

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR JULIO VACIEL  
TREIGUER E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 08/09/92  
  
ORIENTADOR

DE SISTEMAS A SÉRIES ESTOCÁSTICAS.  
APLICAÇÕES À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES  
NO DOMÍNIO DO TEMPO.

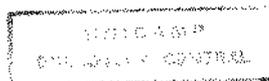
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DE SISTEMAS A SÉRIES ESTOCÁSTICAS  
- APLICAÇÕES À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO -

Julio Maciel Treiguer

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP,  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Mecânica.

- Campinas, 8 de setembro de 1992 -



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de : Doutorado

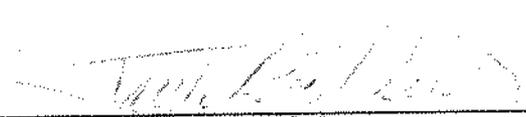
Título da Tese : DE SISTEMAS A SÉRIES ESTOCÁSTICAS  
APLICAÇÕES À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO

Autor : Julio Maciel Treiguer

Orientador : Paulo Roberto Gardel Kurka *ok*

Co-orientador : José Roberto de França Arruda *ok*

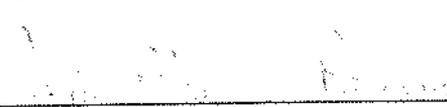
Aprovado por

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Hans Ingo Weber

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José João de Espíndola

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Maurício Rosário

Campinas, 8 de setembro de 1992

Agradeço a Deus e a todos  
que através Dele, me ajudaram  
a realizar este trabalho.

Dedico este trabalho  
ao amor e carinho que  
eu sinto por ti Chris !

Se não viveres aquilo que tu falas,  
não desenvolverás os sentimentos que  
fazem parte da experiência,  
não acreditas naquilo que tu dizes,

NÃO TENS FÉ.

És como uma planta artificial,  
bonita na aparência,  
mas sem vida interior,  
alimenta-te da vaidade e não da verdade.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em particular ao Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka pelo interesse, incentivo, dedicação e orientação e ao colega e amigo Roberto Jordan, por conversas e trocas de idéias que em muito auxiliaram na confecção deste trabalho. Ao Prof. Euclides de Mesquita Neto, chefe do Departamento de Mecânica Computacional e ao Prof. Loir Afonso Moreira, chefe do Departamento de Projeto Mecânico, pelo acesso e utilização de salas e equipamentos necessários ao trabalho. Ao Prof. José Roberto de França Arruda pelo interesse, incentivo e idéias iniciais. Ao Prof. João Maurício Rosário pela amizade e incentivo. Ao Prof. Fernando Iguti que quando coordenador da Pós-graduação me auxiliou e a todos os colegas, professores e amigos que de alguma forma contribuíram com este trabalho. Quero agradecer ainda aos meus pais que sempre com muito carinho me incentivaram, a Sra. Yara de Barros Magalhães e a toda a sua família pela compreensão e carinhosa acolhida aqui em Campinas, o que em muito me auxiliaram na realização deste trabalho e em especial a Christiane que através do seu amor por mim tornou-o muito mais suave.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma descrição sistemática da utilização de métodos de identificação no domínio do tempo aplicados à análise modal de estruturas mecânicas. Inicialmente formulam-se os fundamentos da discretização de sistemas contínuos e análise modal de maneira adequada à análise de sistemas dinâmicos neste domínio. Em seguida relacionam-se modelos de análise no domínio do tempo, utilizados em outras áreas do conhecimento (engenharia elétrica, estatística e economia) com o modelo modal, visando a identificação de freqüências e modos de vibrar. Apresentam-se algoritmos baseados nos modelos probabilísticos de séries estocásticas (ARMA e ARIMA) e sistematiza-se a série de Prony para identificação de sistemas sujeitos a diferentes tipos de excitação. Apresentam-se também exemplos da utilização dos algoritmos de análise em simulações numéricas e na análise modal prática de uma viga sujeita à forças impulsivas. O objetivo deste trabalho é apresentar ao analista de sistemas dinâmicos algumas das mais importantes técnicas de identificação modal no domínio do tempo. Os exemplos apresentados demonstram o potencial de análise dos algoritmos como no caso de sistemas com freqüências coincidentes e também em casos práticos de análise modal. O trabalho sugere também estudos futuros no campo de identificação de polos computacionais, o desenvolvimento de métodos numéricos mais eficientes para a solução de Prony e ainda a identificação de não linearidades no domínio do tempo.

## ABSTRACT

The present work describes the use of time domain identification techniques in the modal analysis of mechanical structures. The fundamentals of continuous system discretization and modal analysis are presented in a suitable manner for the study of dynamic systems in such a domain. Time domain identification models employed in other areas (electric engineering, statistics and economics) are related to the modal model with the objective of identification of natural frequencies and mode shapes. Stochastic series algorithms (ARMA, ARIMA) are presented and the Prony series is introduced as a tool for the identification of systems subjected to different kinds of excitation. There are also shown examples of using the algorithms in numerical simulations and a practical modal analysis of a beam subjected to an impulsive forcing. The aim of the work is to introduce to the dynamic analyst some of the most important techniques of time domain modal identification. The examples shown illustrate the potential of the algorithms to the identification of systems even with coincident natural frequencies and also in practical modal analysis. The work suggests further developments in the field of computational poles determination, more efficient numerical methods for the solution of Prony's problem and the identification of non-linearities in the time domain.

# ÍNDICE

CONTEÚDO	PÁGINA
Lista de figuras.....	i
Lista de tabelas.....	iv
Nomenclatura.....	vi
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS DE FORMA DISCRETIZADA NO ESPAÇO.....</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução.....	6
2.2 Modelo matemático discreto para o sistema dinâmico.....	6
2.3 Conclusão.....	17
<b>3. CARACTERIZAÇÃO MODAL DE SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES COM PARÂMETROS CONCENTRADOS.....</b>	<b>18</b>
3.1 Introdução.....	18
3.2 Descrição do problema modal generalizado no domínio do tempo.....	18
3.2.1 A equação do movimento na forma de equação de estado.....	19
3.2.2 O problema de autovalor, a transformação de coordenadas e a base modal.....	21
3.2.3 A resposta geral do modelo modal discretizado.....	23
3.2.4 A resposta do modelo modal em função da resposta ao impulso unitário.....	28
3.2.5 A resposta do modelo modal em função das características de amplitude, amortecimento, frequência e fase.....	29
3.3 Descrição do problema modal generalizado no domínio da frequência.....	31
3.3.1 A matriz função de transferência e a matriz FRF.....	32
3.3.2 A função de transferência modal (um elemento de $H(s)$ ).....	36
3.3.3 A resposta ao impulso unitário na base modal.....	38
3.4 Conclusão.....	39
<b>4. ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO.....</b>	<b>40</b>
4.1 Introdução.....	40
4.2 O modelo integro-diferencial.....	41
4.3 O modelo de sistemas discretos no tempo.....	45
4.4 O modelo de filtros digitais.....	50
4.5 A análise de séries temporais.....	56
4.5.1 Os objetivos da análise por séries temporais.....	57

4.5.2	As séries temporais e os processos estocásticos....	58
4.5.3	Os operadores e a relação entre o modelo MA e AR...	63
4.5.4	Os modelos probabilísticos ARMA e ARIMA para séries temporais estocásticas.....	67
4.6	A nomenclatura usada em séries, processamento digital.... e análise modal.....	72
4.7	Conclusão.....	73
<b>5.</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS.....</b>	<b>74</b>
5.1	Introdução.....	74
5.2	O teorema da amostragem e a introdução ao cálculo dos parâmetros modais.....	75
5.3	Identificação através da resposta do modelo modal.....	78
5.3.1	Identificação através da resposta livre.....	79
5.3.1.1	Identificação utilizando um modelo de exponenciais complexas.....	79
5.3.1.2	Identificação utilizando a função Randomdec	84
5.3.2	Identificação através da resposta forçada.....	88
5.3.2.1	Identificação utilizando uma força impulsiva.....	89
5.3.2.2	Identificação utilizando uma força aleatória estacionária.....	94
5.4	Identificação através dos modelos probabilísticos ARMA e ARIMA.....	98
5.4.1	Relação entre os parâmetros modais e os parâmetros. ARMA.....	98
5.4.2	Identificação utilizando o modelo estacionário ARMA.....	100
5.4.3	Identificação utilizando o modelo não estacionário ARIMA.....	102
5.5	Técnicas de processamento do sinal no domínio do tempo... 5.5.1 Técnica de super-dimensionamento do modelo..... 5.5.2 Técnica da pseudo-inversa..... 5.5.3 Técnica de verificação através do resto.....	104 105 105 107
5.6	Conclusão.....	109
<b>6.</b>	<b>EXEMPLOS E APLICAÇÕES.....</b>	<b>110</b>
6.1	Introdução.....	110
6.2	Simulação do sistema dinâmico.....	110
6.2.1	A equação de movimento.....	111
6.2.2	Autovalores e matriz modal.....	112
6.2.3	Os parâmetros modais.....	114
6.3	A resposta do modelo modal.....	115
6.3.1	Escolha dos parâmetros para o processamento.....	115
6.3.2	A resposta livre.....	116
6.3.3	A resposta ao impulso unitário.....	117
6.3.4	A resposta a uma força aleatória.....	118
6.3.5	A resposta geral sendo a força de excitação aleatória.....	121
6.3.6	A resposta a uma força impulsiva.....	121
6.3.7	A resposta a uma força aleatória com tendência em relação à sua média.....	123

6.4	Identificação através dos modelos probabilísticos ARMA e ARIMA.....	126
6.4.1	Identificação através do modelo estacionário ARMA..	127
6.4.2	Identificação através do modelo não estacionário ARIMA.....	130
6.5	Identificação através do modelo modal.....	138
6.5.1	Identificação através da resposta livre.....	138
6.5.1.1	Identificação utilizando um modelo de exponenciais complexas.....	138
6.5.1.2	Identificação utilizando a função Randomdec	140
6.5.2	Identificação através da resposta forçada.....	146
6.5.2.1	Identificação utilizando uma força impulsiva.....	146
6.5.2.2	Identificação utilizando uma força aleatória estacionária.....	148
6.6	Comparações entre os resultados.....	151
6.7	Os métodos de Prony na identificação de um exemplo matemático de seis graus de liberdade.....	153
6.8	Análise modal de uma viga excitada por forças impulsivas.	157
6.8.1	Descrição do sistema experimental.....	157
6.8.2	Instrumentação e esquema de medição utilizados.....	158
6.8.3	Resultados obtidos.....	159
6.9	Conclusão.....	164
7.	CONCLUSÃO E SUGESTÕES.....	165
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	167

## Lista de Figuras

CONTEÚDO	PÁGINA
Fig. 2.1 - Haste de comprimento L sofrendo deformação axial...	15
Fig. 2.2 - Sistema de inércias discretas sofrendo deformação axial-n G.L.....	15
Fig. 3.1 - Diagrama em bloco de $H(s)$ , ( $*h(t)$ ).....	36
Fig. 3.2 - Diagrama em bloco de $H_r(s)$ , ( $*h_r(t)$ ).....	37
Fig. 3.3 - Diagrama em bloco de $H_{ij}(s)$ , ( $*h_{ij}(t)$ ).....	38
Fig. 4.1 - O operador de transferência $H_{ij}(p)$ .....	42
Fig. 4.2 - O operador de retardo $B=1/E$ .....	46
Fig. 4.3 - O operador de transferência discreto $H_{ij}(B)$ .....	47
Fig. 4.4 - Sistema discreto no tempo.....	51
Fig. 4.5 - Registro de um processo estocástico.....	60
Fig. 4.6 - Diagrama de um filtro linear Média Móvel para séries temporais.....	65
Fig. 4.7 - Diagrama de um filtro estacionário Auto-Regressivo para séries temporais.....	66
Fig. 4.8 - Diagrama de um filtro Auto-Regressivo de Média Móvel para séries temporais.....	69
Fig. 4.9 - Diagrama de um filtro Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel para séries temporais.....	71
Fig. 5.1 - Sistema excitado aleatoriamente.....	84
Fig. 5.2 - Sistema inicialmente em repouso excitado por uma força impulsiva.....	89
Fig. 5.3 - Sistema inicialmente em repouso excitado por uma força aleatória.....	95
Fig. 6.1 - Sistema de inércias discretas sofrendo deformação axial-3 G.L.....	110
Fig. 6.2 - Resposta livre da massa " $m_3$ " no tempo.....	117
Fig. 6.3 - Resposta livre da massa " $m_3$ " na frequência.....	117

Fig. 6.4	- Resposta ao impulso unitário da massa " $m_3$ " (tempo - pequenos amortecimentos).....	118
Fig. 6.5	- Resposta ao impulso unitário da massa " $m_3$ " (tempo - grandes amortecimentos).....	118
Fig. 6.6	- Força aleatória no tempo, atuando na massa " $m_1$ ".....	119
Fig. 6.7	- Resposta da massa " $m_3$ " de um sistema inicialmente em repouso, excitado por uma força aleatória na massa " $m_1$ ".....	119
Fig. 6.8	- Resposta forçada no tempo da massa " $m_3$ " (força aleatória pequenos amort.).....	119
Fig. 6.9	- Resposta forçada no tempo da massa " $m_3$ " (força aleatória - grandes amort.).....	120
Fig. 6.10	- Função Densidade Espectral de Potência da resposta da massa " $m_3$ ". (força aleatória-grandes amort.).....	120
Fig. 6.11	- Resposta geral no tempo da massa " $m_3$ " (força aleatória- pequenos amort.) <sup>3</sup> .....	121
Fig. 6.12	- Força impulsiva no tempo, atuando na massa " $m_1$ ".....	122
Fig. 6.13	- Força impulsiva na freqüência, atuando na massa " $m_1$ ".....	122
Fig. 6.14	- Resposta forçada no tempo da massa " $m_3$ " (força impulsiva - pequenos amort.).....	123
Fig. 6.15	- Simulação de defeito na leitura da resposta da massa " $m_3$ " de um sistema excitado aleatoriamente na massa " $m_1$ ".....	124
Fig. 6.16	- Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=k$ " (pequenos amortecimentos).....	124
Fig. 6.17	- Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=k$ " (grandes amortecimentos).....	125
Fig. 6.18	- Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=$ $k + k^2/4$ . (pequenos amortecimentos).....	125
Fig. 6.19	- Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=$ $k + k^2/4$ . (grandes amortecimentos).....	126
Fig. 6.20	- Resp. original (—) e resp.diferenciada (--) (pequenos amort. - uma diferenciação).....	130
Fig. 6.21	- Resp. original (—) e resp.diferenciada (--) (grandes amort. - uma diferenciação).....	130

Fig. 6.22 - Resp. original (—) e resp.diferenciada (--) (pequenos amort. - duas diferenciações).....	134
Fig. 6.23 - Resp. original (—) e resp.diferenciada (--) (grandes amort. - duas diferenciação).....	134
Fig. 6.24 - Resposta livre da massa " $m_3$ " no tempo ( $K=12$ ).....	139
Fig. 6.25 - Resposta geral da massa " $m_3$ " no tempo ( $k=1024$ ) (força aleatória - pequenos amortecimentos).....	141
Fig. 6.26 - Os primeiros três trechos da resposta $q_3(k)$ [ $A=0,4$ e $M=128$ ].....	142
Fig. 6.27 - A função Randomdec ( $A=0,4$ ; $M=128$ ; $S=25$ ).....	142
Fig. 6.28 - Resposta livre no tempo (sistema de 6 G.L.).....	154
Fig. 6.29 - Resposta livre na frequência (sistema de 6 G.L.)....	154
Fig. 6.30 - Força impulsiva no tempo (sistema de 6 G.L.).....	155
Fig. 6.31 - Resposta do sistema de 6 G.L. devido à força impulsiva.....	155
Fig. 6.32 - Resposta do sistema de 6 G.L. devido à força aleatória.....	155
Fig. 6.33 - Bancada de teste utilizada.....	157
Fig. 6.34 - Discretização da viga (dimensões em mm).....	158
Fig. 6.35 - Instrumentação e esquema de medição do ensaio.....	158
Fig. 6.36 - Três primeiros modos de vibrar da viga.....	160
Fig. 6.37a- FRF entre pontos 1 e R.....	162
Fig. 6.37b- FRF entre pontos 2 e R.....	162
Fig. 6.37c- FRF entre pontos 3 e R.....	163
Fig. 6.37d- FRF entre pontos 4 e R.....	163
Fig. 6.37e- FRF entre pontos 5 e R.....	164

## Lista de Tabelas

CONTEÚDO	PÁGINA
Tab. 4.1 - Comparação entre as variáveis e os parâmetros usados em séries temporais, processamento digital e análise modal.....	72
Tab. 6.1 - Coeficientes das matrizes "M", "C" e "K".....	112
Tab. 6.2 - Autovalores Simulados.....	112
Tab. 6.3 - Freq(s). naturais, fatores de amort. e resíduos.....	114
Tab. 6.4 - Parâmetros para o processamento.....	115
Tab. 6.5 - Condições iniciais e constantes $[\eta_r(0)\phi_{r,3}]$ .....	116
Tab. 6.6 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Algoritmo ARMA).....	127
Tab. 6.7 - Comparação entre os autovalores simulados e identificados (Algoritmo ARMA).....	128
Tab. 6.8 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo ARMA).....	128
Tab. 6.9 - Comparação entre os resíduos simulados e identificados (Algoritmo ARMA).....	129
Tab. 6.10 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação). .	131
Tab. 6.11 - Comparação entre os autovalores simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)...	132
Tab. 6.12 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação).....	132
Tab. 6.13 - Comparação entre os resíduos simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)...	133
Tab. 6.14 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Algoritmo ARIMA-duas diferenciações)	135
Tab. 6.15 - Comparação entre os autovalores simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-duas diferenciações). .	135
Tab. 6.16 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo ARIMA-duas diferenciações).....	136
Tab. 6.17 - Comparação entre os resíduos simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-duas diferenciações). .	137

Tab. 6.18 - Comparação entre os autovalores e as constantes simulados e identificados (Algoritmo de Prony-Resposta Livre).....	140
Tab. 6.19 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo de Prony-Resposta Livre).....	140
Tab. 6.20 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Randomdec+Algoritmo de Prony).....	144
Tab. 6.21 - Comparação entre os autovalores e as constantes simulados e identificados (Randomdec+Algoritmo de Prony).....	145
Tab. 6.22 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Randomdec+Algoritmo de Prony).....	145
Tab. 6.23 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Algoritmo da Resposta Impulsiva)....	147
Tab. 6.24 - Comparação entre os autovalores e os resíduos simulados e identificados (Algoritmo da Resposta impulsiva).....	147
Tab. 6.25 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo da Resposta Impulsiva).....	148
Tab. 6.26 - Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais) (Algoritmo da Resposta Aleatória)....	149
Tab. 6.27 - Comparação entre os autovalores e os resíduos simulados e identificados (Algoritmo da Resposta Aleatória).....	150
Tab. 6.28 - Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo da Resposta Aleatória).....	150
Tab. 6.29 - Comparação entre os parâmetros obtidos pelos algoritmos no tempo.....	151
Tab. 6.30 - Autovalores de um sistema hipotético de 6 G.L.....	153
Tab. 6.31 - Parâmetros obtidos pelos algoritmos de Prony (sistema de 6 G.L.).....	156
Tab. 6.32 - Alguns polos encontrados na análise nos pontos 1 e 4.....	159
Tab. 6.33 - Amplitudes e fases dos três primeiros modos de vibração.....	150

## Nomenclatura

$m_i$	i-ésima inércia do sistema
$N$	número de inércias do sistema
$c$	número de equações de restrição
$n$	número de graus de liberdade (ordem do sistema dinâmico)
$F_i$	i-ésimo vetor força
$f_i$	i-ésimo vetor força de restrição
$r_i$	i-ésimo vetor posição
$q_k$	k-ésima coordenada generalizada
$\overline{\delta W}$	trabalho virtual
$\delta r_i$	deslocamento virtual
$Q_j$	j-ésima força generalizada não conservativa
$T$	energia cinética
$V$	energia potencial devido as forças conservativas
$F$	função de dissipação de Rayleigh
$m_{rs}$	coeficientes de inércia
$k_{rs}$	coeficientes de rigidez
$c_{rs}$	coeficientes de amortecimento viscoso
$M$	matriz de inércia
$K$	matriz de rigidez
$C$	matriz de amortecimento
$\Phi$	matriz modal
$\eta_r(t)$	coordenada modal genérica
$\eta_r(0)$	condição inicial de $\eta_r(t)$
$q(t)$	vetor deslocamento
$q_h(t)$	resposta livre de $q(t)$
$q_p(t)$	resposta forçada de $q(t)$
$q_i(t)$	i-ésima resposta do sistema
$Q(t)$	vetor força
$Q_j(t)$	j-ésima excitação do sistema

$x(t)$	vetor de estado
$A$	matriz do sistema
$b(t)$	novo vetor força
$I$	matriz identidade
$\lambda_r$	autovalor genérico
$\phi_r$	autovetor genérico
$\phi_{ri}$	elemento do autovetor $\phi_r$
$\Lambda$	matriz diagonal dos autovalores
$f_r(t)$	r-ésima força dada por $f_r(t) = \phi_r^{*T} Q(t)$
$H_r(s)$	transformada de Laplace de $\eta_r(t)$
$F_r(s)$	transformada de Laplace de $f_r(t)$
$x_h(t)$	resposta livre de $x(t)$
$x_p(t)$	resposta forçada de $x(t)$
$q_{hi}(t)$	resposta livre de $q_i(t)$
$q_{pij}(t)$	resposta forçada de $q_i(t)$
$\delta_j(\tau)$	função impulso unitário de Dirac genérica
$h_{ij}(t)$	função de resposta impulsiva
$A_{ri}, \alpha_{ri}$	amplitude e fase de $q_{hi}(t)$
$A_{rij}, \alpha_{rij}$	amplitude e fase de $h_{ij}(t)$
$\sigma_r$	coeficiente de amortecimento genérico
$\omega_{dr}$	frequência natural amortecida genérica (rd/s)
$\omega_r$	frequência natural genérica (rd/s)
$\zeta_r$	fator de amortecimento genérico
$\overline{Q}(s)$	transformada de Laplace de $Q(t)$
$\overline{q}_p(s)$	transformada de Laplace de $q_p(t)$
$H(s)$	matriz função de transferência do sistema
$\overline{Q}_j(s)$	transformada de Laplace de $Q_j(t)$
$\overline{q}_i(s)$	transformada de Laplace de $q_i(t)$
$H_{ij}(s)$	função de transferência modal
$r_{rij}$	resíduo genérico
$n, m$	ordem da equação à diferença (filtro digital)
$a_n, b_m$	constantes da equação à diferença

$p$	operador diferencial
$H_{i,j}(p)$	operador de transferência
$c_{ri}$	condições iniciais
$d_{ri,j}$	constantes da expansão em frações parciais de $H_{i,j}(p)$
$\Delta t$	intervalo de amostragem no tempo
$f_{max}$	freqüência máxima do sinal (Hz)
$f_s$	freqüência de amostragem (Hz)
$\Delta f$	intervalo de amostragem na freqüência (Hz)
$T$	máximo comprimento do sinal no tempo
$K$	número de amostras do sinal no tempo
$q_i(k)$	amostras de $q_i(t)$
$Q_j(k)$	amostras de $Q_j(t)$
$B$	operador de retardo
$H_{i,j}(B)$	operador de transferência discreto
$\gamma_r$	polos genéricos de $H_{i,j}(B)$ (razão da p.g.)
$h_{i,j}(k)$	amostras de $h_{i,j}(t)$
$a_\ell, b_\ell$	constantes do filtro digital
$\overline{q}_i(z)$	transformada Z de $q_i(k)$
$\overline{Q}_j(z)$	transformada Z de $Q_j(k)$
$H_{i,j}(z)$	transformada Z de $H_{i,j}(k)$ (função de transf.do filtro)
$S$	espaço amostral
$S$	número de amostras do processo estocástico, número de trechos do sinal utilizado pela função randomdec e número de testes impulsivos.
$Q(t,S)$	realização amostral (variável aleatória)
$q(t,S)$	ocorrência de $Q(t,S)$
$q_t$	série temporal
$\mu_q$	média amostral de $q_t$
$\sigma_q^2$	variância de $q_t$
$v_\ell$	coeficiente de autocovariância de $q_t$

$\rho_t$	coeficiente de autocorrelação de $q_t$
$a_t$	choque aleatório no tempo "t" (processo de ruído branco)
$\overline{q}_t$	série temporal centrada na média
$N_P, N_Q$	ordem do modelo ARMA
$P_{\ell\ell^q}$	parâmetros do modelo ARMA
$\overline{q}_t^{(d)}$	série estacionária, sendo $\overline{q}_t$ não estacionária de ordem d
$\hat{q}_{h_i}(k)$	estimativa de $q_{h_i}(k)$ (série de Prony)
$a_{r_i}, Y_r$	parâmetros de interpolação genéricos da série de Prony
R	nível de seleção de trechos da função randomdec
$q_i^s(m)$	s-ésimo trecho de $q_i(k)$ de tamanho M, $m=k-k_s$
$k_s$	tempo de retirada de $q_i^s(m)$
$dq_i(m)$	função randomdec
$n_s$	ordem super-dimensionada do sistema
$P_{2n_s}(Y)$	polinômio de ordem $2n_s$ em Y
$\hat{v}$	vetor de resposta (diferenciado ou não)
$\hat{\alpha}$	vetor dos coeficientes de $P_{2n_s}(Y)$
L	matriz da resposta livre
$\hat{r}$	vetor dos resíduos
Q	matriz da força impulsiva e da força aleatória
Y	matriz de Van der Monde
$\hat{h}$	vetor da resposta impulsiva
H	matriz da resposta impulsiva, do modelo ARMA e ARIMA
$e_r$	resto genérico
$\hat{p}$	vetor dos parâmetros ARMA

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Os métodos de análise de vibrações no domínio do tempo vêm encontrando aplicações na área de engenharia mecânica desde o tempo relativamente recente de uma década atrás. Outras áreas do conhecimento científico já possuem uma maior familiaridade com tais métodos. Nos anos 20 e 30 os economistas Walker e Yule [56,58], utilizaram métodos no domínio do tempo para a previsão de dados econômicos através de séries temporais. Wold [57], em 1938 estabeleceu um teorema sobre processos estocásticos estacionários que demonstra que todo o processo deste tipo pode ser representado por um modelo linear Média Móvel (MA). Em 1971, através do seu livro texto, Box e Jenkins [20] utilizaram o teorema de Wold para fundamentarem a sua metodologia de busca de uma classe geral de modelos capazes de representarem o processo gerador da série, trabalhando com uma classe de modelos mistos, Auto Regressivo de Média Móvel (ARMA).

As séries estocásticas no domínio do tempo são ferramentas tradicionais à área da estatística, sendo utilizadas em previsões econômicas [21,47,48,52]. No âmbito da engenharia elétrica é comum a utilização de séries discretas no tempo (sinais digitais) para a análise de circuitos e componentes elétricos. Estas séries sob a forma de filtros digitais são utilizadas em áreas como processamento [17,42,45,49] e controle digital de sinais [41,59].

A análise de vibrações em engenharia mecânica baseou-se sempre na resposta de sistemas a excitações harmônicas. O estudo de vibrações nos anos 40 e 50 recebeu um grande impulso tecnológico com a utilização de computadores analógicos, aliados a técnicas de análise por varredura de frequência. Os anos 60 vieram o constante e progressivo desenvolvimento dos computadores digitais e engenhosas técnicas de realização numérica de algoritmos de análise na frequência. Tais fatores serviram para consolidar e ampliar ainda mais o universo de aplicação das técnicas de análise dinâmica no domínio da frequência. Uma nova disciplina, a análise modal, começou

também a surgir nos anos 70, integrando as técnicas de modelagem discreta de sistemas dinâmicos aos então já bem conhecidos procedimentos experimentais de análise de vibrações.

O primeiro livro texto a sintetizar as principais idéias da modelagem discreta de sistemas dinâmicos associadas às técnicas de análise experimental de vibrações no domínio da frequência, foi apresentado por Ewins [8] em 1984. O número cada vez maior de fabricantes de equipamentos de análise de vibrações, utilizando técnicas no domínio da frequência, as tornam cada vez mais populares e acessíveis aos usuários não especializados.

As técnicas de análise de vibrações no domínio do tempo aplicadas à engenharia mecânica, por outro lado, são ainda objeto de estudos especializados e suas aplicações, restritas a poucas áreas práticas. Em 1973 Cole [30] desenvolveu um método de tratamento de vibrações chamado função "RANDOMDEC", em 76 e 77 Ibrahim e Mikulcík [60,61] utilizaram métodos no domínio do tempo para identificação modal, o que gerou interesse dos analistas neste domínio. Sua abordagem se chamou método "ITD" (Ibrahim Time Domain) e em 1979 Ibrahim associou a função RANDOMDEC ao método "ITD" gerando o que ele chamou de "Randomdec-Time-Domain-Technique", [62].

Em 1983 Leuridan e Vold [63] publicaram um resumo dos principais métodos no domínio do tempo. Mais recentemente, em 1986 Cooper e Wright [64] publicaram um trabalho comparando alguns métodos de identificação, baseados em uma teoria de tratamento de erro. Outras publicações como Ibrahim [65] em 1986, Ewins [66] em 1984 e Brown [67] em 1982, apresentaram uma visão dos testes modais tanto no domínio do tempo como da frequência. A moderna análise modal inclui ainda algoritmos como o da "Polyreference" desenvolvido por Vold [68] em 1982, o algoritmo "ERA" (Eigensystem Realization Algorithm) desenvolvido por Juang e Pappa [69] em 1984, o algoritmo (TDP) (Time Domain Direct Parameter Method) desenvolvido por Leuridan [70] em 1984. Outros algoritmos seriam o (LSE) (Least Square Complex Exponential Method) desenvolvido por Mergeey [71] em 1983 a metodologia (DDS) criada por Wu e Pandit [72,73] e aplicada a análise modal por Pandit e Metha [29] em 1985, os algoritmos da resposta

impulsiva e aleatória desenvolvidos por Kurka [26,36] respectivamente em 1987 e 1990 e ainda trabalhos como o de Kurka [74], Kurka et al. [75,76] em 1991 e recentemente trabalhos como o de Kurka e Bazan [77,78,79].

O grande e diversificado universo das técnicas numéricas que se enquadram na categoria de "domínio do tempo" as tornam de difícil acesso prático para o analista de vibrações mecânicas, habituado aos tradicionais procedimentos no domínio da frequência. O trabalho de Leuridan, Braun e Allemang [28] da Universidade de Cincinnati em 1986, intitulado "Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis: A Unifying Approach", sintetiza a formulação de vários de tais métodos com a finalidade de uma aplicação prática na identificação de sistemas dinâmicos. Este trabalho, entretanto, não apresenta uma descrição da origem dos métodos de identificação, ou de como foram transportados de sua formulação original até a sua aplicação no âmbito da análise modal estrutural.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma descrição sistemática da utilização de métodos de identificação no domínio do tempo aplicados à análise modal de estruturas mecânicas. A boa compreensão de tais métodos requer, antes de mais nada, um bom conhecimento da formulação da resposta de sistemas dinâmicos no tempo, a partir de excitações de forças genéricas. A maioria dos textos que tratam da descrição dos sistemas vibratórios mecânicos, o fazem adequando toda a sua formulação aos métodos de identificação no domínio da frequência, os quais são normalmente utilizados, [8,12,14,51].

Este trabalho busca, inicialmente, relacionar os sistemas vibratórios mecânicos aos métodos de identificação no domínio do tempo. Estes métodos de identificação são formulados para a utilização específica de uma entrada e uma saída do sistema (método SISO), já que a generalização de tal conceito básico de análise, pode sempre ser estendida para uma análise mais abrangente dos sistemas dinâmicos. Apresentam-se os métodos de identificação desde o ponto de vista de suas aplicações originais - séries estocásticas, séries discretas no tempo, até o seu estreito vínculo com as soluções

analíticas discretizadas da resposta no tempo dos sistemas vibratórios mecânicos.

Procura-se também apresentar o algoritmo de exponenciais complexas de Prony [27], tradicionalmente utilizado na análise da resposta livre de sistemas, como ferramenta básica para a análise da resposta dos sistemas a excitações conhecidas (forças impulsivas ou permanentes) ou desconhecidas (forças aleatórias). São apresentados também algumas técnicas para tratamento dos sinais no domínio do tempo, para a redução do efeito de ruídos nos sinais dinâmicos, bem como a separação entre modos de vibrar verdadeiros e computacionais. Assim sendo, os capítulos deste trabalho apresentam o seguinte conteúdo :

Capítulo II : Estabelece a discretização espacial dos sistemas dinâmicos, fundamental à compreensão do modelo matemático utilizado em análise modal.

Capítulo III : Apresenta a formulação modal dos sistemas dinâmicos, enfatizando a sua resposta de deslocamentos generalizados no domínio do tempo como função de condições iniciais modais e da função de resposta ao impulso unitário (o modelo modal).

Capítulo IV : Apresenta os principais modelos de análise no domínio do tempo, utilizados em outras áreas do conhecimento científico, desde o ponto de vista exclusivo do tratamento de sinais. São apresentados modelos como o integro-diferencial, o modelo de equação a diferenças que pode ser compreendido como um modelo de filtros digitais e os modelos de séries temporais.

Capítulo V : Este capítulo aplica os principais conceitos do capítulo anterior no desenvolvimento de algoritmos para a identificação de sistemas mecânicos. Estes algoritmos estão baseados na solução modal discretizada no tempo, onde a série de Prony é utilizada como ferramenta básica para a identificação de sistemas sujeitos a diversos tipos de excitação e nos modelos probabilísticos ARMA e ARIMA, onde as séries temporais representam uma amostra de um processo estocástico.

Capítulo VI : Neste capítulo são apresentados exemplos sintéticos da utilização da maioria dos métodos descritos na análise de um sistema mecânico numérico de três graus de liberdade, bem como na análise de um sistema hipotético de seis graus de liberdade, com distribuição particular da posição relativa de seus auto-valores. Além disso, este capítulo inclui a análise modal prática de uma viga sujeita à forças impulsivas.

Capítulo VII : Apresenta as conclusões ao presente trabalho, bem como sugestões de futuros desenvolvimentos.

## CAPÍTULO II

### REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS DE FORMA DISCRETIZADA NO ESPAÇO

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por finalidade o desenvolvimento de um modelo matemático discretizado no espaço que represente sistemas reais e que com o qual seja possível fazer-se a análise modal destes sistemas. Os sistemas reais são em geral estruturas contínuas que podem ser convenientemente modeladas por equações diferenciais parciais. Uma modelagem simplificada do mesmo sistema pode ser obtida através da sua discretização utilizando-se equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Este modelo discreto tem o objetivo de reduzir o sistema real a uma aproximação por um modelo matemático linear de  $n$  graus de liberdade ou ordem  $n$ , sendo composto por um conjunto finito de  $n$  destas equações e permitindo o uso da álgebra e do método matricial para o seu estudo.

Neste capítulo considera-se o sistema real constituído por um corpo unidimensional sofrendo deformação axial, sendo representado por um conjunto de massas discretas unidas por molas e amortecedores. A equação do movimento para este sistema é uma equação diferencial matricial de segunda ordem e  $n$  variáveis, sendo obtida através da formulação Lagrangeana. Depois de encontrado o modelo matemático, descreve-se a obtenção da sua solução. Conceitos como ortogonalidade e o teorema da expansão são utilizados para obtenção desta solução através da análise modal.

#### 2.2 MODELO MATEMÁTICO DISCRETO PARA O SISTEMA DINÂMICO

Em muitas aplicações práticas é usual considerar-se um sistema físico contínuo representado por um conjunto de inércias discretas  $m_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), unidas por molas e amortecedores. Um modelo com

parâmetros discretos deste tipo tem  $n$  graus de liberdade, onde o número de graus de liberdade é definido como:

$$n = 3N - c \quad (2.1)$$

sendo  $c$  o número de equações de restrição cinemática e  $N$  o número de inércias  $m_i$  do modelo.

O objetivo aqui é obter-se uma equação que possa descrever o sistema físico representado-o sob esta forma discreta, o que pode ser feito através de duas formulações.

A primeira formulação utilizando as leis de Newton, descreve o movimento através de quantidades vetoriais como coordenadas e esforços físicos, chamada por isso de mecânica vetorial. A segunda formulação considera o sistema como um todo eliminando a necessidade de calcular-se os esforços de interação. Esta segunda formulação atribuída a Lagrange e Leibnitz, utiliza coordenadas e esforços generalizados que não são necessariamente físicos. Assim, a formulação matemática apresenta-se, independente de qualquer sistema de coordenadas, sendo conhecida como mecânica analítica.

Devido ao seu caracter mais geral optou-se pela formulação Lagrangeana. Esta formulação é uma abordagem variacional da mecânica e permite obter-se a equação do movimento do sistema através da energia cinética, energia potencial e de uma expressão diferencial conhecida como trabalho virtual para o caso de sistemas não conservativos.

A energia cinética e potencial são quantidades escalares e podem ser expressas por deslocamentos e velocidades generalizadas e o trabalho virtual por esforços e deslocamentos virtuais generalizados. Como não é necessário conhecer-se o sistema de coordenadas, esta formulação não utiliza o diagrama de corpo livre do sistema.

Considere um sistema de partículas de inércias constantes  $m_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) ligadas no espaço por molas e sujeito a esforços externos ao sistema ou que atuam nas próprias molas, que tem a forma geral:

$$F_i = Fx_i i + Fy_i j + Fz_i k \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.2)$$

onde  $Fx_i, Fy_i, Fz_i$ , são as componentes do vetor forçamento  $F_i$  nas direções  $x, y, z$  respectivamente e  $i, j, k$  os vetores unitários nas direções cartesianas  $x, y, z$ .

Estando o movimento das inércias  $m_i$  restrito a uma certa curva ou superfície pode-se considerar esforços de restrição  $f_i$  atuando sobre elas, tendo a expressão :

$$f_i = fx_i i + fy_i j + fz_i k \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.3)$$

onde  $fx_i, fy_i, fz_i$ , são as suas componentes.

Sendo o movimento de  $m_i$  em três dimensões, o seu vetor posição  $r_i$ , onde  $x_i, y_i, z_i$ , são as suas componentes, pode ser dado por:

$$r_i = rx_i i + ry_i j + rz_i k \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.4)$$

Utilizando-se a segunda lei de Newton a equação diferencial vetorial do movimento para cada partícula onde  $f'$  é a aceleração da inércia  $m_i$ , é dada por:

$$F_i + f_i = m_i f'_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.5)$$

As equações (2.5) representam um sistema de  $3N$  equações diferenciais que podem ser lineares ou não, dependendo da relação entre os esforços e os movimentos das inércias.

O movimento das  $N$  partículas estando sujeito a restrições cinemáticas pode ser descrito completamente pelas coordenadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  onde " $n$ " é dado pela expressão (2.1). Estas coordenadas são chamadas de coordenadas generalizadas e utilizando-as, o vetor posição (2.4) pode ser dado por:

$$r_i = r_i(q_k) \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,N \\ k=1,2,\dots,n \end{matrix} \quad (2.6)$$

Nesta formulação a equação do movimento é obtida pela equação de Lagrange, que por sua vez é obtida considerando-se o princípio do trabalho virtual e o princípio de D'Alembert. Estes princípios servem de transição entre a formulação Newtoniana e a Lagrangeana. O trabalho virtual sobre todo o sistema de partículas é dado por :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_i + f_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.7)$$

onde  $F_i$  é a resultante dos esforços externos aplicados em cada partícula,  $f_i$  a resultante dos esforços de restrição que atuam em cada partícula e  $\delta r_i$  o deslocamento virtual do vetor posição  $r_i$  consistente com as restrições do sistema.

Na equação (2.6)  $\delta W$  é uma expressão infinitesimal e não a variação de  $W$ , porque a função trabalho  $W$  existe somente quando o sistema é conservativo. Esta expressão foi igualada a zero porque para um sistema em equilíbrio a resultante dos esforços é nula.

Sendo o deslocamento virtual uma mudança infinitesimal nas coordenadas  $x_i, y_i, z_i$ , que formam o vetor posição  $r_i$ , este não é considerado real e por isso o intervalo de tempo necessário para esta mudança não existe. Isto faz com que durante o processo os esforços e as restrições também não variem.

Sendo o vetor esforço de restrição sempre perpendicular ao deslocamento virtual consistente com esta restrição, o produto escalar entre eles será sempre nulo e a expressão (2.7) pode ser re-escrita como:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é a representação matemática do princípio do

trabalho virtual e estabelece a condição de equilíbrio estático do sistema. Para obter-se a condição de equilíbrio dinâmico parte-se da equação do movimento de Newton para um sistema de partículas, equação (2.5). Neste caso o trabalho virtual de todo o sistema é dado por:

$$\sum_{i=1}^N (F_i + f_i - m_i \dot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.9)$$

Da mesma forma anterior o trabalho virtual feito pelos esforços de restrição é nulo, obtendo-se a expressão matemática do princípio de D'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \dot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.10)$$

A equação de Lagrange para um sistema de  $n$  graus de liberdade é obtida assumindo-se que as suas coordenadas físicas não dependem explicitamente do tempo podendo-se usar a transformação de coordenadas (2.6) e suas derivadas. Utiliza-se ainda para a sua obtenção as equações (2.8) e (2.10), sabendo-se que o deslocamento virtual  $\delta r_i$  obedece as regras do cálculo diferencial, assim:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

é a equação de Lagrange do movimento, onde  $Q_j$  representa os esforços generalizados não conservativos atuando no sistema,  $T$  a energia cinética de todo o sistema,  $V$  a energia potencial devido aos esforços conservativos e  $q_j$  as coordenadas generalizadas.

Não é objetivo deste trabalho a dedução da fórmula de Lagrange e sim sua aplicação na obtenção da equação do movimento de sistemas lineares. Sua dedução pode ser vista em [2,3]. A substituição do índice  $k$  por  $j$  nas coordenadas e esforços generalizados foi devido a esta dedução.

As forças não conservativas devido ao amortecimento viscoso podem ser incluídas de forma explícita na equação (2.11) através da função de dissipação de Rayleigh  $F$ , assim tem-se :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.12)$$

onde agora  $Q_j$  representa somente os esforços generalizados externos aplicados e o termo  $(-\partial F/\partial \dot{q}_j)$  os esforços devidos ao amortecimento viscoso.

A equação (2.12) pode ser aplicada em sistemas lineares e não lineares. Sendo o sistema linear com  $n$  graus de liberdade, no qual os deslocamentos e velocidades são suficientemente pequenos, podendo-se ignorar os termos não lineares, tem-se para a sua energia cinética a expressão:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \quad (2.13)$$

A velocidade  $\dot{r}_i$  é obtida fazendo-se a derivada no tempo de (2.6):

$$\dot{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.14)$$

substituindo-se (2.20) em (2.19) obtém-se a energia cinética em função das velocidades generalizadas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (2.15)$$

onde os índices  $r$  e  $s$  são mudos e os termos  $m_{rs}$  são simétricos e

conhecidos como coeficientes de inércia.

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s} = m_{sr} \quad (2.16)$$

$r, s=1, 2, \dots, n$

Em geral a energia potencial é uma função não linear das coordenadas e para ser obtida deve ser expandida em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio do sistema, dado por  $q_k=0$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , tendo-se:

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(0, \dots, 0) + \sum_{r=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_r} \bigg|_{q_r=0} q_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \bigg|_{q_r=q_s=0} q_r q_s + \dots \quad (2.17)$$

onde os termos de ordem mais alta foram desconsiderados. Sendo termo  $V(0, \dots, 0)$  constante, a sua derivada será nula e além disso a condição de equilíbrio estático  $\partial V / \partial q_r = 0$   $r=1, 2, \dots, n$  faz com que os termos lineares da série sejam também nulos.

A expressão para a energia potencial em coordenadas generalizadas é dada por:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} q_r q_s \quad (2.18)$$

onde os termos  $k_{rs}$  são simétricos constantes e conhecidos como coeficientes de rigidez:

$$k_{rs} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \bigg|_{q_r=q_s=0} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_r} \bigg|_{q_r=q_s=0} = k_{sr} \quad (2.19)$$

$r, s=1, 2, \dots, n$

A expressão para a função de dissipação de Rayleigh é definida

como:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (2.20)$$

onde os termos  $c_{rs}$  são simétricos e conhecidos como coeficientes de amortecimento viscoso.

Substituindo-se (2.15-18-20) em (2.12), fazendo-se as diferenciais parciais, a derivada em relação ao tempo e desconsiderando-se os somatórios, obtém-se um conjunto de  $n$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$m_{js} \ddot{q}_s(t) + c_{js} \dot{q}_s(t) + k_{js} q_s(t) = Q_j(t) \quad \begin{matrix} s=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix} \quad (2.21)$$

onde o termo  $\partial T / \partial q$  é nulo porque os coeficientes de inércia são considerados constantes e a energia cinética não contém as coordenadas generalizadas.

Utilizando-se as regras de soma e multiplicação de matrizes e vetores do método matricial a equação (2.21) pode ser escrita da forma:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = Q(t) \quad (2.22)$$

onde "M" é a matriz de inércia composta pelos coeficientes  $m_{rs}$ , "C" a matriz de amortecimento composta pelos coeficientes  $c_{rs}$ , "K" matriz de rigidez composta pelos coeficientes  $k_{rs}$ ,  $q(t)$  o vetor deslocamento composto pelas coordenadas generalizadas  $q_j(t)$  e  $Q(t)$  o vetor esforço composto pelas esforços generalizados aplicados  $Q_j(t)$ .

A equação (2.22) é a equação de Lagrange ou a equação geral do movimento para um sistema linear de  $n$  graus de liberdade com amortecimento viscoso na forma matricial. Esta equação é uma nova representação matemática do conjunto de  $n$  equações (2.21) As matrizes

que compõem este modelo são simétricas e tem dimensões  $(n \times n)$  e os vetores dimensão  $(n \times 1)$ .

Neste ponto é bom salientar que o sistema considerado, é linear e por isso pode ser expresso por um conjunto de  $n$  equações diferenciais ordinárias, podendo ser analisado posteriormente utilizando-se a álgebra linear. Além disso, o sistema é considerado invariante com o tempo.

A solução da equação (2.22) é difícil de ser obtida, particularmente devido ao acoplamento introduzido pelos coeficientes  $c_{rs}$ , mas em alguns casos obtém-se a sua solução. A forma matricial para a equação facilita esta solução. Existem ainda casos onde as matrizes que compõem a equação (2.22) não são simétricas.

O modelo matemático de um sistema dinâmico linear e discretizado necessita das matrizes "M", "C" e "K", podendo estas ser obtidas através das equações matriciais da energia cinética, potencial e da função de dissipação de Rayleigh dadas abaixo:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) M \dot{q}(t) \quad (2.23a)$$

$$F = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) C \dot{q}(t) \quad (2.23b)$$

$$V = \frac{1}{2} q^T(t) K q(t) \quad (2.23c)$$

onde  $q^T(t)$  significa o vetor  $q(t)$  transposto.

Um exemplo possível para um sistema real pode ser o de uma haste delgada de comprimento  $L$ , engastada nas extremidades e sofrendo deformação axial, como o da figura 2.1 abaixo. Um sistema como este pode ser visto em [1,2]:

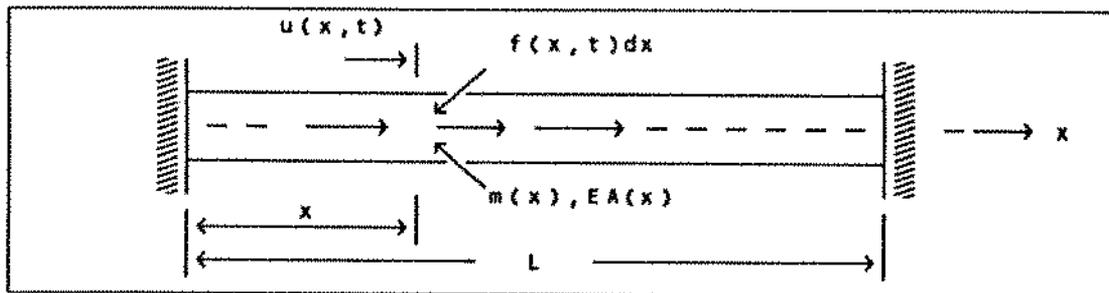


Fig. 2.1 Haste de comprimento  $L$  sofrendo deformação axial

onde  $u(x,t)$  é o deslocamento da haste ao longo da direção axial,  $f(x,t)$  a força axial externa aplicada por unidade de comprimento com a resultante ao longo do eixo centróide da haste,  $m(x)$  a massa por unidade de comprimento,  $EA(x)$  a rigidez axial,  $A(x)$  a área da seção transversal e  $E$  o módulo de elasticidade do material.

Um possível modelo discretizado para esta haste pode ser dado por um sistema de inércias discretas de "n" graus de liberdade como o da figura abaixo:

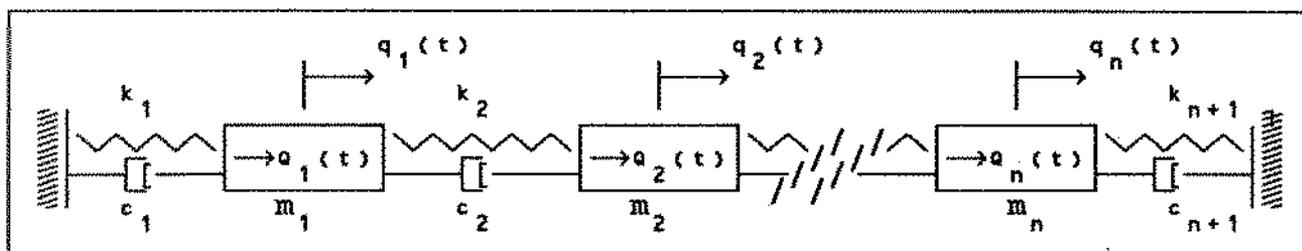


Fig. 2.2 Sistema de inércias discretas sofrendo deformação axial-n G.L.

Para o sistema acima, observa-se que devido à escolha do sistema de coordenadas a matriz de massa apresenta-se diagonal, sendo ainda todas as matrizes simétricas. Neste caso as coordenadas generalizadas são dadas por  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  e os esforços generalizados (axiais) externos dados por  $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)$ .

As restrições ao modelo discreto, representado pela equação (2.22), são que este é apenas uma aproximação do sistema físico real, devendo ser linear e invariante no tempo. A solução  $q(t)$  deste modelo pode ser obtida pela análise modal, estando esta análise

baseada no teorema da expansão [2]. Sendo os vetores modais  $\phi_r$ ,  $r=1,2,\dots,n$  ortonormais, eles formam uma base na qual pode ser representada a resposta do sistema à, condições iniciais e à, excitações

$$q(t) = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \phi_r = \Phi \eta(t) , \quad (2.24)$$

onde " $\Phi$ " é a matriz modal e  $\eta_r(t)$   $r=1,2,\dots,n$  são as coordenadas dependentes do tempo nesta nova base, chamadas de coordenadas modais. A equação (2.24) representa uma transformação linear entre dois conjuntos de coordenadas generalizadas  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  e  $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$ . Esta transformação é capaz de reduzir a equação (2.28) a um conjunto de "n" equações ordinárias de segunda ordem independentes, tendo soluções  $\eta_k(t)$  conhecidas.

Neste caso as matrizes " $M$ " e " $K$ " estão diagonalizadas devido ao processo de ortogonalização dos vetores modais em relação a matriz de massa " $M$ " e a matriz de rigidez " $K$ ", mas o acoplamento devido aos amortecimentos continua existindo. Para solucionar este problema, considera-se que o amortecimento é estrutural. Neste caso, a matriz " $C$ " é uma combinação linear das matrizes " $M$ " e " $K$ ", podendo também ser diagonalizada utilizando-se a solução (2.24). Considerando-se pequenos amortecimentos é possível também obter-se esta diagonalização, de forma aproximada.

A solução (2.24) necessita das características do sistema representado pela equação (2.22) e estas podem ser determinadas analisando-se as suas vibrações livres. Neste caso o amortecimento é considerado nulo " $C$ " = 0, bem como, a excitação. Estas características são funções das matrizes " $M$ " e " $K$ " e são chamadas de autovalores ou frequências naturais ao quadrado,  $w_r^2$   $r=1,2,\dots,n$  e autovetores ou vetores modais correspondentes  $\phi_r$   $r=1,2,\dots,n$ , sendo obtidas resolvendo-se o problema de autovalor associado. Conhecendo-se os autovalores, autovetores, as condições iniciais e a excitação obtém-se a resposta do modo "r"  $\eta_r(t)$   $r=1,2,\dots,n$ , sendo a solução geral dada por (2.24).

Deve-se observar que até este momento foram considerados amortecimentos pequenos ou proporcionais para o sistema. Em casos mais gerais de amortecimentos uma transformação do tipo (2.24) será ainda capaz de desacoplar os modos de forma a obter-se a resposta do sistema, mas neste caso, outras considerações se farão necessárias (ver capítulo III a seguir). Classicamente é possível, por exemplo, obter-se a resposta quando o amortecimento é não proporcional, através da matriz transição de estado, onde trabalha-se com vetores de estado de dimensão  $(2n \times 1)$ , incluindo os deslocamentos  $q_r(t)$  e as velocidades  $\dot{q}_r(t)$ .

Existem outras formas de análise da equação do movimento do sistema discreto dado por (2.22). Pode-se por exemplo obter-se a sua função de transferência através da transformada de Laplace e a seguir a sua resposta impulsiva. Neste caso deve-se trabalhar com os seus resíduos. No capítulo 3 a seguir diversas técnicas de obtenção dos parâmetros modais serão estudadas e a solução da equação de movimento (2.22) se tornará mais clara.

## 2.3 CONCLUSÃO

Neste capítulo desenvolveu-se um modelo matemático discretizado no espaço que serve como uma representação de um sistema real. Observou-se que a solução deste modelo pode ser obtida pela análise modal. A grande vantagem no uso do modelo matemático discreto simplificado é que este permite a utilização de computadores, sendo a sua análise feita através da álgebra linear associada ao método matricial. No capítulo III, a seguir, será apresentada uma formulação que obtém a solução da equação (2.22), mesmo quando o amortecimento é não proporcional. Esta formulação utiliza a formulação por espaço de estado e a base modal, equação (2.24).

## CAPÍTULO III

### CARACTERIZAÇÃO MODAL DE SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES COM PARÂMETROS CONCENTRADOS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo II um sistema dinâmico foi discretizado no espaço, sendo representado por uma equação diferencial matricial de segunda ordem de "n" variáveis. Considerou-se a sua solução no tempo como uma superposição dos vetores modais multiplicados por coeficientes dependentes do tempo, chamados de coordenadas modais.

Neste capítulo a equação de segunda ordem é transformada em uma equação de primeira ordem de "2n" variáveis, chamada de equação de estado do sistema original. A solução geral no tempo do sistema, (solução do modelo modal), é obtida transformando-se a equação de estado em um conjunto de "2n" equações diferenciais uni-modais. Esta solução é utilizada, a seguir, para caracterizar na frequência o sistema dinâmico, através da matriz de transferência e de um elemento genérico desta matriz.

#### 3.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA MODAL GENERALIZADO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Uma forma consistente de descrever o problema modal para um sistema dinâmico de tempo contínuo é através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Neste sentido transforma-se a equação matricial de segunda ordem do movimento, em uma equação de estado. A vibração livre ou solução homogênea da equação de estado, através do problema de autovalor, conduz às suas características ou parâmetros modais.

Com a utilização de uma transformação de coordenadas, obtém-se a base modal onde o vetor solução no tempo é obtido como uma combinação linear dos vetores modais. Através desta transformação e

considerando as propriedades modais , encontra-se uma solução no tempo.

Esta solução é obtida através das equações diferenciais uni-modais, sendo considerada a solução modo a modo do sistema. Como um passo seguinte, compara-se esta solução com a solução encontrada através da matriz transição de estado. Considerando-se uma entrada e uma saída para o sistema, obtém-se ainda esta solução em função da resposta impulsiva e das características de amplitude, freqüência, amortecimento e fase do sistema.

### 3.2.1 A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NA FORMA DE EQUAÇÃO DE ESTADO

O modelo discretizado no espaço para o sistema dinâmico foi obtido no capítulo 2, equação (2.28):

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Q(t) \quad (3.1)$$

onde  $q(t)$   $n \times 1$  é o vetor deslocamento composto pelas coordenadas generalizadas  $q_i(t)$   $i=1,2,\dots,n$  e  $Q(t)$   $n \times 1$  é o vetor de forças composto pelas forças generalizadas  $Q_j(t)$   $j=1,2,\dots,n$ .

A equação diferencial matricial de segunda ordem (3.1), representa um sistema mecânico linear e invariante no tempo com amortecimento viscoso. As forças não conservativas de posição foram consideradas nulas, fazendo portanto com que todas as matrizes sejam simétricas.

O comportamento no tempo de (3.1) é descrito através do seu vetor deslocamento  $q(t)$   $n \times 1$ . Utilizando-se também o vetor velocidade  $\dot{q}(t)$   $n \times 1$ , define-se o vetor de estado  $x(t)$   $2n \times 1$  do sistema, como :

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Utilizando-se o vetor de estado (3.2) e as notações a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se para a equação do movimento (3.1), acrescentando-se a equação trivial  $M\ddot{q}(t) = M\dot{q}(t)$ , a forma:

$$\dot{Bx}(t) - Wx(t) = u(t) \quad (3.3)$$

Pré-multiplicando-se ambos os lados da equação (3.3) por  $B^{-1}$ , obtém-se a equação de estado clássica para o modelo discretizado, [4,5].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \quad (3.4)$$

considerando que a matriz  $M$  é positivo definida possuindo inversa, a inversa da matriz  $B$  é dada por:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix}$$

A equação (3.4) representa uma equação diferencial vetorial de primeira ordem  $2nx1$ . Se  $K$   $nxn$  é uma matriz não singular, a matriz do sistema  $A$   $2nx2n$  será também não singular, sendo dada por:

$$A = B^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sendo o novo vetor forçamento  $b(t)$   $2nx1$  dado por :

$$b(t) = B^{-1}u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}Q(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $I$   $nxn$  é a matriz identidade,  $B^{-1}$   $2nx2n$  a matriz distribuição e  $u(t)$   $2nx1$  o vetor excitação do sistema.

### 3.2.2 O PROBLEMA DE AUTOVALOR, A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS E A BASE MODAL

Considerando as vibrações livres,  $u(t)=0$ , a equação (3.3) é dada por :

$$\dot{B}x(t) = Wx(t) \quad (3.7)$$

Para um dado valor de  $\lambda$  o problema de autovalor será:

$$Wx = \lambda Bx$$

sendo equivalente à equação linear homogênea:

$$[W - \lambda B]x = 0 \quad (3.8)$$

A condição necessária e suficiente para que o valor de  $\lambda$  seja um autovalor do sistema é dada pela equação característica  $\det [W - \lambda B]=0$ , [4].

Substituindo-se os valores  $\lambda_r$ ,  $r=1,2,\dots,2n$  obtidos pela equação característica em (3.8), obtém-se os autovetores  $x = \psi_r$ ,  $r=1,2,\dots,2n$  correspondentes. Assim, a equação (3.8) deve ser satisfeita para :

$$[W - \lambda_r B] \psi_r = 0 \quad r=1,2,\dots,2n \quad (3.9)$$

Para matrizes reais, que é o caso de  $M$ ,  $C$  e  $K$  e sendo o amortecimento não proporcional, os autovalores como os autovetores apresentam-se como pares complexos conjugados e qualquer conjunto destes autovetores (por serem ortogonais) é linearmente independente, servindo como uma nova base vetorial na qual qualquer vetor  $x(t)$  pode ser expresso por uma combinação linear do tipo:

$$x(t) = \sum_{r=1}^{2n} \xi_r(t) \psi_r = \Psi \xi(t) \quad (3.10)$$

onde, pelo teorema da expansão,  $\xi_r(t) = \psi_r^T B x(t)$  para qualquer  $t \geq 0$  e  $\Psi$  é a matriz modal cujas colunas são os autovetores  $\psi_r$ .

Neste caso o vetor de estado  $x(t)$  pode ser definido como uma combinação linear dos vetores modais  $\psi_r$  multiplicados por coeficientes dependentes do tempo. Estes coeficientes podem ser vistos como um novo conjunto de coordenadas generalizadas  $\xi_r(t)$ . Assim, a equação (3.10) representa uma transformação de coordenadas onde as novas coordenadas são chamadas de coordenadas modais e a nova base de base modal.

Sendo os autovetores  $\psi_r$  a solução de um conjunto de equações algébricas homogêneas, utiliza-se um esquema de normalização para obter-se um vetor modal de magnitude única:

$$\psi_r^T B \psi_r = 1 \quad r=1, 2, \dots, 2n \quad (3.11)$$

Multiplicando-se (3.9) por  $\psi_r^T$  e considerando-se (3.11), obtém-se:

$$\psi_r^T W \psi_r = \lambda_r \quad r=1, 2, \dots, 2n \quad (3.12)$$

Considerando-se as propriedades de normalização e ortogonalização dos autovetores, pode-se escrever (3.11) e (3.12) na forma matricial:

$$\Psi^T B \Psi = I \quad ; \quad \Psi^T W \Psi = \Lambda \quad (3.13)$$

onde  $I$   $2n \times 2n$  é a matriz identidade e  $\Lambda$   $2n \times 2n$  é a matriz diagonal dos autovetores  $\lambda_r$ ,  $r=1, 2, \dots, 2n$  incluindo os seus complexos conjugados.

Devido à natureza do vetor de estado  $x(t)$  o autovetor  $\psi_r$  pode ser escrito na forma:

$$\psi_r = \begin{bmatrix} \phi_r \\ \lambda_r \phi_r \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sendo a matriz dos autovalores e dos autovetores dadas respectivamente por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & \Lambda^* \end{bmatrix} ; \Psi = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi \Lambda & \Phi^* \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal dos autovalores  $\lambda_r$ ,  $r=1,2,\dots,n$  e  $\Lambda^*$  a matriz diagonal dos autovalores complexos conjugados  $\lambda_r^*$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , sendo  $\Phi$  e  $\Phi^*$  as matrizes dos autovetores correspondentes.

### 3.2.3 A RESPOSTA GERAL DO MODELO MODAL DISCRETIZADO

Pré-multiplicando-se a equação do movimento na forma de estado (3.3) por  $\Psi^T$  e utilizando-se a transformação de coordenadas (3.10) e sua derivada, onde a matriz modal  $\Psi$  é constante, tem-se:

$$\Psi^T B \dot{\xi}(t) = \Psi^T W \Psi \xi(t) + \Psi^T u(t)$$

Considerando as propriedades de ortonormalização dos vetores modais em relação as matrizes  $B$  e  $W$  (3.13), tem-se a equação do movimento na forma de estado diagonalizada:

$$I \dot{\xi}(t) = \Lambda \xi(t) + \Psi^T u(t) \quad (3.16)$$

sabendo-se que:

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} \Phi^T & \Lambda^T \Phi^T \\ \Phi^{*T} & \Lambda^{*T} \Phi^{*T} \end{bmatrix} \text{ e } u(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\Psi^T u(t) = \begin{bmatrix} \Phi^T Q(t) \\ \Phi^{*T} Q(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Considerando a matriz  $\Lambda$  em (3.15) e (3.17) o conjunto de  $2n$  equações dado por (3.16) pode ser visto como dois conjuntos de  $n$  equações da forma:

$$\begin{aligned} I \dot{\eta}(t) &= \hat{\eta}(t) + f(t) \\ I \dot{\eta}^*(t) &= \hat{\eta}^*(t) + f^*(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde, agora a matriz identidade  $I$  tem dimensão  $n \times n$ ,  $Q(t)$  é o vetor de forças original e  $f(t) = \Phi^T Q(t)$ ,  $f^*(t) = \Phi^{*T} Q(t)$ .

Os dois sistemas de equações (3.18) representam dois conjuntos de  $n$  equações diferenciais ordinárias independentes de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_r(t) &= \lambda_r \eta_r(t) + f_r(t) \quad r=1,2,\dots,n \\ \dot{\eta}_r^*(t) &= \lambda_r^* \eta_r^*(t) + f_r^*(t) \quad r=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde:

$$f_r(t) = \phi_r^T Q(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj} Q_j(t) \quad \text{e} \quad f_r^*(t) = \phi_r^{*T} Q(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj}^* Q_j(t). \quad (3.20)$$

Quaisquer das equações (3.19) podem descrever o comportamento de um sistema mecânico linear, com amortecimento não proporcional de primeira ordem.

As funções  $\eta_r(t)$ ,  $\eta_r^*(t)$  e  $f_r(t)$ ,  $f_r^*(t)$  são funções do tempo e representam respectivamente a resposta e a excitação considerando os pares complexo conjugados.

Estas equações apresentam constantes complexas dadas por  $\lambda_r$ ,  $\lambda_r^*$  e  $\phi_{rj}$ ,  $\phi_{rj}^*$ ,  $r=1,2,\dots,2n$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , que representam respectivamente os autovalores e as componentes  $j$  dos vetores modais. Pode-se ver também em (3.20) que o termo  $Q_j$  representa o  $j$ -ésimo esforço generalizado original, componente do esforço do modo  $r$ .

Fazendo-se a transformada de Laplace de (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned}
 s \mathcal{K}_r(s) - \eta_r(0) &= \lambda_r \mathcal{K}_r(s) + F_r(s) \quad r=1,2,\dots,n \\
 s \mathcal{K}_r^*(s) - \eta_r^*(0) &= \lambda_r^* \mathcal{K}_r^*(s) + F_r^*(s) \quad r=1,2,\dots,n
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

onde  $\mathcal{K}_r(s)$ ,  $\mathcal{K}_r^*(s)$  e  $F_r(s)$ ,  $F_r^*(s)$  são as transformadas de Laplace de  $\eta_r(t)$ ,  $\eta_r^*(t)$  e  $f_r(t)$ ,  $f_r^*(t)$ , e  $\eta_r(0)$  e  $\eta_r^*(0)$  o par complexo conjugado das condições iniciais.

As equações (3.21) podem ser escritas ainda como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_r(s) &= \frac{\eta_r(0)}{s - \lambda_r} + \frac{1}{s - \lambda_r} F_r(s) \quad r=1,2,\dots,n \\
 \mathcal{K}_r^*(s) &= \frac{\eta_r^*(0)}{s - \lambda_r^*} + \frac{1}{s - \lambda_r^*} F_r^*(s) \quad r=1,2,\dots,n
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

A transformada inversa de Laplace das equações (3.22), pelo teorema da convolução [6], é dada por:

$$\begin{aligned}
 \eta_r(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{K}_r(s) \right\} = e^{\lambda_r t} \eta_r(0) + \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f_r(\tau) d\tau \quad r=1,2,\dots,n \\
 \eta_r^*(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{K}_r^*(s) \right\} = e^{\lambda_r^* t} \eta_r^*(0) + \int_0^t e^{\lambda_r^*(t-\tau)} f_r^*(\tau) d\tau \quad r=1,2,\dots,n
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Considerando a solução complexo conjugada, o vetor de estado  $x(t)$  em (3.10) pode ser dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \cdot \\ q(t) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \psi_r + \sum_{r=1}^n \eta_r^*(t) \psi_r^* \tag{3.24}$$

substituindo-se (3.23) em (3.24), sendo os vetores modais  $\psi_r$  e  $\psi_r^*$  constantes e re-arranjando os somatórios e as integrais tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \\
&= \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r t} \eta_r(0) \psi_r + \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r^* t} \eta_r^*(0) \psi_r^* \\
&\quad + \int_0^t \left( \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r(t-\tau)} f_r(\tau) \psi_r + \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r^*(t-\tau)} f_r^*(\tau) \psi_r^* \right) d\tau
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde  $f_r(\tau) = \psi_r^T u(\tau)$  e  $f_r^*(\tau) = \psi_r^{*T} u(\tau)$

A solução geral de tempo contínuo do modelo modal obtida em (3.25) foi possível porque, sendo o sistema de equações linear, utilizou-se o princípio da superposição. Observa-se assim, uma parte homogênea  $\mathbf{x}_h(t)$  e uma parte particular  $\mathbf{x}_p(t)$ . Esta mesma solução pode ser obtida utilizando-se o conceito de matriz transição de estado [4, 7].

A matriz transição é um operador utilizado para a solução de sistemas de equações diferenciais lineares e é definida de tal forma que sendo uma solução para a equação de estado, também serve de transição para que o sistema alcance o estado seguinte.

Neste caso, pode-se demonstrar que a solução geral de tempo contínuo através desta matriz pode ser dada por, [7]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{3.26}$$

$$= \Psi e^{\Lambda t} \Psi^T \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Psi e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^T B^{-1} u(\tau) d\tau$$

onde  $B^{-1}$  é a matriz distribuição, sendo a solução particular  $\mathbf{x}_p(t)$  obtida através das propriedades da matriz transição [7].

Esta solução é obtida na base modal considerando-se o sistema invariante com o tempo, sendo a matriz de transição dada por  $Y(t,0)=$

$=Y(t) = \Psi e^{\Lambda t} \Psi^T$ . Utilizando-se as fórmulas anteriores e sabendo-se que  $e^{\Lambda t} = \text{diag}[e^{\lambda_r t}]$ , onde considera-se o par complexo conjugado, pode-se mostrar que as equações (3.25) e (3.26) são equivalentes.

Utilizando-se (3.14) e a solução homogênea, função das condições iniciais de (3.25), obtém-se a resposta livre do modelo modal devido ao deslocamento do sistema original :

$$q_h(t) = \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r t} \eta_r(0) \phi_r + \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r^* t} \eta_r^*(0) \phi_r^* \quad (3.27)$$

Da mesma forma, utilizando-se (3.14) e a solução particular, dada pela integral de convolução de (3.25), obtém-se a resposta forçada do modelo modal devido ao deslocamento do sistema original :

$$q_p(t) = \sum_{r=1}^n \left( \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f_r(\tau) d\tau \right) \phi_r + \sum_{r=1}^n \left( \int_0^t e^{\lambda_r^*(t-\tau)} f_r^*(\tau) d\tau \right) \phi_r^* \quad (3.28)$$

onde  $f_r(\tau) = \phi_r^T Q(\tau)$  e  $f_r^*(\tau) = \phi_r^{*T} Q(\tau)$  e manteve-se a forma original da solução particular.

Considerando o vetor de forças generalizado  $Q^T(t) = [00 \dots Q_j(t) \dots 00]$ , os deslocamentos generalizados  $q^T(t) = [00 \dots q_j(t) \dots 00]$  e utilizando um único somatório para a parte homogênea (3.27) e particular (3.28), tem-se :

$$\begin{aligned}
q_i(t) &= q_{h_i}(t) + q_{p_{ij}}(t) \\
&= \sum_{r=1}^n \left( \phi_{ri} \eta_r(0) e^{\lambda_r t} + \phi_{ri}^* \eta_r^*(0) e^{\lambda_r^* t} \right) \\
&+ \int_0^t \left\{ \sum_{r=1}^n \left( \phi_{ri} \phi_{rj} e^{\lambda_r(t-\tau)} + \phi_{ri}^* \phi_{rj}^* e^{\lambda_r^*(t-\tau)} \right) Q_j(\tau) \right\} d\tau
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

onde as forças modais são agora dadas por  $f_r(t) = \phi_{rj} Q_j(t)$  e  $f_r^*(t) = \phi_{rj}^* Q_j(t)$ .

### 3.2.4 A RESPOSTA DO MODELO MODAL EM FUNÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO

Considerando a força generalizada sobre o sistema original como a função impulso unitário de Dirac, tem-se  $Q_j(\tau) = \delta_j(\tau)$ , onde por definição  $\delta_j(\tau) = 0$  para  $\tau \neq 0$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_j(\tau) d\tau = 1$ . Sendo as forças modais também funções impulsos de Dirac ponderadas pelos elementos da matriz modal,  $f_r(\tau) = \phi_{rj} \delta_j(\tau)$  e  $f_r^*(\tau) = \phi_{rj}^* \delta_j(\tau)$ .

Desta forma, a resposta do sistema forçada por esta função impulso, (resposta impulsiva), tirada de (3.29) com  $Q_j(\tau) = \delta_j(\tau)$  será:

$$\begin{aligned}
h_{ij}(t) &= \int_0^t \left\{ \sum_{r=1}^n \left( \phi_{ri} \phi_{rj} e^{\lambda_r(t-\tau)} + \phi_{ri}^* \phi_{rj}^* e^{\lambda_r^*(t-\tau)} \right) \delta_j(\tau) \right\} d\tau \\
&= \sum_{r=1}^n \left( \phi_{ri} \phi_{rj} e^{\lambda_r t} + \phi_{ri}^* \phi_{rj}^* e^{\lambda_r^* t} \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

onde foi utilizada a propriedade de amostragem de  $\delta_j(t)$ , [10].

Assim, tem-se para a resposta geral modo a modo, em função da resposta impulsiva do sistema, a expressão:

$$q_i(t) = q_{h_i}(t) + h_{i,j}(t) * Q_j(t)$$

$$q_{h_i}(t) = \sum_{r=1}^n \left( \eta_r(0) \phi_{r,i} e^{\lambda_r t} + \eta_r^*(0) \phi_{r,i}^* e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (3.31)$$

$$h_{i,j}(t) = \sum_{r=1}^n \left( \phi_{r,i} \phi_{r,j} e^{\lambda_r t} + \phi_{r,i}^* \phi_{r,j}^* e^{\lambda_r^* t} \right)$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

onde o produto de convolução em (3.31) é definido pela integral de convolução:

$$h_{i,j}(t) * Q_j(t) = \int_0^t h_{i,j}(t-\tau) Q_j(\tau) d\tau$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

tendo-se considerado os sinais causais, isto é,  $Q_j(t)=0$  para  $t<0$ , e o sistema fisicamente realizável.

### 3.2.5 A RESPOSTA DO MODELO MODAL EM FUNÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE AMPLITUDE, AMORTECIMENTO, FREQUÊNCIA E FASE

Considerando os modos sub-amortecidos e substituindo-se os autovalores característicos da estrutura analisada, (modelo dinâmico),  $\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_{dr}$  e o seu complexo conjugado  $\lambda_r^* = -\sigma_r - j\omega_{dr}$  em (3.31), tem-se para a resposta livre e impulsiva as expressões:

$$q_{hi}(t) = \sum_{r=1}^n \left( A_{ri} e^{-\sigma_r t} \text{sen}(w_{dr} t - \alpha_{ri}) \right) \quad (3.32)$$

$i=1,2,\dots,n$

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^n \left( A_{rij} e^{-\sigma_r t} \text{sen}(w_{dr} t - \alpha_{rij}) \right) \quad (3.33)$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

onde os termos reais  $A_{ri}$  e  $\alpha_{ri}$  da resposta livre  $q_{hi}(t)$  são dados por:

$$A_{ri} = 2 \|\eta_r(0) \phi_{ri}\| = 2 \|\eta_r(0)\| \|\phi_{ri}\|$$

$$\alpha_{ri} = \text{fase}(\eta_r(0) \phi_{ri}) = \text{arctg} \left( \frac{\text{Re}(\eta_r(0) \phi_{ri})}{\text{Im}(\eta_r(0) \phi_{ri})} \right) \quad (3.34)$$

$r=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,n$

e os termos reais  $A_{rij}$  e  $\alpha_{rij}$  da resposta forçada por uma função impulso,  $h_{ij}(t)$ , são dados por:

$$A_{rij} = 2 \|\phi_{ri} \phi_{rj}\| = 2 \|\phi_{ri}\| \|\phi_{rj}\|$$

$$\alpha_{rij} = \text{fase}(\phi_{ri} \phi_{rj}) = \text{arctg} \left( \frac{\text{Re}(\phi_{ri} \phi_{rj})}{\text{Im}(\phi_{ri} \phi_{rj})} \right) \quad (3.35)$$

$r=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$

Expressando-se os autovalores característicos  $\lambda_r$  em função do fator de amortecimento e da frequência natural, tem-se :

$$\lambda_r = -\zeta_r w_r + j w_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2} \quad r=1,2,\dots,n \quad (3.36)$$

onde o coeficiente de amortecimento  $\sigma_r$  e a frequência natural amortecida  $w_{dr}$  do modo  $r$ , são expressos por :

$$\sigma_r = \zeta_r w_r \quad ; \quad w_{dr} = w_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2} \quad r=1, 2, \dots, n \quad (3.37)$$

e o fator de amortecimento  $\zeta_r$ , a freqüência natural  $w_r$  e a fase  $\alpha_r$  do modo  $r$ , são expressos por :

$$w_r = \|\lambda_r\| \quad ; \quad \zeta_r = \frac{-\text{Re}(\lambda_r)}{\|\lambda_r\|} \quad ; \quad \alpha_r = \text{arctg} \frac{\text{Re}(\lambda_r)}{\text{Im}(\lambda_r)} \quad (3.38)$$

$r=1, 2, \dots, n$

O termo genérico  $A_{ri} e^{-\sigma_r t} \text{sen}(w_{dr} t - \alpha_{ri})$  da equação (3.32) é a resposta livre no tempo de um sistema (massa-mola-amortecedor) de um grau de liberdade com amortecimento  $\sigma_r$  e freqüência natural amortecida  $w_{dr}$ . As amplitudes e fases estão relacionadas com as condições iniciais e os elementos da matriz modal através da equação (3.34).

O termo genérico  $A_{rij} e^{-\sigma_r t} \text{sen}(w_{dr} t - \alpha_{rij})$  da equação (3.33) é a resposta deste mesmo sistema cuja excitação é a função impulso unitário. Neste caso, as condições iniciais são consideradas nulas e as amplitudes e fases estão relacionadas somente com as características espaciais do sistema através da equação (3.35).

Sendo o amortecimento do sistema proporcional, os angulos de fase de  $[\eta_r(0) \phi_{ri}]$  e de  $[\phi_{ri} \phi_{rj}]$  serão de 90 graus e conseqüentemente  $\alpha_{ri}$  e  $\alpha_{rij}$  dadas por (3.34) e (3.35), serão zero.

### 3.3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA MODAL GENERALIZADO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Em análise de freqüência trabalha-se no plano complexo da variável  $s$ , sendo a matriz função de transferência uma relação entre a transformada de Laplace da parte forçada do vetor solução no tempo e a transformada de Laplace do vetor resposta no tempo do sistema.

Considerando-se uma entrada e uma saída para o sistema, é possível definir também a função de transferência modal, sendo esta uma combinação linear das funções de transferências uni-modais. Por

sua vez, estas funções são obtidas dividindo-se a resposta no tempo do sistema uni-modal  $e^{st}H_r(s)$  pela sua excitação no tempo  $e^{st}$ .

Utilizando-se a definição acima e as equações diferenciais uni-modais obtém-se expressões para as funções de transferência uni-modais. Através da transformada inversa de Laplace destas funções encontra-se as respostas ao impulso unitário para cada modo. Na base modal uma combinação linear destas respostas, leva à resposta impulsiva modal.

### 3.3.1 A MATRIZ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E A MATRIZ FRF

Segundo Ewins [8] a matriz FRF é composta de um conjunto de Funções de Resposta em Freqüência FRFs, obtidas através da resposta forçada da estrutura, onde a força de excitação é em geral harmônica e representada por exponenciais imaginárias, cujas amplitudes contém a informação de fase. Esta força excita a estrutura em todas as freqüências (e em uma determinada faixa), e a matriz FRF relaciona a resposta vetorial com a excitação vetorial, sendo a resposta também composta por exponenciais imaginárias.

A diferença entre as formulações que conduzem à matriz FRF e a matriz função de transferência está na variável considerada. No primeiro caso, por razões práticas, desejou-se conhecer a estrutura através de uma varredura harmônica forçada e para isso utilizou-se exponenciais imaginárias. Assim a variável de Laplace utilizada aqui é definida só no eixo imaginário do plano complexo  $s = j\omega$ . Na formulação que conduz à matriz função de transferência a variável utilizada contém uma parte real  $\sigma$  e a variável de Laplace é definida como  $s = \sigma + j\omega$ . Desta forma o problema da análise linear de vibrações através da matriz FRF não leva em consideração a formulação utilizada em análise dinâmica de sistemas lineares na qual a variável está no plano complexo  $s$ .

Independendo de uma ou outra formulação existirão sempre os autovalores característicos da estrutura analisada que poderão ser

complexos e definidos neste plano como  $\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_{dr}$ . A solução de tempo contínuo apresentada nas seções anteriores, principalmente na seção 3.2.3, demonstra que a partir do problema de autovalor e da transformação de coordenadas, obtidas através do teorema da expansão, encontra-se a base modal na qual aparecem exponenciais complexas.

Fazendo-se a transformada de Laplace de (3.1), sendo as condições iniciais nulas e sabendo-se que as matrizes  $M, C$  e  $K$  não variam com o tempo, tem-se [9]:

$$\left[ M s^2 + C s + K \right] \bar{q}_p(s) = \bar{Q}(s) \quad (3.39)$$

onde a resposta forçada (solução particular) do vetor deslocamento transformado e a força transformada do sistema no plano complexo  $s$  são dados respectivamente por:  $\bar{q}_p(s) = \mathcal{L}\{q_p(t)\}$  e  $\bar{Q}(s) = \mathcal{L}\{Q(t)\}$ .

Utilizando-se (3.39) pode-se expressar o vetor deslocamento transformado  $\bar{q}_p(s)$  como função do vetor de forças transformado  $\bar{Q}(s)$ :

$$\bar{q}_p(s) = \left[ M s^2 + C s + K \right]^{-1} \bar{Q}(s) \quad (3.40)$$

Define-se a matriz função de transferência do sistema  $H(s)$   $n \times n$  como a matriz que relaciona o vetor  $\bar{q}(s)$  com o vetor  $\bar{Q}(s)$ , assim tem-se:

$$\bar{q}_p(s) = H(s) \bar{Q}(s) \quad (3.41)$$

Comparando-se (3.40) e (3.41) a matriz  $H(s)$  pode ser dada por:

$$H(s) = \left[ M s^2 + C s + K \right]^{-1} \quad (3.42)$$

A matriz  $H(s)$  pode ser expressa diretamente na base modal considerando-se a parte forçada do vetor resposta do sistema, equação (3.28). Neste caso sendo a integral de convolução definida como o produto de convolução :

$$\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau = e^{\lambda t} * f(t)$$

a equação (3.28) pode ser expressa como:

$$\mathbf{q}_p(t) = \sum_{r=1}^n \left[ (e^{\lambda_r t} * \mathbf{f}_r(t)) \phi_r + (e^{\lambda_r^* t} * \mathbf{f}_r^*(t)) \phi_r^* \right] \quad (3.43)$$

Usando o teorema da convolução e fazendo-se a transformada de Laplace da equação (3.43) onde  $\mathbf{f}_r(t) = \phi_r^T \mathbf{Q}(t)$ ,  $\mathbf{f}_r^*(t) = \phi_r^{*T} \mathbf{Q}(t)$  e  $\mathcal{L}\{\mathbf{f}_r(t)\} = \phi_r^T \bar{\mathbf{Q}}(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\mathbf{f}_r^*(t)\} = \phi_r^{*T} \bar{\mathbf{Q}}(s)$  e  $\bar{\mathbf{q}}_p(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{q}_p(t)\}$ , tem-se:

$$\bar{\mathbf{q}}_p(s) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_r^T \bar{\mathbf{Q}}(s)}{s - \lambda_r} \phi_r + \frac{\phi_r^{*T} \bar{\mathbf{Q}}(s)}{s - \lambda_r^*} \phi_r^* \right) \quad (3.44)$$

onde é conhecido que  $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = 1/(s-\lambda)$ .

Sabendo-se que  $\phi_r^T \bar{\mathbf{Q}}(s)$  e  $\phi_r^{*T} \bar{\mathbf{Q}}(s)$  são escalares, (3.44) pode ser expressa como:

$$\bar{\mathbf{q}}_p(s) = \left\{ \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_r \phi_r^T}{s - \lambda_r} + \frac{\phi_r^* \phi_r^{*T}}{s - \lambda_r^*} \right) \right\} \bar{\mathbf{Q}}(s) \quad (3.45)$$

Comparando-se (3.41) com (3.45) pode-se definir a matriz função de transferência  $H(s)$  na base modal. Neste caso  $H(s)$  está em função dos vetores modais do sistema original (3.1) :

$$H(s) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_r \phi_r^T}{s - \lambda_r} + \frac{\phi_r^* \phi_r^{*T}}{s - \lambda_r^*} \right) \quad (3.46)$$

A matriz  $H(s)$  pode ser obtida também através do seu determinante característico e da sua expansão em frações parciais, [9]. Considerando  $D(s)=[M s^2 + C s + K]$  e a equação (3.33), obtém-se  $H(s)$  através divisão da matriz adjunta  $D'(s)$  e do determinante  $|D(s)|$ :

$$H(s) = D^{-1}(s) = \frac{D'(s)}{|D(s)|} \quad (3.47)$$

onde o determinante  $|D(s)|$  é o polinômio característico de ordem  $2n$  do sistema, cujas raízes são pares complexos conjugados no plano  $s$ , tendo os valores  $s = s_r$  e  $s = s_r^*$   $r=1, 2, \dots, n$ .

Assim a matriz  $H(s)$  pode ser expandida em frações parciais da forma:

$$H(s) = \frac{D'(s)}{\prod_{r=1}^n (s-s_r)(s-s_r^*)} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{A_r}{s-s_r} + \frac{A_r^*}{s-s_r^*} \right) \quad (3.48)$$

Comparando-se (3.48) com (3.46) observa-se que as matrizes  $A_r$  são o produto diádico dos vetores modais do sistema original  $\phi_r \phi_r^*$ , sendo as raízes do polinômio característico os seus autovalores  $s_r = \lambda_r$  e  $s_r^* = \lambda_r^*$ .

Esquemáticamente a matriz  $H(s)$  pode ser representada como:

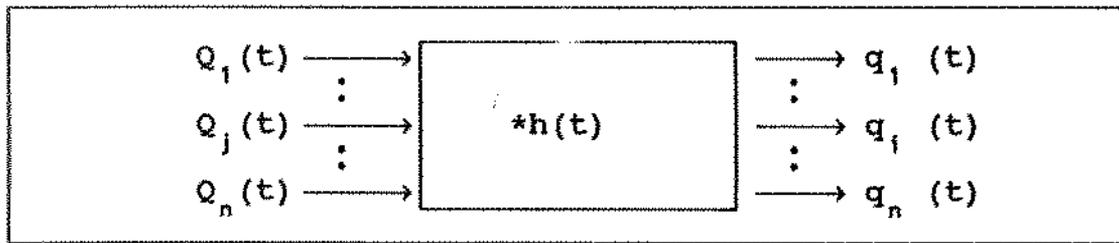


Fig. 3.1 Diagrama em blocos de  $H(s)$ , [ $*h(t)$ ]

onde  $Q_j(t)$  e  $q_i(t)$  são respectivamente a força generalizada no ponto  $j$  e o deslocamento generalizado no ponto  $i$ , sem considerar as condições iniciais.

### 3.3.2 A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA MODAL (UM ELEMENTO DE $H(s)$ )

No estudo sobre análise na frequência pode-se obter a resposta de um sistema conhecendo-se a função de excitação e a sua função de transferência. A resposta de um sistema linear e invariante no tempo à uma função de excitação  $e^{st}$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) é dada por  $H(s)e^{st}$  e define-se a função de transferência do sistema  $H(s)$  pela razão entre a sua saída e a sua entrada, [6].

Devido à sua definição a função de transferência será diferente em diferentes pontos do sistema, devendo ser obtida através da equação diferencial que o descreve.

Para o caso do sistema dinâmico discretizado (3.1) as equações diferenciais uni-modais que o descrevem são dadas por (3.19):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_r(t) - \lambda_r \eta_r(t) &= f_r(t) \quad r=1,2,\dots,n \\ \dot{\eta}_r^*(t) - \lambda_r^* \eta_r^*(t) &= f_r^*(t) \quad r=1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{3.49}$$

Considerando  $f_r(t) = f_r^*(t) = e^{st}$  tem-se  $\eta_r(t) = H_r(s)e^{st}$  e  $\eta_r^*(t) = H_r^*(s)e^{st}$ , substituindo estas expressões e suas derivadas em

(3.49), tem-se as funções de transferências uni-modais dadas por:

$$H_r(s) = \frac{1}{s - \lambda_r} ; H_r^*(s) = \frac{1}{s - \lambda_r^*} \quad (3.50)$$

$r=1, 2, \dots, n$

Esquemáticamente a função  $H_r(s)$  pode ser representada como :

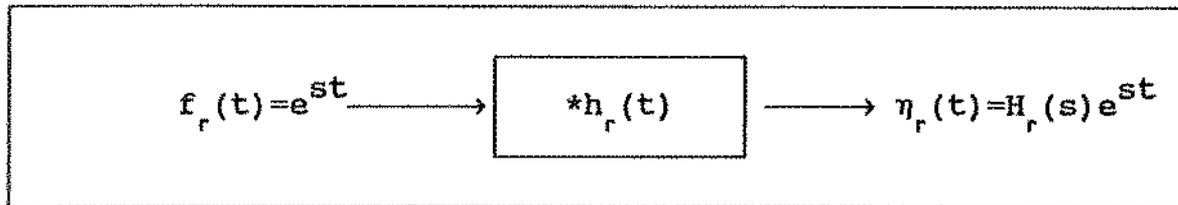


Fig. 3.2 Diagrama em bloco de  $H_r(s)$ ,  $[*h_r(t)]$

onde  $f_r(t)$  e  $\eta_r(t)$  são respectivamente as forças e os deslocamentos uni-modais. Na base modal, a combinação linear destas funções levam à função de transferência modal  $H_{ij}(s)$ .

Sendo  $Q^T(t) = [0 \ 0 \dots Q_j(t) \dots 00]$ , um elemento genérico  $H_{ij}(s)$  da matriz  $H(s)$  representará a relação entre  $\bar{q}_i(s)$  e  $\bar{Q}_j(s)$ , podendo ser expresso em termos dos autovalores e de elementos dos vetores modais do sistema:

$$H_{ij}(s) = \frac{\bar{q}_i(s)}{\bar{Q}_j(s)} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_{ri} \phi_{rj}}{s - \lambda_r} + \frac{\phi_{ri}^* \phi_{rj}^*}{s - \lambda_r^*} \right) \quad (3.51)$$

$i=1, 2, \dots, n \quad j=1, 2, \dots, n$

onde  $\phi_{ri}$  é o elemento  $i$  do autovetor  $\phi_r$ , sendo o transposto de um escalar o próprio escalar. A matriz  $H(s)$  é simétrica, assim  $H_{ij}(s) = H_{ji}(s)$ . Considerando (3.50) e  $r_{rij} = \phi_{ri} \phi_{rj}$ , (3.51) pode ser expressa como::

$$H_{ij}(s) = \frac{\bar{q}_i(s)}{\bar{Q}_j(s)} = \sum_{r=1}^n \left( r_{rij} H_r(s) + r_{rij}^* H_r^*(s) \right) \quad (3.52)$$

Neste caso substitui-se o produto complexo  $\phi_{ri} \phi_{rj}$  por uma constante complexa  $r_{rij}$ , chamada de constante modal ou resíduo, sendo os autovalores  $\lambda_r$ ,  $\lambda_r^*$  considerados, análogamente à teoria de controles, polos do sistema. Os polos e os resíduos representam a informação básica ou os parâmetros modais do modelo discretizado (3.1) e  $H_{ij}(s)$  a função de transferência modal que relaciona a excitação no ponto  $j$  com a resposta no ponto  $i$ .

Esquemáticamente a função  $H_{ij}(s)$  pode ser representada como:

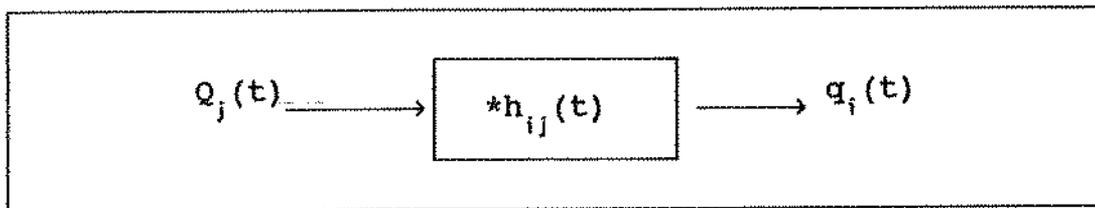


Fig. 3.3 Diagrama em bloco de  $H_{ij}(s)$ ,  $[*h_{ij}(t)]$

onde as forças generalizadas  $Q_j(t)$  e os deslocamentos generalizados  $q_i(t)$  do sistema original estão relacionados com as forças modais  $f_r(t)$ ,  $f_r^*(t)$  e os deslocamentos modais  $\eta_r(t)$ ,  $\eta_r^*(t)$ , através da base modal. Estas relações são expressas pelas equações:

$$f_r(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj} Q_j(t) \quad ; \quad f_r^*(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj}^* Q_j(t) \quad ; \quad q_i(t) = \sum_{r=1}^n [\eta_r(t) \phi_{ri} + \eta_r^*(t) \phi_{ri}^*]$$

onde considera-se só a parte forçada de  $\eta_r(t)$  e  $\eta_r^*(t)$ .

### 3.3.3 A RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO NA BASE MODAL

A resposta ao impulso unitário uni-modal pode ser obtida fazendo-se a transformada inversa de Laplace da equação (3.50):

$$\begin{aligned}
 h_r(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_r(s)\} = e^{\lambda_r t} \\
 h_r^*(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_r^*(s)\} = e^{\lambda_r^* t}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

podendo ser expressa na base modal como:

$$h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{ij}(s)\} = \sum_{r=1}^n ( r_{rij} h_r(t) + r_{rij}^* h_r^*(t) ) \tag{3.54}$$

A equação (3.54) é a mesma equação (3.30), obtida no domínio do tempo, podendo ser ainda encontrada fazendo-se a transformada inversa de Laplace da equação (3.52).

### 3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo reviu-se a caracterização modal de sistemas dinâmicos discretizados no espaço, apresentando-se expressões no tempo e na frequência para a sua resposta em função dos seus parâmetros modais. No capítulo IV a seguir, será (desenvolvida) a análise de sistemas dinâmicos através de diversos modelos paramétricos representativos. Nestes modelos inclui-se o modelo integro-diferencial o modelo de sistemas discreto no tempo (equação a diferenças - filtros digitais) e os modelos de séries temporais tais como AR, MA, ARMA e ARIMA.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

#### 4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo III reviu-se a teoria da resposta geral de um sistema dinâmico discretizado no espaço através da sua representação de estado e da transformada de Laplace.

Neste capítulo (desenvolve-se) a análise do sistema dinâmico (de uma entrada e uma saída) no domínio do tempo através de modelos como a) o integro-diferencial, onde o sistema é representado por uma equação diferencial de ordem "n" de uma variável, b) o modelo de sistemas discretos no tempo, onde esta equação é transformada em uma equação a diferenças, podendo ser compreendida como um modelo de filtros, c) o modelo de séries temporais, onde a série representa uma amostra de um processo estocástico.

Ao longo do capítulo observar-se-á a relação entre a solução modal obtida no capítulo anterior, a solução do modelo integro-diferencial (ambas contínuas no tempo-séries de exponenciais) e a solução do modelo discreto no tempo (séries geométricas). Serão vistas também as relações entre o modelo de equação a diferenças, o modelo de filtros, e o modelo de séries temporais.

Como uma visão mais abrangente destes modelos no tempo é dada pela análise de séries temporais da estatística, este capítulo dedicará uma parte significativa à descrição desta forma de analisar modelos probabilísticos, tais como o ARMA e o ARIMA..

## 4.2 O MODELO INTEGRO-DIFERENCIAL

O modelo integro-diferencial é formulado de forma não matricial, sendo utilizado na mecânica clássica e em áreas como circuitos elétricos, [6,10,15]. Nesta área, por exemplo, as malhas do circuito são modeladas por equações integro-diferenciais, [10].

Em cada uma destas equações estão incluídas a excitação (voltage da malha) e as respostas (correntes das malhas), sendo necessário eliminar as variáveis de resposta, de tal forma que se tenha para cada equação a relação entre a excitação e uma destas respostas.

Para isto, torna-se conveniente o uso de uma notação operacional, onde substitui-se o operador diferencial  $d/dt$  por um operador algébrico "p" e a operação de integração em relação a t por um operador algébrico "1/p". Assim, sendo  $f(t)$  uma função de "t", tem-se:

$$p^n[f(t)] = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p^n} f(t) = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n \quad (4.1)$$

Utilizando-se esta notação, o conjunto de equações integro-diferenciais que representam o sistema é convertido em um conjunto de equações algébricas. Com a utilização da regra de Cramer eliminam-se as variáveis, podendo-se representar genericamente uma destas equações como, [6]:

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0) q_i(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0) Q_j(t) \quad (4.2)$$

A equação (4.2) é uma equação diferencial de ordem "n" de uma variável e caracteriza um sistema linear, invariante no tempo de uma entrada  $Q_j(t)$  e uma saída  $q_i(t)$ .

Introduzindo o conceito de operador de transferência, a equação (4.2) pode ser vista como, [10]:

$$D(p) q_i(t) = N(p) Q_j(t) \quad (4.3)$$

onde  $D(p)$  e  $N(p)$  são polinômios em  $p$ . Esta equação pode ser também expressa por:

$$q_i(t) = \frac{N(p)}{D(p)} Q_j(t) \quad (4.4)$$

definindo-se, então, o operador de transferência  $H_{ij}(p)$  como:

$$H_{ij}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (4.5)$$

Utilizando-se (4.4) e (4.5) tem-se:

$$q_i(t) = H_{ij}(p) Q_j(t) \quad (4.6)$$

A equação (4.6) relaciona a resposta e a entrada do sistema através do operador  $H_{ij}(p)$ . Esta equação não é algébrica e sim uma equação diferencial com uma notação operacional. Esquemáticamente pode-se representá-la por:

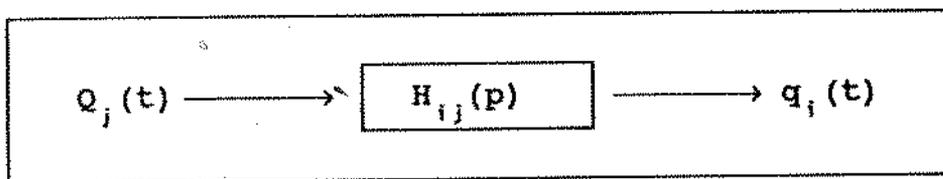


Fig. 4.1 O operador de transferência  $H_{ij}(p)$

Fatorando-se em (4.3) o polinômio  $D(p)$ , a solução homogênea do sistema (resposta livre) é obtida de:

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\dots(p-\lambda_n)q_{hi}(t) = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.7)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são as raízes de  $D(p)$ .

Considerando uma raiz genérica " $\lambda_r$ " de (4.7), tem-se a equação diferencial homogênea de primeira ordem :

$$(p-\lambda_r)q_{hr_i}(t) = 0 \quad r=1,2,\dots,n$$

sendo a sua solução dada por  $c_{ri} e^{\lambda_r t}$ , onde  $c_{ri}$  é uma constante arbitrária função das condições iniciais. Sendo o sistema linear a solução geral de (4.7) é dada pela soma de tais soluções:

$$q_{hi}(t) = \sum_{r=1}^n c_{ri} e^{\lambda_r t} \quad (4.8)$$

A solução particular de (4.3) devida somente à excitação  $Q_j(t)$  é obtida de (4.6):

$$q_{pij}(t) = H_{ij}(p)Q_j(t) \quad (4.9)$$

onde de (4.5), (4.3) e (4.1), tem-se:

$$H_{ij}(p) = \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)}{(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) pode ser, analogamente a uma expressão polinomial, expandida em frações parciais [10] da forma :

$$H_{ij}(p) = \frac{N(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\dots(p-\lambda_n)} = \frac{d_{1ij}}{p-\lambda_1} + \frac{d_{2ij}}{p-\lambda_2} + \dots + \frac{d_{nij}}{p-\lambda_n} \quad (4.11)$$

$$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$$

onde, agora,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os polos de  $H_{ij}(p)$  e  $d_{1ij}, d_{2ij}, \dots, d_{nij}$  os seus resíduos obtidos da expressão:

$$d_{rij} = \lim_{p \rightarrow \lambda_r} H_{ij}(p) (p - \lambda_r)$$

se os  $\lambda_r$  forem de multiplicidade 1.

Utilizando-se (4.11) e considerando o polo genérico " $\lambda_r$ " de (4.9), tem-se a equação diferencial de primeira ordem:

$$q_{prij}(t) = d_{rij} (p - \lambda_r)^{-1} Q_j(t) \quad r=1, 2, \dots, n$$

sendo a sua solução, considerando as condições iniciais nulas e o sistema causal e fisicamente realizável, dada pela integral de convolução:

$$\int_0^t d_{rij} e^{\lambda_r(t-\tau)} Q_j(\tau) d\tau \quad r=1, 2, \dots, n$$

Como o sistema é linear a solução geral de (4.9) é dada pela soma destas soluções:

$$q_{pi}(t) = h_{ij}(t) * Q_j(t) = \int_0^t \left( \sum_{r=1}^n d_{rij} e^{\lambda_r(t-\tau)} \right) Q_j(\tau) d\tau \quad (4.12)$$

onde inverteu-se a operação de integração e de soma.

Utilizando-se o princípio da superposição e as expressões (4.8) e (4.12), , obtém-se a resposta geral do sistema:

$$q_i(t) = q_{hi}(t) + h_{ij}(t) * Q_j(t)$$

$$q_{hi}(t) = \sum_{r=1}^n c_{ri} e^{\lambda_r t} \quad (4.13)$$

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^n d_{rij} e^{\lambda_r t}$$

As constantes  $c_{ri}$  são arbitrárias e determinadas através das condições iniciais do sistema. As constantes  $d_{rij}$  não são arbitrárias sendo obtidas da expansão em frações parciais de  $H_{ij}(p)$ .

Comparando-se as equações (4.13) e (3.31) observa-se a semelhança nas duas soluções. Existe diferença porque este modelo não considera os autovalores como pares complexos conjugados e as constantes na sua solução não apresentam relação com os parâmetros modais do sistema.

Desconsiderando-se o par complexo conjugado e comparando-se as equações (3.31) e (4.13), observa-se que  $c_{ri} = \phi_{ri} \eta_r(0)$  e  $d_{rij} = r_{rij} = \phi_{ri} \phi_{rj}$ , que é evidentemente o resíduo da expansão ou ainda a constante modal do sistema. Assim, o modelo modal do capítulo anterior permite relacionar estas constantes com o modelo espacial do sistema dinâmico.

Uma abordagem similar à anterior pode ser utilizada para desenvolver-se o modelo de sistemas discretos no tempo, o que levará a compreender-se a origem da utilização da série de Prony (capítulo V) e de filtros digitais como modelos para a identificação dos parâmetros modais do sistema.

#### 4.3 O MODELO DE SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Sistemas discretos no tempo, são sistemas dinâmicos em que uma ou mais variáveis podem mudar em instantes discretos no tempo, tais instantes são do tipo  $t=k\Delta t$  ( $k=0,1,2,\dots,K-1$ ), onde  $\Delta t$  é o intervalo de mostragem e  $K$  é o número de amostras do sinal dinâmico do sistema.

Em um sistema discreto os sinais estão na forma amostrada e a descrição do seu comportamento dinâmico operando com estes sinais, diferentemente de um sistema contínuo que utiliza equações diferenciais, é obtida através de equações à diferença. Aproximando a equação (4.2) por uma equação à diferença de ordem "n", pode-se escrever:

$$q_i(k-n) + a_{n-1}q_i(k-n-1) + \dots + a_1q_i(k-1) + a_0q_i(k) = b_mQ_j(k-m) + b_{m-1}Q_j(k-m-1) + \dots + b_1Q_j(k-1) + b_0Q_j(k) \quad (4.14)$$

$$k=0, 1, \dots, K-1$$

onde considerou-se o intervalo  $\Delta t$  pequeno e a notação,  $Q_j(k\Delta t) \approx Q_j(k)$  e  $q_i(k\Delta t) \approx q_i(k)$  para os sinais discretizados de entrada e saída do sistema.

Analogamente ao sistema contínuo utiliza-se uma notação operacional. O que no caso contínuo era um operador diferenciação "p" e um operador integração "1/p", aqui será um operador de avanço "E" e um operador de retardo "B=1/E". Assim, sendo f(k) uma função amostrada no tempo, com intervalo de amostragem  $\Delta t$ , tem-se:

$$E^n[f(k)] = f(k+n) \quad \text{e} \quad B^n[f(k)] = \frac{1}{E^n}[f(k)] = f(k-n) \quad (4.15)$$

Esquemáticamente, por exemplo, o operador de retardo pode ser visto como:

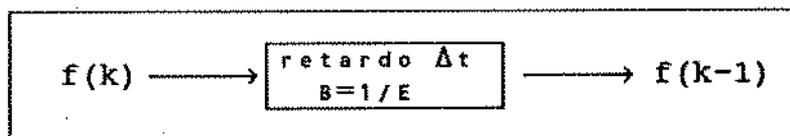


Fig. 4.2 O operador de retardo B=1/E

Utilizando-se (4.15) a equação (4.14) pode ser escrita como:

$$(B^n + a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_1B + a_0) q_i(k) = (b_mB^m + b_{m-1}B^{m-1} + \dots + b_1B + b_0) Q_j(k) \quad (4.16)$$

$$k=0, 1, \dots, K-1$$

Introduzindo o conceito de operador de transferência discreto, a equação (4.16) pode ser vista da seguinte forma, [10]:

$$D(B)q_i(k) = N(B)Q_j(k) \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.17)$$

onde  $D(B)$  e  $N(B)$  são polinômios cuja variável é o operador "B". Esta equação pode ser também expressa por:

$$q_i(k) = \frac{N(B)}{D(B)} Q_j(k) \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.18)$$

definindo-se, então, o operador de transferência discreto  $H_{ij}(B)$  como:

$$H_{ij}(B) = \frac{N(B)}{D(B)} \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.19)$$

e utilizando-se (4.18) e (4.19) tem-se:

$$q_i(k) = H_{ij}(B) Q_j(k) \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.20)$$

A equação (4.20) indica que o operador de transferência discreto  $H_{ij}(B)$  atua sobre a seqüência de entrada  $Q_j(k)$  para produzir a seqüência de saída  $q_i(k)$ . Esta equação não é algébrica e sim uma equação à diferença com uma notação operacional. Esquemáticamente pode-se representá-la por:

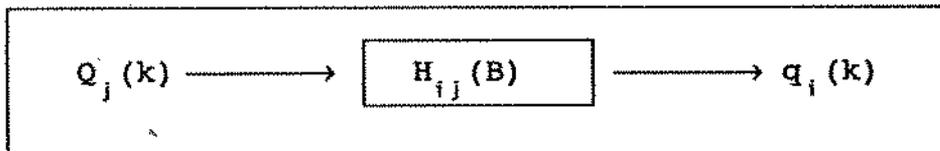


Fig. 4.3 O operador de transferência discreto  $H_{ij}(B)$

O procedimento para resolver a equação à diferença (4.17) é similar ao usado para a equação diferencial (4.3). As leis que se aplicam ao operador diferencial "p", também aplicam-se ao operador de retardo "B", [10].

Fatorizando-se em (4.17) o polinômio  $D(B)$ , a solução homogênea do sistema (resposta livre) é obtida de:

$$(B-\gamma_1)(B-\gamma_2)\dots(B-\gamma_n)q_{hi}(k) = 0 \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.21)$$

onde  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  são as raízes de  $D(B)$ .

Considerando uma raiz genérica " $\gamma_r$ " de (4.21), tem-se a equação à diferenças de primeira ordem homogênea:

$$(B-\gamma_r)q_{hri}(k) = 0 \quad \begin{array}{l} r=1,2,\dots,n \\ k=0,1,\dots,K-1 \end{array}$$

utilizando-se (4.15), a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{q_{hri}(k+1)}{q_{hri}(k)} = \gamma_r \quad \begin{array}{l} r=1,2,\dots,n \\ k=0,1,\dots,K-1 \end{array}$$

o que mostra que a raiz  $\gamma_r$  é a razão comum da progressão geométrica dada pela seqüência  $q_{hri}(k)$ , sendo a sua solução  $c_{ri}\gamma_r^k$  onde  $c_{ri}$  é uma constante arbitrária função das condições iniciais.

Como o sistema é linear a solução geral de (4.21) é soma de tais soluções:

$$q_{hi}(k) = \sum_{r=1}^n c_{ri} \gamma_r^k \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.22)$$

A solução particular de (4.17) devida somente à excitação  $Q_j(k)$  é obtida de (4.20):

$$q_{pij}(k) = H_{ij}(B)Q_j(k) \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (4.23)$$

onde, de (4.19), (4.17) e (4.16), tem-se:

$$H_{ij}(B) = \frac{(b_m B^m + b_{m-1} B^{m-1} + \dots + b_1 B + b_0)}{(B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0)} \quad (4.24)$$

A equação (4.24) pode ser expandida em frações parciais pelas mesmas razões utilizadas para expandir o operador  $H_{ij}(p)$ , seção 4.2:

$$H_{ij}(B) = \frac{N(B)}{(B-\gamma_1)(B-\gamma_2)\dots(B-\gamma_n)} = \frac{d_{1ij}}{B-\gamma_1} + \frac{d_{2ij}}{B-\gamma_2} + \dots + \frac{d_{nij}}{B-\gamma_n} \quad (4.25)$$

onde, agora,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  são os polos de  $H_{ij}(B)$  e  $d_{1ij}, d_{2ij}, \dots, d_{nij}$  os seus resíduos.

Utilizando-se (4.25) e considerando o polo genérico " $\gamma_r$ " de (4.20), tem-se a equação à diferença de primeira ordem:

$$q_{prij}(k) = d_{rij} (B-\gamma_r)^{-1} Q_j(k) \quad \begin{array}{l} r=1,2,\dots,n \\ k=0,1,\dots,K-1 \end{array}$$

sendo a sua solução, considerando as condições iniciais nulas e o sistema causal e fisicamente realizável, dada pelo somatório de convolução:

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} d_{rij} \gamma_r^{(k-\ell)} Q_j(k) \quad \begin{array}{l} r=1,2,\dots,n \\ k=0,1,\dots,K-1 \end{array}$$

Como o sistema é linear a solução geral de (4.20) é dada pela soma destas soluções:

$$q_{pij}(k) = h_{ij}(k) * Q_j(k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left( \sum_{r=1}^n d_{rij} \gamma_r^{(k-\ell)} \right) Q_j(\ell) \quad (4.26)$$

$$k=0, 1, \dots, K-1$$

Utilizando-se o princípio da superposição e as expressões (4.22) e (4.26), obtém-se a resposta geral do sistema:

$$q_i(k) = q_{hi}(k) + h_{ij}(k) * Q_j(k)$$

$$q_{hi}(k) = \sum_{r=1}^n c_{ri} \gamma_r^k \quad (4.27)$$

$$h_{ij}(k) = \sum_{r=1}^n d_{rij} \gamma_r^k \quad k=0, 1, \dots, K-1$$

onde as constantes  $c_{ri}$  são arbitrárias e determinadas através das condições iniciais do sistema e as constantes  $d_{rij}$  não são arbitrárias sendo obtidas da expansão em frações parciais de  $H_{ij}(E)$ .

No capítulo V será visto que a resposta discretizada no tempo do modelo modal (capítulo III) pode ser relacionada com a solução (4.27), onde  $c_{ri} = \phi_{ri} \eta_r(0)$ ,  $d_{rij} = r_{rij} = \phi_{ri} \phi_{rj}$  e considera-se o par complexo conjugado para os autovalores.

Nesta abordagem discreta foi usada uma equação à diferença. Será visto a seguir que o modelo de filtros origina-se desta equação, permitindo compreender-se a sua utilização para obtenção dos parâmetros modais.

#### 4.4 O MODELO DE FILTROS DIGITAIS

O sistema discreto no tempo pode também ser entendido como uma estrutura que, operando sobre um sinal dinâmico discretizado de

entrada, produz um sinal dinâmico discretizado de saída. Esquemáticamente pode-se representar esta estrutura por:

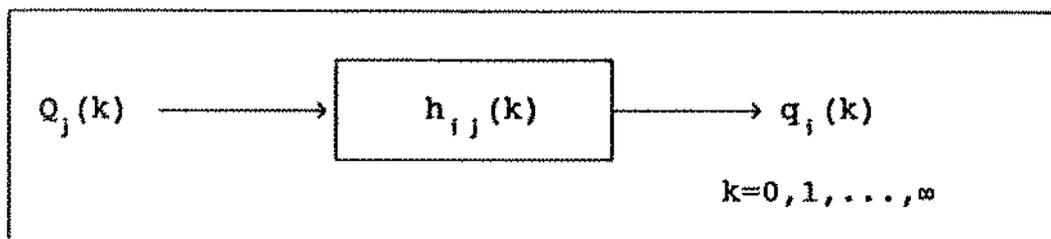


Fig. 4.4 Sistema discreto no tempo

onde  $h_{ij}(k)$  é a resposta do sistema no instante "k" devido a uma entrada unitária amostrada no instante zero (resposta ao impulso unitário).

Estando o sistema em regime permanente, representa-se matematicamente esta estrutura pelo somatório de convolução das seqüências  $h_{ij}(k)$  e  $Q_j(k)$ .

$$q_i(k) = h_{ij}(k) * Q_j(k) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_{ij}(\ell) Q_j(k-\ell) \quad (4.28)$$

$k=0, 1, \dots, \infty$

A equação (4.28) é a equação (4.27) sem a parte homogênea, onde considerou-se o sistema não causal e a possibilidade de uma resposta ao impulso unitário infinita. Quando a seqüência  $h_{ij}(k)$  tem um número finito de termos diferentes de zero é dito que o sistema tem resposta impulsiva finita (FIR), de outra forma é dito que tem resposta impulsiva infinita (IIR).

A resposta deste sistema pode também ser obtida diretamente através da equação à diferença (4.14). Re-escrevendo esta equação sob a forma de somatório tem-se:

$$q_i(k) = \sum_{\ell=0}^m b_{\ell} Q_j(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} q_i(k-\ell) \quad (4.29)$$

$k=0, 1, \dots, \infty$

onde inclui-se a constante  $a_n$  e considera-se  $a_0 = 1$ , sendo "n" a ordem da equação à diferença .

Uma grande classe de sistemas lineares, discretos e invariantes no tempo, podem ser descritos pela equação (4.29), onde  $Q_j(k)$  é a sua entrada,  $q_i(k)$  a sua saída e  $a_{\ell}, b_{\ell}$  constantes que determinam as suas características. Estes sistemas são comumente chamados de filtros digitais, formando uma das classes mais importantes de sistemas de processamento digital de sinais, tendo aplicações em diversos campos da ciência e da engenharia., [17].

O filtro digital da equação (4.29) calcula a k-ésima resposta amostrada  $q_i(k)$  usando as "n" respostas amostradas anteriores  $q_i(k-1), q_i(k-2), \dots, q_i(k-n)$ , a excitação amostrada atual  $Q_j(k)$  e as "m" excitações anteriores  $Q_j(k-1), Q_j(k-2), \dots, Q_j(k-m)$ . Desde que não são necessárias amostras futuras da excitação e da resposta para o cálculo do valor amostrado da resposta atual, o filtro é considerado fisicamente realizável ou causal, tendo a sua resposta impulsiva a propriedade  $h_{ij}(k) = 0$  para  $k \leq 0$ . Assumindo que o filtro deverá ser também estável, só um número finito de termos de  $h_{ij}(k)$  são não nulos, isto é,  $h_{ij}(k) \neq 0$  para "k" tendendo a infinito, estando todos os seus polos dentro do círculo unitário, [17].

Um filtro digital, pode também ser analisado por um método de transformada, analogamente aos métodos de transformada usados em sistemas contínuos. As transformadas de Laplace ou Fourier convertem equações diferenciais em equações algébricas. Da mesma forma a transformada Z, converte equações à diferença em equações algébricas. Assim, a transformada Z unilateral da resposta do filtro, equação (4.29), é definida por:

$$\overline{q}_i(z) = Z\{q_i(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} q_i(k) z^{-k} \quad (4.30)$$

onde "z" é uma variável complexa. A série do lado direito de (4.30) converge quando "z" assume valores em uma determinada região do plano complexo. Esta série é conhecida como série de Laurent na teoria das variáveis complexas, [10,43].

A relação entre a variável "s" de Laplace e a variável "z" é encontrada sabendo-se que a resposta do filtro pode ser representada por um somatório de funções impulsos ponderadas pelas suas amplitudes. Tomando-se então a sua transformada de Laplace tem-se:

$$\overline{q}_i(s) = \mathcal{L}\{q_i(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} q_i(k\Delta t) \mathcal{L}\{\delta(t-k\Delta t)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} q_i(k) e^{-k\Delta t s} \quad (4.31)$$

e comparando-se (4.31) com (4.30), tem-se:

$$z = e^{s\Delta t} \quad (4.32)$$

A transformada Z tem as mesmas propriedades da transformada de Laplace. Fazendo-se a transformada Z do filtro da equação (4.29), tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_i(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\ell=0}^m b_{\ell} Q_j(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} q_i(k-\ell) \right\} z^{-k} \quad (4.33)$$

o lado esquerdo de (4.33) é  $\overline{q}_i(z)$  e o lado direito pode ser obtido utilizando-se as propriedades de linearidade e deslocamento da transformada Z, sendo possível escrever:

$$\overline{q}_i(z) = \overline{Q}_j(z) \sum_{\ell=0}^m b_{\ell} z^{-\ell} - \overline{q}_i(z) \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} z^{-\ell} \quad (4.34)$$

ou considerando uma forma mais conveniente para (4.34) :

$$H_{ij}(z) = \frac{\overline{q}_i(z)}{\overline{Q}_j(z)} = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_{\ell} z^{-\ell}}{1 + \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} z^{-\ell}} \quad (4.35)$$

A equação (4.35) poderia ser obtida diretamente da expressão do operador de transferência discreto, equação (4.24), onde considera-se  $a_0=1$  e inclui-se a constante  $a_n$ . Isto é possível porque o operador de retardo é definido como  $B^{\ell}[q_i(k)] = q_i(k-\ell)$ , sendo a sua transformada  $Z, \overline{q}_i(z) z^{-\ell}$ .

Em processamento digital de sinais  $H_{ij}(z)$  é chamada de função transferência do filtro. As raízes do numerador de  $H_{ij}(z)$  são chamadas de zeros de  $H_{ij}(z)$  e as do denominador de polos de  $H_{ij}(z)$ .

No domínio do tempo a equação (4.35) é dada pela equação (4.28), estas expressões relacionam a resposta ao impulso unitário do filtro e os coeficientes  $a_{\ell}, b_{\ell}$  da equação à diferença que o caracteriza.

Os filtros digitais podem ainda ser classificados como recursivos e não recursivos. São ditos recursivos quando existem coeficientes  $a_{\ell}$  diferentes de zero, neste caso o cálculo de " $q_i(k)$ ", ver equação (4.29), necessita valores amostrados previamente calculados. Para estes filtros,  $H_{ij}(z)$  é uma função racional em  $z^{-1}$  dada pela equação (4.35) e os seus coeficientes  $b_{\ell}$  não são iguais a resposta  $h_{ij}(\ell)$ . Esta resposta pode ser obtida fazendo-se a divisão longa entre os polinômios de (4.35), obtendo-se:

$$H_{ij}(z) = A_0 z^{n-m} + A_1 z^{n-m-1} + A_2 z^{n-m-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{n-m-k} \quad (4.36)$$

Os filtros digitais são ditos não recursivos, quando todos os coeficientes  $a_\ell$  são nulos, neste caso não é necessário o cálculo prévio de amostras da resposta " $q_i(k)$ ", sendo  $H_{ij}(z)$  polinomial em  $z^{-1}$ , ver equação (4.35). Para estes filtros o lado direito da equação (4.29) pode ser visto como a soma de convolução de duas seqüências  $Q_j(k)$  e  $b_k$ ,  $k=0,1,\dots,\infty$ , sendo a resposta " $h_{ij}(\ell)$ " idêntica aos coeficientes  $b_\ell$  [10,17,41,44], isto é:

$$h_{ij}(\ell) = \begin{cases} b_\ell & 0 \leq \ell \leq m \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

Por estas razões, um filtro não recursivo é também um filtro de resposta impulsiva finita (FIR) e um filtro recursivo é um filtro de resposta impulsiva infinita, (IIR).

O filtro da equação (4.29) pode ser programado em computador com fins os mais diversos. Desenvolveram-se vários métodos que propiciam ao projetista escolher os seus coeficientes  $a_\ell$ ,  $b_\ell$ . A escolha dos coeficientes é função das características que são desejadas para o filtro, o qual será utilizado para o processamento digital dos sinais.

Uma vantagem na utilização do modelo de filtros seria a sua flexibilidade, porque as suas características podem mudar facilmente, através da leitura de um novo conjunto de coeficientes guardado na memória do computador. Isto significa que uma única estrutura de filtro pode servir a uma multiplicidade de sinais de entrada e saída.

Para a sua implementação é necessário considerar-se a sua específica aplicação. O filtro da equação (4.29) apresenta um diagrama de blocos na forma direta, sendo uma maneira na qual o filtro digital pode ser implementado, mas pouco desejável. Uma outra forma direta de realização seria quando  $m = n$ . Formas alternativas de implementação

seriam o filtro em paralelo e em cascata. Outras considerações seriam necessárias para a sua implementação podendo ser vistas em referências bibliográficas sobre processamento digital, [17,41,42,45].

O propósito deste trabalho difere do dado em processamento digital para os filtros, onde estes são usados como estruturas que limitam o sinal em frequência para diversos fins. Aqui a estrutura do filtro é utilizada como um modelo paramétrico para o sistema dinâmico. Neste caso o objetivo é identificar os parâmetros do modelo (coeficientes do filtro), que por sua vez estão relacionados com os parâmetros modais do sistema, o que será visto no capítulo V.

O modelo de filtros é similar ao modelo de séries temporais estocásticas ARMA e a relação entre os conceitos utilizados em sistemas discretos no tempo, com a área de séries temporais, abre a possibilidade de estudar-se modelos que representam processos não estacionários. Nas seções seguintes estes temas serão desenvolvidos.

#### 4.5 A ANÁLISE POR SÉRIES TEMPORAIS

Uma série temporal é uma coleção de observações feitas seqüencialmente no tempo. Exemplos destas séries ocorrem em uma grande variedade de campos, desde a economia até a engenharia constituindo uma importante área da estatística. Algumas das séries temporais encontradas na prática seriam séries econômicas, como por exemplo o total de exportações em meses sucessivos. Séries temporais físicas como a temperatura do ar em horas, dias ou meses sucessivos. Pode-se ainda citar séries temporais demográficas, séries temporais chamadas de processos binários que ocorrem particularmente na teoria de comunicações e, para teoria de sistemas dinâmicos na engenharia mecânica, séries temporais que representam por exemplo as vibrações destes sistemas.

#### 4.5.1 OS OBJETIVOS DA ANÁLISE POR SÉRIES TEMPORAIS

Existem vários possíveis objetivos na análise por séries temporais. Estes objetivos podem ser classificados como descrição, explanação, predição e controle, [52].

a. Descrição : Este objetivo é considerado o primeiro passo da análise, usualmente faz-se o gráfico dos dados para obter-se uma simples medida descritiva das principais propriedades da série. Neste caso pode-se observar a sua tendência ascendente, como por exemplo o aumento anual de salários, ou o efeito regular da sua sazonalidade, como por exemplo o aumento das vendas de um determinado produto no verão e a diminuição destas vendas no inverno. Isto será melhor explicado a seguir. Para outras séries, técnicas de análise mais sofisticada são necessárias, assim modelos probabilísticos mais complexos como o ARMA, utilizados em processos estocásticos, serão desenvolvidos mais adiante.

b. Explanação : Quando são obtidas observações sobre duas ou mais variáveis pode ser possível utilizar a variação em uma série temporal para explicar a variação em outra. Isto leva ao entendimento do mecanismo que gerou a série, podendo-se utilizar modelos de regressão múltipla. Este é o caso de sistemas lineares, onde uma série de entrada é convertida em uma série de saída através de uma operação linear. Conhecendo-se as observações de entrada e saída do sistema, obtém-se as suas propriedades, isto é, identifica-se o sistema. Trabalhando-se com séries de entrada e saída discretas no tempo um modelo a ser considerado poderia ser o modelo de filtros dado na seção anterior.

c. Predição : Dada uma série temporal pode-se predizer os seus valores futuros. Este objetivo é muito utilizado em previsão de vendas e na análise de séries temporais econômicas e industriais e esta intimamente relacionada com o problema de controle. Um exemplo de controle ocorre quando se torna necessário predizer se um processo de manufatura esta alcançando os seus objetivos ou se são necessárias ações corretivas para que isso ocorra. Na abordagem por séries muitos

autores consideram os termos predição e previsão intercambiáveis, outros utilizam o termo previsão significando qualquer espécie de conhecimento futuro dos valores da série e o termo predição como a sistemática que leva a fazer isto, [52].

d. Controle : Quando uma série temporal gerada mede a qualidade do processo, o objetivo da análise pode ser controlar este processo. Podem existir vários tipos diferentes de controle, como por exemplo o controle estatístico da qualidade. Desenvolveram-se também estratégias mais sofisticadas de controle através do estudo das séries, neste caso um modelo estocástico é utilizado para representar estas séries e predizer os seus valores futuros, sendo a seguir as variáveis de entrada e saída do processo ajustadas, o que o leva ao seu objetivo, [20]. Muitas contribuições tem sido feitas a teoria de controle, principalmente na área da engenharia elétrica e mecânica, sendo o processo controlado por computador analógico ou digital. Um exemplo seria o controle da trajetória do braço de um robô articulado, utilizado em robótica industrial.

Através dos objetivos acima observa-se o grande campo de aplicação das séries. Para a engenharia mecânica, através da predição e controle pode-se trabalhar com o diagnóstico de estruturas ou ainda com robótica através da identificação e controle. Mantendo-se o objetivo deste trabalho deve-se utilizar o objetivo "b" onde através das séries de entrada e saída pode-se identificar as características modais de sistemas dinâmicos.

#### 4.5.2 AS SÉRIES TEMPORAIS E OS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Uma série temporal univariada é definida como um conjunto de observações de uma variável, dispostas seqüencialmente no tempo, sendo discreta quando o conjunto de observações for finito, [46]. Em geral estas observações são geradas em um intervalo de tempo com amplitude constante, podendo ser consideradas determinísticas ou estocásticas. Sendo elas estocásticas os seus valores futuros só poderão ser determinados em termos probabilísticos. Este trabalho irá considerar

somente séries temporais estocásticas discretas, cujas observações são geradas em intervalos de tempo constante.

Métodos tradicionais de análise de séries temporais procuram classificar os movimentos de uma série de tempo em quatro tipos básicos de variação, [16,46,52]. Esta maneira de decompor a série nem sempre é a melhor, mas é ainda freqüentemente usada:

a. **Tendência** : Caracterizada por um movimento regular e contínuo de longo prazo, ascendente ou descendente, sendo em estatística a variação no tempo do valor esperado.

b. **Variação Sazonal** : Caracterizada por um movimento cíclico que ocorre com certa regularidade dentro de um curto período de tempo.

c. **Variação Cíclica** : Caracterizada por um movimento cíclico de longo prazo com período variável. Em geral os ciclos econômicos. São flutuações em torno da curva de tendência.

d. **Variação Aleatória** : Caracterizada por um movimento aleatório, que não pode ser identificado com nenhum dos casos acima, já que não pode ser descrita de forma determinística.

Os primeiros dois tipos de variação apresentados são a parte sistemática ou determinística da série e os dois últimos são a parte não sistemática ou aleatória.

A análise através de séries temporais pressupõe que exista um processo estocástico gerador da série, isto significa que a cada realização aleatória da variável está associada uma probabilidade de ocorrência da observação. Assim, descrevem-se os mecanismos do processo e as características da sua aleatoriedade, fornecendo as probabilidades associadas aos valores futuros da série.

Inicialmente a notação nesta seção seguirá o estudo da análise de séries temporais, sendo depois, ao longo do texto, relacionada com a notação da análise de sistemas discretos no tempo, incluindo a análise de sistemas dinâmicos.

Muitos processos físicos na prática envolvem elementos aleatórios ou estocásticos em sua estrutura e um processo estocástico pode ser descrito como um fenômeno estatístico que evolui no tempo de acordo com leis probabilísticas. Muitos autores usam "processo estocástico" como sinônimo de "processo aleatório", servindo este termo tanto para descrever um processo físico real quanto para indicar um modelo matemático para isso, [52]. Estando a teoria de processos estocásticos muito desenvolvida, este trabalho concentrar-se-á em seus aspectos importantes para a análise das séries.

Se para cada realização amostral de um experimento, fosse considerada uma função do tempo  $Q(t, S)$ , tem-se um processo estocástico, onde  $S \in \mathcal{S}$ , sendo " $\mathcal{S}$ " o espaço amostral. Assim, matematicamente um processo estocástico pode ser definido como uma família de vetores aleatórios  $\{Q(t), t \in T\}$ , classificada mediante um parâmetro  $t$ , que varia em um intervalo de tempo " $T$ ", caracterizando-se o processo por ser função aleatória de " $t$ ". Na notação " $Q$ " é a variável aleatória e " $q$ " é a ocorrência desta variável. Um registro de um processo estocástico é dado abaixo:

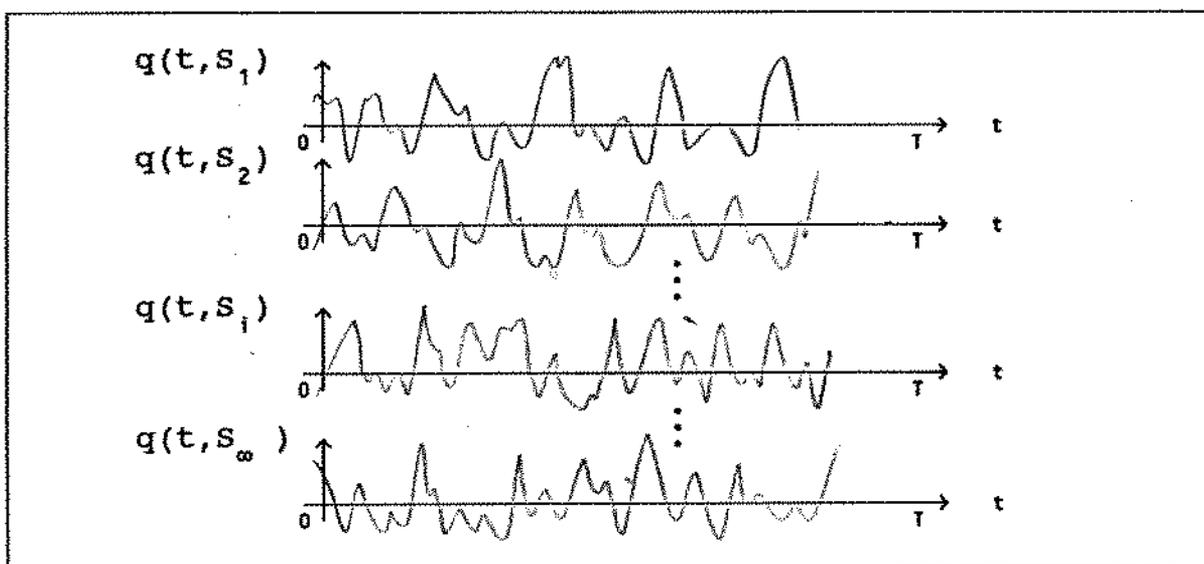


Fig. 4.5 Registro de um processo estocástico

Muitos problemas estatísticos estão relacionados com a estimativa das propriedades de uma amostra de uma população. Na análise por séries, entretanto, é freqüentemente impossível obter-se mais que uma observação em um dado tempo, assim tem-se somente uma observação sobre a variável aleatória neste tempo. Contudo pode-se considerar a série observada como um exemplo do conjunto infinito de séries, sendo esta entendida como uma realização amostral do processo.

Contendo  $T=(K-1)\Delta t$  um número finito de valores o processo estocástico é dito com parâmetros discretos, ou discreto no tempo e para este processo uma seqüência de observações  $q(k\Delta t, S_i)$   $k=0,1,\dots,K-1$ , qualquer  $S_i$   $i=1,2,\dots,\infty$ , sendo  $\Delta t$  o intervalo entre cada observação no tempo, é uma realização amostral deste processo, sendo a série temporal considerada como esta realização. Assim, uma série temporal representa uma realização amostral do processo e considerando  $q_i(k\Delta t) \equiv q_i(k)$ , tem-se a notação  $q(k\Delta t, S_i) = q_i(k)$ , sendo  $q_i(k)$  a  $k$ -ésima ocorrência da  $i$ -ésima série. Anteriormente  $q_i(k)$  era considerada a  $i$ -ésima resposta discretizada do sistema dinâmico dada pela equação (4.27), onde neste caso só a sua parte forçada é considerada. Para o estudo de séries temporais utiliza-se a notação  $q_i(k) = q_t$   $k=t=0,1,\dots,K-1$ , onde o índice "i" foi suprimido. Esta notação pode ser vista em referências tais como [20,52].

A análise da série supõe que cada uma de suas ocorrências  $q_0, q_1, \dots, q_{K-1}$  é obtida aleatoriamente, assim a série é uma seqüência de variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas, isto é, existe alguma função de probabilidade conjunta  $P(Q_0, Q_1, \dots, Q_{K-1})$  que assume valores para todas as possíveis combinações de  $q_0, q_1, \dots, q_{K-1}$ . Conseguindo-se especificar a função de probabilidade da série, fica possível determinar a probabilidade de ocorrência de um valor futuro. Entretanto a especificação completa da função de probabilidade que rege o processo gerador da série é de difícil obtenção, sendo os seus momentos de mais alta ordem raramente usados, por isso restringe-se o estudo a momentos de baixa ordem. Assim, serão considerados os momentos de primeira e segunda ordem do processo estocástico, isto é, a média, variância e a autocovariância.

Sendo o processo não estacionário os seus momentos estatísticos variam com o tempo, mas a maior parte da teoria da probabilidade está relacionada com séries estacionárias. Sendo a série não estacionária existem métodos que a transformam em estacionária podendo-se utilizar esta teoria. Assim, este trabalho irá considerar o processo estacionário, sendo a série que o representa também estacionária. Considerando-se ainda que o processo é gaussiano, a distribuição normal pode ser unicamente determinada em termos dos seus momentos de primeira e segunda ordem, tendo-se para estes momentos as expressões:

$$\text{média : } E[q_t] = \bar{q}_t \quad , \text{ qualquer } t \in T$$

$$\text{variância : } \text{Var}[q_t] = E[q_t - \bar{q}_t]^2 \quad , \text{ qualquer } t \in T \quad (4.37)$$

$$\text{autocovariância : } \text{Cov}[q_t, q_{t-\ell}] = E[(q_t - \bar{q}_t)(q_{t-\ell} - \bar{q}_t)] \quad \text{qualquer } t \in T$$

Neste caso a série que representa o processo não possui uma variação sistemática na média (não possui tendência), nem na variância, sendo removidas todas as suas variações periódicas, o que significa que não variam com o tempo, dependendo a autocovariância somente do número de intervalos no tempo entre as observações. Na prática, entretanto, o que se dispõe é de uma amostra do processo, sendo uma estimativa da sua média obtida pela média temporal da série, ocorrendo o mesmo para a variância e auto-covariância::

$$E[q_t] = \mu_q = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T q_t$$

$$\text{Var}[q_t] = \sigma_q^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (q_t - \mu_q)^2 \quad t=0,1,\dots,K-1 \quad (4.38)$$

$$\text{Cov}[q_t, q_{t-\ell}] = \vartheta_\ell = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (q_t - \mu_q)(q_{t-\ell} - \mu_q)$$

No caso, onde os valores médios do processo são os mesmos valores médios temporais, diz-se que o processo é ergódico. Neste trabalho a ergodicidade dos processos estacionários associados a fenômenos físicos, será considerada.

Para as séries pode-se também definir a estimativa do coeficiente de autocorrelação como:

$$\rho_l = \frac{\vartheta_l}{\vartheta_0} = \frac{\sum_{t=0}^{\tau} (q_t - \mu_q)(q_{t-l} - \mu_q)}{\sum_{t=0}^{\tau} (q_t - \mu_q)^2} \quad t=0,1,\dots,K-1 \quad (4.39)$$

onde este coeficiente é uma medida padronizada do coeficiente de autocovariância, sendo a função que associa cada valor de "l" com o seu respectivo coeficiente de autocorrelação a função de autocorrelação.

#### 4.5.3 OS OPERADORES E A RELAÇÃO ENTRE O MODELO MA E AR.

O tratamento desenvolvido por Box e Jenkins [20], para a análise das séries geradas por um processo estocástico, estacionário e gaussiano, esta baseada no fato de que, embora seus respectivos valores  $q_t$  apresentem correlação serial, cada um deles pode ser considerado como gerado por uma seqüência de "choques  $a_t$ ",  $t \in T$ , aleatórios e independentes estatisticamente entre si, cada um possuindo uma distribuição normal, isto é:

$$E[a_t] = \mu_a = 0 \quad ; \quad \text{Var}[a_t] = \sigma_a^2 \quad (4.40)$$

$$\text{Cov}[a_t, a_{t-l}] = \begin{cases} \sigma_a^2, & l=0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad \rho_l = \begin{cases} 1, & l=0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad t=0,1,\dots,K-1$$

A expressão "choques aleatórios", que para a análise de sistemas dinâmicos seria o mesmo que "forças aleatórias", é usual na análise de séries e a seqüência destes choques com as características acima mencionadas é denominada de processo de ruído branco. O fundamento da metodologia de Box e Jenkins, para a busca de uma classe geral de

modelos capazes de representarem o processo gerador da série, esta baseado no teorema da decomposição de Wold para séries geradas por processos estacionários, [20,46,52,57]. Este teorema demonstra que todo o processo estocástico estacionário pode ser representado por um modelo linear do tipo Média Móvel "MA" :

$$q_t = \mu_q + a_t + p_1 a_{t-1} + p_2 a_{t-2} + \dots \quad (4.41)$$

onde  $p_0=1$  e  $[p_\ell \ell=1,2,\dots,]$ ,  $\mu_q$ , são parâmetros estabelecidos pelos valores da série, sendo  $q_t$  a observação no tempo "t" e  $a_t$  o ruído branco no tempo "t",  $t=0,1,\dots,K-1$ , devendo os  $p_\ell$  formarem uma série convergente para que  $q_t$  seja estável, isto é, mantenha as condições de estacionariedade. O termo " $\mu_q$ " aparece na equação (4.41) porque supõem-se que a série tenha média diferente de zero. Provavelmente este modelo foi chamado de média móvel, porque sendo o processo não estacionário, o valor médio de (4.41) variará com o número de termos da série. Estando as variáveis centradas na média e considerando a ordem do modelo igual a " $NP$ ", a equação (4.41) pode ser escrita como :

$$\bar{q}_t = q_t - \mu_q = a_t + \sum_{\ell=1}^{NP} p_\ell a_{t-\ell} \quad t=0,1,\dots,K-1 \quad (4.42)$$

A equação acima é igual à equação(4.29), onde " $NP=m$ ",  $b_0=1$ ,  $b_\ell=p_\ell$  e os  $a_\ell$  nulos, sendo o modelo linear MA um filtro não recursivo. Neste caso a sua excitação  $Q_j(k)$  é um ruído branco  $a_t$  e os parâmetros Médias Móveis  $p_\ell$  a sua resposta impulsiva. Assim, pensando-se na série como uma amostra de um processo pode-se analisá-la estatisticamente, conseguindo-se previsões de valores futuros e ao encará-la como uma soma de convolução, pode-se utilizá-la para a identificação do sistema. Utilizando-se o operador de retardo da equação (4.15)  $B^l[q_t]=q_{t-l}$ , a equação (4.42) pode ser dada por:

$$\bar{q}_t = N(B) a_t \quad ; \quad N(B) = 1 + p_1 B + \dots + p_{NP-1} B^{NP-1} + p_{NP} B^{NP} \quad (4.43)$$

onde  $N(B)$  em análise de séries temporais é chamado de filtro Média Móvel do sistema. A equação acima é a equação (4.17) onde  $a_0=1$  sendo os (a's) restantes nulos. A série  $N(B)$  deve convergir para interior ou sobre o círculo unitário, ou seja  $|B| \leq 1$ , para que o processo

linear seja estacionário. Para este modelo tem-se o diagrama abaixo:

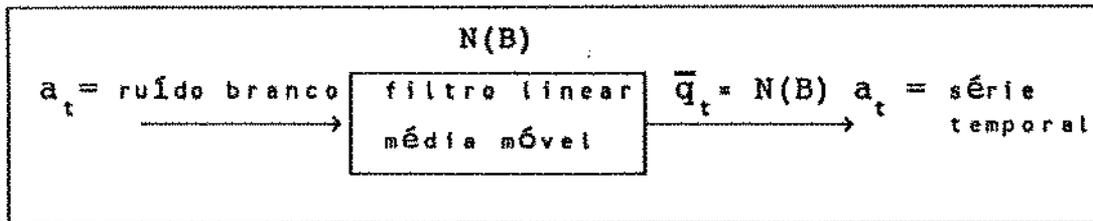


Fig. 4.6 Diagrama de um filtro linear Média Móvel para séries temporais

O modelo, expresso por (4.41), sob determinadas condições, pode ser equivalente a outro, chamado Auto-Regressivo "AR", onde " $q_t$ " é descrito como uma soma ponderada de seus valores passados mais um choque aleatório " $a_t$ ". Assim utilizando-se a equação (4.41), tem-se:

$$a_t = q_t - \mu_q - p_1 a_{t-1} - p_2 a_{t-2} - \dots \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} a_{t-1} &= q_{t-1} - \mu_q - p_1 a_{t-2} - p_2 a_{t-3} - \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

substituindo-se  $a_{t-1}$  de (4.44) em (4.41) tem-se:

$$q_t = \mu_q (1 - p_1) + p_1 q_{t-1} + a_t + (p_2 - p_1^2) a_{t-2} + (p_3 - p_1 p_2) a_{t-3} + \dots \quad (4.45)$$

continuando o mesmo processo de substituição para  $a_{t-2}$ ,  $a_{t-3}$ , ... em (4.44) obtém-se uma equação linear, que é um processo Auto-Regressivo:

$$q_t = a_1 q_{t-1} + a_2 q_{t-2} + \dots + v + a_t \quad (4.46)$$

onde  $v = \mu_q / (1 - a_1 - a_2 - \dots)$  e os pesos " $a$ " são funções dos pesos " $p$ ". Considerando variáveis centradas na média e sendo a ordem do modelo " $n$ ", (4.46) pode ser escrita como:

$$\bar{q}_t = q_t - v = \sum_{\ell=1}^{n_0} a_\ell \bar{q}_{t-\ell} + a_t \quad (4.47)$$

$t=0, 1, \dots, K-1$

A menos do termo  $a_t$  a equação acima é igual a equação (4.29), onde " $n_0=n$ ",  $a_0=1$ ,  $a_\ell=a_\ell$  e os  $b_\ell$  nulos, sendo considerada um modelo linear

AR. Esta equação pode ainda ser escrita como:

$$\bar{q}_t - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \bar{q}_{t-\ell} = a_t \quad (4.48)$$

$t=0, 1, \dots, K-1$

e usando o operador de retardo  $B^{\ell}[q_t]=q_{t-\ell}$ , tem-se:

$$D(B) \bar{q}_t = a_t \quad ; \quad D(B) = 1 - a_1 B - \dots - a_{Nq-1} B^{Nq-1} - a_{Nq} B^{Nq} \quad (4.49)$$

onde  $D(B)^{-1}$  em análise de séries temporais é chamado de filtro Auto Regressivo do sistema. A equação anterior é a equação (4.17) onde  $b_0=1$  sendo os (b's) restantes nulos. A série  $D(B)$  deve convergir para o interior ou sobre o círculo unitário, ou seja  $|B| \leq 1$ , para que o processo linear seja inversível. Para este modelo tem-se o diagrama abaixo:

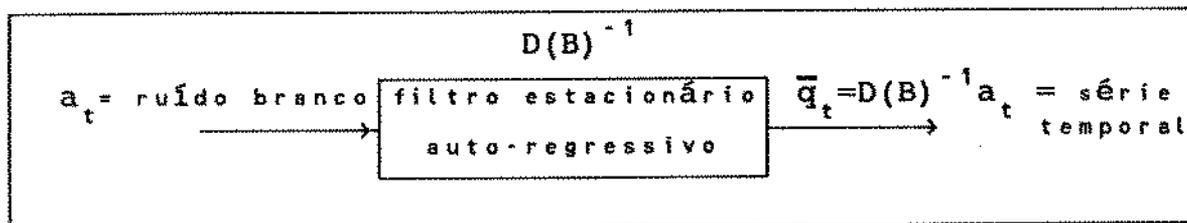


Fig. 4.7 Diagrama de um filtro estacionário Auto-Regressivo para séries temporais

Comparando-se as equações (4.49) e (4.43), tem-se uma relação entre os operadores:

$$N(B) = D(B)^{-1} = (1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots)^{-1} \quad (4.50)$$

O modelo "AR" obtido através de um modelo "MA" finito, apresentou-se infinito. A situação inversa é verdadeira, isto é, de um modelo "AR" finito obtém-se um modelo "MA" infinito. Detalhes, como o fato de que a condição de inversibilidade do modelo é independente da condição de estacionariedade, podem ser melhor compreendidos em Box & Jenkins [20]. A associação das duas formas equivalentes de representação de um modelo linear leva ao modelo ARMA, isto será visto na seção seguinte:

#### 4.5.4 OS MODELOS PROBABILÍSTICOS ARMA E ARIMA PARA SÉRIES TEMPORAIS ESTOCÁSTICAS

Além dos modelos "MA" e "AR" relacionados na seção anterior, pode-se obter um novo modelo, comparando-se estas duas formas equivalentes de representação de um modelo linear. Sabendo-se que o modelo "MA" é descrito por:  $\bar{q}_t = N(B)a_t$  e que o modelo "AR" é descrito por:  $D(B)\bar{q}_t = a_t$ , onde  $N(B) = D(B)^{-1}$ , nota-se uma dualidade entre a estacionariedade e a inversibilidade dos dois. Se  $N(B)$  converge, o processo "MA" é estacionário e se  $D(B)$  converge o processo "AR" é inversível, funcionando as restrições de estacionariedade para um modelo "AR", da mesma forma que funcionam estas restrições para a inversibilidade de um modelo "MA".

##### a. O modelo estacionário ARMA

O objetivo de Box e Jenkins [20], era obter um modelo para o processo, que contivesse um menor número de parâmetros possíveis, utilizando uma descrição aproximada do modelo linear de Wold [57]. Isto foi feito para modelos "MA" e "AR", mas percebendo a relação dual entre estes dois modelos, resolveram trabalhar com uma classe de modelos mistos, Auto-Regressivos e Média Móvel, ARMA. A justificativa para usar este modelo é que muitas vezes as características do processo estocástico não são obtidas satisfatoriamente, usando-se somente um modelo "AR" ou "MA", de poucos parâmetros. Box e Jenkins sabiam que a dualidade entre os dois processos ocorre de tal forma que para um processo "MA" finito, tem-se um processo "AR" infinito e vice-versa, isto é, a obtenção das estimativas dos parâmetros (o menor número possível) necessita muitas vezes a inclusão de ambos os processos no modelo.

Um processo Auto-Regressivo de Média Móvel de ordem "NQ" e "NP", ARMA(NQ, NP), é um processo de filtro linear do tipo:

$$\bar{q}_t = q_t - v = a_1 \bar{q}_{t-1} + \dots + a_{NQ} \bar{q}_{t-NQ} + a_{t+P} a_{t-1} + \dots + a_{NP} a_{t-NP}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{NQ} a_{\ell} \bar{q}_{t-\ell} + \sum_{\ell=0}^{NP} p_{\ell} a_{t-\ell} \quad (4.51)$$

A equação acima é a equação (4.29), onde "NQ=m", "NP=n", sendo os parâmetros MA "p<sub>ℓ</sub>=b<sub>ℓ</sub>" e os AR "a<sub>ℓ</sub>=-a<sub>ℓ</sub>" para ℓ>0, sendo o modelo linear ARMA um filtro recursivo. O modelo ARMA(NQ, NP) pode ser descrito ainda através dos operadores lineares :

$$D(B) \bar{q}_t = N(B) a_t \quad (4.52)$$

Utilizando-se as equações (4.43) e (4.49), (4.52) pode ser escrita como:

$$\frac{\bar{q}_t}{a_t} = \frac{N(B)}{D(B)} = \frac{1 + p_1 B + \dots + p_{NP-1} B^{NP-1} + p_{NP} B^{NP}}{1 - a_1 B - \dots - a_{NQ-1} B^{NQ-1} - a_{NQ} B^{NQ}} = H(B) \quad (4.53)$$

Utilizando em (4.53) o operador de retardo, equação (4.15) B<sup>ℓ</sup>[q̄<sub>t</sub>]=q<sub>t-ℓ</sub>, onde a sua transformada Z é q̄(z)z<sup>-ℓ</sup>, a transformada Z de (4.53) é dada por:

$$H(z) = \frac{\bar{q}(z)}{a(z)} = \frac{1 + \sum_{\ell=1}^{NP} p_{\ell} z^{-\ell}}{1 - \sum_{\ell=1}^{NQ} a_{\ell} z^{-\ell}} \quad (4.54)$$

as equações (4.52-53-54) são as equações (4.17-24-35) anteriores com b<sub>0</sub>=a<sub>0</sub>=1 e os (a's) restantes negativos, representando respectivamente a equação à diferença, o operador de transferência discreto e a função de transferência do filtro. A equação acima poderia ser obtida também através da transformada Z da equação (4.51) usando-se o procedimento da seção 4.4.

Do exposto acima pode-se dizer que para um processo ARMA(NQ, NP) cada observação da série q<sub>t</sub> pode ser gerada de três maneiras

diferentes: 1. por um filtro cuja função de transferência é a razão entre dois polinômios de grau "NP" e "NQ", quando a excitação é um processo de ruído branco. 2. por um processo AR(NQ) e a seguir um MA(NP). 3. por um processo MA(NP) e a seguir um AR(NQ). As características deste processo são:

$$\text{média : } E[q_t] = \mu_q = \frac{v}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{NQ}}$$

$$\text{variância : } \text{Var}[q_t] = E[q_t - \mu_q]^2$$

coeficientes de autocovariância:  $\vartheta_\ell = a_1 \vartheta_{\ell-1} + a_2 \vartheta_{\ell-2} + \dots + a_{NQ} \vartheta_{\ell-NQ}, \ell > NP$  (4.55)

$$\text{coeficientes de autocorrelação: } \rho_\ell = \frac{\vartheta_\ell}{\vartheta_0} = a_1 \rho_{\ell-1} + a_2 \rho_{\ell-2} + \dots + a_{NQ} \rho_{\ell-NQ}, \ell > NP$$

Para este processo ser estacionário e inversível as raízes de  $D(B)=0$  e  $N(B)=0$  deverão, respectivamente, estarem fora do círculo unitário. Para este modelo tem-se o diagrama abaixo:

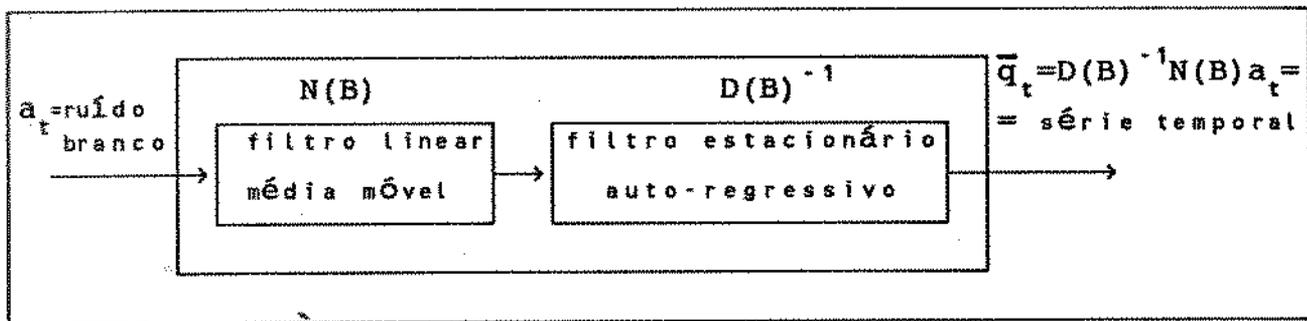


Fig. 4.8 Diagrama de um filtro Auto-Regressivo de Média Móvel para séries temporais

Para processos econômicos, estes modelos descrevem de maneira satisfatória as séries temporais, com um pequeno número de parâmetros, em geral  $NQ+NP \leq 2$ , sendo o modelo mais usado o ARMA(1,1). Para a engenharia mecânica na análise de sistemas vibrantes e acústicos a ordem deste modelo é maior. Por exemplo, tendo o sistema vários modos de vibração e sob certas condições de comportamento, cada modo pode ser modelado usando-se um modelo ARMA(2,1). Supondo-se que a resposta

impulsiva do sistema seja a soma de doze destes modos, a ordem do modelo será ARMA(24,23), [18].

Um interesse no estudo de sistemas dinâmicos com a visão das séries estocásticas seria a introdução nesta área de novos modelos probabilísticos, tais como o modelo ARIMA onde o processo apresenta-se não estacionário devido à variação na sua média. Este modelo será apresentado a seguir.

#### b. O modelo não estacionário ARIMA

Em geral na prática da engenharia, os sinais aleatórios analisados podem ser considerados estacionários, mas em relação a economia por exemplo, a estacionariedade é em geral uma restrição muito grande para o modelo. Neste caso além da aleatoriedade existem situações onde a série contém tendências e sazonalidades. Considerando o caso onde existem dados sem sazonalidade mas com tendência pode-se considerar métodos tradicionais de ajuste de curvas aproximando-os por funções simples como curvas polinomiais (lineares, quadráticas, cúbicas, etc). Uma outra forma de lidar com a tendência da série seria utilizando-se uma filtragem linear que converte esta série em outra através de uma operação linear. O modelo "MA" apresentado é um caso particular desta operação onde o somatório dos pesos da série é igual a unidade, [52].

Pode-se utilizar ainda um outro tipo de modelo para séries não estacionárias e homogêneas. Onde, série homogênea significa uma série que não altera significativamente o seu comportamento com o passar do tempo. Este modelo seria um tipo especial de filtragem particularmente usado para remover a tendência da série ( não estacionariedade em relação a média), através da sua diferenciação, até que se torne estacionária. Neste procedimento a série pode ser diferenciada uma ou mais vezes, onde a ordem de homogeneidade é o número de vezes que ela é diferenciada. Em economia, sendo os dados não sazonais, uma diferenciação de primeira ordem é em geral suficiente para obter-se uma aparente estacionariedade. Ocasionalmente uma diferenciação de segunda ordem se faz necessária.

Supondo-se " $q_t$ " uma série homogênea não estacionária de primeira ordem,  $q_t^{(1)} = \nabla q_t = q_t - q_{t-1}$  será estacionária, sendo " $q_t$ " não estacionária de segunda ordem  $q_t^{(2)} = \nabla^2 q_t = \nabla q_t - \nabla q_{t-1} = q_t - 2q_{t-1} + q_{t-2}$  será estacionária. O operador  $\nabla^d$  onde " $d$ " é o número de diferenciações, é chamado de operador diferença de retardo e o seu inverso é o operador somatório  $\Sigma^d$ . Uma classe de modelos não estacionários que utilizam os princípios desenvolvidos no modelo ARMA(NQ, NP), acrescido do operador  $\Sigma^d$  é chamado de ARIMA(NQ, d, NP), modelo Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel, [20,46,52]. A palavra "integrado" é incluída porque o modelo estacionário obtido pelas diferenciações deve ser "integrado" para obter-se o modelo para os dados não estacionários, sendo o operador somatório correspondente ao operador integral quando a variável é contínua.

Sendo  $\bar{q}_t^{(d)} = \nabla^d \bar{q}_t$  e utilizando-se a equação (4.51) do modelo ARMA(NQ, NP), pode-se escrever para o modelo ARIMA(NQ, d, NP) a expressão:

$$\bar{q}_t^{(d)} = \sum_{l=1}^{NQ} a_l \bar{q}_{t-l}^{(d)} + \sum_{l=0}^{NP} p_l a_{t-l} \quad (4.56)$$

Para este modelo tem-se o diagrama abaixo:

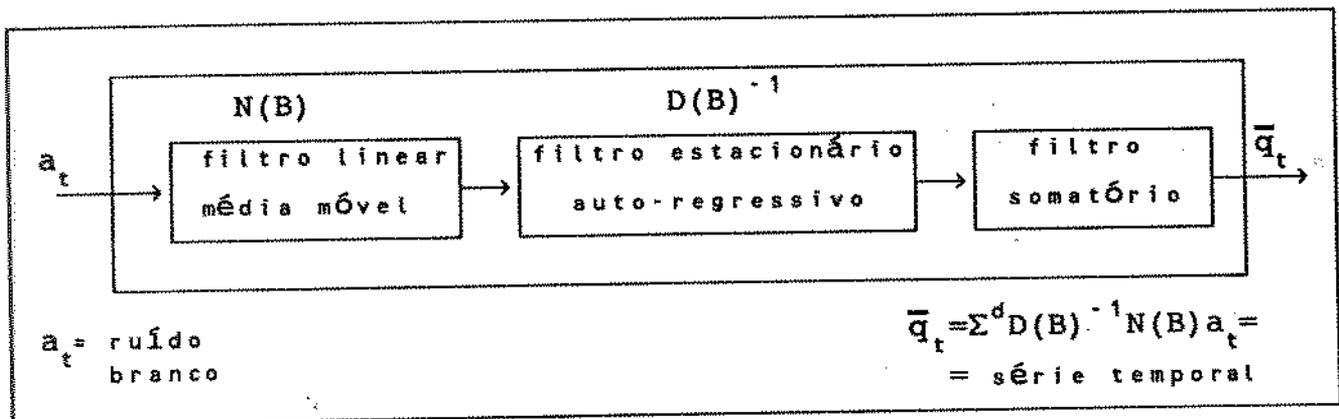


Fig. 4.9 Diagrama de um filtro Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel para séries temporais

De uma forma geral observa-se que a metodologia Box e Jenkins [20], supõe que o processo de filtragem do ruído branco, pode ser dividida em três etapas: filtragem linear Média Móvel, filtragem estacionária Auto-Regressiva e filtragem somatório. Outras variações

do modelo ARIMA podem ser obtidas considerando a componente tendencial ou sazonal da série. No caso da componente sazonal, utiliza-se o modelo sazonal multiplicativo SARIMA, [20,46].

#### 4.6 A NOMENCLATURA USADA EM SÉRIES, PROCESSAMENTO DIGITAL E ANÁLISE MODAL

Considerando-se as relações obtidas entre os modelos apresentados neste capítulo e no capítulo anterior (modelo modal), pode-se considerar a tabela 4.1, onde as variáveis e parâmetros utilizados nas diversas áreas estão relacionados.

séries temporais	process. digital	análise modal
$q_t \rightarrow$ observação no tempo $t$ da variável aleatória (série temporal)	$q_i(k) \rightarrow$ $i$ -ésimo sinal digital de saída do filtro	$q_i(k) \rightarrow$ $i$ -ésimo deslocamento discretizado do sistema
$a_t \rightarrow$ choque aleatório no tempo $t$ (processo de ruído branco)	$Q_j(k) \rightarrow$ $j$ -ésimo sinal digital de entrada do filtro	$Q_j(k) \rightarrow$ $j$ -ésima força discretizada do sistema
$P_\ell \rightarrow$ parâmetro do processo "MA" $q_\ell = 0 \rightarrow P_\ell = h_{ij}(k)$	$b_\ell \rightarrow$ coeficiente de $Q_j$ $a_\ell = 0 \rightarrow b_\ell = h_{ij}(k)$ (filtro não recursivo)	$b_\ell \rightarrow$ coeficiente de $Q_j$ relacionado com os parâmetros modais $\lambda_r, r_{rij}$ , através de $h_{ij}(k)$
$q_\ell \rightarrow$ parâmetro do processo "AR" $q_\ell$ e $P_\ell$ não nulos (modelo ARMA)	$a_\ell \rightarrow$ coeficiente de $q_i$ $a_\ell$ e $b_\ell$ não nulos (filtro recursivo)	$a_\ell \rightarrow$ coeficiente de $q_i$ $a_\ell$ e $b_\ell$ não nulos parâmetros modais relacionados com os coeficientes $A_k$
$MP \rightarrow$ ordem do modelo MA	$m \rightarrow$ ordem da excitação da eq.a diferenças	$m \rightarrow$ relacionado com o número de resíduos do sistema. (expansão em frações parciais)
$NQ \rightarrow$ ordem do modelo AR	$n \rightarrow$ ordem da equação a diferenças	$n \rightarrow$ número de graus de liberdade do sistema dinâmico

Tab. 4.1 Comparação entre as variáveis e os parâmetros usados em séries temporais, process. digital e análise modal

As relações obtidas nos mostram que quando existem coeficientes  $a_\ell$  ou  $a_\ell$  diferentes de zero os filtros são ditos recursivos, tendo resposta impulsiva infinita (IIR) e para o estudo de séries temporais o modelo que descreve o sistema é o ARMA. Quando os coeficientes  $a_\ell$  ou  $a_\ell$  são nulos os filtros são ditos não recursivos, tendo resposta impulsiva finita (FIR) e o modelo que descreve o sistema é MA. Neste caso a resposta do sistema é dada por uma soma de convolução, sendo a resposta impulsiva igual aos coeficientes do filtro e aos parâmetros MA, isto é:

$$h_{i,j}(\ell) = b_\ell = p_\ell \quad \ell=0,1,\dots, NP=M$$

Para a engenharia elétrica conhece-se o modelo de equações a diferenças (filtros), mas não a relação entre os seus coeficientes e os parâmetros modais. Para estatística conhece-se o modelo das séries que representam os sinais e as suas relações com o processo estocástico gerador, mas desconhece-se a relação com o modelo físico. Para engenharia mecânica conhece-se o modelo físico que gerou o modelo modal (capítulo III) e conhecendo-se ainda a relação entre os coeficientes do modelo ARMA e os parâmetros modais, pode-se utilizar estes dois modelos para a identificação modal, o que será visto no capítulo V a seguir.

#### 4.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo foi vista a relação no tempo de diversos modelos entre si e o modelo modal do capítulo III. Todos estes modelos podem ser utilizados para representar um sistema dinâmico e servir como base para o desenvolvimento de algoritmos que levam à sua identificação modal. No capítulo seguinte estes algoritmos no domínio do tempo serão apresentados, sendo para isso obtida a relação entre os parâmetros modais e o modelo ARMA, utilizando o modelo de exponenciais complexas de Prony e a função Randomdec.

## CAPÍTULO V

### IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS

#### 5.1 INTRODUÇÃO

No capítulo III e IV foram apresentados no domínio do tempo modelos de sistemas dinâmicos de uma entrada e uma saída, que podem servir para o desenvolvimento de algoritmos de identificação modal neste domínio.

Neste capítulo, inicialmente a solução modal discretizada no tempo através da sua representação pela série geométrica de Prony é utilizada para identificação do sistema dinâmico. Esta identificação é feita ; a: através da resposta livre (método de Prony tradicional), b: através da resposta geral sendo a excitação aleatória (método de Prony + a função Randomdec), c: através da resposta forçada sendo a excitação impulsiva ou aleatória (algoritmo da resposta impulsiva e aleatória).

Além dos métodos de Prony o sistema dinâmico é identificado utilizando-se algoritmos baseados nos modelos probabilísticos ARMA e ARIMA. Em ambos os casos a excitação é aleatória, mas para o segundo algoritmo supõem-se um processo não estacionário na saída do sistema. Na prática devido a ruídos indesejados presentes nos sinais dinâmicos, técnicas de tratamento dos sinais tais como super-dimensionamento, pseudo-inversa e verificação do erro, são utilizadas com o objetivo de reduzi-lo.

## 5.2 O TEOREMA DA AMOSTRAGEM E A INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DOS PARÂMETROS MODAIS

Nesta seção será revisto o problema da discretização no tempo e introduzida uma forma de determinar os parâmetros modais do sistema dinâmico conhecendo-se as suas respostas livre e ao impulso unitário.

### a. O teorema da amostragem

Para sinais amostrados uniformemente no tempo a possibilidade e condições de discretização são comprovadas através do teorema da amostragem, [6,10,41]. Este teorema estabelece que um sinal limitado em faixa de frequência, isto é, que não possui componentes espectrais acima de uma frequência máxima  $f_{max}$  Hz, é univocamente determinado por seus valores obtidos em intervalos uniformes de tempo menores ou iguais a  $1/2f_{max}$  seg.

Este teorema implica em que, se a transformada de Fourier do sinal é nula acima de uma certa frequência  $f_{max}$ , então toda a informação acerca deste sinal é obtida através de suas amostras espaçadas uniformemente no tempo a distâncias menores ou iguais a  $1/2f_{max}$  seg, podendo ser comprovado através do teorema da convolução na frequência. Considerando como exemplo de um sinal amostrado a resposta livre de um sistema, esta pode ser expressa analiticamente multiplicando a sua forma contínua por um trem de funções impulsivas, espaçadas uniformemente por um intervalo  $\Delta t$ :

$$q_{hi}(t_k) = q_{hi}(t) \cdot \sum_{k=0}^{K-1} \delta(t - k\Delta t) \quad (5.1)$$

Considerando o espectro contínuo de frequência da resposta representado por  $Q_{hi}(f)$  e sabendo-se que a transformada de Fourier de um trem de funções impulsivas no tempo é também um trem de funções impulsivas na frequência, espaçadas agora por  $1/\Delta t$  Hz, a transformada de Fourier da equação (5.1) é dada por:

$$Q_{hi}(f_k) = Q_{hi}(f) * \sum_{k=0}^{K-1} \delta(f - k/\Delta t) = \sum_{k=0}^{K-1} Q_{hi}(f - k/\Delta t) \quad (5.2)$$

onde foi usado o teorema da convolução na frequência e as propriedades da função impulso unitário. A expressão (5.2) indica que o espectro da resposta amostrada no tempo é uma função periódica que repete o espectro da resposta contínua com um período constante igual ao intervalo de frequência  $1/\Delta t$  Hz. Este intervalo de frequência é a frequência de amostragem e deve ser maior ou igual a  $2f_{max}$  para evitar a superposição dos espectros, (erro de "aliasing"), isto é:

$$\Delta t \leq 1/2f_{max} \quad (5.3)$$

como estabelece o teorema da amostragem. O máximo intervalo de amostragem  $\Delta t = 1/2f_{max}$  é também conhecido como intervalo de Nyquist. A superposição dos espectros é evitada considerando-se (5.3) porque os sinais são limitados em faixa de frequência. Na prática deve-se utilizar filtros "anti-aliasing", os quais sendo ligados imediatamente antes do amostrador deverão rejeitar componentes do sinal acima de  $f_{max}$ .

#### b. Introdução ao cálculo dos parâmetros modais

Conhecendo-se a resposta livre e a resposta ao impulso unitário em  $K$  diferentes valores de  $t$  ( $t=t_k$ ,  $k=0,1,\dots,K-1$ ), onde  $K \geq 4n$  (porque tem-se  $4n$  incógnitas para o sistema de equações) e  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema, as equações (3.32) e (3.33), capítulo III, formam dois conjuntos de equações da forma:

$$q_{hi}(t_k) = \sum_{r=1}^n A_{ri} e^{-\sigma_r t_k} \text{sen}(w_{dr} t_k - \alpha_{ri}) \quad (5.4)$$

$k=0,1,\dots,K-1 \quad i=1,2,\dots,n$

$$h_{ij}(t_k) = \sum_{r=1}^n A_{rij} e^{-\sigma_r t_k} \text{sen}(w_{dr} t_k - \alpha_{rij}) \quad (5.5)$$

$k=0,1,\dots,K-1 \quad j=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,n$

Amostrando-se a resposta ao impulso unitário em intervalos no tempo  $t_k = k\Delta t$  que respeitam a equação (5.3) e resolvendo-se simultaneamente o conjunto de equações (5.5), ( $k=0,1,\dots,K-1$  e  $r=1,2,\dots,n$ ), para uma dada excitação no ponto  $j$  e uma resposta no ponto  $i$ , obtém-se o coeficiente de amortecimento  $\sigma_r$ , a frequência natural amortecida  $w_{dr}$  e as constantes  $A_{rij}$  e  $\alpha_{rij}$  para  $r=1,2,\dots,n$ . Sendo determinados também, o fator de amortecimento, a frequência natural e a fase do modo  $r$ , através da equação (3.38), capítulo III. Sabendo-se, da equação (3.35), que  $A_{rij} = 2 \|\phi_{ri}\| \|\phi_{rj}\| n^2$  valores diferentes de  $A_{rij}$  são suficientes para determinar em módulo todo o sistema de vetores modais  $\|\phi_r\|$   $r=1,2,\dots,n$ . Estes valores são encontrados calculando-se a resposta ao impulso unitário  $h_{ij}(t)$ , (que é parte da resposta geral  $q_i(t)$ ), para  $i=1,2,\dots,n$  sendo  $Q_j(t)$  fixo.

O mesmo processo anterior pode ser usado para a resposta livre. A resolução simultânea do conjunto de equações (5.4) onde ( $k=1,2,\dots,4n$  e  $r=1,2,\dots,n$ ), para uma dada resposta no ponto  $i$ , leva a obtenção de,  $\sigma_r$ ,  $w_{dr}$ ,  $A_{ri}$ ,  $\alpha_{ri}$ , para  $r=1,2,\dots,n$ . Sabendo-se, da equação (3.34), que  $A_{ri} = 2 \|\eta_r(0)\| \|\phi_{ri}\|$ ,  $n$  valores diferentes de  $A_{ri}$  são suficientes para determinar em módulo as condições iniciais do sistema  $\|\eta_r(0)\|$   $r=1,2,\dots,n$ . Estes valores são encontrados através do sistema de vetores modais  $\|\phi_r\|$   $r=1,2,\dots,n$ , já obtidos através da resposta impulsiva, sendo necessário uma única das respostas livres  $q_{hi}(t)$  do sistema.

Neste caso, um acoplamento entre uma resolução e outra resulta na obtenção de todos vetores modais e de todas as condições iniciais do

sistema no domínio do tempo. Das equações (5.4) e (5.5) observa-se que são necessárias pelo menos  $4n$  amostras das respostas para definir-se os  $n$  parâmetros de amplitude, amortecimento, frequência e fase. Isto é, se  $K=4n$  nas equações, um conjunto de  $2n$  equações lineares simultâneas, que possuem solução, pode ser estabelecido. Sendo  $K>4n$  a solução ainda é possível, mas deve-se neste caso utilizar a abordagem por mínimos quadrados. Isto será visto na seção 5.5 em técnicas de processamento do sinal.

### 5.3 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DA RESPOSTA DO MODELO MODAL

Os métodos paramétricos são originários da modelagem do sistema dinâmico por uma equação a diferenças, podendo ser classificados como métodos que identificam o sistema utilizando a sua solução modal (capítulo III), ou utilizando diretamente a equação a diferenças (modelo ARMA - capítulo IV).

O método de interpolação pela série de Prony necessita da formulação discreta do sistema. Esta formulação foi desenvolvida no capítulo IV, sendo a solução da equação a diferenças dada por uma série geométrica. Utilizando-se a resposta do modelo modal (equação (3.31)) e considerando-se a natureza discreta dos dados, a resposta deste modelo (discreta no tempo) é dada por :

$$q_i(k) = q_{hi}(k) + h_{ij}(k) * Q_j(k)$$

$$q_{hi}(k) = \sum_{r=1}^n \left( \eta_r(0) \phi_{ri} \gamma_r^k + \eta_r^*(0) \phi_{ri}^* \gamma_r^{*k} \right) \quad (5.6)$$

$$h_{ij}(k) = \sum_{r=1}^n \left( r_{rij} \gamma_r^k + r_{rij}^* \gamma_r^{*k} \right) \quad k=0, \dots, K-1$$

onde  $t=t_k=k\Delta t$ , sendo  $\Delta t$  pequeno,  $q_i(k\Delta t) \equiv q_i(k)$ ,  $\gamma_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  a razão geométrica do modo "r" e  $\gamma_r^* = e^{\lambda_r^* \Delta t}$  o seu complexo conjugado. Comparando (5.6) com (4.27) tem-se  $c_{ri} = \phi_{ri} \eta_r(0)$  e  $d_{rij} = r_{rij} = \phi_{ri} \phi_{rj}$ , sendo o produto de convolução em (5.6) definido pelo somatório de

convolução:

$$q_{pij} = h_{ij}(k) * Q_j(k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} h_{ij}(k-\ell) Q_j(\ell) \quad (5.7)$$

$$k=0, 1, \dots, K-1$$

Devido ao princípio da superposição, o comportamento dinâmico do sistema pode ser descrito pela sua resposta ao impulso unitário discretizada no tempo. Neste caso, a componente particular da solução é dada pelo somatório de convolução e sendo o sistema considerado causal e estável,  $h_{ij}(k)=0$  para  $k \leq 0$  e só um número finito de termos de  $h_{ij}(k)$  são não nulos, isto é,  $h_{ij}(k) \neq 0$  para  $k > K-1$ .

### 5.3.1 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DA RESPOSTA LIVRE

Nesta seção serão desenvolvidos dois métodos de identificação que utilizam a série de Prony e a função Randomdec sendo apresentados os seus respectivos algoritmos. O algoritmo da série de Prony é utilizado para identificar o sistema dinâmico (frequências e amortecimentos) através da sua resposta livre. O algoritmo da função Randomdec utiliza inicialmente esta função para tratar a resposta geral do sistema excitado aleatoriamente, obtendo a sua resposta livre e a seguir utiliza o algoritmo da série de Prony para sua identificação. A junção destes dois algoritmos identifica o sistema excitado aleatoriamente e substitui o algoritmo do modelo Auto Regressivo (AR), que não trabalha com condições iniciais. Nesta identificação obtém-se também as condições iniciais e elementos dos vetores modais, o conjunto completo dos autovetores só será obtido através da identificação da resposta forçada na seção 5.4.

#### 5.3.1.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UM MODELO DE EXPONENCIAIS COMPLEXAS

O método de identificação que utiliza um modelo de exponenciais complexas para representar sinais transitórios amostrados no tempo, se

baseou no método da série de Prony . Neste método são calculadas as incógnitas de uma série dada por um somatório de exponenciais, que representam um função amostrada a intervalos constantes, [24,37]. Sabe-se do capítulo III que a resposta livre do sistema  $q_{hi}(t)$  (equação (3.31)) é dada por um somatório de  $2n$  exponenciais complexas em pares complexos conjugados, sendo representada discretamente no tempo pela série geométrica  $q_{hi}(k)$  da equação (5.6). Desta forma, percebe-se que o modelo da série é similar ao modelo da resposta do sistema dinâmico e que a utilização de um algoritmo que interpole a sua resposta livre por exponenciais complexas baseado no método de Prony ,[9,24,25] é viável.

Considerando a  $i$ -ésima resposta livre; o seu valor estimado pela série de exponenciais, pode ser dado pela expressão:

$$q_{hi}(k) \cong \hat{q}_{hi}(k) = \sum_{r=1}^n \left( a_{ri} Y_r^k + a_{ri}^* Y_r^{*k} \right) \quad (5.8)$$

$k=0, 1, \dots, K-1$

onde  $a_{ri} \cong \eta_r(0) \phi_{ri}$  e  $Y_r \cong \gamma_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  são números complexos ,  $a_{ri}^*$  e  $Y_r^*$  seus complexos conjugados,  $\Delta t$  o intervalo de amostragem no tempo e  $K$  o número de pontos amostrados da  $i$ -ésima resposta.

#### a. O método da Série de Prony para exponenciais complexas

Originalmente a série de Prony incluía no somatório uma exponencial sem o seu compléxo conjugado e usava as constantes " $Y_r$ " como uma forma equivalente de representação da série. Sabe-se agora que a variável " $Y_r$ " está relacionada com a razão da progressão geométrica da série que representa a resposta livre do sistema discreto e que esta série se apresenta como um par complexo conjugado, assim a a série de Prony utilizada na interpolação apresenta ordem dupla. Para o sistema dinâmico " $n$ " é o número de graus de liberdade e para série é a ordem ou o número de parâmetros complexos utilizados para interpolar a  $i$ -ésima resposta " $q_{hi}(k)$ ". Se (5.8) deve ser uma igualdade para todos os valores de " $k$ ", as equações abaixo deverão ser satisfeitas:

$$a_{1i} Y_1^k + a_{1i}^* Y_1^{*k} + a_{2i} Y_2^k + a_{2i}^* Y_2^{*k} + \dots + a_{ni} Y_n^k + a_{ni}^* Y_n^{*k} = q_{hi}(k) \quad (5.9)$$

$$k=0, 1, \dots, K$$

Sendo as constantes " $Y_r$ " conhecidas, são necessárias " $2n$ " equações lineares em (5.9) para obter-se as " $2n$ " incógnitas " $a_{ri}$ ". Sendo " $Y_r$ " desconhecidas necessitam-se no mínimo " $4n$ " equações não lineares em (5.9), isto é, são necessários pelo menos " $4n$ " pontos da resposta amostrada ( $K \geq 4n$ ) para definir-se os " $4n$ " parâmetros complexos de interpolação. Estas equações poderão ser resolvidas exatamente se  $K=4n$ , ou aproximadamente pelo método dos mínimos quadrados se  $K > 4n$ .

Considerando o caso em que " $Y_r$ " são desconhecidas, as não linearidades do sistema podem ser concentradas em uma única equação, onde estas constantes são raízes do polinômio:

$$Y^{2n} + \alpha_{2n-1} Y^{2n-1} + \dots + \alpha_1 Y + \alpha_0 = 0 \quad (5.10)$$

Com o objetivo de determinar os coeficientes  $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}$ , multiplica-se a equação (5.9) com  $k=0$  por  $\alpha_0$ , com  $k=1$  por  $\alpha_1, \dots$ , com  $k=2n-1$  por  $\alpha_{2n-1}$  e com  $k=2n$  por 1. Soma-se as " $2n$ " equações resultantes e se cada " $Y$ " satisfaz a equação (5.10), tem-se a equação:

$$\alpha_{2n-1} q_{hi}(2n-1) + \dots + \alpha_1 q_{hi}(1) + \alpha_0 q_{hi}(0) = -q_{hi}(2n) \quad (5.11)$$

As " $2n-1$ " equações adicionais podem ser obtidas repetindo-se o processo, começando com a segunda equação em (5.9) onde  $k=1, \dots, k=2n$ , até a última equação com  $k=2n-1, \dots, k=4n-1$ . Obtendo-se um conjunto de " $2n-1$ " equações lineares similares a (5.11). Sendo os valores amostrados  $q_{hi}(0), \dots, q_{hi}(4n-1)$  conhecidos, este conjunto de " $2n$ " equações lineares pode ser resolvido diretamente para os  $2n(\alpha$ 's), se  $K=4n$ . Os  $2n(Y$ 's) são então encontrados como as raízes de (5.10) e as equações em (5.9) tornam-se lineares nos  $2n(a$ 's) com coeficientes conhecidos. Os  $2n(a$ 's) podem ser finalmente determinados através das " $2n$ " primeiras equações de (5.9).

b. O algoritmo da série de Prony para exponenciais complexas.

Desta forma pode-se utilizar um algoritmo baseado no método de Prony para obter-se os parâmetros de uma série de exponenciais complexas que modelam a resposta livre discretizada do sistema dinâmico, onde o intervalo de discretização deve ser dado pelo teorema da amostragem, equação (5.3), para prevenir o erro de "aliasing".

O algoritmo que determina os parâmetros complexos da série (5.8) é dado pela seguinte seqüência:

1. Resolver o sistema Toeplitz de "2n" equações lineares para obter-se os 2n( $\alpha$ 's), através dos "4n" pontos amostrados da resposta " $q_{hi}(k)$ ":

$$\begin{bmatrix} q_{hi}(0) & q_{hi}(1) & \dots & q_{hi}(2n-1) \\ q_{hi}(1) & q_{hi}(2) & \dots & q_{hi}(2n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{hi}(2n-1) & q_{hi}(2n) & \dots & q_{hi}(4n-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{hi}(2n) \\ q_{hi}(2n+1) \\ \vdots \\ q_{hi}(4n-1) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$(2n \times 2n)$ 
 $(2n \times 1)$ 
 $(2n \times 1)$

2. Encontrar os "n" pares de raízes complexas  $Y_r$  e  $Y_r^*$  do polinômio dado pela equação (5.10).
3. Resolver o sistema Van der Monde de equações lineares para obter-se os 2n( $a$ 's), através dos 2n( $Y$ 's) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ Y_1 & Y_1^* & \dots & Y_n & Y_n^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_1^{2n-1} & Y_1^{*2n-1} & \dots & Y_n^{2n-1} & Y_n^{*2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{1i}^* \\ \vdots \\ a_{ni} \\ a_{ni}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{hi}(0) \\ q_{hi}(1) \\ \vdots \\ q_{hi}(2n-1) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$(2n \times 2n)$ 
 $(2n \times 1)$ 
 $(2n \times 1)$

Neste ponto são conhecidos todos os parâmetros complexos da série  $Y_r$ ,  $Y_r^*$ ,  $a_{ir}$  e  $a_{ir}^*$ ,  $r=1,2,\dots,n$ . Sendo obtidos os autovalores do sistema através de :

$$\lambda_r \cong \frac{1}{\Delta t} \ln Y_r \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.14)$$

onde utilizando-se as equações (3.37) e (3.38) capítulo III, e a equação (5.14) obtém-se os valores aproximados do coeficiente de amortecimento  $\sigma_r$  e da frequência natural amortecida  $w_{dr}$  do modo  $r$ , em função dos parâmetros de interpolação  $Y_r$ :

$$\sigma_r \cong - \frac{1}{\Delta t} \operatorname{Re}(\ln Y_r) \quad ; \quad w_{dr} \cong \frac{1}{\Delta t} \left( \left\| \ln Y_r \right\|^2 - \operatorname{Re}(\ln Y_r)^2 \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

$r=1,2,\dots,n$

sendo os valores aproximados da amplitude  $A_{ri}$  e da fase  $\alpha_{ri}$  do modo  $r$  da  $i$ -ésima resposta livre, função dos parâmetros de interpolação  $a_{ri} \cong \eta_r(0) \phi_{ri}$ , dadas por:

$$A_{ri} \cong 2 \|a_{ri}\| \quad ; \quad \alpha_{ri} \cong \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Re}(a_{ri})}{\operatorname{Im}(a_{ri})} \right] \quad (5.16)$$

$r=1,2,\dots,n$

Assim, tem-se todos os parâmetros para reconstruir a  $i$ -ésima resposta livre do sistema, dada por (3.32) capítulo III, através dos seus pontos amostrados  $q_{hi}(k)$   $k=0,1,\dots,4n-1$ , sendo a sua formulação discreta dada por (5.6), onde  $t_k = k\Delta t$  e  $Y_r \cong \gamma_r = e^{\lambda_r \Delta t} = e^{-(\sigma_r - jw_{dr}) \Delta t}$ .

Para o método de Prony de sinais transitórios ser utilizado como um método prático de análise modal, além de todos os vetores modais serem obtidos, seção 5.3.2 a seguir, deve-se considerar o fato de que os dados amostrados da resposta transitória de uma estrutura não contém uma soma exata de funções harmônicas. Mesmo nos casos em que um modelo exato é utilizado, existirão erros na resposta amostrada devido à presença de ruídos externos. Nestes casos deve-se usar técnicas que minimizem o efeito destes ruídos para a aplicação dos algoritmos no domínio do tempo, o que será visto no final deste capítulo. Sendo a excitação do sistema um ruído, pode-se utilizar técnicas sobre o sinal de sua resposta para eliminá-lo, isto será visto a seguir com a utilização da função Randomdec.

### 5.3.1.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO A FUNÇÃO RANDOMDEC

A função Randomdec é um método de análise de vibrações estruturais que teve sua origem devido a Cole [30], sendo utilizado inicialmente em medidas de amortecimento, problemas de fadiga e detecção de falhas. O seu desenvolvimento teórico ocorreu mais recentemente, e neste desenvolvimento ficou demonstrado que sendo o sistema linear, invariante com o tempo e excitado por um ruído branco gaussiano de média zero, esta função será proporcional à função de autocorrelação do processo aleatório. Estabeleceu-se também os seus fundamentos matemáticos para sistemas de vários graus de liberdade, sendo visto que matematicamente ela pode ser interpretada como uma estimativa do valor médio estatístico deste processo, [31,32,33].

Esta função tem a mesma dimensão da resposta aleatória e necessita somente a medição da resposta dinâmica do sistema o que permite a sua monitoração automática e contínua. Sendo o sistema linear, invariante com o tempo e o processo ergódico, a vantagem na sua utilização seria a sua interpretação como a resposta livre devida à condição inicial de deslocamento do sistema, o que permitiria identificar os seus parâmetros, mesmo sendo o sistema excitado aleatoriamente. Utilizando a formulação desenvolvida aqui e sendo respectivamente " $Q_j(k)$ " e " $q_i(k)$ " sinais aleatórios amostrados no tempo da excitação e resposta do sistema, tem-se esquematicamente que:

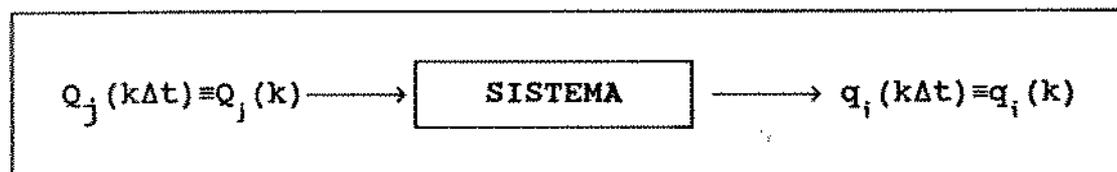


Fig.5.1 Sistema excitado aleatoriamente

onde  $\Delta t$  é o intervalo de amostragem no tempo,  $k=0,1,\dots,K-1$  e  $K$  o número de amostras da  $i$ -ésima resposta aleatória.

### a. O algoritmo da função Randomdec

Conhecendo-se a resposta " $q_i(k)$ ", o algoritmo da função Randomdec é dado por:

1. Fixa-se uma amplitude inicial ou nível de seleção " $R$ ".
2. A cada passagem de resposta " $q_i(k)$ " por esta amplitude, um trecho " $q_i^s(m)$ " de tamanho " $M\Delta t$ " é retirado, onde  $m=k-k_s$ , sendo " $M$ " o número de pontos da função Randomdec e " $k_s\Delta t$ " ou simplesmente " $k_s$ ", o tempo de retirada de cada trecho.
3. Subtrai-se de cada trecho " $q_i^s(m)$ " a amplitude  $R$ .
4. Faz-se a média sobre estes novos trechos encontrando-se a função Randomdec, " $dq_i(m)$ ", isto é :

$$dq_i(m) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (q_i^s(m) - A) \cong E[q_i^s(m) - R] \quad (5.17)$$
$$m = k - k_s = 0, 1, \dots, M-1$$

onde  $S$  é o número de trechos retirados de " $q_i(k)$ " para uma dada amplitude  $R$ .

5. Utiliza-se o algoritmo de Prony da seção anterior onde a resposta livre " $q_{hi}(k)$ " é substituída pela função Randomdec " $dq_i(m)$ ", para obtenção das frequências e amortecimentos.

### b. Desenvolvimento da função Randomdec

A equação (5.17) indica que, sendo o processo aleatório representado pelos " $S$ " trechos, a função Randomdec pode ser vista como uma estimativa do valor médio deste processo subtraída de " $A$ ". Utilizando-se as equações (5.6) e (5.7), um trecho " $s$ " da  $i$ -ésima resposta aleatória pode ser dado por:

$$q_i^s(m) = \sum_{r=1}^n (\phi_{ri} \eta_r^s(k_s) \gamma_r^m + \phi_{ri}^* \eta_r^{*s}(k_s) \gamma_r^{*m}) + \sum_{\ell=0}^{M-1} h_{ij}^s(m-\ell) Q_j^s(\ell) \quad (5.18)$$

$$m = k - k_s = 0, 1, \dots, M-1$$

$$s = 1, 2, \dots, S$$

onde substitui-se  $k$  por  $m$ , sendo os termos  $\eta_r^s(k_s) \gamma_r^m = \eta_{hr}^s(m)$  as soluções homogêneas uni-modais do trecho "s" e  $\eta_r^s(k_s)$  as novas condições iniciais. Utilizando-se a formulação discreta para a forma complexo conjugada da base modal, equação (3.10) capítulo III, tem-se também para um trecho "s" da  $i$ -ésima resposta a expressão:

$$q_i^s(m) = \sum_{r=1}^n (\phi_{ri} \eta_r^s(m) + \phi_{ri}^* \eta_r^{*s}(m)) \quad (5.19)$$

$$s = 1, 2, \dots, S$$

sendo a amplitude inicial, devido a sua definição, dada por:

$$R = q_i^s(k_s) = \sum_{r=1}^n (\phi_{ri} \eta_r^s(k_s) + \phi_{ri}^* \eta_r^{*s}(k_s)) \quad (5.20)$$

$$s = 1, 2, \dots, S$$

substituindo-se (5.19) e (5.20) em (5.17) e comutando-se a operação de média e de soma e sabendo-se que as características do sistema, como os seus autovetores as suas respostas impulsivas uni-modais e a sua resposta impulsiva modal não se alteram devido ao processo de média, tem-se:

$$dq_i(m) \cong \sum_{r=1}^n \{ \phi_{ri} E[\eta_r^s(k_s)] (\gamma_r^m - 1) + \phi_{ri}^* E[\eta_r^{*s}(k_s)] (\gamma_r^{*m} - 1) \} + \sum_{\ell=0}^{M-1} h_{ij}^s(m-\ell) E[Q_j^s(\ell)] \quad (5.21)$$

$$m = k - k_s = 0, 1, \dots, M-1$$

$$s = 1, 2, \dots, S$$

Devido ao uso da formulação por espaço de estado, capítulo III, a resposta aleatória apresentada é função das condições iniciais de

deslocamento mais a componente forçada. Incluindo-se nesta resposta as condições iniciais de velocidade, sabe-se que para uma determinada média imposta, função do número de trechos "S", as soluções homogêneas uni-modais devido a estas condições tendem a anular-se  $E[\dot{\eta}_{hr}^s(m)] \approx 0$ , onde  $\dot{\eta}_{hr}^s(m) = \lambda_r \dot{\eta}_r^s(k_s) \gamma_r^m$ , [31].

Sendo o processo não estacionário o somatório de convolução na equação (5.21) existirá, onde  $E[Q_j^s(\ell)] = f(\ell)$  e  $f(\ell)$  será o valor médio do processo função de " $\ell$ ". Sendo o processo estacionário de média não nula, existirá o somatório de convolução sobre a resposta impulsiva multiplicada por uma constante "C", onde  $E[Q_j^s(\ell)] = C$ . Tendo este processo média nula,  $C=0$  e o termo forçado em (5.21) desaparecerá.

Sendo o processo estacionário e ergódico,  $E[Q_j^s(\ell)] = \overline{Q_j(k)}$ , onde:

$$\overline{Q_j(k)} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Q_j(k)$$

é o valor médio no tempo da  $j$ -ésima excitação de entrada.

Assim, utilizando-se como um sinal de entrada do sistema um ruído branco gaussiano, que tem média nula, ou um ruído colorido no qual é anulada a sua média, o termo forçado da equação (5.21) também desaparecerá. Considerando-se ainda que o número de médias é suficiente para ter-se  $E[\eta_r^s(k_s)] \approx \eta_r(0)$  e  $E[\dot{\eta}_r^s(k_s)] \approx \dot{\eta}_r^*(0)$ , a equação (5.21) pode ser escrita como:

$$dq_i(m) = \sum_{r=1}^n \{ \phi_{ri} \eta_r(0) (\gamma_r^m - 1) + \phi_{ri}^* \dot{\eta}_r^*(0) (\gamma_r^{*m} - 1) \} \quad (5.22)$$

$$m = k - k_s = 0, 1, \dots, M-1$$

O processo de subtração de "R" gerou os termos  $(\gamma_r^m - 1)$  o que padroniza a função,  $dq_i(m=0) = 0$ . Isto foi feito porque o valor da amplitude inicial varia em função do número de médias e originariamente esta função, podendo ser interpretada como um valor

médio, foi utilizada como uma "assinatura padrão", [30,31,40]. Para a identificação não é necessária a subtração de  $R$ , sendo a equação (5.22) igual a resposta livre " $q_{hi}(k)$ ". Assim, pode-se utilizar o modelo de Prony da seção anterior, para a identificação dos parâmetros modais através da função Randomdec, quando o sistema é excitado por um ruído gaussiano. Neste caso as incógnitas da série (5.8) serão dadas por  $a_{r_i} \cong E[\eta_r^s(k_s)]\phi_{r_i}$ .

A seguir a força " $Q_j(k)$ " a resposta geral " $q_j(k)$ " e a impulsiva " $h_{ij}(k)$ " da equação (5.6) serão utilizadas para a identificação dos resíduos, das frequências e dos fatores de amortecimento do sistema dinâmico.

### 5.3.2 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DA RESPOSTA FORÇADA

A resposta impulsiva discretizada " $h_{ij}(k)$ " da equação (5.6) tem a mesma forma básica da resposta livre " $q_{hi}(k)$ " da mesma equação e sugere a utilização de um modelo de exponenciais complexas, equação (5.8), e o método de Prony para determinar-se os parâmetros modais do sistema, incluindo os resíduos. Na prática, entretanto, é muito difícil reproduzir uma força de excitação equivalente a um impulso unitário atuando em um sistema dinâmico. O fenômeno físico que se aproximaria desta força impulsiva seria o "golpe de um martelo", sendo difícil controlar sua intensidade de forma que obtivéssemos uma área unitária característica da função impulso unitário.

A seguir serão apresentados dois algoritmos que utilizam a interpolação por exponenciais complexas de Prony, com algumas modificações, para a análise de uma entrada e uma saída do sistema dinâmico, [9,26,36]. O primeiro é formulado para o caso particular onde a entrada é um força impulsiva no início do intervalo de análise. O segundo tem uma aplicação similar ao algoritmo ARMA, que será visto na seção 5.4, sendo utilizado para o cálculo dos parâmetros modais da resposta de um sistema à uma entrada aleatória. Ambos os algoritmos consideram que o sistema a ser analisado está sendo testado na condição de repouso, isto é, as condições iniciais são nulas.

### 5.3.2.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UMA FORÇA IMPULSIVA

O algoritmo apresentado é composto de dois estágios de análise. No primeiro estágio calcula as frequências e amortecimentos do sistema, baseado na componente livre da sua resposta. No segundo estágio utiliza estas informações e junto com as informações obtidas da componente forçada da sua resposta, calcula os resíduos. Assim, para a aquisição de dados são necessárias a parte livre e forçada da resposta do sistema e a força impulsiva de entrada aplicada. Os registros apresentam-se com comprimentos no tempo diferentes, seria possível considerar também intervalos de amostragens diferentes o que tornaria mais flexível o processamento, [26].

Considere a  $i$ -ésima resposta amostrada " $q_i(k\Delta t) \equiv q_i(k)$ ",  $k=0,1,\dots,Kq-1$ , devida à  $j$ -ésima força amostrada " $Q_j(k\Delta t) \equiv Q_j(k)$ "  $k=0,1,\dots,KQ-1$  do sistema dinâmico de ordem " $n$ ", onde  $\Delta t$  deve ser dado pelo teorema da amostragem (equação (5.3)) para prevenir o erro de "aliasing". Esquemáticamente tem-se:

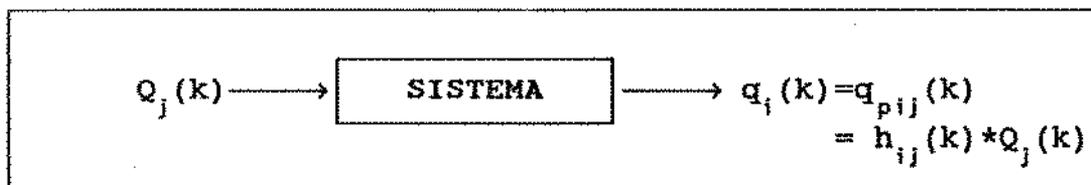


Fig.5.2 Sistema inicialmente em repouso excitado por uma força impulsiva

A natureza impulsiva de " $Q_j(k)$ " é representada pelo fato que  $Q_j(k) \equiv 0$  para  $k > KQ-1$ , sendo a componente particular da solução  $q_{pij}(k) = h_{ij}(k) * Q_j(k)$  nula para estes valores de " $k$ ". Neste caso tem-se para os  $(Kq-KQ)$  pontos restantes a resposta livre, que considera-se satisfaçam a condição  $(Kq-KQ) \geq 4n$ . O algoritmo da resposta impulsiva é então implementado analisando-se inicialmente um sistema super-dimensionado de ordem " $n_s$ ", ( $n_s \geq n$ ), através da sua resposta livre. Como o sistema é super-dimensionado terá mais equações que incógnitas, sendo necessário para a sua solução a utilização da

técnica mínimos quadrados, [9], que será vista na seção 5.5.

### 0 algoritmo da resposta impulsiva

1. Solução do sistema de  $(Kq-KQ-2n_s)$  equações lineares representativas da componente livre da resposta " $q_i(k)=q_{hi}(k)$ " para obter-se os  $2n_s$  ( $\alpha$ 's), através dos " $Kq$ " pontos amostrados.

$$L \hat{\alpha} = \hat{v} \quad (5.23)$$

onde:

$$L = \begin{bmatrix} q_i(KQ) & q_i(KQ+1) & \dots & q_i(KQ+2n_s-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_i(KQ+2n_s-1) & q_i(KQ+2n_s) & \dots & q_i(KQ+4n_s-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_i(KQ-2n_s-1) & q_i(KQ-2n_s+1) & \dots & q_i(KQ-2) \end{bmatrix} \quad (5.24a)$$

[  $(Kq-KQ-2n_s) \times (2n_s)$  ]

e

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2n_s-1} \end{bmatrix} \quad (2n_s \times 1) \quad \hat{v} = - \begin{bmatrix} q_i(KQ+2n_s) \\ \vdots \\ q_i(KQ+4n_s-1) \\ \vdots \\ q_i(KQ-1) \end{bmatrix} \quad (5.24b)$$

[  $(Kq-KQ-2n_s) \times 1$  ]

Sendo  $Kq-KQ=4n$  e  $n_s=n$ , o sistema terá  $2n$  equações, não sendo necessária a solução por mínimos quadrados.

2. Determinar as raízes do polinômio :

$$P_{2n_s}(Y) = Y^{2n_s} + \alpha_{2n_s-1} Y^{2n_s-1} + \dots + \alpha_1 Y + \alpha_0 \quad (5.25)$$

As raízes deste polinômio ocorrem em geral em pares complexos conjugados podendo ser obtidas quando este é fatorado em " $n_s$ " binômios do tipo:  $(Y-Y_r)(Y-Y_r^*)$   $r=1,2,\dots,n_s$ .

3. Calcular a frequência natural amortecida  $w_{dr}$  e o coeficiente de amortecimento  $\sigma_r$  do modo  $r$ ,  $r=1,2,\dots,n_s$ , através da equação (5.14), utilizada no algoritmo de Prony. O fator de amortecimento  $\zeta_r$ , a frequência natural  $w_r$  e a fase  $\alpha_r$  do modo  $r$ , podem ser obtidas da equação (5.15) e da equação (3.38).
4. Verificar os possíveis modos verdadeiros do sistema através da determinação dos  $2n_s^*$  ( $\alpha$ 's) de um novo polinômio " $P_{2n_s}(Y)$ ", solucionando-se novamente um sistema que agora possui  $(Kq-KQ-2n_s^*)$  equações lineares:

$$L^* \hat{\alpha}^* = \hat{v}^* \quad (5.26)$$

Neste caso a matriz  $L^*$  e os vetores  $\hat{\alpha}^*$  e  $\hat{v}^*$  são iguais às equações (5.24a) e (5.24b) substituindo-se  $n_s$  por  $n_s^*$  e o polinômio é dado por :

$$P_{2n_s}(Y) = Y^{2n_s} + \alpha_{2n_s-1} Y^{2n_s-1} + \dots + \alpha_1 Y + \alpha_0 \quad (5.27)$$

Divide-se o polinômio em (5.27) pelos binômios  $(Y-Y_r)(Y-Y_r^*)$  já calculados no segundo passo, obtendo-se um quociente " $Q_{2n_s}(Y)$ " de ordem  $2n_s-2$  mais um resto dado por  $e_{r1}Y + e_{r0}$ , isto é:

$$P_{2n_s}(Y) = (Y-Y_r)(Y-Y_r^*)Q_{2n_s}(Y) + e_{r1}Y + e_{r0} \quad (5.28)$$

Os binômios  $(Y-Y_r)(Y-Y_r^*)$   $r=1,2,\dots,n$  serão fatores comuns dos polinômios em (5.25) e (5.28) se corresponderem aos modos verdadeiros do sistema. Assim, os restos " $\epsilon_r$ " obtidos pela divisão:

$$\epsilon_r = [e_{r1}^2 + e_{r0}^2]^{1/2} \quad r=1,2,\dots,n$$

tendem a zero sempre que o binômio que divide (5.28) representa um destes modos, indicando dentre todos, quais os "n" verdadeiros.

5. Solução do sistema de "Kq" equações lineares representativas da componente forçada da resposta " $q_i(k) = q_{pij}(k) = h_{ij}(k) * Q_j(k)$ ", ... para obter-se os "2n" resíduos do sistema  $r_{rij}, r_{rij}^*$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , através dos (KQ-1) pontos amostrados da força  $Q_j(k)$ , dos  $2n(Y's)$  encontrados no passo 4 e dos "Kq" pontos amostrados da resposta.

$$B \hat{r} = \hat{v} \quad (5.29)$$

onde utilizando-se o somatório de convolução, equação (5.7), e a resposta impulsiva " $h_{ij}(k)$ " da equação (5.6) com  $\gamma_r^k \cong Y_r^k$ , tem-se:

$$B \hat{r} = \sum_{\ell=0}^{KQ-1} \left\{ \sum_{r=1}^n (r_{rij} Y^{k-\ell} + r_{rij}^* Y^{*k-\ell}) \right\} Q_j(\ell)$$

$k=1,2,\dots,Kq$

Considerando que o sistema é causal, isto é,  $h_{ij}(k-\ell)=0$  para  $k-\ell \leq 0$ , existindo a resposta impulsiva só quando  $k > \ell$ , tem-se  $B = Q Y$ , onde:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_j(0) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_j(1) & Q_j(0) & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_j(KQ-1) & Q_j(KQ-2) & \dots & Q_j(0) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & Q_j(KQ-1) & Q_j(KQ-2) & \dots & Q_j(0) \end{bmatrix}$$

$\leftarrow \quad \quad \quad Kq - Kq \quad \quad \quad \rightarrow \quad \quad \quad Kq \quad \quad \quad \rightarrow$   
 (Kq x Kq) (5.30a)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_1^* & \dots & Y_n & Y_n^* \\ Y_1^2 & Y_1^{*2} & \dots & Y_n^2 & Y_n^{*2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_1^{KQ} & Y_1^{*KQ} & \dots & Y_n^{KQ} & Y_n^{*KQ} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_1^{KQ-KQ} & Y_1^{*KQ-KQ} & \dots & Y_n^{KQ-KQ} & Y_n^{*KQ-KQ} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_1^{Kq} & Y_1^{*Kq} & \dots & Y_n^{Kq} & Y_n^{*Kq} \end{bmatrix} \quad (5.30b)$$

(Kq x 2n)

e

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} r_{1ij} \\ r_{1ij}^* \\ \vdots \\ r_{nij} \\ r_{nij}^* \end{bmatrix} \quad (2n \times 1)$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} q_i(1) \\ q_i(2) \\ \vdots \\ q_i(KQ) \\ \vdots \\ q_i(Kq-KQ) \\ \vdots \\ q_i(Kq) \end{bmatrix} \quad (Kq \times 1) \quad (5.30c)$$

6. Calcular os valores médios da frequência  $\overline{w_{dr}}$ , do fator de amortecimento  $\overline{\zeta_r}$  e do resíduo  $\overline{r_{rij}}$  do modo  $r$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , através de uma série de "S" testes impulsivos sobre o mesmo sistema dinâmico de ordem "n", o qual estima-se ter "n<sub>s</sub>" modos.

Os valores usados no processo de médias são:

$$\bar{w}_{dr} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S w_{dr}^s \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.31)$$

$$\bar{\zeta}_r = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \zeta_r^s \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.32)$$

$$\bar{r}_{rij} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S r_{rij}^s \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.33)$$

onde  $w_{dr}^s$ ,  $\zeta_r^s$  e  $r_{rij}^s$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , são os parâmetros modais verdadeiros, determinados individualmente em cada um dos "S" testes.

Os valores médios foram obtidos através das equações anteriores porque estes não podem ser obtidos diretamente, fazendo-se inicialmente médias sobre os sinais amostrados. Poderia-se encontrar os valores médios " $\bar{w}_{dr}$ " e " $\bar{\zeta}_r$ " fazendo-se inicialmente médias sobre os coeficientes do polinômio " $P_{2ns}(Y)$ " para sucessivos testes, mas isto não levaria à encontrar o valor médio dos resíduos " $\bar{r}_{rij}$ ", [9].

### 5.3.2.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UMA FORÇA ALEATÓRIA ESTACIONÁRIA

O algoritmo da excitação aleatória para análise modal no domínio do tempo é similar em muitos aspectos ao algoritmo apresentado na seção anterior. A única diferença é que toda a análise é baseada no vetor resposta ao impulso unitário calculado no início do processo.

Considere a i-ésima resposta aleatória amostrada " $q_i(k\Delta t) \equiv q_i(k)$ ",  $k=1,2,\dots,Kq$ , devida a j-ésima força aleatória amostrada " $Q_j(k\Delta t) \equiv Q_j(k)$ "  $k=0,1,\dots,KQ-1$ , do sistema dinâmico de ordem "n" e inicialmente em repouso, onde  $\Delta t$  deve ser dado pelo teorema da amostragem, equação (5.3), para prevenir o erro de "aliasing". Esquemáticamente tem-se:

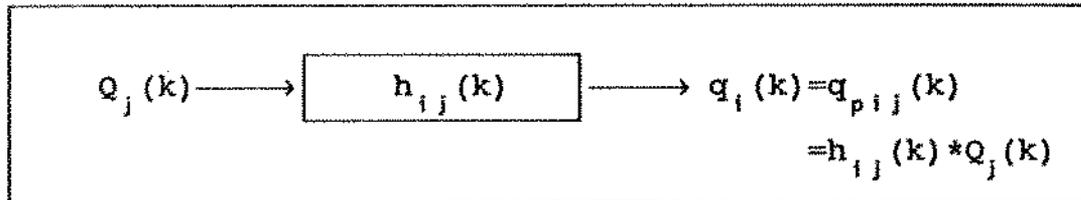


Fig.5.3 Sistema inicialmente em repouso excitado por uma força aleatória.

Sendo a força " $Q_j(k)$ " aleatória, esta é escolhida com o mesmo número de pontos da resposta do sistema deslocada de  $\Delta t$ , tendo-se para a sua solução o somatório de convolução, equação (5.7), onde  $K=Kq$  :

$$\sum_{\ell=0}^{kq-1} h_{ij}(k-\ell) Q_j(\ell) = h_{ij}(k) * Q_j(k) = q_i(k) \quad (5.34)$$

$k=1,2,\dots,Kq$

A equação (5.34) na forma matricial se apresenta como um sistema de " $Kq$ " equações lineares, podendo o vetor resposta impulsiva " $\hat{h}$ " ser obtido de :

$$Q \hat{h} = \hat{v} \quad (5.35)$$

onde, sendo o sistema causal,  $h_{ij}(k-\ell)=0$  para  $k-\ell < 0$ , tendo-se:

$$\begin{bmatrix} Q_j(0) & 0 & \dots & 0 \\ Q_j(1) & Q_j(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_j(Kq-1) & Q_j(Kq-2) & \dots & Q_j(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ij}(1) \\ h_{ij}(2) \\ \vdots \\ h_{ij}(Kq) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i(1) \\ q_i(2) \\ \vdots \\ q_i(Kq) \end{bmatrix} \quad (5.35a)$$

$Q \quad (Kq \times Kq) \qquad \hat{h} \quad (Kq \times 1) \qquad \hat{v} \quad (Kq \times 1)$

Utilizando-se o vetor resposta impulsiva " $\hat{h}$ ", o algoritmo é obtido através dos seguintes passos:

O algoritmo da excitação aleatória.

1. Solução do sistema de  $(Kq-2n_s)$  equações lineares para obter-se os  $2n_s$  ( $\alpha$ 's), através dos  $Kq$  pontos obtidos da resposta impulsiva.

$$H \hat{\alpha} = \hat{h} \quad (5.36)$$

onde:

$$H = \begin{bmatrix} h_{ij}(1) & h_{ij}(2) & \dots & h_{ij}(2n_s) \\ h_{ij}(2) & h_{ij}(3) & \dots & h_{ij}(2n_s+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{ij}(Kq-2n_s-1) & h_{ij}(Kq-2n_s) & \dots & h_{ij}(Kq-1) \end{bmatrix} \quad (5.36a)$$

$[(Kq-2n_s) \times (2n_s)]$

e

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2n_s-1} \end{bmatrix} \quad (2n_s \times 1) \quad \hat{h} = \begin{bmatrix} h_{ij}(2n_s+1) \\ h_{ij}(2n_s+2) \\ \vdots \\ h_{ij}(Kq-1) \end{bmatrix} \quad [(Kq-2n_s) \times 1] \quad (5.36b)$$

2. Determinar as  $2n_s$  ( $\alpha$ 's) raízes do polinômio " $P_{2n_s}(Y)$ " dado pela equação (5.25), passo 2, seção 5.3.2.1.

3. Calcular a frequência natural amortecida  $w_{dr}$  e o coeficiente de amortecimento  $\sigma_r$  do modo  $r$ ,  $r=1,2,\dots,n_s$ , através das  $2n_s$  ( $\alpha$ 's) raízes do polinômio segundo a equação (5.14), utilizada no algoritmo de Prony. O fator de amortecimento  $\zeta_r$ , a frequência natural  $w_r$  e a fase  $\alpha_r$  do modo  $r$ , podem ser obtidas da equação (5.15) e da equação (3.38).

4. Verificar os possíveis modos verdadeiros do sistema através da determinação dos  $2n'_s$  ( $\alpha'$ 's) de um novo polinômio " $P_{2n'_s}(Y)$ ", utilizando novamente a solução do sistema que agora possui  $(Kq-2n'_s)$  equações lineares:

$$H' \hat{\alpha}' = \hat{h}' \quad (5.37)$$

Neste caso a matriz  $H'$  e os vetores  $\hat{\alpha}'$  e  $\hat{h}'$  são iguais as equações (5.36a) e (5.36b) substituindo-se  $n_s$  por  $n'_s$  e o polinômio é dado pela equação (5.25), sendo o processo de verificação dos modos verdadeiros do sistema similar ao utilizado no passo 4 da seção anterior.

5. O cálculo dos " $2n$ " resíduos do sistema  $r_{rij}$  e  $r_{rij}^*$ ,  $r=1,2,\dots,n$  é feito de forma similar ao passo 5 da seção anterior onde substitui-se a matriz da força impulsiva, equação (5.30a), pela matriz triangular inferior " $Q$ " dada na equação (5.35a).
6. Antes do cálculo dos parâmetros modais, deve-se obter o vetor resposta impulsiva médio através de uma série de testes aleatórios feitos sobre o mesmo sistema dinâmico. Na seqüência, através dos passos 1 a 5 anteriores, pode-se então obter os valores médios destes parâmetros. Sendo " $S$ " o número de testes realizados sobre o sistema de ordem " $n$ " e tendo-se " $Kq$ " pontos amostrados para a  $s$ -ésima força " $Q_j^s(k)$ " e para a  $s$ -ésima resposta " $q_i^s(k)$ ", este valor médio será dado por:

$$\overline{\hat{h}} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{h}^s \quad (5.38)$$

onde " $\hat{h}^s$ " é o  $s$ -ésimo vetor obtido na equação (5.35a), sendo a média feita sobre cada um dos seus elementos  $h_{ij}^s(k)$ ,  $k=1,2,\dots,Kq$ .

Considerando os desenvolvimentos feitos nas seções anteriores 5.3.1 (resposta livre) e 5.3.2 (resposta forçada), observa-se que mesmo sendo o sistema excitado por uma força aleatória, todos os parâmetros modais, incluindo os resíduos podem ser identificados.

Através da resposta livre as incógnitas da série  $a_{ri} \approx \eta_r(0) \phi_{ri}$  foram obtidas. Conhecendo-se agora, através da resposta forçada, todo o sistema de vetores modais  $\phi_r$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , serão suficientes "n" valores de  $a_{ri}$ ,  $r=1,2,\dots,n$  para determinar todas as condições iniciais  $\eta_r(0)$ ,  $r=1,2,\dots,n$ . Em todas as resoluções de sistemas de equações, como por exemplo (5.23-26-29-36), onde as matrizes apresentam-se retangulares, deve-se utilizar a técnica da pseudo-inversa, que será vista na seção 5.5 no fim do capítulo.

#### 5.4 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS ARMA E ARIMA

Na seção 5.3 desenvolveu-se algoritmos baseados na solução modal do sistema dinâmico. Nesta seção relacionam-se inicialmente os parâmetros modais com os parâmetros ARMA, desenvolvendo-se a seguir algoritmos baseados neste modelo e no ARIMA. Ambos os modelos estão relacionados com o sistema dinâmico através da sua representação por uma equação a diferenças. Estes algoritmos são desenvolvidos considerando-se uma entrada e uma saída para o sistema que esta inicialmente em repouso. Da mesma forma que nos algoritmos anteriores quando as matrizes apresentam-se retangulares (devido ao super-dimensionamento ou devido ao acréscimo de linhas) deve-se utilizar a técnica da pseudo-inversa, seção 5.5.

##### 5.4.1 RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS MODAIS E OS PARÂMETROS ARMA

A transformada Z da resposta ao impulso unitário do sistema dinâmico, equação (5.6) é dada por:

$$H_{ij}(z) = Z\{h_{ij}(k)\} = \sum_{r=1}^n \left( r_{rij} \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \gamma_r} + r_{rij}^* \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \gamma_r^*} \right) \quad (5.39)$$

onde considerou-se a resposta ao impulso uma seqüência causal, sendo

$\gamma_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  e a transformada Z de  $\gamma_r^k = e^{\lambda_r k \Delta t}$  a série de potência na sua forma fechada:

$$\begin{aligned} Z\{e^{\lambda_r k \Delta t}\} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda_r k \Delta t} z^{-k} = 1 + \left(\frac{e^{\lambda_r \Delta t}}{z}\right) + \left(\frac{e^{\lambda_r \Delta t}}{z}\right)^2 + \left(\frac{e^{\lambda_r \Delta t}}{z}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{e^{\lambda_r \Delta t}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\lambda_r \Delta t}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde  $|z| > \gamma_r$  é a condição que representa a região de convergência da série. A equação (5.39) é a expansão em frações parciais do modelo ARMA na frequência, equação (4.54), onde a sua ordem é  $N_Q = N_P = 2n$ , sendo "n" o número de graus de liberdade do sistema dinâmico. Assim, calculando-se os parâmetros  $p_\ell$  e  $q_\ell$  do modelo e relacionando-os com as constantes da sua expansão em frações parciais obtém-se os parâmetros modais do sistema  $r_{rij}$  e  $\gamma_r$ . Pode-se também obter a relação entre estes parâmetros através da expansão em série de potência dada pela definição da transformada Z. Neste caso a transformada Z unilateral de  $h_{ij}(k)$  é definida como uma série de potência em Z:

$$H_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{ij}(k) z^{-k} = h_{ij}(0) + h_{ij}(1) z^{-1} + h_{ij}(2) z^{-2} + \dots \quad (5.41)$$

onde os coeficientes dos termos  $z^{-k}$  são  $h_{ij}(k)$ . Portanto a expansão de  $H_{ij}(z)$  em série de potência em "z" produz diretamente a seqüência discreta no tempo  $h_{ij}(k)$ . Comparando a equação (5.41) com a equação (4.54) e considerando que o sistema tem resposta impulsiva finita, todos os parâmetros Auto-regressivos são nulos  $q_\ell = 0, \ell = 1, 2, \dots, N_Q$ , podendo-se escrever:

$$H_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{N_P} p_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N_P} h_{ij}(k) z^{-k} \quad (5.42)$$

e utilizando-se a equação (5.6) pode-se escrever:

$$p_k = h_{ij}(k) = \sum_{r=1}^n (r_{rij} \gamma_r^k + r_{rij}^* \gamma_r^{*k}) \quad (5.43)$$

$k=0, 1, \dots, NP$

Tendo o sistema resposta impulsiva infinita, o modelo ARMA equação (4.54) pode ser expandido em série de potência pela divisão longa de seus polinômios, sendo dado pela equação (4.36). Sabe-se que  $n=NQ$  e  $m=NP$  e que os parâmetros " $\lambda_k$ " da expansão de  $H_{ij}(z)$  são dados neste caso por  $\lambda_k = h_{ij}(NQ-NP+k)$ , [10]. Utilizando-se a equação (5.6), pode-se escrever:

$$\lambda_k = h_{ij}(NQ-NP+k) = \sum_{r=1}^n (r_{rij} \gamma_r^{(NQ-NP+k)} + r_{rij}^* \gamma_r^{*(NQ-NP+k)}) \quad (5.44)$$

$k=0, 1, \dots, \infty$

As equações (5.43) e (5.44) relacionam os parâmetros do modelo ARMA com os parâmetros modais. No caso da equação (5.44) a relação não é obtida entre os parâmetros modais e os parâmetros  $p_\ell$  e  $q_\ell$  dos polinômios, sendo os parâmetros modais relacionados com os parâmetros  $\lambda_k$  da divisão longa destes.

#### 5.4.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO O MODELO ESTACIONÁRIO ARMA

O modelo ARMA da equação (4.51) estabelece uma recorrência entre os coeficientes dos polinômios da função de transferência e os valores amostrados do sinal de entrada e saída. Considerando-se a notação de sistemas dinâmicos, a ordem do modelo " $NQ=NP=2n$ " e " $K=4n$ " amostras para estes sinais, o sistema de equações lineares a seguir pode ser estabelecido:

O algoritmo ARMA :

1. Solução do sistema de " $4n$ " equações lineares para obtenção dos " $2n$ "

parâmetros Auto-Regressivos " $a_\ell$ " e dos " $2n$ " parâmetros Média-Móveis " $p_\ell$ ".

$$H \hat{p} = \hat{v} \quad (5.45)$$

onde:

$$H = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} Q_j(0) & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_j(1) & Q_j(0) & \dots & 0 & q_i(0) & \dots & \dots & 0 \\ Q_j(2) & Q_j(1) & \dots & 0 & q_i(1) & q_i(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q_i(2) & q_i(1) & \dots & 0 \\ Q_j(2n-1) & Q_j(2n-2) & \dots & Q_j(0) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_j(2n) & Q_j(2n-1) & \dots & Q_j(1) & q_i(2n-1) & q_i(2n-2) & \dots & q_i(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q_i(2n) & q_i(2n-1) & \dots & q_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ Q_j(4n-1) & Q_j(4n-2) & \dots & Q_j(2n) & q_i(4n-2) & q_i(4n-3) & \dots & q_i(2n) \end{array} \right] \quad (4n \times 4n) \quad (5.45a)$$

e

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{2n-1} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (4n \times 1) \quad ; \quad \hat{v} = \begin{bmatrix} q_i(0) \\ q_i(1) \\ q_i(2) \\ \vdots \\ q_i(2n) \\ q_i(2n+1) \\ \vdots \\ q_i(4n-1) \end{bmatrix} \quad (4n \times 1) \quad (5.45b)$$

2. Cálculo das raízes do polinômio do denominador da equação (4.54) com  $n_0=2n$ , ( $Y_r \cong \gamma_r$ ,  $Y_r^* \cong \gamma_r^*$ ,  $r=1,2,\dots,n$ , polos da função transferência  $H_{ij}(z)$ ), através dos parâmetros Auto-Regressivos " $a_\ell$ " calculados no passo 1.
3. Determinação dos autovalores " $\lambda_r$ ", do coeficiente de amortecimento " $\sigma_r$ " e da frequência natural amortecida do sistema através das equações (5.14) e (5.15), capítulo IV.

4. Determinação dos resíduos " $r_{rij}$ " e " $r_{rij}^*$ " da expansão em frações parciais da equação (4.54), através das raízes obtidas no passo 2.

$$r_{rij} \cong \lim_{z^{-1} \rightarrow Y_r} [(z^{-1} - Y_r) H_{ij}(z)] \quad (5.46)$$

$$r_{rij}^* \cong \lim_{z^{-1} \rightarrow Y_r^*} [(z^{-1} - Y_r^*) H_{ij}(z)]$$

onde  $H_{ij}(z)$  é descrito pela equação (5.39).

Sendo necessário o super-dimensionamento do modelo, determina-se os modos verdadeiros através da técnica de verificação do resto, apresentadas na seção 5.5. Existindo uma componente tendencial a série será não estacionária em relação a sua média, sendo necessária a sua diferenciação antes da utilização do modelo ARMA, isto será visto a seguir.

#### 5.4.3 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO O MODELO NÃO ESTACIONÁRIO ARIMA

Utilizando-se o modelo ARIMA dado pela equação (4.56), a notação de sistemas dinâmicos e considerando-se a série de saída (resposta do sistema) não estacionária de primeira ordem onde a ordem do modelo " $n_q = n_p = 2n$ ", pode-se escrever:

$$q_i^{(1)}(k) = \nabla^1 q_i(k) = \sum_{\ell=0}^{2n} p_{\ell} Q_j(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{2n} q_{\ell} \nabla^1 q_i(k-\ell) \quad (5.47)$$

sendo  $\nabla^1 q_i(k) = q_i(k) - q_i(k-1)$  e estando as variáveis centradas na média.

A equação (5.47) mostra que a diferenciação é feita sobre a série de resposta. Isto ocorre porque a tendência é função do mecanismo que gerou a série (sistema dinâmico), estando, por isso, associada à sua resposta. Com a diferenciação esta série torna-se estacionária,

podendo-se utilizar o modelo "ARMA", onde substituí-se  $q_i(k)$  por  $\nabla^1 q_i(k)$ , (modelo "ARIMA). Considerando-se que a série de saída e de entrada apresentam "K=4n" amostras, obtém-se os "2n" parâmetros Auto-Regressivos " $p_\ell$ " e os "2n" parâmetros Média-Móveis " $q_\ell$ ", através do sistema de "4n" equações lineares dado abaixo:

$$H \hat{p} = \hat{v} \quad (5.48)$$

onde:

$$H = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} Q_j(0) & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_j(1) & Q_j(0) & \dots & 0 & \nabla^1 q_i(0) & \dots & \dots & 0 \\ Q_j(2) & Q_j(1) & \dots & 0 & \nabla^1 q_i(1) & \nabla^1 q_i(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ Q_j(2n-1) & Q_j(2n-2) & \dots & Q_j(0) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_j(2n) & Q_j(2n-1) & \dots & Q_j(1) & \nabla^1 q_i(2n-1) & \nabla^1 q_i(2n-2) & \dots & \nabla^1 q_i(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \nabla^1 q_i(2n) & \nabla^1 q_i(2n-1) & \dots & \nabla^1 q_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ Q_j(4n-1) & Q_j(4n-2) & \dots & Q_j(2n) & \nabla^1 q_i(4n-2) & \nabla^1 q_i(4n-3) & \dots & \nabla^1 q_i(2n) \end{array} \right] \quad (4n \times 4n) \quad (5.48a)$$

e

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{2n-1} \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (4n \times 1) \quad ; \quad \hat{v} = \begin{bmatrix} \nabla^1 q_i(0) \\ \nabla^1 q_i(1) \\ \nabla^1 q_i(2) \\ \vdots \\ \nabla^1 q_i(2n) \\ \nabla^1 q_i(2n+1) \\ \vdots \\ \nabla^1 q_i(4n-1) \end{bmatrix} \quad (4n \times 1) \quad (5.48b)$$

Utilizando-se os passos 2 a 4 do algoritmo "ARMA" obtém-se os parâmetros modais do sistema dinâmico. Da mesma forma que no algoritmo

anterior, se for necessário deverão ser usadas as técnicas de processamento dadas na seção seguinte.

Sendo a resposta do sistema dinâmico estacionária de segunda ordem, substitui-se na equação (5.48)  $\nabla^1 \bar{q}_i(k)$  por  $\nabla^2 \bar{q}_i(k) = q_i(k) - 2q_i(k-1) + q_i(k-2)$ . Os parâmetros " $q_i$ " e " $p_i$ " obtidos na equação (5.48), são coeficientes de um modelo estacionário. Para que o modelo seja usado para previsão de valores futuros é necessário a integração da série de resposta " $\nabla^1 \bar{q}_i(k)$ " através do operador somatório " $\Sigma^1$ ".

## 5.5 TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DO SINAL NO DOMÍNIO DO TEMPO

Na prática muitas estruturas mecânicas apresentam infinitos graus de liberdade e conseqüentemente infinitas freqüências de ressonância, coeficientes de amortecimento e forma dos modos. Entretanto para a análise de tais estruturas é de interesse determinar estes parâmetros dentro de uma determinada faixa operacional de freqüência, assim tem-se para a estrutura um número finito de ressonâncias. Além disso, para a aplicação de algoritmos de análise modal (tanto no tempo como na freqüência) é necessário a filtragem "anti-aliasing" dos sinais dinâmicos a serem analisados com o objetivo de eliminar destes sinais as altas freqüências de ressonância. Uma estrutura que apresenta "n" freqüências de ressonância, teoricamente, poderia ser representada por um modelo dinâmico de "n" graus de liberdade. Entretanto, na prática alguns fatores como não linearidades e a presença de ruídos espúrios fazem com que esta representação não seja suficiente. Apesar disto um grande número de algoritmos para modelos lineares tem tido sucesso na obtenção dos parâmetros modais. Isto indica que, ainda que presentes, as não linearidades em geral não representam as maiores causas de problemas na modelagem de estruturas mecânicas. A maior fonte de problemas se encontra no ruído presente nos sinais dinâmicos os quais são processados pelos algoritmos, tornando o modelo pouco eficiente. A seguir serão apresentadas algumas técnicas que podem ser utilizadas para minimizar o efeito do ruído quando da aplicação de algoritmos no

domínio do tempo para análise modal.

### 5.5.1 TÉCNICA DE SUPER-DIMENSIONAMENTO DO MODELO

A utilização de um modelo super-dimensionado para um sistema dinâmico discretizado no tempo, com objetivo de determinar os seus parâmetros modais na presença de ruídos espúrios, já foi feita com sucesso em alguns trabalhos, [34,53,54,55]. Por exemplo, a determinação da função de resposta ao impulso de um sistema de "n" graus de liberdade  $h_{ij}(k)$ , equação (5.6), na presença de ruídos espúrios, pode ser feita considerando-se um modelo com "p=n+q" graus de liberdade.

Os parâmetros  $r_{rij}, \gamma_r, r=1,2,\dots,n$  de  $h_{ij}(k)$  são os parâmetros modais verdadeiros do sistema dinâmico de ordem "n". Os parâmetros  $r_{rij}, \gamma_r, r=n+1,2,\dots,p$  são os modos falsos devido a existência do ruído no cálculo da resposta impulsiva. Estes parâmetros não representam necessariamente propriedades físicas do sistema, podendo ser números reais puros em vez de complexos. Pensando-se na sua representação exponencial  $\gamma_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  onde  $\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_{dr}$  estes parâmetros podem produzir amortecimentos negativos.

O problema da identificação dos modos verdadeiros quando o modelo do sistema é super-dimensionado é a maior fraqueza deste método. Uma técnica que diferencia os modos verdadeiros dos falsos será apresentada na seção 5.5.3. A seguir apresenta-se a técnica dos mínimos quadrados para ajuste de qualquer número conveniente de amostras dos sinais de entrada e saída do sistema dinâmico, a serem utilizados nos algoritmos no domínio do tempo para análise modal.

### 5.5.2 A TÉCNICA DA PSEUDO-INVERSA

Foi visto que o algoritmo de Prony, o ARMA e o ARIMA utilizam no mínimo 4n amostras dos sinais de entrada e saída para identificar as

características dinâmicas de um sistema de "n" graus de liberdade. Nestes algoritmos o processo de identificação se inicia com a solução de um sistema simultâneo de equações lineares do tipo:

$$A \hat{x} = \hat{b} \quad (5.49)$$

onde " $\hat{x}$ " é o vetor solução de dimensão  $2n \times 1$  para o algoritmo de Prony e  $4n \times 1$  para os algoritmos ARMA e ARIMA.

No algoritmo de Prony a matriz "A"  $2n \times 2n$  contém elementos que são as amostras da resposta livre do sistema devido as condições iniciais. O vetor " $\hat{b}$ "  $2n \times 1$  contém elementos que também são amostras da resposta livre, equação (5.12). No algoritmo ARMA a matriz "A"  $4n \times 4n$ , é incompleta e contém amostras da excitação e da resposta do sistema e o vetor " $\hat{b}$ "  $4n \times 1$ , contém as amostras da resposta, equação (5.45). O algoritmo ARIMA é análogo ao ARMA, considerando-se que em vez da resposta, ele trabalha com a sua diferenciação, equação (5.48)..

Tendo-se " $p > 4n$ " amostras para os sinais de entrada e saída, o algoritmo de Prony apresenta a matriz "A" com a dimensão retangular  $(p-2n) \times 2n$  e os algoritmos ARMA e ARIMA a apresentam com a dimensão retangular  $p \times 4n$ . Neste caso o vetor " $\hat{b}$ " apresenta dimensão  $(p-2n) \times 1$  para o algoritmo de Prony e  $p \times 1$  para os outros e o vetor solução " $\hat{x}$ " se mantém com a dimensão  $2n \times 1$  e  $4n \times 1$  em cada caso respectivamente. A solução deste novo sistema onde existem mais equações que incógnitas, pode somente ser obtida de uma forma otimizada. Isto é feito pré-multiplicando-se ambos os lados da equação (5.49) pela transposta da matriz "A", produzindo um novo sistema de equações cujo vetor solução " $\hat{y}$ " é a aproximação por mínimos quadrados do vetor " $\hat{x}$ ". Esta operação pode ser expressa por:

$$A^T A \hat{y} = A^T \hat{b} \quad (5.50)$$

O produto " $A^T A$ " é uma matriz quadrada e " $\hat{y}$ " e " $A^T \hat{b}$ " são vetores que tem a mesma dimensão de " $A^T A$ ". A solução proposta pela equação (5.50) é conhecida como abordagem por pseudo-inversa. O uso da solução aproximada pelos mínimos quadrados assegura uma boa avaliação dos coeficientes do vetor " $\hat{x}$ " para os algoritmos, quando os sinais

dinâmicos discretizados contém ruídos espúrios. Desta forma a determinação dos parâmetros modais de um sistema dinâmico na presença de ruído, pode ser feita através do super-dimensionamento do modelo, ou através da técnica dos mínimos quadrados. Em experimentos práticos de análise modal, entretanto, ambas as técnicas apresentadas, podem calcular parâmetros com pouca precisão se um modelo sub-dimensionado for utilizado. Nestas circunstâncias a técnica do super-dimensionamento introduzirá o problema da identificação do sistema de modos verdadeiros.

A seção seguinte, combinando as técnicas de super-dimensionamento e dos mínimos quadrados para a análise modal de uma estrutura dinâmica, apresentará um meio de determinação destes modos verdadeiros.

### 5.5.3 TÉCNICA DE VERIFICAÇÃO ATRAVÉS DO RESTO

A técnica supõe que a análise modal de um sistema dinâmico de ordem "n" é feita sobre um modelo super-dimensionado de ordem " $n_s$ ", onde " $n_s > n$ ". Existindo "m" amostras do sinal de entrada e saída onde " $m > 4n_s$ ", a análise começa através da solução por mínimos quadrados do sistema " $A^T A \hat{y} = A^T b$ ".

Sendo a análise de Prony utilizada a matriz "A" será retangular de ordem  $(m-2n_s) \times 2n_s$  e os vetores " $\hat{y}$ " e " $b$ " serão vetores de dimensão  $2n_s \times 1$  e  $(m-2n_s) \times 1$  respectivamente. Utilizando-se o algoritmo ARMA ou ARIMA, a matriz "A" será retangular de ordem  $4m \times 4n_s$  e " $\hat{y}$ " e " $b$ " terão dimensão  $4n_s \times 1$  e  $4m \times 1$  respectivamente. Em qualquer dos métodos o vetor solução " $\hat{y}$ " conterà os coeficientes do polinômio cujas raízes serão proporcionais as freqüências de ressonância do sistema e aos coeficientes de amortecimento, equações (5.14), (5.15) e (5.16).

Para a análise de Prony os elementos de " $\hat{y}$ " são os coeficientes de um polinômio de ordem  $2n_s$ , cujas raízes são complexas, equação (5.10). Para os algoritmos ARMA e ARIMA somente os últimos  $2n_s$  elementos de " $\hat{y}$ " são coeficientes do polinômio, equações (5.45) e (5.48).

Sendo as raízes do polinômio  $P_{2n_s}(Y)$ ,  $Y_r$ ,  $r=1,2,\dots,2n_s$ , proporcionais aos parâmetros modais do modelo super-dimensionado de ordem " $n_s$ ", cuja ordem verdadeira é " $n$ ", somente as raízes  $Y_r$ ,  $r=1,2,\dots,n$  produzirão o sistema de freqüências de ressonância e coeficientes de amortecimento verdadeiros. As raízes restantes  $Y_r$ ,  $r=2n+1,\dots,2n_s$  serão valores numéricos proporcionais ao ruído e a outros fatores de distúrbios aleatórios, introduzidos durante o processo de aquisição de dados.

Os mesmos dados usados para definir  $P_{2n_s}(Y)$  podem ser utilizados em um modelo super-dimensionado de ordem " $n_s$ " que definem o mesmo sistema, produzindo um novo polinômio  $P_{2n_s}(Y)$  com  $[n_s > n]$ . Este novo polinômio também terá " $2n$ " raízes verdadeiras as quais corresponderão ao sistema de parâmetros modais verdadeiros e " $2n_s - 2n$ " raízes as quais corresponderão aos modos falsos, devidas a efeitos aleatórios indesejados.

Todas as raízes de  $P_{2n_s}(Y)$  e  $P_{2n_s}(Y)$  que correspondem as informações modais verdadeiras, devem ser complexas e se apresentarem sob a forma de um par complexo conjugado. Assim, uma forma conveniente de utilização da técnica de verificação através do resto, para obter-se os modos verdadeiros, seria fazer-se a divisão do polinômio  $P_{2n_s}(Y)$  pelos binômios  $(Y-Y_r)(Y-Y_r^*)$  já calculados através de  $P_{2n_s}(Y)$ , obtendo-se um quociente " $Q_{2n_s-2}(Y)$ " de ordem " $2n_s-2$ " mais um resto dado por " $e_{r1}Y + e_{r0}$ ", isto é :

$$P_{2n_s}(Y) = (Y-Y_r)(Y-Y_r^*)Q_{2n_s-2}(Y) + (e_{r1}Y + e_{r0}) \quad (5.51)$$

onde  $e_{r1}$ ,  $e_{r0}$  e os coeficientes de  $Q_{2n_s-2}(Y)$  são números reais.

Na equação (5.51), se os binômios correspondem a informação modal verdadeira o seu resto será nulo, mas na prática sempre que " $Y_r$ " e " $Y_r^*$ " são raízes que correspondem a modos verdadeiros os termos " $e_{r1}$ " e " $e_{r0}$ " não serão nulos, devido a limitações do modelo matemático e a erros numéricos de cálculo.

Sendo os binômios  $(Y-Y_r)(Y-Y_r^*)$   $r=1,2,\dots,n$ , fatores comuns dos polinômios  $P_{2n_s}(Y)$  e  $P_{2n_s}(Y)$  e correspondendo aos modos verdadeiros,

procura-se então obter os restos " $c_r$ " :

$$c_r = [ e_{r1}^2 + e_{r0}^2 ]^{1/2} \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.52)$$

e quando " $c_r$ " tender a valores pequenos o binômio que divide a equação (5.51) representará um dos " $n$ " modos verdadeiros.

As técnicas apresentadas nestas seções devem ser utilizadas para os algoritmos apresentados nas seções 5.3 e 5.4. A aplicação destas técnicas será vista em exemplos dados no capítulo VI, a seguir.

## 5.6 CONCLUSÃO

Apresentou-se neste capítulo diversos algoritmos utilizados para a identificação modal de sistemas dinâmicos no domínio do tempo. Estes algoritmos se basearam na solução do modelo modal (algoritmos de Prony) e nos modelos de séries temporais (ARMA e ARIMA). No capítulo seguinte, com o auxílio das técnicas de processamento e dos algoritmos apresentados serão simulados e identificados modalmente sistemas dinâmicos. Será desenvolvida também uma aplicação prática onde será feita a análise modal de uma viga sujeita a forças impulsivas.

## CAPÍTULO VI

### EXEMPLOS E APLICAÇÕES

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos da utilização dos métodos de identificação descritos no capítulo V. Para a realização das simulações utilizou-se um PC AT-286 com um co-processador numérico 8087 e o "software" PC-MATLAB. Apresenta-se inicialmente a identificação de um sistema numérico representante de um sistema mecânico de três graus de liberdade. Este exemplo serve para mostrar de maneira abrangente a utilização de todos os métodos apresentados neste trabalho. Em seguida é feita a análise de um sistema matemático de seis graus de liberdade, que apresenta freqüências naturais repetidas. A identificação de tal sistema é feita utilizando-se apenas os métodos baseados no algoritmo de Prony. Finalmente um exemplo prático de identificação modal de uma viga suspensa por suportes flexíveis é apresentado. Neste exemplo o algoritmo de identificação empregado é o ARMA.

#### 6.2 SIMULAÇÃO DO SISTEMA DINÂMICO

Nesta seção propõe-se um sistema dinâmico de três graus de liberdade, como um modelo discreto (parâmetros concentrados) para o modelo real da haste sofrendo deformação axial apresentada na figura 2.1, capítulo II. Análogamente ao sistema de "n" graus de liberdade da figura 2.2, capítulo II, tem-se a figura abaixo:

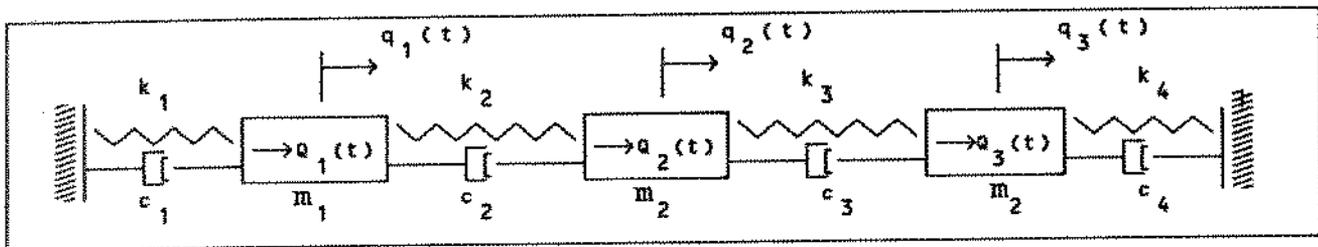


Fig. 6.1 Sistema de inércias discretas sofrendo deformação axial-3 G.L.

Considera-se, para este modelo, que as molas tenham comportamento linear, sendo os seus amortecimentos viscosos. As suas coordenadas generalizadas são  $q_i(t)$ ,  $i=1,2,3$  e os seus esforços generalizados axiais externos são  $Q_j(t)$ ,  $j=1,2,3$ .

### 6.2.1 A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação do movimento tem a sua expressão matemática dada pela expressão (2.22), capítulo II :

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = Q(t) \quad (6.1)$$

sendo determinada através das matrizes  $(n \times n)$   $n=3$ , de inércia, amortecimento e rigidez, "M", "C" e "K" dadas abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (6.2a)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \quad (6.2b)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \quad (6.2c)$$

As matrizes "M", "C" e "K" acima foram obtidas através das equações matriciais de energia cinética, potencial e da função de dissipação de Rayleigh, equações (2.23a,b e c), capítulo II.

Considerando-se a tabela de coeficientes a seguir:

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
inércia (Kg)	rigidez (N/(m/s))	amortec (N/m)	inércia (Kg)	rigidez (N/(m/s))	amortec. (N/m)
$m_1=10$	$k_1=1000$	$c_1=1$	$m_1=10$	$k_1=1000$	$c_1=40$
$m_2=10$	$k_2=100$	$c_2=0$	$m_2=10$	$k_2=100$	$c_3=10$
$m_3=10$	$k_3=1000$	$c_3=1$	$m_3=10$	$k_3=1000$	$c_3=30$
	$k_4=1000$	$c_4=1$		$k_4=1000$	$c_4=20$

Tab. 6.1 Coeficientes das matrizes "M", "C" e "K".

As matrizes anteriores, para pequenos amortecimentos, serão dadas por:

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 1100 & -100 & 0 \\ -100 & 1100 & -1000 \\ 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} \quad (6.3a)$$

e para grandes amortecimentos :

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 50 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -30 \\ 0 & -30 & 50 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 1100 & -100 & 0 \\ -100 & 1100 & -1000 \\ 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} \quad (6.3b)$$

### 6.2.2 AUTOVALORES E MATRIZ MODAL

A matriz diagonal "A" (2nx2n), n=3, é construída com os valores de "λ" obtidos através da solução da equação característica do sistema,  $\det[W-\lambda B]=0$ , sendo dada pela equação (3.15), capítulo III. As matrizes "B" e "W", (2nx2n), n=3, são obtidas, por sua vez, através das matrizes (6.3) anteriores e da utilização da equação (3.3) capítulo III, tendo-se portanto para os autovalores a tabela abaixo:

	pequenos amortecimentos	grandes amortecimentos
1o modo →	$\lambda_1 = -0,0196 - j 6,6533$	$\lambda_1 = -0,7026 - j 6,6302$
2o modo →	$\lambda_2 = -0,0496 - j10,5300$	$\lambda_2 = -2,5634 - j10,2155$
3o modo →	$\lambda_3 = -0,1307 - j16,2737$	$\lambda_3 = -3,7340 - j15,8016$

Tab 6.2 Autovalores Simulados



$$\Psi = \begin{bmatrix} 0,0035-j0,0008 & 0,0486+j0,0494 & 0,0105+j0,0064 & \dots \\ -0,0240-j0,0200 & -0,0065-j0,0044 & 0,0503+j0,0522 & \dots \\ 0,0318+j0,0345 & -0,0082-j0,0022 & 0,0340+j0,0322 & \dots \\ -0,0259-j0,0515 & 0,3803-j0,6232 & 0,0349-j0,0741 & \dots \\ -0,2265+j0,4536 & -0,0287+j0,0774 & 0,3109-j0,3702 & \dots \\ 0,4270-j0,6315 & -0,0017+j0,0898 & 0,1894-j0,2477 & \dots \end{bmatrix} \quad (6.5b)$$

$$\begin{bmatrix} 0,0035+j0,0008 & 0,0486-j0,0494 & 0,0105-j0,0064 \\ -0,0240+j0,0200 & -0,0065+j0,0044 & 0,0503-j0,0522 \\ \dots & 0,0318-j0,0345 & -0,0082+j0,0022 & 0,0340-j0,0322 \\ -0,0259+j0,0515 & 0,3803+j0,6232 & 0,0349+j0,0741 \\ -0,2265-j0,4536 & -0,0287-j0,0774 & 0,3109+j0,3702 \\ 0,4270+j0,6315 & -0,0017-j0,0898 & 0,1894+j0,2477 \end{bmatrix}$$

### 6.2.3 OS PARÂMETROS MODAIS

Utilizando-se a equação (3.38) capítulo III e os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  dados na tabela (6.2), obtêm-se as frequências naturais " $\omega_r$ " e os fatores de amortecimento " $\zeta_r$ " dos modos  $r=1,2,3$ . Considerando-se a excitação do sistema na massa " $m_1$ " e a sua resposta na massa " $m_3$ ", os resíduos  $r_{r31} = \phi_{r3} \phi_{r1}$ ,  $r=1,2,3$ , são obtidos utilizando-se as matrizes da equação (6.5). Tem-se, então, para os parâmetros a tabela abaixo:

pequenos amortecimentos				
	freq.natural (Hz)	fat. amort.	resíduos [ $r_{r31}$ ]	
			p. real	p. imaginária
1º modo →	$f_1 = 1,0589$	$\zeta_1 = 0,0030$	$-3,09 \times 10^{-6}$	$5,11 \times 10^{-4}$
2º modo →	$f_2 = 1,6759$	$\zeta_2 = 0,0047$	$4,65 \times 10^{-6}$	$-4,63 \times 10^{-4}$
3º modo →	$f_3 = 2,5901$	$\zeta_3 = 0,0080$	$-1,56 \times 10^{-6}$	$9,05 \times 10^{-5}$
grandes amortecimentos				
	freq.natural (Hz)	fat. amort.	resíduos [ $r_{r31}$ ]	
			p. real	p. imaginária
1º modo →	$f_1 = 1,0611$	$\zeta_1 = 0,1054$	$1,51 \times 10^{-4}$	$5,54 \times 10^{-4}$
2º modo →	$f_2 = 1,6763$	$\zeta_2 = 0,2434$	$-2,89 \times 10^{-4}$	$-5,15 \times 10^{-4}$
3º modo →	$f_3 = 2,5842$	$\zeta_3 = 0,2300$	$1,38 \times 10^{-4}$	$9,29 \times 10^{-5}$

Tab. 6.3 Frequências naturais, fatores de amortecimento e resíduos

### 6.3 A RESPOSTA DO MODELO MODAL

Para o exemplo considera-se somente a excitação da massa "m<sub>1</sub>" e a resposta da massa, "m<sub>3</sub>", sendo o força e o deslocamento generalizados discretos no tempo, dados respectivamente por:  $Q^T(k)=[Q_1(k), 0, 0]$  e  $q^T(k)=[q_1(k), q_2(k), q_3(k)]$ . Neste caso, utilizando-se a equação (5.6), capítulo V, a resposta do modelo modal de tempo discreto na coordenada q<sub>3</sub>(k) dada em função da resposta impulsiva é :

$$q_3(k) = q_{h3}(k) + h_{31}(k) * Q_1(k)$$

$$q_{h3}(k) = \sum_{r=1}^3 \left( \eta_r(0) \phi_{r3} e^{\lambda_r k \Delta t} + \eta_r^*(0) \phi_{r3}^* e^{\lambda_r^* k \Delta t} \right) \quad (6.6)$$

$$h_{31}(k) = \sum_{r=1}^3 \left( r_{r31} e^{\lambda_r k \Delta t} + r_{r31}^* e^{\lambda_r^* k \Delta t} \right)$$

$$k=0, 1, \dots, K-1$$

Define-se também  $q_{p3}(k)=h_{31} * Q_1(k)$  como sendo a solução particular da equação (6.6).

#### 6.3.1 ESCOLHA DOS PARÂMETROS PARA O PROCESSAMENTO

Definindo-se o número de pontos do sinal, K=128 e o seu máximo valor no tempo, T=15 seg., tem-se a tabela de parâmetros abaixo:

$\Delta t = T/K$	$f_s = 1/\Delta t$	$f_{m\acute{a}x} = f_s / 2$	$\Delta f = 1/T$
0,1172 seg	8,533 Hz	4,2667 Hz	0,0667 Hz

Tab. 6.4 Parâmetros para o processamento

onde "Δt" é o intervalo de amostragem no tempo, "f<sub>s</sub>" a frequência de amostragem, "f<sub>máx</sub>" a máxima frequência do sinal e "Δf" o intervalo de

amostragem na frequência. Neste caso utilizou-se o teorema da amostragem, equação (5.3), capítulo V onde considerou-se o intervalo de Nyquist,  $\Delta t = 1/2f_{\max}$ .

### 6.3.2 A RESPOSTA LIVRE

Neste caso, supondo a excitação da massa "m<sub>1</sub>" nula  $Q_1(k)=0$ ,  $k=0,1,\dots,K-1$ , a resposta do modelo modal é dada pela solução homogênea da equação (6.6), "q<sub>h3</sub>(k)".

#### a. Escolha das condições iniciais e as constantes $[\eta_r(0)\phi_{r3}]$

Considerando-se as condições iniciais de deslocamento do sistema original dadas por  $q^T(0) = [-1 \ 2 \ 1]$  e as condições iniciais de velocidade nulas  $\dot{q}^T(0) = [0 \ 0 \ 0]$ , o vetor de estado, equação (3.2), capítulo III, é dado por  $x^T(0) = [-1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ .

Utilizando-se a base modal, equação (3.10), as condições iniciais uni-modais, são obtidas de:  $\xi(0) = \Psi^{-1}x(0)$ , onde  $\xi^T(0) = [\eta_1(0) \ \eta_2(0) \ \eta_3(0) \ \eta_1^*(0) \ \eta_2^*(0) \ \eta_3^*(0)]$ , sendo  $\Psi^{-1}$  a inversa da matriz modal  $\Psi$  (6x6) dada pela equação (6.5). A partir destas condições obtém-se as constantes "η<sub>r</sub>(0)φ<sub>r3</sub>", tendo-se para pequenos amortecimentos a tabela:

		cond. iniciais $\eta_r(0)$		constantes $\eta_r(0)\phi_{r3}$	
		p. real	p. imaginária	p. real	p. imaginária
1o modo	→	8,4903	-8,4617	$5,57 \times 10^{-1}$	$9,69 \times 10^{-4}$
2o modo	→	-6,5243	-6,4559	$6,22 \times 10^{-2}$	$9,64 \times 10^{-4}$
3o modo	→	-1,8298	-1,7949	$-1,19 \times 10^{-1}$	$-1,12 \times 10^{-3}$

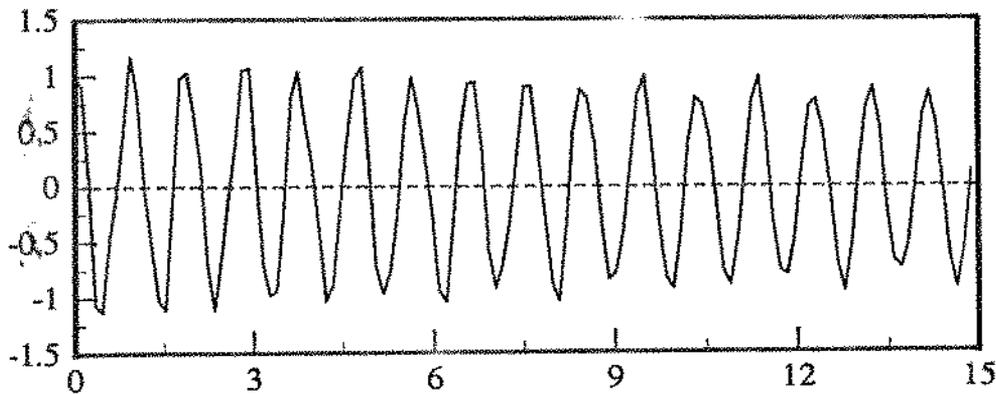
Tab. 6.5 Condições iniciais e constantes  $[\eta_r(0)\phi_{r3}]$

#### b. Gráficos da resposta livre

Utilizando-se os parâmetros de processamento, tabela (6.4), as constantes da tabela (6.5) e os autovalores da tabela (6.2),

determina-se a resposta livre da massa  $m_3$  no tempo, figura 6.2, com  $Q_1(k)=0$ . Esta resposta foi calculada só para pequenos amortecimentos, sendo apresentada também no domínio da freqüência, figura 6.3. Neste caso o eixo das ordenadas esta representado em escala logarítmica.

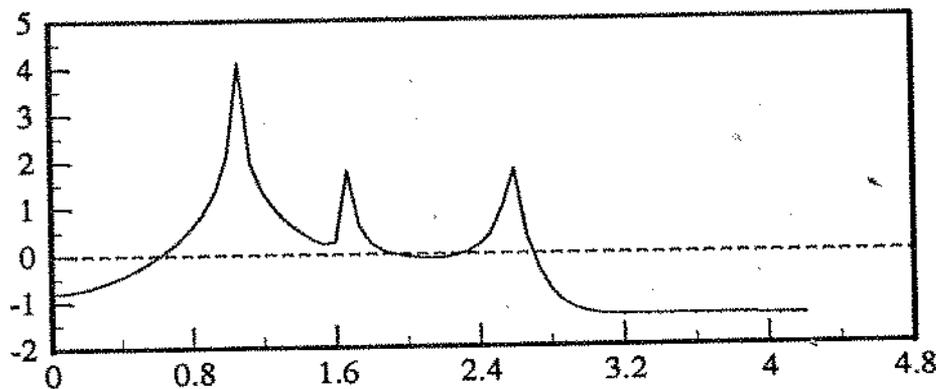
$q_{h3}(k)$



$k\Delta t$

Fig. 6.2 Resposta livre da massa " $m_3$ " no tempo

$\overline{q_{h3}}(z_k)$



$k\Delta f$

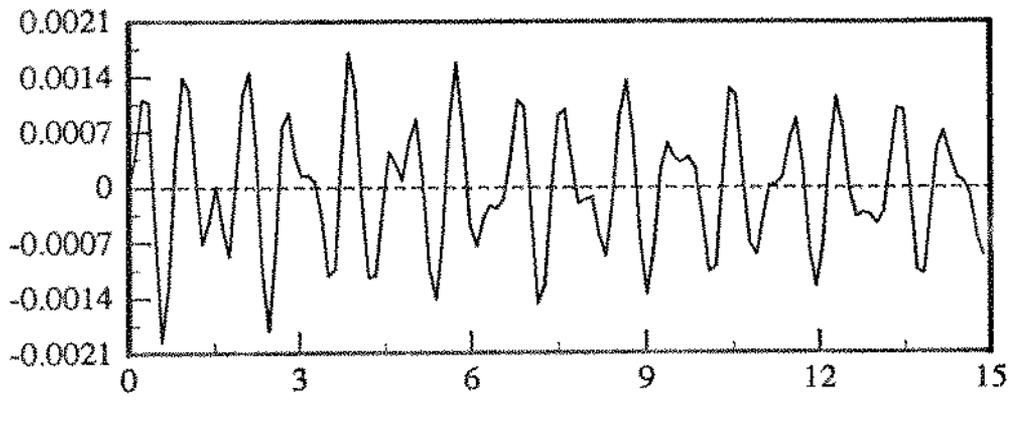
Fig. 6.3 Resposta livre da massa " $m_3$ " na freqüência

### 6.3.3 A RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO

Utilizando-se os parâmetros dados na tabela 6.4, os resíduos, da tabela 6.3 e os autovalores da tabela 6.2, determina-se a resposta

ao impulso unitário " $h_{31}(k)$ ", equação (6.6) com  $i=3$ ,  $j=1$ , da massa  $m_3$ . Esta resposta no tempo, para pequenos e grandes amortecimentos é apresentada nas figuras 6.4 e 6.5.

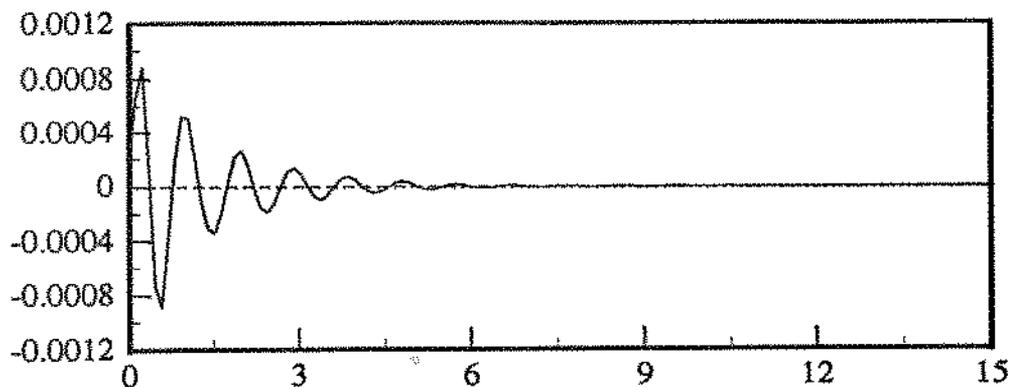
$h_{31}(k)$



$k\Delta t$

Fig 6.4 Resposta ao impulso unitário da massa " $m_3$ "  
(tempo - pequenos amortecimentos)

$h_{31}(k)$



$k\Delta t$

Fig. 6.5 Resposta ao impulso unitário da massa " $m_3$ "  
(tempo - grandes amortecimentos)

#### 6.3.4 A RESPOSTA À UMA FORÇA ALEATÓRIA (RUÍDO BRANCO-SISTEMA INICIALMENTE EM REPOUSO)

Neste caso considera-se como excitação da primeira massa do sistema da figura 6.1, " $Q_1(k)$ ", um ruído com distribuição normal, variância unitária e média zero. Os parâmetros para o processamento são dados pela tabela 6.4 e devido ao alto valor das rigidezes, tabela 6.1, considera-se um fator multiplicativo que

aumenta a amplitude da força aleatória de entrada. Esta força é apresentada na figura 6.6 :

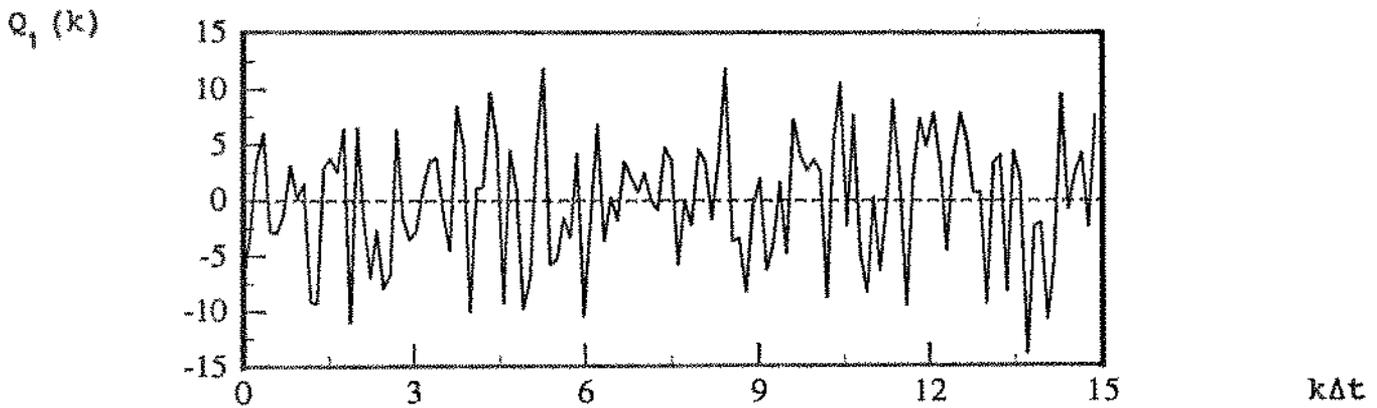


Fig. 6.6 Força aleatória no tempo, atuando na massa  $m_1$

A resposta forçada, sendo as condições iniciais do sistema nulas, é obtida na terceira massa do sistema, através da sua solução particular dada pela equação (6.6),  $q_{p3}(k) = h_{31}(k) * Q_1(k)$ . Neste caso tem-se esquematicamente:

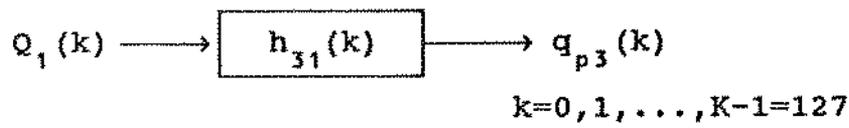


Fig. 6.7 Resposta da massa " $m_3$ " de um sistema inicialmente em repouso, excitado por uma força aleatória na massa " $m_1$ ".

Utilizando-se as respostas ao impulso unitário dadas pelas figuras 6.4 e 6.5 e fazendo-se a convolução discreta, equação (5.7) capítulo V, destas respostas com a força aleatória dada na figura 6.6, tem-se as respostas forçadas representadas nas figuras 6.8 e 6.9.

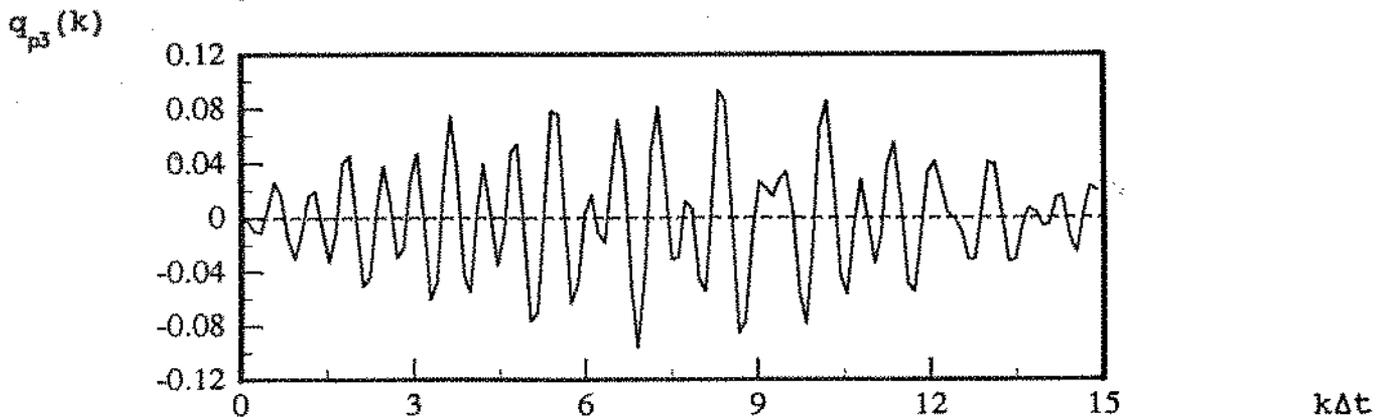


Fig. 6.8 Resposta forçada no tempo da massa " $m_3$ "  
(força aleatória - pequenos amort.)

e para grandes amortecimentos :

$$q_{p3}(k)$$

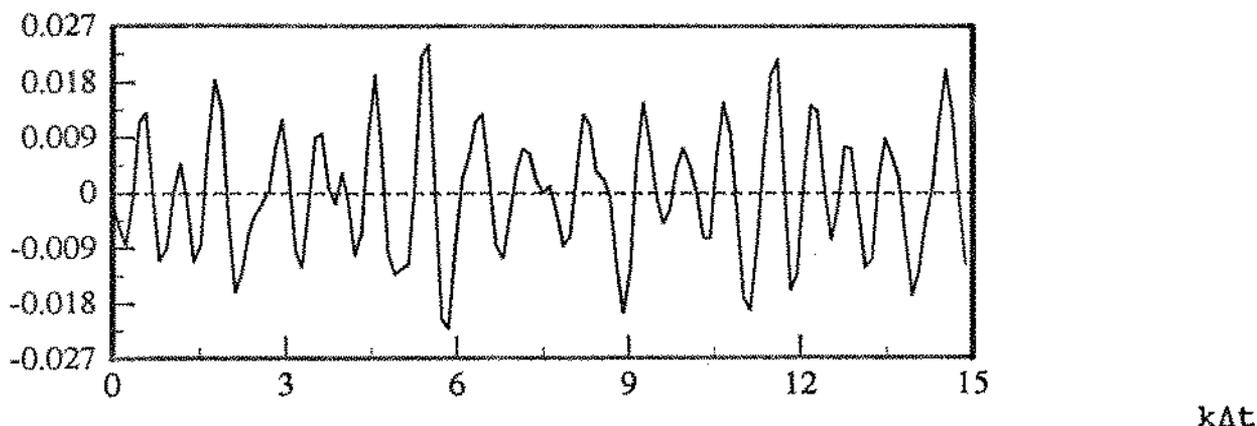


Fig.6.9 Resposta forçada no tempo da massa "m<sub>3</sub>"  
(força aleatória - grandes amort.)

As respostas forçadas acima são representativas de sinais de energia infinita, fazendo-se a autocorrelação do sinal da figura 6.9 e utilizando-se a FFT para transformá-lo para freqüência, obtém-se a sua função densidade espectral de potência, figura 6.10.

$$S_{qq_{p31}}(z_k)$$

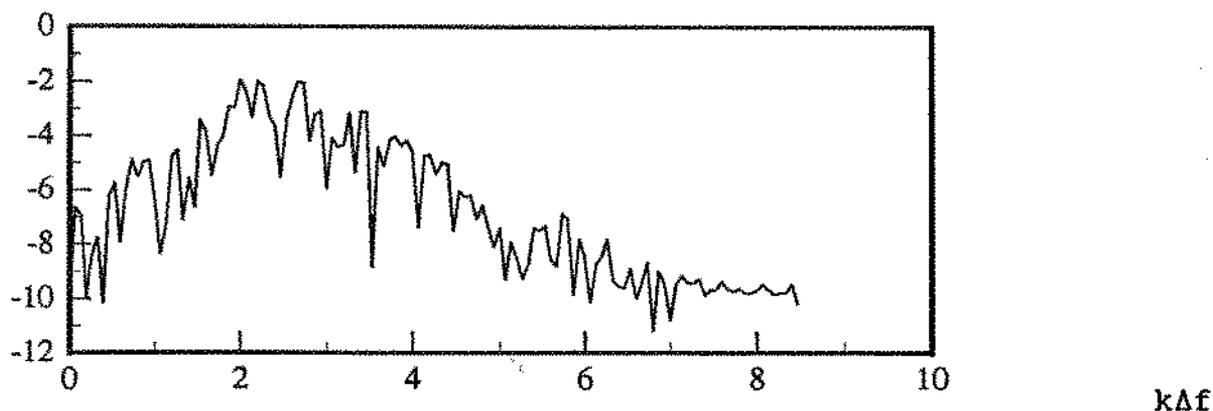


Fig. 6.10 Função Densidade Espectral de Potência da resposta da massa "m<sub>3</sub>".(força aleatória-grandes amort.)

Através da figura 6.10, observa-se que o sinal de saída do sistema apresenta um espectro que deve conter as freqüências naturais, o mesmo ocorrendo para pequenos amortecimentos. Fazendo-se a média

sobre estas funções densidades obtém-se um espectro onde as frequências naturais se evidenciam.

### 6.3.5 A RESPOSTA GERAL SENDO A FORÇA DE EXCITAÇÃO ALEATÓRIA

Devido ao princípio da superposição, a resposta geral do modelo modal é obtida pela soma da resposta livre do sistema " $q_{h3}(k)$ " mais a sua resposta forçada " $q_{p31}(k)$ ", equação (6.6). Somando-se a resposta livre da figura 6.2 com a resposta forçada da figura 6.8, onde considerou-se a resposta forçada com 25% de amplitude da resposta livre, tem-se para pequenos amortecimentos, figura 6.11, a resposta geral no tempo:

$q_3(k)$

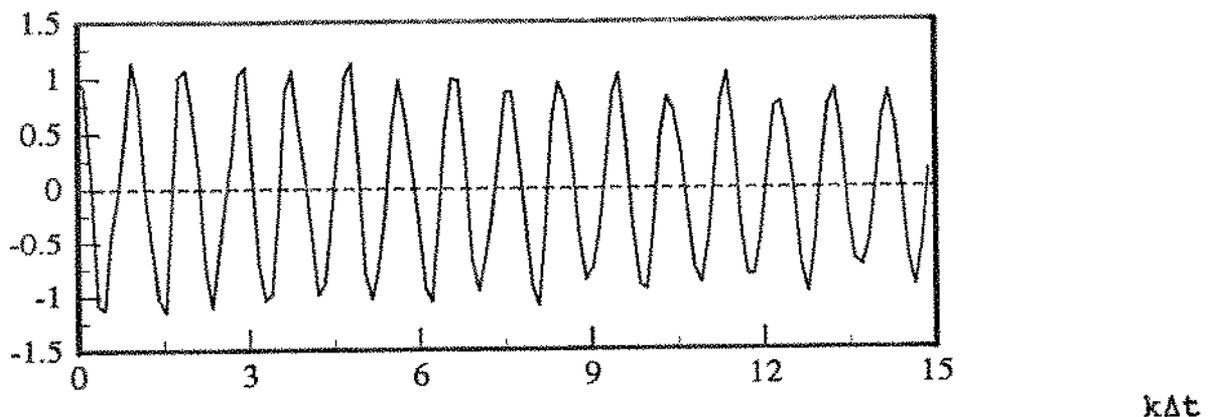


Fig. 6.11 Resposta geral no tempo da massa " $m_3$ "  
(força aleatória - pequenos amort.)

### 6.3.6 A RESPOSTA À UMA FORÇA IMPULSIVA (SISTEMA INICIALMENTE EM REPOUSO)

Nesta seção, sendo as condições iniciais do sistema nulas, excita-se a sua primeira massa por uma força impulsiva " $Q_1(k)$ " entre 0 e  $3\Delta t$ . Utiliza-se, para esta força, uma amplitude compatível com o alto valor das rigidezes do sistema, sendo apresentada no gráfico da figura 6.12.

$Q_1(k)$

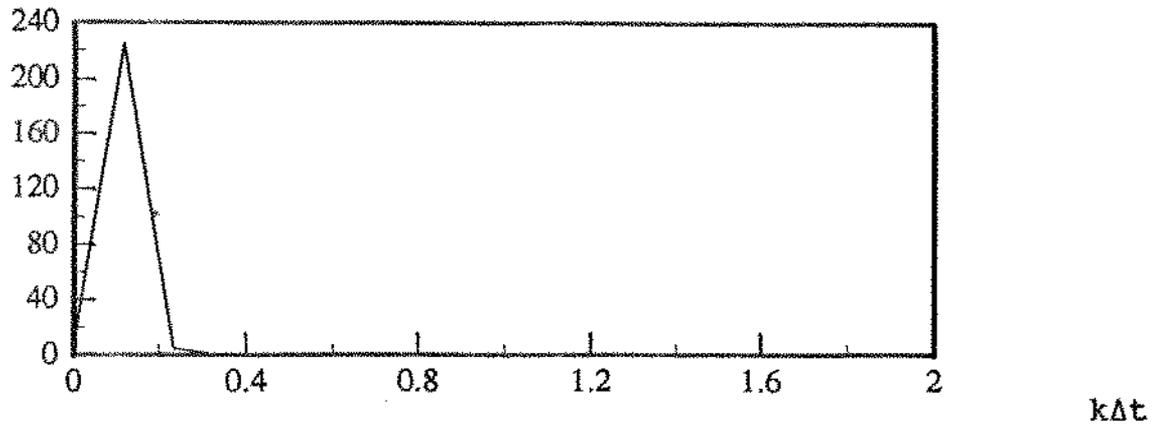


Fig. 6.12 Força impulsiva no tempo, atuando na massa  $m_1$

A figura 6.12 apresenta a força impulsiva com amplitude 225 em  $\Delta t$  e 5 em  $0\Delta t$  e  $2\Delta t$ , sendo nula a partir de  $3\Delta t$ , onde o intervalo de amostragem é dado na tabela 6.3. Para aumentar a resolução o gráfico apresenta esta força com  $1/8$  do seu valor no tempo,  $(T/8)=1,875$  seg. O gráfico desta força no domínio da frequência é apresentado na figura 6.13.

$\overline{Q}_1(z_k)$

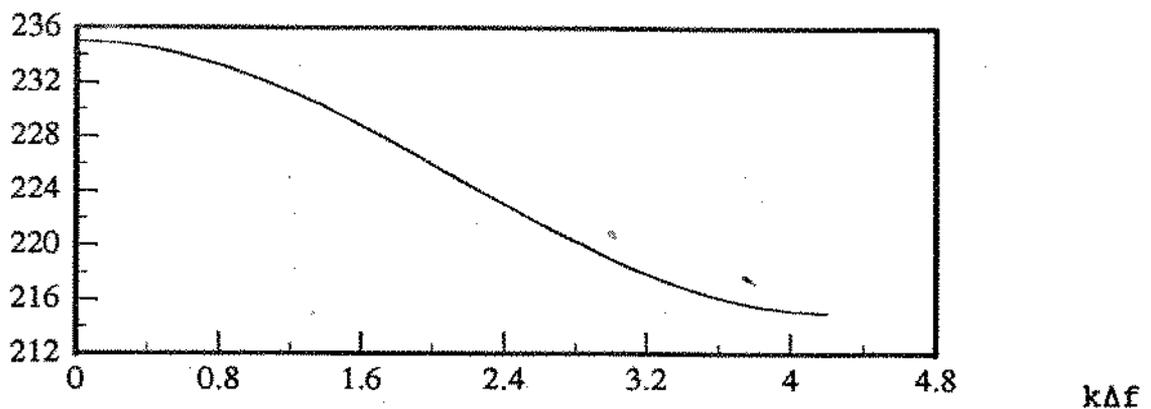


Fig. 6.13 Força impulsiva na frequência, atuando na massa " $m_1$ "

Procurou-se utilizar uma força impulsiva suficientemente larga no tempo, de forma a representar um situação física real, mas levando em conta a necessidade de excitação dos modos, cuja frequência mais alta é  $f_1=2,5901$  Hz para pequenos amortecimentos, ver tabela 6.3.

A resposta forçada é obtida na terceira massa do sistema, através da sua solução particular dada pela equação (6.6),  $q_{p3}(k) = h_{31}(k) * Q_1(k)$ . Esta situação é apresentada esquematicamente pela figura 6.7, onde agora " $Q(k)$ " é uma força impulsiva.

Utilizando-se a resposta ao impulso unitário dada para pequenos amortecimentos pela figura 6.4 e fazendo-se a convolução discreta, equação (5.7) capítulo V, desta resposta com a força impulsiva dada na figura 6.12, tem-se a resposta apresentada na figura 6.14.

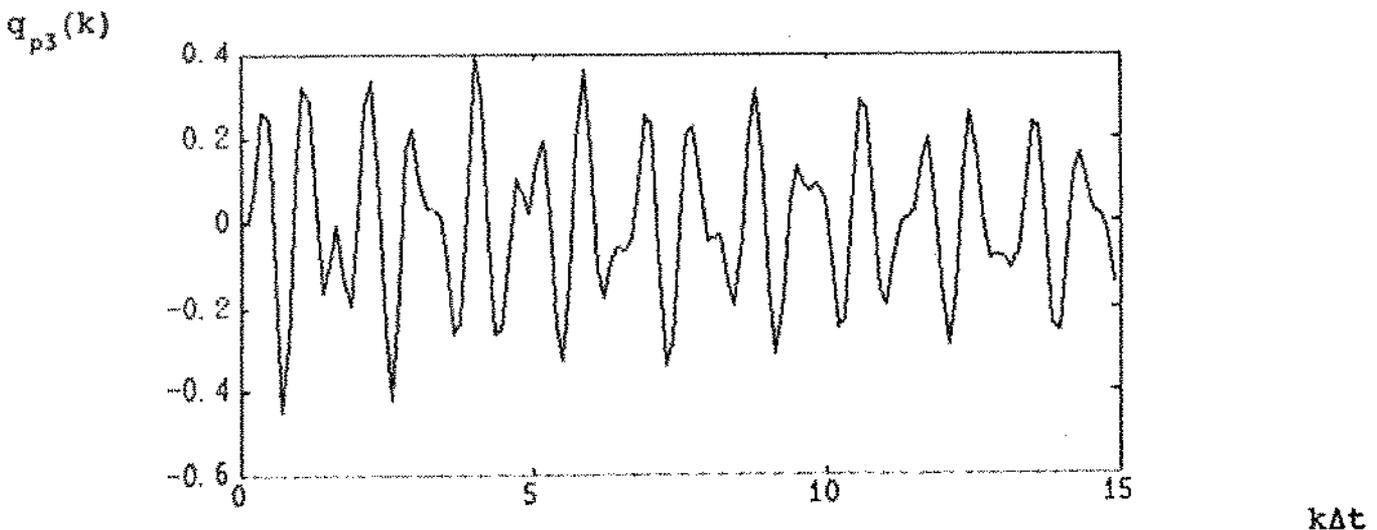


Fig. 6.14 Resposta forçada no tempo da massa " $m_3$ "  
(força impulsiva - pequenos amort.)

### 6.3.7 RESPOSTA A UMA FORÇA ALEATÓRIA COM TENDENCIA EM RELAÇÃO A SUA MÉDIA (SISTEMA INICIALMENTE EM REPOUSO).

Neste caso, consideram-se como excitação e resposta do sistema as mesmas apresentadas na seção 6.3.4, somando-se a sua saída um sinal que varia com o tempo " $f(k\Delta t)$ "  $k=0,1,\dots,K-1$ . Este sinal representa a simulação de um defeito na leitura da resposta do sistema. Aplicando-se o esquema ilustrado na figura 6.7 anterior, tem-se uma nova representação dos sinais dinâmicos através da figura 6.15.

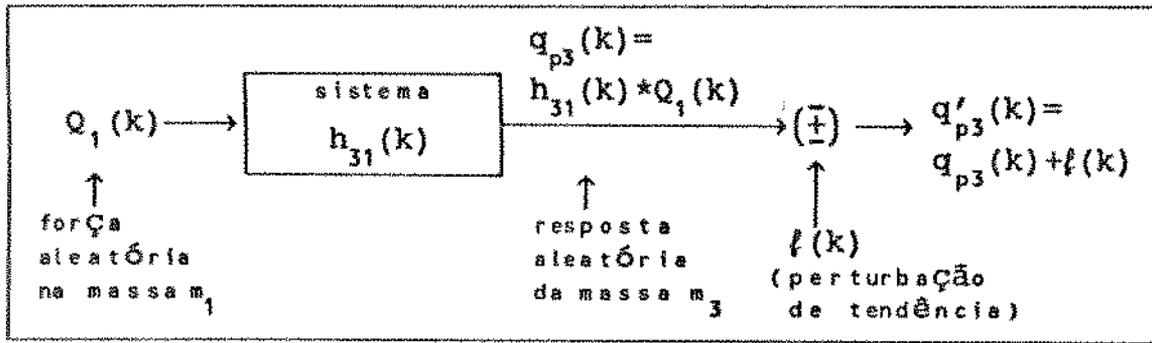


Fig. 6.15 Simulação de defeito na leitura da resposta da massa "m<sub>3</sub>" de um sistema excitado aleatoriamente na massa "m<sub>1</sub>".

Estatisticamente o sinal " $f(k)$ " pode ser considerado como o valor médio do processo não estacionário de saída do sistema. Na prática pode ser considerado como uma perturbação de tendência, como por exemplo o "drift" do amplificador utilizado para amplificar o sinal de saída. Assim, o amplificador tendo em sua entrada um sinal constante, produz em sua saída um sinal que varia com o tempo (neste caso a média do sinal).

Considerando a perturbação uma reta,  $f(k\Delta t) = ak\Delta t + b$   $k=0,1,2\dots,K-1$ , cuja constante e coeficiente angular são dados respectivamente por " $b=0$ " e " $a = \max[q_{p3}(k)/K-1]$ ", onde  $\Delta t$  é dado pela tabela 6.4 e somando-se esta reta a resposta para pequenos amortecimentos, figura 6.8, tem-se o gráfico representado pela figura 6.16.

$q'_{p3}(k)$

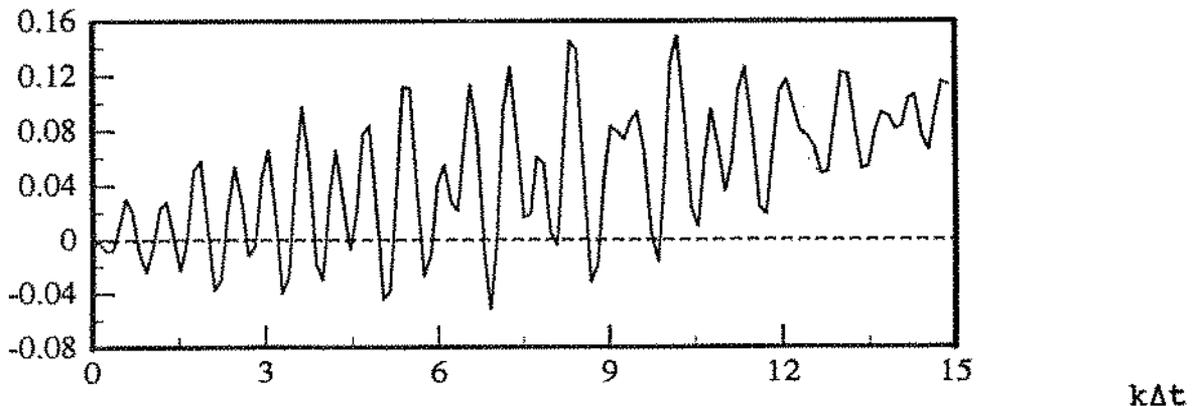


Fig. 6.16 Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k) = k$ " (pequenos amortecimentos)

Considerando grandes amortecimentos, onde soma-se à perturbação anterior a resposta da figura 6.9, tem-se o gráfico da figura 6.17.

$q'_{p3}(k)$

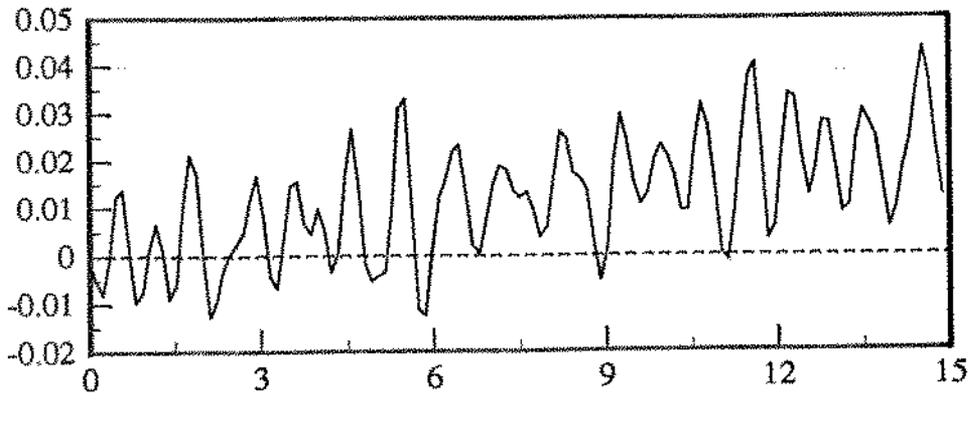


Fig. 6.17 Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=k$ " (grandes amortecimentos)

Sendo agora a perturbação representada por  $f(k\Delta t)=(e^{k\Delta t}-1)$ , onde  $e^{k\Delta t}$  é dada pelos três primeiros termos da sua representação pela série de Taylor, isto é,  $f(k\Delta t)=k\Delta t + (k\Delta t)^2/4$   $k=0,1,\dots,K-1$ , tem-se para pequenos amortecimentos o gráfico da figura 6.18

$q'_{p3}(k)$

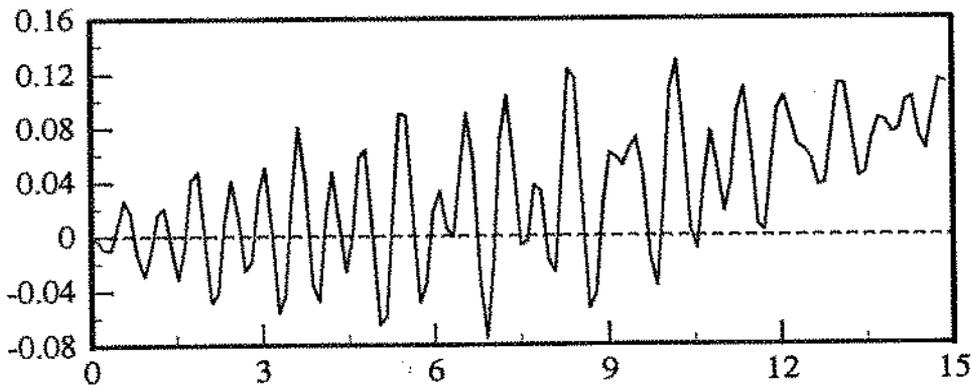


Fig. 6.18 Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=k + k^2/4$ " (pequenos amortecimentos)

Sendo a perturbação a mesma da figura 6.17 e considerando-se grandes amortecimentos, tem-se o gráfico da figura 6.19.

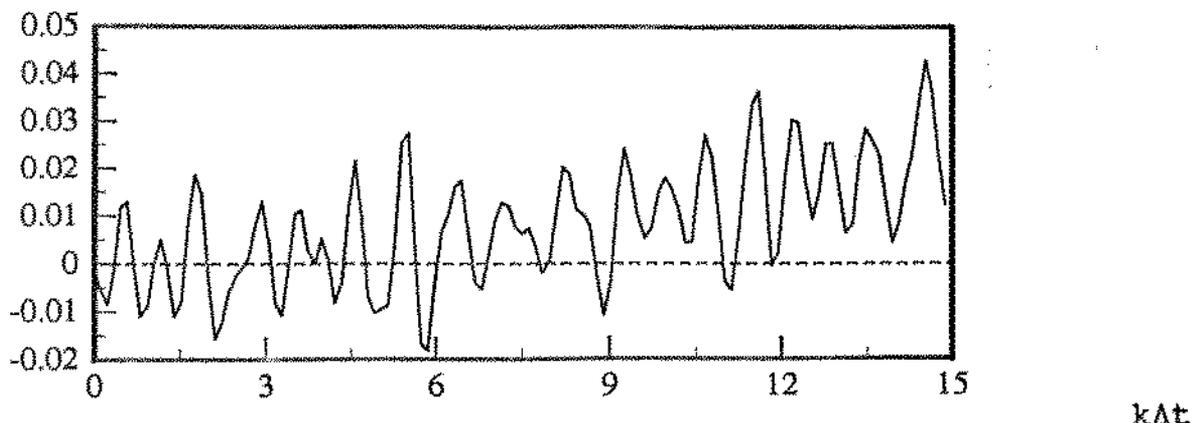
$q'_{p3}(k)$ 

Fig. 6.19 Resposta somada a uma perturbação do tipo " $f(k)=k + k^2/4$  (grandes amortecimentos)

Os diversos sinais no tempo apresentados nesta e nas seções anteriores, servem para a obtenção dos parâmetros modais do sistema dinâmico. Dependendo dos sinais de excitação e respostas considerados, pode-se utilizar um ou outro método de identificação, descrito no capítulos V.

A escolha dos sinais e seus métodos associados levam a identificação, das frequências naturais, fatores de amortecimento, e resíduos do sistema. A seguir estes métodos serão utilizados sobre estes sinais, sendo os parâmetros modais identificados.

#### 6.4. IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS ARMA E ARIMA

Estes modelos representam o sistema em regime permanente e só trabalham com a sua resposta forçada. Considerando-se modelos probabilísticos como o ARMA e o ARIMA, a força de excitação será aleatória, figura 6.6, sendo os parâmetros modais identificados através desta força e das respostas do sistema.

Ambos os algoritmos, ARMA e ARIMA utilizam as técnicas de super-dimensionamento, pseudo-inversa e de verificação através do resto, apresentadas na seção 5.5.

#### 6.4.1 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DO MODELO ESTACIONÁRIO ARMA

O algoritmo ARMA, seção 5.4.2, utiliza as respostas apresentadas nas figuras 6.8 e 6.9 e calcula inicialmente os parâmetros ARMA através da equação (5.45).

A ordem super-dimensionada foi considerada  $n_s=8$ , sendo o número de linhas extras da matriz "H" em (5.45) igual a "90 linhas" para pequenos amortecimentos e igual a "8 linhas" para grandes amortecimentos. Em ambos os casos calcularam-se 32 parâmetros ARMA, através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), aplicada à matriz "H" de dimensão (122x32) para pequenos amortecimentos e (40x32) para grandes amortecimentos.

Em ambos os casos os autovalores foram obtidos através da equação (5.14), onde utilizou-se as raízes do polinômio do denominador da equação (5.39) com  $n=n_0=16$ . Os coeficientes do polinômio são os "16" parâmetros "AR" já obtidos. Considerando uma nova ordem super-dimensionada  $n_s=6$  e utilizando a técnica de verificação através do resto, equação (5.52), identificou-se os polos verdadeiros do sistema para pequenos e grandes amortecimentos, como indicado na tabela abaixo:

pequenos amortecimentos		grandes amortecimentos	
restos $[\epsilon_r]$	autovalores	restos $[\epsilon_r]$	autovalores
2,3769	-1,0089-j 4,0637	3,6376	-0,2205-j 1,5796
→ 0,0001	-0,0197-j 6,6525 ← 1o modo	→ 0,0195	-0,6957-j 6,6220 ←
→ 0,0001	-0,0495-j 10,5289 ← 2o modo	→ 0,0473	-2,4212-j 9,9477 ←
0,8325	-1,1198-j 13,1225	0,2534	-1,5434-j 11,5950
→ 0,0012	-0,1302-j 16,2765 ← 3o modo	→ 0,0654	-3,3115-j 15,2029 ←
0,8050	-0,8792-j 20,2324	1,5768	-0,3598-j 21,8977
0,9647	-0,4497-j 23,9733	2,3532	-0,2881-j 24,7982

Tab. 6.6 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Algoritmo ARMA)

Comparando-se os autovalores da tabela 6.6 com os da tabela 6.2, tem-se:

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
a.v.símu.	a.v.ident.	erro(%)	a.v.símu.	a.v.ident.	erro(%)
p.real	p.real	p.real	p.real	p.real	p.real
-0,01963	-0,01968	0,27917	-0,70256	-0,69569	-0,97840
-0,04962	-0,04955	-0,01486	-2,56339	-2,42122	-5,54623
-0,13075	-0,13022	-0,40652	-3,73405	-3,31155	-11,31155
p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.
-6,65328	-6,65245	-0,01239	-6,63018	-6,62203	-0,12286
-10,53004	-10,52889	-0,01086	-10,21553	-9,94771	-2,62169
-16,27366	-16,27653	0,01763	-15,80162	-15,20291	-3,78893

Tab. 6.7 Comparação entre os autovalores simulados e identificados (algoritmo ARMA)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.7 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros com os parâmetros simulados, tabela 6.3.

pequenos amortecimentos						
	freq.símu.	freq.ident.	erro(%)	fat.símu.	fat.ident.	erro(%)
1 <sup>o</sup>	→ 1,05891	1,05878	-0,01239	0,002950	0,002959	0,29160
2 <sup>o</sup>	→ 1,67593	1,67574	-0,01086	0,004712	0,004706	-0,13782
3 <sup>o</sup>	→ 2,59012	2,59057	0,01761	0,008034	0,008000	-0,42405
grandes amortecimentos						
	freq.símu.	freq.ident.	erro(%)	fat.símu.	fat.ident.	erro(%)
1 <sup>o</sup>	→ 1,06113	1,05973	-0,13232	0,10537	0,10448	-0,84720
2 <sup>o</sup>	→ 1,67626	1,62945	-2,79247	0,24339	0,23649	-2,83286
3 <sup>o</sup>	→ 2,58417	2,47636	-4,17216	0,22997	0,21283	-7,45362

Tab. 6.8 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados (algoritmo ARMA).

Os resíduos, analogamente ao algoritmo da resposta impulsiva, são calculados através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50). Neste caso a matriz da força impulsiva é substituída pela matriz da força aleatória (figura 6.6), que tanto para pequenos como para grandes amortecimentos, tem dimensão (80x80).

Além da força aleatória, o cálculo dos resíduos necessita das raízes correspondentes aos autovalores verdadeiros e os vetores de resposta de dimensão (80x1), figuras 6.8 e 6.9. Na tabela abaixo comparam-se os resíduos identificados com os simulados, tabela 6.3.

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
r. simu.	r. ident.	erro(%)	r. simu.	r. ident.	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
$-3,0894 \times 10^{-6}$	$-2,7829 \times 10^{-6}$	-9,9176	$1,5124 \times 10^{-4}$	$1,5648 \times 10^{-4}$	3,4622
$4,6519 \times 10^{-6}$	$4,6164 \times 10^{-6}$	-0,7618	$-2,8946 \times 10^{-4}$	$-3,3626 \times 10^{-4}$	16,1716
$-1,5625 \times 10^{-6}$	$-1,8332 \times 10^{-6}$	17,3257	$1,3822 \times 10^{-4}$	$1,7895 \times 10^{-4}$	29,4744
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
$5,1141 \times 10^{-4}$	$5,1142 \times 10^{-4}$	0,0045	$5,5442 \times 10^{-4}$	$5,4128 \times 10^{-4}$	-2,3689
$-4,6292 \times 10^{-4}$	$-4,6289 \times 10^{-4}$	-0,0063	$-5,1539 \times 10^{-4}$	$-4,3789 \times 10^{-4}$	-15,0361
$9,0453 \times 10^{-5}$	$9,0509 \times 10^{-5}$	0,0626	$9,2996 \times 10^{-5}$	$5,1875 \times 10^{-5}$	-44,2188

Tab. 6.9 Comparação entre os resíduos simulados e identificados (algoritmo ARMA)

Desconsiderando o número de linhas extras, a matriz "H" na equação (5.45), apresenta-se quadrada de dimensão ( $4n_s \times 4n_s$ ),  $n_s=8$ , sendo a ordem auto-regressiva e média móvel iguais,  $n_q=n_p=16$ . Neste caso o "resto" utilizado pela técnica de verificação, seção 5.5.3, apresenta-se em geral grande, não identificando precisamente os modos verdadeiros. Deve-se, então, utilizar as linhas extras, para melhorar a identificação através dos restos. Quanto maior o número de linhas menor o resto e melhor a identificação. Isto pode ser visto para pequenos amortecimentos na tabela 6.6. Nesta tabela também observa-se que os restos obtidos para grandes amortecimentos apresentam-se maiores, devido ao menor número de linhas extras utilizadas. Neste caso, apesar de prejudicar o resto, isto foi necessário porque um número maior de linhas da matriz torna mais imprecisa a identificação dos amortecimentos.

Sendo a resposta do sistema um processo não estacionário, diferencia-se inicialmente esta resposta, utilizando-se a seguir o algoritmo ARMA. Isto será visto na seção seguinte.

## 6.4.2 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DO MODELO NÃO ESTACIONÁRIO ARIMA

### a. Resposta não estacionária de primeira ordem

Neste caso o algoritmo ARIMA, seção 5.4.3, utiliza as respostas apresentadas nas figuras 6.16 e 6.17 e calcula inicialmente os parâmetros ARMA através da equação (5.48). A matriz "H", no lugar da resposta do sistema, inclui esta resposta diferenciada uma vez. Nas figuras 6.20 e 6.21 apresentam-se as superposições destas respostas diferenciadas com as respostas originais do sistema, figuras 6.8 e 6.9, para pequenos e grandes amortecimentos.

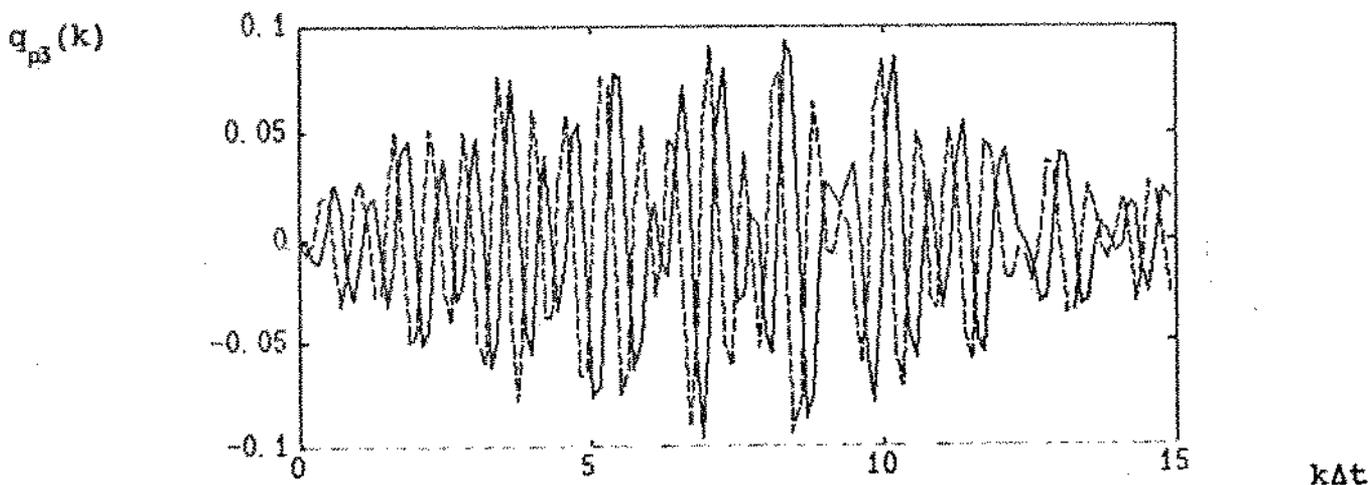


Fig. 6.20 Resposta original(—) e resposta diferenciada(---)  
(pequenos amortecimentos-uma diferenciação)

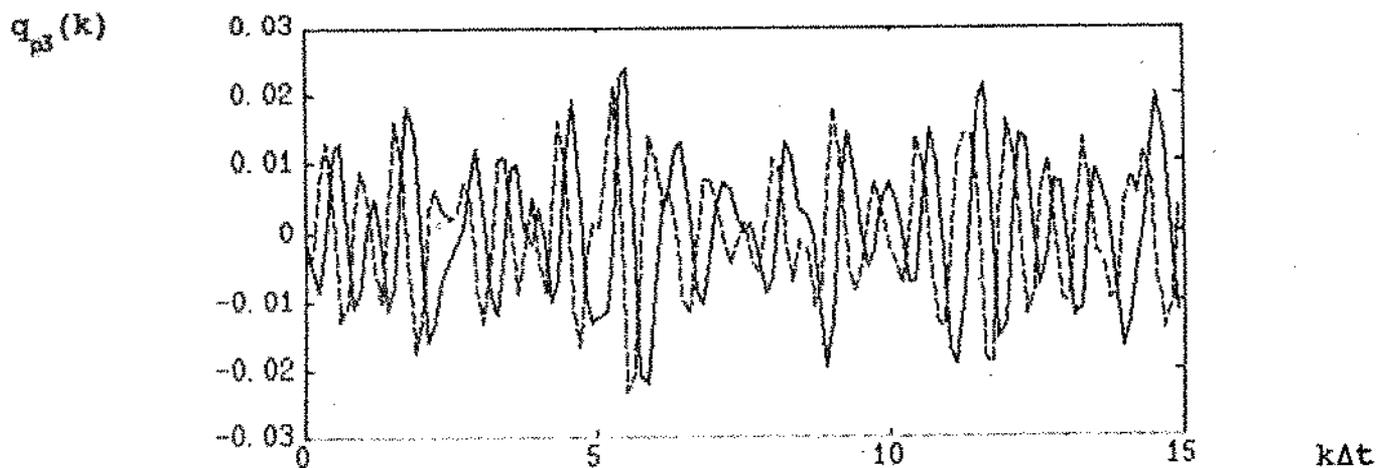


Fig. 6.21 Resposta original(—) e resposta diferenciada (---)  
(grandes amortecimentos-uma diferenciação)

Para pequenos e grandes amortecimentos considerou-se, respectivamente, a ordem super-dimensionada  $n_s=8$  e  $n_s=14$ , sendo o número de linhas extras da matriz "H" em (5.48) igual a "90 linhas" e "20 linhas". Calculou-se, então, para um e outro caso, 32 e 56 parâmetros ARMA, através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), aplicada à matriz "H" de dimensões (122x32) e (76x56).

Em ambos os casos os autovalores foram obtidos através da equação (5.14), onde utilizou-se as raízes do polinômio do denominador da equação (5.39) com  $n=Nq=16$  e  $n=Nq=28$ . Os coeficientes do polinômio são os 16 ou 28 parâmetros "AR" já obtidos. Considerando uma nova ordem super-dimensionada, ( $n_s=6$  para pequenos amortecimentos,  $n_s=12$  para grandes amortecimentos), e utilizando-se da técnica de verificação através do resto, equação (5.52), identificou-se os polos verdadeiros, conforme indicado na tabela abaixo:

pequenos amortecimentos		grandes amortecimentos	
restos [ $\epsilon_r$ ]	autovalores	restos [ $\epsilon_r$ ]	autovalores
4,8023	-0,4439-j 3,1891		
→ 0,0006	-0,0199-j 6,6528 ← 1o modo	→ 0,0270	-0,6803-j 6,6276 ←
→ 0,0001	-0,0497-j10,5288 ← 2o modo	→ 0,1061	-2,6390-j10,0894 ←
1,0757	-2,3054-j15,1585 3o modo	→ 0,0968	-4,1348-j15,8342 ←
→ 0,0030	-0,1333-j16,2788 ← 3o modo	2,3344	-0,4185-j16,7738
0,9740	-0,2404-j22,2346	1,2190	-0,4515-j22,0943
1,2964	-0,5511-j24,3793		

Tab. 6.10 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)

Comparando-se estes autovalores identificados com os simulados, tabela 6.2, tem-se:

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
a.v.simu.	a.v.ident.	erro(%)	a.v.simu.	a.v.ident.	erro(%)
p.real	p.real	p.real	p.real	p.real	p.real
-0,01963	-0,01987	1,24600	-0,70256	-0,68030	-3,16761
-0,04962	-0,04967	0,08800	-2,56339	-2,63902	2,95015
-0,13075	-0,13333	1,97225	-3,73405	-4,13476	-10,73129
p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.
- 6,65328	-6,65282	-0,00686	- 6,63018	-6,62762	-0,03862
-10,53004	-10,52877	-0,01198	-10,21553	-10,08941	-1,23459
-16,27366	-16,27880	0,03156	-15,80162	-15,83420	0,20616

Tab. 6.11 Comparação entre os autovalores simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.11 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros com os parâmetros simulados, tabela 6.3.

pequenos amortecimentos						
	freq.simu.	freq.ident.	erro(%)	fat.simu.	fat.ident.	erro(%)
1o →	1,05891	1,05883	-0,00685	0,002950	0,002987	1,25293
2o →	1,67593	1,67573	-0,01198	0,004712	0,004717	0,09999
3o →	2,59012	2,59094	0,03169	0,008034	0,008190	1,93995
grandes amortecimentos						
	freq.simu.	freq.ident.	erro(%)	fat.simu.	at.ident.	erro(%)
1o →	1,06113	1,06036	-0,07282	0,10537	0,10211	-3,09704
2o →	1,67626	1,65980	-0,98177	0,24339	0,25305	3,97091
3o →	2,58417	2,60459	-0,79035	0,22997	0,25266	9,86299

Tab. 6.12 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)

Da mesma forma que no algoritmo ARMA, os resíduos são calculados através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), sendo a matriz da força aleatória composta pelo ruído da figura 6.6. Esta matriz tem dimensão (80x80), para pequenos e grandes amortecimentos. Para o cálculo dos resíduos necessita-se ainda das raízes correspondentes aos autovalores verdadeiros e os vetores de resposta diferenciados de dimensão (80x1), figuras 6.20 e 6.21. Na tabela abaixo comparam-se os

resíduos identificados com os simulados da tabela 6.3.

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
r. simu.	r. ident.	erro(%)	r. simu.	r. ident.	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
$-3,0894 \times 10^{-6}$	$3,6030 \times 10^{-4}$	$-1,7 \times 10^4$	$1,5124 \times 10^{-4}$	$3,0051 \times 10^{-4}$	98,70
$4,6519 \times 10^{-6}$	$-4,3750 \times 10^{-4}$	$-9,5 \times 10^3$	$-2,8946 \times 10^{-4}$	$-6,6512 \times 10^{-5}$	-77,40
$-1,5625 \times 10^{-6}$	$8,4890 \times 10^{-5}$	$-5,5 \times 10^3$	$1,3822 \times 10^{-4}$	$-9,3006 \times 10^{-5}$	-167,29
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
$5,1141 \times 10^{-4}$	$-1,4616 \times 10^{-4}$	-128,57	$5,5442 \times 10^{-4}$	$-2,7626 \times 10^{-4}$	-149,83
$-4,6292 \times 10^{-4}$	$3,0673 \times 10^{-4}$	-166,26	$-5,1539 \times 10^{-4}$	$5,9208 \times 10^{-4}$	-214,88
$9,0453 \times 10^{-5}$	$-1,1823 \times 10^{-4}$	-230,70	$9,2996 \times 10^{-5}$	$-2,5964 \times 10^{-4}$	-379,98

Tab. 6.13 Comparação entre os resíduos simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-uma diferenciação)

Para as frequências e fatores de amortecimento, os resultados acima apresentam-se muito precisos, mas os resíduos não foram identificados, como pode-se ver na tabela 6.13. Isto significa que o processo de diferenciação da resposta, que retira a sua tendência, prejudicou esta identificação. Testes demonstraram que o aumento do número de linhas extras da matriz "H" da equação (5.48) e o aumento da ordem da matriz da força aleatória, melhoram a identificação dos resíduos. Assim, sugere-se o aumento do número de pontos da força aleatória e da resposta do sistema e a diminuição do intervalo de amostragem no tempo (o processo de diferenciação trabalha como este intervalo), com o objetivo de identifica-los.

#### b. Resposta não estacionária de segunda ordem

Neste caso o algoritmo ARIMA, seção 5.4.3, utiliza as respostas apresentadas nas figuras 6.18 e 6.19 e calcula inicialmente os parâmetros ARMA através da equação (5.48). Analogamente ao caso "a" apresentado, a matriz "H" inclui a resposta diferenciada do sistema, só que neste caso, diferenciada duas vezes. Abaixo apresentam-se as superposições destas respostas diferenciadas com as respostas originais do sistema, figuras 6.8 e 6.9. Em relação ao caso "a", as respostas apresentam-se mais deslocadas para a esquerda. Tanto neste caso, como no caso anterior, a resposta diferenciada não foi dividida

pelo intervalo de amostragem.

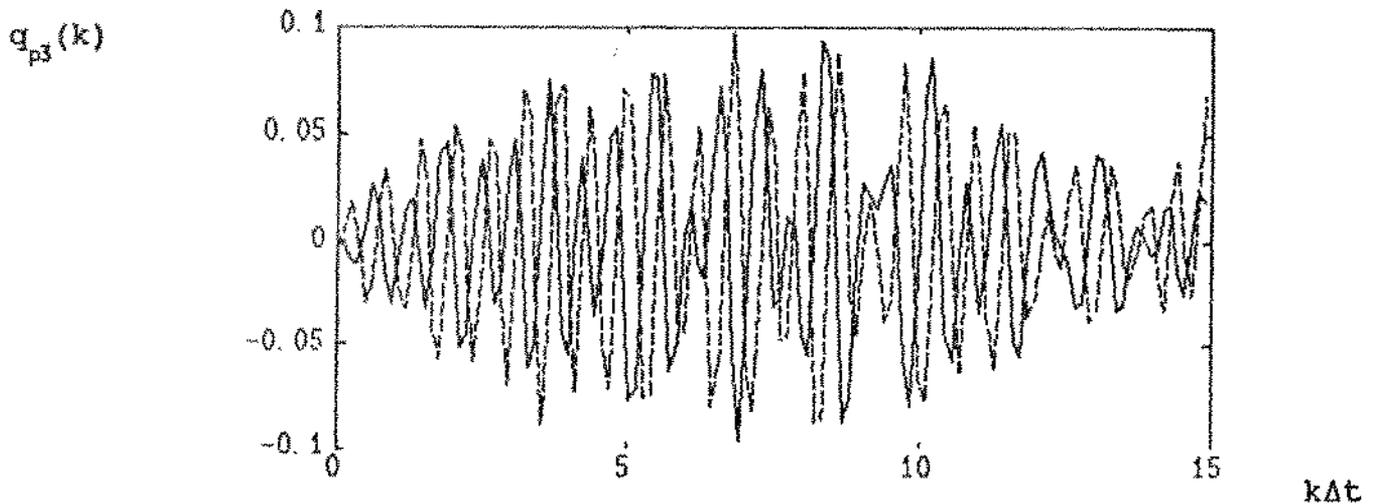


Fig. 6.22 Resposta original(—) e resposta diferenciada(---) (pequenos amortecimentos-duas diferenciações)

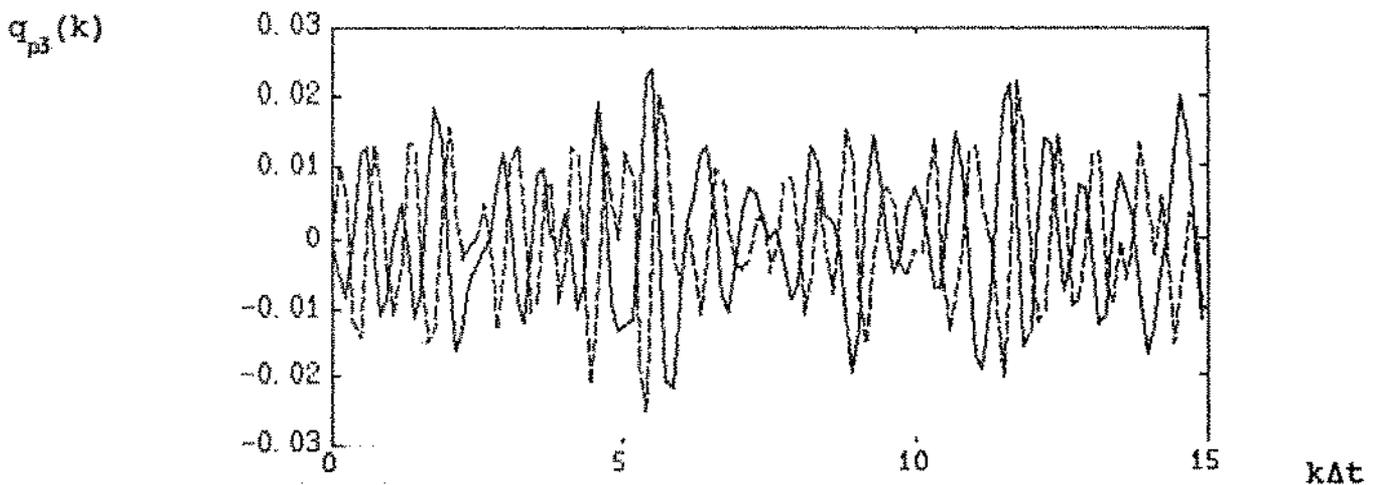


Fig. 6.23 Resposta original(—) e resposta diferenciada (---) (grandes amortecimentos-duas diferenciações)

Para pequenos e grandes amortecimentos considerou-se, respectivamente, a ordem super-dimensionada  $n_s=10$  e  $n_s=12$ , sendo o número de linhas extras da matriz "H" em (5.48) igual a "70 linhas" e "40 linhas". Calculou-se, então, para um e outro caso, 40 e 48 parâmetros ARMA, através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), aplicada à matriz "H" de dimensões (110x40) e (88x48).

Em ambos os casos os autovalores foram obtidos através da equação (5.14), onde utilizou-se as raízes do polinômio do denominador da equação (5.39) com  $n=n_0=20$  e  $n=n_0=24$ . Da mesma forma que no caso "a", os coeficientes do polinômio são os 20 ou 24 parâmetros "AR" já

obtidos. Considerando uma nova ordem super-dimensionada, ( $n_s=8$  para pequenos amortecimentos,  $n_s=10$  para grandes amortecimentos), e utilizando-se da técnica de verificação através do resto, equação (5.52), identificou-se os polos verdadeiros, como indicado na tabela abaixo:

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
restos [ $\epsilon_r$ ]	autovalores		restos [ $\epsilon_r$ ]	autovalores	
			3,6884	-0,1331-j	2,6561
2,8035	-0,7105-j	3,9264	0,4872	-0,6722-j	6,1941
→ 0,0052	-0,0192-j	6,6527 ← 1o modo	→ 0,0610	-0,6445-j	6,6619 ←
→ 0,0013	-0,0500-j	10,5294 ← 2o modo	→ 0,0711	-2,1113-j	10,6394 ←
1,2706	-0,7974-j	12,2104	0,3997	-0,3013-j	11,6976
0,5229	-8,8387-j	12,6033	3o modo → 0,1518	-1,9853-j	13,7287 ←
→ 0,1100	-0,0960-j	16,2231 ← 3o modo	0,8425	-0,7829-j	16,1580
3,1513	-0,3317-j	18,1014	0,7409	-0,4330-j	18,2202
4,8821	-0,0102+j	24,9005	1,4196	-0,9592-j	21,8154
			1,9264	-1,5207-j	22,3284
			3,8392	-0,6361-j	25,3109

Tab. 6.14 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Algoritmo ARIMA-duas diferenciações)

Comparando-se os autovalores identificados (verdadeiros), com os simulados, tabela 6.2, tem-se:

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
a.v. simu.	a.v. ident.	erro(%)	a.v. simu.	a.v. ident.	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
-0,01963	-0,01918	-2,27914	-0,70256	-0,64447	-8,26797
-0,04962	-0,05003	0,82799	-2,56339	-2,11129	-17,63655
-0,13075	-0,09603	-26,55293	-3,73405	-1,98530	-46,83245
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
-6,65328	-6,65273	-0,00814	-6,63018	-6,66187	0,47790
-10,53004	-10,52936	-0,00638	-10,21553	-10,63936	4,14889
-16,27366	-16,22306	-0,31096	-15,80162	-13,72874	-13,11817

Tab. 6.15 Comparação entre os autovalores simulados e identificados  
(Algoritmo ARIMA-duas diferenciações)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.14 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros com os parâmetros simulados, tabela 6.3.

pequenos amortecimentos						
	freq.simu.	freq.ident.	erro(%)	fat.simu.	fat.ident.	erro(%)
1o →	1,05891	1,05882	-0,00816	0,002950	0,002883	-2,27116
2o →	1,67593	1,67582	-0,00636	0,004712	0,004751	0,83441
3o →	2,59012	2,58203	0,31243	0,008034	0,005919	-26,32274
grandes amortecimentos						
	freq.simu.	freq.ident.	erro(%)	fat.simu.	at.ident.	erro(%)
1o →	1,06113	1,06522	0,38497	0,10537	0,09629	-8,61976
2o →	1,67626	1,72633	2,98689	0,24339	0,19465	-20,02530
3o →	2,58417	2,20772	-14,56737	0,22997	0,14312	-37,76668

Tab. 6.16 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados.  
(Algoritmo ARIMA-duas diferenciações)

Analogamente ao caso "a" e ao algoritmo ARMA, os resíduos são calculados através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), sendo a matriz da força aleatória composta pelo ruído da figura 6.6. Esta matriz tem também a mesma dimensão (80x80), para pequenos e grandes amortecimentos. Para o cálculo dos resíduos necessita-se ainda das raízes correspondentes aos autovalores verdadeiros e os vetores de resposta diferenciados (neste caso duas vezes) de dimensão (80x1), figuras 6.22 e 6.23. Na tabela abaixo comparam-se os resíduos identificados com os simulados da tabela 6.3.

pequenos amortecimentos			grandes amortecimentos		
r. simu.	r. ident.	erro(%)	r. simu.	r. ident.	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
$-3,0894 \times 10^{-6}$	$-2,0646 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^3$	$1,5124 \times 10^{-4}$	$-2,5465 \times 10^{-4}$	-268,37
$4,6519 \times 10^{-6}$	$5,8228 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^4$	$-2,8946 \times 10^{-4}$	$5,2457 \times 10^{-4}$	-281,23
$-1,5625 \times 10^{-6}$	$-2,4286 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^4$	$1,3822 \times 10^{-4}$	$2,0039 \times 10^{-4}$	44,98
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
$5,1141 \times 10^{-4}$	$-2,0987 \times 10^{-4}$	-141,04	$5,5442 \times 10^{-4}$	$-9,9850 \times 10^{-5}$	-118,01
$-4,6292 \times 10^{-4}$	$2,0351 \times 10^{-5}$	-143,96	$-5,1539 \times 10^{-4}$	$-1,4091 \times 10^{-4}$	-72,66
$9,0453 \times 10^{-5}$	$8,6192 \times 10^{-5}$	-8,62	$9,2996 \times 10^{-5}$	$4,8250 \times 10^{-5}$	-48,12

Tab. 6.17 Comparação entre os resíduos simulados e identificados (Algoritmo ARIMA-duas diferenciações)

Para a área de séries temporais o modelo ARIMA, pressupõe que o mecanismo gerador da série (o sistema), produz a não estacionariedade da série. Assim, ao serem determinados os parâmetros do sistema através do algoritmo ARMA é necessário um processo de integração, para a determinação dos parâmetros do sistema que gerou esta não estacionariedade.

Este não foi o caso considerado aqui, onde a não estacionariedade apresentou-se como uma perturbação da saída estacionária do sistema, ver seção 6.3.7. Devido a isso o objetivo deste algoritmo, foi diferenciar inicialmente a resposta, identificando o sistema através, agora, do algoritmo ARMA. Para as frequências naturais e os fatores de amortecimento, os resultados (com exceção de grandes amortecimentos e não estacionariedade de segunda ordem), apresentaram-se bastante precisos, ver tabelas 6.12 e 6.16, sendo acompanhados nesta precisão pelos autovalores, tabelas 6.11 e 6.15.

Os resíduos, ao contrário do algoritmo ARMA (seção 6.4.1), praticamente não foram identificados, ver tabelas 6.13 e 6.17. Como já foi citado, existem algumas alternativas possíveis para melhorar esta identificação, aumentando o número de linhas extras da matriz "H", aumentando a ordem da matriz da força aleatória ou ainda diminuindo o intervalo de amostragem de discretização no tempo.

Nesta seção apresentou-se os resultados obtidos por modelos probabilísticos (seção 5.4 cap.V). A seguir serão apresentados os resultados obtidos pelo modelo modal do sistema (seção 5.3 cap.V).

## 6.5 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DO MODELO MODAL

Neste caso, utiliza-se a resposta livre " $q_{h3}(k)$ ", figura 6.2, ou a resposta geral quando a excitação é uma força aleatória " $q_3(k)$ ", figura 6.11. Em ambos os casos serão identificados as frequências naturais, os fatores de amortecimento e constantes que incluem elementos da matriz modal e as condições iniciais do sistema. Isto será visto na seção 6.5.1 a seguir.

Além disso, considerando-se o sistema inicialmente em repouso, pode-se utilizar a resposta forçada por uma força impulsiva, " $q_{p3}(k)$ ", figura 6.14 e a resposta forçada quando a excitação é uma força aleatória, figura 6.8. Em ambos os casos serão identificados as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os resíduos do sistema. Isto será visto na seção 6.5.2 a seguir. Para todos os métodos utilizados, considera-se que o sistema tenha pequenos amortecimentos.

### 6.5.1 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DA RESPOSTA LIVRE

Neste caso, para a identificação, sendo o sinal a resposta livre, trabalha-se com o modelo de exponenciais complexas de Prony, equação (5.8). Sendo o sinal a resposta geral, acopla-se a função Randomdec ao modelo de Prony, equação (5.22).

#### 6.5.1.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UM MODELO DE EXPONENCIAIS COMPLEXAS

Para o sistema utilizado, o modelo de exponenciais complexas é dado por:

$$q_{h3}(k) \cong \sum_{r=1}^3 \left( a_{r3} y_r^k + a_{r3}^* y_r^{*k} \right) \quad (6.7)$$

$k=1, 2, \dots, K-1=127$

Considerando o número de pontos do sinal  $K=4n=12$ , onde  $n=3$ , tem-se para a resposta livre da massa " $m_3$ " do sistema, figura 6.2, o gráfico da figura 6.24:

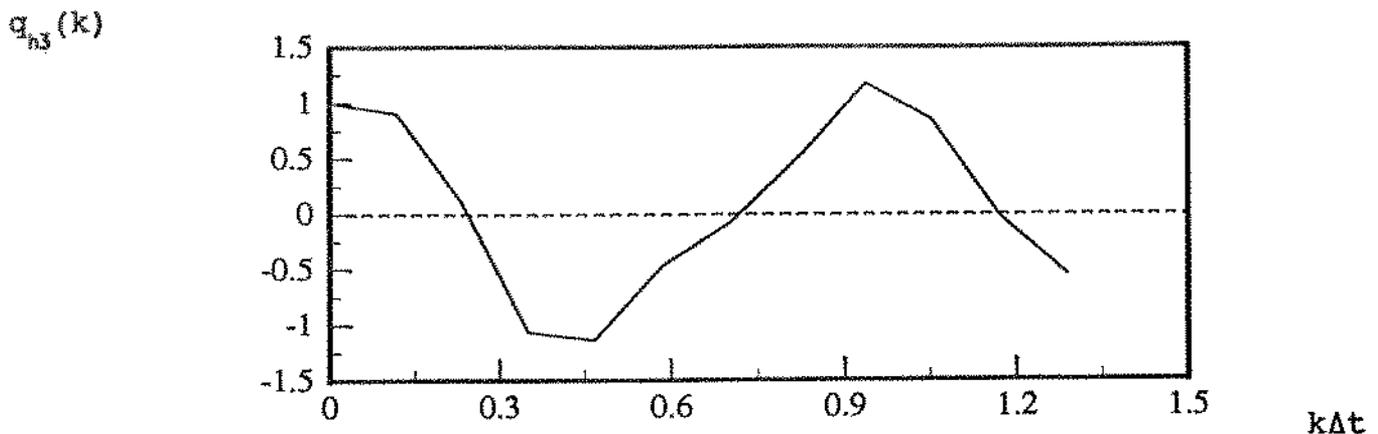


Fig. 6.24 Resposta livre da massa " $m_3$ " no tempo ( $K=12$ )

O cálculo dos parâmetros é feito através do algoritmo da série de Prony, seção 5.3.1.1-b. Neste caso são suficientes um número exato de modos não sendo necessária a técnica de super-dimensionamento do modelo e de verificação através do resto, seção 5.5. Também não são necessárias linhas extras para a matriz da equação (5.12), podendo-se desconsiderar a técnica da pseudo inversa.

As seis incógnitas [ $2n(\alpha's)$ ,  $n=3$ ] são obtidas através da solução de um sistema exato de seis equações lineares equação (5.12). Através destes alfas obtém-se as raízes complexo-conjugadas  $y_r$  e  $y_r^*$  do polinômio (5.10), encontrando-se respectivamente através das equações (5.13) e (5.14) as constantes  $a_{r3} = \eta_r(0) \phi_{r3}$  e os autovalores  $\lambda_r$ ,  $r=1, 2, 3$ . Para o caso dos autovalores utiliza-se também o intervalo " $\Delta t=0,1172$  seg" dado na tabela 6.4. Na tabela abaixo comparam-se, para pequenos amortecimentos, estes parâmetros com as constantes simuladas da tabela 6.5 e os autovalores simulados da tabela 6.2.

autovalores $\lambda_r$			constantes $\eta_r(0)\phi_{r3}$		
simulado	identificado	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
-0,01963	-0,01963	$3,0 \times 10^{-11}$	0,55693	0,55693	$1,5 \times 10^{-12}$
-0,04962	-0,04962	$-3,6 \times 10^{-10}$	0,06219	0,06219	$-6,1 \times 10^{-12}$
-0,13075	-0,13075	$-1,5 \times 10^{-11}$	-0,11912	-0,11912	$2,5 \times 10^{-12}$
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
-6,65328	-6,65328	$-2,7 \times 10^{-14}$	0,00097	0,00097	$5,8 \times 10^{-11}$
-10,53004	-10,53004	$-7,3 \times 10^{-13}$	0,00096	0,00096	$7,6 \times 10^{-10}$
-16,27366	-16,27366	$-1,3 \times 10^{-13}$	-0,00112	-0,00112	$-4,2 \times 10^{-10}$

Tab. 6.18 Comparação entre os autovalores e as constantes simulados e identificados (Algoritmo de Prony-Resposta Livre)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.18 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros como os simulados da tabela 6.3.

freqüência			amortecimento		
simulada	identificada	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
$1_0 \rightarrow 1,05891$	1,05891	$-4,2 \times 10^{-14}$	0,002950	0,002950	$3,0 \times 10^{-11}$
$2_0 \rightarrow 1,67593$	1,67593	$-7,4 \times 10^{-13}$	0,004712	0,004712	$-3,7 \times 10^{-10}$
$3_0 \rightarrow 2,59012$	2,59012	$-1,4 \times 10^{-13}$	0,008034	0,008034	$-1,5 \times 10^{-11}$

Tab. 6.19 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo de Prony-Resposta Livre)

As tabelas 6.18 e 6.19 mostram que o erro percentual para todos os parâmetros identificados ficou em torno da precisão do computador, sendo na prática idênticos aos parâmetros simulados.

#### 6.5.1.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO A FUNÇÃO RANDOMDEC

Para a utilização da função Randomdec são necessários um número

maior de pontos, por este motivo, no lugar da resposta geral, figura 6.11, considera-se a resposta abaixo:

$q_3(k)$

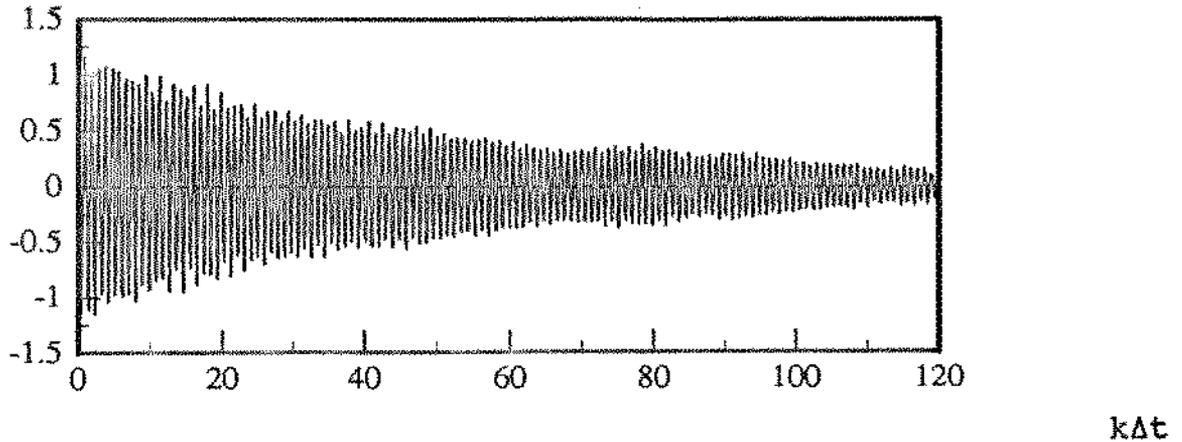


Fig. 6.25 Resposta geral da massa "m<sub>3</sub>" no tempo (K=1024)  
(força aleatória - pequenos amortecimentos)

Para que o sinal tenha a mesma frequência máxima, manteve-se o mesmo intervalo de amostragem  $\Delta t=0,1172$  seg., sendo o máximo valor do sinal no tempo  $T=K \times \Delta t=120$  seg, e o intervalo na frequência,  $\Delta f=1/T=0,0083$  Hz.

A função Randomdec é obtida através de médias feitas sobre diversos trechos retirados da resposta da figura 6.25. Fixando-se a amplitude inicial de retirada destes trechos em  $A=0,4$  e considerando o número de trechos (com o número de pontos  $M=128$ ) igual a  $S=25$ , tem-se para a função Randomdec, equação (5.17), a expressão abaixo:

$$dq_3(m) = \frac{1}{25} \sum_{s=1}^{25} [q_3^s(m) - 0,4] \quad (6.8)$$

$m=1, 2, \dots, M=128$

A seguir são apresentados os primeiros três trechos obtidos da figura 6.25.

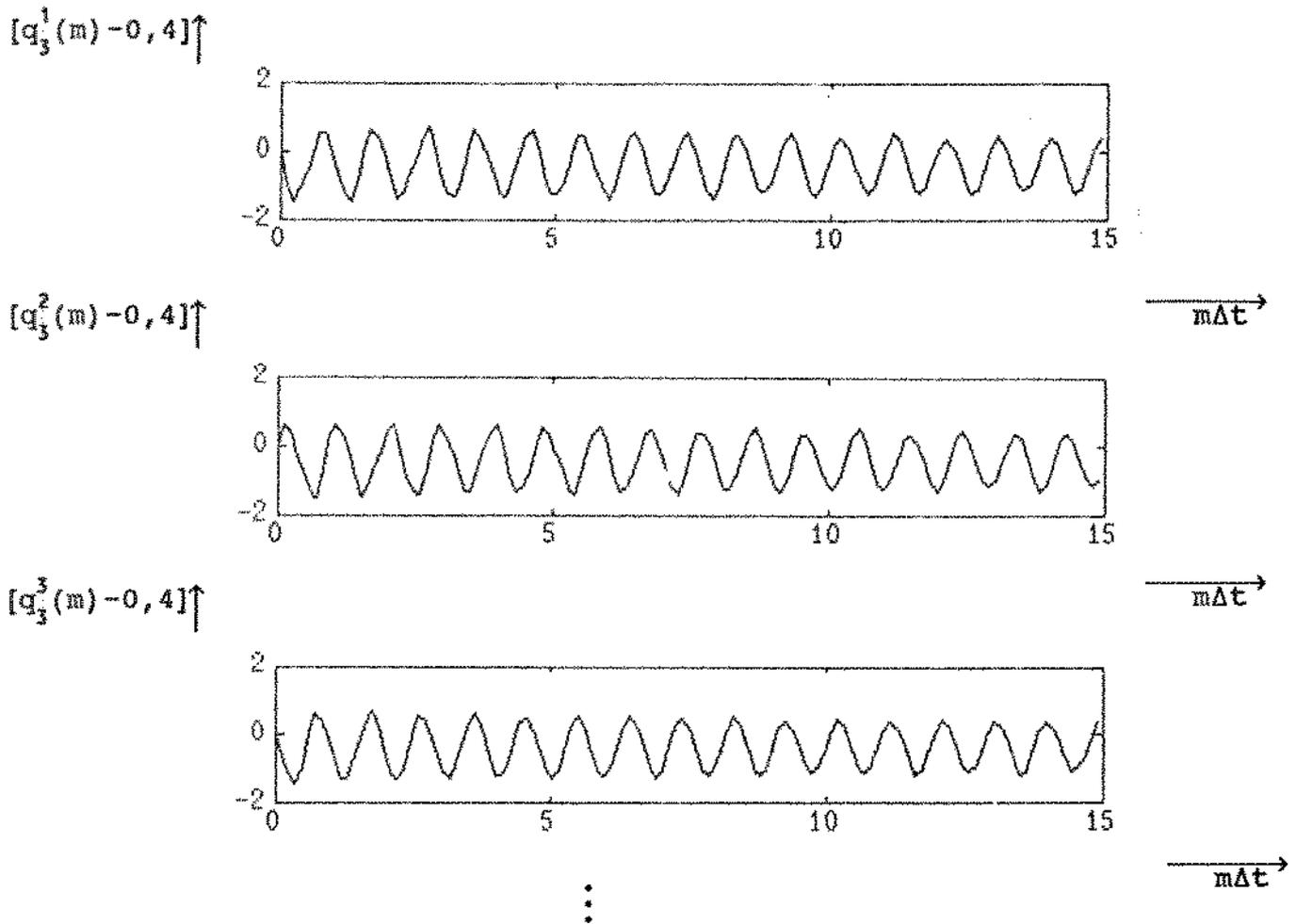


Fig. 6.26 Os primeiros três trechos da resposta  $q_3(k)$ , ( $A=0,4$  e  $M=128$ ).

Sendo a função Randomdec, equação (6.8), dada por:

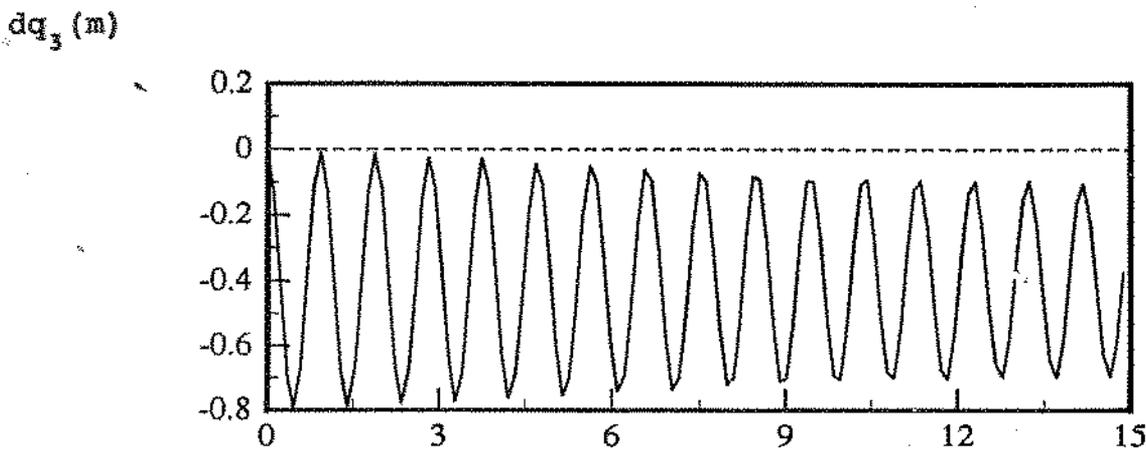


Fig. 6.27 A função Randomdec ( $A=0,4$  ;  $M=128$  ;  $S=25$ )

A função da figura 6.27 foi obtida com o mesmo intervalo de amostragem,  $\Delta t=0,1172$  seg, tendo a mesma freqüência máxima dos sinais anteriores. Como foram considerados  $M=128$  pontos, o seu máximo valor no tempo é  $T=M \times \Delta t=15$  seg. e o intervalo de freqüência é  $\Delta f=1/T=0,0667$  Hz. Estes parâmetros de processamento são os mesmos utilizados pela resposta do modelo modal, tabela 6.4.

A função Randomdec pode ser compreendida como a resposta livre do sistema, equação (5.22), onde desconsiderando-se a subtração de "A", os termos  $(\gamma_r^m - 1)$  transformam-se em  $\gamma_r^m$ . Assim, o seu valor estimado pela série de exponenciais, pode ser dado pela equação (6.7):

$$dq_3(m) = q_{h3}(m) \cong \sum_{r=1}^3 \left( a_{r3} Y_r^m + a_{r3}^* Y_r^{*m} \right) \quad (6.9)$$

$m=1, 2, \dots, M-1=127$

onde  $a_{r3} \cong \eta_r(0) \phi_{r3}$ ,  $Y_r^m \cong \gamma_r^m = e^{\lambda_r m \Delta t}$  e  $m=k$ .

Para o cálculo dos parâmetros considerou-se a junção do algoritmo de Prony (seção 5.3.1.1-b), do algoritmo da função Randomdec (seção 5.3.1.2-a) e das técnicas de processamento do sinal (seção 5.5).

A ordem super-dimensionada foi considerada  $n_s=10$ , sendo o número de linhas extras da matriz da resposta livre, equação (5.12), igual a "60 linhas". Os  $[2n(\alpha's), n=3]$  foram obtidos através da técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), aplicada a esta matriz que neste caso tem dimensão (80x20).

Os autovalores foram obtidos através da equação (5.14), onde utilizou-se as raízes do polinômio da equação (5.10) com  $[n=n_s=10]$ . Considerando uma nova ordem super-dimensionada  $n_s=8$  e utilizando a técnica de verificação através do resto, equação (5.52), identificou-se os polos verdadeiros do sistema, como indicado na tabela abaixo:

	restos $[\epsilon_r]$	autovalores	
	0,1960	-0,6891-j 5,4501	
10 modo	→ 0,0001	-0,0189-j 6,6561	← 1o modo
	0,0870	-0,3948-j 9,4989	
20 modo	→ 0,0047	-0,0519-j10,5383	← 2o modo
	0,0374	-0,0605-j13,4705	
	0,4045	-2,8188-j15,6915	
30 modo	→ 0,0048	-0,1336-j16,2858	← 3o modo
	0,4951	-0,1458-j19,8479	
	22,0377	-1,4084-j22,4987	

Tab. 6.20 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Função Randomdec mais o algoritmo de Prony)

Através das raízes verdadeiras e utilizando a técnica da pseudo-inversa, equação (5.50), na equação (5.14) onde a matriz das raízes tem dimensão (100x6) e o vetor de resposta tem dimensão (100x1), calculou-se as constantes  $[a_{r3}=\eta_r(0)\phi_{r3}]$ . Na tabela abaixo comparam-se as constantes e os autovalores identificados com os simulados, dados respectivamente pelas tabelas 6.5 e 6.2.

autovalores $\lambda_r$			constantes $\eta_r(0)\phi_{r3}$		
simulado	identificado	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
p.real	p.real	p.real	p.real	p.real	p.real
-0,01963	-0,01887	-3,85803	0,55693	0,20861	-60,2430
-0,04962	-0,05192	4,64210	0,06219	-0,00177	-102,841
-0,13075	-0,13360	2,18309	-0,11912	-0,00188	-98,4198
p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.	p.imag.
-6,65328	-6,65609	0,04236	0,00097	0,01883	-2043,56
-10,53004	-10,53830	0,07849	0,00096	0,00153	58,7264
-16,27366	-16,28579	0,07457	-0,00112	0,00217	-294,387

Tab. 6.21 Comparação entre os autovalores e as constantes simulados e identificados (Função Randomdec mais o Algoritmo de Prony)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.21 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros como os simulados da tabela 6.3.

freqüência			amortecimento		
simulada	identificada	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
1 <sub>0</sub> → 1,05891	1,05936	0,04233	0,002950	0,002835	-3,89870
2 <sub>0</sub> → 1,67593	1,67724	0,07860	0,004712	0,004927	4,55991
3 <sub>0</sub> → 2,59012	2,59205	0,07470	0,008034	0,008203	2,10682

Tab. 6.22 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Função Randomdec mais o Algoritmo de Prony)

As tabelas 6.20 e 6.21 mostram que as identificações dos autovalores, fatores de amortecimento e freqüências naturais foram bastante precisas. A tabela 6.20 mostra também que praticamente não foram identificadas as constantes  $[\eta_r(0)\phi_{r3}]$ . Estes dados foram encontrados considerando-se 25 médias para a função Randomdec. Testes realizados com médias (em torno de 100) não demonstraram melhores resultados, mas é possível que melhore com mais médias. Uma outra possibilidade de melhora seria através do aumento do tamanho no tempo da função Randomdec, o que permitiria o aumento das linhas da matriz da resposta e da matriz das raízes, equações (5.12) e (5.13).

## 6.5.2 IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DA RESPOSTA FORÇADA

Nesta seção consideram-se dois algoritmos que se baseiam no modelo de exponenciais complexas de Prony. Ambos algoritmos consideram que o sistema tenha pequenos amortecimentos, estando inicialmente em repouso.

O algoritmo da resposta impulsiva utiliza a resposta livre do sistema, figura 6.2 para calcular as frequências e os fatores de amortecimento. A seguir a força impulsiva, figura 6.12, e a resposta do sistema à esta força, figura 6.14, são utilizadas para calcular os resíduos.

O algoritmo da resposta aleatória utiliza a força aleatória, figura 6.6 e a resposta do sistema à esta força, figura 6.8 para calcular através da deconvolução a resposta ao impulso unitário do sistema. Através desta resposta todos os parâmetros modais são calculados inclusive os resíduos.

### 6.5.2.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UMA FORÇA IMPULSIVA

Analogamente ao algoritmo de Prony aplicado ao Randomdec, este algoritmo inicia calculando os  $[2n(\alpha, s), n=3]$  através da técnica da pseudo-inversa, seção 5.5.2, aplicada a matriz da resposta livre "L", equação (5.23). Como considerou-se a ordem super-dimensionada  $n_s=14$ , o número de pontos da resposta forçada  $Kq=128$  e o número de pontos que dura a resposta livre  $KQ=124$ , a dimensão da matriz "L" foi de  $(96 \times 28)$ , tendo o vetor da resposta livre " $\hat{v}$ " a dimensão  $(96 \times 1)$ .

As raízes foram obtidas através do polinômio, equação (5.10), com  $[n=n_s=14]$ , sendo obtidos os autovalores através destas raízes e da equação (5.14). Considerando uma nova ordem super-dimensionada  $n_s=12$  e utilizando a técnica de verificação através do resto, seção 5.5.3, (o quarto passo do algoritmo), identificou-se os polos verdadeiros do sistema como indicado na tabela abaixo:

	restos [ $\epsilon_r$ ]	autovalores	
	2,8353	-0,7185-j 0,3173	
	1,8489	-0,3918-j 2,6995	
	0,5330	-0,2719-j 4,6180	
1o modo →	0,0000	-0,0197-j 6,6533 ←	1o modo
	0,8066	-0,6804-j 8,7294	
2o modo →	0,0001	-0,0494-j10,5305 ←	2o modo
	0,6823	-0,5372-j12,3346	
	0,6614	-0,5031-j14,4654	
3o modo →	0,0002	-0,1309-j16,2734 ←	3o modo
	0,7642	-0,4708-j18,5241	
	0,4927	-0,2565-j20,1391	
	0,1998	-0,2747-j22,2386	
	0,9192	-0,3063-j24,1290	

Tab. 6.23 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Algoritmo da resposta impulsiva)

Através das raízes verdadeiras, do vetor da resposta à força impulsiva, da técnica da pseudo-inversa (seção 5.5.2), da matriz da força impulsiva e da equação (5.29) identifica-se os resíduos. Nesta equação a matriz "B=QY" tem dimensão (8x6), tendo a matriz da força impulsiva "Q" dimensão (8x8), a matriz das raízes dimensão (8x6) e o vetor da resposta à força impulsiva, dimensão (8x1). A seguir, para pequenos amortecimentos, comparam-se os autovalores verdadeiros e os resíduos identificados com os autovalores e resíduos simulados das tabelas 6.2 e 6.3.

autovalores $\lambda_r$			resíduos $r_{r31}$		
simulado	identificado	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
-0,01963	-0,01966	0,13256	-3,0894x10 <sup>-6</sup>	-3,1221x10 <sup>-6</sup>	1,05875
-0,04962	-0,04938	-0,49692	4,6519x10 <sup>-6</sup>	4,7348x10 <sup>-6</sup>	1,78229
-0,13075	-0,13089	0,11529	-1,5625x10 <sup>-6</sup>	-1,5564x10 <sup>-6</sup>	0,38936
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
-6,65328	-6,65328	0,00009	5,1140x10 <sup>-4</sup>	5,1139x10 <sup>-4</sup>	-0,00229
-10,53004	-10,53050	0,00444	-4,6291x10 <sup>-4</sup>	-4,6286x10 <sup>-4</sup>	-0,01252
-16,27366	-16,27336	-0,00187	9,0453x10 <sup>-5</sup>	9,0428x10 <sup>-5</sup>	-0,02727

Tab. 6.24 Comparação entre os autovalores e os resíduos simulados e identificados (Algoritmo da Resposta Impulsiva)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.24 identificam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros com os simulados da tabela 6.3.

	freqüência			amortecimento		
	simulada	identificada	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
1o →	1,05891	1,05891	0,00009	0,002950	0,002954	0,13247
2o →	1,67593	1,67600	0,00442	0,004712	0,004689	-0,50132
3o →	2,59012	2,59007	-0,00186	0,008034	0,008044	0,11715

Tab. 6.25 Comparação entre as freqüências e os fatores de amortecimento simulados e identificados.  
(Algoritmo da Resposta Impulsiva)

As tabelas 6.24 e 6.25 demonstram que todos os parâmetros foram muito bem identificados, estando o menor erro percentual em torno de um por cento. Obteve-se os resultados através de simulação, sendo estes muito bons, devido a isto não houve a necessidade de execução do sexto passo do algoritmo (cálculo do valor médio do parâmetros), seção 5.3.2.1.

### 6.5.2.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO UMA FORÇA ALEATÓRIA ESTACIONÁRIA

Este algoritmo inicia calculando através da deconvolução, a resposta ao impulso unitário do sistema " $\hat{h}_{31}(k)$ ". Matricialmente a relação entre o vetor resposta ao impulso " $\hat{h}$ " a matriz da força aleatória " $Q$ " e o vetor da resposta à esta força " $\hat{v}$ " é dada pela equação (5.35-a).

Analogamente aos algoritmos anteriores, este algoritmo calcula os  $[2n(\alpha's), n=3]$  através da técnica da pseudo-inversa, seção 5.5.2, aplicada agora a matriz da resposta ao impulso " $H$ ", equação (5.36). Como considerou-se a ordem super-dimensionada  $n_s=14$  e o número de pontos da resposta ao impulso  $Kq=128$ , a dimensão da matriz " $H$ " foi de  $(100 \times 28)$ , tendo o vetor da resposta ao impulso " $\hat{h}$ " a dimensão  $(100 \times 1)$ .

Analogamente ao algoritmo da resposta impulsiva, as raízes são obtidas através do polinômio da equação (5,25) com  $[n=n_s=14]$ , sendo os autovalores obtidos através destas raízes, utilizando a equação (5.14). Considerando uma nova ordem super-dimensionada  $n_s=12$  e utilizando a técnica de verificação através do resto, seção 5.5.3, (o quarto passo do algoritmo), identificou-se os polos verdadeiros do sistema como indicado na tabela abaixo:

	restos $[e_r]$	autovalores	
	3,3046	-0,3938-j 0,9632	
	1,9723	-0,4129-j 2,7399	
	0,5009	-0,2583-j 4,4809	
1o modo →	0,0000	-0,0196-j 6,6526 ←	1o modo
	0,7494	-0,1303-j 8,9096	
2o modo →	0,0001	-0,0496-j 10,5288 ←	2o modo
	0,5822	-0,1563-j 12,3907	
	0,9737	-0,4577-j 15,0906	
3o modo →	0,0006	-0,1309-j 16,2721 ←	3o modo
	0,3598	-0,3189-j 18,5732	
	0,9000	-1,2429-j 20,1664	
	0,0719	-0,2321-j 22,6155	
	0,5739	-0,8914-j 24,2209	
	0,9904	-0,9573-j 25,7841	

Tab. 6.26 Autovalores identificados (verdadeiros e computacionais).  
(Algoritmo da Resposta Aleatória)

Os resíduos foram calculados de forma similar ao algoritmo da resposta impulsiva através da equação (5.29). Só que neste caso a matriz "B=QY" teve dimensão (64x6) e no lugar da matriz da resposta impulsiva "Q" utilizou-se a matriz identidade "I" (64x64). A matriz das raízes "Y" teve dimensão (64x6) e o vetor da resposta à força impulsiva " $\hat{v}$ " foi substituído pelo vetor resposta ao impulso unitário " $\hat{h}$ " de dimensão (64x1). A seguir, para pequenos amortecimentos, comparam-se os autovalores verdadeiros e os resíduos identificados com os autovalores e resíduos simulados das tabelas 6.2 e 6.3.

autovalores $\lambda_r$			resíduos $r_{r31}$		
simulado	identificado	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
p. real	p. real	p. real	p. real	p. real	p. real
-0,01963	-0,01963	-0,00685	$-3,0894 \times 10^{-6}$	$-3,1826 \times 10^{-6}$	3,01678
-0,04962	-0,04959	-0,06664	$4,6519 \times 10^{-6}$	$4,3341 \times 10^{-6}$	-6,83164
-0,13075	-0,13094	0,14748	$-1,5625 \times 10^{-6}$	$-1,8607 \times 10^{-6}$	-19,08377
p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.	p. imag.
-6,65328	-6,65259	-0,01033	$5,1140 \times 10^{-4}$	$5,1126 \times 10^{-4}$	-0,02948
-10,53004	-10,52880	-0,01172	$-4,6291 \times 10^{-4}$	$-4,6269 \times 10^{-4}$	-0,04908
-16,27366	-16,27211	-0,00953	$9,0453 \times 10^{-5}$	$9,0592 \times 10^{-5}$	-0,15387

Tab. 6.27 Comparação entre os autovalores e os resíduos simulados e identificados (Algoritmo da Resposta Aleatória)

Utilizando-se a equação (3.38) e os autovalores da tabela 6.27 identificam-se as frequências naturais e os fatores de amortecimento dos modos. Na tabela abaixo comparam-se estes parâmetros como os simulados da tabela 6.3.

	frequência			amortecimento		
	simulada	identificada	erro(%)	simulado	identificado	erro(%)
1o →	1,05891	1,05880	-0,01033	0,002950	0,002950	0,00349
2o →	1,67593	1,67573	-0,01172	0,004712	0,004710	-0,05493
3o →	2,59012	2,59000	-0,00952	0,008034	0,008047	0,15702

Tab. 6.28 Comparação entre as frequências e os fatores de amortecimento simulados e identificados. (Algoritmo da Resposta Aleatória)

As tabelas 6.25 e 6.26, demonstram que as identificações alcançadas foram boas, não havendo necessidade de execução do sexto passo do algoritmo, seção 5.3.2.2. A seguir os diversos resultados obtidos pelos algoritmos que trabalham, tanto com o modelo modal como com os modelos probabilísticos, serão comparados e analisados.

## 6.6 COMPARAÇÕES ENTRE OS RESULTADOS

Abaixo, é apresentada uma tabela com os parâmetros identificados pelos diversos métodos no tempo que foram formulados no capítulos V. Esta tabela contém um resumo dos principais resultados apresentados ao longo deste capítulo.

	sinal utilizado	frequência		pequenos amortecimentos		resíduos				
		valor	erro %	valor	erro %	parte real		parte imaginária		
						valor	erro %	valor	erro %	
Modelo Simulado		1,0589	---	0,0030	---	$-3,1 \times 10^{-6}$	-----	$5,1 \times 10^{-4}$	-----	
		1,6759	---	0,0047	---	$4,7 \times 10^{-6}$	-----	$-4,6 \times 10^{-4}$	-----	
		2,5901	---	0,0080	---	$-1,6 \times 10^{-6}$	-----	$9,1 \times 10^{-5}$	-----	
NO DE LO	Prony	Resp. Livre	1,0589	$-4 \times 10^{-14}$	0,0030	$-3 \times 10^{-11}$	-----	-----	-----	-----
			1,6759	$-7 \times 10^{-13}$	0,0047	$-4 \times 10^{-10}$	-----	-----	-----	-----
			2,5901	$-1 \times 10^{-13}$	0,0080	$-2 \times 10^{-11}$	-----	-----	-----	-----
da	RAN DEC PRO NY	Resp. Geral	1,0594	0,04233	0,0028	-3,8987	-----	-----	-----	-----
			1,6772	0,07860	0,0049	4,5599	-----	-----	-----	-----
			2,5921	0,07470	0,0082	2,1068	-----	-----	-----	-----
RES POSTA	ALG RES IMP	R Liv F. Imp R. For	1,0589	0,00009	0,0030	0,1325	$-3,1 \times 10^{-6}$	1,05875	$5,1 \times 10^{-4}$	-0,00229
			1,6760	0,00442	0,0047	-0,5013	$4,7 \times 10^{-6}$	1,78229	$-4,6 \times 10^{-4}$	-0,01252
			2,5901	-0,00186	0,0080	0,1172	$-1,6 \times 10^{-6}$	0,38936	$9,0 \times 10^{-5}$	-0,02727
	ALG RES ALE	F. Ale toria R. Ale toria	1,0588	-0,01033	0,0030	0,0035	$-3,2 \times 10^{-6}$	3,01678	$5,1 \times 10^{-4}$	-0,02948
			1,6757	-0,01172	0,0047	-0,0549	$4,3 \times 10^{-6}$	-6,83164	$-4,6 \times 10^{-4}$	-0,04908
			2,5900	-0,00952	0,0080	0,1570	$-1,9 \times 10^{-6}$	-19,0838	$9,0 \times 10^{-5}$	-0,15387
NO DE LO	A R M A	F. Ale R. Ale Estacion.	1,0588	-0,01239	0,0030	0,2916	$-2,8 \times 10^{-6}$	-9,91759	$5,1 \times 10^{-4}$	0,00454
			1,6757	-0,01086	0,0047	-0,1378	$4,6 \times 10^{-6}$	-0,76177	$-4,6 \times 10^{-4}$	-0,00629
			2,5906	0,01761	0,0080	-0,4241	$-1,6 \times 10^{-6}$	17,3257	$9,1 \times 10^{-5}$	0,06257
EQS	A R I M A	F. Ale R. Ale n. Est 1ord.	1,0588	-0,00685	0,0030	1,2529	$3,6 \times 10^{-4}$	$-1,7 \times 10^4$	$-1,5 \times 10^{-4}$	-128,579
			1,6757	-0,01198	0,0047	0,0999	$-4,4 \times 10^{-4}$	$-9,5 \times 10^3$	$3,0 \times 10^{-4}$	-166,261
			2,5909	0,03169	0,0082	1,9399	$-1,9 \times 10^{-6}$	$-5,5 \times 10^3$	$-1,2 \times 10^{-4}$	-230,704
	A R I M A	F. Ale R. Ale n. Est 2ord.	1,0588	-0,00816	0,0029	-2,2712	$-2,1 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^3$	$-2,1 \times 10^{-4}$	-141,039
			1,6758	-0,00636	0,0048	0,8344	$5,8 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^4$	$2,0 \times 10^{-4}$	-143,961
			2,5820	0,31243	0,0059	-26,323	$-2,4 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^4$	$8,6 \times 10^{-5}$	-4,71039

Tab. 6.29 Comparação entre os parâmetros obtidos pelos algoritmos no tempo

Ao longo do capítulo, o sistema com pequenos amortecimentos foi utilizado por todos os algoritmos. Devido a isso, os resultados apresentados na tabela 6.29 envolvem só este tipo de amortecimento.

A tabela 6.29 divide os algoritmos em função do modelo considerado. Para o modelo modal do sistema dinâmico, os quais são séries geométricas (séries de Prony), considera-se quatro algoritmos.

O primeiro (o algoritmo de Prony) calcula as frequências e os amortecimentos através da resposta livre do sistema. Como este algoritmo utiliza a resposta livre, não pode calcular os resíduos. Como mostra a tabela 6.29, os resultados obtidos estão dentro da precisão do computador, sendo os parâmetros simulados, na prática, iguais aos identificados.

O segundo algoritmo (a função Randomdec associada ao algoritmo de Prony) calcula as frequências e os amortecimentos através da resposta geral do sistema excitado por um força aleatória (ruído branco). Esta resposta geral é transformada (pela função Randomdec) na resposta livre e devido a isto este algoritmo não calcula os resíduos. Os resultados, neste caso apresentam-se muito bons.

O terceiro algoritmo (o da resposta impulsiva) utiliza a resposta livre para calcular as frequências e os amortecimentos e a força impulsiva e a resposta forçada para calcular os resíduos. Todos os parâmetros, como mostra a tabela 6.29, foram muito bem identificados.

O quarto algoritmo (o da resposta aleatória) utiliza a força aleatória (ruído branco) e a resposta forçada para obter a resposta ao impulso unitário, que por sua vez, é utilizada para calcular todos os parâmetros modais do sistema. Neste caso a pior identificação foi a da parte real do resíduo do terceiro modo (-19,08 %), sendo todas outras muito boas.

Para os modelos probabilísticos consideram-se dois algoritmos. O primeiro algoritmo (ARMA), utiliza a força aleatória (ruído branco) e a resposta forçada (estacionária) para calcular todos os parâmetros modais. Como mostra a tabela 6.29 as identificações neste caso, apresentaram resultados com a mesma ordem de grandeza do algoritmo da resposta aleatória (observar a parte real dos resíduos identificados).

O segundo algoritmo (ARIMA), da mesma forma que o algoritmo ARMA e o da resposta aleatória, utiliza a força aleatória e a resposta forçada para calcular todos os parâmetros modais do sistema. A diferença, neste caso, é que este algoritmo considera que a resposta tenha uma não estacionariedade em relação a média que pode ser de primeira ou de segunda ordem.

Com a exceção do amortecimento do terceiro modo (quando a não estacionariedade foi de segunda ordem, -26,3 % de erro), todos os amortecimentos restantes e todas as frequências foram muito bem identificadas. Em relação aos resíduos, a tabela 6.29, mostra que não foram identificados. Ao longo do capítulo foram dadas algumas sugestões, como aumentar o número de pontos e diminuir o intervalo de amostragem no tempo, para melhorar estes resultados.

De um maneira geral, todos os algoritmos identificaram com uma precisão muito grande tanto as frequências como os amortecimentos e em alguns casos os resíduos. A seguir um modelo matemático de seis graus de liberdade com frequências e amortecimentos muito próximos (iguais), será apresentado.

### 6.7 OS MÉTODOS DE PRONY NA IDENTIFICAÇÃO DE UM EXEMPLO MATEMÁTICO DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Nesta seção considera-se um sistema hipotético de seis graus de liberdade, que apresenta os autovalores abaixo :

autovalores		$[\lambda_r]$
1o modo	→	$\lambda_1 = -0,2500-j 7,0000$
2o modo	→	$\lambda_2 = -0,0200-j 7,0000$
3o modo	→	$\lambda_3 = -0,0200-j10,5000$
4o modo	→	$\lambda_4 = -0,1000-j14,0000$
5o modo	→	$\lambda_5 = -0,1000-j16,0000$
6o modo	→	$\lambda_6 = -0,2000-j16,0000$

Tab. 6.30 Autovalores de um sistema hipotético de 6 graus de liberdade

Considerando-se os parâmetros de processamento dados pela tabela 6.4, este sistema apresenta a resposta livre abaixo:

$q_h(k)$

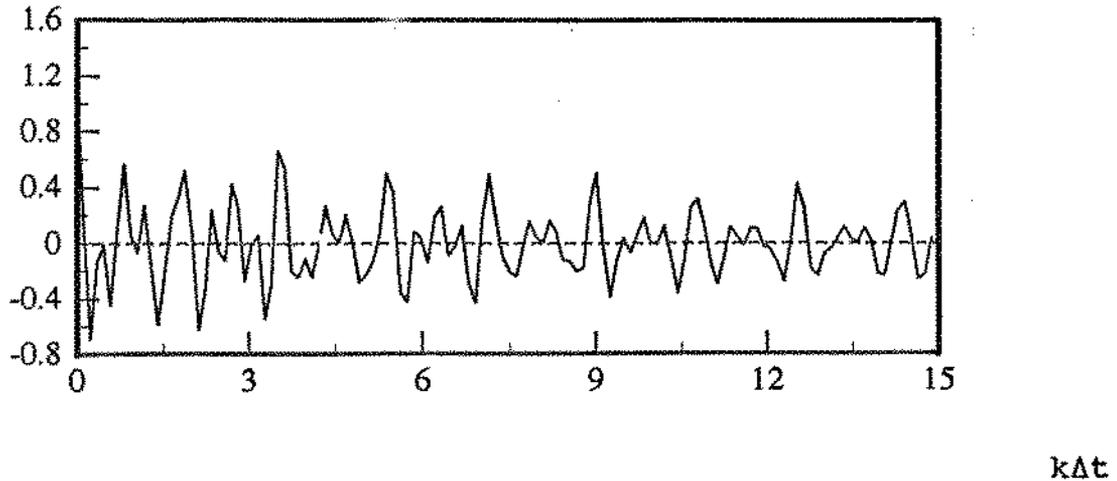


Fig. 6.28 Resposta livre no tempo (sistema de 6 G.L.).

A seguir esta resposta é vista na frequência :

$\overline{q}_h(z_k)$

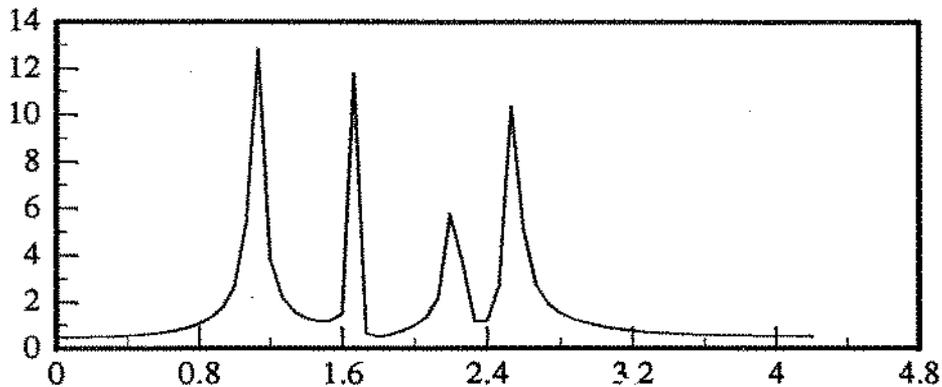


Fig. 6.29 Resposta livre na frequência (sistema de 6.G.L.).

A figura acima mostra que os sistema apresenta somente quatro frequências naturais. Considerando uma força impulsiva dada pelo gráfico a seguir.

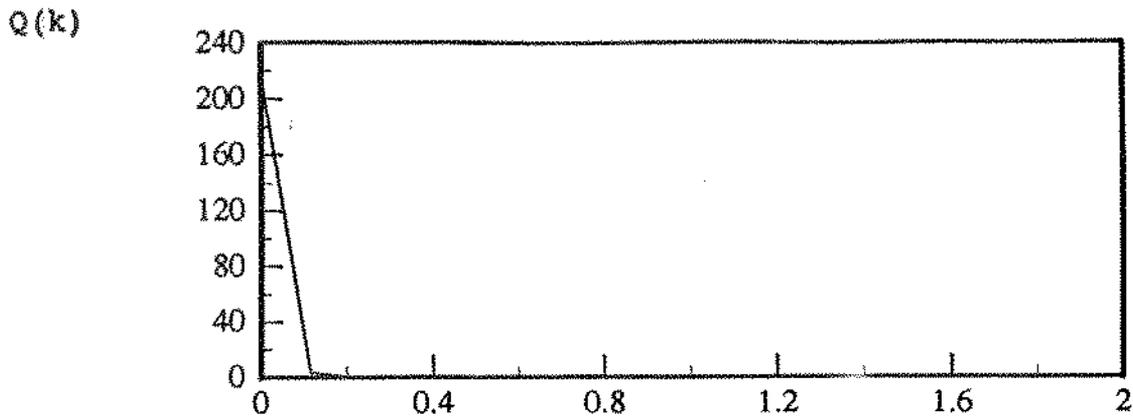


Fig. 6.30 Força impulsiva no tempo (sistema de 6 G.L.).

o sistema apresenta como resposta a esta força o gráfico abaixo:

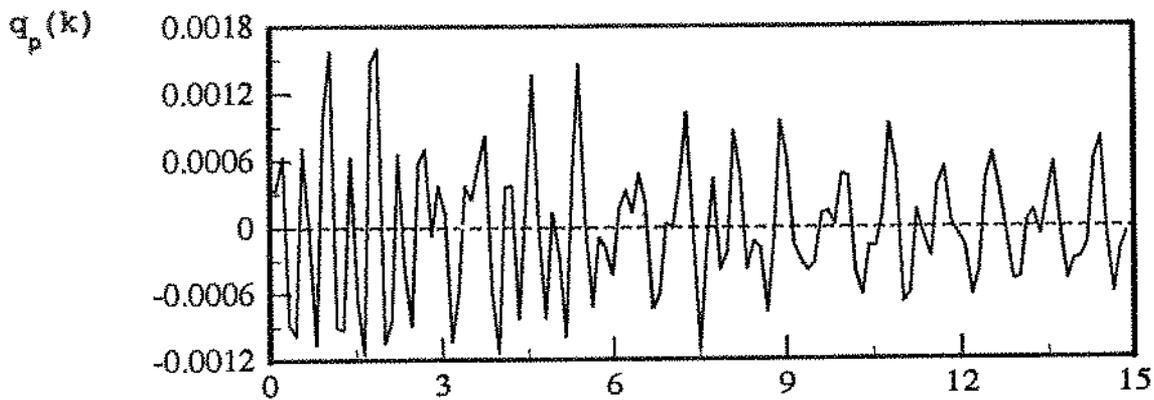


Fig. 6.31 Resposta do sistema de 6 G.L.devido à força impulsiva

Sendo agora, a força de excitação o ruído da figura 6.6 , a resposta do sistema será :

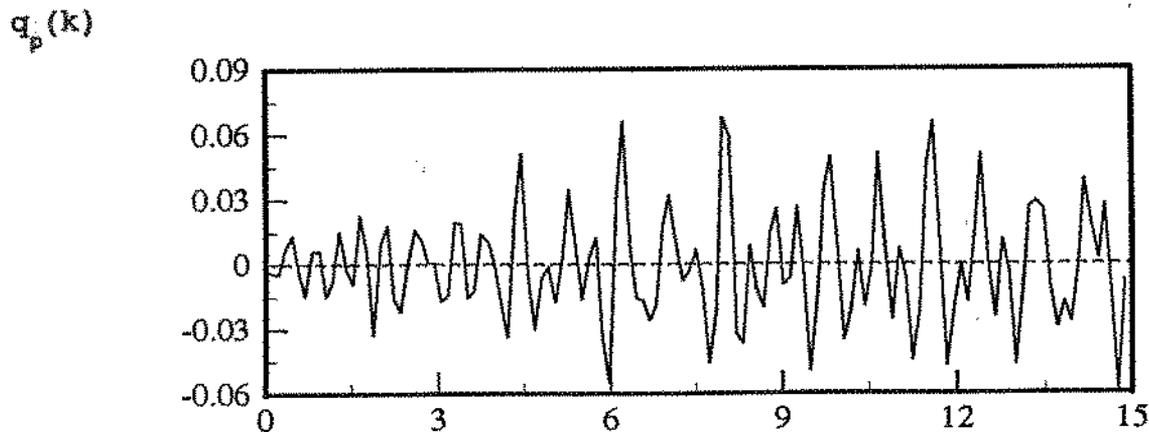


Fig. 6.32 Resposta do sistema de 6 G.L.devido à força aleatória

Utilizando-se a resposta livre anterior com um número de pontos  $K=4n=24$ , calcula-se os parâmetros através do algoritmo da série de Prony, analogamente a seção 6.5.1.1. Também neste caso, são necessários somente um número exato de modos, tendo-se agora doze incógnitas  $[2n(\alpha's), n=6]$ , obtidas pela solução de um sistema de doze equações lineares. Considerando-se a resposta livre, a força impulsiva e a resposta à esta força e utilizando-se o algoritmo da resposta impulsiva, analogamente a seção 6.5.2.1., onde agora a ordem super-dimensionada é  $n_s=16$  e a nova ordem super-dimensionada é igual  $n_s=14$ , calcula-se os parâmetros do sistema. Considerando esta mesma ordem e obtendo-se através da deconvolução da força aleatória e da resposta à esta força, a resposta ao impulso unitário e utilizando o algoritmo da resposta aleatória, analogamente a seção 6.5.2.2, obtem-se novamente os parâmetros modais do sistema de seis graus de liberdade. Os parâmetros (simulados e identificados) estão apresentados na tabela abaixo:

	sinal utilizado	frequência		amortecimentos		resíduos			
						parte real		parte imaginária	
		valor	erro %	valor	erro %	valor	erro %	valor	erro %
MODELO SIMULADO	---	1,1148	---	0,0357	---	-0,0001	-----	0,0001	-----
		1,1141	---	0,0029	---	0,0002	-----	0,0002	-----
		1,6711	---	0,0019	---	0,0001	-----	0,0001	-----
		2,2282	---	0,0071	---	-0,0002	-----	0,0002	-----
		2,5465	---	0,0062	---	0,0003	-----	-0,0001	-----
		2,5467	---	0,0125	---	0,0003	-----	-0,0002	-----
P R O B L E M A	RES-POSTA LIVRE	1,1148	$-2 \times 10^{-8}$	0,0357	$-9 \times 10^{-7}$	-----	-----	-----	-----
		1,1141	$3 \times 10^{-8}$	0,0029	$9 \times 10^{-6}$	-----	-----	-----	-----
		1,6711	$-3 \times 10^{-10}$	0,0019	$1 \times 10^{-6}$	-----	-----	-----	-----
		2,2282	$-4 \times 10^{-9}$	0,0071	$6 \times 10^{-7}$	-----	-----	-----	-----
		2,5465	$-5 \times 10^{-8}$	0,0062	$-3 \times 10^{-6}$	-----	-----	-----	-----
		2,5467	$6 \times 10^{-8}$	0,0125	$-3 \times 10^{-7}$	-----	-----	-----	-----
ALGORITMO RES-POSTA IMPULSIVA	R.LIV F.IMP R.FOR	1,1138	-0,08661	0,0378	5,7976	-0,000109	8,78050	0,000094	-3,85037
		1,1138	-0,02627	0,0033	15,4796	0,000206	3,19351	0,000207	3,39136
		1,6710	-0,01005	0,0019	-0,0049	0,000099	-0,05925	0,000100	0,14754
		2,2280	-0,01152	0,0072	0,2431	-0,000200	0,11468	0,000200	0,19401
		2,5479	0,05264	0,0073	16,4299	0,000499	66,1976	-0,000062	-38,1623
		2,5543	0,30078	0,0130	3,7536	0,000053	-78,9357	-0,000237	18,6281
ALGORITMO RES-POSTA ALEATORIA	F.ALE R.ALE	1,1134	-0,12150	0,0364	2,08446	-0,000102	1,78637	0,000095	-4,52678
		1,1140	-0,00466	0,0030	4,42366	0,000202	0,79424	0,000205	2,39686
		1,6710	-0,07897	0,0019	-0,84968	0,000099	-0,26806	0,000100	0,22909
		2,2280	-0,01164	0,0071	-0,05805	-0,000199	-0,01747	0,000200	0,06444
		2,5466	0,00351	0,0068	9,00456	0,000399	29,9635	-0,000109	9,17237
		2,5491	0,09643	0,0136	8,56646	0,000160	-35,8307	-0,000198	-4,87610

Tab. 6.31 Parâmetros obtidos pelos algoritmos de Prony (sistema de 6 G.L.)

O algoritmo da resposta livre obteve os parâmetros quase com a precisão do computador. Para os outros algoritmos as frequências naturais e os fatores de amortecimento (considerando para o fator de amortecimento uma margem de 20% de erro) foram bem identificados. No caso da identificação dos resíduos os algoritmos também apresentaram bons resultados. Exceções devem ser feitas para a parte real do quinto e sexto resíduos obtidos pelo algoritmo da resposta impulsiva. Estes resultados possivelmente serão melhores se forem considerados mais pontos para os sinais utilizados.

## 6.8 ANÁLISE MODAL DE UMA VIGA EXCITADA POR FORÇAS IMPULSIVAS

A aquisição dos dados experimentais utilizados neste exemplo, bem como a construção da estrutura de teste devem-se ao prof. Milton Dias Junior, do Departamento de Projeto Mecânico, UNICAMP que gentilmente os colocou à disposição para este trabalho. A seguir serão descritos o sistema experimental, a instrumentação para medição e apresentados os resultados obtidos.

### 6.8.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA EXPERIMENTAL

A estrutura de teste utilizada é uma viga de aço com dimensões 20x30x600mm, suspensa nas extremidades por molas flexíveis, conforme ilustra a figura 6.33. A estrutura foi discretizada em quatro elementos de igual comprimento e testada através de impactos aplicados aos nós 1-5, na direção y, conforme ilustrado na figura 6.34. A resposta ao impacto foi sempre medida no ponto "R", na direção y (também indicado na figura 6.34).

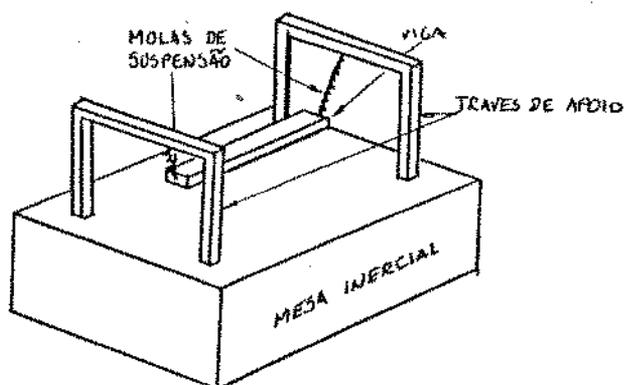


Fig. 6.33 Bancada de teste utilizada

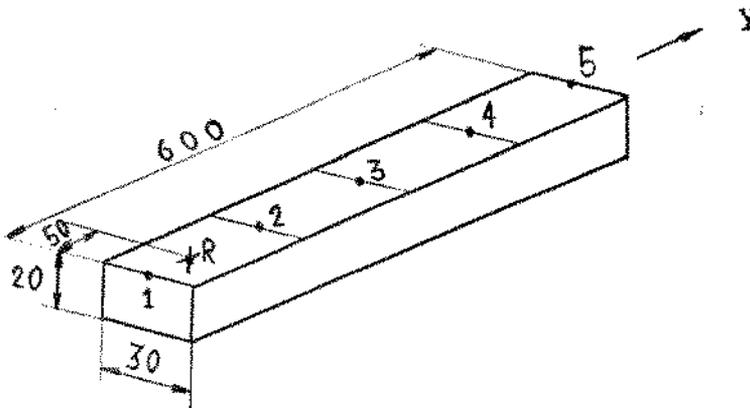


Fig. 6.34 Discretização da viga (dimensões em mm)

Foram utilizados um transdutor de força acoplado ao martetele de impacto e um acelerômetro fixo à viga, em seu ponto "R".

### 6.8.2 INSTRUMENTAÇÃO E ESQUEMA DE MEDIÇÃO UTILIZADOS

Os dados de ensaio constaram de cinco conjuntos de amostras dos sinais de força e aceleração da viga. Cada conjunto de amostras possui 2048 valores discretos dos sinais dinâmicos do sistema, adquiridos em intervalos regulares de tempo de 1/10240 segundos. A figura 6.35 a seguir apresenta o esquema de medição e a instrumentação utilizada para o ensaio.

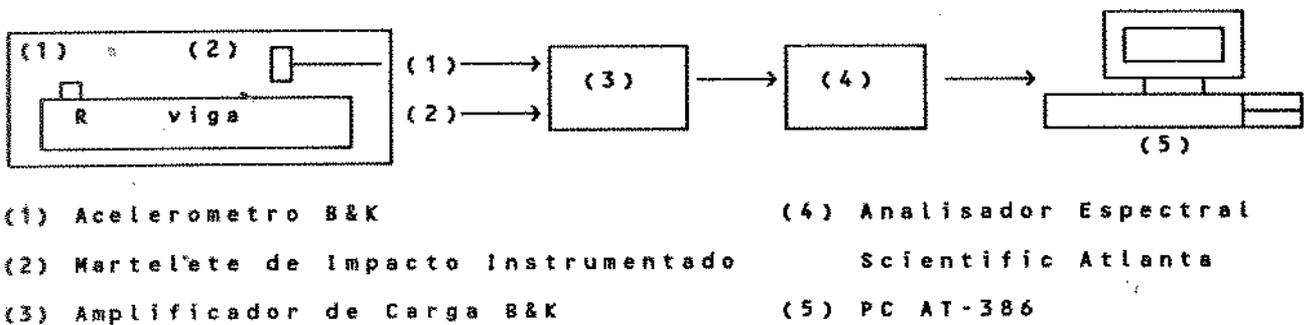


Fig. 6.35 Instrumentação e esquema de medição do ensaio

### 6.8.3 RESULTADOS OBTIDOS

A análise no domínio do tempo consistiu na utilização do algoritmo ARMA sobre apenas 1/16 dos pontos amostrados em cada conjunto de dados, ou seja, 128 pontos por conjunto de amostras. O modelo ARMA utilizado partiu sempre da hipótese da existência de 32 modos de vibrar na estrutura, o que levou em todos os casos estudados à obtenção de diversos polos computacionais. Em todos os casos porém, os polos computacionais foram identificados pelo critério da repetibilidade dos polos verdadeiros, restando sempre um total de cerca de 8 polos verdadeiros a serem utilizados por análise.

As raízes características do filtro ARMA com a hipótese da existência de 32 modos levou aos resultados de determinação de polos, ilustrados tipicamente pelos valores da tabela 6.32. Nesta tabela são apresentados os resultados do cálculo de polos com parte imaginária de até 18849 Rd/s (3000Hz), à partir da análise dos dados de resposta do sistema à excitação nos pontos 1 e 4. Pode-se perceber desta tabela que os únicos polos que possuem repetibilidade com erros inferiores a 0.2% são aqueles indicados por seu número de ordem.

Polos (Rad/s)			freq. (Hz)	Polos (Rad/s)			freq. (Hz)
-27.60 +	210i		33	-27.75 +	34i		5
-27.85 +	166i		264 (1)	-27.85 +	166i		264 (1)
-27.42 +	344i		547	-28.24 +	331i		527
-30.04 +	393i		625	-27.84 +	453i		721 (2)
-27.84 +	453i		721 (2)	-28.48 +	495i		0787
-28.95 +	608i		968	-28.80 +	639i		1017
-27.81 +	736i		1172	-27.91 +	730i		1162
-27.65 +	861i		1371	-27.85 +	885i		1408 (3)
-27.86 +	885i		1408 (3)	-28.38 +	927i		1475
-28.06 +	1049i		1669	-28.08 +	1064i		1694
-26.84 +	1141i		1815	-27.38 +	1198i		1906
-28.53 +	1212i		1929	-28.29 +	1296i		2062
-27.73 +	1312i		2088	-29.27 +	1325i		2108
-27.85 +	1430i		2276 (4)	-27.86 +	1429i		2274 (4)
-27.57 +	1512i		2406	-27.62 +	1595i		2538
-27.44 +	1620i		2579	-28.64 +	16.45		2619
-28.36 +	1739i		2768	-27.88 +	1767i		2813 (5)
-27.83 +	1770i		2817 (5)	-28.94 +	1852i		2948

Tab. 6.32 Alguns polos encontrados na análise nos pontos 1 e 4.

Os polos verdadeiros identificados são utilizados para o cálculo dos resíduos do sistema. Utilizam-se então os polos e resíduos do sistema para o cálculo das amplitudes e fases dos três primeiros modos de vibração do sistema, conforme mostrado na tabela 6.33.

AMPLITUDES:					
Ponto #1	2	3	4	5	
1.76e-02	1.12e-03	1.19e-02	2.10e-03	2.37e-02	(264 Hz)
6.39e-02	3.09e-02	8.91e-04	4.11e-02	8.35e-02	(720 Hz)
1.14e-02	1.71e-02	1.46e-02	1.30e-02	1.82e-02	(1408 Hz)

FASES (graus):					
Ponto #1	2	3	4	5	
-98.1	36.3	78.5	73.9	-101.3	(264 Hz)
-116.4	68.5	-114.8	-118.6	62.2	(720 Hz)
34.6	-122.4	34.1	-146.4	34.1	(1408 Hz)

Tab. 6.33 Amplitudes e fases dos três primeiros modos de vibração do sistema

O conhecimento das amplitudes e fases relativas de vibração dos pontos do sistema em cada ressonância, pode ser utilizado para a representação geométrica de seus modos de vibrar, conforme ilustrado na figura 6.36. Considerou-se, nesta representação, a projeção das amplitudes dos modos complexos no eixo real.

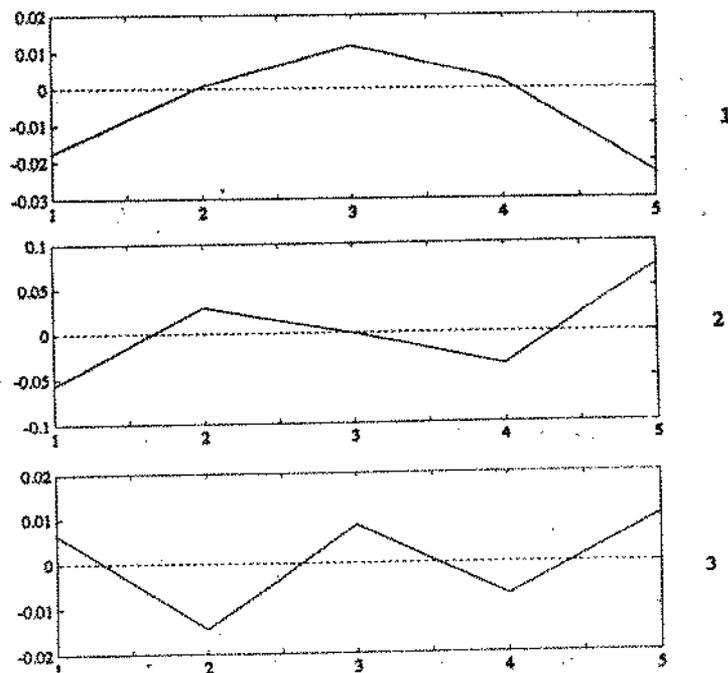


Fig. 6.36 Três primeiros modos de vibrar da viga

Os polos e resíduos encontrados na análise são ainda utilizados na reconstrução de Funções de Resposta em Freqüência do sistema, a fim de compará-las com aquelas obtidas através da transformação de fourier de cada um dos conjuntos de 2048 amostras de excitação e resposta do sistema. As figuras 6.37a-e apresentam os gráficos de amplitude (escala logarítmica) e fase (ângulo em graus) das referidas Funções de Resposta em Freqüência para os diferentes pontos de aplicação de força. Nota-se em tais figuras uma boa concordância quanto a forma das amplitudes das FRF e uma certa correlação dos ângulos de fase na maior parte do espectro. As maiores diferenças entretanto, (com excessão dos angulos de fase, que variam intensamente nas regiões +180 e -180) são notadas na parte inicial dos espectros das FRF obtidas através de reconstrução paramétrica e das FRF obtidas através das técnicas tradicionais no domínio da freqüência.

Observa-se nas FRF obtidas a partir de métodos tradicionais a existência de uma baixa freqüência, na ordem de 50Hz, provavelmente devido à suspensão elástica da estrutura. Tal freqüência não é detectada na análise no domínio do tempo devido ao reduzido número de pontos amostrais utilizados na análise (128 pontos), conveniente para a análise da maior parte do espectro, porém insuficiente na detecção de freqüências mais baixas. Em algumas curvas também percebe-se que a FRF obtida através dos parâmetros identificados, deixa de apresentar a ressonância em torno de 2800Hz. Isto deve-se não ao fato de que tal freqüência não tenha sido corretamente identificada pelo algoritmo, mas sim que no processo de seleção dos polos verdadeiros, o polo associado a tal freqüência não apresentou boa repetibilidade em sua parte real. Tal fato pode ser observado, na tabela 6.32.

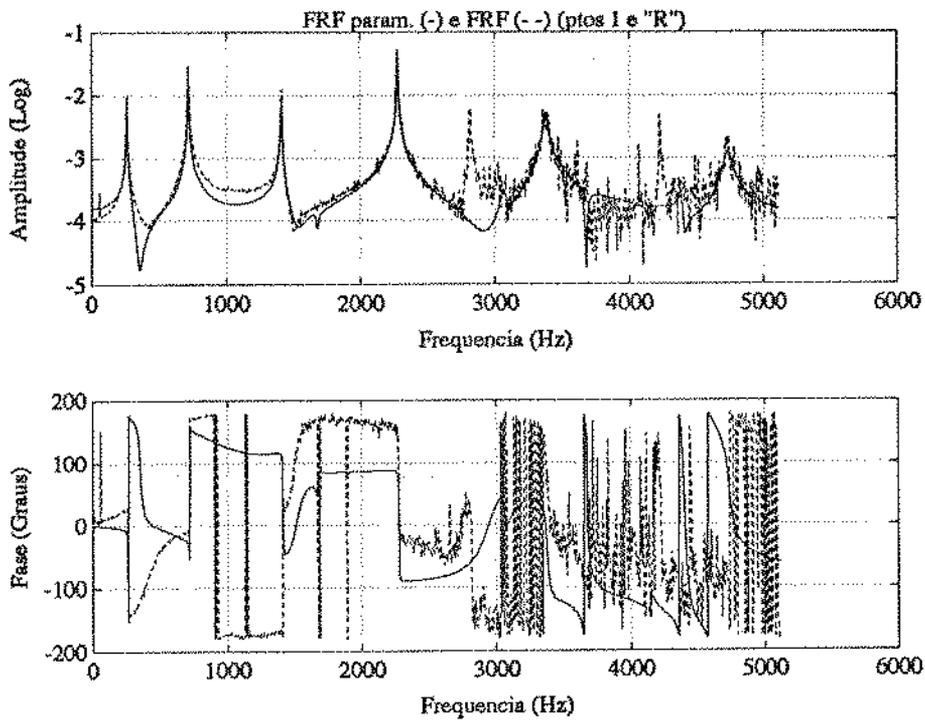


Fig. 6.37a FRF entre pontos 1 e R

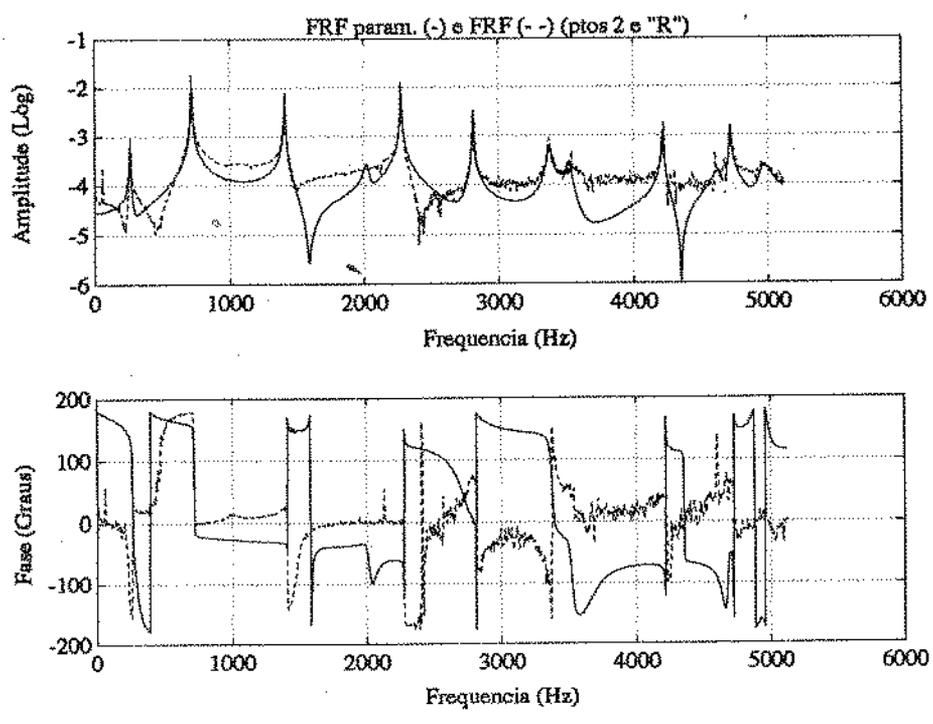


Fig. 6.37b FRF entre pontos 2 e R

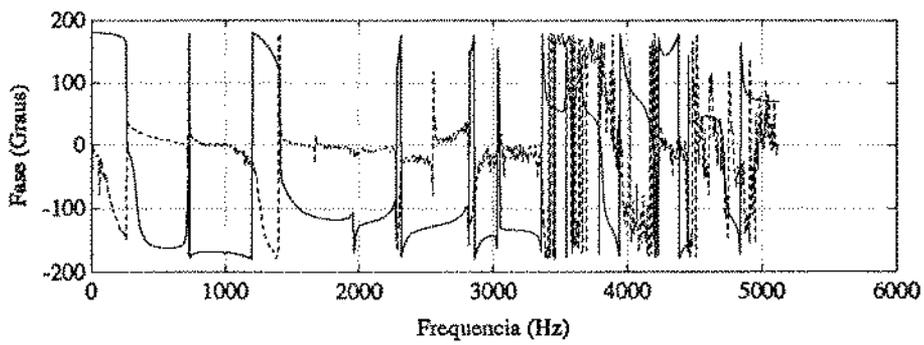
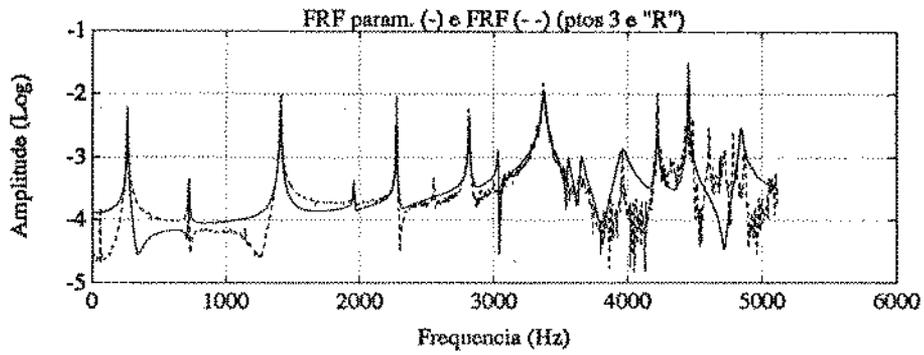


Fig. 6.37c FRF entre pontos 3 e R

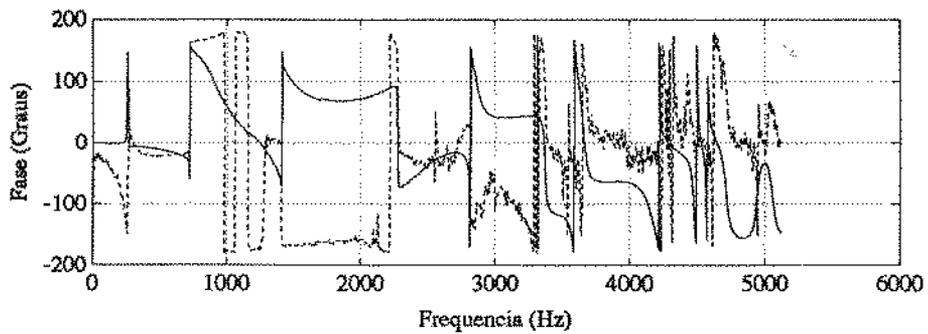
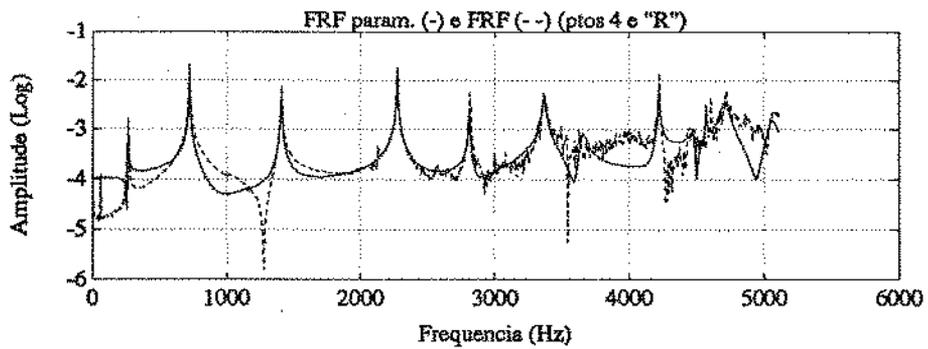


Fig. 6.37d FRF entre pontos 4 e R

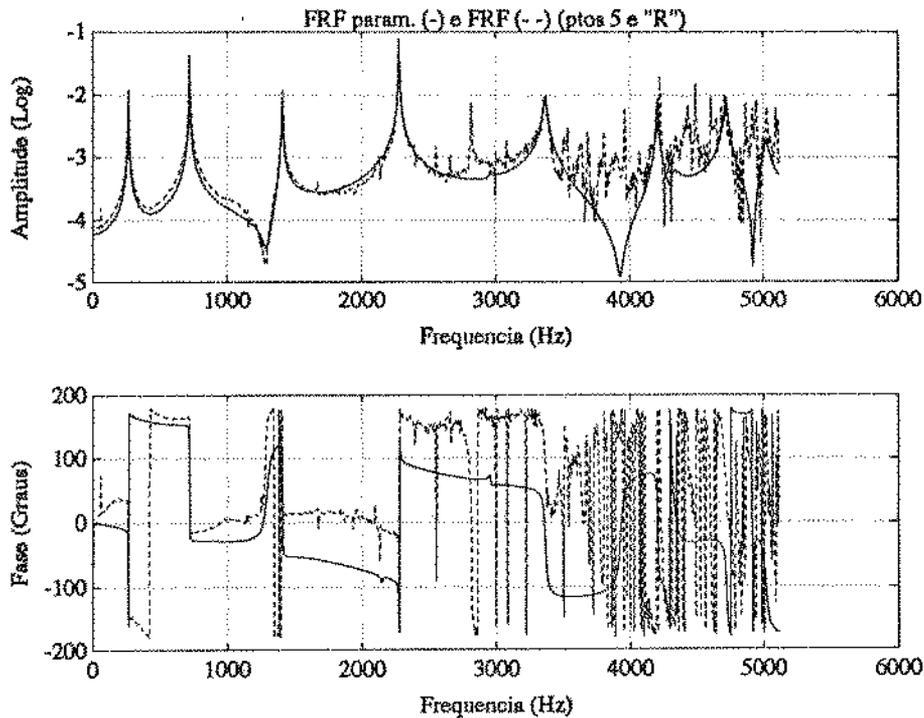


Fig. 6.37e FRF entre pontos 5 e R

## 6.9 CONCLUSÃO

De uma maneira geral as frequências e amortecimentos identificados dos sistemas simulados (incluido o sistema de 6 graus de liberdade), apresentaram muito bons resultados em todos os algoritmos utilizados. Em relação aos resíduos identificados os algoritmos da resposta impulsiva, da resposta aleatória e o ARMA apresentaram bons resultados, mas não foram identificados pelo ARIMA. Em relação a este algoritmo sugere-se testes onde o intervalo de amostragem no tempo seja menor, ou ainda o aumento das linhas da matriz do modelo. Na análise experimental da viga os resultados obtidos foram também coerentes com os resultados que seriam encontrados em uma análise tradicional no domínio da frequência.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Este trabalho procurou formular os fundamentos da discretização de sistemas contínuos e análise modal de maneira adequada à análise de sistemas dinâmicos no domínio do tempo, visando facilitar o acesso do analista aos procedimentos de identificação modal destes sistemas neste domínio.

Procurou ainda sintetizar as principais ideias relacionadas a modelos no tempo, utilizados em outras áreas do conhecimento científico tais como a engenharia elétrica e a estatística. No primeiro caso, a solução do modelo integro-diferencial (série de exponenciais) e na sua forma discreta o modelo de equações a diferenças (série geométrica), permitiu a sistematização do uso do algoritmo de Prony (usado normalmente para a identificação através da resposta livre) nos casos mais gerais de sistemas sujeitos a excitações impulsivas ou aleatórias.

No caso da estatística a síntese das principais ideias sobre o estudo de séries temporais e processos estocásticos através de modelos probabilísticos permitiu a utilização de algoritmos de identificação modal baseados nestes modelos, inclusive no caso em que o processo de saída do sistema apresenta-se não estacionário.

Assim, este trabalho procurou apresentar e sistematizar as duas abordagens típicas da identificação modal de sistemas dinâmicos no domínio do tempo, o modelo ARMA e o modelo de exponenciais complexas, abrindo o caminho para a utilização de outros modelos probabilísticos, como por exemplo o ARIMA e o sazonal SARIMA.

Os exemplos utilizados objetivaram a apresentação detalhada do uso dos algoritmos no domínio do tempo, além da utilização de técnicas de processamento. Permitiram a demonstração do potencial de análise dos algoritmos, como no caso dos modos com frequências coincidentes e também nos casos práticos, através da análise modal

de uma viga sujeita a forças impulsivas.

Como propostas de estudos futuros poderia-se citar a identificação de polos computacionais, o desenvolvimento de métodos numéricos mais eficientes para a solução de Prony e ainda a identificação e o tratamento de não linearidades no domínio do tempo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1 ] - CRAIG R.R.Jr. Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods , New York, John Wiley & Sons, 1981.
- [2 ] - MEIROVITCH L. Elements of Vibration Analysis , New York, McGraw-Hill Book Company, 1986.
- [3 ] - MEIROVITCH L. Introduction to Dynamics Control , New York, John Wiley & Sons, 1985.
- [4 ] - LUENBERGER D.G. Introduction to Dynamic Systems - Theory, Models and Applications, New York, John Wiley & Sons, 1979.
- [5 ] - GONTIER C.; SMAIL M.; GAUTIER P.E. A Time Domain Method for the Identification of Dynamic Parameters of Structures ,Journal of Mechanical Systems and Signal Processing , 1991.
- [6 ] - LATHI B.P. Signals, Systems and Communication , New York , John Wiley & Sons, 1965.
- [7 ] - MÜLLER P.C.;SCHIEHLEN W.O Linear Vibrations - A Theoretical Treatment of Multi-Degree-of-Freedom Vibrating Systems , Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [8 ] - EWINS D.J. Modal Testing and Practice ,New York, John Wiley , & Sons, 1984.
- [9 ] - KURKA P.R.G. Investigation of Dynamics Identification Techniques and Their Applications ,Phd. Thesis, University of Manchester, august, 1989.
- [10] - LATHI B.P. Signals, Systems and Controls , New York, Intext , Educational Publishers, 1974.
- [11] - ALLEMANG R.J.;BROWN D.L. Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis - Vol. III Modal Parameter Estimation , AFWAL-TR-87-3069 Vol III , Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Flight Dynamics Laboratory, december 1987.
- [12] - NEWLAND D.E. An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis , New York, Longman Inc., 1984.
- [13] - LATHI B.P. An Introduction to Random Signals and Communication Theory, Scranton, International Textbook Company, 1968.
- [14] - BENDAT J.S.; PIERSOL A.G. Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [15] - EYKHOFF P. System Identification, London, John Wiley & Sons , 1974.

- [16] - TREIGUER J.M. Análise de Sinais com Modelos Paramétricos : Relação entre os conceitos usados em sistemas lineares discretos no tempo e séries temporais estocásticas , relatório técnico, DMC-UNICAMP, junho de 1987.
- [17] - PELED A.,LIU B. Digital Signal Processing-Theory, Design, and Implementation , New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [18] - DAVIES P. The Analysis of Vibration and Acoustic Data Using Time Domain Methods , Ph.D. Thesis, University of Southampton, may, 1985.
- [19] - SHI D.;STÜHLER W. Modal Analysis with AR(ARMA) Model and Unknow excitation. In: IMAC-V, 1987, pp. 1171-1176.
- [20] - BOX G.E.P.;JENKINS G.M. Time Series Analysis Forecasting and Control , San Francisco, Holden-Day, 1971.
- [21] - WHEELWRIGHT S.C.;MAKRIDAKIS S. Forecasting for Management , New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [22] - XIUJIN T.;JINGXIA Y.;WU S.M. Modal and Structural Parameters Identification by Series Analysis using Digital Filtering. In: IMAC-IV , 1986, pp. 494-500.
- [23] - ZHAO X. Identification of Mechanical System Modal Parameters Using Time Series Approach. In: IMAC-III, 1985, pp. 536-541.
- [24] - DUNW W.H. Modal Analysis of Transient Response Data Using a Complex Exponential Algorithm , NEL Report, n.641, august,1977.
- [25] - DAVIES P.;HAMMOND J.K. A Comparison of Fourier and Parametric Methods for Structural System Identification, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Realibility in Design, V.106, pp. 40-48, january, 1984.
- [26] - KURKA P.R.G.; COWLEY A. Modal Parameter Identification from the Time Impulse Response of Complex Dynamic Systems, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, pp. 49-58, october, 1987.
- [27] - PRONY R. Essai Expérimental et Analytique sur les Lois de la Dilatabilité des Fluides Élastiques et sur celles de la Force Expansive de la Vapeur de l'Eau et de la Vapeur de l'Alcool, a différents Températures, Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris, V.1, cahier 2, An.III, pp. 24-76, 1795.
- [28] - LEURIDAN J.M.;BROWN D.L.;ALLEMANG R.J. Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis : A Unifying Approach, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, V.108, pp.1-8, january, 1986.
- [29] - PANDIT S.M.;METHA N.P. Data Dependent Systems Approach to Modal Analysis via State Space, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, V.107, pp.132-138, june, 1985.
- [30] - COLE H.A.JR. On-line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures , NASA CR-2205, mars, 1973.

- [31] - TREIGUER J.M. Desenvolvimento Teórico da Função Decremento Aleatório e a sua aplicação na Identificação de Sistemas Mecânicos, RBCM, V.6, n.2, 1984.
- [32] - VANDIVER J.K.; DUNWOODY A.B.; CAMPBELL R.B.; COOK M.F. A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique , Journal of Mechanical Design, V. 104 , pp.307-313, april, 1982.
- [33] - YANG J.C.S.; QI G.Z.; KAN C.D. Mathematical Base of Random Decrement Technique. In: IMAC-VIII, 1990, pp.28-34.
- [34] - BRAUN S. Mechanical Signature Analysis, London , Academic Press, 1986.
- [35] - ZHUGE Q.; LU Y.; YANG S. Non-stationary Modelling of Vibration Signals for Monitoring the Condition of Machinery, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, V.4, n.5, pp.355 - 365, 1990.
- [36] - KURKA P.R.G. Modal Parameter Identification in the Time Domain from a Random Excitation Force , Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, V.4, n.5, pp.393-404, 1990.
- [37] - HILDEBRAND F.B. Introduction to Numerical Analysis , McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [38] - TREIGUER J.M.; GERGES S.N.Y. Estudo Experimental sobre Identificação de Sistemas Mecânicos através do uso da Função Decremento Aleatório, IV-CBA, V.1, São Paulo, 1982, pp. 94-100.
- [39] - SOUZA J.P.; TREIGUER J.M.; ROSÁRIO J.M. Identificação dos Parâmetros de um Robô a partir das Informações dos seus Transdutores de Posição, XI-COBEM, São Paulo, 1991, pp.313-316.
- [40] - TREIGUER J.M. Desenvolvimento Teórico e Investigação Experimental da Função Decremento Aleatório , Tese M.ENG., Universidade Federal de Santa Catarina, março, 1981.
- [41] - FRANKLIN G.F.; POWELL J.D. Digital Control of Dynamic Systems , Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [42] - OPPENHEIM A., SCHAFER R.W. Digital Signal Processing , New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
- [43] - JURY E.J. Theory and Applications of the Z-transform , John Wiley & Sons, 1964.
- [44] - OGATA K. Engenharia de Controle Moderno, Rio de Janeiro , Prentice Hall do Brasil Ltda, 1982.
- [45] - Rabiner L.R.; GOLD B. Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, 1975.
- [46] - FISCHER S. Séries Univariantes de Tempo - Metodologia de Box & Jenkins, Fundação de Economia e Estatística, Porto Alegre, n.4, agosto, 1982.

- [47] - MAKRIDAKIS S.; WHEELWRIGHT S.C. Interactive Forecasting, Univariate and Multivariate Methods, San Francisco, Holden-Day, 1978.
- [48] - MAKRIDAKIS S.; WHEELWRIGHT S.C. Forecasting - Methods and Applications, New York, John Wiley & Sons, 1978.
- [49] - ROBERTS R.A.; MULLIS C.T. Digital Signal Processing, Massachusetts, Addison-Wesley, 1987.
- [50] - PRIESTLEY M.B. Spectral Analysis and Time Series, London, Academic Press, 1981.
- [51] - Kay S., Marple S.L. Spectrum Analysis - A Modern Perspective, Proceedings of the IEEE, V.69, n.11, 1981.
- [52] - CHATFIELD C. The Analysis of Time Series: Theory and Practice, London, Chapman and Hall, 1975.
- [53] - YANG Y. A Time Domain Identification Technique. The Oversized Eigenmatrix (OEM) Method, Transactions of ASME, Journal of Vibrations Acoustics, Stress and Reliability in Design, V.107, pp.53-59, 1985.
- [54] - YOUNG P. Recursive Approach to Time Series Analysis, The Institute of Mathematics and its Application, pp.209-224, may /june, 1974.
- [55] - VAN BLARICUM M.L., MITTRA R. Problems and Solutions Associated with Prony's Method for Processing Transient Data, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, V.26, pp.174-183, 1978.
- [56] - WALKER G. On Periodicity in Series of Related Terms, Proc. Royal Soc. London, series A, V.131, pp.518-532, 1931.
- [57] - WOLD H. A Study in the Analysis of Stationary Time Series, Upsalla: Almqvist and Wiksel, 1938.
- [58] - YULE G.U. On the Method of Investigation Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers, Philosophical Trans. Royal Soc. London, series A, vol. 226, pp. 267-298, 1972.
- [59] - KUO B.C. Digital Control Systems, New York, Holt, Rinehart and Wiston, 1980.
- [60] - IBRAHIM S.R.; MIKULCIK E.C. The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses, Shock and Vibrations Bulletin, n.46, pp.187-196, august, 1976.
- [61] - IBRAHIM S.R., MIKULCIK E.C. A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from Free Responses, Shock and Vibrations Bulletin, n.47, pp.183-198, september, 1977.

- [62] - IBRAHIM S.R. Application of Random Time Analysis to Dynamic Flight Measurements, Shock and Vibrations Bulletin, n.49, pt.2, pp.165-170, september, 1979.
- [63] - LEURIDAN J.;VOLD H. A Time Domain Linear Model Estimation Technique for Multiple Input Modal Analysis , ASME-AMD, V. 59, pp. 51-62, 1983.
- [64] - COOPER J.;WRIGHT J. Comparison of Some Time Domain System Identification Methods for Free Response Data . In: IMAC-IV , 1986.
- [65] - IBRAHIM S. Advantages in Time Domain Modal Identification and Modeling of Structure , preprint presented at 2nd International Symposium on Aerospace & Structure Dynamic, april, 1986.
- [66] - EWINS D.J. Use and Abuses of Modal Testing. In:IMAC-III, 1985, pp. xiii-xvii.
- [67] - BROWN D.L. Modal Analysis - Past, Present and Future . In: IMAC-I, 1982, pp. ix-xiii.
- [68] - VOLD H.;ROCKLING F. The Numerical Implementation of a Multi - Input Modal Estimation Method for Mini - Computer . In: IMAC-I, 1982, pp.542-546.
- [69] - JUANG J.N; PAPPA R.S. An Eigensystem Realization Alghoritm (ERA) for Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal of Guidance, Control and Dynamics, V.8, n.5,pp.620-627, september/october., 1985.
- [70] - LEURIDAN J. Some Direct Parameter Modal Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis , Ph.D. dissertation, Mech. and Ind. Eng. Depto., Univ. of Cincinnati, 1984.
- [71] - MERGEAY M. Least Squares Complex Exponential Method and Global Systems Parameter Estimation used by Modal Analysis . In: International Seminar on Modal Analysis, vol.3, 1983, 19pp.
- [72] - WU S.M.;PANDIT S.M. A New Approach to Manufacturing Systems . In: Proceedings NAMRC-11, 1974, pp.1-13.
- [73] - PANDIT S.M. Analysis of Vibration Records by Data Dependent Systems, Shock and Vibrations Bulletin, n.47, pt.4, pp.161-174.
- [74] - KURKA P.R.G. Modal Order Determination in a Time Domain Identification Alghoritm . In: IMAC-IX, Florence, february , 1991, pp.15-19.
- [75] - KURKA P.R.G.; MORAES M.; BLOTA E.; GOMES A.E. Método de Identificação Paramétrica no Domínio do Tempo, Através de Excitação Aleatória e Resposta de Sistemas Dinâmicos ,XI-COBEM, 1991, pp. 469-472.

- [76] - KURKA P.R.G.; LAUX G.P.E.C.; AZEVEDO H.R.T. Influência dos Modos Computacionais na Construção da I.F. de sistemas Dinâmicos , IV-DINAME, 1991, pp. 100-102.
- [77] - KURKA P.R.G.; BAZAN F.S. A Prony Moments Method for Modal Parameter Identification. Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, 1992, trabalho submetido em 07/05/92.
- [78] - KURKA P.R.G.; BAZAN F.S. Regularization Techniques in the Time Domain. In: 17th International Seminar on Modal Analysis, Catholic University of Leuven, Belgium, september, 1992, pp. 21-25.
- [79] - KURKA P.R.G.; BAZAN F.S. Iterative Methods for Inverse Problems .In: 4th IMPA Summer Workshop, january, 1992, pp.8-10. Advances in Time Domain Modal Parameters Identification of Mechanical Systems (cópias feitas sob solicitação).