

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR EDSON ANTONIO  
CAPPELLO SOUZA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 31/07/92.

Edson Capello Souza  
ORIENTADOR

"ACOPLAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
TRATAMENTO DE PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS  
DA ELASTODINÂMICA"

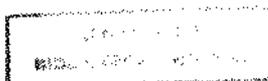
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

"Acoplamento do Método dos Elementos Finitos e Elementos  
de Contorno para tratamento de problemas Estacionários da  
Elastodinâmica"

Edson Antonio Capello Sousa

Tese apresentada à Faculdade de  
Engenharia Mecânica - UNICAMP  
como parte dos requisitos neces-  
sários para obtenção do título  
de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Campinas, 1992



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Mestrado

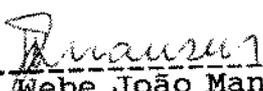
Título da Tese: Acoplamento do Método dos Elementos Finitos e  
Elementos de Contorno para Tratamento de  
Problemas Estacionários de Elastodinâmica

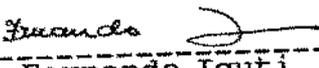
Autor: Edson Antonio Capello Sousa

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto<sup>20</sup>

Aprovado por:

  
-----  
Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

  
-----  
Prof. Dr. Webe João Mansur

  
-----  
Prof. Dr. Fernando Iguti

Campinas, 31 de julho de 1992.

Dedico esta aos meus irmãos  
Marcos e Marcia pela força,  
à Renata pela paciência e  
ao Bruninho.

## AGRADECIMENTOS

Todo trabalho possui uma gratificação e este para mim representa muito mais do que isto, pois permitiu-me duas coisas importantes na minha vida, amadurecimento profissional e pessoal, e isto deve-se também às pessoas que estiveram comigo neste período.

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, meu orientador, pela experiência técnica passada e que me foi indispensável na conclusão deste trabalho. E ao grande incentivo dado por ele.

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti, pelas sugestões bastante pertinentes.

Aos meus pais pelo permanente apoio.

Ao meu amigo Edson Carvalho pelas constantes ajudas e aos meus colegas do DMC.

## R E S U M O

Neste trabalho é feita uma análise comparativa entre o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o acoplamento entre os dois métodos aplicados a problemas dinâmicos estacionário entre solo-estrutura (DSSI - Dynamic Soil-Structure Interaction).

Apresentamos a formulação do MEF e MEC para obter o sistema final aplicado ao DSSI, bem como para o processo de acoplamento entre os métodos.

Finalmente, algumas aplicações práticas entre as três formas de modelar o problema do DSSI são mostradas com análise crítica dos resultados.

## A B S T R A C T

This Work presents a comparison among the MEF, the MEC and the coupling between them applied to dynamic soil-structure interaction (DSSI).

Formulations for the MEC and for the MEF to obtain the final system applied to DSSI and for the process of coupling between them are also presented.

Finally, some practical applications of the three ways of modelling the DSSI are shown with a critical analysis of the results.

## Í N D I C E

	pag.
1 - Introdução - .....	1
2 - O Método dos Elementos Finitos - .....	4
2.1 - Formulação para estado plano de Tensão/Deformação - estática - .....	4
2.1.1 - Ponto de vista do Elemento - .....	10
2.1.2 - Elemento Isoparamétrico - .....	12
2.2 - Estrutura do programa DLEARN - .....	16
2.2.1 - Validação do programa DLEARN - viga elástica simplesmente apoiada - .....	26
2.3 - Formulação para Elastodinâmica Estacionária - .	29
2.3.1 - Problemas Elastodinâmicos - .....	29
2.3.2 - Incorporação do corpo rígido - .....	33
2.3.3 - Validação dos resultados para problemas elastodinâmicos - .....	40
2.4 - Formulação para Viscoelastodinâmica Estacionária - .....	44
2.4.1 - Problema Viscoelastodinâmico - .....	44
2.4.2 - Validação - Comparação com os resultados do trabalho de Luco/Hadjian/Bos [7]	50
3 - O Método dos Elementos de Contorno para problema viscoelastodinâmico estacionário - .....	56
3.1 - Formulação viscoelastodinâmica - .....	56
3.2 - Discretização da Equação Integral de Contorno (O método dos Elementos de Contorno - MEC - ...	60

3.4 - Validação do MEC com o problema da viga - .....	64
4 - Acoplamento das Soluções de Elementos Finitos e Elementos de Contorno - .....	67
4.1 - Revisão crítica da literatura - .....	67
4.2 - A técnica do acoplamento MEF e MEC - .....	70
4.3 - Validação do acoplamento MEF-MEC com o problema da viga - .....	76
5 - Aplicações do MEF, MEC e acoplamento MEF-MEC à problemas do DSSI - .....	79
5.1 - Comparação do MEF-MEC com o MEC e um método semi-analítico - .....	79
5.2 - Comparação do MEF-MEC com o MEF - .....	88
6 - Conclusões - .....	96
7 - Bibliografia - .....	98
Apêndice - .....	103

## 1 - Introdução -

As preocupações dos pesquisadores, na área de geomecânica, com problemas dinâmicos de máquinas pesadas, como turbinas hidrelétricas e nucleares, não são recentes. Existia um consenso de que a melhor forma de resolver os problemas de vibrações entre máquinas era mudando as características de suas fundações, normalmente aumentando seu tamanho, tornando-as mais robustas, ou alterando suas propriedades físicas, tornando-as mais rígidas. Os modelos de representações do solo e da estrutura eram, então, bastante simplificados e não envolviam todos os parâmetros necessários.

Com o passar dos anos pode-se perceber que existe uma grande interação entre os parâmetros, tanto da máquina (rotação, massa, etc), quanto da fundação (geometria, massa, etc) e do solo (flexibilidade, densidade, etc).

Atualmente, criou-se uma área de pesquisa específica nesta direção chamada de DSSI (Dynamic Soil Structure Interaction). Grandes esforços tem sido feito para analisar os parâmetros envolvidos. Uma análise detalhada da evolução destes parâmetros e da utilização de métodos semi-analíticos aplicados ao DSSI pode ser encontrada, respectivamente, em [4] e [5], [6].

Com o avanço dos computadores de grande porte surgiram os métodos numéricos, permitindo uma análise mais detalhada desses problemas. Entre estes, o Método dos Elementos Finitos - MEF foi o que mais se destacou e é ainda o mais utilizado. Isto se deve ao fato de que sua estrutura permite modelar com mais facilidade problemas de geometrias complexas, problemas com domínios que possuem grandes variações das propriedades bem como problemas não lineares.

Apesar desta eficiência, o MEF, por ser um método de domínio, exige a discretização completa do mesmo, o que é uma limitação quando se modela domínios que se estendem ao "infinito". Isto é particularmente importante para problemas da elastodinâmica nos quais existe a propagação de ondas para o infinito, e que carregam consigo energia, que é retirada do sistema. Este fenômeno é chamado de amortecimento geométrico.

Quando modelamos o comportamento dinâmico de propagação de ondas no contínuo, por meio de uma malha finita, surge implicações relacionadas com a reflexão de ondas provocadas pelo truncamento da malha uma vez que a ferramenta computacional exige uma malha finita. Tais reflexões se dão independentemente do tipo de condição de contorno aplicada na extremidade da malha (Newman ou Dirichlet).

Diversas tentativas para o desenvolvimento dos chamados "elementos infinitos", que possibilitariam a incorporação do amortecimento geométrico no domínio considerado podem ser encontradas em [1, 2, 3].

Uma análise detalhada das vantagens e desvantagens do MEF contra as soluções analíticas pode ser encontrada no trabalho de Luco, Hadjian, e Bos [7] ou ainda no trabalho de Hadjian, Luco e Tsai [8].

No final da década de 70, surgiu um método computacional alternativo ao MEF e que possibilitaria um tratamento mais adequado ao problemas do DSSI, qual seja o Método dos Elementos de Contorno - MEC. Diferente do método dos Elementos Finitos, o MEC possui características típicas para aplicações em meio infinito, pois este não exige que todo o domínio infinito seja modelado mas somente o contorno deste domínio. Com isto por sua própria formulação, o MEC permite que o amortecimento geométrico, responsável por uma das formas de retirada de energia do sistema, esteja presente no modelo, caracterizando de fato um meio contínuo.

Deve-se notar ainda que existe um outro mecanismo de retirada de energia em um meio contínuo, associado ao atrito entre as partículas, e chamado de amortecimento material. Este, está presente em ambas as formulações, MEF e MEC, mas estes dois mecanismos de amortecimento são distintos não sendo possível aumentar o valor do amortecimento material em uma malha finita para simular a resistência do amortecimento geométrico. Estes mecanismo de retirada de energia em um meio contínuo será discutido oportunamente no trabalho.

O MEC apesar de melhor aplicado a estes problemas de meio infinito, tem grandes dificuldades de modelar domínios cujas propriedades físicas variem frequentemente. Daí então a

necessidade de se fazer um acoplamento entre os dois métodos numéricos (MEF e MEC), de modo a aproveitar a maior parte das vantagens dos mesmos simultaneamente.

Algumas dificuldades de ordem estruturais surgem na execução do acoplamento, ou seja, o MEF trabalha com apenas uma variável, por exemplo deslocamentos, ao passo que o MEC trabalha com duas variáveis, tensões e deslocamentos, devendo uma delas ser transformada. Outra diferença é que o MEF gera matrizes simétricas e em banda ao passo que o MEC gera matrizes não simétricas e completas. Algumas formas distintas de acoplamento têm sido estudadas. Uma das primeiras tentativas em se fazer o acoplamento foi o trabalho de Zienkiewicz, Kelly e Bettess [18] seguida pelo trabalho de Beer [19]. Os dois trabalhos apresentam formas diferentes de resolver o problema do acoplamento.

Trabalhos importantes como de Brebbia e Georgiou [21], Karabalis e Beskos [25] apresentam uma terceira maneira de proceder o acoplamento. Esta forma por sua vez parece ser a mais adequada, pois vem sendo utilizada em trabalhos bastante recentes como de Von Estorff [27] e Von Estorff e Prabucki [29].

Alguns detalhes sobre outros trabalhos importantes tratando problemas específicos com o acoplamento são apresentados na seção 4.1 desta dissertação.

Tendo em vista o exposto, o objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo comparativo entre os métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno aplicados a problemas de interação dinâmica solo-estrutura, bem como analisar o acoplamento entre os mesmos, através da validação com problemas de elasticidade bi-dimensional, e em particular problemas da DSSI. O estudo comparativo a que nos referimos foi possível graças a uma modificação que fizemos do programa Dlearn devido a Hughes [13] e ao programa desenvolvido por Pontes [37] sobre elementos de Contorno.

## 2 - O Método dos Elementos Finitos -

### 2.1 - Formulação para Estado Plano de Tensão/Deformação - estática

Iniciamos a apresentação da formulação do método para problemas de elasticidade em estado de deformação plana.

Partimos então da equação de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

e as condições de contorno,

$$u_i = q_i \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  tensor de tensões;  
 $f_i$  forças de corpo por unidade de volume;  
 $n_j$  é o vetor normal ao contorno  $\Gamma$ ; e  
 $q_i, h_i$  são os deslocamentos e as trações especificadas no contorno;

Expandimos a notação indicial para o caso bidimensional.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + f_1 &= 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + f_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{em } \Omega$$

$$\begin{aligned} u_1 - q_1 &= 0 & \text{em } \Gamma_{q_1} \\ u_2 - q_2 &= 0 & \text{em } \Gamma_{q_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{12} \cdot n_2) - h_1 &= 0 & \text{em } \Gamma_{h_1} \\ (\sigma_{21} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2) - h_2 &= 0 & \text{em } \Gamma_{h_2} \end{aligned}$$

Para o caso bidimensional, estados plano de deformações, ver referência [11] podemos especificar os índices

1 e 2 como sendo as coordenadas  $x$  e  $y$  do problema, respectivamente. Portanto, escrevemos novamente as equações para a coordenada  $x$  e descreveremos todo procedimento com esta coordenada apenas, sendo que seguindo os mesmos passos podemos chegar a um resultado semelhante para a coordenada  $y$ .

Portanto, a equação de equilíbrio e condições de contorno para a coordenada  $x$  são,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.4)$$

$$u_x - q_x = 0 \quad \text{em } \Gamma_{q_x} \quad (2.5)$$

$$\sigma_x \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y - h_x = 0 \quad \text{em } \Gamma_{h_x} \quad (2.6)$$

Vamos formular o MEF utilizando-nos do esquema dos Resíduos Ponderados, referência [12]. Desta forma, consideramos uma equação diferencial qualquer,

$$\mathcal{L} \phi + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.7)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial linear e 'p' é independente da variável  $\phi$ . Consideramos também que a equação (2.7) está sujeita às condições de contorno, que são dadas na forma geral,

$$\mathcal{M} \phi + r = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (2.8)$$

onde  $\mathcal{M}$  é outro operador diferencial e 'r' é independente da variável  $\phi$ . Temos, então, uma função aproximada de  $\phi$  através das funções de forma dada por

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.9)$$

onde  $M$  é o número de funções de forma  $N_m$  e  $a_m$  são constantes, e ainda  $N_m|_{\Gamma} = 0$  para todo  $m$ . Como  $\phi$  está sendo aproximada por uma série de funções podemos definir o resíduo no domínio,

$$R_{\Omega} = \mathcal{L} \hat{\phi} + p \quad \text{em } \Omega \quad (2.10)$$

e também o resíduo no contorno,

$$R_{\Gamma} = \mathfrak{M} \hat{\phi} + r \quad \text{em } \Gamma \quad (2.11)$$

Portanto, afim de tentar reduzir estes resíduos, fazemos uma soma ponderada do resíduo no contorno  $R_{\Gamma}$  e o resíduo no domínio  $R_{\Omega}$  escrevendo (equação (2.41) - referência [12]),

$$\int_{\Omega} W_1 R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_1 R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (2.12)$$

onde  $W_1$  e  $\bar{W}_1$  são funções ponderadoras que podem ser escolhidas independentemente.

Desta forma definimos a equação dos Resíduos Ponderados para um problema geral, equação (2.12). Observando as equações (2.8) à (2.11), podemos escrever a equação dos Resíduos Ponderados para o problema da elasticidade.

Construindo apenas para a direção  $x$  temos:

$$\int_{\Omega} W_1 \left( \frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{xy}}{\partial y} + f_x \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{h_x}} \bar{W}_1 \left( \hat{\sigma}_x \cdot n_x + \hat{\sigma}_{xy} \cdot n_y - h_x \right) d\Gamma_{h_x} \\ + \int_{\Gamma_{q_x}} \bar{W}_1 \left( \bar{u}_x - q_x \right) d\Gamma_{q_x} = 0 \quad (2.13)$$

Utilizamos a regra da integração por partes juntamente com o teorema de Green, ou seja

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dx + \int_{\Gamma} \alpha \beta n d\Gamma_x \quad (2.14)$$

e aplicamos para a primeira integral da equação (2.13) obtemos,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left( \hat{\sigma}_x \frac{\partial W_1}{\partial x} + \hat{\sigma}_{xy} \frac{\partial W_1}{\partial y} - W_1 f_x \right) d\Omega + \int_{\Gamma = \Gamma_{q_x} + \Gamma_{h_x}} W_1 \left( \hat{\sigma}_x \cdot n_x + \hat{\sigma}_{xy} \cdot n_y \right) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{h_x}} \bar{W}_1 \left( \hat{\sigma}_x \cdot n_x + \hat{\sigma}_{xy} \cdot n_y - h_x \right) d\Gamma_{h_x} + \int_{\Gamma_{q_x}} \bar{W}_1 \left( \bar{u}_x - q_x \right) d\Gamma_{q_x} = 0 \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Escolhendo as funções de forma de maneira conveniente,

$$W_1 = 0 \quad \text{em } \Gamma_{q_x} \quad (2.16)$$

$$\bar{W}_1 = -W_1 \quad \text{em } \Gamma_{h_x} \quad (2.17)$$

portanto a eq. (2.15) resulta,

$$\int_{\Omega} \left( \hat{\sigma}_x \frac{\partial W_1}{\partial x} + \hat{\sigma}_{xy} \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} W_1 \cdot f_x d\Omega - \int_{\Gamma_{h_x}} W_1 \cdot h_x d\Gamma_{h_x} = 0 \quad (2.18)$$

Devemos observar que apesar desta escolha feita para as funções de ponderação, equação (2.16), posteriormente  $W_1$  será diferente de zero no contorno  $\Gamma_{q_x}$  quando calcularmos as reações do problema.

Esta é a equação dos Resíduos Ponderados para a equação (2.4). Para a direção  $y$ , o procedimento é idêntico, portanto podemos expressar a última equação em uma forma matricial que inclui as duas direção.

$$\int_{\Omega} \left[ \begin{matrix} \bar{W}_1 \\ W_1 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \hat{\sigma} \end{matrix} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \begin{matrix} W_1 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} f \end{matrix} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \left[ \begin{matrix} W_1 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} h \end{matrix} \right\} d\Gamma \quad (2.19)$$

$$\text{onde } W_1 = \begin{bmatrix} W_1^x & 0 \\ 0 & W_1^y \end{bmatrix}$$

Utilizando a relação linear deformação-deslocamentos e as equações constitutivas da elasticidade linear homogênea e isotrópica podemos escrever a tensão em função dos deslocamentos.

A equação (2.9) pode ser escrita assim,

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M N_m d_m \quad (2.20)$$

onde  $N_m$  são as funções de forma que devem satisfazer as condições de contorno em  $\Gamma$  (equações 2.2 e 2.3) e  $d_m$  são coeficientes a serem determinados.

Relação deformações-deslocamentos,

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x & & \\ & \partial u_y / \partial y & \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x & & \end{bmatrix} = \xi \{\hat{u}\} \quad (2.21)$$

$$\text{onde } \xi = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e para estado plano de deformação temos a relação tensão-deformação através da matriz constitutiva dada por,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 \\ \text{sim} & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (2.23)$$

Utilizando as equações (2.21), (2.22) e (2.23), podemos expressar a tensão em função do campo de deslocamentos.

$$\int_{\Omega} \left( \left[ \xi \ W_1 \right]^T [D] \xi \ \hat{u} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \left[ W_1 \right] \{f\} d\Omega - \int_{\Gamma} \left[ W_1 \right] \{h\} d\Gamma \quad (2.24)$$

e usando a equação (2.20) temos,

$$\sum_{m=1}^N \left( \int_{\Omega} [{}^e W_1]^T [D] [{}^e N_m] d\Omega \right) d_m = \int_{\Omega} [W_1] \{f\} d\Omega - \int_{\Gamma} [W_1] \{h\} d\Gamma \quad (2.25)$$

Finalmente um sistema de equações matricial da forma,

$$[K] \{d\} = \{f\} \quad (2.26)$$

Onde está definido

$$K_{1m} = \int_{\Omega} [{}^e W_1]^T [D] [{}^e N_m] d\Omega, \quad (2.27)$$

$$f_1 = \int_{\Omega} [W_1] \{f\} d\Omega + \int_{\Gamma} [W_1] \{h\} d\Gamma \quad (2.28)$$

como sendo as matrizes de rigidez e o vetor carregamento, respectivamente.

Se utilizarmos ainda a aproximação de Galerkin para o Método dos Resíduos Ponderados,

$$(W_1 = N_1) \quad (2.29)$$

podemos escrever a matriz de rigidez da seguinte forma,

$$K_{1m} = \int_{\Omega} [{}^e N_1]^T [D] [{}^e N_m] d\Omega. \quad (2.30)$$

### 2.1.1 - Ponto de vista do elemento -

Até aqui nós tratamos o Método dos Elementos Finitos como um processo de aproximação por resíduos ponderados e posteriormente aproximação de Galerkin para formulação fraca.

O que faz isto agora um processo de elementos finitos é a característica das funções de forma.

Particularmente, diferente da função de forma anterior aplicada ao domínio completo, esta é uma função de forma linear aplicada a parte do domínio, ou seja em cada elemento. É a diferença da aplicação global e local ou no elemento.

Definimos a aproximação do campo de deslocamentos como,

$$\hat{u}(\vec{\xi}) = \begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M N_m(\vec{\xi}) d_m^e \quad (2.31)$$

$d_m^e = \{u_{x_m}, u_{y_m}\}^t$  é o vetor que contém as aproximações dos deslocamentos nos nós 'm',

$\vec{\xi} = (\xi, \eta)$  são as coordenadas do elemento, chamadas coordenadas locais, e a deformação dada por

$$\{\epsilon\} = \mathcal{L} \sum_{m=1}^M N_m d_m^e = \sum_{m=1}^M B_m d_m^e \quad (2.32)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador definido em (2.22). Desta forma,

$$B_m^e = \mathcal{L} N_m \begin{bmatrix} \partial N_m / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_m / \partial y \\ \partial N_m / \partial y & \partial N_m / \partial x \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Com as funções de ponderação definidas para aproximação de Galerkin, como anteriormente, a equação dos resíduos ponderados (2.25) agora pode ser reescrita para o elemento,

$$\sum_{m=1}^M \left[ \int_{\Omega_e} \left[ B_m^e \right]^T \left[ D \right] \left[ B_m^e \right] d\Omega \right] d_m^e = \int_{\Omega_e} N_i \left\{ f^e \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_h} N_i \left\{ h^e \right\} d\Gamma \quad (2.34)$$

ou na forma matricial,

$$\left[ K^e \right] \left\{ d^e \right\} = \left\{ f^e \right\} \quad (2.35)$$

onde as matrizes de rigidez e o carregamento dos elementos são dados por,

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \left[ B_l^e \right]^T \left[ D \right] \left[ B_m^e \right] d\Omega \quad (2.36)$$

$$f_l^e = \int_{\Omega_e} N_l^e \left\{ f \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} N_l^e \left\{ h \right\} d\Gamma \quad (2.37)$$

Portanto, para obtermos este sistema matricial, devemos definir inicialmente quais funções de forma que deveremos usar sobre os elementos. Isto será mostrado na seção seguinte.

### 2.1.2 - Elemento Isoparamétrico -

Nesta seção nós faremos uma análise das funções de forma a serem utilizadas no elemento.

Algumas condições são impostas a estas funções de forma, tais como:

C1 - deve ser uma função "suave" (não deve ter descontinuidades) em cada interior do elemento,  $\Omega_e$  ;

C2 - deve ser contínua nos contornos do elemento,  $\Gamma_e$ ; e

C3 - deve ser uma função completa.

As condições C1 e C2 garantem que as primeiras derivadas das funções de forma tenham, no mínimo, saltos finitos na interface do elemento, assegurando assim que todas as integrais usadas na obtenção das matrizes sejam bem definidas.

E ainda, as funções de forma poderiam ser escolhidas de modo a assegurar que a melhora na aproximação ocorra com o incremento do n. de funções de forma usadas. Uma condição óbvia para esta aproximação é que as funções de forma sejam dadas de maneira que a combinação  $\phi = \sum_{m=1}^M a_m N_m$  (equação (2.9)) possam representar qualquer função  $\phi$  quando  $M \rightarrow \infty$ . Isto satisfaz então a condição C3, ou seja a condição de "completeness" das funções de forma.

Podemos então escolher a função de forma mais conveniente para o nosso problema.

Para problemas bidimensionais (elastoestática - tensão/deformação plana) um dos elementos usado é o elemento quadrilateral bilinear.

O domínio deste elemento é definido pela localização dos seus quatro pontos nodais, onde  $\vec{x}_a$  é um vetor das coordenadas x e y. E a numeração destes nós no elemento é feita no sentido antihorário (ver figura 2.1).

Para representar o sistema local em uma forma mais conveniente, devemos fazer uma mudança de coordenada de um dado quadrilátero para um quadrado biunitário, como mostrado na figura 2.1. Isto permite uma facilidade nos cálculos das matrizes dos elementos.

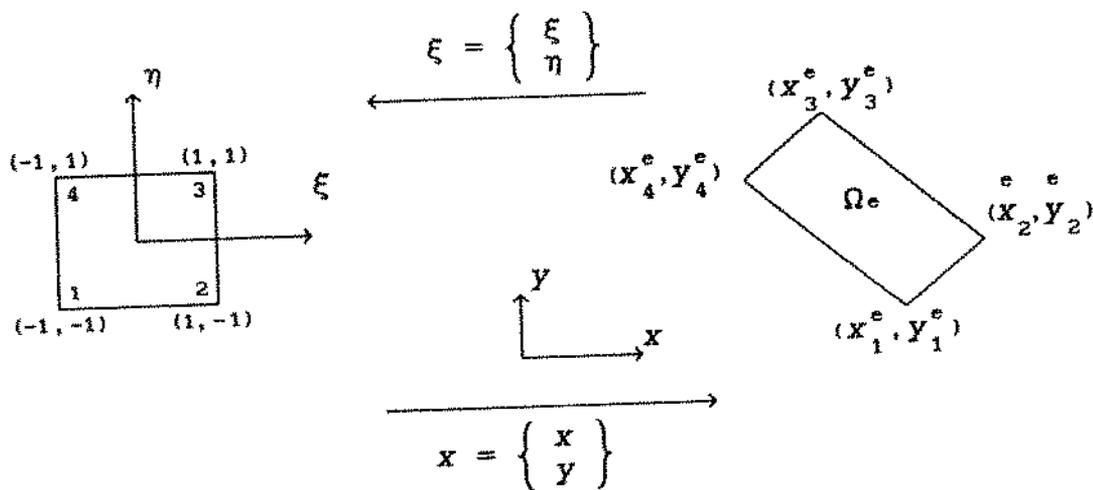


fig. 2.1 - Domínio do elemento quadrilateral bilinear e ordem dos nós locais.

Definimos as coordenadas de um ponto no quadrado biunitário como ,

$$\vec{\xi} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

e as coordenadas de um ponto no elemento ( $\Omega_e$ ) como,

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Estas podem ser relacionadas por um mapeamento através das funções de forma,

$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_a^e \quad (2.40)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) y_a^e \quad (2.41)$$

onde  $\xi, \eta$  são às vezes chamados de coordenadas naturais.

Podemos escrever ainda de forma compacta,

$$\vec{x}(\vec{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\vec{\xi}) \vec{x}_a^e \quad (2.42)$$

Agora devemos obter a função de forma para este tipo de elemento. Assumimos então uma expressão bilinear na forma de um polinômio,

$$x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \quad (2.43)$$

$$y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \quad (2.44)$$

onde  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's são parâmetros a serem determinados.

Devemos assumir também que,

$$x(\xi_a, \eta_a) = x_a^e \quad (2.45)$$

$$y(\xi_a, \eta_a) = y_a^e \quad (2.46)$$

onde  $\xi_a, \eta_a$  são coordenadas locais e podem ser dadas pela tabela 2.1 abaixo,

a	$\xi_a$	$\eta_a$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

tabela 2.1

As condições (2.45) e (2.46) impõem uma restrição à função de forma, do tipo  $N_a(\xi_b, \eta_b) = \delta_{ab}$ . Em palavras, isto significa que a função de forma de um nó qualquer do elemento deve ter valor unitário quando avaliada neste nó e deve ser nula nos demais nós.

Usando as equações (2.43) à (2.45) montamos dois sistemas para obtermos as constantes  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's.

Desenvolvendo para a coordenada  $x$ , usando a tabela 1 temos,

$$\begin{Bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

e solucionando o sistema de equações obtemos,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\
\alpha_1 &= \frac{-x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\
\alpha_2 &= \frac{-x_1 - x_2 + x_3 + x_4}{4} \\
\alpha_4 &= \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{4}
\end{aligned}
\tag{2.48}$$

substituindo essas constantes novamente na equação (2.43)

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [ & (1-\xi-\eta+\xi\eta) x_1 + (1+\xi-\eta-\xi\eta) x_2 + \\
& + (1+\xi+\eta+\xi\eta) x_3 + (1-\xi+\eta-\xi\eta) x_4 ]
\end{aligned}
\tag{2.49}$$

Comparando esta equação com a equação (2.40), observamos que,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta)
\end{aligned}
\tag{2.50}$$

Este procedimento pode ser seguido para a coordenada  $y$ , obtendo as mesmas funções de forma de (2.50). Portanto usando a tabela 2.1 escrevemos as funções de forma de uma maneira geral,

$$N_a(\vec{\xi}) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta)
\tag{2.51}$$

Observe que como citado anteriormente  $N_a(\xi_b) = \delta_{ab}$ .

Fazendo uma comparação entre a equação (2.42) e a equação (2.31), observamos que ambos deslocamentos  $\vec{u}$  e as coordenadas  $\vec{x}$  nos pontos dos elementos podem ser expressos usando as mesmas funções de forma. Isto então define o elemento isoparamétrico.

O elemento quadrilateral bilinear apresentado anteriormente é portanto um exemplo de elemento isoparamétrico.

## 2.2 - Estrutura do programa DLEARN -

Com a finalidade de reproduzir os resultados no trabalho de comparação entre o MEF e o MEC e ainda a implementação do acoplamento entre as técnicas, utilizamos o software de Elementos Finitos DLEARN [13]. Este software foi utilizado devido as suas vantagens estruturais e didáticas.

Para fazer as aplicações a que nos propomos foram necessárias algumas alterações no programa DLEARN , mantendo suas estruturas básicas de aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Nesta seção faremos uma breve apresentação da estrutura do programa.

As principais alterações foram:

- 1 - análise dinâmica no domínio da frequência, pois o programa Dlearn traz análise dinâmica no domínio do tempo;
- 2 - incorporação do corpo rígido, introduzindo as variáveis do corpo rígido (deslocamentos vertical e horizontal e rotação), bem como os carregamentos sobre o corpo rígido. E ainda implementação das rotinas que devem relacionar estas variáveis com os deslocamentos na malha, ou seja cálculo das matrizes de equilíbrio de forças e compatibilidade cinemática, para serem incorporadas ao sistema de equações (ver seção 2.3.2);
- 3 - implementação do elemento viscoelástico, exigindo variáveis complexas para o problema;
- 4 - introdução das rotinas do acoplamento do MEF/MEC;

Mais detalhes com relação a estas alterações feitas no programa Dlearn serão dadas conforme forem apresentadas as teorias de cada estágio.

Apesar das alterações, a estrutura básica do programa foi preservada e ainda pode-se aproveitar suas principais vantagens como:

- manteve-se sua estrutura de programa modular que o torna um programa facilmente legível e permite a introdução de mais tipos de elementos;

- manteve-se toda estrutura da alocação do armazenamento dinâmico com a mesma estrutura dos apontadores da memória

(armazenamento vetorizado);

- manteve-se o elemento quadrilateral, quatro-nós (bilinear), para tensão plana, deformação plana e torção ;

- manteve-se toda estrutura do elemento finito, como entrada de dados, montagem das matrizes de rigidez do elemento e matriz global. Permitindo então utilizarmos a mesma subrotina de resolução de sistemas e sua própria saída de dados.

O programa de elementos finitos Dlearn segue basicamente a teoria apresentada anteriormente. Ou seja, trata o problema por resíduos ponderados com formulação fraca e aproximação de Galerkin.

Alguns detalhes podem ser observados sobre a estrutura do programa quanto à programação de elementos finitos.

As três principais variáveis utilizadas pelo programa Dlearn na montagem da matriz de rigidez do elemento na matriz de rigidez global são:

a ) matriz IEN das incidências nodais, definida como:

$$- \text{IEN}(a, e) = A$$

$\leftarrow$  número do nó do elemento       $\downarrow$  número do elemento       $\rightarrow$  número do nó global

Esta armazena os dados nodais do elemento, o qual relaciona o número do nó global. Suas dimensões são "nen x nel", ou seja número de nós do elemento (para o elemento quadrilateral, nen=4) por número de elementos, respectivamente.

b ) matriz ID das condições de contorno, definida como:

$$- \text{ID}(i, A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \notin \Gamma_{q_1} \text{ (C.C. não especificadas)} \\ 0 & \text{se } A \in \Gamma_{q_1} \text{ (C.C. especificadas)} \end{cases}$$

$\leftarrow$  número do grau de liberdade       $\rightarrow$  número do nó global

e P é o número de equação global, ou seja número de graus de liberdade total da malha.

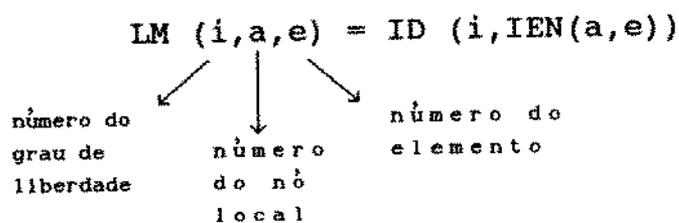
ID armazena a relação entre os números de nós globais

e seus graus de liberdade, ou seja número das equações do problema. Na entrada de dados este vetor armazena inicialmente as condições de contorno. Suas dimensões são  $ndof \times numnp$ , ou seja  $n_0$  de grau de liberdade do problema por  $n_0$  de nós globais.

Tanto o arranjo IEN quanto o ID são dados do problema. Deve-se observar que o arranjo ID inicialmente traz as condições de contorno do problema (definido como 0 para os graus de liberdade livre e 1 para os graus de liberdade restringidos). Posteriormente este arranjo ID armazenará o número de equações do problema.

Existe ainda mais uma matriz, que é definida a partir dos dados de entrada de IEN e ID. Isto é

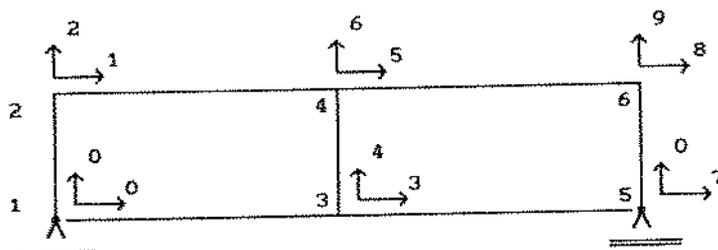
c) A matriz LM chamada matriz de locação e definida como:



A matriz LM define o número da equação global a partir dos dados do grau de liberdade, e do n. do nó local de um elemento, este último é exatamente a incidência nodal. Suas dimensões são dadas pelo n. de grau de liberdade, n. de nós do elemento pelo n. de elementos ( $ndof, nen, nel$ ).

Podemos agora, através de um exemplo prático aplicar os arranjos acima, partindo das matrizes dos elementos até a matriz global e compreender melhor a utilização dos códigos.

Temos uma viga biapoada com as seguintes numerações nodais,



Dados de entrada: nen = 4  
 nel = 2  
 ndof = 2  
 numnp = 6

arranjo ID (i,A)

		numnp					
		1	2	3	4	5	6
ndof	1	1	0	0	0	0	0
	2	1	0	0	0	1	0

Imediatamente após a sua leitura (condições de contorno) o arranjo ID armazena o número das equações do problema. Ou seja quando ID = 1 (grau de liberdade restringido)

$$\Rightarrow ID = ID - 1$$

quando ID = 0 (grau de liberdade livre)

$$\Rightarrow ID = ID_{\text{anterior}} + 1$$

Portanto o arranjo ID fica da seguinte forma, arranjo ID(i,a)

		numnp					
		1	2	3	4	5	6
ndof	1	0	1	3	5	7	8
	2	0	2	4	6	0	9

arranjo IEN(a,e)

		nel	
		1	2
nen	1	1	3
	2	3	5
	3	4	6
	4	2	4

Podemos então obter as matrizes dos elementos que são:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e & K_{15}^e & K_{16}^e & K_{17}^e & K_{18}^e \\
 & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e & K_{25}^e & K_{26}^e & K_{27}^e & K_{28}^e \\
 & & K_{33}^e & K_{34}^e & K_{35}^e & K_{36}^e & K_{37}^e & K_{38}^e \\
 & & & K_{44}^e & K_{45}^e & K_{46}^e & K_{47}^e & K_{48}^e \\
 & & & & K_{55}^e & K_{56}^e & K_{57}^e & K_{58}^e \\
 & & & & & K_{66}^e & K_{67}^e & K_{68}^e \\
 & & & & & & K_{77}^e & K_{78}^e \\
 & & & & & & & K_{88}^e
 \end{bmatrix}$$

(sim)

Devemos observar ainda que a matriz do elemento apresentada anteriormente foi obtida de acordo com as equações do elemento mostrada na seção 2.1, e as integrações presentes foram feitas utilizando a regra da Quadratura de Gauss com quatro pontos. Os pontos ficam localizados da seguinte forma no elemento.

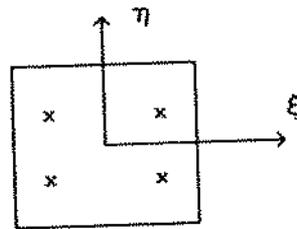
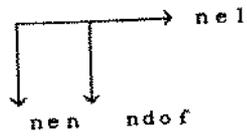


fig. 2.2 - Localização dos pontos da regra da quadratura de Gauss

Com os arranjos ID e IEN, monta-se o arranjo global LM, para ser utilizado na montagem de  $K^e$  em K global.



n<sub>e</sub> da equação global

{	1	{	1	0	3
	2		2	0	4
	3	{	1	3	7
	4		2	4	0
	5	{	1	5	8
	6		2	6	9
	7	{	1	1	5
	8		2	2	6

$$LM(i, a, e) = ID(i, IEN(a, e))$$

onde p = n<sub>o</sub> da equação local

$$p = (ndof (a - 1) + i)$$

nee=8, n<sub>o</sub> de equação elemento (nee=ndof.nen)

Portanto fazemos a montagem usando simetria ,  
 para o elemento 1 (e = 1) para o elemento 2 (e = 2)

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{11} + K_{77}^1 \\
 K_{12} &= K_{12} + K_{78}^1 \\
 K_{13} &= K_{13} + K_{73}^1 \\
 K_{14} &= K_{14} + K_{74}^1 \\
 K_{15} &= K_{15} + K_{75}^1 \\
 K_{16} &= K_{16} + K_{76}^1 \\
 \\
 K_{22} &= K_{22} + K_{88}^1 \\
 K_{23} &= K_{23} + K_{83}^1 \\
 K_{24} &= K_{24} + K_{84}^1 \\
 K_{25} &= K_{25} + K_{85}^1 \\
 K_{26} &= K_{26} + K_{86}^1 \\
 \\
 K_{33} &= K_{33} + K_{33}^1 \\
 K_{34} &= K_{34} + K_{34}^1 \\
 K_{35} &= K_{35} + K_{35}^1 \\
 K_{36} &= K_{36} + K_{36}^1 \\
 \\
 K_{44} &= K_{44} + K_{44}^1 \\
 K_{45} &= K_{45} + K_{45}^1 \\
 K_{46} &= K_{46} + K_{46}^1 \\
 \\
 K_{55} &= K_{55} + K_{55}^1 \\
 K_{56} &= K_{56} + K_{56}^1 \\
 \\
 K_{66} &= K_{66} + K_{66}^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} &= K_{33} + K_{11}^2 \\
 K_{34} &= K_{34} + K_{12}^2 \\
 K_{35} &= K_{35} + K_{17}^2 \\
 K_{36} &= K_{36} + K_{18}^2 \\
 K_{37} &= K_{37} + K_{13}^2 \\
 K_{38} &= K_{38} + K_{15}^2 \\
 K_{39} &= K_{39} + K_{16}^2 \\
 \\
 K_{44} &= K_{44} + K_{22}^2 \\
 K_{45} &= K_{45} + K_{27}^2 \\
 K_{46} &= K_{46} + K_{28}^2 \\
 K_{47} &= K_{47} + K_{23}^2 \\
 K_{48} &= K_{48} + K_{25}^2 \\
 K_{49} &= K_{49} + K_{26}^2 \\
 \\
 K_{55} &= K_{55} + K_{77}^2 \\
 K_{56} &= K_{56} + K_{78}^2 \\
 K_{57} &= K_{57} + K_{73}^2 \\
 K_{58} &= K_{58} + K_{75}^2 \\
 K_{59} &= K_{59} + K_{76}^2 \\
 \\
 K_{66} &= K_{66} + K_{88}^2 \\
 K_{67} &= K_{67} + K_{83}^2 \\
 K_{68} &= K_{68} + K_{85}^2 \\
 K_{69} &= K_{69} + K_{86}^2 \\
 \\
 K_{77} &= K_{77} + K_{33}^2 \\
 K_{78} &= K_{78} + K_{35}^2 \\
 K_{79} &= K_{79} + K_{36}^2 \\
 \\
 K_{88} &= K_{88} + K_{55}^2 \\
 K_{89} &= K_{89} + K_{56}^2 \\
 \\
 K_{99} &= K_{99} + K_{66}^2
 \end{aligned}$$

e ainda obtemos o vetor carregamento ,

para o elemento 1 (e = 1)

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_1 + f_7^1 \\
 f_2 &= f_2 + f_8^1 \\
 f_3 &= f_3 + f_3^1 \\
 f_4 &= f_4 + f_4^1 \\
 f_5 &= f_5 + f_5^1 \\
 f_6 &= f_6 + f_6^1
 \end{aligned}$$

para o elemento 2 (e = 2)

$$\begin{aligned}
 f_3 &= f_3 + f_1^2 \\
 f_4 &= f_4 + f_2^2 \\
 f_5 &= f_5 + f_7^2 \\
 f_6 &= f_6 + f_8^2 \\
 f_7 &= f_7 + f_3^2 \\
 f_8 &= f_8 + f_5^2 \\
 f_9 &= f_9 + f_6^2
 \end{aligned}$$

Portanto a matriz de rigidez global e o vetor carregamento global podem ser definidos.

$$[K] = \begin{matrix} & \xleftarrow{\text{largura de banda}} \xrightarrow{} & \\ \left[ \begin{array}{cccccc} K_{77}^1 & K_{78}^1 & K_{73}^1 & K_{74}^1 & K_{75}^1 & K_{76}^1 \\ & K_{88}^1 & K_{83}^1 & K_{84}^1 & K_{85}^1 & K_{86}^1 \\ & & K_{33}^1+K_{11}^2 & K_{34}^1+K_{12}^2 & K_{35}^1+K_{17}^2 & K_{36}^1+K_{18}^2 & K_{13}^2 & K_{15}^2 & K_{16}^2 \\ & & & K_{44}^1+K_{22}^2 & K_{45}^1+K_{27}^2 & K_{46}^1+K_{28}^2 & K_{23}^2 & K_{25}^2 & K_{26}^2 \\ & & & & K_{55}^1+K_{77}^2 & K_{56}^1+K_{78}^2 & K_{73}^2 & K_{75}^2 & K_{76}^2 \\ & & & & & K_{66}^1+K_{88}^2 & K_{83}^2 & K_{85}^2 & K_{86}^2 \\ & & & & & & K_{33}^2 & K_{35}^2 & K_{36}^2 \\ & & & & & & & K_{55}^2 & K_{56}^2 \\ & & & & & & & & K_{66}^2 \end{array} \right. & \end{matrix}$$

$$\{F\} = \begin{pmatrix} f_7^1 \\ f_8^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_5^1 + f_7^2 \\ f_6^1 + f_8^2 \\ f_3^2 \\ f_5^2 \\ f_6^2 \end{pmatrix}$$

Podemos observar de imediato uma das grandes vantagens do MEF em termos computacionais, que é o fato de a matriz de rigidez global ter a formação em banda, pois acoplam apenas os elementos que possuem nós comuns.

Definimos então um valor de semi-banda como:

$$m_k = \max \{i - n_i\}, \quad i=1, \dots, n$$

onde  $i$  = n. das colunas da matriz

$n_i$  = n. da linha do primeiro elemento não zero na coluna  $i$

$n$  = n. de colunas

Ou seja  $m_k$  é a máxima diferença entre a numeração dos graus de liberdade no sistema global pertencente a qualquer um dos elementos finitos na malha.

O programa Dlearn, utiliza o valor de  $m_k$  na resolução do sistema, usando o método da coluna ativa ou skyline. Isto permite armazenar a matriz em um vetor e cada coluna é armazenada neste vetor iniciando do primeiro elemento não zero até o elemento da diagonal, com isto reduz consideravelmente a quantidade de memória necessária para o armazenamento do sistema de equações.

Desta forma não haverá uma banda constante na matriz e o valor da semi-banda é estimado [14]. Chamado também de semi-banda principal, este valor no Dlearn é dado por  $m_k = \text{nalhs}/\text{neq}$ , onde nalhs é o n. total de termos armazenados pela matriz global e neq é o n. de equações do sistema global.

O valor de  $m_k$  torna-se importante pois ele estima o número de operações utilizadas na resolução do sistema e pode ser geralmente dados por  $o.s.(n.m_k^2)$ , onde  $n = \text{neq}$  (dimensão do sistema).

Outro vetor auxiliar utilizado no processo de montagem e armazenamento da matriz global do programa Dlearn é o vetor IDIAG. Este vetor possui dimensão neq (n. de equações) e define o endereço das diagonais de cada matriz. Para o exemplo apresentado anteriormente IDIAG pode ser definido como:

```
idiag (1) = 1
      (2) = 3
      (3) = 6
      (4) = 10
      (5) = 15
      (6) = 21
      (7) = 26
      (8) = 32
      (9) = 39
```

Com os valores de IDIAG e LM qualquer elemento da matriz [K] vetorizada pode ser obtido.

Finalmente uma das maiores vantagens estruturais do programa Dlearn é o seu processo de alocação dinâmica da

memória.

Com esta técnica todas as variáveis podem ser armazenadas em um só vetor principal. Isto permite que as dimensões dos problemas variem, dentro do limite máximo de armazenamento do vetor, não exigindo o redimensionamento de cada variável separadamente.

### 2.2.1 - Validação do programa Dlearn - Viga elástica simplesmente apoiada -

Como mencionado anteriormente, algumas alterações de ordem estruturais tiveram que ser feitas no programa Dlearn, afim de deixá-lo de uma forma mais conveniente para incorporar as subrotinas necessárias para as posteriores análises do nosso trabalho.

Com isto, após as primeiras modificações fizemos a validação do programa com o MEF aplicado a problemas de elasticidade bi-dimensional (estado plano de tensões). Através desta simulação validamos também a implementação da teoria de elementos finitos para problemas de elasticidade apresentada anteriormente.

A validação foi feita resolvendo um problema clássico da teoria de resistência dos materiais. Problema de uma viga elástica bi-apoiada sujeita a um carregamento estático distribuído.

A figura abaixo mostra a característica do problema resolvido e a malha de elementos finitos.

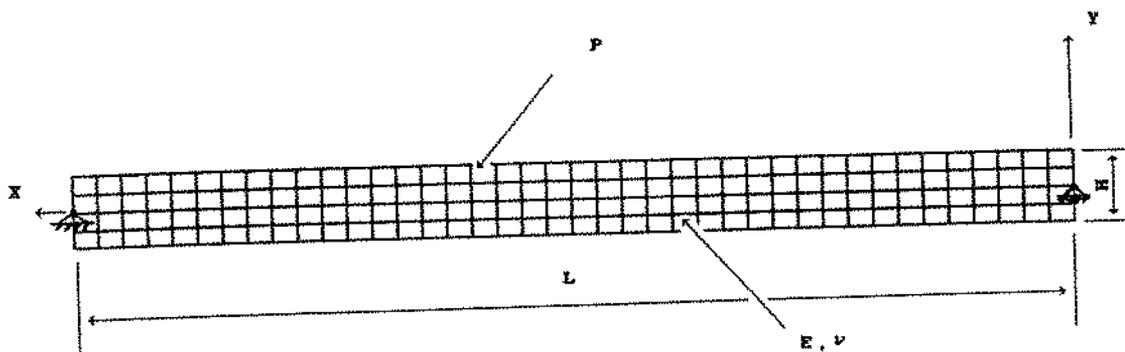


fig. 2.3 - Viga elástica discretizada por elementos finitos

Podemos definir os dados do problema como:

- $P = 100,0$  kN/m - carregamento distribuído
- $L = 0,2$  m - comprimento total da viga
- $H = 0,02$  m - altura da viga
- $E = 200,0$  GPa - módulo de Young
- $\nu = 0,3$  - coeficiente de Poisson

- devemos observar ainda que para caso plano a espessura  $t = 0,01 \text{ m}$

No MEF foi utilizado elementos quadrilateral bilinear, e a discretização foi feita com 160 elementos (ver figura 2.3 ). Devemos observar ainda que para o problema de tensão plana como este a ser analisado, a tensão permanece constante sobre toda a superfície do elemento. Portanto para que isto seja válido devemos considerar o carregamento como sendo distribuído sobre elementos, e isto pode ser feito utilizando as ponderações das funções de forma.

Com os resultados obtidos podemos comparar alguns deles com os valores obtidos da teoria da resistência dos materiais através da equação da linha elástica de um viga em flexão pura bi-apoiada nas mesmas condições.

A figura abaixo mostra a viga deformada e os respectivos pontos comparados com os valores analíticos (ver tabela 2.2).

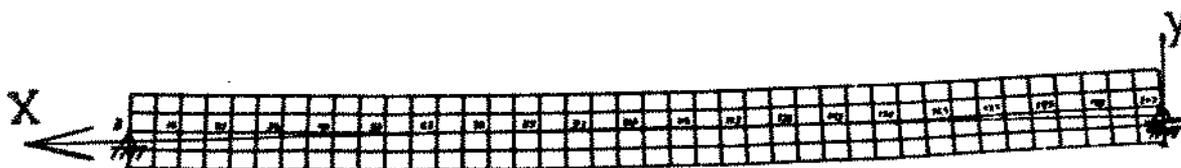


fig. 2.4 - viga elástica deformada.

tabela 2.2 - deslocamentos da viga elástica.

pont os nod a ls	MEF	Teórico	% erro
13	0,02512	0,02488	0,966
23	0,04919	0,04905	0,288
33	0,07189	0,07188	0,022
43	0,09267	0,09280	0,019
53	0,11106	0,11133	0,244
63	0,12664	0,12705	0,320
73	0,13911	0,13963	0,374
83	0,14819	0,14880	0,410
93	0,15371	0,15438	0,430
103	0,15557	0,15625	0,437
113	0,15371	0,15438	0,430
123	0,14819	0,14880	0,410
133	0,13911	0,13963	0,374
143	0,12664	0,12705	0,320
153	0,11106	0,11133	0,244
163	0,09267	0,09280	0,019
173	0,07189	0,07188	0,022
183	0,04919	0,04905	0,288
193	0,02512	0,02488	0,966

Podemos observar, pela tabela, a proximidade dos valores onde os erros são bastante reduzidos. Pode-se observar também a simetria dos deslocamentos da linha elástica partindo do ponto central da viga (nó 103) para a direita e esquerda longitudinal à viga.

## 2.3 - Formulação para Elastodinâmica Estacionária -

### 2.3.1 - Problema Elastodinâmico -

O problema aqui tem as mesmas características que aquelas apresentadas na seção 2.1, onde tratamos o problema elastoestático.

Nós generalizaremos o problema elastoestático, tornando as variáveis dependente do tempo, além da dependência do espaço como anteriormente. Isto implicará no acréscimo de um termo à equação de equilíbrio (equação (2.1)), termo este que inclui as propriedades inerciais do sistema.

O problema de valor de contorno apresentado na seção 2.1, agora torna-se um problema de valor de contorno juntamente com um problema de valor inicial, chamado então de problema de valor de contorno/inicial.

Apresentamos o problema da seguinte forma:

- equação do movimento -

$$\rho \cdot u_{i,tt} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (2.52)$$

- condições de contorno -

$$u_i = q_i \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \times [0, T] \quad (2.53)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \times [0, T] \quad (2.54)$$

- condições iniciais -

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_{0i}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega \quad (2.55)$$

$$u_{i,t}(\vec{x}, 0) = \dot{u}_{0i}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega \quad (2.56)$$

onde  $\rho$  = densidade de massa;

$u_{i,tt}$  = aceleração, ou segunda derivada do deslocamento  $u_i$  em relação ao tempo  $t$ ;

$u_{0i}$  = condição inicial do deslocamento, ou seja em  $t=0$ ;

$\dot{u}_{01}$  = condição inicial de velocidade, também em  $t=0$ ; e as demais variáveis foram definidas na seção 2.1.

Aqui agora a variável  $\vec{u}(\vec{x})$  do problema anterior, dependerá também do tempo e será definida como  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , onde  $\vec{x} \in \Omega$  e  $t \in ]0, T[$ .

Com isto a formulação fraca da aproximação de resíduos ponderados para este problema fica semelhante ao caso elastoestático (equação 2.25), como mostramos abaixo,

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{\Omega} [W_1] \cdot \rho \cdot [N_m] d\Omega \right) \ddot{d}_m + \sum_{m=1}^M \left( \int_{\Omega} [{}^{\varepsilon} W_1]^T [{}^D] [{}^{\varepsilon} N_m] d\Omega \right) \dot{d}_m = \int_{\Omega} [W_1] \{f\} d\Omega + \int_{\Gamma_h} [W_1] \{h\} d\Gamma \quad (2.57)$$

e ainda definimos

$$\vec{u} = u(\vec{x}, t) = \begin{Bmatrix} u_x(\vec{x}, t) \\ u_y(\vec{x}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M N_m(\vec{x}) d_m(t) \quad (2.58)$$

onde  $\vec{x} = (x, y)$ ; e

$$d_m(t) = \begin{Bmatrix} u_{xm}(t) \\ u_{ym}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Portanto usando a aproximação de Galerkin podemos finalmente definir o domínio sobre o elemento, (semelhante as equações (2.35), (2.36) e (2.37)), para obter o sistema matricial,

$$[M^e] \{ \dot{d}^e \} + [K^e] \{ d^e \} = \{ f^e \} \quad (2.60)$$

$$M_{im}^e = \int_{\Omega^e} [N_1] \cdot \rho \cdot [N_m] d\Omega \quad (2.61)$$

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \left[ \begin{array}{c} \xi \\ N_1 \end{array} \right]^t \left[ D \right] \left[ \begin{array}{c} \xi \\ N_m \end{array} \right] d\Omega \quad (2.62)$$

$$f_l^e = \int_{\Omega^e} \left[ N_1 \right] \left\{ f \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} \left[ N_1 \right] \left\{ h \right\} d\Gamma \quad (2.63)$$

e ainda definimos,

$$\vec{d}_m^e = \left\{ \begin{array}{c} u_{x_m} \\ u_{y_m} \end{array} \right\} \quad (2.64)$$

Devemos observar que o sistema global resultante da montagem das matrizes dos elementos dadas acima é um sistema dependente do tempo e do espaço. Tal como,

$$\left[ M \right] \left\{ \ddot{u}(\vec{x}, t) \right\} + \left[ K \right] \left\{ u(\vec{x}, t) \right\} = \left\{ f(t) \right\} \quad (2.65)$$

Trataremos nosso problema em regime estacionário (domínio da frequência). Ou seja se introduzirmos um carregamento harmônico do tipo,

$$f(t) = \bar{f} \exp(i \omega t) \quad (2.66)$$

$\bar{f}$  = amplitude da força de excitação,  
 $\omega$  = frequência de excitação. Como apenas derivadas de mesma ordem aparecem do lado esquerdo da equação (2.65), podemos esperar uma resposta também harmônica do tipo,

$$u(t) = \bar{u} \exp(i \omega t) \quad (2.67)$$

onde  $\bar{u}$  = amplitude dos deslocamentos.

Com isto podemos escrever a equação para resposta em frequência do problema como sendo,

$$\left[ K - \omega^2 \cdot M \right] \left\{ \bar{u} \right\} = \left\{ \bar{f} \right\} \quad (2.68)$$

ou ainda

$$[S] \{ \bar{u} \} = \{ f^- \} \quad (2.69)$$

onde  $[S] = [S(\omega)] = [K] - \omega^2 \cdot [M]$ , sendo

$S(\omega)$  = matriz de rigidez dinâmica ou impedância global.

### 2.3.2 - Incorporação de corpo rígido -

Para tratarmos a interação do solo com fundações consideradas rígidas é necessário impor aos deslocamentos nodais da malha de elementos finitos condições de compatibilidade cinemática com os deslocamentos do corpo rígido da fundação na interface solo/fundação.

Analogamente, deve ser considerado o equilíbrio de forças nodais da malha de elementos finitos com os esforços externos aplicados na fundação [15].

É praxe que se inicie a formulação para uma fundação rígida sem massa, ver figura 2.5.

Supomos o corpo rígido apresentado da seguinte forma:

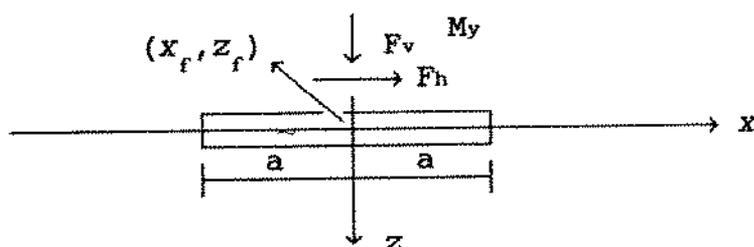


fig. 2.5 - Geometria da fundação rígida e condições de carregamento

Podemos impor duas condições, a saber:

1.) Condição de compatibilidade cinemática.

$$\begin{aligned} u_{z_1} &= u_v + \phi (x_1 - x_f) \\ u_{x_1} &= u_h - \phi (z_1 - z_f) \end{aligned} \quad (2.70)$$

$u_v, u_h$  = amplitude dos deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente no ponto de referência da fundação (deslocamentos do corpo rígido);

$u_{z_1}, u_{x_1}$  = amplitude dos deslocamentos vertical e

horizontal, respectivamente nos  $i$ -ésimos pontos da fundação, que coincidem com os pontos nodais da malha do MEF;

$\phi$  = amplitude do ângulo de rotação;

$\omega$  = frequência de rotação;

$x_i, z_i$  = coordenadas desses  $i$ -ésimos pontos; e

$x_f, z_f$  = coordenadas do ponto de referência da fundação.

De uma forma geral poderíamos escrever:

$$\begin{Bmatrix} u_{z_i} \\ u_{x_i} \\ \vdots \\ u_{z_n} \\ u_{x_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_i - x_f)/a \\ 0 & 1 & -(z_i - z_f)/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & (x_n - x_f)/a \\ 0 & 1 & -(z_n - z_f)/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi \cdot a \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

onde  $n$  é o número de pontos do solo em contato com a fundação.

Podemos escrever a equação (2.71) da seguinte forma,

$$\{ u_f \} = [ CC ] \{ u_t \} \quad (2.72)$$

onde  $[CC]$  é a matriz de compatibilidade cinemática.

2.) Condição de equilíbrio de forças.

$$\left. \begin{aligned} F_v &= \sum_{i=1}^n F_{z_i} \\ F_h &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \\ M_y &= \sum_{i=1}^n (F_{z_i} \cdot (x_i - x_f) - F_{x_i} \cdot (z_i - z_f)) \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

onde  $F_{z_i}, F_{x_i}$  = são as forças em cada ponto  $i$  da fundação nas direções vertical e horizontal,

respectivamente; e  
 $M_y$  = Momento em torno do eixo  $y$

Também de uma forma geral escrevemos,

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M_y/a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ (x_1-x_f)/a & -(z_1-z_f)/a & \dots & (x_n-x_f)/a & -(z_n-z_f)/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{z_1} \\ F_{x_1} \\ \vdots \\ F_{z_n} \\ F_{x_n} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

E podemos escrever a equação (2.74) da seguinte forma

$$\{ F_t \} = [ EQ ] \{ F_f \} \quad (2.75)$$

onde  $[EQ]$  é a matriz de equilíbrio de forças.

Portanto, prosseguimos agora impondo estas duas condições associadas ao movimento do corpo rígido da fundação ao sistema de equações global gerado pelo MEF.

Existem duas formas distintas de incorporação do corpo rígido no MEF que serão apresentadas nas seções seguintes e discutidas posteriormente.

### 2.3.2.1 - Incorporação do corpo rígido sem manter a simetria da matriz global -

Inicialmente temos um sistema global gerado pelo MEF.

$$[ S ] \{ u \} = \{ F \} \quad (2.76)$$

onde  $[S]$  = matriz de rigidez dinâmica global;  
 $\{u\}$  = vetor de deslocamentos dos nós; e

$\{F\}$  = vetor de carregamento dos nós.

Definimos as características do problema discretizado como na fig. abaixo,

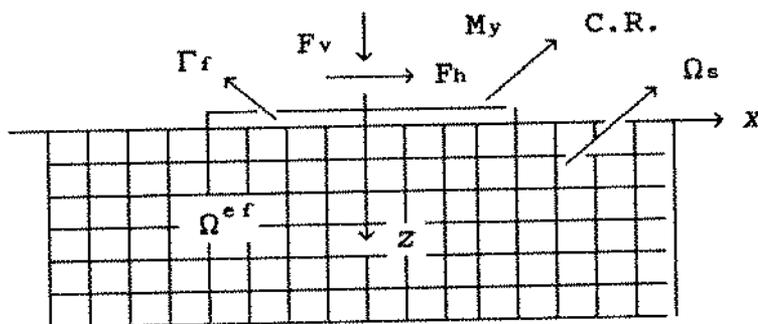


fig. 2.6 - domínio do solo discretizado com MEF e corpo rígido

Na figura nós definimos  $\Omega_s$  como o domínio discretizado pelo MEF com os nós fora da interface e  $\Gamma_f$  o contorno com os nós da interface. Portanto usaremos os subíndices "r" para identificar os nós na fundação e "s" para identificar os nós no solo fora da fundação.

Podemos então rearranjar o sistema de equações, de tal forma que separamos as variáveis dos nós em contato com o corpo rígido e aquelas livres do corpo rígido, ficando o sistema assim,

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sf} \\ S_{fs} & S_{fr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

onde  $F_s$  = carregamento nodal no solo fora da fundação, em geral pode ser nulo; e

$F_f$  = carregamento nodal dos nós na interface.

Aumentamos então o sistema de equações com as condições de corpo rígido e reordenando as incógnitas podemos escrever o sistema total com as equações (2.72), (2.75) e

(2.77),

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sf} & 0 & 0 \\ S_{fs} & S_{ff} & 0 & -I \\ 0 & I & -CC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EQ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_f \\ u_t \\ F_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ 0 \\ 0 \\ F_t \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

onde além dos deslocamentos  $u_s$  e das forças  $F_f$  desejamos

encontrar  $u_t = \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi.a \end{Bmatrix}$ , que são os deslocamentos do corpo

rígido. Observe que quando existe mistura de variáveis físicas, pode existir problema de balanceamento numérico.

#### 2.3.2.2 - Incorporação do corpo rígido mantendo a simetria da matriz global -

Existe uma outra forma de se fazer a incorporação do corpo rígido no MEF, porém mantendo a simetria da matriz global.

Inicialmente separamos as variáveis da fundação e as variáveis livres da fundação, como no caso anterior. (ver sistema matricial da equação (2.77))

Separando a parte inferior daquele sistema, repetimos aqui,

$$\begin{bmatrix} S_{fs} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f \end{Bmatrix}$$

Fazemos então uma transformação de variáveis nesta parte do sistema, multiplicando o sistema por uma matriz transformação [T].

$$[T]^t [S_{fs}] \{u_s\} + [T]^t [S_{ff}] \{u_f\} = [T]^t \{F_f\} \quad (2.79)$$

Podemos escolher a matriz de transformação [T] como sendo a matriz de compatibilidade cinemática, ou seja,

$$[T] = [CC] \quad (2.80)$$

Observando agora a matriz de compatibilidade cinemática [CC] e a matriz de equilíbrio de forças [EQ], podemos escrever,

$$[CC]^t = [EQ] \quad (2.81)$$

e conseqüentemente o lado direito do sistema (2.79) fica,

$$\{F_t\} = [T]^t \{F_f\} = [CC]^t \{F_f\} = [EQ] \{F_f\} \quad (2.82)$$

que é exatamente a imposição dada pela condição de equilíbrio de forças em (2.75).

Finalmente substituindo [T] por [CC] no lado esquerdo, impomos a condição de compatibilidade cinemática dada em (2.72).

Esta parte do sistema resulta,

$$[CC]^t [S_{fs}] \{u_s\} + [CC]^t [S_{ff}] [CC] \{u_t\} = [CC]^t \{F_f\} \quad (2.83)$$

Posteriormente para completar a transformação do sistema de equações, a parte superior do sistema fica,

$$[S_{ss}] \{u_s\} + [S_{sf}] [CC] \{u_t\} = \{F_s\} \quad (2.84)$$

Portanto o sistema completo agora reduzido torna-se,

$$\left[ \begin{array}{c|c} S_{ss} & S'_{sf} \\ \hline S'_{fs} & S'_{ff} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_t \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\text{onde } \begin{bmatrix} S'_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} S_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CC \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S'_{sf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CC \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S'_{fs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{sf} \end{bmatrix}^t$$

Devemos observar que o MEF tem uma grande vantagem computacional de produzir um sistema com matrizes simétricas e em banda. Isto ocorre com a segunda forma de incorporação do corpo rígido mostrada acima, mantendo esta vantagem do MEF. Outra grande vantagem desta forma de incorporar o corpo rígido é que o sistema final obtido não é mixto, ou seja as incógnitas são apenas deslocamentos. Isto pode melhorar o número de condicionamento do sistema, ou seja não traz problemas de balanceamento numérico como observamos anteriormente que ocorre quando misturamos variáveis físicas.

Podemos perceber ainda que além de não destruir a simetria das matrizes, a segunda forma reduz a ordem destas. De fato, ela transforma todos os graus de liberdade dos pontos em contato com a fundação nos três graus de liberdade da fundação ( $u_v, u_h, \phi$ ).

Na incorporação do corpo rígido utilizada neste trabalho, foi implementada a segunda forma, mantendo a simetria das matrizes.

### 2.3.3 - Validação dos resultados para problemas elastodinâmicos -

Esta seção trata da validação das teorias apresentadas nos itens anteriores deste capítulo.

O problema considerado é o de uma viga elástica em balanço excitada uni-axialmente por uma força (harmônica), cuja frequência é  $\Omega$ .

A viga é discretizada com 40 elementos finitos quadrilaterais bilineares. As características do problema bem como a malha de elementos finitos são apresentadas na figura 2.7, abaixo.

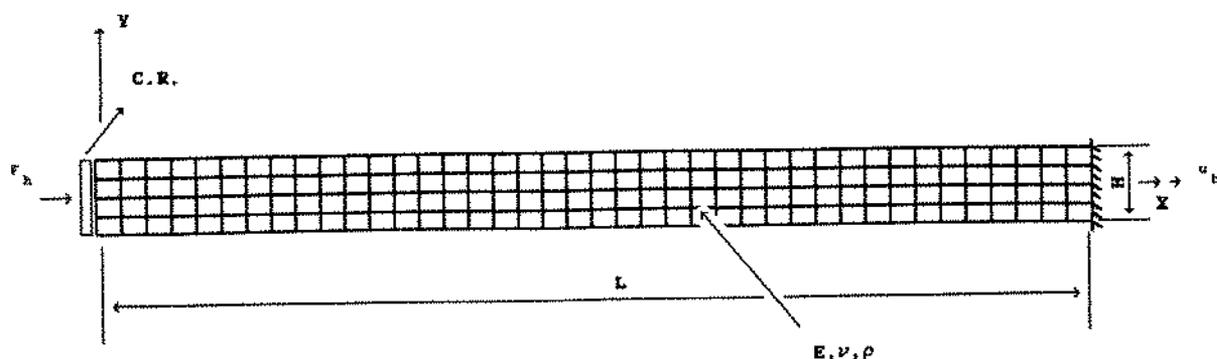


fig 2.7 - viga elástica excitada dinamicamente e discretizada por elementos finitos.

Os dados da figura para o problema são os seguintes:

- $L = 0,2$  m - comprimento total da viga
- $H = 0,02$  m - altura da viga
- $F_h = 1,0$  N - carregamento axial aplicado sobre o corpo rígido
- $F_v, M$  - é o carregamento transversal e momento fletor, respectivamente, no caso são nulos
- $E = 2,6$  MPa - módulo de rigidez (este valor do módulo de rigidez foi escolhido para que o módulo de rigidez transversal  $G$  seja unitário, devido a adimensionalização feita para problemas solo-estrutura, meio contínuo)
- $\nu = 0,3$  - coeficiente de Poisson
- $\rho = 1,0$  kg/m<sup>3</sup> - densidade de massa
- $t = 0,01$  m - espessura da viga

Com isto o problema a ser resolvido está definido. Como trataremos posteriormente de problemas dinâmico solo-estrutura (meio contínuo), usaremos aqui uma frequência adimensional ao definida como [16]:

$$a_0 = \frac{\omega \cdot a}{V_s}$$

onde  $\omega$  = frequência de excitação;

$a$  = metade da largura do corpo rígido; e

$V_s$  = velocidade de onda cisalhante, definida como

$$V_s = \left( \frac{G}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

A curva de resposta em frequência obtida pela utilização do MEF é mostrada na figura 2.8. Através dela, obtemos as frequências naturais (autovalores), simplesmente observando os pontos de frequências para amplitudes máximas. Isto pode ser feito diretamente do gráfico da figura 2.8 ou mesmo dos valores obtidos nos arquivos de saída do programa do MEF. Com estes valores e transformando as frequências teóricas em valores adimensionais, podemos construir a tabela 2.3. Esta tabela traz, entre parenteses, os erros relativos obtidos entre os dois valores de frequências naturais da viga excitada uni-axialmente.

Até o presente momento não definimos o problema viscoelastodinâmico, portanto os resultados do MEF no gráfico e na tabela representam as frequências naturais obtidas com fator de amortecimento material nulo.

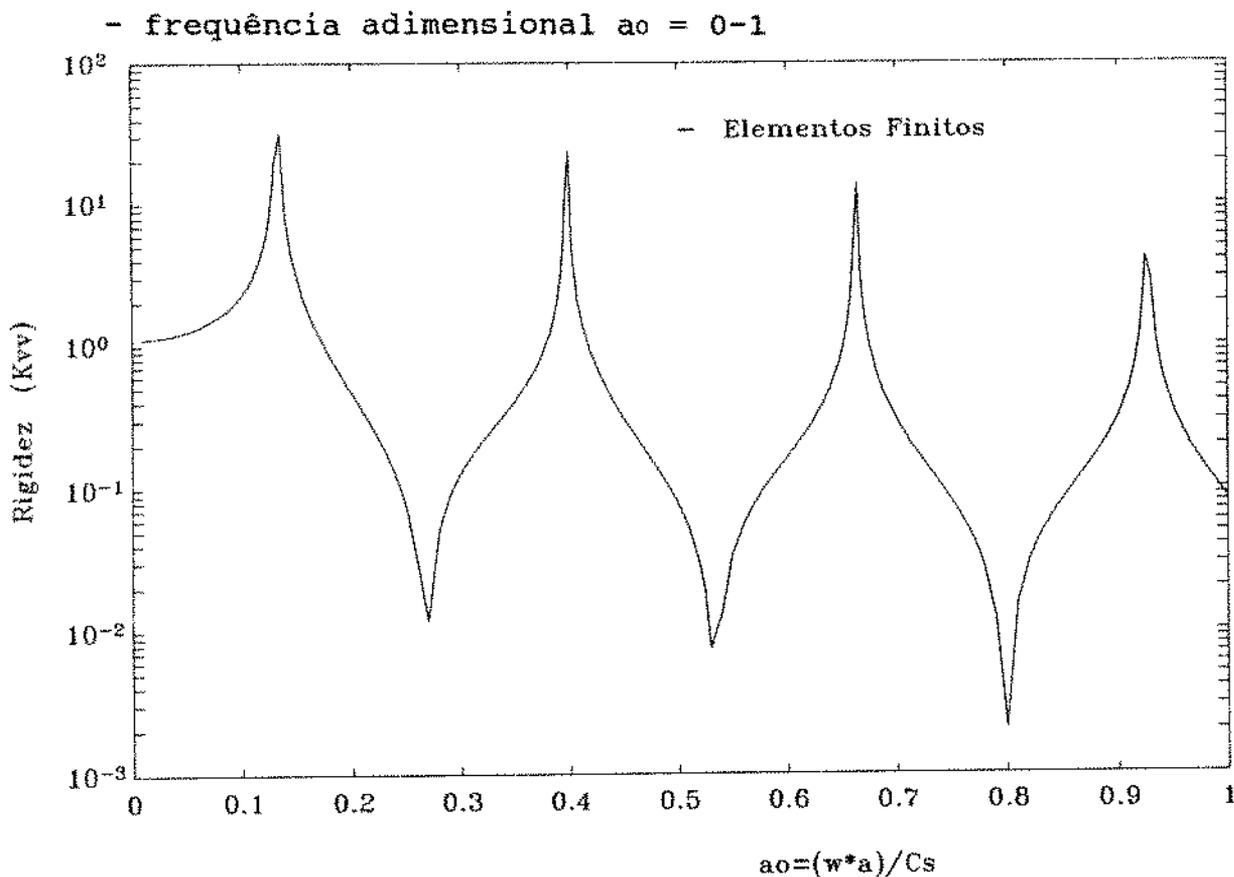


fig 2.8 - Curva de resposta em frequência da viga elástica, frequência  $\omega_0 = 0 - 1$ .

tab. 2.3 - Frequências naturais adimensionais da viga elástica, gráfico da figura 2.8

ponto	MEF	Teórico
1	0,130 (2,6%)	0,1266
2	0,400 (5,2%)	0,3799
3	0,665 (5,0%)	0,6332
4	0,925 (4,3%)	0,8865

Com respeito aos resultados apresentados acima existem algumas aproximações que devem ser consideradas no modelo. Uma delas é

o engastamento da viga em uma das extremidades, restringindo tanto os graus de liberdade no sentido do carregamento quanto no sentido perpendicular a esta. Isto influencia o efeito de Poisson próximo a esta extremidade. A outra tem o mesmo efeito mas é provocada na outra extremidade sobre o corpo rígido. Isto ocorre pois o tipo de interação entre o corpo rígido e a viga é do tipo contato colado.

Uma forma de evitar este tipo de problema e minimizar o erro nesta simulação seria o aumento da relação entre comprimento  $L$  da viga e largura  $h$ , ou corrigir as condições de contorno de tal forma que possa permitir os deslocamentos verticais dos nós que estão na extremidade engastada da viga e ainda permitir um contato corpo rígido/viga sem efeito de cisalhamento.

## 2.4 - Formulação para Viscoelastodinâmica Estacionária -

### 2.4.1 - Problema Viscoelastodinâmico -

Até o presente momento nós tratamos apenas problemas elastodinâmicos. Uma modelagem mais realista do solo é obtido ao se incluir a dissipação de energia devido ao atrito, que recebe o nome de amortecimento material do meio. Partindo da equação do movimento e suas condições de contorno e iniciais (equações (2.52) à (2.56)), podemos transformar os problemas do caso elastodinâmico para o caso viscoelastodinâmico.

Iniciamos da equação do movimento na direção  $x$ . O procedimento será feito apenas para a coordenada  $x$ , sendo que para a direção  $y$ , segue de forma similar.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.86)$$

Dadas as formas gerais da relação constitutiva viscoelástica, referência [17], temos em notação indicial,

$$\sigma_{ij} = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.87)$$

onde  $G_{ijkl}(t)$  é chamada função relaxação. Podemos escrever ainda,

$$\epsilon_{ij} = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.88)$$

onde  $J_{ijkl}(t)$  é chamada função fluência.

Introduzindo o tensor de desvio  $S_{ij}$  e as correspondentes componentes  $e_{ij}$  da dilatação volumétrica de deformação,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\delta_{ij} \sigma_{kk}) \quad S_{11} = 0 \quad (2.89)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\delta_{ij} \varepsilon_{kk}) \quad e_{11} = 0 \quad (2.90)$$

Podemos então decompor a função relaxação em duas funções relaxação independentes,

$$S_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.91)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{\partial e_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.92)$$

Escrevendo também as funções de "creep" independentes,

$$e_{ij} = \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau) \frac{\partial S_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.93)$$

$$e_{kk} = \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.94)$$

Com isto definimos a relação tensão-deformação isotrópica viscoelástica completa,

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.95)$$

onde  $\lambda(t-\tau)$  e  $\mu(t-\tau)$  são funções relaxação apropriadas que podem ser obtidas de  $G_1$  e  $J_1$ , ver Christensen [17].

Escrevemos então a equação acima expandindo os índices e definindo os termos para o nosso caso bidimensional, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x & ; & & \sigma_{22} &= \sigma_y & ; & & \sigma_{xy} &= \tau_{12} \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_x & ; & & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_y & ; & & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{xy} \end{aligned}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_x = \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial(\epsilon_x(\tau) + \epsilon_y(\tau))}{\partial\tau} d\tau + 2 \cdot \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial\epsilon_x(\tau)}{\partial\tau} d\tau \quad (2.96)$$

$$\tau_{11} = \tau_{xy} = \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial\epsilon_{xy}(\tau)}{\partial\tau} d\tau \quad (2.97)$$

Por definição, da elasticidade sabemos que,

$$2 \cdot \epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (2.98)$$

ou expandindo os índices e tratando para o caso bidimensional,

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot \epsilon_{11} &= 2 \cdot \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ 2 \cdot \epsilon_{22} &= 2 \cdot \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ 2 \cdot \epsilon_{12} &= 2 \cdot \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Rightarrow \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

Substituindo as relações tensão-deformação (equações (2.96) e (2.97)) e as relações deformação-deslocamento (equação (2.99)) na equação de equilíbrio para x (equação (2.86)) temos,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) d\tau + 2 \cdot \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right) d\tau + \\ &+ 2 \cdot \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial}{\partial\tau} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) d\tau + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.100) \end{aligned}$$

reordenando a equação (2.100) temos,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) d\tau + \int_{-\infty}^t [\mu(t-\tau) + \lambda(t-\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) d\tau \\ &+ F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.101) \end{aligned}$$

Esta é a equação do movimento (em termos de deslocamentos na direção da coordenada  $x$ ) para um problema de viscoelasticidade transiente linear. Para a coordenada  $y$  o procedimento é exatamente o mesmo. Deve-se observar aqui que  $u_x$  é função das coordenadas  $x, y$  e do tempo, ou seja  $u_x = u_x(\vec{x}, t)$ , e  $\vec{x} = (x, y)$

Nosso trabalho se restringe a viscoelastodinâmica estacionária, portanto devemos passar esta equação do domínio do tempo para o domínio da frequência.

Definimos a força como,

$$F_x = F_x(\vec{x}, t) = \bar{F}_x \cdot \exp(i\omega t) \quad (2.102)$$

e fazendo uma transformada de Fourier na eq. (2.101) temos, ref [17]:

$$\begin{aligned} \mu^*(i\omega) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} \right) + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)] \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x \partial y} \right) + \bar{F}_x = -\rho \omega^2 \bar{u}_x \end{aligned} \quad (2.103)$$

onde agora  $\bar{u}_x$  é função das coordenadas  $x, y$  e da frequência  $\omega$ , ou seja  $\bar{u}_x = \bar{u}_x(\vec{x}, \omega)$ , e  $\vec{x} = (x, y)$

Esta finalmente é a equação do movimento para problemas viscoelastodinâmicos estacionários (com relação à coordenada  $x$  do problema).

De uma forma geral escrevemos esta equação em notação indicial,

$$\mu^*(i\omega) \cdot \bar{u}_{i,jj} + [\lambda^*(i\omega) + \mu^*(i\omega)] \cdot \bar{u}_{k,ki} + \bar{F}_i = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \bar{u}_i \quad (2.104)$$

Observamos que as funções de relaxação  $\mu$  e  $\lambda$  são complexas e definidos como,

$$\left. \begin{aligned} \mu^*(i\omega) &= \mu \cdot (1 + i \gamma(\omega)) \\ \lambda^*(i\omega) &= \lambda \cdot (1 + i \beta(\omega)) \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé definidas anteriormente;

$\gamma(\omega)$  e  $\beta(\omega)$  são coeficientes de amortecimento ou perdas, dependem da frequência e podem ser levantados experimentalmente ou obtidos a partir de um modelo pré-definido.

Substituindo a equação (2.105) em (2.104) e rearranjando em parte real e imaginária, referência [17], isto resulta,

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \bar{u}_{1,jj} + (\lambda + \mu) \cdot \bar{u}_{k,ki} + \underbrace{i\mu\gamma(\omega) \cdot \bar{u}_{1,jj}}_{*1} + \underbrace{i(\lambda\beta(\omega) + \mu\gamma(\omega)) \cdot \bar{u}_{k,ki}}_{*2} + \\ + & \bar{F}_1 + \rho \cdot \omega^2 \cdot \bar{u}_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Poderíamos partir da equação do movimento na forma indicial dada na equação (2.52) e obtermos a equação de Navier, e ainda transformamos-a para o domínio da frequência. Assim, temos:

$$\mu \cdot u_{1,jj} + (\lambda + \mu) \cdot u_{k,ki} + b_1 + \rho \cdot \omega^2 \cdot u_1 = 0$$

Percebemos então que se  $b = \bar{F}_1$ , as equações são exatamente as mesmas a menos dos termos  $*1$  e  $*2$  que vem exatamente das constantes  $\mu$  e  $\lambda$  que agora são definidas como complexas, fazendo surgir estes dois termos na equação (2.106).

Do ponto de vista da implementação o tratamento do problema viscoelastodinâmico consiste em tornar todas variáveis de campo  $u_i$  e  $b_i$  complexas, e também introduzir as constantes de Lamé complexas  $\mu^*$  e  $\lambda^*$ .

Pode-se mostrar, ver referência [5], que para o coeficiente de Poisson do solo ser real,  $\nu \in \mathbb{R}$ , então os coeficientes do amortecimento  $\gamma(\omega)$  e  $\beta(\omega)$  devem ser iguais.

Na prática computacional, referência [5], escolhe-se dois modelos para os coeficientes de amortecimento do solo. O modelo de Kelvin-Voigt é representado pela relação,

$$\gamma(\omega) = \beta(\omega) = \omega \gamma \quad (2.107)$$

Para o modelo de histerese constante temos,

$$\gamma(\omega) = \beta(\omega) = \gamma \quad (2.108)$$

#### 2.4.2- Validação - Comparação com os resultados do trabalho de Luco/Hadjian/Bos [7]

Na área do DSSI, Luco e Hadjian [7] realizaram um trabalho onde se faz um estudo comparativo sobre o MEF e solução semi-analítica para o problema solo-estrutura. Nesta seção faremos uma comparação do nosso trabalho com uma das curvas do trabalho de Luco a fim de validar nossos resultados.

O modelo a ser analisado é o mesmo apresentado em [7]. Modelaremos o solo com o MEF viscoelástico e a interação entre o solo e a estrutura rígida na superfície é do tipo contato colado (welded contact).

Partimos da parte inferior do sistema (2.85), ou seja,  $[S'_{ij}]$ , para representar a matriz de impedância para os graus de liberdade da fundação rígida. Esta parte do sistema pode ser representada como:

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M/a \end{Bmatrix} = \pi \cdot G \begin{bmatrix} S_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & S_{hh} & S_{mh} \\ 0 & S_{hm} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi \cdot a \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M/a \end{Bmatrix} = \pi \cdot G \begin{bmatrix} k_{vv} + i \cdot c_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & k_{hh} + i \cdot c_{hh} & k_{mh} + i \cdot c_{mh} \\ 0 & k_{hm} + i \cdot c_{hm} & k_{mm} + i \cdot c_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi \cdot a \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

onde  $k_{vv}$ ,  $k_{hh}$ ,  $k_{mm}$  são os coeficientes de rigidez dependentes da frequência para os carregamentos harmônicos verticais, horizontais e momentos, respectivamente.  $k_{mh}$  e  $k_{hm}$  são os coeficientes de rigidez acoplados. Da mesma forma,  $c_{vv}$ ,  $c_{hh}$ ,  $c_{mm}$ ,  $c_{mh}$  e  $c_{hm}$  são os coeficientes de amortecimento dependentes da frequência.

Para este tipo de problema (DSSI) utilizamos a frequência adimensional  $a\omega = \omega \cdot a / v_s$ , definida anteriormente, onde  $\omega$  é a frequência de excitação, "a" é o semi-lado da fundação rígida e  $v_s$  é a velocidade de onda de cisalhamento do meio contínuo elástico.

Definimos o vetor carregamento total  $F_t = \{F_v, F_h, M_y/a\}$  como  $F_t = \{1, 0, 0\}$ ,  $\{0, 1, 0\}$ ,  $\{0, 0, 1\}$  para obter cada termo da matriz de impedância (2.109). Ou seja para cada vetor  $F_t$  definido acima podemos obter os termos equivalentes a estes

carregamentos na matriz de impedância, como apresentado abaixo,

$$S_{vv}(a_0) = \frac{F_v}{\pi \cdot G \cdot u_v} ,$$

$$S_{hh}(a_0) = \frac{F_h}{\pi \cdot G \cdot u_h} ,$$

$$S_{mm}(a_0) = \frac{M_y/a}{\pi \cdot G \cdot \phi \cdot a} ,$$

$$S_{mh}(a_0) = \frac{F_h}{\pi \cdot G \cdot \phi \cdot a} ,$$

$$S_{hm}(a_0) = \frac{M_y/a}{\pi \cdot G \cdot u_h} ,$$

e ainda  $S_{mh} = S_{hm}$ , ou seja, deve existir a simetria entre os termos acoplados.

Devemos observar ainda que muitos resultados apresentados para estes tipos de problemas utilizam as flexibilidades dinâmica complexa  $C_{vv}$ ,  $C_{hh}$ ,  $C_{mm}$ ,  $C_{mh}$  e  $C_{hm}$ , ou seja  $[C(a_0)] = [S(a_0)]^{-1}$ . Neste trabalho alguns resultados serão comparados através das flexibilidades.

O modelo a ser analisado será o seguinte: o solo será discretizado com 392 elementos quadrilaterais bilineares. As características desta discretização estão apresentadas na figura 2.9, abaixo,



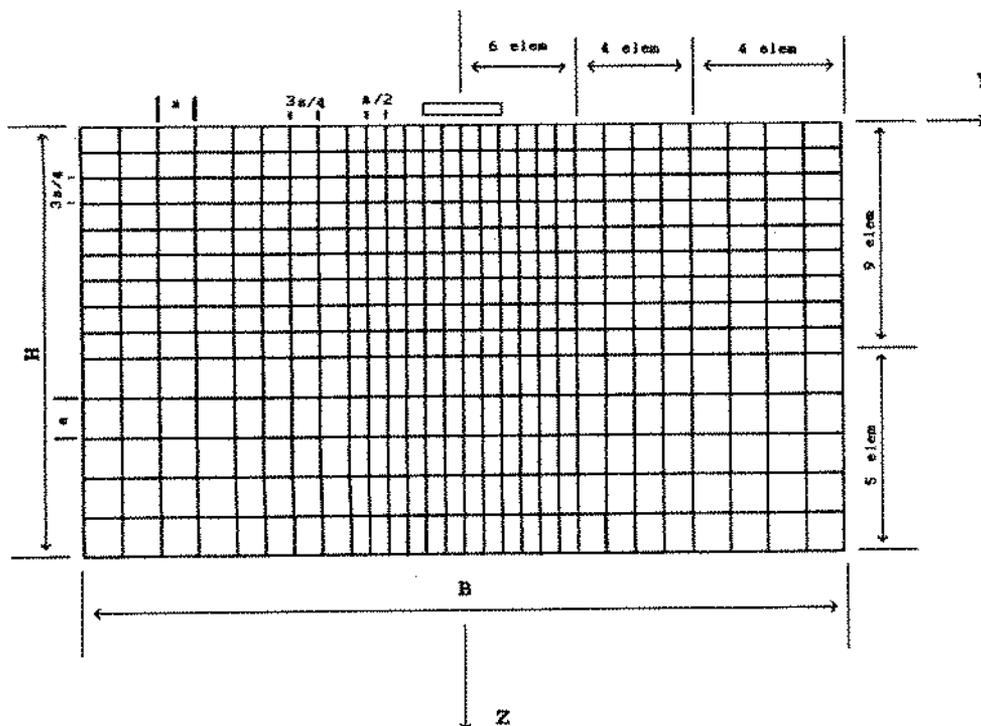


fig. 2.9 - Modelo de elementos finitos e corpo rígido

Para o problema definimos as constantes físicas como:

- $\mu = G = 1,0 \text{ MPa}$  - módulo de cisalhamento
- $\nu = 0,3$  - coeficiente de Poisson
- $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$  - densidade de massa

Uma adimensionalização deve ser feita para plotarmos os valores da rigidez dinâmica,

$$S_{vv}(a_0) = \frac{P_v}{\pi G u_v}$$

onde  $P_v = 1,0 \text{ N}$  - carregamento vertical sobre a fundação,  
 $u_v$  são os deslocamentos da fundação dependentes da

frequência. Devemos observar ainda que  $\omega_0$  é uma frequência adimensional como apresentada na seção 2.3.3.

O contorno foi definido como restringido nas bases para os três tipos de carregamentos e ainda restringido nas laterais no sentido vertical para carregamento horizontal e momento, e restringido na horizontal para carregamento vertical.

Neste resultado preliminar estamos comparando apenas a rigidez dinâmica vertical e sua componente imaginária. Isto está representado nos gráficos das figuras 2.10 e 2.11, ou seja os gráficos representam os termos da matriz de impedância (equação (2.110)) para um carregamento vertical unitário sobre o centro da fundação, ( $F_t = \{F_v, F_h, M_y/a\} = \{1, 0, 0\}$ ). Os gráficos mostram a rigidez dinâmica vertical adimensionalizada como apresentado acima, em função das frequências adimensionais  $\omega_0$ . Obtivemos dois valores para a rigidez vertical com dois fatores de amortecimento material distintos, ou seja  $\eta=0,05$  e  $\eta=0,20$  e comparamos com os resultados obtidos por Luco e Hadjian [7].

Podemos observar no gráfico (figuras 2.10 e 2.11) que a resposta do presente método se aproxima do resultado do Luco, apresentando os picos das funções de rigidez do meio nas frequências de ressonância, o que já esperávamos pois o MEF tem dificuldades em modelar os meios infinitos.

Existe uma pequena diferença entre os resultados; isto se deve ao fato que os resultados do Luco foram obtidos para 5 (cinco) pontos de frequência. Para estes pontos ele provavelmente aproximou uma curva suave. Nossos resultados foram obtidos com uma densidade de frequência muito maior.

Para frequências que antecedem à primeira ressonância os resultados coincidem. Já para frequências mais elevadas nossos resultados mostram ressonâncias que o trabalho do Luco não apresentou. O fato dele ter calculado somente 5 pontos de frequência fez com que ele perdesse uma razoável quantidade de informação.

É possível explicar a opção de Luco, se entendermos que no início da década de 70 tal problema de elementos finitos

somente poderia ser solucionado em computador do tipo mainframe e a custos bastante elevados.

Uma outra observação a ser feita com relação a estes resultados é que se observarmos as curvas para amortecimento elevado ( $\eta = 0,2$ ), verificamos que elas se aproximam bastante pois neste caso os saltos (oscilações) na ressonância são reduzidos não sofrendo o efeito da pequena discretização da frequência.

Posteriormente deveremos apresentar mais resultados em relação ao MEF e o MEF-MEC com esta malha do trabalho do Luco (ver Apêndice).

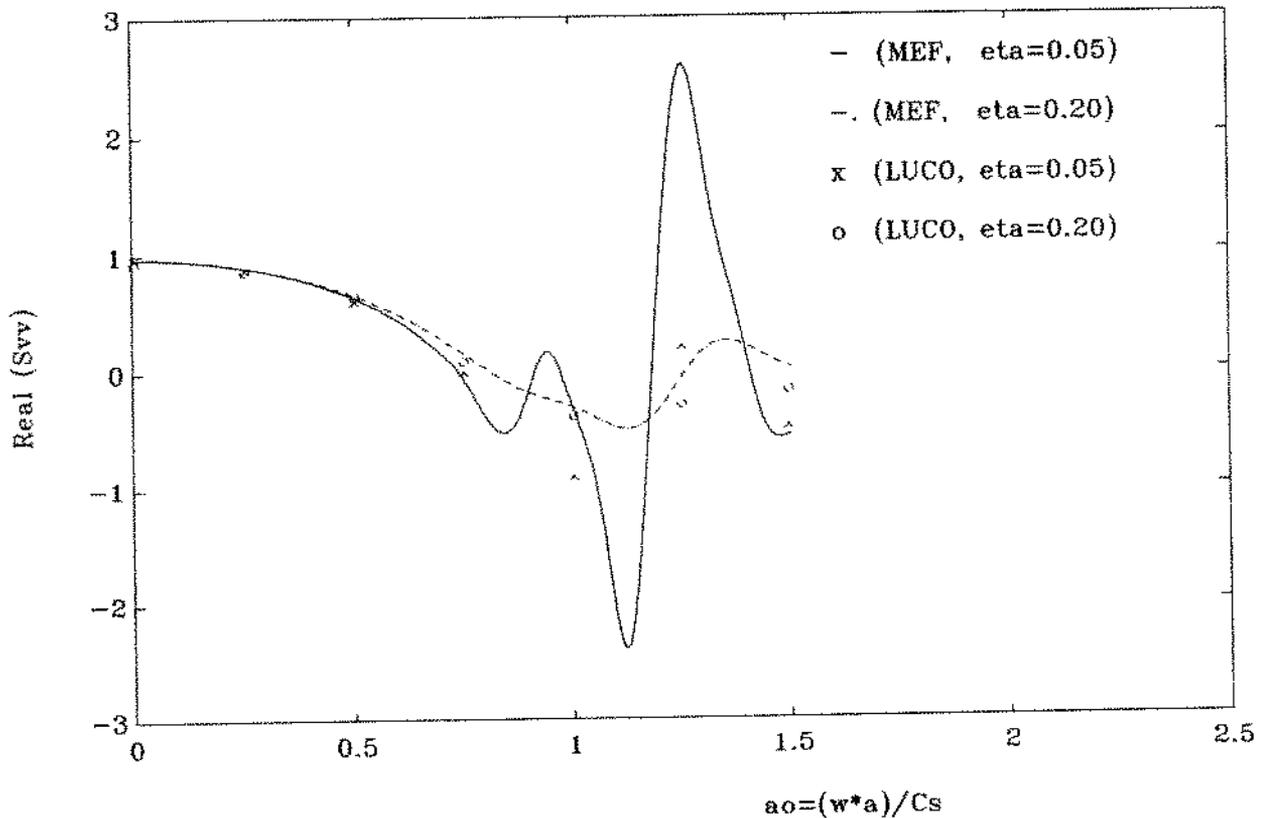


fig. 2.10 - Rigidez Vertical

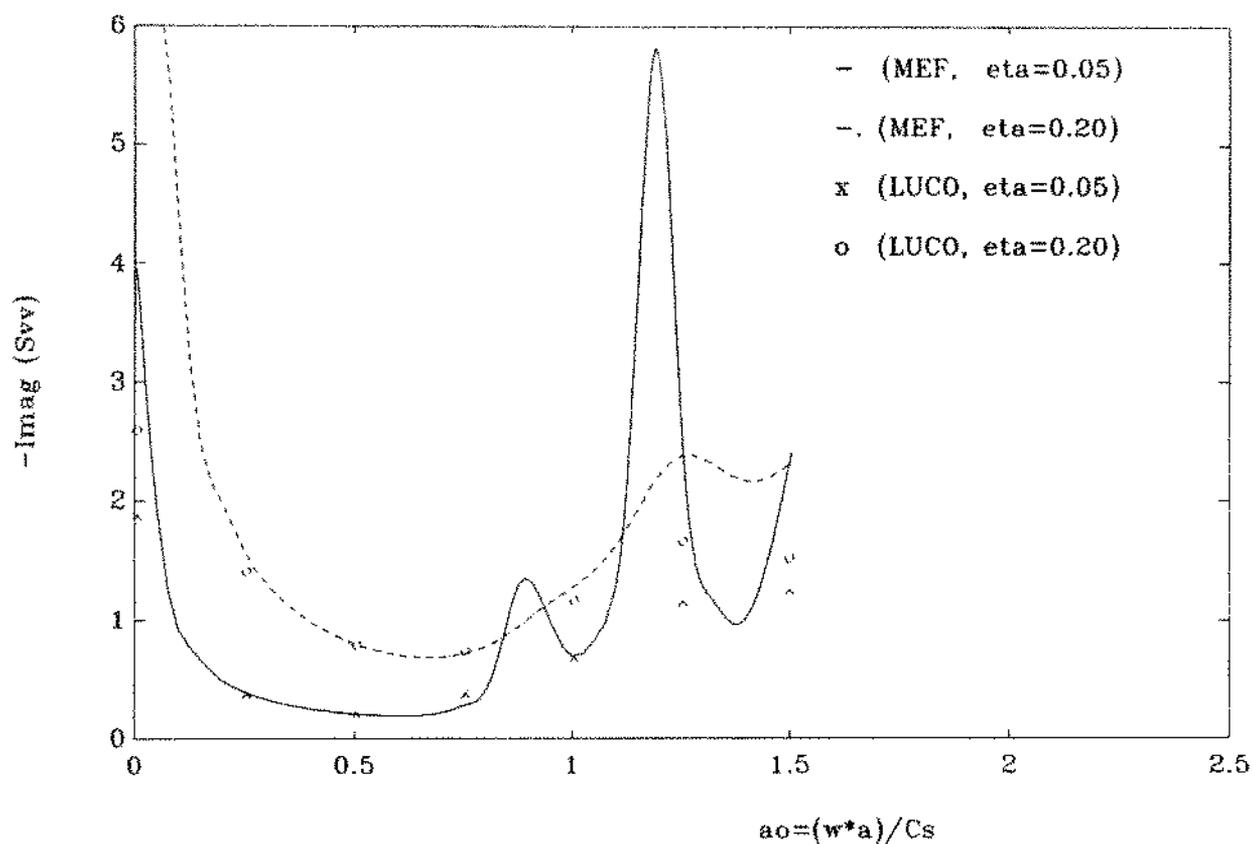


fig. 2.11 - Coeficiente de Amortecimento Vertical

### 3 - O Método dos Elementos de Contorno para problema viscoelastodinâmico estacionário -

#### 3.1 - Formulação viscoelastodinâmica -

Partimos da equação do problema elastodinâmico (equação (2.52)) em termos dos deslocamentos para um meio sólido viscoelástico linear, homogêneo e isotrópico, ou seja,

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{k,kl} + c_2^2 u_{i,jj} + f_i = u_{i,tt} \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são velocidade das ondas de dilatação e de cisalhamento e são dados por

$$c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.2)$$

sendo  $\mu$  e  $\lambda$  as constantes de Lamé e  $\rho$  a densidade do meio contínuo.

As condições de contorno (equações (2.53) e (2.54)) e condições iniciais (equações (2.55) e (2.56)) são repetidas aqui,

- condições de contorno

$$u_i = q_i \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \times [0, T] \quad (3.3)$$

$$t_{(n)i} = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \times [0, T] \quad (3.4)$$

com  $t_{(n)i}$  sendo o vetor tensão, ou  $t_{(n)i} = t_{ij} \cdot n_j$

- condições iniciais

$$u_i = u_{oi} \quad (3.5)$$

$$u_{i,t} = \dot{u}_{oi} \quad (3.6)$$

Podemos escrever a relação constitutiva para o meio sólido, especificado no problema anterior como,

$$t_{ij} = \rho (c_1^2 - 2.c_2^2) u_{k,k} \delta_{ij} + \rho c_2^2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.7)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Como apresentado na seção 2.4, podemos reescrever a equação elastodinâmica (equação (3.1)) e as condições de contorno (equações (3.3) e (3.4)) para problemas viscoelastodinâmicos estacionário (no domínio da frequência), tal como

$$(c_1^2 - c_2^2) \bar{u}_{k,ki} + c_2^2 \bar{u}_{i,jj} + \bar{f}_i + \omega^2 \bar{u}_i = 0 \quad (3.8)$$

As condições de contorno são redefinidas como:

$$\bar{u}_i(x, \omega) = \bar{q}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_{q_i} \quad (3.9)$$

$$\bar{t}_{(n)i}(x, \omega) = \bar{t}_{ij} n_j = \bar{h}_i(x, \omega) \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \quad (3.10)$$

e a relação constitutiva como [34]:

$$t_{ij} = \rho (c_1^2 - 2.c_2^2) \bar{u}_{k,k} \delta_{ij} + \rho c_2^2 (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (3.11)$$

Deve-se observar que as condições iniciais desaparecem quando fazemos a transformação de domínios, ou seja do domínio do tempo para o domínio da frequência.

Nosso problema é resolver a formulação integral de um problema geral da elastodinâmica. Para isto definimos uma solução fundamental singular para a equação 3.8 num meio sólido infinito dependente da frequência  $\omega$ , dada como,

$$\bar{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) = \frac{\bar{f}(\omega)}{\alpha \pi \rho c_2^2} (\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) \quad (3.12)$$

onde para o caso bi-dimensional  $\alpha=2$  e as funções  $\psi$  e  $\chi$

$$\psi = K_0 \left[ \frac{i \omega_r}{c_2} \right] + \frac{c_2}{i \omega_r} \left\{ K_1 \left[ \frac{i \omega_r}{c_2} \right] - \frac{c_2}{c_1} K_1 \left[ \frac{i \omega_2}{c_1} \right] \right\} \quad (3.13)$$

$$\chi = K_2 \left[ \frac{i \omega_r}{c_2} \right] - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2 \left[ \frac{i \omega_r}{c_1} \right] \quad (3.14)$$

onde  $i = (-1)^{1/2}$  e  $K_0, K_1, K_2$  são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo e ordens 0, 1 e 2 respectivamente.

$x$  - ponto do campo

$\xi$  - ponto de colocação, como visto na figura 3.1

$\vec{r} = |x - \xi|$



fig 3.1 - Definição do ponto de colocação  $\xi$  e do ponto de campo  $x$

E a resposta do meio infinito é dada por  $\bar{u}_i = \bar{u}_{ij}^* \cdot e_j$ . Podemos através da solução fundamental, também chamada de tensor de deslocamentos de Stokes [39], obter o tensor de trações  $\bar{t}_{ij}^*$  como:

$$\begin{aligned} t_{ij}^* = & \frac{1}{\alpha \pi} \left\{ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right] \left[ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j \right] - \right. \\ & - \frac{2}{r} \chi \left[ n_i r_{,j} - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \\ & \left. + \left[ \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right] \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right] r_{,j} n_i \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

Podemos usar agora o teorema da reciprocidade de Betti para o domínio da transformada de Fourier [33], para

obter a solução do problema elastodinâmico no domínio da frequência  $\omega$  na forma integral. Para problemas solo-estrutura (DSSI), que será tratado aqui, supomos ainda que as forças de corpo são nulas e ainda tratamos de problemas os quais possuem contornos geométricos "suaves", desta forma escrevemos a equação integral como da forma,

$$\frac{1}{2} u_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \left[ \bar{u}'_{ij}{}^*(x, \xi, \omega) t_{(n)j}(x, \omega) - \bar{t}'_{(n)ij}{}^*(x, \xi, \omega) u_j(x, \omega) \right] d\Gamma \quad (3.16)$$

onde  $\bar{u}'_{ij}{}^* = \bar{u}_{ij}^*/\bar{f}(\omega)$  ;  $\bar{t}'_{(n)ij}{}^* = \bar{t}_{(n)ij}^*/\bar{f}(\omega)$ .

Detalhes com relação a esta formulação do Método dos Elementos de Contorno para problema elastodinâmico pode ser encontrado no trabalho do Pontes, referência [37].

### 3.2 - Discretização da Equação Integral no Contorno (O método dos Elementos de Contorno - MEC) -

O tratamento do Método dos Elementos de Contorno propriamente dito consiste na discretização desta integral de contorno. Devemos fazer apenas uma discretização espacial, pois estamos trabalhando no domínio da frequência [14] (não havendo necessidade de discretização do tempo).

A discretização espacial neste trabalho é feita com elementos constantes. Este tipo de elementos é caracterizado por possuir valores constantes [35] das funções a serem aproximadas, e os valores das tensões e deslocamentos (ou seja os graus de liberdade do problema) são definidos no centro de cada elemento.

Portanto, utilizando a discretização por elementos de contorno constante podemos reescrever a eq. integral de contorno (equação 3.15) em uma forma matricial (discreta),

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i^{pc} = \sum_{e=1}^M [\bar{G}_{ij}^e] \{ \bar{t}_j^e \} - \sum_{e=1}^M [\bar{H}_{ij}^e] \{ \bar{u}_j^e \}, \quad \begin{matrix} pc = 1, 2, \dots, M \\ i, j = 1, 2 \text{ (ndof)} \end{matrix} \quad (3.16)$$

onde  $M$  = número de elementos

$pc$  = elemento que contém o ponto de colocação

$\bar{u}_j^e$  = vetor deslocamentos

$\bar{t}_j^e$  = vetor de trações

$\bar{G}_{ij}^e$ ,  $\bar{H}_{ij}^e$  = matrizes de influência dadas pela integração dos termos na eq. integral, ou seja,

$$\bar{G}_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \bar{u}_{ij}^*(x, \xi, \omega) d\Gamma_e \quad (3.18)$$

$$\bar{H}_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \bar{t}_{ij}^*(x, \xi, \omega) d\Gamma_e \quad (3.19)$$

$\bar{u}_i^{pc}$  = vetor deslocamentos no elemento singular, ou seja o elemento que contém o ponto de colocação  $\xi$  (ponto singular).

Podemos então escrever a equação Integral de Contorno

(equação (3.17)) para todos os elementos de contorno e obter um sistema de  $(2 \times M)$  equações algébricas, o qual pode ser escrito na forma matricial como,

$$(0.5) \{ \bar{u} \} = [ \bar{G} ] \{ \bar{t} \} - [ \bar{H} ] \{ \bar{u} \} \quad (3.20)$$

Para solucionar este sistema de equações devemos conhecer as condições de contorno como forças de superfície  $\{ \bar{t} \}$  ou deslocamentos  $\{ \bar{u} \}$ , ou ainda parte de cada um dos graus de liberdade. Com isto podemos rearranjar o sistema de equações acima de tal forma que os elementos os termos da matriz  $[ \bar{G} ]$  e da matriz  $[ \bar{H} ]$  relacionadas com as trações e deslocamentos respectivamente desconhecidos fiquem do lado esquerdo do sistema, formando assim uma matriz de impedância  $[ S ]$ , semelhante àquela na equação (2.69) para os elementos finitos. Um sistema final do tipo,

$$[ S ] \{ \bar{u}' \} = \{ \bar{f} \}$$

$\{ \bar{u}' \}$  é o vetor formado por parte das forças de superfície  $\{ \bar{f} \}$  e parte dos deslocamentos  $\{ \bar{u} \}$  e o vetor  $\{ \bar{f} \}$  é formado pelas valores conhecidos de  $\{ \bar{u} \}$  e  $\{ \bar{f} \}$  dados pelas condições de contorno. E  $[ S ]$  é a matriz dinâmica dependente da frequência, ou seja  $[ S ] = [ S(\omega) ]$ .

### 3.3 - Incorporação do problema solo-estrutura -

A partir da forma matricial (discreta) da equação Integral de Contorno (equação (3.20)), podemos separar as variáveis com índice "r" para a fundação e "s" para o solo, como na figura abaixo.

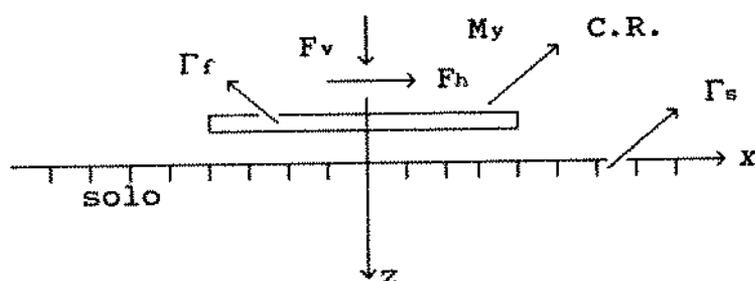


fig. 3.2 - domínio do solo discretizado com MEC e corpo rígido

$$(0.5) \begin{Bmatrix} u_s \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ss} & G_{sr} \\ G_{rs} & G_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s \\ t_r \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ss} & H_{sr} \\ H_{rs} & H_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_r \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Podemos impor as condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças do corpo rígido como apresentado na seção 2.3.2 (equações (2.72) e (2.75)) e ainda lembrando que as tensões na superfície livre são nulas ( $t_s=0$ ), obtemos um sistema matricial incorporando a fundação rígida ao solo.

$$\begin{bmatrix} G_{ss} & -H'_{ss} & -H'_{sr} & 0 \\ G_{rr} & -H'_{rs} & -H'_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & I & -CC \\ -EQ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_r \\ u_s \\ u_r \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_t \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

onde os termos da diagonal da matriz  $H'_{ii} = H_{ii} + 0.5$ ;

$u_i$  são graus de liberdade do corpo rígido e  $F_i$  carregamento harmônico sobre o corpo rígido como definido anteriormente.

### 3.4 - Validação com o problema da viga -

Posteriormente utilizaremos a implementação feita para o Método dos Elementos de Contorno para fazer uma comparação crítica entre este e o Método dos Elementos Finitos. Na sequência esta mesma implementação será utilizada para a implementação do acoplamento entre os dois métodos. Para isto fazemos aqui uma validação da implementação do MEC utilizando o mesmo exemplo apresentado na seção 2.3.3 para o caso da viga excitada uniaxialmente.

A viga possui as mesmas características daquela apresentada anteriormente, mantendo as mesmas dimensões geométricas e as propriedades físicas. Porém a discretização aqui será feita com 176 elementos de contorno constantes dispostos como apresentado na figura 3.3, abaixo,

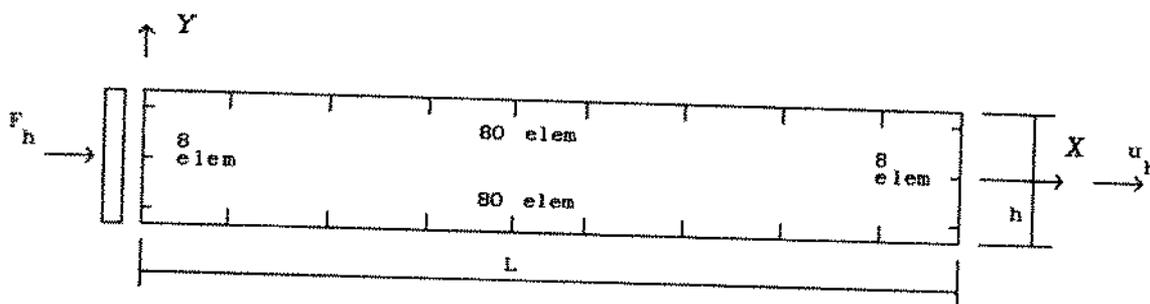


fig 3.3 - viga elástica excitada dinamicamente e discretizada por elementos de contorno.

Os dados são da figura são os seguintes:

- $L = 0,2$  m - comprimento total da viga
- $H = 0,02$  m - altura da viga
- $F_h = 1,0$  N - carregamento axial harmônico aplicado sobre o corpo rígido

A viga está engastada em uma das extremidades e com o carregamento axial aplicado no ponto central do corpo rígido.

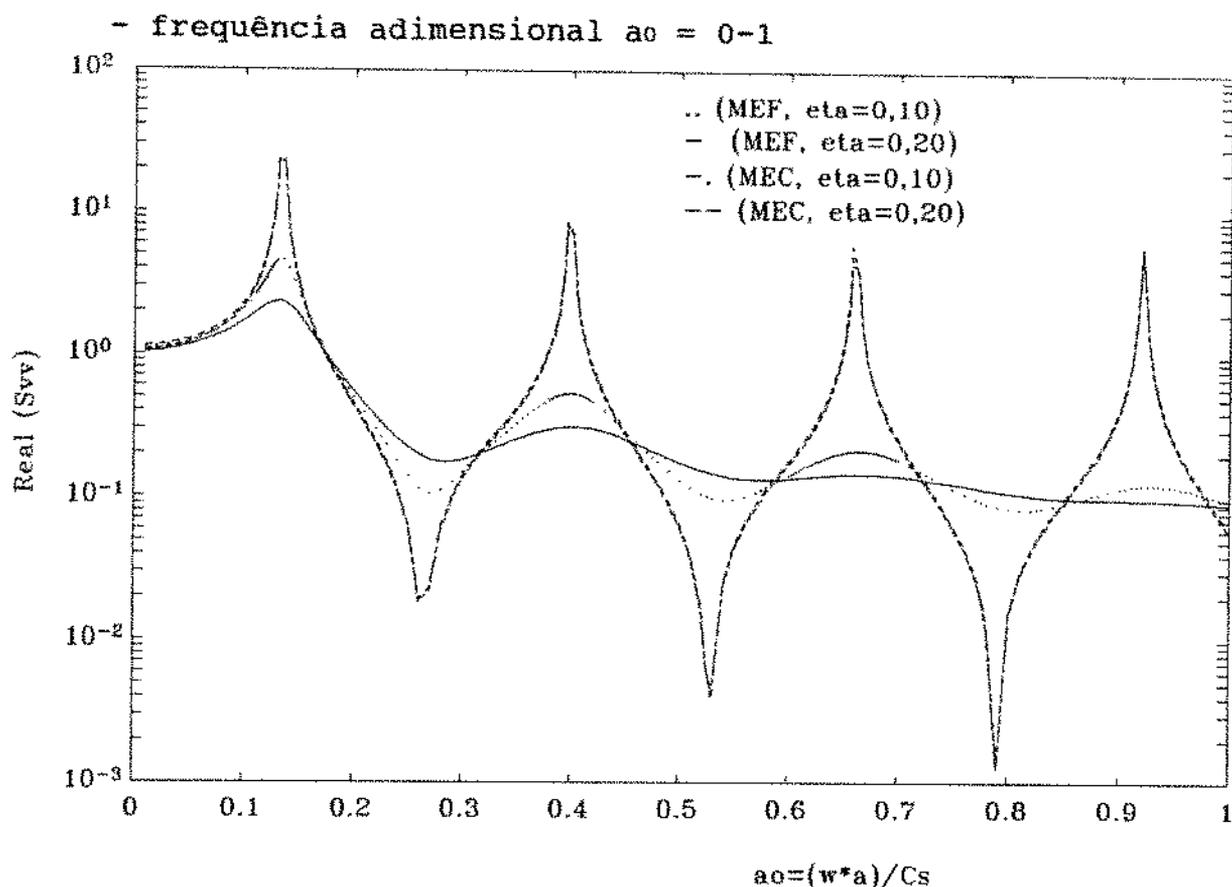


fig 3.4 - Curva de resposta em frequência da viga elástica, frequência  $ao = 0 - 1$ .

tab. 3.1 - Frequências naturais adimensionais da viga elástica, gráfico da figura 3.4

ponto	MEF	MEF	MEC	MEC	Teórico
	(eta=0,10)	(eta=0,10)	(eta=0,10)	(eta=0,20)	
1	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,1266
2	0,3975 (4,6%)	0,400 (5,2%)	0,398 (4,8%)	0,398 (4,8%)	0,3799
3	0,665 (5,0%)	0,6675 (5,4%)	0,660 (4,2%)	0,660 (4,2%)	0,6332
4	0,930 (4,9%)	—	0,920 (3,8%)	0,920 (3,8%)	0,8865

O gráfico apresenta as curvas obtidas com os dois

métodos. Podemos obter os valores de pico para encontrar as frequências de ressonância do gráfico ou diretamente das tabelas de saídas geradas para o gráfico. Na tabela apresentamos estes valores juntamente com os erros relativos ao valor teórico calculados para cada frequência obtida.

Observa-se que as frequências de ressonância da viga obtidas pelos dois métodos concordam com a solução analítica de forma razoável com uma ligeira melhor aproximação para o MEC em relação ao MEF para algumas frequências. Outra informação que podemos extrair da tabela é que por simples inspeção dos valores das frequências de ressonância para ambos os métodos, verificamos que estes estão significativamente próximos, com uma margem de erro da ordem de  $10^{-2}$ . Isto nos leva a concluir que as implementações para ambos os métodos estão em concordância. Finalmente, observamos que o amortecimento material imposto no MEF de  $\eta = 0,10$  para  $\eta = 0,20$  não provocou uma mudança substancial nas frequências naturais, o que realmente é de se esperar. De fato o amortecimento possui pouca influência sobre as frequências naturais do sistema.

## 4 - Acoplamento das Soluções de Elementos Finitos e Elementos de Contorno -

### 4.1 - Revisão crítica da literatura -

Existem duas aproximações diferentes para combinarmos o Método dos Elementos Finitos (MEF) com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A primeira seria converter a região do MEF como uma região equivalente do MEC (chamado MEC equivalente), isto é bastante atrativo quando usamos formulação de elementos finitos mixto, pois neste caso os graus de liberdade para ambas as partes são simplesmente combinados. Uma segunda forma, mais comum, é tratar a região do MEC como uma região equivalente do MEF (chamado MEF equivalente - ou super-elemento). Esta segunda técnica parece ser mais atrativa pois aproveita mais as vantagens do MEC e do MEF. Isto ocorre pois em problemas práticos as estruturas possuem uma certa complexidade (vigas, placas, etc.) e problemas não lineares (fissuras, plasticidade, etc.), as quais não são apropriadas para o MEC tornando a aplicabilidade do MEC equivalente reduzida.

A maior desvantagem que aparece nesta segunda técnica (MEF equivalente) é possuir uma inversão de matriz no processo. Porém, partindo do pressuposto que o número de nós da discretização do MEC, onde a matriz resultante deve ser invertida, é bem menor que a do MEF e ainda com a variedade das técnicas de inversão e os avanços nos equipamentos computacionais, este problema torna-se um pouco reduzido dentro do contexto do problema.

Usando esta segunda técnica, uma das primeiras tentativas para fazer o acoplamento do MEF com o MEC, foi desenvolvida por Zienkiewicz, Kelly e Bettess [18], utilizando uma aproximação de Energia para o domínio do MEC. Esta forma também foi utilizada afim de justificar uma simetrização da matriz do elementos obtida pelo MEC, que facilitaria o acoplamento, pois as matrizes dos elementos do MEF são simétricas. De fato, esta aproximação prova que as matrizes dos elementos devem ser simétricas, apesar das teorias do MEC

mostrarem que as matrizes são não simétricas.

O princípio de Energia utiliza considerações de simetria, daí a sua aplicação a operadores diferenciais simétricos. Portanto o erro desta técnica surge na utilização deste princípio de Energia para operadores integrais.

Ainda utilizando aproximações de Energia e tentando evitar a inversão das matrizes geradas pelo MEC, Beer [19] fez algumas mudanças de ordem estrutural no acoplamento. Utiliza uma forma interativa entre os dois métodos, onde resolve a solução da equação integral várias vezes, substituindo o lado direito da equação. Outra vantagem computacional é que a matriz de rigidez do BEM é computada apenas na interface. Esta técnica é semelhante a de condensação de subestrutura usada no MEF.

Em função da grande aplicabilidade existe um grande número de trabalhos sugerindo a técnica do acoplamento; um resumo com as referências destes trabalhos foram dados por Bebbia, Telles e Wrobel [20]. Alguns trabalhos importantes devem ser mencionados como o de Brebbia e Georgiou [21] e outros apresentados na sequência dentro de áreas específicas.

Na área de problemas elastodinâmicos Kobayashi e Kawakami [22] tratam do problema dinâmico entre estrutura e solo viscoelástico e Kobayashi e Kishima [23] tratam problema dinâmico entre estrutura e solo não homogêneo, ambos tratam o problema no domínio da frequência.

Ainda dentro da área de problemas elastodinâmicos, porém para problemas no domínio do tempo, Spyrakos e Beskos [24] e Karabalis e Beskos [25], respectivamente, consideraram problemas solo-estrutura plana e tri-dimensional usando o acoplamento. O trabalho de Gaitanaros e Karabalis [26], trata problema de fundação embutida tri-dimensional no domínio da frequência. Também na área dos problemas elastodinâmicos temos os trabalhos de Estorff [27] para obter resposta dinâmica de blocos elásticos no domínio da frequência e Von Estorff e Kausel [28] que apresentam resultados obtidos com o acoplamento MEF e MEC discutindo suas aplicabilidades para alguns problemas solo-estrutura.

Estorff e Prabucki [29] desenvolveram trabalho para

problemas de corpos elástico de forma arbitrária sujeita a cargas dinâmicas. Também para análise de corpos elástico temos os trabalhos de Khono, Tsunada, Seto e Tanaka [30] apresentando resultados para os casos bi e tri-dimensional e o trabalho de Li, Han, Mang e Torzicky [31], este último apresentando um sistema de equações totalmente condensado, reduzindo todos os graus de liberdade para a interface, inclusive para os graus de liberdade do MEF.

Também usando a técnica do acoplamento, porém em outra área específica podemos citar o trabalho de Estorff e Antes [32] aplicando a técnica para problemas de interação fluido-estrutura no domínio da frequência.

#### 4.2 - A técnica do acoplamento MEF e MEC utilizada -

Dissemos anteriormente que a forma mais comum para o processo de acoplamento do MEF e do MEC é a transformação do domínio do MEC como um domínio equivalente do MEF, obtendo um super-elemento representado no domínio do MEC.

Desta forma nós também utilizaremos a mesma técnica aplicada ao nosso problema específico de interação solo-estrutura com o solo modelado como um meio viscoelástico no domínio da frequência.

Podemos definir os domínios do problema como na figura abaixo,

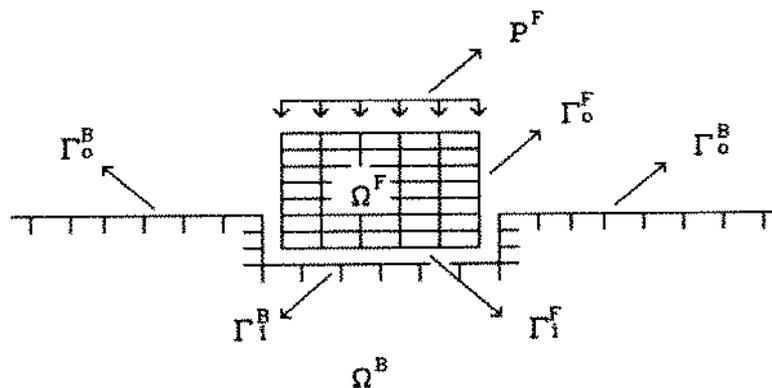


fig. 4.1 - Discretização com elementos finitos e elementos de contorno

Portanto definimos os subíndices "F" para representar a discretização do MEF, e os subíndices "B" para representar a discretização do MEC, e ainda  $\Gamma_1^F$  e  $\Gamma_1^B$  são as interfaces do MEF e do MEC, respectivamente.

Partindo da equação global do MEF para problema elastodinâmico apresentado na seção (3.1),

$$[S^F] \{u^F\} = \{F^F\} \quad (4.1)$$

onde  $[S^F]$  é a matriz de rigidez dinâmica dependente da frequência,  $\{u^F\}$  são os deslocamentos nodais e  $\{F^F\}$  são os carregamentos.

A resposta dinâmica do solo elástico pode ser descrita pela equação de elemento de contorno discreta,

$$\left[ \frac{1}{2} [I] + [R] \right] \left\{ \hat{u}^B \right\} = [G] \left\{ t^B \right\} \quad (4.2)$$

ou ainda,

$$[H] \left\{ \hat{u}^B \right\} = [G] \left\{ t^B \right\} \quad (4.3)$$

onde  $\hat{u}^B$  e  $t^B$  são os deslocamentos e as tensões nos nós do contorno, respectivamente.  $[H]$  e  $[G]$  são as matrizes de influência e  $[I]$  é a matriz identidade.

Podemos agora rearranjar os sistemas de equações (4.1) e (4.2) de tal forma que separemos as variáveis na interface e fora da interface, ver referência [29]. Observando a figura 4.1, definimos os dois sistemas como, do MEF:

$$\left[ \begin{array}{c|c} S_{00}^F & S_{01}^F \\ \hline S_{10}^F & S_{11}^F \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0^F \\ u_1^F \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_0^F \\ P_1^F \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

do MEC:

$$\left[ \begin{array}{c|c} H_{00} & H_{01} \\ \hline H_{10} & H_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0^B \\ u_1^B \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|c} G_{00} & G_{01} \\ \hline G_{10} & G_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} t_0^B \\ t_1^B \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Para obtermos uma consistência entre a formulação do MEF com o MEC, as tensões  $t_i^B$  na interface devem ser transformadas em forças nodais equivalente. Observando a formulação do MEF podemos perceber que a força nodal  $P^F$  em um elemento pode ser definida, desprezando as forças de corpo:

$$P_p^F = \int_{\Gamma^e} N_a \cdot T_i \, d\Gamma \quad (4.6)$$

$a = n_0$  de nós do elemento

onde  $i =$  grau de liberdade

$$p = 2(a-1) + 1$$

$T_i = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$  é o vetor com as componentes das trações na superfície; e as funções de forma  $N_a$  como definidas nas seções anteriores.

Supomos agora um elemento com um dos lados acoplado a um elemento de contorno.

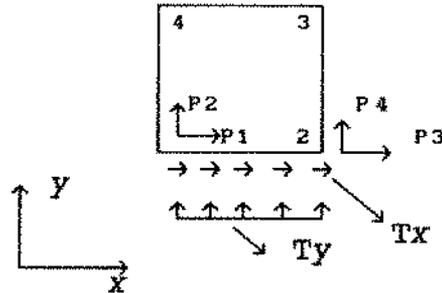


fig. 4.2 - Disposição das tensões e forças nodais na interface do elemento

onde  $T_x$  e  $T_y$  são carregamentos distribuídos na interface do elemento e  $P_i$  são as forças nodais.

Para o lado 1-2 as funções de forma  $N_3$  e  $N_4$  são nulas, isto implica que a equação (4.6) pode ser escrita na forma matricial como,

$$\begin{Bmatrix} P^F \\ P \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (4.7)$$

Como devemos trabalhar com elementos de contorno usando a discretização linear, as funções de forma  $L_i$  podem ser definidas como as mesmas funções de forma usada no MEF. Isto implica que podemos fazer uma aproximação linear para as trações na interface, escrevendo então,

$$\begin{aligned} T_x &= L_1 T_{x_1} + L_2 T_{x_2} \\ T_y &= L_1 T_{y_1} + L_2 T_{y_2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $Tx_1, Tx_2, Ty_1, Ty_2$  são as trações nos nós dos elementos da interface.

Definindo  $L_i = N_i$ , substituindo (4.8) em (4.7) e após a transformação de coordenadas do sistema global para o local, como mostrado nas seções anteriores, podemos realizar a integração da equação (4.7) e obter uma matriz transformação da forma [29],

$$\left\{ \begin{matrix} P_p^F \end{matrix} \right\} = \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} Tx_1 \\ Ty_1 \\ Tx_2 \\ Ty_2 \end{matrix} \right\} \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$\left\{ \begin{matrix} P_p^F \end{matrix} \right\} = [M] \left\{ \begin{matrix} T \end{matrix} \right\} \quad (4.10)$$

Se representarmos as tensões  $T$  como sendo as trações nodais do MEC  $t_i^B$ , podemos fazer uma transformação destas trações para forças nodais equivalentes usando a matriz de transformação  $M$  como acima, portanto,

$$\left\{ \begin{matrix} t_i^B \end{matrix} \right\} = [A] \left\{ \begin{matrix} P_i^B \end{matrix} \right\} \quad (4.11)$$

onde  $[A]$  é obtida fazendo a montagem de todas matrizes  $[\bar{A}]$  dos elementos na interface, sendo  $[\bar{A}] = [M]^{-1}$ .

Voltamos então ao sistema em (4.5) e isolamos o vetor carregamento para escrever,

$$\left\{ \begin{matrix} t_o^B \\ P_i^B \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} G_{oo} & G_{oi}.A \\ G_{io} & G_{ii}.A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{oo} & H_{oi} \\ H_{io} & H_{ii} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_o^B \\ u_i^B \end{matrix} \right\} \quad (4.12)$$

e com isto definimos,

$$\left\{ \begin{matrix} t_o^B \\ P_o^B \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{oo} & Q_{oi} \\ Q_{io} & Q_{ii} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_o^B \\ u_i^B \end{matrix} \right\} \quad (4.13)$$

Podemos agora impor as condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças na interface,

$$u_i^F = u_i^B = u_i \quad (4.14)$$

$$P_i^F = - P_i^B = P_i \quad (4.15)$$

Usando as duas condições (4.14) e (4.15), a equação (4.4) e a parte inferior da (4.13), podemos escrever,

$$\begin{bmatrix} S_{00}^F & S_{01}^F \\ S_{10}^F & S_{11}^F + Q_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^F \\ u_i^F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_{10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0^F \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

e finalmente utilizando a parte superior da equação (4.13) para completar o sistema de equações obtemos,

$$\begin{bmatrix} S_{00}^F & S_{01}^F & 0 \\ S_{10}^F & S_{11}^F + Q_{11} & Q_{10} \\ 0 & Q_{01} & Q_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^F \\ u_i^F \\ u_0^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0^F \\ P_i \\ u_0^B \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Este finalmente é o sistema de equações acoplado pelo MEF e MEC.

Este sistema de equações pode ainda ser reduzido, ficando apenas com as variáveis do MEF e da interface. Se transformarmos as trações  $t_0^B$  dada na equação (4.13) para forças nodais  $P_0^B$  e ainda isolarmos  $u_0^B$  da parte superior desta eq. podemos substituí-la em (4.16) dando,

$$\begin{bmatrix} S_{00}^F & S_{01}^F \\ S_{10}^F & S_{11}^F + K_{11}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^F \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0^F \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

onde  $K_{11}^B = Q_{11} - G Q_{01}$

$P_i = P_i^F - G A P_0^B$

e ainda  $G = Q_{11} (Q_{00})^{-1}$

A implementação finalizada para validar a técnica possui exatamente a forma da equação (4.17) acima, com apenas uma inclusão que são as variáveis para representar os deslocamentos do corpo rígido, as quais estão incluídas com as variáveis do domínio dos elementos finitos.

### 4.3 - Validação com o problema da viga -

Tal como procedemos nas seções anteriores com uma análise do problema da viga axialmente excitada para o MEF e MEC separadamente, faremos isto agora para o método acoplado entre o MEF e o MEC. Como descrito anteriormente a viga deve ter as mesmas características, dimensões e propriedades. Neste caso faremos três discretizações envolvendo o acoplamento. A primeira delas com 4/5 da viga para o MEF e 1/5 para o MEC (caso 1), a segunda com 1/2 para o MEF e 1/2 para o MEC (caso 2) e posteriormente a terceira com 1/5 da viga para o MEF e 4/5 para o MEC (caso 3). Os números de elementos e os modelos em detalhes são mostrados nas figuras abaixo.

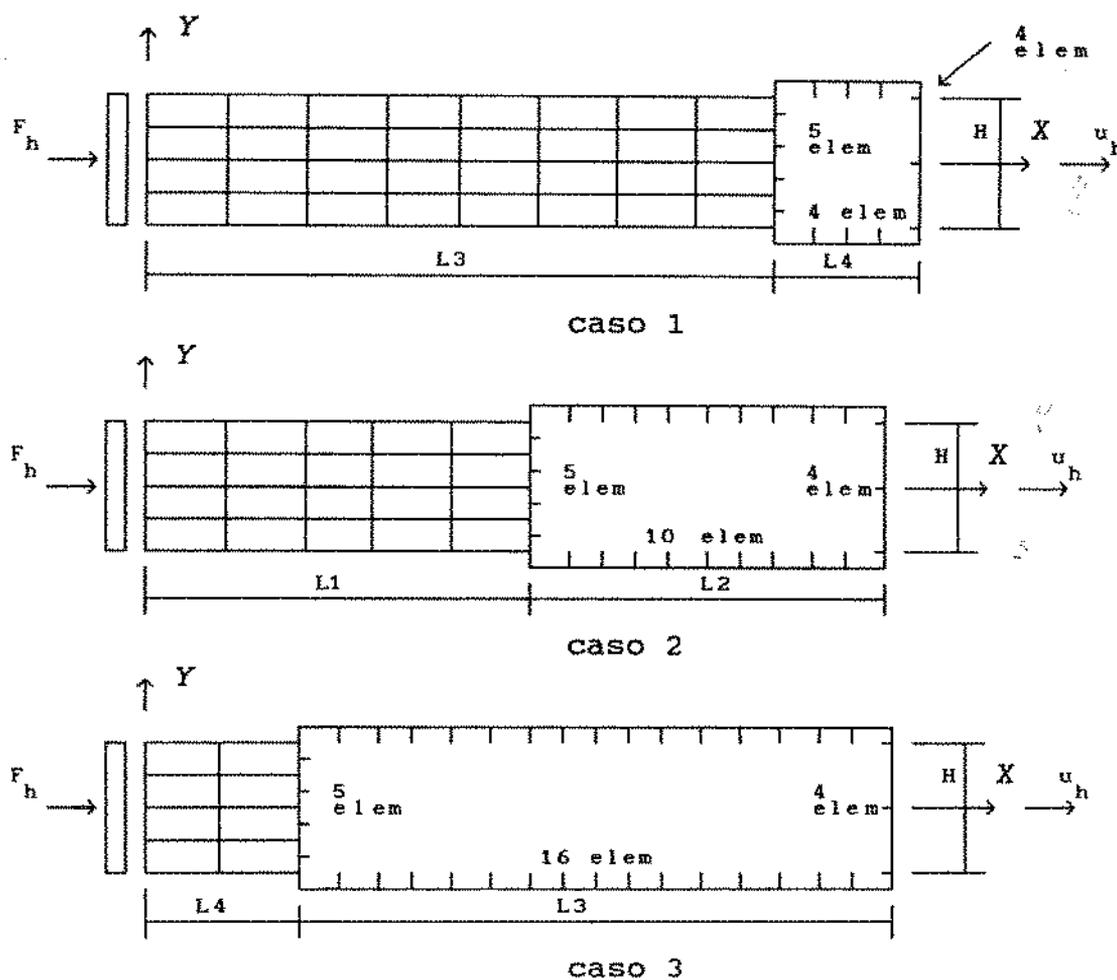


fig 4.3 - viga elástica excitada dinamicamente e discretizada por elementos finitos e elementos de contorno

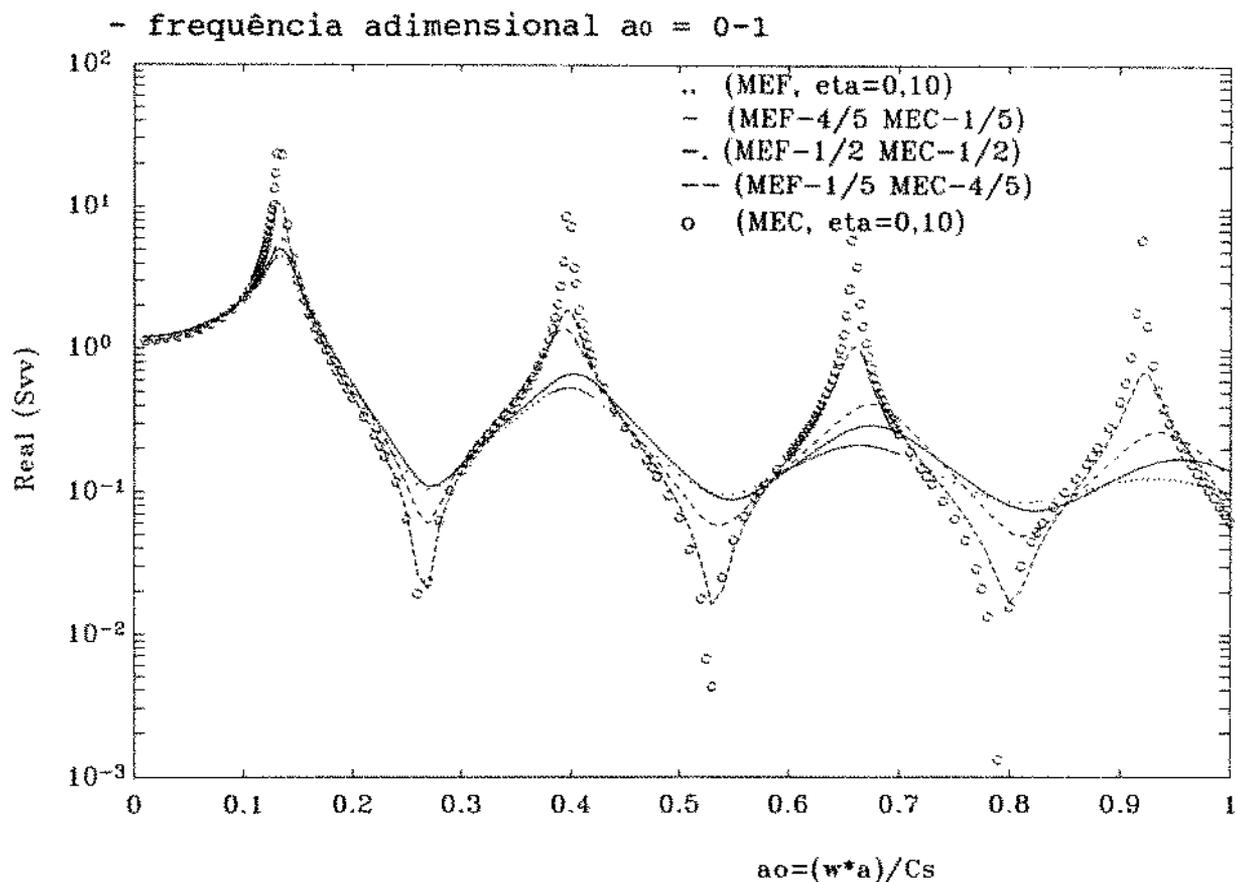


fig 4.4 - Curva de resposta em frequência da viga elástica, frequência  $ao = 0 - 1$ .

tab. 4.1 - Frequências naturais adimensionais da viga elástica, gráfico da figura 4.4

ponto	MEF (eta=0,10)	MEF-MEC (caso 1)	MEF=MEC (caso 2)	MEF-MEC (caso 3)	MEC (eta=0,20)	Analítico
1	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,130 (2,6%)	0,1266
2	0,3975 (4,6%)	0,4025 (5,9%)	0,3925 (3,3%)	0,3975 (4,6%)	0,398 (4,8%)	0,3799
3	0,665 (5,0%)	0,675 (6,6%)	0,675 (6,6%)	0,660 (4,2%)	0,660 (4,2%)	0,6332
4	0,930 (4,9%)	0,955 (7,7%)	0,935 (5,4%)	0,920 (3,8%)	0,920 (3,8%)	0,8865

Analisando os resultados observamos novamente que os erros entre cada um dos casos separadamente e o valor analítico é bem próximo aos erros obtidos tratando separadamente cada método, MEF e MEC. Apesar de existir um erro em relação ao valor analítico, entre as várias discretizações ele é bem pequeno. Isto significa que algum problema pode estar na modelagem que fizemos e não na implementação dos métodos em questão.

## 5 - Aplicações do MEF, MEC e acoplamento MEF-MEC a problemas do DSSI -

### 5.1 - Comparação do MEF-MEC com o MEC e um método semi-analítico -

Até agora temos aplicado o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e a técnica de acoplamento entre eles ao problema relacionado com a obtenção das respostas dinâmicas da viga. A finalidade desta aplicação simples era assegurar que as implementações feitas estavam corretas.

A partir deste momento queremos averiguar como se comportam os métodos acoplados ao se modelar um problema mais real. Vamos, então, aplicar a técnica do acoplamento a um problema de interação solo-estrutura e comparar os resultados com os obtidos por um método semi-analítico [5] e pelo Método dos Elementos de Contorno [37]. No problema em questão a fundação rígida é excitada por forças harmônicas.

Como apresentamos anteriormente devemos plotar os valores dos termos da matriz de flexibilidade em função das frequências adimensionais, ver equação (2.109). Observe que esta matriz de flexibilidade [C] (5.1) é apenas a inversa da matriz de rigidez dinâmica [S] já apresentada anteriormente.

$$\begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi \cdot a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi \cdot G} \begin{bmatrix} C_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & C_{hh} & C_{mh} \\ 0 & C_{hm} & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ M/a \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

No modelo é imposto excitações com forças harmônicas sobre a fundação. Obtemos então a resposta dinâmica da fundação através dos seus deslocamentos vertical- $u_v$ , horizontal- $u_h$  e de rotação- $\phi$ , tal como na equação acima e representado na figura 5.1. Definimos ainda as forças de excitação como sendo  $F_t = \{F_v, F_h, M/a\}$ , ou seja são carregamentos vertical- $F_v$ , horizontal- $F_h$  e momento- $M$ . Estas forças são unitárias, ou seja  $F_t = \{1, 0, 0\}$ ,  $F_t = \{0, 1, 0\}$  e  $F_t = \{0, 0, 1\}$ , respectivamente para as forças

horizontal, vertical e momento, de tal forma que os componentes da matriz de flexibilidade, dada na equação (5.1), estão representados na própria resposta do problema, ou seja flexibilidades vertical  $C_{vv}$ , horizontais  $C_{hh}$ , de momento  $C_{mm}$  e os termos acoplados da matriz de flexibilidade  $C_{hm}$  e  $C_{mh}$ .

Primeiramente apresentamos os resultados obtidos com uma aplicação comparando os problemas analisados com o acoplamento MEF-MEC, com o MEC e um método semi-analítico [5].

Fizemos algumas variações nas discretizações para o domínio do MEF e para o domínio do MEC. Basicamente mantivemos as dimensões totais da superfície discretizada (22.a) e a profundidade da superfície discretizada pela malha de elementos finitos (2.a), onde "a" é o semi-lado da fundação rígida. Duas modelagens com estas dimensões foram utilizadas, uma para o MEF com 48 elementos e o MEC com 85 elementos e outra modelagem com 192 elementos finitos e 105 elementos de contorno, portanto esta última refinando mais a malha.

Uma terceira modelagem é feita com a malha apresentada na figura 2.9, discretização utilizada na seção 2.4.2 e no trabalho de Luco/Hadjian/Bos[7] para mostrar as dificuldades do MEF isoladamente tratar problemas de domínios infinitos. Neste caso MEC foi utilizado para modelar o solo com uma discretização de 88 elementos com tamanho de  $0,25.a$ , o que mantém a discretização total na superfície de 22.a. As características do carregamento são idênticas aos casos anteriores, ou como apresentado na figura 3.2.

Devemos observar ainda que os elementos utilizados foram elementos quadrilateral bilinear para os elementos finitos e elementos constantes para os elementos de contorno.

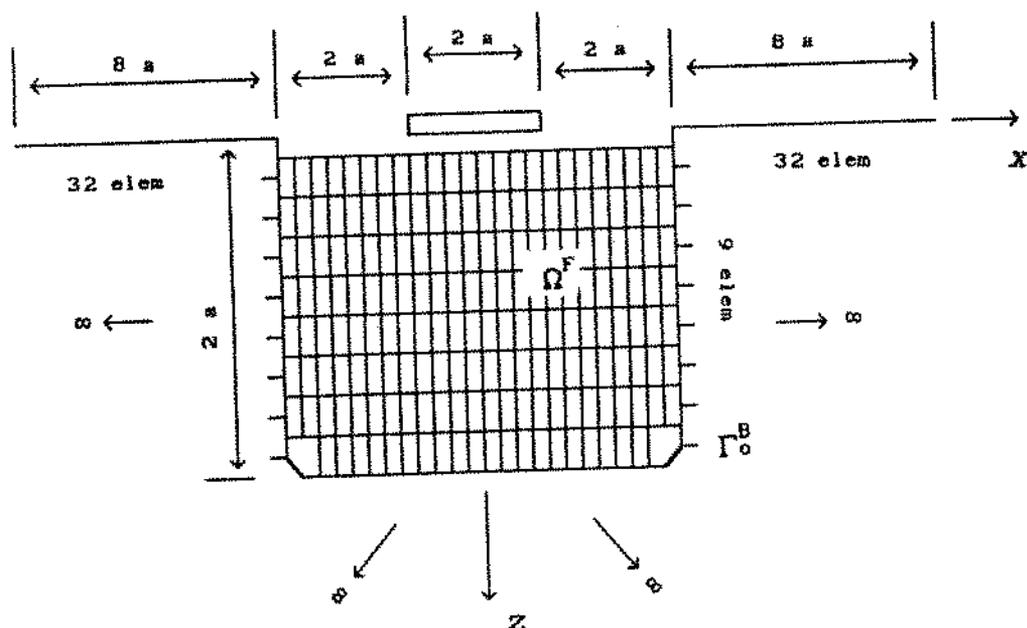


fig. 5.1 - Modelo do acoplamento entre MEF-MEC.  
(MEF-192 elem MEC-105 elem)

O MEC foi utilizado para modelar o solo com uma discretização de 88 elementos com tamanho de  $0,25.a$ , o que mantém a discretização total na superfície de  $22.a$ . As características do carregamento são idênticas aos casos anteriores, ou como apresentado na figura 3.2.

Nas figuras seguintes estão plotados os termos da matriz de flexibilidade dado na equação (5.1).

Nas figuras 5.2 e 5.4 observamos uma boa aproximação entre os valores obtidos pelo sistema acoplado, o MEC e o método semi-analítico. Isto também ocorre nas figuras 5.3 e 5.5, porém com uma pequena divergência. Mas, devemos observar também nestas duas últimas figuras que o amortecimento possui um comportamento contrário àquele apresentado para o problema da viga, ver figura 3.4 e figuras 5.3 e 5.5. Para o domínio fechado (problema da viga), um mesmo fator de amortecimento permitiu que o MEF apresentasse uma resposta mais amortecida do que o MEC. Isto não ocorre para o problema de domínio infinito

(problema solo-estrutura). Neste caso, como mostramos as figuras 5.3 e 5.5, o MEC possui um fator de amortecimento maior do que o modelo do acoplamento onde inclui o MEF à malha do MEC.

Para o termo da flexibilidade de rotação, apresentado na figura 5.6, o método acoplado não possui uma convergência perfeita em relação aos outros métodos, apesar de o aumento da discretização global (MEF-192 elementos, MEC-105 elementos), ou seja um refinamento da malha ter permitido uma convergência nas respostas, levando a curva para o valor do resultado semi-analítico. O termo da flexibilidade de rotação pode ser considerado o mais difícil de representar devido às influências dos termos acoplados ( $C_{mh}$  e  $C_{hm}$ ). Uma idéia para minimizar este erro, poderia ser aumentando o número de elementos na interface solo-fundação, melhorando a discretização no local onde ocorrem as tensões.

Finalmente para este exemplo apresentamos as flexibilidades acopladas. São os termos de acoplamento da matriz de flexibilidade, ou seja  $C_{mh}$  e  $C_{hm}$ , os quais devem ser simétricos. Neste momento estamos comparando apenas os métodos, acoplamento MEF-MEC, MEC e semi-analítico, posteriormente mostraremos em um gráfico este efeito de simetria entre os termos acoplados.

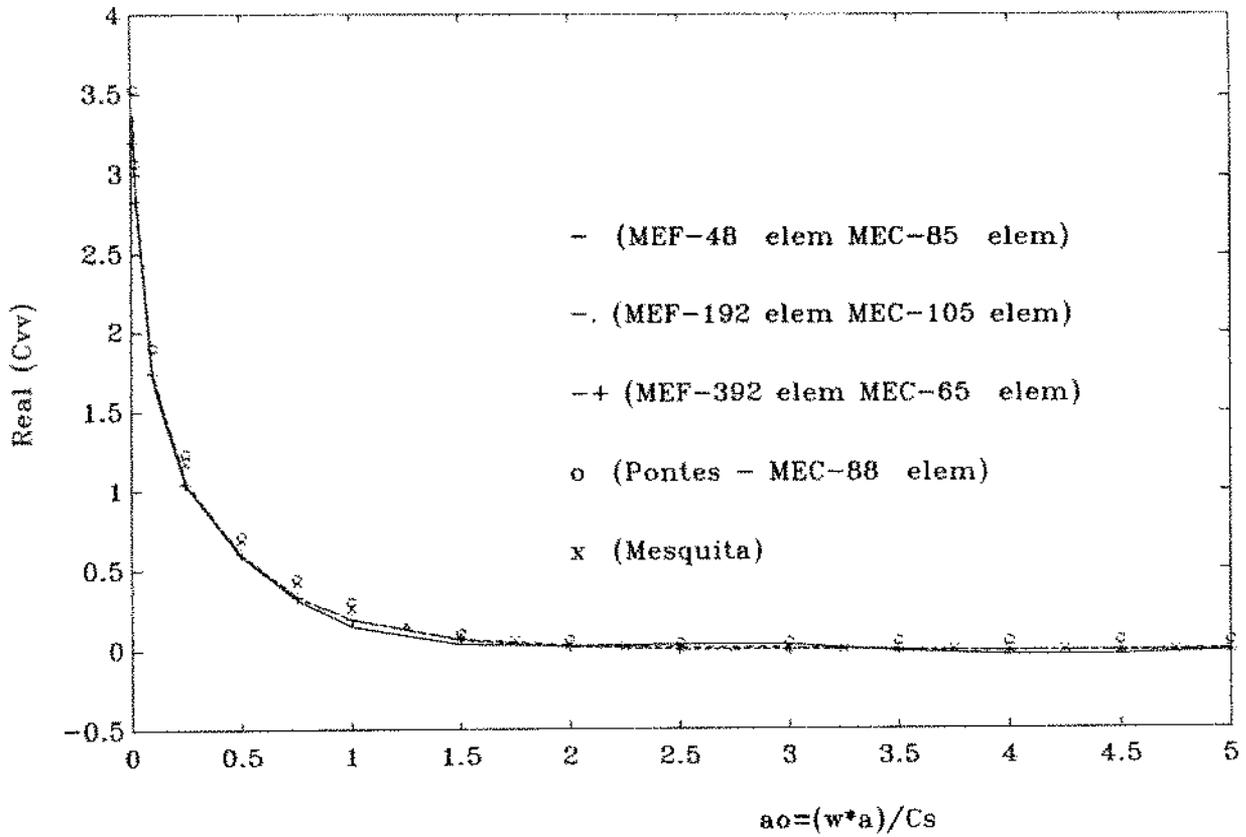


fig. 5.2 - Flexibilidade Vertical

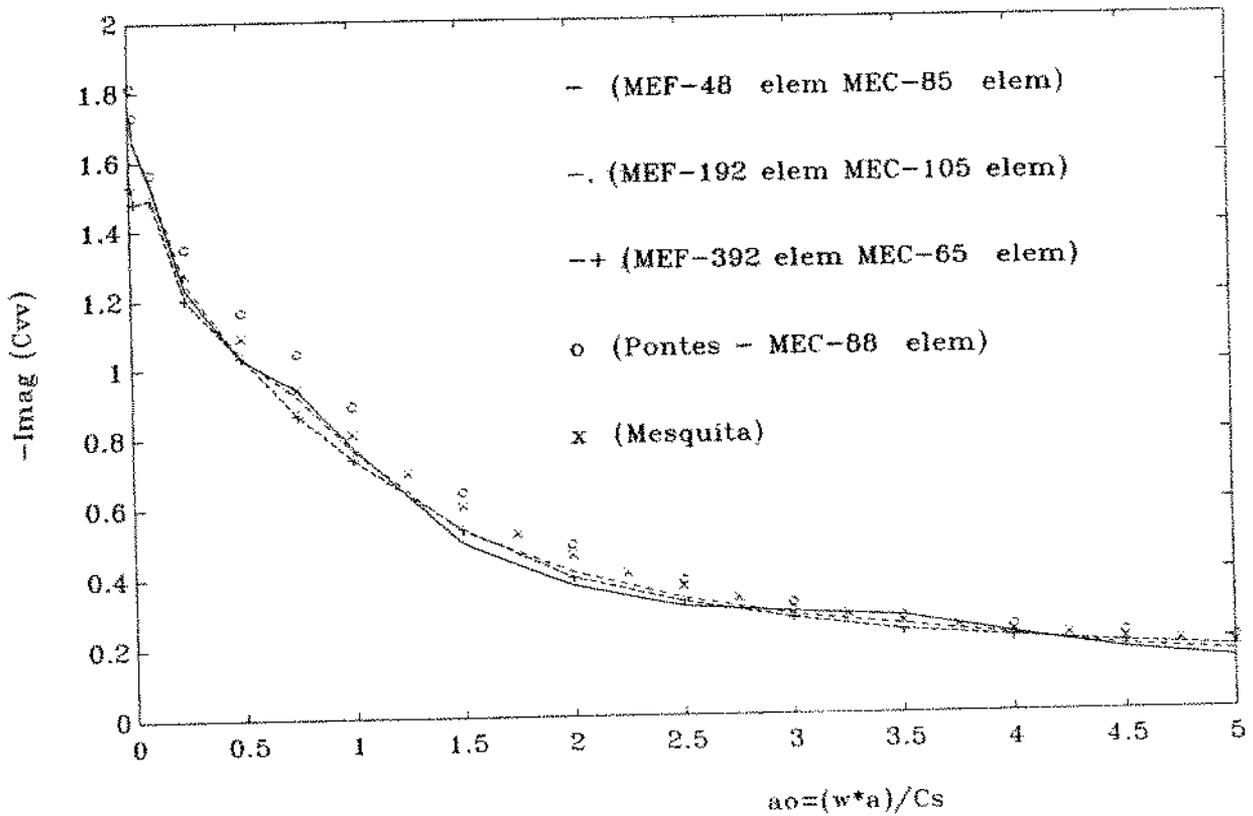


fig. 5.3 - Coeficiente de amortecimento vertical

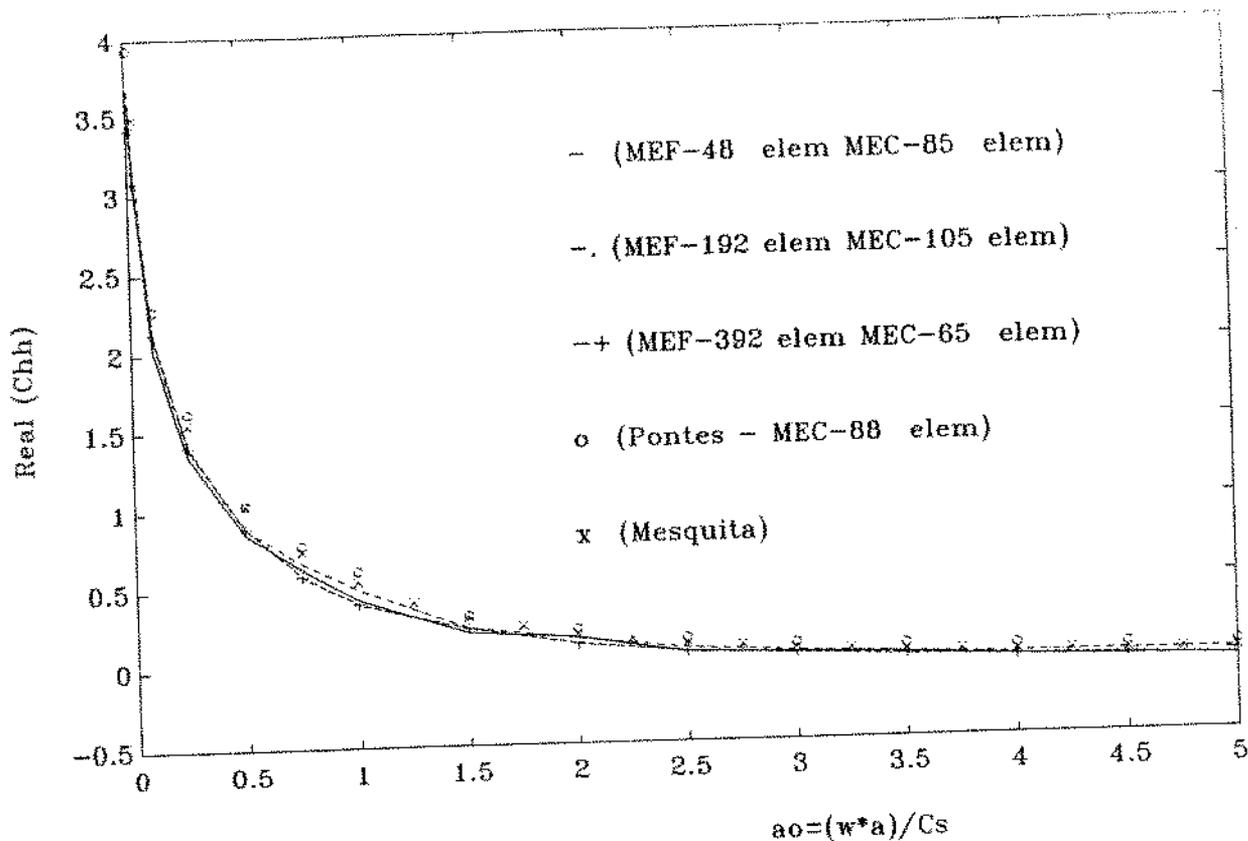


fig. 5.4 - Flexibilidade Horizontal

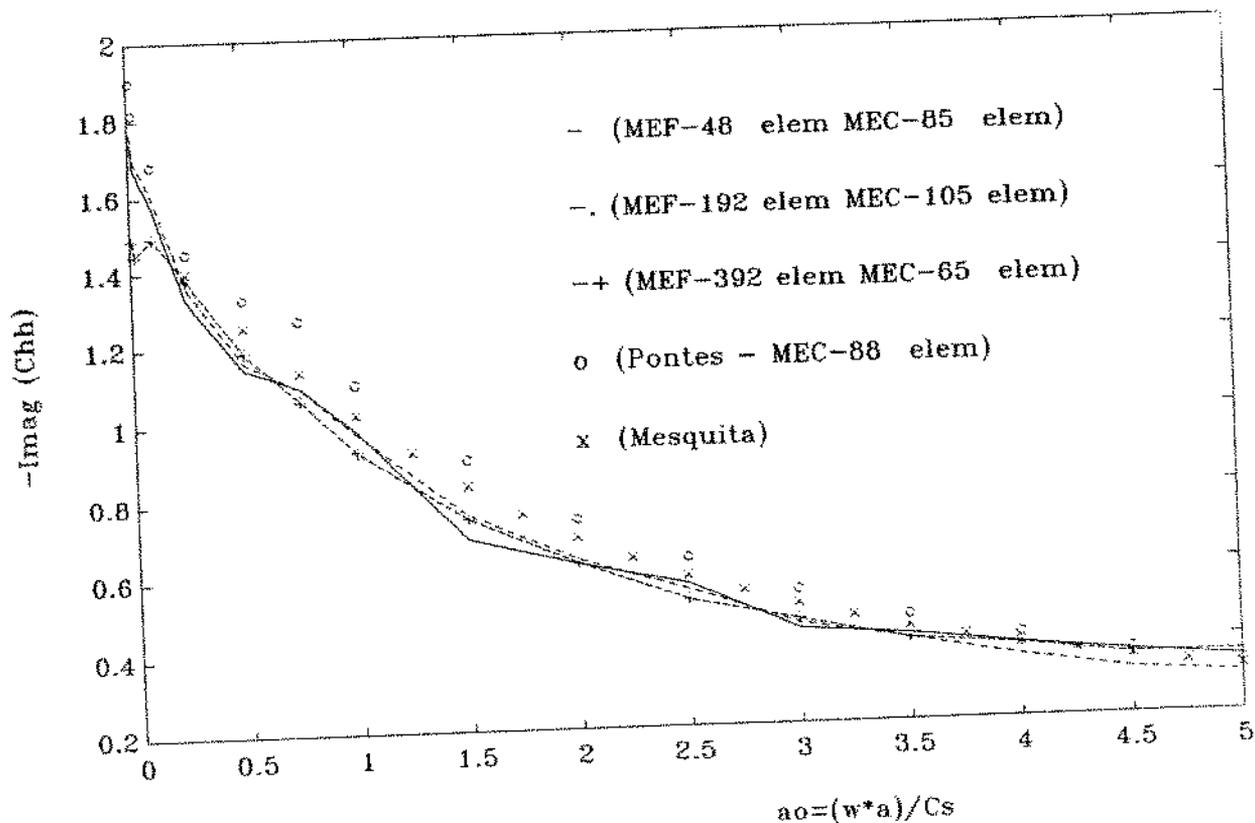


fig. 5.5 - Coeficiente de amortecimento horizontal

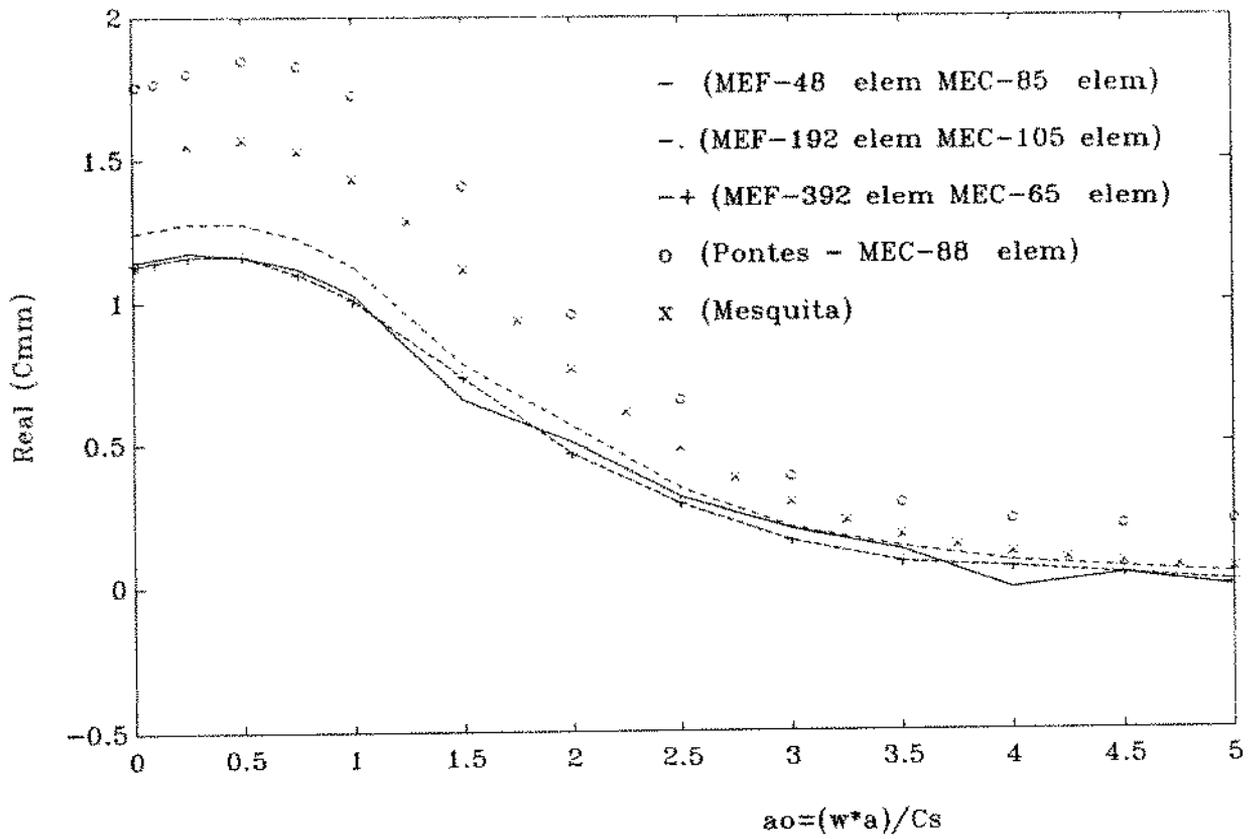


fig. 5.6 - Flexibilidade rotação

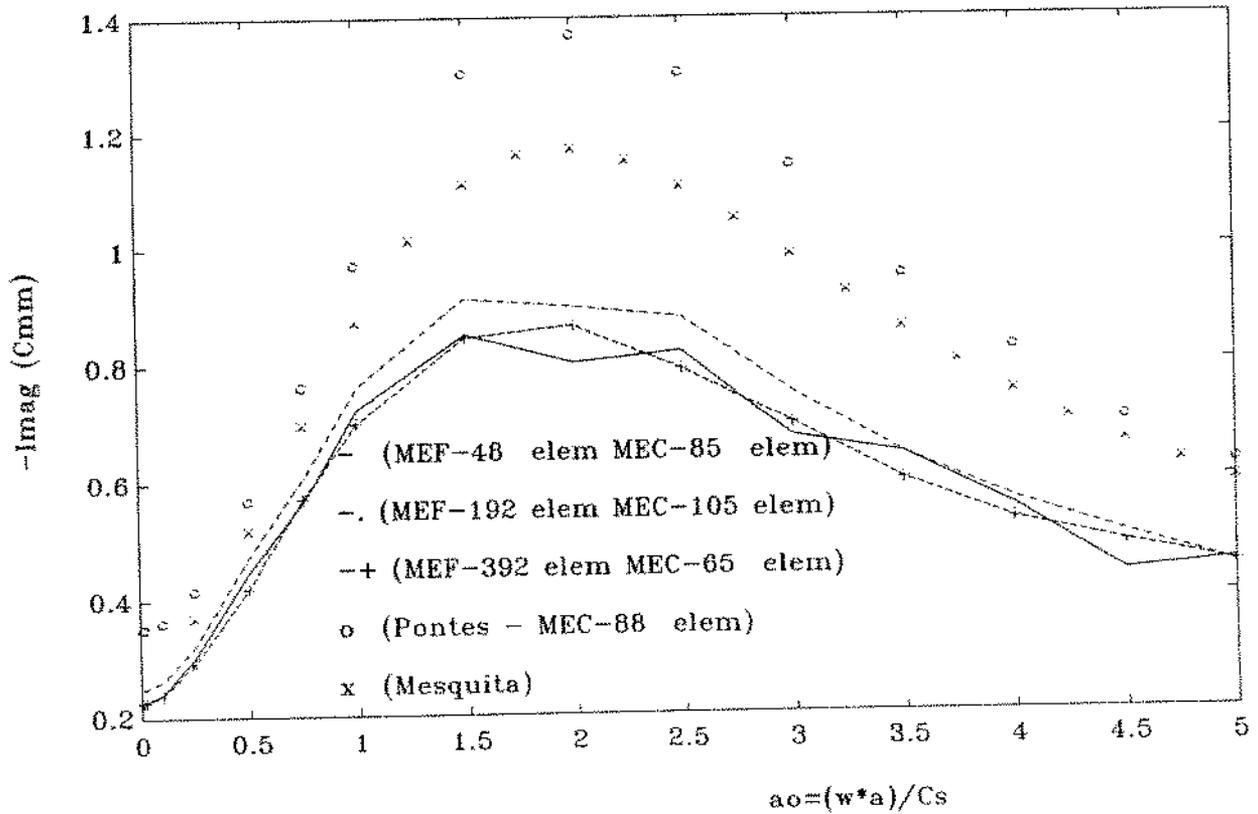


fig. 5.7 - Coeficiente de amortecimento rotação

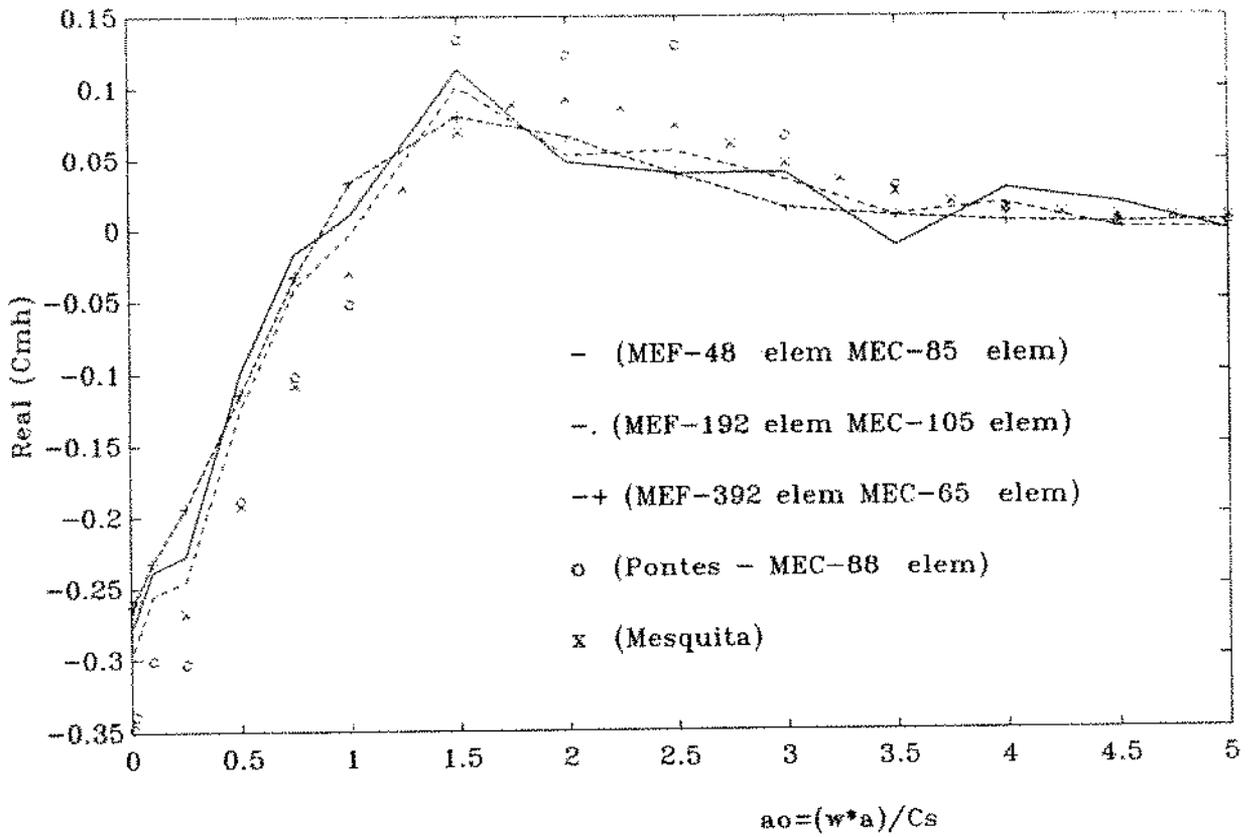


fig. 5.8 - Flexibilidade acoplada  $C_{mh}$

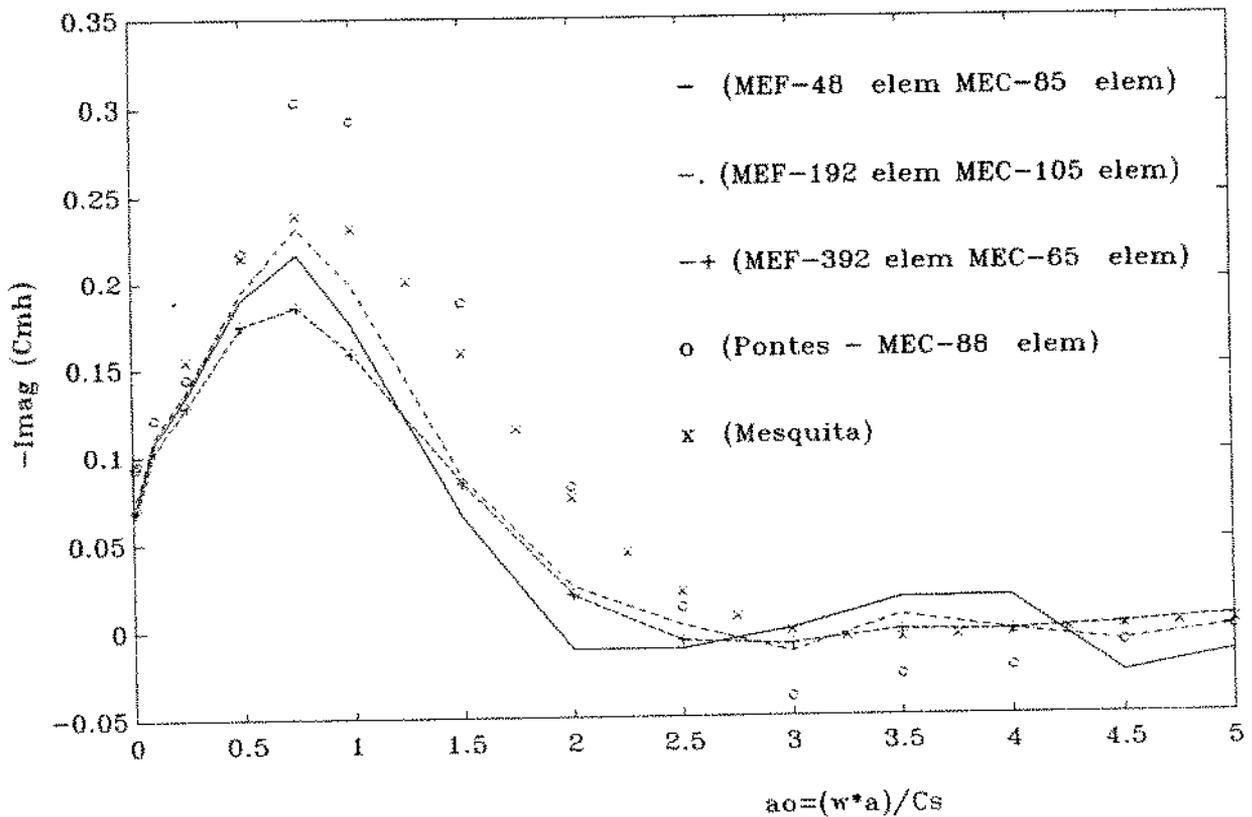


fig. 5.9 - Coeficiente de amortecimento acoplados  $C_{mh}$

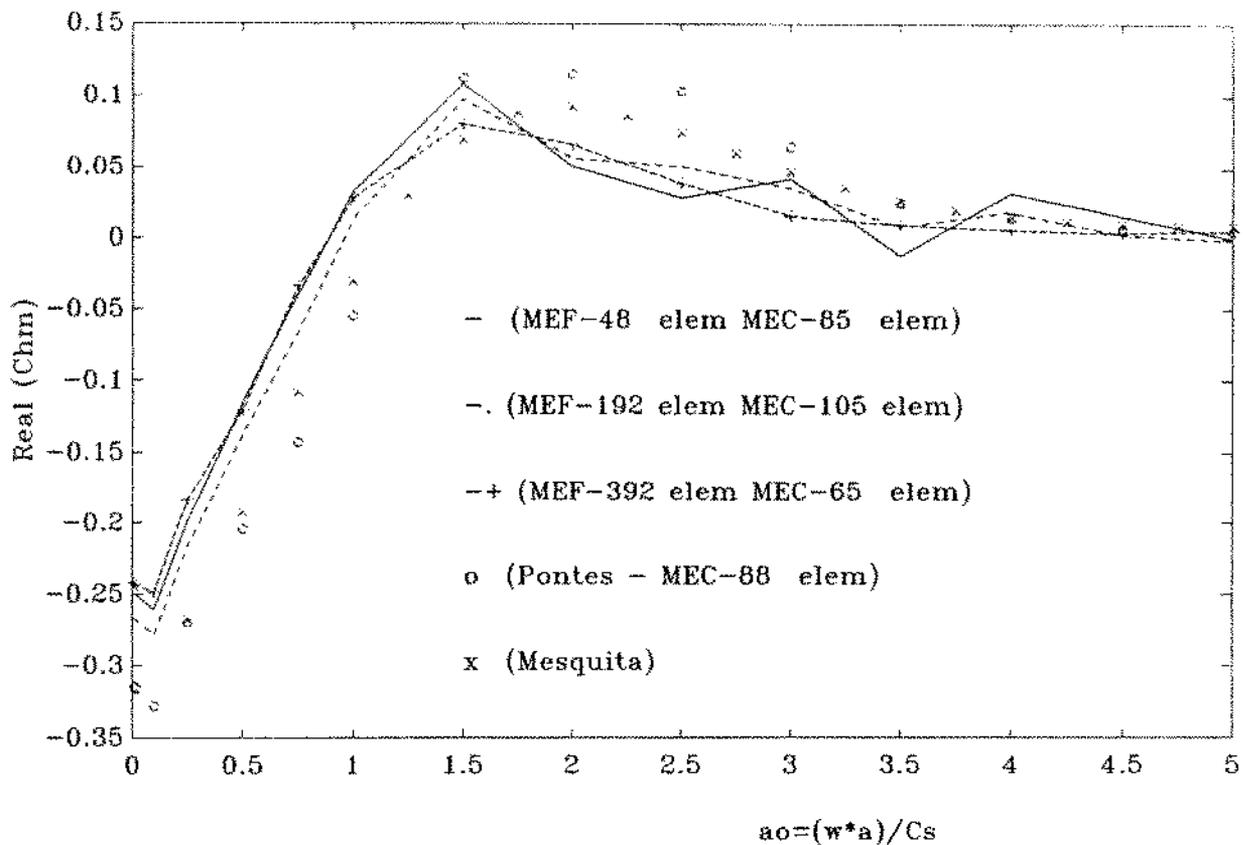


fig. 5.10 - Flexibilidade acoplada  $Ch_m$

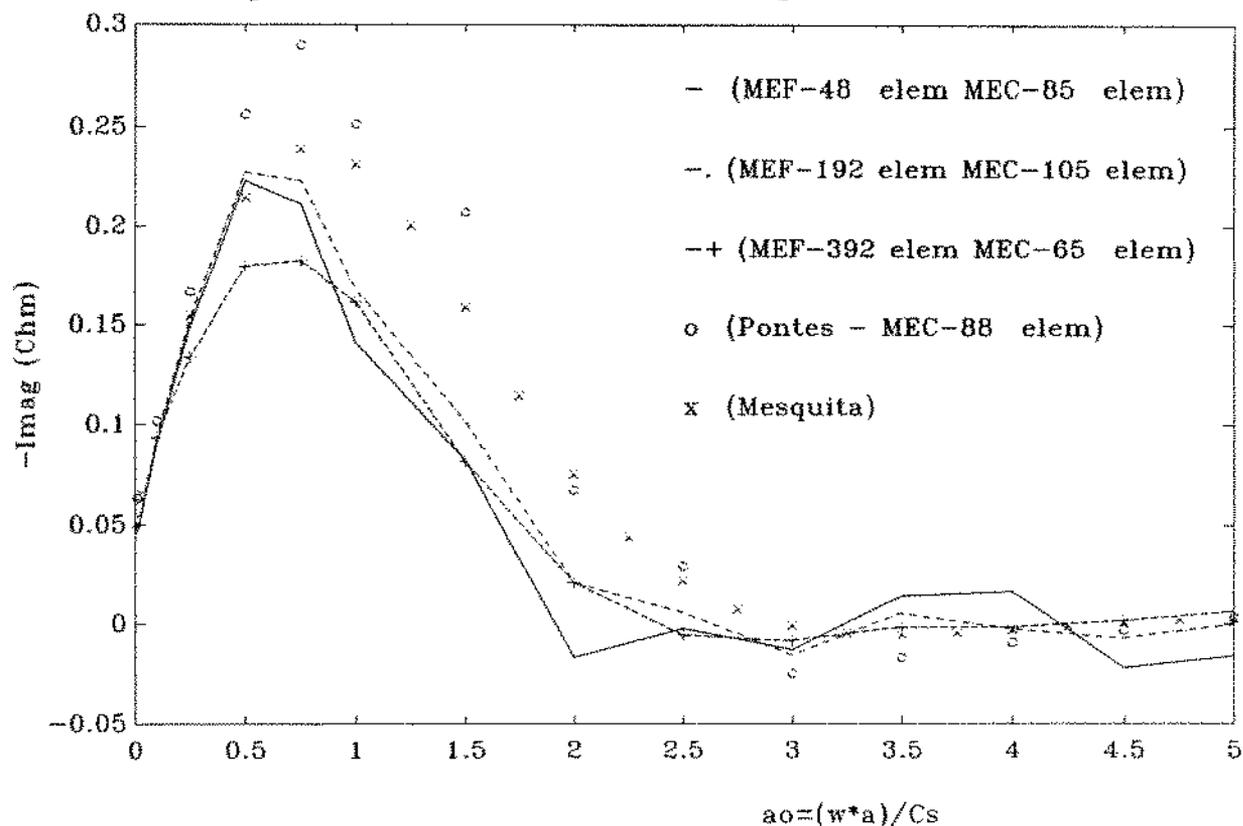


fig. 5.11 - Coeficiente de amortecimento acoplado  $Ch_m$

## 5.2 - Comparação do MEF-MEC com o MEF -

Outra análise a que nos propomos fazer é estudar o efeito do acoplamento ao amortecimento geométrico.

Como mencionamos anteriormente, o solo possui amortecimento físico e amortecimento geométrico. Para modelagem de problemas dinâmicos solo-estrutura, por exemplo, devemos considerar os efeitos destes amortecimentos.

Isto torna-se difícil quando utilizamos elementos finitos para modelar o solo. Sendo um método de domínio finito, o modelo não consegue representar o efeito do amortecimento geométrico. Uma das possibilidades, utilizadas inicialmente por alguns autores [1, 2, 3], são a utilização dos elementos infinitos que possuem a desvantagem de serem criados para soluções particulares e que exigem muitas vezes técnicas de integrações especiais.

Uma outra alternativa seria aumentarmos a malha do domínio discretizado para uma distância bastante grande do local onde está sendo analisado, de modo a representar o domínio infinito. Porém, surgem problemas com este aumento excessivo da malha tornando o custo computacional muito alto. E ainda, mesmo com uma malha suficientemente grande, não é possível representar bem o domínio infinito. Pois a reflexão de ondas sempre existirá devido ao truncamento da malha.

A mudança das condições de contorno não são suficientes para simular este efeito do amortecimento geométrico. Tanto as condições de contorno com deslocamentos nulas, ou seja restringindo as laterais, quanto as condições de contorno com tensões nulas, ou seja com as laterais livres, não conseguem simular o efeito do domínio infinito e então representar o amortecimento geométrico.

Nesta seção mostramos essas dificuldades do MEF modelar o solo em um problema dinâmico solo-estrutura. Os resultados apresentados aqui foram obtidos utilizando o mesmo modelo apresentado na seção 2.4.2 onde comparamos os resultados com a implementação do MEF e os resultados obtidos no trabalho de Luco/Hadjian/Bos [7]. Porém nas curvas apresentada nesta

seção estão plotados os termos da matriz de flexibilidades, que inversa da matriz de rigidez apresentada na seção 2.4.2.

Comparamos os resultados obtidos pelo MEF com os resultados obtidos com a mesma malha de elementos finitos acoplada com os elementos de contorno.

A seguir apresentamos nos gráficos os resultados onde comparamos a modelagem do problema dinâmico solo-estrutura com o solo discretizado por elementos finitos apenas e com o acoplamento entre os métodos, parte do solo discretizado por elementos finitos e parte do solo discretizados por elementos de contorno representando o domínio infinito.

Nas figuras 5.12 - 5.13 podemos observar que o método acoplado (MEF-MEC) consegue reproduzir o amortecimento geométrico eliminando as ressonâncias irrealis que aparecem quando modelamos o meio infinito com o MEF.

Observamos que o aumento do fator de amortecimento material (passando de  $\eta=0,05$  para  $\eta=0,20$ ) para simular o efeito do amortecimento geométrico não possui eficiência, pois consegue reduzir parcialmente os picos das frequências mais altas, onde as amplitudes são menores, como podemos observar nas figuras 5.12 e 5.14, onde plotamos as flexibilidades vertical e horizontal, respectivamente. Podemos observar também que mesmo quando este amortecimento torna-se suficiente ao ponto de eliminar todas as amplitudes das frequências de ressonância, este amortecimento passa a ser muito alto que provoca uma distorção da resposta obtida. Este ultimo efeito é apresentado nos gráficos da figura 5.16 e 5.17 onde plotamos a flexibilidade de rotação e o coeficiente de amortecimento de rotação, respectivamente.

Nas figuras seguintes 5.18 à 5.21, mostramos o efeito dos métodos em relação aos termos acoplados da matriz de flexibilidade dinâmica ( $C_{mh}$  e  $C_{hm}$ ).

Nas figuras 5.18 e 5.19 mostramos a flexibilidade e coeficiente de amortecimento para os termos acoplados quando discretizamos o solo apenas com o MEF, utilizando amortecimento material  $\eta=0,05$  e  $\eta=0,20$ , respectivamente. Nos dois casos observamos a simetria entre os termos  $C_{mh}$  e  $C_{hm}$ . Podemos também

observar o efeito do amortecimento quando aumentamos o valor de  $\eta$ .

Nas figuras 5.20 e 5.21 plotamos os mesmos termos, utilizando um amortecimento material  $\eta=0,20$ , para o domínio discretizado pelo MEF e o MEC juntos, mostrando que a simetria dos termos acoplados também se mantém. O pequeno erro para esta resposta pode ser justificado principalmente pelas dificuldades que surgem nas integrações das integrais de contorno do MEC, integrais estas que possuem singularidades, onde o efeito de uma má integração pode retirar a simetria das respostas.

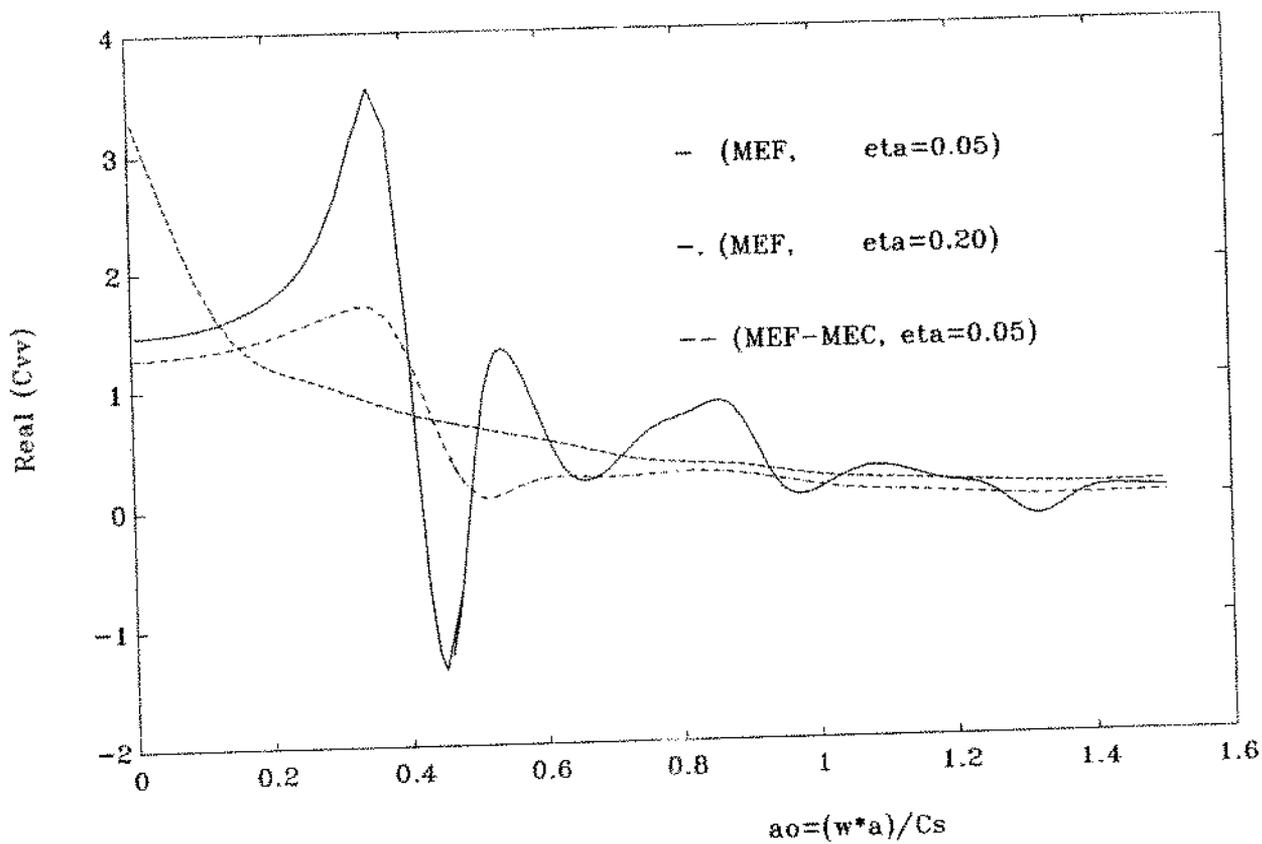


fig. 5.12 - Flexibilidade vertical

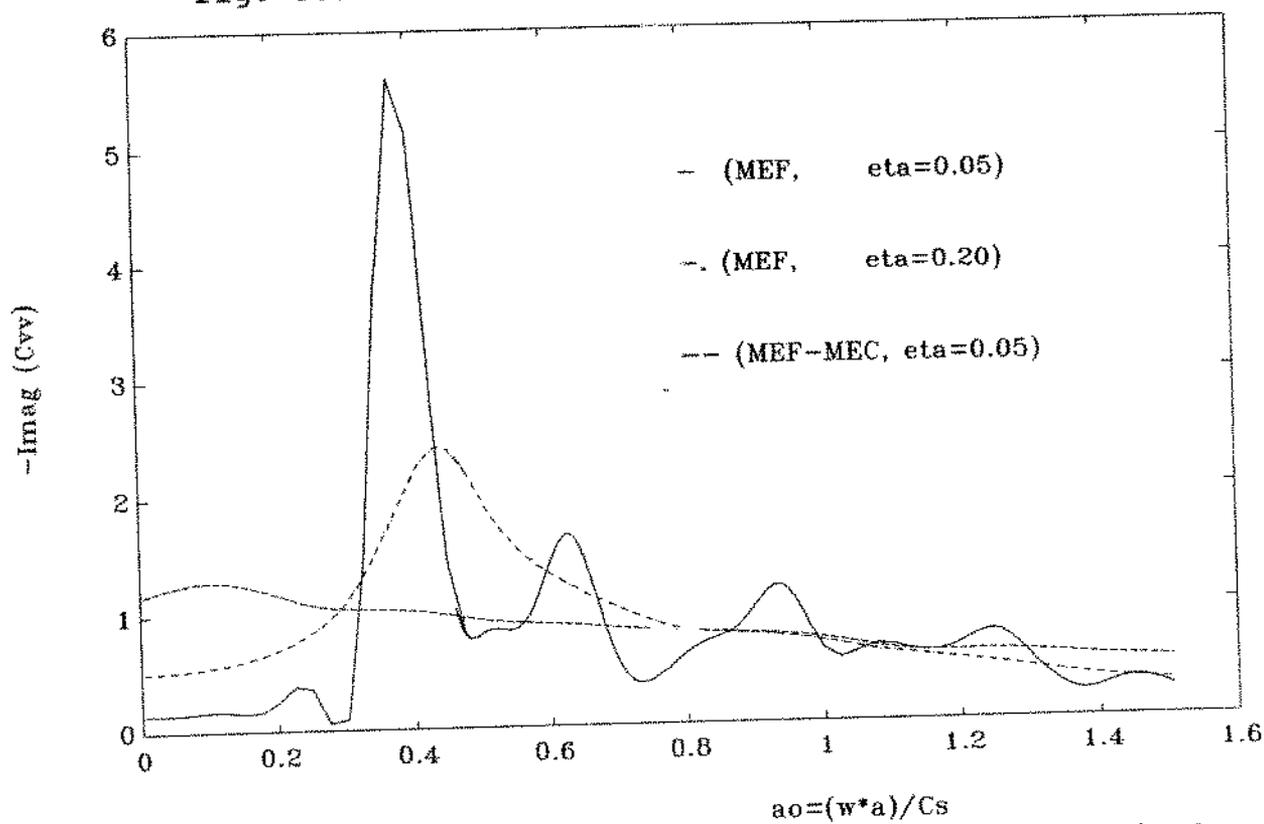


fig. 5.13 - Coeficiente de amortecimento vertical

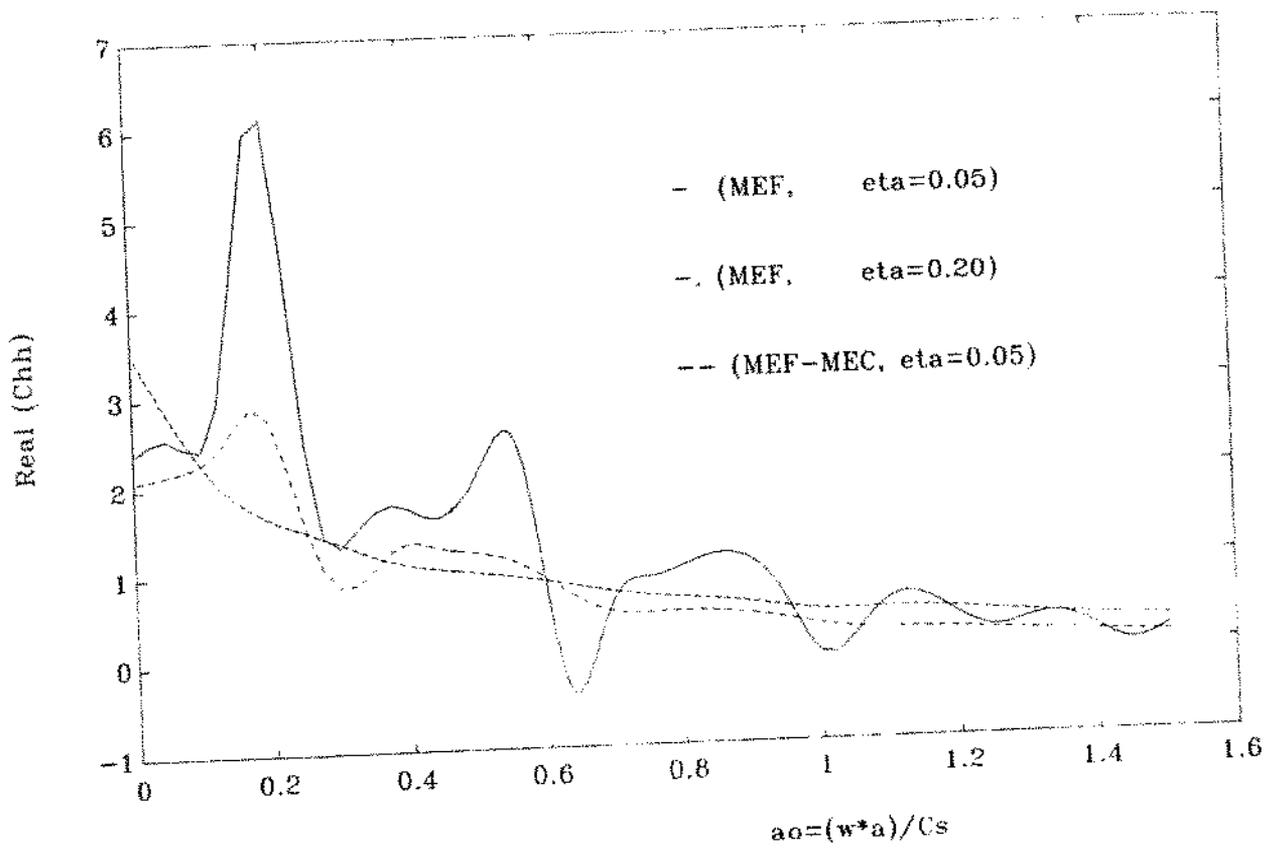


fig. 5.14 - Flexibilidade Horizontal

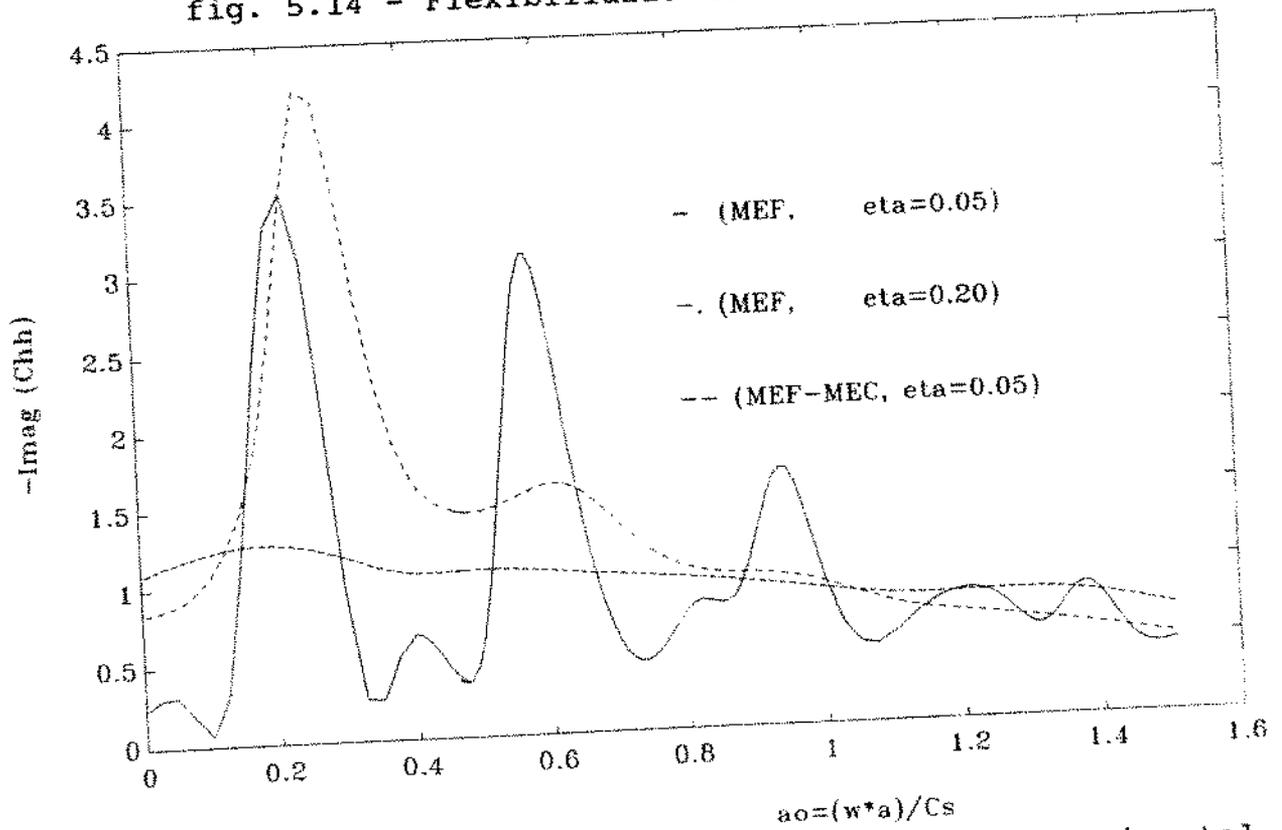


fig. 5.15 - Coeficiente de amortecimento horizontal

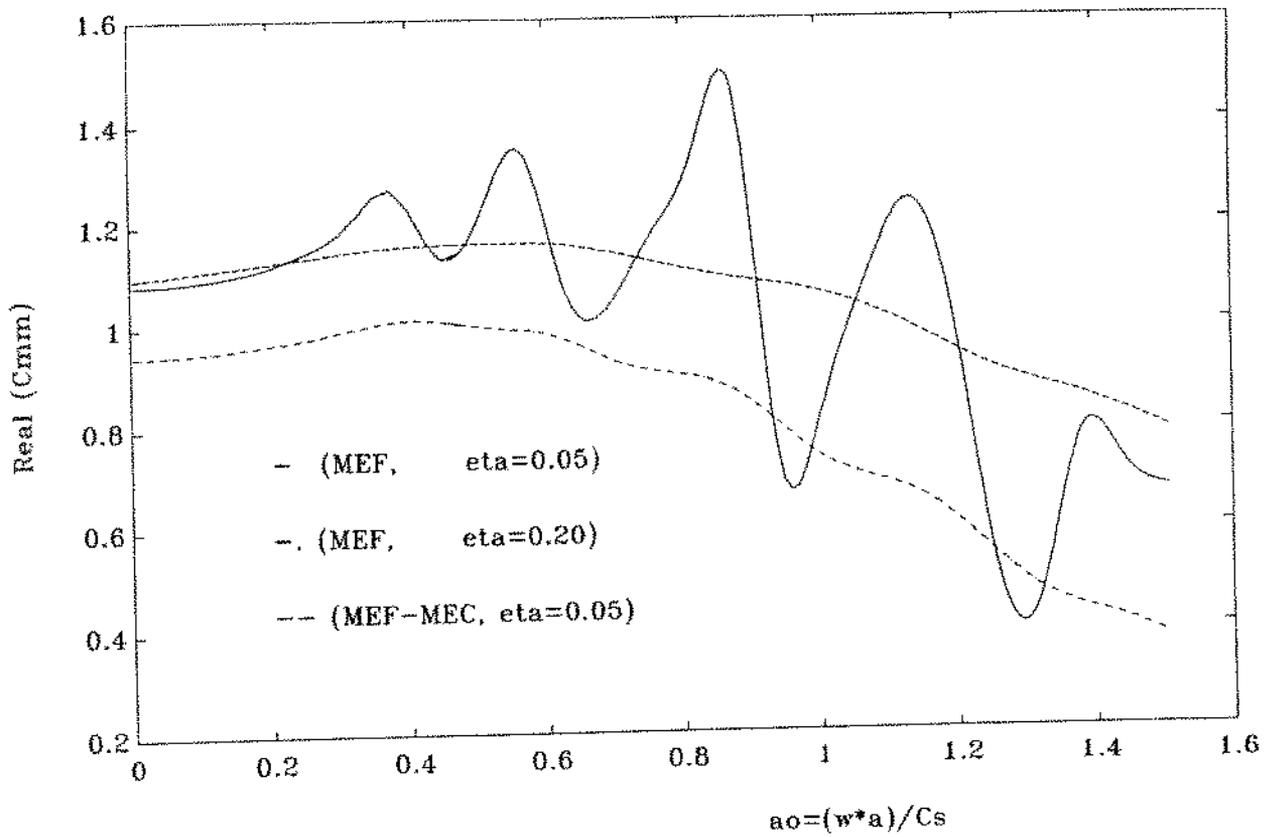


fig. 5.16 - Flexibilidade rotação

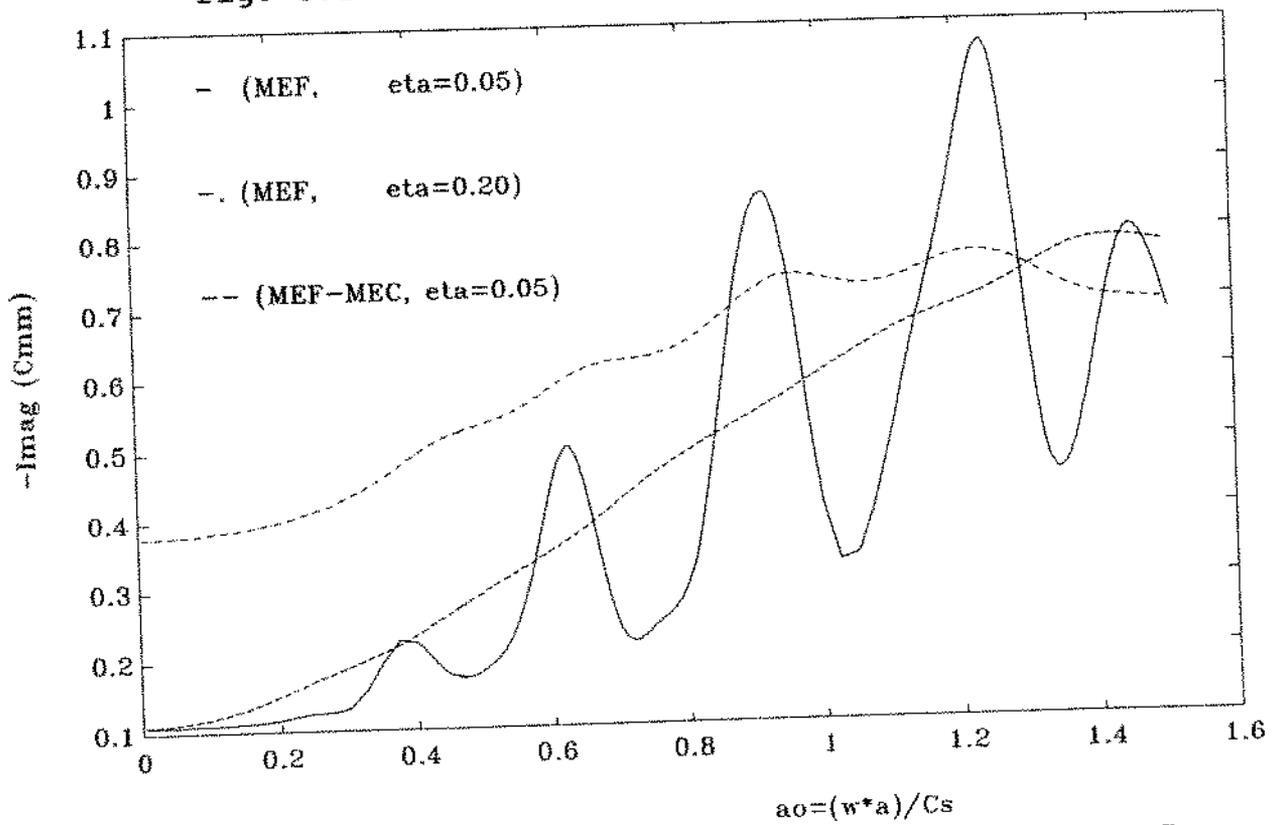


fig. 5.17 - Coeficiente de amortecimento rotação

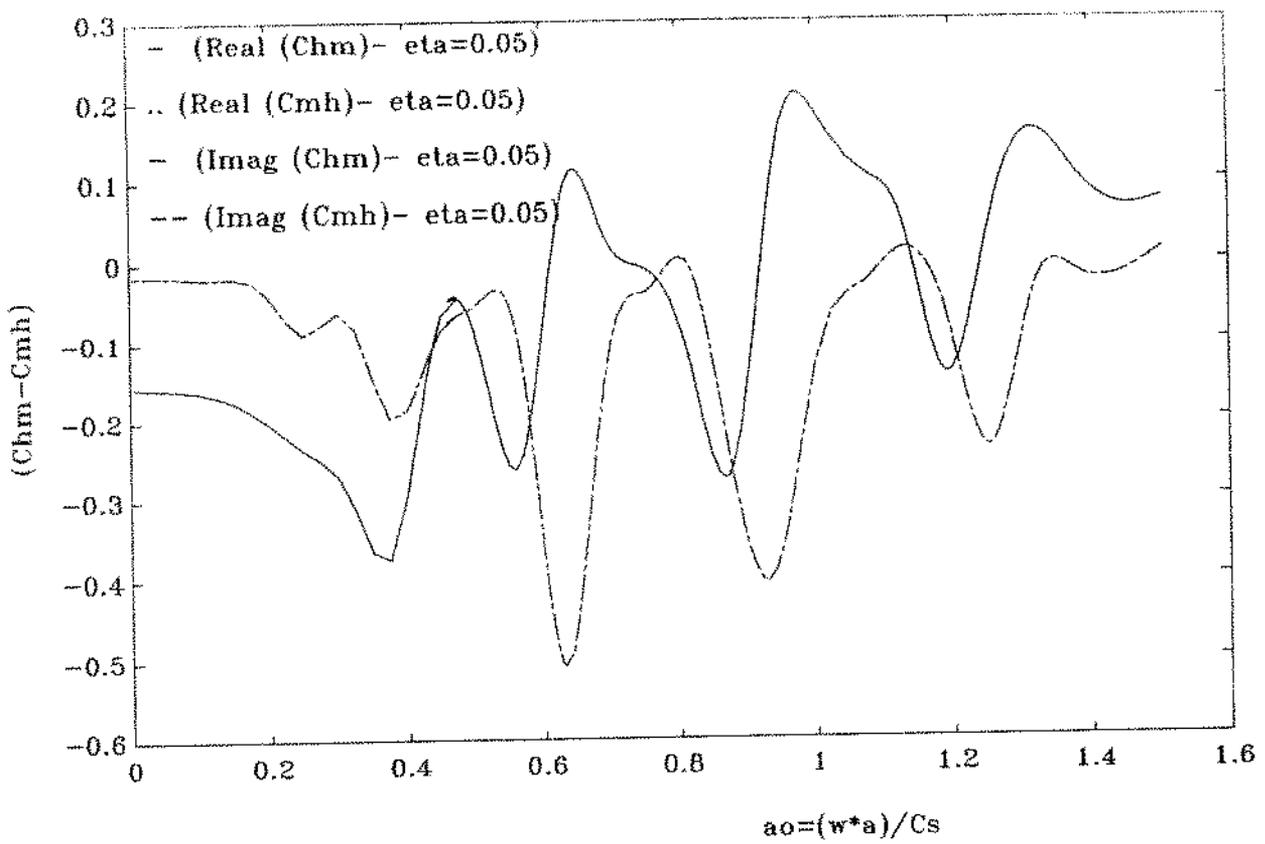


fig. 5.18 - Termos acoplados da matriz de flexibilidade  $C_{mh} - C_{hm}$

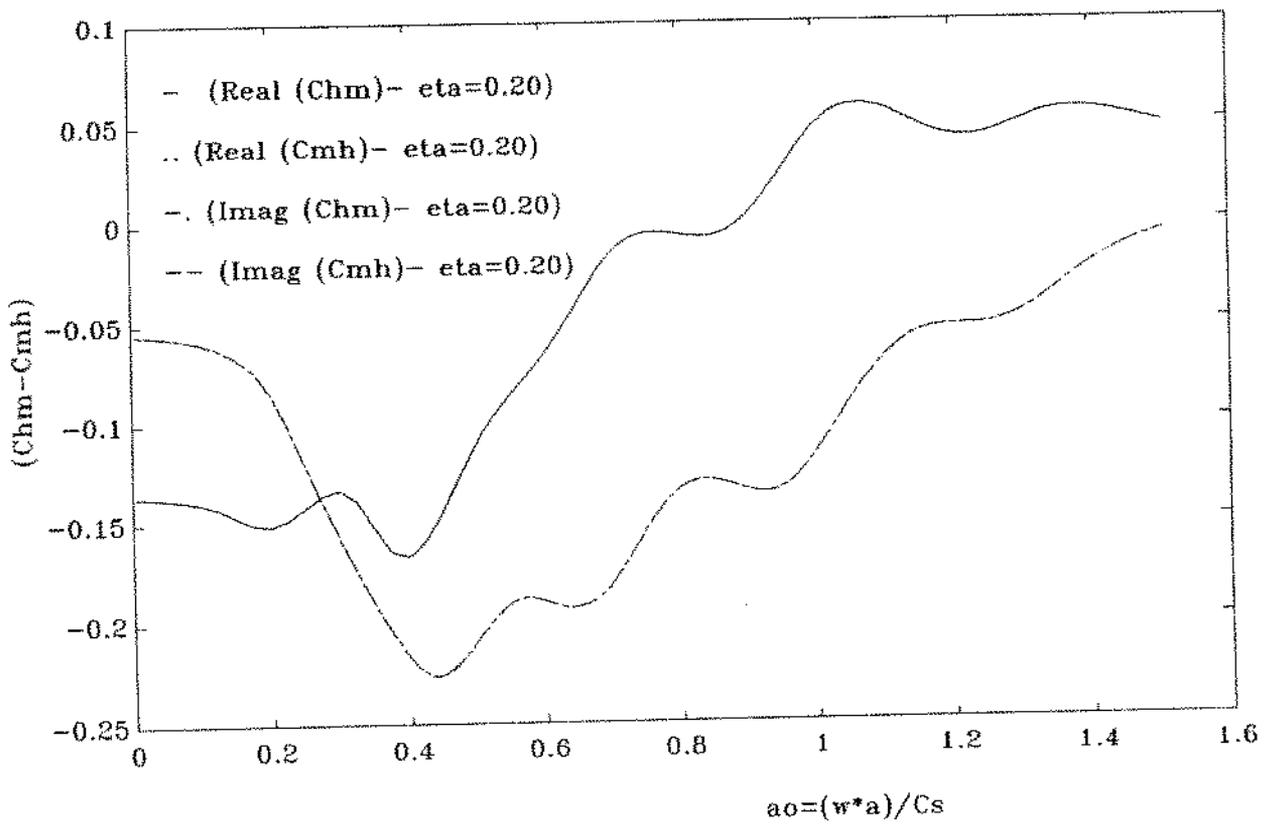


fig. 5.19 - Termos acoplados da matriz de flexibilidade  $C_{mh} - C_{hm}$

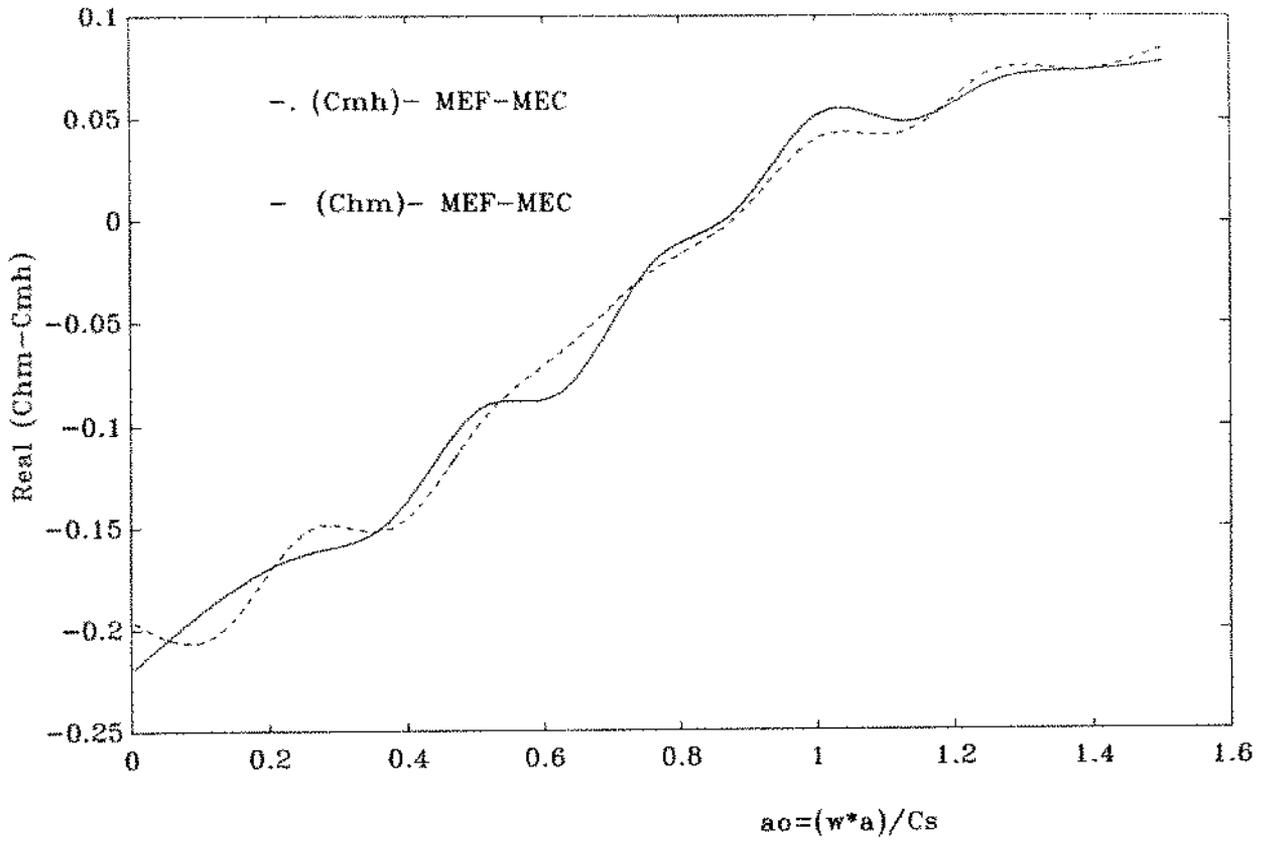


fig. 5.20 - Flexibilidade acoplada  $C_{mh} - C_{hm}$

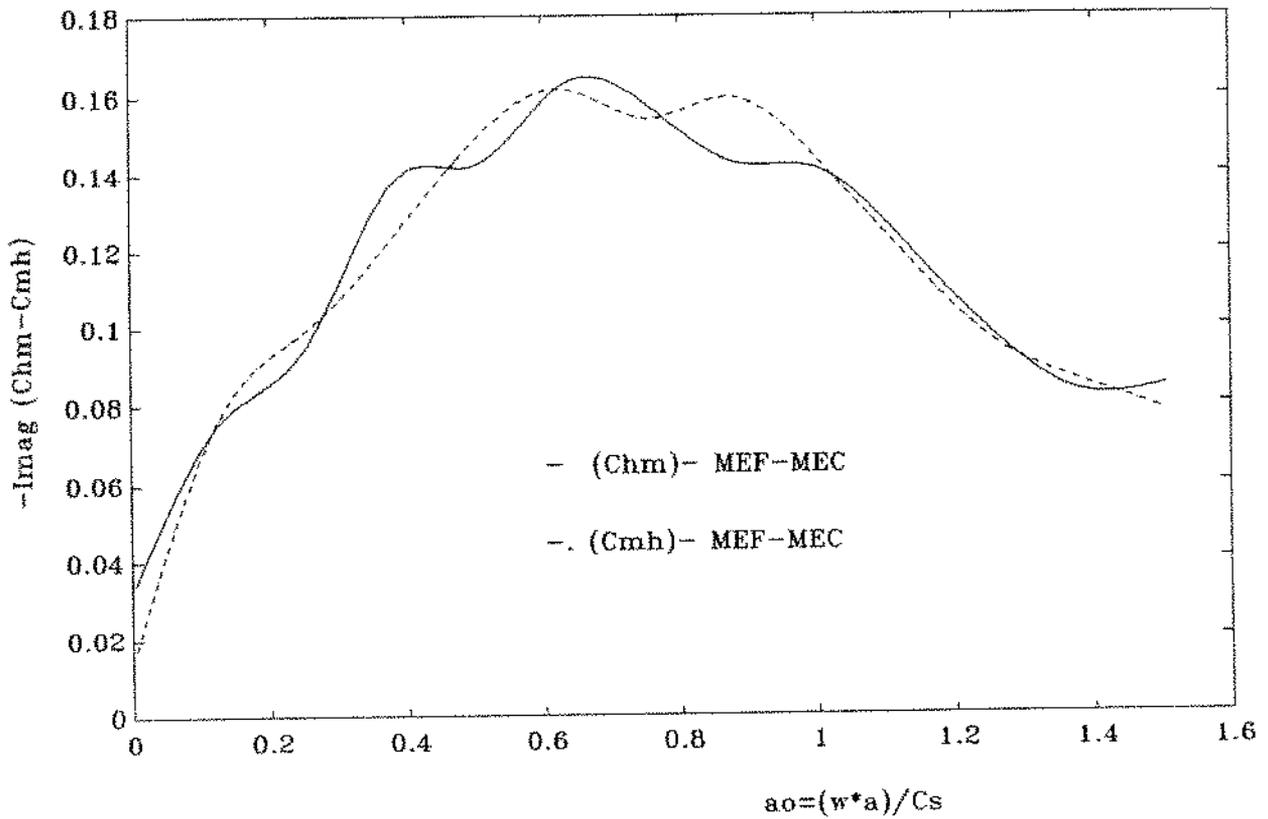


fig. 5.21 - Coeficiente de amortecimento acoplado  $C_{mh} - C_{hm}$

## 6 - Conclusão -

Neste trabalho apresentamos uma comparação crítica entre o método dos Elementos Finitos (MEF), o método dos Elementos de Contorno (MEC) e o acoplamento dos métodos aplicados a problemas do DSSI (Dynamic Soil-Structure Interaction).

Iniciamos com a formulação para problemas elastoestáticos, ampliamos a formulação para problemas elastodinâmicos estacionários e finalmente estudamos o caso viscoelastodinâmico estacionário.

Através de um problema clássico da resistência dos materiais, ou seja, o problema de uma viga engastada excitada uni-axialmente por uma força harmônica, apresentamos a validação e comparação das implementações do MEF, do MEC e do método acoplado. A partir das curvas de resposta em frequência obtidas para cada uma das técnicas, podemos concluir que os resultados apresentados foram bastante satisfatórios. Discutimos também a influência das condições de contorno adotadas na convergência dos resultados. Verificamos que tanto no engastamento da viga, quanto no contato na extremidade com corpo rígido devemos evitar o efeito de cisalhamento ou seja devemos permitir deslocamentos transversais ao sentido do carregamento.

Posteriormente utilizamos os métodos (MEF e MEC) separadamente e o acoplamento entre eles aplicando-os a problemas de interação dinâmica solo-estrutura (problemas do DSSI). Os resultados nos mostram que o acoplamento é a técnica ideal para a solução de problemas desta natureza.

Observamos em outra análise que o MEF realmente possui dificuldades de modelar domínios infinitos, daí a necessidade de estar acoplado ao MEC para tratar estes tipos de problemas, além disso, não existe uma superioridade entre os dois métodos pois apesar do MEF ter uma inferioridade em relação ao MEC para tratar domínios infinitos, é um método que não deve ser descartado em função de sua superioridade em muitos outros aspectos, como na solução de problemas não lineares. Assim, concluímos que o mais adequado é o acoplamento

entre os dois métodos (MEF-MEC) que une as vantagens das duas técnicas.

Alguns aspectos importantes na implementação do método combinado (MEF-MEC) devem ser ressaltados. O uso de elementos diferentes, elementos lineares para os elementos finitos e elementos constantes para os elementos de contorno, trouxeram dificuldades adicionais no acoplamento da interface dos domínios, como por exemplo: número diferentes de graus de liberdade por elemento, localização dos nós e geração das malhas. Podemos sugerir que o mais recomendado é a utilização de elementos de mesma ordem (linear-MEF e linear-MEC ou quadrático-MEF e quadrático-MEC).

Outro aspecto que pode ser mencionado após este trabalho é um estudo mais detalhado das malha utilizadas para cada domínio, analisando o influência dos domínios nas respostas. Poderíamos sugerir por exemplo um refinamento próximo ao corpo rígido onde existe concentrações de tensões.

A partir das implementações realizadas, pode-se facilmente através de estudos paramétricos avaliar a influência na resposta dada por domínios com propriedades físicas diferentes, por fundações flexíveis, por fundações com geometrias diferentes.

Pelos resultados apresentados podemos concluir que o trabalho atingiu os objetivos propostos. Devemos observar no entanto que este trabalho de acoplamento entre o MEF e o MEC e análise dos métodos separadamente foi feito para problemas bi-dimensionais e no domínio da frequência (estado estacionário). Com isto uma sequência natural é o estudo, implementação, e a utilização aplicada da técnica do acoplamento entre o MEF e o MEC para problemas tri-dimensionais e no domínio do tempo. Bem como futuramente análises não lineares destes problemas de domínio infinito.

7 - Bibliografia -

- [1] P. Bettess , 'Infinite Elements', Int. J. Numerical Meth. in Engineering, 11 (1977), pp 53-64.
- [2] F. Medina, J. Penzien , 'Infinite Elements for Elastodynamics', Earth. Eng. Struct. Dynamic, 10 (1982), pp 699-709.
- [3] F. Medina, R. L. Taylor , 'Finite Elements Techniques for Problems of Unbounded Domains', Int. J. Numerical Meth. Eng., 19 (1983), pp 1209-1226.
- [4] G. Gazetas , 'Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art', Soil Dynamics and Earth. Eng., 2 (1983), pp 2 - 42.
- [5] E. Mesquita Neto , 'Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum', VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 120, VDI Verlag, Duesseldorf, 1989.
- [6] S. Lysmer , 'Vertical Motion of Rigid Footings', Dept. of Civil Eng., Univ. of Michigan, Contract Report n. 3-115, Conducted for WES under Contract n. DA-22-07P-ENG-340, June, 1965.
- [7] J. E. Luco, A. H. Hadjian, H. D. Bos , 'The Dynamic Modeling of the Half-plane by Finite Elements.', Nuclear Eng. Design, 31 (1974), pp. 184-194.
- [8] A. H. Hadjian, J. E. Luco, N. C. Tsai , 'Soil-Structure Interaction: Continuum or Finite Element?', Nuclear Eng. Design, 31 (1974), pp. 151-167.
- [9] G. D. Manolis, D. E. Beskos , 'Boundary Element Methods in Elastodynamics', Unwin Hyman, London, 1988.

- [10] D. E. Beskos , 'Boundary Element Methods in Mechanics', Elsevier Science Publishing Co. Inc. , 1987.
- [11] S. Timoshenko and J.N.Goodier , 'Theory of Elasticity', (3rd ed.), New York, McGraw-Hill, 1969.
- [12] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan , 'Finite Elements and Approximation', John Wiley & Sons, Inc. , 1983.
- [13] T. J. R. Hughes , 'The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis', Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
- [14] K. J. Bathe , 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis', Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [15] H. L. Wong, J. E. Luco , 'Dynamic interaction between rigid foundations in a layered half-space', Soil Dynamics Earthqu. Eng., 1986, vol. 5, n. 3.
- [16] F. E. Richart Jr., J. R. Hall Jr., R. D. Woods , 'Vibrations of Soils and Foundations', Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1970.
- [17] R. M. Christensen , 'Theory of Viscoelasticity', Academic Press, New York, 1982.
- [18] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, P. Bettess. , 'Marriage à la mode - The Best of Both Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)', Energy Methods in Finite Element Analysis, chapter 5, Edited by R. Glowinski, E. Y. Radin, O. C. Zienkiewicz, Wiley, 1979.
- [19] G. Beer , 'Finite Element, Boundary Element and Coupled Analysis of Unbounded Problems in Elastostatics', Int. J. Numerical Meth. in Engineering, 19 (1983), pp. 567-580.
- [20] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel , 'Boundary

Element Techniques - Theory and Applications in Engineering', Springer, 1985

- [21] C. A. Brebbia, P. Georgiou , 'Combination of boundary and finite elements in elastostatics', Appl. Math. Modeling, 3 (1979), pp. 212-220
- [22] S. Kobayashi, T. Kawakami , 'Application of BE-FE Combined Method to Analysis of Dynamic Interactions Between Structures and Viscoelastic Soil', In C. A. Brebbia, G. Maier (eds), Boundary Element VII, Proc. 7th Int. Conf., p.6-3 - 6-12, 1985.
- [23] S. Kobayashi, T. Kishima , 'Dynamic analysis of non-homogeneous ground movements by the boundary integral equation- finite element hybrid method', Fifth Int. Conf. on Numerical Meth. in Geomechanics, p. 135-142, 1985.
- [24] C. C. Spyrakos, D. E. Beskos , 'Dynamic response of flexible strip-foundations by boundary and finite elements', Soil Dyn. Earthqu Eng., 5 (1986), No. 2.
- [25] D. L. Karabalis, D. E. Beskos , 'Dynamic Response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM', Soil Dyn. Earthqu. Engng., 4 (1985), pp. 91-101.
- [26] A. P. Gaitanaros, D. Karabalis , 'Dynamic Analysis of 3-D Flexible Embedded Foundations by a Frequency Domain BEM-FEM', Earth. Eng. Struct. Dynamic, 16 (1988), pp. 653-674.
- [27] O. Von Estorff , 'Dynamic Response of Elastic Blocks by Time Domain BEM and FEM', Computers & Structures, 38 (1991), No. 3, pp. 289-300.
- [28] O. Von Estorff, E. Kausel. , 'Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure interaction problems', Earth. Eng. Struct. Dynamics, 18 (1989), pp. 1065-1075.

- [29] O. Von Estorff, M. J. Prabucki. , 'Dynamic Response in the Time Domain by Coupled Boundary and Finite Elements', *Computational Mechanics*, 6 (1990), pp. 35-46.
- [30] K. Khono, T. Tsunada, H. Seto, M. Tanaka. , 'Hybrid stress Analysis of Boundary and Finite Element by a super-element method', *Finite Elements in Analysis and Design*, 7 (1991), pp. 279-290.
- [31] H. B. Li, G. M. Han, H. A. Mang , 'A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies', *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 54 (1986), pp. 161-185.
- [32] O. Von Estorff, H. Antes , 'On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analysis in the time domain', *Int. J. for Num. Meth. Engng.*, 31 (1991), 1151-1168.
- [33] A. C. Eringen e E. S. Suhubi, 'Elastodynamics' , Vol II, *Linear Theory*, Academic Press, New York, 1975.
- [34] D. L. Karabalis e D. E. Beskos , 'Three-Dimensional Soil-Structure Interaction by Boundary Element Methods', Cap. 1, *Topics in Boundary Element Research - Edited by C. A. Brebbia - Vol. 4 - Applications in Geomechanics - Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987.*
- [35] J. Dominguez e R. Abascal , 'Dynamic of Foundations', Cap. 2, *Topics in Boundary Element Research*, Edited by C.A. Brebbia, Vol. 4, *Applications in Geomechanics*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987.
- [36] T. A. Cruse , 'A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II', *J. Mathematical Analysis and Applications*, 22 (1968), 341-355.

- [37] B. R. Pontes Jr. , 'Interação dinâmica de estruturas bidimensionais com o solo: uma comparação entre um método semi-analítico e o método dos elementos de contorno', Dissertação de Mestrado, DMC/FEM/UNICAMP, Fevereiro, 1992.

Apêndice - Outras análises na comparação entre os resultados do MEF e de Luco [7] -

Na seção 2.4.2 validamos a implementação feita para o programa de Elementos Finitos para problemas viscoelastodinâmicos comparando os resultados obtidos pelo método com os resultados apresentados no trabalho de Luco/Hadjian/Bos [7]. Naquela seção apresentamos as curvas da rigidez vertical (figura 2.10) e do coeficiente de amortecimento vertical (figura 2.11) para os fatores de amortecimento  $\eta=0,05$  e  $\eta=0,20$ .

Neste apêndice complementamos os resultados obtidos com a rigidez horizontal e rotação, figuras A.1 e A.3 respectivamente e as suas componentes imaginárias dadas nas figuras A.2 e A.4.

Além de permitirem a validação da implementação feita estes resultados tem a finalidade de mostrar a dificuldade que o MEF possui para representar o comportamento de um domínio infinito. Todos os gráficos mostram claramente as amplitudes elevadas para as frequências de ressonância, as quais não existem em domínios infinitos, como mostramos na seção 5.2.

Outro efeito importante é a alteração dos fator de amortecimento material, o qual mesmo quando aumentado não consegue simular o amortecimento geométrico.

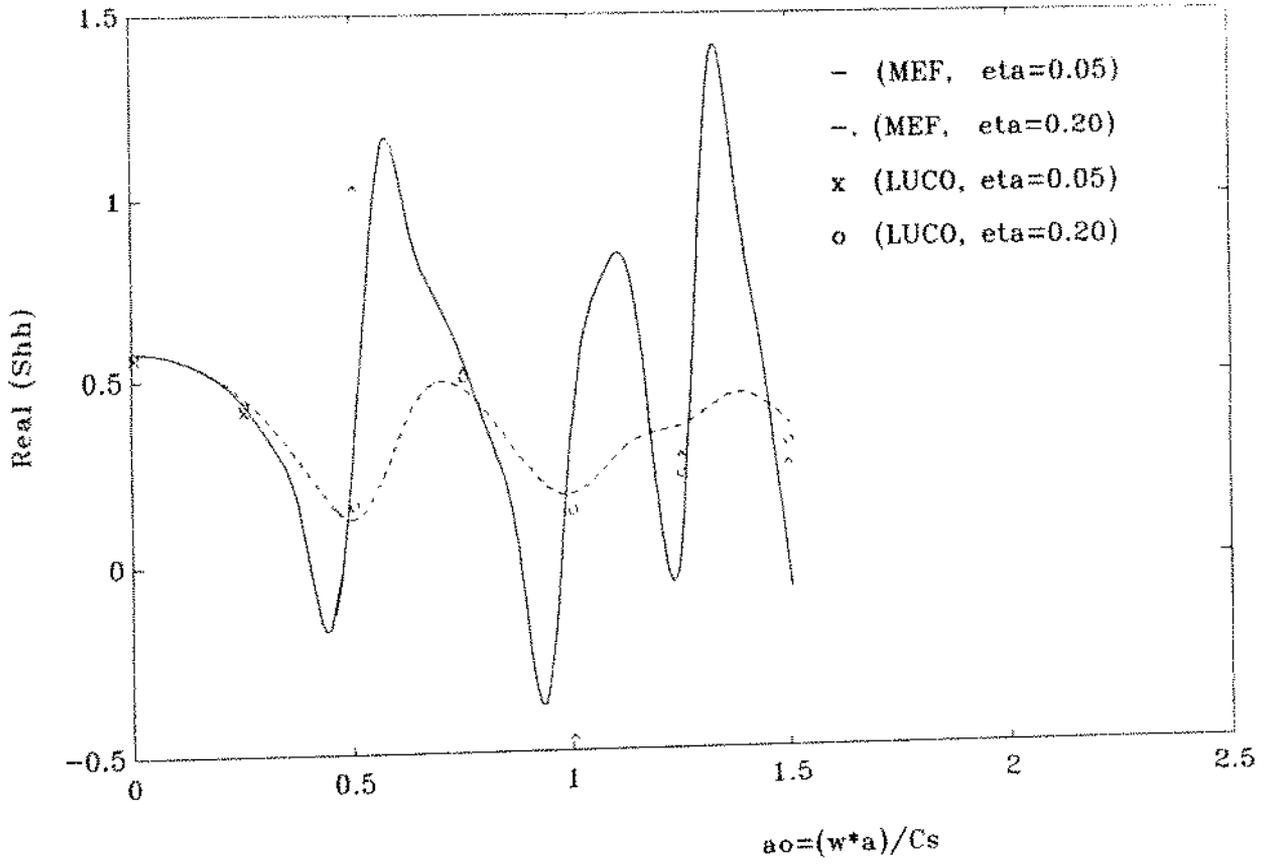


fig. A.1 - Rigidez Horizontal

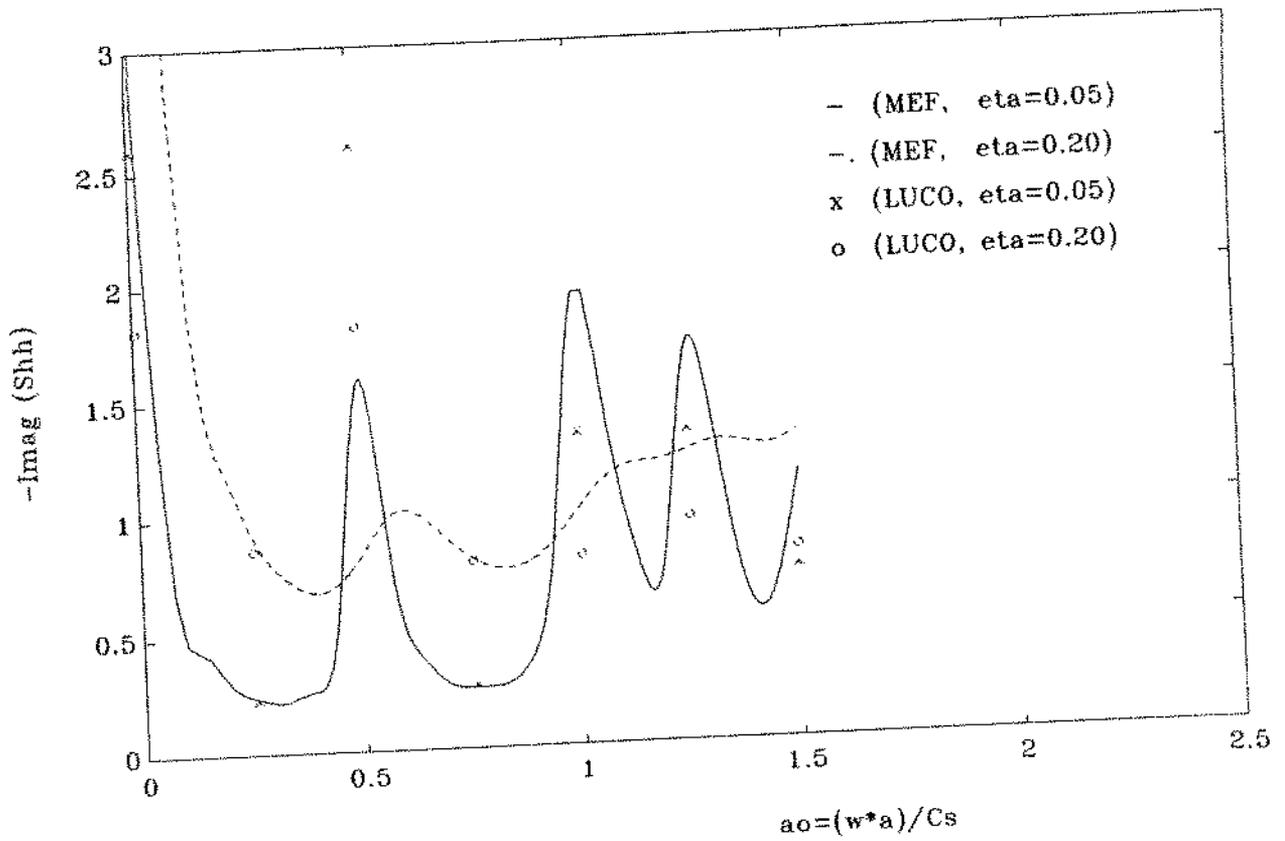


fig. A.2 - Coeficiente de amortecimento horizontal

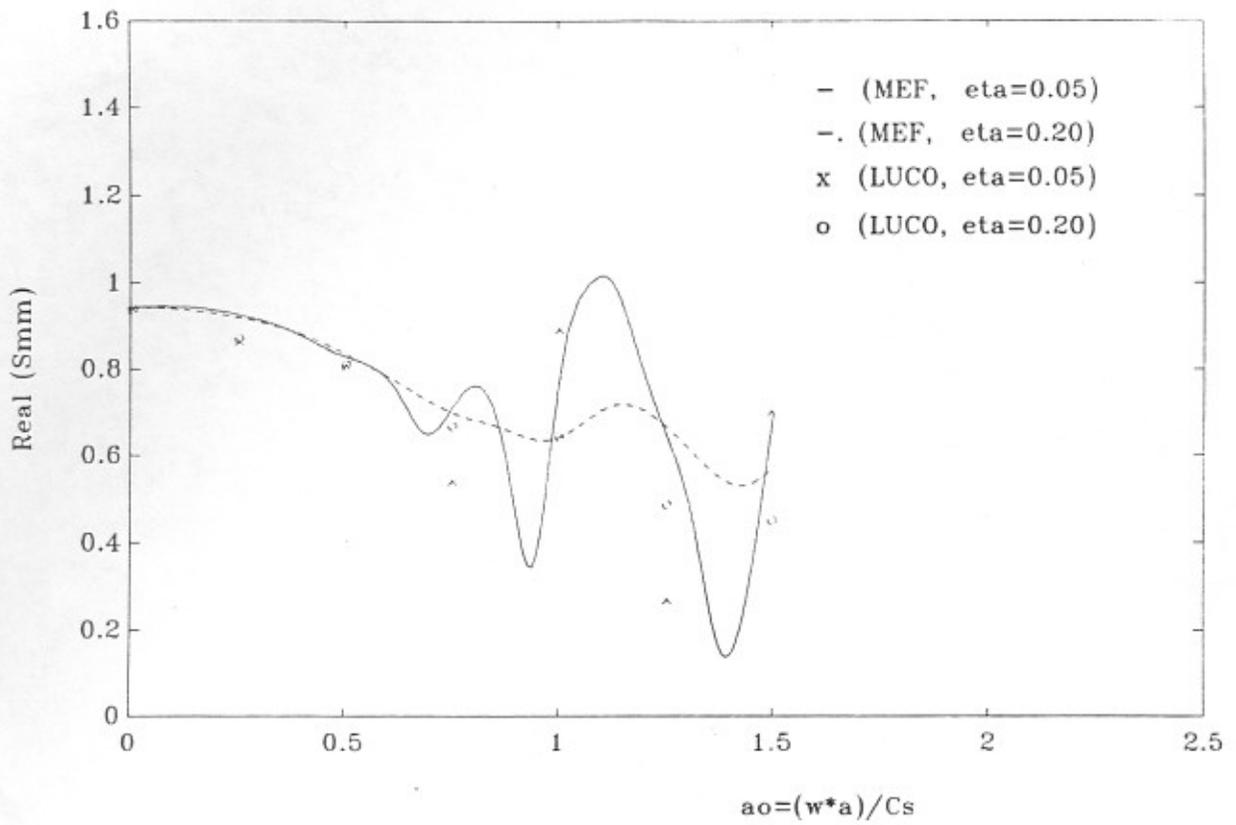


fig. A.3 - Rigidez rotação

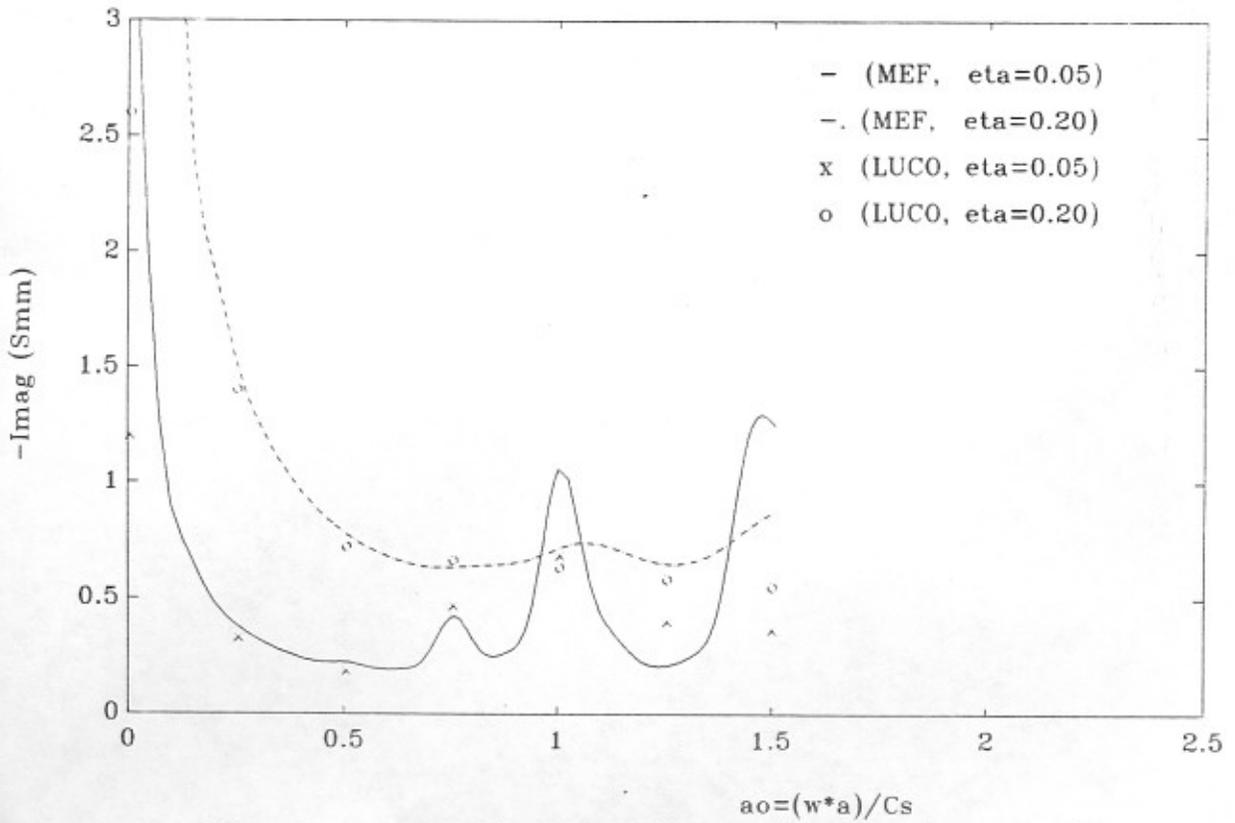


fig. A.4 - Coeficiente de amortecimento rotação