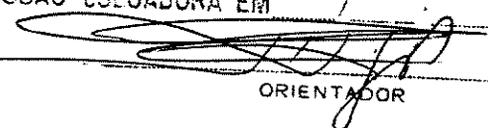


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
TESE DEFENDIDA POR *Carlos Alberto de Almeida Vilela* E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM

ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Simulação de Escoamento em Coordenadas
Generalizadas Utilizando o Método dos Volumes-
Finitos com Esquema UNIFAES de Discretização**

Autor: **Carlos Alberto de Almeida Vilela**

Orientador: **Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo**

07/01

**UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**Simulação de Escoamento em Coordenadas
Generalizadas Utilizando o Método dos Volumes-
Finitos com Esquema UNIFAES de Discretização**

Autor: Carlos Alberto de Almeida Vilela

Orientador: Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Tese de doutorado apresentada à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos para obtenção de título de Doutor em Engenharia Mecânica

Campinas, 2001

S.P.-Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	T/UNICAMP V711s
V	EX
TOMBO BC/	56713
PROC.	16/117/04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	13/01/2004
Nº CPD	

CM00194022-6

bib id 309328

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V711s

Vilela, Carlos Alberto de Almeida
Simulação de escoamento em coordenadas
generalizadas usando o método dos volumes-finitos com
esquema UNIFAES de discretização / Carlos Alberto de
Almeida Vilela. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: José Ricardo Figueiredo
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos volumes finitos. 2. Transformação de
coordenadas. 3. Dinâmica dos fluidos. I. Figueiredo,
José Ricardo. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

TESE DE DOUTORADO

**Simulação de Escoamento em Coordenadas
Generalizadas Utilizando o Método dos Volumes-
Finitos com Esquema UNIFAES de Discretização**

Autor: Carlos Alberto de Almeida Vilela

Orientador: José Ricardo Figueiredo

Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo, Orientador

UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Moreira Gazarolli

UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani

UNICAMP

Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski

UNESP

Prof. Dr. Edson Luiz Zaparoli

ITA

Campinas, 31 de julho de 2001

800900455

Dedicatória

Dedico este trabalho a Bia e Michelle...

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao prof. José Ricardo Figueiredo por todo o apoio, compreensão e tranquilidade dedicada.

À minha família.

Aos amigos Fábio, Antônio Carlos, Murilo, Epaminondas, “Conde” Rigoberto, Rodrigues, e em especial Marcelo “Byron” Silva.

Resumo

ALMEIDA VILELA, Carlos Alberto; *Simulação de Escoamento em Coordenadas Generalizadas Utilizando o Método dos Volumes-Finitos com Esquema UNIFAES de Discretização*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 137 p. Tese (Doutorado).

O esquema de discretização UNIFAES, é aqui avaliado e comparado com alguns dos mais tradicionais e utilizados esquemas de discretização para o método dos volumes finitos da atualidade. Diversos casos testes lineares do problema de transporte convectivo-difusivo em meio fluido e das equações de Navier-Stokes foram utilizados para comparação. Os esquemas utilizados para comparação foram o Central, Exponencial, LOADS e QUICK em duas versões diferentes de formulação. Os casos testes realizados para avaliação do comportamento numérico realizados em coordenadas generalizadas com malhas regulares e irregulares foram: Transporte convectivo-difusivo em, a) escoamento paralelo b) escoamento rotacional de fluido como sólido, c) escoamento em canto, d) escoamento em canto com perfil de entrada parabólico, escoamento em cavidade fechada inclinada e escoamento em canal divergente gradual.

Os resultados obtidos nos testes demonstraram que o esquema UNIFAES, apresentou comportamento bastante promissor comparado aos comportamentos dos demais esquemas. Na grande maioria dos testes os resultados obtidos pelo esquema UNIFAES foram os melhores em questão de acuidade, estando próximo aos obtidos pelo esquema QUICK, que foi o segundo esquema que melhores resultados apresentou.

Palavras Chave

Convecção-Difusão, Volumes Finitos, Esquema UNIFAES, Coordenadas Generalizadas

Abstract

ALMEIDA VILELA, Carlos Alberto; *Fluid Flow Simulation in Generalized Coordinates Using Finite Volume Method with UNIFAES Discretization Scheme*, Mechanical Engineering Faculty, State University of Campinas, 2001, 137p. Doctor Thesys.

The UNIFAES discretization scheme is evaluate and compare with some classical and most used schemes for finite volume method in present time. A lot of linear convection-diffusion problems in fluid flow and the solution of Navier-Stokes equations were used for comparison. The compared used schemes were Central, Exponential, LOADS, and QUICK with two different formulations. The chosen test cases for comparisons, using regular and irregular grid arrangements in generalized coordinates formulations were: a) Convective-diffusive transport in parallel fluid flow, in rotational fluid flow, in fluid flow near a wall, in fluid flow near a wall with parabolic inlet profile of the transported property , b) Inclined side walls lid driven cavity, and c) Gradually expanding channel.

The obtained results shown that UNIFAES scheme has a very promise behavior compared to the other schemes. In most studied cases, UNIFAES scheme demonstrated better accurate results, close to QUICK, the second better one.

Key words

Convection-Diffusion, Finite Volume, UNIFAES Scheme, Generalized Coordinates.

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xvi
Lista de símbolos	xvii
Siglas	xix
1 Apresentação	
1.1 Introdução	1
1.2 Contribuição da presente tese	6
2 Método dos volumes finitos	7
2.1 Generalidades	7
2.2 Esquemas clássicos de interpolação	9
2.2.1 Esquema Central	9
2.2.2 Esquema a Montante (Upwind)	11
2.2.3 Esquema Exponencial	12
2.2.4 Esquema Híbrido	13
2.2.5 Esquema Lei de Potência (Power-Law)	14
2.3 Esquema QUICK	15
2.4 Esquema LOADS	16
2.5 Esquema UNIFAES	19
2.6 Esquema UNIFAES para coordenadas generalizadas	21

3	Desenvolvimento matemático e numérico	26
3.1	Arranjo da célula computacional.	26
3.2	Algoritmo para acoplamento velocidade-pressão	29
3.3	Coordenadas generalizadas	30
3.4	Base de vetores no plano cartesiano e transformado	33
3.5	Escolha entre transformação total e parcial das equações de Navier-Stokes	34
3.6	Tratamento matemático das equações governantes	35
3.7	Tratamento numérico das equações governantes	39
3.7.1	Discretização utilizando o esquema Central	40
3.7.2	Discretização utilizando o esquema UNIFAES	42
3.8	Condições de contorno para velocidades e propriedades transportadas	46
3.9	Esquema de interpolação de Rhie e Chow	47
3.10	Discretização da equação da continuidade	53
3.11	Algoritmo de acoplamento velocidade-pressão – SIMPLE	54
3.12	Condições de contorno para equação da correção da pressão	58
4	Resultados obtidos para casos testes lineares	62
4.1	Apresentação	62
4.2	Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas regulares	63
4.2.1	Transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo	65
4.2.2	Transporte convectivo-difusivo em escoamento rotacional de fluido como sólido	74
4.2.3	Transporte convectivo-difusivo em escoamento em canto	79
4.2.4	Transporte convectivo-difusivo em escoamento em canto com perfil de entrada parabólico	87
4.3	Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas irregulares	89
4.3.1	Transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo	90
4.3.2	Transporte convectivo-difusivo em escoamento rotacional de fluido como sólido	93

5 Resultados obtidos para equações de Navier-Stokes	98
5.1 Introdução	98
5.2 escoamento em cavidade inclinada	98
5.3 escoamento de fluido em canal divergente gradual	108
6 Comentários e conclusões gerais	114
6.1 Propostas para trabalhos futuros	116
Referências Bibliográficas	117
Anexo A	125
Anexo B	131
Anexo C	135

Lista de figuras

2.1	Volume de controle diferencial bidimensional	8
2.2	Curva de interpolação para pontos vizinhos, esquema Central	10
2.3	Curva de interpolação para nós vizinhos, esquema a Montante	11
2.4	Curva de interpolação para nós vizinhos, esquema Exponencial	13
2.5	Curva de interpolação para nós vizinhos, esquema QUICK	15
2.6	Esquema unidimensional do volume de controle	17
2.7	Volume de controle para esquema LOADS	18
2.8	Molécula computacional para esquema UNIFAES	21
2.9	Volume de controle elementar no plano transformado	22
3.1	Esquema dos diferentes arranjos de malha	27
3.2	Esquema do diagrama de Voronoi	31
3.3	Correspondências entre os planos físico e transformado	32
3.4	Bases covariantes e contravariantes	34
3.5	Volume de controle elementar no plano transformado	37
3.6	Disposição dos nós para termos de pressão	47
3.7	Configuração da malha deslocada	48
3.8	Volume de controle típico para o método de Rhie e Chow	49
3.9	Volumes de controle para equação da continuidade	53
3.10	Malha exemplificando condição de contorno para pressão	59
3.11	Malha para derivada nula	60
4.1	Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento paralelo	66
4.2	Solução analítica tipo A, escoamento paralelo	69
4.3	Solução analítica tipo B, escoamento paralelo	69
4.4	Solução analítica tipo C, escoamento paralelo	69

4.5	Solução analítica tipo D, escoamento paralelo	69
4.6	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^2$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=22.5^\circ$	70
4.7	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=22.5^\circ$	70
4.8	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^4$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=22.5^\circ$	71
4.9	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^5$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=22.5^\circ$	71
4.10	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10$, $\lambda=10$, Função tipo B, $\alpha=22.5^\circ$	71
4.11	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=100$, $\lambda=10$, Função tipo B, $\alpha=22.5^\circ$	71
4.12	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^2$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=22.5^\circ$	72
4.13	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=22.5^\circ$	72
4.14	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^4$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=22.5^\circ$	72
4.15	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=10^5$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=22.5^\circ$	72
4.16	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=50$, $\lambda=10$, Função tipo D, $\alpha=22.5^\circ$	73
4.17	Erro numérico, escoamento paralelo, $Pe=100$, $\lambda=10$, Função tipo D, $\alpha=22.5^\circ$	73
4.18	Escoamento paralelo, convergência	73
4.19	Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento rotacional de fluido como sólido	75
4.20	Solução analítica, escoamento rotacional	76
4.21	Solução analítica, escoamento rotacional	76
4.22	Erro numérico, escoamento rotacional de fluido com sólido, $Pe=1$	77
4.23	Erro numérico, escoamento rotacional de fluido com sólido, $Pe=10$	77
4.24	Erro numérico, escoamento rotacional de fluido com sólido, $Pe=100$	77
4.25	Erro numérico, escoamento rotacional de fluido com sólido, $Pe=1000$	77
4.26	Escoamento rotacional de fluido como sólido, histórico da convergência	78
4.27	Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento em canto	79
4.28	Solução analítica Y_aX_a , escoamento em canto	82
4.29	Solução analítica Y_aX_a , escoamento em canto	82
4.30	Solução analítica Y_aX_i , escoamento em canto	82
4.31	Solução analítica Y_aX_i , escoamento em canto	82
4.32	Solução analítica Y_iX_a , escoamento em canto	83
4.33	Solução analítica Y_iX_a , escoamento em canto	83

4.34	Solução analítica Y_iX_i , escoamento em canto	83
4.35	Solução analítica Y_iX_i , escoamento em canto	83
4.36	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_iX_i	84
4.37	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_iX_i	84
4.38	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_iX_a	84
4.39	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_iX_a	84
4.40	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_aX_i	85
4.41	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_aX_i	85
4.42	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_aX_a	85
4.43	Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_aX_a	85
4.44	Escoamento em canto, convergência	86
4.45	Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento em canto com perfil de entrada parabólico	87
4.46	Solução analítica, escoamento em canto parabólico	88
4.47	Erro numérico, escoamento em canto com perfil de entrada parabólico $Pe=50$	89
4.48	Escoamento em canto com perfil de entrada parabólico, convergência	89
4.49	Malha generalizada Tipo 1 utilizada para escoamento paralelo	90
4.50	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$, $\beta=5^\circ$	91
4.51	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$, $\beta=20^\circ$	91
4.52	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=10^\circ$, $\beta=5^\circ$	91
4.53	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=10^\circ$, $\beta=20^\circ$	91
4.54	Influência da variação de β , escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$	92
4.55	Influência da variação de β , escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$	92

4.56	Malha generalizada Tipo 2 para escoamento rotacional	93
4.57	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1, $Pe=10, \beta=5^\circ$	94
4.58	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1, $Pe=10, \beta=20^\circ$	94
4.59	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1, $Pe=10^3, \beta=5^\circ$	94
4.60	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1, $Pe=10^3, \beta=20^\circ$	94
4.61	Influência da variação de β , escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1 $Pe=10$	95
4.62	Influência da variação de β , escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 1 $Pe=10^3$	95
4.63	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 2, $Pe=10$	96
4.64	Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada Tipo 2, $Pe=10^3$	96
5.1	Geometria, condições de contorno e malha utilizadas para cavidade inclinada	99
5.2	Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=90^\circ$	110
5.3	Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=90^\circ$	110
5.4	Pressão na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=90^\circ$	101
5.5	Pressão na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=90^\circ$	101
5.6	Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=80^\circ$	101
5.7	Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=80^\circ$	101
5.8	Pressão na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=80^\circ$	102
5.9	Pressão na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=80^\circ$	102
5.10	Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=70^\circ$	102
5.11	Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=70^\circ$	102
5.12	Pressão na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=70^\circ$	103
5.13	Pressão na linha de centro horizontal, $Re=100, \alpha=70^\circ$	103
5.14	Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100, \alpha=60^\circ$	103

5.15	Componente 'v' na linha de centro horizontal, Re=100, $\alpha=60^\circ$	103
5.16	Pressão na linha de centro vertical, Re=100, $\alpha=60^\circ$	104
5.17	Pressão na linha de centro horizontal, Re=100, $\alpha=60^\circ$	104
5.18	Componente 'u' na linha de centro vertical, Re=100, $\alpha=45^\circ$	104
5.19	Componente 'v' na linha de centro horizontal, Re=100, $\alpha=45^\circ$	104
5.20	Pressão na linha de centro vertical, Re=100, $\alpha=45^\circ$	105
5.21	Pressão na linha de centro horizontal, Re=100, $\alpha=45^\circ$	105
5.22	Histórico da convergência Esquema UNIFAES – Re=100, $\alpha=90^\circ$	105
5.23	Histórico da convergência Esquema QUICK – Re=100, $\alpha=90^\circ$	105
5.24	Histórico da convergência Esquema UNIFAES – Re=100, $\alpha=80^\circ$	106
5.25	Histórico da convergência Esquema QUICK – Re=100, $\alpha=80^\circ$	106
5.26	Histórico da convergência Esquema UNIFAES – Re=100, $\alpha=70^\circ$	106
5.27	Histórico da convergência Esquema QUICK – Re=100, $\alpha=70^\circ$	106
5.28	Histórico da convergência Esquema UNIFAES – Re=100, $\alpha=60^\circ$	107
5.29	Histórico da convergência Esquema QUICK – Re=100, $\alpha=60^\circ$	107
5.30	Histórico da convergência Esquema UNIFAES – Re=100, $\alpha=45^\circ$	107
5.31	Histórico da convergência Esquema QUICK – Re=100, $\alpha=45^\circ$	107
5.32	Geometria e condições de contorno para escoamento em canal divergente gradual	109
5.33	Malha utilizada para simulação em volumes finitos para canal divergente gradual	109
5.34	Canal divergente gradual - Linhas de corrente Re=10 – UNIFAES	110
5.35	Canal divergente gradual - Isobáricas Re=10 – UNIFAES	110
5.36	Canal divergente gradual - Linhas de corrente Re=10 – QUICK	110
5.37	Canal divergente gradual - Isobáricas Re=10 – QUICK	110
5.38	Distribuição de pressão na parede do canal divergente	111
5.39	Histórico da convergência Canal divergente, Re=10 - UNIFAES	112
5.40	Histórico da convergência Canal divergente, Re=10 - QUICK	112
A1	Fluxograma do programa computacional	135
A2	Numeração ij	136

Lista de tabelas

4.1	Propriedades físicas do ar	64
4.2	Condições de contorno para escoamento em canto	81

Lista de símbolos

Símbolos romanos

E, W, P, N, S	relativos aos nós da malha principal
e, w, n, s	relacionados às faces dos volumes de controle
x, y	coordenadas cartesianas
u, v	componentes cartesianas da velocidade
Pe	número de Peclet
Re	número de Reynolds
\tilde{u}, \tilde{v}	componentes transformadas da velocidade
J	jacobiano da transformação geométrica
J	fluxo convectivo-difusivo
f_{ij}	relações de transformação geométrica
p	pressão
μ	viscosidade
ρ	densidade
c_p	capacidade térmica
\dot{M}	fluxo de massa
A, \tilde{A}	coeficientes das equações discretizadas
S, \tilde{S}	termos fonte
k_x, k_y	termos fontes em coordenadas cartesianas
k_ξ, k_η	termos fontes em coordenadas generalizadas
C	constantes
E	erro
s, n	coordenadas cartesianas deslocadas
w	velocidade angular

a_{0x} coeficientes da série

$\frac{\partial}{\partial n}$ derivada normal

Símbolos gregos

ξ, η coordenadas generalizadas

ϕ propriedade transportada

α, β ângulos

$\alpha_{ij}, \beta_{\bar{j}}$ simplificações nas expressões para C. i-interface do volume de controle, j-direção da coordenada generalizada

ε variação dos valores das variáveis entre duas iterações

α_{relax} índice de relaxação

Γ coeficiente de difusão

Siglas

QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
LOADS	Locally Analytic Differencing Scheme
UNIFAES	Unified Finite Approach Exponential-Type Scheme
SOU	Second Order Upwind
SU	Skew Upwind
SUDS	Skew Upstream Difference
WUDS	Weighted Upstream Differencing Scheme
SUPG	Streamline Upwind Petrov Galerkin
PG	Petrov Galerkin
GLS	Galerkin Least Squares
SU ^{FEM}	Streamline Upwind
MAC	Marker and Cell
SIMPLE	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations
SIMPLER	SIMPLE(Revised)
SIMPLEC	SIMPLE(Consistent)
SIMPLEM	SIMPLE(Modified)

Capítulo 1

Apresentação

A motivação para o estudo apresentado neste trabalho foi o desenvolvimento de um novo esquema de discretização construído no método dos volumes finitos para solução da equação de transporte convectivo-difusivo. Os objetivos a serem alcançados são a transformação do esquema para aplicação em coordenadas generalizadas para solução das equações de transporte convectivo-difusivo e de Navier-Stokes e a extensão da avaliação do seu comportamento numérico para estes casos.

No caso da formulação em coordenadas generalizadas, o trabalho que será apresentado pode ser resumido em alguns passos. Definidas as equações para teste, estas são transformadas do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas generalizadas e resolvidas utilizando o método dos volumes finitos no plano de coordenadas transformado de configuração simples. Os resultados serão comparados com as respectivas soluções analíticas, quando disponíveis, ou com soluções obtidas pelo pacote computacional Ansys.

1.1 Introdução

Uma grande parte dos processos de transporte convectivo-difusivo em meio fluido ocorre em situações onde o domínio físico não tem uma geometria regular. Alguns exemplos práticos deste tipo de configuração podem ser encontrados nos escoamentos em trocadores de calor, em turbinas, perfis aerodinâmicos, em canais com geometrias irregulares, ao redor de componentes eletrônicos e inúmeras outras aplicações.

Devido a esta grande variedade de casos onde os processos físicos ocorrem em geometrias irregulares, os métodos numéricos aplicados à soluções das equações diferenciais nestas condições tem-se desenvolvido de forma expressiva nos últimos anos.

Para simulação de escoamento utilizando uma formulação em coordenadas cartesianas, os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos que há tempos tem sido aplicados para o tratamento das equações de Navier-Stokes, tem sido utilizados com sucesso em inúmeros casos desde as suas primeiras implementações. Para a simulação de escoamento em domínios irregulares, algumas aproximações foram desenvolvidas para um tratamento especial das fronteiras curvas. A derivação de expressões especiais de interpolação e a construção de malhas diferenciadas como são apresentadas por Morton e Mayers (1994), são alguns destes artifícios utilizados para a solução de problemas quando o domínio apresenta uma geometria irregular e é utilizada uma malha regular em coordenadas cartesianas ou cilíndricas.

Patankar (1980) apresenta uma alternativa relativamente simples para este tratamento especial em fronteiras curvas, para o método dos volumes finitos, onde é gerada uma malha que envolve todo o domínio tratado e as regiões formadas pelas fronteiras curvas e o excedente da malha são tratadas de forma distintas. Então a malha que será considerada para o domínio físico será formada por regiões ativas e inativas, sendo que as fronteiras físicas do problema serão representadas pelas interfaces formadas pelas duas regiões existentes na malha. É equivalente a representar como uma região sólida aquela região fora do domínio do escoamento do fluido. Algumas desvantagens deste método são: primeiro, que ele não utiliza eficientemente a memória computacional, sendo necessário guardar informações para aquelas regiões inativas; segundo, se a fronteira física não coincidir com as fronteiras dos volumes, esta será representada por uma linha em degraus, o que faz necessário um refinamento mais acentuado nas regiões próximas às fronteiras. Esta alternativa introduziu um inconveniente a mais no problema, que foi o desperdício de memória e tempo computacionais.

Para evitar situações desta natureza, os três caminhos mais comuns a serem tomados são: nos métodos das diferenças finitas e dos volumes finitos seria o desenvolvimento de outras alternativas para que problemas de fronteiras curvas fossem contornados como por exemplo, a solução das equações em coordenadas generalizadas ou em malhas não estruturadas; ou a utilização do método

dos elementos finitos cuja formulação traz um grande atrativo que é tratar geometrias irregulares mais facilmente.

O método dos elementos finitos primeiramente foi bastante utilizado para resolver problemas de elasticidade, e a sua extensão para o campo do escoamento dos fluidos trouxe a facilidade de tratamento das fronteiras irregulares. As primeiras formulações do método dos elementos finitos representavam bem os problemas lineares, casos mais comuns encontrados em elasticidade. Já para os casos não lineares como as equações de Navier-Stokes, o método não se comportava tão bem, principalmente quando os termos convectivos eram predominantes.

Numericamente pode-se encontrar alguma correspondência entre os métodos dos elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas. Pode-se verificar que os elementos lineares resultam em um sistema correspondente ao obtido quando é utilizado o esquema Central em volumes finitos, como detalhado por Idelshohn e Oñate (1994). Para o caso bidimensional, quando utilizados os elementos triangulares com interpolação linear, surgem problemas relacionados à estabilidade numérica do método para altos números de Reynolds do mesmo modo que para o esquema Central em volumes finitos.

Para resolver este problema de instabilidade numérica, várias alternativas têm sido apresentadas tais como as propostas de Ramadhyani (1979) que desenvolveu funções de interpolação mais estáveis para elementos quadrilaterais, Baliga e Patankar (1980) que propuseram um método em que no lugar da interpolação linear para o elemento triangular, eram empregadas interpolações de base exponencial nas direções das velocidades médias do escoamento e interpolações lineares nas direções normais. Um resumo de várias funções de interpolação para vários outros tipos de elementos pode ser encontrado em Reddy (1993). Atualmente têm-se várias alternativas de escolha de elementos mais estáveis numericamente como o SUPG apresentado por Brooks e Hughes (1982), PG e GLS apresentado por Idelsohn *et al* (1996), que são utilizados em casos de escoamento com altos números de Reynolds.

No método dos volumes finitos também são encontradas dificuldades semelhantes às encontradas no método das diferenças finitas no que se diz respeito a geometrias irregulares. De todas as alternativas propostas para evitar problemas com geometrias irregulares, a que tem se

desenvolvido com destaque nos últimos anos é o uso de coordenadas generalizadas, onde um outro sistema de coordenadas é gerado e as equações governantes são resolvidas em um plano transformado regular. Dentre várias características deste método de solução, uma das atraentes vantagens é que todas as fronteiras do domínio serão formadas por fronteiras de volumes de controles alinhados, ou seja, as fronteiras do domínio serão coincidentes com as fronteiras dos volumes. Este é um método bastante promissor e atualmente a grande maioria dos pacotes comerciais baseados na formulação de volumes finitos traz incorporada esta opção.

A solução em coordenadas generalizadas requer que sejam realizados alguns procedimentos preliminares para a solução da equação diferencial. Primeiro é necessário que seja feita a transformação da equação diferencial para o sistema de coordenadas generalizadas, e depois a transformação do método numérico e a construção da malha. Em coordenadas generalizadas são utilizadas as malhas estruturadas, pela correspondência entre os planos físico e transformado. Para geração numérica de malhas estruturadas vários métodos podem ser utilizados, dentre eles estão o de geração algébrica através de polinômios de interpolação e os de geração parabólica, hiperbólica e elíptica apresentadas por Thompson *et al* (1985).

Dentro do método de solução por coordenadas generalizadas, há vários caminhos a serem tomados para definir um conjunto de operações necessárias à solução numérica. No caso da solução das equações de Navier-Stokes, as escolhas entre malhas ortogonais e não ortogonais, entre os esquemas de malha deslocada e colocada, entre a representação das componentes de velocidades covariantes e contravariantes, entre os vários algoritmos de acoplamento velocidade-pressão, entre os vários métodos de solução do sistema de equações para correção da pressão, são escolhas importantes a serem feitas para o processo de cálculo.

Vários autores têm realizado estudos para avaliar detalhadamente de quanto a ortogonalidade da malha pode influenciar os resultados finais. Xu e Zhang (1998) e (1999) avaliaram os efeitos da não ortogonalidade da malha nos resultados para malhas colocadas, além de apresentarem uma comparação entre vários algoritmos para acoplamento velocidade-pressão. Referente a ortogonalidade da malha utilizada, é preferido pela maioria dos autores a utilização da malha não ortogonal devido a maior facilidade de construção e adaptação as irregularidades do domínio. Comparações entre os algoritmos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEM para o acoplamento velocidade-

pressão utilizando malhas colocalizadas também são apresentados por Acharya e Moukalled (1989), concluíram que o algoritmo SIMPLEM apesar de ter uma convergência mais lenta não há vestígios de oscilações no processo. Yang *et al* (1994) realizaram testes em malhas não ortogonais comparando os métodos de transformação das equações de Navier-Stokes para coordenadas generalizadas e concluíram que a formulação fraca em alguns casos leva a oscilações na solução numérica. Em relação ao armazenamento das variáveis na malha, Peric *et al* (1988) fizeram comparações entre malhas deslocadas e colocalizadas, e indicaram várias vantagens do uso da malha colocalizada em relação à deslocada, principalmente em malhas não ortogonais. Melaaen (1992) confirmou esta afirmação apresentando os resultados obtidos para simulação de escoamento em geometrias irregulares, e ainda afirmou que a não ortogonalidade pouco afeta a qualidade dos resultados. Karki e Patankar (1988) utilizaram malhas não ortogonais e deslocadas para solução de escoamentos em geometrias complexas, e comentaram que a escolha pela malha não ortogonal se deu pela maior facilidade de construção e flexibilidade. Sharatchandra e Rhode (1994) também utilizando malhas não ortogonais e colocalizadas, fizeram comparações entre algoritmos de acoplamento velocidade-pressão e descrevem algumas vantagens do uso das componentes de velocidade covariantes. Choi *et al* (1993) utilizaram malhas não ortogonais e colocalizadas para realizar testes comparativos entre o uso das componentes de velocidades covariantes e contravariantes, e reportaram que melhores resultados são obtidos se utilizadas as componentes covariantes.

Então referente à forma de armazenamento das variáveis nos nós da malha parece ser consenso que o uso das malhas colocalizadas trazem vantagens relacionadas ao armazenamento computacional e a velocidade de cálculo dos coeficientes do sistema de equações a ser resolvido

É importante ressaltar que em grande parte dos trabalhos apresentados onde são utilizadas malhas colocalizadas, é também utilizada a chamada Interpolação de Momento para as velocidades na equação da continuidade, com o objetivo de evitar o campo alternado de pressão e velocidades. Detalhes referentes ao método de interpolação de momento podem ser encontrados em Rhie e Chow (1983). Autores como Majumdar (1988) utilizam este tipo de interpolação e apresentam algumas modificações do método original.

1.2 Contribuição da presente tese

O esquema UNIFAES de discretização, já anteriormente avaliado por Vilela e Figueiredo (2000), Figueiredo e Llagostera (1999), apresentou resultados promissores na sua aplicação para solução de diversos problemas de transporte convectivo-difusivo em meio fluido, quando comparados com as soluções analíticas se disponíveis e também com os resultados obtidos por outros esquemas numéricos.

Como o campo de aplicações envolvendo problemas de escoamento de fluidos é bastante amplo, as avaliações de um novo esquema nos mais diversos tipos de problemas revelarão o seu comportamento numérico e com estes dados disponíveis poderão ser feitas avaliações mais completas tornando-o cada vez mais confiável se tais resultados forem considerados bons ou mesmo apresentando suas limitações. O esquema UNIFAES vem justamente percorrendo este caminho, de apresentar-se com bom desempenho quanto à acuidade e estabilidade nos mais diversos tipos de problemas até então avaliados, e por esta razão torna-se evidente a sua aplicação a casos ainda não avaliados onde justamente há maiores dificuldades de se obterem soluções numéricas.

A presente tese tem como objetivo apresentar novas avaliações numéricas realizadas considerando casos lineares e não lineares, em coordenadas generalizadas com malhas regulares e principalmente com malhas não regulares, ampliando assim o campo de aplicações do esquema de discretização UNIFAES aplicado ao método dos volumes finitos nas equações de transporte convectivo-difusivo em meio fluido e nas equações de Navier-Stokes para o caso bidimensional. Como produtos finais deste trabalho, são apresentadas curvas que descrevem o comportamento do esquema estudado e uma ampla discussão sobre os resultados obtidos.

Capítulo 2

Método dos volumes finitos

2.1 Generalidades

O método dos volumes finitos, que é baseado na integração da equação diferencial em um volume de controle tem como objetivo, expressá-la de forma numérica e discreta. Uma breve apresentação deste método será descrita a seguir.

Consideremos a equação de transporte convectivo-difusivo em coordenadas cartesianas para o caso bidimensional em regime permanente na forma divergente ou conservativa:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \quad (2.1)$$

Aplicando a regra da derivação do produto, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \quad (2.2b)$$

Considerando a equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

então a equação de transporte convectivo-difusivo pode ser escrita também na forma abaixo, que é denominada de forma convectiva ou não conservativa :

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \quad (2.3)$$

A equação (2.1) na forma divergente pode ainda ser escrita como:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (2.4)$$

onde os fluxos convectivos-difusivos são:

$$\begin{aligned} J_x &= \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J_y &= \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Integrando a equação (2.4) no volume de controle apresentado na figura 2.1, empregando o teorema do divergente podemos expressá-la de forma discreta segundo o método dos volumes finitos, obtendo:

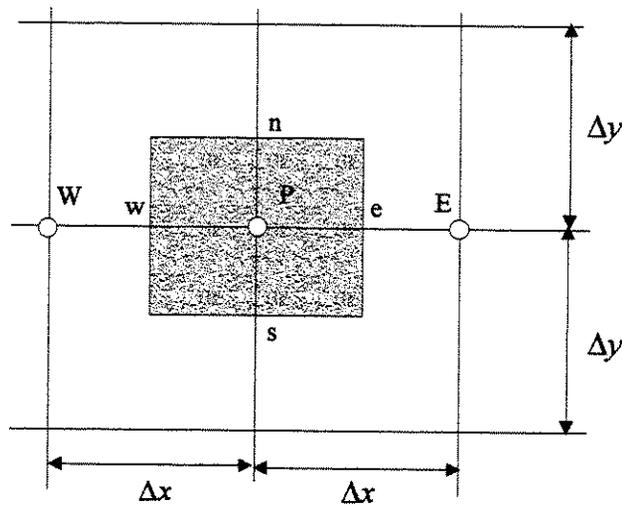


Figura 2.1: Volume de controle diferencial bidimensional

$$(J_e - J_w) \Delta y + (J_n - J_s) \Delta x = S \Delta x \Delta y \quad (2.6)$$

onde os fluxos considerados constantes na face do volume são expressos por:

$$\begin{aligned} J_e &= \rho u \phi_e - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \\ J_n &= \rho v \phi_n - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

assim como para as fronteiras w e s .

Analisando a equação (2.7), observa-se que os termos desta equação envolvem valores das variáveis e suas derivadas nas fronteiras dos volumes de controle considerados, e como na malha numérica utilizada estes valores não são disponíveis nestas localizações mas sim nos nós principais, deve-se então aproximá-los por uma curva interpolante que envolva valores da própria variável em pontos vizinhos da malha, ou seja, nos nós principais. Vários esquemas de discretização podem ser utilizados para avaliar estes valores localizados nas interfaces dos volumes de controle, e alguns dos esquemas clássicos mais conhecidos como o Central, Exponencial e a Montante (Upwind) serão de forma resumida aqui apresentados, além de alguns esquemas mais elaborados matematicamente como o LOADS, QUICK e o UNIFAES.

2.2 Esquemas clássicos de interpolação

O objetivo agora é a avaliação adequada dos valores das variáveis nas fronteiras dos volumes de controle, e várias propostas serão apresentadas pelos diversos esquemas de discretização a seguir.

2.2.1 Esquema Central

O esquema de discretização Central é baseado em uma curva interpolante linear entre os valores da variável nos dois nós vizinhos à fronteira do volume de controle considerado, como mostrado na figura 2.2.

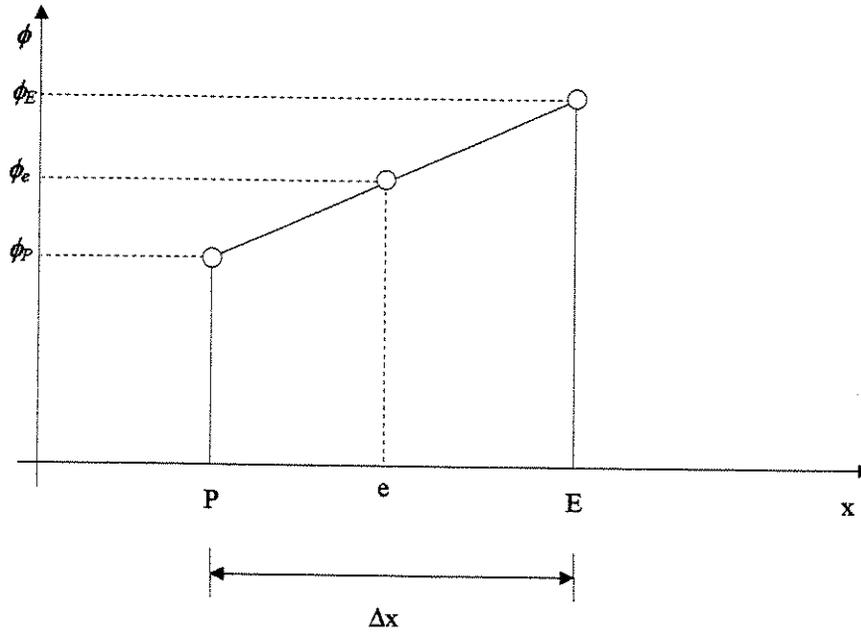


Figura 2.2: Curva de interpolação para nós vizinhos, esquema Central

Considerando a fronteira e localizada no ponto intermediário entre os nós P e E, os termos da equação (2.7) serão aproximados pela curva interpolante linear envolvendo os pontos P e E nas seguintes relações:

$$\phi_e = \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2} \quad (2.8)$$

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} (\phi_E - \phi_P) \quad (2.9)$$

As relações apresentadas descrevem a formulação para o esquema Central para a face e . Relações semelhantes podem ser conseguidas de forma análoga para a face w no caso unidimensional, que também podem ser estendidas para as faces n e s para o caso bidimensional. Então a equação (2.3) discretizada utilizando o esquema Central ficará na forma:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S \quad (2.10)$$

onde a 's são coeficientes, que nos casos dos nós E e W ficam como:

$$a_E \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_e} \right) = 1 - \frac{\rho u_e \Delta x}{2\Gamma_e} \quad (2.11)$$

$$a_W \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_w} \right) = 1 + \frac{\rho u_w \Delta x}{2\Gamma_w}$$

2.2.2 Esquema a Montante (Upwind)

No esquema a Montante (Upwind) a curva interpolante já é considerada constante, e seu valor é dependente do sentido do termo ρu na seguinte relação, considerando para a face e :

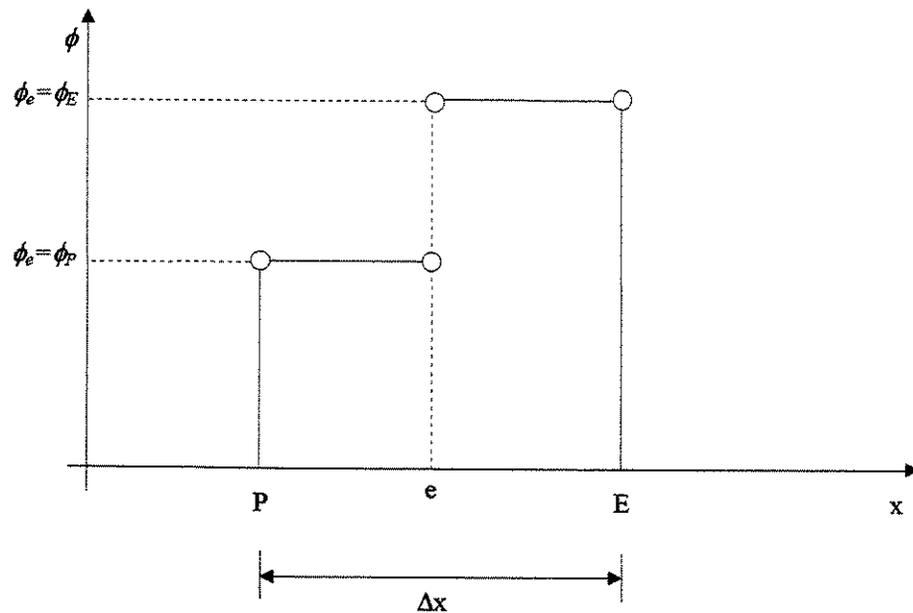


Figura 2.3: Curva de interpolação para nós vizinhos, esquema a Montante

Se $\rho u_e > 0$ então $\phi_e = \phi_P$

Se $\rho u_e < 0$ então $\phi_e = \phi_E$

Expressões análogas também são empregadas para as faces w do volume de controle no caso unidimensional, e também para as faces n e s para o caso bidimensional. Os termos que envolvem valores de derivada nas interfaces, normalmente são avaliados segundo o esquema Central, como mostrado anteriormente. Uma expressão correspondente a (2.10) também é encontrada, onde os coeficientes para os casos dos nós E e W são da forma:

$$a_E \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_e} \right) = 1 + \frac{\rho u_e \Delta x}{\Gamma_e} \quad \text{para } \rho u_e < 0 \quad (2.12)$$

$$a_E \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_e} \right) = 1 \quad \text{para } \rho u_e > 0 \quad (2.13)$$

$$a_W \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_w} \right) = 1 + \frac{\rho u_w \Delta x}{\Gamma_w} \quad \text{para } \rho u_w > 0$$

$$a_W \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_w} \right) = 1 \quad \text{para } \rho u_w < 0$$

2.2.3 Esquema Exponencial

No esquema Exponencial, é considerada uma curva interpolante resultante da solução analítica da equação diferencial unidimensional.

$$\rho u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad (2.14)$$

Considerando um domínio limitado em $0 \leq x \leq L$ e com condições de contorno definidas:

Em $x = 0$ temos $\phi = \phi_0$

Em $x = L$ temos $\phi = \phi_L$

a solução geral da equação (2.14) pode ser encontrada analiticamente como:

$$\phi = C_1 + C_2 e^{\frac{\rho u x}{\Gamma}} \quad (2.15)$$

A solução geral pode ser utilizada para encontrarmos a solução particular válida para o domínio:

$$\frac{(\phi - \phi_0)}{(\phi_L - \phi_0)} = \frac{\exp(Pex/L) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (2.16)$$

onde: $Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma}$

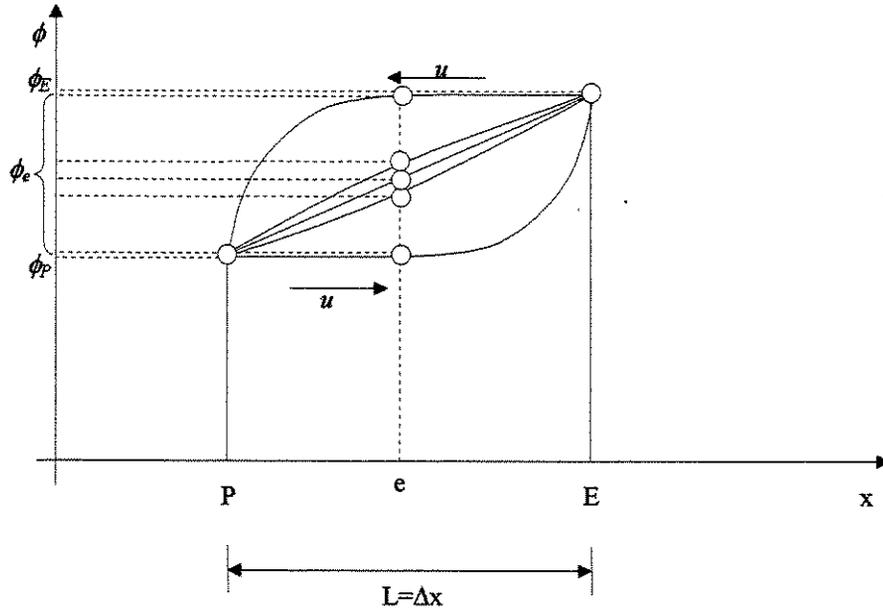


Figura 2.4: Curvas de interpolação para nós vizinhos, esquema Exponencial

Se considerando que a face e esteja no ponto intermediário entre os nós P e E, a expressão (2.16) pode ser simplificada. Já que temos que:

$$x = \frac{L}{2}$$

então:

$$\phi_e = \frac{(\phi_E - \phi_P) \left[\exp\left(\frac{Pe}{2}\right) - 1 \right]}{[\exp(Pe) - 1]} + \phi_P \quad (2.17)$$

Desta forma uma expressão correspondente a (2.10) para o esquema Exponencial será encontrada com os seguintes coeficientes, para os casos dos nós E e W.

$$a_E \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_e} \right) = \frac{\rho u_e \Delta x}{\Gamma_e} \left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\rho u_e \Delta x}{\Gamma_e}\right) - 1} \right) \quad (2.18)$$

$$a_W \left(\frac{\Delta x}{\Gamma_w} \right) = \frac{\rho u_w \Delta x}{\Gamma_w} \left(\frac{\exp\left(\frac{\rho u_w \Delta x}{\Gamma_w}\right)}{\exp\left(\frac{\rho u_w \Delta x}{\Gamma_w}\right) - 1} \right)$$

2.2.4 Esquema Híbrido

O esquema Híbrido desenvolvido por Spalding (1972), também apresentado em Patankar (1980), é um esquema que se aproxima numericamente o esquema Exponencial previamente apresentado, por representar a curva de variação dos coeficientes a 's com o valor de Peclet da equação diferencial discretizada por uma curva formada por três segmentos de retas. A aproximação feita pelo esquema Híbrido é definida da seguinte forma:

$$\text{Para } Pe < -2 \quad \frac{a_E}{D_e} = -Pe_e \quad \frac{a_W}{D_w} = 0 \quad (2.19a)$$

$$\text{Para } -2 \leq Pe \leq 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{Pe_e}{2} \quad \frac{a_W}{D_w} = 1 + \frac{Pe_w}{2} \quad (2.19b)$$

$$\text{Para } Pe > 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 0 \quad \frac{a_W}{D_w} = Pe_w \quad (2.19c)$$

$$\text{onde : } D = \frac{\Gamma}{\Delta x}$$

2.2.5 Esquema Lei de Potência (Power-Law)

O esquema Lei de Potência (Power-Law) assim como o esquema Híbrido, aproxima o esquema Exponencial. Uma detalhada apresentação deste esquema pode ser encontrada em Patankar (1979), mas resumidamente as expressões para a aproximação da curva de variação dos coeficientes a 's em função do valor de Peclet são.

$$\text{Para } Pe < -10 \quad \frac{a_E}{D_e} = -Pe_e \quad \frac{a_W}{D_w} = 0 \quad (2.20a)$$

$$\text{Para } -10 \leq Pe < 0 \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1Pe_e)^5 - Pe_e \quad \frac{a_W}{D_w} = (1 + 0.1Pe_w)^5 \quad (2.20b)$$

$$\text{Para } 0 \leq Pe < 10 \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1Pe_e)^5 \quad \frac{a_W}{D_w} = (1 - 0.1Pe_w)^5 + Pe_w \quad (2.20c)$$

$$\text{Para } Pe \geq 10 \quad \frac{a_E}{D_e} = 0 \quad \frac{a_W}{D_w} = Pe_w \quad (2.20d)$$

Expressões para as faces w , n e s são apresentadas no Anexo A, e substituindo-as na equação (2.7) e (2.6) encontramos a forma discretizada onde os coeficientes serão determinados em função da expressão utilizada para a interpolação. Para o caso de $u_e > 0$ e $u_w > 0$ teremos:

$$a_E \left(\frac{\Delta x}{\Gamma} \right) = 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\rho u_e \Delta x}{\Gamma} \right) \quad (2.22)$$

2.4 Esquema LOADS

O esquema Exponencial previamente apresentado, ao longo dos anos se mostrou um esquema numericamente estável e com boa acuidade quando utilizado em vários problemas onde os esquemas Central e a Montante (Upwind) não se comportavam muito bem, apresentando dificuldades de convergência e neste sentido com resultados não satisfatórios. A partir daí, uma linha de esquemas os quais estão baseados no Exponencial original, vem surgindo ao longo do tempo, e um destes esquemas que foi utilizado como comparação para os resultados obtidos é o esquema LOADS de Wong e Raithby (1979). A idéia principal é utilizar a equação diferencial de transporte convectivo-difusivo como uma aproximação para a interpolação.

Como esquema de base exponencial, a equação unidimensional geratriz da função de interpolação é escrita como:

$$\rho u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = k_x \quad (2.23)$$

Pode-se encontrar analiticamente a solução exata geral da equação (2.23), em um domínio limitado por $0 \leq x \leq L$ como:

$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 \exp\left(\frac{\rho u x}{\Gamma L}\right) \quad (2.24)$$

onde a constante C_2 é dada por:

$$C_2 = \frac{k_x}{\rho u} \quad (2.25)$$

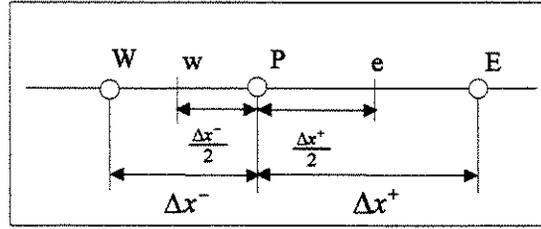


Figura 2.6: Esquema unidimensional do volume de controle

Com referência o nó P, teremos que para um nó situado na face e do volume de controle, a solução analítica pode ser escrita como:

$$\phi_e = C_1 + C_2 \frac{\Delta x^+}{2} + C_3 \exp\left(P_e \frac{\Delta x^+}{2}\right) \quad (2.26)$$

onde por simplificação chamaremos:

$$P_e = \frac{\rho u_e}{\Gamma}$$

Derivando a expressão (2.24) em relação a x , temos:

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = C_2 + C_3 P_e \exp\left(\frac{P_e \Delta x^+}{2}\right) \quad (2.27)$$

então o fluxo convectivo-difusivo na fronteira e da célula, fica:

$$J_e = \rho u_e C_1 + C_2 \left(\frac{P_e \Delta x^+}{2} - 1 \right) \quad (2.28)$$

Assumindo que k_x e C_2 possam ser calculados em cada célula, o perfil interpolante pode ser ajustado aos nós P e E:

$$\phi_P = C_1 + C_3 \quad (2.29)$$

$$\phi_E - C_2 \Delta x^+ = C_1 + C_3 \exp(P_e \Delta x^+) \quad (2.30)$$

então encontramos:

$$C_1 = \phi_P - \frac{\phi_E - \phi_P}{\exp(P_e \Delta x^+) - 1} + \frac{C_2 \Delta x^+}{\exp(P_e \Delta x^+) - 1} \quad (2.31)$$

$$C_3 = \phi_P - C_1$$

e o fluxo fica:

$$J_e = \rho u_e \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\Delta x^+} \frac{P_e \Delta x^+}{\exp(P_e \Delta x^+) - 1} + k_e \Delta x^+ \left[\frac{1}{\exp(P_e \Delta x^+) - 1} - \frac{1}{P_e \Delta x^+} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.32)$$

Tem-se que agora determinar o valor de k_e para completar a aproximação considerada. Tomando a equação (2.1) na forma conservativa, podemos representá-la como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = k_x = S - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

Agora o termo fonte k_x é considerado na equação e este poderá representar todos os termos fontes das equações diferenciais empregadas para solução, como por exemplo das equações de Navier-Stokes. O lado direito da equação incluindo os termos de fluxo entre parênteses são calculados segundo a expressão considerando o volume de controle representado na figura 2.7.

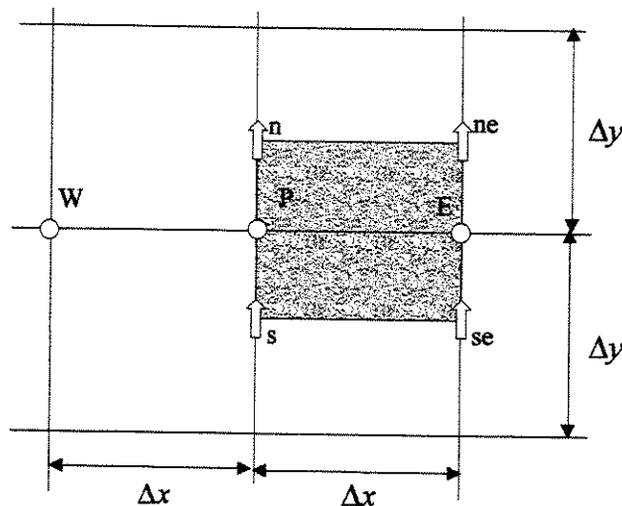


Figura 2.7: Volume de controle para esquema LOADS

$$k_e = \left(\frac{S_{ij} + S_{i+1,j}}{2} \right) + \frac{(J_n - J_s) + (J_{ne} - J_{se})}{2} \quad (2.34)$$

Com a adição do termo fonte, a curva de interpolação estará mais próxima de representar corretamente o perfil da variável no intervalo do volume de controle.

2.5 Esquema UNIFAES

O esquema de discretização UNIFAES, idealizado e desenvolvido por Figueiredo (1997), traz em sua formulação original uma nova alternativa para o cálculo dos termos fonte da equação geratriz de base exponencial, equação (2.14). Esta nova alternativa trouxe ao método algumas características interessantes quanto a estabilidade numérica, simplicidade de implementação e acuidade nos resultados. Os resultados dos testes já realizados anteriormente para o caso de transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo apresentado por Figueiredo (1997), para solução do problema de Smith and Hutton e o caso de convecção natural em cavidade porosa apresentados por Figueiredo e Llagostera (1999), para o caso de convecção mista em meio poroso com cavidade apresentados por Llagostera e Figueiredo (2000), e o caso de transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo, escoamento rotacional de fluido como sólido, escoamento em canto e escoamento em canto com perfil de entrada parabólico apresentados por Vilela e Figueiredo (2000), mostram estas características numéricas mencionadas em relação ao esquema UNIFAES.

Como esquema de base exponencial, os procedimentos matemáticos iniciais serão semelhantes aos já apresentados para o esquema LOADS. Ajustando a curva interpolante, equação (2.24) aos três nós vizinhos W, P, E segundo a figura (2.6), teremos:

$$\phi_W = C_1 - C_2 \Delta x^- + C_3 \exp\left(-\frac{\rho u \Delta x^-}{\Gamma}\right) \quad (2.35)$$

$$\phi_P = C_1 + C_3 \quad (2.36)$$

$$\phi_E = C_1 + C_2 \Delta x^+ + C_3 \exp\left(\frac{\rho u \Delta x^+}{\Gamma}\right) \quad (3.37)$$

e resolvendo o sistema formado pelas equações (2.35), (2.36) e (2.37) para encontrar C_2 e substituindo na expressão (2.25), obteremos:

$$k_x = (\phi_P - \phi_E)\Pi^+ + (\phi_P - \phi_W)\Pi^- = \rho u_p \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

$$\Pi^+ = \frac{\rho u_p [1 - \exp(-p^-)]}{\Delta x^+ [\exp(-p^-) - 1] + \Delta x^- [\exp(p^+) - 1]} \quad (2.39)$$

$$\Pi^- = \frac{\rho u_p [\exp(p^+) - 1]}{\Delta x^+ [\exp(-p^-) - 1] + \Delta x^- [\exp(p^+) - 1]} \quad (2.40)$$

onde:

$$p^\pm = \rho u_p \Delta x^\pm \quad (2.41)$$

No esquema UNIFAES, os valores de k_x , etc, são obtidos generalizando o desenvolvimento algébrico de Allen e Southwell para malhas irregulares. No caso particular de espaçamento regular, as expressões 2.38, 2.39 e 2.40 reduzem-se às encontradas por Allen e Southwell (1955) para malhas regulares. O esquema UNIFAES utiliza estas expressões para determinar numericamente os valores dos termos fonte k das expressões de interpolação requeridas para a formulação por volumes finitos.

$$k_e^{i,j} = 0.5(k_x^{i,j} + k_x^{i+1,j}) \quad (2.42)$$

Nota-se que a expressão para k_x , equação (2.38), envolve valores da variável ϕ em três nós vizinhos, W, P e E. Com isto para calcular o valor de k_w , são necessários os valores de k_w e k_p , e por sua vez para encontrar k_w são necessários valores de ϕ em WW, W e P. No caso de nós próximos as fronteiras do domínio, verifica-se que o nó WW estaria fora do domínio, impossibilitando assim o cálculo de k_x . Então para casos semelhantes a este, foi utilizada uma extrapolação linear considerando os valores de k_x para dois nós vizinhos e adjacentes que estejam dentro do domínio para estimar o valor de k_x na fronteira do volume de controle adjacente à fronteira do domínio. A molécula computacional necessária ao esquema UNIFAES está representada na figura 2.8.

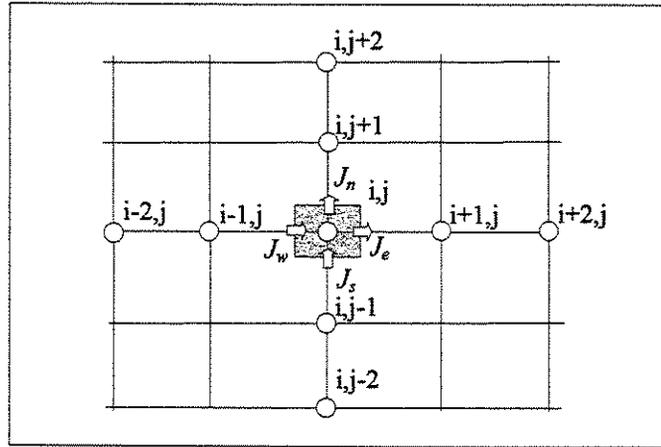


Figura 2.8: Molécula computacional para esquema UNIFAES

2.6 Esquema UNIFAES para coordenadas generalizadas

De forma semelhante ao desenvolvimento do esquema UNIFAES para coordenadas cartesianas, será apresentado a seguir o seu desenvolvimento para o sistema de coordenadas generalizadas bidimensional. Considerando as equações geratrizes das funções de interpolação transformadas para coordenadas generalizadas unidimensionais em cada direção de coordenada como:

$$\frac{d}{d\xi}(\rho\tilde{u}\phi) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{q_{11}\Gamma}{J}\frac{d\phi}{d\xi}\right) = k_\xi \quad (2.43a)$$

$$\frac{d}{d\eta}(\rho\tilde{v}\phi) - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{q_{22}\Gamma}{J}\frac{d\phi}{d\eta}\right) = k_\eta \quad (2.43b)$$

onde definimos:

$$Pe_\xi = \frac{J\rho\tilde{u}}{q_{11}\Gamma} \quad (2.44a)$$

$$Pe_\eta = \frac{J\rho\tilde{v}}{q_{22}\Gamma} \quad (2.44b)$$

Aplicando os mesmos métodos analíticos utilizados para a solução analítica em coordenadas cartesianas, e considerando a disposição dos nós como na figura 2.9 no plano transformado, agora a solução analítica geral e suas derivadas em coordenadas generalizadas aplicadas em todas as faces do volume de controle são dadas por:

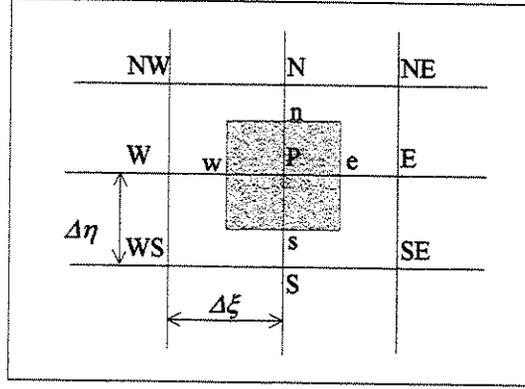


Figura 2.9: Volume de controle elementar no plano transformado

Para a face e :

$$\phi_e = C_1^e + C_2^e \frac{\Delta\xi}{2} + C_3^e \exp\left(\frac{Pe_{e\xi}\Delta\xi}{2}\right)$$

$$\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_e = C_2^e + C_3^e Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi}\Delta\xi}{2}\right) \quad (2.45)$$

Para a face w :

$$\phi_w = C_1^w + C_2^w \frac{\Delta\xi}{2} + C_3^w \exp\left(\frac{Pe_{w\xi}\Delta\xi}{2}\right)$$

$$\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_w = C_2^w + C_3^w Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi}\Delta\xi}{2}\right) \quad (2.46)$$

onde as constantes são dadas da forma:

Para a face e :

$$C_1^e = \phi_E(-\alpha_{e\xi}) + \phi_P(1 + \alpha_{e\xi}) + \beta_{e\xi}$$

$$C_2^e = \frac{k_{e\xi}}{Pe_{e\xi}} \quad (2.47)$$

$$C_3^e = \phi_E(\alpha_{e\xi}) + \phi_P(-\alpha_{e\xi}) - \beta_{e\xi}$$

Analogamente para as outras faces:

Para a face w :

$$\begin{aligned}
 C_1^w &= \phi_w (1 + \alpha_{w\xi}) + \phi_p (-\alpha_{w\xi}) + \beta_{w\xi} \\
 C_2^w &= \frac{k_{w\xi}}{Pe_{w\xi}} \\
 C_3^w &= \phi_w (-\alpha_{w\xi}) + \phi_p (\alpha_{w\xi}) - \beta_{w\xi}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

onde:

$$\alpha_{e\xi} = \frac{1}{[\exp(Pe_{e\xi}\Delta\xi) - 1]} \quad \beta_{e\xi} = \frac{k_{e\xi}\Delta\xi}{2[\exp(Pe_{e\xi}\Delta\xi) - 1]} \tag{2.49}$$

$$\alpha_{w\xi} = \frac{1}{[\exp(Pe_{w\xi}\Delta\xi) - 1]} \quad \beta_{w\xi} = \frac{k_{w\xi}\Delta\xi}{2[\exp(Pe_{w\xi}\Delta\xi) - 1]} \tag{2.50}$$

Expressões análogas podem ser encontradas para as demais faces do volume de controle. Seguindo procedimentos semelhantes aos apresentados no desenvolvimento para coordenadas cartesianas, encontramos as expressões para cálculo dos termos fonte para coordenadas generalizadas.

Para a direção ξ :

$$k_\xi = (\phi_P - \phi_E) \frac{(Pe_\xi\Delta\xi)}{\Delta\xi^2 [e^{(Pe_\xi\Delta\xi)} - 1]} + (\phi_P - \phi_W) \frac{(-Pe_\xi\Delta\xi)}{\Delta\xi^2 [e^{(-Pe_\xi\Delta\xi)} - 1]} \tag{2.51}$$

Para a direção η :

$$k_\eta = (\phi_P - \phi_N) \frac{(Pe_\eta\Delta\eta)}{\Delta\eta^2 [e^{(Pe_\eta\Delta\eta)} - 1]} + (\phi_P - \phi_S) \frac{(-Pe_\eta\Delta\eta)}{\Delta\eta^2 [e^{(-Pe_\eta\Delta\eta)} - 1]} \tag{2.52}$$

É importante lembrar que os valores de k encontrados pelas expressões apresentadas são válidos para os pontos P do volume de controle em questão e, por isso, para obter o valor em uma das interfaces do volume é necessário fazer uma interpolação entre os valores vizinhos, como no caso para coordenadas retangulares.

2.7 Comentários

Todos os esquemas de discretização numérica para avaliação das variáveis localizadas nas interfaces dos volumes de controle, tentam aproximar o comportamento da equação no intervalo discreto por uma curva de características conhecidas. Os resultados obtidos através do método dos volumes finitos sofrem grande influência com o tipo de interpolação utilizada para avaliação dos valores nas interfaces, e esta é a razão que movimenta várias pesquisas na área, a de desenvolver um esquema de discretização que melhor possa expressar numericamente o comportamento da equação para aquele intervalo discreto.

Nessa tentativa de encontrar uma *panacea*¹ numérica para todos os problemas possíveis, vários outros esquemas também foram desenvolvidos além daqueles já apresentados. Além dos já apresentados ainda temos alguns como o esquema SOU apresentado por Shyy (1985), o esquema SU apresentado por Hassan (1983), como também diferentes formulações do esquema QUICK, originalmente desenvolvido por Leonard (1979), apresentadas por Hayase (1992) e por Leonard e Mokhtari (1990) e os esquemas SUDS, WUDS e derivados, comentados por Maliska (1995). Trabalhos desenvolvidos por vários autores, incluindo os anteriormente mencionados, apresentam resultados do comportamento numérico de cada um dos esquemas para vários casos específicos. A grande variedade de testes realizados é importante para a avaliação final do esquema.

Temos então duas linhas de metodologia para que possamos enquadrar os esquemas de discretização: os de base algébrica, dentre os quais estão o Central, a Montante, WUDS, QUICK e seus derivados, e os de base exponencial, dentre os quais estão o Exponencial, Híbrido, Lei de Potência, LOADS e o UNIFAES.

Leonard (1995), idealizador do esquema QUICK, recomenda em seu trabalho a preferência pelo uso dos esquemas de base algébrica de alta ordem ao uso dos esquemas de base exponencial, pelo fato de que a difusão numérica observada nos esquemas de base exponencial, pode ser em muitos casos maiores do que a difusão física do problema. São listadas por Leonard algumas condições principais para que os esquemas de base exponencial tenham um resultado aceitável, entre

elas estão: condições de escoamento desenvolvido, escoamento quase unidimensional, coeficientes constantes e escoamento livre de termos fontes, e que sendo alguma destas condições violadas, podem ser obtidos resultados não realistas ou até mesmo a divergência na solução numérica.

É importante ressaltar que os esquemas de base exponencial e assemelhados observados por Leonard, foram o Exponencial simples, o Híbrido e o Lei de Potência, não sendo incluído nos testes nenhum esquema mais elaborado como o LOADS, já existente em 1995. Um dos testes realizados por Leonard, o problema de Smith-Hutton, do qual foram apresentados resultados que realmente demonstraram a difusividade numérica dos esquemas de base exponencial estudados por ele, também foi realizado por Figueiredo e Llagostera (1999), utilizando os esquemas LOADS e UNIFAES que também são de base exponencial, e comparando os resultados obtidos observou-se uma grande diferença de comportamento dos esquemas. Em problemas mais complexos como escoamento em cavidade inclinada e escoamento em canal divergente gradual, apresentados neste trabalho, ou mesmo no caso de transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo, onde também pode ser observado o problema de difusão numérica, os esquemas de base exponencial mais elaborados apresentam ótimos resultados mesmo quando comparados com os obtidos pelo esquema QUICK, que são resultados bem distintos dos obtidos pelo esquema Exponencial simples.

¹ Planta imaginária que supostamente curaria todos os males do homem.

Capítulo 3

Desenvolvimento matemático e numérico

Os tratamentos matemático e numérico das equações de transporte convectivo-difusivo, da continuidade e de Navier-Stokes serão descritos neste capítulo. Entretanto, antes de iniciar a apresentação dos tratamentos propriamente ditos, é adequado que se façam considerações importantes para o desenvolvimento.

3.1 Arranjo da célula computacional.

Nas soluções das equações diferenciais utilizando-se métodos numéricos tais como diferenças finitas, volumes finitos ou elementos finitos, é importante que seja bem definida a distribuição dos nós que representarão discretamente o domínio físico, pois nestas localidades serão calculadas as variáveis desejadas. Dentre vários pontos importantes que devem ser observados para que sejam obtidos bons resultados nas soluções numéricas, um deles é a distribuição da malha utilizada. Sempre que possível é interessante ter uma maior concentração local de nós, ou mesmo a utilização de elementos/volumes de maior grau de interpolação, em regiões onde há maiores gradientes da variável que está sendo aproximada, porque assim serão minimizados os erros locais.

No caso da solução das equações de Navier-Stokes é também relevante a localização de armazenamento das informações relacionadas às componentes da velocidade e pressão na célula computacional. Três alternativas para localização das variáveis na célula computacional para aproximação das equações de Navier-Stokes são apresentadas por Preyet e Taylor (1983) conforme as figuras 3.1 (a), (b) e (c). Dentre estas, duas das formas de armazenamento das variáveis na célula computacional mais utilizadas no método dos volumes finitos são o arranjo com malha deslocada tipo MAC e o arranjo com malha colocalizada.

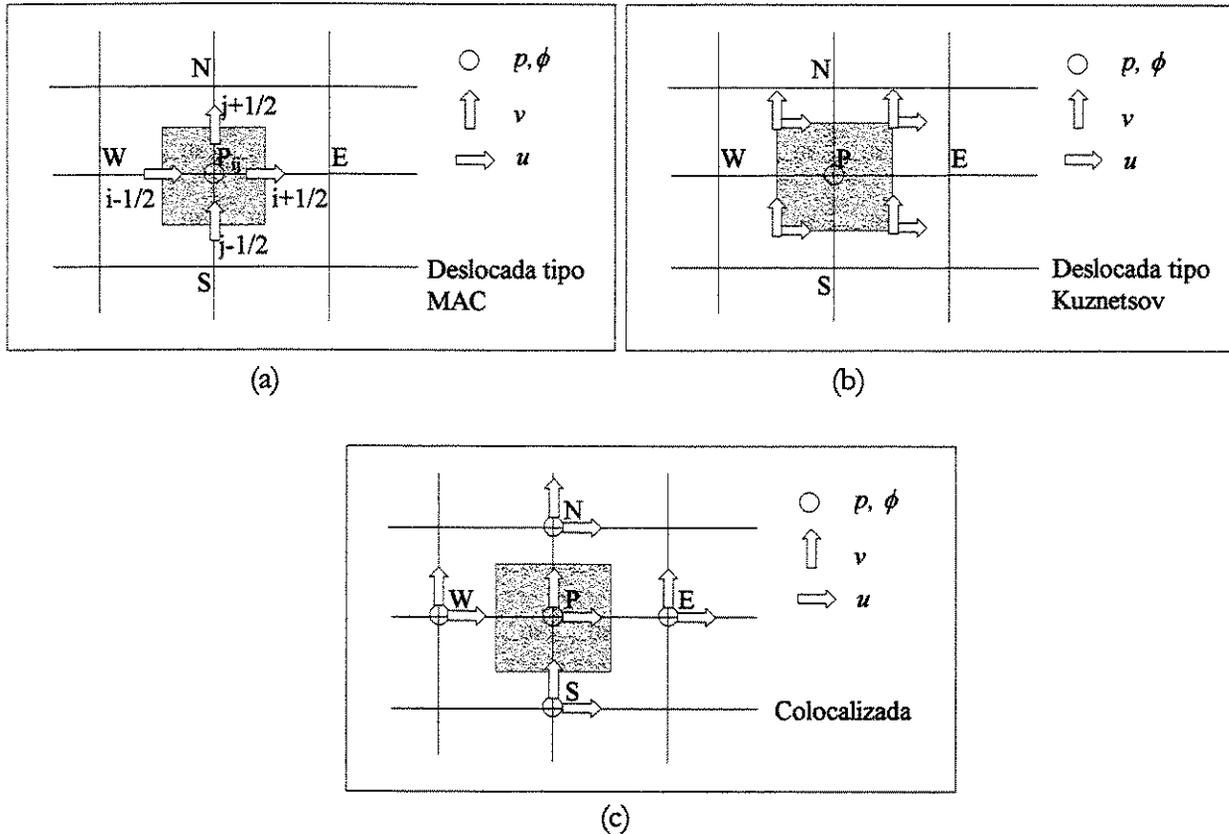


Figura 3.1: Esquema dos diferentes arranjos de malha

Observando os esquemas apresentados nas figuras 3.1 (a), (b) e (c), nota-se que as diferenças entre as formas de armazenamento está na posição relativa em que são armazenadas as variáveis no volume. No arranjo (a) temos que as componentes u da velocidade estão localizadas nas faces e e w do volume de controle da pressão em destaque, as componentes v estão localizadas nas faces n e s deste volume e as variáveis escalares eventualmente presentes estão localizadas no centro do volume de controle junto a pressão. No arranjo (b) temos que as componentes u e v estão localizadas nos vértices do volume de controle e a pressão ou outras variáveis estão localizadas no centro do volume de controle. No arranjo (c) temos que todas as variáveis, tanto velocidades como pressão e outras variáveis consideradas, estão localizadas no centro do volume de controle.

Cada um dos arranjos computacionais tem suas vantagens e desvantagens. O arranjo de malha que é bastante utilizado e que hoje divide espaço com o arranjo colocalizado é o tipo MAC, apresentado por Harlow e Welsh (1965), e que foi grandemente difundido por Patankar (1980), por

evitar o aparecimento de um campo alternado de pressão (*checkerboard*¹) que pode ocorrer quando se usa a malha não deslocada na solução das equações de Navier-Stokes.

O problema do campo de pressão alternada ocorre pelo fato de que na malha colocalizada a expressão para representar a derivada de pressão no nó envolve valores de pressão em nós alternados, não consecutivos, e da mesma forma situação semelhante pode ocorrer na equação da continuidade com as componentes da velocidade. Então temos que se utilizarmos uma malha colocalizada para a solução das equações de Navier-Stokes corremos o risco de obter como solução um campo de pressão alternada fisicamente incorreto, mas que ainda pode estar satisfazendo numericamente as equações do momento. Uma alternativa para remediar o problema do campo alternado de pressão quando é utilizada malha colocalizada na solução das equações de Navier-Stokes foi apresentada por Rhie e Chow (1983), que desenvolveu um método para interpolação das componentes da velocidade nas fronteiras dos volumes de controle envolvendo valores da pressão em nós vizinhos. Este método foi denominado de Interpolação de Momento para a avaliação das componentes da velocidade nas faces do volume de controle. Com isto foi conseguido introduzir nas equações discretizadas para u e v , uma conexão entre nós vizinhos no que se diz respeito a pressão.

Comparando os arranjos deslocado tipo MAC e colocalizado, Peric *et al* (1988), Melaaen (1992) e Date (1998) entre outros, destacam algumas das mais atraentes vantagens do uso da malha colocalizada em relação à malha deslocada.

- ✓ Todas as variáveis são localizadas nos mesmos nós.
- ✓ Há apenas um conjunto de volumes de controle. Não existem mais volumes diferentes para componentes de velocidades, pressão e variáveis dependentes.
- ✓ A contribuição convectiva para os coeficientes nas equações discretizadas é a mesma para todas as variáveis.
- ✓ Para geometrias complexas componentes cartesianas de velocidade podem ser usados em conjunção com coordenadas não ortogonais.
- ✓ O uso da malha não deslocada diminui o tempo necessário para calcular coeficientes e fatores de interpolação geométricas, reduzindo assim o tempo global de cálculo.
- ✓ Maior facilidade geométrica

¹ Faz-se referência ao tabuleiro de xadrez por apresentar casas anexas com cores alternadas

Resultados obtidos por Peric *et al* (1988), Melaaen (1992) demonstraram que, quando convergidas, as soluções obtidas utilizando malhas deslocadas e colocadas não apresentam diferenças qualitativas significativas nos resultados finais.

3.2 Algoritmo para acoplamento velocidade-pressão

Nas equações de Navier-Stokes estão relacionadas as componentes de velocidade e a pressão, sendo estas interligadas e dependentes uma da outra, ou seja, para a solução numérica do campo de escoamento é necessário que se obtenha também o campo de pressão e vice-versa. Duas são as alternativas mais utilizadas para a solução do sistema de equações. A primeira consiste na montagem e solução de um único sistema de equações que contenha todas as informações para os campos de velocidades e pressão, e com a solução do sistema são obtidos os valores das componentes de ambos, e a outra alternativa é a solução segregada de dois sistemas de equações, sendo um para as componentes da velocidade e outro para a pressão, que são resolvidos separadamente, mas obedecendo um critério de acoplamento para que sejam satisfeitas as equações governantes. A primeira alternativa é bastante utilizada quando se trabalha com o método dos elementos finitos, Taylor e Hughes (1981), e a segunda alternativa é bastante utilizada no método dos volumes finitos, apesar de que hoje alguns pacotes comerciais baseados no método dos elementos finitos utilizam este segundo método de solução.

Inicialmente temos o trabalho de Harlow e Welsh, que partindo das equações discretizadas da quantidade de movimento e da continuidade na malha deslocada, obtiveram numericamente uma equação da pressão, correspondente a uma equação de Poisson da pressão antes já conhecida analiticamente. O método MAC emprega um procedimento temporal explícito para as equações da quantidade de movimento e um procedimento ponto a ponto para a equação da pressão. A partir deste conceito, uma família assemelhada de métodos é constituída pelo SIMPLE e seus derivados. No método SIMPLE as equações governantes são obtidas pelo mesmo método de discretização, mas o procedimento de solução é distinto. Ele busca alcançar a solução segundo procedimentos implícitos ou semi-implícitos na equação da conservação da quantidade de movimento, alternando com correções nos campos de velocidade e pressão.

Dentro do método dos volumes finitos, há uma grande variedade de algoritmos que podem ser escolhidos para realizar o acoplamento velocidade-pressão. Patankar (1980) apresentou os algoritmos SIMPLE e SIMPLER, que desde então são bastante utilizados. Vários pesquisadores têm concentrado esforços no desenvolvimento de outras formas de acoplamento, na busca de melhores resultados relativos a velocidade de convergência, estabilidade numérica e acuidade. Acharya e Moukalled (1989) apresentaram o algoritmo SIMPLEM, e comparando os resultados com os obtidos utilizando os algoritmos SIMPLE e SIMPLER afirmaram que o algoritmo proposto por eles tem um melhor desempenho em problemas onde são utilizadas malhas colocalizadas. Xu e Zhang (1998) compararam os algoritmos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC para a soluções de problemas utilizando malhas generalizadas colocalizadas e constataram que utilizando o algoritmo SIMPLEC não há restrições na escolha do índice de relaxação para equação da pressão, como ocorrem nos outros algoritmos.

Resultados semelhantes foram obtidos posteriormente pelos mesmos autores em um novo trabalho, Xu e Zhang (1999), onde ainda constataram que quanto mais distante geometricamente um volume de controle da malha está de um volume de controle retangular regular mais restrita fica a faixa de valores para o índice de relaxação da pressão para que seja conseguida a convergência. Peric (1990) também obteve resultados que apontaram para o mesmo sentido indicando uma dependência da convergência numérica do algoritmo SIMPLE e seus derivados com a configuração geométrica do volume de controle.

Como o objetivo principal deste trabalho é a avaliação numérica do esquema de interpolação UNIFAES em coordenadas generalizadas e não do algoritmo de acoplamento velocidade-pressão, foi utilizado para todos os cálculos apresentados no texto, o algoritmo SIMPLE, pela simplicidade de sua implementação computacional, por ter sido obtida a convergência em todos os testes realizados além do fato de ser ainda bastante utilizado em pacotes computacionais comerciais.

3.3 Coordenadas generalizadas

Em casos práticos nem sempre temos um domínio físico onde a geometria pode ser aproximada por uma configuração mais simples como formas geométricas primitivas, por isso um

grande atrativo ao uso do método dos elementos finitos é justamente a propriedade de melhor ajuste dos elementos nas fronteiras do domínio, representando-o com maior fidelidade.

Algumas alternativas têm sido apresentadas para o método dos volumes finitos para conseguir um ajuste da malha às fronteiras do domínio. Como já discutido anteriormente, tem-se uma linha de desenvolvimento baseada na formulação para malhas não estruturadas e outra para malhas estruturadas. A utilização do método dos volumes finitos em malhas não estruturadas tem sido uma boa alternativa para o tratamento de problemas com geometrias complexas. Como exemplo temos o trabalho de Taniguchi e Kobayashi (1991) que para solução de escoamento em torno de um veículo utilizaram o método de volumes finitos com malhas não estruturadas formadas por elementos triangulares com volumes de controle que podem ser pentagonais ou não, configuração denominada de diagramas de Voronoi, figura 3.2,

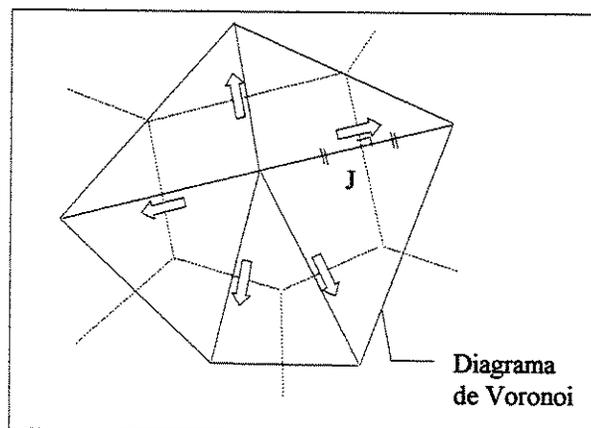


Figura 3.2: Esquema do diagrama de Voronoi

Neste método a integração será feita no volume de controle formado, e o balanço final dos fluxos será o somatório de todos os fluxos normais às suas faces. A figura 3.2 também representa esquematicamente o balanço de fluxo em um volume de controle típico.

Outra alternativa para o tratamento de geometrias complexas é a solução das equações governantes em um plano transformado de geometria mais simples. Para isso é necessário que as equações sejam transformadas matematicamente do sistema cartesiano (x,y) para o sistema de coordenadas generalizadas (ξ,η) .

Dois dos clássicos trabalhos relacionados a geração de malha estruturadas em geometrias complexas e solução das equações em um plano transformado são os trabalhos de Thompson *et al* (1977) e Thames *et al* (1977), onde são apresentados métodos de geração de malhas estruturadas em várias configurações e utilizadas para soluções de escoamento em torno de corpos com geometrias complexas e escoamentos em placas planas. Dentre inúmeras configurações que se pode usar para a correspondência entre os planos físico e transformado, estão representados na figura 3.3 algumas das mais usuais.

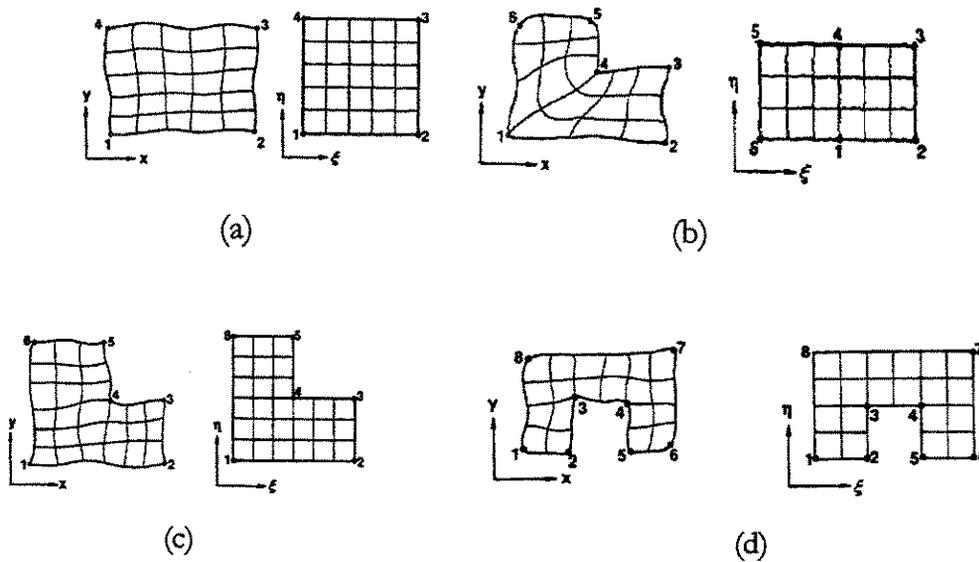


Figura 3.3: Correspondências entre os planos físico e transformado

As relações de transformação necessárias para o tratamento das equações diferenciais parciais, além de várias outras transformações básicas estão apresentadas no Anexo B. No caso de coordenadas generalizadas para solução das equações diferenciais parciais utilizando malhas do tipo estruturada, tem-se ainda as configurações de malhas ortogonais ou não. É preferida por vários autores a utilização de malhas não ortogonais pelo fato de sua construção ser mais simples e por se adaptar melhor que as ortogonais a geometrias complexas. Thompson *et al* (1985) fazem um apanhado geral de vários métodos de geração de malhas estruturadas, entre eles a geração elíptica, interpolação matemática e malhas auto-adaptativas.

Entre as malhas não estruturadas e estruturadas, há vantagens e desvantagens relacionadas a cada uma delas. Maliska (1995) recomenda o uso de malhas estruturadas alinhadas às linhas de corrente do escoamento para que sejam minimizados os erros de aproximação. Esta recomendação deve-se a influência que alguns esquemas numéricos sofrem com o ângulo formado pela coordenada da malha e a direção do escoamento, um fenômeno comumente chamado de difusão numérica. Uma avaliação dos esquemas Lei de Potência, Híbrido e QUICK em problemas de convecção pura convecção-difusão é apresentada por Leonard e Mokhtari (1990) onde também relatam a falsa difusividade do esquema QUICK original em problemas de alta convectividade e avaliam com sucesso novas formulações.

Já as malhas não estruturadas se adaptam melhor às geometrias com reentrâncias e ressaltos muito complexos. Em geral a construção de malhas estruturadas demanda maior tempo computacional que para malhas não estruturadas, sendo estas últimas mais flexíveis. Um ponto bastante favorável ao uso das malhas estruturadas, sendo elas ortogonais ou não, é que são formados volumes de controle mais regulares geometricamente que nas malhas não estruturadas, e quanto mais regular o volume e controle, menores os erros oriundos das transformações geométricas.

Para todo procedimento de discretização das equações e para os testes realizados foi escolhido o tipo de malha estruturada não ortogonal, sendo esta gerada automaticamente utilizando-se o pacote GridGen desenvolvido por Vilela (1996), originalmente para geração de malhas para solução das equações de Navier-Stokes utilizando-se o método dos elementos finitos com elementos quadrangulares de 8 nós, e posteriormente adaptado para geração de volumes quadrangulares de 4 nós.

3.4 Base de vetores no plano cartesiano e transformado

Como a velocidade é uma grandeza vetorial, podemos expressá-la de duas maneiras quando é tratada em coordenadas generalizadas. Há duas bases de vetores que se pode utilizar nos sistemas de coordenadas generalizadas não ortogonais. São eles tangentes as linhas de coordenadas, componentes covariantes, ou normais as linhas de coordenada, componentes contravariantes. A figura 3.4 abaixo mostra a disposição destas duas bases.

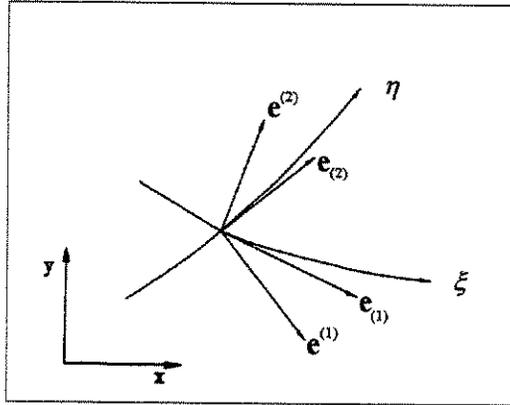


Figura 3.4: Bases covariantes e contravariantes

Na figura 3.4, o sistema de coordenadas cartesianas é representado pelas linhas xy , enquanto que o sistema de coordenadas generalizadas é representado pelas linhas $\xi\eta$. A base covariante é representada pelos vetores $e^{(1)}e^{(2)}$, e a base contravariante é representada pelos vetores $e_{(1)}e_{(2)}$.

3.5 Escolha entre transformação total e parcial das equações de Navier-Stokes

Matematicamente as equações de Navier-Stokes podem ser transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas aplicando-se duas diferentes aproximações, denominadas transformações parcial ou total. Na transformação parcial normalmente as variáveis dependentes das equações de Navier-Stokes para o caso bidimensional são as componentes cartesianas da velocidade u e v , o que caracteriza uma formulação forte da transformação, e na transformação total as variáveis dependentes são as componentes transformadas da velocidade, Yang *et al* (1994). A forma parcial foi escolhida porque após a transformação é obtida uma forma conservativa forte das equações e a transformação total leva a uma forma conservativa fraca.

Xu (1998) comenta em seu trabalho que há uma tendência em se usar as projeções das velocidades covariantes às componentes de velocidade contravariantes por dois aspectos: a) as projeções das velocidades covariantes se alinham com as coordenadas curvilíneas; b) os termos de derivada cruzada de pressão desaparecem nas equações de Navier-Stokes. Uma vantagem no uso das velocidades contravariantes é que a equação da continuidade discretizada se torna mais simples, e por esta razão foi adotada esta representação para velocidades.

3.6 Tratamento matemático das equações governantes

Os testes realizados neste trabalho envolvem a solução em coordenadas generalizadas de quatro equações diferenciais: equação de transporte convectivo-difusivo, equações de Navier-Stokes bidimensional e equação da continuidade. A equação de transporte convectivo-difusivo já foi apresentada no capítulo 2, equação (2.3), e as demais equações em coordenadas cartesianas são escritas como, considerando as hipóteses de escoamento laminar, propriedades físicas constantes, regime permanente e para o caso bidimensional:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho g_x \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como será detalhado adiante, alguns testes foram realizados considerando o sistema de coordenadas retangulares (x,y) e outros considerando o sistema de coordenadas generalizadas. Para o tratamento das equações no sistema de coordenadas retangulares, não se fez necessário nenhuma transformação matemática adicional das equações, mas para o tratamento em coordenadas generalizadas foi necessário que as equações governantes fossem escritas na forma transformada. A transformação das equações pode ser feita aplicando os conceitos de transformação geométrica e relações entre planos físico e transformado que estão apresentadas no Anexo B, onde também está detalhado todo o procedimento para transformação de uma equação de transporte convectivo-difusivo. Simplificando o desenvolvimento, segundo Shyy (1998) as equações transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas $\xi\eta$ são escritas na forma:

Equação de transporte convectivo-difusivo

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.3)$$

onde:

$$\Gamma = \frac{k}{c_p} \quad (3.4)$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial(\rho \tilde{u})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho \tilde{v})}{\partial \eta} = 0 \quad (3.5)$$

Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} u) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\mu}{J} \left(q_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{J} \left(q_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(f_{11} p) + \frac{\partial}{\partial \eta}(f_{21} p) \right] + g_x J \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} v) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\mu}{J} \left(q_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{J} \left(q_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(f_{12} p) + \frac{\partial}{\partial \eta}(f_{22} p) \right] + g_y J \quad (3.6b)$$

As componentes contravariantes da velocidade são escritas como:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u f_{11} + v f_{12} \\ \tilde{v} &= u f_{21} + v f_{22} \end{aligned} \quad (3.7)$$

As relações de transformação geométricas são escritas como:

$$\begin{aligned} q_{11} &= f_{11}^2 + f_{12}^2 \\ q_{22} &= f_{21}^2 + f_{22}^2 \\ q_{12} &= q_{21} = f_{11} f_{21} + f_{12} f_{22} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} & f_{12} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
 f_{21} &= -\frac{\partial y}{\partial \xi} & f_{22} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}
 \tag{3.10}$$

Com base nestas informações o próximo passo é a aplicação do método numérico adequado para a solução. Por razões de simplicidade, será apresentado aqui somente o desenvolvimento numérico das equações escritas em coordenadas generalizadas, que serão utilizadas para teste do esquema em geometrias complexas, pois o desenvolvimento para as equações em coordenadas cartesianas pode ser encontrado detalhadamente em Patankar (1980), além do que ainda há uma certa semelhança entre as duas formulações.

Seguindo um procedimento semelhante ao apresentado por Patankar (1980) para aplicação do método dos volumes finitos em coordenadas cartesianas com malhas colocadas na equação de transporte convectivo-difusivo, a integração das equações governantes em um volume de controle elementar bidimensional regularmente espaçado no plano transformado, temos que as equações são escritas como:

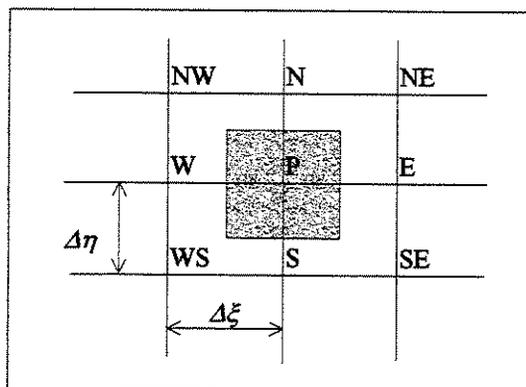


Figura 3.5: Volume de controle elementar no plano transformado

Equação de transporte convectivo-difusivo

$$\begin{aligned} \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s = \\ \left[\Lambda_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[\Lambda_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w + \left[\Lambda_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n - \left[\Lambda_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_s \end{aligned} \quad (3.11)$$

Equação da continuidade

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (3.12)$$

Equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \dot{M}_e u_e - \dot{M}_w u_w + \dot{M}_n u_n - \dot{M}_s u_s = \\ \left[\Lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_e - \left[\Lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_w + \left[\Lambda_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_n - \left[\Lambda_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_s \\ - L[\hat{p}^x] \Delta \xi \Delta \eta + g_x J \Delta \xi \Delta \eta \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_e v_e - \dot{M}_w v_w + \dot{M}_n v_n - \dot{M}_s v_s = \\ \left[\Lambda_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]_e - \left[\Lambda_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \Lambda_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]_w + \left[\Lambda_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]_n - \left[\Lambda_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \Lambda_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]_s \\ - L[\hat{p}^y] \Delta \xi \Delta \eta + g_y J \Delta \xi \Delta \eta \end{aligned} \quad (3.13b)$$

onde os fluxos de massa nas faces do elemento de volume de controle são dados por:

$$\dot{M}_e = (\rho \tilde{u})_e \Delta \eta \quad (3.14a)$$

$$\dot{M}_w = (\rho \tilde{u})_w \Delta \eta \quad (3.14b)$$

$$\dot{M}_n = (\rho \tilde{v})_n \Delta \xi \quad (3.14c)$$

$$\dot{M}_s = (\rho \tilde{v})_s \Delta \xi \quad (3.14d)$$

a integração dos termos de pressão nas equações de Navier-Stokes é dada por:

$$L[\hat{p}^x] = \frac{(p_E f_{11E} - p_W f_{11W})}{2\Delta \xi} + \frac{(p_N f_{21N} - p_S f_{21S})}{2\Delta \eta} \quad (3.15a)$$

$$L[\hat{p}^y] = \frac{(p_E f_{12E} - p_W f_{12W})}{2\Delta \xi} + \frac{(p_N f_{22N} - p_S f_{22S})}{2\Delta \eta} \quad (3.15b)$$

e os coeficientes são dados por:

$$\Lambda_{11} = \frac{\mu q_{11}}{J} \Delta \eta \quad (3.16a)$$

$$\Lambda_{12} = \frac{\mu q_{12}}{J} \Delta \eta$$

$$\Lambda_{21} = \frac{\mu q_{21}}{J} \Delta \xi \quad (3.16b)$$

$$\Lambda_{22} = \frac{\mu q_{22}}{J} \Delta \xi$$

Após todo este tratamento matemático apresentado, as equações agora estão escritas na forma final necessária para a aplicação dos esquemas de discretização numérica utilizados no método dos volumes finitos e assim posterior implementação computacional.

3.7 Tratamento numérico das equações governantes

A integração das equações no volume de controle elementar resulta na formulação final alguns termos que envolvem valores das variáveis dependentes localizados nas interfaces dos volumes, como por exemplo u_e , u_w , que são pontos não coincidentes com os nós principais da malha. Por isso, então, é necessário a representação destas variáveis por meio de uma curva interpolante em função de valores localizados nos nós da malha. Vários esquemas de discretização foram utilizados para este fim, e comparados os resultados obtidos entre si quanto ao comportamento numérico. Para os testes realizados neste trabalho, foram utilizados os esquemas Central, Exponencial, LOADS, QUICK e UNIFAES.

Aqui serão apresentados os tratamentos numéricos para os esquemas Central e UNIFAES, já que para os esquemas restantes o procedimento é semelhante, com modificações somente nas funções de interpolação das variáveis e suas derivadas. Um resumo das funções de interpolação para todos os esquemas utilizados está apresentado em anexo.

3.7.1 Discretização utilizando o esquema Central

Após a integração das equações governantes no volume de controle elementar no plano transformado bidimensional e a adequada substituição das funções de interpolação para o esquema Central que estão descritas em anexo, as equações governantes ficam na forma apresentada a seguir. Substituindo as expressões escritas para ϕ_e, ϕ_w , etc e fazendo-se as respectivas correspondências para u_e, u_w , etc relativas ao esquema Central que estão apresentadas no Anexo A, nas equações 3.11 a 3.13 podemos encontrar as expressões finais das equações governantes na forma de equações discretas relacionando os valores das variáveis dependentes no nós principais da malha.

Equação de transporte convectivo-difusivo

$$\begin{aligned}
 & \phi_P \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\dot{M}_w}{2} - \frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\dot{M}_s}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) = \\
 & \phi_E \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
 & \phi_W \left(+\frac{\dot{M}_w}{2} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
 & \phi_N \left(-\frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} \right) + \\
 & \phi_S \left(+\frac{\dot{M}_s}{2} - \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) + \\
 & \phi_{NE} \left(\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + \phi_{NW} \left(-\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + \phi_{SE} \left(-\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \phi_{SW} \left(\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Equação da continuidade

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \tag{3.18}$$

Equação de Navier-Stokes para componente u

$$\begin{aligned}
& u_P \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\dot{M}_w}{2} - \frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\dot{M}_s}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) = \\
& u_E \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& u_W \left(+\frac{\dot{M}_w}{2} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& u_N \left(-\frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} \right) + \\
& u_S \left(+\frac{\dot{M}_s}{2} - \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) + \\
& u_{NE} \left(\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + u_{NW} \left(-\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + u_{SE} \left(-\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + u_{SW} \left(\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& L[\hat{p}^u] + g_x J_P \Delta\xi \Delta\eta
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Equação de Navier-Stokes para componente v

$$\begin{aligned}
& v_P \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\dot{M}_w}{2} - \frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\dot{M}_s}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) = \\
& v_E \left(-\frac{\dot{M}_e}{2} + \frac{\Lambda_{11e}}{\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& v_W \left(+\frac{\dot{M}_w}{2} + \frac{\Lambda_{11w}}{\Delta\xi} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& v_N \left(-\frac{\dot{M}_n}{2} + \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22n}}{\Delta\eta} \right) + \\
& v_S \left(+\frac{\dot{M}_s}{2} - \frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{22s}}{\Delta\eta} \right) + \\
& v_{NE} \left(\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + v_{NW} \left(-\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21n}}{4\Delta\xi} \right) + v_{SE} \left(-\frac{\Lambda_{12e}}{4\Delta\eta} - \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + v_{SW} \left(\frac{\Lambda_{12w}}{4\Delta\eta} + \frac{\Lambda_{21s}}{4\Delta\xi} \right) + \\
& L[\hat{p}^v] + g_y J_P \Delta\xi \Delta\eta
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Simplificando as expressões apresentadas e organizando-as em uma forma matricial, tem-se as equações discretizadas para as variáveis na forma final para implementação computacional:

$$\tilde{A}_P \phi_P = \tilde{A}_e \phi_E + \tilde{A}_w \phi_W + \tilde{A}_n \phi_N + \tilde{A}_s \phi_S + \tilde{A}_{ne} \phi_{NE} + \tilde{A}_{nw} \phi_{NW} + \tilde{A}_{se} \phi_{SE} + \tilde{A}_{sw} \phi_{SW} \quad (3.21)$$

$$\tilde{A}_P u_P = \tilde{A}_e u_E + \tilde{A}_w u_W + \tilde{A}_n u_N + \tilde{A}_s u_S + \tilde{A}_{ne} u_{NE} + \tilde{A}_{nw} u_{NW} + \tilde{A}_{se} u_{SE} + \tilde{A}_{sw} u_{SW} + \tilde{S}_u \quad (3.22)$$

$$\tilde{A}_P v_P = \tilde{A}_e v_E + \tilde{A}_w v_W + \tilde{A}_n v_N + \tilde{A}_s v_S + \tilde{A}_{ne} v_{NE} + \tilde{A}_{nw} v_{NW} + \tilde{A}_{se} v_{SE} + \tilde{A}_{sw} v_{SW} + \tilde{S}_v \quad (3.23)$$

onde os coeficientes \tilde{A} 's são todos os termos que acompanham as variáveis dependentes, e os termos \tilde{S} 's são os restantes dos termos das equações, incluindo termos fonte e termos de pressão, dependendo da equação analisada.

3.7.2 Discretização utilizando o esquema UNIFAES

Como já foram encontradas as expressões para a interpolação das velocidades e propriedades transportadas seguindo o esquema UNIFAES para coordenadas generalizadas, basta agora a substituição nas expressões das equações governantes discretizadas analogamente ao que foi feito quando tratado o esquema Central.

Substituindo as expressões (2.26) e (2.27) que interpolam valores das variáveis e suas derivadas nas interfaces dos volumes de controle nas expressões (3.11) a (3.13), tem-se que as equações resultantes ficam na forma final:

Equação de transporte convectivo-difusivo

$$\begin{aligned}
& \phi_E \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \frac{\Gamma_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{e\xi})}{J_e} - \frac{\Gamma_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} + \frac{\Gamma_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& \phi_W \left(-\rho \tilde{u}_w \Delta \eta (1 + \alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \frac{\Gamma_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{w\xi})}{J_w} + \frac{\Gamma_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} - \frac{\Gamma_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& \phi_N \left(\rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\Gamma_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\Gamma_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\Gamma_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{n\eta})}{J_n} \right) + \\
& \phi_S \left(-\rho \tilde{v}_s \Delta \xi (1 + \alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) + \frac{\Gamma_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\Gamma_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\Gamma_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& \phi_P \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (1 + \alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (1 + \alpha_{n\eta}) + \right. \\
& \left. \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\Gamma_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{e\xi})}{J_e} + \right. \\
& \left. \frac{\Gamma_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{w\xi})}{J_w} - \frac{\Gamma_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{n\eta})}{J_n} + \frac{\Gamma_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& \phi_{NE} \left(-\frac{\Gamma_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\Gamma_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& \phi_{SE} \left(\frac{\Gamma_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\Gamma_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& \phi_{NW} \left(\frac{\Gamma_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\Gamma_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& \phi_{SW} \left(-\frac{\Gamma_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\Gamma_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) = 0
\end{aligned}$$

(3.24)

Equação de Navier-Stokes para componente u

$$\begin{aligned}
& u_E \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{e\xi})}{J_e} - \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} + \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& u_W \left(-\rho \tilde{u}_w \Delta \eta (1 + \alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \frac{\mu_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{w\xi})}{J_w} + \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} - \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& u_N \left(\rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\mu_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{n\eta})}{J_n} \right) + \\
& u_S \left(-\rho \tilde{v}_s \Delta \xi (1 + \alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) + \frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\mu_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& u_P \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (1 + \alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (1 + \alpha_{n\eta}) + \right. \\
& \left. \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{e\xi})}{J_e} + \right. \\
& \left. \frac{\mu_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{w\xi})}{J_w} - \frac{\mu_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{n\eta})}{J_n} + \frac{\mu_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& u_{NE} \left(-\frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& u_{SE} \left(\frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& u_{NW} \left(\frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& u_{SW} \left(-\frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& p_E \left(-\frac{f_{11e} \Delta \eta}{2} \right) + p_W \left(\frac{f_{11w} \Delta \eta}{2} \right) + p_N \left(-\frac{f_{21n} \Delta \xi}{2} \right) + p_S \left(\frac{f_{21s} \Delta \xi}{2} \right) + p_P \left(-\frac{f_{11e} \Delta \eta}{2} + \frac{f_{11w} \Delta \eta}{2} - \frac{f_{21n} \Delta \xi}{2} + \frac{f_{21s} \Delta \xi}{2} \right) - g_x J_p \Delta \xi \Delta \eta + \Theta = 0
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Equação de Navier-Stokes para componente v

$$\begin{aligned}
& v_E \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{e\xi})}{J_e} - \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} + \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& v_W \left(-\rho \tilde{u}_w \Delta \eta (1 + \alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \frac{\mu_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{w\xi})}{J_w} + \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} - \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& v_N \left(\rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\mu_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{n\eta})}{J_n} \right) + \\
& v_S \left(-\rho \tilde{v}_s \Delta \xi (1 + \alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) + \frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\mu_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& v_P \left(\rho \tilde{u}_e \Delta \eta (1 + \alpha_{e\xi}) + \rho \tilde{u}_e \Delta \eta (-\alpha_{e\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (-\alpha_{w\xi}) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta (\alpha_{w\xi}) \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) + \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (1 + \alpha_{n\eta}) + \right. \\
& \left. \rho \tilde{v}_n \Delta \xi (-\alpha_{n\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (-\alpha_{s\eta}) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi (\alpha_{s\eta}) \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) - \frac{\mu_e q_{11e} \Delta \eta Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) (-\alpha_{e\xi})}{J_e} \right) + \\
& \left. \frac{\mu_w q_{11w} \Delta \eta Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) (\alpha_{w\xi})}{J_w} - \frac{\mu_n q_{22n} \Delta \xi Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) (-\alpha_{n\eta})}{J_n} + \frac{\mu_s q_{22s} \Delta \xi Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) (\alpha_{s\eta})}{J_s} \right) + \\
& v_{NE} \left(-\frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} - \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& v_{SE} \left(\frac{\mu_e q_{12e} \Delta \eta}{4J_e \Delta \eta} + \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& v_{NW} \left(\frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} + \frac{\mu_n q_{21n} \Delta \xi}{4J_n \Delta \xi} \right) + \\
& v_{SW} \left(-\frac{\mu_w q_{12w} \Delta \eta}{4J_w \Delta \eta} - \frac{\mu_s q_{21s} \Delta \xi}{4J_s \Delta \xi} \right) + \\
& p_E \left(-\frac{f_{12e} \Delta \eta}{2} \right) + p_W \left(\frac{f_{12w} \Delta \eta}{2} \right) + p_N \left(-\frac{f_{22n} \Delta \xi}{2} \right) + p_S \left(\frac{f_{22s} \Delta \xi}{2} \right) + p_P \left(-\frac{f_{12e} \Delta \eta}{2} + \frac{f_{12w} \Delta \eta}{2} - \frac{f_{22n} \Delta \xi}{2} + \frac{f_{22s} \Delta \xi}{2} \right) - g_y J_p \Delta \xi \Delta \eta + \Theta = 0
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\Theta = & \rho \tilde{u}_e \Delta \eta \left(\beta_{e\xi} + \frac{C_2^e \Delta \xi}{2} - \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) \beta_{e\xi} \right) - \rho \tilde{u}_w \Delta \eta \left(\beta_{w\xi} + \frac{C_2^w \Delta \xi}{2} - \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) \beta_{w\xi} \right) + \\
& \rho \tilde{v}_n \Delta \xi \left(\beta_{n\eta} + \frac{C_2^n \Delta \eta}{2} - \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) \beta_{n\eta} \right) - \rho \tilde{v}_s \Delta \xi \left(\beta_{s\eta} + \frac{C_2^s \Delta \eta}{2} - \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) \beta_{s\eta} \right) - \\
& \frac{\mu_e q_{11e} \Delta \eta}{J_e} \left(C_2^e - Pe_{e\xi} \exp\left(\frac{Pe_{e\xi} \Delta \xi}{2}\right) \beta_{e\xi} \right) + \frac{\mu_w q_{11w} \Delta \eta}{J_w} \left(C_2^w - Pe_{w\xi} \exp\left(\frac{Pe_{w\xi} \Delta \xi}{2}\right) \beta_{w\xi} \right) - \\
& \frac{\mu_n q_{22n} \Delta \xi}{J_n} \left(C_2^n - Pe_{n\eta} \exp\left(\frac{Pe_{n\eta} \Delta \eta}{2}\right) \beta_{n\eta} \right) + \frac{\mu_s q_{22s} \Delta \xi}{J_s} \left(C_2^s - Pe_{s\eta} \exp\left(\frac{Pe_{s\eta} \Delta \eta}{2}\right) \beta_{s\eta} \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Simplificando as expressões finais e organizando em uma forma matricial, tem-se as equações discretizadas para as variáveis na forma:

$$A_P \phi_P = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_{ne} \phi_{NE} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{se} \phi_{SE} + A_{sw} \phi_{SW} \tag{3.28}$$

$$A_P u_P = A_e u_E + A_w u_W + A_n u_N + A_s u_S + A_{ne} u_{NE} + A_{nw} u_{NW} + A_{se} u_{SE} + A_{sw} u_{SW} + J_u \tag{3.29}$$

$$A_P v_P = A_e v_E + A_w v_W + A_n v_N + A_s v_S + A_{ne} v_{NE} + A_{nw} v_{NW} + A_{se} v_{SE} + A_{sw} v_{SW} + J_v \tag{3.30}$$

onde os coeficientes A 's são todos os termos que acompanham as variáveis dependentes, e os termos J 's são os restantes dos termos das equações, incluindo termos fonte e termos de pressão.

3.8 Condições de contorno para velocidades e propriedades transportadas

As condições de contorno que são aplicadas nas fronteiras do domínio podem ser classificadas em duas formas: condições de valor descrito e condições de fluxo descrito. Nos testes realizados utilizando as equações de transporte convectivo-difusivo tanto em coordenadas retangulares como em coordenadas generalizadas, todas as condições de contorno foram de valor descrito nas fronteiras, porque em todos os casos são conhecidas as soluções exatas no domínio, e

para os casos de escoamentos governados pelas equações de Navier-Stokes foram utilizadas as condições de velocidade de valores descritos nas fronteiras do domínio. Quanto as condições de contorno para pressão para solução do campo de escoamento, estas serão detalhadas adiante.

3.9 Esquema de interpolação de Rhie e Chow

Um dos problemas que surgem quando é utilizada uma malha colocalizada na solução das equações de Navier-Stokes, é o aparecimento de um campo de pressão alternado, indicando um campo não realista. A causa deste problema está representação da derivada de pressão no nó P que envolve pontos alternados da malha, como esquematizado na figura 3.6.

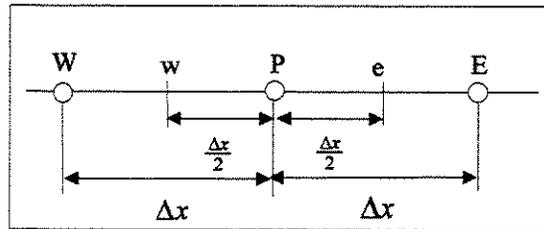


Figura 3.6: Disposição dos nós para termos de pressão

A representação da derivada de pressão no ponto P, é dada por:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{P_e - P_w}{\Delta x} \quad (3.31)$$

mas:

$$P_e = \frac{P_P + P_E}{2} \quad (3.32)$$

$$P_w = \frac{P_W + P_P}{2} \quad (3.33)$$

Substituindo as expressões (3.32) e (3.33) em (3.31), tem-se a expressão final para representar a derivada de pressão no ponto P.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x} \quad (3.34)$$

que como pode-se notar, a expressão relaciona dois pontos alternados na malha, E e W.

O problema do campo alternado de pressão não ocorre nos casos de malhas deslocadas tipo MAC, que foram desenvolvidas primeiramente, mas quando utilizadas as malhas colocalizadas ou malhas tipo Kuznetsov.

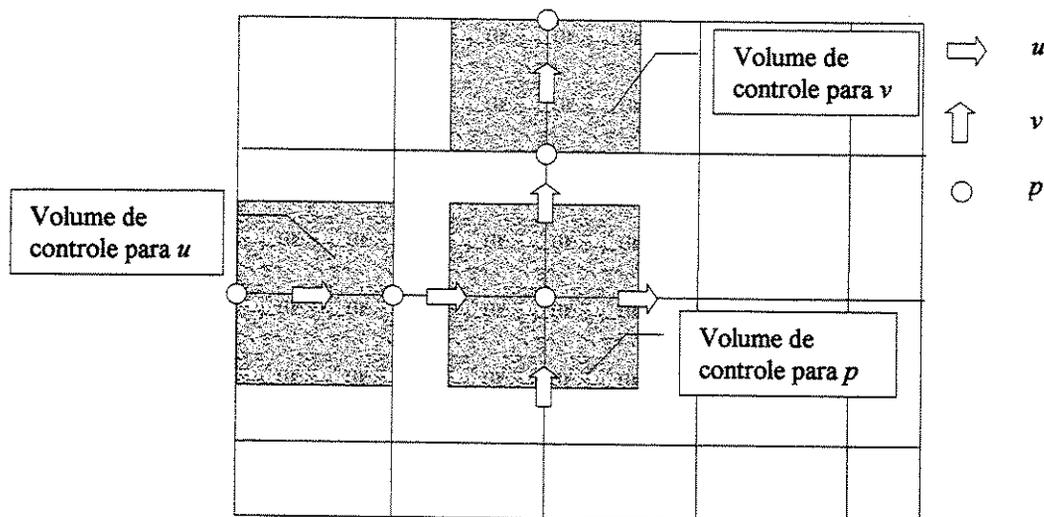


Figura 3.7: Configuração da malha deslocada

Nesta configuração, as expressões resultantes para os termos de pressão nas equações discretizadas para u e v , envolverão valores da pressão em nós vizinhos, eliminando assim o problema do campo alternado.

Situação semelhante também é encontrada quando discretizada a equação da continuidade, onde equação discretizada também envolve pontos alternados se usada a malha colocalizada. Por estas razões, para o uso da malha colocalizada, se faz necessário um tratamento diferenciado para interpolação das velocidades na equação da continuidade discretizada.

Uma alternativa para o tratamento da interpolação das componentes da velocidade nas faces dos volumes de controle com o objetivo de controlar o campo alternado de pressão foi apresentada por Rhie e Chow (1983). Este esquema de interpolação denominado de Método da Interpolação do Momento, é baseado na condição de que, na equação da continuidade discretizada, as velocidades nas interfaces dos volumes de controle são interpoladas por uma expressão proveniente da própria equação do momento, resultando assim em expressões onde as pressões relacionadas são localizadas em pontos adjacentes. A aplicação detalhada deste método em coordenadas generalizadas será apresentada neste capítulo.

Como o algoritmo de acoplamento entre velocidade-pressão escolhido foi o SIMPLE, e aqui será descrito todo o detalhamento do método de Rhie e Chow para este algoritmo, mas podendo ser estendido para outros algoritmos como o SIMPLER, SIMPLEC, SIMPLEM, SIMPLES, como descritos por Acharya e Moukalled (1989), Kobayashi e Pereira (1991), Cho e Chung (1994), entre outros.

A interpolação em coordenadas cartesianas pelo método de Rhie e Chow pode ser escrita para as velocidades u e v , seguindo o esquema de um volume de controle típico na forma.

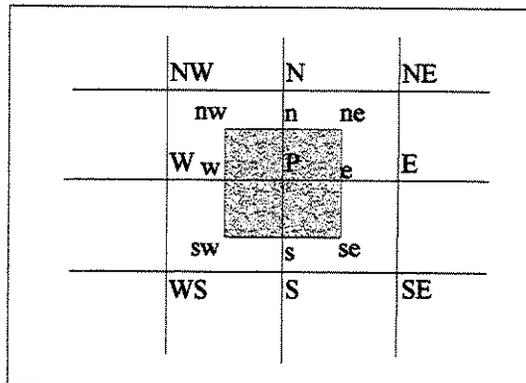


Figura 3.8: Volume de controle típico para o método de Rhie e Chow

Como demonstrado por Acharya e Moukalled (1989) e Choi *et al* (1993) entre outros, as equações do momento para as componentes u e v , equações (3.29) e (3.30), podem ser escritas para o nó P, considerando os termos de pressão como nas equações (3.15a) e (3.15b), como sendo:

Equação para u :

$$u_p = \frac{\sum_{nb} A_{nb}^u u_{nb} + G^u}{A_p^u} - D_u^1 \frac{\partial p}{\partial \xi} - D_u^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.35)$$

Considerando que os termos fontes S nas equações 3.29 e 3.30 sejam formados por um conjunto de termos fontes como:

$$S = G + P$$

P são os termos de pressão

G são os termos de campo gravitacional e termos fonte

$\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ pela própria construção da malha transformada

então escrevemos:

$$u_p = (H_u)_p + (D_u^1)_p (p_w - p_e) + (D_u^2)_p (p_s - p_n)$$

Equação para v :

$$v_p = \frac{\sum_{nb} A_{nb}^v v_{nb} + G^v}{A_p^v} - D_v^1 \frac{\partial p}{\partial \xi} - D_v^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.36)$$

$$v_p = (H_v)_p + (D_v^1)_p (p_w - p_e) + (D_v^2)_p (p_s - p_n) \quad (3.37)$$

onde:

$$H_u = \frac{\sum_{nb} A_{nb}^u u_{nb} + G_u}{A_p^u} \quad H_v = \frac{\sum_{nb} A_{nb}^v v_{nb} + G_v}{A_p^v} \quad (3.38)$$

$$D_u^1 = \frac{f_{11}}{A_p^u} \quad D_u^2 = \frac{f_{21}}{A_p^u}$$

$$D_v^1 = \frac{f_{12}}{A_p^v} \quad D_v^2 = \frac{f_{22}}{A_p^v} \quad (3.39)$$

As expressões apresentadas para as componentes u e v foram desenvolvidas considerando o esquema UNIFAES. Portanto para os demais esquemas, devemos fazer as devidas substituições dos coeficientes e termos fonte, e assim por diante. Ainda em relação a figura 3.8, o mesmo procedimento pode ser utilizado para a obtenção de expressões para as componentes das velocidades localizadas nas interfaces dos volumes de controle. Então tem-se que:

para as componentes u :

$$\begin{aligned}
 u_e &= (H_u)_e + (D_u^1)_e(p_P - p_E) + (D_u^2)_e(p_{se} - p_{ne}) \\
 u_w &= (H_u)_w + (D_u^1)_w(p_W - p_P) + (D_u^2)_w(p_{sw} - p_{nw}) \\
 u_n &= (H_u)_n + (D_u^1)_n(p_{wn} - p_{en}) + (D_u^2)_n(p_P - p_N) \\
 u_s &= (H_u)_s + (D_u^1)_s(p_{ws} - p_{es}) + (D_u^2)_s(p_S - p_P)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

para as componentes v :

$$\begin{aligned}
 v_e &= (H_v)_e + (D_v^1)_e(p_P - p_E) + (D_v^2)_e(p_{se} - p_{ne}) \\
 v_w &= (H_v)_w + (D_v^1)_w(p_W - p_P) + (D_v^2)_w(p_{sw} - p_{nw}) \\
 v_n &= (H_v)_n + (D_v^1)_n(p_{wn} - p_{en}) + (D_v^2)_n(p_P - p_N) \\
 v_s &= (H_v)_s + (D_v^1)_s(p_{ws} - p_{es}) + (D_v^2)_s(p_S - p_P)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Para coordenadas generalizadas, as equações para as componentes das velocidades que podem ser obtidas de forma semelhante da forma às apresentadas por Choi *et al* (1993):

para as componentes \tilde{u} :

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_e &= (H_{\tilde{u}})_e + (D_{\tilde{u}}^1)_e(p_P - p_E) + (D_{\tilde{u}}^2)_e(p_{se} - p_{ne}) \\
 \tilde{u}_w &= (H_{\tilde{u}})_w + (D_{\tilde{u}}^1)_w(p_W - p_P) + (D_{\tilde{u}}^2)_w(p_{sw} - p_{nw}) \\
 \tilde{u}_n &= (H_{\tilde{u}})_n + (D_{\tilde{u}}^1)_n(p_{wn} - p_{en}) + (D_{\tilde{u}}^2)_n(p_P - p_N) \\
 \tilde{u}_s &= (H_{\tilde{u}})_s + (D_{\tilde{u}}^1)_s(p_{ws} - p_{es}) + (D_{\tilde{u}}^2)_s(p_S - p_P)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

para as componentes \tilde{v} :

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_e &= (H_{\tilde{v}})_e + (D_{\tilde{v}}^1)_e (p_P - p_E) + (D_{\tilde{v}}^2)_e (p_{se} - p_{ne}) \\
\tilde{v}_w &= (H_{\tilde{v}})_w + (D_{\tilde{v}}^1)_w (p_W - p_P) + (D_{\tilde{v}}^2)_w (p_{sw} - p_{nw}) \\
\tilde{v}_n &= (H_{\tilde{v}})_n + (D_{\tilde{v}}^1)_n (p_{wn} - p_{en}) + (D_{\tilde{v}}^2)_n (p_P - p_N) \\
\tilde{v}_s &= (H_{\tilde{v}})_s + (D_{\tilde{v}}^1)_s (p_{ws} - p_{es}) + (D_{\tilde{v}}^2)_s (p_S - p_P)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{u}} &= (f_{11}H_u + f_{12}H_v) \\
H_{\tilde{v}} &= (f_{21}H_u + f_{22}H_v)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{u}}^1 &= (f_{11}D_u^1 + f_{12}D_v^1) \\
D_{\tilde{u}}^2 &= (f_{11}D_u^2 + f_{12}D_v^2) \\
D_{\tilde{v}}^1 &= (f_{21}D_u^1 + f_{22}D_v^1) \\
D_{\tilde{v}}^2 &= (f_{21}D_u^2 + f_{22}D_v^2)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Nas expressões para o cálculo das velocidades nas interfaces dos volumes de controle, os termos de pressão localizados fora dos nós principais da malha, são aproximados utilizando uma interpolação bi-linear como sugerido por Peric (1990).

$$\begin{aligned}
p_{ne} &= 0.25(p_P + p_E + p_{NE} + p_N) & p_{se} &= 0.25(p_P + p_S + p_{SE} + p_E) \\
p_{nw} &= 0.25(p_P + p_N + p_{NW} + p_W) & p_{sw} &= 0.25(p_P + p_W + p_{SW} + p_S)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

O que foi apresentado até agora em relação às interpolações das componentes da velocidade nos dá condições de prosseguir com a implementação numérica para solução das equações em coordenadas generalizadas. O objetivo da utilização desta interpolação apresentada por Rhie e Chow é evitar o campo alternado de pressão e velocidades, que é o que aconteceria normalmente quando

são utilizadas malhas colocadas para solução das equações de Navier-Stokes caso seja utilizada uma interpolação linear para as componentes da velocidade e pressão.

A seguir serão descritos os procedimentos para o tratamento da equação da continuidade e o acoplamento velocidade-pressão, para a conclusão do método dos volumes finitos em coordenadas generalizadas utilizando o esquema de interpolação UNIFAES.

3.10 Discretização da equação da continuidade

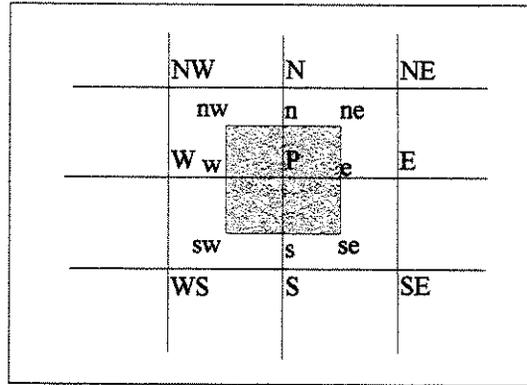


Figura 3.9: Volumes de controle para equação da continuidade

A equação da continuidade escrita em coordenadas generalizadas quando integrada no volume de controle elementar fica como:

$$(\rho \tilde{u} \Delta \eta)_e - (\rho \tilde{u} \Delta \eta)_w + (\rho \tilde{v} \Delta \xi)_n - (\rho \tilde{v} \Delta \xi)_s = 0 \quad (3.47)$$

As expressões encontradas para interpolação das velocidades pelo método de Rhie e Chow, equações (3.42) e (3.43), serão utilizadas na equação da continuidade, com isto será encontrada uma equação envolvendo os termos de correção de pressão no campo de escoamento, que será a equação utilizada para determinar a distribuição da pressão. Sendo esta equação solucionada, estaremos implicitamente satisfazendo também a equação da continuidade e assim fechando o sistema de equações formado pelas equações de Navier-Stokes e da continuidade. Os detalhes deste acoplamento serão descrito no item seguinte.

3.11 Algoritmo de acoplamento velocidade-pressão – SIMPLE

Várias são as formas de tratamento para o acoplamento entre velocidade e pressão para as equações de Navier-Stokes, sendo que para este fim os algoritmos mais utilizados são os da linha SIMPLE. Como mencionado anteriormente, há hoje várias formulações derivadas da formulação original do SIMPLE apresentada por Patankar (1980). Para os testes realizados com as equações de Navier-Stokes, foi utilizado o algoritmo SIMPLE original, por razões já discutidas anteriormente.

A filosofia do acoplamento entre velocidade e pressão, consiste na transformação da equação da continuidade integrada no volume de controle em uma equação resultante para pressão. Assim a continuidade e a pressão estarão sendo satisfeitas quando o campo de velocidades também estiver sendo satisfeito.

As expressões encontradas para as componentes de velocidade \tilde{u} e \tilde{v} nas interfaces dos volumes de controle, são substituídas na equação da continuidade resultando uma equação para correção da pressão, que será esclarecida a seguir.

No processo iterativo de solução, é proposto que a solução final do sistema seja obtida a partir de uma estimativa inicial para os campos de velocidade e pressão. Esta estimativa em coordenadas retangulares é escrita matematicamente como:

$$u = u^* + u' \quad (3.48)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.49)$$

$$p = p^* + p' \quad (3.50)$$

onde :

* significa o campo estimado

' significa a correção a ser feita para encontrar o campo correto

Tomando as equações escritas para as componentes de velocidade (3.35) e (3.36), isolando o termo que referencia o nó P do volume de controle e considerando que estes sejam os valores estimados, temos que:

$$u_p^* = \frac{\sum_{nb} (A_{nb}^u u_{nb}^*) + G^u}{A_p^u} - \left(D_u^1 \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + D_u^2 \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right)_p \quad (3.51)$$

$$v_p^* = \frac{\sum_{nb} (A_{nb}^v v_{nb}^*) + G^v}{A_p^v} - \left(D_v^1 \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + D_v^2 \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right)_p \quad (3.52)$$

E de forma semelhante considerando agora os valores como corretos, temos que:

$$u_p = \frac{\sum_{nb} (A_{nb}^u u_{nb}) + G^u}{A_p^u} - \left(D_u^1 \frac{\partial p}{\partial \xi} + D_u^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_p \quad (3.53)$$

$$v_p = \frac{\sum_{nb} (A_{nb}^v v_{nb}) + G^v}{A_p^v} - \left(D_v^1 \frac{\partial p}{\partial \xi} + D_v^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_p \quad (3.54)$$

Subtraindo a expressão (3.51) de (3.53) e a expressão (3.52) de (3.54) e arbitrariamente² desprezando os termos $\sum_{nb} A_{nb}^u (u_n - u_n^*)$ e os termos $\sum_{nb} A_{nb}^v (v_n - v_n^*)$, temos as expressões para a correção das velocidades:

$$u_p = u_p^* - \left(D_u^1 \frac{\partial p'}{\partial \xi} + D_u^2 \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \quad (3.55)$$

$$v_p = v_p^* - \left(D_v^1 \frac{\partial p'}{\partial \xi} + D_v^2 \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \quad (3.56)$$

Como os testes para as equações de Navier-Stokes foram realizados utilizando a formulação para coordenadas generalizadas, será aqui detalhado apenas o desenvolvimento para este caso. Para coordenadas retangulares, maiores detalhes podem ser encontrados em Patankar (1980).

² Os termos são desprezados considerando que quando convergida a solução teremos $u - u^* = 0$ e $v - v^* = 0$.

As correspondentes correções para as velocidades transformadas podem ser encontradas substituindo as equações (3.55) e (3.56) em (3.7) obtendo :

$$\tilde{u} = \tilde{u}^* + X \frac{\partial p'}{\partial \xi} + Y \frac{\partial p'}{\partial \eta} \quad (3.57)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}^* + Z \frac{\partial p'}{\partial \eta} + W \frac{\partial p'}{\partial \xi} \quad (3.58)$$

onde:

$$X = \left(-D_u^1 \frac{\partial y}{\partial \eta} + D_v^1 \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad Y = \left(-D_u^2 \frac{\partial y}{\partial \eta} + D_v^2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)$$

$$Z = \left(-D_v^2 \frac{\partial x}{\partial \xi} + D_u^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad W = \left(-D_v^1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + D_u^1 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

Substituindo agora as expressões (3.57) e (3.58) na equação da continuidade (3.47), tem-se a equação para correção da pressão.

$$\rho \Delta \eta \left[\tilde{u}_e^* + X_e \frac{(p'_E - p'_P)}{\Delta \xi} + Y_e \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_e \right] - \rho \Delta \eta \left[\tilde{u}_w^* + X_w \frac{(p'_P - p'_W)}{\Delta \xi} + Y_w \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_w \right] +$$

$$\rho \Delta \xi \left[\tilde{v}_n^* + Z_n \frac{(p'_N - p'_P)}{\Delta \eta} + W_n \frac{\partial p'}{\partial \xi} \Big|_n \right] - \rho \Delta \xi \left[\tilde{v}_s^* + Z_s \frac{(p'_P - p'_S)}{\Delta \eta} + W_s \frac{\partial p'}{\partial \xi} \Big|_s \right] = 0 \quad (3.59)$$

onde:

$$X_e = \frac{X_P + X_E}{2} \quad X_w = \frac{X_W + X_P}{2}$$

$$Y_e = \frac{Y_P + Y_E}{2} \quad Y_w = \frac{Y_W + Y_P}{2}$$

$$Z_n = \frac{Z_P + Z_N}{2} \quad Z_s = \frac{Z_S + Z_P}{2}$$

$$W_n = \frac{W_P + W_N}{2} \quad W_s = \frac{W_S + W_P}{2}$$

e os termos de derivada da correção da pressão nas interfaces dos volumes de controle, são calculados segundo expressões análogas as apresentadas em anexo, como sugere Maliska (1995).

Arranjando os termos semelhantes em um único coeficiente comum, obtêm-se o sistema de equações para a correção da pressão.

$$\begin{aligned}
& p'_P \left(-\frac{\rho \Delta \eta}{\Delta \xi} I_e - \frac{\rho \Delta \eta}{\Delta \xi} I_w - \frac{\rho \Delta \xi}{\Delta \eta} III_n - \frac{\rho \Delta \xi}{\Delta \eta} III_s \right) = \\
& p'_E \left(-\frac{\rho \Delta \eta}{\Delta \xi} I_e \right) + p'_W \left(-\frac{\rho \Delta \eta}{\Delta \xi} I_w \right) + p'_N \left(-\frac{\rho \Delta \xi}{\Delta \eta} III_n \right) + p'_S \left(-\frac{\rho \Delta \xi}{\Delta \eta} III_s \right) + \\
& \rho \tilde{u}_w^* \Delta \eta - \rho \tilde{u}_e^* \Delta \eta + \rho \tilde{v}_s^* \Delta \xi - \rho \tilde{v}_n^* \Delta \xi + \\
& \rho \Delta \eta II_w \left. \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right|_w - \rho \Delta \eta II_e \left. \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right|_e + \rho \Delta \xi IV_s \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right|_s - \rho \Delta \xi IV_n \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right|_n
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Os quatro últimos termos da equação (3.60) são termos provenientes da não ortogonalidade da malha utilizada e tem-se várias formas de tratamento para estes termos. A primeira alternativa é simplesmente desconsiderá-los na formação da matriz de coeficientes para p' , a segunda alternativa é apresentada por Peric (1990) que expandindo as derivadas da correção da pressão são encontrados termos adicionais referentes aos nós P, E, W, N, S, além de novos termos referentes aos nós WW, EE, NN e SS, e que posteriormente são adicionados aos termos já existentes para a formação da matriz de coeficientes para p' , com isto o sistema resultante será um sistema com cinco diagonais não nulas e não mais um sistema tridiagonal como anteriormente formado, tornando o sistema mais implícito e necessitando de um algoritmo mais elaborado para solução. Cho e Chung (1994) explicando que se a malha for bastante deformada os termos de derivada da correção da pressão não são desprezíveis e também se for utilizado todos os termos implicitamente o sistema torna-se muito instável numericamente sendo necessário a utilização de parâmetros de relaxação muito baixos, discorda das duas alternativas propostas anteriormente e apresenta uma nova alternativa que consiste na decomposição dos termos onde parte deles serão considerados como implícitos e parte explícitos. Na formulação utilizada para os testes realizados neste trabalho todos os termos de derivada de correção de pressão foram considerados como termos explícitos.

Então finalmente do sistema de equações (3.60), tiramos como solução a correção da pressão para todos os nós da malha, e a correção das velocidades serão dadas pelas expressões (3.55) e (3.56).

3.12 Condições de contorno para equação da correção da pressão

Em relação a pressão pode-se ter dois tipos de condições de contorno.

Valor descrito: $p = p_{\text{especificado}}$

Derivada descrita: $\frac{\partial p}{\partial n} = f$

Como já foi apresentado anteriormente, o campo de pressão está sempre sendo corrigido por um valor p' , e esta correção vem da equação da continuidade que deve ser satisfeita para todo o domínio de cálculo. Para a solução do sistema de equações para p' devemos informar quais as condições de contorno, e estas podem ser levantadas das seguintes formas:

- Se temos o valor da pressão descrita na fronteira, então teremos conseqüentemente o valor da correção que deverá ser nula;
- Se temos velocidades descritas nas fronteiras, então podemos utilizar estas informações para escrever a equação da continuidade nos volumes de fronteira e assim conseguir um sistema para p' que possa ser resolvido, como foi utilizado neste trabalho.

Utilizando o segundo procedimento será encontrado um sistema de equações envolvendo as correções para pressão nos nós internos do domínio de cálculo, então os valores das correções nas fronteiras serão encontrados utilizando a seguinte aproximação:

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial n} \right|_{\text{fronteira}} = 0$$

Maliska (1995) comenta que a aproximação de derivada nula para a correção da pressão nas fronteiras é razoável quando tem-se velocidades descritas e quando o sistema de coordenadas é

ortogonal, caso contrário não é aconselhável a aproximação pois o gradiente de p' não pode ser determinado em função de dois nós somente. Esta observação é feita considerando a utilização de derivada nula como condição de contorno para a solução do sistema.

No presente trabalho as condições de contorno utilizadas foram as de velocidade descrita nas fronteiras, e a aproximação de derivada nula foi utilizada somente para avaliação da correção na fronteira, após a solução do sistema.

Analisando o sistema formado pelas equações da correção de pressão para todos os nós da malha, encontraríamos um sistema de matriz tridiagonal se fossem conhecidos os valores das correções nas fronteiras. Como isto nem sempre é possível de se ter em mãos, uma alternativa para solucionar este problema é satisfazer a equação da continuidade nas fronteiras onde são conhecidas as condições de contorno de velocidades, como sugerem Maliska (1995) e Doormaal e Raithby (1984). Com este procedimento, quando não são disponíveis condições de pressão descrita para os volumes de controle com faces coincidentes com as fronteiras do domínio, na equação da continuidade os termos relativos às respectivas faces, são consideradas as condições de contorno de velocidade descrita, o que simplifica a equação e elimina os termos de pressão nas fronteiras.

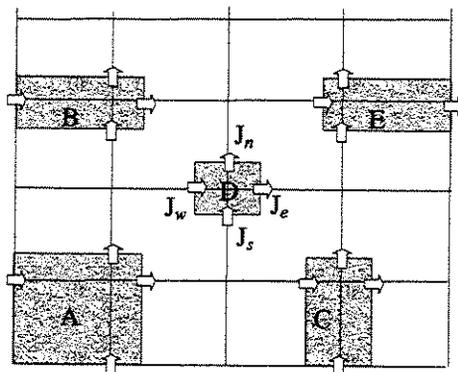


Figura 3.10: Malha exemplificando condição de contorno para pressão

A figura esquematizada mostra alguns volumes de controle coincidentes com as fronteiras do domínio, e como são tratadas as condições de contorno de velocidades disponíveis. No volume de controle “E” em destaque, a equação da continuidade fica, considerando que a face e seja coincidente com a fronteira do domínio:

$$\underbrace{(\rho\tilde{u}\Delta\eta)_e}_{\text{face coincidente}} - (\rho\tilde{u}\Delta\eta)_w + (\rho\tilde{v}\Delta\xi)_n - (\rho\tilde{v}\Delta\xi)_s = 0 \quad (3.61)$$

$$-(\rho\tilde{u}\Delta\eta)_w + (\rho\tilde{v}\Delta\xi)_n - (\rho\tilde{v}\Delta\xi)_s = -\underbrace{(\rho\tilde{u}\Delta\eta)_e}_{\text{valor conhecido}} \quad (3.62)$$

Agora substituindo as expressões para interpolação das velocidades pelo método de Rhie e Chow, a equação para este ponto fica:

$$\begin{aligned} & -\rho\Delta\eta \left[\tilde{u}_w^* + I_w \frac{(p'_P - p'_W)}{\Delta\xi} + II_w \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right] + \\ & \rho\Delta\xi \left[\tilde{v}_n^* + III_n \frac{(p'_N - p'_P)}{\Delta\eta} + IV_n \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right] - \rho\Delta\xi \left[\tilde{v}_s^* + III_s \frac{(p'_P - p'_S)}{\Delta\eta} + IV_s \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right] = -(\rho\tilde{u}\Delta\eta)_e \end{aligned} \quad (3.63)$$

Com a aplicação da condição de contorno de velocidade na equação da continuidade, nota-se que o termo relativo à face e é de valor conhecido, o que reduz a equação em apenas duas incógnitas para este ponto, com isto o sistema de equações se torna tridiagonal.

Os valores das pressões nas fronteiras são encontrados após a solução do sistema de equações para p' e subsequente correção para encontrar os valores corretos das pressões. Como a solução do sistema compreende apenas os pontos internos da malha, os valores nas fronteiras são aproximados pela condição de derivada nula utilizando uma das formulações seguintes:

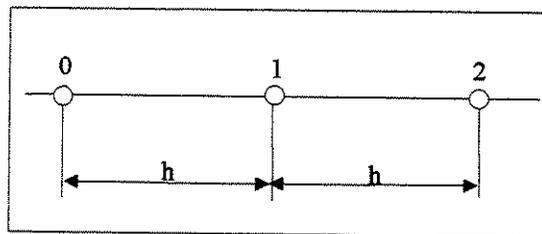


Figura 3.11: Malha para derivada nula

Para $\frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_0 = 0$ temos $p'_0 = p'_1$

Para $\frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_2 = 0$ temos $p'_2 = p'_1$

ou como sugerido por Kreyszig (1993):

$$\frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_0 = \frac{1}{2h}(-3p'_0 + 4p'_1 - p'_2) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_2 = \frac{1}{2h}(p'_0 - 4p'_1 + 3p'_2) \quad (3.65)$$

Em testes preliminares foram utilizadas as duas formulações para comparação dos resultados, e como constatado a segunda aproximação foi a que melhor representou o campo de pressão nas fronteiras.

Capítulo 4

Resultados obtidos para casos testes lineares

4.1 Apresentação

Como forma de avaliação do esquema de discretização UNIFAES através de sua comparação com outros esquemas mais largamente utilizados atualmente, foram realizados alguns testes clássicos já bastante empregados para este fim. Com os resultados obtidos foi possível a avaliação em relação a vários aspectos do comportamento numérico dos esquemas. Serão apresentados a seguir o comportamento numérico dos vários esquemas de discretização utilizados para solução da equação de transporte convectivo-difusivo, e de forma comparativa são apresentados os resultados dos erros cometidos comparados com as respectivas soluções exatas dos problemas, quando disponível, e um histórico da convergência das soluções numéricas. Para todos os testes, foi considerada como convergida a solução numérica encontrada, se atende ao seguinte critério segundo a norma L_∞ :

$$\|\varepsilon\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \leq 10^{-10} \quad (4.1)$$

onde:

$$\left[\frac{|\phi_i^k - \phi_i^{k-1}|}{|\phi_i^k|} \right] = \varepsilon_i$$

k é a iteração atual

$k-1$ é a iteração anterior

i é a identificação para cada nó da malha

ϕ é a propriedade transportada

No processo iterativo, a atualização dos resultados é calculada pela seguinte expressão:

$$\phi_i^k = \alpha_{relax} \phi_i^{k-1} + (1 - \alpha_{relax}) \phi_i^k$$

onde α_{relax} é o índice de relaxação

ϕ_i^k do lado direito da equação é o valor mais recente calculado

ϕ_i^k do lado esquerdo da equação é o valor considerado como o da iteração atual

Os erros apresentados nos gráficos seguintes foram calculados segundo a norma L_2 , que é definida da seguinte forma:

$$\|E\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n E_i^2 \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

onde n é o número de pontos da malha no domínio, e

$$E_i^2 = |\phi_{i,exato} - \phi_{i,numerico}|^2$$

Neste capítulo estão apresentados os resultados dos casos testes lineares realizados com vários esquemas entre eles o esquema UNIFAES. Foram realizados dois conjuntos de testes que ficaram divididos da seguinte forma: 1ª) Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas regularmente espaçadas que foi composto pelos problemas definidos pelos seguintes escoamentos: escoamento paralelo, escoamento rotacional de fluido como sólido e escoamento em canto, 2ª) Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas irregulares, que foi composto pelos problemas definidos pelos seguintes escoamentos: escoamento paralelo e escoamento rotacional de fluido como sólido.

4.2 Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas regulares:

Por generalidade os resultados dos testes bem como as várias soluções analíticas, são apresentadas na forma adimensional. Por outro lado o algoritmo computacional foi construído na forma dimensional. A tabela 4.1 registra os valores das propriedades empregadas, referentes ao ar a 27°C e 1 atm.

Propriedades do ar a 300K e pressão 1Atm:

Densidade ρ [kg/m ³]	Viscosidade cinemática ν [m ² /s]	Viscosidade dinâmica μ [Ns/m ²]	Condutibilidade térmica k [W/mK]	Capacidade térmica C_p [J/kgK]
1.1614	1.589×10^{-5}	184.6×10^{-7}	26.3×10^{-3}	1007.0

Tabela 4.1: Propriedades físicas do ar

Nos problemas tratados nos casos testes lineares, foram utilizadas duas classes de malhas numéricas. A primeira classe formada por malhas regularmente espaçadas em coordenadas generalizadas, e a segunda formada por malhas em coordenadas generalizadas com malhas irregulares.

Dentro da primeira classe de malhas, foram utilizadas para simulação computacional, um refinamento na malha variando de 10x10 a 120x120 volumes, e em alguns casos até que fosse conseguido obter um comportamento quadrático da queda do erro com o refinamento da malha.

Dentro da segunda classe de malhas, foram consideradas dois tipos distintos de construção de malha numérica. Tipo 1, que relaciona um ângulo β de deformação local do volume de controle caracterizando uma malha que dificilmente conseguiremos na prática, e o Tipo 2, caracterizando uma malha gerada automaticamente por métodos elípticos e que é mais comum na prática. Na malha Tipo 1, além das condições de refinamento já comentadas para as malhas da primeira classe, foi adicionada mais uma condição para a construção das malhas, que foi a variação do ângulo β entre 0 a 20°. Na malha Tipo 2 não foi considerado nenhuma condição adicional.

Como já foi dito anteriormente, vários esquemas de discretização foram utilizados para comparação dos resultados, a saber: Central, Exponencial simples, LOADS, UNIFAES, QUICK com a formulação original de Leonard (1979) identificado nos gráficos como QUICK[2], QUICK com a formulação apresentada por Hayase (1992) identificado nos gráficos como QUICK [3] e QUICK com formulação de Pollard que também foi tratada por Hayase (1992). A última formulação do esquema QUICK, revelou-se instável numericamente em alguns testes preliminares e por esta razão foi então eliminada dos testes realizados.

As condições de contorno necessárias para solução numérica são do tipo Dirichlet, dada em cada caso pela solução analítica obtida nas fronteiras do domínio. Para os esquemas QUICK e seus derivados, nas fronteiras do domínio onde apareceriam termos relacionados à nós que estariam fora do domínio de cálculo, foram utilizadas as formulações dos esquemas Central e Upwind como objetivo de que todos os nós envolvidos no sistema de equações estivessem contidos dentro do domínio. Dentre as duas alternativas utilizadas, não houve uma diferença qualitativa significativa entre elas, sendo então adotada apenas a formulação Central.

A seguir serão descritos detalhadamente cada caso teste realizado. São apresentados dados de geometria, campos de velocidade e as condições de contorno para a variável ϕ .

4.2.1 Transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo

Vários autores tem utilizado este tipo de escoamento para solução das equações de transporte convectivo-difusivo com o objetivo de avaliação do comportamento dos esquemas desenvolvidos. Figueiredo (1997) em estudo realizado com o esquema UNIFAES em coordenadas cartesianas utilizou as soluções analíticas que serão apresentadas a seguir, como referência e verificou que o comportamento do esquema proposto tem pouca influência com a orientação do escoamento além de boa acuidade. Utilizando o problema de transporte puramente convectivo de uma descontinuidade, Prakash (1984) realizou estudos com o esquema LOADS e verificou que o fenômeno de difusão numérica é bastante reduzido pelo fato de que os fluxos serem calculados na direção normal a linha da malha, Hassan *et al* (1983) em testes realizados com o esquema SU proposto por ele mesmo, verificou que os problemas de estabilidade foram minimizados, que o esquema SU é computacionalmente mais econômico e apresenta resultados para valores de Peclet abaixo de 5 onde o fenômeno da difusão numérica é pequeno, Leonard e Mokhtari (1990) também avaliam o esquema QUICK e verificam que para problemas de alta convectividade, Peclet celular próximo de 100, há uma considerável difusão numérica e então apresentam o esquema ULTRA-SHARP, são alguns dos trabalhos já realizados que demonstram o quanto testes envolvendo este tipo de escoamento é revelador e importante para avaliação do comportamento numérico de um esquema de discretização.

O problema tratado representa o transporte de uma propriedade escalar, por exemplo a temperatura, em um campo de escoamento paralelo. As linhas de corrente e domínio estão representados na figura 4.1 e as condições de contorno estão descritas a seguir.

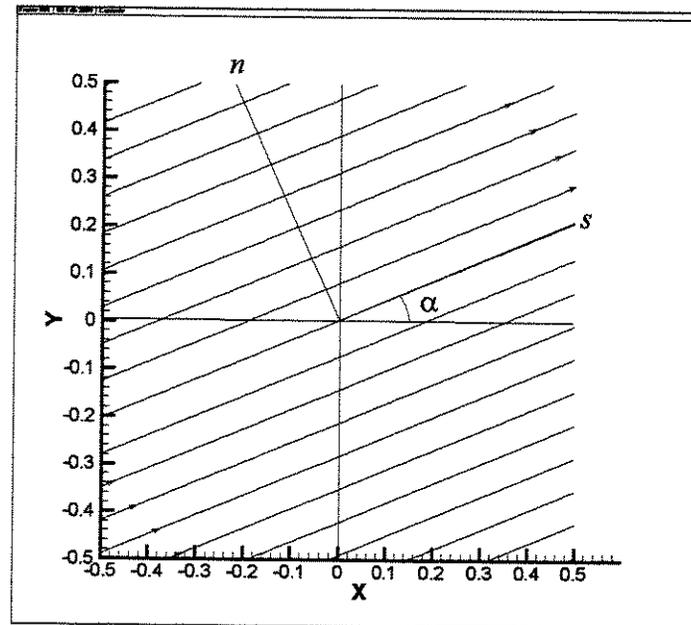


Figura 4.1 : Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento paralelo

O campo de velocidades para este problema é dado por :

$$u = V \cos(\alpha)$$

$$v = V \sin(\alpha)$$

onde:

V é o módulo da velocidade no campo

α é o ângulo formado entre as linhas de corrente e a coordenada x

Considerando uma dimensão característica L e a velocidade característica V , podemos encontrar a forma adimensional da equação 2.1 como sendo:

$$\frac{\partial(Pe\hat{u}\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(Pe\hat{v}\phi)}{\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

onde:

$$Pe = \frac{\rho V L C_p}{k}, \quad \hat{u} = \frac{u}{V}, \quad \hat{v} = \frac{v}{V}$$

Temos que as coordenadas cartesianas podem ser escritas em função do sistema de coordenadas (s, n) respectivamente paralela e normal à linha de corrente do escoamento, considerando as seguintes relações:

$$s = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)$$

$$n = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)$$

Então a equação 4.3 escrita em termos destas duas novas coordenadas fica como:

$$Pe \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 0 \quad (4.4)$$

Aplicando o método da separação de variáveis, é encontrada uma solução do tipo $\phi = \Omega(s)\Psi(n)$ apresentada por Figueiredo (1997):

$$\Omega = c_1 \exp\left(\frac{Pe + \sqrt{Pe^2 \pm 4\lambda^2}}{2}s\right) + c_2 \exp\left(\frac{Pe - \sqrt{Pe^2 \pm 4\lambda^2}}{2}s\right) \quad (4.5)$$

$$\Psi = c_3 \exp[\sqrt{-(\pm 1)\lambda}n] + c_4 \exp[-\sqrt{-(\pm 1)\lambda}n] \quad (4.6)$$

temos que para $\lambda = 0$

$$\Psi = c_5 + c_6 n \quad (4.7)$$

onde:

$$\lambda \in \Re$$

c_i são coeficientes

Das soluções encontradas, temos as seguintes combinações:

$$\phi_A(s, n) = \exp\left(\frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\lambda^2}}{2}s\right) \text{sen}(\lambda n) \quad (4.8)$$

$$\phi_B(s, n) = \exp\left(\frac{Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\lambda^2}}{2}s\right) \text{sen}(\lambda n) \quad (4.9)$$

$$\phi_C(s, n) = \exp\left(\frac{Pe - \sqrt{Pe^2 - 4\lambda^2}}{2}s\right) \exp(\lambda n) \quad (4.10)$$

$$\phi_D(s, n) = \exp\left(\frac{Pe + \sqrt{Pe^2 - 4\lambda^2}}{2}s\right) \exp(\lambda n) \quad (4.11)$$

$$\phi_{CD} = \exp\left(\frac{Pe}{2}s\right) \text{sen}\left(s\sqrt{\lambda^2 - \frac{Pe}{4}}\right) \exp(\lambda n) \quad (4.12)$$

$$\phi_{DC} = \exp\left(\frac{Pe}{2}s\right) \cos\left(s\sqrt{\lambda^2 - \frac{Pe}{4}}\right) \exp(\lambda n) \quad (4.13)$$

Testes anteriormente realizados foram feitos por Figueiredo (1997) comparando os resultados obtidos pelos esquemas Central, Exponencial, UNIFAES e LOADS para uma larga faixa de valores para λ em todos os tipos de soluções encontradas. Uma descrição detalhada da solução analítica para este problema pode ser encontrada em Figueiredo (1997).

Nas figuras a seguir estão apresentadas algumas das soluções exatas encontradas.

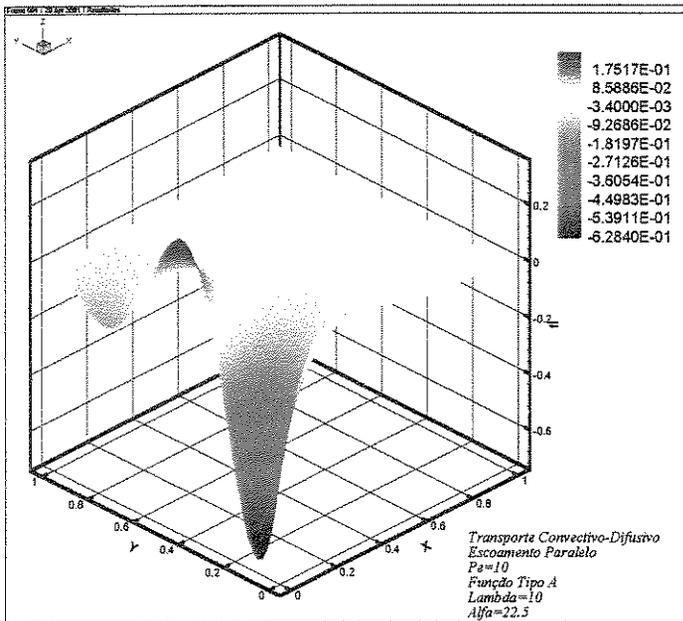


Figura 4.2: Solução analítica Tipo A
Escoamento paralelo

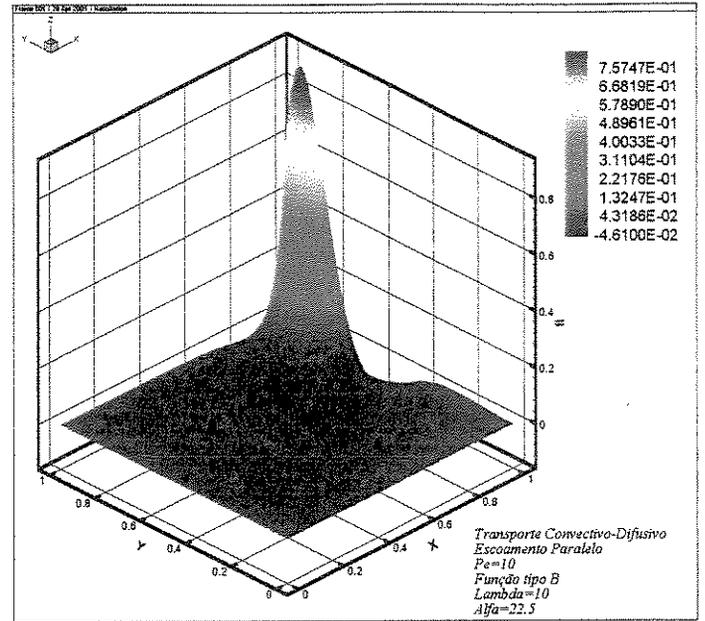


Figura 4.3: Solução analítica Tipo B
Escoamento paralelo

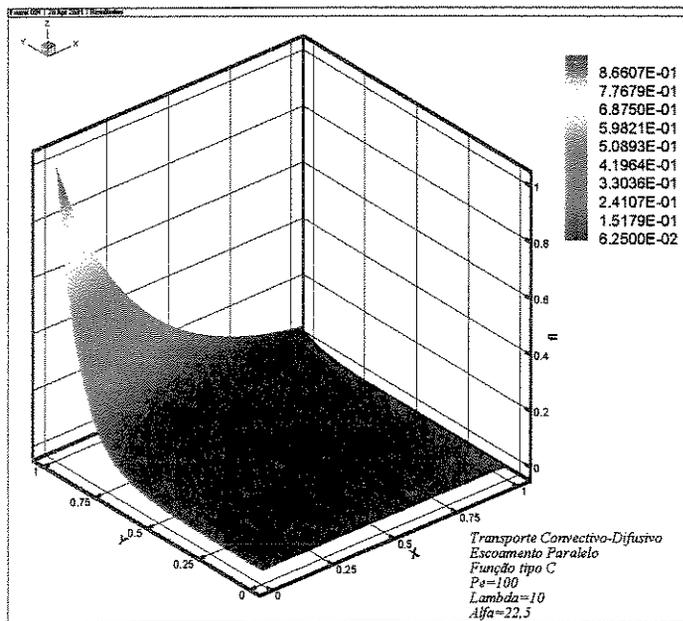


Figura 4.4: Solução analítica Tipo C
Escoamento paralelo

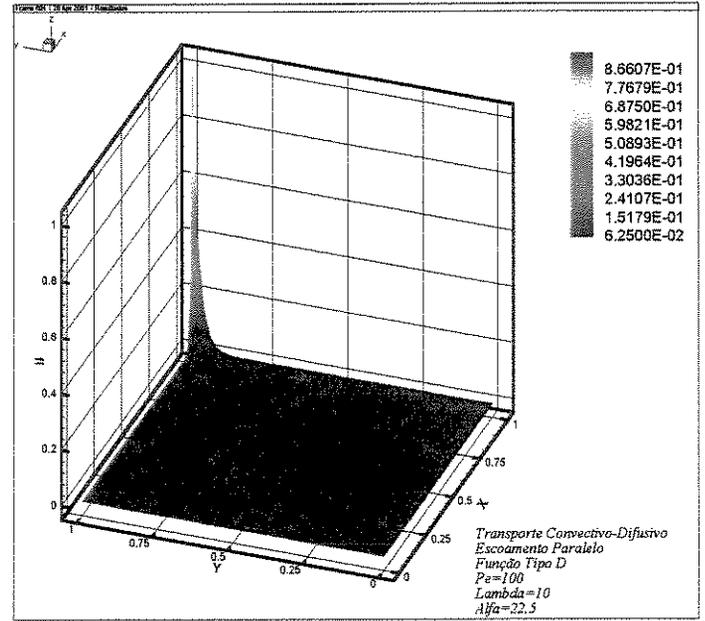


Figura 4.5: Solução analítica Tipo D
Escoamento paralelo

Neste problema teste, apesar de serem obtidas seis tipos de soluções analíticas, foram utilizadas apenas as do tipo A, B, C e D para avaliação para os esquemas numéricos. A justificativa para esta escolha é porque nestas soluções e principalmente nas do tipo A e C onde é possível a melhor avaliação do fenômeno angular denominado de difusão numérica dos esquemas.

Para este teste foi utilizado o esquema QUICK pela formulação de Hayase (1992), por se comportar em alguns testes preliminares, de forma mais estável e com convergência mais rápida que o de Leonard (1979).

Os gráficos apresentados a seguir mostram os resultados obtidos para as funções A, B, C e D, em uma faixa de número de Pe bastante abrangente.

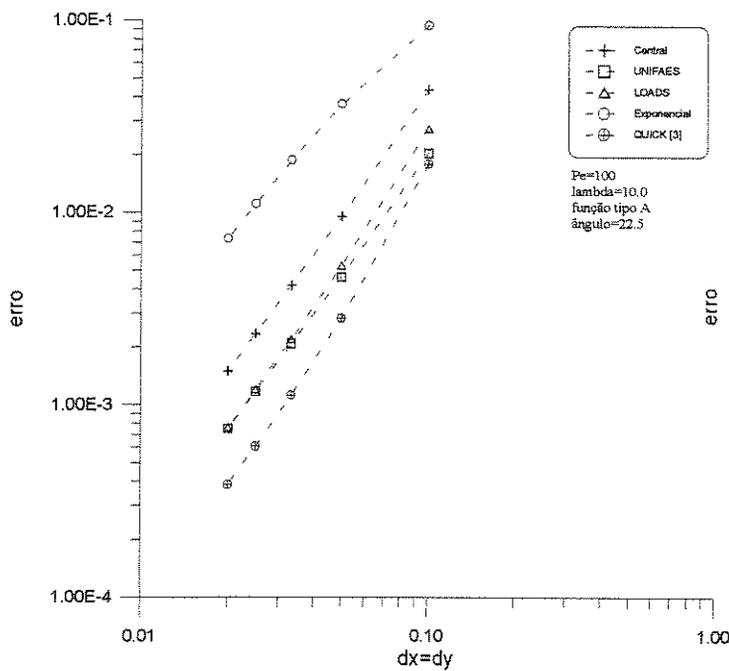


Figura 4.6: Erro numérico escoamento paralelo

Pe=10², λ=10, Função tipo A, α=22.5°

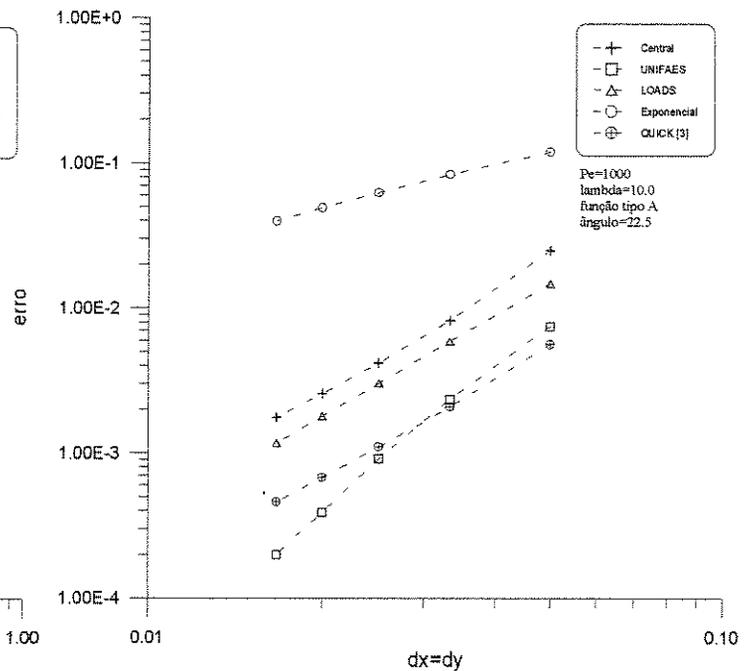


Figura 4.7: Erro numérico escoamento paralelo

Pe=10³, λ=10, Função tipo A, α=22.5°

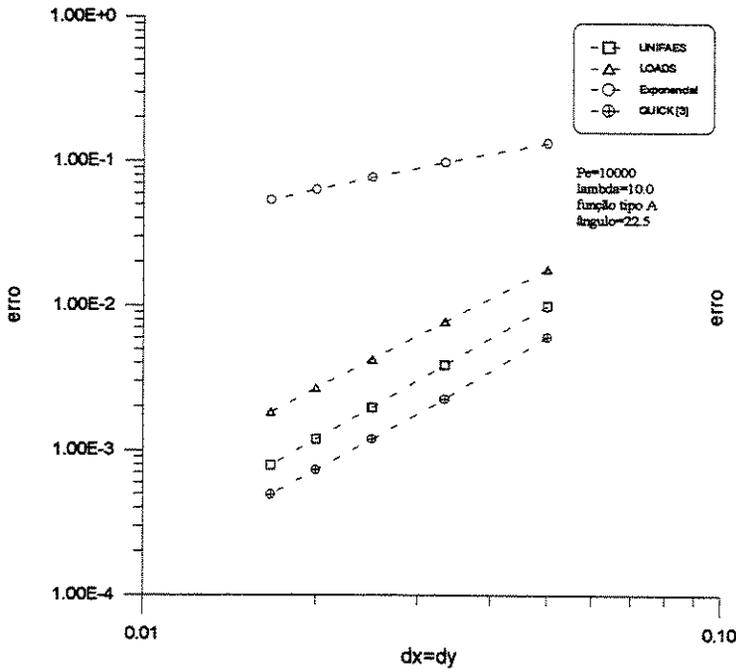


Figura 4.8: Erro numérico
escoamento paralelo

$Pe=10^4, \lambda=10, \text{Função tipo A}, \alpha=22.5^\circ$

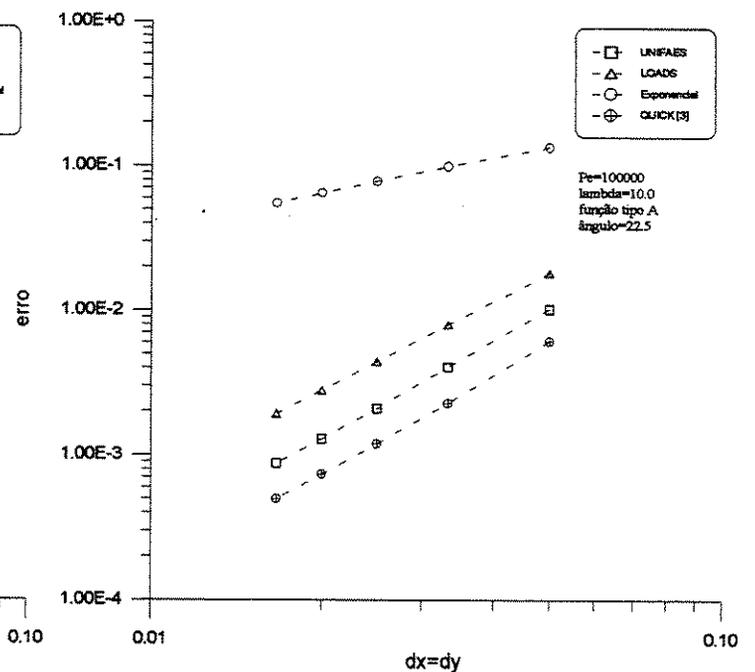


Figura 4.9: Erro numérico
escoamento paralelo

$Pe=10^5, \lambda=10, \text{Função tipo A}, \alpha=22.5^\circ$

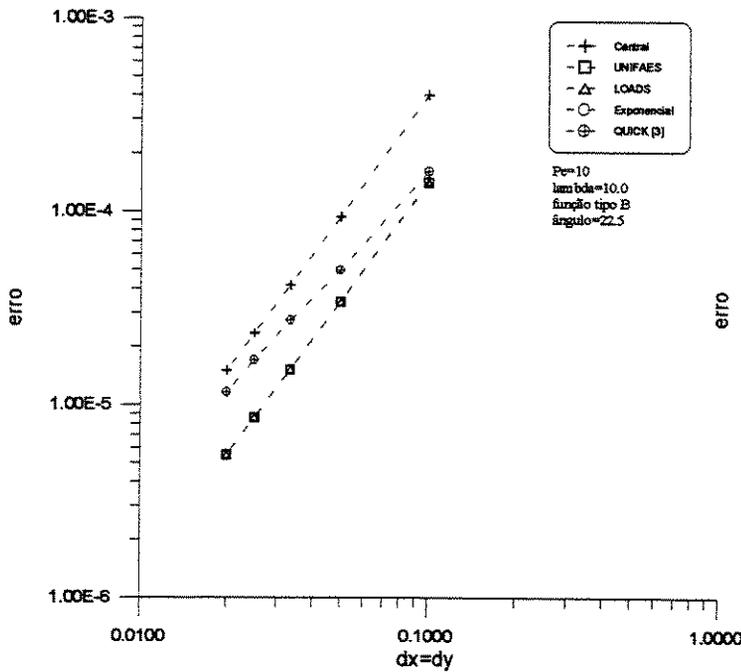


Figura 4.10: Erro numérico
escoamento paralelo

$Pe=10, \lambda=10, \text{Função tipo B}, \alpha=22.5^\circ$

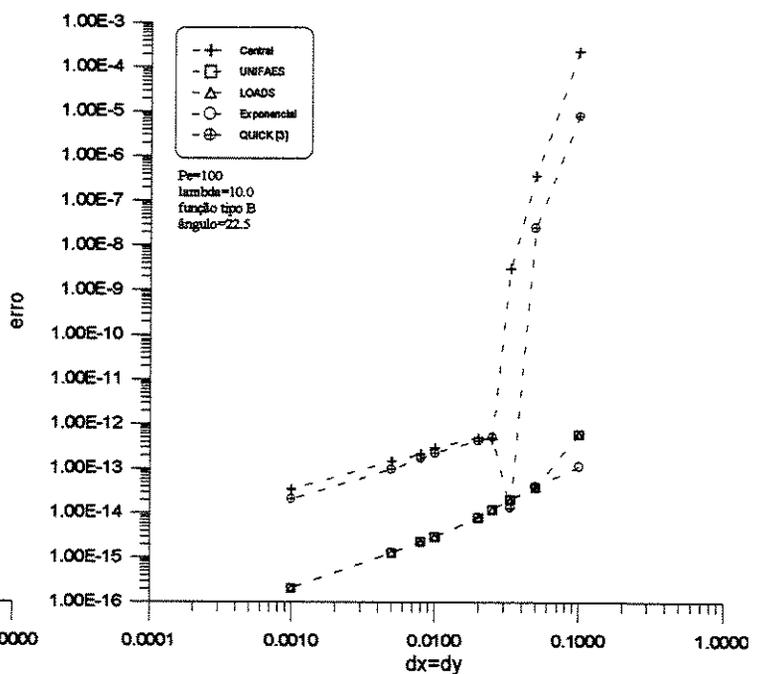


Figura 4.11: Erro numérico
escoamento paralelo

$Pe=100, \lambda=10, \text{Função tipo B}, \alpha=22.5^\circ$

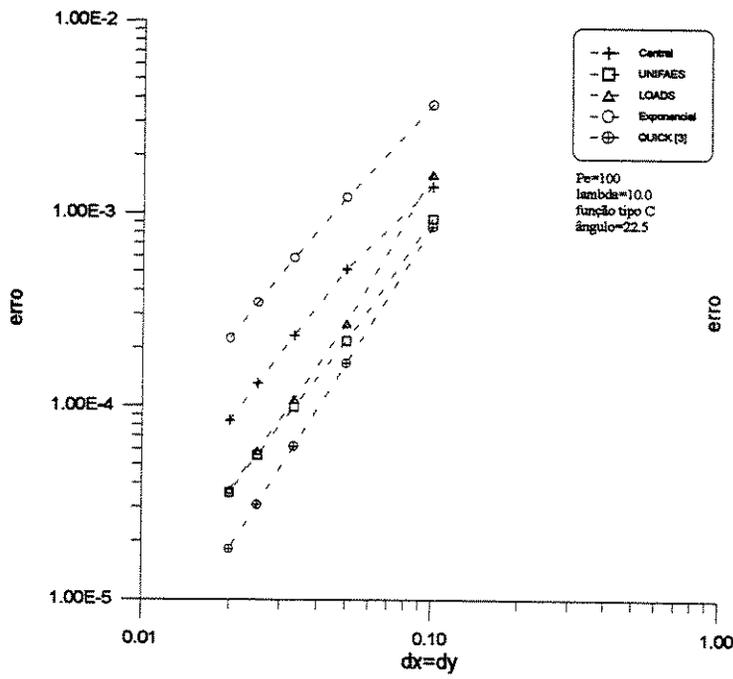


Figura 4.12: Erro numérico escoamento paralelo

$Pe=10^2, \lambda=10, \text{Função tipo C}, \alpha=22.5^\circ$

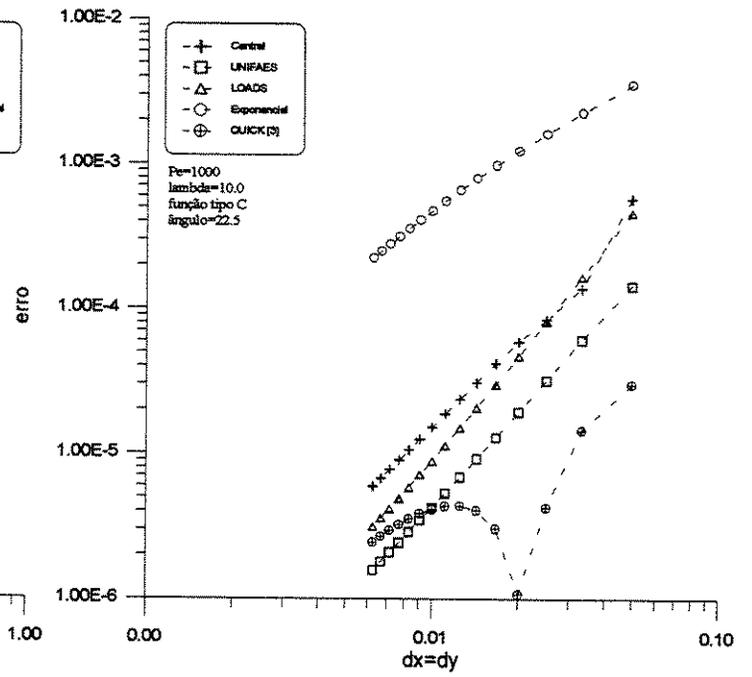


Figura 4.13: Erro numérico escoamento paralelo

$Pe=10^3, \lambda=10, \text{Função tipo C}, \alpha=22.5^\circ$

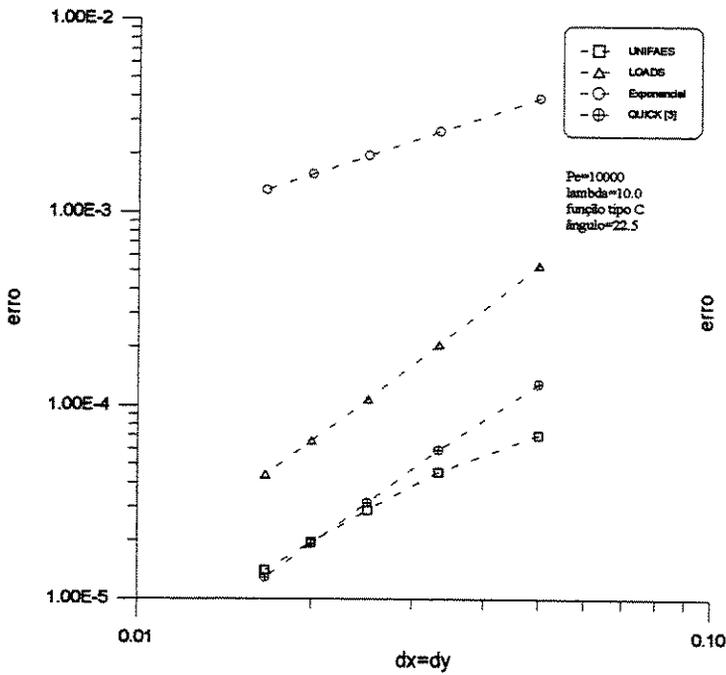


Figura 4.14: Erro numérico escoamento paralelo

$Pe=10^4, \lambda=10, \text{Função tipo C}, \alpha=22.5^\circ$

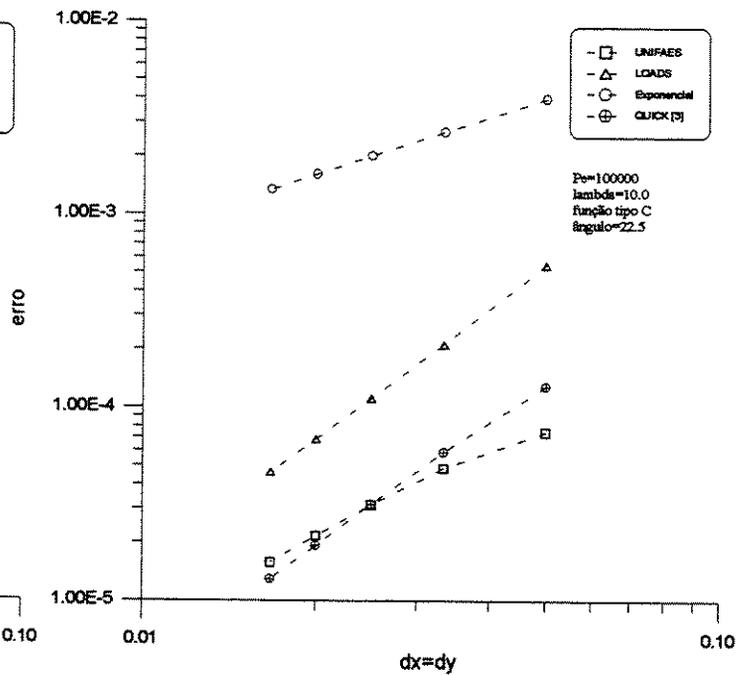


Figura 4.15: Erro numérico escoamento paralelo

$Pe=10^5, \lambda=10, \text{Função tipo C}, \alpha=22.5^\circ$

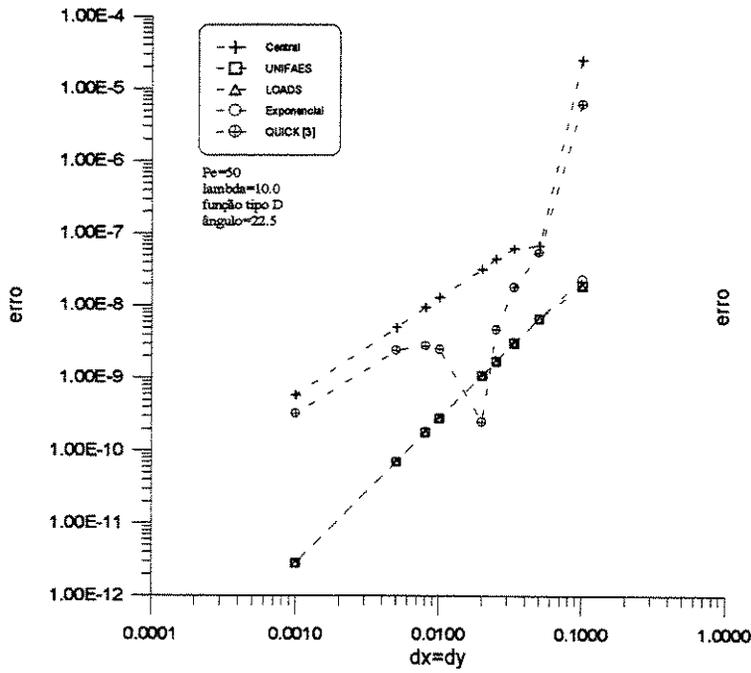


Figura 4.16: Erro numérico

escoamento paralelo

$Pe=50$, $\lambda=10$, Função tipo D, $\alpha=22.5^\circ$

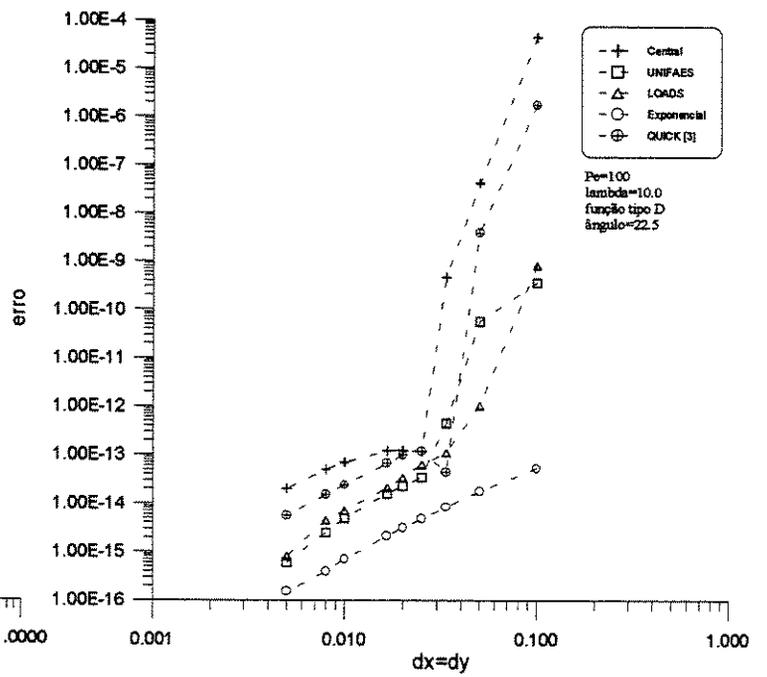


Figura 4.17: Erro numérico

escoamento paralelo

$Pe=100$, $\lambda=10$, Função tipo D, $\alpha=22.5^\circ$

Como foi observado nos testes realizados, o comportamento da convergência foi semelhante para todos os casos, então aqui será apresentado um caso típico para solução Tipo A com $Pe=10^4$.

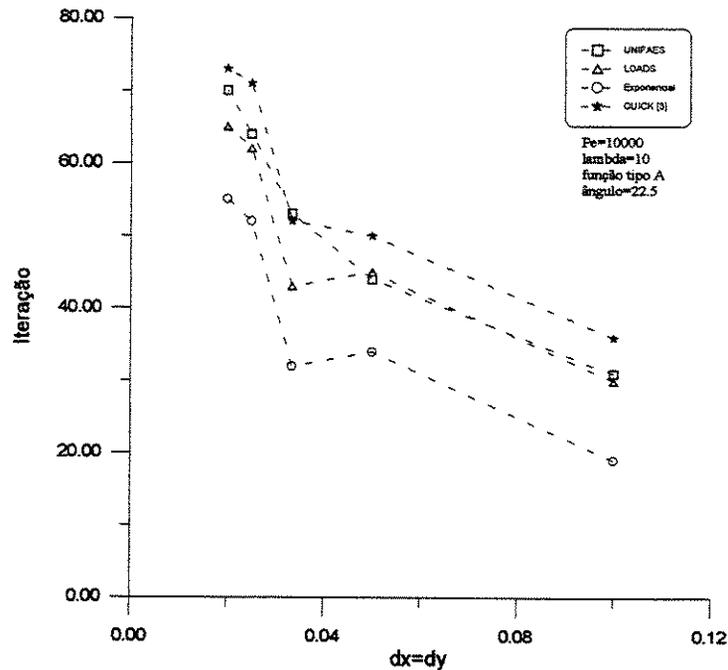


Figura 4.18: Escoamento paralelo, convergência

Comentários

Foram realizados os testes comparativos utilizando as soluções analíticas obtidas para as funções tipo A, B, C e D para uma abrangente faixa de número de Peclet.

Para as funções tipo A e C, o esquema Exponencial simples foi o que piores resultados apresentou, sendo bem visível a diferença entre os demais esquemas. Já para as funções tipo B e D o esquema Exponencial simples foi o que melhores resultados apresentou. Foi observado também em alguns resultados um comportamento não monotônico na convergência dos esquemas exceto para os esquemas Exponencial, LOADS e UNIFAES. O esquema Central apresentou um comportamento não monotônico para malhas grosseiras, em maior número de casos o esquema QUICK o apresentou também para malhas moderadamente refinadas. Para alguns casos este comportamento fez com que o erro assintótico quadrático fosse atingido para malhas com refinamento acima de 500x500 volumes de controle.

Em geral o comportamento quadrático de queda de erro com o refinamento foi atingido com uma malha de 40x40 volumes de controle, sendo que o esquema UNIFAES esteve sempre classificado como um dos primeiros esquemas a atingir este ponto. Para os casos de mais alto Peclet, foi observada a não convergência do esquema Central, quando considerando um processo iterativo de até 10000 iterações.

Em relação aos esquemas UNIFAES e QUICK, foi observado que eles se alternam apresentando os melhores resultados para grande maioria dos casos, e com o aumento do número de Peclet tornam-se mais evidentes suas diferenças com resultados obtidos pelos demais esquemas. Em relação à velocidade de convergência o esquema Exponencial simples foi o que apresentou mais rápida convergência, seguido pelos esquemas LOADS, UNIFAES e QUICK.

4.2.2 Transporte convectivo-difusivo em escoamento rotacional de fluido como sólido

O teste seguinte representa o transporte convectivo-difusivo de uma propriedade em um campo de escoamento rotacional, como indicado na figura 4.19, onde está também indicado o domínio de cálculo considerado para avaliação da propriedade transportada.

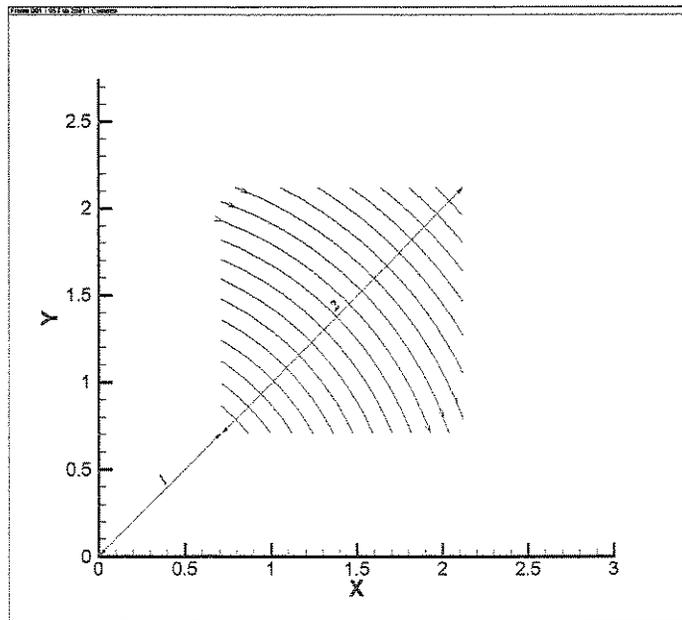


Figura 4.19: Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento rotacional de fluido como sólido

Campo de velocidades considerado para este problema é dado por :

$$u = 2y \quad (4.14)$$

$$v = -2x$$

O domínio de cálculo é limitado por:

$$x \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right], \quad y \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$$

Uma solução analítica para o problema é dada por Runchall (1972) como sendo:

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2} Pe \ln(x^2 + y^2) + C \quad (4.15)$$

onde:

$$Pe = \frac{\rho \omega r_1^2 c_p}{k}$$

ω é a velocidade angular dada por:

$$\omega = \frac{V}{r} \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

O valor da constante C , é determinado de forma que se obtenha um valor mínimo de zero no canto superior direito do domínio.

Algumas soluções analíticas encontradas estão apresentadas nas figuras a seguir.

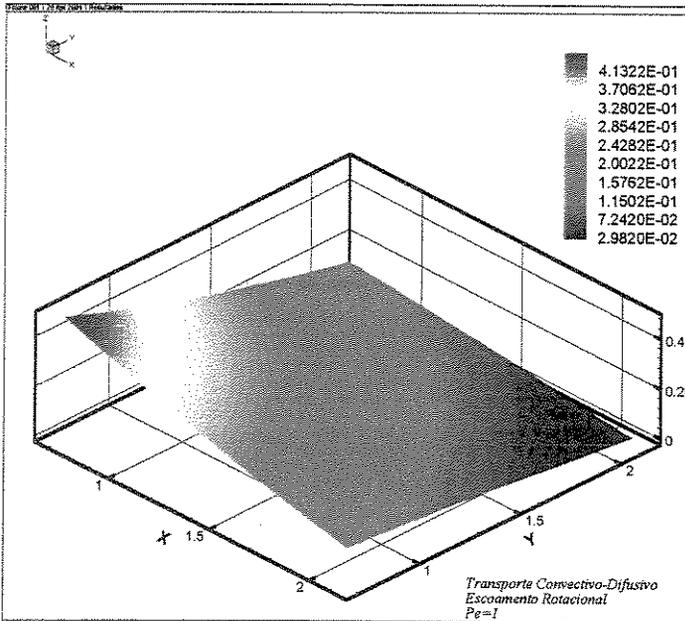


Figura 4.20: Solução analítica
Escoamento rotacional

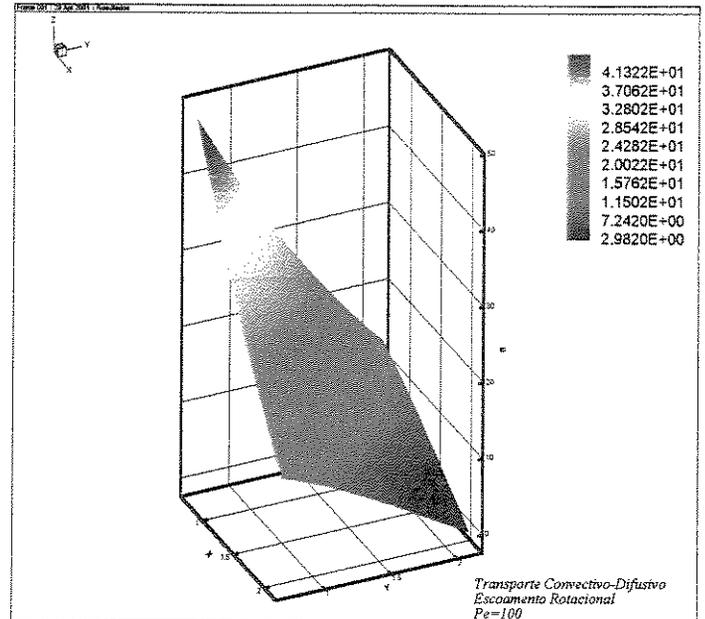


Figura 4.21 Solução analítica
Escoamento rotacional

Para alguns dos gráficos de erro apresentados, foram utilizadas as duas formulações do esquema QUICK, mas para os gráficos onde os números de Peclet são mais altos, não houve convergência quando utilizada a formulação original de Leonard (1979), dentro dos critérios de convergência apresentados no início do capítulo.

Os resultados a seguir mostram as comparações entre os esquemas utilizados para discretização e a solução analítica. Foi utilizada uma larga faixa de número de Peclet, com o objetivo de varrer uma grande faixa de soluções.

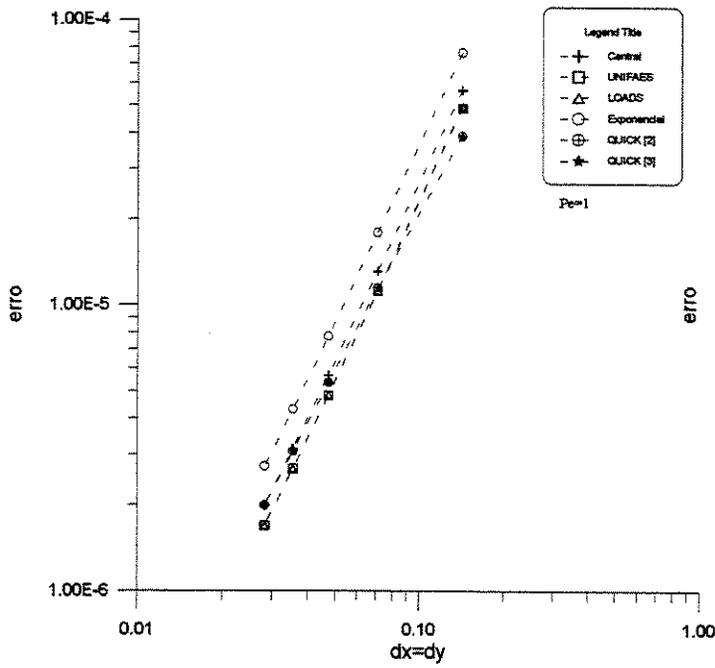


Figura 4.22: Erro numérico,
escoamento rotacional de fluido como sólido
Pe=1

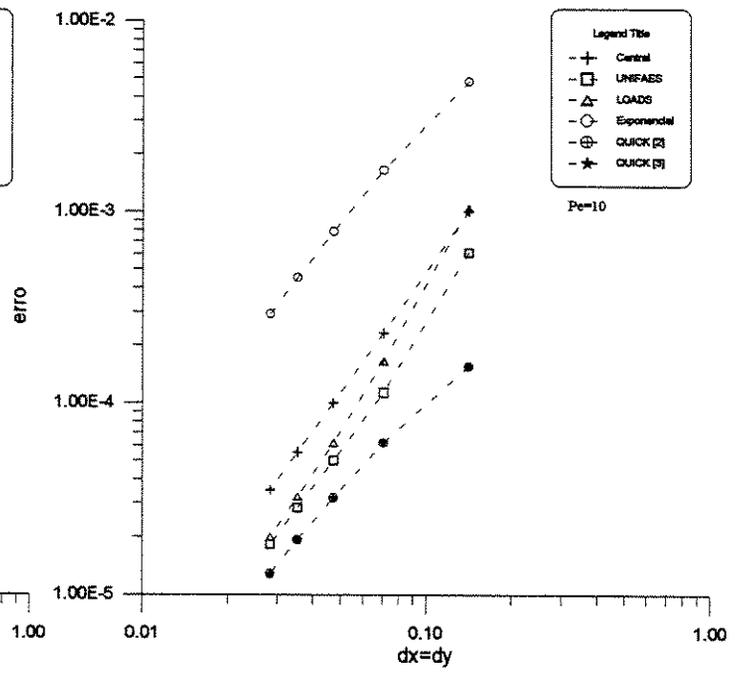


Figura 4.23: Erro numérico,
escoamento rotacional de fluido como sólido
Pe=10

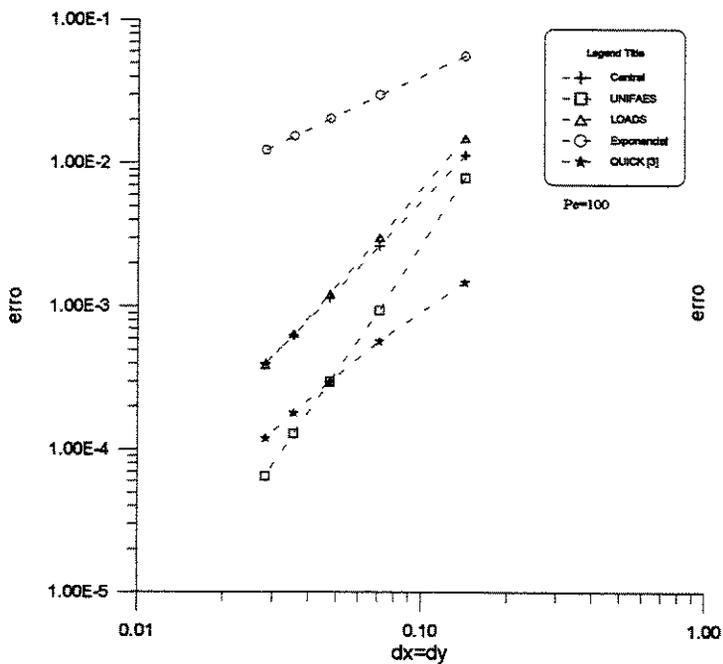


Figura 4.24: Erro numérico,
escoamento rotacional de fluido como sólido
Pe=100

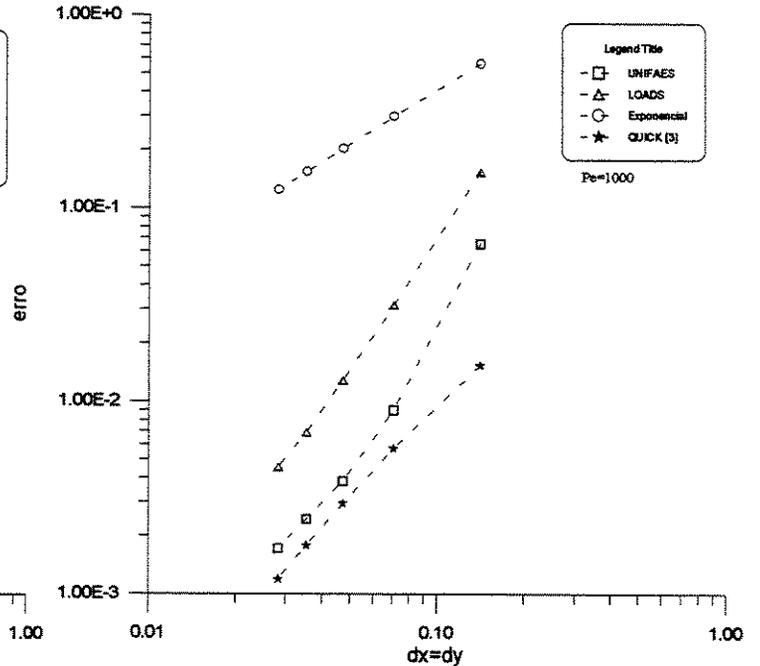


Figura 4.25: Erro numérico,
escoamento rotacional de fluido como sólido
Pe=1000

O gráfico a seguir é um comparativo da velocidade de convergência entre os esquemas estudados. São apresentados apenas os resultados para o caso de $Pe=100$ que foi o segundo maior valor de Peclet considerado, pois neste caso ainda foi possível obter uma solução numérica com o esquema Central.

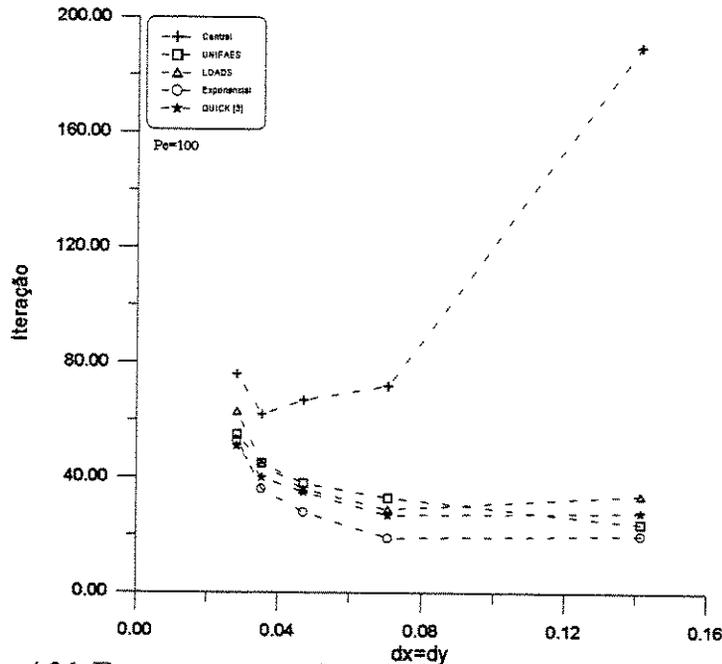


Figura 4.26: Escoamento rotacional de fluido como sólido, convergência

Comentários

Foi observado que o esquema Exponencial simples neste caso foi o que demonstrou o pior desempenho dentre todos os esquemas testados. Novamente para os casos de alto Peclet não houve convergência para o esquema Central.

As duas formulações utilizadas do esquema QUICK apresentaram praticamente os mesmos resultados, havendo apenas uma diferença na velocidade de convergência e estabilidade, com vantagem para a formulação apresentada por Hayase (1992), confirmando assim o que é defendido por ele em seu trabalho.

Comparativamente os esquemas UNIFAES e QUICK continuam se alternando na qualidade dos resultados, sendo que neste problema teste não foi observado em nenhum caso um comportamento não monotônico na convergência dos esquemas.

Em relação à velocidade de convergência o esquema Exponencial simples foi o que melhor desempenho obteve sendo também que o esquema UNIFAES se apresentou mais veloz que o esquema QUICK.

O que podemos concluir destes resultados é o seguinte: analisando os resultados para este caso, nota-se claramente com o aumento do número de Peclet que o comportamento dos esquemas vão se apresentando bem distintos. Apesar de neste caso ainda o esquema Exponencial apresentar velocidade de convergência maior, ele é o que apresenta também os piores resultados. Quando atingido um refinamento tal que o erro assintótico quadrático é predominante, os esquemas UNIFAES e QUICK apresentam erros quanto a acuidade próximos, alternando ora UNIFAES e ora QUICK como o melhor. Quanto a convergência, os esquemas UNIFAES e QUICK se aproximam com o refinamento da malha

4.2.3 Transporte convectivo-difusivo em escoamento em canto

O caso seguinte representa o problema de transporte convectivo-difusivo em escoamento de fluido descendente em canto representado pelos eixos xy , onde não há aderência de fluido na parede e com condições de impermeabilidade.

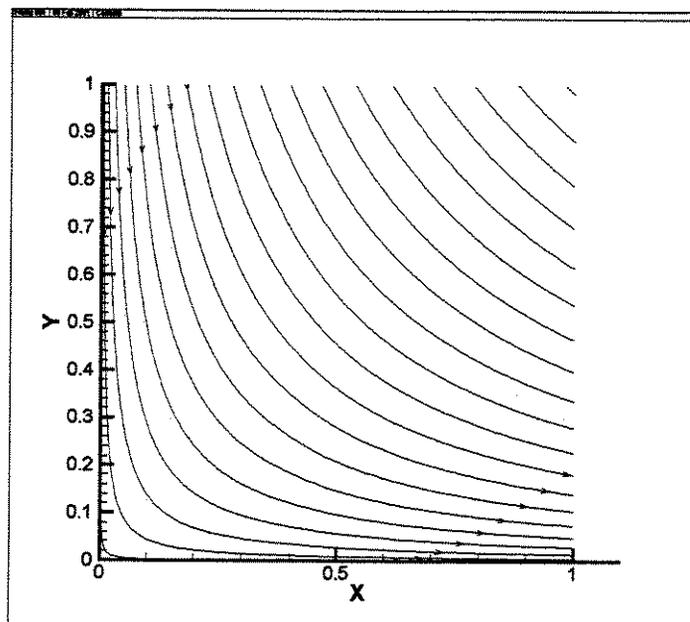


Figura 4.27 : Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento em canto

Para este caso, é considerado o campo de velocidades dado por :

$$u = x$$

$$v = -y$$

A solução da equação (2.3), apresentada por Figueiredo (1994), é obtida aplicando o método da separação de variáveis na forma:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4.16)$$

onde é considerado que X seja função apenas de x e Y apenas de y . Desenvolvendo as derivadas de X e Y e substituindo em (4.16), encontramos:

$$\frac{PexX' - X''}{X} = \frac{PeyY' + Y''}{Y} = \lambda \quad (4.17)$$

onde λ é uma constante real.

Manipulando a equação (4.17) podemos escrever:

$$-X'' + PexX' - \lambda X = 0 \quad (4.18a)$$

$$Y'' + PeyY' - \lambda Y = 0 \quad (4.18b)$$

A solução da equação (4.18a) e (4.18b) podem ser encontradas por meio de séries como:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.19)$$

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (4.20)$$

Derivando as expressões (4.19) e (4.20), e substituindo em (4.18), teremos:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} Pea_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda a_n x^n = 0 \quad (4.21a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)y^n + \sum_{n=1}^{\infty} Pea_n n y^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda a_n y^n = 0 \quad (4.21b)$$

onde:

$$a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 1 \qquad a_2 = \pm \frac{\lambda a_0}{2}$$

$$a_1 = 0 \text{ ou } a_1 = 1 \qquad a_{n+2} = \pm a_n \frac{(\lambda - Pe \cdot n)}{(n+1)(n+2)}$$

As equações (4.19) e (4.20) podem ser desmembradas em:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \qquad (4.22)$$

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} y^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} y^{2n+1} \qquad (4.23)$$

que combinadas resultará na solução geral:

$$\phi(x, y) = a_{0,x} a_{0,y} \sum_{0,x}^{\infty} x \sum_{0,y}^{\infty} y + a_{0,x} a_{1,y} \sum_{0,x}^{\infty} x \sum_{1,y}^{\infty} y + a_{1,x} a_{0,y} \sum_{1,x}^{\infty} x \sum_{0,y}^{\infty} y + a_{1,x} a_{1,y} \sum_{1,x}^{\infty} x \sum_{1,y}^{\infty} y \qquad (4.24)$$

Os coeficientes a 's definem o tipo de solução encontrada, que é dependente do tipo de condição de contorno para cada fronteira. Na tabela 4.2 a seguir, estão relacionados os tipos de condições de contorno tratadas no problema teste, e os índices a 's subscritos significam fronteiras adiabáticas, e os índices i 's subscritos, significam fronteiras isotermas.

Tipo de solução	Condições de contorno		
$X_a Y_a$	$a_0 = 0$	$a_1 = 0$	$\lambda = \pm 100$
$X_a Y_i$	$a_0 = 0$	$a_1 = 1$	$\lambda = \pm 100$
$X_i Y_a$	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$\lambda = \pm 100$
$X_i Y_i$	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$\lambda = \pm 100$

Tabela 4.2: Condições de contorno para escoamento em canto

Nas figuras a seguir estão apresentadas algumas das soluções analíticas encontradas.

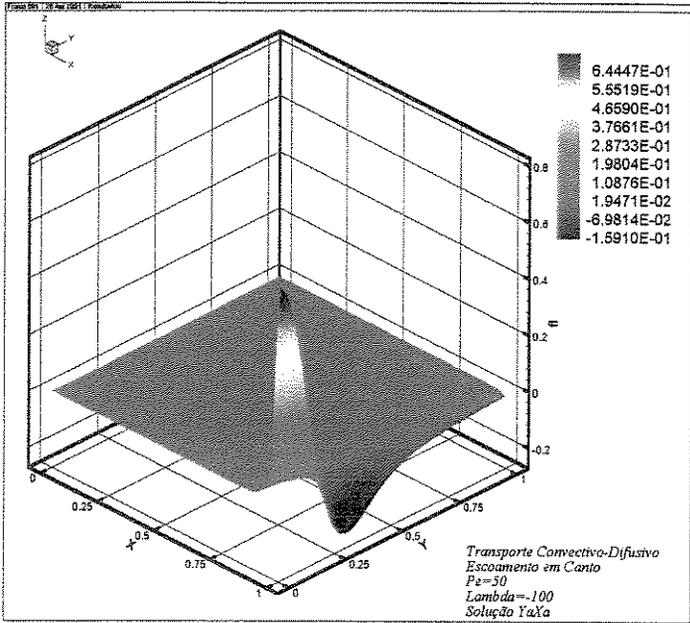


Figura 4.28: Solução analítica YaXa
Escoamento em canto

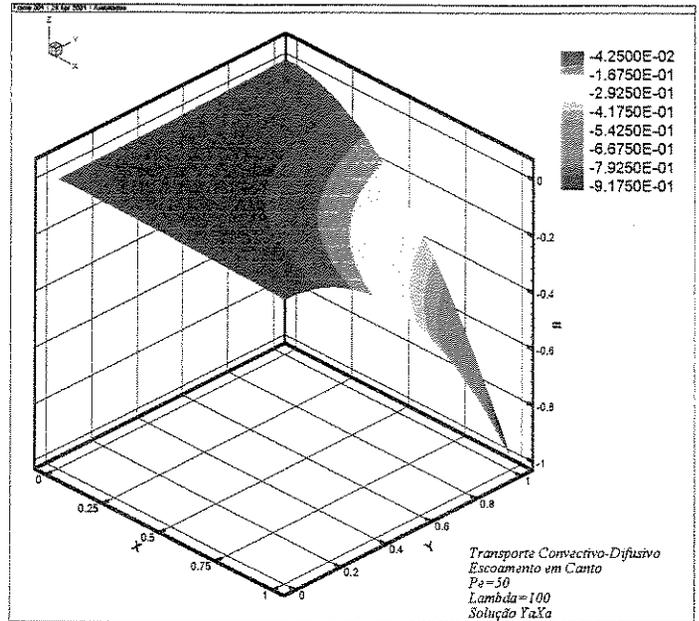


Figura 4.29: Solução analítica YaXa
Escoamento em canto

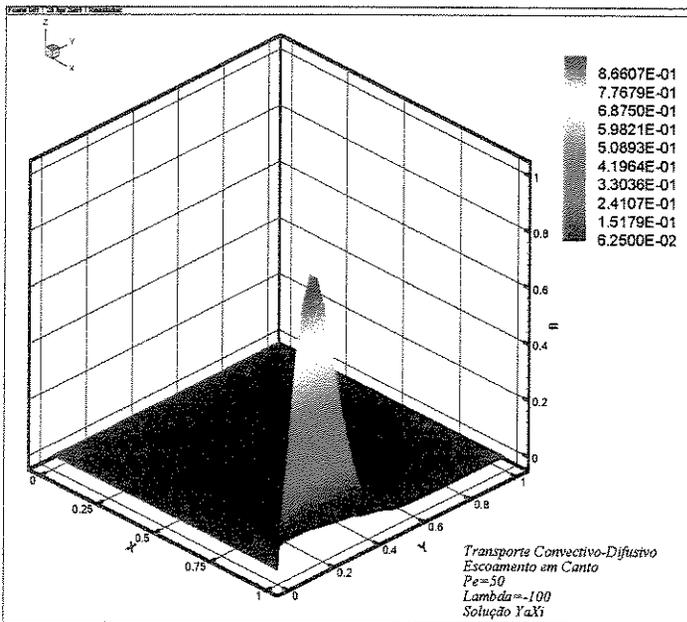


Figura 4.30: Solução analítica YaXi
Escoamento em canto

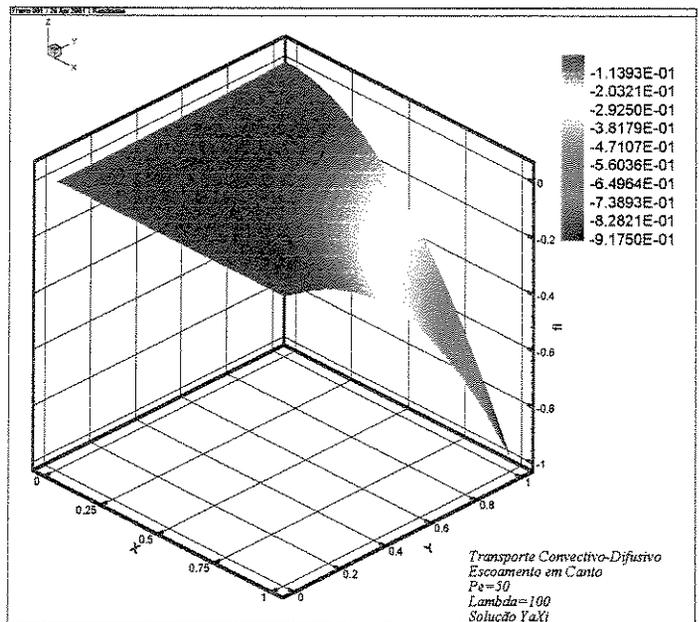


Figura 4.31: Solução analítica YaXi
Escoamento em canto

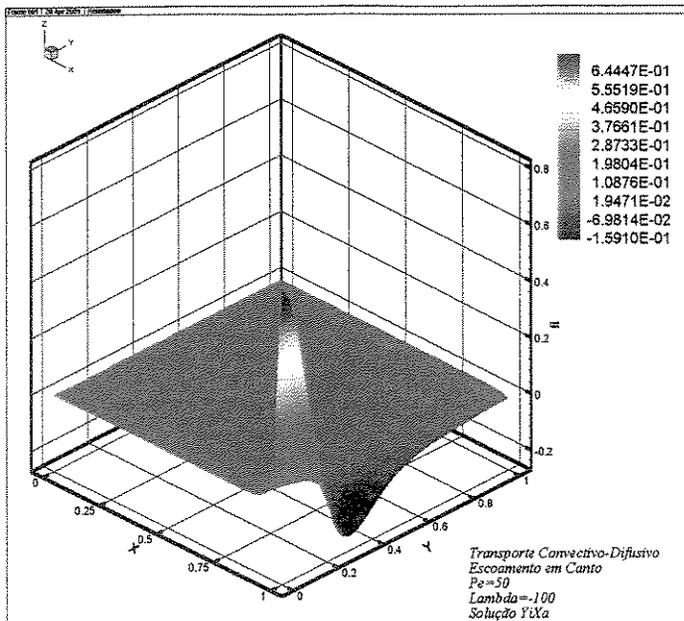


Figura 4.32: Solução analítica Y_1X_a
Escoamento em canto

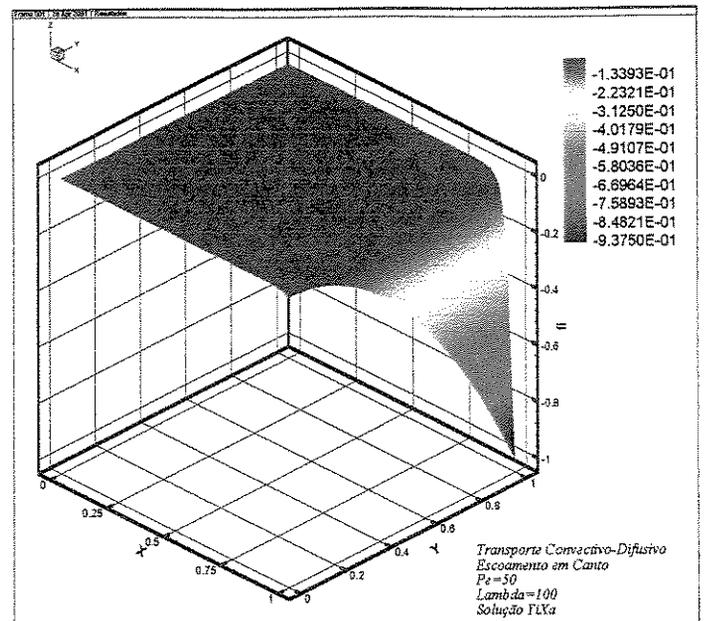


Figura 4.33: Solução analítica Y_1X_a
Escoamento em canto

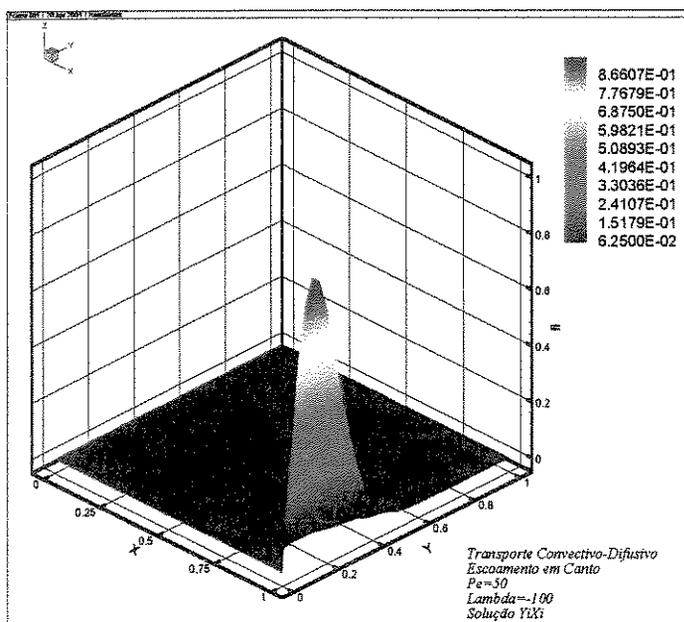


Figura 4.34: Solução analítica Y_1X_i
Escoamento em canto

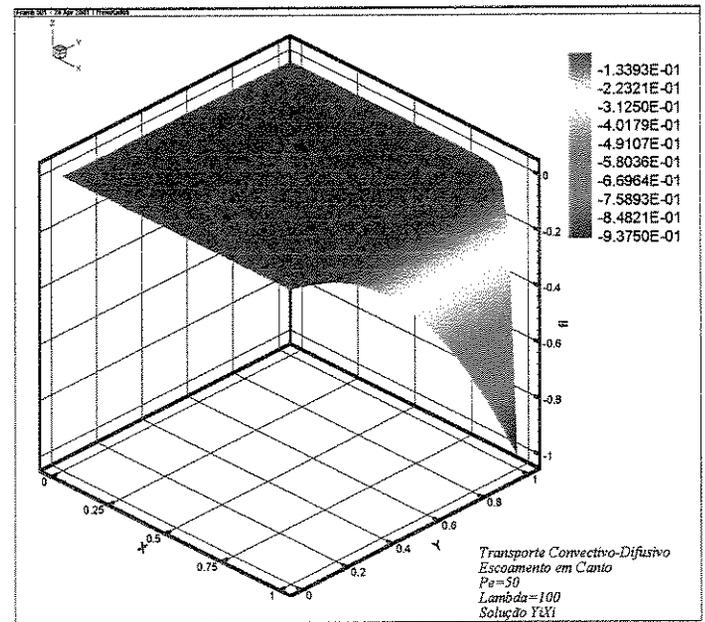


Figura 4.35: Solução analítica Y_1X_i
Escoamento em canto

Os gráficos a seguir estão representando os resultados comparativos entre os esquemas utilizados e as soluções analíticas. São apresentados aqui os resultados para os casos mais severos de escoamento, onde o número de Peclet é mais alto. Para números de Peclet maiores de 50 não foi atingida a convergência da solução analítica por séries encontrada, até o limite de 10000 termos.

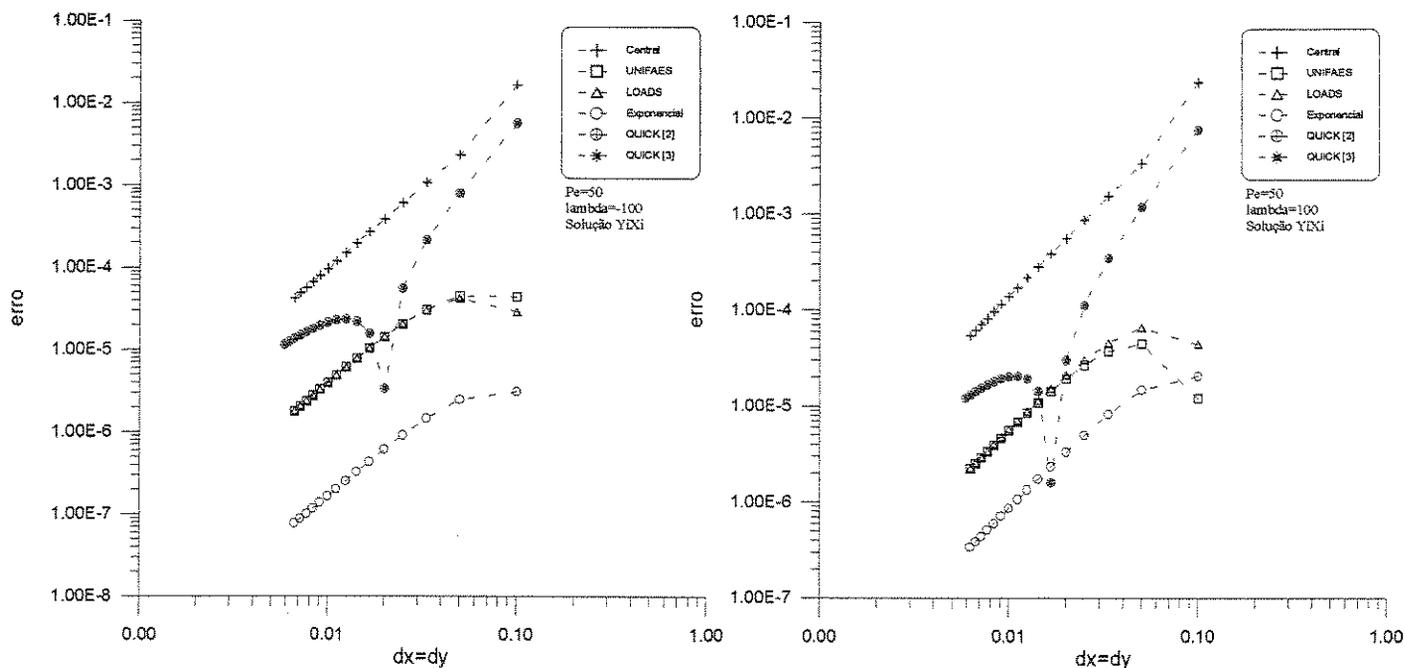


Figura 4.36: Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_iX_i

Figura 4.37: Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_iY_i

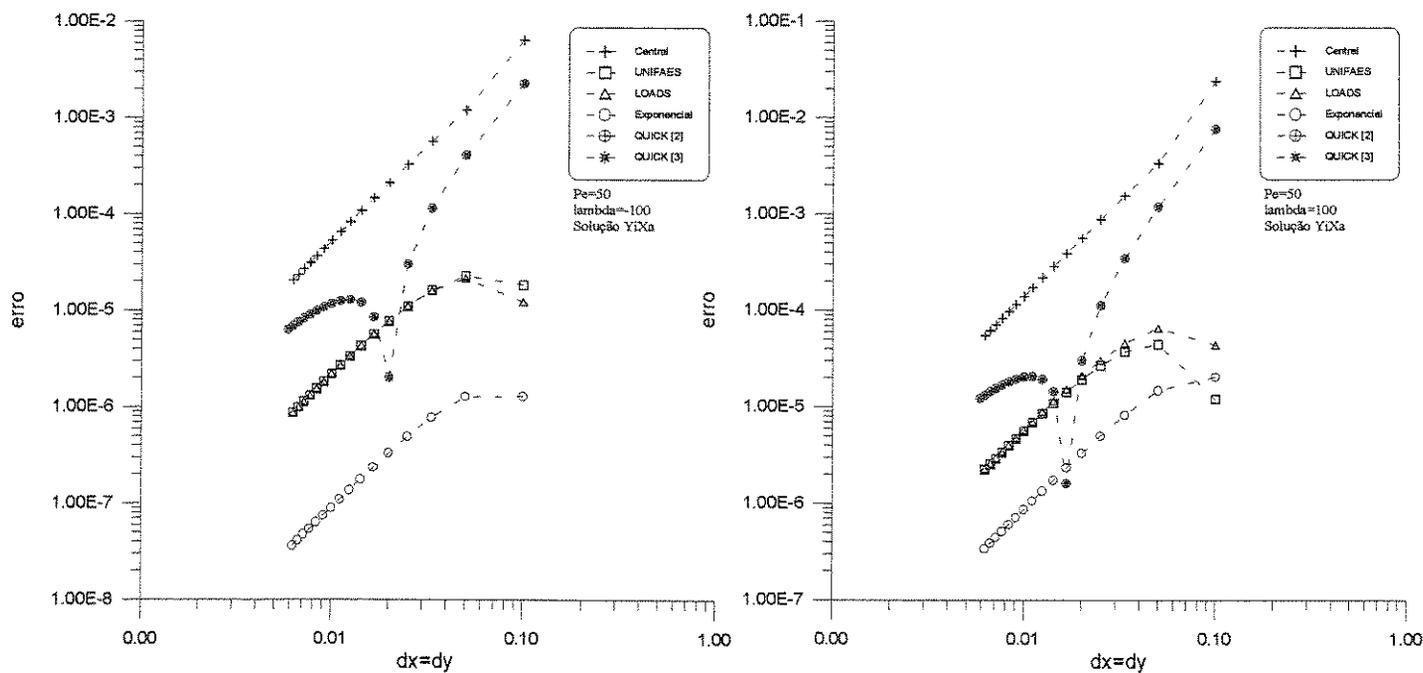


Figura 4.38: Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$, Solução Y_iX_a

Figura 4.39: Erro numérico, escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$, Solução Y_iY_a

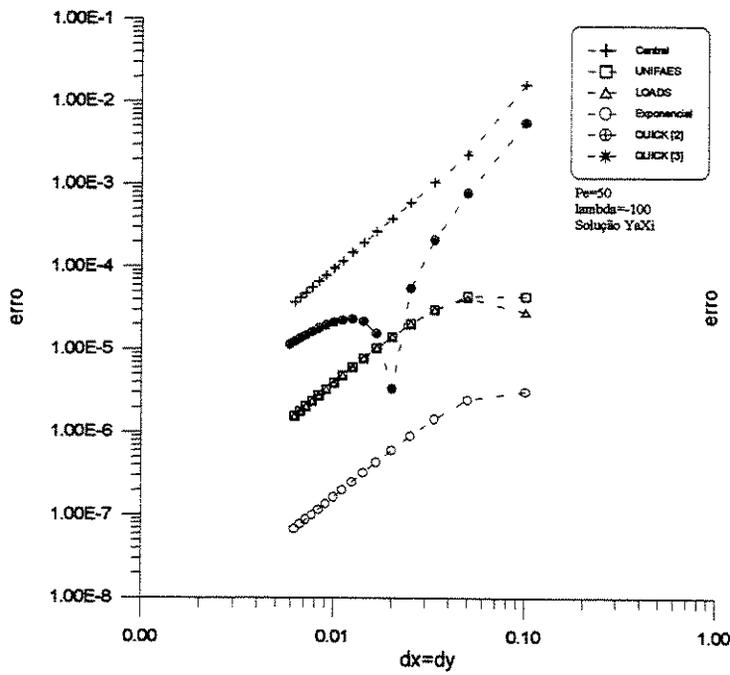


Figura 4.40: Erro numérico,
escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$,
Solução YaXi

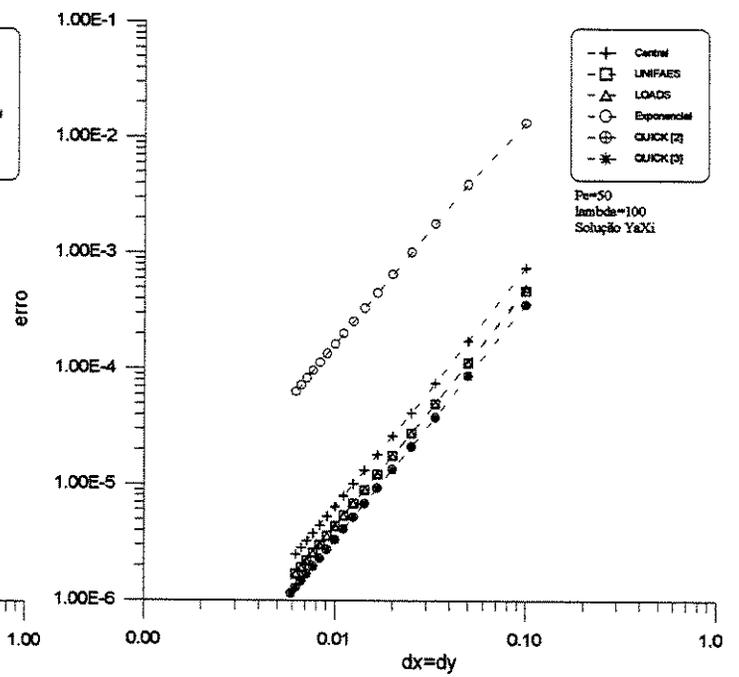


Figura 4.41: Erro numérico,
escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$,
Solução YaXi

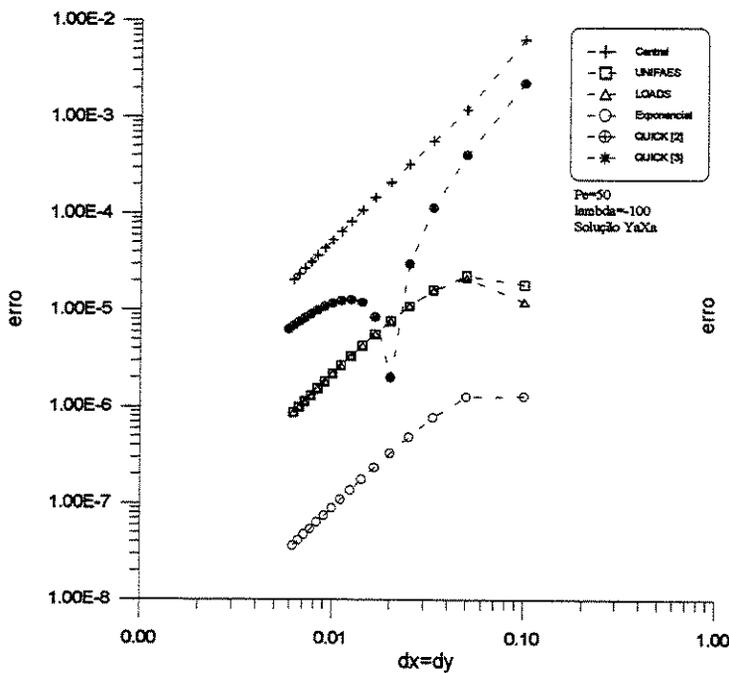


Figura 4.42: Erro numérico,
escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=-100$,
Solução YaXa

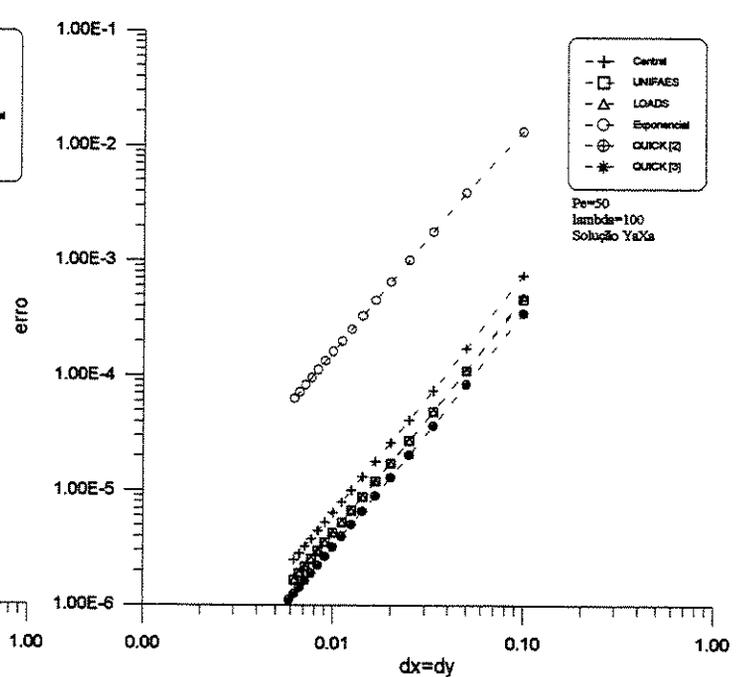


Figura 4.43: Erro numérico,
escoamento em canto, $Pe=50$, $\lambda=+100$,
Solução YaXa

Como constatado através dos vários testes realizados que o comportamento dos esquemas em relação à velocidade de convergência são semelhantes em todos os casos analisados, portanto como referência aqui será apresentado o resultado para um dos casos.

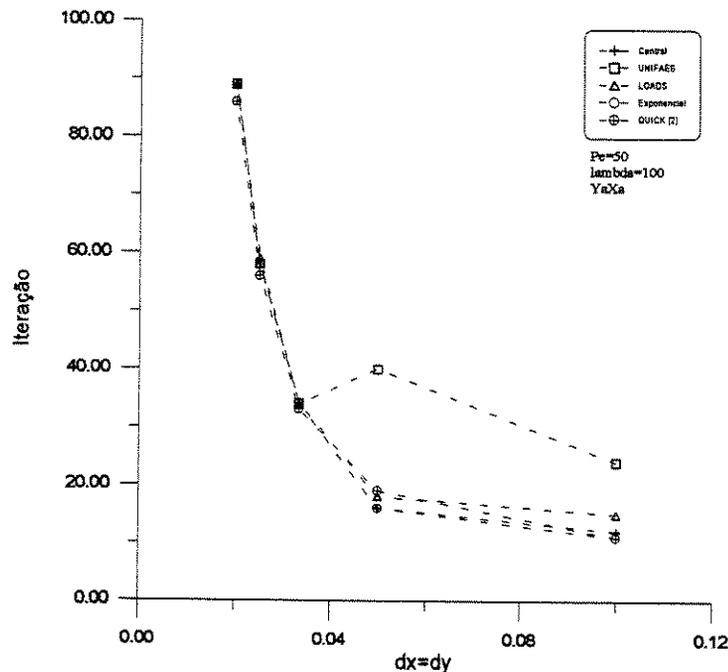


Figura 4.44: Escoamento em canto, convergência

Comentários

Observou-se que para a grande maioria dos testes o esquema Exponencial simples foi o que apresentou os melhores resultados, e em todos os testes para este problema o esquema UNIFAES se comportou melhor que o esquema QUICK. Em seis dos oito testes realizados para este problema, o esquema QUICK voltou a apresentar comportamento não monotônico, e em geral atinge o comportamento quadrático de queda de erro com malhas mais refinadas que os demais esquemas.

O gráfico do histórico da convergência representa um comportamento geral que foi observado em todos os casos, sendo que o esquema UNIFAES foi o que apresentou um maior número de iterações e o esquema QUICK foi o que apresentou um menor número de iterações.

Destas observações podemos tirar algumas conclusões: o esquema Exponencial simples apresentou melhores resultados na maioria dos testes, e entre os esquemas UNIFAES e LOADS os erros são bem próximos quando já atingida a tendência quadrática do comportamento do erro, e

entre os esquemas UNIFAES e QUICK, o esquema UNIFAES apresentou resultados significativamente melhores, aproximadamente 1 década a menos no erro cometido. Em relação à convergência, o esquema UNIFAES apresenta uma convergência mais lenta que os demais esquemas nas duas primeiras malhas utilizadas, mas após este ponto, as iterações necessárias para cada esquema são bem próximas. Novamente como nos dois problemas anteriores o esquema Exponencial simples foi o que apresentou uma maior velocidade de convergência.

4.2.4 Transporte convectivo-difusivo em escoamento em canto com perfil de entrada parabólico

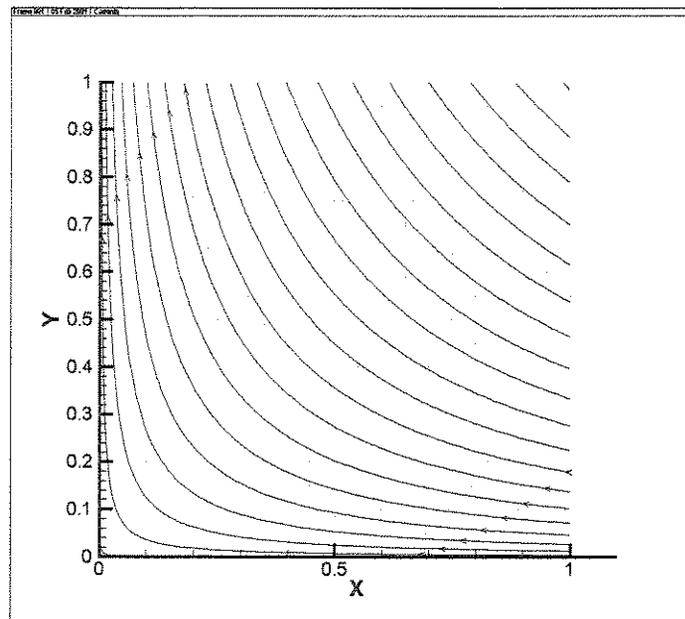


Figura 4.45: Linhas de corrente e domínio de cálculo para escoamento em canto com perfil de entrada parabólico

Campo de velocidades para este problema é dado por :

$$u = -x$$

$$v = y$$

e uma solução analítica para este problema é dada por Lai (1983):

$$\phi^* = C_1(1 - Pe.y^2)(1 + Pe.x^2) \tag{4.25}$$

onde:
$$\phi^* = \frac{(\phi - \phi_{\min})}{(\phi_{\max} - \phi_{\min})}$$

A figura a seguir mostra um dos casos para a solução analítica.

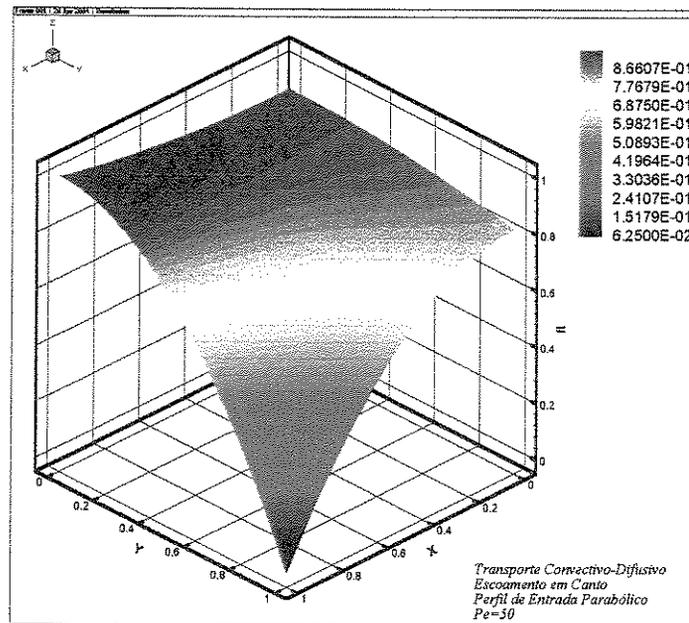


Figura 4.46: Solução analítica, escoamento em canto parabólico

Como este é um caso teste mais simples, os resultados apresentados compreendem as comparações entre os esquemas para o caso de escoamento mais severo com $Pe=50$ e a comparação entre as velocidades de convergências dos esquemas.

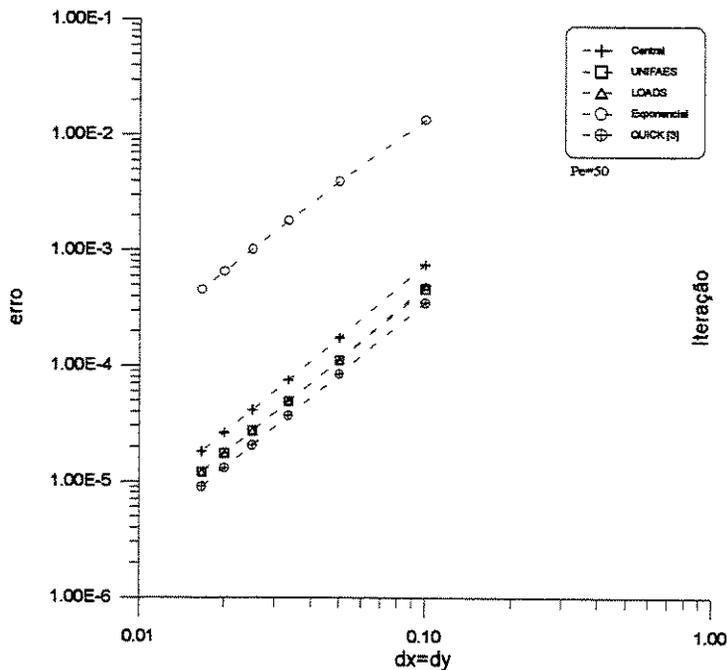


Figura 4.47: Erro numérico escoamento em canto com perfil de entrada parabólico

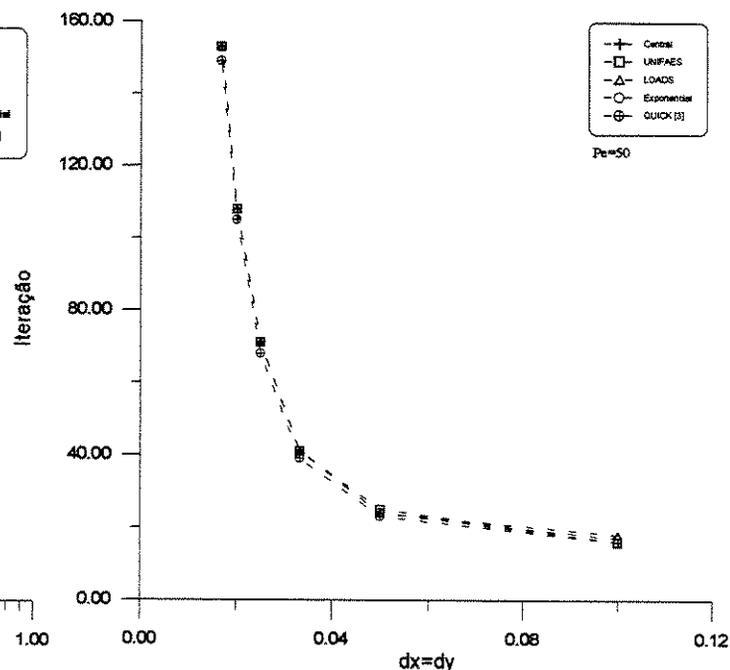


Figura 4.48: Escoamento em canto com perfil de entrada parabólico convergência

Comentários

Para o caso de $Pe=50$, os esquemas UNIFAES e QUICK foram os que melhores resultados apresentaram, sendo estes bem próximos um do outro de acordo com que o refinamento da malha vai aumentando, sendo que o esquema Exponencial simples foi o que apresentou piores resultados. Em relação a velocidade de convergência, esta é praticamente a mesma para todos os esquemas.

4.3 Transporte convectivo-difusivo em coordenadas generalizadas com malhas irregulares

Até agora foram apresentados os resultados para os testes realizados em coordenadas generalizadas com malhas regulares. Para a avaliação dos esquemas em coordenadas generalizadas com malhas irregulares, foram realizados alguns testes com a equação de transporte convectivo-difusivo sendo que dois casos foram escolhidos para avaliação, casos estes já foram utilizados como referência para nos testes anteriores. O que difere aqui dos testes anteriores é a distribuição dos nós na malha, que agora são utilizadas malhas em coordenadas generalizadas. Fazem parte de segundo conjunto de testes os seguintes casos: Transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo e em escoamento rotacional de fluido como sólido.

4.3.1 Transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo

A geometria, condições de contorno e solução analítica para este problema são as mesmas anteriormente apresentadas para o caso de coordenadas generalizadas com malhas regulares. A configuração da malha apresentada na figura 4.49 segue um modelo padrão adotado e sugerido por Shyy (1986), Verma and Eswaran (1999) entre outros. A malha possui uma configuração em função de um ângulo β definido entre as linhas verticais da coordenada e as linhas verticais dos volumes de controle.

A justificativa para a utilização deste tipo de malha se baseia no fato de que nela os erros numéricos oriundos das transformações geométricas para a formulação em coordenadas generalizadas e conseqüentemente a qualidade dos resultados obtidos pelos diversos esquemas são bastante evidenciados, então a utilização deste tipo de malha é justificada somente para a avaliação do comportamento numérico dos esquemas com a variação do ângulo β .

Foi utilizada uma variação de β de 0.0° a 20.0° , que é aplicada somente aos nós internos da malha. A variação de β varre todo o campo angular no volume de controle até próximo do limite $\beta > 22.5$, onde ocorreria o encontro das fronteiras de volumes não vizinhos ocasionando uma sobreposição dos volumes.

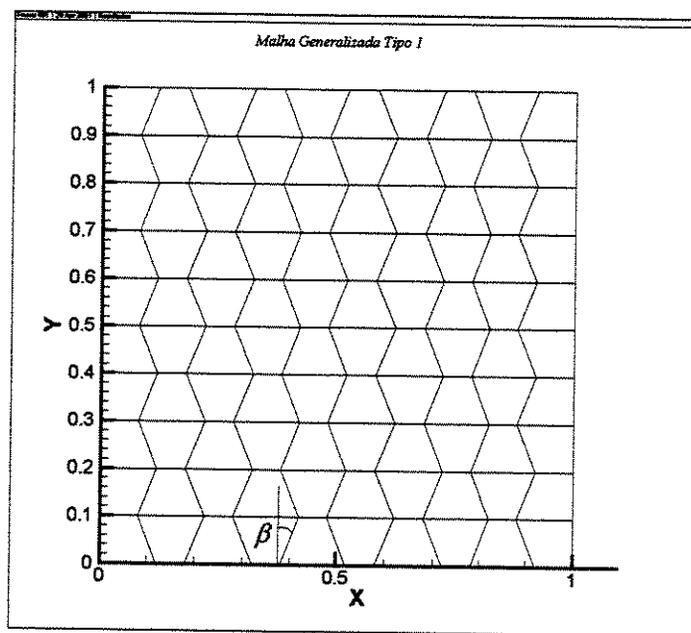


Figura 4.49: Malha generalizada Tipo 1 utilizada para escoamento paralelo

Foram escolhidos para este teste os casos de número de Peclet médio, onde ainda foi possível a convergência numérica com o esquema Central, e os casos de menor e maior valores de β .

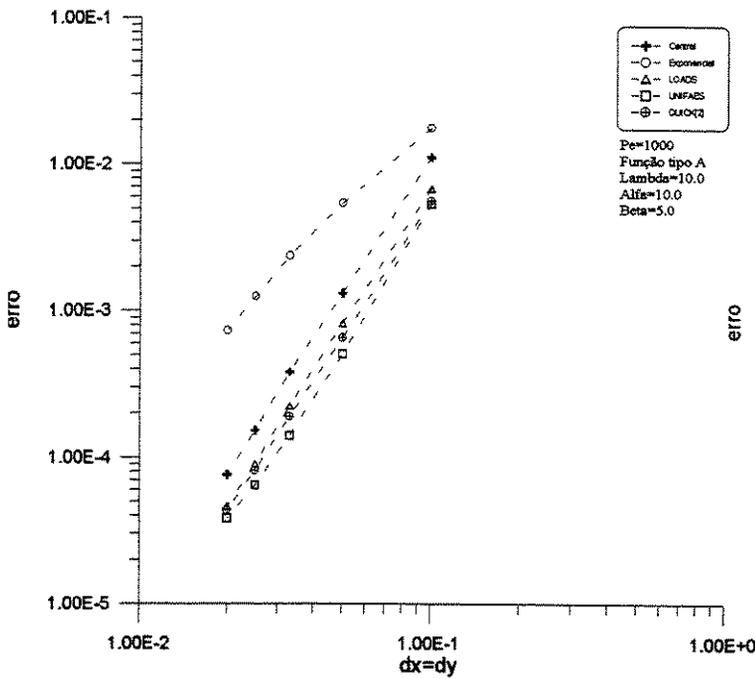


Figura 4.50: Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$, $\beta=5^\circ$

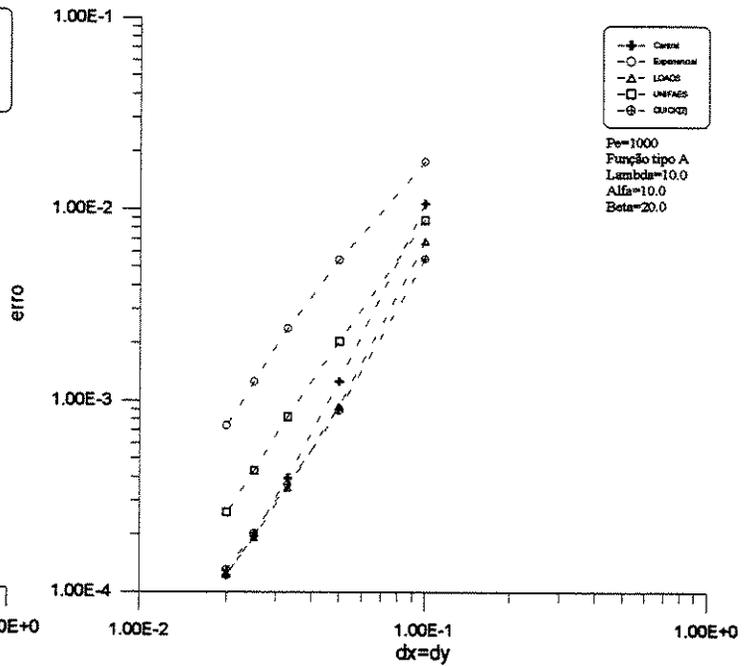


Figura 4.51: Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$, $\beta=20^\circ$

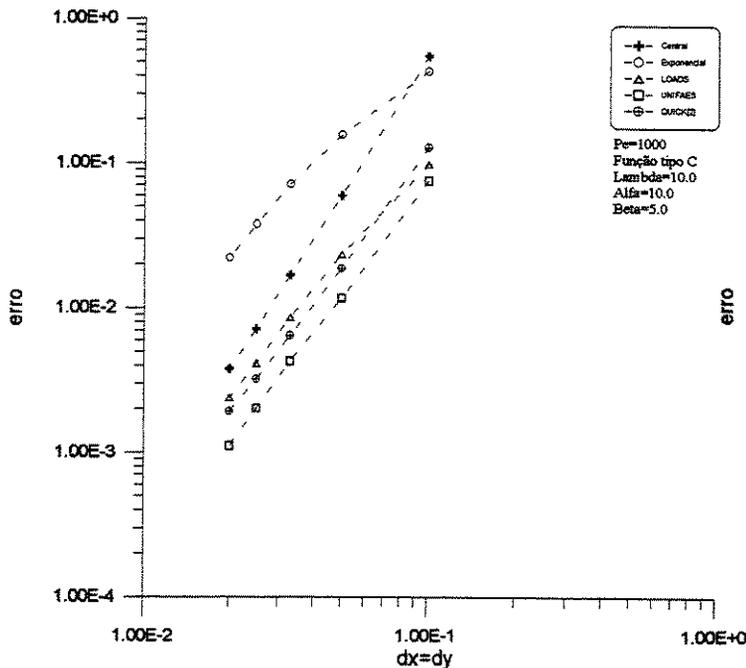


Figura 4.52: Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=10^\circ$, $\beta=5^\circ$

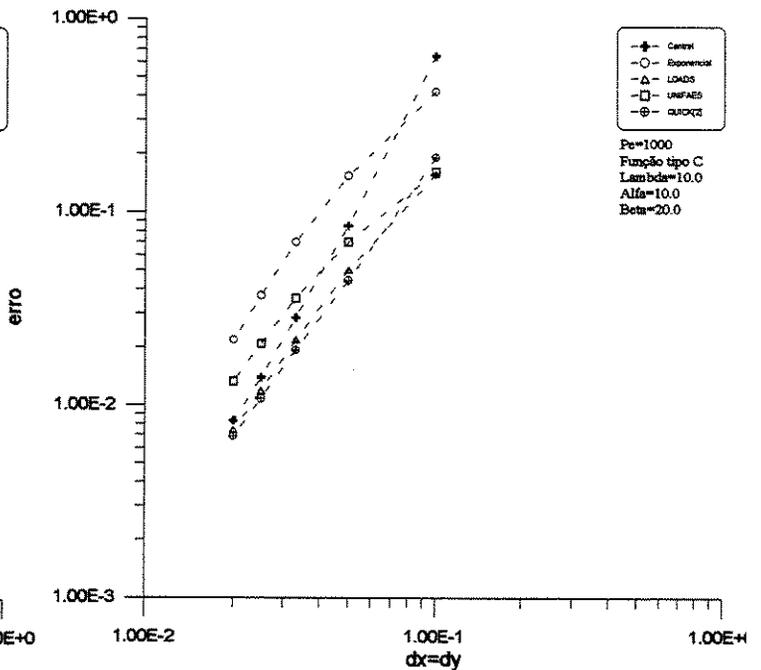


Figura 4.53: Erro numérico escoamento paralelo com malha generalizada $Pe=10^3$, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=10^\circ$, $\beta=20^\circ$

Para avaliação do efeito da variação de β no comportamento numérico dos esquemas, foram considerados os casos de número de Pe médio para soluções tipo A e C, variando a deformação em uma faixa abrangente.

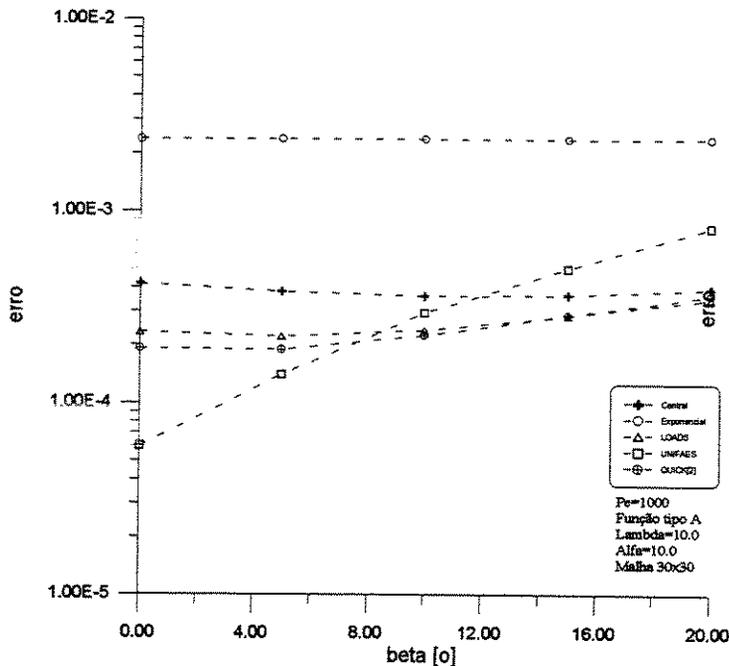


Figura 4.54: Influência da variação de β escoamento paralelo com malha generalizada
Pe=10³, $\lambda=10$, Função tipo A, $\alpha=10^\circ$

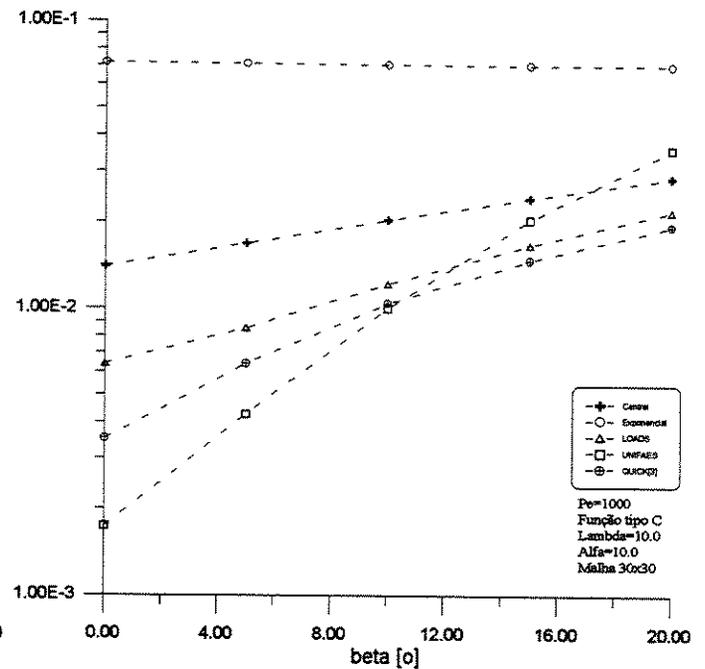


Figura 4.55: Influência da variação de β escoamento paralelo com malha generalizada
Pe=10³, $\lambda=10$, Função tipo C, $\alpha=10^\circ$

Comentários

Foram realizados quatro testes distintos, sendo consideradas as funções tipo A e C, pois nas soluções destas duas funções observou-se nos testes realizados anteriormente que foram os casos onde houve maiores diferenças entre os comportamentos dos esquemas nos gráficos dos erros.

Observou-se que os esquemas UNIFAES e QUICK foram os que melhores resultados apresentaram, e que por outro lado o esquema Exponencial simples foi o que piores resultados apresentou. Em relação à influência da variação do ângulo β da malha nos resultados finais, que foi o objetivo da utilização da malha com a configuração tipo 1, observou-se que o esquema Exponencial simples foi o que menor influência sofreu, enquanto que o esquema UNIFAES pareceu ser o mais

sensível à esta variação. A influência do ângulo β parece equalizar a qualidade dos resultados dos esquemas quando este valor atinge em média 12° , o que é uma deformação local bastante considerável.

4.3.2 Transporte convectivo-difusivo em escoamento rotacional de fluido como sólido

A geometria e solução analítica para este caso, são as mesmas que para o caso de escoamento rotacional como sólido em coordenadas generalizadas com malhas regulares. Para este teste, foram utilizadas dois tipos de malhas generalizadas irregulares. A primeira configuração é semelhante à usada no caso transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo em malhas generalizadas, e a segunda configuração trata-se uma seção de anel circular como sugerido e apresentado por Melaen (1992) representada na figura 4.38. A construção da malha Tipo 2 é feita de tal forma que se obtenha a mesma quantidade de nós nas direções ξ e η constantes, e neste tipo de malha as linhas de coordenadas estão alinhadas às linhas de corrente.

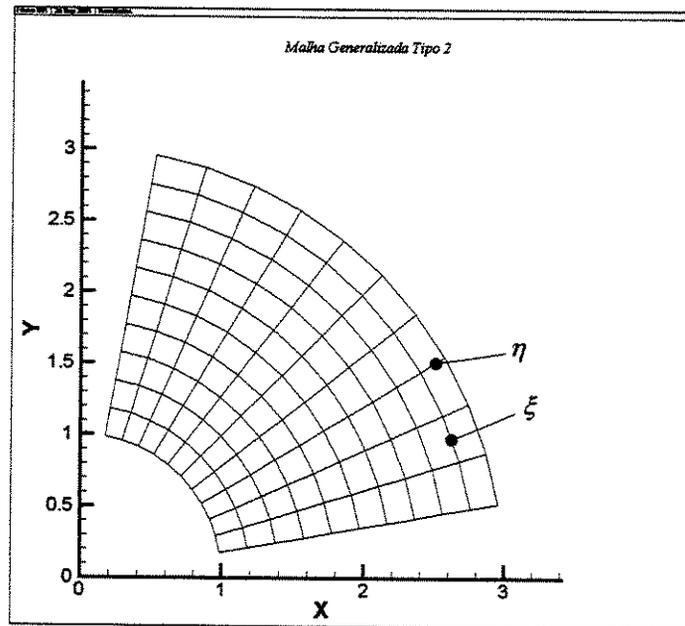


Figura 4.56: Malha generalizada Tipo 2 para escoamento rotacional

Os resultados a seguir foram obtidos utilizando-se a malha generalizada Tipo 1. Os resultados abrangem casos de número de Peclet baixos e altos, com baixos e altos valores de β .

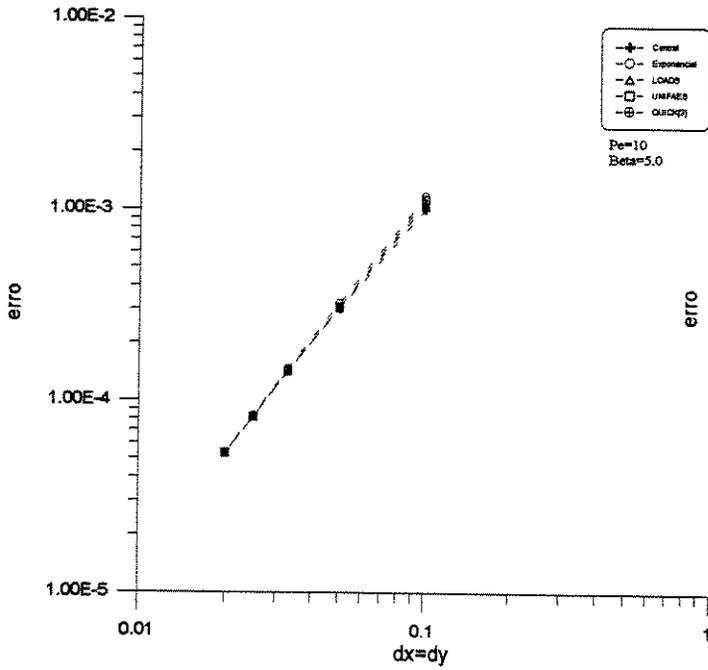


Figura 4.57: Erro numérico
escoamento rotacional como sólido
malha generalizada Tipo 1, $Pe=10$, $\beta=5^\circ$

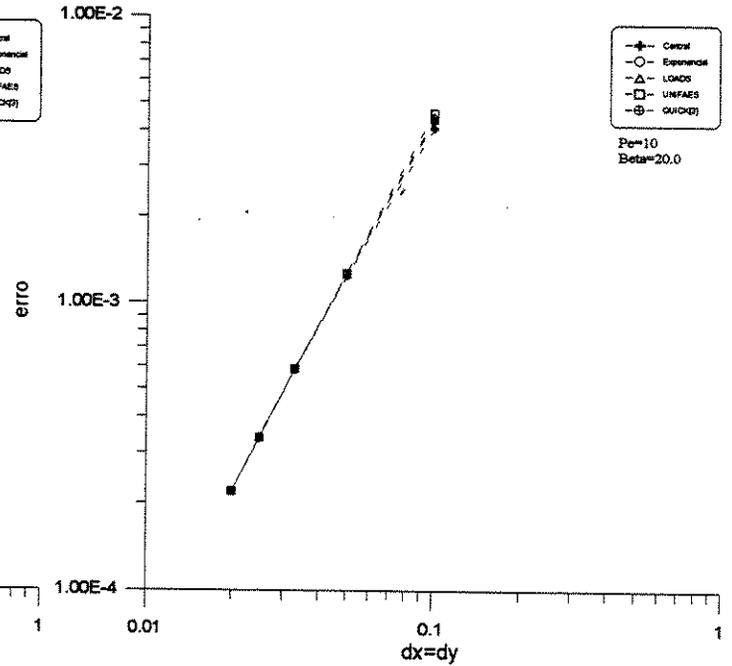


Figura 4.58: Erro numérico
escoamento rotacional como sólido
malha generalizada tipo 1, $Pe=10$, $\beta=20^\circ$

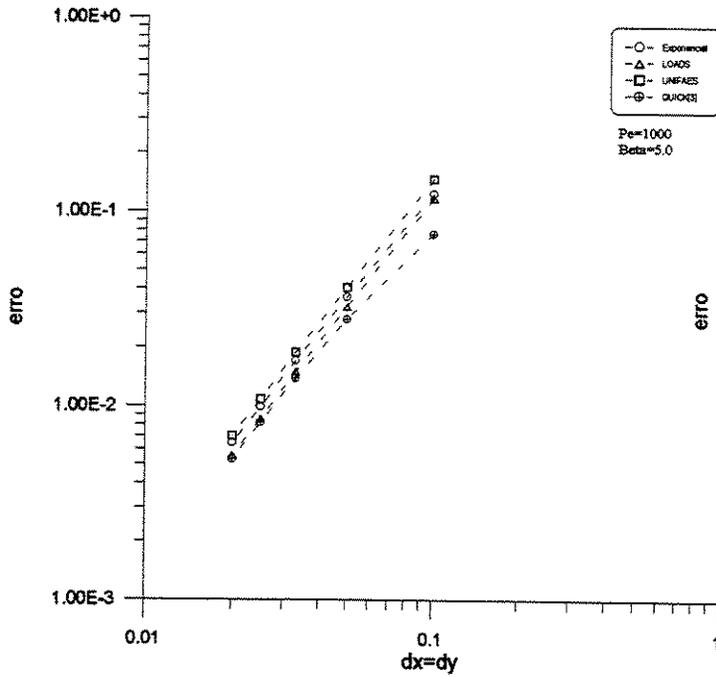


Figura 4.59: Erro numérico
escoamento rotacional como sólido
malha generalizada Tipo 1, $Pe=10^3$, $\beta=5^\circ$

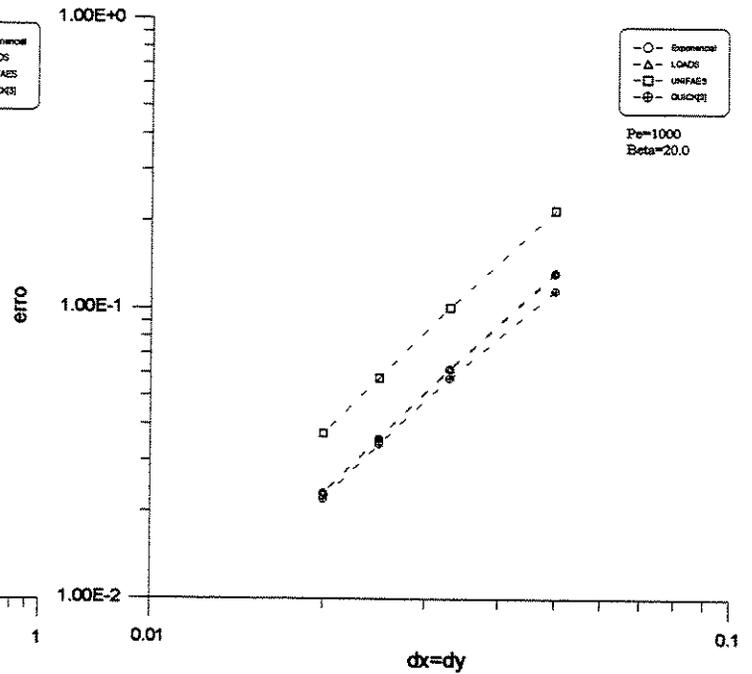


Figura 4.60: Erro numérico
escoamento rotacional como sólido
malha generalizada Tipo 1, $Pe=10^3$, $\beta=20^\circ$

Para avaliação da influência variação de β no comportamento numérico dos esquemas, foi considerada uma faixa de ângulo de deformação como no caso de escoamento paralelo em malhas generalizadas.

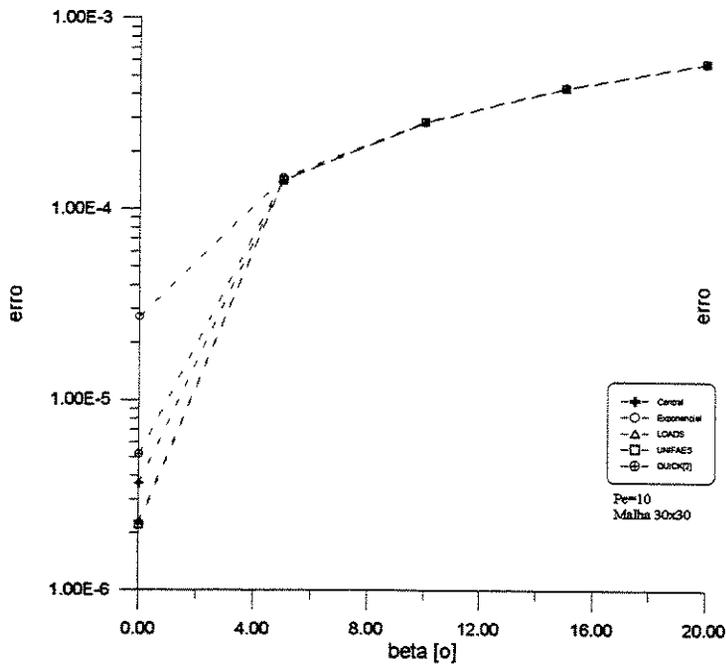


Figura 4.61: Influência da variação de β escoamento rotacional como sólido malha generalizada Tipo 1 Pe=10

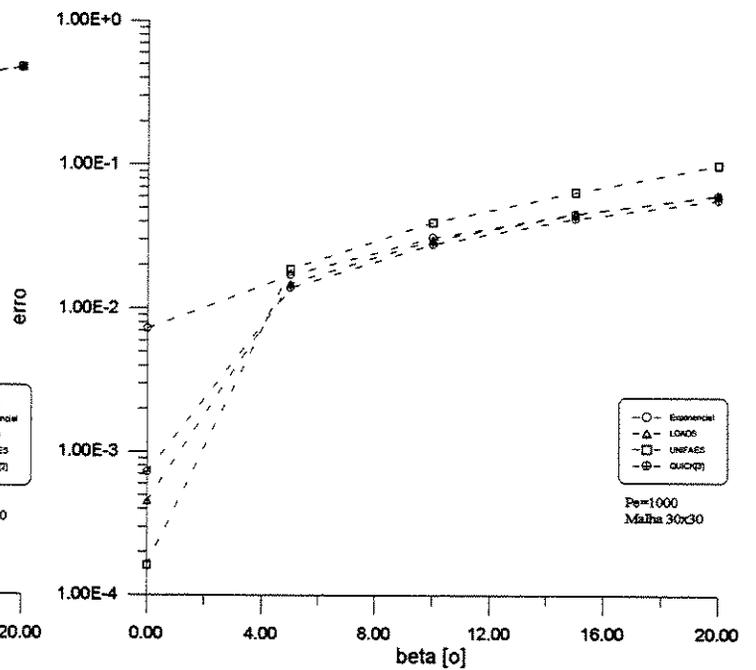


Figura 4.62: Influência da variação de β escoamento rotacional como sólido malha generalizada Tipo 1 Pe=10³

Os resultados a seguir, foram obtidos utilizando-se a malha generalizada Tipo 2. Ao contrário da malha tipo 1, esta malha não sofre deformação adicional nos volumes de controle, pois ela é ajustada ao domínio de cálculo. Os resultados apresentados abrangem valores de baixo e médio números de Pe.

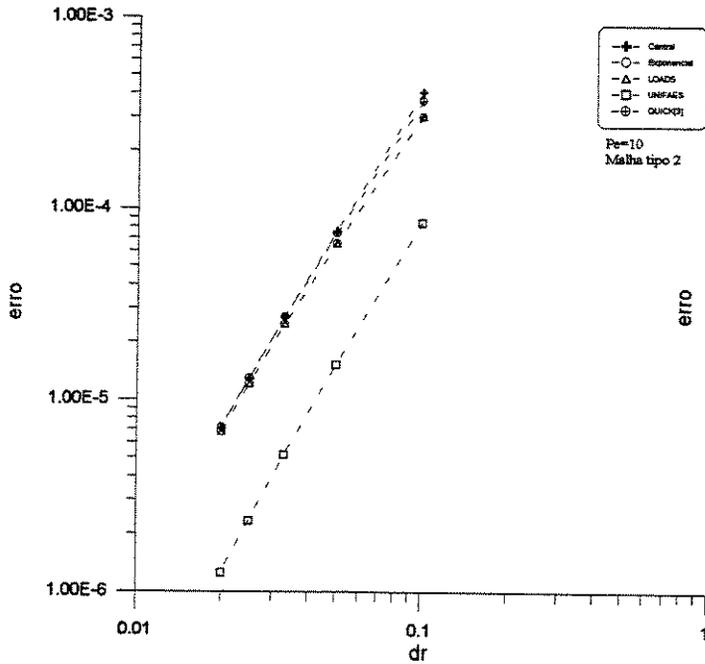


Figura 4.63: Erro numérico escoamento rotacional como sólido malha generalizada Tipo 2, $Pe=10$

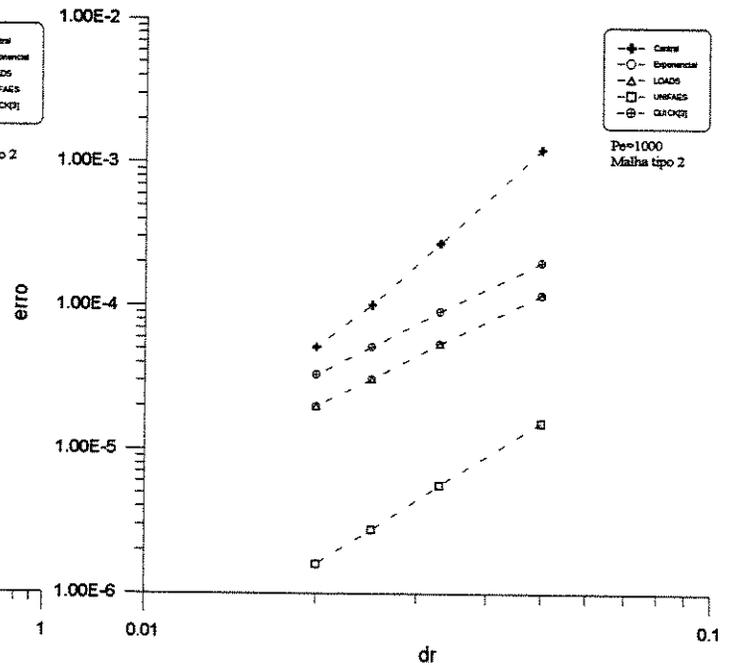


Figura 4.64: Erro numérico escoamento rotacional como sólido malha generalizada Tipo 2, $Pe=10^3$

Comentários

Foi observado neste problema teste que quando utilizada a malha generalizada tipo 1, praticamente não houve uma significativa diferença entre os resultados obtidos pelos esquemas testados para os casos de baixo Peclet, tanto para baixo quanto para altos valores de β . Assim que foi elevado o Peclet, houve então um distanciamento relativo entre as curvas dos erros dos esquemas, sendo estas mais evidenciadas para no caso de maior valor de β . Foi observado também no caso mais crítico, que o esquema UNIFAES foi o que piores resultados apresentou. Este comportamento do esquema UNIFAES não foi observado em nenhum dos testes até aqui realizados, mas observando o comportamento dos esquemas quanto a sua influência pela variação do ângulo β , foi observado que o esquema UNIFAES como no caso de transporte convectivo-difusivo em escoamento paralelo utilizando malhas generalizadas novamente se apresentou como sendo o esquema que maior influência sofre com a variação do ângulo β , e que o esquema Exponencial simples novamente se apresenta como o que menor influência sofre. Quanto ao esquema QUICK, este se manteve na média de comportamento entre os demais.

Para o caso de malha generalizada tipo 2, observou-se que o comportamento dos esquemas numéricos é bem distinto do caso anterior. O esquema UNIFAES se destaca em relação aos demais mesmo no caso de baixo número de Peclet, e se torna bem evidente para o caso de alto número de Peclet.

Pode-se então verificar que como no caso da malha tipo 1 com baixo valor de β onde teríamos volumes de controle com geometrias mais próximas de um retângulo, no caso da malha tipo 2 os volumes de controle também se aproximam da forma geométrica de um retângulo, o que consequentemente a construção da malha terá uma pouca influência nos resultados do esquema UNIFAES.

Capítulo 5

Resultados obtidos para equações de Navier-Stokes

5.1 Introdução

O capítulo 5 foi reservado para apresentação e discussão dos resultados obtidos para os casos testes para equações de Navier-Stokes. Os critérios de convergência utilizados foram os mesmos apresentados para os casos lineares, capítulo 4. Como testes não-lineares foram escolhidos dois casos clássicos que são facilmente encontrados na literatura como uma forma de avaliação de esquemas numéricos: Escoamento em cavidade e escoamento em canal divergente gradual. Estes dois problemas foram tratados utilizando-se as formulações para coordenadas generalizadas das equações de Navier-Stokes e da continuidade.

5.2 Escoamento em cavidade inclinada

O problema de escoamento de fluido em cavidade retangular bidimensional tem sido largamente utilizado como forma de avaliação de métodos numéricos aplicados às equações de Navier-Stokes devido a simplicidade geométrica e a complexidade do escoamento.

Provavelmente o trabalho mais conhecido que envolve uma solução numérica deste problema é o trabalho de Ghia *et al* (1982), onde é aplicado o método *multigrid* para solução das equações de Navier-Stokes para altos números de Re. A solução obtida por Ghia é considerada como solução de referência para outros autores, devido à qualidade dos resultados, ao método e ao refinamento da malha utilizados. No estudo realizado por Ghia *et al* (1982) foi considerado um problema em coordenadas cartesianas bidimensional, e com a difusão dos métodos numéricos para

coordenadas generalizadas, a utilização de um problema similar que é o do escoamento em cavidade inclinada também tem sido muito utilizado para avaliação dos métodos numéricos.

Este caso foi escolhido por ser um problema bastante tratado na literatura como teste para comparações e avaliações do comportamento de esquemas numéricos em coordenadas generalizadas. Choi *et al* (1993), Oosterlee e Ritzdorf (1996) e Wang e Komori (1999) entre outros, apresentam estudos referentes a utilização do método de interpolação de momento de Rhie e Chow para resolver o problema de campo alternado de pressão, acuidade e comportamento de esquemas numéricos de discretização e comparação entre várias formas de tratamento dos componentes da velocidade.

A geometria e as condições de contorno para este problema estão apresentadas nas figuras a seguir, bem como a malha utilizada.

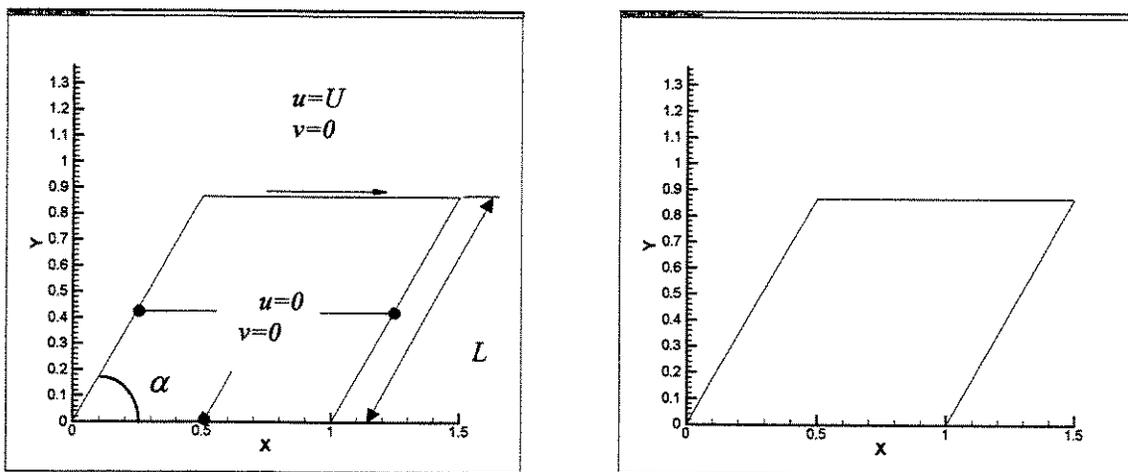


Figura 5.1: Geometria, condições de contorno e malha utilizadas para cavidade inclinada

Para todos os testes realizados, foi utilizado $Re=100$ como referência para cálculo, sendo este definido como:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

Os ângulos utilizados para teste foram: $\alpha=90^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ$ e 45° .

Aqui os resultados obtidos através do programa desenvolvido utilizando o esquema UNIFAES, foram comparados com resultados obtidos pelo pacote computacional Ansys, baseado no método dos elementos finitos. Foi utilizada uma malha com refinamento de 20x20 volumes nas fronteiras para os esquemas UNIFAES e QUICK, e uma malha com refinamento de 100x100 elementos quadrangulares com interpolação SUPG para velocidades e SU para pressão para a solução por elementos finitos.

Em alguns casos foram realizados testes utilizando uma malha mais refinada com 40x40 volumes de controle, para que fosse registrada e observada a convergência do campo de pressão, que para estes respectivos casos a solução obtida com a malha 20x20 não foi satisfatória.

A seguir serão apresentados como resultados os perfis das componentes da velocidade e pressão nas linhas de centro horizontal e vertical da cavidade.

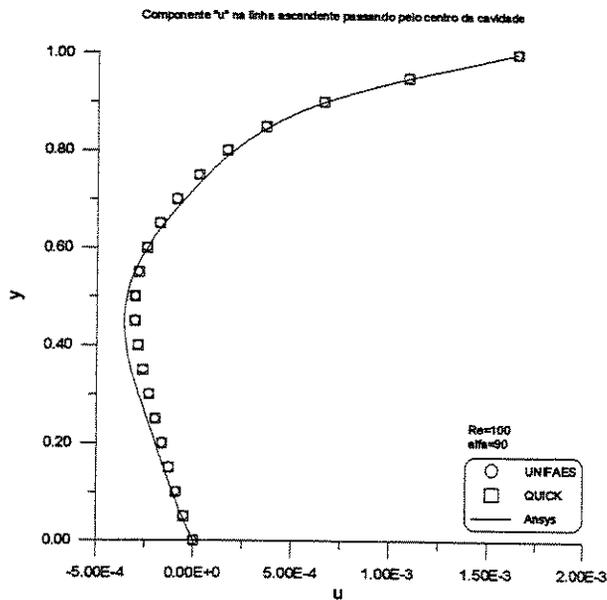


Figura 5.2: Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

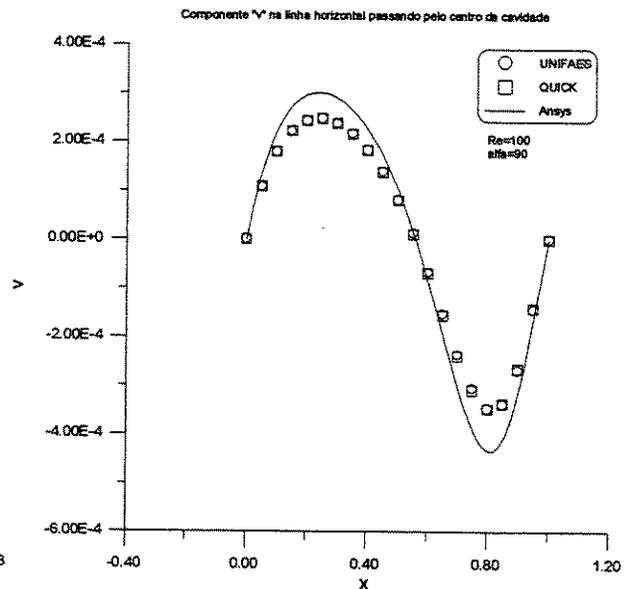


Figura 5.3: Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

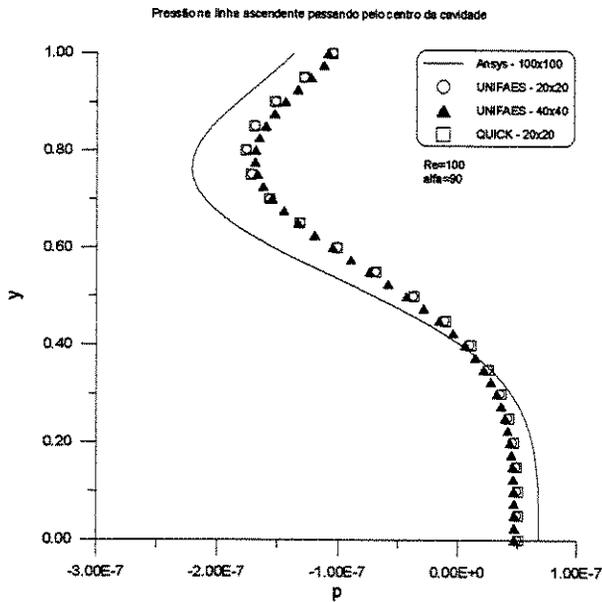


Figura 5.4: Pressão na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

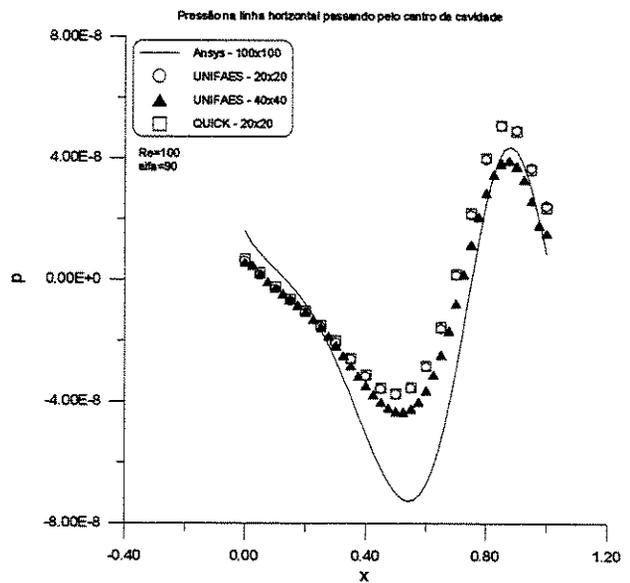


Figura 5.5: Pressão na linha de centro horizontal $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

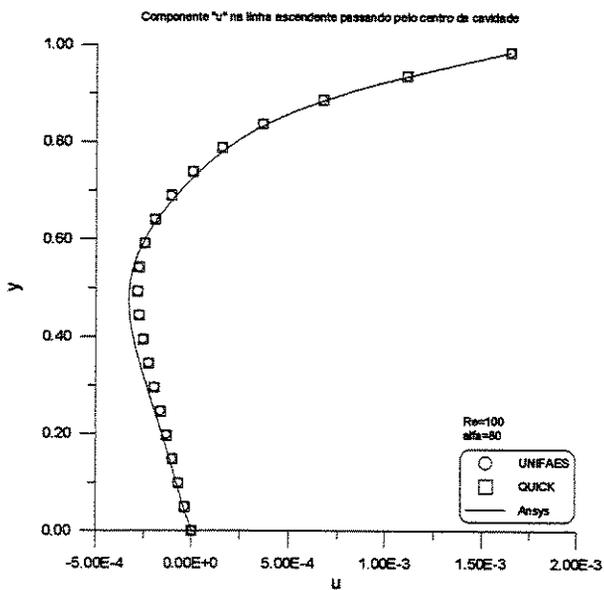


Figura 5.6: Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

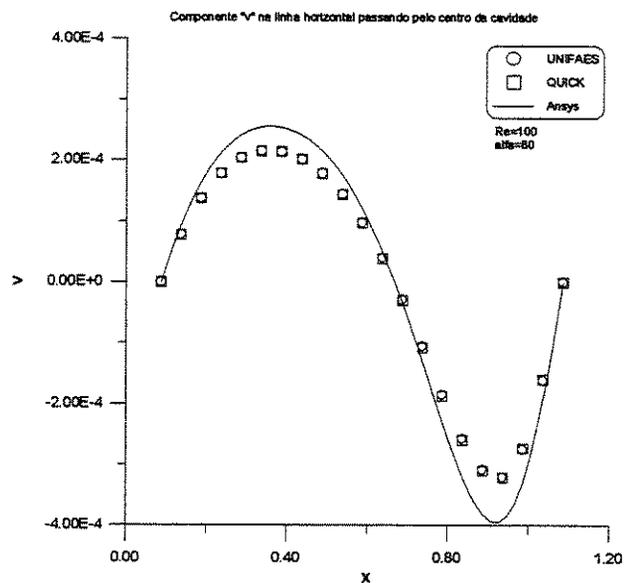


Figura 5.7: Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

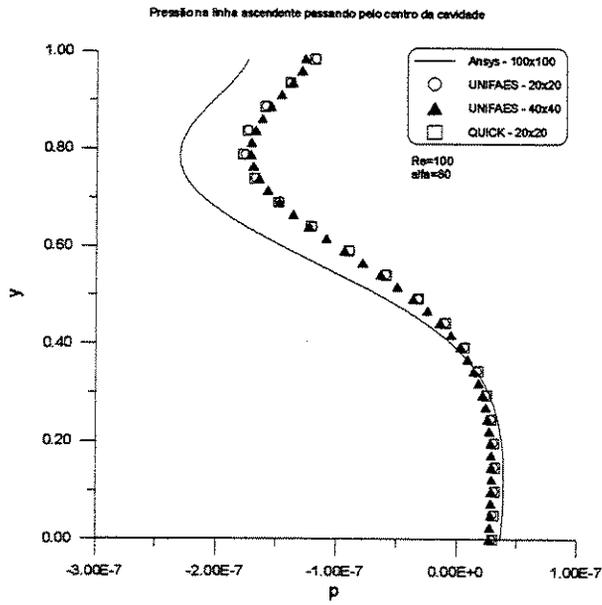


Figura 5.8: Pressão na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

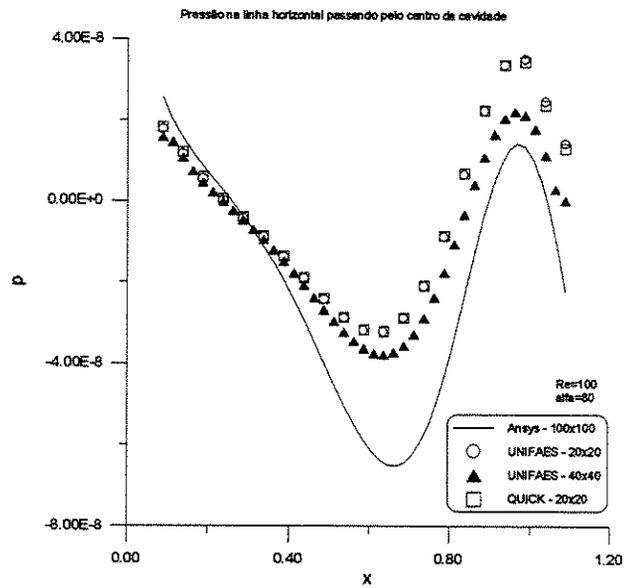


Figura 5.9: Pressão na linha de centro horizontal $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

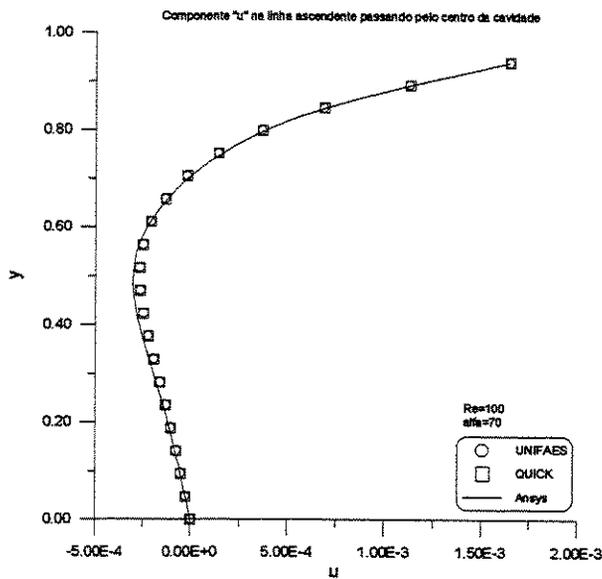


Figura 5.10: Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

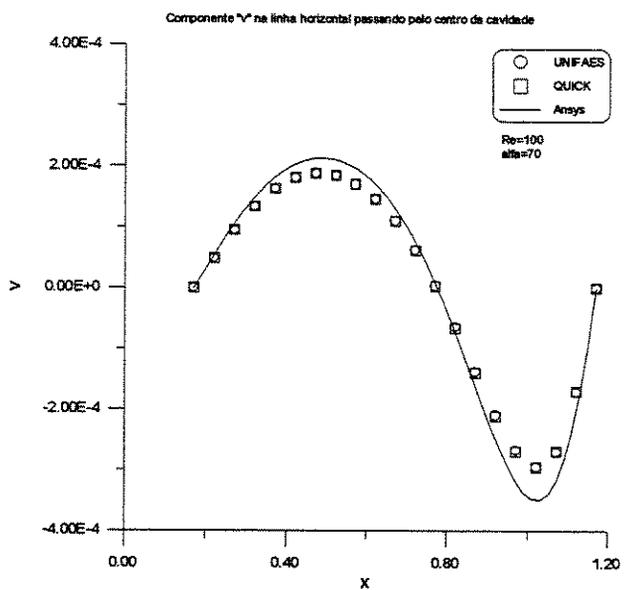


Figura 5.11: Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

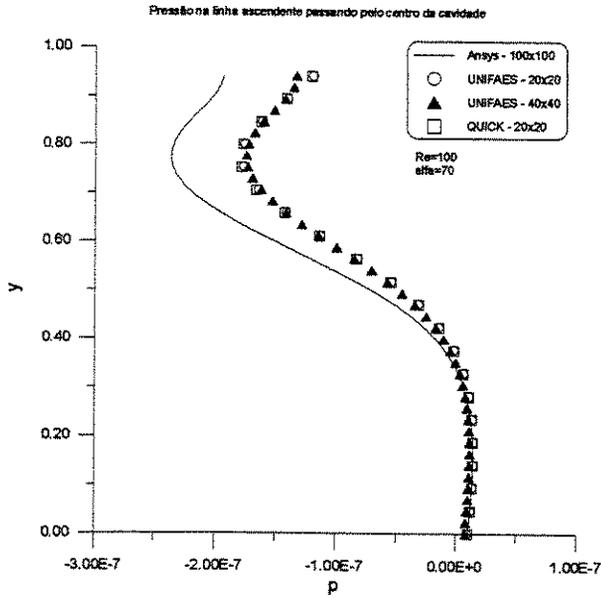


Figura 5.12: Pressão na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

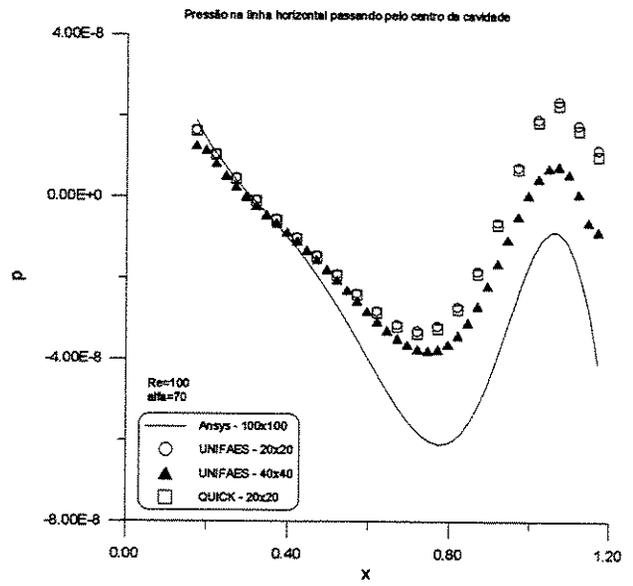


Figura 5.13: Pressão na linha de centro horizontal $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

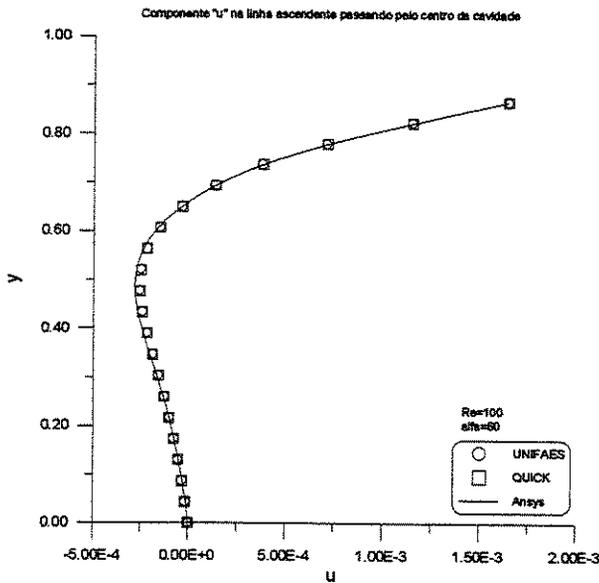


Figura 5.14: Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

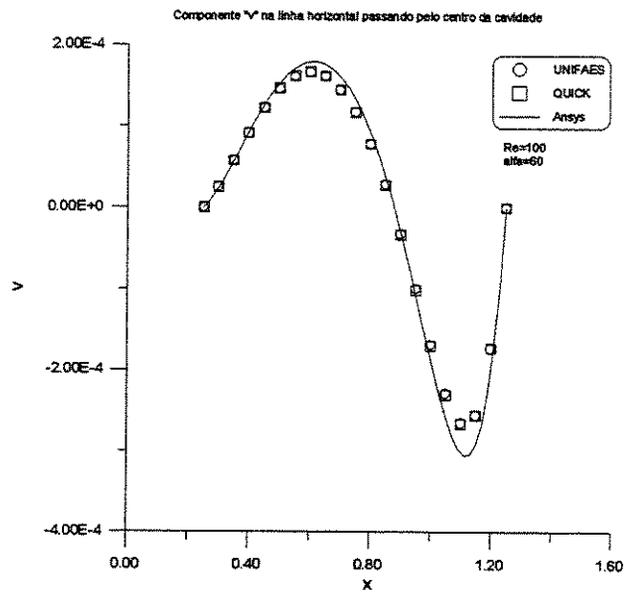


Figura 5.15: Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

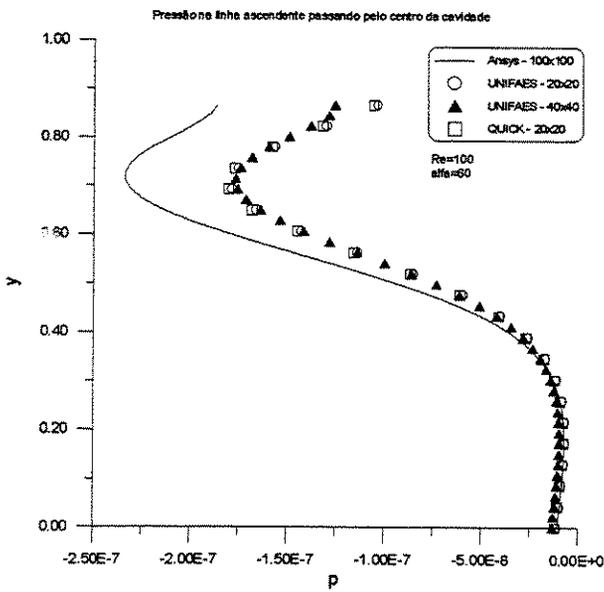


Figura 5.16: Pressão na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

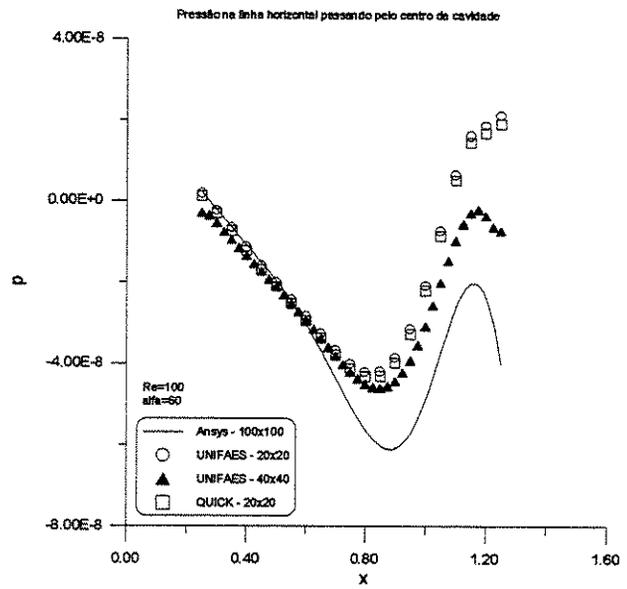


Figura 5.17: Pressão na linha de centro horizontal $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

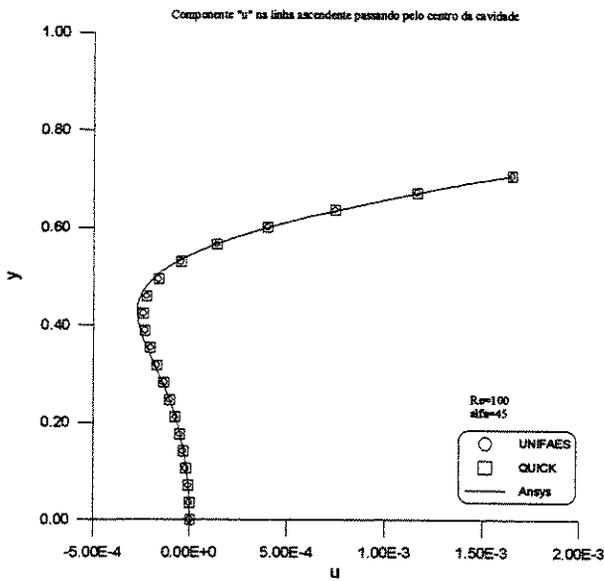


Figura 5.18: Componente 'u' na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

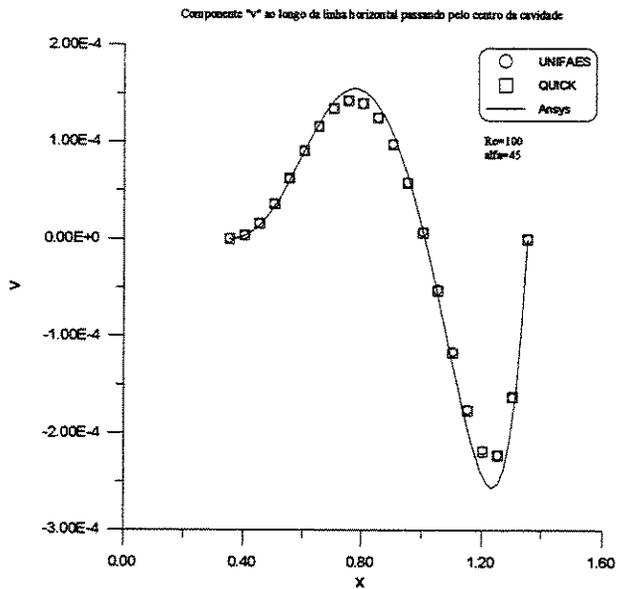


Figura 5.19: Componente 'v' na linha de centro horizontal, $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

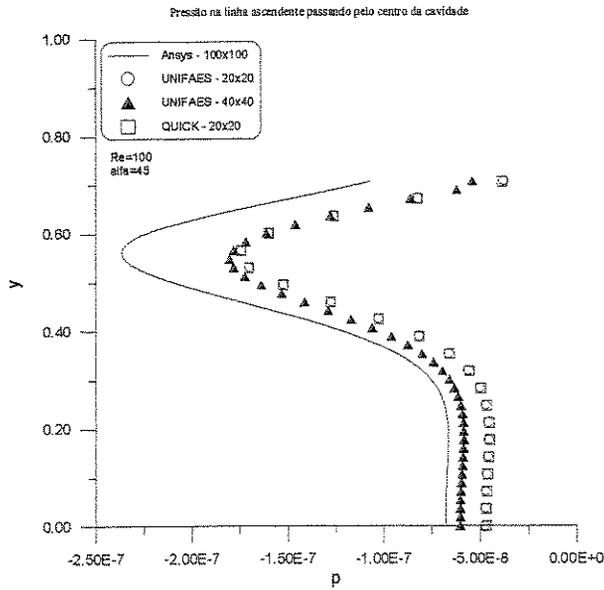


Figura 5.20: Pressão na linha de centro vertical, $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

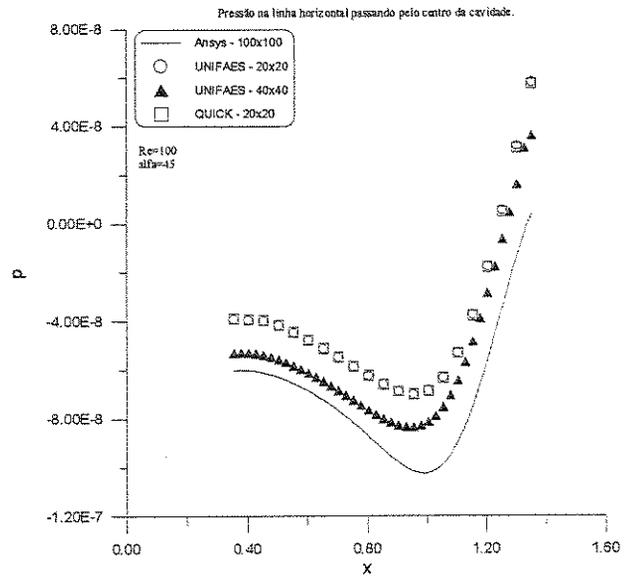


Figura 5.21: Pressão na linha de centro horizontal $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

Os gráficos a seguir, mostram o histórico da convergência para cada variável calculada no escoamento. O resíduo foi calculado da mesma forma que para os casos testes lineares, equação 4.1

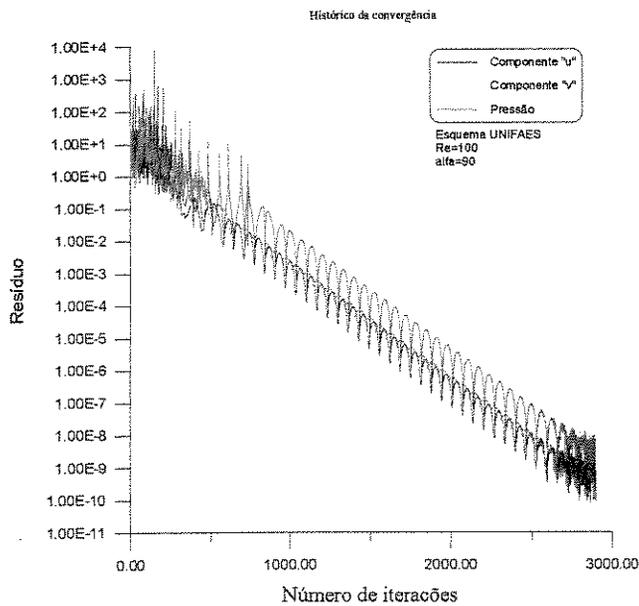


Figura 5.22: Histórico da convergência Esquema UNIFAES – $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

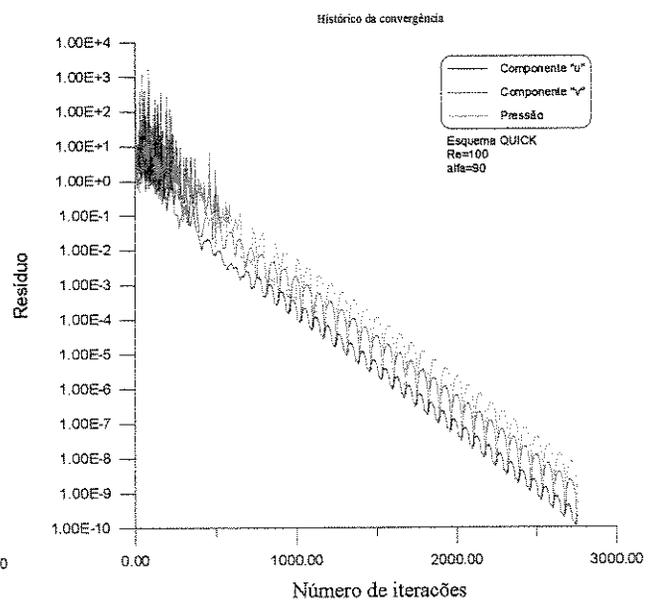


Figura 5.23: Histórico da convergência Esquema QUICK – $Re=100$, $\alpha=90^\circ$

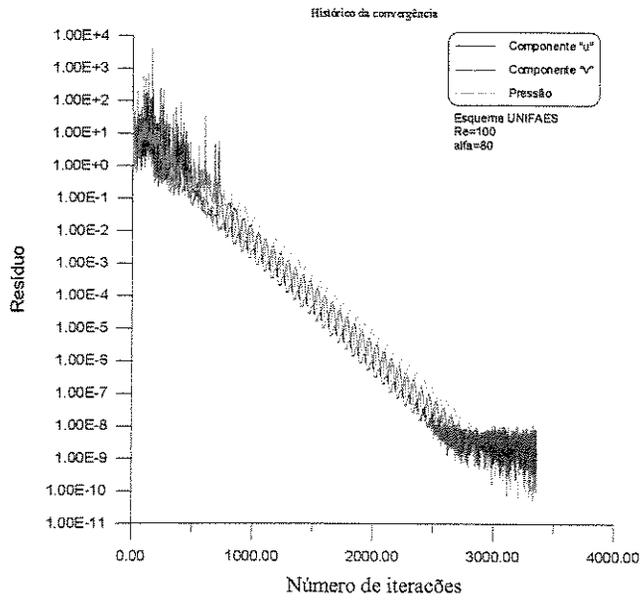


Figura 5.24: Histórico da convergência
Esquema UNIFAES – $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

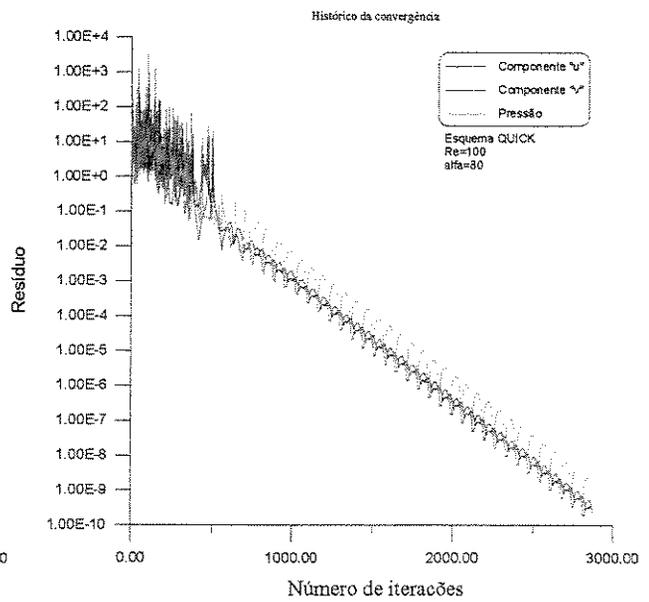


Figura 5.25: Histórico da convergência
Esquema QUICK – $Re=100$, $\alpha=80^\circ$

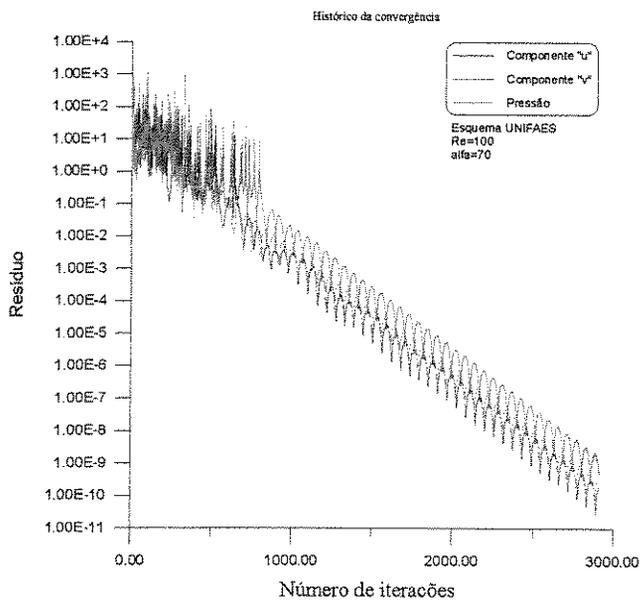


Figura 5.26: Histórico da convergência
Esquema UNIFAES – $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

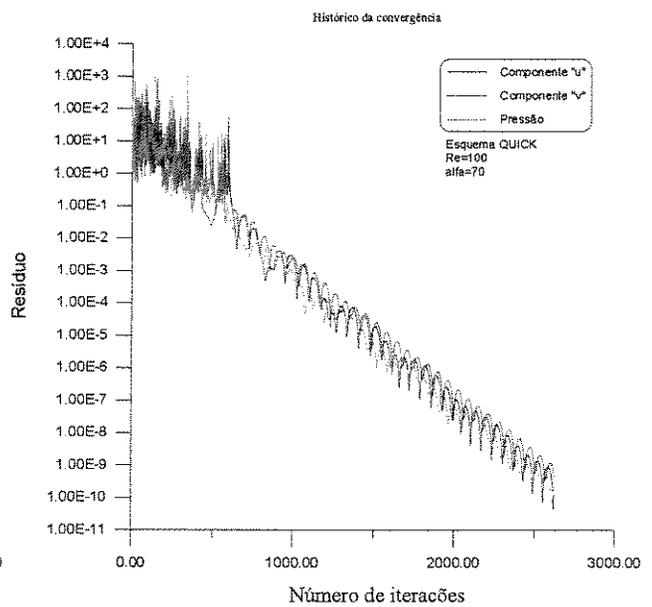


Figura 5.27: Histórico da convergência
Esquema QUICK – $Re=100$, $\alpha=70^\circ$

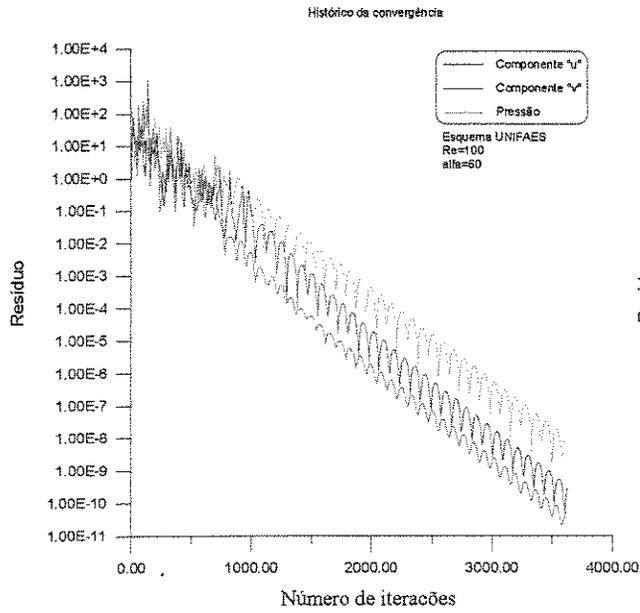


Figura 5.28: Histórico da convergência
Esquema UNIFAES – $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

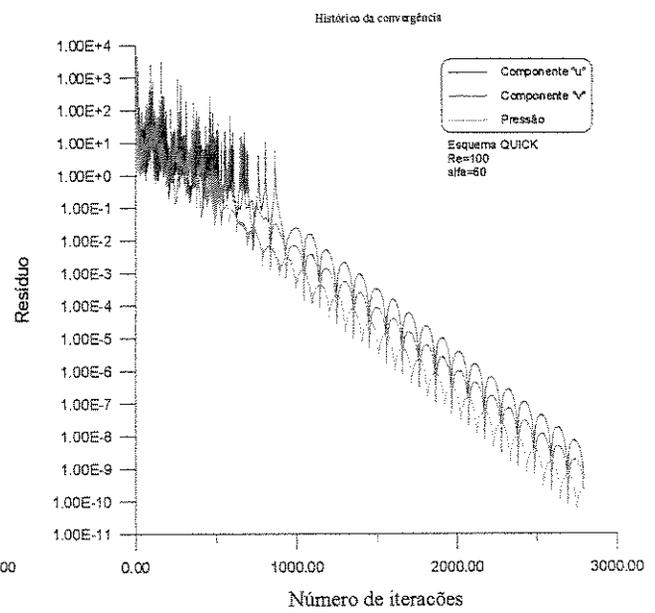


Figura 5.29: Histórico da convergência
Esquema QUICK – $Re=100$, $\alpha=60^\circ$

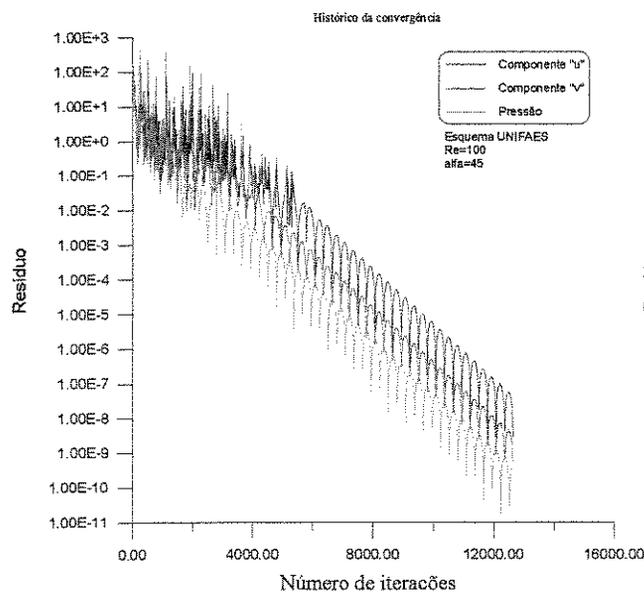


Figura 5.30: Histórico da convergência
Esquema UNIFAES – $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

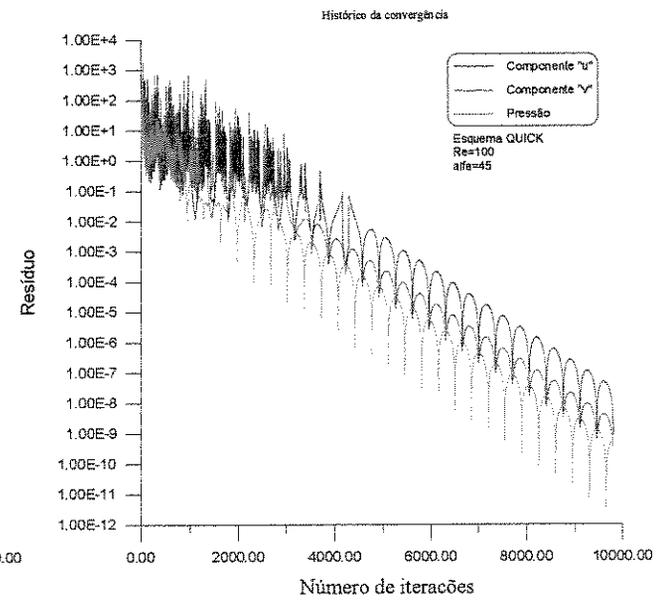


Figura 5.31: Histórico da convergência
Esquema QUICK – $Re=100$, $\alpha=45^\circ$

Comentários

Os resultados obtidos pelos esquemas UNIFAES e QUICK para este problema são bem próximos, não havendo quase que nenhuma distinção entre eles, tanto para as componentes da velocidade quanto para a distribuição de pressão.

Analisando os gráficos do histórico da convergência, observou-se também comportamentos semelhantes entre os esquemas, mas com uma pequena vantagem para o esquema QUICK em relação à velocidade para os casos de maior ângulo α da cavidade. Este fato, reforça o que foi relatado em testes anteriores em relação a sensibilidade do esquema UNIFAES às deformações locais dos volumes de controle. Temos que quanto maior o ângulo α da cavidade, os volumes de controle estarão se afastando cada vez mais da forma geométrica de um volume retangular e com isto o comportamento do esquema UNIFAES foi sensivelmente influenciado, fato que foi revelado na velocidade de convergência.

Os gráficos de distribuição de pressão no interior da cavidade, mostraram que a interpolação sugerida por Rhie e Chow realmente soluciona o problema do campo alternado de pressão. Como foi dito no início do capítulo 5, para alguns casos foram necessários novos testes com malhas mais refinadas porque os resultados iniciais obtidos para o campo de pressão com a malha padrão não foram considerados satisfatórios tanto qualitativamente quanto quantitativamente. A realização destes novos testes com malhas mais refinadas demonstrou que há uma tendência da solução por volumes finitos de se aproximar da solução obtida por elementos finitos, o que sugere que as formulações e os algoritmos construídos estão corretos.

5.3 escoamento de fluido em canal divergente gradual

Para avaliação dos métodos computacionais aplicados à solução das equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas muitos problemas testes tem sido utilizados ao longo do tempo. O problema proposto aqui como mais um campo para avaliação do esquema UNIFAES para solução das equações de Navier-Stokes é o problema de escoamento de fluido em regime laminar em canal divergente gradual, que foi primeiramente proposto por Napolitano e Orlandi (1985) onde o domínio consiste em um canal divergente onde a geometria é dependente do número de Reynolds

segundo a equação (5.1) e é considerado um perfil de velocidades desenvolvido na entrada segundo a equação (5.2).

$$y|_{\text{parede}} = 0.5(\tanh(2 - 30x/\text{Re}) - \tanh(2)) \quad (5.1)$$

$$u|_{\text{entrada}} = 3y(1 - 0.5y) \quad (5.2)$$

onde:

$$0 \leq x \leq \frac{\text{Re}}{3}$$

O número de Reynolds é definido para o problema como:

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

onde:

U é a velocidade média na seção de entrada

L é a altura da seção.

A geometria, condições de contorno e a malha utilizada para o problema estão apresentadas nas figuras 5.32 e 5.33 a seguir.

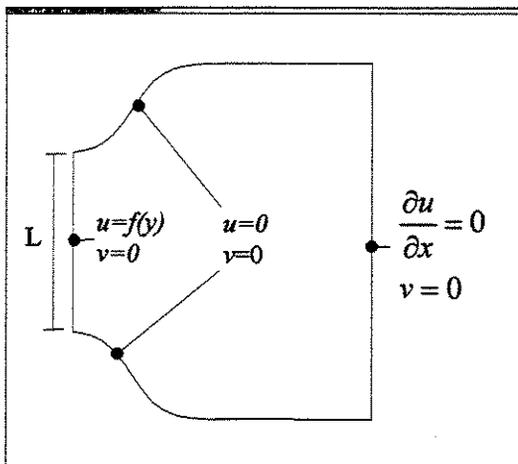


Figura 5.32: Geometria e condições de contorno para escoamento em canal divergente gradual

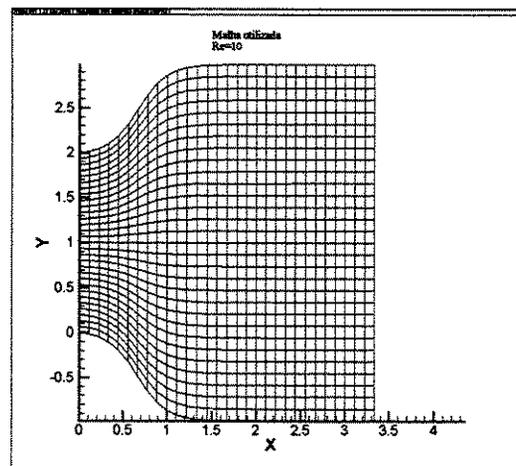


Figura 5.33: Malha utilizada para simulação em volumes finitos para canal divergente gradual

O problema do canal divergente gradual foi primeiramente resolvido por Napolitano e Orlandi (1985) e tem sido utilizado como referência para comparação dos métodos numéricos em coordenadas generalizadas. Autores como Xu e Zhang (2000), Melaaen (1992), Choi *et al* (1993) entre outros, utilizam as soluções de Napolitano para comparações em seus testes. Para o presente estudo, foi considerado o caso de $Re=10$ por ser o mais utilizado pelos autores citados.

A seguir estão plotadas as soluções obtidas pelos esquemas UNIFAES e QUICK para o campo de linhas de corrente e pressão.

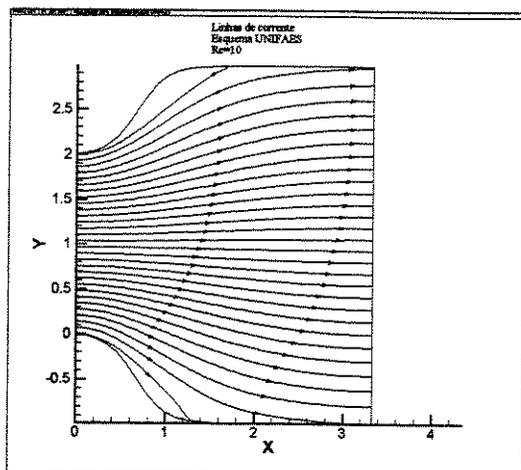


Figura 5.34: Canal divergente gradual
Linhas de corrente $Re=10$ – UNIFAES

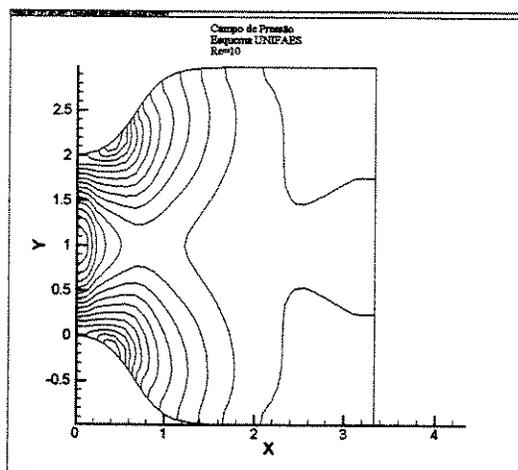


Figura 5.35: Canal divergente gradual
Isobáricas $Re=10$ – UNIFAES

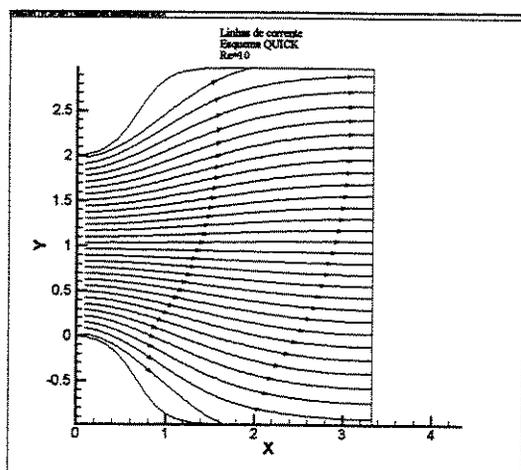


Figura 5.36: Canal divergente gradual
Linhas de corrente $Re=10$ – QUICK

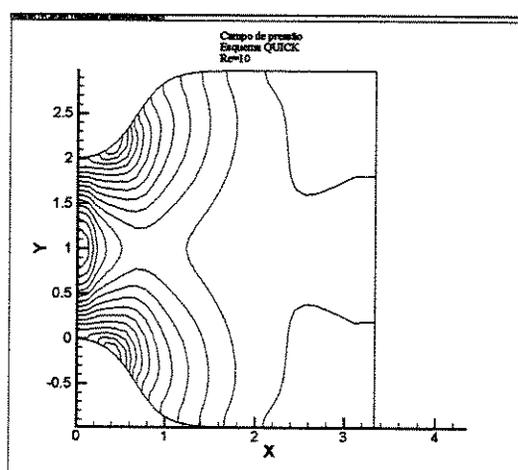


Figura 5.37: Canal divergente gradual
Isobáricas $Re=10$ – QUICK

A distribuição da pressão na parede do canal é apresentada no gráfico da figura 5.38

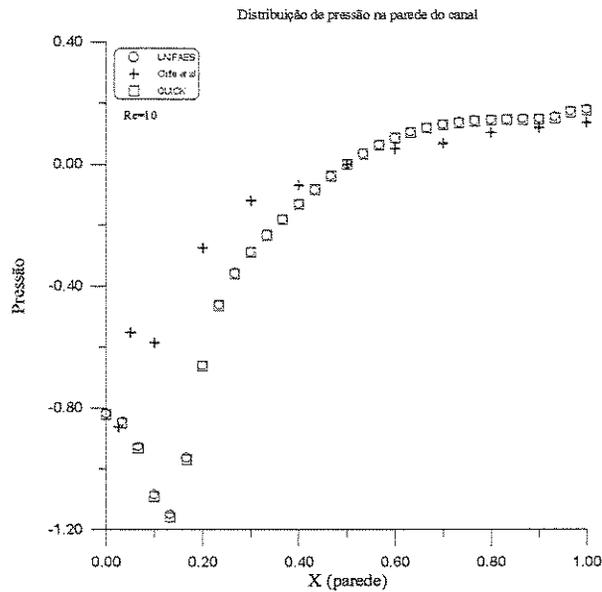


Figura 5.38: Distribuição de pressão na parede do canal divergente

Os gráficos a seguir, mostram o histórico da convergência para cada variável calculada no escoamento e o resíduo foi calculado da mesma forma apresentada para os casos testes lineares.

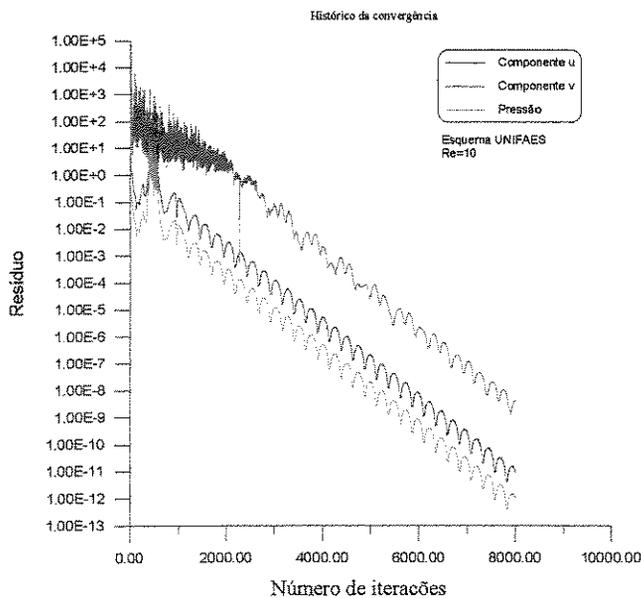


Figura 5.39: Histórico da convergência
Canal divergente, Re=10 - UNIFAES

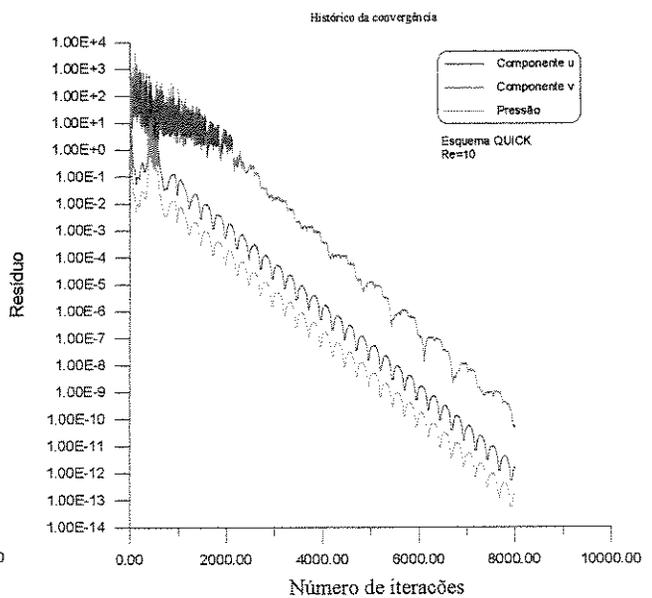


Figura 5.40: Histórico da convergência
Canal divergente, Re=10 - QUICK

Comentários

No problema de escoamento laminar em canal divergente gradual, nos trabalhos já realizados sobre o assunto, a distribuição da pressão nas paredes do canal é sempre observada como forma de avaliação da qualidade dos resultados obtidos numericamente.

As figuras mostrando os quatro primeiros resultados para as linhas de corrente e distribuição de pressão para os esquemas QUICK e UNIFAES comparativamente não apresentam nenhuma diferença visível, e em particular para os gráficos da distribuição da pressão assim como no caso de escoamento em cavidade inclinada não houve o aparecimento do campo alternado de pressão, indicando novamente que a utilização do esquema de Rhie e Chow realmente elimina essa possibilidade de se obter um campo alternado. Pelo gráfico da distribuição da pressão na parede, observou-se que entre os esquemas QUICK e UNIFAES não houve praticamente nenhuma diferença tanto quantitativa quanto qualitativa. Os resultados obtidos pelos esquemas UNIFAES e QUICK para distribuição da pressão nas paredes do canal foram comparados com os resultados obtidos por Kaki e Patankar (1988).

Em relação a convergência numérica, observou-se que não há também diferenças significativas nos resultados para os esquemas QUICK e UNIFAES. Os dois esquemas atingem a convergência praticamente com o mesmo número de iterações.

Capítulo 6

Comentários e conclusões gerais

Em todos os casos estudados, tanto os lineares quanto nas equações de Navier-Stokes, na implementação numérica do esquema QUICK e seus derivados, foi necessário um tratamento especial para os pontos provenientes das expressões de interpolação quando aplicadas nas fronteiras e que eventualmente estariam fora das fronteiras do domínio estudado. Este tratamento se deu de duas formas distintas: primeiro aplicando o valor da solução analítica quando disponível à estes pontos e segundo aplicando uma discretização local nas fronteiras utilizando os esquemas Central ou a Montante. Em todos os casos estudados não foram observadas diferenças significativas tanto qualitativas quanto quantitativas nos cálculos dos erros das soluções numéricas quando comparados os diferentes métodos de discretização nas fronteiras, por esta razão foi adotada como padrão a discretização pelo esquema Central nas fronteiras para os casos onde não são possíveis obter-se soluções analíticas.

De um modo geral para os problemas lineares observou-se que o esquema Exponencial simples foi o esquema que mais rapidamente atingia a convergência numérica, mas por outro lado o seu comportamento quanto ao erro cometido em relação às soluções analíticas foi um tanto variado, ora se apresentando como o melhor esquema e ora como o pior. Já os esquemas QUICK e UNIFAES apresentaram um comportamento mais regular, sempre se apresentando como um dos melhores esquemas para todos os casos testes estudados, e em relação de um ao outro, também sempre houve uma proximidade dos resultados obtidos.

Em particular aos casos lineares com malhas generalizadas irregulares pode-se apresentar após uma análise dos resultados, comentários e conclusões. Observou-se nos gráficos apresentados

uma variação do erro da aproximação numérica com o valor do ângulo β definido como uma deformação local do volume de controle, e que esta variação foi menor para o esquema Exponencial e maior para o esquema UNIFAES. Uma indicação para justificativa para este comportamento pode ser o fato de que no caso dos esquema de base exponencial as curvas interpolantes são ajustadas às linhas coordenadas, mas entre os esquemas Exponencial, LOADS e UNIFAES a diferença está na forma que é calculado o termo k , que indica ser o ponto diferencial que está em função do jacobiano da transformação geométrica presente na formulação. No esquema Exponencial tem-se que $k=0$, então a influência do jacobiano estaria minimizada, já para os esquemas LOADS e UNIFAES o cálculo do termo k é dependente do jacobiano, sendo menos sensível no esquema LOADS, que pode ser atribuído à presença de um termo a mais na formulação.

Já para os demais esquemas, a influência do jacobiano estaria mais presente na formulação geral das equações governantes do problema. Isto explicaria a melhor acuidade nos resultados do esquema UNIFAES a medida que o valor de β vai diminuindo, ou seja, a forma geométrica do volume de controle físico estaria mais próximo geometricamente de um volume de controle transformado e com isto o jacobiano da transformação será mais corretamente avaliado, e isto pôde ser observado nos resultados para malhas regulares.

É importante ressaltar que uma malha com a configuração da malha Tipo 1 utilizada nos casos lineares com malhas generalizadas, dificilmente será construída na prática. Este tipo de malha é propositalmente construída desta forma para o estudo do comportamento numérico dos esquemas discretizantes, como sugerem Braaten e Shyy (1986), Verma e Eswaran (1996) e Shyy *et al*(1998).

Foi observado nos testes realizados para os casos testes em coordenadas generalizadas que a avaliação das derivadas envolvidas nas transformações geométricas é muito importante para a qualidade dos resultados. Por esta razão são utilizadas as expressões para derivadas centradas para os nós internos da malha e derivadas de segunda ordem para os nós pertencentes às fronteiras como descrito em Hämmerlin e Hoffman (1989).

Para as equações de Navier-Stokes os resultados obtidos pelos esquemas QUICK e UNIFAES são bem próximos um do outro, sendo as maiores diferenças evidenciadas nos gráficos

do histórico da convergência para os casos de maior ângulo α para cavidade inclinada. Pela proximidade dos resultados para as componentes da velocidade e pressão obtidos pelos esquemas QUICK e UNIFAES em relação as soluções obtidas por elementos finitos, podemos observar a qualidade destes esquemas considerando que para solução por elementos finitos foram utilizadas malhas de 100x100 elementos contra malhas de 20x20 e 40x40 volumes de controle na formulação por volumes finitos.

A escolha da utilização de malhas colocadas foi considerada satisfatória pois analisando o algoritmo computacional desenvolvido relativamente simples, foram conseguidos bons resultados devido a utilização do esquema de interpolação sugerido por Rhie e Chow.

6.1 Propostas para trabalhos futuros

O esquema UNIFAES nos últimos anos tem sido aplicado a vários tipos de soluções para avaliação de seu comportamento, dentre elas algumas apresentadas neste trabalho. Como esquema numérico, é importante que se faça uma completa avaliação de quais são os campos de soluções onde poderá ser aplicado vantajosamente em relação aos esquemas mais utilizados. Além dos campos estudados apresentados neste trabalho, Figueiredo e Llagostera (1999) e Llagostera e Figueiredo (2000) também avaliaram o comportamento deste esquema em problemas de convecção natural e mista em meios porosos onde obtiveram bons resultados, o que amplia o campo de aplicações do esquema UNIFAES. Alguns outros campos de soluções que ainda podem ser tratados estão relacionados a seguir:

- > Problemas envolvendo fenômenos de convecção natural
- > Problemas em regime turbulento
- > Discretização em malhas não estruturadas
- > Avaliação mais detalhada da influência da convergência numérica com os valores dos índices de relaxação para velocidades e pressão na solução das equações de Navier-Stokes.
- > Utilização de outros algoritmos de acoplamento velocidade-pressão.

Referências Bibliográficas

A. K. Runchal; **“Convergence and Accuracy of Three Finite Difference Schemes for a Two-Dimensional Conduction and Convection Problem”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 4, pp. 541-550, 1972.

A. K. Verma and V. Eswaran; **“Overlapping Control Volume Approach for Convection-diffusion Problems”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 23, pp. 865-882, 1996.

A. K. Verma and V. Eswaran; **“An Overlapping Control Volume Method for Navier-Stokes Equations on Non-Staggered Grids”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 30, pp. 279-308, 1999.

A. N. Brooks; **“Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, pp. 199-259, 1982.

A. W. Date; **“Solution of Navier-Stokes Equations on Nonstaggered Grid at All Speeds”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 33, pp. 451-467, 1998.

B. P. Leonard and J. E. Drummond; **“Why Should You Not Use Hybrid, Power-Law or Related Exponential Schemes for Convective Modelling-There Are Much Better Alternatives”**, pp. 421-442, 1995.

B. P. Leonard and S. Mokhtari; **“Beyond First-Order Upwinding the ULTRA-SHARP Alternative for Nonoscillatory Steady-State Simulation of Convection”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp. 729-766, 1990.

B. P. Leonard and S. Mokhtari; **“Beyond First-Order Upwinding: The ULTRA-SHARP Alternative for Non-Oscillatory Steady-State Simulation of Convection”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp. 729-766, 1990.

B. P. Leonard; **“A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 19, pp. 59-98, 1979.

B. R. Baliga and S. V. Patankar; **“A New Finite Element Formulation for Convection-Diffusion Problems”**, Numerical Heat Transfer, vol. 03, pp. 393-410, 1980.

C. A. A. Vilela e J. R. Figueiredo; **“Avaliação de Esquemas de Discretização Numérica para Equação de Transporte Convectivo-Difusivo”**, Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE 2000, 2000.

C. M. Rhie and W. L. Chow; **“Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation”**, AIAA Journal, vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.

C. Prakash; **“Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection-Diffusion Equation”**, Numerical Heat Transfer, vol. 07, pp.165-182, 1984.

C. R. Maliska; **“Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”**, LTC Livros Técnicos e Científicos, 1995.

C. Taylor and T. G. Hughes; **“Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations”**, Pineridge Press Swansea, 1981.

- C. W. Oosterlee and H. Ritzdorf; **“Flux Difference Splitting for Three-Dimensional Steady Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Co-Ordinates”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 23, pp. 347-366, 1996.
- D. B. Spalding; **“A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 04, pp.551, 1972.
- E. Kreyszig; **“Advanced Engineering Mathematics”**, Seventh Edition, John Wiley & Sons, 1993.
- F. C. Thames, J. F. Thompson, C. W. Mastin and R. L. Walker; **“Numerical Solutions for Viscous and Potential Flow About Arbitrary Two-Dimensional Bodies Using Body-Fitted Coordinate System”**, Journal of Computational Physics, vol. 24, pp. 245-273, 1977.
- F. S. Lien and M. A. Leschziner; **“A General Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm for Turbulent Flow at All Speeds Incorporating Second-Moment Turbulent-Transport Closure”**, Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, vol. 114, pp. 123-148, 1994.
- G. Hämmerlin and K. Hoffmann; **“Numerical Mathematics”**, Springer-Verlag, 1989.
- G. Vradis, V. Zalak and J. Bentson; **“Simultaneous Variable Solutions of the Incompressible Steady Navier-Stokes Equations in General Curvilinear Coordinate Systems”**, Journal of Fluids Engineering, vol. 114, pp. 299-305, September, 1992.
- H. H. Wong and G. D. Raithby; **“Improved Finite-Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors”**, Numerical Heat Transfer, vol. 2, pp. 139-163, 1979.
- H. Q. Yang, S. D. Habchi and A. J. Przekwast; **“General Strong Conservation Formulation of Navier-Stokes Equations in Nonorthogonal Curvilinear Coordinates”**, AIAA Journal, vol. 32, n. 05, pp. 936-941, May 1994.

H. Xu and C. Zhang; **“Numerical Calculations of Laminar Flows using Contravariant Velocity Fluxes”**, Computers & Fluids, vol. 29, pp. 149-177, 2000.

H. Xu and C. Zhang; **“Study of the Effect of the Non-Orthogonality for Non-Staggered Grids - The Theory”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 28, pp. 1265-1280, 1998.

H. Xu and C. Zhang; **“Study of the Effect of the Non-Orthogonality for Non-Staggered Grids - The Results”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 29, pp. 625-644, 1999.

J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin; **“TOMCAT – A Code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies”**, Journal of Computational Physics, vol. 24, pp. 274-302, 1997.

J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi and C. W. Mastin; **“Numerical Grid Generation: Foundations and Applications”**, Elsevier Science Publishing Co., 1985.

J. Llagostera and J. R. Figueiredo; **“Application of the UNIFAES Discretization Scheme to Mixed Convection in a Porous Layer with a Cavity, Using the Darcy Model”**, Journal of Porous Media, vol. 03(2), pp. 139-154, 2000.

J. N. Reddy; **“An Introduction to the Finite Element Method”**, Second Edition, Mc. Graw Hill, 1993.

J. P. Van Doormaal and G. D. Raithby; **“Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows”**, Numerical Heat Transfer, vol. 17, pp. 147-163, 1984.

J. R. Figueiredo and J. Llagostera; **“Comparative Study of the Unified Finite Approach Exponential-Type Scheme (UNIFAES) and its Application to Natural Convection in a Porous Media”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 35, pp. 347-367, 1999.

J. R. Figueiredo; **“A Unified Finite-Volume Finite-Differencing Exponential-Type Scheme for Convective-Diffusive Fluid Transport Equations”**, Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol. 19, n. 03, pp. 371-391, 1997.

J. R. Figueiredo; **“Estudo Comparativo entre Esquemas Numéricos Conservativos e Não Conservativos para Equações de Transporte em Fluidos”**, Relatório de Atividades, CNPq, 1994.

K. C. Karki and S. V. Patankar; **“Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries”**, Numerical Heat Transfer, vol. 14, pp. 295-307, 1988.

K. W. Morton and D. F. Mayers; **“Numerical Solution of Partial Differential Equations : An Introduction”**, Cambridge University Press, 1994.

L. K. Mark, **“Numerical Analysis of Fluid Transport Phenomena”**, PhD Tesis, Imperial College of Science and Technology, 1983.

M. Braaten and W. Shyy; **“A Study of Recirculating Flow Computation Using Body-Fitted Coordinates: Consistency Aspects and Mesh Skewness”**, Numerical Heat Transfer, vol. 9, pp. 559-574, 1986.

M. C. Melaaen; **“Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids – The Theory”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 21, pp. 1-19, 1992.

M. C. Melaaen; **“Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids - A Comparison”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 21, pp. 21-39, 1992.

M. C. Sharatchandra and D. L. Rhode; **“New, Strongly Conservative Finite-Volume Formulation for Fluid Flows in Irregular Geometries Using Contravariant Velocity Components: Part 1, Theory”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 26, pp. 39-52, 1994.

- M. Char and Y. Hsu; **“Computation of Buoyancy-Driven Flow in an Eccentric Centrifugal Annulus with a Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 26, pp. 323-343, 1998.
- M. H. Kobayashi and J. C. F. Pereira; **“Calculation of Incompressible Laminar Flows on a Nonstaggered, Nonorthogonal Grid”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 19, pp. 243-262, 1991.
- M. J. Cho and M. K. Chung; **“New Treatment of Nonorthogonal Terms in the Pressure-Correction Equation”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 26, pp. 133-145, 1994.
- M. Napolitano, P. Orlandi; **“Laminar Flow in a Complex Geometry: A comparison”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1985, vol. 05, pp. 667-683.
- M. Peric, R. Kessler and G. Scheuerer; **“Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Collocated Grids”**, Computers & Fluids, vol. 16, n. 04, pp. 389-403, 1988.
- M. Peric; **“Analysis of Pressure-Velocity Coupling on Nonorthogonal Grids”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 17, pp. 63-82, 1990.
- M. Peric; **“Efficient Semi-Implicit Solving Algorithm for Nine-Diagonal Coefficient Matrix”**, Numerical Heat Transfer, vol. 11, pp. 251-279, 1987.
- M. W. Chang and B. A. Findlayson; **“Heat Transfer in Flow Past Cylinders at $Re < 150$: Part 1, Calculations for Constant Fluid Properties”**, Numerical Heat Transfer, vol. 12, pp. 179-195, 1987.
- N. Taniguchi and T. Kobayashi; **“Finite Volume Method on the Unstructured Grid System”**, Computer & Fluid, vol. 19, n. 3/4, pp. 287-295, 1991.
- R. M. Smith and A. G. Hutton; **“The Numerical Treatment of Advection: A Performance Comparison of Current Methods”**, Numerical Heat Transfer, vol. 05, pp. 439-461, 1982.

- R. Peyret and T. D. Taylor; **“Computational Methods for Fluid Flow”**, Springer-Verlag, 1983.
- S. Acharya and F. H. Moukalled; **“Improvements to Incompressible Flow Calculation on a Nonstaggered Curvilinear Grid”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 15, pp. 131-152, 1989.
- S. K. Choi, H. Y. Nam and M. Cho; **“Use of the Momentum Interpolation Method for Numerical Solution of Incompressible Flows in Complex Geometries: Choosing Cell Face Velocities”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 23, pp. 21-41, 1993.
- S. Majumdar; **“Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids”**, Numerical Heat Transfer, vol. 13, pp.125-132, Technical Notes, 1988.
- S. R. Idelshon, J. C. Heinrich and E. Oñate; **“Petrov-Galerkin Methods for the Transient Advective-Diffusive Equation with Sharp Gradients”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, pp. 1455-1473, 1996.
- S. R. Idelsohn and E. Oñate; **“Finite Volumes and Finite Elements: Two Good Friends”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 3323-3341, 1994.
- S. Ramadhyani; **“Solution of the Equations of Convective, Heat, Mass, and Momentum Transfer by the Finite Element Method Using Quadrilateral Elements”**, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1979.
- S. Thakur and W. Shyy; **“Some Implementational Issues of Convection Schemes for Finite-Volume Formulations”**, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 24, pp. 31-55, 1993.
- S. Thangam and D. D. Knight; **“A Computational Scheme in Generalized Coordinates for Viscous Incompressible Flows”**, Computers & Fluid, vol. 18, n. 04, pp. 317-327, 1990.
- S. V. Patankar, **“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”**, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

S. V. Patankar; **“A Calculation Procedure for Two Dimensional Elliptic Situations”**, Numerical Heat Transfer, vol. 02, 1979.

T. Hayase, J. A. Humphrey, R. Greif; **“A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures”**, Journal of Computational Physics, vol. 98, pp. 108-118, 1992.

U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin; **“High Resolutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”**, Journal of Computational Physics, vol. 48, pp.378-411, 1982.

U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin; **“High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”**, Journal of Computational Physics, vol. 48, pp. 387-411, 1982.

W. Shyy, S. Pal, H. S. Udaykumar and D. Choi; **“Structured Moving Grid and Geometric Conservation Laws for Fluid Flow Computation”**, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 34, pp. 369-397, 1998.

W. Shyy; **“A Study of Finite Difference Approximations to Steady-State, Convection-Dominated Flow Problems”**, Journal of Computational Physics, vol. 57, pp.415-438, 1985.

Y. Wang and S. Komori; **“Comparison of Using Cartesian and Covariant Velocity Components on Non-Orthogonal Collocated Grids”**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 31, pp. 1265-1280, 1999.

Anexo A

Expressões para os esquemas utilizados:

Esquema Central

$$\phi_e = \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}$$

$$\phi_w = \frac{(\phi_P + \phi_W)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}$$

$$\phi_n = \frac{(\phi_N + \phi_P)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y}$$

$$\phi_s = \frac{(\phi_P + \phi_S)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_s = \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}$$

Esquema QUICK – Leonard (1979)

$u, v > 0$

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_W - 2\phi_P + \phi_E)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_{WW} - 2\phi_W + \phi_P)$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N) - \frac{1}{8}(\phi_S - 2\phi_P + \phi_N)$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_{SS} - 2\phi_S + \phi_P)$$

$u, v < 0$

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_{EE} - 2\phi_E + \phi_P)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_E - 2\phi_P + \phi_W)$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N) - \frac{1}{8}(\phi_{NN} - 2\phi_N + \phi_P)$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_N - 2\phi_P + \phi_S)$$

Esquema QUICK – Hayase (1992)

$u, v > 0$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}(-\phi_W - 2\phi_P + 3\phi_E)$$

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{8}(-\phi_{WW} - 2\phi_W + 3\phi_P)$$

$$\phi_n = \phi_P + \frac{1}{8}(-\phi_S - 2\phi_P + 3\phi_N)$$

$$\phi_s = \phi_S + \frac{1}{8}(-\phi_{SS} - 2\phi_S + 3\phi_P)$$

$u, v < 0$

$$\phi_e = \phi_E + \frac{1}{8}(3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE})$$

$$\phi_w = \phi_P + \frac{1}{8}(3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E)$$

$$\phi_n = \phi_N + \frac{1}{8}(3\phi_P - 2\phi_N - \phi_{NN})$$

$$\phi_s = \phi_P + \frac{1}{8}(3\phi_S - 2\phi_P - \phi_N)$$

Esquema exponencial

Coordenadas generalizadas

Equação de interpolação:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} \phi) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_{11} \Gamma}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} \phi) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_{22} \Gamma}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0$$

onde $P_\xi = \frac{\rho \tilde{u}}{q_{11} \Gamma}$

$P_\eta = \frac{\rho \tilde{v}}{q_{22} \Gamma}$

$$\phi_e = (\phi_E - \phi_P) \frac{(e^{P_\xi/2} - 1)}{(e^{P_\xi} - 1)} + \phi_P$$

$$\phi_w = (\phi_P - \phi_W) \frac{(e^{P_\xi/2} - 1)}{(e^{P_\xi} - 1)} + \phi_W$$

$$\phi_n = (\phi_N - \phi_P) \frac{(e^{P_\eta/2} - 1)}{(e^{P_\eta} - 1)} + \phi_P$$

$$\phi_s = (\phi_P - \phi_S) \frac{(e^{P_\eta/2} - 1)}{(e^{P_\eta} - 1)} + \phi_S$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = (\phi_E - \phi_P) \frac{e^{P_\xi/2}}{(e^{P_\xi} - 1)} \frac{P_\xi}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = (\phi_P - \phi_W) \frac{e^{P_\xi/2}}{(e^{P_\xi} - 1)} \frac{P_\xi}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = (\phi_N - \phi_P) \frac{e^{P_\eta/2}}{(e^{P_\eta} - 1)} \frac{P_\eta}{\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = (\phi_P - \phi_S) \frac{e^{P_\eta/2}}{(e^{P_\eta} - 1)} \frac{P_\eta}{\Delta \eta}$$

Coordenadas generalizadas

A equação de transporte convectivo-difusivo bidimensional em coordenadas generalizadas é escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

Equações de interpolação para direção ξ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \tilde{u} \phi) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_{11} \Gamma}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = k_\xi \quad \text{onde} \quad P_\xi = \frac{\rho \tilde{u}}{q_{11} \Gamma}$$

onde temos:

$$k_\xi = -\rho \tilde{v} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{q_{12} \Gamma}{J} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

Equações de interpolação para direção η :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \tilde{v} \phi) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_{22} \Gamma}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = k_\eta \quad P_\eta = \frac{\rho \tilde{v}}{q_{22} \Gamma}$$

$$k_\eta = -\rho \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{q_{21} \Gamma}{J} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(q_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

Solução analítica geral das equações unidimensionais podem ser encontradas como:

$$\phi = C_1 + C_2 \xi + C_3 e^{(P_\xi \cdot \xi)}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = C_2 + C_3 P_\xi e^{(P_\xi \cdot \xi)}$$

Para interface e localizada no centro do volume de controle

$$\overset{e}{C}_1 = \phi_E(-\alpha_{e\xi}) + \phi_P(1 + \alpha_{e\xi}) + \beta_{e\xi} \quad \text{onde} \quad \alpha_{e\xi} = \frac{1}{(e^{P_{e\xi}\Delta\xi} - 1)}$$

$$\overset{e}{C}_2 = \frac{k_{e\xi}}{P_{e\xi}} \quad \beta_{e\xi} = \frac{k_{e\xi}\Delta\xi}{(P_{e\xi}(e^{P_{e\xi}\Delta\xi}) - 1)}$$

$$\overset{e}{C}_3 = \phi_E(\alpha_{e\xi}) + \phi_P(-\alpha_{e\xi}) - \beta_{e\xi}$$

Formas análogas são encontradas para as interfaces w , n , s , localizadas nos centros dos volumes de controle:

$$\overset{w}{C}_1 = \phi_W(1 + \alpha_{w\xi}) + \phi_P(-\alpha_{w\xi}) + \beta_{w\xi} \quad \text{onde} \quad \alpha_{w\xi} = \frac{1}{(e^{P_{w\xi}\Delta\xi} - 1)}$$

$$\overset{w}{C}_2 = \frac{k_{w\xi}}{P_{w\xi}} \quad \beta_{w\xi} = \frac{k_{w\xi}\Delta\xi}{(P_{w\xi}(e^{P_{w\xi}\Delta\xi}) - 1)}$$

$$\overset{w}{C}_3 = \phi_E(-\alpha_{w\xi}) + \phi_P(\alpha_{w\xi}) - \beta_{w\xi}$$

$$\overset{n}{C}_1 = \phi_N(-\alpha_{n\eta}) + \phi_P(1 + \alpha_{n\eta}) + \beta_{n\eta} \quad \text{onde} \quad \alpha_{n\eta} = \frac{1}{(e^{P_{n\eta}\Delta\eta} - 1)}$$

$$\overset{n}{C}_2 = \frac{k_{n\eta}}{P_{n\eta}} \quad \beta_{n\eta} = \frac{k_{n\eta}\Delta\eta}{(P_{n\eta}(e^{P_{n\eta}\Delta\eta}) - 1)}$$

$$\overset{n}{C}_3 = \phi_N(\alpha_{n\eta}) + \phi_P(-\alpha_{n\eta}) - \beta_{n\eta}$$

$$\overset{s}{C}_1 = \phi_S(1 + \alpha_{s\eta}) + \phi_P(-\alpha_{s\eta}) + \beta_{s\eta} \quad \text{onde} \quad \alpha_{s\eta} = \frac{1}{(e^{P_{s\eta}\Delta\eta} - 1)}$$

$$\overset{s}{C}_2 = \frac{k_{s\eta}}{P_{s\eta}} \quad \beta_{s\eta} = \frac{k_{s\eta}\Delta\eta}{(P_{s\eta}(e^{P_{s\eta}\Delta\eta}) - 1)}$$

$$\overset{s}{C}_3 = \phi_S(-\alpha_{s\eta}) + \phi_P(\alpha_{s\eta}) - \beta_{s\eta}$$

Com as expressões para ϕ , $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}$, analogamente para a direção η , expressas em função de C_1 , C_2 e C_3 substituídas nas expressões de interpolação unidimensional teremos as expressões para k na forma nodal:

$$k_\eta = (\phi_P - \phi_E) \frac{P_\xi \Delta \xi}{\Delta \xi^2 (e^{P_\xi \Delta \xi} - 1)} + (\phi_P - \phi_W) \frac{-P_\xi \Delta \xi}{\Delta \xi^2 (e^{-P_\xi \Delta \xi} - 1)} + \frac{2q_{12}\Gamma}{J} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$k_\xi = (\phi_P - \phi_N) \frac{P_\eta \Delta \eta}{\Delta \eta^2 (e^{P_\eta \Delta \eta} - 1)} + (\phi_P - \phi_S) \frac{-P_\eta \Delta \eta}{\Delta \eta^2 (e^{-P_\eta \Delta \eta} - 1)} + \frac{2q_{12}\Gamma}{J} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}$$

Expressões utilizadas para calcular os termos $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}$:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\phi_N + \phi_{NE} - \phi_S - \phi_{SE}}{4\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\phi_N + \phi_{NW} - \phi_S - \phi_{SW}}{4\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\phi_E + \phi_{NE} - \phi_W - \phi_{NW}}{4\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = \frac{\phi_n - \phi_p}{\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\phi_E + \phi_{SE} - \phi_W - \phi_{SW}}{4\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = \frac{\phi_p - \phi_s}{\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\phi_{NE} - \phi_{NW} + \phi_{SW} - \phi_{SE}}{4\Delta \xi \Delta \eta}$$

Relações de transformação de coordenadas

Diferenças centrais

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \cong \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \cong \frac{(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \cong \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}{(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \cong \frac{(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})}$$

Anexo B

Procedimento para transformação da equação de convecção-difusão de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas

As derivadas parciais, na forma matricial podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Onde o Jacobiano da transformação será dado por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}$$

J é o determinante de J

Transformação para coordenadas generalizadas da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{A1a}$$

Sendo a diferenciação parcial dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{A1b})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{A1c})$$

Utilizando a seguinte notação

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \phi_x \quad \text{então}$$

$$F_x = \xi_x F_\xi + \eta_x F_\eta$$

$$G_y = \xi_y G_\xi + \eta_y G_\eta$$

Substituindo em (A1) e dividindo por J tem-se

$$\frac{\xi_x F_\xi}{J} + \frac{\xi_y G_\xi}{J} + \frac{\eta_x F_\eta}{J} + \frac{\eta_y G_\eta}{J} = 0 \quad (\text{A2})$$

O primeiro termo da equação pode ser escrito da forma

$$\frac{\xi_x F_\xi}{J} = \left(\frac{\xi_x F}{J} \right)_\xi - F \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_\xi \quad (\text{A3})$$

e de forma análoga aos outros termos, pode encontrar a forma final da equação transformada

$$F_x + G_x = J \left(F_\xi^* + G_\eta^* \right) \quad (\text{A4})$$

onde

$$F_\xi^* = \left(\frac{\xi_x F}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\xi_y G}{J} \right)_\xi \quad (\text{A5a})$$

$$G_\eta^* = \left(\frac{\eta_x F}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\eta_y G}{J} \right)_\eta \quad (\text{A5b})$$

Transformação para coordenadas generalizadas da equação diferencial de segunda ordem.

A equação original em coordenadas retangulares é escrita da forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A6})$$

ou na notação adotada

$$F_x + G_y = R_{xx} + S_{xy} + T_{yy} \quad (\text{A7})$$

introduzindo um termo de ponderação ε

$$F_x + G_y = \left(R_x + \varepsilon S_y \right)_x + \left((1 - \varepsilon) S_x + T_y \right)_y$$

Tomando o lado direito e comparando com a equação (A4) tem-se

$$\frac{\left(R_x + \varepsilon S_y \right)_x}{J} + \frac{\left((1 - \varepsilon) S_x + T_y \right)_y}{J} = P_\xi + Q_\eta$$

$$P = \frac{\xi_x}{J} \left(R_x + \varepsilon S_y \right) + \frac{\xi_y}{J} \left((1 - \varepsilon) S_x + T_y \right) \quad (\text{A8a})$$

$$Q = \frac{\eta_x}{J} \left(R_x + \varepsilon S_y \right) + \frac{\eta_y}{J} \left((1 - \varepsilon) S_x + T_y \right) \quad (\text{A8b})$$

Tomando-se os termos de derivada em x do lado direito da equação (A8a) e utilizando a expansão apresentada em (A3), obtém-se

$$\frac{\xi_x}{J} R_x + \frac{\xi_y}{J} (1 - \varepsilon) S_x = \left(\frac{\xi_x R}{J} \right)_x - \frac{\xi_{xx} R}{J} + (1 - \varepsilon) \left(\frac{\xi_y S}{J} \right)_x - (1 - \varepsilon) \frac{\xi_{yx} S}{J} \quad (\text{A9})$$

Aplicando a definição apresentada em (A1b) e (A1c) expande-se a expressão (A8) para coordenadas generalizadas, e analogamente para o restante dos termos das equações (A8a) e (A8.b), encontrando-se a forma final da equação diferencial de segunda ordem.

$$F_{\xi}^{**} + G_{\eta}^{**} = R_{\xi\xi}^{*} + S_{\xi\eta}^{*} + T_{\eta\eta}^{*}$$

onde

$$F^{**} = \frac{1}{J}(\xi_x F + \xi_y G) + \frac{1}{J}(\xi_{xx} R + \xi_{xy} S + \xi_{yy} T)$$

$$G^{**} = \frac{1}{J}(\eta_x F + \eta_y G) + \frac{1}{J}(\eta_{xx} R + \eta_{xy} S + \eta_{yy} T)$$

$$R^{*} = \frac{1}{J}(\xi_x^2 R + \xi_x \xi_y S + \xi_y^2 T)$$

$$S^{*} = \frac{1}{J}(2\xi_x \eta_x R + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) S + 2\xi_y \eta_y T)$$

$$T^{*} = \frac{1}{J}(\eta_x^2 R + \eta_x \eta_y S + \eta_y^2 T)$$

Anexo C

Aspectos computacionais

Fluxograma

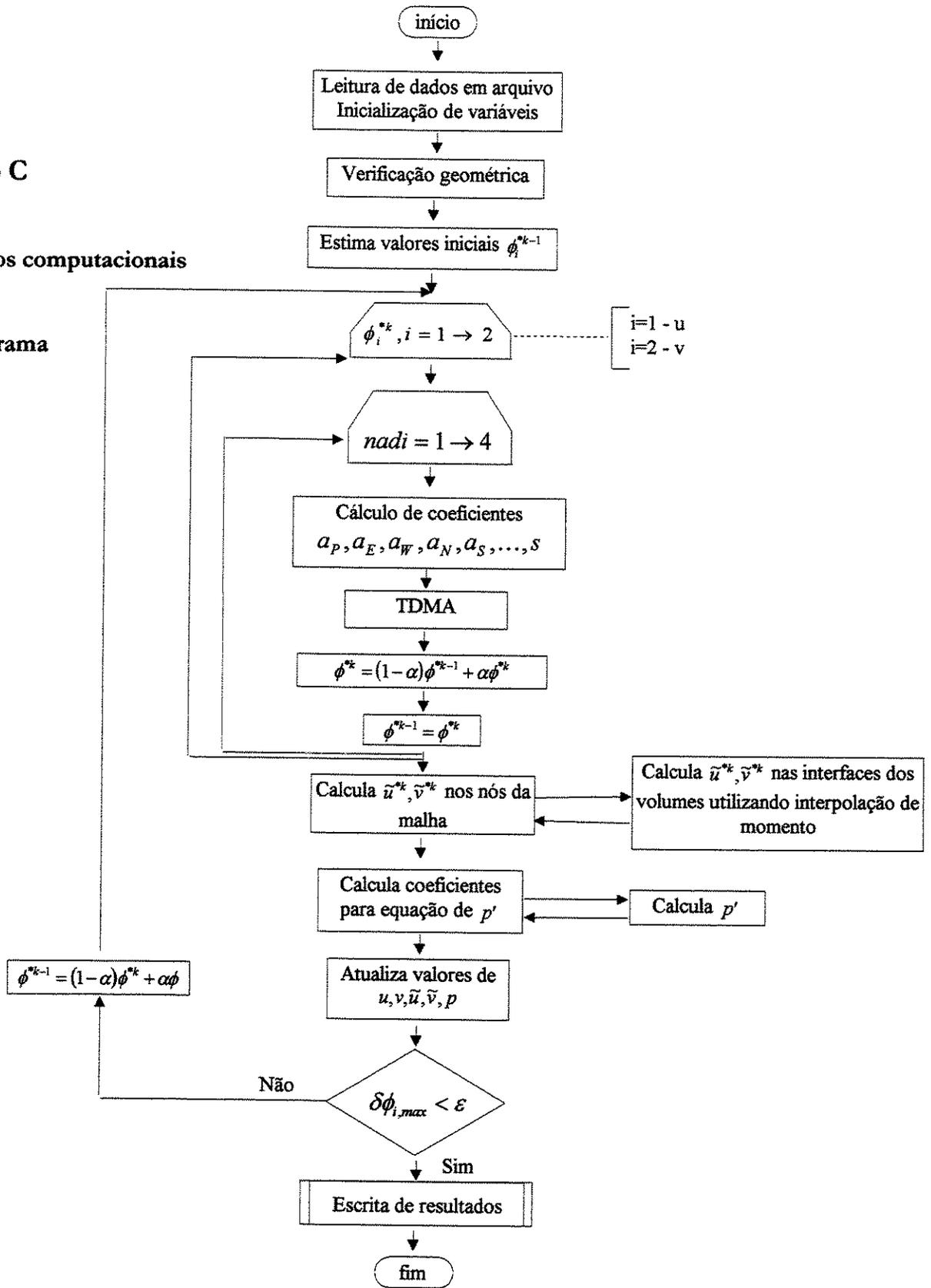


Figura A1: Fluxograma do programa computacional

TDMA – Algoritmo para matriz tri-diagonal (TriDiagonal-Matrix Algorithm)

A solução do sistema linear de equações pode ser obtido pelo método de eliminação Gaussiana. O algoritmo de Thomas, também chamado de TDMA, é uma forma mais simples do método de eliminação, aplicado em sistemas onde há três diagonais na matriz de coeficientes, isto pode ser conseguido se todos os outros coeficientes do sistema forem tratados como termos fonte.

Consideremos o sistema seguinte:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_{NE} \phi_{NE} + A_{NW} \phi_{NW} + A_{SE} \phi_{SE} + A_{SW} \phi_{SW} + S_\phi$$

Seguindo o esquema de numeração apresentado na figura A4:

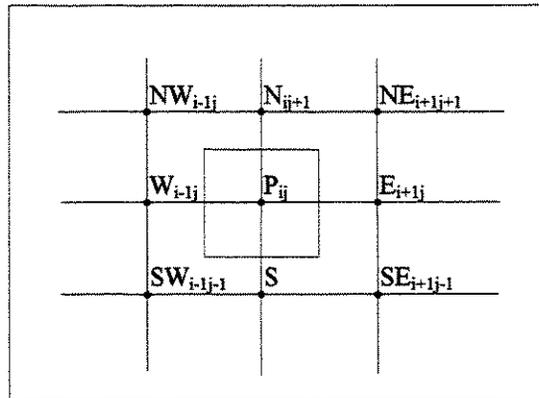


Figura A2: Numeração ij

Aplicando-se o método para a linha j constante, tem-se o sistema de equações que contém todos os pontos ij , de forma que pode-se escrever para um ponto genérico:

$$A_{ij} \phi_{ij} = A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + A_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + A_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + A_{i+1,j+1} \phi_{i+1,j+1} + A_{i-1,j+1} \phi_{i-1,j+1} + A_{i+1,j-1} \phi_{i+1,j-1} + A_{i-1,j-1} \phi_{i-1,j-1} + S_i$$

No algoritmo TDMA o termo S compreende todos os termos restantes da equação que não são adjacentes ao termo relacionado ao ponto ij , então a equação fica:

