

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
T.M.S. DEFENDIDA POR AMILCAR DANIEL  
OGAZ SOUSA E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 31/05/07  
Euclides de Mesquita Neto  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

## Resposta de Sistemas Dinâmicos e Rotores Interagindo com o Solo

Autor: **Amílcar Daniel Ogaz Sousa**  
Orientador: **Euclides de Mesquita Neto**

08/2009

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

# **Resposta de Sistemas Dinâmicos e Rotores Interagindo Com o Solo**

Autor: Amílcar Daniel Ogaz de Sousa  
Orientador: Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica Computacional

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007  
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So85r            Sousa, Amílcar Daniel Ogaz de  
                    Resposta de sistemas dinâmicos e rotores interagindo  
                    com o solo / Amílcar Daniel Ogaz de Sousa. --Campinas,  
                    SP: [s.n.], 2007.

                    Orientador: Euclides de Mesquita Neto.  
                    Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
                    Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

                    1. Rotores - Dinâmica. 2. Dinâmica do solo. 3.  
                    Fundações (Engenharia). I. Mesquita Neto, Euclides de.  
                    II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
                    Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic system response and rotors interacting with soil

Palavras-chave em Inglês: Rotordynamic, Rotor-Foundation-Soil Dynamic  
Interaction

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Gilberto Pechoto de Melo

Data da defesa: 31/05/2007

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## Resposta de Sistemas Dinâmicos e Rotores Interagindo Com o Solo

Autor: Amílcar Daniel Ogaz de Sousa  
Orientador: Euclides de Mesquita Neto

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



---

**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente**  
DMC/FEM/Unicamp



---

**Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo**  
Unesp/Ilha Solteira



---

**Prof. Dr. Robson Pederiva**  
DPM/FEM/Unicamp

Campinas, 31 de maio de 2007

## **Dedicatória:**

Dedico este trabalho para minhas duas Marias:  
Maria minha esposa e Maria Clara minha filha.

## **Agradecimentos**

Em primeiro tenho que agradecer ao Professor Euclides que generosamente se dispôs a me orientar. Tem a minha admiração pela serenidade com a qual conduziu o trabalho e pelo seu vasto conhecimento.

Quero agradecer aos colegas Luiz Henrique Thomazo e Josué Labaki Silva que sempre me motivaram, mas especialmente por terem me ajudado no momento da elaboração da apresentação da defesa. Ao Professor Ronaldo Carrion por fornecer os dados necessários para a montagem do problema e por sua disposição para esclarecer as dúvidas pertinentes.

Agradeço também a todos os demais colegas e professores, que ajudaram de forma direta e indireta para a conclusão deste trabalho.

Por último agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

## Resumo

SOUSA, Amílcar Daniel Ogaz de, *Resposta de Sistemas Dinâmicos e Rotores Interagindo Com o Solo*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 154 p. Dissertação (Mestrado)

A presente dissertação descreve a resposta de um sistema dinâmico constituído por um rotor, uma fundação rígida e um solo homogêneo. O rotor considerado é um modelo de Jeffcott (Laval) com amortecimento externo. O rotor está fixado em uma fundação rígida que, por sua vez, está assentada em um solo homogêneo modelado como um semi-espaço viscoelástico. O sistema é analisado no plano do rotor. Uma cuidadosa dedução das equações de movimento é apresentada. A resposta dinâmica do solo é sintetizada com auxílio do Método dos Elementos de Contorno. A análise é conduzida no domínio da frequência, reproduzindo o comportamento estacionário do rotor e da fundação. A influência de diversos parâmetros do sistema, sobre a resposta dinâmica do rotor e fundação é estudada. Entre os parâmetros geométricos considerados estão a altura do centro geométrico da fundação em relação ao solo e a altura do rotor em relação à fundação. O papel das razões de inércia entre rotor e fundação é investigado. A influência do amortecimento interno e do amortecimento geométrico do solo é analisada. O tipo de contato entre a fundação rígida e o solo também é estudada.

### *Palavras Chave*

Dinâmica de Rotores, Interação Dinâmica Rotor-Fundação-Solo

## **Abstract**

SOUSA, Amílcar Daniel Ogaz de, Dynamic system response and rotors interacting with soil, Campinas,; Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 154 p. Dissertação (Mestrado)

The present work describes the dynamic response of a system consisting of a rotor, a rigid foundation and a homogeneous soil profile. The rotor is considered a Jeffcott (Laval) model with external damping which is attached to a rigid foundation. The foundation is supported by a viscoelastic half-space. The analysis is conducted in the plane of the rotor. A detailed deduction of the system's equation of motion is presented. The soil response is synthesized by the Boundary Element Method. The analysis is conducted in the frequency domain, leading thus to the stationary response of rotor and foundation. The influence of distinct system parameters of the dynamic response of rotor and foundation is addressed. The geometric parameters include the distance of the foundation mass center to the soil-foundation interface and the height of the rotor with respect to the foundation. The effect of rotor to foundation inertia ratio is investigated. The role of soil internal and geometric damping on the system response is also addressed. The influence of the contact type at the soil foundation interface, bonded or smooth, is also considered.

### *Key Words*

Rotordynamic, Rotor-Foundation-Soil Dynamic Interaction

## Índice

Lista de Figuras .....	ix
Lista de Tabelas.....	xiii
Nomenclatura .....	xiv
Capítulo 1 .....	1
Introdução.....	1
Revisão Bibliográfica.....	2
Objetivo.....	7
Capítulo 2 .....	9
Introdução – Resposta dinâmica do solo.....	9
Formulação do problema.....	10
Técnicas para solução do problema da interação dinâmica solo-estrutura. ....	14
Matriz de impedância do solo .....	15
Capítulo 3 .....	23
Descrição do modelo rotor-fundação-solo .....	23
Relações cinemáticas.....	31
Forças de atuação nos componentes do sistema.....	47
Momentos que atuam sobre os componentes do sistema.....	53
Equações de movimento.....	57
Capítulo 4 .....	83
Dinâmica do rotor em suporte fixo .....	83
Dinâmica do sistema solo-fundação.....	85
Dinâmica do sistema rotor-fundação-solo.....	118
Capítulo 5 .....	133
<i>Conclusões e sugestões</i> .....	133
Referências Bibliográficas .....	137
Apêndices .....	141
<i>Notas sobre amortecimento interno em rotores</i> .....	141
<i>Considerações para a linearização</i> .....	155

## Lista de Figuras

Figura 2.1: Fundação rígida de superfície interagindo com semi-espaço. ....	13
Figura 2.2: Malha utilizada para discretizar a superfície livre do semi-espaço através do MEC. .	19
Figura 2.3: Função de flexibilidade vertical $n_{U_z F_z}$ da fundação rígida e sem massa. Solo sem amortecimento interno, $\eta = 0$ . ....	19
Figura 2.4: Função de flexibilidade horizontal $n_{U_y F_x}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0$ . ....	19
Figura 2.5: Função de flexibilidade de rotação $n_{\phi_x M_x}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0$ . ....	20
Figura 2.6: Função de flexibilidade do termo não diagonal $n_{U_y M_x}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0$ .....	20
Figura 2.7: Função de flexibilidade do termo não diagonal $n_{\phi_x F_y}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0$ .....	20
Figura 2.8: Função de flexibilidade vertical $n_{U_z F_z}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0,05$ .....	21
Figura 2.9: Função de flexibilidade horizontal $n_{U_y F_y}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0,05$ .....	21
Figura 2.10: Função de flexibilidade de rotação $n_{\phi_x M_x}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0,05$ .....	21
Figura 2.11: Função de flexibilidade do termo não diagonal $n_{U_y M_x}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0,05$ .....	22
Figura 2.12: Função de flexibilidade do termo não diagonal $n_{\phi_x F_y}$ da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno, $\eta = 0,05$ .....	22
Figura 3.1: Planos longitudinal e frontal do sistema rotor-fundação-solo. ....	23
Figura 3.2: Distância $\varepsilon$ entre o centro de massa (V) e o ponto de contato do rotor com o eixo (W). ....	24
Figura 3.3: Deformação estática do rotor. ....	25
Figura 3.4: Vista tridimensional do sistema rotor-fundação em equilíbrio estático com sistemas de eixos inércias $(y^A, z^A)$ e $(y^C, z^C)$ . ....	26

Figura 3.5: Plano indicando a cinemática do rotor e da fundação. ....	27
Figura 3.6: Definição dos graus de liberdade do rotor. ....	28
Figura 3.7: Definição dos graus de liberdade da fundação. ....	28
Figura 3.8: Sistema de coordenadas utilizadas na descrição do sistema. ....	29
Figura 3.9: Esquema vetorial da posição do ponto $V$ . ....	32
Figura 3.10: Sistema de coordenadas móveis sobre o rotor: $X^W Y^W Z^W$ rotativo com origem em $W$ e $x^w y^w z^w$ não rotativo com origem também em $W$ . ....	32
Figura 3.11: Vetor posição do centro de massa da fundação em relação a sua posição de equilíbrio. ....	34
Figura 3.12: Esquema vetorial da posição do ponto $W$ em relação ao ponto $P$ . ....	35
Figura 3.13: Esquema vetorial da posição do ponto $W$ em relação ao ponto $A$ . ....	36
Figura 3.14: Esquema vetorial da posição do ponto $A$ em relação ao ponto $P$ . ....	37
Figura 3.15: Esquema vetorial do deslocamento do centro da base em relação a sua posição de equilíbrio. ....	39
Figura 3.16: Esquema vetorial da posição do centro da base da fundação em relação a posição de equilíbrio do centro de massa desta. ....	40
Figura 3.17: Deslocamento, velocidade e aceleração angulares do rotor. ....	42
Figura 3.18: Deslocamento, velocidade e aceleração angulares da fundação. ....	43
Figura 3.19: Sistemas de coordenadas rotacionais $X^P Y^P Z^P$ e $X^W Y^W Z^W$ . ....	45
Figura 3.20: Forças atuando no rotor. ....	48
Figura 3.21: Forças atuantes na fundação. ....	50
Figura 3.22: Forças externas de excitação. ....	53
Figura 3.23: Graus de liberdade da interface solo-fundação. ....	64
Figura 3.24: Esquema vetorial da posição do ponto central da base em relação a sua posição de equilíbrio. ....	64
Figura 4.1: Deslocamento vertical $u_z^R$ e horizontal $u_y^R$ do rotor sobre suporte rígido. ....	84
Figura 4.2: Deslocamento vertical $u_z^R$ do rotor sobre suporte rígido para distintos valores do amortecimento externo. ....	84
Figura 4.3: Deslocamento horizontal $u_y^R$ do rotor sobre suporte rígido para distintos valores do amortecimento externo. ....	85
Figura 4.4: Forças de solo e forças de excitação. ....	86
Figura 4.5: Representação da direção da excitação e resposta do grau correspondente para sistemas com matrizes de inércia e impedância diagonais. ....	87
Figura 4.6: Representação da direção da excitação e respostas dos graus correspondente para sistemas com matrizes de inércia ou impedância diagonais. ....	88
Figura 4.7: Proposta de substituição do solo por molas. ....	88
Figura 4.9: Módulo do deslocamento vertical da fundação sobre uma rigidez constante e sobre um semi-espaço para diversos valores do amortecimento material do solo $\eta$ . ....	93
Figura 4.10: Detalhe do deslocamento vertical da fundação. ....	94
Figura 4.11: Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Matriz de impedância diagonal acima. Matriz de impedância não diagonal abaixo. ....	96
Figura 4.12: Módulo do deslocamento angular da fundação em resposta a força $F_y$ . ....	97
Figura 4.13: Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal acima. Com a matriz de impedância não diagonal abaixo. ....	99

Figura 4.14: Módulo do deslocamento horizontal da fundação em resposta ao momento $M_x$ ...	100
Figura 4.15: FRFs para fundação sobre o solo modelado como mola de rigidez constante. ....	101
Figura 4.16: FRFs para fundação sobre o solo modelado como semi-espaço. ....	102
Figura 4.17: Módulos do deslocamento vertical da fundação. ....	103
Figura 4.18: Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura (a). Com a matriz de impedância não diagonal, figura (b). ....	104
Figura 4.19: Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	105
Figura 4.20: Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	107
Figura 4.21: Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	108
Figura 4.22: Módulo do deslocamento horizontal. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	111
Figura 4.23: Módulo do deslocamento angular. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	113
Figura 4.24: Módulo do deslocamento horizontal. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	115
Figura 4.25: Módulo do deslocamento angular. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo. ....	116
Figura 4.26: Módulos dos deslocamentos nas direções vertical e horizontal. A fundação da figura a esquerda está sob a força $F_z$ e a fundação da direita está sob a força $F_y$ .....	117
Figura 4.27: Módulo do deslocamento angular da fundação sob a ação do momento $M_x$ .....	118
Figura 4.28: Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para $S = 0,5$ .....	119
Figura 4.29: Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para $S = 1$ .....	120
Figura 4.30: Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para $S = 2$ .....	121
Figura 4.31: Deslocamento vertical da fundação sob diversas flexibilidades do solo. ....	122
Figura 4.32: Deslocamento horizontal do rotor sob a variação da altura do mancal. ....	123
Figura 4.33: Deslocamento horizontal da fundação sob a variação da altura do mancal. ....	124
Figura 4.34: Deslocamento horizontal do rotor sob a variação da posição do centro de massa da fundação. ....	125
Figura 4.35: Deslocamento horizontal da fundação sob a variação da posição do centro de massa deste. ....	126
Figura 4.36: Comparação dos deslocamentos angulares da fundação sob a variação .....	127
Figura 4.37: Deslocamento vertical do rotor sob variação do parâmetro $B_F$ .....	128
Figura 4.38: Deslocamento vertical da fundação sob variação do parâmetro $B_F$ .....	129
Figura 4.39: Deslocamento vertical do rotor sob variação do amortecimento interno do rotor. .	130
Figura 4.40: Deslocamento vertical da fundação sob variação do amortecimento interno. ....	130
Figura 0.1 .....	142
Figura 0.2 .....	142
Figura 0.3 .....	144
Figura 0.4 .....	147
Figura 0.5 .....	150
Figura 0.6 .....	151
Figura 0.7 .....	152

Figura 0.8 .....153  
Figura 0.9 .....153

## Lista de Tabelas

Tabela 1: parâmetros da equação de movimento. ....	75
Tabela 2: Total de parâmetros utilizados nas equações (4.3) e (4.4) .....	89
Tabela 3: Parâmetros adimensionais .....	89
Tabela 4: Freqüências de maior amplitude das FRFs em resposta da força $F_y$ ..	98
Tabela 5: Freqüências de maior amplitude em resposta do momento $M_x$ .....	100
Tabela 6: Freqüências de maior amplitude em resposta da força $F_y$ .....	106
Tabela 7: Freqüências de maior amplitude em resposta da força $F_y$ .....	109
Tabela 8: Freqüências de maior amplitude em resposta da força $F_y$ .....	114
Tabela 9: Freqüências de maior amplitude em resposta do momento $M_x$ ..	117

## Nomenclatura

### Letras Latinas

$a$	Metade da largura da fundação	$[m]$
$A$	Ponto de origem do sistema de coordenadas inerciais	
$A_0$	Parâmetro da frequência adimensional	
$\mathbf{a}_x$	Versor paralelo ao eixo do rotor	
$\mathbf{a}_y$	Versor com a mesma rotação do rotor	
$\mathbf{a}_z$	Versor paralelo à reta formada pelos pontos $V$ e $W$	
${}^I \mathbf{a}^V$	Aceleração do ponto $V$	$[m/s^2]$
${}^I \mathbf{a}^O$	Aceleração do ponto $O$	$[m/s^2]$
$b$	Metade do comprimento da fundação	$[m]$
$B$	Ponto da posição de repouso do eixo do rotor	
$B$	Razão entre o comprimento e largura da fundação	
$B_F$	Razão entre a massa da fundação e a massa do solo	
$\mathbf{b}_x$	Versor paralelo à rotação da fundação	
$\mathbf{b}_y$	Versor paralelo à largura da fundação	
$\mathbf{b}_z$	Versor paralelo à espessura da fundação	
$C$	Ponto da posição do eixo sob ação da gravidade	
$d_{Ey}$	Coefficiente de amortecimento do rotor na direção $y$	$[Ns/m]$
$d_{Ez}$	Coefficiente de amortecimento do rotor na direção $z$	$[Ns/m]$
$d_I$	Coefficiente de amortecimento interno do rotor	$[Ns/m]$
$D_E$	Coefficiente de amortecimento externo adimensional do rotor	
$D_I$	Coefficiente de amortecimento interno adimensional do rotor	
$E$	Ponto estático da interface solo-fundação	
$E$	Módulo de cisalhamento longitudinal	$[kg/ms^2]$
$F_y$	Componente horizontal do vetor de forças externas	$[N]$
$F_z$	Componente vertical do vetor de forças externas	$[N]$

$F_x^S$	Componente longitudinal ao rotor da força de reação do solo.	[N]
$F_y^S$	Componente horizontal do vetor de força de reação do solo	[N]
$F_z^S$	Componente vertical do vetor de força de reação do solo	[N]
$\bar{F}_y^S$	Força horizontal complexa do solo	[N]
$\bar{F}_z^S$	Força vertical complexa do solo	[N]
$\mathbf{F}$	Vetor de forças externas atuantes na fundação	[N]
$\mathbf{F}_E^R$	Força de restituição elástica do eixo	[N]
$\mathbf{F}_A^R$	Força de amortecimento externo do rotor	[N]
$\mathbf{F}_I^R$	Força de amortecimento interno do rotor	[N]
$\mathbf{F}_P^R$	Força peso do rotor	[N]
$\mathbf{F}^S$	Vetor das forças de reação do solo	[N]
$G$	Módulo de elasticidade transversal do solo	[kg / ms <sup>2</sup> ]
${}^I \mathbf{G}^F$	Quantidade de movimento linear da fundação	[kg m / s]
${}^I \dot{\mathbf{G}}^F$	Derivada temporal da quantidade da quantidade de movimento linear da fundação	[kg m / s <sup>2</sup> ]
${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/Q}$	Derivada temporal da quantidade de movimento angular da fundação em relação ao ponto $Q$	[kg m <sup>2</sup> / s <sup>2</sup> ]
$\dot{\mathbf{H}}^{R/V}$	Derivada temporal da quantidade de movimento angular do rotor	[kg m <sup>2</sup> / s <sup>2</sup> ]
$I_{xx}^{F/O}$	Momento de inércia da fundação na direção x	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{yy}^{F/O}$	Momento de inércia da fundação na direção y	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{zz}^{F/O}$	Momento de inércia da fundação na direção z	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{xx}^{R/V}$	Momento de inércia do rotor na direção x	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{yy}^{R/V}$	Momento de inércia do rotor na direção y	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{zz}^{R/V}$	Momento de inércia do rotor na direção z	[kg m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{\Pi}^{F/O}$	Tensor de inércia de massa da fundação (duplo i)	[kg m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{\Pi}^{R/V}$	Tensor de inércia de massa do rotor	[kg m <sup>2</sup> ]
$k_{zz}^S$	Termo (1,1) da rigidez do solo	[kg / s <sup>2</sup> ]
$k_{yy}^S$	Termo (2,2) da rigidez do solo	[kg / s <sup>2</sup> ]
$k_{\varphi\varphi}^S$	Termo (3,3) da rigidez do solo	[kg / s <sup>2</sup> ]
$k_{y\varphi}^S$	Termo (2,3) da rigidez do solo	[kg / s <sup>2</sup> ]
$k_{\varphi y}^S$	Termo (3,2) da rigidez do solo	[kg / s <sup>2</sup> ]
$m_R$	Massa do rotor	[kg]
$m_F$	Massa da fundação	[kg]
$M_{RF}$	Razão entre a massa do rotor e a massa da fundação	

$M_x$	Componente de momento do vetor de forças externas	[Nm]
$M_x^S$	Componente de momento do vetor de força de reação do solo	[Nm]
$M_y^S$	Componente horizontal do momento de reação do solo.	[Nm]
$M_z^S$	Componente vertical do momento de reação do solo.	[Nm]
$\bar{M}_x^S$	Momento complexo do solo na direção longitudinal ao rotor.	[Nm]
$\mathbf{M}^{F_E^R/V}$	Momento da força de restituição elástica em relação ao ponto $V$	[Nm]
$\mathbf{M}^{F_A^R/V}$	Momento da força de amortecimento externo em relação ao ponto $V$	[Nm]
$\mathbf{M}^{F_I^R/V}$	Momento da força de amortecimento interno em relação ao ponto $V$	[Nm]
$\mathbf{M}^{F^S/O}$	Momento das forças do solo em relação ao ponto $O$	[Nm]
$\mathbf{M}^{F^S/Q}$	Momento das forças do solo em relação ao ponto $Q$	[Nm]
$\mathbf{M}^{R^R/O}$	Momento das forças do rotor em relação ao ponto $O$	[Nm]
$\mathbf{M}^{R^R/Q}$	Momento das forças do rotor em relação ao ponto $Q$	[Nm]
$n_{U_z F_z}$	Termo (1,1) da matriz de flexibilidade adimensional do solo	
$n_{U_y F_y}$	Termo (2,2) da matriz de flexibilidade adimensional do solo	
$n_{\phi_x M_x}$	Termo (3,3) da matriz de flexibilidade adimensional do solo	
$n_{U_y M_x}$	Termo (2,3) da matriz de flexibilidade adimensional do solo	
$n_{\phi_x F_y}$	Termo (3,2) da matriz de flexibilidade adimensional do solo	
$\mathbf{n}_x$	Versor inercial na direção $x$	
$\mathbf{n}_y$	Versor inercial na direção $y$	
$\mathbf{n}_z$	Versor inercial na direção $z$	
$O$	Ponto da fundação onde se encontra o centro de massa deste	
$P$	Ponto do mancal referencial para o deslocamento relativo do rotor	
$* \mathbf{p}^{V/C}$	Vetor posição	[m]
$Q$	Ponto da fundação em contato com o solo	
$R$	Referencial móvel com rotação igual ao rotor	
$r_x^{F/O}$	Raio de giração da fundação na direção $x$	[m]
$\mathbf{R}^R$	Resultante das forças do rotor	[N]
$S$	Parâmetro adimensional rotor-solo	
$s_{zz}$	Termo (1,1) da matriz de impedância mecânica adimensional do solo	
$s_{yy}$	Termo (2,2) da matriz de impedância mecânica adimensional do solo	
$s_{\phi\phi}$	Termo (3,3) da matriz de impedância mecânica adimensional do solo	
$s_{y\phi}$	Termo (2,3) da matriz de impedância mecânica adimensional do solo	
$s_{\phi y}$	Termo (3,2) da matriz de impedância mecânica adimensional do solo	
$t$	Tempo	[s]
$t_i$	Forças de superfície.	

$T$	Momento atuante no rotor	$[Nm]$
$u_i$	Componente do vetor de deslocamentos do solo	
$u_y^F$	Componente horizontal do deslocamento da fundação	$[m]$
$u_z^F$	Componente vertical do deslocamento da fundação	$[m]$
$u_y^R$	Componente horizontal do deslocamento do rotor	$[m]$
$u_z^R$	Componente vertical do deslocamento do rotor	$[m]$
$u_x^S$	Componente longitudinal ao rotor do deslocamento da interface solo-fundação.	$[m]$
$u_y^S$	Componente horizontal do deslocamento da interface solo-fundação	$[m]$
$u_z^S$	Componente vertical do deslocamento da interface solo-fundação	$[m]$
$\dot{u}_y^F$	Componente horizontal da velocidade da fundação	$[m/s]$
$\dot{u}_z^F$	Componente vertical da velocidade da fundação	$[m/s]$
$\dot{u}_y^R$	Componente horizontal da velocidade do rotor	$[m/s]$
$\dot{u}_z^R$	Componente vertical da velocidade do rotor	$[m/s]$
$\dot{u}_y^S$	Componente horizontal da velocidade da interface solo-fundação	$[m/s]$
$\dot{u}_z^S$	Componente vertical da velocidade da interface solo-fundação	$[m/s]$
$\ddot{u}_y^F$	Componente horizontal da aceleração da fundação	$[m/s^2]$
$\ddot{u}_z^F$	Componente vertical da aceleração da fundação	$[m/s^2]$
$\ddot{u}_y^R$	Componente horizontal da aceleração do rotor	$[m/s^2]$
$\ddot{u}_z^R$	Componente vertical da aceleração do rotor	$[m/s^2]$
$\ddot{u}_y^S$	Componente horizontal da aceleração da interface solo-fundação	$[m/s^2]$
$\ddot{u}_z^S$	Componente vertical da aceleração da interface solo-fundação	$[m/s^2]$
$\mathbf{u}^S$	Vetor dos graus de liberdade da interface solo-fundação	$[m], [rad]$
${}^I \mathbf{v}^O$	Velocidade inercial do ponto $O$	$[m/s]$
${}^I \mathbf{v}^V$	Velocidade inercial do ponto $V$	$[m/s]$
${}^I \mathbf{v}^{W/P}$	Velocidade do ponto $W$ em relação ao ponto $P$	$[m/s]$
${}^R \mathbf{v}^{W/P}$	Velocidade do ponto $W$ em relação ao ponto $P$ no referencial móvel $R$ .	$[m/s]$
** $y^A$	Eixo de coordenada $y$	
** $Y^A$	Eixo de coordenada $y$	
** $y_C^A$	Componente de posição na direção $y$	
$V$	Ponto do rotor onde se encontra o centro de massa deste	
$w$	Razão entre a rotação e a frequência crítica do rotor	
$W$	Ponto do disco interceptado pelo eixo do rotor	

## Letras Gregas

${}^I\boldsymbol{\alpha}^F$	Aceleração angular da fundação	$[rad / s^2]$
${}^I\boldsymbol{\alpha}^R$	Aceleração angular do rotor	$[rad / s^2]$
$\Gamma_F$	Interface entre o solo e a fundação.	
$\Gamma_{inf}$	Contorno ilimitado do semi espaço.	
$\Gamma_S$	Superfície livre do semi-espaço.	
$\delta_{ij}$	Delta de Krönecker	
$\varepsilon$	Desbalanceamento do rotor	$[m]$
$\varepsilon_{i,j}$	Tensor de deformações linear de Cauchy	
$\eta$	Coefficiente adimensional de amortecimento do solo	
$\eta_\mu$	Coefficiente de amortecimento do meio	
$\eta_\lambda$	Coefficiente de amortecimento do meio	
$\lambda$	Constante de Lamé	
$\lambda_L^*$	Módulo de dissipação	
$\lambda_S^*$	Módulo de armazenamento	
$\mu$	Constante de Lamé	
$\mu_L^*$	Módulo de dissipação	
$\mu_S^*$	Módulo de armazenamento	
$\rho_F$	Densidade da fundação	$[kg / m^3]$
$\rho_S$	Densidade do solo	$[kg / m^3]$
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensão	$[N / m^2]$
$\varphi_x^F$	Ângulo de rotação da fundação na direção longitudinal ao rotor	$[rad]$
$\varphi^R$	Angulo de rotação do rotor	$[rad]$
$\varphi_x^S$	Ângulo de rotação da interface solo-fundação na direção longitudinal ao rotor	$[rad]$
$\varphi_Z^S$	Ângulo de rotação da interface solo-fundação na direção vertical	$[rad]$
$\varphi_Y^S$	Ângulo de rotação da interface solo-fundação na direção horizontal	$[rad]$
$\dot{\varphi}_x^F$	Velocidade de rotação da fundação	$[rad / s]$
$\dot{\varphi}^R$	Velocidade de rotação do rotor	$[rad / s]$
$\dot{\varphi}_x^S$	Velocidade de rotação da fundação	$[rad / s]$
$\ddot{\varphi}_x^F$	Aceleração angular da fundação	$[rad / s^2]$
$\ddot{\varphi}^R$	Aceleração angular do rotor	$[rad / s^2]$
$\ddot{\varphi}_x^S$	Aceleração angular da interface solo-fundação	$[rad / s^2]$
$\nu$	Coefficiente de Poisson do solo	
$\omega_R$	Frequência crítica do rotor	$[rad / s]$

${}^I\omega^F$	Velocidade angular inercial da fundação	[rad / s]
${}^I\omega^R$	Velocidade angular inercial do rotor	[rad / s]
$\omega$	Módulo da velocidade angular do rotor	[rad / s]

### Abreviações

**FRF** Função da resposta em frequência.

**MEC** Método dos elementos de contorno.

**MEF** Método dos elementos finitos.

\* O sobrescrito refere-se ao ponto de origem e ao ponto final do vetor posição. Neste caso  $V$  é o ponto final e  $C$  é o ponto inicial.

\*\* Esta nomenclatura é válida também para os eixos  $x$  e  $z$ . Letras minúsculas são usadas para os sistemas de coordenadas com direções fixas e letras maiúsculas são usadas para sistemas de coordenadas com direções móveis. A letra sobrescrita indica o ponto de origem do sistema de coordenadas. A letra subscrita indica o ponto de referência para as coordenadas.

# Capítulo 1

## Introdução

São vários os elementos de engenharia envolvidos com dinâmica de rotores: turbinas, geradores, motores, compressores, sopradores e muitos outros. O rotor destas máquinas em operação tem uma grande quantidade de energia, a maior parte desta é energia rotacional, mas uma pequena parcela é energia vibracional. O rotor pode sofrer vibração de flexão e vibração torcional. Um dos propósitos do estudo da dinâmica de rotores é averiguar o quanto essa vibração pode ser minimizada.

A vibração do rotor depende da sua geometria, do tipo suporte, das forças de excitação, da fundação, entre outros fatores. Grande parte das simulações de sistemas rotor-fundação ou não considera o solo que sustenta a fundação, ou incorpora o solo através de modelos bastante simplificados. Desta forma o estudo de sistemas reais, sofre certa inconsistência em sua modelagem. De um lado, rotores, eixos, mancais e estruturas são modelados com precisão e detalhamento, mas o solo é incorporado de forma superficial e simplificado, tornando inconsistente a totalidade do modelo. Em sistemas reais, entretanto, não é possível ignorar a influência da resposta dinâmica do solo.

Com o intuito de manter compromisso com a realidade há diversos fatores do solo que devem ser considerados. O solo em análise é modelado como sendo tridimensional isotrópico linear. Uma aproximação que pode ser feita é considerar este como sendo de domínio ilimitado, isto confere ao solo uma característica bem peculiar, a sua capacidade dissipativa, a capacidade de absorver energia. Por ser o solo considerado um meio elástico ilimitado surgem ondas de

corpo, de dilatação e de cisalhamento. Surgirão também ondas que se propagam na superfície externa conhecidas como ondas de Rayleigh, Romanini (1995). Além da energia dissipada por meio de ondas, há a energia dissipada pelo amortecimento material ou também conhecida por amortecimento interno. As soluções descritas aqui assumem isotropia linear viscoelástica.

Assim como no rotor o objetivo básico no dimensionamento da fundação é limitar o seu movimento. Para isso é preciso analisar a resposta da fundação a cargas dinâmicas prevendo a operação da máquina. O dimensionamento da fundação envolve o estabelecimento dos critérios de funcionamento da máquina, a determinação das cargas dinâmicas e envolve também o estabelecimento das características do solo bem como a avaliação das suas propriedades constitutivas.

Neste trabalho se analisa a influência do solo sobre o comportamento dinâmico de um sistema rotor-fundação. Primeiramente faz-se a análise do comportamento do rotor supondo-se o solo rígido. Em seguida faz-se a análise da fundação sem o rotor colocando em seu lugar força externas atuando. Por último faz-se a análise do sistema completo, rotor-fundação-solo.

Os problemas em questão ficarão restritos ao domínio da frequência. Para efeitos de comparação, o solo primeiramente será modelado de maneira simples, dotada apenas de rigidez estática e sem amortecimento. Embora o sistema seja tridimensional a análise ficará limitada ao plano que coincide com o plano do rotor.

## **Revisão Bibliográfica**

Em se tratando de dinâmica de rotores, está se referindo especificamente a parte girante em máquinas rotativas. Turbinas, geradores, motores e compressores são apenas alguns exemplos de máquinas rotativas. Há muitas fontes de excitação e o movimento pode ter muitas formas. O rotor em questão sofre vibração torcional e vibração de flexão. Esta vibração depende da geometria e do tipo de suporte bem como das forças de excitação. Os mancais podem muitas vezes ter uma

profunda influência no movimento. É importante ressaltar que esta vibração também excita a fundação e esta por sua vez pode influenciar a vibração do rotor. O comportamento dinâmico do conjunto rotor-fundação é dependente principalmente da velocidade deste (rotor). A rotação quando atinge uma das várias possíveis frequências naturais do sistema, diz-se que atingiu a velocidade crítica.

A velocidade crítica é um importante parâmetro na análise de máquinas rotativas. Rankine em 1869 já havia notado a existência da velocidade crítica. Em 1895 os estudos de Dunkerley e Föppl concluíram que um eixo tem várias velocidades críticas e que em certas circunstâncias estas coincidem com as frequências naturais de eixos não rotativos. Ainda sobre velocidades críticas, a teoria de Reynolds foi aplicada para calcular as velocidades críticas de um eixo cilíndrico com vários discos e mancais. Nesse período a solução necessária da equação da frequência somente era possível para modelos simples, no entanto Dunkerley encontrou a primeira velocidade crítica para numerosas medições utilizando a relação conhecida por Soulhwell. No ano de 1910 Stodola apresentou um método gráfico para calcular as velocidades críticas até ser substituído por métodos computacionais. *Apud* Krämer (1993).

Outro aspecto importante em rotores é o filme de óleo do mancal, este atua como um sistema mola-amortecedor influenciando também na velocidade crítica além de influenciar limitando a amplitude na ressonância, Krammer (1993). Um outro fator causado pelo filme de óleo é a instabilidade. Seu amortecimento em um rotor pode produzir um efeito que não é visto em estruturas estacionárias: instabilidade dinâmica de rotores, Lee (1993). O amortecimento pode produzir instabilidade gerando grandes amplitudes de vibração em alguns intervalos de velocidade.

Os primeiros trabalhos no campo de rotores foram voltados para a vibração na ressonância (velocidade crítica do rotor) e problemas envolvendo o balanceamento de rotores. Atualmente o enfoque no estudo de rotores pode estar na análise qualitativa das características da vibração, nos métodos de cálculo da velocidade crítica, na teoria de balanceamento e nos procedimentos de balanceamento, Nelson (1998).

Para a modelagem matemática de rotores, pode-se afirmar que para modelos mais simples a maioria dos resultados importantes pode ser alcançada analiticamente, o mesmo não acontece para demais modelos. Um dos modelos mais simples foi explicado e elucidado por Jeffcott. Este tipo de rotor, rotor Jeffcott, consiste em um eixo flexível (com ou sem amortecimento) suposto de massa nula no qual se encontra fixo no ponto médio um disco circular concêntrico. O disco supõe-se montado num plano perpendicular ao eixo podendo transladar apenas no plano de montagem do disco referido. Para modelos mais complexos a solução analítica é árdua, nestes casos deve-se fazer uso do método da matriz da transferência ou método dos elementos finitos. O desenvolvimento dos métodos computacionais e estratégias de análise de sistemas de rotores é paralelo a criação de vários modelos físicos e matemáticos. Uma importante decisão em se tratando de modelamento é o nível de sofisticação e detalhes para determinada análise. Esta deve se basear nos objetivos da análise e experiência sobre o sistema em questão. Nelson (1998) apresenta uma elucidação sobre os diversos procedimentos de análise e modelamento. Verifica-se que modelos contínuos não são usados em aplicações industriais, mas são importantes porque fornecem informações sobre o comportamento em algumas condições especiais. Outro fato elucidado por Nelson (1998) é a discretização adotado em modelos complexos. Destacam-se dois tipos de aproximação usando métodos computacionais com parâmetros discretos: método da matriz de transferência e método da rigidez direta.

O modelo tem de ser consistente com dados experimentais, nesse sentido Maslen, Vazquez e Sortore (2002) apresentam um meio eficiente para ajustar modelos analíticos de rotores, tornando-os consistentes com dados experimentais. A aproximação adotada nesse trabalho permite o uso de modelos convencionais de dinâmica de rotores. As hipóteses levantadas em cada modelo têm de ser compatíveis com os parâmetros a serem estudados. Genta, Delprete e Busa (1999) fazem algumas considerações em dinâmica de rotores, desenvolvem um modelo geral não linear o qual pode ser usado para estudar o comportamento tanto do rotor fixo quanto do rotor livre. Entenda-se o rotor livre como sendo o caso especial de rotor o qual não está suportado por mancais, como por exemplo, corpos celestiais. Faz-se uma comparação da simulação numérica não-linear com a aproximação linearizada, possibilitando verificar a validade do modelo dinâmico. A análise linear funciona com boa precisão para movimentos que ocorrem em vários

graus de liberdade permitindo o uso da clássica aproximação linear de dinâmica de rotores para rotores fixos. Assumindo-se pequenos deslocamentos lineares e angulares, considerando a velocidade angular constante ou com função conhecida, podem-se linearizar diversos termos na equação de movimento. Constata-se neste trabalho que o movimento axial e torcional do eixo estão acoplados com o comportamento lateral do rotor. Contudo este acoplamento torna-se menos importante com amplitudes pequenas. No caso de multicorpos é possível recorrer a modelos semi-lineares no qual o deslocamento de cada corpo está desacoplado enquanto o deslocamento relativo for considerado pequeno.

O efeito do lubrificante na resposta experimental foi estudado por Flack, Lanes e Gambel (1981). Neste modelo de rotor flexível, composto por três massas, fez-se variar a viscosidade do lubrificante e pode-se verificar a dependência da estabilidade com a variação da viscosidade do óleo lubrificante. Estes dados foram comparados com mapas teóricos de estabilidade e pode-se estimar de maneira correta o limite de estabilidade.

Gasch, Maurer e Sarfel (1984) apresentaram um modelo constituído de rotor, mancais, fundação e solo. O estudo verifica a resposta ao desbalanceamento. Neste modelo o rotor possui a sua massa distribuída em um disco com centro gravitacional com uma excentricidade relativa ao centro do disco. Os mancais são considerados rígidos, bem como a fundação. O solo é idealizado como um semi-espaço elástico. Apresenta somente 5 graus de liberdade: dois para o disco e três para a fundação. A rigidez e o coeficiente de amortecimento do solo são dependentes da frequência. Como resultado da análise, ainda sobre o solo, verifica-se nessa publicação que a elasticidade do solo pode ter uma influência positiva no funcionamento do rotor.

A importância da condição de contato entre solo e fundação na condição de não haver deslocamento relativo entre eles é analisada por Mesquita (1989). Esta condição denominada “colada” implica no aparecimento de termos não diagonais na matriz de compliança. Esta matriz descreve o comportamento dinâmico do solo. O solo apresentado por Gasch *et al* (1984) acima atua passivamente, diferentemente do modelamento apresentado por Mesquita (1990). Este

descreve o comportamento dinâmico de dois rotores Jeffcott os quais interagem por meio de um solo descrito como um semi-espaço viscoelástico.

Estudar dinâmica de rotores é importante para garantir o funcionamento seguro e confiável de máquinas rotativas. Para isso deve se especificar os parâmetros físicos que caracterizam a máquina rotativa. Neste sentido, a fundação que está sob a máquina rotativa tem de ser considerada. Esta, enquanto estrutura, interage com o rotor e a fundação por sua vez interage com o solo. A análise de problemas relacionados com a interação dinâmica solo-estrutura tem dentre os seus objetivos o desenvolvimento de projetos de estruturas em contato com o solo sujeitas a excitações externas. A contribuição dada por Romanini (1995) nos estudos da análise dinâmica de interação solo-estrutura foi no desenvolvimento de funções de influência, para sintetizar matrizes de flexibilidade dinâmica. Desenvolveu funções de influência para problemas da viscoelastodinâmica bidimensional no domínio da frequência.

A estruturação bidimensional do solo permite a avaliação de diversos problemas descritos por rotor de Jeffcott. Nesta condição Ramalho (2006) analisou a resposta ao desbalanceamento do sistema rotor-fundação sobre um solo descrito como um semi-espaço viscoelástico e o sistema rotor-fundação sobre um solo viscoelástico com base rígida.

Continuando os estudos de interação solo estrutura, Barros (2002) acrescentou anisotropia. Trabalhou com meios elásticos homogêneos transversalmente isotrópicos. Ampliando a análise de problemas viscoelásticos estacionários, Carrion (2002) estudou a solução do semi-espaço viscoelástico isotrópico, porém agora não mais um modelo bidimensional. Fez uma implementação para a análise de problemas viscoelásticos estacionários tridimensionais.

## Objetivo

O presente trabalho tem como proposta discutir os mecanismos de acoplamento dos graus de liberdade de um sistema rotor-fundação-solo. A proposta consiste em utilizar um solo tridimensional idealizado como um semi-espaço sintetizado pelo método dos elementos de contorno (MEC) para estudar a resposta ao desbalanceamento do rotor. Esse modelo de solo tem como base a tese de doutorado de Ronaldo Carrion (2002). Os mecanismos de acoplamento no sistema rotor-fundação-solo estão localizados na matriz de inércia, na posição do vetor de excitação, nos mecanismos de amortecimento e na resposta do solo. Inicialmente será considerado um sistema dinâmico solo-fundação sob a ação de uma excitação externa sem a presença do rotor. Isto elimina da análise os graus de liberdade do rotor, conseqüentemente o acoplamento causado pelo amortecimento e rigidez do eixo do rotor não estão inclusos. De maneira a complementar o estudo do comportamento dinâmico da fundação estuda-se posteriormente o sistema rotor-fundação-solo.

## Capítulo 2

### Introdução – Resposta dinâmica do solo

Este capítulo descreve a resposta dinâmica do solo que será incorporada às equações de movimento da fundação rígida e do sistema fundação rotor.

A particularidade associada à resposta dinâmica de solos é que estes possuem, na maioria das vezes uma dimensão ilimitada. A resposta dinâmica de sistemas elásticos com uma dimensão ilimitada deve ser capaz de descrever a chamada condição de radiação de Sommerfeld. Esta condição de radiação está associada ao fenômeno físico de propagação de ondas na direção da dimensão ilimitada do domínio e que não são refletidas de volta à origem da fonte de energia.

Quando o solo é excitado, por exemplo, através de uma fundação, ele gera uma resposta dinâmica que se materializa na forma de um campo de deslocamento com ondas que se propagam para longe da fonte de energia. Estas ondas, que se propagam para o infinito, ou seja, na direção da dimensão ilimitada do domínio, carregam consigo energia que é retirada e não retorna ao meio. Este mecanismo de retirada de energia através de ondas que se propagam sem ser refletidas de volta é conhecido como amortecimento geométrico, Woods, Richart e Hall (1972). A condição de radiação de Sommerfeld é a expressão matemática para esta condição. Ela também pode ser interpretada como descrevendo o fato que, para além do sistema analisado não existe fonte de energia. Desta forma não existem ondas geradas fora do sistema ou seja “no infinito” e que se propagam em direção ao sistema (fundação) analisado. Sommerfeld forneceu a expressão matemática para esta condição de radiação, Sommerfeld (1949).

O solos exibem, entretanto, um segundo mecanismo de dissipação de energia associado ao atrito interno no meio. Este mecanismo de amortecimento é conhecido com amortecimento interno ou material, Mesquita (1989) e Romanini (1995). Os domínios que apresentam mecanismo de amortecimento interno são conhecidos como meios viscoelásticos, Findley *et ali* (1989).

## Formulação do problema

No presente trabalho o solo será modelado como um domínio tridimensional (3D) que apresenta comportamento geometricamente linear. Ou seja, são tratados modelos de solo cujo comportamento é descrito pelo tensor de deformações linear de Cauchy,  $\varepsilon_{ij}$ , Malvern (1969):

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \{u_{i,j} + u_{j,i}\} \quad (2.1)$$

Onde  $u_i$  representa a componente do vetor de deslocamentos do solo e a vírgula indica a diferenciação em relação à coordenada que se segue. Também assume-se comportamento materialmente linear, ou seja, a equação constitutiva do meio é descrita por uma relação linear  $\varepsilon_{ij}$ , Malvern (1969):

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk} \quad (2.2)$$

Na expressão acima  $\sigma_{ij}$  representa as componentes do tensor de tensão,  $\delta_{ij}$  é o Delta de Krönecker,  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé. Adota-se a regra da notação indicial, segundo a qual índices repetidos implicam em soma sobre os valores que estes podem assumir:  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ . A relação entre as constantes de Lamé e as demais constantes de engenharia como o coeficiente de Poisson  $\nu$ , o módulo de Young ou de cisalhamento longitudinal  $E$  e o módulo de cisalhamento transversal  $G$  é dado por (Malvern (1969)):

$$\mu = G \quad (2.3)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.4)$$

e ainda

$$E = 2G(1+\nu) \quad (2.5)$$

No presente trabalho o solo pode ou não conter amortecimento interno. Ou seja, ele pode ser considerado elástico ou visco-elástico. Do ponto de vista do comportamento dinâmico, vamos estudar solos sob regime estacionário, ou seja:

$$\bar{u}(\underline{x}, t) = u(\underline{x}) \exp(i\omega t) \quad (2.6)$$

Em problemas elastodinâmicos estacionários, a visco-elasticidade por ser incluída através do princípio da correspondência elástico-viscoelástico, Christensen (1982). Segundo este princípio a solução viscoelástica é obtida a partir da solução elástica pela substituição das constantes elásticas do material  $\lambda, \mu$  por suas contrapartidas viscoelásticas  $\lambda^*$  e  $\mu^*$ . Os parâmetros viscoelásticos são agora complexos, contém o modelo de amortecimento material que pode depender da frequência  $\omega$  e são definidos como (Findley *et al.* (1989)):

$$\lambda^*(\omega) = \lambda_s^*(\omega) + i\lambda_L^*(\omega) = \lambda_s^*(\omega)[1 + i\eta_\lambda(\omega)] \quad (2.7)$$

$$\mu^*(\omega) = \mu_s^*(\omega) + i\mu_L^*(\omega) = \mu_s^*(\omega)[1 + i\eta_\mu(\omega)] \quad (2.8)$$

Nas equações (2.7) e (2.8) as grandezas  $\lambda_s^*(\omega)$  e  $\mu_s^*(\omega)$  representam os chamados módulos de armazenamento (storage), enquanto as grandezas  $\lambda_L^*(\omega)$  e  $\mu_L^*(\omega)$  indicam os módulos de dissipação (loss). Nestas equações também estão indicados os coeficientes de amortecimento do meio  $\eta_\lambda(\omega)$  e  $\eta_\mu(\omega)$  que foram definidos como:

$$\eta_\lambda(\omega) = \frac{\lambda_L^*(\omega)}{\lambda_s^*(\omega)} \quad ; \quad \eta_\mu(\omega) = \frac{\mu_L^*(\omega)}{\mu_s^*(\omega)} \quad (2.9)$$

Como nesta representação os módulos de armazenamento e dissipação podem variar com a frequência circular  $\omega$ , as equações (2.7) e (2.8) são capazes de representar qualquer modelo de sólido visco-elástico linear, Findley *et ali.* (1989). No presente trabalho será empregado um modelo viscoelástico mais simplificado. Os módulos de armazenamento são considerados constantes com o valor da respectiva constante elástica do meio:

$$\lambda_s^*(\omega) = \lambda \quad (2.10)$$

$$\mu_s^*(\omega) = \mu \quad (2.11)$$

Por sua vez os módulos de dissipação são considerados constantes, não dependentes da frequência, sendo uma fração do módulo de armazenamento:

$$\lambda_L^*(\omega) = \eta \lambda_s^*(\omega) = \eta \lambda \quad (2.12)$$

$$\mu_L^*(\omega) = \eta \mu_s^*(\omega) = \eta \mu \quad (2.13)$$

O fator  $\eta$  é denominado fator de amortecimento do meio, no caso, o solo. Estas hipóteses caracterizam o comportamento viscoelástico conhecido como de histerese constante e as equações constitutivas viscoelásticas se tornam:

$$\lambda^* = \lambda(1+i\eta) \quad (2.14)$$

$$\mu^* = \mu(1+i\eta) \quad (2.15)$$

Com estas definições do modelo constitutivo, as equações que regem o comportamento dinâmico linear do meio visco-elástico são as equações Eringen e Suhubi (1979):

$$\mu^*(\omega) \bar{u}_{i,jj} + [\lambda^*(\omega) + \mu^*(\omega)] \bar{u}_{k,ki} + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0 \quad (2.16)$$

Assim o problema da interação dinâmica de estruturas rígidas de fundação com o solo é regido pela equação (2.16) e sujeita às condições de contorno que serão descritas a seguir. A figura 2.1 mostra um semi-espço com uma fundação rígida e sem massa colocada em sua superfície. A superfície livre do semi-espço é designada por  $\Gamma_s$ . A interface entre o solo e a fundação é

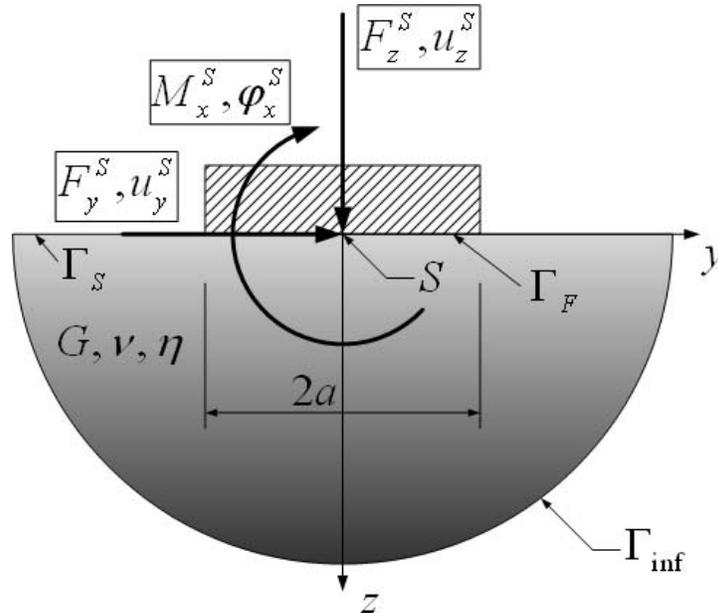
denotada por  $\Gamma_F$ . A figura 2.1 mostra ainda o contorno ilimitado do semi espaço  $\Gamma_{inf}$ , que é o contorno que deve obedecer a condição de radiação de Sommerfeld.

O problema a ser tratado nesta dissertação é tridimensional. A figura 2.1 somente retrata o plano (y-z). Na figura 2.1 também está indicado a origem do sistema de coordenadas utilizado para solucionar o problema da interação dinâmica solo-estrutura. Os graus de liberdade da fundação rígida são três deslocamentos e três rotações e podem ser agrupados em um vetor de deslocamentos generalizados  $\{u^S\}$  medido a partir do ponto S, que se situa na interface solo-fundação e na origem do sistema de coordenadas indicado na figura 2.1:

$$\{u^S\} = \{u_x^S \quad u_y^S \quad u_z^S \quad \varphi_x^S \quad \varphi_y^S \quad \varphi_z^S\}^T \quad (2.17)$$

A fundação rígida é excitada por forças externas  $\{F^S\}$ , cujas resultantes estão aplicadas na origem do sistema de coordenadas:

$$\{F^S\} = \{F_x^S \quad F_y^S \quad F_z^S \quad M_x^S \quad M_y^S \quad M_z^S\}^T \quad (2.18)$$



**Figura 2.1:** Fundação rígida de superfície interagindo com semi-espaço.

Uma vez postas estas definições, é possível avançar para a explicitação das condições de contorno que estão prescritas neste problema de interação solo-estrutura. Na parte ilimitada do contorno  $\Gamma_{\text{inf}}$  a condição de radiação de Sommerfeld deve ser obedecida. Na interface solo-fundação  $\Gamma_F$ , de comprimento  $2a$  o campo de deslocamentos do solo deve ser compatível com o movimento de corpo rígido da fundação expresso pelo vetor de deslocamentos (2.17). No resto da superfície do semi espaço  $\Gamma_S$  as forças de superfície  $t_i$  ( $i = x, y, z$ ) possuem valor nulo:

$$t_i(\underline{x} \in \Gamma_S) = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (2.19)$$

O problema de interação dinâmica solo-estrutura é um típico problema de valor de contorno misto da elastodinâmica. Dadas as forças externas (2.18) pede-se o vetor de deslocamentos da fundação (2.17) de forma que a expressão de superfície livre (2.19) seja respeitada.

## **Técnicas para solução do problema da interação dinâmica solo-estrutura.**

O problema da interação dinâmica solo estrutura recebeu e continua a receber atenção de centenas de pesquisadores. Até o início da década de 80 a maioria dos trabalhos descrevendo a interação solo-estrutura possuía um caráter analítico ou semi-analítico. Uma boa resenha do estado da arte até o início dos anos 80 pode ser encontrado no artigo de Gazetas (1983). Embora o método dos elementos finitos (MEF) já estivesse, então, em utilização há praticamente 2 décadas, ele não foi imediatamente aplicado a problemas de interação dinâmica solo-estrutura. Existiram algumas tentativas, Hadjain, Luco & Tsai (1974), Mesquita *et ali.* (1993), mas o que logo ficou evidente é que um método de domínio como o MEF não era capaz de simular adequadamente a condição de radiação de Sommerfeld e os resultados eram inconsistentes.

Ao longo das últimas duas décadas os pesquisadores do MEF tentaram desenvolver técnicas para introduzir no método a capacidade de respeitar a condição de radiação de

Sommerfeld. Duas técnicas receberam atenção especial. A primeira era a incorporação de “elementos infinitos”, Barros (1996); Rajapakse e Karasudhi (1986), no âmbito do MEF e a segunda era a técnica de mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN), Givoli (1992), Zavala (1999). Todas estas técnicas possuem particularidades e limitações. Para uma descrição mais detalhadas das características destes método sugere-se a leitura do trabalho Mesquita e Pavanello (2005).

A técnica, entretanto, que surgiu no início dos anos 70 e maturou nas últimas décadas é o Método dos Elementos de Contorno, MEC. Existe um certo consenso que o MEC é a técnica mais eficiente para tratar a dinâmica de sistemas ilimitados, Beskos (1987), Beskos (1997), Dominguez (1993), Hall e Olivetto (2003).

No presente trabalho o problema da interação dinâmica solo-estrutura será resolvido com auxílio da versão direta do Método dos Elementos de Contorno, Carrion (2002). O trabalho de Carrion (2002) será utilizado para a obtenção da resposta dinâmica do problema da iteração solo estrutura.

## **Matriz de impedância do solo**

A resposta dinâmica do problema de interação solo estrutura é geralmente expressa na forma de uma matriz de impedância  $[S]$  que liga o vetor de deslocamentos de corpo rígido da fundação  $\{u^s\}$  fornecido pela equação (2.17) com o vetor da forças externas aplicadas sobre a fundação  $\{F^s\}$  definido pela equação (2.18):

$$Ga[S]\{u^s\} = \{F^s\} \quad (2.20)$$

Ou alternativamente escrita utilizando-se uma matriz de flexibilidade  $[N]$  ao invés da matriz de impedância:

$$\frac{1}{Ga}[N]\{F^S\}=\{u^S\} \quad (2.21)$$

Para o caso de uma fundação tridimensional, assentada sobre o semi-espço e apresentando simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , a estrutura da matriz de impedância da fundação é (Mesquita (1989), Carrion (2002)):

$$Ga \begin{bmatrix} S_{u_x F_x} & 0 & 0 & 0 & S_{u_x M_y} & 0 \\ 0 & S_{u_y F_y} & 0 & S_{u_y M_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{u_z F_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\phi_x F_y} & 0 & S_{\phi_x M_x} & 0 & 0 \\ S_{\phi_y F_x} & 0 & 0 & 0 & S_{\phi_y M_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{\phi_z M_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^S \\ u_y^S \\ u_z^S \\ \phi_x^S \\ \phi_y^S \\ \phi_z^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x^S \\ F_y^S \\ F_z^S \\ M_x^S \\ M_y^S \\ M_z^S \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Esta equação mostra que, para o semi-espço, uma excitação vertical  $F_z^S$  resulta somente em um deslocamento vertical  $u_z^S$ . Da mesma forma, um momento em torno do eixo  $z$  (torção)  $M_z^S$  somente resulta em uma rotação em torno do próprio eixo  $z$ ,  $\phi_z^S$ . Já uma excitação horizontal nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $F_x^S$  e  $F_y^S$ , resultam não somente nos respectivos deslocamentos lineares  $u_x^S$  e  $u_y^S$ , mas também as rotações  $\phi_y^S$  e  $\phi_x^S$ .

Uma análise da estrutura da matriz fornecida na equação (2.22) também indica que quando uma fundação é excitada por momentos em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , não somente são excitados os graus de liberdade de rotação em torno destes eixos  $\phi_x^S$  e  $\phi_y^S$ , mas também são gerados deslocamentos nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $u_y^S$  e  $u_x^S$ . Isto significa um acoplamento entre os graus de liberdade de rotação e translação.

No caso de realizarmos a análise somente no plano  $y$ - $z$ , a matriz acima se reduz a:

$$Ga \begin{bmatrix} S_{u_z F_z} & 0 & 0 \\ 0 & S_{u_y F_y} & S_{u_y M_x} \\ 0 & S_{\phi_x F_y} & S_{\phi_x M_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \phi_x^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z^S \\ F_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Esta matriz de impedância também pode ser expressa através de outra convenção que será utilizada no capítulo 3.

$$Ga \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & s_{y\phi} \\ 0 & s_{\phi y} & s_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \phi_x^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z^S \\ F_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Pode-se mostrar que os termos de acoplamento  $s_{\phi y}$  e  $s_{y\phi}$  existem para fundações de superfície somente se a condição de contato na interface solo-fundação for considerado “colado”, ou seja, capaz de desenvolver tensões de cisalhamento. Caso a condição de contato não seja “colado” (bonded) a matriz de impedância do solo é diagonal e não surgem acoplamentos entre os graus de liberdade, devida à resposta do solo, Mesquita (1989), Carrion (2002):

$$Ga \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_x^S \\ \phi_x^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z^S \\ F_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

É importante mencionar que a matriz de impedância  $[S(A_0)]$ , que descreve a interação dinâmica solo-estrutura, é uma matriz complexa, e suas funções apresentam parte real e imaginária dependentes da frequência. Na análise da interação dinâmica solo-estrutura convencionou-se o emprego de uma frequência adimensional  $A_0$  definida por:

$$A_0 = \frac{\omega a}{v_s} \quad (2.26)$$

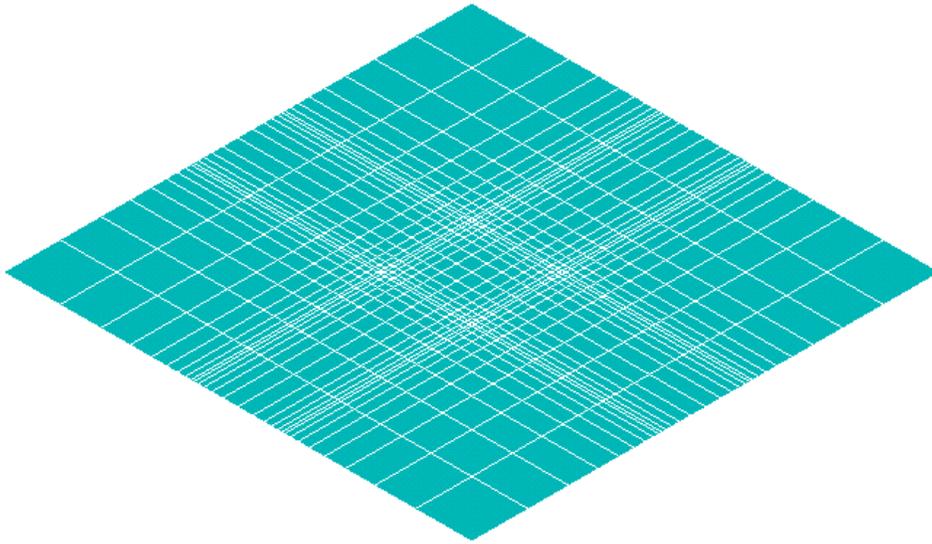
Nesta expressão,  $\omega$  é a frequência circular em [rad/s],  $a$  é a dimensão do semi-lado da fundação (ver fig. 2.1) e  $v_s$  representa a velocidade de propagação a onda de cisalhamento no contínuo elástico.

Neste trabalho serão utilizadas matrizes de flexibilidade sintetizadas por Carrion (2002). Ressaltando que para obter a matriz de impedância basta se fazer a inversa da matriz de flexibilidade. As figuras 2.3 até 2.12 mostram as funções de flexibilidade definidas na equação (2.27) para o caso de um solo tridimensional, uma fundação quadrada com lado  $2a \times 2a$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . A malha de elementos de contorno utilizada é um malha não homogênea, leia-se com elementos de dimensões distintas, e pode ser vista a figura 2.2 abaixo. A dimensão da superfície livre do semi-espaço discretizada é  $|x| = |y| \leq 5a$ . Ela é composta por um total de 928 elementos constantes, sendo que deste total utiliza-se 114 elementos na interface solo-fundação.

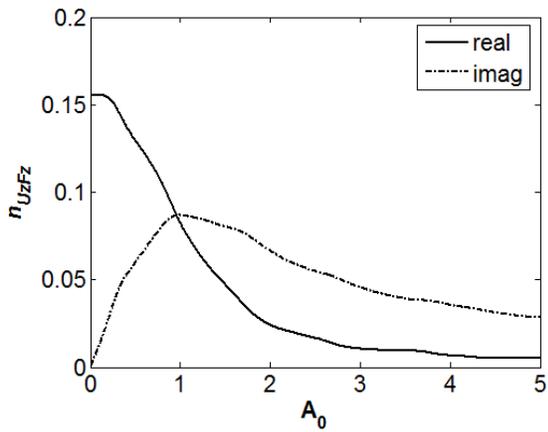
A matriz de flexibilidade extraída de Carrion (2002) pode ser vista na equação (2.27) Lembrando que no trabalho presente utilizou-se a matriz de impedância do solo sendo necessário portando se inverter a matriz de flexibilidade obtida.

$$\frac{1}{Ga} \begin{bmatrix} n_{U_z F_z} & 0 & 0 \\ 0 & n_{U_y F_y} & n_{U_y M_x} \\ 0 & n_{\phi_x F_y} & n_{\phi_x M_x} \end{bmatrix} \{F^S\} = \{u^S\} \quad (2.27)$$

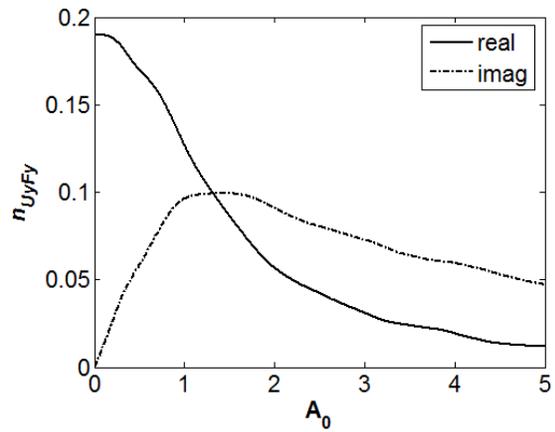
Os componentes da inversa da matriz de impedância (2.23) e (2.24) determinados através desta metodologia podem ser vistos nas figuras 2.3 até 2.12 para dois casos distintos de amortecimento material. Inicialmente assume-se que o semi-espaço é completamente elástico  $\eta = 0$ . Desta forma todo amortecimento introduzido no meio é resultado do amortecimento geométrico. As figuras 2.3 a 2.5 mostram a parte real e imaginária das funções de flexibilidade vertical,  $n_{U_z F_z}$ , horizontal  $n_{U_y F_y}$  e de rotação em torno do eixo  $x$   $n_{\phi_x M_x}$ .



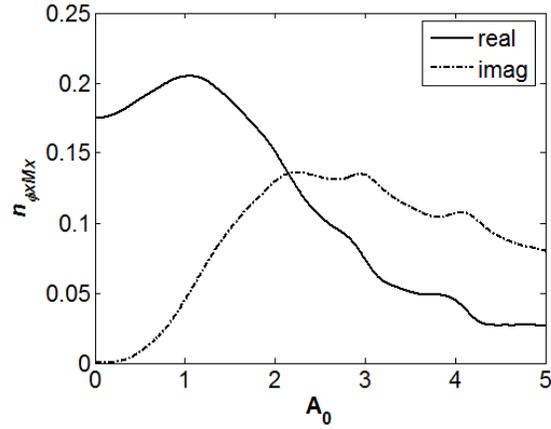
**Figura 2.2:** Malha utilizada para discretizar a superfície livre do semi-espço através do MEC.



**Figura 2.3:** Função de flexibilidade vertical  $n_{UzFz}$  da fundação rígida e sem massa. Solo sem amortecimento interno,  $\eta = 0$ .

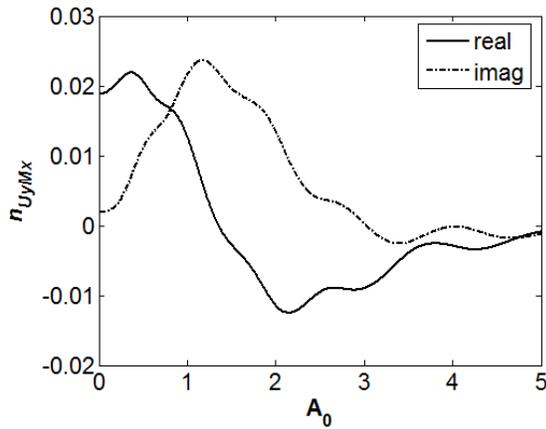


**Figura 2.4:** Função de flexibilidade horizontal  $n_{UyFy}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0$ .

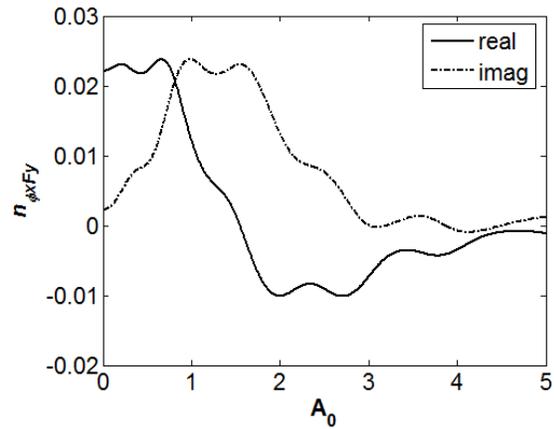


**Figura 2.5:** Função de flexibilidade de rotação  $n_{\phi_x M_x}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0$ .

Por sua vez as figuras 2.6 e 2.7 mostram as partes reais e imaginárias dos termos não-diagonais das matrizes (2.23) e/ou (2.24). Sabe-se que as matrizes de impedância do solo deveriam ser simétricas, ou seja,  $S_{\phi_x F_y} = S_{u_y M_x}$ , Mesquita (1989), Romanini (1995).



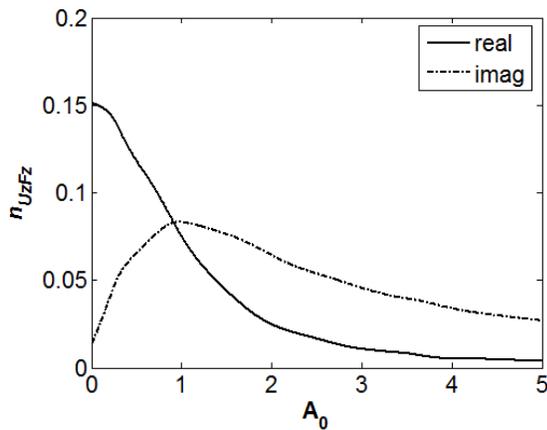
**Figura 2.6:** Função de flexibilidade do termo não diagonal  $n_{u_y M_x}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0$ .



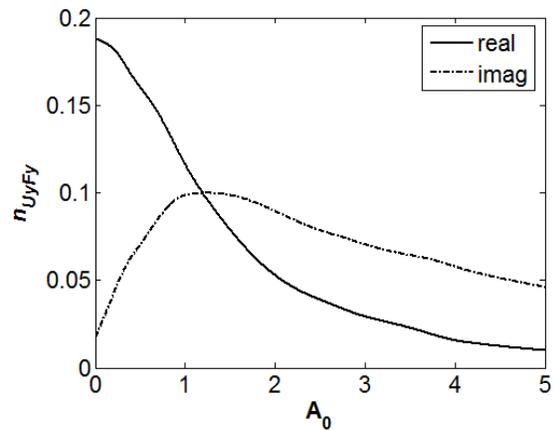
**Figura 2.7:** Função de flexibilidade do termo não diagonal  $n_{\phi_x F_y}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0$ .

Mas o semi-espaço é, nesta modelagem, gerado a partir da criação de uma superfície livre limitada pela discretização, o que resulta em uma matriz de impedância não perfeitamente simétrica, como pode ser observados nas figuras 2.6 e 2.7.

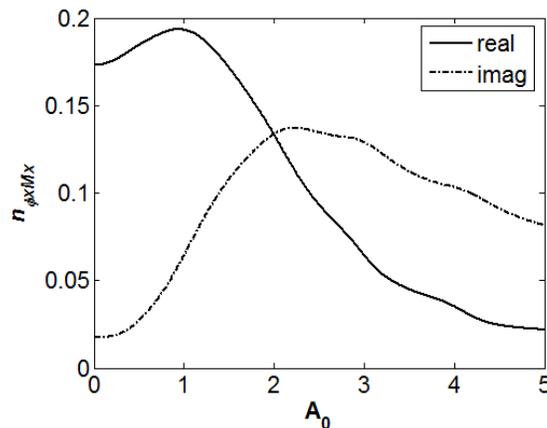
O segundo conjunto de funções de impedância estão associadas a um semi-espço viscoelástico, ou seja, que possui amortecimento material, com coeficiente de amortecimento  $\eta = 0.05$ . Estas funções estão mostradas nas figuras 2.8 a 2.12. Um aspecto interessante do comportamento viscoelástico é que as funções  $n_{U_z F_z}$  e  $n_{U_y F_y}$  são muito mais próximas entre si do que no caso puramente elástico, evidenciando a simetria da matriz de impedância da fundação rígida e sem massa interagindo com o semi-espço.



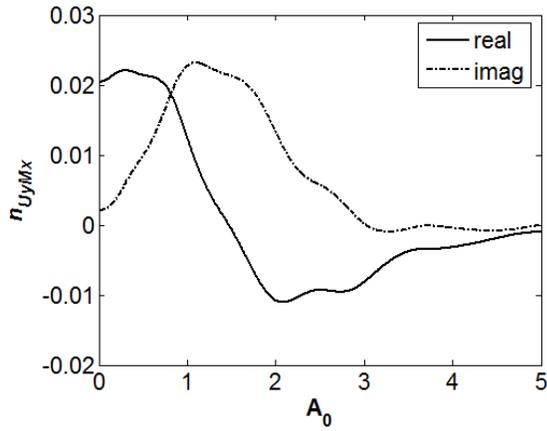
**Figura 2.8:** Função de flexibilidade vertical  $n_{U_z F_z}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0,05$ .



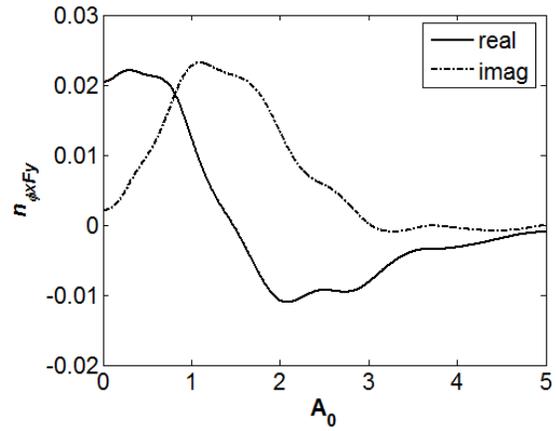
**Figura 2.9:** Função de flexibilidade horizontal  $n_{U_y F_y}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0,05$ .



**Figura 2.10:** Função de flexibilidade de rotação  $n_{\phi_x M_x}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0,05$ .



**Figura 2.11:** Função de flexibilidade do termo não diagonal  $n_{U_y M_x}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0,05$ .



**Figura 2.12:** Função de flexibilidade do termo não diagonal  $n_{\phi_x F_y}$  da fundação rígida e sem massa. Amortecimento interno,  $\eta = 0,05$ .

Menciona-se ainda que nas simulações numéricas da interação rotor-fundação-solo a serem realizadas nos próximos capítulos, mais valores para o amortecimento material do solo foram utilizados.

## Capítulo 3

### Descrição do modelo rotor-fundação-solo

O modelo deste trabalho é constituído do rotor, da fundação e do solo. Denomina-se este conjunto de rotor-fundação-solo, ver Figura 3.1. O rotor utilizado é o rotor de Jeffcott (Laval). Este tipo de rotor consiste em um eixo flexível (com ou sem amortecimento) suposto de massa nula. O eixo flexível cruza o disco do rotor no ponto W (ver Figura 3.2). O disco é considerado rígido com massa  $m_R$ . O centro de massa do disco é indicado pela letra V (ver Figura 3.2). Entre os pontos V e W existe uma excentricidade  $\varepsilon$ . Supõe-se que o disco esteja montado num plano perpendicular ao eixo podendo transladar apenas no plano de montagem referido.

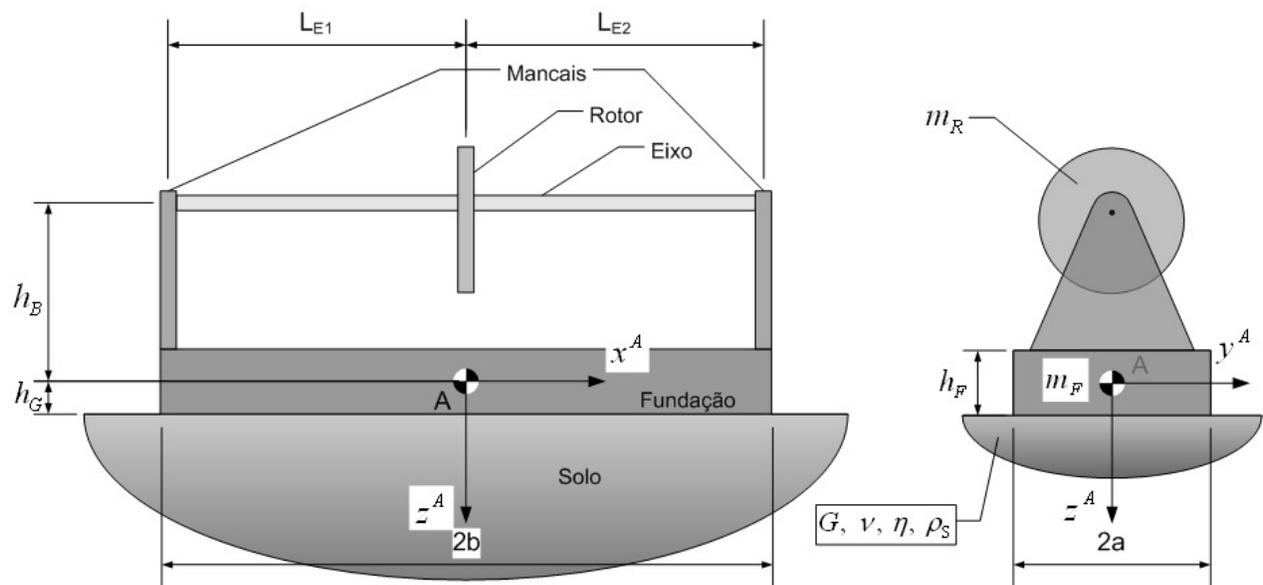
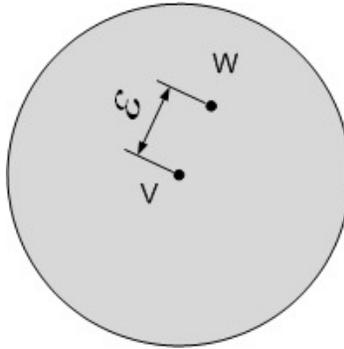


Figura 3.1: Planos longitudinal e frontal do sistema rotor-fundação-solo.



**Figura 3.2:** Distância  $\varepsilon$  entre o centro de massa (V) e o ponto de contato do rotor com o eixo (W).

O eixo do rotor, indicado na **Figura 3.2**, possui flexibilidade nas direções  $y$  e  $z$ . Sendo que a rigidez do eixo na direção  $y$  é denominada  $k_y^R$  e a rigidez do eixo na direção  $z$  é denominada  $k_z^R$ . O comprimento total do eixo é  $L_{E1} + L_{E2}$ , neste trabalho assume-se que  $L_{E1} = L_{E2}$ , portanto despreza-se o efeito giroscópico, assumindo-se a simetria no plano  $y^A z^A$ .

O eixo do rotor pode possuir ainda amortecimento externo e interno. O coeficiente de amortecimento externo na direção  $y$  é denominado  $d_{Ey}$  e o coeficiente de amortecimento externo na direção  $z$  é denominado  $d_{Ez}$ . O coeficiente de amortecimento interno é denominado  $d_I$ , independente da direção.

O mancal que sustenta o eixo é suposto rígido assim como é rígida também a fundação. Com isso o mancal é considerado como parte integrante da fundação formando um único corpo.

A fundação constitui-se de um bloco maciço de dimensões  $2a \times 2b \times h_F$ , como indicado na Figura 3.1. A letra  $a$  é a dimensão da metade da largura da fundação,  $b$  é a dimensão da metade do comprimento da fundação e  $h_F$  é a dimensão da altura da fundação. A massa da fundação é denominada  $m_F$ . O centro de massa é localizado por  $h_G$ , que mede a distância entre centro de massa da fundação e a sua base.

Sobre a fundação ainda pode-se destacar que esta é de superfície. Duas diferentes hipóteses são estudadas neste trabalho. Primeiramente supõe-se que a interface solo-fundação é lisa, esta está simplesmente apoiada na superfície do solo. Depois se supõe que a interface solo-fundação não é mais lisa, neste caso ela é “colada” sobre a superfície. As implicações destas hipóteses se refletem na estrutura da matriz de impedância ou flexibilidade do solo.

Como já explicitado no capítulo 2 o solo é suposto um semi-espaco viscoelástico linear. Os parâmetros que caracterizam o solo estão abaixo:

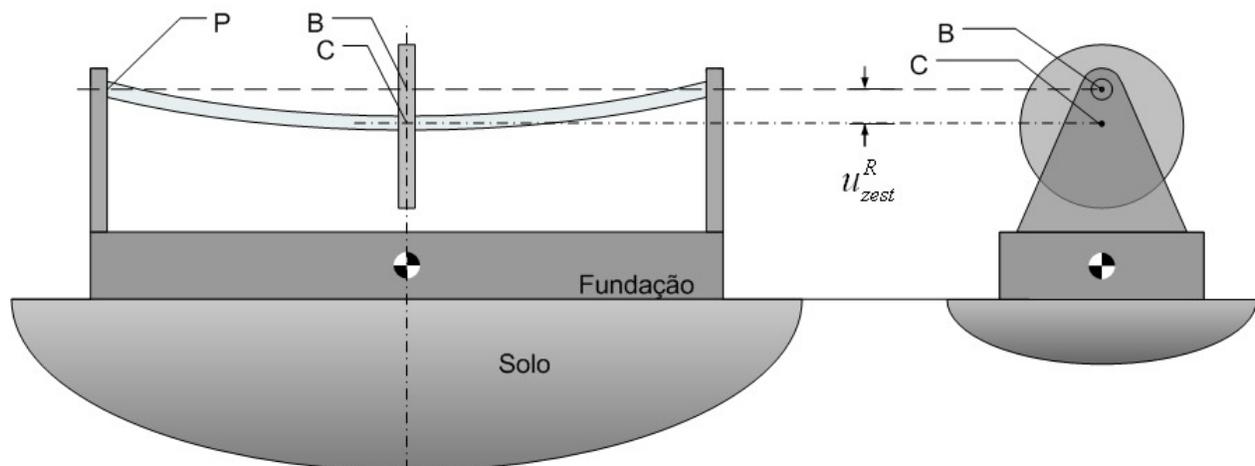
$G$  : módulo de elasticidade

$\nu$  : coeficiente de Poisson

$\rho_s$  : densidade do solo

$\eta$  : coeficiente de amortecimento interno.

Nos parágrafos anteriores foram descritos algumas características de cada componente que compõem o sistema dinâmico. Complementando as definições descreve-se agora a cinemática do sistema.

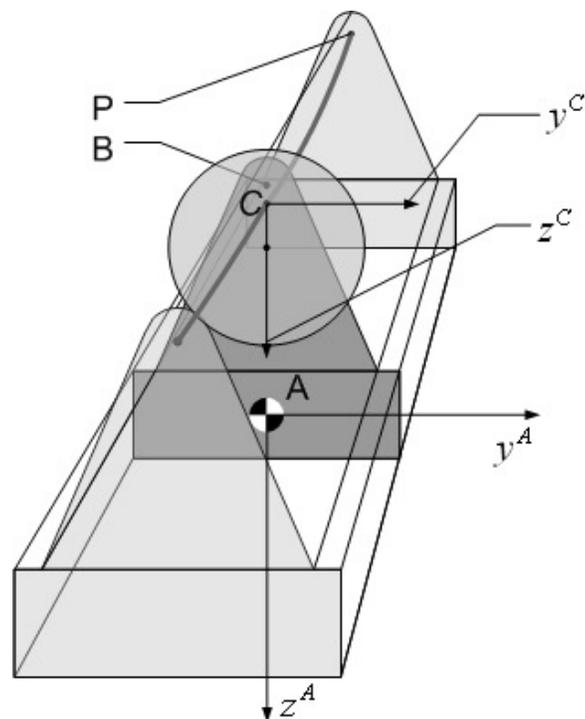


**Figura 3.3:** Deformação estática do rotor.

Devido ao fato do eixo do rotor ser flexível, este sofre deflexão estática em consequência do seu próprio peso. O ponto  $B$  da **Figura 3.3** indica a suposta posição em que o eixo estaria se estivesse em repouso e sem a ação do peso do rotor. O ponto  $C$  indica a posição do eixo quando o sistema está em repouso e o eixo sofre flexão apenas pela ação do peso. A intensidade da flexão

causada pelo peso é caracterizada pelo deslocamento  $u_{z_{est}}^R$ , que é a distância entre os pontos  $B$  e  $C$ . O ponto  $C$  coincide com o ponto  $W$  (ver Figura 3.3) quando o sistema está em repouso, levando-se em conta a deformação vertical estática  $u_{z_{est}}^R$ .

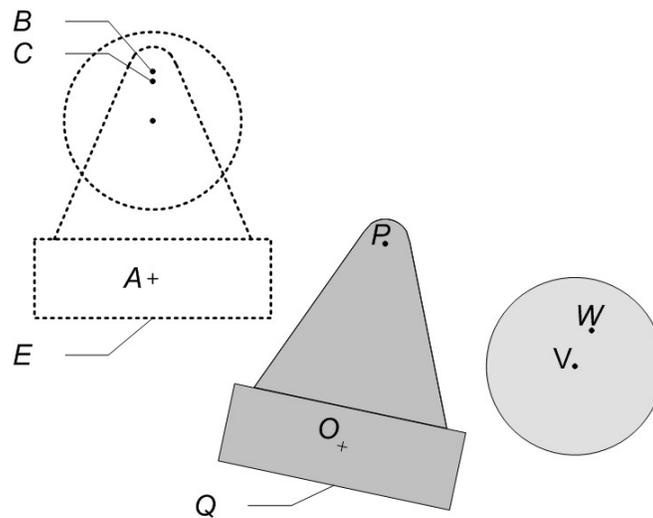
Os pontos mencionados no parágrafo anterior estão situados no plano  $y^A z^A$ . O plano pode ser visto na Figura 3.1 e na Figura 3.4. É este o plano no qual ocorre toda a cinemática. Na Figura 3.4 projeta-se um dos mancais para o plano mencionado, dessa forma o equacionamento fica contido no plano. A Figura 3.5 mostra o deslocamento da fundação e do rotor em relação à sua posição de repouso. O ponto  $O$  corresponde ao centro de massa da fundação coincide com o ponto  $A$  quando o sistema está em repouso. No ponto  $A$  adota-se um sistema de coordenadas inerciais  $(y^A, z^A)$ . No ponto  $C$  também se coloca outro sistema inercial  $(y^C, z^C)$ , conforme mostrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Vista tridimensional do sistema rotor-fundação em equilíbrio estático com sistemas de eixos inerciais  $(y^A, z^A)$  e  $(y^C, z^C)$ .

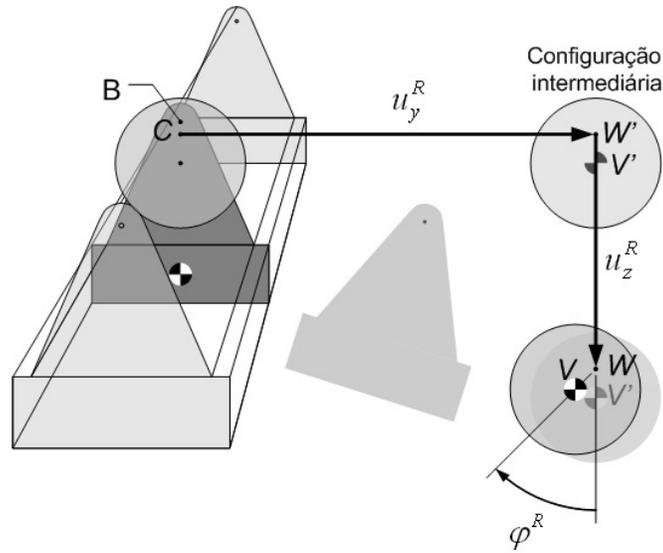
Na Figura 3.5 tem-se ilustrado o plano no qual a cinemática do sistema ocorre. A figura em pontilhado corresponde ao sistema em repouso. Logo a direita desta tem-se a figura da fundação

deslocada da posição de equilíbrio. E mais a direita tem-se o rotor deslocado da posição de equilíbrio. O ponto  $P$  é de especial importância, ele coincide com o ponto  $B$  quando o sistema está em repouso. O ponto  $P$  é o referencial para deslocamento do rotor em relação ao mancal. Outros pontos relevantes são os pontos  $E$  e  $Q$ . O primeiro corresponde a um ponto na interface solo fundação quando o sistema está em repouso. O segundo corresponde ao ponto  $E$ , porém deslocado. O ponto  $Q$  é o ponto onde serão aplicadas as resultantes da reação do solo.



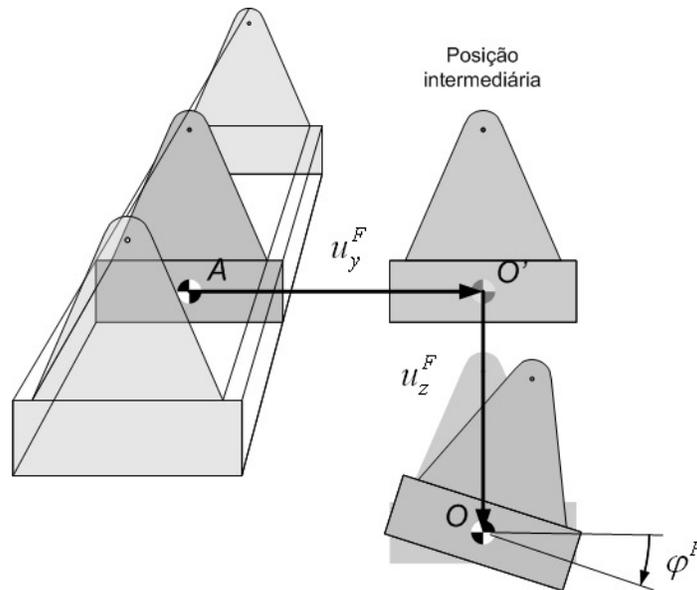
**Figura 3.5:** Plano indicando a cinemática do rotor e da fundação.

No sistema dinâmico há dois corpos, o rotor e a fundação. Cada um possui três graus de liberdade. Dois referentes ao deslocamento linear e um referente ao deslocamento angular. A Figura 3.6 indica os graus de liberdade do rotor. O termo  $u_y^R$  corresponde ao deslocamento do rotor da posição de equilíbrio  $C$  para a posição intermediária  $W'$  na direção do eixo  $y^A$ . O termo  $u_z^R$  é o deslocamento da posição de equilíbrio  $C$  para a posição  $W$  na direção do eixo  $z^A$ . E finalmente tem-se deslocamento angular em torno do eixo ou direção  $x$  que é indicado por  $\varphi^R$ .



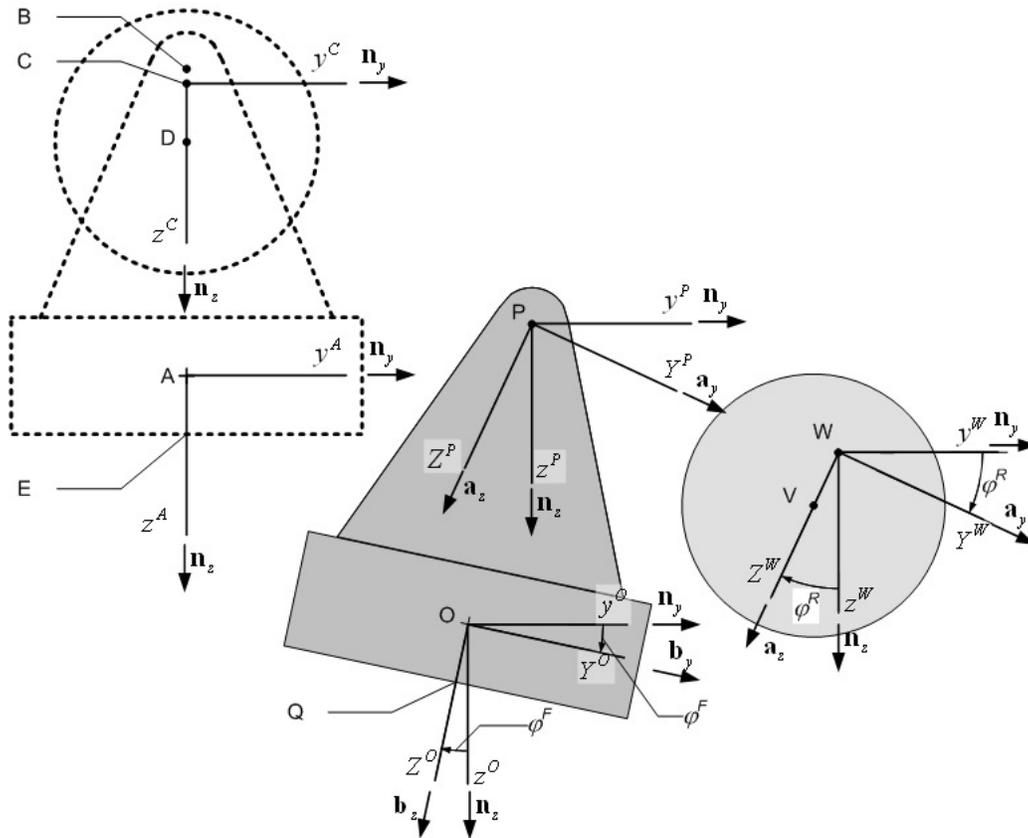
**Figura 3.6:** Definição dos graus de liberdade do rotor.

A Figura 3.7 indica os graus de liberdade da fundação. O termo  $u_y^F$  corresponde ao deslocamento da fundação da posição de equilíbrio  $A$  para a posição  $O$  na direção do eixo  $y^A$ . O termo  $u_z^F$  é o deslocamento da posição de equilíbrio  $A$  para a posição  $O$  na direção do eixo  $z^A$ . O deslocamento angular da fundação em torno de um eixo na direção  $x$  é indicado por  $\varphi^F$ . Os graus de liberdade do rotor são medidos a partir do deslocamento do ponto  $W$  em relação ao ponto  $C$ . E os graus de liberdade da fundação são medidos a partir do deslocamento do centro de massa da fundação, ponto  $A$ .



**Figura 3.7:** Definição dos graus de liberdade da fundação.

A Figura 3.8 mostra o conjunto de sistemas de coordenadas utilizados na dedução das equações de movimento do sistema. Pode-se observar que todos os sistemas de coordenadas estão contidos em um único plano.



**Figura 3.8:** Sistema de coordenadas utilizadas na descrição do sistema.

Os sistemas de coordenadas utilizados são definidos da seguinte forma:

$x^A y^A z^A$ : Sistema de coordenadas inercial com origem no centro de massa da fundação. Eixos com versores indicados por  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ .

$x^C y^C z^C$ : Sistema de coordenadas fixo, com origem no ponto C (posição em que o eixo corta o disco considerando-se a deformação estática) e versores paralelos a  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ .

$x^P y^P z^P$ : Sistema de coordenadas móveis, com origem no ponto P e com versores paralelos a  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ .

$X^P Y^P Z^P$ : Sistema de coordenadas móvel, com origem no ponto P. Mantém um giro em torno do eixo x igual ao do rotor,  $\varphi^R$ , com versores paralelos a  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$ .

$x^O y^O z^O$ : Sistema de coordenadas móveis com origem no centro de massa da fundação  $O$  e com eixos paralelos aos versores  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ .

$X^O Y^O Z^O$ : Sistema de coordenada com origem em  $O$ , porém fixo na fundação. O sistema realiza a rotação  $\varphi^F$ , a rotação da fundação em torno do eixo  $x$ . Este sistema de coordenadas possui os eixos paralelos aos versores  $\mathbf{b}_x$ ,  $\mathbf{b}_y$  e  $\mathbf{b}_z$ .

$x^W y^W z^W$ : Sistema de coordenadas móveis com origem em  $W$  e eixos paralelos aos versores  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ .

$X^W Y^W Z^W$ : Sistema de coordenadas móveis com origem em  $W$ , porém fixo no rotor e executando a rotação  $\varphi^R$  do rotor. Possui eixos paralelos aos versores  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$ .

Na seqüência serão deduzidas as relações entre os versores dos sistemas de coordenadas.

Versores do sistema inercial  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ :

$\mathbf{n}_x$ : entrando no plano do papel.

$\mathbf{n}_y$ : direção horizontal no plano do papel, sentido apontando para a direita do leitor.

$\mathbf{n}_z$ : direção vertical no plano do papel apontado para baixo.

Relação dos versores do sistema de coordenadas fixo ao rotor ( $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$ ) com os versores inerciais ( $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ ):

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{n}_x \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a}_y = \cos \varphi^R \mathbf{n}_y + \text{sen } \varphi^R \mathbf{n}_z \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}_z = -\text{sen } \varphi^R \mathbf{n}_y + \cos \varphi^R \mathbf{n}_z \quad (3.3)$$

$\varphi^R$ : ângulo de rotação do rotor

Relação dos versores do sistema de coordenadas fixo na fundação ( $\mathbf{b}_x$ ,  $\mathbf{b}_y$  e  $\mathbf{b}_z$ ) com os versores inerciais ( $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_y$  e  $\mathbf{n}_z$ ):

$$\mathbf{b}_x = \mathbf{n}_x \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b}_y = \cos \varphi^F \mathbf{n}_y + \text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_z \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b}_z = -\text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_y + \cos \varphi^F \mathbf{n}_z \quad (3.6)$$

$\varphi^F$  : ângulo de rotação da fundação.

As transformações de coordenadas podem ser expressas de forma matricial. Transformação de coordenadas entre os versores  $\mathbf{n}_i$  e  $\mathbf{a}_i$  :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi^R) & \text{sen}(\varphi^R) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi^R) & \cos(\varphi^R) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Transformação de coordenadas entre os versores  $\mathbf{n}_i$  e  $\mathbf{b}_i$  :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi^F) & \text{sen}(\varphi^F) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi^F) & \cos(\varphi^F) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

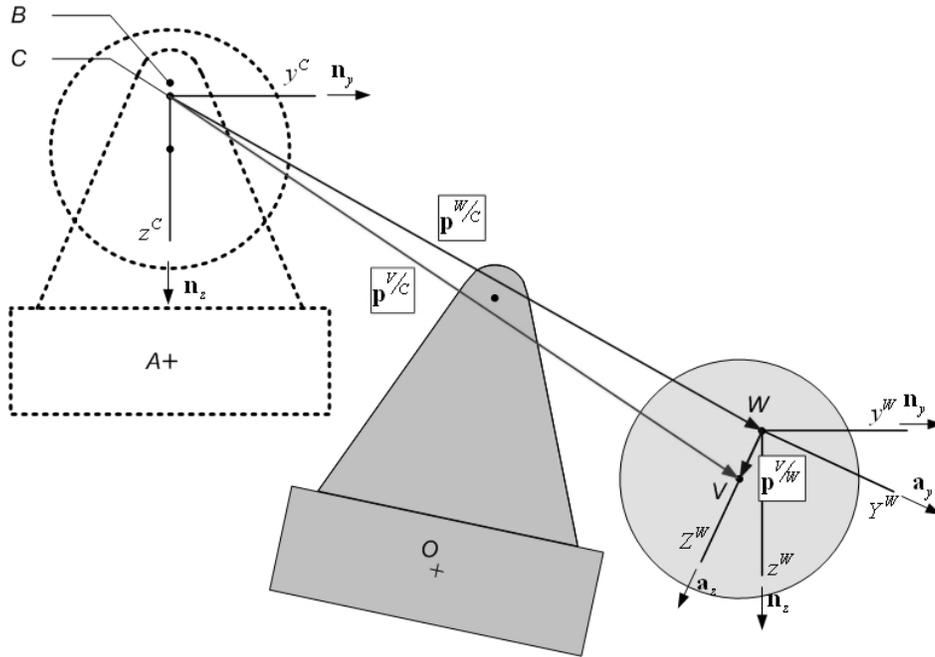
## Relações cinemáticas

As definições adotadas da seção anterior vão permitir as definições dos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração.

## Vetores posição

### Centro de massa do rotor

Principia-se com o vetor posição do centro de massa do rotor,  $\mathbf{p}^{V/c}$ . Este vetor é importante para posteriormente se deduzir a aceleração do centro de massa e com esta compor a equação de movimento. Da figura abaixo se pode verificar a composição da posição do ponto V.

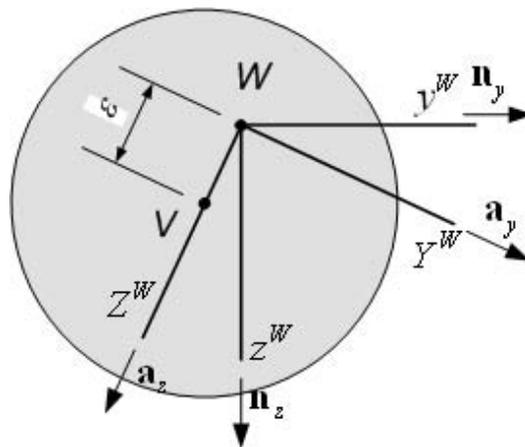


**Figura 3.9:** Esquema vetorial da posição do ponto V.

O vetor  $\mathbf{p}^{v/c}$ , pode ser decomposto pela posição do ponto W (onde o eixo intercepta o disco) em relação ao ponto C (posição do eixo em repouso) e pela posição do ponto V (centro de massa do rotor) em relação ao ponto W.

$$\mathbf{p}^{v/c} = \mathbf{p}^{v/w} + \mathbf{p}^{w/c}$$

O vetor  $\mathbf{p}^{v/w}$  pode ser escrito a partir da Figura 3.10.



**Figura 3.10:** Sistema de coordenadas móveis sobre o rotor:  $X^w Y^w Z^w$  rotativo com origem em W e  $x^w y^w z^w$  não rotativo com origem também em W.

$$\mathbf{p}^{V/W} = V - W = (Y_V^W - Y_W^W)\mathbf{a}_y + (Z_V^W - Z_W^W)\mathbf{a}_z = Y_V^W\mathbf{a}_y + Z_V^W\mathbf{a}_z \quad (3.9)$$

A excentricidade é definida pela letra  $\varepsilon$ , assim sendo, ele pode ser escrito no sistema de eixos  $(y^W, z^W)$  fixo ao rotor como  $Y_V^W = 0$  e  $Z_V^W = \varepsilon$ , portanto:

$$\mathbf{p}^{V/W} = \varepsilon \mathbf{a}_z \quad (3.10)$$

Transformando de coordenadas  $X^W Y^W Z^W$  para  $x^W y^W z^W$

$$\mathbf{p}^{V/W} = \varepsilon(-\sin \varphi^R \mathbf{n}_y + \cos \varphi^R \mathbf{n}_z) = -\varepsilon \sin \varphi^R \mathbf{n}_y + \varepsilon \cos \varphi^R \mathbf{n}_z \quad (3.11)$$

O vetor  $\mathbf{p}^{W/C}$  é extraído da Figura 3.6, ele representa o deslocamento do rotor em relação à posição de repouso.

$$\mathbf{p}^{W/C} = u_y^R \mathbf{n}_y + u_z^R \mathbf{n}_z \quad (3.12)$$

Há condições de se escrever agora o vetor posição do ponto  $V$ , referente ao centro de massa do rotor, em função dos graus de liberdade do rotor e da excentricidade.

$$\mathbf{p}^{V/C} = (u_y^R - \varepsilon \sin \varphi^R)\mathbf{n}_y + (u_z^R + \varepsilon \cos \varphi^R)\mathbf{n}_z \quad (3.13)$$

### Posição do ponto $W$ em relação ao ponto $V$

As forças de amortecimento externo, amortecimento interno e a elástica do eixo atuam no ponto  $W$ . Para montar a equação de movimento do rotor é preciso se conhecer o momento que essas forças causam em relação ao ponto  $V$ . Portanto é necessário deduzir o vetor posição  $\mathbf{p}^{W/V}$ . A partir da equação (3.11) acima se deduz o vetor posição bastando trocar o sinal.

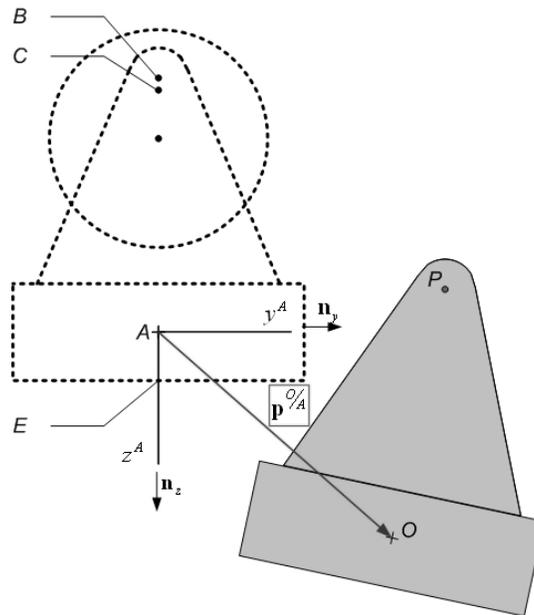
$$\mathbf{p}^{W/V} = \varepsilon \sin \varphi^R \mathbf{n}_y - \varepsilon \cos \varphi^R \mathbf{n}_z \quad (3.14)$$

### Grau de liberdade de rotação do rotor, $\varphi^R$

Da Figura 3.6 pode-se verificar que o deslocamento angular do rotor é  $\varphi^R$ , conseqüentemente este também é a sua posição angular, vetorialmente podendo ser escrita  $\varphi^R \mathbf{n}_x$ .

### Centro de massa da fundação

A partir da Figura 3.7, a qual faz referencia aos graus de liberdade da fundação deduz-se o vetor posição do centro de massa da fundação.



**Figura 3.11:** Vetor posição do centro de massa da fundação em relação a sua posição de equilíbrio.

$$\mathbf{p}^{O/A} = \mathbf{O} - \mathbf{A} = y_O^A \mathbf{n}_y + z_O^A \mathbf{n}_z = u_y^F \mathbf{n}_y + u_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.15)$$

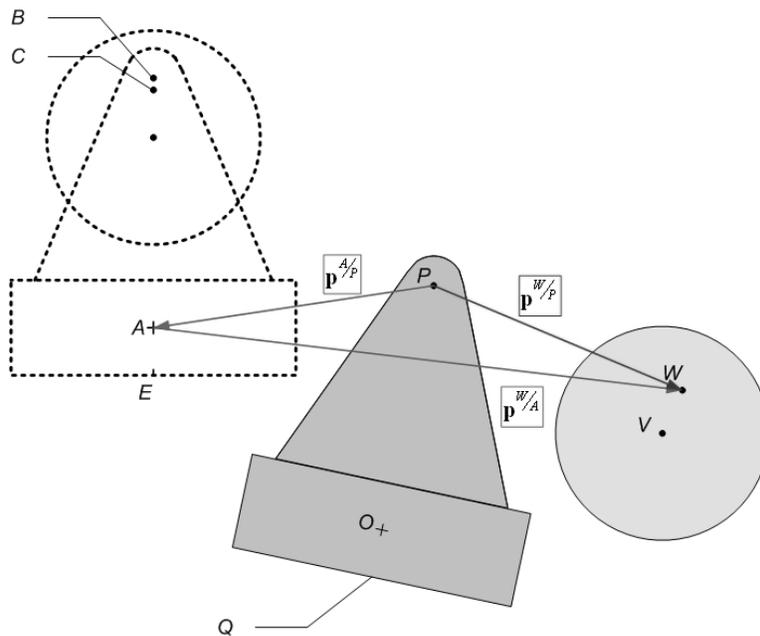
### Grau de liberdade de rotação da fundação, $\varphi^F$

Da Figura 3.7 pode-se extrair a posição angular da fundação,  $\varphi^F$ . Escrevendo vetorialmente  $\varphi^F \mathbf{n}_x$

## Deslocamento do eixo do rotor em relação à fundação

É preciso encontrar o deslocamento relativo do eixo em relação ao mancal para se deduzir posteriormente a força elástica do eixo. O deslocamento que se busca é representado pelo vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ , este é decomposto pela posição do eixo em relação ao ponto A e pela posição do mancal em relação ao ponto A.

$$\mathbf{p}^{W/P} = \mathbf{p}^{W/A} + \mathbf{p}^{A/P} \quad (3.16)$$



**Figura 3.12:** Esquema vetorial da posição do ponto W em relação ao ponto P.

A figura acima ilustra a decomposição do vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ , por sua vez os vetores  $\mathbf{p}^{W/A}$  e  $\mathbf{p}^{A/P}$  também podem ser decompostos. Decomposição do vetor  $\mathbf{p}^{W/A}$ :

$$\mathbf{p}^{W/A} = \mathbf{p}^{W/C} + \mathbf{p}^{C/A} \quad (3.17)$$

Decomposição do vetor  $\mathbf{p}^{A/P}$ :

$$\mathbf{p}^{A/P} = \mathbf{p}^{A/O} + \mathbf{p}^{O/P} \quad (3.18)$$

Inicia-se pela dedução do vetor  $\mathbf{p}^{W/A}$ . A figura abaixo ilustra os vetores  $\mathbf{p}^{W/C}$  e  $\mathbf{p}^{C/A}$ .

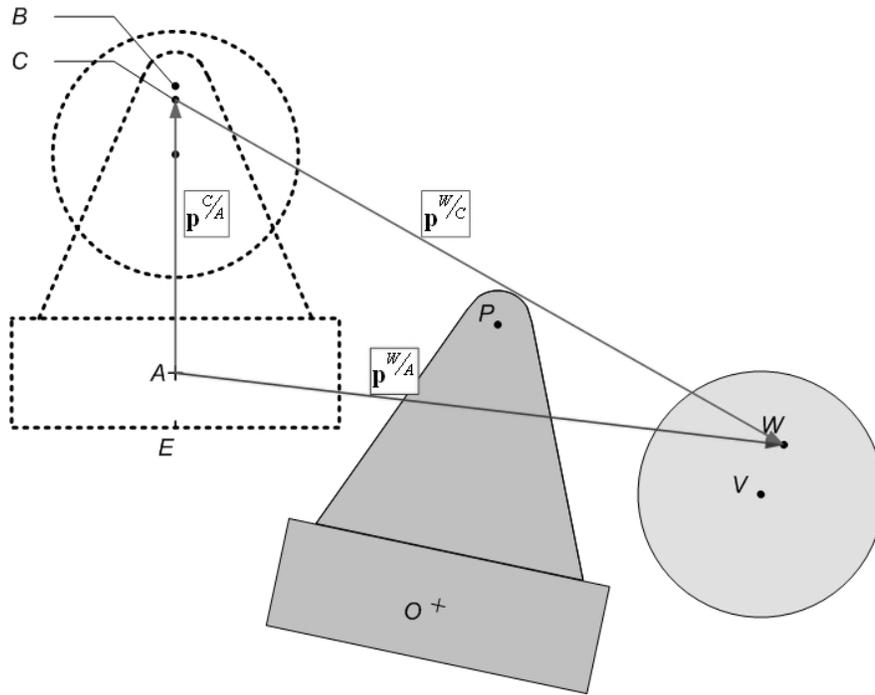


Figura 3.13: Esquema vetorial da posição do ponto W em relação ao ponto A.

O vetor  $\mathbf{p}^{W/C}$  já foi deduzido anteriormente, equação (3.12). O vetor  $\mathbf{p}^{C/A}$  é um vetor estacionário como pode ser verificado pela Figura 3.13.

$$\mathbf{p}^{C/A} = C - A = (y_C^A - y_A^A)\mathbf{n}_y + (z_C^A - z_A^A)\mathbf{n}_z = y_C^A\mathbf{n}_y + z_C^A\mathbf{n}_z \quad (3.19)$$

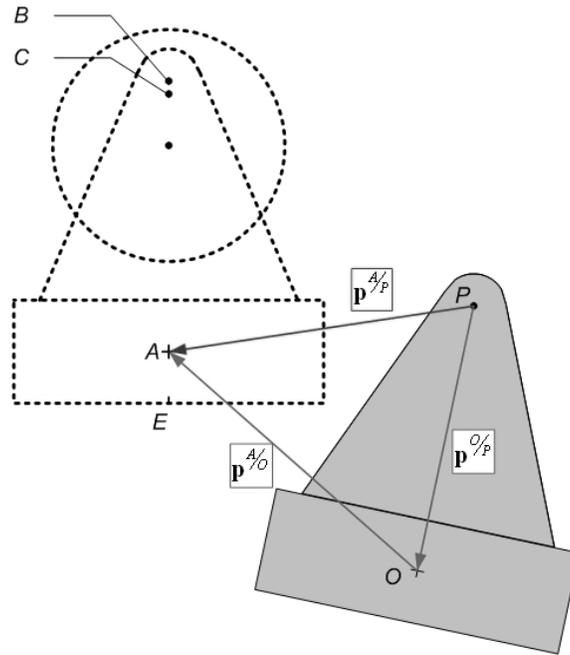
Os termos do vetor acima podem ser escritos em função da dimensão do mancal e do deslocamento estático do eixo:  $y_C^A = 0$  e  $z_C^A = -h_B + u_{zest}^R$ . Tem-se então:

$$\mathbf{p}^{C/A} = (-h_B + u_{zest}^R)\mathbf{n}_z \quad (3.20)$$

Inserindo as equações (3.12) e (3.20) na equação (3.17)

$$\mathbf{p}^{W/A} = u_y^R\mathbf{n}_y + (u_z^R + u_{zest}^R - h_B)\mathbf{n}_z \quad (3.21)$$

Seguindo a dedução do vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ , faz-se agora a dedução do vetor  $\mathbf{p}^{A/P}$ , a Figura 3.14 ilustra a decomposição do vetor.



**Figura 3.14:** Esquema vetorial da posição do ponto A em relação ao ponto P.

O vetor  $\mathbf{p}^{A/O}$  pode ser deduzido da equação (3.15):

$$\mathbf{p}^{A/O} = -\mathbf{p}^{O/A} = -u_y^F \mathbf{n}_y - u_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.22)$$

O vetor  $\mathbf{p}^{O/P}$  é deduzido abaixo.

$$\mathbf{p}^{O/P} = O - P = (Y_P^O - Y_O^O) \mathbf{b}_y + (Z_P^O - Z_O^O) \mathbf{b}_z$$

$$\mathbf{p}^{O/P} = -Y_P^O \mathbf{b}_y - Z_P^O \mathbf{b}_z$$

Da **Figura 3.14** pode-se extrair os valores dos termos acima:  $Y_P^O = 0$  e  $Z_P^O = -h_B$ . Portanto

$$\mathbf{p}^{O/P} = h_B \mathbf{b}_z \quad (3.23)$$

Transformação da expressão (3.23) do sistema  $X^O Y^O Z^O$  para  $x^O y^O z^O$ :

$$\mathbf{p}^{O/P} = h_B (-\sin \varphi^F \mathbf{n}_y + \cos \varphi^F \mathbf{n}_z) = -h_B \sin \varphi^F \mathbf{n}_y + h_B \cos \varphi^F \mathbf{n}_z \quad (3.24)$$

Inserindo as equações (3.15) e (3.24) na equação (3.18).

$$\mathbf{p}^{A/P} = -(u_y^F + h_B \text{sen } \varphi^F) \mathbf{n}_y + (h_B \text{cos } \varphi^F - u_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.25)$$

O deslocamento do eixo em relação ao mancal, vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ , é finalmente deduzido inserindo-se as equações (3.21) e (3.25) na equação (3.16).

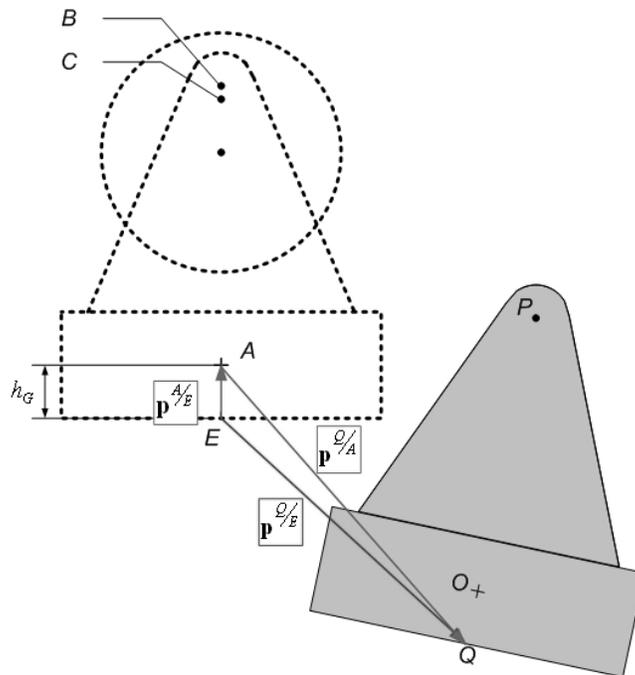
$$\mathbf{p}^{W/P} = \mathbf{p}^{W/A} + \mathbf{p}^{A/P} = (u_y^R - u_y^F - h_B \text{sen } \varphi^F) \mathbf{n}_y + (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F + h_B \text{cos } \varphi^F - h_B) \mathbf{n}_z \quad (3.26)$$

Esta equação pode ser linearizada assumindo-se que  $\varphi^F \ll 1$ , conseqüentemente  $\text{sen}(\varphi^F) \approx \varphi^F$  e  $\text{cos}(\varphi^F) \approx 1$ .

$$\mathbf{p}^{W/P} = \mathbf{p}^{W/A} + \mathbf{p}^{A/P} = (u_y^R - u_y^F - h_B \varphi^F) \mathbf{n}_y + (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.27)$$

### Deslocamento da fundação em relação ao solo

O deslocamento da fundação em relação ao solo é representado pelo vetor  $\mathbf{p}^{Q/E}$ . O ponto  $Q$  é o deslocamento do ponto  $E$  que é um ponto fixo no sistema inercial e está situado no centro da interface solo-fundação (ver **Figura 3.15**). O deslocamento deste ponto ( $E$ ) para a posição  $Q$ ,  $\mathbf{p}^{Q/E}$ , é importante, pois a reação do solo é proporcional a este deslocamento.

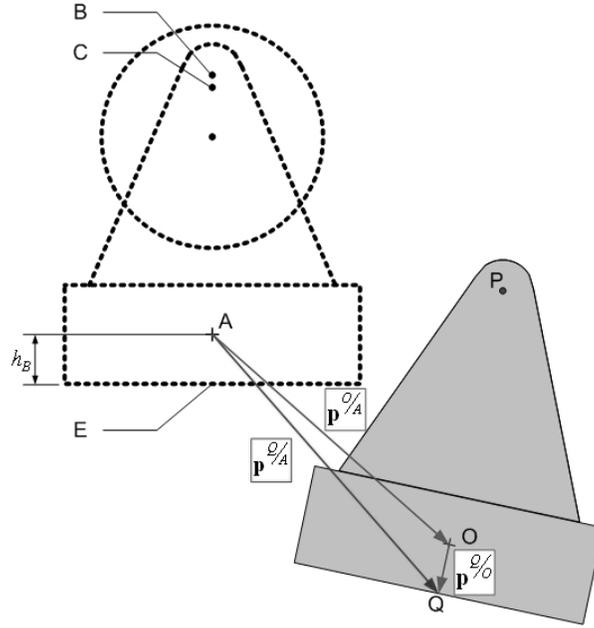


**Figura 3.15:** Esquema vetorial do deslocamento do centro da base em relação a sua posição de equilíbrio.

Na **Figura 3.15** pode-se verificar a decomposição do vetor  $\mathbf{p}^{Q/E}$  resultando nos termos  $\mathbf{p}^{Q/A}$  e  $\mathbf{p}^{A/E}$ . O vetor  $\mathbf{p}^{Q/A}$  posteriormente será decomposto pelos vetores  $\mathbf{p}^{Q/O}$  e  $\mathbf{p}^{O/A}$ . Inicia-se com a decomposição do vetor  $\mathbf{p}^{Q/E}$  (ver **Figura 3.15**):

$$\mathbf{p}^{Q/E} = \mathbf{p}^{Q/A} + \mathbf{p}^{A/E} \quad (3.28)$$

Na equação acima o vetor  $\mathbf{p}^{Q/A}$  deve ser decomposto pelos vetores  $\mathbf{p}^{Q/O}$  e  $\mathbf{p}^{O/A}$ , ver **Figura 3.16**.



**Figura 3.16:** Esquema vetorial da posição do centro da base da fundação em relação à posição de equilíbrio do centro de massa desta.

$$\mathbf{p}^{o/A} = \mathbf{p}^{o/A} + \mathbf{p}^{o/o} \quad (3.29)$$

O vetor  $\mathbf{p}^{o/A}$  já foi deduzido, equação (3.15):

$$\mathbf{p}^{o/A} = u_y^F \mathbf{n}_y + u_z^F \mathbf{n}_z$$

Parte-se agora para a dedução do vetor  $\mathbf{p}^{o/o}$ . Da **Figura 3.16**

$$\mathbf{p}^{o/o} = \mathbf{Q} - \mathbf{O} = (Y_Q^o - Y_O^o) \mathbf{b}_y + (Z_Q^o - Z_O^o) \mathbf{b}_z = Y_Q^o \mathbf{b}_y + Z_Q^o \mathbf{b}_z \quad (3.30)$$

Sabendo-se que  $Y_Q^o = O$  e  $Z_Q^o = h_G$ :

$$\mathbf{p}^{o/o} = h_G \mathbf{b}_y \quad (3.31)$$

O vetor pode ser escrito utilizando-se o versor móvel  $\mathbf{b}_y$ , porém, para manter a uniformidade das equações, utiliza-se da transformação de coordenadas. Transforma-se de coordenadas  $X^o Y^o Z^o$  para  $x^o y^o z^o$ .

$$\mathbf{p}^{Q/O} = h_G \mathbf{b}_z = -h_G \sin \varphi^F \mathbf{n}_y + h_G \cos \varphi^F \mathbf{n}_z \quad (3.32)$$

Inserindo as equações (3.15) e (3.32) na equação (3.29).

$$\mathbf{p}^{Q/A} = (u_y^F - h_G \sin \varphi^F) \mathbf{n}_y + (u_z^F + h_G \cos \varphi^F) \mathbf{n}_z \quad (3.33)$$

O vetor  $\mathbf{p}^{E/A}$  é um valor fixo no sistema inercial referente à altura  $h_G$ .

$$\mathbf{p}^{E/A} = E - A = (y_E^A - y_A^A) \mathbf{n}_y + (z_E^A - z_A^A) \mathbf{n}_z = y_F^A \mathbf{n}_y + z_F^A \mathbf{n}_z$$

Da **Figura 3.16** extraem-se os valores  $y_E^A = 0$  e  $z_E^A = h_G$ , portanto:

$$\mathbf{p}^{E/A} = h_G \mathbf{n}_z \quad (3.34)$$

Inserindo as equações (3.33) e (3.34) em (3.28), conclui-se a dedução do vetor posição desejado.

$$\mathbf{p}^{Q/E} = \mathbf{p}^{Q/A} - \mathbf{p}^{E/A} = (u_y^F - h_G \sin \varphi^F) \mathbf{n}_y + (u_z^F + h_G \cos \varphi^F - h_G) \mathbf{n}_z \quad (3.35)$$

Linearizando a equação acima se deduz o deslocamento da fundação em relação ao solo.

$$\mathbf{p}^{Q/E} = \mathbf{p}^{Q/A} - \mathbf{p}^{E/A} = (u_y^F - h_G \varphi^F) \mathbf{n}_y + u_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.36)$$

## Vetores Velocidade

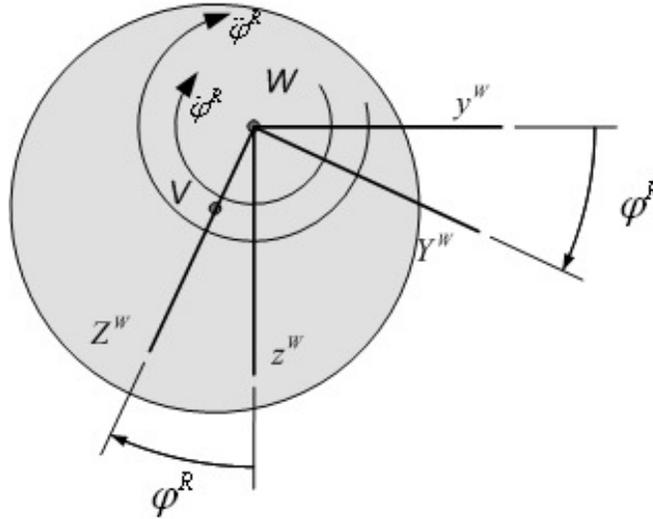
### Velocidade do centro de massa do rotor

Fazendo-se a derivada da equação (3.13), deduz-se a velocidade do centro de massa do rotor, ponto  $V$ . Esta derivada temporal é efetuada em relação aos eixos do sistema inercial,  $x^A y^A z^A$  (a letra  $I$  sobrescrita indica sistema inercial).

$$\begin{aligned} {}^I \mathbf{v}^V &= \frac{{}^I d}{dt} \left[ (u_y^R - \varepsilon \sin \varphi^R) \mathbf{n}_y + (u_z^R + \varepsilon \cos \varphi^R) \mathbf{n}_z \right] \\ {}^I \mathbf{v}^V &= (\dot{u}_y^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R) \cos \varphi^R) \mathbf{n}_y + (\dot{u}_z^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R) \sin \varphi^R) \mathbf{n}_z \end{aligned} \quad (3.37)$$

### Velocidade angular do rotor

Fazendo a derivada temporal da posição angular do rotor,  $\phi^R \mathbf{n}_x$ , deduz-se a velocidade angular do rotor. A velocidade angular é indicada na **Figura 3.17**.



**Figura 3.17:** Deslocamento, velocidade e aceleração angulares do rotor.

$$\frac{d(\phi^R)}{dt} = \dot{\phi}^R \quad (3.38)$$

Como o problema é plano, a derivada  $\dot{\phi}^R$  coincide com a velocidade angular do rotor (em relação a um sistema inercial).

$${}^I \boldsymbol{\omega}^R = \dot{\phi}^R \mathbf{n}_x \quad (3.39)$$

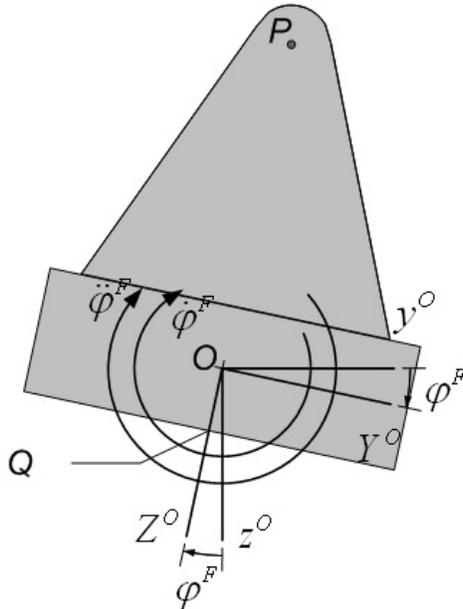
### Velocidade do centro de massa da fundação

Fazendo-se a derivada temporal do vetor posição do ponto  $O$ ,  $\mathbf{p}^{O/A}$ , deduz-se a velocidade do centro de massa da fundação.

$${}^I \mathbf{v}^O = \frac{{}^I d}{dt} (u_y^F \mathbf{n}_y + u_z^F \mathbf{n}_z) = \dot{u}_y^F \mathbf{n}_y + \dot{u}_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.40)$$

## Velocidade angular da fundação

Na **Figura 3.18** abaixo se tem representado o deslocamento angular da fundação a partir de um referencial inercial e a velocidade angular.



**Figura 3.18:** Deslocamento, velocidade e aceleração angulares da fundação.

Tendo-se a posição angular, faz-se a derivada temporal e deduz-se a velocidade angular da fundação.

$$\frac{{}^I d\varphi^F}{dt} = \dot{\varphi}^F \quad (3.41)$$

Como o problema é plano, a derivada do ângulo  $\varphi^F$  coincide com a velocidade angular da rotação.

$$\dot{\varphi}^F \mathbf{n}_x = {}^I \boldsymbol{\omega}^F \quad (3.42)$$

### Velocidade relativa do rotor em relação a um ponto fixo na fundação ( $P$ )

É necessário conhecer a velocidade relativa do ponto  $W$  em relação ao ponto  $P$ ,  $\mathbf{v}^{W/P}$ , para se deduzir a força de amortecimento externo que atua sobre o rotor. Da equação (3.27) reescrita abaixo e fazendo a derivada temporal chega-se a equação desejada.

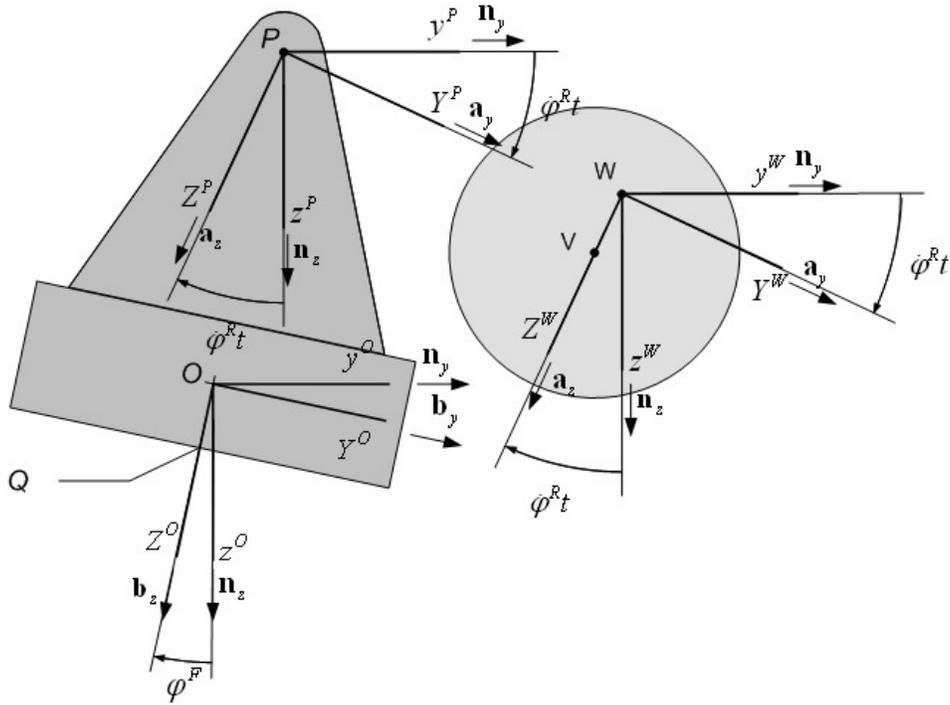
$$\mathbf{p}^{W/P} = (u_y^R - u_y^F - h_B \dot{\varphi}^F) \mathbf{n}_y + (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F) \mathbf{n}_z$$

Velocidade do ponto  $W$  em relação ao ponto  $P$  no referencial inercial:

$${}^I \mathbf{v}^{W/P} = \frac{{}^I d\mathbf{p}^{W/P}}{dt} = (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B \dot{\varphi}^F) \mathbf{n}_y + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.43)$$

### Velocidade relativa do rotor em relação à fundação quando observada de um sistema de coordenadas que gira com a velocidade do rotor

Para que se possam determinar as forças de amortecimento interno do rotor é necessário conhecer a velocidade relativa do rotor em relação à fundação, mas medida em relação a um sistema de coordenadas que gira junto com a velocidade angular do rotor,  $X^P Y^P Z^P$  (ver apêndice). É necessário conhecer a velocidade de flexão do eixo para se deduzir a força de amortecimento interno.



**Figura 3.19:** Sistemas de coordenadas rotacionais  $X^P Y^P Z^P$  e  $X^W Y^W Z^W$ .

Denomina-se R um referencial móvel representado pelo sistema de coordenadas  $X^P Y^P Z^P$ , se este referencial gira com a mesma velocidade do rotor pode-se escrever a velocidade angular do referencial R como  $\dot{\phi}^R$ . Para se chegar à equação da velocidade de flexão, usa-se o vetor posição (equação (3.27)), e faz-se sua derivada temporal no referencial R.

$$\begin{aligned}
 {}^R \mathbf{v}^{W/P} &= \frac{{}^R d}{dt} \left[ (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F) \mathbf{n}_z + (u_y^R - u_y^F - h_B \dot{\phi}^F) \mathbf{n}_y \right] \\
 {}^R \mathbf{v}^{W/P} &= (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F) \mathbf{n}_z + (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F) \frac{{}^R d(\mathbf{n}_z)}{dt} + (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B \dot{\phi}^F) \mathbf{n}_y + (u_y^R - u_y^F - h_B \dot{\phi}^F) \frac{{}^R d(\mathbf{n}_y)}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

A derivada dos versores acima é efetuada a seguir:

$$\begin{aligned}
 \frac{{}^R d\mathbf{n}_z}{dt} &= {}^R \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{n}_z = -(\dot{\phi}^R) \mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_z = (\dot{\phi}^R) \mathbf{n}_y \\
 \frac{{}^R d\mathbf{n}_y}{dt} &= {}^R \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{n}_y = -(\dot{\phi}^R) \mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_y = -(\dot{\phi}^R) \mathbf{n}_z
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

O termo  ${}^R\boldsymbol{\omega}^I$  acima representa a velocidade angular do referencial  $I$  em relação ao referencial  $R$ , ou seja,  ${}^R\boldsymbol{\omega}^I = -{}^I\boldsymbol{\omega}^R$ . Reescrevendo a velocidade inserindo-se a derivada dos versores:

$$\begin{aligned} {}^R\mathbf{v}^{W/P} = & (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F - u_y^R\dot{\varphi}^R + u_y^F\dot{\varphi}^R + h_B\dot{\varphi}^F\dot{\varphi}^R)\mathbf{n}_z + \\ & + (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B\dot{\varphi}^F + u_z^R\dot{\varphi}^R + u_{zest}^R\dot{\varphi}^R - u_z^F\dot{\varphi}^R)\mathbf{n}_y \end{aligned} \quad (3.46)$$

## Acelerações

### Aceleração do centro de massa do rotor

Derivando-se no tempo a equação (3.37) em relação ao sistema inercial, tem-se a aceleração do centro de massa do rotor.

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}^V = & (\dot{u}_y^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R)\cos\varphi^R)\mathbf{n}_y + (\dot{u}_z^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R)\sin\varphi^R)\mathbf{n}_z \\ {}^I\mathbf{a}^V = & \frac{{}^I d {}^I\mathbf{v}^V}{dt} = (\ddot{u}_y^R - \varepsilon(\ddot{\varphi}^R)\cos\varphi^R + \varepsilon(\dot{\varphi}^R)^2\sin\varphi^R)\mathbf{n}_y + \\ & + (\ddot{u}_z^R - \varepsilon(\ddot{\varphi}^R)\sin\varphi^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R)^2\cos\varphi^R)\mathbf{n}_z \end{aligned} \quad (3.47)$$

### Aceleração angular do rotor

Para deduzir a aceleração angular do rotor faz-se a derivada temporal em relação a um sistema inercial da velocidade angular fornecida pela equação (3.38). A **Figura 3.17** ilustra a aceleração angular.

$$\frac{{}^I d\dot{\varphi}^R}{dt} = \ddot{\varphi}^R \quad (3.48)$$

Levando-se em conta a equação (3.48) tem-se:

$$\frac{{}^I d(\dot{\varphi}^R\mathbf{n}_x)}{dt} = \frac{{}^I d({}^I\boldsymbol{\omega}^R)}{dt} = \ddot{\varphi}^R\mathbf{n}_x = {}^I\boldsymbol{\alpha}^R \quad (3.49)$$

## Aceleração do centro de massa da fundação

A partir da equação (3.40), chega-se a aceleração do ponto O, ou seja, do centro de massa da fundação.

$$\frac{{}^I d {}^I \mathbf{v}^O}{dt} = {}^I \mathbf{a}^O = \ddot{u}_y^F \mathbf{n}_y + \ddot{u}_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.50)$$

## Aceleração angular da fundação

A **Figura 3.18** indica a aceleração angular. Análogo ao efetuado para o rotor faz-se para a fundação e deduz-se a aceleração angular da fundação. Considerando-se a equação (3.41):

$$\frac{{}^I d(\dot{\phi}^F)}{dt} = \ddot{\phi}^F \quad (3.51)$$

Vetorialmente escrito a equação (3.51) resulta:

$$\frac{{}^I d(\dot{\phi}^F \mathbf{n}_x)}{dt} = \frac{{}^I d({}^I \boldsymbol{\omega}^F)}{dt} = \ddot{\phi}^F \mathbf{n}_x = {}^I \boldsymbol{\alpha}^F \quad (3.52)$$

Concluída a dedução das acelerações, têm-se agora todas as relações cinemáticas necessárias para construir as equações de movimento.

## Forças de atuação nos componentes do sistema

### Forças que atuam no rotor

Todas as forças externas que atuam no rotor estão indicadas na **Figura 3.20**. São elas: a força de restituição elástica do eixo (indicada por  $\mathbf{F}_E^R$ ), a força de amortecimento externo que age sobre o rotor (indicado por  $\mathbf{F}_A^R$ ), força de amortecimento interno (indicado por  $\mathbf{F}_I^R$ ) e finalmente o peso do rotor,  $m_R g$ .

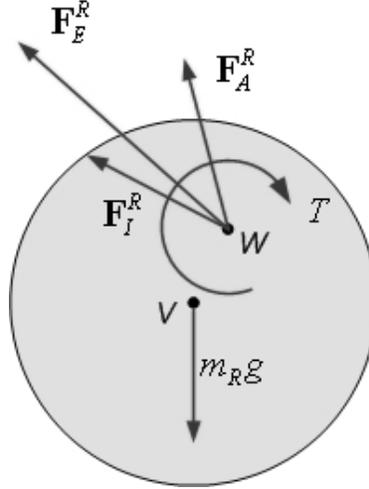


Figura 3.20: Forças atuando no rotor.

### Força de restituição elástica do eixo

As forças de restituição elásticas que atuam sobre o rotor são proporcionais ao deslocamento relativo entre o ponto  $P$  e o ponto  $W$ ,  $\mathbf{p}^{W/P}$ . Escrita de outra forma:  $\mathbf{p}^{W/P} = p_z^{W/P} \mathbf{n}_z + p_y^{W/P} \mathbf{n}_y$ , sendo  $p_z^{W/P}$  e  $p_y^{W/P}$  as projeções de vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ . Com o deslocamento deduzido descrito pelo vetor  $\mathbf{p}^{W/P}$ , equação (3.27), e conhecendo-se a rigidez do eixo ( $k_z^R$  e  $k_y^R$ ) conseqüentemente deduz-se a força elástica do eixo:

$$\mathbf{F}_E^R = -k_y^R (u_y^R - u_y^F - h_B \varphi^F) \mathbf{n}_y - k_z^R (u_z^R + u_{zest}^R - u_z^F) \mathbf{n}_z$$

$$\mathbf{F}_E^R = (-k_y^R u_y^R + k_y^R u_y^F + k_y^R h_B \varphi^F) \mathbf{n}_y + (-k_z^R u_z^R - k_z^R u_{zest}^R + k_z^R u_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.53)$$

### Força de amortecimento externo

Assume-se que as forças de amortecimento externo que atuam sobre o rotor são de caráter viscoso e proporcional à velocidade do deslocamento relativo, ou seja,

$$\mathbf{F}_A^R = - \begin{bmatrix} d_{Ez} & d_{Ey} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_z^{W/P} \\ v_y^{W/P} \end{Bmatrix}.$$

Portanto, se conhecidas os coeficientes de amortecimento viscoso externo  $d_{Ez}$  e  $d_{Ey}$  (que atuam nas direções  $z$  e  $y$  respectivamente) e conhecida à velocidade relativa do ponto  $W$  em relação ao

ponto  $P$ ,  ${}^I \mathbf{v}^{W/P}$  (cujos componentes estão escritos acima  $v_z^{W/P}$  na direção  $z$  e  $v_y^{W/P}$  na direção  $y$ ), descrita pela equação (3.43), obtém-se a **força de amortecimento externo**.

$$\mathbf{F}_A^R = -d_{Ey}(\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B \dot{\phi}^F) \mathbf{n}_y - d_{Ez}(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F) \mathbf{n}_z$$

$$\mathbf{F}_A^R = (-d_{Ey} \dot{u}_y^R + d_{Ey} \dot{u}_y^F + d_{Ey} h_B \dot{\phi}^F) \mathbf{n}_y + (-d_{Ez} \dot{u}_z^R + d_{Ez} \dot{u}_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.54)$$

### Força de amortecimento interno

Assim como o amortecimento externo, o amortecimento interno é de caráter viscoso e proporcional à velocidade,

$$\mathbf{F}_I^R = -[d_I \quad d_I] \left\{ \begin{array}{l} A v_z^{W/P} \\ A v_y^{W/P} \end{array} \right\}.$$

Porém a velocidade a qual se refere é a velocidade de flexão do eixo,  ${}^A \mathbf{v}^{W/P}$ , ver apêndice. A velocidade de flexão do eixo é fornecida pela equação (3.46), reescrita abaixo.

$${}^A \mathbf{v}^{W/P} = (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F - \dot{u}_y^R \dot{\phi}^R + u_y^F \dot{\phi}^R + h_B \dot{\phi}^F \dot{\phi}^R) \mathbf{n}_z + (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B \dot{\phi}^F + u_z^R \dot{\phi}^R + u_{zest}^R \dot{\phi}^R - u_z^F \dot{\phi}^R) \mathbf{n}_y$$

Conhecendo-se a velocidade e se o coeficiente de amortecimento interno for também conhecido,  $d_I$ , deduz-se, portanto a **força de amortecimento interno**:

$$\mathbf{F}_I^R = -d_I(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^F - \dot{u}_y^R \dot{\phi}^R + u_y^F \dot{\phi}^R + h_B \dot{\phi}^F \dot{\phi}^R) \mathbf{n}_z +$$

$$-d_I(\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^F - h_B \dot{\phi}^F + u_z^R \dot{\phi}^R + u_{zest}^R \dot{\phi}^R - u_z^F \dot{\phi}^R) \mathbf{n}_y \quad (3.55)$$

### Peso do rotor

O peso do rotor é descrito como:

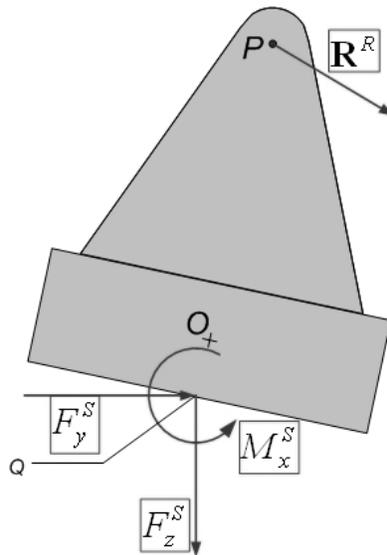
$$\mathbf{F}_P^R = m_R g \mathbf{n}_z \quad (3.56)$$

Pode-se fazer uma associação do peso do rotor com o deslocamento estático sofrido pelo eixo deste.

$$m_R g = k_z^R u_{zest}^R \quad (3.57)$$

## Forças que atuam na fundação

As forças que atuam na fundação estão indicadas na **Figura 3.21**. No ponto  $P$  a resultante das forças do rotor. No ponto  $O$  atua o peso da fundação. E no ponto  $Q$  atua a força de reação do solo.



**Figura 3.21:** Forças atuantes na fundação.

## Forças do rotor sobre o mancal

Para deduzir a força do mancal sobre o rotor é preciso primeiramente deduzir a resultante das forças do rotor. As forças do rotor que atuam sobre a fundação são as forças de restauração elástica (3.53), as forças de amortecimento interno (3.54), e o peso do rotor (3.56). O somatório destas forças compõe a resultante das forças do rotor.

$$\mathbf{R}^R = \mathbf{F}_E^R + \mathbf{F}_A^R + \mathbf{F}_I^R + \mathbf{F}_P^R \quad (3.58)$$

Na direção  $\mathbf{n}_y$  :

$$\begin{aligned}
R_y^R = & (-d_{Ey}\dot{u}_y^R + d_{Ey}\dot{u}_y^F + d_{Ey}h_B\dot{\phi}^F) + \\
& + (-d_I\dot{u}_y^R + d_I\dot{u}_y^F + d_Ih_B\dot{\phi}^F - d_Iu_z^R\dot{\phi}^R - d_Iu_{zest}^R\dot{\phi}^R + d_Iu_z^F\dot{\phi}^R) + \\
& + (-k_y^R u_y^R + k_y^R u_y^F + k_y^R h_B \phi^F)
\end{aligned} \quad (3.59)$$

Linearizando  $u_{zest}^R \dot{\phi}^R \approx 0$  tem-se:

$$\begin{aligned}
R_y^R = & -(d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^R + (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^F + (d_I + d_{Ey})h_B\dot{\phi}^F - (d_I\dot{\phi}^R)u_z^R - (k_y^R)u_y^R + \\
& + (d_I\dot{\phi}^R)u_z^F + (k_y^R)u_y^F + (k_y^R h_B) \phi^F
\end{aligned} \quad (3.60)$$

Na direção  $\mathbf{n}_z$ :

$$\begin{aligned}
R_z^R = & (-d_{Ez}\dot{u}_z^R + d_{Ez}\dot{u}_z^F) + (-d_I\dot{u}_z^R + d_I\dot{u}_z^F + d_Iu_y^R\dot{\phi}^R - d_Iu_y^F\dot{\phi}^R - d_Ih_B\phi^F\dot{\phi}^R) + \\
& + (-k_z^R u_z^R - k_z^R u_{zest}^R + k_z^R u_z^F) + m_R g
\end{aligned} \quad (3.61)$$

Da relação existente entre o peso do rotor e o deslocamento estático do eixo, equação (3.57), a equação acima, fica ligeiramente mais simplificada.

$$\begin{aligned}
R_z^R = & -(d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R + (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F - (k_z^R)u_z^R + (d_I\dot{\phi}^R)u_y^R + \\
& + (k_z^R)u_z^F - (d_I\dot{\phi}^R)u_y^F - (d_Ih_B\dot{\phi}^R)\phi^F
\end{aligned} \quad (3.62)$$

Das equações (3.60) e (3.62), conclui-se a dedução da resultante das forças do rotor.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^R = & \left[ \begin{aligned} & -(d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^R + (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^F + (d_I + d_{Ey})h_B\dot{\phi}^F + \\ & -(d_I\dot{\phi}^R)u_z^R - (k_y^R)u_y^R + (d_I\dot{\phi}^R)u_z^F + (k_y^R)u_y^F + (k_y^R h_B) \phi^F \end{aligned} \right] \mathbf{n}_y + \\
& + \left[ \begin{aligned} & -(d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R + (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F + \\ & -(k_z^R)u_z^R + (d_I\dot{\phi}^R)u_y^R + (k_z^R)u_z^F - (d_I\dot{\phi}^R)u_y^F - (d_Ih_B\dot{\phi}^R)\phi^F \end{aligned} \right] \mathbf{n}_z
\end{aligned} \quad (3.63)$$

### Força de reação do solo

A força de reação do solo ocorre devido ao deslocamento da fundação. A relação entre os graus de liberdade de deslocamento de um corpo rígido sem massa no ponto  $E$ ,

$\mathbf{u}^S = \{u_z^S \quad u_y^S \quad \phi_x^S\}^T$ , e as reações do solo,  $\mathbf{F}^S = \{F_z^S \quad F_y^S \quad M_x^S\}^T$ , é dada pela matriz de

impedância  $[S(\omega)]$  do solo. Como já discutido no capítulo 2, se a condição de contato solo-fundação for lisa, esta matriz complexa será diagonal e dada por:

$$\begin{Bmatrix} F_z^S \\ F_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} = G a \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \varphi^S \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Se a fundação for simétrica em relação ao eixo  $z$  e apresentar a condição de contato “colado” na interface solo-fundação, então a matriz de impedância terá elementos não-diagonais.

$$\begin{Bmatrix} F_z^S \\ F_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} = G a \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & s_{\varphi y} \\ 0 & s_{y\varphi} & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \varphi^S \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Como já explicado os termos  $u_z^S$  e  $u_y^S$  se referem ao deslocamento do ponto  $Q$  em relação ao ponto  $E$ , Figura 3.8. O termo  $\varphi^S$  se refere ao deslocamento angular da fundação. Os termos  $F_z^S$  e  $F_y^S$  compõem a força de solo e o termo  $M_x^S$  se refere ao momento do solo que age sobre a fundação. Nas equações acima  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $a$  é o “semi-largura” da fundação.

### Forças externas aplicadas na fundação

Além das forças estudadas até o momento, podem-se inserir forças externas sobre a fundação. Por exemplo, pode-se aplicar um conjunto de forças externas no ponto  $P$ . Estas forças são designadas por  $\mathbf{F} = \{F_z \quad F_y \quad M_x\}^T$  podendo ser observadas na **Figura 3.22**.

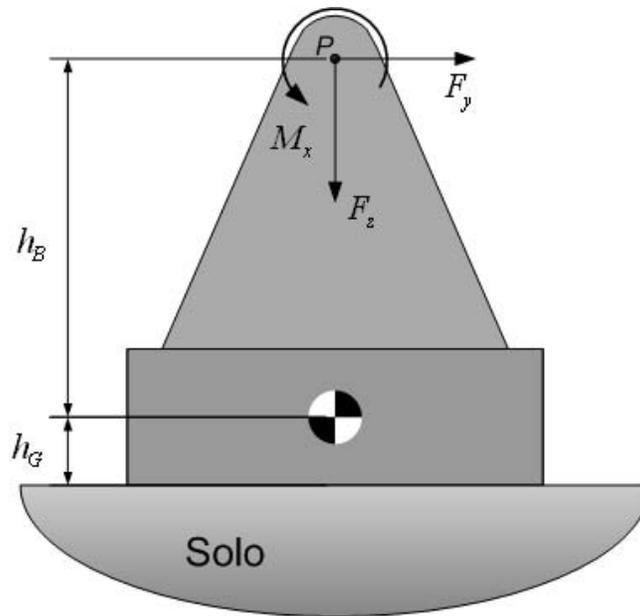


Figura 3.22: Forças externas de excitação.

## Momentos que atuam sobre os componentes do sistema

### Momentos que atuam no rotor

A força elástica do eixo  $\mathbf{F}_E^R$ , a força de amortecimento externo  $\mathbf{F}_A^R$  e a força de amortecimento interno  $\mathbf{F}_I^R$  atuam no ponto  $W$ , Figura 3.20. O momento que se busca é o momento das forças que atuam em  $W$  em relação ao ponto  $V$ . O peso do rotor não causará momento porque é aplicado justamente no ponto  $V$ . E o torque  $T$ , Figura 3.20, é um momento livre.

## Momento $T$

O momento  $T$  mantém o rotor girando com velocidade constante (**Figura 3.20**). É deste que advém toda a energia que mantém o sistema rotor-fundação-solo em movimento. Vetorialmente escrito fica:  $T\mathbf{n}_x$ .

## Momento da força de restituição elástica do eixo em relação ao ponto $V$

O momento é calculado pela multiplicação vetorial das equações (3.14) e (3.53).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{F}_E^R/V} &= \mathbf{p}^{W/V} \times \mathbf{F}_E^R \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_E^R/V} &= (\varepsilon \sin \varphi^R \mathbf{n}_y - \varepsilon \cos \varphi^R \mathbf{n}_z) \times \\ &\quad \times [(-k_y^R u_y^R + k_y^R u_y^F + k_y^R h_B \varphi^F) \mathbf{n}_y + (-k_z^R u_z^R - k_z^R u_{zest}^R + k_z^R u_z^F) \mathbf{n}_z] \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_E^R/V} &= [-k_y^R \varepsilon \cos \varphi^R u_y^R + k_y^R \varepsilon \cos \varphi^R u_y^F + k_y^R \varepsilon h_B \cos \varphi^R \varphi^F - \\ &\quad + k_z^R \varepsilon \sin \varphi^R (u_z^R + u_{zest}^R) + k_z^R \varepsilon \sin \varphi^R u_z^F] \mathbf{n}_x \end{aligned} \quad (3.66)$$

## Momento da força de amortecimento externo em relação ao ponto $V$

Novamente se faz uso do vetor posição  $\mathbf{p}^{W/V}$ . Das equações (3.14) e (3.54).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{F}_A^R/V} &= \mathbf{p}^{W/V} \times \mathbf{F}_A^R \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_A^R/V} &= (\varepsilon \sin \varphi^R \mathbf{n}_y - \varepsilon \cos \varphi^R \mathbf{n}_z) \times \\ &\quad \times [(-d_{E_y} \dot{u}_y^R + d_{E_y} \dot{u}_y^F + d_{E_y} h_B \dot{\varphi}^F) \mathbf{n}_y + (-d_{E_z} \dot{u}_z^R + d_{E_z} \dot{u}_z^F) \mathbf{n}_z] \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_A^R/V} &= \left( \begin{array}{c} -d_{E_y} \varepsilon \cos \varphi^R \dot{u}_y^R + d_{E_y} \varepsilon \cos \varphi^R \dot{u}_y^F + d_{E_y} h_B \cos \varphi^R \dot{\varphi}^F + \\ -d_{E_z} \varepsilon \sin \varphi^R \dot{u}_z^R + d_{E_z} \varepsilon \sin \varphi^R \dot{u}_z^F \end{array} \right) \mathbf{n}_x \end{aligned} \quad (3.67)$$

## Momento da força de amortecimento interno em relação ao ponto V

Análogo ao efetuado para os momentos referentes à força elástica e de amortecimento externo, faz-se agora com a força de amortecimento interno. Das equações (3.14) e (3.55).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{F}_I^R}/V &= \mathbf{p}^{W/V} \times \mathbf{F}_I^R \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_I^R}/V &= (\varepsilon \sin \varphi^R \mathbf{n}_y - \varepsilon \cos \varphi^R \mathbf{n}_z) \times [(-d_I \dot{u}_z^R + d_I \dot{u}_z^F + d_I \dot{u}_y^R(\dot{\varphi}^R) - d_I u_y^F(\dot{\varphi}^R) - d_I h_B \varphi^F(\dot{\varphi}^R)) \mathbf{n}_z + \\ &\quad + (-d_I \dot{u}_y^R + d_I \dot{u}_y^F + d_I h_B \dot{\varphi}^F - d_I u_z^R(\dot{\varphi}^R) - d_I u_{zest}^R(\dot{\varphi}^R) + d_I u_z^F(\dot{\varphi}^R)) \mathbf{n}_y] \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}_I^R}/V &= \left( \begin{array}{l} -d_I \varepsilon \sin(\varphi^R) \dot{u}_z^R + d_I \varepsilon \sin(\varphi^R) (\dot{\varphi}^R) \dot{u}_y^R - d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) \dot{u}_y^R + d_I \varepsilon \sin(\varphi^R) \dot{u}_z^F + \\ + d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) \dot{u}_y^F + d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) h_B \dot{\varphi}^F - d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) (\dot{\varphi}^R) u_z^R - d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) (\dot{\varphi}^R) u_{zest}^R - \\ + d_I \varepsilon \sin(\varphi^R) (\dot{\varphi}^R) u_y^F + d_I \varepsilon \cos(\varphi^R) (\dot{\varphi}^R) u_z^F - d_I \varepsilon \sin(\varphi^R) h_B (\dot{\varphi}^R) \varphi^F \end{array} \right) \mathbf{n}_x \end{aligned} \quad (3.68)$$

## Momentos que atuam na fundação

Como referencial para encontrar a equação de movimento rotacional da fundação, usa-se o ponto  $O$ , o centro de massa da fundação. A reação do rotor atua no ponto  $P$ , **Figura 3.21**, portanto faz-se necessário o vetor posição  $\mathbf{p}^{P/O}$  para deduzir o momento causado pelas forças que atuam no rotor. A força do solo  $\mathbf{F}^S$  atua no ponto  $Q$  conseqüentemente deve-se conhecer o vetor posição  $\mathbf{p}^{Q/O}$  para conhecer o momento que a reação do solo exerce em relação ao ponto  $O$ .

## Momento das forças do rotor em relação ao ponto O

O vetor  $\mathbf{p}^{P/O}$  pode ser extraído da dedução do vetor posição do ponto  $V$  em relação ao ponto  $P$ , equação (3.24). Da equação (3.63) e linearizando-se o vetor  $\mathbf{p}^{P/O}$  tem-se:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}^R}/O = (h_B \varphi^F \mathbf{n}_y - h_B \mathbf{n}_z) \times \mathbf{R}^R$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{R}^R}/O &= (h_B \boldsymbol{\varphi}^F \mathbf{n}_y - h_B \mathbf{n}_z) \times \\
&\times \left\{ [(d_I + d_{E_y}) \dot{u}_y^R - (d_I + d_{E_y}) \dot{u}_y^F - (d_I + d_{E_y}) h_B \dot{\varphi}^F + (d_I (\dot{\varphi}^R)) u_z^R + k_y^R u_y^R - d_I (\dot{\varphi}^R) u_z^F - k_y^R u_y^F - k_y^R h_B \varphi^F] \mathbf{n}_y + \right. \\
&\quad \left. + [(d_I + d_{E_z}) \dot{u}_z^R - (d_I + d_{E_z}) \dot{u}_z^F + k_z^R u_z^R - (d_I (\dot{\varphi}^R)) u_y^R - k_z^R u_z^F + d_I (\dot{\varphi}^R) u_y^F + (d_I h_B (\dot{\varphi}^R)) \varphi^F] \mathbf{n}_z \right\} \\
\mathbf{M}^{\mathbf{R}^R}/O &= \left[ \begin{aligned} &(d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^R - (d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^F - (d_I h_B^2 + d_{E_y} h_B^2) \dot{\varphi}^F + d_I (\dot{\varphi}^R) h_B u_z^R + k_y^R h_B u_y^R \\ &- d_I (\dot{\varphi}^R) h_B u_z^F - k_y^R h_B u_y^F - k_y^R h_B^2 \varphi^F + (d_I + d_{E_z}) h_B \varphi^F \dot{u}_z^R - (d_I + d_{E_z}) h_B \varphi^F \dot{u}_z^F + \\ &+ k_z^R h_B \varphi^F u_z^R - d_I (\dot{\varphi}^R) h_B \varphi^F u_y^R - k_z^R h_B \varphi^F u_z^F + d_I (\dot{\varphi}^R) h_B \varphi^F u_y^F + d_I h_B (\dot{\varphi}^R) h_B \varphi^F \varphi^F \end{aligned} \right] \mathbf{n}_x
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Linearizando-se e supondo-se que  $\varphi^F \dot{u}_z^R \approx 0$ ,  $\varphi^F \dot{u}_z^F \approx 0$ ,  $\varphi^F u_z^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_z^F \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^F \approx 0$  e  $\varphi^F \varphi^F \approx 0$ , obtém-se:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}^R}/O = \left[ \begin{aligned} &+(d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^R - (d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^F - (d_I h_B^2 + d_{E_y} h_B^2) \dot{\varphi}^F + \\ &+(d_I (\dot{\varphi}^R) h_B) u_z^R + (k_y^R h_B) u_y^R - (d_I (\dot{\varphi}^R) h_B) u_z^F - (k_y^R h_B) u_y^F - (k_y^R h_B^2) \varphi^F \end{aligned} \right] \mathbf{n}_x \tag{3.70}$$

### Momento da força de solo em relação ao ponto $O$

A força de solo já foi escrita como  $\mathbf{F}^S = \{F_z^S \quad F_y^S \quad M^S\}^T$ . Pode-se observar que este vetor inclui o momento causado pelo solo. A partir da força e do vetor  $\mathbf{p}^O/O$ , equação (3.32) se deduz o momento que a força do solo causa em relação ao ponto  $O$ .

$$\mathbf{M}^{\mathbf{F}^S}/O = \mathbf{p}^O/O \times \mathbf{F}^S = (-h_G \text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_y + h_G \text{cos } \varphi^F \mathbf{n}_z) \times (F_y^S \mathbf{n}_y + F_z^S \mathbf{n}_z) - M^S \mathbf{n}_x$$

$$\mathbf{M}^{\mathbf{F}^S}/O = (-F_z^S h_G \text{sen } \varphi^F - F_y^S h_G \text{cos } \varphi^F - M^S) \mathbf{n}_x \tag{3.71}$$

Linearizando

$$\mathbf{M}^{\mathbf{F}^S}/O = (-F_z^S h_G \varphi^F - F_y^S h_G - M^S) \mathbf{n}_x \tag{3.72}$$

Conclui-se aqui a dedução das forças e momentos que atuam na fundação e no rotor. Estas irão compor as equações de movimento de translação e de rotação.

## Equações de movimento

### Conservação da quantidade de movimento linear

Conhecendo-se as acelerações angulares, as acelerações lineares, as forças e momentos externos que atuam no rotor e fundação, há condições de se construir o sistema resultante.

#### Equação de movimento linear para o rotor

Como se trata de um problema no plano, cada um dos corpos tem três graus de liberdade. Principia-se com a equação de translação do rotor. Das equações (3.54) e (3.48):

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}^R &= m_R {}^I \mathbf{a}^V \\ m_R {}^I \mathbf{a}^V &= \mathbf{F}_E^R + \mathbf{F}_A^R + \mathbf{F}_I^R + \mathbf{F}_P^R\end{aligned}\quad (3.73)$$

A equação acima pode ser escrita de maneira explícita e separada nas direções z e y. Inicia-se pela direção z.

$$\begin{aligned}m_R(\ddot{u}_z^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R) \operatorname{sen} \varphi^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R)^2 \cos \varphi^R) &= \\ = -(d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R + (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F - (k_z^R)u_z^R + (d_I\dot{\varphi}^R)u_y^R + (k_z^R)u_z^F - (d_I\dot{\varphi}^R)u_y^F - (d_I h_B \dot{\varphi}^R)\varphi^F\end{aligned}$$

Assume-se no presente trabalho que a velocidade de rotação do rotor é constante. Se esta rotação for de intensidade  $\dot{\varphi}^R = \omega$ , a equação acima se torna mais simples.

$$\begin{aligned}m_R\ddot{u}_z^R - m_R\varepsilon\omega^2 \cos \varphi^R &= \\ = -(d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R + (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F - (k_z^R)u_z^R + (d_I\omega)u_y^R + (k_z^R)u_z^F - (d_I\omega)u_y^F - (d_I h_B \omega)\varphi^F\end{aligned}\quad (3.74)$$

Análogo ao efetuado para a direção z faz-se agora o desmembramento da equação (3.73) para a direção y.

$$\begin{aligned}
m_R(\ddot{u}_y^R - \varepsilon(\dot{\varphi}^R) \cos \varphi^R + \varepsilon(\dot{\varphi}^R)^2 \sin \varphi^R) = \\
= -(d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^R + (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^F + (d_I + d_{Ey})h_B\dot{\varphi}^F - (d_I\dot{\varphi}^R)u_z^R - (k_y^R)u_y^R + (d_I\dot{\varphi}^R)u_z^F + \\
+(k_y^R)u_y^F + (k_y^R h_B) \varphi^F
\end{aligned}$$

Sabendo-se que a velocidade de rotação é constante,  $\dot{\varphi}^R = \omega$ , a equação acima é reescrita a seguir.

$$\begin{aligned}
m_R(\ddot{u}_y^R + \varepsilon \omega^2 \sin \varphi^R) = \\
= -(d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^R + (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^F + (d_I + d_{Ey})h_B\dot{\varphi}^F - (d_I\omega)u_z^R - (k_y^R)u_y^R + (d_I\omega)u_z^F + \\
+(k_y^R)u_y^F + (k_y^R h_B) \varphi^F
\end{aligned} \tag{3.75}$$

### Equação de movimento linear para a fundação

São duas as forças que atuam na fundação, a resultante das forças do rotor e a força de solo. Das equações (3.50), (3.58), (3.64) (ou (3.65)) e da massa da fundação  $m_F$ .

$$m_F {}^I \mathbf{a}^O = \mathbf{R}^R + \mathbf{F}^S \tag{3.76}$$

A equação (3.76) pode ser reescrita explicitamente, e desmembrada nas direções z e y. Abaixo está escrita a equação de movimento linear da fundação para a direção z.

$$\begin{aligned}
m_F \ddot{u}_z^F = (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R - (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F + (k_z^R)u_z^R - (d_I\dot{\varphi}^R)u_y^R + \\
- (k_z^R)u_z^F + (d_I\dot{\varphi}^R)u_y^F + (d_I h_B \dot{\varphi}^R) \varphi^F + F_z^S
\end{aligned}$$

Sabendo-se que a rotação do rotor é constante, a equação acima fica:

$$\begin{aligned}
m_F \ddot{u}_z^F = (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^R - (d_I + d_{Ez})\dot{u}_z^F + (k_z^R)u_z^R - (d_I\omega)u_y^R + \\
- (k_z^R)u_z^F + (d_I\omega)u_y^F + (d_I h_B \omega) \varphi^F + F_z^S
\end{aligned} \tag{3.77}$$

O mesmo procedimento é agora usado para deduzir a equação de movimento linear da fundação na direção y.

$$\begin{aligned}
m_F \ddot{u}_y^F = (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey})\dot{u}_y^F - (d_I + d_{Ey})h_B\dot{\varphi}^F + (d_I\dot{\varphi}^R)u_z^R + \\
+ (k_y^R)u_y^R - (d_I\dot{\varphi}^R)u_z^F - (k_y^R)u_y^F - (k_y^R h_B) \varphi^F + F_y^S
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_F \ddot{u}_y^F &= (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^F - (d_I + d_{Ey}) h_B \dot{\phi}^F + (d_I \omega) u_z^R + \\
&+ (k_y^R) u_y^R - (d_I \omega) u_z^F - (k_y^R) u_y^F - (k_y^R h_B) \phi^F + F_y^S
\end{aligned} \tag{3.78}$$

## Conservação da quantidade de movimento angular

As equações de movimento angular serão escritas a princípio em relação ao centro de massa do rotor e do centro de massa da fundação respectivamente. Posteriormente a equação de movimento angular da fundação será escrita em função do ponto  $Q$  com o intuito de facilitar a resolução numérica do problema.

### Equação de movimento angular para o rotor

Segue-se a notação de Tenenbaum (1997) para descrever as equações de movimento rotacional para o rotor. A quantidade de movimento angular de um corpo em relação ao seu centro de massa no referencial inercial é dada por:

$${}^I \mathbf{H}^{R/V} = \mathbf{\Pi}^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^R,$$

o corpo em questão é o próprio rotor. O termo  $\mathbf{\Pi}^{R/V}$  é o tensor de inércia de massa do rotor em relação ao seu centro de massa. É sabido que o rotor sendo um corpo rígido, a derivada temporal da quantidade de movimento angular deste no referencial inercial, é igual ao somatório dos momentos em relação ao centro de massa (somam-se os momentos obtidos das equações (3.66), (3.67), (3.68) e torque  $T$ ).

$$\dot{\mathbf{H}}^{R/V} = \mathbf{M}^{F_E/V} + \mathbf{M}^{F_A/V} + \mathbf{M}^{F_I/V} + T \mathbf{n}_x \tag{3.79}$$

Fazendo-se a derivada temporal de  ${}^I \mathbf{H}^{R/V}$ :

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{R/V} = \frac{d}{dt} ({}^I \mathbf{H}^{R/V}) = \mathbf{\Pi}^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^R + {}^I \boldsymbol{\omega}^R \times \mathbf{\Pi}^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^R \tag{3.80}$$

Inserindo-se a equação (3.80) na equação (3.79):

$$\Pi^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^R + {}^I \boldsymbol{\omega}^R \times \Pi^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^R = \mathbf{M}^{F_E^R/V} + \mathbf{M}^{F_A^R/V} + \mathbf{M}^{F_I^R/V} + T \mathbf{n}_x \quad (3.81)$$

Esta equação pode ser simplificada. Sendo a velocidade angular do rotor (equação (3.39)):

${}^I \boldsymbol{\omega}^R = \dot{\phi}^R \mathbf{n}_x$ , logo:

$${}^I \boldsymbol{\omega}^R \times \Pi^{R/V} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}^{R/V} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{R/V} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{R/V} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{xx}^{R/V} \dot{\phi}^R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Da aceleração do rotor  ${}^I \boldsymbol{\alpha}^R = \ddot{\phi}^R \mathbf{n}_x$  (equação (3.49)) e do tensor de inércia, tem-se a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} I_{xx}^{R/V} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{R/V} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{R/V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}^R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = I_{xx}^{R/V} \ddot{\phi}^R \mathbf{n}_x$$

Reescrevendo-se a equação de movimento rotacional do rotor, equação (3.81):

$$I_{xx}^{R/V} \ddot{\phi}^R \mathbf{n}_x = \mathbf{M}^{F_E^R/V} + \mathbf{M}^{F_A^R/V} + \mathbf{M}^{F_I^R/V} + T \mathbf{n}_x \quad (3.82)$$

Neste trabalho considera-se o rotor com velocidade constante, então  $\dot{\phi}^R = 0$ , conseqüentemente o somatório dos momentos do rotor em relação ao ponto  $V$  é nulo.

$$0 = \mathbf{M}^{F_E^R/V} + \mathbf{M}^{F_A^R/V} + \mathbf{M}^{F_I^R/V} + T \mathbf{n}_x \quad (3.83)$$

### Equação de movimento angular para a fundação

Por último escreve-se a equação de rotação da fundação. A esquerda tem-se a derivada temporal da quantidade de movimento angular depois escrita em função do seu tensor de inércia.

$$\dot{\mathbf{H}}^{F/o} = \mathbf{M}^{F^S/o} + \mathbf{M}^{R^R/o} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^F + {}^I \boldsymbol{\omega}^F \times \mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F = \mathbf{M}^{F^S/o} + \mathbf{M}^{R^R/o} \quad (3.85)$$

O termo  $\mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^F$  está escrito abaixo em função do tensor de inércia. Do tensor de inércia somente o momento de inércia do centro de massa da fundação é necessário.

$$\mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^F = \begin{bmatrix} I_{xx}^{F/o} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx}^{F/o} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}^{F/o} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}^F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \ddot{\phi}^F I_{xx}^{F/o} \mathbf{n}_x$$

Análogo ao rotor, o termo  $\mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F \times \mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F$  se anula.

$${}^I \boldsymbol{\omega}^F \times \mathbf{\Pi}^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}^{F/o} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{F/o} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{F/o} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{xx}^{F/o} \dot{\phi}^F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Finalmente a equação de rotação para a fundação:

$$\ddot{\phi}^F I_{xx}^{F/o} \mathbf{n}_x = \mathbf{M}^{F^S/o} + \mathbf{M}^{R^R/o} \quad (3.86)$$

Explicitamente escrita:

$$\ddot{\phi}^F I_{xx}^{F/o} \mathbf{n}_x = \begin{bmatrix} -F_z^S h_G \phi^F - F_y^S h_G - M^S + \\ +(d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^R - (d_I h_B + d_{E_y} h_B) \dot{u}_y^F - (d_I h_B^2 + d_{E_y} h_B^2) \dot{\phi}^F + \\ +(d_I (\dot{\phi}^R) h_B) u_z^R + (k_y^R h_B) u_y^R - (d_I (\dot{\phi}^R) h_B) u_z^F - (k_y^R h_B) u_y^F - (k_y^R h_B^2) \phi^F \end{bmatrix} \mathbf{n}_x \quad (3.87)$$

## Equações finais no domínio do tempo

Das equações (3.74), (3.75), (3.77), (3.78) e (3.86) monta-se o sistema de equações abaixo. A equação (3.83) não faz parte do sistema. Esta é desacoplada por seu momento resultante ser nulo.

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xx}^{F/O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_z^R \\ \ddot{u}_y^R \\ \ddot{u}_z^F \\ \ddot{u}_y^F \\ \ddot{\phi}^F \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (d_I + d_{Ez}) & 0 & -(d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & (d_I + d_{Ey}) & 0 & -(d_I + d_{Ey}) & -(d_I h_B + d_{Ey} h_B) \\ -(d_I + d_{Ez}) & 0 & (d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_I + d_{Ey}) & 0 & (d_I + d_{Ey}) & (d_I + d_{Ey}) h_B \\ 0 & -(d_I h_B + d_{Ey} h_B) & 0 & (d_I h_B + d_{Ey} h_B) & (d_I h_B^2 + d_{Ey} h_B^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \\ \dot{u}_z^F \\ \dot{u}_y^F \\ \dot{\phi}^F \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_z^R & -d_I \omega & -k_z^R & d_I \omega & d_I h_B \omega \\ d_I \omega & k_y^R & -d_I \omega & -k_y^R & -k_y^R h_B \\ -k_z^R & d_I \omega & k_z^R & -d_I \omega & -d_I h_B \omega \\ -d_I \omega & -k_y^R & d_I \omega & k_y^R & k_y^R h_B \\ -d_I \omega h_B & -k_y^R h_B & d_I \omega h_B u_z^F & k_y^R h_B & k_y^R h_B^2 + F_z^S h_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \\ u_z^F \\ u_y^F \\ \phi^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R \varepsilon \omega^2 \cos \varphi^R \\ -m_R \varepsilon \omega^2 \sin \varphi^R \\ -F_z^S \\ -F_y^S \\ -F_y^S h_G - M^S \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

Esta é a equação de movimento no domínio do tempo para o sistema rotor-fundação-solo, onde o rotor é mantido com velocidade constante,  $\omega = \dot{\varphi}^R$  através de  $T$  (torque) e as forças do solo são designadas por  $\mathbf{F}^S = \{F_z^S(t) \quad F_y^S(t) \quad M^S(t)\}^T$ . Pode-se notar que a matriz de massa é diagonal, a matriz de amortecimento é simétrica (não se tem efeito giroscópico) e que a matriz de rigidez possui termos anti-simétricos associados ao amortecimento interno  $d_I$ .

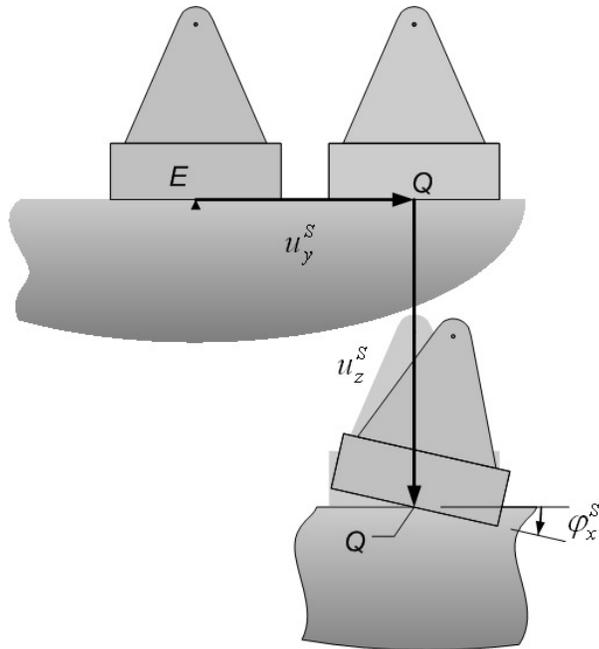
A partir deste ponto assume-se que o eixo do rotor é isotrópico, sendo assim,  $k_z^R = k_y^R = k^R$ , o mesmo vale para os coeficientes de amortecimento externo  $d_{Ez} = d_{Ey} = d_E$ . As equações resultantes são:

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xx}^{F/O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \\ \dot{u}_z^F \\ \dot{u}_y^F \\ \ddot{\varphi}^F \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (d_I + d_E) & 0 & -(d_I + d_E) & 0 & 0 \\ 0 & (d_I + d_E) & 0 & -(d_I + d_E) & -(d_I h_B + d_E h_B) \\ -(d_I + d_E) & 0 & (d_I + d_E) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_I + d_E) & 0 & (d_I + d_E) & (d_I + d_E) h_B \\ 0 & -(d_I h_B + d_E h_B) & 0 & (d_I h_B + d_E h_B) & (d_I h_B^2 + d_E h_B^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \\ \dot{u}_z^F \\ \dot{u}_y^F \\ \ddot{\varphi}^F \end{Bmatrix} +$$

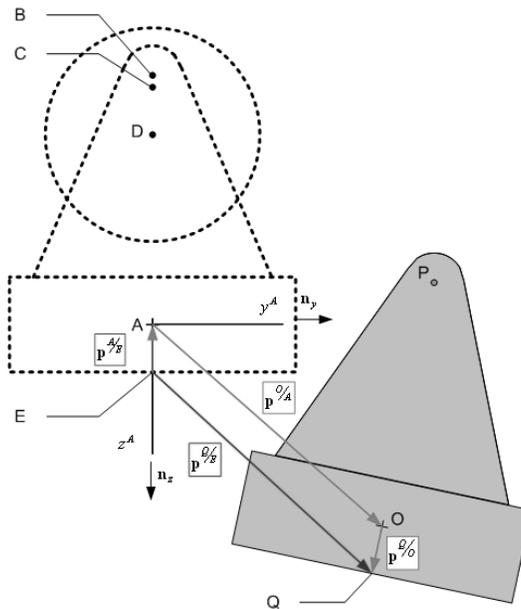
$$\begin{bmatrix} k^R & -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & d_I h_B \omega \\ d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -k^R & -k^R h_B \\ -k^R & d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -d_I h_B \omega \\ -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & k^R & k^R h_B \\ -d_I \omega h_B & -k^R h_B & d_I \omega h_B & k^R h_B & k^R h_B^2 + F_z^S h_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \\ u_z^F \\ u_y^F \\ \varphi^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R \varepsilon \omega^2 \cos \varphi^R \\ -m_R \varepsilon \omega^2 \sin \varphi^R \\ -F_z^S \\ -F_y^S \\ -F_y^S h_G - M^S \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

Para se introduzir as reações do solo  $\mathbf{F}^S$  em função de sua matriz de impedância, é vantajoso realizar-se uma transformação de coordenadas para descrever o grau de liberdade da fundação. Ao invés de se utilizar  $\mathbf{u}^F = \{u_z^F \quad u_y^F \quad \varphi^F\}^T$  utiliza-se  $\mathbf{u}^S = \{u_z^S \quad u_y^S \quad \varphi^S\}^T$ , ver **Figura 3.23**.



**Figura 3.23:** Graus de liberdade da interface solo-fundação.

A figura acima ilustra os graus de liberdade do ponto  $E$  na interface solo-fundação. O sistema de equações da página anterior depende das coordenadas  $u_z^F$ ,  $u_y^F$  e  $\varphi^F$ . Deve-se reescrever este sistema usando-se as coordenadas do solo acima. Primeiramente deduz-se uma relação entre as coordenadas do solo e as coordenadas da fundação.



**Figura 3.24:** Esquema vetorial da posição do ponto central da base em relação a sua posição de equilíbrio.

Principia-se a dedução das relações das coordenadas pela posição do ponto  $Q$  em relação ao ponto  $E$ .

$$\mathbf{p}^{Q/E} = \mathbf{p}^{A/E} + \mathbf{p}^{O/A} + \mathbf{p}^{Q/O} \quad (3.90)$$

O vetor  $\mathbf{p}^{Q/E}$  pode ser deduzido a partir da Figura 3.23:

$$\mathbf{p}^{Q/E} = u_y^S \mathbf{n}_y + u_z^S \mathbf{n}_z \quad (3.91)$$

Cada um dos termos da direita é escrito a seguir:

$$\mathbf{p}^{A/E} = -h_G \mathbf{n}_z \quad (3.92)$$

$$\mathbf{p}^{O/A} = u_y^F \mathbf{n}_y + u_z^F \mathbf{n}_z \quad (3.93)$$

Levando-se em conta a relação entre os versores  $\mathbf{b}_i$  e  $\mathbf{n}_i$ , equação (3.6):

$$\mathbf{p}^{Q/O} = h_G \mathbf{b}_z = h_G (-\sin \varphi^F \mathbf{n}_y + \cos \varphi^F \mathbf{n}_z) \quad (3.94)$$

Agora é possível escrever o vetor  $\mathbf{p}^{Q/E}$  utilizando coordenadas da fundação  $u_z^F$ ,  $u_y^F$  e  $\varphi^F$  a partir das equações (3.92), (3.93) e (3.94).

$$\mathbf{p}^{Q/E} = (u_y^F - h_G \sin \varphi^F) \mathbf{n}_y + (-h_G + u_z^F + h_G \cos \varphi^F) \mathbf{n}_z \quad (3.95)$$

Linearizando a igualdade acima ( $\sin \varphi^F \approx \varphi^F$  e  $\cos \varphi^F \approx 1$ ), tem-se:

$$\mathbf{p}^{Q/E} = (u_y^F - h_G \varphi^F) \mathbf{n}_y + (u_z^F) \mathbf{n}_z \quad (3.96)$$

Das equações (3.91) e (3.96) é possível escreve-se a relação existente entre as coordenadas da fundação e as coordenadas do solo, equações (3.97) (3.98) e (3.99). Posteriormente estas equações serão usadas para adequar as equações (3.74), (3.75), (3.77), (3.78) e (3.86) às novas condições de resolução.

$$\begin{aligned}
u_y^F &= u_y^S + h_G \varphi^S \\
u_z^F &= u_z^S \\
\varphi^F &= \varphi^S
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_y^F &= \dot{u}_y^S + h_G \dot{\varphi}^S \\
\dot{u}_z^F &= \dot{u}_z^S \\
\dot{\varphi}^F &= \dot{\varphi}^S
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_y^F &= \ddot{u}_y^S + h_G \ddot{\varphi}^S \\
\ddot{u}_z^F &= \ddot{u}_z^S \\
\ddot{\varphi}^F &= \ddot{\varphi}^S
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Usando-se das igualdades acima, pode-se alterar as equações (3.74) e (3.75) referentes a equação de movimento linear do rotor para as coordenadas do solo. O mesmo é válido para as equações (3.77) e (3.78) referentes a equação de movimento linear da fundação. É importante ressaltar que ainda não se altera a equação de movimento rotacional da fundação. Além de se mudar o sistema de coordenadas é preciso mudar-se também o ponto de referência para a resolução da equação de movimento rotacional da fundação, anteriormente deduzido em relação ao ponto  $O$  agora será deduzido em relação ao ponto  $Q$ .

Alteram-se as coordenadas das equações (3.74) e (3.75) referentes ao movimento linear do rotor usando-se as relações (3.97), (3.98) e (3.99):

$$\begin{aligned}
m_R \ddot{u}_z^R - m_R \varepsilon \omega^2 \cos \varphi^R &= \\
= -(d_I + d_{Ez}) \ddot{u}_z^R + (d_I + d_{Ez}) \ddot{u}_z^S - (k_z^R) u_z^R + (d_I \omega) u_y^R + (k_z^R) u_z^S - (d_I \omega) u_y^S - (h_G + h_B) d_I \omega \varphi^S
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
m_R (\ddot{u}_y^R + \varepsilon \omega^2 \sin \varphi^R) &= \\
= -(d_I + d_{Ey}) \ddot{u}_y^R + (d_I + d_{Ey}) \ddot{u}_y^S + (d_I + d_{Ey}) (h_G + h_B) \dot{\varphi}^S - (d_I \omega) u_z^R - (k_y^R) u_y^R + (d_I \omega) u_z^S + \\
+ (k_y^R) u_y^S + (h_G + h_B) k_y^R \varphi^S
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Analogamente faz-se a alteração das equações (3.77) e (3.78) referentes ao movimento linear da fundação:

$$m_F \ddot{u}_z^S = (d_I + d_{Ez}) \dot{u}_z^R - (d_I + d_{Ez}) \dot{u}_z^S + (k_z^R) u_z^R - (d_I \omega) u_y^R + \\ - (k_z^R) u_z^S + (d_I \omega) u_y^S + (h_G + h_B) d_I \omega \varphi^S + F_z^S \quad (3.102)$$

$$m_F (\ddot{u}_y^S + h_G \ddot{\varphi}^S) = (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^S - (d_I + d_{Ey}) (h_G + h_B) \dot{\varphi}^S + \\ + (d_I \omega) u_z^R + (k_y^R) u_y^R - (d_I \omega) u_z^S - (k_y^R) u_y^S - (h_G + h_B) k_y^R \varphi^S + F_y^S \quad (3.103)$$

Deduziu-se o momento causado pelas forças  $\mathbf{R}^R$  e  $\mathbf{F}^S$  em relação ao ponto  $O$  usando-se as coordenadas da fundação ( $u_z^F$ ,  $u_y^F$  e  $\varphi^F$ ), equação (3.86). Porém agora se deduz o momento causado por essas forças em relação ao ponto  $Q$  usando-se as coordenadas do solo  $u_z^S$ ,  $u_y^S$  e  $\varphi^S$ . Para o momento causado pela resultante das forças do rotor,  $\mathbf{R}^R$ , é necessário se deduzir o vetor posição  $\mathbf{p}^{P/Q}$ . Das equações (3.24) e (3.32).

$$\mathbf{p}^{P/Q} = \mathbf{p}^{P/O} + \mathbf{p}^{O/Q}$$

$$\mathbf{p}^{P/Q} = h_B \text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_y - h_B \text{cos } \varphi^F \mathbf{n}_z + h_G \text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_y - h_G \text{cos } \varphi^F \mathbf{n}_z = \\ = (h_B + h_G) \text{sen } \varphi^F \mathbf{n}_y - (h_B + h_G) \text{cos } \varphi^F \mathbf{n}_z$$

Linearizando:

$$\mathbf{p}^{P/Q} = (h_B + h_G) \varphi^F \mathbf{n}_y - (h_B + h_G) \mathbf{n}_z \quad (3.104)$$

Do vetor  $\mathbf{p}^{P/Q}$  e da resultante  $\mathbf{R}^R$ , (equações (3.63) e (3.104)) escreve-se o momento procurado.

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}^R/Q} = \mathbf{p}^{P/Q} \times \mathbf{R}^R = \left[ (h_B + h_G) \varphi^F \mathbf{n}_y - (h_B + h_G) \mathbf{n}_z \right] \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \left[ (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey}) \dot{u}_y^F - (d_I + d_{Ey}) h_B \dot{\varphi}^F + (d_I (\dot{\varphi}^R)) u_z^R + \right. \\ \left. + k_y^R u_y^R - d_I (\dot{\varphi}^R) u_z^F - k_y^R u_y^F - k_y^R h_B \varphi^F \right] \mathbf{n}_y + \\ \left. + \left[ (d_I + d_{Ez}) \dot{u}_z^R - (d_I + d_{Ez}) \dot{u}_z^F + k_z^R u_z^R - (d_I (\dot{\varphi}^R)) u_y^R + \right. \right. \\ \left. \left. - k_z^R u_z^F + d_I (\dot{\varphi}^R) u_y^F + (d_I h_B (\dot{\varphi}^R)) \varphi^F \right] \mathbf{n}_z \right\}$$

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}/\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} (d_I + d_{Ez})(h_B + h_G)\varphi^F \dot{u}_z^R - (d_I + d_{Ez})(h_B + h_G)\varphi^F \dot{u}_z^F + k_z^R (h_B + h_G)\varphi^F u_z^R + \\ -(d_I(\dot{\varphi}^R))u_y^R - k_z^R u_z^F + d_I(\dot{\varphi}^R)(h_B + h_G)\varphi^F u_y^F + (d_I h_B(\dot{\varphi}^R))(h_B + h_G)\varphi^F \varphi^F + \\ +(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)\dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)\dot{u}_y^F - (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)h_B \dot{\varphi}^F + \\ +(d_I(\dot{\varphi}^R))u_z^R + k_y^R u_y^R - d_I(\dot{\varphi}^R)(h_B + h_G)u_z^F - k_y^R (h_B + h_G)u_y^F - k_y^R h_B (h_B + h_G)\varphi^F \end{bmatrix} \mathbf{n}_x \quad (3.105)$$

O momento acima está escrito em coordenadas da fundação, deve-se escrever esta em coordenadas do solo. Linearizando-se e supondo  $\varphi^F \dot{u}_z^R \approx 0$ ,  $\varphi^F \dot{u}_z^F \approx 0$ ,  $\varphi^F u_z^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_z^F \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^F \approx 0$ ,  $\varphi^F \varphi^F \approx 0$ . E sabendo-se que o rotor gira com velocidade constante  $\dot{\varphi}^R = \omega = cte$  o momento deduzido é reescrito abaixo.

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}/\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} -(d_I \omega)u_y^R - k_z^R u_z^S + (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)\dot{u}_y^R - (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)\dot{u}_y^S + \\ -(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)^2 h_G \dot{\varphi}^S + (d_I \omega)u_z^R + k_y^R u_y^R - d_I \omega (h_B + h_G)u_z^S + \\ -k_y^R (h_B + h_G)u_y^S - k_y^R (h_B + h_G)^2 \varphi^S \end{bmatrix} \mathbf{n}_x \quad (3.106)$$

As forças do solo são aplicadas no ponto  $Q$  por isso o momento de reação do solo é somente um vetor livre.

$$\mathbf{M}^{\mathbf{F}/\mathcal{Q}} = -M_x^S \mathbf{n}_x \quad (3.107)$$

A quantidade de movimento linear da fundação no referencial inercial é definida como:  ${}^I \mathbf{G}^F = m_F {}^I \mathbf{v}^O$ . Como se mudou o ponto de referência para a dedução da equação de movimento rotacional, o somatório de momentos em relação ao ponto  $Q$  tem que ser igual a derivada temporal da quantidade de movimento angular em relação ao ponto  $Q$  acrescido do produto vetorial da velocidade do ponto  $Q$  e da quantidade de movimento linear da fundação. Ver Tenenbaum (1997).

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{\mathbf{F}/\mathcal{Q}} + {}^I \mathbf{v}^Q \times {}^I \mathbf{G}^F = \mathbf{M}^{\mathbf{R}/\mathcal{Q}} + \mathbf{M}^{\mathbf{F}/\mathcal{Q}} \quad (3.108)$$

O tensor de inércia da fundação é mais facilmente deduzido para a derivada temporal da quantidade de movimento angular em relação ao ponto  $O$ , centro de massa. Nesse sentido a

equação (3.108) pode ser modificada. A quantidade de movimento angular da fundação (no referencial inercial) em relação ao ponto  $Q$  é igual à quantidade de movimento angular em relação ao ponto  $O$  acrescido do produto vetorial do vetor posição do ponto  $O$  em relação ao ponto  $Q$  e da quantidade de movimento linear.

$${}^I \mathbf{H}^{F/Q} = {}^I \mathbf{H}^{F/O} + \mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \mathbf{G}^F \quad (3.109)$$

Na equação (3.108) pode-se verificar a necessidade de se ter a derivada temporal da quantidade de movimento angular acima,  ${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/Q}$ .

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/Q} = {}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/O} + {}^I \mathbf{v}^{O/Q} \times {}^I \mathbf{G}^F + \mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F \quad (3.110)$$

A velocidade  ${}^I \mathbf{v}^{O/Q}$  que surge na equação (3.110) acima pode ser decomposto:  ${}^I \mathbf{v}^{O/Q} = {}^I \mathbf{v}^O - {}^I \mathbf{v}^Q$ .

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/Q} = {}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/O} + {}^I \mathbf{v}^O \times {}^I \mathbf{G}^F - {}^I \mathbf{v}^Q \times {}^I \mathbf{G}^F + \mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F \quad (3.111)$$

Esta pode ser simplificada pela relação  ${}^I \mathbf{v}^O \times {}^I \mathbf{G}^F = {}^I \mathbf{v}^O \times m_F {}^I \mathbf{v}^O = 0$

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/Q} = {}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/O} - {}^I \mathbf{v}^Q \times {}^I \mathbf{G}^F + \mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F \quad (3.112)$$

Inserindo a equação (3.112) na equação (3.108) deduz-se finalmente a equação de movimento rotacional.

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/O} + \mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F = \mathbf{M}^{R/Q} + \mathbf{M}^{F/Q} \quad (3.113)$$

Escreve-se agora a equação de movimento rotacional explicitamente. Primeiramente escreve-se o termo  $\mathbf{p}^{O/Q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F$ . O vetor posição  $\mathbf{p}^{O/Q}$  pode ser deduzido da equação (3.32) e a derivada temporal da quantidade de movimento  ${}^I \dot{\mathbf{G}}^F$  pode ser deduzida multiplicando-se equação (3.50) pela massa da fundação,  ${}^I \dot{\mathbf{G}}^F = m_F {}^I \mathbf{a}^O$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{o/q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F &= h_G (\sin \varphi^S \mathbf{n}_y - \cos \varphi^S \mathbf{n}_z) \times \left[ (m_F \ddot{u}_y^S + m_F h_G \ddot{\varphi}^S) \mathbf{n}_y + m_F \ddot{u}_z^S \mathbf{n}_z \right] = \\
&= m_F \ddot{u}_z^S h_G \sin \varphi^S + m_F h_G \ddot{u}_y^S \cos \varphi^S + m_F h_G^2 \ddot{\varphi}^S \cos \varphi^S
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Linearizando a equação (3.114) e considerando  $\dot{u}_z^S \varphi^S \approx 0$ :

$$\mathbf{p}^{o/q} \times {}^I \dot{\mathbf{G}}^F = m_F h_G \ddot{u}_y^S + m_F h_G^2 \ddot{\varphi}^S \tag{3.115}$$

O termo  ${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/o}$  pode ser explicitamente escrito  ${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/o} = \Pi^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^F + {}^I \boldsymbol{\omega}^F \times \Pi^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F$ , como demonstra as equações (3.84) e (3.85). Sabendo-se que (seção anterior)  $\Pi^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\alpha}^F = I_{xx}^{F/o} \ddot{\varphi}^S \mathbf{n}_x$  e  ${}^I \boldsymbol{\omega}^F \times \Pi^{F/o} \cdot {}^I \boldsymbol{\omega}^F = 0$  resulta:

$${}^I \dot{\mathbf{H}}^{F/o} = I_{xx}^{F/o} \ddot{\varphi}^S \mathbf{n}_x \tag{3.116}$$

Inserem-se as equações (3.115) e (3.116) na equação (3.113).

$$I_{xx}^{F/o} \ddot{\varphi}^S + m_F h_G \ddot{u}_y^S + m_F h_G^2 \ddot{\varphi}^S = \mathbf{M}^{R/o} + \mathbf{M}^{F^s/o} \tag{3.117}$$

Os momentos  $\mathbf{M}^{R/o}$  e  $\mathbf{M}^{F^s/o}$  foram obtidos das equações (3.106) e (3.107) respectivamente. Explicitamente escrito a equação (3.117) resulta:

$$I_{xx}^{F/o} \ddot{\varphi}^S + m_F h_G \ddot{u}_y^S + m_F h_G^2 \ddot{\varphi}^S = \begin{bmatrix} -(d_I \omega) u_y^R - k_z^R u_z^S + (d_I + d_{E_y})(h_B + h_G) \dot{u}_y^R + \\ -(d_I + d_{E_y})(h_B + h_G) \dot{u}_y^S - (d_I + d_{E_y})(h_B + h_G)^2 h_G \dot{\varphi}^S + \\ +(d_I \omega) u_z^R + k_y^R u_y^R - d_I \omega (h_B + h_G) u_z^S + \\ -k_y^R (h_B + h_G) u_y^S - k_y^R (h_B + h_G)^2 \varphi^S - M_x^S \end{bmatrix} \mathbf{n}_x \tag{3.118}$$

Agora é possível montar o sistema de equações usando-se coordenadas do solo. Das equações (3.100), (3.101), (3.102), (3.103) e (3.118) resulta:

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & 0 & 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_z^R \\ \ddot{u}_y^R \\ \ddot{u}_z^S \\ \ddot{u}_y^S \\ \ddot{\phi}^S \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (d_I + d_{Ez}) & 0 & -(d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & (d_I + d_{Ey}) & 0 & -(d_I + d_{Ey}) & -(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) \\ -(d_I + d_{Ez}) & 0 & (d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_I + d_{Ey}) & 0 & (d_I + d_{Ey}) & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) \\ 0 & -(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) & 0 & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \\ \dot{u}_z^S \\ \dot{u}_y^S \\ \dot{\phi}^S \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_z^R & -d_I \omega & -k_z^R & d_I \omega & d_I \omega (h_B + h_G) \\ d_I \omega & k_y^R & -d_I \omega & -k_y^R & -k_y^R (h_B + h_G) \\ -k_z^R & d_I \omega & k_z^R & -d_I \omega & -d_I \omega (h_B + h_G) \\ -d_I \omega & -k_y^R & d_I \omega & k_y^R & k_y^R (h_B + h_G) \\ -d_I \omega (h_B + h_G) & -k_y^R (h_B + h_G) & d_I \omega (h_B + h_G) & k_y^R (h_B + h_G) & k_y^R (h_B + h_G)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \\ u_z^S \\ u_y^S \\ \phi^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t) \\ -m_R \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t) \\ -F_z^S \\ -F_y^S \\ -M_x^S \end{Bmatrix}$$

(3.119)

## Equações finais no domínio da frequência

Está se tratando de um sistema harmônico. Neste sentido se pode escrever o deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força (e momento) do solo usando variáveis complexas obedecendo às relações abaixo.

$$u = \bar{u} e^{i\omega t}$$

$$\dot{u} = i\bar{u}\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{u} = -\bar{u}\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$F = \bar{F} e^{i\omega t}$$

O vetor de força do sistema (3.119) pode ser simplificado usando-se as equações de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$ie^{i\omega t} = i \cos(\omega t) - \sin(\omega t)$$

Observa-se que se tomando somente a parte real dos valores abaixo o vetor adquire novamente a aparência do sistema (3.119):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_R \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t) \\ -m_R \varepsilon \omega^2 \text{sen}(\omega t) \\ -F_z^S \\ -F_y^S \\ -M_x^S \end{array} \right\} = \text{Real} \left\{ \left\{ \begin{array}{l} m_R \varepsilon \omega^2 e^{i\omega t} \\ i m_R \varepsilon \omega^2 e^{i\omega t} \\ -\bar{F}_z^S e^{i\omega t} \\ -\bar{F}_y^S e^{i\omega t} \\ -\bar{M}_x^S e^{i\omega t} \end{array} \right\} \right\}$$

Reescrevendo-se o sistema, agora em valores complexos.

$$\left( \begin{array}{l} -\omega^2 \left[ \begin{array}{ccccc} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & 0 & 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{array} \right] + \\ i\omega \left[ \begin{array}{ccccc} (d_I + d_{Ez}) & 0 & -(d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & (d_I + d_{Ey}) & 0 & -(d_I + d_{Ey}) & -(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) \\ -(d_I + d_{Ez}) & 0 & (d_I + d_{Ez}) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_I + d_{Ey}) & 0 & (d_I + d_{Ey}) & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) \\ 0 & -(d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) & 0 & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G) & (d_I + d_{Ey})(h_B + h_G)^2 \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{ccccc} k_z^R & -d_I \omega & -k_z^R & d_I \omega & d_I \omega (h_B + h_G) \\ d_I \omega & k_y^R & -d_I \omega & -k_y^R & -k_y^R (h_B + h_G) \\ -k_z^R & d_I \omega & k_z^R & -d_I \omega & -d_I \omega (h_B + h_G) \\ -d_I \omega & -k_y^R & d_I \omega & k_y^R & k_y^R (h_B + h_G) \\ -d_I \Omega (h_B + h_G) & -k_y^R (h_B + h_G) & d_I \Omega (h_B + h_G) & k_y^R (h_B + h_G) & k_y^R (h_B + h_G)^2 \end{array} \right] \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_z^R \\ \bar{u}_y^R \\ \bar{u}_z^S \\ \bar{u}_y^S \\ \bar{\varphi}^S \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_R \varepsilon \omega^2 \\ i m_R \varepsilon \omega^2 \\ -\bar{F}_z^S \\ -\bar{F}_y^S \\ -\bar{M}_x^S \end{array} \right\} \quad (3.120)$$

Esta é a equação de movimento no **domínio da frequência** para o sistema rotor-fundação-solo (velocidade do rotor constante  $\dot{\varphi}^R = \omega$ ). Diferentemente da equação (3.89) a matriz de massa é não-diagonal, além de ser não-diagonal ela também é simétrica. A matriz de amortecimento mantém-se simétrica assim como a matriz de rigidez mantém os seus termos anti-simétricos associados ao amortecimento interno  $d_I$ . No vetor de força os termos associados à

força do solo, que também há na equação (3.89) serão eliminados adiante se incorporando a matriz de impedância mecânica.

## Incorporação da matriz de impedância no sistema de equações

O sistema de equações (3.120) não apresenta os termos de rigidez dinâmica do solo. Ao invés destas simplesmente apresentam-se as forças (e momento) correspondentes,  $\bar{F}_z^S$ ,  $\bar{F}_y^S$  e  $\bar{M}_x^S$ . Neste trabalho a rigidez utilizada do solo é adquirida a partir dos resultados numéricos de Carrion (2002) e que foram fornecidas no Capítulo 2. Deste são adquiridos os valores adimensionais de flexibilidade para uma semi-largura de valor  $a = 1m$ . Com os valores de flexibilidade e com o módulo de elasticidade  $G$  adquirem-se os valores de rigidez dinâmica ou também conhecida como impedância mecânica. Escrevendo-se a equação (3.64) com variáveis complexas, esta adquire o aspecto abaixo.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_z^S e^{i\omega t} \\ \bar{F}_y^S e^{i\omega t} \\ \bar{M}_x^S e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = G a \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_z^S e^{i\omega t} \\ \bar{u}_y^S e^{i\omega t} \\ \bar{\varphi}^S e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (3.121)$$

O fator  $e^{i\omega t}$  pode ser eliminado. Ao invés de se escrever as forças do solo, incorpora-se a matriz de impedância do solo que no sistema ficará:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_z^S \\ \bar{F}_y^S \\ \bar{M}_x^S \end{Bmatrix} = G a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

O mesmo procedimento é adotado para a equação (3.65).

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_z^S \\ \bar{F}_y^S \\ \bar{M}_x^S \end{Bmatrix} = Ga \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{yy} & s_{y\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & s_{\varphi y} & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Substituindo no sistema de equações (3.120):

$$\left( \begin{array}{c} -\omega^2 \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & 0 & 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{bmatrix} + \\ i\omega \begin{bmatrix} (d_I + d_E) & 0 & -(d_I + d_E) & 0 & 0 \\ 0 & (d_I + d_E) & 0 & -(d_I + d_E) & -(d_I + d_E)(h_B + h_G) \\ -(d_I + d_E) & 0 & (d_I + d_E) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_I + d_E) & 0 & (d_I + d_E) & (d_I + d_E)(h_B + h_G) \\ 0 & -(d_I + d_E)(h_B + h_G) & 0 & (d_I + d_E)(h_B + h_G) & (d_I + d_E)(h_B + h_G)^2 \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} k^R & -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & d_I \omega (h_B + h_G) \\ d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -k^R & -k^R (h_B + h_G) \\ -k^R & d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -d_I \omega (h_B + h_G) \\ -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & k^R & k^R (h_B + h_G) \\ -d_I \omega (h_B + h_G) & -k^R (h_B + h_G) & d_I \omega (h_B + h_G) & k^R (h_B + h_G) & k^R (h_B + h_G)^2 \end{bmatrix} + Ga \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}_z^R \\ \bar{u}_y^R \\ \bar{u}_z^S \\ \bar{u}_y^S \\ \bar{\varphi}^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R \mathcal{E} \omega^2 \\ i m_R \mathcal{E} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.124)$$

A incorporação da matriz de impedância deixa o vetor de força somente com dois termos referentes aos graus de liberdade no rotor nas direções z e y. A equação tem solução no domínio complexo, isto é mais evidente com a incorporação da matriz de impedância, pois todos os termos desta estão neste domínio. A matriz de impedância da equação (3.124) acima é diagonal, mas esta também pode ser não diagonal incorporando-se a matriz da equação (3.123).

## Normalização do sistema de equações

O número de parâmetros utilizados pode ser reduzido introduzindo quantidades adimensionais. A introdução da razão  $\frac{u}{\varepsilon}$ , sendo  $u$  o deslocamento de um grau de liberdade do rotor ou fundação, torna possível a redução de 21 parâmetros existentes na equação (3.124) para 10. Este procedimento foi efetuado por Gasch *et ali* (1984) e adotado neste trabalho. A Tabela 1 exibe os parâmetros originais da equação de movimento.

**Tabela 1:** Parâmetros da equação de movimento.

	Eixo	Fundação	Solo
Massas/densidades	$m_R$	$m_F, I_{xx}^{F/O}$	$\rho_S$
Rigidez/impedâncias	$k^R$		$s_{zz}, s_{yy}, s_{\phi\phi}, s_{\phi y}, s_{y\phi}$
Amortecimento	$d_I, d_E$		
Geometria	$\varepsilon$	$h_B, h_G, h_F, b, a$	
Velocidade	$\omega$		$v_S$

A quantificação da massa é feita pelas razões entre elas. Para se quantificar a massa do solo utiliza-se um quarto do volume da fundação como referência.

$$M_{RF} = \frac{m_R}{m_F}$$

$$B_F = \frac{m_F}{\rho_S abh_F} = \frac{4\rho_F}{\rho_S}$$

O eixo está sob dois amortecimentos, o interno e o externo. Ambos estão adimensionalizados pela massa do rotor e rigidez do eixo do rotor.

$$D_I = \frac{d_I}{2\sqrt{m_R k^R}}$$

$$D_E = \frac{d_E}{2\sqrt{m_R k^R}}$$

Os parâmetros geométricos utilizados estão todos adimensionalizados pela semi-largura da fundação.

$$H_B = \frac{h_B}{a}$$

$$H_G = \frac{h_G}{a}$$

$$H_F = \frac{h_F}{a}$$

$$B = \frac{b}{a}$$

A frequência crítica do eixo do rotor pode ser definida por  $\omega_R = \sqrt{\frac{k^R}{m_R}}$ , esta mesma frequência é utilizada para normalizar a velocidade de rotação do rotor.

$$w = \frac{\omega}{\omega_R}$$

O parâmetro  $S$ , denominado parâmetro rotor-solo, é escrito como sendo:

$$S = \frac{a\omega_R}{v_s}$$

Denomina-se  $A_0$  como sendo:

$$A_0 = \frac{a\omega}{v_s}$$

Esta também é uma frequência adimensional. A frequência adimensional do rotor,  $\eta$  esta ligada com a frequência adimensional,  $A_0$  pelo parâmetro  $S$ .

$$A_0 = Sw$$

Como o parâmetro  $A_0$  pode ser escrito utilizando-se o parâmetro  $w$  e  $S$ , pode se contar 10 parâmetros utilizados para descrever a equação de movimento. Os parâmetros de impedância mecânica do semi-espaco viscoelástico não estão diretamente relacionados a nenhum dos parâmetros adimensionais anteriores por estes dependerem somente da frequência adimensional  $A_0$  e do amortecimento interno do solo  $\eta$ .

### Normalização da matriz de massa

A equação de movimento (3.124) pode agora ser normalizada, principia-se pela matriz de massa multiplicando-a pelo fator  $\frac{1}{m_R \omega_R^2}$ .

$$\frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & 0 & 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{bmatrix}$$

Para os termos (1,1) e (2,2):

$$m_R \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = w^2$$

Para os termos (3,3) e (4,4):

$$m_F \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{\omega^2}{M_{RF} \omega_R^2} = \frac{1}{M_{RF}} w^2$$

Para os termos (4,5) e (5,4):

$$m_F h_G \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{h_G}{M_{RF}} w^2 = \frac{H_G}{M_{RF}} a w^2$$

Na posição (5,5) têm-se dois termos, um é o momento de inércia da fundação em relação ao ponto  $O$ , o outro é resultante do uso do ponto  $Q$  para montar a equação de movimento rotacional da fundação. Para o momento de inércia, tem-se:

$$I_{xx}^{F/O} \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{\left( \frac{4a^2 + h_F^2}{12} m_F \right) \omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{\left( \frac{4 + H_F^2}{12} \right) a^2 \omega^2}{M_{RF} \omega_R^2} = \frac{(4 + H_F^2)}{12 M_{RF}} a^2 w^2$$

Alternativamente pode-se utilizar o raio de giração da fundação para descrever o momento de inércia:  $I_{xx}^{F/O} = m_F (r_x^{F/O})^2$ . Dessa maneira tem-se:

$$I_{xx}^{F/O} \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{\omega^2 m_F}{m_R \omega_R^2} (r_x^{F/O})^2 = \frac{w^2}{M_{RF}} (r_x^{F/O})^2$$

Para o outro termo da posição (5,5) tem-se:

$$m_F h_G^2 \frac{\omega^2}{m_R \omega_R^2} = \frac{H_G}{M_{RF}} a^2 w^2$$

Reescrita a matriz de massa, esta adquire a aparência abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_{RF}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M_{RF}} & \frac{H_G}{M_{RF}} a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H_G}{M_{RF}} a & \frac{(4 + H_F^2)}{12M_{RF}} a^2 + \frac{H_G}{M_{RF}} a^2 \end{bmatrix}$$

### ***Normalização do amortecimento (excluindo o solo)***

De maneira análoga ao efetuada para a matriz de massa faz-se para a matriz de amortecimento.

$$\frac{i\omega}{m_R \omega_R^2} \begin{bmatrix} (d_E + d_I) & 0 & -(d_E + d_I) & 0 & 0 \\ 0 & (d_E + d_I) & 0 & -(d_E + d_I) & -(d_E + d_I)(h_B + h_G) \\ -(d_E + d_I) & 0 & (d_E + d_I) & 0 & 0 \\ 0 & -(d_E + d_I) & 0 & (d_E + d_I) & (d_E + d_I)(h_B + h_G) \\ 0 & -(d_E + d_I)(h_B + h_G) & 0 & (d_E + d_I)(h_B + h_G) & (d_E + d_I)(h_B + h_G)^2 \end{bmatrix}$$

Para os termos das posições (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2) e (4,4):

$$(d_E + d_I) \frac{\omega}{m_R \omega_R^2} = \frac{2(D_I + D_E) \omega \sqrt{m_R k_R}}{m_R \omega_R^2} = \frac{2(D_I + D_E) \omega \sqrt{m_R k_R}}{m_R \omega_R} \sqrt{\frac{m_R}{k_R}} = 2(D_I + D_E) \omega$$

Para os termos das posições (2,5), (4,5), (5,4) e (5,4):

$$(d_E + d_I)(h_B + h_G) \frac{\omega}{m_R \omega_R^2} = 2(D_I + D_E)(h_B + h_G) \omega = 2(D_I + D_E)(H_B + H_G) a \omega$$

Para o termo de posição (5,5):

$$(d_E + d_I)(h_B + h_G)^2 \frac{\omega}{m_R \omega_R^2} = 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)(h_B + h_G) a \omega = 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)^2 a^2 \omega$$

A matriz de amortecimento normalizado:

$$D = \begin{bmatrix} 2(D_I + D_E) & 0 & -2(D_I + D_E) & 0 & 0 \\ 0 & 2(D_I + D_E) & 0 & -2(D_I + D_E) & -2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a \\ -2(D_I + D_E) & 0 & 2(D_I + D_E) & 0 & 0 \\ 0 & -2(D_I + D_E) & 0 & 2(D_I + D_E) & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a \\ 0 & -2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a & 0 & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)^2 a^2 \end{bmatrix}$$

### **Normalização da rigidez (excluindo o solo)**

$$\frac{1}{m_R \omega_R^2} \begin{bmatrix} k^R & -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & d_I \omega (h_B + h_G) \\ d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -k^R & -k^R (h_B + h_G) \\ -k^R & d_I \omega & k^R & -d_I \omega & -d_I \omega (h_B + h_G) \\ -d_I \omega & -k^R & d_I \omega & k^R & k^R (h_B + h_G) \\ -d_I \omega (h_B + h_G) & -k^R (h_B + h_G) & d_I \omega (h_B + h_G) & k^R (h_B + h_G) & k^R (h_B + h_G)^2 \end{bmatrix}$$

Para os termos das posições (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2) e (4,4):

$$k^R \frac{1}{m_R \omega_R^2} = \frac{m_R \omega_R^2}{m_R \omega_R^2} = 1$$

Agora para os termos das posições (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1) e (4,2) segue-se o procedimento análogo ao anterior.

$$d_I \omega \frac{1}{m_R \omega_R^2} = \frac{2D_I \omega \sqrt{m_R k_R}}{m_R \omega_R^2} = \frac{2D_I \omega \sqrt{m_R k_R}}{m_R \omega_R} \sqrt{\frac{m_R}{k_R}} = \frac{2D_I \omega}{\omega_R} = 2D_I w$$

Aproveitando-se o resultado anterior, a normalização dos termos das posições (1,5), (3,5), (5,1) e (5,3) torna-se simples:

$$d_I \omega (h_B + h_G) \frac{1}{m_R \omega_R^2} = 2D_I (h_B + h_G) w = 2D_I (H_B + H_G) a w$$

Para os termos das posições (2,5), (3,5), (5,2) e (5,4) tem-se o resultado a seguir.

$$k^R (h_B + h_G) \frac{1}{m_R \omega_R^2} = (h_B + h_G) = (H_B + H_G) a$$

Aproveitando-se o resultado anterior a normalização do termo de posição (5,5) fica então definida.

$$k_y^R (h_B + h_G)^2 \frac{1}{m_R \omega_R^2} = (h_B + h_G)^2 = (H_B + H_G) a^2$$

Finalmente a matriz de rigidez normalizada:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2D_I w & -1 & 2D_I w & 2D_I (H_B + H_G) a w \\ 2D_I w & 1 & -2D_I w & -1 & -(H_B + H_G) a \\ -1 & 2D_I w & 1 & -2D_I w & -2D_I (H_B + H_G) a w \\ -2D_I w & -1 & 2D_I w & 1 & (H_B + H_G) a \\ -2D_I (H_B + H_G) a w & -(H_B + H_G) a & 2D_I (H_B + H_G) a w & (H_B + H_G) a & (H_B + H_G)^2 a^2 \end{bmatrix}$$

### ***Normalização da matriz de impedância***

Para normalizar a matriz de impedância basta normalizar o valor  $Ga$ , o produto do módulo transversal de elasticidade pela metade da largura da fundação. O módulo de elasticidade pode ser escrito em função da densidade do solo e da velocidade da onda de cisalhamento. A densidade

do solo por sua vez pode ser escrito em função da massa da fundação, do parâmetro  $B_F$ , e das dimensões da fundação.

$$G = \rho_G v_s^2$$

$$\rho_G = \frac{m_F}{B_F a b h_F}$$

Normalização do valor  $Ga$ :

$$\frac{\overbrace{Ga}^{G=\rho_G v_s^2}}{m_R \omega_R^2} = \frac{\overbrace{\rho_G v_s^2 a}^{\rho_G = \frac{m_F}{B_F a b h_F}}}{m_R \omega_R^2} = \frac{m_F v_s^2 a}{B_F a b h_F m_R \omega_R^2} \cdot \frac{a}{a} = \frac{m_F v_s^2 a^2}{B_F a^2 b h_F m_R \omega_R^2} = \frac{a}{h_F} \cdot \frac{m_F}{m_R} \cdot \frac{v_s^2}{a^2 \omega_R^2} \cdot \frac{a}{B_F b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{B_F H_F M_{RF} S^2}$$

### ***Normalização do vetor excitação***

Não diferente do procedimento adotado pra normalizar as matrizes faz-se com os termos do vetor.

$$\frac{1}{m_R \omega_R^2} \begin{Bmatrix} m_R \mathcal{E} \omega^2 \\ i m_R \mathcal{E} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega^2 \mathcal{E} \begin{Bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### ***Equação final de movimento***

Efetuada a normalização têm-se condições de finalmente se escrever a equação final de movimento. Será esta a equação utilizada para realização das análises.

$$\left( \begin{array}{c}
 -w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_{RF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/M_{RF} & H_G/M_{RF} \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & H_G/M_{RF} \cdot a & (4+H_F^2)/(12M_{RF}) \cdot a^2 + H_G/M_{RF} \cdot a^2 \end{bmatrix} + \\
 iw \begin{bmatrix} 2(D_I + D_E) & 0 & -2(D_I + D_E) & 0 & 0 \\ 0 & 2(D_I + D_E) & 0 & -2(D_I + D_E) & -2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a \\ -2(D_I + D_E) & 0 & 2(D_I + D_E) & 0 & 0 \\ 0 & -2(D_I + D_E) & 0 & 2(D_I + D_E) & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a \\ 0 & -2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a & 0 & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)a & 2(D_I + D_E)(H_B + H_G)^2 a^2 \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} 1 & -2D_I w & -1 & 2D_I w & 2D_I(H_B + H_G)aw \\ 2D_I w & 1 & -2D_I w & -1 & -(H_B + H_G)a \\ -1 & 2D_I w & 1 & -2D_I w & -2D_I(H_B + H_G)aw \\ -2D_I w & -1 & 2D_I w & 1 & (H_B + H_G)a \\ -2D_I(H_B + H_G)aw & -(H_B + H_G)a & 2D_I(H_B + H_G)aw & (H_B + H_G)a & (H_B + H_G)^2 a^2 \end{bmatrix} + \\
 \frac{1}{B_F H_F M_{RF} S^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/b \cdot s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a/b \cdot s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 s_{\phi\phi} \end{bmatrix}
 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_z^R \\ \bar{u}_y^R \\ \bar{u}_z^S \\ \bar{u}_y^S \\ \bar{\phi}^S \end{array} \right\} \frac{1}{\epsilon} = w^2 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

(3.125)

## Capítulo 4

### Dinâmica do rotor em suporte fixo

Neste trabalho tem-se o intuito de analisar a influência do solo sobre o comportamento dinâmico de um sistema rotor-fundação-solo. Porém, a princípio somente o comportamento dinâmico do rotor será analisado sem se levar em conta a fundação e o solo. Analisando-se somente o rotor pode-se fazer uma comparação do seu comportamento dinâmico sem os demais componentes com o comportamento dinâmico do rotor interagindo com outros componentes.

Do sistema resultante rotor-fundação-solo do capítulo anterior, obtém-se as equações do rotor isolado. Considera-se o solo como sendo rígido, dessa maneira os graus de liberdade  $u_z^S$ ,  $u_y^S$  e  $\varphi^S$  se anulam. Como resultado tem-se o sistema abaixo.

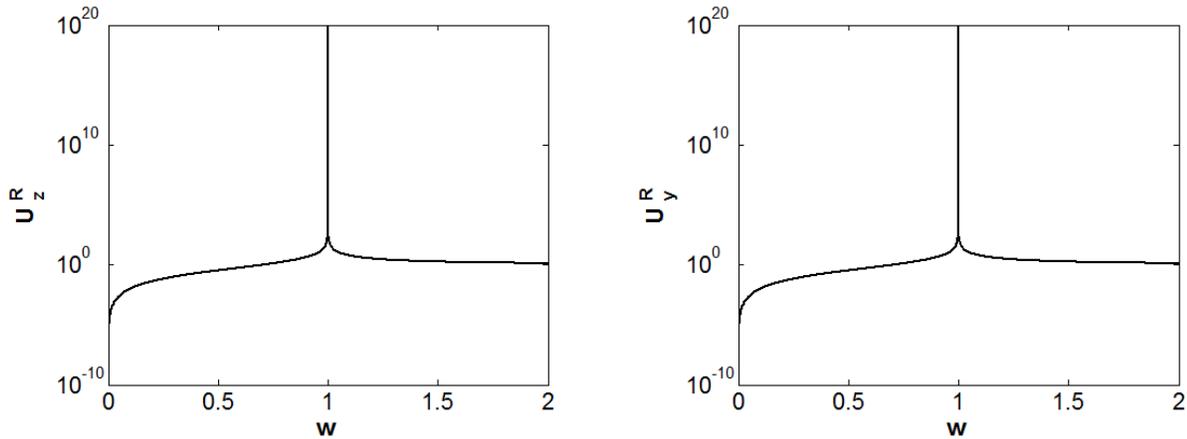
$$\begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & m_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_z^R \\ \ddot{u}_y^R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (d_I + d_{Ez}) & 0 \\ 0 & (d_I + d_{Ey}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z^R & -d_I \omega \\ d_I \omega & k_y^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R \varepsilon (\dot{\varphi}^R)^2 \cos(\varphi^R) \\ -m_R \varepsilon (\dot{\varphi}^R)^2 \sin(\varphi^R) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Do sistema normalizado, equação (3.117), do capítulo anterior resulta:

$$\left( -w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + iw \begin{bmatrix} 2(D_I + D_E) & 0 \\ 0 & 2(D_I + D_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2D_I w \\ 2D_I w & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}_z^R \\ \bar{u}_y^R \end{Bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

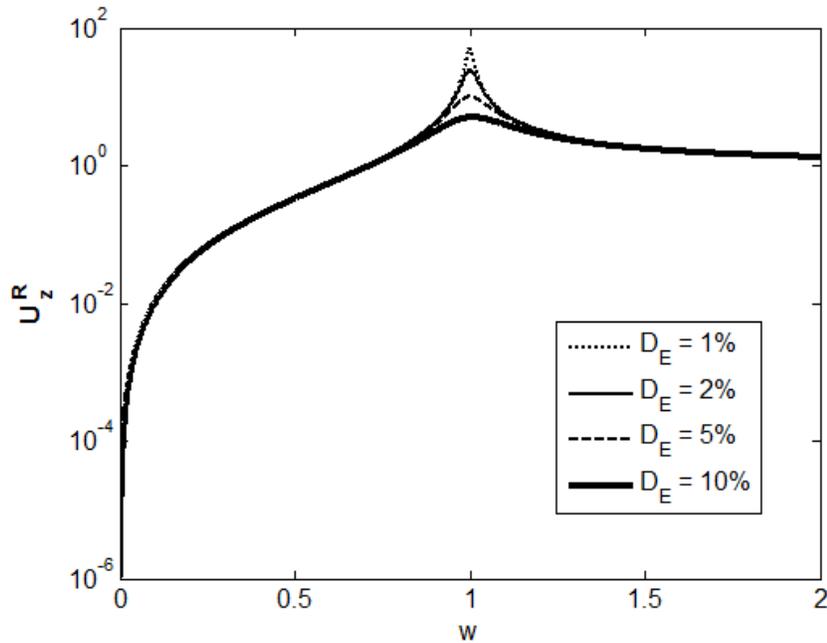
Inicialmente os amortecimentos interno e o externo são considerados nulos. O desbalanceamento tem valor  $\varepsilon = 1$  e as frequências adimensionais variam de 0 até 2. Observa-se nos gráficos abaixo que o deslocamento vertical e horizontal é idêntico, isso se deve ao fato do

sistema ser isotrópico, o eixo do rotor não apresenta anisotropia, portanto a sua rigidez é uniforme,  $k_z^R = k_y^R = k^R$ .

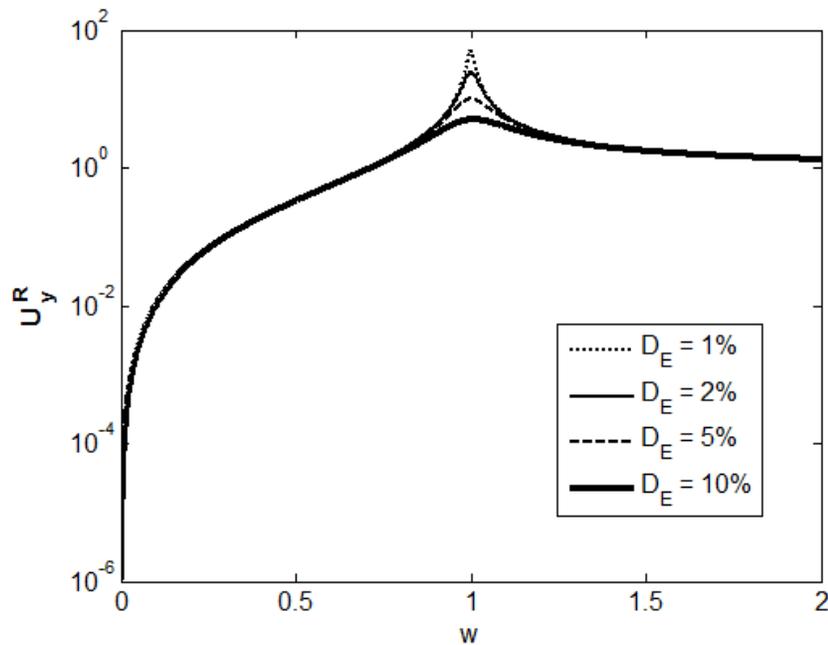


**Figura 4.1:** Deslocamento vertical  $u_z^R$  e horizontal  $u_y^R$  do rotor sobre suporte rígido.

Como esperado, quando o valor de  $w=1$ , o sistema entra em ressonância e o deslocamento tende ao infinito. Se acrescentarmos o amortecimento externo o deslocamento na ressonância e na sua proximidade tende a amplitudes bem menores.



**Figura 4.2:** Deslocamento vertical  $u_z^R$  do rotor sobre suporte rígido para distintos valores do amortecimento externo.



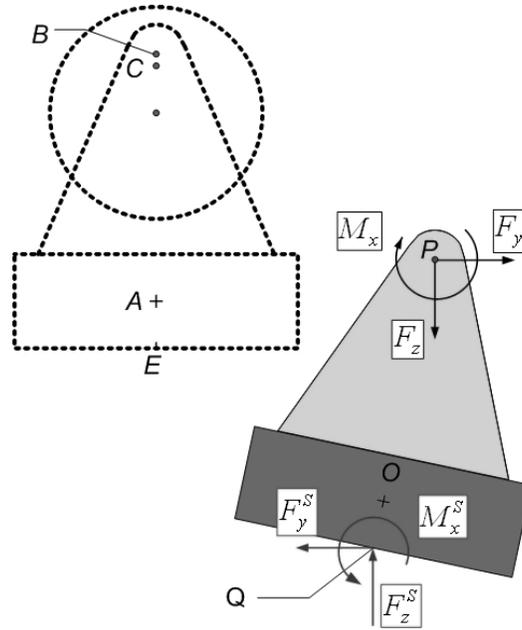
**Figura 4.3:** Deslocamento horizontal  $u_y^R$  do rotor sobre suporte rígido para distintos valores do amortecimento externo.

O amortecimento interno não tem influência neste caso, pois sendo o sistema isotrópico o movimento do eixo é de precessão direta, ou seja, não há precessão relativa. Se houver amortecimento interno, os gráficos serão os mesmos da **Figura 4.1**.

## Dinâmica do sistema solo-fundação

Em construções que envolvem máquinas rotativas a fundação é a parte que sustenta o rotor, ou seja, a própria máquina rotativa. Quando se faz o seu dimensionamento tem-se como objetivo básico limitar o seu movimento. Fez-se anteriormente a análise do rotor na ausência da fundação e do solo. Faz-se agora a análise dinâmica do sistema fundação-solo. A fundação será analisada sobre o solo sem a presença do rotor, mas podendo haver uma força excitadora de altura  $h_B + h_G$  na direção horizontal,  $F_y$ , ou na direção vertical,  $F_z$ , ou ainda pode haver um momento livre como excitação,  $M_x$  tal como na **Figura 3.22**. Na equação (3.120) a excitação era consequência de um momento externo, ou seja, aplicava-se um torque de maneira a manter a velocidade

constante do rotor. Agora, na ausência do rotor pode-se aplicar individualmente a excitação em cada grau de liberdade  $u_z^S$ ,  $u_y^S$  e  $\varphi^S$ . Os graus  $u_z^R$  e  $u_y^R$  deixam de existir, conseqüentemente todos os parâmetros advindos destes também, ou seja, o amortecimento do eixo do rotor, a força elástica restauradora do eixo do rotor e a massa do rotor. Na **Figura 4.4** pode-se ver as forças envolvidas sem a presença do rotor.



**Figura 4.4:** Forças de solo e forças de excitação.

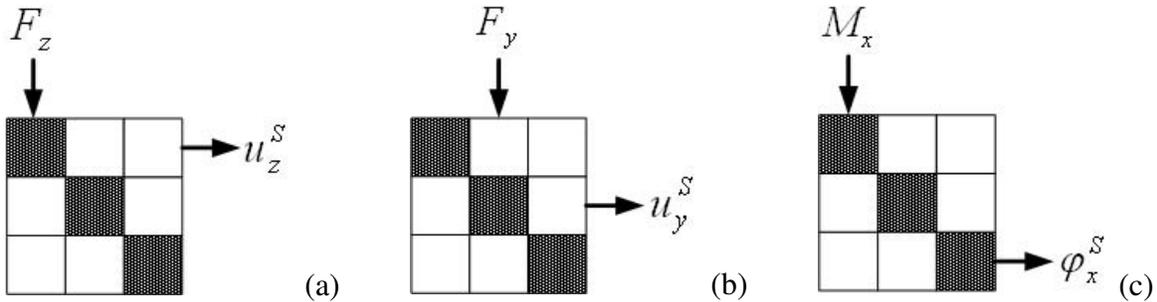
Na equação (3.120) os valores  $d_I$ ,  $d_E$ ,  $k^R$ ,  $m_R$  tornam-se nulos, resultando na matriz de amortecimento nula. A matriz de massa e a matriz de impedância ficam somente com os três graus de liberdade cada uma referentes a fundação.

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_F & 0 & 0 \\ 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{bmatrix} + i\omega[0] + Ga \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}_z^S \\ \bar{u}_y^S \\ \bar{\varphi}^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z \\ F_y \\ M_x + (h_B + h_G)F_y \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

A equação acima considera a fundação lisa, ou seja, a matriz de impedância é diagonal. Já a equação abaixo considera a fundação “colada”, a matriz de impedância é não diagonal.

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_F & 0 & 0 \\ 0 & m_F & m_F h_G \\ 0 & m_F h_G & I_{xx}^{F/O} + m_F h_G^2 \end{bmatrix} + i\omega[0] + Ga \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & s_{y\varphi} \\ 0 & s_{\varphi y} & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}_z^S \\ \bar{u}_y^S \\ \bar{\varphi}^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_z \\ \bar{F}_y \\ \bar{M}_x + (h_B + h_G)\bar{F}_y \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

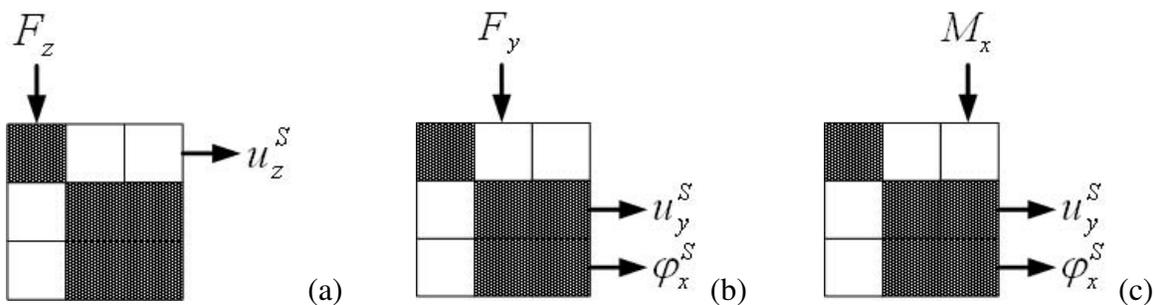
Nos sistemas (4.3) e (4.4) há diversos mecanismos de acoplamento. No sistema (4.3) a matriz de impedância é diagonal e o acoplamento pode ocorrer pela matriz de massa. Contudo se a altura do centro de massa for nula,  $h_G = 0$  ou  $H_G = 0$ , a matriz de massa será diagonal e o sistema (4.3) desacoplado. Na **Figura 4.5** representa-se o mecanismo pelo qual o sistema desacoplado responde a cada força externa aplicada, os quadrados em negrito representam a posição dos termos da matriz de massa e da matriz de impedância.



**Figura 4.5:** Representação da direção da excitação e resposta do grau correspondente para sistemas com matrizes de inércia e impedância diagonais.

Em (a) tem-se a força  $F_z$  atuando e a resposta do sistema somente em  $u_z^S$ . Em (b) tem-se a força  $F_y$  atuando e a resposta em  $u_y^S$ . Em (c) tem-se o momento  $M_x$  atuando e a resposta do sistema em  $\varphi_x^S$ .

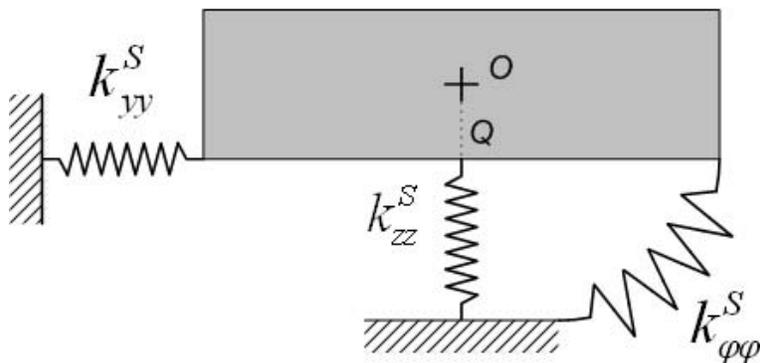
No sistema (4.4) ocorre acoplamento pela matriz de impedância. E em ambos os sistemas, (4.3) e (4.4), há acoplamento pela matriz de massa se a altura do centro de massa for maior do que zero,  $h_G > 0$ . Pode-se verificar na Figura 4.6 a ocorrência do acoplamento quando há força  $F_y$  ou momento  $M_x$  atuando. Em ambos os casos o sistema responde simultaneamente em  $u_y^S$  e  $\varphi_x^S$ . Se houver força  $F_z$  atuando, o sistema responde somente em  $u_z^S$  como no sistema desacoplado, pois o acoplamento ocorre somente nos graus  $u_y^S$  e  $\varphi_x^S$ .



**Figura 4.6:** Representação da direção da excitação e respostas dos graus correspondentes para sistemas com matrizes de inércia ou impedância diagonais.

Nos sistemas (4.3) e (4.4) pode haver excitação no grau de liberdade  $\varphi_x^S$  aplicando-se uma força  $F_y$ , bastando para isso  $h_G > 0$  ou  $h_B > 0$ . Neste caso o sistema será simultaneamente excitado nos graus  $u_y^S$  e  $\varphi_x^S$ , respondendo individualmente de acordo com as figuras **Figura 4.5** e **Figura 4.6**.

O solo primeiramente será modelado de maneira simples dotada de rigidez constante como na **Figura 4.7**, ou seja, nos modelos acima a matriz de impedância é substituída por uma matriz de rigidez constante.



**Figura 4.7:** Proposta de substituição do solo por molas.

A matriz de rigidez é formada pelos termos  $k_{zz}^S$ ,  $k_{yy}^S$ ,  $k_{\varphi\varphi}^S$  que substituem os termos  $s_{zz}$ ,  $s_{yy}$  e  $s_{\varphi\varphi}$ . Se a interface solo-fundação for “colada” incluem-se os termos  $k_{y\varphi}^S$ ,  $k_{\varphi y}^S$  em substituição dos termos  $s_{y\varphi}$  e  $s_{\varphi y}$ .

As matrizes de impedância acima consideram que o solo é um semi-espaço, viscoelástico linear. É uma consideração mais elaborada, na qual os parâmetros de rigidez sofrem influência da frequência. A impedância mecânica, também conhecida como rigidez dinâmica, faz uso de números complexos para ser descrita. A parte real reflete a rigidez e inércia do solo. A parte imaginária reflete a radiação. A radiação resulta na dissipação de energia por ondas. Os dados utilizados foram provenientes de um modelo tridimensional que utiliza elementos de contorno para solução, Carrion (2002).

Faz se agora a normalização dos sistemas deduzidos em (4.3) e (4.4). A normalização efetuada agora é ligeiramente diferente da normalização efetuando com o sistema completo rotor-fundação-solo. A frequência natural do eixo não entra na formulação.

Abaixo estão os parâmetros originais que entraram na formulação do sistema fundação-solo.

**Tabela 2:** Total de parâmetros utilizados nas equações (4.3) e (4.4)

	Fundação	Solo
Massa e densidade	$m_F, I_{xx}^{F/O}$	$\rho_S$
Impedância mecânica		$s_{zz}, s_{yy}, s_{\phi\phi}, s_{\phi y}, s_{y\phi}$
Geometria	$h_B, h_G, h_F, b, a$	
Velocidade		$v_S$

A seguir estão os parâmetros adimensionais (6 ao todo) utilizados para normalizar os sistemas (4.3) e (4.4).

**Tabela 3:** Parâmetros adimensionais

Geométricos	$H_B = \frac{h_B}{a}$	$H_G = \frac{h_G}{a}$	$H_F = \frac{h_F}{a}$	$B = \frac{b}{a}$
Razão de massa	$B_F = \frac{m_F}{m_S} = \frac{4\rho_F}{\rho_G}$			
Velocidade	$A_0 = \frac{a\omega}{v_S}$			

Utiliza-se o termo  $\frac{A_0^2}{m_F \omega^2}$  para normalizar os sistemas de equações. Para os termos da matriz de massa (1,1) e (2,2) multiplicados pela velocidade de rotação ao quadrado,  $\omega^2$ , a normalização abaixo é demonstrada.

$$\omega^2 m_F \frac{A_0^2}{m_F \omega^2} = A_0^2$$

Para os termos (2,3) e (3,2) da matriz de massa multiplicados por  $\omega^2$ , tem-se a normalização:

$$\omega^2 m_F h_G \frac{A_0^2}{m_F \omega^2} = h_G A_0^2 = H_G a A_0^2$$

No termo (3,3) é preciso normalizar o momento de inércia em relação ao ponto  $O$  e também normalizar o termo resultante da mudança do sistema de coordenadas.

$$I_{xx}^{F/O} \frac{A_0^2 \omega^2}{m_F \omega^2} = \frac{\left( \frac{4a^2 + h_F^2}{12} m_F \right) A_0^2 \omega^2}{m_F \omega^2} = \frac{(4a^2 + h_F^2) A_0^2}{12} = \frac{(4a^2 + H_F^2 a^2) A_0^2}{12} = \frac{(4 + H_F^2) a^2 A_0^2}{12}$$

$$m_F h_G^2 \frac{\omega^2 A_0^2}{m_F \omega^2} = h_G^2 A_0^2 = \frac{a^2}{a^2} h_G^2 A_0^2 = H_G^2 a^2 A_0^2$$

Para a matriz de rigidez dinâmica o valor  $Ga$  deve ser normalizado, o produto do módulo de elasticidade do solo pela semi-largura da fundação. O módulo de elasticidade  $G$  é substituído por  $G = \rho_G v_s^2$ . Por sua vez a densidade do solo  $\rho_s$  é substituída por  $\rho_G = \frac{m_F}{B_F ab h_F}$ .

$$\overbrace{Ga}^{G = \rho_G v_s^2} \frac{A_0^2}{m_F \omega^2} = \frac{\overbrace{\rho_G v_s^2 a A_0^2}^{\rho_G = \frac{m_F}{B_F ab h_F}}}{m_F \omega^2} = \frac{v_s^2 a A_0^2}{B_F ab h_F \omega^2} = \frac{v_s^2 A_0^2}{B_F ab H_F \omega^2} = \frac{a}{a} \frac{v_s^2 A_0^2}{B_F ab H_F \omega^2} = \frac{a A_0^2}{A_0^2 B_F b H_F} = \frac{1}{B_F H_F} \frac{a}{b}$$

Finalmente faz-se a normalizando das forças aplicadas  $F_z$ ,  $F_y$  e do momento  $M_x$ . O procedimento abaixo também é válido para a força horizontal  $F_y$ .

$$\bar{F}_{Rz} \frac{A_0^2}{m_F \omega^2} = \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S^2}$$

Para o momento tem-se:

$$\bar{M}_x \frac{A_0^2}{m_F \omega^2} = \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S^2}$$

O sistema resultante para o sistema solo-fundação normalizado está transcrito abaixo.

$$\left( \begin{array}{c} -A_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & H_G a \\ 0 & H_G a & \frac{[4 + (H_F)^2] a^2}{12} + H_G^2 a^2 \end{bmatrix} + \\ \frac{1}{B_F H_F} \frac{a}{b} \begin{bmatrix} s_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_z^s \\ \bar{u}_y^s \\ \bar{\varphi}^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S^2} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S^2} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S^2} + (H_B + H_G) \bar{F}_{Ry} \frac{a^3}{m_F v_S^2} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Parâmetros utilizados

$$B_F = 5$$

$$H_F = 1$$

$$\frac{b}{a} = 1$$

$$a = 1$$

$$\bar{F}_{Rz} \frac{1}{m_F v_S} = 1, \bar{F}_{Ry} \frac{1}{m_F v_S} = 1 \text{ ou } \bar{M}_x \frac{1}{m_F v_S} = 1$$

$$\eta = 0, \eta = 0,01, \eta = 0,05 \text{ e } \eta = 0,2$$

## Resultados

Os principais parâmetros de entrada já foram definidos, é possível então obter alguns resultados. Há quatro casos a serem analisados. Primeiro os parâmetros geométricos  $H_B$  e  $H_G$  são nulos, aplicam-se forças externas (e momento) em cada direção de excitação  $F_z$ ,  $F_y$  e  $M_x$ . No segundo caso  $H_G$  permanece nulo, enquanto  $H_B$  adquire valores maiores que zero; e aplicam-se forças externas na direção z e na direção y. No terceiro caso,  $H_B$  permanece nulo, enquanto  $H_G$  adquire valores maiores que zero; e aplicam-se individualmente forças (e momento) em cada uma das direções de excitação. Obtêm-se os resultados de cada um dos casos acima com a matriz de impedância diagonal e em seguida obtêm-se os resultados com a matriz de impedância contendo termos não diagonais. Por último mantêm-se os parâmetros  $H_B$  e  $H_G$  nulos e faz-se o estudo com a variação do parâmetro  $B_F$ .

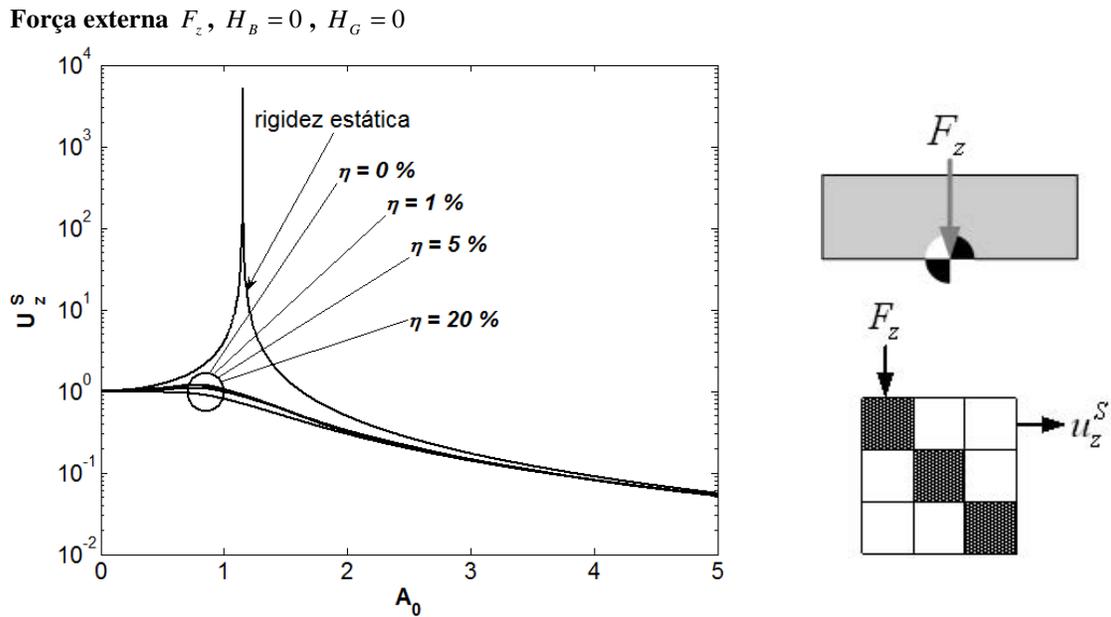
### Dinâmica da fundação para $H_G = 0$ e $H_B = 0$

Sendo  $H_B = H_G = 0$ , o centro de massa da fundação ficará rente ao solo e a força externa de excitação atuará rente ao solo também. O vetor de força externa do sistema (4.5) na primeira análise terá somente valor na primeira linha,  $\bar{F}_z \frac{1}{m_F v_S} = 1$ , as demais linhas terão valor nulo, ou seja, o sistema será excitado somente na direção z. O vetor em questão toma o seguinte aspecto:

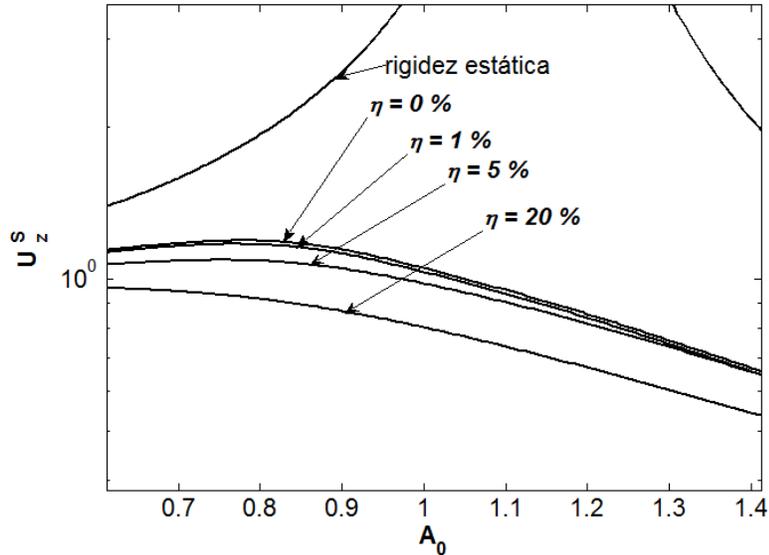
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_z \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_y \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

A rigidez estática adotada corresponde ao valor da rigidez dinâmica para a menor frequência conhecida, ou seja,  $A_0 = 0,005$  considerando este o valor estático,  $A_0 \approx 0$ . Por

exemplo, para o termo correspondente a impedância  $s_{zz}$ , adota-se o valor:  $k_{zz}^S = \text{Real}[s_{zz}(A_0 = 0,005)]$ . Faz-se a comparação da rigidez constante ( $k_{zz}^S$ ) invariável com a frequência com valores de rigidez que variam com a frequência ( $s_{zz}(A_0)$ ). Compara-se também a impedância mecânica para diversos valores de amortecimento interno:  $\eta = 0\%$ ,  $\eta = 1\%$ ,  $\eta = 5\%$  e  $\eta = 20\%$ .



**Figura 4.8:** Módulo do deslocamento vertical da fundação sobre uma rigidez constante e sobre um semi-espaço para diversos valores do amortecimento material do solo  $\eta$ .



**Figura 4.9:** Detalhe do deslocamento vertical da fundação.

A resposta do sistema ocorre somente na direção da excitação,  $u_z^S$ . A excitação é feita na direção  $z$  e o sistema responde nesta mesma direção indicando que na direção  $z$  não há nenhum acoplamento com as demais direções. O valor de  $A_0 = 1,145$  corresponde ao valor da frequência de ressonância utilizando a rigidez estática com os parâmetros utilizados de  $a$ ,  $b$ ,  $B_F$  e  $H_F$ . A frequência de ressonância pode também ser escrita em radianos por segundo  $\omega_n^z = \frac{A_0 v_s}{a} = 1,145 \cdot v_s$  sendo que  $v_s$  corresponde ao valor da velocidade da onda de cisalhamento do solo. A frequência de ressonância para as curvas correspondentes a impedância mecânica mantém-se próximas de  $A_0 = 0,8$ , tendendo a diminuir com o aumento do amortecimento interno do solo,  $\eta$ . A massa da fundação adquire o valor  $m_F = B_F \rho_s a b h_F = 5 \cdot \rho_s$ . Sendo que  $\rho_s$  corresponde ao valor da densidade do solo.

Observando-se a curva correspondente a rigidez estática e comparando-se com as demais curvas, verifica-se que o sistema fundação-solo resulta ser fortemente amortecido quando colocado em um semi-espço viscoelástico. O amortecimento interno demonstra ter uma influência muito menor do que o amortecimento causado pela radiação de energia no semi-espço.

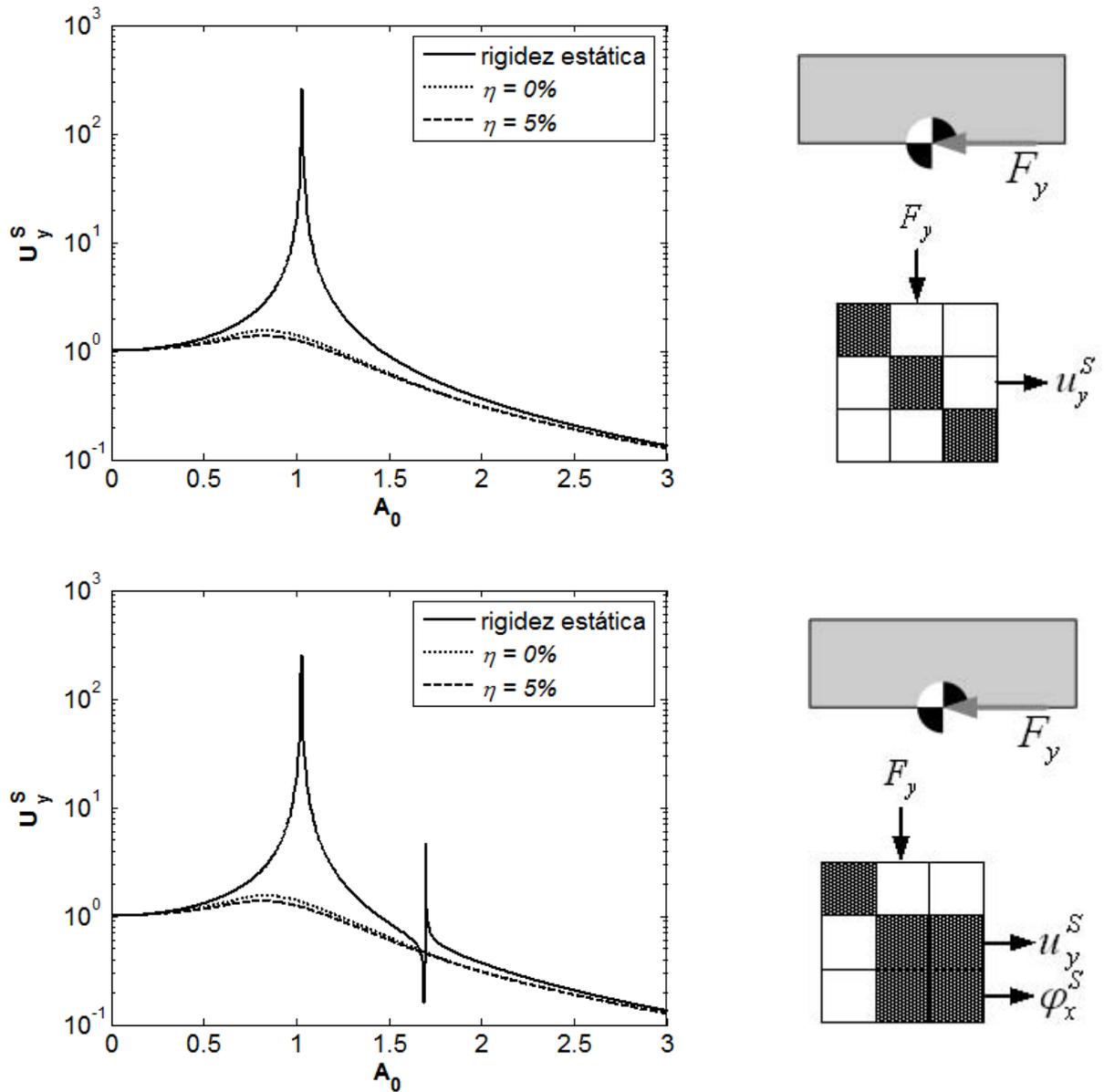
Alterando a excitação insere-se o valor  $\bar{F}_y \frac{1}{m_F v_S} = 1$  e os demais valores do vetor excitação ficam nulos. O vetor adquire o aspecto abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Os demais parâmetros de entrada mantêm-se os mesmos do exemplo anterior:  $a$ ,  $b$ ,  $B_F$ ,

$H_F$ ,  $H_B$ ,  $H_G$  e os parâmetros do solo.

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 0$



**Figura 4.10:** Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Matriz de impedância diagonal acima. Matriz de impedância não diagonal abaixo.

Ao se usar a matriz de impedância não diagonal, implica na introdução de acoplamento no sistema. Mais especificamente os graus de liberdade  $u_y^S$  e  $\varphi^S$  ficarão acoplados enquanto o grau  $u_z^S$  permanece desacoplado. A principal distinção entre as curvas correspondentes a matriz de impedância diagonal com as curvas de matriz de impedância não diagonal é o aparecimento de

dois picos de ressonância quando a rigidez é estática no primeiro caso. Nota-se que a primeira ressonância é coincidente nas duas figuras, inclusive quando a rigidez não é estática. Analisando-se as respostas que usam a matriz de impedância observa-se que não há evidências de uma segunda ressonância bem como alteração nas amplitudes de deslocamento apesar do acoplamento causado pela matriz, indicando a pouca influência que o termo  $s_{y\varphi}$  tem nesta resposta.

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 0$

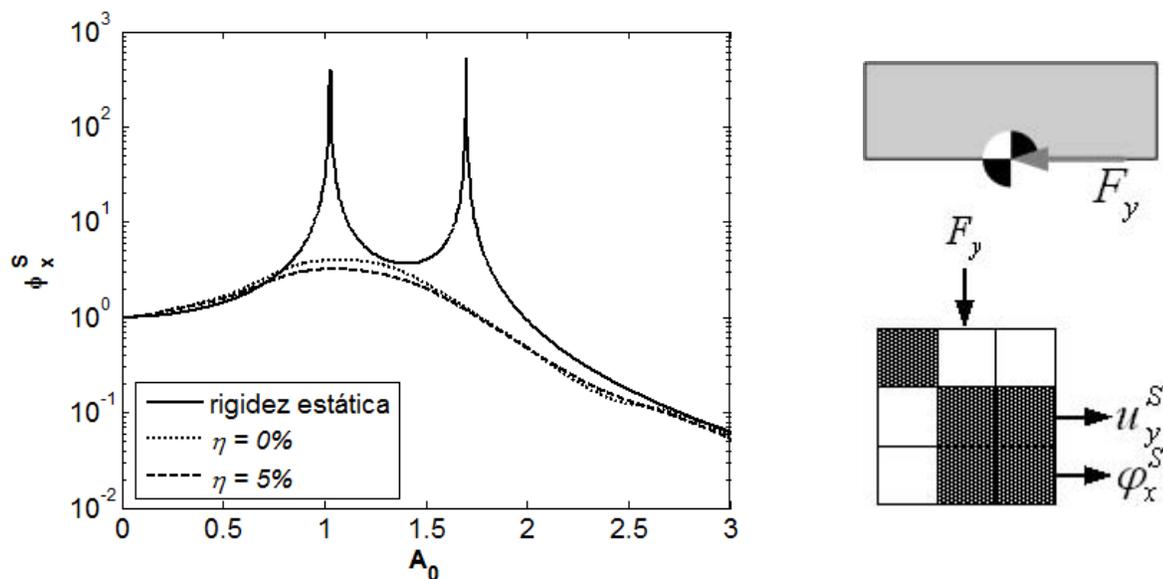


Figura 4.11: Módulo do deslocamento angular da fundação em resposta a força  $F_y$ .

Além do surgimento de outra ressonância destaca-se o deslocamento angular como resposta da força externa horizontal,  $F_y$ . O gráfico acima não consta na análise envolvendo a matriz de impedância diagonal indicando a ocorrência do acoplamento.

**Tabela 4:** Frequências de maior amplitude das FRFs em resposta da força  $F_y$ . A letra D se refere a equação com matriz de impedância diagonal e as letras ND se refere a equação com a matriz de impedância não diagonal.

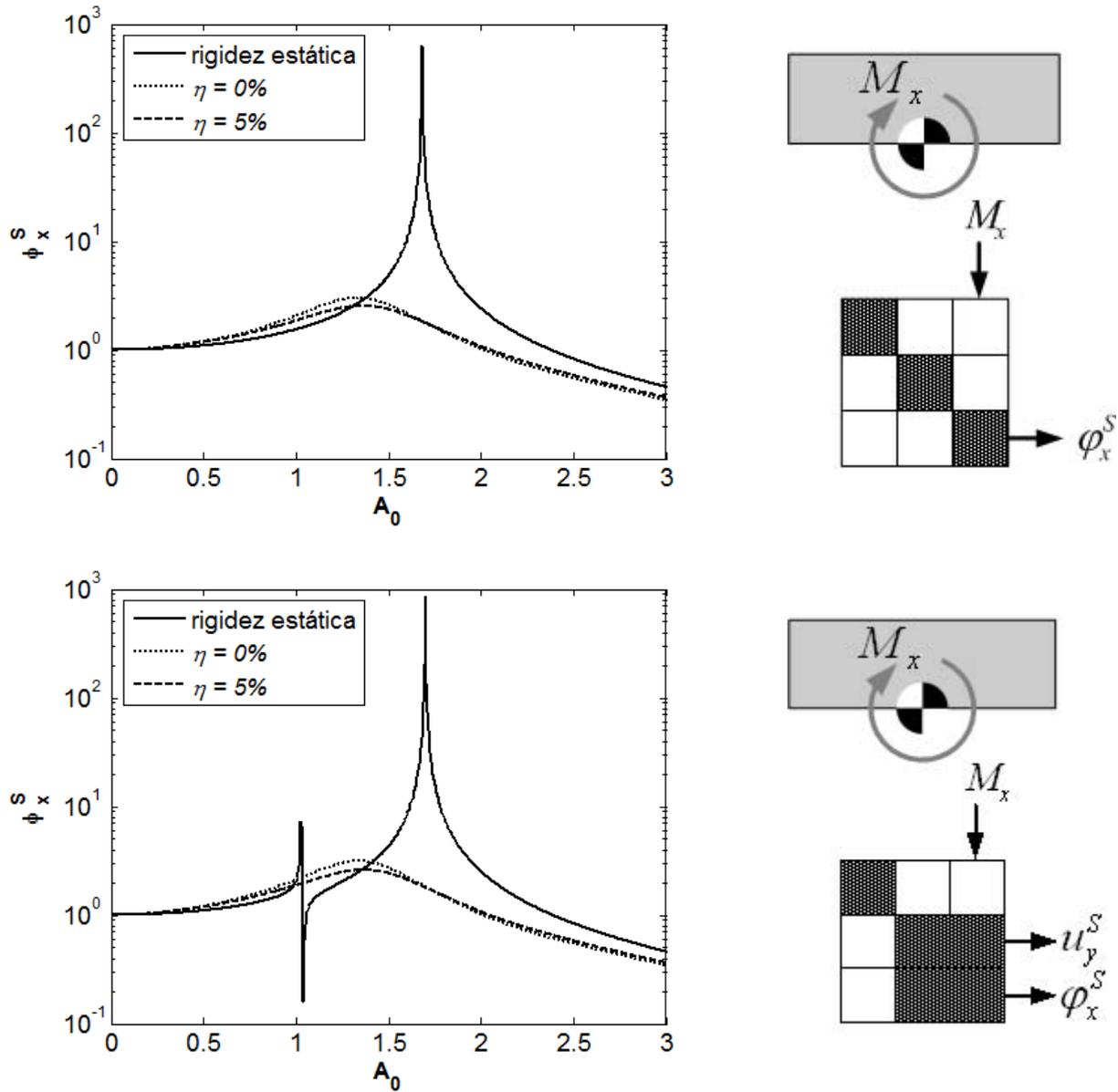
$H_B = H_G = 0$	D		ND		ND	
	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$
rigidez estática	1,015	-	1,030; 1,700	-	1,030; 1,700	-
$\eta = 0 \%$	0,840	1,536	0,840	1,541	1,080	3,969
$\eta = 1 \%$	0,825	1,400	0,825	1,504	1,060	3,773
$\eta = 5 \%$	0,820	1,369	0,815	1,369	1,050	3,199
$\eta = 20 \%$	0,700	1,096	0,700	1,093	0,920	1,840

Novamente se observa que a resposta do sistema ocorre somente na direção da excitação. Verifica-se que o gráfico obtido não difere muito do gráfico obtido anteriormente. A frequência de ressonância para a rigidez estática é um pouco menor  $A_0 = 1,03$ , mas as demais ressonâncias mantêm-se próximas de  $A_0 = 0,82$ .

Finalmente a última análise para este caso, aplica-se um momento unitário, ao invés de aplicar-se uma força, neste estudo usa-se um momento como excitação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

Momento externo  $M_x$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 0$



**Figura 4.12:** Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal acima. Com a matriz de impedância não diagonal abaixo.

Verifica-se mais uma vez o forte amortecimento introduzido pelo solo. A frequência de ressonância usando-se matriz de rigidez estática diagonal é  $A_0 = 1,67$ . E para as demais curvas a frequência de ressonância se mantém próxima de  $A_0 = 1,36$ . O deslocamento angular demonstrou ser mais sensível a alteração da frequência de ressonância com a introdução do solo.

Momento externo  $M_x$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 0$

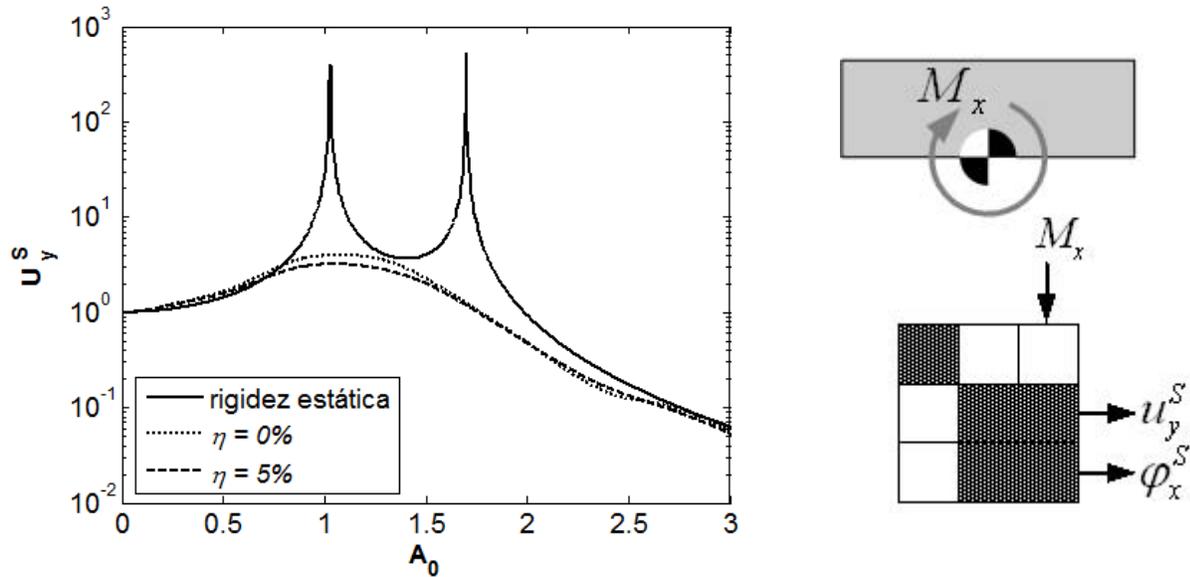


Figura 4.13: Módulo do deslocamento horizontal da fundação em resposta ao momento  $M_x$ .

Surge novamente uma resposta que não constava na análise da matriz de impedância diagonal. No gráfico acima as amplitudes máximas coincidem com o gráfico cuja excitação é em  $y$  e a resposta analisada está em  $\varphi$ . Isto se deve pelas propriedades simétricas da matriz de impedância,  $s_{\varphi y} = s_{y\varphi}$ .

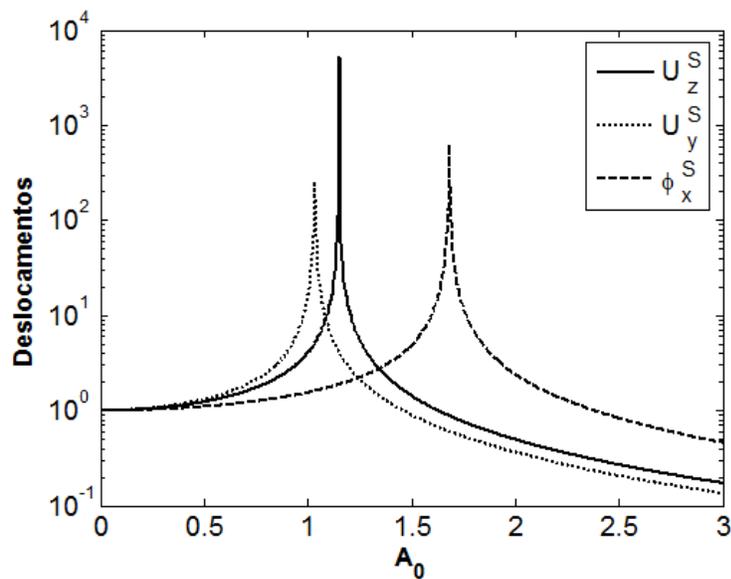
Tabela 5: Frequências de maior amplitude em resposta do momento  $M_x$

$H_B = H_G = 0$	D		ND		ND	
	$A_0$	$\varphi_x^s$	$A_0$	$\varphi_x^s$	$A_0$	$u_y^s$
rigidez estática	1,680	-	1,025; 1,700	-	1,030; 1,700	-
$\eta = 0\%$	1,335	3,034	1,335	3,166	1,080	3,969
$\eta = 1\%$	1,330	2,899	1,330	3,005	1,060	3,774
$\eta = 5\%$	1,360	2,548	1,370	2,597	1,050	3,199
$\eta = 20\%$	1,250	1,640	1,250	1,620	0,920	1,840

Tomando-se a equação cuja matriz de impedância é diagonal e se incidirem forças externas em todos os graus de liberdade simultaneamente, todos os graus de liberdade respondem, porém cada grau de liberdade responde individualmente independente da força externa aplicada em outro grau de liberdade. O vetor ficará completo.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_z \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_y \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Fica mais evidente que cada grau de liberdade possui sua própria frequência de ressonância. As frequências de ressonância nas direções vertical e horizontal são bastante próximas tanto se usando uma rigidez constante quanto usando a impedância mecânica.



**Figura 4.14:** FRFs para fundação sobre o solo modelado como mola de rigidez constante.

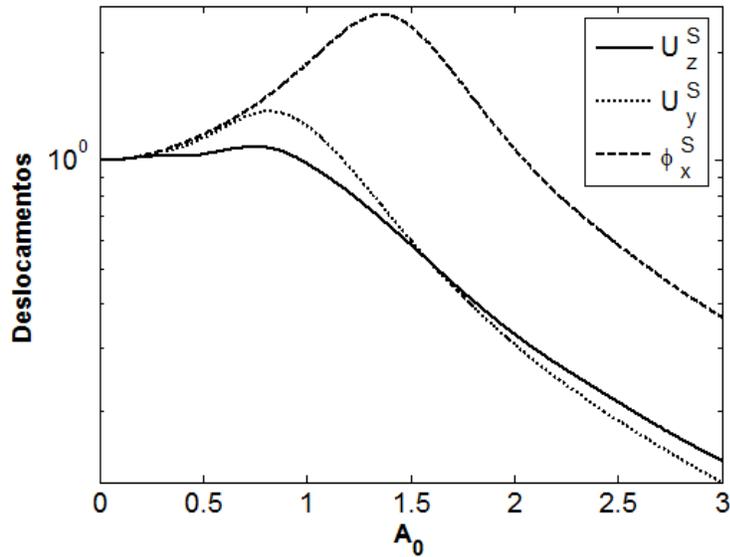


Figura 4.15: FRFs para fundação sobre o solo modelado como semi-espaço.

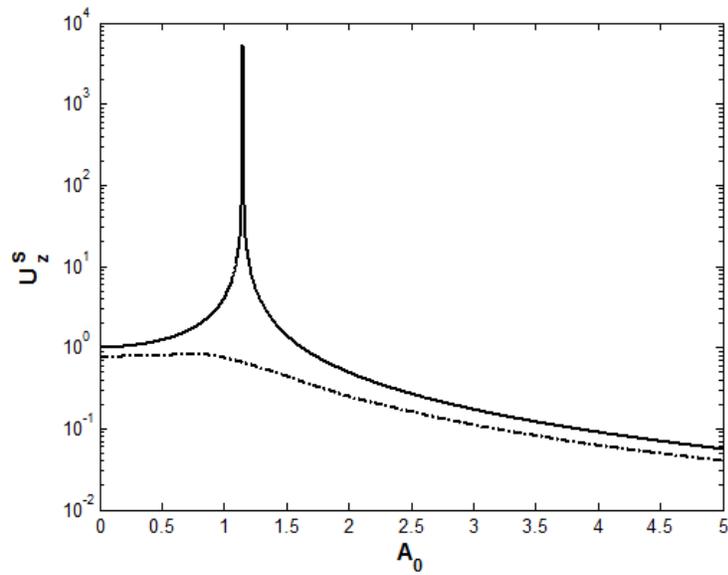
No gráfico acima se pode verificar que o deslocamento horizontal é maior que o deslocamento vertical. Isto se deve a uma maior flexibilidade do solo nesta direção uma vez que a força atuante nas duas direções possui a mesma intensidade.

### Dinâmica da fundação para $H_G = 0$ e $H_B > 0$

Neste caso o centro de massa da fundação fica rente ao solo,  $H_G = 0$ . A altura  $H_B$  é maior do que zero, assim quando houver uma força externa aplicada horizontalmente, esta causará um momento e conseqüentemente um deslocamento angular.

Introduz-se a mesma força externa do caso 1 para a direção z,  $\bar{F}_z \frac{1}{m_F v_S} = 1$ . Primeiramente fazendo  $H_B = 1$ .

Força externa  $F_z$ ,  $H_B = 1$ ,  $H_G = 0$

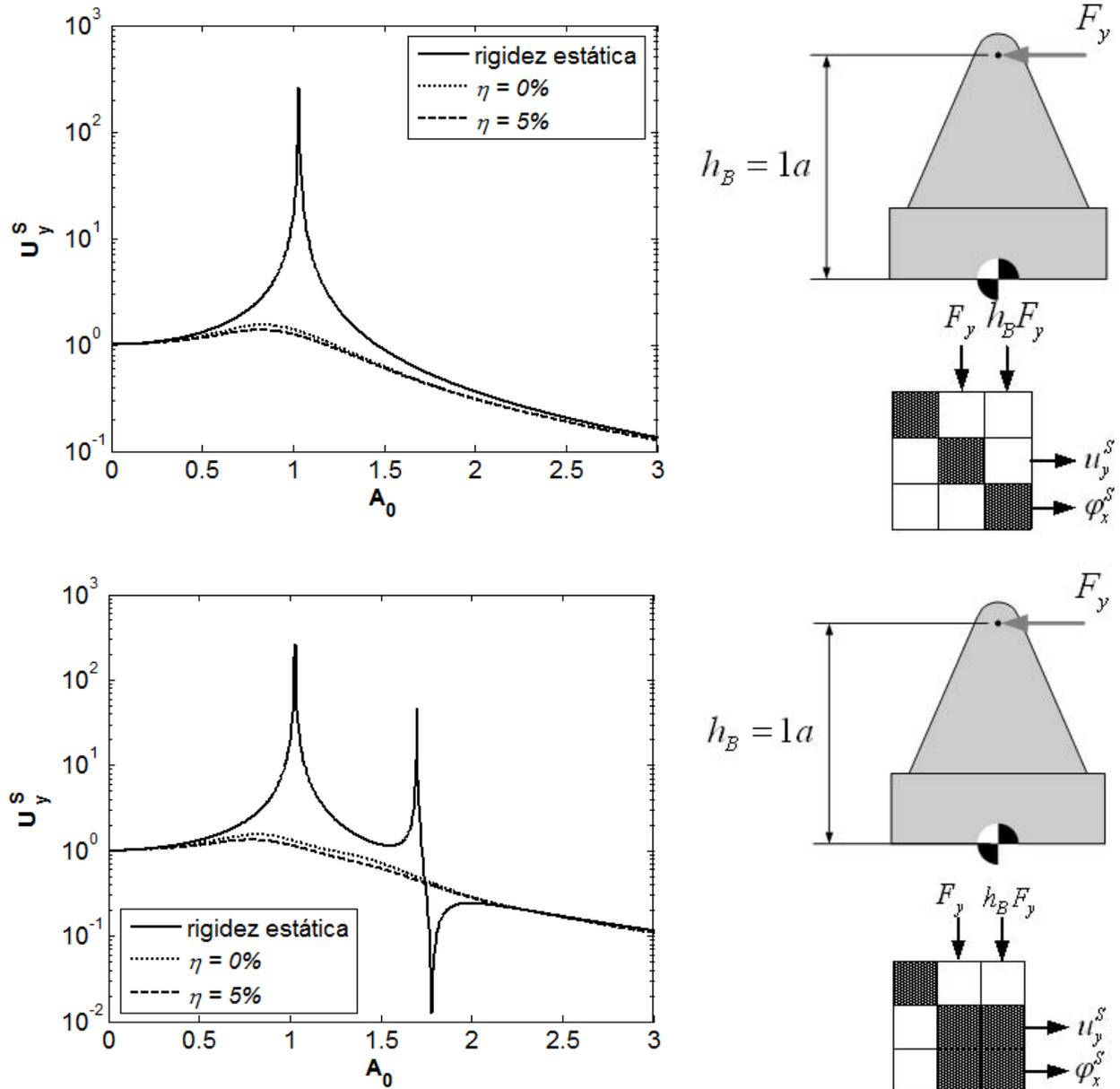


**Figura 4.16:** Módulos do deslocamento vertical da fundação.

Pode-se verificar que não houve nenhuma alteração em comparação com o caso 1. A introdução do parâmetro  $H_B$  não influencia o deslocamento vertical. Estudado a excitação em  $z$ , faz se o

estudo com a excitação em  $y$ ,  $\bar{F}_y \frac{1}{m_F v_S} = 1$ .

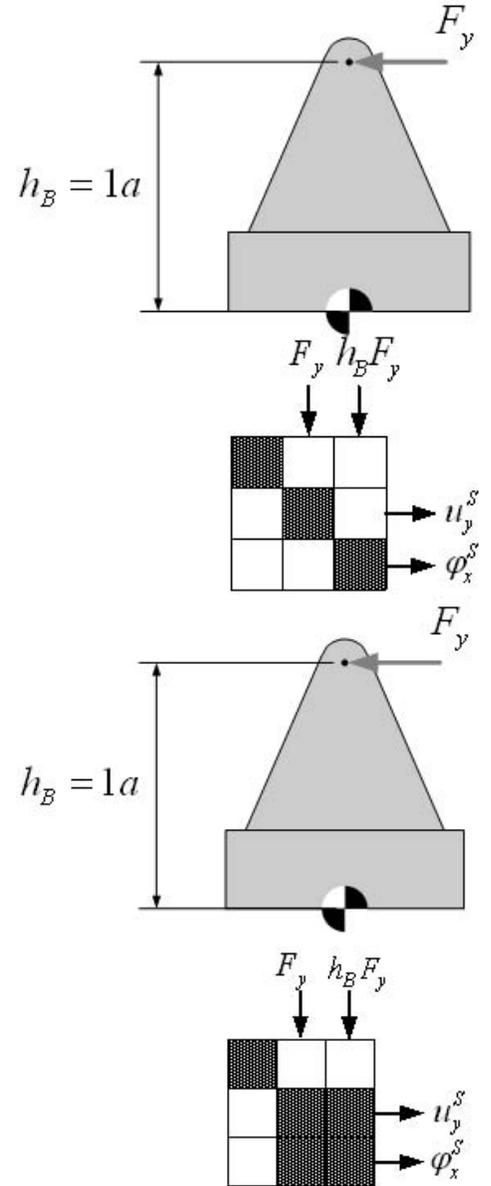
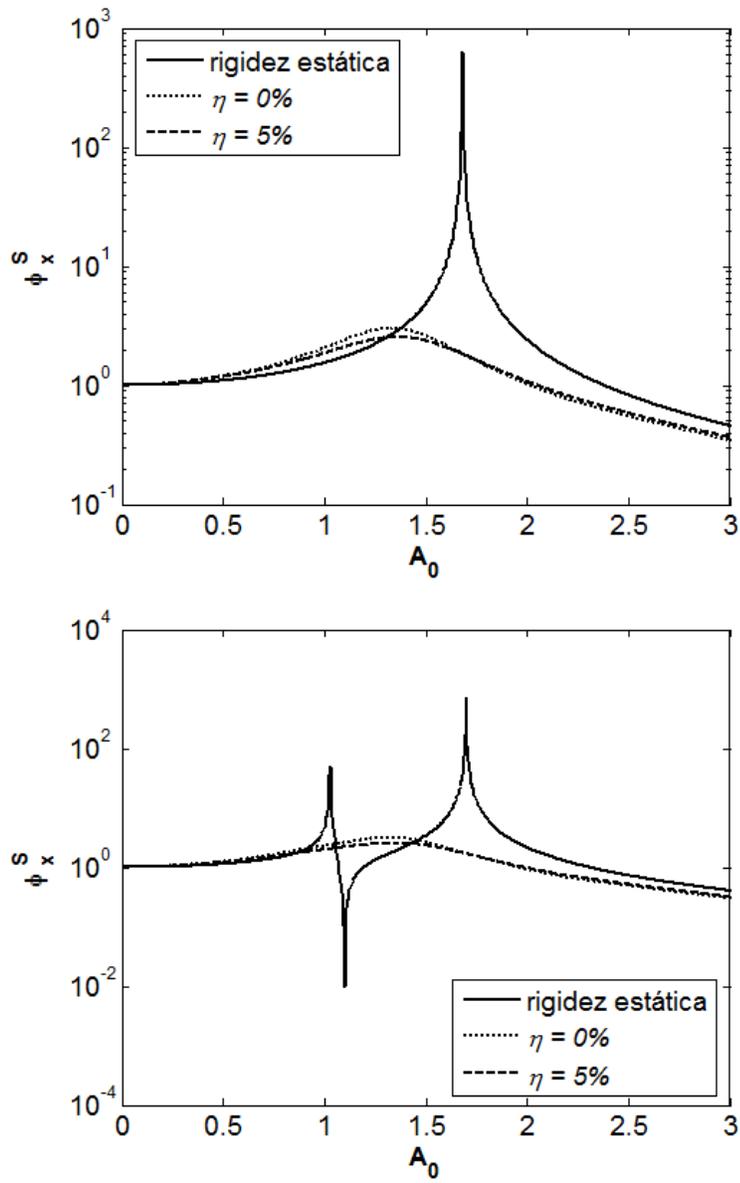
Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 1$ ,  $H_G = 0$



**Figura 4.17:** Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura (a). Com a matriz de impedância não diagonal, figura (b).

Diferentemente do que ocorreu para  $H_B = H_G = 0$ , aqui quando se aplica uma força horizontal, não somente haverá deslocamento na direção  $y$  como também haverá deslocamento angular. Isto se deve ao momento causado pelo termo  $H_B F_y$  do vetor de força.

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 1$ ,  $H_G = 0$



**Figura 4.18:** Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

**Tabela 6: Frequências de maior amplitude em resposta da força  $F_y$**

$H_G = 0$ e $H_B = 1$	D		ND		D		ND	
	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$
rigidez estática	1,030	-	1,030; 1,700	-	1,680	-	1,030; 1,700	-
$\eta = 0 \%$	0,840	1,536	0,825	1,546	1,335	3,034	1,315	3,170
$\eta = 1 \%$	0,825	1,500	0,815	1,499	1,330	2,899	1,310	3,002
$\eta = 5 \%$	0,820	1,369	0,785	1,337	1,360	2,548	1,340	2,569
$\eta = 20 \%$	0,700	1,096	0,780	1,213	1,250	1,620	1,270	1,705

Os gráficos superiores da **Figura 4.17** e **Figura 4.18** não diferem em nada dos gráficos superiores da **Figura 4.10** e **Figura 4.12**. A força externa na direção  $y$  tem o mesmo valor do caso 1 e com o momento externo ocorre o mesmo.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ H_B \bar{F}_{Ry} \frac{a^3}{m_F v_S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A distinção maior do caso 1 para o caso 2 é que no segundo uma aplicação de força externa na direção horizontal desloca simultaneamente a fundação na horizontal e angularmente.

Mudando-se o parâmetro da altura da fundação para  $H_B = 2$  o vetor adquire o aspecto abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ H_B \bar{F}_{Ry} \frac{a^3}{m_F v_S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 2$ ,  $H_G = 0$

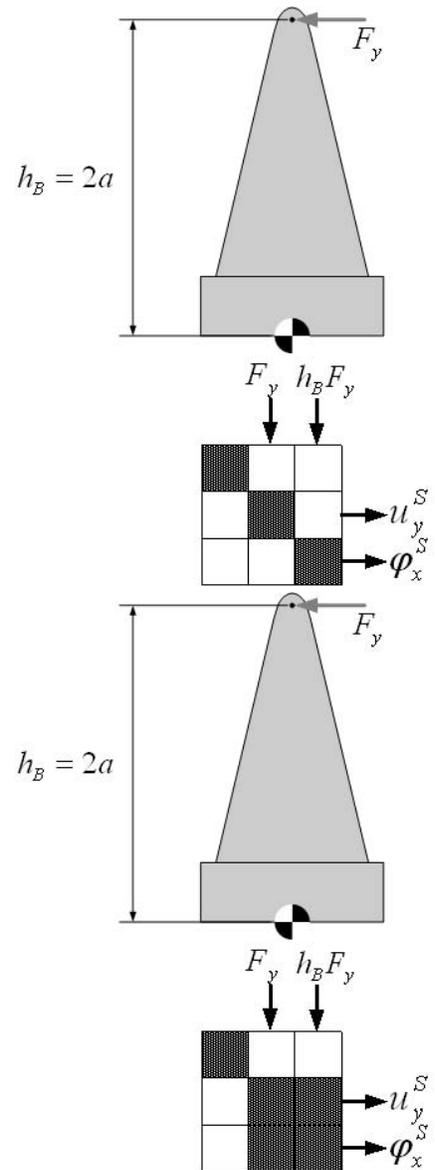
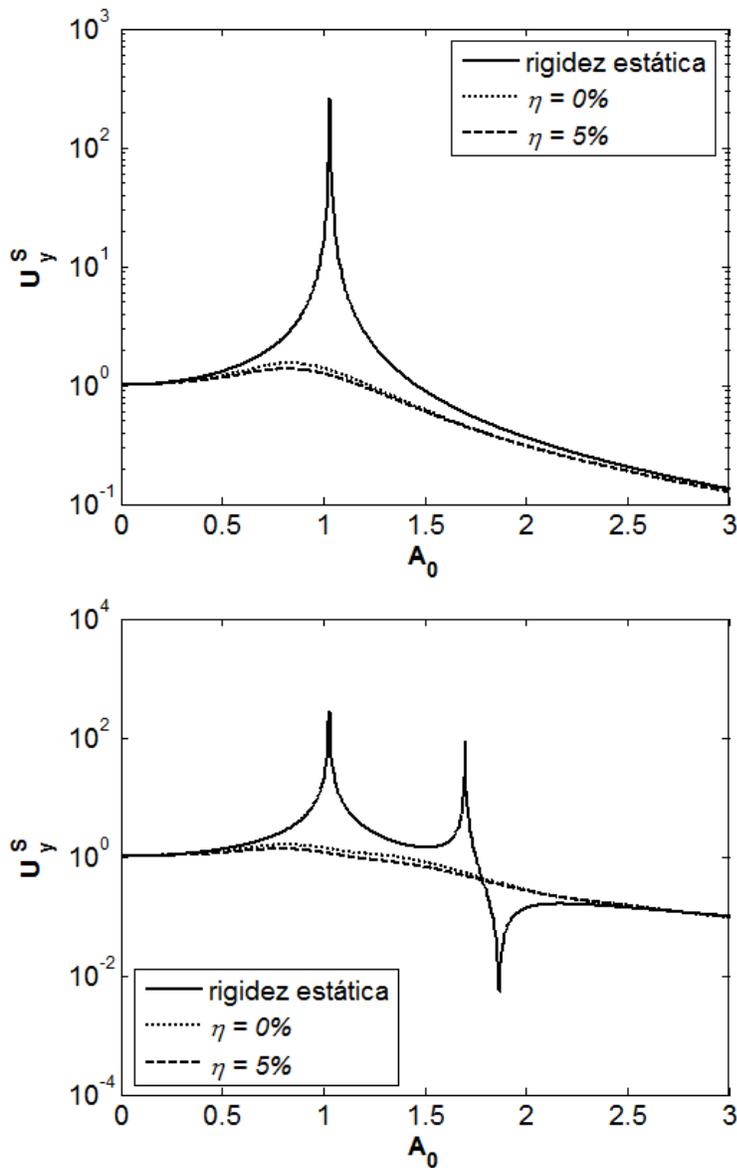
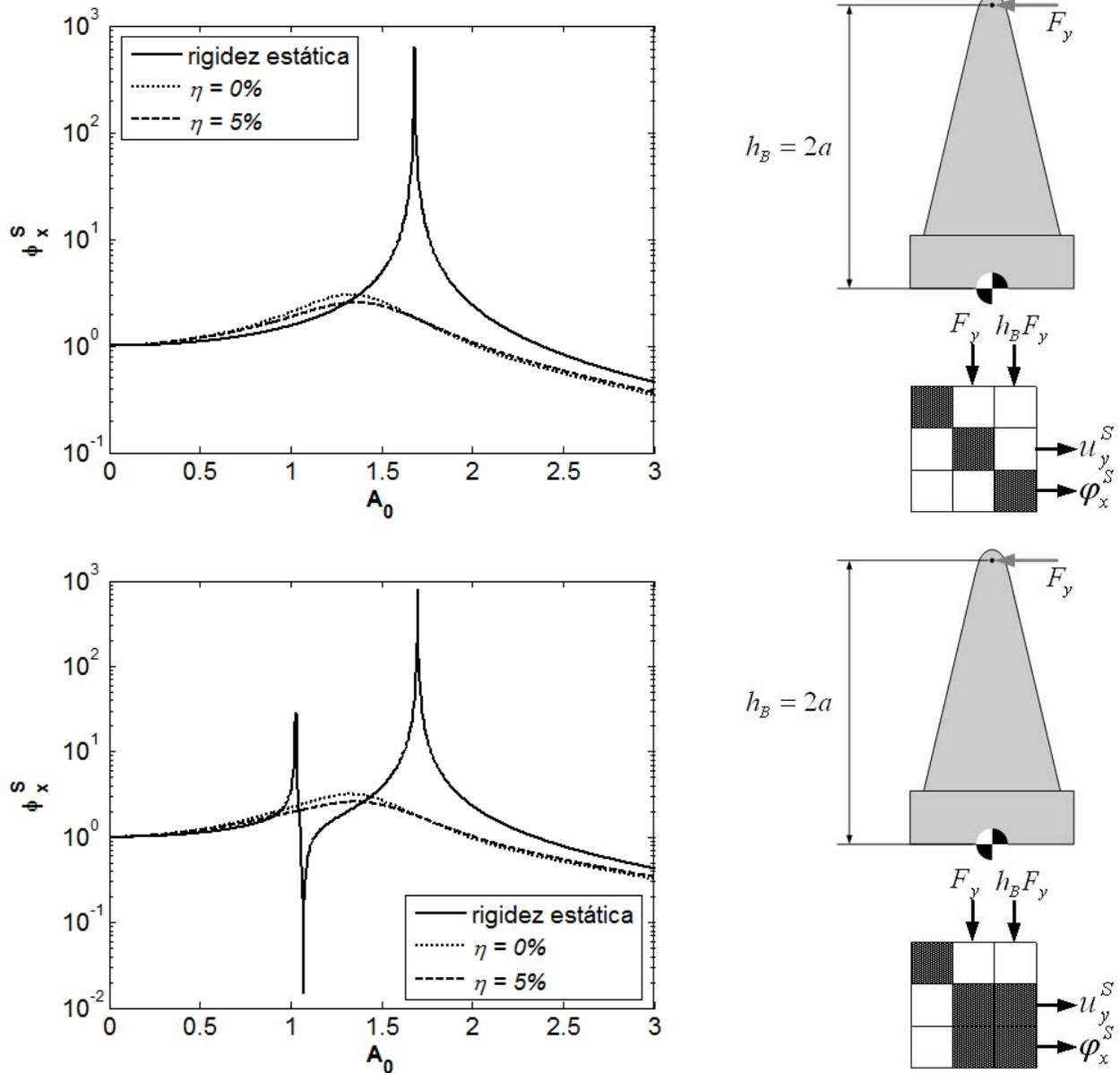


Figura 4.19: Módulo do deslocamento horizontal da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 2$ ,  $H_G = 0$



**Figura 4.20:** Módulo do deslocamento angular da fundação. Com a matriz de impedância diagonal, figura acima. Com a matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

Os deslocamentos são normalizados pelo deslocamento estático. Este deslocamento tem como referência a rigidez para a frequência nula,  $A_0 \approx 0$ . O deslocamento angular estático pode

ser escrito:  $\phi_0^S = \frac{\bar{F}_y h_B}{s_{\phi\phi} G a}$ , conseqüentemente o deslocamento normalizado é a razão:  $\frac{\phi^F}{\phi_0^S}$ . Pode-se

verificar, portanto que o deslocamento angular é diretamente proporcional a  $H_B$ . Observa-se que em todas as curvas referentes a matriz de rigidez não diagonal estas apresentam anti-ressonância, porém esta anti-ressonância não é evidente com a presença do modelo de solo viscoelástico.

**Tabela 7:** Frequências de maior amplitude em resposta da força  $F_y$

$H_G = 0$ e $H_B = 2$	D		ND		D		ND	
	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$
rigidez estática	1,030	-	1,030; 1,700	-	1,680	-	1,030; 1,700	-
$\eta = 0 \%$	0,840	1,536	0,825	1,593	1,335	3,034	1,325	3,167
$\eta = 1 \%$	0,825	1,500	0,820	1,537	1,330	2,899	1,320	3,002
$\eta = 5 \%$	0,820	1,369	0,785	1,348	1,360	2,548	1,350	2,580
$\eta = 20 \%$	0,700	1,096	0,845	1,399	1,250	1,620	1,250	1,660

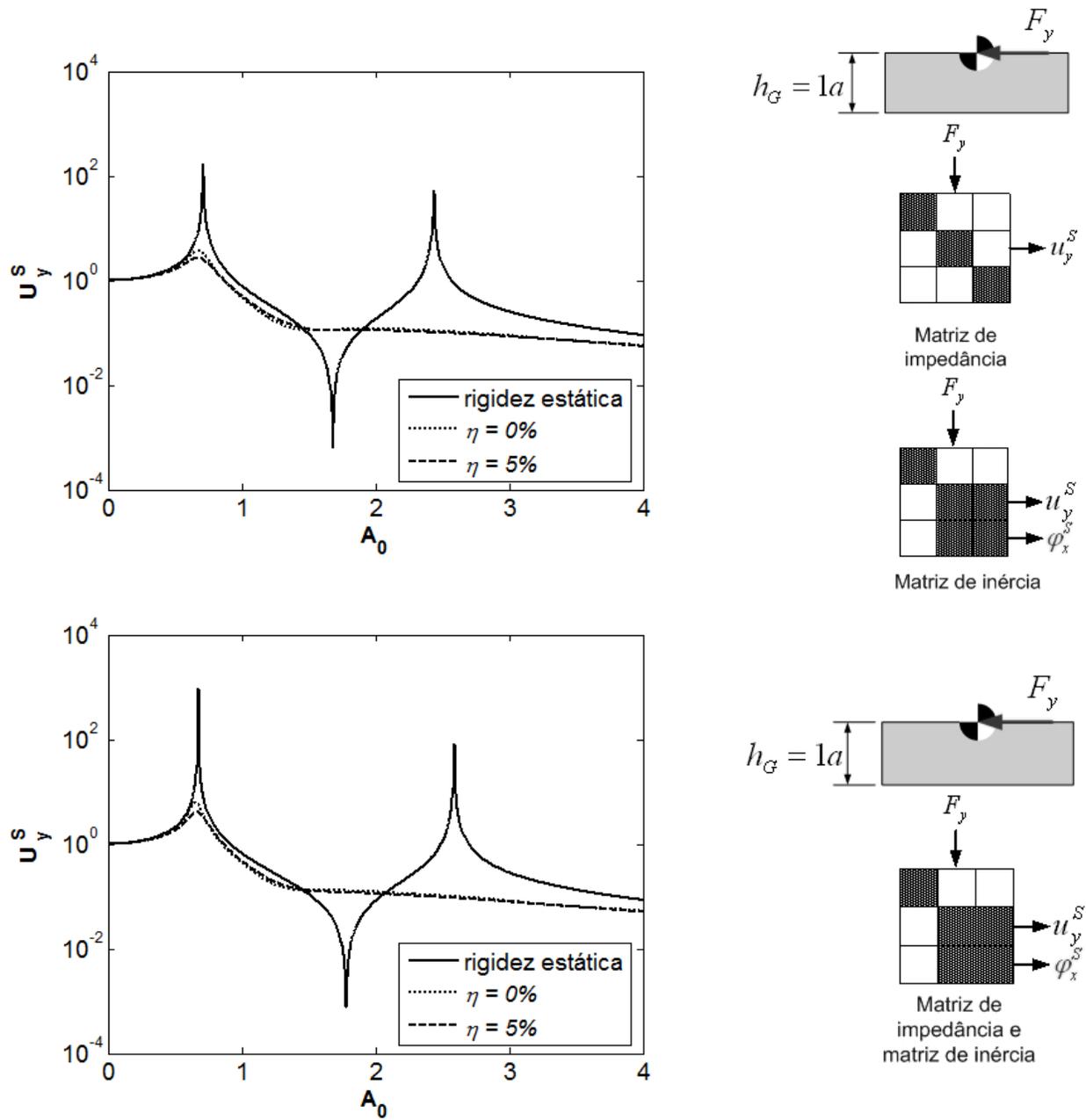
### Dinâmica da fundação para $H_G > 0$ e $H_B = 0$

Diferentemente dos estudos anteriores, agora o centro de massa da fundação está acima da base da fundação,  $H_G$  é maior do que zero. Assim como nos estudos anteriores  $H_B = H_G = 0$  e  $H_B > 0, H_G = 0$  aqui também o deslocamento na direção  $z$  é desacoplado dos demais. A distinção ocorre nos demais graus de liberdade. A matriz de massa não é mais diagonal como ocorreu aos estudos anteriores devido ao valor não nulo de  $H_G$ , ver equação (4.5). O acoplamento no sistema dos graus de liberdade  $u_y^S$  e  $\varphi^S$  pode ocorrer de duas maneiras, pela matriz de impedância e pela matriz de massa. Quando aplicada uma força externa horizontal espera-se que ocorram dois picos de ressonância.

Faz-se o estudo com cada um dos vetores de força alternadamente:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{Rz} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{F}_{Ry} \frac{a^2}{m_F v_S} \\ \bar{M}_x \frac{a^2}{m_F v_S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 1$



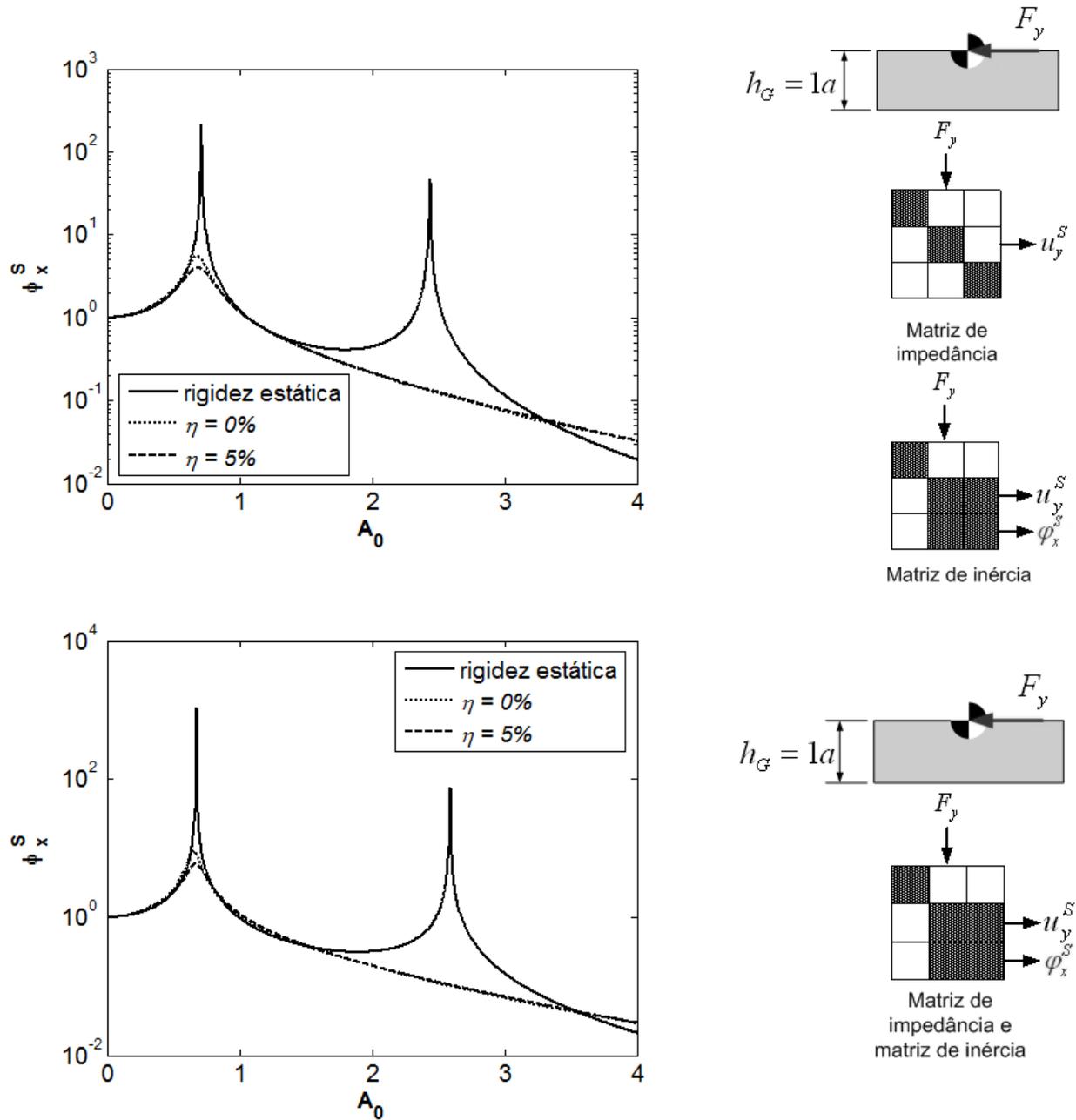
**Figura 4.21:** Módulo do deslocamento horizontal. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

Na condição de rigidez estática ocorrem dois picos de ressonância. Nas proximidades da frequência  $A_0 = 0,71$ , encontram-se as ressonâncias para as demais curvas que representam a fundação sobre o solo dinâmico. Verifica-se que não há evidência da ocorrência de mais

ressonâncias na condição de solo dinâmico, comprovando o forte amortecimento introduzido pelo solo. Outro fenômeno não ocorrido nos demais casos é o surgimento da anti-ressonância. Esta pode ocorrer quando se mede a resposta do sistema no mesmo grau da incidência da excitação. Verifica-se nos gráficos acima que nas proximidades de  $A_0 = 1,3$  há uma região de baixa amplitude, e de maneira mais pronunciada em  $A_0 = 1,7$  para a rigidez estática, estas são as anti-ressonâncias.

Novamente no gráfico abaixo se pode verificar a não incidência da segunda ressonância quando o solo é dinâmico. Quando a matriz de impedância é não diagonal e a força externa é horizontal pode-se notar um aumento do deslocamento em comparação com o mesmo caso sendo a matriz de impedância diagonal.

Força externa  $F_y$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 1$



**Figura 4.22:** Módulo do deslocamento angular. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

Novamente no gráfico abaixo se pode verificar a não incidência da segunda ressonância quando o solo é dinâmico. Quando a matriz de impedância é não diagonal e a força externa é

horizontal pode-se notar um aumento do deslocamento em comparação com o mesmo caso sendo a matriz de impedância diagonal.

**Tabela 8:** Frequências de maior amplitude em resposta da força  $F_y$

$H_G = 1$ e $H_B = 0$	D		ND		D		ND	
	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$
rigidez estática	0,710; 2,435	-	0,675; 2,590	-	0,710; 2,435	-	0,675; 2,590	-
$\eta = 0 \%$	0,675	3,748	0,655	6,269	0,680	5,580	0,655	8,963
$\eta = 1 \%$	0,670	3,430	0,655	5,539	0,680	5,107	0,655	7,944
$\eta = 5 \%$	0,675	2,700	0,665	4,055	0,685	4,035	0,670	5,944
$\eta = 20 \%$	0,615	1,453	0,590	1,368	0,660	2,051	0,645	1,867

A seguir ao invés de se aplicar uma força externa horizontal, aplica-se um momento externo,  $M_x$ . Pode-se observar que a anti-ressonância surge agora no deslocamento angular.

Força externa  $M_x$ ,  $H_B = 0$ ,  $H_G = 1$

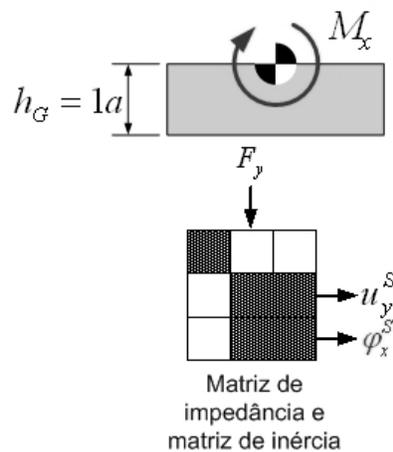
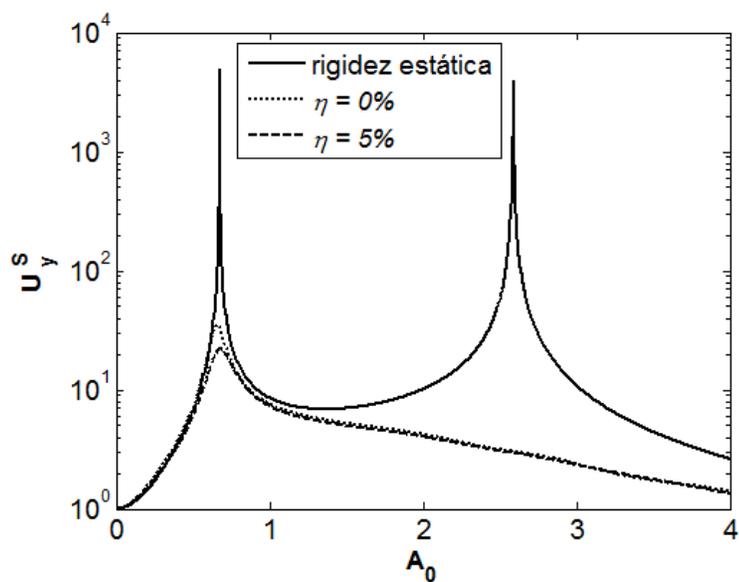
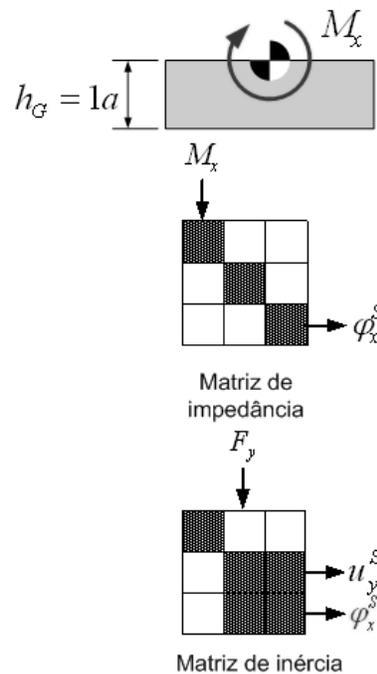
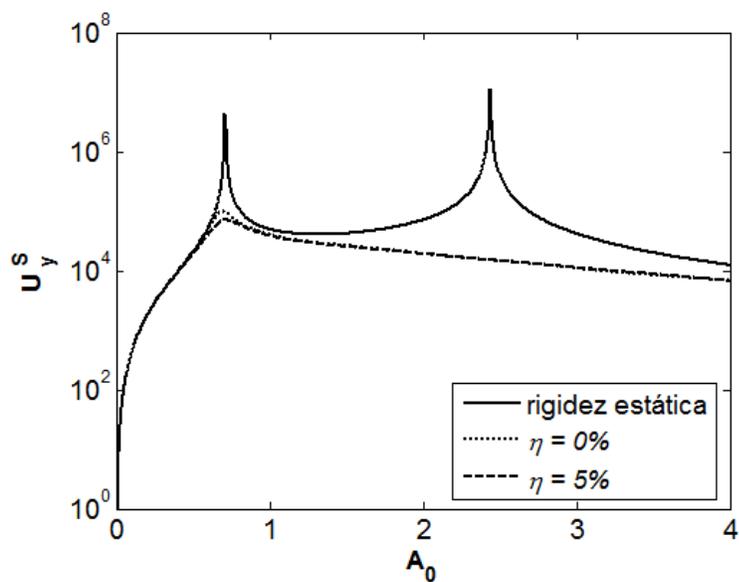


Figura 4.23: Módulo do deslocamento horizontal. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

Força externa  $M_x, H_B = 0, H_G = 1$

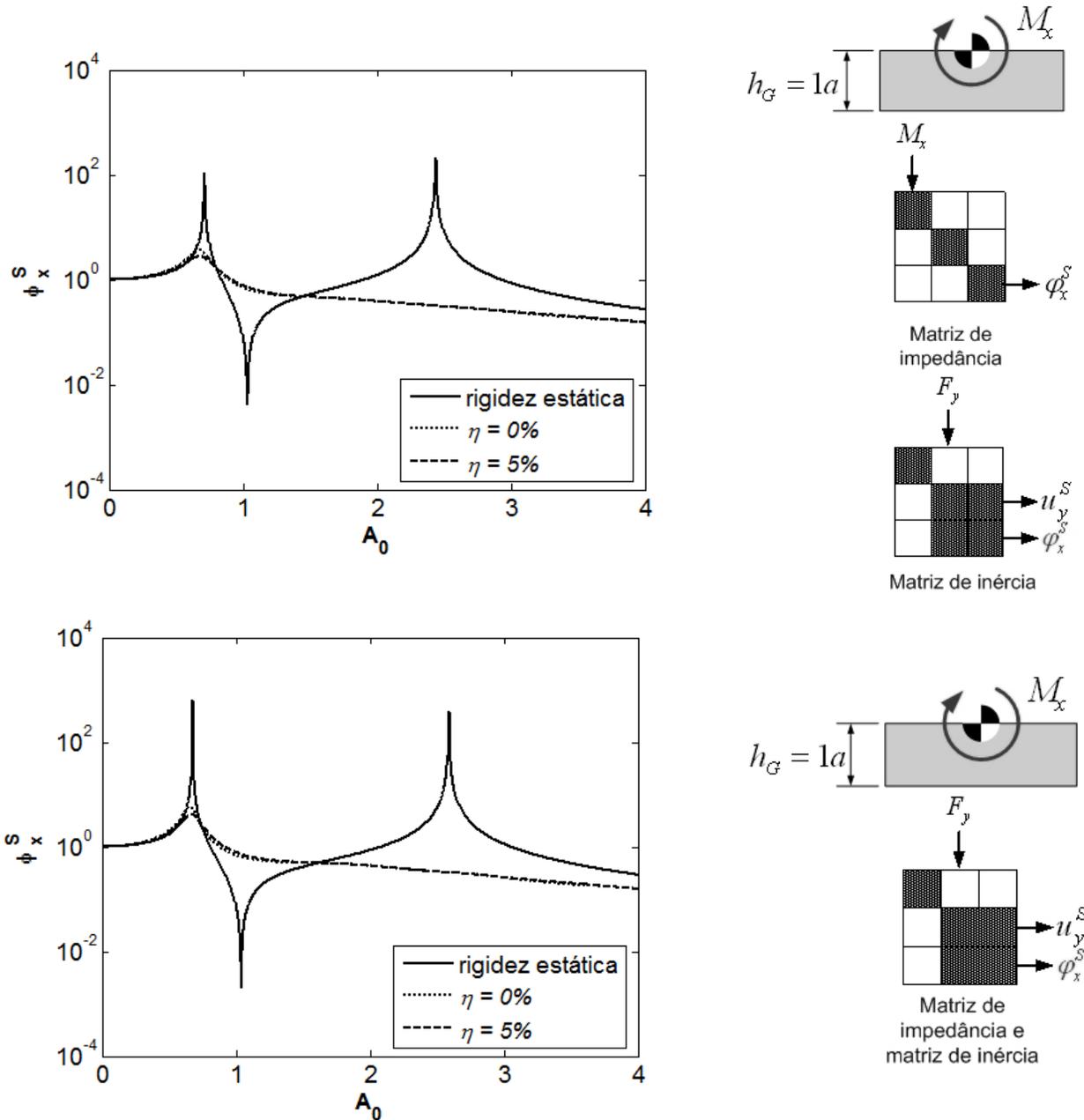


Figura 4.24: Módulo do deslocamento angular. Matriz de impedância diagonal, figura acima. Matriz de impedância não diagonal, figura abaixo.

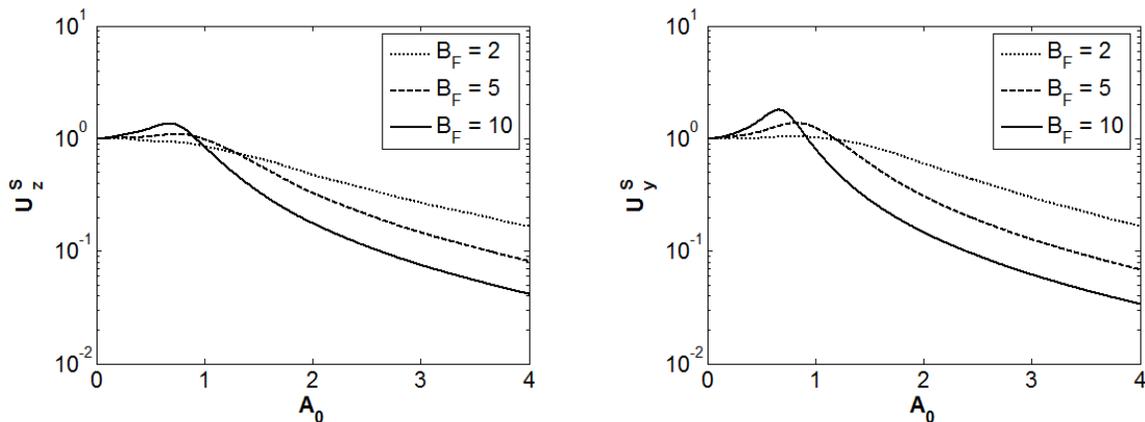
É grande a semelhança comparando-se as respostas com as equações de matriz de impedância diagonal com as equações de matriz de impedância não diagonal. Nota-se, porém um aumento no deslocamento angular e uma diminuição no deslocamento horizontal com a segunda equação.

**Tabela 9:** Freqüências de maior amplitude em resposta do momento  $M_x$ .

$H_G = 1$ e $H_B = 0$	D		ND		D		ND	
	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$u_y^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$	$A_0$	$\varphi_x^S$
rigidez estática	0,71; 2,435	-	0,675; 2,59	-	0,71; 2,435	-	0,675; 2,59	-
$\eta = 0 \%$	0,695	$9,78 \times 10^4$	0,660	35,469	0,675	3,669	0,655	6,092
$\eta = 1 \%$	0,695	$8,914 \times 10^4$	0,660	31,141	0,675	3,393	0,655	5,458
$\eta = 5 \%$	0,715	$7,064 \times 10^4$	0,680	22,189	0,675	2,775	0,665	4,219
$\eta = 20 \%$	0,78	$3,627 \times 10^4$	0,780	6,924	0,645	1,634	0,610	1,411

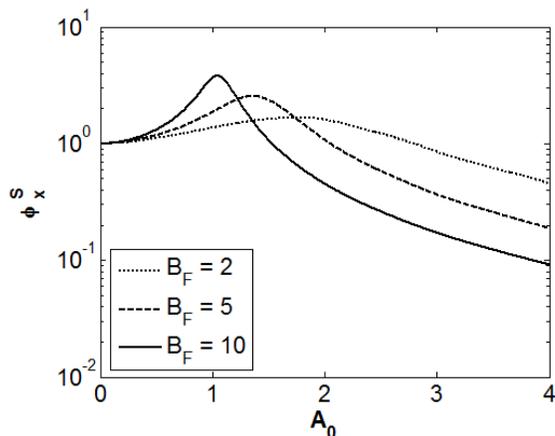
### Variação do parâmetro $B_F$

Utiliza-se uma fundação cujo centro de massa e a excitação coincidam com a interface solo-fundação. Neste caso, como já visto anteriormente,  $h_G = 0$  e  $h_B = 0$ . A interface solo-fundação é lisa. Sendo assim a matriz de impedância é diagonal e conseqüentemente a equação de movimento é desacoplado. Obtêm-se as FRFs correspondentes a cada direção de excitação.



**Figura 4.25:** Módulos dos deslocamentos nas direções vertical e horizontal. A fundação da figura a esquerda está sob a força  $F_z$  e a fundação da direita está sob a força  $F_y$ .

O deslocamento na direção horizontal tende a ser maior na ressonância em comparação com o deslocamento vertical.



**Figura 4.26:** Módulo do deslocamento angular da fundação sob a ação do momento  $M_x$ .

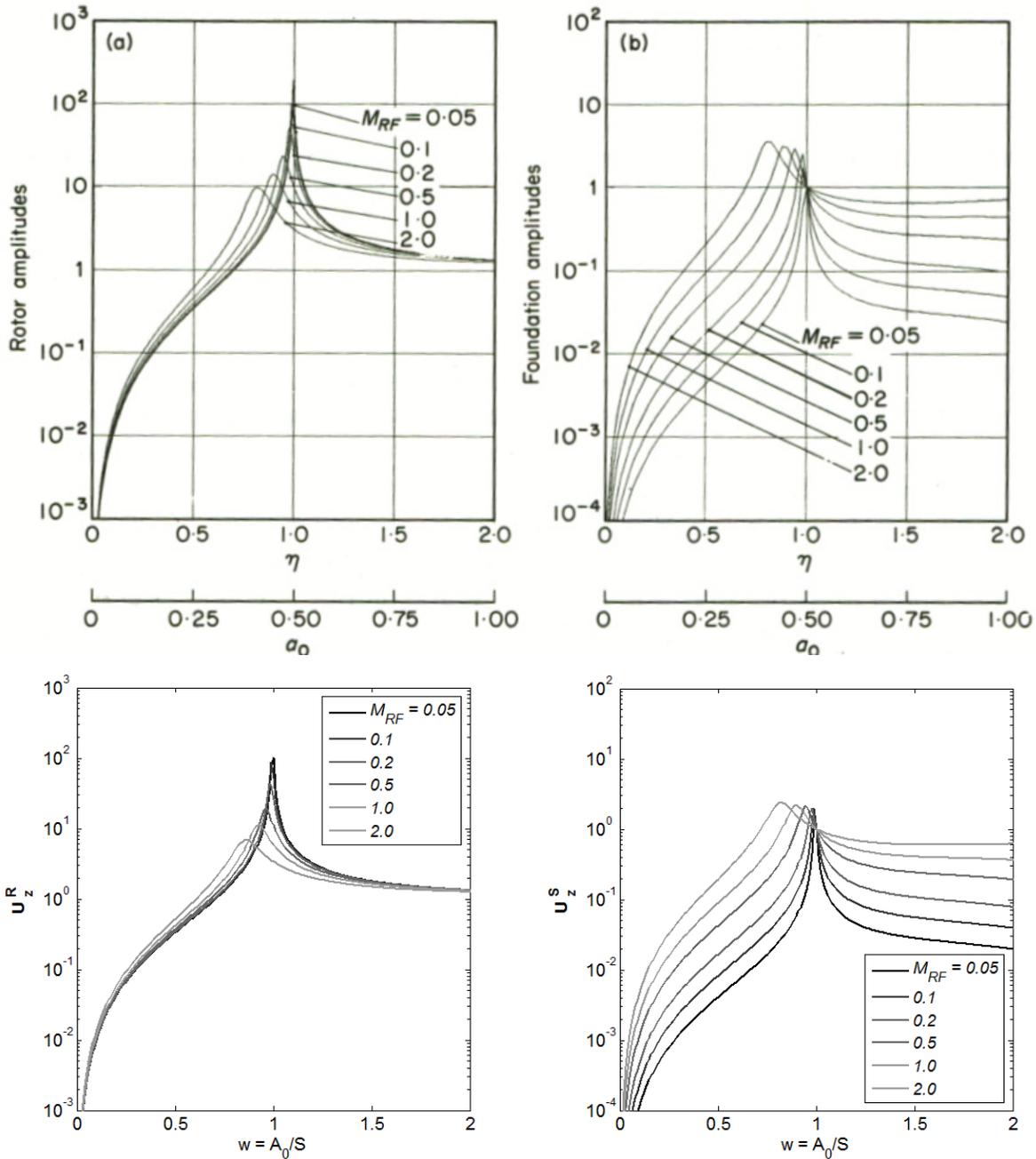
Pode-se perceber que o aumento do valor de  $B_F$  tende a causar um aumento na amplitude de ressonância e uma redução na frequência em que esta ressonância ocorre, minimizando o efeito do solo.

## Dinâmica do sistema rotor-fundação-solo

A partir de agora se faz a análise do sistema completo, rotor-fundação-solo. O solo, como já descrito anteriormente, é modelado como sendo um semi-espaço tridimensional linear viscoelástico. Inicialmente comparam-se os gráficos obtidos por Gasch *et al* (1984) a partir de um semi-espaço elástico bidimensional com número de Poisson  $\nu = 0,25$ , com os gráficos obtidos a partir do solo modelado neste trabalho utilizando um amortecimento interno de  $\eta = 5\%$ , verificando-se a semelhança dos resultados. Depois se faz a análise da influência dos parâmetros de altura  $H_B$  e  $H_G$ . Em seguida faz-se a análise da influência do parâmetro  $B_F$ . Por último verifica-se a incidência do amortecimento interno, conseqüência da anisotropia introduzida pelo sistema solo-fundação.

### Sistema rotor-fundação-solo em diversas condições de flexibilidade de solo

Na **Figura 4.27** têm-se os deslocamentos do rotor e da fundação sob um solo de parâmetro  $S = 0,5$ . Pode-se constatar que o aumento do parâmetro  $M_{RF}$  implica no aumento da amplitude do



**Figura 4.27:** Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para  $S = 0,5$ .

deslocamento da fundação e implica na diminuição da amplitude do deslocamento do rotor.

Aumentando-se a flexibilidade do solo, para um valor de  $S = 1$  e mantendo-se os demais parâmetros, pode-se perceber nas figuras abaixo que surgem novas ressonâncias fortemente amortecidas.

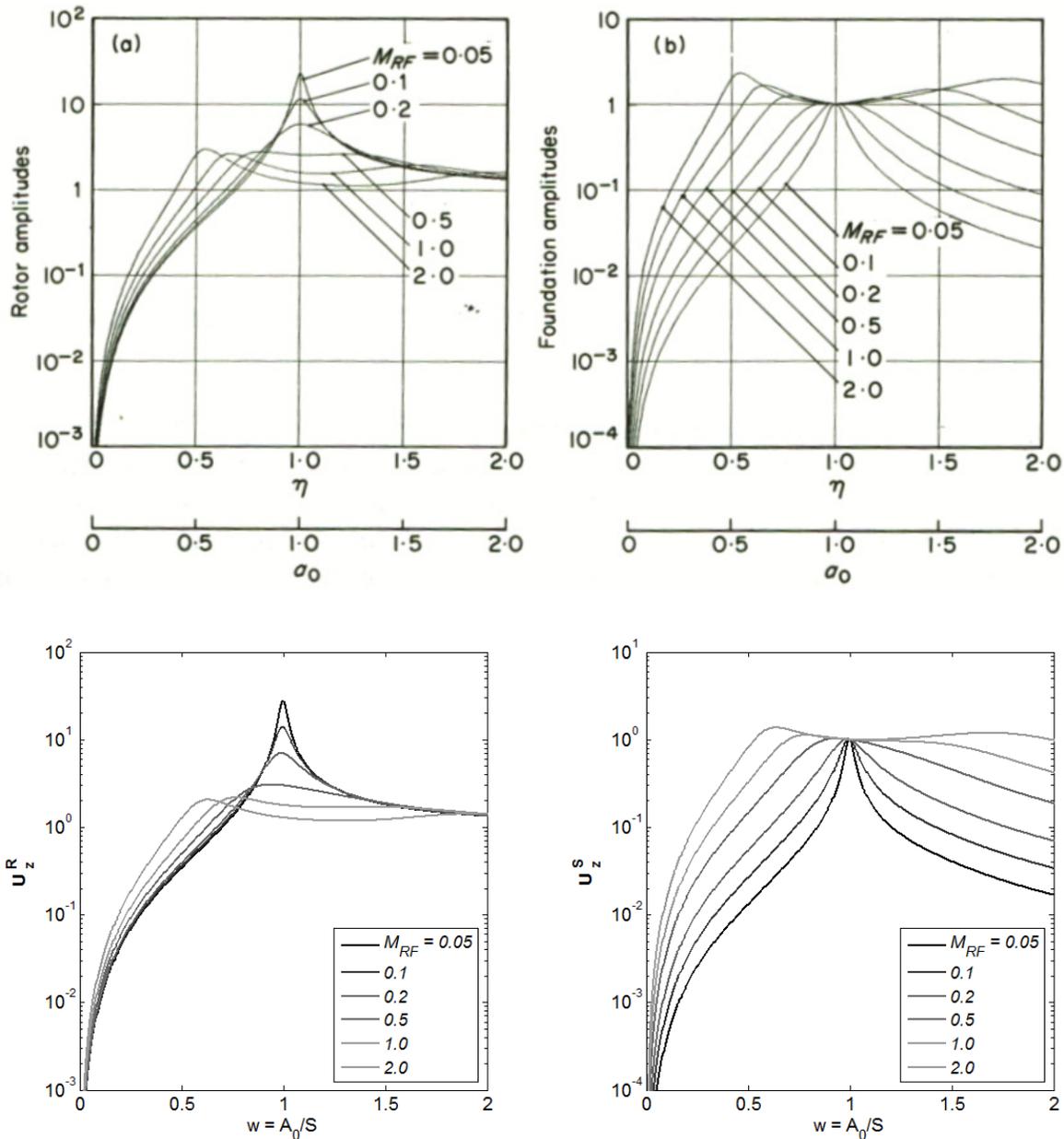
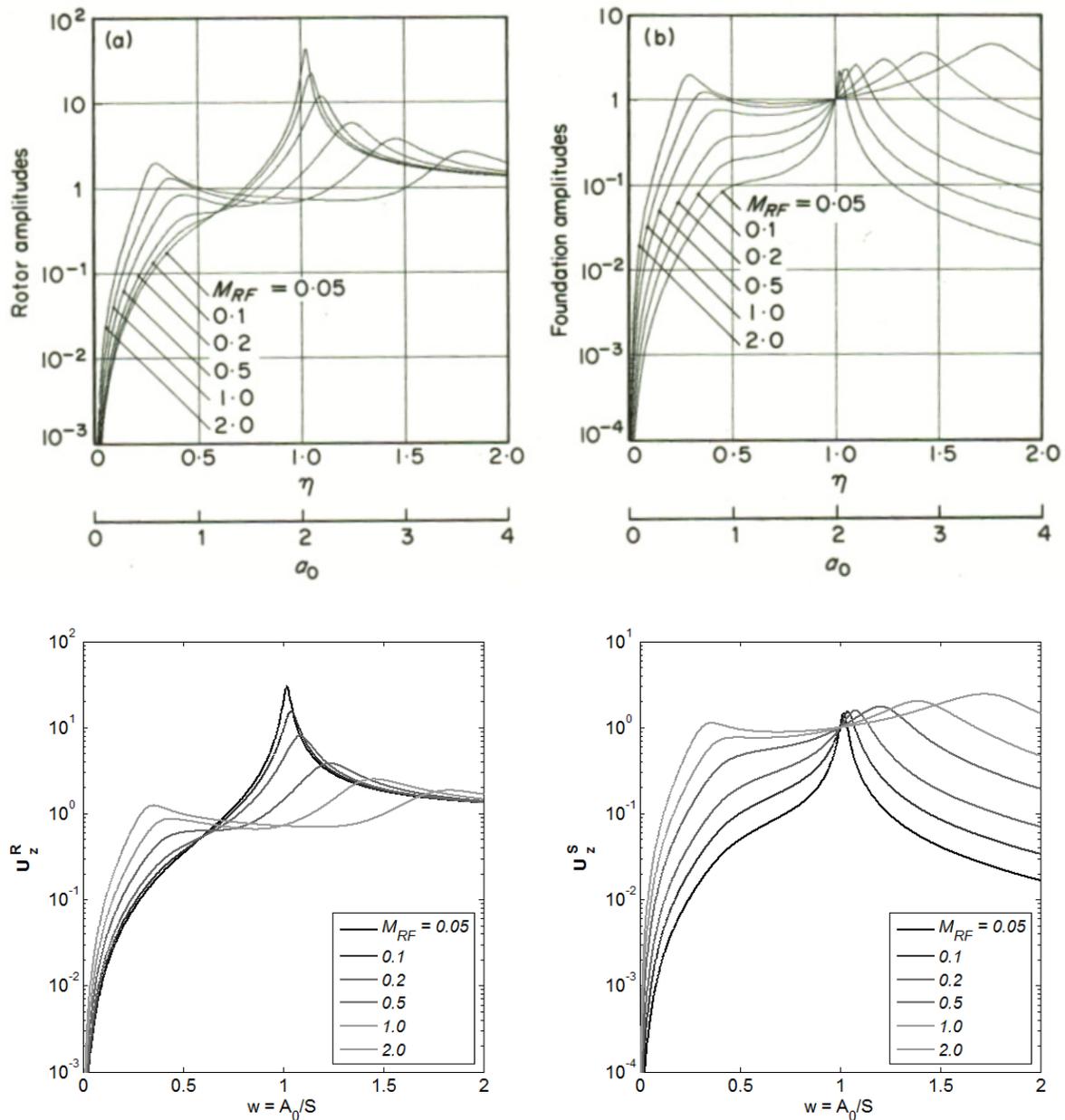


Figura 4.28: Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para  $S = 1$ .

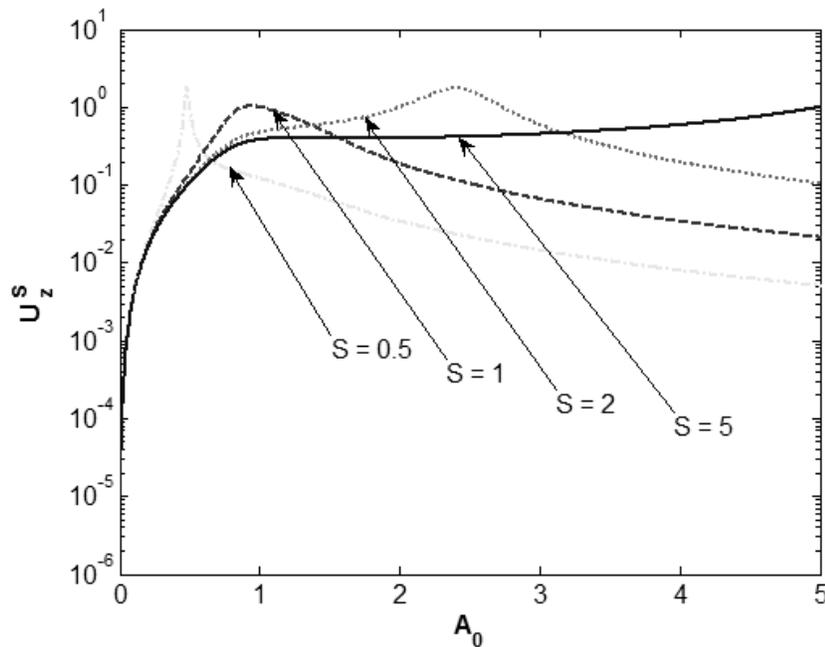
Se o solo for feito mais flexível, o aparecimento de novas ressonâncias é mais evidente. Principalmente se o valor do parâmetro  $M_{RF}$  também for aumentado.



**Figura 4.29:** Comparação das FRFs do sistema rotor-fundação-solo para  $S = 2$ .

Pode-se verificar que quando a razão de massa aumenta, ou seja, o rotor torna-se mais pesado em relação à fundação, o deslocamento da fundação aumenta enquanto o deslocamento do rotor diminui. Verifica-se também que a frequência de ressonância decai significativamente

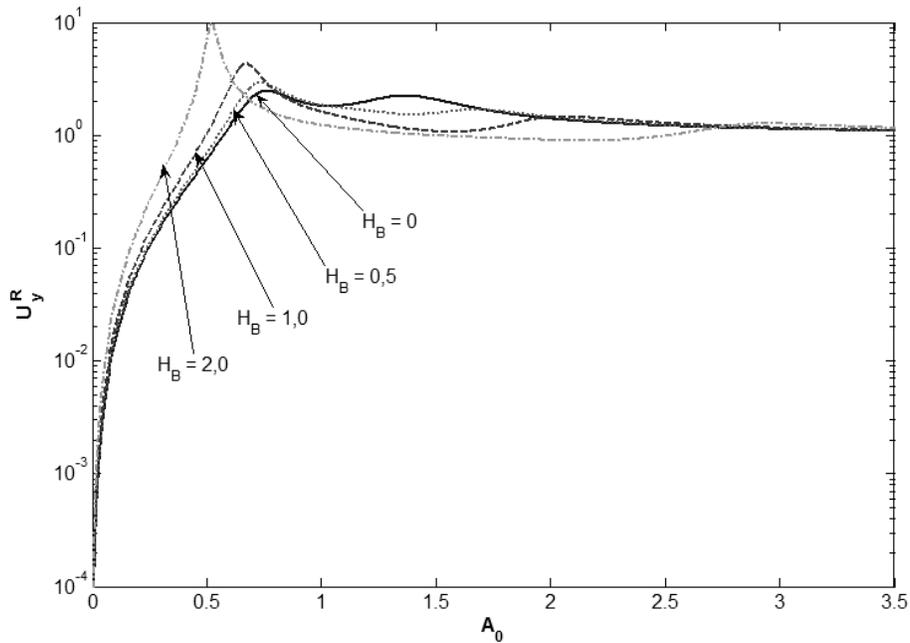
quando  $S = 0,5$  e para maiores valores do parâmetro  $S$ , novas frequências de ressonâncias tendem a aparecer. Isto fica mais evidente na figura abaixo a qual se elabora as curvas de deslocamento vertical do solo, mantendo a razão de massa em  $M_{RF} = 0,5$  para diversos valores de  $S$ .



**Figura 4.30:** Deslocamento vertical da fundação sob diversas flexibilidades do solo.

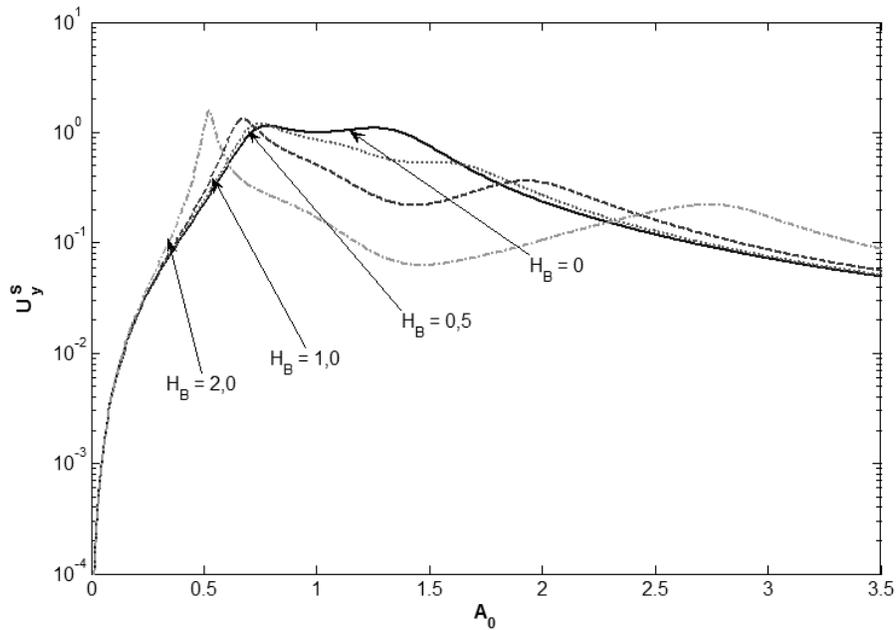
### Sobre $H_B$

Assim como se acrescentou e analisou o parâmetro  $H_B$  para o sistema fundação-solo, faz-se uma análise deste parâmetro para a resposta do sistema rotor-fundação-solo. Utiliza-se para este exemplo uma razão de massa  $M_{RF} = 0,5$ , parâmetro de flexibilidade do solo  $S = 1$  e matriz de impedância diagonal. Varia-se  $H_B$  de 0 a 2.



**Figura 4.31:** Deslocamento horizontal do rotor sob a variação da altura do mancal.

Como esperado a alteração do parâmetro  $H_B$ , não tem nenhuma influência sobre o deslocamento vertical, tanto do rotor quanto da fundação. O deslocamento horizontal do rotor mostra-se mais sensível ao aumento do parâmetro  $H_B$  nas proximidades da frequência de ressonância do eixo do rotor. Para frequências mais altas,  $A_0 > 2,5$ , a influência deste parâmetro mostra-se muito menor. Quanto maior o valor de  $H_B$  maior é a influência de  $\varphi^S$ , Gasch *et alii* (1984).

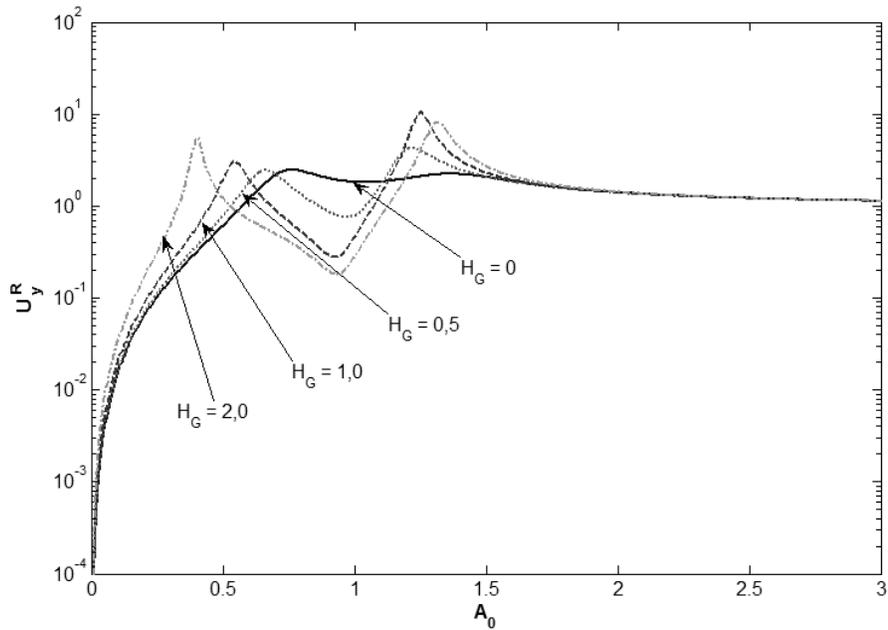


**Figura 4.32:** Deslocamento horizontal da fundação sob a variação da altura do mancal.

A fundação mostra-se mais influenciada na faixa de frequência  $0,2 < A_0 < 3$ , o deslocamento desta tende a ser menor nesta faixa à medida que o parâmetro  $H_B$  aumenta.

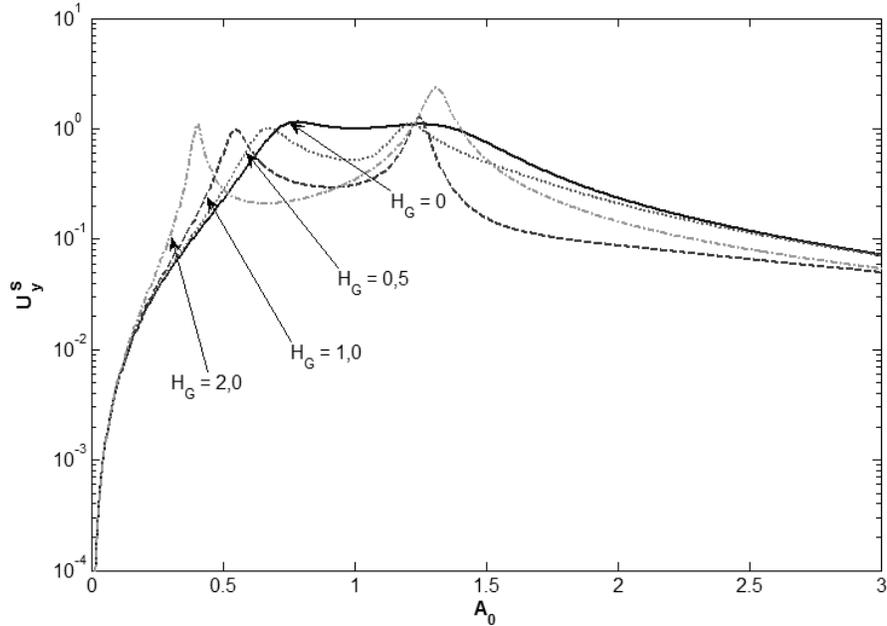
### Sobre $H_G$

Analisa-se agora o parâmetro  $H_G$  mantendo-se o parâmetro  $H_B$  nulo. Utiliza-se novamente para este exemplo uma razão de massa  $M_{RF} = 0,5$ , parâmetro de flexibilidade do solo  $S = 1$  e matriz de impedância diagonal. Varia-se  $H_G$  de 0 a 2.



**Figura 4.33:** Deslocamento horizontal do rotor sob a variação da posição do centro de massa da fundação.

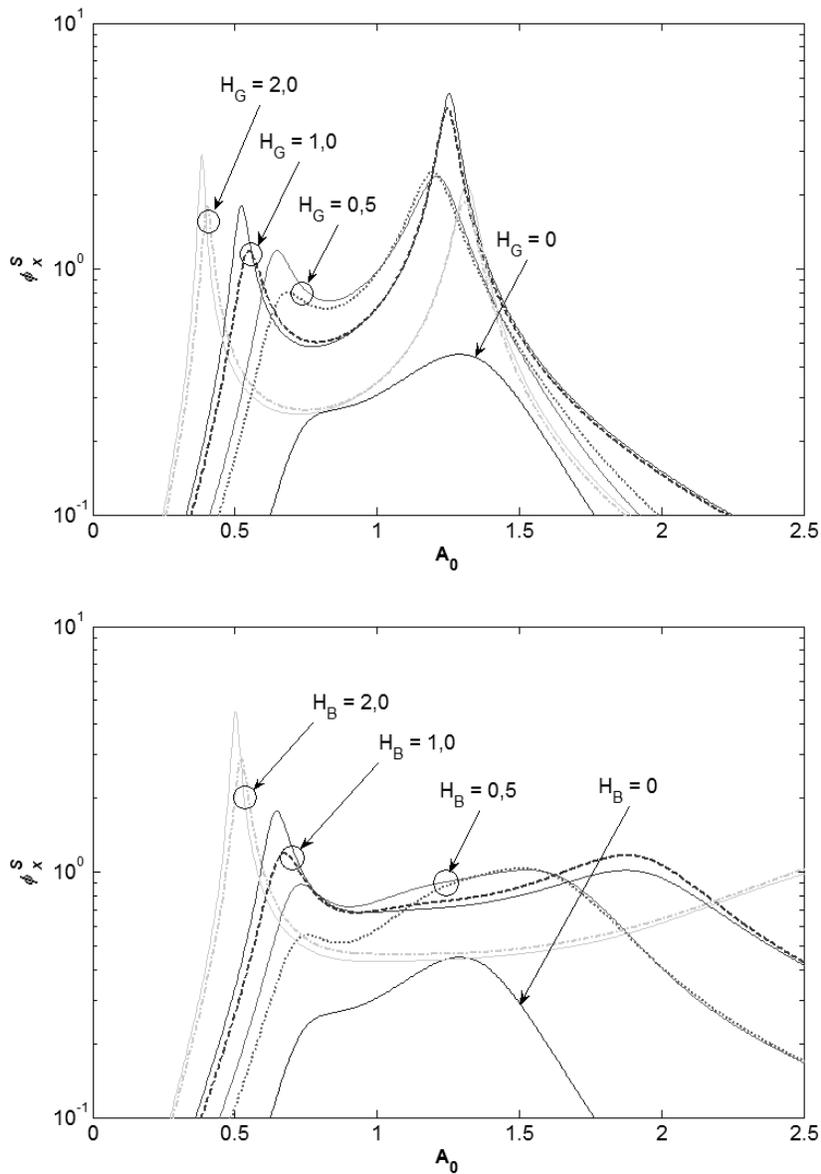
Verifica-se que a influência do parâmetro  $H_G$  sobre o rotor restringe-se a uma pequena faixa de atuação  $0 < A_0 < 2$ . Tendendo a um valor mínimo nas proximidades de  $A_0 = 1$ , valor correspondente a ressonância do eixo para  $S = 1$ . Diferentemente do parâmetro  $H_B$ , a variação do parâmetro  $H_G$  acentua mais o segundo pico de ressonância.



**Figura 4.34:** Deslocamento horizontal da fundação sob a variação da posição do centro de massa deste.

No deslocamento da fundação a faixa de atuação do parâmetro  $H_G$  é maior do que o rotor, mas ainda é mais bem sentida entre os valores  $0 < A_0 < 2$ . O surgimento do valor  $H_G$  tende a diminuir a amplitude do deslocamento da fundação, a não ser nas proximidades do segundo pico de ressonância, onde o aumento do parâmetro  $H_G$  tende a aumentar este deslocamento.

Faz-se agora uma comparação dos deslocamentos angulares com a variação dos valores de  $H_G$  e  $H_B$ . Além desta comparação, faz-se a comparação dos deslocamentos envolvendo a matriz de impedância diagonal e não diagonal.



**Figura 4.35:** Comparação dos deslocamentos angulares da fundação sob a variação da posição do centro de massa, figura (a), e altura do mancal, figura (b).

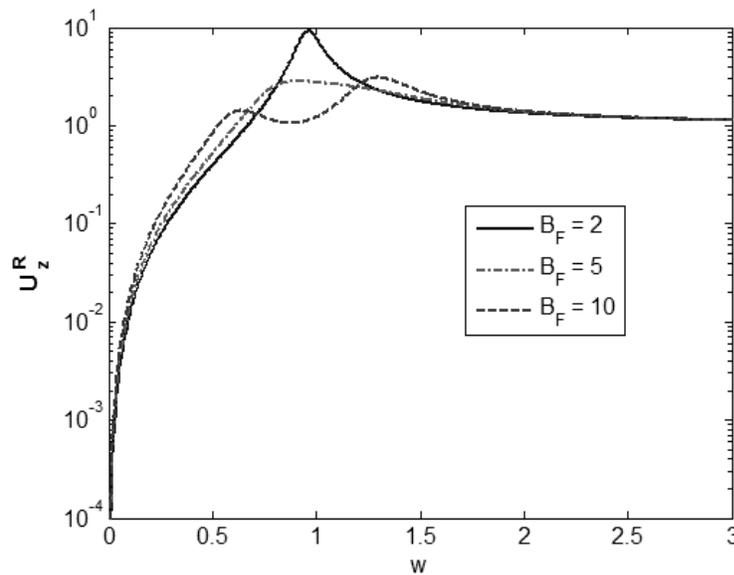
Como ocorrido nos deslocamentos horizontais do rotor e da fundação, no deslocamento angular a faixa de frequência influenciado pelo parâmetro  $H_B$  é maior do que o parâmetro  $H_G$ . E o segundo pico de ressonância também é muito mais acentuado na variação do parâmetro  $H_G$ .

As linhas contínuas representam os deslocamentos com a matriz de impedância não diagonal. Verifica-se que a influência da matriz de impedância não diagonal em relação a matriz

de impedância diagonal é pequena no que diz respeito ao deslocamento, e desprezível no que diz respeito à frequência.

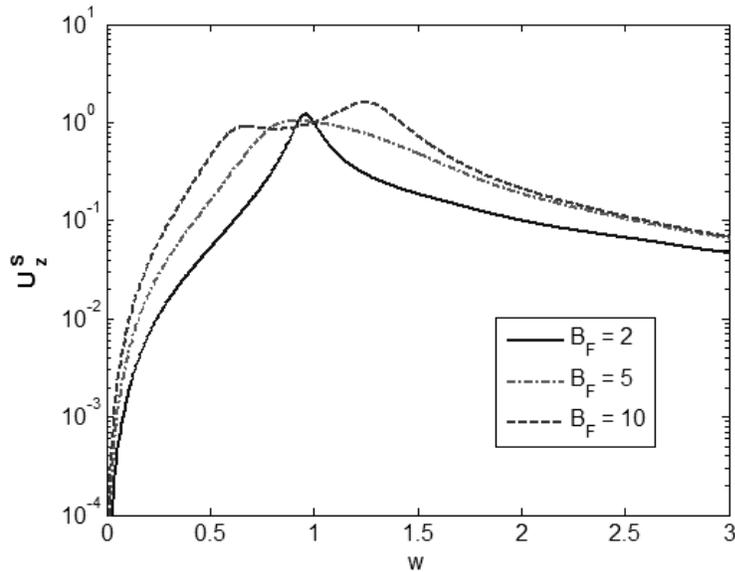
### Sobre $B_F$

O parâmetro  $B_F$  é a razão entre a densidade da fundação e a densidade do solo. Este parâmetro estabelece uma relação entre a massa da fundação e uma determinada massa do solo. Faz-se agora uma análise deste parâmetro, para tal mantém-se os parâmetros  $S$  e  $M_{RF}$  como anteriormente ( $S = 1$  e  $M_{RF} = 0,5$ ). Os valores de  $H_B$  e  $H_G$  são nulos neste estudo. Adotam-se valores para  $B_F$ : 2, 5 e 10.



**Figura 4.36:** Deslocamento vertical do rotor sob variação do parâmetro  $B_F$ .

Os deslocamentos verticais e horizontais não diferem muito. Pode-se perceber que se aumentando o parâmetro  $B_F$  o deslocamento do rotor tende a ser menor, ou seja, há uma diminuição da flexibilidade do solo, isto também foi observado por Ramalho (2006).



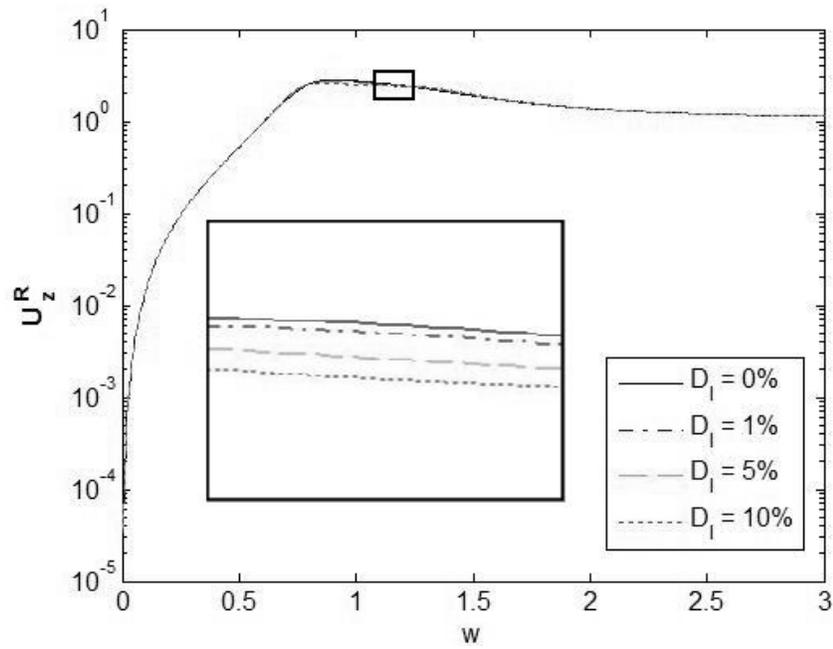
**Figura 4.37:** Deslocamento vertical da fundação sob variação do parâmetro  $B_F$ .

Na fundação e no rotor o aumento de parâmetro  $B_F$  tende a diminuir a ressonância de frequência além de induzir o surgimento de outra frequência de ressonância.

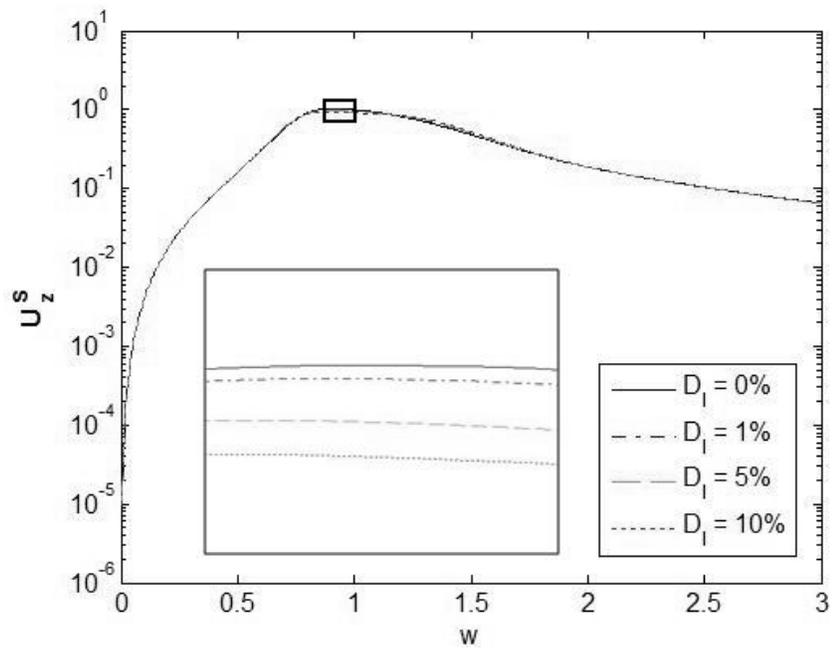
### Sobre $D_I$

Até o momento, no sistema rotor-fundação-solo, não se adicionou amortecimento interno do eixo. No estudo do rotor sobre um solo rígido, não há a ocorrência desta força. Mas com a adição da flexibilidade do solo no sistema, pode haver a atuação desta força. Isto ocorre devido a anisotropia causada pela adição do solo e da fundação. A razão de massa usada é  $M_{RF} = 0,5$ , os parâmetros  $S$  e  $B_F$  usados nesta análise são respectivamente  $S = 1$  e  $B_F = 5$ .

No deslocamento vertical do rotor é nítido que quanto maior o amortecimento interno, maior é a influência deste, **Figura 4.38**. O mesmo ocorre com o deslocamento horizontal da fundação da **Figura 4.39**.



**Figura 4.38:** Deslocamento vertical do rotor sob variação do amortecimento interno do rotor.



**Figura 4.39:** Deslocamento vertical da fundação sob variação do amortecimento interno.

O eixo do rotor é isotrópico, portanto a sua rigidez e amortecimentos nas direções vertical e horizontal são iguais. O solo também é isotrópico, porém a interface solo-fundação elimina a isotropia do sistema e componentes de força de flexão aparecerão.

## Capítulo 5

### *Conclusões e sugestões*

Neste trabalho procurou-se enfatizar a influência que o solo pode trazer no comportamento dinâmico de fundações e rotores. Dentre os parâmetros analisados estão o amortecimento interno do solo, a flexibilidade do solo, a variação das razões de massa, a influência da altura do mancal, a influência da posição do centro de massa da fundação e os diversos mecanismos de acoplamento.

Nos exemplos considerados o amortecimento interno do solo demonstrou ter uma importância muito pequena em comparação com o amortecimento geométrico isto está demonstrado na maioria dos gráficos referentes a análise do comportamento dinâmico da fundação.

Pode-se comparar a influência do acoplamento causado pelo parâmetro  $H_G$  e o acoplamento causado pela matriz de impedância com termos não diagonais no sistema solo-fundação. Tomando-se os valores de  $\varphi_x^S$  como exemplo, este grau de liberdade na incidência da força  $F_y$  somente responderá se houver acoplamento. A tabela 4 possui as frequências de maior amplitude das FRFs em resposta da força atuante  $F_y$  para  $H_B = 0$  e  $H_G = 0$ . E a tabela 8 possui as frequências de maior amplitude das FRFs em resposta da mesma força  $F_y$  para  $H_B = 0$  e  $H_G = 1$ . Se verificadas os deslocamentos  $\varphi_x^S$  das tabelas 4 e 8, especificamente o deslocamento  $\varphi_x^S$  da tabela 4 para a matriz de impedância não diagonal e os valores de deslocamento  $\varphi_x^S$  da tabela 8 para a matriz de impedância diagonal. Por exemplo, tomam-se os valores de frequência e

deslocamento com amortecimento  $\eta = 0\%$  para ambas as tabelas. Da tabela 4:  $A_0 = 1,080$  e  $\varphi_x^S = 3,969$ . Da tabela 8:  $A_0 = 0,680$  e  $\varphi_x^S = 5,580$ . Verifica-se que no segundo caso o deslocamento é maior, indicando que o acoplamento causado pela matriz de inércia é maior do que o acoplamento causado pela matriz de impedância. Além disso, verifica-se que as frequências de ressonância também são distintas. A frequência de ressonância diminuiu (passou para  $A_0 = 0,680$ ) quando o sistema está acoplado pela matriz de inércia. Obviamente utilizando menores valores para  $H_G$  o acoplamento diminui e valores maiores aumentarão o acoplamento isto é válido também no sistema rotor-fundação-solo, fato que pode ser verificado nas figuras 4.34 e 4.35 (Sobre  $H_G$  Capítulo 4). Isto demonstra a dependência do sistema à geometria da fundação.

Como demonstrado por Gasch *et ali* (1984) quanto maior o valor de  $H_B$  maior é a influência de  $\varphi_x^S$  (Sobre  $H_B$ - Capítulo 4), já quanto ao valor de  $H_G$  a influência da frequência é mais evidente do que  $\varphi_x^S$  em comparação a  $H_B$ .

O aumento de  $B_F$ , ou seja, da massa da fundação em relação a uma porção fixa da massa do solo, tende a diminuir a influência do solo, fato verificado pelas Figura 4.25 e Figura 4.26. E um aumento do parâmetro  $S$ , deixando o solo mais flexível, tende a minimizar o efeito da ressonância principalmente para valores maiores de  $M_{RF}$ , fato que pode ser verificado pelas figuras 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30.

Por último, chama-se a atenção ao fato da não ocorrência do amortecimento interno quando um rotor isotrópico de mancal rígido está sobre uma base rígida e da sua ocorrência quando esse mesmo rotor está sobre o solo. Isto demonstra que a anisotropia fornecida pelo acréscimo do sistema solo-fundação pode introduzir amortecimento interno de rotor.

Como sugestão pode-se usar modelos mais complexos sobre o mesmo modelo de solo. Pela simetria assumida do rotor os graus de liberdade deste ficam restritos a um plano. O modelo da

interação solo-estrutura adotado permite estudar rotores não centralizados entre os mancais, ou seja, com mais graus de liberdade, neste sentido pode-se considerar o deslocamento axial do rotor e o deslocamento angular aos eixos radiais do rotor, conseqüentemente pode-se analisar a influência dos demais momentos de inércia que compõem o rotor e o efeito giroscópico.

## Referências Bibliográficas

- Barros, R. M. *Elementos infinitos para o tratamento de problemas da viscoelastodinâmica estacionária em domínios ilimitados pelo Método dos Elementos Finitos*. Campinas: FEM/UNICAMP, 1996, Dissertação (Mestrado).
- Barros, P. L. de A. *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-Estrutura*. Campinas: FEM/UNICAMP, 1997, 300 p. Tese (Doutorado).
- Beskos, D. E. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis, *Applied Mechanics Reviews*, 40, 1987, 1-23.
- Beskos, D.E. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996), *Applied Mechanics Reviews*, 50, 1997, 149-197.
- Carrion, R. *Uma implementação do método dos elementos de contorno para problemas viscoelastodinâmicos estacionários tridimensionais em domínios abertos e fechados*. Campinas: FEM/UNICAMP, 2002, 189 p. Tese (Doutorado).
- Christensen, R. M. *Theory of Viscoelasticity*. 2nd. ed. Academic Press, NY, 1982.
- Dominguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.

Eringen, A. C., Suhubi, E. S. *Elastodynamics*, vol.II, Academic Press, NY, 1979.

Flack, R. D.; Lanes, R. F. e Gambel, P. S., *Effects of lubricant viscosity on the experimental response of a three-mass flexible rotor in two types of journal bearings*. *Wear*. v. 67, n. 2, p. 201-216, 1981.

Findley, W. N. , Lai J. S., Onaran, K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials: With an Introduction to Linear Viscoelasticity*, Dover Publications, 1989

Gasch, R., Maurer, J., Sarfeld, W. *Soil influence on unbalance response and stability of a simple rotor-foundation system*. *Journal of Sound and Vibration*. v. 93, n. 4, p. 549-566, 1984.

Gazetas, G. *Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the art*. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1983, 2, pp02-42.

Genta, G.; Delprete, C.; Busa, E., *Some considerations on the basic assumptions in rotordynamics*. *Journal of Sound and Vibration*. v. 227, n. 3, p. 611-645, 1999.

Givoli, D., *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, 1992.

Hall, W. S., Olivetto, G., *Boundary Element Methods for Soil-Structure Interaction*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

Hadjain, A. H., Luco, J. E., Tsai, N. C. *Soil-structure interaction: continuum or finite elements?* *Nuclear Engineering and Design*, 1974, 31, (151-167).

Krämer, E., *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag. 1993, pp.3-6.

Lee, C. W., *Vibration Analysis of Rotors*. Kluwer Academic Publishers. 1993, pp. 1-3.

- Malvern, L. E. Introduction to the Mechanics of a continuous medium. Prentice Hall, New Jersey, 1969.
- Maslen, E. H.; Vazquez, J. A.; Sortore C. K., *Reconciliation of rotordynamic models with experimental data*. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the Asme. v. 124, n. 2, p. 351-356, 2002.
- Mesquita, E., *Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum* (Sobre a interação dinâmica de estruturas com um semi-espaço viscoelástico). VDI Fortschrittberichte, Reihe 11: Schwingungstechnik, NR 120, VDI-Verlag Duesseldorf, 1989 ISBN 3-18-142011-5.
- Mesquita, E., Sousa, E. A. C., Pontes, B. R. *Boundary or Finite Elements to Model the Behaviour of Dynamical Systems and Foundation Structures Interacting with the Soil?* Proc. PACAM III, 3<sup>rd</sup> Pan american Congress of Applied Mechanics, 1993, January, 4-8, São Paulo, Brasil, pp.101-104.
- Mesquita, E., Pavanello, R., *Numerical Methods for the Dynamics of Unbounded Domains*. Computational and Applied Mathematics vol 24., 2005, N.1, pp. 01-26.
- Mesquita, E., Cavalca K. L., Ramalho D., Thomazo, L. H., *On the Influence of Soil Stratification Profiles on Rotor-Foundation Unbalance Response*. In H. Springer and H Ecker Editors, Proceedings 7th International Conference on Rotor Dynamics, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, September 25-28, 2006, paper ID 263, pp.01-10, proceedings in cd-rom.
- Nelson, H. D., *Rotordynamic modeling and analysis procedures: A review*. JSME International Journal Series C-Mechanical Systems Machine Elements and Manufacturing. V.41, n. 1, p. 1-12, 1998.

Rajapalske, R. K. N. D., Karasudhi, P. Efficient Elastodynamic Infinte Element, *International Journal of Solids and Structures*, 1986, v. 22,pp 643-657.

Ramalho, Denise Alves, *Estudo da influência dos perfis de solo na resposta dinâmica de sistemas rotor-fundação*. Campinas: FEM/UNICAMP, 2006, Dissertação (Mestrado).

Romanini, Edvaldo. *Síntese de funções de influência e Green para o tratamento da interação dinâmica solo-estrutura através de equações integrais de contorno*. Campinas: FEM/UNICAMP, 1995, 192 p. Tese (Doutorado).

Sommerfeld, A. *Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, 1949.

Tenenbaum, Roberto A. *Dinâmica*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1997.

Woods, Richart., Hall. *Foundation Vibration*. Prentice Hall, 1972.

Zavala, P. A. G. *Análise vibro-acústica utilizando o método de elementos finitos com mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN)*. Campinas: FEM/UNICAMP , 1999, 175p. Tese (Doutorado)

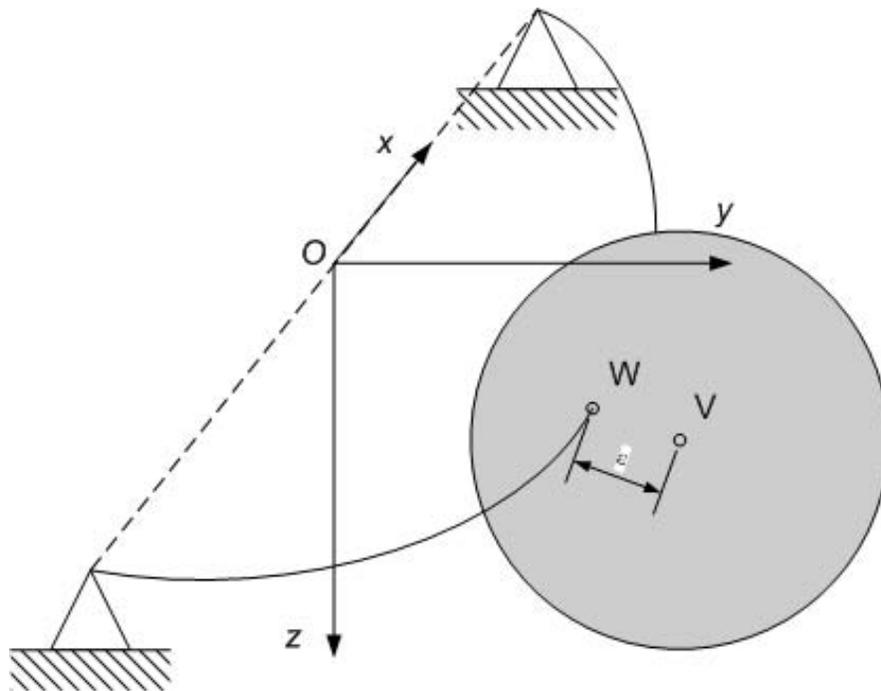
## Apêndices

### *Notas sobre amortecimento interno em rotores*

Para elucidar a dedução das equações de movimento do rotor faz-se aqui uma pequena explicação sobre o amortecimento interno do rotor. Este amortecimento é causado pela flexão do eixo. Para demonstrar a ação deste, inicia-se a explicação deduzindo-se as equações de movimento de um rotor Jeffcott com rotação constante e sem amortecimento interno e tampouco amortecimento externo. Deduzem-se estas equações usando-se coordenadas inerciais e em seguida usando-se coordenadas móveis. O uso de coordenadas móveis é de suma importância para descrever o amortecimento interno. Com a descrição do uso de coordenadas móveis é possível descrever as forças de amortecimento interno. Usa-se para isso um rotor que possui um eixo pré-flexionado e mantido em uma posição fixa, podendo girar, mas não se deslocar. A dedução da força de amortecimento assim obtida pode ser estendida para rotores Jeffcott.

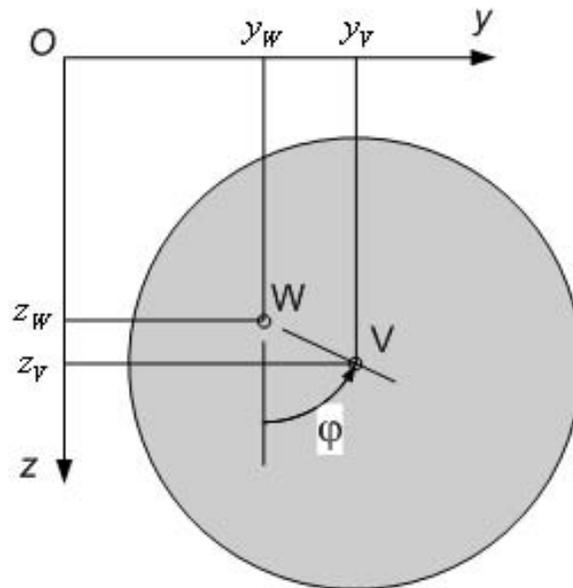
### Equações de movimento usando coordenadas inerciais

O rotor abaixo possui um eixo transpassando o disco em  $W$ . Este eixo está descentralizado do centro geométrico do disco  $V$  em  $\varepsilon$ . O centro geométrico coincide com o centro de massa e está indicado na figura pela letra  $V$ . Em  $O$  tem-se a origem do sistema de eixos inercial.



**Figura 0.1**

Para deduzir as equações de movimento principia-se encontrando a posição do centro de massa do rotor, ponto  $V$ . Deduzida a posição, conseqüentemente deduz-se a velocidade e aceleração do centro de massa, ou seja, do ponto  $V$ .



**Figura 0.2**

Da Figura 0.2 pode-se verificar as coordenadas dos pontos  $V$  e  $W$ . Na figura também se pode verificar que o ângulo de rotação é indicado por  $\varphi$ . A posição do centro de massa é, portanto descrita como abaixo.

$$\begin{aligned} z_v &= z_w + \varepsilon \cos \varphi \\ y_v &= y_w + \varepsilon \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

Fazendo-se a derivada temporal da posição do centro de massa do rotor se deduz a velocidade. Posteriormente fazendo-se a derivada temporal da velocidade se deduz a aceleração.

$$\begin{aligned} \dot{z}_v &= \dot{z}_w - \varepsilon \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_v &= \dot{y}_w + \varepsilon \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_v &= \ddot{z}_w - \varepsilon \ddot{\varphi} \sin \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{y}_v &= \ddot{y}_w + \varepsilon \ddot{\varphi} \cos \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

As únicas forças externas que agem neste rotor é a força provocada pela rigidez do eixo e o momento aplicado no eixo (Figura 0.3). Para se conhecer a força de rigidez é preciso se conhecer o deslocamento do eixo. O deslocamento do eixo é dado pelas coordenadas  $z_w$  e  $y_w$  (Figura 0.2).

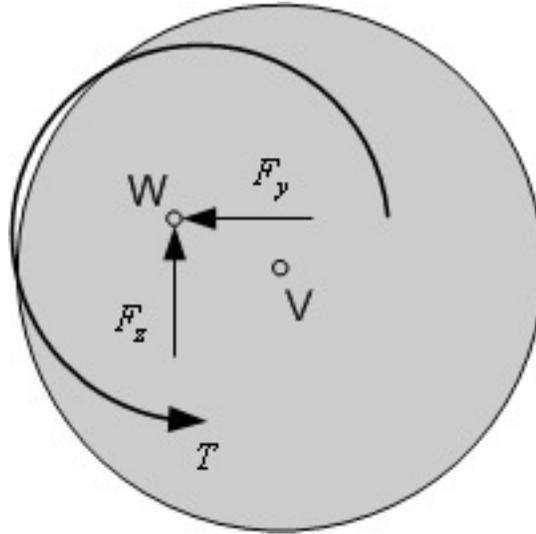


Figura 0.3

A força externa do rotor fica então deduzida.

$$\begin{aligned} F_z &= -k_z z_w \\ F_y &= -k_y y_w \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Pela conservação da quantidade de movimento linear,  $m {}^I \mathbf{a}^V = \sum \mathbf{F}$ , sendo  ${}^I \mathbf{a}^V$  a aceleração do ponto  $V$  no referencial inercial e  $\mathbf{F}$  refere-se às forças que atuam no rotor é possível deduzir a equação de movimento. A partir das equações 3 e 4 se deduz primeiramente a equação de movimento para a direção  $z$ .

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_V &= -k_z z_w \\ m(\ddot{z}_w - \varepsilon \ddot{\varphi} \sin \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= -k_z z_w \end{aligned}$$

Analogamente para a direção  $y$ .

$$m(\ddot{y}_w + \varepsilon \ddot{\varphi} \cos \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -k_y y_w$$

Se como hipótese for considerado que a rigidez do eixo é a mesma não importando a direção, ou seja, o eixo é isotrópico e, portanto  $k_z = k_y = k$ , a equação de movimento de translação fica como escrita abaixo.

$$\begin{aligned} m(\ddot{z}_w - \varepsilon\dot{\varphi}\sin\varphi - \varepsilon\dot{\varphi}^2\cos\varphi) &= -k z_w \\ m(\ddot{y}_w + \varepsilon\dot{\varphi}\cos\varphi - \varepsilon\dot{\varphi}^2\sin\varphi) &= -k y_w \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

A dedução somente é completa se for considerado além do movimento de translação o movimento de rotação. Há somente rotação em x, portanto pela conservação da quantidade de movimento angular somente é preciso se conhecer o momento de inércia na direção z e os momentos externos para se deduzir a equação de movimento de rotação.

$$I_{xx}\ddot{\varphi} = M_V + T \quad (\text{A-6})$$

O símbolo  $\ddot{\varphi}$  da equação acima indica a aceleração angular do rotor. O momento  $M_V$ , momento da força de restauração elástica do eixo em relação ao ponto V, é deduzido abaixo pelo produto da força e o desbalanceamento do eixo.

$$M_V \mathbf{n}_x = -\varepsilon(-\cos\varphi \mathbf{n}_z - \sin\varphi \mathbf{n}_y) \times (-kz_w \mathbf{n}_z - ky_w \mathbf{n}_y)$$

Novamente se a rigidez nas direções z e y forem as mesmas,  $k_z = k_y = k$ , pode-se reescrever o momento acima.

$$M_V = \varepsilon(ky_w \cos\varphi - kz_w \sin\varphi)$$

Do momento referente à força de rigidez do eixo e do momento aplicado,  $T$ , pode-se reescrever a equação 6.

$$I_{xx}\ddot{\varphi} = \varepsilon(ky_w \cos\varphi - kz_w \sin\varphi) + T \quad (\text{A-7})$$

Com isto a dedução da equação de movimento fica completa, tanto para o movimento de translação, equação 5, quanto para o movimento de rotação, equação 7. Contudo, como a velocidade angular é constante, ou seja,  $\dot{\varphi} = \Omega$ , a posição angular do rotor obedece a seguinte relação,  $\varphi = \varphi_0 + \Omega t$ , sendo  $\varphi_0$  a posição angular inicial. Assim as equações 5 e 7 podem ser reescritas como abaixo.

$$\begin{aligned}
m(\ddot{z}_w - \varepsilon \Omega^2 \cos \varphi) &= -k z_w \\
m(\ddot{y}_w - \varepsilon \Omega^2 \sin \varphi) &= -k y_w
\end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

$$0 = \varepsilon(ky_w \cos \varphi - kz_w \sin \varphi) + T \quad (\text{A-9})$$

## Equações de movimento usando coordenadas móveis

Agora ao invés de se usar coordenadas inerciais usa-se coordenadas móveis. Define-se um sistema móvel B o qual tem rotação  $\Omega$ . Adota-se um sistema de coordenadas com origem em O cujos versores podem ser escritos equivalentemente aos versores referentes às coordenadas inerciais.

$$\mathbf{b}_\xi = \mathbf{n}_x$$

$$\mathbf{b}_\eta = \cos(\Omega t)\mathbf{n}_z - \sin(\Omega t)\mathbf{n}_y$$

$$\mathbf{b}_\zeta = \sin(\Omega t)\mathbf{n}_z + \cos(\Omega t)\mathbf{n}_y$$

A Figura 0.4 indica as coordenadas dos pontos V e W usando-se coordenadas móveis. O segmento formado pelos pontos V e W, mantém-se paralelo ao eixo  $\zeta$ . Análogo a dedução do sistema de equações anterior escreve-se a coordenada do centro de massa, para em seguida deduzir-se a velocidade e aceleração deste.

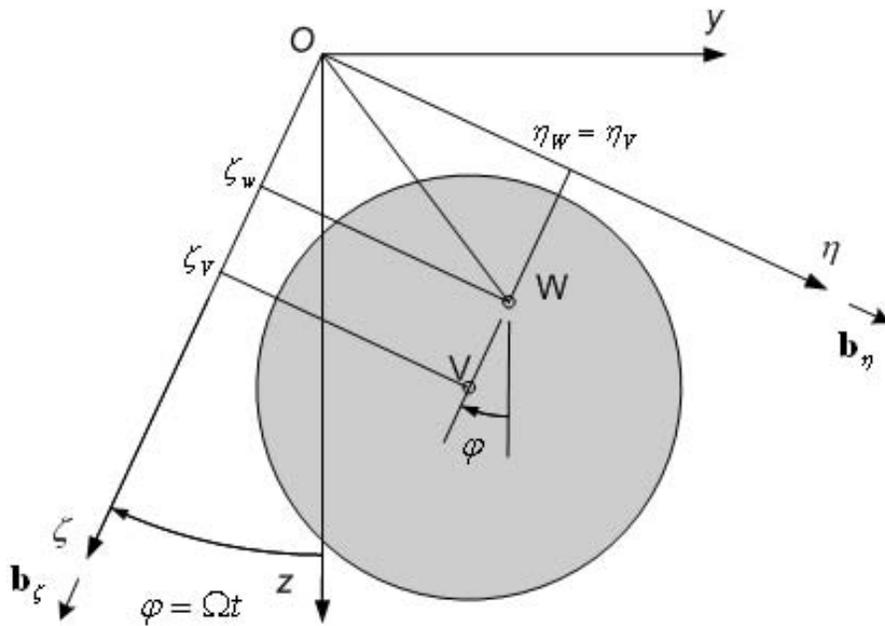


Figura 0.4

Posição do ponto  $V$ .

$$\begin{aligned} \zeta_V &= \zeta_w + \varepsilon \\ \eta_V &= \eta_w \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

Faz-se a derivada temporal da posição do ponto  $V$  no referencial  $B$ , obtendo-se a velocidade do ponto  $V$  no referencial  $B$ . O resultado obtido é usado posteriormente para a dedução da velocidade no referencial inercial.

$$\begin{aligned} \frac{{}^B d\zeta_V}{dt} &= \frac{{}^B d\zeta_w}{dt} + 0 = \dot{\zeta}_w \\ \frac{{}^B d\eta_V}{dt} &= \frac{{}^B d\eta_w}{dt} = \dot{\eta}_w \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

Como é necessário obter a velocidade do centro de massa no referencial inercial faz-se a derivada temporal da posição deste no referencial inercial.

Na direção  $\zeta$ .

$$\frac{{}^I d(\zeta_V \mathbf{b}_\zeta)}{dt} = \frac{{}^B d\zeta_V}{dt} \mathbf{b}_\zeta + {}^I \boldsymbol{\omega}^B \times \zeta_V \mathbf{b}_\zeta$$

$$\frac{{}^I d(\zeta_V \mathbf{b}_\zeta)}{dt} = \dot{\zeta}_w \mathbf{b}_\zeta + (-\Omega \mathbf{b}_\xi) \times (\zeta_w + \varepsilon) \mathbf{b}_\zeta = \dot{\zeta}_w \mathbf{b}_\zeta + (\Omega \zeta_w + \Omega \varepsilon) \mathbf{b}_\eta$$

Na direção  $\eta$ .

$$\frac{{}^I d(\eta_V \mathbf{b}_\eta)}{dt} = \frac{{}^B d\eta_V}{dt} \mathbf{b}_\eta + {}^I \boldsymbol{\omega}^B \times \eta_V \mathbf{b}_\eta$$

$$\frac{{}^I d(\eta_V \mathbf{b}_\eta)}{dt} = \dot{\eta}_w \mathbf{b}_\eta + (-\Omega \mathbf{b}_\xi) \times \eta_V \mathbf{b}_\eta = \dot{\eta}_w \mathbf{b}_\eta - \Omega \eta_V \mathbf{b}_\zeta$$

Assim se obtém a velocidade do centro de massa usando-se coordenadas móveis.

$$\mathbf{v}^V = (\dot{\zeta}_w - \Omega \eta_V) \mathbf{b}_\zeta + (\dot{\eta}_w + \Omega \zeta_w + \Omega \varepsilon) \mathbf{b}_\eta \quad (\text{A-12})$$

Aceleração do ponto  $V$  no referencial  $B$  é deduzida como abaixo. Em seguida faz-se a dedução da aceleração do ponto  $V$  em relação ao referencial inercial.

$$\frac{{}^B d\dot{\zeta}_V}{dt} = \ddot{\zeta}_w \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{{}^B d\dot{\eta}_V}{dt} = \ddot{\eta}_w$$

Aceleração do ponto  $V$  no referencial inercial.

$$\frac{{}^I d\mathbf{v}^V}{dt} = (\ddot{\zeta}_w - \Omega \dot{\eta}_V) \mathbf{b}_\zeta + (\dot{\zeta}_w - \Omega \eta_V) \frac{{}^I d\mathbf{b}_\zeta}{dt} + (\ddot{\eta}_w + \Omega \dot{\zeta}_w) \mathbf{b}_\eta + (\dot{\eta}_w + \Omega \zeta_w + \Omega \varepsilon) \frac{{}^I d\mathbf{b}_\eta}{dt}$$

A derivada dos versores acima é feita de maneira explícita a seguir.

$$\frac{{}^I d\mathbf{b}_\zeta}{dt} = {}^I \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{b}_\zeta = (-\Omega \mathbf{b}_\xi) \times \mathbf{b}_\zeta = \Omega \mathbf{b}_\eta$$

$$\frac{{}^I d\mathbf{b}_\eta}{dt} = {}^I \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{b}_\eta = (-\Omega \mathbf{b}_\xi) \times \mathbf{b}_\eta = -\Omega \mathbf{b}_\zeta$$

Reescrevendo o resultado da derivada temporal da velocidade do centro de massa esta resulta como abaixo.

$${}^I \mathbf{a}^V = (\ddot{\zeta}_w - \Omega \dot{\eta}_w - \Omega \dot{\eta}_w - \Omega^2 \zeta_w - \Omega^2 \varepsilon) \mathbf{b}_\zeta + (\dot{\eta}_w + \Omega \dot{\zeta}_w + \Omega \dot{\zeta}_w - \Omega^2 \eta_w) \mathbf{b}_\eta$$

$${}^I \mathbf{a}^V = (\ddot{\zeta}_w - 2\Omega \dot{\eta}_w - \Omega^2 \zeta_w - \Omega^2 \varepsilon) \mathbf{b}_\zeta + (\dot{\eta}_w + 2\Omega \dot{\zeta}_w - \Omega^2 \eta_w) \mathbf{b}_\eta \quad (\text{A-14})$$

A equação de movimento rotacional não sofre modificações quando escrita utilizando-se coordenadas móveis. A força externa que atua no rotor é somente a força referente à rigidez do eixo. Decomposta nas direções  $\zeta$  e  $\eta$ , tem-se:

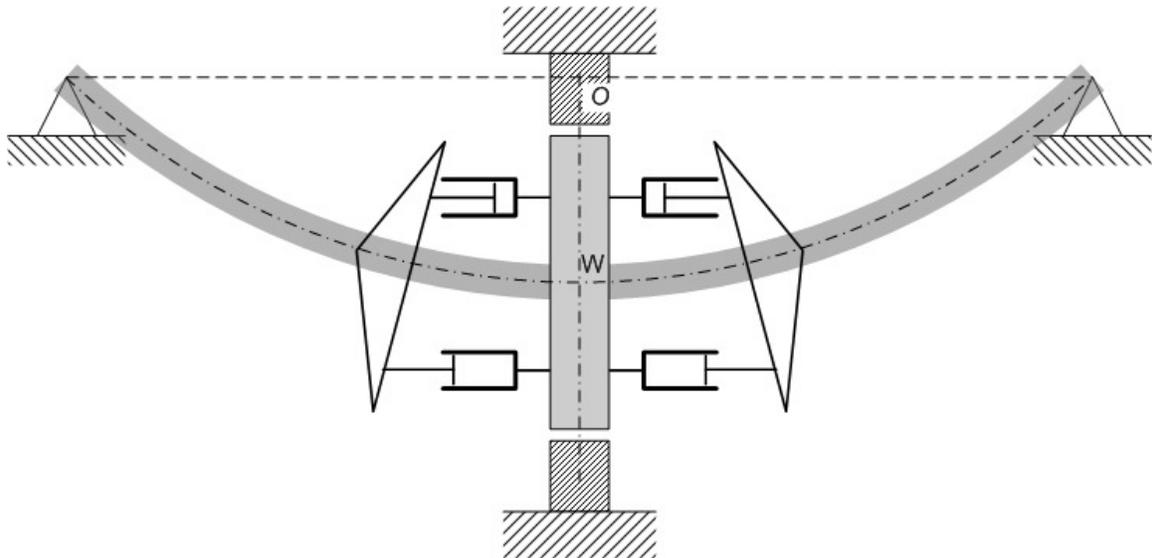
$$\begin{aligned} F_\zeta &= -k_\zeta \zeta_w \\ F_\eta &= -k_\eta \eta_w \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Como feito em coordenadas inerciais do modelo anterior a rigidez do eixo é considerada uniforme,  $k_\zeta = k_\eta = k$ . Das equações 14 e 15 deduz-se a equação de movimento pela conservação da quantidade de movimento linear:  $m {}^I \mathbf{a}^V = \sum \mathbf{F}$ .

$$\begin{aligned} m(\ddot{\zeta}_w - 2\Omega \dot{\eta}_w - \Omega^2 \zeta_w - \Omega^2 \varepsilon) &= -k \zeta_w \\ m(\dot{\eta}_w + 2\Omega \dot{\zeta}_w - \Omega^2 \eta_w) &= -k \eta_w \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

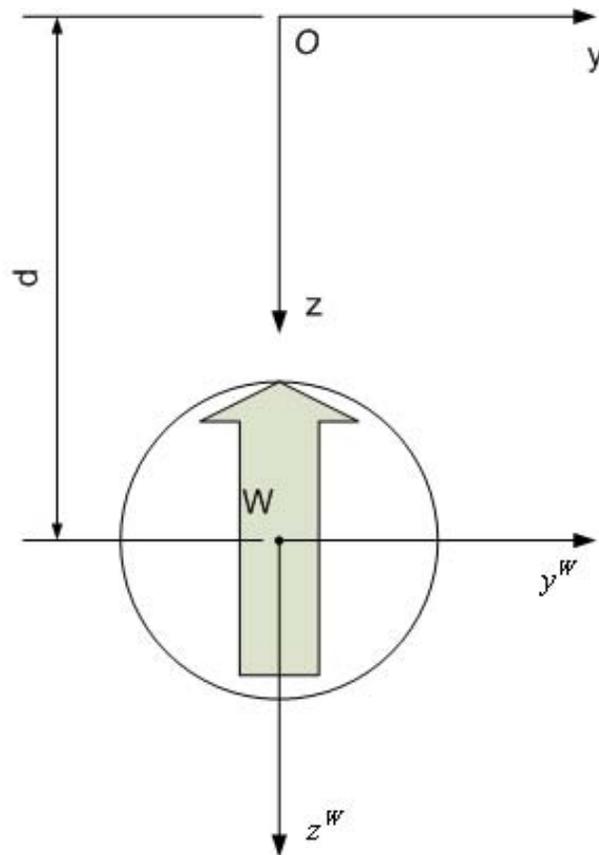
## Força de amortecimento interno do rotor

Neste modelo de rotor além da força de rigidez do eixo tem-se a força do amortecimento interno do eixo do rotor. O uso de coordenadas móveis torna mais clara a dedução da força de amortecimento interno. No modelo a seguir o eixo é pré-flexionado e mantido flexionado como ilustrado na figura abaixo.



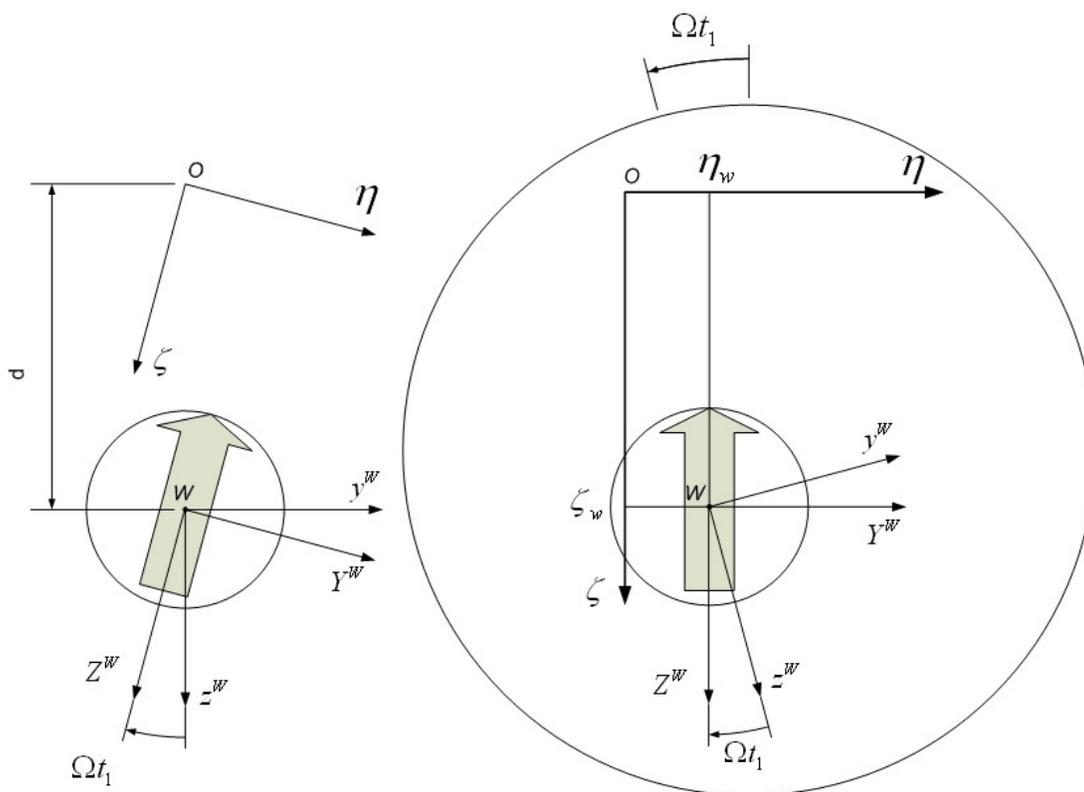
**Figura 0.5**

Na figura pode-se verificar o mecanismo de formação do amortecimento interno. Os amortecedores da figura são acionados quando ocorre flexão do eixo. Esta flexão não fica evidente no rotor devido a este estar em permanente movimento rotacional. No modelo acima o rotor é modelado como perfeitamente balanceado, sendo assim os pontos V e W são coincidentes.



**Figura 0.6**

A figura acima ilustra a seção transversal do rotor e as coordenadas inerciais com origem em  $O$  e  $W$ . Na figura  $d$  corresponde a magnitude da flexão do eixo. Considerando-se a figura acima como sendo o estado do rotor para um instante  $t = 0$ , para um instante posterior,  $t = t_1$ , o rotor adquire a configuração abaixo. Na figura da esquerda pode-se verificar o deslocamento angular que ocorreu no rotor, mas a flexão sofrida pelo eixo não fica evidente. Se considerarmos um referencial que se move com a mesma velocidade angular do rotor, figura a direita, pode-se verificar a flexão sofrida pelo rotor pelas coordenadas  $\zeta_w$  e  $\eta_w$ . Essa flexão fica mais evidente em um instante posterior  $t = t_2$ , figura 8.



**Figura 0.7**

Do instante  $t_1$  para o instante  $t_2$  pode-se verificar que a coordenada  $\zeta_w$  sofreu uma diminuição e a coordenada  $\eta_w$  sofreu um aumento.



Se  $\zeta_w$  e  $\eta_w$  indicam a flexão do eixo nas direções  $\zeta$  e  $\eta$  respectivamente. A velocidade da flexão nestas direções pode então ser escrita como sendo:  $\dot{\zeta}_w$  e  $\dot{\eta}_w$ . E mais ainda se conhecidos os coeficientes de amortecimento interno nestas mesmas direções  $d_{I\zeta}$  e  $d_{I\eta}$  a força de amortecimento interno fica deduzida como abaixo.

$$\begin{aligned} F_{d_{I\zeta}} &= d_{I\zeta} \dot{\zeta}_w \\ F_{d_{I\eta}} &= d_{I\eta} \dot{\eta}_w \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

A velocidade do ponto  $W$  no referencial  $B$  pode ser escrita como abaixo (figura 4).

$${}^B \mathbf{v}^W = \dot{\zeta}_w \mathbf{b}_\zeta + \dot{\eta}_w \mathbf{b}_\eta$$

Esta equação está escrita em coordenadas móveis, porém ela pode ser escrita em coordenadas inerciais. A posição do ponto  $W$  em coordenadas inerciais é escrita como abaixo.

$$\mathbf{p}^{W/O} = z_W \mathbf{n}_z + y_W \mathbf{n}_y \quad (\text{A-18})$$

Se efetuada a derivada temporal da equação acima no referencial  $B$ , como consequência encontra-se a equação da velocidade do ponto  $W$  no referencial  $B$  em coordenadas inerciais.

$$\frac{{}^B d(\mathbf{p}^{W/O})}{dt} = \dot{z}_W \mathbf{n}_z + z_W \frac{{}^B d(\mathbf{n}_z)}{dt} + \dot{y}_W \mathbf{n}_y + y_W \frac{{}^B d(\mathbf{n}_y)}{dt}$$

A derivada dos versores  $\mathbf{n}_z$  e  $\mathbf{n}_y$  é mostrada abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{{}^B d\mathbf{n}_z}{dt} &= {}^B \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{n}_z = (-\Omega \mathbf{n}_x) \times \mathbf{n}_z = \Omega \mathbf{n}_y \\ \frac{{}^B d\mathbf{n}_y}{dt} &= {}^B \boldsymbol{\omega}^I \times \mathbf{n}_y = (-\Omega \mathbf{n}_x) \times \mathbf{n}_y = -\Omega \mathbf{n}_z \end{aligned}$$

A velocidade do ponto  $W$  no referencial  $B$  em coordenadas inerciais é escrita abaixo.

$${}^B \mathbf{v}^W = (\dot{z}_W - \Omega y_W) \mathbf{n}_z + (\dot{y}_W + \Omega z_W) \mathbf{n}_y \quad (\text{A-19})$$

Como hipótese se considera o eixo com o mesmo coeficiente de amortecimento nas direções  $\zeta$ ,  $\eta$  e conseqüente possuindo o mesmo coeficiente de amortecimento em quaisquer outras direções. Sabendo-se que a equação 19 é a velocidade de flexão do eixo, pode-se reescrever a força de amortecimento interno, porém agora se utilizando coordenadas inerciais. Da equação 19 e com a hipótese  $d_{I\zeta} = d_{I\eta}$  a força de amortecimento interno é reescrito abaixo com coordenadas inerciais.

$$\begin{aligned} F_{d_{Iz}} &= -d_I (\dot{z}_W - \Omega y_W) \\ F_{d_{Iy}} &= -d_I (\dot{y}_W + \Omega z_W) \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

Assim deduz-se a força de amortecimento interno em coordenadas inerciais.

### *Considerações para a linearização*

Algumas considerações são necessárias para a realização da linearização. Se considerarmos o rotor um corpo rígido cujo movimento está restrito a rotação, a energia cinética total desse rotor pode ser escrita como:

$$\frac{I\omega^2}{2}$$

$I$  e  $\omega$  são o momento de inércia e velocidade de rotação do rotor. Se este rotor ao invés de efetuar movimento rotacional estiver em movimento translacional com a mesma energia cinética, esta energia pode ser escrita como:

$$\frac{mv^2}{2}$$

$m$  e  $v$  são massa e velocidade linear do rotor. Se  $r$  for o raio de giração do rotor o momento de inércia pode ser escrita como  $I = mr^2$ , igualando-se as duas expressões:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

conseqüentemente  $v = \omega r$ . O rotor tem inerente os dois tipos de movimento, rotacional e translacional. Segundo Krämer (1993) a velocidade típica de vibração translacional é de um fator  $10^{-4}$  menor que a velocidade  $v = \omega r$ . Por exemplo, (Krämer (1993)), para um rotor de raio de giração 200 mm e 3000 rpm, a velocidade  $v$  é de 63 m/s, sendo que a velocidade típica de vibração translacional pode ser medido em mm/s. Por essa razão é possível se desprezar o termo  $\varphi^F \dot{u}_z^R \approx 0$ , o deslocamento angular da fundação é mínimo diante do deslocamento angular do rotor e a velocidade translacional  $\dot{u}_z^R$  é mínima diante de  $v$ . Seguindo o mesmo princípio despreza-se também o termo  $\varphi^F \dot{u}_z^F \approx 0$ . Os deslocamentos resultantes da vibração são conhecidamente pequenos e o produto entre eles:  $\varphi^F u_z^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^R \approx 0$ ,  $\varphi^F u_z^F \approx 0$ ,  $\varphi^F u_y^F \approx 0$  e  $\varphi^F \varphi^F \approx 0$ , torna-se um valor desprezível.