

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

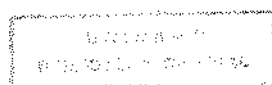
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Claudio Bezerra
de Carvalho E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 17/02/93

Gilmar Mompean
ORIENTADOR

DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO DE CÁLCULO
UTILIZANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS
E O MODELO DE TURBULÊNCIA $k-\epsilon$ PARA
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Autor: Claudio Bezerra de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Mompean Munhoz da Cruz



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

Tese de: Mestrado

Título da Tese:

DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO DE CÁLCULO UTILIZANDO
O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS E O MODELO DE
TURBULÊNCIA $k-\epsilon$ PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS

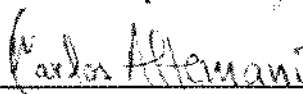
Autor: Claudio Bezerra de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Mompean Munhoz da Cruz

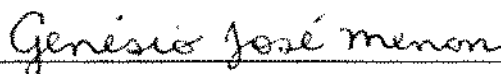
Aprovado por:



Prof. Dr. Gilmar Mompean Munhoz da Cruz



Prof. Dr. Carlos Alberto C. Altemani



Prof. Dr. Genésio José Menon

Campinas, 17 de fevereiro de 1993

À minha Neginha.

Agradecimentos

Ao Prof. Manuel Valente, pela grande ajuda e estímulo que possibilitou a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Gilmar Mompean, meu orientador, que sempre se mostrou prestativo.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

"A gente vai correndo atrás das coisas,
meio sem saber o que busca, sem refletir
porque há uma consciência esconsa de que
o sentido não existe onde procuramos."

Luciana Bezerra de Carvalho

RESUMO

Desenvolvimento de um código de cálculo, em FORTRAN 77, para solução das equações de Navier-Stokes, considerando-se fluidos newtonianos e escoamento em regime turbulento.

O método dos volumes finitos foi utilizado para a discretização espacial. Os termos convectivos foram discretizados utilizando-se dois esquemas: UPWIND e QUICK.

Para a discretização temporal foi utilizado o método semi-implícito SOLA e o modelo de turbulência empregado foi o modelo a duas equações k - ϵ .

Este código foi desenvolvido para a solução de problemas bidimensionais em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

O código de cálculo foi validado utilizando-se quatro configurações clássicas:

- escoamento laminar entre placas planas paralelas;
- escoamento laminar em uma cavidade quadrada;
- escoamento laminar no interior de dutos de secção circular e
- escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular.

ABSTRACT

A computer code was developed in this thesis, in FORTRAN 77, for the solution of the Navier-Stokes equations, considering newtonian fluids and turbulent flow.

The finite volumes method was used for the spatial discretization. The convective terms were discretized using two alternative schemes: UPWIND and QUICK.

For the temporal discretization the semi-implicit SOLA method was used. The two equations, $k - \epsilon$ method, modelled the turbulence terms.

This code was developed for the solution of bidimensional problems in cartesian and cylindrical coordinates.

The algorithm was validated using four classical configurations:

- Laminar flow between parallel plates;
- Laminar flow in a square cavity;
- Laminar flow in ducts of circular section and
- Turbulent flow in ducts of circular section.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO GERAL

- 1.1 BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS
- 1.2 O PRESENTE TRABALHO

CAPÍTULO 2 - MODELO MATEMÁTICO

- 2.1 EQUAÇÕES LOCAIS INSTANTÂNEAS
 - 2.1.1 Equação da continuidade
 - 2.1.2 Equação do momentum
- 2.2 EQUAÇÕES MÉDIAS
 - 2.2.1 Propriedades de médias estatísticas
 - 2.2.2 Equação da continuidade em termos médios
 - 2.2.3 Equação do momentum em termos médios
- 2.3 MODELAGEM DO TENSOR DE REYNOLDS
 - 2.3.1 Natureza da turbulência
 - 2.3.2 Conceito de viscosidade turbulenta
 - 2.3.3 Modelo k - ϵ
 - 2.3.4 Equação exata de transporte de k
 - 2.3.5 Equação exata de transporte de ϵ
 - 2.3.6 Aproximação das correlações desconhecidas da equação de k
 - 2.3.7 Aproximação das correlações desconhecidas da equação de ϵ
 - 2.3.8 Forma final dos sistema de equações para o modelo estudado
 - 2.3.9 Constantes utilizadas no modelo

CAPÍTULO 3 - MÉTODO NUMÉRICO

- 3.1 INTRODUÇÃO

3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

3.2.1 Expressões integrais das equações

3.2.2 Localização das variáveis: malha deslocada

3.2.3 Equações de conservação para um escalar

3.2.4 Esquema numérico para o termo convectivo

3.2.4.1 Esquema UPWIND

3.2.4.2 Esquema QUICK

3.2.4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

3.2.5 RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

3.2.6 ESTABILIDADE NUMÉRICA - PASSO DE TEMPO

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS

4.1 INTRODUÇÃO

4.2 ESCOAMENTO LAMINAR ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS

4.2.1 Introdução

4.2.2 Descrição da configuração

4.2.3 Condições de contorno

4.2.4 Comparação dos resultados

4.2.5 Influência da malha

4.2.6 Influência do esquema convectivo

4.2.7 Conclusões

4.3 ESCOAMENTO LAMINAR EM UMA CAVIDADE QUADRADA

4.3.1 Introdução

4.3.2 Descrição da configuração

4.3.3 Condições de contorno

4.3.4 Comparação dos resultados

4.3.5 Influência da malha

4.3.6 Influência do esquema convectivo

4.3.7 Conclusões

4.4 ESCOAMENTO LAMINAR NO INTERIOR DE DUTOS DE SECÇÃO CIRCULAR

4.4.1 Introdução

4.4.2 Descrição da configuração

4.4.3 Condições de contorno

4.4.4 Comparação dos resultados

4.4.5 Influência da malha

4.4.6 Influência do esquema convectivo

4.4.7 Conclusões

4.5 ESCOAMENTO TURBULENTO NO INTERIOR DE DUTOS DE SECÇÃO CIRCULAR

4.5.1 Introdução

4.5.2 Descrição da configuração

4.5.3 Condições de contorno

4.5.3.1 Condições de contorno para as grandezas do escoamento médio

4.5.3.2 Condições de contorno para as grandezas turbulentas

4.5.4 Comparação dos resultados

4.5.5 Conclusões

4.6 DETALHES COMPUTACIONAIS

4.6.1 Introdução

4.6.2 Condições iniciais

4.6.3 Critérios de convergência

4.6.4 Tempo de CPU

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APÊNDICES

A - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE k e ε

B - LISTAGEM DO PROGRAMA

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO GERAL

1.1 BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

O conhecimento e a compreensão dos princípios básicos e dos conceitos da mecânica dos fluidos são essenciais na análise e projeto de qualquer sistema em que um fluido é o meio atuante, como no projeto e desenvolvimento dos modernos aviões, foguetes e sistemas de resfriamento de equipamentos eletrônicos por convecção. Esta é uma pequena amostra diante da infinidade de problemas que atingiram o atual nível de eficiência graças ao conhecimento da dinâmica dos escoamentos dos fluidos.

Até o final do século XIX, a ciência da mecânica dos fluidos desenvolveu-se em duas direções distintas em que praticamente não havia pontos em comum. De um lado estava a ciência teórica da hidrodinâmica, que utilizava as equações do movimento de Euler para fluidos não viscosos e do outro lado a ciência da hidráulica (essencialmente empírica), baseada em um grande número de resultados experimentais.

A discrepância entre os resultados da hidrodinâmica clássica e os experimentos foi, em muitos casos, devido ao fato de que a teoria desprezava o atrito do fluido, embora as equações completas do movimento para escoamento com atrito (equações de Navier-Stokes) fossem conhecidas a muito tempo.

A solução destas equações estava associada a grande dificuldades matemáticas.

L. Prandtl, com sua Teoria da Camada Limite, contribuiu significativamente para a compreensão do fenômeno físico associado ao escoamento de fluidos viscosos. Em seu trabalho, " O Movimento de Fluidos de Baixo Atrito ", de 1904, Prandtl propôs que " a influência da viscosidade do fluido seria sentida somente na região de altos

gradientes de velocidade transversal, primariamente em uma região próxima da superfície exposta do escoamento, enquanto o corpo principal do fluido poderia ser considerado, em boa aproximação, como não tendo atrito " [ALMEIDA, 1992].

Esta proposição simplificava as equações de Navier-Stokes e conduzia a um conjunto de equações diferenciais cuja solução, para um bom número de geometrias e regime de escoamento, vem sendo encontrada analiticamente ou com auxílio de métodos numéricos até os dias atuais.

Embora tenha sido fundamental a contribuição de Prandtl para a compreensão do fenômeno, tópicos como o separação da camada limite, a recirculação dos fluidos e o escoamento em torno de geometrias mais complexas, seja em regime laminar, seja em regime turbulento, só poderão ser explicados com a solução das equações completas de Navier-Stokes.

As dificuldades para a solução analítica dessas equações e a criação do computador digital na década de 40, estimulou o desenvolvimento de métodos numéricos para a solução dessas equações.

A análise numérica desenvolveu-se aceleradamente a partir da década de 50, acompanhando o rápido desenvolvimento dos equipamentos digitais de computação.

Na natureza e em grande parte dos problemas de engenharia ligados ao escoamento de fluidos ocorrem em regime turbulento. Esta foi uma das motivações para a elaboração do presente trabalho.

Como foi dito anteriormente, as equações que descrevem o escoamento de um fluido real são as equações de Navier-Stokes. Estas equações descrevem o escoamento tanto em regime laminar quanto turbulento. Na resolução de problemas envolvendo escoamentos turbulentos, a prática comumente adotada consiste em dividir as variáveis do escoamento instantâneo como sendo a soma de um valor médio no tempo e um valor flutuante. Este procedimento sugerido por Osborne Reynolds é denominado de decomposição de Reynolds.

Infelizmente, este procedimento cria um novo problema: o sistema de equações formado não constitui um sistema fechado pois elas contêm termos desconhecidos representando o transporte do momentum médio pelo movimento turbulento.

O fechamento do sistema pode ser feito através da utilização de modelos de turbulência, que são definidos como um conjunto de equações (algébricas e/ou diferenciais) que determinam os termos de transporte turbulentos nas equações do escoamento médio.

O modelo de turbulência utilizado nesta dissertação é o modelo a duas equações k - ϵ , por prever rasoavelmente bem um grande número de problemas de hidráulica com os mesmos dados empíricos.[RODI, 1972]

1.2 O PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho teve por objetivo a elaboração de um código de cálculo escrito em FORTRAN 77, para solução de problemas de escoamentos bidimensionais em regime laminar e turbulento nos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

O código de cálculo tem como base o método dos volumes finitos (MVF) para a discretização espacial e o método SOLA para a discretização temporal. O método SOLA foi desenvolvido pelos pesquisadores Hirt, Nichols e Romero [HIRT, 1975] do grupo de Los Alamos.

O modelo de turbulência utilizado é o modelo a duas equações k - ϵ , onde k é a energia cinética de turbulência e ϵ a taxa de dissipação de energia cinética de turbulência.

No capítulo 2, são apresentadas as equações locais instantâneas, as equações médias e o modelo de turbulência k - ϵ .

A implementação do método numérico é apresentada no capítulo 3.

A validação do programa é feita no capítulo 4 onde, são tratados os seguintes problemas:

escoamento laminar entre placas planas paralelas;

escoamento laminar em uma cavidade quadrada;

escoamento laminar no interior de dutos de secção circular e

escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular;

Por ultimo, o capítulo 5 apresenta as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

MODELO MATEMÁTICO

2.1 EQUAÇÕES LOCAIS INSTANTÂNEAS

As relações necessárias para descrever o movimento de uma partícula de fluido são deduzidas a partir dos princípios fundamentais de Conservação da Massa e Quantidade de Movimento. As equações que resultam da aplicação destes princípios são respectivamente:

- equação da continuidade;
- equação do momentum.

2.1.1 Equação da continuidade

A lei de Conservação da Massa aplicada para um fluido passando em um volume de controle infinitesimal fixo (Fig.2-1) resulta em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido e V é a sua velocidade. O primeiro termo desta equação representa a variação da densidade dentro do volume de controle e o segundo termo representa a variação do fluxo de massa que passa através das faces do volume de controle por unidade de volume. A equação (2.1) foi derivada usando-se a aproximação Euleriana. Nesta aproximação, é utilizado um volume de controle fixo e as informações sobre o fluido que passa através do volume de controle são registradas. Será usada a notação tensorial para escrever esta equação. Nesta notação, as três coordenadas do sistema Cartesiano são escritas como x_1 , x_2 , x_3 ou, genericamente, x_i com i assumindo os valores de 1 a 3. Analogamente, as componentes de velocidade são u_1 , u_2 , u_3 e u_i para as

três componentes do vetor velocidade. A equação (2.2) é então escrita:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

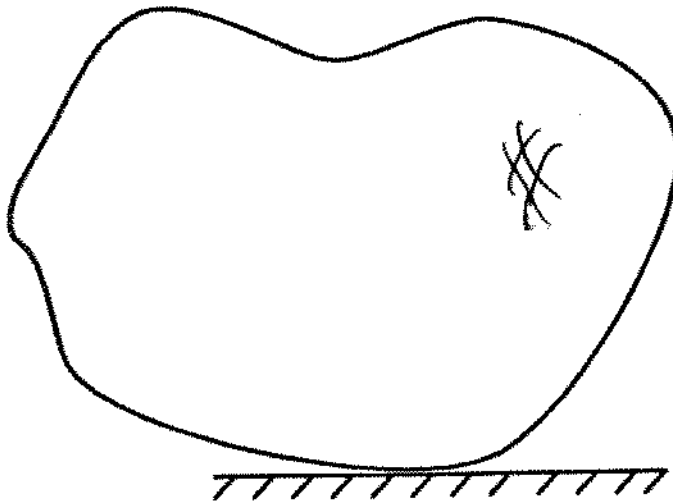


Fig. 2-1 Volume de controle em um referencial euleriano

Para um escoamento incompressível (densidade constante) a equação (2.2) reduz-se a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

2.1.2 Equação do momentum

Aplicando-se a lei de Conservação da Quantidade de Movimento para um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo (Fig.2-1) tem-se:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho V V = \nabla \cdot \Pi_{ij} + \rho g \quad (2.4)$$

O primeiro termo desta equação representa a variação do momentum dentro do volume de controle por unidade de volume. O segundo representa a variação do momentum (por unidade de volume) devido a convecção através das faces do volume de controle.

O primeiro termo do lado direito da igualdade representa as forças de superfície por unidade de volume. Estas forças são aplicadas por tensões externas no elemento de fluido, as quais podem ser divididas em tensões normais e cisalhantes, sendo representadas pelos componentes do tensor de tensões Π_{ij} . O segundo termo do lado direito da igualdade representa a força do campo gravitacional, por unidade de volume, que age sobre o fluido dentro do volume de controle.

O tensor de tensões, Π_{ij} , é frequentemente decomposto da seguinte maneira:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.5)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$) e p é a pressão estática do fluido.

Para um sistema de coordenadas Cartesianas, a equação (2.4) é escrita como:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(-p) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) + \rho g_i. \quad (2.6)$$

Esta equação é conhecida como equação de conservação da quantidade de movimento ou equação de Navier Stokes. Para que esta equação possa ser utilizada, relações são introduzidas para conectar a tensão com a deformação do volume de controle considerado. Estas relações são

conhecidas como *equações constitutivas*. Para fluidos newtonianos, existe uma relação linear entre a tensão e a taxa de deformação.

Para um fluido newtoniano e incompressível, a tensão viscosa pode ser expressa como

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.7)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

Introduzindo as relações entre as tensões e taxas de deformação na equação (2.6) tem-se

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(-p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i. \quad (2.8)$$

Considerando-se um fluido incompressível com propriedades físicas constantes e escoamento isotérmico, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{(Continuidade)} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(-p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) & \text{(Momentum)} \end{cases} \quad (2.10)$$

onde ν é a viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$). As equações contêm as seguintes incógnitas: u_i (u_1, u_2, u_3) e p . Como o número de equações é igual ao de incógnitas o sistema de equações pode ser resolvido com as condições de contorno apropriadas.

2.2 EQUAÇÕES MÉDIAS

As equações de conservação da massa e quantidade de movimento, vistas anteriormente podem ser utilizadas para descrever tanto escoamentos laminares como escoamentos turbulentos pois, elas foram obtidas a partir das leis fundamentais da mecânica. Na resolução de problemas que envolvem escoamentos turbulentos, as variáveis do escoamento instantâneo são escritas como sendo a soma de um valor médio no tempo (indicado por uma barra) e um valor flutuante (indicado por primo). Este procedimento é denominado decomposição de Reynolds. Considerando a notação tensorial tem-se:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i + u'_i, \\ p = \bar{p} + p' \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.1 Propriedades de médias estatísticas

Antes de aplicar a decomposição de Reynolds é necessário introduzir alguns conceitos referentes à média estatística.

Como foi visto anteriormente, os parâmetros do escoamento instantâneo podem ser decompostos em um valor médio mais um valor flutuante. Deste modo, tem-se para as três componentes de velocidade e a componente de pressão:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; \\ v &= \bar{v} + v'; \\ w &= \bar{w} + w' \text{ e} \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned}$$

A média temporal de uma quantidade em um ponto fixo no espaço é dada por

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u \, dt .$$

É entendido que os valores médios são calculados num intervalo de tempo suficientemente grande, T , para que sejam completamente independentes do tempo. Desta forma, por definição, todas as quantidades médias descrevendo flutuações são iguais a zero, ou seja,

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = \bar{p}' = 0.$$

Algumas regras básicas de operadores em médias temporais são listadas a seguir. Considerando-se f e g como duas variáveis cujo valor médio será formado e s denota alguma variável independente x , y , z e t então as seguintes regras são aplicadas [SCHLICHTING, 1958]:

- | | |
|----|--|
| a) | $\overline{\bar{f}} = \bar{f} ;$ |
| b) | $\overline{\bar{f} + \bar{g}} = \bar{f} + \bar{g} ;$ |
| c) | $\overline{\bar{f} \cdot \bar{g}} = \bar{f} \cdot \bar{g} ;$ |
| d) | $\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} .$ |

2.2.2 Equação da continuidade em termos médios

Aplicando-se a decomposição de Reynolds na equação (2.9) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u'_i) = 0, \quad (2.12)$$

Desenvolvendo-se a equação (2.12) obtendo o valor médio (regras b e d, respectivamente) obtém-se

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.13)$$

subtraindo-se esta última equação da anterior:

$$\frac{\partial(u'_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.14)$$

2.2.3 Equação do momentum em termos médios

Aplicando-se a decomposição de Reynolds na equação (2.10) e obtendo-se o valor médio, tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} + \overline{\left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) \right]} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-\bar{p}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.15)$$

A equação do momentum para escoamento turbulento difere da equação

instantânea correspondente pelo termo contendo o produto das componentes de flutuação de velocidade.

O sistema resultante não pode ser resolvido por conter um número maior de incógnitas, devido ao surgimento da correlação $\overline{(u'_i u'_j)}$.

Fisicamente, o produto desta correlação pela densidade ρ representa o transporte de momentum pelo movimento flutuante. O termo $-\overline{(u'_i u'_j)}$ age como uma tensão turbulenta no fluido e é chamado tensor de Reynolds.

2.3 MODELAGEM DO TENSOR DE REYNOLDS

As equações (2.13) e (2.15) podem ser resolvidas para os valores médios de velocidade e pressão somente quando a correlação de turbulência $\overline{(u'_i u'_j)}$ for modelada de alguma maneira.

Pode-se derivar uma equação para o termo $\overline{(u'_i u'_j)}$, mas esta equação contém correlação de turbulência de terceira ordem $\overline{(u'_i u'_j u'_k)}$. Deste modo, surgiriam correlações de ordem cada vez mais elevadas. Em vez disso, um modelo de turbulência deve ser introduzido com a aproximação das correlações de uma certa ordem em termos de correlações de menor ordem e/ou quantidades do escoamento médio. As leis descritas por um modelo de turbulência simulam as características médias da turbulência real. Estas leis são expressas em equações diferenciais e/ou algébricas que, junto com as equações do escoamento médio, tornam possível a resolução do sistema formado.

2.3.1 Natureza da turbulência

Antes de introduzir o modelo de turbulência, é necessário descrever alguns detalhes básicos da natureza do fenômeno de turbulência. Turbulência é um movimento turbilhonar que usualmente prevalece em altos números de Reynolds tendo um extenso espectro de tamanho de turbilhões e um correspondente espectro de flutuação de frequência. Este movimento é sempre rotacional. Os maiores turbilhões, que são associados com as flutuações de baixa frequência, são determinados pelas condições de contorno do escoamento e seus tamanhos são da mesma ordem de magnitude do domínio do escoamento. Os menores turbilhões, associados com as flutuações de alta frequência, são determinados pelas forças viscosas. A extensão do espectro é, deste modo, a diferença entre o maior e o menor turbilhão, que aumenta com o número de Reynolds. O principal responsável pelo transporte de momentum no movimento turbulento é a maior escala e contribui para a correlação de turbulência $(\overline{u' i u' j})$. A maior escala é simulada no modelo de turbulência para a determinação de $(\overline{u' i u' j})$. A velocidade e a escala de comprimento introduzidas nos modelos são os parâmetros que caracterizam este movimento.

Os maiores turbilhões interagem com o escoamento médio - porque suas escalas são similares - extraindo deste energia cinética.

Turbilhões podem ser considerados como elementos de vortice que se dividem em outros. Através desta divisão, que é o fator essencial do movimento turbulento, a energia é passada para turbilhões cada vez menores até que as forças viscosas sejam ativadas e dissipem a energia. Este processo é chamado de cascata de energia. A taxa na qual a energia do escoamento médio é alimentada dentro do movimento turbulento

é determinada pela maior escala do movimento. Esta quantidade de energia somente pode ser passada para as menores escalas e finalmente ser dissipada. A taxa de energia dissipada é também determinada pela maior escala do movimento, contudo, acontece nos menores turbilhões por se tratar de um processo viscoso.

Por causa da interação com o escoamento médio, a maior escala do movimento turbulento depende fortemente das condições de contorno do problema. O escoamento médio, frequentemente, tem direções preferenciais as quais são impostas também a maior escala do movimento turbulento. Este movimento pode, contudo, ser altamente anisotrópico, tanto que a intensidade das flutuações e suas escalas de comprimento são diretamente dependentes.

Quando o número de Reynolds é alto, tanto que a maior e a menor escala do movimento são suficientemente distintas no espectro, a sensibilidade à direção é perdida para os pequenos turbilhões levando a menor escala dissipativa do movimento ser isotrópica. Este fenômeno em que só a menor escala do movimento é isotrópica é chamado de isotropia local e é um importante conceito na modelagem de escoamentos turbulentos.

2.3.2 Conceito de viscosidade turbulenta

A mais antiga proposta para modelagem do tensor de Reynolds, que se tornou parte significativa de muitos modelos de uso prático hoje, é o conceito de viscosidade turbulenta de Boussinesq o qual assume que - em analogia ao tensor viscoso em escoamentos laminares - o tensor de

Reynolds é proporcional ao gradiente de velocidade média. Para uma situação geral de escoamento, este conceito pode ser expresso como [RODI,1978]:

$$-\overline{(u'_i u'_j)} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} , \quad (2.16)$$

onde ν_t é a viscosidade turbulenta que, em contraste com a viscosidade molecular ν , não é uma propriedade do fluido mas depende altamente do escoamento, variando significativamente de um ponto a outro do escoamento e de escoamento para escoamento. O problema principal agora é a determinação de ν_t .

O termo envolvendo o delta de Kronecker δ_{ij} é talvez uma adição não familiar para a expressão da viscosidade turbulenta. Ele é necessário para tornar a equação aplicável também para o tensor normal (quando $i=j$) pois, neste caso, o termo envolvendo o gradiente de velocidade média é nulo (equação(2.13)). Contudo, todos os tensores normais são, por definição, quantidades positivas e sua soma é o dobro da energia cinética k do movimento flutuante

$$k = \frac{1}{2} (\bar{u}_1'^2 + \bar{u}_2'^2 + \bar{u}_3'^2). \quad (2.17)$$

Os tensores normais agem como forças de pressão - isto é, perpendiculares às faces de um volume de controle - e, desta forma, assim como a pressão, a energia k é uma grandeza escalar.

O conceito de viscosidade turbulenta foi concebido presumindo-se

uma analogia entre o movimento molecular, que usa a lei de viscosidade de Stokes em escoamentos laminares, e o movimento turbulento. Os turbilhões são tratados como porções de fluido, assim como moléculas, que colidem e trocam momentum. A viscosidade molecular é proporcional a velocidade média e ao "caminho livre médio" das moléculas. Do mesmo modo, a viscosidade turbulenta é considerada proporcional a uma velocidade caracterizando o movimento flutuante e um comprimento típico deste movimento que Prandtl chamou de "comprimento de mistura". Em princípio, a analogia entre o movimento molecular e o turbulento não pode ser correta pois, turbilhões não são corpos rígidos que conservam sua identidade e porque os maiores turbilhões - responsáveis pela transferência de momentum, e consequentemente seu "caminho livre" - não são pequenos comparados com o domínio do escoamento, como é requerido pela teoria cinética dos gases. Porém, na prática, o conceito de viscosidade turbulenta (ν_t) apresenta resultados satisfatórios quando empregado em diferentes tipos de escoamentos.

A noção de que a viscosidade turbulenta ν_t é proporcional à escala de velocidade e à escala de comprimento (maior escala), caracterizando o movimento turbulento, é enfatizada porque as distribuições destas escalas podem ser aproximadas razoavelmente bem em muitos escoamentos. Para determinação destas escalas são utilizados modelos de turbulência.

2.3.3 Modelo $k-\epsilon$

A classificação dos modelos de turbulência aqui adotada é baseada no número de equações de transporte para as grandezas turbulentas. Deste modo, um modelo a zero equação não envolve equação de transporte para nenhuma grandeza turbulenta, enquanto que modelos a uma e a duas

equações envolvem uma e duas equações de transporte para uma e duas grandezas turbulentas, respectivamente. Experiências com vários modelos, geralmente confirmam que a introdução de equações de transporte para mais e mais grandezas turbulentas pode descrever complexos fenômenos de turbulência com aumento do realismo, tornando-os mais universais [RODI, 1978].

O modelo que será utilizado nesta dissertação é o modelo a duas equações k - ε , onde as grandezas turbulentas transportadas são a energia cinética de turbulência (k) e a taxa de dissipação de energia cinética de turbulência (ε). Esta escolha deve-se ao fato de que este modelo - ao contrário dos modelos a zero e a uma equação - não requer ajustes de constantes utilizadas no modelo para diferentes configurações geométricas. O aumento do tempo computacional não é muito maior, além de ser amplamente testado para muitos escoamentos e de grande utilização industrial.

Neste modelo, a viscosidade turbulenta é determinada unicamente pelo valor da energia cinética de turbulência, k e pela escala característica de comprimento l . Deste modo, tem-se:

$$\nu_t = C'_\mu k^{1/2} l, \quad (2.18)$$

onde C'_μ é uma constante. Uma equação para k é resolvida e a escala de comprimento é determinada a partir de uma equação para a taxa de dissipação de energia cinética de turbulência, ε .

Para altos números de Reynolds, ε pode ser assumido proporcional a $k^{3/2}/l$ [JONES and LAUNDER, 1970]. Deste modo, l pode ser expresso como:

$$l = C_D \frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \quad (2.19)$$

onde C_D é uma constante. Substituindo a equação (2.19) na equação (2.18) obtém-se:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (2.20)$$

onde $C_\mu = C_D C'_\mu$.

2.3.4 Equação exata de transporte de k

A equação de transporte da energia cinética de turbulência (k) é derivada da equação de conservação da quantidade de movimento (ver apêndice A). Para um fluido com propriedades físicas constantes, incompressível e escoamento isotérmico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \overline{u'_j k'} - \overline{u'_j p} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$. k = \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)}$$

$$. k' = \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)}$$

. i e j variam de 1 a 3.

Significado dos termos da equação(2.21):

- 1 - evolução no tempo e transporte por convecção devido ao campo de velocidade média;
- 2 - difusão molecular;
- 3 - transporte devido a convecção turbulenta;
- 4 - difusão pelo efeito de flutuação de pressão;
- P - produção de energia cinética devido ao gradiente de velocidade;
- ϵ - dissipação de energia cinética devido aos efeitos viscosos.

2.3.5 Equação exata de transporte de ϵ

Do mesmo modo que a equação de transporte de k , a equação de transporte de dissipação de energia cinética de turbulência (ϵ) é derivada da equação de conservação da quantidade de movimento(ver apêndice A). Considerando-se as hipóteses anteriores, a equação de ϵ é escrita:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}}^{1} = - 2 \nu \overbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'^i}{\partial x_l} \frac{\partial u'^k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'^i}{\partial x_l} \frac{\partial u'^l}{\partial x_k} \right)}^{Pu, \epsilon} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right)}^{2} \\
 & - \overbrace{\nu u'^k \frac{\partial u'^i}{\partial x_l} \frac{\partial u'^l}{\partial x_l}}^{3} - 2 \nu \overbrace{\frac{\partial p'^i}{\partial x_l} \frac{\partial u'^l}{\partial x_l}}^{4} - 2 \nu \overbrace{\frac{\partial \bar{u}'^i}{\partial x_l} u'^k \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}^{Pu' \epsilon} \\
 & - 2 \nu \overbrace{\frac{\partial u'^i}{\partial x_l} \frac{\partial u'^l}{\partial x_k} \frac{\partial u'^k}{\partial x_l}}^{Pe} - 2 \nu^2 \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'^i}{\partial x_l} \right) \right)^2}^{\epsilon \epsilon} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

onde

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}};$$

. i, k e l variam de 1 a 3.

Significado dos termos da equação(2.25):

- 1 - evolução no tempo e transporte por convecção devido ao campo de velocidade média;
- 2 - difusão molecular;
- 3 - difusão turbulenta devido a flutuação de velocidade;
- 4 - difusão turbulenta devido à flutuação de pressão;
- $P_{u,\epsilon}$ e $P'_{u,\epsilon}$ - produção ligada ao gradiente de velocidade média, traduzindo uma interação entre a turbulência e o escoamento médio;
- P_ϵ - termo ligado a interação entre os gradientes de flutuação de velocidade;
- $\epsilon\epsilon$ - dissipação de ϵ .

2.3.6 Aproximação das correlações desconhecidas da equação de k

Para aplicar a equação de transporte de energia cinética de turbulência no modelo é necessário aproximar algumas correlações por equações contendo quantidades que possam ser calculadas no escoamento.

O termo contendo flutuações de pressão e velocidade (3 e 4) assume-se proporcional ao gradiente de energia cinética. Deste modo, adota-se

a mesma lei de transporte difusivo aplicada a escoamentos laminares [LAUNDER, 1973]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (- \overline{u' j k'} - \overline{u' j p}) = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

onde σ_k é o número de Prandtl turbulento efetivo para o transporte de energia.

A correlação que aparece no termo de produção (P), $\overline{(u' i u' j)}$ é o tensor de Reynolds. Este termo é trocado pelo produto entre a viscosidade turbulenta e o gradiente de velocidade média:

$$\overline{(u' i u' j)} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.24)$$

Através da análise de ordem de grandeza, o termo de difusão molecular (2) pode ser desprezado para elevados números de Reynolds [MOMPEAN, 1990].

Finalmente, o termo de dissipação (ϵ) será calculado a partir da equação de transporte de ϵ . Deste modo, tem-se:

$$\nu \frac{\partial u'^2}{\partial x_i} \frac{\partial u'^2}{\partial x_i} = \epsilon \quad (2.25)$$

2.3.7 Aproximação das correlações desconhecidas da equação de ϵ

Assim como na equação exata de k , algumas correlações da equação exata de dissipação de energia cinética de turbulência (ϵ) serão aproximadas a equações contendo quantidades que possam ser calculadas no escoamento. Deste modo, o termo difusivo (3 e 4) da equação de ϵ é considerado proporcional ao gradiente da dissipação de energia cinética e a viscosidade turbulenta [LAUNDER, 1973]:

$$\left(- \nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1}} - 2 \nu \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial u'_k}{\partial x_1}} \right) = \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \quad (2.26)$$

Os termos P_ϵ e $\mathcal{E}_\epsilon$ são modelados em conjunto. Rodi (1972) mostrou que estes dois termos são indefinidamente grandes em relação aos outros termos da equação de ϵ para números de Reynolds elevados. Porém, eles são de sinais diferentes e sua soma é finita comparável aos outros termos da equação. Assume-se que esta soma é proporcional à taxa de dissipação dividida pelo decaimento da turbulência no tempo, k/ϵ [LAUNDER, 1973]:

$$2 \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_1}} + 2 \nu^2 \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \right) \right)^2} = c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.27)$$

onde c_2 é uma constante.

O termo de difusão molecular (2) da equação de ϵ e o de produção

P_u e também podem ser desprezados para elevados números de Reynolds [MOMPEAN, 1990].

Finalmente, o termo de Produção P_u é aproximado como sendo proporcional ao produto entre o tensor de Reynolds e a razão entre a dissipação de energia cinética de turbulência e a energia cinética de turbulência [LAUNDER, 1973]:

$$\boxed{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = (c_1 \overline{u'_i u'_j}) \frac{\epsilon}{k}} \quad (2.28)$$

2.3.8 Forma final do sistema de equações para o modelo estudado

Considerando-se um fluido incompressível, propriedades físicas constantes, e escoamento isotérmico, o sistema final de equações é:

Continuidade

$$\frac{\partial(\tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.29)$$

Momentum

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_j \tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-\bar{p}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.30)$$

Hipótese da Viscosidade turbulenta:

$$-\overline{(u' \text{ }_i \text{ } u' \text{ }_j)} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad \therefore \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.31)$$

Equação da energia cinética de turbulência:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \epsilon \quad (2.32)$$

Equação da taxa de dissipação de energia cinética de turbulência:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + S_\epsilon \quad (2.33)$$

onde : $S_\epsilon = c_1 P \frac{\epsilon}{k} + c_2 \frac{\epsilon^2}{k}$

2.3.9 Constantes utilizadas no modelo

As quantidades σ_ϵ , σ_k , C_μ , c_1 e c_2 são constantes empíricas e seus valores são [SINGHAL and SPALDING, 1981]:

σ_ϵ	σ_k	C_μ	c_1	c_2
1.3	1.0	0.09	1.44	1.92

CAPÍTULO 3

MÉTODO NUMÉRICO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feito o tratamento numérico das equações da hidrodinâmica para escoamentos bi-dimensionais turbulentos. A discretização espacial é feita utilizando-se o método dos volumes finitos (MVF). A discretização temporal das equações de transporte das grandezas escalares (k, ϵ) é explícita e das equações do movimento (momentum e continuidade) é semi-implícita pois, o método utilizado é o SOLA [HIRT, 1975]. As grandezas escalares são tratadas no centro dos volumes de controle principais e as velocidades são tratadas no centro das faces dos mesmos. Este procedimento recomendado por Patankar [PATANKAR, 1980] para manter o realismo físico, constitui a chamada malha deslocada (Staggered Grid).

3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

3.2.1 Expressões integrais das equações

As equações de k , ϵ , continuidade e as projeções da equação do momento sobre um referencial fixo podem ser escritas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_i \phi) + \nabla J_\phi = S_\phi \quad (3.1)$$

A tabela 1 apresenta as expressões dos diferentes termos da equação (3.1) em um sistema de coordenadas cartesianas.

Considerando-se um volume v invariante no tempo, de fronteira regular, s e seja $\vec{n}$ o vetor unitário normal à superfície s , dirigido ao exterior (Fig. 3-1), a integração da equação (3.1) em v é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_v \phi \, dv \right) + \int_{\lambda} \nabla \cdot (\vec{u}_i \phi - J_\phi) dv = \int_v S_\phi \, dv. \quad (3.2)$$

Aplicando-se o teorema de Gauss no segundo termo da equação(3.2) obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V_0} \phi \, dV \right) + \int_S (\bar{u}_i \phi) \cdot \vec{n} \, ds - \int_S J_\phi \cdot \vec{n} \, ds = \int_{V_0} S_\phi \, dV \quad (3.3)$$

A equação (3.3) representa o balanço da grandeza ϕ sobre o volume finito v .

Tabela 1

Equação	ϕ	J_ϕ	S_ϕ
Cons.massa	1	0	0
Momento:			
projeção			
ox	$\bar{u}$	$p \delta_{1j} - \nu \nabla \bar{u} + \overline{u'u'} + \overline{u'v'}$	0
oy	$\bar{v}$	$p \delta_{2j} - \nu \nabla \bar{v} + \overline{v'v'} + \overline{u'v'}$	0
k	k	$-C_k k^2 / \epsilon \nabla k$	$P + \epsilon$
ϵ	ϵ	$-C_\epsilon k^2 / \epsilon \nabla \epsilon$	S_ϵ

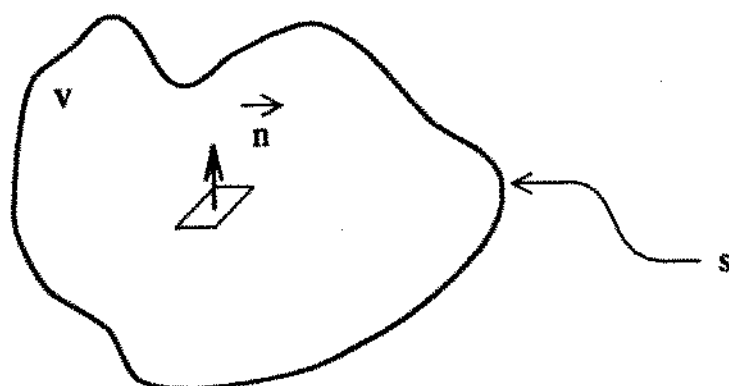


Fig. 3-1 Volume ΔV

3.2.2 Localização das variáveis: malha deslocada

Para um caso bi-dimensional invariante por translação, em um referencial cartesiano e considerando a espessura na direção de invariância L , a figura 3-2 representa o domínio de cálculo dividido em vários volumes de controle. A cada volume de controle é associado um ponto nodal no centro do mesmo e as equações diferenciais são integradas em cada volume de controle do domínio $\mathcal{D}$, satisfazendo os princípios de conservação.

A figura 3-3 representa um volume de controle principal da malha onde O é o centro do volume de controle principal e E , W , N e S são os centros dos volumes de controle principais adjacentes.

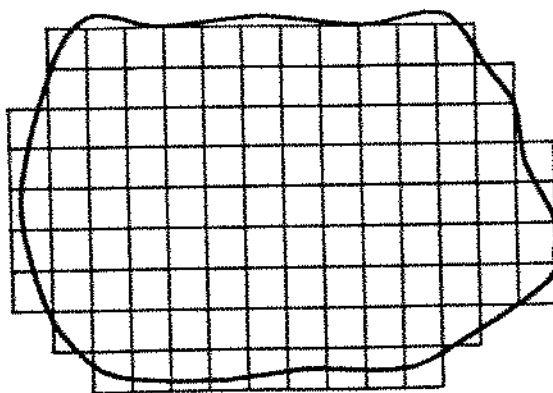


Fig 3-2 Malha do domínio

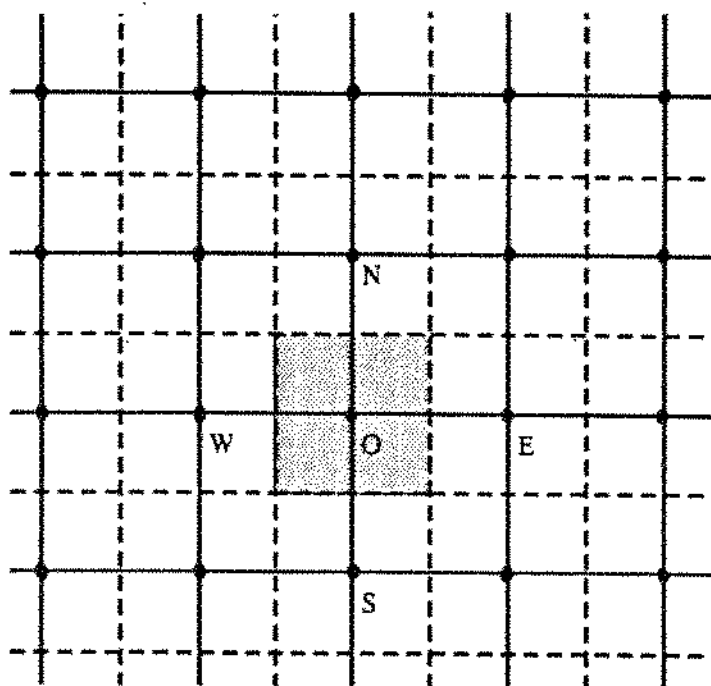


Fig. 3-3 volume de controle principal

Os volumes de controle principais são utilizados pelas expressões de balanço das grandezas escalares: massa, energia cinética de turbulência e dissipação de energia cinética de turbulência.

As velocidades são localizadas no centro das faces dos volumes de controle principais. Esta escolha constitui o princípio da malha deslocada. Os volumes de controle secundários utilizados pelas velocidades são ilustrados na figura 3-4.

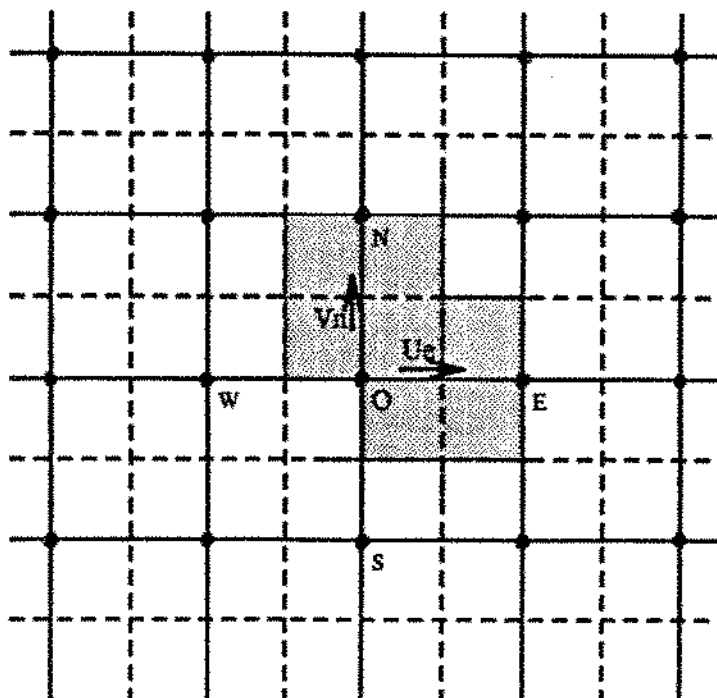


Fig. 3-4 Malha deslocada - balanço para $\bar{u}_e$ e $\bar{v}_n$

3.2.3 Equações de conservação para um escalar

As integrais de volume da equação (3.3), são aproximadas considerando que as funções que são integradas apresentam um perfil linear contínuo por partes

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \phi \, d\Omega \right) \cong \Delta \phi_O \frac{\partial \phi}{\partial t}_O, \quad (3.4)$$

$$\int_{\Delta} S_\phi \, d\Omega \cong \Delta \phi_O S_\phi_O. \quad (3.5)$$

Aplicando-se o mesmo tratamento nas integrais de superfície obtém-se:

a) Termo difusivo

$$\int_s J_{\phi} \cdot \vec{n} \, ds \cong \sum_{i=1}^4 af_i (J_{\phi} \cdot \vec{n})_i, \quad (3.6)$$

onde af é a área da face e i o índice para as 4 faces(e , n , w e s), deste modo, tem-se:

$$\int_s J_{\phi} \cdot \vec{n} \, ds \cong af_e J_{\phi_e} - af_w J_{\phi_w} + af_n J_{\phi_n} - af_s J_{\phi_s}, \quad (3.7)$$

o valor J_{ϕ_i} é obtido através de uma interpolação linear.

b) Termo convectivo

$$\begin{aligned} \int_s (\vec{u}_i \cdot \phi) \cdot \vec{n} \, ds &\cong \sum_{i=1}^4 af_i \phi_i (\vec{u}_i \cdot \vec{n})_i \quad \text{ou} \\ &\cong af_e \phi_e \vec{u}_e - af_w \phi_w \vec{u}_w + af_n \phi_n \vec{v}_n - af_s \phi_s \vec{v}_s \end{aligned} \quad (3.8)$$

A variável $FLUX(\phi_0)$ será utilizada para representar a soma dos termos convectivo e difusivo:

$$FLUX(\phi) = \sum_{i=1}^4 af_i \phi_i (\vec{u}_i \cdot \vec{n})_i + \sum_{i=1}^4 af_i (J_{\phi} \cdot \vec{n})_i$$

3.2.4 Esquema numérico para o termo convectivo

O tratamento numérico do termo convectivo é de grande influência na obtenção de resultados precisos em problemas de escoamentos turbulentos e recirculantes.

Dois esquemas convectivos de fácil implementação são introduzidos no programa:

esquema UPWIND;

esquema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics).

3.2.4.1 Esquema UPWIND

Considerando um caso unidimensional (Fig. 3-5), o esquema UPWIND é expresso por:

$$\bar{u}_e \times \phi_e = \bar{u}_e \times \begin{cases} \phi_O & \text{se } \bar{u}_e > 0 \\ \phi_E & \text{se } \bar{u}_e < 0 \end{cases}$$

Este esquema leva a uma discretização estável, porém, introduz erros de truncamento de primeira ordem (difusão numérica)[HAN AND LAUNDER, 1981]. Em princípio, um refinamento da malha poderia aliviar estes erros. Porém, o grau de refinamento necessário é impraticável em problemas de engenharia como escoamentos turbulentos em regime não permanente e a altas velocidades.

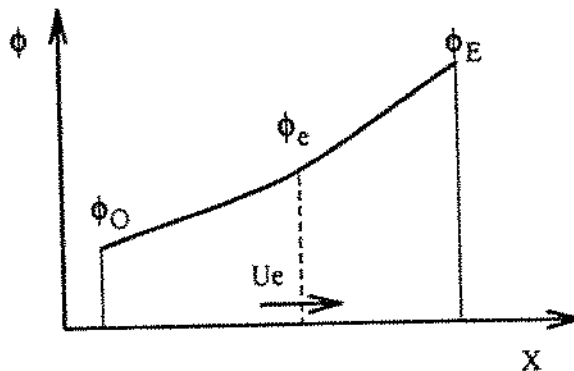


Fig. 3-5 Malha unidimensional Esquema UPWIND

3.2.4.2 Esquema QUICK

Considerando um caso unidimensional e uma malha uniforme (Fig.

3-6), o esquema QUICK é expresso por

$$\bar{u}_e \times \phi_e = \bar{u}_e \times \begin{cases} \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_O + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_W + \phi_E - 2\phi_O) & \text{se } \bar{u}_e > 0 \\ \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_O + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_O + \phi_{EE} - 2\phi_E) & \text{se } \bar{u}_e < 0 \end{cases}$$

Este esquema, desenvolvido por Leonard [LEONARD, 1979], consiste em uma interpolação quadrática sobre três pontos combinando uma interpolação linear e um termo de correção. Os erros de truncamento causados pela utilização deste esquema são de terceira ordem que são menores que os erros de truncamento causados pela utilização do esquema UPWIND, sem contudo, aumentar significativamente o tempo computacional.

No capítulo IV serão mostradas as diferenças obtidas pela utilização dos dois esquemas.

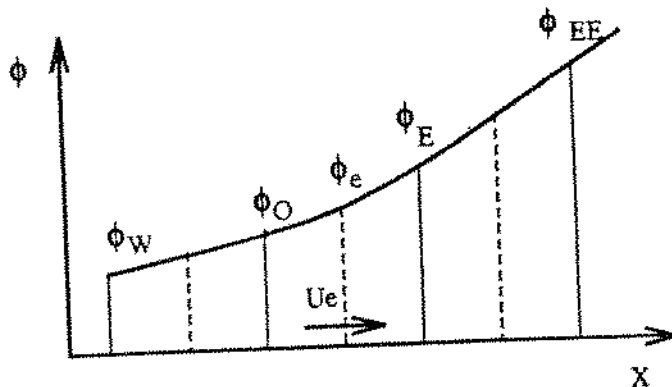


Fig. 3-6 Malha unidimensional Esquema QUICK

3.2.4 Equação de conservação do momentum

Os termos convectivos e difusivos das projeções da equação de conservação do momentum são obtidos de forma idêntica à equação de um escalar.

O termo de pressão é tratado diferentemente. Para a face oeste (w) (Fig.3-7) por exemplo, no balanço $\bar{u}_w$ é expresso por

$$-\int_s p \vec{i} \cdot \vec{n} ds \approx (af_w p_w - af_o p_o)L \quad (3.9)$$

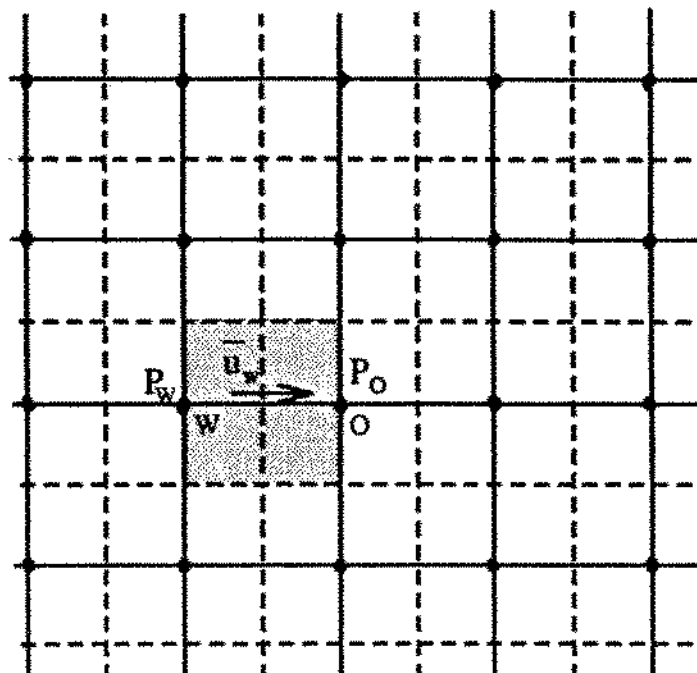


Fig 3-7 Tratamento do termo p

Os nós das forças de pressão são os mesmos que os das grandezas escalares.

A equação da quantidade de movimento apresenta a seguinte forma:

Componente $\bar{u}_w$:

$$\rho_w \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{u}_w) = \frac{1}{\rho} (af_w p_w - af_o p_o) \quad (3.10)$$

Componente $\bar{u}_e$:

$$\epsilon_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{u}_e) = \frac{1}{\rho} (af_o p_o - af_e p_e) \quad (3.11)$$

Componente $\bar{v}_s$:

$$\epsilon_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{v}_s) = \frac{1}{\rho} (af_s p_s - af_o p_o) \quad (3.12)$$

Componente $\bar{v}_n$:

$$\epsilon_n \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{v}_n) = \frac{1}{\rho} (af_o p_o - af_n p_n) \quad (3.13)$$

3.2.5 Equação da continuidade

Aplicando o teorema de Gauss à equação da continuidade tem-se:

$$\int_{\epsilon} \nabla \cdot \bar{u}_i \, d\epsilon = \int_s \bar{u}_i \cdot \vec{n} \, ds \quad (3.14)$$

Para o volume de controle principal O (Fig.3-3) a equação (3.14) apresenta a seguinte forma:

$$\bar{u}_e af_e - \bar{u}_w af_w + \bar{v}_n af_n - \bar{v}_s af_s = 0 \quad (3.15)$$

3.4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Os termos transitórios são escritos da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \cong \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^n}{\Delta t}, \quad (3.16)$$

onde n representa o instante t e $n+1$ o instante $t+\Delta t$.

A discretização temporal é feita utilizando-se o método SOLA:

A integração no tempo das equações escalares é explícita, deste modo tem-se:

$$\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^n}{\Delta t} \Delta z_o + \left[\text{FLUX}(\phi)_o - S_{\phi_o} \Delta z_o \right]^n = 0. \quad (3.17)$$

A equação da continuidade é integrada de forma implícita

$$\bar{u}_e^{(n+1)} af_e - \bar{u}_w^{(n+1)} af_w + \bar{v}_n^{(n+1)} af_n - \bar{v}_s^{(n+1)} af_s = 0, \quad (3.18)$$

e a equação do momentum de forma semi-implícita

Componente $\bar{u}_w$:

$$\bar{u}_w^{(n+1)} = \bar{u}_w^n - \frac{\Delta t}{\Delta z_w} \text{FLUX}(\bar{u}_w)^n + \frac{\Delta t}{\Delta z_w} \rho (af_w p_w - af_o p_o)^{(n+1)} \quad (3.19)$$

Componente $\bar{u}_e$:

$$\bar{u}_e^{(n+1)} = \bar{u}_e^n - \frac{\Delta t}{\Delta z_e} \text{FLUX}(\bar{u}_e)^n + \frac{\Delta t}{\Delta z_e} \rho (af_o p_o - af_e p_e)^{(n+1)} \quad (3.20)$$

Componente $\bar{v}_s$:

$$\bar{v}_s^{(n+1)} = \bar{v}_s^n - \frac{\Delta t}{\Delta z_s} \text{FLUX}(\bar{v}_s)^n + \frac{\Delta t}{\Delta z_s} \rho (af_s p_s - af_o p_o)^{(n+1)} \quad (3.21)$$

Componente $\bar{v}_n$:

$$\bar{v}_n^{(n+1)} = \bar{v}_n^n - \frac{\Delta t}{\Delta z_n} \text{FLUX}(\bar{v}_n)^n + \frac{\Delta t}{\Delta z_n} \rho (af_o p_o - af_n p_n)^{(n+1)} \quad (3.22)$$

Deste modo, substituindo-se os valores das velocidades no instante $n+1$ - obtidas a partir da equação do momentum (Eqs.3.19 a 3.22) - na equação da continuidade (Eq. 3.18), para o volume de controle O tem-se:

$$a_O P_O - a_E P_E - a_W P_W - a_N P_N - a_S P_S = b_O, \quad (3.23)$$

onde:

$$a_E = \frac{af_e af_e}{\Delta x_e}, \quad (3.24)$$

$$a_W = \frac{af_w af_w}{\Delta x_w}, \quad (3.25)$$

$$a_N = \frac{af_n af_n}{\Delta x_n}, \quad (3.26)$$

$$a_S = \frac{af_s af_s}{\Delta x_s}, \quad (3.27)$$

$$a_O = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad (3.28)$$

e

$$b_O = \frac{1}{\Delta t} (af_w \bar{u}_w^n - af_e \bar{u}_e^n) + \frac{1}{\Delta t} (af_s \bar{v}_s^n - af_n \bar{v}_n^n) + \frac{af_e}{\Delta x_e} \text{FLUX} (\bar{u}_e)^n - \frac{af_w}{\Delta x_w} \text{FLUX} (\bar{u}_w)^n + \frac{af_n}{\Delta x_n} \text{FLUX} (\bar{v}_n)^n - \frac{af_s}{\Delta x_s} \text{FLUX} (\bar{v}_s)^n \quad (3.29)$$

Deste modo, cada volume de controle principal do domínio irá gerar uma equação linear idêntica à Eq.(3.23). Como se pode observar, os

coeficientes dos termos de pressão irão depender apenas de parâmetros geométricos da malha, enquanto o termo do lado direito, b_O , dependerá do campo de velocidade no instante anterior e do passo de tempo de cálculo, Δt .

O conjunto de equações lineares (3.23) formado por todos os nós principais do domínio de cálculo formam a chamada matriz de rigidez do problema. A matriz de rigidez é, então, calculada uma só vez por depender somente de parâmetros geométricos, enquanto o vetor b_O , termo do lado direito, tem que ser calculado a cada passo de tempo pois depende do campo de velocidade anterior.

3.5 Resolução do Sistema Linear de Equações

Dada a característica da matriz de rigidez (positiva e simétrica) podemos utilizar o método direto de Choleski para resolver o sistema linear.

A matriz de rigidez, A é decomposta em:

$$A = Lx L^t, \quad (3.30)$$

onde L é a matriz triangular inferior e L^t é a sua transposta. A decomposição da matriz de rigidez A é feita uma só vez tendo em vista os seus elementos dependerem somente de grandezas geométricas, as quais não variam no tempo.

A cada passo de tempo efetuamos a seguinte operação:

$$[L] \{ X \} = \{ B \}. \quad (3.31)$$

Desta operação determinamos o vetor $\{ X \}$, pois $[L]$ e $\{ B \}$ são conhecidos. O passo seguinte será:

$$[L^t] \{ Y \} = \{ X \} \quad (3.32)$$

onde $\{ Y \}$, para o presente problema representa o campo de pressão $\{ P_{(j)} \}$.

3.6 Estabilidade Numérica - Passo de tempo

Os termos convectivos e difusivos das equações de quantidade de movimento são estimados de maneira explícita como foi mostrado anteriormente. Esta forma de discretização resulta em uma limitação do passo de tempo, Δt , de cálculo para que haja estabilidade do método numérico.

A método matricial fornece uma expressão para o passo de tempo ótimo a ser usado. No caso bi-dimensional e malha uniforme o passo de tempo recomendado no Relatório Técnico - TRIO-VF, referência [VILLAND, 1986] é:

* condição de convecção

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\frac{u}{\Delta X} + \frac{v}{\Delta Y}} \quad (3.33)$$

* condição de difusão

$$\Delta t_{dif} = \frac{1}{2(v+u) \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2} \right)} \quad (3.34)$$

Assim, o passo de tempo convecção-difusão será calculado como:

$$\Delta t_{cálculo} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_{conv}} + \frac{1}{\Delta t_{dif}}} \quad (3.35)$$

Foi adotado este critério para o cálculo do passo de tempo em todos os casos estudados.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos em alguns problemas hidrodinâmicos. Os resultados das soluções numéricas serão comparadas com resultados experimentais e/ou soluções analíticas para escoamentos em regime permanente com objetivo de validar o programa.

Quatro configurações são tratadas:

- escoamento laminar entre placas planas paralelas;
- escoamento laminar em uma cavidade quadrada;
- escoamento laminar no interior de dutos de secção circular e
- escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular.

Essas quatro configurações foram escolhidas, por serem casos clássicos tratados amplamente na literatura, para os quais dispoe-se de resultados experimentais, soluções analíticas e numéricas, possibilitando assim a comparação com os resultados obtidos com o código de cálculo desenvolvido.

As três primeiras configurações tratam de escoamentos laminares. O programa foi desenvolvido para solução de problemas envolvendo escoamentos turbulentos porém, é possível resolver problemas em regime laminar já que as equações que descrevem estes tipos de problemas apresentam a mesma forma que as equações médias que descrevem escoamentos em regime turbulento, a menos do tensor de Reynolds que aparece na equação do momentum em termos médios para escoamentos em regime turbulento. Deste modo, para a resolução de problemas de escoamentos em regime laminar a partir do programa desenvolvido, é feito um

desvio no algoritmo eliminando-se o cálculo do tensor de Reynolds e consequentemente das equações de k e ε , o que leva a uma diminuição no tempo computacional.

Para as comparações que serão realizadas entre os valores obtidos com o programa desenvolvido e os valores experimentais ou analíticos obtidos na literatura, utilizaremos a seguinte definição de desvio percentual:

$$\text{Desvio} = \left| \frac{\phi_{an,exp} - \phi_{cal}}{\phi_{an,exp}} \right| \times 100\% \quad (4.1)$$

onde:

$\phi_{an,exp}$ = valor da variável comparada, obtido analiticamente ou experimentalmente e

ϕ_{cal} = valor da variável comparada, obtido a partir do programa.

4.2 ESCOAMENTO LAMINAR ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS

4.2.1 Introdução

O escoamento laminar entre placas planas paralelas apresenta duas regiões distintas. A primeira, que corresponde à região de entrada, a camada limite hidrodinâmica começa a se desenvolver em direção ao centro do canal à medida que se avança longitudinalmente. Nesta região os perfis de velocidades variam tanto longitudinalmente como transversalmente em relação ao eixo de simetria. Quando a camada limite alcança o centro do canal os perfis de velocidades não variam

mais longitudinalmente. Nesta região pode-se obter uma solução exata da equação de Navier-Stokes.

A solução exata da equação de Navier-Stokes para esta região é:

$$u = 6 * Ub * \left[\left(\frac{y}{2b} \right) - \left(\frac{y}{2b} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

onde

u é a velocidade para uma posição y ;

Ub é a velocidade média em uma secção transversal e

b é a metade da distância entre as placas.

O numero de Reynolds do escoamento é definido como:

$$Re = \frac{Ub * 2b}{\nu} \quad (4.3)$$

onde ν é a viscosidade dinâmica do fluido.

O comprimento de desenvolvimento é estimado em:

$$\frac{L}{2b} \approx 0.035 Re \quad (4.4)$$

Os resultados obtidos são comparados com o perfil teórico da região em que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido (Equ.4.2) para número de Reynolds 500, 700 e 1000. É mostrada a influência causada pelo refinamento da malha e do esquema numérico para o termo convectivo.

4.2.2 Descrição da configuração

O problema consiste em duas paredes paralelas separadas por uma distância $2b$, comprimento $L = 100b$ e profundidade infinita (Fig. 4-1). Em uma das extremidades o fluido entra com velocidade uniforme U_0 na direção x e velocidade nula na direção y .

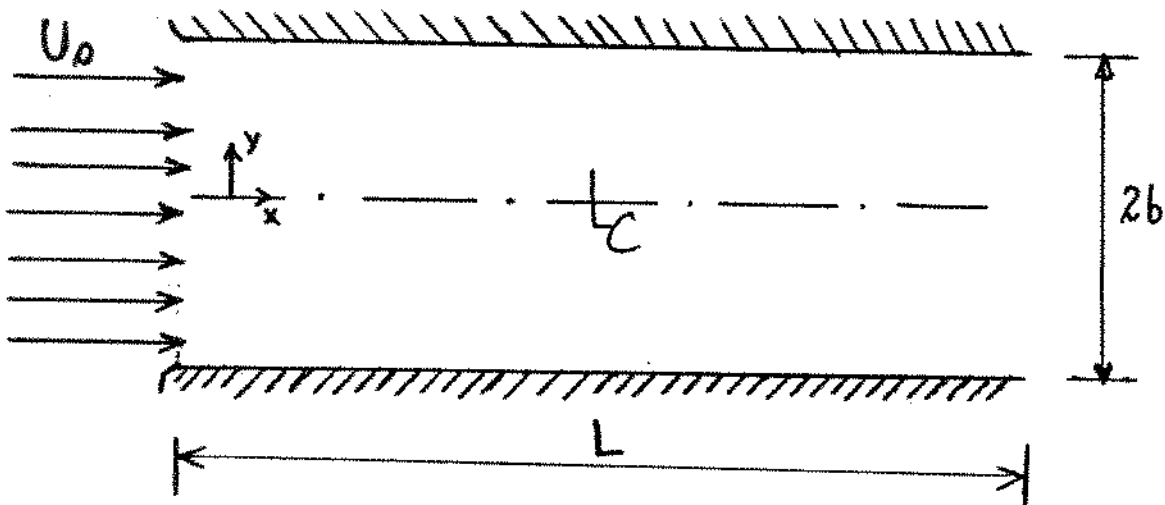


Figura 4-1 Placas planas paralelas

4.2.3 Condições de contorno

Devido a simetria do problema, é tratado metade do domínio (Fig.4-2).

As condições de contorno do problema são :

- (1) entrada: perfil uniforme de velocidade especificado;
- (2) saída: $\partial u / \partial x = 0$ e $v = 0$ (escoamento desenvolvido);
- (3) contorno sólido: $u = 0$ e $v = 0$;
- (4) eixo de simetria: $\partial u / \partial y = 0$, $v = 0$.

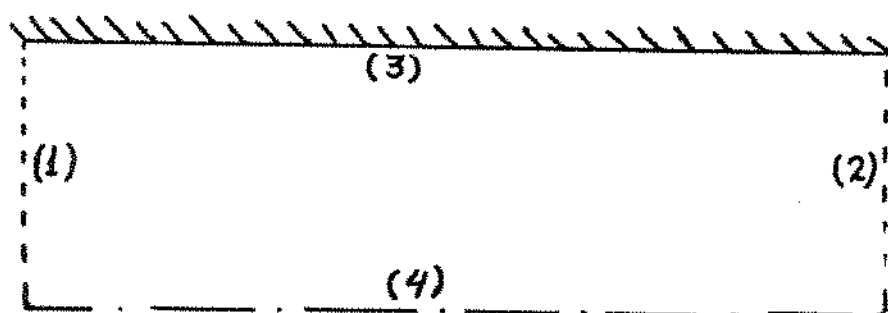


Figura 4-2 Condições de contorno

4.2.4 Comparação dos resultados

As figuras 4-3 a 4-5 mostram os perfis de velocidade u/U_b em função de $y/2b$ em diferentes posições $x/2b$ (0, 4, 10, 20 e 50) para número de Reynolds 500, 700 e 1000, malha 20X20 regular na direção y e em progressão geométrica com razão 1.1 na direção x . O esquema numérico para o termo convectivo utilizado é o QUICK, por apresentar melhores resultados como será mostrado na seção 4.2.6.

- IV.6 -

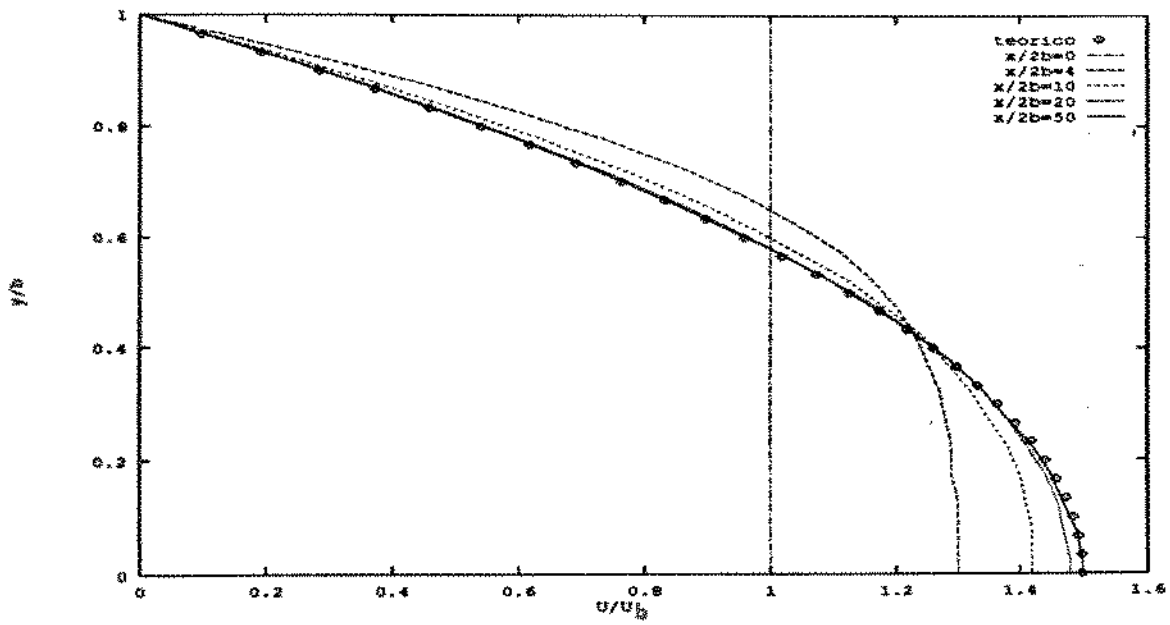


Figura 4-3 Perfis de velocidades U/U_m em função de $y/2b$, $Re=500$

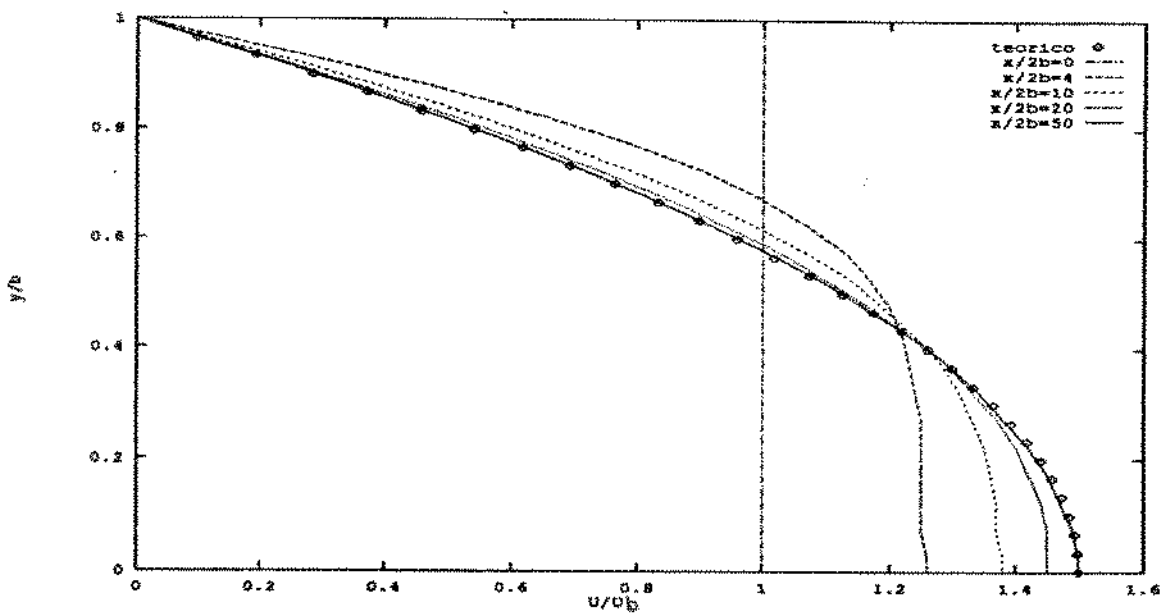


Figura 4-4 Perfis de velocidades U/U_b função de $y/2b$, $Re=700$

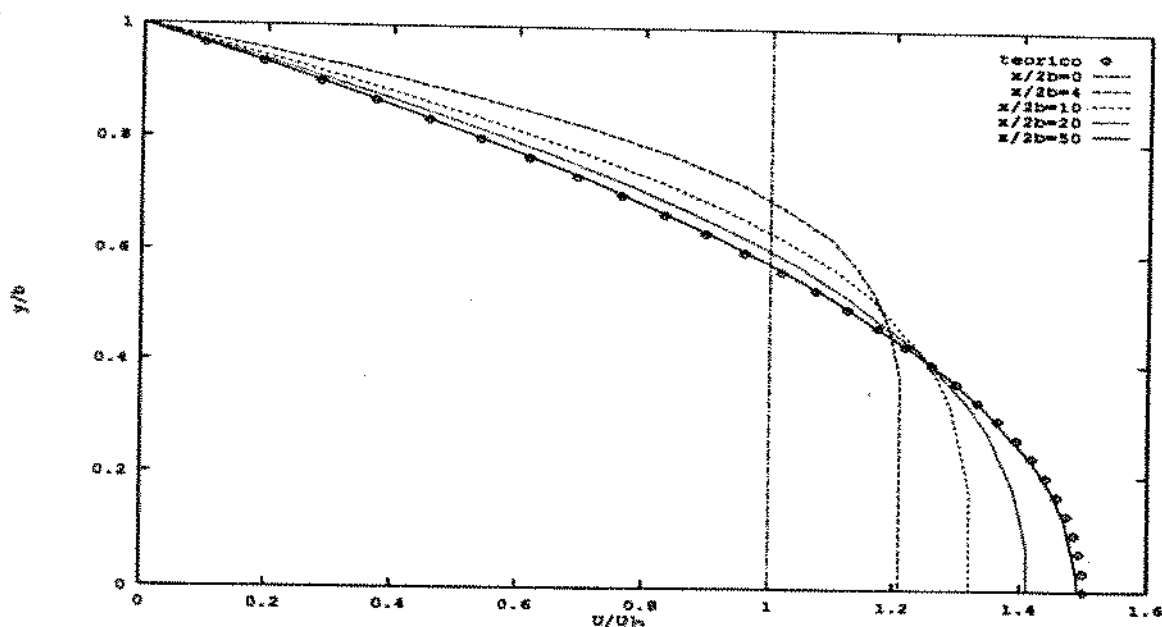


Figura 4-5 Perfis de velocidades U/U_b em função de $y/2b$, $Re=1000$

Os perfis de velocidade adimensional u/U_b em função de $y/2b$ é o mesmo na região em que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido independente do número de Reynolds do escoamento já que nesta região o perfil é função apenas de y (Eq. 4.2).

Os desvios percentuais máximos (Eq. 4.1) entre a solução analítica e as soluções obtidas pelo programa para os perfis de velocidade axial na região de escoamento completamente desenvolvido (figuras 4-3 a 4-5) para números de Reynolds 500, 700 e 1000 foram 0.014%, 0.015% e 0.015% respectivamente.

4.2.5 Influência da malha

As figuras 4-6 e 4-7 mostram o perfil de velocidade u/U_b em função de $y/2b$, $Re = 700$, $x/2b = 50$ e 19 respectivamente. São utilizadas malhas regulares 5X5, 10X10 e 20X20.

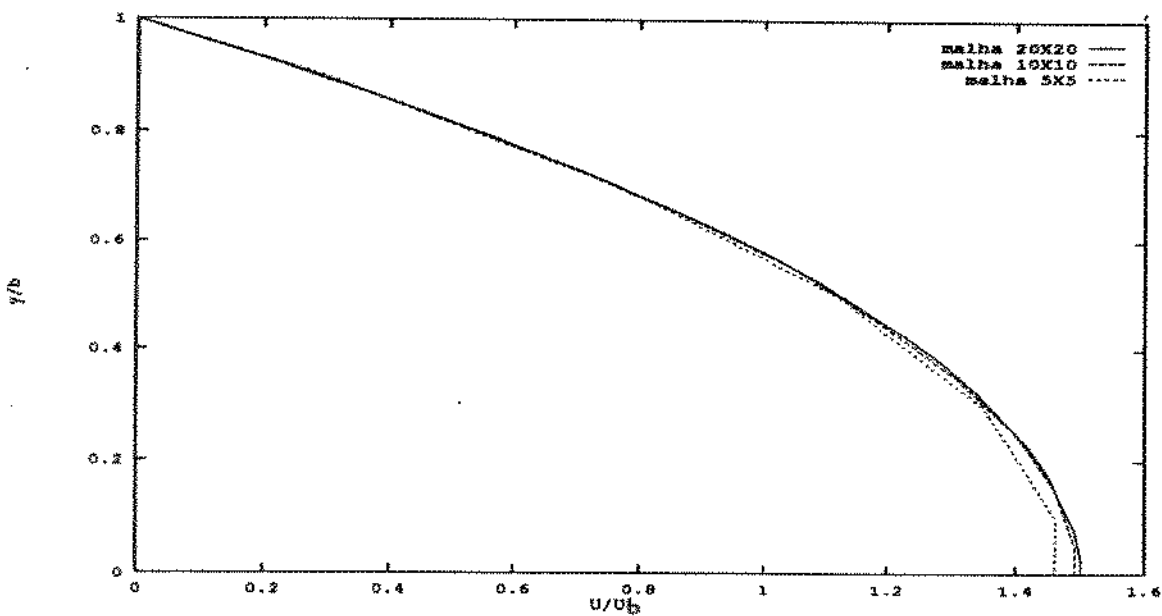


Figura 4-6 Influência da malha para $x/2b = 50$ e $Re=700$

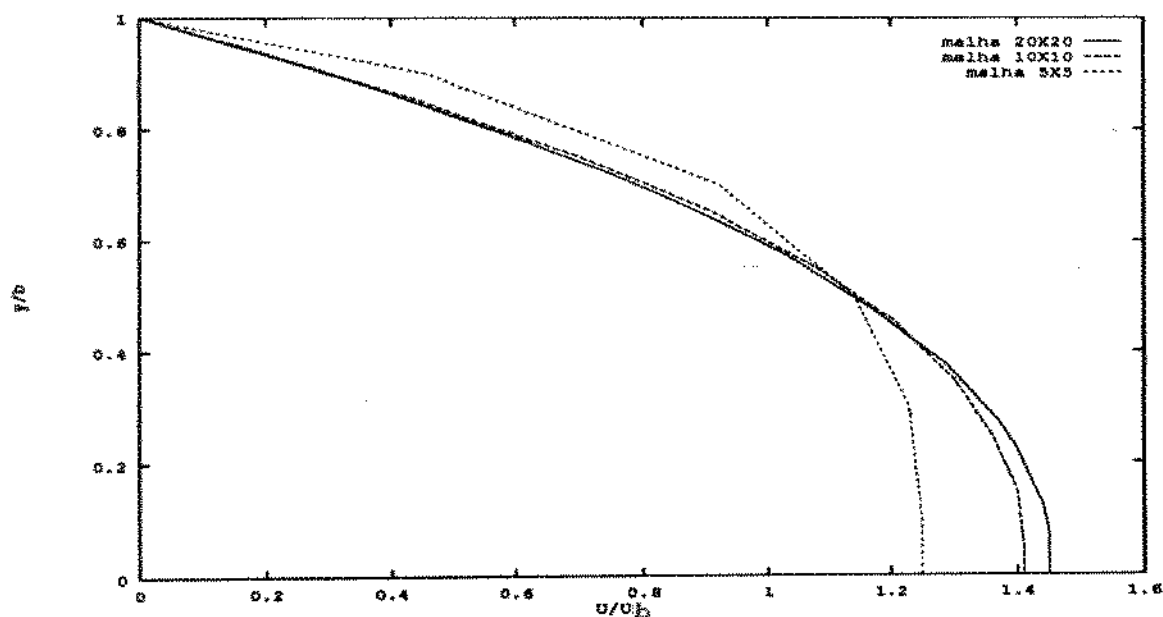


Figura 4-7 Influência da malha para $x/2b = 19$ e $Re = 700$

A influência causada pelo refinamento da malha é bem maior na região de desenvolvimento como mostrado nas figuras 4-6 e 4-7.

A diferença máxima entre os valores obtidos para o perfil de velocidade axial para número de Reynolds 700 e $x/2b = 50$ entre as malhas 20x20 e 10x10 foi de 0.4% e entre as malhas 20x20 e 5x5 de 2.43%. Na região correspondente a $x/2b = 19$, a diferença máxima entre as malhas 20x20 e 10x10 é igual a 2.9% e entre as malhas 20x20 e 5x5 de 12.7%.

4.2.6 Influência do esquema convectivo

A diferença causada pela utilização dos esquemas implementados no programa (QUICK e UPWIND) é mostrado na figura 4-8 comparando-se o resultado obtido para o perfil de velocidade u/U_b na região em que o escoamento encontra-se completamente desenvolvido para uma malha regular 20X20 e $Re = 500$.

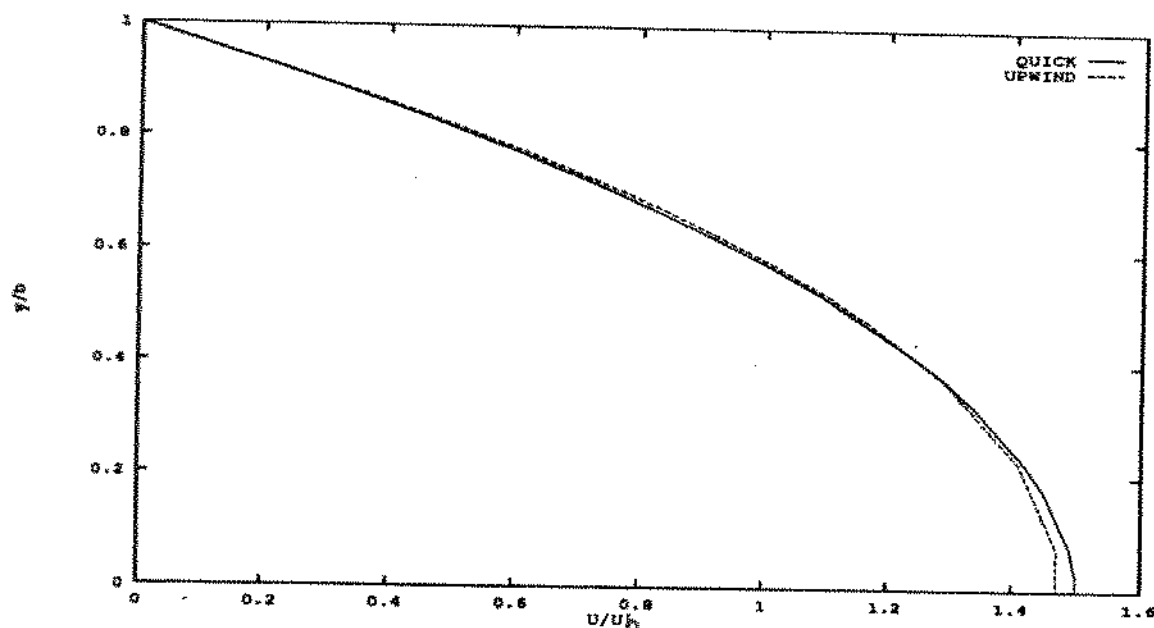


Figura 4-8 Diferença na utilização do esquema QUICK E UPWIND

para $Re=300$ e malha 20×20

A diferença máxima causada pela utilização dos esquemas convectivos QUICK e UPWIND para a obtenção do perfil de velocidade axial na região $x/2b = 50$ foi de 2.03%.

4.2.7 Conclusões

Os resultados para região de escoamento completamente desenvolvido apresentam boa concordância.

O refinamento da malha é sentido principalmente na região de desenvolvimento.

Apesar dos resultados obtidos com a utilização dos dois esquemas convectivos estarem bem próximo, pois o escoamento é fortemente

unidirecional, podemos verificar que a utilização do esquema QUICK leva a obtenção de melhores resultados que a utilização do esquema UPWIND,

4.3. ESCOAMENTO LAMINAR EM UMA CAVIDADE QUADRADA

4.3.1 Introdução

O escoamento laminar em uma cavida é um problema clássico de escoamento recirculante estudado por diversos autores. Este problema será utilizado para validar o programa desenvolvido através da comparação com os resultados obtidos por Burggraf [BURGGRAF, 1966], que fez um extenso estudo numérico neste tipo de problema, usando o método modificado de relaxação. Seu cálculo foi feito para uma cavidade com o número de Reynolds variando de 0 a 400 e espaçamento de 1/10 a 1/40.

É feito um estudo para mostrar a influência causada pelo refinamento da malha e a escolha do esquema numérico QUICK e UPWIND para o termo convectivo.

O número de Reynolds 10^{-4} é comparado com os valores apresentados por Burggraf como $Re = 0$.

4.3.2 Descrição da configuração

O problema da cavidade quadrada consiste em uma caixa de altura e largura iguais a L e profundidade infinita, com fluido no seu interior

que é posto em movimento através do movimento da tampa superior que se desloca a uma velocidade constante U como mostrado na figura 4-9.

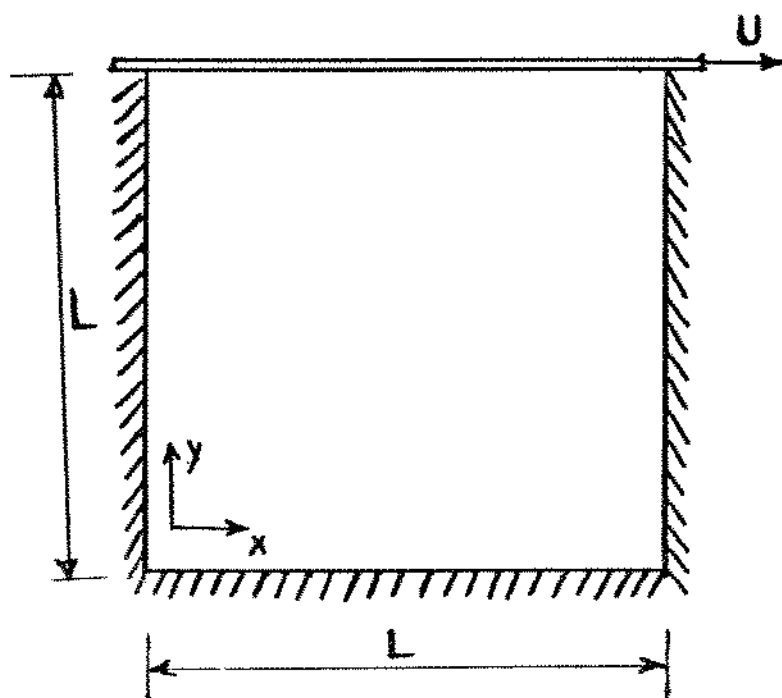


Figura 4-9 Cavidade quadrada

4.3.3 Condições de contorno

Considerando-se a figura 4-10, as condições de contorno utilizadas são:

- (1) - parede superior: $u = U$, $v = 0$;
- (2) - paredes laterais e inferior: $u = v = 0$.

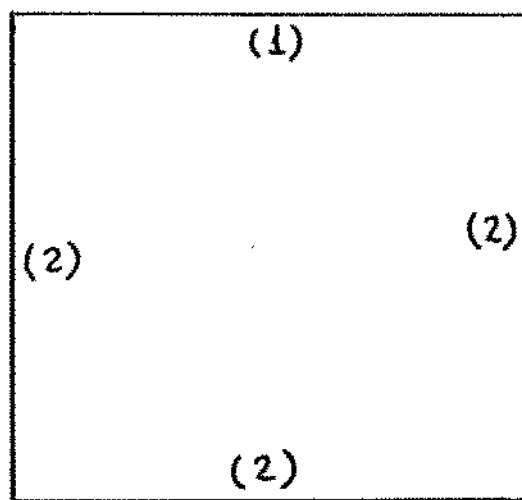


Figura 4-10 Condições de contorno

4.3.4 Comparação de resultados

As figuras 4-11 a 4-13 mostram o perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade ao longo da direção y obtidos para uma malha uniforme 30×30 e números de Reynolds 0, 100 e 400. O número de Reynolds é definido por:

$$Re = \frac{U * L}{\nu} \quad (4.5)$$

onde

U = Velocidade da tampa;

L = Largura da cavidade e

ν = Viscosidade dinâmica do fluido.

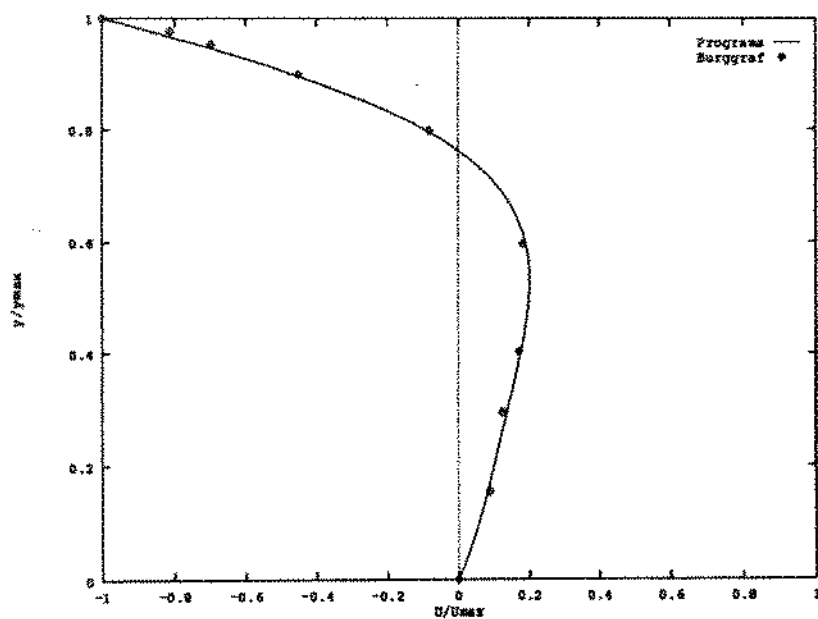


Figura. 4-11 Perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade para $Re = 0$ — programa, ♦ ♦ ♦ Burggraf

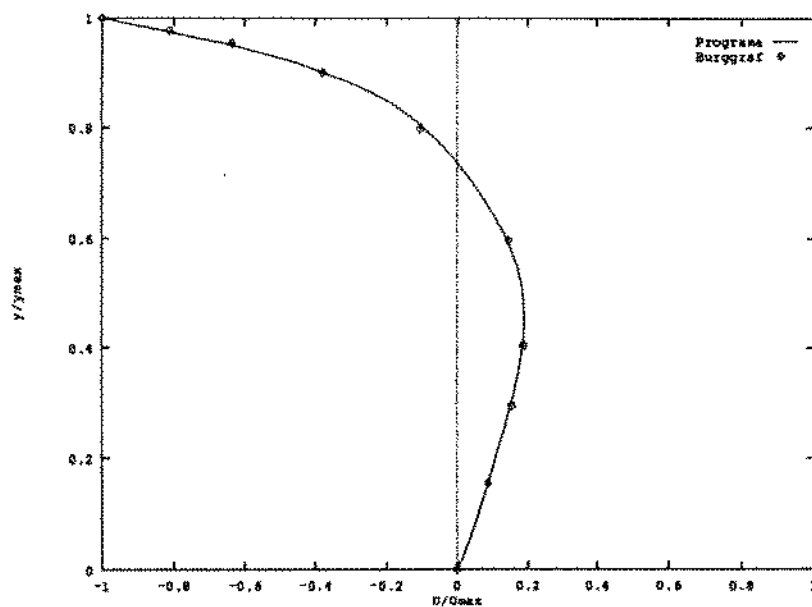


Figura 4-12 Perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade para $Re = 100$ — programa, ♦ ♦ ♦ Burggraf

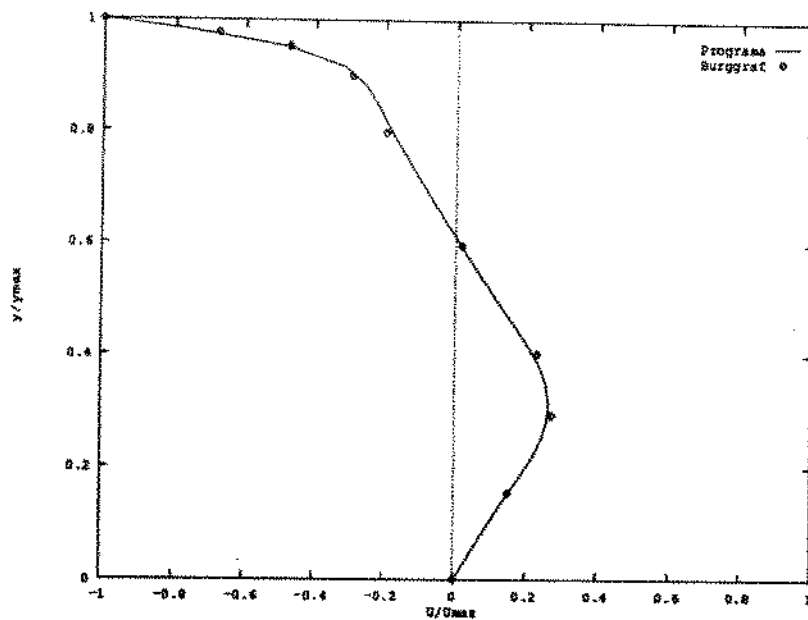


Figura 4-13 Perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade para $Re = 400$ — programa, $\circ$ $\circ$ $\circ$ Burggraf

As figuras 4-14 a 4-16 mostram de forma qualitativa as linhas de corrente obtidas a partir do programa desenvolvido para números de Reynolds 0, 100 e 400.

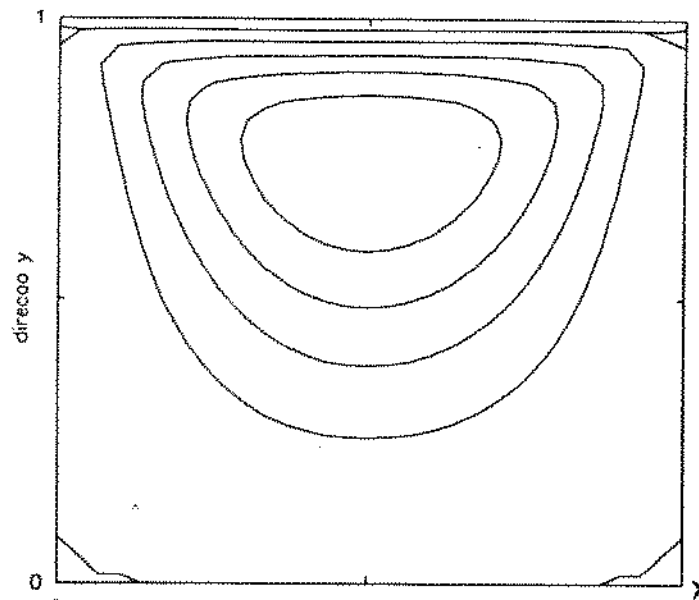


Figura 4-14 Linhas de corrente em uma cavidade para $R=0$

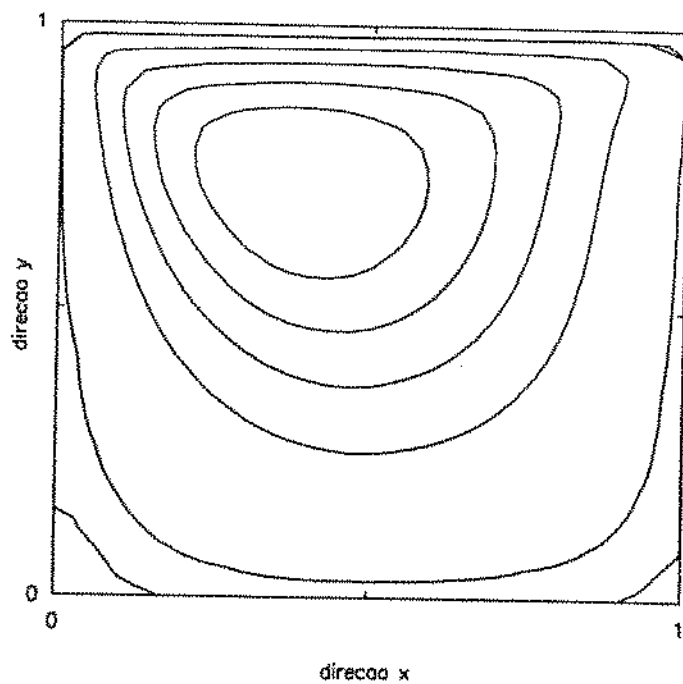


Figura 4-15 Linhas de corrente em uma cavidade
para $R=100$

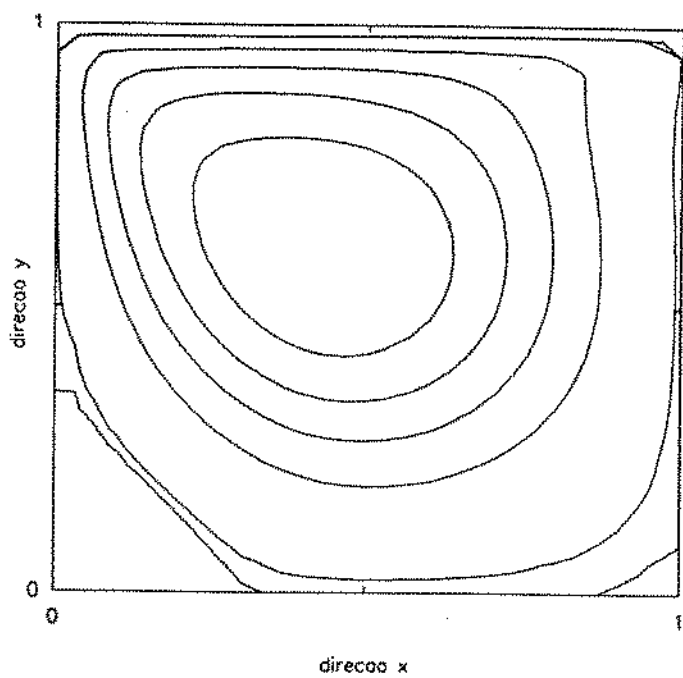


Figura 4-16 Linhas de corrente em uma cavidade
para $R=400$

As linhas de corrente mostram o deslocamento do vortice principal em direção ao canto superior esquerdo da cavidade e o aumento dos vortices secundários nos cantos inferiores à medida que o número de Reynolds aumenta.

4.3.5 Influência da malha

Para mostrar a influência causada pelo refinamento da malha são obtidos resultados para o perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade para malhas uniformes 20×20 e 30×30 para Reynolds 400 como mostrado na figura 4-17.

Os resultados obtidos com a malha 30×30 são melhores que os resultados obtidos com a malha 20×20 .

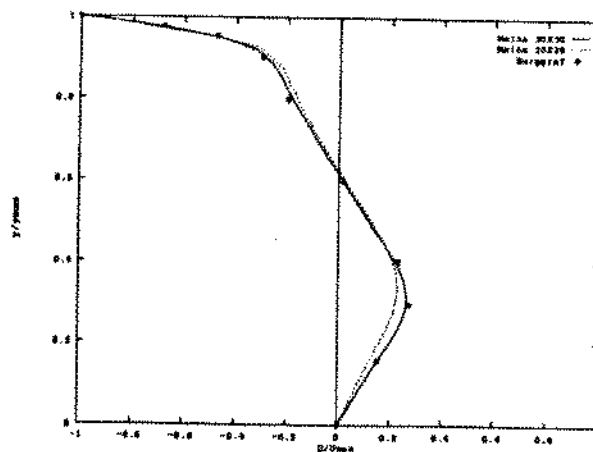


Figura 4-17 Perfil de velocidade na direção x no centro da cavidade com $Re=400$ para malhas uniformes 20×20 e 30×30

A diferença máxima entre os perfis de velocidades no centro da cavidade para as malhas 30x30 e 20x20 e número de Reynolds 400 é de 16.6%.

4.2.6 Esquema convectivo

A figura 4-18 mostra os resultados obtidos para o perfil de velocidade x no centro da cavidade com número de Reynolds 400 e malha regular 30x30 utilizando-se os dois esquemas que foram implementados no programa (QUICK e UPWIND).

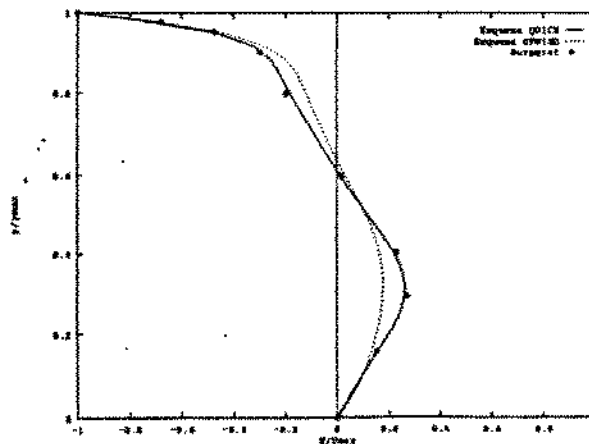


Figura 4-18 Perfil de velocidade no centro da cavidade para $Re=400$
utilizando-se os esquemas QUICK e UPWIND

A diferença máxima entre os resultados obtidos para o perfil de velocidade no centro da cavidade utilizando-se os esquemas QUICK e UPWIND, para número de Reynolds 400 é de 24.1%.

4.3.7 Conclusão

Os resultados obtidos apresentam boa concordância com os resultados de Burggraf. A escolha da malha é um fator importante para a obtenção dos resultados pois, se de um lado o refinamento da malha leva resultados melhores por outro lado aumenta o tempo computacional chegando a um ponto no qual o refinamento da malha não altera os resultados significativamente.

Os resultados obtidos com a utilização do esquema QUICK são melhores que os obtidos com o esquema UPWIND.

4.4 ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS DE SECÇÃO CIRCULAR

4.4.1 Introdução

O tratamento do problema de escoamento laminar em dutos de secção circular é o mesmo utilizado para o escoamento laminar entre placas planas paralelas a menos do sistema de coordenadas que no primeiro caso trata-se de um sistema de coordenadas cilíndricas e no segundo de coordenadas cartesianas.

O perfil de velocidade na região que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido é:

$$u=2*U_b*\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (4.6)$$

onde

u é a velocidade axial para uma posição y ;

U_b é a velocidade média em uma secção do duto e

R é o raio do duto.

O número de Reynolds do escoamento é definido como:

$$Re = \frac{U_b * 2R}{\nu} \quad (4.7)$$

onde ν é a viscosidade dinâmica do fluido.

O comprimento de desenvolvimento do perfil de velocidade axial é:

$$\frac{L}{2R} \approx 0.06 Re \quad (4.8)$$

Os resultados obtidos com o programa serão comparados com o perfil teórico da região em que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido (Eq. 4.6) para número de Reynolds 500, 700 e 1000 com a finalidade de validar o programa no sistema de coordenadas cilíndricas (r, x) .

4.4.2 Descrição da configuração

O problema consiste em um duto de seção circular raio R e comprimento $L = 100 R$ (Fig. 4-19). Em uma das extremidades o fluido entra com velocidade uniforme U_0 na direção x e velocidade nula na direção r .

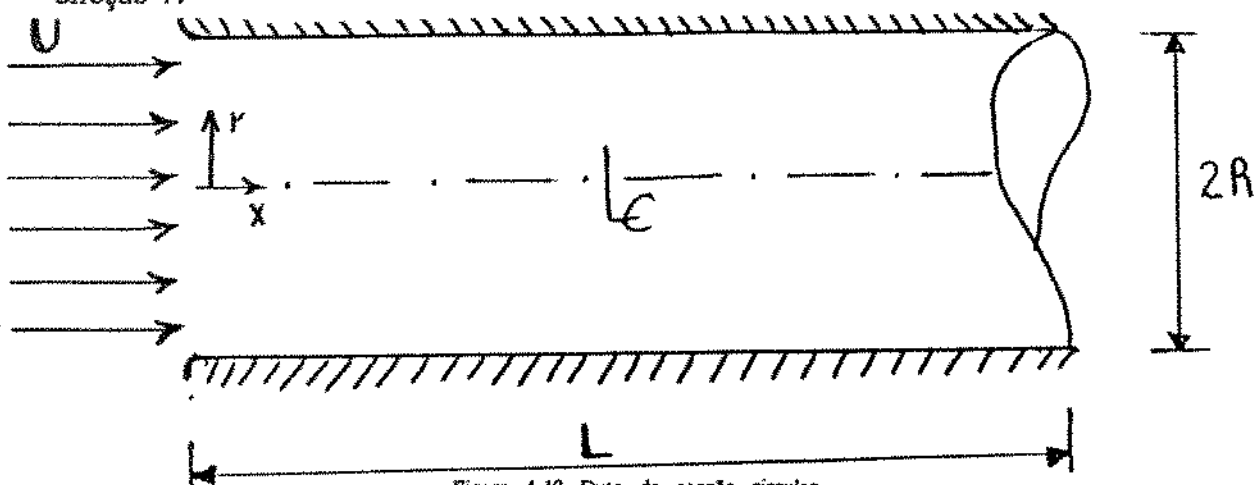


Figura 4-19 Duto de seção circular

4.4.3 Condições de contorno

Devido a simetria do problema, é tratado metade do domínio (Fig.4-2).

As condições de contorno do problema são:

- (1) entrada: perfil uniforme de velocidade especificado;
- (2) saída: $\partial u / \partial x = 0$ e $v = 0$ (escoamento desenvolvido);
- (3) contorno sólido: $u = 0$ e $v = 0$;
- (4) eixo de simetria: $\partial u / \partial r = 0$, $v = 0$.

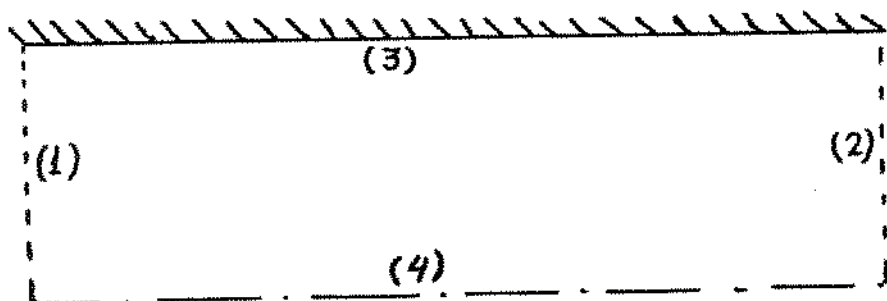


Figura 4-20 Condições de contorno

4.4.4 Comparação dos resultados

As figuras 4-21 a 4-23 mostram os perfis de velocidade u/U_b em função de $r/2R$ em diferentes posições $x/2R$ (0, 4, 10, 10 e 50) para número de Reynolds 500, 700 e 1000 com malha 20X20 regular na direção r e em progressão geométrica com razão 1.1 na direção x .

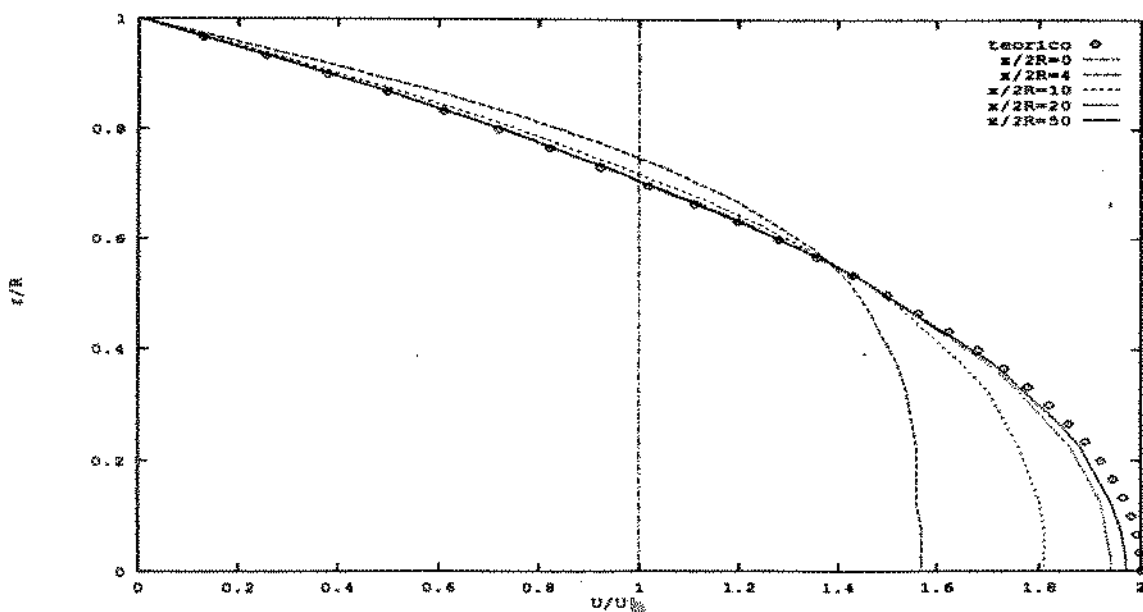


Figura 4-21 Perfis de velocidades u/U_b em função de $r/2R$ $Re=500$

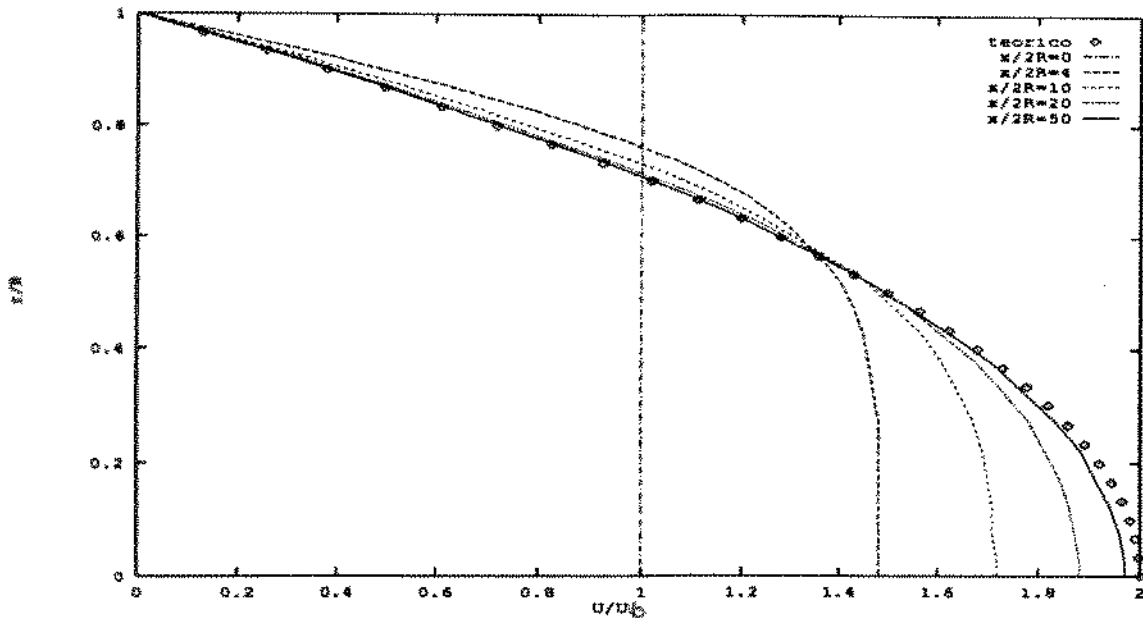


Figura 4-22 Perfis de velocidades U/U_b em função de r/R $Re=700$

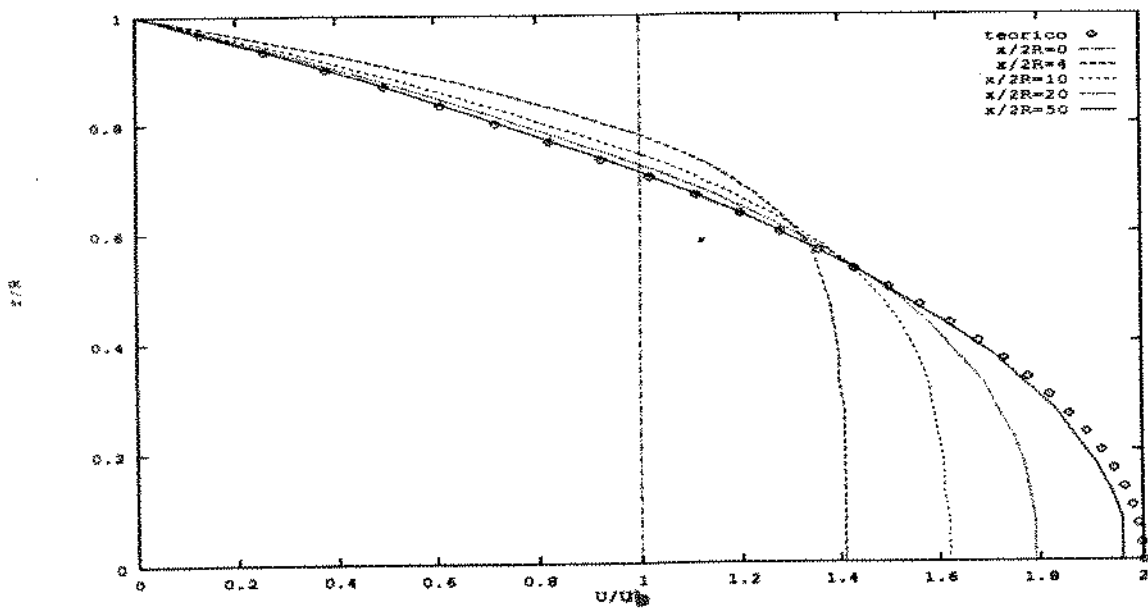


Figura 4-23 Perfis de velocidades U/U_b em função de r/R $Re=1000$

Os perfis de velocidade adimensional u/U_b em função de $r/2R$ é o mesmo na região em que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido, independente do número de Reynolds do escoamento, já que nesta região o perfil é função apenas de r .

Os desvios percentuais máximos (Eq. 4.1) entre a solução analítica e as soluções obtidas pelo programa para os perfis de velocidade axial na região de escoamento completamente desenvolvido (figuras 4-21 a 4-23) para números de Reynolds 500, 700 e 1000 foram 1.3%, 1.3% e 1.5% respectivamente.

4.4.5 Influência da malha

As figuras 4-24 e 4-25 mostram o perfil de velocidade u/U_b em função de $r/2R$, $Re = 1000$, $x/2R = 50$ e 19 respectivamente. São utilizadas malhas regulares 5X5, 10X10 e 20X20.

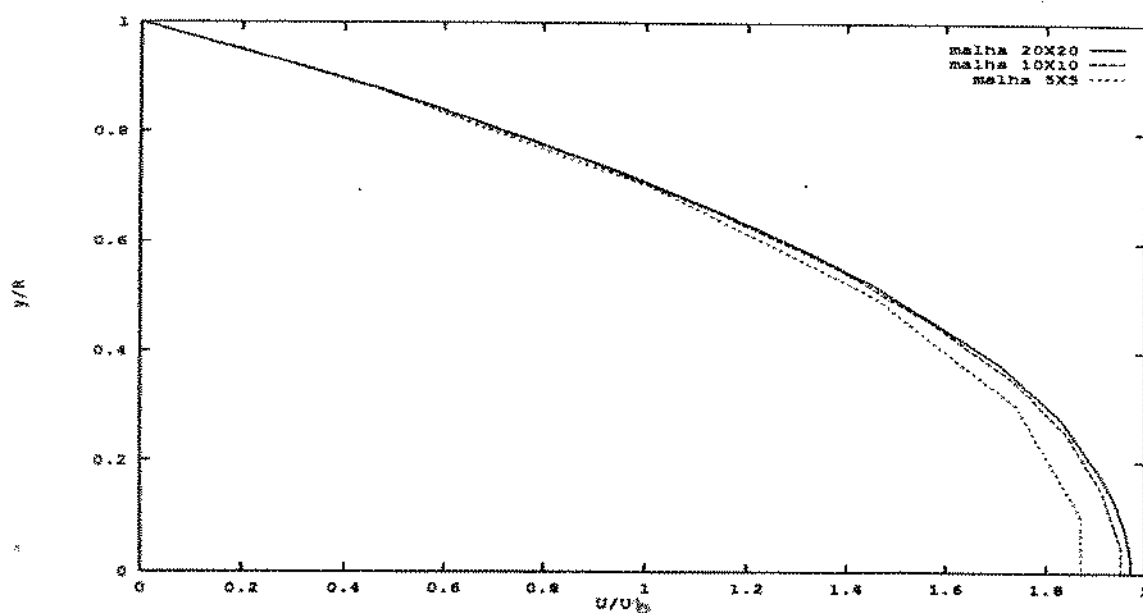


Figura 4-24 Influência da malha para $x/2R = 50$ e $Re=1000$

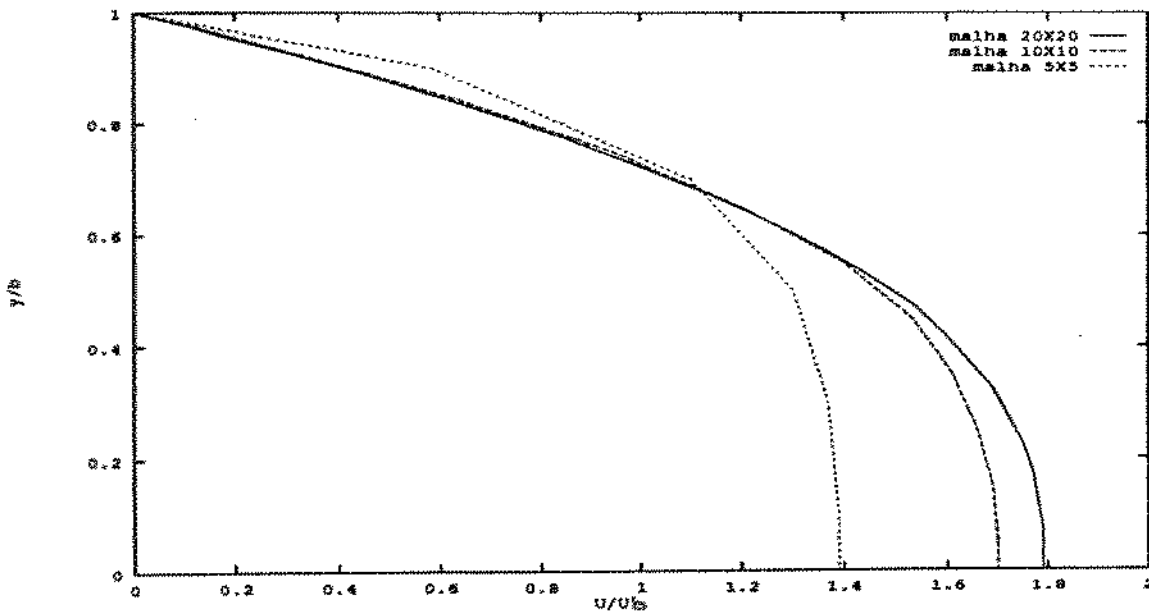


Figura 4-25 Influência da malha para $x/2R = 19$ e $Re = 1000$

Assim como no escoamento entre placas planas paralelas a influência causada pelo refinamento é sentida principalmente na região de desenvolvimento.

A influência causada pelo refinamento da malha é bem maior na região de desenvolvimento como mostrado nas figuras 4-6 e 4-7.

A diferença máxima entre os valores obtidos para o perfil de velocidade axial para número de Reynolds 1000 e $x/2b = 50$ entre as malhas 20x20 e 10x10 foi de 1.15% e entre as malhas 20x20 e 5x5 de 4.43%. Na região correspondente a $x/2b = 19$, a diferença máxima entre as malhas 20x20 e 10x10 é igual a 4.8% e entre as malhas 20x20 e 5x5 de 19.7%.

4.4.6 Influência do esquema convectivo

A diferença causada pela utilização dos esquemas implementados no programa (QUICK e UPWIND) é mostrado na figura 4-26, comparando-se o resultado obtido para o perfil de velocidade u/U_b na região em que o escoamento encontra-se completamente desenvolvido para uma malha regular 20X20 e $Re=500$.

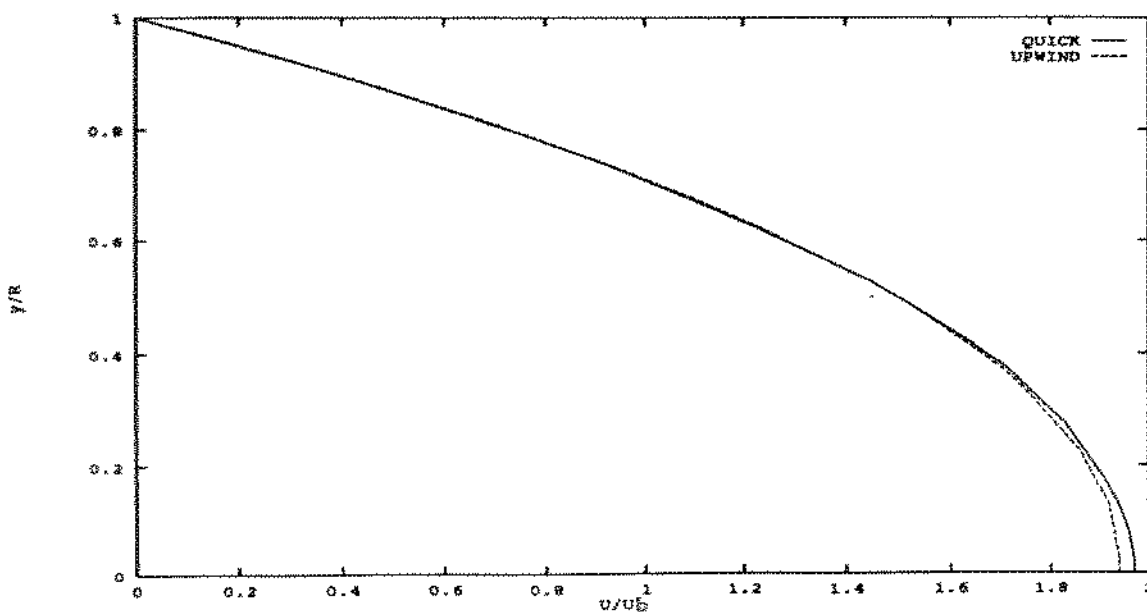


Figura 4-26 Diferença na utilização do esquema QUICK E UPWIND
para $Re=500$ e malha 20X20

4.4.7 Conclusões

Os resultados apresentam boa concordância com a teoria no sistema de coordenadas cilíndricas.

Novamente é mostrado que os resultados obtidos com a utilização do esquema QUICK são melhores que os resultados obtidos com a utilização do esquema UPWIND.

4.5 ESCOAMENTO TURBULENTO NO INTERIOR DE DUTOS DE SECÇÃO CIRCULAR

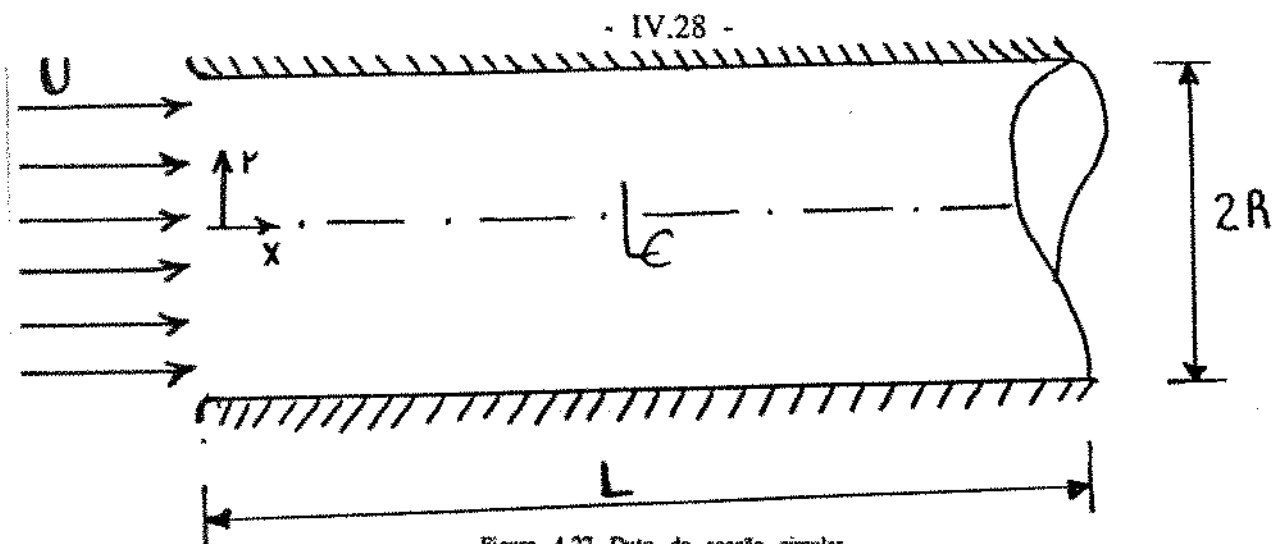
4.5.1 Introdução

Nesta seção são apresentados os resultados para o escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular comparados com resultados experimentais. Os resultados são comparados na região de desenvolvimento da camada limite e na região em que o escoamento apresenta-se completamente desenvolvido.

Como o modelo $k-\varepsilon$ usado foi desenvolvido para regiões em que o regime é completamente turbulento, são usadas condições de contorno para k e ε baseadas em uma função de parede empírica (considerando a existência de um equilíbrio entre os efeitos viscosos e os efeitos devido as flutuações de velocidade) para os nós próximos à parede.

4.5.2 Descrição da configuração

O problema consiste em um duto de secção circular raio R e comprimento $L = 160 R$ (Fig. 4-27). Em uma das extremidades o fluido entra com velocidade uniforme U_0 na direção x e velocidade nula na direção r .



4.5.3 Condições de contorno

As condições de contorno são divididas em:

- condições de contorno para as grandezas do escoamento médio e
- condições de contorno para as grandezas turbulentas.

4.5.3.1 Condições de contorno para as grandezas do escoamento médio

Considerando a figura 4-28, as condições de contorno para as grandezas do escoamento médio são:

- (1) entrada: perfil uniforme de velocidade especificado;
- (2) saída: $\partial \bar{u} / \partial x = 0$ e $\bar{v} = 0$ (escoamento desenvolvido);
- (3) contorno sólido: $\bar{u} = 0$ e $\bar{v} = 0$;
- (4) eixo de simetria: $\partial \bar{u} / \partial r = 0$, $\bar{v} = 0$.

4.5.3.2 Condições de contorno para as grandezas turbulentas

Considerando a figura 4-28, as condições de contorno para as grandezas turbulentas são:

Entrada (1):

As condições de entrada das grandezas turbulentas (k e ε) são obtidas empiricamente. Há grande dificuldade em encontrar estes valores na literatura pois, cada caso estudado apresenta relações diferentes para estas grandezas. No caso do escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular as seguintes relações são recomendadas [POLLARD, 1989a]:

$$k=0.005*U^2 \text{ e} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon=C_{\mu} * \frac{k^{3/2}}{0.03*R} \quad (4.10)$$

onde

U é a velocidade média de entrada;

R é o raio do duto e

$$C_{\mu} = 0.09.$$

Saida (2):

Na saída as condições de contorno utilizadas são:

$$\partial k / \partial x = \partial \varepsilon / \partial x = 0.$$

Parede (3):

As condições de contorno para k e ε não são aplicadas diretamente na parede do duto pois, o modelo é desenvolvido assumindo o regime do escoamento completamente turbulento. Elas são obtidas a partir da "Lei de Parede" que corresponde a distribuição de velocidade u^+ versus y^+ .

Seja y a distância a uma superfície sólida de um determinado ponto no escoamento e U a velocidade média tangencial a esta superfície neste ponto, as variáveis y^+ e u^+ são definidas como:

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad (4.11)$$

$$u^+ = \frac{U}{u^*} \quad (4.12)$$

A velocidade de atrito, u^* , é determinada substituindo-se na expressão que relaciona y^+ com u^+ por suas respectivas definições (Eqs. 4.11 e 4.12).

As condições de contorno para as variáveis k e ε são determinadas em função de u^+ e y^+ . Deste modo, dividindo-se a região próxima à parede em três zonas, os valores de k e ε são [HINZE, 1975]:

zona 1 - sub-camada viscosa ($y^+ < 5$):

$$u^+ = y^+ \quad (4.13)$$

$$k = 0 \quad (4.14)$$

$$\varepsilon = 0 \quad (4.15)$$

zona 3 - sub-camada inercial ($y^+ > 200$):

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log E y^+ \quad (4.16)$$

$$k = \frac{(u^*)^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (4.17)$$

$$\varepsilon = \frac{(u^*)^3}{\kappa} \quad (4.18)$$

zona 2 - sub-camada tampão ($5 < y^+ < 200$):

$$u^+ = 2 \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + [1 + 4\kappa^2 (y^+)^2 [1 - \text{EXP}(-y^+/A)]^2]^{1/2}} \quad (4.19)$$

$$k = \frac{(u^+)^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (4.20)$$

$$\varepsilon = \frac{(u^+)^3}{\kappa} \quad (4.21)$$

onde,

$$\kappa = 0.4;$$

$$A = 26.0 \text{ e}$$

$$E = 5.5.$$

Eixo de simetria (4):

No eixo de simetria as condições de contorno utilizadas são:

$$\partial k / \partial r = \partial \varepsilon / \partial r = 0.$$

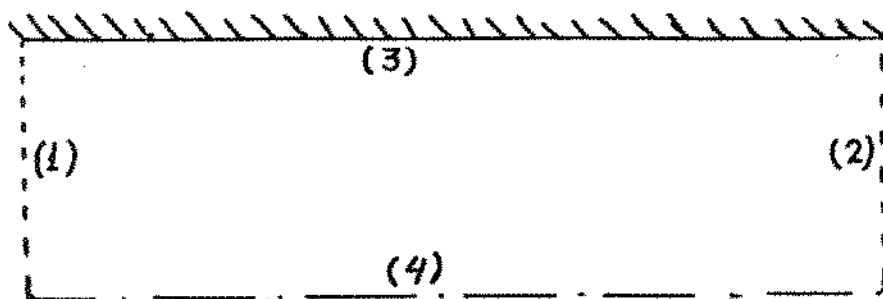


Figura 4-28 Condições de contorno

4.5.4 Comparação dos resultados

As figuras 4-29 e 4-30 mostram os resultados obtidos pelo programa comparados com os dados de Nikuradse [POLLARD, 1989a] para número de Reynolds 10.000 e 380.000 para $x/2R=80$. Foram utilizadas malhas 20X30 e 50x30 geométricas com razão 1.06 na direção axial e uniformes na direção radial para $Re = 10.0000$ e $Re = 380.000$ respectivamente. O esquema convectivo adotado foi o QUICK.

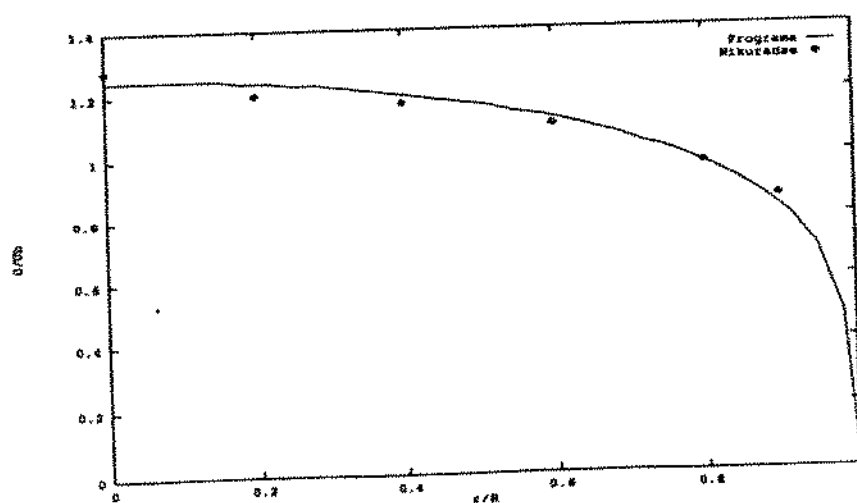


Figura 4-29 Velocidade axial X r/R com $x/2R=80$ e $Re=10.000$

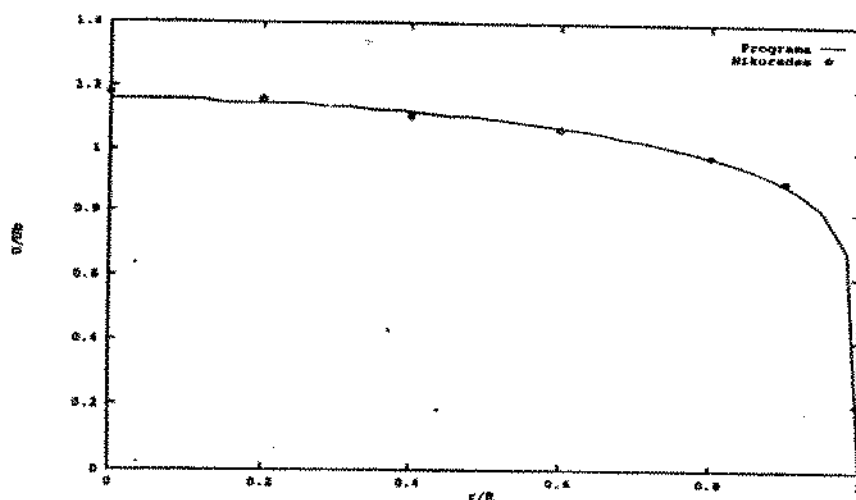


Figura 4-30 Velocidade axial X r/R com $x/2R=80$ e $Re=380.000$

O desvio máximo obtido para o perfil de velocidade média foi de 1.6% e 2.8% para número de Reynolds 380.000 e 10.000 respectivamente.

As figuras 4-31 e 4-32 mostram os perfis de velocidades axiais nas secções $x/2R=16$ e $x/2R=29$ para $Re = 380.000$ comparados com os resultados obtidos por Barbin e Jones [POLLARD,1989b]

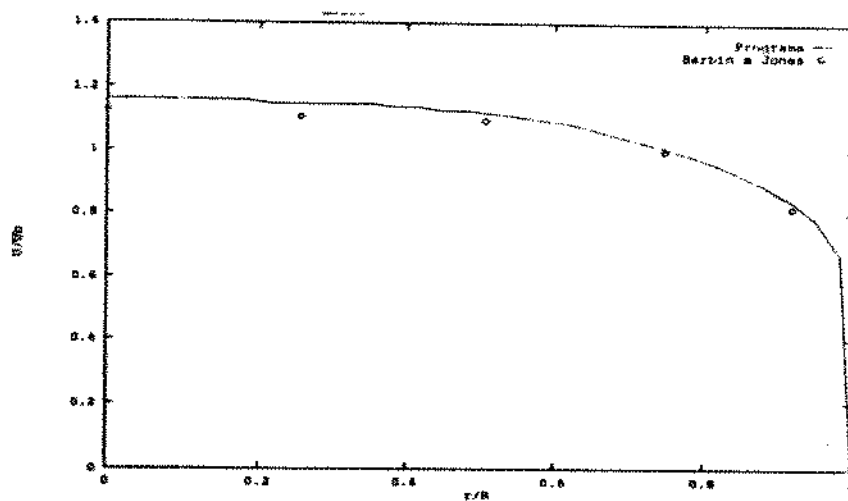


Figura 4-31 Velocidade axial X r/R com $x/2R=16$ e $Re=380.000$

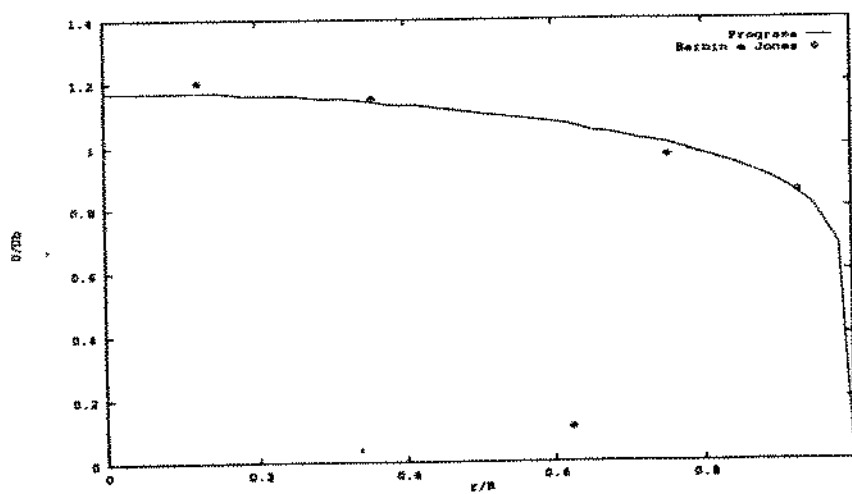


Figura 4-32 Velocidade axial X r/R com $x/2R=29$ e $Re=380.000$

O desvio máximo para o perfil de velocidade axial média em $x/2R$ igual a 29 e 16, para número de Reynolds 380.000 foi 2.6% e 3.1% respectivamente.

Os resultados mostram boa concordância com os resultados experimentais.

As figuras 4-33 e 4-34 mostram os valores da energia cinética de turbulência, k , para número de Reynolds 10.000 e 380.000 em $x/2R=80$ comparados com os resultados de Lawn [POLLARD, 1989a].

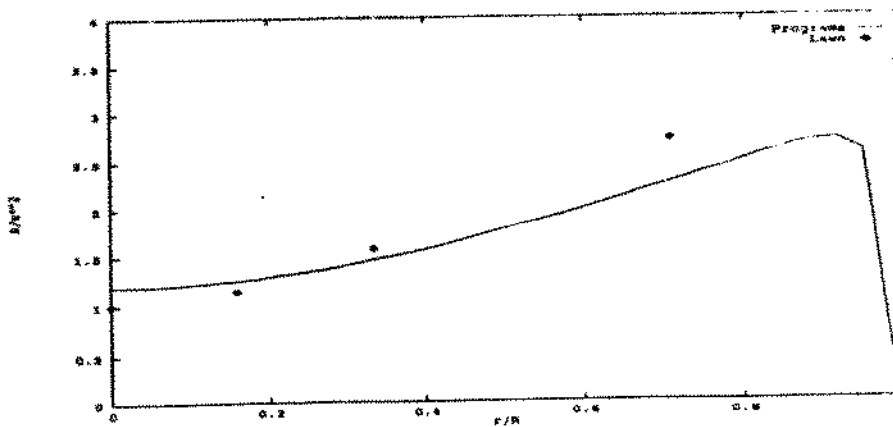


Figura 4-33 $k \times r/R$ com $x/2R=80$ e $Re=10.000$

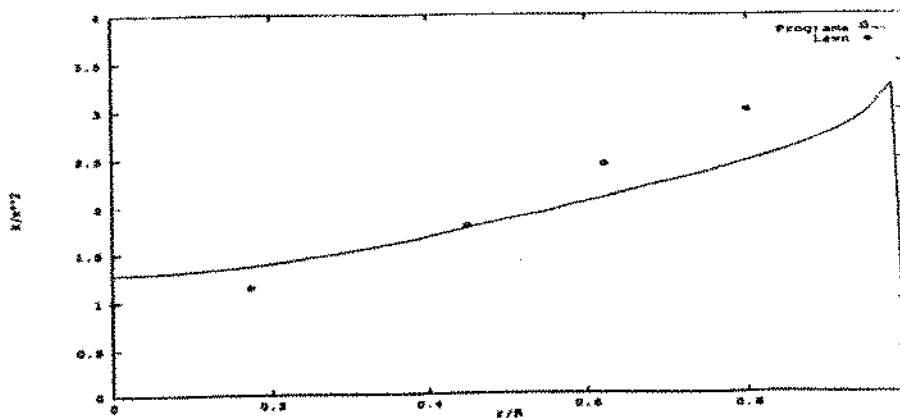


Figura 4-34 $k \times r/R$ com $x/2R=80$ e $Re=380.000$

Como pode ser visto nas figuras 4-33 e 4-34 o modelo superestima os valores da energia cinética de turbulência para as regiões próximas ao centro do duto ($r/R < 0.36$) e subestima nas regiões próximas à parede ($r/R > 0.36$).

A seguir são mostrados os resultados obtidos para tensão de cisalhamento $\overline{u'v'}$ nas secções $x/2R$ 10, 29 e 80 (figuras 4-35a 4-40) para número de Reynolds 10.000 e 380.000 comparados com os resultados de Richman e Azad [POLLARD,1989b].

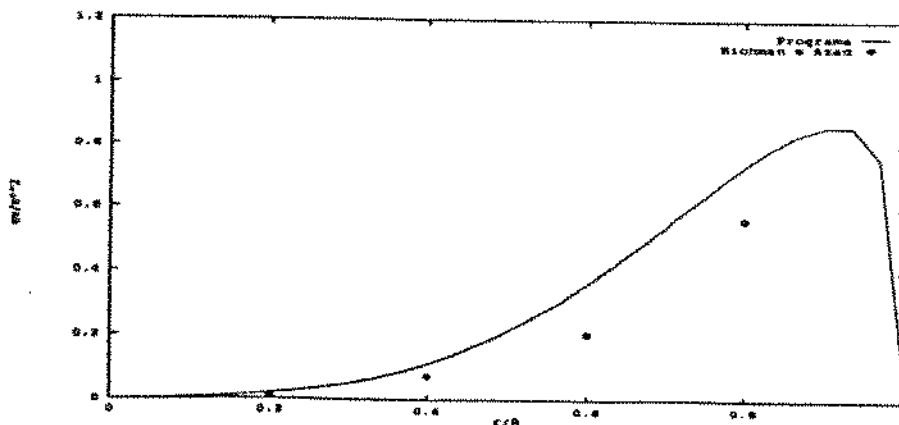


Figura 4-35 Tensor de Reynolds cisalhante X r/R
para $Re=10.000$ e $x/2R=10$

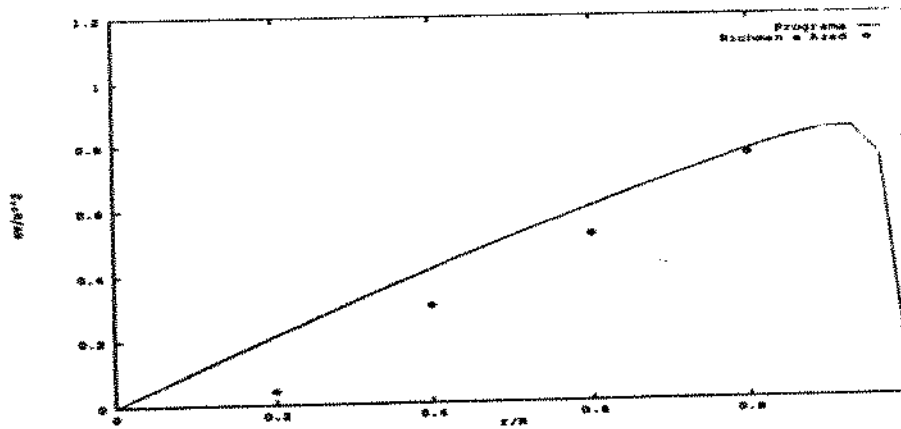


Figura 4-36 Tensor de Reynolds cisalhante X r/R
para $Re=10.000$ e $x/2R=29$

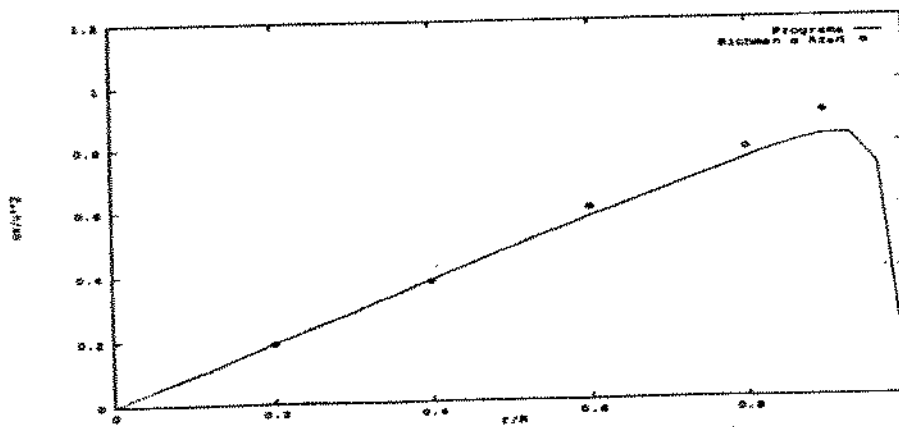


Figura 4-37 Tensor de Reynolds cisalhante X r/R
para $Re=10.000$ e $x/2R=80$

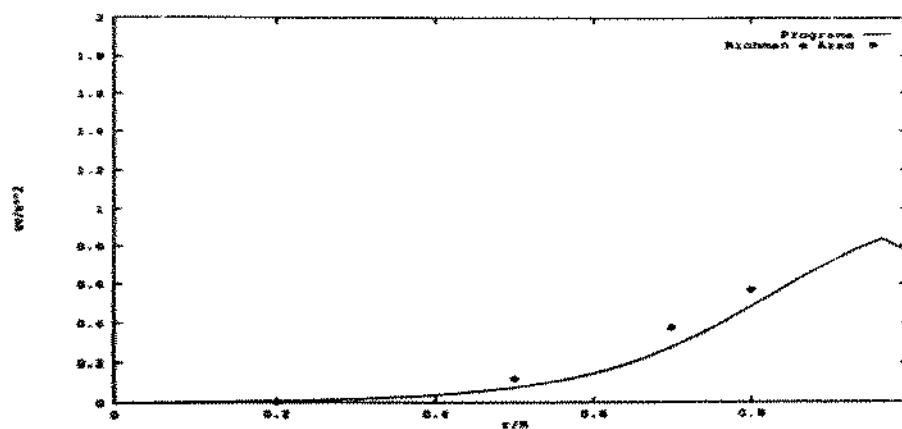


Figura 4-38 Tensor de Reynolds cisalhante X r/R
para $Re=380.000$ e $x/2R=10$

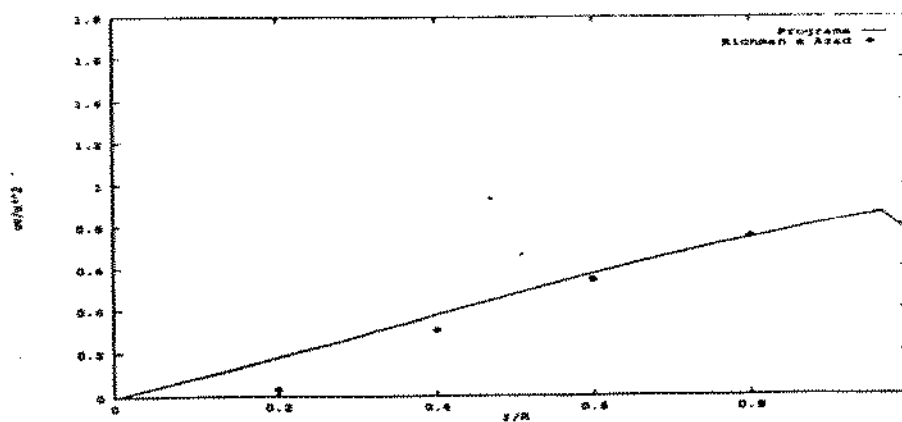


Figura 4-39 Tensor de Reynolds cisalhante X r/R
para $Re=380.000$ e $x/2R=29$

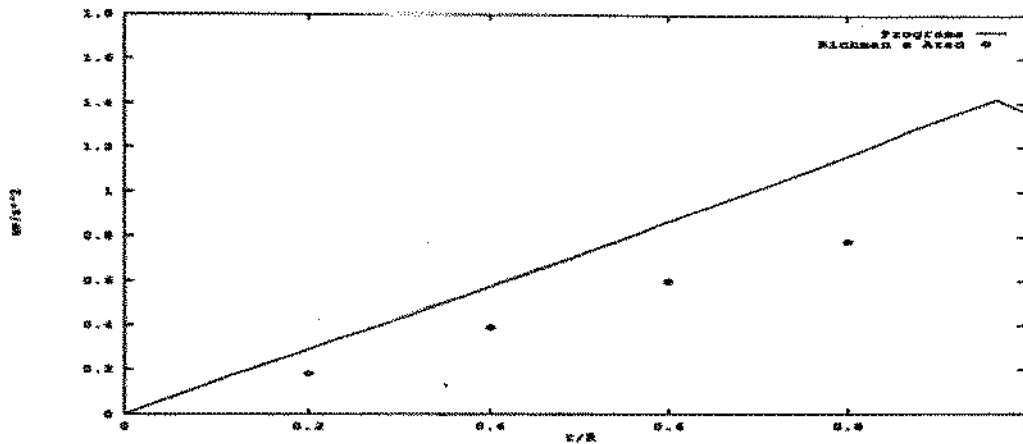


Figura 4-40 Tensor de Reynolds cisalhante $\times r/R$
para $Re=380.000$ e $x/2R=80$

Os perfis obtidos para o tensor de Reynolds cisalhante nas diferentes secções ($x/2R = 10, 29$ e 80) apresentam-se bastante coerentes com os valores experimentais. Estes valores apresentam desvios mais elevados que os observados para as grandezas médias. Este mesmo comportamento foi observado com a utilização de outros modelos para o tensor de Reynolds [POLLARD, 1989a,b].

As figuras 4-41 e 4-42 mostram o perfil da taxa de dissipação de energia cinética de turbulência em função de r/R com número de Reynolds 10.000 e 380.000 em $x/2R=80$ comparados com os resultados obtidos por Lawn [POLLARD, 1989b].

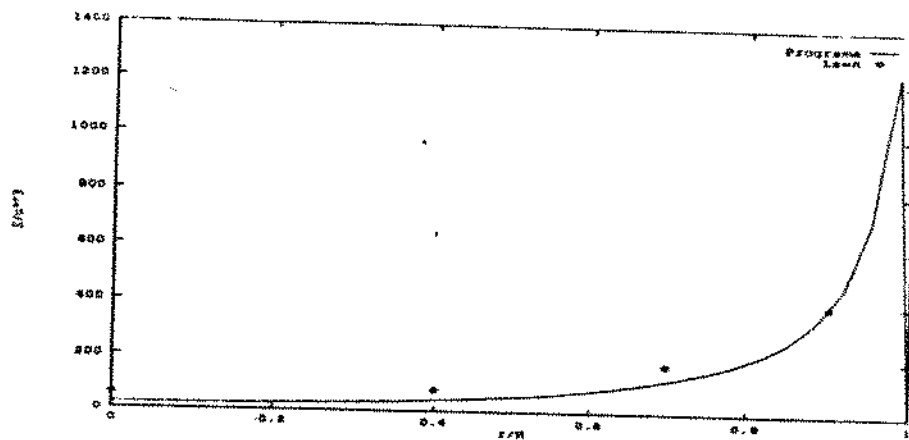


Figura 4-41 Taxa de dissipação de energia cinética de
turbulência $\times r/R$ para $Re=10.000$ e $x/2R=80$

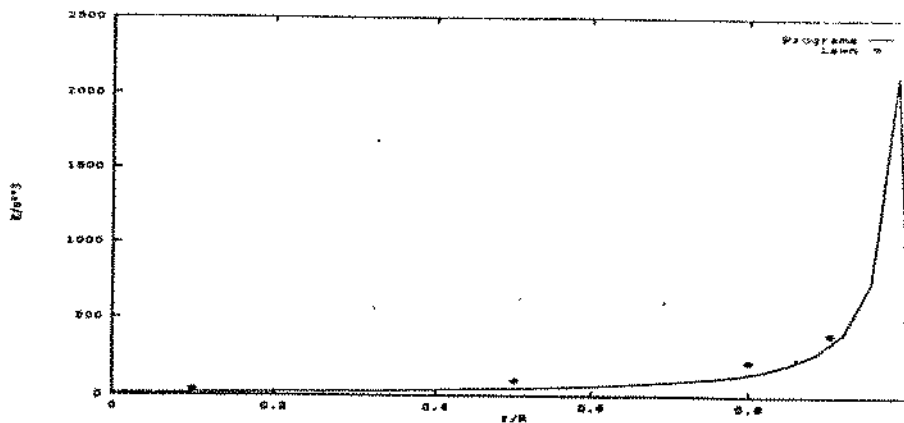


Figura 4-42 Taxa de dissipação de energia cinética de
turbulência $\times r/R$ para $Re=380.000$ e $x/2R=80$

4.5.5 Conclusões

Os resultados obtidos para escoamentos turbulentos no interior de dutos de secção circular foram próximo dos resultados experimentais tanto na região de desenvolvimento quanto na região completamente desenvolvida.

Os resultados apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais para regiões próximas ao centro do tubo. Nas regiões próximas à parede os resultados obtidos se afastam ligeiramente dos valores experimentais pois, como era de se esperar o modelo de turbulência $k-\epsilon$ usado foi desenvolvido considerando-se que o regime de escoamento é completamente turbulento, o que não ocorre nas regiões próxima de superfícies sólidas devido aos efeitos viscosos terem grande influência.

4.6 DETALHES COMPUTACIONAIS

4.6.1 Introdução

Esta seção mostra o desempenho do programa na Estação de Trabalho SUN (SPARC 1+), onde foram obtidos os resultados apresentados no presente trabalho, e as condições iniciais para as configurações tratadas.

4.6.2 Condições iniciais

Devido a formulação do método SOLA, as condições iniciais de todas as variáveis do escoamento são especificadas. O objetivo do trabalho foi a apresentação dos resultados em regime permanente. Deste modo, foi assumido um campo nulo para todas as grandezas do escoamento nos nós internos e para os nós de fronteiras os valores das variáveis já são especificados nas condições de contorno.

4.6.3 Critério de convergência

O critério de convergência adotado foi:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1}} \leq 10^{-4} \quad (4.)$$

onde

V^{n+1} é o campo de velocidade no instante $n+1$ e

V^n é o campo de velocidade no instante n .

Este critério foi utilizado em todos os casos tratados.

4.6.4 Tempo de CPU

A tabela 4.1 apresenta o tempo de CPU que foi necessário para que o critério de convergência fosse obedecido.

Tabela 4.1 Tempo de CPU

Tempo de CPU

Casos	Re	Esquema convec t i v o	malha	Dt (seg.)	No.Passo de tempo	Tempo CPU (Min)
Cavidade	10e-4	QU I C K	30x30	3 . 07e-3	4300	2 9 .40
	100	QU I C K	30x30	1 . 32e-3	3800	2 7 .23
	400	QU I C K	30x30	1 . 32e-3	3800	2 7 .23
	400	UPWIND	30x30	3 . 12e-3	3800	2 4 .95
	400	QU I C K	20x20	5 . 52e-3	4000	8 .67
Placas	500	QU I C K	20x20	5 . 34e-5	2000	7 .25
Paralelas	700	QU I C K	20x20	7 . 40e-5	2000	6 .98
	1000	QU I C K	20x20	1 . 04e-4	2000	6 .94
	700	QU I C K	10x10	2 . 88e-4	2000	1 .42
	500	UPWIND	20x20	5 . 34e-5	2000	6 .73
Tubo	500	QU I C K	20x20	5 . 31e-5	2000	7 .90
Laminar	700	QU I C K	20x20	7 . 35e-5	2000	7 .87
	1000	QU I C K	20x20	1 . 04e-4	2000	7 .88
	1000	QU I C K	10x10	3 . 40e-4	2000	1 .32
	500	UPWIND	20x20	5 . 32e-5	2000	7 .65
Tubo	10000	QU I C K	20x30	4 . 33e-6	20100	8 9 .67
Turbo- lento	380000	QU I C K	50x30	1 . 82e-5	17900	38 7 .20

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho foi desenvolvido um código de cálculo para a resolução das equações de Navier-Stokes em regime turbulento. Utilizou-se o método dos volume finitos para a discretização espacial e os esquemas, UPWIND e QUICK para os termos convectivos. Para a discretização temporal, optou-se pelo método semi-implícito SOLA.

Este código foi validado para quatro configurações clássicas:

- escoamento laminar entre placas paralelas;
- escoamento laminar em uma cavidade quadrada;
- escoamento laminar no interior de dutos de secção circular e
- escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular.

Para a primeira configuração, escoamento laminar entre placas paralelas, obteve-se excelentes resultados da comparação com o perfil de velocidades teórico na direção axial na região de escoamento completamente desenvolvido, para número de Reynolds 500, 700 e 1000. Mostram-se também os resultados coerentes para a região de entrada ($x/2b$ igual a 0, 4, 10 e 20).

Na segunda configuração, escoamento laminar em uma cavidade quadrada, os resultados obtidos do perfil de velocidade no centro da cavidade apresentam bom acordo com os resultados de Burggraf (1966) para números de Reynolds 0, 100 e 400.

Para o problema de escoamento laminar no interior de dutos de secção circular, obteve-se um excelente acordo com o perfil de velocidade teórico na direção axial para os diferentes número de Reynolds (500, 700 e 1000). Foram obtidos também resultados na região de entrada ($x/2R$ igual a 0, 5, 10, 20), estes resultados foram bastante coerentes. Deste modo, o código de cálculo foi validado também para o sistema de coordenadas cilíndricas.

Finalmente, o código de cálculo foi testado para escoamento turbulento no interior de dutos de secção circular. Foram obtidos resultados para o perfil de velocidade axial média e para as grandezas turbulentas, k , ϵ e $u'v'$ na região de entrada ($x/2R$ igual a 0, 10 e 19) e na região de escoamento completamente desenvolvido.

Para este caso utilizaram-se dois números de Reynolds, 10.000 e 380.000. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados publicados na referência ([Pollard, 1989]) mostrando-se bastantes coerentes..

Foi mostrado também, para as três primeiras configurações a influência causada pelo refinamento das malhas e da utilização dos esquemas convectivos UPWIND e QUICK. Para os casos tratados, o esquema QUICK revelou-se mais preciso.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a validação do código para regimes transitórios, já que o método SOLA permite este tipo de estudo. Outro ponto importante é a expansão do código para o tratamento de geometrias tridimensionais.

Os resultados obtidos com o programa para as configurações tratadas apresentaram boa concordância com os resultados obtidos na literatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, P. L., Análise numérica do escoamento convectivo entre placas planas verticais paralelas. Tese de Doutorado, UNICAMP, Departamento de Energia, 1992.
- BURGGRAF, O. R., Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows. J. Fluid Mech., vol. 24, pp. 113-151, 1966.
- HAND, T. ; HUMPHREY, J. A. C. and LAUNDER, B.E., A Comparison of Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in high Reynolds Number Elliptic Flows. COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, vol. 29, pp. 81-95, 1981.
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B.D. AND ROMERO, N.C., SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1975.
- JONES, W. P. and LAUNDER, B.E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Models of Turbulence. J. Heat Mass Transfers, vol.15, pp. 301-314, 1970.
- LAUNDER, B. E., Turbulence Models and Their Experimental Verification. IMPERIAL COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, Department of Mechanical Engineering, 1973.

- LEONARD, B.P., A Stable Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream interpolation. COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, vol. 19, pp. 59-98, 1979.
- MOMPEAN, G. M., Modélisation des écoulements Turbulents avec Transferts Thermiques en Convection Mixte, Tese de Doutorado, Ecole Centrale de LYON, France, 1989.
- PATANKAR, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- POLLARD, A. and MARTINUZZI, R., Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow Part I: Algebraic Stress and k - ϵ Models. AIAA JOURNAL, vol. 27, No 1, 1989a.
- POLLARD, A. and MARTINUZZI, R., Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow Part II: Reynolds Stress and k - ϵ Models. AIAA JOURNAL, vol. 27, No 12, 1989b.
- RODI, W., Turbulence Models and Their application in Hydraulics - A state of the art review. SFB 80/T/127, 1972.
- SCHLICHTING, H., Boundary Layer Theory, MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1958.

SHINGHAL, A. K. and SPALDING, D. B., Predictions of Two-dimensional Boundary Layers with the aid of the $k-\epsilon$ Model of Turbulence. COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, vol. 25, pp. 365-383, 1981.

VILLAND, M., TRIO-VF - Relatório Técnico - Note de presentation de la version octobre 86. CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE GRENOBLE, France, 1986.

APÊNDICES

APÊNDICE A

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA DE TURBULÊNCIA E DA
TAXA DE DISSIPACÃO DE ENERGIA CINÉTICA DE TURBULÊNCIA.

Hipóteses:

Fluido newtoniano
Propriedades físicas constantes
Escoamento isotérmico

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

Aplicando-se a decomposição de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u'_i) = 0 \quad (2)$$

obtendo-se o valor médio da equação (2):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Equação do momentum:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (4)$$

Aplicando-se a decomposição de Reynolds, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u'_i) + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{u}_i + u'_i) \quad (5)$$

obtendo-se o valor médio da equação (5):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (6)$$

subtraindo-se a equação (5) da equação (6):

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} + u'_i u'_j) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \quad (7)$$

trocando-se o índice j pelo índice k na equação (7):

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_k} + u'_i u'_k) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} \quad (8)$$

trocando-se o índice i pelo índice j na equação (8):

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_j u'_k} + u'_j u'_k) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2} \quad (9)$$

Somando-se a equação (8) multiplicada por $\bar{u}_i$ à equação (9) multiplicada por $\bar{u}_j$ e obtendo-se o valor médio, tem-se a equação de transporte do tensor de Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) - \overline{u'_i (u'_j u'_k)}) - \\ &\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p' u'_i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' u'_j}) + \overline{p' (\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i})} - (\overline{u'_j u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \\ &(\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (10)$$

Equação de transporte de energia Cinética de Turbulência (k):

Dividindo-se a equação (10) por 2 e fazendo-se o índice i=j, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_i}) + \frac{1}{2} \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_i}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_i}) - \\ &\overline{u'_i u'_i u'_k}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u'_i}) - (\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (11)$$

Por definição:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_i}$$

Deste modo, fazendo k=j, a equação (11) é escrita (Equação de k):

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \frac{\partial k}{\partial x_k} - (\overline{p' u'_i}) - \overline{k' u'_j}) - (\overline{u'_i u'_j}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &- \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (12)$$

Equação de transporte da taxa de dissipação de Energia Cinética de turbulência (ϵ):

Derivando-se a equação (8) em relação a x_i e multiplicando-se por $2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$ e fazendo-se i=j e obtendo-se a média, tem-se:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i}) + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i}) \bar{u}_k &+ 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_i} + \\ 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} [\frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k})] &+ 2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_k} - \overline{u'_i u'_k})) \\ \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} &= - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial p'}{\partial x_i}) \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k^2}) \end{aligned} \quad (13)$$

Por definição:

$$\epsilon = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \epsilon' = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j}$$

Deste modo, a equação (13) é escrita (Equação de $\mathcal{E}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_k} = & - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} u'_k \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_k} - \bar{u}_k \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right) - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right] - \\ & - 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_l} \right) \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} + 2\nu^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'^2_l}{\partial x_l} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

APÊNDICE B

O programa em anexo está estruturado para a solução de escoamentos no interior de uma cavidade quadrada.

Para a solução de outros tipos de escoamentos é necessário adequar a sub-rotina USER para cada caso específico, fornecendo as condições de contorno apropriadas.

O programa pode resolver problemas bidimensionais elípticos em geometrias cartesianas e cilíndricas, tanto em regime laminar quanto turbulento.

Para escoamentos com fronteiras sólidas é assumido a existência da Lei de Parede subdividida em três sub-camadas (viscosa, inercial e tampão), para obtenção das condições de contorno das grandezas turbulentas.

O programa continua em fase de desenvolvimento, podendo ser melhorado. Portanto, qualquer sugestão que possa contribuir para o aperfeiçoamento do mesmo, será bem acolhida.

PROGRAM TURBULENTO

```
C*
C*****
C*      Finalidade deste programa:
C*      Resolver as equacoes de NAVIER-STOKES
C*      para escoamento BI-DIMENSIONAL TURBU-
C*      LENTO AXISSIMETRICO em coordenadas
C*      cilindricas ou cartesianas
C*****
C*
C      CHARACTER*14 OUTFILE
C      CALCULO DO TEMPO DE CPU
C
      REAL*4 DTIME,ARRAY(2),CPU
      REAL X(125),Y(125),XU(125),YV(125),U(125,125),V(125,125),YVC(125)
      REAL FLUXUVD(125,125),FLUXVVD(125,125),TQA(125,125),TEPS(125,125)
      REAL UU(125,125),VV(125,125),UV(125,125),XNUT(125,125),US(125,125)
      REAL TAU11(125,125),TAU22(125,125),TAU12(125,125),TAU21(125,125)
      REAL XNUL,RHO,DT,T,BMASSA,R(125),RV(125),DX(125),DY(125),XVC(125)
      REAL TAUP(125,125),A(570000),L(570000),B(5000),PL(5000),P(5000)
      REAL XUTAB(200), FI(125,125),U1(125,125)
      REAL USE(125),USW(125),USN(125),USS(125)
      INTEGER L1,M1,IE,N,ICH,NITER,ITMAX,MODE,LAM,LAMI,CON
      DATA USE,USW,USN,USS/125*1.0,125*1.0,125*1.0,125*1.0/
C*
      CPU=DTIME(ARRAY)
      WRITE(*,*)'DIGITE O NOME DO ARQUIVO DE SAIDA'
      READ(5,*)OUTFILE
C*
      WRITE(*,*)'DIGITE O NUMERO MAXIMO DE PASSOS DE TEMPO'
      READ(5,*)ITMAX
C*
      WRITE(*,*)'DIGITE 1 SE FOR SO LAMINAR'
      WRITE(*,*)'DIGITE 0 (ZERO) SE FOR SO TURBULENTO'
      READ(5,*)LAM
      IF(LAM.EQ.1)THEN
        LAMI=ITMAX
      ELSE
        LAMI=1
      END IF
C*
      CALL INTXUT(XUTAB)
C*
      CALL USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$      DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,1)
C*
```

```
C*      CALL MONTAMR(L1,M1,IE,X,Y,R,XU,YV,RV,A,DX,DY,XVC,YVC)
C*      CALL DECOG(A,L,N,IE,L1-1)
C*      CALL USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$          DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,2)
C*      CON=100
C*      1  T=T+DT
C*      CALL DERIV(L1,M1,X,Y,XU,YV,U,V,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,
$          DX,DY,XVC,YVC)
C*      CALL REYNOLDS(L1,M1,U,V,TQA,XNUT,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,UU,VV,UV)
C*      CALL FLUXU(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,UU,UV,XNUL,FLUXUVD,
$          ICH,DX,DY,XVC,YVC)
C*      CALL FLUXV(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,VV,UV,XNUL,FLUXVVD,
$          ICH,DX,DY,XVC,YVC)
C*      CALL MONTAB(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,DT,N,FLUXUVD,FLUXVVD,
$          B,DX,DY,XVC,YVC)
C*      CALL SYSTINF(L,PL,B,N,IE,L1-1)
C*      CALL SYSTSUP(L,PL,P,N,IE,L1-1)
C*****ARMAZENANDO O VALOR DE U NO INSTANTE ANTERIOR
C      IF (NITER.EQ.CON)THEN
C          DO I=1,L1
C              DO J=1,M1
C                  U1(I,J)=U(I,J)
C              END DO
C          END DO
C      END IF
C*****FINALIZANDO O ARMAZENAMENTO
C*      CALL EQDMX(L1,M1,X,R,YV,U,P,DT,FLUXUVD,DX,YVC)
C*      CALL EQDMY(L1,M1,XU,Y,RV,V,P,DT,FLUXVVD,DY,XVC)
C*
C*****FAZENDO A COMPARACAO COM O INSTANTE CORRENTE
C      IF(NITER.EQ.CON)THEN
C          AUX2=1.E-10
```

```
DO I=1,L1
  DO J=1,M1
    AUX1=ABS((U(I,J)-U1(I,J))/(U(I,J)+1.0E-10))+1.0E-10
    IF(AUX1.GT.AUX2)THEN
      AUX2=AUX1
    END IF
  END DO
END DO
IF(AUX2.LE.1.0E-4)THEN
  CON=1
ELSE
  CON=CON+100
END IF
END IF
C*****TERMINADA A COMPARACAO
C*
CALL USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$      DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,3)
C*
IF(NITER.GT.LAMI)THEN
  CALL KEPS(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,XNUL,XNUT,TQA,TEPS,DT,
$      DX,DY,XVC,YVC,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,UU,VV,UV)
C*
  CALL CCTURB(L1,M1,X,Y,R,RV,U,V,XNUL,XNUT,TQA,TEPS,TAUP,DX,DY,
$      USE,USW,USN,USS,RHO,XUTAB)
C*
  CALL USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$      DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,4)
  ELSE
C***** LAMINAR *****
DO 10 I=1,L1
  DO 10 J=1,M1
    XNUT(I,J)=0.0
    TQA(I,J)=0.0
    TEPS(I,J)=0.0
10  CONTINUE
    IF(NITER.EQ.LAMI)THEN
      DO 20 J=2,M1,1
        TQA(1,J)=0.005*U(2,J)*U(2,J)
        TQA3=TQA(1,J)*TQA(1,J)*TQA(1,J)
        TEPS(1,J)=CMU*SQRT(TQA3)/(0.03*(Y(M1)-Y(1)))
        XNUTW=CMU*TQA(1,J)*TQA(1,J)/(TEPS(1,J)+1.0E-12)
        XNUT(1,J)=AMAXT(0.0,XNUTW,TEPS(1,J))
20  CONTINUE
      END IF
```

```

      END IF
C*
      CALL DDTIME(L1,M1,X,Y,U,V,XNUL,XVC,YVC,XNUT,DT,DX,DY,NITER,LAM)
C*
      CALL USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$          DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,5)
C*
      IF((NITER.LT.ITMAX).AND.(CON.NE.1)) GO TO 1
C*
      CALL BILAN(XU,YV,R,RV,U,V,L1,M1,BMASSA,XVC,YVC)
C*
      OPEN(UNIT=6,FILE=OUTFILE,STATUS='NEW')
      CPU=DDTIME(ARRAY)
      WRITE(6,*) 'CPU TIME SECONDS =',CPU
C*
      CALL PRINT(L1,M1,X,Y,U,V,P,DT,T,BMASSA,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$          USE,USW,USN,USS,RHO,XU,YV,UU,VV,UV,TAUP)
C*
      CALL SAIDA(U,V,X,Y,XU,YV,L1,M1,XNUL,T,NITER,TQA,TEPS,UV)
C*
      CALL CORRENTE(L1,M1,X,Y,XU,YV,U,FI)
      STOP
      END
C*
C*
      SUBROUTINE GRID(XL,YL,NVX,NVY,RX,RY,X,R,XU,Y,YV,RV,L1,M1,MODE,
$          DX,DY,XVC,YVC)
C*
      REAL XL,YL,RX,RY,X(*),Y(*),XU(*),YV(*),R(*),RV(*)
      REAL DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
      INTEGER L1,M1,NVX,NVY,MODE
C*
      L1=NVX+2
      M1=NVY+2
C*
C*
      IF(RX.EQ.1.0)THEN
          DO 1 I=2,L1,1
              XU(I)=(I-2)*(XL/NVX)
          1 CONTINUE
      ELSE
C*
          SMNTX=XL
          MNVX=NVX
          PTX=(SMNTX*(RX-1.0))/((RX**MNVX)-1.0)

```

```

      XU(2)=0.0
      XU(L1)=XL
      DO 2 I=3,MNVX+2,1
        K=L1-(I-2)
        XU(I)=XU(I-1)+PTX*(RX**(I-3))
2      CONTINUE
      END IF
      IF(RY.EQ.1.0)THEN
        DO 3 J=2,M1,1
          YV(J)=(J-2)*(YL/NVY)
3        CONTINUE
        ELSE
          SMNTY=YL
          MNVY=NVY
          PTY=(SMNTY*(RY-1.0))/((RY**MNVY)-1.0)
          YV(2)=0.0
          YV(M1)=YL
          DO 4 I=3,MNVY+2,1
            L=M1-(I-2)
            YV(L)=YV(L+1)-PTY*(RY**(I-3))
4          CONTINUE
        END IF
        X(1)=XU(2)
        Y(1)=YV(2)
        X(L1)=XU(L1)
        Y(M1)=YV(M1)
        DO 5 I=2,L1-1,1
          X(I)=(XU(I+1)+XU(I))*0.5
5        CONTINUE
        DO 6 J=2,M1-1,1
          Y(J)=(YV(J+1)+YV(J))*0.5
6        CONTINUE
        IF(MODE.EQ.2)THEN
          DO 7 J=1,M1,1
            R(J)=Y(J)
            RV(J)=YV(J)
7          CONTINUE
        ELSE
          DO 8 J=1,M1,1
            R(J)=1.0
            RV(J)=1.0
8          CONTINUE
        END IF
        DO 9 I=2,L1-1,1
```



```

      DX(I)=X(I)-X(I-1)
      XVC(I)=XU(I+1)-XU(I)
9    CONTINUE
C*
      DO 10 J=2,M1-1,1
        DY(J)=Y(J)-Y(J-1)
        YVC(J)=YV(J+1)-YV(J)
10   CONTINUE
C*
      DX(L1)=X(L1)-X(L1-1)
      DY(M1)=Y(M1)-Y(M1-1)
C*
C*****          FIM DE ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE DERIV(L1,M1,X,Y,XU,YV,U,V,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,
$                                DX,DY,XVC,YVC)
      REAL X(*),Y(*),XU(*),YV(*),U(125,*),V(125,*),DX(*),DY(*),XVC(*)
      REAL TAU11(125,*),TAU22(125,*),TAU12(125,*),TAU21(125,*),YVC(*)
      INTEGER L1,M1
C*
C*****  PARAMETROS A SEREM USADOS NESTA ROTINA
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
C*
C*****  DERIVADAS CENTRADAS NOS NO'S PRINCIPAIS
C*
      DO 10 I= 2,L2,1
        DO 10 J= 2,M2,1
          TAU11(I,J)=(U(I+1,J)-U(I,J))/XVC(I)
          TAU22(I,J)=(V(I,J+1)-V(I,J))/YVC(J)
10     CONTINUE
C*
C*****  DERIVADAS EM RELACAO A X "DV/DX"  NAO CENTRADAS
C*
      DO 20 I=2,L1,1
        DO 20 J=2,M1,1
          TAU12(I,J)=(V(I,J)-V(I-1,J))/DX(I)
20    CONTINUE
C*
C*
```

```

DO 30 I=2,L1,1
DO 30 J=2,M1,1
    TAU21(I,J)=(U(I,J)-U(I,J-1))/DY(J)
30 CONTINUE
C*
C*****      FIM DA ROTINA
C*
    RETURN
    END
C*
C*
    SUBROUTINE REYNOLDS(L1,M1,U,V,TQA,XNUT,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,
$                      UU,VV,UV)
    REAL TQA(125,*),XNUT(125,*),U(125,*),V(125,*),UU(125,*),VV(125,*),
    REAL UV(125,*),TAU11(125,*),TAU22(125,*),TAU12(125,*),TAU21(125,*)
    INTEGER L1,M1
C*
C*
    DO 1 I=1,L1,1
    DO 1 J=1,M1,1
        UU(I,J)=0.0
        VV(I,J)=0.0
        UV(I,J)=0.0
1 CONTINUE
C*
C*
    L2=L1-1
    M2=M1-1
C*
C*
    DO 10 I=2,L2,1
    DO 10 J=2,M2,1
        XUU=((1.0)*TQA(I,J))-(2.0*XNUT(I,J)*TAU11(I,J))
        XVV=((1.0)*TQA(I,J))-(2.0*XNUT(I,J)*TAU22(I,J))
C*
C*
        UU(I,J)=AMAXT(0.0,XUU,XUU)
        VV(I,J)=AMAXT(0.0,XVV,XVV)
10 CONTINUE
C*
C*
    DO 20 I=3,L2,1
    DO 20 J=3,M2,1
        UV(I,J)= -0.25*(XNUT(I,J)+XNUT(I-1,J)+
$                XNUT(I-1,J-1)+XNUT(I,J-1))*
$                (TAU12(I,J)+TAU21(I,J))

```

```

20  CONTINUE
C*
C*
DO 30 I=2,L1,1
C*
C*
C*
FRONTEIRA SUL
C*
UV(I,2)= -0.25*(XNUT(I,2)+XNUT(I-1,2)+
$
XNUT(I-1,1)+XNUT(I,1))*
$
(TAU12(I,2)+TAU21(I,2))
C*
c
UV(I,M1)= -0.25*(XNUT(I,M1)+XNUT(I-1,M1)+
$
XNUT(I-1,M2)+XNUT(I,M2))*
$
(TAU12(I,M1)+TAU21(I,M1))/2.5
30  CONTINUE
C*
C*
DO 40 J=3,M2,1
C*
C*
UV(2,J)= -0.25*(XNUT(2,J)+XNUT(1,J)+
$
XNUT(1,J-1)+XNUT(2,J-1))*
$
(TAU12(2,J)+TAU21(2,J))
C*
C*
UV(L1,J)= -0.25*(XNUT(L1,J)+XNUT(L2,J)+
$
XNUT(L2,J-1)+XNUT(L1,J-1))*
$
(TAU12(L1,J)+TAU21(L1,J))
40  CONTINUE
C*
C***** FIM DE ROTINA
C*
RETURN
END
C*
C*
SUBROUTINE FLUXU(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,UU,UV,XNUL,FLUXUVD,
$
ICH,DX,DY,XVC,YVC)
C*
C*
REAL X(*),Y(*),XU(*),YV(*),U(125,*),V(125,*),XNUL,R(*),RV(*)
REAL FLUXUVD(125,*),FLWEUS(125,125),FLSNUS(125,125)
REAL UU(125,*),UV(125,*),DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
INTEGER L1,M1,ICH
C*

```

```

C*      L2=L1-1
C*      M2=M1-1
C*
C*      DO 10 I=1,L1,1
C*          DO 10 J=1,M1,1
C*              FLWEUS(I,J)=0.0
C*              FLSNUS(I,J)=0.0
C*              FLUXUVD(I,J)=0.0
10      CONTINUE
C*
C*      DO 20 I=2,L2,1
C*          DO 20 J=2,M2,1
C*              UM=(U(I+1,J)+U(I,J))*0.5
C*              IF(ICH.EQ.1)THEN
C*                  CONV=UPWIND(U(I+1,J),U(I,J),UM)*UM
C*              ELSE
C*                  IF((I.GE.3).AND.(I.LE.(L2-2)))THEN
C*                      CONV=QUICK(U(I-1,J),U(I,J),U(I+1,J),U(I+2,J),UM)*UM
C*                  ELSE
C*                      CONV=UPWIND(U(I+1,J),U(I,J),UM)*UM
C*                  END IF
C*              END IF
C*              DIFF=XNUL*(U(I+1,J)-U(I,J))/XVC(I)
C*              FLWEUS(I,J)=CONV-DIFF+UU(I,J)
20      CONTINUE
C*
C*      DO 30 J=2,M2,1
C*          UM=U(2,J)
C*          CONV=UPWIND(U(3,J),U(2,J),UM)*UM
C*          DIFF=XNUL*(U(3,J)-U(2,J))/(2.0*DX(2))
C*          FLWEUS(1,J)=CONV-DIFF+UU(1,J)
C*
C*      UM=U(L1,J)
C*      CONV=UPWIND(U(L1,J),U(L2,J),UM)*UM
C*      DIFF=XNUL*(U(L1,J)-U(L2,J))/(2.0*DX(L1))
C*      FLWEUS(L1,J)=CONV-DIFF+UU(L1,J)
C*
C*      30 CONTINUE
C*
C*      DO 40 I=2,L1,1
C*          DO 40 J=2,M1,1

```

```

      VM=(V(I,J)+V(I-1,J))*0.5
      IF(ICH.EQ.1)THEN
        CONV=UPWIND(U(I,J),U(I,J-1),VM)*VM
      ELSE
        IF((J.GE.4).AND.(J.LE.(M1-1)))THEN
          CONV=QUICK(U(I,J-2),U(I,J-1),U(I,J),U(I,J+1),VM)*VM
        ELSE
          CONV=UPWIND(U(I,J),U(I,J-1),VM)*VM
        END IF
      END IF
      DIFF=XNUL*(U(I,J)-U(I,J-1))/DY(J)
      FLSNUS(I,J)=CONV-DIFF+UV(I,J)
40  CONTINUE
C*
C*
      DO 50 I=3,L2,1
      DO 50 J=2,M2,1
        FLUXUVD(I,J)=R(J)*YVC(J)*FLWEUS(I,J)+RV(J+1)*DX(I)*FLSNUS(I,J+1)
      $      -(RV(J)*DX(I)*FLSNUS(I,J)+R(J)*YVC(J)*FLWEUS(I-1,J))
50  CONTINUE
C*
C*****          FIM DA ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE FLUXV(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,VV,UV,XNUL,FLUXVVD,
      $      ICH,DX,DY,XVC,YVC)
      REAL X(*),Y(*),XU(*),YV(*),U(125,*),V(125,*),XNUL,R(*),RV(*)
      REAL FLUXVVD(125,*),FLWEVS(125,125),FLSNVS(125,125)
      REAL VV(125,*),UV(125,*),DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
      INTEGER L1,M1,ICH
C*
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
C*
C*
      DO 10 I=1,L1,1
        DO 10 J=1,M1,1
          FLWEVS(I,J)=0.0
          FLSNVS(I,J)=0.0
          FLUXVVD(I,J)=0.0
10  CONTINUE
C*

```

C*

```
DO 20 I=2,L1,1
  DO 20 J=2,M1,1
    UM=(U(I,J)+U(I,J-1))*0.5
    IF(ICH.EQ.1)THEN
      CONV=UPWIND(V(I,J),V(I-1,J),UM)*UM
    ELSE
      IF((I.GE.4).AND.(I.LE.(L1-1)))THEN
        CONV=QUICK(V(I-2,J),V(I-1,J),V(I,J),V(I+1,J),UM)*UM
      ELSE
        CONV=UPWIND(V(I,J),V(I-1,J),UM)*UM
      END IF
    END IF
    DIFF=XNUL*(V(I,J)-V(I-1,J))/DX(I)
    FLWEVS(I,J)=CONV-DIFF+UV(I,J)
20 CONTINUE
```

C*

C*

```
DO 30 I=2,L2,1
  DO 30 J=2,M2,1
    VM=(V(I,J+1)+V(I,J))*0.5
    IF(ICH.EQ.1)THEN
      CONV=UPWIND(V(I,J+1),V(I,J),VM)*VM
    ELSE
      IF((J.GE.3).AND.(J.LE.(M2-2)))THEN
        CONV=QUICK(V(I,J-1),V(I,J),V(I,J+1),V(I,J+2),VM)*VM
      ELSE
        CONV=UPWIND(V(I,J+1),V(I,J),VM)*VM
      END IF
    END IF
    DIFF=XNUL*(V(I,J+1)-V(I,J))/YVC(J)
    FLSNVS(I,J)=CONV-DIFF+VV(I,J)
30 CONTINUE
```

C*

C*

```
DO 40 I=2,L2,1
  VM=V(I,2)
  CONV=UPWIND(V(I,3),V(I,2),VM)*VM
  DIFF=XNUL*(V(I,3)-V(I,2))/(2.0*DY(2))
  FLSNVS(I,1)=CONV-DIFF+VV(I,1)
```

C*

C*

```
VM=V(I,M1)
CONV=UPWIND(V(I,M1),V(I,M2),VM)*VM
DIFF=XNUL*(V(I,M1)-V(I,M2))/(2.0*DY(M1))
```

```

        FLSNVS(I,M1)=CONV-DIFF+VV(I,M1)
C*
40 CONTINUE
C*
C*
        DO 50 I=2,L2,1
        DO 50 J=3,M2,1
        FLUXVVD(I,J)=RV(J)*DY(J)*FLWEVS(I+1,J)+R(J)*XVC(I)*FLSNVS(I,J)
$      -(R(J-1)*XVC(I)*FLSNVS(I,J-1)+RV(J)*DY(J)*FLWEVS(I,J))
C*
50 CONTINUE
C*
C*****          FIM DA  ROTINA
C*
        RETURN
        END
C*
C*
        SUBROUTINE KEPS(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,XNUL,XNUT,TQA,TEPS,DT,
$      DX,DY,XVC,YVC,TAU11,TAU22,TAU12,TAU21,UU,VV,UV)
C*
        REAL X(*),Y(*),XU(*),YV(*),TAU11(125,*),TAU22(125,*),
        REAL DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*),U(125,*),V(125,*),
        REAL TQA(125,*),TEPS(125,*),XNUT(125,*),TAU12(125,*),TAU21(125,*),
        REAL FLWEK(125,125),FLSNK(125,125),FLWEEP(125,125),FLSNEP(125,125),
        REAL UU(125,*),VV(125,*),UV(125,*),DT,XNUL,TAUP(125,125),
$      R(*),RV(*)
        INTEGER L1,M1
C*
C*
        L2=L1-1
        M2=M1-1
        DATA PRK,PRE,CE1,CE2,CMU/1.0,1.3,1.44,1.92,0.09/
C*
C*****          ZERANDO AS VARIÁVEIS DE TRABALHO
C*
        DO 10 I=1,L1,1
        DO 10 J=1,M1,1
            FLWEK(I,J)=0.0
            FLSNK(I,J)=0.0
            FLWEEP(I,J)=0.0
            FLSNEP(I,J)=0.0
10 CONTINUE
C*
C*
        DO 20 I=2,L1,1

```

```

DO 20 J=2,M2,1
  CONVK=U(I,J)*UPWIND(TQA(I,J),TQA(I-1,J),U(I,J))
  CONVEP=U(I,J)*UPWIND(TEPS(I,J),TEPS(I-1,J),U(I,J))
  XNUTM=(XNUT(I,J)+XNUT(I-1,J))*0.5
  DIFFK=(XNUTM/PRK)*(TQA(I,J)-TQA(I-1,J))/DX(I)
  DIFFEP=(XNUTM/PRE)*(TEPS(I,J)-TEPS(I-1,J))/DX(I)
  FLWEK(I,J)=CONVK-DIFFK
  FLWEEP(I,J)=CONVEP-DIFFEP
20 CONTINUE
C*
C*
DO 30 I=2,L2,1
DO 30 J=2,M1,1
  CONVK=V(I,J)*UPWIND(TQA(I,J),TQA(I,J-1),V(I,J))
  CONVEP=V(I,J)*UPWIND(TEPS(I,J),TEPS(I,J-1),V(I,J))
  XNUTM=(XNUT(I,J)+XNUT(I,J-1))*0.5
  DIFFK=(XNUTM/PRK)*(TQA(I,J)-TQA(I,J-1))/DY(J)
  DIFFEP=(XNUTM/PRE)*(TEPS(I,J)-TEPS(I,J-1))/DY(J)
  FLSNK(I,J)=CONVK-DIFFK
  FLSNEP(I,J)=CONVEP-DIFFEP
30 CONTINUE
C*
C*
DO 40 I=2,L2,1
DO 40 J=2,M2,1
C*
C*
  PROD1= -(UU(I,J)*TAU11(I,J)+VV(I,J)*TAU22(I,J))
  PRODUV= -0.25*(UV(I,J)*(TAU12(I,J)+TAU21(I,J))+
$      UV(I,J+1)*(TAU12(I,J+1)+TAU21(I,J+1))+
$      UV(I+1,J+1)*(TAU12(I+1,J+1)+TAU21(I+1,J+1))+
$      UV(I+1,J)*(TAU12(I+1,J)+TAU21(I+1,J)))
  PROD=PROD1 +PRODUV
  STQA=PROD-TEPS(I,J)
  STEPS=(CE1*PROD-CE2*TEPS(I,J))*TEPS(I,J)
  STEPS=AMAXT(0.0,STEPS/(TQA(I,J)+1.0E-12),TQA(I,J))
C*
C*
  FLK=R(J)*YVC(J)*FLWEK(I+1,J)+RV(J+1)*XVC(I)*FLSNK(I,J+1)
$      -(R(J)*YVC(J)*FLWEEK(I,J)+RV(J)*XVC(I)*FLSNK(I,J))
C*
  TQA(I,J)=TQA(I,J)+DT*(STQA-(FLK/(R(J)*XVC(I)*YVC(J))))
C*
C*
  TQA(I,J)= AMAXT(0.0,TQA(I,J),TQA(I,J))
C*

```



```

C*      FLEPS=R(J)*YVC(J)*FLWEEP(I+1,J)+RV(J+1)*XVC(I)*FLSNEP(I,J+1)
C*      $      -(R(J)*YVC(J)*FLWEEP(I,J)+RV(J)*XVC(I)*FLSNEP(I,J))
C*      TEPS(I,J)=TEPS(I,J)+DT*(STEPS-(FLEPS/(R(J)*XVC(I)*YVC(J))))
C*      TEPS(I,J)=AMAXT(0.0,TEPS(I,J),TEPS(I,J))
C*
C*      XNUT(I,J)=CMU*TQA(I,J)*TQA(I,J)/(TEPS(I,J)+1.0E-12)
C*      XNUT(I,J)=AMAXT(0.0,XNUT(I,J),TEPS(I,J))
C*
C* 40  CONTINUE
C*
C*****  FIM DA ROTINA
C*
C*      RETURN
C*      END
C*
C*
C*      SUBROUTINE WALL(D,UD,XNUL,TK,TE,TAUW,XUTAB,USTAR,RHO)
C*
C*      REAL D,UD,XNUL,TK,TE,TAUW,XUTAB(200),USTAR,RHO
C*
C*      DATA CMU,XK,E,JMIN,JMAX,APLUS/0.09,0.40,9.00,5,200,26.0/
C*
C*      XXUU=UD*D/XNUL
C*      IF(XXUU.GE.XUTAB(200))THEN
C*        USTAR=ABS(UD)
C*        IF(USTAR.EQ.0.0) GO TO 10
C*
C*      ITER=0
C* 1  CONTINUE
C*    IF(ITER.GE.30) GO TO 900
C*    USTARC=ABS(UD)*XK/(ALOG(E*USTAR*D/XNUL))
C*    DIFA=ABS(USTAR-USTARC)/ABS(USTAR)
C*    IF(DIFA.LT.5.0E-03) GO TO 10
C*    IF(USTAR.LT.1.0E-04) GO TO 10
C*    USTAR=(USTAR+USTARC)*0.5
C*    IF(USTAR.LT.0.0)GO TO 800
C*    ITER=ITER+1
C*    GO TO 1
C* 10  CONTINUE
C*

```

```
      TK=USTAR*USTAR/SQRT(CMU)
      TE=USTAR*USTAR*USTAR/(XK*D)
      TAUW=USTAR*USTAR/XNUL
C*** FALTA DIVIDIR TAUW POR RHO PELA DEFINICAO
      TK=AMAXT(0.0,TK,TK)
      TE=AMAXT(0.0,TE,TE)
      GO TO 20
C*
C*
800  WRITE(6,*)'** ROTINA WALL  ARGUMENTO < (MENOR) QUE  ZERO **'
900  WRITE(6,*)'ROTINA WALL NAO CONVERGE PARA* ',ITER,' *ITERACOES'
      STOP
      ELSE
      J1=JMIN
      J2=JMAX
30    J3=INT((J1+J2)/2)
      AUX=XXUU-XUTAB(J3)
      IF(AUX.GE.0.0)THEN
        IF((J2-J3).EQ.1)THEN
          J2=J2
          J1=J3
          GO TO 40
        ELSE
          J1=J3
          J2=J2
          GO TO 30
        END IF
      ELSE
        IF((J3-J1).EQ.1)THEN
          J2=J3
          J1=J1
          GO TO 40
        ELSE
          J2=J3
          J1=J1
          GO TO 30
        END IF
      END IF
40    CONTINUE
      XP=FLOAT(J1)+FLOAT(J2-J1)*(XXUU-XUTAB(J1))/(XUTAB(J2)-XUTAB(J1))
      USTAR=XP*XNUL/D
C** CALCULO DE TK E TE
      XLM=XK*XP*(1.0-EXP(-XP/APLUS))
      DUDX2=2.0/(1.0+SQRT(1.0+4.0*XLM*XLM))
      UST2=USTAR*USTAR
      TKEPAR=1.0/SQRT(CMU)
```

```
      TK=TKEPAR*UST2*(XLM*DUDX2)**2
      TE=TK*UST2*DUDX2/XNUL/TKEPAR
      TALW=UST2/XNUL
      TAUW=USTAR*USTAR*RHO
      END IF
20    CONTINUE
C*
C*****      FIM DE ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
C*
C*
      INTEGER FUNCTION NELE(N,NB)
C*
C*
      SOMA=0.0
      DO 1 K=1,NB
      SOMA=SOMA+(NB-K)
1    CONTINUE
      NELE=N*NB-SOMA
      RETURN
      END
C*
C*
      REAL FUNCTION UPWIND(A,B,C)
C*
      REAL A,B,C
      IF(C.GE.0.0)THEN
        UPWIND=B
      ELSE
        UPWIND=A
      END IF
      RETURN
      END
C*
      REAL FUNCTION AMAXT(X,Y,Z)
C*
      REAL X,Y,Z
      IF(Z.LT.1.0E-12)THEN
        AMAXT=X
      ELSE
        AMAXT=Y
      END IF
      RETURN
```

```

      END
C*
C*
SUBROUTINE MONTAMR(L1,M1,IE,X,Y,R,XU,YV,RV,A,DX,DY,XVC,YVC)
REAL X(*),Y(*),R(*),XU(*),YV(*),RV(*),A(IE)
REAL DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
INTEGER L1,M1,IE
C*
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
      L3=L1-2
      M3=M1-2
C*
      DO 1 I=1,IE,1
        A(I)=0.0
1    CONTINUE
C*
      DO 10 J=2,M3,1
      DO 10 I=2,L3,1
C*
        M=(I-1)+(J-2)*(L2-1)
        NE=M+1
        NN=M+(L2-1)
        MM=IPOS(M,M,L2)
        MNE=IPOS(M,NE,L2)
        MNN=IPOS(M,NN,L2)
        AE=R(J)*YVC(J)/DX(I+1)
        AN=RV(J+1)*XVC(I)/DY(J+1)
        IF(J.EQ.2)THEN
          IF(I.EQ.2)THEN
            AW=0.0
            AS=0.0
          ELSE
            AW=R(J)*YVC(J)/DX(I)
            AS=0.0
          END IF
        ELSE
          IF(I.EQ.2)THEN
            AW=0.0
            AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
          ELSE
            AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
            AW=R(J)*YVC(J)/DX(I)
          END IF
        END IF
      END IF
    END IF
  
```

```

      A(MM)=AE+AW+AN+AS
      A(MNE)=-AE
      A(MNN)=-AN
10    CONTINUE
C*
      J=M2
      AN=0.0
      DO 20 I=2,L3,1
        M=(I-1)+(J-2)*(L2-1)
        NE=M+1
        MM=IPOS(M,M,L2)
        MNE=IPOS(M,NE,L2)
        AE=R(J)*YVC(J)/DX(I+1)
        IF(I.EQ.2)THEN
          AW=0.0
          AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
        ELSE
          AW=R(J)*YVC(J)/DX(I)
          AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
        END IF
        A(MM)=AE+AW+AN+AS
        A(MNE)=-AE
20    CONTINUE
C*
      I=L2
      AE=0.0
      DO 30 J=2,M2,1
        M=(I-1)+(J-2)*(L2-1)
        NN=M+(L2-1)
        MM=IPOS(M,M,L2)
        AW=R(J)*YVC(J)/DX(I)
        IF(J.NE.M2)THEN
          MNN=IPOS(M,NN,L2)
          IF(J.EQ.2)THEN
            AN=RV(J+1)*XVC(I)/DY(J+1)
            AS=0.0
            A(MNN)=-AN
          ELSE
            AN=RV(J+1)*XVC(I)/DY(J+1)
            AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
            A(MNN)=-AN
          END IF
        ELSE
          AN=0.0
          AS=RV(J)*XVC(I)/DY(J)
        END IF
      END DO
```

```

      A(MM)=AE+AW+AN+AS
30  CONTINUE
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE MONTAB(L1,M1,X,Y,R,XU,YV,RV,U,V,DT,N,FLUXUVD,FLUXVVD,
$      B,DX,DY,XVC,YVC)
C*
      REAL X(*),Y(*),XU(*),YV(*),U(125,*),V(125,*),B(*),DT,DX(*),DY(*)
      REAL FLUXUVD(125,*),FLUXVVD(125,*),R(*),RV(*),XVC(*),YVC(*)
      INTEGER L1,M1,N
C*
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
C*
C*
      DO 10 J=2,M2,1
      DO 10 I=2,L2,1
C*
      VAX=RV(J)*V(I,J)-RV(J+1)*V(I,J+1)
      B1=(YVC(J)/DT)*(R(J)*U(I,J)-R(J)*U(I+1,J))+(XVC(I)/DT)*VAX
      B2=(FLUXUVD(I+1,J)/DX(I+1))-(FLUXUVD(I,J)/DX(I))
      B3=(FLUXVVD(I,J+1)/DY(J+1))-(FLUXVVD(I,J)/DY(J))
C*
      M= (I-1)+(J-2)*(L2-1)
      B(M)=B1+B2+B3
10  CONTINUE
C*
C*****      FIM DA ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE EQDMX(L1,M1,X,R,YV,U,P,DT,FLUXUVD,DX,YVC)
C*
C*
      REAL X(*),R(*),YV(*),U(125,*),DX(*),YVC(*),DT
      REAL P(*),PP(125,125),FLUXUVD(125,*)
      INTEGER L1,M1
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
```

```

C*      DO 8 J=2,M2,1
        DO 8 I=2,L2,1
            M= (I-1)+(J-2)*(L2-1)
            PP(I,J)=P(M)
8      CONTINUE
C*
        DO 10 I=3,L2,1
        DO 10 J=2,M2,1
C*
        U(I,J)=U(I,J)-DT*(FLUXUVD(I,J)/(R(J)*YVC(J)*DX(I))
$              +(PP(I,J)-PP(I-1,J))/DX(I))
10     CONTINUE
C*
C*****      FIM DE ROTINA
C*
        RETURN
        END
C*
C*
SUBROUTINE EQDMY(L1,M1,XU,Y,RV,V,P,DT,FLUXVVD,DY,XVC)
C*
C*
        REAL XU(*),Y(*),RV(*),V(125,*),DY(*),XVC(*),DT
        REAL P(*),PP(125,125),FLUXVVD(125,*)
        INTEGER L1,M1
C*
        L2=L1-1
        M2=M1-1
C*
        DO 8 J=2,M2,1
            DO 8 I=2,L2,1
                M= (I-1)+(J-2)*(L2-1)
                PP(I,J)=P(M)
8      CONTINUE
C*
        DO 10 I=2,L2,1
        DO 10 J=3,M2,1
C*
        V(I,J)=V(I,J)-DT*(FLUXVVD(I,J)/(RV(J)*XVC(I)*DY(J))
$              +(PP(I,J)-PP(I,J-1))/DY(J))
10     CONTINUE
C*
C*****      FIM DE ROTINA
C*
        RETURN

```

```

END
C*
C*
SUBROUTINE DECOG(A,L,N,NE,NB)
C*
C
REAL A(NE),L(NE),SOMA
INTEGER I,J,M,MI,I1,I2,I3,JI,ICONT,JFIM,IPOS
C
IF(A(1).LE.0.0) GO TO 100
C
C
L(1)=SQRT(A(1))
C
I=1
DO 10 J=2,NB
    IJ=IPOS(I,J,NB)
    L(IJ)=A(IJ)/L(1)
10 CONTINUE
C
DO 20 I=2,N
    SOMA=0.0
    I2=1
    I1=I-1
    IF(I.GT.NB)I2=I+1-NB
    DO 30 M=I2,I1
        MI=IPOS(M,I,NB)
        SOMA=SOMA+L(MI)*L(MI)
30 CONTINUE
    IJ=IPOS(I,I,NB)
    L(IJ)=A(IJ)-SOMA
    IF(L(IJ).LE.0.0)GO TO 100
    L(IJ)=SQRT(L(IJ))
C
IF(I.GE.N) GO TO 90
C
M=1
I3=I+2-NB
JI=I+1
JFIM=JI+NB
IF(JFIM.GT.N) JFIM=N
IF(I3.GT.0.0) M=I3
ICONT=0.0
DO 40 J=JI,JFIM
    SOMA=0.0
50 CONTINUE

```



```

        IF(ICONT.EQ.(NB-2)) GO TO 52
        MI=IPOS(M,I,NB)
        MJ=IPOS(M,J,NB)
        SOMA=SOMA+L(MI)*L(MJ)
        IF(M.GE.II) GO TO 51
        M=M+1
        GO TO 50
51      CONTINUE
        ICONT=ICONT+1
52      CONTINUE
        II=IPOS(I,I,NB)
        L(II)=(A(II)-SOMA)/L(II)
        IF(NB.EQ.N) M=1
40      CONTINUE
20      CONTINUE
        GO TO 90
100     CONTINUE
C
        WRITE(6,1)
1       FORMAT(" RADICANDO NULO OU NEGATIVO")
90      CONTINUE
        RETURN
        END
C*
C*
SUBROUTINE SYSTINF(L,Y,B,N,NE,NB)
C*
REAL L(NE),Y(N),B(N),SOMA
INTEGER I,II,N,NE,NB,IM,IPOS
C
Y(1)=B(1)/L(1)
C
DO 20 I=2,N
    IM=1
    II=I-1
    IF(I.GT.NB)IM=I+1-NB
    SOMA=0.0
    DO 10 M=IM,II
        MI=IPOS(M,I,NB)
        SOMA=SOMA+L(MI)*Y(M)
10     CONTINUE
        II=IPOS(I,I,NB)
        Y(I)=(B(I)-SOMA)/L(II)
20    CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C*      SUBROUTINE SYSTSUP(L,Y,X,N,NE,NB)
      REAL L(NE),Y(N),X(N),SOMA
      INTEGER I,K,N,N1,NB,NE,MI,MF,IPOS
      X(N)=Y(N)/L(NE)
C
      N1=N-1
      DO 20 K=1,N1
        I=N-K
        MI=I+1
        MF=I-1+NB
        IF(MF.GT.N)MF=N
        SOMA=0.0
        DO 10 M=MI,MF
          IM=IPOS(I,M,NB)
          SOMA=SOMA+L(IM)*X(M)
10       CONTINUE
          II=IPOS(I,I,NB)
          X(I)=(Y(I)-SOMA)/L(II)
20      CONTINUE
      RETURN
      END
C*
      INTEGER FUNCTION IPOS(I,J,NB)
C*
      IF(J.LE.NB)THEN
        IPOS=I+(J-1)/2)
      ELSE
        IPOS=(NB*(NB+1)/2)+(NB*(J-NB-1))+(NB-(J-I))
      END IF
      RETURN
      END
C*
C*      SUBROUTINE DDTIME(L1,M1,X,Y,U,V,XNUL,XVC,YVC,XNUT,DT,DX,
+      DY,NITER,LAM)
C*
C*      REAL X(*),Y(*),U(125,*),V(125,*),XNUL,DT,DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
      REAL XNUT(125,*)
      INTEGER L1,M1,NITER,LAM
C*
      AUX2=0.0
      AUX3=0.0
      AUX4=0.0
      L2=L1-1

```

```
M2=M1-1
DO 10 I=2,L2
  DO 10 J=1,M1
    AUX=(U(I,J)+U(I+1,J))/2.0
    IF(AUX.EQ.0.0)THEN
      AUX=1.0E-15
    END IF
    AUX=ABS(AUX/XVC(I))
    IF((I+J).EQ.3)THEN
      AUX2=AUX
    END IF
    IF(AUX.GE.AUX2)THEN
      AUX2=AUX
    END IF
10  CONTINUE
C*
DO 20 J=2,M2
  DO 20 I=1,L1
    AUX=(V(I,J)+V(I+1,J))/2.0
    IF(AUX.EQ.0.0)THEN
      AUX=1.0E-15
    END IF
    AUX=ABS(AUX/YVC(J))
    IF((I+J).EQ.3)THEN
      AUX3=AUX
    END IF
    IF(AUX.GE.AUX3)THEN
      AUX3=AUX
    END IF
20  CONTINUE
DTCONV=1.0/(AUX2+AUX3)
C*
C
DO 30 I=2,L2
  DO 30 J=2,M2
    XY=(1.0/(DX(I)*DX(I)))+(1.0/(DY(J)*DY(J)))
C*    ***** DTDIFF *****
    AUX=1.0/(2.0*(XNUL+XNUT(I,J))*XY)
    IF((I+J).EQ.4)THEN
      AUX4=AUX
    END IF
    IF(AUX.LE.AUX4)THEN
      AUX4=AUX
    END IF
30  CONTINUE
DTDIFF=AUX4
```

```
C*
      DTO=1.0/((1.0/DTCONV)+(1.0/DTDIFF))
C*
C*
      DT=DTO*0.25
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE BILAN(XU,YV,R,RV,U,V,L1,M1,BMASSA,XVC,YVC)
C*
      REAL XU(*),YV(*),R(*),RV(*),U(125,*),V(125,*)
      REAL XVC(*),YVC(*),BM(125,125),BMASSA
      INTEGER L1,M1
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
C*
      DO 1 I= 2,L2,1
        DO 1 J= 2,M2,1
          DFU=R(J)*U(I+1,J)-R(J)*U(I,J)
          DFV=RV(J+1)*V(I,J+1)-RV(J)*V(I,J)
          BM(I,J)=ABS(YVC(J)*DFU+XVC(I)*DFV)
1      CONTINUE
C*
      BMASSA=XMAIOR(BM,2,2,L1,M1)
C*
C*****      FIM DE ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      REAL FUNCTION XMENOR(VET,N)
C*
C*
      REAL VET(125),XM,DVET
      INTEGER N
C*
      XM=VET(2)
      DO 1 I=3,N,1
        IF(VET(I).LT.XM)THEN
          XM=VET(I)
        END IF
1      CONTINUE
```

```

      XMENOR=XM
C*
      RETURN
      END
C*
      REAL FUNCTION XMAIOR(RM,IIN,JIN,L,M)
C*
C*
      REAL RM(125,125),XM
      INTEGER IIN,JIN,L,M
C*
      XM=RM(IIN,JIN)
        DO 1 I=IIN,L,1
          DO 1 J=JIN,M,1
            IF(RM(I,J).GT.XM)THEN
              XM=RM(I,J)
            END IF
1      CONTINUE
C*
      XMAIOR=XM
C*
      RETURN
      END
C*
C*
      SUBROUTINE PRINT(L1,M1,X,Y,U,V,P,DT,TEMPO,BMASSA,XNUL,TQA,TEPS,
$                XNUT,USE,USW,USN,USS,RHO,XU,YV,UU,VV,UV,TAUP)
C*
C*
      REAL X(*),Y(*),U(125,*),V(125,*),P(*),DT,TEMPO,BMASSA,XNUL
      REAL PS(125,125),UU(125,125),VV(125,125),UV(125,125),XU(*),YV(*)
      REAL TQA(125,*),TEPS(125,*),XNUT(125,*),RHO
      REAL USE(*),USW(*),USN(*),USS(*),TAUP(125,*)
      INTEGER L1,M1,L2,M2
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1
      IPAG=1
      NPAG=1
      IF(L1.GT.11) IPAG=2
C*
      UMAX=XMAIOR(U,2,1,L1,M1)
      VMAX=XMAIOR(V,1,2,L1,M1)
      RE=U(2,M2-4)*2.0*(Y(M1)-Y(1))/XNUL
C*
      WRITE(6,111)

```

```

111 FORMAT(1H1,////)
C*
WRITE(6,11)
11 FORMAT(/,30X,'*****')
WRITE(6,12)

12 FORMAT(32X,' TITULO : ESCOAMENTO TURBULENTO EM TUBO ')
WRITE(6,11)
WRITE(6,13)
13 FORMAT(32X,' DESVIO MAXIMO, EM MODULO ,DO BALANCO DE',/
+ 32X,' MASSA NUM DOS VOLUME DE CONTROLE EM Kg')
WRITE(6,14) BMASSA
14 FORMAT(/,40X,F12.6)
WRITE(6,11)
WRITE(6,15)RE
15 FORMAT(32X,' NUMERO DE REYNOLDS DO ESCOAMENTO',/
+ /,40X,E12.3)
WRITE(6,11)
WRITE(6,16)DT
16 FORMAT(30X,'INCREMENTO DE TEMPO DE CALCULO EM segundos',/
+ /,35X,E18.5)
WRITE(6,11)
WRITE(6,17)TEMPO
17 FORMAT(32X,' TEMPO DE CALCULO EM segundos ',/
+ /,35X,E18.5)
WRITE(6,11)
C*
110 CONTINUE

C*
c
NPAG=2
IF(L1.LE.10)THEN
    FPAG=L1
ELSE
    FPAG=10
END IF
2 WRITE(6,18)
WRITE(6,19)(I,I=NPAG,FPAG)
DO 1,J=M1,1,-1
    WRITE(6,20)J,(U(I,J)/U(2,4),I=NPAG,FPAG),Y(J)/Y(M1)
1 CONTINUE
IF(FPAG.LT.L1)THEN
    NPAG=FPAG+1
    FPAG=FPAG+10
    IF(FPAG.GT.L1)THEN
        FPAG=L1
    
```

```

      END IF
      GOTO 2
    END IF

```

```

c
18  FORMAT(1H1,////,43X,'CAMPO FINAL DE VELOCIDADE U(LJ)/U(2,4),EM m/s
$ ultima ccoluma Y(J)/Y(M1) '///)
19  FORMAT(16X,I2,10(9X,I2))
20  FORMAT(3X,I2,11X,10(2X,E9.3),2X,E9.3)
21  FORMAT(/,3X,I2,11(2X,E9.3))
23  FORMAT(3X,I2,11(2X,E9.3),2X,E9.3)
25  FORMAT(/,3X,I2,10(2X,E9.3))
22  FORMAT(1H1,////,43X,'CAMPO FINAL DE VELOCIDADE V(LJ),EM m/s
$ ultima coluna YV(J)'///)
24  FORMAT(1H1,////,43X,'CAMPO FINAL DE PRESSAO P(L,J) em Pa'///)
27  FORMAT(1H1,////////,34X,'**** FIM DE SAIDA DE DADOS **** 'J)
371 FORMAT(3X,I2,12(1X,E9.3),2X,E9.3)
470 FORMAT(9X,I2,12(8X,I2))

```

```

c
      NPAG=2
      IF(L1.LE.10)THEN
        FPAG=L1
      ELSE
        FPAG=10
      END IF
3  WRITE(6,22)
   WRITE(6,19)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 4,J=M1,1,-1
        WRITE(6,23)J,(V(I,J),I=NPAG,FPAG),YV(J)
4  CONTINUE
      IF(FPAG.LT.L1)THEN
        NPAG=FPAG+1
        FPAG=FPAG+10
        IF(FPAG.GT.L1)THEN
          FPAG=L1
        END IF
        GOTO 3
      END IF

```

```

c
C*
      DO 7 I=2,L2
        DO 7 J=2,M2
          M=(I-1)+(J-2)*(L2-1)
          PS(I,J)=P(M)
7  CONTINUE
C*
      NPAG=1

```

```

IF(L1.LE.10)THEN
  FPAG=L1
ELSE
  FPAG=10
END IF
8  WRITE(6,24)
  WRITE(6,19)(I,I=NPAG,FPAG)
  DO 9,J=M2,2,-1
    WRITE(6,23)J,(PS(I,J),I=NPAG,FPAG)
9  CONTINUE
  IF(FPAG.LT.L1)THEN
    NPAG=FPAG+1
    FPAG=FPAG+10
    IF(FPAG.GT.L1)THEN
      FPAG=L1
    END IF
    GOTO 8
  END IF
  WRITE(6,27)
C*
  WRITE(6,*)'
  WRITE(6,*)'  SAIDA DE PROPRIEDADES TURBULENTAS '
  WRITE(6,*)'
C*
NPAG=1
IF(L1.LE.10)THEN
  FPAG=L1
ELSE
  FPAG=10
END IF
130 WRITE(6,*)' ENERGIA CINETICA DE TURBULENCIA, K/USTAR2 Y/YMAX'
  WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
  DO 131,J=M1,1,-1
    WRITE(6,371)J,(TQA(I,J)/(USN(I)*USN(I)),
$      I=NPAG,FPAG),Y(J)/Y(M1)
131 CONTINUE
  IF(FPAG.LT.L1)THEN
    NPAG=FPAG+1
    FPAG=FPAG+10
    IF(FPAG.GT.L1)THEN
      FPAG=L1
    END IF
    GOTO 130
  END IF
C
  WRITE(6,*)'

```



```

NPAG=1
IF(L1.LE.10)THEN
  FPAG=L1
ELSE
  FPAG=10
END IF
112  WRITE(6,*) ' DISSIPACAO DE ENERGIA CINETICA  EPSLON/USTAR3'
      WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 113,J=M1,1,-1
        WRITE(6,371)J,(TEPS(I,J)/(USN(I)*USN(I)*USN(I)),
$      I=NPAG,FPAG),Y(J)/Y(M1)
113  CONTINUE
      IF(FPAG.LT.L1)THEN
        NPAG=FPAG+1
        FPAG=FPAG+10
        IF(FPAG.GT.L1)THEN
          FPAG=L1
        END IF
        GOTO 112
      END IF
C*
      WRITE(6,*)' '
C*
NPAG=1
IF(L1.LE.10)THEN
  FPAG=L1
ELSE
  FPAG=10
END IF
114  WRITE(6,*) 'VISCOSIDADE TURBULENTA  XNUT '
      WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 115,J=M1,1,-1
        WRITE(6,371)J,(XNUT(I,J),I=NPAG,FPAG),Y(J)/Y(M1)
115  CONTINUE
      IF(FPAG.LT.L1)THEN
        NPAG=FPAG+1
        FPAG=FPAG+10
        IF(FPAG.GT.L1)THEN
          FPAG=L1
        END IF
        GOTO 114
      END IF
c
      WRITE(6,*)' '
C*
NPAG=2

```

```
IF(L2.LE.10)THEN
  FPAG=L2
ELSE
  FPAG=10
END IF
116  WRITE(6,*) 'TENSOR DE REYNOLDS   UU/USTAR2 '
    WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 117 J=M2,2,-1
        WRITE(6,371)J,(UU(I,J)/(USN(I)*USN(I)),
117  $   I=NPAG,FPAG),Y(J)/Y(M1)
      CONTINUE
    IF(FPAG.LT.L2)THEN
      NPAG=FPAG+1
      FPAG=FPAG+10
      IF(FPAG.GT.L2)THEN
        FPAG=L2
      END IF
      GOTO 116
    END IF
C*
  WRITE(6,*)'
C*
  NPAG=2
  IF(L1.LE.10)THEN
    FPAG=L1
  ELSE
    FPAG=10
  END IF
118  WRITE(6,*) 'TENSOR DE REYNOLDS   UV/USTAR2 '
    WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 119 J=M1,2,-1
        WRITE(6,371)J,(UV(I,J)/(USN(I)*USN(I)),
119  $   I=NPAG,FPAG),YV(J)/Y(M1)
      CONTINUE
    IF(FPAG.LT.L1)THEN
      NPAG=FPAG+1
      FPAG=FPAG+10
      IF(FPAG.GT.L1)THEN
        FPAG=L1
      END IF
      GOTO 118
    END IF
C
C
  DO 120 I=1,L1
    WRITE(6,*)'XU(' ,I,')=' ,XU(I), 'X(' ,I,')/R=' ,X(I)/Y(M1),
120  $   'USS(' ,I,')=' ,USS(I), 'USN(' ,I,')=' ,USN(I)
```

```
120      CONTINUE
      DO 121 J=1,M1
        WRITE(6,*)'YV('J,')=',YV(J),'Y('J,')=',Y(J),
$        'USW('J,')=',USW(J),'USE('J,')=',USE(J)

121      CONTINUE
C
      WRITE(6,*)'
C*
      NPAG=1
      IF(L1.LE.10)THEN
        FPAG=L1
      ELSE
        FPAG=10
      END IF
144      WRITE(6,*) ' TENSÃO DE CISALHAMENTO NA PAREDE TAUP'
      WRITE(6,470)(I,I=NPAG,FPAG)
      DO 145,J=M1,1,-1
        WRITE(6,371)J,(TAUP(I,J),I=NPAG,FPAG)
145      CONTINUE
      IF(FPAG.LT.L1)THEN
        NPAG=FPAG+1
        FPAG=FPAG+10
        IF(FPAG.GT.L1)THEN
          FPAG=L1
          END IF
          GOTO 144
        END IF
C*
C***** FIM DA ROTINA

      RETURN
      END

C*
C*
      REAL FUNCTION VMAX(S,T)

C*
C*
      IF(S.GE.T)THEN
        VMAX=S
      ELSE
        VMAX=T
      END IF
C*
      RETURN
      END
```

```
      REAL FUNCTION VMIN(S,T)
C*
      IF(S.GE.T)THEN
        VMIN=T
      ELSE
        VMIN=S
      END IF
C*
C***** FIM DA FUNCAO
C*
      RETURN
      END
c
      REAL FUNCTION QUICK(A,B,C,D,E)
      REAL A,B,C,D,E
      IF(E.GE.0.0)THEN
        QUICK=((C+B)*0.5)-(0.125*(C-(2.0*B)+A))
      ELSE
        QUICK=((C+B)*0.5)-(0.125*(B-(2.0*C)+D))
      END IF
      RETURN
      END
C*
      SUBROUTINE INTXUT(AUX3)
C*
      REAL AUX3(200)
C*
C***** CONSTANTES A SEREM USADAS
C*
      DATA CMU,XK,E,A/0.09,0.40,9.00,26.0/
      X2PLUS=0.0
      AUX2=0.0
      DO 20 I=1,200
        X2PLUS=X2PLUS+1.0
        UPLUS=2.0*TRAP(X2PLUS,(X2PLUS-1.0),XK,A)
        UPLUS=UPLUS+AUX2
        AUX3(I)=X2PLUS*UPLUS
        WRITE(*,*)X2PLUS,UPLUS,AUX3(I)
        AUX2=UPLUS
20    CONTINUE
      RETURN
      END
C*
C***** FIM DE ROTINA
C*
      REAL FUNCTION TRAP(XMAX,XMIN,XK,A)
```

```

REAL XMAX,XMIN,A,XK,AUX,AREA,Y1,Y2,X2
IF(XMAX.LE.0.0)THEN
  TRAP=0.0
ELSE
  DELTA=(XMAX-XMIN)/20.0
  AUX1=EXP((-1.0*XMIN)/A)
  AUX=(1.0-AUX1)*(1.0-AUX1)
  AUX=4.0*(XK*XK)*(XMIN*XMIN)*AUX
  AUX=1.0+(SQRT(1.0+AUX))
  AUX=1.0/AUX
  Y1=AUX
  X2=XMIN
  AREA=0.0
  DO I=1,20
    X2=X2+DELTA
    AUX1=EXP((-1.0*X2)/A)
    AUX=(1.0-AUX1)*(1.0-AUX1)
    AUX=4.0*(XK*XK)*(X2*X2)*AUX
    AUX=1.0+(SQRT(1.0+AUX))
    AUX=1.0/AUX
    Y2=AUX
    AREA=AREA+(((Y2+Y1)/2.0)*DELTA)
    Y1=Y2
  END DO
  TRAP=AREA
END IF
RETURN
END
SUBROUTINE USER(X,Y,R,XU,YV,RV,L1,M1,U,V,RHO,XNUL,TQA,TEPS,XNUT,
$           DX,DY,XVC,YVC,ITMAX,NITER,DT,IE,N,ICH,MODE,IOPS)

```

C⁺
C⁺

```

REAL RHO,XNUL,X(*),XU(*),Y(*),YV(*),U(125,*),V(125,*)
REAL TQA(125,*),TEPS(125,*),XNUT(125,*),DT,R(*),RV(*)
REAL DX(*),DY(*),XVC(*),YVC(*)
INTEGER L1,M1,NVOLX,NVOLY,IE,N,ICH,IOPS,NITER,ITMAX,MODE
DATA CMU/0.09/

```


東坡先生集卷之五

EXEMPLO 1 ESCOAMENTO LAMINAR tubo

陳維英先生文集

此表係根據本局所屬各機關、學校、團體、及社會服務機構之登記資料彙編而成，其內容僅供參考，如有錯誤，請逕向本局查詢。

GO TO (100,200,300,400,500),IOPS

[illegible]

100 CONTINUE

```
XL=6.2
YL=0.05
C*
C*
NVOLX=20
NVOLY=20
C*
RX=1.0
RY=1.0
C*
MODE=2
C*
CALL GRID(XL,YL,NVOLX,NVOLY,RX,RY,X,R,XU,Y,YV,RV,L1,M1,MODE,
$          DX,DY,XVC,YVC)
C*
C*****  PROPRIEDADES DO FLUIDO
C*
RHO=1.165
XNUL=1.76e-3
C*
ICH=1
C*
N=(L1-2)*(M1-2)
C*
IE=NELE(N,L1-1)
C*
DT=1.0E-15
C*
GO TO 1000
200  CONTINUE
C*****  USER(2)= START
C*****
C*****
DO 1 I=1,L1,1
DO 1 J=1,M1,1
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
1  CONTINUE
C*
DO 2 J=2,M1,1
U(2,J)=17.6
V(1,J)=0.0
2  CONTINUE
C*
C*
DO 3 I=1,L1,1
```

```
      DO 3 J=1,M1,1
        TQA(I,J)=0.0
        TEPS(I,J)=0.0
        XNUT(I,J)=0.0
3      CONTINUE
C*
C*
C***** FIM DA ROTINA USER(2)
C*****
      GO TO 1000
C*****
300 CONTINUE
C***** USER(3)=BOUND
C*****
      L2=L1-1
      M2=M1-1
      DO 5 J=1,M2,1
        U(2,J)=17.6
        V(1,J)=0.0
5      CONTINUE
      VZE=0.0
      DO 6 J=2,M2,1
        VZE=VZE+U(2,J)*R(J)*YVC(J)
6      CONTINUE
      VZS=0.0
      DO 7 J=2,M2,1
        VZS=VZS+U(L2,J)*R(J)*YVC(J)
7      CONTINUE
C*
      IF((ABS(VZE).LE.1.0E-09).OR.(ABS(VZS).LE.1.0E-09))THEN
        FATOR=1.0
      ELSE
        FATOR=VZE/VZS
      END IF
      DO 8 J=2,M2,1
        U(L1,J)=FATOR*U(L2,J)
        V(L1,J)=0.0
8      CONTINUE
C*
      DO 9 I=2,L1,1
        U(I,1)=U(I,2)
        V(I,2)=0.0
9      CONTINUE
C*
C***** FIM DA ROTINA USER(3)
C*****
```

```
GO TO 1000
C*****
400  CONTINUE
C*****      USER(4)=BOUNDTUR
C*****
C*****
C      L2=L1-1
      M2=M1-1
C*
C*
      DO 10 J=1,M2,1
      TQA(1,J)=0.005*U(2,J)*U(2,J)
      TQA3=TQA(1,J)*TQA(1,J)*TQA(1,J)
      TEPS(1,J)=CMU*SQRT(TQA3)/(0.03*(Y(M1)-Y(1)))
      XNUTW=CMU*TQA(1,J)*TQA(1,J)/(TEPS(1,J)+1.0E-12)
      XNUT(1,J)=AMAXT(0.0,XNUTW,TEPS(1,J))
10   CONTINUE
C*
      DO 20 I=1,L1,1
      TQA(I,1)=TQA(I,2)
      TEPS(I,1)=TEPS(I,2)
      XNUT(I,1)=CMU*TQA(I,1)*TQA(I,1)/(TEPS(I,1)+1.0E-12)
      XNUT(I,1)=AMAXT(0.0,XNUT(I,1),TEPS(I,1))
20   CONTINUE
C*
      DO 30 J=1,M2,1
      TQA(L1,J)=TQA(L2,J)
      TEPS(L1,J)=TEPS(L2,J)
      XNUTE=CMU*TQA(L1,J)*TQA(L1,J)/(TEPS(L1,J)+1.0E-12)
      XNUT(L1,J)=AMAXT(0.0,XNUTE,TEPS(L1,J))
30   CONTINUE
CC*
      DO 40 I=1,L1,1
      TQA(I,M1)=0.0
      TEPS(I,M1)=0.0
      XNUT(I,M1)=0.0
40   CONTINUE
C*
C*****      FIM DE ROTINA  USER(4)
C*****
GO TO 1000
C*****
500  CONTINUE
C*****      USER(5)= PRINT
C*****
C*****
C*****      SAIDA NO ARQUIVO TAPE6  E/OU TELA
C*****
```



```

C*****  NUMERO MA'XIMO DE ITERACOES DO PROGRAMA
C*****  SAIDA DE TELA
C*
c      WRITE(*,*)'ITERACAO= ',NITER,' DT= ',DT,' U(L1-2,2)= ',U(L1-2,2)
C*
C*****  FIM DA ROTINA  USER(5)
C*****
      GO TO 1000
C*****
C*
C*****  FIM DE ROTINA
C*
1000  CONTINUE
      RETURN
      END
c
c
      SUBROUTINE CCTURB(L1,M1,X,Y,R,RV,U,V,XNUL,XNUT,TQA,TEPS,TAUP,
$                                DX,DY,XUTAB)
C*
      REAL X(*),Y(*),XNUL,U(125,*),V(125,*),XNUT(125,*),R(*),RV(*)
      REAL TQA(125,*),TEPS(125,*),TAUP(125,125),DX(*),DY(*),XUTAB(200)
      INTEGER L1,M1
C*
      DATA CMU/0.09/
C*
      L2=L1-1
      M2=M1-1

      GO TO 100
DO 10 J=2,M2,1
      VM=(V(2,J+1)+V(2,J))*0.5
      CALL WALL(DX(2),VM,XNUL,TQA(2,J),TEPS(2,J),TAUP(1,J),XUTAB)
      XNUTW=CMU*TQA(2,J)*TQA(2,J)/(TEPS(2,J)+1.0E-12)
      XNUT(2,J)=AMAXT(0.0,XNUTW,TEPS(2,J))
10  CONTINUE
C*
DO 20 J=2,M2,1
      VM=(V(L2,J+1)+V(L2,J))*0.5
      CALL WALL(DX(L1),VM,XNUL,TQA(L2,J),TEPS(L2,J),TAUP(L1,J),XUTAB)
      XNUTE=CMU*TQA(L2,J)*TQA(L2,J)/(TEPS(L2,J)+1.0E-12)
      XNUT(L2,J)=AMAXT(0.0,XNUTE,TEPS(L2,J))
20  CONTINUE
C*C*
DO 30 I=2,L2,1
      UM=(U(I+1,2)+U(I,2))*0.5

```

```

      CALL WALL(DY(2),UM,XNUL,TQA(I,2),TEPS(I,2),TAUP(I,1),XUTAB)
      XNUTS=CMU*TQA(I,2)*TQA(I,2)/(TEPS(I,2)+1.0E-12)
      XNUT(I,2)=AMAXT(0.0,XNUTS,TEPS(I,2))
30    CONTINUE
100   CONTINUE
      DO 40 I=2,L2,1
        UM=(U(I+1,M2)+U(I,M2))*0.5
        CALL WALL(DY(M1),UM,XNUL,TQA(I,M2),TEPS(I,M2),TAUP(I,M1),XUTAB)
        XNUTN=CMU*TQA(I,M2)*TQA(I,M2)/(TEPS(I,M2)+1.0E-12)
        XNUT(I,M2)=AMAXT(0.0,XNUTN,TEPS(I,M2))
40    CONTINUE
C*
C*****      FIM DE ROTINA
C*
      RETURN
      END
C*
c
c
c
C*
SUBROUTINE SAIDA(U,V,X,Y,XU,YV,L1,M1,XNUL,T,NITER)
REAL U(125,125),V(125,125),X(125),Y(125),XU(125),YV(125),AUX1
REAL XNUL,RE,T
INTEGER L1,M1,AUX2,ITMAX
RE=1.*1/XNUL
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)'CAVIDADE REYNOLDS RE= ',RE
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)'Tempo total= ',T
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)' '
WRITE(6,*)'Numero de iteracoes= ',NITER
WRITE(6,*)' '
POSX=5.8
WRITE(6,*)'VELOCIDADE U/UMAX NA POSICAO X= ',POSX
WRITE(6,*)'U/UMAX(' ,POSX,' ,J)', 'Y(J)/ymax'
DO I=3,L1
  IF((POSX.GE.XU(I-1)).AND.(POSX.LE.XU(I)))THEN
    DO J=1,M1
      RAZ=(U(I+1,J)-U(I,J))/(XU(I)-XU(I-1))
      UA=RAZ*(POSX-XU(I-1))+U(I,J)
      RAZ=(U(I+1,1)-U(I,1))/(XU(I)-XU(I-1))
      UMAX=RAZ*(POSX-XU(I-1))+U(I,1)

```

C***

```
        WRITE(6,*)UA/ABS(UMAX),Y(J)/Y(M1)
    END DO
    I=L1
    END IF
END DO
C**
C**
    POSY=0.5
    WRITE(6,*)'VELOCIDADE Y NA POSICAO X= ',POSY
    WRITE(6,*)'V(I,',POSY,')',X(I)
    DO J=3,M1
        IF((POSY.GE.YV(J-1)).AND.(POSY.LE.YV(J)))THEN
            DO I=1,L1
                RAZ=(V(I,J+1)-V(I,J))/(YV(J)-YV(J-1))
                VA=RAZ*(POSY-YV(J-1))+V(I,J)
                WRITE(6,*)VA,X(I)
            END DO
            J=M1
        END IF
    END DO
    K=1
    WRITE(6,*)'#DESENHO DA MALHA PRINCIPAL E SECUNDARIA'
    WRITE(6,*)'#X(I),Y(J),XU(I),YV(I)'
    DO 800 I=1,L1
        IF(K.EQ.1)THEN
            WRITE(6,*)X(I),Y(1),XU(I),Y(1)
            WRITE(6,*)X(I),Y(M1),XU(I),Y(M1)
            K=0
        ELSE
            WRITE(6,*)X(I),Y(M1),XU(I),Y(M1)
            WRITE(6,*)X(I),Y(1),XU(I),Y(1)
            K=1
        END IF
800 CONTINUE
    K=1
    DO 801 J=1,M1
        IF(K.EQ.1)THEN
            WRITE(6,*)X(1),Y(J),X(1),YV(J)
            WRITE(6,*)X(L1),Y(J),X(L1),YV(J)
            K=0
        ELSE
            WRITE(6,*)X(L1),Y(J),X(L1),YV(J)
            WRITE(6,*)X(1),Y(J),X(1),YV(J)
            K=1
        END IF
801 CONTINUE
```

```
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE CORRENTE(L1,M1,X,Y,XU,YV,U,FI)
C*
      REAL X(125),Y(125),XU(125),YV(125),U(125,125),FI(125,125)
      INTEGER L1,M1
      DO 1 I=1,L1
        DO 1 J=1,M1
          FI(I,J)=0.0
1      CONTINUE
      WRITE(6,9)

      DO 2 I=2,L1
        DO 2 J=2,M1
          FI(I,1)=0.0
          FI(I,J)=FI(I,J-1)+(U(I,J)*(Y(J)-Y(J-1)))
          WRITE(6,10)FI(I,J),XU(I),Y(J)
2      CONTINUE
      DO 3 I=2,L1
        WRITE(6,10)FI(I,1),XU(I),Y(1)
3      CONTINUE
9      FORMAT('#FUNCAO CORRENTE' , '#FI',4X,'X',4X,'Y')
10     FORMAT(3F8.5)
      RETURN
      END
```