ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR Kerlles Rafael Pereira Sousa E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 25/11/2009

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Tensões em Placas Finas de Materiais Compósitos sob Carregamento Dinâmico usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Kerlles Rafael Pereira Sousa**
Orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**
Co-orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

121/2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Análise de Tensões em Placas Finas de Materiais Compósitos sob Carregamento Dinâmico usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Kerlles Rafael Pereira Sousa
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So85a	Sousa, Kerlles Rafael Pereira Análise de tensões em placas finas de materiais compósitos sob carregamento dinâmico usando o método dos elementos de contorno / Kerlles Rafael Pereira Sousa. --Campinas, SP: [s.n.], 2009. Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Paulo Sollero. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). 3. Materiais compostos. 4. Materiais laminados. 5. Deformação e tensões. I. Albuquerque, Éder Lima. II. Sollero, Paulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Analysis of stress in thin plates of composite materials under dynamic load using the boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Boundary element methods, Engineering boards, Composite materials, Laminated materials, Strains and stresses
Área de concentração: Mêcanica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Leandro Palermo Junior, Carlos Friedrich Loeffer Neto
Data da defesa: 25/11/2009
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Análise de Tensões em Placas Finas de Materiais Compósitos sob Carregamento Dinâmico usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Kerlles Rafael Pereira Sousa**
Orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**
Co-orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.
FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
UFES

Campinas, 25 de novembro de 2009.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e meus dois irmãos.

Agradecimentos

- Inicialmente, a Deus pela vida.
- Aos meus pais, Reginaldo e Pêdra, e irmãos, Kerllesvaldo e Jefferson que, sempre incentivaram meus estudos, pelo apoio e participação em todas as minhas pequenas conquistas. Sem eles, nada seria possível.
- Ao meu orientador, Professor Éder Lima de Albuquerque, pela extraordinária orientação, comprometimento, apoio, amizade, paciência, por tantos conhecimentos transmitidos, pela oportunidade de ter realizado o Estágio Docente e estímulo constante para o bom decorrer do trabalho.
- Ao Professor Paulo Sollero à co-orientação e, pelos ensinamentos transmitidos.
- A Josilene, pelo apoio e amizade.
- Aos amigos da República (Flávio, Hairton, André, Louryval Gordin e Lourival Magrin) pelo companherismo, amizade e risadas durante todos os dias de convivência.
- Aos amigos Adriana, Núbia, Fabiano, Dalmo, Luís e Karlos pela amizade, conhecimento e por estarem sempre dispostos a me ajudar no que fosse necessário, além das brincadeiras.
- Ao amigo Belisário pela companhia nos finais de semana na UNICAMP.
- Aos amigos do DMC (Alexandre, Marcel e Martin) pela amizade nesse período.
- Ao Professor Doval do CEFET-MA pelo grande incentivo na graduação e durante todo o mestrado.
- Aos amigos do CEFET-MA, Luciana, Rita de Cássia, Kindersley, Michel Silva, Victor Morfeu, Luís Carlos pela amizade, companherismo e apoio.
- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuiram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.
- A FAPEMA pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

A gratidão é, definitivamente, a forma de trazer mais para sua vida.
(Marci Shimoff)

Resumo

Sousa, Kerlles Rafael Pereira, *Análise de Tensões em Placas Finas de Materiais Compósitos sob Carregamento Dinâmico usando o Método dos Elementos de Contorno.* Campinas, 2009. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

Este trabalho apresenta uma formulação dinâmica do método dos elementos de contorno para o cálculo de tensões e critério de falhas de placas finas anisótropicas. As formulações utilizam soluções fundamentais da elasto-estática e os termos de inércia são tratados como forças de corpo. As integrais de domínio provenientes de forças de corpo são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial (RIM). No RIM, a função de aproximação "thin plate spline"de placas finas é usada na aproximação das forças de corpo. São implementados formulações para análise transiente de placas finas. A integração no tempo é realizada usando o método de Houbolt. Uma equação integral para a segunda derivada de deslocamento é desenvolvida e todas as derivadas da solução fundamental são calculadas analiticamente. Apenas o contorno é discretizado. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura e também com resultados do método dos elementos finitos.

Palavras chaves: Métodos dos elementos de contorno, método da integração radial, placas, materiais compósitos, dinâmica de placas, análise de tensões e critérios de falhas.

Abstract

Sousa, Kerlles Rafael Pereira, *Analysis of Stress in thin Plates of Composite Materials under Dynamic Load using the Boundary Element Method.* Campinas, 2009. Master Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas.

This work presents a dynamic formulation of the boundary element method for stress and failure criterion analyses of anisotropic thin plates. Formulations use elastostatic fundamental solutions and inertia terms are treated as body forces. Domain integrals that come from body forces are transformed into boundary integrals using the radial integration method (RIM). In the RIM, the augmented thin plate spline is used as the aproximation function. A formulation for transient analysis is implemented. The time integration is carried out using the Houbolt method. Integral equations for the second derivatives of deflection are developed and all derivatives of fundamental solutions are computed analitically. Only the boundary is discretized in the formulation. Numerical results show good agreement with results available in literature as well as finite element results.

Key words: Boundary element method, radial integration method, plates, composite materials, dynamic of plates, stress analyses and failure criterion.

Sumário

Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raíz do polinômio característico.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

b = Força de corpo.

C, K = Constantes.

$\mathbf{D}$ = Matriz de rigidez de flexão.

$\mathbf{D}'$ = Matriz $\mathbf{D}$ transformada.

d_i = Parte real de μ.

E = Módulo de elasticidade.

e_i = Parte imaginária de μ.

g = Força elementar.

M, m = Momentos.

N = Função de interpolação.

$\mathbf{n}$ = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

$\mathbf{Q}$ = Matriz de rigidez.

$\overline{\mathbf{Q}}$ = Matriz de rigidez transformada.

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

$\mathbf{T}$ = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamentos no plano.

V = Força cortante equivalente de Kirchhoff.

w = Deslocamento transversal.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

s = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Eixos do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

$*$ = Soluções fundamentais.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 *Introdução*

O presente trabalho trata de quatro assuntos: os materiais compósitos, as placas, análise de falhas e o método dos elementos de contorno. A seguir são apresentadas as razões para a escolha desses quatro assuntos como objeto de estudo, bem como um pouco de sua história.

1.1 Motivação

Uma análise estrutural completa deve levar em conta não somente as deformações, assim como, as falhas e danos na estrutura. A falha de um material compósito geralmente se inicia muito antes de qualquer mudança macroscópica no comportamento da estrutura. Em geral, a falha ocorre de quatro modos principais (AGARWAL; BROUTMAN, 1990): (1) quebra da fibra, (2) nucleação e coalescimento de trincas na matriz (trincamento da matriz), (3) separação das fibras da matriz (deslocamento das fibras) e (4) separação das lâminas uma das outras (delaminação). A falha pode ser gerada tanto por carregamentos estáticos como dinâmicos. De fato, falhas causadas por carregamentos dinâmicos são comuns devido às aplicações típicas de materiais compósitos, principalmente nas indústrias aeronáuticas e aeroespaciais. Por exemplo: fuselagem, tanques de combustíveis, asas e as outras estruturas estão sujeitas às cargas aerodinâmicas transientes e também ao impacto de pássaros e outros detritos. Particularmente, aos impactos considerados de baixa velocidade (onde não há penetração do projéctil na estrutura).

Raramente os danos causados pelo impacto de baixa velocidade são detectados a olhos nus. Uma vez que eles podem não ser encontrados, os danos causados por impactos de baixa velocidade em materiais compósitos são considerados potencialmente perigosos. Em geral, o trincamento da matriz e a quebra da fibra são os danos iniciais que precedem a delaminação. A rigidez do material danificado e, consequentemente, da estrutura pode ser significativamente reduzida pelos danos. Esta perda de rigidez pode, até mesmo, causar uma falha catastrófica. Por estes motivos, torna-se importante o desenvolvimento de ferramentas que possibilitem análises de estruturas de materiais compósitos sob impactos de baixa velocidade.

1.2 Considerações sobre materiais compósitos

O material composto (ou compósito) permite ao engenheiro, até certo ponto, criar um novo material, enfatizando certas características desejáveis, enquanto minimiza outras indesejáveis, por meio da combinação de componentes. Uma gama bastante ampla de aspectos de comportamento do material pode ser manipulada no projeto de um composto, e efetivamente é, como por exemplo:

- resistência estática e à fadiga;
- rigidez;
- resistência à corrosão;
- redução à abrasão;
- redução de peso;
- capacidade de trabalho a alta e baixa temperatura;
- isolamento ou condutividade térmica, elétrica ou acústica;
- dureza, ductilidade
- aparência estética

Embora o desenvolvimento e uso de materiais compostos seja considerado um evento recente, do século XX, a idéia de combinar intimamente diferentes tipos de materiais é aparentemente tão antiga quanto a civilização. Como relatado no livro do Êxodo, já os egípicios antigos, do segundo milênio antes de Cristo, embora utilizassem pedra para a construção dos monumentos que deveriam desafiar o tempo, usavam em todas as demais construções urbanas um tipo de tijolo construído por barro reforçado por palha vegetal picotada. Tem-se todos os ingredientes dos modernos compostos: o barro, o material barato, fácil de produzir, de moldar, porém de características mecânicas pobres, e a palha, o material fibroso mais resistente, encarregado de manter o barro agregado e de adicionar resistência a ele.

Os compósitos avançados são obtidos pela combinação de materiais com diferentes características físico-químicas e mecânicas e pela utilização de diferentes processos de manufatura. O desenvolvimento destes materiais ainda exige muito trabalho de pesquisa. A crescente utilização dos compósitos estruturais tem estimulado a formação de recursos humanos cada vez mais capacitados, de modo a atingir com êxito os desafios da obtenção de componentes com funções múltiplas.

A análise numérica dos danos causados por impactos de baixa velocidade tem sido feita principalmente pelo método dos elementos finitos (MEF). Lakshminarayana e Murthy (1984) e Luo, Green e Morrison (1999) fizeram uma análise dinâmica de uma estrutura usando um programa comercial para prever danos causados no material sem considerar a falha progressiva na análise. Zhao e Cho (2006) analisaram o início dos danos em uma casca de material compósito usando elementos sólidos de 8 nós. Ganapathy e Rao (1998) analisaram o dano causado em um laminado curvo usando um elemento de casca de dupla curvatura de 48 graus de liberdade. Li et al. (2002a, 2002b) apresentaram um modelo numérico para simular o processo de impacto de baixa velocidade baseado em um elemento de placa de Mindlin de 9 nós. Em levantamentos bibliográficos realizados, não foram encontrados na literatura nenhum artigo onde o dano causado pelo impacto de baixa velocidade tenha sido analisado usando o método dos elementos de contorno (MEC). Entretanto, algumas características do MEC o torna atrativo para esta análise como, por exemplo, sua alta taxa de convergência na análise de problemas de alto gradientes, que é o caso da propagação de ondas surgidas devido ao impacto.

O número de trabalhos que analisaram os danos causados pelos impactos de baixa velocidade é significante na literatura, por exemplo: Zhao e Cho (2006), Li et al. (2002a, 2002b), Ganapathy e Rao (1998), Luo, Green e Morrison (1999) e Lakshminarayana e Murthy (1984).

1.3 Considerações sobre placas

A adoção de hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, fez surgir diferentes teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural. Kirchhoff (1850) estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez a flexão foi definida em termos do módulo de Young e coeficiente de Poisson. Adicionalmente, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostas por Poisson (1829) não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial obtida e mostrou que estas poderiam ser reduzidas a duas condições de contorno naturais. Esta teoria não leva em conta o efeito da deformação pelo esforço cortante, assumindo-se que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. As hipóteses apresentadas por Kirchhoff resultaram em uma equação diferencial de quarta ordem, na qual o deslocamento é dado em função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação pode ser uma eficiente representação do comportamento de placas finas para pequenos deslocamentos, apresentando boa precisão de resultados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias. Entretanto, a teoria desenvolvida por Kirchhoff não apresenta bons resultados quando são analisadas placas de maior espessura. Mindlin (1951) formulou uma teoria para analisar placas moderadamente espessas onde, assumindo-se que as distorções que ocorrem na espessura são constantes, as tensões são obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem e também satisfaz as três condições de contorno requeridas. As formulações apresentadas por Kirchhoff e Mindlin podem ser consideradas como expressivas contribuições para o aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

1.4 Falhas mecânicas em materiais compósitos

As teorias de falha são fundamentais para a determinação de critérios para a previsão da falha de um determinado material frente a um estado bi ou tridimensional de tensões. Quando o estado de tensões for unidimensional, o simples critério de controlar o valor da tensão para que não ultrapasse a tensão de escoamento ou de ruptura do material é suficiente para se determinar a falha. No entanto, um estado complexo de tensões exige teorias próprias para o tipo de material.

A formulação desenvolvida, neste trabalho, é aplicada no cálculo de tensões e deslocamentos de estruturas planas de materiais compósitos laminados submetidos a cargas transversais ao plano da estrutura. Serão estudados, neste trabalho, os critérios de falha para materiais compósitos, abordando o critério quadrático de Tsai e Wu (1971).

1.5 Análise de placas anisotrópicas pelo método dos elementos de contorno

A motivação para o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno para análise do comportamento mecânico dos materiais compósitos advém da crescente utilização desses materiais devido às suas excelentes propriedades mecânicas. O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido há várias décadas e através dos anos se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Entretanto, a análise de problemas de materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno ainda demanda muita pesquisa. Neste trabalho, são apresentadas formulações do método dos elementos de contorno para análise dinâmica de tensões e critérios de falhas em placas finas de materiais compósitos laminados. Não foi encontrado na literatura qualquer trabalho que faz a análise de tensões de placas anisotrópicas sob carregamento dinâmico. A precisão dos resultados numéricos apresentados no presente trabalho é analisada pela comparação com resultados numéricos obtidos na literatura e com resultados numéricos obtidos usando-se o método dos elementos finitos.

As formulações de elementos de contorno têm sido aplicadas a problemas de flexão em placas anisotrópicas, considerando a teoria de Kirchhoff, bem como teorias de placas deformáveis ao cisalhamento. Shi e Bezine (1990) apresentam uma análise por elementos de contorno de problemas de flexão de placa usando a solução fundamental proposta por Wu e Altiero (1981) baseadas nos pressupostos de flexão da placa de Kirchhoff. Rajamohan e Raamachandran (1999) propuseram uma formulação na qual as singularidades são evitadas por pontos fontes colocados fora do domínio. Paiva, Sollero e Albuquerque (2003) apresentaram um tratamento analítico para integrais singulares e hipersingulares da formulação proposta por Shi e Bezine (1990). Placas deformáveis por cisalhamento tem sido analisadas usando o método dos elementos de contorno por Wang e Schweizerhof (1996), Wang e Schweizerhof (1997) com a solução fundamental proposta por Wang e Schweizerhof (1995).

No método dos elementos de contorno para flexão de placas, a presença de forças distribuídas no domínio fazem aparecer na formulação as integrais de domínio. Com o objetivo de resolver estas integrais, o esquema de integração por células pode dar resultados precisos, como demonstrado por Shi e Bezine (1990) para problemas de flexão em placas anisotrópicas. Contudo, a discretização do domínio em células reduz uma das principais vantagens do método dos elementos de contorno que é a discretização somente do contorno. Uma alternativa para este procedimento foi apresentada por Rajamohan e Raamachandran (1999) que propuseram o uso de soluções particulares para aproximar a discretização do domínio. Entretanto, o uso de soluções particulares requer a busca de uma função que satisfaça a equação governante. Dependendo do quão complexa seja a equação governante, esta função pode ser difícil de ser encontrada.

Neste trabalho, integrais de domínio devido a cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno pelo método da integração radial. Este método foi inicialmente apresentado por Venturini (1988) para problemas de flexão em placas isotrópicas. Recentemente, Gao (2002) estendeu o método para problemas de elasticidade isotrópica tridimensional e Albuquerque et al. (2006) para placa de Kirchhoff anisotrópica.

1.6 Descrição do presente trabalho

O presente trabalho é disposto de 7 capítulos.

No Capítulo 2 é apresentada uma classificação dos compósitos quanto à sua forma e uma visão geral sobre suas características, tais como: composição, interesse e aplicações. Além disso, é discutida a análise e critérios de falhas de materiais compósitos.

No Capítulo 3 são apresentados algumas considerações em que se baseiam as teorias de placas finas. Será obtida a equação de equilíbrio de placas finas em termos da deflexão.

No Capítulo 4 a formulação de elementos de contorno é apresentada de forma detalhada. Será apresentada a obtenção da equação integral de contorno. Também será apresentada a obtenção da solução fundamental anisotrópica, tratamento de integrais análiticas e numéricas e os tipos de elementos de contorno usados.

No Capítulo 5 são apresentadas duas formulações para o tratamento de integrais de domínio na formulação de elementos de contorno. A primeira faz a transformação exata da integral de domínio proveniente da carga distribuída em integral de contorno. A segunda transforma a integral de domínio proveniente do termo de inércia em integrais de contorno usando-se o método da integração radial.

No Capítulo 6 são apresentados alguns resultados numéricos obtidos com as rotinas implementadas. O momento fletor é calculado para vários instantes de tempo.

Por fim, no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais e conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados nesta dissertação.

2 *Análise de Falhas em Materiais Compósitos*

2.1 Definição

Um material compósito (ou composto) é formado pela união de dois materiais de naturezas diferentes, resultando em um material de performance superior àquela de seus componentes tomados separadamente. O material resultante é um arranjo de fibras, contínuas ou não, de um material resistente (reforço) que são impregnados em uma matriz de resistência mecânica inferior as fibras. Após décadas de uso restrito em alguns setores da indústria, como na área de míssies, foguetes e aeronaves de geometrias complexas, os compósitos poliméricos estruturais, também denominados avançados, têm ampliado a sua utilização em diferentes setores da indústria moderna, com um crescimento de uso de 5% ao ano (REZENDE; BOTELHO, 2000). Atualmente, a utilização de estruturas de alto desempenho e com baixo peso tem sido buscada também nas indústrias automotiva, esportiva, de construção civil, entre outras.

2.2 Interesse dos materiais compósitos

O interesse dos materiais compósitos está ligado a dois fatores: econômico e de desempenho. O fator econômico vem do fato do material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica numa economia de combustível e consequentemente, num aumento de carga útil (vantagens especiais nas áreas aeronáutica e aeroespacial). A redução na massa total do produto pode chegar a 30% ou mais, em função da aplicação dada ao material compósito. O custo de fabricação de algumas peças em material compósito pode ser também sensívelmente menor se comparado com os materiais metálicos. O fator performance está ligado à procura por um melhor desempenho de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito as características mecânicas (resistência à ruptura, resistência à ambientes agressivos, etc.). O caráter anisotrópico dos materiais compósitos é o fator primordial para a obtenção das propriedades mecânicas requeridas pelo componente. A leveza, juntamente com as excelentes características mecânicas, faz com que os materiais compósitos sejam cada vez mais utilizados dentro de atividades esportivas.

2.3 Aplicações dos materiais compósitos

A aplicação dos materiais compósitos na área aeronáutica surgiu devido à necessidade de estruturas de alto desempenho e baixo peso. Atualmente, uma grande variedade de peças em materiais compósitos pode ser encontrada nos aviões (Figura 1) em substituição aos materiais metálicos: fuselagem, spoilers, portas de trem de aterrissagem, portas internas, etc.

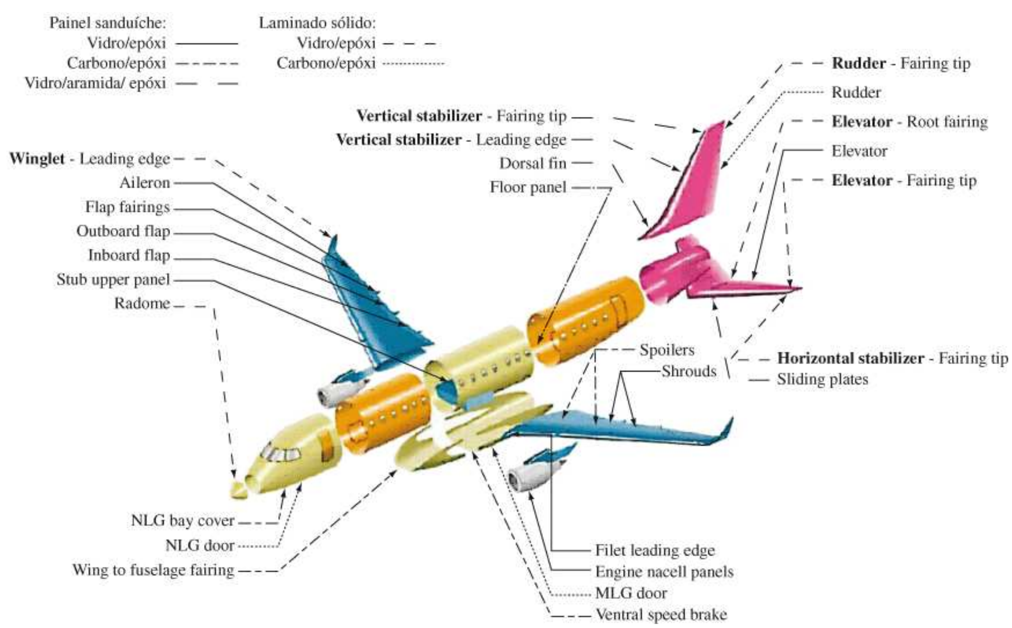

Figura 1: EMB 170 - Vista explodida mostrando vários componentes em compósitos poliméricos avançados. Crédito: Portal Embraer.

Em muitos destes componentes, sua concepção foge da definição dada inicialmente para materiais compósitos, pois nestes casos os componentes são fabricados normalmente por placas de baixa densidade, contra-placadas por placas finas de alta resistência. Esta configuração normalmente é dita sanduíche. De uma forma mais ampla, estas configurações são também consideradas materiais compósitos, pois combinam diferentes materiais. Dentro da área aeronáutica, os helicópteros possuem também vários componentes em material compósito: pás da hélice principal, hélice traseira, árvore de transmissão, fuselagem, etc.

A utilização dos materiais compósitos dentro da indústria automobilística é bem mais recente do que na área aeronáutica. Inicialmente, eram produzidos somente parachoques e tetos de automóveis. Atualmente, o material compósito é utilizado para a fabricação de capots, carters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. Uma das grandes vantagens trazidas para o meio automobilístico pelos materiais compósitos é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas (Figura 2). Uma atividade esportiva notória que emprega material compósito é a Fórmula 1, que pode ser considerada como um laboratório para as inovações tecnológicas.

Figura 2: Audi - Fibra de carbono compondo a maior parte do veículo. Crédito: Portal Audi Brasil.

Em muitos casos, o que se emprega dentro dos carros de Fórmula 1 será utilizado futuramente nos carros de passeio. Neste caso, o aumento da relação potência/peso é fundamental para um bom desempenho do carro nas pistas. A configuração mais frequentemente utilizada nestes carros é do tipo sanduíche que é utilizada para a confecção da carroceria.

Em praticamente todas as atividades esportivas, a redução do peso está diretamente ligada a redução do tempo de execução de uma prova esportiva. Como exemplo disto, podemos citar: barcos a vela, skis, bicicletas, etc. Em alguns casos, o que se procura é a agilidade, e a perfeição, como no tênis, com suas raquetes; no golf, com seus tacos; e no surf, com suas pranchas.

2.4 Equação constitutiva do laminado

Em geral, os componentes mecânicos compostos são construídos pelo empilhamento de várias lâminas, formando um laminado. A (Figura 3) mostra os elementos principais de uma lâmina. A direção das fibras define as três **direções principais de propriedades** da lâmina, que são as direções tomadas como referência nas definições das propriedades mecânicas, tensões, deformações e demais cálculos básicos. A **direção principal** L é a direção longitudinal, indicada pelo eixo L. A **direção principal** T, transversal à fibra, é indicada pelo eixo T. E, a **direção principal** Z, perpendicular à fibra, é indicada pelo eixo Z.

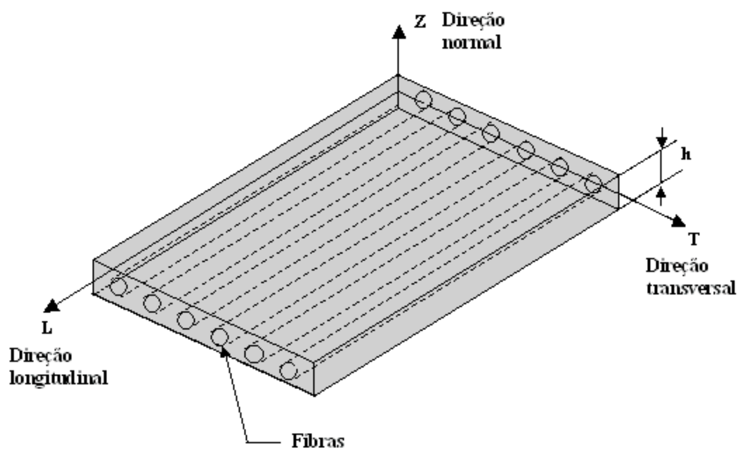

Figura 3: Direções principais de propriedades mecânicas em uma lâmina.

Cada lâmina é colocada com as fibras orientadas em direção diferente das demais. Assim, a análise do laminado precisa ser feita por um sistema de coordenadas que, em geral, não corresponde ao sistema principal de nenhuma das lâminas. Define-se matriz de transformação $[T]$ como a matriz que exprime a rotação de componentes do sistema, determinado pelo ângulo θ, conforme mostrado na (Figura 4). Esta rotação plana é representada por:

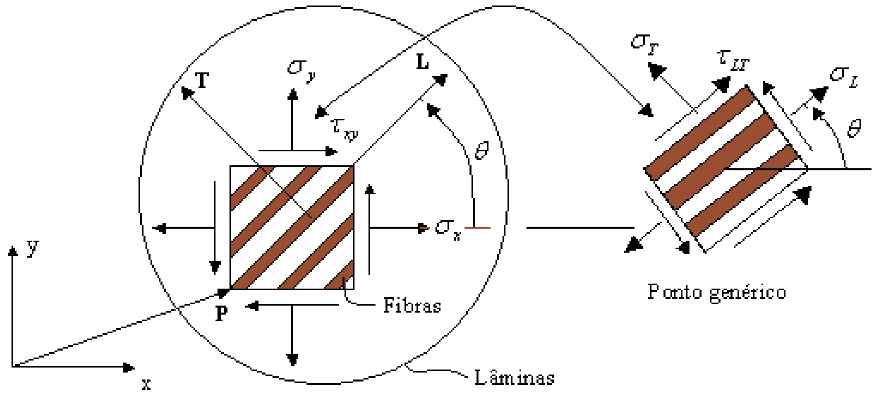

Figura 4: Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas P de uma lâmina.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sendo

$$m = \cos\theta \tag{2.2}$$
$$n = \operatorname{sen}\theta \tag{2.3}$$

onde θ é o ângulo entre as fibras e o sistema de referência.

Como apresentado por Agarwal e Broutman (1990), as tensões em cada lâmina pode ser calculada a partir das deformações através da relação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

onde, a matriz $\left[\overline{Q}\right]$ é dada por:

$$\left[\overline{Q}\right] = [T]^{-1}\,[Q]\,[T]^{-T}\,. \tag{2.5}$$

A matriz de rigidez $[Q]$ é dada, em termos das constantes de engenharia por:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

onde E_L e E_T são os módulos de elasticidade nas direções paralela e transversal às fibras, respectivamente; ν_{LT} e ν_{TL} são os valores dos coeficientes de Poisson principal e secundário, respectivamente e G_{LT} é o módulo de cisalhamento.

As tensões nas direções longitudinal e transversal do reforço com fibras podem ser calculadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{array} \right\} = [T] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

Com estas tensões calculadas em cada ponto de cada lâmina, podem ser aplicados critérios de falha para a avaliação da resistência da placa.

2.5 Critérios de falha para materiais compósitos

Em engenharia e, mais precisamente no projeto de máquinas e estruturas, o conhecimento do comportamento dos materiais utilizados é fundamental. É esse conhecimento que determinará se um material é adequado ao projeto ou não, se suportará as solicitações a ele impostas e por quanto tempo suportará.

Em geral, o comportamento de um material é observado e medido experimentalmente, através de testes como o de tração, onde amostras padronizadas, os corpos de prova, são submetidas a esforços uni-axiais de tração para o levantamento de suas propriedades mecânicas: módulos de elasticidade, tensões de escoamento, limite de ruptura e razão de Poisson, dentre outras.

A partir dessas propriedades obtidas dos testes com os corpos de prova, são aplicadas as teorias ou critérios de falha para relacioná-las ao comportamento real de peças de geometria complexa sujeitas a carregamentos compostos.

Para os materiais de comportamento isotrópico, ou considerados como tal, alguns critérios são bem conhecidos e largamente utilizados. Já para os materiais compósitos reforçados com fibra, cujo desenvolvimento é mais recente e apresentam um comportamento anisotrópico, os critérios de falha são mais complexos, envolvendo um número maior de variáveis.

Abaixo será apresentada uma análise do comportamento destes materiais e de alguns critérios de falha para eles desenvolvidos.

2.5.1 Modos de falha para materiais compósitos

Devido à sua constituição, um material compósito laminado, reforçado com fibra, pode falhar de diversas formas, segundo Agarwal e Broutman (1990):

- Por trincas na matriz (Figura 5), normalmente decorrente de tensões transversais à direção das fibras, quando a tensão da matriz é alta.

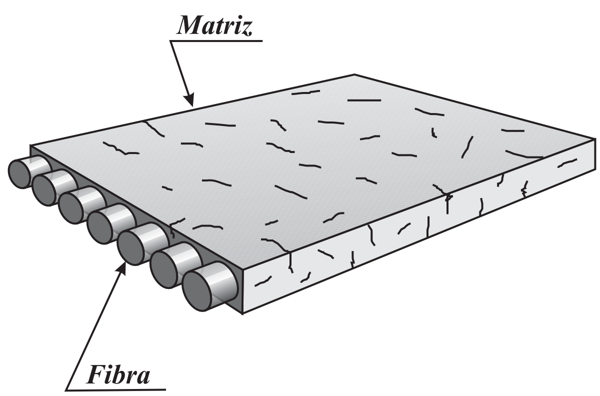

Figura 5: Falha por trincas na matriz

- Por descolamento interfacial (Figura 6), ou seja, um deslocamento relativo entre a fibra e a matriz, resultante do colapso da interface entre ambas. Uma vez rompida a ligação entre fibra e matriz, a carga não é mais transferida entre esses dois componentes, reduzindo drasticamente a resistência do compósito.

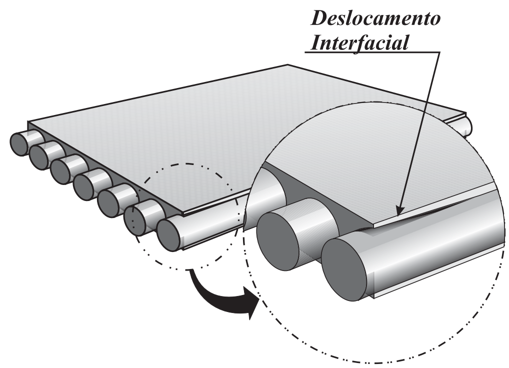

Figura 6: Falha por deslocamento interfacial

- Pela delaminação (Figura 7), ou seja, a separação entre as lâminas que formam um laminado. É resultado em geral de tensões na direção normal às lâminas.

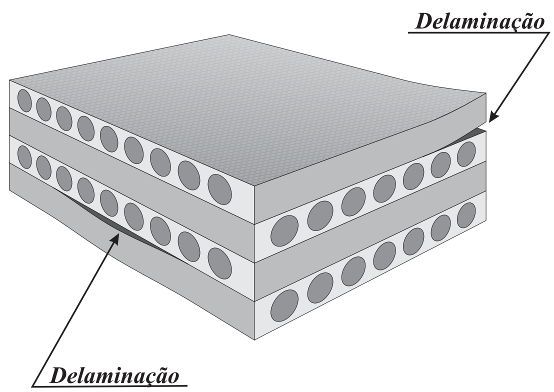

Figura 7: Falha por delaminação

- Pelo descolamento e ruptura das fibras (Figura 8), que é normalmente decorrente da tensão aplicada na direção das fibras, situação em que as fibras são as responsáveis pela resistência do compósito.

2.5.2 Critérios da máxima tensão e máxima deformação

Este critério parte da mesma base usada para materiais isotrópicos: a falha ocorre quando as tensões máximas na direção das fibras ou transversalmente às fibras excede a

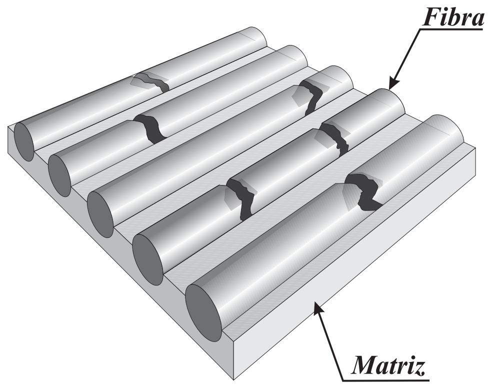

Figura 8: Falha por quebra das fibras

respectiva resistência de tração ou compressão de corpos de prova com as fibras ao longo do eixo ou transversalmente a ele.

Os limites de falha para o critério da máxima tensão são dados por (VINSON; SIERKOWSKI, 1987):

$\sigma_L < X_t$ ou $\sigma_T < Y_t$, o que acontecer primeiro, para σ_L e $\sigma_T > 0$

$|\sigma_L| > X_c$ e $|\sigma_T| > Y_c$, o que acontecer primeiro, para σ_L e $\sigma_T < 0$

onde X e Y representam as tensões últimas ao longo e transversalmente à direção das fibras, respectivamente, e os subscritos c e t referem-se, respectivamente, a compressão e tração.

É importante salientar que neste caso σ_L e σ_T são as tensões ao longo das fibras e transversalmente a elas e não as tensões principais como no caso isotrópico.

Adicionalmente a uma trinca iniciada por tensões normais, as camadas de compósito reforçados com fibras também são vulneráveis a falhas causadas por tensões de cisalhamento. O critério da máxima tensão para cisalhamento é expresso por:

$$|\tau_{LT}| < S \tag{2.8}$$

onde S é a resistência última ao cisalhamento plano de um corpo de prova sob cisalhamento puro e τ_{LT} é a tensão de cisalhamento na direção principal do material (não a máxima tensão de cisalhamento). De forma similar, no critério da máxima deformação a falha ocorre quando uma das condições abaixo não é atendida (VINSON; SIERKOWSKI, 1987):

$\varepsilon_L < \varepsilon_L^t = \frac{X_t}{E_L}$ e $\varepsilon_T < \varepsilon_T^t = \frac{Y_t}{E_T}$ para ε_L e $\varepsilon_T > 0$

$\varepsilon_L > -\varepsilon_L^c = -\frac{X_c}{E_L}$ e $\varepsilon_T > -\varepsilon_T^c = -\frac{Y_c}{E_T}$ para ε_L e $\varepsilon_T < 0$

$|\gamma_{LT}| < \gamma_{LT}^s = \frac{S}{G_{LT}}$

A Figura (9) apresenta os limites de resistência em tração em função do ângulo das fibras para um laminado unidirecional de fibras de boro em matriz de resina epóxi.

Para ângulos pequenos a resistência das fibras controla a falha. Entre aproximadamente 3° e 42° a falha é controlada pelo cisalhamento. Acima de 42° a falha passa a ser controlada pela resistência da matriz. A área hachureada em cinza representa a faixa em que o material não falha.

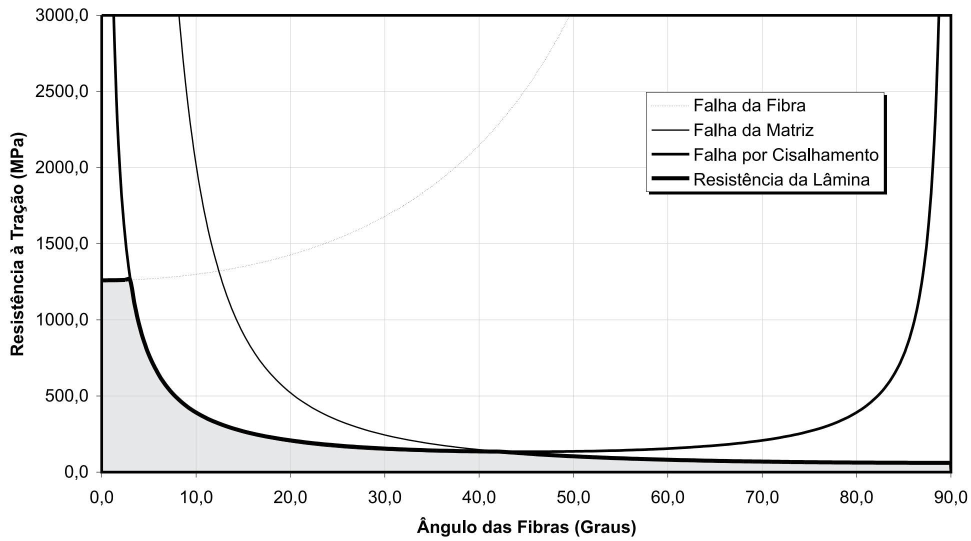

Figura 9: Limite de resistência do laminado unidirecional

Por serem simples, estes critérios (máxima tensão e máxima deformação) não levam em consideração as interações entre as diferentes componentes de tensão no mecanismo de falha. Observações experimentais mostraram que essas interações podem afetar a falha do material. Critérios de falha quadráticos, similares ao de Von Mises, podem levar em conta essas interações entre as tensões.

Alguns dos mais utilizados critérios quadráticos desenvolvidos são os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu apresentados a seguir.

2.5.3 Critério de Tsai-Hill

Hill (1950) considerou que o critério de von Mises, proposto para o início de escoamento em metais isotrópicos, poderia ser modificado para incluir os efeitos da anisotropia induzida num metal inicialmente isotrópico durante um processo de grandes deformações plásticas. Para um estado triaxial de tensões, a expressão do critério de von Mises é

$$\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2\right]+3\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)=\sigma_{EQ}^2, \tag{2.9}$$

onde σ_{EQ} é o valor da tensão uniaxial equivalente ao estado triaxial de tensões solicitado ao material no ponto considerado. Hill modificou esse enunciado e propôs o seguinte critério:

$$F(\sigma_2-\sigma_3)^2+G(\sigma_3-\sigma_1)^2+H(\sigma_1-\sigma_2)^2+2L\tau_{23}^2+2M\tau_{13}^2+2N\tau_{12}^2=1. \tag{2.10}$$

Esta expressão pode ser reordenada para a forma

$$\begin{aligned}&(G+H)\,\sigma_L^2+(F+H)\,\sigma_T^2+(F+G)\,\sigma_Z^2\\&-2H\sigma_L\sigma_T-2G\sigma_L\sigma_Z-2F\sigma_T\sigma_Z+2L\tau_{TZ}^2+2M\tau_{LZ}^2+2N\tau_{LT}^2=1.\end{aligned} \tag{2.11}$$

A igualdade a 1 indica o limiar de falha, enquanto valores menores que 1 indicam que o material está em segurança sob aquele estado de tensões, nas direções principais do material. Este critério pode ser usado como um critério de escoamento, resistência mecânica ou falha, pois estabelece um limite teórico para o comportamento elástico de um material. As seis constantes F, G, H, L, M e N, são propriedades do material relacionadas à sua resistência ao escoamento em diferentes direções.

Tsai (1968) aplicou este critério ao caso dos compósitos laminados, relacionando as constantes de Hill com os valores de resistência X, Y e S das lâminas. Observa-se que quando atuam somente tensões de cisalhamento, a falha ocorre quando τ_{LT} atinge um valor S. Da equação (2.11) tem-se:

$$2N = \frac{1}{S^2} \tag{2.12}$$

Similarmente, para situações onde só atuam tensões normais $\sigma_L = X$, $\sigma_T = Y$ e $\sigma_Z = Z$ (individualmente), tem-se:

$$(G + H) = \frac{1}{X^2} \tag{2.13}$$

$$(F + H) = \frac{1}{Y^2} \tag{2.14}$$

$$(F + G) = \frac{1}{Z^2} \tag{2.15}$$

respectivamente.

Os valores para F, G e H são obtidos resolvendo as (2.13), (2.14) e (2.15), donde resulta:

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \qquad 2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \qquad 2F = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}. \tag{2.16}$$

Aplicando-se apenas τ_{LZ} e τ_{TZ}, um por vez, (2.11) resulta em

$$2M = \frac{1}{S^2} \qquad e \qquad 2L = \frac{1}{S^2} \tag{2.17}$$

Resumindo as consantes das eqs.(2.12), (2.16) e (2.17), a expressão (2.11) resulta no critério de Hill para um estado triaxial de tensões na forma:

$$\frac{\sigma_L^2}{X^2} + \frac{\sigma_T^2}{Y^2} + \frac{\sigma_Z^2}{Z^2} - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T - \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_T\sigma_Z$$
$$- \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_Z + \frac{\tau_{TZ}^2}{S_T^2} + \frac{\tau_{LZ}^2}{S_L^2} + \frac{\tau_{LT}^2}{S_Z^2} \tag{2.18}$$

Para o caso dos laminados, tem-se uma condição de tensão plana, ou seja: $\sigma_Z = \tau_{LZ} = \tau_{TZ} = 0$ e especificamente para um laminado ortotrópico: $Y = Z$. O critério de Hill aplicado a um compósito ortotrópico pode ser escrito como:

$$\frac{\sigma_L^2}{X^2} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} + \frac{\sigma_T^2}{Y^2} + \frac{\tau_{LT}^2}{S^2} = 1 \tag{2.19}$$

o qual é conhecido como critério de falha de Tsai-Hill com referencial nos eixos principais do laminado. Valores apropriados de X e Y devem ser utilizados dependendo do sinal das tensões, ou seja, tração ou compressão.

2.5.4 Critério de Tsai-Wu

Uma desvantagem do critério de Tsai-Hill é que não há uma distinção direta entre os limites de resistência à tração e à compressão. Os parâmetros de resistência devem ser especificados de acordo com o estado de tensão. Com o critério de falha de Tsai-Wu procura-se uma melhor correlação com os dados experimentais através do incremento do número de termos na equação de aproximação (melhor ajuste da curva aos dados experimentais). Tsai e Wu (1971) propuseram uma nova expressão para o critério de falha:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\sigma_{12} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1 \tag{2.20}$$

Da mesma forma que para o critério de Tsai-Hill, a determinação dos coeficientes é feita pela substituição dos resultados experimentais na equação (2.20).
Por exemplo, para o caso de tensão somente na direção das fibras, com resistência à compressão e à tração dadas respectivamente por X_c e X_t tem-se:

$$\begin{aligned} F_1X_t + F_{11}X_t^2 = 1 \\ F_1X_c + F_{11}X_c^2 = 1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

A solução do sistema de equações acima resulta em:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \\
F_{11} &= -\frac{1}{X_t X_c}
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Similarmente, considerando tensões na direção transversal às fibras:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \\
F_{22} &= -\frac{1}{Y_t Y_c}
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Para que o critério independa do sinal da tensão de cisalhamento, os termos lineares de σ_{12} devem ser nulos, ou seja:

$$F_6 = F_{16} = F_{26} = 0 \tag{2.24}$$

Para um estado de cisalhamento puro:

$\sigma_{12} = S$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$

ou seja,

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \tag{2.25}$$

Para se evitar a necessidade de mais um ensaio experimental, é comum que F_{12} seja assumido de maneira a fazer o critério de Tsai-Wu concordar com algum critério mais simples. A abordagem mais usada é fazer: $F_{12} = -1/(2\sqrt{F_{11}F_{22}}) = -1/(2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c})$

pois, neste caso, se o critério de Tsai-Wu for aplicado em um material como aço de baixo e médio carbono (isotrópicos e dúteis), onde $X_t = X_c = Y_t = Y_c = S_y$, sendo S_y o limite de escoamento, obtém-se o critério de von Mises, ou seja:

$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = S_y^2$

Uma vez que todos os coeficientes foram determinados, o critério de Tsai-Wu é escrito como:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_{22} = 1 \tag{2.26}$$

Observa-se que o critério de Tsai-Wu é mais geral que o critério de Tsai-Hill, já que relaciona mais propriedades mecânicas.

Para projetos, o critério de Tsai-Wu é apresentado como um índice de falha, na seguinte forma:

$$F = \frac{\sigma_{11}^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_{22} \tag{2.27}$$

Neste caso, para um projeto seguro, é necessário que todas os pontos da estrutura apresentem $F < 1$. A falha ocorre quando $F \geq 1$.

2.6 Considerações sobre os critérios de falha

Observando os dados apresentados concluí-se facilmente que a falha em materiais compósitos é mais complexa que em materiais isotrópicos, pois envolve a análise de um número maior de variáveis. Assim, os critérios tradicionalmente utilizados no projeto de máquinas e estruturas em materiais com comportamento isotrópico podem não ser adequados, podendo inclusive levar o projetista a erros catastróficos, caso utilizadas equivocadamente.

A utilização de critérios mais complexos leva a resultados mais precisos, porém a um custo maior. Os critérios de máxima tensão e máxima deformação exigem a análise de três condições distintas de falha para a determinação do limite real. Esse inconveniente é eliminado com o desenvolvimento de critérios quadráticos como os de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Enquanto o primeiro Tsai-Hill é mais simples de ser utilizado o segundo Tsai-Wu apresenta uma melhor precisão dos resultados. Todos estes critérios porém exigem um número maior de testes do material compósito (laminado unidirecional) do que aqueles exigidos para a determinação das características de um material isotrópico.

3 Teoria da Flexão em Placas de Materiais Compósitos Laminados

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas e paralelas Figura 10 distanciadas entre si por uma espessura t.

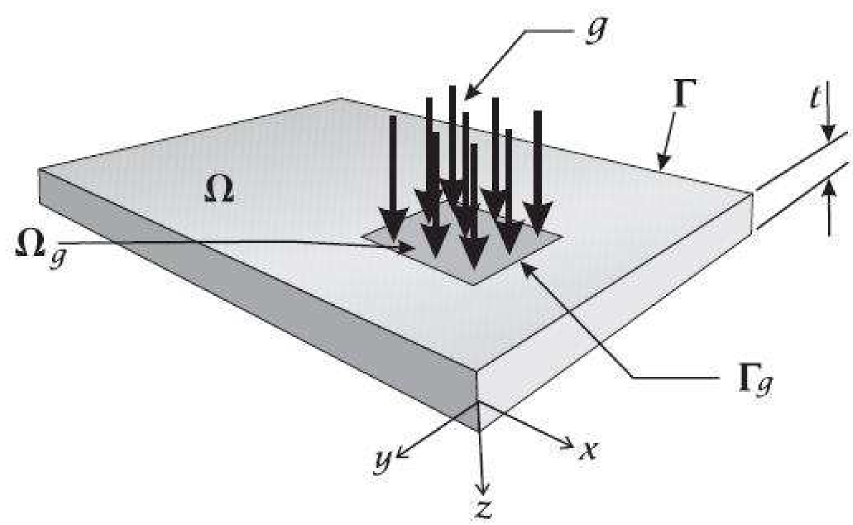

Figura 10: Placa Fina.

No caso da dimensão da espessura ser muito menor que as dimensões das superfícies planas limitantes, as placas são designadas por placas finas. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa. Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. Neste trabalho, será desenvolvida a formulação do método dos elementos de contorno para placas finas anisotrópicas. A teoria de flexão em placas finas anisotrópicas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem normal à superfície média fletida.
2. A tensão normal σ_z na direção normal ao plano médio é desprezível.

3.1 Relações básicas para flexão segundo a teoria clássica

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 11 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície.

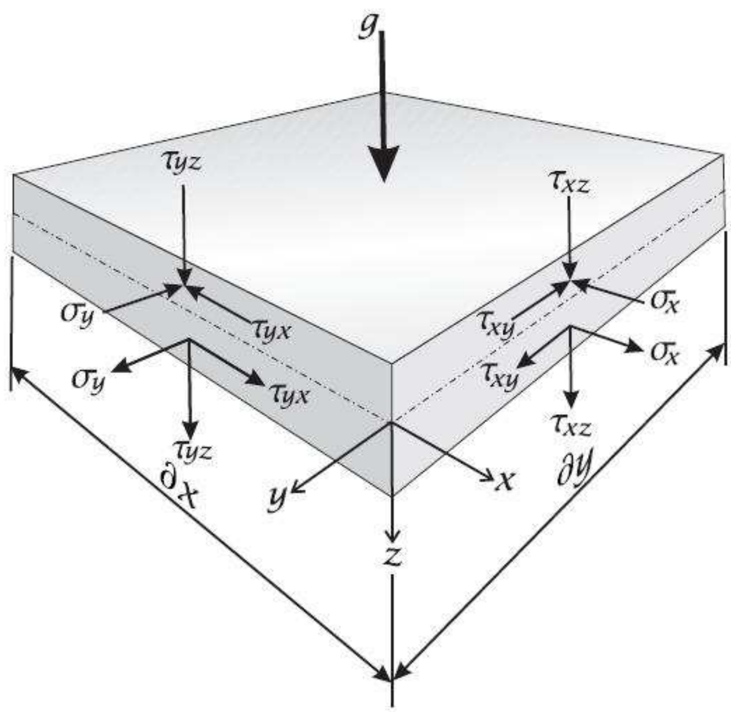

Figura 11: Tensões em um elemento de placa

Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa podemos definir os momentos e forças (Figura 12):

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \tag{3.1}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \tag{3.2}$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \tag{3.3}$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \tag{3.4}$$

e

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \tag{3.5}$$

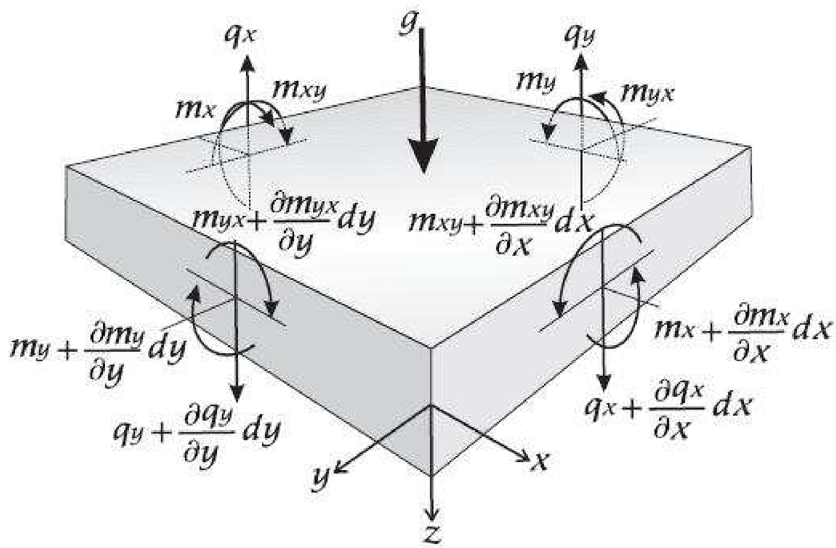

Figura 12: Forças e momentos em um elemento da placa

Do equilíbrio de forças e momentos, podemos escrever:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \tag{3.8}$$

onde as unidades de força distribuída g é dada em N/m^2, o momento m é dado em $N.m/m$

e o esforço cortante q é dado em N/m.

Resolvendo as equações (3.7) e (3.8) para q_x e q_y, respectivamente, substituindo a equação (3.6) e considerando a simetria de momentos ($m_{xy} = m_{yx}$), temos:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \tag{3.9}$$

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y, respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 13).

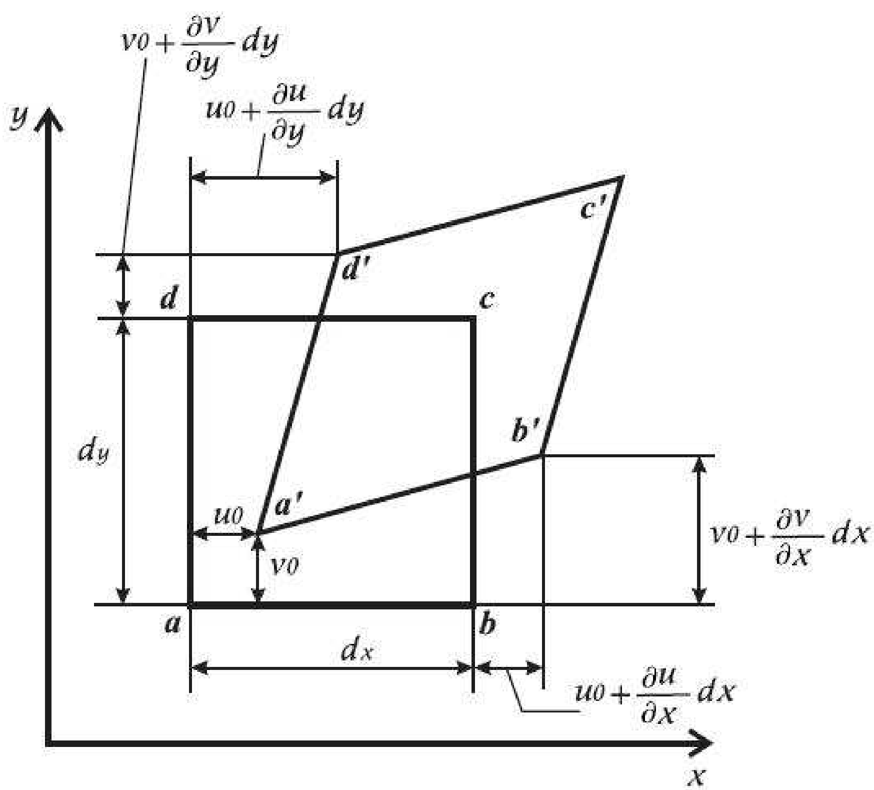

Figura 13: Deformação em um elemento da placa.

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a, b, c e d, movem-se para a', b', c' e d', chamando as componentes de deslocamento u_0 e v_0 do ponto a nas direções x e y (Figura 13), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_o + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \tag{3.10}$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \tag{3.11}$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.12}$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.14}$$

A Figura 14 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz, que contém os pontos a, b, n_1 e n_2. A rotação do elemento an_1, inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 14). Então, o deslocamento do ponto na direção x, a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.15}$$

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado por:

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.16}$$

Substituindo as equações (3.15) e (3.16) nas equações (3.12), (3.13) e (3.14) pode-se escrever:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\kappa_x,$$

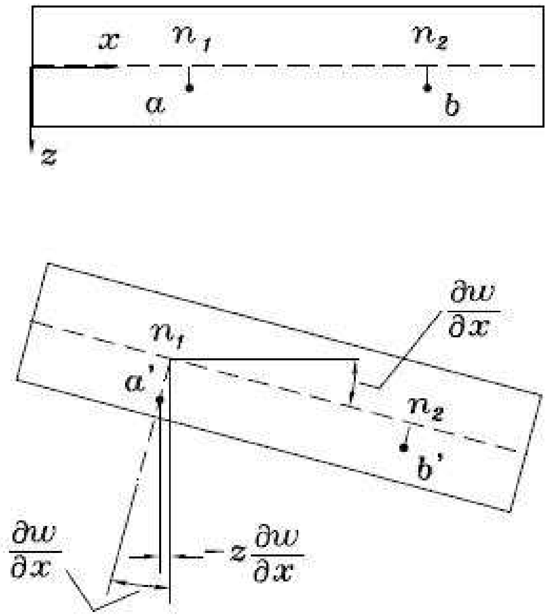

Figura 14: Posições inicial e final de um elemento de placa.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\kappa_y, \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z\kappa_{xy}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde κ_x, κ_y e κ_{xy} são as curvaturas da placa dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \tag{3.18}$$

Integrando ao longo da espessura (Figura 15) as equações (3.1), (3.2), (3.3) e usando a equação (2.4) obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_k z\,dz \tag{3.19}$$

Usando-se as equações (2.4) e (3.17), a equação (3.19) pode ser escrita para um laminado como:

$$\left\{\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\begin{array}{ccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{array}\right]_k \left\{\begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array}\right\} z^2\, dz \right\} \tag{3.20}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array}\right\} \tag{3.21}$$

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \tag{3.22}$$

onde h_k é a distância do plano médio do laminado até a interface k (Figura 15).

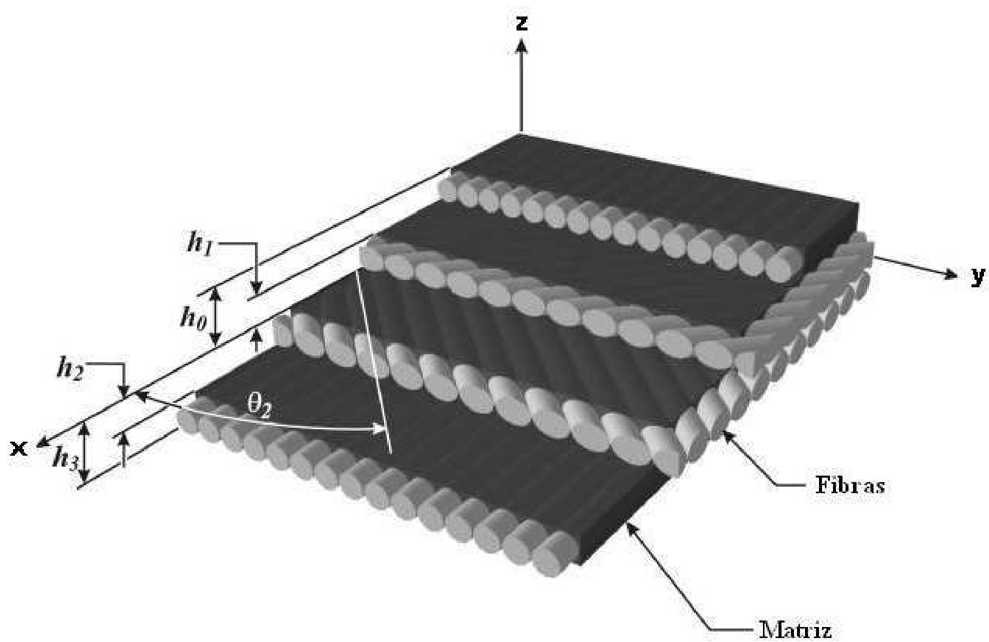

Figura 15: Compósito laminado com quatro lâminas

A equação (3.21) também pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
m_x &= -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_y &= -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_{xy} &= -\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right).
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Substituindo as equações (3.23) nas equações (3.7) e (3.8), pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
q_x &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right], \\
q_y &= -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right].
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

A equação (3.9) pode então ser reescrita usando as equações (3.23) como:

$$
D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{3.25}
$$

A equação (3.25) pode ser integrada no plano característico complexo:

$$
z = x + \mu y \tag{3.26}
$$

$$
\mu = d + ie
$$

onde d e e são as partes real e imaginária de μ, respectivamente. Usando a equação (3.26) e considerando as forças de corpo nulas, a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$
\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\left[D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11}\right] = 0. \tag{3.27}
$$

A solução geral para w na equação (3.25) depende das raízes μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \tag{3.28}$$

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas $\mu_1 = d_1 + e_1 i$ e $\mu_2 = d_2 + e_2 i$ são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são números complexos distintos. Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos distintos ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \tag{3.29}$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ($\mu_1 = \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \tag{3.30}$$

onde w_0 é uma solução particular da equação (3.25) que depende da força distribuída g nas superfícies da placa, $w_1(z_1)$ e $w_2(z_2)$ são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas $z_1 = x + \mu_1 y$ e $z_2 = x + \mu_2 y$. Baseada nas equações (3.23) e (3.24), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso $\mu_1 \neq \mu_2$):

$$\begin{aligned}
m_x &= m_x^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)], \\
m_y &= m_y^o - 2\text{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\
m_{xy} &= m_{xy}^o - 2\text{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)], \\
q_x &= q_x^o - 2\text{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)], \\
q_y &= q_y^o - 2\text{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)].
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde m_x^0, m_y^0, m_{xy}^0, q_x^0 e q_y^0 são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função w_0 calculada pelas equações (3.23) e (3.24). As outras constantes são dadas por:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, & p_2 &= D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2,\\
q_1 &= D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, & q_2 &= D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2,\\
r_1 &= D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, & p_2 &= D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2,\\
s_1 &= \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, & &\\
s_2 &= \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2, & &\\
s_1 - r_1 &= \frac{p_1}{\mu_1}, & s_2 - r_2 &= \frac{p_2}{\mu_2},\\
s_1 + r_1 &= -q_1\mu_1, & s_2 + r_2 &= -q_2\mu_2.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso onde $\mu_1 = \mu_2$. Estes casos ocorrem quando:

$$D_{11}\ D_{22} = (D_{12} + 2D_{66})^2 \tag{3.33}$$

e

$$D_{16} = D_{26} = 0 \tag{3.34}$$

Contudo este caso não será apresentado neste trabalho (SHI; BEZINE, 1988).

3.2 Transformação de coordenadas para momentos e forças cortantes

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns}, tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{3.35}$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.36}$$

onde α é o ângulo entre os eixos h e y.

As componentes de momento, inicialmente escritas considerando os eixos x e y, podem agora ser reescritas em um sistema de coordenadas genérico n, s (PAIVA, 1987). Os momentos fletores referentes às direções n e s são dados por:

$$m_n = m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2m_{xy} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{3.37}$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha + m_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.38}$$

Similarmente, q_n, a força cisalhante no eixo n, pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds\cos\alpha + q_y ds\sin\alpha, \tag{3.39}$$

ou

$$q_n = q_x\cos\alpha + q_y\sin\alpha. \tag{3.40}$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (3.25), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante q_n e momento volvente m_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \tag{3.41}$$

A outra condição de carregamento no contorno é o momento m_n.

4 O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas

4.1 Formulação integral

Usando o teorema de Betti (Kane (1994)), podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{*} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*} d\Omega. \tag{4.1}$$

Escrevendo o lado direito da equação (4.1) na notação de von Karman, temos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_x \varepsilon_x^{*} + \sigma_y \varepsilon_y^{*} + \sigma_z \varepsilon_z^{*} + \tau_{xy} \gamma_{xy}^{*} + \tau_{xz} \gamma_{xz}^{*} + \tau_{yz} \gamma_{yz}^{*} \right) d\Omega. \tag{4.2}$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (4.2) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_x \varepsilon_x^{*} + \sigma_y \varepsilon_y^{*} + \tau_{xy} \gamma_{xy}^{*} \right) d\Omega. \tag{4.3}$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) na equação (4.3), pode-se escrever o primeiro termo da integral do lado direito da equação (4.3) como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\int_z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(z \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) dz \right] d\Omega. \tag{4.4}$$

Integrando (4.4) ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = -\int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.5}$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \tag{4.6}$$

Usando a propriedade de derivação (4.6) na equação (4.5), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = -\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \tag{4.7}$$

Usando o teorema de Green (Kane (1994)), a equação (4.7) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = -\int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \tag{4.8}$$

Aplicando a propriedade de derivação (4.6) no segundo termo do lado direito da equação (4.8), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = -\int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \tag{4.9}$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_\Omega \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.10}$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_\Omega \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \tag{4.11}$$

e

$$\int_\Omega \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin\alpha + \right.$$

$$\left. w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega 2w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \tag{4.12}$$

Assim, a equação (4.3) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* \left[\left(\cos\alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin\alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma -$$

$$\int_\Omega w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Omega. \tag{4.13}$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.9) e usando a equação (3.40), a equação (4.13) pode ser escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.14}$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s), tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha. \tag{4.15}$$

Substituindo as equações (4.15) na equação (4.14), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \left[m_x\cos\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right) + \right.$$

$$m_y\sin\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) + m_{xy}\cos\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) +$$

$$\left. m_{xy}\sin\alpha\left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right)\right] d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.16}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (4.16) pode ser reescrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \left\{\frac{\partial w^*}{\partial n}\left(m_x\cos^2\alpha + m_y\sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\right) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial w^*}{\partial s}\left[m_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha\right]\right\} d\Gamma +$$

$$\int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.17}$$

Substituindo as equações (3.37) e (3.38) na equação (4.17), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = -\int_\Gamma \left(m_n\frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^*\right) d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.18}$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (4.18), temos:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \tag{4.19}$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (4.19) desaparece. No caso onde há cantos, a equação (4.19) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \tag{4.20}$$

onde

$$R_{c_i} = m^+_{ns_i} - m^-_{ns_i}, \tag{4.21}$$

e os termos w_{c_i}, $m^+_{ns_i}$, $m^-_{ns_i}$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa (Figura 16), N_c é o número total de cantos no contorno (PAIVA, 1987).

Das equações (4.18) e (4.20), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \tag{4.22}$$

Das equações (4.22) e (3.41), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \tag{4.23}$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obter a equação (4.23), o lado

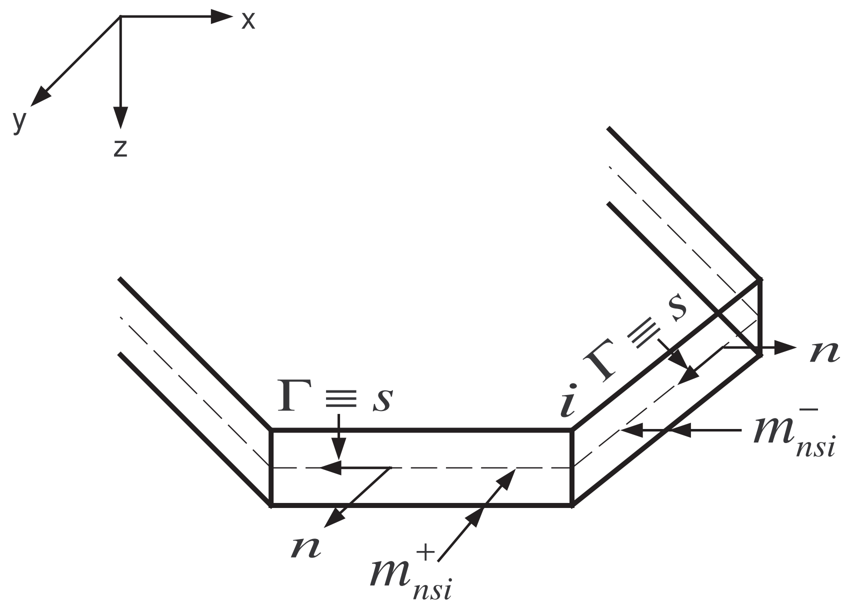

Figura 16: Canto i do contorno da placa.

esquerdo da equação (4.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma^*_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V^*_n w - m^*_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i} w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \tag{4.24}$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.24) na equação (4.1), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega =$$
$$\int_{\Gamma} \left(V^*_n w - m^*_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i} w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \tag{4.25}$$

A equação (4.25) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \tag{4.26}$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P,Q)$, de forma que $g^* = \delta(P,Q)$, a integral (4.26) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P,Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \tag{4.27}$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde o deslocamento é observado, conhecido como ponto campo. O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (4.25) relacionadas a este estado (w^*,V_n^* e m_n^*) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação (3.25).

Considerando o estado "*"como o estado fundamental, a equação (4.25) pode ser escrita como:

$$Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) =$$

$$\int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) +$$

$$\int_{\Omega} b(P) w^*(Q,P) d\Omega. \tag{4.28}$$

A equação(4.28) é a equação de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (m_n), reação de canto (R_{c_i}), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w/\partial n$) conhecidos no contorno.

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$. As variáveis da equação (4.28) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para se ter um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem. Para problemas de flexão em placas anisotrópicas tem-se que a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão w, inclinação da normal $\partial w/\partial n$, força cortante V_n e momento fletor m_n. Em um problema bem colocado dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas.

Pode-se verificar que num problema de flexão em placas há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e consequentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida da derivada da equação (4.28) em relação à direção n_1 normal ao contorno no ponto fonte e também corresponde à solução do binário unitário. Esta equação é dada por:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_\Gamma \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q,P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)\right] d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P)w_{c_i}(P) = \int_\Gamma \left\{V_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial}{\partial n_1}\left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P)\right]\right\} d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) + \int_\Omega b(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P)d\Omega. \tag{4.29}$$

Encontra-se na literatura formulações de elementos de contorno que usam apenas a equação (4.28). Neste caso, os pontos fontes são os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema (RAJAMOHAN; RAAMACHANDRAN, 1999).

4.2 Solução fundamental de deflexão para uma carga pontual

A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual em um meio elástico infinito cujas propriedades elásticas são as mesmas do componente que se quer analisar. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento w em um ponto P qualquer do domínio, chamado de ponto campo, devido à aplicação de uma carga unitária q em um ponto Q qualquer, chamado de ponto fonte (Figura 17).

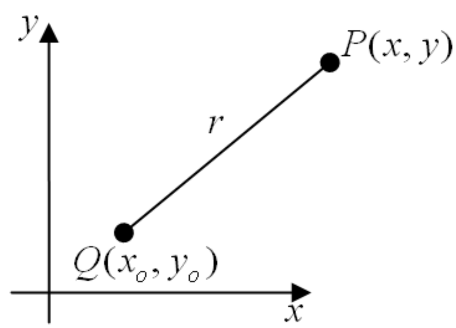

Figura 17: Solução fundamental

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (3.25) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q, P)$, isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q, P) = \delta(Q, P), \tag{4.30}$$

onde $\Delta\Delta(.)$ é o operador diferencial:

$$\Delta\Delta(.) = \frac{D_{11}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^4} + 4\frac{D_{16}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\frac{D_{26}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(.)}{\partial y^4}. \tag{4.31}$$

Como mostrado por Shi e Bezine (1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho,\theta) = \frac{1}{8\pi}\left\{C_1 R_1(\rho,\theta) + C_2 R_2(\rho,\theta) + C_3\left[S_1(\rho,\theta) - S_2(\rho,\theta)\right]\right\}, \tag{4.32}$$

onde

$$\rho = [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}, \tag{4.33}$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P, x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte Q,

$$\theta = \arctan\frac{y-y_o}{x-x_o}, \tag{4.34}$$

$$C_1 = \frac{(d_1-d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_1}, \tag{4.35}$$

$$C_2 = \frac{(d_1-d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_2}, \tag{4.36}$$

$$C_3 = \frac{4(d_1-d_2)}{GH}, \tag{4.37}$$

$$G = (d_1-d_2)^2 + (e_1+e_2)^2, \tag{4.38}$$

$$H = (d_1-d_2)^2 + (e_1-e_2)^2, \tag{4.39}$$

d_i e e_i são respectivamente as partes real e imaginária das raízes μ_i da equação característica (3.28).

$$\begin{aligned} R_i &= \rho^2\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 - e_i^2\sin^2\theta\right]\times \\ &\left\{\log\left[\frac{\rho^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 3\right\} - \end{aligned}$$

$$4\rho^2 e_i \sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, \tag{4.40}$$

e

$$\begin{aligned} S_i &= \rho^2 e_i \sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)\times \\ &\left\{\log\left[\frac{\rho^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 3\right\} + \\ &\rho^2\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 - e_i^2\sin^2\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

O índice repetido i nos termos de R_i e S_i não implicam em soma. O coeficiente a é uma constante arbitrária tomada como $a = 1$. As outras grandezas derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$m_n^* = -\left(f_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + f_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.42}$$

$$R_{c_i}^* = -\left(g_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + g_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} V_n^* &= -\left(h_1\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2\partial y} + h_3\frac{\partial^3 w^*}{\partial x\partial y^2} + h_4\frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3}\right) - \\ &\frac{1}{\bar{R}}\left(h_5\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + h_7\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde $\bar{R}$ é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno Γ. As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_x n_y + D_{12}n_y^2, \tag{4.45}$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_xn_y + D_{26}n_y^2), \tag{4.46}$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \tag{4.47}$$

$$g_1 = (D_{12} - D_{11})\cos\beta\sin\beta + D_{16}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.48}$$

$$g_2 = 2(D_{26} - D_{16})\cos\beta\sin\beta + 2D_{66}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.49}$$

$$g_3 = (D_{22} - D_{12})\cos\beta\sin\beta + D_{26}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.50}$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_xn_y^2, \tag{4.51}$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2n_y - 2D_{26}n_xn_y^2, \tag{4.52}$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1 + n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_xn_y^2 - 2D_{16}n_x^2n_y, \tag{4.53}$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1 + n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2n_y, \tag{4.54}$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11})\cos 2\beta - 4D_{16}\sin 2\beta, \tag{4.55}$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16})\cos 2\beta - 4D_{66}\sin 2\beta, \tag{4.56}$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12})\cos 2\beta - 4D_{26}\sin 2\beta, \tag{4.57}$$

e β é o ângulo entre o sistema de coordenadas global xy e um sistema de coordenadas ns o qual tem seus eixos paralelos aos vetores n e s, normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto Q. As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções R_i e S_i. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi}\left[C_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2\frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{4.58}$$

As derivadas de R_i e S_i são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2r\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\
&\quad 4re_i\sin\theta\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, && (4.59)\\
\frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - e_i^2\sin\theta\right]\times \\
&\quad \left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\
&\quad 4re_i\left(\cos\theta + 2d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, && (4.60)\\
\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} &= 2\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} && (4.61)\\
\frac{\partial^2 R_i}{\partial x\partial y} &= 2d_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} - \\
&\quad 4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, && (4.62)\\
\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} &= 2\left(d_i^2 - e_i^2\right)\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} - \\
&\quad 8d_ie_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}, && (4.63)\\
\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} &= \frac{4\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)}{r\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, && (4.64)\\
\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2\partial y} &= \frac{4\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) + e_i^2\sin\theta\right]}{r\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, && (4.65)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4\left[\left(d_i^2 - e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^2 + e_i^2\right)d_i \sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4\left[d_i\left(d_i^2 - 3e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^4 - e_i^4\right)\sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 - e_i^2 \sin^2\theta\right]}{r^2\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = & -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i}{\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right. \\ & \left. \frac{2e_i^2 \sin\theta\cos\theta}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = & -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)} - \right. \\ & \left. \frac{2e_i^2 \cos^2\theta}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = & -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)} - \right. \\ & \left. \frac{2e_i^2 \cos\theta\left(2d_i\cos\theta + \left(d_i^2 + e_i^2\right)\sin\theta\right)}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = & -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^4 - e_i^4\right)}{\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} - \right. \\ & \left. \frac{2e_i^2 \cos\theta\left[\left(3d_i^2 - e_i^2\right)\cos\theta + 2d_i\left(d_i^2 + e_i^2\right)\sin\theta\right]}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i}{\partial x} = & \, r e_i \sin\theta\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} + \\ & 2r\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)\arctan\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta},\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial y} = r e_i\left(\cos\theta + 2d_i \sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} +$$

$$2r\left[d_i\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)-e_i^2\sin\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.74}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.75}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x\partial y} = e_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+$$

$$2d_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.76}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = 2d_ie_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+$$

$$2\left(d_i^2-e_i^2\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.77}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i\sin\theta}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.78}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2\partial y} = \frac{2e_i\cos\theta}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x\partial y^2} = \frac{2e_i\left[2d_i\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)-\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right)}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.80}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i\left[\left(3d_i^2-e_i^2\right)\cos\theta+2d_i\left(d_i^2+e_i^2\right)\sin\theta\right]}{r\left(\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i\sin\theta\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)}{r^2\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.82}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3\partial y} = \frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{1}{\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta}-\right.$$

$$\left.\frac{2\cos\theta\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2\partial y^2} = -\frac{4e_i\cos\theta\left[d_i\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)+e_i^2\sin\theta\right]}{r^2\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.84}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{(d_i^2+e_i^2)}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. \frac{2\,(d_i^2+e_i^2)\cos\theta\,(\cos\theta + d_i\sin\theta) - 4e_i^2\cos^2\theta}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2}\left\{\frac{d_i\,(d_i^2+e_i^2)}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. \frac{\cos\theta\left[d_i\,(d_i^2 - 3e_i^2)\cos\theta + (d_i^4 - e_i^4)\sin\theta\right]}{\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}. \tag{4.86}$$

Como pode ser visto, as derivadas de R_i e S_i apresentam singularidades fracas ($\log r$), singularidades fortes ($1/r$), e hipersingularidades ($1/r^2$) que precisam de uma atenção especial durante sua integração.

4.3 Elementos Quadráticos

Uma vez que não se tem soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno (4.28) e (4.29), torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno.

Considere a Figura 18 onde o contorno de uma placa é aproximado por uma série de segmentos (elementos de contorno) Γ_i, cujo número e forma são escolhidos para representá-lo adequadamente.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados nós ou pontos nodais e os valores das variavéis associadas a eles são denominados valores nodais. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento.

Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

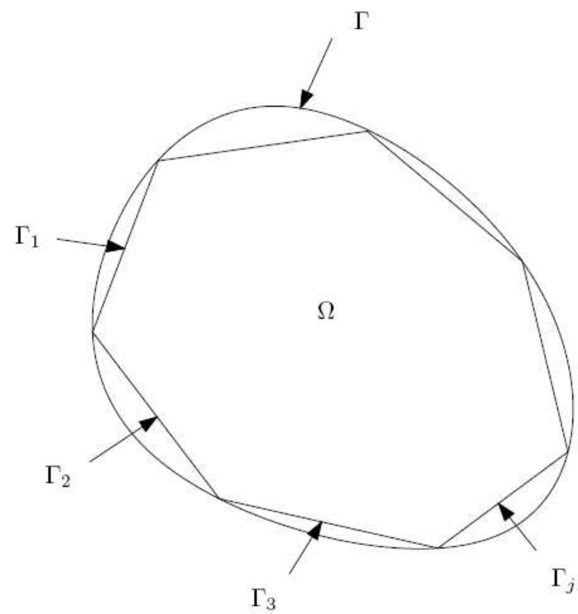

Figura 18: Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e as forças podem ser representados como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.87}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_n \\ m_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.88}$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 19. As funções de forma são dadas por:

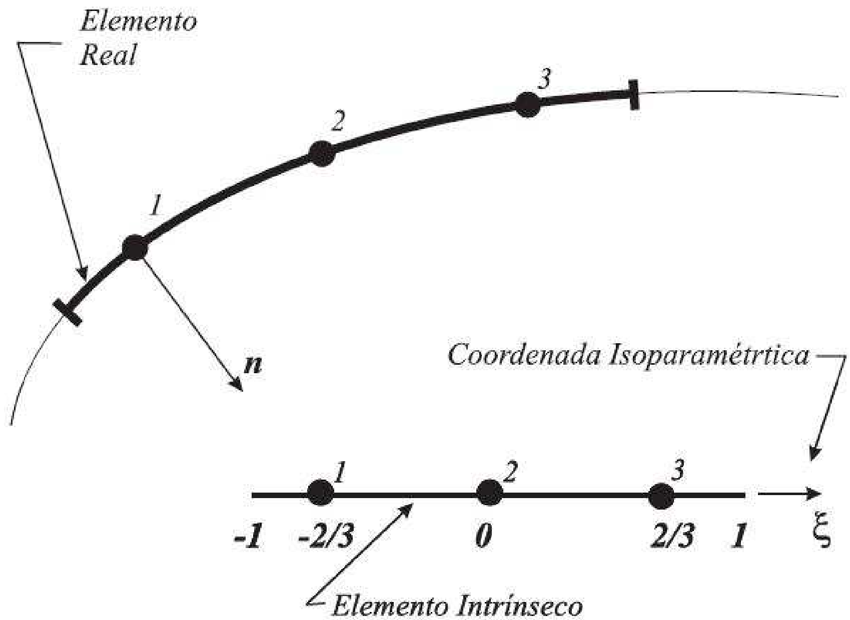

Figura 19: Elemento quadrático descontínuo.

$$N_d^{(1)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4}\right); \tag{4.89}$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)\left(1 + \frac{3}{2}\xi\right); \tag{4.90}$$

$$N_d^{(3)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4}\right). \tag{4.91}$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 19).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.92}$$

porém, utilizando as funções de forma para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi - 1\right); \tag{4.93}$$

$$N_c^{(2)} = \left(1 - \xi^2\right); \tag{4.94}$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi + 1\right). \tag{4.95}$$

4.4 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos de contorno quadráticos e as variáveis de contorno w, $\partial w/\partial n$, m_n e V_n são interpoladas ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (4.28) e (4.29) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} w^{(d)} \\ \\ \frac{\partial w}{\partial n_1}^{(d)} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_e} \left(\left[\begin{array}{cccccc} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{array} \right\} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N_e}\left(\begin{bmatrix} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{Bmatrix}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{N_c}\left(\begin{Bmatrix} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{Bmatrix} w_c^{(i)}\right)+\sum_{i=1}^{N_c}\left(\begin{Bmatrix} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{Bmatrix} R_c^{(i)}\right)+\begin{Bmatrix} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{Bmatrix}. \tag{4.96}$$

Os termos da equação (4.96) são integrais dadas por:

$$h_{11}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{12}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.97}$$

$$h_{13}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{14}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.98}$$

$$h_{15}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{16}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.99}$$

$$h_{21}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{22}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.100}$$

$$h_{23}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{24}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.101}$$

$$h_{25}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{26}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.102}$$

$$g_{11}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(1)} w^* d\Gamma, \qquad g_{12}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.103}$$

$$g_{13}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(2)} w^* d\Gamma, \qquad g_{14}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.104}$$

$$g_{15}^{(i,d)}=\int_{\Gamma_i} N^{(3)} w^* d\Gamma, \qquad g_{16}^{(i,d)}=-\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.105}$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.106}$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.107}$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.108}$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \qquad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.109}$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \qquad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.110}$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \qquad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \tag{4.111}$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \tag{4.112}$$

onde, N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (4.96) requer o uso do jacobiano, já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional e as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e. O jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \tag{4.113}$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi) d\xi. \tag{4.114}$$

A equação matricial (4.96) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, ..., 6N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 6N_e + 1, ..., 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (4.28) e (4.29), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (4.28) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \tag{4.115}$$

onde, $\mathbf{w}_{bn}$ contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, $\mathbf{V}_{bn}$ contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, $\mathbf{P}_{bn}$ contém a integral de domínio para cada nó de contorno, $\mathbf{w}_c$ contém o deslocamento transversal de cada canto, $\mathbf{V}_c$ contém a reação de canto para cada canto, $\mathbf{P}_c$ contém a integral de domínio para cada canto. Os termos $\mathbf{H}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{R}'$ e $\mathbf{G}'$ são matrizes que contém os respectivos termos da equação (4.96) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos $\mathbf{H}''$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{R}''$ e $\mathbf{G}''$ são matrizes que contém os respectivos primeiros termos da equação (4.96) escrita para os N_c cantos.

A equação (4.115) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{GV} + \mathbf{P}, \tag{4.116}$$

onde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \tag{4.117}$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \tag{4.118}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \tag{4.119}$$

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{array} \right\}, \tag{4.120}$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{array} \right\}. \tag{4.121}$$

Para resolver a equação (4.116) é necessário levar em conta as condições de contorno. No caso de formulações dinâmicas, o termo **P** contém as acelerações (termos de inércia). Na formulação transiente, esta aceleração é escrita em função dos deslocamentos em passos de tempo anteriores e no instante atual. Neste trabalho, utiliza-se o método de Houbolt (1950) para descrever a aceleração em termos dos deslocamentos. Este procedimento é descrito na seção 5.3.

4.5 Tensões em Placas Compósitas Laminadas

As lâminas de materias compósitos apresentam um comportamento anisotrópico bem definido, cujas propriedades variam com as direções, pórem permanecem constantes em cada direção. Assim a resistência na direção longitudinal às fibras será a mesma por toda a lâmina, bem como a resistência na direção perpendicular às fibras e na direção normal à lâmina. Essa característica permite que o fabricante tenha controle sobre as propriedades da lâmina através de poucas variáveis. Quando várias lâminas unidirecionais são unidas para formar um laminado, além do surgimento de outras incógnitas, como o número de lâminas e o ângulo das fibras de cada lâmina, observa-se que o comportamento elástico de cada lâmina é distinto das outras.

4.5.1 Tensão e deformação de placas compósitas laminadas

Os laminados são fabricados para agir como um elemento estrutural único. Para atender a essa condição, a união entre duas lâminas do laminado deve ser infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento para que o deslizamento de uma lâmina sobre outra seja evitado e, permitir o deslocamento contínuo ao longo da união (AGARWAL; BROUTMAN, 1990). Assim, pode-se considerar que as deformações são contínuas ao longo da espessura.

Contudo, como cada lâmina é feita de um material, as tensões apresentam descontinuidades ao longo das interfaces do laminado, como mostrado na Figura 20.

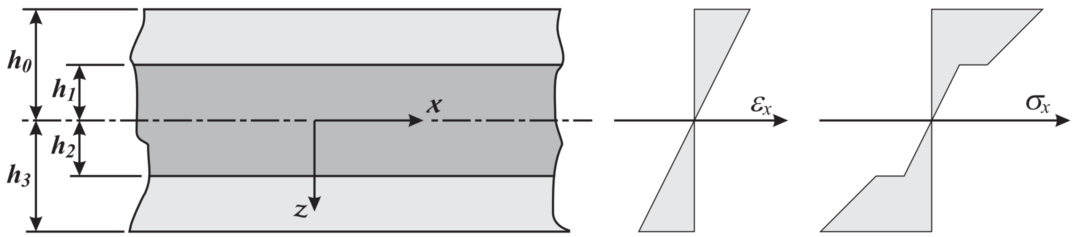

Figura 20: Variação de deformação e da tensão em um laminado hipotético.

As tensões em cada lâmina são dadas pela equação (2.4), e as deformações pela equação (3.17). Conforme pode ser observado na equação (3.17), para se calcular as deformações e, posteriormente, as tensões é necessário se calcular as segundas derivadas do deslocamento transversal w. Estas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x^2} &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q,P)w_{c_i}(P) - \\ &\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x^2}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q,P) + \\ &\int_\Omega g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q,P)d\Omega \end{aligned} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial y^2} &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial y^2}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial y^2}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q,P)w_{c_i}(P) - \\ &\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial y^2}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q,P) + \\ &\int_\Omega g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q,P)d\Omega \end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x \partial y} = \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x \partial y}(Q,P)w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x \partial y}(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q,P)w_{c_i}(P) -$$

$$\int_\Gamma \left[V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x \partial y}(Q,P)\right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial^2 w^*_{c_i}}{\partial x \partial y}(Q,P) +$$

$$\int_\Omega g(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q,P)d\Omega \tag{4.124}$$

onde as segundas derivadas das soluções fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w^*(\rho,\theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi}\left\{C_1\frac{\partial^2 R_1(\rho,\theta)}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 R_2(\rho,\theta)}{\partial x^2} + C_3\left[\frac{\partial^2 S_1(\rho,\theta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2(\rho,\theta)}{\partial x^2}\right]\right\} \tag{4.125}$$

sendo que C_1, C_2 e C_3 são dados pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente; ρ é dado pela equação (4.33) e θ é dado pela equação (4.34).

As outras derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2} = -\left(f_1\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + f_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + f_3\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2}\right), \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2} = -\left(g_1\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + g_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + g_3\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2}\right), \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2} = & -\left(h_1\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^5} + h_2\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^4 \partial y} + h_3\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^3 \partial y^2} + h_4\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^2 \partial y^3}\right) - \\ & \frac{1}{\bar{R}}\left(h_5\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + h_6\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_7\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2}\right).\end{aligned} \tag{4.128}$$

As derivadas para y e xy são dadas por procedimentos similares. Todas as derivadas das soluções fundamentais do deslocamento transversal w podem ser expressas pela combinação linear das derivadas de R_i e S_i. Todas as derivadas de R_i e S_i até a 4ª ordem são dadas pelas equações de (4.59) até (4.86). As derivadas de 5ª ordem são dadas por:

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^5} = \frac{8(\cos\theta + d_i\sin\theta)\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 - 3{e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.129}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^4\partial y} = \frac{8}{R^3}\Bigg\{ & \frac{d_i\cos^3\theta + 3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \\ & + \frac{3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^4 - {e_i}^4\right)\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^3\partial y^2} = \frac{8}{R^3}\Bigg\{ & \frac{\left({d_i}^2 - {e_i}^2\right)\cos^3\theta + 3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \\ & + \frac{3\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^2\partial y^3} = \frac{8}{R^3}\Bigg\{ & \frac{d_i\left({d_i}^2 - 3{e_i}^2\right)\cos^3\theta + 3\left({d_i}^4 - {e_i}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \\ & + \frac{3d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 R_i}{\partial x\partial y^4} = \frac{8}{R^3}\Bigg\{ & \frac{\left({d_i}^4 - 6{e_i}^2{d_i}^2 + {e_i}^4\right)\cos^3\theta + 3d_i\left({d_i}^4 - 2{e_i}^2{d_i}^2 - 3{e_i}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} + \\ & + \frac{3\left({d_i}^2 - {e_i}^2\right)\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta + d_i\left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.133}$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial y^5} = \frac{8}{R^3}\Bigg\{\frac{d_i\left({d_i}^4 - 10{e_i}^2{d_i}^2 + 5{e_i}^4\right)\cos^3\theta + 3\left({d_i}^6 - 5{e_i}^2{d_i}^4 - 5{e_i}^4{d_i}^2 + {e_i}^6\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta + \left({d_i}^2 + {e_i}^2\right)\sin^2\theta + d_i\sin 2\theta\right]^3} +$$

$$+\frac{3d_i\left(d_i{}^2-3e_i{}^2\right)\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta+\left(d_i{}^2-e_i{}^2\right)\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}\Bigg\} \tag{4.134}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^5} = \frac{4ei\sin\theta\left[-3\cos^2\theta-6di\sin\theta\cos\theta+\left(ei^2-3di^2\right)\sin^2\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta+\left(di^2+ei^2\right)\sin^2\theta+di\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.135}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^4\partial y} = \frac{4e_i\left[\cos^3\theta-3\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta\cos\theta-2d_i\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^3\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.136}$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^3\partial y^2} = \frac{4e_i\left[2d_i\cos^3\theta+3\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta-\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^2\sin^3\theta\right]}{R^3\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3} \tag{4.137}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^2\partial y^3} &= \frac{4e_i\cos\theta}{R^3}\left\{\frac{\left(3d_i{}^2-e_i{}^2\right)\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}+\right.\\ &\left.+\frac{3\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin\theta\left[2d_i\cos\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin\theta\right]}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.138}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial x\partial y^4} &= \frac{4e_i}{R^3}\left\{\frac{4d_i(d_i-e_i)(d_i+e_i)\cos^3\theta+3\left(3d_i{}^2-e_i{}^2\right)\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}+\right.\\ &\left.+\frac{6d_i\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.139}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 S_i}{\partial y^5} &= \frac{4e_i}{R^3}\left\{\frac{\left(5d_i{}^4-10e_i{}^2d_i{}^2+ei^4\right)\cos^3\theta+12d_i\left(d_i{}^4-e_i{}^4\right)\sin\theta\cos^2\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}-\right.\\ &\left.-\frac{3\left(e_i{}^2-3d_i{}^2\right)\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^2\sin^2\theta\cos\theta+2d_i\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)^3\sin^3\theta}{\left[\cos^2\theta+\left(d_i{}^2+e_i{}^2\right)\sin^2\theta+d_i\sin 2\theta\right]^3}\right\}\end{aligned} \tag{4.140}$$

5 *Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas*

5.1 Introdução

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental produzirão integrais de domínio que preferencialmente, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio em integral de contorno. Pórem, isto só é possível quando os termos não considerados são funções apenas da geometria (carregamento distribuído, por exemplo). A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial. Estes procedimentos são mais gerais e podem ser empregados para quaisquer termos. No caso deste trabalho, as integrais de domínio provenientes da carga distribuída serão transformadas em integrais de contorno por transformação exata, enquanto que os termos de inércia serão transformados usando o método de integração radial. A força de corpo é representada pela equação abaixo:

.

$$b = g + \varrho h \ddot{w}$$

onde g = carga distribuída e $\varrho h\ddot{w}$ = termo de inércia, sendo h = espessura, ϱ = densidade do material.

5.2 Transformação exata

Como pôde ser observado nas equações (4.28) e (4.29), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio e aos termos de inércia. Estas integrais podem ser calculadas por integração direta, através de células, na área Ω_g (veja Figura 10). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio oriundas das cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 10 sob um carregamento g aplicado em uma área Ω_g. Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear $(Ax + By + C)$ na área Ω_g, a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \tag{5.1}$$

ou

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \tag{5.2}$$

onde, r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g.

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \tag{5.3}$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \tag{5.4}$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 21), a relação entre o comprimento do arco $rd\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

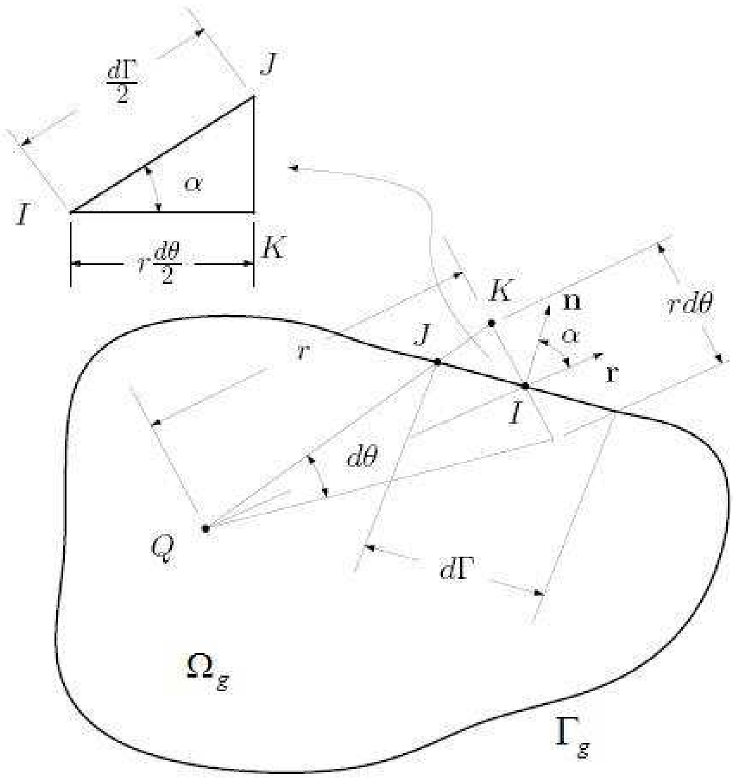

Figura 21: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$\cos\alpha = \frac{r\frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \tag{5.5}$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos\alpha}{r} d\Gamma. \tag{5.6}$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários $\mathbf{n}$ e $\mathbf{r}$, indicados na (Figura 21), podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n}.\mathbf{r}}{r} d\Gamma. \tag{5.7}$$

Finalmente, substituindo a equação (5.7) na equação (5.4), a integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.8}$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos\theta \tag{5.9}$$

e

$$y = \rho \sin\theta, \tag{5.10}$$

a integral F^* pode ser escrita como:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho\cos\theta + B\rho\sin\theta + C) \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)\right] \rho d\rho, \tag{5.11}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são dados pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente. A equação (5.11) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{1}{8\pi} \left\{ (A\cos\theta + B\sin\theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)\right] d\rho + \right. \\ &\left. C \int_0^r \rho \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)\right] d\rho \right\}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (5.12), o termo de domínio da equação (4.29) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Omega = \int_\theta G^* d\theta, \tag{5.13}$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}\rho d\rho \tag{5.14}$$

ou

$$G^* = \frac{1}{8\pi}\left\{(A\cos\theta + B\sin\theta)\int_0^r \rho^2\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right] d\rho + C\int_0^r \rho\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right] d\rho\right\}. \tag{5.15}$$

Como pode ser visto, as equações (5.12) e (5.15) não são dependentes de θ. Por integração analítica, podemos obter:

$$\begin{aligned}\int_0^r R_i\rho d\rho \quad = \quad & \frac{r^4}{16}\left\{-16e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\sin\theta\,(\cos\theta + d_i\sin\theta) - \right.\\ & \left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\\ & \left.\left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + \left(-1 + d_i^2 - e_i^2\right)\cos 2\theta - 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r S_i\rho d\rho \quad = \quad & \frac{r^4}{16}\left\{2e_i\left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\right.\\ & \sin\theta\,(\cos\theta + d_i\sin\theta) + 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\times\\ & \left.\left[1 + d_i^2 - e_i^2 + \left(1 - d_i^2 + e_i^2\right)\cos 2\theta + 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\int_0^r R_i\rho^2 d\rho = \frac{r^5}{50}\left\{-40e_i \arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\sin\theta\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right) - \left[-17+5\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2\right)}{a^2}\right]\times \left[-1-d_i^2+e_i^2+\left(-1+d_i^2-e_i^2\right)\cos 2\theta-2d_i\sin 2\theta\right]\right\}, \tag{5.18}$$

$$\int_0^r S_i\rho^2 d\rho = \frac{r^5}{50}\left\{2e_i\left[-17+5\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2\right)}{a^2}\right]\times \sin\theta\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)+5\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\times \left[1+d_i^2-e_i^2+\left(1-d_i^2+e_i^2\right)\cos 2\theta+2d_i\sin 2\theta\right]\right\}, \tag{5.19}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x}\rho d\rho = \frac{2r^3}{9}\left\{-6e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\sin\theta+ \left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2\right)}{a^2}\right]\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\right\}, \tag{5.20}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y}\rho d\rho = \frac{2r^3}{9}\left\{-6e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+2d_i\sin\theta\right)+ \left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2\right)}{a^2}\right]\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}, \tag{5.21}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho d\rho = \frac{r^3}{9}\left\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta+\right.$$
$$\left. 6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\right\}, \tag{5.22}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y}\rho d\rho = \frac{r^3}{9}\left\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\right.$$
$$\left.(\cos\theta+2d_i\sin\theta)-6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}, \tag{5.23}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4}\left\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\sin\theta+\right.$$
$$\left.\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\right\}, \tag{5.24}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4}\left\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+2d_i\sin\theta\right)+\right.$$
$$\left.\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}, \tag{5.25}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8}\left\{e_i\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta\ +\right.$$

$$4 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) \Bigg\}, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho &= \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[-5 + 2 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 \right)}{a^2} \right] \right. \\ & \left. (\cos\theta + 2d_i \sin\theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left[d_i \cos\theta + \left(d_i^2 - e_i^2 \right) \sin\theta \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Embora neste trabalho as cargas de domínio são consideradas como linearmente distribuídas, o procedimento apresentado nesta seção pode ser estendido para outras cargas de ordem superior.

O último termo da equação (4.122) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar ao procedimento mostrado na seção 5. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_\theta H^* d\theta, \tag{5.28}$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho \tag{5.29}$$

ou

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{8\pi} \left\{ (A\cos\theta + B\sin\theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho + \right. \\ & \left. + C \int_0^r \rho \left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right\} \end{aligned} \tag{5.30}$$

As integrais das segundas derivadas de R_i e S_i que aparecem na equação (5.30), tanto as multiplicadas por ρ quanto por ρ^2, podem ser resolvidas analiticamente e são dadas por:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2}\rho d\rho = r^2\left\{\log\left[\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]-1\right\} \tag{5.31}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2}\rho^2 d\rho = \frac{2}{9}r^3\left\{3\log\left[\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]-2\right\} \tag{5.32}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2}\rho d\rho = r^2\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right] \tag{5.33}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2}\rho^2 d\rho = \frac{2}{3}r^3\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right] \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2}\rho d\rho &= r^2\left\{\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]-\right.\\&\left.-4d_ie_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2}\rho^2 d\rho &= \frac{2}{9}r^3\left\{\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-2\right]-\right.\\&\left.-12d_ie_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2}\rho d\rho &= r^2\left\{\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\&\left.+d_ie_i\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2}\rho^2 d\rho &= \frac{2}{9}r^3\left\{3\left({d_i}^2-{e_i}^2\right)\arctan\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]+\right.\\&\left.+d_ie_i\left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-2\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x\partial y}\rho d\rho &= r^2\left\{d_i\left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2\sin\theta^2+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)-1\right]-\right.\\&\left.-2e_i\tan^{-1}\left[\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y}\rho^2 d\rho = \frac{2}{9}r^3 \left\{6e_i \tan^{-1}\left[\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}\right] + \right.$$
$$\left. + d_i \left[2 - 3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2\right)}{a^2}\right)\right]\right\} \tag{5.40}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y}\rho d\rho = \frac{1}{2}r^2 \left\{2d_i \arctan\left[\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}\right] + \right.$$
$$\left. + e_i \left[\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2\right)}{a^2}\right) - 1\right]\right\} \tag{5.41}$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y}\rho^2 d\rho = \frac{1}{9}r^3 \left\{6d_i \arctan\left[\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}\right] + \right.$$
$$\left. + e_i \left[3\log\left(\frac{r^2\left({e_i}^2 \sin\theta^2 + (\cos\theta + d_i \sin\theta)^2\right)}{a^2}\right) - 2\right]\right\} \tag{5.42}$$

As tensões são então calculadas usando o procedimento apresentado na seção 2.4, pela equação (2.7).

5.3 Método da integração radial - RIM

O RIM aproxima a força de corpo b como uma soma de M produtos de funções de aproximação f^m e coeficientes a determinar γ^m, ou seja:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m f^m \tag{5.43}$$

para as funções de aproximação baseadas puramente em funções de base radiais, ou:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m f^m + ax + by + c \tag{5.44}$$

e

$$\sum_{m=1}^{M} \gamma^m x_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m y_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m = 0 \tag{5.45}$$

para as funções de aproximação expandidas por polinômios. A integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita como:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m w^*(Q,P)\rho d\rho d\theta \tag{5.46}$$

ou

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m w^*(Q,P)\rho d\rho d\theta, \tag{5.47}$$

onde r é o valor de ρ em um ponto no contorno Γ_g (ver Figura 21):

Definindo $F^m(Q)$ como:

$$F^m(Q) = \int_0^r f^m w^*(Q,P)\rho d\rho, \tag{5.48}$$

pode-se escrever:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\theta} F^m(Q) d\theta. \tag{5.49}$$

Substituindo a equação (5.7) na equação (5.49), a equação integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita na seguinte integral de contorno dada por:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{F^m(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.50}$$

Seguindo procedimentos similares aos usados para obter a equação (5.50), o termo de domínio da equação pode ser escrito assim:

$$P_2(Q) = \int_{\Omega_g} b \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial n_1} d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{G^m(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma, \tag{5.51}$$

onde

$$G^m(Q) = \int_0^r f^m \frac{\partial w^*}{\partial n_1} \rho d\rho. \tag{5.52}$$

Assim, a integral de domínio da equação (4.96) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \sum_{i=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} p_1^{(d,m)} \\ p_2^{(d,m)} \end{array} \right\}, \tag{5.53}$$

onde

$$p_1^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{F^{(d,m)}}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma, \qquad p_2^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{G^{(d,m)}}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.54}$$

ou, na forma matricial, como:

$$P(Q) = \left[\begin{array}{cccc} \int_\Gamma \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma & \int_\Gamma \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma & \ldots & \int_\Gamma \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{array} \right\}. \tag{5.55}$$

Para calcular γ_m, é necessário considerar a força de corpo em M pontos do domínio e do contorno. No caso deste trabalho, estes pontos são os nós do contorno e alguns pontos internos. Assim, a equação (5.43) pode ser escrita como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\gamma \tag{5.56}$$

e γ pode ser calculado como:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}, \tag{5.57}$$

Substituindo (5.57) na equação (5.55), tem-se:

$$P(Q) = \left[\begin{array}{cccc} \int_\Gamma \frac{F_1(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \int_\Gamma \frac{F_2(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \ldots & \int_\Gamma \frac{F_M(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma \end{array} \right] \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \tag{5.58}$$

Escrevendo a equação (5.58) para todos os pontos do domínio, isto é, todos os nós do contorno e pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{b}, \tag{5.59}$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{P}$ é um vetor que contém os valores de $P(Q)$ em todos os pontos fontes Q e $\mathbf{R}$ é uma matriz que contém todos os valores das integrais (5.58) quando esta equação é escrita para todos os pontos fontes Q.

As funções de aproximação f^m serão funções de base radial escritas em termos de R, onde R é a distância entre o centro S da função de base radial e o ponto de integração P. Da Figura 22, pode-se escrever:

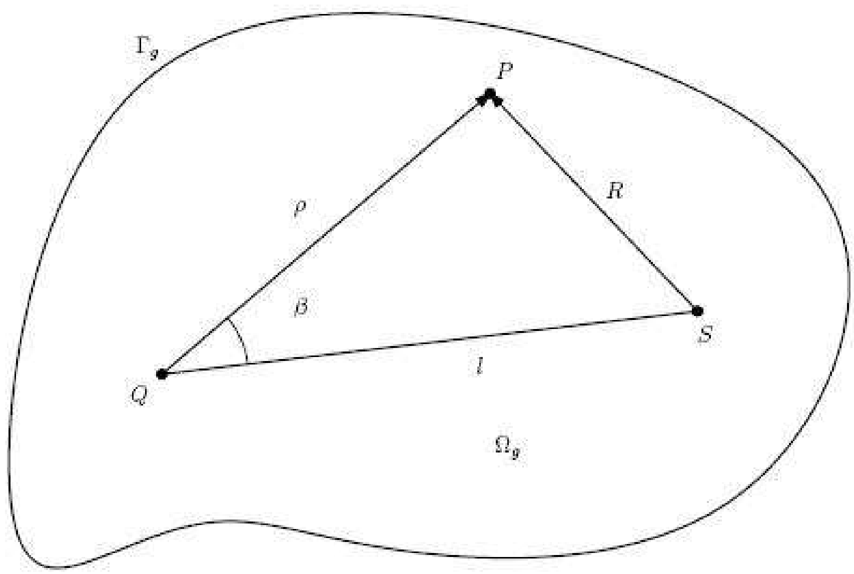

Figura 22: Posição dos pontos no domínio.

$$R = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\beta}, \tag{5.60}$$

onde l é a distância entre os pontos S e Q e β é o ângulo entre ρ e l conforme observado na (Figura 22).

O custo computacional do RIM é maior que do DRM uma vez que as integrais dadas pelas equações (5.48) e (5.52) não podem ser calculadas analiticamente para a maioria das funções de aproximação. Por exemplo, se $f^m = R$, a equação (5.48) é escrita como:

$$F^m(Q) = \int_0^r c_1\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\beta}\,\log(c_2\rho)\rho^3 d\rho, \tag{5.61}$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes que não dependem de ρ. A integral da equação (5.61) não pode ser calculada analiticamente. O cálculo numérico desta integral torna mais alto o custo computacional do RIM, uma vez que no DRM não se faz nenhuma integração numérica na transformação da integral de domínio em integrais de contorno. A vantagem mais interessante do RIM sobre o DRM para formulações que envolvam materiais anisotrópicos é que as funções de aproximação f_m podem ser escolhidas livremente, pois o RIM não usa as soluções particulares $\hat{w}_m$ obtidas da equação diferencial (3.25).

Estas soluções particulares são necessárias no DRM, o que restringe a escolha das funções de aproximação devido a complexidade da equação (3.25).

Neste trabalho foi usada como função de aproximação de base radial denominada spline de placas finas que é dada por:

$$f_{m_3} = R^2\log(R). \tag{5.62}$$

Alguns trabalhos da literatura (GOLBERG; CHEN; BOWMAN, 1999) mostraram que esta função possui uma alta taxa de convergência quando usadas na forma aumentada por polinômios, ou seja, quando a aproximação da força de corpo é dada pelas equações (5.44) e (5.45). Neste caso ela é chamada de função *spline* de placas finas aumentada, ou ATPS (*augmented thin plate spline*).

5.4 Problemas transientes

O método dos elementos de contorno de integração radial será aplicados ao cálculo dos campos de deslocamentos para problemas transientes no domínio do tempo. A integração no tempo será realizada utilizando o método proposto por Houbolt (1950) por já ter sido mostrado por Loeffler e Mansur (1987) que o método de Houbolt é o mais apropriado para se usar na integração direta no tempo junto com o método dos elementos de contorno de integração radial. Uma importante característica do método de Houbolt é que ele tem um alto amortecimento numérico. Este amortecimento torna os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno de integração radial mais suaves que os obtidos por outras formulações do método dos elementos de contorno aplicadas à elasto-dinâmica (FEDELINSK; ALIABADI; ROOKE, 1996) e (CHIRINO et al., 1994). Porém, o amortecimento numérico pode ser reduzido usando-se passos de tempo menores. Algumas vezes, para se conseguir reduzir o passo de tempo e obter uma maior precisão dos resultados é necessário refinar a malha ou aumentar o número de nós internos.

Considere que as únicas forças de corpo presente num corpo de domínio Ω e contorno Γ são devido ao campo de aceleração $\ddot{\mathbf{w}}$, ou seja:

$$\mathbf{b} = \varrho h \ddot{\mathbf{w}}. \tag{5.63}$$

O esquema de Houbolt está enquadrado entre os métodos de múltiplos passos, pois o mesmo não se utiliza apenas dos valores do passo anterior para determinar os valores atuais e sim de três outros passos passados. Para se proceder a integração no tempo durante um período $\mathcal{T}$, este período é dividido em N intervalos iguais $\Delta\tau$ ($\mathcal{T} = N\Delta\tau$). A aceleração em $\tau + \Delta\tau$ é aproximada pela expressão de diferenças finitas:

$$\ddot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau^2}\left(2\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} - 5\mathbf{w}_{\tau} + 4\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau} - \mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}\right). \tag{5.64}$$

onde:

$\tau + \Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo atual;

$\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo atual $\tau + \Delta\tau$;

$\tau - \Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo τ;

$\tau - 2\Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo $\tau - \Delta\tau$;

$\Delta\tau \rightarrow$ intervalo de tempo entre passos consecutivos de tempo.

Desde que $\mathbf{w}_\tau$, $\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau}$ e $\mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}$ sejam conhecidos, pode-se calcular $\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau}$ através de um sistema, da forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{y}_{\tau+\Delta\tau} \tag{5.65}$$

onde $\mathbf{x}_{\tau+\Delta\tau}$ é o vetor de variáveis desconhecidas e $\mathbf{y}_{\tau+\Delta\tau}$ é o vetor de variáveis conhecidas, sendo que seus elementos são calculados a partir dos valores de $\mathbf{w}$ dos passos de tempo anteriores e das condições de contorno no tempo $\tau + \Delta\tau$.

Uma vez que o sistema (5.65) é resolvido, o vetor $\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau}$ é conhecido e a solução pode então ser encontrada para o próximo passo de tempo.

6 Resultados numéricos

6.1 Introdução

São apresentados a seguir alguns resultados obtidos com as rotinas implementadas. Esses resultados são comparados com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e método sem malhas Petrov-Galerkin (meshless Petrov Galerkin method, MLPG) proposto por Sladek et al. (2007).

6.2 Aplicação do RIM na análise transiente de placas ortotrópicas

Nesta seção, resultados numéricos para momentos são apresentados para placas sob cargas dependentes do tempo. Os valores obtidos em um ponto da placa são comparados com resultados disponíveis na literatura.

6.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa apoiada (Figura 23) carregada no instante $\tau_o = 0\,\mathrm{s}$ por uma carga $q = 2,07 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}$ tipo degrau (Figura 24). A placa é ortotrópica e apresenta as seguintes propriedades e dimensões: $E_2 = 6895$ MPa, $E_1 = 2E_2$, $G_{12} = 2651,9$ MPa, $\nu_{12} = 0,3$, $\rho = 7166\ \mathrm{kg/m^3}$, $a = 254\,\mathrm{mm}$ e espessura $h = 12,7$ mm. Este problema é equivalente ao problema proposto por Sladek et al. (2007) que foi analisado usando o MPLG. O momento fletor estático do nó central da placa é dado por $m_x^{stat} = 9,54 \times 10^3\ \mathrm{N.m/m}$ e o fator de normalização do tempo por $t_o = a^2(\sqrt{\rho h/D_{22}})/4$.

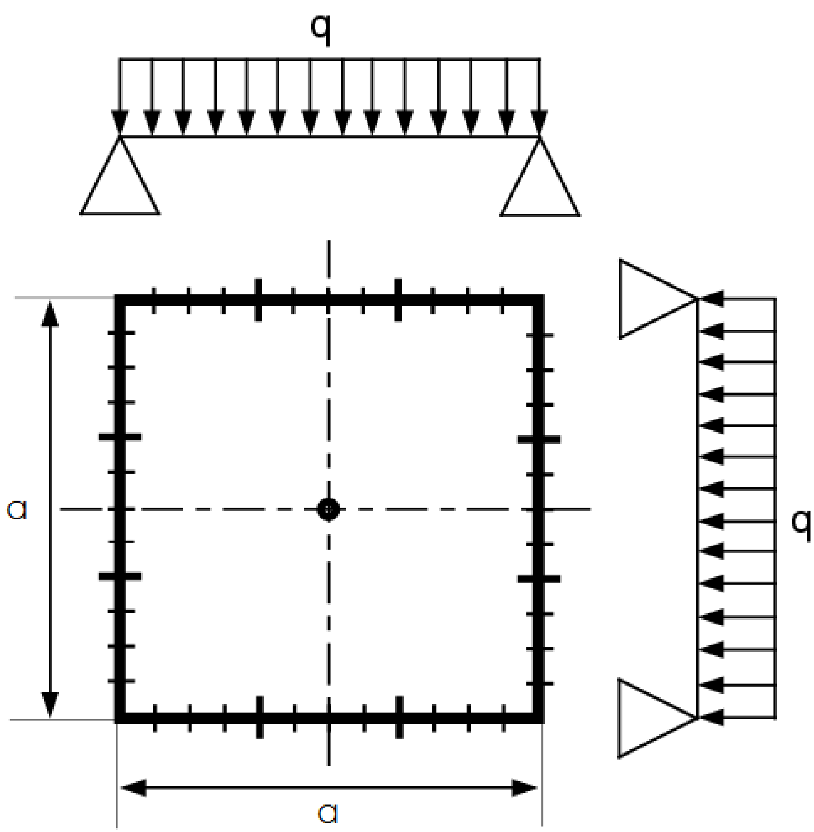

Figura 23: Placa quadrada ortotrópica apoiada.

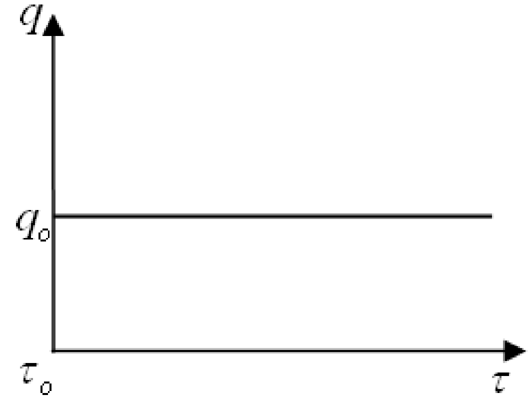

Figura 24: Carregamento tipo função degrau.

6.2.1.1 Sensibilidade ao número de pontos internos

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento, passos de tempo $\Delta\tau = 3,9447 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado utilizando-se 1, 9 e 25 pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 25 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo.

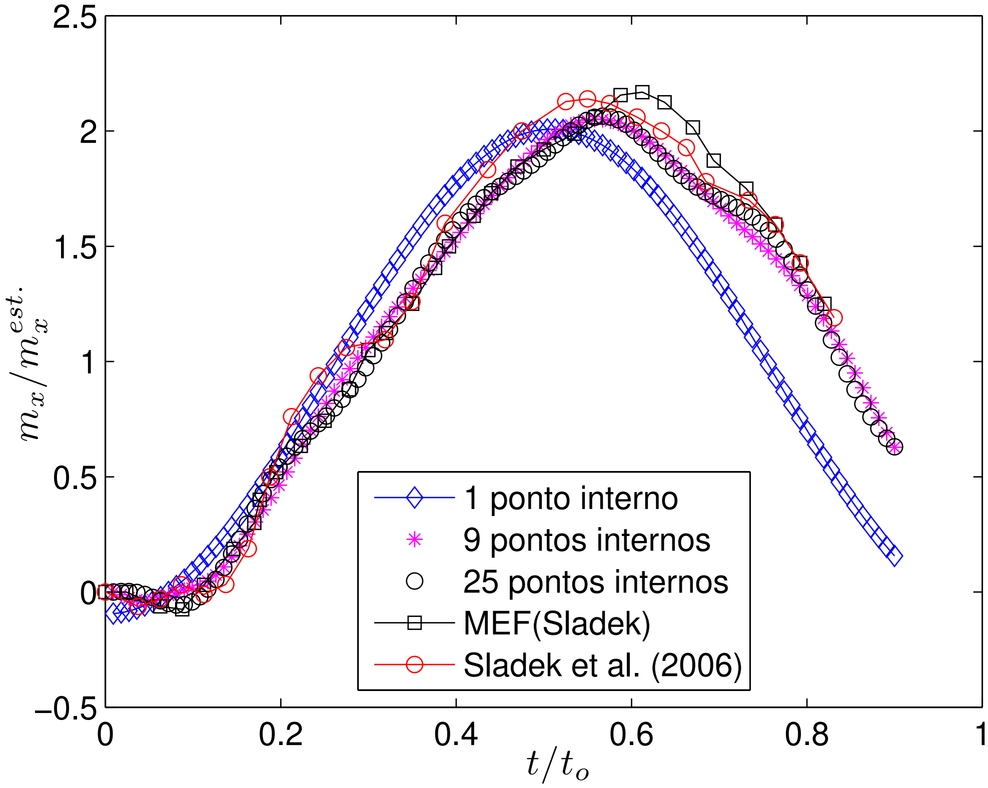

Figura 25: Malha com pontos internos na placa.

Pode-se observar que o uso de pontos internos são necessários para se obter uma maior precisão dos resultados. Neste caso, o resultado obtido com 25 pontos internos foi mais próximo da solução de elementos finitos e do MLPG que os resultados com 1 e 9 pontos internos. Entretanto, os resultados com 9 e 25 pontos internos encontram-se bastante próximos, o que indica uma convergência dos resultados. Os resultados com um ponto interno se mostrou excessivamente suave e longe dos demais resultados. Ou seja, o número de pontos internos foi insuficiente para a modelagem adequada deste problema.

6.2.1.2 Sensibilidade ao número de elementos

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 3,9447 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado utilizando-se 8, 12 e 16 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 26 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo.

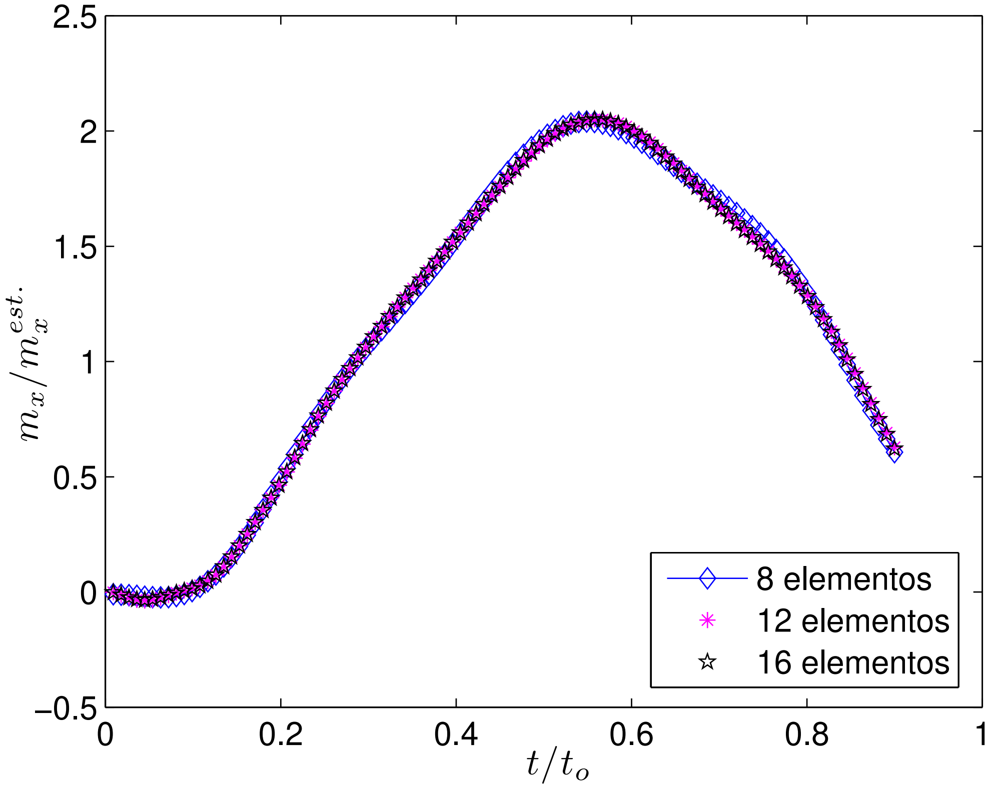

Figura 26: Momento fletor do nó central de placa em função do tempo sujeita a variação do número de elementos.

Conforme observado, as curvas apresentaram-se justapostas, o que indica que apenas 2 elementos por lados já são suficientes para a modelagem adequada deste problema.

6.2.1.3 Sensibilidade ao passo de tempo

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado utilizando-se passos de tempo iguais a $\Delta\tau = 1,3149 \times 10^{-4}$ s, $\Delta\tau = 3,9447 \times 10^{-5}$ s e $\Delta\tau = 1,9723 \times 10^{-5}$ s. A Figura 27 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo.

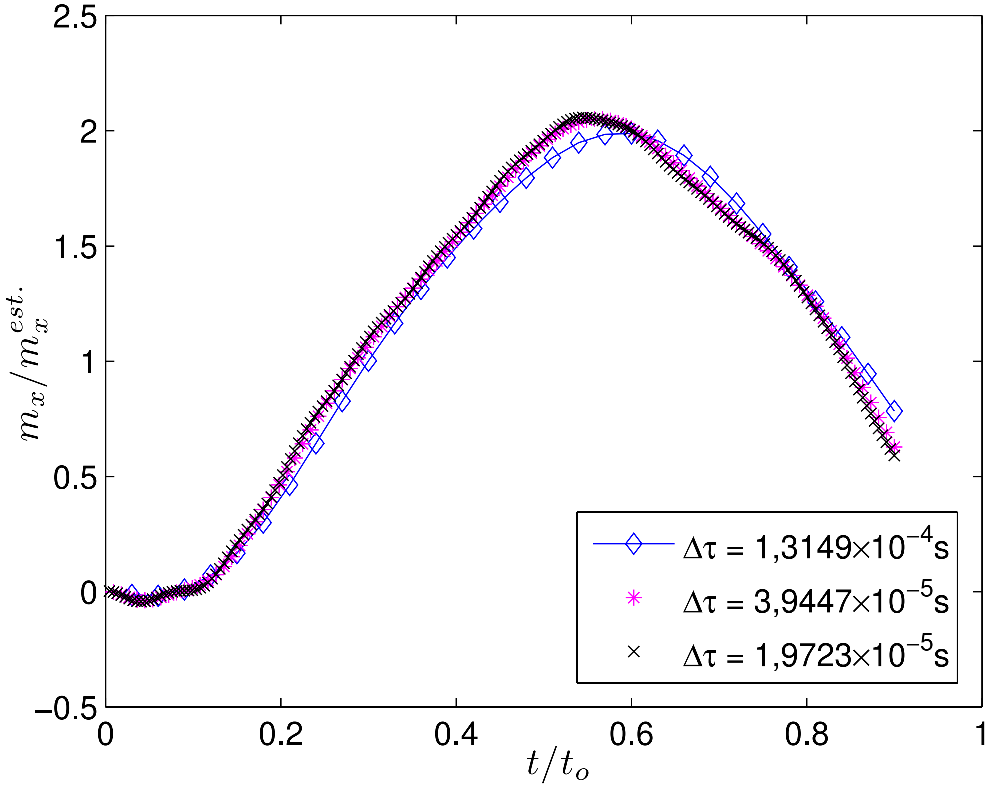

Figura 27: Momento fletor do nó central de placa sujeito a variação de passo de tempo.

Neste caso, pode-se observar que houve pouca variação dos resultados quando se usou o passo de tempo $\Delta\tau = 1,9723 \times 10^{-5}$ s, entretanto, para o passo de tempo $\Delta\tau = 1,3149 \times 10^{-4}$ s o resultado mostrou-se muito suave. Isto indica que passos de tempo excessivamente grandes tendem a suavisar o resultado, existindo um tamanho ótimo a partir do qual passos de tempo menores variam pouco os resultados.

6.2.1.4 Comportamento do momento em um intervalo de tempo maior

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 3,9447 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado utilizando 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 28 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo.

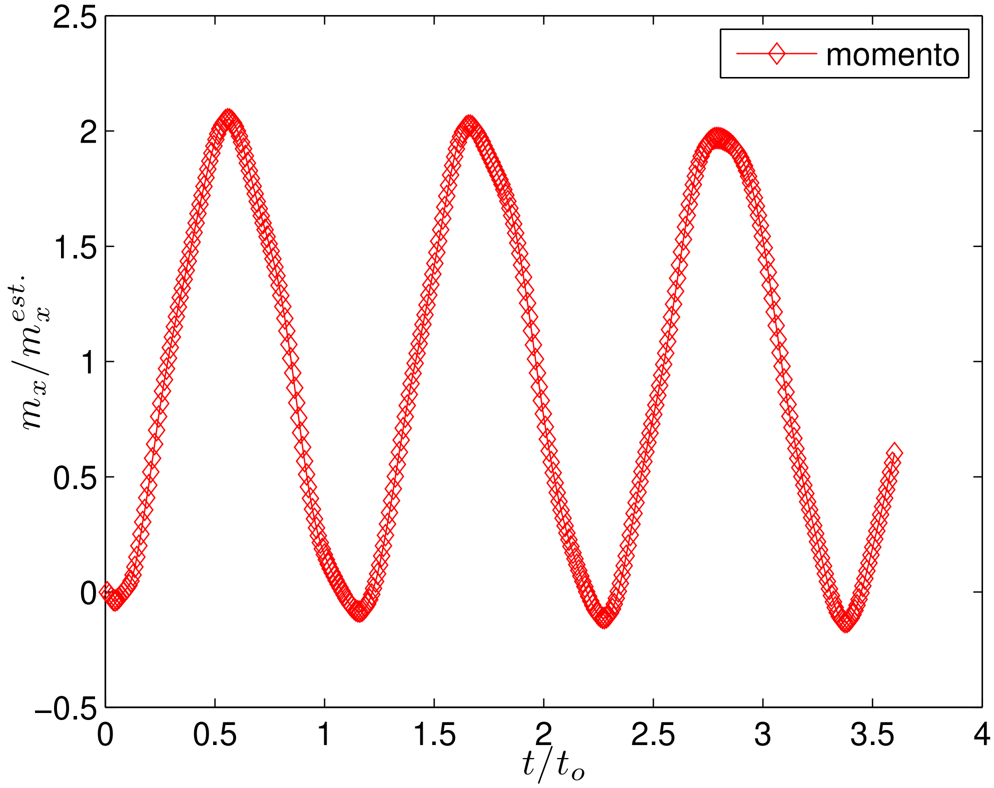

Figura 28: Momento fletor do nó central da placa.

Observa-se que a curva apresentou um leve amortecimento dos picos, o que pode ser atribuído ao amortecimento numérico do método de Houbolt. Entretanto, é necessário uma análise mais detalhada e um número maior de problemas para entender melhor as características do método de Houbolt. Para os objetivos deste trabalho, o resultado foi bastante satisfatório.

Seguindo o mesmo procedimento feito para o momento, realizou-se o cálculo do deslocamento do nó central da placa para o mesmo intervalo de tempo. A Figura 29 mostra o deslocamento do nó central da placa em função da variação de tempo.

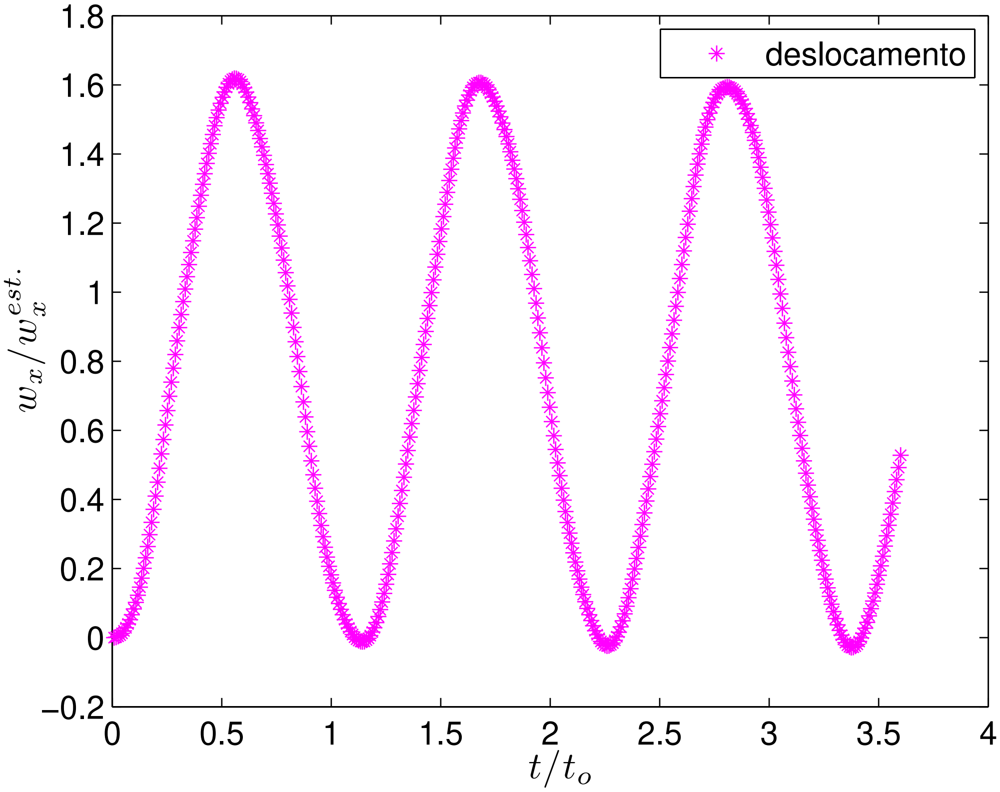

Figura 29: Deslocamento vertical do nó central da placa.

De acordo com a Figura 29, observou-se que o deslocamento apresentou um bom comportamento ao longo do intervalo de tempo, variando muito pouco a forma e a amplitude dos ciclos.

6.2.2 Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa engastada (Figura 30) carregada no instante $\tau_o = 0\,\mathrm{s}$ por uma carga tipo degrau $q = 2,07 \times 10^6$ N/m^2 (Figura 24). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da Seção 6.2.1. A única diferença é a condição de contorno. O momento fletor estático do nó central da placa é dado por $m_x^{stat} = 4,06 \times 10^3$ N.m/m e o fator de normalização do tempo por $t_o = a^2(\sqrt{\rho h/D_{22}})/4$.

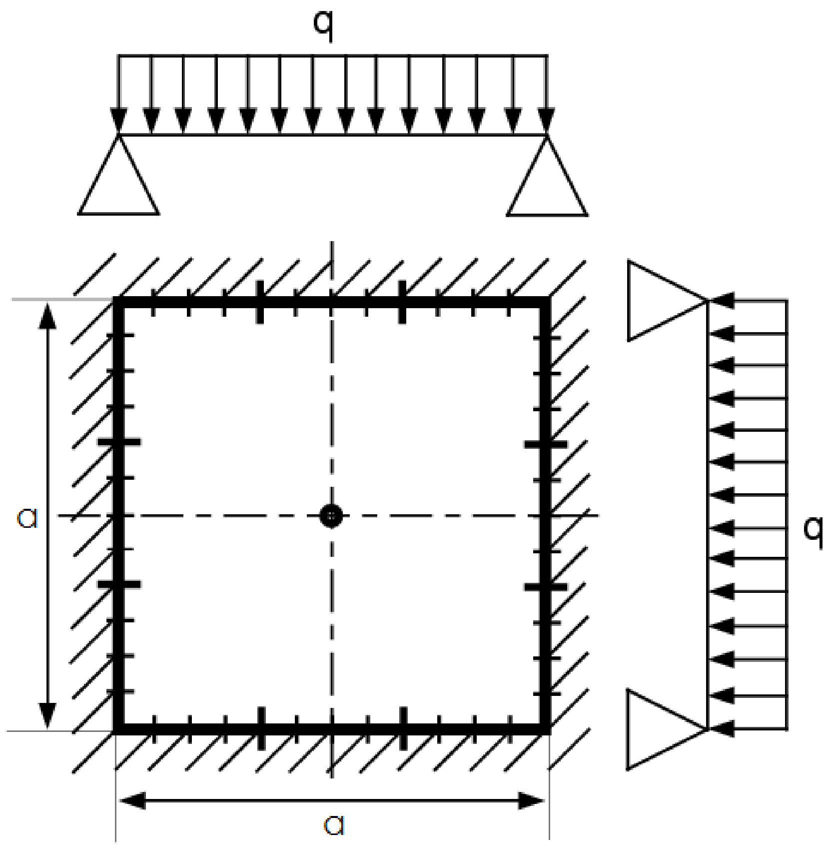

Figura 30: Placa quadrada ortotrópica engastada.

6.2.2.1 Sensibilidade ao número de pontos internos

A placa foi discretizada usando 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e passo de tempo $\Delta\tau = 2,1915 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado utilizando-se 1, 9 e 25 pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 31 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo. Além disso, são mostrados nesta figura os resultados usando o MLPG e elementos finitos apresentado por Sladek et al. (2007).

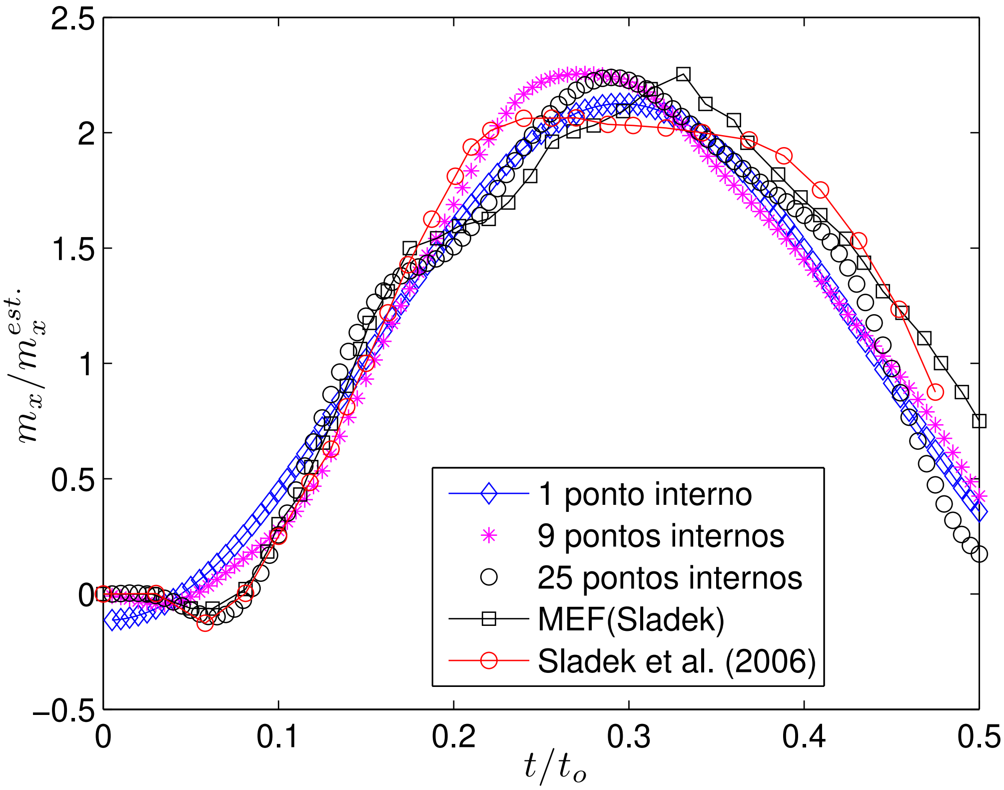

Figura 31: Momento fletor do nó central da placa em função do tempo, variando-se o número de pontos internos.

Pode-se observar que pontos internos são necessários para se obter uma maior precisão dos resultados, conforme mostrado na Figura 31. Com apenas 1 ponto interno existe uma diferença expressiva em relação aos demais resultados. O resultado com 25 pontos internos mostrou-se mais próximo das soluções obtidas por Sladek et al. (2007). O resultado com 9 pontos internos teve uma concordância boa com os resultados da literatura.

6.2.2.2 Sensibilidade ao número de elementos

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 2,1915 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analizado utilizando-se 8, 12 e 16 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 32 mostra o momento fletor do nó central da placa em função do tempo.

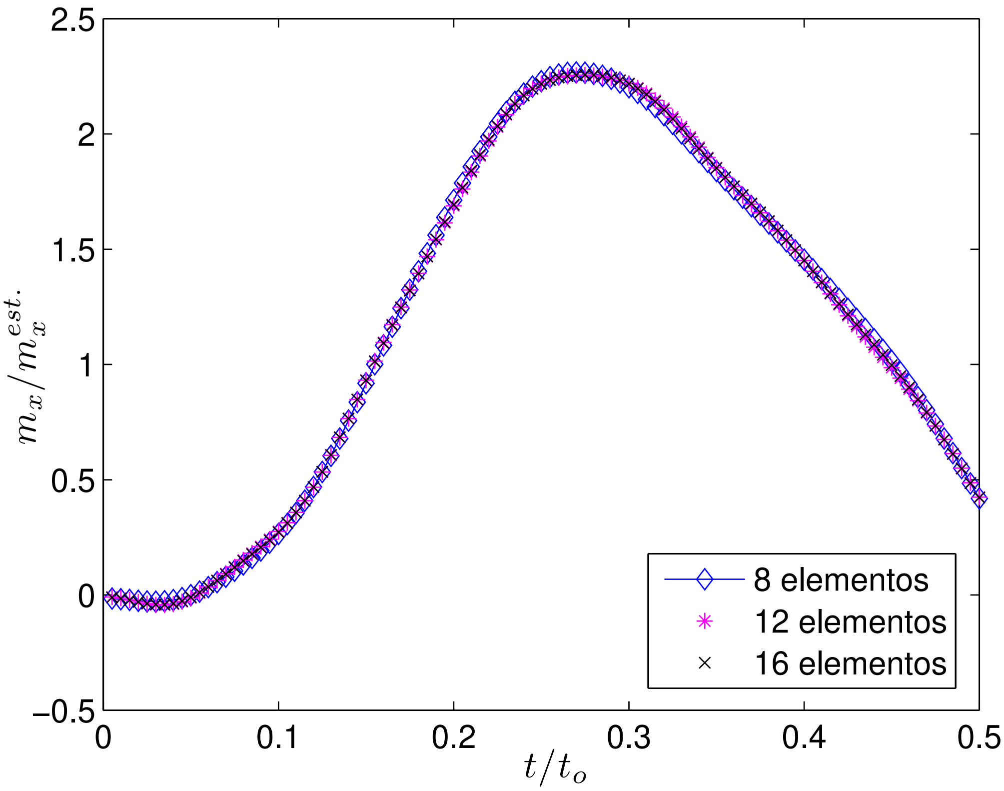

Figura 32: Momento fletor do nó central da placa em função do tempo, variando-se o número de elementos.

Pode-se observar na Figura 32 que a discretização do contorno da placa pouco afetou nos resultados, da mesma forma que no caso da placa apoiada analisada anteriormente.

6.2.2.3 Sensibilidade ao passo de tempo

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado utilizando-se passos de tempo iguais a $\Delta\tau = 7,3049 \times 10^{-5}$ s, $\Delta\tau = 2,1915 \times 10^{-5}$ s e $\Delta\tau = 1,0957 \times 10^{-5}$ s. A Figura 33 mostra o momento fletor do nó A da placa em função do tempo.

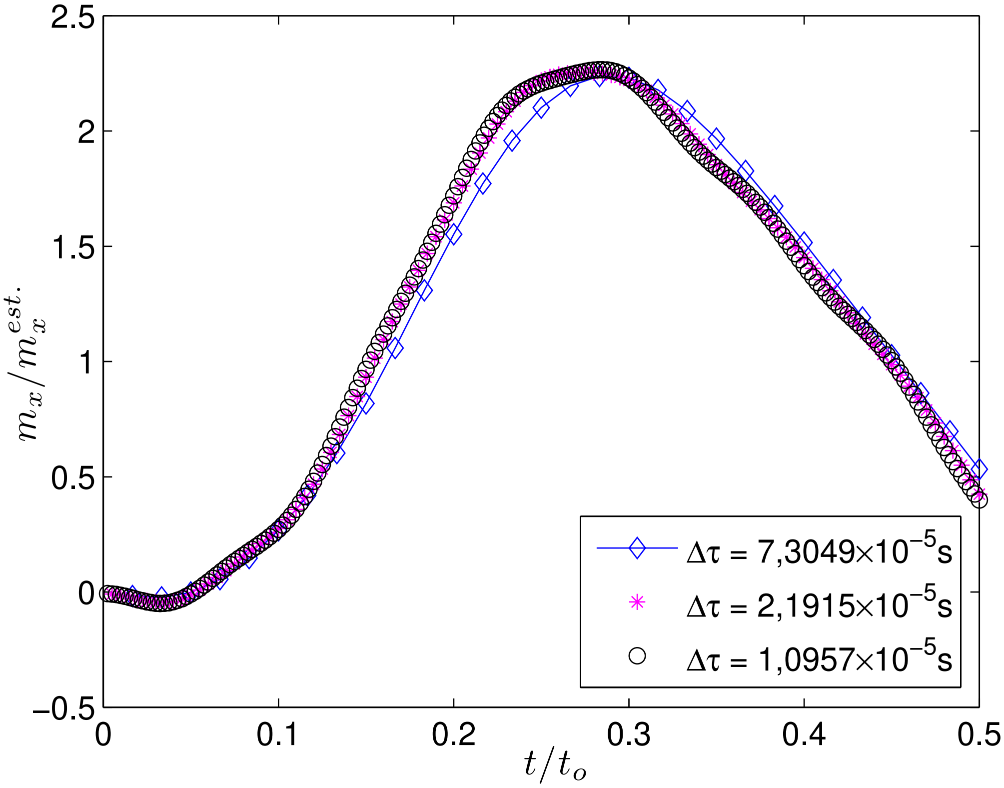

Figura 33: Momento fletor do nó central de placa sujeito a variação de passo de tempo.

Conforme observado na Figura 33, houve pouca variação dos resultados quando se usou o passo de tempo $\Delta\tau = 7,3049 \times 10^{-5}$ s e $\Delta\tau = 2,1915 \times 10^{-5}$ s . Entretanto, para o passo de tempo $\Delta\tau = 1,0957 \times 10^{-5}$ s, o resultado mostrou-se bastante suave, conforme notado no exemplo anterior.

6.2.3 Placa engastada-livre sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa engastada-livre (Figura 34) carregada no instante $\tau_o = 0$ s por uma carga tipo degrau $q = 2,07 \times 10^6$ N/m^2 (Figura 24). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da Seção 6.2.1.

A placa foi discretizada usando-se 20 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento, passo de tempo $\Delta\tau = 1,1667 \times 10^{-4}$ s e 25 pontos internos uniformemente distribuídos. A Figura 35 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

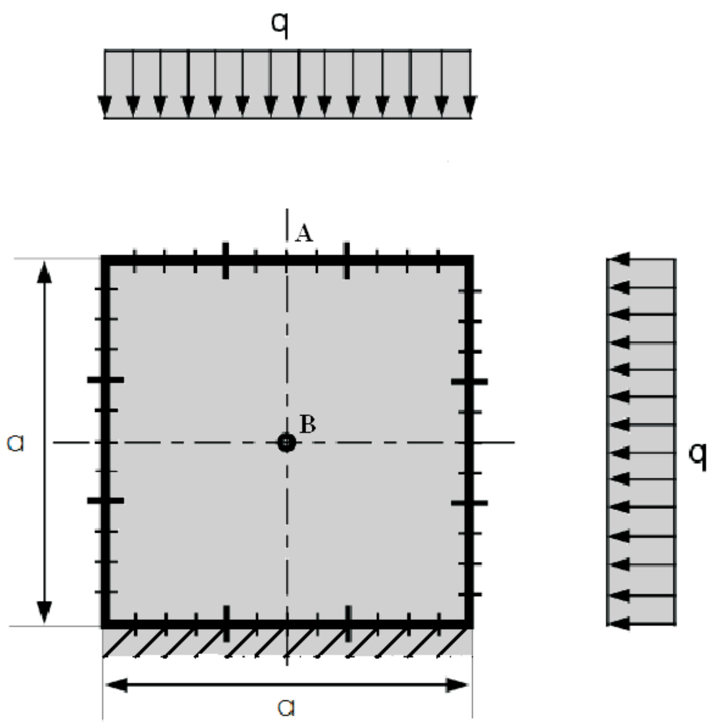

Figura 34: Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados.

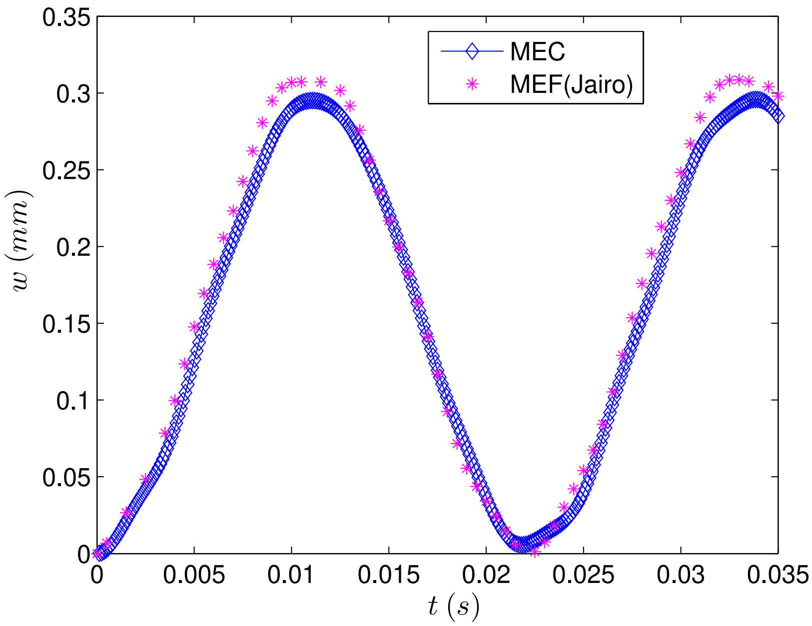

Figura 35: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo.

Pode-se observar na Figura 35 que os resultados mostraram-se próximo da solução de elementos finitos.

A Figura 36 mostra o momento fletor do nó central da placa da placa em função do tempo. Pode-se observar o que resultado se manteve estável durante todo o intervalo analisado.

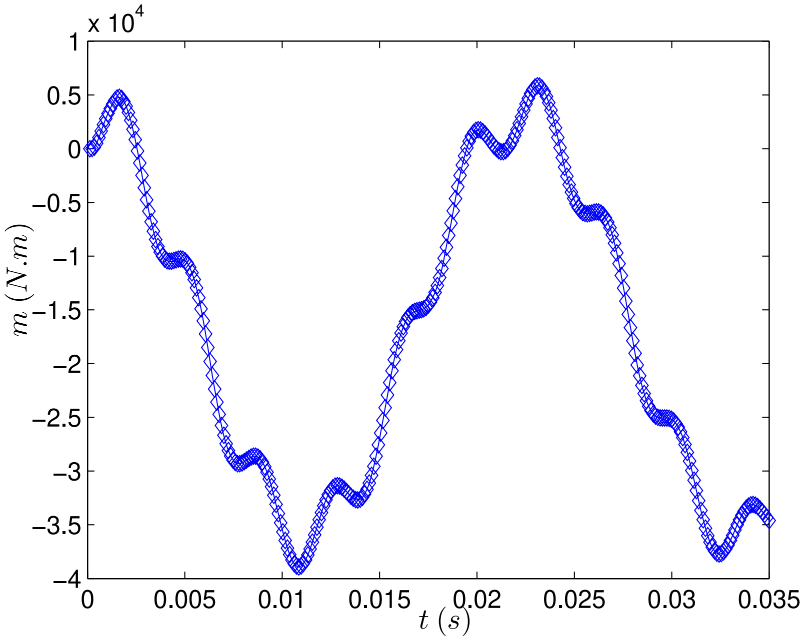

Figura 36: Momento fletor do nó central da placa com o tempo.

—-

6.2.3.1 Distribuição de tensões ao longo da espessura da placa simplesmente apoiada

Considere uma placa de material compósito laminado simétrico de dez camadas com sequência de empilhamento $[45^{\circ}/-45^{\circ}/45^{\circ}/-45^{\circ}/45^{\circ}]_S$. Todas as lâminas tem espessuras iguais. A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos, passo de tempo igual $\Delta\tau = 8,2667 \times 10^{-4}$ s e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A espessura total da placa é $h = 0.001$ m e as propriedades do material são: $E_L = 207$ GPa, $E_T = 5,2$ GPa, $G_{LT} = 3,1$ GPa e $\nu_{LT} = 0,25$. A Figura 37 mostra a distribuição de tensão σ_x ao longo da espessura da placa no nó central.

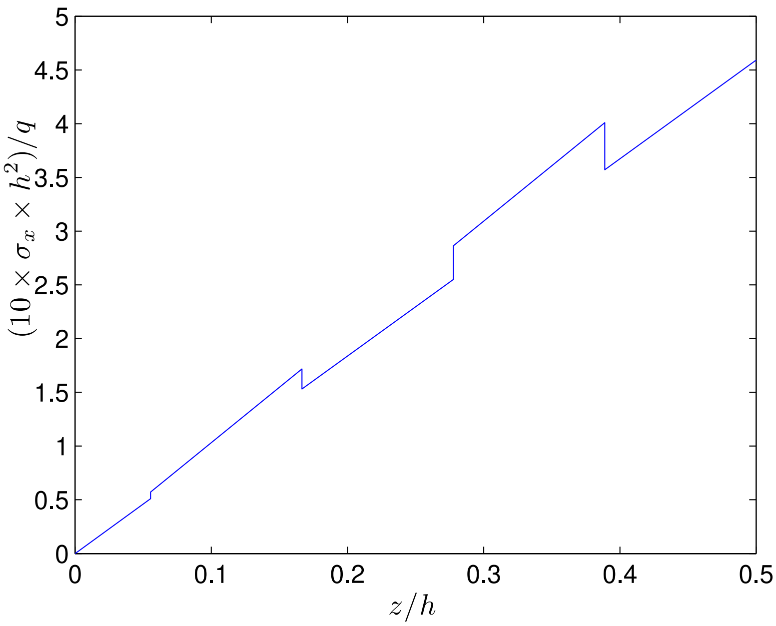

Figura 37: Distribuição de tensão σ_x ao longo da espessura com $\alpha = 45^\circ$ no nó central da placa.

Conforme esperado, as tensões apresentam descontinuidades entre uma lâmina e outra, devido a descontinuidade do material. Além disso, o resultado mostrou-se duas vezes maior que o resultado do problema estático, conforme apresentado por Gouvêa, Albuquerque e Palermo-Jr. (2008).

Para se proceder uma análise de falha na placa analisada, foram consideradas os seguintes valores para as propriedades de falha: $X_t = 1260$ MPa, $Y_t = 61$ MPa, $S = 167$ MPa, $X_c = 500$ MPa, $Y_c = 102$ MPa. O índice de falha F foi calculado segundo o critério de Tsai-Wu, dado pela equação (2.27). A tabela 1 apresenta os valores das tensões e do critério de falha F para as camadas mais externas do laminado (camadas 1 e 9), onde se localizam as tensões de maior módulo.

Tabela 1: Tensões principais no laminado

Lâmina	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)	σ_L (MPa)	σ_T (MPa)	τ_{LT} (MPa)	F
1	-383,3	-382,7	-356,3	-739,3	-26,7	0,28	1,38
9	383,3	382,7	356,3	739,3	26,7	-0,28	-0,05

Como esperado, as tensões são simétricas com sinais invertidos porém o índice de falha não é simétrico, uma vez que as propriedades de falha em tração são diferentes das propriedades em compressão. Corforme pode ser notado na tabela 1, pelo critério de falha de Tsai-Wu, é prevista a falha da camada 1, uma vez que o índice de falha é maior que 1.

7 *Considerações finais*

7.1 Conclusões

Este trabalho apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para o cálculo de momentos, tensões e critérios de falhas em pontos internos em placas finas de materiais compósitos. A formulação do método dos elementos de contorno para a análise de problemas de elastodinâmica em materiais anisotrópicos foi obtida usando soluções fundamentais da elastostática e considerando os termos de inércia como forças de corpo. Foram usados elementos de contorno quadráticos descontínuos. As integrais de domínio provenientes dos termos de inércia foram transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial.

No método da integração radial foi utilizada como função de aproximação a função de base radial spline de placas finas aumentadas por polinômios que, conforme relatado na literatura, apresenta um bom desempenho em várias formulações.

A formulação desenvolvida foi aplicada a vários problemas numéricos e mostrou boa concordância com resultados disponíveis na literatura. Foram feitas análises de sensibilidade ao número de pontos internos, número de elementos e o tamanho de passo de tempo.

O método se mostrou sensível ao número de pontos internos, exigindo, em todos os problemas um número mínimo de pontos internos a partir do qual a resposta apresenta boa concordância com os resultados da literatura. Quando são usados poucos pontos internos, os resultados tendem a ser mais suaves.

Houve pouca sensibilidade quanto ao número de elementos de contorno da malha, obtendo-se boa concordância com a literatura mesmo para malhas bastante grosseiras.

O método mostrou-se sensível ao tamanho do passo de tempo. Passos de tempo grandes tendem a suavisar os resultados, embora ainda permanecendo com uma boa concordância com os resultados da literatura.

No geral, a formulação desenvolvida apresentou um bom desempenho na modelagem de problemas dinâmicos de placas anisotrópicas finas, constituindo-se, como uma alternativa para a análise de estruturas de materiais compósitos laminados sujeitas a cargas transientes.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Extensão da formulação desenvolvida para o cálculo de momentos, tensões e critérios de falha em pontos do contorno;
- Extensão da formulação para análise de danos causados por impacto de baixa velocidade em placas de materiais compósitos laminados;
- Desenvolvimento de formulações similares que considere o efeito da deformação de cisalhamento transversal (placas espessas);
- Extensão da formulação desenvolvida para problemas de placas finas sob grandes deflexões.

Referências

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.

ALBUQUERQUE, E. L. et al. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.

CHIRINO, F. et al. A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *IEngineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, p. 11–19, 1994.

FEDELINSK, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 17, p. 45–56, 1996.

GANAPATHY, S.; RAO, K. P. Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact. *Computers and Structures*, v. 68, p. 627–641, 1998.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Engn. Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.

GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S.; BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. *Engineering Analysis with Boundary Element*, v. 23, p. 285–296, 1999.

GOUVÊA, A. R.; ALBUQUERQUE, E. L.; PALERMO-JR., L. Computation of stresses on the boundary of laminate composite plates by the boundary element method. *Boundary Element Technique*, 2008.

HILL, R. A theory of the yelding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Socety*, v. 193, p. 281–297, 1950.

HOUBOLT, J. C. A reccurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. of Aeronautical and Science*, v. 17, p. 540–550, 1950.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, v. 40, p. 51–58, 1850. In German.

LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, 1984.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.

LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part i. an fem numerical model. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1055–1062, 2002.

LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part ii. verification and numerical investigation. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1063–1072, 2002.

LOEFFLER, C.; MANSUR, W. J. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S. (Ed.). *Boundary Element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer*. Computational Mechanics Publications, South Hampton: [s.n.], 1987. p. 105–122.

LUO, R. K.; GREEN, E. R.; MORRISON, C. J. Impact damage analysis of composite plates. *Int. J. of Impact Engineering*, v. 22, p. 435–447, 1999.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, v. 18, p. 31–38, 1951.

PAIVA, J. B. *Boundary element formulation for plate bending and its aplication in engineering*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1987. In Portuguese.

PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 49–73, 2003.

POISSON, S. D. Tmemoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides. *Journal of Mathematics Physics*, v. 12, p. 8, 1829.

RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engn. Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.

REZENDE, M. C.; BOTELHO, E. C. O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial. *Polímeros*, v. 10, p. 33–42, 2000.

SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J. Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.

SHI, G.; BEZINE, G. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. *Mechanics Research Communications*, v. 26, p. 1351–1370, 1990.

SLADEK, J. et al. Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, p. 2285–2303, 2007.

TSAI, S. W. Strength theories of filamentary structures, in fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites. In: *Conference Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1968.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, v. 5, p. 58–80, 1971.

VENTURINI, W. S. *A study of boundary element method and its application on engineering problems*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1988. In Portuguese.

VINSON, J. R.; SIERKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. Boston: Martinus Nijnoff, 1987.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *Int. J. Engng. Sci.*, v. 33, p. 995–1004, 1995.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 383–394, 1996.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

ZHAO, G. P.; CHO, C. D. Damage initiation and propagation in composite shells. *Composite Structures*, p. Early view, 2006.

Referências

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.

ALBUQUERQUE, E. L. et al. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Second. Southampton, Boston: Computation Mechanics Publications, 1989.

CHIRINO, F. et al. A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *IEngineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, p. 11–19, 1994.

FEDELINSK, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 17, p. 45–56, 1996.

GANAPATHY, S.; RAO, K. P. Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact. *Computers and Structures*, v. 68, p. 627–641, 1998.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Engn. Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.

GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S.; BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. *Engineering Analysis with Boundary Element*, v. 23, p. 285–296, 1999.

HILL, R. A theory of the yelding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Socety*, v. 193, p. 281–297, 1950.

HOUBOLT, J. C. A reccurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. of Aeronautical and Science*, v. 17, p. 540–550, 1950.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, v. 40, p. 51–58, 1850. In German.

LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, 1984.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.

LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part i. an fem numerical model. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1055–1062, 2002.

LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part ii. verification and numerical investigation. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1063–1072, 2002.

LOEFFLER, C.; MANSUR, W. J. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S. (Ed.). *Boundary Element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer*. Computational Mechanics Publications, Southhampton: [s.n.], 1987. p. 105–122.

LUO, R. K.; GREEN, E. R.; MORRISON, C. J. Impact damage analysis of composite plates. *Int. J. of Impact Engineering*, v. 22, p. 435–447, 1999.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, v. 18, p. 31–38, 1951.

PAIVA, J. B. *Boundary element formulation for plate bending and its aplication in engineering*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1987. In Portuguese.

PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 49–73, 2003.

POISSON, S. D. Tmemoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides. *Journal of Mathematics Physics*, v. 12, p. 8, 1829.

RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engn. Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.

REZENDE, M. C.; BOTELHO, E. C. O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial. *Polímeros*, v. 10, p. 33–42, 2000.

SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J. Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.

SHI, G.; BEZINE, G. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. *Mechanics Research Communications*, v. 26, p. 1351–1370, 1990.

SLADEK, J. et al. Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, p. 2285–2303, 2007.

STROUD, A. H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

TELLES, J. C. F. A self adptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p. 959–973, 1987.

TSAI, S. W. Strength theories of filamentary structures, in fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites. In: *Conference Proceedings*, 1968.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, v. 5, p. 58–80, 1971.

USECHE, J. *Finite Element Analysis Program for Linear Static and Dynamic Analysis of Composite Shell Structures*. Shellcomp, v3.4. Cartagena, Colômbia, 2008.

VENTURINI, W. S. *A study of boundary element method and its application on engineering problems*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1988. In Portuguese.

VINSON, J. R.; SIERKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. Boston: Martinus Nijnoff, 1987.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *Int. J. Engng. Sci.*, v. 33, p. 995–1004, 1995.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 383–394, 1996.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

ZHAO, G. P.; CHO, C. D. Damage initiation and propagation in composite shells. *Composite Structures*, p. Early view, 2006.