

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica

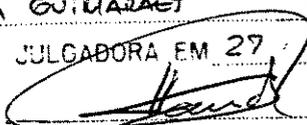
Análise das Solicitações Dinâmicas na Via
Férrea através da Simulação da Interação
entre o Veículo e a Via

57/99

Carlos Alberto Bandeira Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR CARLOS ALBERTO
BANDEIRA GUIMARÃES E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 27.10.99.


ORIENTADOR



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
Departamento de Projeto Mecânico

**Análise das Solicitações Dinâmicas na Via
Férrea através da Simulação da Interação
entre o Veículo e a Via**

Carlos Alberto Bandeira Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica
da Universidade Estadual de Campinas para preen-
chimento dos pré-requisitos necessários à obtenção do
Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1999
SP - Brasil

UNIDADE	B. C.
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	G 947a
V.	Es.
TOMBO BC/	40846
PROC.	278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	\$11,00
DATA	04/04/00
N.º CPD	

CM-00139666-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G947a

Guimarães, Carlos Alberto Bandeira

Análise das solicitações dinâmicas na via férrea através da simulação da interação entre o veículo e a via / Carlos Alberto Bandeira Guimarães.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Fausto Rodrigues Filho.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Transporte ferroviário - Vagões - Dinâmica. 2. Simulação (Computadores). I. Rodrigues Filho, Fausto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

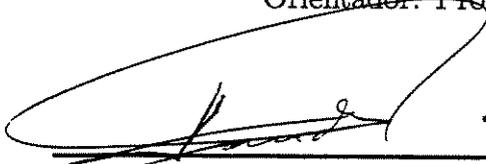
Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
Departamento de Projeto Mecânico

Tese de Doutorado

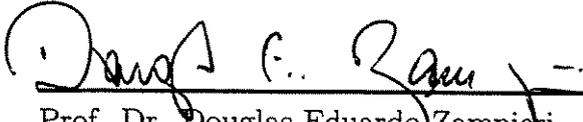
**Análise das Solicitações Dinâmicas na Via
Férrea através da Simulação da Interação
entre o Veículo e a Via**

Carlos Alberto Bandeira Guimarães

Orientador: ~~Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho~~



Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas.



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri
Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas.



Prof. Dr. Renato Pavanello
Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas.



Prof. Dr. Cassio Eduardo Lima de Paiva
Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas.



Prof. Dr. Antonio Arlindo Guidetti Porto
Centro de Tecnologia da Universidade Estadual de Campinas.

Campinas, 27 de outubro de 1999.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ter-se concluído sem o auxílio de diversas pessoas a quem sinceramente agradeço.

Ao Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho pela sua competente orientação, amizade e apoio.

Ao Prof. Dr. Cassio Eduardo Lima de Paiva, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, amigo e colega pesquisador, pela sugestão inicial quanto ao tema desenvolvido neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Philip Bernard Remmy Devloo, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pela sugestão inicial quanto a implementação computacional do modelo dinâmico desenvolvido neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Pérsio Leister de Almeida Barros, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pelo encorajamento, pela troca de idéias e pelo grande auxílio durante a edição deste trabalho.

Aos Profs. Drs. Aloísio Ernesto Assan, Francisco Antonio Menezes e Isafas Vizotto, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pelo auxílio em relação ao Método dos Elementos Finitos.

Ao Prof. Dr. Vinicius Fernando Arcaro, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pelas sugestões em relação à implementação dos Métodos de Otimização.

Ao Prof. Dr. Renato Pavanello, da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, pelas sugestões em relação à implementação das não-linearidades.

Ao Prof. Dr. Abel Maia Genovez, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, meus sinceros agradecimentos pela amizade e apoio material em um momento decisivo.

Aos amigos e colegas do Departamento de Geotecnia e Transportes da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP.

E a minha esposa, Terezinha, pelo amor, pela paciência e pelo grande encorajamento.

Para Terezinha, Mariana e Marcelo.

Sumário

Sumário	v
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Simbologia	xxi
1 Introdução	1
1.1 Apresentação	1
1.2 Revisão Bibliográfica	3
1.3 Objetivos e Organização do Trabalho	19
2 A Análise de Tensões na Via Férrea	21
2.1 Considerações Iniciais	21
2.2 A Metodologia baseada nas Equações de Talbot	22
2.3 A Metodologia proposta por Eisenmann	26
2.4 O Parâmetro de Suporte da Via	30
2.5 Modelos Quasi-estáticos	33
2.5.1 ILLITRACK	34
2.5.2 GEOTRACK	34
2.5.3 KENTRACK	36
2.5.4 A Metodologia desenvolvida por Paiva	36
2.6 Os Fatores de Carga	38
2.6.1 Fatores Empíricos	39

2.6.2	O Fator de Carga utilizado pela <i>British Railways</i>	40
2.6.3	O Fator de Carga proposto por Eisenmann	42
2.6.4	O Fator de Carga proposto Stewart e O'Rourke	44
2.6.5	Análise Comparativa dos Fatores de Carga	45
3	A Análise Dinâmica da Via Férrea	49
3.1	Considerações Iniciais	49
3.2	Interação entre via e veículo ferroviários	50
3.2.1	Problemas relacionados à dinâmica do veículo	50
3.2.2	Problemas envolvendo componentes do truque e da massa não-suspensa	52
3.2.3	Deterioração das superfícies de rolamento da roda e do trilho	52
3.2.4	Deterioração dos componentes da via permanente	54
3.2.5	Ruído	54
3.2.6	Limites das frequências de interesse	55
3.3	Interação Dinâmica	56
3.3.1	Considerações iniciais	56
3.3.2	Modelagem dos componentes físicos	57
3.3.3	A modelagem da via férrea	60
3.3.4	A modelagem da excitação	62
3.3.5	A modelagem do contato entre roda e trilho	63
3.4	Técnicas de solução	75
3.4.1	Considerações iniciais	75
3.4.2	Técnicas de solução no domínio da frequência	77
3.4.3	Técnicas de solução no domínio do tempo	78
3.4.4	Métodos numéricos diretos de integração no tempo	87
3.4.5	A análise de sistemas dinâmicos não-lineares	101
4	O modelo dinâmico da interação	115
4.1	Considerações iniciais	115
4.2	O modelo de via férrea	118
4.2.1	O modelo de trilho	118
4.2.2	Acoplamento do modelo de trilho com os modelos de suporte da via	127
4.2.3	Montagem das matrizes globais que representam o mo- delo de via completo	129
4.3	O modelo de excitação	130

4.4	O Acoplamento do Modelo de Veículo	131
4.5	A técnica de solução adotada	135
4.5.1	O método quasi-Newton com busca unidimensional	138
4.6	Estrutura do modelo computacional	140
4.6.1	A estrutura principal	141
4.6.2	A sub-rotina <i>prox_passo</i>	144
4.6.3	A sub-rotina <i>Altera_mat_rig</i>	146
5	Aplicação do modelo e resultados	149
5.1	Considerações iniciais	149
5.2	As irregularidades analisadas	150
5.2.1	Trilhos corrugados	150
5.2.2	O “plano-na-roda” (<i>flat</i>)	151
5.2.3	A deformação devida ao cisalhamento	153
5.3	A Validação do Modelo Desenvolvido	155
5.3.1	O problema dos trilhos corrugados	155
5.3.2	O problema do “plano-na-roda”	177
5.4	A aplicação do modelo	199
5.4.1	Introdução	199
5.4.2	A classificação das ferrovias brasileiras	201
5.4.3	Os parâmetros para a simulação	203
5.4.4	Estudo de caso	214
6	Conclusões e sugestões	225
	Referências Bibliográficas	228

Resumo

GUIMARÃES, Carlos Alberto Bandeira, *Análise das Solicitações Dinâmicas na Via Férrea através da Simulação da Interação entre o Veículo e a Via*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 261 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho apresenta uma ampla revisão sobre a análise de tensões devidas a solicitações estáticas e dinâmicas na via férrea. A partir desta revisão é desenvolvido um modelo sobre apoio discreto da interação dinâmica vertical entre veículo e via ferroviários, para a faixa de frequência de interesse variando entre 50 e 2500 hertz, que permite determinar vários parâmetros relacionados à análise de tensões dinâmicas, como a força no contato entre a roda e o trilho e as deformações devidas ao cisalhamento. Este modelo tem formulação baseada no Método dos Elementos Finitos com solução no domínio do tempo. O contato entre a roda e o trilho é modelado como sendo normal, através de uma mola não-linear hertziana. O modelo leva em consideração não-linearidades como o levantamento do dormente em relação à camada de lastro. É proposta uma técnica de solução no tempo baseada em um esquema de integração numérica tipo Newmark- β para sistemas dinâmicos não-lineares, com uma rotina de otimização do desequilíbrio nodal do sistema formado pelo veículo e a via baseada no método quasi-Newton com busca unidimensional. Foram implementadas e testadas três formulações de elementos finitos de viga para a modelagem do trilho na análise dos efeitos dinâmicos devidos a dois tipos de irregularidade (trilhos corrugados e “planos-na-roda”), para se obter a formulação mais adequada. Posteriormente é feito um estudo sobre os parâmetros a serem utilizados na simulação. É proposta uma metodologia baseada no modelo de Winkler e no método dos elementos finitos para a obtenção dos parâmetros de rigidez da camada de lastro. É desenvolvido um estudo de caso relacionado aos efeitos dinâmicos que uma irregularidade tipo “plano-na-roda” teria sobre três tipos de via tipicamente brasileiras. O modelo desenvolvido forneceu respostas realistas dentro da faixa de frequência de interesse. Finalmente, são apresentadas as conclusões finais do trabalho e sugestões de estudos futuros.

Palavras Chave

- Dinâmica Ferroviária, Interação Dinâmica entre o Veículo e a Via Ferroviários, Simulação Dinâmica da Via Férrea.

Abstract

GUIMARÃES, Carlos Alberto Bandeira, *Railway Track Dynamic Loading Analysis through the Simulation of Vehicle/Track Interaction*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 261 p. Tese (Doutorado)

This work presents initially a wide revision on the railway static and dynamic analysis. Starting from this revision a discret support model of the vertical vehicle/track dynamic interaction, at the frequency range of 50 to 2500 Hertz, is developed. It allows to determine several parameters related to the dynamic analysis, as the wheel/rail contact force and the rail shear strain. This model has formulation based on the Finite Element Method with a time domain solution. The wheel/rail contact is considered to be normal by using a non-linear hertzian contact spring. The track model developed is able to consider nonlinearities in the track structure. A time-step integration algorithm based on a Newmark- β scheme, with a optimization routine for solving the nodal unbalance of the dynamic system, based on the quasi-Newton method with a line search was developed. Three beam finite elements formulations for the rail model was used in the analysis of the dynamic effects due to two irregularity types (corrugated rails and wheel flats), were implemented and tested for to obtain the most adequate formulation. After, a study was done for determining the ballast stiffness that could be used in the simulation. A methodology based on the Winkler and Finite Element Methods for to obtain these parameters was proposed. A case study related to the dynamic effects of a wheel flat on three typical brazilian railway tracks was developed. The developed model provided realistic responses in the frequency range of interest. Finally, the conclusions and future research works are presented.

Key Words

- Railway Dynamics, Railway Vehicle/Track Dynamic Interaction, Railway Track Dynamic Simulation.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama mestre	25
2.2	Viga apoiada sobre dormente longitudinal	27
2.3	Transformação do Dormente Transversal Discreto em Dormente Longitudinal	29
2.4	Viga apoiada (a) sobre uma base Winkler (b) sobre contínuo elástico contínuo	33
2.5	Aplicação da Distribuição Normal para o cálculo dos valores máximos e mínimos	43
2.6	Distribuição dos Fatores de Carga Dinâmicos segundo Stewart e O'Rourke[3]	46
3.1	Componentes do sistema formado pela via e veículo ferroviários	56
3.2	Modelos de apoio discreto	60
3.3	Modelos de apoio discreto sobre semi-espaco elástico ou visco-elástico	60
3.4	Hierarquia de modelos de via	61
3.5	Modelagem da excitação	63
3.6	Força no contato versus deformação relativa	65
3.7	Mecânica do contato entre roda e trilho: (a) caracterização do fenômeno e (b) relação entre a força e "creep".	66
3.8	Raios principais de rolamento e raios de curvatura transversais principais	68
3.9	Área de contato conforme Johnson e Vermeulen	71
4.1	Modelo da interação dinâmica entre via e veículo desenvolvido	117
4.2	Elemento de viga uniforme sob deflexão transversal	120
4.3	Cinemática da deformação de uma viga incluindo a deformação devida ao cisalhamento	122
4.4	Modelo de elemento finito de uma viga Timoshenko	123

4.5	Subsistema lastro, dormente e fixações	128
4.6	Esquema de montagem das matrizes globais do modelo de via.	129
4.7	O acoplamento entre os modelos de veículo e de via	132
4.8	Estratégia adotada para o deslocamento da força de contato	135
5.1	152
5.2	Configuração da instrumentação de medição	156
5.3	Série histórica experimental do deslocamento da ponta do dormente. Fonte: Clark et al. [39, Fig. 8, pag. 70]	157
5.4	Série histórica experimental da deformação devida ao cisalhamento na alma do trilho. Fonte: Clark et al.[39, Fig. 7, pg. 69]	158
5.5	Deslocamentos obtidos pelo carro laboratório. Fonte: Clark et al. [39, Fig. 12, pag. 71]	159
5.6	Força de contato e deslocamento do final do dormente previstas pelo modelo. Fonte: Clark et al. [39, Fig. 10 e 11, pg. 71]	161
5.7	Formas da deflexão teórica do dormente. Fonte: Clark et al.[39, Fig. 14, pg. 72]	162
5.8	Resultados teóricos para a deflexão do dormente obtidos pelo modelo utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.	165
5.9	Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento no ponto de contato para o modelo com elemento finito de viga Euler-Bernoulli.	167
5.10	Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Euler-Bernoulli.	168
5.11	Resultados obtidos para o deslocamento do dormente pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.	170
5.12	Resultados obtidos para o deslocamento do dormente pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.	171
5.13	Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.	173

5.14	Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.	174
5.15	Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.	175
5.16	Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.	176
5.17	Séries históricas para a variação da energia total do sistema para a velocidade de 12,1 metros por segundo para as três formulações.	178
5.18	Instrumentação e características da irregularidade. Fonte: Newton e Clark [40, Fig.1, pg.289]	179
5.19	Cargas medidas na placa de apoio e tensões de flexão no trilho em função do tempo. Fonte: Newton e Clark[40, Fig. 3, pg. 290]	181
5.20	Tensões de cisalhamento medidas em função do tempo. Fonte: Newton e Clark [40, Fig. 4, pg. 290]	182
5.21	Força de contato medida e calculada. Fonte: Newton e Clark[40, Fig. 8, pg. 293]	183
5.22	Resultado para a força de contato para o modelo com viga de Timoshenko. Fonte: Newton e Clark [40, Fig. 10, pg. 294] . .	185
5.23	Forças de contato em função do tempo para os diversos modelos. Fonte: Dong e Dukkipati [45, Fig. 8, pg. 67]	187
5.24	Resultados obtidos com o modelo. Fonte: Dong e Dukkipati [45, Fig. 14, pg. 69]	188
5.25	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.	191
5.26	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.	193
5.27	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com quatro graus de liberdade.	195
5.28	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade.	196

5.29	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com quatro graus de liberdade.	197
5.30	Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade.	198
5.31	Energia total do sistema para as três formulações de elemento finito para a velocidade de 117 quilômetros por hora.	200
5.32	Modelo de via férrea com apoio discreto utilizando o método dos elementos finitos.	210
5.33	Deflexões do trilho calculadas pela metodologia de Zimmermann e pelo modelo de elementos finitos.	211
5.34	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (A) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.	218
5.35	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (A) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.	219
5.36	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (B) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.	220
5.37	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (B) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.	221
5.38	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (C) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.	222
5.39	Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (C) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.	223
6.1	Modelo de elemento finito de viga de Timoshenko sobre apoios discretos e semi-plano elástico.	228

Lista de Tabelas

2.1	Fatores de Carga segundo Stewart e O'Rourke	47
3.1	Problemas oriundos da interação veículo/via segundo Knothe e Grassie	51
3.2	Valores dos coeficientes m e n	69
3.3	Coeficientes de <i>creepage</i> e spin <i>creepage</i>	70
5.1	Grupos de via principal de uma via férrea	202
5.2	Dormentação de linha principal	203
5.3	Perfis de trilhos fabricados no Brasil	204
5.4	Dimensões limites nominais de dormentes de madeira	204
5.5	Limites dos valores das massas dos dormentes de madeira	205
5.6	Faixas de variação da rigidez da via	205
5.7	Coeficientes de rigidez dinâmicos	206
5.8	Coeficientes de rigidez da placa de apoio e do lastro	207
5.9	Coeficientes de rigidez e de amortecimento para placas de apoio	207
5.10	Coeficientes de rigidez e de amortecimento para placas de apoio	208
5.11	Valores da rigidez do lastro em função do módulo de lastro	212
5.12	Parâmetros referentes aos três tipos de via utilizados na simulação	215

Simbologia

• Letras latinas

A	área da seção transversal
P	carga de roda simples
EI	rigidez à flexão
E	módulo de elasticidade
I	momento de inércia de segunda ordem
N	ordem das matrizes globais
C	módulo de lastro
L	valor fundamental
V	velocidade da composição ferroviária
F	força tangencial
C	amplitude de onda
G	módulo de rigidez ao cisalhamento
R	parâmetro de inércia de rotação
Q	força de cisalhamento
M	momento fletor
M_o	máximo momento fletor
S_o	máximo cisalhamento
Y_o	máxima deflexão
P_o	máxima pressão contra o trilho
P_d	carga vertical dinâmica
D_w	diâmetro da roda
P_1	força que ocorre a altas frequências
P_2	força que ocorre a baixas frequências
F_T	força no contato entre e o trilho
C_H	constante de Hertz para o contato não-linear
F_x, F_y	forças devidas ao <i>creep</i>

M_z	momento de <i>spin</i>
F_x	força devida ao <i>creep</i> longitudinal ilimitada
F_y	força devida ao <i>creep</i> lateral ilimitada
R_s	resto do desenvolvimento (equação 3.84)
M_d	metade da massa do dormente
Q_s	forças de dissipação
M_R	massa da roda do veículo
M_S	massa suspensa sobre a roda
R_c	raio da roda
T_f	tráfego fictício
R_1, R_2	raios principais de rolamento
x	distância ao longo do eixo das abscissas
u	coeficiente de rigidez
b	largura do dormente longitudinal
\ddot{u}	distância medida a partir do centro do trilho até o fim do dormente
a	espaçamento entre dois dormentes
k	parâmetro de suporte do trilho ou rigidez da via
y	deformação relativa entre a roda e o trilho
h	altura
t	tempo
l	comprimento do elemento finito
m	ordem da função de dissipação
\bar{r}^2	raio de giração
i	$\sqrt{-1}$
$p(x)$	pressão por unidade de comprimento
$w(x)$	deflexão vertical
$q(x)$	carga vertical
$v(x, t)$	deslocamentos da estrutura (equação 4.1)
$u(x, y)$	deslocamentos axiais da estrutura
$p(\lambda)$	polinômio característico
e_i	vetores unitários
v_j	multiplicidade - (equação 3.47)
b_s	largura do dormente
k_d	fator de carga
f_i	fator de impacto
t_d	número de desvios padrões normais

n_s	número de graus de liberdade do sistema
k_F	rigidez do sistema de fixações
k_L	rigidez da camada de lastro
k_t	rigidez da suspensão primária
c_F	amortecimento do sistema de fixações
c_L	amortecimento da camada de lastro
c_t	amortecimento da suspensão primária
w_o	deslocamento vertical do trilho
f_o	força transmitida ao trilho no contato
h_f	deformação devida a uma irregularidade tipo “plano-na-roda”
h_c	deformação devida a irregularidade tipo trilho corrugado
l_f	comprimento do “plano-na-roda”
d_f	profundidade máxima do “plano-na-roda”
f_{ij}	coeficientes de <i>creep</i>
k_{ij}	coeficientes da matriz de rigidez
c_{ij}	coeficientes da matriz de amortecimento
m_{ij}	coeficientes da matriz de massa
$[M]$	matriz de massa
$[C]$	matriz de amortecimento
$[K]$	matriz de rigidez
$[C]^t$	matriz de amortecimento tangente
$[K]^t$	matriz de rigidez tangente
$[A]$	matriz do sistema
$[M]$	matriz de massa efetiva
$[M_g]$	matriz de massa global do sistema veículo e via
$[C_g]$	matriz de amortecimento global do sistema veículo e via
$[K_g]$	matriz de rigidez global do sistema veículo e via
$[A(\Delta t)]$	matriz de amplificação - método HHT
$[S(\{x\})]$	matriz hessiana
$[F]_k$	aproximações sucessivas para a matriz hessiana
$[J(\{x\})]$	matriz jacobiana
$\{x\}$	vetor deslocamento em coordenadas generalizadas
$\{\dot{x}\}$	vetor velocidade em coordenadas generalizadas
$\{\ddot{x}\}$	vetor aceleração em coordenadas generalizadas
$\{q\}$	vetor global deslocamento em coordenadas generalizadas
$\{\dot{q}\}$	vetor global velocidade em coordenadas generalizadas

$\{\ddot{q}\}$	vetor global aceleração em coordenadas generalizadas
$\{F(t)\}$	vetor das forças externas
$\{\bar{F}(t)\}$	vetor das forças efetivas
$\{y(t)\}$	vetor de estado
$\{b(t)\}$	vetor de excitação
$\{\tilde{y}\}$	autovetores
$\{u(t)\}$	coordenadas principais
$\{d\}$	vetor direção
$\{p\}$, $\{s\}$ e $\{v\}$	vetores auxiliares na aproximação <i>BFGS</i>
$\{g\}$	vetor gravidade
u_0	deslocamento horizontal da estrutura rígida
\bar{u}	deslocamento horizontal transformado
u_n	deslocamento normal
u_s	deslocamento tangente
u_{cx} , u_{cz}	funções de influência para carga uniforme
u_{lx} , u_{lz}	funções de influência para carga linear
u_{qx} , u_{qz}	funções de influência para carga quadrática
V	energia de deformação
v	deslocamento na direção y
w	deslocamento vertical

- Letras gregas

Δ	comprimento da onda de flexão
ξ	valor relativo do comprimento
σ	desvio padrão
φ	valor do efeito da velocidade no cálculo do fator de carga
ω	freqüência
λ	autovalor
α	parâmetro de amortecimento (equação 3.100)
ρ	densidade do material
κ	coeficiente de cisalhamento
γ e β	coeficientes do esquema Newmark
Δt	intervalo ou passo-de-tempo
β_d	ângulo de depressão
γ_e	fator de escala
Δ_c	amplitude da corrugação
ξ_{sp}	<i>spin creepage</i>
ν	coeficiente de Poisson
μ_a	coeficiente de atrito
θ	incremento de tempo no método Wilson- θ
δ_j	fator de decaimento
ξ_i	índice de decaimento modal
ψ_i e φ_i	funções de forma defletida da estrutura
λ_c	comprimento da corrugação
γ_{xy}	deformação devida ao cisalhamento
ν	coeficiente de Poisson
ρ	densidade da massa
$\beta(x, t)$	ângulo de cisalhamento (equação 4.13)
$\alpha(x, t)$	rotação da seção transversal (equação 4.13)
$[\Phi]$	matriz modal
$[\Phi(t)]$	matriz fundamental
$\{\eta\}$	coordenadas nodais do elemento finito

- Abreviaturas

ASCE *American Society of Civil Engineers* - Sociedade Americana dos Engenheiros Civis

AREMA	<i>American Railway Engineering and Maintenance-of-way Association</i> - Associação Americana da Engenharia Ferroviária e de Manutenção de via
BEM	<i>Boundary Element Method</i> - Método dos Elementos de Contorno
FEM	<i>Finite Element Method</i> - Método dos Elementos Finitos
AAR	<i>Association of American Railways</i> - Associação das Ferrovias Americanas
DSM	<i>Discrete Support Model</i> - Modelo sobre apoio discreto
BOEF	<i>Beam Over Elastic Foundation</i> - Viga sobre apoio elástico
EBEF	<i>Euler Beam over Elastic Foundation</i> - Viga de Euler sobre apoio elástico
EBDS	<i>Euler Beam Over Discrete Support</i> - Viga de Euler sobre apoio discreto
TBEF	<i>Timoshenko Beam Over Elastic Foundation</i> - Viga de Timoshenko sobre apoio elástico
TBDS	<i>Timoshenko Beam Over Discrete Support</i> - Viga de Timoshenko sobre apoio discreto

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Tradicionalmente, na análise de tensões na via permanente é utilizado o modelo clássico de Winkler¹, que consiste de um sistema estrutural composto de uma viga apoiada sobre dormentes longitudinais sobre uma fundação contínua, elástica e uniforme. O desenvolvimento deste modelo para as vias de dormentes discretos foi mais complicado devido à natureza discreta do apoio dos trilhos. Inicialmente, considerou-se a via como sendo uma viga sobre apoios discretos (rígidos ou elásticos), e a partir daí torna-se uma via “continuamente” apoiada. Esta abordagem é atualmente o método dominante na engenharia ferroviária.

A principal restrição deste modelo reside em não considerar explicitamente as solicitações dinâmicas atuantes na via. Entretanto, como bem coloca Hanna[1], as tensões e deformações dinâmicas de uma via férrea sob ação das rodas em movimento dos veículos ferroviários podem ser muito maiores do que aquelas calculadas a partir de formulações estáticas, pois existem muitos fatores que contribuem para o aumento destas tensões e deformações, como irregularidades e juntas nos trilhos, vibrações devidas a forças elásticas variáveis atuando nas rodas e a própria vibração da via férrea devida às cargas móveis. Apesar disto, esta consideração é simplesmente feita através da

¹As equações diferenciais propostas por Winkler foram introduzidas em 1867, em seu trabalho clássico “Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit”. Uma cópia do trabalho original pode ser encontrada no Proc. of the 3rd. Herbertov Workshop on Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure, *Vehicle System Dynamics Supplement 24*, p.7-12, 1995.

majoração da solicitação estática através da utilização de um fator de carga, sendo que alguns destes fatores são obtidos a partir de estudos detalhados de resultados experimentais, caso do estudo desenvolvido por Eisenmann, apresentado no livro de Fastenrath [2] e do método apresentado no trabalho de Stewart e O'Rourke[3]. Este procedimento, como coloca Esveld[4], deve-se à extrema complexidade existente neste tipo de análise, bem como a sua difícil disponibilidade.

Atualmente, com o grande desenvolvimento dos recursos computacionais à disposição dos pesquisadores, bem como de técnicas numéricas adequadas, a análise das solicitações dinâmicas na via tornou-se acessível, sem muitas restrições. Historicamente, como colocam Knothe e Grassie[5], a partir de 1943 vários pesquisadores preocupados com o aumento crescente na velocidade dos trens, já alertavam sobre a necessidade de se desenvolver modelos de via que levassem em consideração os efeitos das solicitações dinâmicas. Entretanto, somente nos últimos vinte anos tem crescido o interesse na aplicação de modelos matemáticos para compreender, e mesmo às vezes, tentar resolver problemas práticos devidos à solicitações dinâmicas, tanto em relação às solicitações normais como as acidentais, o efeito de irregularidades na via, "plano-na-roda", trilhos corrugados, ruídos e vibrações em obras-de-arte em meio urbano, etc.

Entretanto, os modelos dinâmicos até o presente momento desenvolvidos têm se voltado principalmente para a análise da tensões devidas à interação entre o veículo e a via. Neste contexto, os elementos da superestrutura envolvidos são os trilhos, as fixações e os dormentes, sendo dado muito pouca atenção à análise de tensões que ocorrem dentro do lastro e da plataforma ferroviária. As exceções ocorrem por conta de estudiosos alemães, que desenvolveram estudos durante o desenvolvimento do projeto do trem ICE("Inter-city Experimental")[6, 7].

Atualmente, no Brasil, os sistemas ferroviários têm operado com intensidades de tráfego e cargas por eixo crescentes, o que tem provocado uma rápida degradação das condições operacionais da via permanente. Como a realização de ensaios de campo é muito difícil de devido à restrições financeiras e mesmo até operacionais, o conhecimento das tensões atuantes na via devidas às cargas estáticas e, principalmente, às dinâmicas, é extremamente útil, pois devido às características resilientes dos solos estas cargas provocam deformações permanentes na plataforma, bem como um mal funcionamento do sistema de drenagem. Estas deformações permanentes são corrigidas com adição de lastro. Um melhor conhecimento destas tensões pode levar ao de-

envolvimento de técnicas construtivas e de manutenção que minimizariam estes efeitos sobre a plataforma com conseqüentemente, reduções nos custos de manutenção e de operação.

Dentro deste contexto, este trabalho apresenta uma revisão teórica sobre a modelagem dinâmica da interação entre veículo e via ferroviários, fazendo uma descrição dos modelos existentes, bem como de suas aplicações. Posteriormente, é apresentado um modelo dinâmico que pode ser utilizado para a análise de tensões na via férrea, incluindo sua formulação teórica e aplicação.

1.2 Revisão Bibliográfica

Há mais de cem anos a atenção dos engenheiros ferroviários foi alertada para a necessidade de se desenvolver modelos que permitissem a análise de tensões nas vias férreas, tanto para a finalidade de dimensionamento destas vias bem como a possibilidade de prevenção de danos à via como aos veículos ferroviários. O modelo de Winkler, apresentado em 1867, que consistia de uma viga apoiada sobre dormentes longitudinais em uma fundação contínua, elástica e uniforme foi a primeira tentativa bem sucedida. Em 1882, Schwedler[8] apresenta a solução da equação de Winkler para vias com dormentes longitudinais para o caso da viga com comprimento infinito sujeita a uma carga concentrada. Em 1888, Zimmermann[9] apresentou as soluções para a equação de Winkler para vários casos de interesse para a análise de tensões nas vias férreas. Zimmermann posteriormente adaptou este modelo para as vias com dormentes transversais discretos.

Segundo Kerr[10], a análise de uma viga apoiada sobre dormentes transversais discretos apresentava aos estudiosos da época sérios de problemas, pois envolvia a solução de várias equações algébricas simultâneas. Desta forma, era natural que fossem feitas tentativas para analisar as tensões devidas à flexão do trilho nas vias com dormentes discretos baseadas na análise desenvolvida para as vias apoiadas sobre dormentes longitudinais contínuos. Os primeiros estudiosos que adotaram esta abordagem foram Flamache em 1904, Timoshenko em 1915² e o Comitê Especial sobre Tensões na Via Férrea da ASCE-AREMA[11], em 1918. Com o crescimento contínuo das cargas por eixo, compensado por um também contínuo decréscimo do espaçamento

²Em seu famoso trabalho "To the Strength of Rails", publicado em 1915, em russo, conforme citado por Kerr.

entre os dormentes, a hipótese da continuidade foi fortalecida. Vários ensaios de campo conduzidos pelo Comitê Especial ASCE-AREMA mostraram que havia uma boa correlação entre os resultados analíticos obtidos com a formulação de Winkler e os resultados obtidos no campo.

Devido à esta boa correlação e à falta de uma abordagem analítica melhor ou mais simples, a validade da hipótese da continuidade foi aceita por um número significativo de ferrovias como uma metodologia de análise de tensões nas vias férreas apoiadas sobre dormentes transversais discretos. Desde a segunda guerra mundial, este tipo de análise de tensões é aceita de um modo geral³, como pode ser evidenciado por sua inclusão nos livros de Fastenrath[2], Rives[12] e Hay[13], bem como no Manual da AREMA [14]. No desenvolvimento deste tipo de análise a carga considerada é sempre a carga por eixo estática, majorada por coeficientes que levam em consideração o efeito de cargas dinâmicas acidentais ou o tráfego dos veículos em trechos em curva da via.

A partir do final dos anos sessenta, a análise estática de tensões na via férrea foi objeto de um número razoável de modelos computacionais que incluíam em sua formulação, em separado, de todos componentes da superestrutura da via férrea (trilhos, fixações, dormentes e camadas representando o lastro, sub-lastro e sub-leito). Segundo Selig e Waters[15], três modelos desenvolvidos nesta época ofereciam aos analistas uma variedade de opções para projeto, com ênfase na influência da subestrutura da via. Alguns deste modelos, como o ILLITRACK e KENTRACK, utilizavam o Método dos Elementos Finitos. Outro, denominado GEOTRACK, era um modelo tridimensional, multicamadas, que permitia a determinação da resposta elástica da estrutura da via utilizando-se das propriedades dependentes da tensão dos materiais constituintes do lastro, sub-lastro e sub-leito. O modelo ILLITRACK, para evitar o número enorme de discretizações necessária exigidas para uma modelagem tridimensional, utiliza-se de abordagem em dois estágios: a análise ao longo do eixo longitudinal é seguida por uma análise no plano transversal. As características dos materiais podem ser determinadas em termos do módulo de resiliência, caracterizando uma tendência marcante nos estudos relativos a pavimentos rodoviários desenvolvidos à época e até o presente momento. Este modelo foi utilizado por Tayabji[16] em um estudo

³Uma exceção notável foram as ferrovias membros do "Verien Mitteleuropaischer Eisenbahnverwaltungen" (VMEV). Desde a primeira guerra mundial esta organização tentou desenvolver uma análise padronizada de via. Mas, por volta de 1935, a VMEV recomendou a seus membros não utilizar a metodologia baseada na equação de Winkler.

de parâmetros de projeto com o objetivo de estabelecer os efeitos destes parâmetros sobre a resposta elástica instantânea da subestrutura da via férrea. Os parâmetros estudados foram o tipo e a profundidade do lastro e sublastro; condições de suporte do subleito; tamanho do trilho; espaçamento entre dormentes; carga de roda e falta de dormentes. Segundo o autor o tipo de lastro e tamanho do dormente não afetam significativamente a resposta elástica instantânea da subestrutura; mas um sublastro estabilizado, as condições de suporte do subleito e a carga de roda exercem grande influência.

Uma abordagem também utilizada consiste no desenvolvimento da análise estática de tensões utilizando-se o procedimento proposto por Eisenmann, *in* Fastenrath[2] para a determinação das forças atuantes nos dormentes, que posteriormente são introduzidas como esforços solicitantes em um sistema de camadas elásticas, constituintes do lastro, sublastro e subleito. Esta abordagem foi utilizada por Paiva[17] e Paiva e Guimarães[18, 19] para a determinação das tensões e deformações nas camadas da subestrutura da via férrea. Para a análise das camadas elásticas foi utilizado o programa ELSYM-5.

A modelagem utilizando também o Método dos Elementos Finitos também foi utilizada por pesquisadores franceses na análise de tensões na subestrutura da via, como o trabalho de Sauvage e Larible[20]. Neste trabalho, desenvolvido no início dos anos oitenta, os autores apresentam uma modelagem tridimensional do sistema mecânico composto pela grade ferroviária e a plataforma, utilizando um elemento finito hexaédrico com vinte nós, no interior dos quais os deslocamentos são interpolados através de polinômios do terceiro grau nos três eixos de coordenadas e considerava comportamento elasto-plástico dos materiais constituintes dos elementos.

A análise dinâmica tem início nos anos 20, onde problemas com os então novos trilhos longos soldados levaram ao desenvolvimento de análises relacionadas á estabilidade da via, que entretanto só seriam resolvidos analiticamente nos anos setenta, principalmente com o trabalho de Prud'homme[21]. Em 1926, a partir de trabalhos desenvolvidos por Timoshenko sobre o problema do "plano-na-roda", tivera início as pesquisas relativas ao efeito das cargas dinâmicas sobre a via férrea. Segundo Knothe e Grassie[5], em 1943 vários pesquisadores preocupados com o aumento crescente da velocidade dos trens alertavam sobre a necessidade de se desenvolver modelos de via férrea melhores. Entretanto, até 1970 havia poucos trabalhos relacionados à utilização de modelos dinâmicos para a solução de problemas práticos, apenas estudos teóricos sobre a estabilidade de cargas móveis sobre vigas, com a conseqüente

possibilidade de uma “velocidade crítica”, que sempre resultaram em valores críticos bem acima que os existentes na prática.

Atualmente, ainda são publicados trabalhos relacionados à resposta dinâmica de vigas sujeitas a cargas móveis, como o trabalho de Lin e Tret-hewey[22], de 1990, e os trabalhos de Lee[23] e de Thambiratnan e Zhuge[24], de 1996, todos relacionados à análise dinâmica de vigas, apoiadas ou não sobre uma fundação elástica, sujeitas a uma carga ou massa móvel. Estes trabalhos tem com referência básica o trabalho de Thomas[25]. Posteriormente, as técnicas desenvolvidas eram aplicadas ao estudo do comportamento dinâmico de vias férreas e de obras-de-arte, como ponte e viadutos. Os mais recentes incorporam a utilização do Método dos Elementos Finitos em sua formulação. Apesar de serem trabalhos recentes e publicados em revistas de prestígio, são trabalhos de formulação simples (por exemplo: o contato entre a roda e o trilho é considerado linear), mas apresentam uma formulação interessante no tocante à implementação da matriz de rigidez da viga, no caso o trilho.

Em relação aos estudos relacionados à determinação de uma “velocidade crítica”, ligada à estabilidade da via, segundo Knothe[26], estes tiveram início com os testes desenvolvidos pela SNCF⁴ em 1954 e tiveram grande influência sobre o trabalho de Wickens[27], que é aceito como uma das primeiras soluções para o problema. Mas, acredita-se que já nos anos vinte e trinta alguns pesquisadores⁵ já tinham conseguido a solução para o problema da estabilidade dos veículos ferroviários. O trabalho de Fortin[76], de 1982, também é exemplar neste sentido. Neste trabalho é desenvolvido um estudo teórico simplificado da deflexão da via férrea sujeita a uma carga constante ou variando harmonicamente, deslocando-se a uma velocidade constante. Neste estudo não é considerado o amortecimento da via, o que é feito em um estudo posterior realizado junto com Sauvage[28]. O objetivo era a determinação da rigidez dinâmica aparente da via férrea, que posteriormente seria utilizada na determinação da velocidade crítica. Os resultados teóricos foram posteriormente comparados com ensaios realizados em um trecho experimental do TGV francês. O modelo analítico desenvolvido por Fortin parte de uma solução de uma equação diferencial semelhante à de Winkler, a exceção do termo relacionado à inércia da via, que depende da massa por

⁴ *Société Nationale des Chemins de Fer*, operadora ferroviária estatal francesa.

⁵ Seriam os trabalhos desenvolvidos por Rocard, em 1936, por Carter, em 1926 e Fromm, em 1927, conforme citados por Knothe.

metro linear da via e do quadrado da velocidade de deslocamento da carga. Para cargas constantes a solução independente do tempo, fazendo com que a via vibre em um único modo.

Desde os anos setenta tem havido muito interesse na aplicação de modelos matemáticos para compreender, e as vezes, tentar resolver problemas práticos, como irregularidades na via; trilhos corrugados; ruídos e vibrações em obras-de-arte urbanas, reconhecendo que as cargas dinâmicas podem causar danos significativos não somente à via, mas também aos veículos ferroviários. Segundo Knothe e Grassie[5], existe atualmente uma grande demanda por modelos dinâmicos relacionados à interação veículo-via que possam ser utilizados satisfatoriamente até uma faixa de frequência de 5000 Hz.

Nos anos setenta, a AAR (*Association of American Railroads*) em um programa de pesquisa conjunto com a FRA (*Federal Railroad Administration*) desenvolveram vários estudos relacionado à dinâmica entre trem e via, cujos resultados podem ser conhecidos através de vários relatórios técnicos[29, 30, 31, 32]. Estes estudos permitiram o desenvolvimento de modelos matemáticos para a análise de desempenho de todos componentes constituintes do sistema via férrea-composição ferroviária, bem como os requisitos de testes de engenharia necessários, de forma a fornecer uma base de dados e uma estrutura computacional para o estudo e previsão de problemas relacionados à interação dinâmica entre a via e a composição ferroviária. O resultado final deste programa foi o desenvolvimento do conjunto de modelos de simulação denominado NUCARS⁶. Entretanto, apesar dos estudos desenvolvidos levarem também em consideração os efeitos dinâmicos de irregularidades na via férrea, estes efeitos eram restritos somente aos veículos ferroviários e à interação dinâmica no contato entre roda e trilho, pouco mencionando os efeitos sobre a subestrutura da via.

Neste período vale ressaltar os trabalhos realizados por um grupo de pesquisadores ingleses ligados à Universidade de Cambridge e ao Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento da *British Railway*. Estes pesquisadores centraram seu estudos em torno dos efeitos dinâmicos provocados na via férrea por irregularidades da via, com a falta de dormentes; trilhos corrugados; “planos-na-roda” e excitações verticais e longitudinais a altas frequências; utilizando modelos dinâmicos desenvolvidos tanto no domínio da frequência como do tempo.

Um primeiro grupo de trabalhos realizados sob a liderança de Grassie[33,

⁶*New and Untried Car Analytic Regime Simulation.*

34, 35, 36, 37, 38], todos voltados para a determinação da resposta dinâmica da via férrea sob os mais diversos tipos de excitação: dormentes laqueados, excitação vertical, lateral ou longitudinal a altas frequências. Um segundo grupo liderado por Clark[39, 40], dedicou-se à investigação dos efeitos dinâmicos oriundos do tráfego de veículos ferroviários sobre vias com trilhos corrugados e à irregularidade do tipo “planos-na-roda”.

Em um dos trabalhos, realizado por Grassie et al.[33], que se tornou referência básica para todos os outros, são apresentados dois modelos dinâmicos: um modelando a via férrea como uma viga apoiada continuamente e outro sobre apoios discretos que incorpora as massas dos dormentes. Na faixa de frequência de interesse, no caso variando de 50 a 1500 Hertz, foi assumido que a flexibilidade dos dormentes permitiria os dois trilhos vibrarem independentemente, portando considerando-se somente um trilho. Este último modelo tornou-se o modelo dinâmico básico para análise de tensões dinâmicas da via quando o campo de interesse da análise for os componentes da superestrutura, principalmente trilhos, dormentes e fixações..

Os modelos foram utilizados para determinar a força de contato dinâmica entre a roda e o trilho como uma função da frequência da passagem da roda sobre um trilho corrugado. A roda é representada por uma massa concentrada em contato com o trilho através de uma mola hertziana linearizada. Em outro trabalho, Grassie et al.[35] investigaram a resposta dinâmica de um rodeiro apoiado sobre a via e excitado longitudinalmente em um ponto de contato, na mesma faixa de frequência do trabalho citado anteriormente. A resposta dinâmica de uma via férrea em relação às forças atuando longitudinalmente é o objeto de outro trabalho[34]. Aqui, o modelo consiste de uma viga infinita sobre um apoio contínuo. Segundo os autores, existe uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo modelo na faixa de frequência de 50 a 1500 Hertz com dados obtidos experimentalmente e a natureza discreta dos dormentes é relativamente desimportante. A via férrea move-se muito pouco em relação a estas forças frente às forças atuando verticalmente nesta faixa de frequência. Outro trabalho[37] apresenta um modelo de via férrea que permite examinar o comportamento do suporte da via. Neste modelo os dormentes são representados como vigas de Timoshenko de comprimento infinito apoiadas sobre uma fundação contínua. Este modelo permite uma análise mais detalhada do comportamento dinâmico dos dormentes. A resposta dinâmica da via férrea com dormentes descalçados é o objeto de outro trabalho[38]. Os autores, a partir de dados experimentais obtidos de um trecho de via que possuía dormentes laqueados, desenvolveram um modelo

para a obtenção da resposta dinâmica. A principal função do lastro para excitações com frequências acima de 100 Hertz é amortecer a vibração da via enquanto a resiliência das fixações atenuam as forças transmitidas para o dormente. Na falta de lastro, segundo os autores, dormentes de concreto podem fraturar caso ocorram irregularidades modestas nas rodas ou no boleto do trilho. Os modelos foram desenvolvidos no domínio da frequência.

Os trabalhos de Clark e Newton[39, 40] tinham como objetivo estudar os efeitos dinâmicos sobre a via férrea de irregularidades como corrugações e “plano-na-roda”. Os modelos desenvolvidos situam-se no domínio da frequência e o contato entre a roda e o trilho é feito através de uma mola hertziana não-linear. No modelo desenvolvido para estudar o efeito da corrugação, o lastro e as fixações são considerados como molas lineares, sem amortecimento e os dormentes como corpos rígidos. No caso do efeito da “plano-na-roda” foram desenvolvidos dois tipos de modelo: um do tipo viga apoiada sobre fundação elástica contínua e outro sobre apoio discreto, semelhante ao modelo básico desenvolvido por Grassie em seus estudos, mas o modelo de veículo representava um avanço em relação aos modelos então utilizados. Este modelo de veículo incorporava além da roda, o rodeiro e o corpo do veículo, conectados entre si por sistemas mola-amortecedor. Os resultados obtidos foram posteriormente comparados com testes de campo e mostraram boa correlação.

Em 1987, em um simpósio internacional realizado em Praga, promovido pela IAVSD⁷, voltado para o estudo da dinâmica dos veículos em estradas e vias férreas, foram apresentados alguns trabalhos dedicados ao estudo do comportamento da via férrea sob cargas dinâmicas. Um destes trabalhos, de autoria de Ahlbeck[41], está relacionado ao estudo das forças dinâmicas atuantes no contato entre roda e trilho devidas a erros no perfil radial da banda de rolamento de rodas ferroviárias. Segundo o autor, estas forças podem exceder a 400 kN e são propagadas para dentro dos componentes do rodeiro e até para a estrutura do veículo, podendo provocar danos por fadiga ou fratura. A partir de dados experimentais foi validado um modelo matemático da interação entre veículo e via.

Cox e Grassie[42] apresentam um modelo linear para estudar a interação dinâmica entre veículo e via. Uma vantagem significativa deste tipo de modelo é a sua simplicidade e facilidade para o exame dos efeitos dos parâmetros da via e do veículo. A desvantagem é que com este tipo de modelo é

⁷ *International Association for Vehicle System Dynamics.*

difícil examinar quantitativamente os efeitos das não-linearidades que ocorrem, como a perda de contato entre a roda e o trilho. A resposta dinâmica do veículo e da via a uma irregularidade senoidal periódica interposta entre eles é encontrada pela combinação dos dois sistemas (via e veículo), conforme desenvolvido por Grassie[33]. A resposta a um defeito discreto é encontrada pela análise de Fourier.

Em outro simpósio internacional realizado em 1989, em Kingston, no Canadá, também promovido pela IAVSD e como o de 1987, também voltado para o estudo da dinâmica dos veículos em estradas e vias férreas, foram apresentados alguns trabalhos voltados ao estudo da interação dinâmica entre veículo e via férrea. Um dos trabalhos, de autoria de Knothe e Ripke[43], aborda os efeitos dos parâmetros relacionados ao rodeiro, à via e as condições de rolamento sobre a taxa de crescimento das corrugações nos trilhos. Podem ser distinguidas três fases durante o processo de formação das corrugações do trilho. Na fase inicial, com a amplitude das corrugações variando entre 10 e 50 μm , a superfície do trilho é praticamente homogênea. Na segunda fase, a superfície lisa do trilho começa a ter as ondulações, que na fase seguinte, a terceira e última, sofrem um processo de amplificação podendo atingir profundidades de até no máximo 250 μm , com comprimento da corrugação variando entre 2 e 12 cm. O modelo é utilizado para investigar este processo, no qual uma irregularidade da superfície do trilho aumenta na fase inicial do processo de corrugação. É utilizado um processo de realimentação entre altas frequências de excitação, vibrações transientes e um processo de desgaste a longo prazo.

Outro trabalho, de autoria de Schwab e Mauer[44], apresenta um modelo computacional para simular o comportamento da subestrutura da via sob ação do tráfego ferroviário. É um estudo original, que foge do padrão da análise corrente na época, mais preocupada puramente com o estudo da interação entre veículo e a via. O modelo é composto por três componentes: um modelo dinâmico vertical de veículo, um modelo de via utilizando o método dos elementos finitos e um algoritmo matemático para prever o comportamento da subestrutura da via. As forças dinâmicas calculadas no contato entre roda e trilho através do modelo de veículo são a excitação para o modelo de via, provocando a resposta dinâmica dos trilhos, dormentes e do lastro. Os trilhos recebem as forças de contato diretamente, sofrem uma flexão sob esta carga e a distribuem aos dormentes e lastro. As forças resultantes do contato entre dormente e lastro alimentam o modelo de comportamento da subestrutura. O perfil do trilho deformado obtido a partir

do modelo de via, junto com o novo perfil deformado da subestrutura, serve como novo carregamento para a nova passagem do veículo, ou seja, uma nova excitação para o modelo de veículo.

O modelo de comportamento da subestrutura é baseado em um algoritmo desenvolvido por pesquisadores alemães, a partir de estudos sobre carregamentos cíclicos realizados sobre modelos de via compostos de um e de oito dormentes. O modelo de dormente único foi carregado concentricamente e o modelo de oito dormentes foi carregado através de dois dormentes simultaneamente para simular o carregamento com dois eixos⁸.

Em 1993, Knothe e Grassie[5] desenvolveram uma extensa revisão sobre o estado-da-arte da modelagem da via férrea e sua interação com os veículos ferroviários em altas frequências. Este artigo tornou-se referência básica para esta área de conhecimento a partir da data de sua publicação. Os autores fazem uma revisão histórica do tema, apresentam os principais problemas oriundos da interação dinâmica entre via e veículos e as respectivas faixas de frequências de interesse. Apresentam todos tipos de modelos até a época desenvolvidos, modelos estes relacionados a todos componentes dos sistemas envolvidos. Em termos da modelagem da via apresentam uma detalhada hierarquização, onde a principal diferenciação entre os modelos está relacionada às características do suporte da via férrea (contínuo ou discreto), bem como uma discussão detalhada sobre a modelagem da via possuindo ou não comprimento infinito, questão intimamente relacionada ao tipo de solução a ser utilizada (domínio da frequência ou do tempo).

Também são apresentadas as técnicas de solução em ambos os domínios, bem como uma revisão histórica destas técnicas. As técnicas de solução no domínio da frequência são normalmente indicadas para as situações em que o modelo seja linear. Mas no caso das vias férreas sabemos que existem várias não-linearidades, como por exemplo, a perda de contato entre roda e trilho; o levantamento do dormente em relação ao lastro; a rigidez do contato entre roda e trilho por si só também não-linear, bem como outros fenômenos. Desta forma, qualquer modelagem da via férrea que leve em consideração estas não-linearidades deverá ser preferivelmente desenvolvida no domínio do tempo. As técnicas de solução disponíveis neste domínio são a análise modal e a integração a passo de tempo, ou uma combinação das

⁸Maiores detalhes sobre este estudo pode ser encontrado no trabalho de Hettler, A., "Bleibende Setzungen des Schotteroberbaus", *ETR - Eisenbahn-technische Rundschau* 33, Heft 11, p.847-853, 1984, citado por Schwab e Mauer.

duas. Com o desenvolvimento dos recursos computacionais a disposição dos pesquisadores e a utilização de técnicas numéricas de integração como os métodos de Newmark e Runge-Kutta, a integração a passo de tempo tornou-se o método corrente para a análise estrutural dinâmica não-linear, incluindo aí a interação entre via férrea e veículos ferroviários a altas frequências. Ao seu final, o artigo lista 133 referências, abrangendo todo o tema, que se tornam um caminho seguro para quaisquer pesquisadores que se aventurem no tema e um apêndice muito útil contendo que lista valores para os vários parâmetros possíveis de serem utilizados nos modelos dinâmicos voltados à interação entre via e veículos ferroviários.

Em 1994, Dong e Dukkipati[45] desenvolveram um modelo dinâmico para estudar a interação entre via e veículo ferroviário que levava em consideração vários fatores não-lineares, como a perda de contato entre a roda e o trilho, o levantamento dos trilhos em relação aos dormentes e destes em relação ao lastro. O trilho é modelado como elemento finito de uma viga Timoshenko com quatro graus de liberdade por nó (ou seja, leva em consideração a inércia de rotação) e com comprimento infinito. A característica de comprimento infinito é conseguida através da inserção de uma mola torsional no finais do trecho de via adotado na modelagem. É utilizado um modelo interessante para o contato entre a roda e o trilho, derivado de um modelo multi-contato desenvolvido para veículos rodoviários. O modelo é utilizado no estudo dos efeitos dinâmicos provocados na via férrea por uma irregularidade tipo “plano-na-roda”.

Este modelo pode ser considerado como uma síntese dos modelos dinâmicos da interação entre via e veículo ferroviários na faixa de frequência de 0 a 2500 Hertz, ou seja, viga apoiada discretamente sobre dormentes rígidos, interconectados por sistemas tipo mola-amortecedor, sendo o modelo de veículo constituído por uma roda trafegando a uma velocidade constante. Segundo os autores a resposta em regime do sistema via-veículo para uma roda perfeita transmitindo uma carga constante a uma velocidade também constante sobre uma via perfeita é periódica e o comprimento de onda dominante é igual ao espaçamento entre os dormentes. No caso das forças dinâmicas devido à “plano-na-roda”, os resultados obtidos mostraram uma boa correlação com dados experimentais e obtidos da literatura, garantindo uma boa verificação do modelo.

Em 1995, a IASVD promove um “workshop” em Herbertov, na República Tcheca, voltado para a interação dos veículos ferroviários com a via férrea e sua subestrutura. Duas seções deste “workshop” foram dedicadas ao

estudo da interação dinâmica entre os veículos ferroviários, a via férrea e sua subestrutura e as técnicas de medições de irregularidades. Um dos trabalhos apresentados, de autoria de Diana et al.[46] estuda a interação dinâmica veículos ferroviários e a via férrea no caso de trens de alta velocidade. O modelo desenvolvido leva em consideração a deformabilidade do corpo do veículo e do rodeiro, de forma a poder reproduzir as acelerações medidas e, portanto, o conforto dos passageiros e as forças atuantes no contato entre a roda e o trilho. A faixa de frequência estudada varia entre 0 e 200 Hertz, ou seja a baixa e médias frequências. O veículo é modelado através de corpos rígidos enquanto que um modelo de elementos finitos é adotado para a via. Os dados obtidos pelo modelo foram comparados com resultados experimentais obtidos em testes de campo realizados pela Ferrovias Italianas, principalmente em termos dos dados relativos à aceleração do corpo do veículo, rodeiros e eixos, de forma a validar o modelo matemático desenvolvido. Os resultados obtidos pelo modelo em termos da força de contato entre roda e trilho e as acelerações do trilho e da superestrutura foram comparados com resultados encontrados na literatura. A análise comparativa mostrou que a esquematização do sistema via-veículo é adequado para reproduzir o comportamento dinâmico do sistema dentro da faixa de frequências adotada.

Outro trabalho, de autoria de Dahlberg[47], desenvolve um modelo de simulação da via e da interação da via com o veículo ferroviário com o objetivo de determinar as deformações e as forças dinâmicas atuantes entre a roda e o trilho. Paralelamente ao desenvolvimento deste modelo, um grande programa de testes de campo foi realizado o que permitiu a comparação entre resultados calculados pelo modelo com as medições realizadas. O modelo compreende um rodeiro ferroviário deslocando-se sobre uma via, onde o trilho e os dormentes são modelados vigas do tipo Rayleigh-Timoshenko e as fixações e o lastro como sistemas mola-amortecedor em paralelo. É adicionada massa ao dormente para levar em consideração a massa do lastro. O modelo é considerado linear e invariante no tempo, o que permitiu a utilização da análise modal como técnica de solução. O trabalho de Dahlberg fornece vários dados experimentais que podem ser utilizados para a validação de outros modelos de simulação.

Ahlbeck[48] apresenta um trabalho muito interessante onde apresenta as várias abordagens possíveis para a modelagem dinâmica da interação entre via e veículo ferroviários. Apresenta uma hierarquização dos modelos baseada na faixa de frequência de interesse. O trabalho de Ahlbeck fornece ao pesquisador interessado na modelagem da interação dinâmica entre via e

veículo ferroviários um roteiro para o desenvolvimento de seu modelo tendo em vista a eficiência computacional, o que exige um compromisso entre a alta fidelidade ao sistema a ser modelado e a simplicidade, fazendo com que seja claramente determinado o problema a ser analisado e sua faixa de frequência de interesse.

Outro trabalho, de autoria de Ripke e Knothe[49], apresenta um modelo de simulação para a interação vertical entre a via e veículo ferroviários para baixas e altas frequências. O modelo de interação entre via e veículo consiste de um modelo de via e de veículo, ambos restritos à dinâmica vertical e longitudinal de forma a reduzir os graus de liberdade. Desta forma somente carregamentos simétricos da via e do veículo podem ser estudados. A força de contato entre as rodas e o trilho são calculadas de acordo com a teoria não-linear de Hertz. O modelo de veículo consiste de um carro com até dois truques rígidos e com até quatro rodeiros elásticos. As elasticidades dos rodeiros são consideradas através de graus de liberdade nodais, onde os parâmetros modais são calculados a partir de um modelo de elemento finito. As suspensões primária e secundária são modeladas através molas lineares em paralelo com amortecedores viscosos. Este modelo de veículo permite que se leve em consideração a dinâmica vertical do veículo incluindo a rotação do carro e dos rodeiros e o acoplamento através da via.

O modelo de via consiste de um trecho com pelo menos trinta dormentes, que podem ser modelados tanto como corpos rígidos com três graus de liberdade ou como uma viga de Timoshenko com seis elementos por dormente. O trilho é modelado como uma viga de Timoshenko com até quatro elementos entre dois dormentes. A placa de apoio do trilho é modelada como uma fundação visco-elástica com rigidez elástica linear e amortecimento viscoso. O lastro também é modelado como molas lineares em paralelo com amortecedores viscosos e uma massa efetiva de lastro foi introduzida. Para poder ser capaz de levar em consideração efeitos de propagação de onda, as massas de lastro são conectadas através de molas e amortecedores. O subleito é modelado de forma semelhante à placa de apoio do trilho. A técnica de solução utilizada é um algoritmo de integração a passo de tempo modal. Os resultados obtidos com o modelo foram comparados com os resultados obtidos a partir de dois programas computacionais (MEDYNA e SiRaGe). O modelo desenvolvido por Ripke e Knothe é sofisticado e fornece resultados precisos dentro da faixa de frequência de interesse e os seus resultados podem ser utilizados na validação de modelos mais simples.

Dois trabalhos relacionados à covalidação de modelos teóricos através

de testes de laboratório foram apresentados por Thompson e Vincent[50, 51]. Os autores desenvolveram três modelos teóricos do comportamento dinâmico da via férrea para uma faixa de frequência variando de 0 a 6000 Hertz. Estes modelos tinham como objetivo o estudo do ruído provocado pelo rolamento da composição ferroviária. O comportamento dinâmico da via férrea tem um importante papel na geração do ruído pelo rolamento das rodas sobre o trilho, pois as vibrações geradas na zona de contato são transmitidas através da via e das estruturas das rodas, sendo responsáveis pelo ruído que se irradia para o ambiente. O primeiro modelo, o mais simples, consistia de um modelo de viga de Timoshenko apoiado continuamente sobre uma fundação composta por três camadas: uma camada resiliente (as placas de apoio); uma camada de massa (os dormentes) e uma segunda camada resiliente formada pelo lastro. O amortecimento nas duas camadas resilientes foi considerado como sendo histerético em vez de viscoso. O segundo era um modelo de via apoiado discretamente, onde a fundação consistia de um sistema mola-massa-mola, com molas amortecidas histereticamente representando as placas de apoio e o lastro e a massa os dormentes. O terceiro também era apoiado continuamente, mas com uma modelagem mais detalhada do trilho, feita através uma malha de elementos finitos. O dormente era considerado como uma massa com seis graus de liberdade; a placa de apoio era modelada como uma rigidez distribuída nas três direções abaixo do patim do trilho e o lastro era representado por seis rigidezes.

Além da análise comparativa desenvolvida entre os valores calculados pelos modelos e os testes de laboratório, foram também apresentadas medições relativas à determinação da rigidez dinâmica de fixações de trilhos. Para tanto foi utilizado um método denominado indireto, no qual o elemento resiliente é colocado entre duas massas. A massa superior é excitada eletro-dinamicamente, e a respostas de ambas as massas é medida através acelerômetros. Medições da excitação e da resposta são possíveis nos seis graus de liberdade, permitindo com que toda matriz de transferência com 36 elementos possa ser determinada. Os ensaios foram realizados para cinco sistemas diferentes de fixações e os autores fornecem os resultados obtidos. Estes resultados podem ser utilizados como parâmetros para outros modelos de simulação que incluem em sua formulação um sistema de fixações. No segundo trabalho são apresentados vários resultados de testes de campo obtidos para quatro tipos de vias e os resultados obtidos através da utilização dos três modelos anteriormente citados. Segundo os autores a aceleração vertical foi bem prevista utilizando-se o segundo modelo (apoio discreto).

Na mesma linha de pesquisa do trabalho de Schwab e Mauer[44], o trabalho de Li e Selig[52] também se preocupa com a interação dinâmica entre os veículos e a superestrutura ferroviária (trilhos, fixações e dormentes) com a subestrutura, ou seja lastro, sublastro e subleito da via férrea. O trabalho apresenta uma perspectiva para o estudo da influência da subestrutura da via sobre a interação dinâmica entre via e veículos ferroviários, bem como a influência que as cargas repetidas dinâmicas têm sobre o projeto e a manutenção da subestrutura. Dentro deste contexto, o trabalho faz uma descrição dos modelos estáticos de via bem como dos modelos dinâmicos da interação entre via e veículos ferroviários; estuda a influência que a subestrutura da via tem sobre a rigidez da via ou do modulo da via, sobre as irregularidades da via e sobre as cargas dinâmicas, e também sobre os efeitos que as cargas dinâmicas repetidas têm sobre a degradação do lastro e da deformação plástica da subestrutura.

Ao contrário de irregularidades da via como trilhos corrugados e “planos-na-roda” que provocam a maioria das cargas dinâmicas na via com as frequências mais altas, as irregularidades devidas a alterações da rigidez e a recalques plásticos diferenciais da subestrutura geralmente provocam baixas cargas dinâmicas com componentes de baixa frequência. Com o modelo dinâmico de interação entre via e veículo ferroviários são obtidas cargas dinâmicas máximas, que associadas a sua repetição devida ao tráfego, torna-se o parâmetro para as análises relacionadas à deformação plástica e a degradação da subestrutura.

Os trabalhos de Sato[53], Mauer[54] e de Ford[55] seguem na mesma linha, ou seja, associar as cargas dinâmicas repetidas às características funcionais das camadas da subestrutura da via. Em seu trabalho, Mauer apresenta um modelo de assentamento da via dinâmico que simula o comportamento da via férrea sob o tráfego ferroviário. O modelo tem uma estrutura semelhante ao desenvolvido por Schwab[44], a exceção do modelo de via que é um modelo do tipo estático discreto não-linear. Este modelo consiste de um trecho de via com pelo menos cinquenta dormentes em uma formação circular, como um anel, constituindo-se assim em um trecho de comprimento infinito de via. O trilho com suas propriedades elásticas é modelado como uma viga do tipo Euler-Bernoulli utilizando o método dos elementos finitos para a obtenção das matrizes de massa e de rigidez do elemento. Os nós dos elementos finitos apóiam-se sobre cada dormente e têm dois graus de liberdade: translação vertical e rotação. As funções de forma do tipo polinomial cúbica são utilizadas para transformar a carga de roda que atua entre os dois dormentes em

cargas nodais. As massas dos dormentes são adicionadas às massas nodais dos elementos do trilho. A rigidez total do lastro e do subleito é discretizada para cada dormente e a função de rigidez é assumida como sendo linear na direção de compressão e zero na outra direção. Esta seria a não-linearidade incluída no modelo. Os três modelos (veículo, via e de assentamento da via) relacionam-se entre si, realimentando-se em um processo contínuo a partir de condições iniciais pré-determinadas.

Os trabalhos de Schwab, Li, Sato, Mauer e Ford constituem-se em uma abordagem recente na análise dinâmica da interação entre via e veículos ferroviários, das influências e efeitos desta interação sobre a subestrutura da via, refletindo uma postura nova dos analistas. Como bem coloca Ahlbeck[48], tradicionalmente operadores ferroviários e, portanto, os estudiosos da dinâmica dos veículos, têm considerado a região do contato entre a roda e o trilho como sendo o limite de seu interesse. Toda estrutura situada abaixo deste ponto era motivo de preocupação somente do pessoal de manutenção da via e dos engenheiros civis. Mas a via e o veículo ferroviário formam um sistema dinâmico complexo no qual a impedância dinâmica da via constitui-se numa parte significativa da “suspensão dinâmica” do veículo.

Muitos dos modelos desenvolvidos pelos autores aqui revisados possuem algumas limitações significativas em relação ao comportamento dinâmico da subestrutura da via, pois, como bem coloca Knothe[5] o lastro sofre deflexões de uma forma altamente não-linear sob carregamento. A dissipação de energia ocorre devido à fricção seca e a partir da propagação da onda de vibração para o subleito, fato confirmado por Kerr[56], que a partir de dados de campo do estudo desenvolvido pela AREMA[14], no qual revelou que a deflexão vertical do trilho não era proporcional às cargas de roda, especialmente nas vias em condições ruins. Entretanto, Zarembski[58] mostra que mesmo para as vias em boas condições, mas sujeitas a cargas de roda muito grandes, respostas não-lineares também foram observadas. Kerr sugere a partir do trabalho de Mair[59] uma aproximação bilinear para a resposta do lastro. Este problema foi parcialmente resolvido no trabalho de Ripke[49] com a colocação de conjuntos mola-amortecedor entre as massas representativas da camada de lastro em seu modelo de via. Nas conclusões de seu trabalho Li coloca a necessidade de mais pesquisas para a compreensão dos efeitos que o carregamento dinâmico provocado pela roda tem sobre a subestrutura da via, bem como o efeito que a subestrutura da via sobre a resposta dinâmica do veículo.

Neste sentido, alguns trabalhos recentes de pesquisadores voltados pa-

ra o estudo da interação dinâmica entre solos e estruturas têm dado uma grande contribuição. Um exemplo ilustrativo deste tipo de abordagem é o trabalho de Mohammadi e Karabalis[60], que desenvolveram um estudo da resposta dinâmica da via férrea através de uma formulação tridimensional baseada no método dos elementos de contorno acoplado ao método dos elementos finitos⁹ no domínio da frequência. A via é modelada como sendo um grupo de fundações superficiais massivas e rígidas apoiadas sobre um semi-espaço viscoelástico e conectadas entre si por uma estrutura formada pelos trilhos. O método dos elementos de contorno utilizando soluções fundamentais de espaço completo e elementos quadrilaterais é utilizado para simular o semi-espaço, enquanto que o método dos elementos finitos é utilizado na modelagem das fundações e dos trilhos. A função de carga consiste de um conjunto de cargas harmônicas ou transientes aplicadas externamente. Os resultados relativos às frequências bem como os transientes, obtidos a partir de uma transformação rápida de Fourier (FFT), são apresentados para vários modos de vibração.

Na mesma linha, o trabalho de Auersch[7] desenvolveu um modelo da interação entre via e veículo ferroviários para ser aplicado ao estudo do comportamento dinâmico do trem ICE (*InterCityExperimental*). O modelo completo consiste de um modelo de veículo considerado como corpo rígido, os trilhos modelados como elementos finitos de viga e o suporte da via modelado como elementos de contorno. Com a finalidade de desenvolver análises comparativas as cargas móveis calculadas foram utilizadas para simular as vibrações nos testes do ICE, onde mostraram uma boa correlação.

Os trabalhos desenvolvidos por Rücker[6, 61] também se baseiam em uma formulação analítica para a solução tridimensional para os problemas da interação solo-estrutura, na qual quaisquer estruturas com fundações rígidas ou flexíveis, com formas e posições no espaço arbitrárias, apoiadas sobre a superfície de semi-espaço homogêneo visco-elástico podem ser consideradas. Segundo o autor as respostas obtidas com o modelo correlacionam-se bem com ensaios de campo realizados em uma subestrutura real. O trabalho de Sarfeld et al.[62] apresenta também um modelo na mesma linha dos anteriores, mas sem o modelo de veículo, englobando somente o subsistema dormente-fundação. Neste modelo um número infinito de dormentes de concreto são imersos na superfície da fundação. Os dormentes são assumi-

⁹Este tipo de acoplamento entre o método de elementos de contorno e o método dos elementos finitos é denominado formulação *BEM-FEM* na literatura.

dos como sendo rígidos e o subsolo é idealizado como sendo um semi-espaço elástico homogêneo e isotrópico. Devido ao comportamento tridimensional a energia será absorvida através de amortecimento de radiação.

Todos estes modelos têm soluções no domínio da frequência, e portanto não levam em consideração nenhuma das não-linearidades comumente encontradas na interação entre via e veículo ferroviários. Portanto, a busca de modelagens que pudessem ser formuladas no domínio do tempo seria interessante. Até o presente momento não apareceu na literatura nenhum trabalho de modelagem da interação entre via e veículo ferroviários dentro da abordagem da interação solo-estrutura no domínio do tempo. Entretanto, alguns trabalhos como os de Guan e Novak[63, 64], nos quais é estudado a resposta transiente de um grupo de fundações rígidas do tipo faixa apoiadas sobre um semi-espaço homogêneo elástico sujeitas à cargas externas ou a movimento sísmicos abre boas possibilidades neste sentido. Guan e Novak utilizam funções de Green como soluções fundamentais em sua análise. No caso, bastaria o acoplamento de uma estrutura formada pelos trilhos (uma viga), conectadas sobre os dormentes (as fundações rígidas do tipo faixa), modelada através do método dos elementos finitos, por onde uma carga móvel, no caso a carga de roda de um veículo ferroviário se deslocaria a velocidade constante. Como a subestrutura dormente-fundação é modelada segundo o método dos elementos de contorno, teríamos que ter uma formulação do tipo *BEM-FEM* para este tipo de modelo. Se fosse possível ainda modelar a fundação como sendo uma camada (no caso, o lastro) apoiada sobre um semi-espaço (o sub-leito) teria um modelo ainda mais realista, mas segundo Wolf[65] ainda não existem soluções para este tipo de abordagem.

1.3 Objetivos e Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ampla revisão sobre a análise de tensões na via férrea, tanto estática como dinâmica e, posteriormente, desenvolver um modelo dinâmico da interação vertical entre via e veículo ferroviários que permita o cálculo das forças atuantes no contato entre a roda e o trilho. Para poder levar em consideração as não-linearidades associadas ao contato entre roda e trilho e da subestrutura o modelo tem formulação para o domínio do tempo, utilizando um método numérico de integração aplicado à análise de estruturas não-lineares, implementado com uma rotina para a busca da solução ótima do equilíbrio nodal original. Com o modelo

serão simuladas as principais irregularidades que ocorrem na via e no veículo responsáveis pelas cargas dinâmicas a média e altas frequências para as condições normalmente encontradas na via férrea.

No capítulo 2 é feita uma revisão geral da análise estática de tensões na via férrea apresentando a metodologia tradicionalmente utilizada baseadas na equação de Winkler, bem como uma revisão dos modelos quasi-estáticos disponíveis atualmente e uma discussão dos diversos métodos utilizados para a determinação dos fatores de carga atualmente utilizados na prática ferroviária.

No capítulo 3 é feita uma revisão da modelagem dinâmica da interação entre via e veículo ferroviários, apresentando os principais tipos de problemas oriundos desta interação, as faixas de frequências onde eles ocorrem, os tipos de modelos que podem ser utilizados em função dos problemas a serem utilizados e as técnicas de soluções possíveis de utilização.

No capítulo 4 é apresentada descrição e a implementação de um modelo da interação dinâmica vertical entre via e veículo ferroviários que permita a determinação das forças atuantes no contato entre roda e trilho, contato considerado como sendo do tipo hertziano não-linear.

No capítulo 5 são apresentadas as implementações do modelo para os dois tipos de irregularidades da via e do veículo. Posteriormente é feita a validação deste modelo a partir de resultados teóricos e experimentais encontrados na literatura revisada e é desenvolvido um estudo de caso.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões dos trabalho bem como sugestões relativas à continuidade dos estudos.

Capítulo 2

A Análise de Tensões na Via Férrea

2.1 Considerações Iniciais

A introdução dos trilhos metálicos durante o século dezenove levou ao desenvolvimento de dois tipos de via. Um era a via apoiada sobre dormentes longitudinais e o outro a via com dormentes transversais discretos. Enquanto no primeiro caso os trilhos são apoiados continuamente, no segundo caso os trilhos são apoiados por dormentes transversais, espaçados a uma dada distância pré-fixada um do outro. Embora o desenvolvimento das vias férreas nesta época fosse principalmente intuitivo, baseado na abordagem de tentativa e erro, já desde a segunda metade do século dezenove tinham sido feitas tentativas por engenheiros ferroviários de desenvolverem análises da via e de seus componentes.

A análise da via apoiada sobre uma base elástica teve um grande desenvolvimento a partir da introdução das equações diferenciais propostas por Winkler em 1867. Winkler também formulou a solução básica para o caso de uma viga apoiada sobre dormentes longitudinais suportados por uma base elástica. O desenvolvimento da análise de tensões para as vias apoiadas sobre dormentes discretos foi mais complicada devido à natureza discreta do apoio. Ela começou considerando a via como sendo uma viga sobre apoios discretos (rígidos ou elásticos), e a partir daí como uma via “continuamente” apoiada. O primeiro tipo de abordagem, viga apoiada sobre uma base elástica, foi adotado por engenheiros ferroviários americanos, principalmente por

Talbot, nos estudo conjunto ASCE-AREMA-[14]. As equações de Talbot são ainda hoje utilizadas na prática corrente americana, como podemos observar no livro de Hay[13]. A análise da via sobre dormentes longitudinais, que evoluiu posteriormente para a análise sobre dormentes discretos é atualmente o método dominante na engenharia ferroviária européia, principalmente alemã, como podemos observar no livro de Fastenrath[2], no capítulo relacionado à análise de tensões na via de autoria de Eisenmann.

Nas seções a seguir faremos uma revisão sucinta destas duas metodologias. Também serão apresentados alguns modelos quasi-estáticos desenvolvidos para a análise de tensões na via férrea, bem como uma ampla revisão das diversas metodologias utilizadas para a determinação dos fatores de carga.

2.2 A Metodologia baseada nas Equações de Talbot

Segundo Talbot uma carga originada de um grupo de rodas é distribuída sobre os dormentes adjacentes em magnitude decrescente, com a parte proporcional da carga para cada dormente sendo uma função da rigidez do trilho, do espaçamento entre dormentes, do tamanho e da rigidez dos dormentes e da rigidez da subestrutura da via férrea. A relação fundamental, a partir da solução básica proposta por Winkler, que considera a via férrea como sendo uma viga contínua apoiada elasticamente pode ser vista na equação 2.1.

$$p(x) = -uw(x) \quad (2.1)$$

Nesta equação $p(x)$ é a pressão por unidade de comprimento ao longo do eixo x , no caso orientada para cima, proporcional à deflexão vertical $w(x)$ e modificada pelo *coeficiente de rigidez* ou *elasticidade* da via u . A equação diferencial para uma viga elástica nesta situação é a equação 2.2.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + uw(x) = 0 \quad (2.2)$$

Esta equação diferencial é satisfeita para x dado pela equação 2.3, mostrada a seguir.

$$w(x) = \frac{P}{(64EIu^3)^{1/4}} \exp^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (2.3)$$

2.2. A METODOLOGIA BASEADA NAS EQUAÇÕES DE TALBOT 23

Nesta equação P é uma carga de roda simples, EI é a rigidez a flexão do trilho e λ é denominado *fator de amortecimento* que pode ser determinado a partir da relação 2.4.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{u}{4EI}} \quad (2.4)$$

Derivando sucessivamente a equação 2.3 podemos obter as equações para a declividade, momento fletor, cisalhamento e a intensidade da pressão no contato com o trilho. Desta forma, temos:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{2P}{(16EIu)^{1/2}} \exp^{-\lambda x} \sin \lambda x = \text{declividade} \quad (2.5)$$

$$EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} = P \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} \exp^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \text{momento fletor} \quad (2.6)$$

$$EI \frac{d^3w(x)}{dx^3} = -\frac{P}{2} \exp^{-\lambda x} \cos \lambda x = \text{cisalhamento} \quad (2.7)$$

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} = P \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} \exp^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = -uw(x) = \quad (2.8)$$

= pressão contra o trilho.

Os valores máximos ocorrem no ponto de aplicação da carga, ou seja, para $x=0$. Aplicando este valor nas equações acima temos que:

$$Y_0 = \frac{P}{(64EIu^3)^{1/4}} = \text{máxima deflexão} \quad (2.9)$$

$$m_0 = 0 = \text{declividade} \quad (2.10)$$

$$M_0 = P \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} = \text{máximo momento fletor} \quad (2.11)$$

$$S_0 = -\frac{P}{2} = \text{máximo cisalhamento} \quad (2.12)$$

$$P_0 = P \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} = -uY_0 = \text{máxima pressão contra o trilho} \quad (2.13)$$

O sinal negativo na equação 2.13 é indicativo de uma deflexão para baixo, condizente com a convenção utilizada por Talbot. Resolvendo a equação 2.6 para $M=0$, temos a distância (x_1) a partir do ponto de aplicação da carga no qual o momento fletor torna-se nulo, que pode ser determinada através da equação 2.14, apresentada a seguir.

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} \quad (2.14)$$

Da mesma maneira podemos obter o ponto (x_2) onde a deflexão é nula. Para tanto basta fazer $w(x)=0$ na equação 2.3. O resultado é mostrado na equação 2.15 a seguir.

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} \sqrt[4]{\frac{u}{64EI}} \quad (2.15)$$

Uma observação importante deve ser levada em consideração. Como bem coloca Hay[13], estas expressões acima desenvolvidas são válidas para vias com espaçamento entre dormentes pequeno, com uma elástica expandindo-se a pelo menos oito dormentes, seções de trilhos bem rígidas, com a via férrea construída de tal forma a permitir pressões negativas e com carregamento estático.

Para simplificar o processo de cálculo, Talbot desenvolveu uma forma de se obter as deflexões, os momentos fletores e a pressões contra o trilho ao longo do trilho devido a uma carga de roda simples. Estes valores podem ser determinados a partir dos valores máximos através do chamado *diagrama mestre*, mostrado na Figura 2.1. As deflexões e os momentos fletores sob a roda são tomados como sendo unitários e os valores nos outros pontos são tomados como relativos a estes valores máximos. Assim, as distâncias ao longo do eixo das abcissas são em termos da distância x_1 . Calculando-se a distância entre o ponto x_1 até o ponto onde o momento é nulo, pode-se determinar o valor do momento máximo. O valor do momento fletor em qualquer

2.2. A METODOLOGIA BASEADA NAS EQUAÇÕES DE TALBOT 25

outro ponto pode ser determinado a partir do valor da relação x/x_1 . Com este valor como abcissa podemos obter a ordenada correspondente a partir do diagrama mestre. O momento fletor no ponto em análise é obtido pela multiplicação desta ordenada pelo valor do momento máximo. As deflexões e as pressões contra o trilho podem ser determinadas da mesma forma.

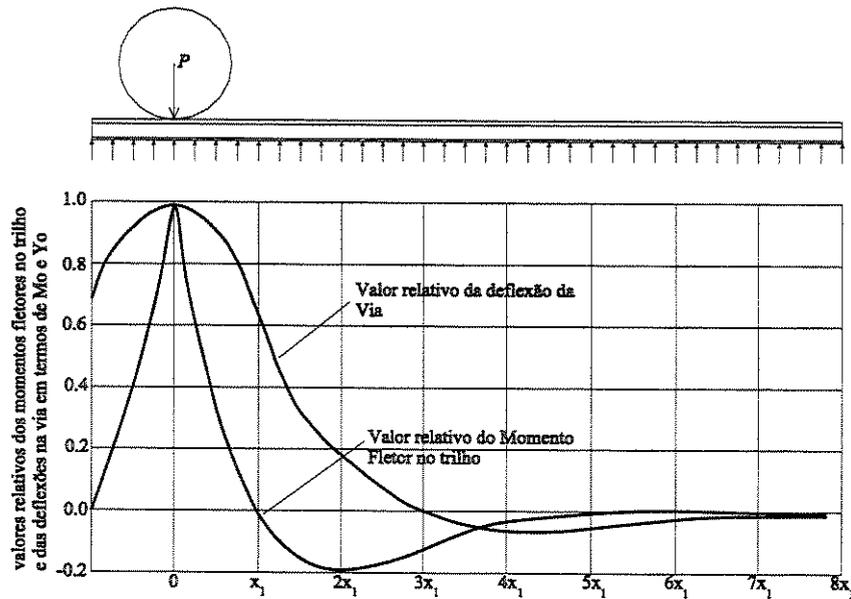


Figura 2.1: Diagrama mestre

No caso de rodas múltiplas, as curvas de deflexões e de momentos fletores para cada roda são determinadas em função da posição que cada roda ocupa. Assim sendo, curvas compostas de deflexões e de momentos fletores podem ser obtidas por superposição, ou seja, a partir da soma algébrica das ordenadas de cada curva individual. Se as rodas forem muitas próximas uma das outras há uma tendência da curva composta de deflexões se tornar “plana”, reduzindo a declividade, os momentos fletores e as tensões. A medida que o espaçamento aumenta, as rodas tendem a atuar como rodas separadas aumentando os valores das deflexões, das declividades e dos momentos fletores. Segundo Talbot, a influência do grupo de rodas do outro lado do veículo, bem como do veículo ou locomotiva adjacente devem ser também considerados. Desta forma, no cálculo das pressões contra o trilho o valor

da carga de roda deve ser modificado por um fator multiplicador baseado no efeito das deflexões das rodas adjacentes.

2.3 A Metodologia proposta por Eisenmann

A metodologia proposta por Eisenmann baseia-se no trabalho de Zimmermann [9]. Diferentemente da formulação de Talbot, a de Zimmermann parte da formulação de Winkler para uma via apoiada sobre dormentes longitudinais, estes por sua vez apoiados sobre uma base elástica. Assim, a relação 2.16 foi proposta como sendo a resposta básica do sistema formado pela viga apoiada sobre os dormentes longitudinais.

$$p(x) = Cw(x) \quad (2.16)$$

Nesta relação $p(x)$ é a pressão de contato continua entre os dormentes longitudinais e a base por unidade de área, $w(x)$ é a deflexão vertical ao longo do eixo x e C é uma constante de proporcionalidade, denominada *modulo de lastro*. A equação diferencial de equilíbrio para a teoria de flexão de uma viga elástica nestas condições é mostrada na equação 2.17.

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + p(x) = q(x) \quad (2.17)$$

Onde $q(x)$ representa as cargas verticais e EI é a rigidez à flexão efetiva do trilho e do dormente longitudinal no plano vertical. Na equação 2.16 a pressão $p(x)$ é por unidade de área e como a equação 2.17 é por unidade de comprimento, a equação 2.16 foi reescrita na forma apresentada pela equação 2.18.

$$p(x) = bCw(x) \quad (2.18)$$

Onde b é a largura do dormente longitudinal, como mostrado na Figura 2.2. Desta forma, a equação diferencial resultante é a equação 2.19. Mecanicamente, isto representa a resposta estática do sistema viga trilho-dormente conectada a uma base elástica. De acordo com Winkler o valor de EI seria igual a soma dos valores das rigidezes a flexão do trilho e do dormente longitudinal, o que implica em contato sem atrito entre o trilho e o dormente.

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + bCw(x) = q(x) \quad (2.19)$$

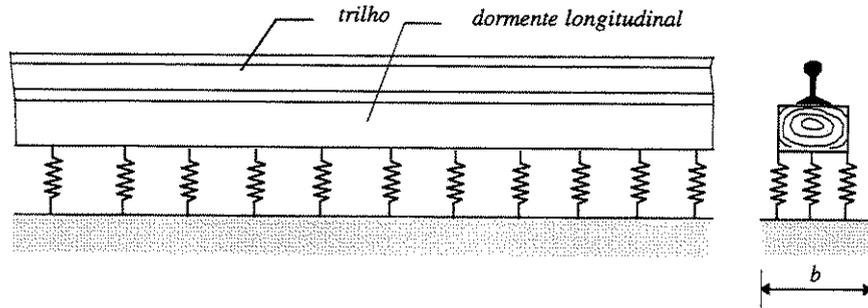


Figura 2.2: Viga apoiada sobre dormente longitudinal

Em 1882, Schwedler[8] discute as tensões nos trilhos de uma via com trilhos longitudinais e apresenta a bem conhecida solução da equação 2.19 para o caso de uma viga de comprimento infinito sujeita a uma carga concentrada P aplicada no ponto x igual a 0 , mostrada através da equação 2.20, bem como a expressão correspondente para o momento fletor através da equação 2.21.

$$w(x) = \frac{P\beta}{2bC} \exp^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \text{ para } 0 \leq x \leq \infty \quad (2.20)$$

$$M(x) = \frac{P}{4\beta} \exp^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \text{ para } 0 \leq x \leq \infty \quad (2.21)$$

O valor da constante β é determinado a partir da equação 2.22.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{bC}{4EI}} \quad (2.22)$$

A concordância próxima observada entre as deflexões calculadas e as medidas realizadas no campo apontaram para a conclusão que a teoria de flexão linear para uma viga sobre uma base de Winkler linear era suficiente para a análise estática das vias com dormentes longitudinais.

Entretanto, os pesquisadores, notadamente os alemães, como Hanker e Saller¹, estavam interessados no desenvolvimento da análise dos trilhos para a via apoiada sobre dormentes transversais discretos, que era um modelo

¹Estes pesquisadores, nos anos trinta, estudaram as formas possíveis de transformar uma via apoiada sobre dormentes discretos em uma via apoiada sobre dormentes longitudinais. O princípio básico utilizado é o da igualdade das áreas de apoio dos dormentes.

mais próximo da realidade. Este desenvolvimento foi mais complicado. Teve início considerando o trilho como uma viga repousada sobre apoios discretos rígidos, depois sobre apoios elásticos discretos e finalmente sobre uma base continua elástica. A análise de uma viga sobre vários apoios elásticos discretos era de difícil abordagem na época (final do século dezanove) pois envolvia a solução de várias equações algébricas simultâneas. Foi natural, portanto, que as tentativas feitas para analisar as tensões devidas à flexão nos trilhos assumissem que também para o caso das vias apoiadas sobre dormentes transversais discretos, os trilhos respondessem como vigas sobre apoio continuo.

A tendência existente a época de crescimento continuo das cargas de roda, contrabalançada por um decréscimo também continuo no espaçamento entre dormentes, contribuiu muito para fortalecer esta hipótese de “continuidade”. Testes de campos extensos conduzidos pelo Comitê Especial ASCE-AREMA[14] mostraram que havia uma boa correlação entre os resultados analíticos obtidos a partir da equação 2.19 e resultados de campo, contando que o coeficiente $b.C$ fosse escolhido adequadamente.

Para a transformação de uma via apoiada sobre dormentes discretos em uma via apoiada sobre dormentes longitudinais, a equação 2.19 foi utilizada com uma alteração. Ao parâmetro C foi adicionada uma largura “efetiva” b , obtida através da relação 2.23, que seria agora a largura do dormente longitudinal equivalente a

$$b = \frac{2\ddot{u}b_s}{a}. \quad (2.23)$$

Na expressão acima, \ddot{u} é a distância medida a partir do centro do trilho até o fim do dormente, b_s é a largura do dormente e a é o espaçamento medido entre os centros dos dormentes. Desta forma a equação 2.22 torna-se a equação 2.24.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{C\ddot{u}b_s}{2E I a}} \quad (2.24)$$

Assim, a via apoiada sobre dormentes discretos foi transformada em uma pseudo-via apoiada sobre dormentes longitudinais, de acordo com o esquema mostrado na Figura 2.3. Como parte desta transformação foi introduzida a condição de que as áreas de contato entre dormente e lastro efetivas, para ambos os casos, eram para ser iguais. Esta condição foi aparentemente concebida a partir de considerações de equilíbrio vertical e pela noção de que

para uma dada força trilho-dormente, as pressões nas áreas de contato entre dormente e lastro efetivas ($a \cdot b$ e $2 \cdot \ddot{u} \cdot b_s$) são constantes e iguais.

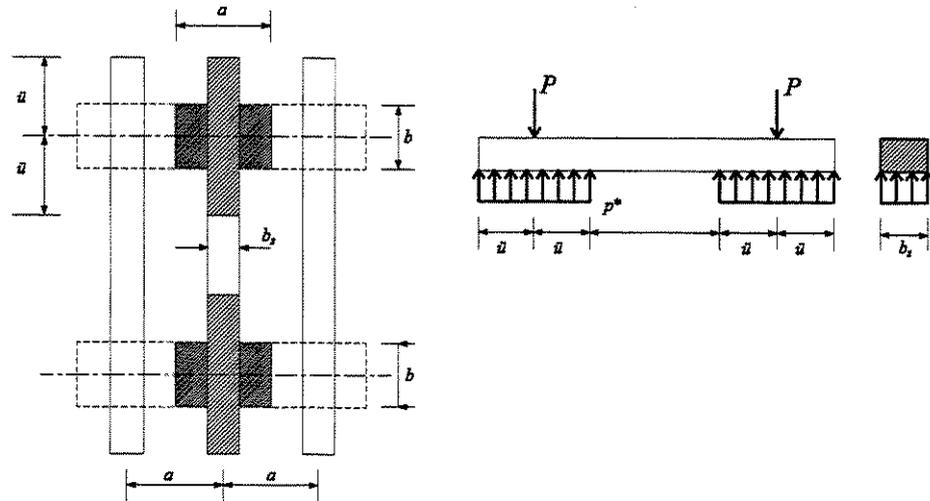


Figura 2.3: Transformação do Dormente Transversal Discreto em Dormente Longitudinal

Para o desenvolvimento de sua metodologia de cálculo Zimmermann determina algumas variáveis auxiliares. A primeira delas é o chamado *valor fundamental* da via com o dormente longitudinal, determinado a partir da equação 2.25.

$$L = \frac{1}{\beta} = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bC}} = \text{valor fundamental} \quad (2.25)$$

Com o valor fundamental determinado, podemos calcular as deflexões e os momentos fletores através das equações 2.26 e 2.27 respectivamente. Estas equações são as equações 2.20 e 2.21 reescritas em função do valor fundamental L e são apresentadas a seguir.

$$w(x) = \frac{P}{2bCL} \times \eta \quad (2.26)$$

$$M(x) = \frac{PL}{4} \times \mu \quad (2.27)$$

Onde as variáveis auxiliares η e μ são determinadas pelas equações 2.28 e 2.29.

$$\eta = \frac{\sin \xi + \cos \xi}{e^{\xi}} \quad (2.28)$$

$$\mu = \frac{-\sin \xi + \cos \xi}{e^{\xi}} \quad (2.29)$$

A variável ξ representa um valor relativo do comprimento x em relação ao valor fundamental L , ou seja, $\xi = x/L$. As curvas de deflexão e de momento podem ser mostradas graficamente, através de *curvas de influência* ou de tabelas, onde em função do valor de ξ são fornecidos os valores de η e μ . Desta forma, o efeito de cargas de rodas adjacentes pode ser calculado de uma forma bem simples, através da superposição dos efeitos. Dependendo da distância entre rodeiros pode ocorrer um aumento ou uma redução do momento fletor e da deflexão.

O valor fundamental L é de grande importância para a metodologia de cálculo baseada no módulo de lastro. Este valor depende da seção transversal do trilho, da superfície de apoio do dormente, do espaçamento entre dormentes e do coeficiente de lastro. Segundo Eisenmann, o valor do coeficiente de lastro flutua dentro de uma larga faixa de valores e exerce uma grande influência sobre o valor fundamental, o mesmo ocorrendo com as características da seção transversal do trilho. Entretanto, o efeito do espaçamento entre dormentes é menos evidente.

2.4 O Parâmetro de Suporte da Via

Em ambas metodologias acima apresentadas uma questão extremamente relevante é a determinação do valor do parâmetro de suporte da via. Na metodologia proposta por Talbot este parâmetro é o *módulo de elasticidade da via* (u), e na metodologia desenvolvida por Zimmermann é o *módulo de lastro* (C). Existem diferenças significativas entre eles além da dimensional.

No caso do módulo de elasticidade os trilhos, as fixações, os dormentes, o lastro, o sublastro e o subleito são componentes que entram na determinação do valor da rigidez da via e portanto, na determinação de seu valor. Como ele é um valor único para toda via, isto significa que é determinado como sendo um parâmetro agregado. Entretanto, não passa de um valor médio

estimado ou composto a partir dos valores de rigidez individuais dos trilhos, fixações, dormentes, lastro e subleito. Mas a rigidez do trilho não faz parte de fato do modulo de elasticidade, sendo que este na realidade representa as condições de apoio existente abaixo dos trilhos. Mas não há como medir o valor do modulo de elasticidade sem incluir a rigidez dos trilhos. Segundo Talbot[11], a maior parte da deflexão da via ocorre no sistema abaixo dos dormentes, ou seja, nas camadas de lastro, sublastro e subleito, mas o modulo de elasticidade não leva diretamente em consideração variações da rigidez neste sistema ou mudanças nestas camadas ao longo do tempo. Todavia, a qualidade e a profundidade do lastro, a solidez do subleito, a qualidade da soca, as dimensões e o espaçamento dos dormentes e outras condições da via são refletidas no modulo de elasticidade.

O modulo de elasticidade não pode ser determinado através de medição direta, a não ser através de medições de deflexões na via, que por sua vez substituindo na equação 2.9. Resolvendo para o modulo de elasticidade teremos a equação 2.30.

$$u = \frac{(P/Y_0)^{4/3}}{(64EI)^{1/3}} \quad (2.30)$$

Por outro lado, o modulo de lastro representaria as condições de suporte oferecidas pelo lastro e o subleito abaixo do dormente longitudinal. As hipóteses assumidas são que o apoio da grade ferroviária é considerado elástico, que os dormentes não deslizam dentro da camada de lastro e que o lastro e o subleito tenham uma curva característica progressiva, ou seja as deflexões ocorrem de forma progressiva em relação às cargas aplicadas. Desta forma o modulo de lastro acaba representando um valor idealizado da rigidez do suporte da via. Segundo Eisenmann, *in* Fastenrath[2], devido a efeitos operacionais, a granulometria do lastro é gradualmente reposicionada e fragmentada e o subleito é compactado, o que faz com que os valores do modulo de lastro sofra grandes variações. Desta forma, quaisquer cálculos relativos à via deve iniciar-se a partir de valores médios determinados a partir de vários pontos ao longo da via. Ainda mais, como o valor do modulo de lastro é afetado pelo tamanho e a forma da superfície de carregamento, tornando necessário que a sua determinação seja feita na grade ferroviária. Assim, segundo Eisenmann, a sua determinação a partir de placas de carga pode levar a valores incorretos.

Portanto, se for conhecido a deflexão do trilho ou o comprimento da onda de flexão entre os dois pontos onde inicia o levantamento do trilho (A), o

modulo de lastro pode ser determinado através da substituição destes valores nas equações 2.26 e 2.27, e posteriormente resolvendo-as para o modulo de lastro. Isto nos dará as equações 2.31 e 2.32.

$$C = \frac{1}{4b} \frac{P}{w(x)} \sqrt[3]{\frac{1}{EI} \frac{P}{w(x)}} \quad (2.31)$$

$$C = 1973 \frac{EI}{bA^4} \quad (2.32)$$

Na prática, os valores medidos são dispersos e conseqüentemente deve-se usar um valor médio de oito a doze pontos de medição. O comprimento da onda de flexão pode ser medido através da utilização de uma viga *Benkelman*. De forma a se evitar efeitos de interferência devidos aos rodeiros adjacentes as medições devem ser realizadas utilizando-se um rodeiro simples.

Mas o grande problema relacionado à utilização da teoria baseada no modulo de lastro é conceitual. Segundo Kerr[10, 56], utilizando as equações 2.19 e 2.24 para uma dada condição de suporte da via, o modulo de lastro é fixado. Desta forma, para uma via de dormentes longitudinais se a largura do dormente (b) for dobrada, então o valor resultante do produto $b.C$ será duas vezes maior. Mas, este não é o caso nas situações que ocorrem atualmente nas vias férreas. Este argumento também é válido para trilhos de uma via regular ou via de bitola estreita apoiada sobre dormentes transversais, com as mesmas condições de suporte mas com comprimentos de dormentes diferentes. Segundo Kerr, a razão desta falta de precisão é que a multiplicação usada na equação 2.18 não é admissível.

Considere a base de Winkler sujeita a uma viga rígida longa que é carregada centralmente, como mostrado na Figura 2.4(a). Como as molas neste modelo não são interconectadas, a pressão de contato é constante ao longo de toda largura b da viga e desta forma, a hipótese utilizada na equação 2.18 é justificada. Entretanto, a situação é muito diferente quando o suporte da via for um *contínuo*. Neste caso, a base exhibe fortes tensões de cisalhamento ao longo dos planos verticais e a pressão de contato é não-uniforme, como mostrado na Figura 2.4(b).

Segundo Kerr a multiplicação utilizada na equação 2.18 não é admissível e, portanto, sugere que a constante $b.C$ na equação 2.19 seja substituída por um parâmetro k , como comumente acontece na literatura de mecânica estrutural.

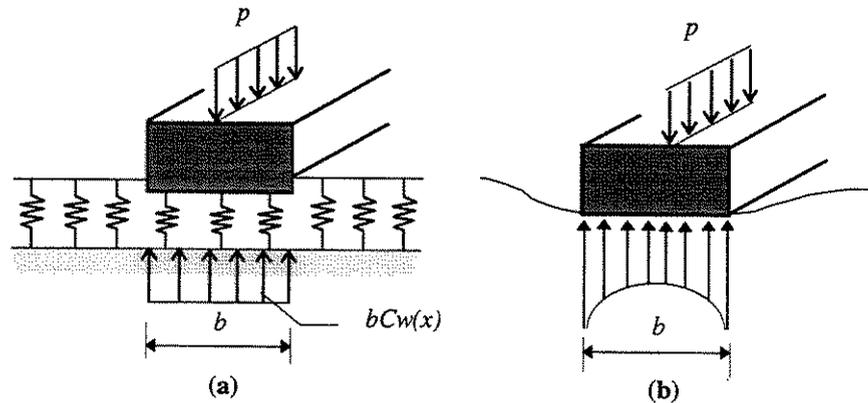


Figura 2.4: Viga apoiada (a) sobre uma base Winkler (b) sobre contínuo elástico contínuo

Conceitualmente esta equação representa a resposta de um trilho elástico vinculado a uma base formada por molas independentes muito próximas uma das outras. Esta base formada por molas simula a resposta *conjunta* dos dormentes, do lastro e da plataforma. A análise resultante conterá somente o parâmetro de suporte do trilho k , que pode ser determinado a partir de ensaios sobre a via.

Por esta análise podemos perceber que o módulo de elasticidade da via utilizado na formulação de Talbot é conceitualmente mais correto que o módulo de lastro utilizado por Zimmermann, já que reflete as condições de suporte abaixo do trilho, ou seja, do sistema formado pelos dormentes, fixações, lastro e subleito da mesma forma que o parâmetro de suporte do trilho proposto por Kerr.

2.5 Modelos Estáticos para Análise de Tensões na Via Férrea

Como podemos perceber na seção anterior a determinação das condições de suporte do trilho é um problema muito complexo, devido às características físicas e mecânicas das camadas de lastro e sublastro e o subleito. Características estas que se alteram devido às condições de carregamento, das

condições de drenagem existentes na via e de fatores ligados à manutenção. Assim, parâmetros como o módulo de lastro ou o módulo de elasticidade da via surgem como simplificações e somente podem ser utilizados com certas limitações. A principal destas limitações é a relativa ao estado de tensões dentro das camadas de lastro e sublastro e no subleito. Para poder superar estas deficiências alguns modelos computacionais foram desenvolvidos para a análise da via férrea sob ação de cargas verticais, onde estes componentes são incluídos separadamente. Estes modelos foram desenvolvidos nos Estados Unidos em universidades ou em entidades de pesquisas ligadas ao meio ferroviário. A seguir faremos uma apresentação das principais características destes modelos.

2.5.1 ILLITRACK

É um modelo baseado no método dos elementos finitos desenvolvido na Universidade de Illinois. Consiste de dois modelos bidimensionais, um transversal e outro longitudinal, interligados entre si de tal forma que os dados de saída do modelo longitudinal são os dados de entrada do modelo transversal. Desta forma é conseguido um efeito tridimensional sem muito esforço computacional em relação a um modelo tridimensional completo. As propriedades não-lineares dos materiais constituintes das camadas da subestrutura são obtidas em laboratório a partir de ensaios triaxiais com repetição de carga e é utilizada uma técnica de carregamento incremental para a obtenção da solução, a partir de um critério de ruptura explícitos desenvolvidos para as camadas da subestrutura. Entretanto, o modelo não consegue impedir que se desenvolvam tensões entre o dormente e o trilho.

A principal vantagem do modelo é a sua capacidade de permitir que as propriedades dos materiais da subestrutura variem tanto na direção longitudinal como transversal, permitindo o desenvolvimento de análises paramétricas. Como desvantagem principal relacionamos o fato de que o modelo é apenas uma aproximação bidimensional de um problema que na realidade é tridimensional. Uma descrição detalhada deste modelo pode ser encontrada no trabalho de Tayabji[16].

2.5.2 GEOTRACK

Este modelo tem sido o mais utilizado por pesquisadores americanos para a análise de tensões nas camadas da subestrutura. O modelo permite a deter-

minação das deflexões da via e do módulo de elasticidade da via em função das cargas de roda atuantes, das propriedades físicas e geométricas dos trilhos e dos dormentes, das propriedades do lastros e das camadas subjacentes e da geometria da via, incluindo o espaçamento entre os dormentes e as espessuras das camadas. O modelo também fornece uma estimativa das tensões e deformações dentro das camadas da subestrutura como funções das mesmas variáveis.

Concomitantemente ao desenvolvimento deste modelo, foram desenvolvidos testes de campo para a medir a resposta resiliente do lastro e do subleito em uma pista de teste construída em Pueblo, no estado do Colorado, conhecida como *FAST (Facility for Accelerated Service Testing)*. Podemos encontrar uma detalhada descrição desta instalação nos trabalhos de Nussbaum[66] e de Piotrowski[67]. Os dados obtidos foram utilizados para a avaliação do modelo.

O modelo GEOTRACK é um modelo tridimensional. Os trilhos são representados como sendo vigas elásticas lineares com um apoio em cada dormente. O comprimento do trecho de via utilizado corresponde a onze dormentes e os trilhos são livres para girar nos finais do trecho e em cada dormente, sendo que a conexão entre os trilhos e os dormentes é feita através de uma mola linear. Os dormentes são representados também como vigas elásticas lineares apoiadas em dez posições igualmente espaçadas sobre a camada de lastro. As reações individuais entre dormentes e lastro são aplicadas à superfície do lastro através de áreas circulares, cujas dimensões estão relacionadas às dimensões dos dormentes.

As camadas de lastro, sublastro e do subleito são representadas como um conjunto de cinco camadas lineares elásticas com comprimento infinito na direção horizontal, sendo que a última camada também se estende a uma profundidade infinita. Cada camada possui valores individuais do módulo de Young e do coeficiente de Poisson, além de um módulo de resiliência que é função do estado de tensões existente. Não é permitido que as camadas deslizem entre si em suas interfaces. O modelo somente permite a utilização da componente vertical da carga de roda. Para o carregamento a partir de um rodeiro simples a carga é aplicada diretamente sobre o dormente central. No caso de carregamento de rodeiros múltiplos a solução obtida para o rodeiro simples é deslocada para cada ponto adicional e combinada algebricamente com a solução para carregamento simples sobre o dormente central. Entretanto, como o espaçamento entre rodeiros não é múltiplo do espaçamento entre dormentes, fazendo com que as cargas não sejam aplicadas direta-

te sobre o centro dos dormentes. De uma forma aproximada as cargas podem ser colocadas sobre os dormentes mais próximos ou serem divididas em duas partes que são alocadas aos dormentes adjacentes. Como o modelo considera cada iteração como um problema elástico linear, cargas de rodas diferentes podem ser acomodadas através da multiplicação da solução obtida para o rodeiro simples por um índice de cargas de rodas antes de efetuar a soma dos efeitos.

O modelo calcula as distribuições de carga estrutural e compara as reações entre dormentes e lastro calculada com valores de peso estático limitantes em cada segmento. São feitas correções sucessivas são feitas às cargas e os cálculos são repetidos até que as forças sejam iguais a estes valores limitantes.

2.5.3 KENTRACK

Este modelo é similar ao modelo GEOTRACK de forma que fornece os mesmos resultados se as condições iniciais fornecidas ao modelo forem as mesmas. Também utiliza a teoria de camadas múltiplas elásticas para a subestrutura, mas utiliza o método dos elementos finitos para modelar os dormentes, o que permite a variação da seção transversal do dormente. O modelo também permite a utilização de mais cargas verticais. Apesar de ter sido desenvolvido especificamente para a análise de uma estrutura de via que possui uma camada de concreto asfáltico pré-misturado a quente entre o lastro e o subleito, segundo Selig[15] o modelo tem versatilidade suficiente para ser aplicado à análise da via lastreada convencional. No modelo foram incluídos dois tipos de critérios de falha: o primeiro é a máxima tensão de compressão vertical em uma dada camada (lastro ou subleito) para controlar a deformação permanente e o segundo é a máxima deformação horizontal embaixo da camada de asfalto (caso ela esteja presente) para controlar o trincamento devido a fadiga. Uma detalhada descrição do modelo pode ser encontrada no trabalho de Huang[68].

2.5.4 A Metodologia desenvolvida por Paiva

A metodologia desenvolvida por Paiva[17] é uma tentativa de desenvolver uma análise estática das tensões e deformações no interior das camadas que forma a subestrutura (lastro, sublastro e subleito). A metodologia é desenvolvida em duas etapas. A primeira etapa consiste em determinar as

deformações ao longo do trilho devida ao carregamento de um trem tipo ferroviário, normalmente o último truque de um vagão em conjunto com o primeiro truque do vagão seguinte, em um total de quatro cargas de roda. Este truque é posicionado de forma a se obter a configuração de carregamento crítica. As deformações são calculadas segundo a metodologia desenvolvida por Zimmermann e utilizando-se o princípio das superposição dos efeitos podemos determinar as forças atuantes sob cada dormente.

Para os cinco dormentes mais carregados, que segundo Togno[69] e Schramm[70] concentram 80 por cento das cargas atuantes e o restante é distribuído pelos demais dormentes, calcula-se a distribuição de tensões sob o vértice que passa pelo dormente central utilizando-se as relações desenvolvidas por Boussinesq. Para que as relações desenvolvidas por Boussinesq possam ser utilizadas, é necessário admitir que o meio pelo qual se propagam as tensões é homogêneo e isotrópico, tornando a sua aplicação para a via férrea questionável, pois esta compõe-se de pelo menos duas ou três camadas.

Na segunda etapa é utilizado um modelo computacional denominado ELSYM-5 [71], desenvolvido pela Universidade da Califórnia em Berkeley para o estudo de pavimentos rodoviários e aeroportuários. O modelo determina as tensões e as deformações em quaisquer pontos em um sistema de coordenadas tridimensionais de um pavimento constituído por até cinco camadas elásticas, e admitindo o carregamento de até dez cargas iguais atuando na superfície do pavimento. As camadas elásticas são consideradas homogêneas, isotrópicas e linearmente elásticas. Cada camada tem espessura definida e finita, a exceção da última que admitida como sendo semi-infinita. As cargas são consideradas como verticais e uniformemente distribuídas em uma área circular e é considerado o princípio da superposição para considerar o efeito das demais cargas.

Como o modelo computacional ELSYM-5 foi desenvolvido para estudos de pavimentos, que recebem diretamente as cargas de roda dos veículos, para poder ser utilizado a partir de um carregamento ferroviário foi necessário realizar algumas adaptações ou equivalências para poder realizar a análise. A primeira delas é que as cargas ferroviárias atuam sobre o conjunto formado pelos trilhos e os dormentes (grade ferroviária) e este conjunto provoca uma dissipação das cargas, de forma que na superfície inferior dos dormentes atuem parcelas menores que as cargas individuais dos veículos.

A solução adotada por Paiva foi considerar as cargas atuantes nas faces inferiores dos dormentes, a partir de uma via flexionada segundo a metodologia proposta por Zimmermann. Porém, as cinco cargas atuantes formam

conjuntos de cargas iguais com valores diferentes (o dormente central, os dormentes adjacentes ao central e os dois das extremidades) e o modelo computacional só opera com até dez cargas idênticas. Para contornar este problema foi utilizado o princípio da superposição dos efeitos de forma que o modelo é resolvido inicialmente para cinco cargas idênticas (as cargas dos dormentes das extremidades), em seguida é rodado para três cargas idênticas (iguais à diferença entre as cargas dos dormentes adjacentes ao central menos o valor da carga dos dormentes das extremidades e, finalmente, com uma única carga aplicada no dormente central igual à diferença entre o valor da carga do dormente central menos o valor da carga dos dormentes a ele adjacentes. Posteriormente, tanto as deflexões como as tensões finais são obtidas a partir do somatório dos três carregamentos.

2.6 Os Fatores de Carga

Todas as metodologias até aqui apresentadas para levar em consideração o carregamento dinâmico que ocorre durante a passagem da composição ferroviária se utilizam de *fatores de carga* aplicados ao carregamento estático. Segundo Hay[13], as composições ferroviárias ao se locomoverem produzem impactos dinâmicos devidos ao próprio rolamento, a deslizamentos, guinadas, choques, ao torque aplicado nos rodeiros, à transferência de cargas, a vibrações e por distribuição desigual do carregamento.

Estes fatores de carga dependem, de uma forma geral, das características da via, incluindo aí sua geometria, qualidade, rigidez e componentes estruturais; das características do material rodante, incluindo a massa não-suspensa do truque, do tipo de truque e da magnitude da carga de roda; e das condições operacionais como velocidade, frenagem, aceleração e desaceleração. As práticas correntes para projeto de vias férreas utilizam fatores *empíricos* ou fatores obtidos de um *estudo estatístico* das tensões que ocorrem na via, a partir de dados oriundos de ensaios de campo. Estes fatores são aplicados à carga de roda estática, para representar níveis de carregamento de projeto para as respostas dos componentes da superestrutura e para estimativa das tensões no subleito. Desta forma, a carga dinâmica é obtida a partir da relação a apresentada a seguir.

$$P_d = K_d \times P$$

Onde P_d é a carga de roda vertical dinâmica, P é a carga de roda

vertical estática e K_d é o fator de carga. A seguir, faremos uma revisão dos principais fatores de carga utilizados nos principais sistemas ferroviários a nível mundial, iniciando pelos fatores empíricos e na sequência os fatores baseados em estudos estatísticos.

2.6.1 Fatores Empíricos

Nos Estados Unidos o fator de carga mais utilizado para projeto de vias férreas, recomendado pela *AAR (Association of American Railroads)*, é o fornecido pelo manual da AREMA[14]. O fator é obtido através da relação 2.33.

$$K_d = 1 + \frac{5,2 \times V}{D_w} \quad (2.33)$$

Onde V é a velocidade da composição ferroviária, em quilômetros por hora e D_w é o diâmetro da roda medido em milímetros.. Nos Estados Unidos os diâmetros das rodas para os vagões de carga variam entre 838 e 965 milímetros (33 a 38 polegadas), sendo que o diâmetro de 914 milímetros (36 polegadas) é o mais comum. Este fator de carga é primariamente um fator somente ligado à velocidade, já que os efeitos devidos a variações na geometria da via, na rigidez ou nas características dos veículos não consideradas de forma direta.

Este método é muito similar a uma formulação anterior proposta por Talbot[11]. Nesta formulação a carga estática é acrescida de 0,62 por cento para cada quilômetro por hora de velocidade que exceda a oito quilômetro por hora (cinco milhas por hora). Desta forma, o fator de carga é determinado pela equação 2.34.

$$K_d = 1 + 0.0062 \times (V - 8) \quad (2.34)$$

Esta fórmula foi desenvolvida a partir da suposição que o diâmetro da roda era igual a 33 polegadas. Para rodas com diâmetros maiores é de supor que tenham maiores áreas de contato e portanto devem provocar menos impacto à via. Assim, um *fator de impacto* (f_i) determinado pelo quociente entre a área de contato da roda com diâmetro igual a 33 polegadas e a área de contato da roda com diâmetro diferente é aplicado à equação 2.34, resultando na equação 2.35.

$$K_d = 1 + 0.0062 \times (V - 8) \times f_i \quad (2.35)$$

O método da AREMA aplica o mesmo procedimento, só que omite o efeito estático dos oito quilômetro por hora, e usa o quociente entre diâmetros das rodas invés das áreas de contato.

Existem algumas formulações que consideram o efeito da rigidez do suporte da via em acréscimo à velocidade. Para tanto é utilizado o módulo de elasticidade da via. Altos valores do módulo de elasticidade geralmente representam uma estrutura de via bem melhor do que um módulo de via mais baixo. Os valores típicos utilizados para caracterizar a qualidade da via são 7, 14 e 21 MN/m² para vias ruins, médias e boas respectivamente.

Clark[72] propôs a relação 2.36 para vias com dormentes de madeira.

$$K_d = 1 + \frac{19.65 \times V}{D_w \sqrt{u}} \quad (2.36)$$

Nesta relação V é a velocidade da composição ferroviária em quilômetro por hora, D_w é o diâmetro da roda em milímetros e u é o módulo de elasticidade da via em meganewtons por metro por metro. As Ferrovias Indianas, segundo Thambiratnam[24], utilizam a equação 2.37, semelhante à proposta por Clark, para determinar o fator de carga.

$$K_d = 1 + \frac{0.017 \times V}{\sqrt{u}} \quad (2.37)$$

Segundo Stewart e O'Rourke[3], para vias em condições medianas, ou seja, com módulo de elasticidade da ordem de 14 meganewtons por metro por metro, os métodos da AREMA e de Clark são essencialmente os mesmos, já o método das ferrovias indianas leva a fatores de carga menores aos recomendados pelo método da AREMA, exceto no caso de vias ruins.

2.6.2 O Fator de Carga utilizado pela *British Railways*

Alguns métodos de determinação do fator de carga já apresentados levavam em consideração as condições da via de uma forma indireta, utilizando o módulo de elasticidade da via e não considerando nenhuma irregularidade específica da superfície de rolamento como junções de trilhos, soldas ou "planos-na-roda". A estas irregularidades são acrescentadas a velocidade da composição ferroviária, a rigidez da via, a massa efetiva e a massa não-suspensa.

Segundo Stewart e O'Rourke[3], formulações teóricas desenvolvidas para os coeficientes de impactos dinâmicos baseadas nas variáveis acima apresentadas indicam a existência de dois tipos de forças dinâmicas. O primeiro tipo é conhecido como força P_1 , que possui um conteúdo a altas frequências e outro tipo, a força P_2 , que ocorre a frequências mais baixas, na faixa de 50 Hertz. Quando a superfície da via possui uma irregularidade discreta, como uma junção de trilho ou uma solda, a força P_1 segue a força P_2 . Entretanto, a força P_1 sofre um processo de filtragem intensa por atenuação nos trilhos e nos dormentes, de forma que somente a força P_2 é importante quando analisamos as tensões que ocorrem no sistema de suporte da via. A força P_2 pode ser determinada pela equação 2.38.

$$P_2 = P + V \times \beta_d \times \sqrt{kM} \quad (2.38)$$

Nesta equação temos que V é a velocidade da composição, P é a carga de roda estática, β_d é o ângulo da depressão da irregularidade, M é a massa não-suspensa por roda e k representa a rigidez da via. A rigidez da via pode ser determinada em função do modulo de elasticidade da via u e da rigidez do trilho EI através da relação

$$k = \sqrt[4]{EIu^3}.$$

Podemos observar que a medida que a rigidez da via aumenta, as forças dinâmicas P_2 aumentam, diferentemente do que ocorre com expressão 2.36 proposta por Clark e pela equação 2.37 utilizada pela Ferrovia Indiana, que assumem que vias com módulos de elasticidade baixos deverão ter mais defeitos, que por sua vez provocarão forças dinâmicas maiores. Na equação 2.38 é assumido que ocorre uma amplificação da carga devido à irregularidade e esta amplificação aumenta a medida que aumenta a rigidez da via.

A formulação do fator de carga da *British Railways* é feita em termos das forças dinâmicas de impacto através da equação 2.39,

$$K_d = 1 + \frac{P_2 - P}{P} = 1 + \frac{V \times \beta \times \sqrt{kM}}{P}. \quad (2.39)$$

A dificuldade desta metodologia está relacionada à determinação dos parâmetros β e M necessários para a utilização da equação 2.39. Raymond[73] em seu trabalho reporta que os valores típicos para a massa não-suspensa para vagões de carga com peso líquido variando entre 70 e 100 toneladas, varia

entre 853 e 989 quilogramas, respectivamente. A *British Railways* reporta que os piores valores para o ângulo de solda encontrados em seu sistema situam-se na faixa de 0.005 a 0.006 radianos. Stewart e O'Rourke[3] colocam que no caso de junções de trilho estes valores devem ser bem maiores.

2.6.3 O Fator de Carga proposto por Eisenmann

A Ferrovia Federal Alemã utiliza um fator de carga para estimas as cargas sobre os dormentes que leva em consideração a variabilidade da qualidade da via e a natureza estatística do espectro das forças dinâmicas, desenvolvido por Eisenmann, *in* Fastenrath[2]. O fator de carga é determinado a partir da relação 2.40,

$$K_d = 1 + t_d \times \sigma. \quad (2.40)$$

Onde σ é o desvio padrão relativo ao valor médio e t_d é o número de desvios padrões normais além do valor médio correspondente a uma certeza estatística prescrita. O desenvolvimento deste fator foi baseado em numerosas medições feitas para a Ferrovia Federal Alemã. Observou-se que o valor médio da tensão de flexão no patim do trilho, bem como o valor médio da deflexão são praticamente constantes até uma velocidade de 200 quilômetros por hora. Os valores medidos estão distribuídos em torno de um valor constante, mas a distribuição dos valores aumenta com a velocidade. Isto pode ser melhor compreendido através da figura 2.5.

Estatisticamente, a distribuição pode ser descrita quantitativamente através do chamado desvio-padrão, calculado a partir de valores medidos individualmente em relação aos vários pontos de medição. Para uma dada certeza estatística prescrita, os valores máximos e mínimos podem ser determinados a partir do desvio-padrão e do valor médio. O cálculo é baseado na distribuição normal Gaussiana, que descreve bem a distribuição dos valores medidos. Desta forma, Eisenmann propõe que para vias em excelente condições o valor de σ seja igual a 0.1φ , para vias em boas condições o valor de σ seja igual a 0.2φ e para vias em condições ruins o valor de σ seja igual a 0.3φ . O parâmetro φ representa o efeito da velocidade no cálculo do fator de carga. Para velocidades de até 60 quilômetros por hora o valor de φ é constante e igual um, para velocidades entre 60 e 200 quilômetros por hora o valor de φ é determinado através da equação 2.41, dada por

$$\varphi = 1 + \frac{V - 60}{140}. \quad (2.41)$$

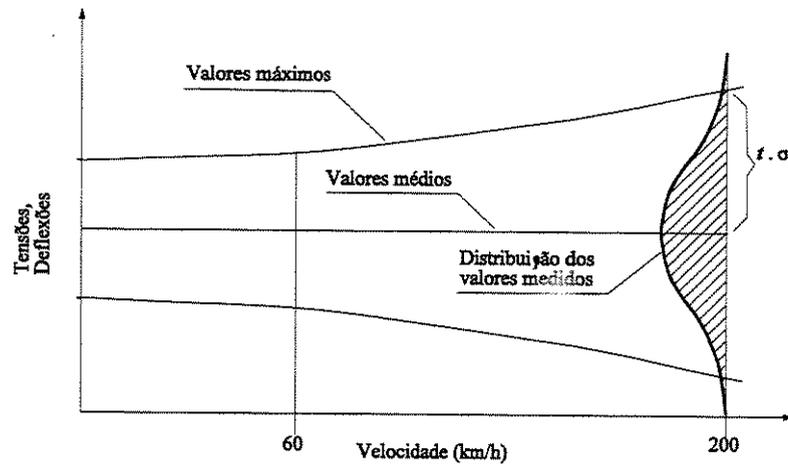


Figura 2.5: Aplicação da Distribuição Normal para o cálculo dos valores máximos e mínimos

O parâmetro t_d é igual 1 para uma certeza estatística de 68,3 por cento, igual a 2 para uma certeza estatística de 95,5 por cento e igual a 3 para uma certeza estatística de 99,7 por cento. Tendo em vista a segurança e a confiabilidade da operação ferroviária Eisenmann recomenda que uma certeza estatística de 99,7 por cento ($t_d = 3$) seja utilizada como base para dimensionar o perfil do trilho. Para as tensões no lastro, recomenda-se uma certeza estatística de entre 68,3 e 99,7 por cento (t_d entre 1 e 3), dependendo da qualidade de via requerida. Quando avaliar as tensões no subleito, uma certeza estatística de 68,3 por cento ($t_d = 1$) é adequada, tendo em vista o efeito de superposição equalizador dos dormentes adjacentes.

Para vias com lastro e para rodeiros tratores, o ponto de partida pode ser os desvios-padrões relativos ao valor médio já apresentados. Para os rodeiros não-tratores o desvio-padrão é menor. Para cobrir tensões crescentes devido à rodas excêntricas e especialmente “planos-na-roda”, um desvio padrão igual a 0.2φ deve ser aplicado em todos casos, mesmo no caso de vias não-lastreadas. As medições mostraram que a uma velocidade de 200 quilômetros por hora o desvio-padrão é duas vezes maior do que na faixa de baixa velocidade.

No cálculo da máxima tensão de flexão bem como da deflexão máxima do trilho, a carga efetiva é para ser utilizada como carga de roda. Esta é

composta pela carga de roda estática (metade da carga por rodeiro) e um fator aditivo para o deslocamento da carga de roda ao longo das curvas, bem como o deslocamento da carga quando da partida e da frenagem, e também para cobrir um eventual carregamento desigual. Dependendo da velocidade, do raio de curvatura, da superelevação e do nível do centro de gravidade do veículo, o deslocamento da carga de roda na curva será de 10 a 30% da carga de roda estática.

2.6.4 O Fator de Carga proposto Stewart e O'Rourke

O fator de carga desenvolvido por Stewart e O'Rourke[3] é baseado no conceito de fatores de impacto, que utilizam resultados normatizados obtidos a partir de medidas realizadas em campo para o carregamento estático e dinâmico. O método é adequado para um dimensionamento do tipo probabilístico, como o método desenvolvido por Eisenmann, e é capaz de definir de uma forma simples o número de cargas em um nível especificado de projeto que poderão ocorrer na via.

As medições de campo foram realizadas para um estudo de desempenho de dormentes de concreto feito para a *FRA (Federal Railway Administration)*, órgão ferroviário dos Estados Unidos. Foram feitas medições em cinco locais distintos, sendo que um deles foi na via de teste *FAST*, em Pueblo, no estado do Colorado. A partir das medições realizadas para a determinação da distribuição das cargas atuantes no contato entre roda e trilho e de um levantamento da distribuição das cargas estáticas fornecida pelos operadores, em função dos pesos dos vagões e da tonelagem transportada, foram desenvolvidos diagramas de distribuição das cargas estáticas e dinâmicas em termos da porcentagem das cargas de roda que excediam um dado nível de carregamento.

Estas distribuições mostraram que havia uma concordância relativamente próxima entre as cargas estáticas e dinâmicas em uma faixa entre 90 e 95% das cargas de roda. Somente na parte inferior dos diagramas, ou seja, para os níveis de porcentagens que excedem da ordem de 1 a 0.01%. Segundo Stewart e O'Rourke, uma interpretação direta destes diagramas de distribuição implicaria em que cargas dinâmicas elevadas são provocadas correspondente por cargas estáticas elevadas, mas uma observação mais detalhada dos dados mostrou que muitas das cargas de roda mais leves contribuíram igualmente para as cargas dinâmicas maiores, principalmente como resultado de irregularidades nas rodas.

Uma das principais observações feitas a partir dos dados de campo é que as cargas de roda estáticas e dinâmicas médias são aproximadamente iguais para um dado local, e que abaixo de um nível de excedência entre 5 e 10 por cento, as diferenças entre as cargas estáticas e dinâmicas não é significativa, mas acima destes níveis as cargas dinâmicas são bem maiores para quaisquer porcentagens de excedência. Segundo Stewart e O'Rourke, para as vias estudadas, a exceção da via de teste do *FAST*, as medições indicaram que 1 em cada 1000 cargas de roda pode ser de 1.2 a 2.1 vezes maiores que a carga estática máxima ou até 2.3 a 4.0 vezes a carga estática média. Para a frequência de ocorrência mais baixa de 1 em cada 10.000 cargas de roda, as cargas dinâmicas podem ser de 1.7 a 2.5 vezes maiores que as cargas estáticas máximas, ou de 2.8 a 4.7 vezes maiores que as cargas estáticas médias.

A partir destes resultados obtidos de testes de campo, combinado com o conceito de um multiplicador foi a estratégia adotada por Stewart e O'Rourke para a elaboração do seu fator de carga. Assim, o fator de carga é definido como sendo o valor da carga dinâmica que excede um dado nível de porcentagem dividido pela carga estática máxima. A figura 2.6 mostra a distribuição dos fatores de carga para as vias onde foram feitos os testes, à exceção da via de teste do *FAST*, mostrando os valores médios e limitantes superiores e inferiores para vários níveis de porcentagem excedidos. Desta forma, para uma dada via o valor antecipado da carga estática máxima pode ser previsto com um alto grau de confiança e a partir do conhecimento deste valor a distribuição esperada das cargas dinâmicas pode ser determinada a partir das curvas apresentadas na figura 2.6.

2.6.5 Análise Comparativa dos Fatores de Carga

Como foi mostrado anteriormente existem basicamente duas abordagens para a determinação dos fatores de carga. A primeira consiste na utilização de fatores de carga obtidos empiricamente, onde uma variável básica para sua determinação é a velocidade prevista da composição ferroviária, como podemos observar nas metodologias adotadas pela AREMA, por Talbot, por Clarke e pela Ferrovia Indiana. Além da velocidade, também podem ser utilizados outros parâmetros, como o diâmetro da roda ou o módulo de elasticidade da via. Não existe diferença prática entre a metodologia da AREMA e a de Talbot para rodas com 36 polegadas de diâmetro. Para ve-

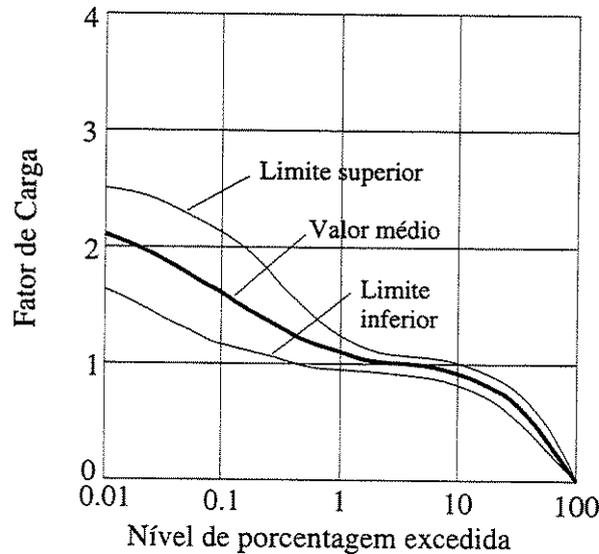


Figura 2.6: Distribuição dos Fatores de Carga Dinâmicos segundo Stewart e O'Rourke[3]

locidades variando entre 65 e 130 quilômetros por hora os fatores de carga variam de 1.35 a 2.0. A segunda abordagem é a baseada em fatores probabilísticos, como nas metodologias desenvolvidas por Eisenmann e Stewart e O'Rourke

Mas, as metodologias propostas por Clarke e pela Ferrovia Indiana (FI) além da velocidade da composição ferroviária, consideram também o módulo de elasticidade da via. A tabela 2.1 nos apresenta os valores dos fatores de carga para velocidades variando de zero a 150 quilômetro por hora, segundo as metodologias que seguem o primeiro tipo de abordagem, no caso a da AREMA, de Clarke e da Ferrovia Indiana. O diâmetro da roda adotado é igual a 36 polegadas (914 milímetros). Em relação ao módulo de elasticidade da via foi adotado os valores de $7 \mu\text{Pa}$ para vias consideradas de qualidade ruim, $14 \mu\text{Pa}$ para as vias de qualidade mediana e $21 \mu\text{Pa}$ para as vias de boa qualidade.

Para uma via de qualidade mediana as metodologias da AREA e de

Tabela 2.1: Fatores de Carga segundo Stewart e O'Rourke

velocidade km/h	AREA	Clarke			FI		
		u = 7	u = 14	u = 21	u = 7	u = 14	u = 21
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	1.14	1.20	1.14	1.12	1.16	1.11	1.09
50	1.28	1.41	1.29	1.23	1.32	1.23	1.19
75	1.43	1.61	1.43	1.35	1.48	1.34	1.28
100	1.57	1.81	1.57	1.47	1.64	1.45	1.37
125	1.71	2.02	1.72	1.59	1.80	1.57	1.46
150	1.85	2.22	1.86	1.70	1.96	1.68	1.56

Clarke são essencialmente as mesmas. Os fatores de carga da Ferrovia Indiana são geralmente menores que os recomendados pela AREA, exceto para as vias de baixa qualidade. Podemos notar que a qualidade da via exerce uma grande influência na determinação dos fatores de carga, de forma que vias de baixa qualidade levam a fatores de carga maiores.

Capítulo 3

A Análise Dinâmica da Via Férrea

3.1 Considerações Iniciais

Como já vimos anteriormente a atenção dos engenheiros e pesquisadores ferroviários para a análise dinâmica da via férrea teve início na década de 40, devido ao crescente aumento da velocidade dos trens.

Entretanto, até a década de 70 havia poucos trabalhos nos quais modelos dinâmicos da via foram utilizados na solução de problemas práticos, apenas trabalhos anteriores relacionados ao problema da estabilidade dinâmica de uma carga movendo-se ao longo de uma via, com a consequente possibilidade de uma “velocidade crítica”, na qual a velocidade da carga móvel poderia ser igual à velocidade de propagação da onda na via.

A partir de meados da década de setenta, pesquisadores e engenheiros ferroviários começaram a desenvolver e aplicar modelos matemáticos para compreender e tentar resolver problemas práticos. Esta mudança deve-se ao fato de ter crescido o reconhecimento de que as cargas dinâmicas causam danos significativos não só à via em particular, mas também aos veículos. Elas também são responsáveis por ruídos e vibrações no solo, sobre os quais existe uma crescente sensibilidade, principalmente no caso de sistemas ferroviários operando em áreas urbanas. Consequentemente, como bem colocam Knothe e Grassie[5], atualmente existe uma crescente demanda por modelos dinâmicos relacionados à interação veículo/via que possam ser utilizados satisfatoriamente para frequências de até 5 kHz, frequência limite relacionada

à geração de ruídos.

Embora a modelagem da resposta dinâmica às forças laterais seja importante devido à sua importância na geração de ruído, a modelagem da resposta dinâmica às forças verticais será a principal preocupação deste estudo, pois estas é que causam a maioria dos problemas.

Este capítulo apresenta uma descrição dos principais problemas oriundos da interação dinâmica entre via e veículos ferroviários; das modelagens possíveis de serem utilizadas com respectivas técnicas de solução e suas aplicabilidades.

3.2 Problemas oriundos da interação entre via e veículo ferroviários

Muitas das pesquisas recentes na modelagem do comportamento dinâmico do veículo e da via tem sido estimuladas pela necessidade de se compreender a causa de problemas práticos crescentes a partir da interação veículo/via, bem como desenvolver soluções para estes problemas. Estes problemas são apresentados resumidamente na Tabela 3.1. Os problemas estão agrupados da seguinte forma: inicialmente os relacionados aos veículos, posteriormente aos associados à interface entre a roda e o trilho e, finalmente, àqueles associados aos componentes da via permanente. Os problemas relacionados ao ruído e a vibrações no solo são analisados separadamente. A faixa de variação das frequências de interesse nos diversos tipos de problemas e a fronteira entre o que seria “alta” ou “baixa” frequência são apresentadas a seguir.

3.2.1 Problemas relacionados à dinâmica do veículo

O comportamento dinâmico próprio do veículo é importante em relação à sua estabilidade, ao comportamento nas curvas e ao conforto dos passageiros, no caso dos carros de passageiros. As suspensões dos veículos são projetadas para garantir modos de vibração abaixo de 10 Hz, o que permite por um lado um isolamento adequado dos passageiros da vibração e, por outro lado, reduzir a massa não-suspensa efetiva, reduzindo as cargas dinâmicas na interface entre a roda e o trilho. Nesta faixa de frequência a via férrea comporta-se como uma mola relativamente rígida. Mas, a partir de frequências acima de 20

Tabela 3.1: Problemas oriundos da interação veículo/via segundo Knothe e Grassie

Problemas oriundos da interação entre veículo e via		
	Área de interesse	Faixa de Frequência (Hz)
1	Veículos	0-20
2	Truque e massa não-suspensa	0-500
	mancais das rodas	
	fadiga dos eixos, dos freios, etc.	
3	Superfície irregular da roda e do trilho	1-1500
	“plano-na-roda”	
	rodas desbalanceadas	
	rodas corrugadas	
	corrugação no trilho - ondulação longa	
	corrugação no trilho - ondulação curta	
	soldas e juntas	
	“pitting” e “shelling”	
4	Componentes da via férrea	1-1500
	fadiga do trilho na flexão	
	apoio dos trilhos	
	dormentes de concreto	
	lastro e geometria da via	
5	Ruído do contato entre roda e trilho	0-5000
	ruído devido ao rolamento	
	ruído de impacto	
	guinchamento (“squeal”)	
6	Ruído estrutural e vibração	0-500
	vibração no solo	
	viadutos	

Hz a inércia da via torna-se cada vez mais importante enquanto a suspensão do veículo isola tudo, menos a massa não-suspensa (essencialmente rodeiros, mancais, qualquer motor de tração no eixo e transmissão) do restante do veículo.

Assim, segundo Knothe e Grassie[5], uma definição prática de “alta” frequência pode ser considerada àquela acima de 20 Hz, onde a dinâmica da via férrea torna-se crescentemente importante e a do veículo não. Dentro desta definição, movimentos em curva, estabilidade e conforto são fenômenos que ocorrem em baixas frequências.

3.2.2 Problemas envolvendo componentes do truque e da massa não-suspensa

Na prática existem frequentes problemas envolvendo componentes do truque e da massa não suspensa que apareceram devido a cargas dinâmicas a frequências relativamente altas, mas que até hoje tem sido poucos investigados. Tem havido também pouco desenvolvimento de modelos que descrevam o comportamento do veículo para frequências na faixa de 10-50 Hz, na qual o rodeiro torna-se crescentemente bem isolado dinamicamente do truque, enquanto que, simultaneamente, sua deformação própria como corpo elástico torna-se significativa.

Forças dinâmicas atuando em frequências da ordem de centenas de Hertz são reagidas primariamente pela inércia da roda. Isto faz com que as forças em baixas frequências que surgem a partir das ondulações sejam particularmente nocivas aos mancais dos rodeiros. Segundo Ahlbeck [41], ondulações com comprimento na faixa de centenas de milímetros podem aumentar as forças no contato entre a roda e o trilho em mais de 300 kN, e causar uma redução na ordem de 50% na vida útil dos mancais de vagões de carga comuns.

3.2.3 Deterioração das superfícies de rolamento da roda e do trilho

Problemas com as rodas

A irregularidade da roda que tem estimulado grande interesse na modelagem do comportamento dinâmico do veículo e da via é o “plano-na-roda”. Este problema é causado pelo travamento das rodas na frenagem, provocando

através do desgaste da superfície de contato da roda o aparecimento de uma área plana. A *British Rail (BR)* desenvolveu trabalhos nesta área em um excelente exemplo de experimento na via, que foi utilizado para validar um modelo matemático[40]. Estes resultados também foram utilizados por Dong e Dukkipati em seu trabalho [45].

Outra irregularidade freqüentemente observada é uma corrugação que aparece na superfície de rolamento da roda, com comprimento de onda similar ao das corrugações curtas que aparecem nos trilhos. Fadigas devidas ao contato de rolamento, como cavitação (“pitting”) e escamação (“shelling”), podem ocorrer tanto nas rodas como nos trilhos devidas às altas cargas estáticas em linhas operadas por trens de carga, ou mesmo em linhas de uso misto devido a pouca conformidade entre a roda e o trilho, o que provoca o aparecimento de altas tensões de contato, bem como a índices de desgaste insuficientes para remover as trincas antes que elas se propaguem

Problemas com os trilhos

Os principais problemas devidos à interação dinâmica entre via e veículos ferroviários relacionados aos trilhos é a corrugação. Esta corrugação pode possuir um comprimento de onda curto (entre 30 a 100 mm) ou longo. Uma explicação bem validada e amplamente aceita sobre a origem do fenômeno ainda não existe, mas várias hipóteses estão disponíveis. Uma destas hipóteses foi apresentada por Valdivia[74]. Segundo esta hipótese vibrações a altas freqüências do sistema formado pela via e o rodeiro podem ser excitadas por rugosidades estocásticas existentes na superfície do trilho, que por sua vez influenciam na forma da superfície do boleto, em um processo recursivo, através de forças devidas ao fenômeno de “creepage”¹. Segundo Knothe e Grassie[5], pesquisadores australianos demonstraram que a ressonância devida à massa não-suspensa de vagões de minério de ferro sobre a rigidez da via, excitada por juntas soldadas levaram ao aparecimento de corrugações com comprimento de onda na ordem de 200 mm. O mesmo fenômeno provocou o aparecimento de corrugações com comprimento de onda variando entre 300 e 1500 mm que aparecem após juntas soldadas em condições ruins em linhas leves.

¹O fenômeno de “creepage” será discutido com mais detalhes na seção 3.3.5 na parte que trata do contato tangencial.

3.2.4 Deterioração dos componentes da via permanente

A ação de cargas dinâmicas a altas frequências podem provocar vários problemas nos componentes da via permanente. Um dos principais critérios utilizados para a seleção de trilhos é a necessidade de proteção contra a fadiga devida à flexão. Enquanto o trilho flexiona sob a ação das cargas quasi-estáticas devidas às rodas a fadiga pode ser exacerbada pelos impactos devidos às irregularidades existentes nas rodas ou nos trilhos.

Dormentes de concreto ou de aço são essencialmente vigas não-amortecidas separando os dois trilhos, os quais possuem várias frequências de ressonância dentro da faixa de frequência excitadas pelas irregularidades existentes nas rodas ou nos trilhos. Segundo Knothe e Grassie[5], fraturas de dormentes de concreto, principalmente na região de apoio do trilho ocorreram em várias ferrovias devido em grande parte ao fato do segundo modo de flexão simétrica dos dormentes ter sido excitado por cargas dinâmicas a altas frequências. Outros dois problemas devidos ao carregamento dinâmico a altas frequências que ocorrem principalemnte com dormentes de concreto em áreas poucos isoladas são o “caminhamento” e o “skewing” dos dormentes. O primeiro ocorre principalmente em torno de juntas soldadas onde o dormente tende a se mover ao longo do trilho e o outro ocorre quando uma ponta do dormente se move ao longo do trilho em relação à outra ponta.

A deterioração do lastro com a consequente perda de geometria da via é uma preocupação permanente das ferrovias. Segundo Knothe e Grassie[5] este não é um problema devido em sua totalidade ao carregamento dinâmico a altas frequências, mas a partir do fato de que a manutenção em locais da via com problemas de corrugação e em tornos de juntas soldadas ser muito maior em relação a outros pontos da via, torna claro que o carregamento dinâmico ajuda a exacerbar a deterioração do lastro.

As placas de apoio de trilho podem deteriorar-se em serviço e é claro que elas podem deteriorar-se mais rapidamente onde cargas dinâmicas atuantes na via sejam excepcionalmente altas.

3.2.5 Ruído

O ruído é um fenômeno essencialmente dinâmico. O ruído é normalmente classificado em três tipos. O primeiro tipo é o ruído devido ao rolamento da composição ferroviária; o segundo tipo é ruído devido ao impacto e o terceiro

é o ruído devido ao fenômeno do “guinchamento”². Os dois primeiros são causados por irregularidades nas rodas e nos trilhos, enquanto que o último aparece a partir de vibrações que ocorrem primariamente durante a interação das rodas com o trilho em curvas apertadas. Vibrações no solo são uma grande preocupação das ferrovias que possuem trechos de via que passam por áreas urbanas, devido ao impacto destas vibrações nas edificações existentes na faixa lindeira à via férrea.

3.2.6 Limites das frequências de interesse

Segundo Knothe e Grassie[5] as frequências mais altas são aquelas associadas ao ruído devido ao contato entre roda e trilho, de forma que qualquer modelagem deste fenômeno deve ser satisfatória até o limite humano de percepção do ruído, ou seja, 5000 Hz. Os problemas relacionados com as superfícies de rolamento da roda e do trilho e com os componentes da via permanente são causados principalmente por forças verticais, que são mais significativas até um limite de 1500 Hz. Cargas dinâmicas com frequências mais altas que surgem a partir de irregularidades com comprimentos de onda curtos são fortemente atenuadas pelo tamanho finito da área de contato entre a roda e o trilho, cujo diâmetro típico é igual a 15 mm. Já forças transmitidas por um lado através da inércia da roda para o eixo, truque e veículo e por outro lado através da via para o solo e a superestrutura, são significativas até frequências na faixa de 500 Hz. Problemas de dinâmica dos veículos ocorrem em sua grande maioria em frequências menores que 20 Hz.

Portanto, uma modelagem da interação dinâmica entre veículo e via ferroviários no qual se deseja levar em consideração os efeitos dinâmicos devidos a irregularidades nas rodas e nos trilhos e o efeito sobre os componentes da via permanente, deve ter como limite de frequência de interesse 1500 Hz e deve-se considerar somente o carregamento vertical.

²Em inglês o termo utilizado para denominar o fenômeno é “squeal”.

3.3 Os Modelos da Interação Dinâmica entre Via e Veículos Ferroviários

3.3.1 Considerações iniciais

Na modelagem do comportamento dinâmico da interação entre via e veículos ferroviários podemos considerar cinco subsistemas, que podem ser observados na figura 3.1. Estes subsistemas são os seguintes:

1. o veículo, incluindo a sua caixa, truque e rodeiro;
2. o contato entre a roda e o trilho e a representação da excitação;
3. o trilho;
4. o sistema de fixações, incluindo a fixação e a placa de apoio do trilho;
5. o dormente; e
6. o suporte do dormente, incluindo o lastro e o subleito.

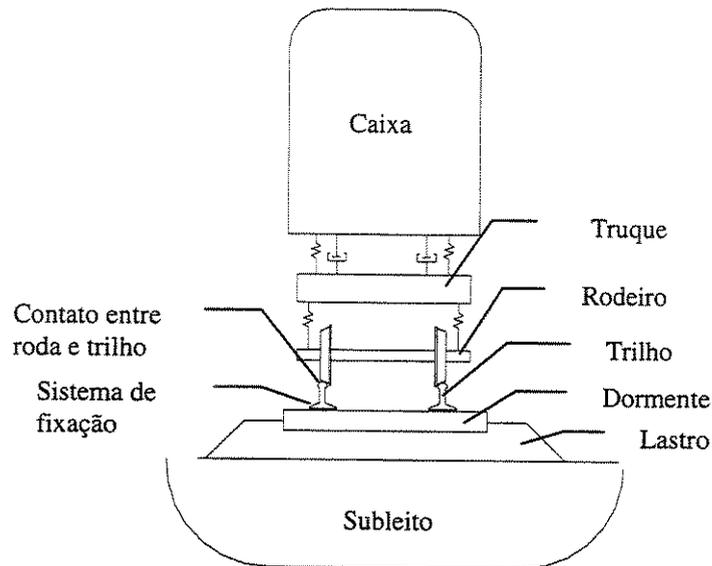


Figura 3.1: Componentes do sistema formado pela via e veículo ferroviários

O comportamento dinâmico do veículo em relação à sua estabilidade, dirigibilidade e conforto dos passageiros é mais significativo em uma faixa de frequência de poucos Hertz. Para a maioria dos problemas práticos este comportamento é bem compreendido e existem no mercado vários pacotes computacionais que permitem calcular a resposta dinâmica do veículo, como o NUCARS, MEDYNA, VAMPIRE e VOCO.

Nesta faixa de frequência as suspensões primária e secundária do veículo isolam o truque e a caixa do veículo do rodeiro. Desta forma a massa não-suspensa do veículo, compreendida basicamente pelo rodeiro, mancais e eventuais motores de tração, é o único componente que afeta significativamente as cargas verticais atuantes entre o rodeiro e a via, e na própria via a altas frequências. Sendo assim, a massa não-suspensa pode ser representada satisfatoriamente como corpo rígido. Por outro lado, se desejarmos examinar a vibração lateral da roda, excitada por forças normais ao plano do contato entre a roda e o trilho, devemos desenvolver uma modelagem bem mais sofisticada devido à flexibilidade lateral do rodeiro e esta modelagem deveria incluir o comportamento ressonante do rodeiro se desejássemos representar fenômenos como o ruído.

A seguir faremos uma dissertação sobre as possíveis modelagens dos componentes físicos da via, depois a modelagem do sistema completo da via; a modelagem do contato entre a roda e o trilho e finalmente a modelagem da excitação.

3.3.2 Modelagem dos componentes físicos

Modelagem do trilho

Até o início dos anos sessenta todas análises estáticas e de estabilidade do trilho eram desenvolvidas considerando-se o trilho como uma viga de Euler-Bernoulli, e segundo Honthe e Grassie[5], até o presente momento este modelo é considerado adequado para a representação da resposta dinâmica do trilho para a excitação dinâmica vertical para frequências de até 500 Hz. Entretanto, este modelo torna-se inadequado para a modelagem da resposta em relação à forças verticais a altas frequências à medida que a deformação do trilho devida ao cisalhamento torna-se crescentemente importante.

Tem sido feitas tentativas para estabelecer as faixa de frequência nas quais os diferentes de modelos representam adequadamente o comportamento do trilho, mas quando somente a vibração vertical e longitudinal for de

interesse, o trilho pode ser modelado como uma viga de Timoshenko até um limite de frequência igual a 2500 Hz. O modelo de viga de Timoshenko além de levar em consideração a deformação devida à flexão também considera a deformação devida ao cisalhamento e a inércia de rotação do trilho.

Se utilizarmos no modelo de viga de Timoshenko um módulo de cisalhamento muito grande e inserirmos a inércia devida à rotação na matriz de massa, o modelo de viga de Timoshenko pode ser transformado em um modelo de viga de Euler-Bernoulli, o que pode facilitar análises comparativas entre os dois modelos.

Modelos para o sistema de fixação

O sistema de fixação mais utilizado no caso de dormentes de concreto consiste de uma mola de fixação resiliente atuando em paralelo com uma placa de apoio bem mais rígida. As placas de apoio são normalmente construídas de borracha, plástico ou materiais compostos. O comportamento em termos de deflexão do sistema de fixação é não-linear, mas como seu comportamento quando uma carga de roda estiver perto dos dormentes é do maior interesse, alguma linearização torna-se justificável.

Para vibrações verticais a placa de apoio é normalmente modelada como um sistema mola e amortecedor viscoso em paralelo. Para modelos de trilho e de via que sejam essencialmente tridimensionais, é conveniente representar a placa de apoio como uma camada visco-elástica distribuída através do patim do trilho, enquanto que para modelos bidimensionais ela pode ser representada como estando atuando em um ponto do patim. Segundo Knothe e Grassie[5] ainda não existe nenhum modelo preditivo que permita projetar uma placa de apoio com rigidez e amortecimento pré-determinados, de forma que existe uma grande dificuldade em determinar os valores destes parâmetros. Apesar de se poder obter valores a partir de ensaios em laboratório, o ideal é a obtenção dos valores destes parâmetros a partir de ensaios de campo, realizados em vias que possuem o tipo de sistema de fixação para o qual se deseja obter os parâmetros. Nestes ensaios de campo normalmente são utilizados martelos de impulso ou excitadores eletromagnéticos.

Modelos de dormentes

O modelo mais completo de dormente é o de uma viga de Timoshenko com espessura variável, que pode ser analisado através do método dos elementos

finitos. Tem sido obtido um considerável sucesso na correlação entre a resposta calculada do trilho e do dormente na via e a resposta obtida através de medições para frequências abaixo de 700 Hz, quando o dormente é considerado como sendo uma viga uniforme. A resposta dinâmica de forças atuando no boleto é bem representada até uma frequência de 1000 Hz modelando-se o dormente simplesmente como um corpo rígido.

O apoio do dormente pela camada de lastro e pelo subleito

A modelagem do apoio do dormente pelas camadas de lastro, sublastro e subleito é a que apresenta os maiores problemas para o modelador. Estas camadas sofrem deflexão de forma altamente não-linear sob carregamento, podendo mesmo existir vazios entre o dormente e o lastro. A dissipação de energia ocorre devido à fricção seca e da propagação de tensões através do subleito. Uma consideração importante é a forma de como o trilho é apoiado sobre as camadas subjacentes, se contínuo ou discreto. No caso de modelagem da interação dinâmica entre veículo e via ferroviários normalmente se considera o trilho apoiado discretamente.

Segundo Knothe e Grassie[5], na maioria das modelagens que podem ser encontradas na literatura um modelo simples de dois parâmetros na direção vertical é utilizado. Neste caso o apoio do trilho sobre os dormentes é considerado discreto e as camadas de lastro, sublastro e subleito são modeladas como um conjunto mola mais amortecedor em paralelo. Este modelo pode ser visualizado na figura 3.2(a). Uma variação deste modelo consiste na modelagem do sistema de fixações também como um modelo simples de dois parâmetros na direção vertical, interconectando o trilho com os dormentes (figura 3.2 (b)).

Uma outra variação deste modelo consiste na inclusão de massas de lastro adicionais sobre os dormentes que são interconectadas entre si por sistemas mola mais amortecedor transversal (figura 3.2 (c)).

Outra possibilidade de modelagem do apoio do trilho é considerar as camadas de lastro, sublastro e subleito formando um semi-espaço elástico ou visco elástico, como podemos observar na figura 3.3(a) e (b). Neste tipo de modelagem se o objetivo for a análise de vibrações no solo é necessário pelo menos um trecho de via correspondente a cinco dormentes. Um modelo de apoio do trilho mais completo obtido a partir do anterior consiste de uma camada de lastro apoiada sobre um semi-espaço tridimensional. A figura 3.3(c) nos apresenta este tipo de modelagem. O maior problema relacionado a este

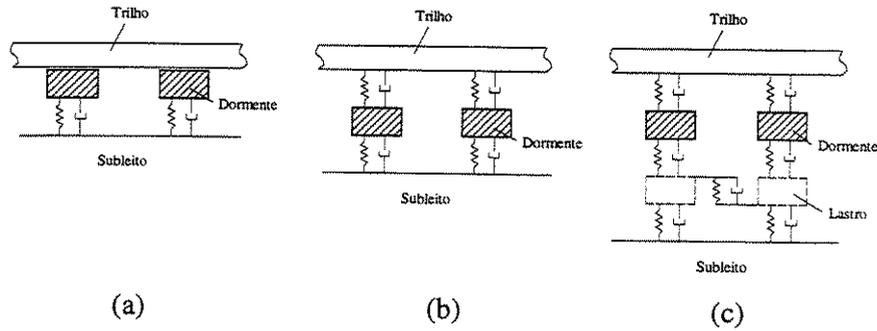


Figura 3.2: Modelos de apoio discreto

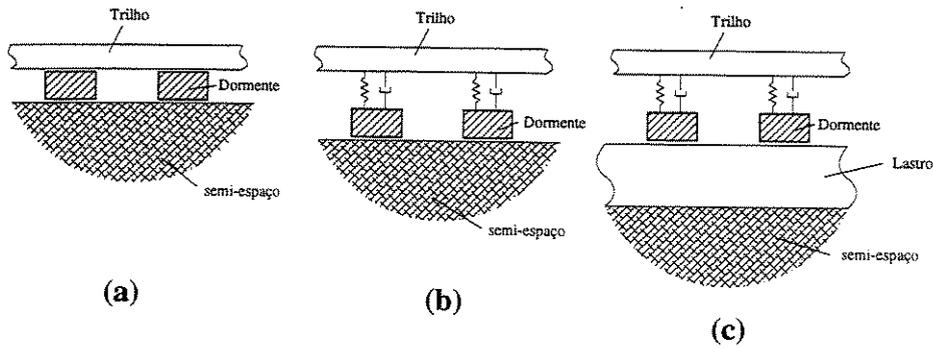


Figura 3.3: Modelos de apoio discreto sobre semi-espaco elástico ou visco-elástico

tipo de modelagem é sua alta complexidade e o grande esforço computacional necessário, mas trabalhos recentes como os de Rucker et al[6], Mohammadi e Karabalis[60] e Suiker et al.[75] mostraram a atual viabilidade de sua implementação.

3.3.3 A modelagem da via férrea

Os modelos dos componentes físicos da via férrea que foram aqui apresentados podem ser combinados para formarem modelos de via. A figura 3.4 nos apresenta uma hierarquização dos modelos de via que podem ser constituídos, coletados por Knothe e Grassie[5] em sua ampla revisão sobre os modelos que

foram até o presente desenvolvidos e encontrados na literatura. A principal diferença entre os modelos está relacionada ao tipo de apoio do trilho, ou seja, os modelos onde o apoio é considerado contínuo e os onde o apoio é considerado discreto (colunas I e III e colunas II e IV, respectivamente).

Considerar o apoio do trilho como sendo discreto está mais de acordo com a realidade que encontramos na maioria das ferrovias, cujos trilhos estão apoiados sobre dormentes discretos. Como já vimos no capítulo anterior, o apoio contínuo é conseguido através da transformação da via apoiada discretamente em uma via apoiada sobre um dormente longitudinal apoiado sobre uma fundação visco-elástica contínua. Os dormentes longitudinais podem ser modelados como corpos rígidos ou como vigas com massa e rigidez distribuídas, como podemos observar na figura 3.4 (Ic). Os modelos de via de apoio contínuo somente são válidos para o cálculo da resposta dinâmica da via para frequências de até 500 Hz, no caso de excitação vertical e 400 Hz para excitação lateral.

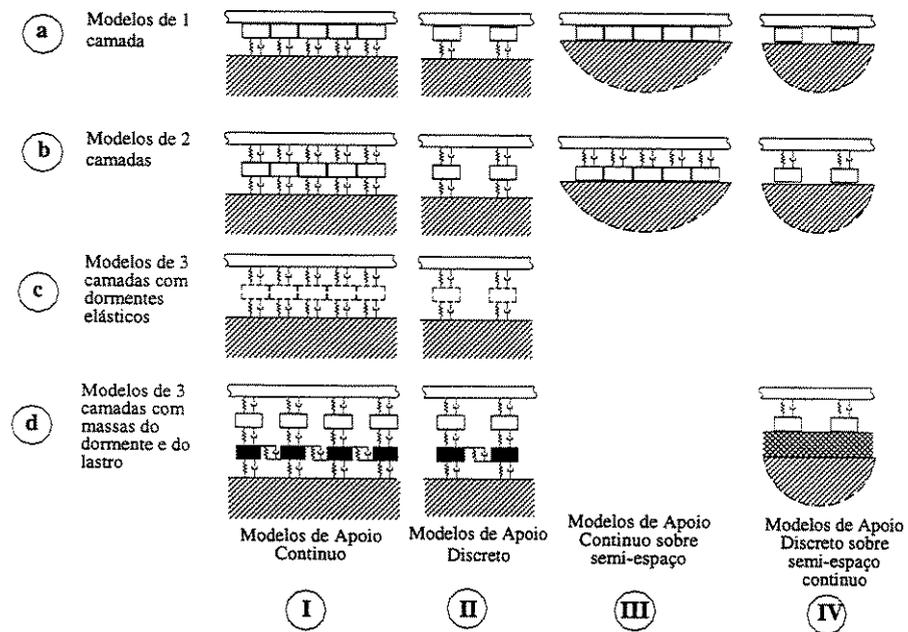


Figura 3.4: Hierarquia de modelos de via

Outro problema muito importante relacionado à modelagem da via férrea está no fato de se modelar a estrutura da via como tendo compri-

mento finito ou infinito. O tipo de estrutura está normalmente relacionado à técnica de solução a ser utilizada para a obtenção da resposta dinâmica. Estruturas de via com comprimento infinito são comumente utilizadas para soluções no domínio da frequência enquanto que estruturas com comprimento finito são mais apropriadas para soluções no domínio do tempo, principalmente se existirem não-linearidades significativas. O maior problema com as estruturas de comprimento finito está relacionado aos extremos, que podem introduzir efeitos indesejáveis no caso de se estudar a resposta do sistema à excitação provocada por cargas móveis.

Para solucionar este problema Dukkipati[45], em seu estudo com solução no domínio do tempo, introduziu uma mola torcional nas extremidades, para simular o efeito de continuidade da via. Outra solução, bem mais interessante foi utilizada por Ripke, citado por Knothe e Grassie[5], que simulou a continuidade da via através de uma estrutura de “anel fechado”, ou seja, o deslocamento da extremidade inicial era igual ao da final. Para que este tipo de abordagem seja bem sucedido é necessário um trecho de via com um comprimento significativo, na faixa de 15 a 25 dormentes, para que efeitos devidos a condições de contorno pouco realistas sejam reduzidas.

3.3.4 A modelagem da excitação

Existem vários modelos para representar a excitação vertical que surge do contato entre a roda e o trilho. A figura 3.5 nos apresenta os modelos mais utilizados. O modelo representado na figura 3.5(a) representa a via excitada por uma força transiente ou estacionária periódica. O modelo representado na figura 3.5(b) representa uma carga móvel constante ou variando harmonicamente deslocando-se a velocidade constante sobre a via. Este modelo é muito utilizado no desenvolvimento de análises de estabilidade de composições ferroviárias deslocando-se em altas velocidades, como apresentado no trabalho de Fortin[76].

O modelo representado na figura 3.5(c) é um modelo no qual o rodeiro permanece fixo em uma dada posição sobre o trilho, e uma faixa contendo as irregularidades existentes no boleto e a superfície da roda é empurrada a uma velocidade constante entre a roda e o trilho. Entretanto, o modelo mais realista da excitação vertical que aparece no contato entre a roda e o trilho é o de uma roda deslocando-se sobre irregularidades existentes no boleto do trilho (ou sobre a própria superfície da roda). Este modelo denominado modelo de massa móvel é representado na figura 3.5(d). Este modelo pode

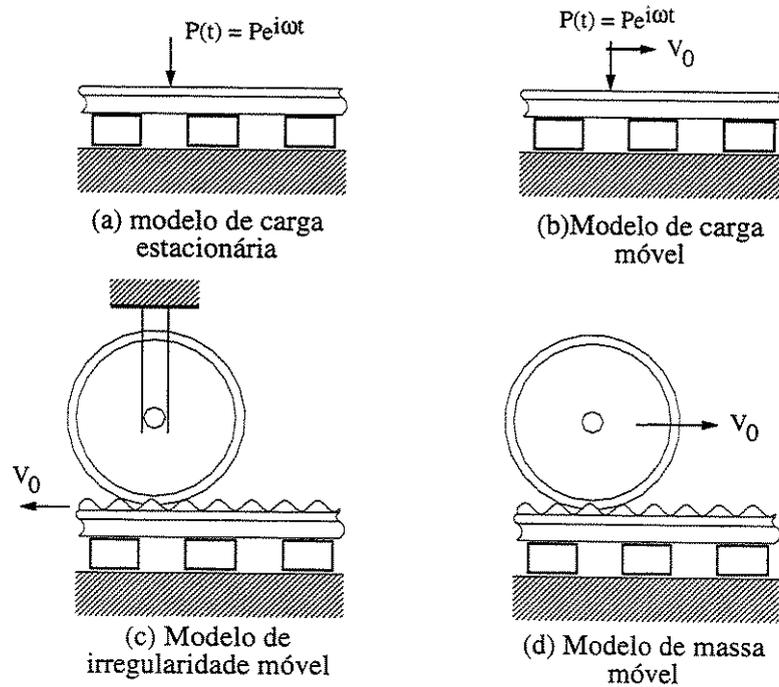


Figura 3.5: Modelagem da excitação

ser um dos componentes de um modelo de veículo, onde a massa móvel (no caso, a roda considerada como corpo rígido) estaria acoplada ao rodeiro, este por sua vez estaria acoplado ao truque e este, finalmente, acoplado à caixa do veículo, através das suspensões primárias e secundárias.

3.3.5 A modelagem do contato entre roda e trilho

Este é o último componente que é necessário modelar no sistema dinâmico composto pelo veículo e a via férrea. Consiste na modelagem do contato entre a roda e o trilho. Neste ponto, existem duas possibilidades para esta modelagem em função do tipo de contato. Uma é a modelagem para o contato tipo normal e a outra é para o contato tipo tangencial. O contato tangencial normalmente é utilizado em situações onde ocorrem frequências muito altas, como no caso da análise de geração de ruído (limite de frequência até de 5000 Hz). Apesar deste limite estar fora da faixa de frequência de interesse para

análise dinâmica dos problemas relacionados à superestrutura da via férrea, dentro do objetivo de uma ampla revisão dos temas relacionados à interação dinâmica entre a via e o veículo ferroviários, além do contato normal também discutiremos a seguir o contato tangencial.

Contato normal

Neste tipo de contato consideramos que a carga de roda é aplicada verticalmente sobre o boleto, exatamente ao sobre o eixo de simetria do trilho. Na maioria dos casos as hipóteses da teoria de contato Hertziana³ são válidas, de forma que podemos utilizar uma mola de contato não-linear ou linearizada. No caso de se utilizar uma mola de contato não-linear, a expressão relativa à força no contato entre a roda e o trilho é a seguinte:

$$F_T = C_H \times y^{\frac{3}{2}}, \quad (3.1)$$

onde F_T é a força no contato, C_H é a constante de Hertz para o contato não-linear e y é a deformação relativa entre a roda e o trilho. Podemos perceber que se o valor de y for negativo, ou seja, o trilho deformou-se mais que a roda, há a perda de contato e a força é nula. A figura 3.6 nos apresenta graficamente a função que expressa a relação entre a deformação relativa e a força no contato.

Contato Tangencial

Este tipo de contato é bem mais complexo de ser modelado. Aqui aparece o fenômeno do *creep* ou *creepage*⁴. Segundo Garg e Dukkipati[77] e Dukkipati e Amyot [78], este fenômeno é de importância fundamental na modelagem do contato tangencial entre roda e trilho ferroviários. Quando dois corpos rígidos (indeformáveis) em contato possuem uma velocidade relativa entre si, temos o fenômeno do deslizamento (*sliding*). Se estes corpos em contato forem elásticos (deformáveis), além deste fenômeno também ocorre o fenômeno do *creep*, (termo sem tradução na língua portuguesa) que é o deslocamento relativo devido às deformações sofridas pelos dois corpos não serem iguais.

³Teoria desenvolvida por Hertz em seu trabalho clássico *Gesamelte Werke*, vol. 1, de 1895.

⁴A tradução literal do termo *creep* é arrepio ou ato de deslizar, já *creepage* pode ser traduzido como escorregamento.

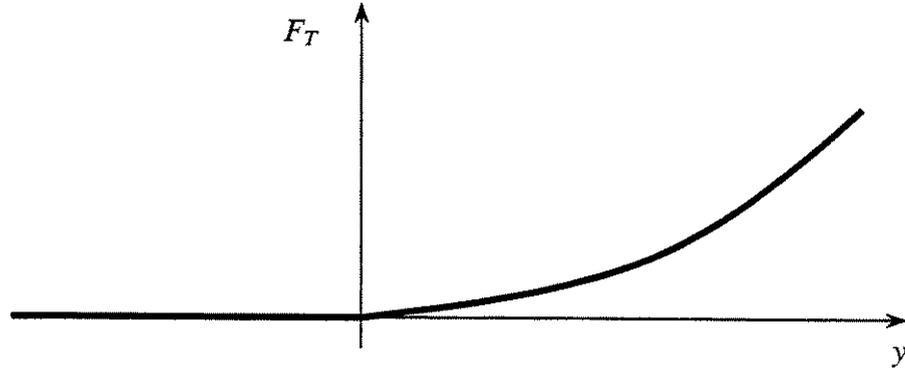


Figura 3.6: Força no contato versus deformação relativa

Assim, o escorregamento que ocorre entre os dois corpos é a soma do deslizamento e do *creep*. Estes corpos elásticos compartilham uma região de contato, onde tanto o deslizamento como o *creep* ocorrem simultaneamente. Esta região de contato, que segundo a teoria estática de Hertz possui uma forma elipsoidal, pode ser considerada como sendo um estado de transição entre o rolamento e o escorregamento puros.

Quando um rodeiro se desloca sobre um trilho, tanto a roda como o trilho se deformam elasticamente na região de contato e desvios em relação ao rolamento puro acontecem. Estes desvios na literatura técnica são denominados *creepage*, e são definidos tanto na direção longitudinal como na lateral. Quando o movimento relativo é de rotação, o fenômeno é denominado *spin creepage*. Eles são definidos matematicamente da seguinte forma:

$$\xi_x = \frac{v_x - v_x^*}{v_x^*} \text{ (longitudinal),} \quad (3.2)$$

$$\xi_y = \frac{v_y - v_y^*}{v_x^*} \text{ (lateral), e} \quad (3.3)$$

$$\xi_{sp} = \frac{\omega_u - \omega_l}{v_x^*} \text{ (spin),} \quad (3.4)$$

onde v_x e v_x^* são as velocidades real e pura de rolamento a frente, respectivamente, e v_y e v_y^* são as velocidades real e pura de rolamento lateral; ω_u e ω_l

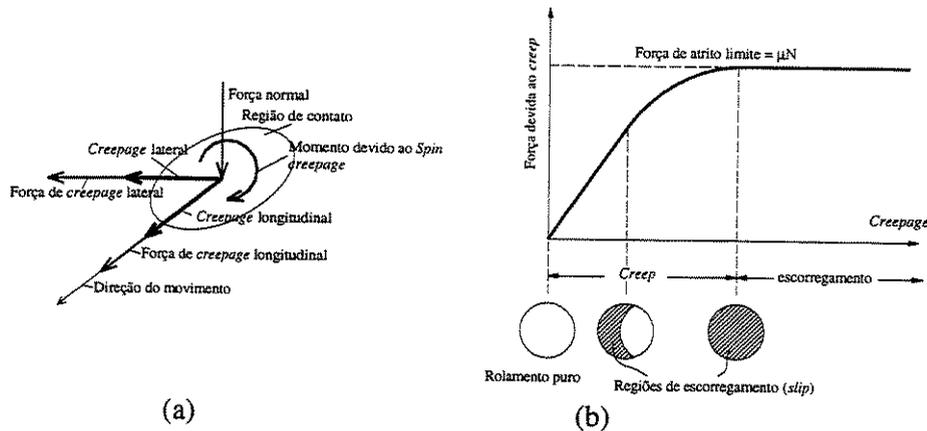


Figura 3.7: Mecânica do contato entre roda e trilho: (a) caracterização do fenômeno e (b) relação entre a força e “creep”.

são as velocidades angulares dos corpos elásticos de cima e de baixo em torno da norma à região de contato. A figura 3.7 (a) nos apresenta a caracterização do fenômeno.

Estes *creepages* produzem forças e momentos. A relação entre a força devida ao *creep* e seu *creepage* correspondente é essencialmente não linear, como podemos observar na figura 3.7 (b). Mas a força devida ao *creep* varia linearmente na maior parte da faixa onde ocorre o *creepage*, iniciando com um valor igual a zero quando o *creepage* for nulo até o valor de uma força de atrito limite igual a μN para os grandes *creepages*, sendo μ o coeficiente de atrito e N a força normal. Para pequenos valores de *creepage* existem relações lineares aproximadas entre as forças devidas ao *creep* e os *creepages*. As constantes de proporcionalidade utilizadas nestas relações aproximadas, chamadas de coeficientes de *creep*, foram determinadas por Kalker⁵.

Baseado nesta formulação do fenômeno do *creep*, existem na literatura modelos de *creep* possíveis de serem utilizados na modelagem do contato tangencial entre roda e trilho ferroviários. A seguir apresentaremos três destes modelos.

⁵Estes coeficientes foram apresentados em sua tese de doutorado junto à Universidade de Tecnologia de Delft, denominada *On the Rolling Contact of two Elastic Bodies in the presence of Dry Friction*, de 1967.

Modelo de força de *creep* linear com momento devido ao *spin* Este modelo é baseado na teoria de contato de rolamento linear desenvolvida por Kalker[79], também conhecida como teoria simplificada de Kalker. Segundo esta teoria, para valores de *creepage* longitudinal, lateral e *spin* muito pequenos, a área de escorregamento (*slid*) é pequena e a zona de atrito pode ser assumida como cobrindo toda a região de contato. As forças devidas ao *creep* e o momento de *spin* são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$F_x = f_{33} \times \xi_x, \quad (3.5)$$

$$F_y = f_{11} \times \xi_y + f_{12} \times \xi_{sp}, \text{ e} \quad (3.6)$$

$$M_z = -f_{12} \times \xi_y + f_{12} \times \xi_{sp}, \quad (3.7)$$

onde os valores de f_{ij} são os coeficientes de *creep*. Estes coeficientes dependem da geometria do contato entre roda e trilho, das propriedades dos materiais e da força normal que está atuando no centro da região de contato. Podemos observar que F_x é independente de ξ_y e de ξ_{sp} , enquanto que F_y é independente de ξ_x devido à simetria

Os valores dos semieixos característicos da região elíptica de contato podem ser determinadas a partir das seguintes expressões, obtidas a partir da teoria de Hertz:

$$a = m [3\pi N (K_1 + K_2) / 4K_3]^{1/3}, \text{ e} \quad (3.8)$$

$$b = n [3\pi N (K_1 + K_2) / 4K_3]^{1/3}, \quad (3.9)$$

onde os valores de K_1 , K_2 e K_3 são determinados a partir das seguintes expressões:

$$K_1 = \frac{1 - \nu_R^2}{\pi E_R},$$

$$K_2 = \frac{1 - \nu_T^2}{\pi E_T},$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right],$$

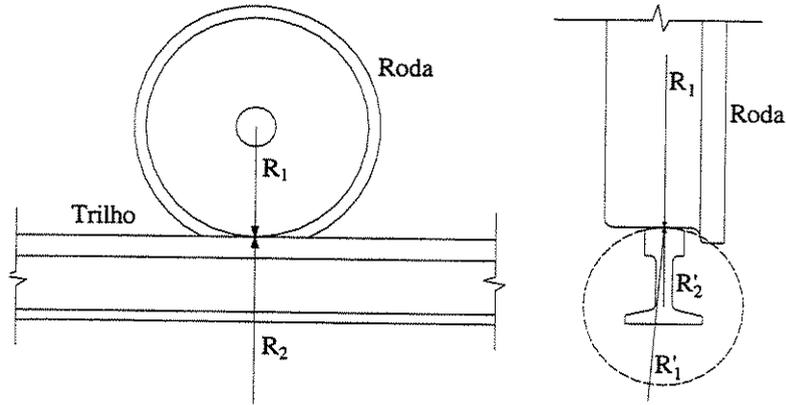


Figura 3.8: Raios principais de rolamento e raios de curvatura transversais principais

$$G = \frac{2G_R G_T}{G_R + G_T}, \text{ e}$$

$$\nu = \frac{G(G_R \nu_T + G_T \nu_R)}{2G_R G_T}.$$

Nas expressões acima N representa a força normal atuante na interface; R_1 e R_2 são os raios principais de rolamento da roda e do trilho; R_1' e R_2' são os raios de curvatura transversais principais dos perfis da roda e do trilho, como podemos observar na figura 3.8; ν_R e ν_T são os coeficientes de Poisson dos materiais constituintes da roda e do trilho; E_R e E_T são os módulos de elasticidade de Young dos materiais constituintes da roda e do trilho e G_R e G_T são os módulos de rigidez ao cisalhamento dos materiais constituintes da roda e do trilho. G e ν representam as constantes elásticas combinadas, propostas por Kalker e que podem ser utilizadas como uma aproximação para o caso de dois corpos com diferentes constantes elásticas.

O raio de curvatura de um corpo é considerado como sendo *positivo* e o seu correspondente centro de curvatura estiver dentro do corpo. Na figura 3.8 podemos observar que somente R_1' é negativo. Os coeficientes m e n são valores que dependem da relação K_4/K_3 , onde

$$K_4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\psi \right],$$

onde ψ é o ângulo entre os planos normais que contêm as curvaturas $1/R_1$ e $1/R_2$. os valores de m e n podem ser obtidos na tabela 3.2 como função do ângulo θ_c , medido em graus, determinado a partir da seguinte expressão:

$$\theta_c = \cos^{-1}(K_4/K_3).$$

Os valores dos coeficientes de *creepage* e de *spin creepage* c_{ij} que dependem sómente de ν e da relação a/b , são listados na tabela 3.3. Desta forma, os coeficientes de *creepage* linear e de *spin creepage* podem então ser determinados através das seguintes relações:

$$f_{11} = ab \times G \times c_{22}, \quad (3.10)$$

$$f_{12} = (ab)^{\frac{3}{2}} \times G \times c_{23}, \quad (3.11)$$

$$f_{22} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \times G \times c_{33}, \text{ e} \quad (3.12)$$

$$f_{33} = ab \times G \times c_{11}. \quad (3.13)$$

Tabela 3.2: Valores dos coeficientes m e n

θ (graus)	m	n	θ (graus)	m	n	θ (graus)	m	n
0.5	61.40	0.102	10	6.604	0.311	60	1.486	0.717
1	36.89	0.131	20	3.813	0.412	65	1.378	0.759
1.5	27.48	0.152	30	2.731	0.493	70	1.284	0.802
2	22.26	0.169	35	2.397	0.530	75	1.202	0.846
3	16.50	0.196	40	2.136	0.567	80	1.128	0.893
4	13.31	0.219	45	1.926	0.604	85	1.061	0.944
6	9.79	0.255	50	1.754	0.641	90	1.000	1.000
8	7.86	0.285	55	1.611	0.678			

Tabela 3.3: Coeficientes de *creepage* e spin *creepage*

ν	C_{11}			C_{22}			$C_{23} = -C_{32}$			C_{33}		
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{a}{b}$												
0.1	2.51	3.31	4.85	2.51	2.52	2.53	0.33	0.47	0.73	6.42	8.28	11.7
0.2	2.59	3.37	4.81	2.59	2.63	2.66	0.48	0.60	0.81	3.46	4.27	5.66
0.3	2.68	3.44	4.80	2.68	2.75	2.81	0.61	0.72	0.89	2.49	2.96	3.72
0.4	2.78	3.53	4.82	2.78	2.88	2.98	0.72	0.82	0.98	2.02	2.32	2.77
0.5	2.88	3.62	4.83	2.88	3.01	3.14	0.83	0.93	1.07	1.74	1.93	2.22
0.6	2.98	3.72	4.91	2.98	3.14	3.31	0.93	1.03	1.18	1.56	1.68	1.86
0.7	3.09	3.81	4.97	3.09	3.28	3.48	1.03	1.14	1.29	1.43	1.50	1.60
0.8	3.19	3.91	5.05	3.19	3.41	3.65	1.13	1.25	1.40	1.34	1.37	1.42
0.9	3.29	4.01	5.12	3.29	3.54	3.82	1.23	1.36	1.51	1.27	1.27	1.27
$\frac{b}{a}$												
1.0	3.40	4.12	5.20	3.40	3.67	3.98	1.33	1.47	1.63	1.21	1.19	1.16
0.9	3.51	4.22	5.30	3.51	3.81	4.16	1.44	1.59	1.77	1.16	1.11	1.06
0.8	3.65	4.36	5.42	3.65	3.99	4.39	1.58	1.75	1.94	1.10	1.04	0.95
0.7	3.82	4.54	5.58	3.82	4.21	4.67	1.76	1.95	2.18	1.05	0.96	0.85
0.6	4.06	4.78	5.80	4.06	4.50	5.04	2.01	2.23	2.50	1.01	0.89	0.75
0.5	4.37	5.10	6.11	4.37	4.90	5.56	2.35	2.62	2.96	0.96	0.82	0.65
0.4	4.84	5.57	6.57	4.84	5.48	6.31	2.88	3.24	3.70	0.91	0.75	0.55
0.3	5.57	6.34	7.34	5.57	6.40	7.51	3.79	4.32	5.01	0.87	0.67	0.45
0.2	6.96	7.78	8.82	6.96	8.14	9.79	5.72	6.63	7.89	0.83	0.60	0.34
0.1	10.70	11.70	12.90	10.70	12.80	16.00	12.20	14.60	18.00	0.79	0.52	0.23

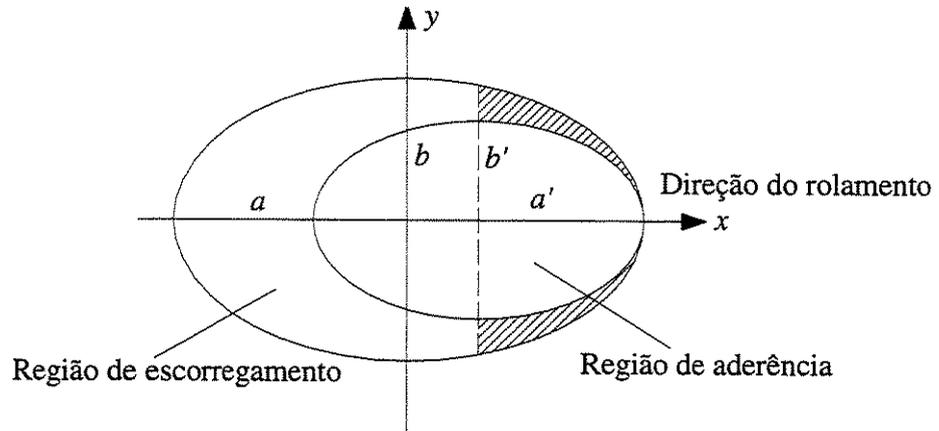


Figura 3.9: Área de contato conforme Johnson e Vermeulen

Modelo de força de *creep* não linear sem *spin* Este modelo é baseado na teoria desenvolvida por Johnson e Vermeulen[80]. Esta teoria é uma extensão da teoria de Carter⁶ para o caso tridimensional de duas esferas rolantes no qual os *creepages* longitudinal e lateral foram incluídos, mas sem o *spin creepage*. Posteriormente, esta teoria foi estendida para semi-espacos lisos arbitrários para *creepage* puro sem *spin creepage*. Desta forma, a região de contato entre os corpos rolantes que transmitem a força tangencial foi dividida em duas regiões diferentes: uma região de escorregamento e uma região de aderência. A área de aderência foi assumida como sendo uma elipse que toca a borda dianteira da região de contato. A região de contato com as áreas de escorregamento e de aderência pode ser observada na figura 3.9.

Forças de tração tangencial semi-elíptica atuam em cada elipse e a força de tração tangencial total pode ser obtida pela diferença entre elas. É importante observar que na parte hachurada da região de escorregamento as direções de escorregamento e de tração são incompatíveis. Johnson e Vermeulen mostraram que o erro no cálculo das forças devidas ao *creep* utilizando o seu modelo matemático era menor do que 25% em relação aos resultados obtidos experimentalmente.

⁶Em 1926, Carter desenvolveu uma teoria bidimensional para o contato de rolamento com atrito para aplicação em dinâmica ferroviária, que fornece uma solução fechada exata para a relação entre o *creepage* longitudinal e a força tangencial.

A força tangencial resultante pode ser formulada da seguinte forma: seja a o semi-eixo na direção de rolamento com vetor unitário i , e b o semi-eixo na direção lateral com vetor unitário j da elipse no plano de contato. Assim, dados o módulo de rigidez G , o coeficiente de Poisson ν , o coeficiente de atrito μ_a , ξ_x e ξ_y e a força normal total N , a força tangencial (*creep*) F será dada por:

$$\frac{F}{\mu_a N} = \begin{cases} (1/\tau) [(1 - \tau/3)^3 - 1] (\xi i + \eta j) & \text{para } |\tau| \leq 3 \\ -(1/\tau) (\xi i + \eta j) & \text{para } |\tau| \geq 3, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde ξ e η são os *creepages* longitudinal e lateral normalizados, e τ é o *creepage* resultante normalizado. Estes valores são obtidos a partir das seguintes expressões:

$$\xi = \frac{\pi ab G \xi_x}{\mu N \phi},$$

$$\eta = \frac{\pi ab G \xi_y}{\mu N \psi}, \text{ e}$$

$$\tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

onde os valores de ϕ e ψ são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi &= B - \nu(D - C) \\ \psi &= B - \nu(a^2/b^2)C, \text{ para o caso de } a \leq b \text{ e } k = \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2}}, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= [D - \nu(D - C)](b/a) \\ \psi &= [D - \nu C](b/a), \text{ para o caso de } a > b \text{ e } k = \sqrt{\frac{1 - b^2}{a^2}}, \end{aligned}$$

em que os valores de B , C e D são obtidos através das integrais apresentadas a seguir.

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \text{ e}$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

Como $\nu \neq 0$ e a função ϕ raramente é igual a ψ , a força devido ao *creep* normalmente não está na mesma direção do *creepage*. Este modelo tem sua utilização restrita ao caso de *creepages* longitudinal e lateral puros, ou seja, com o *spin creepage* nulo.

Modelo de força de *creep* não linear com *spin* Também conhecido como modelo não-linear heurístico. Segundo Garg e Dukkipati[77], estudos mostraram a necessidade de modelos de contato tangencial mais sofisticados. Isto se deve à existência de algumas não linearidades que deveriam estar incluídas nestes modelos. Entre estas não linearidades podemos incluir funções geométricas não lineares oriundas dos perfis da roda e do trilho e limites de aderência sobre a relação entre a força devida ao *creep* e o *creepage*, como podemos observar na figura 3.7.

É sabido que os efeitos devido ao *spin creepage* podem ser significativos, principalmente na região da flange da roda. Assim, é feita uma modificação na formulação proposta por Johnson e Vermeulen para incluir os efeitos devidos ao *spin creepage* sobre as forças devidas ao *creep*. Neste modelo modificado, as forças e o momento devidos ao *creep* são calculados conforme a teoria linear de Kalker, através das equações 2.34, 2.35 e 2.36. O efeito não linear devido ao limite de aderência é incluído calculando-se

$$F'_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

onde F_x é a força devida ao *creep* longitudinal ilimitada e F_y é a força devida ao *creep* lateral ilimitada. Seguindo a formulação proposta por Johnson e Vermeulen sem levar em consideração o *spin creepage*, a força limitante resultante F_R é determinada da seguinte forma:

$$F_R = \begin{cases} \mu_a N \left[\frac{F'_R}{\mu_a N} - \frac{1}{3} \left(\frac{F'_R}{\mu_a N} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{F'_R}{\mu_a N} \right)^3 \right] & \text{para } F'_R \leq 3\mu_a N \\ \mu_a N & \text{para } F'_R > 3\mu_a N. \end{cases} \quad (3.15)$$

Podemos observar que na equação 3.14 a contribuição devida ao *spin creepage* à força devida ao *creep* lateral F_y está incluída no cálculo da força devida ao *creep* resultante ilimitada F'_R . De forma a calcular as componentes da força devida ao *creep* resultante, a direção da força resultante devida ao

creep resultante em relação ao *creepage* resultante deve ser estabelecida. São conhecidos dois casos limites:

1. Caso 1. Para *creepages* pequenos, caso em que a teoria linear de Kalker é válida, a direção pode ser determinada da seguinte forma:

$$F_{yN} = \left(\frac{F_y}{F'_R} \right) F_R, \quad F_{xN} = \left(\frac{F_x}{F'_R} \right) F_R$$

ou

$$F_{yN} = F_R \cos \theta_1, \quad F_{xN} = F_R \sin \theta_1,$$

onde $\theta_1 = \arctan(F_x/F_y)$.

2. Caso 2. Quando ocorre escorregamento completo, ou seja, quando $F'_R > 3\mu_a N$, a força resultante deve ter a direção do *creepage* resultante, ou seja:

$$F_{yN} = \left(\frac{\xi_y}{\tau} \right) \mu_a N, \quad F_{xN} = \left(\frac{\xi_x}{\tau} \right) \mu_a N$$

ou

$$F_{yN} = \mu_a N \cos \theta_2, \quad F_{xN} = \mu_a N \sin \theta_2,$$

onde

$$\theta_2 = \arctan(\xi_x/\xi_y) \quad \text{e} \quad \tau = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}.$$

Se adotarmos uma aproximação linear para θ , teremos que

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{F'_R}{\mu_a N} & , \text{ para } F'_R \leq 3\mu_a N \\ \theta_2 & , \text{ para } F'_R > 3\mu_a N \end{cases} \quad (3.16)$$

Desta forma, o modelo prevê as forças devidas ao *creep* como

$$F_{yN} = F_R \cos \theta \operatorname{sgn}(F_y), \quad F_{xN} = F_R \sin \theta \operatorname{sgn}(F_x). \quad (3.17)$$

Os dados necessários para os cálculos são a relação a/b e os valores normalizados do *creepage*. A determinação da relação a/b pode ser obtida

através das equações 2.37 e 2.40. Os valores dos *creepages* normalizados são função da força normal na região de contato e são definidos como *creepages* longitudinal, lateral e *spin* normalizados, determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\xi_{xN} &= \xi_x \frac{\rho}{\mu_a C}, \\ \xi_{yN} &= \xi_y \frac{\rho}{\mu_a C}, \text{ e} \\ \xi_{spN} &= \xi_{sp} \frac{\rho}{\mu_a C},\end{aligned}\tag{3.18}$$

onde $C = \sqrt{ab}$, função da força normal no contato, e

$$\frac{4}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

função dos raios principais de curvatura dos dois corpos elásticos em contato, e ξ_x , ξ_y e ξ_{sp} são os valores dos *creepages* reais. Assim, as forças devidas ao *creep* longitudinal e lateral, bem como o momento devido ao *spin*, são determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}F_{xN} &= F_x / \mu_a N, \\ F_{yN} &= F_y / \mu_a N, \text{ e} \\ M_{zN} &= M_z / (\mu_a N / C).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Segundo Garg e Dukkipati[77] os resultados obtidos pelo modelo heurístico descrevem com precisão as relações de *creep* não lineares quando dois dos três *creepages* forem nulos. No caso geral dos *creepages* combinados, os resultados obtidos são similares aos obtidos com a teoria simplificada de Kalker.

Existem outras teorias voltadas para a análise do fenômeno do *creep*, mas são de utilização restrita ou são mais complexas e de difícil utilização. No livro de Garg e Dukkipati[77] existe uma discussão detalhada sobre estas teorias, incluindo as acima apresentadas. Para a modelagem do contato tangencial vários modelos computacionais foram desenvolvidos. Estes programas foram baseados na teoria simplificada de Kalker e entre eles podemos os desenvolvidos pelo próprio Kalker, como o FASTSIM e o CONTACT.

3.4 Técnicas de solução

3.4.1 Considerações iniciais

Do ponto de vista da dinâmica de estruturas, os modelos dinâmicos da via férrea podem ser considerados como sendo uma viga (o trilho) apoiada so-

bre uma fundação contínua elástica (modelo clássico de Winkler) ou sobre apoios discretos (os dormentes), sendo estes apoiados sobre conjuntos molas-amortecedores ou sobre uma fundação contínua, elástica ou visco-elástica. A modelagem dos veículos ferroviários normalmente é feita através de corpos rígidos.

Como coloca Craig[81] em seu livro, em termos de modelagem matemática estes modelos podem ser tratados como sendo *modelos contínuos* ou *modelos de parâmetros discretos*, também chamados de *modelos de massas concentradas* (pois a massa do sistema é assumida como sendo representada por um pequeno número de pontos de massa). A diferença básica entre estes dois tipos de modelos está relacionada ao número de graus de liberdade do sistema que está sendo modelado. Nos modelos contínuos este número de graus de liberdade é infinito e no outro é finito. A adoção de um modelo contínuo leva à soluções obtidas através da aplicação das leis de Newton, obtendo-se as equações de movimento a partir de um diagrama de corpo livre de uma parte do sistema em análise, ou através das equações de Lagrange. Em ambos casos o comportamento dinâmico do sistema é representado por uma *equação diferencial parcial*. Este tipo de modelagem pode ser utilizada no caso da via apoiada sobre fundação contínua elástica sujeita à uma carga móvel constante ou variando harmonicamente, deslocando-se a uma velocidade constante, utilizando-se tanto as formulações de viga de Euler-Bernoulli ou Timoshenko, como as apresentadas por Warburton [82] em seu livro.

Nos modelos de parâmetros aglomerados as equações de movimento também são obtidas através da leis de Newton ou das equações de Lagrange, mas a solução do sistema é feita através da resolução de um *sistema de equações diferenciais ordinárias*, sendo que o número de equações está relacionado ao número de graus de liberdade do sistema. A modelagem da viga apoiada sobre apoios discretos pode ser realizada através deste tipo de modelo. Entretanto, o número grande de graus de liberdade existente neste tipo de modelo leva à utilização dos chamados *métodos aproximados* ou *diretos*, como os métodos de Rayleigh-Ritz ou dos elementos finitos, como bem colocam Mitchell e Wait[83]. Estes métodos também podem ser aplicados no caso dos modelos contínuos para se obter uma solução aproximada.

A modelagem da interação dinâmica entre o veículo e a via ferroviários, com o veículo deslocando-se a uma velocidade constante sobre a via, só é possível modelando-se o sistema dinâmico formado pelo veículo e a via como um modelo de parâmetros discretos, devido à necessidade de se realizar o acoplamento entre os dois modelos. Como o número de graus de liberda-

de resultante deste sistema é muito grande recomenda-se a utilização dos métodos aproximados ou diretos para a obtenção da resposta do sistema .

A resposta do sistema dinâmico formado pelo veículo e a via ferroviários pode ser encontrada tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo. O parâmetro fundamental na escolha do tipo de domínio a ser adotado é o fato de se considerar ou não quaisquer não linearidades no sistema. Soluções no domínio da frequência para sistemas dinâmicos não-lineares são possíveis, mas de maior complexidade em relação às soluções obtidas no domínio do tempo, portanto sendo recomendáveis somente se o sistema dinâmico em análise for linear. Na interação dinâmica entre o veículo e a via ferroviários existem várias não linearidades, principalmente no contato entre roda e trilho e entre os dormentes e a camada de lastro. O próprio lastro, como bem coloca Knothe e Grassie[5] se deforma de uma forma altamente não linear. Desta forma, quaisquer modelagens que se pretendam realistas devem levar em consideração estas não linearidades, fazendo com que as soluções a serem obtidas sejam de preferência no domínio do tempo.

A seguir faremos uma apresentação das principais técnicas de solução existentes em ambos os domínios para os modelos de parâmetros discretos, mas nos preocupando em detalhar somente as técnicas mais utilizadas de solução no domínio do tempo, e entre estas, os métodos numéricos de integração, que permitirão a obtenção da resposta do sistema dinâmico formado pela via e veículo ferroviários levando-se em consideração as não linearidades existentes.

3.4.2 Técnicas de solução no domínio da frequência

Neste tipo de técnica de solução as equações de movimento do sistema são expressas em termos da frequência e integradas no domínio da frequência para a obtenção da resposta como função também da frequência. Uma vantagem desta técnica é que os componentes a altas frequências podem ser eliminados, fazendo com que os custos computacionais sejam reduzidos. A interpretação dos resultados também é mais simples em relação às soluções no domínio do tempo. Seja

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (3.20)$$

o conjunto de n equações diferenciais acopladas que representam as equações de movimento de um modelo de parâmetros discretos linear, utilizando a

chamada notação matricial, onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e rigidez, respectivamente, todas com coeficientes constantes; $\{F(t)\}$ é o vetor das forças externas; $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são os vetores, em termos de coordenadas generalizadas, correspondentes à aceleração, velocidade e deslocamento.

Utilizando a transformada rápida de Fourier ou outra técnica similar, $\{F(t)\}$ é transformada em $\{F(\omega)\}$, representando as forças devidas às solicitações externas em uma frequência particular ω .

A solução da equação 3.20 pode ser assumida como sendo

$$\{x\} = \{\bar{x}\} e^{i\omega t}. \quad (3.21)$$

Desta forma, temos

$$\{\dot{x}\} = \{\bar{x}\} i\omega e^{i\omega t}, \text{ e} \quad (3.22)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\{\bar{x}\} \omega^2 e^{i\omega t}. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações 3.21, 3.22 e 3.23 na equação 3.20, nós obtemos

$$\{\bar{x}\} e^{i\omega t} = \frac{\{F(\omega)\}}{(-[M]\omega^2 + i\omega[C] + [K])}. \quad (3.24)$$

Podemos observar que as n equações simultâneas possuem coeficientes complexos. Estes coeficientes representam forças ou momentos em ou fora de fase em relação ao movimento. Da mesma forma as forças externa que atuam sobre o sistema em uma dada frequência possuem também amplitude e fase.

3.4.3 Técnicas de solução no domínio do tempo

Transformação em equações diferenciais de primeira ordem e análise de estabilidade

É a técnica de solução clássica para o sistema dinâmico com vários graus de liberdade, que pode ser encontrada em vários livros relacionados à análise dinâmica, como no caso do livro de Garg e Dukkipati[77]; Müller e Schiehlen[84]; Warburton[82] e Craig[81]. O sistema dinâmico representado pelo sistema de

equações 3.20, para sistemas mecânicos comuns deve ser suplementado com as seguintes condições iniciais

$$\{x(t_0)\} = \{x\}_0, \quad \{\dot{x}(t_0)\} = \{\dot{x}\}_0.$$

Enquanto que o comportamento no tempo do sistema é representado unicamente pelo vetor de posição $\{x(t)\}$, a formulação das condições iniciais requiere a adição de um vetor velocidade $\{\dot{x}(t)\}$. Com estes dois vetores formamos o *vetor de estado* $\{y(t)\}$, ou seja

$$\{y\} = \left\{ \begin{array}{c} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{array} \right\}. \quad (3.25)$$

A ordem do vetor de estado é duas vezes maior do que a ordem do vetor posição. Os seus componentes também são chamados de variáveis de estado. Podemos utilizar o vetor de estado para escrever as equações de movimento descritas em 3.20 na forma de uma *equação de estado*, representada pelo sistema formado por $2n$ equações de primeira ordem

$$\{\dot{y}(t)\} = [A] \{y(t)\} + \{b(t)\}, \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.26)$$

onde a matriz $[A]$ é conhecida como *matriz do sistema*. Esta matriz possui a seguinte estrutura:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

O *vetor de excitação* $\{b(t)\}$ possui a seguinte estrutura:

$$\{b(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ [M]^{-1}[F(t)] \end{array} \right\}. \quad (3.28)$$

As matrizes de massa $[M]$ são sempre regulares no caso dos sistemas mecânicos mais comuns, de forma que a sua inversa $[M]^{-1}$ sempre existe.

A solução geral do sistema

$$\{x(t)\} = \{x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0, F(t))\},$$

respectivamente

$$\{y(t)\} = \{y(t, y_0, t_0)\},$$

fornece informações sobre o movimento do sistema vibrante quando este for perturbado a partir de sua posição de equilíbrio.

Um sistema dinâmico, tal como um sistema estático, pode ser estável ou instável. O critério de estabilidade de um sistema estático é que ele deve retornar à sua configuração original após uma pequena perturbação. O mesmo critério se aplica a um sistema dinâmico. Assim, se um sistema dinâmico formado por um conjunto massa-mola amortecido for submetido a uma pequena perturbação, ele oscilará com uma amplitude decrescente até aproximar-se de sua condição inicial e a isto chamamos equilíbrio *estável*. Por outro lado um sistema massa-mola não amortecido possui uma estabilidade equivalente à de uma bola colocada sobre uma superfície plana e lisa. Neste caso temos uma estabilidade *neutra* ou indiferente. Um sistema dinâmico *instável* amplifica quaisquer deslocamentos por menores que sejam, fazendo com a amplitude aumente espontaneamente quando o sistema é submetido a pequenas perturbações.

A solução geral é em princípio determinada através da *matriz fundamental* do sistema de equações diferenciais. Como os coeficientes em 3.20 e 3.26 não variam com o tempo, temos que a solução geral dos sistemas não dependem da escolha do instante inicial t_0 . A solução é somente uma função da diferença de tempo entre o tempo corrente e o tempo inicial, fornecidos pela mesma condição inicial (x_0, \dot{x}_0) , respectivamente y_0 . Assim, podemos admitir sem perda de generalidade que $t_0 = 0$.

Se o sistema descrito por 3.20 estiver vibrando livremente, ou seja $\{F(t)\} = \{0\}$, o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de ordem $2n$ representado por 3.26, se transformará em

$$\{\dot{y}(t)\} = [A] \{y(t)\}, \quad y(t_0) = y_0. \quad (3.29)$$

Para este sistema sempre existirá um sistema fundamental de $2n$ vetores soluções linearmente independentes $\varphi_i(t)$, $i = 1(1)2n$, que para $t = 0$ coincidem com os n vetores unitários e_i , tal que

$$\varphi_i(0) = e_i, \quad i = 1(1)2n, \quad (3.30)$$

e que satisfazem a equação 3.29, ou seja

$$\{\dot{\varphi}_i(t)\} = [A] \{\varphi_i(t)\}. \quad (3.31)$$

Estes vetores solução formam as colunas de uma matriz regular de orden $2n \times 2n$

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \mid \varphi_2(t) \mid \cdots \mid \varphi_{2n}(t)], \quad (3.32)$$

chamada de *matriz fundamental* ou *matriz de transição de estado*. De uma maneira geral, qualquer matriz regular $\Phi(t)$ que satisfaça a equação diferencial

$$\dot{\Phi}_i(t) = [A] \Phi_i(t) \quad (3.33)$$

é chamada matriz fundamental. A matriz fundamental definida em 3.32 possui a propriedade adicional de que $\Phi(0) = [I]$ (matriz identidade). A relação entre $\dot{\Phi}_i(t)$ e $\Phi_i(t)$ é dada por $\dot{\Phi}_i(t) = [A] \Phi_i(t)$. Podemos representar a matriz fundamental como sendo uma solução da equação 3.33 através de uma função exponencial matricial dada por

$$\Phi(t) = e^{[A]t}, \quad (3.34)$$

definida para toda matriz de sistema através da série infinita convergente

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{1}{2!} ([A]t)^2 + \frac{1}{3!} ([A]t)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([A]t)^k}{k!}. \quad (3.35)$$

A partir das relações 3.34 e 3.35 podemos caracterizar a *propriedade de transição* da matriz fundamental $\Phi(t)$, ou seja

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1).$$

O livro de Müller e Schienhken[84] nos apresenta detalhadamente todas as propriedades da matriz fundamental. A partir das relações 3.33 e 3.34 obtemos a seguinte relação:

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = [A]^{-1} (\Phi(t) - [I]) = (\Phi(t) - [I]) [A]^{-1}, \quad (3.36)$$

sempre que o determinante de $[A]$ seja diferente de zero. De maneira análoga ao sistema descrito por 3.29, o sistema descrito por 3.20, vibrando livremente ($\{F(t)\} = \{0\}$), pode ser associado a um sistema fundamental de $2n$ funções vetoriais linearmente independentes $\psi_i(t)$, $i = 1(1)2n$, onde os ψ_i satisfazem o sistema 3.20 e as condições iniciais, ou seja

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= e_i, \quad \dot{\psi}_i(0) = 0, \quad i = 1(1)n, \text{ e} \\ \psi_{n+i}(0) &= 0, \quad \dot{\psi}_{n+i}(0) = e_i, \quad i = 1(1)n. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Estes vetores solução formam as colunas de duas matrizes

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) &= [\psi_1(t) \mid \psi_2(t) \mid \cdots \mid \psi_n(t)], \text{ e} \\ \Psi_2(t) &= [\psi_{n+1}(t) \mid \psi_{n+2}(t) \mid \cdots \mid \psi_{2n}(t)].\end{aligned}\quad (3.38)$$

Estas matrizes também satisfazem as equações diferenciais descritas por 3.20, mas com condições iniciais diferentes:

$$\begin{aligned}[M] \ddot{\Psi}_i(t) + [C] \dot{\Psi}_i(t) + [K] \Psi_i(t) &= \{0\}, \quad i = 1, 2, \text{ com} \\ \Psi_1(0) &= [I], \quad \dot{\Psi}_1(0) = 0, \text{ e} \\ \Psi_2(0) &= 0, \quad \dot{\Psi}_2(0) = [I].\end{aligned}\quad (3.39)$$

Na transição das equações de movimento para suas equivalentes equações de estado, obtemos a seguinte relação entre a matriz fundamental e as matrizes de solução descritas em 3.38:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_1(t) & \Psi_2(t) \\ \dot{\Psi}_1(t) & \dot{\Psi}_2(t) \end{bmatrix}.\quad (3.40)$$

Substituindo em 3.27 para a matriz $[A]$ na série exponencial descrita em 3.35, temos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix},$$

e podemos calcular os primeiros termos da série de potências convergente para $\Psi_1(t)$ e $\Psi_2(t)$:

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) &= [I] - \frac{t^2}{2!} [M]^{-1} [K] + \frac{t^3}{3!} [M]^{-1} [C] [M]^{-1} [K] + \cdots, \text{ e} \\ \Psi_2(t) &= \frac{t}{1!} [I] - \frac{t^2}{2!} [M]^{-1} [C] + \frac{t^3}{3!} \left[([M]^{-1} [C])^2 - [M]^{-1} [K] \right] + \cdots.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Assim, a solução geral de um sistema homogêneo de equações diferenciais representado por 3.29, dada uma condição inicial pode ser obtido como uma combinação linear das soluções fundamentais $\varphi_i(t)$, ou seja

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2n} \varphi_i(t) y_{i0}.$$

Utilizando a matriz fundamental, podemos escrever a relação acima em notação matricial, ou seja

$$\{y(t)\} = [\Phi(t)] \{y_0\}.$$

Em outras palavras, a matriz fundamental ou matriz de transição de estado nos indica como o estado inicial $\{x_0\}$ se transforma no estado $\{x(t)\}$. A equação de estado pode ser resolvida facilmente e é compatível com programas computacionais. Tem como grande desvantagem em relação às equações de movimento o fato de dobrar a ordem do sistema de equações.

Alguns pesquisadores, como Zhong e Willians[85], desenvolveram um método de integração a passo de tempo preciso para a obtenção da resposta dinâmica do sistema. Neste método as equações diferenciais de segunda ordem representadas em 3.20 são transformadas em equações de primeira ordem utilizando uma transformação ligeiramente diferente da mostrada na equação 3.35. A principal característica característica do método é que a matriz exponencial em $t = \Delta t$ é calculada recursivamente como

$$e^{[A]\frac{\Delta t}{2^k}} = \left[e^{[A]\frac{\Delta t}{2^{k+1}}} \right]^2, k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.42)$$

e $\exp([A]\frac{\Delta t}{2^m})$ é calculada a partir de uma solução de série de Taylor truncada na equação 3.35. O número de cálculos recursivos m foi adotado como sendo igual a 20, e com isto foi obtido um algoritmo de integração a passo de tempo muito preciso. Mas, segundo Fung[86], este algoritmo não do ponto de vista computacional eficiente, pois a ordem das matrizes, como já vimos anteriormente, é dobrada e as propriedades das matrizes simétricas e de banda não são exploradas.

Entretanto, assumindo a hipótese de linearidade a estabilidade do sistema dinâmico pode ser analisada através da solução do *problema do autovalor*. Enquanto que a matriz fundamental é dada em termos dos vetores solução especiais $\varphi_i(t)$, normalizados no instante inicial $t = 0$, de modo que $\varphi_i(0) = e_i$, o *problema do autovalor* caracteriza o comportamento do sistema dinâmico representado pelo sistema de equações diferenciais 3.29 através de *soluções particulares*, que possuem a seguinte propriedade: o vetor de estado $y(t)$ e sua derivada $\dot{y}(t)$ possuem a mesma direção no espaço de estado. Ou seja

$$\{\dot{y}(t)\} = \lambda \{y(t)\}. \quad (3.43)$$

Se estas soluções particulares existirem, elas devem satisfazer não somente a equação 3.29, mas também a equação 3.43. Uma solução do tipo

$$\{y(t)\} = e^{\lambda t} \{\tilde{y}(t)\}, \quad (3.44)$$

satisfaz as duas condições. Substituindo a equação 3.44 na equação 3.29, temos

$$\lambda e^{\lambda t} \{\tilde{y}(t)\} = [A] e^{\lambda t} \{\tilde{y}(t)\},$$

o que nos fornece o seguinte sistema homogêneo de equações

$$(\lambda [I] - [A]) \{\tilde{y}\} = \{0\}, \quad (3.45)$$

que é chamado de *problema do autovalor* associado com a matriz de sistema $[A]$.

O problema do autovalor possui vetores solução não triviais \tilde{y} se e somente se $\lambda [I] - [A]$ for uma matriz singular. Isto só ocorre quando λ for a raiz do polinômio característico

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda [I] - [A]) \equiv \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + a_2 \lambda^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n} = 0. \quad (3.46)$$

Para toda matriz real $[A]$ de ordem $2n \times 2n$, o polinômio característico $p(\lambda)$ possui grau igual a $2n$, com coeficientes a_i , $i = 1(1)2n$, que são unicamente determinados por $[A]$. O polinômio característico tem $2n$ raízes $\lambda = \lambda_i$, onde raízes múltiplas são contadas de acordo com sua *multiplicidade* v_j . Se aparecerem raízes complexas, $\lambda_j = \delta_j + i\omega_j$, então seus conjugados $\bar{\lambda}_j = \delta_j - i\omega_j$ também são raízes. Denominando λ_j , $j = 1(1)s \leq 2n$, as s raízes distintas do polinômio característico e v_j , $j = 1(1)s$, suas multiplicidades, as raízes $\lambda = \lambda_j$, $j = 1(1)s$ são chamadas de *autovalores* de $[A]$. As soluções não-triviais $\{\tilde{y}\}_j = \{y(\lambda_j)\}$ de 3.45 são chamadas de *autovetores*. Para todos autovalores conjugados complexos existem os correspondentes autovetores complexos conjugados. Enquanto que os autovetores correspondentes a diferentes autovalores são sempre linearmente independentes, devemos no caso de múltiplos autovalores ($v_j > 1$) distinguir várias possibilidades. Ao lado da multiplicidade v_j , devemos também considerar a *nulidade* da matriz $(\lambda_j [I] - [A])$, determinada por:

$$\begin{aligned} d_j &= 2n - \text{rank}(\lambda_j [I] - [A]), \text{ com} \\ 1 &\leq d_j \leq v_j, \quad j = 1(1)s, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde o *rank* de uma matriz é definido como sendo o número vetores linha ou vetores coluna linearmente independentes da matriz.. Assim, existem para um autovalor λ_j de multiplicidade v_j exatamente d_j autovetores linearmente independentes.

Se os autovalores forem da forma $\lambda_j = \delta_j \pm i\omega_j$ o movimento correspondente será

$$x_j(t) = e^{-\delta_j} [C \sin(\omega_j t + \phi_j)], \quad (3.48)$$

onde C é uma constante e δ_j é o fator de *decaimento* associado ao j -ésimo modo de vibração e é dado por

$$\delta_j = \xi_j \omega_j,$$

onde ξ_j é o amortecimento modal, ω_j é a frequência modal e ϕ_j é o ângulo de fase. A partir da equação 3.48 podemos observar que enquanto δ_j for positivo (ou enquanto o amortecimento modal ξ_j for positivo), a amplitude de $x_j(t)$ diminuirá com o tempo. Por outro lado, para um valor negativo de δ_j ou para um amortecimento modal negativo, a amplitude de $x_j(t)$ aumentará com o tempo e o movimento é classificado como sendo *instável*.

Método da decomposição modal

Neste método o problema do autovalor relacionado ao problema da vibração livre não amortecida do sistema dinâmico é resolvido, ou seja

$$([K] - \lambda^2 [M]) \{\tilde{y}\} = \{0\}. \quad (3.49)$$

Os autovalores λ_i^2 e os autovetores $\{\tilde{y}\}_i$ correspondem aos quadrados das frequências naturais e aos modos naturais de vibração, respectivamente. Os autovetores $\{\tilde{y}\}_i$ podem ser normalizados, de forma que $\{\tilde{y}\}_i^T [M] \{\tilde{y}\}_i = 1$. Todos os autovalores e autovetores são reunidos para formar as matrizes $[\Lambda^2] = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2)$ e $[\Phi] = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n]$, sendo a última matriz denominada como *matriz modal* e n é o número de graus de liberdade do sistema. As matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ podem ser diagonalizadas se as pré-multiplicarmos por $[\Phi]^T$ e posteriormente, pós-multiplicarmos por $[\Phi]$, ou seja

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \text{ e } [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda^2]. \quad (3.50)$$

Se a matriz de amortecimento $[C]$ na equação 3.20 puder ser diagonalizada através do mesmo processo feito em relação à matriz de massa $[M]$, e para tanto a matriz de amortecimento deverá estar na forma de amortecimento de Rayleigh, ou seja, $[C] = a[M] + b[K]$, podemos determinar os *índices de amortecimento modal* $\xi_i, i = 1, n$, da seguinte forma

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \text{diag} (2\lambda_i \xi_i). \quad (3.51)$$

Desta forma a equação 3.20 pode ser desacoplada através de sua pré-multiplicação por $[\Phi]^T$ e utilizando a transformação para as *coordenadas principais* $\{u(t)\}$, onde $\{x(t)\} = [\Phi] \{u(t)\}$, conseguimos obter o seguinte conjunto de equações diferenciais desacopladas dadas por

$$\{\ddot{u}\}_i + 2\lambda_i \xi_i \{\dot{u}\}_i + \lambda_i^2 \{u\}_i = \{f_i(t)\}, \quad (3.52)$$

onde $\{f(t)\} = [\Phi] \{F(t)\}$. As equações diferenciais podem ser resolvidas individualmente e a resposta transiente é obtida através da combinação das respostas modais e pode ser escrita como

$$\{u(t)\} = [G(t)] (\{u\}_0 - \{u_s(0)\}) + [H(t)] (\{v\}_0 - \{v_s(0)\}) + \{u_s(t)\} \quad (3.53)$$

onde $\{u_s(t)\}$ é a resposta em regime correspondente a $\{F(t)\}$, $\{v_s(t)\} = \{\dot{u}_s(t)\}$, sendo que

$$[G(t)] = [\Phi] \text{diag} (g_i(t)) [\Phi]^T [M], \text{ e} \quad (3.54)$$

$$[H(t)] = [\Phi] \text{diag} (h_i(t)) [\Phi]^T [M], \quad (3.55)$$

onde os valores de $g_i(t)$ e $h_i(t)$ são obtidos a partir das seguintes expressões

$$g_i(t) = e^{-\xi_i \lambda_i t} \left[\cos(\lambda_{di} t) + \frac{\xi_i \lambda_i}{\lambda_{di}} \text{sen}(\lambda_{di} t) \right], \text{ e} \quad (3.56)$$

$$h_i(t) = e^{-\xi_i \lambda_i t} \left[\frac{1}{\lambda_{di}} \text{sen}(\lambda_{di} t) \right] \text{ e } \lambda_{di} = \sqrt{1 - \xi_i^2 \lambda_i}. \quad (3.57)$$

A matriz $[G(t)]$ representa a resposta do sistema a um carregamento do tipo degrau (função de Heaviside) e a matriz $[H(t)]$ representa a resposta do sistema a um carregamento do tipo impulso (função delta de Dirac). Como condição adicional, a matriz de amortecimento $[C]$ deverá satisfazer a condição de Caughey, ou seja, $[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$, para que possa ser desacoplada na equação 3.51.

Soluções aproximadas podem ser obtidas se todos os autovetores não forem utilizados. Normalmente, um certo número de modos naturais deve ser incluído para podermos avaliar a resposta dinâmica do sistema com precisão.

3.4.4 Métodos numéricos diretos de integração no tempo

Considerações iniciais

Vários métodos numéricos diretos de integração no tempo são utilizados para se obter soluções aproximadas das equações de movimento ou conjuntos destas equações. Para sistemas dinâmicos lineares, as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são independentes do tempo e permanecem constante durante o procedimento de integração. Entretanto, no caso de sistemas dinâmicos não-lineares, estas matrizes variam com o tempo e devem ser modificadas durante a integração das equações de movimento. Para a solução das equações de movimento no caso de sistemas lineares podemos utilizar no domínio do tempo os métodos previamente apresentados ou os métodos numéricos de integração. Entretanto, para a obtenção da solução de sistemas não-lineares, a utilização dos métodos numéricos de integração é geralmente obrigatória. Como bem coloca Gérardin e Rixen[87], ao contrário dos métodos de superposição, as técnicas de integração no tempo diretas não se limitam somente à análise dos sistemas lineares, mas podem ser facilmente estendidas para os sistemas não-lineares. Elas tornam possível levar em consideração os componentes de alta frequência de uma forma direta. Mas para tanto, devemos tomar alguns cuidados, como ajustar corretamente os parâmetros do método conforme a precisão e a estabilidade exigidas, de forma a controlar o amortecimento numérico.

Nos métodos de integração as equações de movimento ou as equações de estado são integradas sucessivamente através de um procedimento numérico de passo-de-tempo (*time-step*) e as equações de movimento ou de estado não precisam ser transformadas antes da integração. As derivadas em relação ao tempo são aproximadas, de uma forma geral, através de fórmulas de diferença

envolvendo um ou mais incrementos de tempo. A escolha do incremento de tempo ou passo-de-tempo, é um dado muito importante na utilização deste tipo de método. Seu valor não depende sómente do espectro de frequências da excitação, mas também da discretização no espaço, já que ele deve ser consistente com a velocidade de propagação da onda dentro do modelo.

De uma forma geral, os métodos de integração para sistemas de equações de primeira ordem podem ser enunciados na seguinte forma:

$$\{y\}_{n+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \{y\}_{n+1-j} - \Delta t \sum_{j=0}^m \beta_j \{\dot{y}\}_{n+1-j}, \quad (3.58)$$

onde $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ é o passo-de-tempo e $\{y\}_{n+1}^T = [\{\dot{x}\}_{n+1}^T \quad \{x\}_{n+1}^T]$ é o vetor de estado no tempo t_{n+1} , determinado a partir dos m instantes precedentes, a partir de suas derivadas e a partir do próprio valor de $\{y\}_{n+1}$.

Se $\beta_0 \neq 0$, o esquema de integração representado por 3.58 é chamado de *implícito*, já que o vetor de estado no tempo t_{n+1} é uma função de sua própria derivada no tempo. Portanto, as relações de integração tem que ser remodeladas antes de poderem ser resolvidas. Assim, em um método implícito as equações de diferenças são combinadas com as equações de movimento, e os deslocamentos são calculados diretamente a partir da resolução das equações.

Para $\beta_0 = 0$, $\{y\}_{n+1}$ pode ser deduzida diretamente a partir dos resultados obtidos nos passos-de-tempo anteriores, e porisso o método é chamado *explícito*. Assim, em um método explícito os valores da resposta do sistema são expressas em termos de valores de deslocamento, velocidade e aceleração previamente determinados. Se os valores de α_j e β_j forem iguais a zero para $j > 1$, a relação 3.58 corresponde a um *método de passo-único*, ou seja, o sistema no instante t_{n+1} depende sómente do seu estado no tempo t_n .

A partir da equação 3.58 podemos deduzir três fórmulas básicas de integração:

1. Regra trapeizodal (implícita)

$$\{y\}_{n+1} = \{y\}_n + \frac{\Delta t}{2} (\{\dot{y}\}_n + \{\dot{y}\}_{n+1}) \quad (3.59)$$

2. Fórmula anterior de Euler (implícita)

$$\{y\}_{n+1} = \{y\}_n + \Delta t \{\dot{y}\}_{n+1} \quad (3.60)$$

3. Fórmula à frente de Euler (explícita)

$$\{y\}_{n+1} = \{y\}_n + \Delta t \{\dot{y}\}_n \quad (3.61)$$

Substituindo as relações de integração na equação de estado representada pela relação 3.29, nós encontramos um sistema linear de equações que é resolvido para $\{y\}_{n+1}$ no instante t_{n+1} .

A seguir faremos uma apresentação dos principais esquemas numéricos de integração existentes para os dois tipos de formulação, nos atendo sómente aos mais utilizados no meio técnico. Posteriormente, apresentaremos os esquemas de solução para implementação de métodos numéricos de integração para sistemas dinâmicos lineares e não-lineares, com uma apresentação mais detalhada em relação aos sistemas não-lineares.

Esquemas de integração numérica explícitos

Os esquemas de integração numérica explícitos mais utilizados são o preditor de diferença central; a interação de dois ciclos com regra trapezoidal e o Runge-Kutta. Destes os mais utilizados são o primeiro e o último. A seguir faremos uma descrição suscinta destes dois esquemas.

Esquema Preditor de Diferença Central As fórmulas de diferença neste esquema são aplicadas às equações de movimento. A velocidade e a aceleração são escritas em termos dos deslocamentos, como podemos ver a seguir

$$\{\dot{x}\}_t = (2\Delta t)^{-1} (\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_{t-\Delta t}), \text{ e} \quad (3.62)$$

$$\{\ddot{x}\}_t = \Delta t^{-2} (\{x\}_{t+\Delta t} - 2\{x\}_t + \{x\}_{t-\Delta t}). \quad (3.63)$$

Substituindo as equações 3.62 e 3.63 na equação 3.20, obtemos

$$[\overline{M}] \{x\}_{t+\Delta t} = \{\overline{F}(t)\}, \quad (3.64)$$

onde $[\overline{M}]$ é a *matriz de massa efetiva*, e $\{\overline{F}_t\}$ é o *vetor de forças efetivo*, que são determinados a partir das seguintes expressões:

$$\{\overline{M}\} = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C], \text{ e} \quad (3.65)$$

$$\{\bar{F}(t)\} = \{F(t)\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right) \{x\}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{x\}_{t-\Delta t}. \quad (3.66)$$

Os deslocamentos $\{x\}_{t+\Delta t}$ no tempo $t + \Delta t$ podem ser calculados resolvendo-se a equação 3.64, enquanto que as velocidades e acelerações no tempo t são obtidas através da substituição de $\{x\}_{t+\Delta t}$ nas equações 3.62 e 3.63. Como podemos observar, o esquema de integração para calcular $\{x\}_{t+\Delta t}$ necessita dos valores de $\{x\}_t$ e de $\{x\}_{t-\Delta t}$, de forma que para iniciar o processo de integração existe a necessidade de um procedimento de partida especial.

O erro de truncamento local da fórmula de diferença utilizada no esquema possui ordem de Δt^2 . O passo de tempo para análise de sistemas dinâmicos lineares é limitado pela frequência mais alta do sistema, ω_{\max} , ou seja

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}. \quad (3.67)$$

Quando o passo de tempo Δt não satisfaz a inequação 3.67, a solução torna-se instável. Segundo Garg e Dukkipati [77], a condição representada pela inequação 3.67 é necessária e suficiente para a estabilidade do método.

Esquema Runge-Kutta Neste esquema utilizamos as equações de estado, ou seja

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}.$$

O esquema se utiliza da fórmula de Euler a frente, ou seja

$$\{y\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \Delta t f(t, \{y\}_t),$$

sendo que

$$f(t, \{y\}_t) = \{\dot{y}\}_t,$$

o qual aproxima uma solução a partir de $\{y_t\}$ para $\{y_{t+\Delta t}\}$. Esta aproximação é obtida de tal forma que a expansão em série de potências da aproximação coincida, até os termos de uma ordem estabelecida $(\Delta t)^N$ dentro do intervalo

de tempo Δt , com uma série de Taylor da expansão de $\{y\}_{t+\Delta t}$ em potências de Δt . Este esquema possui a vantagem de não necessitar de valores iniciais além dos já prescritos. Os algoritmos do *esquema de Rung-Kutta de quarta-ordem* são baseados em fórmulas com a seguinte estrutura

$$\{y\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \Delta t (ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4), \quad (3.68)$$

onde a, b, c e d são constantes e k_1, k_2, k_3 e k_4 são os valores aproximados das derivadas dentro do intervalo $t_k \leq t \leq t_{k+\Delta t}$. Vários algoritmos tem sido utilizados, sendo o que o seguinte é atribuído a Kutta:

$$\{y\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.69)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= \{f(t, \{y\}_t)\}, \\ k_2 &= \left\{ f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \{y\}_t + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right) \right\}, \\ k_3 &= \left\{ f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \{y\}_t + k_2 \frac{\Delta t}{2}\right) \right\}, \text{ e} \\ k_4 &= \{f(t + \Delta t, \{y\}_t + k_3 \Delta t)\}. \end{aligned}$$

O esquema Runge-Kutta possui a vantagem de que, como sua utilização em cada estágio do cálculo da aproximação não exige informações relevantes em relação aos passos anteriores, ele é completamente auto-iniciável e é particularmente adequado quando se deseja minimizar as necessidades de memória computacional.

O erro de truncamento e_t para o esquema Runge-Kutta de quarta ordem é da forma

$$e_t = k_t (\Delta t)^5, \quad (3.70)$$

onde k_t depende de $f(t, \{y\})$ e de suas derivadas parciais de maior ordem. Como o esquema Runge-Kutta é um esquema de formulação explícita, o passo de tempo máximo é geralmente escolhido em função de considerações sobre a estabilidade. Segundo Garg e Dukkipatti [77], o sistema pode ser considerado como um método inerentemente estável, desde que mudanças no passo de tempo possam ser implementadas em qualquer estágio durante os desenvolvimentos dos cálculos. Mas o método gera um amortecimento artificial que

suprime indevidamente a amplitude da resposta. A sua principal desvantagem é que cada passo a frente durante o desenvolvimento do esquema exige vários cálculos das derivadas, o que faz com o custo computacional aumente significativamente. Press et al. [88] apresenta uma discussão detalhada do esquema Runge-Kutta, incluindo sua implementação computacional.

Esquemas de integração numérica implícitos

Entre os esquemas de integração numérica implícitos mais utilizados na literatura podemos citar os esquemas de Houbolt; Wilson- β e os esquemas da chamada “família” Newmark. A seguir faremos uma descrição sucinta dos dois primeiros e daremos mais atenção aos esquemas da “família” Newmark.

Esquema de Houbolt O esquema de Houbolt é baseado na interpolação de terceira ordem dos deslocamentos. São derivadas fórmulas implícitas com vários passos em termo dos deslocamentos, através da utilização de diferenças anteriores.

As fórmulas de diferenças utilizadas no esquema de Houbolt são as seguintes:

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \Delta t^{-2} (2\{x\}_{t+\Delta t} - 5\{x\}_t + 4\{x\}_{t-\Delta t} - \{x\}_{t-2\Delta t}), \text{ e} \quad (3.71)$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = (6\Delta t)^{-1} (11\{x\}_{t+\Delta t} - 18\{x\}_t + 9\{x\}_{t-\Delta t} - 2\{x\}_{t-2\Delta t}). \quad (3.72)$$

Substituindo as equações 3.71 e 3.72 para $\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$ e $\{\dot{x}\}_{t+\Delta t}$ na equação 3.20, obtemos

$$[\overline{M}] \{x_{t+\Delta t}\} = \{\overline{F}(t + \Delta t)\}, \quad (3.73)$$

onde $[\overline{M}]$ e $\{\overline{F}(t + \Delta t)\}$ são determinados a partir das seguintes expressões:

$$\{\overline{M}\} = \frac{2}{\Delta t^2} [M] + \frac{11}{6\Delta t} [C] + [K], \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{F}(t + \Delta t)\} &= \{F(t + \Delta t)\} + \\
&\quad \left(\frac{5}{\Delta t^2} [M] + \frac{3}{\Delta t} [C] \right) \{x\}_t - \\
&\quad \left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{3}{2\Delta t} [C] \right) \{x\}_{t-\Delta t} + \\
&\quad \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{3\Delta t} [C] \right) \{x\}_{t-2\Delta t}. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Os deslocamentos $\{x\}_{t-\Delta t}$ no passo de tempo $t + \Delta t$ podem ser calculados através da resolução da equação 3.73, enquanto que as velocidades e acelerações no tempo $t + \Delta t$ são obtidas a partir da substituição de $\{x\}_{t+\Delta t}$ nas equações 3.71 e 3.72. O esquema não é auto-iniciável e necessita de muita memória de massa no computador para sua implementação computacional.

Esquema Wilson- θ Neste esquema é assumido que a aceleração varia linearmente ao longo de um incremento de tempo $\theta \geq 1.0$ e que as propriedades do sistema dinâmico permanecem constante durante este intervalo de tempo. As fórmulas de diferença no esquema de Wilson- θ são dadas por:

$$\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \{\dot{x}\}_t - 2\{\ddot{x}\}_t, \quad (3.76)$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta \Delta t} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - 2\{\dot{x}\}_t - \frac{\theta \Delta t}{2} \{\ddot{x}\}_t. \quad (3.77)$$

Utilizamos a equação 3.20 no instante $t + \Delta t$ para obtermos a solução para os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t + \Delta t$. Como as acelerações variam linearmente, uma força linear projetada é utilizada tal que

$$[M] \{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + [C] \{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + [K] \{x\}_{t+\theta\Delta t} = \{F(t + \theta\Delta t)\} \quad (3.78)$$

onde $\{F(t + \theta\Delta t)\} = \{F(t)\} + \theta F(t + \Delta t) - \{F(t)\}$.

Através da substituição das relações para $\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ e $\{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ nas equações 3.76 e 3.77, respectivamente, na equação 3.78, obtemos a seguinte relação:

$$[M] \{x\}_{t+\theta\Delta t} = \{\bar{F}(t + \theta\Delta t)\}, \quad (3.79)$$

onde $\{\overline{M}\}$ e $\{\overline{F}(t + \Delta t)\}$ são determinados a partir das seguintes expressões:

$$\{\overline{M}\} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} [M] + \frac{3}{\theta \Delta t} [C] + [K],$$

$$\begin{aligned} \{\overline{F}(t + \theta \Delta t)\} &= \{F(t + \theta \Delta t)\} + \\ &\left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} [M] + \frac{3}{\theta \Delta t} [C] \right) \{x\}_t + \left(\frac{6}{\theta \Delta t} [M] + 2[C] \right) \{\dot{x}\}_t \\ &+ \left(2[M] + \frac{\theta \Delta t}{2} [C] \right) \{\ddot{x}\}_t. \end{aligned} \quad (3.80)$$

A solução da equação 3.79 nos fornece o valor de $\{x\}_{t+\theta\Delta t}$, o qual é posteriormente substituído nas seguintes expressões:

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \{\dot{x}\}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \{\ddot{x}\}_t, \quad (3.81)$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{x}\}_t), \quad (3.82)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{\dot{x}\}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} - 2\{\ddot{x}\}_t), \quad (3.83)$$

o que nos permite obter os valores das acelerações, velocidades e deslocamentos no instante $t + \Delta t$. Segundo Garg e Dukkipati[77], o esquema em sua totalidade é incondicionalmente estável para a determinação da resposta dinâmica de sistemas dinâmicos lineares quando $\theta \geq 1.37$, mas um valor igual a 1.5 é frequentemente utilizado para a análise de sistemas não-lineares. Uma anomalia do esquema é que o equilíbrio nunca é satisfeito no instante $t + \Delta t$.

Métodos implícitos de passo-único: a “família” Newmark

O método Newmark O método Newmark é um método de passo-único, ou seja, o vetor de estado do sistema no instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ é obtido a partir do vetor de estado já determinado no instante t_n , através de uma expansão em série de Taylor dos deslocamentos e das velocidades:

$$f(t_n + \Delta t) = f(t_n) + \Delta t f'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R_s, \quad (3.84)$$

onde R_s é o resto do desenvolvimento até a ordem s , dado por

$$R_s = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f^{(s+1)}(\tau) [t_n + \Delta t + \tau]^s d\tau.$$

A partir da relação 3.84 podemos calcular as velocidades e os deslocamentos de um sistema no instante t_{n+1} , ou seja

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\}_{n+1} &= \{\dot{x}\}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau, \text{ e} \\ \{x\}_{n+1} &= \{x\}_n + \Delta t \{\dot{x}\}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau. \end{aligned} \quad (3.85)$$

A aproximação utilizada no método consiste do desenvolvimento dos termos da integral relativos à aceleração através da utilização de uma quadratura numérica. Desta forma, podemos expressar $\{\ddot{x}(\tau)\}$ no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ como uma função de $\{\ddot{x}\}_n$ e $\{\ddot{x}\}_{n+1}$ nos limites do intervalo, ou seja

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}\}_n &= \{\ddot{x}(\tau)\} + \{x^{(3)}(\tau)\} (t_n - \tau) + \\ &\quad \{x^{(4)}(\tau)\} \frac{(t_n - \tau)^2}{2} + \dots, \text{ e} \\ \{\ddot{x}\}_{n+1} &= \{\ddot{x}(\tau)\} + \{x^{(3)}(\tau)\} (t_{n+1} - \tau) + \\ &\quad \{x^{(4)}(\tau)\} \frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} + \dots. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Multiplicando as equações 3.86 por $(1 - \gamma)$ e por γ , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}(\tau)\} &= (1 - \gamma) \{\ddot{x}\}_n + \gamma \{\ddot{x}\}_{n+1} + \{x^{(3)}(\tau)\} [\tau - \Delta t \gamma - t_n] + \\ &\quad O(\Delta t^2 x^{(4)}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

De maneira análoga, multiplicando as equações 3.86 por $(1 - 2\beta)$ e por β , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}(\tau)\} &= (1 - 2\beta) \{\ddot{x}\}_n + 2\beta \{\ddot{x}\}_{n+1} + \{x^{(3)}(\tau)\} [\tau - 2\Delta t\beta - t_n] \\ &\quad + O(\Delta t^2 x^{(4)}). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Desta forma, pela substituição das equações 3.87 e 3.88 nos termos da integral das equações 3.85, conseguimos obter as fórmulas de quadratura, mostradas a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau &= (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{x}\}_n + \gamma \Delta t \{\ddot{x}\}_{n+1} + \{r\}_n, \text{ e} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_n + \beta \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_{n+1} + \\ &\quad \{r'\}_n, \end{aligned} \quad (3.89)$$

e com as seguintes medidas de erro:

$$\begin{aligned} \{r\}_n &= \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \Delta t^2 \{x^{(3)}(\tilde{\tau})\} + O(\Delta t^3 \{x^{(4)}\}), \text{ } t_n < \tilde{\tau} < t_{n+1}, \text{ e} \\ \{r'\}_n &= \left(\beta - \frac{1}{6}\right) \Delta t^3 \{x^{(3)}(\tilde{\tau})\} + O(\Delta t^4 \{x^{(4)}\}). \end{aligned} \quad (3.90)$$

As constantes γ e β são parâmetros associados com o esquema da quadratura numérica. Estes parâmetros escolhidos em função da precisão e da estabilidade desejadas ao longo do processo de integração. O efeito líquido destes parâmetros é a mudança na forma da variação da aceleração durante o intervalo de tempo Δt . Fazendo $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$, a aceleração é *constante* e igual a \ddot{x}_n durante cada intervalo Δt . Se adotarmos $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{8}$, a aceleração é *constante* e igual a \ddot{x}_n no início e então muda para \ddot{x}_{n+1} no meio do intervalo de tempo Δt . Escolhendo $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, isto nos leva a uma *interpolação linear da aceleração*, ou seja,

$$\{\ddot{x}(\tau)\} = \{\ddot{x}\}_n + \tau \frac{\{\ddot{x}\}_n + \{\ddot{x}\}_{n+1}}{\Delta t}.$$

Da mesma maneira, escolhendo $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, isto corresponde a considerar que uma *aceleração média*, igual a

$$\{\ddot{x}(\tau)\} = \frac{\{\ddot{x}\}_n + \{\ddot{x}\}_{n+1}}{2},$$

ocorra ao longo de todo intervalo de tempo Δt .

Substituindo as relações 3.89 nas equações 3.85, conseguimos as seguintes fórmulas de aproximação para o método Newmark:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\}_{n+1} &= \{\dot{x}\}_n + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{x}\}_n + \gamma \Delta t \{\ddot{x}\}_{n+1}, \text{ e} \\ \{x\}_{n+1} &= \{x\}_n + \Delta t \{\dot{x}\}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{x}\}_n + \Delta t^2 \beta \{\ddot{x}\}_{n+1}\end{aligned}\quad (3.91)$$

Assumindo que as equações de movimento representadas pelo sistema de equações 3.20,

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\}$$

seja *linear*, ou seja, as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são independentes de $\{x\}$. Introduzimos o esquema numérico representado pelas equações 3.91 nas equações de movimento no instante t_{n+1} , de forma a podermos determinar a aceleração $\{\ddot{x}\}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}([M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K]) \{\ddot{x}\}_{n+1} &= \{F\}_{n+1} - \\ [C] (\{\dot{x}\}_n + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{x}\}_n) - \\ [K] \left(\{x\}_n + \Delta t \{\dot{x}\}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_n \right)\end{aligned}\quad (3.92)$$

A solução da equação 3.92 implica na inversão do sistema linear de equações associado à matriz de interação, dada por

$$[M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K],$$

a qual é simétrica e definida positiva devido às propriedades das matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$. Continuando com um passo-de-tempo constante, esta matriz pode ser triangularizada e invertida. Posteriormente, determinamos os valores das velocidades e deslocamentos $\{\dot{x}\}_{n+1}$ e $\{x\}_{n+1}$ conforme as equações 3.91.

Em relação à estabilidade, um método de integração é considerado estável se existir um passo-de-tempo $\Delta t_0 > 0$, tal que para qualquer $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$, uma variação finita do vetor de estado no instante t_n induz somente a uma variação não-crescente do vetor de estado $\{y\}_{n+j}$, calculado no instante subsequente t_{n+j} . Géradin e Rixen[87] apresentam uma tabela com as propriedades dos algoritmos da “família” Newmark, em termos de seus limites de

estabilidade, erro de amplitude e de periodicidade⁷. Segundo os autores, o método Newmark considerando a aceleração média constante no intervalo de tempo ($\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$) é o melhor esquema estável incondicionalmente.

As propriedades de estabilidade do método Newmark para aceleração média constante podem ser relacionadas ao conceito de conservação de energia. Segundo Géradin e Rixie[87], a estabilidade incondicional do método e a falta de erros de amplitude faz com que a energia total do sistema seja conservada durante o cálculo da resposta dinâmica.

Quando temos forças externas atuando sobre o sistema, dizemos que estas forças são *conservativas* se seu trabalho virtual permanece igual a zero durante um ciclo de aplicação destas forças, caso contrário, estas forças são chamadas de *não-conservativas*. Desta forma, considerando-se que as forças externas sejam do tipo não-conservativo, o balanço de energia do sistema pode ser descrito de uma forma geral pela seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -mD + \sum_{s=1}^{n_s} Q_s \{\dot{x}\}_s, \quad (3.93)$$

onde V e T são as energias potencial e cinética, D é a função de dissipação, m representa a ordem da função de dissipação, indicando o modo físico da dissipação (no caso de amortecimento viscoso m é igual a 2), Q_s representa as forças de dissipação generalizadas devidas às forças externas não-conservativas, $\{\dot{x}\}_s$ representa a primeira derivada das coordenadas generalizadas e n_s é o número de graus de liberdade do sistema. No caso de sistemas lineares, as energias potencial e cinética são funções quadráticas, ou seja

$$V = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\}.$$

A função de dissipação para o caso de amortecimento viscoso também é quadrática em termos da primeira derivada das coordenadas generalizadas, ou seja

$$D = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [C] \{\dot{x}\}.$$

⁷Tabela 7.3.1, na página 372.

A componente das forças externas no balanço de energia pode ser expressa como

$$\sum_{s=1}^{n_s} Q_s \dot{x}_s = \{\dot{x}\}^T F(t),$$

de forma que, integrando a expressão 3.93 no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$, nós podemos escrever que

$$[T + V]_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\{\dot{x}\}^T [C] \{\dot{x}\} - \{\dot{x}\}^T F(t) \right) dt. \quad (3.94)$$

Podemos determinar as variações nas energias cinética e potencial ao longo do intervalo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \frac{1}{2} (\{\dot{x}\}_{n+1} - \{\dot{x}\}_n)^T [M] (\{\dot{x}\}_{n+1} + \{\dot{x}\}_n), \text{ e} \\ V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{2} (\{x\}_{n+1} - \{x\}_n)^T [K] (\{x\}_{n+1} + \{x\}_n). \end{aligned}$$

Assumindo que a integração no tempo está sendo feita através do método Newmark com aceleração média constante no intervalo de tempo, ou seja, $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, podemos obter as aproximações para os deslocamentos e as velocidades no final do intervalo de tempo. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\}_{n+1} &= \{\dot{x}\}_n + \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{x}\}_n + \{\ddot{x}\}_{n+1}), \text{ e} \\ \{x\}_{n+1} &= \{x\}_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\{\ddot{x}\}_n + \{\ddot{x}\}_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.95)$$

de onde podemos deduzir as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \{x\}_{n+1} - \{x\}_n &= \frac{\Delta t}{2} (\{\dot{x}\}_n + \{\dot{x}\}_{n+1}), \text{ e} \\ \{\dot{x}\}_{n+1} - \{\dot{x}\}_n &= \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{x}\}_n + \{\ddot{x}\}_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Assim, podemos reescrever as expressões para as variações das energias cinética e potencial. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \frac{\Delta t}{4} (\{\dot{x}\}_{n+1} + \{\dot{x}\}_n)^T [M] (\{\ddot{x}\}_{n+1} + \{\ddot{x}\}_n), \text{ e} \\ V_{n+1} - V_n &= \frac{\Delta t}{4} (\{\dot{x}\}_{n+1} + \{\dot{x}\}_n)^T [K] (\{x\}_{n+1} + \{x\}_n). \end{aligned}$$

Desta forma, a variação da energia total do sistema será dada por

$$[T + V]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{\Delta t}{4} (\{\dot{x}\}_{n+1} + \{\dot{x}\}_n)^T \times \\ [[K] (\{x\}_{n+1} + \{x\}_n) + [M] (\{\ddot{x}\}_{n+1} + \{\ddot{x}\}_n)]$$

e levando em consideração as equações de equilíbrio dinâmico representadas por 3.20, temos então que

$$[T + V]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{1}{2} (\{x\}_{n+1} - \{x\}_n)^T \times \\ (\{F(t)\} + \{F(t + \Delta t)\} - [C] \{\dot{x}\}_n - [C] \{\dot{x}\}_{n+1}) \quad (3.97)$$

Substituindo na equação 3.97 a primeira relação de 3.96, chegamos à formulação final dada por

$$[T + V]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{1}{2} (\{x\}_{n+1} - \{x\}_n)^T (\{F(t)\} + \{F(t + \Delta t)\}) - \\ \frac{\Delta t}{4} (\{\dot{x}\}_n + \{\dot{x}\}_{n+1})^T [C] (\{\dot{x}\}_n + \{\dot{x}\}_{n+1}). \quad (3.98)$$

A partir da observação desta relação, temos que quando aplicamos o método Newmark com aceleração média constante a um sistema conservativo, ou seja, $[C]$ é uma matriz nula e $\{F(t)\} = \{0\}$, a energia total é preservada; e no caso de sistemas não-conservativos, ambos os termos do lado direito da expressão 3.93, a partir das relações de quadratura numéricas, se mostram consistentes com o operador de integração dado pelas expressões 3.95, mostrando que a variação da energia total é igual ao trabalho das forças de dissipação externas. Segundo Géradin e Rixie[87], o cálculo do balanço energético é muito útil quando resolvemos sistemas não-lineares, pois fornece uma medida da estabilidade do método na presença das não-linearidades existentes no sistema.

O Método- α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) Este método possui uma forma elegante para introduzir o amortecimento no método Newmark sem que haja uma degradação da ordem de precisão. Consiste na manutenção das fórmulas 3.91 do esquema Newmark, enquanto que as equações discretas no tempo são modificadas através da determinação dos valores médios das forças externa, de inércia e elástica entre os dois instantes. O método se

utiliza de uma notação para descrever as forças internas do sistema dinâmico, que inclusive será muito útil no desenvolvimento da análise dos sistemas dinâmicos não-lineares. É a seguinte:

$$\{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\} = [K] \{x\} + [C] \{\dot{x}\}, \quad (3.99)$$

onde o vetor $\{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\}$ descreve as forças internas do sistema. Assim, as equações de movimento do sistema podem ter uma forma mais geral, ou seja

$$[M] \{\ddot{x}\}_{n+1} + (1 - \alpha) \{f(\{x\}_{n+1}, \{\dot{x}\}_{n+1})\} + \alpha \{f(\{x\}_n, \{\dot{x}\}_n)\} = (1 - \alpha) \{g(\{x\}_{n+1}, t)\} + \alpha \{g(\{x\}_n, t)\} \quad (3.100)$$

Podemos perceber que se α , denominado *parâmetro de amortecimento*, for igual a zero, o método se reduz ao esquema Newmark. Se os parâmetros forem escolhidos de forma que $\alpha \in [0, \frac{1}{3}]$, $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ e $\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2$, segundo Géradin e Rixen[87], temos como resultado um esquema de segunda-ordem incondicionalmente estável. Semelhante ao esquema Newmark, a solução numérica do método pode ser colocada na seguinte fórmula recursiva:

$$\{z\}_{n+1} = [A(\Delta t)] \{z\}_n + \{g(\Delta t)\}_{n+1}$$

onde $\{z\}_n^T = [\{x\}_n^T \ \{\dot{x}\}_n^T \ \{\ddot{x}\}_n^T]$ é um vetor que descreve o estado do sistema no instante t_n ; $[A(\Delta t)]$ é a *matriz de amplificação do sistema*, de ordem igual a três vezes o número de graus de liberdade do sistema e $\{g(\Delta t)\}_n$ é o vetor de carga externo. O esquema é uma opção lógica ao método Newmark para a obtenção da resposta dinâmica para sistemas não-lineares, quando for necessário controlar o amortecimento numérico durante o processo de integração.

3.4.5 A análise de sistemas dinâmicos não-lineares

Considerações iniciais

Até o presente momento temos estudado as técnicas de solução disponíveis para a obtenção da resposta dinâmica dos sistemas lineares, que são representados pelo sistema de n equações diferenciais de segunda ordem

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\}.$$

Neste sistema $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e rigidez, respectivamente, todas com coeficientes constantes; $\{F(t)\}$ é o vetor das forças externas; $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são os vetores, em termos de coordenadas generalizadas, correspondentes à aceleração, velocidade e deslocamento.

Em um sistema *não-linear*, não-linearidades de origem geométrica ou de material fazem com que os coeficientes das matrizes acima descritas não sejam mais constantes, variando inclusive em função das coordenadas generalizadas. O mesmo, como geralmente ocorre, acontece com o vetor das forças externas que pode depender também dos deslocamentos além do tempo, ou seja $\{F(t)\} = \{F(\{x\}, t)\}$. Assumindo que os coeficientes da matriz de massa não dependem da configuração do sistema e que não existam não-linearidades devidas ao material, o sistema de equações diferenciais que representam as equações de movimento do sistema pode ser expresso de uma forma geral como:

$$[M] \{\ddot{x}\} + \{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\} = \{F(\{x\}, t)\}, \quad (3.101)$$

com as condições iniciais $\{x\}_0$ e $\{\dot{x}\}_0$ conhecidas. O vetor $\{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\}$ representa parte das forças internas do sistema, devidas aos deslocamentos e as velocidades, incluindo tanto as forças elásticas como as forças internas de dissipação. No caso de sistemas lineares, como já vimos anteriormente, este vetor pode ser determinado através da relação 3.99.

De maneira similar para o caso da análise de sistemas lineares, o processo de integração para a obtenção da resposta do sistema não-linear necessita de uma estimativa preliminar do comportamento da solução para as equações de movimento representadas pela relação 3.101. A parte oscilatória da solução pode variar continuamente dependendo do carregamento e/ou das não-linearidades existentes no sistema. Sempre que a resposta do sistema for conduzida pelos termos de alta frequência, temos um problema de propagação de ondas. Se os termos de baixa frequência forem dominantes temos um problema clássico de dinâmica estrutural.

A análise não-linear elástica de estruturas nos fornece subsídios para a implementação de um método de solução para sistemas dinâmicos não-lineares. Como coloca Arcaro[89], este tipo de análise é baseada no princípio da mínima energia potencial, pois uma vez tendo determinado a energia potencial total como função dos deslocamentos nodais da estrutura, o problema a ser resolvido consiste em encontrar as suas configurações de equilíbrio. Como

as configurações estáveis da estrutura são representadas pelos pontos de mínimo local da função energia potencia total, a obtenção destas configurações torna-se um problema de *programação não-linear*. Mesmo em situações em que não existe uma função energia potencial total, ainda assim podemos definir alguma função de modo que seus pontos de mínimo local representem configurações de equilíbrio da estrutura. Normalmente, para este fim são utilizadas as equações de equilíbrio.

Para podermos compreender os métodos utilizados em programação não-linear irrestrita, alguns conceitos fundamentais são de extrema importância para o desenvolvimento da análise não-linear de estruturas. É o que faremos a seguir.

Conceitos fundamentais em programação não-linear irrestrita

Consideremos uma função não-linear de classe C^2 definida por $f(\{x\}) : R^n \rightarrow R$. Seja $\{x\}$ um ponto pertencente a uma reta que passa por um ponto $\{x\}_0$ e que tem direção dada pelo vetor $\{d\}$, ou seja $\{x\} = \{x\}_0 + \alpha \{d\}$. Podemos observar que para todos pontos $\{x\}$ dados por esta expressão, a função $f(\{x\})$ torna-se uma expressão de apenas uma variável, ou seja, $f(\{x\}) = f(\alpha)$. A derivada primeira de $f(\alpha)$ pode ser obtida através da utilização da regra da cadeia, o que nos fornece:

$$\frac{df(\{x\})}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\{x\})}{\partial \{x\}_i} \frac{d\{x\}_i}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\{x\})}{\partial \{x\}_i} d_i = \nabla f(\{x\})^T \times d, \quad (3.102)$$

onde $\nabla f(\{x\})$ é o *vetor gradiente*. Aplicando novamente a regra da cadeia na expressão 3.102, obtemos a derivada segunda de $f(\alpha)$, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(\{x\})}{d\alpha^2} &= \frac{d \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \{d\}_i \right)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\{x\})}{\partial \{x\}_i \partial \{x\}_j} \{d\}_i \{d\}_j = \\ & \{d\}^T [S(\{x\})] \{d\}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde a matriz $[S(\{x\})]$ é a *matriz hessiana*. Expandindo $f(\alpha)$ em série de Taylor e utilizando as expressões para as derivadas primeira e segunda, temos que

$$\begin{aligned} f(\{x\}) &= f(\{x\}_0 + \alpha \{d\}) = f(\{x\}_0) + \alpha \nabla f(\{x\}_0) \times \{d\} + \\ & \frac{\alpha^2}{2!} \{d\}^T [S(x_0)] \{d\} + \dots, \end{aligned}$$

que pode ser colocada da seguinte forma:

$$f(\{x\}_0 + \alpha \{d\}) - f(\{x\}_0) = \alpha \nabla f(\{x\}_0)^T \times \{d\} + \frac{\alpha^2}{2!} \{d\}^T [S(\{x\}_0)] \{d\} + \dots \quad (3.104)$$

Restringindo α a valores somente positivos, $\alpha \geq 0$, temos que o sentido da direção definida por um vetor estará implícito como sendo o sentido deste vetor. Assim, para pequenos valores de α , existe um intervalo onde o sinal do segundo termo da equação 3.104 é dado sinal do primeiro termo. Supondo que o sinal deste termo seja negativo, ou seja,

$$\nabla f(\{x\}_0)^T \times \{d\} < 0,$$

existe um intervalo para pequenos valores de α , onde $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ tal que $f(\{x\}_0 + \alpha \{d\}) < f(\{x\}_0)$, ou seja, o valor da função decresce. Neste caso a direção dada pelo vetor $\{d\}$ é uma direção de descida.

Suponhamos agora que o ponto $\{x\}_0$ seja um ponto interior e que $\nabla f(\{x\}_0) = 0$ e que a matriz hessiana seja *definida positiva*. Desta forma, o ponto $\{x\}_0$ é um ponto de mínimo local, pois expandindo $f(\alpha)$ em série de Taylor em uma direção d qualquer em torno de $\{x\}_0$, temos que

$$f(\{x\}_0 + \alpha d) = f(\{x\}_0) + \alpha \nabla f(\{x\}_0)^T \times d + \frac{\alpha^2}{2!} d^T [S(\{x\}_0)] d + O(\alpha^3). \quad (3.105)$$

Mas o gradiente no ponto $\{x\}_0$ é um vetor nulo. Desta forma a expressão 3.105 pode ser reescrita como

$$f(\{x\}_0 + \alpha d) - f(\{x\}_0) = \frac{\alpha^2}{2!} \{d\}^T [S(\{x\}_0)] \{d\} + O(\alpha^3).$$

Podemos observar que para pequenos valores de α e dado que $[S(\{x\}_0)]$ é uma matriz definida positiva, o sinal do segundo membro da equação acima é positivo, significando que o ponto $\{x\}_0$ é um ponto de mínimo local da função $f(\{x\})$.

Com o que vimos anteriormente, dada uma matriz $[A]$ definida positiva qualquer, podemos construir um direção de descida $\{d\}$ em um determinado ponto $\{x\}_0$ pela deflexão do vetor gradiente da seguinte maneira:

$$\{d\} = -[A] \times \nabla f(\{x\}_0), \quad (3.106)$$

pois $\nabla f(\{x\}_0) \times d = -\nabla f(\{x\}_0)^T [A] \nabla f(\{x\}_0) < 0$.

Em análise não-linear de estruturas os pontos $\{x\}$ representam os deslocamentos nodais; a função $f(\{x\})$ representa a energia potencial total; o vetor $\nabla f(\{x\})$ representa o vetor resíduo, no qual cada componente representa o desequilíbrio entre as forças que agem em um dado nó e a matriz hessiana representa a matriz de rigidez.

Os métodos básicos de análise numérica disponíveis na literatura, como os encontrados no livro de Luenberger[90], diferenciam-se entre si pela escolha da matriz definida positiva empregada. Se for escolhida a matriz identidade, $[I]$, temos o *método do gradiente*. Estes métodos, como bem coloca Arcaro [89], são concebidos a partir de uma estratégia básica: a partir de um ponto qualquer pertencente ao domínio da função, caminhamos numa dada direção e sentido ($\{d\}$), determinada a partir de uma expressão semelhante a 3.106, de forma que o valor da função decresça. De acordo com uma *regra fixa* movemos nesta direção (encontramos um valor de α maior que 1) até um ponto de mínimo da função relativo a esta direção. Este ponto de mínimo relativo é tomado como um novo ponto inicial e repetimos o procedimento até um ponto de mínimo local da função seja alcançado. Chamamos de *busca unidimensional* ao procedimento utilizado para caminhar o máximo possível na direção escolhida. Encontramos o mínimo valor da função nesta direção e sentido, obtendo assim um novo ponto de partida. Repetir este processo até que um ponto de mínimo local seja alcançado.

Segundo Arcaro[89], existem diversos métodos que podem ser utilizados na busca unidimensional, mas só dois merecem destaque: o *método da interpolação cúbica*, cuja ordem de convergência é 2.0; e o *método da falsa posição*, cuja ordem de convergência é aproximadamente igual a 1.618.

No método de interpolação cúbica, primeiramente, encontramos um intervalo (α_1, α_2) de forma que o ponto α^* esteja contido neste intervalo. Posteriormente, interpolamos uma função cúbica em α utilizando os pontos limites do intervalo, utilizando os valores de α_1 , $f(\alpha_1)$, $f'(\alpha_1)$ e α_2 , $f(\alpha_2)$, $f'(\alpha_2)$. Calculamos α como sendo o *ponto de mínimo da função cúbica*. Redefinimos o intervalo com os valores de α e de $f'(\alpha)$. Prosseguimos deste modo até que uma certa exatidão seja alcançada. O último valor encontrado para α é tomado como sendo α^* .

No método da falsa posição, encontramos um primeiro intervalo (α_1, α_2) , utilizando somente os valores de $f'(\alpha)$, de forma que α^* esteja contido neste intervalo. Interpolamos uma reta para a função $f'(\alpha)$ utilizando os pontos limites do intervalo e com a ajuda dos valores de α_1 , $f'(\alpha_1)$ e α_2 , $f'(\alpha_2)$.

Calculamos α como sendo a raiz desta reta. Redefinimos o intervalo com a ajuda de α e do sinal de $f'(\alpha)$. Prosseguimos deste modo até que uma certa exatidão seja alcançada. O último valor encontrado para α é tomado como sendo α^* .

A principal diferença entre os dois métodos reside no fato de que o método da falsa posição não necessitar do cálculo do valor de $f(\alpha)$, o que significa que não precisamos calcular o valor da energia potencial total. Segundo Arcaro[89], nas situações onde não existir a função energia potencial total, ou ela não estiver disponível, estas podem ser tratadas com a estratégia dos mínimos quadrados, ou seja, minimizamos a norma euclidiana do vetor resíduo.

A seguir apresentaremos os principais métodos de minimização utilizados na análise não-linear de estruturas e que podem ser utilizados na análise dinâmica de estruturas.

Método do Gradiente Neste método a matriz $[A]$ é representada pela matriz identidade $[I]$. Assim, a direção de busca é dada pela direção oposta ao vetor gradiente. Segundo Arcaro[89], apesar desta direção ser a de máximo decréscimo da função, a sua utilidade está limitada para valores de $\{x\}$ longe da solução.

Método de Newton Fazendo $\{x\} = \{x\}_0 + \alpha\{d\}$, podemos escrever que

$$f(\{x\}) \approx f(\{x\}_0) + \nabla f(\{x\}_0)^T (\{x\} - \{x\}_0) + \frac{1}{2!} (\{x\} - \{x\}_0)^T [S(\{x\}_0)] (\{x\} - \{x\}_0), \quad (3.107)$$

que é a expansão em série de Taylor para $f(\alpha)$ em torno do ponto $\{x\}_0$, com $\alpha = 1$.

Tomando o segundo membro da expressão acima como uma aproximação aceitável para $f(\{x\})$, então o ponto de mínimo desta aproximação pode ser usado como uma aproximação para o ponto de mínimo de $f(\{x\})$, ou seja

$$\{x_1\} = \{x\}_0 - [S(\{x\}_0)]^{-1} \nabla f(\{x\}_0).$$

Observamos que se $[S(\{x\}_0)]$ for definida positiva, o ponto $\{x\}_1$ é um ponto de mínimo para a aproximação de $f(\{x\})$. Agora o ponto $\{x\}_1$ é tomado

como um novo ponto $\{x\}_0$ e repetindo o procedimento chegaremos a uma aproximação cada vez melhor para o ponto de mínimo de $f(\{x\})$.

Podemos observar que o ponto de mínimo pode ser escrito como $\{x\}_1 = \{x\}_0 + \alpha \{d\}$, com $\alpha = 1$ e a direção de busca dada pela resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$[S(\{x\}_0)] \times \{d\} = -\nabla f(\{x\}_0), \quad (3.108)$$

similar ao sistema representado pela expressão 3.106.

Caso a matriz $[S(\{x\}_0)]$ não seja definida positiva, o que não garantiria que a direção de busca obtida pela resolução do sistema linear representado por 3.108 seja uma direção de descida. Para resolver este problema, podemos adicionar uma matriz diagonal à matriz $[S(\{x\}_0)]$ de forma a garantir que a matriz resultante seja definida positiva⁸. Assim, a direção de busca é determinada a partir da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$([S(\{x\}_0)] + [E]) \times \{d\} = -\nabla f(\{x\}_0).$$

Mesmo tendo assegurado uma direção de descida, nada garante que um passo α de valor unitário diminua o valor da função. Para resolver este problema, basta utilizar uma rotina de busca unidimensional na direção de descida.

O método de Newton modificado É um método padrão para a aproximação do método de Newton. Neste método não é feito o cálculo da matriz hessiana em cada passo durante o processo de descida. Fazemos

$$\{x\}_{k+1} = \{x\}_k - \alpha_k [S(\{x\}_0)]^{-1} \nabla f(\{x\}_k),$$

ou seja, a matriz hessiana no ponto inicial $\{x\}_0$ é invertida e utilizada ao longo de todo o procedimento. A eficiência deste procedimento é governada pela rapidez da mudança da matriz hessiana, ou seja, pela magnitude da terceira derivada de $f(\{x\})$.

⁸ A matriz diagonal deve ser determinada de forma a garantir não somente que a matriz resultante seja definida positiva, como também que sua decomposição por Choleski seja suficientemente estável.

Os métodos Quasi-Newton A idéia fundamental por trás da maioria dos métodos quasi-Newton é tentar construir a matriz inversa da hessiana, ou uma aproximação, a partir das informações reunidas durante o processo de descida. A aproximação construída em um passo é então utilizada para definir a próxima direção de descida como no método de Newton modificado. O ideal seria que as aproximações convergissem para a inversa da matriz hessiana no ponto de solução, e os métodos se comportam de alguma forma como o método de Newton. A construção da inversa da matriz hessiana é feita a partir de informações sobre o gradiente da função obtidas em vários pontos.

Seja $f(\{x\})$ uma função que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Para dois pontos $\{x\}_{k+1}$ e $\{x\}_k$, definimos os vetores $\{g\}_{k+1} = \nabla f(\{x\}_{k+1})$, $\{g\}_k = \nabla f(\{x\}_k)$ e $\{p\}_k = \{x\}_{k+1} - \{x\}_k$. Assim, temos que

$$\{g\}_{k+1} - \{g\}_k \cong [S(\{x\}_k + \theta \{p\}_k)] \times \{p\}_k,$$

para algum θ , $0 \leq \theta \leq 1$. Se a matriz hessiana $[S(\{x\})]$ for constante, então temos que

$$\{q\}_k \triangleq \{g\}_{k+1} - \{g\}_k = [S] \times \{p\}_k, \quad (3.109)$$

e podemos ver que a determinação do gradiente em dois pontos nos fornece informações sobre a matriz hessiana $[S]$. Se n direções linearmente independentes $\{p\}_0, \{p\}_1, \{p\}_2, \dots, \{p\}_{n-1}$ e correspondentes $\{q\}_k$ são conhecidos, então a matriz $[S]$ é unicamente determinada. De fato, sejam $[P]$ e $[Q]$ duas matrizes de ordem $n \times n$, cujas colunas são formadas pelos vetores p_k e q_k , respectivamente, temos então que

$$[S] = [Q][P]^{-1}.$$

Construímos sucessivas aproximações $[F]_k$ para a inversa da hessiana baseada nas informações obtidas dos primeiros k passos do processo de descida de forma que, se a matriz hessiana for constante, a aproximação será consistente com 3.109 para estes passos. Assim, se a matriz hessiana for constante, $[F]_{k+1}$ irá satisfazer a seguinte relação:

$$[F]_{k+1} \times \{q\}_i = \{p\}_i, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (3.110)$$

Assim, depois de n passos linearmente independentes teríamos então que $[F]_n = [S]$.

Para qualquer $k < n$, o problema de se construir uma matriz $[F]_k$ adequada, que geralmente servirá como uma aproximação para a matriz hessiana e que caso esta seja constante satisfará a relação 3.110, admite infinitas soluções, pois existem mais graus de liberdade do que restrições. Assim, podemos ter vários métodos que permitam a construção da aproximação da inversa da hessiana. No livro de Luenberger[90] e no texto de Arcaro[89], podemos encontrar alguns métodos que podem ser utilizados.

O método Newton-Raphson O método de Newton-Raphson não deve ser confundido com o método de Newton. No método de Newton-Raphson a abordagem é a resolução direta do sistema de equações não-lineares dadas pelas equações de equilíbrio. Este sistema de equações lineares que representa as equações de equilíbrio é dado por:

$$r(\{x\}) = \{0\}, \quad (3.111)$$

cuja solução denominaremos de $\{x\}^*$ e onde cada componente do vetor $r_i(\{x\})$ é uma função não-linear. Uma aproximação para cada função $r_i(\{x\})$ pode ser obtida pela expansão em série de Taylor em torno de um ponto $\{x\}_0$, ou seja

$$r_i(\{x\}) \approx r_i(\{x\}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i(\{x\})}{\partial \{x\}_j} (\{x\}_j - \{x\}_{0,j}). \quad (3.112)$$

Definindo uma matriz $[J(\{x\})]$ de modo que $J_{ij} = \partial r_i(\{x\})/\partial \{x\}_j$, podemos reescrever a expressão 3.112 como

$$r(\{x\}) \approx r(\{x\}_0) + [J(\{x\}_0)] (\{x\} - \{x\}_0), \quad (3.113)$$

onde a matriz $[J(\{x\})]$ é conhecida como *matriz jacobiana*.

De forma similar ao método de Newton, o ponto que satisfaz o problema aproximado dado por

$$r(\{x\}_0) + [J(\{x\}_0)] (\{x\} - \{x\}_0) = \{0\}$$

é tomado como solução aproximada aceitável para o problema exato. Desta forma, a solução aproximada pode ser escrita como

$$\{x\}_1 = \{x\}_0 - [S(\{x\}_0)]^{-1} r(\{x\}_0). \quad (3.114)$$

O ponto $\{x\}_1$ pode ser tomado como novo ponto de partida $\{x\}_0$, e repetindo o processo é provável que possamos obter uma aproximação cada vez melhor para $\{x\}^*$.

A utilização do método Newmark para sistemas não-lineares com procedimento de minimização

Faremos uma apresentação de um esquema para a obtenção da resposta dinâmicas de sistemas não-lineares, utilizando um esquema implícito, no caso o método Newmark, conforme desenvolvido por G eradin e Rixie [87] em seu livro⁹. Diferentemente da análise dos sistemas lineares, quando aplicamos um esquema implícito de integração, os deslocamentos, as velocidades e as acelerações envolvidas nas equações de equilíbrio não podem ser mais considerados independentes, já que estão relacionados entre si através do operador de integração. Desta forma em cada passo-de-tempo, as equações de equilíbrio são reescritas em termos dos deslocamentos $\{x(t)\}$, ou seja

$$r(\{x(t)\}) = [M] \{\ddot{x}(t)\} + f(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}) - F(\{x(t)\}, t) = \{0\}, \quad (3.115)$$

onde $r(\{x(t)\})$ é um vetor que representa o disequil brio entre as forças externas e as forças internas atuantes no sistema, e porisso, como já vimos anteriormente, é denominado *vetor resíduo* e a equação 3.115 de *equação residual*. Invertendo as relações de integração do método Newmark da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}\}_{n+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\{x\}_{n+1} - \{x\}_{n+1}^*), \text{ e} \\ \{\dot{x}\}_{n+1} &= \{\dot{x}\}_n + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\{x\}_{n+1} - \{x\}_{n+1}^*), \end{aligned} \quad (3.116)$$

onde as aproximações das velocidades e deslocamentos são obtidas a partir das fórmulas 3.91 do método Newmark, e fazendo $\{x\}_{n+1} = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\}_{n+1}^* &= \{\dot{x}\}_n + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{x}\}_n, \text{ e} \\ \{x\}_{n+1}^* &= \{x\}_n + \Delta t \{\dot{x}\}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_n. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Substituindo as equações 3.116 na equação 3.115, a equação residual pode ser expressa s mente em termos dos deslocamentos $\{x\}_{n+1}$, ou seja

$$r(\{x\}_{n+1}) = 0. \quad (3.118)$$

⁹Uma formulação utilizando um esquema explícito, no caso o método da diferença central, pode ser encontrada no livro editado por Belytschko e Hughes, *Computational Methods for Transiente Analysis*, North-Holland, 1983.

Temos que a expressão 3.118 representa um sistema de equações não-lineares semelhante à equação 3.111. Como já vimos no método de Newton-Raphson, para resolvermos este tipo de sistema podemos utilizar técnicas de linearização. Se chamarmos de $\{x\}_{n+1}^k$ a um valor aproximado de $\{x\}_{n+1}$, obtido a partir de um processo iterativo no passo k , temos que no entorno deste valor a equação residual pode ser substituída com precisão suficiente pela expansão em série de Taylor em torno de um ponto $\{x\}_{n+1}$. Assim, uma aproximação para $r(\{x\}_{n+1}^k)$ pode ser obtida através de

$$r(\{x\}_{n+1}^{k+1}) = r(\{x\}_{n+1}^k) + [J(\{x\}_{n+1}^k)] (\{x\}_{n+1}^{k+1} - \{x\}_{n+1}^k), \quad (3.119)$$

onde a matriz $[J(\{x\}_{n+1}^k)]$ é a matriz *jacobiana*, que é dada por:

$$[J(\{x\}_{n+1}^k)] = \left[\frac{\partial r}{\partial \{x\}} \right]_{\{x\}_{n+1}^k}.$$

Neste caso, fórmula geral para obtenção da matriz jacobiana será dada por

$$[J(\{x\})] = \left[\frac{\partial f(\{x\}, \{\dot{x}\})}{\partial \{x\}} \right] + \left[\frac{\partial f(\{x\}, \{\dot{x}\})}{\partial \dot{x}} \right] \left[\frac{\partial \{\dot{x}\}}{\partial \{x\}} \right] + [M] \left[\frac{\partial \{\ddot{x}\}}{\partial \{x\}} \right] - \left[\frac{\partial F(\{x\}, t)}{\partial \{x\}} \right], \quad (3.120)$$

onde $\left[\frac{\partial f(\{x\}, \{\dot{x}\})}{\partial \{x\}} \right]$ é a variação das forças internas em relação aos deslocamentos e portanto representa a *matriz de rigidez tangente* $[K]^t$; $\left[\frac{\partial f(\{x\}, \{\dot{x}\})}{\partial \dot{x}} \right]$ é a variação das forças internas em relação às velocidades e portanto representa a *matriz de amortecimento tangente* $[C]^t$; e $\left[\frac{\partial F(\{x\}, t)}{\partial \{x\}} \right]$ descreve a dependência das forças externas em relação aos deslocamentos do sistema. Diferentemente dos dois primeiros termos, o termo relacionado às forças externas é geralmente não simétrico e é freqüentemente omitido para preservar a simetria da matriz jacobiana. Utilizando as definições acima apresentadas e considerando as relações de integração dadas por 3.116, temos que

$$\left[\frac{\partial \{\ddot{x}\}}{\partial \{x\}} \right] = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [I] \text{ e } \left[\frac{\partial \{\dot{x}\}}{\partial \{x\}} \right] = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [I],$$

o que nos permite obter a forma final da matriz jacobiana, dada por

$$[J(\{x\})] = [K]^t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} [C]^t + \frac{1}{\beta\Delta t^2} [M]. \quad (3.121)$$

Como podemos observar, o procedimento desenvolvido por G eradin e Rixie consiste basicamente em resolver o sistema de equa es não-lineares representado por 3.118, através de um processo de otimiza o iterativo, no caso foi utilizado o método de Newton-Raphson.

Assim, em uma dada intera o k dentro do passo-de-tempo $n + 1$, as aproxima es dos deslocamentos, das velocidades e das acelera es são corrigidas através de fatores de corre o ($\Delta\{x\}^k$, $\Delta\{\dot{x}\}^k$, $\Delta\{\ddot{x}\}^k$), da seguinte forma: inicialmente, obtemos a corre o para os deslocamentos através da resolu o das equa es linearizadas dadas por 3.122, semelhante   equa o 3.114, onde $\Delta\{x\}$ representa na realidade a dire o de descida no processo de minimiza o. Assim, temos que

$$[J(\{x\})] \Delta\{x\}^k = -r(\{x\}_{n+1}^k). \quad (3.122)$$

Posteriormente, obtemos as corre es para as velocidades e acelera es através das fórmulas de integra o dadas pelas expressões 3.116, ou seja

$$\begin{aligned} \Delta\{\ddot{x}\}^k &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\{x\}^k, \text{ e} \\ \Delta\{\dot{x}\}^k &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\{x\}^k. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Os valores das aproxima es corrigidas serão dadas por:

$$\begin{aligned} \{x\}_{n+1}^{k+1} &= \{x\}_{n+1}^k + \Delta\{x\}^k, \\ \{\dot{x}\}_{n+1}^{k+1} &= \{\dot{x}\}_{n+1}^k + \Delta\{\dot{x}\}^k, \text{ e} \\ \{\ddot{x}\}_{n+1}^{k+1} &= \{\ddot{x}\}_{n+1}^k + \Delta\{\ddot{x}\}^k. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Entramos com estes valores na equa o residual 3.115 e determinamos o vetor resíduo. Desta forma, dentro do passo-de-tempo este processo se repetir , dentro de um processo iterativo, que s o terminará quando uma *norma* aplicada ao vetor resíduo atingir um valor residual abaixo de uma precisão pré-determinada, ou seja, quando

$$\|r(\{x\}_{n+1}^k)\| < \varepsilon. \quad (3.125)$$

O desenvolvimento deste esquema de integração pode ser resumido nas seguintes etapas:

1. Os dados necessários para o desenvolvimento de integração consistem na matriz de massa do sistema $[M]$, no vetor das forças internas $f(\{x\}, \{\dot{x}\})$, que normalmente será uma função das matrizes de amortecimento $[C(\{\dot{x}\})]$ e/ou da matriz de rigidez $[K(\{x\})]$, que poderão ter coeficientes não constantes; do vetor de forças externas $F(\{x\}, t)$ e dos deslocamentos iniciais $\{x\}_0$ e das velocidades iniciais $\{\dot{x}\}_0$.

2. Calculamos as acelerações iniciais através da seguintes expressão:

$$\{\ddot{x}\}_0 = [M]^{-1} (F(\{x\}_0, t_0) - [C(\{\dot{x}\}_0)] \{\dot{x}\}_0 - [K(\{x\}_0)] \{x\}_0).$$

3. Realizamos o incremento de tempo, ou seja $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.
4. Através das aproximações do método Newmark 3.91 determinamos as previsões para os deslocamentos $\{x\}_{n+1}$, velocidades $\{\dot{x}\}_{n+1}$ e acelerações $\{\ddot{x}\}_{n+1}$. Gêradin e Rixie recomendam a utilização das aproximações dadas por 3.116, fazendo $\{\ddot{x}\}_{n+1} = 0$. Segundo os autores, a experiência tem mostrado que esta abordagem leva a um procedimento de interação razoavelmente estável.

5. Neste ponto é feita uma avaliação do vetor resíduo, ou seja

$$r(\{x\}_{n+1}) = [M] \{\ddot{x}\}_{n+1} + [C(\{\dot{x}\}_{n+1})] \{\dot{x}\}_{n+1} + [K(\{x\}_{n+1})] \{x\}_{n+1} - F(\{x\}_{n+1}, t_{n+1}).$$

6. Verificamos a convergência do vetor resíduo através da inequação 3.125. Se for verdadeira, as aproximações não precisam de serem corrigidas e correspondem aos valores para o passo de tempo t_{n+1} , e voltamos a etapa 3. Caso contrário, as aproximações precisam ser corrigidas, o que será feito através da resolução das equações linearizadas representadas por 3.122e, posteriormente, calculando as correções e determinando as novas aproximações utilizando as expressões 3.123 e 3.124. Voltamos à etapa 5 e fazemos uma nova avaliação do vetor resíduo. Este processo se repetirá até atingirmos a convergência.

Como bem colocam G eradin e Rixie[87], como o método de Newton-Raphson é afetado pelo raio de convergência no entorno da solução, a convergência do processo iterativo s omente estará assegurada perto da solução de 3.118. Desta forma, no caso de sistemas dinâmicos não-lineares, o passo-de-tempo não s omente governa a precisão do processo de integração, como também a estabilidade do processo iterativo. Assim, a escolha de um passo-de-tempo adequado é fundamental.

Uma desvantagem deste esquema é que o conjunto de equações lineares para o cálculo dos termos relativos às correções necessita da determinação da matriz jacobiana. Como esta matriz varia conforme o estado do sistema, ela deverá ser recalculada em todos passos do processo iterativo, contribuindo muito para o aumento do esforço computacional necessário no desenvolvimento do processo de integração.

Mas como já vimos anteriormente, existem outros métodos de minimização que podem ser utilizados no lugar do método de Newton-Raphson, como os métodos quasi-Newton, utilizando um procedimento de busca unidimensional, que poderiam dar uma maior eficiência ao processo de integração proposto por G eradin e Rixie.

Capítulo 4

O modelo dinâmico da interação entre via e veículo desenvolvido

4.1 Considerações iniciais

No capítulo anterior apresentamos uma revisão sobre a modelagem dinâmica da via férrea, com uma descrição dos modelos existentes, suas aplicações e as técnicas de solução disponíveis. Baseado nesta revisão, o nosso objetivo é desenvolver um modelo dinâmico da interação entre via e veículo ferroviário que permita a determinação da força atuante no contato entre a roda e o trilho devido a irregularidades existentes na via ou na roda, como corrugações, “plano-na-roda”, a falta de dormentes na via e dormentes laqueados.

Este modelo dinâmico deverá levar em consideração as principais não-linearidades existentes na interação entre a via e veículo ferroviários, e portanto deverá possuir solução no *domínio do tempo*. Para tanto, será utilizada uma abordagem que permite a obtenção desta solução a partir de uma metodologia desenvolvida para a análise de estruturas não-lineares, baseada na minimização do resíduo resultante do desequilíbrio nodal existente na estrutura formada pela via e o veículo.

Como já vimos anteriormente, os problemas relacionados aos componentes da via quando da atuação das cargas dinâmicas a altas frequências (acima de 20 Hertz) são a fratura por fadiga, principalmente na flexão devida às cargas quasi-estáticas das rodas, amplificadas por impactos devidos à

irregularidades da roda e do trilho; fraturas em dormentes de concreto (na área de apoio do trilho, devido à excitação dinâmica). No nosso caso, onde o interesse está centrado na determinação da força de contato entre a roda e o trilho, as frequências que nos interessam estão acima de 500 Hertz, chegando até o limite de 2500 Hertz. Nesta faixa de frequências, as forças são transmitidas, de um lado, através da inércia da roda para o eixo, truque e veículo, e por outro lado através da via para o solo e a estrutura da via. Estas forças estão principalmente na *direção vertical* e o contato pode ser considerado como sendo do tipo *normal*. Para o problema do contato normal, as hipóteses da teoria do contato Hertziano são válidas para a maioria das situações, de forma que uma mola de contato *não-linearizada* pode ser introduzida. Na prática, existem outras não-linearidades envolvidas no contato entre roda e trilho, onde a roda pode perder contato com o trilho; o trilho pode se levantar em relação aos dormentes e estes também podem se levantar em relação ao lastro em algumas situações.

Em relação à modelagem da excitação e do contato entre roda e trilho, o modelo de excitação mais realista é o que considera a excitação vertical que surge do contato entre a roda e o trilho devida a uma roda rolando sobre as irregularidades da via ou sobre a própria superfície de rolamento da roda. Para esta faixa de frequência, o modelo de via deverá ter uma estrutura de *apoio discreto*.

As fixações no caso de vibrações verticais podem ser modeladas como sendo conjuntos mola-amortecedor em paralelo. Os dormentes são representados por massas aglomeradas, conectadas ao trilho e ao lastro através de sistemas mola-amortecedores, representando estes subsistemas. Para dar característica de via com comprimento *infinito*, o último elemento da viga será ligado ao primeiro elemento, através de um elemento formado pelo segundo nó do último elemento e o primeiro nó do primeiro elemento, formando um trecho "circular", perceptível somente pelo programa computacional.

Como já vimos anteriormente, o lastro sofre deflexões de uma forma altamente não-linear sob carregamento e a dissipação de energia ocorre devido à fricção seca e a partir da propagação em onda através do subleito, mas apesar disto, podemos utilizar um modelo simples de dois parâmetros (mola mais amortecedor) na direção vertical.

O modelo de via, para ser realista, necessita de um comprimento correspondente a um trecho de via férrea com número de dormentes variando de 20 a 30 dormentes, o que acaba acarretando em um número grande de graus de liberdade. Desta forma, utilizaremos um *método aproximado* ou *direto*

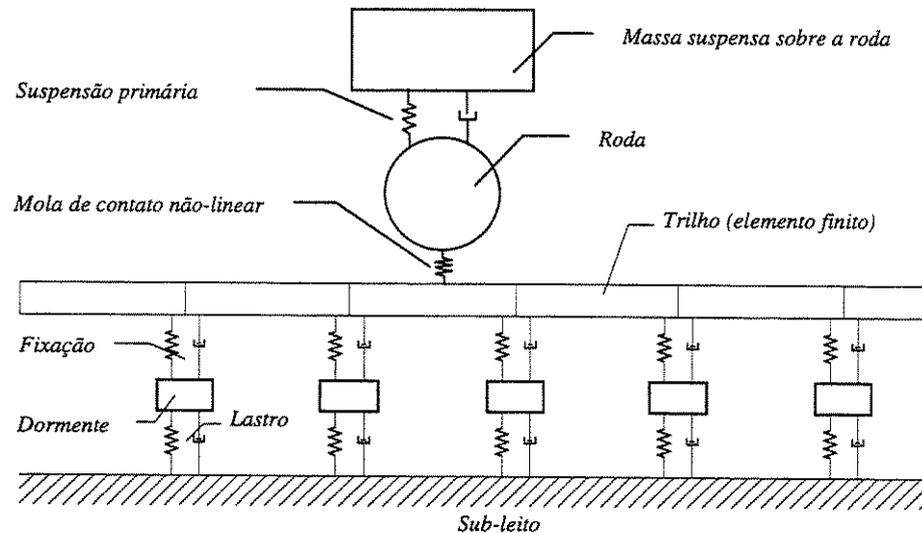


Figura 4.1: Modelo da interação dinâmica entre via e veículo desenvolvido

para a obtenção da resposta dinâmica. No nosso caso, utilizaremos o *método dos elementos finitos*.

Nesta faixa de frequência, como bem colocam Knothe e Grassie[5], somente a inércia da roda tem influência, pois a suspensão primária isola todas as frequências acima de 20 Hertz. Assim, o modelo de veículo consiste em uma roda acoplada através da suspensão primária a uma massa não-suspensa, que teria um peso igual ao da carga de roda. O modelo da interação dinâmica entre via e veículo proposto pode ser visualizado na figura 4.1.

A seguir apresentaremos a descrição do modelo dinâmico da interação entre via e veículo ferroviário desenvolvido; com a descrição de seus componentes; a técnica de solução utilizada e sua implementação computacional. Inicialmente, apresentaremos o modelo de via desenvolvido, o modelo de veículo e posterior acoplamento entre os dois modelos.

4.2 O modelo de via férrea

4.2.1 O modelo de trilho

Para os trilhos o modelo mais utilizado é de uma viga Euler-Bernoulli, que oferece boas respostas para excitações verticais dinâmicas com frequências até 500 Hertz. Se somente as vibrações verticais e longitudinais são de interesse, o trilho pode ser modelado como uma viga de Timoshenko para frequências de até 2500 Hertz, que é o limite da faixa de frequência que nos interessa.

Os elementos finitos de um viga de Euler-Bernoulli possuem dois graus de liberdade por nó, enquanto que os elementos finitos de viga de Timoshenko possuem quatro graus de liberdade por nó, pois este modelo leva em consideração a inércia de rotação da viga e as deformações devidas ao cisalhamento. O problema reside exatamente neste acréscimo do número de graus de liberdade, pois as matrizes do elemento finito passam de 16 elementos para 64 elementos, ou seja, um aumento de quatro vezes. Este fato faz com que o esforço computacional aumente de forma significativa.

Para tentar resolver este problema, encontramos na literatura trabalhos, como os de Nickell e Secor[91] e Davis et al.[92], que apresentam uma formulação de um elemento finito de viga de Timoshenko mais simples e que podia ser implementado sem alterar muito as características de resposta dinâmica do trilho. Este elemento finito de viga de Timoshenko possui quatro graus de liberdade ao invés dos oito graus do elemento tradicional. Entretanto, como este elemento finito foi obtido a partir de uma teoria de viga de Timoshenko aproximada, desenvolvida para eliminar o acoplamento entre a deformação transversal devida ao cisalhamento e a inércia de rotação, só pode ser utilizado quando a deformação devida ao cisalhamento for moderada comparada com a deformação devida à flexão.

O artigo de Knothe e Grassie[5], bem como outros trabalhos onde foram desenvolvidos modelos de via, como o de Dong e Dukkupati[45], colocam que a inércia de rotação do trilho e a deformação devida ao cisalhamento possuem uma influência significativa nesta faixa de frequência e, portanto, aconselham a utilização do modelo de viga de Timoshenko.

Para escolher qual o tipo de modelo mais adequado resolvemos implementar os três tipos de modelos e realizar uma análise comparativa que permitisse uma escolha. A seguir, apresentamos a formulação para os três tipos de elementos finitos.

O elemento finito de viga Euler-Bernoulli

Vimos que um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade pode ser aproximado por um sistema com um número finito de graus de liberdade. Desta forma, a função que fornece os deslocamentos no sistema contínuo pode ser aproximada por uma expressão da seguinte forma:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) v_i(t), \quad (4.1)$$

onde cada função $\psi_i(x)$ descreve a forma defletida de toda estrutura. Na modelagem por elementos finitos estas funções representam as formas de deflexão ao longo de uma parte da estrutura (o elemento finito). Estes elementos são conectados entre de si para formar a totalidade do sistema estrutural. As conexões são feitas em pontos chamados de *nós* e as compatibilidades dos deslocamentos são impostas nestes nós.

A formulação apresentada a seguir foi desenvolvida por Graig em seu livro[81]. Consideremos um elemento de viga uniforme de comprimento l , com densidade ρ , módulo de elasticidade E , área de seção transversal A e momento de inércia I . Sejam as coordenadas generalizadas para o movimento transversal os deslocamentos e os giros nas extremidades do elemento, numerados na forma mostrada na figura 4.2.

Temos que a equação 4.1 para esta situação é dada por

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) v_i(t), \quad (4.2)$$

onde as funções $\psi_i(x)$ satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 1, & \psi_1'(0) &= \psi_1(l) = \psi_1'(l) = 0, \\ \psi_2'(0) &= 1, & \psi_2(0) &= \psi_2(l) = \psi_2'(l) = 0, \\ \psi_3(l) &= 1, & \psi_3(0) &= \psi_3'(0) = \psi_3'(l) = 0, \\ \psi_4'(l) &= 1, & \psi_4(0) &= \psi_4'(0) = \psi_4(l) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considerando o elemento de viga descrito na figura 4.2 como sendo carregado estaticamente por forças de cisalhamento e momentos, que produzindo as formas de deflexão estáticas que satisfazem as equações 4.3, permite a obtenção de funções de forma adequadas. Portanto, segundo a teoria de

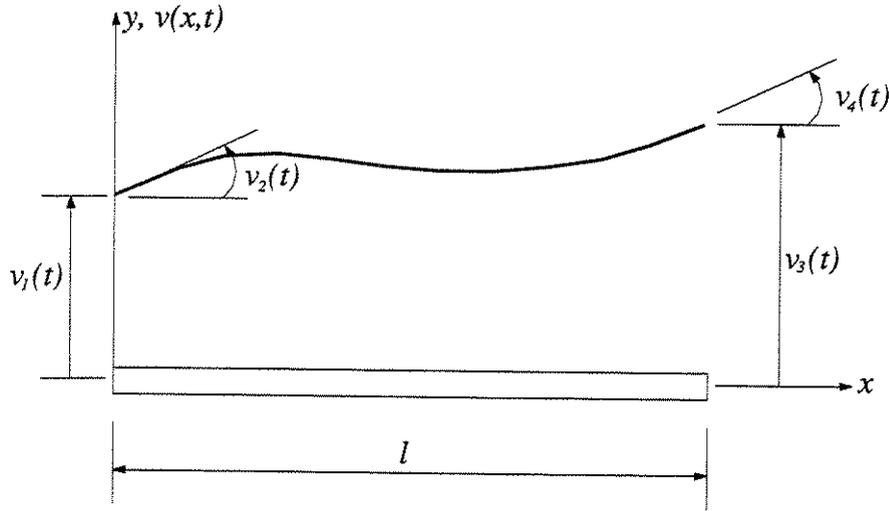


Figura 4.2: Elemento de viga uniforme sob deflexão transversal

Euler-Bernoulli, para uma viga carregada somente em suas extremidades, a equação de equilíbrio é dada por

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = 0. \quad (4.4)$$

A solução geral para a equação 4.2, no caso de vigas uniformes, é uma função polinomial cúbica, ou seja,

$$v(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{l}\right) + c_3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{l}\right)^3. \quad (4.5)$$

Podemos observar que utilizamos (x/l) ao invés de x , de forma que todos os coeficientes c_i tenham as mesmas dimensões. Substituindo os quatro conjuntos de condições de contorno dadas pelas equações 4.3 na equação 4.5, obtemos as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ \psi_2(x) &= x - 2l \left(\frac{x}{l}\right)^2 + l \left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ \psi_3(x) &= 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3, \text{ e} \\ \psi_4(x) &= -l \left(\frac{x}{l}\right)^2 + l \left(\frac{x}{l}\right)^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para uma viga Euler-Bernoulli, a energia de deformação é dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (4.7)$$

e a energia cinética por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (4.8)$$

As equações 4.7 e 4.8 levam às seguintes expressões para os coeficientes das matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente:

$$k_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} dx, \text{ e} \quad (4.9)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho A \psi_i \psi_j dx. \quad (4.10)$$

Substituindo as equações 4.6 nas equações 4.9 e 4.10, obtemos as matrizes de rigidez e de massa do elemento, dadas por

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{sim.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (4.11)$$

$$[M] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{sim.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

onde, no nosso modelo:

E = módulo de elasticidade do trilho,

I = momento de inércia do trilho, e

l = comprimento do elemento de trilho.

ρ = densidade do aço por metro de trilho;

A = área da seção transversal do trilho.

O elemento finito de viga de Timoshenko

A teoria de viga de Timoshenko leva em consideração a deformação devida ao cisalhamento e a inércia de rotação da seção transversal. A figura 4.3 nos apresenta a cinemática da deformação de uma viga que sofre deformação devida ao cisalhamento além da deformação devida à flexão pura. Seja $v(x, t)$ o deslocamento transversal total da linha neutra da viga, $\beta(x, t)$ o ângulo de cisalhamento e $\alpha(x, t)$ a rotação da seção transversal. Pela figura 4.3, temos que

$$\beta(x, t) = \alpha(x, t) - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

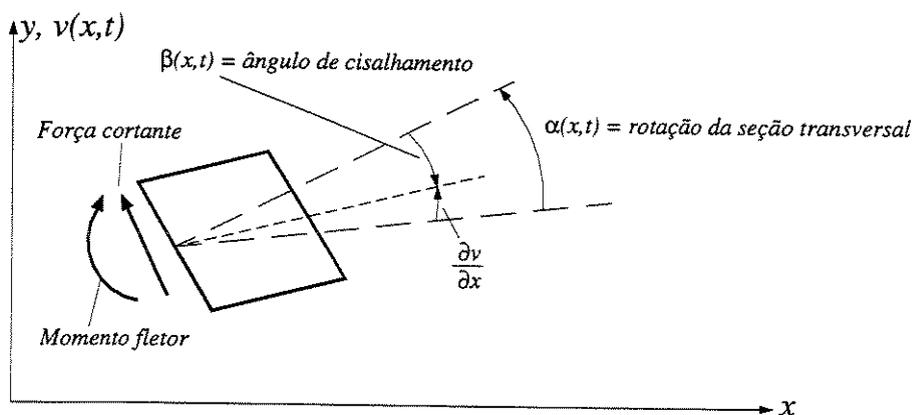


Figura 4.3: Cinemática da deformação de uma viga incluindo a deformação devida ao cisalhamento

Da teoria elementar de vigas, temos que a equação de momento fletor será dada por

$$M = EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x},$$

onde E é o módulo de elasticidade e I o momento de inércia. A correspondente energia de deformação devida à flexão será dada por

$$V_f = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.14)$$

A energia devida à deformação por cisalhamento pode ser expressa como

$$V_c = \frac{1}{2} \int_0^l \kappa G A \beta(x, t)^2 dx, \quad (4.15)$$

onde κ é o *coeficiente de cisalhamento*, que no caso de trilhos ferroviários seu valor é igual a 0.34, G é o *módulo de cisalhamento*, A é a *área da seção transversal* da viga e l é o *comprimento* da viga. A energia cinética da viga é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (4.16)$$

A formulação para elementos finitos que iremos apresentar foi desenvolvida por Thomas e Abbas[25] em seu trabalho. O elemento finito de viga de Timoshenko proposto possui quatro graus de liberdade por nó, onde as coordenadas generalizadas são os deslocamentos transversais (v) e os giros nas extremidades ($\partial v / \partial x$), mais o ângulo de rotação da seção transversal (α) e a sua derivada ($\partial \alpha / \partial x$). A figura 4.4 nos apresenta este elemento. As

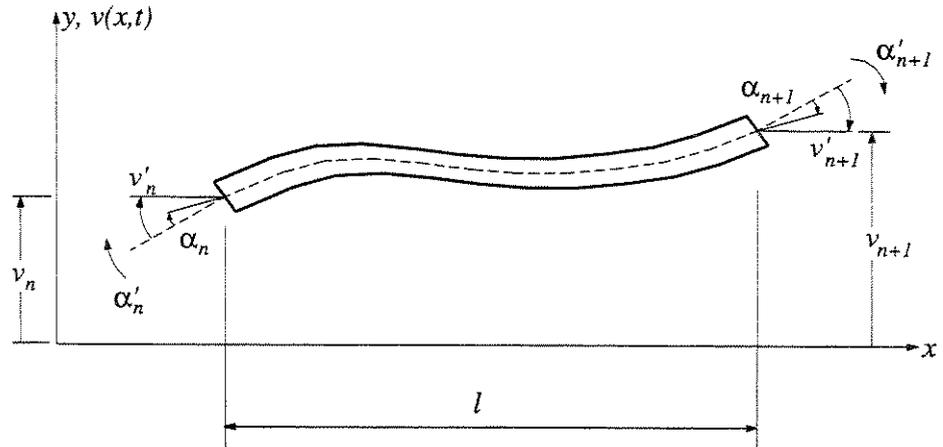


Figura 4.4: Modelo de elemento finito de uma viga Timoshenko

coordenadas nodais do elemento podem ser descritas em forma vetorial, ou seja,

$$\{\eta\} = \{v_n, \alpha_n, v'_n, \alpha'_n, v_{n+1}, \alpha_{n+1}, v'_{n+1}, \alpha'_{n+1}\}^T,$$

onde n e $n+1$ são os números dos nós em cada extremidade do elemento. Assumimos que $v(x, t)$ e $\alpha(x, t)$ podem ser aproximados por funções polinomiais cúbicas da seguinte forma:

$$v = \sum_{i=1}^8 \psi_i(x) \eta_i \text{ e } \alpha = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(x) \eta_i, \quad (4.17)$$

onde $\psi_i(\xi)$ e $\varphi_i(\xi)$, $\xi = x/l$, são as funções de forma, dadas por

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_2 = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3), \\ \psi_3 &= \varphi_4 = \frac{l}{8} (1 - \xi) (1 - \xi^2), \\ \psi_5 &= \varphi_6 = \frac{l}{4} (2 + 3\xi - \xi^3), \\ \psi_7 &= \varphi_8 = -\frac{l}{8} (1 + \xi) (1 - \xi^2), \text{ e} \\ \psi_2 &= \psi_4 = \psi_6 = \psi_8 = \varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo as aproximações dadas por 4.17 nas expressões das energias, dadas por 4.14, 4.15 e 4.16 e utilizando as funções de forma dadas por 4.18, obtemos as seguintes expressões para os coeficientes das matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{2EI}{l} \int_{-1}^1 \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi + \\ &\frac{\kappa GA l}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{l^2} \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} + \varphi_i \varphi_j - \frac{2}{l} \varphi_i \frac{d\psi_j}{d\xi} - \frac{2}{l} \varphi_j \frac{d\psi_i}{d\xi} \right) d\xi, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\text{e } m_{ij} = \frac{\rho l}{2} \int_{-1}^1 (A \psi_i \psi_j + I \varphi_i \varphi_j) d\xi. \quad (4.20)$$

Desenvolvendo todas as integrais, conseguimos obter as matrizes de rigidez do elemento, dada por:

$$[K] = \frac{EI}{420l^3} [K^*], \quad (4.21)$$

onde

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 504S & 210Sl & 42Sl & 42Sl^2 & -504S & 210Sl & 42Sl & -42Sl^2 \\ (504 + 156S)l^2 & -42Sl^2(42 + 22S)l^3 & -210Sl & -(504 - 54S)l^2 & 42Sl^2 & (42 - 13S)l^3 & 56l^2 & 0 \\ & 0 & -42Sl & 42Sl^2 & -14Sl^2 & -7Sl^3 & (56 + 4S)l^4 & -42Sl^2 - (42 - 13S)l^3 \\ & & 504S & -210Sl & -42Sl & 42Sl^2 & 504S & -210Sl \\ & & & (504 + 156S)l^2 & -42Sl^2 - (42 + 22S)l^3 & 56Sl^2 & 0 & (56 + 4S)l^4 \\ \text{sim.} & & & & & & & \end{bmatrix}$$

onde $S = (\kappa G/E)(Al^2/I)$ é o *parâmetro de deformação de cisalhamento*.

De maneira análoga, conseguimos a matriz de massa, dada por:

$$[M] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22l & 0 & -54 & 0 & -13l & 0 \\ & 156Rl^2 & 0 & 22Rl^3 & 0 & 54Rl^2 & 0 & -13Rl^3 \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & 0 & -3l^2 & 0 \\ & & & 4Rl^4 & 0 & 13Rl^3 & 0 & -3Rl^4 \\ & & & & 156 & 0 & -22l & 0 \\ & & & & & 156Rl^2 & 0 & -22Rl^4 \\ & & & & & & 4l^2 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & & & 4Rl^4 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde $R = I/Al^2$ é o *parâmetro de inércia de rotação*.

O elemento finito de viga de Timoshenko com quatro graus de liberdade

Como já discutimos anteriormente, o grande problema em relação ao elemento finito de viga de Timoshenko em termos computacionais reside na ordem das matrizes, que são o dobro em relação ao elemento finito de viga de Euler-Bernoulli. Para poder resolver este problema, pesquisadores como Nickell e Secor [91] e Davis; Henshell e Warburton [92], a partir de teorias aproximadas, desenvolveram elementos finitos com matrizes de ordem menores que oito (sete ou quatro). A teoria aproximada utilizada por Nickell e Secor foi desenvolvida para eliminar o acoplamento entre a deformação transversal devida ao cisalhamento e a inércia de rotação.

Temos que a energia potencial de deformação de uma viga de Timoshenko é dada pela soma das energias determinadas a partir das expressões 4.14 e 4.15, e a energia cinética é determinada pela expressão 4.16. Podemos ver claramente que somente na equação 4.15 existe o acoplamento entre o deslocamento transversal e a rotação da viga ($\beta(x, t)$). É colocada uma restrição,

consistente com a teoria de Euler-Bernoulli, de que a força de cisalhamento resultante Q seja obtida a partir da derivada em relação ao espaço do momento fletor M , ou seja

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = \kappa GA \beta(x, t). \quad (4.23)$$

Esta restrição faz com que este desenvolvimento seja válido somente quando a deformação devida ao cisalhamento for moderada comparada com a deformação devida ao momento fletor. Desta forma, a energia potencial de deformação torna-se

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{\kappa GA} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right) \right]^2 \right\} dx, \quad (4.24)$$

e o deslocamento transversal pode ser determinado, em termos da rotação da seção transversal, a partir da equação 4.23.

Em uma formulação de elementos finitos, expandimos os deslocamentos transversais como

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{l}\right) v_1(t) + x \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 v_2(t) \\ & + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(3 - \frac{2x}{l}\right) v_3(t) - x \left(\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) v_4(t), \end{aligned}$$

e a rotação da seção transversal como

$$\alpha(x, t) = a_0(t) + x a_1(t) + x^2 a_2(t),$$

onde $a_0(t)$, $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são um conjunto de coordenadas generalizadas. Estas coordenadas generalizadas podem ser relacionadas às coordenadas nodais através da equação 4.23 como

$$\begin{Bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12\gamma}{l} & 1 + 6\gamma & -\frac{12\gamma}{l} & 6\gamma \\ -\frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} \\ \frac{6}{l^3} & \frac{3}{l^2} & -\frac{6}{l^3} & \frac{3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{Bmatrix},$$

onde

$$\gamma = \frac{EI}{\kappa GA l^2}.$$

Neste caso a matriz de rigidez é dada por:

$$[K] = \frac{EI}{l^3} (1 + 12\gamma) \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 \left(\frac{1+9\gamma}{1+12\gamma} \right) & -6l & 2l^2 \left(\frac{1+18\gamma}{1+12\gamma} \right) \\ \text{sim.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \left(\frac{1+9\gamma}{1+12\gamma} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

A matriz de massa é composta pela soma de duas matrizes. Uma é a matriz de massa de translação convencional para uma viga uniforme, igual a matriz dada por 4.12, ou seja

$$[M_1] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{sim.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

e a outra matriz é uma matriz proporcional à inércia de rotação dada por

$$[M_2] = \rho A \bar{r}^2 \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \left(\frac{1}{10} - 2\gamma + 12\gamma^2 \right) \left(\frac{1}{10} - 6\gamma + 72\gamma^2 \right) & -\frac{12}{7} \left(\frac{1}{10} - 2\gamma + 12\gamma^2 \right) \left(\frac{1}{10} - 6\gamma + 72\gamma^2 \right) \\ & l \left(\frac{1}{15} - 2\gamma + 12\gamma^2 \right) - \left(\frac{1}{10} - 6\gamma + 72\gamma^2 \right) & -l \left(\frac{1}{10} - 36\gamma^2 \right) \\ \text{sim.} & & \frac{12}{7} \left(\frac{1}{10} - 2\gamma + 12\gamma^2 \right) - \left(\frac{1}{10} - 6\gamma + 72\gamma^2 \right) \\ & & & \left(\frac{2}{15} + 36\gamma^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde \bar{r}^2 é o raio de giração.

4.2.2 Acoplamento do modelo de trilho com os modelos de suporte da via

Os subsistemas formados pelo lastro e as fixações, constituídos por sistemas molas-amortecedores são considerados unidimensionais, portanto o conjunto formado pelos dois subsistemas possui dois graus de liberdade. Um dos graus está acoplado a uma das extremidades do elemento finito de trilho, que possui comprimento igual ao espaçamento entre os dormentes, como podemos observar na Figura 4.5.

O elemento finito obtido com o acoplamento do elemento finito do trilho com os subsistemas acima descritos possui cinco graus de liberdade, no caso dos elementos finitos do trilho terem quatro graus de liberdade, e nove

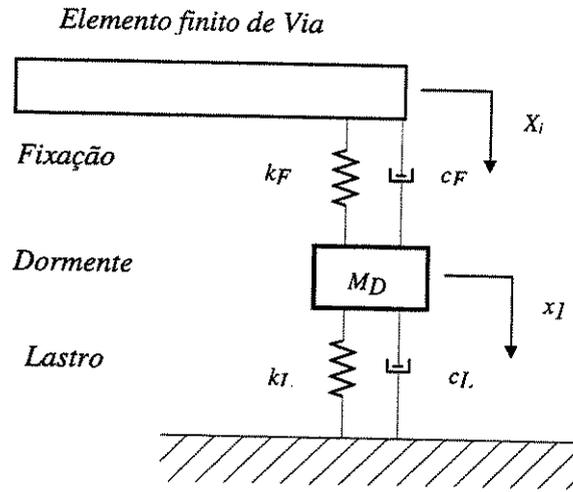


Figura 4.5: Subsistema lastro, dormente e fixações

graus de liberdade se o elemento finito de trilho for o de uma viga Timoshenko tradicional. No primeiro caso, teremos as seguintes matrizes de massa, amortecimento e rigidez resultantes:

$$[\overline{M}] = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$[\overline{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_F & 0 & c_F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_F & 0 & c_F + c_L \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (4.28)$$

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_F & k_{34} & k_F \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k_F & 0 & k_F + k_L \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

onde:

M_D = metade da massa de um dormente;

k_F = coeficiente de rigidez da fixação;
 k_L = coeficiente de rigidez da ignora do lastro;
 c_F = coeficiente de amortecimento da fixação; e
 c_L = coeficiente de amortecimento do lastro.

No segundo caso, a matriz de massa teria o mesmo esquema dado por 4.27; e as matrizes de amortecimento e de rigidez teriam os mesmos esquemas dados por 4.28 e 4.29, só que os acoplamentos ao invés de ocorrerem nas posições pertencentes às terceiras linha e coluna matriz de ordem 5 por 5, ocorreriam nas posições pertencentes às quintas linha e coluna da matriz de ordem 9 por 9.

4.2.3 Montagem das matrizes globais que representam o modelo de via completo

Cada matriz de ordem 5 por 5 ou 9 por 9 são montadas para formar o modelo completo da via. Para tanto, temos que o nó final de cada elemento se conecta com o nó inicial do elemento seguinte. A figura 4.6 nos apresenta o esquema de montagem para formar as matrizes do modelo completo de via.

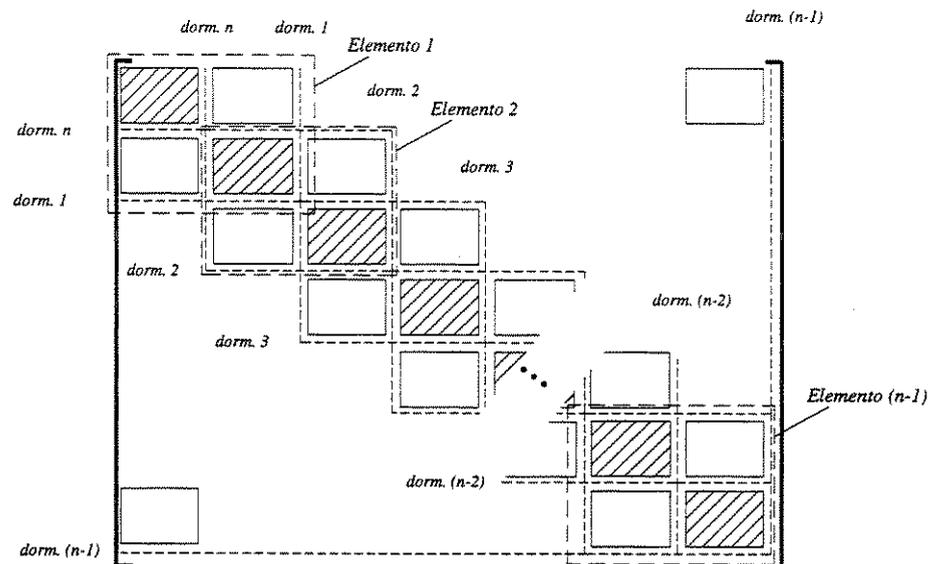


Figura 4.6: Esquema de montagem das matrizes globais do modelo de via.

Cada retângulo representa dois (ou quatro) graus de liberdade associados ao elemento finito. As linhas pontilhadas menores representam os graus de liberdade associados ao deslocamento vertical dos dormentes. As linhas pontilhadas maiores representam as matrizes dos elementos finitos individuais. Onde dois elementos se superpõem as contribuições de cada elemento se somam, efeito representados pelos retângulos hachurados.

Para dar a característica de via com comprimento infinito, o nó final do último elemento é conectado ao nó inicial do primeiro elemento. Na figura 4.6 isto é representado pelos retângulos hachurados localizados no topo esquerdo e no extremo inferior direito da matriz global, além dos dois retângulos isolados que aparecem nos cantos inferior esquerdo e superior direito. O grau de liberdade associado ao deslocamento vertical do último dormente está localizado no meio do primeiro elemento. Com este esquema de montagem conseguimos construir as matrizes globais de rigidez, amortecimento e de massa do modelo completo de via. Podemos perceber que o número final de graus (a ordem da matriz) associado ao modelo completo é função do número de dormentes, ou seja $N = 3n$ no caso dos elementos finitos com cinco graus de liberdade, e $N = 5n$ para os elementos finitos com nove graus de liberdade, onde n é o número de dormentes que compõem o “anel” de trecho de via adotado.

Como existe a possibilidade do dormente levantar-se em relação ao lastro, esta característica não-linear pode ser levada em consideração no modelo, bastando fazer os coeficientes de rigidez do lastro serem iguais a zero. A condição para que o dormente se levante em relação ao lastro é dada pela seguinte relação:

$$x_1 < 0, \quad (4.30)$$

onde x_1 é o deslocamento vertical do dormente, conforme mostrado na figura 4.5. As coordenadas são negativas para deslocamentos para cima. Esta relação será verificada em cada passo de tempo, modificando-se as matrizes do sistema de acordo com este deslocamento.

4.3 O modelo de excitação

O modelo de excitação a ser implementado consiste de uma carga produzida pelo deslocamento do veículo, mostrado na figura 4.1, que produz uma força variável em função do contato entre a roda e o trilho. Como o limite superior

da nossa faixa de frequência é igual a 2500 Hertz, como colocam Knothe e Grassie[5], este sistema dinâmico será modelado como sendo do tipo *contato normal (vertical)*, através de uma mola hertziana não-linear, conforme a expressão 4.31, obtida a partir da expressão 2.31 e apresentada a seguir:

$$F_T = C_H (y_R - w_0)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.31)$$

onde F_T é a força transmitida ao trilho no contato, C_H é constante de Hertz para o contato não-linear, y_R é a deflexão da roda e w_0 é a deflexão do trilho no ponto de contato. Se a deflexão da roda for menor ou igual à deflexão do trilho, ou seja, $y_R \leq w_0$, a força no contato será igual a zero.

4.4 O Acoplamento do Modelo de Veículo com o Modelo de Via

Para podermos realizar o acoplamento entre os dois modelos precisamos de funções de forma, pois a força de contato entre a roda e o trilho nem sempre é aplicada nos nós dos elementos finitos. Assim, utilizaremos funções polinomiais cúbicas como funções de forma. As funções de forma podem ser representadas como

$$[N] = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ N_{1i} \ N_{2i} \ N_{3i} \ N_{4i} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots], \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{1i} &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_{2i} &= x\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2, \\ N_{3i} &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_{4i} &= x\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}\right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

nas quais i é o número do elemento no qual a carga está atuando, l é o comprimento do elemento finito da via e x é a ordenada correspondente à posição da carga dentro do elemento. O vetor $[N]^T$ possui coordenadas iguais a zero, exceto para aquelas correspondentes aos nós do elemento no qual a força de contato está atuando. Para o elemento finito para o trilho com cinco graus de liberdade, este número de coordenadas diferentes de zero será igual a quatro. Para o elemento finito com nove graus de liberdade (viga de Timoshenko tradicional), as funções de forma só atuaram sobre os

graus de liberdade relacionados ao deslocamento vertical das extremidades do elemento e à sua derivada (v e $\partial v/\partial x$). Portanto, a expressão 4.32 seria reescrita da seguinte forma:

$$[N] = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ N_{1i} \ 0 \ N_{2i} \ 0 \ N_{3i} \ 0 \ N_{4i} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]. \quad (4.34)$$

O acoplamento entre os modelos de veículo e de via é apresentado pela figura 4.7.

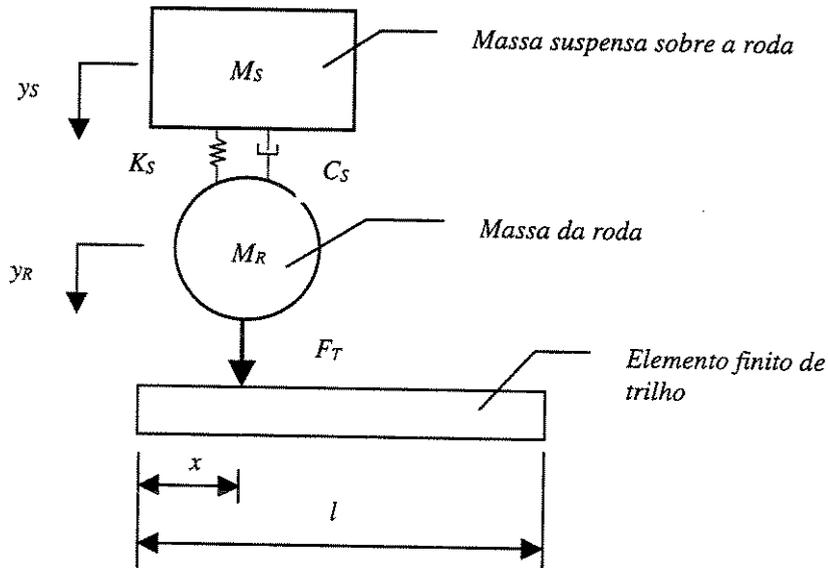


Figura 4.7: O acoplamento entre os modelos de veículo e de via

Onde y_R e y_S são os deslocamentos verticais da roda e da massa suspensa sobre a roda. Agora podemos rescrever o sistema de equações dado pela expressão (3.20) após o acoplamento dos dois modelos. O sistema de equações diferenciais que representa o modelo da via será dada por

$$[M_g] \{\ddot{\eta}\} + [C_g] \{\dot{\eta}\} + [K_g] \{\eta\} = [N]^T f_0, \quad (4.35)$$

onde $[M_g]$, $[C_g]$ e $[K_g]$ são as matrizes globais de massa, amortecimento e de rigidez do modelo de via; $\{\eta\}$ são as coordenadas generalizadas globais do sistema formado pela via e f_0 é a força transmitida à via no contato com

a roda. Desprezando inicialmente o peso do veículo, esta força é igual à força do contato não-linear hertziano entre a roda e o trilho (F_T), descrita na equação 4.31. Esta equação pode ser então reescrita. Assim, temos

$$\begin{aligned} [N]^T f_0 &= [N]^T F_T = [N]^T C_H (y_R - w_0)^{\frac{3}{2}} \\ &= [N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} (y_R - w_0). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mas o deslocamento do trilho no ponto de aplicação da força de contato pode ser escrito em termos da coordenadas globais e das funções de forma, ou seja

$$w_0 = [N] \{ \eta \}. \quad (4.37)$$

Substituindo a equação 4.37 na equação 4.36, temos

$$\begin{aligned} [N]^T F_T &= [N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} (y_R - w_0) \\ &= [N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} (y_R - [N] \{ \eta \}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Fazendo o desenvolvimento da equação 4.38 temos que

$$\begin{aligned} [N]^T F_T &= [N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} (y_R - [N] \{ \eta \}) \\ &= [N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} y_R - \\ &\quad [N]^T [N] C_H \sqrt{(y_R - w_0)} \{ \eta \}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Analisando separadamente o modelo de veículo mostrado na figura 4.7, temos que o mesmo pode ser representado através do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_R \\ \ddot{y}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_S & -c_S \\ -c_S & c_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_R \\ \dot{y}_S \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_S & -k_S \\ -k_S & k_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_R \\ y_S \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_T \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Temos que a primeira equação do sistema, dada por

$$M_R \ddot{y}_R + c_S \dot{y}_R - c_S \dot{y}_S + k_S y_R - k_S y_S = F_T,$$

pode ser reescrita como

$$M_R \ddot{y}_R + c_S (\dot{y}_R - \dot{y}_S) + k_S (y_R - y_S) = C_H (y_R - w_0)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.41)$$

Substituindo a equação 4.37 na relação 4.41 e desenvolvendo, temos que

$$M_R \ddot{y}_R + c_S (\dot{y}_R - \dot{y}_S) + k_S (y_R - y_S) = C_H \sqrt{(y_R - w_0)} y_R - [N] C_H \sqrt{(y_R - w_0)} \{\eta\}. \quad (4.42)$$

Fazendo o acoplamento dos modelos de via e de veículo, utilizando as relações dadas por 4.35, 4.39 e 4.42, montamos o sistema global final que representa matematicamente o modelo dinâmico da interação entre o veículo a via, que apresentaremos a seguir:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M_g] & 0 & 0 \\ 0 & M_R & 0 \\ 0 & 0 & M_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\eta}\} \\ \ddot{y}_R \\ \ddot{y}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_g] & 0 & 0 \\ 0 & c_S & -c_S \\ 0 & -c_S & c_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\eta}\} \\ \dot{y}_R \\ \dot{y}_S \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [[K_g] + [K]^*] & -[N]^T C_H \sqrt{(y_R - w_0)} & 0 \\ -[N] C_H \sqrt{(y_R - w_0)} & C_H \sqrt{(y_R - w_0)} + k_S & -k_S \\ 0 & -k_S & k_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ y_R \\ y_S \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde

$$[K]^* = [N]^T [N] C_H \sqrt{(y_R - w_0)}.$$

Este sistema dinâmico pode ser então representado em sua forma final, dada por

$$[M_G] \{\ddot{q}\} + [C_G] \{\dot{q}\} + [K_G] \{q\} = \{0\},$$

onde $[M_G]$, $[C_G]$ e $[K_G]$ são as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez globais finais de todo o sistema e $\{q\}$ representa todas as coordenadas generalizadas do modelo de via mais os deslocamentos verticais da roda e da massa suspensa sobre a roda.

Como podemos observar, a matriz de rigidez depende dos deslocamentos da roda e do trilho no ponto de contato. Isto deve-se ao fato de que a rigidez do contato entre a roda e o trilho foi “internalizada” na matriz de rigidez do sistema. Esta abordagem foi utilizada por pesquisadores australianos[22], só que o contato era linear, fazendo com que a matriz de rigidez permanecesse

constante. No caso de contato não-linear aqui apresentado, esta abordagem é original.

Para podermos levar em consideração o efeito do peso do veículo e da grade ferroviária, basta multiplicar a matriz de massa por um vetor gravidade, cujas coordenadas são iguais ao valor da aceleração da gravidade quando o elemento da matriz de inércia for uma massa e igual a zero caso ocorra o contrário.

4.5 A técnica de solução adotada

Para a resolução do sistema global de equações diferenciais dado por 4.43, que nos fornecerá a resposta do sistema dinâmico no domínio do tempo, utilizaremos um método numérico de integração. Utilizaremos um esquema implícito Newmark- β para o caso de sistemas estruturais não-lineares, seguindo a formulação proposta por Geradin e Rixie[87], mas utilizando um método quasi-Newton para a minimização do resíduo nodal. Porém, antes de utilizar o esquema de integração é necessário uma estratégia para o deslocamento do veículo sobre a via. Na estratégia adotada o veículo sempre se desloca sobre o primeiro elemento da via, iniciando no primeiro nó e terminando sempre no nó final, deslocando-se a intervalos fixos de tempo, obtidos em função de um número inteiro de intervalos pré-determinado. A figura 4.8 nos mostra esquematicamente esta estratégia.

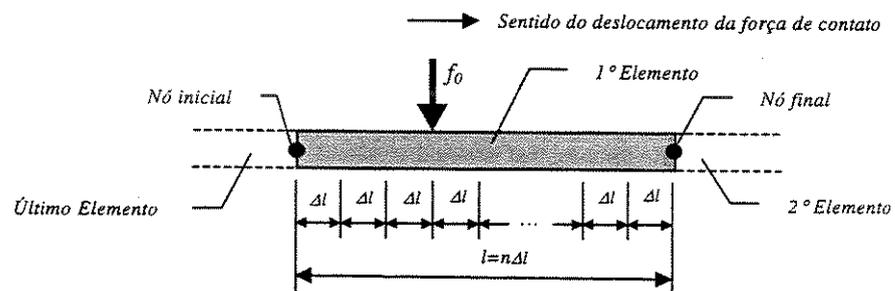


Figura 4.8: Estratégia adotada para o deslocamento da força de contato

O número de intervalos de tempo depende do passo de tempo adotado, do espaçamento entre os dormentes e da velocidade de deslocamento do veículo. Os dois últimos são dados do problema a ser analisado, portanto são

previamente conhecidos. O problema reside na escolha do passo de tempo. Não existe um valor de passo de tempo que seja considerado ideal para ser utilizado no esquema Newmark- β , mas podemos adotar como referência o valor indicado pela expressão 3.67 para o esquema Preditor de Diferença Central, apresentado no capítulo anterior, onde para análise de sistemas dinâmicos lineares o passo de tempo é limitado pela frequência mais alta do sistema, ω_{\max} , ou seja

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}.$$

Como o limite superior da nossa faixa de frequência de interesse é igual a 2500 Hertz, o passo de tempo de referência seria igual a 0,8 milisegundos. Seja l o espaçamento entre os dormentes, V a velocidade do veículo e t o tempo gasto para percorrer o espaço entre os dormentes, temos que $l = V \times t = V \times n \times \Delta t$, onde n é o número de intervalos de tempo. Desenvolvendo esta relação e fazendo o acerto de unidades, temos que o número de intervalos (inteiro) pode ser obtido através da seguinte relação:

$$n \geq \frac{4500 \times l}{V},$$

onde l é o espaçamento entre os dormentes, em metros, e V é a velocidade do veículo em quilômetros por hora. Com o valor de n determinado, calculamos o passo de tempo a ser adotado, ou seja

$$\Delta t = \frac{3600 \times l}{n \times V},$$

onde l é dado em metros, V em quilômetros por hora e Δt em milisegundos.

Após o veículo atingir o nó final, a solução do sistema de equações obtida neste ponto é “deslocada” para o nó inicial, provocando o efeito do deslocamento do veículo para o elemento de via seguinte. A repetição deste processo a cada chegada do veículo ao nó final simula o deslocamento do veículo por todo o “anel” que representa o trecho de via adotado. O esquema de integração inicia-se a partir de uma condição inicial com a força de contato posicionada sobre o nó inicial e com o contador de tempo da simulação sendo igualado a zero. Então é feito um incremento de tempo correspondente ao deslocamento da força até o ponto de aplicação seguinte. Neste ponto, o esquema de integração faz uma previsão dos deslocamentos, velocidades e

acelerações segundo as relações do esquema Newmark- β :

$$\begin{aligned}\{\dot{q}\}_{n+1} &= \{\dot{q}\}_n + (1 - \gamma) \times \Delta t \times \{\ddot{q}\}_n, \\ \{q\}_{n+1} &= \{q\}_n + \Delta t \times \{\dot{q}\}_n + (0.5 - \beta) \times \Delta t^2 \times \{\ddot{q}\}_n, \text{ e} \\ \{\ddot{q}\}_{n+1} &= 0,\end{aligned}\tag{4.44}$$

onde $\{q\}$ representa as coordenadas generalizadas do sistema dinâmico completo (via mais veículo), Δt é o passo-de-tempo, n representa o passo anterior e γ e β são os coeficientes do esquema Newmark. No nosso caso, onde consideramos a aceleração constante durante o intervalo de integração, γ é igual a 0.5 e β igual a 0.25.

Com os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações obtidos para o passo $n + 1$ é feita uma avaliação do resíduo devido aos desequilíbrios nodais. Estes desequilíbrios são representados por um vetor, resultante da diferença entre as forças internas ao sistema e as forças externas atuantes. O vetor das forças internas é obtido através da soma dos produtos das matrizes de massa, amortecimento e rigidez pelos respectivos vetores aceleração, velocidade e deslocamento. Calcula-se a norma euclidiana do vetor resíduo, que posteriormente é comparada com um erro admissível pré-determinado (no nosso caso adotamos 10^{-3}).

Se a norma for menor ou igual a este valor, passa-se para o próximo passo de tempo ($n + 2$). Caso contrário, é feita uma correção aos valores previstos através de um procedimento de otimização até que se encontre os valores das acelerações, velocidades e deslocamentos que satisfaçam a condição de mínimo resíduo do desequilíbrio nodal.

Como já vimos anteriormente, o procedimento de otimização utilizado por Geradin e Rixie utiliza-se do método de Newton-Raphson, onde na busca da direção descida para encontrar a solução ótima é utilizada a matriz jacobiana do sistema, que no nosso caso se restringiria à chamada *matriz de rigidez tangente*, ou seja, a derivada da matriz de rigidez do sistema. Esta abordagem, entretanto, não conseguiu dar resultados, pois em algumas situações, onde ocorria o “descolamento” da roda em relação ao trilho (força de contato nula), não se conseguia a convergência para a solução ótima.

Para resolver este problema, utilizamos um método de otimização que independe da matriz jacobiana, no caso um método quasi-Newton com rotina de busca unidimensional, utilizando o método da falsa-posição, segundo a formulação desenvolvida por Arcaro[89]. Esta abordagem foi bem sucedida e também consiste uma em solução original para o caso de modelos dinâmicos

para análise da interação entre veículo e via ferroviários. A seguir faremos uma descrição do procedimento desenvolvido por Arcaro.

4.5.1 O método quasi-Newton com busca unidimensional

No capítulo anterior fizemos uma apresentação das etapas desenvolvidas no procedimento proposto por Geradin e Rixie. O procedimento desenvolvido por Arcaro é semelhante a este esquema até o cálculo do vetor resíduo. A partir desta etapa os dois procedimentos de diferenciam. No procedimento desenvolvido por Geradin e Rixie a etapa seguinte consiste na verificação da convergência do vetor resíduo, feita através da inequação 3.125. No procedimento desenvolvido por Arcaro é feita a determinação da primeira direção de descida, segundo a expressão 3.106, ou seja

$$\{d\}^k = -[A]^k \times \nabla f(\{q\}_{n+1}^k).$$

onde o vetor $\nabla f(q_{n+1})$ representa o vetor resíduo e q_{n+1} é o vetor dos deslocamentos do sistema. Nos métodos quasi-Newton a matriz $[A]^k$ é inicialmente aproximada como sendo igual à matriz identidade, ou seja $[A]^k = [I]$, de forma que a primeira direção de descida é determinada de maneira similar ao método do gradiente, ou seja

$$\{d\}^k = -\nabla f(\{q\}_{n+1}^k).$$

O problema que ocorre com esta primeira direção de descida, é que apesar desta direção ser a de máximo decrescimento da função, como já vimos anteriormente, a sua utilidade está limitada para valores de $\{q\}$ longe da solução. Para fazer com que esta direção esteja dentro da escala do problema por nós analisado, esta direção é multiplicada por um fator de escala igual ao inverso do elemento das primeiras linha e coluna da matriz jacobiana, ou seja

$$\{d\}^k = \frac{-\nabla f(\{q\}_{n+1}^k)}{(M_G(1,1)/a_2 + C_G(1,1)/a_1 + K_G(1,1)/a_0)}, \quad (4.45)$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são as constantes que aparecem na expressão dada por 3.121,

ou seja

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.0, \\ a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \text{ e} \\ a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}. \end{aligned}$$

Feito isto, é realizada uma primeira verificação da norma do vetor resíduo. De maneira análoga ao procedimento de Geradin e Rixie, se for verdadeira, as aproximações não precisam ser corrigidas e correspondem aos valores para o passo de tempo t_{n+1} , e passamos para um novo passo de tempo t_{n+2} . Caso contrário, as aproximações precisam ser corrigidas. A partir deste ponto é que ocorre a diferenciação entre os dois procedimentos.

Para a direção de descida inicialmente determinada pela equação 4.45, realizamos a busca unidimensional que nos dará o valor de $\alpha \geq 1$. No desenvolvimento do processo de busca unidimensional a matriz de rigidez do sistema é alterada várias vezes em função dos valores dos deslocamentos que são determinados durante o processo. Com os valores de α e $\{d\}$ determinados calculamos os novos pontos de partida através das expressões:

$$\begin{aligned} \{q\}_{n+1}^{k+1} &= \{q\}_{n+1}^k + a_0 \alpha \{d\}^k, \\ \{\dot{q}\}_{n+1}^{k+1} &= \{\dot{q}\}_{n+1}^k + a_1 \alpha \{d\}^k, \text{ e} \\ \{\ddot{q}\}_{n+1}^{k+1} &= \{\ddot{q}\}_{n+1}^k + a_2 \alpha \{d\}^k. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A partir deste ponto é feita a atualização da inversa da matriz hessiana. Para tanto, utilizamos uma atualização denominada Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, ou simplesmente *BFGS*, com fator de escala. Uma descrição detalhada desta aproximação pode ser encontrada no livro de Luenberger[90]. Nesta atualização, inicialmente, são calculados dois vetores $\{p\}$ e $\{s\}$, obtidos a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \{p\} &= \{q\}_{n+1}^{k+1} - \{q\}_{n+1}^k, \text{ e} \\ \{s\} &= \nabla f(\{s\}_{n+1}^{k+1}) - \nabla f(\{s\}_{n+1}^k). \end{aligned}$$

Com estes vetores mais a matriz $[A]^k$ construímos o vetor v , denominado vetor *BFGS*, através da seguinte expressão:

$$\{v\} = \frac{\sqrt{\{s\}^T [A]^k \{s\}} \times \{p\}}{\{p\}^T \{s\}} - \frac{[A]^k \{s\}}{\sqrt{\{s\}^T [A]^k \{s\}}}.$$

Em seguida determinamos o fator de escala γ_e , dado por

$$\gamma_e = \frac{\{p\}^T \{s\}}{\{s\}^T [A]^k \{s\}}.$$

Com os valores de $\{p\}$, $\{s\}$, $\{v\}$ e $[A]^k$ fazemos a atualização da matriz hessiana da seguinte forma:

$$[A]^{k+1} = \left([A]^k - \frac{[A]^k \{s\} \{s\}^T [A]^k}{\{s\}^T [A]^k \{s\}} + \{v\} \{v\}^T \right) \gamma_e + \frac{\{p\} \{p\}^T}{\{p\}^T \{s\}}.$$

Calculamos a norma do vetor resíduo dado por $\nabla f(\{q\}_{n+1}^{k+1})$ e verificamos a sua convergência. Se for verdadeira, as aproximações obtidas por 4.46 não precisam ser corrigidas e correspondem aos valores para o passo de tempo t_{n+1} , e passamos para um novo passo de tempo t_{n+2} . Caso contrário, as aproximações precisam ser corrigidas. Obtemos a nova direção de descida $\{d\}^{k+1}$ através da expressão

$$\{d\}^{k+1} = -[A]^{k+1} \times \nabla f(\{q\}_{n+1}^{k+1}),$$

e repetimos o processo até conseguirmos a convergência da norma do vetor resíduo.

4.6 Estrutura do modelo computacional desenvolvido

O modelo computacional desenvolvido foi implementado em linguagem PASCAL, utilizando o conjunto de programas Delphi 3[®], desenvolvido pela Borland[®] Corporation, em um ambiente Windows95[®]. O programa constitui-se de uma estrutura principal composta por duas partes. A primeira parte consiste de rotinas de entrada dos dados relativos à situação que está sendo simulada e da determinação da configuração inicial do sistema dinâmico. A segunda parte consiste de um “laço” que desenvolve o cálculo das variáveis de estado do sistema, bem como a determinação da força de contato entre a roda e o trilho, a medida que a roda avança em cada passo-de-tempo. Este “laço” se repete até ser atingido o tempo de simulação previsto ou um número de passos-de-tempo previamente determinado. A seguir, faremos uma apresentação detalhada da implementação desenvolvida.

4.6.1 A estrutura principal

A estrutura do programa em termos de uma linguagem computacional estruturada é a seguinte:

início

leitura dos dados

determinação dos parâmetros utilizados na simulação

montagem das matrizes do elemento finito

montagem das matrizes globais para a condição inicial

inicialização do processo de integração numérica

determinação do peso próprio do sistema

determinação da configuração inicial do sistema

inicialização dos valores das energias cinética e potencial do sistema

inicialização das variáveis de controle do processo de simulação

enquanto passo-de-tempo < número de passos-de-tempo previsto **faça**

início

prox_passo

atualização do passo-de-tempo

determinação da energia total no passo-de-tempo

impressão dos valores das variáveis de estado e da força de contato

e da energia total

fim

fim

A seguir faremos uma descrição das etapas apresentadas na estrutura principal do programa. Iniciamos com a leitura dos dados. Os dados necessários para o desenvolvimento da simulação estão relacionados às características do veículo ferroviário (velocidade, massa da roda, massa suspensa sobre a roda e características da suspensão primária); às características físicas da via permanente (número de dormentes existentes no trecho em análise, área da seção transversal e o momento de inércia de segunda ordem do trilho, espaçamento entre os dormentes, metade da massa de um dormente e os coeficientes de rigidez e amortecimento do lastro e das fixações); à rigidez do contato entre a roda e o trilho, o número de passos-de-tempo entre dois dormentes consecutivos, o tempo de simulação desejado e dados relativos à irregularidade a ser analisada, caso houver.

Algumas constantes são utilizadas no programa, como os módulos de elasticidade e cisalhamento do aço dos trilhos, o coeficiente de cisalhamento de Timoshenko e os coeficientes do esquema Newmark.

Com os dados fornecidos ao programa, determinamos alguns parâmetros como a ordem das matrizes globais de rigidez, amortecimento e de massa, o passo-de-tempo e seu comprimento. Com o passo-de-tempo determinado e o tempo de simulação desejado, determinamos o número de passos-de-tempo previsto.

Em seguida, através da utilização de uma sub-rotina denominada *Matriz_elemento* são construídas as matrizes de rigidez, amortecimento e de massa do elemento finito que está sendo utilizado (viga de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko com quatro ou oito graus de liberdade).

Com as matrizes do elemento construídas, montamos as matrizes globais. Foi desenvolvida uma sub-rotina, denominada *Matriz_global*, que tem como parâmetro a matriz do elemento finito. Se a matriz do elemento for a de rigidez, a sub-rotina monta a matriz global de rigidez, repetindo o procedimento para os outros tipos de matriz. Como existem detalhes na montagem das matrizes globais no acoplamento do modelo de via com o modelo de veículo, estes são desenvolvidos a parte.

A partir deste ponto, inicializamos o processo de integração numérica. Com os coeficientes de Newmark determinamos os fatores de integração a_0 , a_1 e a_2 , dados por:

$$a_0 = 1.0, a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, e a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t^2},$$

bem como inicializamos o tempo de simulação e a distância inicial percorrida pela roda no trecho entre os dois dormentes.

A próxima etapa é determinação do peso próprio do sistema dinâmico. Calculamos um vetor gravidade, que possui número de coordenada igual à ordem das matrizes globais. As coordenadas correspondentes aos termos de deslocamento da matriz de massa e aos dormentes são iguais à aceleração da gravidade, o restante é nulo. A finalidade da construção deste vetor está relacionada à construção do vetor que representará o peso próprio do sistema dinâmico, obtido a partir da multiplicação da matriz global de massa pelo vetor gravidade, que será o vetor de força atuante durante todo o processo de simulação.

A configuração inicial do sistema adotada consiste em se considerar a carga de parada e apoiada sobre o nó inicial do primeiro trecho. Nesta con-

dição, podemos determinar os deslocamentos correspondentes $\{q\}_0$ através da resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$[K_g]\{q\}_0 = \{F\}_0,$$

onde $[K_g]$ é a matriz de rigidez para a condição inicial e $\{F\}_0$ é o vetor que representa o peso próprio do sistema dinâmico. As velocidades e as acelerações iniciais são nulas.

Inicializamos os valores das energias potencial e cinética e as variáveis de controle da simulação. O sistema em sua configuração inicial possui somente energia potencial (devida à deformação e à posição).

As variáveis relacionadas aos contadores do número de passos de tempo e do número de intervalos percorridos entre os dois dormentes são inicializadas.

A partir deste ponto, entramos no “laço” que desenvolve o cálculo das variáveis de estado do sistema, da força no contato entre a roda e o trilho e da energia total do sistema. Dentro desta estrutura, existe uma sub-rotina, denominada *prox_passo*, onde é feita a determinação das variáveis de estado e da força de contato no passo-de-tempo em análise. Sua estrutura será apresentada com mais detalhes a seguir.

Em seguida, atualizamos o contador do número de passos-de-tempo e desenvolvemos, a partir dos valores das variáveis de estado previamente determinadas, o cálculo da energia total do sistema dinâmico no passo-de-tempo. Para desenvolvermos este cálculo, necessitamos das energias dissipadas por unidade de tempo do passo-de-tempo em análise e do passo-de-tempo anterior, que é previamente armazenada em uma variável auxiliar.

A energia total do sistema é determinada através da seguinte expressão:

$$E_T = \frac{D_n + D_{n-1}}{2} \times \Delta t + V + T,$$

onde E_T é a energia total, D_n e D_{n-1} são as energias dissipadas por unidade de tempo nos passos-de-tempo atual e anterior, respectivamente; Δt é o intervalo correspondente ao passo-de-tempo. V é a energia potencial (no nosso caso, consideramos tanto a energia potencial devida à deformação como a devida à posição) e T é energia cinética. A energia potencial é determinada através da seguinte expressão:

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_g] \{q\} - \{g\}^T [M_g] \{q\},$$

onde $\{g\}$ é o vetor gravidade; $\{q\}$ são os deslocamentos; $[K_g]$ e $[M_g]$ são as matrizes globais de rigidez e de massa, respectivamente. A energia cinética é determinada a partir da seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_g] \{\dot{q}\},$$

onde $\{\dot{q}\}$ são as velocidades. A energia dissipada por unidade de tempo é obtida através da seguinte expressão:

$$D = \{\dot{q}\}^T [C_g] \{\dot{q}\},$$

onde $[C_g]$ é a matriz global de amortecimento. A finalidade de se fazer a determinação da energia total do sistema dinâmico em cada passo-de-tempo é a verificação da estabilidade do processo de integração numérica.

4.6.2 A sub-rotina *prox_passo*

Início *prox_passo*

atualização das variáveis relacionadas à posição do veículo
 e do tempo de simulação
 cálculo do efeito da irregularidade (caso necessário)
 determinação dos fatores de forma
 inicialização da matriz hessiana := matriz identidade
 (método quasi-Newton)
 determinação das previsões das variáveis de estado (esquema Newmark)
 alteração da matriz de rigidez em função dos deslocamentos previstos
 determinação do vetor resíduo devido ao desequilíbrio nodal
 determinação do vetor gradiente
 determinação da norma euclidiana do vetor resíduo
enquanto norma > erro admissível **faça**
 início
 busca_unidimen
 atualização da matriz hessiana
 determinação do novo vetor gradiente
 fim
 atualização das previsões das variáveis de estado
 se passo atual = número de intervalos **então**

início

deslocamento da solução

veículo volta ao nó inicial no primeiro dormente

fim

fim

As etapas desenvolvidas nesta sub-rotinas serão apresentadas com mais detalhes a seguir. Inicialmente, calculamos o efeito da irregularidade presente na análise em desenvolvimento. Entre as irregularidades possíveis de serem analisadas pelo modelo, algumas como o “plano-na-roda”, demandam a construção de um segmento de programa próprio dentro da sub-rotina. Outras, como a corrugação de trilhos pode ser efetuada dentro da sub-rotina que altera a matriz de rigidez e que calcula a força de contato entre a roda e o trilho.

A seguir, em função da posição do veículo e utilizando as equações dadas por 4.33, determinamos os fatores de forma para o passo-de-tempo em análise e determinamos a matriz global de rigidez. Como a rigidez do contato entre a roda e o trilho é não-linear, a matriz global de rigidez depende dos deslocamentos da roda e do trilho no ponto de contato, como pode ser observado pela expressão 4.43. Para a determinação destas alterações da matriz global de rigidez foi desenvolvida uma sub-rotina, denominada *Altera_mat_rig*, que recebe como parâmetro o vetor dos deslocamentos do sistema dinâmico. Esta sub-rotina será detalhada em uma seção a seguir.

Em seguida, fazemos a determinação do vetor resíduo devido ao desequilíbrio nodal. Como já vimos anteriormente, $\nabla f(\{q\}_{n+1})$ representa o vetor resíduo e é determinado através da seguinte expressão:

$$\nabla f(\{q\}_{n+1}) = [M_g] \{\ddot{q}\}_{n+1} + [C_g] \{\dot{q}\}_{n+1} + [K_g] \{q\}_{n+1} - \{F\}_0,$$

onde $\{F\}_0$ é o vetor que representa o peso próprio do sistema dinâmico, e os vetores $\{q\}_{n+1}$, $\{\dot{q}\}_{n+1}$ e $\{\ddot{q}\}_{n+1}$ são as previsões das variáveis de estado do sistema obtidas pelo esquema Newmark.

A primeira direção de descida é determinada de maneira similar ao método do gradiente, mas com uma correção para fazer com que esta direção esteja dentro da escala do problema, esta direção é multiplicada por um fator de escala igual ao inverso do elemento das primeiras linha e coluna da matriz jacobiana.

A partir deste ponto, determinamos a norma euclidiana do vetor resíduo e iniciamos um “laço” controlado pelo valor desta norma comparada a

um erro admissível. Se a norma for menor que o erro admissível, as previsões das variáveis de estado são as definitivas para este passo-de-tempo, caso contrário, iniciamos o processo de otimização. As previsões feitas pelo esquema Newmark são consideradas como os valores iniciais do processo. Com estes valores iniciais inicia-se uma sub-rotina de busca unidimensional, denominada *busca_unidimen*. Esta sub-rotina retornará com os valores das variáveis de estado que minimizarão a norma do vetor resíduo na direção de descida dada pelo vetor gradiente.

Posteriormente, fazemos a atualização da inversa da matriz hessiana. Para tanto, como já vimos anteriormente, utilizamos a atualização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, ou simplesmente *BFGS*, com fator de escala.

Finalizado o processo de otimização, as variáveis de estado obtidas são as definitivas para o passo-de-tempo em análise. Feito isto, o programa verifica se no passo-de-tempo recém analisado, o veículo se encontrava sobre o nó final do trecho (sobre o segundo dormente). Caso isto seja verdade, a solução do sistema dinâmico é “deslocada”.

Este deslocamento é realizado da seguinte forma: variáveis auxiliares são atribuídas com os valores das variáveis de estado referentes ao primeiro nó do primeiro trecho. Por sua vez, as variáveis de estado do primeiro nó são atribuídas com os valores das variáveis de estado do nó final do primeiro trecho. Este procedimento se repete para todos os trechos que constituem o “anel” de via. Finalmente, as variáveis de estado do nó inicial do último trecho são atribuídas com os valores armazenados nas variáveis auxiliares. As variáveis de estado referentes ao veículo não são deslocadas. Feito isto, o veículo é posicionado no nó inicial do primeiro trecho.

4.6.3 A sub-rotina *Altera_mat_rig*

início *Altera_mat_rig*

cálculo da deformação do trilho no ponto de contato

se deslocamento da roda > deformação do trilho **então**

início

cálculo da raiz quadrada da diferença entre as deformações

cálculo do fator devido à não-linearidade

fim

senão fator devido à não-linearidade nulo

determinação da força de contato entre a roda e o trilho

remontagem da matriz global de rigidez
 acoplamento dos modelos de via e veículo
fim

A seguir faremos uma descrição mais detalhada das etapas constituintes desta sub-rotina. Com os dados relativos aos deslocamentos e com os fatores de forma, calculamos a deformação do trilho segundo a expressão 4.37, que pode ser adicionada com o valor da deformação devida à irregularidade, caso seja necessário. Assim, temos

$$w_0 = [N] \{q\} + h_f,$$

onde w_0 é a deformação do trilho no ponto de contato, $[N]$ são as funções de forma e h_f é a deformação devida à irregularidade. Em seguida é feita uma comparação entre o deslocamento da roda e a deformação do trilho. Se o deslocamento da roda for maior, existe o contato e determinamos um *fator* de não-linearidade dado por:

$$fator = C_H \sqrt{(y_R - w_0)},$$

onde C_H é a constante de mola de Hertz para o contato não-linear e y_R é o deslocamento da roda. Se o deslocamento da roda for menor, ocorre a perda de contato entre a roda e o trilho e o fator de não-linearidade é nulo.

Caso exista o contato, a força de contato F_T é obtida a partir da seguinte expressão:

$$F_T = fator \times (y_R - w_0).$$

Como a matriz global de rigidez é modificada sempre que ocorre mudanças nos deslocamentos e acoplamento entre os modelos de via e veículo, é mais simples remonta-la do que tentar fazer as correções necessária. Isto é feito através da sub-rotina *Matriz_global*. Posteriormente, fazemos o acoplamento entre os dois modelos utilizando as expressões que aparecem no sistema de equações 4.43.

Esta sub-rotina é de extrema importância no processo de simulação, pois sempre que houver modificações nos deslocamentos do sistema dinâmico, estes provocam alterações na matriz global de rigidez devido à internalização do contato não-linear entre a roda e o trilho.

Capítulo 5

Aplicação do modelo e resultados

5.1 Considerações iniciais

Como já vimos anteriormente, o desenvolvimento dos modelos dinâmicos não-lineares da interação entre veículo e via ferroviários só têm se justificado para a análise dos efeitos dinâmicos que eventuais irregularidades existentes na via ou na roda do veículo tenham sobre a força de contato, devido às altas frequências atuantes. Para a análise de solicitações dinâmicas devidas à passagem normal da composição ferroviária ou sobre o estudo de estabilidade a altas velocidades, modelos analíticos lineares são mais indicados, inclusive por sua simplicidade de implementação e utilização, como bem nos mostra o trabalhos desenvolvidos por Wickens[27], Fortin[76], Sauvage[28], Torio[93] e Prud'homme[21]. Nesta situação a via é considerada perfeita, sem nenhuma irregularidade, o mesmo ocorrendo em relação às condições do material rodante.

Irregularidades da via como a falta de fixações ou a falta de dormentes também podem ser analisadas com este tipo de modelo. No caso das fixações basta fazer seus coeficientes de amortecimento e de rigidez serem nulos no dormente onde ocorre a falta da fixação. No caso da falta de dormentes, basta fazer igual a zero todos os valores dos coeficientes do subsistema composto pelo dormente e a fixação no ponto do dormente faltante.

Para irregularidades no rolamento da composição ferroviária, tais como trilhos corrugados e “plano-na-roda”, há a necessidade de se alterar o mo-

delo de excitação. Neste capítulo faremos uma apresentação sobre estes dois tipos de irregularidades encontradas na operação ferroviária e normalmente encontradas na literatura (trilhos corrugados e “plano-na-roda”), o que nos permitirá fazer a validação do modelo por nós desenvolvido. Em seguida faremos uma discussão sobre os parâmetros relativos às características físicas da via e que são utilizadas no desenvolvimento da simulação. Posteriormente, aplicaremos o modelo na análise de algumas destas irregularidades em vias brasileiras.

5.2 As irregularidades analisadas

5.2.1 Trilhos corrugados

A corrugação do trilho é um fenômeno que tem como característica o aparecimento na superfície de rolamento do trilho de ondulações, com comprimento variando entre 40 e 100 mm e com amplitudes de até 0,2 mm. Estas ondulações podem ocorrer em uma grande variedade de situações na via férrea, tanto em trechos em tangente como em curva, e em locais onde as velocidades predominantes podem variar entre 18 e 180 km/h.

O efeito mais visível das corrugações é a geração de ruído a altas frequências quando da passagem da composição ferroviária, mas não é o único. Segundo Clark et al. [39], geralmente as corrugações levam ao aumento das taxas de deterioração da via, envolvendo a fragmentação das placas de apoio dos trilhos, seguida por perda da força de aperto dos grampos dos trilhos e, eventualmente, os grampos inseridos nos dormentes são perdidos, provocando a perda das fixações entre o trilho e os dormentes. Ao mesmo tempo, a taxa de desagregação do material do lastro é aumentada e em vias com trilhos corrugados é bem mais difícil manter o alinhamento vertical da via.

No nosso modelo, a deformação devida à corrugação do trilho deve ser adicionada à sua deflexão. A deformação do trilho é determinada admitindo-se que a forma da irregularidade é a de uma ondulação senoidal pura, dada por

$$h_c = \Delta_c \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi Vt}{\lambda_c}\right),$$

onde h_c é deformação do trilho devido à corrugação; Δ_c é a amplitude máxima da corrugação; V é a velocidade da composição ferroviária; λ_c é o compri-

mento da corrugação e t é o tempo decorrido na simulação. Desta forma, temos que a deflexão do trilho será dada por

$$w_0^* = w_0 + h_c = [N] \{q\} + h_c.$$

A deformação do trilho devida à irregularidade é determinada no início da sub-rotina *prox_passo* e é posteriormente utilizada no cálculo da deflexão do trilho na sub-rotina *Altera_mat_rig*.

5.2.2 O “plano-na-roda” (*flat*)

Esta irregularidade aparece como consequência do travamento da roda do veículo em operações de frenagem, com a roda deslizando ao longo do trilho. A fricção criada por este travamento esmerilha uma região plana (o *flat*) na superfície de rolamento da roda. O efeito deste tipo de irregularidade é provocar forças e tensões muito altas na via férrea e nos veículos. Segundo Newton e Clark[40], dependendo do tamanho da irregularidade, do tipo de veículo e da velocidade, as tensões podem ser suficientes para provocar a falência final da via, sózinha ou em conjunto com outras irregularidades, ou pode dar início a um processo de aparecimento de fraturas devidas à fadiga. Um “plano-na-roda” grande constitui-se em um grave risco à segurança e os menores contribuem para a deterioração da via e, conseqüentemente, para o aumento dos custos de manutenção por danificar trilhos, dormentes e o lastro. Além disso, reduz o nível de conforto dos passageiros nos carros e gera um ruído incômodo.

No caso da irregularidade do tipo “plano-na-roda”, a profundidade pode ser determinada através da seguinte expressão:

$$h_f = \frac{d}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_f}{l_f} \right), \quad (5.1)$$

onde o valor de d é obtido através da relação

$$d = \frac{l_f^2}{16R_c},$$

onde h_f é a profundidade do *flat*, x_f é a distância dentro do *flat*, d é a máxima profundidade, l_f é o comprimento do *flat* e R_c é o raio da roda.

Entretanto, diferentemente do caso da irregularidade devida à corrugação dos trilhos que atua sempre, esta irregularidade somente atua quando

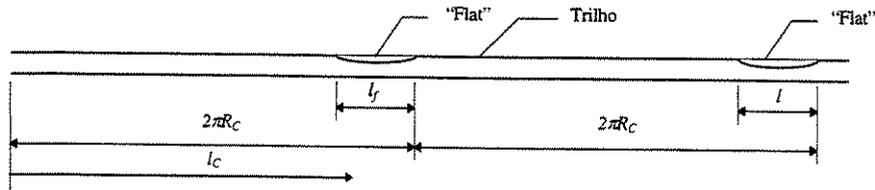


Figura 5.1: Posicionamento da irregularidade ao longo do trilho

o *flat* entra em contato com o trilho. Para podermos tratar esta característica em nosso modelo de simulação, transferimos o *flat* para o trilho, conforme podemos visualizar na figura 5.1.

O valor da variável l_c é igualada a zero no início do processo de simulação e a cada passo de tempo é adicionado o valor de Δl , que corresponde ao espaço percorrido pela roda no passo-de-tempo. Se neste passo-de-tempo em análise o valor de l_c for menor que a diferença entre o perímetro da roda e o comprimento do *flat*, ou seja $l_c < 2\pi R_c - l_f$, o contato entre a roda e o trilho está fora do *flat* e, neste caso, h_f é igual a zero. Mas, se for maior que esta diferença e menor que o perímetro, o contato está dentro do *flat* e a profundidade h_f é determinada segundo a equação 5.1, com o valor de x_f dado por

$$x_f = l_c - (2\pi R_c - l_f).$$

Se o valor de l_c for maior ou igual ao perímetro da roda, ou seja, $l_c > 2\pi R_c$, ou seja, a roda já passou pelo *flat*, ao valor de l_c é subtraído o perímetro da roda e o processo inicia-se novamente, repetindo-se até o final da simulação.

Aqui, como no caso do trilho corrugado, à deformação do trilho deve ser adicionada profundidade do *flat*, ou seja:

$$w_0^* = w_0 + h_f = [N] \{q\} + h_f.$$

A deformação do trilho devida à irregularidade é determinada no início da sub-rotina *prox_passo* através do seguinte segmento de programa:

Início *prox_passo*

atualização das variáveis relacionadas à posição do veículo e do tempo de simulação

atualização do espaço percorrido pela roda

se espaço percorrido pela roda > perímetro da roda **então**

subtrair o perímetro

se espaço percorrido pela roda > (perímetro - comprimento do flat) **então**

início

cálculo da distância dentro do flat

cálculo da deformação devida ao flat

fim

senão deformação devida ao flat igual a zero

determinação dos fatores de forma

inicialização da matriz hessiana := matriz identidade

(cont.)

e é posteriormente utilizada no cálculo da deflexão do trilho na sub-rotina *Altera_mat_rig*.

5.2.3 A deformação devida ao cisalhamento

Um dos resultados mais importantes que podem ser obtidos para a análise de tensões na via férrea devido à sua interação dinâmica com os veículos é a determinação da deformação devida ao cisalhamento. Nos modelos que se utilizam dos elementos finitos de viga Euler-Bernoulli e de Timoshenko com quatro graus de liberdade, esta deformação pode ser estimada em função das derivadas das funções de forma e dos valores das variáveis nodais. Segundo a Teoria da Elasticidade, temos que a deformação devida ao cisalhamento (γ_{xy}) pode ser determinada através da seguinte expressão:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5.2)$$

onde $v(x, t)$ é o deslocamento vertical da estrutura e $u(x, y)$ é o deslocamento axial. Nos elementos finitos por nós utilizados não existe grau de liberdade associado ao deslocamento axial, portanto $u(x, y) = 0$. Assim, reescrevendo a equação 5.2, temos que

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vimos no capítulo anterior que os deslocamentos verticais podem ser

expressos através da equação 4.2, ou seja

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) v_i(t),$$

onde $\psi_i(x)$ são as funções de forma e $v_i(t)$ são os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito. Assim sendo, a deformação devida ao cisalhamento será

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{d\psi_i(x)}{dx} v_i(t).$$

No caso do modelo com elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade, sendo $v(x, t)$ o deslocamento transversal total da linha neutra da viga, $\alpha(x, t)$ a rotação normal da seção transversal e $\beta(x, t)$ o ângulo de cisalhamento, temos que

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{dx} - \beta(x, t). \quad (5.3)$$

Assim, utilizando a aproximação dada pela equação 5.3 e a equação 5.2 reescrita, temos que

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v(x, t)}{dx} - \alpha(x, t) = \beta(x, t). \quad (5.4)$$

Assumimos que $v(x, t)$ e $\alpha(x, t)$ podem ser aproximados por funções polinomiais cúbicas da seguinte forma:

$$v = \sum_{i=1}^8 \psi_i(\xi) v_i \text{ e } \alpha = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi) v_i,$$

onde $\xi = x/l$, $-1 \leq \xi \leq 1$, l é o comprimento do elemento finito, $\psi_i(\xi)$ e $\varphi_i(\xi)$ são as funções de forma, representadas por expressões polinomiais cúbicas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_2 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4; \\ \psi_3 &= \varphi_4 = l(1 - \xi)(1 - \xi^2)/4; \\ \psi_5 &= \varphi_6 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4; \\ \psi_7 &= \varphi_8 = -l(1 + \xi)(1 - \xi^2)/4; \text{ e} \\ \psi_2 &= \psi_4 = \psi_6 = \psi_8 = \varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a forma final da expressão 5.4 será dada por

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^8 \frac{d\psi_i(\xi)}{d\xi} v_i(t) - \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi) v_i(t).$$

5.3 A Validação do Modelo Desenvolvido

Existem muito poucos trabalhos na literatura onde dados experimentais estivessem disponíveis para o desenvolvimento de análises comparativas. Para a validação do modelo foram utilizados dados experimentais obtidos por pesquisadores ingleses, ligados à *British Railways*, e canadenses, relacionados aos problemas de trilhos corrugados e do “plano-na-roda”. A seguir faremos uma análise comparativa dos resultados obtidos com o nosso modelo com resultados experimentais e resultados teóricos obtidos com modelos com formulações diferentes.

5.3.1 O problema dos trilhos corrugados

Resultados experimentais

Em maio de 1979 a *British Railways* desenvolveu testes de campo com a finalidade de avaliar o efeito da corrugação dos trilhos sobre os elementos da via férrea. De forma a fornecer uma excitação uniforme, os trilhos do trecho de teste foram especialmente esmerilhados de forma a simular uma corrugação com comprimento igual a 60 mm e com amplitude de 0,23 mm (uma corrugação muito forte), em um trecho de 6 m ao longo dos dois trilhos.

Como relatam Clark et al.[39], foram colocados *strain gauges* para medir as tensões devidas ao cisalhamento e à flexão vertical em um trecho de trilho longo soldado, com fixações Pandrol[®] sobre dormentes de concreto, apoiados sobre uma camada de lastro de pedra britada. Devido a problemas que ocorreram durante o processo de soldagem, os picos da corrugação em cada trilho estavam 11 mm fora da linha, o que dava um erro de fase na ordem de 66 graus. Dois dormentes foram instrumentados para medir a tensão longitudinal e transdutores de deslocamentos foram colocados para monitorar os deslocamentos verticais do dormente em uma das pontas e próximo da placa de apoio do trilho. A compressão da placa de apoio foi medida através de sondas de capacitância colocadas entre o dormente e o trilho. A

figura 5.2 nos apresenta a configuração do posicionamento dos equipamentos de medição utilizados.

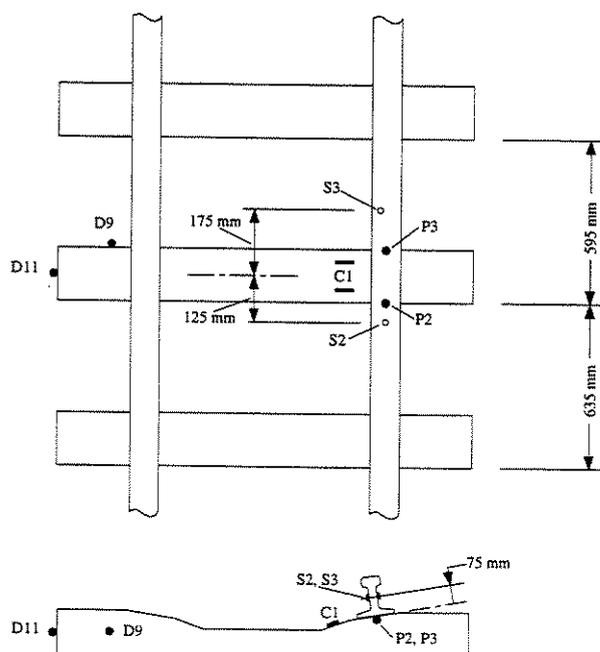


Figura 5.2: Configuração da instrumentação de medição

Na figura *S* representa os *strain gauge* colocados na alma do trilho e *C* os colocados na superfície do dormente para medir a tensão longitudinal, *D* os transdutores colocados para medir o deslocamento vertical do dormente e *P* são as sondas de capacitância.

Uma composição ferroviária com um vagão laboratório trafegou sobre o trecho com velocidades variando entre 3 e 45 m/s, variando os dois sentidos para verificar se a direção tinha alguma influência sobre os resultados. Os sinais dos transdutores foram armazenados analogicamente em fitas magnéticas e, posteriormente, digitalizados. Entre os resultados obtidos, temos séries históricas do deslocamento vertical da ponta do dormente em função de três velocidades diferentes (figura 5.3) e da deformação devida ao cisalhamento da alma do trilho (figura 5.4), bem como os deslocamentos obtidos pelo carro laboratório em função da frequência de excitação e da velocidade da roda (figura 5.5).

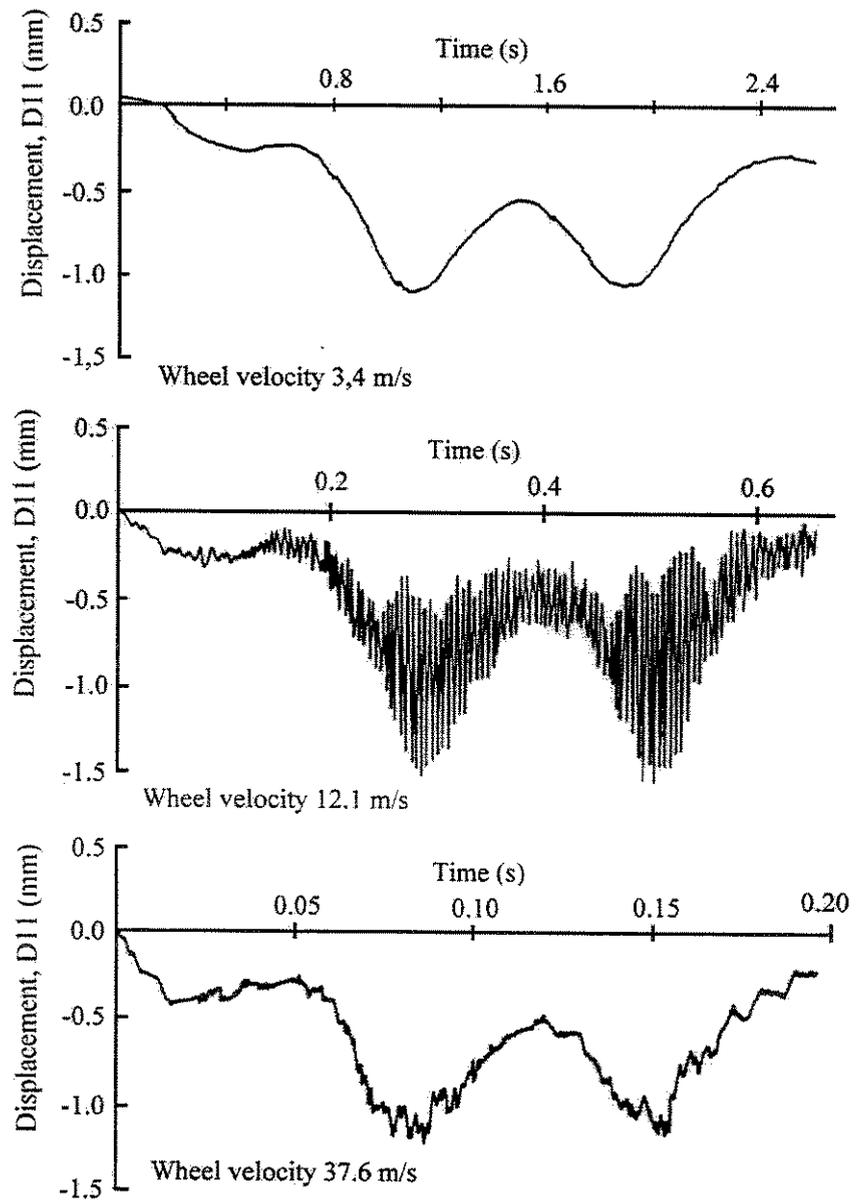


Figura 5.3: Série histórica experimental do deslocamento da ponta do dormente segundo Clark et al. [39, Fig. 8, pag. 70]

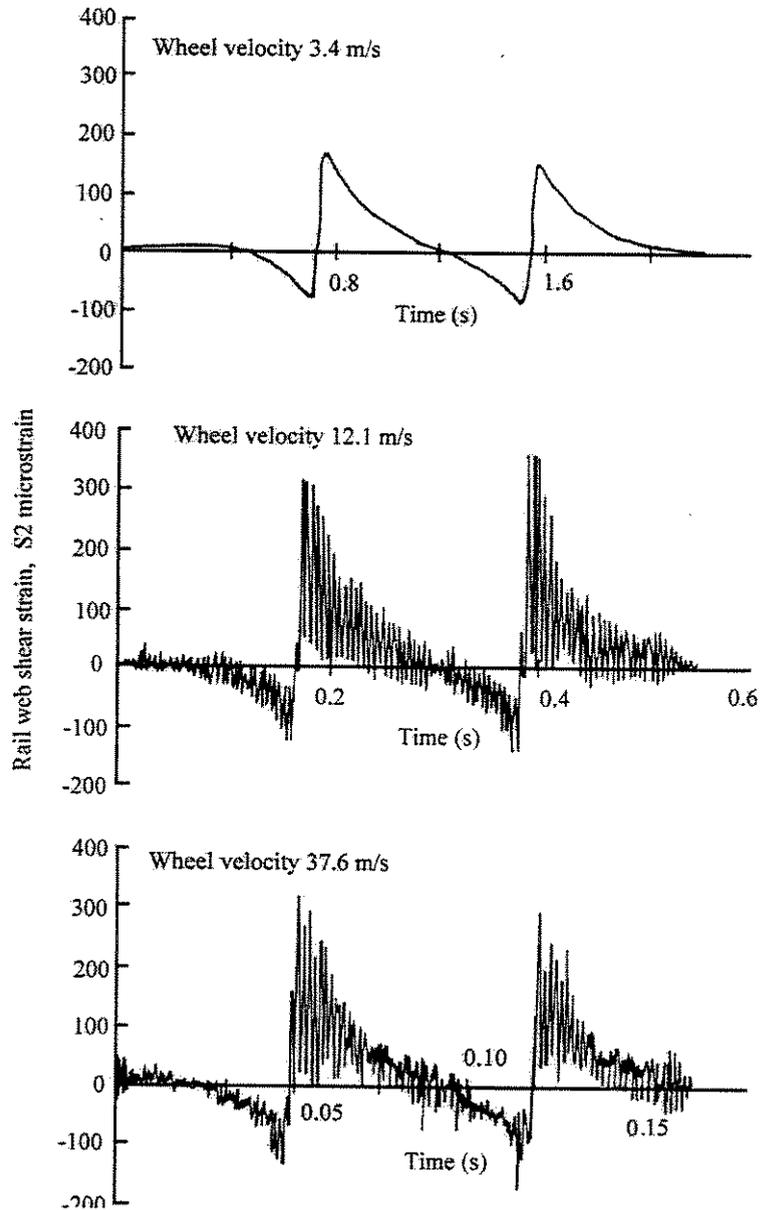


Figura 5.4: Série histórica experimental da deformação devida ao cisalhamento na alma do trilho segundo Clark et al.[39, Fig. 7, pg. 69]

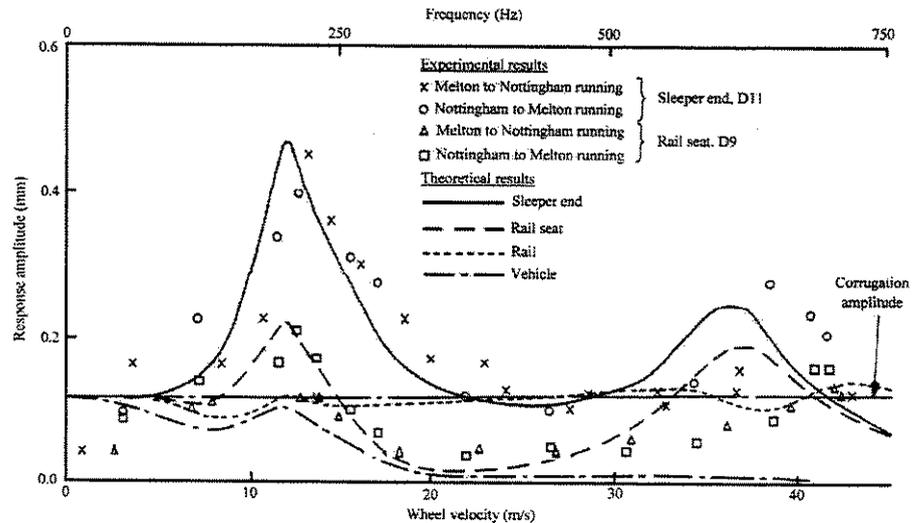


Figura 5.5: Deslocamentos obtidos pelo carro laboratório segundo Clark et al.[39, Fig. 12, pag. 71]

Modelagem teórica

Paralelamente ao estudo de campo, Clark et al.[39] desenvolveram um modelo teórico para estudar o efeito da corrugação dos trilhos. O modelo segue a estratégia de separar o sistema dinâmico na interface roda-trilho. Isto permite que se tenha a solução de dois sistemas lineares conectados por uma mola de contato hertziana não-linear.

Segundo os autores, nas condições operacionais existentes na *British Railways*, para corrugações com comprimento de 50 mm, as frequências de passagem chegam até 1300 Hz. Associado a este fato, foi observado que a corrugação desenvolve-se normalmente próxima ao dormente e depois expande-se para todo o trilho. Isto levou a suposição que o modelo de via necessário para descrever a resposta dinâmica do efeito da corrugação deveria representar os dormentes discretamente. Além disso, como os dormentes possuem vários modos de flexão vertical na faixa de frequência de 0 a 1300 Hz, foi considerado essencial modelar os dormentes como vigas flexíveis em vez de massas concentradas.

Assim, modelo de via consiste de N baias (trechos de trilho) idênticas, com comprimento igual ao espaçamento entre os dormentes, com rigidez

vertical à flexão e inércia, mais um dormente também com rigidez vertical à flexão e inércia. Em cada final do modelo os trilhos são fixados de modo que não possam sofrer deflexão ou rotação. Os dormentes são conectados aos trilhos por molas representando as placas de apoio e são apoiados sobre uma mola uniformemente distribuída representando a resiliência da camada de lastro. Como somente os movimentos verticais do sistema veículo-via são considerados, a via foi dividida ao longo do eixo longitudinal. O modelo é linear, não amortecido e resolvido através uma técnica de análise modal.

O modelo de veículo consiste como uma massa de rodeiro sob ação de uma carga estática. Os eixos do veículo são assumidos como estando separados o suficiente para gerar respostas separadas na via. Para poder comparar os resultados experimentais com os obtidos através da utilização do modelo, foi necessário determinar alguns parâmetros do local onde foram realizados os testes. Estes parâmetros eram os dados relativos à placa de apoio e a rigidez da camada de lastro. Uma amostra das placas de apoio foi removida da via e testada em laboratório. Uma série de testes de carga versus deflexão foi realizada com frequências de carregamento variando entre o carregamento estático até 15 Hz. Descobriu-se que a rigidez do lastro era dependente da frequência e, portanto, foi calculada para a frequência de passagem da corrugação obtida nos ensaios de campo.

A figura 5.6 nos mostra séries históricas para a força de contato entre a roda e o trilho e para o deslocamento do final do dormente previstas pelo modelo. Uma condição de regime pode ser observada, na qual a força de contato oscila na frequência de passagem da corrugação em torno da média (no caso a carga de roda estática). Podemos perceber que a amplitude da oscilação é maior perto dos dormentes. Segundo os autores, isto deve-se à uma maior massa de via nas proximidades dos dormentes, pois entre os dormentes a flexibilidade vertical à flexão do trilho ajuda a isolar a inércia do dormente. Este efeito se acentua quando a frequência de passagem da corrugação na faixa de 700 Hz, que corresponde ao modo de flexão do trilho fixado aos dormentes.

A figura nos mostra as variações na deflexão do final do dormente a medida que a roda se aproxima e depois se afasta. Podemos observar que a resposta teórica consiste de uma componente quasi-estática superposta com a alta frequência de oscilação devida à passagem da corrugação. Existem poucas evidências em relação à frequência de passagem dos dormentes. Podemos observar que a força de contato oscila em torno da carga de roda, variando dentro de uma faixa que tem como limites aproximados 12 kN (inferior) e 82

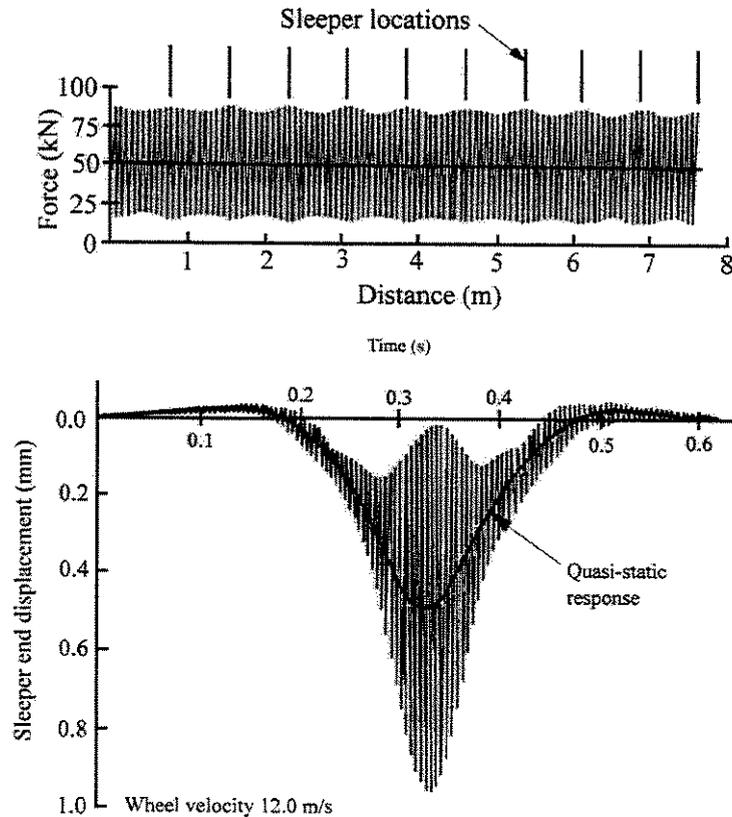


Figura 5.6: Força de contato e deslocamento do final do dormente previstas pelo modelo segundo Clark et al.[39, Fig. 10 e 11, pg. 71]

kN (superior).

Segundo Clark et al. a resposta do dormente depende muito da velocidade. Existe uma ressonância na faixa de 220 Hz, equivalente a uma velocidade da roda igual a 13 m/s, na qual a amplitude dinâmica do final do dormente alcança quatro vezes o valor da amplitude da corrugação (0,115 mm). Uma segunda ressonância ocorre em torno de 630 Hz, correspondendo a uma velocidade da roda igual a 37 m/s, onde a amplitude do final do dormente chega a três vezes a amplitude da corrugação. O modo de vibração no pico de baixa frequência corresponde à situação do dormente ficar pulando sobre as rigidezes do lastro e da placa de apoio, com pouca flexão. Entretanto,

to, no pico de alta frequência, o modo primário de vibração corresponde ao segundo modo de flexão do dormente sobre o lastro, modificado pela presença da placa de apoio. A figura 5.7 nos apresenta as formas teóricas da deflexão do dormente nestas duas ressonâncias.

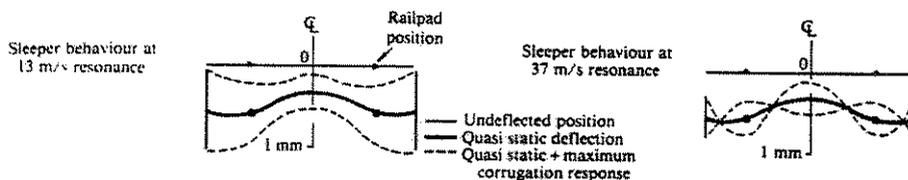


Figura 5.7: Formas da deflexão teórica do dormente segundo Clark et al. [39, Fig. 14, pg. 72]

Uma observação importante está relacionada ao valor da constante de Hertz para o contato não-linear utilizada no modelo. Foi adotado uma constante igual a $3,25 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$. Na literatura em geral, como bem podemos ver nos trabalhos de Dong et al. [45] e de Newton e Clark [40], o valor normalmente utilizado é igual a $1,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^{3/2}$. Não foi possível descobrir na literatura disponível o porque desta discrepância de valores, já que ambos se referem ao contato entre roda e trilho feitos de aço. Para podermos desenvolver uma análise comparativa adotamos este valor no desenvolvimento de nossa análise.

A aplicação do modelo desenvolvido

O modelo desenvolvido foi aplicado na análise dinâmica da via com trilhos corrugados utilizando os parâmetros utilizados por Clark et al. [39] em seu estudo. Os únicos parâmetros a serem acrescentados se referem aos coeficientes de rigidez e amortecimento da suspensão primária do veículo e ao valor da massa suspensa sobre a roda. Os parâmetros relativos à suspensão primária utilizados são os comumente utilizados na modelagem dinâmica de veículos ferroviários, no nosso caso adotamos um valor de 750 kN/m como coeficiente de rigidez e um valor igual a 12 kNs/m para o coeficiente de amortecimento. O valor da massa suspensa sobre a roda é determinado a partir do valor da carga de roda. Admitimos que a carga de roda é igual ao valor do peso da massa da roda mais a massa suspensa.

Outro parâmetro importante é o número de intervalos de tempo necessários para a roda trafegar de um dormente a outro. O intervalo de tempo é função da frequência de excitação. A frequência de excitação pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\omega = \frac{2\pi V}{\lambda_c},$$

onde V é a velocidade da roda e λ_c é o comprimento da corrugação. Com a frequência de excitação determinada e utilizando a expressão 3.67, conseguimos determinar o intervalo de tempo, ou seja $\Delta t = 2/\omega = \lambda_c/\pi V$. Com o valor do intervalo de tempo podemos determinar o número de intervalos de tempo necessários para a roda percorrer uma distância igual ao espaçamento entre os dormentes, ou seja

$$n = \frac{l}{V \times \Delta t}, \quad (5.5)$$

onde n é o número de intervalos e l é o espaçamento entre os dormentes. No trabalho de Clark et al.[39] foram obtidos valores experimentais para três velocidades diferentes (3,4 m/s - 12,24 km/h, 12,1 m/s - 43,56 km/h e 37,6 m/s - 135,36 km/h). Eram resultados experimentais obtidos para a deformação devida ao cisalhamento na alma do trilho(S2 na figura 5.2), para o deslocamento do final do dormente e do apoio do trilho (D11 e D9 na figura 5.2), mostrados nas figuras 5.3 e 5.4, e dados obtidos do carro laboratório (figura 5.5) . Foram obtidos resultados teóricos para estes parâmetros e para a força de contato (apresentados na figura 5.6), somente para a velocidade de 43,56 km/h (12,1 m/s).

Aplicamos o modelo desenvolvido para as mesmas velocidades e obtivemos valores teóricos para a força de contato, para a deformação devida ao cisalhamento no ponto de contato e para o deslocamento do dormente, utilizando as três formulações de elemento finito de viga (Euler-Bernoulli, Timoshenko com 4 e 8 graus de liberdade). Como em nossa formulação o dormente foi modelado como massa concentrada e não como uma viga, o deslocamento do dormente fornecido pelo nosso modelo pode ser comparado com os resultados experimentais e teóricos obtidos para o deslocamento do apoio do dormente (correspondente a D9 na figura 5.2). Para a velocidade de 12,1 m/s a frequência de excitação será aproximadamente igual a 1267 Hz, o que nos dá um intervalo de tempo igual a 1,58 milissegundos. Com este valor mais o espaçamento entre dormentes de 0,63 m e utilizando a expressão

5.5, obtemos o número de intervalos necessários para a roda percorrer entre dois dormentes (aproximadamente 33 intervalos). Por simplicidade, adotamos um número de intervalos igual a 40 para todas as velocidades. A seguir apresentamos os resultados obtidos para cada formulação.

Formulação com elemento finito de viga Euler-Bernoulli A figura 5.8 nos apresenta os resultados obtidos para o deslocamento do dormente para esta formulação para as três velocidades adotadas por Clark et al. em seu estudo. Podemos observar que a resposta consiste de uma componente quasi-estática com uma oscilação devida à frequência de passagem da corrugação superposta. Na figura 5.3 podemos observar que as máximas deflexões do final do dormente para as três velocidades analisadas são iguais a 0,635 mm para a velocidade da roda igual a 3,4 m/s; 0,957 mm para a velocidade igual a 12,1 m/s e 1,075 mm para a velocidade de roda igual a 37,6 m/s. Esta formulação levou a valores inferiores ou próximos aos determinados experimentalmente para o final do dormente (1,19 mm; 1,23 mm e 1,15 mm, respectivamente).

Entretanto, cabe ressaltar que os resultados experimentais obtidos se referem ao final do dormente. Observando a figura 5.5, onde são mostrados os deslocamentos medidos pelo carro laboratório, observamos que para a velocidade de 3,4 m/s a deflexão do final do dormente (D11) é praticamente igual à deflexão do apoio do trilho (D9); mas para a velocidade de roda igual a 12,1 m/s, a deflexão do final do dormente é duas vezes maior e para a velocidade de roda igual a 37,6 m/s existe uma diferença na ordem de 20 por cento. Assim, os resultados obtidos por esta formulação são satisfatórios para velocidades altas, mas são subestimados para baixa e média velocidades. Mas, se observarmos a figura 5.7 onde são apresentadas as formas teóricas para a deflexão do dormente nas duas ressonâncias observadas por Clark et al., veremos que no caso da primeira ressonância (velocidade de 13 m/s), a diferença entre as deflexões no final do dormente e no apoio do dormente seria na ordem de 25 por cento. Assim, para uma deflexão no final do dormente de 1,5 mm corresponderia a uma deflexão no apoio do trilho de 1,2 mm, de forma que o valor estimado pelo modelo (0,957 mm) pode ser considerada realista do ponto de vista teórico.

Podemos perceber um forte incremento do deslocamento do dormente em todas velocidades após a passagem da roda pelo dormente (reflexo do grande aumento da força de contato neste ponto, como poderemos observar

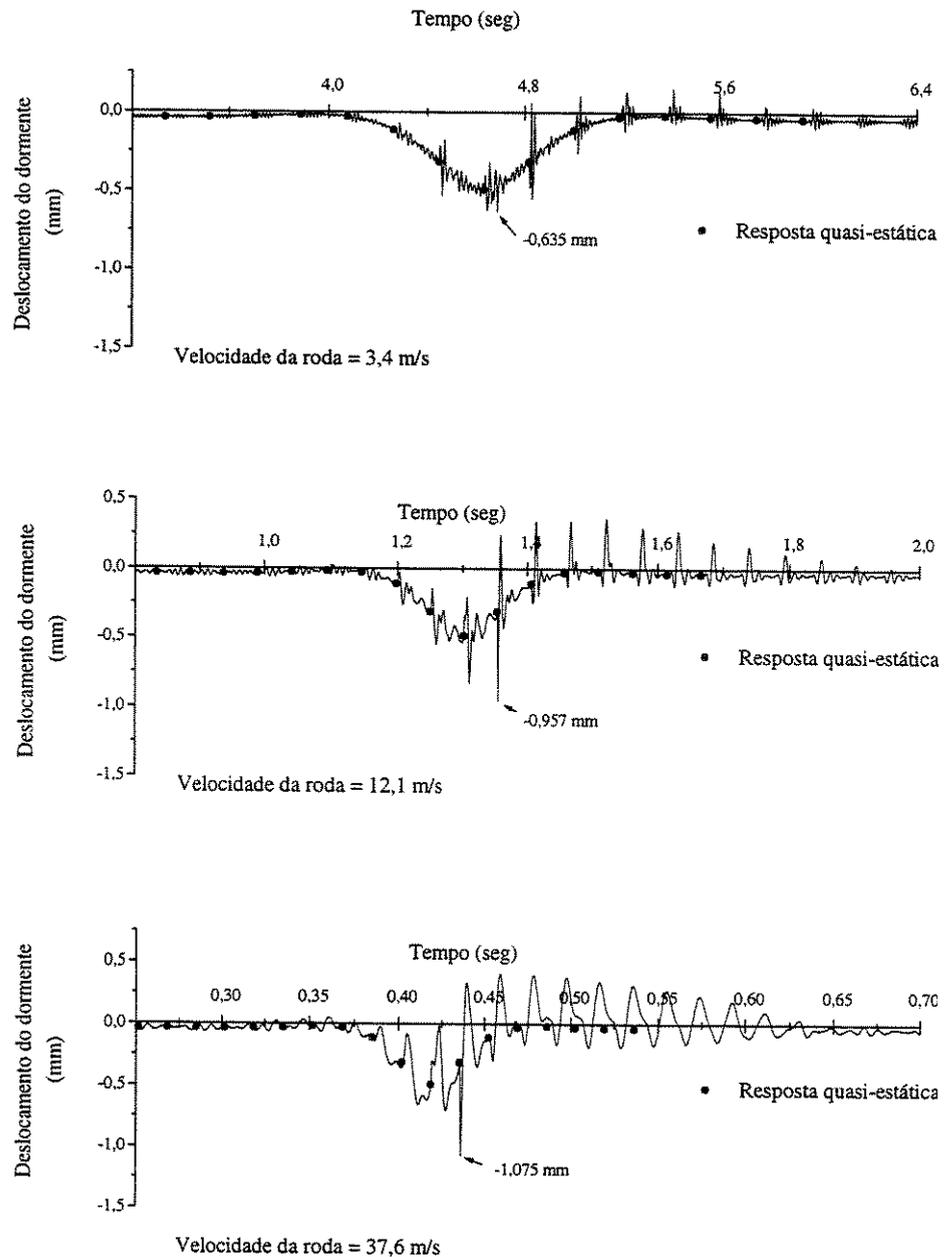


Figura 5.8: Resultados teóricos para a deflexão do dormente obtidos pelo modelo utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.

a seguir). Também observamos uma assimetria nos deslocamentos, pois os deslocamentos do dormente após a passagem da roda são maiores em relação aos observados antes de sua passagem. Isto deve-se à não-linearidade do lastro adotada no modelo, significando que o dormente foi levantado após a passagem da roda. Este levantamento cancela os coeficientes de rigidez e de amortecimento embaixo do dormente no modelo, provocando uma menor rigidez de todo o conjunto da via.

Em relação à deformação devida ao cisalhamento a figura 5.9 nos apresenta os resultados obtidos pelo modelo também para as três velocidades. Os resultados apresentados referem-se a uma série histórica relativa à deformação devida ao cisalhamento no meio da alma do trilho em um ponto situado a 0,125 m do centro do dormente, simulando a posição do *strain-gauge* S2 no trecho experimental. O importante é observar a “reversão” que ocorre no valor da deformação após a passagem da roda pelo ponto onde está colocada a instrumentação, bem visível nos resultados experimentais e confirmada pelos dados estimados pelo modelo. Os valores obtidos pelo modelo estão dentro da ordem de grandeza dos valores obtidos experimentalmente.

Em relação à força no contato entre a roda e o trilho a figura 5.10 nos apresenta as séries históricas obtidas pelo modelo para as três velocidades. Observamos que ocorre uma situação de regime na qual a força de contato oscila em torno de um valor médio (no caso a carga de roda estática, representada pelas linhas tracejadas na figura). É perceptível que a amplitude da oscilação é maior nas proximidades da localização dos dormentes. Isto pode ser atribuído a existência de uma maior massa de via nas vizinhanças dos dormentes e também pelo fato de que entre os dormentes a flexibilidade vertical à flexão do trilho ajuda a isolar a inércia do dormente. Estes resultados são semelhante aos resultados teóricos obtidos por Clark et al.[39] para a velocidade de 12,1 m/s, mostrados na figura 5.6, mas sem a mesma uniformidade. Isto pode ser atribuído à diferente implementação do modelo desenvolvido pelos autores, onde os dormentes foram modelados como vigas flexíveis ao invés de massas concentradas. A modelagem dos dormentes como massas concentradas acentua o efeito de massa da via maior nas vizinhanças dos dormentes, bem como um aumento de sua rigidez.

Para a velocidade de roda igual a 12,1 m/s observamos que a força no contato varia de zero (perda de contato) a 99,03 kN, uma faixa de variação maior do que a obtida pelo modelo teórico de Clark et al., que estima resultados entre 12 e 82 kN. Portanto, no modelo há uma superestimação dos valores, provavelmente devida aos mesmos fatores já citados anteriormente.

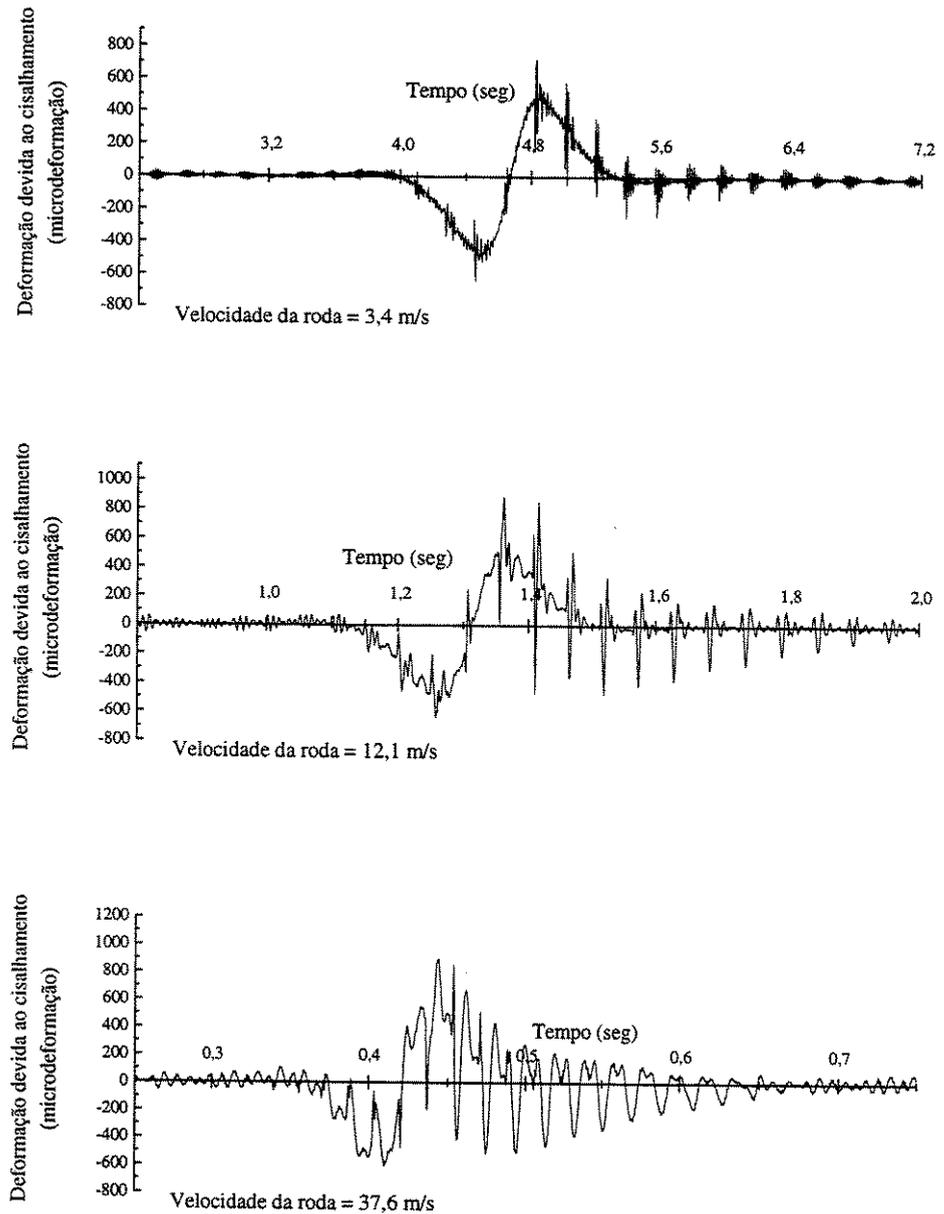


Figura 5.9: Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento no ponto de contato para o modelo com elemento finito de viga Euler-Bernoulli.

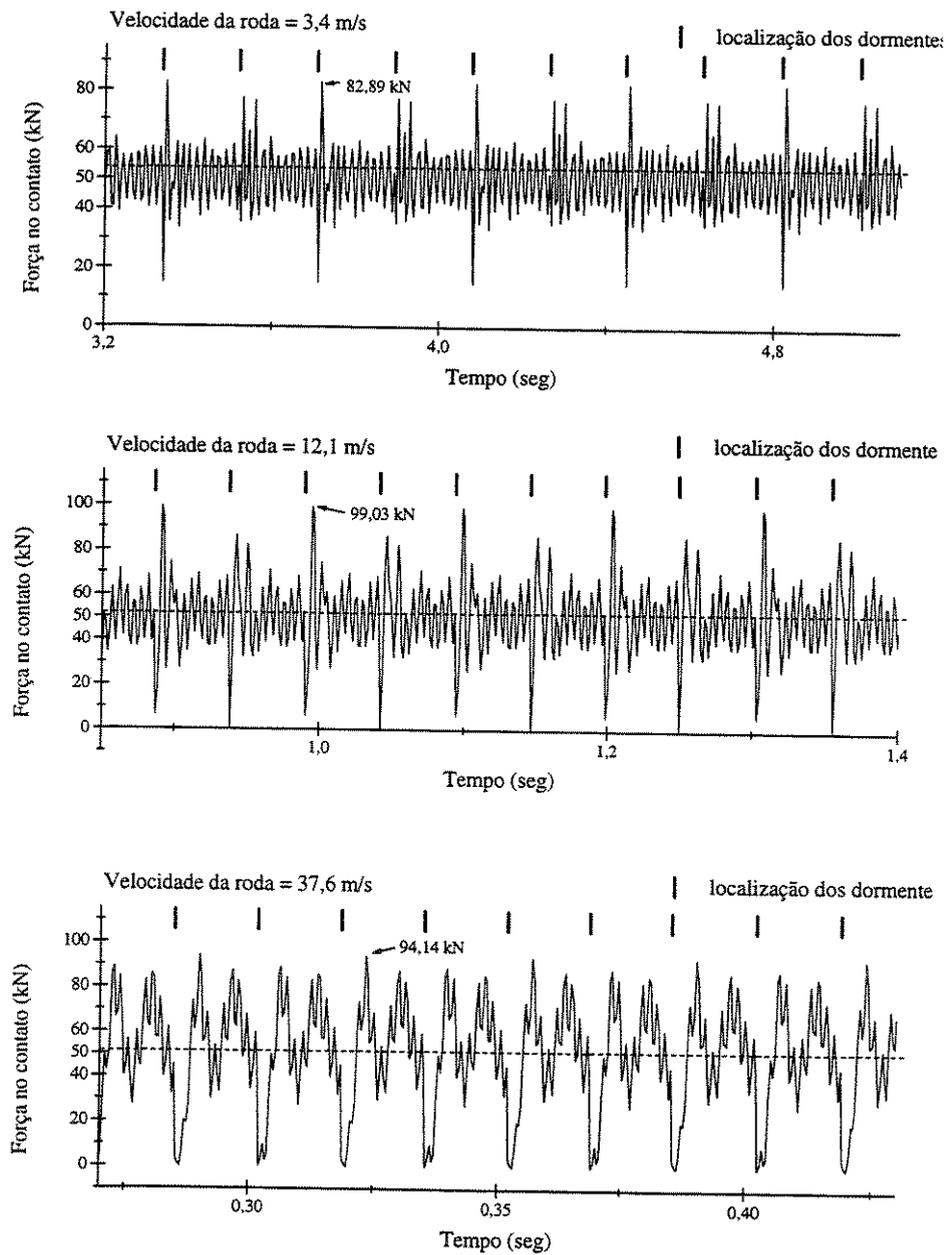


Figura 5.10: Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Euler-Bernoulli.

Formulações com elementos finitos de viga Timoshenko com 4 e 8 graus de liberdade Apresentaremos os resultados obtidos por estas formulações em conjunto, de forma a poder realizar uma análise comparativa mais eficiente, já que, teoricamente, deveriam fornecer resultados muito próximos. As figuras 5.11 e 5.12 nos apresentam os resultados obtidos para o deslocamento do dormente para as mesmas três velocidades já analisadas anteriormente. Podemos observar, que a exceção dos resultados obtidos para a baixa velocidade, onde ocorre uma pequena oscilação superposta à resposta quasi-estática, o dormente praticamente não oscila, sendo a resposta basicamente a quasi-estática. Provavelmente, a maior inércia do trilho devida à formulação de Timoshenko (leva-se em consideração a inércia devida à rotação da seção transversal), associada à do dormente, acabaram por isolá-lo; ou este aumento na inércia provocou mudanças nas frequências de ressonância, alterando os picos. Como podemos observar na figura 5.5, entre os dois picos de ressonância (velocidades entre 15 e 30 m/s) as deflexões dinâmicas são muito pequenas. Assim, se os picos de ressonância foram alterados os valores obtidos para as velocidades de roda iguais a 12,1 m/s e 37,6 m/s podem estar relacionados à frequências fora dos novos picos de ressonância.

Em relação à deformação devida ao cisalhamento as figuras 5.13 e 5.14 apresentam os resultados obtidos pelo modelo também para as três velocidades. Novamente, os resultados apresentados referem-se a uma série histórica relativa à deformação devida ao cisalhamento no meio da alma do trilho no ponto situado a 0,125 m do centro do dormente. Podemos perceber o forte aumento que ocorre no valor da deformação após a passagem da roda pelo dormente, bem visível nos resultados experimentais. Para a velocidade de 12,1 m/s, foi obtido experimentalmente (figura 5.4) uma deformação máxima (no caso, microdeformação) da ordem de 350. No modelo com elemento finito de 4 graus de liberdade foi estimada uma deformação máxima de 500, portanto, dentro da ordem de grandeza do valor obtido experimentalmente.

Em relação aos resultados obtidos pelo modelo com elemento finito de 8 graus de liberdade, os valores máximos da microdeformação estimados pelo para as três velocidades (aproximadamente igual a 150 para velocidade igual a 37,6 m/s e a 100 para 12,1 m/s para 3,4 m/s. Estes valores estão dentro da faixa de grandeza dos valores obtidos experimentalmente (300, 350 e 200, respectivamente).

Estes valores menores são devidos ao fato da formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com 8 graus de liberdade considerar integralmente a deformação devida ao cisalhamento na determinação da matriz de

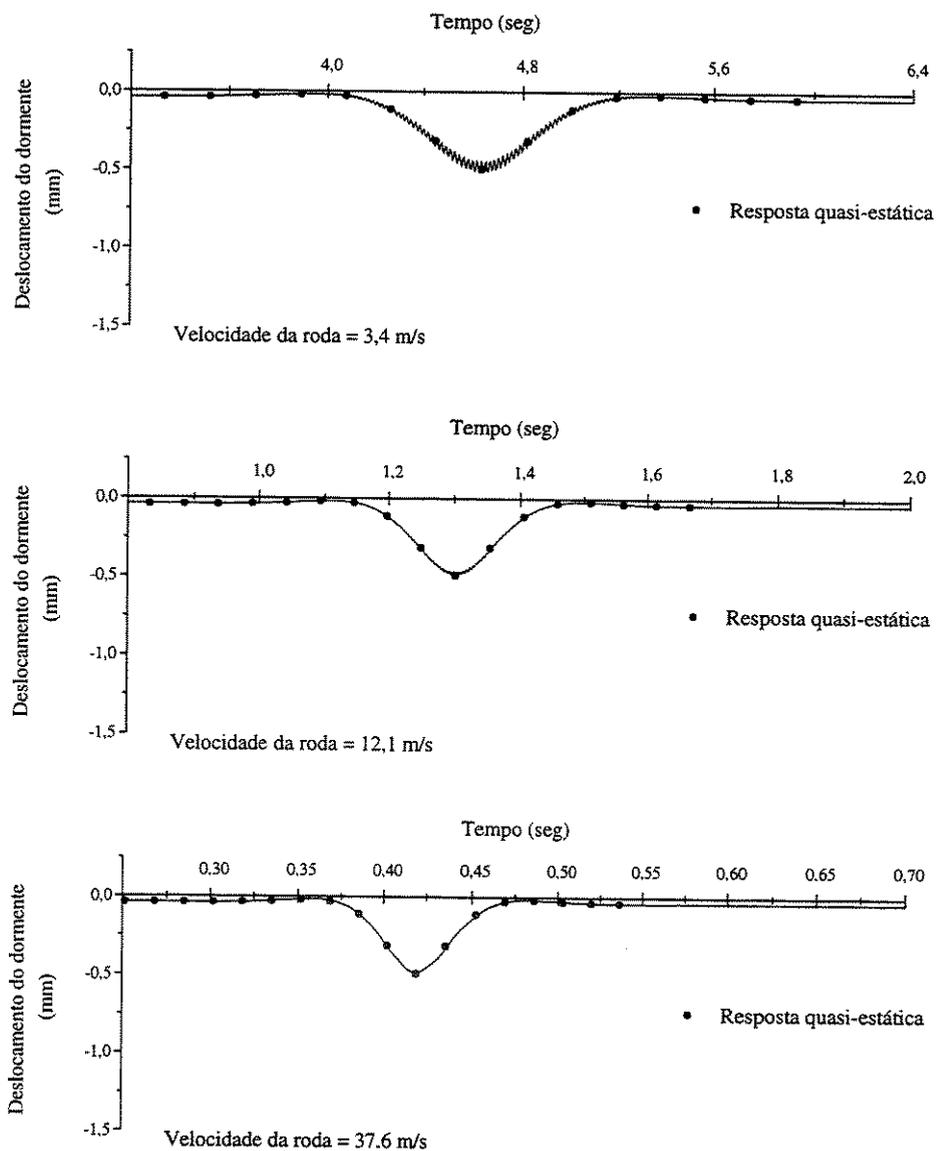


Figura 5.11: Resultados obtidos para o deslocamento do dormente pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.

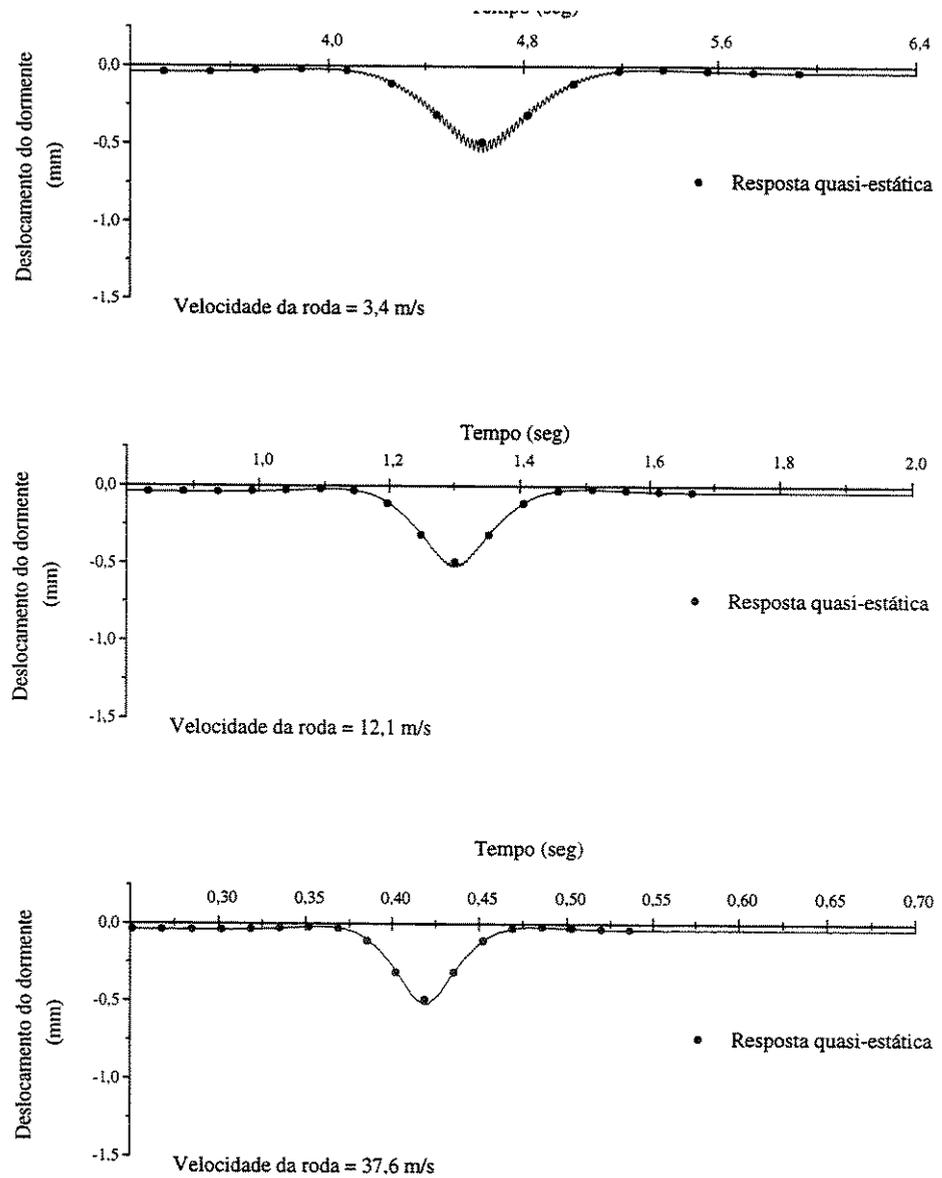


Figura 5.12: Resultados obtidos para o deslocamento do dormente pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.

rigidez, ao contrário da formulação com 4 graus de liberdade, onde isto é feito de uma forma aproximada.

Em relação à força no contato entre a roda e o trilho as figuras 5.15 e 5.16 nos apresentam as séries históricas obtidas pelos modelos para as três velocidades. Observamos que, como no caso da formulação com elemento finito de viga Euler-Bernoulli, ocorre uma situação de regime na qual a força de contato oscila em torno de um valor médio (no caso a carga de roda estática, representada pelas linhas tracejadas nas figuras). Percebemos que a amplitude da oscilação é maior nas proximidades da localização dos dormentes. Isto também pode ser atribuído a existência de uma maior massa de via nas vizinhanças dos dormentes, menor do que em relação à formulação anterior pois agora os trilhos possuem uma inércia maior, e também pelo fato de que entre os dormentes a flexibilidade vertical à flexão do trilho ajuda a isolar a inércia do dormente. Estes resultados são bem semelhantes aos resultados teóricos obtidos por Clark et al. [39] para a velocidade de 12,1 m/s, mostrados na figura 5.6, com um padrão de uniformidade semelhante.

A força no contato para esta velocidade varia entre 64,88 e 37,40 kN (4 graus de liberdade) e entre 64,85 e 37,42 kN (8 graus de liberdade), uma faixa de variação menor do que a obtida pelo modelo teórico de Clark et al., que estima resultados entre 12 e 82 kN. Em seu trabalho, Clark et al. [39, Fig. 13, pg. 72] apresentam resultados experimentais e teóricos para a força aplicada sobre a placa de apoio do trilho. Para a velocidade de 12,1 m/s, baseado em medições feitas pelo carro-laboratório, foi medida uma força de 40 kN. O valor teórico estimado pelos autores é da ordem de 54 kN. Desta forma, os valores estimados pelo nosso modelo com estas formulações (Timoshenko) são bem realistas.

Questões referentes à implementação computacional

Com a finalidade de verificar a estabilidade do esquema numérico de integração adotado, determinamos em cada passo de tempo o valor da energia total do sistema dinâmico. A figura 5.17 nos apresenta séries históricas para a energia total do sistema para as três formulações utilizadas, para a velocidade de roda igual a 12,1 m/s. Podemos perceber que o esquema de integração é estável, pois a energia máxima do sistema permanece constante ao longo de todo processo de integração.

Outra questão importante é o tempo de processamento dispendido para as diferentes formulações. O menor tempo é conseguido com a formulação de

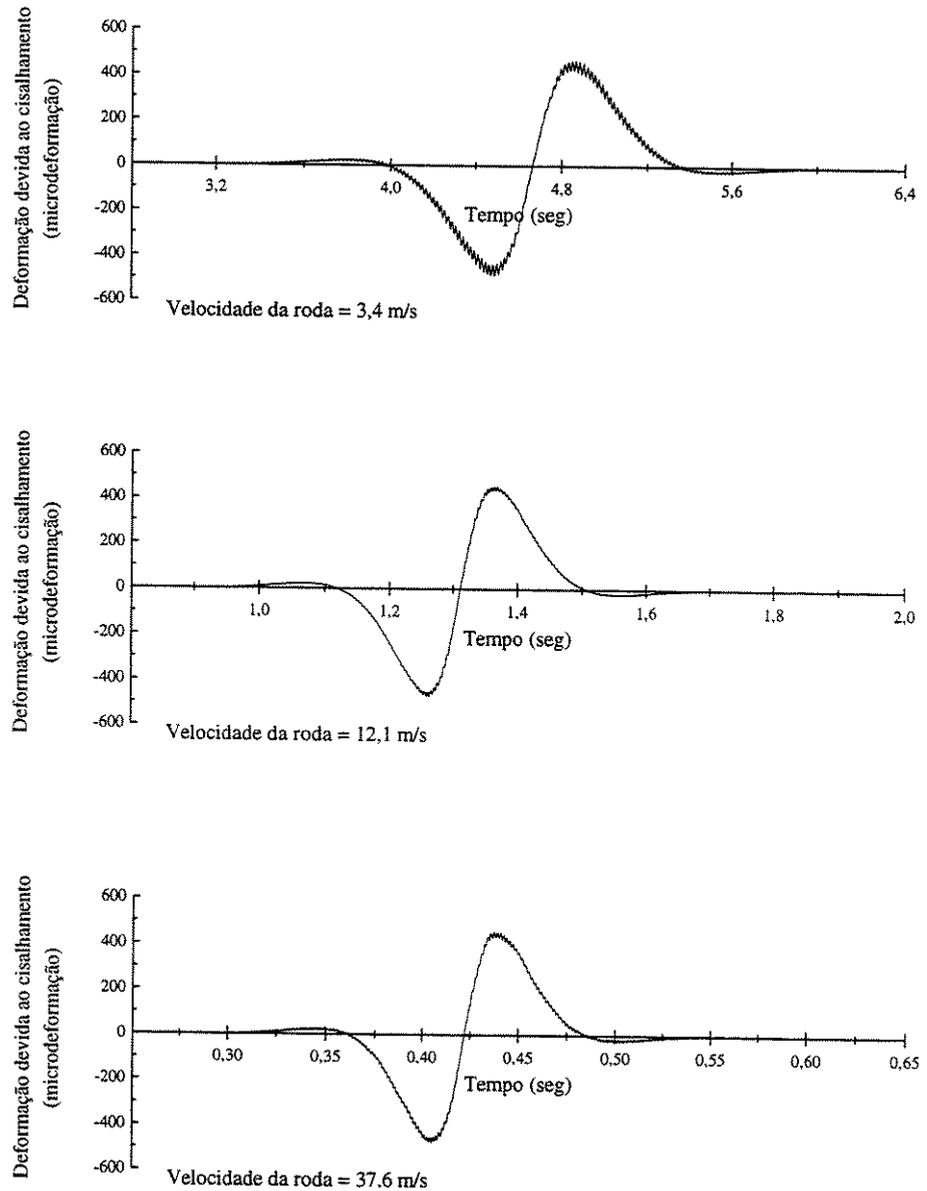


Figura 5.13: Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.

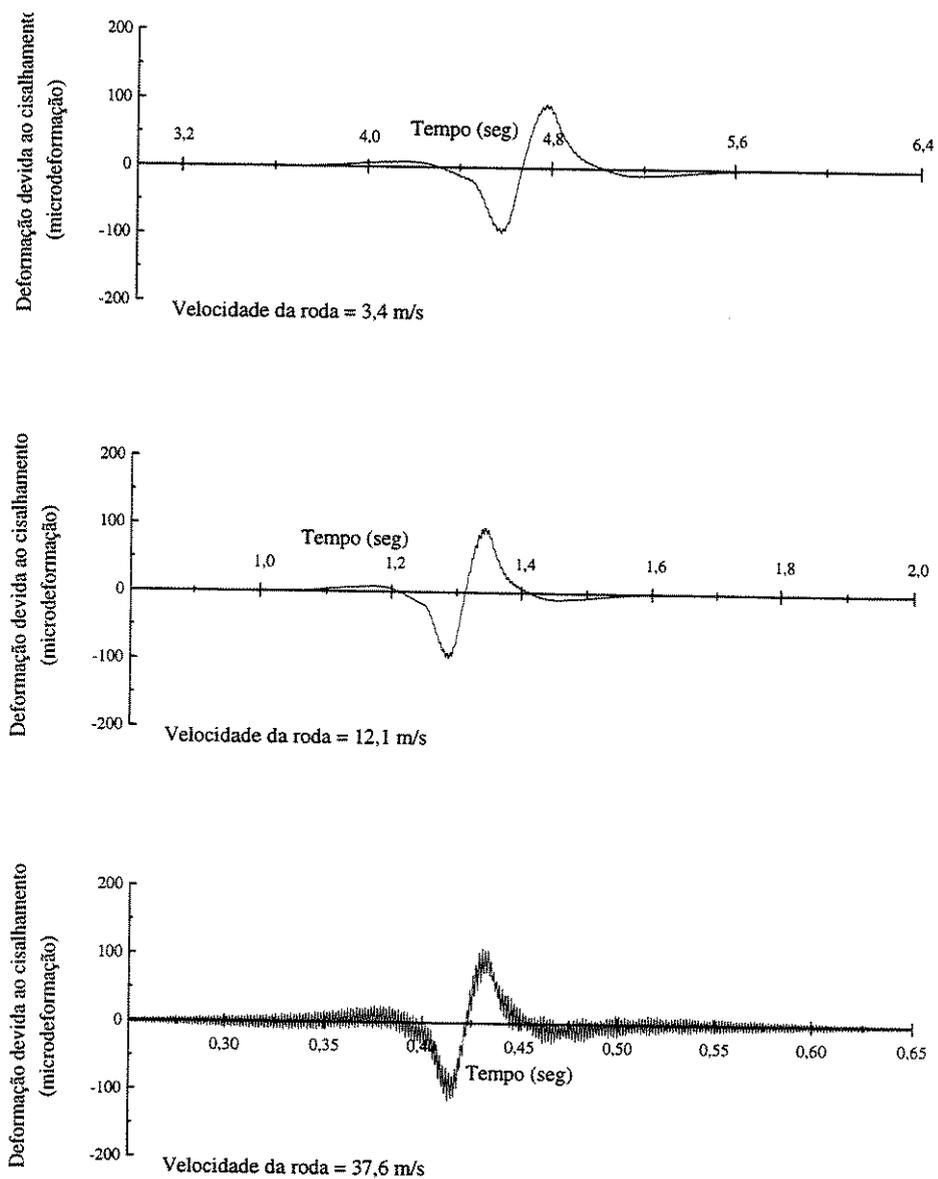


Figura 5.14: Resultados obtidos para a deformação devida ao cisalhamento pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.

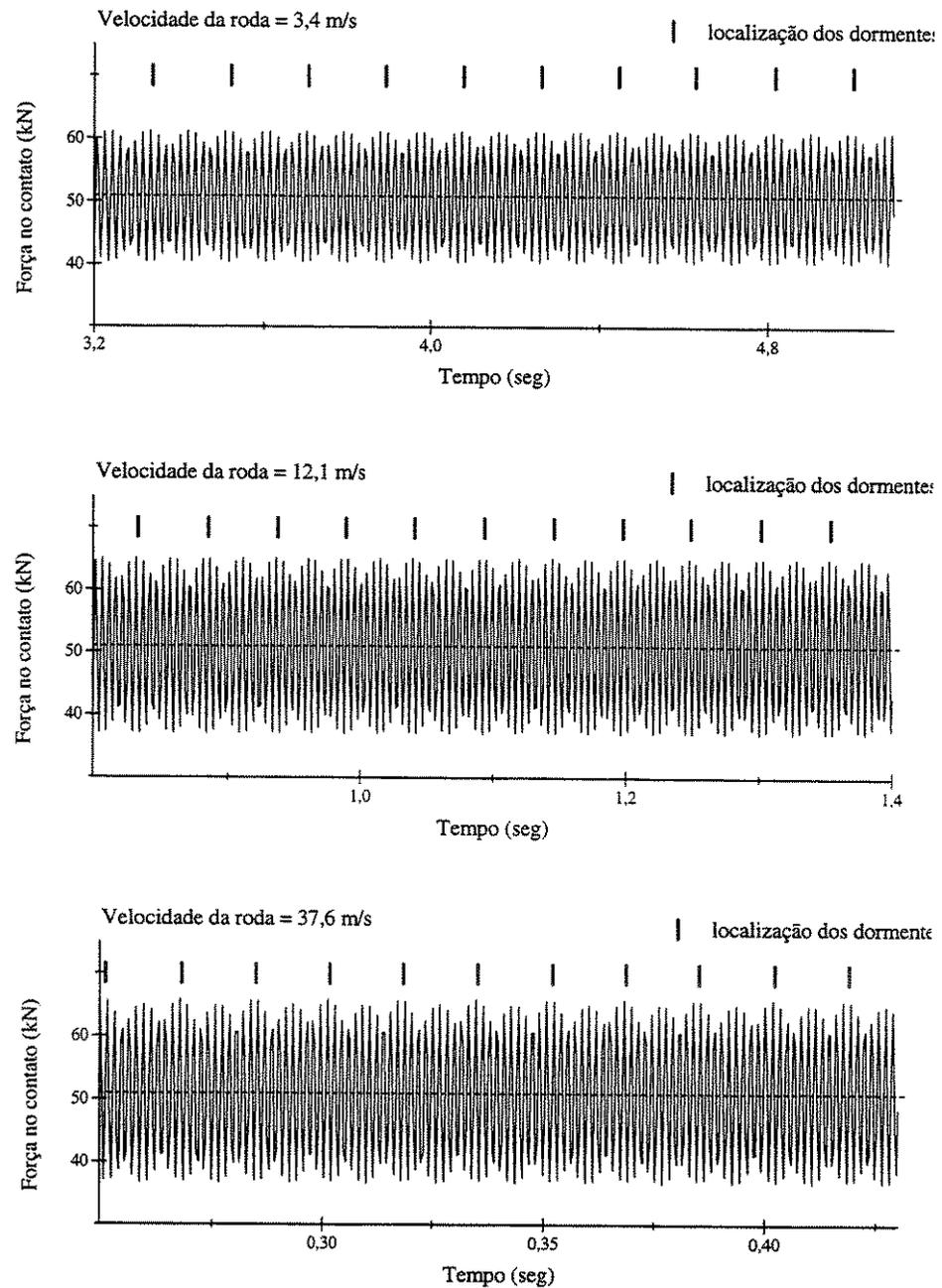


Figura 5.15: Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade.

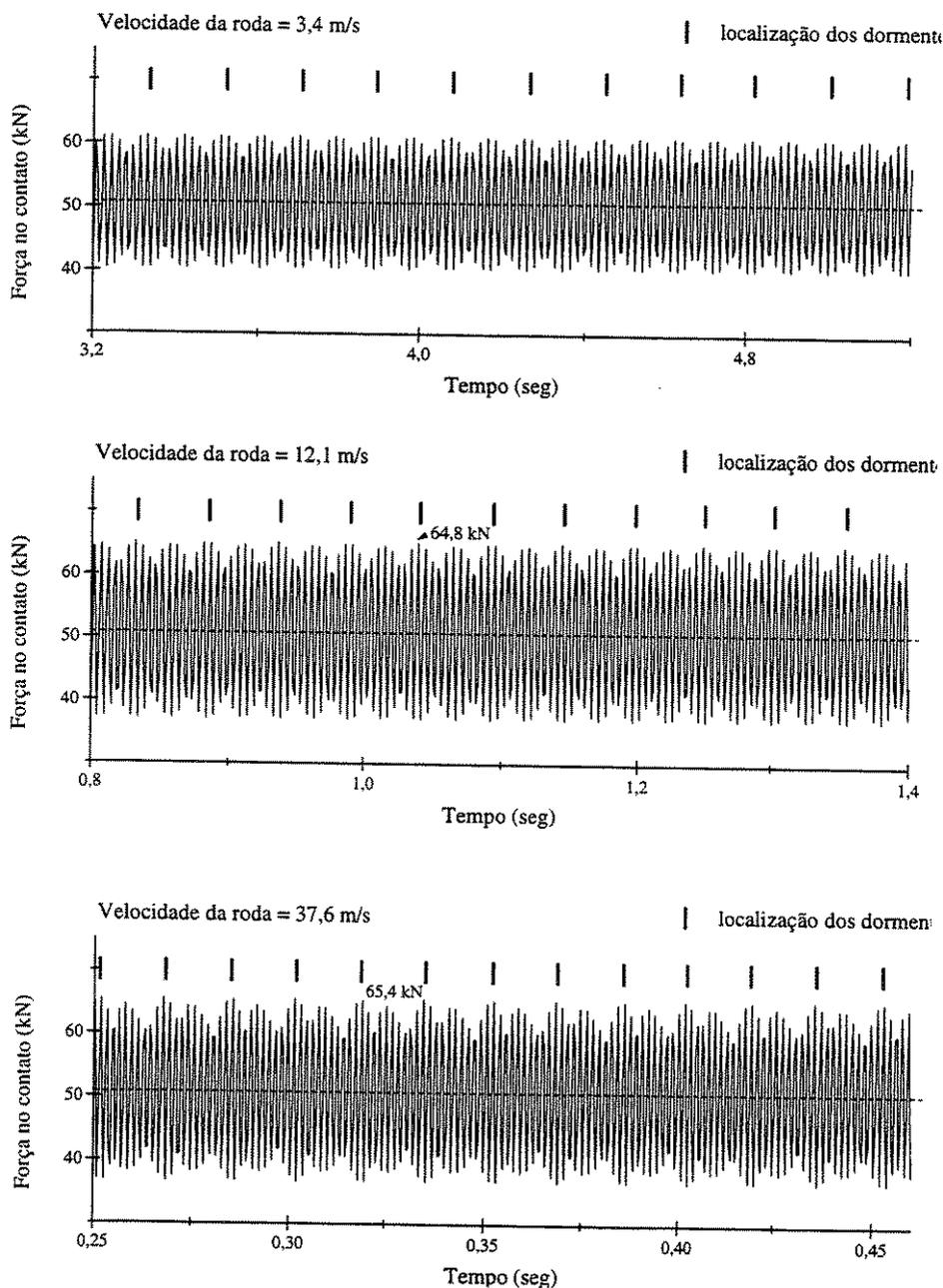


Figura 5.16: Resultados obtidos para a força no contato pelo modelo com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus de liberdade.

elemento finito de viga Timoshenko com 4 graus de liberdade. Se adotarmos um tempo padrão de referência igual a 100 para esta formulação para a execução de um determinado número de passos de tempo, a formulação com elemento finito de viga Euler-Bernoulli dispenderia um tempo igual a 106 e a formulação com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus um tempo igual a 794. Não existe praticamente diferença entre as duas primeiras, mas a formulação com elemento finito de viga de Timoshenko com 8 graus de liberdade dispense praticamente 8 vezes mais tempo de processamento, reflexo da ordem das matrizes duas vezes maior.

5.3.2 O problema do “plano-na-roda”

Resultados experimentais

Segundo Newton e Clark[40] existem dois modos básicos de vibração que podem ser induzidos por uma irregularidade tipo “plano-na-roda”: O primeiro, que ocorre a baixas velocidades (abaixo de 35 km/h), o movimento é uma combinação dos movimentos da via e da massa não-suspensa sobre o lastro, devido a uma oscilação em torno da carga estática, oriunda de um processo de carregamento/descarregamento parcial da via. No segundo, que ocorre em velocidades mais altas (maiores que 55 km/h), a roda perde contato com o trilho, ou porque a rigidez da via é tal que a rigidez do lastro não consegue mantê-la em contato, ou porque a profundidade do *flat* é tão grande que o movimento do trilho não consegue acomodá-la, e “voa” até entrar em contato novamente com o trilho, primeiramente devido ao movimento deste. No impacto, a velocidade possui componentes devidas ao movimento da via e do veículo, e uma componente da velocidade à frente baseada no ângulo de impacto relativo (algo assim como um “tapa” rotacional do *flat* sobre o trilho). Este impacto cria efeitos de alta frequência devido ao movimento do trilho sobre a mola de contato hertziana.

De forma a medir as respostas da via férrea devidas aos “planos-na-roda” e compará-las com valores obtidos em modelos teóricos, desenvolvidos pelo Departamento de Pesquisas e Desenvolvimento da *British Railways*, foram desenvolvidos ensaios de campo. Segundo Newton e Clark, apesar dos procedimentos de cálculo serem adequados em alguns aspectos, eles apresentaram algumas deficiências sob condições de impacto, particularmente aos relacionados à previsão das deformações do trilho. Para superar estas deficiências, um modelo de trilho de viga de Timoshenko em conjunto com um

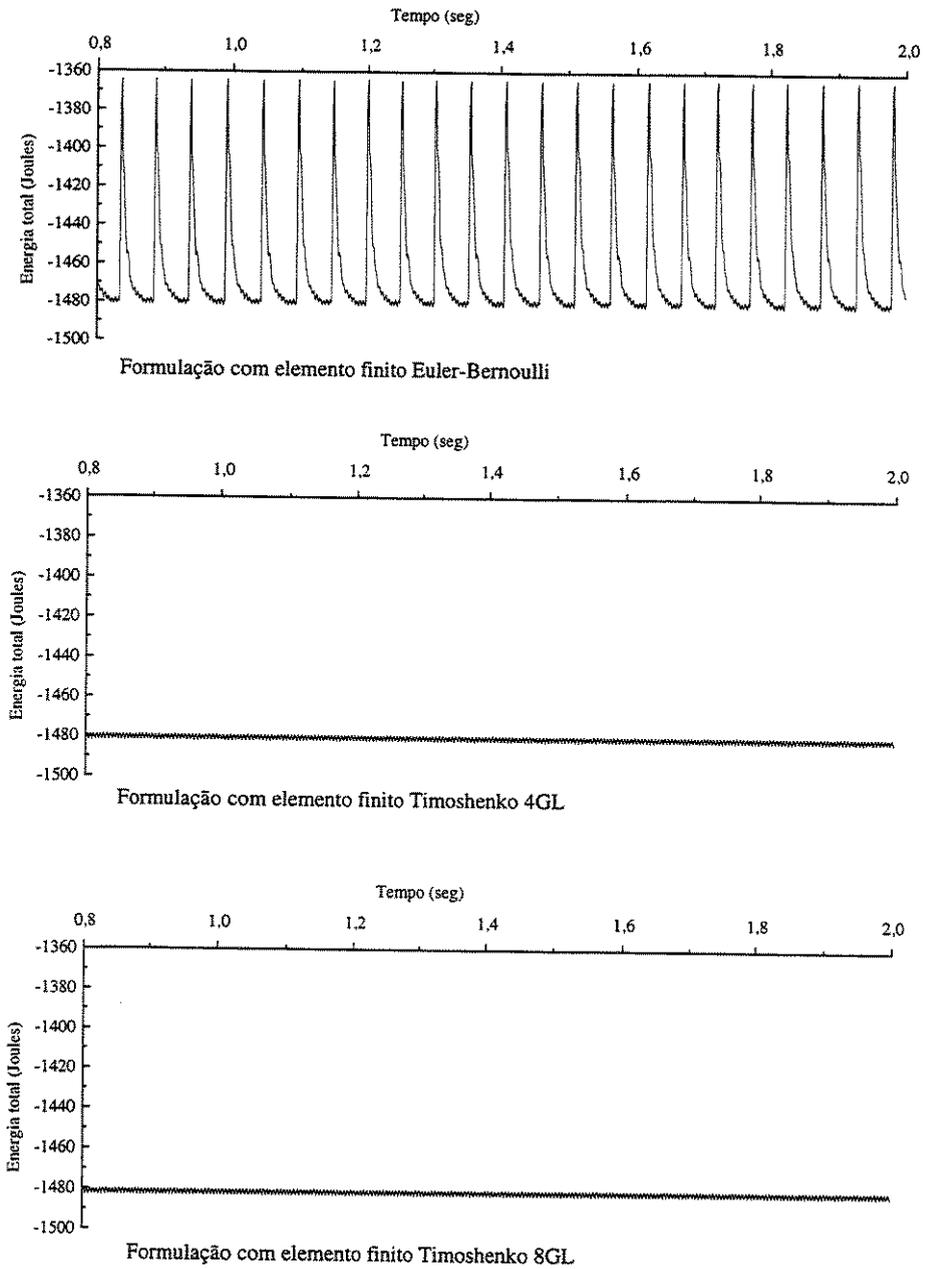


Figura 5.17: Séries históricas para a variação da energia total do sistema para a velocidade de 12,1 metros por segundo para as três formulações.

modelo de apoio discreto foi desenvolvido e obteve resultados satisfatórios.

Em ensaios anteriores que envolveram o estudo do problema do “plano-na-roda” realizados pela AAR (*Association of American Railroads*), ocorreram dificuldades na localização da posição dos “planos-na-roda” e de seus impactos sobre a instrumentação da via. Para o teste da *British Railways* foi decidido que um entalhe equivalente ao “plano-na-roda” seria feito no boleto do trilho. Desta forma, sua posição seria conhecida com precisão e a instrumentação poderia ser adequadamente posicionada. Além disso, a forma do entalhe poderia ser medida facilmente e este seria o mesmo para todos os veículos, facilitando análises comparativas entre os vários tipos.

“Planos-na-roda” com comprimento de 150 mm e profundidade de 2,15 mm foram feitas nos boletos de dois trilhos. Isto corresponde a um “plano-na-roda” com uma profundidade de 2 mm em uma roda com diâmetro de 1 metro. A figura 5.18 nos mostra os perfis propostos e medidos.

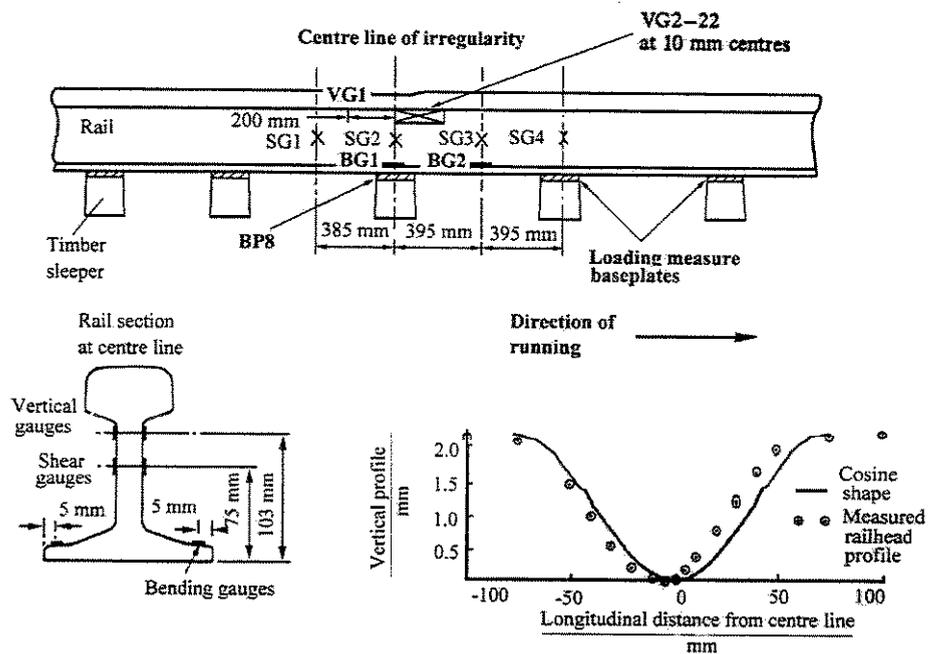


Figura 5.18: Instrumentação e características da irregularidade segundo Newton e Clark [40, Fig.1, pg.289]

Os dois trilhos foram instalados em um trecho da via de teste da *British*

Railways na estação de Widmerpool, entre Nottingham e Melton Molbray. Era um trecho de via em tangente com dormentes de madeira, com placas de apoio tipo BR1 com grampos elásticos. Em um dos trilhos foram instalados *strain gauges* antes de sua colocação na via para medir a flexão do patim, o cisalhamento e a compressão da alma. Todos os *strain gauges* foram colocados em pares e em cada lado do trilho para eliminar os efeitos da torção e flexão da alma em torno do eixo longitudinal. Antes dos ensaios não foi permitido nenhum tráfego no trecho que tinha os trilhos instrumentados.

Um trem de teste trafegou sobre o trecho lentamente e posteriormente chegando até a 117 km/h. Foram realizadas 64 passagens sobre o trecho e não foram observadas variações significativas ao longo de todos os ensaios. Foi aplicada uma pintura no boleto antes de várias passagens do trem de teste, para mostrar a linha de contato para o trem. Foi observado que na velocidade mais baixa existia contato ao longo da irregularidade; a uma velocidade de 79 km/h existia alguma perda de contato por todos tipos de veículos e a 117 km/h existia uma área claramente definida de perda de contato, com um comprimento de aproximadamente 75 mm, seguida por uma área de contato elíptica e, eventualmente, o retorno a uma faixa de contato com largura constante. Especial atenção foi dada a um vagão de carga tipo COV AB, carregado, por ser este um veículo representativo do material rodante de carga inglês. A figura 5.19 nos apresenta as séries históricas obtidas para um eixo deste veículo a partir da placa de apoio BP8 e dos *strain gauges* para medir a flexão BG1 e BG2, e a figura 5.20 nos apresenta as séries históricas para os *strain gauges* para medir o cisalhamento SG2, SG3 e SG4, para as velocidades de 23 km/h e 117 km/h. Em relação a estas séries históricas, Newton e Clark[40] observaram que a baixas velocidades existe um descarregamento parcial e gradual à medida que a roda rola sobre o entalhe, seguido por um sobrecarregamento à medida que ela sobe o outro lado, seguida por uma oscilação amortecida em torno do nível quasi-estático. Em altas velocidades existe um descarregamento total e alguns dos instrumentos mostram mudanças de sentido com tempos de elevação muito curtos. Este descarregamento é seguido por um aumento muito rápido, em uma oscilação bem menos definida em relação ao caso da baixa velocidade.

Modelagem teórica

Para poder realizar análises comparativas, Newton e Clark desenvolveram alguns modelos teóricos. No primeiro modelo, analítico, a via era modela-

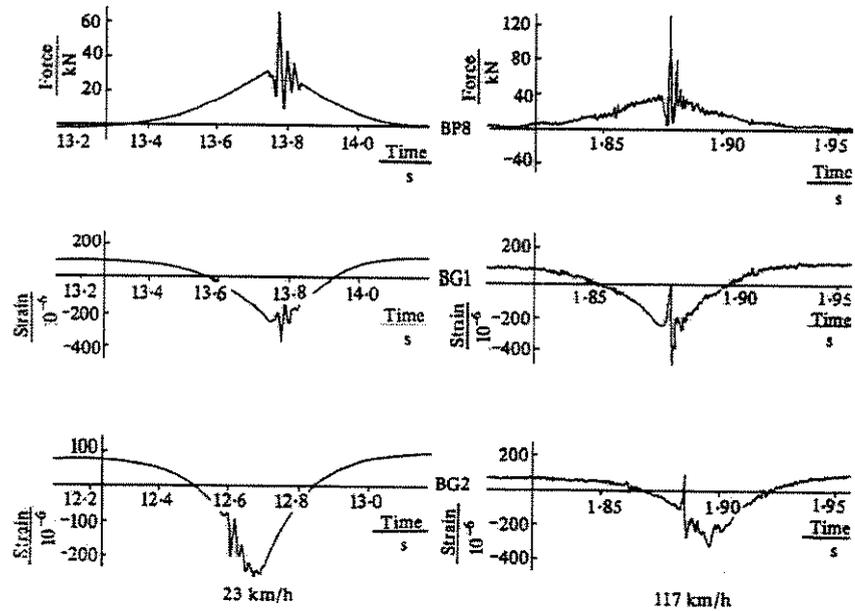


Figura 5.19: Cargas medidas na placa de apoio e tensões de flexão no trilho em função do tempo segundo Newton e Clark[40, Fig. 3, pg. 290]

da como sendo uma viga de Euler-Bernoulli, com massa e rigidez à flexão, apoiada sobre uma fundação elástica, no caso uma mola linear uniforme representando a camada de lastro¹. As massas dos dormentes são distribuídas uniformemente e somadas à densidade do trilho para dar a densidade da viga. O veículo é representado por um conjunto de massas interconectadas entre si através de molas e amortecedores. O contato entre a roda e o trilho é considerado como sendo hertziano não-linear.

O método de solução é baseado nas funções de resposta de impulso para o veículo e a via, e o procedimento de marcha no tempo para obter a força em função do tempo é dado pela seguinte relação:

$$F_T(t) = C_H[y_v(t) - w_o(t) - f(Vt)]^{3/2}, \quad (5.6)$$

onde $F_T(t)$ é a força de contato, y_v é a deflexão do veículo, w_o é a deflexão do trilho e C_H é a constante de Hertz para o contato não linear. Foram obtidas

¹Este tipo de modelo é conhecido na literatura como *BOEF* (*Beam Over Elastic Foundation*).

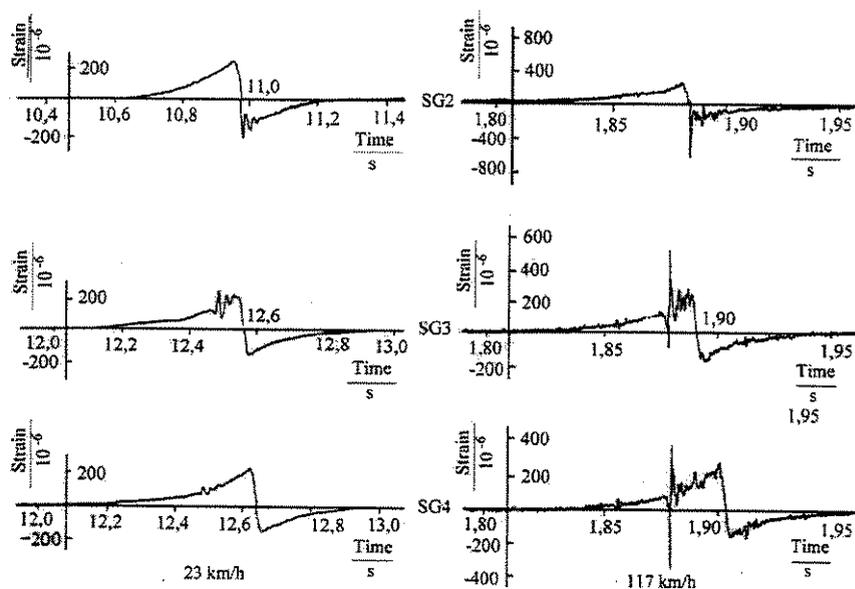


Figura 5.20: Tensões de cisalhamento medidas em função do tempo segundo Newton e Clark[40, Fig. 4, pg. 290]

soluções para a força de contato, deslocamento da via, momento fletor do trilho e acelerações do veículo e da via. A linha cheia na figura 5.21 nos mostra a força de contato entre a roda e o trilho para o vagão COV AB, obtidas a partir de um programa computacional, para um “plano-na-roda” com comprimento igual 150 mm e profundidade de 2,15 mm, para as velocidades de 23 e 117 km/h. Podemos perceber que a baixa velocidade, ocorre um descarregamento a medida que a roda passa pela irregularidade, seguida de um sobrecarregamento e uma oscilação sobre a mola que representa a via. Nas velocidades mais altas, ocorre uma perda de contato e um impacto correspondente ao deslocamento da mola hertziana.

Como este tipo de modelo tinha algumas restrições quanto ao seu realismo, como a não correta distribuição das massas dos dormentes, não haver condições de incluir uma placa de apoio, para poder isolar o trilho do dormente, e os efeitos de flexão do dormente não podiam ser levados em consideração, Newton e Clark desenvolveram um modelo sobre apoio discreto², onde

²Conhecido na literatura como *DSM (Discrete Support Model)*.

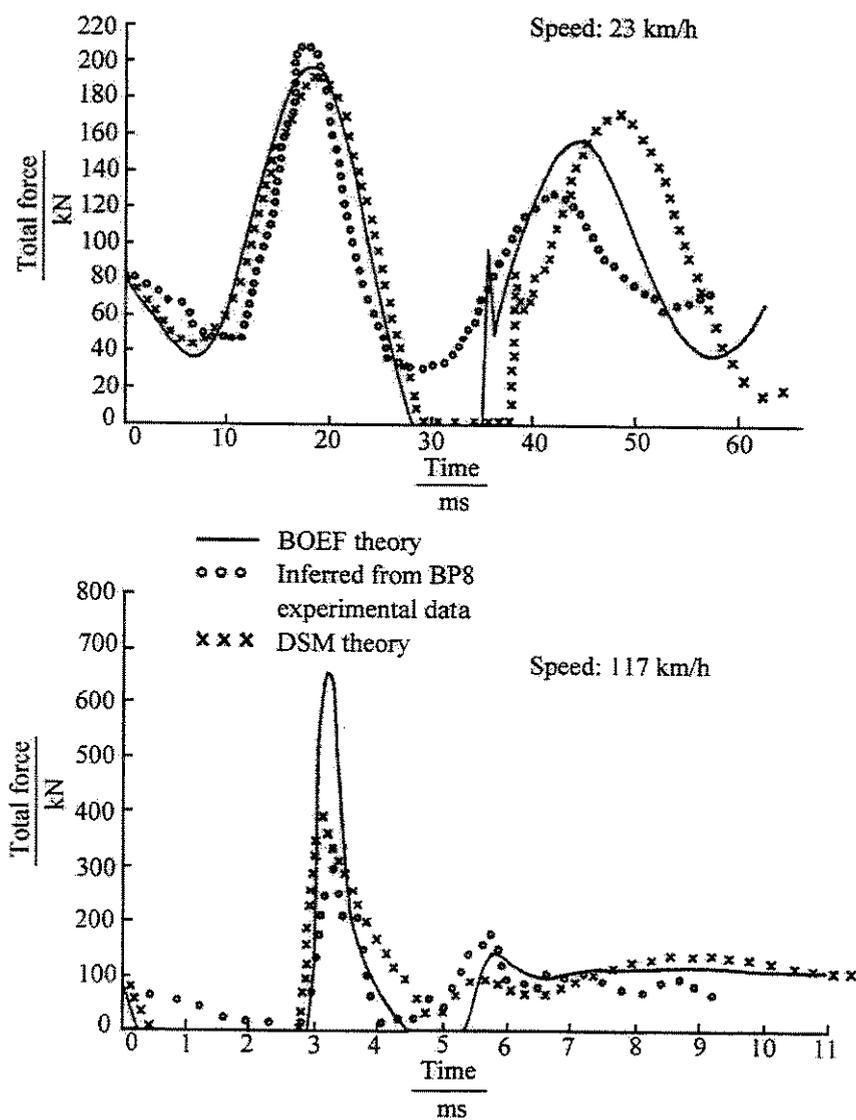


Figura 5.21: Força de contato medida e calculada segundo Newton e Clark[40, Fig. 8, pg. 293]

o trilho foi modelado como uma viga de Euler-Bernoulli apoiada sobre placas de apoio, que por sua vez estavam apoiadas sobre dormentes discretos. Os dormentes, por sua vez eram representados como vigas apoiadas sobre uma fundação elástica, ou modelados como massas concentradas apoiadas sobre molas. O mecanismo do contato entre a roda e o trilho era o mesmo do primeiro modelo, dado pela equação 5.6. Um modelo de veículo mais simples foi utilizado, consistindo de uma massa não-suspensa sob ação de uma força constante. Para a obtenção da solução do modelo, os modos e as frequências naturais foram obtidas para um comprimento finito de via, assumindo que os finais estavam fixos.

As frequências naturais foram obtidas através de um algoritmo específico³. O modelo de veículo era deslocado sobre a via e através de uma técnica de marcha de tempo, e foram obtidas soluções para a força de contato e os deslocamentos do veículo, da via e dos dormentes. A equação 5.6 fornece uma restrição consistente entre os deslocamentos da via e do veículo e a força de contato. A figura 5.21 nos apresenta os resultados obtidos para o mesmo veículo e velocidades do primeiro modelo.

Podemos observar que para baixas velocidades as soluções obtidas pelos dois modelos são similares, apenas com uma fase diferente no segundo ciclo, mas para as velocidades mais altas o segundo modelo fornece uma força de impacto consideravelmente mais reduzida.

Um terceiro modelo, semelhante ao primeiro modelo, só que o trilho era modelado como sendo uma viga de Timoshenko e, portanto, como uma equação diferencial bem mais complexa devido ao acoplamento das deflexões devidas ao cisalhamento e à flexão. A solução foi obtida através da expansão em série de Fourier ao longo da distância longitudinal. Foi utilizado um modelo de veículo simplificado e foram obtidas soluções tanto para a força de contato e deslocamento do trilho, como para as tensões de cisalhamento e flexão do trilho. A figura 5.22 nos apresenta os resultados para a força de contato para o vagão COV AB carregado para a velocidade de 117 km/h e com o mesmo “plano-na-roda” que foi utilizado nos modelos anteriores.

Segundo Newton e Clark, para altas velocidades existe uma redução da força de impacto devida à deformação por cisalhamento. Paralelamente ao desenvolvimento do cálculo utilizando uma fundação contínua elástica, o pro-

³Este algoritmo é baseado em uma método desenvolvido por Wittrick e Williams, em seu trabalho “A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures”, *Quart. Journal of Mech. Appl. Math.* 24, 1971, pg263-284.

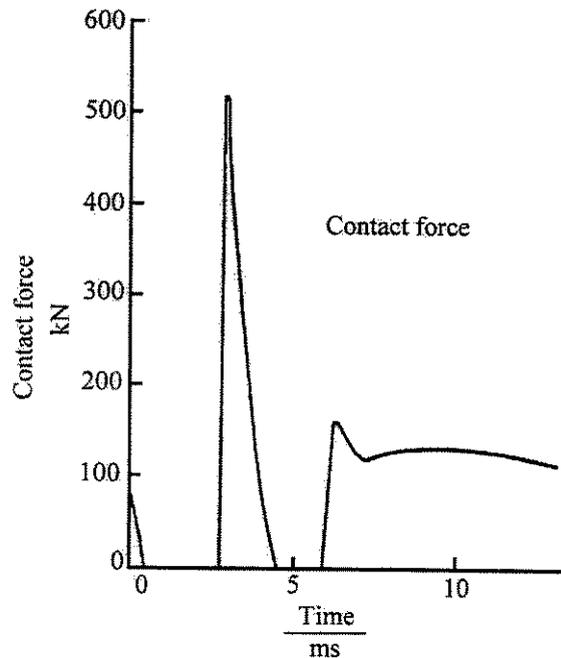


Figura 5.22: Resultado para a força de contato para o modelo com viga de Timoshenko segundo Newton e Clark [40, Fig. 10, pg. 294]

grama computacional de viga de Timoshenko foi adaptado para determinar a força de contato entre a roda e o trilho utilizando o segundo modelo (com apoio discreto). O modelo de apoio discreto com viga de Euler-Bernoulli é utilizado para calcular a força de contato, que é posteriormente utilizada como dado de entrada no modelo de viga de Timoshenko sobre fundação elástica contínua, permitindo o cálculo das tensões de flexão e cisalhamento, para posteriormente comparar os resultados com os obtidos experimentalmente. Os resultados obtidos a partir deste modelo combinado eram qualitativamente os mesmos para o caso da fundação elástica contínua, mas a contribuição da placa de apoio do trilho é reduzir a magnitude dos efeitos do impacto. Segundo Newton e Clark, como a deformação devida ao cisalhamento afeta as forças de impacto, não tem sentido utilizar o modelo de apoio discreto com um modelo de viga de Euler-Bernoulli para calcular estas forças. Mas, cabe observar que o valor da rigidez da placa de apoio utilizada no modelo de apoio discreto representa tanto a flexibilidade existente entre o trilho e

o dormente, como a flexibilidade devida à deformação por cisalhamento do trilho. Apesar desta falta de rigor, na prática esta abordagem pareceu ser satisfatória.

Outro estudo teórico, foi desenvolvido por Dong e Dukkipati[45], para estudar a interação dinâmica entre veículo e via ferroviários quando da presença de “planos-na-roda”. A via foi representada através de um elemento finito de viga de Timoshenko, com oito graus de liberdade, apoiada discretamente. O comprimento de via escolhido foi o equivalente a 20 dormentes. Uma mola vertical e uma mola rotacional equivalente foram colocadas em cada final do trecho para representar as condições de contorno. O suporte discreto formado pela placa de apoio e lastro, representados por conjuntos de mola-amortecedores e pelos dormentes, modelados como massas concentradas. O modelo de veículo é representado por uma massa correspondente à roda sob ação de uma força constante equivalente à carga de roda. Não-linearidades como o levantamento do trilho em relação ao dormente, e deste em relação ao lastro foram consideradas na formulação do modelo. O modelo do contato entre a roda e o trilho adotado, era um modelo similar ao modelo de pneu adaptativo⁴, utilizado para representar o contato entre pneu e estrada. Neste modelo, a relação entre roda e trilho é representada através de um conjunto de molas, uniformemente distribuídas no plano vertical e todas com a mesma rigidez, permitindo que as molas se adaptem a quaisquer irregularidades na zona do contato.

No estudo do problema do “plano-na-roda”, as rigidezes da placa de apoio e do lastro foram consideradas lineares. Os parâmetros utilizados no modelo foram os mesmos utilizados por Newton e Clark[40]. Os autores não apresentaram qual técnica de solução foi utilizada para se obter as respostas do sistema. O modelo inicial de Viga de Timoshenko sobre apoio discreto (*TBDS - Timoshenko Beam on Discrete Support*) foi modificado para um modelo de viga de Euler-Bernoulli sobre apoio discreto (*EBDS - Euler Beam on Discrete Support*), depois para um modelo de viga de Timoshenko sobre uma fundação elástica contínua (*TBEF - Timoshenko Beam on Elastic Foundation*) e, finalmente, para um modelo de viga de Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica contínua (*EBEF - Euler Beam on Elastic Foundation*). As forças de contato foram calculadas com estes modelos e são mostradas na fi-

⁴Uma descrição deste tipo de modelo pode ser encontrada no trabalho de Captain, Boghani e Wormley, “Analytical Tire Model for Dynamic Vehicle Simulation”, *Vehicle System Dynamics* 8, 1979, pg.1-32.

gura 5.23, junto com os dados experimentais obtidos por Newton e Clark[40]. Podemos perceber que as todas as curvas possuem formas similares, mas o primeiro pico (o máximo impacto) são bem diferentes, sendo que o valor de pico obtido com o modelo TBDS é muito próximo ao obtido experimentalmente. Na figura 5.24 são apresentados os resultados obtidos para o modelo para a força de contato, deslocamentos do trilho, da roda e do dormente, bem como o deslocamento relativo entre a roda e o trilho.

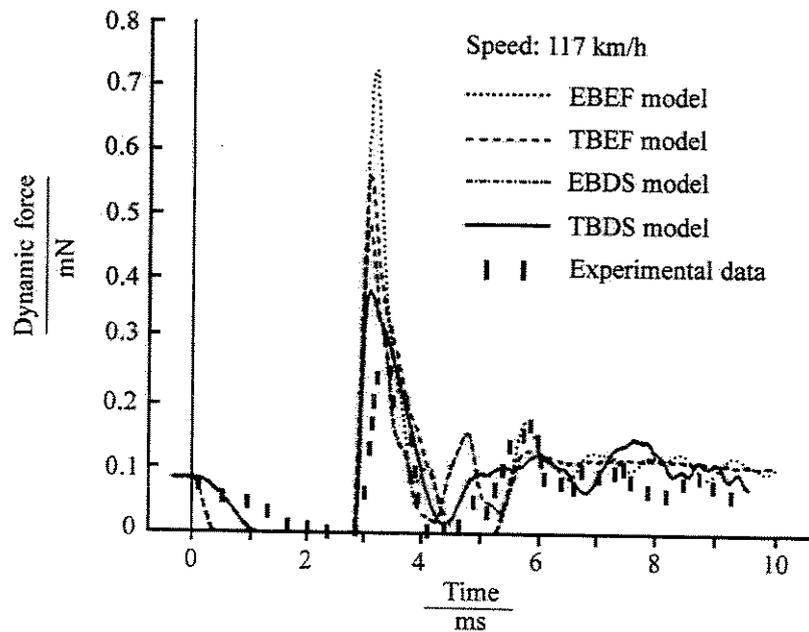


Figura 5.23: Forças de contato em função do tempo para os diversos modelos segundo Dong e Dukkipati[45, Fig. 8, pg. 67]

A aplicação do modelo desenvolvido

O modelo desenvolvido foi aplicado na análise dinâmica do efeito de uma irregularidade tipo “plano-na-roda” utilizando os parâmetros utilizados por Newton e Clark[40] em seu estudo. Os únicos parâmetros a serem acrescentados, como no caso anterior, se referem aos coeficientes de rigidez e amortecimento da suspensão primária do veículo e ao valor da massa suspensa sobre a roda. Os parâmetros utilizados são os mesmos da análise dos trilhos

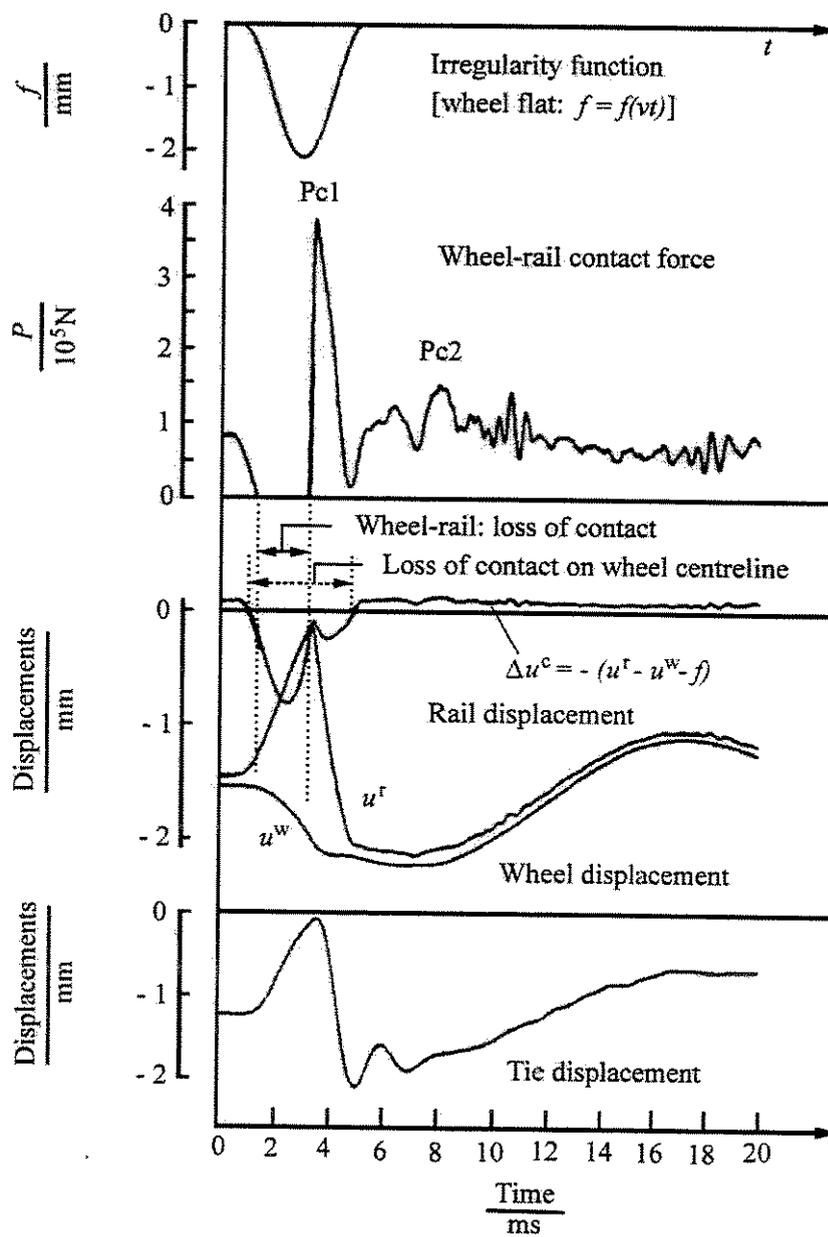


Figura 5.24: Resultados obtidos com o modelo segundo Dong e Dukkipati[45, Fig. 14, pg. 69]

corrugados. O valor da massa suspensa sobre a roda é determinado a partir do valor da carga de roda. Admitimos que a carga de roda é igual ao valor do peso da massa da roda mais a massa suspensa.

No caso da irregularidade tipo “plano-na-roda”, o limite da faixa de frequência de excitação é igual a 2500 Hz. Com este valor e utilizando a expressão 3.67, conseguimos determinar o intervalo de tempo, ou seja $\Delta t = 2/\omega = 2/2500 = 0,8$ milisegundos. Com este valor do intervalo de tempo e utilizando a expressão 5.5 determinamos o número de intervalos de tempo necessários para a roda percorrer uma distância igual ao espaçamento entre os dormentes em função da velocidade da roda. No trabalho de Newton e Clark[40] foram obtidos valores experimentais para duas velocidades diferentes (23 km/h e 117 km/h). Eram resultados experimentais para a força de contato, deformações devidas à flexão (BP8, BG1 e BG2 na figura 5.18) e ao cisalhamento na alma do trilho (SG2, SG3 e SG4 na figura 5.18).

Foram obtidos resultados teóricos para estes parâmetros (apresentados nas figuras 5.21 e 5.22), para as duas velocidades.

Para uma análise preliminar aplicamos o modelo desenvolvido para a velocidade de 117 km/h e obtivemos valores teóricos para a força de contato e para o deslocamento do dormente, utilizando as três formulações de vigas (Euler-Bernoulli, Timoshenko com 4 e 8 graus de liberdade). Para a velocidade de 117 km/h e um intervalo de tempo igual a 0,8 milisegundos mais o espaçamento entre dormentes igual a 0,79 m e utilizando a expressão 5.5, obtemos o número de intervalos necessários para a roda percorrer entre dois dormentes (aproximadamente 31 intervalos). Por simplicidade, também adotamos um número de intervalos igual a 40. Entretanto, após analisar os resultados iniciais obtidos com este número de intervalos de tempo, percebemos que ocorriam situações onde os resultados obtidos para a força no contato tinham comportamento muito diferentes entre si. Para solucionar este problema, aumentamos o número de intervalos de tempo para 60, o que garantiu uma boa uniformidade nos resultados aí então obtidos. Para todas formulações o número de intervalos de tempo simulados foi igual a 3000, o que garante uma boa amostra para análise, e são mostrados os resultados relativos à amostra onde ocorreu a máxima força de contato.

Aplicamos o modelo desenvolvido para as mesmas velocidades (23 e 117 km/h) e obtemos valores teóricos para a força de contato, para as deflexões do trilho, da roda e do dormente, bem como o deslocamento relativo entre a roda e o trilho, utilizando as três formulações de elemento finito de viga (Euler-Bernoulli, Timoshenko com 4 e 8 graus de liberdade). Os resultados

são apresentados de forma similar aos resultados apresentados na figura 5.24. Acreditamos que desta forma a análise dos resultados ficaria muito facilitada.

Formulação com elemento finito de viga Euler-Bernoulli A figura 5.25 nos apresenta os resultados obtidos para esta formulação para a velocidade de 23 km/h. Podemos observar que no momento em que a roda atinge a região do *flat* ela “voa”, perdendo contato com o trilho, para posteriormente entrar em contato após ter percorrido aproximadamente metade do comprimento da irregularidade, e aí então iniciar um movimento oscilatório em torno da carga estática. O máximo valor atingido pela força de contato é da ordem de 124 kN, que ocorre logo após a roda sair da região que contém a irregularidade. Estes resultados são diferentes dos obtidos experimentais e teóricos obtidos por Newton e Clark[40]. Segundo os autores, esta situação representaria o primeiro modo básico de vibração, que ocorre a baixas velocidades (abaixo de 35 km/h) e o movimento resultante é uma combinação dos movimentos da via e da massa não-suspensa sobre o lastro, devido a uma oscilação em torno da carga estática, oriunda de um processo de carregamento/descarregamento parcial da via, com a força de contato atingindo um valor máximo na ordem de 210 kN. Esta conclusão foi obtida a partir das informações mostradas na figura 5.21. Entretanto, nesta figura não é mostrada a posição relativa do *flat*. Acreditamos que a roda atingiu a região da irregularidade no intervalo de tempo entre 0 e 10 milissegundos e não entre 30 e 40 milissegundos, onde os resultados teóricos obtidos pelos autores para as duas formulações implementadas (*BOEF* e *DSM*) mostraram a ocorrência de perda de contato entre a roda e o trilho. Se a roda atingiu a região neste intervalo, não tem sentido o valor máximo alcançado pela força de contato, na ordem de 210 kN, e que ocorre antes desta perda de contato, e portanto antes da roda atingir a região da irregularidade. Ao nosso ver, esta perda de contato ocorre devido ao grande impacto da roda contra o trilho que ocorre logo após a roda ter saído na região da irregularidade (após 20 milissegundos), de forma semelhante aos resultados obtidos em nossa modelagem. Infelizmente, Dong e Dukkipati[45] em seu estudo não aplicaram o seu modelo para esta situação, o que seria um dado importante para a nossa análise comparativa.

A figura 5.26 nos apresenta os resultados obtidos para esta formulação para a velocidade de 117 km/h. Podemos observar, de forma similar ao caso anterior, que no momento em que a roda atinge a região do *flat* ela “voa”,

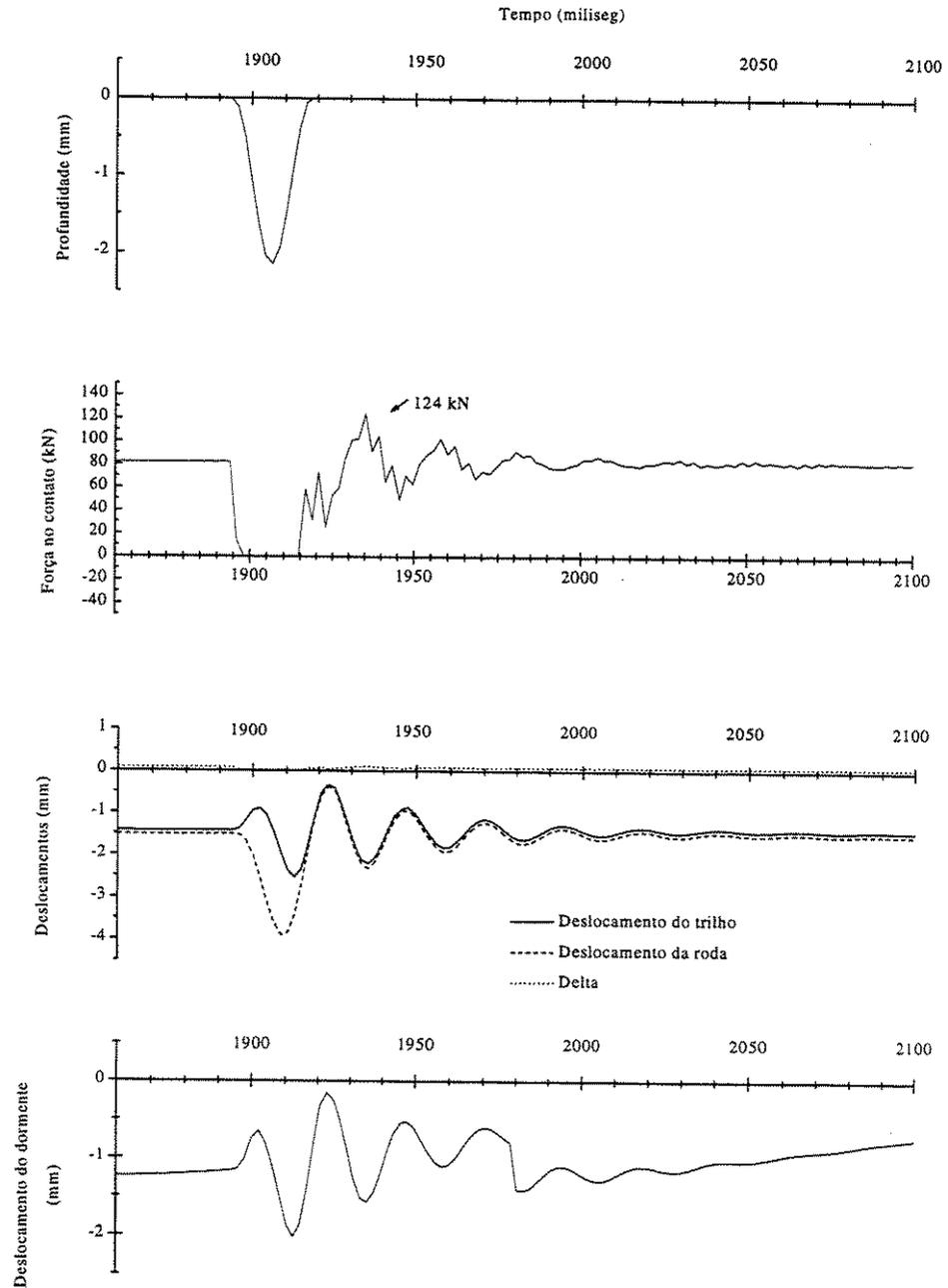


Figura 5.25: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.

perdendo contato com o trilho, para posteriormente entrar em contato, onde ocorre o “pico” máximo da força de contato, igual a 396 kN. Devido a este forte impacto ocorre uma nova perda de contato, seguida de um novo “pico” na força de contato e aí então iniciar um movimento oscilatório em torno da carga estática. Segundo Newton e Clark[40], em altas velocidades, ocorre uma perda de contato e uma força de contato correspondente ao movimento da mola hertziana, sendo que, geralmente, podem ser distinguidos dois “picos”. Os resultados obtidos pelo nosso modelo com esta formulação confirmam estes resultados. O primeiro pico (normalmente denominado $Pc1$), segundo os resultados experimentais mostrado na figura 5.21, seria da ordem de 300 kN, enquanto que os resultados teóricos (*BOEF* e *DSM*) seriam da ordem de 650 e 400 kN, respectivamente. Se compararmos estes resultados com os obtidos por Dong e Dukkipati[45], mostrados nas figuras 5.23 e 5.24, para as diversas formulações por eles implementadas, observamos que o valor estimado pelo nosso modelo é similar ao obtido pelo modelo *DSM* de Newton e Clark, e estaria entre os valores obtidos pelas formulações *TBDS* e *EBDS* implementadas por Dong e Dukkipati (aproximadamente 380 e 480 kN, respectivamente). Observamos que os resultados obtidos pelo nosso modelo possuem uma grande semelhança com os resultados obtidos por Dong e Dukkipati, apresentados na figura 5.24 apesar do modelo destes autores ter sido implementado com elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade. Segundo os autores, era de se esperar valores maiores para o pico da força utilizando-se uma formulação com elemento finito de viga Euler-Bernoulli, pois esta formulação não leva em consideração a deformação devida ao cisalhamento e a inércia de rotação da seção transversal.

Formulações com elementos finitos de viga Timoshenko com quatro e oito graus de liberdade Como no caso dos trilhos corrugados, apresentaremos os resultados obtidos por estas formulações em conjunto, de forma a poder realizar uma análise comparativa mais eficiente, já que, teoricamente, deveriam fornecer resultados muito próximos. As figuras 5.27 e 5.28 nos apresentam os resultados obtidos por estas formulações para a velocidade de 23 km/h. Podemos observar também que no momento em que a roda atinge a região do *flat* ela “voa”, perdendo contato com o trilho, para posteriormente entrar em contato após ter percorrido aproximadamente metade do comprimento da irregularidade, e aí então iniciar um movimento oscilatório em torno da carga estática. Os valores máximos atingidos pela força de

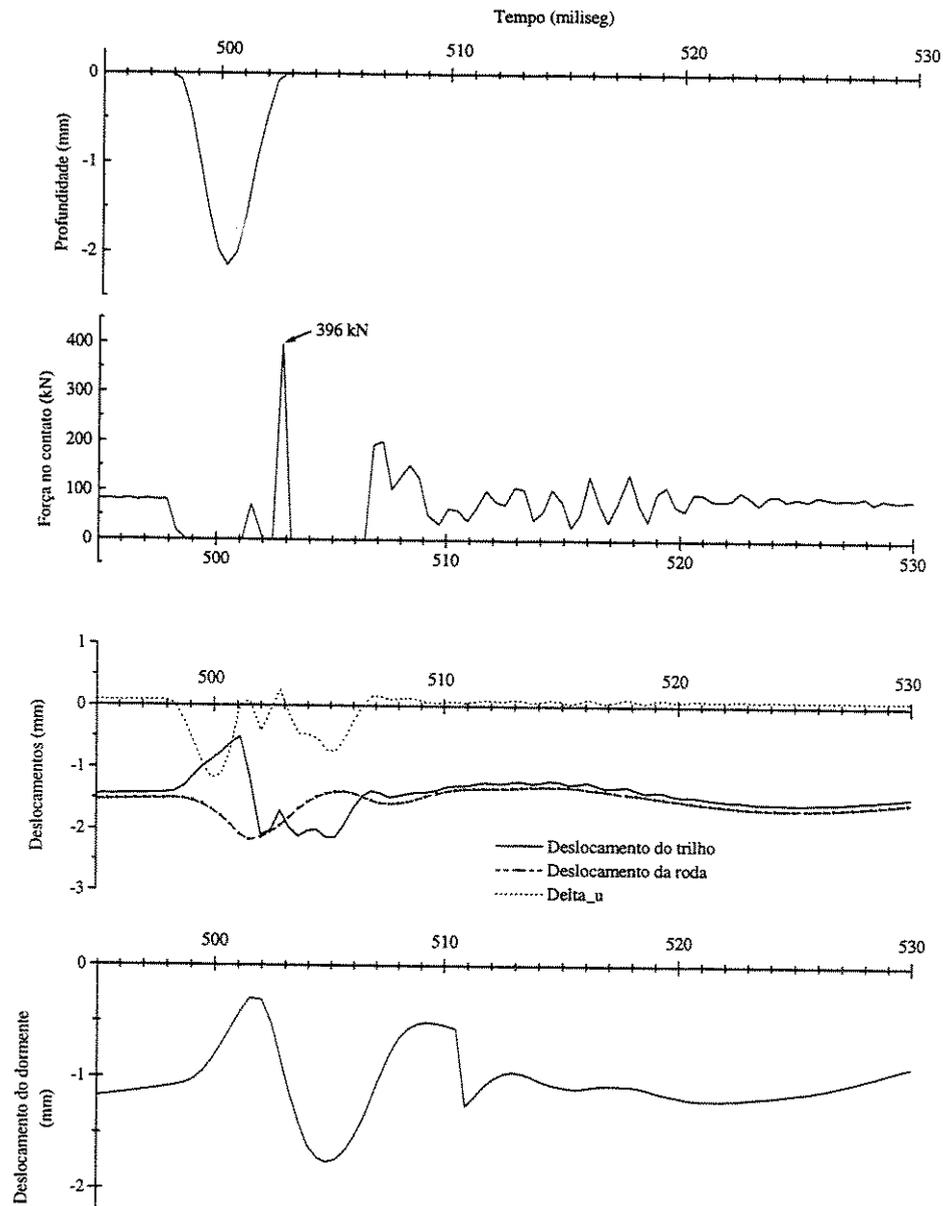


Figura 5.26: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.

contato são da ordem de 127 e 125 kN (para as formulações de quatro e oito graus, respectivamente), que ocorrem logo após a roda sair da região que contém a irregularidade. As mesmas considerações feitas para o caso da modelagem com elemento finito de viga de Euler-Bernoulli são também válidas para estas formulações. Para esta velocidade praticamente não existe diferenças nos resultados obtidos pelas três formulações implementadas.

As figuras 5.29 e 5.30 nos apresentam os resultados obtidos para estas formulações para a velocidade de 117 km/h. Novamente podemos observar, que no momento em que a roda atinge a região do *flat* ela “voa”, perdendo contato com o trilho, para posteriormente entrar em contato, ocorrendo os “picos” máximos da força de contato, iguais a 425 e 577 kN (para as formulações com quatro e oito graus, respectivamente). Devido a este forte impacto ocorre uma nova perda de contato, seguida de um novo “pico” na força de contato e aí então iniciar um movimento oscilatório em torno da carga estática. O primeiro pico (normalmente denominado P_{c1}), segundo os resultados experimentais mostrado na figura 5.21, seria da ordem de 300 kN, enquanto que os resultados teóricos (*BOEF* e *DSM*) seriam da ordem de 650 e 400 kN, respectivamente. Se compararmos estes resultados com os obtidos por Dong e Dukkipati[45], mostrados nas figuras 5.23 e 5.24, para as diversas formulações por eles implementadas, observamos que o valor da força de contato estimado pelo nosso modelo utilizando a formulação com quatro graus de liberdade é similar ao obtido pelo modelo *DSM* de Newton e Clark, e estaria entre os valores obtidos pelas formulações *TBDS* e *EBDS* implementadas por Dong e Dukkipati (aproximadamente 380 e 480 kN, respectivamente), mas o valor estimado com a formulação com quatro graus de liberdade é superior, superestimando a força de contato. Também podemos observar que os resultados obtidos pelo nosso modelo com estas formulações possuem uma boa semelhança com os resultados obtidos por Dong e Dukkipati, apresentados na figura 5.24, obtidos com um modelo também implementado com uma formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade.

O fato da formulação com elemento de viga de Euler-Bernoulli ter obtido resultados melhores em relação às formulações de Timoshenko é surpreendente, pois segundo Dong e Dukkipati, era de se esperar valores maiores para o pico da força de contato utilizando-se esta formulação, pois como já dissemos anteriormente esta formulação não leva em consideração a deformação devida ao cisalhamento e a inércia de rotação da seção transversal.

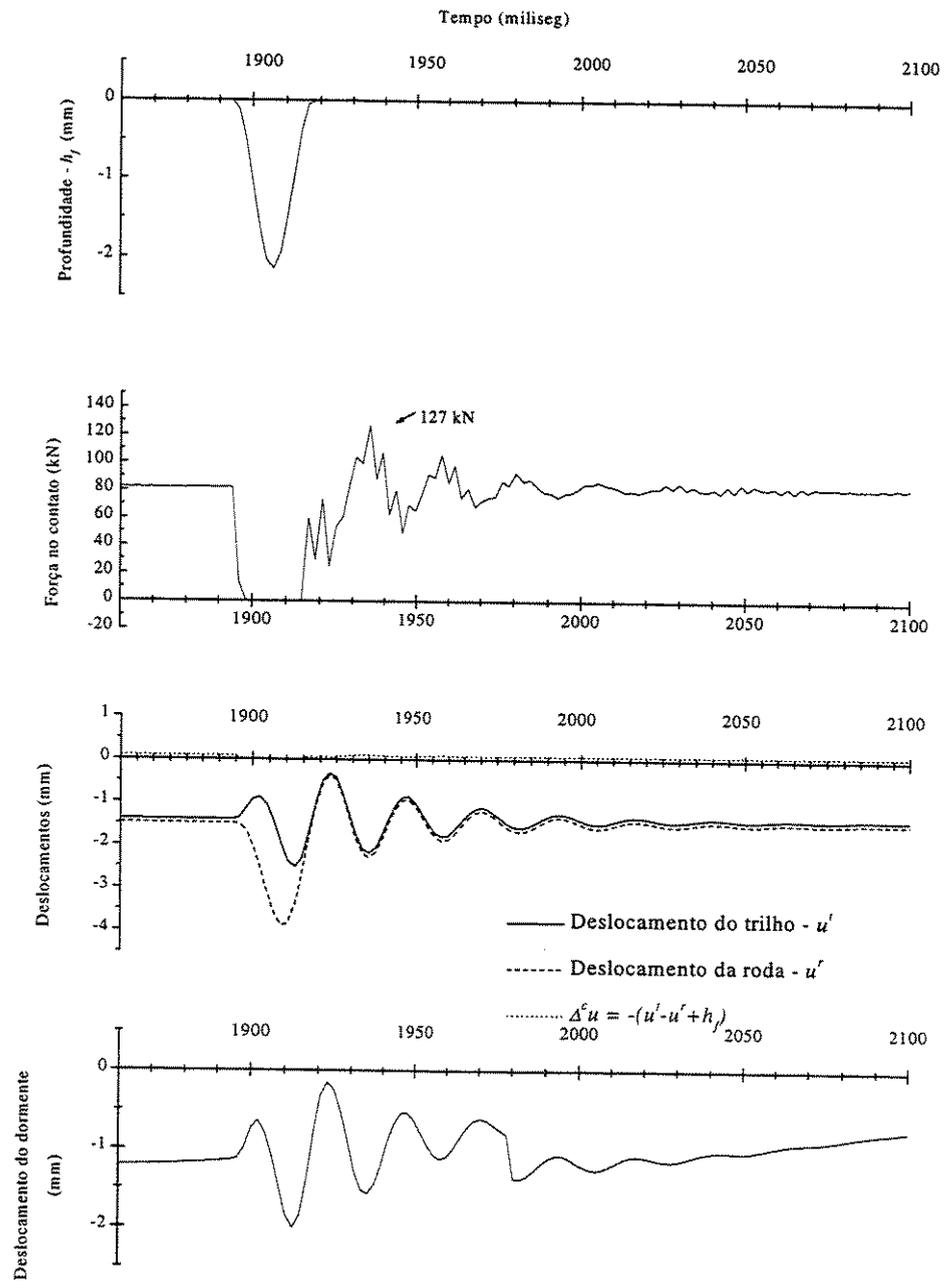


Figura 5.27: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com quatro graus de liberdade.

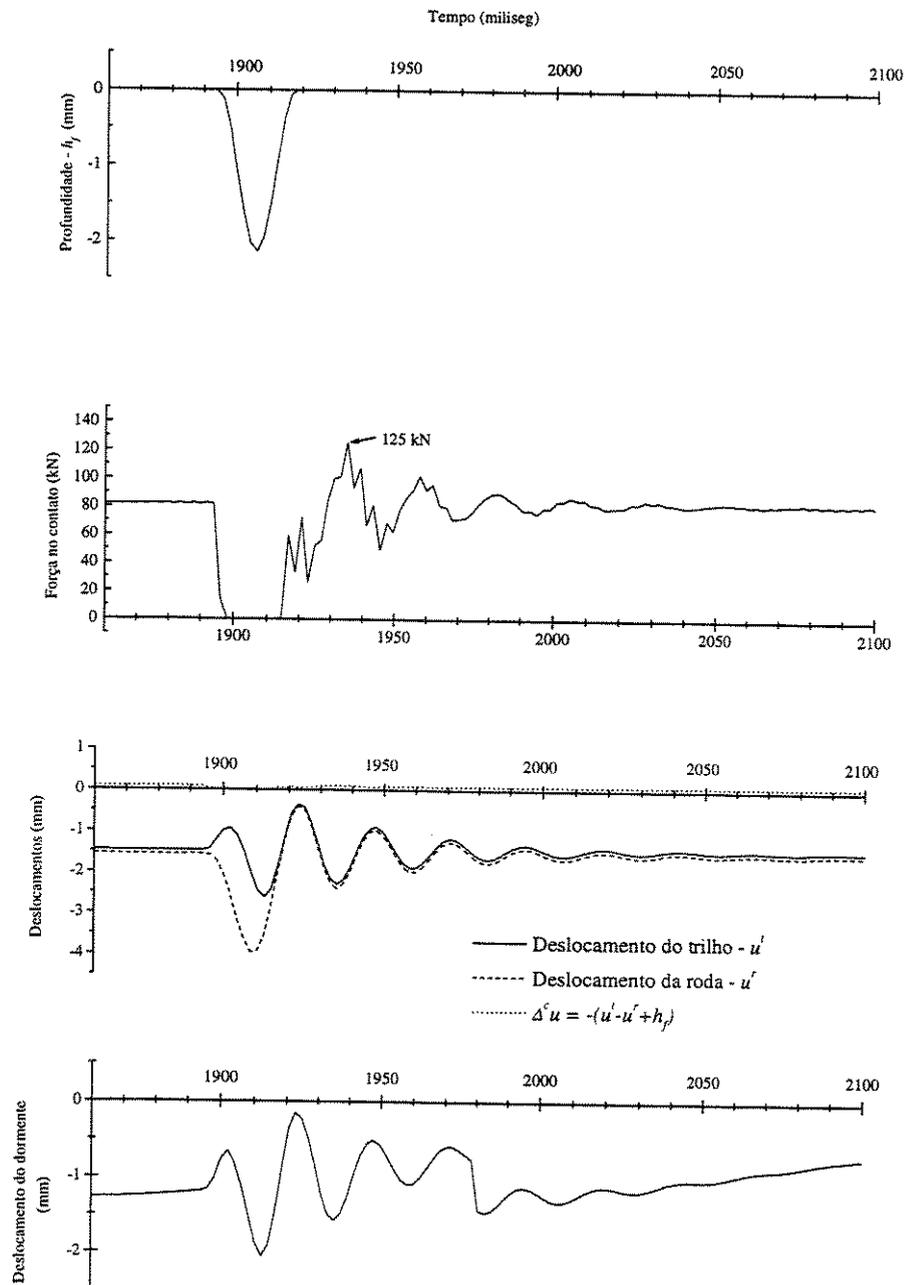


Figura 5.28: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 23 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade.

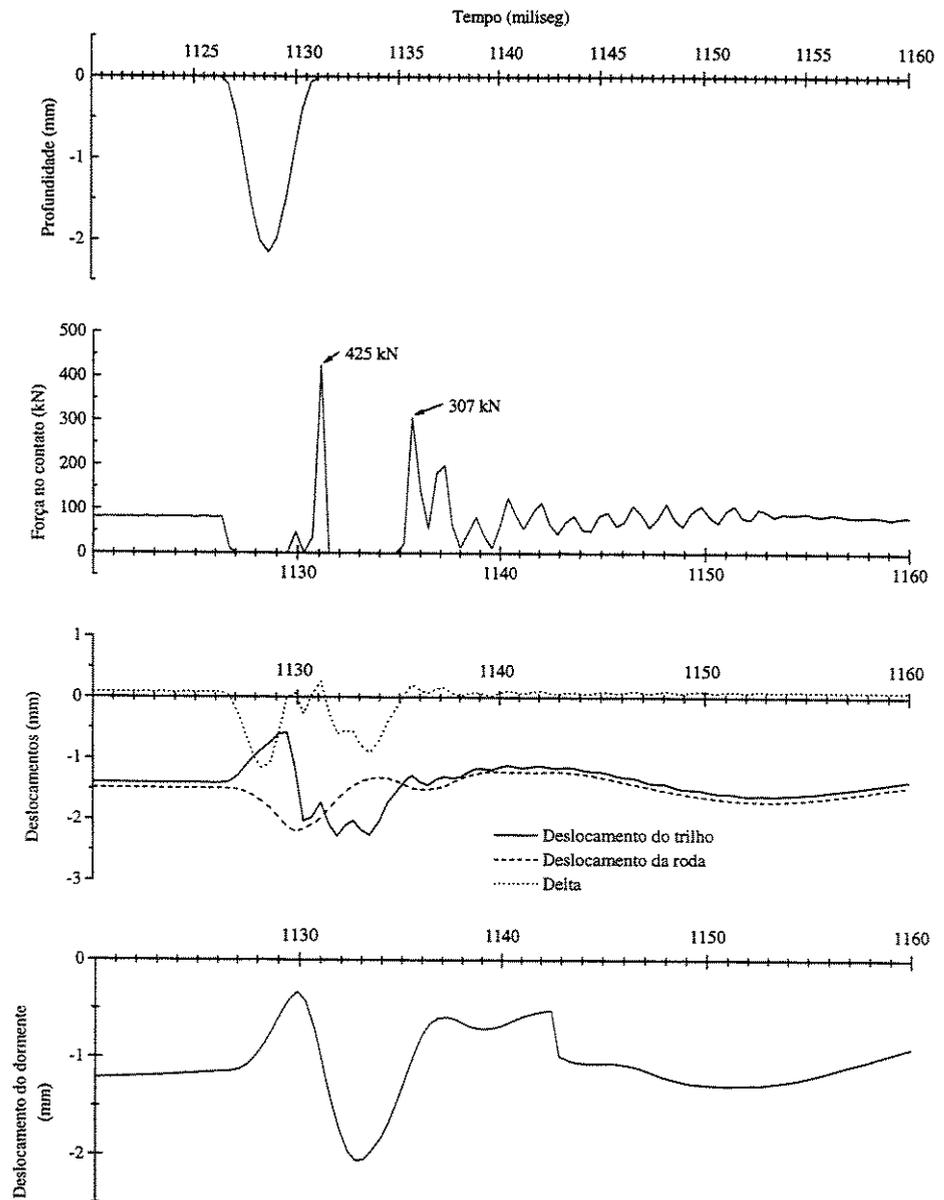


Figura 5.29: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com quatro graus de liberdade.

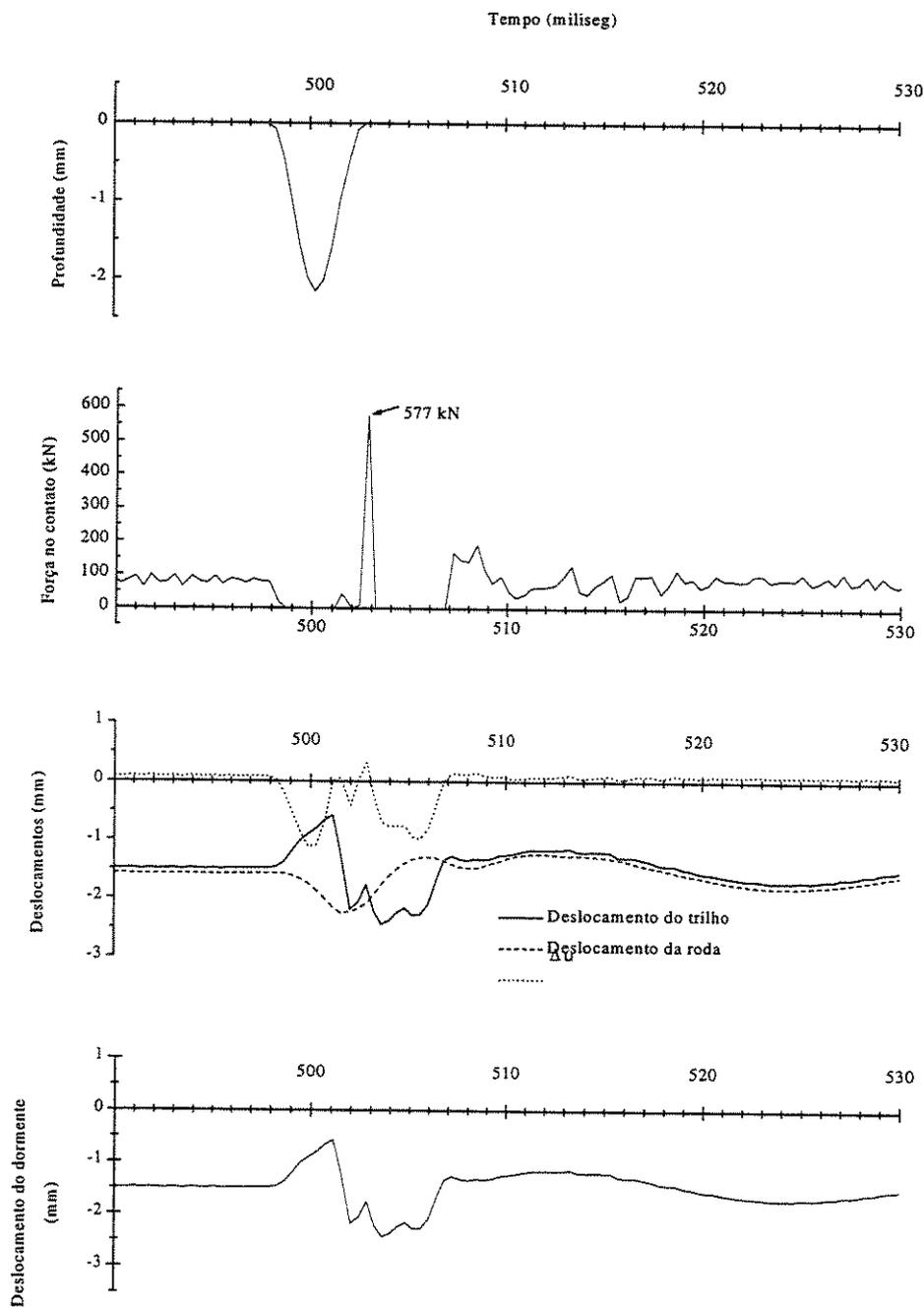


Figura 5.30: Resultados teóricos obtidos pelo modelo para a velocidade de 117 km/h utilizando a formulação de elemento finito de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade.

Questões referentes à implementação computacional

De forma similar ao caso do estudo dos trilhos corrugados, para verificar a estabilidade do esquema numérico de integração adotado determinamos em cada passo de tempo o valor da energia total do sistema dinâmico. A figura 5.31 nos apresenta séries históricas para a energia total do sistema para as três formulações utilizadas, para a velocidade de 117 km/h ao longo de um intervalo de tempo da simulação que contém uma ocorrência da irregularidade. Podemos perceber que o esquema de integração é estável, pois a energia máxima do sistema permanece constante ao longo de todo processo de integração, a menos do trecho onde ocorre a irregularidade. Provavelmente, esta variação é devida à pouca discretização em termos de intervalo de tempo. Teríamos que diminuir o intervalo de tempo de forma a se ter mais pontos de resposta ao longo do período que ocorre a irregularidade.

Outra questão importante é o tempo de processamento dispendido para as diferentes formulações. O menor tempo é conseguido com a formulação de elemento finito de viga Euler-Bernoulli. Se adotarmos um tempo padrão de referência igual a 100 para esta formulação para a execução de um determinado número de passos de tempo, a formulação com elemento finito de viga Timoshenko com quatro graus de liberdade dispenderia um tempo igual a 121 e a formulação com elemento finito de viga Timoshenko com 8 graus um tempo igual a 618. Existe uma diferença da ordem de 20 por cento entre as duas primeiras, mas a formulação com elemento finito de viga de Timoshenko com 8 graus de liberdade dispende praticamente 6 vezes mais tempo de processamento, reflexo da ordem das matrizes duas vezes maior.

5.4 A aplicação do modelo

5.4.1 Introdução

Nesta seção será desenvolvido um estudo do efeito de uma irregularidade tipo “plano-na-roda” para as condições das ferrovias brasileiras. Optamos por desenvolver esta análise para este tipo de irregularidade devido aos bons resultados obtidos com a formulação por nós adotada. O grande problema que encontramos para desenvolver este tipo de análise é a escolha dos parâmetros que serão utilizados na modelagem. Enquanto que vários parâmetros relativos ao veículo e à superestrutura da via férrea são facilmente determinados ou previamente conhecidos, o mesmo não acontece em relação aos parâmetros

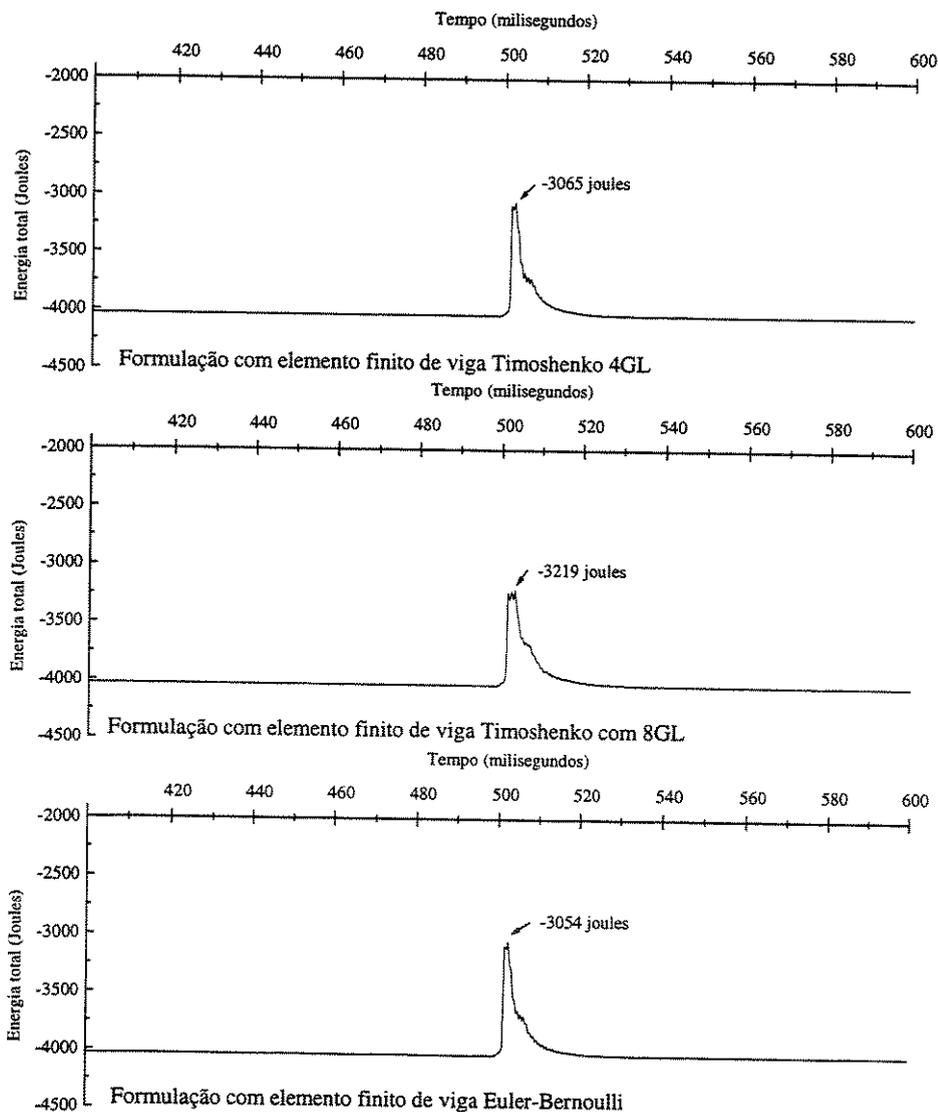


Figura 5.31: Energia total do sistema para as três formulações de elemento finito para a velocidade de 117 quilômetros por hora.

relativos à rigidez e ao amortecimento do sistema de fixação e da camada de lastro. Inicialmente, faremos uma apresentação da classificação das ferrovias brasileiras segundo as especificações brasileiras, e em função desta tipologia iremos sugerir quais seriam os parâmetros indicados para o desenvolvimento do processo de simulação.

5.4.2 A classificação das ferrovias brasileiras

Segundo a classificação brasileira *CB-55*[94] e a norma brasileira *NBR-11689* [95], as classes de via férrea principal são definidas a partir do chamado *tráfego fictício* (Tf_2). Este tráfego é definido para segmentos de via com mais de 50 km de extensão, com velocidade operacional menor ou igual a 140 km/h e para uma carga por eixo menor que 20 toneladas. Obtemos o tráfego fictício a partir da relação 5.7:

$$Tf_2 = S \times Tf_1 = S \times (Tv + km \times Tm + kt \times Tt), \quad (5.7)$$

onde Tf_1 é a tonelagem fictícia; Tv é a tonelagem diária de passageiros; Tm é a tonelagem diária de carga e Tt é a tonelagem diária de equipamentos de tração. O coeficiente km possui normalmente valor igual a 1.15, mas para vias que suportam um tráfego predominante com carga de eixo de 20 toneladas, adota-se um valor igual a 1.30. O valor do coeficiente kt é 1.40. Estes coeficientes levam em consideração a carga e a agressividade dos rodéis atuais.

O coeficiente S está relacionado com a qualidade da via. Se a via não tiver tráfego de passageiros ou comportando apenas tráfego local de passageiros, seu valor é igual a 1.00; mas se a via tiver tráfego de passageiros com trens cuja velocidade seja menor ou igual a 120 km/h, seu valor é 1.10; se a velocidade dos trens for maior que 120 km/h e menor que 140 km/h, seu valor é igual a 1.20 e se a velocidade for maior que 140 km/h, 1.25. A tonelagem diária é obtida pela divisão da tonelagem total do ano considerado por 365 dias.

Existe um processo alternativo para a determinação do tráfego fictício para as vias com tráfego de médio e longo percurso, sem tráfego de passageiros ou com tráfego de carga e de passageiros, com predominância do de cargas, com velocidade de até 80 km/h e carga por eixo máxima de até 30 toneladas. Obtemos o valor do tráfego fictício através da expressão 5.8:

$$Tf = \frac{U}{E} = \frac{Tm + Tv}{Tu} \times \frac{D}{E}, \quad (5.8)$$

onde U é a unidade de tráfego diário; E é a extensão de via que se deseja classificar; D é a densidade de tráfego diário; Tm é o transporte diário de cargas; Tv é o transporte diário de passageiros e Tu é o transporte diário de mercadorias útil. Em função do tráfego fictício temos os chamados *grupos de via principal de uma via férrea*, apresentados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Grupos de via principal de uma via férrea

Grupo	Tf_2 menor ou igual	Tf_2 maior	Ts menor ou igual	Ts maior
1	-	120.000	-	102.000
2	120.000	85.000	102.000	70.000
3	85.000	50.000	70.000	40.000
4	50.000	28.000	40.000	25.000
5	28.000	14.000	25.000	12.500
6	14.000	7.000	12.500	6.000
7	7.000	3.500	6.000	3.000
8	3.500	1.500	3.000	1.500
9	1.500	-	1.500	-

Com os grupos de via já definidos, a norma brasileira *NBR 12198*[96] nos fornece o espaçamento dos dormentes para as linhas principais, em função da bitola a ser adotada na via, impondo as condições mínimas em relação ao tipo de trilho a ser utilizado e a classe de fixação. Estas recomendações são apresentadas na tabela 5.2.

Nesta tabela as categorias dos dormentes é dada segundo a especificação brasileira *EB-101*[97], e as classes de fixação são as seguintes: *A*, quando utilizamos uma fixação rígida direta; *B* para uma fixação rígida com placa de apoio e *D* para as fixações elásticas indiretas com placa de apoio. Os trilhos seguem a tipologia adotada no Brasil, apresentada na tabela 5.3.

Em relação aos dormentes a especificação brasileira *EB-101* e a norma brasileira *NBR-7511*[98] fornecem as dimensões limites nominais para os dormentes de madeira, apresentadas na tabela 5.4.

Em relação à massa específica a 15 por cento de umidade, os valores mínimos são fornecidos em função da categoria do dormente. Existem três categorias: para a primeira categoria a massa específica mínima é igual a $0,75 \text{ g/cm}^3$; para a segunda categoria o valor é igual $0,60 \text{ g/cm}^3$ e para a

Tabela 5.2: Dormentação de linha principal

Bitola	Grupo de via	Condição mínima		Dormentes	
		Tipo de trilho	Classe de fixação	espaçamento máximo (mm)	Categoria
métrica	1,2 e 3	57	D	580	1 ^a ,2 ^a
	4,5 e 6	45	B	600	1 ^a ,2 ^a
	7,8 e 9	37	A	600	1 ^a ,2 ^a e 3 ^a
Normal ou Larga	1,2 e 3	68	D	550	1 ^a ,2 ^a
	4,5 e 6	57	B	550	1 ^a ,2 ^a
	7,8 e 9	50	A	580	1 ^a ,2 ^a e 3 ^a

terceira categoria é igual a $0,50 \text{ g/cm}^3$. Desta forma, podemos determinar quais são os valores máximos e mínimos das massas de dormentes de madeira. Os valores são apresentados na tabela 5.5.

Para os dormentes de concreto, estas massas variam em função das características do dormente utilizado e podem ser obtidas a partir de informações fornecidas pelo fabricante. Por exemplo, para um dormente inglês tipo F27 a massa é igual a 292.6 quilogramas, para um dormente tipo monobloco a massa é igual a 324 quilogramas, para um tipo bibloco a massa pode variar entre 240 e 244 quilogramas.

5.4.3 Os parâmetros para a simulação

Como já foi dito anteriormente, o grande problema que encontramos para desenvolver uma simulação da interação dinâmica entre o veículo e a via ferroviários é a escolha dos parâmetros que serão utilizados na modelagem, principalmente os parâmetros relativos à rigidez e ao amortecimento do sistema de fixação e da camada de lastro. Na literatura disponível encontramos vários valores obtidos através de estudos experimentais e utilizados na modelagem dinâmica da interação entre veículos e via ferroviários. Knothe e Grassie[5, p. 260 e 261] apresentam duas tabelas com vários valores dos coeficientes de rigidez e de amortecimento que foram utilizados por vários autores em seus estudos teóricos e experimentais. Os valores obtidos a partir de medições feitas vias descarregadas ou com pré-carregamento e em carros laboratórios

Tabela 5.3: Perfis de trilhos fabricados no Brasil

Tipo Nominal Brasileiro - TR		25	32	37	45	50	57	68	
Tipo correspondente americano		5848 ASCE	6548 ASCE	7548 ASCE	9828 ARA-A	10025 AREA	11525 AREA	13637 AREA	
peso por metro linear (kgf/m)		24,654	32,845	37,185	44,645	58,349	56,897	67,568	
Área calculada da seção (cm ²)	Boleto	área	13,23	17,16	19,87	20,58	24,51	25,22	31,35
		% total	42	42	42	36,2	38,2	34,8	36,3
	Alma	área	6,58	8,58	9,94	13,60	14,52	19,68	25,53
		% total	21	21	21	24	22,6	27,1	27,3
	Patim	área	11,6	15,18	17,48	22,64	25,16	27,68	31,42
		% total	37	37	37	39,8	39,2	38,1	36,4
	Área total		31,42	40,84	47,29	56,98	64,19	72,58	86,3
	Momento de inércia (cm ⁴)		413,7	783,4	951,5	1610,8	2039,5	2730,5	3950,0
Módulo de resistência (cm ³)	Boleto	81,6	120,8	149,1	205,6	247,4	295,0	391,6	
	Patim	86,7	129,5	162,9	249,7	291,7	360,7	463,8	
Raio de giração (cm)		3,63	4,15	4,49	5,32	5,63	6,13	7,11	

Tabela 5.4: Dimensões limites nominais de dormentes de madeira

	Dimensões (mm)					
	Largura		Altura		Comprimento	
Bitola	min.	máx.	min.	máx.	min.	máx.
métrica	220	240	160	170	1900	2300
normal	220	240	160	170	2550	2650
larga	220	240	160	170	2650	2800

mostraram que para vias lastreadas e com dormentes de concreto, o coeficiente de rigidez para a camada de lastro varia entre 12 e 500 MN/m, com coeficientes de amortecimento variando entre 30 e 240 kNs/m. Em relação aos coeficientes de rigidez e de amortecimento para as placas de apoio, estes variavam entre 70 e 400 MN/m e entre 7 e 70 kNs/m, respectivamente.

Em alguns casos, como no trabalho de Ahlbeck[48], os parâmetros são relativos à rigidez total da via, incluindo toda super e infraestrutura (trilhos, fixações, dormentes e camada de lastro), que podem ser utilizados em modelos de baixa frequência, onde a via férrea é modelada como um sistema simples mola mais amortecedor. A tabela 5.6 nos apresenta estes valores.

Tabela 5.5: Limites dos valores das massas dos dormentes de madeira

	massa do dormente (kg)					
	1ª categoria		2ª categoria		3ª categoria	
Bitola	min.	máx.	min.	máx.	min.	máx.
métrica	50,16	70,38	40,13	56,30	33,44	46,92
normal	67,32	81,09	53,86	64,87	44,48	54,06
larga	69,96	85,68	55,97	68,54	46,64	57,12

Tabela 5.6: Faixas de variação da rigidez da via

Tipo de Via (todas lastreadas)	Rigidez da via			
	Vertical - k_z (MN/m)	Lateral (MN/m)		
		k_{y1}	L/V p/	k_{y2}
Via principal, dorm. concreto	60 a 120	30 a 40	0.6 a 0.8	10
Via secundária, dorm. madeira	33 a 100	20 a 30	0.3 a 0.4	7
Ramal, dorm. madeira	22 a 33	8 a 11	0.3 a 0.4	3.3

As características da deflexão da via não dependem somente do tipo de via e de sua condição operacional, mas também da carga vertical, da relação entre a carga vertical e a lateral (L/V) e do ponto de aplicação da carga. Thompson e Vincent[50] em seu estudo, para o tipo de via analisado (trilhos UIC54, dormentes de concreto tipo bibloco com placas de apoio bastante rígidas) utilizaram coeficiente de rigidez para o lastro igual a 67 MN/m e igual a 1300 MN/m para as placas de apoio. Neste mesmo estudo, foram realizadas medições para determinar a rigidez dinâmica de cinco tipos de fixações de trilho. Foi utilizado um método denominado indireto, no qual o elemento resiliente é colocado entre duas massas. A massa superior é excitada eletro-dinamicamente e a resposta de ambas as massas é medida através de acelerômetros. Um pré-carregamento estático pode ser introduzido hidraulicamente na direção vertical. Medições da excitação e da resposta podem ser feitas nos seis graus de liberdade, permitindo a determinação de todos trinta e seis elementos da matriz de transferência, mas somente as funções de transferência vertical e lateral foram consideradas.

Foram testados cinco tipos de sistemas de fixação, descritos a seguir:

1. Fixações NABLA com placa de apoio de borracha reforçada com 4.5 mm de espessura tipo MRE89;

2. Fixações VOSSLOH com placa de apoio de borracha fina tipo Zw687a;
3. Fixações macias de dois estágios “Rheda modifiziert” (placa de apoio tipo Zw692 de 6 mm, mais uma paca de aço com 16 mm de espessura e uma placa de apoio macia com fixações VOSSLOH), utilizada em vias férreas não-lastreadas;
4. Placas de apoio de borracha-cortiça tipo FC9 com 4.5 mm de espessura e *clips* DE;
5. Placas de apoio de borracha EVA com 4.5 mm de espessura com *clips* DE (a), dormentes de madeira com fixações tipo K (b).

Em todas os casos os dormentes não foram utilizados nos testes e as fixações foram conectadas diretamente à massa inferior. Os valores das rigidezes dinâmicas vertical e lateral para os vários sistemas são apresentados na tabela 5.7. Os valores estão sujeitos a uma tolerância de 5 a 10 por cento e para a direção vertical a rigidez estática também é apresentada.

Tabela 5.7: Coeficientes de rigidez dinâmicos para fixações sob pré-carregamento

Fixações	Vertical			Rigidez dinâmica lateral (MN/m)	
	Rigidez estática (MN/m)		Rigidez dinâmica (MN/m)		fator de perda amortecimento
Pré-carregamento (kN)	40 ⁽¹⁾	60 ⁽¹⁾	40 ⁽²⁾	40 ⁽²⁾	
placa 4.5 mm / NABLA Zw687a / VOSSLOH	170	300	2250 ⁽³⁾	0.08	380
Rheda Modifiziert	970	1300	3550	0.1	280
placa FC9 / clip DE	26	26	60	0.2-0.3	50
placa EVA / clip DE	250	380	3000	0.13	22
placa EVA / fixação K	-	-	4000	0.13	266
	130	130	265	0.05	71

Obs: (1) sem clips, (2) com clips, (3) resultado muito sensível à tensão nas fixações

Thompson e Vincent[51] apresentam parâmetros utilizados em seu estudo referentes a quatro tipos de vias férreas, todas lastreadas. O primeiro tipo (A) consiste de uma via com trilhos UIC54 apoiados sobre placas de apoio ranhuradas muito rígidas e dormentes de concreto tipo bibloco; o segundo

tipo (B) consiste de trilhos UIC54 apoiados diretamente sobre dormentes de madeira; o terceiro tipo (C) consiste de uma via com trilhos UIC60 apoiados sobre placas de apoio de média rigidez e dormentes de concreto tipo monobloco e o último tipo (D) consiste de uma via com trilhos UIC60 apoiados sobre placas de apoio ranhuradas de rigidez média e dormentes de concreto tipo bibloco. A tabela 5.8 nos apresenta estes valores.

Tabela 5.8: Coeficientes de rigidez da placa de apoio e do lastro

Parâmetro	Tipo de via			
	A	B	C	D
Rigidez vertical da placa (MN/m)	1300	500	350	200
Rigidez vertical do lastro (MN/m)	67	70	50	50

Também em relação aos valores que podem ser utilizados para as placas de apoio de trilhos e do sistema de fixações, Ripke e Knoth [49] nos apresentam na tabela 5.9 valores para a rigidez e o amortecimento das placas de apoio.

Tabela 5.9: Coeficientes de rigidez e de amortecimento para placas de apoio

Tipo de Placa	Rigidez (MN/m)	Amortecimento (kNs/m)
placa muito macia	100	43
placa macia	200	54
referência	280	63
placa rígida	400	74
placa muito rígida	800	93

Em outro estudo, Knothe et al.[99] para uma via lastreada com trilhos UIC60 e com dormentes tipo DB, utilizou os seguintes coeficientes de rigidez para a placa de apoio e para a camada de lastro: 280 e 180 MN/m, respectivamente. Os coeficientes de amortecimento adotados foram 63 e 82 kN/m, respectivamente. Neste estudo também foram utilizados parâmetros para a suspensão primária do veículo, outro parâmetro que utilizamos em nosso modelo. O coeficiente de rigidez adotado era igual a 750 kN/m e o coeficiente de amortecimento era igual a 12 kNs/m.

Dois trabalhos voltados para testes de *benchmark* de modelos de via e de interação entre veículo e via ferroviários apresentam os parâmetros de referência que deveriam ser utilizados. No primeiro trabalho, de Knothe[100], para modelos que trabalham com uma faixa de frequências baixa, e o segundo trabalho, de autoria de Grassie[101], para modelos voltados para faixas de frequência relativamente altas. A tabela 5.10 nos apresenta os valores sugeridos por estes pesquisadores.

Tabela 5.10: Coeficientes de rigidez e de amortecimento para placas de apoio

Parâmetro	Grassie	Knothe
rigidez vertical - placa de apoio (MN/m)	150	80
amortecimento vertical - placa de apoio (kNs/m)	50	20
rigidez vertical - lastro (MN/m)	80	25
amortecimento vertical - lastro (kNs/m)	30	25
rigidez vertical - suspensão primária (kN/m)	1000	732
amortecimento vertical - suspensão primária (kNs/m)	10	-

Como podemos observar pelos valores apresentados por todos estes autores e mostrados nas tabelas, os parâmetros relativos à rigidez e ao amortecimento do lastro e das placas de apoio e/ou sistemas de fixações varia muito em função das características da via, de seu grau de conservação e manutenção e da faixa de frequência de interesse. Acreditamos que os valores apresentados na tabela 5.9 podem ser utilizados como referência, caso não se conheça com exatidão as características dos sistemas de fixações e das placas de apoio. Entretanto, em relação aos parâmetros do lastro existe uma grande variação em função das características da superestrutura e da faixa de frequência de interesse. Para podermos solucionar este problema desenvolvemos uma abordagem baseada no módulo de lastro, utilizado na análise estática de tensões na via férrea desenvolvida por Zimmermann e apresentada no capítulo 2.

Nesta metodologia para a transformação de uma via apoiada sobre dormentes discretos em uma via apoiada sobre dormentes longitudinais, ao valor do módulo de lastro C foi adicionada uma largura "efetiva" b , que seria agora a largura do dormente longitudinal equivalente. Esta largura efetiva é determinada pela equação 2.23, ou seja

$$b = \frac{2\ddot{u}b_s}{a},$$

onde \ddot{u} é a distância medida a partir do centro do trilho até o fim do dormente, b_s é a largura do dormente e a é o espaçamento medido entre os centros dos dormentes.

Para o desenvolvimento de sua metodologia de cálculo Zimmermann determina algumas variáveis auxiliares. A primeira delas é o chamado *valor fundamental* (L) da via com dormente longitudinal, determinado a partir da equação 2.25, ou seja

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bC}} = \text{valor fundamental.}$$

Com o valor fundamental determinado, podemos calcular as deflexões ($w(x)$) através da equação 2.26, ou seja

$$w(x) = \frac{P}{2bCL} \times \eta,$$

onde a variável auxiliar η é determinada pela equação 2.28, ou seja

$$\eta = \frac{\sin \xi + \cos \xi}{e^\xi},$$

onde a variável ξ representa um valor relativo do comprimento x em relação ao valor fundamental L , ou seja, $\xi = x/L$. O valor fundamental L é de grande importância nesta metodologia de cálculo. Este valor depende das características do trilho, da superfície de apoio do dormente, do espaçamento entre dormentes e do coeficiente de lastro. A deflexão no ponto de aplicação da carga, ou seja, para $x = 0$, é dada por

$$w_0 = \frac{P}{2bCL}. \quad (5.9)$$

Se conseguíssemos relacionar os parâmetros de rigidez da via de nosso modelo com o módulo de lastro C , poderíamos obter valores para estes parâmetros com certa facilidade, pois o módulo de lastro pode ser obtido por

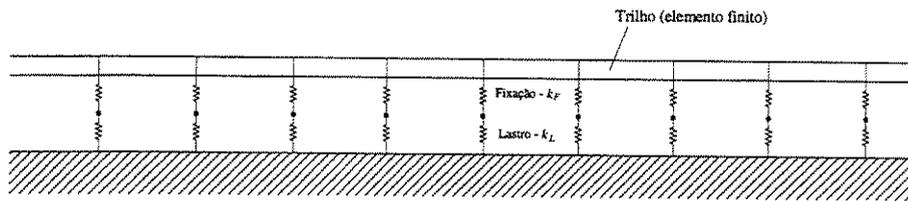


Figura 5.32: Modelo de via férrea com apoio discreto utilizando o método dos elementos finitos.

determinação direta, a partir da determinação da deflexão do trilho ou do comprimento da bacia de deformação, como já mostrado anteriormente no Capítulo 2. Para tanto, construímos um programa computacional, onde a via férrea é modelada através do método dos elementos finitos, com apoio discreto, com um trecho em anel com 25 dormentes para simular comprimento infinito e modelando o trilho como uma viga de Euler-Bernoulli. Este modelo pode ser visualizado através da figura 5.32.

Neste modelo o apoio do trilho é feito através de duas molas em série, representando as rigidezes das fixações e placas de apoio (k_F) e do lastro (k_L). O programa computacional inicia-se com o cálculo da deflexão do trilho no ponto de aplicação da carga segundo a metodologia desenvolvida por Zimmermann, através da equação 5.9. Para tanto, é necessário conhecer a bitola da via; o tamanho e a largura do dormente e o seu espaçamento, e o módulo de lastro. Com este valor, o programa inicia uma busca para determinar o valor da rigidez do lastro (k_L), utilizando o modelo de elementos finitos que forneça a mesma deflexão. Este valor será determinado em função da rigidez do sistema de fixações. No modelo de elementos finitos faz diferença se a carga for aplicada sobre o dormente ou no ponto médio entre dois dormentes. Uma análise preliminar mostrou que a maior deflexão ocorre quando a carga é aplicada sobre o dormente. Assim, para um dado valor do módulo de lastro C , existem vários valores para a rigidez do lastro, dependendo das características da via e da rigidez das fixações. A relação entre o módulo de lastro e a sua rigidez independem do tipo de trilho e do valor da carga aplicada, pois estes parâmetros são independentes nas duas metodologias.

Para obtermos as relações entre o módulo de lastro e a sua rigidez utilizaremos uma carga igual a 50 kN e trilho tipo TR-45. Foram estudadas as

três bitolas usuais no Brasil (métrica, normal e larga), dormentes de madeira com largura igual a 240 mm e comprimentos iguais a 2000, 2600 e 2800 mm respectivamente. Em relação à rigidez do sistema de fixações utilizamos os valores apresentados na tabela 5.9, sem os valores extremos, ou seja placa de apoio macia, de referência e rígida (200, 280 e 400 MN/m, respectivamente). Em relação ao espaçamento entre dormentes utilizamos os valores apresentados na tabela 5.2, onde para a bitola métrica temos os espaçamentos de 580 e 600 mm e para as bitolas normal e larga, os espaçamentos de 550 e 580 mm.

No cálculo da área de apoio, seguiremos o procedimento apresentado por Paiva[102], que segue critérios alemães e da norma brasileira NB-475[103]. Assim, os valores de \ddot{u} serão iguais a 56,75 cm para bitola larga; 55 cm para bitola normal e 38,25 cm para bitola métrica. Para podermos verificar a consistência desta metodologia, verificamos não somente a deflexão do trilho no ponto de aplicação da carga, mas ao longo de um trecho com 15 dormentes a partir deste ponto. Assim, comparamos as deflexões calculadas pela metodologia de Zimmermann com as obtidas no mesmo ponto pelo método dos elementos finitos. Como parâmetros utilizamos os dados utilizados por Clark et al.[39] em seu estudo. Era uma via inglesa de bitola normal, com trilhos 113A CWR; dormentes de concreto F27, com largura igual a 0,30 m; espaçamento entre dormentes igual a 0,63 m; \ddot{u} igual a 0,50 m e a rigidez da placa de apoio igual a 250 MN/m. A carga de roda aplicada é igual a 50,3 kN. Para um valor de C igual a 10,0 kgf/cm² foi determinada uma rigidez do lastro igual a 35,4 MN/m. A figura 5.33 nos apresenta as deflexões obtidas pelas duas metodologias utilizando estes valores.

Podemos observar que a diferença no valor da deflexão máxima é da ordem de 1 por cento. Para os outros valores esta diferença é ainda menor, tal que a partir do oitavo dormente são praticamente idênticas. Este resultado mostra a precisão da metodologia desenvolvida por Zimmermann, tanto que até hoje é extensivamente utilizada no dimensionamento e na análise estática de tensões nas vias férreas. A tabela 5.11 nos apresenta os resultados obtidos para as relações entre o módulo e a rigidez do lastro.

Podemos observar que para todas as bitolas o valor do espaçamento entre os dormentes tem pouca influência sobre a determinação da rigidez do lastro. No caso da bitola métrica, o resultado também é pouco sensível à rigidez do sistema de fixação. Assim, para esta bitola é possível a utilização de valores médios para a rigidez do lastro para cada valor do módulo de lastro. Segundo Paiva[102], os valores do módulo de lastro podem variar entre 2 e 50

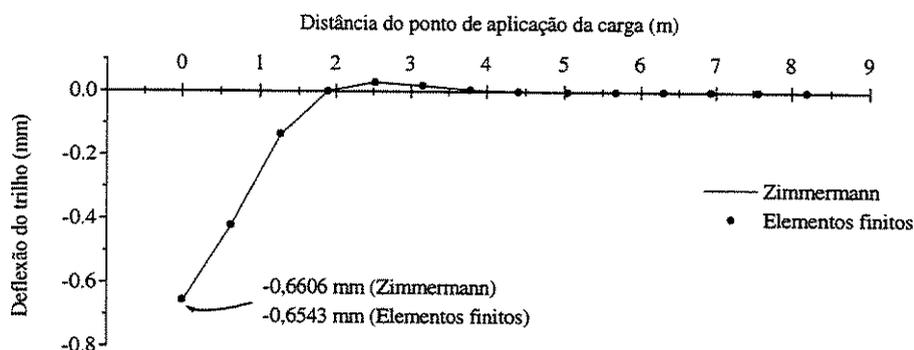


Figura 5.33: Deflexões do trilho calculadas pela metodologia de Zimmermann e pelo modelo de elementos finitos.

Tabela 5.11: Valores da rigidez do lastro em função do módulo de lastro

Bitola	esp. (mm)	k_F (MN/m)	C	Rigidez do lastro - k_L (MN/m)						
				2	5	7	8	10	13	15
Métrica	580	200		3,7	9,5	13,6	15,6	19,9	26,6	31,3
		280		3,7	9,4	13,3	15,3	19,4	25,6	30,0
		400		3,7	9,3	13,1	15,1	19,0	25,0	29,1
	600	200		3,7	9,5	13,6	15,6	19,9	26,6	31,3
		280		3,7	9,4	13,3	15,3	19,3	25,6	30,0
		400		3,7	9,3	13,1	15,0	19,0	25,0	29,0
Normal	550	200		5,4	14,0	20,1	23,2	29,9	40,6	48,2
		280		5,4	13,7	19,5	22,5	28,6	38,3	45,1
		400		5,4	13,5	19,1	22,0	27,8	36,8	43,1
	580	200		5,4	14,0	20,0	23,2	29,8	40,5	48,2
		280		5,4	13,7	19,5	22,5	28,6	38,3	45,1
		400		5,4	13,5	19,1	22,0	27,8	36,8	43,0
Larga	550	200		5,6	14,4	20,8	24,1	31,0	42,1	50,1
		280		5,6	14,1	20,2	23,3	29,7	39,7	46,8
		400		5,5	13,9	19,7	22,7	28,7	38,1	44,6
	580	200		5,6	14,4	20,7	24,0	30,9	42,1	50,1
		280		5,6	14,1	20,2	23,2	29,6	39,7	46,7
		400		5,5	13,9	19,7	22,7	28,7	38,1	44,5

kgf/cm³. Entretanto, valores de módulo de lastro superiores a 15 são muito difíceis de serem encontrados. As ferrovias japonesas indicam valores iguais a 5 para plataforma regulares e 13 para as boas plataformas. Schramm[70] em seu livro coloca que o valor médio adotado para as ferrovias alemãs é igual a 14,6 kgf/cm³, valor bem razoável tendo em vista a grande qualidade das vias alemãs. Eisenmann, no livro de Fastenrath[2], recomenda que para vias com uma infra-estrutura ruim adotar um módulo de lastro igual a 2; 5 para vias com boa infra-estrutura e 10 kgf/cm³ para o caso de infra-estrutura muito boa.

Uma outra maneira de se estimar os valores do módulo de lastro foi proposta por Lopez Pitta, no livro de Rives[12], onde são apresentadas expressões desenvolvidas a partir de pesquisas nas vias européias, que permitem estimar o valor do módulo da lastro em função do módulo de deformabilidade da plataforma (E_p), obtido em ensaios de campo, e da espessura do lastro (h), dada em metros. No caso de bitola normal, estas expressões são:

$$\begin{aligned} \text{para } E_p = 130 \text{ kgf/cm}^2 &\longrightarrow C = 0,106 \times h + 0,212, \\ \text{para } E_p = 300 \text{ kgf/cm}^2 &\longrightarrow C = 0,194 \times h + 0,101, \text{ e} \\ \text{para } E_p = 700 \text{ kgf/cm}^2 &\longrightarrow C = 0,275 \times h + 0,972. \end{aligned}$$

Paiva e Guimarães[19], desenvolveram correlações entre estas curvas e os valores do módulo de lastro sugeridos por Eisenmann e concluíram que para um módulo de deformabilidade da plataforma igual a 130 kgf/cm², que corresponde a um valor do índice de suporte Califórnia (*CBR*) de aproximadamente 9 por cento, que seria uma plataforma de baixa capacidade de suporte, uma camada de lastro com espessura de 17 cm sobre esta plataforma teria um módulo de lastro igual a 2 kgf/cm³. Para um módulo de deformabilidade da plataforma igual a 300 kgf/cm², que corresponde a um valor do índice de suporte Califórnia (*CBR*) de aproximadamente 26 por cento (boa capacidade de suporte), uma camada de lastro com espessura de 25 cm sobre esta plataforma teria um módulo de lastro igual a 5 kgf/cm³. Se o módulo de deformabilidade da plataforma for igual a 700 kgf/cm², que corresponde a um valor do índice de suporte Califórnia (*CBR*) de aproximadamente 76 por cento (grande capacidade de suporte), uma camada de lastro com espessura de 33 cm sobre esta plataforma teria um módulo de lastro igual a 10 kgf/cm³. Neste mesmo estudo Paiva e Guimarães também concluíram que as expressões propostas por Lopez Pitta poderiam ser utilizadas em vias de bitola larga.

Assim sendo, dada uma via férrea onde a capacidade de suporte da plataforma for conhecida, podemos determinar o módulo de lastro em função da altura da camada de lastro. Com este valor determinado podemos estimar a rigidez do lastro que poderá ser utilizada no modelo de simulação dinâmica da interação entre veículo e via ferroviários. Entretanto, cabe ressaltar que a rigidez assim determinada é apenas uma estimativa, pois foi determinada a partir de critérios estáticos e sabemos que a rigidez dinâmica varia com a frequência de excitação. O recomendável seria determinar este parâmetro a partir de ensaios experimentais, mas a experiência internacional tem mostrado a extrema dificuldade de se realizar tais tipos de experimentos.

Em relação aos parâmetros de amortecimento, em relação ao sistema de fixação podemos utilizar os valores sugeridos por Ripke e Knothe apresentados na tabela 5.9. Em relação lastro, Grassie e Cox[38, tab.1, pg. 126], apresentam uma tabela onde são mostrados valores dos parâmetros de rigidez e amortecimento do sistema de fixação e do lastro, obtidos de vários experimentos. Seguntos os autores, o fato de haver ocorrido soca da camada de lastro afeta a sua rigidez e o seu amortecimento. A soca torna o lastro mais resiliente e bem menos amortecido. Valores de amortecimento entre 25 e 70 kNs/m são aceitáveis.

5.4.4 Estudo de caso

Para podermos dar uma demonstração das possibilidades de utilização do modelo aqui desenvolvido, nesta seção realizamos um estudo do efeito sobre a força de contato entre a roda e o trilho que uma irregularidade tipo “plano-na-roda” teria em função da qualidade da infra e da superestruturada da via férrea. Analisamos três tipos de vias de bitola métrica tipicamente brasileiras, solicitadas por um vagão de carga típico trafegando a uma velocidade igual a 25 e a 60 km/h. A escolha destas velocidades deve-se ao fato de ser no entorno da primeira que ocorre o primeiro pico de ressonância devida à excitação provocada pelo “plano-na-roda”, e a segunda é uma velocidade operacional típica das ferrovias brasileiras. As características da irregularidade são as mesmas adotadas por Newton e Clark[40] em seu estudo (profundidade do *flat* igual a 2,15 mm e comprimento igual a 150 mm).

As características do veículo que nos interessam estão relacionadas à roda e à suspensão primária do vagão. Utilizaremos uma roda de diâmetro igual a $29\frac{1}{4}$ polegadas (0,743 m), utilizada em vagões da antiga FEPASA e que possui uma massa igual a 350 kg. A carga de roda adotada é igual

a 100 kN, a massa suspensa sobre a roda igual a 9844 kg e os parâmetros da suspensão primária adotados são: rigidez da mola igual a 750 kN/m e amortecimento igual a 12 kNs/m. A seguir faremos a descrição dos três tipos de via férrea analisadas.

Características das vias analisadas

As três vias possuem características bem distintas em relação às características da superestrutura e das condições de manutenção. O primeiro tipo (A) é uma via com trilhos TR-45, apoiados sobre dormentes de madeira de terceira categoria e fixações diretas rígidas (classe A) e com péssimas condições de manutenção do lastro; o segundo tipo (B) é uma via também com trilhos TR-45, apoiados sobre dormentes de madeira de primeira categoria e fixações rígidas com placa de apoio (classe B), e com lastro em boas condições, e o terceiro tipo (C) é uma via de excelente padrão, também com trilhos TR-45 apoiados sobre dormentes de concreto tipo monobloco e fixações elásticas indiretas (classe D) e com lastro em excelentes condições. Em todas as vias o espaçamento entre os dormentes é igual a 580 mm. A tabela 5.12 nos apresenta os parâmetros adotados para a simulação para os três tipos de via.

Tabela 5.12: Parâmetros referentes aos três tipos de via utilizados na simulação

Parâmetros	Tipo de via		
	A	B	C
Módulo de lastro (kgf/cm^3)	2	5	10
Rigidez fixação ⁽¹⁾ - k_F (MN/m)	400	280	200
Amortecimento fixação ⁽¹⁾ - c_F (kNs/m)	74	63	54
Rigidez lastro ⁽²⁾ - k_F (MN/m)	3,7	9,4	19,4
Amortecimento lastro ⁽³⁾ - c_F (kNs/m)	25	25	25
Meia massa do dormente (kg)	25	35	113

⁽¹⁾tab.5.9, ⁽²⁾tab.5.11 e ⁽³⁾valores adotados.

Utilizaremos em nossa análise o modelo com a formulação de elemento de viga Euler-Bernoulli, por ter sido esta implementação que obteve os melhores resultados. Utilizaremos um trecho de via com 25 dormentes, número de intervalos de tempo igual a 60 e simularemos 3000 passos de tempo.

Análise dos resultados

As figuras 5.34 e 5.35 nos apresentam os resultados obtidos pela simulação para a via tipo (A) para as velocidades de 25 e 60 km/h, respectivamente. Para a velocidade de 25 km/h observamos que a roda ao chegar na região da irregularidade “voa”, perdendo contato com o trilho. Entra em contato novamente próximo do final da região, devido ao movimento do trilho e a restituição devida à suspensão primária. Entretanto, no impacto a força no contato aumenta muito pouco. Isto deve-se à rigidez muito pequena do lastro, que favorece muito o amortecimento deste impacto, como bem colocam Grassie e Cox [38]. Para a velocidade de 60 km/h o fenômeno se repete, mas com um impacto significativamente maior, na ordem de 116 kN, seguido de uma pequena oscilação.

Os resultados obtidos para a via tipo (B) são apresentados nas figuras 5.36 e 5.37, para as velocidades de 25 e 60 km/h, respectivamente. Para a velocidade de 25 km/h também observamos que a roda ao chegar na região da irregularidade “voa”, perdendo contato com o trilho. Entra em contato novamente próximo do final da região, devido ao movimento do trilho e a restituição devida à suspensão primária, com uma força no contato um pouco maior que a carga estática (107,5 kN) no impacto, em um movimento de oscilação significativo. Isto já se deve à uma maior rigidez do lastro. Para a velocidade de 60 km/h o fenômeno se repete, mas com um impacto significativamente maior, na ordem de 124 kN, seguido de uma oscilação em torno da carga estática.

Os resultados obtidos para a via tipo (C) são apresentados nas figuras 5.38 e 5.39, para as velocidades de 25 e 60 km/h, respectivamente. Para a velocidade de 25 km/h também observamos que a roda ao chegar na região da irregularidade “voa”, perdendo contato com o trilho. Entra em contato novamente próximo do final da região, devido ao movimento do trilho e a restituição devida à suspensão primária como nos casos anteriores, com uma força no contato significativamente maior que a carga estática (112,5 kN) no impacto, em um movimento de oscilação bem significativo. Isto também deve-se à uma maior rigidez do lastro. Para a velocidade de 60 km/h o fenômeno se repete, mas com um impacto significativamente bem maior, na ordem de 141 kN, seguido de uma oscilação significativa em torno da carga estática.

Pelos resultados apresentados observamos que quanto menor for a rigidez da via férrea, menor será o efeito da irregularidade em relação à força

no contato entre a roda e o trilho, já que uma via pouco rígida amortece o impacto provocado pela transposição da irregularidade pela roda. Como a força no contato tem mais importância para os trilhos e para os veículos, a irregularidade tipo “plano-na-roda” só tem importância operacional em vias de alta qualidade e em altas velocidades. Para vias com baixa rigidez a importância maior está relacionada à deformação permanente da via, pois como podemos observar pelos resultados relativos à deflexão do dormente em todos os tipos de via analisados, o mesmo sofre uma grande oscilação, algumas bruscas, com amplitudes variando de 5 a 8 mm no caso da via de tipo (A), para a velocidade de 60 km/h, que podem contribuir decisivamente para a degradação das características operacionais da camada de lastro. Estas amplitudes se reduzem com o aumento da rigidez da camada de lastro.

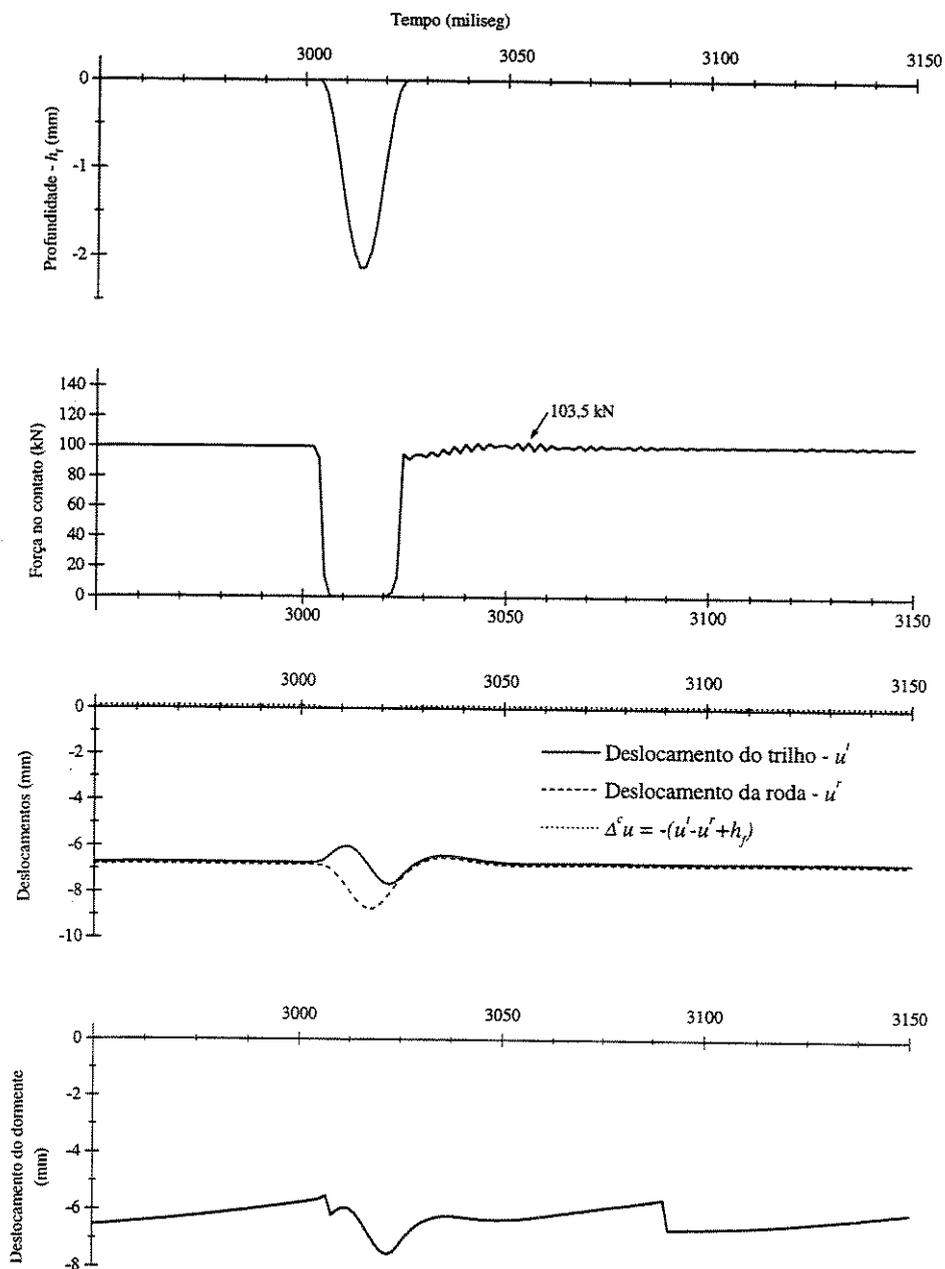


Figura 5.34: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (A) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.

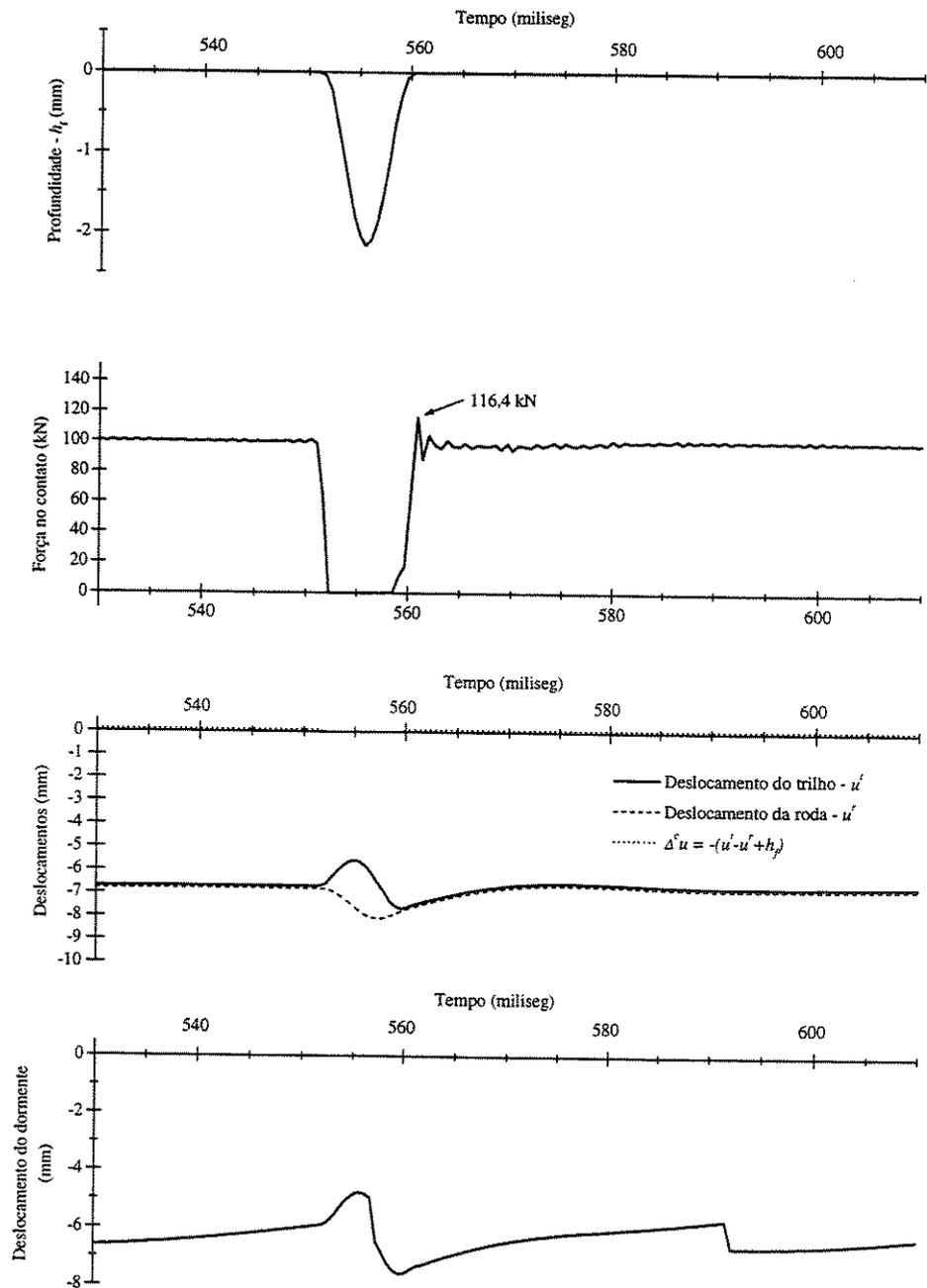


Figura 5.35: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (A) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.

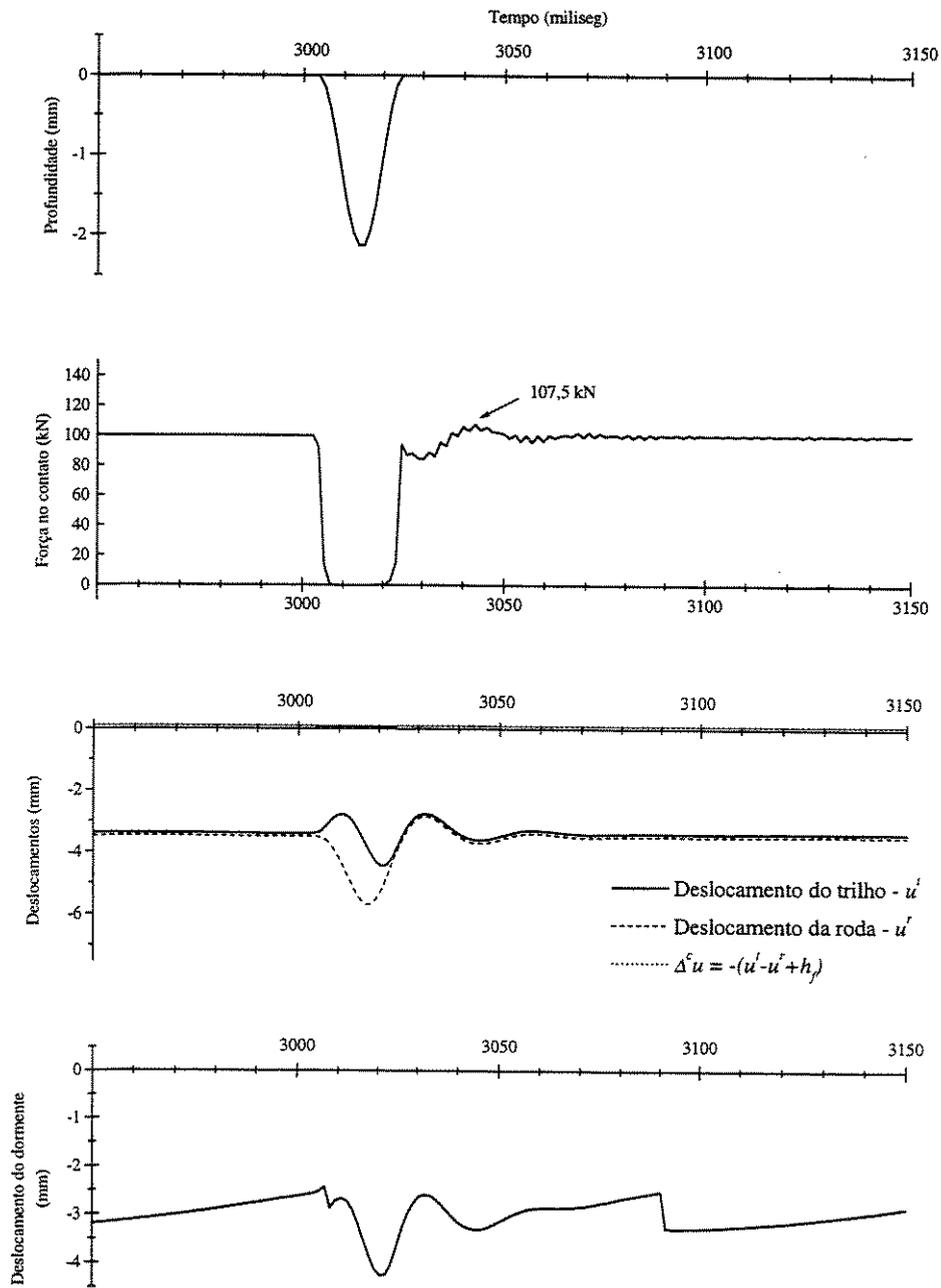


Figura 5.36: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (B) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.

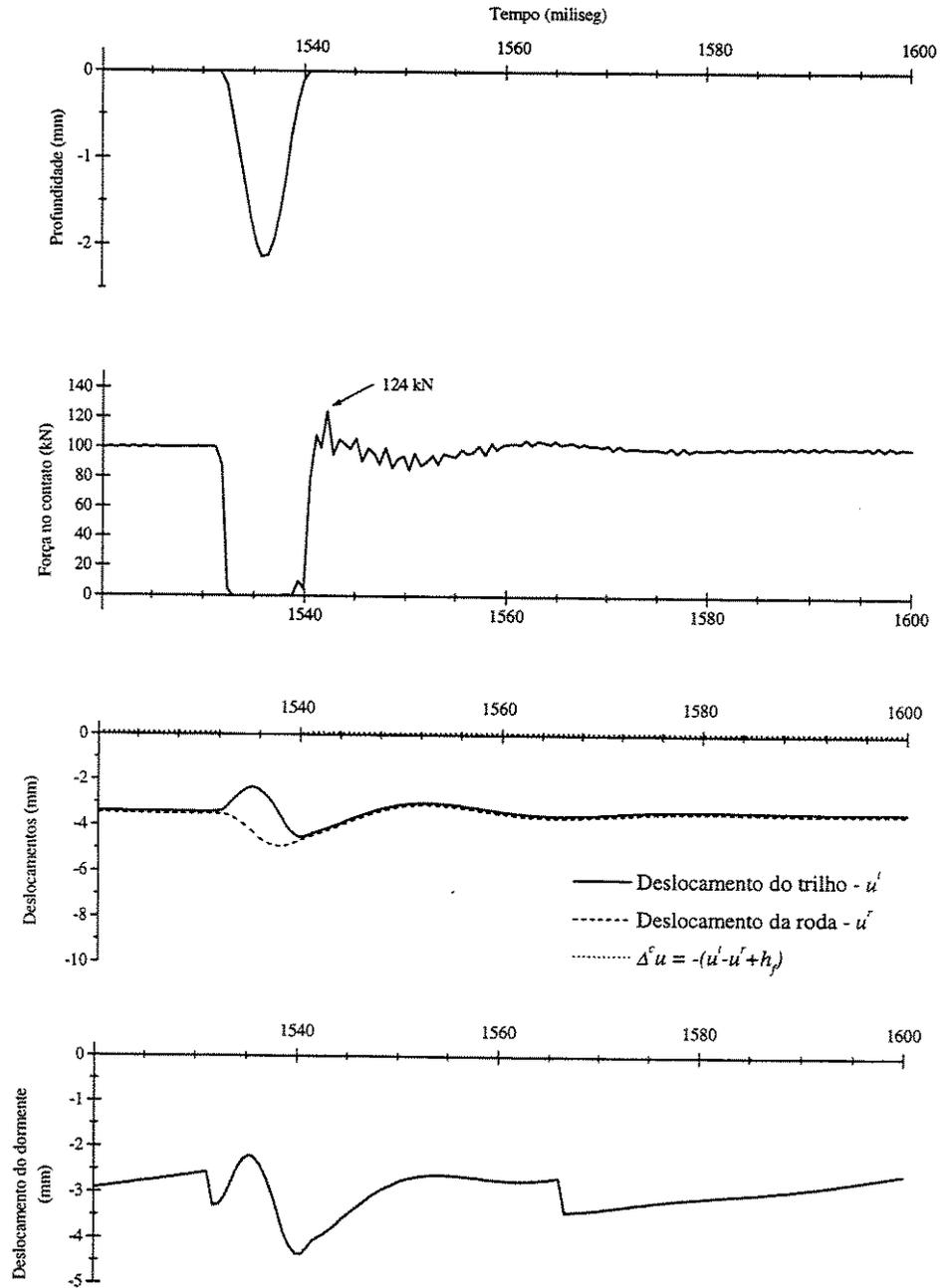


Figura 5.37: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (B) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.

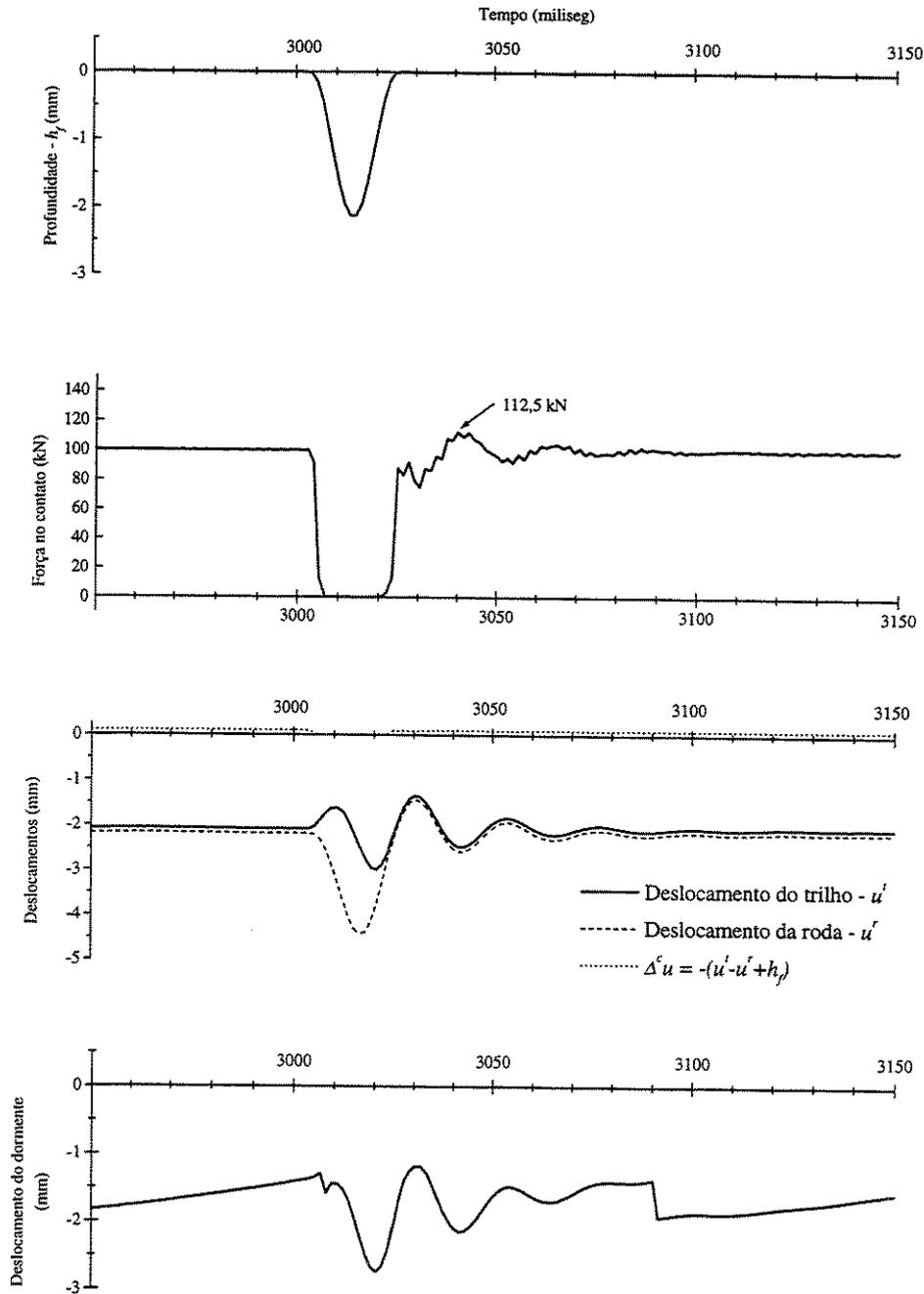


Figura 5.38: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (C) para a velocidade de 25 quilômetros por hora.

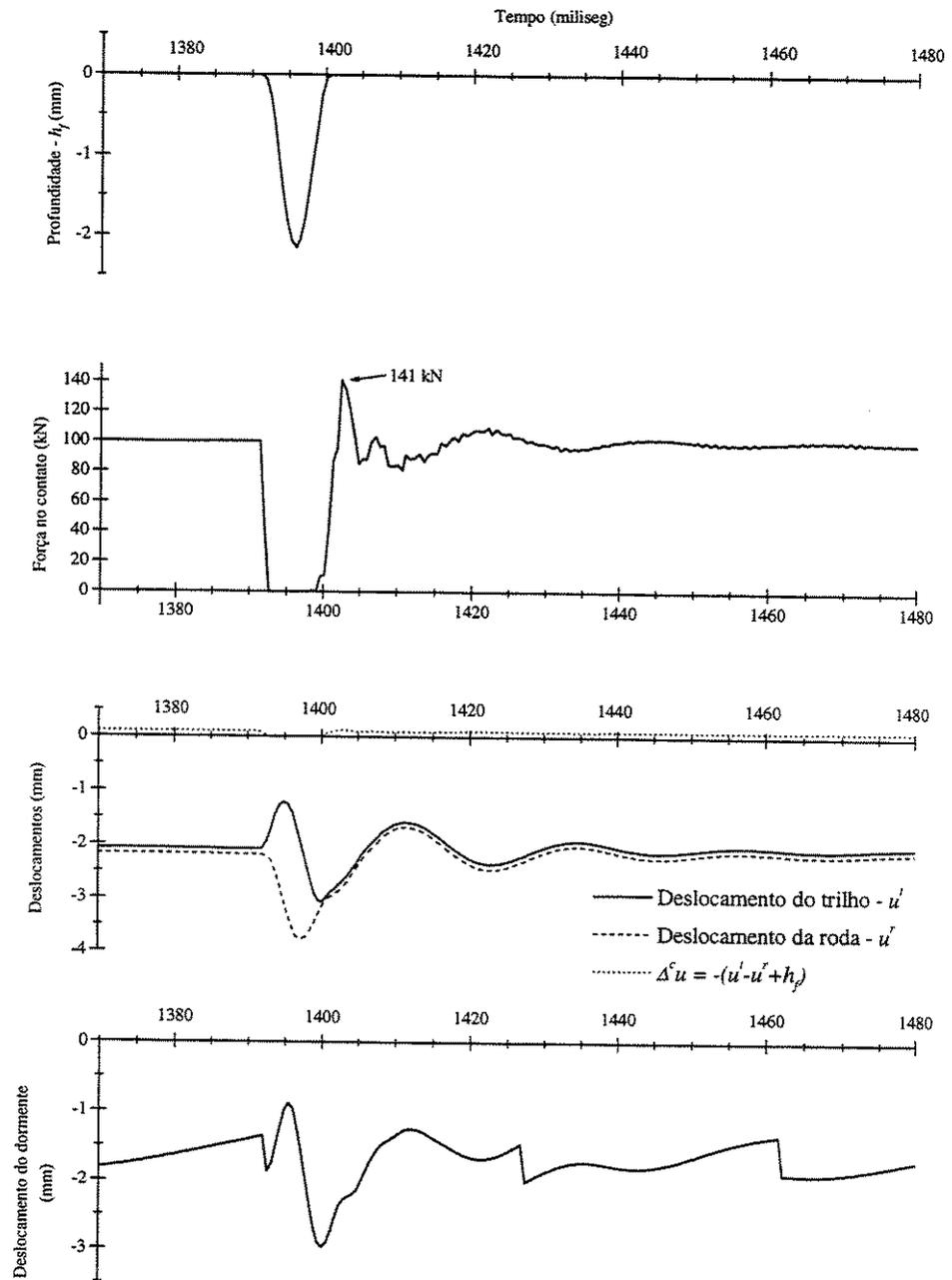


Figura 5.39: Resultados obtidos pela simulação para a via tipo (C) para a velocidade de 60 quilômetros por hora.

Capítulo 6

Conclusões e sugestões de estudos futuros

Pelos resultados obtidos através da utilização do modelo de simulação dinâmica da interação entre veículo e via ferroviários aqui desenvolvido, concluímos que o mesmo fornece estimativas realistas para os valores da força de contato, bem como outros parâmetros relevantes (deformação devida ao cisalhamento dos trilhos, deflexões de trilhos e dormentes), nas situações analisadas e descritas na literatura disponível, dentro da faixa de frequência de interesse, variando de 500 a 2500 Hz. O seu desempenho sofre restrições quando a frequência de excitação for próxima das frequências de ressonância dos dormentes, onde a modelagem dos mesmos através de massas aglomeradas é pouco realista recomendando-se a modelagem dos mesmos como vigas. O esquema de integração numérico utilizado (Newmark- β) mostrou-se estável ao longo de todo processo de simulação.

Em relação à modelagem dos trilhos, as formulações de elemento finito de viga Euler-Bernoulli produziu resultados melhores na determinação de estimativas das deflexões dos dormentes na análise do efeito de corrugações de trilho e na força de contato na irregularidade tipo “plano-na-roda”. Este último resultado é surpreendente, já que os autores que desenvolveram estudos deste tipo de irregularidade, como Newton e Clark[40] e Dong e Dukkipati [45], apresentaram resultados que mostravam a desvantagem deste tipo de formulação em relação à formulação de elemento de viga de Timoshenko, pois esta formulação leva em consideração a inércia de rotação e deformação devida ao cisalhamento. Durante o desenvolvimento da simulação houve momentos em que a formulação de elemento finito de Euler-Bernoulli produziu

resultados superiores para a força de contato em relação às formulações de elemento finito de viga Timoshenko, mas em termos de valores máximos ao longo dos 3000 passos-de-tempo simulados, a primeira produziu resultados mais realistas. Para análises onde a deformação devida ao cisalhamento tiver um papel importante, como no caso de sistemas de fixação, recomendamos a utilização da formulação com elemento finito de viga Timoshenko, no caso a formulação com quatro graus de liberdade, pois a formulação com oito graus de liberdade tem sua utilização inviabilizada devida ao seu alto custo computacional.

Via de regra a formulação de elemento finito de viga Timoshenko com quatro graus de liberdade pode ser utilizada em todas situações, pois fornece resultados muito próximos aos estimados pela formulação de viga Euler-Bernoulli nas situações onde esta formulação produziu melhores resultados.

Em relação à modelagem do contato entre a roda e o trilho, o modelo simples de mola de contato não-linear hertziana teve um bom desempenho. Seria interessante analisar outras abordagens, como a utilizada por Dong e Dukkipatti em seu estudo, chamada de modelo adaptivo de pneu, oriunda de pesquisas sobre veículos rodoviários. O método de otimização utilizado para obter as variáveis de estado na análise do desequilíbrio nodal (método *quasi-Newton* com busca unidimensional) apesar de ser eficaz tem baixo desempenho, realizando um grande número de iterações em cada passo-de-tempo para encontrar a solução ótima. Seria de grande valia desenvolver uma nova implementação do método proposto por Gerádin e Rixie [87], só que agora associado a uma rotina de busca unidimensional, para aumentar a sua eficiência e, posteriormente, realizar um estudo comparativo entre as duas metodologias.

Este modelo mostrou-se uma ferramenta potencial para a análise de tensões na via férrea devidas a cargas dinâmicas oriundas de irregularidades existentes na via e nos veículos ferroviários. Os pesquisadores dos países desenvolvidos têm se preocupado mais com os efeitos que irregularidades têm sobre as condições operacionais dos veículos e sobre as condições de manutenção da via permanente a médias e altas velocidades. Entretanto, aqui no Brasil as condições em que se apresentam a maioria das vias permanentes (precárias, com camadas de lastro corrompidas; faltas de elementos da superestrutura como fixações e dormentes; falta de dormentes e baixa periodicidade da manutenção) e operando a baixas velocidades em comparação com as principais ferrovias do mundo desenvolvido, associado ao fato de que as operadoras não possuem estrutura ou recursos para desenvolverem pes-

quisas voltadas para a análise de problemas oriundos da interação dinâmica entre veículos e via ferroviários, faz com que a modelagem dinâmica aqui desenvolvida seja extremamente útil.

Além das aplicações relacionadas à determinação dos efeitos dinâmicos provocados por irregularidades existentes na roda e no trilho, este modelo pode ser utilizado também para a análise de não-linearidades existentes na camada de lastro. Como exemplo, podemos citar a consideração da rigidez do lastro como sendo bilinear, de forma que a partir de uma dada deflexão vertical do dormente a rigidez do lastro aumenta. A modelagem deste tipo de análise seria original.

Outra possível aplicação está relacionada a modelagem dos efeitos dinâmicos devidos à utilização alternada de dois tipos de fixações, uma rígida e outra flexível, configuração comum nas ferrovias brasileiras. Uma outra aplicação muito interessante está relacionada à utilização do software *NUCAR* da *AAR*. Este programa permite que se entre com uma base de dados relacionadas às forças atuantes no contato entre roda e trilho para a análise dinâmica de composições ferroviárias.

Algumas irregularidades da via como falta de fixações, juntas de trilhos e falta de dormentes também podem ser analisadas com este modelo. No caso das fixações basta fazer seus coeficientes de amortecimento e de rigidez serem nulos no dormente onde ocorre a falta da fixação. No caso da falta de dormentes, basta zerar todo subsistema composto pelo dormente e o sistema de fixações no ponto do dormente faltante.

Uma sugestão muito interessante seria o desenvolvimento de um modelo da interação dinâmica entre veículo e via ferroviários onde a via seria apoiada discretamente sobre um semi-plano elástico e excitada por um veículo deslocando-se a velocidade constante, com contato entre roda e trilho considerado como não-linear e considerando-se a inércia da roda. Este modelo é semelhante ao aqui desenvolvido. A diferença básica está relacionada à forma de se considerar a camada de lastro e a plataforma. No modelo anterior todo este sistema era transformado em um conjunto mola mais amortecedor, e neste em uma camada semi-infinita elástica, como podemos observar no modelo de via apresentado na Figura 6.1.

O semi-plano elástico é modelado através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se funções de Green no domínio do tempo como solução fundamental. Este modelo na realidade é um acoplamento de um modelo de Elementos Finitos com um modelo de Elementos de Contorno (na literatura é denominado modelo "FEM-BEM"). As funções de Green no domínio do

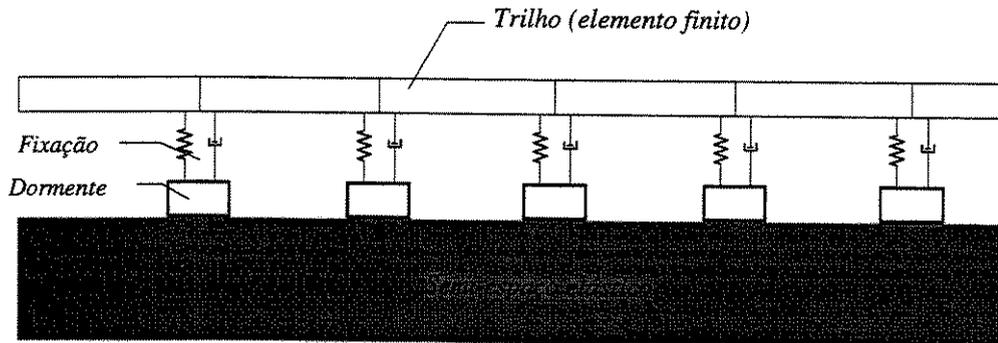


Figura 6.1: Modelo de elemento finito de viga de Timoshenko sobre apoios discretos e semi-plano elástico.

tempo podem ser encontradas no livro de Wolf[65] e nos trabalhos de Guan e Novak[63, 64].

Com este modelo seria possível determinar as tensões no contato entre dormente e lastro e em qualquer ponto dentro do interior do semi-plano. Este seria o modelo mais adequado para o desenvolvimento da análise de tensões no lastro e na plataforma, pois leva em consideração a propagação das ondas de vibração no interior destas estruturas. Do ponto de vista teórico, a modelagem correta seria tratar o lastro como uma camada finita apoiada sobre um semi-plano (no caso a plataforma). Entretanto, esta abordagem é de difícil implementação pois ainda não existe até o presente momento instrumental teórico para resolver este problema no domínio do tempo.

Este modelo seria o mais adequado para a realidade brasileira, principalmente no caso das vias de bitola métrica, pois o estudo de tensões sobre a plataforma permitirá um correto dimensionamento da mesma em termos de sua capacidade de suporte e das características resilientes dos materiais do terrapleno, o que permitirá a proposição de metodologias construtivas que minimizem as necessidades freqüentes de nivelamento da via permanente.

Referências Bibliográficas

- [1] Hanna, A.N., "Track-Structure Analysis: Methodology and Verification". *Transportation Research Record 653*, p.26-32, 1977.
- [2] Fastenrath, F., *Railroad Track Theory and Practice*. Trad. Walter Grant, Frederick Ungar, New York, 1981.
- [3] Stewart, H.E. & O'Rourke, T.D., "Load Factor Method for Dynamic Track Loadings". *Journal of Transportation Engineering of ASCE*, vol. 114, No. 1, January 1988, p.21-39.
- [4] Esveld, C., *Modern Railway Track*. Duisburg, MRT-Productions, 1989.
- [5] Knothe, K.L. & Grassie, S.L., "Modelling Railway Track and Vehicle/Track Interaction at High Frequencies". *Vehicle System Dynamics*. Vol. 22, p.209-262, 1993.
- [6] Rohrmann-Baumgart, R.G. & Rücker, W. "Dynamische Bodenkennwerte aus Halbraumtheorie". *ETR 36*, p.587-591, september 1987.
- [7] Auersch, L., "Zur Parametererregung des Rad-Schiene-Systems: Berechnung der Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund-Dynamik und experimentelle Verifikation am Hochgeschwindigkeitszug Intercity Experimental". *Ingeneur-Archiv 60*, p141-156, 1990.
- [8] Schwedler, J.W., *On Iron Permanent Way*. Proc. Institution of Civil Engineers, London, 1882.
- [9] Zimmermann, H., *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1888.
- [10] Kerr, A.D., "On the Vertical Modulus in the Standard Railway Track Analysis". *Rail International 38*, p.37-45, November 1987.

- [11] ASCE-AREA Special Committee on Stresses in Railroad Track, *Proc. AREA, First Progress Report*, Vol.19, 1918. Reimpresso como "Stresses in Railroad Track - The Talbot Reports", AREA, 1980.
- [12] Rives, F. et alii. *Tratado de Ferrocarriles - 1 - Via*. Madrid, Rueda, 1977.
- [13] Hay, W.W., *Railroad Engineering*. 2nd.ed., New York, John Wiley, 1982.
- [14] American Railway Engineering Association, *Manual for Railway Engineering (Fixed Properties)*, Vol. II, Chapter 22, part 3.
- [15] Selig, E.T & Waters, J.M., *Track Geotechnology and Substructure Management*. London, Thomas Telford Services, 1994.
- [16] Tayabji, S.D., "Effect of Design Parameters on Track Support Systems". *Transportation Research Record 653*, p.2-11, 1977.
- [17] Paiva, C.E.L. "Uma Contribuição ao Dimensionamento das Subcamadas das Plataformas Ferroviárias". *Dissertação de mestrado EPUSP*. São Paulo, 1982.
- [18] Paiva, C.E.L. e Guimarães, C.A.B. "Análise Comparativa das Solicitações atuantes em Plataformas Ferroviárias". *Anais do I Congresso Internacional de Material Rodante e Via Permanente*, ABNT, Brasília, 1994.
- [19] Paiva, C.E.L. e Guimarães, C.A.B. "O Tráfego Ferroviário e as Respectivas Deformações provocadas na Infraestrutura". *Anais do III Congresso Internacional de Transporte Metropolitano sobre Trilhos*. Fortaleza (CE), junho 1995.
- [20] Sauvage, R. & Larible, G., "La Modélisation par Élément Finis des Couches d'assise de la Voie Ferrée". *Revue Générale des Chemins de Fer*, p.475-484, Septembre 1982.
- [21] Prud'homme, A. & Janin, G., "The Stability of Tracks laid with Long Welded Rails, parts I-II", *Bulletin of the International Railway Congress Association 88*, p.460-480, June/July/August 1969.

- [22] Lin, Y.H. & Trethewey, M.W., "Finite Element Analysis of Elastic Beams subjected to Moving Dynamic Loads". *Journal of Sound and Vibration* 136(2), p.323-342, 1990.
- [23] Lee, H.P., "The Dynamic Response of a Timoshenko Beam subjected to a Moving Mass". *Journal of Sound and Vibration* 198(2), p.249-256, 1996.
- [24] Thambiratnam, D. & Zhuge, Y., "Dynamic Analysis of Beams on an Elastic Foundation subjected to Moving Loads". *Journal of Sound and Vibration* 198(2), p.149-169, 1996.
- [25] Thomas, J. & Abbas, B.A.H., "Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beams". *Journal of Sound and Vibration* 41(3), p.291-299, 1975.
- [26] Knothe, K., "Past and Future of Vehicle/Track Interaction". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24. p.3-6, 1995.
- [27] Wickens, A.H., "The Dynamic Stability of Simplified four-wheeled Vehicles having Conical Wheels". *International Journal of Solids Structures*, vol.1, p.319-341, 1965.
- [28] Sauvage, G. & Fortin, J.P., "La Traînée de Roulement des Véhicules de Chemin de Fer". *Revue Générale des Chemins de Fer*, p.383-390, Juillet-Août 1982.
- [29] Association of American Railroads, *Track-Train Dynamics - Phase I*, Report R-180, 1975.
- [30] Association of American Railroads, *Track-Train Dynamics - Track Testing for validation of Computer Models*, Report R-181, 1975.
- [31] Singh, S., Suresh, C. & Hussain, S.M.A., "Track Structures - Vol. IV - Effects of Track Geometry (Irregularities) on the Dynamic Behavior of Railway Vehicle on Tangent Track", *Association of American Railroads*, Report R-377, January 1979.
- [32] Association of American Railroads, *User's Manual for NUCARS version 2.1*, Report SD-043 - (rev9/95), September 1995.

- [33] Grassie, S.L., Gregory, R.W., Harrinson, D. & Johnson, K.L., "The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, No.2, p.77-90, 1982.
- [34] Grassie, S.L., Gregory, R.W. & Johnson, K.L., "The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Longitudinal Excitation". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, No.2, p.97-102, 1982.
- [35] Grassie, S.L., Gregory, R.W. & Johnson, K.L., "The Behaviour of Railway Wheelsets and Track at High Frequency of Excitation". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, No.2, p.103-111, 1982.
- [36] Grassie, S.L., Gregory, R.W. & Johnson, K.L., "The Dynamic response of Railway Track to High Frequency Lateral Excitation". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, No.2, p.91-95, 1982.
- [37] Grassie, S.L. & Cox, S.J., "The Dynamic Response of Railway Track with Flexible Sleepers to High Frequency Vertical Excitation". *Proc. of Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 198, No.D7, p.117-124, 1984.
- [38] Grassie, S.L. & Cox, S.J., "The Dynamic Response of Railway Track with unsupported Sleepers". *Proc. of Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 199, No.D2, p.123-135, 1984.
- [39] Clark, R.A., Dean, P.A., Elkins, J.A. & Newton, S.G., "An Investigation into the Dynamic Effects of Railway Vehicles running on Corrugated Rails". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, No.2, p.65-76, 1982.
- [40] Newton, S.G. & Clark, R.A., "An Investigation into the Dynamic Effects on the Track of Wheelflats on Railway Vehicles". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 21, No.4, p.207-297, 1979.
- [41] Ahlbeck, D.R., "A Study of Dynamic impact Load Effects Due to Railroad Wheel Profile Roughness". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 17, p.13-16, 1987.

- [42] Cox, S.J & Grassie, S.L., "The Dynamic Response of Railway Track to Discrete Irregularities". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.58-71, 1995.
- [43] Knothe, K. & Ripke, B., "The Effects of the Parameters of Wheelset, Track and Running Conditions on the Growth Rate of Rail Corrugations". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 18, p.345-356, 1989.
- [44] Schwab, C.A. & Mauer, L., "An Interactive Track/Train Dynamics Model for Investigating System Limits in High Speed Track". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 18, p.502-514, 1989.
- [45] Dong, R.G., Sankar, S. & Dukkipati, R.V., "A Finite Element Model of Railway Track and its application to the Wheel Flat Problem". *Proc. of Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 208, Part F, p.61-72, 1994.
- [46] Diana, G., Cheli, F., Bruni, S. & Collina, A., "Dynamic Interaction between Rail Vehicles and Track for High Speed Train". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.15-30, 1995.
- [47] Dahlberg, T., "Vertical Dynamic Train/Track Interaction - Verifying a Theoretical Model by Full-Scale Experiments". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.45-57, 1995.
- [48] Ahlbeck, D.R., "Effects of Track Impedance on Vehicle-Track Interactions". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.58-71, 1995.
- [49] Ripke, B. & Knothe, K., "Simulation of High Frequency Vehicle-Track Interactions". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.72-75, 1995.
- [50] Thompson, D.J. & Vincent, N., "Track Dynamic Behaviour at High Frequencies. Part 1: Theoretical Models and Laboratory Measurements". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.86-89, 1995.
- [51] Thompson, D.J. & Vincent, N., "Track Dynamic Behaviour at High Frequencies. Part 2: Experimental Results and Comparisons with Theory". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.100-114, 1995.
- [52] Li, D. & Selig, E.T., "Wheel/Track Interaction: Track Substructure Perspective". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.183-196, 1995.

- [53] Sato, Y., "Japanese Studies on Deterioration of Ballasted Track". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.197-208, 1995.
- [54] Mauer, L., "An Interactive Track-Train Dynamic Model for Calculation of Track Error Growth". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.209-221, 1995.
- [55] Ford, R., "Differential Ballast Settlement, and Consequent Undulations in Track, Caused by Vehicle-Track Interaction". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.222-233, 1995.
- [56] Kerr, A.D., "Railroad Track Analyses and Determination of Parameters". *Journal of Engineering Mechanics of ASCE*, vol. 112, No. 11, p.1117-1134, November 1986.
- [57] Kerr, A.D. & Bassler, S.B., "Effect of Rail Lift-off on the Analysis of Railroad Track". *Rail International*, p.38-48, October 1982.
- [58] Zarembski, A.M. & Choros, J., "On the Measurement and Calculation of Vertical Track Modulus". *Proc. of AREA*, vol. 81, p.156-173, 1980.
- [59] Mair, R.I., "The Rail on a Stiffening Elastic Foundation", *Rail International* 8, p.443-450, 1976.
- [60] Mohammadi, M. & Karabalis, D.L., "Dynamic 3-D Soil-Railway Track Interaction by BEM-FEM". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, p.1177-1193, 1995.
- [61] Rücker, W., "Dynamic Interaction of a Railroad-Bed with the Subsoil". *Proc. of Soil Dynamics & Earthquake Engineering Conference*, Southampton, p.435-448, July 1982.
- [62] Sarfeld, W., Savidis, S.A., Schuppe, R. & Klapperich, H., "Three-Dimensional Dynamic Interaction of Ties". *Proc. of the 10th Intern. Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Stockholm, p.287-292, 1981.
- [63] Guan, F. & Novak, M., "Transient Response of a Group of Rigid Strip Surface Foundations". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 23, p.671-685, 1994.

- [64] Guan, F. & Novak, M., "Transient Response of Multiple Rigid Foundations on an Elastic, Homogeneous Half-Space". *Transactions of the ASME*, Vol. 61, p.656-662, September 1994.
- [65] Wolf, J.P. *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time-Domain*. New Jersey, Prentice-Hall, 1988, 446p.
- [66] Nussbaum, E., "Track Structure at Facility for Accelerated Service Testing". *Transportation Research Record 653*, p.32-37, 1977.
- [67] Piotrowski, W.L., "Mechanical Testing at Facility for Accelerated Service Testing". *Transportation Research Record 653*, p.54-57, 1977.
- [68] Huang, Y.H., Lin, C. & Deng, X., "KENTRACK, a Computer Program for Hot Mix Asphalt and Conventional Ballast Railway Trackbeds". *Research Report RR-84-1*, The Asphalt Institute, April 1984.
- [69] Togno, F. M., *Ferrocarriles*. México Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1972.
- [70] Schramm, G., *Técnica e Economia na Via Permanente*. Trad. Rudy Volkman, Emma, Porto Alegre, 1977.
- [71] Monteiro, M. & Landi, P., *Programa ELSYM-5 - Manual para usuários*. IPT-Instituto de Pesquisas Tecnológicas, São Paulo, janeiro 1987.
- [72] Clark, C.W., "Track Loading Fundamentals - Parts 1-7". *Railway Gazette*, 106, 1957.
- [73] Raymond, G.P., "Analysis of Track Support and Determination of Track Modulus". *Transportation Research Record 1022*, p.80-91, 1985.
- [74] Valdivia, A.R.; "A Linear Dynamic Wear Model to explain the Initiating Mechanism of Corrugation". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 17, p.493-496, 1988.
- [75] Suiker, A.S.J.; de Boerst, R. & Esveld, C. "Critical Behaviour of a Timoshenko Beam-half Plane System under a Moving Load". *Archive of Applied Mechanics*, vol. 68 Issue 3/4, p.158-168, 1998.
- [76] Fortin, J.P., "La Déformée Dynamique de la Voie Ferrée". *Revue Générale des Chemins de Fer*, p.93-102, Février 1982.

- [77] Garg, V.K. & Dukkipati, R.V. *Dynamics of Railway Vehicles Systems*. Toronto, Academic Press Canada, 1984.
- [78] Dukkipati, R.V. & Amyot, J.R. *Computer-aided Simulation in Railway Dynamics*. New York, Marcel Dekker, 1988.
- [79] Kalker, J.J. "Review of Wheel-Rail Contact Theories" in: *The General Problem of Rolling Contact*, Browne, A.L. & Tsai, N.T. (ed.), vol. 40, p.77-92, ASME, New York, 1980.
- [80] Johnson, K.L & Vermeulen, P.J. "Contact of Non Spherical Bodies transmitting Tangential Forces". *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, p.338-340, 1964.
- [81] Craig, R.R. *Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods*. New York, John Wiley, 1981.
- [82] Warburton, G.B. *The Dynamical Behaviour of Structures*. 2nd.ed., Oxford, Pergamon Press, 1976.
- [83] Mitchell, A.R. & Wait, R. *The Finite Element method in Partial Differential Equations*. New York, John Wiley, 1978.
- [84] Müller, P.C. & Schiehlen, W.O. *Linear Vibrations*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [85] Zhong, W.X. & Williams, F.W. "A Precise Time Step Integration Method". *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 208, p.427-450, 1994.
- [86] Fung, T.C. "A Precise Time-step Integration Method by Step-response and Impulsive-response Matrices for Dynamic Problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p.4501-4527, 1997.
- [87] Géradin, M & Rixen, D. *Mechanical Vibration - Theory and Application to Structural Dynamics*. Paris, Wiley-Masson, 1994.
- [88] Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukolski, S.A. & Vetterling, W.T. *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

- [89] Arcaro, V.F. *Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Análise Não-linear de Estruturas*. Campinas, FEC-UNICAMP, 1996.
- [90] Luenberger, D.G. *Introduction to Linear and Non-linear Programming*. 2nd.ed., Reading, Addison-Wesley, 1989.
- [91] Nickel, R. & Secor, G. "Convergence of Consistently derived Timoshenko Beam Finite Element". *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 5, p243-253, 1972.
- [92] Davis, R.; Henshell, R.D. & Warburton, G.B. "A Timoshenko Beam Element". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 22, p475-487, 1972.
- [93] Torio, R.F., "La Deformación Dinámica de la Via Férrea". *Revista de Obras Publicas*, p.149-154, Marzo 1987.
- [94] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Classificação Brasileira 55 - CB-55 - Via Férrea Principal*. Rio de Janeiro, ABNT, 1980, 5p.
- [95] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Norma Brasileira 11689 - NBR-11689 - Via Férrea Principal*. Rio de Janeiro, ABNT, 1992, 5p.
- [96] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Norma Brasileira 12198 - NBR-12198 - Dormente*. Rio de Janeiro, ABNT, 1992, 2p.
- [97] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Especificação Brasileira 101 - EB-101 - Dormente de Madeira para Via Férrea*. Rio de Janeiro, ABNT, 1974, 12p.
- [98] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Norma Brasileira 7511 - NBR-7511 - Dormente de Maderia para Via Férrea*. Rio de Janeiro, 1982, 12p.
- [99] Knothe, K., Wu, Y. & Gross-Thebing, A. "Simple, Semi-analytical Models for Discrete-Continuous Railway Track and their Use for Time-Domain Solutions". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.340-352, 1995.
- [100] Knothe, K. "Benchmark Test for Models of Railway Track and Vehicle/Track Interaction in Low Frequency Range". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.363-379, 1995.

- [101] Grassie, S.L. "Benchmark Test for Models of Railway Track and Vehicle/Track Interaction at Relatively High Frequencies". *Vehicle System Dynamics Supplement*, vol. 24, p.355-362, 1995.
- [102] Paiva, C.E.L. *Superestrutura Ferroviária*. 2ª ed., Campinas, FEC-UNICAMP, 1999.
- [103] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Norma Brasileira 475 - NB-475 - Projeto de Lastro para Via Férrea*. Rio de Janeiro, ABNT, 1990, 2p.