

ÉSTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO DE
TESE DEFENDIDA POR IVAN LIMA DO
ESPÍRITO SANTO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 02/10/98.

Kátia Lucchesi Cavalca
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Estudo dos Efeitos de Atrito Seco e
Restituição Cúbica no Comportamento
do Rotor Laval Vertical**

Autor: Ivan Lima do Espírito Santo

Orientadora: Profa. Dra. Kátia Cavalca Lucchesi



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Estudo dos Efeitos de Atrito Seco e Restituição Cúbica no Comportamento do Rotor Laval Vertical

Autor: Ivan Lima do Espírito Santo

Orientadora: *Prof^a. Dr^a.* Kátia Cavalca Lucchesi

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Dinâmica de Rotores

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998.

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Es65e Espírito Santo, Ivan Lima do
 Estudo dos efeitos de atrito seco e restituição cúbica
 no comportamento do rotor Laval vertical. / Ivan Lima
 do Espírito Santo.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

 Orientadora: Kátia Cavalca Lucchesi
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

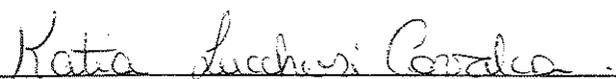
 1. Rotores - Dinâmica. 2. Mecânica não-linear. 3.
 Perturbação (Matemática). I. Lucchesi, Kátia Cavalca.
 II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Dissertação de Mestrado

**Estudo dos Efeitos de Atrito Seco e
Restituição Cúbica no Comportamento
do Rotor Laval Vertical**

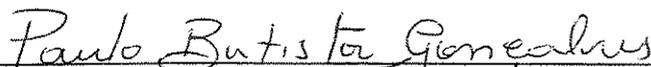
Autor: Ivan Lima do Espírito Santo
Orientadora: Profa. Dra. Kátia Cavalca Lucchesi



Profa. Dra. Kátia Cavalca Lucchesi, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Fernando Iguti
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Campinas, 02 de Outubro de 1998.

Dedicatória:

Dedico este trabalho ao meu pai.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

Ao CNPq, pelos 23 meses de bolsa para o desenvolvimento deste trabalho. Ao Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica, que me acolheu como aluno e deu todo suporte de material e equipamentos para o estudo e elaboração da dissertação final. Ao Sifem pelo suporte computacional. À professora Kátia Lucchesi pela proposta do tema e pela paciência e dedicação. Aos colegas de departamento, e em especial ao colega André Fenili pelas horas de discussão e aos colegas Allan Pereira, Juan Camino e Éder Lima pela paciência e boa vontade com as quais sempre me ajudaram. Ao Pr. Dr. Hans Ingo Weber pelos relevantes esclarecimentos sobre a interação entre a fonte de potência e o sistema. Ao Pr. Dr. Paulo Batista Gonçalves pelos conselhos e explicações sobre a aplicabilidade dos métodos de perturbação. A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Nomenclatura	xx
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	4
3 Descrição do Problema	14
3.1 Modelo do Rotor Laval Não Amortecido	14
3.1.1 Sistema Adicional com Fixação Rígida	17
3.2 Fonte de Potência	21
3.2.1 Motor de Corrente Alternada	22
3.2.2 Motor de Corrente Contínua	23
3.2.3 Acionamento Ideal	24
3.3 Atrito Seco de Coulomb	25

4	Equacionamento Dinâmico do Rotor Laval	27
4.1	Rotor Laval com Restituição Cúbica	30
4.2	Rotor Laval com Atrito Seco	31
5	Metodologia de Solução	33
5.1	Simulação Numérica	33
5.2	Método da Média	34
5.2.1	Movimento em Regime Permanente	37
5.2.2	Curva de Ressonância	38
5.2.3	Rotação em Regime	38
5.2.4	Estabilidade	39
5.2.5	Amplitude Máxima de Oscilação	40
5.2.6	Movimento em Regime Transiente	41
6	Simulação Numérica - Resultados	42
6.1	Acionamento por Motor CA	43
6.1.1	Rotor Laval Não Amortecido	44
6.1.2	Rotor Laval com Amortecimento Viscoso	44
6.1.3	Rotor Laval com Restituição Cúbica	47

6.1.4	Rotor Laval com Atrito Seco	49
6.1.5	Rotor Laval com Efeitos Combinados de Restituição Cúbica e Amortecimento Viscoso	50
6.1.6	Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Amortecimento Viscoso	52
6.1.7	Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Restituição Cúbica	53
6.1.8	Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Restituição Cúbica e Amortecimento Viscoso	55
7	Conclusão	57
7.1	Considerações Finais	57
7.2	Conclusões	58
7.3	Perspectivas	59
	Bibliografia	60
A	Motor de Corrente Contínua	64
A.1	Acionamento por Motor CC	64
A.1.1	Rotor Laval Não Amortecido	64
A.1.2	Rotor Laval com Amortecimento Viscoso	66
A.1.3	Rotor Laval com Atrito Seco	68
A.1.4	Rotor Laval com Restituição Cúbica	70

A.1.5 Rotor Laval com Efeitos Combinados	72
B Sistema Ideal	77
B.1 Acionamento Ideal	77
B.1.1 Rotor Laval Não Amortecido	77
B.1.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso	79
B.1.3 Rotor Laval com Atrito Seco	80
B.1.4 Rotor Laval com Restituição Cúbica	81
B.1.5 Rotor Laval com Efeitos Combinados	83
C Resposta Transiente	86
C.1 Rotor Laval Não Amortecido	86
C.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso	89
C.3 Rotor Laval com Restituição Cúbica	90
C.4 Rotor Laval com Efeitos Combinados	92
D Equações Adimensionais	94

Resumo

ESPÍRITO SANTO, Ivan Lima do, Estudo dos Efeitos de Atrito Seco e Restituição Cúbica no Comportamento do Rotor Laval Vertical, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 97 p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho, é desenvolvida uma análise não linear de um rotor Laval com uma fonte de potência não ideal passando através da velocidade crítica sob efeitos de atrito seco de Coulomb e restituição cúbica. Verificaram-se as mudanças na resposta do sistema através da integração direta da equação de movimento, no caso de fortes não linearidades, e através do método da média, no caso de fracas não linearidades. Vários aspectos importantes no projeto de máquinas rotativas são verificados com estudo do comportamento não linear do rotor Laval, tais como o torque mínimo necessário para passagem pela velocidade crítica, a amplitude de vibração durante a passagem e a estabilidade da rotação em regime permanente. A rigidez cúbica afeta a frequência natural do sistema, fazendo com que o valor desta varie em função da amplitude de oscilação. A forma inclinada da curva de ressonância faz com que, para uma determinada rotação, existam duas amplitudes de vibração possíveis, uma correspondente à aceleração e outra à desaceleração do rotor. O estudo teórico de estabilidade dos pontos da curva de ressonância, através do método da média, mostrou-se satisfatório na previsão da rotação em regime permanente.

Palavras Chave

Modelagem Numérica, Mecânica Não Linear, Perturbação (Matemática), Sistemas Não Lineares, Atrito Seco, Rotor, Dinâmica

Abstract

ESPÍRITO SANTO, Ivan Lima do, Study of the Behaviour of the Laval Rotor under Dry Friction and Cubic Restoring Force, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 97 p. Dissertação (Mestrado)

In this work a nonlinear analysis of a simple Laval rotor with a non ideal power source crossing its resonance under a Coulomb dry friction action and cubic restoring force is done. Dynamical changes on the system response are observed through numerical integration in the case of strong nonlinearity and through average method in the case of weak nonlinearity. Some important constitutive request appear from the studies of the behavior. Two important aspects take place: the minimal torque requested for the passage across the critical speed and the amplitude of vibration, both of them are quite dependent on the interaction between the system and the power source. The Coulomb dry friction come from the contact between the rotor and a auxiliar device for reduction of oscillation during the passage through the critical speed. This device is made of cylindric rolles that also leads to a cubic restoring force. Otherwise, without such device the rotor runs free of any kind of dry friction and in this case the shaft is made of material that responds better with the cubic law instead of linear one.

Key Words

Numerical Modeling, Average Method, Perturbation Theory, Nonlinear System, Dry Friction, Cubic Restoring Force, Rotor, Dynamic

Lista de Figuras

3.1	Rotor Laval vertical	15
3.2	Rotor Laval vertical com sistema auxiliar	16
3.3	Vista superior do sistema de fixação dos roletes	17
3.4	Circuito do motor de corrente contínua	23
3.5	Modelo de atrito seco proposto por Coulomb (linha cheia) e possível comportamento real (linha tracejada)	25
3.6	Modelo de atrito usado	26
5.1	Intersecção da curva $S(\varphi')$ com curvas de torque L	39
6.1	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	45
6.2	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	45
6.3	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	45
6.4	Órbita do rotor	45
6.5	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	46

6.6	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	46
6.7	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	47
6.8	Órbita do rotor	47
6.9	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	48
6.10	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	48
6.11	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	48
6.12	Órbita do rotor	48
6.13	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	49
6.14	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	49
6.15	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	50
6.16	Órbita do rotor	50
6.17	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	51
6.18	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	51
6.19	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	51
6.20	Órbita do rotor	51
6.21	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	52
6.22	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	52
6.23	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	53

6.24	Órbita do rotor	53
6.25	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	54
6.26	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	54
6.27	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	54
6.28	Órbita do rotor	54
6.29	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n	55
6.30	Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n	55
6.31	Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n	56
6.32	Órbita do rotor	56
A.1	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	64
A.2	Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	64
A.3	Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	65
A.4	Órbita do rotor	65
A.5	Órbita do rotor	65
A.6	Órbita do rotor	65
A.7	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	66
A.8	Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	66
A.9	Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	66

A.10 Órbita do rotor	66
A.11 Órbita do rotor	67
A.12 Órbita do rotor	67
A.13 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	68
A.14 Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	68
A.15 Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	68
A.16 Órbita do rotor	68
A.17 Órbita do rotor	69
A.18 Órbita do rotor	69
A.19 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	70
A.20 Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	70
A.21 Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	70
A.22 Órbita do rotor	70
A.23 Órbita do rotor	71
A.24 Órbita do rotor	71
A.25 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	72
A.26 Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	72
A.27 Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	72

A.28 Órbita do rotor	72
A.29 Órbita do rotor	73
A.30 Órbita do rotor	73
A.31 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	73
A.32 Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	73
A.33 Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	74
A.34 Órbita do rotor	74
A.35 Órbita do rotor	74
A.36 Órbita do rotor	74
A.37 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	75
A.38 Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}	75
A.39 Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}	75
A.40 Órbita do rotor	75
A.41 Órbita do rotor	76
A.42 Órbita do rotor	76
B.1 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	77
B.2 Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	77
B.3 Órbita do rotor	78

B.4	Órbita do rotor	78
B.5	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	79
B.6	Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	79
B.7	Órbita do rotor	79
B.8	Órbita do rotor	79
B.9	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	80
B.10	Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	80
B.11	Órbita do rotor	80
B.12	Órbita do rotor	80
B.13	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	81
B.14	Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	81
B.15	Rotação ao longo do tempo para dois valores de T_m	81
B.16	Órbita do rotor	81
B.17	Órbita do rotor	82
B.18	Órbita do rotor	82
B.19	Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	83
B.20	Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	83
B.21	Rotação ao longo do tempo para dois valores de T_m	83

B.22 Órbita do rotor	83
B.23 Órbita do rotor	84
B.24 Órbita do rotor	84
B.25 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	84
B.26 Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	84
B.27 Órbita do rotor	84
B.28 Órbita do rotor	84
B.29 Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m	85
B.30 Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m	85
B.31 Órbita do rotor	85
B.32 Órbita do rotor	85
C.1 Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	87
C.2 Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	87
C.3 Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	88
C.4 Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	88
C.5 Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	88

C.6	Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	88
C.7	Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	89
C.8	Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	89
C.9	Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	89
C.10	Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	89
C.11	Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	90
C.12	Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	90
C.13	Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	90
C.14	Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	90
C.15	Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	91
C.16	Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	91
C.17	Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	91
C.18	Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	91
C.19	Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	92

C.20 Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	92
C.21 Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	92
C.22 Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio	92
C.23 Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	93
C.24 Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio	93

Nomenclatura

Parâmetros Gerais do Sistema

O	centro do eixo imaginário que une os mancais
w	centro do disco onde passa o eixo
s	centro de massa do disco
e	excentricidade
m	massa do disco
c	constante de amortecimento viscoso
I_p	momento de inércia polar do disco
ρ	raio de giração do disco ($\rho = \sqrt{\frac{I_p}{m}}$)
k	constante de rigidez linear do eixo em todas as direções radiais
γ	constante de rigidez cúbica do eixo em todas as direções radiais
ω	freqüência natural
φ	ângulo de rotação do disco
y_w, z_w	coordenadas inerciais do ponto w
F_a	força de atrito seco
T	torque líquido aplicado
T_m	torque do motor de acionamento
T_p	torque ocasionado pelas perdas
t	tempo
E_c	energia cinética do sistema
E_p	energia potencial do sistema
q_i	coordenadas generalizadas

Parâmetros do Motor de Corrente Contínua

e_a	tensão aplicada na armadura
i_a	corrente elétrica na armadura
R_a	resistência da armadura
L_a	indutância
k_b	força contra eletromotriz
τ_a	torque aplicado a caixa de engrenagem
n_g	razão de transmissão da caixa de engrenagem do motor para o eixo do rotor
c_v	constante de perdas do motor
I_m	inércia do motor
k_t	constante de torque

Parâmetros do Motor de Corrente Alternada

T_{max}	torque máximo do motor de indução no escorregamento crítico
α_m	torque adimensional do motor de indução
α_{max}	torque máximo
S	escorregamento instantâneo do motor de indução ($s = 1 - \dot{\phi}/\omega_{syn}$)
ω_{syn}	velocidade angular síncrona do motor de indução
Ω_s	razão entre a velocidade síncrona e a frequência natural ($\Omega_s = \omega_{syn}/\omega$)
S_{cr}	escorregamento crítico
α_n	número característico de acionamento
α_p	torque adimensional ocasionado pelas perdas

Parâmetros Adimensionais do Sistema

$\tau = t\omega$	tempo adimensional
------------------	--------------------

$y = \frac{y_w}{x}$	coordenada inercial y do ponto w adimensionalizada
$z = \frac{z_w}{x}$	coordenada inercial z do ponto w adimensionalizada
$\alpha_1 = \frac{T}{ke\rho}$	torque líquido adimensional
x	comprimento característico de oscilação
$\alpha_2 = \frac{x}{\rho}$	
$\alpha_3 = \frac{\gamma x^2}{k}$	
$\varepsilon = e/\rho$	parâmetro de perturbação
$\mu = \frac{c}{2m\omega}$	amortecimento viscoso
a	amplitude de oscilação
β	fase de oscilação
$\Delta = \varphi' - 1$	parâmetro de sintonia
$\sigma = \frac{\varphi' - 1}{\varepsilon}$	

Derivadas

$$\frac{d}{dt} = (\cdot)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (\cdot\cdot)$$

$$\frac{d}{d\tau} = (')$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = (''')$$

Capítulo 1

Introdução

Longe de constituir uma aproximação, a teoria de sistemas lineares é amplamente empregada, com muito êxito, nos mais diversos campos da engenharia. Contudo, muitas vezes nos deparamos com problemas de natureza essencialmente não linear. Neste caso, não mais se aplica toda a teoria desenvolvida a partir da integral de Duhammel. Em outras palavras, o princípio da superposição não é válido e uma grande dependência das condições iniciais se torna presente.

Neste trabalho, considera-se o estudo de um modelo não linear do rotor de Laval, sujeito a atrito seco e restituição cúbica, bem como à interação deste com a fonte de potência. As não linearidades encontram-se divididas em dois modelos distintos. Em um primeiro modelo, a restituição cúbica tem sua origem na rigidez do material do eixo. Ensaio recentes mostram a validade deste modelo para uma grande faixa de materiais (CVETICANIN, 1995). Em um segundo modelo, o sistema adicional de redução da amplitude de vibração, desenvolvido por LUCCHESI, 1988, é usado para simular o atrito seco. Este sistema adicional de fixação rígida consiste em roletes que entram em contato com o disco do rotor. Neste modelo, a rigidez do eixo é considerada linear e a força de restituição cúbica é devida ao contato dos roletes com o disco do rotor.

Quanto ao acionamento, são considerados três tipos de fonte para efeito de simulação: motor de corrente alternada, motor de corrente contínua e torque constante. Este último, uma simplificação muitas vezes usada, considera constante o torque líquido atuante no sistema, após se verificar experimentalmente que a ordem de grandeza do torque devido às perdas é desprezível em relação ao torque líquido. Essa suposição despreza a interação entre a fonte de potência e o sistema (sistema considerado ideal). Todavia, o comportamento de um sistema oscilatório, linear ou não, está explícita ou implicitamente ligado à presença da fonte de potência (PAKDERMIRLI & NAYFEH, 1994).

Os métodos de estudo de vibrações não lineares geralmente se dividem em dois grupos: um grupo no qual estão os métodos gráficos e outro no qual estão os métodos de perturbação. O primeiro estuda o comportamento do sistema através de ferramentas gráficas, tais como mapas de Poincaré, espaço-fase, mapa de retorno, diagrama de bifurcação, expoente de Liapunov etc. O segundo baseia-se na expansão assintótica em série, para solução de equações diferenciais.

Neste trabalho, a metodologia de solução usada no caso de as não linearidades serem fracas é a técnica de perturbação conhecida como método da média. Segundo HASAN & MOOK, 1979a, este é o método mais indicado para o tratamento de sistemas não ideais. Neste caso, o modelo considera apenas o efeito de restituição cúbica. No caso de fortes não linearidades, utilizou-se a integração numérica das equações diferenciais, através do método de Runge-Kutta de quinta ordem de passo fixo.

O método da média mostrou-se satisfatório para o estudo do sistema. Através deste, puderam-se obter informações sobre a estabilidade da rotação em regime, curva de ressonância e a máxima amplitude de vibração durante a passagem pela rotação crítica. A forma distorcida da curva de ressonância, própria de sistemas não lineares, pôde também ser avaliada através de uma expressão analítica. Este tipo de curva faz com que coexistam duas amplitudes de oscilação possíveis em uma determinada rotação, relacionadas com a aceleração (parte superior da curva) e a desaceleração (parte inferior da curva) do rotor. Este fato acarreta o fenômeno do salto, caracterizado por uma mudança repentina na amplitude de oscilação.

Com essas informações tornou-se possível o conhecimento de alguns aspectos importantes no projeto de máquinas rotativas, tais como o torque de acionamento mínimo necessário para que o rotor consiga transpor a rotação crítica e qual a faixa de rotação em regime praticável para este torque.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica está dividida em três partes distintas. Em uma primeira etapa, procuram-se rever os trabalhos mais relevantes relacionados com o rotor Laval propriamente dito. Em seguida, vêem os trabalhos relacionados com a modelagem do atrito seco. Finalmente, são mostradas algumas das principais abordagens usadas no estudo de sistemas não lineares em geral.

A solução exata para o problema não linear da passagem pela ressonância foi apresentada por LEWIS, 1932. Em seguida, DORNING, 1959 e BODGER, 1967 aprofundaram-se neste estudo, analisando os casos de passagem acelerada e desacelerada pela velocidade crítica.

YANABE & TAMURA, 1972 estudaram a vibração de um eixo passando através da velocidade crítica. Uma solução exata para o problema foi obtida, assumindo-se que a velocidade angular da força externa cresce linearmente com o tempo, considerando-se o sistema sem amortecimento. Esta solução foi apresentada, contudo, contendo a integral de Fresnel. Também neste mesmo trabalho, a equação de movimento foi resolvida numericamente pelo método de Runge-Kutta. A solução aproximada pela expansão assintótica das integrais de Fresnel mostrou que a vibração transiente é dividida em três regiões distintas.

MATSUURA, 1975 estudou a vibração e as características da velocidade de um rotor desbalanceado durante a aceleração. Nesse trabalho, a solução estacionária do sistema linear foi analisada por um método diferente dos utilizados até então, numa tentativa de explicar a inclinação da curva de frequência versus amplitude. Este fenômeno, segundo o autor, ocorre devido à interação da fonte de energia de potência limitada com o sistema oscilatório do rotor. Características não estacionárias, nas vizinhanças da velocidade crítica, foram calculadas pela integração da equação diferencial aproximada pela teoria de perturbação. Contudo, as soluções obtidas pela teoria de perturbação foram satisfatórias somente na região de ressonância.

AIBA, 1976 estudou a passagem de um rotor pela ressonância, sem desprezar o efeito giroscópico, pelo método numérico de Runge-Kutta-Gill. Para estabelecer a influência do efeito giroscópico quando o rotor passa pela velocidade crítica, várias soluções foram obtidas para vários rotores de características geométricas similares. Quando o raio do rotor é da mesma ordem de grandeza do comprimento do eixo, a influência do efeito giroscópico torna-se consideravelmente grande e não pode ser negligenciada. Nesse trabalho, também não foram abordados efeitos de amortecimento.

MATSUURA, 1977 forneceu um método para estimar as condições necessárias para que um rotor passe pela ressonância. O sistema é considerado linear de um grau de liberdade. O autor desenvolveu uma expressão que fornece o torque máximo gerado pela oscilação, na condição crítica, sendo então necessário que o torque mínimo para uma passagem pela ressonância supere este valor.

GASCH & MARKET, 1979 estudaram o mesmo problema para um sistema de dois graus de liberdade, considerando também a equação da fonte, com efeitos de restituição linear e atrito seco. Um estudo mostra que o efeito da torção é desprezível na oscilação flexional.

BOVIC & HOGFORS, 1986 mostraram que rotores planos, com uma ou duas partículas livres para se moverem, sujeitas a um amortecimento viscoso, e localizadas em uma ranhura no rotor, exibem autobalanceamento. Sistemas dinâmicos deste tipo podem ser representados por sistemas hamiltonianos perturbados, e o método da média pode ser aplicado;

porém o método das múltiplas escalas com solução de primeira ordem foi o usado.

HENDRICKS, 1986 estudou o efeito da viscoelasticidade na vibração do rotor. Algumas comparações foram feitas entre o comportamento do eixo elástico e do eixo viscoelástico. O autor concluiu que, quando o eixo é construído de material viscoelástico, o movimento do rotor ocorre em duas escalas distintas de tempo. Se estas duas escalas diferem por uma ordem de grandeza elevada, o problema é tratável pela solução perturbada. A solução perturbada revela uma região de instabilidade para o movimento do rotor. Na região instável, o centro do rotor move-se numa exponencial crescente. Se o movimento ocorre numa região estável, o centro do rotor move-se numa exponencial decrescente, e acabará por alcançar uma posição de equilíbrio fixa. O movimento espiral se desenvolve em uma escala de tempo longa, governada pela constante viscoelástica de tempo.

GANAPATHY & PARAMESWARAN, 1986 analisaram a transição pela ressonância de um sistema conhecido como "mass-driven", de um grau de liberdade e com efeito de atrito viscoso. As curvas de amplitude traçadas mostram a interação entre vibração e aceleração de acionamento, a qual é acompanhada por um aumento da amplitude de vibração na região de ressonância. Foi deduzida uma expressão que define o número característico da aceleração de acionamento, que é a aceleração de acionamento líquida mínima, para uma passagem pela ressonância sem acréscimo da amplitude transicional de vibração. Este procedimento possibilitou a seleção adequada do motor de acionamento para um dado sistema vibratório. Um exemplo mostrado no artigo ilustra que a potência requerida em um sistema vibratório durante a passagem pela ressonância pode ser várias vezes maior que aquela para o regime permanente.

CHOI & NOAH, 1987 estudaram a resposta não linear, em regime permanente, de um sistema rotor suporte. Um método numérico foi apresentado, usando-se a transformada discreta de Fourier e a transformada discreta inversa de Fourier. A fonte de potência foi considerada ideal e a força nos mancais foi considerada não linear.

A passagem de um rotor vertical flexível pela sua velocidade crítica foi estudada

detalhadamente por LUCCHESI, 1988. Nesse trabalho, a autora apresenta um dispositivo adicional para a redução da amplitude de oscilação na passagem pela ressonância. Este dispositivo consiste de um sistema de roletes, que entra em contato com o disco do rotor quando este atinge sua velocidade de rotação crítica. Várias inclinações possíveis de roletes foram testadas. Este mesmo conceito de dispositivo é aqui aplicado para simulação do atrito seco presente no movimento do rotor. O sistema de fixação do dispositivo adicional foi definido como rígido, a fim de evitar que parte da energia envolvida no processo dissipativo para redução de amplitude seja transferida para vibração do próprio sistema adicional.

ISHIDA *et al.*, 1992 estudaram as vibrações não estacionárias de um eixo girante com características de mola não linear, durante a aceleração através da velocidade crítica. Se ocorrer uma perturbação inicial da aceleração angular, a solução salta (*jump*) na curva de ressonância e uma oscilação sub-harmônica ocorre. A amplitude máxima durante a aceleração depende não somente da aceleração angular, mas também da perturbação, da rotação e da posição iniciais do deslocamento. Para a posição inicial de deslocamento a amplitude máxima varia periodicamente. A amplitude cresce infinitamente para alguns valores da posição inicial do deslocamento, quando a aceleração angular toma valores entre duas críticas. Se a aceleração angular está fora deste campo, o rotor sempre passará a velocidade crítica com uma amplitude de oscilação finita. O autor ainda concluiu que, como a curva de ressonância se inclina em sistemas não lineares, a passagem pela velocidade crítica torna-se mais difícil nestes sistemas, em relação àqueles com característica linear de rigidez.

CVETICANIN, 1993 chegou a uma solução assintótica para vibração de um rotor fracamente não linear sobre a influência de forças normais e tangenciais. O modelo usado pela autora possui parâmetros acoplados, não contemplando a equação da fonte. O método usado é o de Bogoljubov-Mitropolski, adaptado para uma equação diferencial com funções complexas e pequenas não linearidades. Como exemplo, o método é aplicado num rotor sujeito à influência de forças hidrodinâmicas, que atuam como forças de amortecimento.

CVETICANIN, 1995 também estudou fenômenos de vibração na ressonância de rotores não lineares sobre influência de excitação em monofreqüência. A não linearidade é

causada por características do material do eixo. O sistema do rotor apresenta dois graus de liberdade, sendo descrito por uma equação diferencial na forma complexa. O método da média é usado na obtenção da variação no tempo de amplitude e fase. A solução em regime permanente é também considerada. O método é aplicado a um rotor com pequeno amortecimento. Eixos de vários materiais são analisados. As soluções analíticas são comprovadas experimentalmente. O autor chegou à conclusão que o movimento do rotor na ressonância é crucialmente afetado pelas propriedades não lineares do sistema. Devido à não linearidade, no caso da ressonância, o efeito do salto aparece. As condições iniciais influenciaram significativamente a resposta em regime permanente. Uma variação infinitesimal nas condições iniciais pode causar mudanças na resposta em regime (efeito borboleta). Esta é uma das condições para existência de resposta caótica em regime permanente. Para um eixo em liga de cobre a amplitude aumenta com o aumento da frequência, provocando, então, saltos repentinos para um novo valor. Depois disso, o valor da amplitude decresce, apesar do aumento da frequência.

O comportamento de sistemas mecânicos sob efeito de atrito seco tem sido objeto de estudo de vários autores. Este fato é facilmente explicado, uma vez que este tipo de atrito, presente quando duas superfícies com velocidades relativas entram em contato, introduz no sistema fortes instabilidades dinâmicas.

MARCHIS & VATTA, 1985 propuseram uma aproximação numérica para o movimento com amortecimento viscoso e atrito seco de Coulomb. SHAW, 1986 estudou a resposta dinâmica de um sistema de um grau de liberdade com atrito seco. O autor incluiu o coeficiente de atrito estático. A estabilidade assintótica da resposta em regime permanente e alguns comportamentos transientes foram também determinados. Aplicando-se a teoria de bifurcação, foram mostrados novos comportamentos, tais como movimentos aperiódicos contendo duas frequências distintas.

NARYANAN & JAYARAMAN, 1991 estudaram a vibração caótica em um sistema não linear com amortecimento de Coulomb. O sistema foi excitado harmonicamente e a solução numérica foi encontrada em um determinado campo de frequências de excitação. Plano fase, diagramas, mapas e resposta no domínio do tempo foram obtidos. O comportamento do atrator

estranho foi analisado através de mapas de Poincaré, e o expoente de Liapunov foi calculado, chegando-se a um valor positivo em um deles, indicando a presença de movimento caótico. A duplicação de período, rota para o caos, foi observada em certos valores de frequência, a qual foi explicada através de análise por balanço harmônico.

FEENY & MOON, 1992 mostraram a seqüência de bifurcação em um oscilador com atrito de Coulomb. Em algumas faixas de parâmetros, a dinâmica de um oscilador forçado na presença do atrito de Coulomb depende não só do deslocamento como da velocidade. Este comportamento pode ser estudado através da dinâmica de mapa unidimensional. A seqüência do modelo de Coulomb foi comparada com aquele padrão de um mapa unidimensional, com a finalidade de verificar se o primeiro modelo exhibe um comportamento universal.

SHERIF & BASSIONI, 1993 fizeram um estudo teórico experimental de um sistema de dois graus de liberdade, com excitação forçada, sujeito a atrito seco. Um novo modelo matemático, para descrição de um sistema submetido a fricção sob a influência de carregamento normal, foi desenvolvido.

FEENY & MOON, 1994, seguindo a mesma linha do trabalho precedente, estudaram o caos em um oscilador forçado através de experimentos e modelos numéricos. O atrito foi projetado para variar linearmente com o deslocamento durante o experimento. Um mapa unidimensional foi mostrado para descrever a dinâmica do sistema. Três modelos de fricção são examinados pela modelagem numérica: o modelo descontínuo de Coulomb, uma versão contínua do modelo de Coulomb e, por último, a lei de fricção por variável de estado. Usando mapas de Poincaré experimentais, as características qualitativas do atrator caótico no espaço fase tridimensional são avaliadas e usadas para verificar os modelos de fricção.

Os fenômenos mais importantes observados em sistemas não-lineares, tais como soluções periódicas múltiplas, saltos na ressonância, ressonância primária e secundária, saturação e modulação de amplitude do movimento, dependência das condições iniciais e comportamento caótico, são estudados geralmente de duas maneiras: métodos gráficos e métodos assintóticos. Os métodos gráficos, também chamados de métodos qualitativos, procuram des-

crever o comportamento através de mapeamento de pontos previamente calculados por integração numérica. Nesse grupo, estão incluídas técnicas como o cálculo de secções de Poincaré, cálculo do expoente de Liapunov, diagramas de bifurcação, mapas de retorno, entre outros. Os métodos assintóticos, tais como o método da média e o método das múltiplas escalas, são soluções analíticas aproximadas da equação diferencial que descreve o sistema. Este método tem sido a principal ferramenta para análise de vibração forçada em sistemas fracamente não lineares. Quanto mais fraca é a não linearidade presente, mais a solução analítica aproximada tende para a solução exata. Os trabalhos de HASAN & MOOK, 1979a, Bogoljubov, Mitropolski e Hale estão entre os que sumarizam os resultados relevantes, fornecendo numerosas aplicações destes métodos assintóticos.

Os métodos assintóticos convencionais de análise, descritos em vários textos, possuem suas vantagens, mas também limitações. O método da média, por exemplo, leva a uma primeira aproximação conveniente para solução em regime permanente e suas estabilidades. Porém, para ordens elevadas, o cálculo se torna extenso e complexo. Com o objetivo de superar tais problemas, HASAN & MOOK, 1979a propuseram um método híbrido do balanço harmônico com o de múltiplas escalas para vibração de sistemas não lineares e problemas de bifurcação. Esse novo enfoque combina características do balanço harmônico e de múltiplas escalas, num esforço de produzir uma técnica mais eficiente para análise de sistemas não lineares.

HASAN & MOOK, 1979a, em seu trabalho sobre identificação de não linearidades em sistemas estruturais, apresentam um procedimento para identificação de tais não linearidades, causadas por rigidez quadrática e cúbica, geometria assimétrica, ressonância interna, sujeitas a excitação paramétrica. O método usa instrumentação convencional e análise modal para combinar o comportamento observado na resposta estrutural com o comportamento do sistema não linear analítico, quando sujeito a excitação do tipo aleatória, impulsiva ou harmônica.

BAJAJ & TOUSI, 1990 estudaram a resposta de um sistema fracamente não linear com dois graus de liberdade, quando o sistema é excitado próximo à ressonância. O método

assintótico da média e o da integração numérica direta foram usados para obtenção da resposta do sistema. Em uma faixa de frequência de excitação e amortecimento, a equação média em tempo lento apresentou ciclos limites. Estas soluções vão de bifurcação do tipo duplicação de período a soluções caóticas. A secção de Poincaré da resposta em regime permanente foi usada para caracterizar os vários tipos de modulação de amplitude do movimento.

TO *et al.*, 1991 descreveu a bifurcação primária, periodicamente perturbada em dois osciladores acoplados de maneira não linear, nos casos de ressonância e não ressonância. O método da média de Krylov-Bogoljubov-Mitroposky foi usado para deduzir a equação de bifurcação. Pode-se controlar vibração em sistemas não lineares com uma escolha apropriada de parâmetros do sistema, como sugerido por algumas regiões na hipersuperfície onde a amplitude da solução de bifurcação é sempre zero. Nesse mesmo trabalho, consta em apêndice uma análise de estabilidade para solução da equação de bifurcação no caso sub-harmônico e de ressonância principal.

Ainda com o propósito de melhorar as soluções analíticas deduzidas com o uso de expansão assintótica, CHEUNG *et al.*, 1991 desenvolveram um método modificado com base no método de Lindstedt-Poincaré para estudo de certos osciladores com fortes não linearidades.

VAKAKIS & RAND, 1992 estudaram modos normais e dinâmica global de sistemas não lineares com dois graus de liberdade em altas energias. O sistema não amortecido com fortes não linearidades foi estudado por mapas de Poincaré. Os autores apontam que, para um sistema hamiltoniano, de n graus de liberdade existem teoremas básicos formulados por Liapunov e Weistein, dizendo que para cada nível fixo de energia existem no mínimo n soluções periódicas (modos normais) passando através de cada equilíbrio estável. Mais ainda, algumas destas soluções podem não ser analiticamente contínuas de modo normal linear.

NAYFEH & NAYFEH, 1994 estudaram a resposta de um sistema de um grau de liberdade com não linearidades cúbicas a uma excitação modulada, que carrega frequências maiores que a frequência natural do sistema. A única restrição à modulação de amplitude é que esta contém frequências mais baixas que a de excitação. Os autores aplicaram a teoria

com diferentes modulações de amplitude e concluíram que a excitação ressonante do sistema pode ocorrer sob algumas condições. O método das múltiplas escalas foi utilizado neste caso.

HASSAN, 1994 a usou uma transformação através do método das múltiplas escalas de ordem elevada para determinar a resposta de um oscilador não linear excitado harmonicamente. A ressonância primária do oscilador de Duffing foi estudada como exemplo de uma aproximação pelo método das múltiplas escalas de segunda ordem, com o uso de duas escalas de tempo, e depois comparada ao procedimento anterior. Nesse trabalho, o autor usa transformação de derivadas. Em um novo trabalho, HASSAN, 1994 b continua sua investigação, agora com o uso de transformação de sintonia.

CUSUMANO & SHARKADY, 1995 fizeram um estudo experimental de bifurcação e caos em um sistema forçado através de parâmetro de bifurcação. O sistema consiste em uma massa concentrada em uma barra flexível, sujeita a um campo magnético de sentido variável e frequência senoidal. Bifurcações estáticas e dinâmicas estão presentes. A bifurcação estática para o sistema envolve o efeito catástrofe-borboleta. O diagrama de bifurcação dinâmica obtido com a aquisição automática de dados mostrou várias seqüências de duplicação de período e fenômeno de salto. A dimensão correlacionada do atrator caótico é estimada em uma grande região. A secção de Poincaré da resposta caótica em regime permanente foi obtida para vários valores da fase de excitação.

GONCALVES & MACHADO, 1995 mostram uma estratégia computacional para determinação de diagramas de bifurcação para sistemas oscilatórios não lineares. Os passos para obtenção seguem a escolha do parâmetro de controle e sua faixa, cálculo dos pontos fixos para cada valor do parâmetro dentro da faixa escolhida, determinação da característica de estabilidade destes pontos fixos, aumentar ou diminuir gradualmente o valor do parâmetro e usar o ponto fixo da simulação prévia como condição inicial para a próxima simulação e, para cada valor do parâmetro, traçar os pontos de Poincaré associados com cada solução periódica, gerando assim o diagrama de bifurcação.

RAMAN *et al.*, 1996 estudaram a transição lenta de sistemas não lineares dissipa-

tivos pelas instabilidades. Uma metodologia geral é apresentada para se prever analiticamente a resposta de alguns sistemas dissipativos fracamente não lineares excitados parametricamente de maneira lenta através de pontos de instabilidade. Nesse trabalho também é estudado o problema da transição através da bifurcação sela-nó ou saltos durante a passagem pela ressonância primária do oscilador forçado de Duffing.

No presente trabalho, é utilizado o método da média para obtenção da solução analítica aproximada, no caso do sistema estar sujeito a fracas não linearidades. No caso de fortes não linearidades, lança-se mão da integração direta da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de quinta ordem de passo fixo.

Capítulo 3

Descrição do Problema

3.1 Modelo do Rotor Laval Não Amortecido

O rotor Laval consiste em um eixo flexível de massa desprezível, com um disco rigidamente fixado ao centro. O rotor é fixado verticalmente, podendo-se desprezar a ação da gravidade. Neste trabalho, considera-se o modelo planar, sem efeito giroscópico. As frequências naturais em duas direções perpendiculares são iguais ou muito próximas. A oscilação forçada de um sistema com duas frequências naturais muito próximas, próximo à ressonância, caracteriza-se pelo fato de que a parte dominante contém harmônicas com frequência da força de excitação. O sistema é descrito por três equações diferenciais. Duas desacopladas entre si (direções perpendiculares) e uma acoplada com as outras. Essa terceira equação traduz a interação fonte de potência e sistema, uma vez que contém o termo do torque líquido diretamente calculado da expressão da fonte. O eixo acopla o movimento do motor com o rotor com uma relação de transmissão de 1:1.

Com o aumento da velocidade de rotação do rotor (aceleração), as forças inerciais atuantes no sistema devido à excentricidade também aumentam, causando deflexão do eixo (figura 3.1)

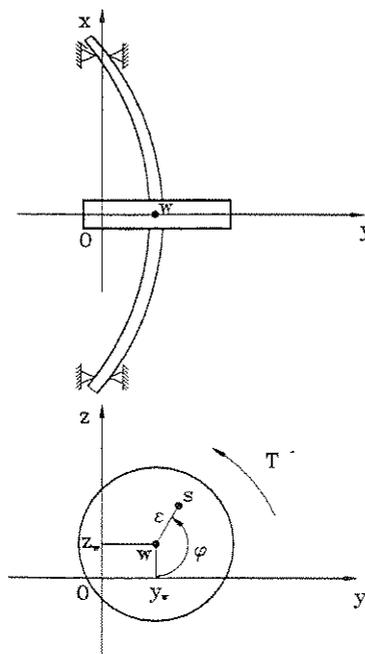


Figura 3.1: Rotor Laval vertical

onde:

m é a massa do rotor;

O é o centro da linha que une os mancais;

W é o centro do disco por onde passa o eixo;

S é o centro de massa do disco;

y_w, z_w são as coordenadas inerciais do ponto w ;

e é a excentricidade;

φ é o ângulo de rotação do disco;

T é o torque líquido dado por $(T_m - T_p)$, onde:

T_m é o torque do motor;

T_p é o torque devido às perdas.

Um dos modelos analisados para o rotor Laval vertical é proposto no caso em que o material do eixo não responde bem à formulação linear de rigidez. Segundo HASAN & MOOK, 1979a a formulação cúbica para a rigidez é mais indicada para eixos de ligas de alumínio.

Outro modelo analisado combina efeitos de restituição cúbica e atrito seco de Coulomb. O atrito seco aparece entre os roletes de um dispositivo adicional de redução de amplitude de vibração do rotor na passagem pela ressonância, sugerido por LUCCHESI, 1988, e o próprio disco do rotor. Este sistema adicional é mostrado na figura 3.2.

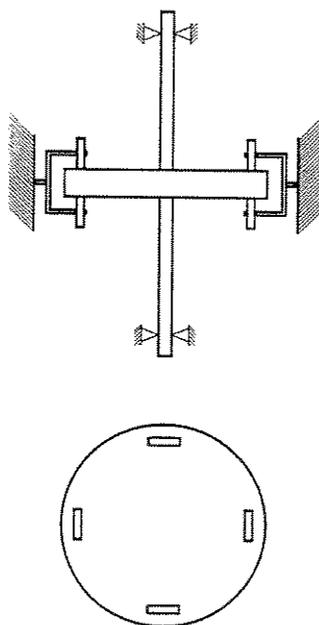


Figura 3.2: Rotor Laval vertical com sistema auxiliar

3.1.1 Sistema Adicional com Fixação Rígida

Em seu trabalho, LUCCHESI, 1988 simulou dois tipos de sistemas adicionais de redução da amplitude de vibração na passagem pela ressonância. Um com fixação flexível e outro com fixação rígida. Este último é aqui considerado por não depender parte da energia na vibração do próprio sistema adicional. A figura (3.3) mostra uma vista superior deste sistema adicional de redução de amplitude de vibração.

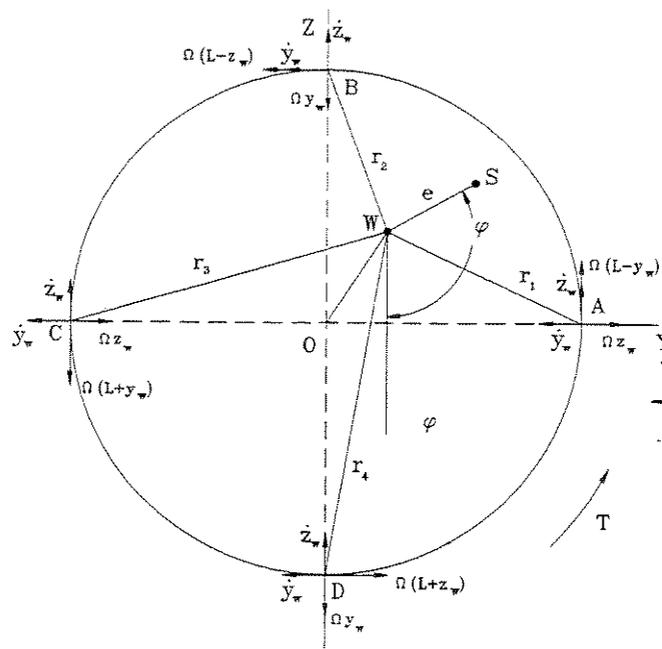


Figura 3.3: Vista superior do sistema de fixação dos roletes

onde:

A, B, C, D são os pontos de contato entre os roletes e o disco;

L é o raio da circunferência sobre a qual estão os roletes;

r_i é a distância entre o centro do disco (w) e os pontos de contato;

y_w e z_w são as oscilações do ponto (w) nas respectivas direções y e z ;

Ω velocidade de rotação do disco.

Tem-se:

$$v_i = v_w + \dot{\varphi} \times r_i \rightarrow i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1)$$

onde:

v_i é a velocidade resultante no ponto de contato;

v_w é a velocidade do centro do disco.

Os vetores r_i são dadas por:

$$r_1 = (L - y_w)\hat{e}_y - z_w\hat{e}_z \quad (3.2)$$

$$r_2 = -y_w\hat{e}_y + (L - z_w)\hat{e}_z \quad (3.3)$$

$$r_3 = -(L + y_w)\hat{e}_y - z_w\hat{e}_z \quad (3.4)$$

$$r_4 = -y_w\hat{e}_y - (L + z_w)\hat{e}_z \quad (3.5)$$

Para o ponto A tem-se:

$$v_1 = (\dot{y}_w\hat{e}_y + \dot{z}_w\hat{e}_z) + \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & (L - y_w) & -z_w \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Analogamente para os outros pontos:

$$v_1 = (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w)\hat{e}_y + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w))\hat{e}_z \quad (3.7)$$

$$v_2 = (\dot{y}_w - \dot{\varphi}(L - z_w))\hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w)\hat{e}_z \quad (3.8)$$

$$v_3 = (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w)\hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}(L + y_w))\hat{e}_z \quad (3.9)$$

$$v_4 = (\dot{y}_w + \dot{\varphi}(L + z_w))\hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w)\hat{e}_z \quad (3.10)$$

Para os pontos A e C (sobre o eixo y), tem-se:

$$(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) < 0 \Rightarrow F_{ay} > 0 \quad (3.11)$$

$$(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) = 0 \Rightarrow F_{ay} = 0 \quad (3.12)$$

$$(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) > 0 \Rightarrow F_{ay} < 0 \quad (3.13)$$

onde F_{ay} é a força de atrito no ponto A e C na direção y .

Seguindo o mesmo raciocínio para os pontos B e D , tem-se:

$$(\dot{z}_w + \dot{\varphi}y_w) < 0 \Rightarrow F_{az} > 0 \quad (3.14)$$

$$(\dot{z}_w + \dot{\varphi}y_w) = 0 \Rightarrow F_{az} = 0 \quad (3.15)$$

$$(\dot{z}_w + \dot{\varphi}y_w) > 0 \Rightarrow F_{az} < 0 \quad (3.16)$$

onde F_{az} é a força de atrito no ponto B e D na direção z .

Incluindo a força gerada pelo atrito seco, bem como o momento, tem-se:

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY + \gamma Y^3 = 2Fay + em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (3.17)$$

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + kZ + \gamma Z^3 = 2Faz - em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} Ip\ddot{\varphi} &= T + e((kZ + \gamma Z^3) \sin \varphi + (kY + \gamma Y^3) \cos \varphi) \\ &\quad + 2Fay(Z - e \cos \varphi) - 2Faz(Y + e \sin \varphi) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde:

Y é a coordenada y do centro de massa do rotor;

Z é a coordenada z do centro de massa do rotor;

Ip é o momento polar de inércia do rotor;

γ é a rigidez cúbica do eixo;

c é constante de amortecimento viscoso;

T é o torque líquido aplicado ao rotor.

3.2 Fonte de Potência

Dependendo da excitação, pode-se referir aos sistemas como ideais ou não ideais. Quando a excitação não é influenciada pela resposta, é dito tratar-se de uma excitação ideal, ou uma fonte de potência ideal. Por outro lado, quando a excitação é influenciada pela resposta, é dito tratar-se de uma excitação não ideal. Geralmente, sistemas não ideais são aqueles em que a fonte de potência é limitada. Quanto mais limitada a fonte de potência, mais distante se torna o comportamento deste do sistema ideal correspondente. Para sistemas não ideais deve-se adicionar uma equação que descreve o motor àquelas que descrevem o sistema. Por isso, sistemas não ideais têm um grau de liberdade a mais que o ideal equivalente.

KONONENKO, 1969 conduziu um experimento onde um motor foi colocado na extremidade de uma viga em balanço. O eixo do motor era acoplado em dois rotores desbalanceados através de um furo. O procedimento seguido foi fixar o parâmetro de controle do motor e depois medir a amplitude de vibração em regime permanente. Em seguida, o parâmetro de controle foi variado lentamente para um novo valor e mantido fixo até a medida de amplitude de vibração do novo regime permanente. Este procedimento foi realizado tanto para acréscimo como para decréscimo do parâmetro de controle do motor. Notou-se a existência de lacunas, onde, para determinadas rotações, não existe estado de equilíbrio. Ou seja, existem certas rotações em que o rotor não trabalha porque a fonte de potência não fornece energia para isso. Este fenômeno recebe o nome de efeito Sommerfeld. Por esse motivo, para o estudo da interação entre a fonte de potência e o sistema, torna-se necessário o conhecimento prévio da característica de torque do motor de acionamento. Alguns tipos de acionamentos por motores elétricos, que estão presentes neste trabalho, são agora mostrados.

3.2.1 Motor de Corrente Alternada

A expressão do torque de acionamento de um motor de indução CA trifásico (*3-phase AC squirrel cage induction motor*) é deduzida. O torque do motor é obtido através da curva característica de rotação versus torque. Para um motor trifásico de indução esta curva é dada por:

$$T_m(\dot{\varphi}) = \frac{2T_{\max}}{\frac{S}{S_{cr}} + \frac{S_{cr}}{S}} \quad (3.20)$$

Lançando mão das variáveis adimensionais, a expressão (3.20) pode ser escrita na forma:

$$\alpha_m(\varphi') = \frac{2\alpha_{\max}}{\frac{S}{S_{cr}} + \frac{S_{cr}}{S}} \quad (3.21)$$

onde:

$$\alpha_{\max} = \frac{T_{\max}}{ek\rho} \quad (3.22)$$

e

$$s = 1 - (\varphi'/\Omega_s) \quad (3.23)$$

Com o propósito de comparar as diferentes respostas, define-se a quantidade adimensional α_n , número característico de acionamento, como sendo α_m quando s é calculado para $\varphi' = 1$ (rotação crítica):

$$(\alpha_m)_{\varphi'=1} = \alpha_n = \frac{2\alpha_{\max}}{\left[\left(1 - \frac{1}{\Omega_s}\right)/S_{cr}\right] + \left[S_{cr}/\left(1 - \frac{1}{\Omega_s}\right)\right]} \quad (3.24)$$

Chega-se, então, à expressão usada para o torque do motor, em função do número característico de acionamento (parâmetro de controle):

$$\alpha_m(\varphi') = \alpha_n \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{\Omega_s}\right)/S_{cr}\right] + \left[S_{cr}/\left(1 - \frac{1}{\Omega_s}\right)\right]}{\left[\left(1 - \frac{\varphi'}{\Omega_s}\right)/S_{cr}\right] + \left[S_{cr}/\left(1 - \frac{\varphi'}{\Omega_s}\right)\right]} \quad (3.25)$$

O torque devido às perdas é considerado constante e igual a $\alpha_p = \frac{0.437}{ek\rho}$ para efeito de simulação. A expressão final para o torque líquido é a diferença entre o torque do motor, dado pela expressão (3.25) e as perdas, como mostrado na expressão (3.26)

$$\alpha = \alpha_m - \alpha_p \quad (3.26)$$

A inclinação da curva de torque é dada pela derivada da expressão (3.25) em relação à rotação, como mostrado na equação (3.27).

$$\frac{d\alpha_1}{d\varphi'} = -an \frac{\left(\frac{1-\frac{1}{\Omega_s}}{S_{cr}} + \frac{S_{cr}}{(1-\frac{1}{\Omega_s})}\right) \left(-\frac{1}{\Omega_s S_{cr}} + \frac{S_{cr}}{(1-\frac{\varphi'}{\Omega_s})^2 \Omega_s}\right)}{\left(\frac{1-\frac{\varphi'}{\Omega_s}}{S_{cr}} + \frac{S_{cr}}{1-\frac{\varphi'}{\Omega_s}}\right)^2} \quad (3.27)$$

3.2.2 Motor de Corrente Contínua

O motor de corrente contínua segue o esquema mostrado na figura 3.4.

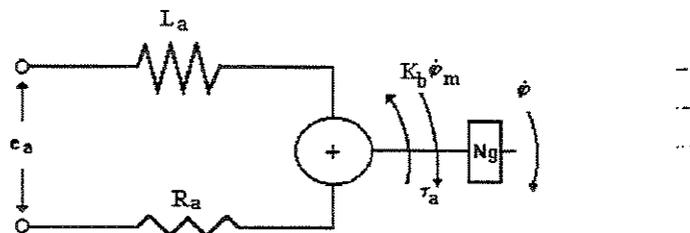


Figura 3.4: Circuito do motor de corrente contínua

onde e_a é a tensão aplicada na armadura, L_a é a indutância do motor, R_a é a resistência da armadura e k_b é a força contra eletromotriz. Aplicando a lei de Kirchhoff, obtém-se:

$$e_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_b \dot{\varphi}_m \quad (3.28)$$

A soma dos torques na armadura do motor resulta em:

$$I_m \ddot{\varphi}_m + c_v \dot{\varphi}_m + \tau_a = k_t i_a \quad (3.29)$$

onde τ_a é o torque aplicado à caixa de engrenagem e φ_m é a posição angular do motor. Chamando de n_g a relação de transmissão da caixa de engranagens, o torque aplicado ao sistema e o deslocamento angular obedecem às relações (3.30) e (3.31):

$$T = n_g \tau_a \quad (3.30)$$

$$\varphi_m = n_g \hat{\varphi} \quad (3.31)$$

onde o deslocamento angular total é representado por $\hat{\varphi}$. As equações (3.28) e (3.29) são agora combinadas usando as relações (3.30) e (3.31). Chega-se, então, a expressão (3.32), que fornece o torque aplicado ao rotor em função da tensão aplicada a armadura:

$$T = \left(n_g \frac{k_t}{r_a} \right) e_a - \left(c_v + k_b \frac{k_t}{r_a} \right) n_g^2 \dot{\varphi} \quad (3.32)$$

O seguinte perfil de tensão foi usado:

$$e_a = U_{max}(1 - e^{-t}) \quad (3.33)$$

3.2.3 Acionamento Ideal

Em outros trabalhos, como o de LUCCHESI, 1988, é considerado que o acionamento por um motor de corrente contínua atua no sistema com um torque constante. Essa consideração é tanto mais válida quanto menor for a ordem de grandeza do torque devido às perdas em relação ao torque mínimo de acionamento. Antes de fazer tal consideração a autora levantou experimentalmente o torque devido às perdas para o motor usado, chegando à seguinte expressão:

$$T_p = -1.366510^{-8}(\dot{\varphi})^{2.3869} \quad (3.34)$$

Sendo que o torque líquido é dado por:

$$T = T_m - T_p \quad (3.35)$$

Onde T_m é o torque do motor (constante). Uma vez verificado que as perdas são desprezíveis, o torque líquido é considerado constante.

3.3 Atrito Seco de Coulomb

Antes de um corpo iniciar um movimento numa superfície rugosa, a força de atrito atuante é de atrito estático. Após iniciado o movimento, numa certa velocidade não nula, a força de atrito sofre uma ligeira queda no seu valor, permanecendo constante a partir de então. A figura 3.5 esquematiza um possível comportamento real do atrito, com uma queda acentuada do valor estático para o dinâmico, seguida de uma curvatura suave para depois aumentar rapidamente, sendo que este aumento depende dos materiais e da rugosidade das superfícies em contato (LUCCHESI, 1988).

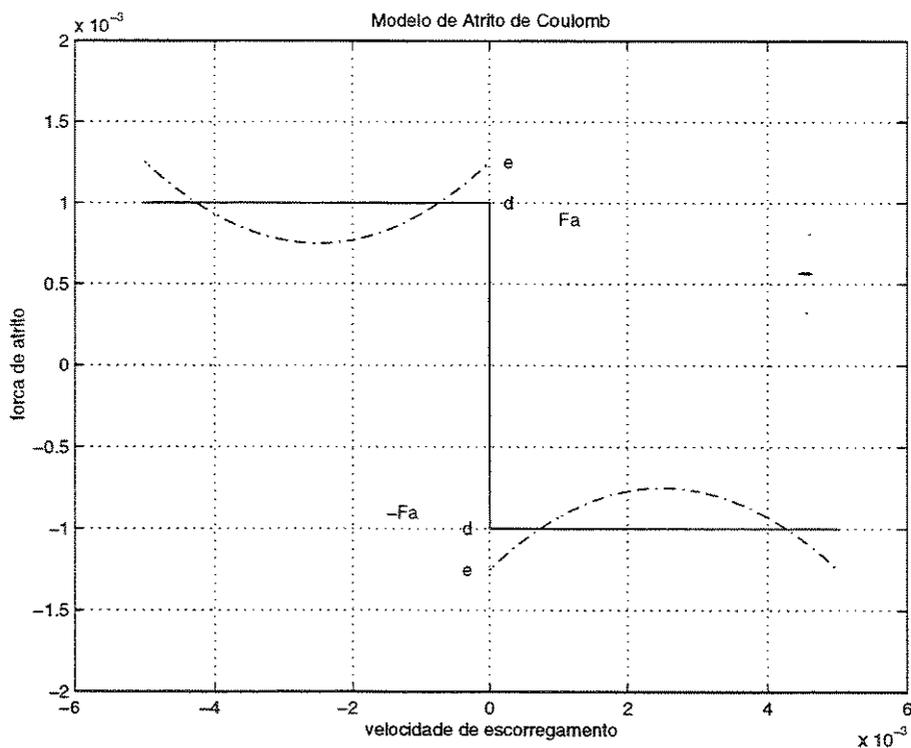


Figura 3.5: Modelo de atrito seco proposto por Coulomb (linha cheia) e possível comportamento real (linha tracejada)

Estudos anteriores (HASAN & MOOK, 1979b) mostram que a diferenciação entre atrito estático e dinâmico atua de forma significativa abaixo da ressonância e em baixa rotação.

No presente trabalho, assumiu-se que os coeficientes de atrito estático e dinâmico apresentam o mesmo valor, uma vez que o sistema oscila periódica e rapidamente em torno do centro O e atinge sua velocidade crítica num curto intervalo de tempo, permanecendo muito pouco na região onde esta diferenciação torna-se relevante. O modelo usado é mostrado na figura 3.6.

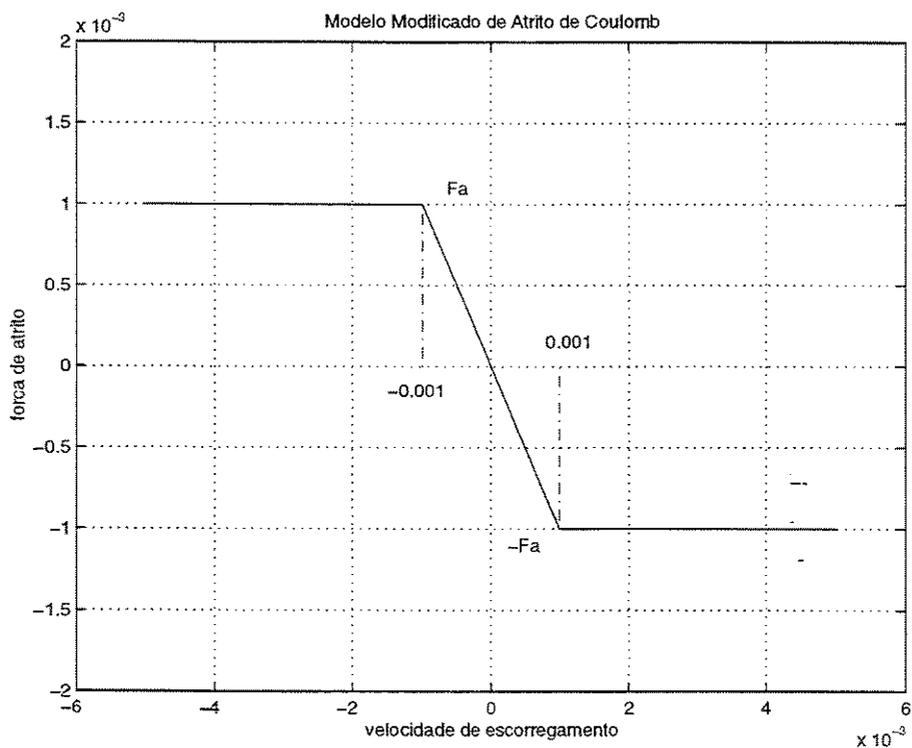


Figura 3.6: Modelo de atrito usado

Capítulo 4

Equacionamento Dinâmico do Rotor Laval

Neste capítulo são apresentadas as equações que governam o comportamento do rotor Laval. Tais equações são deduzidas a partir do balanço de energia do sistema dinâmico. Este balanço de energia é descrito pela equação de Lagrange, na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q \quad (4.1)$$

onde:

q_i são as coordenadas generalizadas ($i = 1, 2, 3$);

Q é força externa generalizada aplicada ao sistema;

t é o tempo;

E_c é a energia cinética do sistema;

E_p é a energia potencial do sistema;

$\dot{}$ denota derivada em relação ao tempo.

Para o rotor Laval tem-se (q_1, q_2, q_3) correspondente a (y, z, φ) . A energia cinética do sistema é escrita na forma :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}_s^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_s^2 + \frac{1}{2}I_p\dot{\varphi}^2 \quad (4.2)$$

Verificando as relações geométricas da figura 3.1, tem-se:

$$y_s = y_w + e \sin \varphi \quad (4.3)$$

$$z_s = z_w - e \cos \varphi \quad (4.4)$$

Derivando-se as relações (4.3) e (4.4) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{y}_s = \dot{y}_w + e\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (4.5)$$

$$\dot{z}_s = \dot{z}_w + e\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (4.6)$$

Substituindo-se as relações (4.5) e (4.6) em (4.2), chega-se a:

$$Ec = \frac{1}{2}m(\dot{y}_w + e\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z}_w + e\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 \quad (4.7)$$

Note-se que a energia cinética não é descrita em função do deslocamento do centro de massa do rotor (ponto s), e sim em função do deslocamento do centro geométrico do rotor (ponto w).

A única energia potencial presente no sistema é devida à deformação elástica. Portanto, a expressão da energia potencial tem a seguinte forma:

$$Ep = \frac{1}{2}ky_w^2 + \frac{1}{2}kz_w^2 \quad (4.8)$$

O próximo passo será calcular, para cada uma das três variáveis do sistema, os termos da equação de Lagrange. Para a variável y , tem-se:

$$\frac{\partial Ec}{\partial \dot{y}_w} = m\dot{y}_w + me\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial Ec}{\partial y_w} = 0$$

$$\frac{\partial Ep}{\partial y_w} = ky_w$$

$$Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) = m\ddot{y}_w + me(-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi)$$

Substituindo-se os resultados obtidos na equação (4.1), chega-se à equação de movimento para a coordenada y :

$$m\ddot{y}_w + ky_w = em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (4.9)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento para a coordenada z , chega-se a:

$$m\ddot{z}_w + kz_w = -em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (4.10)$$

Para a variável φ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} &= me(\dot{y}_w \sin \varphi + \dot{z}_w \cos \varphi) + me\dot{\varphi}^2 + Ip\dot{\varphi} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} &= m(\dot{y}_w + e\dot{\varphi} \sin \varphi)e\dot{\varphi} \cos \varphi - m(\dot{z}_w + e\dot{\varphi} \cos \varphi)e\dot{\varphi} \sin \varphi \\ &\quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \\ &\quad Q_1 = T \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) &= me(\ddot{y}_w \sin \varphi + \dot{y}_w \dot{\varphi} \cos \varphi + \ddot{z}_w \cos \varphi - \dot{z}_w \dot{\varphi} \sin \varphi) + me^2 \ddot{\varphi} + Ip\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Substituindo-se as relações anteriores na equação (4.1), chega-se a:

$$(Ip + me^2)\ddot{\varphi} + me\ddot{z}_w \cos \varphi + me\ddot{y}_w \sin \varphi = T \quad (4.11)$$

No entanto, de acordo com a figura 3.1, vê-se que o deslocamento do eixo de sua posição de equilíbrio provoca uma força no ponto W do rotor. Aplicando-se a segunda lei de Newton e lembrando-se que o centro de massa do rotor é o ponto S , tem-se:

$$m\ddot{y}_s = -ky_w \quad (4.12)$$

$$m\ddot{z}_s = -kz_w \quad (4.13)$$

Substituindo-se as relações (4.12) e (4.13) na equação (4.11), chega-se a:

$$(Ip + me^2)\ddot{\varphi} = T + ek(y_w \sin \varphi + z_w \cos \varphi) \quad (4.14)$$

Considerando-se o amortecimento no eixo como sendo proporcional à velocidade de oscilação, as equações (4.9) e (4.10) são acrescidas, respectivamente, dos termos $c\dot{y}_w$ e $c\dot{z}_w$ onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso. A equação (4.14) permanece inalterada. As equações diferenciais que governam o sistema tomam, então, a seguinte forma:

$$m\ddot{y}_w + ky_w + c\dot{y}_w = +em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (4.15)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w + c\dot{z}_w = -em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (4.16)$$

$$(Ip + me^2)\ddot{\varphi} = T + ek(y_w \sin \varphi + z_w \cos \varphi) \quad (4.17)$$

4.1 Rotor Laval com Restituição Cúbica

A equação (4.14) representa a segunda lei de Newton para o somatório dos momentos em torno do ponto S (centro de massa do rotor). Do lado esquerdo da equação está o torque externo aplicado ao sistema, bem como o momento em torno de S , gerado pelo desbalanceamento. Considerando-se a rigidez do eixo descrita por uma lei de restituição cúbica (CVETICANIN, 1995), a expressão para a energia potencial elástica toma a seguinte forma:

$$Ep = \frac{1}{2}ky_w^2 + \frac{1}{4}\gamma y_w^4 + \frac{1}{2}kz_w^2 + \frac{1}{4}\gamma z_w^4 \quad (4.18)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento descrito anteriormente, chega-se a:

$$m\ddot{y}_w + ky_w + \gamma y_w^3 = +em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (4.19)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w + \gamma z_w^3 = -em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (4.20)$$

$$(Ip + me^2)\ddot{\varphi} = T + e((ky_w + \gamma y_w^3) \sin \varphi + (kz_w + \gamma z_w^3) \cos \varphi) \quad (4.21)$$

4.2 Rotor Laval com Atrito Seco

Em seu estudo de redução da amplitude de vibração de um rotor Laval durante a passagem pela velocidade crítica, LUCCHESI, 1988 considerou dois dispositivos auxiliares. O atrito aqui considerado vem do contato entre a superfície dos roletes e a do rotor. Neste trabalho considera-se o modelo rígido proposto por LUCCHESI, 1988. O tipo de atrito seco aqui considerado é o proposto por Coulomb, segundo o qual a força de atrito tem módulo constante e sinal dependente do valor da velocidade de escorregamento entre as superfícies. Este atrito introduz fortes não linearidades devido à descontinuidade da função força nas proximidades do repouso (velocidade de escorregamento nula). O modelo teórico proposto por Coulomb é mostrado na figura 3.5. Incluindo a força gerada pelo atrito seco, bem como seu momento nas equações diferenciais que governam o sistema, tem-se:

$$m\ddot{y}_w + c\dot{y}_w + ky_w = 2Fa_y + em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (4.22)$$

$$m\ddot{z}_w + c\dot{z}_w + kz_w = 2Fa_z - em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} Ip\ddot{\varphi} &= T + ek(z_w \sin \varphi + y_w \cos \varphi) \\ &\quad + 2Fa_y(z_w - e \cos \varphi) - 2Fa_z(y_w + e \sin \varphi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

No caso de o eixo ser de um material em que a lei de rigidez linear proposta por Hook descreve bem seu comportamento e o material dos roletes for algum tipo de borracha ou neoprene, têm-se os efeitos combinados de restituição cúbica e atrito seco vindas do contato entre os roletes e o rotor. Neste caso as equações que descrevem o sistema são:

$$m\ddot{y}_w + c\dot{y}_w + ky_w + \gamma y_w^3 = 2Fa_y + em(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (4.25)$$

$$m\ddot{z}_w + c\dot{z}_w + kz_w + \gamma z_w^3 = 2Fa_z - em(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} Ip\ddot{\varphi} &= T + e((kz_w + \gamma z_w^3) \sin \varphi + (ky_w + \gamma y_w^3) \cos \varphi) \\ &\quad + 2Fa_y(z_w - e \cos \varphi) - 2Fa_z(y_w + e \sin \varphi) \end{aligned} \quad (4.27)$$

As equações (4.25), (4.26) e (4.27) podem ser escritas usando-se variáveis adimensionais, como:

$$\ddot{y} + y = -2\mu\dot{y} - \alpha_3 y^3 + \frac{\varepsilon}{\alpha_2} \left(\frac{2Fa_y}{ek} + (\varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \cos \varphi) \right) \quad (4.28)$$

$$\ddot{z} + z = -2\mu\dot{z} - \alpha_3 z^3 + \frac{\varepsilon}{\alpha_2} \left(\frac{2Fa_z}{ek} - (\varphi'^2 \cos \varphi + \varphi'' \sin \varphi) \right) \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \varepsilon(\alpha_1 + ((\alpha_2 z + \alpha_2 \alpha_3 z^3) \sin \varphi + (\alpha_2 y + \alpha_2 \alpha_3 y^3) \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{2Fa_y}{ek}(\alpha_2 z - \varepsilon \cos \varphi) - \frac{2Fa_z}{ek}(\alpha_2 y + \varepsilon \sin \varphi)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \tau = t\omega; & \quad y = \frac{y_w}{x}; & \quad z = \frac{z_w}{x}; & \quad \alpha_1 = \frac{T}{km\rho}; \\ \alpha_2 = \frac{x}{\rho}; & \quad \alpha_3 = \frac{\gamma x^2}{k}; & \quad \varepsilon = \frac{e}{\rho}; & \quad \mu = \frac{c}{2m\omega}; \end{aligned}$$

onde:

x é um comprimento característico ;

ρ é o raio de giração ($\rho = \sqrt{\frac{Ip}{m}}$);

ω é a frequência natural ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$);

' denota derivada em relação ao tempo adimensional τ .

O procedimento usado para adimensionalização é mostrado em detalhes no Apêndice D.

Capítulo 5

Metodologia de Solução

Os problemas de oscilações não lineares têm sido geralmente tratados de duas maneiras distintas. Uma pela integração numérica direta das equações diferenciais do movimento, que possibilita não só o estudo no domínio do tempo, como também a aplicação de técnicas gráficas que auxiliam na compreensão do comportamento do sistema (FEENEY & MOON, 1994 e THOMPSON & STEWART, 1989). A outra é o cálculo de uma solução aproximada usando-se a teoria de perturbação, que possibilita a visualização da curva de ressonância e o estudo da natureza dos pontos singulares (HASAN & MOOK, 1979*a*).

5.1 Simulação Numérica

O rotor Laval, previamente modelado, é descrito por um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem. Cada uma destas equações de segunda ordem é equivalente a duas equações de primeira ordem, seguindo a formulação de variável de estado. Portanto, são obtidas seis equações de primeira ordem, que posteriormente são integradas, no domínio do tempo, através do algoritmo de Runge-Kutta de quinta ordem de passo fixo. Procuraram-se variar os parâmetros do sistema dentro de uma determinada faixa de valores a fim de se

verificar a influência de cada um no comportamento do sistema.

5.2 Método da Média

O método da média de primeira ordem é aplicado ao sistema de equações obtido para o modelo do rotor Laval, com restituição cúbica e amortecimento viscoso, descrito pelas equações (4.19), (4.20) e (4.21). Segundo HASAN & MOOK, 1979a este método é mais indicado para tratar problemas de fonte de potência não ideal. O método é aplicável a sistemas com fracas não linearidades. Em outras palavras, o sistema deve ser representado por equações diferenciais onde apareça um parâmetro adimensional (parâmetro de perturbação), que dê a medida de quanto o sistema é não linear. Quando este parâmetro tende a zero o sistema tende a um oscilador harmônico simples. Estamos considerando o caso em que a excentricidade é pequena, comparada com o raio de giração do rotor. Considerando pequenas as forças de amortecimento viscoso e de restituição não linear, quando comparadas com a força de restituição linear, e fazendo essas forças aparecerem na mesma ordem de grandeza do parâmetro de perturbação, podemos escrever as equações (4.19), (4.20) e (4.21) na forma adimensional como:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon(-2\mu\dot{y} - \alpha_3 f(y) + \frac{1}{\alpha_2}((\varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \cos \varphi))) \quad (5.1)$$

$$\ddot{z} + z = \varepsilon(-2\mu\dot{z} - \alpha_3 f(z) - \frac{1}{\alpha_2}((\varphi'^2 \cos \varphi + \varphi'' \sin \varphi))) \quad (5.2)$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon(\alpha_1 + ((\alpha_2 z + \alpha_2 \alpha_3 f(z)) \sin \varphi + (\alpha_2 y + \alpha_2 \alpha_3 f(y)) \cos \varphi)) \quad (5.3)$$

onde $f(y)$ e $f(z)$ são funções não lineares de y e z .

Nossa atenção é voltada para uma faixa relativamente estreita de frequência que abrange a frequência natural do sistema (unitária com o uso de variáveis adimensionais); então é conveniente introduzir o parâmetro de sintonia Δ como a seguir:

$$\varphi' = 1 + \Delta \quad (5.4)$$

$$\varphi'' = \Delta' \quad (5.5)$$

Primeiramente impõe-se a solução e a sua primeira derivada na forma:

$$y = a \cos(\varphi + \beta) \quad (5.6)$$

$$y' = -a \sin(\varphi + \beta) \quad (5.7)$$

Onde os parâmetros a e β são funções do tempo.

O ângulo β é a fase, usada para distinguir entre a rotação e a freqüência de oscilação direção y , enquanto Δ é usado para distinguir entre a rotação e a freqüência natural na direção y (HASAN & MOOK, 1979a).

O próximo passo é calcular uma mudança de variáveis do sistema:

$$y, z, \varphi \rightarrow a, \beta, \Delta$$

Derivando-se y' , dado pela equação (5.7) em relação a τ , obtém-se:

$$y'' = -a' \sin(\varphi + \beta) - a \cos(\varphi + \beta)(\varphi' + \beta') \quad (5.8)$$

Derivando-se y , dado pela equação (5.6), em relação a τ e igualando-se ao y' imposto na equação (5.7), obtém-se:

$$a' \cos(\varphi + \beta) - a \sin(\varphi + \beta)(\varphi' + \beta') = -a \sin(\varphi + \beta) \quad (5.9)$$

Substituindo-se as expressões de y equação (5.6), y' equação (5.7) e y'' equação (5.8), bem como as relações (5.4) e (5.5) nas equações (5.1), (5.2) e (5.3), chega-se ao sistema de três equações (5.10).

$$a \cos(\beta + \varphi) - \sin(\beta + \varphi)a' - a \cos(\beta + \varphi)(1 + \Delta + \beta') =$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_2}(-\alpha_3 f(y) + 2\mu a \sin(\beta + \varphi) + (1 + \Delta)^2 \sin(\varphi) - \cos(\varphi)(\Delta')^2)$$

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \varepsilon(a_1 + \cos(\varphi)(\alpha_2 a \cos(\beta + \varphi) + \alpha_2 \alpha_3 f(y) + \\
&\quad + \sin(\varphi)(\alpha_2 \alpha_3 f(z) + \alpha_2 a \sin(\beta + \varphi)) \\
\cos(\beta + \varphi)a' - a \sin(\beta + \varphi)(1 + \Delta + \beta') &= -a \sin(\beta + \varphi)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Resolvendo-se este sistema, chega-se às expressões para a' , β' , Δ' . Assumindo-se que se trabalha perto da região de ressonância, pode-se escrever o parâmetro de sintonia como:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \varepsilon \sigma \\
\Delta' &= \varepsilon \sigma'
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Desprezando-se os termos de ordem superior ou igual a $O(\varepsilon^2)$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{\varepsilon}{\alpha_2}(\sin(\beta + \varphi)(\alpha_2 \alpha_3 f(y) - \sin(\varphi) - 2\alpha_2 \mu a \sin(\varphi + \beta)) \\
\beta' &= \frac{\varepsilon}{2\alpha_2 a}(2\alpha_2 \alpha_3 \cos(\beta + \varphi)f(y) - 2\alpha_2 a \sigma + \sin(\beta) - \\
&\quad 2\alpha_2 \mu a \sin(2(\beta + \varphi)) - \sin(\beta + 2\varphi)) \\
\Delta' &= \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 a \cos(\beta) + \alpha_2 \alpha_3 \cos(\varphi)f(y) + \alpha_2 \alpha_3 \sin(\varphi)f(z))
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Até aqui, a não ser pelas eliminações dos termos de ordem superior a $O(\varepsilon)$, apenas uma mudança de variável no sistema foi efetuada. Pela natureza das equações nota-se que a taxa de variação das grandezas a , β , Δ com o tempo é tanto menor quanto menor for o parâmetro de perturbação. Considerando-se a , β , Δ como sendo constantes durante um ciclo e integrando-se as equações em um ciclo, como mostram as relações (5.13):

$$\begin{aligned}
a'_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a' d\varphi \\
\beta'_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta' d\varphi
\end{aligned}$$

$$\Delta'_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta' d\varphi \quad (5.13)$$

chega-se aos valores médios:

$$a'_m = -\frac{\varepsilon}{2a}(2\alpha_2\mu a + \cos \beta) \quad (5.14)$$

$$b'_m = \frac{\varepsilon}{2\alpha_2 a}(2\alpha_2\alpha_3 G_1 - 2\alpha_2 a\sigma + \sin \beta) \quad (5.15)$$

$$\Delta'_m = \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 a \cos \beta + 2\alpha_2\alpha_3 G_2) \quad (5.16)$$

onde:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin(\varphi + \beta) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos(\varphi + \beta) d\varphi \quad (5.17)$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos(\beta) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin(\beta) d\varphi \quad (5.18)$$

5.2.1 Movimento em Regime Permanente

Em regime permanente, as equações (5.14), (5.15) e (5.16) são igualadas a zero, chegando-se às expressões:

$$2\alpha_2\mu a + \cos \beta = 0 \quad (5.19)$$

$$2\alpha_2\alpha_3 G_1 - 2\alpha_2 a\sigma + \sin \beta = 0 \quad (5.20)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 a \cos \beta + 2\alpha_2\alpha_3 G_2 = 0 \quad (5.21)$$

5.2.2 Curva de Ressonância

Usando-se as expressões (5.19) e (5.20), juntamente com as relações (5.4) e (5.11), chega-se à expressão (5.22):

$$a = \frac{1}{\sqrt{(2\alpha_2\mu)^2 + \left(\frac{2\alpha_2}{\varepsilon}(\omega_e - \varphi')^2\right)}} \quad (5.22)$$

onde:

$$\omega_e = 1 + \alpha_3\varepsilon \frac{G_1}{a} \quad (5.23)$$

Para o caso em que a restituição é cúbica, a expressão (5.17) resulta em:

$$G_1 = \frac{3a^3}{8} \quad (5.24)$$

Substituindo-se a expressão (5.24) em (5.23), tem-se:

$$\omega_e = 1 + \alpha_3\varepsilon \frac{3a^2}{8} \quad (5.25)$$

E finalmente, a fase β , é dada por:

$$\beta = \arctan\left(\frac{3/8\alpha_3a^2 - \sigma}{\mu}\right) \quad (5.26)$$

5.2.3 Rotação em Regime

Usando-se as equações (5.19) e (5.21) e lembrando-se que para restituição cúbica à expressão (5.18) resulta em:

$$G_2 = \frac{3a^3}{8} \cos(\beta) \quad (5.27)$$

chega-se a expressão (5.28) para o torque:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}(2\alpha_2\mu a(4\alpha_2a + 3\alpha_2\alpha_3a^3)) \quad (5.28)$$

Combinando-se as equações (5.20) e (5.21), chega-se a (5.29), que é equivalente a (5.28):

$$\alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}(4\alpha_2a + 3\alpha_2\alpha_3a^3)\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{4}(8\alpha_2a(\varphi' - 1)/\varepsilon - 3\alpha_2\alpha_3a^3)\right)^2\right)} \quad (5.29)$$

As equações (5.28) e (5.29) são usadas para calcular a rotação em regime permanente. O lado esquerdo é a curva característica de torque adimensional do motor em função da rotação. O lado direito é uma expressão que envolve a amplitude, que por sua vez é função da rotação, como mostra a expressão (5.30):

$$\alpha_1(\varphi') = S(\varphi') \quad (5.30)$$

5.2.4 Estabilidade

O melhor procedimento para se achar as raízes é o método gráfico, que possibilita a visualização da intersecção das duas curvas. Como mostrado na figura 5.1, pode ocorrer uma, duas ou três raízes. Quando mais de uma raiz são encontradas, é necessário o estudo de estabilidade para se saber qual rotação realmente ocorre. A expressão 5.30 pode resultar em uma, duas ou três soluções, como mostram os pontos A, B e C, na figura 5.1.

Para se determinar qual destas soluções corresponde à realidade, é necessário considerar suas estabilidades. Para tal, faz-se o estudo da natureza dos pontos encontrados, através das equações (5.14), (5.15) e (5.16). Fazendo-se:

$$a = a_o + a_1 \quad (5.31)$$

$$\beta = \beta_o + \beta_1 \quad (5.32)$$

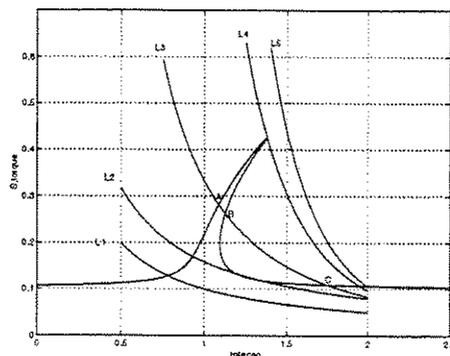


Figura 5.1: Intersecção da curva $S(\varphi')$ com curvas de torque L

$$\Delta = \Delta_o + \Delta_1 \quad (5.33)$$

Substituindo-se as relações (5.31), (5.32) e (5.33) nas equações (5.14), (5.15) e (5.16) e considerando-se apenas os termos lineares em a_1 , β_1 e Δ_1 , obtém-se, em forma matricial:

$$[a'_1 \quad \beta'_1 \quad \Delta'_1]^T = [J]\varepsilon [a_1 \quad \beta_1 \quad \Delta_1]^T \quad (5.34)$$

onde J é a matriz dos coeficientes, definida por:

$$J = \begin{bmatrix} (-\mu) & \left(\frac{\sin(\beta_o)}{2\alpha_2}\right) & 0 \\ \left(\frac{3}{4}\alpha_3 a_o - \frac{\sin(\beta_o)}{2\alpha_2 a_o^2}\right) & \left(\frac{\cos(\beta_o)}{2\alpha_2 a_o}\right) & (-1) \\ \left(\alpha_2 \cos(\beta_o) + \frac{9}{4}\alpha_2 \alpha_3 a_o^2 \cos(\beta_o)\right) & \left(-a_o \sin(\beta_o) - \frac{3}{4}\alpha_2 \alpha_3 a_o^3 \sin(\beta_o)\right) & \left(\frac{d\alpha_1}{d\varphi'}\right) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

A equação (5.34) possui soluções na forma:

$$(a_1, \beta_1, \Delta_1) = (a_{10}, \beta_{10}, \Delta_{10})e^{\lambda t}$$

onde λ são os autovalores da matriz dos coeficientes e $a_{10}, \beta_{10}, \Delta_{10}$ são constantes.

A solução é estável, e portanto o movimento realizável, se a parte real de cada autovalor for negativa ou zero. Notar que o parâmetro que indica a influência do motor no sistema é a inclinação da curva característica de torque no ponto de intersecção com a curva $S(\varphi')$.

5.2.5 Amplitude Máxima de Oscilação

Combinando-se as expressões (5.19) e (5.20), chega-se a:

$$\frac{(\varphi' - 1)}{\varepsilon} = \frac{1}{8\alpha_2 a} (3\alpha_2 \alpha_3 a^3 \pm \sqrt{16(1 - (2\alpha_2 \mu a)^2)}) \quad (5.36)$$

Como a expressão dentro do radical em (5.36) deve ser maior que zero, a amplitude máxima de oscilação é dada por (5.37):

$$a \leq \frac{1}{2\alpha_2 \mu} \quad (5.37)$$

Capítulo 6

Simulação Numérica - Resultados

Neste capítulo constam os resultados obtidos através da metodologia previamente apresentada. Para efeito de simulação, considerou-se o rotor com as seguintes características:

$$k = 31580 N/m$$

$$m = 2 kg$$

$$I_p = 0.0056 kg/m^2$$

$$e = 0.001 m$$

Este mesmo rotor foi anteriormente analisado por LUCCHESI, 1988, em seu trabalho sobre a redução da amplitude de vibração durante a passagem pela ressonância.

O sistema de acionamento por motor de corrente alternada foi o escolhido para ilustrar os resultados. Encontram-se nos Apêndices A e B os resultados obtidos através de simulação numérica, para os acionamentos por motor de corrente contínua e por torque constante, respectivamente.

As equações de movimento previamente deduzidas, em sua forma adimensional, foram

5.2.6 Movimento em Regime Transiente

Neste caso, lança-se mão da integração direta das expressões (5.14), (5.15) e (5.16). Os resultados assim obtidos, usando-se o mesmo integrador de Runge-Kutta de quinta ordem e passo fixo, são comparados com aqueles calculados através da integração direta do sistema original. Este procedimento é usado para se saber qual ordem de grandeza das não linearidades torna o modelo perturbado insatisfatório na previsão do comportamento do rotor.

6.1.1 Rotor Laval Não Amortecido

A figura 6.1 mostra o comportamento da amplitude de oscilação ao longo do tempo. Com o número de acionamento igual a 0.2, insuficiente para transpor a rotação crítica, a amplitude cresce indefinidamente. Com o número de acionamento igual 0.4, a amplitude de oscilação logo se estabiliza em um patamar de 0.28. Com o número de acionamento intermediário de 0.3, a amplitude cresce até atingir um patamar de 1.3. A figura 6.2 mostra os três casos para a rotação ao longo do tempo. Para o torque insuficiente ($a_n = 0.2$), a oscilação flutua com amplitude crescente, em torno da crítica. Com o valor intermediário ($a_n = 0.3$), ao atingir a rotação crítica, o rotor começa a oscilar com uma magnitude crescente, até transpor a crítica e se estabilizar na rotação imposta pelo motor. Com o número de acionamento igual a 0.4, a passagem pela rotação crítica é rápida, e o rotor logo alcança a rotação em regime desejada. A rotação neste caso oscila menos em torno do valor em regime que no caso anterior, onde a passagem foi lenta. A figura 6.3 mostra o torque líquido de acionamento. Com o número de acionamento de 0.2, o torque líquido não se estabiliza em torno de zero. Com o número de acionamento de 0.3, o torque líquido cresce até chegar à rotação crítica, oscila em torno do valor 0.28 com magnitude crescente, e finalmente cai para o valor nulo, onde permanece oscilando em torno deste, com magnitude constante da ordem de 0.08. A órbita do rotor, figura 6.4, para ($a_n = 0.3$), mostra a trajetória estável em torno da amplitude 1.3.

O rotor Laval, livre dos efeitos de restituição cúbica, amortecimento viscoso e atrito seco, apresenta uma amplitude de vibração crescente quando o torque aplicado é insuficiente para a transposição da rotação crítica.

6.1.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso

A figura 6.5 mostra a amplitude de oscilação ao longo do tempo, para três valores do torque de acionamento, com o rotor Laval sujeito a atrito viscoso. Observa-se um comportamento semelhante ao rotor Laval não amortecido. Porém, as duas curvas em que o torque

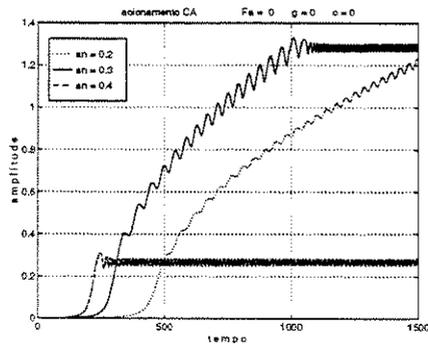


Figura 6.1: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

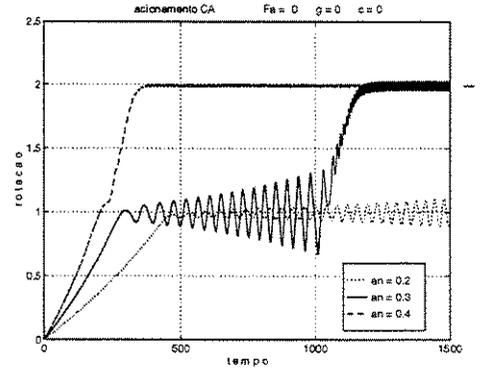


Figura 6.2: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

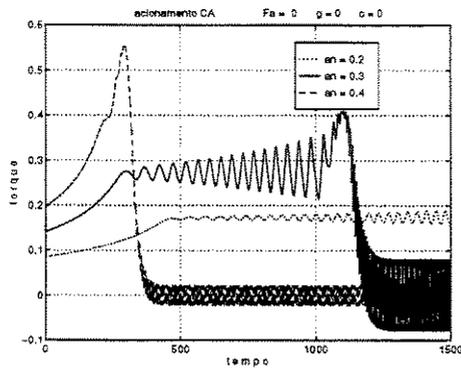


Figura 6.3: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n

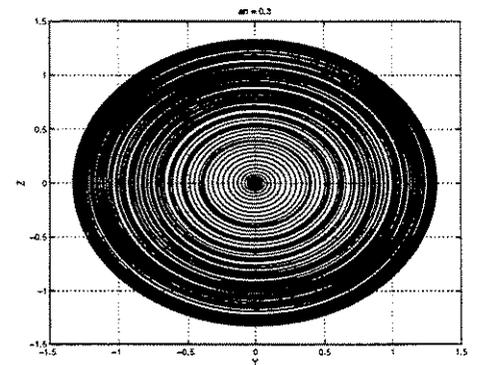


Figura 6.4: Órbita do rotor

fornecido foi suficiente para transposição da rotação crítica, que neste caso possuem $a_n = 0.3$ e $a_n = 0.4$, desta vez não apresentam grande diferença quanto a amplitude de oscilação em regime. Para ambos as curvas, esta amplitude ficou em torno de 0.025. A rotação ao longo do tempo, mostrada na figura 6.6, evidencia o fato de que, embora com o número de acionamento de 0.4 a rotação em regime seja alcançada mais rápido que com o número de acionamento de 0.3, ambos oscilam pouco em torno do valor estável. Quando o torque é insuficiente, a rotação oscila em torno da crítica e a magnitude cresce lenta e continuamente. O torque líquido de acionamento, mostrado na figura 6.7, para $a_n = 0.4$, atinge seu valor máximo antes que o rotor alcance a velocidade crítica. Para o valor intermediário, ($a_n = 0.3$), o máximo valor do torque é alcançado depois de o rotor permanecer, durante um certo tempo, oscilando em torno da rotação crítica. Em ambos os casos, depois de atingir seus valores máximos, o torque líquido cai para zero, onde permanece oscilando com magnitude crescente. A órbita do rotor, figura 6.8, para o torque de acionamento igual a 0.3, mostra as duas regiões antes e depois de o rotor passar pela rotação crítica e se estabilizar com amplitude de oscilação em torno de 0.025.

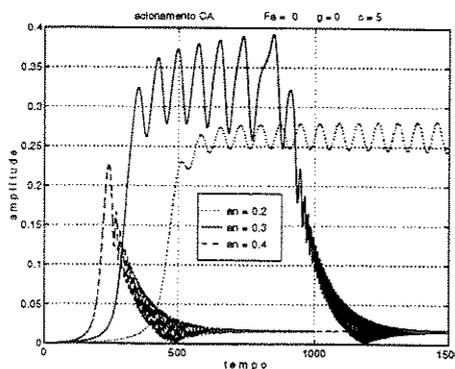


Figura 6.5: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

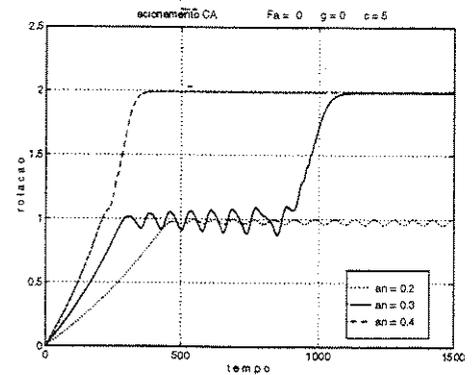


Figura 6.6: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

O amortecimento viscoso suaviza a amplitude de oscilação em torno da crítica, embora esta oscilação continue crescente.

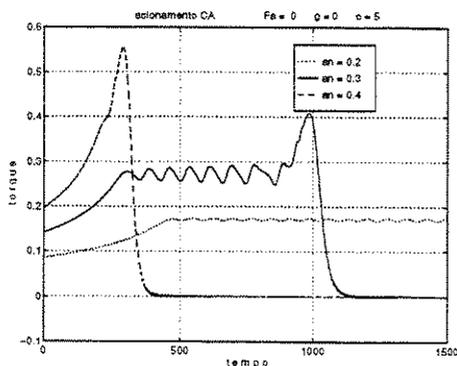


Figura 6.7: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n

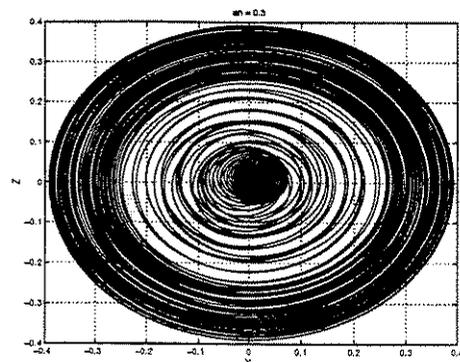


Figura 6.8: Órbita do rotor

6.1.3 Rotor Laval com Restituição Cúbica

A figura 6.9 mostra a amplitude de oscilação para três valores do torque de acionamento. O número de acionamento usado, para uma passagem rápida pela crítica, foi de 0.6. Os outros dois valores mostrados ($a_n = 0.2$ e $a_n = 0.3$) apresentam um comportamento semelhante, onde as amplitudes de oscilação são crescentes. A figura 6.10 mostra que em pouco tempo a rotação entra em regime, quando o número de acionamento é 0.6. Para os outros valores, ($a_n = 0.2$ e $a_n = 0.3$), a rotação cresce monotonicamente até atingir a crítica. A partir de então, continua aumentando, só que agora com uma oscilação primeiro crescente e posteriormente decrescente, em direção ao valor estacionário. O torque líquido, figura 6.11, com $a_n = 0.6$, atinge seu valor máximo antes de a rotação atingir o valor crítico e logo após decresce até um valor nulo. Para o valor de $a_n = 0.3$, o torque líquido começa a oscilar ao atingir a crítica. Essa oscilação cresce e posteriormente decresce em direção ao valor nulo. O mesmo acontece com o torque líquido quando o número de acionamento é igual a 0.2, embora o tempo de integração não tenha sido suficiente para se verificar a queda em direção ao valor nulo. A órbita do rotor, com torque de acionamento 0.6, é mostrada na figura 6.12.

A restituição cúbica faz com que, no caso de torque insuficiente, a rotação acompanhe a crítica, que por sua vez tem seu valor dependente da amplitude de oscilação, até alcançar

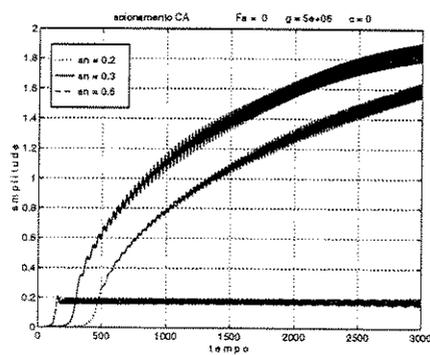


Figura 6.9: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

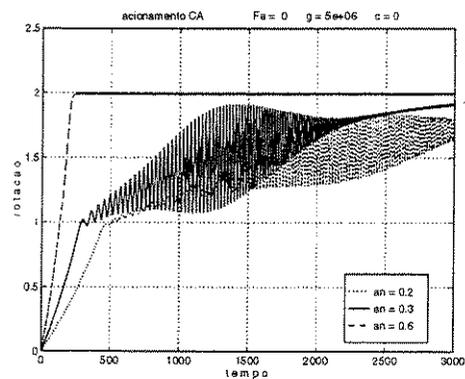


Figura 6.10: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

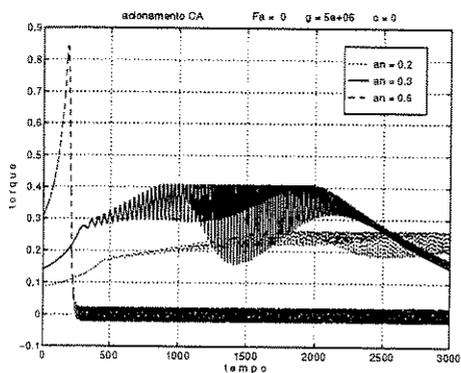


Figura 6.11: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n

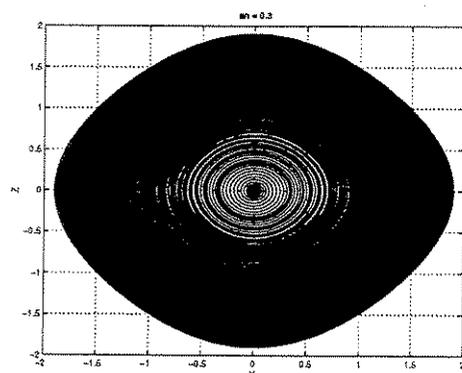


Figura 6.12: Órbita do rotor

a rotação em regime desejada, neste instante, a amplitude de oscilação assume um valor constante.

6.1.4 Rotor Laval com Atrito Seco

A figura 6.13 mostra a amplitude de oscilação para três valores distintos de a_n . Em todos os casos, a rotação ao longo do tempo, figura 6.14, mostra que, mesmo com uma grande potência de acionamento, o rotor termina por voltar a oscilar em torno da rotação crítica. As curvas de torque, figura 6.15, mostram que nenhum dos três valores consegue se estabilizar em torno de zero. A órbita do rotor cresce indefinidamente, como mostra a figura 6.16.

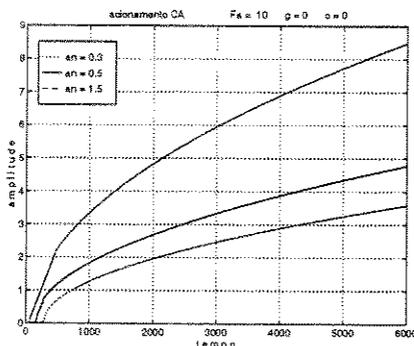


Figura 6.13: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

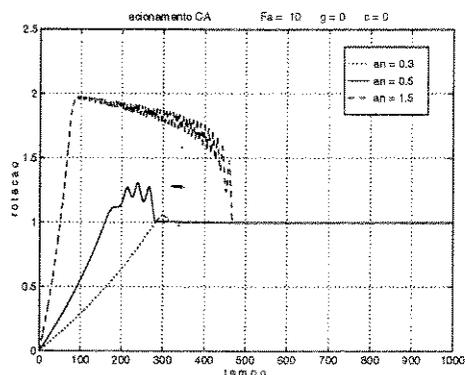


Figura 6.14: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

O atrito seco, imposto pelo sistema adicional, dissipa energia do sistema, fazendo que, mesmo com um valor elevado do torque de acionamento, o rotor não consiga manter a rotação em regime desejada; voltando sempre ao valor da rotação crítica.

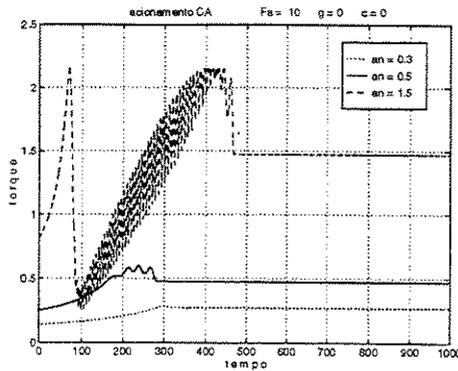


Figura 6.15: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n .

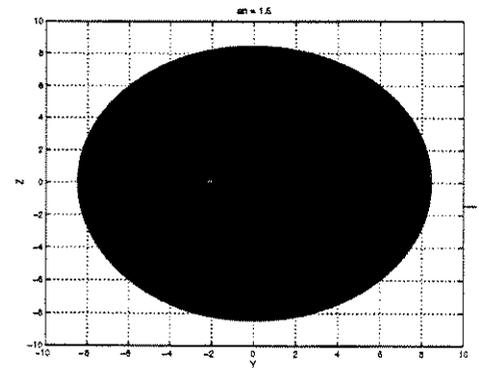


Figura 6.16: Órbita do rotor

6.1.5 Rotor Laval com Efeitos Combinados de Restituição Cúbica e Amortecimento Viscoso

A figura 6.17 mostra a amplitude de oscilação para três valores de a_n . Com o número de acionamento igual a 0.4, a passagem através da velocidade crítica é rápida; com $a_n = 0.35$ a amplitude aumenta até saltar para o mesmo valor da passagem rápida. Para $a_n = 0.2$, o torque é insuficiente para vencer a velocidade crítica e a amplitude de oscilação permanece em um patamar de 0.25. A figura 6.18 mostra o comportamento da rotação ao longo do tempo. Com $a_n = 0.4$ o rotor atinge rapidamente a rotação em regime. As curvas de torque, figura 6.19, mostram que, nos valores suficientes para transpor a rotação crítica, o patamar estável é acima de zero. Para $a_n = 0.2$, o rotor não consegue transpor a crítica, permanecendo nesta indefinidamente. A órbita do rotor para $a_n = 0.35$ é mostrada na figura 6.20.

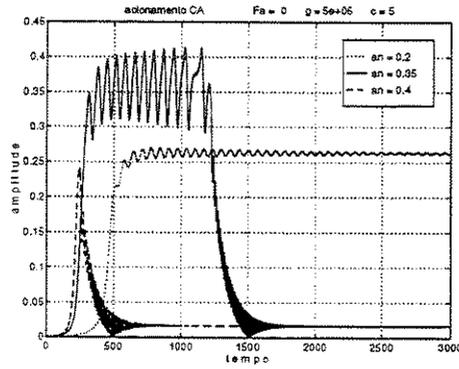


Figura 6.17: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

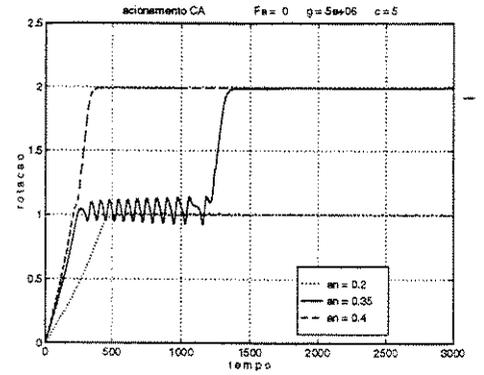


Figura 6.18: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

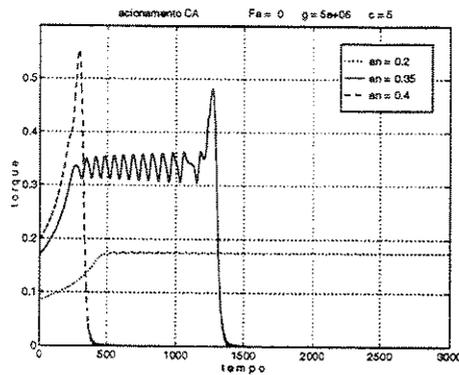


Figura 6.19: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n

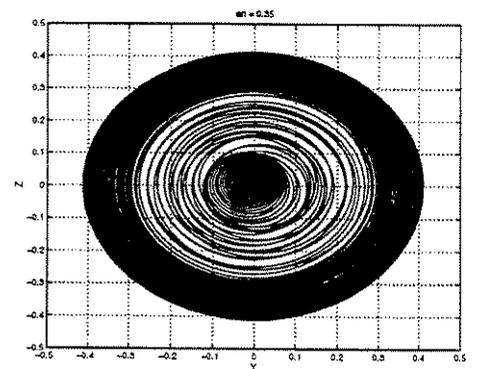


Figura 6.20: Órbita do rotor

6.1.6 Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Amortecimento Viscoso

A figura 6.21 mostra a amplitude de oscilação para três casos distintos do torque de acionamento. Em todos eles, o comportamento ao longo do tempo mostrou-se semelhante. O rotor apresenta um aumento da amplitude de oscilação até se estabilizar em torno do valor 0.5. A rotação ao longo do tempo, figura 6.22, mostra um comportamento semelhante entre os três casos. Quanto maior o torque, mais a rotação em regime se aproxima da rotação imposta pelo motor. As curvas de torque líquido, figura 6.23, mostram que nenhum dos três casos alcança o equilíbrio em torno do valor nulo. A figura 6.24 mostra a órbita do rotor para $a_n = 0.5$.

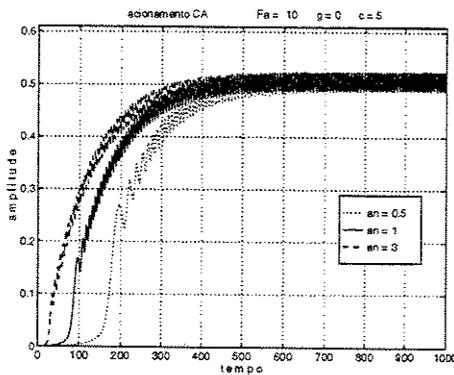


Figura 6.21: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n .

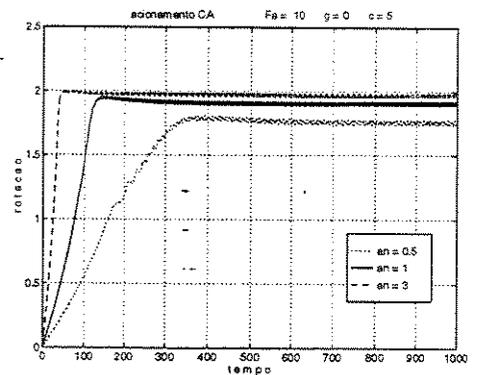


Figura 6.22: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n .

O amortecimento viscoso, presente no rotor sujeito a atrito seco, diminui os valores dos torques de acionamento necessários para a passagem pela rotação crítica, embora a rotação em regime se apresente tanto mais abaixo da desejada quanto menor o valor do torque de acionamento.

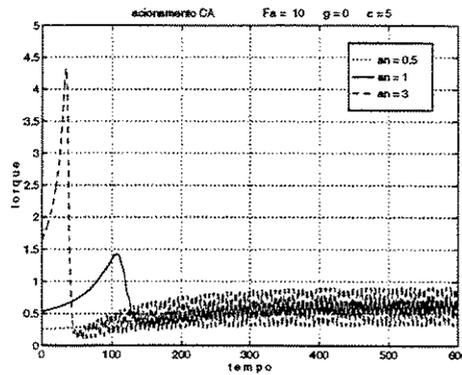


Figura 6.23: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n

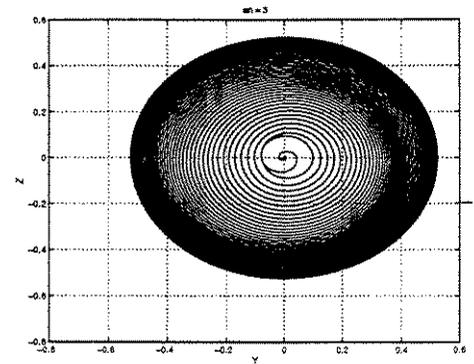


Figura 6.24: Órbita do rotor

6.1.7 Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Restituição Cúbica

As curvas da figura 6.25 mostram que para $a_n = 0.4$, a amplitude de vibração cresce até atingir o valor 2.0, onde permanece oscilando em torno deste valor. Para os demais valores, $a_n = 0.1$ e $a_n = 0.3$, a amplitude cresce indefinidamente. As curvas de rotação, figura 6.26, mostram que para $a_n = 4.0$, a rotação passa rapidamente pela velocidade crítica, chega até o valor 2.0, onde inicia uma oscilação crescente. Abruptamente a rotação salta para o valor em regime imposto pelo motor, permanecendo neste com uma pequena flutuação. As curvas de torque, figura 6.27, mostram que com $a_n = 4.0$, o torque líquido se estabiliza em torno de zero. Para $a_n = 0.3$, quase não há oscilação, embora o torque líquido cresça e não se estabilize em torno do valor nulo. Com $a_n = 0.1$, o torque líquido oscila de maneira crescente até atingir um certo patamar, depois cai repentinamente e passa a oscilar em torno de um valor próximo, porém acima do valor nulo. A órbita do rotor para $a_n = 4$ é mostrada na figura 6.28.

O rotor Laval sujeito a efeitos combinados de atrito seco e restituição cúbica apresenta uma grande amplitude de oscilação para valores elevados de torque de acionamento, enquanto que, para valores menores, a rotação acompanha lentamente a crítica e acaba por se estabilizar

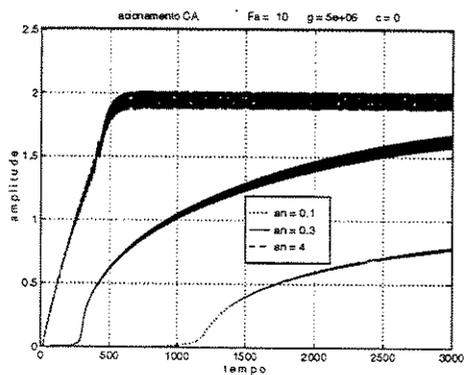


Figura 6.25: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n .

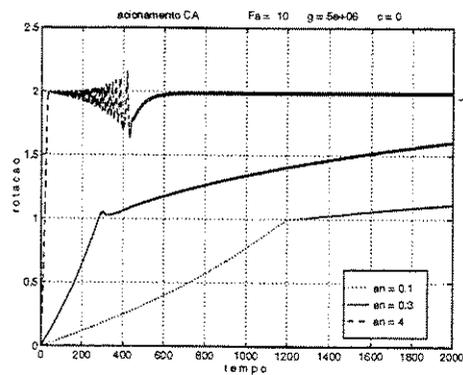


Figura 6.26: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n .

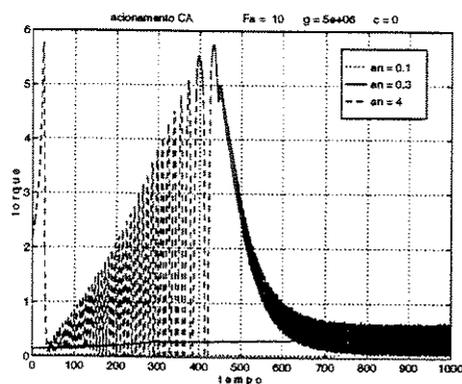


Figura 6.27: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n .

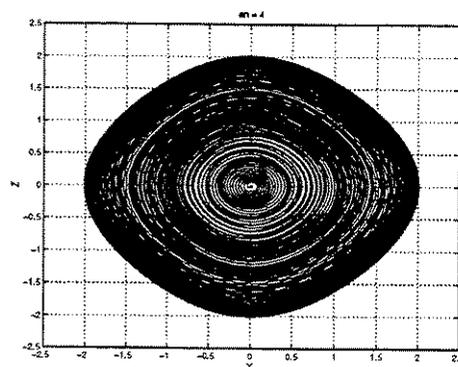


Figura 6.28: Órbita do rotor

no valor desejado.

6.1.8 Rotor Laval com Efeitos Combinados de Atrito Seco e Restituição Cúbica e Amortecimento Viscoso

A figura 6.29 mostra a amplitude de oscilação para três valores distintos de a_n . Para $a_n = 10$, a amplitude se estabiliza em torno de 0.35, com pequena flutuação em torno deste valor. Para os demais valores, $a_n = 0.35$ e $a_n = 0.5$, a amplitude se estabiliza em 0.45 com grande flutuação. As curvas de rotação ao longo do tempo, figura 6.30, mostram que para $a_n = 10.0$, a passagem pela ressonância é praticamente instantânea, enquanto que para os outros valores, $a_n = 0.35$ e $a_n = 0.5$, o rotor não atinge o patamar de rotação imposto pelo motor, ficando tanto mais abaixo quanto menor o número de acionamento. As curvas de torque, figura 6.31, mostram que, embora a flutuação varie, para os três valores de a_n mostrados, o torque líquido se estabiliza em torno do valor nulo em todos os casos. A figura 6.32 mostra a órbita do rotor para $a_n = 10$.

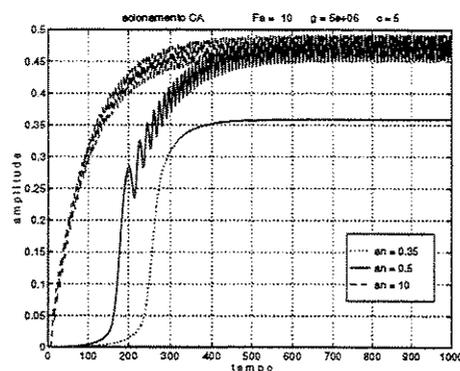


Figura 6.29: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de a_n

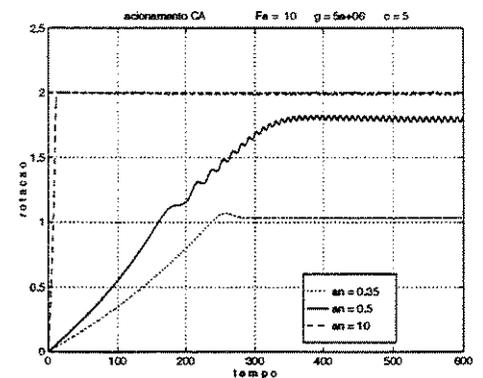


Figura 6.30: Rotação ao longo do tempo para três valores de a_n

Com os efeitos combinados de atrito seco, restituição cúbica e amortecimento viscoso,

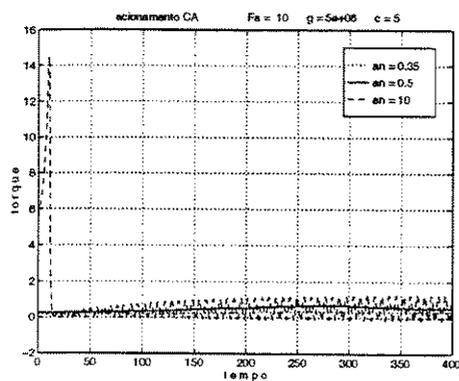


Figura 6.31: Torque de acionamento CA ao longo do tempo para três valores de a_n .

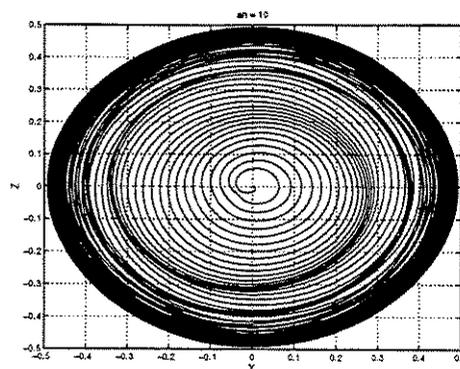


Figura 6.32: Órbita do rotor

a amplitude de oscilação se estabiliza rapidamente. Isto faz a rotação crítica permanecer com seu valor constante. A partir deste instante, a rotação em regime se estabiliza em um determinado valor, embora este valor fique abaixo do desejado se o torque de acionamento não for satisfatório.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Considerações Finais

A forma inclinada da curva de ressonância faz com que coexistam duas amplitudes de oscilação para uma mesma rotação. Para se saber qual delas ocorre na prática, um estudo de estabilidade torna-se necessário. Mais ainda, as partes estável e instável da curva têm relação direta com a aceleração e desaceleração do rotor, como KONONENKO, 1969 comprovou em seu experimento.

Alguns autovalores calculados não ofereceram resultados satisfatórios. Isso se deve mais à imprecisão dos valores numéricos calculados nos pontos de intersecção do que a limitações do método da média em si.

A comparação das curvas de resposta ao longo do tempo, entre o sistema original e o sistema médio, corrobora a validade do método.

Não obstante o fato de o atrito seco não ter sido considerado na aplicação do método da média, não há nenhum impedimento matemático à sua inclusão neste tipo de análise.

Embora, neste caso, a força de atrito tenha que assumir valores da mesma ordem de grandeza do parâmetro de perturbação.

O procedimento usado para tornar as equações adimensionais mostra que o sistema possui não linearidades tanto mais fracas quanto menor for o quociente entre o valor da excentricidade e o raio de giração do rotor.

Embora a interação com a fonte de potência seja considerada neste trabalho, desprezou-se a inércia do motor. Isto faz com que os resultados se aproximem bastante daqueles obtidos para o sistema ideal. Esperam-se obter resultados mais coerentes com a inclusão da inércia do motor em trabalhos futuros.

Outro aspecto importante no projeto de máquinas rotativas é o torque mínimo necessário para uma passagem satisfatória pela ressonância. O estudo da influência do termo da derivada do torque em relação à rotação, nos autovalores da matriz jacobiana, fornece informações importantes neste sentido.

7.2 Conclusões

A aplicação do método da média mostrou-se eficiente no estudo do comportamento do rotor Laval, no caso de fracas não linearidades estarem presentes.

A estabilidade de uma determinada rotação em regime depende da inclinação da curva de torque em função da rotação, no valor da rotação considerada.

Devido à interação com a fonte de potência, ocorre o fenômeno conhecido como efeito Sommerfeld, o qual está relacionado com a impossibilidade de o movimento ocorrer em determinada faixa de rotação.

A grande sensibilidade às condições iniciais faz com que a precisão numérica seja um problema crítico no estudo da estabilidade de sistemas não lineares.

7.3 Perspectivas

Por último, é importante salientar que este trabalho constitui apenas um primeiro passo em direção à compreensão do comportamento de um rotor Laval Vertical, sujeito a efeitos de atrito seco e restituição cúbica, interagindo com uma fonte de potência não ideal. Para que o modelo teórico aqui desenvolvido possa ser convalidado experimentalmente, várias modificações devem ser introduzidas, tais como o aumento da precisão nos cálculos e a inclusão da inércia do motor na equação da fonte. Nesta etapa, ferramentas gráficas de análise podem ser incorporadas como auxílio na compreensão dos fenômenos inerentes ao sistema.

Referências Bibliográficas

- AIBA, S. (1976). On the vibration of a rotating shaft passing through the critical speed. *Bulletin of the JSME* **19**, 95–103.
- BAJAJ, A. K. & TOUSI, S. (1990). Torus doubling and chaotic amplitude modulations in two degree of freedom resonantly forced mechanical system. *International Journal of Nonlinear Mechanics* **25**, 625–641.
- BODGER, W. K. (1967). Deceleration of an unbalanced rotor through a critical speed. *Transaction ASME, Serie B, Journal of Engineering for Industry* **89** no 4, 582.
- BOVIC, P. & HOGFORS, C. (1986). autobalancing of rotors. *Journal of Sound and Vibration* **111**, 429–440.
- CHEUNG, Y. K., CHEN, S. H. & LAU, S. L. (1991). A modified linstedt-poincaré method for certain strongly nonlinear oscillators. *International Journal Non-Linear Mechanics* **26**, 367–378.
- CHOI, Y. S. & NOAH, S. T. (1987). Nonlinear steady-state response of a rotor-suport system. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* **109**, 255–261.
- CUSUMANO, J. P. & SHARKADY, M. T. (1995). An experimental study of bifurcation, chaos and dimensionality in a system forced through a bifurcation parameter. *Nonlinear Dynamics* **8**, 467–489.
- CVETICANIN, L. (1993). An asymptotic solution for weak nonlinear vibrations of the rotor. *Mechanism and Machine Theory* **28**, 495–505.

- CVETICANIN, L. (1995). Resonant vibrations of nonlinear rotor. *Mechanism and Machine Theory* **30**, 581–588.
- DORNING, A. (1959). Transients in a simple undamped oscillators under inertial disturbances. *Transaction ASME Journal, of Applied Mechanics* **66 no 2**, 217.
- FEENY, B. F. & MOON, F. C. (1992). Bifurcation sequences of a coulomb friction oscillator. *Nonlinear Dynamics* **4**, 25–37.
- FEENY, B. F. & MOON, F. C. (1994). Chaos in a forced dry friction oscillator: Experiments and numerical modelling. *Journal of Sound and Vibration* **170**, 303–323.
- GANAPATHY, S. & PARAMESWARAN, M. A. (1986). Transition over resonance and power requirements of an unbalanced mass-driven vibratory system. *Mechanism and Machine Theory* **21**, 73–85.
- GASCH, R. & MARKET, R. (1979). Acceleration of unbalanced flexible rotor through the critical speeds. *Journal of Sound and Vibration* **63**, 393–409.
- GONÇALVES, P. B. & MACHADO, V. L. S. S. (1995). A computation strategy for determining bifurcation diagram for non-linear oscillating systems. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas* **XVII**, 344–352.
- HASAN, A. H. & MOOK, D. T. (1979a). *Nonlinear Oscillations*. second ed.. Addison-Wesley.
- HASAN, A. H. & MOOK, D. T. (1979b). *Nonlinear oscillations*.
- HASSAN, A. (1994a). Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically excited nonlinear oscillations, part i: Transformation of detuning. *Journal of Sound and Vibration* **178**, 21–40.
- HASSAN, A. (1994b). Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically excited nonlinear oscillations, part 1: Transformation of derivative. *Journal of Sound and Vibration* **178**, 1–19.
- HENDRICKS, S. L. (1986). The effect of viscoelasticity on the vibration of a rotor. *Transaction of the ASME* **53**, 412–416.

- ISHIDA, Y., YAMAMOTO, T. & MURAKAMI, S. (1992). Nonstationary vibration of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through a critical speed. *JSME International Journal* **35**, 360–368.
- KONONENKO, V. O. (1969). *Vibrations Systems with a Limited Power Supply*. Addison-Wesley.
- LEWIS, F. M. (1932). Vibration during acceleration through a critical speed. *Transaction ASME APM-54-24*, 253.
- LUCCHESI, K. C. (1988). Passagem de um rotor pela velocidade crítica. Master's thesis. Universidade Estadual de Campinas.
- MARCHIS, V. & VATTA, F. (1985). A numerical approach on the combined viscous and coulomb friction motion. *Mechanism and Machine Theory* **20**, 171–180.
- MATSUURA, K. (1975). A study of vibration and velocity characteristic of an accelerated unbalanced rotor. *Nonlinear Dynamics* **18**, 1226–1235.
- MATSUURA, K. (1977). A method for estimating the condition that a rotor can pass through resonance. *Bulletin of the JSME* **20**, 801–810.
- NARYANAN, S. & JAYARAMAN, K. (1991). Chaotic vibration in a non-linear oscillator with coulomb damping. *Journal of Sound and Vibration* **146**, 17–31.
- NAYFEH, S. A. & NAYFEH, A. H. (1994). The response of nonlinear systems to modulated high-frequency input. *Dynamics and Vibration of Time-Varying Systems and Structure ASME* **56**, 411–420.
- PAKDERMIRLI, M. & NAYFEH, A. H. (1994). Nonlinear vibration of a beam-spring-mass system. *Journal of Vibration and Acoustics* **116**, 433–439.
- RAMAN, A., BAJAD, A. K. & DAVIES, P. (1996). On the slow transition across instabilities in non-linear dissipative systems. *Journal of Sound and Vibration* **192**, 835–865.
- SHAW, S. W. (1986). On the dynamic response of a system with dry friction. *Journal of Sound and Vibration* **108**, 305–325.

- SHERIF, H. A. & BASSIONI, A. S. (1993). Non-linear identification of mechanical systems with dynamic dry friction. *Journal of Sound and Vibration* **178**, 513–533.
- THOMPSON, J. M. & STEWART, H. B. (1989). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. sexta ed.. Addison-Wesley.
- TO, C. W. S., LIN, RUI, HRANG, KELEI & LU, QISHAO (1991). Primary bifurcation in two non-linearly coupled oscillators. *Journal of Sound and Vibration* **147**, 265–282.
- VAKAKIS, A. F. & RAND, R. H. (1992). Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom nonlinear system in low energies. *Internatinal Journal of Nonlinear Mechanics* **27**, 861–874.
- YANABE, S. & TAMURA, A. (1972). Vibration of a shaft passing through a critical speed. *Bulletin of the JSME* **15**, 1364–1374.

Apêndice A

Motor de Corrente Contínua

A.1 Acionamento por Motor CC

A.1.1 Rotor Laval Não Amortecido

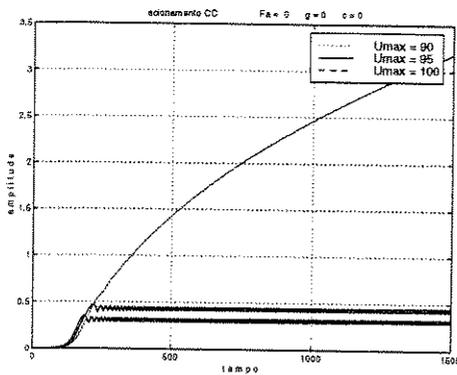


Figura A.1: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

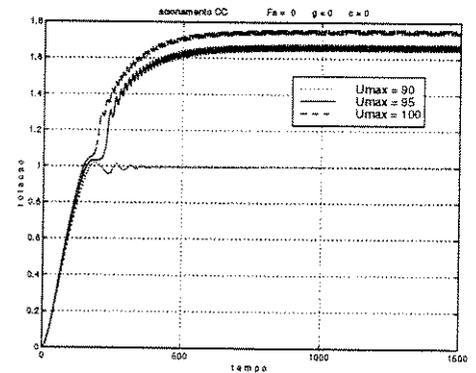


Figura A.2: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

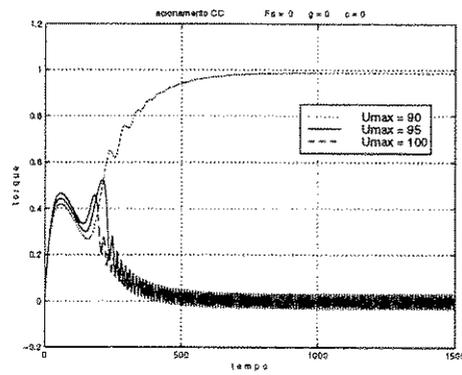


Figura A.3: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

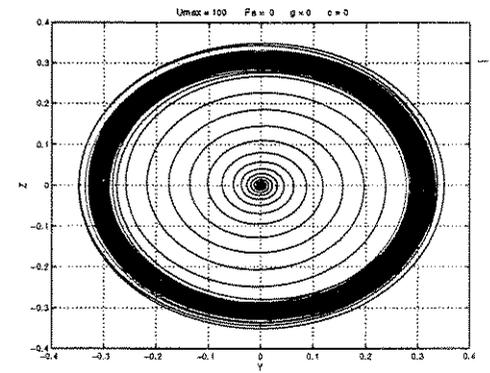


Figura A.4: Órbita do rotor

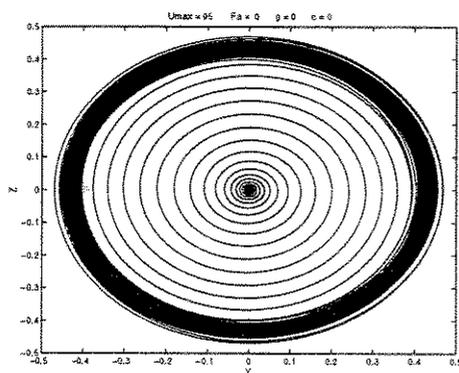


Figura A.5: Órbita do rotor

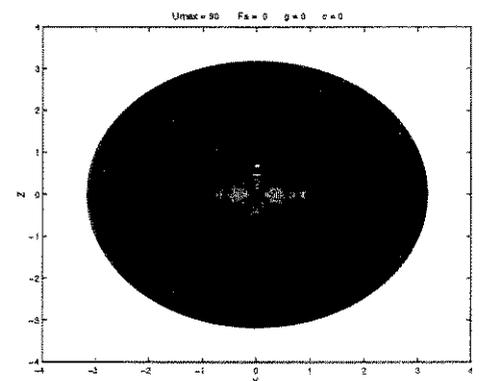


Figura A.6: Órbita do rotor

A.1.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso

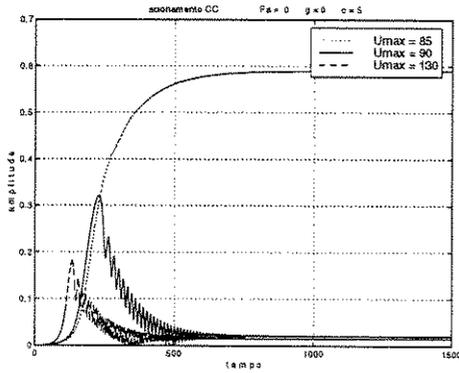


Figura A.7: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

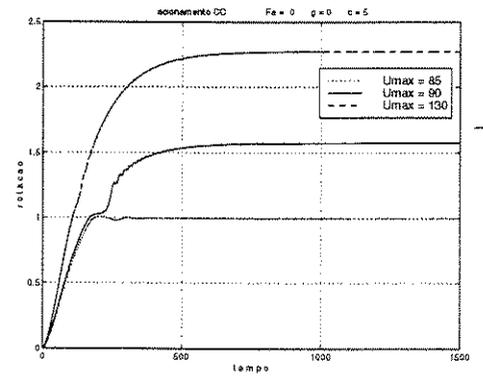


Figura A.8: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

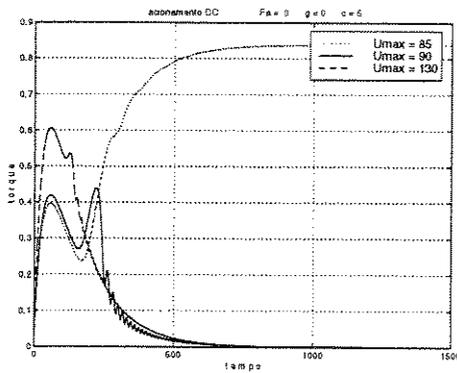


Figura A.9: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

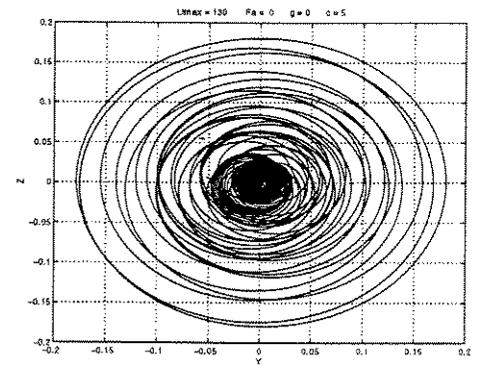


Figura A.10: Órbita do rotor

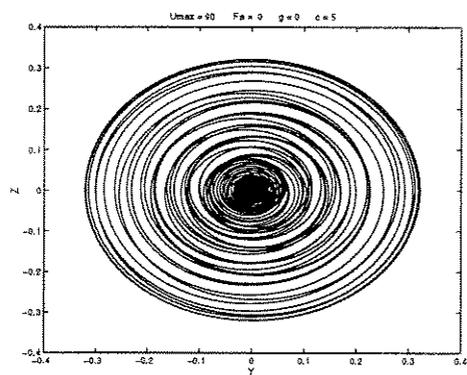


Figura A.11: Órbita do rotor

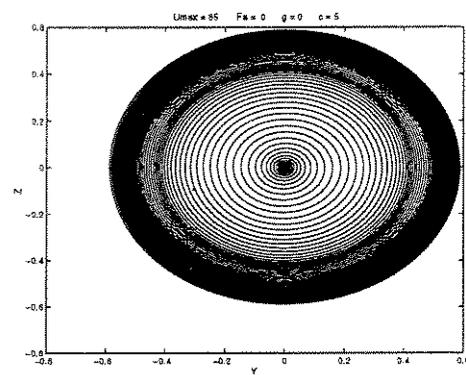


Figura A.12: Órbita do rotor

A.1.3 Rotor Laval com Atrito Seco

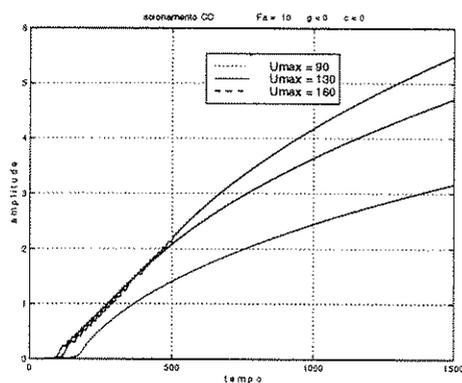


Figura A.13: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

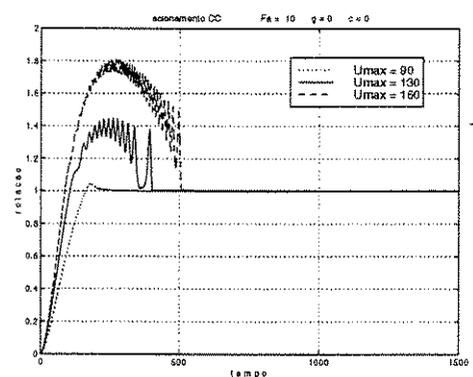


Figura A.14: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

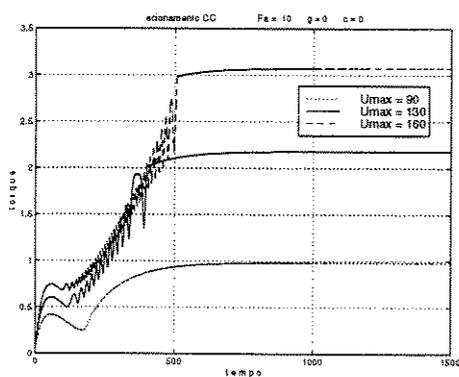


Figura A.15: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

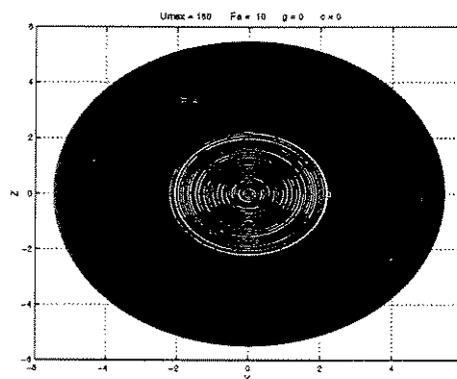


Figura A.16: Órbita do rotor

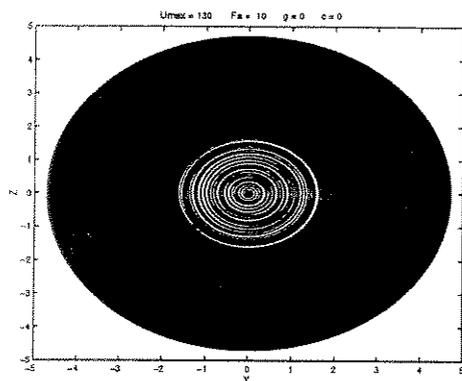


Figura A.17: Órbita do rotor

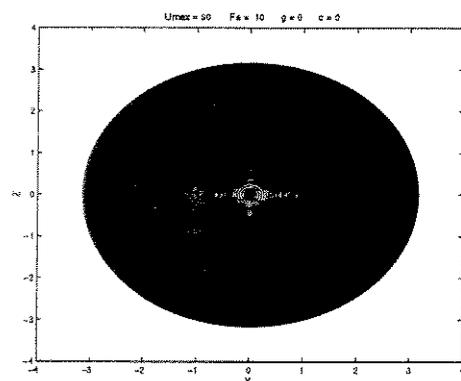


Figura A.18: Órbita do rotor

A.1.4 Rotor Laval com Restituição Cúbica

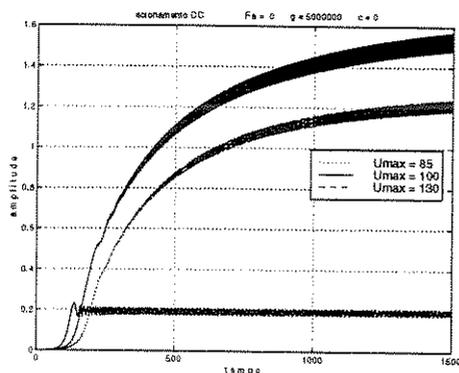


Figura A.19: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

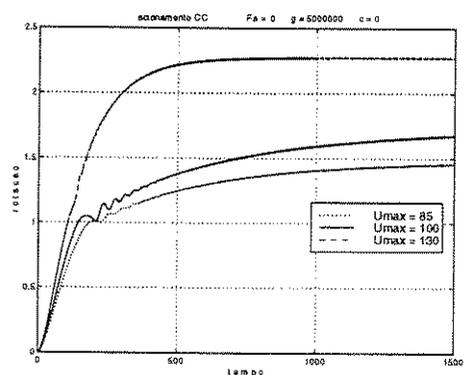


Figura A.20: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

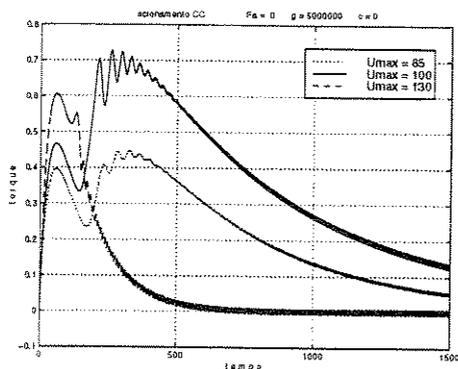


Figura A.21: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

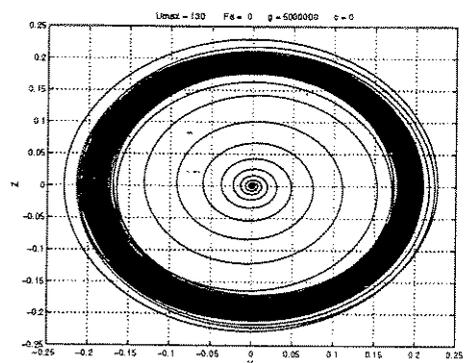


Figura A.22: Órbita do rotor

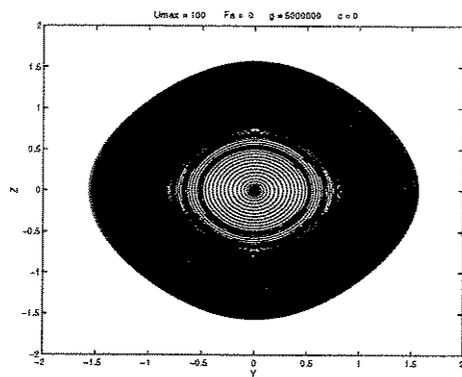


Figura A.23: Órbita do rotor

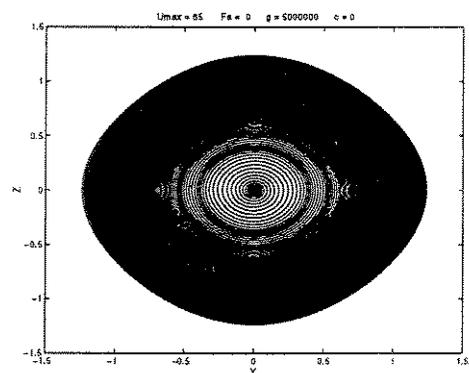


Figura A.24: Órbita do rotor

A.1.5 Rotor Laval com Efeitos Combinados

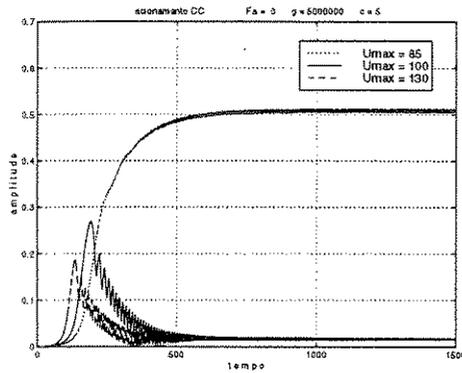


Figura A.25: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

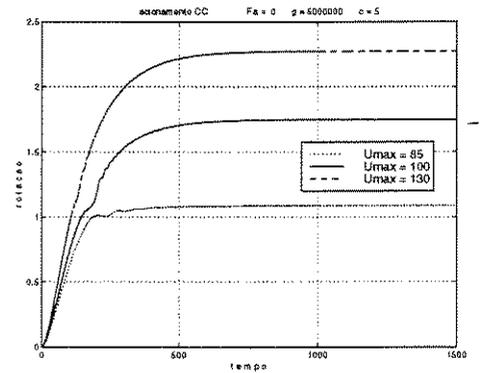


Figura A.26: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

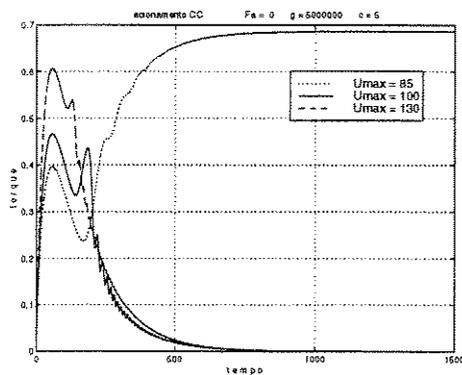


Figura A.27: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

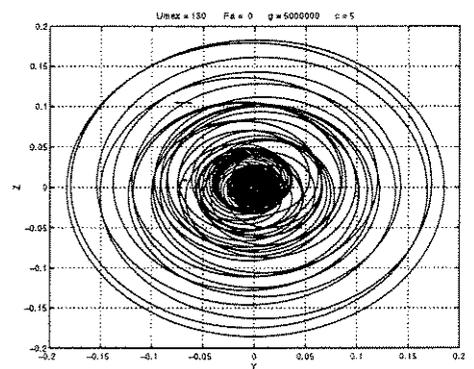


Figura A.28: Órbita do rotor

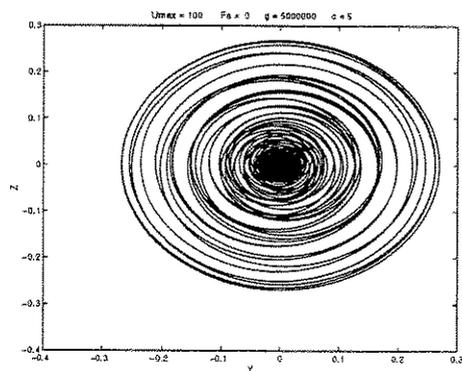


Figura A.29: Órbita do rotor

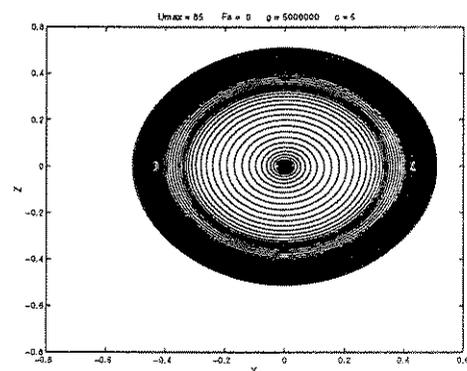


Figura A.30: Órbita do rotor

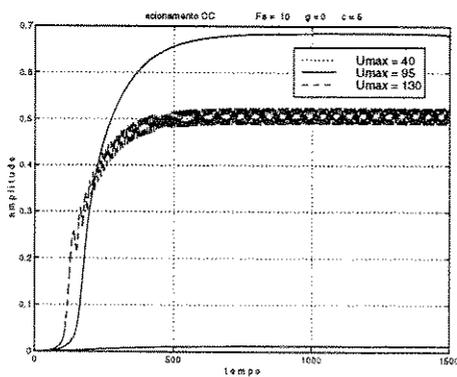


Figura A.31: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

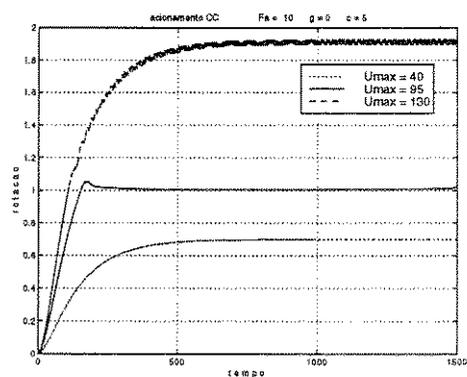


Figura A.32: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

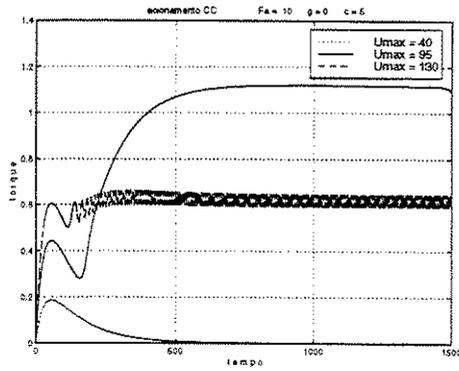


Figura A.33: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

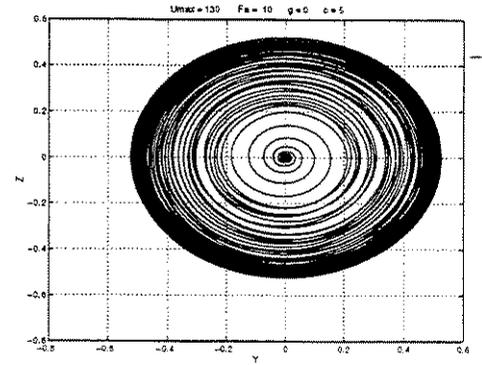


Figura A.34: Órbita do rotor

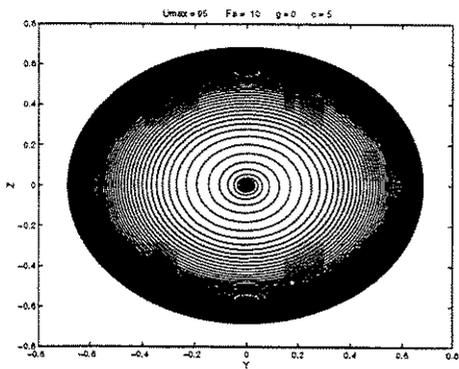


Figura A.35: Órbita do rotor

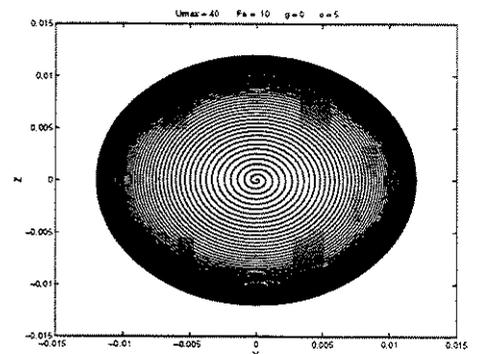


Figura A.36: Órbita do rotor

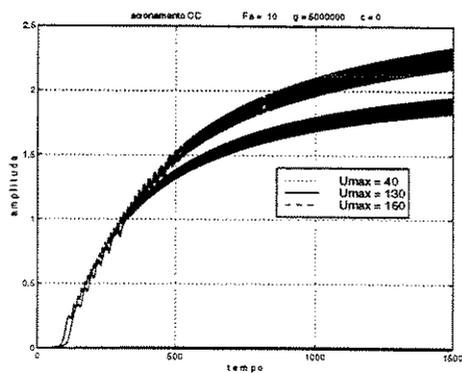


Figura A.37: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

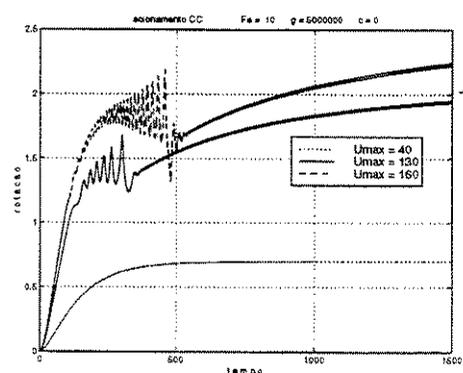


Figura A.38: Rotação ao longo do tempo para três valores de U_{max}

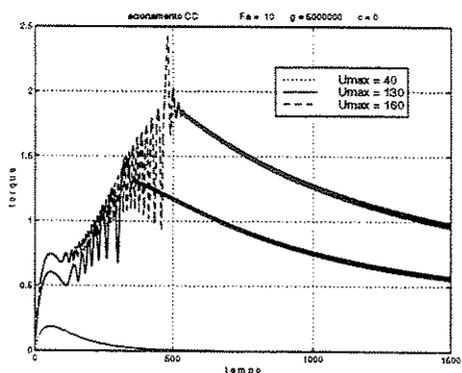


Figura A.39: Torque de acionamento CC ao longo do tempo para três valores de U_{max}

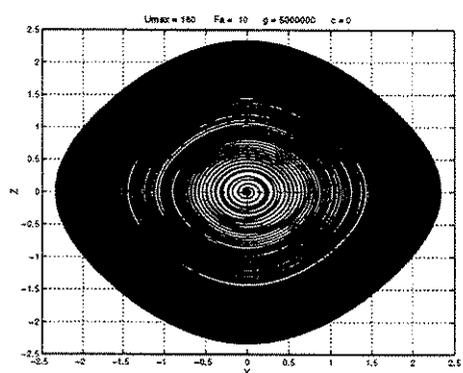


Figura A.40: Órbita do rotor

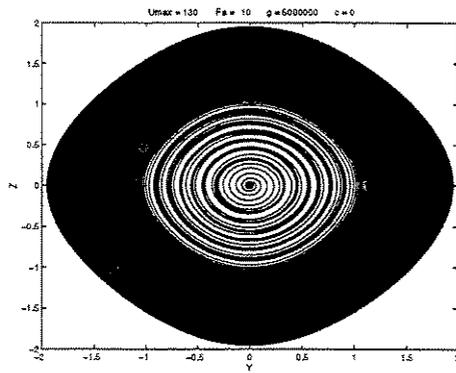


Figura A.41: Órbita do rotor

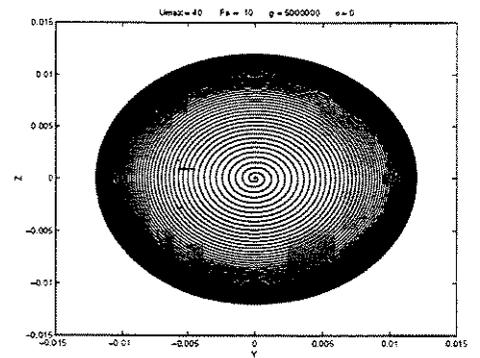


Figura A.42: Órbita do rotor

Apêndice B

Sistema Ideal

B.1 Acionamento Ideal

B.1.1 Rotor Laval Não Amortecido

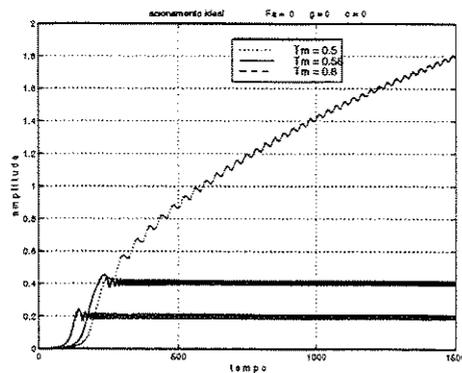


Figura B.1: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m .

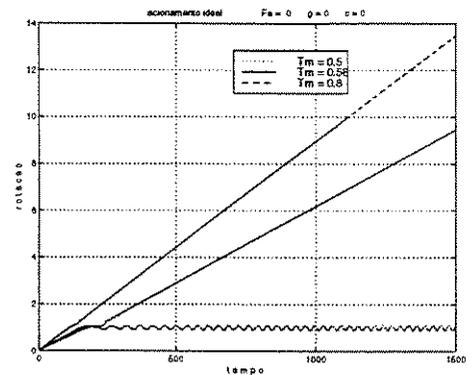


Figura B.2: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m .

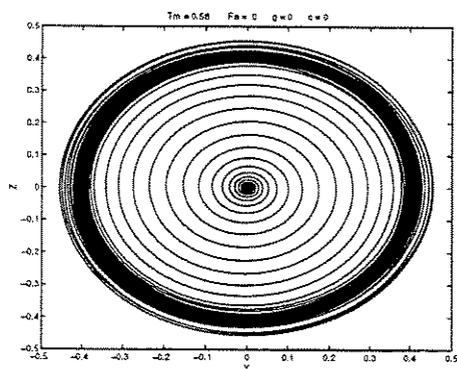


Figura B.3: Órbita do rotor

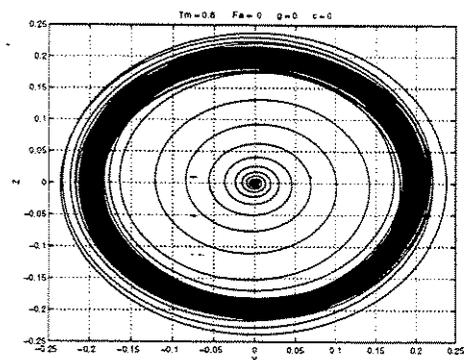


Figura B.4: Órbita do rotor

B.1.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso

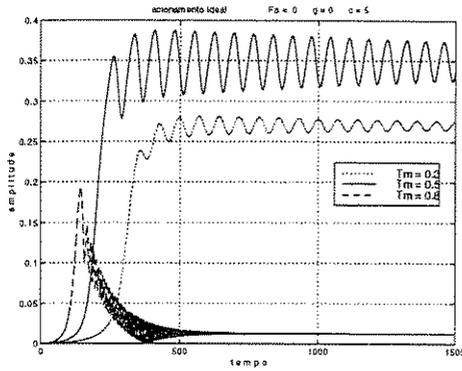


Figura B.5: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

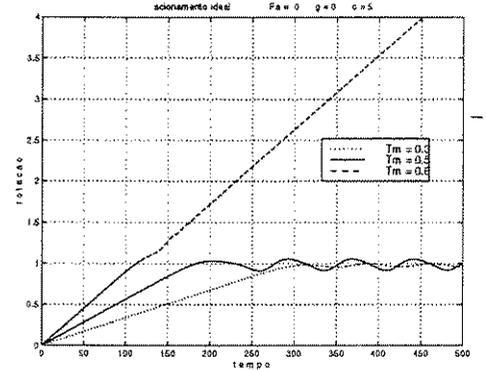


Figura B.6: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

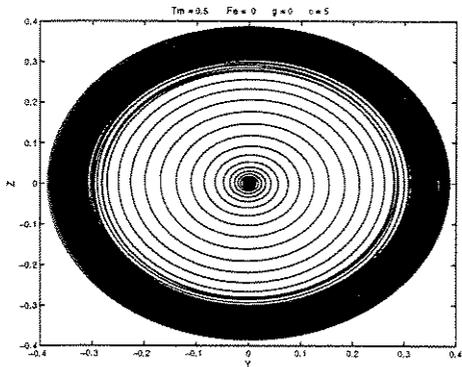


Figura B.7: Órbita do rotor

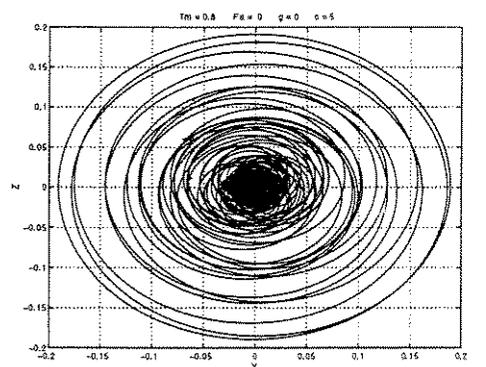


Figura B.8: Órbita do rotor

B.1.3 Rotor Laval com Atrito Seco

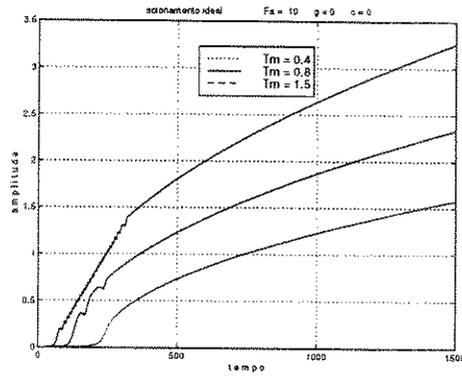


Figura B.9: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

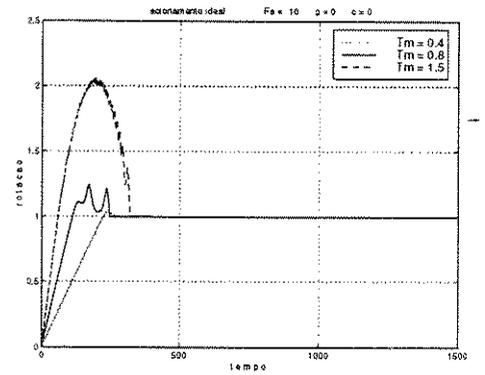


Figura B.10: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

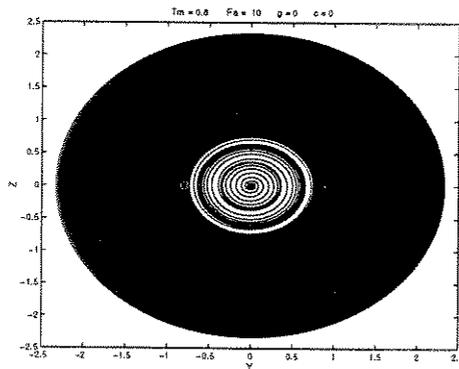


Figura B.11: Órbita do rotor

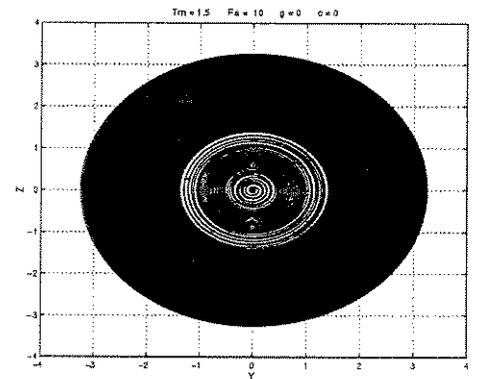


Figura B.12: Órbita do rotor

B.1.4 Rotor Laval com Restituição Cúbica

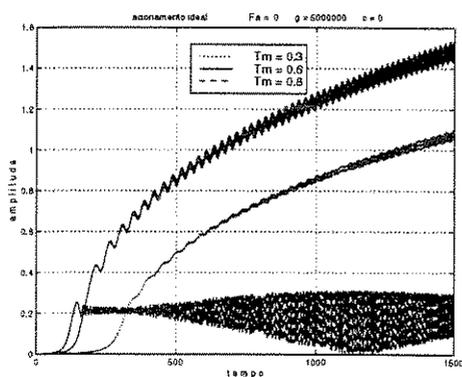


Figura B.13: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

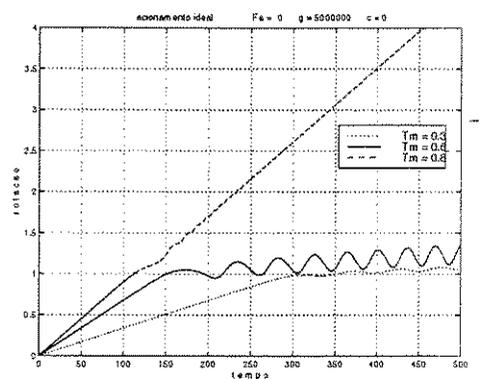


Figura B.14: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

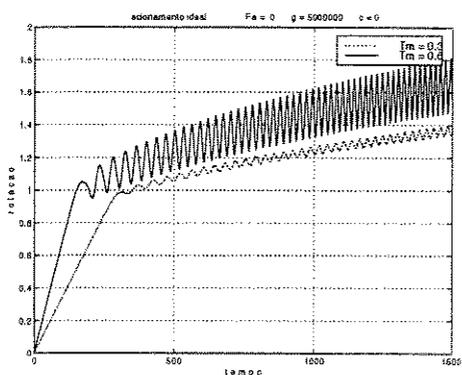


Figura B.15: Rotação ao longo do tempo para dois valores de T_m

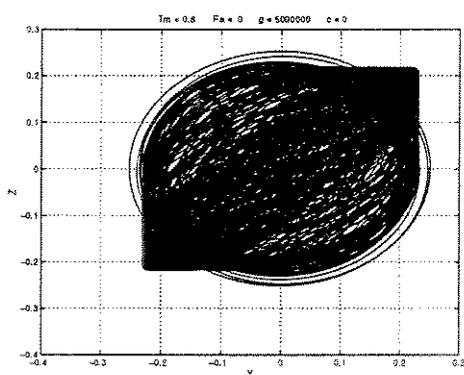


Figura B.16: Órbita do rotor

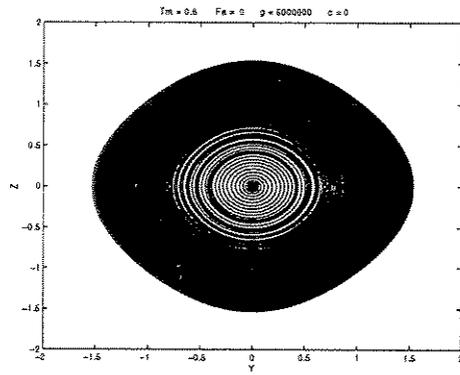


Figura B.17: Órbita do rotor

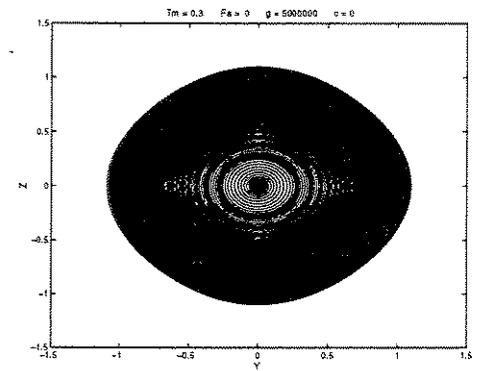


Figura B.18: Órbita do rotor

B.1.5 Rotor Laval com Efeitos Combinados

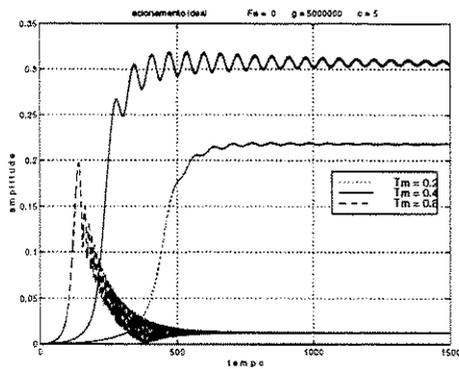


Figura B.19: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

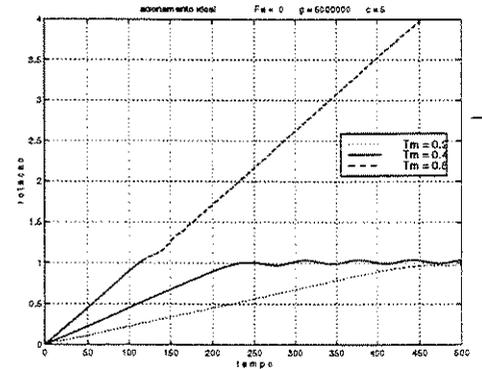


Figura B.20: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

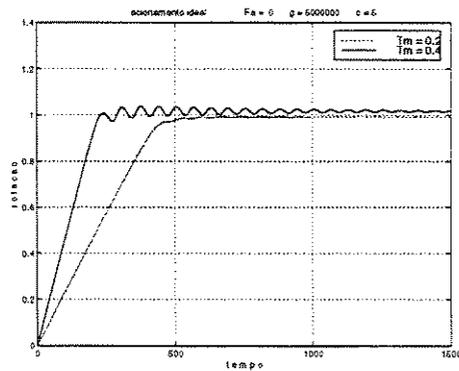


Figura B.21: Rotação ao longo do tempo para dois valores de T_m

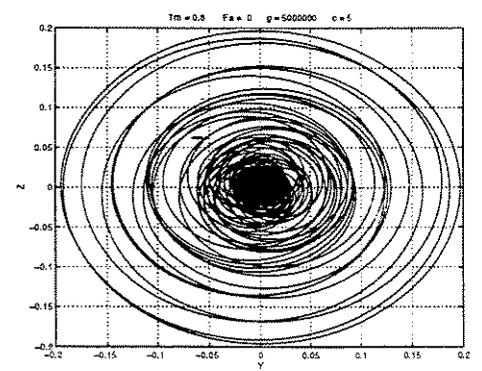


Figura B.22: Órbita do rotor

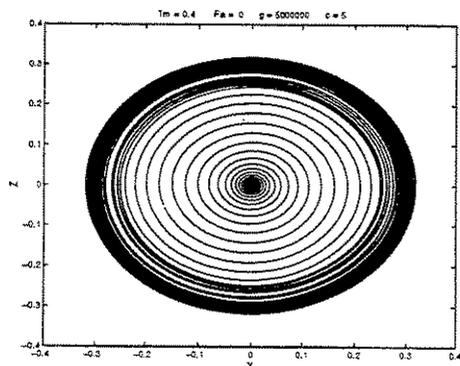


Figura B.23: Órbita do rotor

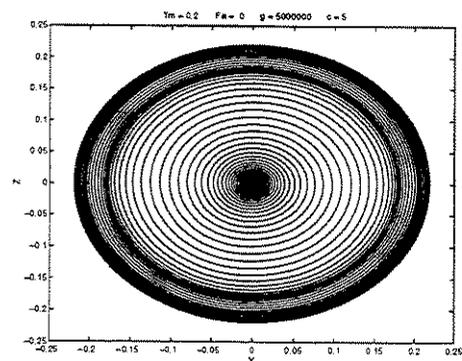


Figura B.24: Órbita do rotor

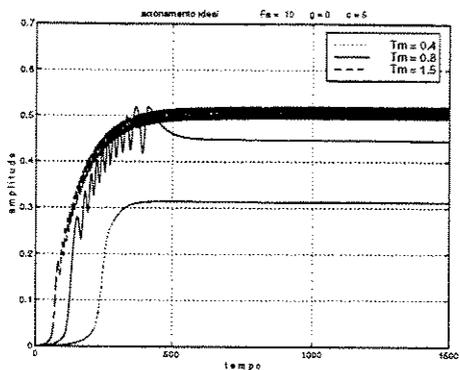


Figura B.25: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

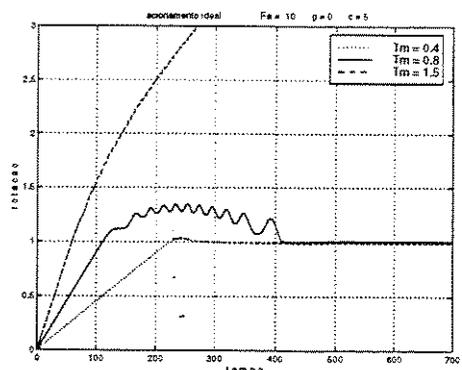


Figura B.26: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

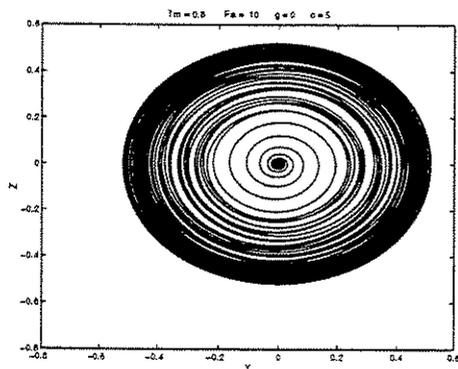


Figura B.27: Órbita do rotor

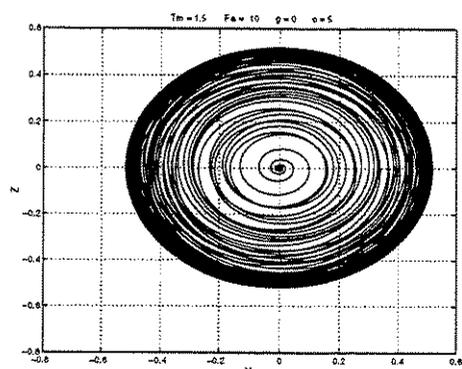


Figura B.28: Órbita do rotor

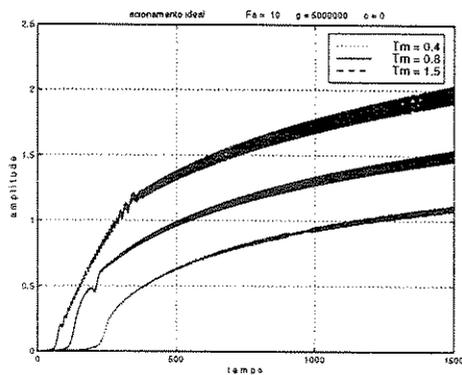


Figura B.29: Amplitude de oscilação ao longo do tempo para três valores de T_m

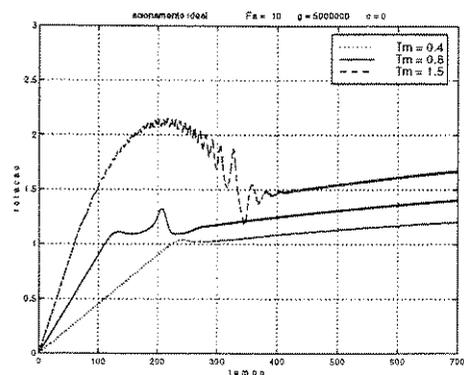


Figura B.30: Rotação ao longo do tempo para três valores de T_m

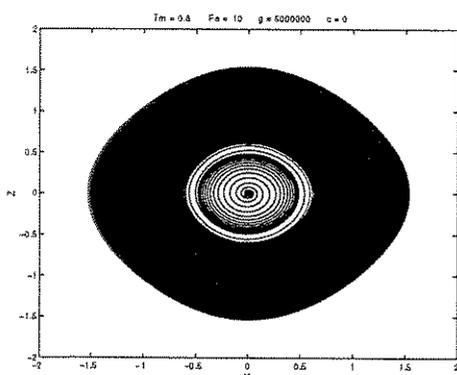


Figura B.31: Órbita do rotor

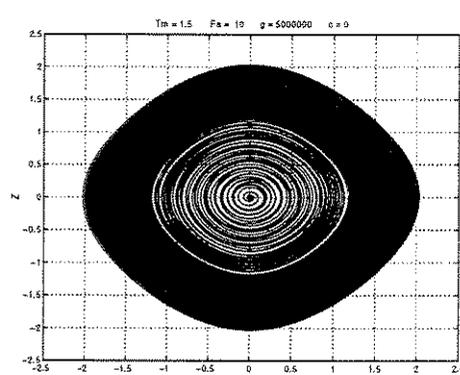


Figura B.32: Órbita do rotor

Apêndice C

Resposta Transiente

Neste apêndice estão os resultados obtidos através da integração numérica das equações de movimento do sistema. Foram simulados tanto o sistema original quanto o sistema médio, com o objetivo de se comparar as duas soluções obtidas.

C.1 Rotor Laval Não Amortecido

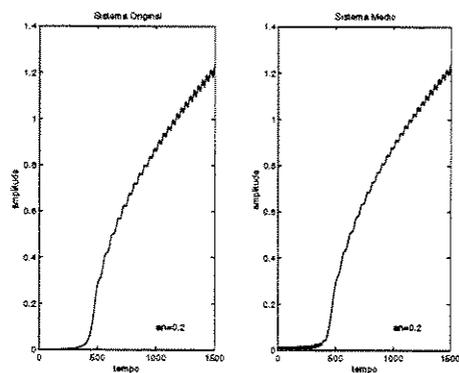


Figura C.1: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

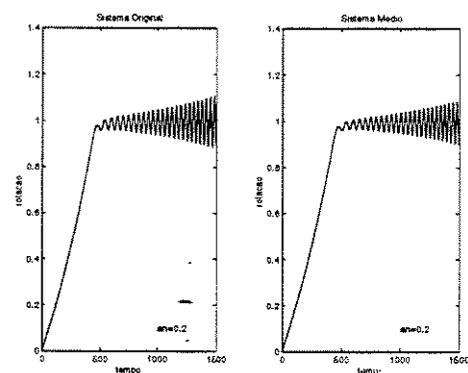


Figura C.2: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

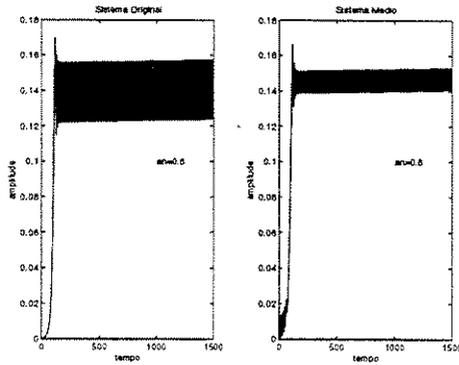


Figura C.3: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

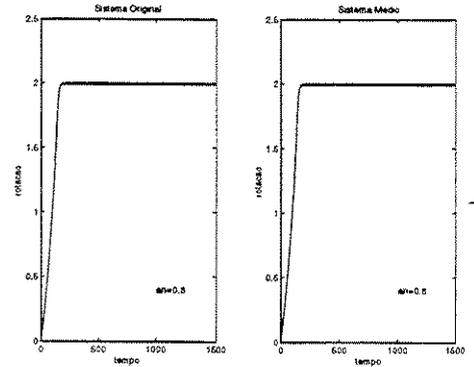


Figura C.4: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

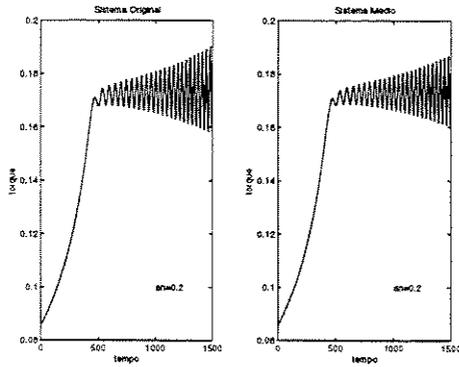


Figura C.5: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

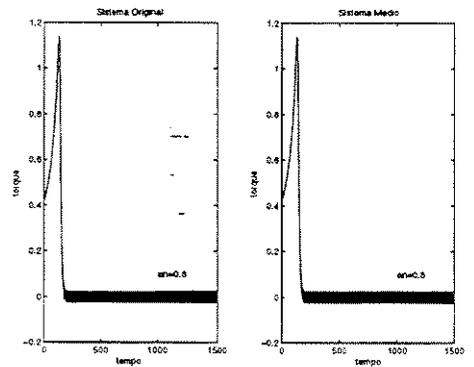


Figura C.6: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

C.2 Rotor Laval com Amortecimento Viscoso

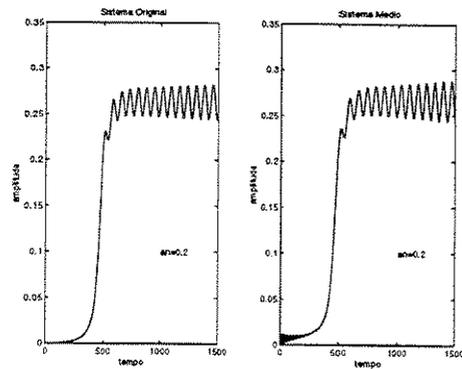


Figura C.7: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

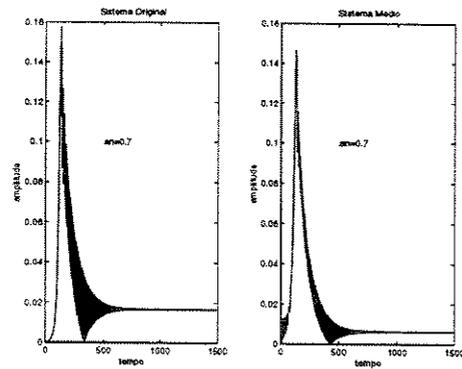


Figura C.9: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

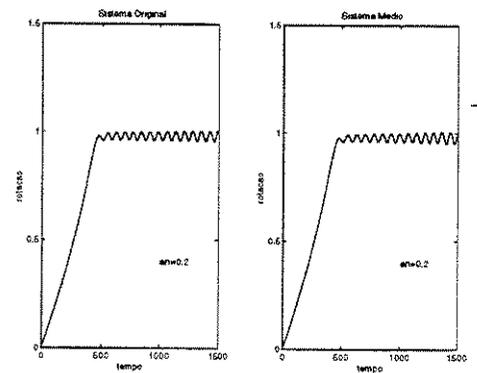


Figura C.8: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

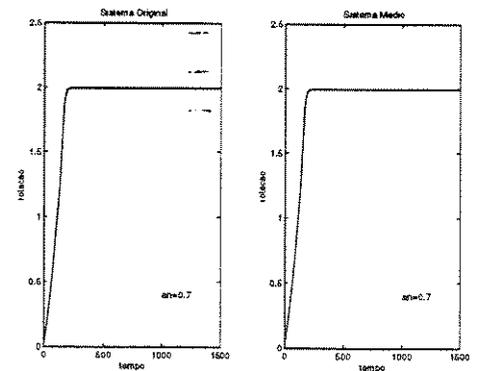


Figura C.10: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

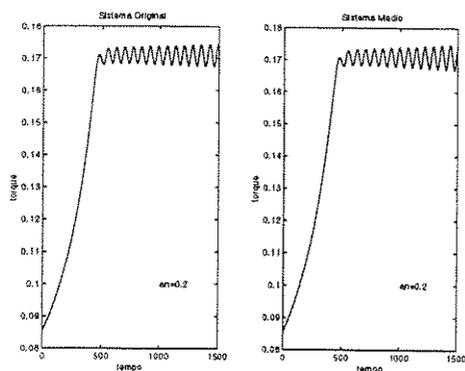


Figura C.11: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

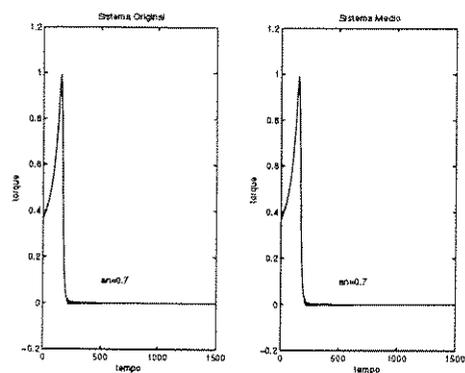


Figura C.12: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

C.3 Rotor Laval com Restituição Cúbica

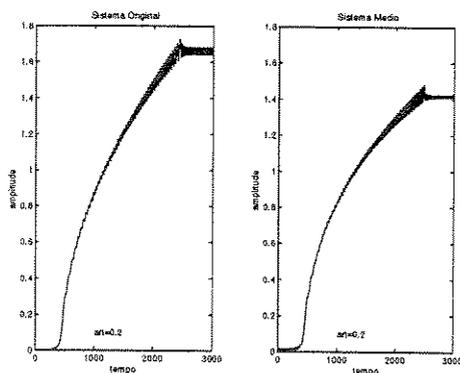


Figura C.13: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

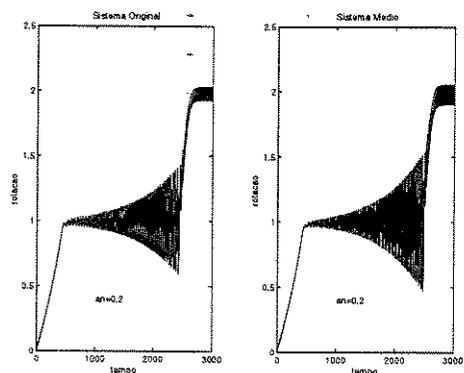


Figura C.14: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

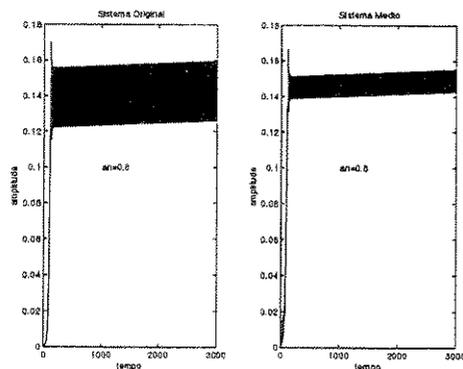


Figura C.15: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

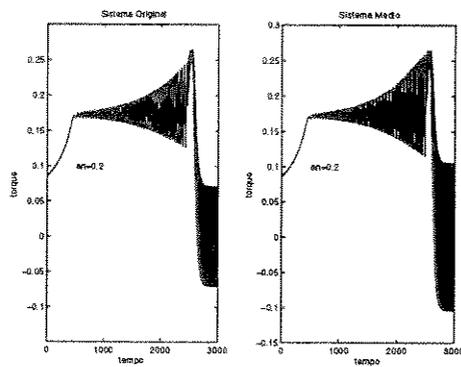


Figura C.17: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

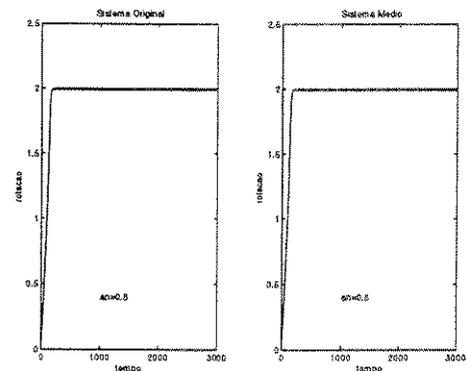


Figura C.16: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

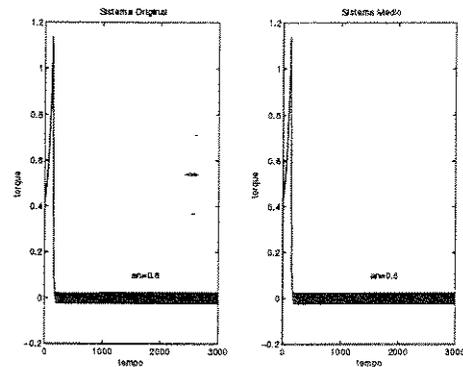


Figura C.18: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

C.4 Rotor Laval com Efeitos Combinados

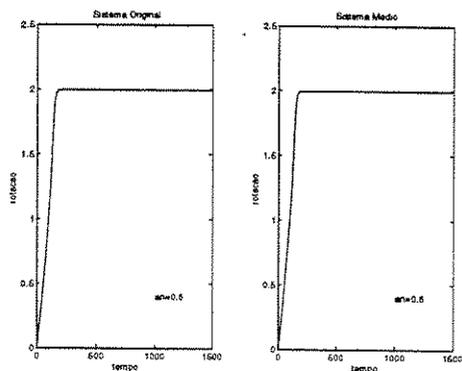


Figura C.19: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

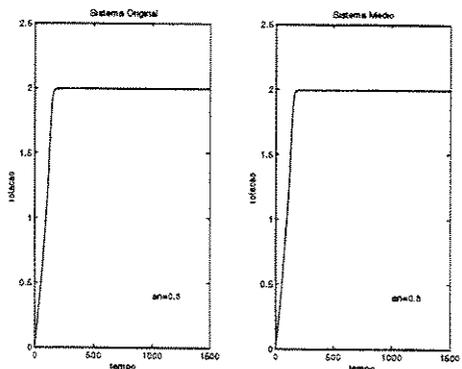


Figura C.21: Amplitude de oscilação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

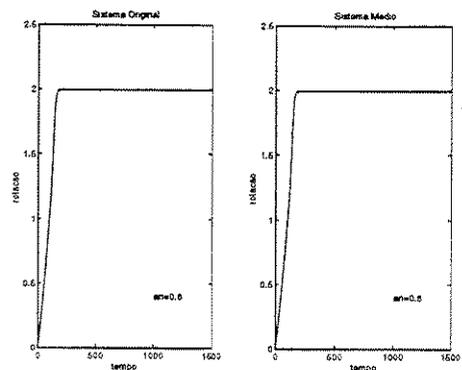


Figura C.20: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

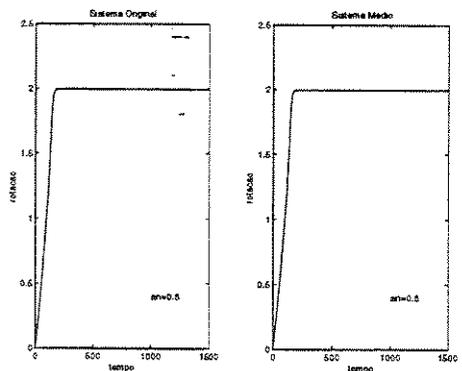


Figura C.22: Rotação ao longo do tempo - comparação entre o sistema original e o sistema médio

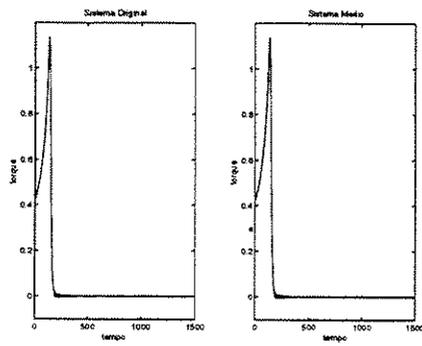


Figura C.23: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

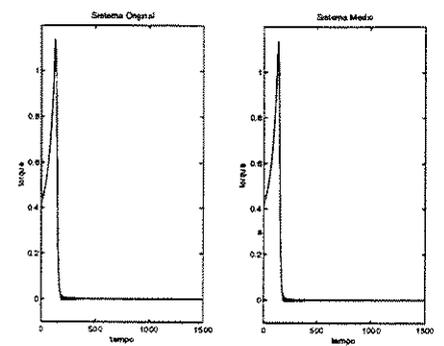


Figura C.24: Torque de acionamento - comparação entre o sistema original e o sistema médio

Apêndice D

Equações Adimensionais

Neste apêndice é mostrado o procedimento empregado na obtenção das equações adimensionais de movimento. O objetivo é colocar as equações em uma forma padrão onde aparece o parâmetro pequeno, ε (parâmetro de perturbação). O parâmetro pequeno é uma razão entre grandezas físicas do sistema; quando este tende a zero, o sistema tende a um oscilador harmônico simples.

As três equações diferenciais que representam o problema estudado são escritas na forma:

$$m\ddot{y}_w + c\dot{y}_w + ky_w + \gamma y_w^3 = 2Fa_y + em(\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - \ddot{\varphi} \cos(\varphi)) \quad (\text{D.1})$$

$$m\ddot{z}_w + c\dot{z}_w + kz_w + \gamma z_w^3 = 2Fa_z - em(\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + \ddot{\varphi} \sin(\varphi)) \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} (Ip + me^2)\ddot{\varphi} &= T + e((ky_w + \gamma y_w^3) \sin(\varphi) + (kz_w + \gamma z_w^3) \cos(\varphi)) \\ &\quad + 2Fa_y(z_w - e \cos(\varphi)) - 2Fa_z(y_w + e \sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dividindo a equação (D.1) por m e escrevendo a amplitude y como a razão entre ela e um comprimento característico x (por exemplo a amplitude máxima de oscilação), tem-se:

$$x\ddot{y}_w + \frac{c}{m}x\dot{y}_w + \frac{k}{m}xky_w + \frac{\gamma}{m}x^3y_w^3 = \frac{2Fa_y}{m} + em(\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - \ddot{\varphi} \cos(\varphi)) \quad (D.4)$$

Definindo o tempo adimensional τ como a razão entre o tempo e o inverso da frequência natural, como mostra a relação D.5:

$$\tau = t\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega t \quad (D.5)$$

a equação D.4 toma a seguinte forma:

$$x\omega^2 y'' + \frac{c}{m}x\omega y' + \omega^2 xy + \frac{\gamma}{m}x^3 y^3 = \frac{2Fa_y}{m} + e\omega^2(\varphi'^2 \sin(\varphi) - \varphi'' \cos(\varphi)) \quad (D.6)$$

Dividindo toda equação D.6 por $\omega^2 x$, tem-se

$$y'' + \frac{c}{m\omega}y' + y + \frac{\gamma x^2}{k}y^3 = \frac{2Fa_y}{kx} + \frac{e}{x}(\varphi'^2 \sin(\varphi) - \varphi'' \cos(\varphi)) \quad (D.7)$$

onde ($'$) denota derivada em relação a τ .

Introduzindo o raio de giração, ρ , chega-se a equação D.8,:

$$y'' + \frac{c}{m\omega}y' + y + \frac{\gamma x^2}{k}y^3 = \frac{e}{\rho} \frac{2Fa_y}{kx} \frac{\rho}{e} + \frac{e}{\rho x}(\varphi'^2 \sin(\varphi) - \varphi'' \cos(\varphi)) \quad (D.8)$$

A equação D.8 pode ser escrita como:

$$y'' + 2\mu y' + y + \alpha_3 y^3 = \varepsilon \frac{2Fa_y}{\alpha_2 ek} + \frac{\varepsilon}{\alpha_2} (\varphi'^2 \sin(\varphi) - \varphi'' \cos(\varphi)) \quad (\text{D.9})$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{c}{m\omega} \\ \alpha_3 &= \frac{\gamma}{k} x^2 \\ \varepsilon &= \frac{e}{\rho} \\ \alpha_2 &= \frac{x}{\rho} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Considera-se o caso em que $\mu \cong O(\varepsilon)$ e $\alpha_3 \cong O(\varepsilon)$. Pode-se escrever D.9 como:

$$y'' + y = \varepsilon \left(\frac{2Fa_y}{\alpha_2 ek} - \alpha_3 y^3 - 2\mu y' + \frac{1}{\alpha_2} (\varphi'^2 \sin(\varphi) - \varphi'' \cos(\varphi)) \right) \quad (\text{D.11})$$

O mesmo procedimento para a variável z_w , leva a:

$$z'' + z = \varepsilon \left(\frac{2Fa_z}{\alpha_2 ek} - \alpha_3 z^3 - 2\mu z' - \frac{1}{\alpha_2} (\varphi'^2 \cos(\varphi) + \varphi'' \sin(\varphi)) \right) \quad (\text{D.12})$$

Para a equação D.3, após dividi-la por $(Ip + me^2)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{T}{m(\rho^2 + e^2)} + \frac{e}{m(\rho^2 + e^2)} ((ky_w + \gamma y_w^3) \sin(\varphi) + (kz_w + \gamma z_w^3) \cos(\varphi)) \\ &+ \frac{2Fa_y}{m(\rho^2 + e^2)} (z_w - e \cos(\varphi)) - \frac{2Fa_z}{m(\rho^2 + e^2)} (y_w + e \sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Usando as definições de tempo e amplitudes adimensionais, a equação D.13 torna-se:

$$\begin{aligned} \varphi'' = & \frac{T}{k(\rho^2 + e^2)} + \frac{e}{k(\rho^2 + e^2)} ((kxy + \gamma x^3 y^3) \sin(\varphi) + (kxz + \gamma x^3 z^3) \cos(\varphi)) \\ & + \frac{2Fa_y}{k(\rho^2 + e^2)} (zx - e \cos(\varphi)) - \frac{2Fa_z}{k(\rho^2 + e^2)} (yx + e \sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (D.14)$$

Para fracas não-linearidades, tem-se:

$$\frac{e}{\rho} \ll 0 \Rightarrow e \ll \rho \Rightarrow \frac{e}{\rho^2 + e^2} \cong \frac{e}{\rho^2} = \frac{e}{\rho} \frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{1}{\rho} \quad (D.15)$$

o que transforma a equação D.14 em:

$$\begin{aligned} \varphi'' = & \varepsilon \frac{T}{ke\rho} + \varepsilon \left(\left(\frac{x}{\rho} y + \frac{\gamma x^2}{k} \frac{x}{\rho} y^3 \right) \sin(\varphi) + \left(\frac{x}{\rho} z + \frac{\gamma x^2}{k} \frac{x}{\rho} z^3 \right) \cos(\varphi) \right) \\ & + \varepsilon \frac{2Fa_y}{ek} \left(\frac{x}{\rho} z - \varepsilon \cos(\varphi) \right) - \varepsilon \frac{2Fa_z}{ek} \left(\frac{x}{\rho} y + \varepsilon \sin(\varphi) \right) \end{aligned} \quad (D.16)$$

Lançando-se mão das relações D.10, chega-se a:

$$\begin{aligned} \varphi'' = & \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon \left((\alpha_2 y + \alpha_2 \alpha_3 y^3) \sin(\varphi) + (\alpha_2 z + \alpha_2 \alpha_3 z^3) \cos(\varphi) \right) \\ & + \varepsilon \frac{2Fa_y}{ek} (\alpha_2 z - \varepsilon \cos(\varphi)) - \varepsilon \frac{2Fa_z}{ek} (\alpha_2 y + \varepsilon \sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (D.17)$$

onde o torque adimensionalizado é dado por:

$$\alpha_1 = \frac{T}{ke\rho} \quad (D.18)$$