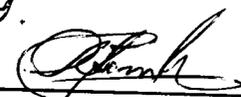


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida pelo engenheiro Adib Paulo Abdalla Kurban e aprovada pela comissão julgadora em 23 de Junho de 1989.

Dissertação Apresentada à


Faculdade de Engenharia de Campinas Prof. Dr. A.C. Bannwart

Como Requisito Parcial à Obtenção do

Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

PREVISÃO DA CONFIGURAÇÃO DE FASES DE UM ESCOAMENTO
LAMINAR DESENVOLVIDO DE DOIS LÍQUIDOS
IMISCÍVEIS EM UM TUBO HORIZONTAL

Nº 29/89

Autor : Adib Paulo Abdalla Kurban
Orientador : Antonio Carlos Bannwart

Junho, 1989

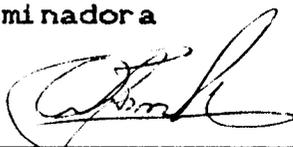
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

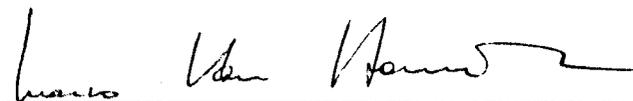
A dissertação "Previsão da Configuração de Fases de um Escoamento Laminar Desenvolvido de Dois Líquidos Imiscíveis em um Tubo Horizontal", elaborada por Adib Paulo Abdalla Kurban e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 23 de junho de 1989

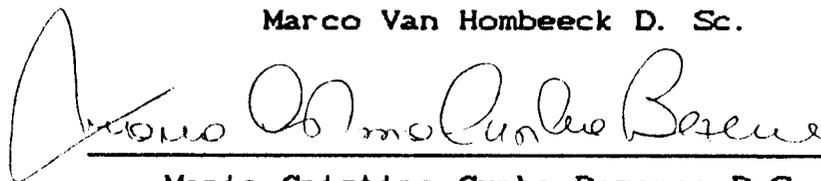
Banca Examinadora



Antonio Carlos Bannwart Dr.



Marco Van Hombeeck D. Sc.



Maria Cristina Cunha Bezerra D.Sc.

A Vich e a minha mãe Clara que através
do seu amor tornam a minha vida feliz.

AGRADECIMENTOS

Ao meu entusiasmado orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart a quem aprendi a admirar como profissional e como pessoa, pela presteza e dedicação com que conduziu o presente trabalho.

À Professora Maria Cristina Cunha por ter aceitado participar da banca examinadora.

Aos colegas de turma e funcionários do mestrado em Engenharia (Petróleo, Mecânica e Química) da UNICAMP com quem compartilhei bons momentos em mais esta etapa da minha vida acadêmica. Menção especial deve ser feita a Engenheira Maria Lúcia de Fátima e Silva pela atenção e companheirismo dedicados.

Aos colegas do PETROBRÁS/ CENPES/ DIPILOT/ SEPROV pelo interesse e ânimo sempre transmitidos.

À PETROBRÁS, em especial representada pelos Engenheiros Elísio Caetano Filho e Marco Van Hombeeck, pela oportunidade de aprimorar-me tecnicamente participando no Curso de Mestrado em Engenharia de Petróleo.

À cidade de Campinas e aos amigos que eu e minha esposa aqui fizemos.

RESUMO

Em muitas operações de engenharia encontram-se situações em que dois líquidos devem escoar simultaneamente por um mesmo duto.

Na indústria da produção de petróleo quando se quer transportar um óleo de viscosidade muito alta através de uma tubulação, normalmente um grande dispêndio de energia é necessário. A adição ao óleo de água, ou outro fluido imiscível menos viscoso reduzem a energia necessária para promover o seu escoamento. Esta economia de energia, então, será função da configuração destas duas fases no tubo.

Utilizando-se princípios variacionais (mínima dissipação viscosa e mínima energia potencial) determinou-se o seguinte: o campo de velocidades no escoamento monofásico laminar desenvolvido; a forma da interface entre dois fluidos em repouso (problema hidrostático, estratificação gravimétrica); os campos de velocidades e a forma da interface no escoamento laminar desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de mesma densidade em um tubo horizontal (estratificação viscosa pura) e finalmente, os campos de velocidade e a forma da interface no caso geral, em que os dois fluidos podem ser de densidades distintas e arbitrárias (proposta final deste trabalho).

Os resultados previstos pela teoria apresentada estão de acordo com a observação experimental, de que quando dois líquidos escoam simultaneamente por um mesmo duto, o menos viscoso tende a encapsular total ou parcialmente o mais viscoso.

A B S T R A C T

In several engineering operations there are situations where two immiscible liquids must flow simultaneously through a duct.

In the petroleum industry when one wants to transport a very viscous oil through a pipeline usually a great expenditure of energy is required. The addition of water or any other less viscous fluid to the oil stream reduces the energy necessary to keep it flowing. This saving of energy shall be then, a function of the phase configuration of these two liquids in the pipe.

By means of variational principles (minimum viscous dissipation and minimum potential energy) the following has been derived: the velocity field of a single phase in developed laminar flow; the interface shape of two fluids at rest (hydrostatic problem, gravity stratification); the velocity fields and the interface shape in the flow of two immiscible liquids of same density through a horizontal pipe (pure viscosity stratification) and, at last, the velocity fields and the interface shape of the general case, where the two fluids may have any and distinct densities (final goal of this work).

The results forecasted by the presented theory are in agreement with the experimental observation, that when two immiscible liquids simultaneously flow through the same duct, there is a tendency for the less viscous fluid to partial or totally encapsulate the more viscous one.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE QUADROS	xiv
LISTA DE ANEXOS	xv
NOMENCLATURA	xvi

Capítulo

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação e objetivo	1
1.2. Revisão Bibliográfica	3
1.3. Apresentação do Problema	13
2. DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDROSTÁTICO DE DOIS FLUIDOS USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL"	17
2.1. Princípio Variacional	17
2.2. Equação da Interface	21
2.3. Determinação do Multiplicador de Lagrange ..	23
3. DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DE UM ESCOAMENTO MONOFÁSICO DESENVOLVIDO USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPACÃO VISCOSA"	27
3.1. Princípio Variacional.....	29
3.2. Campo de Velocidades	30
3.3. Determinação do Multiplicador de Lagrange...	33

4.	DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDRODINÂMICO DE DOIS FLUIDOS DE MESMA DENSIDADE USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPACÃO VISCOSA"	39
4.1.	Princípio Variacional	39
4.2.	Determinação do Campo de Velocidades	42
4.3.	Determinação da Interface entre os Fluidos .	46
4.4	Interpretação do Princípio da Mínima Dissipação Viscosa no Caso do Escoamento Simultâneo de Dois Fluidos	54
4.5.	Determinação dos Multiplicadores de Lagrange	58
5.	DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDRODINÂMICO DE DOIS FLUIDOS DE DENSIDADES E VISCOSIDADES DIFERENTES USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPACÃO VISCOSA"	60
5.1.	Princípio Variacional	61
5.2.	Determinação do Campo de Velocidades	64
5.3.	Determinação da Interface entre os Fluidos .	65
5.4.	Determinação dos Multiplicadores de Lagrange	76

6.	SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS CAMPOS DE VELOCIDADES .	79
6.1.	Discretização das Equações que Regem os Campos de Velocidades	80
6.2.	Domínio de Cálculo	81
6.3.	Condições de Contorno, Interface e Simetria	86
6.4-	Integração dos Campos de Velocidades	90
7.	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	96
7.1.	Adimensionalização de Equações e Funcionais	96
7.2.	Ábacos Generalizados	100
7.3.	Utilização dos Ábacos	108
7.4.	Interpretação do Comportamento dos Gráficos $\hat{Q}_1 \times \hat{Q}_2$	110
8.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	117
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
	ANEXOS	127

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.1.	Padrões observados por CHARLES et alii [3] no escoamento simultâneo de óleo e água em uma tubulação de 1,04 pol de diâmetro. A razão de densidade dos fluidos é aproximadamente unitária e a razão de viscosidades do óleo para a água é 16,8. A velocidade superficial da água foi mantida constante em 0,10 pés/s	5
1.2.	Comportamento da viscosidade em função da taxa de cisalhamento para os dois poliestirenos usados por SOUTHERN & BALLMAN [11]	8
1.3.	Formatos da interface resultantes do escoamento de dois poliestirenos por um capilar. Experimentos de SOUTHERN & BALLMAN [11]	10
1.4.	Configurações do escoamento entre placas estudados por MacLEAN [12]	12
1.5.	Esquema para o problema geral	14
2.1.	Definição de variáveis e parâmetros para o estudo do problema hidrostático de dois fluidos de densidades diferentes no interior de um tubo horizontal	18
2.2.	Parâmetros que definem o formato da interface no problema hidrostático de dois fluidos no interior de um tubo circular horizontal	24

3.1.	Parâmetros do escoamento monofásico desenvolvido por um duto de seção genérica ..	28
4.1.	Parâmetros do escoamento desenvolvido de dois fluidos imiscíveis por um duto de seção genérica	41
4.2.	Definição de parâmetros no estudo do escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades iguais e viscosidades diferentes por um tubo horizontal	47
4.3.	Interface circular concêntrica resultante no escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades iguais e viscosidades diferentes ($\mu_1 < \mu_2$) por um tubo horizontal	53
4.4.	Fator F x area ocupada pelo fluido menos viscoso. Comparação entre as duas configurações concêntricas	57
5.1.	Parâmetros do escoamento desenvolvido de dois fluidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por um duto de seção genérica	62
5.2.	Definição de variáveis e parâmetros no estudo do escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por um tubo horizontal	66

5.3.	Interface circular excêntrica resultante no escoamento laminar desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes ($\mu_1 > \mu_2$; $\rho_1 < \rho_2$) por um tubo horizontal	72
6.1	Volume-de-Controle em coordenadas polares	82
6.2	Domínio de cálculo utilizado	83
6.3	Domínio de cálculo coberto por uma malha uniformemente distribuída 20 x 20 com os nós localizados no centro de cada volume-de-controle.....	85
6.4	Distâncias associadas à interface \underline{n}	88
6.5	Distâncias associadas à interface \underline{e}	89
6.6	Geometria do volume-de-controle híbrido	91
6.7	Comparação entre as soluções numérica e analítica exata para o escoamento laminar concêntrico de dois fluidos imiscíveis. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$	95
7.1	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 0,8$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 10$	102
7.2	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 0,8$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$	103

7.3	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 0,8$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000$	104
7.4	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 10$	105
7.5	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$	106
7.6	Ábaco generalizado. Razão de densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000$	107
7.7	Procedimento gráfico para a resolução do exemplo proposto	111
7.8	Fator de redução de potência. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 10$	114
7.9	Fator de redução de potência. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$	115
7.10	Fator de redução de potência. Razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000$	116
A2.1	Variáveis e parâmetros utilizados nos algoritmos "Calcula \hat{R}_g " e "Calcula \bar{x} "	147

LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
6.1	Comparação entre as soluções numérica e analítica (exata) para o escoamento laminar concêntrico de dois fluidos imiscíveis. (razão de viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$)	94
7.1	Guia de utilização dos ábacos	101

LISTA DE QUADROS

Quadro		Página
4.1.	Algoritmo proposto para a resolução do gradiente de pressão e do raio da interface do escoamento bifásico concêntrico quando as vazões dos fluidos são prescritas	59
5.1.	Algoritmo proposto para a resolução do gradiente de pressão, raio de curvatura e excentricidade da interface no escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis por um tubo horizontal	78
A2.1.	Algoritmo para calcular de \hat{R}_s dados $\hat{R}_{s,0}$, ϵ , ρ_1/ρ_2	145
A2.2.	Algoritmo para o cálculo de \bar{x} dada uma interface circular excêntrica e uma razão de densidade dos fluidos	146

LISTA DE ANEXOS

Anexo		Página
1.	Equações de Euler-Lagrange Associadas a Problemas Variacionais com Um ou Mais Subdomínios	128
2.	Procedimento para Determinar \hat{R}_\bullet e \bar{x}	141

NONENCLATURA

Alfabeto Latino

Item	Descrição
a	Coefficiente genérico da equação discretizada
A	Área
e	Excentricidade
E_p	Energia potencial
f	Função genérica
f	Função genérica; Resíduo definido pela Eq.(A2.12)
	Fator proporcional de área ocupado por um fluido no volume-de-controle híbrido
F	Funcional genérico (Integrando)
FP	Fator de redução de potência
g	Aceleração da gravidade
G	Gradiente de pressão na direção oposta ao escoamento
h	Posição vertical da partícula fluida em relação a um plano de energia potencial zero genérico
\bar{h}	Posição h do centro de massa do sistema
H	Posição h da base da tubulação
i	Índice azimutal de um nó na solução numérica do campo de velocidades

Item	Descrição
j	Índice radial de um nó na solução numérica do campo de velocidades
J	Funcional genérico (Integral)
J_{ep}	Funcional relativo à energia potencial
J_{dv}	Funcional relativo à dissipação viscosa
m	Limite genérico de somatório e malha (solução numérica)
M	Massa; Massa por unidade de comprimento da tubulação
n	Limite genérico de somatório e malha (solução numérica).
\vec{n}	Vetor normal unitário a uma superfície
P	Pressão
P	Potência
Q	Vazão volumétrica
r	Coordenada radial nos sistemas polar e cilíndrico
R	Raio da tubulação
R_s	Raio de curvatura da interface circular
$R_{s,0}$	Raio de curvatura da interface circular concêntrica equivalente
s	Posição r da interface
S	Superfície
V	Volume

Item	Descrição
x	Posição vertical da partícula fluida em relação ao centro da tubulação
\bar{x}	Posição x do centro de massa do sistema
z	Coordenada axial no sistema cilíndrico

Alfabeto Grego

Item	Descrição
λ	Multiplicador de Lagrange
μ	Viscosidade
θ	Coordenada azimutal nos sistemas polar e cilíndrico
ρ	Densidade
τ	Tensão cisalhante

Subscritos

Item	Descrição
ap	Aparente
A_k	Relativo a área ocupada pelo fluido k
bifs	Bifásico
c	Calculado

Item	Descrição
e	Relativo a fronteira leste do volume-de-controle típico
E	Relativo ao nó vizinho a leste do nó corrente
DV	Relativo à dissipação viscosa
Ep	Relativo à energia potencial
H	Relativo à solução homogênea
i	Relativo à interface
k	Relativo à fase k
mono	Monofásico
n	Relativo a fronteira norte do volume-de-controle típico
N	Relativo ao nó vizinho a norte do nó corrente
P	Relativo à solução particular; Relativo ao nó corrente
s	Relativo à interface; Relativo a fronteira sul do volume-de-controle típico
S	Relativo ao nó vizinho a sul do nó corrente
v	Relativo a fronteira oeste do volume-de-controle típico
W	Relativo ao nó vizinho a oeste do nó corrente
o	Relativo à solução concêntrica
1	Relativo à fase 1 (exceto quando usado em λ)
2	Relativo à fase 2 (exceto quando usado em λ)

Item	Descrição
------	-----------

s	Usado em λ
---	--------------------

Sobrescritos

Item	Descrição
------	-----------

^	Indicador de variável adimensional (o sinal é colocado sobre a variável)
---	--

s	Relativo à solução completa das equações de Euler-Lagrange
---	--

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1- Motivação e Objetivo

Em diversos ramos da Engenharia tem se reportado que quando dois líquidos imiscíveis, não emulsionados, e de viscosidades diferentes escoam por um mesmo conduto existe uma tendência do menos viscoso a encapsular o mais viscoso.

Em Engenharia de Petróleo, tem-se procurado tirar proveito dessa estratificação de viscosidades já que o líquido mais viscoso tende a se acumular na região central do tubo, enquanto o líquido menos viscoso fica em contato com a parede ("core-flow"). Assim é possível encontrar uma solução economicamente atrativa para o transporte de petróleos muito viscosos através do escoamento simultâneo de água e óleo em tubulações.

Em Engenharia Química, o fenômeno da distorção da interface na co-extrusão de dois polímeros fundidos para a fabricação de filamentos e placas compostas tem há muito interessado os pesquisadores desta área visto a sua influência nas propriedades dos produtos finais obtidos.

O escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis por um mesmo conduto não é um problema hidrodinâmico de resolução simples. Além das complexidades usuais associadas à

determinação do campo de velocidades e à geometria do conduto existe ainda aquela, crucial, de determinar simultaneamente a interface entre os fluidos. De fato, é preciso reconhecer que as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento que regem o escoamento de cada fluido nada dizem a respeito da forma dessa interface, o mesmo podendo se dizer das condições de contorno, válidas qualquer que este seja. Assim a forma da interface é deixada em aberto, devendo ser previamente imposta, com base em algum critério empírico para que o problema possa ser resolvido.

A fim de explicar o fenômeno da estratificação de viscosidades, possibilitando a resolução simultânea dos campos de velocidades e da forma da interface, tem-se empregado um princípio variacional, chamado "Princípio da Mínima Dissipação Viscosa", ou também "Princípio da Mínima Produção de Entropia". Através deste princípio pode-se, por exemplo, facilmente deduzir as equações de Navier-Stokes para o escoamento laminar desenvolvido de um único fluido em um conduto. No caso de escoamento laminar desenvolvido de dois fluidos, esse princípio é aparentemente consistente com a observada estratificação das viscosidades.

Neste trabalho propõe-se resolver um escoamento de Hagen-Poiseuille de dois líquidos imiscíveis no interior de um tubo horizontal usando o "Princípio da Mínima Dissipação Viscosa". Além da diferença de viscosidades será considerado também o efeito da diferença de densidades. Admite-se que o escoamento seja axial e plenamente desenvolvido. A forma da interface e os campos de velocidades encontrados para os dois

líquidos devem de certa maneira minimizar simultaneamente a energia potencial na seção e a dissipação viscosa por unidade de comprimento do tubo.

Com os resultados obtidos pretende-se não somente auxiliar o desenvolvimento da tecnologia nas já citadas áreas de transporte de óleos viscosos (Engenharia de Petróleo / Produção) e fabricação de filamentos e placas compostas (Engenharia Química / Polímeros), como também poder vislumbrar a sua aplicação para o transporte de resinas e resíduos asfálticos (Engenharia de Processamento); transporte de pastas e produtos alimentares (Engenharia de Alimentos); e melhor compreensão do escoamento bifásico em meios porosos (Engenharia de Petróleo / Reservatórios e Engenharia Química / Filtração).

1.2- Revisão Bibliográfica

Embora o interesse e conseqüentemente o número de trabalhos publicados sobre os escoamentos bifásicos gás-líquido tenha crescido ultimamente, muito pouco tem sido feito ou relatado a respeito dos escoamentos de duas fases líquidas. E muito menos ainda tem sido realizado no que concerne a previsão das suas configurações de fases (forma da interface) visando a compreensão do fenômeno sob uma sólida base físico-matemática.

Nos fim da década de 50 e início dos anos 60 um grupo de pesquisadores da Universidade de Alberta (Canadá) publicou uma série de artigos sobre o escoamento simultâneo de dois

líquidos imiscíveis em tubulações circulares e dutos de seção retangular [4,5,19,20].

RUSSEL et alii [10] fizeram um estudo experimental do escoamento horizontal de sistemas óleo-água de densidades diferentes. CHARLES et alii [4] fizeram um trabalho similar, mas aditivaram o óleo de forma que o mesmo adquirisse uma densidade próxima a da água. Em ambos os trabalhos foram mapeados os padrões de escoamento observados, que podem ser resumidos como sendo estratificados (interface plana e anular), pistonados ("slug flow") e dispersos (gotas de óleo na água e gotas de água no óleo). Interessantemente no escoamento estratificado anular observou-se apenas a configuração anulo de água com núcleo de óleo, e no escoamento pistonado apenas observou-se a formação de pistões de óleo em uma fase contínua de água (figura 1.1). Situações recíprocas (anulo de óleo no escoamento anular e pistões de água no escoamento pistonado) não foram registradas. Sempre que houve o encapsulamento de uma fase, este foi o da mais viscosa. Tais observações indicam que, nestes casos, as fases dispuseram-se naturalmente de modo a facilitar o escoamento dos fluidos [6,11-14].

RUSSEL & CHARLES [20] estudaram analiticamente o efeito do líquido menos viscoso no escoamento laminar de dois líquidos imiscíveis em um canal retangular e em um tubo circular. A forma da interface, previamente prescrita na proposição dos problemas, era horizontal plana no caso do canal retangular e circular concêntrica no caso do tubo.

CHARLES e REDBERGER [5] e GEMMEL e EPSTEIN [7] resolveram numericamente, por diferenças finitas, o escoamento

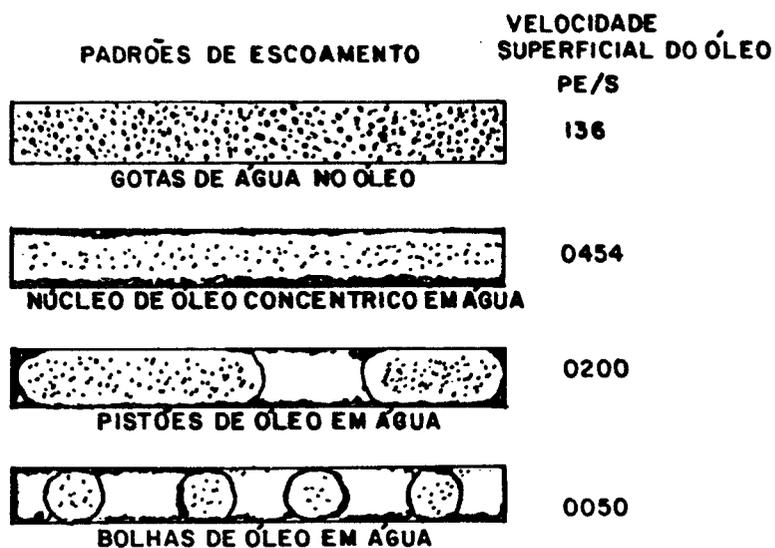


Figura 1.1- Padrões observados por CHARLES et alii [3] no escoamento simultâneo de óleo e água em uma tubulação de 1,04 pol de diâmetro. A razão de densidades dos fluidos é aproximadamente unitária e a razão de viscosidades do óleo para a água é 16.8. A velocidade superficial da água foi mantida constante em 0,10 pé/s.

laminar de dois líquidos imiscíveis em um tubo circular com interface plana. Foi notado que com esta configuração a vazão do fluido mais viscoso não era tão favorecida em relação ao escoamento monofásico como na configuração circular concêntrica.

BENTWICH [1-3] foi sem dúvida um dos investigadores que mais estudou o escoamento de dois líquidos imiscíveis em tubulações. Ele desenvolveu a solução analítica do escoamento laminar de ambas as fases (gradiente de pressão constante) para qualquer interface prescrita como um círculo excêntrico ao tubo [1,2]. Muito mais tarde [3] calculou a interface estática que dois fluidos formam levando-se em conta suas tensões superficiais, forças capilares e densidades, e resolveu numericamente o campo de velocidades (regime laminar) para o escoamento dada esta interface.

YU e SPARROW [29] fizeram um trabalho experimental do escoamento de dois líquidos imiscíveis em um duto retangular horizontal e interface plana. Permitiram que o regime de escoamento de cada fase pudesse ser laminar ou turbulento. Observaram que embora a interface nunca fosse totalmente plana, devido à formação de ondulações, estas perturbações em quase nada influem na determinação dos gradientes de pressão quando o escoamento era laminar em ambas as fases.

Um trabalho empírico desenvolvido por HASSON et alii [8] buscou determinar, seguindo uma abordagem mecanicista (fenomenológica), as condições de estabilidade para o escoamento anular de dois líquidos imiscíveis de densidades aproximadamente iguais. Em um trabalho subsequente HASSON e NIR

[9] procuram determinar da mesma maneira a trajetória (ascenso) do núcleo líquido quando este possui densidade inferior ao do anulo.

Mais recentemente OOMS et alii [17] e OLIEMANS et alii [16] aplicaram a teoria da lubrificação para a determinação dos gradientes de pressão em escoamentos em tubulações horizontais onde um núcleo de um óleo muito viscoso é encapsulado por um anulo de água. Além disto este grupo de pesquisadores holandeses desenvolveu com seus parceiros venezuelanos um extenso trabalho experimental para comprovação de seus resultados [28,30].

É na área da Engenharia de Polímeros que se tem dado maior atenção à influência dos parâmetros do escoamento no formato da interface entre dois líquidos imiscíveis (newtonianos ou não). Por outro lado a maioria dos trabalhos publicados são experimentais, e o tratamento matemático dado à justificação dos fenômenos modelados não é totalmente conclusivo. Ademais o escoamento de polímeros fundidos para a fabricação de fibras é normalmente vertical [15], anulando assim a contribuição esperada da diferença da densidade dos fluidos no formato final da interface (estratificação gravitacional).

SOUTHERN e BALLMAN [23] foram dos primeiros pesquisadores a observar e a quantificar a distorção de uma interface inicialmente plana, quando dois fluidos imiscíveis são postos em escoamento. Seu trabalho utilizou dois poliestirenos (A e B) distintos cujas viscosidades aparentes variam com a taxa de cisalhamento a que estão sujeitos

(figura 1.2). A baixas taxas de cisalhamento a viscosidade aparente do poliestireno B é maior que a do poliestireno A, e a altas taxas de cisalhamento a situação se inverte, passando o poliestireno A a ser mais viscoso que o poliestireno B. Obviamente existe uma dada taxa de cisalhamento em que as viscosidades aparentes dos dois poliestirenos são iguais. Seu experimento consistiu em fazer estes poliestirenos escoar sob diferentes taxas de cisalhamento por um tubo capilar vertical, recolhendo o material extrudado resultante do processo para análise. Com este procedimento observou-se que nos experimentos conduzidos a baixas taxas de cisalhamento o poliestireno A (então com viscosidade mais baixa) tendia a encapsular o poliestireno B. A taxas de cisalhamento altas a situação se inverte, com o poliestireno B (desta vez com viscosidade mais baixa) tendendo a encapsular o poliestireno A. A taxa de cisalhamento em que ambos os poliestirenos apresentam a mesma viscosidade aparente a interface plana da configuração inicial dos fluidos foi praticamente mantida. (figura 1.3).

MacLEAN [14] tentou explicar os resultados dos experimentos realizados por SOUTHERN e BALLMAN [23] lançando mão de considerações energéticas para determinar o formato da interface estável entre os dois fluidos através do "Princípio Variacional da Mínima Dissipação Viscosa" (ou "Mínima Geração de Entropia") já utilizado anteriormente na determinação de perfis de velocidade de escoamentos monofásicos totalmente desenvolvidos. Em seu trabalho, MacLEAN estuda o escoamento horizontal bifásico entre placas paralelas sob duas configurações. Uma em que o fluido I, mais viscoso, ocupa o

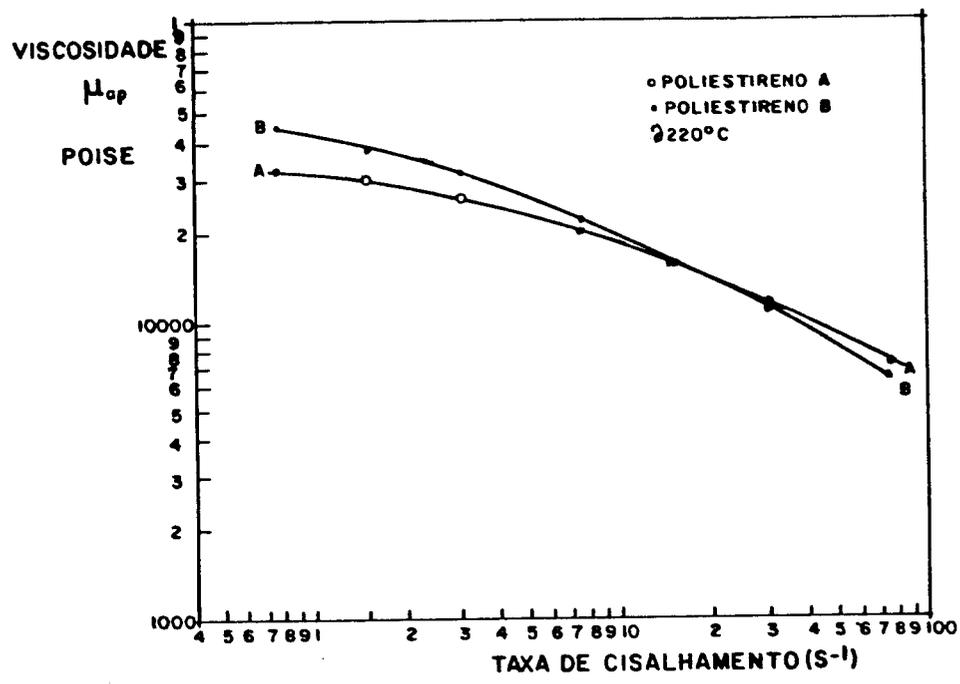


Figura 1.2- Comportamento da viscosidade em função da taxa de cisalhamento para os dois poliestirenos usados nas medições por SOUTHERN & BALLMAN [23].

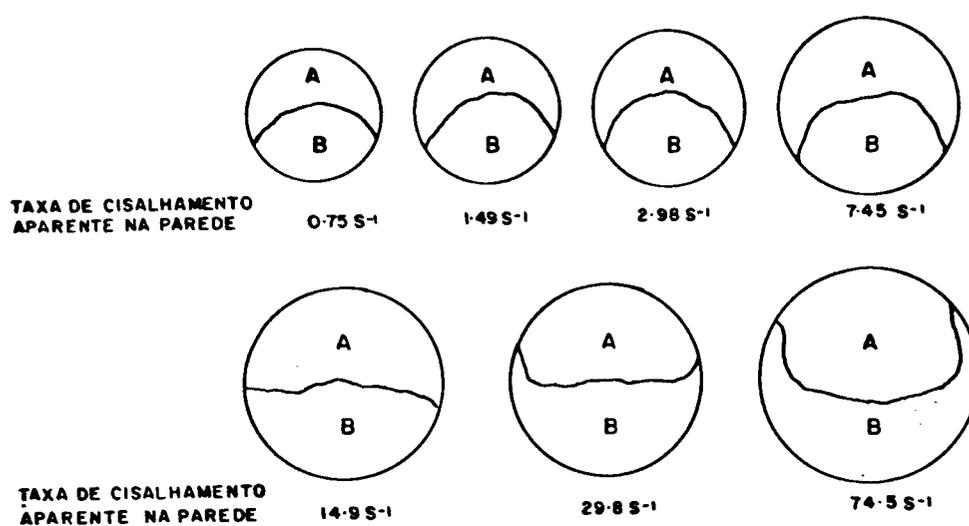


Figura 1.3- Formatos da interface resultantes do escoamento de dois poliestirenos por um capilar. Experimentos de SOUTHERN & BALLMAN [23].

centro do canal e o fluido II, menos viscoso, as bordas, molhando totalmente as duas placas. Outra em que o fluido I ocupa a metade do canal molhando uma placa e o fluido II ocupando a outra metade do canal, molhando a outra placa. (figura 1.4). Finalmente ele prova que a primeira configuração descrita (núcleo de fluido mais viscoso e bordas de menos viscoso) é uma configuração de escoamento energeticamente mais favorável.

EVERAGE [6] fez um trabalho similar a MacLEAN [14], entretanto considerando o escoamento em tubos circulares. Em seu trabalho (no qual não considera a diferença de densidade entre o fluidos) ele mostra que a configuração concêntrica (núcleo de fluido mais viscoso e anulo de fluido menos viscoso) é energeticamente preferencial sobre outras formas de interfaces circulares excêntricas, inclusive a interface plana que lhe é um caso particular.

WILLIAMS [27] mostrou o mesmo que EVERAGE [6] porém de uma forma mais singela e direta, esclarecendo ainda pelos "princípios energéticos" (mínima dissipação viscosa) porque a configuração preferencial no escoamento concêntrico deve ter a fase mais viscosa no núcleo e a menos viscosa no anulo.

Por último JOSEPH et alii [12] provaram informalmente as mesmas constatações de MacLEAN [14], EVERAGE [6] e WILLIAMS [26] e fizeram uma análise de estabilidade linear do perfil de velocidades na configuração concêntrica do escoamento de dois líquidos imiscíveis de viscosidades diferentes e mesma densidade em um tubo circular sujeito a pequenas perturbações.

Do estudo bibliográfico acima restam ainda muitas

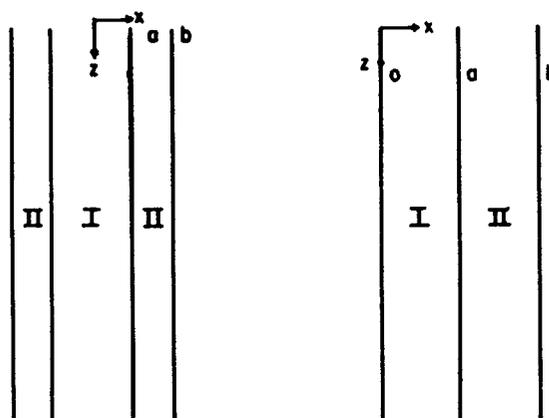


Figura 1.4- Configurações do escoamento entre placas de dois fluidos imiscíveis estudados por MacLEAN [14].

características a serem esclarecidas no escoamento de dois líquidos imiscíveis. Em particular, a influência simultânea da diferença de densidades e viscosidades em um escoamento laminar desenvolvido por um tubo horizontal ainda permanece em aberto. Este é o problema abordado neste trabalho, precedido de um estudo detalhado dos princípios variacionais aplicáveis aos casos limites: ausência de escoamento dos fluidos (Cap. 2), escoamento de um único fluido (Cap. 3), escoamento de dois fluidos de mesma densidade e viscosidade distintas (Cap. 4) e, finalmente, escoamento de dois fluidos de densidades e viscosidades distintas (Cap 5).

1.3- Apresentação do Problema

Considera-se um escoamento de Hagen-Poiseuille simultâneo de dois fluidos incompressíveis e totalmente imiscíveis em um tubo horizontal. Estes fluidos podem ter tanto viscosidades quanto densidades diferentes entre si. O escoamento é plenamente desenvolvido, permanente e puramente axial. Efeitos de tensão superficial são desprezados. A vazão volumétrica de cada fluido é conhecida, ou alternativamente, o gradiente de pressão e a razão das vazões dos fluidos são prescritos. Ver figura 1.5 .

O fenômeno é regido pelas equações de Navier-Stokes para o escoamento axial plenamente desenvolvido em cada fase presente na tubulação (Eqs. 1.1.a-c).

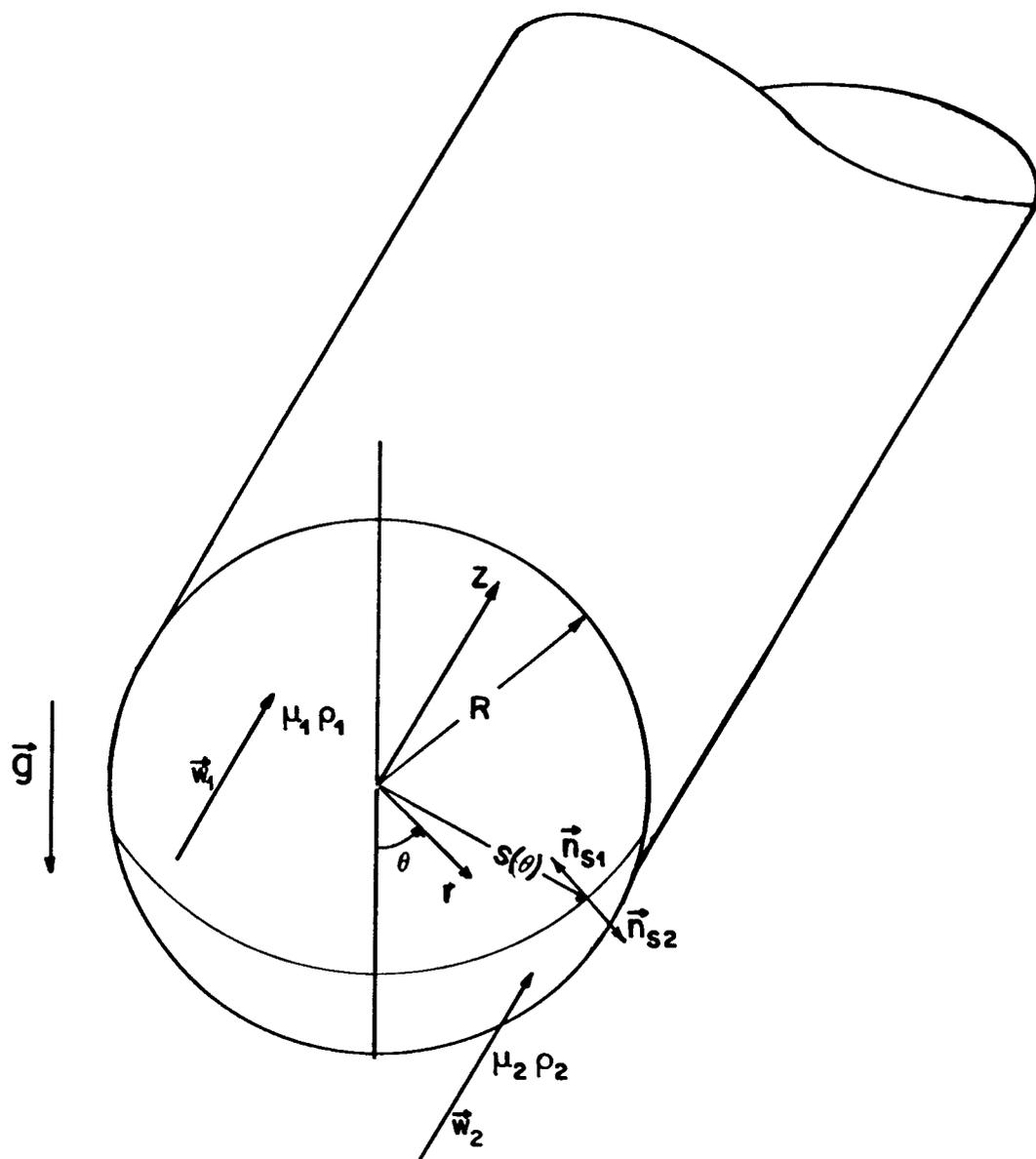


Figura 1.5- Esquema para o problema geral.

$$0 = \mu_1 \cdot \nabla^2 w_1 - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1.1.a)$$

$$0 = \mu_2 \cdot \nabla^2 w_2 - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1.1.b)$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (1.1.c)$$

As condições de contorno são de não deslissamento na parede do tubo e continuidade de tensões normais e velocidades na interface dos fluidos (Eqs 1.2.a-c):

$$r = R \quad : \quad w_k = 0 \quad (k=1,2) \quad (1.2.a)$$

$$r = s(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_s} \\ w_1 = w_2 \end{array} \right. \quad (1.2.b)$$

$$(1.2.c)$$

Para completar-se a formulação do problema fluidodinâmico deve-se ainda definir a configuração dos fluidos no interior da tubulação. Isto é, deve-se especificar a posição

da interface $s(\theta)$ bem como a disposição dos fluidos em relação a ela. Entretanto a interface não pode ser prescrita *a priori* porque depende do campo de velocidades. E, sozinhas, as equações que regem o escoamento nada dizem a seu respeito. Deve-se portanto procurar uma equação ou "princípio" que forneça informações adicionais do fenômeno. No caso, usar-se-á o "Princípio Variacional da Mínima Dissipação Viscosa" acoplado a restrições apropriadas que contemplem a diferença de densidade dos fluidos e às condições particulares do problema.

CAPÍTULO 2

DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDROSTÁTICO DE DOIS FLUIDOS USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL"

A fim de ilustrar o uso de princípios variacionais na determinação da forma da interface entre dois fluidos, estudar-se-á primeiramente o caso limite em que os fluidos encontram-se estáticos no interior de um tubo horizontal.

2.1- Princípio Variacional

Considere-se um tubo circular horizontal de raio R , que contem dois fluidos incompressíveis de densidades diferentes em repouso no seu interior (figura 2.1). Admita-se ainda que a massa total dos fluidos por unidade de comprimento, M , seja dada. O problema de determinar a posição da interface e a disposição dos fluidos é regido pelo seguinte princípio variacional:

A energia potencial do sistema é mínima para uma dada massa do mesmo.

Este princípio, de mínima energia potencial, equivale

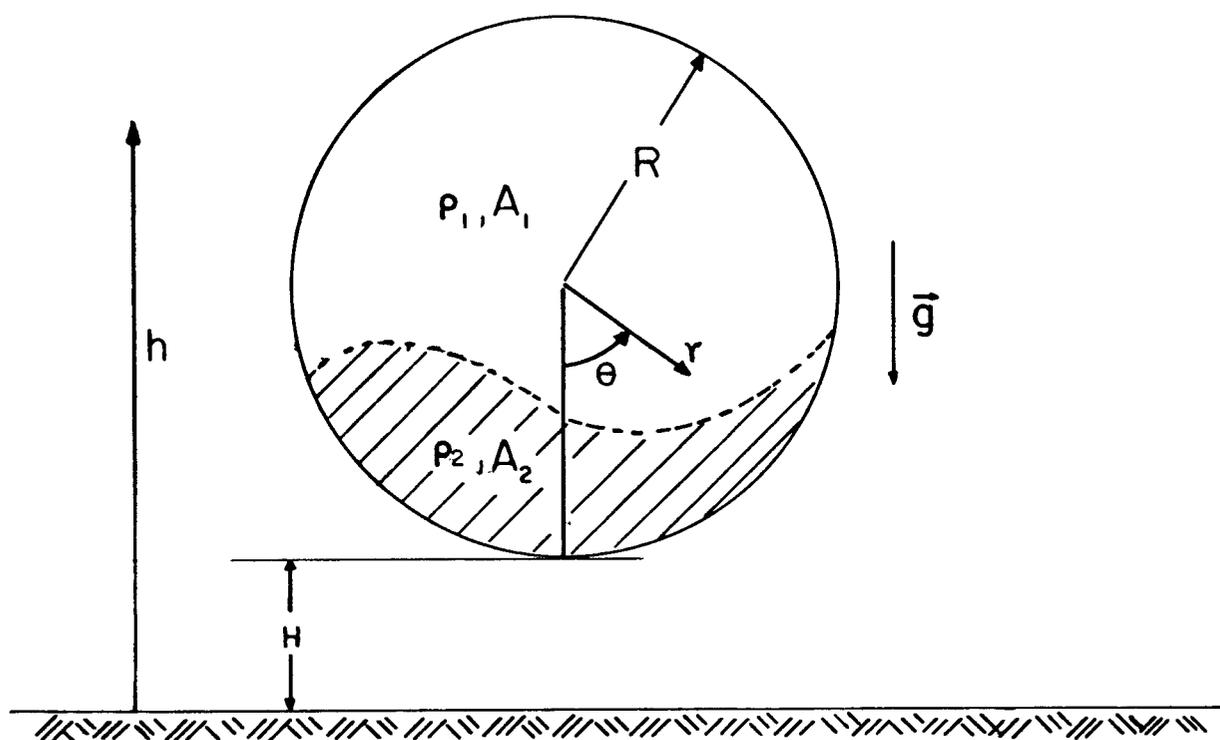


Figura 2.1- Definição de variáveis e parâmetros para o estudo do problema hidrostático de dois fluidos imiscíveis de densidades diferentes no interior de um tubo circular horizontal.

a postular que o centro de massa do sistema estará na posição mais baixa possível dada a massa.

De acordo com este princípio, deve-se minimizar o funcional:

$$E_p = \rho_1 g \int_{A_1} h \, dA + \rho_2 g \int_{A_2} h \, dA \quad (2.1)$$

onde

$$h = H + R - r \cos\theta \quad (2.2)$$

dada a restrição, de massa total conhecida :

$$\rho_1 \int_{A_1} dA + \rho_2 \int_{A_2} dA - M = 0 \quad (2.3)$$

Em coordenadas polares, o funcional (2.1) e a restrição (2.3) se escrevem, respectivamente:

$$E_p = \rho_1 g \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} h \, r \, dr \, d\theta + \rho_2 g \int_0^{2\pi} \int_{s(\theta)}^R h \, r \, dr \, d\theta \quad (2.4)$$

e:

$$\rho_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} r \, dr d\theta + \rho_2 \int_0^{2\pi} \int_{s(\theta)}^R r \, dr d\theta - M = 0 \quad (2.5)$$

Usando as seguintes relações geométricas:

$$\int_{A_1} h \, dA + \int_{A_2} h \, dA = \pi R^2 (H + R) \quad (2.6)$$

$$\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA = \pi R^2 \quad (2.7)$$

e admitindo-se primeiramente que o centro do tubo venha sempre a ser ocupado pelo fluido 1, o funcional (2.4) e a restrição (2.5) se tornam:

$$\frac{E_P}{g} = J_{EP} = (\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} h \, r \, dr d\theta + \rho_2 \pi R^2 (R+H) \quad (2.8)$$

$$(\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} r \, dr d\theta + \rho_2 \pi R^2 - M = 0 \quad (2.9)$$

A fim de minimizar o funcional (2.8) sujeito a restrição (2.9), o método clássico consiste em multiplicar a eq. (2.9) por um fator λ (multiplicador de Lagrange) e somá-la

ao funcional (2.8). Ao fazê-lo, deve-se notar que o valor do funcional (2.8) permanece inalterado, já que a restrição tem valor nulo. Assim, o problema final é:

Minimizar

$$J_{Ep} = (\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} (h+\lambda) r \, dr d\theta + \rho_2 \pi R^2 (R+H+\lambda) - \lambda M \quad (2.10)$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange.

2.2- Equação da Interface

A minimização do funcional (2.10) requer que as derivadas parciais do mesmo com relação às variáveis desconhecidas, \underline{s} e $\underline{\lambda}$ sejam nulas. Note-se que \underline{h} é uma função conhecida de \underline{r} e $\underline{\theta}$, dada pela equação (2.2).

Para a derivação do funcional em relação a \underline{s} , pode-se usar a seguinte forma da Regra de Leibniz:

$$\frac{d}{ds} \int_{f_1(s)}^{f_2(s)} F(r) \, dr = F(f_2) \frac{df_2}{ds} - F(f_1) \frac{df_1}{ds} \quad (2.11)$$

então:

$$\frac{dJ_{Ep}}{ds} = (\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \left[H + R - s(\theta)\cos\theta + \lambda \right] s \, d\theta = 0 \quad (2.12)$$

ou seja:

$$h_s(\theta) = H + R - s(\theta) \cdot \cos\theta = -\lambda \quad (2.13)$$

Além disso devemos ter nesse ponto:

$$\begin{aligned} \frac{d^2J_{Ep}}{ds^2} &= (\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \left[H + R - 2s \cos\theta + \lambda \right] \, d\theta = \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \left[s \cos\theta \right] \, d\theta > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Usando (2.13) em (2.14), conclui-se que:

$$(\rho_1 - \rho_2) \left[h_s - (H + R) \right] > 0 \quad (2.15)$$

isto é; lembrando que o fluido que ocupa o centro geométrico da tubulação é indicado pelo índice 1:

se $h_s > (H+R)$ implica que $\rho_1 > \rho_2$;

e caso contrário:

se $h_s < (H+R)$ implica que $\rho_1 < \rho_2$.

As equações (2.13) e (2.15) com suas observações, mostram que a interface é uma linha reta horizontal com o fluido mais leve acima do mais pesado. (ver a figura 2.2).

2.3- Determinação do Multiplicador de Lagrange

A derivada do funcional (2.10) com respeito a $\underline{\lambda}$, igualada a zero, recupera a restrição (2.9). Assim o valor do multiplicador de Lagrange $\underline{\lambda}$, e conseqüentemente de $\underline{h_s}$, é determinado por essa restrição.

Reescrevendo-a:

$$(\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} r \, dr d\theta + \rho_2 \pi R^2 - M = 0 \quad (2.9)$$

resolvendo a integral em r:

$$(\rho_1 - \rho_2) \int_0^{2\pi} \frac{s^2(\theta)}{2} \, d\theta + \rho_2 \pi R^2 - M = 0 \quad (2.16)$$

e repartindo os limites da integral em θ ;

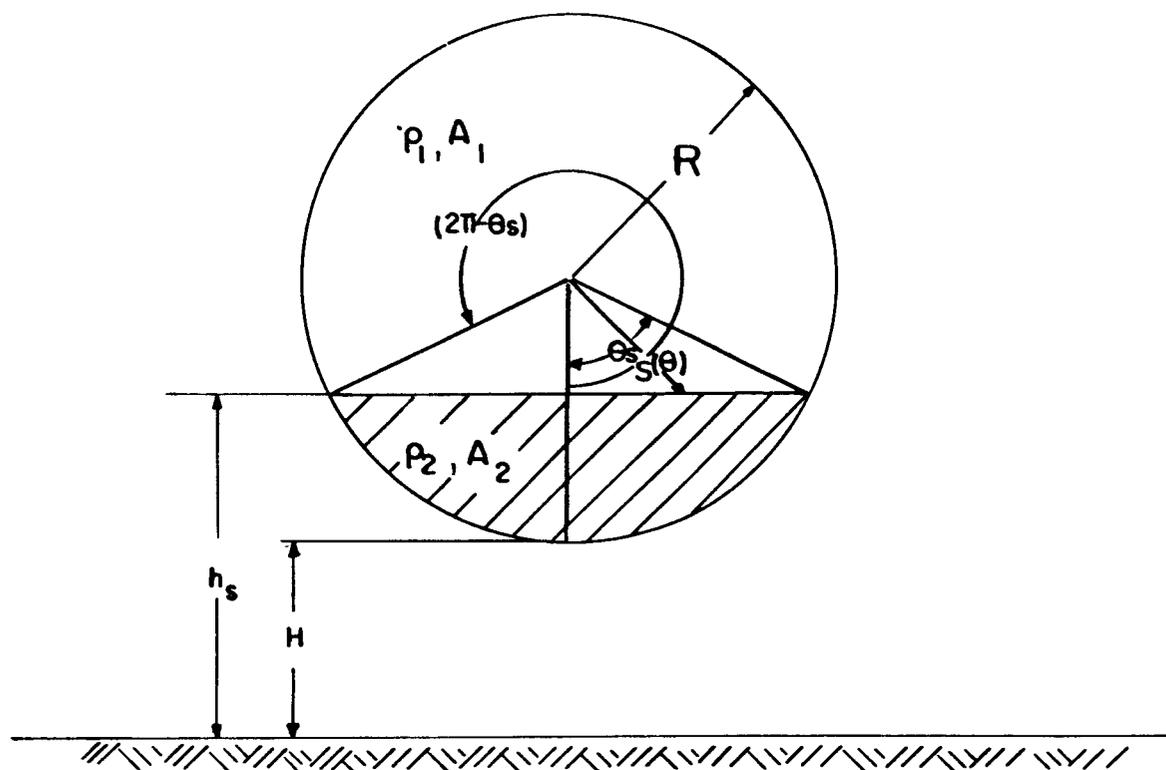


Figura 2.2- Parâmetros que definem o formato da interface no problema hidrostático de dois fluidos no interior de um tubo circular horizontal

$$(\rho_1 - \rho_2) \left[\int_0^{\theta_s} \frac{s^2(\theta)}{2} d\theta + \int_{\theta_s}^{2\pi-\theta_s} \frac{R^2}{2} d\theta + \int_{2\pi-\theta_s}^{2\pi} \frac{s^2(\theta)}{2} d\theta \right] + \rho_2 \pi R^2 - M = 0 \quad (2.17)$$

observando que:

$$0 \leq \theta_s \leq \pi \quad (2.18)$$

pois θ_s é o primeiro azimute em que a interface dos dois fluidos encontra a parede (figura 2.2). Observar ainda que para valores de θ entre θ_s e $(2\pi-\theta_s)$ não existe interface entre os fluidos. Nesta região toma-se $s(\theta) = R$.

Da eq.(2.13) se obtém :

$$s(\theta) = \frac{H + R - h_s}{\cos\theta} \quad (2.19)$$

e:

$$R = \frac{H + R - h_s}{\cos\theta_s} \quad (2.20)$$

Portanto:

$$s(\theta) = - \frac{R \cdot \cos \theta_s}{\cos \theta} \quad (2.21)$$

Substituindo-se a expressão de $s(\theta)$ dada pela eq.(2.21) na eq.(2.17) e resolvendo-se as integrais tem-se:

$$(\rho_1 - \rho_2) R^2 \left[\left(\pi - \theta_s \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2\theta_s \right) \right] + \rho_2 \pi R^2 - M = 0 \quad (2.22)$$

ou, reagrupando-se :

$$\left(\pi - \theta_s \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2\theta_s \right) = \frac{\frac{M}{R^2} - \rho_2 \pi}{\rho_1 - \rho_2} \quad (2.23)$$

A eq.(2.23) determina implicitamente o valor de θ_s . Os valores de h_s e λ podem então ser obtidos diretamente pela eq.(2.13). É muito importante observar que o valor de h_s calculado confirme que o fluido 1 ocupa o centro do tubo. Caso contrário o problema deve ser refeito atribuindo-se o valor inicialmente dado a ρ_1 a ρ_2 e vice-e-versa.

No caso em que h_s for tal que a interface passe pelo centro do tubo a próxima diferenciação da eq.(2.14), indica que o fluido mais leve está acima do mais pesado.

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DE UM ESCOAMENTO MONOFÁSICO DESENVOLVIDO USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPAÇÃO VISCOSA"

O escoamento laminar desenvolvido de um fluido newtoniano incompressível também pode ser estudado a partir de um princípio variacional. Mostrar-se-á que o campo de velocidades e as condições de contorno deste problema são consistentes com o princípio da mínima dissipação viscosa.

O escoamento laminar incompressível plenamente desenvolvido no interior de um conduto (figura 3.1) é regido pela equação de Poisson:

$$0 = \mu_1 \cdot \nabla^2 w_1 + G \quad (3.1.a)$$

onde:

$$G = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.1.b)$$

com a condição de contorno de não deslização na parede:

$$w = 0 \text{ em } S \quad (3.2)$$

O valor de G é normalmente determinado pela imposição da vazão de fluido através da área A (figura 3.1).

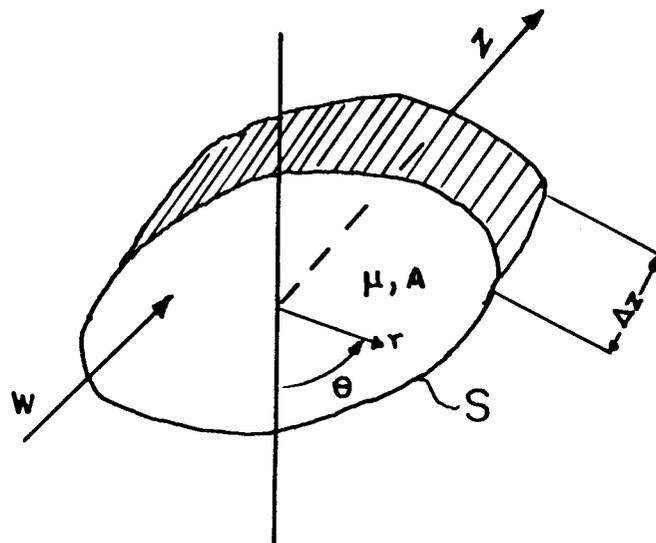


Figura 3.1- Parâmetros do escoamento monofásico desenvolvido em um duto de seção genérica.

3.1- Princípio Variacional

O princípio variacional que rege este problema pode ser expresso nos seguintes termos:

A dissipação viscosa é mínima para uma dada vazão.

Este princípio de mínima dissipação viscosa, aplicado ao volume $V = A \Delta z$ (figura 3.1) se exprime da seguinte maneira:

Minimizar

$$J_{DV} = \int_V \mu \left[\nabla w \right] \cdot \left[\nabla w \right] dV = \Delta z \int_A \mu \left[\nabla w \right]^2 dA \quad (3.3)$$

com a restrição:

$$\int_A w dA - Q = 0 \quad (3.4)$$

Da mesma forma que no capítulo 2 a minimização do funcional (3.3) sujeito à restrição (3.4) é efetuada multiplicando-se a eq. (3.4) por um fator λ (multiplicador de Lagrange) e posteriormente somando o resultado ao funcional (3.3). Fazendo isto o valor do funcional (3.3) permanece inalterado, já que a restrição tem valor nulo.

Assim, obtem-se:

$$J_{DV}(w) = \int_A \left[\mu \left(\nabla w \right)^2 + \lambda w \right] dA - \lambda Q \quad (3.5)$$

Usando coordenadas polares a eq.(3.5) se escreve:

Minimizar

$$J_{DV} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \lambda w \right\} r \, dr d\theta - \lambda Q \quad (3.6)$$

onde $R(\theta)$ é especificada.

3.2- Campo de Velocidades

A minimização do funcional (3.6) requer que suas derivadas em relação às variáveis desconhecidas w e λ , sejam nulas.

A derivada do funcional em relação a w pode ser obtida analisando-se o caso geral:

$$J(w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} F(r, \theta, w, w_r, w_\theta) r \, dr \, d\theta \quad (3.7)$$

A derivada de $J(w)$ em relação a w igualada a zero resulta na seguinte equação de Euler-Lagrange (ver o Apêndice A.1):

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial w_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial w_\theta} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Aplicada ao funcional (3.6), a equação (3.8) resulta em:

$$\lambda r - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.9)$$

ou simplificando:

$$0 = \frac{-\lambda}{2} + \mu \nabla^2 w \quad (3.10)$$

a qual é equivalente à eq.(3.1.a) desde que:

$$\lambda = -2G \quad (3.11)$$

Portanto o princípio variacional pode ser expresso como:

Minimizar

$$J_{DV}(w) = \int_A \left[\mu (\nabla w)^2 - 2Gw \right] dA + 2GQ \quad (3.12)$$

Observação

Quando w satisfaz à eq.(3.1.a), o valor (mínimo) de $J_{DV}(w)$ pode ser obtido em termos de Q e G integrando a eq. (3.12) com a ajuda do teorema da divergência.

Usando para tanto a propriedade

$$(\nabla w)^2 = (\nabla w) \cdot (\nabla w) = \nabla \cdot (w \nabla w) - w \nabla^2 w \quad (3.13)$$

o funcional da eq.(3.12) pode ser escrito

$$J_{DV}(w) = -G \int_A w dA - \int_A w \left[G + \mu \nabla^2 w \right] dA + \mu \int_A \nabla \cdot (w \nabla w) dA + 2G \cdot Q \quad (3.14)$$

O segundo termo do lado direito da eq.(3.14) é nulo se $w = w^s$, onde w^s satisfaz a eq (3.1.a). Usando-se então a restrição (3.4) na primeira integral e o teorema da divergência na terceira obtém-se:

$$J_{DV}(w^s) = -GQ + \oint_S \left[\mu \left(w \nabla w \right) \cdot \vec{n}_s \right] dS + 2GQ \quad (3.15)$$

A integral em S representa a dissipação viscosa na parede do conduto. Esta dissipação é nula em virtude da condição de contorno expressa pela eq.(3.2). Portanto quando $w = w^s$ e $w = 0$ em S, então:

$$J_{DV}(w^s) = GQ \quad (3.16)$$

Que o valor acima é mínimo resulta do fato de que o integrando da eq.(3.6) satisfaz a chamada condição necessária de Legendre para um mínimo, isto é, a segunda derivada de F no funcional geral (3.7) deve ser positiva. Então:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w_r^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial w_r \partial w_\theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial w_\theta^2} = 2\mu r + \frac{2\mu}{r} = 2\mu \left[r + \frac{1}{r} \right] > 0 \quad (3.17)$$

3.3- Determinação do Multiplicador de Lagrange

A derivada do funcional(3.6) em relação a λ recupera a restrição (3.4), de maneira análoga ao capítulo 2. Com o auxílio dessa restrição determina-se o valor do gradiente de

pressão \underline{G} capaz de atender à vazão dada \underline{Q} . Conhecido o valor de \underline{G} tem-se imediatamente o valor de $\underline{\lambda}$, já que ambos são interligados pela eq.(3.11).

Alternativamente, pode-se dar o valor de \underline{G} (logo de $\underline{\lambda}$) e obter o valor resultante de \underline{Q} .

Conclui-se, portanto, que o escoamento laminar desenvolvido de um fluido newtoniano incompressível é caracterizado por um mínimo valor da dissipação viscosa para uma dada vazão.

Uma interpretação física para o "Princípio da Mínima Dissipação Viscosa" é que o perfil de velocidades que minimiza o funcional da eq.(3.5) é aquele que minimiza a perda de carga por unidade de comprimento do conduto (gradiente de pressão) quando se tem uma vazão imposta. Isto pode ser concluído da eq. (3.16). Ou então de maneira inversa é aquele perfil de velocidades cuja integral na área de escoamento (i.e. a vazão do fluido) é maximizada quando se tem um gradiente de pressão prescrito. E este perfil de velocidades, conforme ficou provado, é aquele que obedece as equações de Navier-Stokes para o escoamento axial plenamente desenvolvido.

3.4- Método de Minimização

Uma interessante constatação [6, 12] relativa à solução da equação de Euler-Lagrange (3.10) satisfazendo à condição de contorno (3.2), pode ser feita se decomposermos a solução procurada deste problema na forma:

$$w(r, \theta) = w_p(r, \theta) + w_H(r, \theta) \quad (3.18)$$

onde w_p e w_H satisfazem:

$$\mu \nabla^2 w_p = -G \quad (3.19)$$

$$\nabla^2 w_H = 0 \quad (3.20)$$

Então o funcional (3.5) pode ser escrito:

$$\begin{aligned} J_{DV}(w) - 2GQ &= \\ &= \int_A \left[\mu \left(\nabla w \right)^2 - 2Gw \right] dA = \\ &= \int_A \left[\mu \left(\nabla(w_H + w_p) \right) \cdot \left(\nabla(w_H + w_p) \right) - 2Gw \right] dA = \\ &= \int_A \left[2\mu \nabla w \cdot \nabla w_p + \mu \left(\nabla w_H \right)^2 - \mu \left(\nabla w_p \right)^2 - 2Gw \right] dA = \\ &= 2 \int_A \left[\mu \nabla w \cdot \nabla w_p - Gw \right] dA + \int_A \mu \left[\left(\nabla w_H \right)^2 - \left(\nabla w_p \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando a propriedade:

$$\nabla w \cdot \nabla w_p = \nabla(w \nabla w_p) - w \nabla^2 w_p \quad (3.22)$$

então:

$$J_{DV} - 2GQ = 2 \int_A \mu \nabla \cdot (w \nabla w_P) dA - 2 \int_A w (\mu \nabla^2 w_P + G) dA + \int_A \mu \left[(\nabla w_H)^2 - (\nabla w_P)^2 \right] dA \quad (3.23)$$

A primeira integral dessa expressão é nula, pela aplicação do teorema da divergência e pelo fato de que w deve obedecer à condição (3.2). A segunda integral também é nula em virtude de (3.19). Portanto:

$$J_{DV} = \int_A \mu (\nabla w_H)^2 dA - \int_A (\nabla w_P)^2 dA + 2GQ \quad (3.24)$$

Definindo:

$$J_H = \int_A \mu (\nabla w_H)^2 dA \geq 0 \quad (3.25)$$

$$J_P = - \int_A (\nabla w_P)^2 dA + 2GQ \quad (3.26)$$

então:

$$J_{DV} = J_H + J_P \geq J_P \quad (3.27)$$

Agora w_H (e portanto J_H) dependem da escolha de w_P .

visto que a solução $w(r, \theta)$ é única. Além disso, J_{DV} já está nas condições acima passando por um mínimo (de valor GQ), uma vez que a equação de Euler-Lagrange (3.10) é satisfeita (basta somar as equações (3.19) e (3.20)), bem como é atendida a condição de contorno (3.2).

Por estas razões, e pelo fato de os funcionais J_H e J_P serem formas quadráticas, a expressão acima sugere então um método de minimização do funcional J_{DV} baseado na escolha de $w_P(r, \theta)$ tal a minimizar J_P , obtendo-se em seguida $w_H(r, \theta)$ e J_H .

A escolha de w_P que torna J_P mínimo é aquela que satisfaz a condição de contorno (3.2). Neste caso $w_H \equiv 0$ e J_H tem valor nulo, que é o seu mínimo absoluto. Isso se aplica a um duto de seção arbitrária. Como ilustração, considere-se o caso de um tubo circular. A seleção de uma função contínua w_P que atende à condição (3.2) conduz a:

$$w_P(r) = \frac{G}{4\mu} \left(R^2 - r^2 \right) \quad (3.28)$$

$$w_H = 0 \quad (3.29)$$

Nesse caso:

$$\begin{aligned}
 J_P &= - \int_A \left[(\nabla w_P)^2 \right] dA + 2GQ = \\
 &= \frac{\pi G^2}{4\mu} \int_0^R r^3 dr + 2GQ = \frac{\pi G^2 R^4}{4\mu} + 2GQ \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

$$J_H = 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
 GQ &= G \int_A w dA = \\
 &= \frac{\pi G^2}{2\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr + 2GQ = \\
 &= \frac{\pi G^2 R^4}{8\mu} \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

de onde se conclui que:

$$J_{DV} = J_P = GQ \quad (3.33)$$

O método de minimização acima será empregado nos capítulos 4 e 5. Ele se mostrará particularmente útil na determinação da forma da interface dos fluidos.

CAPÍTULO 4

DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDRODINÂMICO DE DOIS FLUIDOS DE MESMA DENSIDADE USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPACÃO VISCOSA"

Quando dois fluidos incompressíveis de mesma densidade e com viscosidades distintas escoam juntos no interior de um tubo horizontal, surge o problema de determinar simultaneamente:

- a forma da interface entre os fluidos;
- a disposição dos fluidos em relação à interface;
- o campo de velocidades.

Mostrar-se-á, no que segue, como tal determinação pode ser feita através do princípio variacional da mínima dissipação viscosa, no caso do escoamento laminar desenvolvido. Isto é, a aplicação desse princípio nos permite recuperar as equações (1.1.a,b) e as condições (1.2.a,b,c) que regem o problema, como também determinar a forma da interface e respectiva disposição dos fluidos.

4.1- Princípio Variacional

Considerando-se um duto de seção transversal

arbitrária especificada (fig. 4.1), o princípio variacional da mínima dissipação viscosa aplicável ao escoamento bifásico desenvolvido pode ser enunciado:

A dissipação viscosa é mínima para uma dada vazão total e uma dada área seccional de um dos fluidos.

Considerando-se a descontinuidade ocorrendo na viscosidade, o enunciado acima se exprime da seguinte maneira:

Minimizar

$$J_{DV}(w_1, w_2, s(\theta)) = \int_{A_1} \mu_1 \left[\nabla w_1 \right]^2 dA + \int_{A_2} \mu_2 \left[\nabla w_2 \right]^2 dA \quad (4.1)$$

com as restrições:

$$\int_{A_1} w_1 dA + \int_{A_2} w_2 dA - Q = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_{A_2} dA - A_2 = 0 \quad (4.3)$$

A restrição relativa à área seccional ocupada por um dos fluidos é necessária para se garantir a presença de ambos no duto (escoamento bifásico). Caso contrário, a minimização do

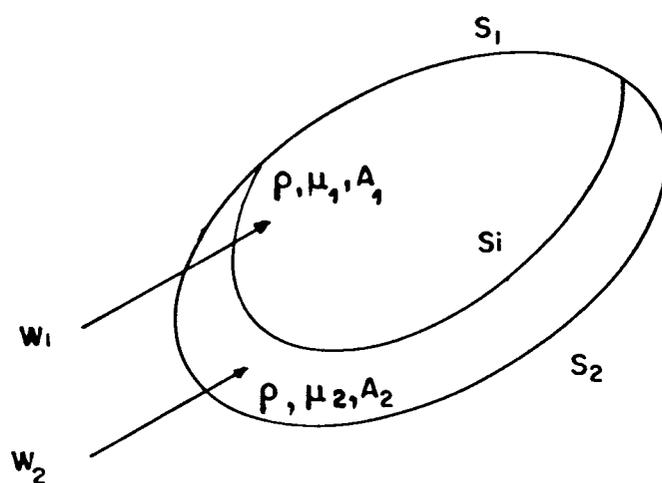


Figura 4.1- Parâmetros do escoamento desenvolvido de dois fluidos imiscíveis por um duto de seção genérica.

funcional (4.1), restrito apenas pela equação (4.2) implicaria na exclusão do fluido mais viscoso do escoamento. Desta forma o problema se reduziria àquele estudado no capítulo 3, em que um único fluido (no caso o menos viscoso) escoava por um duto genérico (escoamento monofásico).

Note-se ainda que as restrições expressas pelas equações (4.2) e (4.3) foram escolhidas com a única razão de facilitar a resolução matemática do problema. A rigor, quaisquer outras restrições que garantam o escoamento bifásico poderiam ter sido utilizadas, por exemplo, as vazões individuais de cada fluido, pois o problema estaria equivalentemente formulado.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange já mencionado nos capítulos precedentes a minimização do funcional (4.1) com as restrições (4.2) e (4.3) equivale a minimizar:

$$J_{DV}(w_1, w_2, s(\theta)) = \int_{A_1} \left[\mu_1 (\nabla w_1)^2 + \lambda_1 w_1 \right] dA + \int_{A_2} \left[\mu_2 (\nabla w_2)^2 + \lambda_1 w_2 + \lambda_3 \right] dA - \lambda_1 \cdot Q - \lambda_3 \cdot A_2 \quad (4.4)$$

Note-se que apenas uma das áreas seccionais $[A_2]$ foi dada, já que a área restante fica então automaticamente determinada pela seção previamente especificada do duto.

4.2- Determinação do Campo de Velocidades

O funcional (4.4) tem a seguinte forma em coordenadas polares:

$$J_{DV} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^s F_1(r, \theta, w_1, w_{1r}, w_{1\theta}) + \int_0^s F_2(r, \theta, w_2, w_{2r}, w_{2\theta}) \right\} r \, dr \, d\theta \quad (4.5)$$

Exprimindo o diferencial desse funcional com relação a w_1 e w_2 , mantidos constantes s , λ_1 , λ_2 , e igualando-se a zero obtem-se uma equação de Euler-Lagrange em cada domínio $[A_1$ e $A_2]$ e as respectivas condições de contorno. Este procedimento é detalhado no anexo 1, e seus resultados são análogos aos do escoamento monofásico, exceto pelas condições de contorno que devem ser aplicadas à interface entre os fluidos. Usando-se as funções F_1 e F_2 associadas ao funcional (4.4), as equações de Euler-Lagrange assim obtidas se tornam:

$$0 = \mu_1 \cdot \nabla^2 w_1 + \frac{\lambda_1}{2} \quad (4.6)$$

$$0 = \mu_2 \cdot \nabla^2 w_2 + \frac{\lambda_2}{2} \quad (4.7)$$

e as condições de contorno são:

$$r = R \quad ; \quad w_k = 0 \quad (k=1,2) \quad (4.8.a)$$

$$r = s(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_s} \\ w_1 = w_2 \end{array} \right. \quad (4.8.b)$$

$$w_1 = w_2 \quad (4.8.c)$$

Vemos que esses resultados são inteiramente equivalentes às equações que regem o escoamento (1.1.a,b) e condições de contorno (1.2.a-c), desde que:

$$\lambda_1 = -2G = 2 \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.9)$$

É útil também determinar-se o valor mínimo de J_{DV} , isto é o valor do funcional (4.4) quando $w_1 = w_1^s$ e $w_2 = w_2^s$ são soluções do problema acima. Usando novamente a propriedade:

$$\left[\nabla w_k \right]^2 = \nabla \cdot \left[w_k \nabla w_k \right] - \nabla^2 w_k \quad (k=1,2) \quad (4.10)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} J_{DV}(w_1, w_2) = & -G \int_{A_1} w_1 \, dA - G \int_{A_2} w_2 \, dA - \mu_1 \int_{A_1} \left[G + \mu_1 \nabla^2 w_1 \right] \, dA - \\ & \int_{A_2} \left[G + \mu_2 \nabla^2 w_2 \right] \, dA + \mu_1 \int_{A_1} \nabla \cdot \left[w_1 \nabla w_1 \right] \, dA + \\ & \mu_2 \int_{A_2} \nabla \cdot \left[w_2 \nabla w_2 \right] \, dA + \lambda_3 \int_{A_2} \, dA - \lambda_3 A_2 + 2GQ \quad (4.11) \end{aligned}$$

Com a ajuda das restrições (4.2,3), e quando w_1, w_2 satisfazem (4.6,7) obtem-se:

$$J_{DV}(w_1^s, w_2^s) = GQ + \mu_1 \int_{A_1} \nabla \cdot (w_1 \nabla w_1) dA + \mu_2 \int_{A_2} \nabla \cdot (w_2 \nabla w_2) dA \quad (4.12)$$

Usando-se o teorema da divergência nas integrais acima, obtem-se:

$$J_{DV}(w_1^s, w_2^s) = GQ + \mu_1 \int_{S_1} w_1 \nabla w_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \mu_2 \int_{S_2} w_2 \nabla w_2 \cdot \vec{n}_2 dS$$

$$\int_{S_i} (w_1 \mu_1 \nabla w_1 \cdot \vec{n}_1 + w_2 \mu_2 \nabla w_2 \cdot \vec{n}_2) dS \quad (4.13)$$

ou

$$J_{DV} = GQ + \mu_1 \int_{S_1} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} dS + \mu_2 \int_{S_2} w_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_2} dS$$

$$\int_{S_i} \left(w_1 \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} - w_2 \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_1} \right) dS \quad (4.14)$$

Pela aplicação das condições (4.8.a,b,c) essas integrais se anulam, portanto:

$$J_{DV}(w_1^s, w_2^s) = GQ \quad (4.15)$$

como no caso monofásico. Deve-se lembrar entretanto que embora

esse resultado seja válido qualquer que seja a forma da interface $s(\theta)$, esta de fato intervém no campo de velocidades e conseqüentemente no valor de G obtido para uma dada vazão Q . Portanto, a minimização de J_{DV} ainda deve ser feita com respeito a $s(\theta)$.

4.3- Determinação da Interface entre os Fluidos

Admitir-se-á, por simplicidade, que o duto pelo qual os fluidos estão escoando seja um tubo circular (figura 4.2). O método de obtenção da forma da interface emprega o procedimento adotado na seção 3.4. Assim, decompõe-se a solução do problema (4.6-8) na forma:

$$w_k(r, \theta) = w_{H,k}(r, \theta) + w_{P,k}(r, \theta) \quad (4.16)$$

onde

$$\nabla^2 w_{H,k} = 0 \quad (4.17)$$

$$\mu_k \nabla^2 w_{P,k} = -G \quad (4.18)$$

Admita-se também que, para qualquer direção \vec{n}_s , $w_{P,k}(r, \theta)$ satisfaça (4.8.b), isto é:

$$\mu_1 \frac{\partial w_{P,1}}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_{P,2}}{\partial n_s} \quad (4.19)$$

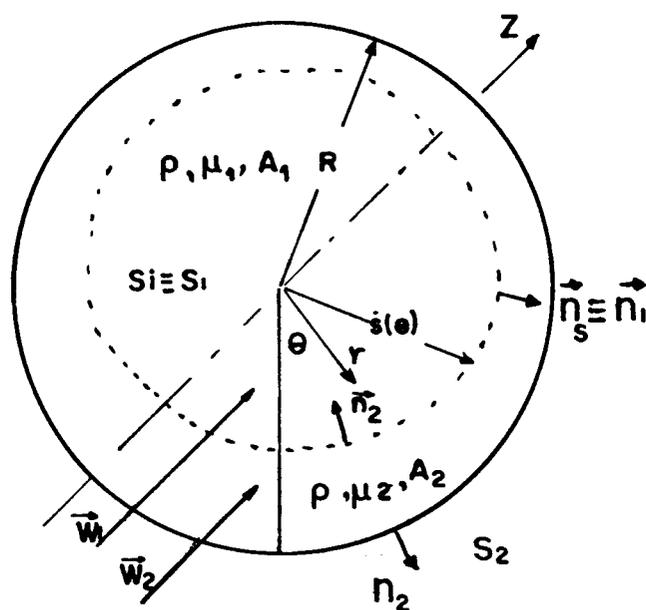


Figura 4.2- Definição de parâmetros no estudo do escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades iguais e viscosidades diferentes por um tubo horizontal.

Com essa decomposição o funcional (4.4), com a identidade (4.9) pode ser escrito:

$$\begin{aligned}
 J_{DV}(w_1, w_2, s) = & \\
 & 2 \int_{A_1} \left\{ \mu_1 [\nabla w_1 \cdot \nabla w_{P,1}] - G w_1 \right\} dA + \int_{A_1} \mu_1 \left[(\nabla w_{H,1})^2 - (\nabla w_{P,1})^2 \right] dA + \\
 & 2 \int_{A_2} \left\{ \mu_2 [\nabla w_2 \cdot \nabla w_{P,2}] - G w_2 \right\} dA + \int_{A_2} \mu_2 \left[(\nabla w_{H,2})^2 - (\nabla w_{P,2})^2 \right] dA + \\
 & \lambda_3 \int_{A_2} dA + 2GQ - \lambda_3 A_2 \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Usando-se a propriedade:

$$\nabla w_k \cdot \nabla_{P,k} = \nabla \cdot (w_k \nabla w_{P,k}) - w_k \nabla^2 w_{P,k} \tag{4.21}$$

vem:

$$\begin{aligned}
 J_{DV}(w_1, w_2, s) = & 2 \int_{A_1} \mu_1 \nabla \cdot (w_1 \nabla w_{P,1}) dA + 2 \int_{A_2} \mu_2 \nabla \cdot (w_2 \nabla w_{P,2}) dA - \\
 & 2 \int_{A_1} w_1 (\mu_1 \nabla^2 w_{P,1} + G) dA - 2 \int_{A_2} w_2 (\mu_2 \nabla^2 w_{P,2} + G) dA + \\
 & \lambda_3 \int_{A_2} dA + 2G \cdot Q - \lambda_3 A_2 \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

As duas primeiras integrais dessa expressão são nulas, pela aplicação do teorema da divergência e pelo fato de que w_k satisfaz (4.8.a) e $w_{P,k}$ satisfaz (4.19). A terceira e a quarta integrais também são nulas em virtude de (4.18). Portanto:

$$\begin{aligned}
 J_{DV}(w_1, w_2, s) = & \int_{A_1} \mu_1 \left(\nabla w_{H,1} \right)^2 dA + \int_{A_2} \mu_2 \left(\nabla w_{H,2} \right)^2 dA - \\
 & \int_{A_1} \mu_1 \left(\nabla w_{P,1} \right)^2 dA - \int_{A_2} \mu_2 \left(\nabla w_{P,2} \right)^2 dA + \\
 & \lambda_s \int_{A_2} dA + 2G \cdot Q - \lambda_s A_2
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Definindo-se :

$$J_H \equiv \int_{A_1} \mu_1 \left(\nabla w_{H,1} \right)^2 dA + \int_{A_1} \mu_2 \left(\nabla w_{H,2} \right)^2 dA \geq 0 \tag{4.24}$$

$$J_P \equiv - \int_{A_1} \mu_1 \left(\nabla w_{P,1} \right)^2 dA - \int_{A_2} \mu_2 \left(\nabla w_{P,2} \right)^2 dA + \lambda_s \int_{A_2} dA + 2G \cdot Q - \lambda_s A_2 \tag{4.25}$$

então a eq. (4.23) pode ser reescrita:

$$J_{DV} = J_H + J_P \geq J_P \quad (4.27)$$

Seguindo o método de minimização proposto na seção 3.4 procura-se $w_{P,k}(r,\theta)$ tal a minimizar J_P . Para tanto é necessário que $w_{P,k}(r,\theta)$ satisfaça à condição de não escorregamento na parede (4.8.a). No caso de um tubo circular, isto conduz a:

$$w_{P,1} = \frac{G}{4\mu_1} \left[R^2 - r^2 \right] \quad (4.27)$$

$$w_{P,2} = \frac{G}{4\mu_2} \left[R^2 - r^2 \right] \quad (4.28)$$

Note-se que estas funções também satisfazem o requisito prévio (4.19), isto é a tensão de cisalhamento associada a $w_{P,k}$ é contínua. Observe-se também que a restrição presente no funcional (4.25) não altera o valor de J_P , já que a restrição tem valor nulo de acordo com (4.3).

Com o auxílio das expressões (4.27,28) o funcional J_P se torna, em coordenadas polares:

$$J_P = \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} \left[-\frac{G^2 r^2}{4\mu_1} \right] r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{s(\theta)}^R \left[-\frac{G^2 r^2}{4\mu_2} + \lambda_s \right] r dr d\theta + 2G \cdot Q - \lambda_s A_2 \quad (4.29)$$

Para se minimizar J_p com respeito a $s(\theta)$ aplica-se a regra de Leibniz, eq.(2.7). Logo :

$$\frac{\partial J_p}{\partial s} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{G^2 s(\theta)^2}{4 \mu_1} + \frac{G^2 s(\theta)^2}{4 \mu_2} - \lambda_s \right] s \, d\theta = 0 \quad (4.30)$$

ou seja:

$$s(\theta) = \frac{2}{G} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_s}{\left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right]}} = \text{const.} \quad (4.31)$$

Além disso devemos ter, nesse ponto:

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial s^2} = 2\pi \left[\frac{3G^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] s^2 - \lambda_s \right] > 0 \quad (4.32)$$

Usando (4.31) em (4.32) conclui-se que:

$$\lambda_s = \frac{G^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] s^2 > 0 \quad (4.33)$$

isto é:

$$\mu_2 < \mu_1 \quad (4.34)$$

Portanto, a fim de minimizar J_p , a interface deve ser um círculo concêntrico ao tubo, com o fluido mais viscoso sendo encapsulado pelo menos viscoso (ver figura 4.3), em acordo com as observações experimentais. O valor do raio s , e portanto de λ_g , é obtido extremizando-se J_p em relação a λ_g , o que recai na restrição (4.3). Logo:

$$s = \sqrt{R^2 - \frac{A_2}{\pi}} \quad (4.35)$$

Uma vez que $\lambda_g > 0$, conclui-se da eq. (4.29) que a minimização do funcional J_p implica a minimização da área do fluido menos viscoso.

Obtida a interface e a disposição dos fluidos, podemos agora determinar $w_H(r, \theta)$ e J_H . Conclui-se facilmente que:

$$w_{H,2} = 0 \quad (4.36)$$

$$w_{H,1} = \frac{G}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] \left[R^2 - s^2 \right] \quad (4.37)$$

satisfazendo a eq. (4.17) e as condições de contorno do problema. Consequentemente:

$$J_H = 0 \quad (4.38)$$

que é o seu valor mínimo absoluto.

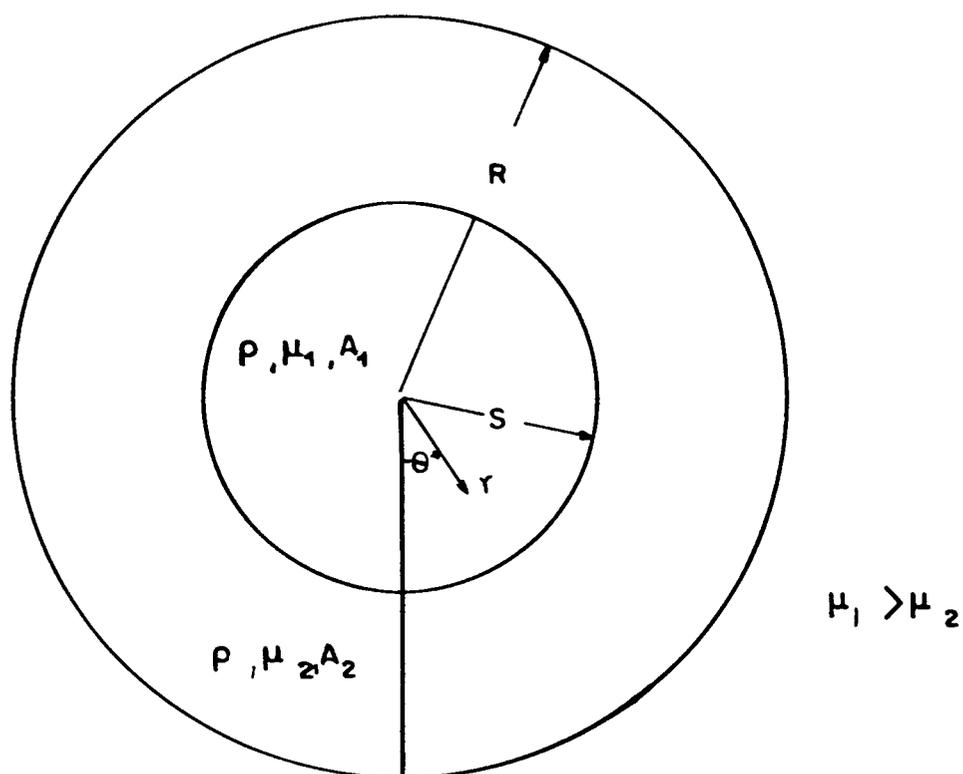


Figura 4.3- Interface circular concêntrica resultante no escoamento laminar desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades iguais e viscosidades diferentes ($\mu_1 < \mu_2$) por um tubo horizontal.

A solução final deste campo de velocidades é pois :

$$w_1 = \frac{G}{4} \left[\frac{1}{\mu_1} (R^2 - r^2) + \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) (R^2 - s^2) \right] \quad (4.39)$$

$$w_2 = \frac{G}{4\mu_2} (R^2 - r^2) \quad (4.40)$$

É importante notar que o procedimento de minimização adotado requer que as funções $w_{p,k}$ satisfaçam a equação de Euler-Lagrange (4.18) e a condição de não escorregamento na parede (4.8.a). Isso resolve o problema global, a menos do requisito de continuidade na interface (4.8.b), tarefa essa assegurada por $w_{H,k}$.

4.4- Interpretação do Princípio da Mínima Dissipação Viscosa no Caso do Escoamento Simultâneo de Dois Fluidos

No caso do escoamento monofásico foi visto que o "princípio da mínima dissipação viscosa" minimiza o gradiente de pressão dada uma vazão ou, inversamente, maximiza a vazão dado um gradiente pressão.

Foi visto anteriormente que a aplicação do "princípio da mínima dissipação viscosa" ao escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis em uma tubulação horizontal leva, no caso das densidades destes fluidos serem as mesmas a configurações

concêntricas de interface. É interessante interpretar fisicamente o resultado de que o fluido mais viscoso seja encapsulado pelo menos viscoso.

As restrições que foram impostas à minimização do funcional dissipação viscosa foram: a vazão total e a área de escoamento ocupada pelo fluido menos viscoso dadas. Tome-se então por exemplo quaisquer dois líquidos de densidades iguais e viscosidades diferentes. A vazão total, obtida pela integração dos perfis de velocidade eqs. (4.39) e (4.40) é facilmente obtida como:

$$Q = 2\pi \left[\int_0^s w_1 r dr + \int_s^R w_2 r dr \right] = \frac{\pi G}{8} \left[\frac{s^4}{\mu_1} + \frac{R^4 - s^4}{\mu_2} \right] \quad (4.41)$$

No caso do fluido menos viscoso estar no núcleo do tubo a sua área ocupada é dada por:

$$A_2 = \pi s^2 \quad (4.42)$$

e no caso de estar na periferia sua área ocupada é dada por:

$$A_2 = \pi (R^2 - s^2) \quad (4.43)$$

onde s é o raio da interface e R o raio do tubo.

Reescrevendo a eq.(4.41) tem-se:

$$Q = \frac{\pi GR^4}{8\mu_2} \left[1 + \left(\frac{s}{R} \right)^4 \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \right] \quad (4.44)$$

Definindo-se:

$$F \equiv \left[1 + \left(\frac{s}{R} \right)^4 \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \right] \quad (4.45)$$

a eq(4.44) se simplifica para:

$$Q = \left(\frac{\pi GR^4}{8\mu_2} \right) F \quad (4.46)$$

Observa-se assim pela eq(4.46) que quando a vazão total Q é dada, o gradiente de pressão G (e consequentemente a dissipação viscosa) será mínimo quando o fator F for máximo.

A figura 4.4 mostra a relação do fator F , (razão de viscosidades dos fluidos, μ_1/μ_2 , igual a 100) com a área adimensional ocupada pelo fluido menos viscoso \hat{A}_2 (ver a sua definição no capítulo 7). Pode-se verificar que, independentemente do valor de \hat{A}_2 , o valor de F é sempre superior na curva que representa o encapsulamento do fluido mais viscoso pelo menos viscoso. Conclui-se pois que como ambas as curvas representam extremos do funcional dissipação viscosa, o encapsulamento do fluido mais viscoso representa o seu mínimo, sendo então esta a configuração que o princípio prevê que os fluidos irão assumir.

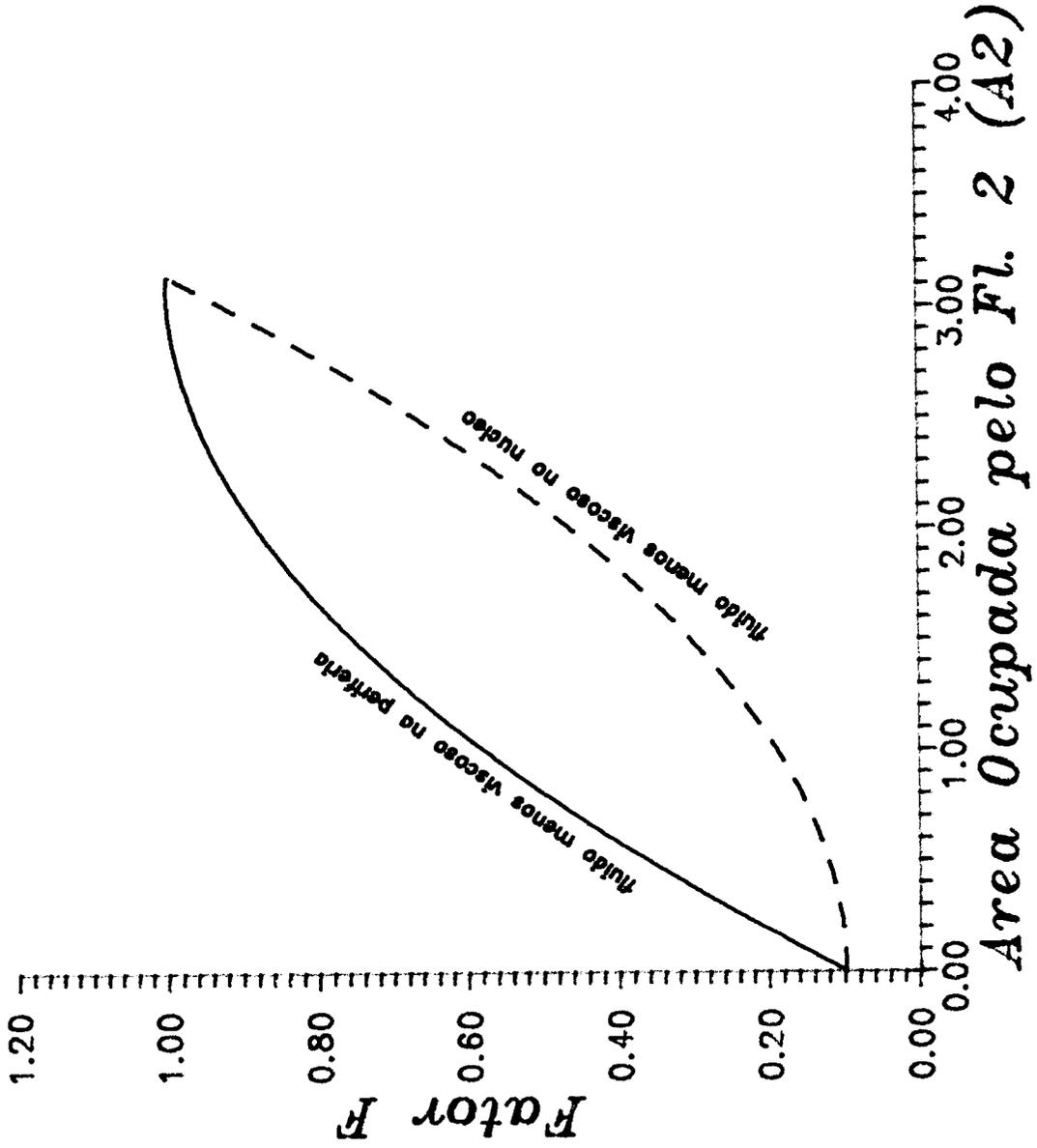


Figura 4.4
Fator F X Area Ocupada pelo Fluido Menos Viscoso
Comparacao entre as Duas Configuracoes Concentricas

4.5- Determinação dos Multiplicadores de Lagrange

Quando o gradiente de pressão ($G = -\partial P/\partial z$) e a posição (raio) da interface (\underline{z}) são dados, os valores dos multiplicadores de Lagrange (λ_1 e λ_3) podem ser obtidos diretamente das eqs. (4.9) e (4.31). Os valores das vazões dos fluidos (Q_1 e Q_2) podem então ser calculados pela integração dos perfis de velocidades que resolvem as equações de Euler-Lagrange (4.6) e (4.7) sujeitas às condições de contorno das eqs. (4.8.a-c).

Entretanto, o problema prático é normalmente posto em termos de vazões requeridas e gradiente de pressão e posição da interface incógnitos. A solução para este caso é iterativa. Uma maneira para a sua resolução é apresentada no algoritmo do quadro 4.1. .

As variáveis adimensionais utilizadas no algoritmo mencionado estão definidas no capítulo 7.

ALGORITMO PARA O CÁLCULO DO GRADIENTE DE PRESSÃO E RAIOS DA INTERFACE CONCÊNTRICA QUE SATISFAZEM UM PAR DE VAZÕES DADAS.

INÍCIO

DADOS $Q_1, Q_2, \mu_1, \mu_2, R$

$D \leftarrow Q_1/Q_2$

$G_a \leftarrow 1.$

CALCULA $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$

ARBITRA \hat{R}

CALCULA $\hat{Q}_{1,c}, \hat{Q}_{2,c}$

$D_c \leftarrow \hat{Q}_{1,c} / \hat{Q}_{2,c}$

ENQUANTO $|D_c - D| > \text{tolerância}$

CORRIGE \hat{R}

CALCULA $\hat{Q}_{1,c}, \hat{Q}_{2,c}$

$D_c \leftarrow \hat{Q}_{1,c} / \hat{Q}_{2,c}$

FIM-ENQUANTO

CALCULA $G = f(Q_1, \hat{Q}_{1,c} \text{ e propriedades})$

CALCULA $\hat{\lambda}_g = f(\hat{R}_s)$

CALCULA $\hat{R}_s = f(\hat{R}_s, R)$

CALCULA $\lambda_g = f(\hat{\lambda}_g \text{ e propriedades})$

RETORNA propriedades, $Q_1, Q_2, G, R_s, \lambda_g,$
 $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{R}_s, \hat{\lambda}_g$

FIM

Quadro 4.1- Algoritmo proposto para a resolução do gradiente de pressão e do raio da interface do escoamento bifásico concêntrico quando a vazões dos fluidos são prescritas.

CAPÍTULO 5

DETERMINAÇÃO DA INTERFACE NO PROBLEMA HIDRODINÂMICO DE DOIS FLUIDOS DE DENSIDADES E VISCOSIDADES DIFERENTES USANDO O "PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISSIPACÃO VISCOSA"

Quando dois fluidos incompressíveis, escoando juntos no interior de um tubo horizontal, possuem não apenas viscosidades distintas como também diferentes densidades, o centro de gravidade da mistura não estará mais forçosamente no centro do tubo como no caso de densidades iguais. Sua posição dependerá, presumivelmente, dos parâmetros do escoamento, mas *a priori* é desconhecida.

O estudo do efeito da diferença de densidades no escoamento bifásico desenvolvido é feito a partir do princípio da mínima dissipação viscosa sujeito a uma restrição adicional: a posição do centro de massa, fixa, é admitida como dada para a formulação do princípio. Ela será, posteriormente, relacionada aos parâmetros do escoamento, pelo uso da mesma metodologia empregada no Capítulo 4, e finalmente determinada com ajuda da hipótese de invariância. Tal é a contribuição que o autor pode oferecer para a compreensão do fenômeno em consideração.

5.1- Princípio Variacional

Para um duto horizontal de seção transversal arbitrária especificada (ver figura 5.1), o princípio variacional da mínima dissipação viscosa, aplicável ao escoamento bifásico desenvolvido de fluidos de densidades e viscosidades diferentes pode ser assim enunciado:

A dissipação viscosa é mínima para uma dada vazão total, uma dada posição do centro de massa e uma dada área seccional de um dos fluidos.

Este enunciado se exprime da seguinte maneira:

Minimizar:

$$J_{DV}(w_1, w_2, s(\theta)) = \int_{A_1} \mu_1 \left[\nabla w_1 \right]^2 dA + \int_{A_2} \mu_2 \left[\nabla w_2 \right]^2 dA \quad (5.1)$$

com as restrições:

$$\int_{A_1} w_1 dA + \int_{A_2} w_2 dA - Q = 0 \quad (5.2)$$

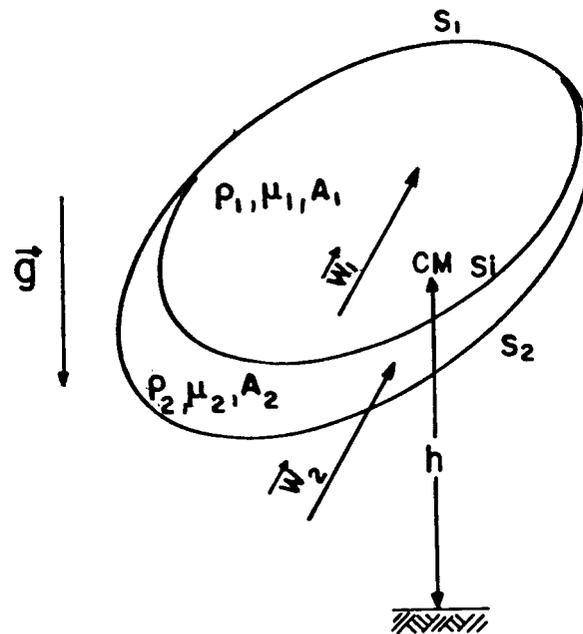


Figura 5.1- Parâmetros do escoamento desenvolvido de dois fluidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por um duto de seção genérica.

$$\frac{\rho_1 g \int_{A_1} h \, dA + \rho_2 g \int_{A_2} h \, dA}{\rho_1 g \int_{A_1} dA + \rho_2 g \int_{A_2} dA} - \bar{h} = 0 \quad (5.3)$$

e

$$\int_{A_2} dA - A_2 = 0 \quad (5.4)$$

A restrição relativa a posição do centro de massa do sistema é necessária afim de que a diferença de densidade entre os fluidos seja contemplada no processo de minimização do funcional. A não inclusão desta restrição levaria o problema a uma solução idêntica àquela encontrada no capítulo 4.

Observar também que, da mesma forma que nos capítulos anteriores, a inclusão das restrições no funcional não modificam o seu valor. Portanto o problema pode ser expresso da seguinte maneira:

Minimizar

$$J_{DV}(w_1, w_2, s) = \int_{A_1} \left[\mu_1 \left(\nabla w_1 \right)^2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 \rho_1 (h - \bar{h}) \right] dA +$$

$$\int_{A_2} \left[\mu_2 \left(\nabla w_2 \right)^2 + \lambda_1 w_2 + \lambda_2 \rho_2 (h - \bar{h}) + \lambda_3 \right] dA -$$

$$\lambda_1 Q - \lambda_3 A_2 \quad (5.5)$$

5.2- Determinação do Campo de Velocidades

Uma vez que h é sempre uma função algébrica conhecida das coordenadas utilizadas, obtem-se que para J_{DV} ser mínimo é necessário que as funções w_1 e w_2 satisfaçam nos seus respectivos domínios às mesmas equações de Euler-Lagrange, obtidas no capítulo anterior, isto é:

$$0 = \mu_1 \cdot \nabla^2 w_1 + G \quad (5.6)$$

$$0 = \mu_2 \cdot \nabla^2 w_2 + G \quad (5.7)$$

onde:

$$G = - \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{\lambda_1}{z} \quad (5.8)$$

cujas condições de contorno são:

$$r = R \quad : \quad w_k = 0 \quad (k=1,2) \quad (5.9.a)$$

$$r = s(\theta) \left. \begin{array}{l} \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_s} \\ w_1 = w_2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (5.9. b) \\ (5.9. c) \end{array}$$

Por um procedimento inteiramente análogo ao empregado no Capítulo 4, obtém-se o valor mínimo do funcional (5.5):

$$J_{DV} \left[w_1^s, w_2^s \right] = GQ \quad (5.10)$$

onde w_1^s e w_2^s são a solução de (5.6-9).

5.3- Determinação da Interface entre os Fluidos

Uma vez mais a análise é dirigida ao caso de um tubo circular (ver figura 5.2). Para a minimização do funcional J_{DV} da eq.(5.5) com relação a $s(\theta)$ adotar-se-á o mesmo método empregado no Capítulo 4, isto é, decompõe-se a solução do problema (5.6-9) na forma:

$$w_k(r, \theta) = w_{H,k}(r, \theta) + w_{P,k}(r, \theta) \quad (k=1,2) \quad (5.12)$$

onde $w_{H,k}$ e $w_{P,k}$ satisfazem:

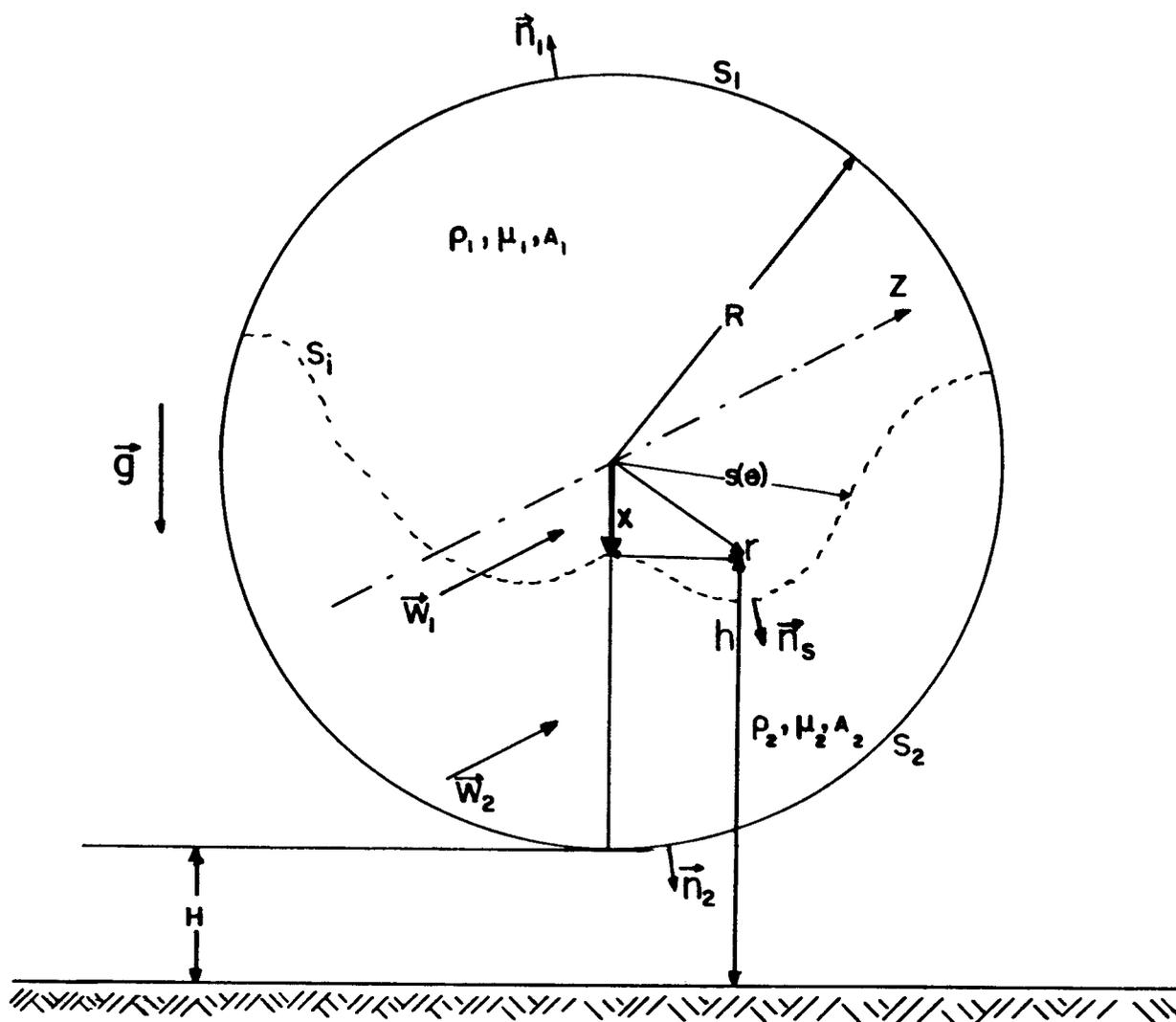


Figura 5.2- Definição de variáveis e parâmetros no estudo do escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por um tubo horizontal.

$$\nabla^2 w_{H,k} = 0 \quad (5.12)$$

$$\mu_k \nabla^2 w_{P,k} = -G \quad (5.13)$$

Admita-se também que, para qualquer direção \vec{n}_s , $w_{P,k}(r, \theta)$ satisfaça (5.9.b), isto é:

$$\mu_1 \frac{\partial w_{P,1}}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_{P,2}}{\partial n_s} \quad (5.14)$$

Com auxílio dessa decomposição e por um procedimento análogo ao realizado no Capítulo 4, obtém-se:

$$J_{DV} = J_H + J_P \geq J_P \quad (5.15)$$

onde:

$$J_H \equiv \int_{A_1} \mu_1 \left[\nabla w_{H,1} \right]^2 dA + \int_{A_2} \mu_2 \left[\nabla w_{H,2} \right]^2 dA \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
J_P \equiv & \int_{A_1} \mu_1 \left(\nabla w_{P,1} \right)^2 dA + \int_{A_2} \mu_2 \left(\nabla w_{P,2} \right)^2 dA + \\
& \lambda_2 \left[\int_{A_1} \rho_1 (h - \bar{h}) dA + \int_{A_2} \rho_2 (h - \bar{h}) dA \right] + \lambda_3 \int_{A_2} dA + \\
& 2GQ - \lambda_3 A_2
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Seguindo o método de minimização adotado na seção 4.3, procura-se $w_{P,k}(r, \theta)$ satisfaça à condição de não escorregamento na parede (5.9.a), qualquer que seja a interface dos fluidos. No caso de um tubo circular, e como as equações de Euler-Lagrange são as mesmas do Capítulo 4, isto leva novamente a:

$$w_{P,1} = \frac{G}{4\mu_1} \left(R^2 - r^2 \right) \tag{5.18}$$

$$w_{P,2} = \frac{G}{4\mu_2} \left(R^2 - r^2 \right) \tag{5.19}$$

Ao tomar $w_{P,k}$ na forma acima deve-se ter claro que o problema global está resolvido a menos da condição de continuidade do perfil de velocidades na interface, tarefa a ser assegurada por $w_{H,k}$. Note-se que a tensão de cisalhamento associada a $w_{P,k}$ já satisfaz a eq. (5.14) independentemente da forma da interface. Note-se ainda que as restrições presentes no funcional (5.17) têm valor nulo e portanto não alteram o

valor de J_P .

Lembrando que como já foi visto no Capítulo 2:

$$\int_{A_1} h \, dA + \int_{A_2} h \, dA = \pi R^2(H+R) \quad (5.20)$$

$$\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA = \pi R^2 \quad (5.21)$$

e pelo uso das expressões (5.18,19), o funcional J_P pode ser escrito da seguinte forma em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} J_P = & \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{s(\theta)} \left(-\frac{G^2 r^2}{4 \mu_1} \right) r \, dr + \right. \\ & \left. \int_{s(\theta)}^R \left(-\frac{G^2 r^2}{4 \mu_2} + \lambda_2(\rho_2 - \rho_1)(h - \bar{h}) + \lambda_3 \right) r \, dr \right] d\theta + \\ & 2GQ + \lambda_2 \rho_1 \pi R^2 \left[H + R - \bar{h} \right] - \lambda_3 A_2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde

$$h = H + R - s \cos\theta \quad (5.23)$$

conforme pode ser observado na figura 5.2.

Aplicando a regra de Leibniz, eq.(2.11), para minimizar J_P com relação a \underline{s} vem:

$$\frac{\partial J_P}{\partial s} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{G^2 s(\theta)^2}{4 \mu_1} + \frac{G^2 s(\theta)^2}{4 \mu_2} - \lambda_2(\rho_2 - \rho_1)(H + R - s \cdot \cos \theta - \bar{h}) - \lambda_3 \right] s \, d\theta = 0 \quad (5.24)$$

ou seja, a interface entre os dois fluidos é caracterizada pela equação :

$$\frac{G^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] s^2 + \lambda_2(\rho_2 - \rho_1)s \cos \theta = \lambda_2(\rho_2 - \rho_1)\bar{x} - \lambda_3 \quad (5.25)$$

onde:

$$\bar{x} = H + R - \bar{h} \quad (5.26)$$

Além disso devemos ter, quando a equação (5.25) é obedecida:

$$\frac{\partial^2 J_P}{\partial s^2} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{G^2}{2} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] s^2 + \lambda_2(\rho_2 - \rho_1)(\bar{x} - 2s \cos \theta) - \lambda_3 \right] d\theta > 0 \quad (5.27)$$

Substituindo-se (5.25) em (5.27) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 J_P}{\partial s^2} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{G^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) s^2 + \lambda_2 (\rho_2 - \rho_1) (s \cos \theta) \right] d\theta > 0 \quad (5.28)$$

Se $\lambda_2 > 0$ a desigualdade representa a soma dos critérios (4.33) e (2.14), os quais exprimem respectivamente o encapsulamento do fluido mais viscoso e a estratificação de densidades. De fato λ_2 deve ser positivo a fim de assegurar que ao minimizar J_{DV} e J_P , esteja-se também minimizando a posição (\bar{h}) do centro de massa do sistema. Então sendo $\bar{x} = 0$ quando o centro de massa coincide com o centro do tubo (ver eq. (5.26) e figura 5,2) a configuração dos fluidos deve ser tal que:

$$\lambda_2 > 0 \quad (5.29.a)$$

$$\bar{x} \geq 0 \quad (5.29.b)$$

requisito esse que caracteriza a estratificação das densidades.

A partir de (5.29.a,b) é possível obter a disposição dos fluidos em relação à interface. Esta, dada pela eq. (5.25), representa uma circunferência excêntrica ao tubo (ver a figura 5.3), a qual tem a forma:

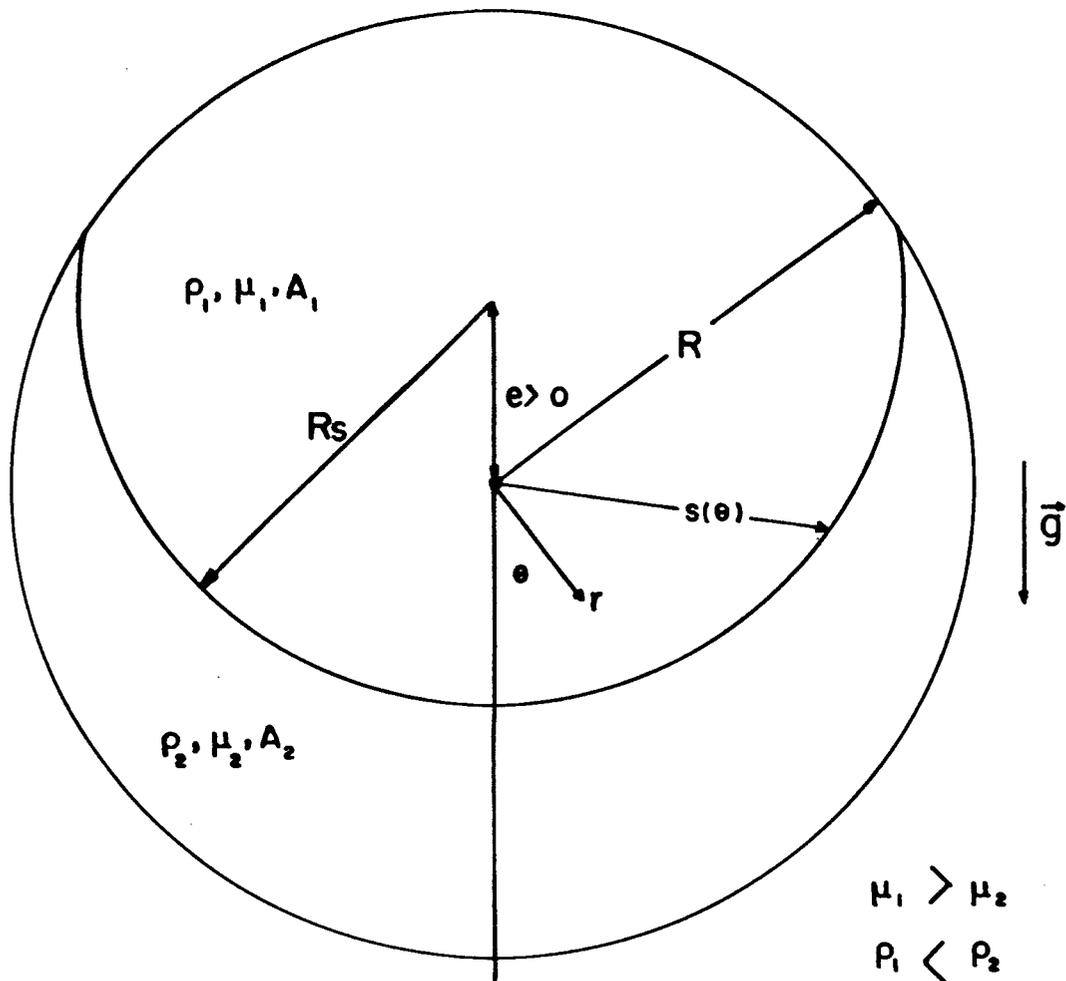


Figura 5.3- Interface circular excêntrica resultante no escoamento laminar desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes ($\mu_1 > \mu_2$; $\rho_1 < \rho_2$) por um tubo horizontal.

$$s^2 + 2es \cdot \cos\theta + e^2 = R_s^2 \quad (5.30)$$

onde e é a excentricidade e R_s é o raio de curvatura dados respectivamente por:

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\frac{G^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right]} \quad (5.31)$$

$$R_s^2 = e^2 + 2 \cdot e \cdot \bar{x} + \frac{\lambda_3}{\frac{G^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right]} \quad (5.32)$$

Observando-se a eqs.(5.31) e (5.32) verifica-se que se $\rho_1 = \rho_2$, então:

$$e = 0 \quad (5.33)$$

e a eq.(5.32) se torna:

$$R_s^2 = R_{s,0}^2 = \frac{\lambda_{s,0}}{\frac{G_0^2}{4} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right]} \quad (5.34)$$

onde o índice "o" exprime "valor quando $e = 0$ ". Este resultado é inteiramente consistente com o resultado obtido no capítulo 4 expresso pela eq.(4.32), possibilitando a determinação de $R_{s,0}$ em função da razão das vazões dos fluidos e das razões de suas viscosidades (ver a seção 4.5). Com essas considerações a eq.(5.32) se torna:

$$R_s^2 = R_{s,0}^2 + e^2 + 2 \cdot e \cdot \bar{x} \quad (5.35)$$

Note-se que a relação acima exprime uma dependência na forma $R_s = R_s \left(R_{s,0}; e; \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$, onde $R_{s,0}$ entra como dado "hidrodinâmico". Isso porque:

$$\bar{x} = \bar{x} \left(e, R_s, \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (5.36)$$

relação que é explicitada para interfaces circulares no anexo A.2. Este ponto encerra a análise da minimização do funcional J_p .

Agora, para interfaces circulares excêntricas, tem-se:

$$w_H(r, \theta) \neq \text{const} \quad (5.37)$$

e conseqüentemente:

$$J_H > 0 \quad (5.38)$$

o que suscita a questão: é J_{DV} realmente um mínimo para a forma interfacial circular excêntrica obtida pela minimização de J_P ?

Não se dispõe de prova formal de que esta questão se responda pela afirmativa. Entretanto, tendo empregado um procedimento de minimização que se mostrou válido nos capítulos precedentes, temos algumas razões para confiar no resultado aqui obtido. Primeiramente, ao proceder à minimização de J_P , as funções $w_{P,k}$ atenderam a todas as condições (equações de Euler-Lagrange e condições de contorno) requeridas para a minimização de J_{DV} , exceto o requisito de serem contínuas entre si na interface. Isso significa que o balanço de forças no sistema bifásico foi atendido, o que é o principal aspecto do problema, e das funções harmônicas $w_{H,k}$ se requer apenas que assegurem a continuidade do campo de velocidades na interface. Em segundo lugar, para pequenas excentricidades, e particularmente no caso em que o encapsulamento do fluido viscoso é completo, J_H deve ser próximo de zero, não prejudicando o procedimento adotado.

Pode-se sugerir a esse respeito, um procedimento de verificação que consiste em calcular J_H e compará-lo ao valor de J_P para diversas interfaces circulares excêntricas,

examinando assim a importância relativa de ambos. Uma maneira simples de fazê-lo, é calcular J_p pela integração de (5.22) e em seguida obter J_H através de:

$$J_H = GQ - J_p \quad (5.39)$$

Dessa forma, conhecido GQ (que é o valor mínimo de J_{DV} via solução numérica do campo de velocidades, obter-se-ia imediatamente J_H pela equação acima. Além disso, cada interface circular excêntrica poderia ser submetida a uma variação de modo a obter-se os novos valores de J_{DV} , J_p , e J_H , verificando assim a sua minimalidade. Naturalmente, tais procedimentos não substituem a demonstração formal da validade do método proposto.

5.4- Determinação dos Multiplicadores de Lagrange

Como se sabe [10] em muitos problemas pode-se atribuir um certo significado físico aos multiplicadores de Lagrange. Neste caso como nos precedentes foi observado que λ_1 está relacionado ao gradiente de pressão que promove o escoamento dos fluidos. Já os outros dois multiplicadores de Lagrange utilizados no caso presente, λ_2 e λ_3 , conforme foi verificado no item anterior, estão relacionados respectivamente com a excentricidade e o raio de curvatura da interface entre os dois fluidos. Ver eqs. (5.32,33).

Para se determinar a forma da interface e o gradiente

de pressão de um dado escoamento cujas vazões dos dois fluidos são conhecidas é necessário um processo iterativo. Um algoritmo para este fim está apresentado no quadro 5.1. A definição das variáveis adimensionais utilizadas no algoritmo se encontram no capítulo 7.

ALGORITMO PARA O CÁLCULO DO GRADIENTE DE PRESSÃO, RAIO E EXCENTRICIDADE DA INTERFACE CIRCULAR QUE SATISFAZEM A UM PAR DE VAZÕES DADAS.

INÍCIO

DADOS $Q_1, Q_2, \mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2, R$

$D \leftarrow Q_1 / Q_2$

$G_a \leftarrow 1.$

CALCULA $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$

RESOLVE $\hat{R}_{s,0}, \hat{Q}_{1,0}, \hat{Q}_{2,0}$ (QUADRO 4.D)

SE QUISER CALCULA $G = f(Q_1, \hat{Q}_{1,0} \text{ e props})$

ARBITRA \hat{e}

CALCULA \hat{R}_s (EQUAÇÃO 5.38)

CALCULA $\hat{Q}_{1,c}, \hat{Q}_{2,c}$

$D_c \leftarrow \hat{Q}_{1,c} / \hat{Q}_{2,c}$

ENQUANTO $|D_c - D| > \text{tolerância}$

CORRIGE \hat{e}

CALCULA \hat{R}_s (EQUAÇÃO 5.38) CALCULA $\hat{Q}_{1,c}, \hat{Q}_{2,c}$

$D_c \leftarrow \hat{Q}_{1,c} / \hat{Q}_{2,c}$

FIM-ENQUANTO

CALCULA $G = f(Q_1, \hat{Q}_{1,c} \text{ e propriedades})$

CALCULA $\hat{\lambda}_2 = f(\hat{e})$

CALCULA $\hat{\lambda}_3 = f(\hat{R}_s)$

CALCULA $e = f(\hat{e}, R)$

CALCULA $R_s = f(\hat{R}_s, R)$

CALCULA $\lambda_2 = f(\hat{\lambda}_2 \text{ e propriedades})$

CALCULA $\lambda_3 = f(\hat{\lambda}_3 \text{ e propriedades})$

RETORNA propriedades, $Q_1, Q_2, G, e, R_s, \lambda_2, \lambda_3,$
 $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{e}, \hat{R}_s, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$

FIM

Quadro 5.1- Algoritmo proposto para a resolução do gradiente de pressão, raio de curvatura e excentricidade da interface no escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis por um tubo horizontal.

CAPÍTULO 6

SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS CAMPOS DE VELOCIDADES

Conforme foi visto a minimização do funcional dissipação viscosa no escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por um tubo horizontal leva a resolução de dois campos de velocidades, regidos por equações de Poisson, separados por uma interface circular excêntrica.

Os parâmetros da equação da interface estão relacionados pela eq. (5.35). Pode-se, portanto, determinar a equação da interface antes de se resolver os campos de velocidades.

As equações diferenciais que regem os campos de velocidades nos domínios então descritos possuem solução analítica bastante complexa [1,2]. Para a sua execução se necessita de transformações elaboradas que se por um lado permitem obter a solução exata de um dado problema, por outro o tornam um tanto abstrato, dissociando a formulação matemática dos parâmetros físicos e geométricos envolvidos.

A solução numérica por sua vez, embora intrinsecamente inexata, permite basicamente que o problema físico seja resolvido diretamente em sua formulação original. A questão da precisão da solução obtida deve ser contemporizada entre o seu custo computacional e a sua necessidade prática. De

fato teoricamente é possível conseguir-se uma solução numérica tão precisa o quanto se queira, embora isto nem sempre seja tecnicamente razoável.

Pelo escopo deste trabalho e com base no que foi exposto, optou-se assim por resolver numericamente os campos de velocidades dos fluidos.

6.1- Discretização das Equações que Regem os Campos de Velocidades

As equações que regem os campos de velocidades dos fluidos em cada um de seus subdomínios são equações diferenciais parciais de Poisson do tipo:

$$0 = \mu \nabla^2 w + G \quad (6.1)$$

ou, em coordenadas polares:

$$0 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + G \quad (6.2)$$

Discretizando-se a eq. (6.2) segundo a formulação de "volume-de-controle" proposta por PATANKAR [18], obtém-se para o elemento de volume típico descrito na figura 6.1, obtém-se uma equação da forma:

$$a_{PP} w_P = a_{EE} w_E + a_{WW} w_W + a_{NN} w_N + a_{SS} w_S + b \quad (6.3)$$

onde w_P , w_E , w_V , w_N , w_S são as velocidades nos nós indicados na figura 6.1, c:

$$a_E = \frac{\mu_e \Delta r}{r_e (\delta\theta)_e} \quad (6.4.a)$$

$$a_V = \frac{\mu_v \Delta r}{r_v (\delta\theta)_v} \quad (6.4.b)$$

$$a_N = \frac{\mu_n \Delta r}{r_n (\delta\theta)_n} \quad (6.4.c)$$

$$a_S = \frac{\mu_s \Delta r}{r_s (\delta\theta)_s} \quad (6.4.d)$$

$$a_P = a_E + a_V + a_N + a_S \quad (6.4.e)$$

$$b = G \Delta A \quad (6.4.f)$$

observando que:

$$\Delta A = \frac{1}{2} (r_n + r_s) \Delta r \Delta\theta \quad (6.5)$$

6.2- Domínio de Cálculo

Dada a simetria existente ao longo do eixo vertical (i.e. na direção da força da gravidade) o domínio de cálculo pode reduzir-se àquele descrito no figura 6.2 .

Este domínio de cálculo foi coberto por uma malha

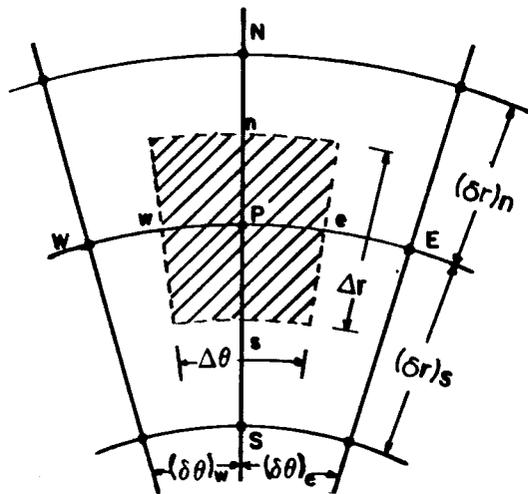


Figura 6.1- Volume-de-Control e em coordenadas polares.

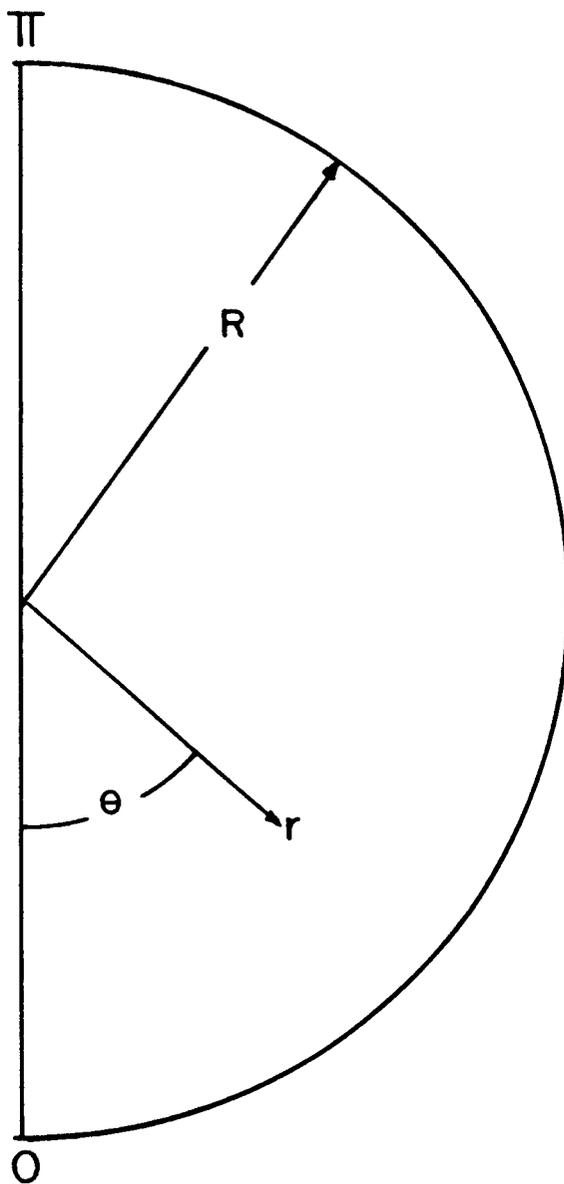


Figura 6.2- Domínio de cálculo utilizado.

uniformemente distribuída com o nós localizados no centro de cada volume-de-controle (figura 6.3). O uso da malha uniforme foi preferido ao uso da malha logarítmica, normalmente utilizada em problemas de geometria cilíndrica, pelo fato de se possuir dois fluidos ocupando o domínio de cálculo e de se desejar que em um maior número de casos exista sempre mais de um volume-de-controle no subdomínio de cada fluido. Além do mais, a malha uniforme em geometria cilíndrica equivale a um refinamento da malha à medida em que se aproxima da parede do tubo, que é a área de maior interesse no estudo.

A dimensão da malha de cálculo utilizada é de 20×20 . Forma-se assim um sistema de equações ao se escrever uma equação do tipo da eq.(6.3) para cada nó da malha.

Este sistema foi resolvido por um método iterativo de solução chamado de "linha-a-linha" descrito por PATANKAR [18]. Basicamente este método consiste em uma combinação do Algoritmo-da-Matriz-Tridiagonal (TDMA) usado em problemas unidimensionais, e o método de Gauss-Seidel. Por este método, cada linha da malha de cálculo é sucessivamente resolvida admitindo-se que os valores das velocidades nas linhas adjacentes são conhecidos pelo resultado da última iteração então realizada. Assim, o Algoritmo-da-Matriz-Tridiagonal pode ser aplicado sobre a linha escolhida. Este procedimento é efetuado para todas as linhas em um sentido e repetido posteriormente em sentido inverso. Afim de se acelerar o processo de convergência o método também é aplicado de maneira similar coluna-a-coluna na malha de cálculo.

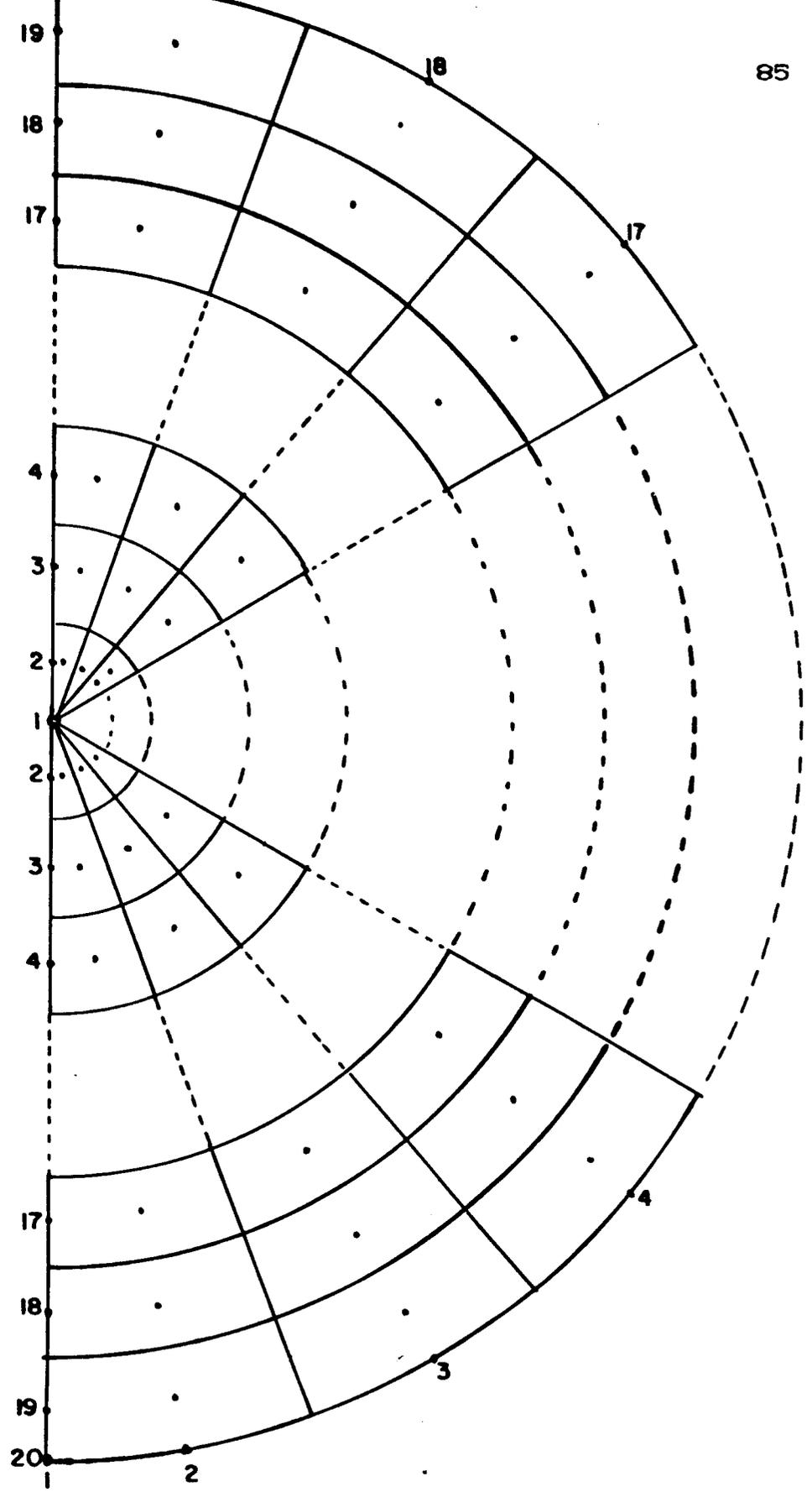


Figura 6.3- Domínio de cálculo coberto por uma malha uniformemente distribuída 20 x 20 com os nós localizados no centro de cada volume-de-control.

6.3- Condições de Contorno , Interface e Simetria

As condições de contorno e interface são aquelas descritas na seção 1.3, quais sejam:

a) Não escorregamento na parede do tubo:

$$r = R \qquad w = 0 \qquad (6.6)$$

b) Não escorregamento na interface entre os fluidos:

$$r = s(\theta) \qquad w_1 = w_2 \qquad (6.7)$$

c) Continuidade da tensão de cisalhamento na interface dos fluidos:

$$r = s(\theta) \qquad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_s} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_s} \qquad (6.8)$$

A condição de simetria a ser acrescentada devido ao domínio de cálculo utilizado é:

d) Simetria em relação ao eixo vertical:

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \text{ e } \theta = \pi \\ \forall r \end{array} \right\} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.9)$$

As condições prescritas nas alíneas b e c são internamente satisfeitas pelo método de solução numérica

utilizado enquanto que aquelas prescritas nas alíneas a e d devem ser impostas externamente.

É importante ainda observar que nas eqs.(6.4.a-d) o valor das viscosidades utilizados para o cálculo dos parâmetros da eq.(6.3) são aqueles existentes na devida fronteira de cada volume-de-controle.

No caso do meio ser isotrópico o valor da viscosidade na fronteira de dois volumes-de-controle é o mesmo de cada volume-de-controle. Já no caso de dois volumes-de-controle adjacentes possuírem viscosidades diferentes PATANKAR [18] recomenda que seja usada a média harmônica ponderada de suas viscosidades, de modo a preservar a tensão de cisalhamento (fluxo de quantidade de movimento) real entre os dois volumes-de-controle. Ver as eqs.(6.10.a,b) e figuras 6.4 e 6.5 .

$$\mu_n = \frac{(\delta r)_n}{\frac{(\delta r)_{n+}}{\mu_N} + \frac{(\delta r)_{n-}}{\mu_P}} \quad (6.10.a)$$

$$\mu_{\bullet} = \frac{(\delta \theta)_{\bullet}}{\frac{(\delta \theta)_{\bullet+}}{\mu_E} + \frac{(\delta \theta)_{\bullet-}}{\mu_P}} \quad (6.10.b)$$

Seria pois aconselhável que a interface sempre coincidisse com a fronteira de dois volumes-de-controle. Isto

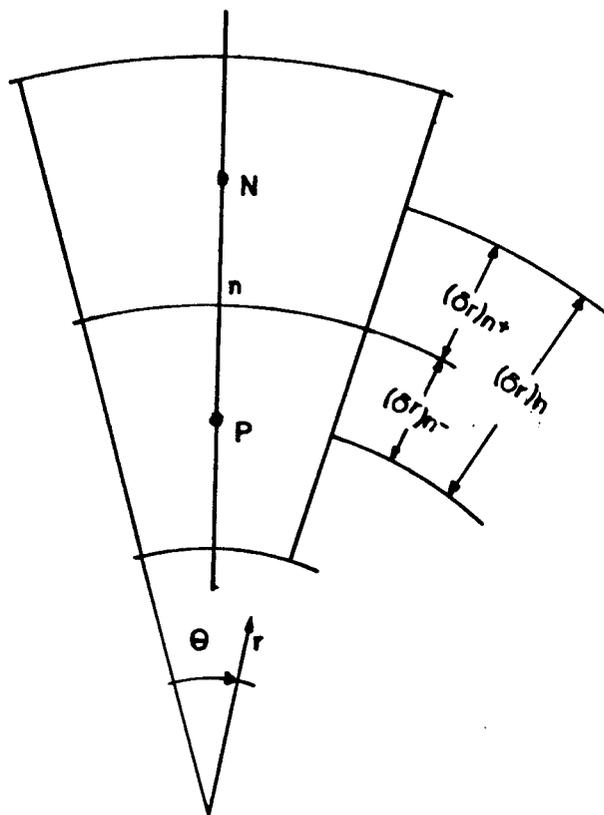


Figura 6.4- Distâncias associadas à interface \underline{n} .

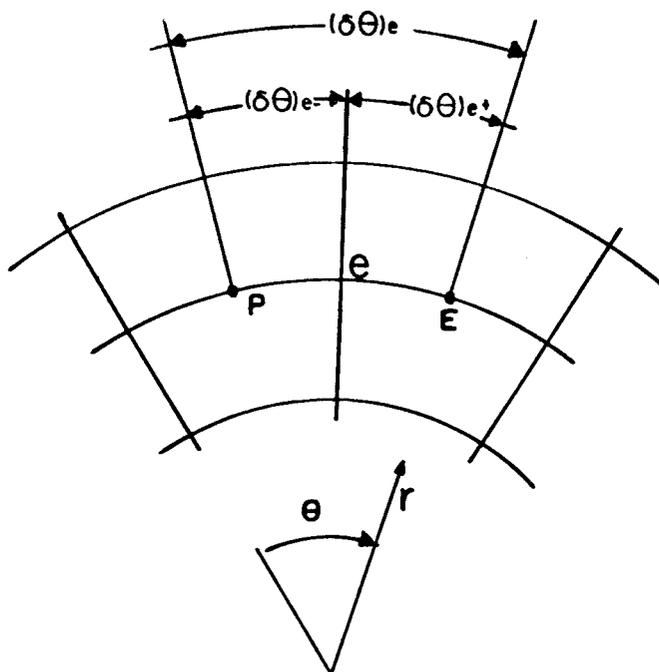


Figura 6.5- Distâncias associadas a interface e .

entretanto não é possível, quer seja pelo refinamento excessivo da malha que se deveria ter junto a interface (um círculo excêntrico só pode ser representado aproximadamente em coordenadas polares), quer seja pela dificuldade de se refazer totalmente a malha de cálculo para cada nova posição da interface a ser simulada.

Permitiu-se então que a interface pudesse cruzar os volumes-de-controle, dando origem a volumes de controle "híbridos" (figura 6.6). A viscosidade destes volumes-de-controle híbridos foi admitida como sendo a média harmônica das viscosidades dos fluidos ponderada pelo comprimento de raio ocupado por cada fluido, ver eq.(6.11).

$$\mu_{P(\text{híbrido})} = \frac{\Delta r}{\frac{(\Delta r)_+}{\mu_N} + \frac{(\Delta r)_-}{\mu_S}} \quad (6.11)$$

Desta maneira procurou-se garantir valores mais realísticos para as tensões de cisalhamento radiais $\left[\tau_{rz} \right]$ que pela natureza do problema (geometria e condições de contorno), são, conforme se observou no resultados obtidos, de ordem de grandeza superior às tensões de cisalhamento azimutais $\left[\tau_{\theta z} \right]$.

6.4- Integração dos Campos de Velocidade

As vazões dos fluidos foram calculadas pela

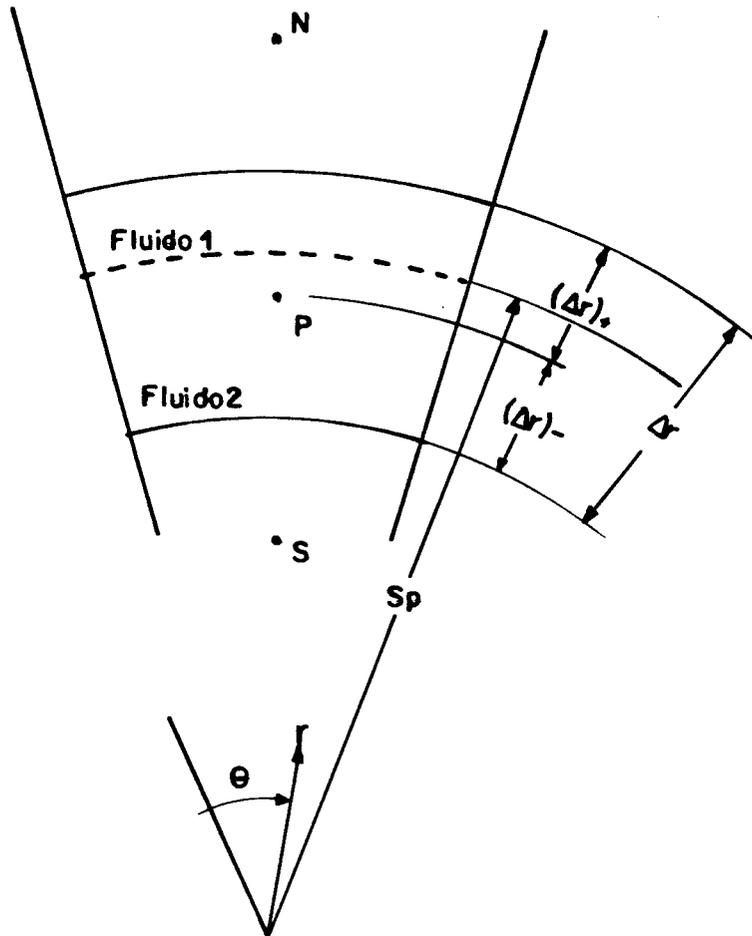


Figura 6.6- Geometria do volume-de-controle híbrido

integração numérica dos campos de velocidade sobre o domínio de cálculo. Procedeu-se esta integração considerando que a velocidade de cada nó prevalecesse por todo o volume-de-controle ao seu redor.

Assim:

$$\int_{A_1} w \, dA = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{m_0(i)} w(i,j) \Delta A(i,j) + f_{A_1} [m_1(i)] w[i, m_1(i)] \Delta A[i, m_1(i)] \right] \quad (6.12)$$

e:

$$\int_{A_2} w \, dA = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=m_2(i)}^m w(i,j) \Delta A(i,j) + f_{A_2} [m_1(i)] w[i, m_1(i)] \Delta A[i, m_1(i)] \right] \quad (6.13)$$

onde i, j são respectivamente as coordenadas azimutal e radial do nó; $m_1(i)$ é a coordenada radial do nó híbrido para um dado azimute; e :

$$m_0(i) = m_1(i) - 1 \quad (6.14)$$

$$m_2(i) = m_1(i) + 1 \quad (6.15)$$

$$f_{A_1} = \frac{\frac{1}{2} (r_s + s_p)}{\Delta A} \quad (6.16)$$

$$f_{A_2} = 1 - f_{A_1} \quad (6.17)$$

A tabela 6.1 e a figura 6.7 comparam as vazões obtidas através da solução e integração numéricas do campo de velocidades de um escoamento de dois líquidos submetidos a um gradiente de pressão prescrito (no caso $\frac{\partial P}{\partial z} = 1$) em diversos casos cujas interfaces apresentam configurações concêntricas diferentes não coincidentes com a fronteira dos volumes-de-controle da malha de cálculo utilizada, com aquelas obtidas pela integração das eqs. (4.39,40), que expressam as soluções analíticas exatas dos perfis de velocidades destes mesmos problemas.

Os maiores erros relativos encontrados (tabela 7.1) se dão na determinação numérica da vazão do fluido menos viscoso quando a sua área de escoamento é a de um filme pouco espesso. Nesta situação o subdomínio de cálculo referente a este fluido é coberto por apenas um ou dois volumes-de-controle (ver malha de cálculo) de forma que o seu perfil de velocidades calculado numericamente é praticamente apenas uma aproximação linear da solução analítica encontrada.

VAZÃO DO FLUIDO 1 (Q1)				VAZÃO DO FLUIDO 2 (Q2)			
SOLUÇÃO		ERRO		SOLUÇÃO		ERRO	
EXATA	NUMÉRICA	ABSOLUTO	RELATIVO (%)	EXATA	NUMÉRICA	ABSOLUTO	RELATIVO (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.0000	0.392699	0.392700	-0.000001	-0.0003
0.007776	0.007776	0.000000	0.0000	0.384884	0.386328	-0.001444	-0.3752
0.030166	0.030166	0.000000	0.0000	0.361911	0.363324	-0.001413	-0.3904
0.064356	0.064356	0.000000	0.0000	0.325194	0.326558	-0.001364	-0.4194
0.105658	0.105662	-0.000004	-0.0038	0.277088	0.278178	-0.001090	-0.3934
0.126998	0.125940	0.001058	0.8331	0.249759	0.250552	-0.000793	-0.3175
0.147508	0.147514	-0.000006	-0.0041	0.220893	0.221630	-0.000737	-0.3336
0.166073	0.166080	-0.000007	-0.0042	0.191051	0.191736	-0.000685	-0.3585
0.181465	0.181472	-0.000007	-0.0039	0.160850	0.161478	-0.000628	-0.3904
0.192333	0.192342	-0.000009	-0.0047	0.130968	0.131534	-0.000566	-0.4322
0.197214	0.197224	-0.000010	-0.0051	0.102141	0.102642	-0.000501	-0.4905
0.194524	0.194534	-0.000010	-0.0051	0.075165	0.075594	-0.000429	-0.5707
0.182564	0.182576	-0.000012	-0.0066	0.050894	0.051248	-0.000354	-0.6956
0.159517	0.159530	-0.000013	-0.0081	0.030240	0.030512	-0.000272	-0.8995
0.123449	0.123462	-0.000013	-0.0105	0.014176	0.014362	-0.000186	-1.3121
0.072309	0.072322	-0.000013	-0.0180	0.003733	0.003828	-0.000095	-2.5449
0.003927	0.003926	0.000001	0.0255	0.000000	0.000000	0.000000	0.0000

Tabela 6.1- Comparação entre as soluções numérica e analítica (exata) para o escoamento laminar concêntrico de dois fluidos imiscíveis (razão de viscosidade entre os fluidos $\mu_1/\mu_2 = 100$)

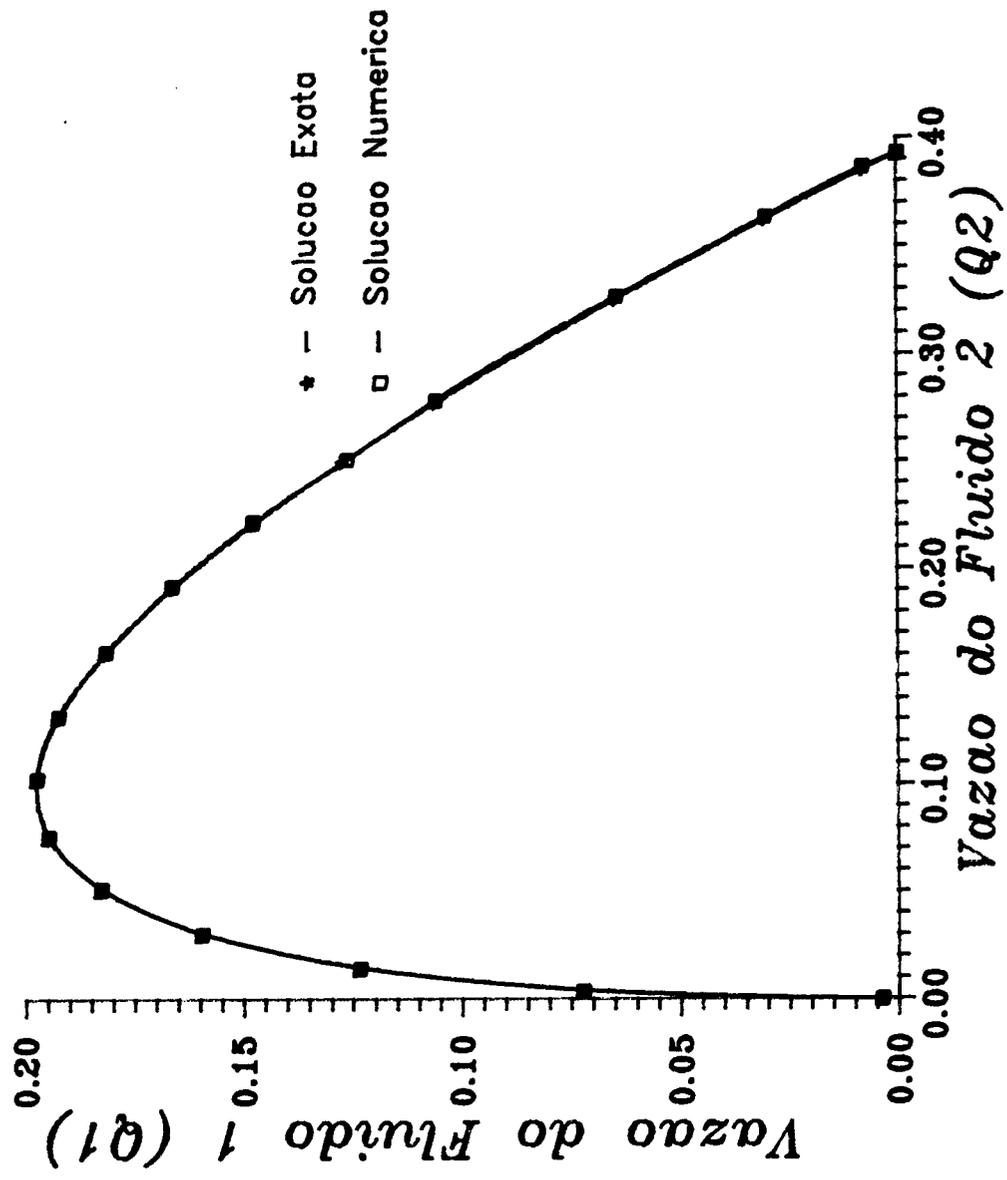


Figura. 6.7
 Comparacao entre as Solucoes Numerica e Analitica Exata para o Escoamento
 Laminar Concentrico de Dois Fluidos Imisciveis
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$.

CAPÍTULO 7

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

7.1- Adimensionalização de Equações e Funcionais

Afim de generalizar os resultados obtidos efetuou-se a seguinte adimensionalização de variáveis :

$$\hat{\mu}_k = \frac{\mu_k}{\mu_2} \quad (7.1)$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\rho_k}{\rho_2} \quad (7.2)$$

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad (7.3)$$

$$\hat{h} = \frac{h}{R} \quad (7.4)$$

$$\hat{s} = \frac{s}{R} \quad (7.5)$$

$$\hat{w} = w \left(\frac{\mu_2}{GR^2} \right) \quad (7.6)$$

Logo, obtem-se:

a) funcional dissipação viscosa adimensional

$$\hat{J}_{DV} = \int_{\hat{A}} \hat{\mu} (\nabla \hat{w})^2 d\hat{A} \quad (7.7)$$

ou

$$\hat{J}_{DV} = J_{DV} \left(\frac{\mu_2}{G^2 R^4} \right) \quad (7.8)$$

b) equações que minimizam o funcional dissipação viscosa adimensional e regem o escoamento em cada fase:

$$0 = \mu_k (\nabla^2 \hat{w}_k) + 1 \quad (k=1,2) \quad (7.9)$$

com as condições de contorno dimensionais:

$$\hat{r} = 1 \quad \hat{w} = 0 \quad (7.10.a)$$

$$\hat{r} = \hat{s}(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{w}_1 = \hat{w}_2 \\ \mu_1 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{n}_s} = \mu_2 \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{n}_s} \end{array} \right. \quad (7.10.b)$$

$$(7.10.c)$$

onde :

c) vazão adimensional

$$\hat{Q} = \int_{\hat{A}} \hat{w} d\hat{A} \quad (7.11)$$

onde:

$$\hat{Q} = Q \left(\frac{\mu_2}{GR^4} \right) \quad (7.12)$$

Observação:

Como o valor mínimo de J_{DV} é:

$$J_{DV} = Q G \quad (7.13)$$

então, usando as eqs.(7.8) e (7.12)

$$\hat{J}_{DV} \left(\begin{array}{c} G^2 R^4 \\ \mu_2 \end{array} \right) = \hat{Q} \left(\frac{GR^4}{\mu_2} \right) G \quad (7.14)$$

Logo, o valor mínimo de \hat{J}_{DV} é:

$$\hat{J}_{DV} = \hat{Q} \quad (7.15)$$

d) área:

$$\hat{A} = \int_{\hat{A}} d\hat{A} \quad (7.16)$$

ou:

$$\hat{A} = \frac{A}{R^2} \quad (7.17)$$

c) funcional com restrições no caso de escoamento de dois líquidos imiscíveis de viscosidades e densidades diferentes:

$$\hat{J}_{DV} = \int_{\hat{A}_1} \left[\hat{\mu}_1 (\nabla \hat{w})^2 + \hat{\lambda}_1 \hat{w}_1 + \hat{\lambda}_2 \hat{\rho}_1 (\hat{h} - \bar{h}) \right] d\hat{A} +$$

$$\int_{\hat{A}_2} \left[\hat{\mu}_2 (\nabla \hat{w})^2 + \hat{\lambda}_1 \hat{w}_2 + \hat{\lambda}_2 \hat{\rho}_2 (\hat{h} - \bar{h}) + \hat{\lambda}_3 \right] d\hat{A} - \lambda_1 Q - \lambda_3 A_2$$

(7.18)

Observar que pela adimensionalização:

$$\hat{\mu}_2 = 1 \quad (7.19)$$

$$\hat{\rho}_2 = 1 \quad (7.20)$$

$$\hat{\lambda}_1 = -2 \quad (7.21)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \lambda_2 \left[\frac{\rho_2 \mu_2}{G^2 R} \right] \quad (7.22)$$

$$\hat{\lambda}_3 = \lambda_3 \left[\frac{\mu_2}{G^2 R^2} \right] \quad (7.23)$$

g) equação que descreve a interface que minimiza o funcional da eq.(7.23):

$$\hat{R}_s^2 = \hat{R}_{s,0}^2 + \hat{e}^2 + 2 \hat{e} \hat{x} \quad (7.24)$$

onde evidentemente:

$$\hat{R}_{s,0} = \frac{R_{s,0}}{R} \quad (7.25)$$

$$\hat{c} = \frac{c}{R} \quad (7.26)$$

$$\hat{R}_s = \frac{R_s}{R} \quad (7.27)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{R} \quad (7.28)$$

7.2- Ábacos Generalizados

Ao invés de se apresentar resultados para simples exemplos isolados, elaboraram-se ábacos generalizados que possibilitam a solução de uma vasta quantidade de casos do escoamento de dois líquidos imiscíveis em um tubo horizontal.

A tabela 7.1 indica os ábacos e a classe de fluidos a que a sua aplicação se destina.

RAZÃO DE VISCOSIDADES	RAZÃO DE DENSIDADES	ÁBACO
10	0,8	7.1
100	0,8	7.2
1000	0,8	7.3
10	1,25	7.4
100	1,25	7.5
1000	1,25	7.6

Tabela 7.1- Guia de utilização dos ábacos.

Figura - 7.1
 Abaco Generalizado
 Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 0.8$
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 10$.

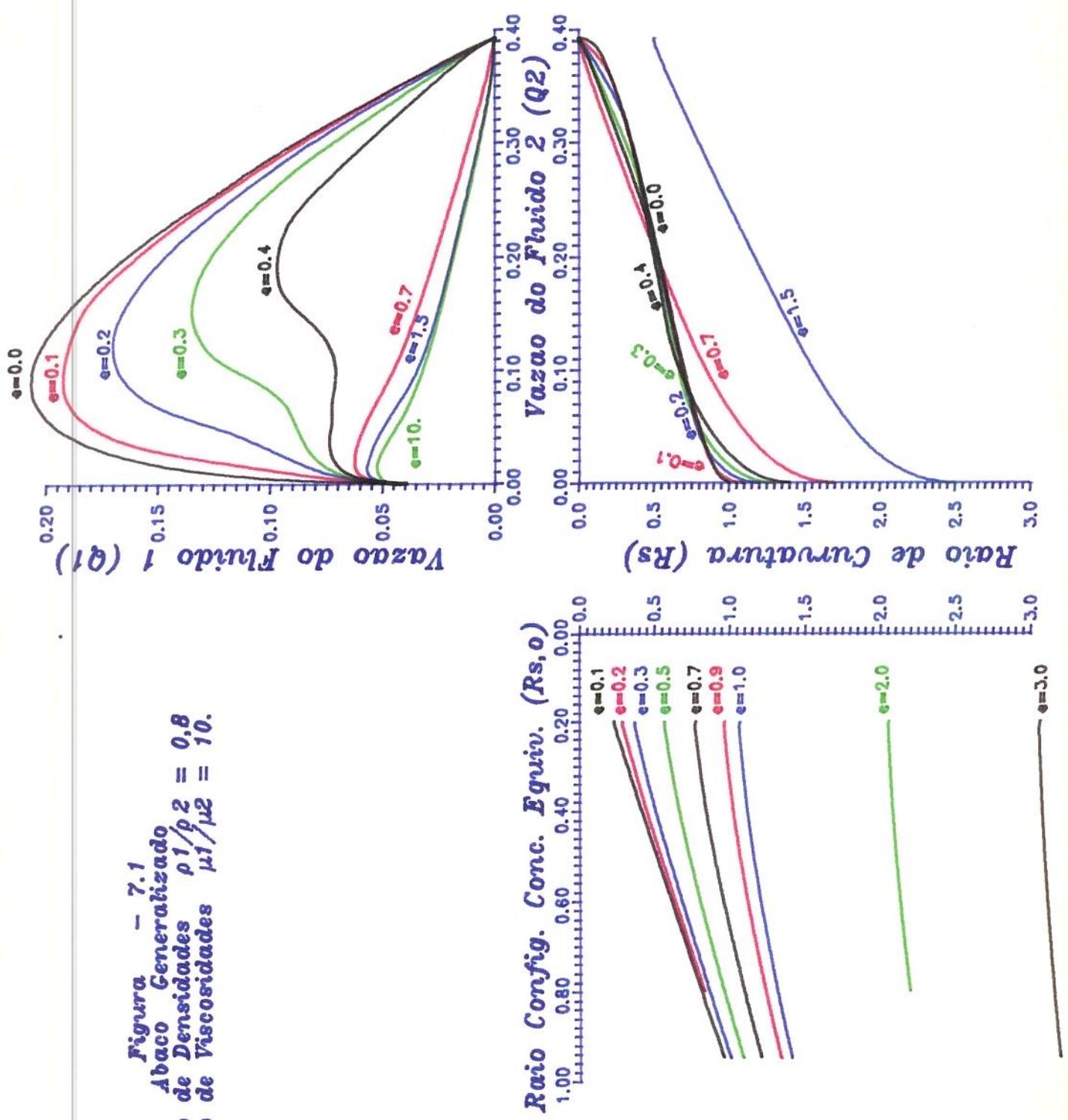


Figura - 7.2
 Abaco Generalizado
 Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 0.8$
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$.

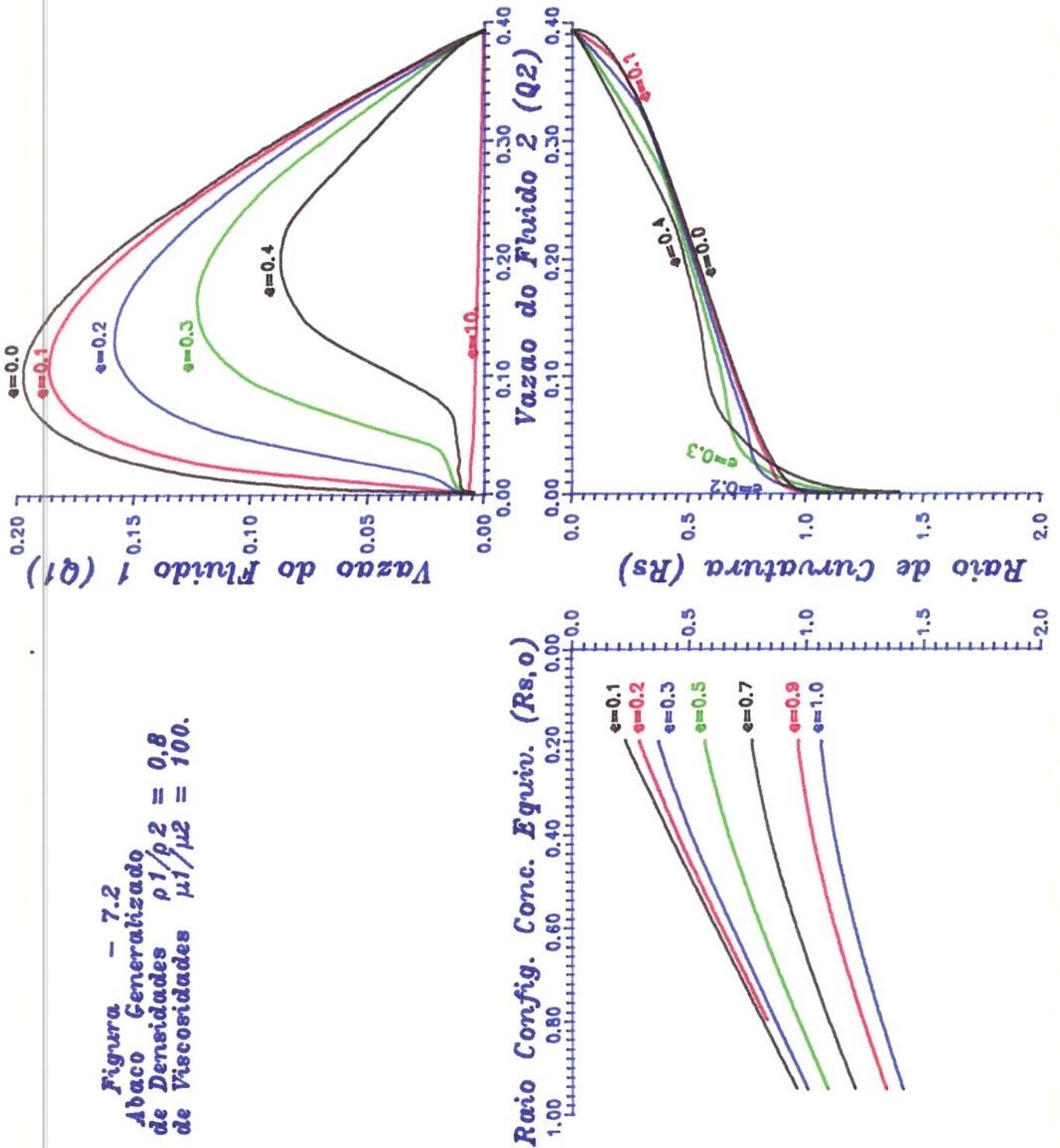


Figura - 7.3
Abaco Generalizado
Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 0.8$
Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000.$

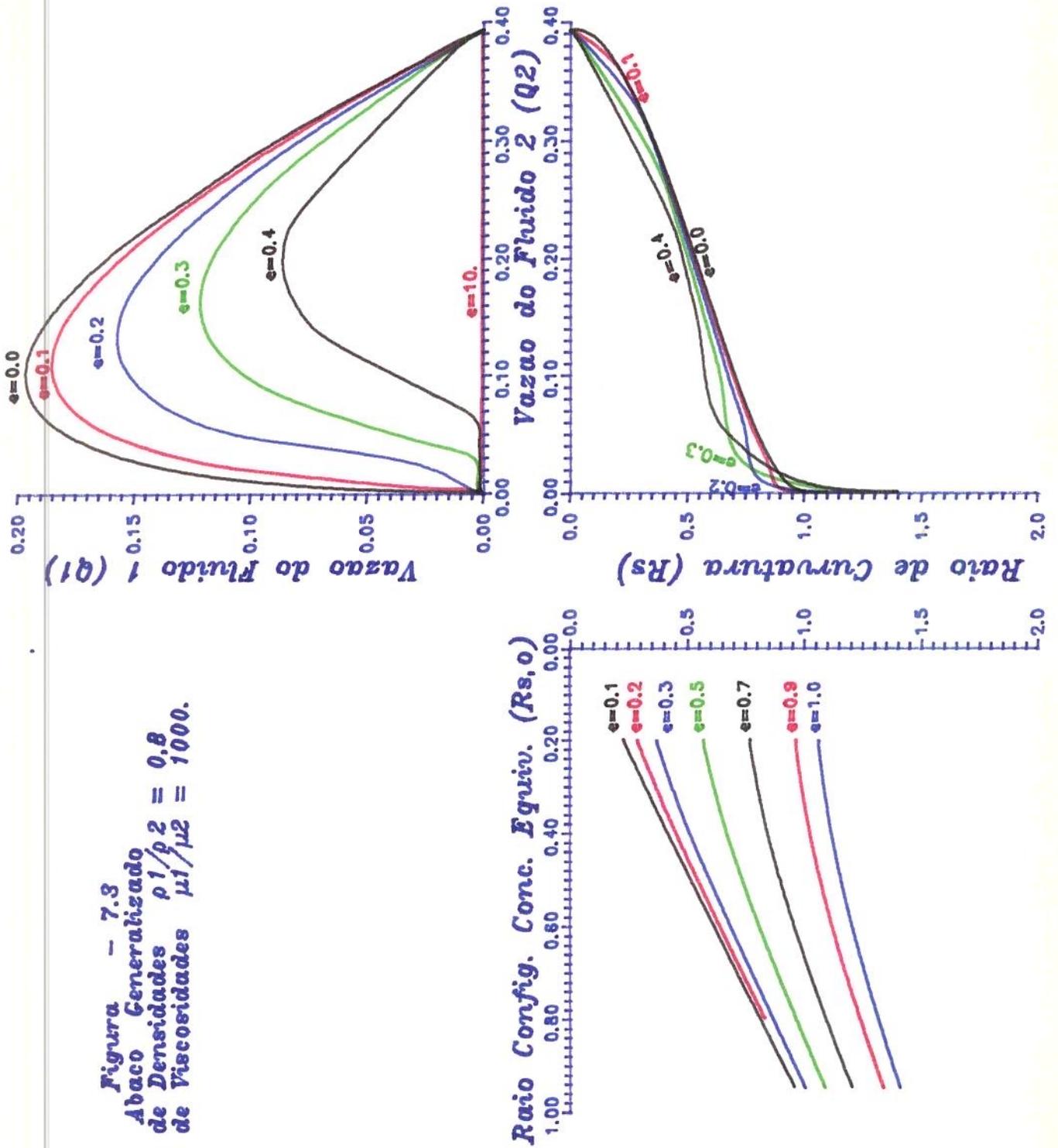


Figura - 7.4
 Abaco Generalizado
 Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 10$.

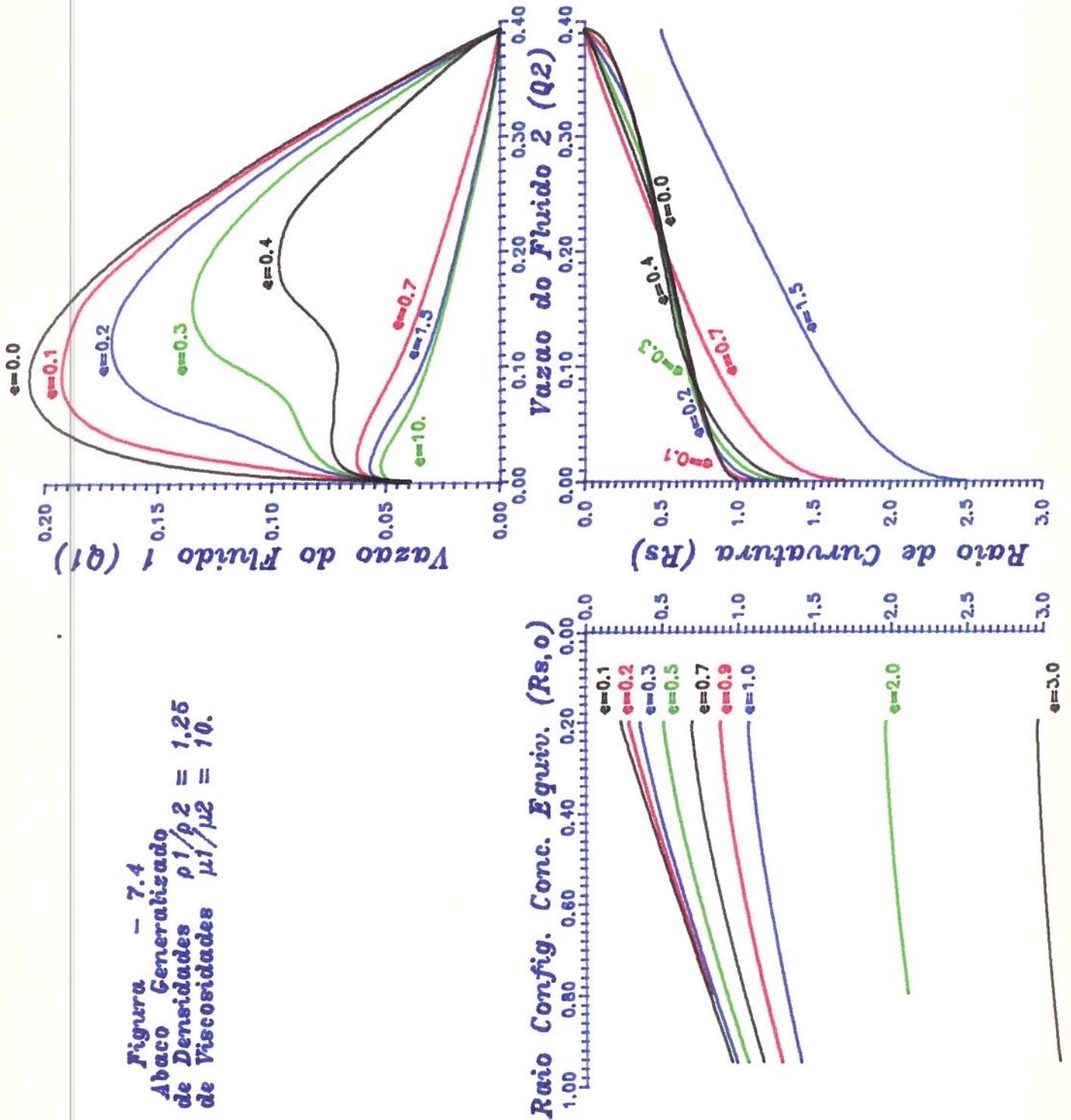


Figura - 7.5
 Abaco Generalizado
 Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 100$.

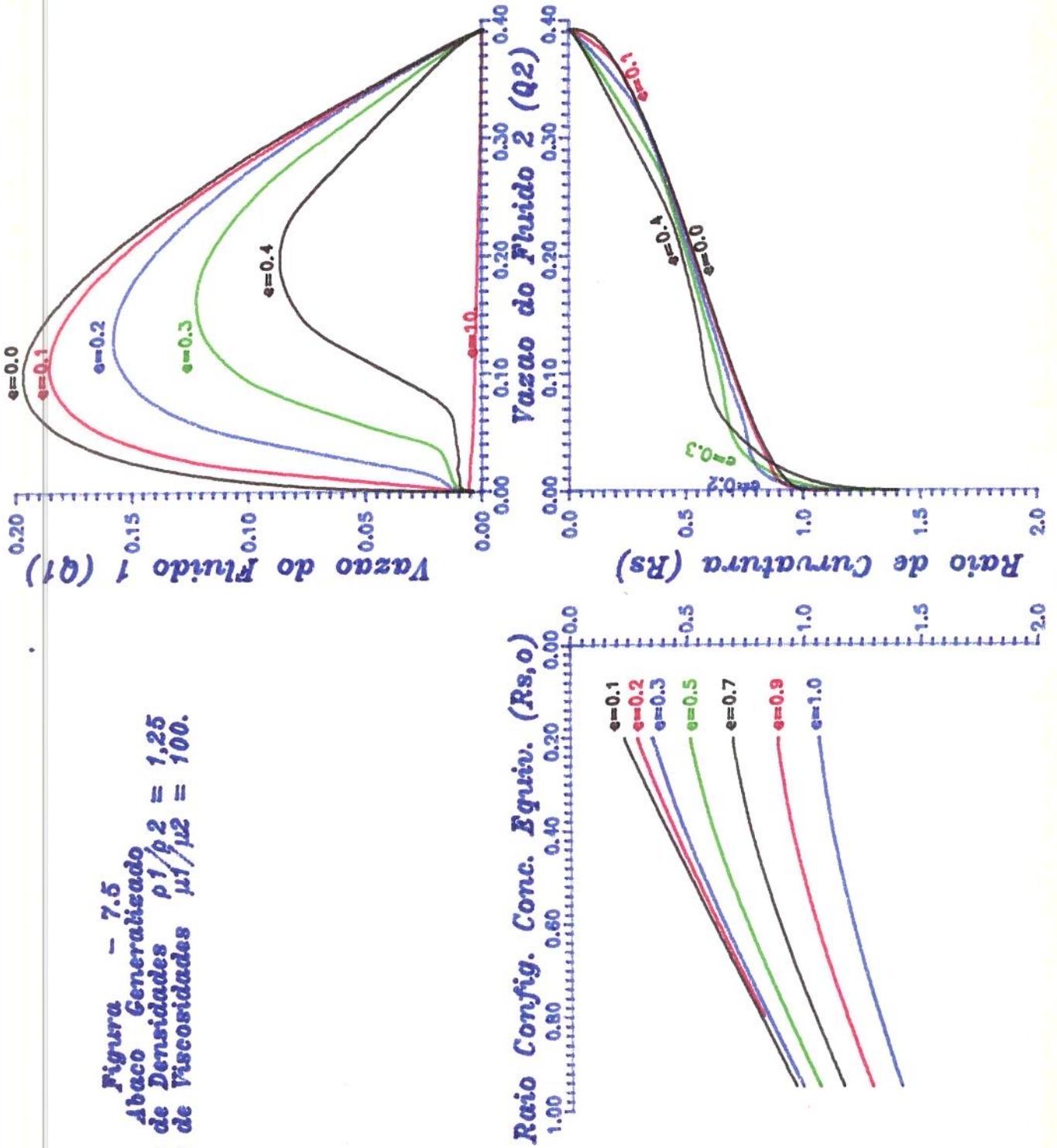
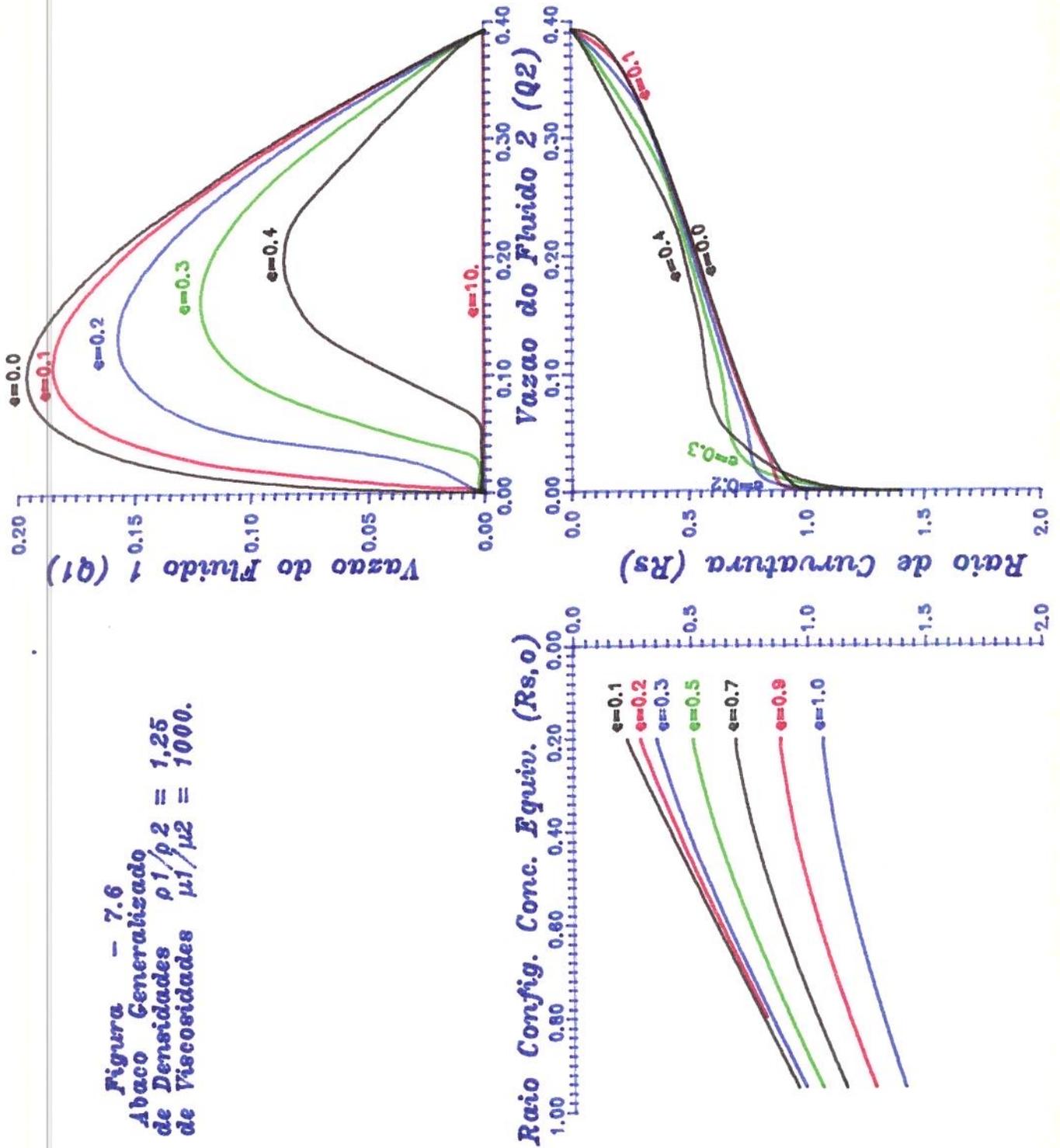


Figura - 7.6
Abaco Generalizado
 Razao de Densidades $\rho_1/\rho_2 = 1,25$
 Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000$.



7.3- Utilização dos Ábacos

A utilização dos ábacos é simples, mas para se ilustrar o seu uso será resolvido um exemplo genérico:

Problema:

Suponha-se que um pesquisador fez com que dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes e conhecidas escoassem por uma tubulação horizontal. O aparato experimental é composto de tubos convencionais não transparentes e não existe nenhum dispositivo sensor com que se possa verificar a configuração dos fluidos em seu interior. Os únicos parâmetros que o pesquisador impõe ao experimento são as vazões individuais de cada fluido, Q_1 e Q_2 . E o único parâmetro que ele monitora é o gradiente de pressão na direção axial do tubo, G , em um trecho da tubulação suficientemente longe da entrada onde confirmadamente o escoamento já está plenamente desenvolvido. De alguma maneira o pesquisador garante que o escoamento em ambas fases é laminar. Ele deseja saber a configuração dos fluidos no interior do tubo.

Solução:

1) Na tabela 7.1 procura-se o ábaco que corresponde às propriedades dos fluidos utilizados no experimento;

2) Calcula-se:

$$D = \frac{Q_1}{Q_2} \quad ;$$

3) No ábaco localiza-se o gráfico $\hat{Q}_1 \times \hat{Q}_2$ e traça-se uma linha reta com a inclinação correspondente à razão D ;

4) No ponto em que esta reta cortar a curva de excentricidade zero ($\hat{e} = 0$) ler $\hat{Q}_{1,0}$ e $\hat{Q}_{2,0}$;

5) Por $\hat{Q}_{2,0}$ obtem-se o valor de $\hat{R}_{s,0}$ no gráfico $\hat{Q}_2 \times \hat{R}_s$;

6) Toma-se o valor de $\hat{R}_{s,0}$ do passo (5) e obtem-se um conjunto de pares (\hat{e}, \hat{R}_s) no gráfico $\hat{R}_{s,0} \times \hat{R}_s$;

7) Para cada par (\hat{e}, \hat{R}_s) do conjunto encontrado no passo (6) obtem-se os valores de \hat{Q}_1 e \hat{Q}_2 através dos gráficos $\hat{Q}_2 \times \hat{R}_s$ e $\hat{Q}_1 \times \hat{Q}_2$.

8) Com \hat{Q}_1 e \hat{Q}_2 calcula-se:

$$D_c = \frac{\hat{Q}_1}{\hat{Q}_2} \quad ;$$

9) A configuração dos fluidos no interior da tubulação tem excentricidade e raio de curvatura adimensionais,

\hat{c} e \hat{R}_g quando o valor de D_c calculado no passo (8) for igual a D calculado no passo (2);

10) Com o uso das equações (7.26,27) transforma-se as variáveis adimensionais em dimensionais.

A figura 7.7 mostra graficamente o procedimento de solução descrito acima.

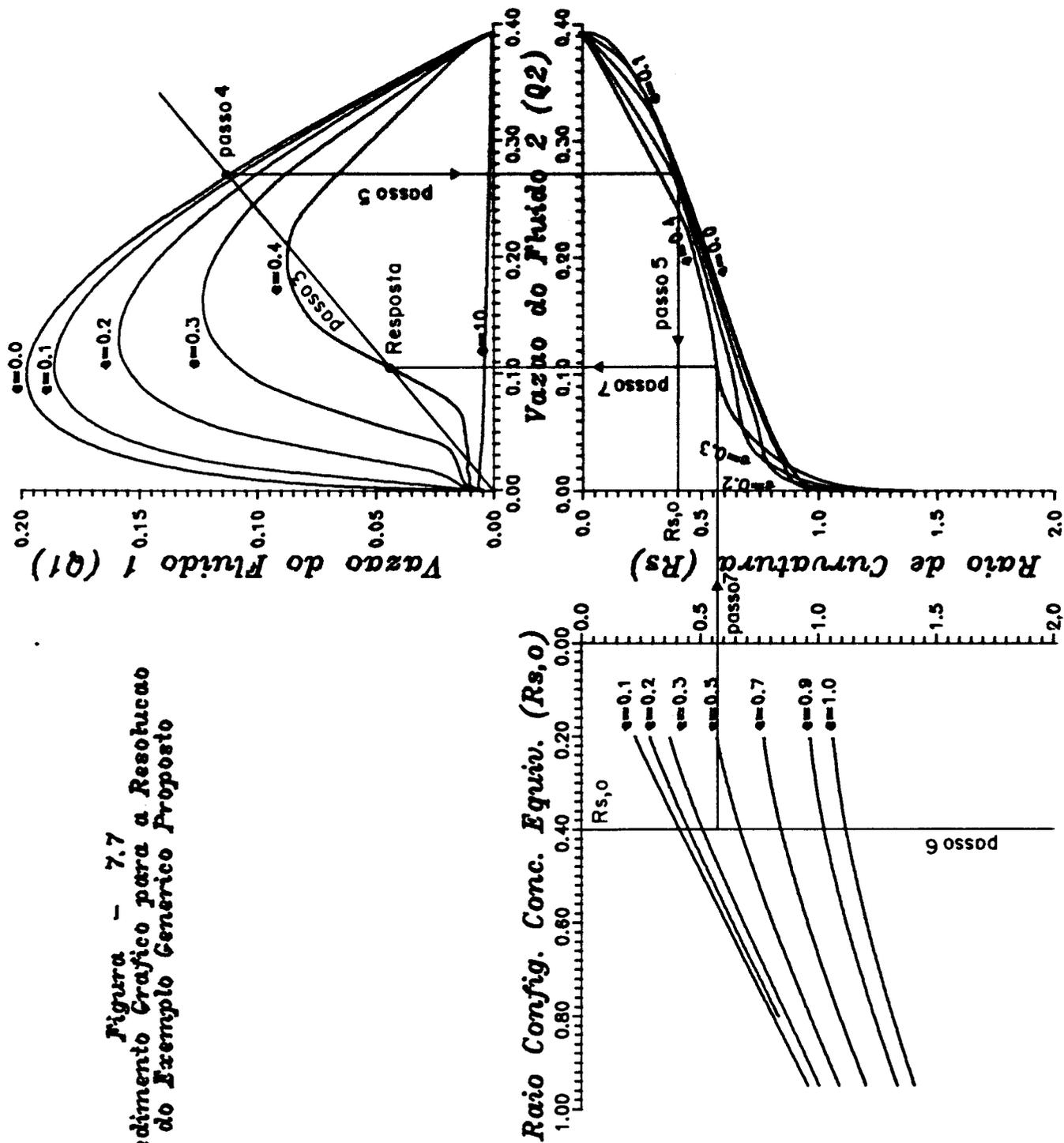
7.4- Interpretação do Comportamento dos Gráficos $\hat{Q}_1 \times \hat{Q}_2$

Pelos gráficos $\hat{Q}_1 \times \hat{Q}_2$ pode-se observar que a adição de um fluido imiscível menos viscoso ao escoamento de um fluido mais viscoso por um tubo horizontal pode, mantido o gradiente de pressão constante, incrementar a vazão deste último até aproximadamente a ordem de grandeza da razão de viscosidade dos dois fluidos. Quanto maior for o encapsulamento (i.e. menor a excentricidade) do fluido mais viscoso maior será este ganho de vazão.

Mantida a excentricidade da configuração dos fluidos constante a vazão do fluido menos viscoso para a qual a vazão do fluido mais viscoso é máxima se dá entre 50% a 100% desta última. O ponto de máximo da vazão do fluido mais viscoso se desloca em direção a maiores vazões do fluido menos viscoso a medida em que a excentricidade do núcleo viscoso aumenta.

Quando o fluido menos viscoso não encapsula totalmente o mais viscoso o ganho de vazão não é significativo.

Figura - 7.7
 Procedimento Grafico para a Resolucao
 do Exemplo Generico Proposto



Certamente os custos agregados à execução dos processos de injeção simultânea dos fluidos na tubulação e a sua posterior separação na saída devem exceder aos ganhos obtidos.

O fator de redução de potência, conforme definido por BENTWICH [2,3], devido a adição do líquido 2 menos viscoso ao líquido 1 mais viscoso, originalmente em escoamento monofásico cuja vazão permanece constante é dado por:

$$FP = \frac{P_{\text{mono}}}{P_{\text{bifs}}} \quad (7.33)$$

ou:

$$FP = \frac{Q_1 G_{\text{mono}}}{(Q_1 + Q_2) G_{\text{bifs}}} \quad (7.34)$$

mas:

$$\frac{Q_1}{(Q_1 + Q_2)} = \frac{\hat{Q}_1}{(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2)} \quad (7.35)$$

e pode-se provar que:

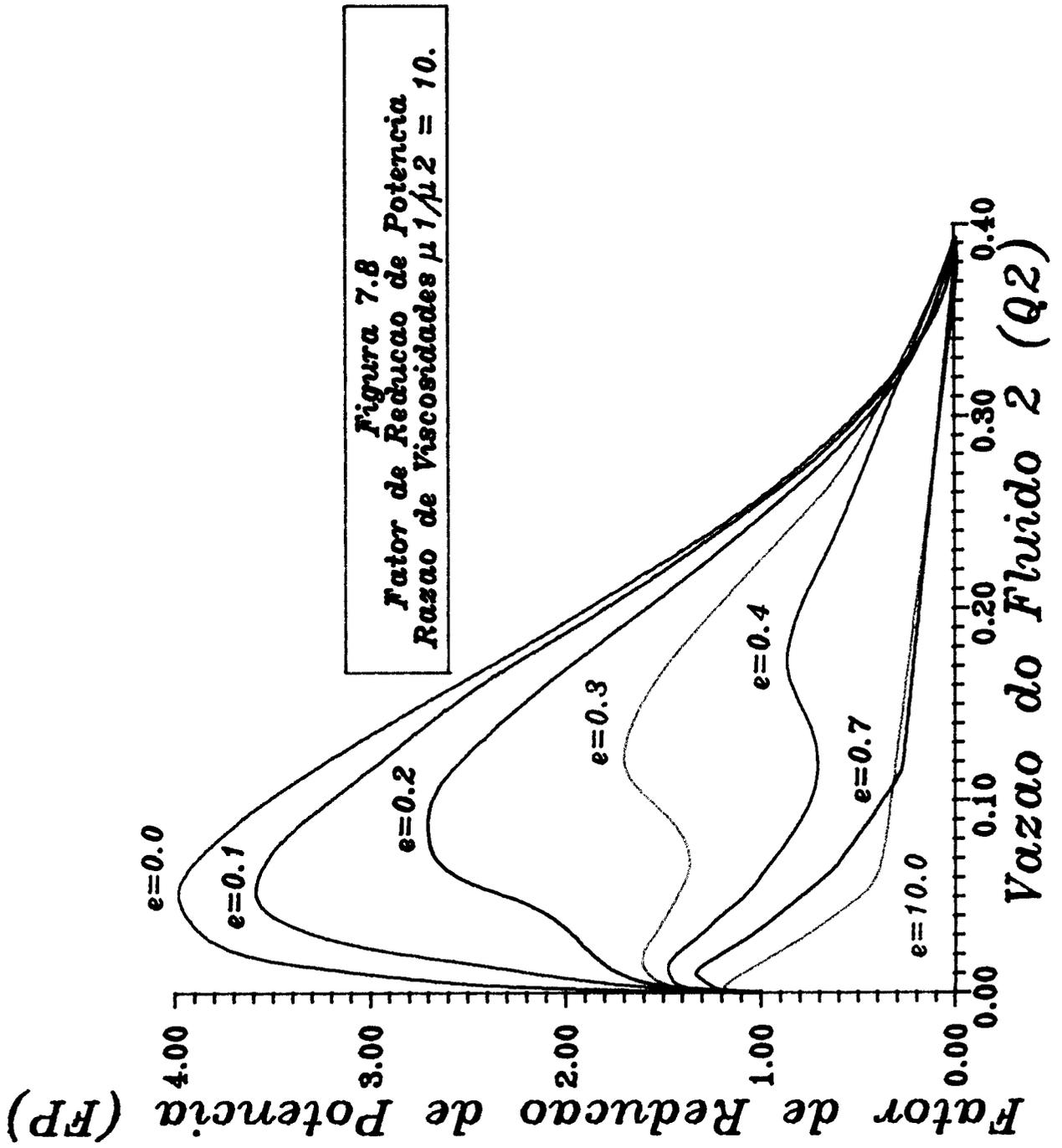
$$\frac{G_{\text{mono}}}{G_{\text{bifs}}} = \frac{\hat{Q}_1}{\hat{Q}_{1,\text{mono}}} \quad (7.36)$$

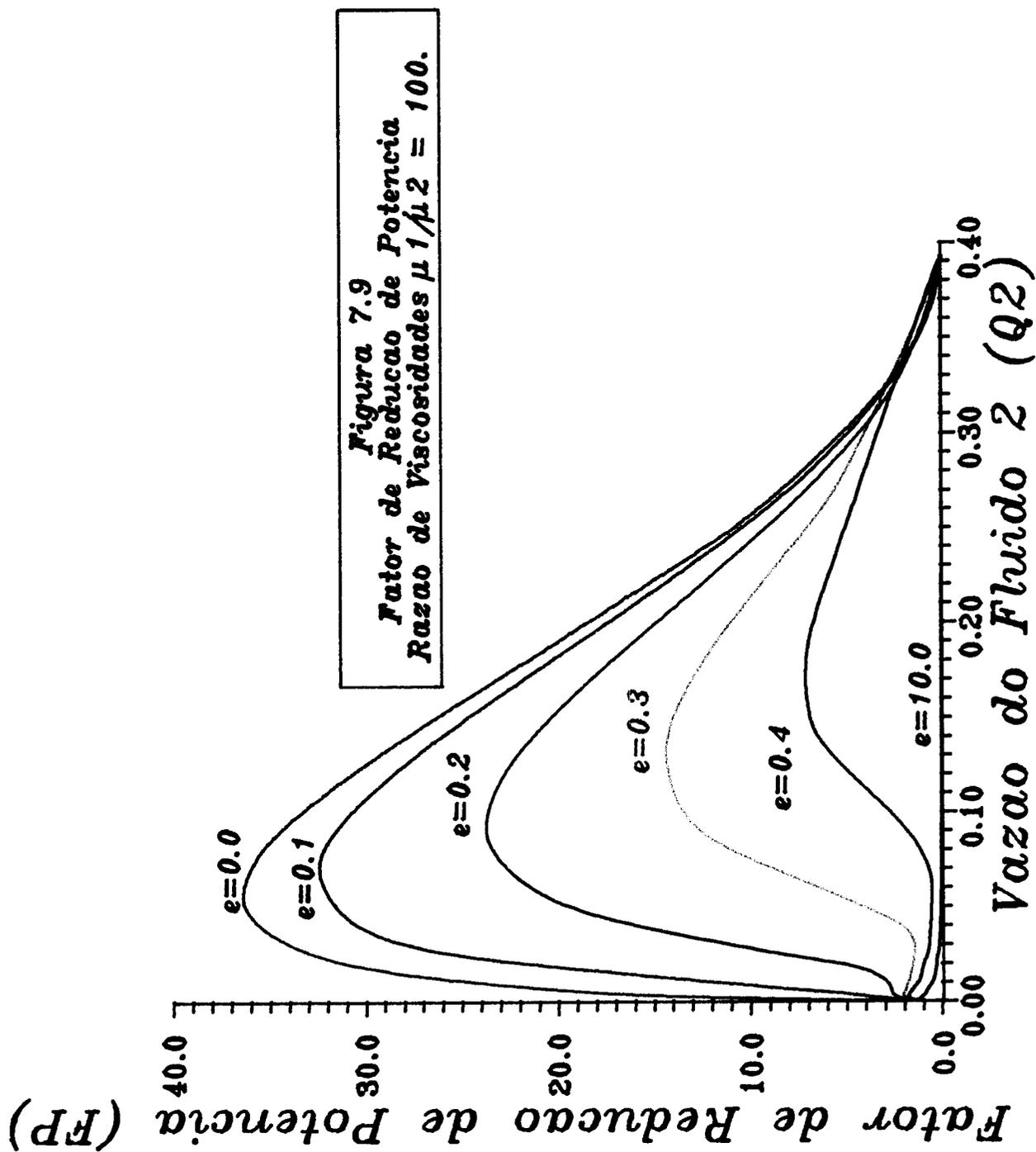
portanto:

$$FP = \frac{(\hat{Q}_1)^2}{(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) Q_{1,mono}} \quad (7.37)$$

As figuras 7.8-10 mostram o graficamente a relação entre o fator de redução de potência e a vazão (adimensional) do fluido menos viscoso adicionado (gráficos $\hat{Q}_2 \times FP$).

Como se pode observar dessas figuras o ganho de potência máximo é da ordem de grandeza da vazão das viscosidades, e corresponde ao ponto de máximo das curvas de excentricidade nula.





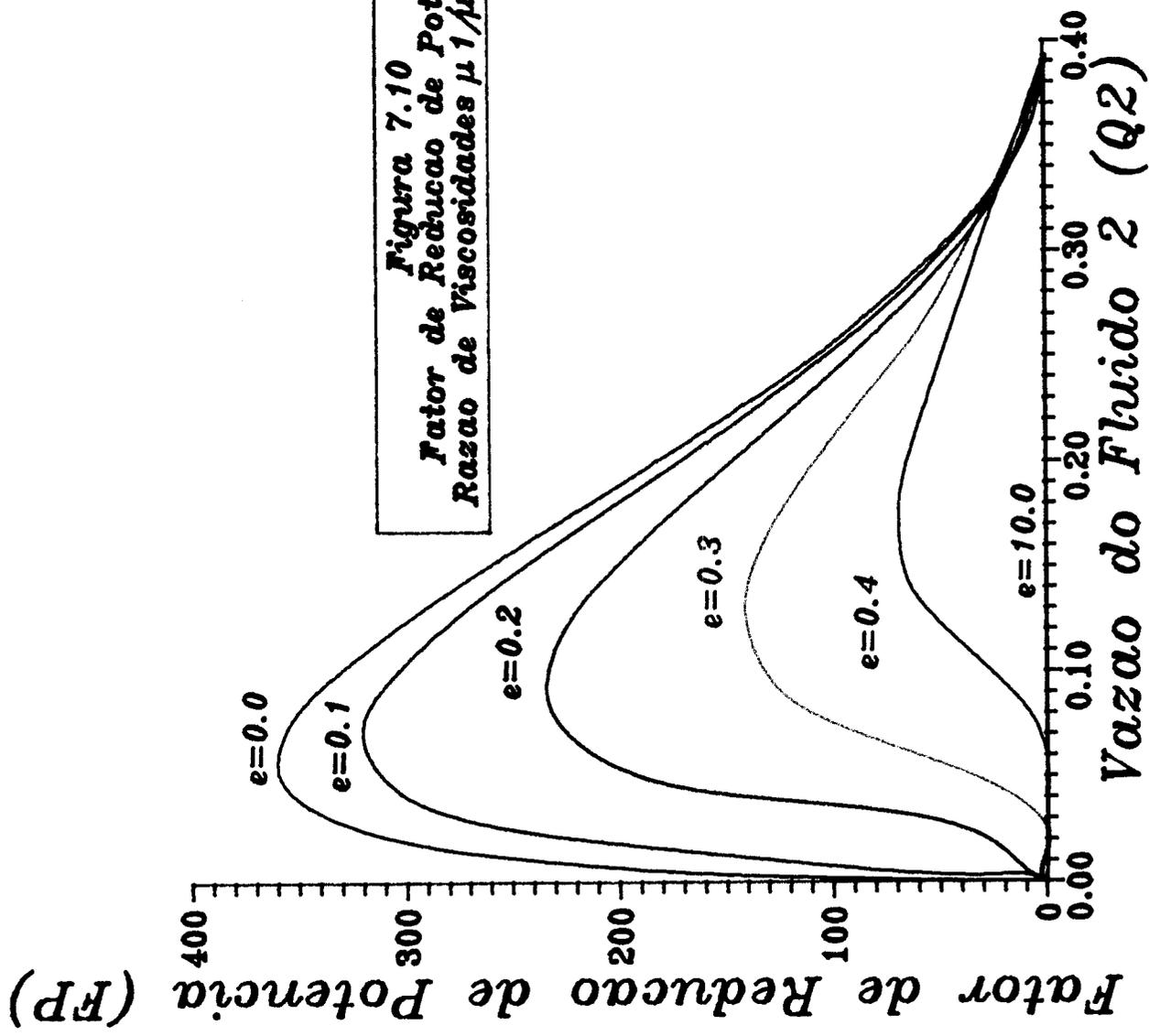


Figura 7.10
Fator de Reducao de Potencia
Razao de Viscosidades $\mu_1/\mu_2 = 1000$.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho objetivou-se, baseado no "princípio da mínima dissipação viscosa", elaborar um método de previsão da configuração de fases conjuntamente com os respectivos campos de velocidades, que quaisquer dois líquidos imiscíveis assumem ao escoarem simultaneamente em uma tubulação horizontal.

Fez-se um rigoroso levantamento bibliográfico do trabalho de pesquisadores, engenheiros e matemáticos que observaram experimentalmente o escoamento simultâneo de duas fases líquidas imiscíveis nas mais diversas situações técnicas e que procuraram formular e resolver física e matematicamente o fenômeno. Reparou-se que a quase totalidade dos artigos revistos eram muito limitados em relação aos objetivos que se procurou atingir com a presente tese. Por exemplo, nos trabalhos teóricos a interface entre os fluidos, quando não foi previamente prescrita, só foi calculada para o caso mais simples do escoamento bifásico de dois fluidos de mesma densidade, e ainda assim sem reportar o procedimento empregado em detalhe. E no caso dos trabalhos experimentais, a grande maioria dos pesquisadores limitou-se a simplesmente observar o formato da interface qualitativamente.

A fim de se possuir uma maior compreensão do uso de princípios variacionais para a determinação de campos de velocidades e da forma de interface de dois fluidos no interior

de uma tubulação, estudou-se inicialmente alguns casos mais simples do que aquele proposto nos objetivos deste trabalho.

Assim:

a) utilizou-se o "princípio da mínima energia potencial", para a determinação da forma da interface no caso hidrostático de dois fluidos no interior de um tubo (resultado: interface plana; ver o capítulo 2); a ferramenta básica utilizada foi a regra de Leibniz de derivação de integrais em respeito aos limites de integração;

b) utilizou-se o "princípio da mínima dissipação viscosa", para a determinação do campo de velocidades do escoamento monofásico desenvolvido por um duto de seção genérica (resultado: equação de Navier-Stokes para o escoamento laminar desenvolvido e condição de contorno de não escorregamento na parede do duto; ver o capítulo 3); aqui o procedimento clássico do cálculo de variações foi empregado para a determinação das equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional;

c) utilizou-se o "princípio da mínima dissipação viscosa", para a determinação do campo de velocidades e da forma da interface no escoamento desenvolvido de dois líquidos imiscíveis de viscosidades quaisquer e densidades iguais por um tubo (resultado: campo de velocidades em cada fase regido por equações idênticas à do escoamento monofásico agregadas das condições de continuidade de velocidades e tensões de cisalhamento na interface, e interface circular concêntrica ao eixo do tubo, ver o capítulo 4); a regra de Leibniz foi novamente empregada na determinação da forma da interface..

A partir do estudo dos casos acima foi elaborada uma metodologia de cálculo apropriada para a utilização do "princípio da mínima dissipação viscosa" na previsão da configuração de fases e campos de velocidades no escoamento de dois líquidos imiscíveis de densidades e viscosidades diferentes por uma tubulação horizontal, problema até aqui não abordado na literatura. Desta forma, pelo uso da regra de Leibniz e a partir de considerações convenientes, conseguiu-se determinar a forma da interface entre os fluidos como sendo circular excêntrica dependente das propriedades (viscosidade e densidade) dos mesmos, com os campos de velocidades de cada fase sendo regidos pelas mesmas equações diferenciais do caso de fluidos de densidade iguais (ver o capítulo 5). A solução proposta deste problema representa, uma significativa contribuição para o melhor entendimento do fenômeno, visto que os resultados obtidos, até agora inéditos, concordam ao menos de forma qualitativa com as situações reais reportadas na bibliografia pesquisada.

Para a engenharia de petróleo, os resultados aqui previstos, podem, respeitadas as condições expressas no título deste trabalho (escoamento laminar desenvolvido e imiscibilidade) e levando-se em conta as demais considerações feitas ao longo do mesmo, auxiliar a determinar que vazão de fluido menos viscoso deve ser adicionada ao escoamento de outro mais viscoso afim de que a transferência de uma vazão requerida deste último por uma tubulação horizontal não exceda um dado diferencial de pressão máximo admissível na linha ou um certo limite de potência na estação de bombeamento.

Para outros ramos da engenharia, além de aplicações similares à descrita acima, pode-se ainda vislumbrar a utilização destes resultados na solução de problemas de naturezas bastante diversas. Cita-se, por exemplo, aquela classe de problemas, da qual faz parte a coextrusão de polímeros fundidos na fabricação de filamentos compostos, onde o formato da interface entre os fluidos e a área ocupada por cada um deles são por si só parâmetros importantes a serem determinados.

Este trabalho, comportou diversas simplificações e suposições, não pretendendo assim ser obra acabada e definitiva. Abre-se desta feita um leque de opções a trabalhos futuros que se aprofundem no tema em questão. Podemos portanto sugerir que os seguintes tópicos sejam estudados em maior detalhe:

a) Estudo matemático analítico mais rigoroso do problema apresentado. Tanto no processo de minimização de funcionais quanto nas soluções das equações de Euler-Lagrange um maior formalismo se faz necessário. As soluções homogêneas das equações de Euler-Lagrange também devem ser mais trabalhadas de maneira a se determinar sua relevância no processo de minimização no caso em que estas funções não assumem valores constantes em cada subdomínio;

b) Estudo do funcional dissipação viscosa geral (fluidos de densidades e viscosidades distintas) acrescido dos efeitos da tensão superficial entre o fluidos e entre cada fluido e a parede do tubo, estendendo o trabalho efetuado ao caso de tubos capilares de pequeno diâmetro. A importância

deste estudo residirá na sua aplicação ao escoamento bifásico imiscível em meios porosos;

c) Estudo do funcional geral acrescido de efeitos de turbulência, principalmente no escoamento do fluido de menor viscosidade molecular;

d) Análise de escoamentos em que o gradiente de pressão não seja igual em ambas as fases, possibilitando estudar os casos de escoamentos verticais e inclinados de fluidos com densidades diferentes; e

e) Desenvolvimento de um programa experimental para verificação dos resultados obtidos no presente trabalho. Pode-se também correlacionar empiricamente os parâmetros de uma interface circular entre os fluidos (excentricidade e raio de curvatura) com as suas propriedades (densidades e viscosidades) e restrições impostas ao escoamento (vazões).

REFERÊNCIAS

BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - BENTWICH, M. Two-Phase Viscous Axial Flow in a Pipe. Trans. ASME : J. Basic Eng., 86 : 669-672, DEZ. 1964.
- 02 - BENTWICH M., KELLY D. A. I., EPSTEIN, N. Two-Phase Eccentric Laminar Pipeline Flow. Trans. ASME : J. Basic Eng., 92 : 32-36, MAR. 1970.
- 03 - BENTWICH, M. Two-Phase Laminar Flow in a Pipe with Naturally Curved Interface. Chem. Eng. Sci., 31 : 71-76, 1976.
- 04 - CHARLES, M. E., GOVIER G. W. & HODGSON, G. W. The Horizontal Pipeline Flow of Equal Density Oil-Water Mixtures. Can. J. Chem. Eng., 39(1) : 27-36, FEV. 1961.
- 05 - CHARLES, M. E., REDBERGER, P. J. The Reduction of Pressure Gradients in Oil Pipelines by the Addition of Water: Numerical Analysis of Stratified Flow. Can. J. Chem. Eng., 40(2) : 70-75, ABR. 1962.
- 06 - EVERAGE, JR., A. E. Theory of Stratified Bicomponent Flow of Polymer Melts. I. Equilibrium Newtonian Tube Flow. Trans. Soc. Rheology, 17(4) : 629-646, 1973.
- 07 - GEMMEL, A. R., EPSTEIN, N. Numerical Analysis of Stratified Laminar Flow of Two Immiscible Newtonian Liquids in a Circular Pipe. Can. J. Chem. Eng., 40(5) : 215-224, OUT. 1962.
- 08 - HASSON, D., MANN, U., NIR A. Annular Flow of Two Immiscible Liquids. I. Mechanisms. Can. J. Chem. Eng., 48(5) : 514-520, OUT. 1970.

- 09 - HASSON, D., NIR, A. Annular Flow of Two Immiscible Liquids. II. Analysis of Core-Liquid Ascent Can. J. Chem Eng., 48(5) : 521-526, OUT. 1970.
- 10 - HILDEBRAND, F. B. Methods of Applied Mathematics, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1965.
- 11 - JOSEPH, D. D., NGUYEN, K., BEAVERS, G. S. Non-Uniqueness and Stability of the Configuration of Flow of Immiscible Fluids with Different Viscosities. J. Fluid Mech., 141 : 319-345, 1984.
- 12 - JOSEPH, D. D., RENARDY, M., RENARDY, Y. Instability of the Flow of Two Immiscible Liquids with Different Viscosities in a Pipe. J. Fluid Mech., 141 : 309-317, 1984.
- 13 - KRASNOV, M. L., MAKARENKO, G. I., KISELOV, A. I. Cálculo Variacional, Moscou, Editora Mir, 1984.
- 14 - MacLEAN, D. L. A Theoretical Analysis of Bicomponent Flow and the Problem of Interface Shape. Trans. Soc. Rheology, 17(3) : 385-399, 1973.
- 15 - MINAGAWA, N., WHITE, J. L. Co-Extrusion of Unfilled and TiO_2 -Filled Polyethylene: Influence of Viscosity and Die Cross-Section on Interface Shape. Polymer Eng. and Sci., 15(12) : 825-830, DEZ. 1975.
- 16 - OLIEMANS, R. V. A. et alii. Core-Annular Oil/Water Flow: The Turbulent-Lubricating-Film Model and Measurements in a 5 cm Pipe Loop. Int. J. Multiphase Flow., 13(1) : 23-31, 1987.

- 17 - OOMS, G. et alii. A Theoretical Model for Core-Annular Flow of a Very Viscous Oil Core and a Water Annulus through a Horizontal Pipe. Int. J. Multiphase Flow., 10(1) : 41-60, 1984.
- 18 - PATANKAR S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington, Hemisphere, 1980.
- 19 - RUSSEL, T. W. F., HODGSON G. W., GOVIER G. W. Horizontal Pipeline Flow of Mixtures of Oil and Water. Can. J. Chem. Eng., 37(1) : 9-17, FEV. 1959.
- 20 - RUSSEL, T. W. F., CHARLES, M. E. The Effect of The Less Viscous Liquid in The Laminar Flow of Two Immiscible Liquids. Can. J. Chem. Eng., 37(1) : 18-24, FEV. 1959.
- 21 - SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. New York, McGraw-Hill, 1979.
- 22 - SLATTERY, J. C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua. New York, McGraw-Hill, 1972.
- 23 - SOUTHERN J. H., BALLMAN R. L. Stratified Bicomponent Flow of Polymer Melts in a Tube. Appl. Polymer Sci., 20 : 175-189, 1973.
- 24 - WANG, C. C-C., CHARLES, M. E. Co-Current Stratified Flow of Immiscible Liquids: Velocity Distribution and Pressure Gradient in the Laminar-Laminar and Laminar-Turbulent Regimes. Can. J. Chem Eng., 59(6) : 668-676, DEZ. 1981.
- 25 - WHITE, F. M. Viscous Fluid Flow. New York, McGraw-Hill, 1974.
- 26 - WHITE, J. L., LEE, B-L. Theory of Interface Distortion in Stratified Two-Phase Flow. Trans. Soc. Rheology, 19(3) : 457-479, 1975.

- 27 - WILLIAMS, M. C., Migration of Two Liquid Phases in Capillary Extrusion: An Energy Interpretation. AICHE J., 21(6) : 1204-1207, NOV. 1975.
- 28 - WU, H. L. et alii. Core-Annular Flow: A Solution to Pipeline Transportation of Heavy Crude Oils. Rev. Tec. INTEVEP., 8(1) : 17-22, JAN. 1986.
- 29 - YU, H. S., SPARROW, E. M. Experiments on Two-Component Stratified Flow in a Horizontal Duct. Trans. ASME : J. Heat Transfer, 91 : 51-58, FEB. 1969.
- 30 - ZUBILLAGA, V. et alii. Pipelining of Heavy Crude Oils Using Core Annular Flow. 3rd UNITAR/UNDP Heavy Crude and Tar Sands Conf., 4 : 2000-2016, 1985.

A N E X O S

A N E X O 1

**EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE ASSOCIADAS A PROBLEMAS VARIACIONAIS
COM UM OU MAIS SUBDOMÍNIOS**

EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE ASSOCIADAS A PROBLEMAS VARIACIONAIS
COM UM OU MAIS SUBDOMÍNIOS

A1.1- Problemas com Apenas Um Subdomínio

Seja o funcional:

$$J(w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} F(r, \theta, w, w_r, w_\theta) r \, dr d\theta \quad (A1.1)$$

para o qual se procura a função w que o extremize em um dado domínio.

A aplicação da condição :

$$\delta J = 0 \quad (A1.2)$$

resulta em:

$$\frac{dJ}{dw} = 0 \quad (A1.3)$$

Considere-se então que a função $w(r, \theta)$ sofra uma variação $\delta w(r, \theta)$. Então:

$$J(w + \delta w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} F(r, \theta, w + \delta w, w_r + \delta w_r, w_\theta + \delta w_\theta) r \, dr d\theta \quad (A1.4)$$

Temos:

$$\delta J \equiv J \left[w + \delta w \right] - J \left[w \right] \quad (A1.5)$$

c:

$$\delta F = F \left[r, \theta, w + \delta w, w_r + \delta w_r, w_\theta + \delta w_\theta \right] - F \left[r, \theta, w, w_r, w_\theta \right] \quad (A1.6)$$

Uma vez que δw é infinitesimal, é suficiente expandir a eq.(A1.6) em série de Taylor de primeira ordem:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_r} \delta w_r + \frac{\partial F}{\partial w_\theta} \delta w_\theta \quad (A1.7)$$

donde:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w \right] + \frac{\partial F}{\partial w_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w \right] \quad (A1.8)$$

Logo:

$$\delta J = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[\frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w \right] + \frac{\partial F}{\partial w_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w \right] \right] r dr d\theta \quad (A1.9)$$

ou equivalentemente:

$$\delta J = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[r \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial F}{\partial w_r} \delta w \right] + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial F}{\partial w_\theta} \delta w \right] - \delta w \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial F}{\partial w_r} \right] - r \delta w \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial F}{\partial w_\theta} \right] \right] r dr d\theta \quad (A1.10)$$

Reagrupando a equação anterior vem:

$$\delta J = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \delta w \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial w_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial w_\theta} \right) \right] r \, dr \, d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial w_r} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial w_\theta} \delta w \right) \right] r \, dr \, d\theta$$

(A1.11)

Definindo:

$$\vec{V} = \frac{\partial F}{\partial w_r} \vec{e}_r + r \frac{\partial F}{\partial w_\theta} \vec{e}_\theta$$

(A1.12)

e lembrando que:

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

(A1.13)

a equação (A1.12) se torna:

$$\delta J = \int_A \delta w \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \nabla \cdot \vec{V} \right] dA + \int_A \nabla \cdot \left(\vec{V} \delta w \right) dA$$

(A1.14)

Usando o teorema de Gauss na última integral vem:

$$\delta J = \int_A \delta w \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \nabla \cdot \vec{V} \right] dA + \oint_S \delta w \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

(A1.15)

Quando J é extremo a variação expressa pela

cq.(A1.15) é nula para qualquer área A de superfície S. Para tal é necessário que:

$$i) \quad \frac{\delta F}{\delta w} - \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{em A} \quad (A1.16)$$

ou em coordenadas polares:

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\delta F}{\delta w_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\delta F}{\delta w_\theta} \right) = 0 \quad (A1.17)$$

e

$$ii) \quad \delta w = 0 \quad \text{em S} \quad (A1.18)$$

ou seja w é especificado em S (condição "essencial"). Alternativamente à condição (A1.18) pode-se ter:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em S} \quad (A1.19)$$

o que significa que as derivadas contidas em (A1.12) são nulas em S (condição "natural").

A1.2- Problemas com Dois Subdomínios

Considere-se o problema do seguinte funcional a dois subdomínios:

$$J\left[w(r, \theta, s), s(\theta)\right] = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{s(\theta)} F_1\left(r, \theta, w_1, w_{1r}, w_{1\theta}\right) r dr + \int_{s(\theta)}^{R(\theta)} F_2\left(r, \theta, w_2, w_{2r}, w_{2\theta}\right) r dr \right\} d\theta$$

(A1.20)

para o qual se procuram as funções w_1 , w_2 e s que o extremizem em um dado domínio.

A aplicação da condição :

$$\delta J = 0 \quad (\text{A1.21})$$

para as variações δw_1 , δw_2 e δs resulta em duas equações:

$$i) \quad \left[\frac{\partial J}{\partial w} \right]_s = 0 \quad (\text{A1.22})$$

ou

$$\delta J|_{s=\text{const}} = 0 \quad (\text{A1.23})$$

e

$$ii) \quad \frac{dJ}{ds} = \left[\frac{\partial J}{\partial w} \right]_s \frac{\partial w}{\partial s} + \left[\frac{\partial J}{\partial s} \right]_w = 0 \quad (\text{A1.24})$$

ou, devido a (A1.22)

$$\delta J|_{w=\text{const}} = 0 \quad (\text{A1.23})$$

Estudar-se-á neste anexo a condição expressa pela eq.(A1.23). visto que a condição expressa pela eq.(A1.25) é vista nos capítulo 4 e 5.

Então com $s(\theta)$ mantido fixo, admita-se que as funções $w_1(r, \theta)$ e $w_2(r, \theta)$ sofram variação $\delta w_1(r, \theta)$ e $\delta w_2(r, \theta)$ respectivamente. Logo:

$$J(w_1 + \delta w_1, w_2 + \delta w_2) = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{s(\theta)} F(r, \theta, w_1 + \delta w_1, w_{1r} + \delta w_{1r}, w_{1\theta} + \delta w_{1\theta}) r \, dr \right. \\ \left. \int_{s(\theta)}^{R(\theta)} F(r, \theta, w_2 + \delta w_2, w_{2r} + \delta w_{2r}, w_{2\theta} + \delta w_{2\theta}) r \, dr \right\} d\theta \quad (A1.26)$$

Temos:

$$\delta J|_{s=\text{const}} = J(w_1 + \delta w_1, w_2 + \delta w_2, s) - J(w_1, w_2, s) \quad (A1.27)$$

e:

$$\delta F_1 = F_1(r, \theta, w_1 + \delta w_1, w_{1r} + \delta w_{1r}, w_{1\theta} + \delta w_{1\theta}) - F_1(r, \theta, w_1, w_{1r}, w_{1\theta}) \quad (A1.28)$$

$$\delta F_2 = F_2(r, \theta, w_2 + \delta w_2, w_{2r} + \delta w_{2r}, w_{2\theta} + \delta w_{2\theta}) - F_2(r, \theta, w_2, w_{2r}, w_{2\theta}) \quad (A1.29)$$

Como δw_1 e δw_2 são infinitesimais, é suficiente expandir (A1.28) e (A1.29) em série de Taylor até a primeira ordem:

$$\delta F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial w_1} \delta w_1 + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \delta w_{1r} + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \delta w_{1\theta} \quad (\text{A1.30})$$

c

$$\delta F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial w_2} \delta w_2 + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \delta w_{2r} + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \delta w_{2\theta} \quad (\text{A1.31})$$

donde:

$$\delta F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial w_1} \delta w_1 + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w_1 \right] + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w_1 \right] \quad (\text{A1.32})$$

$$\delta F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial w_2} \delta w_2 + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w_2 \right] + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w_2 \right] \quad (\text{A1.33})$$

Substituindo-se as relações (A1.32) e (A1.33) na eq.(A1.27) se obtém:

$$\delta J|_s = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{s(\theta)} \left[\frac{\partial F_1}{\partial w} \delta w_1 + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w_1 \right] + \frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w_1 \right] \right] dr + \int_{s(\theta)}^{R(\theta)} \left[\frac{\partial F_2}{\partial w} \delta w_2 + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\delta w_2 \right] + \frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta w_2 \right] \right] dr \right\} d\theta \quad (\text{A1.34})$$

ou equivalentemente:

$$\begin{aligned}
\delta J|_s = & \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{s(\theta)} \left[r \frac{\partial F_1}{\partial w_1} \delta w_1 + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \delta w_1 \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \delta w_1 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \delta w_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \right) - r \delta w_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \right) \right] dr + \right. \\
& \left. \int_0^{s(\theta)} \left[r \frac{\partial F_2}{\partial w_2} \delta w_2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \delta w_2 \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \delta w_2 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \delta w_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \right) - r \delta w_2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \right) \right] dr \right\} d\theta
\end{aligned}$$

(A1.35)

Reagrupando vem:

$$\begin{aligned}
\delta J|_s = & \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} \delta w_1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \right) \right] r dr d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \int_{s(\theta)}^{R(\theta)} \delta w_2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \right) \right] r dr d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \int_0^{s(\theta)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \delta w \right) \right] r dr d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \int_{s(\theta)}^{R(\theta)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \delta w \right) \right] r dr d\theta
\end{aligned}$$

(A1.36)

Definindo:

$$\vec{V}_1 \equiv \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \vec{e}_r + r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \vec{e}_\theta \quad (\text{A1.37})$$

$$\vec{V}_2 \equiv \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \vec{e}_r + r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \vec{e}_\theta \quad (\text{A1.38})$$

e dado que:

$$dA = r \, dr \, d\theta \quad (\text{A1.39})$$

a eq. (A1.36) se torna:

$$\begin{aligned} \delta J|_E = & \int_{A_1} \delta w_1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \nabla \cdot \vec{V}_1 \right] dA + \int_{A_1} \nabla \cdot \left[\vec{V}_1 \delta w_1 \right] dA + \\ & \int_{A_2} \delta w_2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \nabla \cdot \vec{V}_2 \right] dA + \int_{A_2} \nabla \cdot \left[\vec{V}_2 \delta w_2 \right] dA \quad (\text{A1.40}) \end{aligned}$$

Usando o teorema de Gauss na segunda e na última integral vem:

$$\begin{aligned} \delta J|_E = & \int_{A_1} \delta w_1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \nabla \cdot \vec{V}_1 \right] dA + \int_{S_1} \delta w_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS + \int_{S_i} \delta w_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS + \\ & \int_{A_2} \delta w_2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \nabla \cdot \vec{V}_2 \right] dA + \int_{S_2} \delta w_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS + \int_{S_i} \delta w_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS \quad (\text{A1.41}) \end{aligned}$$

Finalmente, como $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ em S_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta J|_S = & \int_{A_1} \delta w_1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \nabla \cdot \vec{V}_1 \right] dA + \int_{A_2} \delta w_2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \nabla \cdot \vec{V}_2 \right] dA + \\ & \int_{S_1} \delta w_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \delta w_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_1} \left[\delta w_1 \vec{V}_1 - \delta w_2 \vec{V}_2 \right] \cdot \vec{n}_1 dS \end{aligned} \quad (A1.40)$$

Quando J é extremo a variação expressa pela eq.(A1.42) é nula para quaisquer áreas A_1 e A_2 , respectivamente de superfícies S_1 e S_2 . Disso se conclui que:

$$i) \quad \frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad \text{em } A_1 \quad (A1.43)$$

ou, em coordenadas polares:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} \right] = 0 \quad (A1.44)$$

$$ii) \quad \frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \nabla \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad \text{em } A_2 \quad (A1.45)$$

ou em coordenadas polares:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \right] = 0 \quad (A1.46)$$

$$iii) \quad \delta w_1 = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (A1.47)$$

ou seja w_1 é especificado em S_1 (condição "essencial").
Alternativamente à condição (A1.47) pode-se ter:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (\text{A1.48})$$

o que significa que as derivadas contidas em (A1.37) são nulas em S_1 (condição "natural").

$$\text{iv)} \quad \delta w_2 = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (\text{A1.49})$$

ou seja w_2 é especificado em S_2 (condição "essencial").
Alternativamente à condição (A1.49) pode-se ter:

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (\text{A1.50})$$

o que significa que as derivadas contidas em (A1.38) são nulas em S_2 (condição "natural").

$$\text{v)} \quad \delta w_1 = \delta w_2 \neq 0 \quad \text{em } S_i \quad (\text{A1.51})$$

e

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1r}} = \frac{\partial F_2}{\partial w_{2r}} \right) ; \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_{1\theta}} = \frac{\partial F_2}{\partial w_{2\theta}} \right) \quad \text{em } S_i \quad (\text{A1.52. a, b})$$

ou seja w e V são contínuas em S_i (condição natural).

Alternativamente às condições (A1.51,52) pode-se ter:

$$\delta w_1 = \delta w_2 = 0 \quad \text{em } S_i \quad (\text{A1.53})$$

ou seja w é especificado em S_i (condição "essencial"). Ainda, como caso particular das condições (A1.51,52), tem-se:

$$\delta w_1 = \delta w_2 \neq 0 \quad \text{em } S_i \quad (\text{A1.54})$$

e

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{em } S_i \quad (\text{A1.55})$$

e

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (\text{A1.56})$$

o que significa que as derivadas contidas nas eqs. (A1.38,39) são nulas em S_i (condição "natural").

A N E X O 2

PROCEDIMENTO PARA A DETERMINAÇÃO DE R_s E \bar{x}

PROCEDIMENTO PARA A DETERMINAÇÃO DE R_s E \bar{x}

No capítulo 5 foi visto que:

$$R_s^2 = R_{s,0}^2 + c^2 + 2ex \quad (A2.1)$$

onde:

$$\bar{x} = \bar{x} \left(\sigma, R_s, \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (A2.2)$$

A resolução simultânea das equações (A2.1) e (A2.2) é iterativa. O algoritmo "Calcula \hat{R}_s " mostrado no quadro A2.1 explicita esta solução. O algoritmo "Calcula $\hat{\bar{x}}$ ", quadro A2.2, resolve a eq. (A2.2). A figura (A2.1) e as equações (A2.3-12) resumem as variáveis geométricas e as relações usadas nos algoritmos.

É importante reparar que tanto as equações quanto os algoritmos mencionados estão expressos em variáveis adimensionais a guisa de serem os mais gerais possíveis. As relações destas variáveis com as suas equivalentes dimensionais estão expressas no capítulo 7. Observar também que pela dedução destes algoritmos e equações o índice 1 deve ser sempre atribuído ao fluido mais viscoso (ver a figura A2.1).

$$\theta'_s = \arccos \left[\frac{\hat{R}_s^2 + \hat{e}^2 - 1}{2|\hat{e}|\hat{R}_s} \right] \quad (A2.3)$$

$$\theta_s = \arccos \left[\frac{\hat{R}_s^2 - \hat{\epsilon}^2 - 1}{2|\hat{\epsilon}|} \right] \quad (\text{A2.4})$$

$$\hat{A}_2'' = \frac{|\hat{\epsilon}|}{c} \hat{R}^2 \left[\theta_s' - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta_s' \right] \quad (\text{A2.5})$$

$$\hat{A}_2 = \theta_s - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta_s - \hat{A}_1'' \quad (\text{A2.6})$$

$$\hat{A}_1 = \pi - \hat{A}_2 \quad (\text{A2.7})$$

$$\bar{x}_2 \hat{A}_2 = \hat{\epsilon} \hat{A}_1'' + \frac{2}{3} \left[\text{sen}^3 \theta_s - R_s \text{sen}^3 \theta_s' \right] \quad (\text{A2.8})$$

$$\bar{x}_1 \hat{A}_1 = - \bar{x}_2 \hat{A}_2 \quad (\text{A2.9})$$

e:

$$\bar{x} = \frac{\rho_1 \bar{x}_1 \hat{A}_1 + \rho_2 \bar{x}_2 \hat{A}_2}{\rho_1 \hat{A}_1 + \rho_2 \hat{A}_2} \quad (\text{A2.10})$$

substituindo as eqs.(A2.7,9) na eq.(A2.10), e reagrupando:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_2 \hat{A}_2 \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right]}{\pi \frac{\rho_1}{\rho_2} + \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] \hat{A}_2}$$

Finalmente reescrevendo-se a eq.(A2.1), em variáveis adimensionais, para ser resolvida iterativamente, se obtém:

$$f = \hat{R}_s^2 + \hat{R}_{s,0}^2 - \hat{\epsilon}^2 - 2\hat{\epsilon}\hat{x} = 0 \quad (A2.12)$$

ALGORITMO CALCULA_ \hat{R}_s

INÍCIO

LÊ $\hat{R}_{s,0}$, $\hat{\epsilon}$, ρ_1/ρ_2 ARBITRA \hat{R}_s ($0 < \hat{R}_s \leq |\hat{\epsilon}|+1$ se $|\hat{\epsilon}| < 1$;
 $|\hat{\epsilon}|-1 < \hat{R}_s \leq |\hat{\epsilon}|+1$ se $|\hat{\epsilon}| > 1$)CALCULA \hat{x} (ALGORITMO DO QUADRO A2.2)CALCULA f (EQ. A2.12)ENQUANTO $f >$ TOLERÂNCIACORRIGE \hat{R}_s ($0 < \hat{R}_s \leq |\hat{\epsilon}|+1$ se $|\hat{\epsilon}| < 1$;
 $|\hat{\epsilon}|-1 < \hat{R}_s \leq |\hat{\epsilon}|+1$ se $|\hat{\epsilon}| > 1$)CALCULA \hat{x} (ALGORITMO DO QUADRO A2.2)CALCULA f (EQ. A2.12)

FIM-ENQUANTO

ESCREVE \hat{R}_s , $\hat{R}_{s,0}$, $\hat{\epsilon}$, ρ_1/ρ_2

FIM

Quadro A2.1- Algoritmo para calcular \hat{R}_s dados $\hat{R}_{s,0}$, $\hat{\epsilon}$, ρ_1/ρ_2 .

ALGORITMO CALCULA \bar{x}

INÍCIO

LÊ $\hat{R}_e, \hat{c}, \rho_1/\rho_2$

CALCULA \hat{A}_1'' (Eq. A2.5)

CALCULA \hat{A}_2 (Eq. A2.6)

CALCULA $\hat{x}_2 \hat{A}_2$ (Eq. A2.8)

CALCULA \bar{x} (Eq. A2.11)

FIM

Quadro A2.2- Algoritmo para calcular \bar{x} dada uma interface circular excêntrica e uma razão de densidade dos fluidos

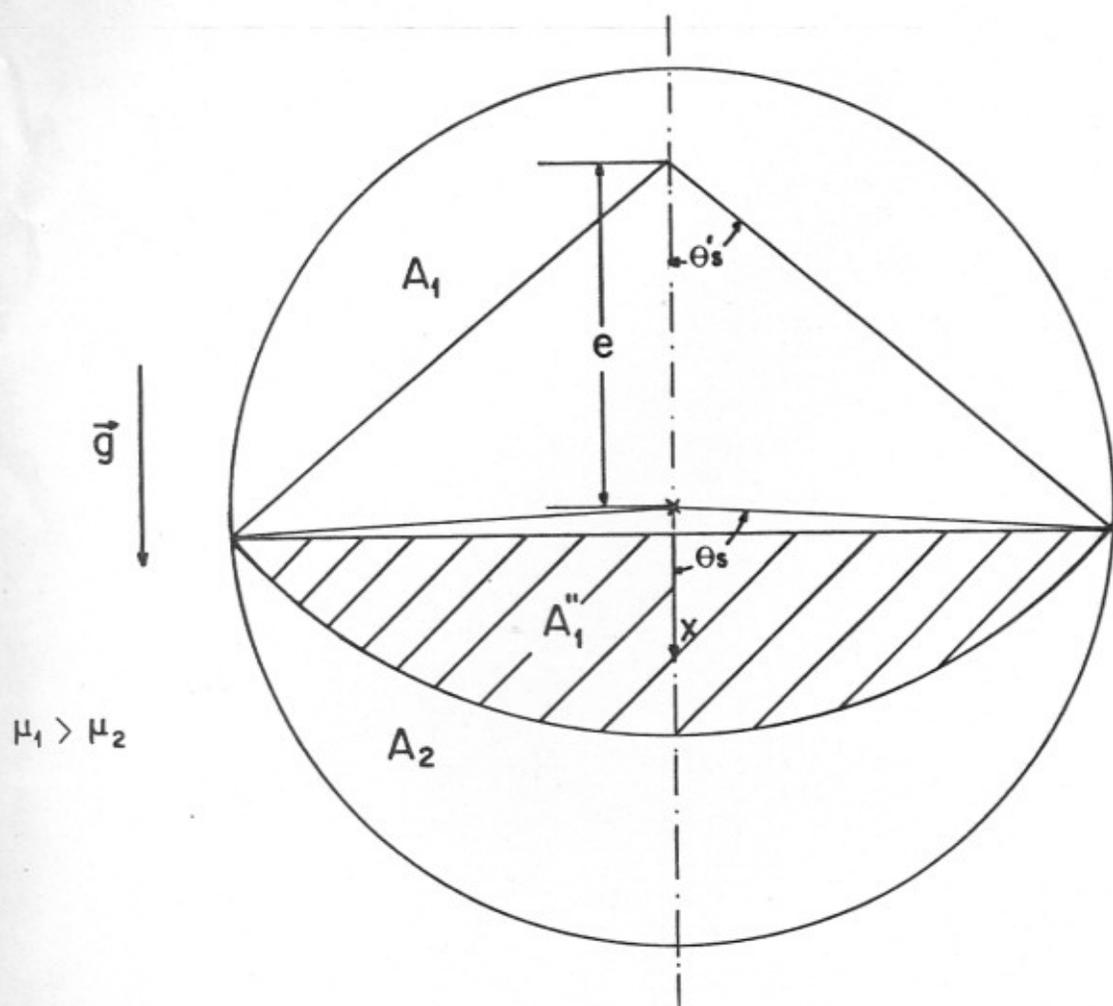


Figura A2.1- Variáveis e parâmetros utilizados nos algoritmos

"Calcula_ \hat{R}_e " e "Calcula_ $\bar{\chi}$ " (Observar que o índice 1 se refere ao fluido mais viscoso).