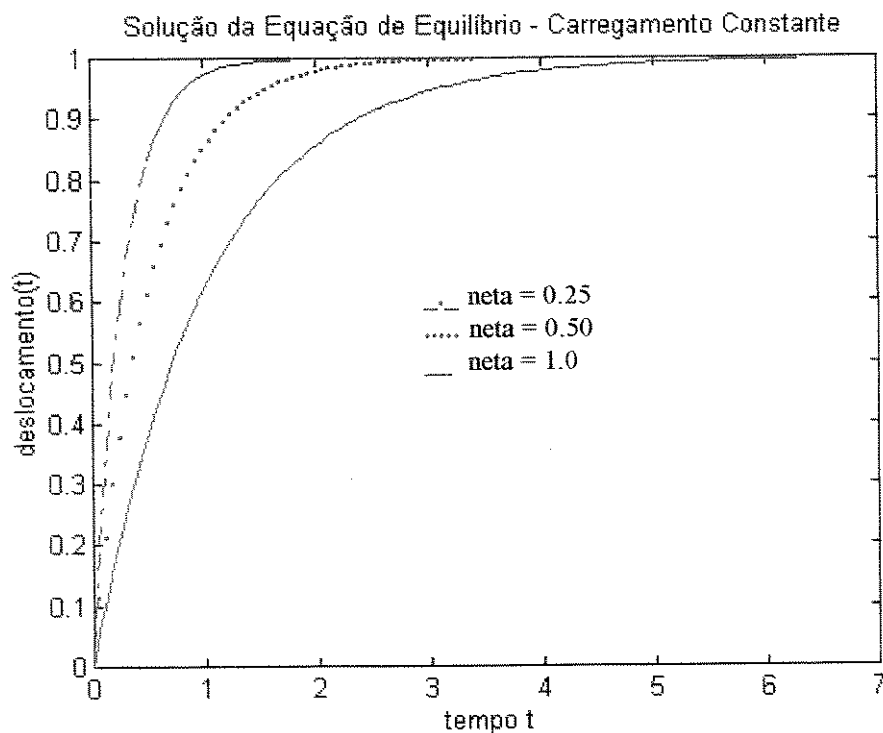


Fig. 4.9 - Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin

Quando utiliza-se um carregamento transiente, como um carregamento harmônico, observa-se que quanto maior o fator de amortecimento, mais tempo o sistema leva para deslocar-se na mesma frequência da força e com amplitude determinada pela reação entre a força excitadora e a mola. Nas figuras 4.10 e 4.11 foram variados os fatores de amortecimento do sistema. Na

primeira, onde existe um fator de amortecimento menor, observa-se que o tempo de estabilização é menor, ou seja, as amplitudes máximas passam a ser constantes mais rapidamente. Na figura seguinte o fator de amortecimento foi aumentado, exigindo um tempo maior de resposta do sistema, para se estabilizar.

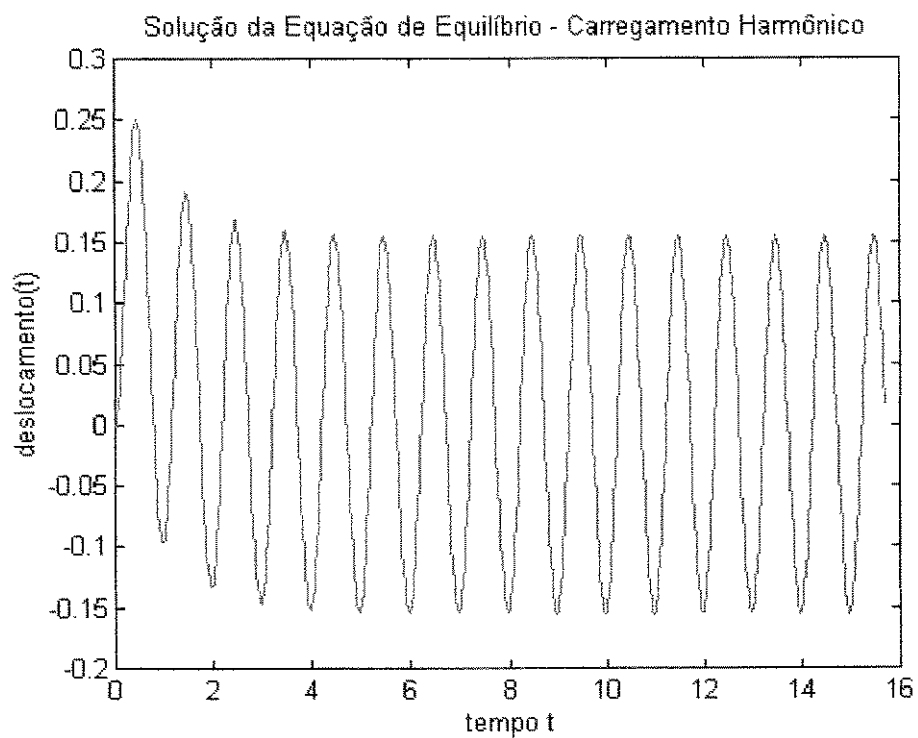


Fig. 4.10 - Efeito do fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin - $\eta = 1.0$

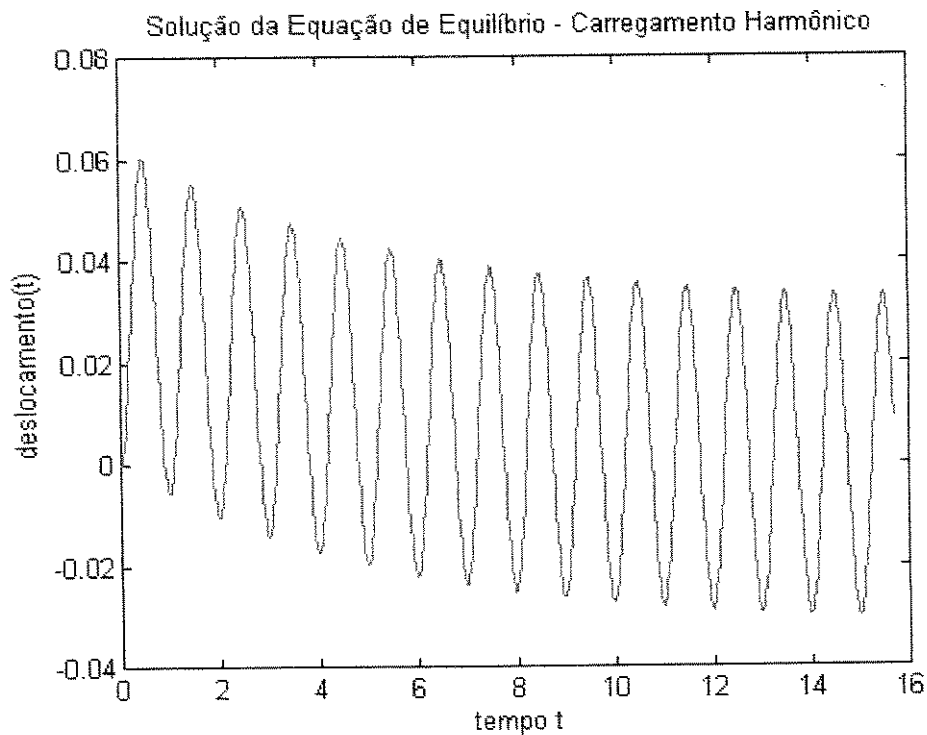


Fig. 4.11 - Efeito do fator de Amortecimento - Modelo de Kelvin - $\eta = 5.0$

A resposta de uma estrutura viscoelástica representada pelo modelo de Maxwell também pode ser avaliada. Em uma primeira análise deve-se observar o comportamento dos deslocamentos da extremidade da barra quando se aplica uma força constante. Observa-se então que, se o carregamento é constante, ocorre um crescimento constante das amplitudes, tendendo ao deslocamento infinito, uma vez que a força não para de ser aplicada. E, a velocidade com que este crescimento ocorre depende do fator de amortecimento da estrutura. Isto pode ser observado na figura 4.12. Observa-se que quanto mais baixo o amortecimento ($\eta=0.25$) mostrado na primeira curva da figura, os deslocamentos tendem ao infinito mais rapidamente. O caso inverso ocorre para $\eta=0.5$ e $\eta=1.0$ onde a inclinação da curva de deslocamentos é reduzida. Deve-se observar ainda que no primeiro instante de aplicação do carregamento, o deslocamento é acrescido rapidamente e depois depende dos efeitos da rigidez e amortecimento da estrutura. Este efeito é observado no início do gráfico, para o tempo próximo do valor zero. Isto se verifica fisicamente, pois como o modelo de Maxwell é representado por um sistema onde existe uma mola (rigidez) e um amortecedor (viscosidade) dispostos em série, este permite uma deformação instantânea, imediatamente quando a força é aplicada sobre o sistema, seguindo-se de um deslocamento

tendendo ao infinito. Este comportamento não é observado em um sistema representado pelo modelo de Kelvin, pois neste caso, mola e amortecedor estão dispostos em paralelo, onde não há deformação instantânea, quando ocorre a aplicação da força.

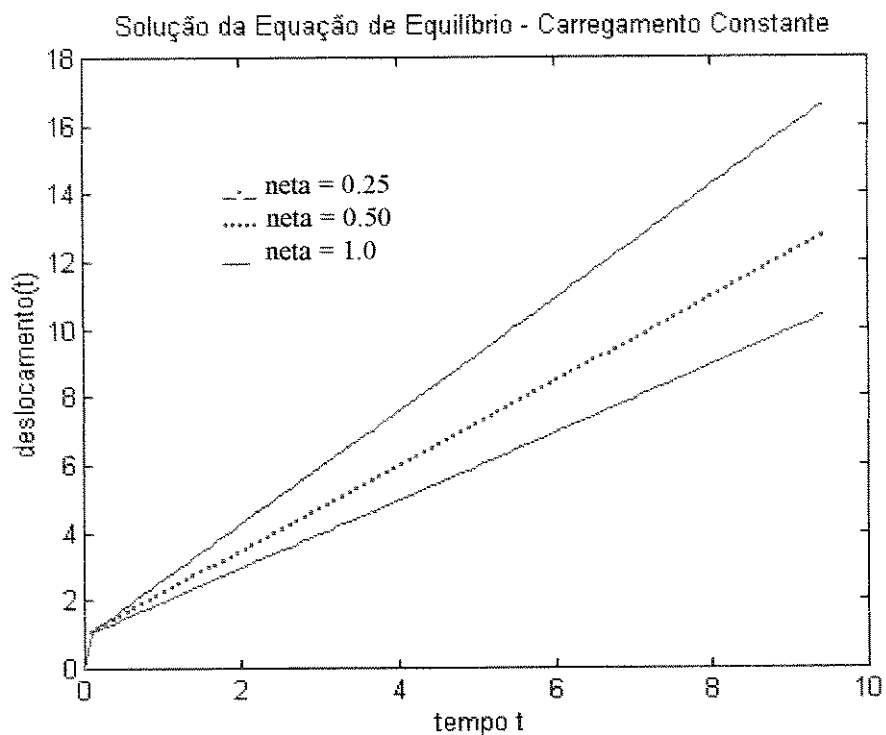


Fig. 4.12 - Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell

Em outra análise utilizando o modelo de Maxwell, pode-se avaliar o que ocorre quando aplica-se uma força excitadora dependente do tempo, como por exemplo uma força harmônica. Como observado na figura 4.13, pode-se verificar que se o fator de amortecimento é baixo, o deslocamento é amplificado rapidamente e finalmente torna-se harmônico em torno de um valor constante, diferente de zero. De forma contrária, quando o amortecimento cresce substancialmente, a resposta do elemento viscoso é muito lenta com relação a força excitadora e este elemento passa a funcionar como um corpo rígido, sem deformação, e o sistema responde apenas com a reação da mola contra a força externa. E como representado no gráfico da figura 4.14, a resposta converge para a resposta de um sistema onde existe apenas o efeito elástico, não apresentando o efeito viscoelástico. Isto é, não há tempo suficiente para que ocorra a relaxação do sistema, pois a relaxação é produzida lentamente, devido a um fator de amortecimento bastante alto ($\eta \rightarrow \infty$).

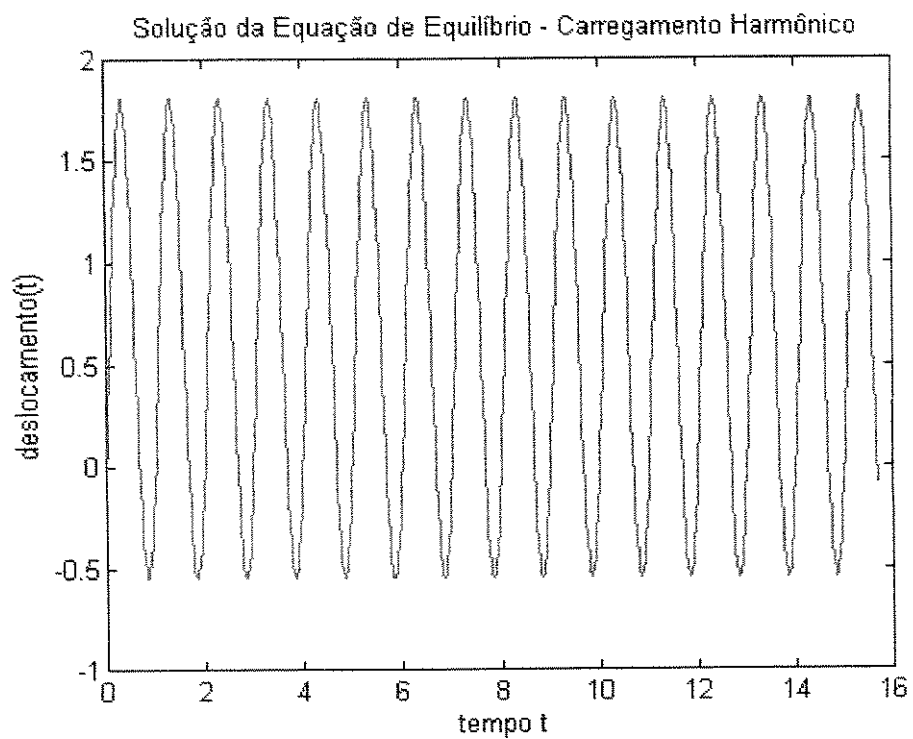


Fig. 4.13 - Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - $\eta \rightarrow 0$.

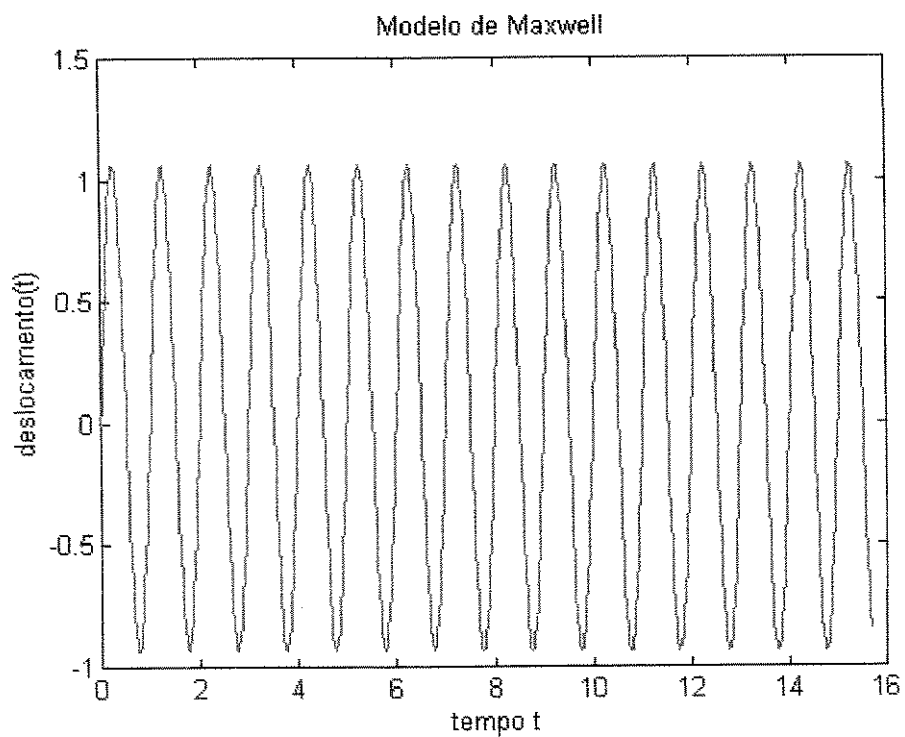


Fig. 4.14 - Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell - $\eta \rightarrow \infty$

Finalmente em uma última análise da resposta de uma estrutura envolvendo o modelo de Maxwell, pode-se avaliar a resposta da estrutura para uma força excitadora harmônica e crescente no tempo. Isto caracteriza um sistema onde os deslocamentos são sempre crescentes, tendendo ao infinito, com amplitude de oscilação constante. Isto é mostrado na figura 4.15. As curvas também caracterizam o efeito do amortecimento sobre a resposta, mostrando que quando o amortecimento decresce a resposta oscila tendendo para o infinito mais rapidamente ($\eta=0.25$).

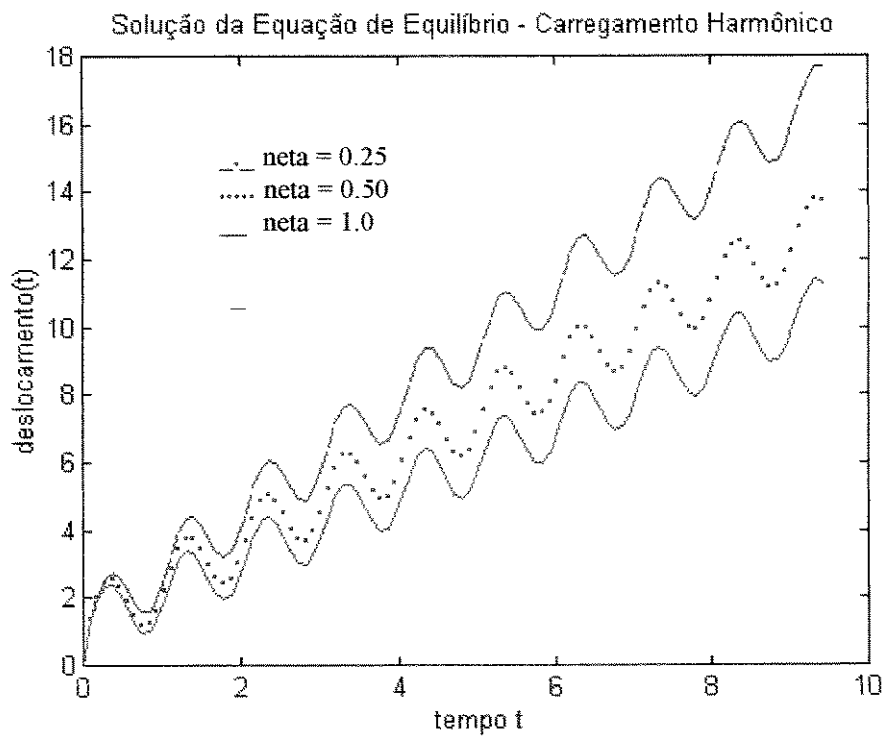


Fig. 4.15 - Efeito do Fator de Amortecimento - Modelo de Maxwell

Capítulo 5

Formulação da Solução para Equação de Equilíbrio Integro-Diferencial do Problema Visco-elastodinâmico Transiente

5.1 Equação de Equilíbrio Dinâmico Transiente - Representação Integral

Nas seções anteriores foi apresentada a formulação e avaliados os resultados para o problema viscoelástico quase-estático, isto é, com uma excitação dependente do tempo, aplicada sobre a estrutura, porém nesta estrutura, não foi considerada a propriedade de inércia da mesma. A extensão do problema anterior, isto é, do problema quase-estático, para o problema dinâmico viscoelástico transiente, consiste em incluir as propriedades de inércia ou massa na formulação.

Isto torna a formulação mais complexa, uma vez que a equação de equilíbrio dinâmico resulta em uma equação denominada integro-diferencial, pois envolve termos de derivadas parciais e integrais na mesma equação final, e que devem ser solucionadas diretamente no tempo.

A equação de equilíbrio estático (4.18), envolvendo a relação constitutiva viscoelástica (4.19) escrita na forma de integral de convolução de Stieltjes, pode ser utilizada para formular o problema dinâmico. Portanto, para o problema dinâmico, deve ser inserido naquela equação o termo caracterizando a inércia do sistema. Para permitir uma melhor compreensão dos passos apresentados na formulação, deve-se omitir as derivadas espaciais, envolvidas em um sistema contínuo, para desenvolver a solução, representando um sistema mecânico como se estivesse um grau de liberdade. A forma final da solução, será posteriormente estendida para incluir a formulação de Elementos Finitos.

A equação do movimento integro-diferencial para o sistema forçado é dada por:

$$M\ddot{u} + K' \int_0^t E(t-\tau) \dot{u} d\tau = F \quad (5.1)$$

onde M = representa o termo de inércia do sistema;

K' = representa a constante de rigidez do sistema;

$E(t-\tau)$ = representa a rigidez dependente do tempo, caracterizando a propriedade viscoelástica do sistema;

$\ddot{u} = \ddot{u}(t)$ = aceleração;

$\dot{u} = \dot{u}(t)$ = velocidade; e

$F = F(t)$ = forças externas.

Para determinar a resposta do sistema linear, o qual é governado pela equação do movimento acima, pode-se aproximar as derivadas que aparecem na equação através da solução discreta no tempo, isto é utilizando uma integração numérica passo a passo. Embora existam muitos métodos para realizar a integração numérica, um dos mais úteis é o método da aceleração média constante, o qual faz parte da família de Newmark. Este será escolhido para ser utilizado na solução da equação do movimento, como utilizado na solução do problema elastodinâmico, principalmente pela sua característica de boa estabilidade numérica, o que não ocorre em outros métodos de integração numérica no tempo. O método da aceleração média é definido na família de Newmark como $\beta=1/4$ e $\gamma=1/2$. Pode-se obter uma análise comparativa sobre integradores no tempo e critérios de convergências para aplicação destes integradores, no trabalho de Hughes, 1987.

O integrador de Newmark para aceleração média, caracteriza-se por definir uma aceleração média em um dado intervalo de tempo Δt , e que permite encontrar as relações das velocidades e deslocamentos do sistema mecânico neste mesmo passo de tempo, dependendo de seus valores nos passos de tempos anteriores. Resulta que, a aceleração é determinada como constante em cada intervalo de tempo, definida por um valor médio neste intervalo. Consequentemente, as velocidades serão determinadas por uma função linear e os deslocamentos por uma função

quadrática, nos intervalos de tempo. A integração numérica utilizando o método de Newmark para aceleração média é representada na figura 5.1.

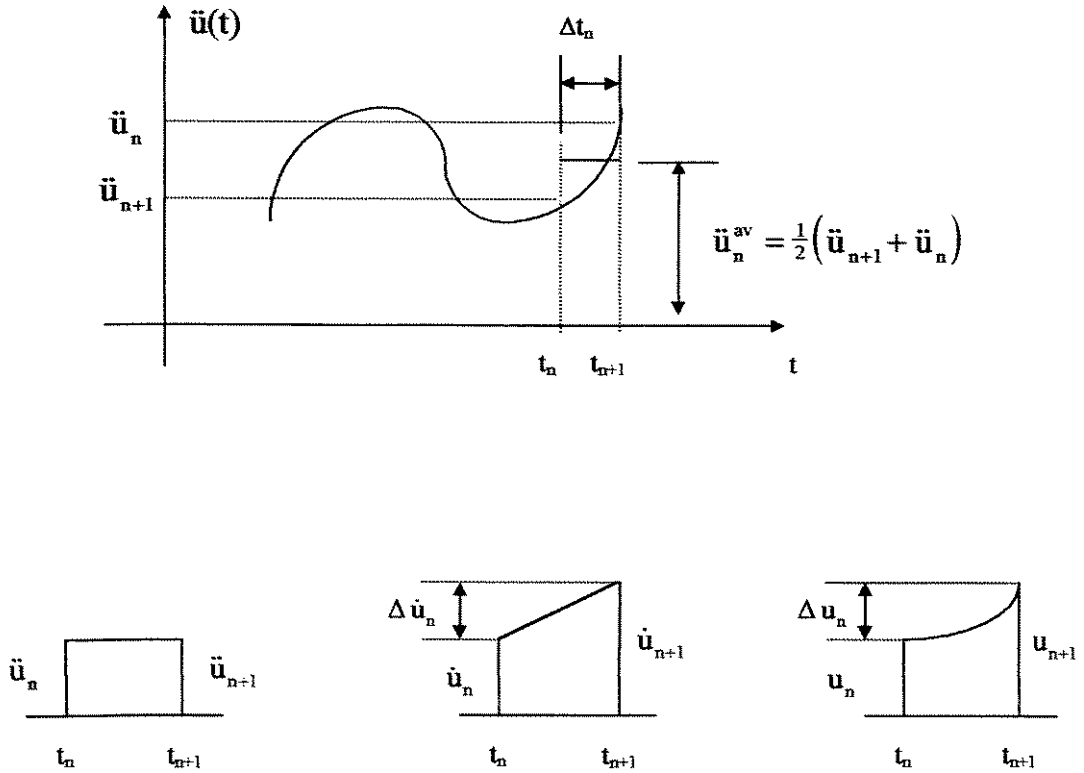


Fig. 5.1 - Integração Numérica do Método de Newmark para Aceleração Média

As funções de velocidade e deslocamentos dependentes do tempo devem ser explicitadas de forma direta na variável tempo, não apenas na forma discreta, como é comumente aplicado o integrador de Newmark, pois estas funções devem ser inseridas na equação de equilíbrio dinâmico viscoelástico e integradas, para posteriormente tornarem-se discretas, dependentes apenas dos valores iniciais e finais em cada passo de tempo, isto é, dos valores das funções avaliadas para t_n e t_{n+1} , respectivamente.

Observa-se que a aceleração no intervalo de tempo t_n à t_{n+1} é obtida como uma média da aceleração inicial e final, isto é,

$$\ddot{u}_n^{av} = \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \quad (5.2)$$

a função aceleração é constante no intervalo de tempo Δt e representado pela própria aceleração média:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_n^{av} = \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \quad (5.3)$$

Isto resultará, após as integrações no tempo, em uma função velocidade linear e uma função deslocamento quadrática como é mostrado graficamente na figura 5.1.

A função aceleração pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= \frac{d\dot{u}(t)}{dt} = \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \Rightarrow \\ \int_{\dot{u}(t_n)}^{\dot{u}(\tau')} d\dot{u}(t) &= \int_{t_n}^{\tau'} \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} dt \Rightarrow \\ \dot{u}(t) \Big|_{\dot{u}(t_n)}^{\dot{u}(\tau')} &= \left(\frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \right) \Big|_{t_n}^{\tau'} \Rightarrow \\ \dot{u}(\tau') - \dot{u}(t_n) &= \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} (\tau' - t_n) \end{aligned} \quad (5.4)$$

portanto a função velocidade linear, para $\dot{u}(t_n) = u_n$

$$\dot{u}(\tau') = \dot{u}_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} (\tau' - t_n) \quad (5.5)$$

Pode-se reescrever a função velocidade como,

$$\begin{aligned} \dot{u}(\tau') &= \frac{du(\tau')}{d\tau'} = \dot{u}_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} (\tau' - t_n) \Rightarrow \\ \int_{u(t_n)}^{u(\tau')} du(\tau') &= \int_{t_n}^{\tau'} \dot{u}_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} (\tau' - t_n) d\tau' \Rightarrow \\ u(\tau') \Big|_{u(t_n)}^{u(\tau')} &= \left[\dot{u}_n \tau' + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \left(\frac{\tau'^2}{2} - t_n \tau' \right) \right] \Big|_{t_n}^{\tau'} \Rightarrow \\ u(\tau') - u(t_n) &= \left(\dot{u}_n \tau' + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \left(\frac{\tau'^2}{2} - t_n \tau' \right) \right) - \left(\dot{u}_n t_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \left(\frac{t_n^2}{2} - t_n t_n \right) \right) \Rightarrow \\ u(\tau') - u(t_n) &= \dot{u}_n (\tau' - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \left(\frac{\tau'^2}{2} - t_n \tau' - \frac{t_n^2}{2} + t_n^2 \right) \Rightarrow \\ u(\tau') - u(t_n) &= \dot{u}_n (\tau' - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \left(\frac{\tau'^2 - 2t_n \tau' + t_n^2}{2} \right) \Rightarrow \\ u(\tau') - u(t_n) &= \dot{u}_n (\tau' - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{4} (\tau' - t_n)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

portanto para $u(t_n) = u_n$, a equação resulta,

$$u(\tau) = u_n + \dot{u}_n(\tau - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{4}(\tau - t_n)^2 \quad (5.7)$$

A função deslocamento é dada por uma função quadrática, como observado nos gráficos da figura 5.1. Deve-se salientar que τ' e τ'' são tempos t definidos dentro do intervalo t_n a t_{n+1} .

A função $u(t)$, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ devem ser substituídas na equação do movimento integro-diferencial. Nota-se que a equação integro-diferencial possui uma integral de convolução $E(t-\tau)$ e $\dot{u}(t)$, o que dificulta a solução desta integral quando não se define a função $E(t-\tau)$, uma vez que a integração numérica não pode ser executada enquanto não se identifica o produto $E(t-\tau) \cdot \dot{u}(t)$.

Portanto para dar seqüência a formulação, até tornar a equação integro-diferencial discreta e consequentemente programável, deve-se fazer uma integração por partes neste termo, isto é, na integral de convolução, afim de passar o termo de velocidade dentro da integral de convolução para um termo de aceleração. Isto permitirá uma solução facilitada da integração uma vez que a função aceleração é uma função constante no tempo e não necessita portanto permanecer dentro da integral no tempo.

Faz-se então uma integração por partes no segundo termo da equação integro diferencial, (5.1), rerepresentada aqui,

$$M\ddot{u}(t) + K \int_0^t E(t-\tau) \dot{u}(\tau) d\tau = F(t)$$

Definição da integral por partes,

$$w = \dot{u} \Rightarrow dw = \ddot{u} d\tau$$

$$dv = E(t-\tau) d\tau \Rightarrow v = \int_0^t E(t-\tau) d\tau$$

$$\text{onde } \int w dv = w \cdot v - \int v dw$$

Portanto a integral de convolução se transforma em,

$$\int_0^t E(t-\tau) \dot{u}(\tau) d\tau = \left(\dot{u}(\tau) \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' \right) \Big|_0^t - \int_0^t \ddot{u}(\tau) \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' d\tau \quad (5.8)$$

e pode ser substituída na equação do movimento,

$$M \ddot{u}(t) + K \left[\left(\dot{u}(\tau) \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' \right) \Big|_0^t - \int_0^t \ddot{u}(\tau) \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' d\tau \right] = F(t) \quad (5.9)$$

Pode-se definir

$$K_1(\tau) = \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' \quad (5.10)$$

e substituir na equação acima

$$\Rightarrow M \ddot{u}(t) + K \left[\left(\dot{u}(\tau) K_1(\tau) \right) \Big|_0^t - \int_0^t \ddot{u}(\tau) K_1(\tau) d\tau \right] = F(t)$$

que resulta,

$$M \ddot{u}(t) + K \left[\left(\dot{u}(t) K_1(t) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \int_0^t \ddot{u}(\tau) K_1(\tau) d\tau \right] = F(t) \quad (5.11)$$

As funções discretas definidas anteriormente para a aceleração e velocidade devem ser utilizadas para substituir os termos na equação acima, tornando-a discreta, onde $t = t_{n+1}$.

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \int_0^{t_{n+1}} \ddot{u}(\tau) K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1}) \quad (5.12)$$

Neste ponto, através de um somatório, pode-se mudar os intervalos de integração da integral que aparece na equação acima, de $0 \rightarrow t_{n+1}$ para $t_i \rightarrow t_{i+1}$. Desta forma, a integral deve ser executada apenas em cada intervalo de tempo e o tempo total será obtido com o somatório de todos esses intervalos. A equação 5.12 pode então ser reescrita como,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}(\tau) K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1}) \quad (5.13)$$

Substituindo ainda o valor de $\ddot{u}(t)$ no intervalo de integração $t_i \rightarrow t_{i+1}$, pois para cada passo de tempo o valor da aceleração é constante, dada por,

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_i^{av} = \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2}$$

e definida por $\ddot{u}_i^{av}$ na equação anterior,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}_i^{av} K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1})$$

resulta,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1}) \quad (5.14)$$

Portanto como o termo de aceleração dentro da integral é constante no intervalo de tempo $t_i \rightarrow t_{i+1}$, este pode ficar fora da integral,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1})$$

Deve-se observar que o termo $\ddot{u}_{i+1}$ para $i = n$ deve ser retirado do somatório pois este é uma incógnita, portanto o somatório deve ser dividido em dois intervalos distintos, isto é,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau - \sum_{i=n}^{i=n} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1})$$

Portanto o segundo somatório é avaliado apenas no passo de tempo para $i = n$, o que faz com que o somatório desapareça,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau - \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} K_1(\tau) d\tau \right] = F(t_{n+1}) \quad (5.15)$$

Define-se também,

$$K_2(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow K_2(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' d\tau \quad (5.16)$$

O que substituindo na equação anterior resulta,

$$M \ddot{u}(t_{n+1}) + K \left[\left(\dot{u}(t_{n+1}) K_1(t_{n+1}) - \dot{u}(0) K_1(0) \right) - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2(t = t_i) - \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} K_2(t = t_n) \right] = F(t_{n+1}) \quad (5.17)$$

Simplificando-se os termos da equação acima, isto é,

$$M \ddot{u}_{n+1} + K \left[\left(\dot{u}_{n+1} K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 \right) - \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} K_2^n \right] = F_{n+1} \quad (5.18)$$

Das relações definidas anteriormente para $u(t)$, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ tem-se,

$$u(t) = u(t_n) + \dot{u}_n(t - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{4}(t - t_n)^2 \quad (5.19)$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2}(t - t_n) \quad (5.20)$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_n^{av} = \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \quad (5.21)$$

Pode-se ainda defini-la na forma discreta no tempo, para $t = t_{n+1}$,

$$u(t_{n+1}) = u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n(t_{n+1} - t_n) + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{4}(t_{n+1} - t_n)^2 \quad (5.22)$$

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2}(t_{n+1} - t_n) \quad (5.23)$$

e posteriormente definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n \right) \frac{\Delta t^2}{4} \quad (5.24)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \frac{\Delta t}{2} \quad (5.25)$$

Substitui-se as relações para $\dot{u}(t) = \dot{u}(t_{n+1}) = \dot{u}_{n+1}$ dada acima, na equação integro diferencial,

$$M \ddot{u}_{n+1} + K \left\{ \left(\dot{u}_n + (\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \frac{\Delta t}{2} \right) K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} K_2^n \right\} = F_{n+1}$$

O último termo do lado esquerdo da equação pode ser separado afim de substituirmos a equação para $\ddot{u}_{n+1}$, isto é,

$$M \ddot{u}_{n+1} + K \left\{ \left(\dot{u}_n + (\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \frac{\Delta t}{2} \right) K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \frac{\ddot{u}_{n+1}}{2} K_2^n - \frac{\ddot{u}_n}{2} K_2^n \right\} = F_{n+1}$$

A equação de $\ddot{u}(t) = \ddot{u}(t_{n+1}) = \ddot{u}_{n+1}$ pode ser manipulada a fim de ser substituída na equação integro-diferencial, como sendo,

$$\ddot{u}_{n+1} = (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \quad (5.26)$$

que na substituição resulta,

$$M \left\{ (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \right\} + K \left\{ \left(\dot{u}_n + \left((u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n + \ddot{u}_n \right) \frac{\Delta t}{2} \right) K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \left((u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \right) \frac{K_2^n}{2} - \ddot{u}_n \frac{K_2^n}{2} \right\} = F_{n+1}$$

O dois últimos termos do lado esquerdo da equação pode ser manipulados para serem simplificados,

$$M \left\{ (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \right\} + K \left\{ \left(\dot{u}_n + \left((u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n + \ddot{u}_n \right) \frac{\Delta t}{2} \right) K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \left((u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \right) \frac{K_2^n}{2} + \ddot{u}_n \frac{K_2^n}{2} - \ddot{u}_n \frac{K_2^n}{2} \right\} = F_{n+1}$$

Desta forma os termos $\ddot{u}_n$ e $\ddot{u}_n \frac{K_2^n}{2}$ que multiplicam K desaparecem da equação, isto é,

exceto $\ddot{u}_n$ no primeiro termo da equação que multiplica M . Isto resulta,

$$M \left\{ \left(u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t \right) \frac{4}{\Delta t^2} - \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ \left(\dot{u}_n + \left(u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t \right) \frac{4}{\Delta t^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \right\} K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \left(u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t \right) \frac{4}{\Delta t^2} \frac{K_2^n}{2} \Bigg\} = F_{n+1} \quad (5.27)$$

Os passos seguintes rearranjam cada termo da equação afim de separar os deslocamentos u_{n+1} dos demais termos da equação. Fazemos isto no primeiro termo,

$$\frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ \left(\dot{u}_n + \left(u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t \right) \frac{4}{\Delta t^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \right\} K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \left(u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t \right) \frac{4}{\Delta t^2} \frac{K_2^n}{2} \Bigg\} = F_{n+1}$$

Posteriormente no segundo termo da equação,

$$\frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n + (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} \frac{K_2^n}{2} \right\} = F_{n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} u_{n+1} - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{4}{\Delta t^2} \frac{K_2^n}{2} \right\} = F_{n+1}$$

e em seguida no último termo da equação,

$$\frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} u_{n+1} - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - (u_{n+1} - u_n - \dot{u}_n \Delta t) \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n \right\} = F_{n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} u_{n+1} - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n u_{n+1} + \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n (u_n + \dot{u}_n \Delta t) \right\} = F_{n+1}$$

Pode-se então aglutinar todos os termos que envolvem u_{n+1} , para resultar,

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} + K' \left\{ \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} u_{n+1} - \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n u_{n+1} \right\} - \\ & - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \right. \\ & \left. - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i + \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n (u_n + \dot{u}_n \Delta t) \right\} = F_{n+1} \end{aligned}$$

e posteriormente,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} - \\ & - M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \right. \\ & \left. - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i + \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n (u_n + \dot{u}_n \Delta t) \right\} = F_{n+1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Os deslocamentos u_{n+1} são as únicas incógnitas do sistema acima (eq. 5.28) para cada passo de tempo. Portanto, devem permanecer do lado esquerdo do sistema apenas os termos associados a estes deslocamentos. Os demais termos são constantes no passo de tempo, pois são dados dos passos de tempo anteriores, e devem ser deslocados para o lado direito da igualdade, o que resultará,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} = \\ & = F_{n+1} + M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} - K' \left\{ K_1^{n+1} \dot{u}_n - \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - \right. \\ & \left. - \dot{u}_0 K_1^0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i + \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n (u_n + \dot{u}_n \Delta t) \right\} \Rightarrow \\ & \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} = \\ & = F_{n+1} + M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ -K_1^{n+1} \dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t} K_1^{n+1} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \right. \\ & \left. + \dot{u}_0 K_1^0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i - \frac{2}{\Delta t^2} K_2^n (u_n + \dot{u}_n \Delta t) \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} =$$

$$= F_{n+1} + M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + K' \left\{ (K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n) \frac{2}{\Delta t^2} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - K_1^{n+1} \dot{u}_n + \right.$$

$$\left. + \dot{u}_0 K_1^0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i \right\}$$

que finalmente resulta,

$$\left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} =$$

$$= F_{n+1} + M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} +$$

$$+ K' \left\{ (K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n) \frac{2}{\Delta t^2} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - K_1^{n+1} \dot{u}_n + K_1^0 \dot{u}_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i \right\} \quad (5.30)$$

A equação acima representa um sistema de equações dinâmico equivalente, representado por,

$$[K_{eq}] \{u\} = \{F_{eq}\} \quad (5.31)$$

onde K_{eq} representa a matriz do lado esquerdo do sistema como sendo uma rigidez equivalente, F_{eq} representa o vetor força equivalente, o qual é dado por todas as variáveis já conhecidas nos seus passos anteriores ao que está sendo analisado e finalmente o vetor 'u' representa o vetor deslocamento no passo de tempo em questão. E são dados por,

$$[K_{eq}] = \left[\frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right] \quad (5.32)$$

$$\{F_{eq}\} = \left\{ F_{n+1} + M \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 (u_n + \dot{u}_n \Delta t) + \ddot{u}_n \right\} + \right.$$

$$\left. + K' \left\{ (K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n) \frac{2}{\Delta t^2} (u_n + \dot{u}_n \Delta t) - K_1^{n+1} \dot{u}_n + K_1^0 \dot{u}_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2^i \right\} \right\} \quad (5.33)$$

onde K_1 e K_2 , são dependentes do tempo, como definido anteriormente, e repetidas abaixo,

$$K_1(\tau) = \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau'$$

$$K_2(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow K_2(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' d\tau$$

Estas duas relações dependem das funções de relaxação do material viscoelástico, e devem ser avaliadas na próxima seção.

Portanto, a equação (5.31) pode ser solucionada para u_{n+1} , pois esta é a única incógnita, e uma vez que esta equação é linear, o princípio da superposição pode ser aplicado, determinando que os passos de tempo seguintes podem ser obtidos em função dos passos de tempo anteriores, a fim de desenvolvê-la a cada passo de tempo e solucionar o problema transiente em todos os passos de tempo seguintes.

5.2 Integração das Funções de Relaxação

As funções de relaxação devem ser previamente preparadas a fim de serem introduzidas na equação de equilíbrio integro-diferencial discreta (5.31). Desta forma, dada a Função de Relaxação, obtida através de modelos viscoelásticos ou experimentalmente, as quais definem o módulo de Elasticidade dependente do tempo $E(t)$ para os modelos viscoelásticos, pode-se obter a integral de convolução desta função para utilizá-la na solução da equação integro-diferencial apresentada na formulação da seção anterior. Nestas análises deve-se utilizar as funções de relaxação para os modelos viscoelásticos de Maxwell e de Kelvin, definidas na seção 3.2. Porém, como já observado nas teorias apresentadas nos capítulos anteriores, estas funções podem facilmente serem substituídas por funções de Relaxação obtidas em experimentos.

- Modelo de Maxwell

O modelo está mostrado na figura 5.2,



Fig. 5.2 - Modelo Viscoelástico de Maxwell

e a função de Relaxação correspondente a este modelo é,

$$E(t) = E_1 e^{-E_1 t / \eta} \quad (5.34)$$

onde $\beta = \frac{E_1}{\eta}$, e essas constantes já foram definidas nas seções anteriores (capítulo 3)

A integral de Convolução dada abaixo, faz parte da equação integro-diferencial, e deve ser tratada separadamente.

$$K_1(\tau) = \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' \quad (5.35)$$

Portanto, para se obter a integral acima, pode-se utilizar a função de Relaxação $E(t-\tau') = E_1 e^{-\beta(t-\tau')}$. Desta forma a integral resulta,

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \int_0^\tau E_1 e^{-\beta(t-\tau')} d\tau' \Rightarrow K_1(\tau) = \int_0^\tau E_1 e^{-\beta t} e^{\beta \tau'} d\tau' \Rightarrow \\ K_1(\tau) &= E_1 e^{-\beta t} \left(e^{\beta \tau} \frac{1}{\beta} \right) \Big|_0^\tau \Rightarrow K_1(\tau) = E_1 e^{-\beta t} \frac{1}{\beta} (e^{\beta \tau} - e^{\beta 0}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$K_1(\tau) = \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta \tau} - 1) \quad (5.36)$$

A função $K_1(\tau)$ é dependente do tempo e pode ser definida para $\tau = t$, isto é, resultará em uma função apenas de t .

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta \tau} - 1) \Rightarrow K_1(\tau = t) = \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta t} - 1) \Rightarrow K_1(t) = \frac{E_1}{\beta} (e^{-\beta t} e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \Rightarrow \\ K_1(t) &= \frac{E_1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned} \quad (5.37)$$

A função $K_1(\tau)$ pode ser integrada novamente em τ , antes de ser definida como função de t . Desta forma resulta,

$$K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E(t-\tau') d\tau' d\tau \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E_1 e^{-\beta(t-\tau')} d\tau' d\tau \Rightarrow K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta \tau} - 1) d\tau \Rightarrow \\ K_2(t) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (e^{\beta \tau} - 1) d\tau \Rightarrow K_2(t) = \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left(e^{\beta \tau} \frac{1}{\beta} - t \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \Rightarrow \\ K_2(t) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\left(\frac{e^{\beta t_{i+1}}}{\beta} - t_{i+1} \right) - \left(\frac{e^{\beta t_i}}{\beta} - t_i \right) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$K_2(t) = \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \quad (5.39)$$

Deve-se observar que a função $K_2(t)$ deve ser definida em dois pontos distintos na equação integro-diferencial. No primeiro caso define-se $K_2(t_{n+1}) = K_2^{n+1}$ no primeiro termo $\left(\left\{ \frac{4}{\Delta t^2} M + K' \left\{ K_1^{n+1} \Delta t - K_2^n \right\} \frac{2}{\Delta t^2} \right\} u_{n+1} \right)$ da equação integro-diferencial. Portanto, neste caso $K_2(t)$ é avaliado para o tempo $t = t_{i+1} = t_{n+1}$, o que resulta,

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \Rightarrow \\ K_2(t = t_{n+1}) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{n+1}} - e^{\beta t_n}) - (t_{n+1} - t_n) \right] \Rightarrow \\ K_2(t_{n+1}) &= \frac{E_1}{\beta^2} (e^{-\beta t_{n+1}} e^{\beta t_{n+1}} - e^{-\beta t_{n+1}} e^{\beta t_n}) - \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) \Rightarrow \\ K_2(t_{n+1}) &= \frac{E_1}{\beta^2} (1 - e^{-\beta (t_{n+1} - t_n)}) - \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Em um segundo caso, $K_2(t)$ é definido na equação integro-diferencial de forma diferente, isto é define-se $t = t_{n+1}$, mas t_{i+1} pode variar dentro do somatório, que resulta,

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \Rightarrow \\ K_2(t = t_{n+1}) &= \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

Isto ocorre pois o tempo t_{i+1} varia dentro de um somatório, na equação integro-diferencial, enquanto t_{n+1} permanece constante para avaliar até este passo de tempo. Como mostrado no somatório abaixo,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau$$

e sendo $K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau$, pode-se substituí-lo no somatório acima,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2(t)$$

e o termo envolvendo o somatório resulta,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \left[\frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \right] \quad (5.42)$$

O modelo composto Kelvin-Maxwell utilizado nas análises está representado na figura 5.3, abaixo,

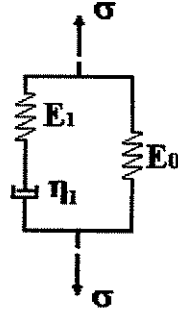


Fig. 5.3 - Modelo Kelvin-Maxwell

e a função de Relaxação para este modelo é dada por,

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{-E_1 t / \eta} \quad (5.43)$$

onde define-se novamente, $\beta = \frac{E_1}{\eta}$

Para se obter a integral de Convolução dada abaixo (5.10),

$$K_1(\tau) = \int_0^\tau E(t - \tau') d\tau'$$

deve-se utilizar neste caso a função de Relaxação $E(t - \tau') = E_0 + E_1 e^{-\beta(t - \tau')}$.

Desta forma esta integral pode ser novamente desenvolvida como apresentado abaixo,

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \int_0^\tau E_0 + E_1 e^{-\beta(t - \tau')} d\tau' \Rightarrow K_1(\tau) = \int_0^\tau E_0 d\tau' + \int_0^\tau E_1 e^{-\beta(t - \tau')} d\tau' \Rightarrow \\ K_1(\tau) &= \int_0^\tau E_0 d\tau' + \int_0^\tau E_1 e^{-\beta t} e^{\beta \tau'} d\tau' \Rightarrow K_1(\tau) = E_0 \int_0^\tau d\tau' + E_1 e^{-\beta t} \int_0^\tau e^{\beta \tau'} d\tau' \Rightarrow \\ K_1(\tau) &= E_0 e^{-\beta t} (\tau') \Big|_0^\tau + E_1 e^{-\beta t} \left(e^{\beta \tau'} \frac{1}{\beta} \right) \Big|_0^\tau \Rightarrow \\ K_1(\tau) &= E_0 (\tau - 0) + E_1 e^{-\beta t} \frac{1}{\beta} (e^{\beta \tau} - e^{\beta 0}) \Rightarrow \\ K_1(\tau) &= E_0 \tau + E_1 e^{-\beta t} \frac{1}{\beta} (e^{\beta \tau} - 1) \end{aligned} \quad (5.44)$$

A função $K_1(\tau)$ é definida para $\tau = t$, isto é,

$$\begin{aligned}
K_1(\tau) &= E_0 \tau + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta \tau} (e^{\beta \tau} - 1) \Rightarrow K_1(\tau = t) = E_0 t + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta t} - 1) \Rightarrow \\
K_1(t) &= E_0 t + \frac{E_1}{\beta} (e^{-\beta t} e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \Rightarrow \\
K_1(t) &= E_0 t + \frac{E_1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Pode-se obter a segunda integral no tempo, definida como uma função do tempo $K_2(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
K_2(t) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E(t - \tau') d\tau' d\tau \tag{5.46} \\
K_2(t) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\tau E_0 + E_1 e^{-\beta(t-\tau')} d\tau' d\tau \Rightarrow K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_0 \tau + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta \tau} - 1) d\tau \Rightarrow \\
K_2(t) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_0 \tau d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} (e^{\beta \tau} - 1) d\tau \Rightarrow \\
K_2(t) &= E_0 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tau d\tau + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (e^{\beta \tau} - 1) d\tau \Rightarrow \\
K_2(t) &= E_0 \left(\frac{\tau^2}{2} \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left(e^{\beta \tau} \frac{1}{\beta} - t \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \Rightarrow \\
K_2(t) &= E_0 \left(\frac{t_{i+1}^2 - t_i^2}{2} \right) + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\left(\frac{e^{\beta t_{i+1}}}{\beta} - t_{i+1} \right) - \left(\frac{e^{\beta t_i}}{\beta} - t_i \right) \right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

e finalmente $K_2(t)$ resulta,

$$K_2(t) = E_0 \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \tag{5.47}$$

Como explicado para o modelo de Maxwell, a função $K_2(t)$ deve ser definida para dois pontos no intervalo de tempo, o primeiro é quando $t = t_{i+1} = t_{n+1}$, isto é, da definição de $K_2(t)$ dada acima,

$$\begin{aligned}
K_2(t) &= E_0 \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \Rightarrow \\
K_2(t = t_{n+1}) &= E_0 \frac{(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{n+1}} - e^{\beta t_n}) - (t_{n+1} - t_n) \right] \Rightarrow \\
K_2(t_{n+1}) &= E_0 \frac{(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta^2} (e^{-\beta t_{n+1}} e^{\beta t_{n+1}} - e^{-\beta t_{n+1}} e^{\beta t_n}) - \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) \Rightarrow
\end{aligned}$$

e finalmente $K_2(t_{n+1})$ resulta,

$$K_2(t_{n+1}) = E_0 \frac{(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta^2} (1 - e^{-\beta(t_{n+1} - t_n)}) - \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) \quad (5.48)$$

E em outro ponto $K_2(t)$ deve ser definida para $t = t_{n+1}$, onde t_{i+1} está variando dentro do somatório, ou seja,

$$K_2(t) = E_0 \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \Rightarrow$$

$$K_2(t = t_{n+1}) = E_0 \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \quad (5.49)$$

Isto ocorre pois o tempo t_{i+1} varia dentro de um somatório, na equação integro-diferencial, enquanto t_{n+1} permanece constante para avaliar até este passo de tempo. Como mostrado no somatório abaixo,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau$$

$$\text{e sendo } K_2(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_1(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} K_2(t)$$

que resulta no somatório dado por,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} \left[E_0 \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} + \frac{E_1}{\beta} e^{-\beta t_{n+1}} \left[\frac{1}{\beta} (e^{\beta t_{i+1}} - e^{\beta t_i}) - (t_{i+1} - t_i) \right] \right] \quad (5.50)$$

Finalmente, uma vez pré-definidos os termos que envolvem as integrais de convolução das funções de Relaxação, dentro da equação integro-diferencial, estes podem ser incorporados na solução do problema.

5.3 Formulação de Elementos Finitos

A formulação para o problema viscoelástico transiente envolvendo a equação de equilíbrio integro-diferencial, foi apresentada nas seções anteriores para problema estrutural de 1 grau de liberdade. Esta formulação pode então ser estendida para solucionar problema estrutural envolvendo as definições da mecânica do contínuo. O Método dos Elementos Finitos deve ser aplicado para obter a solução do problema de um meio contínuo, sendo que os elementos estruturais a serem apresentados nesta formulação são elementos de barra e viga plana, e as propriedades físicas do meio devem ser definidas como viscoelásticas.

- Formulação para um contínuo unidimensional - elemento de barra

Considere uma barra viscoelástica de comprimento L e com área de seção transversal variando na direção de seu comprimento, como observado na figura abaixo.

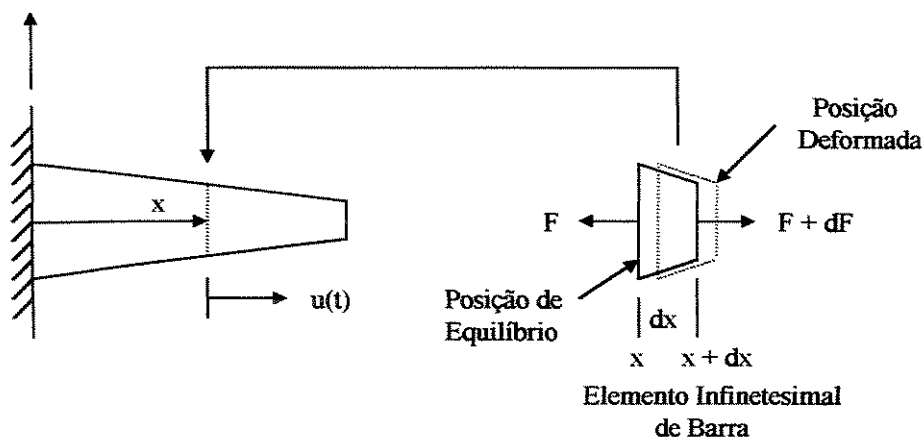


Fig. 5.4 - Barra Engastada com Excitação Longitudinal

Por questão de generalidade da formulação pode-se definir o problema através da equação de equilíbrio dinâmico para um contínuo e suas condições de contorno e iniciais.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (5.51)$$

e as condições de contorno e condições iniciais são dadas por:

- condições de contorno

$$u_i = q_i \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \times [0, T] \quad (5.52)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \times [0, T] \quad (5.53)$$

- condições iniciais

$$u_i = u_{o,i} \quad (5.54)$$

$$u_{i,t} = \dot{u}_{o,i} \quad (5.55)$$

onde σ_{ij} = tensor de tensões;

f_i = forças de corpo por unidade de volume;

n_j = vetor normal ao contorno Γ ;

q_i , h_i = são os deslocamentos e trações especificados no contorno;

ρ = densidade de massa;

$u_{i,tt}$ = aceleração, ou segunda derivada dos deslocamentos u_i em relação ao tempo t ; e

$u_{o,i}$, $\dot{u}_{o,i}$ = condições iniciais de deslocamentos e velocidades, isto é, para $t = 0$.

E a equação constitutiva do material viscoelástico é definida como,

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5.56)$$

onde $G_{ijkl}(t - \tau)$ define a função de relaxação viscoelástica dependente do tempo, e que caracteriza o problema viscoelástico.

ε_{kl} = tensor de deformações.

Para o problema unidimensional, isto é, para um contínuo representado por um elemento estrutural de barra, estas relações se simplificam, pois considera-se que existam apenas tensões na direção longitudinal.

Portanto, como representado na figura 5.4, os esforços existentes no meio, ocorrem apenas na direção x , e a estrutura está submetida unicamente a tensões normais $\sigma = \sigma(x, t)$. Consequentemente, as deformações existentes são definidas por $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$, resultando em deslocamentos longitudinais $u = u(x, t)$, provenientes dos carregamentos longitudinais $f = f(x, t)$. Desta forma a equação de equilíbrio é descrita como,

$$A\sigma_x + f = \rho A u_{,tt} \quad (5.57)$$

onde A é a área de seção transversal do elemento de barra.

A relação constitutiva tensão-deformação também é redefinida,

$$\sigma(x, t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5.58)$$

e a relação deslocamento-deformação é,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (5.59)$$

A equação constitutiva (5.58) pode ser substituída na equação de equilíbrio (5.57), como,

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} + f(x, t) &= \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^t AE(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^t AE(t - \tau) \frac{\partial^2 \varepsilon(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} d\tau + f(x, t) &= \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.60)$$

e utilizando a relação deslocamento-deformação 5.10, resulta,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t AE(t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau + f(x, t) &= \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^t AE(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial^2 x} \right) d\tau + f(x, t) &= \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Esta é a equação de equilíbrio dinâmico do contínuo viscoelástico, para problema unidimensional. Pode-se neste ponto aplicar a formulação padrão de Elementos Finitos, através da técnica de Resíduos Ponderados, a fim de obter esta equação na forma discreta.

Deve-se delinear alguns passos da formulação de Elementos Finitos na solução do problema contínuo unidimensional. O objetivo é obter as matrizes de elementos da estrutura contínua discretizada. Da definição de Resíduos Ponderados, pode-se integrar a equação de equilíbrio sobre o elemento, com coordenadas x_1 e x_2 , onde $w(x)$ é a função ponderadora. Isto é,

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x) \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial^2 x} \right) d\tau + f(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] dx = 0 \quad (5.62)$$

esta equação pode ser reescrita como,

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x) \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial^2 x} \right) d\tau \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} w(x) f(x, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} w(x) \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = 0 \quad (5.63)$$

O primeiro termo da equação pode ser tratado separadamente. Aplica-se uma integração por partes neste termo para a variável x . A definição de integração por partes é,

$$\int_{x_1}^{x_2} w dv = - \int_{x_1}^{x_2} v dw + w v \Big|_{x_1}^{x_2}$$

onde define-se $dv = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ e $w = w(x)$. Desta forma a integração por partes sobre o primeiro

termo da equação 5.63, resulta,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} w(x) \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial^2 x} \right) d\tau \right] dx = \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau \right] dx - \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(w(x) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (5.64)$$

A função deslocamento $u(x, t)$, pode ser definida variando linearmente na variável espacial x , em função dos valores nodais u_i , dados por $u_1 = u(x_1, t)$ e $u_2 = u(x_2, t)$, isto é,

$$u(x, t) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{u_i\} \quad (5.65)$$

onde as funções de forma $N_i(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)]$ definem as interpolações lineares, e são dadas por,

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \left(\frac{x_2 - x}{h_e} \right) \\ N_2(x) &= \left(\frac{x - x_1}{h_e} \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

sendo h_e o comprimento do elemento, dado por $h_e = x_2 - x_1$

Para a formulação de Galerkin, as funções ponderadoras, associadas $w(x)$ também são representadas pelas mesmas funções de forma, isto é, $W_i(x) = N_i(x)$.

Substituindo as funções $w(x)$ e $u(x, t)$ definidas pela equação (5.65), através das funções ponderadoras e de forma $W_i(x)$ e $N_i(x)$, dado pela equação (5.66), e lembrando que $u = u(x, t)$, o primeiro termo da equação 5.64 pode ser redefinido na forma matricial como,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau \right] dx = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) d\tau \right] dx \Rightarrow \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) d\tau \right] dx \end{aligned}$$

e passando a integral espacial antes da integral no tempo, resulta,

$$\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) d\tau$$

Executando a integração dos termos dentro da matriz envolvendo as funções de forma, resulta,

$$\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\begin{bmatrix} 1/h_e & -1/h_e \\ -1/h_e & 1/h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) d\tau \quad (5.67)$$

Sendo a matriz da equação envolvendo termos constantes em relação ao tempo, podem estar fora da integral de convolução no tempo, que resulta,

$$\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\tau \quad (5.68)$$

O segundo termo da equação 5.64 pode ser reescrito novamente para ser analisado,

$$\left[\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(w(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) d\tau \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} \right) d\tau \quad (5.69)$$

Este termo está associado as condições de contorno essenciais (deslocamento) e naturais (força) da equação diferencial. Os termos dentro do colchete definem estas condições de contorno

para o problema, quando avaliadas nos pontos x_1 e x_2 . Nesta formulação assume-se que todas as condições de contorno, quando trata-se do elemento, são do tipo natural e podem ser definidas como,

$$h_1 = \int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u(x_1)}{\partial x} \right) d\tau \quad e \quad h_2 = \int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u(x_2)}{\partial x} \right) d\tau \quad (5.70)$$

Retornando a equação (5.63), da definição do Resíduos Ponderados, pode-se determinar o termo de inércia. A partir da equação (5.65), pode-se definir a aceleração através das funções de forma, isto é,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [N_1(x) \quad N_2(x)] \{u_i\} \Rightarrow \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \dot{u} = \dot{u}(x,t) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{\dot{u}_i\} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \ddot{u} = \ddot{u}(x,t) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{\ddot{u}_i\} \end{aligned}$$

Substituindo as relações da aceleração acima e a função ponderadora $W_i(x) = N_i(x)$, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} w(x) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx &\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \rho A \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} dx \Rightarrow \\ \int_{x_1}^{x_2} \rho A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \rho A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

e fazendo a integração de cada um dos termos da matriz,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} N_1^2 dx &= \int_{x_1}^{x_2} N_2^2 dx = \frac{h_e}{3} \\ \int_{x_1}^{x_2} N_1 N_2 dx &= \int_{x_1}^{x_2} N_2 N_1 dx = \frac{h_e}{6} \end{aligned}$$

e o termo de inércia descrito da forma discreta resulta,

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = \frac{\rho A h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.71)$$

O outro termo da equação (5.63) envolve as forças de corpo, que pode ser interpolada linearmente através das funções forma, $f = f(x,t) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{f_i\}$. Utilizando então esta equação e as funções ponderadoras, e seguindo o mesmo procedimento para a aceleração, o termo envolvendo as forças de corpo resulta,

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x) f(x, t) dx = \frac{h_e}{6} \begin{Bmatrix} 2f_1 + f_2 \\ f_1 + 2f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

A relações (5.68), (5.71) e (5.72) podem ser substituídas de volta na equação de equilíbrio 5.61 para o sistema contínuo viscoelástico, tornando-a de forma discreta,

$$\int_{-\infty}^t AE(t-\tau) \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\tau + \frac{h_e}{6} \begin{Bmatrix} 2f_1 + f_2 \\ f_1 + 2f_2 \end{Bmatrix} = \frac{\rho A h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

A equação matricial acima representa a informação de cada elemento separadamente, e define as matrizes de rigidez e massa do elemento viscoelástico unidimensional, como,

$$[k_e] = A / h_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$[m_e] = \frac{\rho A h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Observe que a matriz de rigidez do elemento, não possui o termo de flexibilidade que faz parte da integral de convolução.

Estas matrizes podem então serem superpostas, para obter a contribuição de todos os elementos envolvidos na discretização da estrutura, como,

$$M = \sum_{e=1}^{n_d} [m_e] \quad (5.76)$$

$$K = \sum_{e=1}^{n_d} [k_e]$$

onde o somatório $\sum_{e=1}^{n_d}$, deve ser interpretado como um *assembler* das matrizes de rigidez e massa dos elementos.

E o sistema de equação global resulta,

$$M \ddot{u} + \int_{-\infty}^t E(t-\tau) K \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau = F \quad (5.77)$$

onde M = matriz de massa global do sistema;

K = matriz de rigidez global do sistema, representando a característica geométrica da propriedade de rigidez. Esta matriz K associada ao módulo de relaxação, ou módulo de elasticidade dependente do tempo $E(t)$, caracteriza a propriedade de rigidez total do sistema mecânico, incluindo ainda a capacidade de amortecimento material do mesmo;

F = vetor carregamento, envolvendo forças de corpo por unidade de comprimento e as condições de contorno naturais.

A formulação de Elementos Finitos para um contínuo viscoelástico unidimensional mostra claramente que é possível incorporar a solução para um sistema contínuo nas formulações envolvendo integrais hereditárias, apresentadas nas seções anteriores. Este tratamento da equação integro-diferencial pode ser aplicado a qualquer outro tipo de meio contínuo, tal como, na solução de elementos de viga ou mesmo problema de elasticidade plana, sem perder a potencialidade da solução através do Método dos Elementos Finitos. Esta formulação é estendida, na próxima seção, para solução de estruturas utilizando viga plana.

- Formulação para elemento de viga

Neste equacionamento, pode-se seguir os mesmos passos da formulação unidimensional, para tornar a formulação da equação integro-diferencial deduzida nas seções anteriores, aplicável a elementos de viga. Desta forma, deve-se apresentar alguns passos para se obter a forma final da equação do sistema envolvendo estruturas de vigas.

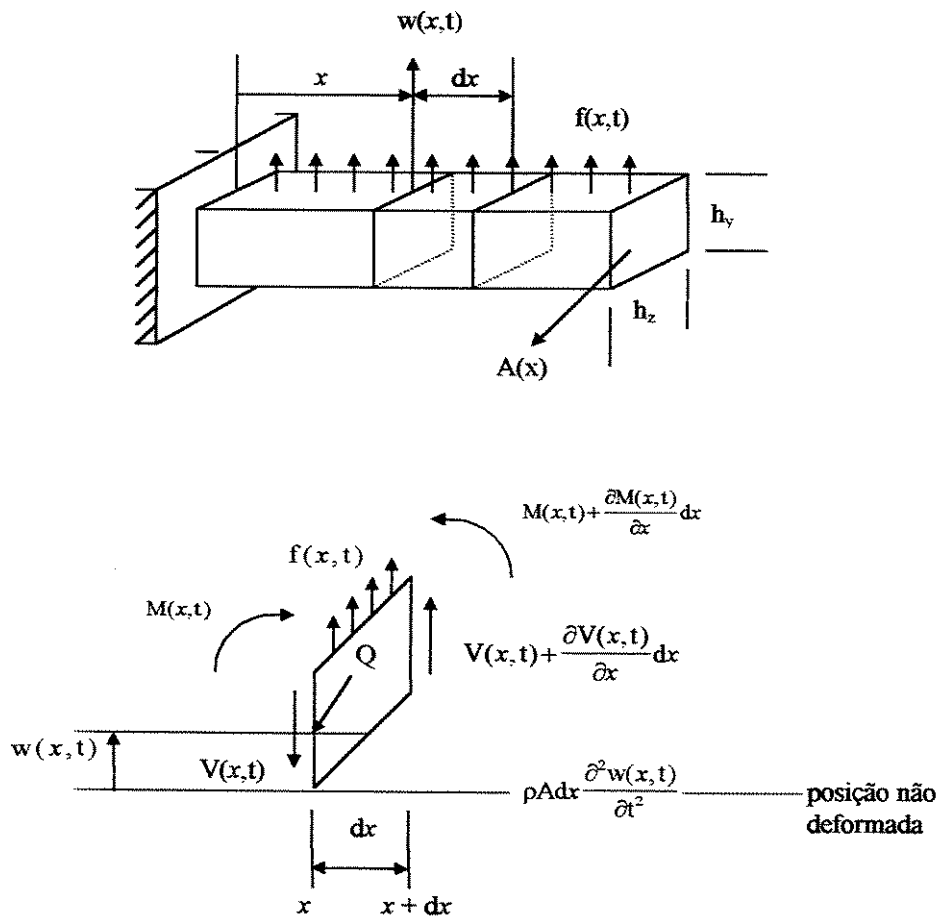


Fig. 5.5 Viga engastada com excitação transversal e diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal da viga deformada devido a uma força excitadora por unidade de comprimento, definida por $f(x,t)$

Define-se $w(x,t)$, os deslocamentos transversais da viga plana, $A(x)$ a área de seção transversal e ρ a densidade de massa da viga. Os esforços internos na viga plana são definidos por, $M(x,t)$ momento fletor e $V(x,t)$ força cortante e $f(x,t)$ força distribuída transversalmente a viga por unidade de comprimento.

A equação de equilíbrio dinâmico (5.57) para o problema anterior, pode ser derivada, para a viga plana, partindo-se do diagrama de força de um elemento infinitesimal da viga, como mostrado na figura 5.5. Supondo-se pequenas deformações, pode-se considerar as deformações devido ao

cisalhamento desprezíveis em relação a deflexão $w(x,t)$, e um equilíbrio de forças, para o elemento infinitesimal, na direção vertical da viga resulta,

$$\left(V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + f(x,t) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.78)$$

Fazendo um equilíbrio de momentos em torno do ponto Q, definido na figura 5.2, resulta,

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + [f(x,t) dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (5.79)$$

Deve-se observar que neste caso o lado direito da equação é nulo, pois assume-se que a inércia de rotação do elemento dx é desprezível. Simplificando esta última equação e assumindo que os termos de segunda ordem $(dx)^2$ são desprezíveis, obtém-se a relação entre os esforços cortantes e de flexão, isto é,

$$V(x,t) = - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (5.80)$$

Esta relação pode ser substituída na equação (5.77) para obter,

$$- \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.81)$$

A equação de equilíbrio dinâmico acima é válida tanto para formulação elástica quanto viscoelástica. Como observado nas discussões anteriores deste capítulo, o que diferencia a definição do meio elástico para o viscoelástico é a equação constitutiva, ou então a relação força-deslocamento para a estrutura analisada. Neste caso, fazendo uma analogia com a equação (5.58) da seção anterior, pode-se escrever a relação momento fletor $M(x,t)$ e deslocamento $w(x,t)$ para um estrutura de viga viscoelástica, isto é,

$$M(x,t) = \int_{-\infty}^t I E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} \right) d\tau \quad (5.82)$$

onde $E(t)$ é o módulo de relaxação do material viscoelástico, e I é o momento de inércia de área da viga.

Seguindo o mesmo procedimento do problema anterior, esta relação pode ser substituída na equação de equilíbrio (5.81), isto é,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\
-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^t I E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} \right) d\tau \right) + f(x,t) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\
-\int_{-\infty}^t I E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^4 w(x,\tau)}{\partial x^4} \right) d\tau + f(x,t) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

e rearranjando os termos resulta,

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \int_{-\infty}^t I E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^4 w(x,\tau)}{\partial x^4} \right) d\tau = f(x,t) \quad (5.83)$$

Esta é a equação final de equilíbrio dinâmico de uma viga contínua viscoelástico, escrita na variável deslocamento transversal da viga $w(x,t)$. Esta equação é análoga a equação (5.61) para um meio contínuo unidimensional.

O passo seguinte da formulação é aplicar a formulação de Elementos Finitos sobre esta equação para obtê-la na sua forma discreta. Portanto, deve-se seguir exatamente o mesmo equacionamento apresentado na seção anterior para o problema unidimensional. Quais sejam estes passos: aplicar a forma de resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio (5.83) para cada elemento; escrever a função deslocamentos em relação aos valores de deslocamentos nodais, semelhante a equação (5.65), definida através das funções de forma; obter as funções para velocidade e aceleração; definir a função ponderadora igual as funções de forma; substituir estas funções na equação de equilíbrio ponderada e integra-la no espaço; e superpor os efeitos de cada elemento para obter um sistema de equações matriciais final. É importante observar neste caso que as funções de forma e ponderadores são funções cúbicas na variável espacial, pois a equação diferencial solucionada possui derivadas até quarta ordem. Isto é, para uma melhor precisão numérica das interpolações nodais, essas funções devem representar as derivadas espaciais mais superiores, as quais aparecem nas funções de deslocamento e rotação.

Seguindo todos esses passos pode-se obter um sistema matricial final como,

$$M \ddot{u} + \int_{-\infty}^t E(t-\tau) K \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau = F \quad (5.84)$$

onde a matriz de massa M e de rigidez K são obtidas através da superposição das matrizes de massa e rigidez dos elementos, como mostrado na equação (5.76).

A matrizes de massa $[m_e]$ e rigidez $[k_e]$ dos elementos de viga são definidos por,

$$\begin{aligned} [m_e] &= \int_{\Omega_e} [N^T \rho N] d\Omega_e \\ [k_e] &= \int_{\Omega_e} [B^T D B] d\Omega_e \end{aligned} \quad (5.85)$$

onde N = matriz das funções de forma para o elemento de viga;

B = matriz das derivadas das funções de forma; e

D = matriz constitutiva do material.

A matrizes de massa e rigidez do elemento de viga a ser utilizada na aplicação desta formulação são definidas como,

$$[m_e] = \frac{\rho A h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 h_e & 54 & -13 h_e \\ 22 h_e & 4 h_e^2 & 13 h_e & -3 h_e^2 \\ 54 & 13 h_e & 156 & -22 h_e \\ -13 h_e & -3 h_e^2 & -22 h_e & 4 h_e^2 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$$[k_e] = \frac{I}{h_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 h_e & -12 & 6 h_e \\ 6 h_e & 4 h_e^2 & -6 h_e & 2 h_e^2 \\ -12 & -6 h_e & 12 & -6 h_e \\ 6 h_e & 2 h_e^2 & -6 h_e & 4 h_e^2 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

onde na matriz de rigidez não está explicitada a propriedade de rigidez dependente do tempo $E(t)$, que caracteriza o comportamento viscoelástico do meio. Para completar a matriz de rigidez final, a matriz de rigidez de elemento $[k_e]$ deve estar associada a $E(t)$ através da integral de convolução de Stieltjes.

5.4 Resultados e Discussões da Formulação Integral

Nesta seção a equação integro-diferencial é resolvida numericamente, onde deve-se apresentar a validação da formulação dinâmica viscoelástica transiente utilizando o método dos Elementos Finitos para solução de um contínuo viscoelástico. As formulações apresentadas nas seções anteriores, pode ser aplicada para modelar o problema de estruturas viscoelásticas envolvendo elementos estruturais de barra (unidimensional) e viga plana. Nas duas seções que se seguem, seções 5.4.1 e 5.4.2 para elementos de barra e viga, respectivamente, utiliza-se os modelos viscoelásticos apresentados anteriormente, para representar as características viscoelásticas da estrutura. Em alguns exemplos, as respostas são comparadas com soluções analíticas e em outros verifica-se a conformidade da solução com as respostas de problemas físicos envolvendo estruturas viscoelásticas.

5.4.1 - Problema Contínuo Viscoelástico - Elemento de Barra

Nesta seção deve-se avaliar a resposta de um meio contínuo unidimensional. A formulação de elementos finitos aplicada a equação integro-diferencial, é avaliada para elementos de barra.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nos exemplos para a estrutura de barra, utiliza-se os modelos viscoelásticos de Maxwell e Kelvin-Maxwell, também chamado de modelo de três parâmetros, apresentados na figura 5.6. A estrutura, definida por um elemento de barra, está fixa em uma extremidade e possui uma força externa $F(t)$ aplicada na outra extremidade livre. As características geométricas, área de seção

transversal e comprimento da barra, são definidas com valores unitários (utiliza-se o Sistema Internacional de Unidades).

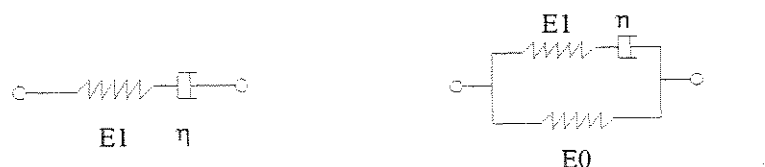


Fig. 5.6 - Modelo de Maxwell e Modelo de Três Parâmetros

Nos primeiros três exemplos, valida-se a solução numérica da equação viscoelástica transiente, comparando-se as respostas obtidas com as soluções analíticas existentes. Nos exemplos seguintes obtém-se as respostas dinâmicas da barra, mostrando a potencialidade da formulação para representar o comportamento dinâmico de meios viscoelásticos.

Inicialmente, analisa-se o problema da vibração livre da barra ($F(t)=0$), ou seja, a resposta da barra sem amortecimento ($\eta \Rightarrow \infty$), sujeita a condições iniciais não homogêneas, prescritas abaixo. As propriedades de rigidez do modelo de três parâmetros são $E_0 = 1$, e $E_1 = 1$, e a massa $M = 1$. As condições iniciais do problema são $u_0 = 0$, e $v_0 = 1$.

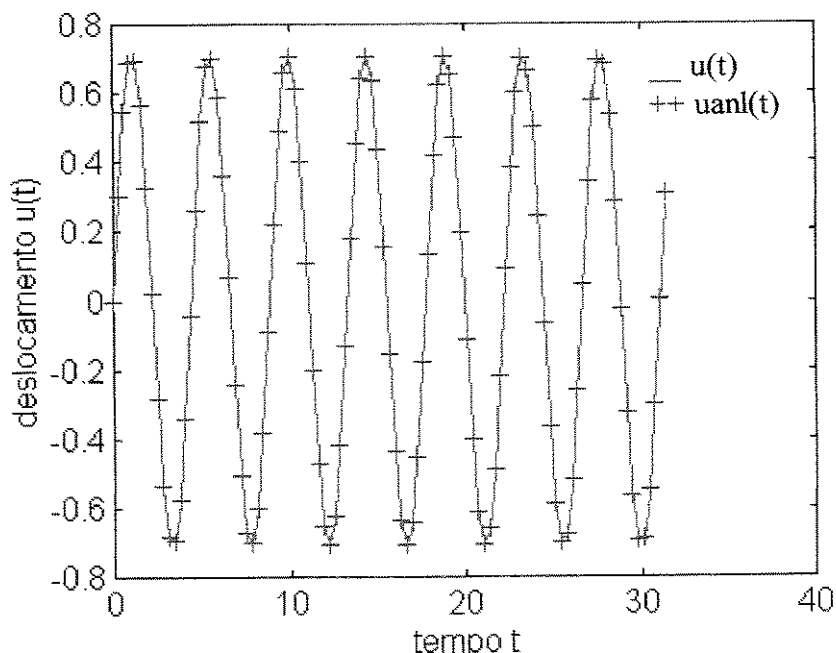


Fig. 5.7 - Vibração Livre sem Amortecimento - $v_0 = 1$.

Verifica-se, nesta primeira validação (fig. 5.7), uma ótima concordância entre a resposta numérica e a resposta analítica. Deve-se salientar que o parâmetro η definido como tempo de relaxação é inversamente proporcional ao amortecimento. Portanto, neste caso para se obter uma estrutura sem amortecimento o tempo de relaxação deve tender a infinito. Em outras palavras, não há tempo suficiente para a estrutura atingir a relaxação, devido ao efeito viscoelástico, restando apenas o efeito elástico da estrutura.

Utilizando-se a estrutura com propriedades idênticas às do caso anterior, pode-se obter a resposta dinâmica, com condições iniciais nulas e excitada harmonicamente na primeira frequência natural (ω_{n1}) da barra, ou seja, uma excitação forçada com frequência igual à da primeira ressonância da barra, dada por $F(t)=F_0.\text{Sen}(\omega_{n1}.t)$, $F_0 = 1$. Os resultados estão mostrados na figura 5.8. Observa-se concordância da resposta numérica com a solução analítica.

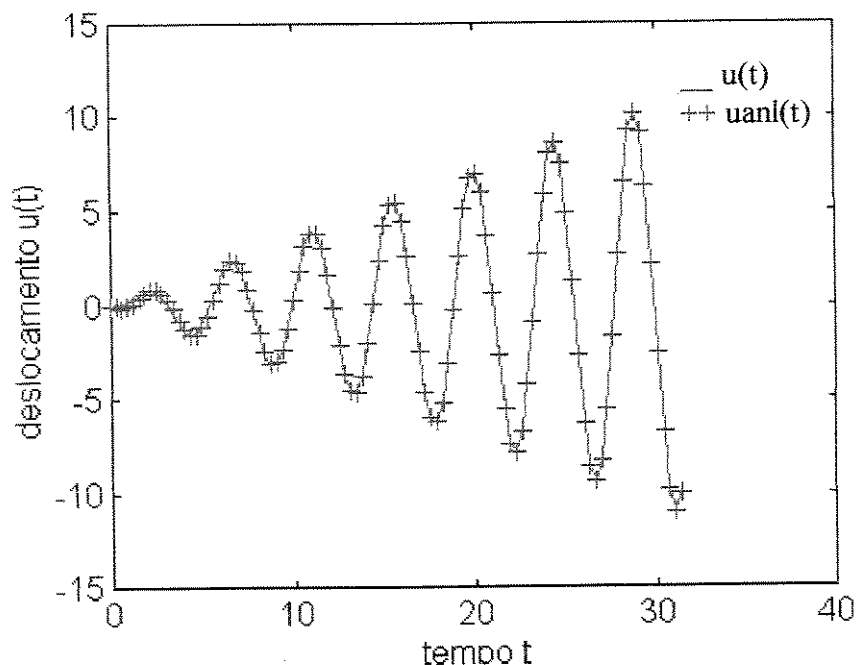


Fig. 5.8 - Vibração Ressonante sem Amortecimento.

Em um terceiro exemplo utilizado para validar o algoritmo proposto, analisa-se o efeito do amortecimento estrutural na resposta dinâmica da barra. As propriedades são as mesmas dos exemplos anteriores, apenas com a modificação no parâmetro de relaxação, que neste caso é utilizado $\eta = 1$. A força externa é dada pela função Heaviside (degrau unitário) e as condições iniciais são nulas. A resposta se encontra na figura 5.9.

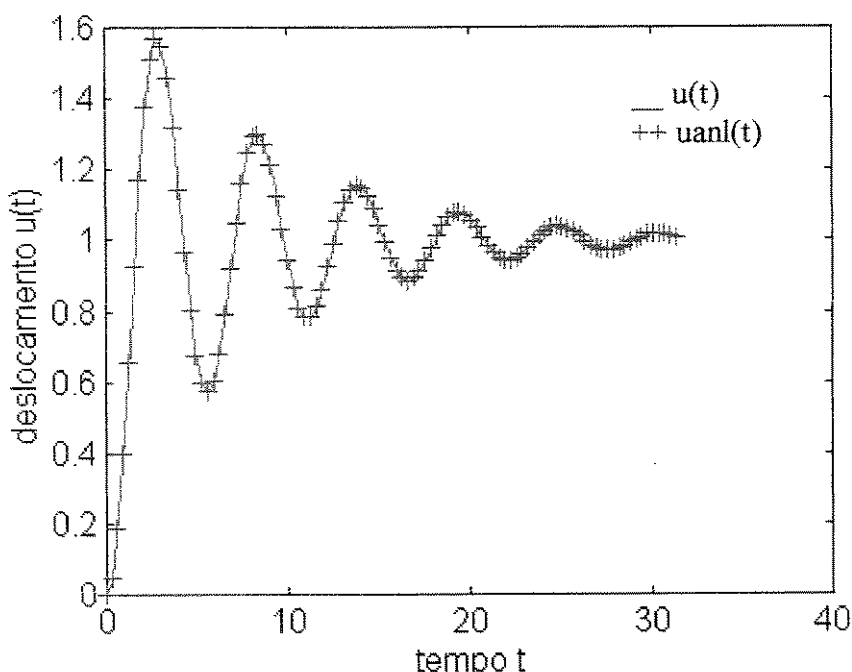


Fig. 5.9 - Vibração Amortecida - Carregamento Heaviside

Estes três exemplos tem por finalidade validar tanto a formulação quanto a implementação do algoritmo proposto. A qualidade dos resultados induz a se acreditar que os mesmos estão corretos. Nos exemplos seguintes avalia-se o efeito dos parâmetros viscoelásticos sobre as respostas dinâmicas. Variando-se a rigidez e o amortecimento do modelo de três parâmetros pode-se obter os modelos de Kelvin ou Maxwell, separadamente. Em todos os casos utiliza-se condições iniciais nulas e excitação representada pela função Heaviside ($F=1$), aplicada em $t=0$.

Neste caso adota-se $E_0 = 0$ restando então um estrutura representada por mola-amortecedor em série, que define o modelo viscoelástico de Maxwell (figura 5.6). Na figura 5.10 observa-se o efeito da variação do amortecimento (tempo de relaxação η) sobre a resposta.

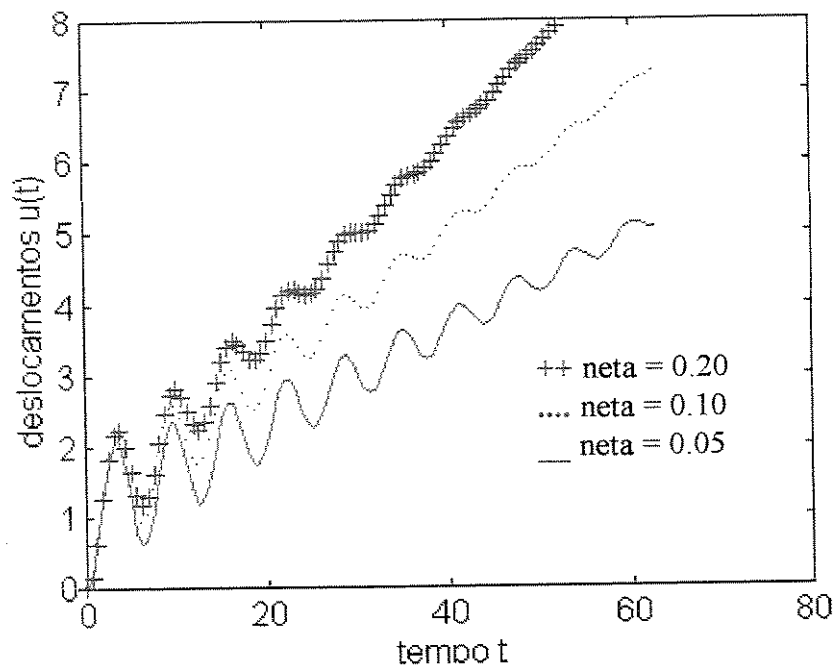


Fig. 5.10 - Efeito do Amortecimento e Inércia - Modelo de Maxwell.

A primeira característica que pode ser observada nesta resposta é o efeito da inércia, pois as oscilações que ocorrem nos deslocamentos são devido a presença da massa do sistema, uma vez que a força externa aplicada é constante. Observa-se também uma propriedade patente no modelo de Maxwell, que é a de permitir deslocamentos crescentes, tendendo ao infinito, quando submetidos a um carregamento externo qualquer. Quanto ao parâmetro de relaxação (η), nota-se que quando este cresce, o amortecimento efetivo é menor e que a estrutura deverá permanecer um período maior sob controle dos parâmetros rigidez-inércia.

Em seguida mostra-se a versatilidade da formulação, uma vez que podem ser avaliados tanto os problemas dinâmicos viscoelásticos transientes, como apresentados acima, quanto os problemas quase-estáticos, caracterizados pela ausência de forças de inércia ($\rho \Rightarrow 0$). Neste caso as propriedades de rigidez são modificadas, fazendo-se $E_0=0.5$ e $E_1=5$. Obtendo-se o modelo de Kelvin-Maxwell ou modelo de três parâmetros, mostrado na figura 5.6, que característico para um modelo sólido.

Novamente observa-se na resposta da figura 5.11, a influência do parâmetro de relaxação η , pois quando este decresce os deslocamentos tendem a se estabilizar mais rapidamente e convergir para a resposta estática. Observa-se ainda, a completa ausência de oscilações na resposta, que caracteriza a resposta quase-estática.

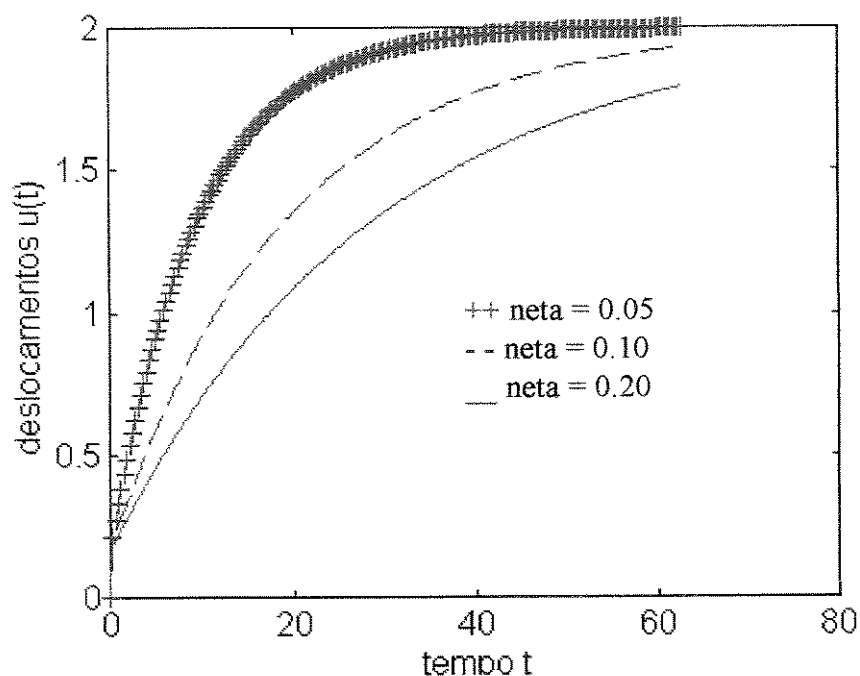


Fig. 5.11 - Resposta para Estrutura Quase-estática - Modelo de Três Parâmetros.

No último exemplo utilizando elemento de barra, o mesmo problema anterior é estudado, acrescentando-se inércia ao sistema. A resposta transiente de uma estrutura viscoelástica com inércia é mostrada na figura 5.12. Deve-se observar que o comportamento da resposta é semelhante aquele apresentado na figura 5.11, para o caso quase-estático, a menos das oscilações proveniente do efeito de inércia no sistema. A principal característica do modelo sólido a ser observada na resposta da figura 5.12, é que a resposta do sistema oscila devido a inércia e em seguida, tende ao valor estático.

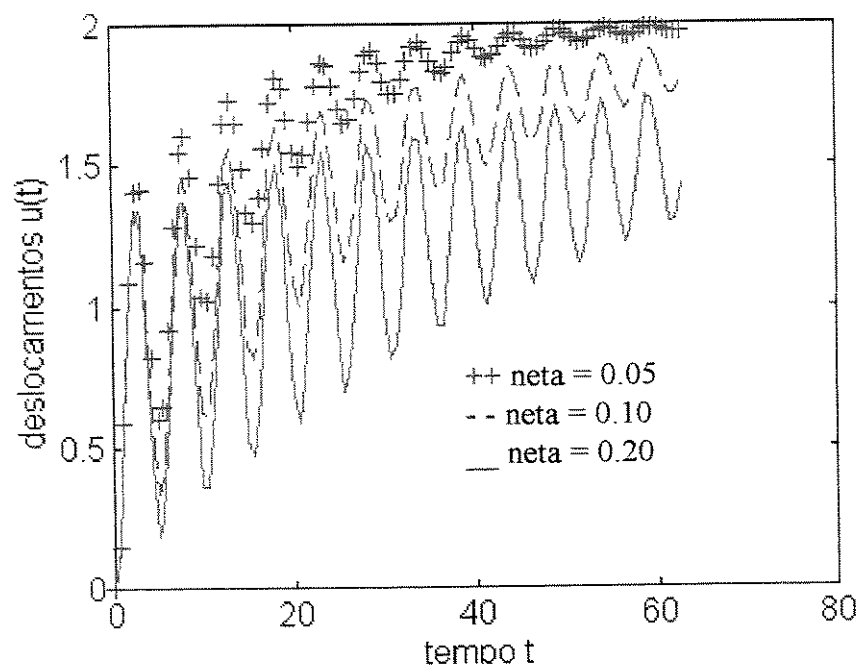


Fig. 5.12 - Estrutura Viscoelástica e Efeito de Inércia - Modelo de Três Parâmetros.

5.4.2 - Problema Contínuo Viscoelástico - Viga Plana

A estrutura discretizada e analisada é de uma viga plana bi-apoiada, com carregamento dependente do tempo, distribuído sobre sua superfície. Avalia-se uma viga sem massa, para a solução do problema quase-estático, e posteriormente envolvendo o termo de inércia na solução. A solução do problema quase-estático é validada com a solução analítica. Para isto, utilizou-se dois modelos viscoelásticos, o modelo de Maxwell, também definido como modelo fluido e o modelo de três parâmetros, também chamado de modelo sólido. Como esta sendo utilizado como elemento estrutural a viga plana, deve-se observar nos plots os deslocamentos da linha neutra da viga. Em alguns casos está sendo plotada a deformação de toda linha neutra, e em outros casos, avalia-se o ponto central da viga sobre a linha neutra. No modelo de Elementos Finitos utilizou-se uma discretização de 15 elementos de viga (16 pontos nodais).

EXEMPLOS NUMÉRICOS

PROBLEMA QUASE-ESTÁTICO

A viga viscoelástica é considerada como modelo de Maxwell e modelo sólido de três parâmetros, tal como representado nas figuras 5.13 e 5.14. As propriedades materiais são assumidas como:

- a) Modelo de Maxwell - $E1 = 9.8 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 2.744 \times 10^8 \text{ N.s/m}^2$. O módulo de relaxação para o modelo de Maxwell é dado por,

$$E_M = E_1 \exp(E_1 t / \eta)$$

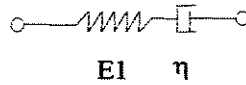


Fig. 5.13 - Modelo de Maxwell

b) Modelo de três parâmetros - $E_0 = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $E_1 = 9.8 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 2.744 \times 10^8 \text{ N.s/m}^2$. E o módulo de relaxação é dado por,

$$E_M = E_0 + E_1 \exp(E_1 t / \eta)$$

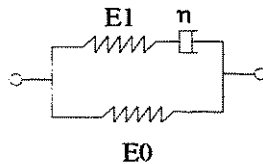


Fig. 5.14 - Modelo de Três Parâmetros

Considere uma viga de comprimento $L = 5 \text{ m}$, com largura de $b = 1.5 \text{ m}$ e altura de $h = 2.0 \text{ m}$. Deve-se observar que estas não são dimensões usuais em estruturas de vigas reais, mas apenas valores utilizados para avaliação dos modelos viscoelásticos. A solicitação é definida através de um carregamento distribuído de 4 N/m aplicado sobre a viga na direção z e a viga analisada está bi-apoiada. A solução obtida neste exemplo inicial de estrutura de viga, é validada com a solução exata para o problema quase-estático envolvendo os dois modelos viscoelásticos propostos acima.

A solução exata dos deslocamentos do ponto médio $x = \frac{1}{2} L$ da viga viscoelástica pode ser obtida para cada modelo viscoelástico. Essas soluções foram obtidas analiticamente para cada caso, e para referência do procedimento destas soluções analíticas, ver Flügge, 1975.

- Viga bi-apoiada com carregamento distribuído:

$$w(\frac{1}{2}, t) = \frac{5 p L^4}{384 I} J(t)$$

O módulo de fluência $J(t)$ pode ser obtido através do módulo de relaxação. Isto resulta para cada caso,

- Modelo de Maxwell

$$J(t) = 1.02042 \times 10^{-8} + 3.64431 \times 10^{-9} t$$

- Modelo de três parâmetros

$$J(t) = 2.5 \times 10^{-8} - 1.77536 \times 10^{-8} / e^{0.10352 t}$$

A figura 5.15 apresenta os deslocamentos dependentes do tempo no centro da viga para o modelo de Maxwell e modelo de três parâmetros. Pode-se ver uma ótima concordância entre a solução numérica e a solução exata.

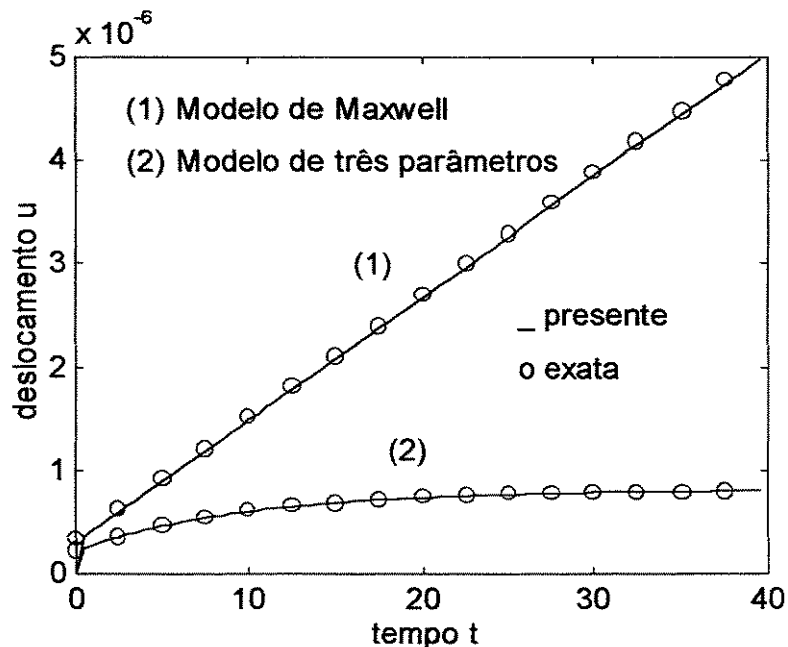


Fig. 5.15 - Deslocamento dependente do tempo no centro da viga para o modelo de Maxwell e modelo de três parâmetros

No gráfico, deve-se observar a principal característica que diferencia o modelo fluido de Maxwell e o modelo sólido de três parâmetros, qual seja, no modelo fluido os deslocamentos são crescentes enquanto existir carregamento, enquanto no modelo sólido os deslocamentos convergem para o valor de equilíbrio estático da viga. O deslocamento estático para o modelo de três parâmetros é $w(x=L/2, t_{\infty}) = 0,8138 \times 10^{-6}$ m.

Na figura 5.16 observa-se o comportamento da viga inteira através dos deslocamentos da linha neutra ao longo do eixo x na viga. Pode-se ver o fenômeno de redução do incremento das deflexões da viga que é uma característica do modelo sólido, figura 5.14. Este mesmo efeito não ocorre para o modelo fluido de Maxwell, onde as deflexões crescem linearmente com o tempo, como observado na figura 5.17.

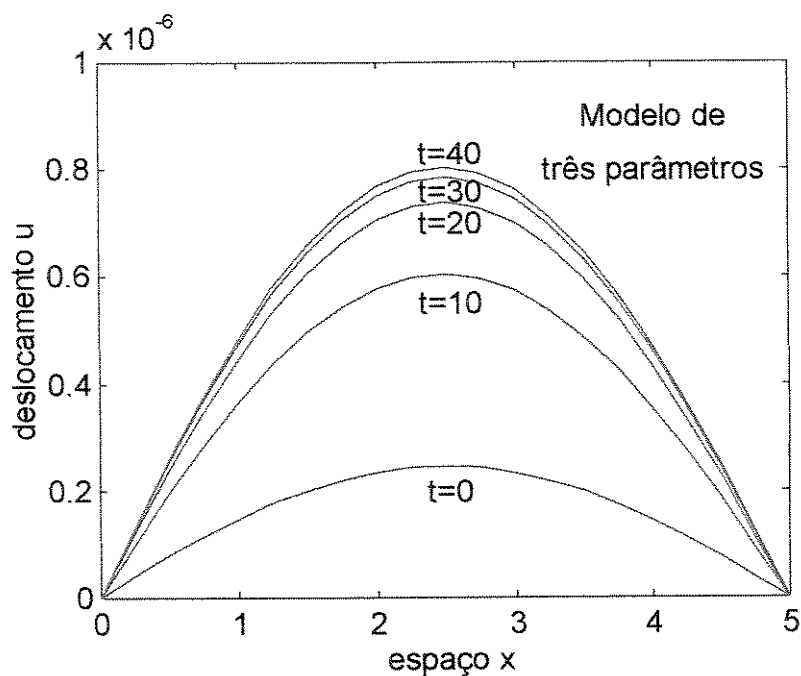


Fig. 5.16 - Deflexão da linha neutra para o modelo sólido de três parâmetros

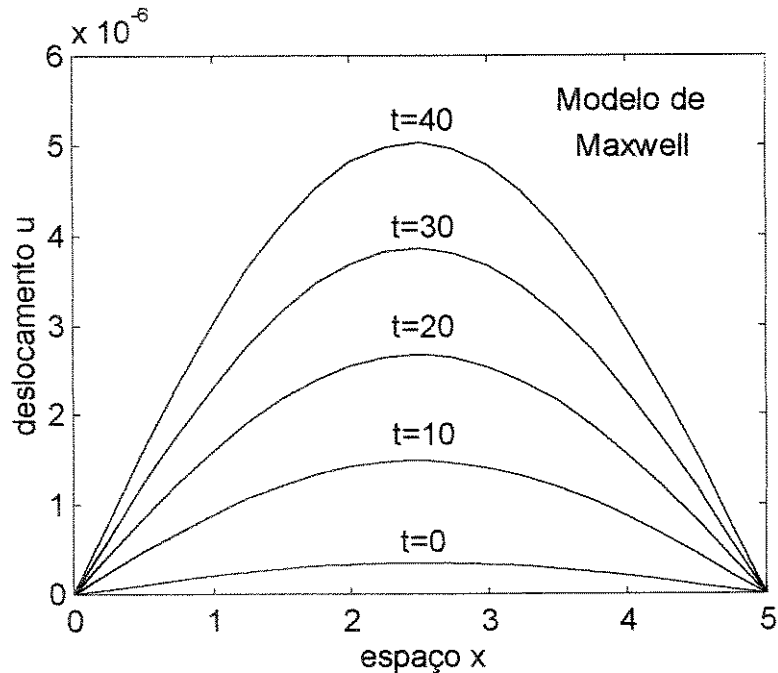


Fig. 5.17 - Deflexão da linha neutra para o modelo fluido de Maxwell

PROBLEMA DINÂMICO

ANÁLISE DO EFEITO DE INÉRCIA - PROBLEMA QUASE-ESTÁTICO

Em seguida as análises do problema quase-estático, pode analisar o problema dinâmico, impondo o efeito de inércia da viga na solução transiente.

Considere novamente a viga com as mesmas característica apresentadas para o problema anterior. Neste caso o carregamento é definido por uma função passo $p = 4 H(t)$ N/m, distribuído sobre o comprimento x . A massa específica $\rho = 8 \times 10^4$ kg/m³. São obtidos os deslocamentos no centro da viga para os modelos de Maxwell e de três parâmetros.

Na figura 5.18, observa-se o comportamento dinâmico da viga viscoelástica. Pode-se ver que as oscilações da viga diminuem com o aumento do tempo, desaparecendo o efeito dinâmico

devido a presença de inércia, fazendo a resposta convergir para a solução do problema quase-estático.

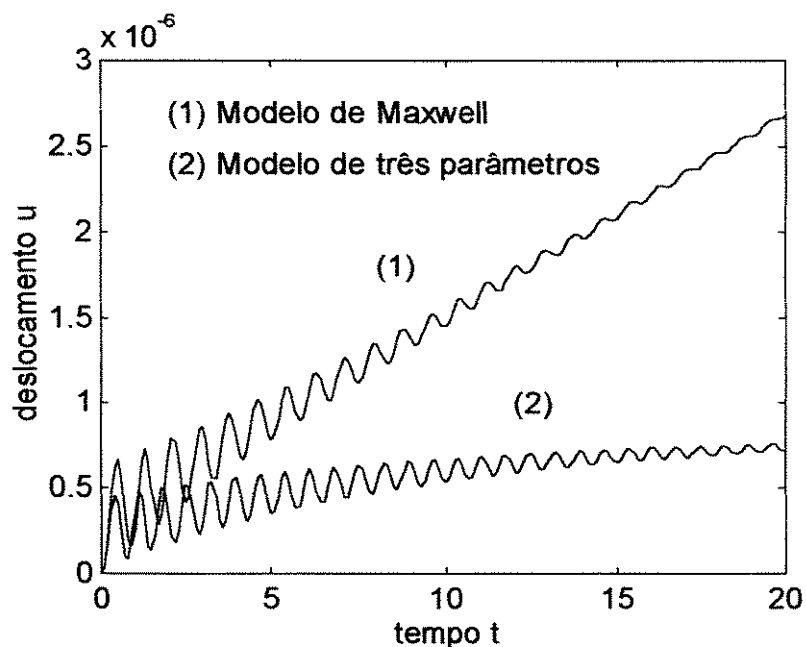


Fig. 5.18 - Deslocamento dependente do tempo no centro da viga - Efeito de inércia.

ANÁLISE VISCOELÁSTICA TRANSIENTE - ELASTODINÂMICA

Em uma última análise, utiliza-se a viga com as mesmas características do problema dinâmico anterior, onde também são obtidos os deslocamentos no centro da viga.

O efeito do aumento do coeficiente de viscosidade η na resposta transiente da viga viscoelástica pode ser observado nas figuras 5.19 e 5.20. É evidente que o aumento da viscosidade reduz as amplitudes dos deslocamentos. Observa-se que, com o incremento acentuado da viscosidade, a estrutura passa a ter um comportamento elastodinâmico, apresentando apenas o efeito da propriedade de rigidez do modelo viscoelástico.

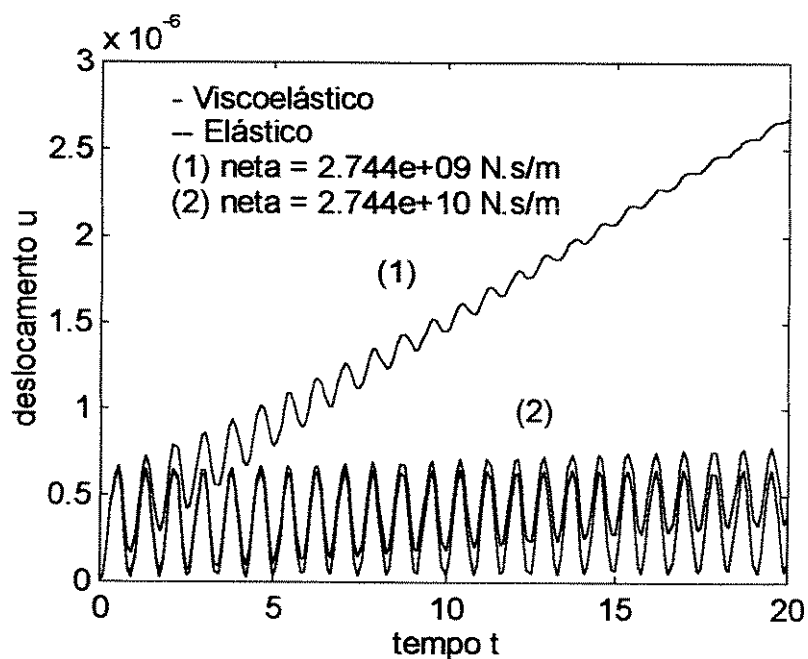


Fig. 5.19 - Comparação dos deslocamento dependente do tempo no centro da viga para o modelo fluido de Maxwell e a análise elastodinâmica.

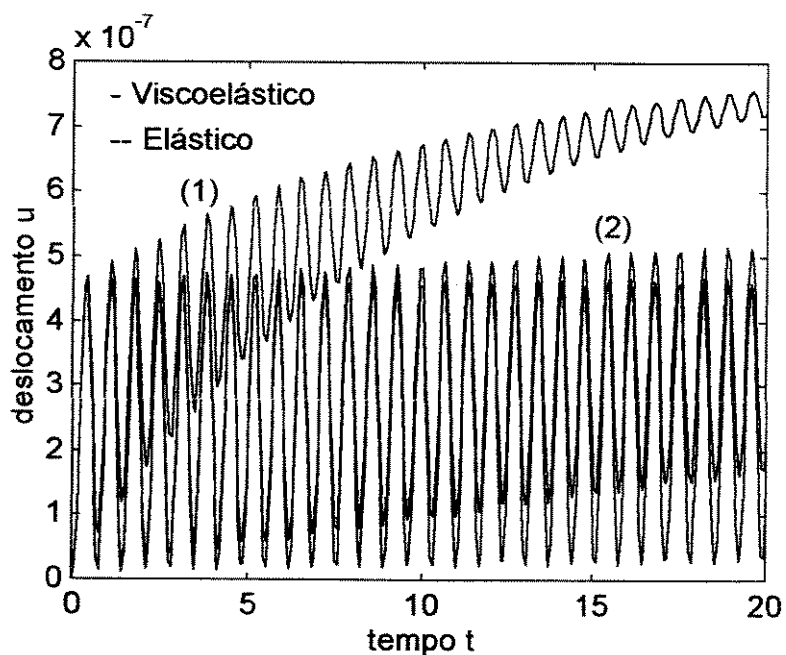


Fig. 5.20 - Comparação dos deslocamento dependente do tempo no centro da viga para o modelo sólido de três parâmetros e a análise elastodinâmica.

A formulação integral para o Método dos Elementos Finitos viscoelástico foi apresentada para solução de vigas viscoelásticas. Observa-se das soluções numéricas apresentadas, uma ótima concordância com a solução exata. As respostas quase-estáticas e dinâmicas obtidas através da formulação, caracterizaram muito bem os modelos viscoelásticos fluido de Maxwell e sólido de três parâmetros, que representa-se um elemento de barra ou viga viscoelástica. A solução elastodinâmica pode naturalmente ser obtida através da formulação viscoelástica transiente. A análise do efeito de outros modelos de amortecimentos estruturais em problemas elastodinâmicos pode ser avaliada em uma aplicação da formulação obtida. A formulação pode ser facilmente estendida para o problema de elasticidade plana.

Capítulo 6

Formulação de Elementos de Contorno e Função de Green Estacionárias

6.1 Definição do Problema Elastodinâmico e Visco-elastodinâmico

Muitas vezes as soluções dinâmicas de estruturas são definidas representando um meio elástico, que caracteriza o problema elastodinâmico. Porém, como justificado extensivamente na introdução deste trabalho, uma modelagem mais realista de meios contínuos deve ser obtida incluindo a dissipação de energia, caracterizada pelo amortecimento material do meio. Isto pode ser feito, representando o problema dinâmico através de um meio que se caracterize por possuir um comportamento visco-elastodinâmico.

O problema a ser tratado neste capítulo é o de um meio contínuo visco-elastodinâmico estacionário, onde são apresentadas as formulações deste problema para solução através da técnica de superposição das funções de Green e do Método dos Elementos de Contorno. Alguns detalhes das formulações matemáticas desenvolvidas para este tipo de problema podem ser encontrada em várias bibliografias, como Banerjee, 1981, Eringen e Suhubi, 1975, Christensen, 1982.

As relações matemáticas que definem o problema de valor de contorno viscoelástico linear isotrópico, podem ser extraídas diretamente das equações da teoria da elasticidade linear. Das relações que definem o problema viscoelástico, somente a relação tensão-deformação difere da sua equivalente, definida na teoria da elasticidade. Na realidade, o problema visco-elastodinâmico é

uma generalização do problema elastodinâmico. Neste último, compreende-se como o problema de um meio onde ocorre propagação de ondas, mas que não possui capacidade de dissipação de energia devido ao amortecimento material. Uma forma de se incluir o amortecimento material em um meio elástico é trata-lo como um meio viscoelástico. Para isto, pode-se inserir nas propriedades do meio, um fator de perda de energia, definido como fator de amortecimento. Na generalização da formulação elastodinâmica para a visco-elastodinâmica, pode-se incluir a propriedade de amortecimento nas propriedades elásticas do material do meio. Para as formulações estacionárias, isto pode ser feito naturalmente, substituindo-se a relação tensão-deformação, fazendo com que a constante elástica do meio (matriz constitutiva) seja substituída por outra definida como uma constante no domínio das variáveis complexas. A parte real desta constante complexa define a constante elástica do problema elastodinâmico, enquanto a parte imaginária da mesma, define a constante que determina a capacidade viscoelástica do meio, ou amortecimento material do mesmo. Portanto, pode-se partir da definição do problema elastodinâmico para se desenvolver a formulação visco-elastodinâmica.

O problema de valor de contorno visco-elastodinâmico é definido através da equação de equilíbrio dinâmico, as condições de contorno e condições iniciais do problema. A equação de equilíbrio em tensões é dada por,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (6.1)$$

e as condições de contorno e condições iniciais são dadas por:

- condições de contorno

$$u_i = q_i \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \times [0, T] \quad (6.2)$$

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \times [0, T] \quad (6.3)$$

- condições iniciais

$$u_i = u_{o,i} \quad (6.4)$$

$$u_{i,t} = \dot{u}_{o,i} \quad (6.5)$$

onde σ_{ij} = tensor de tensões;

f_i = forças de corpo por unidade de volume;

n_j = vetor normal ao contorno Γ ;

q_i , h_i = são os deslocamentos e trações especificados no contorno;

ρ = densidade de massa;

$u_{i,tt}$ = aceleração, ou segunda derivada dos deslocamentos u_i em relação ao tempo t ; e

$u_{o,i}$, $\dot{u}_{o,i}$ = condições iniciais de deslocamentos e velocidades, isto é, para $t = 0$.

As equações apresentadas definem o problema elastodinâmico, resta apenas definir a equação constitutiva elástica, isto é,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.6)$$

onde C_{ijkl} = matriz constitutiva elástica do material; e

ε_{kl} = tensor de deformações.

Portanto, a menos desta última equação, ou seja, a relação tensão-deformação, todas as outras podem ser definidas para o problema viscoelástico. Neste caso, a equação constitutiva do material viscoelástico é definida por,

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6.7)$$

onde $G_{ijkl}(t-\tau)$ define a função de relaxação viscoelástica dependente do tempo, e que caracteriza o problema viscoelástico.

Entre outras formas para se apresentar esta relação constitutiva pode-se redefini-la de forma conveniente para o desenvolvimento da formulação, ou seja,

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6.8)$$

onde $\lambda(t-\tau)$, $\mu(t-\tau)$ são as funções de relaxação δ_{ij} é o operador delta de Kronecker.

Muitas formulações partem da equação de equilíbrio dinâmico definida em função do vetor de deslocamentos u_i . Desta forma, pode-se recorrer novamente a teoria da elasticidade linear para definir a relação deslocamento-deformação, onde a correspondente forma para o problema viscoelástico é dada por,

$$2 \varepsilon_{ij}(\tau) = u_{i,j}(\tau) + u_{j,i}(\tau) \quad (6.9)$$

A relação constitutiva viscoelástica (6.8) e relação deformação-deslocamento (6.9), podem ser substituídas conjuntamente na equação de equilíbrio (6.1) para obter a correspondente equação de equilíbrio dinâmico em função dos deslocamentos, isto é,

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{k,ki}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + f_i = \rho u_{i,tt} \quad (6.10)$$

Este é a equação final, em conjunto com as condições de contorno e iniciais, que define o problema visco-elastodinâmico transiente. Para o problema quasi-estático, esta se simplifica apenas eliminando o último termo, isto é, o termo de inércia.

Entretanto, a solução que se pretende obter nesta formulação, é para o problema visco-elastodinâmico estacionário. Portanto, deve-se transformar esta equação transiente, do domínio do tempo, para o domínio da frequência.

Desta forma, considera-se então, para o problema estacionário, que as forças de corpo e as condições de contorno sejam harmônicas no tempo, isto é,

$$f_i(x, t) = \bar{f}_i \cdot \exp(i\omega t) \quad (6.11)$$

A imposição desta forma de excitação resulta em um resposta harmônica do sistema, ou seja, a resposta do problema estacionário, corresponde a solução do problema dependente do tempo quando aplica-se um carregamento harmônico no tempo. Em outras palavras, essa resposta que em princípio é dada no tempo, pode ser observada apenas variando-se a frequência, quando a parte transiente da resposta do sistema desaparece, e o sistema dinâmico encontra-se em regime estacionário. Desta forma a resposta harmônica resulta em,

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i \cdot \exp(i\omega t) \quad (6.12)$$

Uma forma matemática de se operar esta transformação, do problema transiente (tempo) para o problema estacionário (frequência), é através da transformada de Fourier. Aplicando-se a definição da transformada de Fourier sobre a equação de equilíbrio, obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico em regime estacionário, isto é,

$$\mu^*(i\omega) \bar{u}_{i,jj} + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)] \bar{u}_{k,ki} + \bar{f}_i = \rho \omega^2 \bar{u}_i \quad (6.13)$$

Observe que as funções de relaxação μ e λ são complexas e definidas por,

$$\mu^*(i\omega) = \mu \cdot (1 + i \eta_\mu(\omega)) \quad (6.14)$$

$$\lambda^*(i\omega) = \lambda \cdot (1 + i \eta_\lambda(\omega)) \quad (6.15)$$

onde μ e λ são as constantes de Lamé definidas na teoria da elasticidade; e

$\eta_\mu(\omega)$ e $\eta_\lambda(\omega)$ são os coeficientes de amortecimento ou dissipação do meio.

As propriedades viscoelásticas definidas através das constantes de Lamé complexas μ^* e λ^* , podem ser definidas através de modelos viscoelásticos, como os modelos de Maxwell, Kelvin e Maxwell-Kelvin, ou mesmo obtidos experimentalmente. Como observado nos capítulos anteriores

sobre viscoelasticidade linear, é importante destacar, que qualquer modelo viscoelástico também necessita de uma avaliação experimental, a fim de ajustar os parâmetros do modelo para caracterizar as propriedades viscoelásticas do material utilizado.

Na aplicação dos problemas de interação dinâmica solo-estrutura, o solo deve ser modelado como viscoelástico e os parâmetros de dissipação do meio $\eta_u(\omega)$ e $\eta_h(\omega)$ devem ser definidos. Por exemplo, para o modelo de kelvin, mostrado no capítulo de viscoelasticidade e rerepresentado abaixo,

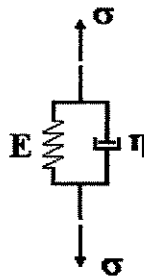


Fig. 6.1 - Modelo Viscoelástico de Kelvin

pode-se definir a relação entre tensão deformação viscoelástica para este modelo (3.6), como,

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (3.6)$$

Sendo movimento harmônico no tempo, onde a resposta do sistema é dada pela equação 6.12, as deformações também possuem comportamento harmônica, e a relação tensão-deformação viscoelástica é dada por,

$$\bar{\sigma} \exp(i\omega t) = (E \bar{\epsilon} + \eta \bar{\epsilon} i\omega) \exp(i\omega t)$$

que resulta,

$$\bar{\sigma} = (E + \eta i\omega) \bar{\epsilon} \quad (6.16)$$

onde E define a rigidez da mola e η o coeficiente de amortecimento viscoelástico. Observe a relação 3.12, que define a relação tensão-deformação na variável de Laplace, rerepresentada aqui, $\hat{\sigma} = (E + \eta s)\hat{\epsilon}$.

A relação equação constitutiva (6.16) pode ser reescrita por,

$$\bar{\sigma} = E(1 + i\omega \frac{\eta}{E}) \bar{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\bar{\sigma} = E(1 + i\omega\zeta) \bar{\varepsilon} \quad (6.17)$$

onde pode-se definir $\zeta = \eta/E$ como fator de amortecimento.

Comparando-se esta última relação com a equação constitutiva elástica, $\sigma = E \varepsilon$, observa-se que a passagem das propriedades do problema elástico para o viscoelástico é dada simplesmente pela transformação de uma variável real E para uma variável complexa $E^* = E(1 + i\omega\zeta)$. Isto implica que a parte que representa a dissipação de energia $\omega\zeta$ depende da frequência. Porém, em avaliações experimentais, observa-se que, para muitos materiais estruturais E^* permanece constante para um amplo espectro de frequência. Portanto, nestes casos, deve-se modificar a relação que faz a transição entre materiais elásticos e viscoelásticos, estabelecendo a E^* por $E(1 + i\eta)$, onde o fator de amortecimento η que representa a dissipação é constante na frequência, ou amortecimento material.

Este amortecimento material na forma $E(1 + i\eta)$ é denominado amortecimento histerético, enquanto o amortecimento material descrito por $E^* = E(1 + i\omega\zeta)$ é chamado de amortecimento viscoso.

Tendo em vista, o exposto acima, pode-se estabelecer um princípio da correspondência (relação entre materiais elásticos e viscoelásticos) para aproximar a descrição do mecanismo de amortecimento material num sólido elástico. Este princípio faz com que as constantes elásticas comumente utilizadas em problemas estruturais, tais como as constantes de Lamé, λ e μ , sejam substituídas, para a solução no domínio da frequência, por suas correspondentes complexas (eq. 6.14 e 6.15), porém com o fator de dissipação constante, isto é,

$$\mu^* = \mu \cdot (1 + i\eta_\mu) \quad (6.18)$$

$$\lambda^* = \lambda \cdot (1 + i\eta_\lambda) \quad (6.19)$$

Para o problema de mecânica do contínuo elástica, a constante de rigidez E define o módulo de elasticidade do material e μ o módulo de elasticidade transversal. Outra constante freqüentemente utilizada para definir o meio contínuo elástico é o coeficiente de Poisson ν , que para o problema elástico é dada por, $\nu = \frac{E}{2\mu} - 1$.

As constantes físicas elásticas E , μ , λ e ν estão associadas entre si, necessitando-se apenas de duas delas para definir as propriedades elásticas do meio. Isto também pode-se aplicar para o

meio viscoelástico, e tal como da teoria da elasticidade, as correspondentes constantes de Lamé viscoelásticas podem ser dadas por,

$$\mu^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \quad (6.20)$$

$$\lambda^* = \frac{E^* \nu^*}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \quad (6.21)$$

Outra simplificação prática, proveniente de resultados experimentais, é que os coeficientes de amortecimentos, na grande maioria das vezes são considerados iguais, isto é, $\eta_\mu = \eta_\lambda$. Neste caso, o coeficiente de Poisson ν^* para o problema viscoelástico é uma constante real, definida por,

$$\nu = \frac{E^*}{2\mu^*} - 1 \quad (6.22)$$

Como já observado anteriormente, em casos reais de problemas estruturais, o amortecimento viscoso, onde o termo de dissipação ou amortecimento é depende da frequência, pode ser aproximado pelo amortecimento histerético, onde o termo de dissipação é constante em relação a frequência. Desta forma, os problemas que analisados neste trabalho, são avaliados definindo-se as propriedades, utilizando o amortecimento histerético, como dadas nas equações 6.18 e 6.19.

6.2 Função de Green - Propagação de Ondas em Meio Viscoelástico

A formulação a seguir tem como objetivo solucionar o problema de propagação de ondas em um meio infinito. Em particular deseja-se obter a resposta de uma estrutura interagindo com o solo, caracterizando o problema de interação dinâmica solo-estrutura, ou da DSSI (Dynamic Soil-Structure Interaction). A formulação desenvolvida nesta seção é dedicada ao trabalho de doutorado de Romanini, 1995. Em sua tese de doutorado, Romanini desenvolve a sintetização de funções de Green para tratamento de problemas elastodinâmicos analisando a interação dinâmica solo-estrutura. Sendo que, sua formulação é realizada totalmente no domínio da frequência. Desta forma, deve-se apresentar apenas alguns passos desta formulação, pois o objetivo deste trabalho é utilizar as repostas estacionárias (resposta em frequência) para obter as soluções transientes de problemas da DSSI.

Neste caso a estrutura representa uma fundação ou componente mecânico sobre o solo e excitada dinamicamente e o solo caracteriza o meio infinito viscoelástico, como mostrado na figura 6.2.

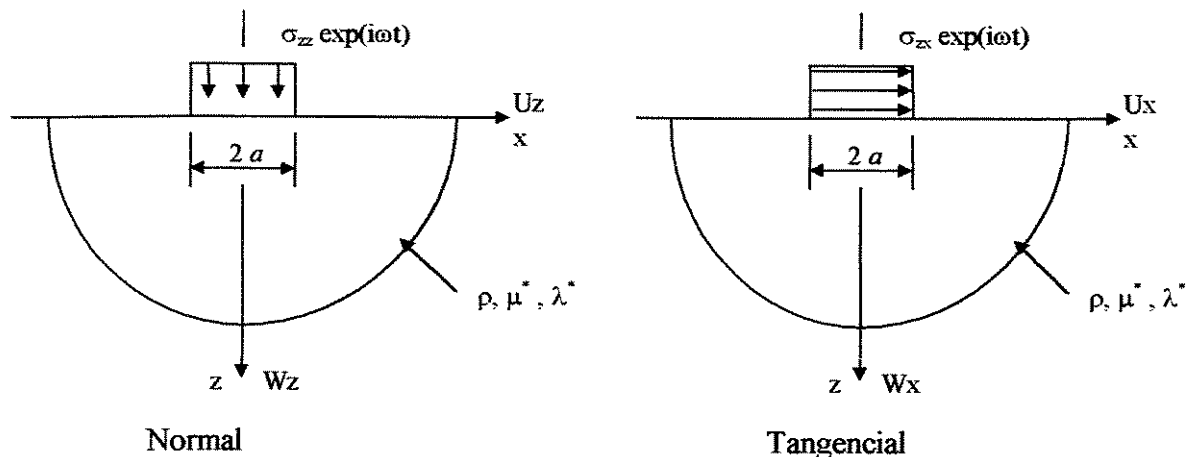


Fig 6.2 Carregamento Normal e Tangencial na superfície do semi-espaço viscoelástico

Para o problema estacionário, assume-se os deslocamentos harmônicos no tempo, como na equação 6.12, repetida aqui,

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x) \cdot \exp(i\omega t) \quad (6.23)$$

e a equação de equilíbrio dinâmico estacionário (6.13), ou equação de Navier também repetida aqui,

$$\mu^* \bar{u}_{i,jj} + [\lambda^* + \mu^*] \bar{u}_{k,ki} + \bar{f}_i = \rho \omega^2 \bar{u}_i \quad (6.24)$$

e para completar a definição deste problema de valor de contorno, resta apenas especificar as condições de contorno. Assim, considerando os carregamentos normal e tangencial na superfície do semi-espço, as condições de contorno em tensões podem ser definidas. Para a carga vertical, estas condições de contorno são dadas por,

$$\bar{\sigma}_{oz}(x, z = 0) = \begin{cases} -\bar{\sigma}_{zz} & ; |x| \leq a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \quad (6.25)$$

e para a carga horizontal, as condições de contorno são dadas por,

$$\bar{\sigma}_{ox}(x, z = 0) = \begin{cases} \bar{\sigma}_{zx} & ; |x| \leq a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \quad (6.26)$$

A solução para o problema consiste em obter as funções de Green que permitem encontrar a resposta dinâmica estacionária de um semi-espço viscoelástico, submetida a um carregamento harmônico.

No problema propagação de ondas em um semi-espço, é mais comum representar as propriedades do meio em função das velocidades de propagação de ondas de pressão (dilatação) C_1 de cisalhamento C_2 . Para um meio contínuo viscoelástico essas velocidades de ondas serão definidas em função das propriedades viscoelásticas do meio. Isto é, as velocidades de onda de pressão C_1^* e de cisalhamento C_2^* são dadas como,

$$C_1^{*2} = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho} \quad (6.27)$$

$$C_2^{*2} = \frac{\mu^*}{\rho} \quad (6.28)$$

onde as constantes envolvidas nas equações já foram definidas anteriormente. Também é freqüente definir os números complexos de onda, isto é,

$$k_1^{*2} = \frac{\omega^2}{C_1^{*2}} \quad (6.29)$$

$$k_2^{*2} = \frac{\omega^2}{C_2^{*2}} \quad (6.30)$$

Utilizando as constantes acima a solução da equação de equilíbrio dinâmico (6.24) permite obter as funções de flexibilidade no semi-espaco bi-dimensional.

A função de flexibilidade para carregamento vertical resulta,

$$\bar{H}_{wz}(\beta) = \frac{\alpha_1 (\beta^2 - \alpha_2^2)}{\mu^* F_{ray}(\beta)} \quad (6.31)$$

$$\bar{H}_{uz}(\beta) = \frac{i \beta [(\beta^2 + \alpha_2^2) - 2 \alpha_1 \alpha_2]}{\mu^* F_{ray}(\beta)} \quad (6.32)$$

e a função flexibilidade para carregamento horizontal resulta,

$$\bar{H}_{ux}(\beta) = \frac{\alpha_2 (\beta^2 - \alpha_1^2)}{\mu^* F_{ray}(\beta)} \quad (6.33)$$

$$\bar{H}_{wx}(\beta) = -\frac{i \beta [(\beta^2 + \alpha_1^2) - 2 \alpha_1 \alpha_2]}{\mu^* F_{ray}(\beta)} \quad (6.34)$$

onde, $\alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - k_1^{*2}}$, $\alpha_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^{*2}}$; e

$$F_{ray}(\beta) = [2 \beta^2 - k_2^{*2}]^2 - 4 \beta^2 \alpha_1 \alpha_2$$

enquanto, α_1 , α_2 e β número de ondas. É ainda interessante observar que $\bar{H}_{uz}(\beta) = -\bar{H}_{wx}(\beta)$.

E a solução final, que fornece os deslocamentos estacionários para carregamentos vertical e horizontal sobre o semi-espaco viscoelástico é,

$$\bar{W}_p(x) = \frac{\bar{\sigma}_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{wp}(\beta) \sin(\beta \alpha)}{\beta} \exp(i \beta x) d\beta \quad (6.35)$$

$$\bar{U}_p(x) = \frac{\bar{\sigma}_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_{up}(\beta) \sin(\beta \alpha)}{\beta} \exp(i \beta x) d\beta \quad (6.36)$$

onde $p = z, x$.

As equações para $\overline{W}_p(x)$ e $\overline{U}_p(x)$ acima são chamadas de funções de influência e as integrais envolvidas na sua solução são obtidas numericamente.

6.2.1 Definição das Grandezas Adimensionais

É comum em problemas de interação dinâmica solo-estrutura apresentar as soluções em função de grandezas adimensionais, diferente das constantes β , k_1^{*2} , k_2^{*2} , α_1 e α_2 , definidas na formulação anterior. Os resultados são apresentados em função da frequência adimensional A_o e dos deslocamentos adimensionalizados.

- frequência adimensional A_o

$$A_o = \frac{\omega \cdot a}{C_2} \quad (6.37)$$

onde as constantes foram definidas anteriormente como sendo: ω a frequência de excitação, a a metade da extensão do carregamento, e C_2 a velocidade de propagação de onda de cisalhamento.

- amplitudes adimensionais

Após a avaliação numérica das expressões para $\overline{W}_p(x)$ e $\overline{U}_p(x)$ estas podem ser normalizadas em relação às excitações $\bar{f}_p = 2 a \bar{\sigma}_{zp}$ para fornecer as funções de flexibilidade complexas,

$$\frac{\overline{W}_p \pi \mu}{2 a \bar{\sigma}_{zp}} = \overline{H}_{wp} \quad (6.38)$$

$$\frac{\overline{U}_p \pi \mu}{2 a \bar{\sigma}_{zp}} = \overline{H}_{up} \quad (6.39)$$

com $p = z, x$.

6.2.2 Superposição das funções de flexibilidade complexas

Denominados de Método da Superposição a técnica baseada na aplicação sucessiva da relação (6.38) e (6.39) em cada segmento discretizado da interface solo-estrutura. Assume-se um campo de tensões constantes em cada um destes segmentos, e pode-se então analisar a influência destas tensões (localizada sobre cada um dos segmentos) em relação aos segmentos restantes.

Desta forma, para uma distribuição de tensões constantes por segmentos, em que assume-se uma discretização regular com n elementos na interface solo-estrutura, as condições de contorno podem ser escritas na forma,

$$\bar{\sigma}_{ozp}(x) = \bar{\sigma}_{ozpi}^M; \quad (x_i^M - a_i) < x < (x_i^M + a_i) \quad (6.40)$$

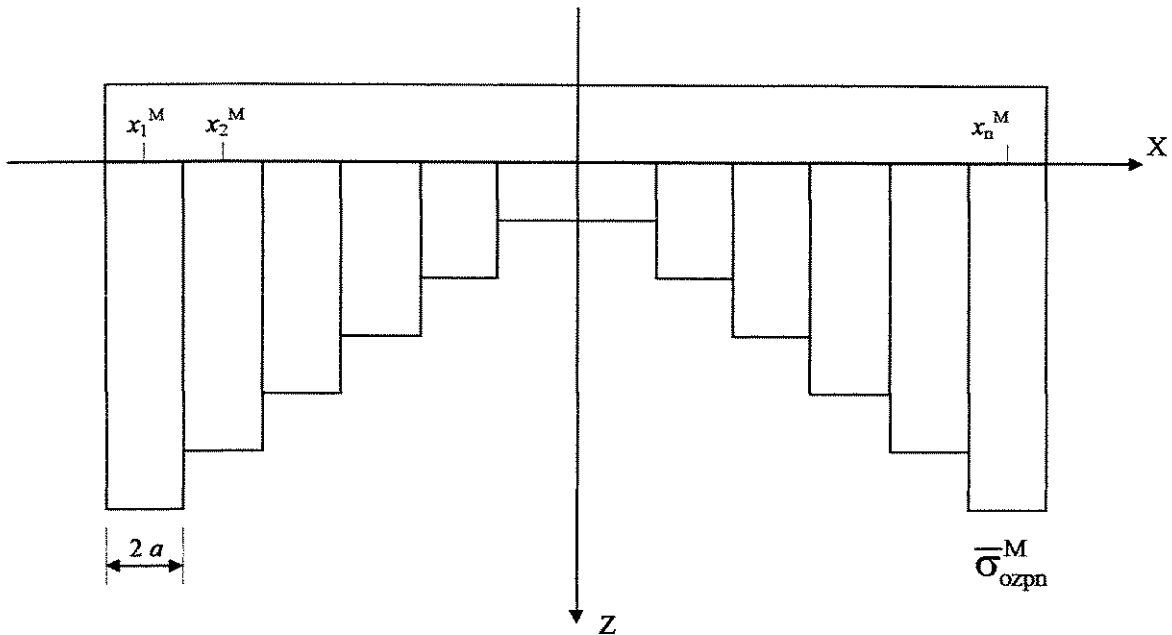


Fig. 6.3 Discretização das tensões no solo sob a fundação

As funções de flexibilidade complexas são superpostas na interface solo-fundação a fim de constituírem uma relação geral entre os esforços $\bar{f}_f(x_j)$ e os deslocamentos $\bar{u}_f(x_j)$, definida por um sistema matricial,

$$\{\bar{u}_f(x_i)\} = \frac{1}{\pi \mu} [\bar{H}_f(x_i, x_j)] \{\bar{f}_f(x_j)\} \quad (6.41)$$

A equação final (6.41) representa a forma discretizada das equações para os deslocamentos adimensionalizados (6.38) e (6.39), e associa o deslocamento no centro do i -ésimo elemento sob a fundação que é provocada por uma tensão constante no j -ésimo elemento. Algumas aplicações para esta solução pode ser encontrada no trabalho de Mesquita *et all*, 1995.

6.3 Elementos de Contorno Viscoelástico Estacionário

6.3.1 Formulação da Equação Integral de Contorno

Na seção anterior obteve-se a solução da equação de equilíbrio dinâmico estacionário para um meio viscoelástico através das funções de influência. Este mesmo problema pode agora ser solucionado utilizando a formulação de Elementos de Contorno. Qualquer uma das formulações tem como objetivo solucionar o problema de propagação de ondas em um semi-espço viscoelástico.

A formulação de Elementos de Contorno, tal como a formulação para funções de influência, inicia-se da definição da equação de Navier para problemas estacionário. O meio a ser analisado é viscoelástico linear, homogêneo e isotrópico. Pode-se partir novamente da equação de equilíbrio elastodinâmico estacionário (6.24) descrita em termos dos deslocamentos, isto é, a equação de Navier. Neste caso a equação de Navier é definida em função das velocidades de propagação de ondas C_1^* e C_2^* .

$$(C_1^{*2} - C_2^{*2}) \bar{u}_{k,ki} + C_2^{*2} \bar{u}_{i,jj} + \bar{f}_i = \omega^2 \bar{u}_i \quad (6.42)$$

As constantes são rerepresentadas aqui,

- velocidade de propagação de ondas de dilatação C_1^*

$$C_1^{*2} = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho} \quad (6.43)$$

- velocidade de propagação de ondas de cisalhamento C_2^*

$$C_2^{*2} = \frac{\mu^*}{\rho} \quad (6.44)$$

sendo μ e λ as constantes de Lamé e ρ a densidade do meio contínuo.

As condições também transformadas para o domínio da frequência e redefinidas,

$$\bar{u}_i(x, \omega) = \bar{q}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \quad (6.45)$$

$$\bar{t}_{(n)i}(x, \omega) = \bar{t}_{ij} n_j = \bar{h}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \quad (6.46)$$

e a relação constitutiva como em Eringen e Suhubi, 1975, é dada por,

$$\bar{t}_{ij} = \rho (C_1^{*2} - 2 C_2^{*2}) \bar{u}_{k,k} \delta_{ij} + \rho C_2^{*2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (6.47)$$

Deve-se observar que as condições iniciais desaparecem quando se faz a transformação de domínio, ou seja, do domínio do tempo para o domínio da frequência.

O próximo passo é desenvolver a formulação integral para um problema geral elastodinâmico estacionário, definido pela equação 6.42 e suas condições de contorno. Para isto, deve-se definir a solução fundamental singular para esta equação num meio infinito. Esta solução fundamental é definida no domínio da frequência, como,

$$\bar{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) = \frac{\bar{f}(\omega)}{\alpha \pi \rho C_2^{*2}} (\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j) \quad (6.48)$$

onde para o caso bi-dimensional $\alpha = 2$ e as funções ψ e χ são definidas por,

$$\psi = K_0 \left[\frac{i \omega}{C_2^*} \right] + \frac{i \omega}{C_2^*} \left\{ K_1 \left[\frac{i \omega}{C_2^*} \right] - \frac{C_2^*}{C_1^*} K_1 \left[\frac{i \omega}{C_1^*} \right] \right\} \quad (6.49)$$

$$\chi = K_2 \left[\frac{i \omega}{C_2^*} \right] - \frac{C_2^{*2}}{C_1^{*2}} K_2 \left[\frac{i \omega}{C_1^*} \right] \quad (6.50)$$

onde K_0 , K_1 , K_2 são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo e ordens 0, 1 e 2, respectivamente. As demais variáveis são dadas como,

x - ponto do campo onde mede-se os deslocamentos

ξ - ponto de colocação onde aplica-se a carga

$$\bar{r} = |x - \xi|$$

E a resposta do meio infinito é dada por $\bar{u}_i = \bar{u}_{ij}^* \cdot e_j$

Pode-se através da solução fundamental $\bar{u}_{ij}^*$, também chamada de tensor de deslocamentos de Stokes, obter o tensor de trações $\bar{t}_{ij}^*$ como,

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi} \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right] \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_i r_j \right] - \frac{2}{r} \chi \left[n_i r_j - 2 r_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} + \left[\frac{C_1^{*2}}{C_2^{*2}} - 2 \right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\alpha}{2 r} \chi \right] r_i r_j \right\} \quad (6.51) \end{aligned}$$

Pode-se então usar o teorema da reciprocidade de Betti, para obter a solução do problema elastodinâmico no domínio da frequência ω na forma integral. Para problemas solo-estrutura (DSSI), o qual é assunto deste capítulo, pode-se supor que as forças de corpo $\bar{f}_i$ sejam nulas e ainda deve-se tratar de problemas, os quais possuem contornos geométricos “suaves”. Desta forma, pode-se finalmente escrever a equação integral como definido abaixo,

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \left[\bar{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) \bar{t}_{(w)j}(x, \omega) - \bar{t}_{ij}^*(x, \xi, \omega) \bar{u}_j(x, \omega) \right] d\Gamma \quad (6.52)$$

Detalhes com relação a esta formulação do Método dos Elementos de Contorno para problema elastodinâmicos estacionários podem ser encontrados no trabalho de Pontes, 1992.

6.3.2 Discretização da Equação Integral no Contorno - MEC

Pode-se utilizar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para solucionar a integral de contorno descrita anteriormente. Isto é, o MEC consiste na discretização desta integral de contorno, obtendo-se um sistema de equações com variáveis de trações e deslocamentos, na superfície do solo ou contorno. Deve-se fazer apenas a discretização espacial, pois o problema a ser solucionado é em regime estacionário, domínio da frequência, não necessitando da discretização no tempo.

A discretização espacial neste trabalho é feita com elementos constantes, onde os nós de referência para obtenção das variáveis de deslocamentos e trações são definidos no centro de cada elemento.

Portanto, utilizando-se da discretização do contorno com elementos constantes e, superpondo os efeitos de todos os nós, a equação integral de contorno resulta na sua forma discreta ou matricial como,

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i^{pc} = \sum_{e=1}^M [\bar{G}_{ij}^e] \{ \bar{t}_j^e \} - \sum_{e=1}^M [\bar{H}_{ij}^e] \{ \bar{u}_j^e \}, \quad \begin{matrix} pc = 1, 2, \dots, M \\ i, j = 1, 2 \text{ (ndof)} \end{matrix} \quad (6.53)$$

onde M = número de elementos do contorno

pc = elementos que contém o ponto de colocação

$\bar{u}_j^e$ = vetor deslocamentos

$\bar{t}_j^e$ = vetor de trações

$\overline{G}_{ij}^e, \overline{H}_{ij}^e$ = matrizes de influência dada pela integração dos termos na equação integral de contorno, que é definida por,

$$\overline{G}_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \overline{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) d\Gamma_e \quad (6.54)$$

$$\overline{H}_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \overline{t}_{ij}^*(x, \xi, \omega) d\Gamma_e \quad (6.55)$$

$\overline{u}_i^{pc}$ = vetor deslocamentos no elemento singular, ou seja, o elemento que contém o ponto de colocação, ou ponto de aplicação do carregamento dado pela função delta de Dirac, e que gera uma singularidade na resposta para este ponto.

Na discretização de Elementos de Contorno, foi utilizado elemento constante, e após a integração sobre todos os elementos, dada pelas equações 6.54 e 6.55, e superposição dos efeitos através da equação 6.53, obtém-se um sistema de equações algébricas, escrito na forma matricial abaixo,

$$\frac{1}{2} \{\overline{u}\} = [\overline{G}] \{\overline{t}\} - [\overline{H}] \{\overline{u}\} \quad (6.56)$$

Para solucionar este sistema de equações deve-se conhecer e impor as condições de contorno como forças de superfície $\{\overline{t}\}$ ou deslocamentos da superfície $\{\overline{u}\}$, ou ainda parte de cada um desses graus de liberdade. Com isto pode-se rearranjar o sistema de equações acima, de tal forma que os elementos, ou termos das matrizes $[\overline{G}]$ e $[\overline{H}]$ relacionados com as trações e deslocamentos desconhecidos, se encontrem no lado esquerdo do sistema, formando a matriz dinâmica equivalente $[\overline{S}]$, enquanto no lado direito do sistema resta os graus de liberdades dados por trações e deslocamentos conhecidos. Então, um sistema de equações semelhante àquele obtido para as formulações de elementos finitos, resulta para a equação de Elementos de Contorno, isto é,

$$[\overline{S}] \{\overline{u}\} = \{\overline{f}\} \quad (6.57)$$

onde $\{\overline{u}\}$ é o vetor formado por parte das trações de superfície $\{\overline{t}\}$ e parte dos deslocamentos de superfície $\{\overline{u}\}$ desconhecidos;

$\{\overline{f}\}$ é formado pelos valores conhecidos de $\{\overline{t}\}$ e $\{\overline{u}\}$, dados pelas condições de contorno do problema; e

$[\overline{S}]$ é a matriz de coeficientes dinâmicos dependentes da frequência, ou seja $[\overline{S}] = [S(\omega)]$.

6.4 Inclusão da Solução para Fundação Rígida nas Formulações de Green e do MEC

Os mesmos procedimentos apresentados anteriormente, para as formulações das funções de Green ou do MEC, podem ser empregados para incluir a fundação rígida na solução. Apenas, que o sistema matricial inicial, obtido através de cada uma das formulações são distintos. Portanto, pode-se partir do sistema matricial proveniente da superposição das funções de Green, equação 6.41, ou do sistema matricial gerado pela formulação do MEC, equação 6.56. Isto é, para a formulação através das funções de Green, o sistema equivalente do solo é dado por,

$$\{\bar{u}_f(x_i)\} = \frac{1}{\pi \mu} [\bar{H}_f(x_i, x_j)] \{\bar{f}_f(x_j)\} \quad (6.41)$$

e para o MEC, o sistema equivalente é,

$$\frac{1}{2} \{\bar{u}\} = [\bar{G}] \{\bar{t}\} - [\bar{H}] \{\bar{u}\} \quad (6.56)$$

O problema de interação solo-estrutura, ou a interação entre um corpo rígido (fundação) e o solo é definido impondo-se as condições cinemáticas e de forças entre o solo e a fundação. Para esta análise, parte-se do princípio que a fundação permanece sempre em contato (colado) com o solo.

A partir de uma discretização sobre o solo, determinada pelos métodos, pode-se identificar os pontos nodais que devem fazer a interação física entre fundação e solo. A figura 6.4 representa uma fundação rígida sobre o solo, onde os pontos nodais estão identificados sobre o eixo X. As coordenadas com x_i e z_i identificam os “n” pontos nodais sobre o solo que são comuns com a fundação, enquanto as coordenadas x_f e z_f definem o ponto de referência para aplicação das forças externas F_v , F_h e M_y aplicadas sobre a fundação e também os pontos onde deve-se medir os deslocamentos u_v e u_h e a rotação ϕ_y da fundação rígida.

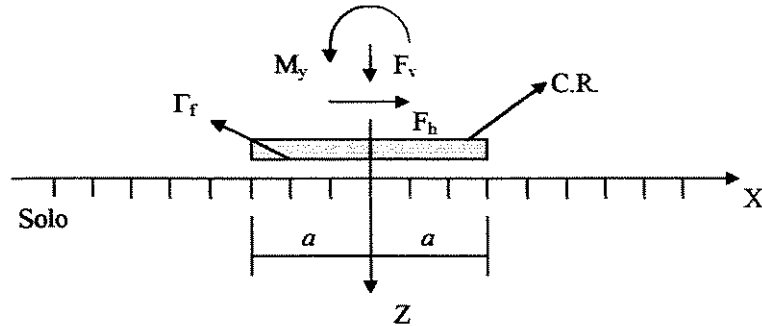


Fig. 6.4 - Domínio do Solo Discretizado e a Interação com o Corpo Rígido

Pode-se impor as condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças entre o corpo rígido e a modelagem do solo.

- Condição de compatibilidade cinemática

$$\begin{aligned} u_{z_i} &= u_v + \phi_y (x_i - x_f) \\ u_{x_i} &= u_h - \phi_y (z_i - z_f) \end{aligned} \quad (6.58)$$

u_v, u_h = amplitude dos deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente no ponto de referência da fundação (deslocamentos de corpo rígido);

u_{z_i}, u_{x_i} = amplitude dos deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente nos i-ésimos pontos da fundação, que coincidem com os pontos nodais da discretização;

ϕ_y = amplitude do ângulo de rotação;

ω = frequência de excitação;

x_i, z_i = coordenadas desses i-ésimos pontos; e

x_f, z_f = coordenadas do ponto de referência da fundação.

De uma forma geral pode-se escrever,

$$\begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ u_{x_i} \\ \vdots \\ u_{z_n} \\ u_{x_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_i - x_f)/a \\ 0 & 1 & -(z_i - z_f)/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & (x_n - x_f)/a \\ 0 & 1 & -(z_n - z_f)/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi_y \cdot a \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

onde n é o número de pontos do solo em contato com a fundação.

Pode-se escrever a equação acima de forma compacta,

$$\{u_f\} = [CC] \{u_i\} \quad (6.60)$$

onde $[CC]$ é a matriz de compatibilidade cinemática.

- Condição de Equilíbrio em Forças

$$\begin{aligned} F_v &= \sum_{i=1}^n F_{z_i} \\ F_h &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \\ M_y &= \sum_{i=1}^n F_{z_i} \cdot (x_i - x_f) - F_{x_i} \cdot (z_i - z_f) \end{aligned} \quad (6.61)$$

onde F_{z_i}, F_{x_i} = forças em cada ponto i da fundação nas direções vertical e horizontal, respectivamente; e

M_y = Momento na fundação em torno do eixo y .

Esta relação de equilíbrio de forças também pode ser reescrita de forma geral,

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M_y / a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ (x_i - x_f) / a & -(z_i - z_f) / a & \dots & (x_n - x_f) / a & -(z_n - z_f) / a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{z_i} \\ F_{x_i} \\ \vdots \\ F_{z_n} \\ F_{x_n} \end{Bmatrix} \quad (6.62)$$

ou mesmo de forma compacta,

$$\{F_f\} = [EQ] \{F_i\} \quad (6.63)$$

onde $[EQ]$ é a matriz equilíbrio de forças.

As relações (6.60) e (6.63) devem então serem impostas as matrizes provenientes da modelagem do solo, funções de Green ou Elementos de Contorno, para produzirem um sistema de equações que incorpore a interação dinâmica solo-estrutura.

6.4.1 Resposta da Fundação Rígida e Funções de Green

As relações (6.35) e (6.36) podem ser utilizadas para definir o campo de deslocamentos $\bar{W}_z$ e $\bar{U}_z$ provenientes das excitações normais $\bar{F}_z$, e de deslocamentos $\bar{W}_x$ e $\bar{U}_x$ devido as forças tangenciais $\bar{F}_x$. Portanto, o campo de deslocamentos resulta,

$$\bar{W}_z(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x) \bar{F}_z(x) \quad (6.64)$$

$$\bar{W}_x(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x) \bar{F}_x(x) \quad (6.65)$$

$$\bar{U}_z(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x) \bar{F}_z(x) \quad (6.66)$$

$$\bar{U}_x(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x) \bar{F}_x(x) \quad (6.67)$$

Pode-se através das relações (6.64)-(6.67) obter os deslocamentos totais em cada ponto nodal sob a fundação, isto é,

$$\bar{W}_f(x) = \bar{W}_z(x) + \bar{W}_x(x) \quad (6.68)$$

$$\bar{U}_f(x) = \bar{U}_z(x) + \bar{U}_x(x) \quad (6.69)$$

Os deslocamentos totais podem ser escritos através das funções das flexibilidades, resultando,

$$\bar{W}_f(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x) \bar{F}_z(x) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x) \bar{F}_x(x) \quad (6.70)$$

$$\bar{U}_f(x) = \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x) \bar{F}_z(x) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x) \bar{F}_x(x) \quad (6.71)$$

Desta forma, utilizando o princípio da superposição definido na relação (6.41), pode-se obter os deslocamentos totais dos nós sob a fundação,

$$\bar{W}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] \quad (6.72)$$

$$\bar{U}_f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] \quad (6.73)$$

Pode-se impor as condições de compatibilidade cinemática do corpo rígido, na forma descrita nas relações (6.58-6.59). Lembrando-se ainda que as variáveis de deslocamentos de corpo rígido devem ser escritas no domínio da frequência, isto é $\bar{u}_v$, $\bar{u}_h$ e $\bar{\phi}_y$, obtém-se,

$$\bar{W}_i(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] = \bar{u}_v + (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a \quad (6.74)$$

$$\bar{U}_i(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] = \bar{u}_h - (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a \quad (6.75)$$

que resulta,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] - \bar{u}_v - (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.76)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) \bar{F}_z(x_j) + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \bar{F}_x(x_j) \right] - \bar{u}_h + (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.77)$$

As relações acima podem ser reescritas na forma matricial, como,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f) / a \\ \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f) / a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z(x_j) \\ \bar{F}_x(x_j) \\ \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.78)$$

Observe que resultou-se em um sistema de mais incógnitas do que equações (2n equações e 2n+3 incógnitas), onde “n” é o número de discretizações do solo sob a fundação. Deve-se neste ponto, impor as condições de equilíbrio de forças, definida nas equações (6.61-6.62). Portanto, o sistema acima é ampliado para,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f) / a \\ \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) & \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f) / a \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -(x_i - x_f) / a & (z_i - z_f) / a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z(x_j) \\ \bar{F}_x(x_j) \\ \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_v \\ \bar{F}_h \\ \bar{M}_y / a \end{Bmatrix} \quad (6.79)$$

Observando o sistema matricial acima, pode-se identificar as matrizes de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças (eqs. (6.60) e (6.63)). Estas relações podem então serem substituídas no sistema matricial, resultando,

$$\begin{bmatrix} \bar{H} & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_t \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

onde $\bar{H}$ é a matriz com as funções de flexibilidade do solo;

CC é a matriz de compatibilidade cinemática;

EQ é a matriz de equilíbrio de forças;

$\bar{F}_t$ é o vetor de forças na interface da fundação;

$\bar{u}_t$ são os graus de liberdade da fundação rígida, $\bar{u}_v, \bar{u}_h$ e $\bar{\phi}_y \cdot a$, isto é, deslocamentos vertical, horizontal e rotação, respectivamente; e

$\bar{F}_t$ são os carregamentos sobre o corpo rígido, $\bar{F}_v, \bar{F}_h$ e $\bar{M}_y / a$, isto é, forças vertical e horizontal e momento.

- Normalização da Resposta da Fundação Rígida Sem Massa

As tensões normalizadas podem ser definidas por,

$$\bar{k}_{zj} = \frac{\bar{\sigma}_{zj}}{\bar{\sigma}_z} = \frac{\bar{F}_z(x_j) a}{a_j \bar{F}_z} \Rightarrow \bar{k}_{zj} = \frac{\bar{F}_z(x_j) a}{\bar{F}_z a_j} \quad (6.81)$$

$$\bar{k}_{xj} = \frac{\bar{\sigma}_{xj}}{\bar{\sigma}_x} = \frac{\bar{F}_x(x_j) a}{a_j \bar{F}_x} \Rightarrow \bar{k}_{xj} = \frac{\bar{F}_x(x_j) a}{\bar{F}_x a_j} \quad (6.82)$$

onde $d_j = \frac{a_j}{a}$; a é o semi-lado da fundação rígida e a_j a largura das discretizações sob a fundação.

As equações (6.76) e (6.77), da compatibilidade entre os deslocamentos da fundação e a superfície do solo podem ser utilizadas para obter as respostas adimensionais da fundação rígida. Inicialmente, deve-se assumir que apenas a força vertical sobre a fundação é aplicada, ou seja, $\bar{F}_v = \bar{F}_z \neq 0$, enquanto os demais carregamentos são iguais a zero, isto é, carregamento horizontal, $\bar{F}_h = \bar{F}_x = 0$, e momento sobre a fundação, $\bar{M}_y / a = 0$. Pode-se dividir as relações (6.76) e (6.77), pela força vertical $\bar{F}_z$, para obter a adimensionalização, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\bar{F}_z} + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\bar{F}_z} \right] - \frac{1}{\bar{F}_z} \bar{u}_v - \frac{1}{\bar{F}_z} (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.83)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_z(x_j)}{\bar{F}_z} + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \frac{\bar{F}_x(x_j)}{\bar{F}_z} \right] - \frac{1}{\bar{F}_z} \bar{u}_h + \frac{1}{\bar{F}_z} (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.84)$$

Segundo a mesma normalização das tensões apresentadas em (6.81) e (6.82), pode-se substituir os termos envolvendo os carregamentos na equação acima, pelas suas respectivas tensões normalizadas, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) \bar{k}_{zj} d_j + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \bar{k}_{xj} d_j \right] - \frac{1}{\bar{F}_z} \bar{u}_v - \frac{1}{\bar{F}_z} (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.85)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) \bar{k}_{zj} d_j + \frac{1}{\pi \mu} \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \bar{k}_{xj} d_j \right] - \frac{1}{\bar{F}_z} \bar{u}_h + \frac{1}{\bar{F}_z} (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.86)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zj} d_j \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xj} d_j \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} \bar{u}_v - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.87)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zj} d_j \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xj} d_j \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} \bar{u}_h + \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_y \cdot a = 0 \quad (6.88)$$

Lembrando que as amplitudes também podem ser normalizadas pelo fator $\pi \mu / \bar{F}_z$, pode-se escrever os deslocamentos verticais, horizontais e a rotação normalizadas da fundação rígida como,

$$\bar{u}_{vN} = \frac{\bar{u}_v \pi \mu}{\bar{F}_z} \quad \bar{u}_{hN} = \frac{\bar{u}_h \pi \mu}{\bar{F}_z} \quad \bar{\phi}_{yN} \cdot a = \frac{\bar{\phi}_y \cdot a \pi \mu}{\bar{F}_z} \quad (6.89)$$

Substituindo estas três relações nas equações (6.87) e (6.88), obtém-se,

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zj} d_j \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xj} d_j \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} \frac{\bar{u}_{vN} \bar{F}_z}{\pi \mu} - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} (x_i - x_f) / a \frac{\bar{\phi}_{yN} \cdot a \bar{F}_z}{\pi \mu} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zj} d_j \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xj} d_j \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \right] - \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} \frac{\bar{u}_{hN} \bar{F}_z}{\pi \mu} + \frac{\pi \mu}{\bar{F}_z} (z_i - z_f) / a \frac{\bar{\phi}_{yN} \cdot a \bar{F}_z}{\pi \mu} = 0$$

e simplificando as equações acima, resulta,

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zj} d_j \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xj} d_j \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) \right] - \bar{u}_{vN} - (x_i - x_f) / a \bar{\phi}_{yN} \cdot a = 0 \quad (6.90)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\bar{k}_{zzj} d_j \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) + \bar{k}_{xzzj} d_j \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) \right] - \bar{u}_{hN} + (z_i - z_f) / a \bar{\phi}_{yN} \cdot a = 0 \quad (6.91)$$

Estas duas equações acima, podem ser colocadas em uma forma matricial, como em (6.78), isto é,

$$\begin{bmatrix} d_j \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) & d_j \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f) / a \\ d_j \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) & d_j \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f) / a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{k}_{zzj} \\ \bar{k}_{xzzj} \\ \bar{u}_{vN} \\ \bar{u}_{hN} \\ \bar{\phi}_{yN} \cdot a \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.92)$$

Novamente, o sistema de equações acima deve ser complementado, impondo-se as condições de equilíbrio de força, a fim de se obter um sistema com $2n+3$ equações e $2n+3$ incógnitas. Utilizando a equação de equilíbrio de forças da relação (6.62), porém neste caso em sua forma normalizada, e ainda lembrando que definiu $\bar{F}_v \neq 0$, enquanto $\bar{F}_h = \bar{M}_y = 0$, pode-se obter,

$$\begin{bmatrix} d_j \bar{H}_{wz}(x_i, x_j) & d_j \bar{H}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(x_i - x_f) / a \\ d_j \bar{H}_{uz}(x_i, x_j) & d_j \bar{H}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (z_i - z_f) / a \\ -1 \cdot d_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \cdot d_j & 0 & 0 & 0 \\ d_j \cdot (-x_i - x_f) / a & d_j \cdot ((z_i - z_f) / a) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{k}_{zzj} \\ \bar{k}_{xzzj} \\ \bar{u}_{vN} \\ \bar{u}_{hN} \\ \bar{\phi}_{yN} \cdot a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.93)$$

Observando o sistema matricial acima, identifica-se as matrizes de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças, semelhante aqueles das equações (6.60) e (6.63). Portanto utilizando-se estas matrizes, pode-se escrever um sistema matricial final, tal como o sistema da equação (6.80), porém neste caso com as variáveis normalizadas, isto é,

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_N & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{k}_N \\ \bar{u}_{tN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{tN} \end{Bmatrix} \quad (6.94)$$

onde $\bar{H}_N$ é a matriz com as funções de flexibilidade normalizadas do solo;

CC é a matriz de compatibilidade cinemática;

EQ é a matriz de equilíbrio de forças;

$\bar{k}_N$ é o vetor normalizado das tensões na interface da fundação rígida com o solo;

$\bar{u}_{tN}$ são os graus de liberdade da fundação rígida, u_{vN} , u_{hN} e $\phi_{yN} \cdot a$, isto é, deslocamentos vertical, horizontal e rotação, respectivamente; e

$\bar{F}_{\text{en}}$ são os carregamentos sobre o corpo rígido, $\{1 \ 0 \ 0\}$, $\{0 \ 1 \ 0\}$ e $\{0 \ 0 \ 1\}$, isto é, vetor de forças vertical, horizontal e momento normalizados, e que podem ser aplicadas sobre o sistema (6.94), a fim de obter as respostas da fundação rígida normalizadas.

6.4.2 Resposta da Fundação Rígida e o MEC

A partir da forma matricial da equação integral (6.56), pode-se separar as variáveis em contato com a fundação e as restantes representando apenas o solo livre. E o sistema matricial pode ser rearranjado para separar as variáveis associadas a fundação rígida daquelas que discretizam apenas o solo livre.

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{ss} & \bar{G}_{sf} \\ \bar{G}_{fs} & \bar{G}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_s \\ \bar{t}_f \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}_{ss} & \bar{H}_{sf} \\ \bar{H}_{fs} & \bar{H}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \end{Bmatrix} \quad (6.95)$$

Portanto, pode-se impor estas duas condições, compatibilidade cinemática (6.60) e equilíbrio de forças (6.63), associadas ao movimento do corpo rígido no sistema de equações gerado pelo MEC representando a discretização do solo.

Deve-se observar que a força transferida da fundação para o solo F_f pode ser escrita como a tensão t_f produzida por esta força sobre o solo, isto é,

$$\{F_f\} = a \{t_f\} \quad (6.96)$$

Desta forma, produz-se uma equivalência mecânica entre a força aplicada sobre a fundação rígida $\bar{F}_t$ e a tensão proveniente deste equilíbrio de forças $\bar{t}_f$, onde esta equivalência mecânica é dada por,

$$-[EQ] a \{\bar{t}_f\} = \{\bar{F}_t\} \quad (6.97)$$

Considerando ainda o caso onde pode-se impor esforços fora da região de interface entre o solo e o corpo rígido, o sistema resulta,

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{sf} & -\bar{H}_{ss} & -\bar{H}_{sf} & 0 \\ \bar{G}_{ff} & -\bar{H}_{fs} & -\bar{H}_{ff} & 0 \\ 0 & 0 & I & -CC \\ -a EQ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_f \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{G}_{ss} \bar{t}_s \\ \bar{G}_{fs} \bar{t}_s \\ 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \quad (6.98)$$

Porém, deve-se observar que nestas análises de interação solo-estrutura com fundação rígida as tensões na superfície do solo livre são nulas ($\bar{t}_s = 0$). Desta forma, o sistema de equações final,

incluindo a modelagem do MEC sobre o solo, e incorporando a influência da fundação rígida resulta,

$$\begin{bmatrix} \overline{G}_{sf} & -\overline{H}_{ss} & -\overline{H}_{sf} & 0 \\ \overline{G}_{ff} & -\overline{H}_{fs} & -\overline{H}_{ff} & 0 \\ 0 & 0 & I & -CC \\ -\alpha EQ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_f \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \quad (6.99)$$

onde $\overline{H}_{ii} = \overline{H}_{ii} + 0.5$, e o índice “i” representa os índices ss, sf, fs, ff,

CC é a matriz de compatibilidade cinemática;

EQ é a matriz de equilíbrio de forças;

α é a metade da largura da fundação rígida;

$\bar{t}_f$ são as tensões na interface do solo com a fundação;

$\bar{u}_s$ são os graus de liberdade do solo fora da fundação;

$\bar{u}_f$ são os graus de liberdade do solo sob a fundação;

$\bar{u}_t$ são os graus de liberdade da fundação; e

$\bar{F}_t$ são os carregamentos aplicados sobre a fundação.

6.5 Inclusão da Propriedade de Inércia na Resposta da Fundação Rígida

Nesta seção deve-se apresentar a formulação para inclusão da propriedade de inércia da fundação rígida, na resposta da fundação para o problema de interação dinâmica solo-estrutura. A figura 6.5, abaixo, mostra uma diagrama de corpo livre do corpo rígido com massa m_f , para obter as equações de equilíbrio de forças envolvidas no corpo.

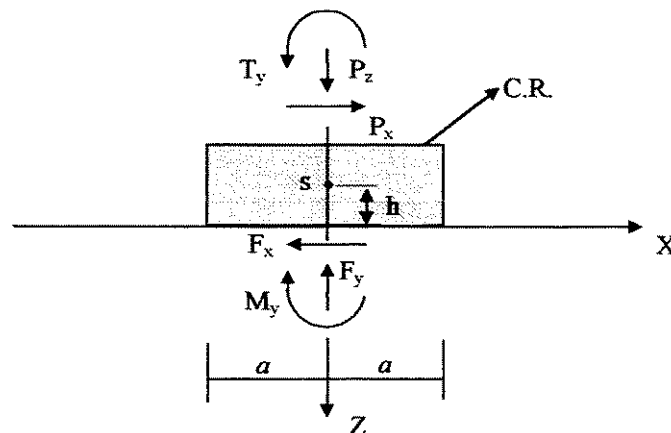


Fig. 6.5 - Diagrama de Corpo Livre da Fundação Rígida com Massa

Pode-se o equilíbrio de forças sobre o corpo rígido, lembrando que este possui massa. As equações de equilíbrio de forças é obtida aplicando-se a segunda lei de Newton sobre o corpo rígido, isto é,

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m_f a_x \\ \sum F_z &= m_f a_z \\ \sum M_y &= J_{yy} \ddot{\phi}_y\end{aligned}\tag{6.100}$$

As forças externas P_x , P_z e T_y estão aplicadas sobre o ponto s , que define o centro de massa do corpo rígido. Desta forma, os deslocamentos, velocidades e acelerações devem ser medidos sobre este ponto. As acelerações em cada direção do sistema de coordenadas podem ser definidas como,

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{u}_h - h \ddot{\phi}_y \\ a_y &= 0. \\ a_z &= \ddot{u}_v + h \dot{\phi}_y^2 \end{aligned} \quad (6.101)$$

Linearizando as relações da aceleração, onde os termos de segunda ordem da equação podem ser desprezados, define-se $\dot{\phi}_y^2 = 0$. E as acelerações resultantes das forças externas aplicadas resultam,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_f \ddot{u}_h - m_f h \ddot{\phi}_y \\ \sum F_z &= m_f \ddot{u}_v \\ \sum M_y &= J_{yy}^s \ddot{\phi}_y \end{aligned} \quad (6.102)$$

Impondo-se então as solicitações externas ao sistema, as equações de equilíbrio de forças (6.100), resultam,

$$\begin{aligned} P_x - F_x &= m_f \ddot{u}_h - m_f h \ddot{\phi}_y \\ P_z - F_z &= m_f \ddot{u}_v \\ T_y - M_y - F_x h &= J_{yy}^s \ddot{\phi}_y \end{aligned} \quad (6.103)$$

Na forma matricial este sistema de equações pode ser reescrito como,

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 & -m_f h \\ 0 & m_f & 0 \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_h \\ \ddot{u}_v \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ T_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ M_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x h \end{Bmatrix} \quad (6.104)$$

ou de outra forma,

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 & -m_f h \\ 0 & m_f & 0 \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_h \\ \ddot{u}_v \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ T_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (6.105)$$

A relação (6.105), definida no domínio do tempo, representa o equilíbrio de forças da fundação rígida com massa, submetida a carregamentos externos. Esta relação, deve ser introduzida nos sistemas de equações (6.80) para solução através das funções de Green, e (6.99) para o Elemento de Contorno, os quais descrevem a interação dinâmica solo e fundação rígida, apresentados anteriormente. Pode-se então, reorganizar a equação (6.105), para torna-la em conformidade com os graus de liberdade dispostos nas relações (6.80) e (6.99), resultando,

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -m_f h \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_h \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_z \\ P_x \\ T_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (6.106)$$

Este sistema está definido no domínio do tempo. Desta forma, deve-se transformá-lo para o domínio da frequência para associá-lo ao sistema (6.80) e (6.99). A relação (6.106) no domínio da frequência é definida por,

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -m_f h \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_z \\ \bar{P}_x \\ \bar{T}_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y \end{Bmatrix} \quad (6.107)$$

A última linha do sistema matricial acima pode ser alterada, multiplicando e dividindo simultaneamente a linha por “a”, definido como a metade da largura da fundação rígida. Isto é,

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -m_f h \\ 0 & 0 & J_{yy}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \frac{a}{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_z \\ \bar{P}_x \\ \bar{T}_y \frac{a}{a} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y \frac{a}{a} \end{Bmatrix}$$

que resulta,

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 \\ 0 & m_f & -m_f h \\ 0 & 0 & J_{yy}^s / a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_z \\ \bar{P}_x \\ \bar{T}_y / a \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y / a \end{Bmatrix} \quad (6.108)$$

Observando a equação acima e as relações (6.59-6.60) e (6.62-6.63), respectivamente para os deslocamentos e carregamentos totais do corpo rígido, pode-se definir um vetor deslocamento total e um vetor carregamento total para o corpo rígido, como utilizado nas relações (6.80) e

(6.99). Isto é, os vetores deslocamentos totais $\{\bar{u}_t\}$ e forças resultantes $\{\bar{F}_t\}$, da fundação rígida sobre o solo, são dados por,

$$\{\bar{u}_t\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix} \quad \{\bar{F}_t\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_x \\ \bar{M}_y / a \end{Bmatrix} \quad (6.109)$$

Desta forma, o sistema matricial da equação (6.108) pode ser definido de forma compacta como,

$$\omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} = \{\bar{P}_t\} - [Q] \{\bar{F}_t\} \quad (6.110)$$

onde $[M]$ é a matriz de inércia equivalente do sistema;

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix}; \text{ e o vetor carregamento externo é dado por, } \{\bar{P}_t\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_z \\ \bar{P}_x \\ \bar{T}_y / a \end{Bmatrix}$$

Em seguida deve-se apresentar a solução conjunta para reposta da interação dinâmica da fundação rígida sobre o solo incluindo o efeito de inércia da fundação. Sendo que, a modelagem do solo viscoelástico deve ser feita, utilizando-se as formulações obtidas anteriormente, para as funções de Green e para o Método dos Elementos de Contorno.

6.5.1 Resposta da Fundação Rígida Com Inércia e as Funções de Green

O sistema de equação para obtenção da reposta da fundação rígida sobre o solo modelado pelas Funções de Green é dada na equação (6.80), repetida aqui,

$$\begin{bmatrix} \bar{H} & CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_f \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

O sistema matricial acima pode ser reescrito em dois sistemas separadamente, isto é,

$$\begin{aligned} [\bar{H}] \{\bar{F}_f\} + [CC] \{\bar{u}_t\} &= \{0\} \\ [EQ] \{\bar{F}_f\} &= \{\bar{F}_t\} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Da segunda equação acima, pode-se obter $\{\bar{F}_f\} = [EQ]^{-1} \{\bar{F}_t\}$ para ser substituído na equação envolvendo a inércia da fundação (6.110), isto é,

$$\omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} = \{\bar{P}_t\} - [Q] \{\bar{F}_t\} \Rightarrow \omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} = \{\bar{P}_t\} - [Q] [EQ] \{\bar{F}_t\}$$

que resulta,

$$\omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} + [Q] [EQ] \{\bar{F}_t\} = \{\bar{P}_t\} \quad (6.112)$$

ou ainda,

$$[Q] [EQ] \{\bar{F}_t\} + \omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} = \{\bar{P}_t\} \quad (6.113)$$

A segunda equação do sistema matricial (6.111) pode então ser substituída pela relação (6.113), para resultar,

$$\begin{aligned} [\bar{H}] \{\bar{F}_t\} + [CC] \{\bar{u}_t\} &= \{0\} \\ [Q] [EQ] \{\bar{F}_t\} + \omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} &= \{\bar{P}_t\} \end{aligned} \quad (6.114)$$

O sistema acima pode ainda ser representado por um sistema matricial final, isto é,

$$\begin{bmatrix} \bar{H} & CC \\ Q & EQ \quad \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_t \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{P}_t \end{Bmatrix} \quad (6.115)$$

onde $\bar{H}$ é a matriz com as funções de flexibilidade do solo;

CC é a matriz de compatibilidade cinemática;

EQ é a matriz de equilíbrio de forças;

M é a matriz de inércia equivalente da fundação;

$\bar{F}_t$ é o vetor de forças na interface da fundação;

Q é a matriz definida na relação (6.110);

ω é a frequência de excitação em rad/s;

$\bar{u}_t$ são os graus de liberdade da fundação rígida, $\bar{u}_v, \bar{u}_h$ e $\bar{\phi}_y \cdot \alpha$, isto é, deslocamentos vertical, horizontal e rotação, respectivamente; e

$\bar{F}_t$ são os carregamentos sobre a fundação rígida, $\bar{F}_v, \bar{F}_h$ e $\bar{M}_y / \alpha$, isto é, forças vertical e horizontal, e momento.

Finalmente, este sistema representa a solução para a resposta da fundação rígida sob o solo levando em conta o efeito de inércia da fundação, sendo que o solo está sendo modelado através da superposição das funções de Green.

- Normalização da Resposta da Fundação Rígida Com Efeito de Inércia

Da relação (6.108) pode-se escrever três equações de equilíbrio, ou seja, obtem-se o equilíbrio para cada grau de liberdade da fundação rígida. Isto é,

$$\begin{aligned}\omega^2 m_f \bar{u}_v &= \bar{P}_z - \bar{F}_z \\ \omega^2 m_f \bar{u}_h - \omega^2 m_f h \bar{\phi}_y \cdot a &= \bar{P}_x - \bar{F}_x \\ \omega^2 \frac{J_{yy}^s}{a^2} \bar{\phi}_y \cdot a &= \bar{T}_y / a - h \bar{F}_x - \bar{M}_y / a\end{aligned}\quad (6.116)$$

Lembrando que as normalizações dos deslocamentos para a fundação rígida sem massa, como em (6.89), são dadas, respectivamente, para os deslocamentos verticais, horizontais e rotação da fundação, isto é,

$$\bar{u}_{vN} = \frac{\bar{u}_v \pi \mu}{\bar{P}_t} \quad \bar{u}_{hN} = \frac{\bar{u}_h \pi \mu}{\bar{P}_t} \quad \bar{\phi}_{yN} \cdot a = \frac{\bar{\phi}_y \cdot a \pi \mu}{\bar{P}_t} \quad (6.117)$$

Substituindo estas três relações de normalização nas equações (6.116), pode-se obter,

$$\begin{aligned}\omega^2 m_f \left(\frac{\bar{u}_{vN} \bar{P}_t}{\pi \mu} \right) &= \bar{P}_z - \bar{F}_z \Rightarrow \\ \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \bar{u}_{vN} &= \frac{\bar{P}_z}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_z}{\bar{P}_t}\end{aligned}\quad (6.118)$$

$$\begin{aligned}\omega^2 m_f \left(\frac{\bar{u}_{hN} \bar{P}_t}{\pi \mu} \right) - \omega^2 m_f h \left(\frac{\bar{\phi}_{yN} \cdot a \bar{P}_t}{\pi \mu} \right) &= \bar{P}_x - \bar{F}_x \Rightarrow \\ \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \bar{u}_{hN} - \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} h \bar{\phi}_{yN} \cdot a &= \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_x}{\bar{P}_t}\end{aligned}\quad (6.119)$$

$$\begin{aligned}\omega^2 \frac{J_{yy}^s}{a^2} \left(\frac{\bar{\phi}_{yN} \cdot a \bar{P}_t}{\pi \mu} \right) &= \bar{T}_y / a - h \bar{F}_x - \bar{M}_y / a \Rightarrow \\ \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \frac{J_{yy}^s}{m_f a^2} \bar{\phi}_{yN} \cdot a &= \frac{\bar{T}_y / a}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y / a}{\bar{P}_t}\end{aligned}\quad (6.120)$$

Lembrando-se a teoria da dinâmica clássica, pode-se definir o raio de giração do corpo rígido como sendo,

$$i_{yy}^s = \sqrt{\frac{J_{yy}^s}{m_f}} \Rightarrow \frac{J_{yy}^s}{m_f} = i_{yy}^{s^2}$$

O termo envolvendo o momento de inércia da fundação em (6.120) e a relação acima resulta,

$$\frac{J_{yy}^s}{m_f a^2} = \frac{J_{yy}^s}{m_f} \frac{1}{a^2} = i_{yy}^{s^2} \frac{1}{a^2} = \left(\frac{i_{yy}^s}{a} \right)^2$$

E retornando a (6.120) pode-se obter,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \left(\frac{i_{yy}^s}{a} \right)^2 \bar{\Phi}_{yN} \cdot a = \frac{\bar{T}_y / a}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y / a}{\bar{P}_t} \quad (6.121)$$

A frequência de excitação ω também pode ser definida na sua forma adimensionalizada A_0 .

Desta forma, o termo $\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu}$ das equações anteriores (6.118, 6.119 e 6.121), envolvendo a frequência da excitação sobre a fundação, deve então ser normalizado.

Define-se o parâmetro associando a massa da fundação m_f e a massa do solo m_s , isto é,

$$B^{(2D)} = B = \frac{m_f}{m_s} = \frac{m_f}{\pi \rho a^2} \quad (6.122)$$

onde $m_s = \pi \rho a^2$, corresponde a uma massa equivalente do solo, associada as dimensões da metade da largura da fundação “ a ”. Isto é, a massa m_s equivale a uma massa de solo correspondente a uma área de raio “ a ”, abaixo da fundação. Portanto pode-se escrever,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} = \frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} \frac{a^2}{a^2} = \omega^2 a^2 \frac{1}{\pi \mu a^2} m_f = \omega^2 a^2 \frac{1}{\pi \mu a^2} m_f \frac{\rho}{\rho} = \omega^2 a^2 \frac{\rho}{\mu} \frac{1}{\pi \rho a^2} m_f$$

Mas, na relação obtida acima, pode-se observar os seguintes termos,

$$\frac{1}{C_2^2} = \frac{\rho}{\mu} \text{ - definido pela velocidade de propagação de ondas de cisalhamento}$$

$$\frac{1}{m_s} = \frac{1}{\pi \rho a^2} \text{ - definido pela massa equivalente do solo}$$

Então, o termo envolvendo a frequência de excitação deve ser redefinido em função destes termos, como,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} = \omega^2 a^2 \frac{1}{C_2^2} \frac{1}{m_s} m_f \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} = \frac{\omega^2 a^2}{C_2^2} \frac{m_f}{m_s} \quad (6.123)$$

Mas lembrando-se da equação (6.37) onde definiu-se a frequência adimensional A_o como, $A_o = \frac{\omega \cdot a}{C_2}$, pode-se utilizar esta equação e a relação (6.122) que define o parâmetro B , para finalmente redefinir o termo envolvendo a frequência de excitação. Isto é,

$$\frac{\omega^2 m_f}{\pi \mu} = A_o B \quad (6.124)$$

Retornando as relações (6.118), (6.119) e (6.121), pode-se redefinir os deslocamentos da fundação rígida normalizados em função da frequência adimensional A_o da relação (6.124). Finalmente, as equações de equilíbrio são,

$$A_o B \bar{u}_{vN} = \frac{\bar{P}_z}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_z}{\bar{P}_t} \quad (6.125)$$

$$A_o B \bar{u}_{hN} - A_o B h \bar{\phi}_{yN} \cdot a = \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{F}_x}{\bar{P}_t} \quad (6.126)$$

$$A_o B \left(\frac{\bar{I}_{yy}^s}{a} \right)^2 \bar{\phi}_{yN} \cdot a = \frac{\bar{T}_y}{\bar{P}_t} - \frac{h \bar{F}_x}{\bar{P}_t} - \frac{\bar{M}_y}{\bar{P}_t} \quad (6.127)$$

Estas três relações anteriores são então escritas em uma forma matricial,

$$A_o B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & \left(\frac{\bar{I}_{yy}^s}{a} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{vN} \\ \bar{u}_{hN} \\ \bar{\phi}_{yN} \cdot a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\bar{P}_z}{\bar{P}_t} \\ \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_t} \\ \frac{\bar{T}_y}{a \bar{P}_t} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{F}_z}{\bar{P}_t} \\ \frac{\bar{F}_x}{\bar{P}_t} \\ \frac{\bar{M}_y}{a \bar{P}_t} \end{Bmatrix} \quad (6.128)$$

Ou na forma matricial compacta, como em (6.110), isto é,

$$A_o B [M] \{ \bar{u}_{tN} \} = \{ \bar{P}_{tN} \} - [Q] \{ \bar{F}_{tN} \} \quad (6.129)$$

O sistema de equações (6.94), que representa a resposta normalizada da fundação rígida com o solo modelado através das funções de Green, pode então ser complementado pela equação matricial de (6.129), a fim de incluir na resposta, o efeito de inércia da fundação.

Seguindo os mesmos passos das relações (6.111) a (6.115), pode-se obter o sistema final como,

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_N & CC \\ Q & EQ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{k}_N \\ \bar{u}_{tN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{P}_{tN} \end{Bmatrix} \quad (6.130)$$

onde $\bar{H}_N$ é a matriz com as funções de flexibilidade normalizadas do solo;

CC é a matriz de compatibilidade cinemática;

EQ é a matriz de equilíbrio de forças;

M é a matriz de inércia equivalente da fundação;

Q é a matriz definida na relação (6.110);

$A_o B$ é a relação de frequência de excitação adimensional;

$\bar{k}_N$ é o vetor normalizado das tensões na interface da fundação rígida com o solo;

$\bar{u}_{tN}$ são os graus de liberdade da fundação rígida, u_{vN} , u_{hN} e $\phi_{yN} \cdot \alpha$, isto é, deslocamentos vertical, horizontal e rotação, respectivamente; e

$\bar{P}_{tN}$ são os carregamentos externos normalizados, aplicados sobre a fundação rígida.

6.5.2 Resposta da Fundação Rígida Com Inércia e o MEC

Pode-se seguir o mesmo procedimento apresentado no item 6.4.2, da seção anterior, para a resposta da fundação rígida sem massa através do Método dos Elementos de Contorno. Em seguida, a formulação dada na seção 6.5, até a relação (6.110), definindo a cinemática da fundação rígida com massa, deve ser utilizada neste item. Desta forma, pode-se obter a resposta da fundação rígida incluindo o efeito de inércia e utilizando-se o MEC para modelar o solo.

A solução do sistema matricial (6.99), permite obter a resposta da fundação rígida através do MEC. Este sistema é repetido aqui,

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{sf} & -\bar{H}_{ss} & -\bar{H}_{sf} & 0 \\ \bar{G}_{ff} & -\bar{H}_{fs} & -\bar{H}_{ff} & 0 \\ 0 & 0 & I & -CC \\ -\alpha EQ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_f \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \quad (6.99)$$

Este sistema matricial pode ser modificado incluindo a relação (6.110), também reapresentada novamente,

$$\omega^2 [M] \{\bar{u}_t\} = \{\bar{P}_t\} - [Q] \{\bar{F}_t\} \quad (6.110)$$

Portanto os sistemas (6.99) e (6.110), podem ser solucionados conjuntamente, para obter um sistema matricial final, dado abaixo,

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{sf} & -\bar{H}_{ss} & -\bar{H}_{sf} & 0 \\ \bar{G}_{ff} & -\bar{H}_{fs} & -\bar{H}_{ff} & 0 \\ 0 & 0 & I & -CC \\ -a Q EQ & 0 & 0 & \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_f \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_f \\ \bar{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{P}_t \end{Bmatrix} \quad (6.131)$$

onde $\bar{H}$ e $\bar{G}$ são as matrizes de flexibilidade do solo, obtidas através do MEC;

CC e EQ são as matrizes de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças na interface da fundação;

M é a matriz de inércia equivalente da fundação rígida;

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{bmatrix}, \text{ como definido na relação (6.110);}$$

ω é a frequência de excitação sobre a fundação rígida, dada em rad/s;

$$\{\bar{u}_t\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_v \\ \bar{u}_h \\ \bar{\phi}_y \cdot a \end{Bmatrix} \text{ são os graus de liberdade da fundação rígida, isto é, deslocamentos vertical,}$$

horizontal e rotação;

$$\{\bar{P}_t\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_z \\ \bar{P}_x \\ \bar{T}_y / a \end{Bmatrix} \text{ é o vetor carregamento externo aplicado sobre a fundação; e}$$

$\bar{t}_f$, $\bar{u}_s$ e $\bar{u}_f$ são os vetores de tensões e deslocamentos, definidos anteriormente, com a relação (6.99).

Desta forma, o sistema matricial dado na relação (6.131), permite obter a resposta da fundação rígida sobre o solo, incluindo a inércia desta fundação, modelando o solo através do Método de Elementos de Contorno.

Capítulo 7

Formulação de Elementos de Contorno / Função de Green - Resposta Transiente

A obtenção de soluções de problemas físicos através da transformação de domínio é um procedimento matemático bastante comum, amplamente aplicado a soluções de problemas de engenharia. A teoria da transformação de domínio, consiste basicamente em obter a transformação matemática de uma equação de equilíbrio dependente da variável real do problema, para um outros domínio, onde esta equação transformada, passa a depender da variável no domínio transformado. Na grande maioria das vezes, a equação de equilíbrio é uma equação diferencial, muitas vezes de difícil solução na sua forma original, que quando transformada torna-se uma equação algébrica, matematicamente mais simples de ser resolvida.

As transformações mais comuns a problemas dinâmicos em engenharia, são as transformadas de Laplace e Fourier. Neste caso, a equação de origem, é a equação de equilíbrio dinâmico do sistema, dependente da variável original que é o tempo, que, quando transformada, torna-se uma equação algébrica dependente da variável transformada, definida por “s” para a transformada de Laplace e “ ω ” para a transformada de Fourier. O procedimento formal, para obtenção da solução do problema, é transformar a equação diferencial para o domínio de Laplace ou Fourier, resolver a equação algébrica do domínio transformado, e aplicar uma transformação inversa sobre a resposta dependente da variável transformada, para obter a resposta na variável real.

Este procedimento, é muitas vezes desenvolvido matematicamente, de forma analítica, aplicando-se as definições das transformadas de Laplace ou Fourier. O processo de transformação para o domínio transformado não possui qualquer complicação matemática, e pode ser resolvido analiticamente para a maioria das equações físicas aplicadas na engenharia. A complexidade surge, na obtenção da resposta original através da aplicação da transformada inversa sobre a resposta no domínio transformado. Isto ocorre, pois a definição da integral de transformação inversa, deve ser desenvolvida no domínio da variáveis complexas, e mesmo que se utilize procedimentos analíticos apropriados, tais como o Método de Cagniard-De Hoop ou derivadas fracionais para problemas viscoelásticos, são formas matemáticas bastante difíceis de serem executadas. E ainda, estas inversões analíticas, freqüentemente produzem soluções particularizadas para o problema físico que está sendo avaliado, como por exemplo para cada modelo viscoelástico utilizado, deve-se proceder novamente a inversão matemática da resposta. Portanto, é difícil obter soluções analíticas gerais para uma ampla variedade de problemas.

Uma alternativa que surge para superar esta dificuldade, é a solução da transformada inversa executando-a numericamente. Esta técnica de solução, parece ser uma hipótese interessante, uma vez que atualmente, desenvolveram-se muitas formas de controle de convergência das soluções numéricas, resultante de um melhor aparato computacional existente. Entretanto, as soluções através da transformação de domínio obtida numericamente, possuem algumas peculiaridades. Quando se refere a convergência da transformação numérica, a dificuldade está no ajuste dos parâmetros matemáticos que influenciam nesta convergência. Pois, estes parâmetros estão sempre associados as características físicas do problema em questão, e não devem ser definidos de forma desarticulada.

A aplicação da inversão numérica de domínio conjuntamente com as formulações de Elementos de Contorno ou Funções de Green, resulta em grandes vantagens. Pois, como já observado na introdução deste trabalho, existem algumas dificuldades em obter soluções transientes para estas formulações. Em contrapartida, as soluções, tanto do MEC como através das funções de Green, para problemas no domínio transformado, já foram bastante investigadas e as resposta obtidas, possuem um amplo espectro de aplicações físicas e são altamente confiáveis. Portanto, pode-se obter respostas transientes para muitos problemas físicos, tal como problemas

visco-elastodinâmicos, que nas formulações diretamente no tempo, estão ainda por serem aprimorados.

Nas seções que seguem, deve-se apresentar as formulações transientes obtidas através das equações de equilíbrio no domínio transformado de Laplace ou Fourier. Em seguida deve-se fazer uma descrição detalhada da forma de obter a solução transiente partindo-se da equação de equilíbrio estacionária desenvolvidas no capítulo anterior, para as formulações das funções de Green e de Elementos de Contorno.

7.1 Formulação para Solução Transiente

A solução transiente ou reposta transiente do sistema pode ser obtida partindo-se da equação de equilíbrio dinâmico estacionário, equação 6.24 ou 6.42, e suas condições de contorno, representada no domínio transformado de Laplace ou de Fourier, dependendo da formulação que originou esta equação de equilíbrio. Deve-se observar que a solução no domínio de Laplace (s), matematicamente, é mais geral que a solução estacionária, no domínio de Fourier (ω). Pois, a menos dos intervalos de integração da definição das transformadas, a formulação de Laplace pode ser simplificada supondo-se que a sua variável s , definida por $s = \sigma + i \omega$, seja redefinida por $i \omega$, para resultar na formulação de Fourier. Isto implica, por exemplo, por que algumas funções possuem transformada de Laplace e não possuem transformada de Fourier. Numericamente isto é extremamente importante, pois para se obter a transformação numérica destas funções através da transformada de Fourier, deve-se ter alguns cuidados na representação destas funções na sua forma discreta. Alguns desses cuidados devem ser discutidos na seção 7.2.

7.1.1 Formulação da equação integral no domínio transformado de Laplace

A equação de equilíbrio dinâmicos (6.42) e suas condições de contorno, podem ser representadas no domínio de Laplace como,

$$(c_1^2 - c_2^2) \hat{u}_{,ji} + c_2^2 \hat{u}_{,ij} + \hat{f}_i = s^2 \hat{u}_i \quad (7.1)$$

E as condições de contorno e a equação constitutiva também devem ser transformadas de domínio,

$$\hat{u}_i(x, s) = \hat{q}_i(x, s) \quad \text{em } \Gamma_q \quad (7.2)$$

$$\hat{t}_{(n)i}(x, s) = \hat{t}_{ij} n_j = \hat{h}_i(x, s) \quad \text{em } \Gamma_h \quad (7.3)$$

$$\hat{t}_{ij} = \rho (c_1^2 - 2c_2^2) \hat{u}_{k,k} \delta_{ij} + \rho c_2^2 (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) \quad (7.4)$$

A aplicação da formulação de Elementos de Contorno, resultam esta solução na sua forma de equação integral,

$$\frac{1}{2} \hat{u}_i(\xi, s) = \int_{\Gamma} \left[\hat{u}_{ij}^*(x, \xi, s) \hat{t}_{(n)i}(x, s) - \hat{t}_{ij}^*(x, \xi, s) \hat{u}_i(x, s) \right] d\Gamma \quad (7.5)$$

onde $\hat{u}_{ij}^*$ e $\hat{t}_{ij}^*$ são os tensores de deslocamentos e tensões, definidos no domínio de Laplace.

A equação integral é então solucionada para obter a resposta do sistema no domínio de Laplace. Essa solução é semelhante ao problema estático para valores definidos da variável s .

Portanto, o processo de obtenção da resposta transiente, consiste na solução da equação integral de contorno (7.5), juntamente com suas condições de contorno do problema, para as incógnitas do contorno $\hat{u}_i(x, s)$ e $\hat{t}_{(n)i}(x, s)$, em uma seqüência de valores de s . Em seguida, a resposta no domínio transformado $\hat{u}_i$ e $\hat{t}_{(n)i}$ pode ser invertida numericamente para obter a solução transformada no domínio do tempo.

A transformada de Laplace inversa para a função deslocamentos pode ser definida como,

$$u_i(x, t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{u}_i(x, s) e^{st} ds \quad (7.6)$$

onde $\sigma > 0$ é um valor arbitrário e deve ser maior do que a parte real de todas as singularidades da função $\hat{u}_i(x, s)$. A integral da equação 7.6, é uma integral sobre o plano complexo, sendo que a variável s deve ser definida por,

$$s = \sigma + i \omega \quad (7.7)$$

Desta forma, a integral da equação 7.6 deve ser solucionada através de uma técnica de inversão numérica de Laplace. Como verificado na bibliografia existem muitos métodos aplicados na avaliação desta inversão numérica. Alguns desses métodos utilizam a inversão definindo-se a variável s , da equação 7.7, como sendo real. Porém, estes métodos não resultam em boa precisão para problemas dinâmicos, como mostrado no trabalho de Narayanan e Beskos, 1982. Desta forma, os métodos de inversão resultam em uma precisão maior, se utilizarem a variável s complexa, tal como definido na equação 7.7.

Dentre os principais métodos discutido na revisão da literatura, o método de Durbin, 1974, é reconhecido na bibliografia do assunto, como sendo o mais eficiente e preciso. O método é uma extensão do método de Dubner e Abate, e utiliza uma combinação das transformadas de Fourier em seno e cosseno. A formulação de Durbin resulta na seguinte formula discreta de inversão,

$$u_i(t_j) = \frac{2 e^{j\sigma \Delta t}}{T} \left\{ -(\frac{1}{2}) \text{Re} [\hat{u}_i(\sigma)] + \text{Re} \left[\sum_{k=1}^{N-1} (A(k) + i B(k)) W^{jk} \right] \right\} \quad (7.8)$$

onde

$$A(k) = \sum_{l=0}^L \text{Re} [\hat{u}_i(\sigma + i (k+1/N) (\frac{2\pi}{T}))] \quad (7.9)$$

$$B(k) = \sum_{l=0}^L \text{Im} [\hat{u}_i(\sigma + i (k+1/N) (\frac{2\pi}{T}))] \quad (7.10)$$

$$W = e^{2\pi j/N} \quad (7.11)$$

sendo $i = \sqrt{-1}$, define a variável complexa.

Nesta solução discretizada, a variável s (7.7), deve ser redefinida na sua forma discreta como,

$$s = \sigma + i \left(\frac{2\pi k}{T} \right) \quad (7.12)$$

Assim, a resposta do sistema $u_i(t_j)$, pode ser obtida para um número N de pontos na discretização do tempo. A discretização é definida por,

$$t_j = j \Delta t = j \left(\frac{T}{N} \right) \quad (7.13)$$

onde $T = t_{\max}$ define o tempo máximo de análise para observação da resposta e $j = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$.

Deve-se observar que o algoritmo de Durbin avalia a transformada inversa, com o auxílio do algoritmo de Cooley e Tukey, 1965, tradicionalmente conhecido como transformada de Fourier rápida (FFT). Desta forma, os termos $A(k)$ e $B(k)$, definidos nas equações (7.9) e (7.10), são avaliados e tornam-se entradas da FFT, que resultam na saída $AX(j)$ e $BX(j)$, e finalmente,

$$u_i(t_j) = AX(j) \quad (7.13)$$

que define os valores dos deslocamento para cada tempo t_j .

7.1.2 Formulação da equação integral no domínio transformado de Fourier

O procedimento para obter a resposta do sistema, da equação integral de contorno, através da transformada de Fourier, segue basicamente os mesmos passos, que aqueles apresentados na seção anterior para a transformada de Laplace. Pois, como observado anteriormente, pode-se fazer a suposição na formulação de Laplace de que $s = i\omega$. Neste caso a equação de equilíbrio é a mesma definida para o regime estacionário (6.42) na formulações Elementos de Contorno, e repetida aqui,

$$(c_1^2 - c_2^2) \bar{u}_{j,jj} + c_2^2 \bar{u}_{i,jj} + \hat{f}_i - \omega^2 \bar{u}_i + \dot{u}_{i0} + i\omega u_{i0} = 0 \quad (7.14)$$

E as condições de contorno (6.45 e 6.46),

$$\bar{u}_i(x, \omega) = \bar{q}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_q, \quad (7.15)$$

$$\bar{t}_{(n)i}(x, \omega) = \bar{t}_{ij} n_j = \bar{h}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_h, \quad (7.16)$$

ou na sua forma de equação integral (6.52),

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} [\bar{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) \bar{t}_{(n)i}(x, \omega) - \bar{t}_{ij}^*(x, \xi, \omega) \bar{u}_i(x, \omega)] d\Gamma \quad (7.17)$$

onde $\bar{u}_{ij}^*$ e $\bar{t}_{ij}^*$ são os tensores de deslocamentos e tensões, definidos no domínio de Fourier, como na seção 6.3.

Esta integral pode ser então solucionada para as variáveis $\bar{u}_i(x, \omega)$ e $\bar{t}_{(n)i}(x, \omega)$, para obter a resposta dinâmica estacionária do problema.

A definição da transformada de

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_i(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7.15)$$

Neste caso, a inversa numérica deve ser obtida diretamente através da transformada de Fourier rápida (FFT). A transformada discreta de Fourier (Morrison, 1994), a qual dá origem a FFT, é definida para obter a solução transformada inversa como,

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{y}_k e^{i 2\pi k j / N} \quad (7.16)$$

onde $\bar{y}_k$ são os termos da função definida no domínio da frequência, y_j é a resposta no tempo, sendo $j = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ e N é o número de pontos de discretização no tempo.

A função $\bar{y}_k$ é a própria resposta estacionária $\bar{u}_i(x, \omega)$, definida na sua forma discreta, isto é,

$$\bar{y}_k = \bar{u}_i(x, \omega_k) \quad (7.17)$$

onde a frequência discretizada é dada por,

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (7.18)$$

e T é o tempo máximo de análise, definido por $T = N \Delta t$.

Comparando-se a formula de inversão de Durbin (7.8) e a definição da transformada de Fourier (7.17), pode-se fazer algumas observações. Se os termos $A(k)$, $B(k)$, equações (7.9) e (7.10), respectivamente, forem avaliados para $L = 1$ e $\sigma = 0$., e observando ainda o termo W , equação (7.11), a formula de Durbin (7.8), torna-se semelhante a definição da transformada de Fourier (7.16). Porém, estes dois parâmetros L e σ , são fundamentais na convergência da solução de Durbin, e não podem ser definidos aleatoriamente. Em específico o parâmetro σ , para alguns problemas matemáticos pode ser nulo. Sugere-se que para $L \times N$ definido entre 50 e 5000, σT deve variar entre 5 e 10.

Para o caso da inversa da solução no domínio de Fourier, estes parâmetros não estão presentes e a influência na convergência é dada diretamente pela frequência máxima e o número de pontos de discretização. Utilizando a relação (7.18), pode-se substituir $k = N$ e lembrando que $T = N \Delta t$, para escrever,

$$\omega_{\max} = \omega_N = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi N}{N \Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

e define-se então a frequência máxima,

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (7.19)$$

Deve-se observar que a frequência máxima de análise no espectro é definida através do delta no tempo, ou discretização do tempo. Ou o inverso, a frequência máxima define o delta de tempo na discretização. Este é um parâmetro importante na convergência da inversão numérica, pois quando deseja-se obter um refinamento no tempo deve-se aumentar o espectro em frequência analisado.

Deve-se definir também o tempo máximo de análise. Novamente, utilizando-se a relação (7.18), pode-se escrever,

$$\omega_{\max} = \omega_N = \frac{2\pi N}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi N}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}/N} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

e sendo $T = t_{\max}$, o tempo máximo de análise é dado por,

$$t_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (7.20)$$

Este é o segundo parâmetro de importância na inversão numérica de Fourier, pois quando o tempo de observação deve ser maior, necessariamente o delta na frequência deve ser reduzido. Portanto, deve-se ter o cuidado na definição destes parâmetros, pois eles estão intrinsecamente envolvidos. Por exemplo, quando aumenta-se o espectro em frequência, a fim de melhorar a convergência da resposta, o tempo de observação desta resposta é reduzido. Neste caso, deve-se aumentar a discretização na mesma proporção para observar o mesmo período. Algumas teorias sobre soluções através de transformadas e a aplicação da Transformada de Fourier para sistemas mecânicos podem ser encontradas em Sneddon, 1962, Kreyszig, 1972, Newland, 1993, e Morrison, 1994.

Nas próximas seções são avaliados alguns casos, para mostrar a influência destes parâmetros na convergência da inversa da Transformada de Fourier obtida numericamente.

7.2 Exemplos Numéricos - Avaliações da Transformada de Fourier Numérica

Como observado na seção anterior, a convergência das soluções numéricas em técnicas de transformação de domínio são fortemente influenciadas por alguns parâmetros matemáticos associados aos parâmetros físicos do problema em questão. Na aplicação da transformada de Fourier numérica, os principais parâmetros que influenciam na resposta são a discretização da frequência $\Delta\omega$ e discretização no tempo Δt , sendo que este último está relacionado a frequência máxima de análise.

Acrescentou-se ainda que, funções com fortes variações das frequências de oscilações, ou grandes variações de amplitudes, podem dificultar a obtenção da solução através da transformada. Uma função tipicamente difícil de ser avaliada numericamente através das transformadas, é a função Heaviside $H(t)$ ou funções derivadas desta (função “gate”), como a função pulso retangular. Esta dificuldade surge, pois estas funções possuem variações abruptas de valores, em um espaço de tempo muito pequeno, que matematicamente são consideradas como descontinuidades da função. Todavia, estes tipos de funções são muito importantes nas aplicações de problemas físicos, uma vez que permite caracterizar muitos tipos de excitações dinâmicas que ocorrem em sistemas mecânicos reais. Portanto, face a importância destas funções matemáticas e a dificuldade em obter suas avaliações transformadas numericamente, muitos trabalhos, relacionados aos métodos de inversão numérica de domínio, avaliam estas funções para testar a eficiência de suas técnicas.

Nesta seção deve-se obter a função pulso retangular (função “gate”) e a resposta a um sistema de 1 grau de liberdade, obtida através da inversa numérica da Transformada de Fourier. Para isto deve-se observar a influência dos fatores que melhoram a convergência da resposta, como a discretização na frequência $\Delta\omega$ e no tempo Δt .

Inicialmente, avalia-se a função pulso retangular, com amplitude unitária e duração de 1 segundo. A figura 7.1 mostra a evolução da convergência da resposta do pulso retangular, obtidas com variações no espectro de frequência do pulso.

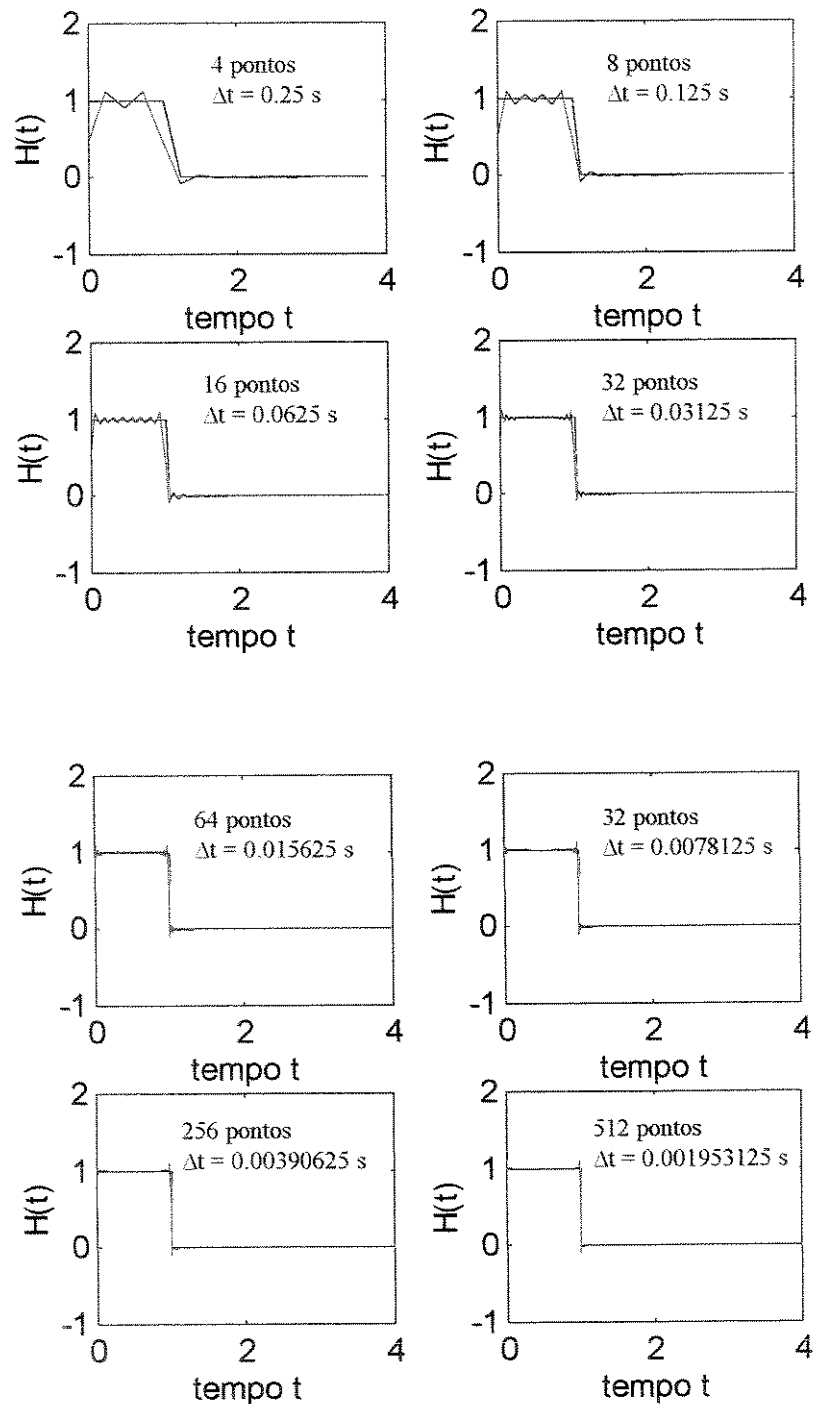


Fig. 7.1 - Convergência da Função Pulso Retangular

Como observado na seção anterior, a frequência máxima, dada em Hz (1/s), determina a discretização no tempo, isto é, o delta de tempo (Δt). Portanto, a figura 7.1 apresenta as respostas do pulso, variando o Δt (a partir das frequências máximas no espectro), isto resulta em um número maior de pontos no tempo sob o pulso. No primeiro gráfico, avalia-se a função com $\Delta t = 0.25$ s, que equivale a 4 pontos de discretização sob o pulso de duração 1 segundo. Pode-se aumentar gradativamente a frequência máxima de análise no espectro, fazendo com que o delta de tempo seja reduzido na mesma proporção, e conseqüentemente altera-se o número de pontos sob o pulso. A seqüência de soluções, segue dobrando o número de pontos sob o pulso, isto é, 8 pontos ($\Delta t = 0.125$ s) para o segundo gráfico, 16 pontos ($\Delta t = 0.0625$ s) para o terceiro, e assim sucessivamente, até atingir 512 pontos sob o pulso ($\Delta t = 0.00195$ s), na solução final. Este último gráfico está ampliado, na figura 7.2, para mostrar a resposta final do pulso retangular.

Deve-se observar que a função pulso retangular possui um espectro em frequência infinito, onde mesmo estendendo a frequência de análise para uma valor bastante alto, sempre existirá amplitudes no espectro que contribuem na resposta final, isto é, o espectro em frequência quase não converge a zero quando a frequência vai para o infinito. Resulta que, sempre quando houver o aumento da frequência máxima, ocorrerá uma variação na solução final no tempo, ainda que esta variação de frequência máxima seja bastante reduzida. Porém, é importante ressaltar que as frequências mais altas vão contribuindo cada vez menos para a resposta final, portanto, quando a variação das amplitudes da solução no tempo são desprezíveis, entende-se que a solução convergiu.

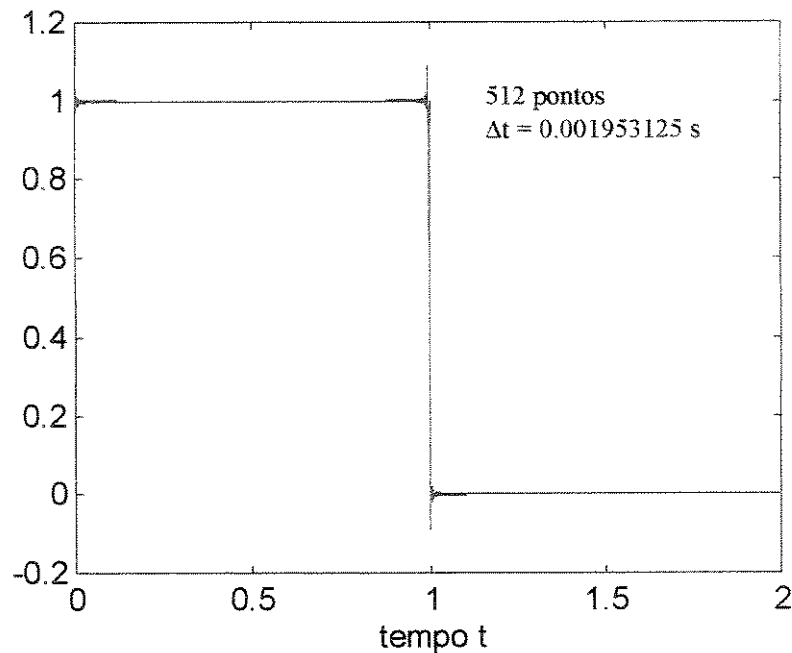


Fig. 7.2 - Pulso Retangular obtido através da Inversa Numérica da Transformada de Fourier

Em uma segunda análise, deve-se obter a resposta de um sistema dinâmico, excitado por um força transiente. Como observado na seção anterior, deve-se partir da resposta em frequência, ou reposta estacionária para o problema físico (sistema dinâmico). Em seguida, obtém-se a solução no domínio da frequência para a excitação dependente do tempo. A resposta estacionária final, é o produto entre as respostas em frequência do sistema e da excitação. Esta resposta estacionária final, pode então ser invertida numericamente para se obter a resposta transiente, isto é, no domínio do tempo.

Nestes exemplos numéricos, pode-se idealizar um sistema mecânico de 1 grau de liberdade excitado por um pulso retangular unitário. Para se caracterizar o sistema mecânico, deve-se definir os parâmetros físicos do sistema, como rigidez, massa e amortecimento. Como o sistema mecânico é idealizado, apenas para verificação da convergência da resposta, pode-se definir os parâmetros de rigidez K e massa M , especificando valores unitários para estes, e um fator de amortecimento $\zeta=0.1$, que equivale a um coeficiente de amortecimento $C = 0.2 \text{ N s/m}$. Uma vez conhecidas as características do sistema físico, define-se a função resposta em frequência deste, ou função de impedância do sistema, apresentada na figura 7.3.

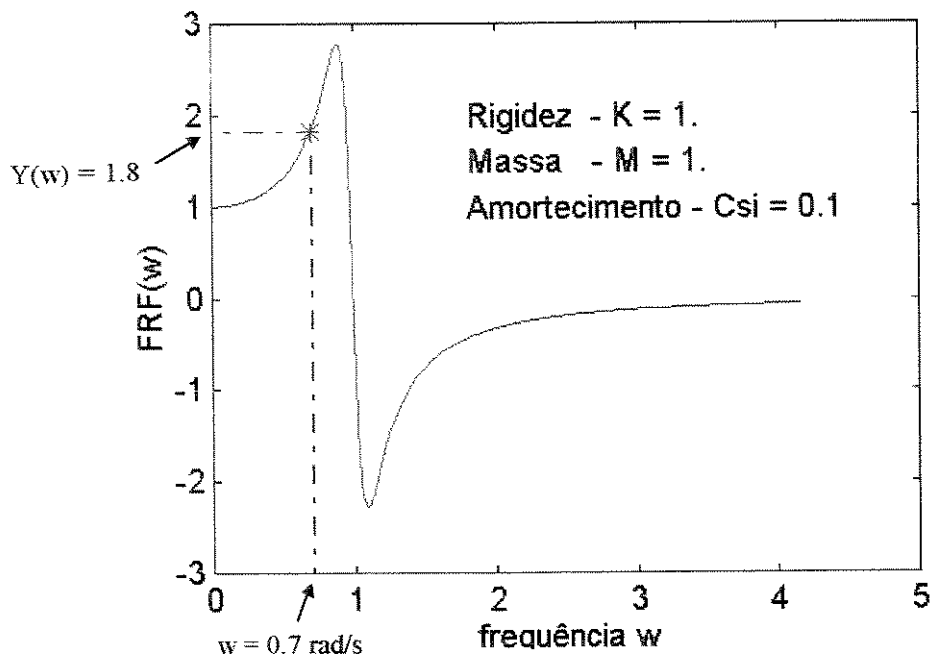


Fig. 7.3 - Função de Impedância do Sistema

Em uma primeira análise, a excitação é dada por um pulso retangular de duração de 50 segundos, mostrado na figura 7.4. Através da transformada de Fourier, obtém-se esta função excitação transformada para o domínio da frequência. O produto desta função transformada e a função de impedância (figura 7.3), resulta no espectro em frequência da solução final. Este espectro é apresentado na figura 7.5 e comparado com a solução obtida analiticamente. Pode-se observar uma boa concordância da solução numérica e da solução analítica para a resposta em frequência final do sistema. Pode-se dizer que espera-se realmente esta concordância, pois a dificuldade na aplicação das soluções transformadas, não está em obter a resposta para o domínio transformado, mas na inversão desta solução para o domínio original.

Finalmente, a solução transformada do sistema excitado pode ser invertida numericamente para se obter a resposta transiente, mostrada na figura 7.6 e comparada com a solução analítica. Neste caso também, compara-se a resposta obtida numericamente e a solução analítica do problema.

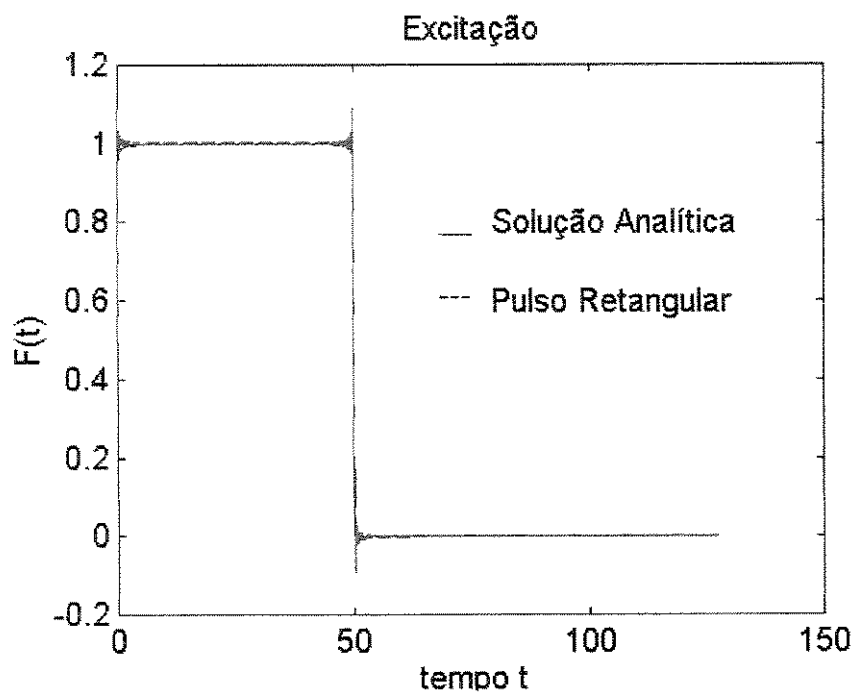


Fig. 7.4 - Pulso Retangular de Duração 50 segundos

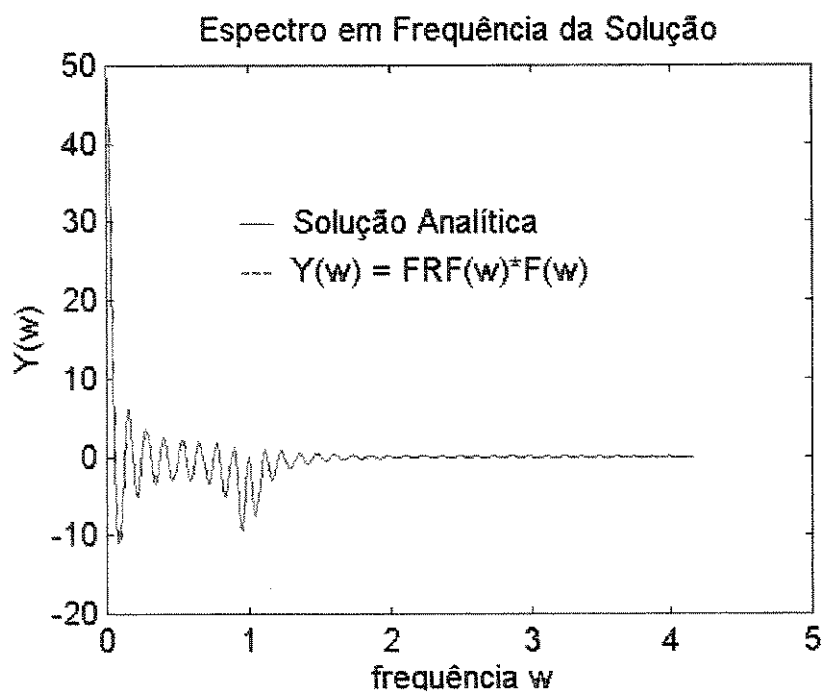


Fig. 7.5 - Resposta Estacionária Final do Sistema - Pulso Retangular 50 s

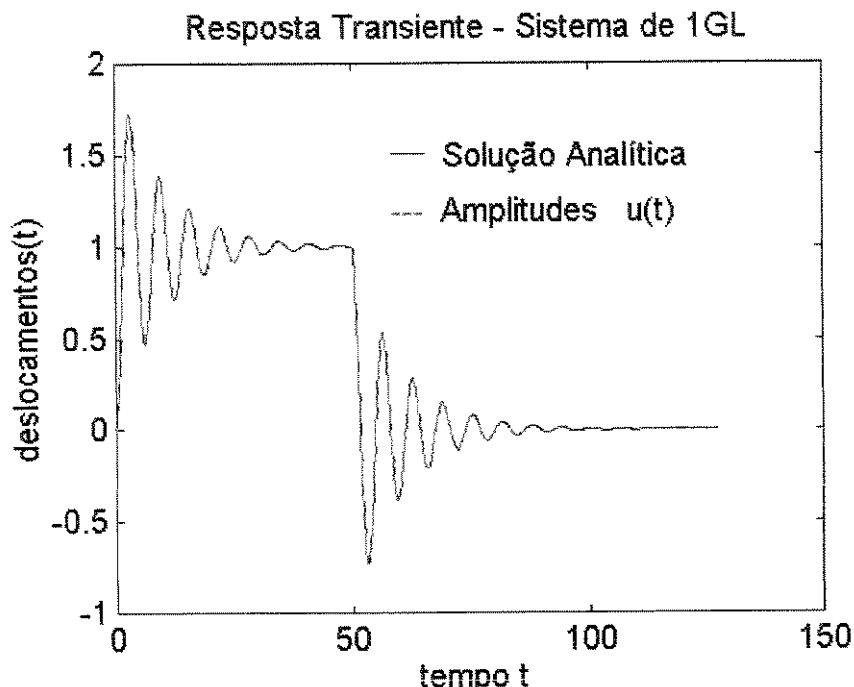


Fig. 7.6 - Solução Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por um Pulso Retangular de duração 50 segundos

Para ilustrar a influência da excitação sobre a resposta transiente do sistema mecânico, pode-se reduzir o tempo de permanência da excitação e observar o comportamento do sistema. A excitação neste caso deve ter a duração de 20 segundos, figura 7.7. A figura 7.8, mostra a resposta estacionária final do sistema excitado pelo pulso de duração 20 segundos, e está sendo comparada com a solução analítica. A figura 7.9, apresenta a resposta transiente do sistema, obtida numericamente, comparando-a com a solução analítica, onde observa-se uma boa convergência da solução numérica.

As respostas obtidas mostram claramente que a solução consegue definir o comportamento dinâmico transiente do sistema. Como é esperado, para a resposta de um sistema mecânico excitado por um impulso de duração limitada, o sistema deve vibrar em torno da posição de equilíbrio estático após a aplicação da força e voltar a oscilar em torno da posição inicial do movimento, quando o carregamento é eliminado. Outra característica a ser observada na reposta,

é proveniente do efeito do amortecimento sobre o sistema mecânico, que faz com que as amplitudes vão se reduzindo com o tempo até permanecer em repouso na posição estática.

Nas duas análises foi utilizado 4096 pontos de discretização no tempo e na frequência e a frequência máxima avaliada é de 8 Hz. Para esta frequência máxima, os passos de tempo são dados por um $\Delta t = 0.25$ s.

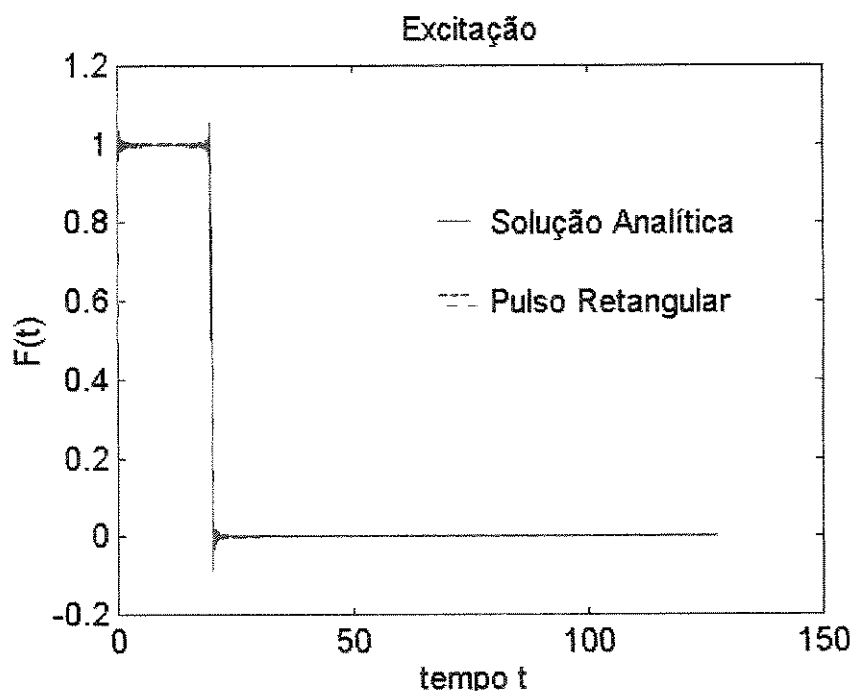


Fig. 7.7 - Pulso Retangular de Duração 20 segundos

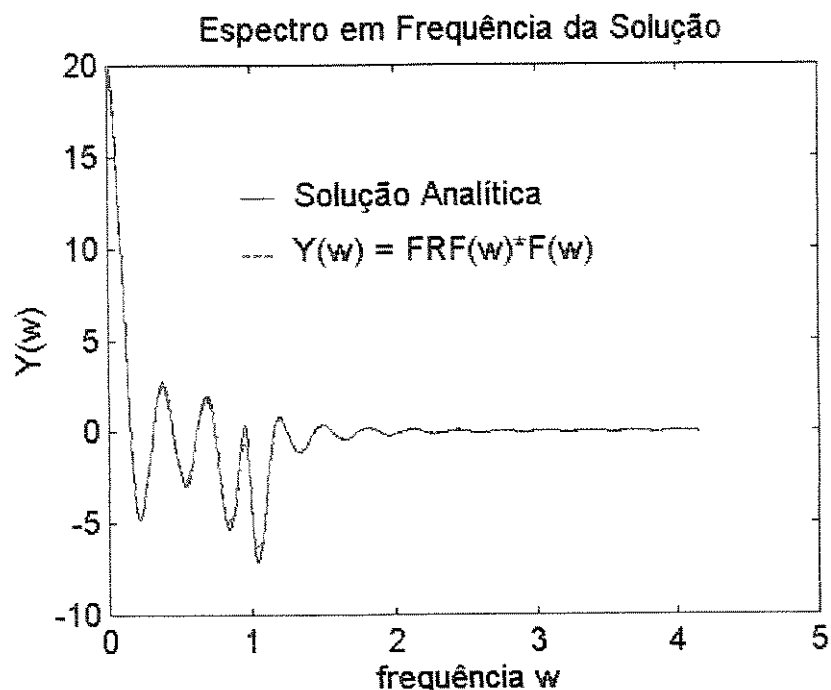


Fig. 7.8 - Resposta Estacionária Final do Sistema - Pulso Retangular 20 s

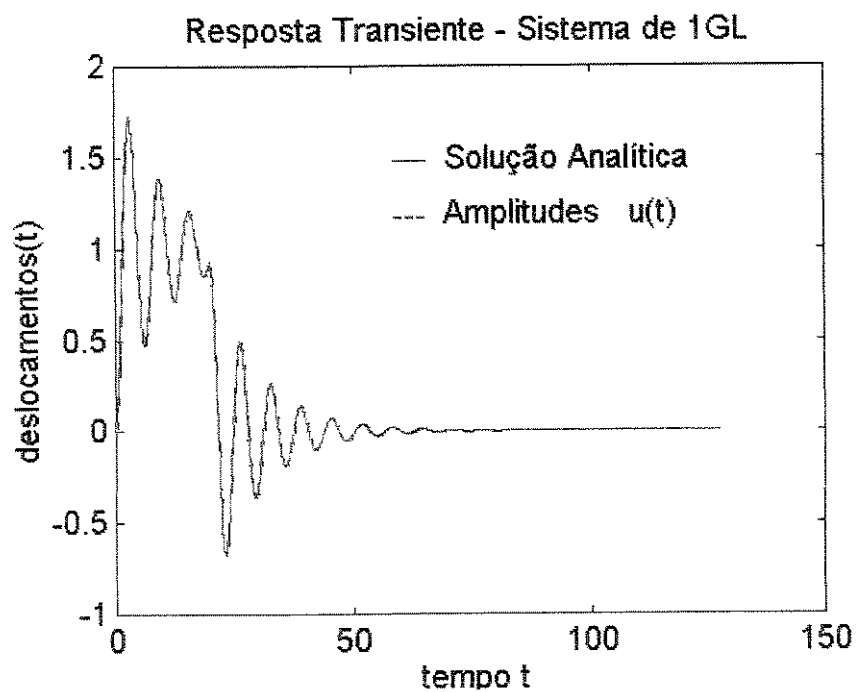


Fig. 7.9 - Solução Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por um Pulso Retangular de duração 20 segundos

A função resposta em frequência apresentada na figura 7.3, descreve a resposta estacionária do sistema mecânico quando aplicada uma força transiente senoidal. Frequentemente, a resposta em frequência é utilizada para determinar as características do sistema dinâmico. Pois, avaliando-se a função resposta em frequência para todas as frequências do espectro pode-se definir completamente as características dinâmicas do sistema, como rigidez, massa (inércia) e amortecimento, ou então frequência natural e fator de amortecimento. Uma forma alternativa para se obter as características dinâmicas é através da medida da resposta transiente, iniciada por um distúrbio apropriado. Isto é feito, medindo-se a resposta transiente para todos os tempos, até que o equilíbrio estático seja atingido depois do distúrbio. Sendo portanto, outra forma de medir completamente as características de um sistema dinâmico.

É importante observar que essa resposta do sistema, somente torna-se útil para caracterizar o sistema dinâmico, se o distúrbio de entrada for gerado por uma excitação dada em um tempo muito curto (rápido). Este distúrbio, é representado por uma força impulsiva e pode ser definido matematicamente através da função delta de Dirac ($\delta(t)$) dependente do tempo. Muito importante nas formulações da física-matemática, a função delta, não é avaliada numericamente, mas, no limite, pode ser representada através da função pulso retangular, se o tempo de aplicação do pulso for bastante reduzido.

O exemplo que segue utiliza-se da excitação dada pelo pulso retangular, reduzindo bastante o seu tempo de duração, para apenas 1 s. Consequentemente, o que se espera da solução, após a inversão numérica, é a função resposta impulsiva do sistema. A figura 7.10 mostra exatamente esta resposta, que também pode ser definida como a resposta em vibração livre amortecida do sistema de 1 grau de liberdade. No gráfico está plotada também a solução analítica.

Neste caso, em função da curta duração do pulso retangular, a frequência máxima para o espectro do pulso, foi ampliada para 32 Hz, que equivale ao delta de tempo $\Delta t = 0,03$ s.

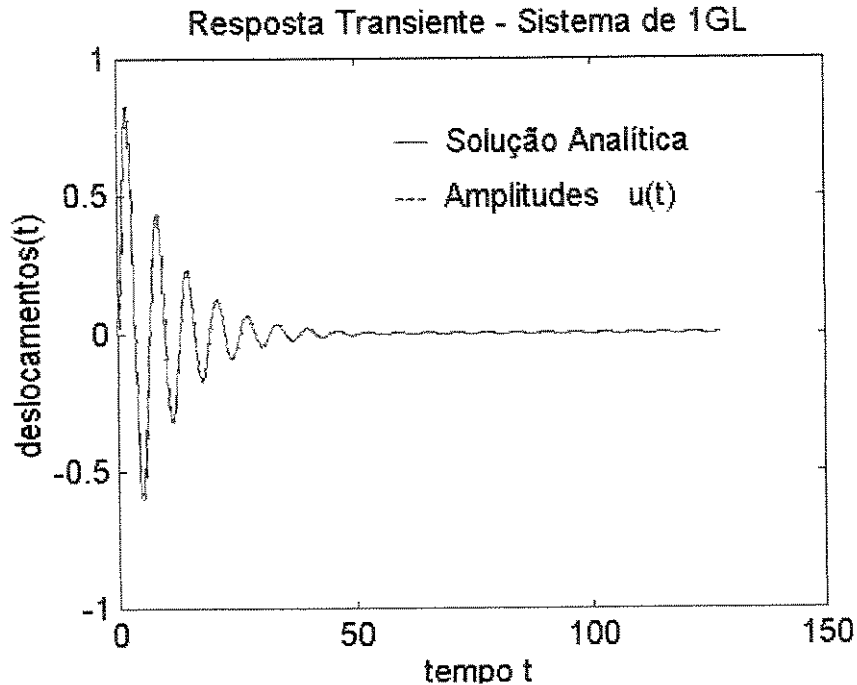


Fig. 7.10 - Resposta Impulsiva - Vibração Livre Amortecida do Sistema

O último exemplo avaliado, através da transformada numérica, é a resposta dinâmica de um sistema excitado harmonicamente. As características físicas do modelo mecânico são exatamente as mesmas utilizadas nos exemplos anteriores, onde a função de impedância do sistema é mostrada na figura 7.4. Porém, a excitação para este problema é dada por uma função senóide dependente do tempo, $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$, onde $F_0=1$. N, é a força máxima aplicada e $\omega = 0.7$ rad/s a frequência de excitação, figura 7.11.

Utilizou-se inicialmente uma frequência máxima de análise de 8 Hz, que equivale a um delta de tempo, $\Delta t = 0.125$ s. O espectro em frequência foi discretizado com $n_i = 2048$ pontos. A figura 7.12 mostra esta primeira tentativa para obter a resposta no tempo do sistema mecânico excitado pela senóide. Deve-se observar que a resposta a esta excitação é composta de duas partes, a primeira que corresponde a parte transiente da resposta, que estende-se até aproximadamente 30 segundos, e a segunda que caracteriza a parte da resposta em regime estacionário. Porém, para este caso, pode-se verificar na resposta do sistema dinâmico, apresentada na figura 7.12, que a parte que corresponde ao transiente não converge para a solução obtida analiticamente, entretanto, quando o transiente desaparece, a resposta estacionária tende a coincidir com a solução analítica.

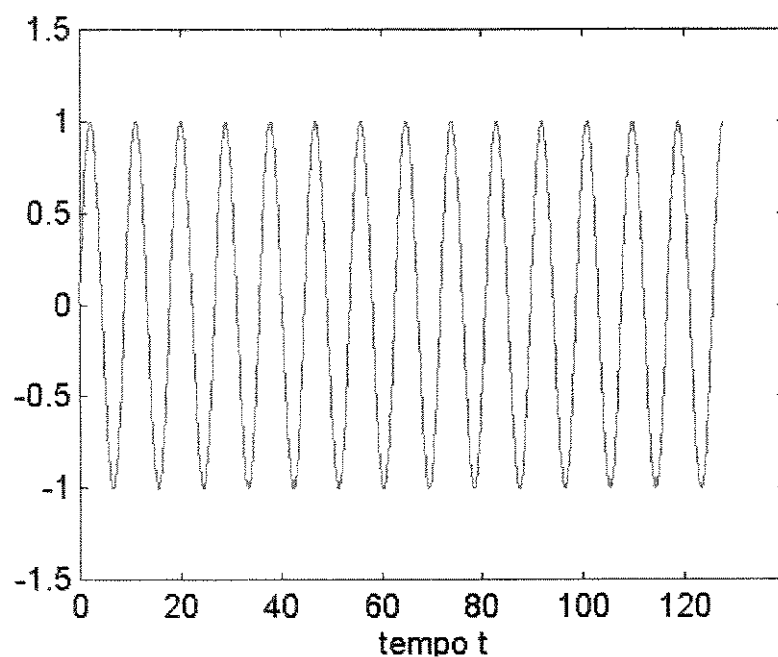


Fig. 7.11 - Função Excitação Senóide

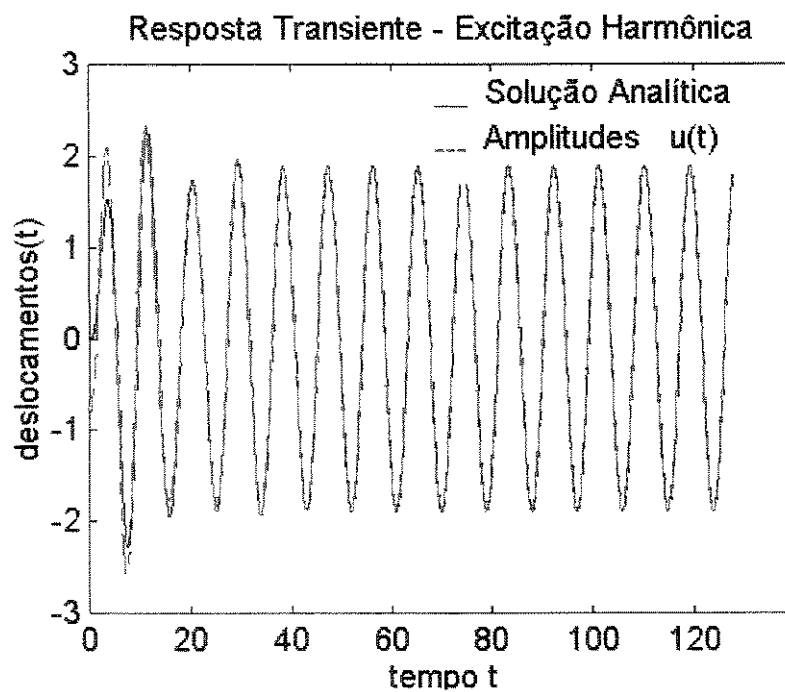


Fig. 7.12 - Resposta Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por uma Senóide

Discretização 2048 pontos

Posteriormente, em outra tentativa para se obter melhor convergência da resposta numérica, aumentou-se o número de pontos da discretização para $n_i = 4096$ pontos no espectro em frequência. A resposta do sistema obtida para este caso está apresentada no gráfico da figura 7.13. Observa-se que, tanto a parte transiente quanto a estacionária da solução, possuem uma boa concordância com a solução analítica do problema.

A parte do regime estacionário da solução, para qualquer sistema mecânico dessa natureza, excitado por uma força harmônica, corresponde a resposta do sistema quando o mesmo está vibrando na mesma frequência de excitação da força, ou seja, quando a influência do transiente desaparece. Comparando-se a solução na figura 7.13 e a função excitação na figura 7.11, observa-se claramente este comportamento na resposta do sistema. Pode-se verificar também na resposta do sistema, que as amplitudes máximas de oscilações em regime estacionário, são as mesmas que a amplitude da função resposta em frequência, mostrada na figura 7.3, correspondente a frequência de 0.7 rad/s . Essas amplitudes são de aproximadamente 1.8 e está demarcada na figura 7.3.

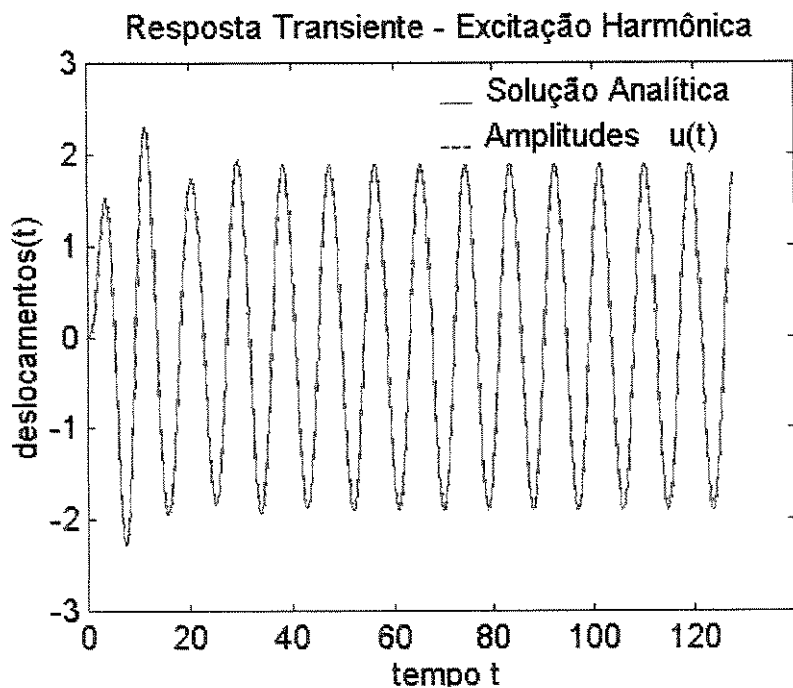


Fig. 7.13 - Resposta Transiente para um Sistema Mecânico Excitado por uma Senóide
Discretização 4096 pontos

Estando estas soluções extensivamente verificadas, na próxima seção deve-se utilizar a transformada inversa de Fourier para solucionar o problema dinâmico de interação solo-estrutura. Para este problema, as funções de impedância do sistema serão definidas através das funções de Green do meio contínuo. As excitações são produzidas por uma função pulso retangular e uma força harmônica, como nesta seção. E as resposta dinâmica obtidas, são as amplitudes de oscilações de um corpo rígido na superfície do solo. Essas soluções devem ser verificadas, com algumas soluções obtidas na bibliografia para o problema dinâmico envolvendo estrutura e um meio contínuo infinito.

7.3 Exemplos Numéricos - Problema Dinâmico Solo-Estrutura

Nesta seção deve-se obter a resposta dinâmica transiente envolvendo um meio contínuo viscoelástico. A solução transiente deve ser aplicada para o problema de interação dinâmica solo-estrutura. O problema a ser avaliado é de uma estrutura rígida sobre a superfície do solo, submetida a uma excitação externa, figura 7.14. A solução consiste em obter a resposta estacionária da fundação rígida através da superposição a partir das funções de Green estacionárias. Desta forma, a solução transiente é obtida aplicando-se inversa numérica da transformada de Fourier. O semi-espaço caracterizando o solo é definido como um meio viscoelástico, podendo então incorporar o amortecimento material do solo.

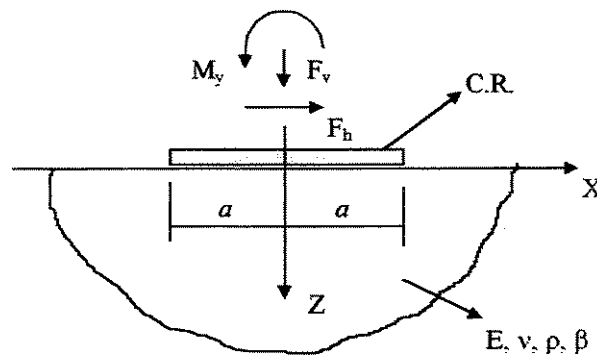


Fig. 7.14 - Problema Interação Dinâmica Solo-Estrutura

Considere uma fundação rígida sem massa com largura $2a = 5$ ft, sobre a superfície do solo. As propriedades físicas do solo podem ser caracterizadas pelo módulo de elasticidade $E = 2.58984 \times 10^9$ lb/ft²; coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$ e densidade de massa $\rho = 10.5368$ lb.s²/ft². Como o solo é considerado viscoelástico, deve-se definir ainda o coeficiente de amortecimento material ζ .

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os resultados da bibliografia sobre o assunto, os quais possuem apenas resultados de problemas elásticos, deve-se considerar um coeficiente de amortecimento material baixo, $\zeta = 0.05$. A fundação pode estar submetida a uma excitação dinâmica dada por um carregamento vertical F_v , horizontal F_h e momento M_y . Os deslocamentos dependentes da frequência são definidos como vertical $W(\omega)$, horizontal $U(\omega)$ e $\phi(\omega)$ rotação do corpo rígido.

A aplicação da formulação descrita nas seções anteriores exigem que se encontre a resposta estacionária do sistema para posteriormente, através da inversão numérica, obter a resposta transiente. Portanto, em uma primeira análise deve-se obter a resposta harmônica da fundação rígida. Esta solução é obtida utilizando a superposição das funções de Green. Utilizou-se 8 pontos de discretização sob a fundação rígida. O carregamento aplicado na fundação é definido por:

$$F_v = F_h = 180 \times 10^3 \text{ lb/ft}$$

$$M_y = 180 \times 10^3 \text{ lb ft/ft}$$

Nas figuras 7.15, 7.16 e 7.17, verifica-se as resposta harmônicas da fundação rígida comparando-as com as soluções obtidas no trabalho de Spyrakos e Beskos, 1986. As amplitudes que definem os deslocamentos do corpo rígido vertical (W) e horizontal (U) estão dadas em *foot* (ft), e as rotações de corpo rígido em radianos (rad). A escala horizontal define a frequência adimensional dada por,

$$A_o = \frac{a \omega}{C_s}$$

onde C_2 define a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento, dada,

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Na figura 7.15 está plotada a resposta vertical comparando-a com as soluções obtidas nos trabalhos de Spyrakos e Beskos, 1986; Karasudhi, *at all*, 1968; e Luco e Westmann, 1972. Observa-se que a solução obtida através das funções de Green (função de influência), concorda bem com as soluções obtidas na bibliografia. A menos da resposta das rotações que a solução de Green concorda com a resposta de Luco e Westmann e divergem um pouco da solução de Spyrakos e Beskos.

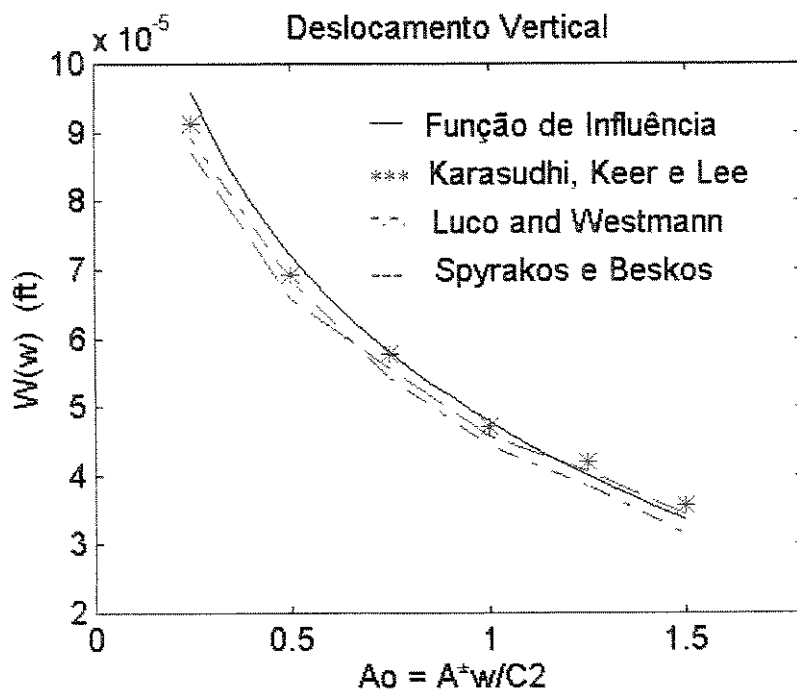


Fig. 7.15 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Deslocamento Vertical

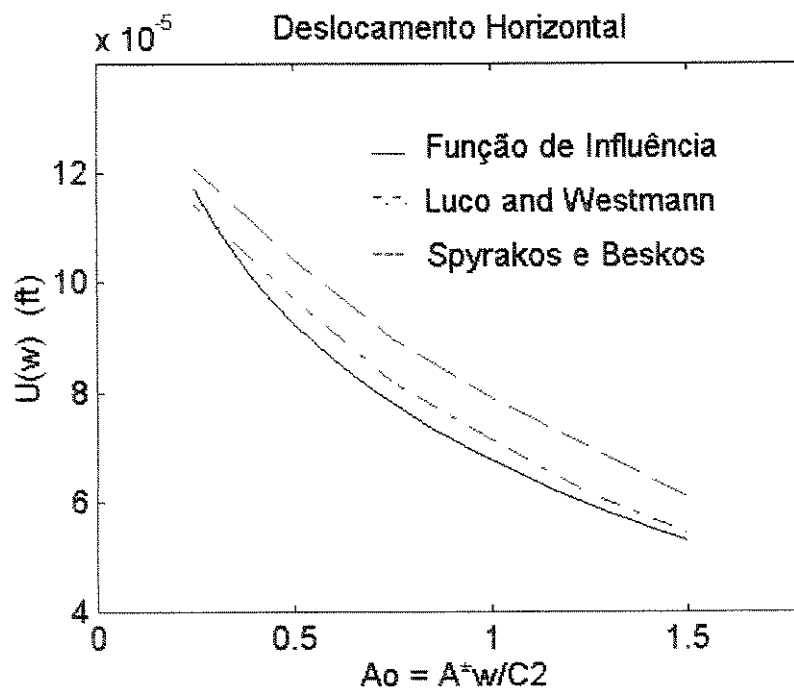


Fig. 7.16 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Deslocamento Horizontal

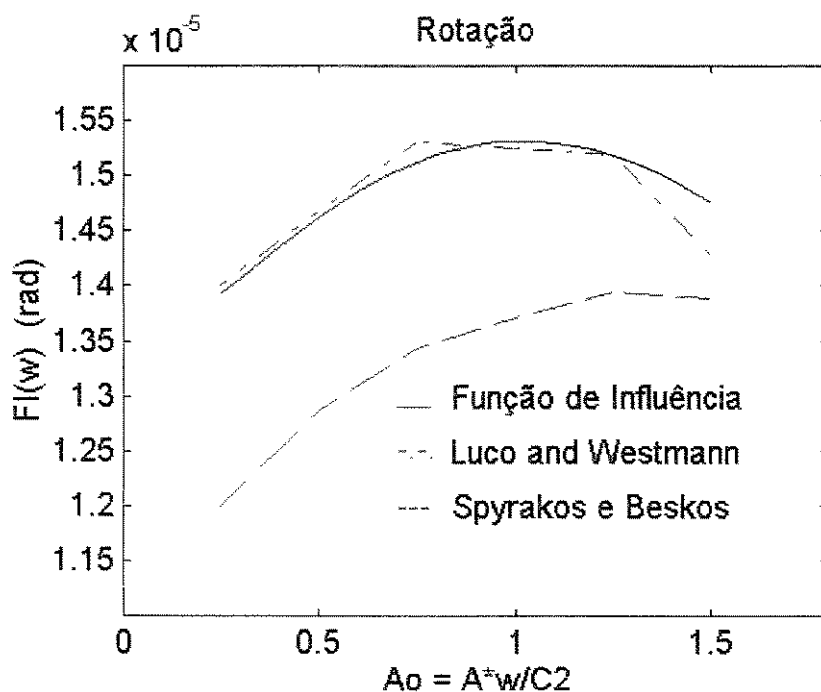


Fig. 7.17 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Rotação

No exemplo seguinte, deve-se utilizar a função de influência verificada no gráfico da figura 7.15, para obter a resposta transiente da fundação rígida. O exemplo avalia a resposta dinâmica transiente da fundação para uma excitação dada por um pulso retangular de duração 1.6×10^{-06} segundos e amplitude $F_v = 180 \times 10^3 \text{ lb/ft}$, figura 7.18.

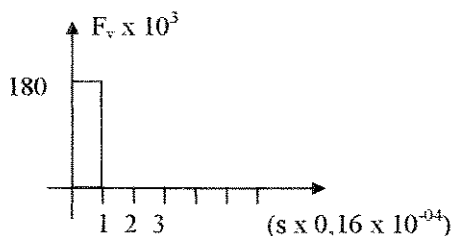


Fig. 7.18 - Função Pulso Retangular Vertical

A resposta dinâmica para a excitação na forma de um pulso retangular está apresentada a figura 7.19. Alguns casos foram analisados para verificar influência dos principais parâmetros

envolvidos na inversão, sobre a convergência da resposta. Como definido na seção 7.1 e analisado em alguns problemas na seção 7.2, os parâmetros que influenciam a convergência da resposta são o número de pontos de discretização na frequência e a frequência máxima que define também o delta de tempo da resposta obtida no domínio do tempo.

Uma primeira constatação ocorreu sobre a discretização na frequência. Observou-se neste caso que a frequência máxima do espectro não influencia diretamente na convergência da resposta, desde de que se mantenha o mesmo delta de frequência utilizado. Ou seja, dada uma frequência máxima e um número de pontos de discretização, a resposta é exatamente a mesma se dobrarmos esta frequência máxima e dobrarmos os pontos de discretização simultaneamente. Pois, desta forma mantém-se o mesmo delta de frequência para os dois casos. Entretanto, quando mantém-se a frequência máxima e aumenta-se o número de pontos de discretização a solução tende a convergir, pois o delta de frequência está se tornando menor.

Desta forma, manteve-se sempre a frequência máxima adimensional, $Ao = 200$ e verificou-se a influência da discretização sobre a resposta final do sistema. Na figura 7.19, está plotada quatro curvas correspondentes a diferentes números discretização, isto é, $n_i = 2048, 4096, 8192$ e 16384 , sendo que a de menor discretização é a inferior e a de maior discretização é a mais superior. Observa-se que conforme aumenta-se a discretização do sistema, a resposta vai convergindo gradativamente. Na figura 7.20, esta mesma solução é mostrada aumentando-se o tempo final de análise.

Em uma segunda análise, observou-se a influência do primeiro ponto de frequência sobre a resposta final do sistema. Isto é um fator importante, pois como a resposta transiente é obtida a partir da solução estacionária do sistema, esta última não permite verificar o valor estático da resposta ($Ao = 0$.) pois neste ponto existe a singularidade proveniente da formulação e a resposta tende a infinito. Desta forma, pode-se apenas reduzir a primeira frequência na discretização fazendo-a tender a zero. As figuras 7.21 e 7.22 mostram esta avaliação, onde observa-se a resposta obtida a partir de uma solução em frequência com o primeiro ponto de frequência tendendo a zero e a solução com discretização máxima.

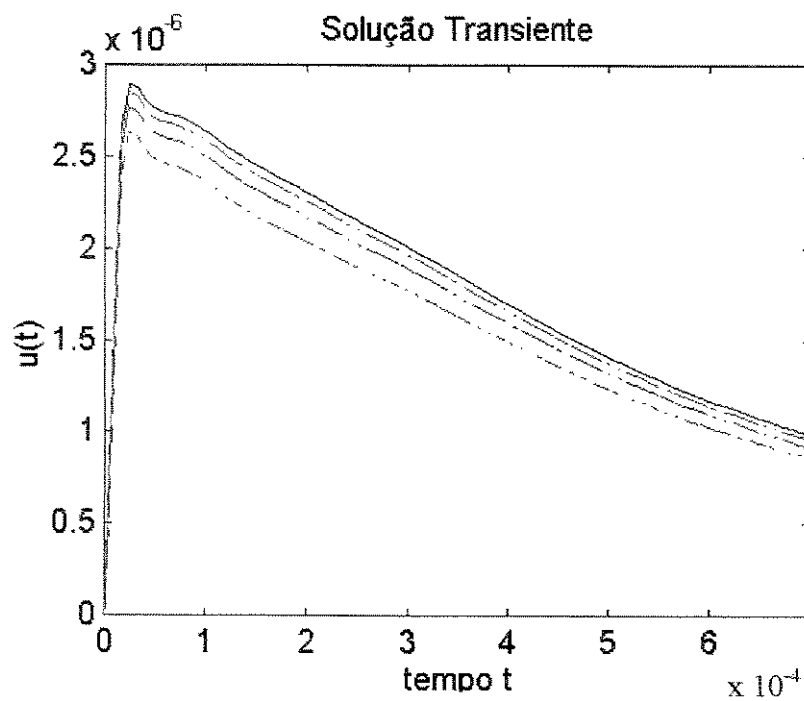


Fig. 7.19 - Resposta ao Impulso Vertical

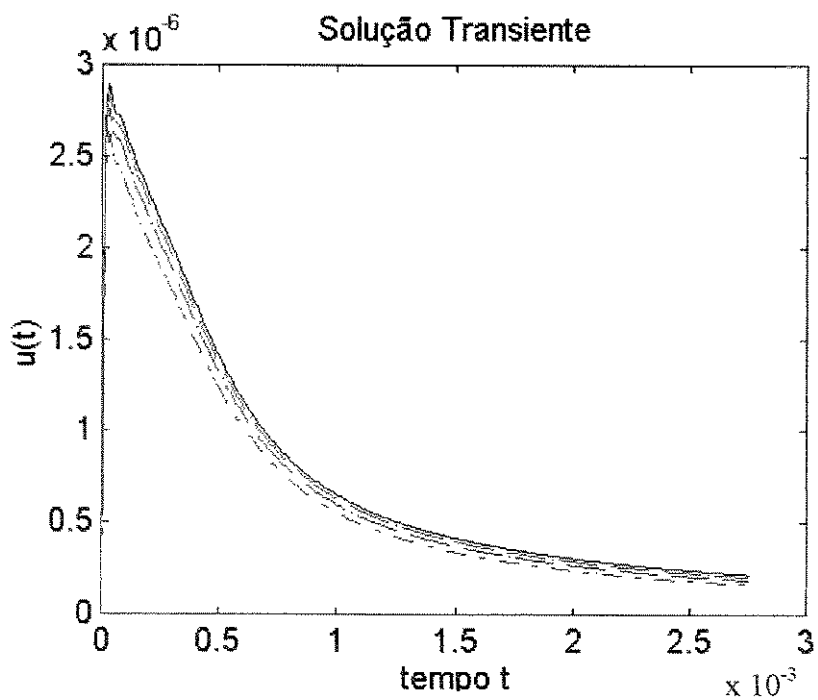


Fig. 7.20 - Resposta ao Impulso Vertical - Tempo de Análise

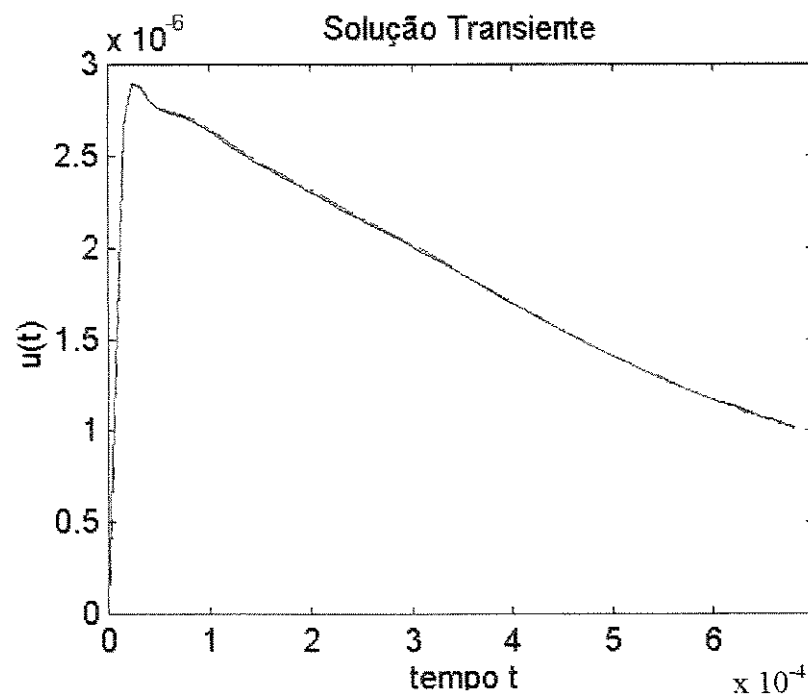


Fig. 7.21 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência

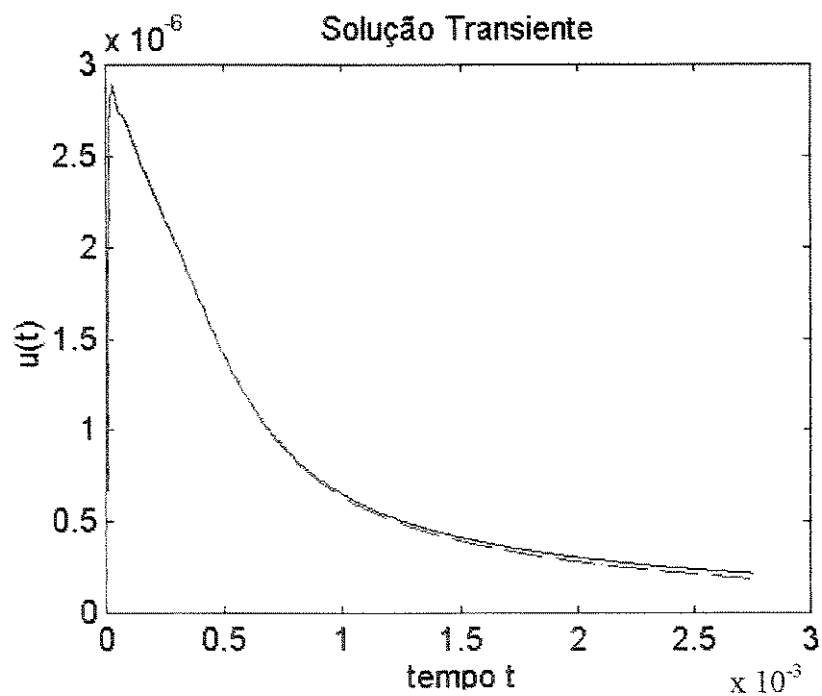


Fig. 7.22 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Tempo de Análise

Após este estudo para verificar os parâmetros que influenciam na solução final, pode-se comparar a solução obtida com os resultados da bibliografia. Na figura 7.23 a resposta do sistema está sendo comparada com a resposta obtida para nos trabalhos de Spyrakos e Beskos, 1986, e Spyrakos e Antes, 1986. Observa-se que a solução obtida através da inversão numérica, se aproxima mais da solução dada por Spyrakos e Antes. Isto mostra a boa convergência na resposta obtida através da inversão numérica, uma vez que a solução de Spyrakos e Antes, possui muitas melhorias em relação a formulação de Spyrakos e Beskos. Pode-se observar ainda que, a partir de 1×10^{-3} segundos, o decaimento da resposta através da inversão numérica é ligeiramente maior do que nas demais soluções. Este efeito pode ser creditado ao pequeno amortecimento inserido na resposta da inversão numérica, que não existe nas outras formulações. Deve-se acrescentar que a resposta da inversão numérica parece mais realista, pois ainda que nestas análises esteja-se utilizando um fator de amortecimento bastante baixo, para efeito de validação dos resultados, pode-se incluir qualquer outro valor de amortecimento material na análise.

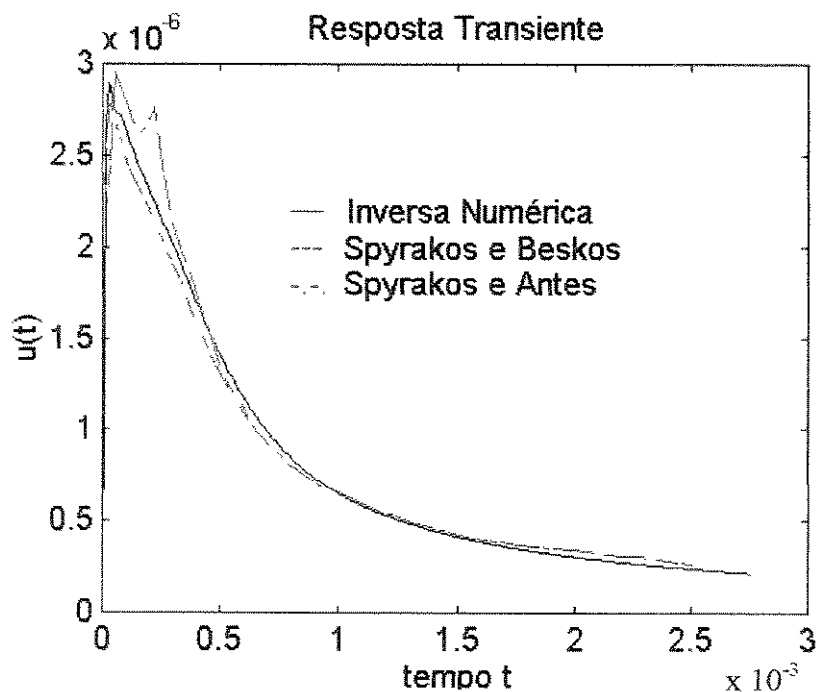


Fig. 7.23 - Resposta ao Impulso Vertical - Validação da Solução

- Resposta a Excitação Harmônica -

Nesta segundo exemplo, deve-se observar a resposta transiente da função rígida, excitada por uma força harmônica vertical na forma de uma senóide. A força é dada por:

$$F_v(t) = \bar{F} \sin(\omega t)$$

onde $\bar{F} = 180 \times 10^3 \text{ lb/ft}$ e $\omega = 5814.326 \text{ rad/s}$ ($A_0 = 1.5$).

A figura 7.24 mostra a avaliação da convergência obtida para as discretizações analisadas no caso anterior, isto é, $n_i = 2048, 4096, 8192$ e 16384 . Observa-se novamente que a solução converge gradativamente, em função do aumento de pontos n_i da discretização.

E a figura 7.25 mostra a resposta obtida variando o primeiro ponto de frequência na discretização, como discutido no caso anterior. Observa-se novamente que a solução converge para a resposta obtida com uma maior discretização.

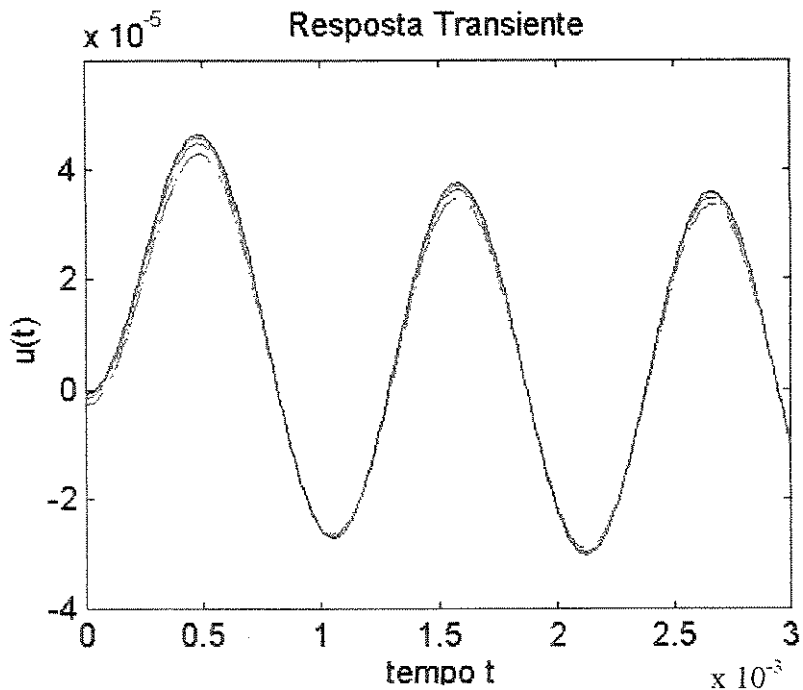


Fig. 7.24 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical

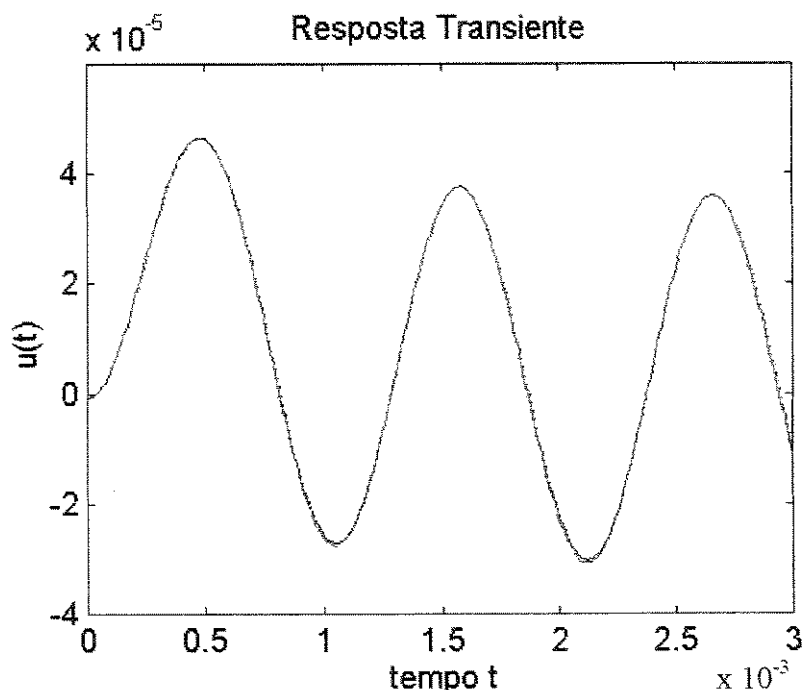


Fig. 7.25 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Convergência

Em seguida, a resposta obtida pela inversão numérica, é outra vez comparada com as soluções apresentadas nos trabalhos de Spyrakos *et all*, citados anteriormente. A figura 7.26 apresenta estas comparações, onde pode-se observar que as resposta se aproximam bem, verificando novamente a convergência da inversão numérica. Algumas soluções transientes apresentam dificuldades para obter as respostas para períodos de tempos muito grandes, as vezes devido ao custo computacional para avaliar estas respostas, e em outras devido a erros numéricos que se apresentam quando a solução se estende demasiadamente no tempo. No trabalho de Spyrakos e Beskos, este apresenta um parte da solução para um período de tempo mais longo, avaliado entre 100 e 113,6 ($\times 10^{-3}$) segundos. Esta verificação também é feita e mostrada na figura 7.27. E, uma vez que esta é uma dificuldade nas soluções transientes, na figura 7.28, é mostrado que a solução através da inversão numérica pode ser obtida para um tempo de análise ainda maior.

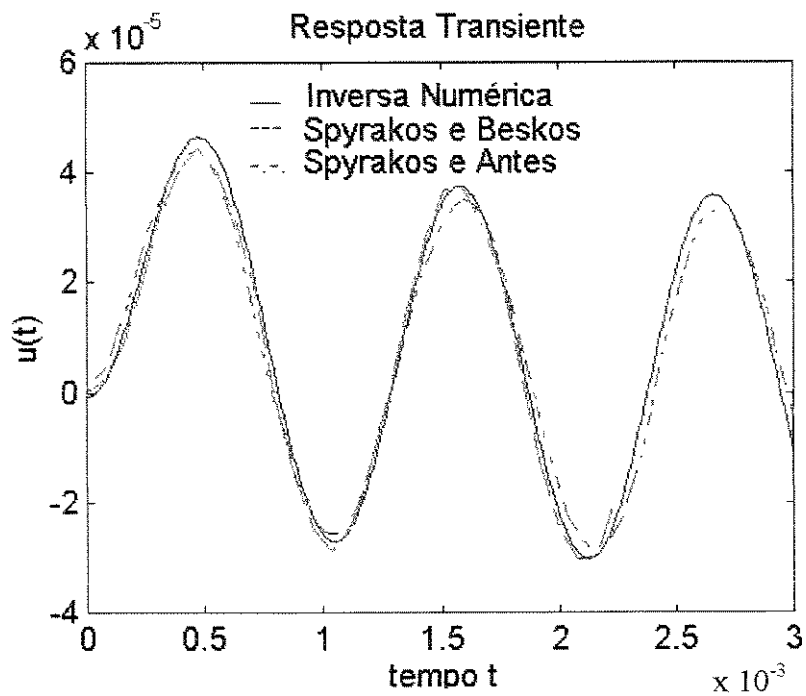


Fig. 7.26 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Validação

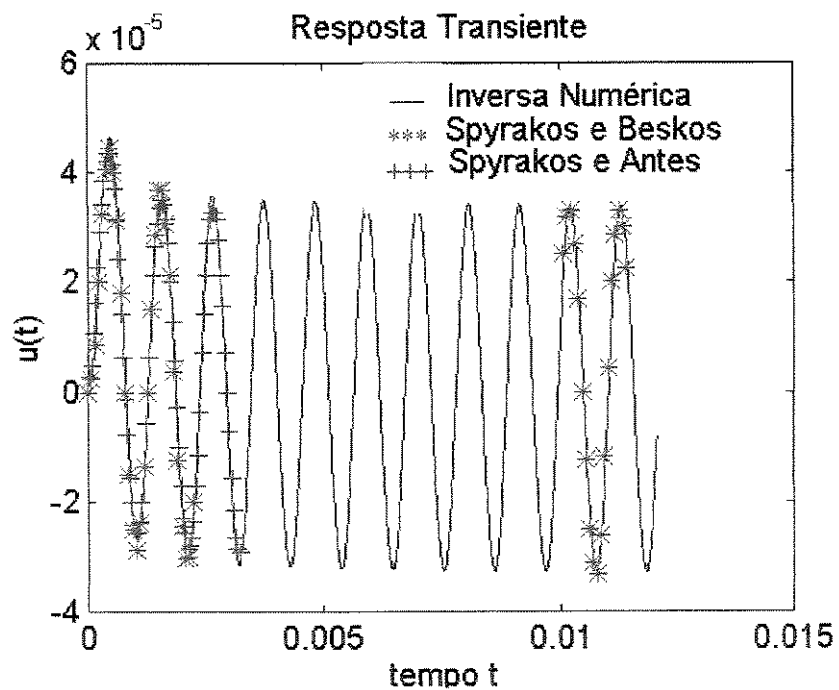


Fig. 7.27 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Validação

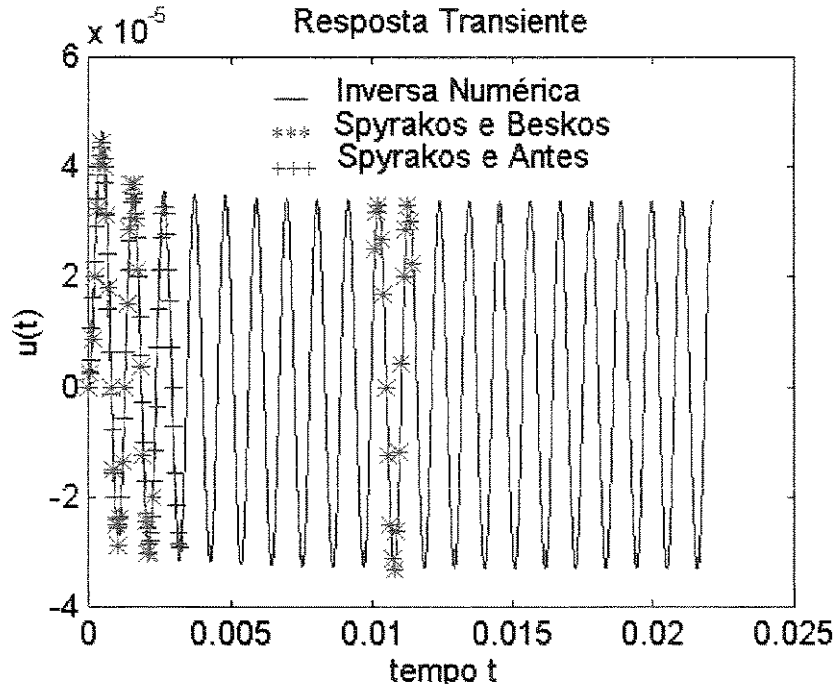


Fig. 7.28 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Tempo Máximo de Análise

- Resposta a excitação harmônica. Variação da Frequência de Excitação

Nesta terceira e última análise, pode-se avaliar a resposta dinâmica do corpo rígido variando a excitação harmônica sobre o corpo. Foram utilizadas dois outros valores de frequência de excitação, $\omega_1 = 3871.369$ rad/s e $\omega_2 = 1935.684$ rad/s. Estas frequências foram escolhidas de forma a verificar as amplitudes produzidas sobre o corpo rígido na curva de resposta em frequência. Estas frequências são equivalentes as frequências adimensionais $Ao = 1$ e $Ao = 0.5$, respectivamente para ω_1 e ω_2 .

Como discutido nas análises da seção 7.2, a resposta a uma excitação harmônica pode ser dividida em duas partes bem definidas, a primeira chamada de parte transiente e a segunda de parte estacionária, sendo que esta última corresponde a resposta do sistema, quando o transiente desaparece e o sistema responde apenas em função da força de excitação externa. Desta forma, as amplitudes da parte estacionária da resposta, devem ser as mesmas que aquelas obtidas na solução da resposta em frequência, figura 7.15. A função resposta em frequência vertical é novamente

apresentada na figura 7.29, identificando as amplitudes estacionárias para as frequências $A_o = 0.5$ e $A_o = 1$, e $A_o = 1.5$, sendo que a frequências $A_o = 1.5$ ($\omega = 5814.326$ rad/s) é mesma dos exemplos analisados anteriormente.

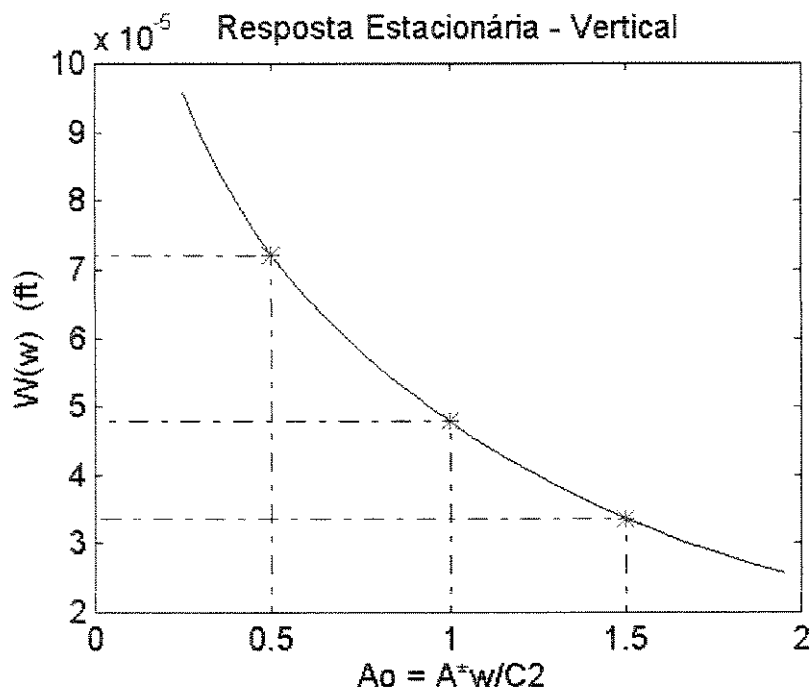


Fig. 7.29 - Função Resposta em Frequência Vertical

Na figura 7.30 é mostrada a resposta a uma excitação harmônica com frequência de excitação $\omega_1 = 3871.369$ rad/s ($A_o = 1$). Observa-se que a partir de 0.005 s, a parte equivalente ao transiente da resposta começa a desaparecer e permanece somente a parte estacionária da resposta onde a amplitude máxima é de aproximadamente 4.8×10^{-5} ft, semelhante a amplitude correspondente a esta frequência na figura 7.29.

A figura 7.31 apresenta a mesma verificação, porém, a resposta é observada para a frequência de excitação $\omega_2 = 1935.684$ rad/s ($A_o = 0.5$). Pode-se notar que o regime transiente da resposta vai até 0.003 s, permanecendo a partir deste tempo apenas a resposta estacionária, onde a amplitude máxima de aproximadamente 7.2×10^{-5} ft, coincide com o valor identificado na figura 7.29 para esta mesma frequência.

Pode-se ainda fazer esta mesma comparação observando o gráfico da figura 7.29 com o gráfico da figura 7.28, mostrado na primeira análise da resposta a uma excitação harmônica, para frequência de excitação $\omega = 5814.326 \text{ rad/s}$ ($A_o = 1.5$), onde é observado que a amplitude máxima estacionária é de aproximadamente $3.4 \times 10^{-5} \text{ ft}$.

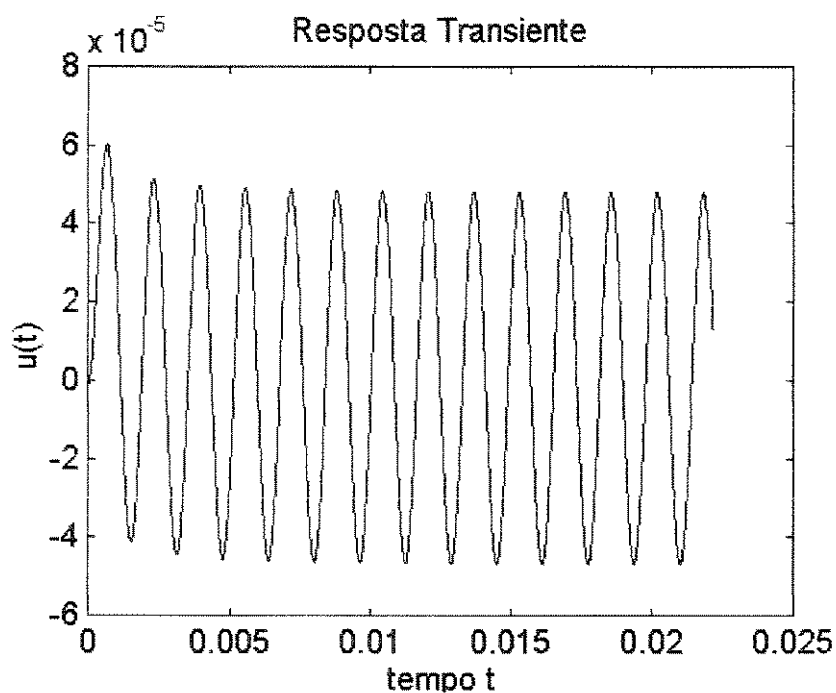


Fig. 7.30 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Frequência de Excitação - $A_o = 1$.

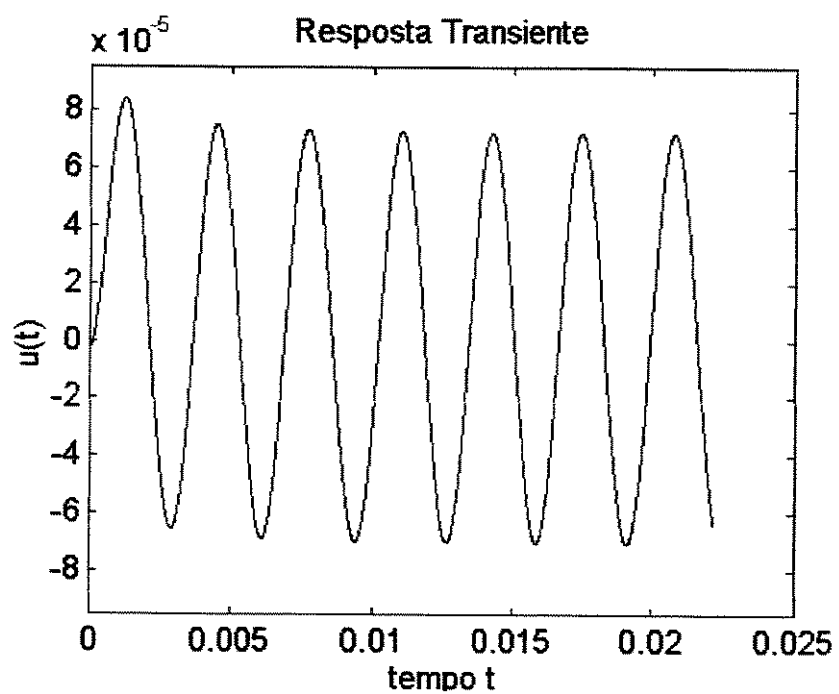


Fig. 7.31 - Resposta a Excitação Harmônica Vertical - Frequência de Excitação - $A_0 = 0.5$

7.4 Exemplos Numéricos - Problema Dinâmico Solo-Estrutura - Inércia da Fundação

Na seção anterior, a dinâmica da fundação rígida sobre o solo foi analisada utilizando-se uma fundação sem massa. Em seguida, nesta seção, deve-se observar influência da propriedade de inércia da fundação sobre resposta dinâmica transiente do sistema solo-estrutura. O problema a ser avaliado é semelhante àquele apresentado anteriormente, isto é, uma fundação rígida sobre o solo viscoelástico, excitada externamente. Porém, neste caso a fundação rígida possui massa. Desta forma, pode-se verificar a formulação apresentada na seção 6.5, onde a resposta dinâmica da fundação com massa é obtida utilizando-se as funções de Green ou do Método dos Elementos de Contorno para modelar o solo viscoelástico, incorporando o amortecimento material do meio.

Para permitir uma análise parametrizada do efeito de inércia sobre a resposta do sistema, a massa da fundação m_f , deve ser associada a uma massa equivalente do solo m_s . Esta massa m_s , corresponde a uma massa de solo, localizada abaixo da fundação, em uma área de meia circunferência de raio “ a ”, onde “ a ” é o semi-lado da fundação, como representado na figura 7.32, abaixo. Portanto, pode-se definir a massa equivalente do solo como sendo $m_s = \pi \rho a^2$.

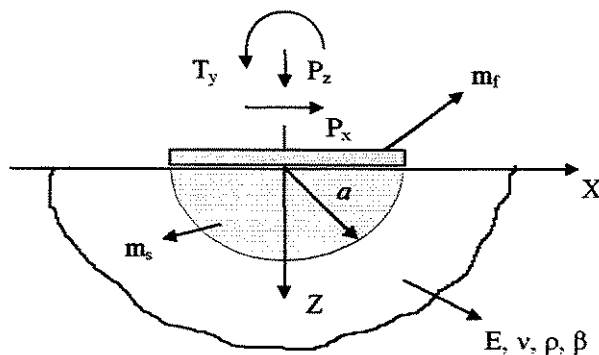


Fig. 7.32 - Problema Interação Dinâmica Solo-Estrutura - Inércia da Fundação

A relação existente entre a massa da fundação m_f e massa do solo m_s , é dada por $B = \frac{m_f}{m_s}$.

As propriedades físicas do solo são as mesmas utilizadas na seção anterior, isto é, módulo de elasticidade $E = 2.58984 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$; coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$ e densidade de massa $\rho = 10.5368 \text{ lb.s}^2/\text{ft}^2$. E ainda como o solo é considerado viscoelástico, novamente, deve-se utilizar o mesmo coeficiente de amortecimento material, $\zeta = 0.05$. A largura da fundação rígida com massa é dada por $2a = 5 \text{ ft}$.

Em todas as análises desenvolvidas a seguir, foram observados quatro casos, relacionados as propriedades de inércia da fundação. A massa da fundação foi sendo incrementada gradativamente, a fim de verificar a influência desta sobre a resposta dinâmica da fundação. Inicia-se com uma massa bastante reduzida $m_f/m_s = 1$, onde a influência da massa sobre a resposta é mínima, passando por $m_f/m_s = 5$, $m_f/m_s = 20$ e $m_f/m_s = 50$, sendo que neste último caso observa-se uma influência maior da massa da fundação sob a resposta dinâmica.

Em uma análise inicial, envolvendo a inércia da fundação, avalia-se a resposta harmônica da fundação rígida, obtida através da superposição das funções de Green (função de influência). Utilizou-se 8 pontos de discretização sob a fundação rígida. Aplica-se uma excitação vertical $P_z = 180 \times 10^3 \text{ lb/ft}$ sob a fundação para obter os deslocamentos verticais $W(A_o)$ dadas em *foot*, dependentes da frequência adimensional A_o , definida como $A_o = \frac{a \omega}{C_s}$, onde “ a ” é o metade da largura da fundação, C_s é a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento e ω a frequência de excitação dada em rad/s.

Na figura 7.33, observa-se a resposta estacionária da fundação para o caso $m_f/m_s = 1$, onde comparando-a com a resposta dinâmica obtida para o caso da fundação sem massa. Verifica-se uma variação mínima na resposta influenciada pela massa da fundação. E em seguida esta massa é aumentada para $m_f/m_s = 5$, onde pode-se observar na figura 7.34, o início da influência da inércia da fundação a resposta.

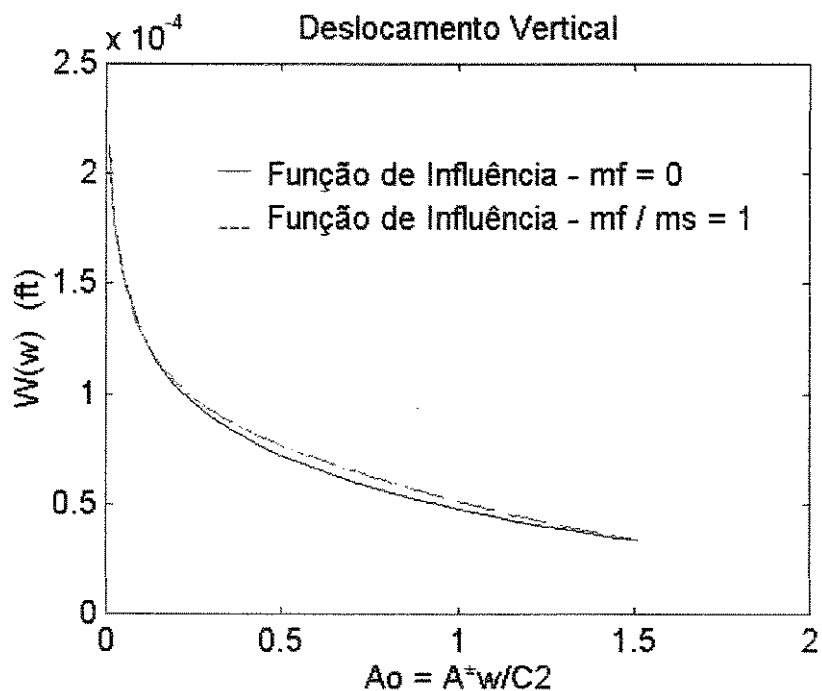


Fig. 7.33 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 1$

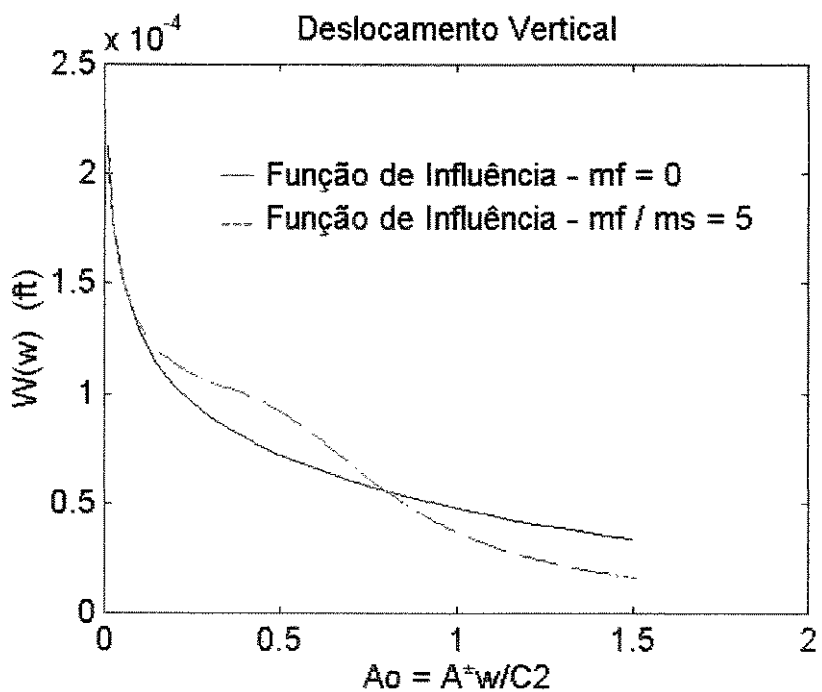


Fig. 7.34 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 5$

Em seguida a massa da fundação é substancialmente amplificada, tornando visível a influência da inércia da fundação sobre a resposta do sistema. Nos dois casos seguintes, a resposta da fundação é obtida para $m_f/m_s = 20$, figura 7.35, e $m_f/m_s = 50$, figura 7.36, comparando-a com a resposta da fundação sem massa. Observa-se nos dois gráficos, o aparecimento de um pequeno pico na resposta em frequência da fundação rígida, determinando uma frequência natural para o sistema. Isto ocorre devido a maior influência da massa da fundação sobre a resposta do sistema solo-estrutura. Pois, nestes dois casos a massa da fundação é significativamente maior do que a massa equivalente do solo, pois em um caso a massa da fundação m_f é 20 vezes maior do que a massa do solo m_s , enquanto no outro a massa é 50 vezes maior do que a massa do solo.

Verifica-se ainda que, além do aparecimento destes picos, determinando um frequência natural do sistema, estes ocorrem em frequência distintas, o que é naturalmente esperado, uma vez que a variação da massa da fundação, influencia tanto na amplitude da resposta, quanto no valor da frequência natural do sistema.

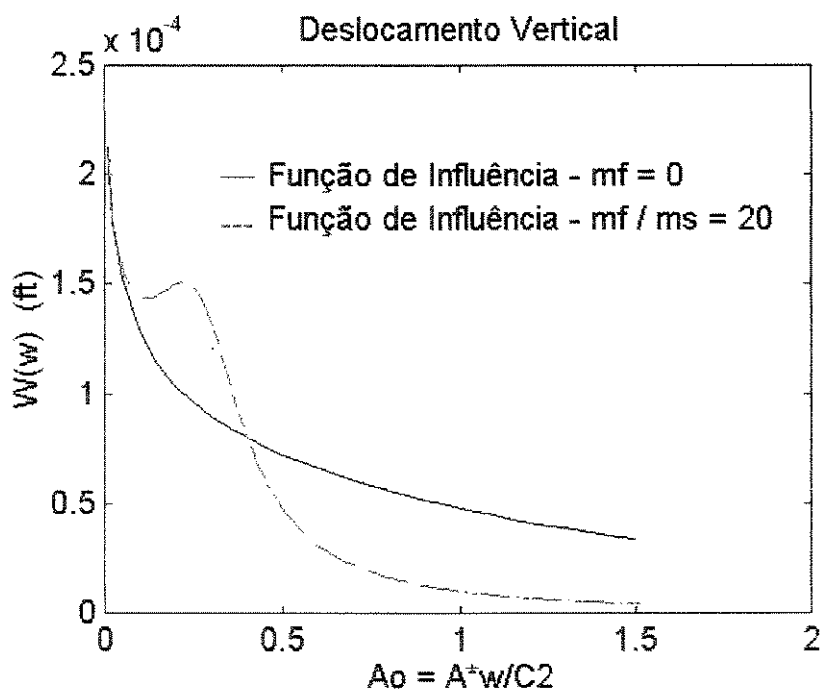


Fig. 7.35 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 20$

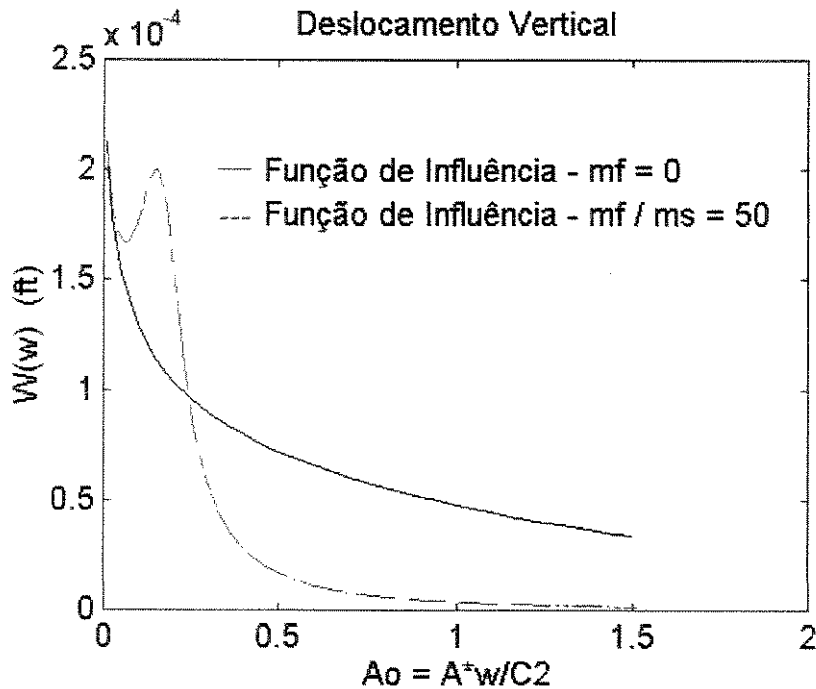


Fig. 7.36 - Movimento de Corpo Rígido sobre o Solo - Resposta Harmônica - $m_f/m_s = 50$

Nos exemplos seguintes, as funções de influência apresentadas anteriormente, são utilizadas para obter a resposta transiente da fundação rígida. A excitação externa é dada por uma carga impulsiva retangular de amplitude $P_z = 180 \times 10^3$ lb/ft, e duração 1.6×10^{-6} segundos, tal como apresentada na figura 7.18, da seção anterior. Isto permite comparar os resultados obtidos neste capítulo com a resposta sob influência da inércia da fundação e aqueles apresentados no capítulo anterior para fundação sem massa.

Inicialmente, deve-se fazer uma validação da convergência dos resultados, em função do número de pontos de discretização no espectro de frequência. Tal como no capítulo anterior, a frequência adimensional máxima de análise é definida por $Ao = 200$, sendo que as discretizações são dadas por $n_i = 2048, 4096, 8192$ e 16384 pontos de discretização na frequência. As avaliações da convergência destas discretizações devem ser feitas para cada caso de massa da fundação diferente, isto é, $m_f/m_s = 1, m_f/m_s = 5, m_f/m_s = 20$ e $m_f/m_s = 50$.

A figura 7.37 e 7.38, mostra a resposta transiente devido a carga impulsiva para $m_f/m_s = 1$ e $m_f/m_s = 5$, respectivamente. Observa-se que a resposta vai convergindo gradativamente, da curva mais inferior (linha tracejada -.-) até a mais superior (linha contínua) quando a discretização na

freqüência vai sendo aumentada de 2048 até 16384 pontos, tal como observou-se no capítulo anterior, para as figuras 7.19 e 7.20.

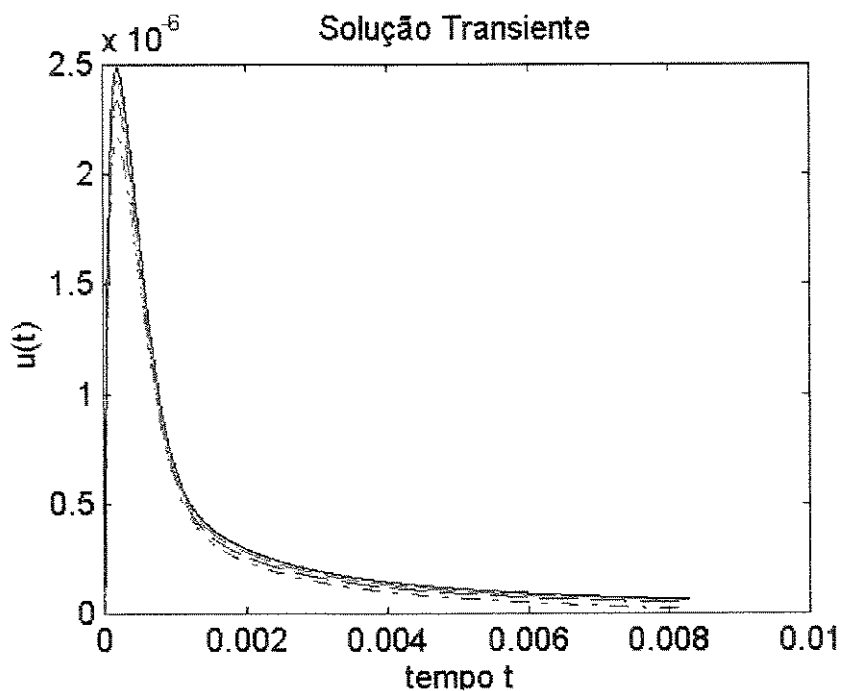


Fig. 7.37 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 1$

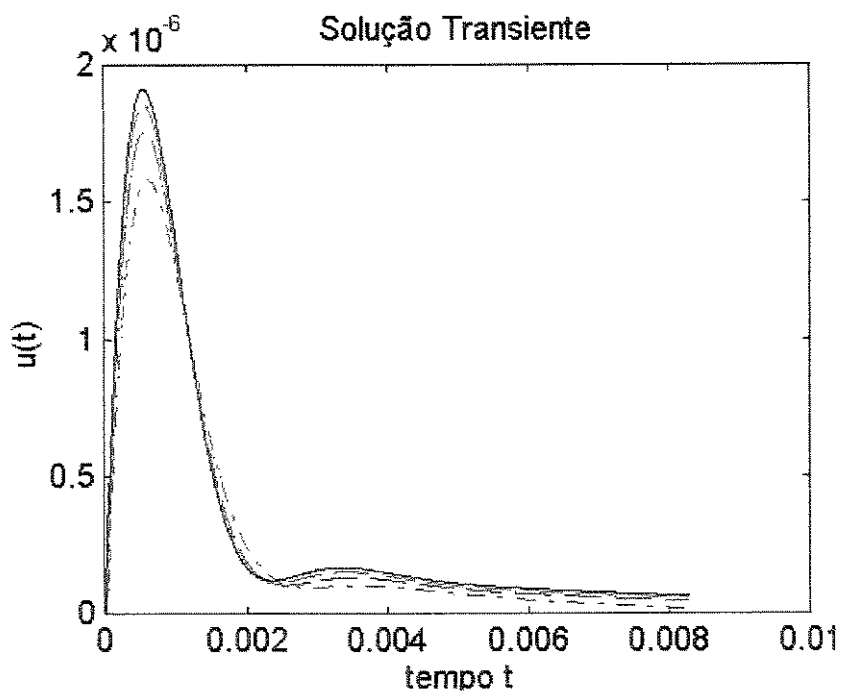


Fig. 7.38 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 5$

Em seguida, é avaliada a convergência da resposta em função da discretização na frequência, para os outros dois casos de inércia da fundação. Os resultados são apresentados nas figuras 7.39 e 7.40, sendo que a massa da fundação é dada por $m_f/m_s = 20$ e $m_f/m_s = 50$, respectivamente. Novamente verifica-se que a resposta converge quando é aumentada a discretização do espectro de frequência.

Entretanto, observa-se nas respostas obtidas, que maior predominância da massa da fundação, influencia fortemente na convergência da resposta. Pode-se verificar por exemplo, no gráfico da figura 7.39 ($m_f/m_s = 20$), que para uma discretização menor ($n_i = 2048$ - curva definida com a linha tracejada -.-), não se observa as oscilações na resposta, a partir de 0.003 segundos. Ao passo que, enquanto a discretização é aumentada, essas oscilações vão tornando-se visíveis. Observando finalmente, uma maior oscilação na resposta, quando esta converge definitivamente na discretização máxima ($n_i = 16384$ - linha contínua). Esta influência numérica, da inércia da fundação, sobre a resposta pode ser creditada ao aparecimento dos picos na resposta em frequência (figuras 7.34 e 7.35), os quais exigem uma melhor discretização em torno dessas frequências.

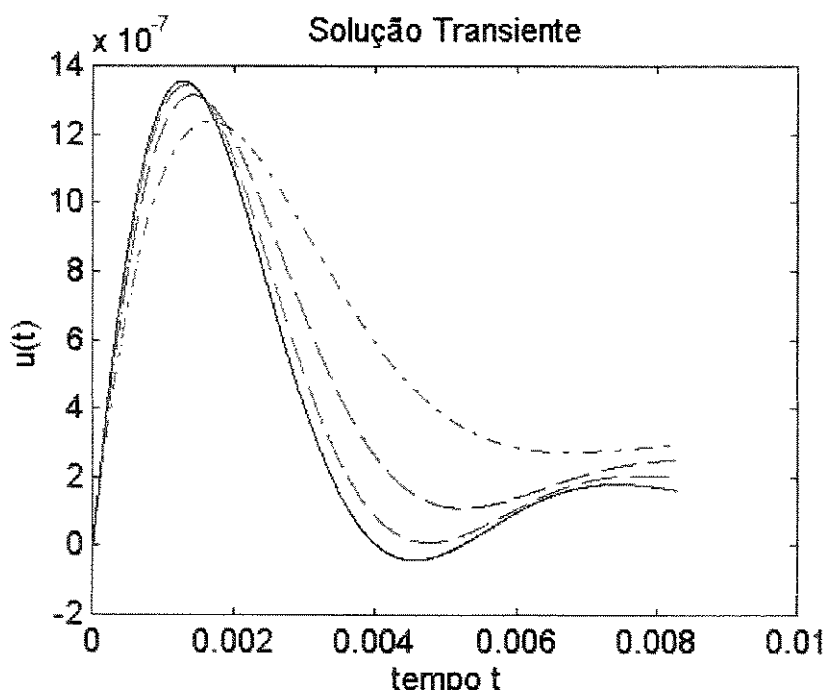


Fig. 7.39 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 20$

Na figura 7.40 ($m_f/m_s = 50$), este mesmo efeito numérico da influência da massa da fundação, é verificado novamente. Observa-se que a resposta converge, quando aumenta-se a discretização, porém, as diferenças nas repostas, para cada discretização apresentada, são significantes. E a convergência, novamente é verificada, observando-se desde a curva tracejada (-.-.) até a curva contínua, quando tem-se a máxima discretização.

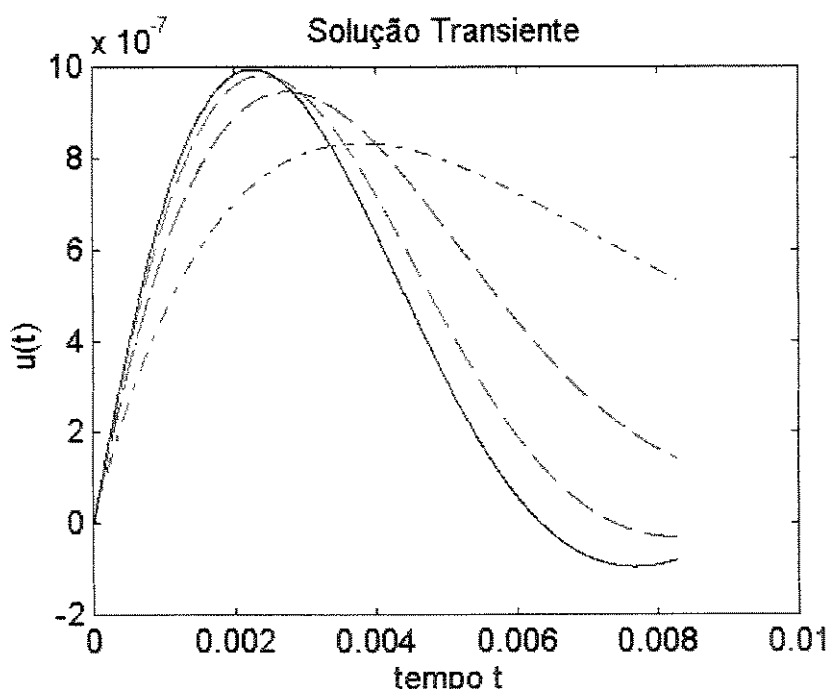


Fig. 7.40 - Resposta ao Impulso Vertical - Convergência - Inércia da Fundação - $m_f/m_s = 50$

Em seguida, pode-se observar a resposta dinâmica da fundação rígida, influenciada pela variação da massa da fundação. As respostas transientes, para os quatro casos de massa da fundação rígida ($m_f/m_s = 1$, $m_f/m_s = 5$, $m_f/m_s = 20$ e $m_f/m_s = 50$), são apresentadas comparando-as entre si.

Inicialmente, pode-se comparar a resposta da fundação rígida com um pequeno incremento de massa e a resposta da fundação sem massa. Verifica-se no gráfico da figura 7.41, que qualquer incremento, mínimo de massa da fundação, produz variação nas respostas transientes da fundação rígida. Deve-se observar que, enquanto na solução estacionária (resposta em frequência), apresentada na figura 7.32, a resposta da fundação com massa reduzida, $m_f/m_s = 1$, e a resposta

sem massa, apresentam-se muito próximas, isto não ocorre na resposta transiente, apresentada na figura 7.41. E como verificado no gráfico da figura 7.41, a existência de massa na fundação produz uma suavização na resposta com o tempo e uma redução nas amplitudes, tornando-a, nos instantes iniciais do movimento do corpo, diferente da resposta da fundação sem massa.

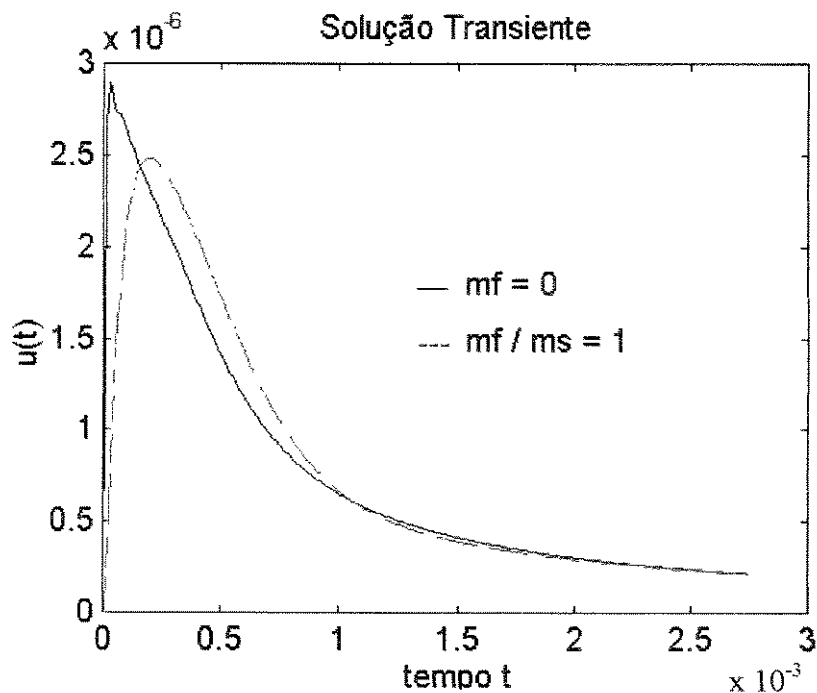


Fig. 7.41 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Fundação Com e Sem Massa

No gráfico da figura 7.42, a resposta é apresentada fazendo mais um incremento da massa da fundação, avaliando o caso para $m_f/m_s = 5$. Comparando-se os três casos na figura 7.42, isto é, a resposta para a fundação sem massa, $m_f/m_s = 1$ e $m_f/m_s = 5$, verifica-se no gráfico que existe grandes variações nas amplitudes da fundação. A principal alteração verificada neste gráfico é que as amplitudes crescem e decrescem de forma distinta, quando influenciada pelo presença de massa. Na resposta da fundação sem massa, observa-se que as amplitudes crescem rapidamente e decrescem também mais rapidamente do que nos casos onde existe a influência da massa. Quando a massa se faz presente na resposta do sistema ($m_f/m_s = 1$), há um crescimento mais lento das amplitudes e o decrescimento também é mais lento. Este efeito é observado com mais evidência no

caso em que a massa é acrescida para $m_f/m_s = 5$. Isto ocorre pois o efeito de inércia tende a retardar o movimento do corpo rígido com relação ao tempo.

Entretanto, não se observa uma forte mudança do comportamento geral da resposta, pois qualquer uma das respostas obtidas possuem um aumento de amplitude após a aplicação da força impulsiva com um decaimento (exponencial) até zero. Este comportamento da resposta transiente mostra que a influência da inércia da fundação não é suficiente para produzir oscilações no movimento do corpo rígido. Visto que, quando a presença da inércia se torna mais predominante sobre o sistema mecânico, esta produz oscilações na resposta transiente desses sistemas. Estas oscilações podem ser verificadas, de forma bastante incipiente, na resposta do caso em que a massa da fundação é dada por $m_f/m_s = 5$.

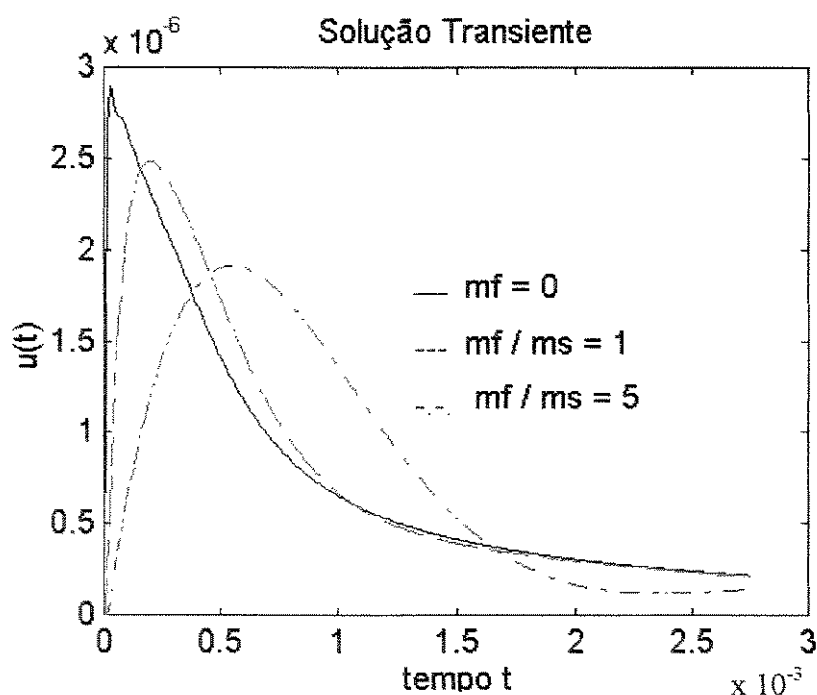


Fig. 7.42 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Baixa Influência da Inércia

Finalmente, pode-se fazer um estudo comparativo entre todos os casos onde a resposta da fundação é obtida incluindo a propriedade de inércia. No gráfico da figura 7.43, pode-se observar que para as respostas da fundação tornam-se mais lentas devido ao aumento da propriedade de inércia. E ainda, as amplitudes máximas também decrescem com o aumento da massa da fundação.

Observa-se também a maior presença de oscilações na resposta dos sistemas onde a massa é maior, isto é, nas respostas para $m_f/m_s = 20$ e $m_f/m_s = 50$.

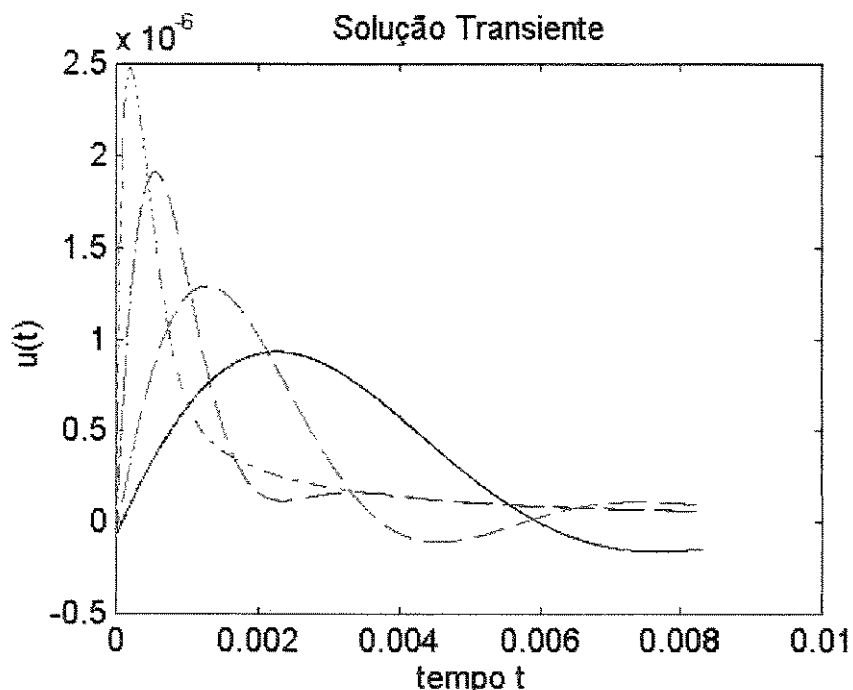


Fig. 7.43 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Efeito da Variação da Inércia

Posteriormente, quando aumenta-se o tempo de análise, pode-se observar as oscilações que ocorrem devido a presença da inércia na resposta. Este comportamento é verificado na figura 7.44. Nota-se ainda que, quando a massa da fundação rígida não influencia mais sobre a resposta do sistema, todas as respostas convergem para produzir o mesmo decrescimento tendendo a zero, semelhante ao caso da fundação sem massa.

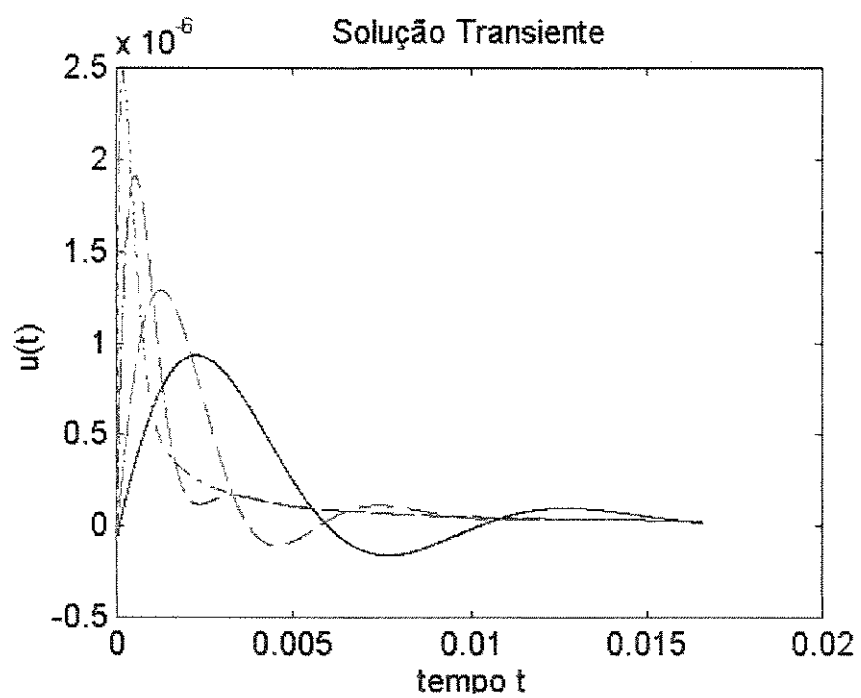


Fig. 7.44 - Resposta ao Impulso Vertical - Inércia da Fundação - Tempo de Análise

Capítulo 8

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Neste trabalho apresentou-se uma formulação para tratamento de problemas dinâmicos viscoelásticos. Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para modelar estruturas com comportamento viscoelástico, enquanto o Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi utilizado para modelar um meio infinito viscoelástico. Sendo que um acoplamento entre MEF-MEC permitiria solucionar problemas de interação dinâmica solo-estrutura utilizando os dois métodos conjuntamente.

O Método dos Elementos Finitos formulado diretamente no tempo, utilizando-se os conceitos de integrais hereditárias, mostrou ser uma forma bastante geral de avaliar o comportamento dinâmico de estruturas viscoelásticas. A implementação diretamente no tempo permite incluir qualquer tipo de representação para os módulos de Relaxação e Fluência, que caracterizam um material viscoelástico. Esses módulos de Relaxação e Fluência por sua vez podem ser obtidos compondo-se modelos viscoelásticos como os de Maxwell e Kelvin, ou medidos experimentalmente. Desta forma, qualquer tipo de material viscoelástico real pode ser incluído na formulação desde que seja possível medir de alguma forma as suas características viscoelásticas.

A formulação do MEF viscoelástico apresentada teve como objetivo principal solucionar o problema dinâmico, onde o amortecimento material na estrutura seria representado através das propriedades viscoelásticas do meio. Porém, observa-se nos resultados apresentados que, esta formulação se aplica diretamente na solução de problemas quase-estáticos. Desta forma, materiais com comportamento viscoso, onde a deformação depende da história do tempo, e não somente do

carregamento aplicado, que pode ser constante, podem ser analisados, apenas eliminando o efeito de inércia do problema.

Na modelagem de Elementos Finitos utilizou-se elementos estruturais de barra e viga. Os exemplos apresentados avaliaram as respostas de estruturas simples envolvendo estes tipos de elementos estruturais. Os resultados mostraram-se bastante precisos e totalmente coerente com as interpretações físicas esperadas para o comportamento dos tipos de estruturas viscoelásticas avaliadas. A utilização de modelos e elementos estruturais simples teve como objetivo facilitar a compreensão do fenômeno físico apresentado na reposta. Porém, é importante observar, que esta formulação pode ser facilmente aplicada para problemas estruturais mais complexos, utilizando-se elementos planos ou tri-dimensionais.

Em uma segunda parte do trabalho, o método dos Elementos de Contorno ou função de influência foi aplicado para obter a resposta dinâmica transiente em um meio infinito. Neste caso, a solução transiente foi obtida através de uma inversão numérica de Fourier a partir da resposta estacionária do sistema. A transformada de Fourier inversa obtida da FFT (Fast Fourier Transform) mostrou-se muito eficiente nos exemplos numéricos avaliados. Nos exemplos iniciais, envolvendo um sistema mecânico simples, observou-se que deve-se ter alguns cuidados na aplicação da inversão numérica. Parâmetros como número de pontos de discretização, frequência máxima e delta de frequência e de tempo, influenciam fortemente na resposta do sistema, descaracterizando totalmente a resposta quando não ajustados corretamente. Nas discussões apresentadas, deve-se ter claramente que estes parâmetros, não são apenas coeficientes matemáticos envolvidos na inversão numérica, mas estão associados com parâmetros físicos do problema.

O objetivo final da utilização da inversão numérica, foi avaliar o problema de interação dinâmica solo-estrutura transiente, onde a estrutura é rígida e o solo possui características viscoelásticas. A resposta estacionária do problema, foi obtida através das funções de influência (formulação a partir das funções de Green do semi-espaço). Esta solução foi verificada e mostrou-se de acordo com os resultados obtidos da bibliografia. A resposta transiente da fundação rígida sobre o solo, obtida pela inversão numérica de Fourier aplicada a este problema, apresentou-se totalmente de acordo com as repostas obtidas por outras formulações. A resposta da estrutura, obtida para uma carregamento harmônico em qualquer frequência de excitação, mostra que, uma

vez conhecida a função resposta estacionária do sistema (função de impedância que caracteriza o sistema), pode-se obter outras respostas transiente da estrutura, quando excitada por um carregamento transiente qualquer.

Das soluções apresentadas para o Elementos Finitos e para o Elementos de Contorno, pode-se concluir que o trabalho atingiu seus objetivos, pois o acoplamento entre as formulações somente teria sucesso, com as formulações para cada método obtidas separadamente, e resolvidas de forma eficiente. As soluções obtidas tanto para o MEF quanto para o MEC são bastante gerais e permitem solucionar muitos problemas físicos.

Na solução do MEF, uma ampla área de aplicação pode ser atingida pela forma proposta. Por exemplo, como sugerido em pareceres de assessores nos trabalhos publicados em congressos, existe uma necessidade muito grande em se avaliar o comportamento de estruturas de concreto em Engenharia Civil, que freqüentemente possuem comportamento viscoelástico. Em outra área, materiais orgânicos, invariavelmente possuem características viscoelásticas e problemas dependentes da história do tempo com carregamentos constantes, como força gravitacional, são freqüentes nesta área. E até mesmo, problemas estruturais mecânicos envolvendo estruturas viscoelásticas, constituídos de materiais polímeros ou materiais alternativos, que são bastante comuns na composição de elementos mecânicos atualmente, são viáveis de serem avaliados. Portanto, com pequenas adaptações, que podem estar no tipo de elemento finito utilizado ou na no modelo viscoelástico utilizado, a formulação apresentada pode ser empregada para solucionar muitos problemas reais.

Quanto ao MEC ou função de influência, a solução apresentada, passa por um ponto de fundamental importância, qual seja, a resposta transiente depende de uma solução estacionária precisa e eficiente. Uma vez que o grupo de pesquisa, no qual se insere o autor deste trabalho, vem extensivamente ao longo de alguns anos buscando soluções de problemas estacionários em várias áreas de aplicação, este problema passa a ser bastante reduzido. Desta forma, a solução apresentada, para obter respostas transientes através da inversão numérica, a partir das respostas estacionárias, deixa uma perspectiva muito grande de solução de alguns problemas transientes ainda não avaliados de forma precisa. Problemas transientes em meio contínuo infinito com interação fluido-estrutura, anisotropia, poroelasticidade, etc, podem de imediato serem verificados em futuras pesquisas, aplicando-se a solução apresentada. Pesquisas mais ousadas, como a

sintetização funções de Green transientes, obtidas numericamente, também podem estar em projetos de futuras pesquisas.

Referências Bibliográficas

- ABOUSLEIMAN, Y., CHENG, A. H-D. Boundary Element Solution for Steady and Unsteady Stokes flow. *Computational Methods Applied Engineering*, v.117, p.1-13, 1994.
- AHMAD, S., BANERJEE, P. K. Multi-domain BEM for Two-dimensional Problems of Elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, p.891-911, 1988.
- AHMAD, S., MANOLIS, G. D. Dynamic Analysis of 3-D Structures by a Transform Boundary Element Method. *Computational Mechanics*, v.2, p.185-196, 1987.
- ANTES, H. A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagation in Two-dimensional Isotropic Elastic Media. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.1, p.313-322, 1985.
- BADMUS, T., CHENG, A. H-D., GRILLI, S. A Laplace-transform-based Three-dimensional BEM for Poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.36, p.67-85, 1993.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J. Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *AIAA Journal*, v.21, n.5, p.741-748, 1983.
- BANERJEE, P.K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. London: McGraw-Hill, London, 1994.

- BARROS, P. L. A. *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise de Interação Solo-Estrutura*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. Tese (Doutorado)
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- BETTES, P. Infinite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.53-64, 1977.
- BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. 2nd edition, London: Pentech Press, 1984.
- BREBBIA, C. A., GEORGIU, P. Combination of Boundary and Finite Elements in Elastostatics. *Applied Mathematics Modeling*, v.3, p.212-220, 1979.
- CAMPOS, J. C. B. *Solução de Problemas de Poroelasticidade através do Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995. Tese (Doutorado)
- CAPELLO SOUSA, E. A. *Acoplamento do Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno para Tratamento de Problemas Estacionários da Elastodinâmica*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992. Tese (Mestrado)
- CARVALHO, E. R. *Análise Dinâmica de Sistemas Solo-Fluido-Estrutura pelo Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995. Tese (Doutorado)

- CHEN, T-M. The Hibrid Laplace Transform / Finite Element Method Applied to the Quasi-static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p. 509-522, 1995.
- CHEN, W. H., LIN, T. C. Dynamic Analysis of Viscoelastic Structures Using Incremental Finite Element Method. *Engineering & Structures*, v.4, p.271-276, 1982.
- CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity*. New York: Academic Press, 1982.
- CISKOWSKI, R. D., BREBBIA, C. A. *Boundary Element Methods in Acoustics*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991.
- CODA, H. B. *Análise Tridimensional, Transiente de Estruturas pela Combinação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993. Tese (Doutorado)
- CODA, H. B., VENTURINI, W. S. Three Dimensional Transiente BEM Analysis. *Computers & Structures*, v.56, p.751-768, 1995.
- COLLEY, J. W., TUKEY, J. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, v.19, p.297-301, 1965.
- COST, T. L., BECKER, E. B. A Multidata Method of Approximate Laplace Transform Inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.2, p.207-219, 1970.
- CRUMP, K. S. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v.23, n.1, p.89-96, 1976.

- CRUSE, T. A., RIZZO, F. J. A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. I *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.22, p.244-259, 1968.
- CRUSE, T. A. A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.22, p.341-355, 1968.
- CRUSE, T. A. Two- and Three-dimensional Problems of Fracture Mechanics. In: P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD EDITIONS, Developments in Boundary Elements - 1, *Applied Science Publications*, London, 1979.
- CRUSE, T. A., RIZZO, F. J. Boundary Integral Equation Methods - Computational Applications in Applied Mechanics. *Proceedings ASME Conference on Boundary Integral Equations*, ASME, New York, 1975.
- DAVIES, B., MARTIN, B. Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods. *Journal of Computational Physics*, v.33, p.1-32, 1979.
- DUBNER, H., ABATE, J. Numerical Inversion of Laplace Transform by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v.15, n.1, p.115-123, 1968.
- DURBIN, F. Numerical Inversion of Laplace Transform: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. *The Computer Journal*, v.17, n.4, p.371-376, 1974.
- ENGEL, R. S. Dynamic Stability of an Axially Loaded Beam on an Elastic Foundation With Damping. *Journal of Sound and Vibration*, v. 146, p. 463-477, 1991.

- ESTORFF, O. Dynamic Response of Elastic Blocks by Time Domain BEM and FEM. *Computers & Structures*, v. 38, n. 3, p. 289-300, 1991.
- ESTORFF, O. Coupling of BEM and FEM in the Time Domain: Some Remarks on its Applicability and Efficiency. *Computers & Structures*, v. 44, n.1/2, p. 325-337, 1992.
- ESTORFF, O., ANTES, H. On FEM-BEM Coupling for Fluid-Structure Interaction Analysis the Time Domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.31, p.1151-1168, 1991.
- ESTORFF, O., KAUSEL, E. Coupling of Boundary and Finite Element for Soil-Structure Interaction Problems. *Earthquake Engineering Structures Dynamic*, v.18, p.1065-1075, 1989.
- ESTORFF, O., PAIS, A. L., KAUSEL, E. Some Observations on the Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.29, p.785-800, 1990.
- ESTORFF, O., PRABUCKI, M. J. The Coupling of Boundary and Finite Elements to Solve Transient Problems in Elastodynamics. In: BOUNDARY ELEMENT X, *Computational Mechanics Publications*, v. 4, p. 447-459, 1988.
- ESTORFF, O., PRABUCKI, M. J. Dynamic Response in the Time Domain by Coupled Boundary and Finite Elements. *Computational Mechanics*, v. 6, p. 35-46, 1990.
- FINDLEY, W. N., LAI, J. S., ONARAN, K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. New York: Dover Publications, 1976.
- FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. New York: Springer-Verlag, 1975.

- GAITANAROS, A. P., KARABALIS, D. Dynamic Analysis of 3-D Flexible Embbebed Foundations by a Frequency Domain BEM-FEM. *Earthquake Engineering Structures Dynamic*, v.16, p.653-674, 1988.
- GAUL, L., SCHANZ, M., FIEDLER C. Viscoelastic Formulations of BEM in Time and Frequency Domain. *Engineering Analysis with Boundary Element*, v.10, p.137-141, 1992.
- GEORGIADIS, H. G., RIGATOS, A. P. CHARALAMBAKIS, N. C. Dynamic Stress Concentration Around a Hole in a Viscoelastic Plate. *Acta Mechanica*, v.111, p.1-12, 1995.
- GOLLA, D. F. HUGHES, P. C. Dynamic of Viscoelastic Structures - A Time- Domain Finite Element Formulation. *Journal of Applied Mechanics*, v.52, p.897-906, 1985.
- GRAFF, K. F. Wave Motion in Elastic Solids. *Dover Publications*, New York, 1975.
- GRINENKO, N. I., MOKEEV, V. V., Analysis of the Dynamics of Inhomogeneous Viscoelastic Structures by the Finite-Element Method. *Mechanics of Composite Materials*, v.25, p.352-357, 1989.
- GURTIN, M. E. & STERNBERG, E. On the Linear Theory of Viscoelasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 11, p.291-356, 1962.
- HADJIAN, M. E., LUCO, J. E., TSAI, N. C. Soil-structure Interaction: Continuum or Finite Elements?, *Nuclear Engineering and Design*, v.31, p.151-167, 1974.
- HOLZLÖHNER, U. Finite Element Analysis for Time-Dependent Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 8, p. 55-69, 1974.
- HONIG, G., HIRDES, U. A Method for the Numerical Inversion of Laplace Transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.10, p.113-132, 1984.

- HURDEY, T. M. A Creep Bending Analysis of Plates by the Finite Element Method. *International Journal Solids Structures*, v.9, p.291-303, 1973.
- HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- HULL, A. J. A Closed Form Solution of a Longitudinal Bar with a Viscous Boundary Condition. *Journal of Sound and Vibration*, v.169, n.1, p.19-28, 1994.
- ISRAIL, A. S. M., BANERJEE, P. K. Advanced Time-domain Formulation of BEM for two-dimensional Transient Elastodynamic. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.29, p.1421-1440, 1990a.
- ISRAIL, A. S. M., BANERJEE, P. K. Two-dimensional Transient Wave-Propagation Problems by Time-domain BEM. *International Journal Solids Structures*, v.26, n.8, p.851-864, 1990b.
- JOHNSON, C. D., KLENHOLZ, D. A. & ROGERS, L. C., Finite Element Prediction of Damping in Beams with Constrained Viscoelastic Layers. *Shock Vibration Bullets*, v. 51, p. 71-81, 1981.
- KARABALIS, D. L., BESKOS, D. E. Dynamic Response of 3-D Flexible Foundations by Time Domain BEM and FEM. *Soil Dynamic Earthquake Engineering*, v.4, p.91-101, 1985.
- KARASUDHI, P., KEER, L. M., LEE, S. L. Vibratory Motion of a Body on an Elastic Half-plane, *Journal Applied Mechanics*, v.35, p.697-690, 1968.
- KOBAYASHI, S., KAWAKAMI, T. Application of BE-FE Combined Method to Analysis of Dynamic Interactions Between Structures and Viscoelastic Soil. In: C. A. BREBBIA, G.

MAIER EDITIONS, Boundary Element VII, *Proceedings 7th. International Conference*, v.6, p.6-12, 1985.

KOBAYASHI, S., KISHIMA, T. Dynamic Analysis of Non-homogeneous Ground Movements by the Boundary Integral Equation - Finite Element Hybrid Method. *Proceedings 5th. International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, 1992, 1-5 April, p.135-142.

KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 3th. edition, New York: John Wiley & Sons, 1972.

LEE, E. H., RADOK, J. R. M. The Contact Problem for Viscoelastic Bodies. *Journal Applied in Mechanics*, v.27, p.438-444, 1960.

LESIEUTRE, G. A. Finite Elements for Dynamic Modeling of Uniaxial Rods with Frequency - Dependent Material Properties. *International Journal Solids Structures*, v.29, n.12, p.1567-1579, 1992.

LIU, Y., ANTES, H. Boundary Element Method for Viscoelastic Dynamic Earthquake Analysis of Structures. *Earthquake Resistent Engineering Structures Advance in Earthquake Engineering*, v.2, p.223-232, 1995.

LUCO, J. E., HADKIAN, A. H., BOS, H. D. The Dynamic Modeling of the Half-space by Finite Element. *Nuclear Engineering Design*, v.31, p.184-194, 1974.

LUCO, J. E., WESTMANN, R. A. Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half-Space. *Journal Applied Mechanics*, v. 39, p.527-534, 1972.

MACÉ, R. Damping of Beam Vibrations by Means of a Thin Constrained Viscoelastic Layer: Evaluation of a New Thoery. *Journal of sound and Vibration*, v.172, p.577-591, 1994.

- MANOLIS, G. D. A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problem in Elastodynamic. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.19, p.73-91, 1983.
- MANOLIS, G. D., BESKOS, D. E. Dynamic Strees Concetration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.17, p.573-599, 1981.
- MANOLIS, G. D., BESKOS, D. E. *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. London: Unwin Hyman, 1988.
- MANSUR, W. J. *A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. University of Southampton, 1983. Ph. D. Thesis.
- MEDINA, F., PENZIEN, J. Infinite Elements for Elastodynamics. *Earthquake Engineering Structural Dynamic*, v.10, p.699-709, 1982.
- MEDINA, F., TAYLOR, R. L. Finite Elements Techiniques for Problems of Unbounded Domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.19, p.1209-1226, 1983.
- MEHL, J. D., MILES, R. N. Finite Element Modeling of the Transient Response of Viscoelastic Beams. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering - Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers*, v. 2445, p. 306-311, 1995.
- MESQUITA NETO, E., PONTES JR., B. R., SOUSA, E. A. C. Coupling of Finite Element and Finite Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part I: Formulation, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, RBCM, v.16, n.2 p.143-158, 1994.

- MESQUITA NETO, E., PONTES JR., B. R., SOUSA, E. A. C. Coupling of Finite Element and Finite Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part II: Numerical Results - Validations and Applications, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, RBCM, v.16, n.2 p.159-176, 1994.
- MESQUITA NETO, E., ROMANINI, E., PONTES JR., B. R. *A Boundary Element Implementation of the Substructure Deletion Method*. 17th. BEM (17 Boundary Element International Conference), 1995, p. 375-386.
- MOHAMMADI, M., KARABALIS, D. L. Dynamic 3-D Soil-railway Track Interaction by BEM-FEM. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.24, p.1177-1193, 1995.
- MORRISON, N. *Introduction to Fourier Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1994.
- NARAYANAN, G. V., BESKOS, D. E. Numerical Operational Methods for Time-dependent Linear Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.18, p.1829-1854, 1982.
- NASHIF, A. D., JONES, D. I. G., HENDERSON, J. P. *Vibration Damping*. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- NEWLAND, D. E. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral Wavelet Analysis*. Singapore: Longman, 1993.
- NISHIGAKI, T., OHYAMA, T., ENDO, M. A Study of the Transient Sound Radiated by Impacted Solid Bodies Based on the Boundary Element Method. *JSME International Journal*, Series C, v.39, n.2, p.218-224, 1996.
- PADHORECKI, A., The Viscoelastic Space-time Element. *Computers & Structures*, v.23, n.4, p. 535-544, 1986.

- PAPOULIS, A. A New Method of Inversion of the Laplace Transform. *Quartly Applied Mathematics*, v.14, p.405-414, 1957.
- PASSARIS, E. K. S., KOSTOGLU, K. N. A BEM Program for Two Dimensional Transient Elastodynamic Analysis of Underground Openings. In: STRUCTURES UNDER SHOCK AND INPACT II, *Proceedings Second International Conference Structures under Shock Impact II*, Publ. by Computational Mechanics, p.651-661, 1992.
- PENZIEN, J., CLOUGH, R. W. *Dynamics of Structures*. New York: McGraw-Hill International Editions, 1993.
- PIESSENS, R. A New Numerical Method for the Inversion of the Laplace Transform. *Journal Inst. Maths. Applics*, v.10, p.185-192, 1972.
- POLYZOS, D., STAMOS, A. A., BESKOS, D. E. BEM Computation of DSIF in Cracked Viscoelastic Plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.10, p.81-87, 1994.
- PONTES JR., B. R. *Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais Sobre o Solo: Uma Comparação entre um Método Semi-Analítico e o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992. Tese (Mestrado)
- RAJAPAKSE, R. K. N. D., SENJUNTICHAJ, T. Fundamental Solutions for a Poroelastic Half-Space With Compressible Constituents. *Journal of Applied Mechanics*, v.60, p.847-856, 1993.
- RAO, V. S., SUN, C. T. & SANKAR, B. V. Finite Element Analysis of Prestressed Laminated Plates with Constrained Viscoelastic Damping Layer. *ASME - DOE Facilities Programs, Systems Interaction, and Active / Inactive Damping*, PVP - v. 229, p. 147-154, 1992.

- REDDY, J. N. Modified Gurtin's Variational Principles in the Linear Dynamic Theory of Viscoelasticity. *International Journal Solids Structures*, v.12, p.227-235, 1976.
- REEDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill, 1984.
- RENCIS, J. J., SAIGAL, S., JONG, K-Y. Dynamic Viscoelastic Beam Model for Finite Element Methods. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 3, n. 1, p. 19-29, January, 1990.
- RICHART JR., F. E., HALL, J. R., WOODS, R. D. *Vibration of Soils and Foundations*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- RIKARDS, R., CHATE, A., BARKANOV, E. Finite Element Analysis of Damping the Vibrations of Laminated Composites. *Computers & Structures*, v. 47, p. 1005-1015, 1993.
- RIZZO, F. J. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, v.25, p.83-95, 1967.
- ROMANINI, E. *Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura através de Equações Integrais de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995. Tese (Doutorado)
- SCHAPERY, R. A. Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis. *Proceedings 4th. U.S. National Congress Applied Mechanics*, Berkeley, California, v.2, p.1075-1085, 1962.
- SNEDDON, L.N. *The Use of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- SOGABE, Y. Finite Element analysis of Dynamic Behavior of Viscoelastic Materials. *JSMIE International Journal*, v. 39, n. 1, série A, p. 71-77, 1996.

- SPYRAKOS, C. C., ANTES, H. Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics: A Comparative Study. *Computers & Structures*, v.24, n.4, p.529-535, 1986.
- SPYRAKOS, C. C., BESKOS, D. E. Dynamic Response of Flexible Strip Foundation by Boundary and Finite Elements. *Soil Dynamic Earthquake Engineering*, v.5, p.84-96, 1986.
- SPYRAKOS, C. C., BESKOS, D. E. Dynamic Response of Rigid Strip-foundation by a Time-Domain Boundary Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, p.1547-1565, 1986.
- STAMOS, A. A., BESKOS, D. E. Dynamic Analysis of Large 3-D Underground Structures by the BEM. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.24, p.917-934, 1995.
- STEHFEST, H. Numerical Inversion of Laplace Transforms. *Communications of the ACM*, v.13, n.1, p.47-49, 1970.
- TANAKA, M., NAKAMURA, M., AOKI, K., MATSUMOTO, T. Computation of Dynamic Stress Intensity Factors Using the Boundary Element Method Based on Laplace Transform and Regularized Boundary Integral Equations. *JSME International Journal*, Series A, v.36, n.3, 1993.
- WANG, C. C., WANG, H. C., LIOU, G. S. Two-dimensional Elastodynamic Transient Analysis by QL Time Domain BEM Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.39, p.951-985, 1996.
- WANG, C. C., WANG, H. C., LIOU, G. S. Quadratic Time Domain BEM Formulation for 2D Elastodynamic Transient Analysis. *International Journal Solids Structures*, v.34, n.1, p.129-151, 1997.

- WANG, Y. Z., TSAL, T. J. Static and Dynamic Analysis of a Viscoelastic Plate by the Finite Element Method. *Applied Acoustics*, v. 25, p. 77-94, 1988.
- WEEKS, W. T. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v.13, n.3, p.419-429, 1966.
- WILDE, W. P., CARDON, A. H., Analysis of Viscoelastic Structural Elements in the Frequency Domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.27, p.429-436, 1989.
- WROBEL, L. C. *Boundary Element Methods in Heat Transfer*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.
- YAGAWA, G., MIYAZAKI, N., ANDO, Y. Superposition Method of Finite Element and Analytical Solutions for Transient Creep analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, p. 1107-1115, 1977.
- YAMADA, Y., TAKABATAKE, H., SATO, T. Effect of Time-dependent Material Properties on Dynamic Response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 8, p. 403-414, 1974.
- YI, S., AHMAD, M. F., HILTON, H. H. Dynamic Responses of Plates with Viscoelastic Damping Treatment. *ASME - Dynamics and Vibration of Time-Varying Systems and Structures*, DE - v. 56, p. 437-445, 1993.
- YIU, Y. C. Finite Element Analysis of structures with Classical Viscoelastic Materials. *AIAA / ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference - 34th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics*, v. 4, p. 2110-2119, 1993.

ZIENKIEWICZ, O. C., KELLY, D. W., BETTESS, P. Marriage à la Mode - The Best of Two Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals). In: R. GLOWINSKI, E. Y. RADIN, O. C. ZIENKIEWICZ EDITIONS, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, cap. 5, 1979.

ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K. *Finite Element and Aproximation*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *Finite Element and Aproximation*. 4th. edition, v.2, London: McGraw Hill, 1991.

Apêndice

Associação dos Modelos Kelvin e Maxwell

Modelo de Kelvin-Maxwell - 1º Modelo -

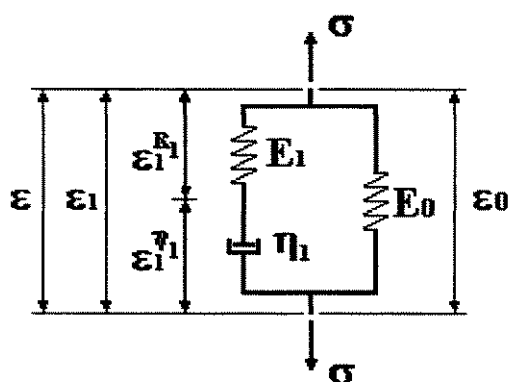


Fig. A.1 - Modelo Kelvin-Maxwell

Pode-se analisar um modelo composto onde existem elementos dispostos em série e em paralelo no sistema. Neste caso, ocorre uma associação dos modelos de Maxwell e Kelvin.

- Condições de Equilíbrio Cinemático:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{\eta} + \varepsilon_1^E \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 = \varepsilon_0\end{aligned}\tag{A.1}$$

- Condições de Equilíbrio de Forças:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0\tag{A.2}$$

Define-se separadamente a parte em série do sistema:

Equilíbrio Cinemático

Equilíbrio de Forças

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{\eta_1} + \varepsilon_1^{E_1} & \sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1^{E_1} \Rightarrow \dot{\sigma}_1 = E_1 \dot{\varepsilon}_1^{E_1} \\ \varepsilon_1 &= \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} + \dot{\varepsilon}_1^{E_1} & \sigma_1 &= \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1}\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Pode-se associar as relações acima para obter,

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} + \dot{\varepsilon}_1^{E_1} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (\text{A.4})$$

Define-se em seguida a parte do sistema que está disposta em paralelo, dada por,

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_0 = E_0 \varepsilon \quad (\text{A.5})$$

Resolve-se as equações acima em conjunto para obter a relação entre σ e ε . Para isto, utiliza-se a Transformada de Laplace sobre as equações,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_0 \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \Rightarrow s\hat{\varepsilon} = \frac{1}{E_1} s\hat{\sigma}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1}{\eta_1}$$

$$\hat{\sigma}_0 = E_0 \hat{\varepsilon}$$

A segunda dessas equações permite obter uma definição para $\hat{\sigma}_1$ em função de $\hat{\varepsilon}$, isto é,

$$s\hat{\varepsilon} = \frac{1}{E_1} s\hat{\sigma}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1}{\eta_1} \Rightarrow s\hat{\varepsilon} = \left(\frac{s}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \hat{\sigma}_1 \Rightarrow \hat{\sigma}_1 = \frac{s}{\left(\frac{s}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right)} \frac{E_1}{E_1} \hat{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{sE_1}{\left(\frac{sE_1}{E_1} + \frac{E_1}{\eta_1} \right)} \hat{\varepsilon} \Rightarrow \hat{\sigma}_1 = E_1 \hat{\varepsilon} \left(\frac{s}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right)$$

Portanto as relações de $\hat{\sigma}_0$ e $\hat{\sigma}_1$ podem ser utilizadas para serem aplicadas na equação de $\hat{\sigma}$, isto é,

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_1 \Rightarrow \hat{\sigma} = E_0 \hat{\varepsilon} + E_1 \hat{\varepsilon} \left(\frac{s}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma} = \left[E_0 + E_1 \left(\frac{s}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right) \right] \hat{\varepsilon} \quad (\text{A.7})$$

Define-se ainda a função deformação constante no tempo e sua transformada de Laplace,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}. \text{ Portanto pode-se escrever,}$$

$$\hat{\sigma} = \left[E_0 + E_1 \left(\frac{s}{s + E_1/\eta_1} \right) \right] \hat{\varepsilon} \Rightarrow \hat{\sigma} = \left[E_0 + E_1 \left(\frac{s}{s + E_1/\eta_1} \right) \right] \frac{\varepsilon_0}{s} \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{E_0}{s} + E_1 \left(\frac{1}{s + E_1/\eta_1} \right) \right] \varepsilon_0 \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a transformada de Laplace inversa sobre esta equação resulta,

$$L^{-1}\{\hat{\sigma}\} = L^{-1}\left\{ \left[\frac{E_0}{s} + E_1 \left(\frac{1}{s + E_1/\eta_1} \right) \right] \varepsilon_0 \right\} \Rightarrow L^{-1}\{\hat{\sigma}\} = L^{-1}\left\{ \frac{E_0}{s} \varepsilon_0 \right\} + L^{-1}\left\{ E_1 \left(\frac{1}{s + E_1/\eta_1} \right) \varepsilon_0 \right\} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\{\hat{\sigma}\} = E_0 \varepsilon_0 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} + E_1 \varepsilon_0 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s + E_1/\eta_1} \right\} \Rightarrow \sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 + E_1 \varepsilon_0 e^{-E_1 t/\eta_1} \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \left(E_0 + E_1 e^{-E_1 t/\eta_1} \right) \varepsilon_0 \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, o módulo de Relaxação para o modelo composto Maxwell-Kelvin é definido como,

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{-E_1 t/\eta_1} \quad (\text{A.10})$$

Modelo de Kelvin-Maxwell - 2º Modelo

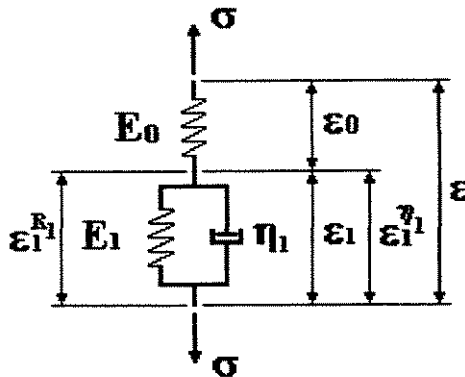


Fig. A.2 - Modelo Kelvin-Maxwell

Neste segundo modelo, deve-se analisar um modelo composto onde existem elementos dispostos em série e em paralelo no sistema, isto é, uma composição dos modelos de Maxwell e Kelvin. Porém neste caso, os elementos estão dispostos de forma diferente daquele apresentado anteriormente.

- Condições de Equilíbrio Cinemático:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{\eta_1} = \varepsilon_1^{E_1}\end{aligned}\tag{A.11}$$

- Condição de Equilíbrio de Forças:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_0\tag{A.12}$$

Define-se inicialmente a parte do sistema que está disposta em paralelo,

Equilíbrio Cinemático

Equilíbrio de Forças

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{\eta_1} = \varepsilon_1^{E_1} & \sigma_1^{E_1} &= E_1 \varepsilon_1^{E_1}, \sigma_1^{\eta_1} = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} = \dot{\varepsilon}_1^{E_1} & \sigma_1 &= \sigma_1^{E_1} + \sigma_1^{\eta_1} \Rightarrow \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1^{E_1} + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1}\end{aligned}\tag{A.13}$$

Pode-se substituir as condições de equilíbrio cinemático acima, na condição de equilíbrio de forças, obtendo-se a equação diferencial para o modelo de Maxwell,

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1^{E_1} + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^{\eta_1} \Rightarrow \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \Rightarrow$$

$$\dot{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\eta_1}\tag{A.14}$$

A parte que está em série com o sistema pode ser definida, utilizando a condição de equilíbrio de força como sendo,

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0\tag{A.15}$$

A condição de equilíbrio de forças, $\sigma = \sigma_1 = \sigma_0$, pode-se utilizada nas duas equações acima, que resulta nas equações,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{\eta_1} \\ \Rightarrow \sigma &= E_0 \varepsilon_0\end{aligned}\tag{A.16}$$

Para completar o conjunto de equações, deve-se utilizar ainda a equação de equilíbrio cinemático,

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_0\tag{A.17}$$

Portanto, pode-se aplicar a transformada de Laplace nestas três últimas equações para obter,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{\eta_1} \Rightarrow s\hat{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \hat{\varepsilon}_1 = \frac{\hat{\sigma}}{\eta_1} \\ \sigma &= E_0 \varepsilon_0 \Rightarrow \hat{\sigma} = E_0 \hat{\varepsilon}_0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_0\end{aligned}\tag{A.18}$$

Da primeira equação obtém-se a relação entre $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\sigma}$,

$$s\hat{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \hat{\varepsilon}_1 = \frac{\hat{\sigma}}{\eta_1} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_1 \left(s + \frac{E_1}{\eta_1} \right) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta_1} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_1 = \left(\frac{1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right) \frac{1}{\eta_1} \hat{\sigma}\tag{A.19}$$

Substituindo as relações de $\hat{\varepsilon}_0$ e $\hat{\varepsilon}_1$ na terceira equação do domínio transformado, resulta,

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_1 \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\sigma}}{E_0} + \left(\frac{1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right) \frac{1}{\eta_1} \hat{\sigma} \Rightarrow \\ \hat{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{E_0} + \left(\frac{1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right) \frac{1}{\eta_1} \right) \hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E_0} + \left(\frac{1}{s\eta_1 + E_1} \right) \right) \hat{\sigma} \Rightarrow \\ \hat{\varepsilon} &= \left(\frac{(s\eta_1 + E_1) + E_0}{E_0(s\eta_1 + E_1)} \right) \hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\sigma} = \left(\frac{E_0(s\eta_1 + E_1)}{s\eta_1 + E_1 + E_0} \right) \hat{\varepsilon} \Rightarrow \hat{\sigma} = \left(\frac{E_0(s\eta_1 + E_1)}{s\eta_1 + E} \right) \hat{\varepsilon}\end{aligned}\tag{A.20}$$

onde $E = E_1 + E_0$

Utiliza-se novamente a deformação constante no tempo e sua transformada de Laplace,

definida por $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}$, substituindo na equação acima,

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \left(\frac{E_0(s\eta_l + E_1)}{s\eta_l + E} \right) \hat{\varepsilon} \Rightarrow \hat{\sigma} = \left(\frac{E_0(s\eta_l + E_1)}{s\eta_l + E} \right) \frac{\varepsilon_0}{s} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{\eta_l}{s\eta_l + E} + \left(\frac{E_1}{s\eta_l + E} \right) \frac{1}{s} \right\} \Rightarrow \hat{\sigma} = E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{1}{s + E/\eta_l} \right) \frac{1}{s} \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{1}{s + E/\eta_l} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{E/\eta_l}{E/\eta_l} + \frac{s}{E/\eta_l} - \frac{s}{E/\eta_l} \right) \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{1}{s + E/\eta_l} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{E/\eta_l + s - s}{E/\eta_l} \right) \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{E/\eta_l + s - s}{s + E/\eta_l} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{1}{E/\eta_l} \right) \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{E/\eta_l + s - s}{(s + E/\eta_l)s} \right) \frac{1}{E/\eta_l} \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{E/\eta_l + s}{(s + E/\eta_l)s} - \frac{s}{(s + E/\eta_l)s} \right) \frac{1}{E/\eta_l} \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{\eta_l} \left(\frac{1}{E/\eta_l} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + E/\eta_l)} \right) \right) \right\} \Rightarrow \\
\hat{\sigma} &= E_0 \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{s + E/\eta_l} + \frac{E_1}{E} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + E/\eta_l)} \right) \right\} \Rightarrow \hat{\sigma} = E_0 \varepsilon_0 \left\{ \left(1 - \frac{E_1}{E} \right) \frac{1}{s + E/\eta_l} - \frac{E_1}{E} \frac{1}{s} \right\} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa pode-se obter,

$$L^{-1}\{\hat{\sigma}\} = L^{-1}\left\{E_0\varepsilon_0\left\{\left(1-\frac{E_1}{E}\right)\frac{1}{s+\frac{E}{\eta_1}}-\frac{E_1}{E}\frac{1}{s}\right\}\right\}\Rightarrow$$

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon_0\left\{\left(1-\frac{E_1}{E}\right)L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{E}{\eta_1}}\right\}-\frac{E_1}{E}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right\}\Rightarrow$$

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon_0\left\{\left(1-\frac{E_1}{E}\right)e^{-\frac{E}{\eta_1}t}-\frac{E_1}{E}\right\}\Rightarrow$$

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon_0\left\{\left(1-\frac{E_1}{E}\right)e^{-\frac{E}{\eta_1}t}-\frac{E_1}{E}\right\}\Rightarrow$$

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon_0\left\{e^{-\frac{E}{\eta_1}t}-\frac{E_1}{E}\left(1+e^{-\frac{E}{\eta_1}t}\right)\right\} \quad (A.22)$$

Portanto, o módulo de Relaxação $E(t)$ para o modelo de Maxwell-Kelvin apresentado acima é dado por,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_0\varepsilon_0\left\{e^{-\frac{E}{\eta_1}t}-\frac{E_1}{E}\left(1+e^{-\frac{E}{\eta_1}t}\right)\right\}\Rightarrow \\ E(t) &= E_0\left\{e^{-\frac{E}{\eta_1}t}-\frac{E_1}{E}\left(1+e^{-\frac{E}{\eta_1}t}\right)\right\} \end{aligned} \quad (A.23)$$