ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR Musa Mohamed Radwan E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24.09.1999.

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem de Crescimento de Cristais de Gelo em Filme de Líquido Laminar Descendente Para Aplicações em Sistemas de Armazenamento de Frio

Autor: **Musa Mohamed Radwan**
Orientador: **Kamal A. R. Ismail**

50/99

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS

Modelagem de Crescimento de Cristais de Gelo em Filme de Líquido Laminar Descendente para Aplicações em Sistemas de Armazenamento de Frio

Autor: **Musa Mohamed Radwan**
Orientador: **Kamal A. R. Ismail**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de pós graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1999
S.P.– Brasil

UNIDADE BC
N.º CHAMADA:
V. Ex.
TOMBO BC/ 39678
PROC. 229/99
C D X
PREÇO R$ 11,00
DATA 06-12-99
Nº CPD

CM-00137484-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R116m

Radwan, Musa Mohamed
Modelagem de crescimento de cristais de gelo em filme de líquido laminar descendente para aplicações em sistemas de armazenamento de frio / Musa Mohamed Radwan.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Kamal A. R. Ismail.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Cristais - Crescimento. 2. Energia - Armazenamento. 3. Filmes finos. I. Ismail, Kamal A. R. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

UNVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS

TESE DE DOUTORADO

Modelagem de Crescimento de Cristais de Gelo em Filme de Líquido Laminar Descendente para Aplicações em Sistemas de Armazenamento de Frio

Autor: Musa Mohamed Radwan
Orientador: Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail

Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail

Prof. Dr. Luiz Felipe M. Moura

Prof. Dr. Marcelo M. Ganzarolli

Prof. Dr. Alcides Padilha

Profa. Dra. Sandra Cristina Dos Santos Rocha

Campinas, 24 de setembro de 1999

Dedicatória

Dedica este trabalho a minha esposa e meus Filhos pela paciência durante todo este tempo.

Agradecimentos

O autor deste trabalho e seu orientador gostariam de agradecer o CNPq ,FAPESP.e TNRC. Pelo apoio financeiro na forma de BOLSA e apoio aos projetos de pesquisa solicitados.

Agradecimento especial

Uma infinidade de agradecimentos são necessários quando se termina uma trabalho extenso como este. Entretanto como seriam necessárias também uma infinidade de paginas e mesmo assim, alguém ainda poderia ser esquecido, gostaria de agradecer de maneira geral a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento e finalização deste trabalho. No entanto, algumas pessoas contribuíram de forma mais efetiva e constante no desenvolvimento deste trabalho e os quais farei um agradecimento especial: O meu orientador, Prof. Kamal A. R. Ismail, pela paciência e compreensão.

Indice

1. INTRODUÇÃO 1

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 3

3. HIDRODINÂMICA E TRANSPORTE DE FILME LÍQUIDO DESCENDENTE 15

3.1 Introdução 15

3.2 Resultados experimentais da hidrodinâmica de filme de líquido 16

3.3 Estudos experimentais relacionados ao transporte para os filmes de líquidos descendentes 17

3.4 Análise teórica 18

3.4.1 Equações gerais 19

3.4.2 Escoamento bidimensional laminar sem ondas 20

3.4.3 Efeitos de inércia no escoamento laminar de filme sem ondas 23

3.4.4 Escoamento laminar de filmes com ondas 24

3.5 Modelagem numérica do escoamento de filmes descendente 25

3.6 Resultados e discussões 29

4. MODLEO APROXIMADO DE FILME DESCENDENTE, LAMINAR, TOTALMENTE DESENVOLVIDO DE CRESCIMENTO DE CRISTAIS DE GELO 34

4.1 Introdução 34

4.2 Formulação e Método Numérico Adotado 36

4.2.1 Condutividade Térmica 38

4.2.2 O termo Fonte S 41

4.3 Solução e Validação do Modelo 42

4.4 Resultados e Discussão 48

5. MODELO GENERALIZADO DE CRESCIMENTO DE CRISTAIS DE GELO NUM FILME DESCENDENTE 55
5.1 Introdução 55
5.2 Formulação do Modelo 56
5.2.1 Variação das Propriedades da Mistura 62
5.3 Discretização e Método de Solução 66
5.4 Resultados e Discussão 71
5.4.1 Efeito do Número de Reynolds 74
5.4.2 Efeito do Número de Stefan 82
5.4.3 Efeitos Combinados dos Números de Reynolds e Stefan 89

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES 92

BIBLIOGRAFIA 96

APÊNDICE A 103

Resumo

RADWAN, Musa Mohamed, *Modelagem de Crescimento de Cristais de Geloem Filme de Líquido Laminar Descendente para Aplicações em Sistemas de Armazenamento de Frio,:* Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999 119 P. Tese (Doutorado)

Neste estudo foi investigado numericamente a taxa de formação e o crescimento dos cristais de gelo num filme laminar descendente ao longo de uma placa vertical fria. A energia consumida na mudança de fase foi incluída na equação da energia na forma de termo fonte. Este estudo foi realizado em três etapas: na primeira etapa foi elaborado um modelo simplificado que considera um filme descendente de propriedades termofísicas constantes e assim foi estudado a hidrodinâmica e troca de calor. No segundo estudo foi considerado a condição axial e investigada a influência sobre os parâmetros hidrodinâmicos e térmicos. Na terceira e última etapa foi elaborado um modelo generalizado que considera propriedades termofísicas variáveis, considerando os efeitos do campo de escoamento, resolvendo-se as equações de Navier-Stokes para prever os efeitos hidrodinâmicos tais como espessura do filme, velocidade na superfície e a taxa do vazão sobre a concentração e o comportamento dos cristais de gelo. As equações governantes de massa, momento, energia e das fases foram resolvidas numericamente usando o esquema de diferenças finitas baseado no método do volume de controle. Os resultados mostram que o crescimento dos cristais é dominado pelo número de Reynolds e pelo o número de Stefan. O aumento do número de Reynolds resulta na redução da concentração dos cristais de gelo, por outro lado, a concentração dos cristais aumenta com o aumento do número de Stefan. Os cálculos o número de Nusselt local indicam que a presença dos cristais provoca aumento no coeficiente de troca de calor por cerca de 12% em relação ao caso de fase única.

Palavras Chave

Cristais – Crescimento, Energia – Armazenamento, Filmes-Finos

Abstract

RADWAN, Musa *Mohamed, Modeling of Ice Crystal Growth in Laminar Falling Liquid Film for Applications in Cold Storage Systems,:* Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999 119 P. Tese (Doutorado)

In this work the rate of ice crystals growth in laminar free falling film over a cooled vertical plate has been investigated numerically. The phase change energy was included in the energy equation as a source term. These investigations are based on the variable properties model, and taking full account of the flow field effects, by solving the Navier-Stokes equations to predict the hydrodynamic effects such as film thickness , surface velocity, and the flow rate on the behavior of ice crystal concentration. The governing equations of mass, momentum, energy, and ice crystal species were solved numerically using the finite difference- based control volume method. It was determined that the growth of ice crystals in laminar free falling film is governed by two dimensionless parameters, namely Reynolds and Stefan numbers, increasing Reynolds number results in decreasing ice crystal concentration, on the other hand the concentration of ice crystals was found to increase as Stefan number increased. Calculations of the local Nusselt number have indicated that the presence of ice crystals can enhance the heat transfer coefficient by almost 12% compared to a single phase fluid.

Key Words

Crystal - Growth, Energy - Storage, Thin - Films

Lista de Figuras

Figura 3.1: Esquema do modelo físico do filme livre descendente 26

Figura 3.2: Comparação da profundidade de filme descendentes ao longo da direção axial com os resultados da literatura para o caso de número de Reynolds = 263 31

Figura 3.3: Comparação da velocidade superficial de filme descendente com dados experimentais para número de Reynolds = 342 32

Figura 3.4: Desenvolvimento de perfil de velocidades axial para várias seções ao longo do escoamento do filme livre 32

Figura 3.5: Comparação da profundidade de filme livre descendente ao longo da posição axial para diferentes número de Reynolds 33

Figura 4.1:Modelo físico esquematizado de filme com espessura constante 36

Figura. 4.2: Grade e volumes de controle 47

Figura 4.3 O efeito do numero do pontos nodais sobre a distribuição da temperatura

Figura 4.4: Influência da condução axial no campo de temperatura de filme para Ste = 0.05 h = 0.5 mm e d_{in} = 0.025 mm. (a) sem condução axial, (b) incluindo condução axial 50

Figura 4.5: Influência da condução axial na distribuição do diâmetro de cristais de gelo do filme para Ste = 0.05, h = 0.5 mm, e d_{in} = 0.025 mm, (a) sem condução axial, (b) incluindo condução axial 50

Figura 4.6: Variação do número de Nusselt local na superfície da placa com a direção axial para três espessuras diferentes de filme, Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm 51

Figura 4.7: Efeito da espessura de filme, h, no número de Nusselt local na superfície da placa (incluindo difusão axial) para vários posições em, x, de cima para baixo ao longo da placa para Ste = 0.05, d_{in} = 0.025 mm. 51

Figura 4.8: Variação do super- resfriamento do fluido, (T_m – T), com a espessura de filme, y, para várias posições em, x, ; h = 0.5 mm, Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm 52

Figura 4.9: Variação do super resfriamento do fluido, (T_m – T), com a espessura de filme, y, para várias posições em x ; h = 1.0 mm, Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm 52

Figura 4.10: Variação do número do Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a espessura de filme, y, para várias posições ao longo do comprimento da placa; Ste = 0.05, h = 0.5 mm, e d_{in} = 0.025 mm 53

Figura 4.11: Variação do número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a espessura de filme, y, em várias posições ao longo do comprimento da placa, para Ste = 0.05, h = 1.0 mm, e d_{in} = 0.025 mm. 53

Figura 4.12: Variação do número de Nusselt médio na superfície da placa com número inicial dos cristais de gelo (densidade dos cristais de gelo) incluindo difusão axial para h = 0.5 mm, Ste = 0.05 e d_{in} = 0.025 mm 54

Figura 5.1:Modelo físico generalizado de filme livre descendente 57

Figura 5.2: Volumes de controle mostrando os fluxos envolvidos no balanço de energia 60

Figura 5.3 O efeito do numero do pontos nodais sobre a distribuição da temperatura

Figura 5.4: Efeito do número de Reynolds sobre a distribuição de temperatura adimensional para o caso de Ste = 0.05 (temperatura da superfície = 267 K), (a) Re = 137; (b) Re = 458; (c) Re = 1051 77

Figura 5.5: Efeito do número de Reynolds sobre a concentração adimensional dos cristais de gelo (a) Re = 137; (b) Re = 458; (c) Re = 1051 78

Figura 5.6:Variação do número de Nusselt local à superfície solida para vários números de Reynolds 79

Figura 5.7: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 137 79

Figura 5.8: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 458. 80

Figura 5.9: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 1051 80

Figura 5.10: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme, Y, em várias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 137 81

Figura5.11: Número de Nusselt dos partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade a-dimensional de filme, Y, em varias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 458 81

Figura 5.12: Número de Nusselt dos partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme, Y, a várias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 1051 82

Figura 5.13: Efeito do número de Stefan sobre a distribuição da concentração de cristais de gelo para o caso de Reynolds = 137 (a) Ste = 0.05; (b) Ste = 0.075; (c) Ste =0.1 84

Figura 5.14: Efeito o número de Stefan (temperatura da parede) sobre a distribuição de temperatura adimensional para o caso de Reynolds = 137; (a) Ste = 0.05; (b) Ste = 0.075; (c) Ste =0.1 85

Figura 5.15: Número de Nusselt local ao longo da superfície sólida para o caso especial de Reynolds = 137 e para vários números de Stefan 86

Figura 5.16: Super- resfriamento do fluido ($T_m - T$) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.05 ; Reynolds = 137 86

Figura 5.17: Super- resfriamento do fluido ($T_m - T$) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.075 ; Reynolds = 137 87

Figura 5.18: Super- resfriamento do fluido ($T_m - T$) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.1 ; Reynolds = 137 87

Figura 5.19: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.05 88

Figura 5.20: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo da direção do escoamento para Stefan = 0.075 88

Figura 5.21: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade a dimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo da direção do escoamento para Ste = 0.1 89

Figura 5.22: Variação da taxa do crescimento dos cristais de gelo com o número de Stefan 90

Figura 5.23: Efeito do número de Stefan sobre o coeficiente de transferência de calor global para diferentes números de Reynolds 91

Figura 5.24: Variação do coeficiente de transferência de calor global com o número de Reynolds para casos de fase única e cristais de gelo (Ste = 0.1) 91

Figura A.1: Volume de controle no arranjo des-locada para o componente da velocidade, u. 103

Figura A.2: Volume de controle no arranjo des-locado para o componente da velocidade, v. 104

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 Número de Nusselt para transporte em filme laminar completamente desenvolvido 18

Tabela 5.1 Correlações empíricas para calcular a condutividade térmica efetiva da mistura de cristais de gelo e fluído de trabalho (*ice slurry*) 65

Nomenclatura

a_i = coeficientes constantes da temperatura de fusão

A_p = área superficial dos cristais de gelo

e = gradiente de velocidade, u

B = constante

c = calor específico

C = concentração volumétrica dos cristais de gelo

D = coeficiente do difusão dos cristais de gelo

d = diâmetro adimensional dos cristais de gelo

g = aceleração grávitacional

h = espessura de filme normal à placa

h_d, h_∞ = coeficientes de troca do calor por convecção

h_{if} = calor latente.

k = condutividade térmica.

L = altura vertical da placa

m = massa de gelo

p = pressão

p_0 = pressão atmosférica

Pr = número do Prandtl

Pe = número do Peclet

$\dot{m}$ = taxa de crescimento da massa de gelo

n = número de cristais de gelo por unidade de volume

Nu = número de Nusselt

Q = taxa de transferência de calor por cristal de gelo

q = transferência de calor por unidade do tempo

Ra = número de Rayleigh, $g\beta(T_m-T)\ d^3/\nu_e\alpha_e$

Re = número de Reynolds

S = termo fonte devido ao calor trocado por mudança de face

Sc = número do Schmidt

Ste = número de Stefan

t = tempo

T = temperatura

U = coeficiente de transferência de calor global

$\bar{u}$ = componente da velocidade na direção axial

u_0 = velocidade do filme descendente totalmente desenvolvido

$V_{crystal}$ = volume do cristal de gelo

W = largura da placa

x = coordenada axial

y = coordenada normal à direção do escoamento.

Símbolos Gregos

α = difusividade térmica

Γ = coeficiente do difusão

μ = viscosidade dinâmica

ν = viscosidade cinemática

β =1/T coeficiente de expansão térmica

ρ = densidade

ϕ = temperatura a dimensional

Φ = concentração adimensional

Subscritos

b = valor do bulk

d = baseado no diâmetro

e = valores efetivas

f = fluido (fase líquido)

h = valores à superfície livre do filme

i = incremento na direção, x

in, 0 = valores na entrada do filme

j = incremento na direção, y

m = fusão

L1 = número de pontos nodais na direção axial

M1 = número de pontas nodais na direção normal ao escoamento

P = partícula de gelo (partícula)

w = parede

x = direção axial

y = direção transversal

Símbolos

_ valores dimensionais

Capitulo 1

Introdução

Sistemas de armazenamento térmico eficientes e econômicos são as chaves da utilização efetiva e generalizada da energia em aplicações térmicas de baixa temperatura. Entre as diversas técnicas de armazenamento de calor e de interesse potencial o armazenamento de calor latente por causa da alta densidade de armazenamento de energia e da pouca variação da temperatura durante os processos de carga e descarga. Pode-se incluir na definição de armazenamento de calor latente, o calor de cristalização. O calor de vaporização, mesmo sendo possível, não é considerado como alternativa viável para aplicação contemporânea.

Entre os Materiais típicos para armazenamento de calor latente inclui-se as parafinas, sal de Glauber e o gelo. Os requisitos básicos de sistemas de armazenamento térmico por calor latente deve ter no mínimo, os três requisitos a seguir: i) o material deve mudar de fase entre solido e líquido na faixa de temperatura desejada na aplicação, no instante em que a maior parcela da energia fornecida é armazenada na forma de calor latente. ii) o encapsulamento do material de mudança de fase em cilindros, esferas e outros meios de encapsulamento deve ser seguro, barato, eficiente e de vida longa. iii) é necessário uma superfície de troca de calor adequada para transferir o calor envolvido no processo.

O desenvolvimento de sistemas de armazenamento de energia na forma de calor latente envolve a profunda compreensão de dois princípios básicos: materiais de armazenamento de calor e projeto de trocadores de calor. Existe uma gama de materiais

orgânicos e inorgânicos de armazenamento, cujas temperaturas de fusão variam de 0 a 120 °C.

O presente trabalho é restringido ao crescimento de cristais de gelo os quais formam uma mistura com o fluido de trabalho a ser usado nos sistemas de armazenamento de frio. Esta técnica pode ser considerada de grande potencial de utilização. O principal objetivo é utilizar materiais de mudança de fase de alto valor de calor latente para reduzir o volume de armazenamento e a vazão da mistura. Na literatura, são poucos os trabalhos que investigam o emprega do transporte de material de mudança de fase para facilitar o processo de armazenamento térmico mas, nenhuma destes estudos investiga o potencial de se utilizar misturas multai-fásicos, dispersas, sendo algumas, para armazenar o calor latente. O objetivo deste estudo é investigar e avaliar os benefícios que podem ser alcançados através do uso da mistura de fluido com partículas de gelo para aumentar a taxa de troca de calor e rendimento térmico do sistema de armazenamento.

Alguns benefícios incluem:

a) aumento de coeficiente de transferência de calor entre o fluido e os cristais e portanto, reduzindo a área de troca e o custo de trocador de calor
b) aumento da capacidade térmica do fluido de troca de calor, por causa de calor latente, incluindo os cristais de gelo em suspensão. Isto resulta na redução da taxa de vazão e; consequentemente da potência de bombeamento.
c) Melhoramento de qualidade da energia térmica usada, sendo a temperatura do fluido de trabalho final a mais próxima possível da temperatura da fonte geradora de frio.
d) Melhoramento na flexibilidade do conceito de armazenamento integrado dentro de uma sistema térmico que utiliza armazenador do tipo mistura de cristais de gelo com água. Nesta caso, o armazenador contém os cristais de gelo numa concentração maior que o do fluido circulante. Deste modo, a queda na temperatura associada com o processo de troca de calor é eliminada, o tamanho do tanque do armazenamento requerido é menor e, consequentemente, menores são as perdes térmicas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A teoria do congelamento de camada de líquido foi apresentada inicialmente por Stefan (1891) para explicar suas observações em relação a formação do gelo no mar. Este trabalho pioneiro tornou-se referência padrão nos estudos mais recentes nos problemas de congelamento. A primeira solução exata importante foi obtida por Neumann. Anos após a formulação de Stefan, foram identificadas uma classe de problemas tecnicamente importantes envolvendo as equações de difusão de calor e massa e um contorno móvel. A revisão bibliográfica apresentada por Chung e Epstain (1983) foi restringida quase que exclusivamente para o caso de líquido estagnante ou onde o movimento do líquido é integralmente por causa do processo de mudança de fase. Mesmo que a mudança de fase no líquido quase estagnante seja importante em algumas aplicações, a maioria dos problemas a serem apresentados aqui não pertencem a esta classe. Na prática, a maioria dos problemas do tipo de Stefan não acontecem em camadas estagnantes de líquido mas sim, na superfície sobre a qual uma camada de sólido cresce ou decresce com o escoamento de líquido sobre a superfície. Geralmente o fluído com a fração fundida escoa e a interface de líquido – sólido é fortemente acoplada ao campo de escoamento da mistura.

O surgimento do interesse nos problemas de mudança de fase acoplado ao escoamento somente apareceu nas últimas duas décadas por causa das possibilidades de sua utilização em sistemas de armazenamento e outras aplicações de engenharia. A troca de calor com fusão em líquido estagnante e nos escoamentos alinhados com a superfície de

mudança de fase está recebendo maior atenção nos últimos anos por causa de aplicações, tais como aquelas que envolvem jatos de líquidos quentes para furação nas camadas de gelo ou no solo congelado, a ablação dos protetores térmicos das naves espaciais, sorvedouros de calor para sistemas de potências e aplicações em reatores nucleares.

O processo de solidificação em escoamento plano em regime permanente sobre uma placa fria foi estudado por Savino e Siegel (1965) e o escoamento plano estagnante direcional contra uma superfície fria foi desenvolvido por Savino et al. (1970). As duas investigações mostraram que o congelamento em líquidos em movimento pode ser tratado simplesmente como um problema de condução com contorno móvel, usando os conceitos convencionais de convecção térmica na interface sólido – líquido. Entretanto, duas simplificações importante foram feitas para minimizar a interação entre o escoamento e o processo de congelamento. A primeira, que a camada de gelo formada durante o processo de solidificação foi assumida sendo fina ou de espessura uniformemente distribuída de modo que o processo de condução no sólido possa ser assumido unidimensional. A segunda, que os efeitos de movimento e a forma da interface são desprezíveis em relação ao escoamento.

Nas condições em que a temperatura da parede é constante e uniforme, o processo transiente de formação de gelo foi estudado de forma extensiva por vários pesquisadores e usando diferentes procedimentos teóricos. Libby e Chen (1964) obtiveram solução de curta e longa duração usando o método integral de Goodman. Lapadula e Muller (1970) usaram o método variacional de Biot para obter uma solução analítica aproximada. Beaubowef e Chapman (1967) usaram um esquema numérico de diferenças finitas para resolver este mesmo problema enquanto Savino e Siegel (1969) desenvolveram uma técnica iterativa para obter soluções sucessivas e aproximadas. Finalmente, Elmas (1970) desenvolveu uma solução de forma fechada. De modo geral, a conclusão mais importante destes trabalhos é que, ambos os fluxos de calor convectivo, transferido do líquido para a superfície fria e da espessura da camada de gelo, são funções da coordenada ao longo do escoamento e também mutuamente dependentes um do outro. Entretanto, os efeitos da interação do escoamento em congelamento no processo de solidificação e os problemas de fusão em

escoamento de convecção forçada paralelo ou normal a uma superfície fundível não foram discutidos.

Em algumas condições de temperatura e vazão, o coeficiente de troca de calor de um líquido escoando para o gelo formado pode ser fortemente influenciado pelo processo de solidificação. O entendimento da interação entre os processo de mudança de fase e a convecção é necessário para a previsão realística do processo de formação de gelo entre placas frias. Basicamente existem três aspectos principais de interação do processo de escoamento em congelamento que podem influenciar as taxas de troca de calor e solidificação. Em primeiro lugar, a mudança de fase na interface móvel pode deformar o perfil de velocidade perto da superfície de troca de calor, que pode, por sua vez, alterar o coeficiente de troca de calor no contorno onde acontece a mudança de fase. Em segundo lugar, o coeficiente de troca de calor pode ser uma função da posição ao longo da direção do escoamento. Isto pode produzir uma camada de gelo que varia na espessura ao longo da parede sobre a qual ela é formada e portanto, pode produzir certas influências como resultado da condução bidimensional no sólido. Por último, a forma da camada de gelo pode influenciar de maneira direta o campo de escoamento adjacente que, por sua vez, pode influenciar a troca de calor convectiva do escoamento para a superfície de gelo. Para escoamento laminar este efeito é relativamente pequeno.

O problema transiente de formação de gelo num escoamento plano estagnante foi investigado por Yang (1967), que utilizou a técnica de perturbação para resolver as equações transientes bidimensionais da camada limite laminar para o escoamento de água e a condução unidimensional para a camada de gelo. Soluções de curta e longa duração indicaram distorções no campo de escoamento por causa do avanço da frente de solidificação. As maiores distorções da velocidade acontecem no inicio do processo de formação de gelo. Savino et al. (1970) estudou o mesmo problema de forma experimental e verificou que a mudança de fase não altera o coeficiente de troca de calor. Deve-se observar que os experimentos foram realizados para pequenas diferencias de temperaturas, o que provoca pequena mudança de fase. Fisicamente, o comportamento transiente do escoamento é inerentemente relacionado ao processo de solidificação através da condição de não-deslizamento no contorno móvel que atua como fonte constante de geração no

líquido. A medida que a solidificação procede, esta fonte de atrito é transferida por convecção para o interior do líquido causando distorção no campo de escoamento. Sendo que a taxa de avanço de solidificação é menor quando o tempo é pequeno, o campo de velocidade sofre maior distorção. Distorções similares no escoamento foram observadas por Kuiken (1977).

Em comparação com o caso de formação de gelo em escoamento plano estagnante, o processo de solidificação numa placa plana horizontal paralela ao escoamento é considerava mais complicado devido a dependência do problema em relação á direção do escoamento. Entretanto, a solução pode ser bastante simplificada se considerar apenas o caso de regime permanente. Nesta situação não existe o efeito de contorno móvel sobre o escoamento e, somente o efeito da camada de gelo e a condução térmica ao longo da direção do escoamento são importantes. Os dois efeitos foram estudados experimental e teoricamente por Hirata et al. (1979). No experimento uma placa de cobre de 6,35 mm de espessura, 24,1 mm de largura e 152 mm de comprimento foi instalada horizontalmente na seção de teste com a superfície fria faciando para cima. A temperatura da placa foi mantida uniformemente constante e abaixo da temperatura de solidificação pela circulação do fluído refrigerante a alta velocidade na face inferior da placa, enquanto o escoamento acima da placa é mantida em velocidade e temperatura uniforme. A taxa de crescimento da espessura da camada de gelo, os perfis da velocidade e da temperatura sobre a camada de gelo foram medidos numa faixa larga de número de Reynolds e da temperatura de refrigeração. Por causa da existência de um ponto de estagnação na borda de ataque da placa, a camada de gelo é formada a uma certa distância antes da borda de ataque da placa. Na análise foi desenvolvido um modelo bidimensional de crescimento de gelo, levando em conta o efeito da forma de camada de gelo sobre o escoamento não perturbado além do efeito da condução ao longo da direção do escoamento no gelo. Aproximando a camada de gelo como um cilindro parabólico, que é válido no mínimo para o caso de camada fina de gelo, as soluções para o escoamento externo e a condução no gelo foram obtidas usando transformação para coordenadas parabólicas. O coeficiente de troca de calor externo ás camadas de gelo é calculado de modo similar ao crescimento da camada limite com a variação da velocidade na superfície livre.

Até o momento, a interação do escoamento em congelamento no escoamento paralelo forçado, foi revisto nas condições de regime permanente. Não se sabe se é possivel esperar se os mesmos resultados no caso de escoamento de convecção forçada sobre uma superfície em fusão térmica. Na prática, a teoria de condução revela os mesmos conceitos de modelagem para os processos de fusão e de solidificação. Infelizmente, isto não é o caso de solidificação e fusão num escoamento de fluído. Por exemplo, no caso de solidificação, a camada solidificada permanece parada em relação a parede enquanto no caso de fusão, a camada fundida movimenta em relação ao contorno fixo. Se no caso de fusão, o sólido e o fluído em escoamento são substâncias diferentes, o campo de escoamento perto da parede pode ser fortemente afetado pelo influxo de material fundido no escoamento principal. Este e outros fatores solicitam diferentes tratamentos para a fusão e a solidificação em escoamento forçado .

O processo de troca de calor na região próxima da superfície de fusão foi investigado pela primeira vez por Pozvonkov et al. (1970), também por Griffine e Szewezyle (1970) nas condições de regime permanente laminar. Em todos estes estudos foi assumido que a taxa de fusão é constante no tempo de modo que pode adequadamente usar uma coordenada fixa ao contorno móvel. Nestes estudos a atenção principal foi focada sobre a troca de calor convectivo na camada fundida em escoamento. Knudsen e Katz (1958) usaram uma técnica de aproximação sucessiva para estender suas soluções clássicas para o problema de fusão. Neste estudo, o sólido foi assumido na temperatura de fusão e uma distribuição linear da velocidade tangencial na camada limite externa á superfície em fusão. A equação da continuidade foi usada para expressar a velocidade normal em termos de fluxo de calor na parede, e a solução clássica de Knudsen e Katz para a superfície sem fusão foi adotada como primeira aproximação para determinar o gradiente de temperatura na parede, atualizando assim a velocidade normal então a equação da energia foi integrada para obter a solução de primeira ordem do perfil de temperatura na camada em fusão. Com este processo iterativo, foram obtidas soluções convergentes de maior ordem, além de uma expressão de forma fechada relacionando o número de Nusselt local para a troca de calor na superfície em fusão ao coeficiente de Nusselt local para a superfície em fusão.

Griffin (1973) modelou o processo de fusão de um *iceberg* na água do mar, modelo que inclui os efeitos de resfriamento do sólido e a mudança da salinidade da camada fundida próxima a interface sólido – líquido. Neste estudo, o problema de fusão foi formulado considerando as equações da camada limite laminar e em regime permanente para a troca simultânea de momento, calor e massa. As espessuras relativas das camadas limites para momento, temperatura e salinidade, além da taxa de difusão, foram determinadas para diversas situações através do uso do método integral. Os resultados indicam que a espessura de momento da camada limite não é afetada pela mudança das condições térmicas, mas ambas as espessuras da camada limite de temperatura e da concentração aumentam devido o aumento da mudança de fase. Uma conclusão qualitativamente similar foi obtida por Chen e Nee (1974), os quais que verificaram que a espessura da camada limite térmica é mais sensível ás mudanças das condições térmicas do que a espessura da camada limite do momento.

No tratamento clássico do problema de contorno móvel sólido – líquido, os possíveis efeitos da convecção térmica na fase líquida são geralmente desprezados. Somente recentemente os efeitos da força de empuxo e convecção foram tomados em consideração quando analisados os processos de mudança de fase. Os efeitos da empuxo e da mudança de densidade durante o processo de transformação de fase em camadas horizontais foram estudados intensivamente por Hale e Viskanta (1980) nos processos térmicos em armazenamento de energia. Este tipo de convecção também é muito encontrado nos processos metalúrgicos de fusão e solidificação (Muller et al. 1980) . Quando uma camada de sólido é aquecido de baixo, uma camada líquida de material fundido é formada e a convecção natural pode acontecer somente se o número de Rayleigh da camada excede seu valor crítico. Para líquidos fundidos normais cujas densidades decrescem monotonamente com a temperatura, a condição que marca o início da convecção foi estudada por Sparrow et al. (1976). Este trabalho difere fundamentalmente dos estudos anteriores no sentido que o perfil da temperatura na base da camada fundida é não linear, a qual é inicialmente nula e aumenta continuamente com o tempo. Assim, para obter o perfil de temperatura vertical, o problema de condução deve ser resolvido com certa precisão. Isto foi feito usando um esquema numérico de diferenças finitas totalmente implícito. Além da geometria horizontal acima descrita, o mecanismo de convecção natural na camada

fundida na qual a direção das forças de empuxo é paralela à superfície aquecida ou resfriada, sendo importante nas aplicações em sistemas de armazenamento térmico. A necessidade de entender os mecanismos de transporte e troca de calor, motivaram muitos estudos teóricos, numéricos e experimentais. Sparrow et al. (1977), empregou um esquema implícito de diferenças finitas criado por um tubo vertical aquecido embutido no sólido. A temperatura do tubo foi mantida a uma temperatura uniforme e maior que a temperatura de fusão. A taxa calculada de troca de calor na superfície do tubo decresce nos primeiros instantes até atingir um valor mínimo após o qual, aumenta novamente até atingir um valor máximo e subseqüentemente, decresce novamente. A espessura da região fundida varia ao longo do comprimento do tubo, sendo a espessura menor no fundo e maior no topo. Este resultado é muito diferente do resultado do modelo condutivo onde a taxa de calor decresce linearmente e a espessura do fundido é uniforme. As observações experimentais de fusão e convecção natural por causa de um cilindro vertical embutido no sólido, realizados por Ramsey e Sparrow (1978) afirmam os resultados anteriores.

O caso de solidificação de um líquido ao longo de uma superfície fria e vertical foi investigado por Sparrow, Ramsey e Kemink (1979), Lapredula e Mueller (1970). No estudo experimental de Sparrow, Ramsey e Kemink foi investigado o efeito da convecção natural sobre o movimento da interface sólido – líquido durante a solidificação de uma parafina líquida ao longo de um cilindro vertical frio. Diferente do caso de condução pura no qual a camada solidificada foi retardada drasticamente e finalmente terminada pela convecção natural no líquido. Este resultado é o encontrado no caso de fusão no qual a convecção natural acelera o processo de mudança de fase. O tamanho final da camada solidificada e o período de solidificação transiente são controlados pelas temperaturas que provocam o processo de movimento convectivo. No caso de convecção natural forte, uma camada fina e tempo de solidificação menor foram encontrados. A camada solidificada aumenta de cima para baixo, mais funda por conforme o escoamento devido a redução do coeficiente de transferencia de calor convectivo. Uma comparação entre os dados de transferência de calor local e os resultados das previsões analíticas por Lapudula e Mueller (1966), indicou que os resultados de solidificação numa superfície vertical situada num domínio infinito podem ser aplicados ao caso de sistemas de pequeno tamanho com recirculação no escoamento.

A intensidade de troca de calor representa um fator extremamente importante em muitas aplicações de engenharia. Como resultado deste forte interesse, muitas técnicas e estudos foram realizados e experimentados para a intensificação da taxa de troca de calor. Estudos recentes sugerem que a taxa de troca de calor pode ser aumentada pela utilização de material de mudança de fase e particularmente gelo. Isto é feito pela adição de cristais de gelo ao fluido de trabalho ou pela auto formação de cristais de gelo. A intensificação da taxa de troca de calor é por causa de diversos fatores como, o aumento da micro convecção por causa das partículas de gelo em suspensão, a alta condutividade térmica das partículas formadas (usualmente), o alto calor específico efetivo durante o processo de mudança de fase e, finalmente, a maior diferença de temperatura que é mantida com o material de mudança de fase solidificada. O desenvolvimento de material de mudança de fase em suspensão para sua utilização como fluido de transferência de calor, necessita uma maior e intensa investigação da formação de cristais de gelo e as condições de escoamento necessárias para este fim. Aplicações deste tipo de fluído com suspensão de micro encapsulado foram reportadas por Hale et al. (1971) e diversas técnicas de utilização de conceitos foram investigas e reportadas por Hart e Thornton [1984] . Nestes estudos o material de mudança de fase era micro encapsulado e suspenso no fluído de transferência de calor formando uma mistura fluida.

O desenvolvimento do conceito da mistura líquida de *PCM* e o de fluido de trabalho foi somente possível graças aos avanços na tecnologia de micro encapsulamento nos últimos anos. Por causa do fato que a razão da área superficial ao volume de pequenas partículas é muito elevada, a taxa de troca de calor por unidade de volume para o material dentro da partícula é muito elevada. A mistura de pcm serve como fluido de trabalho e também como meio de troca de calor e portanto, a necessidade de transferência é eliminada conforme Kasza e Chen (1985). Além deste, o encapsulamento de material de mudança de fase em pequenas cápsulas elimina a possibilidade de segregação durante o processo de mudança de fase, (Telkes, 1980), e também aumenta a taxa de transferência de calor sendo uma solução com material suspenso.

Mesmo que todos os estudos e os experimentos preliminares indicam um campo de aplicações promissores da mistura fluida de pcm e fluido de trabalho como meio de

armazenamento, e não existem dados completos adequados para o dimensionamento e projeto de equipamentos. Isto foi, de modo geral, provocado pela falta de procedimentos gerais sistemáticos nos estudos anteriores o que, por sua vez, dificulta a interpretação e avaliação dos resultados. Para desenvolver a mistura líquida de *PCM* a ser usada como fluido de transferência de calor, é necessário investigar a viabilidade de fabricar microcápsulas que podem ser utilizadas neste tipo de aplicação. Os requisitos necessários para fabricação destas microcápsulas, são as propriedades térmicas do produto que devem permanecer constantes, além de suportar esforços mecânicos causados pelos ciclos térmicos repetidos. Alguns estudos nestas direção foram realizados por Sanjey e Sengrupta (1991).

As propriedades termofísicas das suspensões com o calor específico, condutividade térmica e a difusividade térmica são maiores que seus valores de misturas. Harle e Thornton (1982) reportaram um aumento de duas vezes no calor específico efetivo de uma suspensão de 30% de capsulas de cera no óleo, testado num protótipo de bomba solar na faixa de temperatura de 100 - 120°C. Além disto eles mostraram que microcápsulas de diâmetro variando entre 5 a 50 μm podem ser bombeadas sem qualquer estrago significativo.

McMahon (1982) realizou um estudo experimental envolvendo mistura líquida de n-heptadecano e n- ocatadecano na solução água etilenoglicol como fluído de trabalho e reportou um aumento efetivo no calor específico de 20%. Kasga e Chen (1982) verificaram que o coeficiente de troca de calor pode aumentar até três vezes quando usaram uma solução de pcm em microcápsulas. De forma similar Clovin e Mulligan (1987) reportaram que um aumento de até 5 vezes no calor específico e 2,8 vezes no coeficiente de troca de calor podem ser alcançados em escoamento em suspensão de pcm em microcápsulas sugerindo sua aplicação em sistemas eletrônicos, aplicações espaciais e aviação. Enquanto isto, Cheung e Chen (1987) desenvolveram um modelo para a intensificação de troca de calor usando suspensões de pcm escoando sobre placas planas e confirmaram a validade do modelo devido a boa concordância entre os resultados do modelo e as medidas experimentais, demonstrando um aumento significativo no coeficiente de troca de calor.

Charunyakorn et al. (1990 ; 1991), realizaram um estudo numérico de simulação de escoamento de suspensão de pcm microencapsulado em tubos circulares e placas planas para diferentes condições de contorno em baixas temperaturas. O estudo paramétrico mostra que a troca de calor em escoamento de suspensão é dependente do número de Stefan da mistura e da concentração volumétrica de partículas e, prevendo um aumento no coeficiente de troca de calor de 1,5 a 3 vezes, além da redução de 40 a 60% a elevação da temperatura. Estudos envolvendo sistemas com convecção natural foram realizados por Katz (1987) e Datta et al. (1992). No estudo de Katz, foram utilizados as esferas de diâmetros de poucos milímetros maior de ordem de vários mms e mostrou que a suspensão de microencapsulados com pcm resultou em aumento de 80% na taxa de troca de calor com até 5% de concentração.

Quando o fluído de transferência de calor e as partículas em suspensão são do mesmo material, não é mais necessário encapsular o material de mudança de fase em suspensão. Stewart et al. (1993) desenvolveram um modelo numérico aproximado que avalia a taxa de crescimento dos cristais de gelo num filme em queda ao longo de uma placa vertical fria com diâmetro de partículas variando na faixa de 0,0025mm a 0,5mm. Foi concluído que o número de Nusselt e o crescimento dos cristais de gelo dependem da espessura do filme, concentração inicial dos cristais de gelo e do número de Stefan. O coeficiente de troca de calor calculado pelo método mostra uma concordância com alguns dados experimentais. Seki et al. (1984) conduziram uma investigação experimental sobre o fenômeno de formação de gelo e as características térmicas do escoamento de água entre duas placas paralelas. O experimento foi realizado com as placas superior e inferior mantidas numa temperatura abaixo da temperatura de solidificação da água (-7 a -14°C), e com a temperatura da entrada da água variando entre 2 e 5°C. A conclusão mais importante deste estudo experimental é a existência de dois tipos diferentes de formação de gelo, um tipo de formação transitório e o outro, de formação de gelo liso.

No escoamento de mistura líquida de pcm, as propriedades termofísicas não são mais os valores médios da mistura mas sim, os valores efetivos. O procedimento geral utilizado para calcular a condutividade térmica efetiva é a lei da potência usada por Sohn e Chen (1984). Outros modelos foram também desenvolvidos para calcular a condutividade

térmica efetiva. Sohn e Chen (1981) realizaram experimentos para valores moderados do número de Peclet e obtiveram uma correlação em função da concentração e o número de Peclet modificado da partícula.

Da literatura citada pode notar que a maioria dos estudos relativos aos problemas de convecção/difusão em fluídos estacionários. Entretanto muito pouco foi feito em relação aos problemas de crescimento de cristais em filme descendente limitados ainda ao caso de baixa concentração de cristais, desprezando o crescimento da espessura da camada limite, isto é, tratando o filme como sendo de espessura constante e, finalmente, considerando a mistura como fluido Newtoniano.

O objetivo do presente estudo é de investigar o crescimento dos cristais de gelo enquanto em suspensão no filme descendente de fluído de trabalho ao longo de uma placa vertical mantida à uma temperatura abaixo da temperatura de solidificação da água. O modelo proposto é geral, considera difusão axial ao longo da placa, crescimento da camada limite ao longo da placa, variação da concentração, além do fluído não Newtoniano. O modelo baseado nas equações de conservação foi resolvido numericamente usando a técnica de volume de controle. Os resultados obtidos mostram o campo de temperatura, variação do diâmetro de partículas ao longo da placa, e o número de Nusselt local, além de outros parâmetros térmicos e de escoamento.

Organização do Trabalho

No capítulo 3 são apresentadas as equações de conservação que descrevem o desenvolvimento de escoamento em filme laminar descendente com propriedades constante. O objetivo deste capítulo é explorar as características hidrodinâmica de filme descendente como perfil da velocidade, velocidade da superfície, e espessura do filme.

O capítulo 4 apresenta um modelo aproximado de crescimento dos cristais de gelo. Este modelo é baseado na equação da conservação da energia com o perfil da velocidade totalmente desenvolvido, de modo que as propriedades térmofísica variam com a concentração dos cristais de gelo.

O capítulo 5 apresenta um modelo generalizado de crescimento dos cristais de gelo, levando em consideração o desenvolvimento do perfil do escoamento, junto com as equações da conservação da energia e massa (concentração dos cristais de gelo). Neste modelo, a densidade da mistura é assumida como função da concentração de partículas de gelo.

Finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 3

Hidrodinâmica e Transporte de Filme Líquido Descendente

3.1 Introdução

O escoamento de líquidos em camadas finas é freqüentemente observado no caso de escoamento da água da chuva em vidros de janelas e tetos de casas. O escoamento em filmes é um caso especial do escoamento bifásico. Na presente pesquisa bibliográfica, nossa atenção será confinada ao escoamento de filme ao longo de uma superfície sólida com uma única superfície livre. A segunda fase em contato com a superfície livre do filme pode ser gás ou um segundo líquido imiscível. O escoamento do filme pode ser diferenciado do escoamento bifásico pela presença de interfaces de configuração geralmente simples. Este tipo de escoamento pode ser encontrado em muitas aplicações e equipamentos como condensadores, evaporadores e torres de resfriamento. O escoamento pode ser laminar ou turbulento com a espessura do filme geralmente variável. O transporte para filme de líquido pode acontecer na parede na forma de fluxo ou temperatura prescrita. Existem vários estudos para ambos fluxo laminar e turbulento com espessura de filme constante. A segunda parte deste capítulo apresenta a base analítica deste tipo de tratamento. Na terceira parte são apresentados os resultados de escoamento laminar e comparação com os dados existentes, ilustrando as diferenciais atribuídas à não inclusão dos efeitos de ondas no filme. A análise teórica é baseada na solução da equação de difusões convectivas, usando a distribuição de velocidade obtida da análise hidrodinâmica do escoamento de onda. Os modelos numéricos e a simulação dos fenômenos de transporte na camada de líquido, na presença de interfaces com ondas, são apresentados na última parte deste capítulo.

3.2 Resultados experimentais da hidrodinâmica de filme de líquido

O conhecimento das propriedades hidrodinâmica de filme de líquido escoando para baixo de uma parede vertical é de maior importância na definição e dimensionamento de muitos equipamentos térmicos como evaporadores e condensadores. O trabalho de Fulford (1964) apresenta muitas investigações experimentais do escoamento hidrodinâmica incluindo a espessura média do filme, velocidade média do filme e a velocidade superficial cobrindo o regime laminar, laminar com ondas e turbulento com a presença de fluxo de gás e a rugosidade da parede.

A maioria dos dados experimentais da espessura média do filme descendente laminar é com onda, como citadas por Karapantsios et al. (1995) e Dukler et al. (1989). Estas ondas estão compreendidas na faixa da teoria de Kapitza e Nusselt. Novos dados foram apresentados para a faixa de número de Reynolds de 370 a 11020 e ao longo do comprimento de entrada, de 1,7 a 2,46 m. Nestas investigações foi mostrado que a espessura de filme não varia e que a espessura mínima apresenta tendências para aumentar. Outras grandezas como o desvio padrão, espessura máxima do filme, velocidade dominante de onda, V_{wav}, mostraram tendências de aumentar com o aumento da distância longitudinal. Estas variações sugerem que o escoamento não pode ser totalmente desenvolvido nas distâncias consideradas.

O conhecimento dos perfis de velocidade dentro dos filmes descendentes nas várias condições de escoamento é de grande importância, possibilitando calcular as taxas convectivas de calor e massa sem a necessidade de adotar modelos simplificados. Por exemplo, a investigação experimental de Ahmed et al. (1998) e Duckler et. al. (1989) indicam claramente que os perfis de velocidades são inicialmente planos mas, eventualmente assumem a forma característica, resultado do desenvolvimento da camada limite. Duckler et al. (1989) estudaram numericamente e experimentalmente os perfis de

velocidade num filme descendente com ondas e concluíram que os perfis de velocidade aproximam da forma parabólica longe da região de entrada e que a tensão de cizalhamento e as velocidade medidas mostram uma razoável concordância com aqueles determinados da simulação numérica.

3.3 Estudos experimentais relacionados ao transporte para os filmes de líquidos descendentes

O transporte para filmes de líquidos, usualmente associado com condensação, evaporação ou absorção de gás na interface, aquecimento ou transferência de massa na parede acontece em muitos processos químicos e mecânicos. Chen e Seban (1971) publicaram os resultados experimentais que forneceram base experimental comparativa para os modelos analíticos e numéricos. Existem muitos resultados experimentais que demonstram que a presença de ondas na interface provocam aumento na taxa de difusão de massa e calor, entretanto poucas investigações relacionam os dados experimentais às propriedades das ondas. O aumento de troca de calor e massa para o filme laminar descendente foi demonstrado por diversos investigadores como Bay e Macadams (1973) e Wilk (1962) no caso de aquecimento, Iriban, Gosman e Spalding (1967) no caso de transferência de massa de electrólito e Emert e Pigford (1954) no caso de absorção. Estes estudos indicaram os efeitos relativos das ondas de superfícies e apontam a necessidade dos modelos térmicos que consideram a presença de ondas e seus efeitos. Um resumo dos resultados é mostrado na tabela 3.1.

Recentemente os filmes descendentes foram usados num outro contexto relativamente não convencional como meio de armazenamento e transporte de frio em sistemas de armazenamento térmico como em Ismail e Radwan (1997, 1999). Nestes estudos os autores usaram o conceito de filme de líquido descendente para gerar os cristais de gelo para formarem uma mistura de cristais na forma de "*slurry*" usado como meio de armazenamento de frio para aplicação em sistemas de condicionamento de ar e aplicações

em refrigeração. Os resultados mostram que o coeficiente de troca de calor na parede aumentam cerca de 12%.

Tabela 3.1 Número de Nusselt para transporte em filme laminar completamente desenvolvido.

Tipo de analise	Espessura	Evaporação	Aquecimento	Absorção
Baseado no analise laminar	$h = 0.866\,Re^{1/3}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 1.1\ Re^{-1/3}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 2.22\ Re^{-1/3}$	$\frac{k_L}{D}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 4.48X10^{-3}\,Re^{0.33}\,Sc^{1/2}$
Baseado no analise do Kapitza	$h = 0.775\,Re^{1/2}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 1.185\ Re^{-1/3}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 2.38\ Re^{-1/3}$	$\frac{k_L}{D}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 4.65X10^{-3}\,Re^{0.83}\,Sc^{1/2}$
Baseado no modificação do Zazuli	$h = 1.328\,Re^{0.335}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 0.83\ Re^{-0.22}\,Pr^{0.08}$	$\frac{h_x}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 1.66\ Re^{-0.22}$	$\frac{k_L}{D}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = 3.34X10^{-3}\,Re^{1.446}\,Sc^{1/2}$

3.4 Análise Teórica

Da revisão resumida dos resultados experimentais fica claro que o escoamento de um filme de líquido descendente ao longo de uma parede vertical é freqüentemente acompanhado por forças gravitacionais na interface e a presença das ondas usualmente complica e dificulta a possibilidade de obter-se uma solução geral. Nesta parte serão apresentadas as equações de conservação para o escoamento suave laminar e laminar com ondas.

3.4.1 As equações gerais

As equações de Navier-Stokes para escoamento laminar viscoso incompressível e de propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} + \nu \nabla^2 \bar{u} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{y}} + \nu \nabla^2 \bar{v} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} + \nu \nabla^2 \bar{w} \tag{3.3}$$

onde u, v, e w são as velocidades nas direções x, y, e z e t é o tempo, enquanto ρ e ν são a densidade e a viscosidade cinematicas, p é a pressão e Ω é a força de campo. A equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{3.4}$$

Sendo que somente o campo gravitacional é considerado, as derivadas negativas de Ω são simplesmente iguais aos componentes de aceleração gravitacional, *g*, nas respectivas direções. Para escoamento sobre placas planas consideramos que o eixo *x* é direcionado ao longo da superfície da placa na direção da maior inclinação e o eixo *y* é direcionado normalmente a placa. As diferentes formas das equações gerais para os casos simplificados junto com as condições de contorno e as respectivas soluções são apresentados a seguir.

3.4.2. Escoamento bidimensional laminar sem ondas

Se o escoamento é bidimensional uniforme e de regime permanente, as equações (3.1) a (3.4) podem ser escritas como foram obtidas originalmente por Hopf (1910) e Nusselt (1916).

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{g}{\nu} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{3.7}$$

e a equação da continuidade é satisfeita automaticamente. Com as seguintes condições de contorno que indicam o deslizamento na parede e o arraste na interface são nulos

$$\begin{aligned} &\bar{y} = 0 \qquad \bar{u} = 0 \\ &\bar{y} = h \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A Equação 3.5 é integrada e, por meio das condições (3.8), a distribuição de velocidade é dada pela equação semi-parabólica

$$\bar{u} = \frac{g}{\nu}\left(h\bar{y} - \frac{\bar{y}^2}{2}\right) \tag{3.9}$$

onde a velocidade máxima ocorre na superfície livre do filme (em y = h)

$$\bar{u}_{max} = \frac{g h^2}{2\nu} \tag{3.10}$$

e a velocidade média é

$$\bar{u} = \frac{g h^2}{3\nu} \tag{3.11}$$

onde

$$\frac{\bar{u}_{max}}{\bar{u}} = 1.5 \tag{3.12}$$

a vazão volumétrica por unidade de perímetro é

$$Q = h\bar{u} = \frac{g h^3}{3\nu} \tag{3.13}$$

Na ausência de arraste na interface livre, a tensão de cisalhamento na parede deve suportar a força de corpo total sobre o filme de modo que:

$$\tau_w = \rho g h = \left(3\rho^2 g^2 \mu Q\right)^{1/3} \tag{3.14}$$

Usando o número de Reynolds do filme definido como:

$$Re = \frac{h\bar{u}}{\nu} = \frac{Q}{\nu} \tag{3.15}$$

pode-se escrever a velocidade média, a espessura do filme e a tensão de cisalhamento como:

$$\bar{u} = \left[\frac{\nu g}{3}\right]^{1/3} (Re)^{2/3} \tag{3.16}$$

$$h = \left[\frac{3\nu^2}{g}\right]^{1/3} (Re)^{1/3} \tag{3.17}$$

$$\tau_w = \rho\left(3\nu^2 g^2\right)^{1/3} (Re)^{1/3} \tag{3.18}$$

Se o fator de atrito do escoamento de filme é definido na forma usual, $\tau_w = f\,\rho\,(\bar{u})^2/2$, deste modo temos:

$$f = \frac{6}{Re} \tag{3.19}$$

em comparação ao caso de escoamento laminar num duto fechado $f = \frac{8}{Re}$.

No caso de escoamento de filme num canal de largura finita com paredes laterais, o escoamento não é mais bidimensional, e os efeitos de bordas são importantes e devem ser considerados. Dois tipos de efeitos de borda podem acontecer: efeitos de borda viscosos por causa de atrito nas paredes laterais e efeitos de borda capilares por causa da elevação capilar da superfície nas paredes laterais. A considerar os efeitos viscosos de borda, é assumido que não existe tensão superficial, de modo que a superfície de líquido seja plana de uma parede para outra. Neste caso, com o escoamento laminar e uniforme, sem ondas, as equações de movimento se reduzem a:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = -\frac{g}{\nu} \tag{3.20}$$

Esta equação pode ser resolvida sujeita à velocidade nula na parede (y = 0), e nas paredes (z = ± w) e arraste nulo na interface (y = h). Diversas soluções de formas diferentes desta equação foram obtidos por Cornish (1928), Fulford (1962) e Hopf (1910). Fullford (1962) mostrou que o problema é do tipo Dirichlet e portanto tem solução única.

3.4.3 Efeitos de inércia no escoamento laminar de filme sem onda

Kasimov e Zigmund (1962), trataram o caso de escoamento laminar em regime permanente em um filme descendente mas não necessariamente uniforme e considerando os termos de inércia. Neste caso as equações de quantidade de movimento ficaram:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}=\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}-g \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=0 \tag{3.22}$$

Assumindo um valor inicial da espessura do filme na borda de ataque da placa e um perfil de velocidade semi-parabólico, os autores obtiveram uma espessura local de filme em termos do valor da espessura do filme dada pela teoria de Nusselt na ausência das forças de inércia. Conforme os resultados obtidos o campo de escoamento foi dividido em três regiões em função da espessura local do filme,

i. região de estabilização, onde $h(x) < h$;

ii. região de escoamento estabilizado onde $h(x) = h$;

iii. região onde os efeitos de inércia são importantes onde $h(x) > h$.

A teoria de Nusselt é somente válida na segunda região geralmente curta. Numa segunda solução aproximada obtida sem assumir um perfil de velocidade, o componente da velocidade ao longo do eixo, *x*, é

$$\bar{u}=\frac{g}{\nu}\left(h(x)\bar{y}-\frac{\bar{y}^2}{2}\right)+\frac{\nu}{6}\left\{\frac{g}{4\nu^2}\right\}^2\left[\bar{y}^4-\frac{13}{210}\frac{g}{4\nu^2}\frac{h(x)\bar{y}^2}{\bar{x}}\right] \tag{3.23}$$

para $x > 2{,}02\,m$. Uma equação similar à Equação 3.23 determina a componente da velocidade ao longo do eixo y. Pode-se observar que a solução obtida é geral e também que a espessura aumenta ao longo do escoamento em função dos efeitos de inércia.

3.4.4 Escoamento de filme laminar e com ondas

Levich (1959) mostrou que o caso bidimensional de filme laminar com ondas pode ser representado pelas equações da camada limite

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + g \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\int \bar{u}\,d\bar{y}\right) \tag{3.26}$$

e com as condições de contorno:

- na superfície livre do filme, $\bar{y} = h(x)$

$$\bar{p} = \bar{p}_\sigma = -\sigma\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \bar{x}^2} \text{ (pressão capilar)} \tag{3.27}$$

$$\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{3.28}$$

- na superfície sólida $(y = 0;\ u = v = 0)$

Kapitsa (1962) foi o primeiro a conseguir a solução deste sistema de equações, desprezando o termo $\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ na Equação 3.24. Ambos, Portalski (1960) e Bushmanov (1961), resolveram este mesmo problema com maior precisão e demonstraram que os erros causados pela não inclusão do termo $\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ é muito pequeno.

3.5. Modelagem Numérica de Escoamento de Filme Descendente

Imediatamente após a iniciação do filme, existe uma região sem ondas. Entretanto, ao longo do escoamento do filme é sujeito ao espectro largo de freqüências e amortece as outras. Para pequenas taxas de vazão, a taxa de amplificação é muito pequena e o filme parece suave sem ondas ao longo do comprimento de importância prática, conforme Merte (1973). Para altas taxas de vazão, a taxa de amplificação aumenta consideravelmente e as ondas de amplitude finita na linha de incepção da onda é basicamente bidimensional, de forma senoidal, movendo-se ao longo de uma pequena distância e logo são distorcidas como apresentados por Van der Walt e Kroeger (1974). Na região de escoamento imediatamente após a região de ondas senoidais, existe uma variação espacial significativa no comprimento de onda e as características de dispersão, tornadas aleatórias e tridimensionais. Entretanto, Salazar e Marchal (1959) concluíram que o movimento ondulatório é basicamente bidimensional para $Re < 1500$.

A maioria das pesquisas recentes sobre a modelagem e simulação de campo de escoamento num filme descendente são concentrados na precisão de campo de escoamento dentro de certa estrutura de onda determinada anteriormente de forma experimental. Entretanto, a modelagem de escoamento deste tipo, incluindo ondas, foi tratada pela solução das equações de movimento sobre o comprimento de onda sem incluir as várias regiões de campo de escoamento. O desenvolvimento do perfil de velocidade dentro da estrutura do filme ao longo do escoamento é importante para prever o crescimento de

cristais de gelo formados num filme líquido descendente que foi tratado inicialmente por Ismail e Radwan (1997 e 1998).

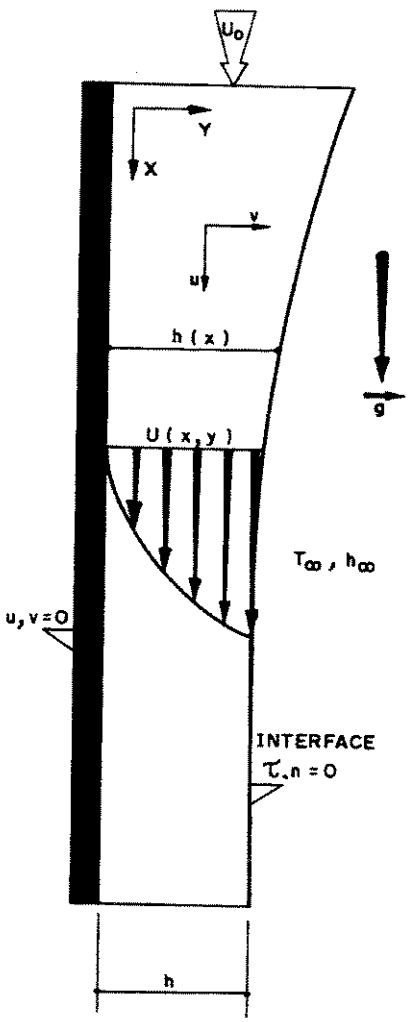

Figura 3.1: Esquema do modelo físico de filme livre descendente.

Numa parte do presente estudo o filme descendente do líquido, laminar sem ondas foi modelado baseado nas equações de Navier-Stokes nas variáveis primitivas e resolvidas usando diferenciais finitas baseado no método de volume de controle. A Figura 3.1 mostra o esquema do modelo físico de filme descendente, considerando que o eixo x é ao longo da placa, o eixo y é normal à placa e para o escoamento laminar de um fluido Newtoniano as equações de Navier-Stokes para regime permanente e propriedades constantes pode ser escrita como:

Continuidade

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v})}{\partial \overline{y}}=0 \tag{3.29}$$

Momento na direção - x

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{u})}{\partial \overline{y}}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}\right)+\overline{\rho}g \tag{3.30}$$

Momento na direção - y

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{v})}{\partial \overline{y}}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(\mu\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\mu\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}}\right) \tag{3.31}$$

onde u e v são as velocidades ao longo e normal a placa respectivamente, p e μ são a pressão e a viscosidade dinamica de fluído.

As condições de contorno são:

$$\overline{u}=\overline{v}=0 \quad \text{para } \overline{y}=0 \tag{3.32}$$

$$\overline{u}=\overline{u}_0; \quad \overline{v}=0 \quad \text{em } \overline{x}=0 \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=h}=0 \tag{3.34}$$

onde a Equação 3.34 indica tensão de cisalhamento nulo na superfície livre.

Adotando novas variáveis adimensionais na forma

$$x = \frac{\overline{x}}{h\,Pe};\quad y = \frac{\overline{y}}{h};\quad u = \frac{\overline{u}}{u_0};\quad v = \frac{\overline{v}h}{\nu};\quad p = \frac{\overline{p} - \overline{p}_0}{\rho u_0^2} \tag{3.35}$$

as equações básicas junto com as condições de contorno podem ser escritas:

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{3.36}$$

Momento na direção - x

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Re^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\rho g h Re}{u_0^2} \tag{3.37}$$

Momento na direção - y

$$\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Re^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.38}$$

Condições de contorno:

$$u = v = 0 \;\; ; y = 0 \tag{3.39}$$

$$u = 1;\; v = 0 \quad ; x = 0 \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 1 \tag{3.41}$$

No método numérico a ser usado, o objetivo é de calcular os valores relevantes das variáveis dependentes no conjunto de pontos da malha escolhidas. As equações algébricas resultantes ou as equações de discretização são obtidas pela integração das equações diferenciais sobre o sub domínio, em torno de cada ponto e os sub- domínios são chamados de volumes de controle. Adotando o esquema de discretização descrito por Patankar (1980), a forma adimensional das equações governantes podem ser escritas em termos dos fluxos totais nas direções x e y respectivamente como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u u - \frac{1}{Re^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v u - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho g h Re}{u_0^2} \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u v - \frac{1}{Re^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v v - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.43}$$

Onde o primeiro e o segundo termo no lado esquerdo nas Equações 3.42 e 3.43 representando os fluxos totais convectivos e de difusão enquanto o termo do lado direito é chamado termo fonte. Os detalhes da discretização das equações governantes e a descrição do algoritmo numérico são apresentados no apêndice, A.

A espessura do filme foi calculada baseada na aplicação da equação do Bernulli ao longo da superfície livre, conforme Chung (1978) A equação do Bernulli ao longo da superfície livre pode ser escrita com

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g h_x = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g h_\infty \tag{3.44}$$

Nesta equação o símbolo (∞) refere a velocidade da superfície ou a espessura do filme a jusante do escoamento considerado como ponto da referencia no procedimento numérico para calcular a espessura do filme em cada iteração. Considerando a pressão constante ao longo da superfície livre a equação acima pode-se escrita com

$$u_i^2 = u_\infty^2 - 2g(h_x - h_\infty) \tag{3.45}$$

Na Equação 3.45 o subscrito, i, refere a velocidade da superfície em qual que posição, x, ao longo do escoamento. A espessura inicial do filme foi calculado a partir da Equação 3.10 utilizando velocidade uniforme na entrada do filme.

3.6 Resultados e discussão

Nesta seção serão apresentados alguns dos resultados obtidos pela solução das equações de Navier-Stokes de propriedades constantes e em regime permanente descrevendo o escoamento de um filme descendente de forma livre.

A Figura 3.2 mostra uma comparação da variação da espessura do filme ademinsional, h(x), ao longo da escoamento do presente modelo e os resultados de Hassan (1967) para número de Reynolds igual a 263. Como pode-se verificar as duas soluções aproximam-se do mesmo valor, quando longe da região de entrada. A divergência nos valores de até aproximadamente x = 0,5 pode ser atribuída às aproximações da camada limite e o perfil de velocidade imposto no estudo de Hassan (1967). A velocidade superficial foi calculada para o caso de número de Reynolds 342 e comparada com os resultados de Lynn (1960). Como pode ser visto na Figura 3.3, a concordância é boa indicando que a modelagem é confiável e produz resultados que concordam com os resultados disponíveis. A Figura 3.4 mostra os perfis de velocidade para três posições ao longo do eixo x. Destes resultados pode-se verificar que o perfil totalmente desenvolvido mostra uma forma parabólica que está em concordância com a solução analítica quando assume-se o perfil com sendo totalmente desenvolvido e a razão entre a velocidade máxima e velocidade média é

$$\frac{u_{max}}{\bar{u}} = 1.5 \tag{3.46}$$

que está também de acordo com os resultados de Fulford (1964). Bruley (1965), Hassan (1967) e Hangen (1968) trataram o mesmo problema, em cada um dos três estudos as equações governantes foram simplificadas para as equações clássicas de camada limite e o perfil parabólico foi assumido na seção de entrada (x = 0). Os resultados mostram que o

perfil de velocidade tende à forma parabólica mas a razão entre a velocidade máxima e a velocidade media não atingiu o valor de 1,5. No presente trabalho foi admitido a condição na superfície livre do filme como condição livre de tensão ao invés de usar a velocidade de queda livre como assumido por Bruley (1965).

Também pode-se observar que o perfil de velocidade assumido em x = 0 como no presente trabalho produz resultados mais satisfatórios que de Hassan (1967), que adota um polinômio de terceira ordem para o perfil de velocidade na entrada. O efeito da variação do número de Reynolds sobre a distribuição da espessura do filme é mostrado na Figura 3.5. Como pode ser verificado, para baixos valores de número de Reynolds a espessura é constante, aproximado assintoticamente do valor previsto pela teoria de Nusselt.

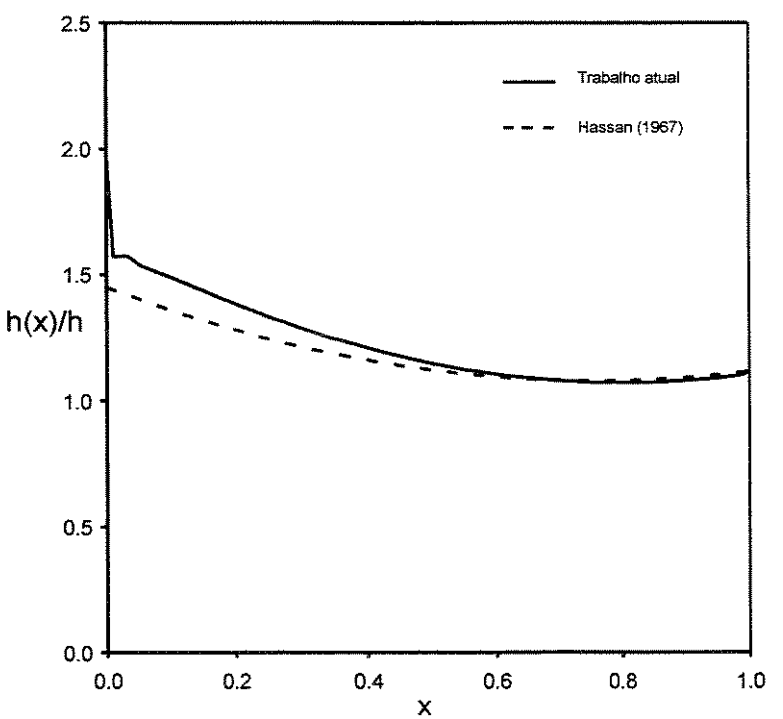

Figura 3.2: Comparação da profundidade de filme descendente ao longo da direção axial com os resultados da literatura para o caso de número de Reynolds = 263.

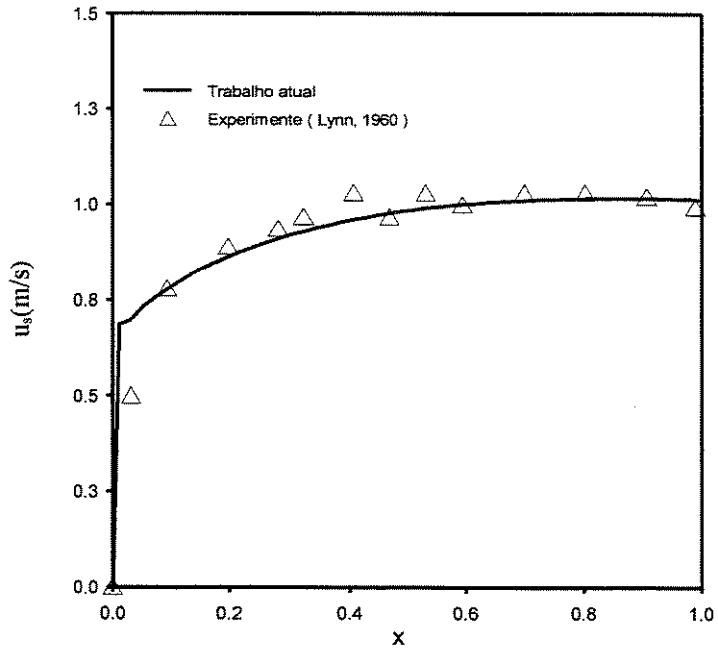

Figura 3.3: Comparação da velocidade superficial de filme descendente com dados experimentais para número de Reynolds = 342.

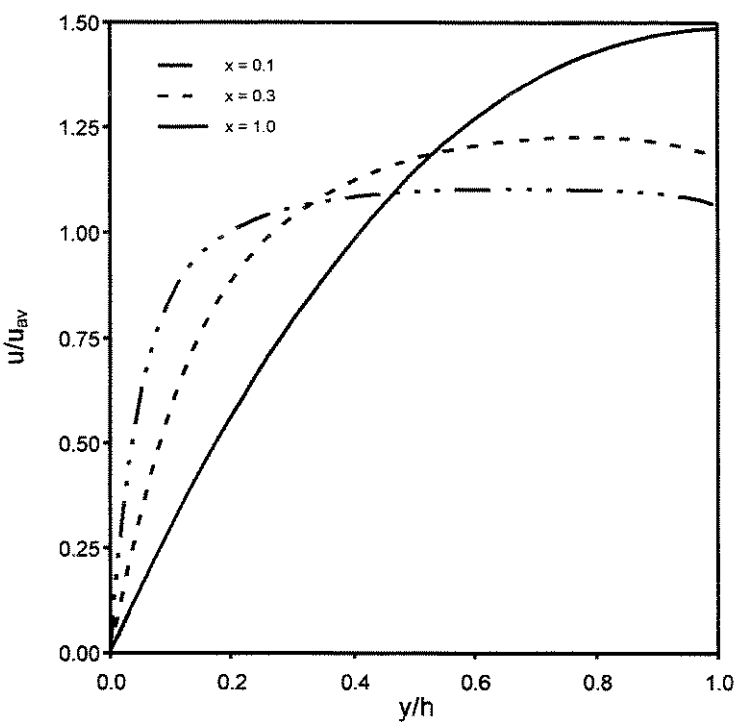

Figura 3.4: Desenvolvimento do perfil de velocidade axial para várias seções ao longo do escoamento de filme livre.

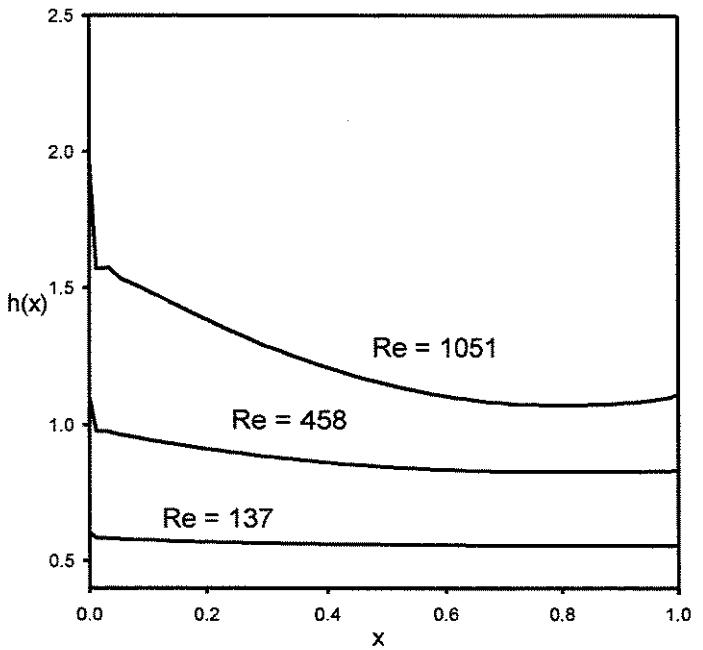

Figura 3.5: Comparação da profundidade de filme livre descendente ao longo da posição axial para diferentes números de Reynolds.

Capítulo 4

Modelo Aproximado de Filme Descendente Laminar Totalmente Desenvolvido de Crescimento de Cristais de Gelo

4.1 Introdução

No último capítulo, as características hidrodinâmica do filme descendente ao longo da placa vertical foram estudados. Os perfis de velocidade, velocidade na superfície e a distribuição da profundidade do filme ao longo da direção do escoamento foram investigados pela solução das equações de Navier-Stokes. Este entendimento do comportamento do escoamento é essencial para conseguir prever a troca de calor e a da massa no filme descendente e o crescimento dos cristais de gelo, com o objetivo de ser utilizado na armazenagem térmica de frio.

Recentemente, o uso de armazenamento térmico de frio aumentou substancialmente por seu potencial na redução da carga de sistemas de ar condicionado e aplicações afins nas horas de pico e o deslocamento da demanda elétrica para horas de baixa demanda. Esta medida reduz a demanda e, consequentemente, o custo para o consumidor e para a distribuidora de energia elétrica.

Existem várias técnicas de armazenamento de frio disponíveis na forma comercial entre elas, o sistema de água gelada com ou sem estratificação, gelo sobre tubo, gelo sobre serpentinas, placas de gelo fino, sistema anular, encapsulamento de pcm em tubos, latas, esferas, etc.

No sistema de fabricação de gelo tipo "*harvesting*" a água escoa sobre a placa fria do evaporador e congela na forma de camada de gelo que pode ser removida da superfície por um sistema de reversão de refrigerante. A camada de gelo é limitada a uma espessura máxima de 1 cm para manter a resistência térmica razoável entre a superfície do evaporador e a água. Como era de se esperar, o rendimento do sistema é baixo, chegando a 10%. Um dos fatores que afetam o rendimento é o coeficiente global de troca de calor durante o processo de formação de gelo, iniciando de um valor típico de 1703 W/m^2 °C e terminando com um calor de 784 W/m^2°C. Outro fator que influencia no rendimento é o uso de sistema de reversão de refrigerante e o calor que será liberado para separar a placa de gelo da superfície do evaporador.

Como alternativa atraente do processos convencionais de fabricação "*harvesting*" de gelo o processo de formação de cristais de gelo junto com o fluído formando um "*slurry*", pode ser utilizado para armazenar o frio na forma do calor latente. As partículas de gelo fino formadas na superfície fria serão arrastadas pelo escoamento de fluído formando uma mistura de gelo e água na forma de "*slurry*". Neste processo é possível manter o coeficiente global de troca de calor ou mesmo aumentando seu valor, além de eliminar o processo de reversão de refrigerante com as conseqüências energéticas não desejáveis. No presente estudo é desenvolvido um modelo aproximado para o filme descendente de cristais de gelo em crescimento numa solução binária que incorpora características desejadas de cristais de gelo que são auto - liberadas da superfície fria. A metodologia seguida no desenvolvimento deste modelo é de investigar, inicialmente, o caso limite caracterizado pelo escoamento totalmente desenvolvido junto com outras duas considerações simplificadoras. O motivo de adotar tal procedimento é que as soluções asintóticas da hidrodinâmica de filme descendente são bem estabelecidas analiticamente e usadas como critérios de apoio para prever a solução correta para o desenvolvimento de campo de escoamento. Sendo que a solução asintótica para as características de calor e massa de crescimento de cristais de gelo no filme descendente não é disponível, o objetivo nesta etapa é de desenvolver uma solução numérica simplificadora, consistente com a região de escoamento totalmente desenvolvido. Isto deve nos permitir prever o caso limite de modelo generalizado além de permitir a comparação necessária para possível validação do modelo.

4.2 Formulação e Método Numérico Adotado

Muitos estudos foram realizados sobre filmes de líquido finos por causa das altas taxas de troca de calor. Entretanto filmes de líquidos descendentes ao longo de placas verticais contendo cristais de gelo em suspensão devem provocar ainda maiores taxas de calor. Estes efeitos combinados de filme líquido fino com cristais de gelo não é muito conhecido. É de esperar que pesquisas fundamentais podem revelar no futuro, maior potencial especialmente nas aplicações relacionadas ao armazenamento de energia térmica.

Várias simplificações são usadas no desenvolvimento do modelo esquematizado na Figura 4.1, incluindo o escoamento laminar, cristais de gelo de formato esférico, além do fluído sendo considerado incompressível.

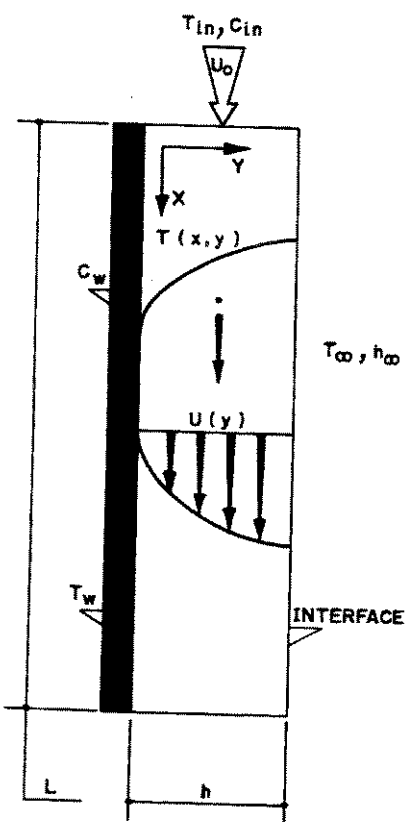

Figura 4.1:Modelo físico esquematizado de filme.com espessura constante.

As propriedades são assumidas constantes exceto os valores efetivos da condutividade térmica, difusividade térmica, viscosidade e calor específico. O fluído é assumido Newtoniano, que é tipicamente o caso para concentração de cristais de gelo abaixo de 45% conforme Rutger (1962). É também assumido que os cristais de gelo não aderem a superfície da placa fria, são distribuídos de forma homogênea no campo de escoamento e que as densidades dos cristais e do fluído são iguais e que não existe deslizamento entre os cristais de gelo e o fluído. No presente estudo (modelo homogêneo), a temperatura de entrada do fluído é considerada como sendo a temperatura de congelamento da solução e condição de temperatura constante na placa fria sem radiação ou ganhos ou perdas por evaporação no superfície livre de filme. Nestas condições as equações governantes e as condições de contorno podem ser escritas junto com o perfil de velocidade totalmente desenvolvido conforme Levich (1964) na forma:

$$\bar{u} = \frac{gh\bar{y}}{\nu_e}\left(1 - \frac{\bar{y}}{2h}\right) \tag{4.1}$$

onde, u, é constante ao longo da direção do escoamento enquanto v é a componente normal a placa na direção y desprezada neste modelo. A equação de energia em regime permanente é:

$$\rho c_e \bar{u}\frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(k_e \frac{\partial T}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(k_e \frac{\partial T}{\partial \bar{y}}\right) + S \tag{4.2}$$

sujeita as condições de contorno;

$$T(\bar{x},0) = T_w \tag{4.3 a}$$

$$T(0,\bar{y}) = T_m = T_{in} \tag{4.3 b}$$

$$k_e \frac{\partial T(\bar{x},h)}{\partial \bar{y}} = h_\infty\left(T(\bar{x},h) - T_\infty\right) \tag{4.3 c}$$

As viscosidades cinemática e dinâmica efetivas da mistura fluído e cristais de gelo são assumidas como sendo funções da concentração volumétrica de cristais de gelo como é sugerido por Vand (1948)

$$\frac{\mu_b}{\mu_f} = \left(1 - C - 1.18C^2\right)^{2.5}; \quad C \leq 0.45 \tag{4.4}$$

$$\nu_e = \frac{\mu_b}{\rho} \tag{4.5}$$

onde ρ é a densidade constante da mistura. O calor específico efetivo c_e da mistura é a média mássica do calor específico do fluído e das partículas de gelo, ou seja,

$$c_e = Cc_p + c_f(1-C) \tag{4.6}$$

onde c_p e c_f são os valores do calor específico da partícula de gelo e do fluído respetivamente.

4.2.1 Condutividade Térmica

Durante duas ou três décadas, muitas investigações e estudos foram realizados sobre a determinação das propriedades de transporte de suspensões ou material composto contendo partículas finas dispersas de forma aleatória no meio fluído. Os objetivos básicos destes estudos eram obter correlações das propriedades efetivas destes compostos em termos das propriedades das fases e sua distribuição espacial como reportado por Batchelor (1974).

O problema de determinação da condutividade térmica efetiva, k_e, de um fluído composto foi posta inicialmente por Maxwell (1873) para o caso de uma suspensão diluída

contendo esferas. Os resultados de Maxwell foram estendidos por muitos outros pesquisadores como Rocha e Acrivo (1973) e Leal (1973). Entretanto todos estes estudos foram restringidos ao caso de meio estacionário e portanto, muito pouco é conhecido dos efeitos de movimento relativo entre as fases sobre o aumento de condutividade térmica efetiva, k_e. No presente estudo este efeito será especialmente investigado de modo a mostrar o grau de influência da concentração dos cristais de gelo sobre o valor de, k_e , por causa da presença da convecção da mistura de água e cristais de gelo em escoamento.

A condutividade térmica efetiva de uma solução diluída estática, k_b, pode ser avaliada pela equação de Maxwell,

$$\frac{k_b}{k_f} = \frac{2 + \frac{k_p}{k_f} + 2\,C\left(\frac{k_p}{k_f} - 1\right)}{2 + \frac{k_p}{k_f} - C\left(\frac{k_p}{k_f} - 1\right)} \tag{4.7}$$

Por causa da turbulência criada pelos cristais de gelo e a interação junto com o fluido, a condutividade térmica efetiva da mistura é uma função da taxa de cisalhamento local e maior que previsto pela Equação 4.7. Leal (1973) estudou o aumento da condutividade térmica das suspensões diluídas num número de Peclet de partículas pequena, e obteve a relação a seguir para suspensão com condutividade de partícula e fluído iguais:

$$\frac{k_e}{k_f} = 1 + 3.0\,C\,(Pe_p)^{1.5} \tag{4.8}$$

onde Pe_p é o número de Peclet da partícula definida como:

$$Pe_p = \frac{e\bar{d}^2}{\alpha_e} \tag{4.9}$$

Depois, Nir e Acrivo (1976) aplicaram um modelo similar para uma suspensão diluída com número de Peclet de partícula muito alto, e apresentaram a relação

$$\frac{k_e}{k_f} = 1 + A\,C\left(Pe_p\right)^{1/11} \tag{4.10}$$

onde, *A*, é uma constante cujo valor é determinado experimentalmente. Sohan e Chen (1981) apresentaram uma correlação para número de Peclet moderado na forma

$$\frac{k_e}{k_f} = F(C)\,\left(Pe_p\right)^m \tag{4.11}$$

onde, F, é uma função a ser determinada. Baseado nos resultados apresentados acima, uma correlação geral da forma

$$\frac{k_e}{k_f} = f = 1 + B\,C\left(Pe_p\right)^m \tag{4.12}$$

foi usada por Stewart et al. (1993) e Charunyakorn et al. (1991) para modelar a condutividade térmica do escoamento de uma suspensão. Esta mesma correlação foi usada no presente estudo utilizando a definição do número de Peclet da partícula como:

$$Pe_p = \frac{e\bar{d}^2}{\alpha_e} \tag{4.13}$$

onde, *e*, é a taxa de cisalhamento local dada por:

$$e = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{g\,h}{\nu_e}\right)\left(\frac{1-\bar{y}}{h}\right) \tag{4.14}$$

$$\alpha_e = \frac{k_e}{\rho c_e} \tag{4.15}$$

o número de Peclet do fluído é definido como:

$$Pe_f = \frac{\bar{u}_{y=h}\ h}{\alpha_e} \tag{4.16}$$

onde $u_{y=h}$ é a velocidade máxima do fluído que acontece na superfície livre do filme descendente e que dada por:

$$\bar{u}_{\bar{y}=h} = \frac{g\,h^2}{2\,\nu_e}. \tag{4.17}$$

4.2.2 Termo Fonte, S,

O termo fonte, S, da Equação 4.2 representa o calor latente liberado pelos cristais de gelo durante o processo de mudança de fase, que é o produto da taxa de calor liberado por cada cristal de gelo e o número de cristais de gelo por unidade de volume da mistura. A taxa de transferência de calor por cristal de gelo é avaliada como segue:

$$Q_{crystal} = \rho h_{if} \bar{u} \frac{\partial V_{crystal}}{\partial \bar{x}} \tag{4.18}$$

onde, $V_{cristal}$, é o volume de cada cristal de gelo assumida como sendo esfera sólida de diâmetro, d, e ocupa uma fração pequena de volume de controle. Deste modo, a Equação 4.18 fica:

$$Q_{crystal} = \rho h_{if} \bar{u} \left(\frac{\pi}{2}\right) \bar{d}^2 \frac{\partial \bar{d}}{\partial \bar{x}} \tag{4.19}$$

e o termo fonte, S, fica

$$n Q_{crystal} = \rho h_{if} \bar{u} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \bar{d}^2 \frac{\partial \bar{d}}{\partial \bar{x}} \tag{4.20}$$

onde, n, é o número de cristais de gelo por unidade de volume da mistura.

O calor latente liberado pelos cristais de gelo por unidade de volume é igual à troca de calor por convecção entre as partículas de gelo e o fluído. Como resultado, o termo de fonte de calor pode ser expresso pela equação:

$$S = n h_d A_p (T_m - T) \tag{4.21}$$

onde h_d é o coeficiente de troca de calor entre os cristais de gelo e o fluído, A_p é a área superficial de cristal de gelo, πd^2. Igualando a Equação 4.21 à Equação 4.20 tem-se:

$$\frac{\partial \bar{d}}{\partial \bar{x}} = \frac{2 h_d (T_m - T)}{\rho h_{if} \bar{u}} \tag{4.22}$$

A concentração local, C, é a grandeza adimensional definida como sendo o número de cristais de gelo por unidade de volume, n, vezes o volume de cada cristal, $V_{cristal}$, como:

$$C = n \frac{\pi \bar{d}^3}{6} \tag{4.23}$$

4.3 Solução e Validação do Modelo

Adotando as variáveis ademinsionais;

$$x = \frac{\overline{x}}{L}; \quad y = \frac{\overline{y}}{h}; \quad d = \frac{\overline{d}}{h}; \quad u = \frac{\overline{u}}{\overline{u}_{\overline{y}=h}}; \quad \Gamma = \frac{k_e}{k_b}; \quad \phi = \frac{T - T_w}{T_{in} - T_w} \tag{4.24}$$

as Equações do modelo 4.1 a 4.3 e as Equações 4.22 e 4.23 ficam na seguinte forma:

$$u = 2y - y^2 \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{L^2}{h^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S \tag{4.26}$$

$$\phi(x, 0) = 0 \tag{4.27a}$$

$$\phi(0, y) = 1 \tag{4.27 b}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=1} = \frac{h_\infty . h}{\Gamma}(\phi_{Y=1} - \phi_\infty) \tag{4.27 c}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{2\,Ste\,L}{\rho u \overline{u}_{\overline{y}=h} h c_f} h_d(\phi_m - \phi) \tag{4.28}$$

$$C = \frac{n\pi h^3}{6} d^3 \tag{4.29}$$

$$\eta = \frac{1}{u_{y=h} L c_e}; \quad Ste = \frac{c_f(T_{in} - T_w)}{h_{if}}; \quad S = \frac{\rho u}{Ste}\frac{c_f}{c_e}\frac{\partial C}{\partial x} \tag{4.30}$$

$$\Gamma = 1 + BC2^m (Pe_f(1 - \overline{y}))^m \overline{d}^{2m} \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \left(\frac{n\pi h^3}{2}\right) d^2 \frac{\partial d}{\partial x} \tag{4.32}$$

O coeficiente de troca de calor h_d, entre os cristais de gelo e o fluído é determinado usando a correlação de convecção natural para esferas, Nu_p,

$$Nu_p = \frac{h_d \bar{d}}{k_f} \tag{4.33}$$

$$Nu_p = 2 + 0.5\,Ra^{0.25} \tag{4.34}$$

O número de Nusselt local na superfície sólida é definido como

$$Nu_x = \frac{h_x \bar{x}}{k_f} \tag{4.35}$$

onde, k_f, é a condutividade térmica do fluído perto da superfície da placa, porque foi assumido que não existe cristais de gelo adjacente a superfície sólida. O coeficiente local de transferência de calor é avaliado como:

$$h_x = \frac{q_w}{T_w - T_{in}} \tag{4.36}$$

A troca de calor no parede é definido como:

$$q_w = \frac{k_f\left(T_w - T_{i,2}\right)}{\Delta\bar{y}} \tag{4.37}$$

onde $T_{i,2}$ é a temperatura do fluído no volume de controle subsequente à parede.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

O coeficiente global de troca de calor é calculado como:

$$U = \frac{1}{L}\int_0^L h_x d\bar{x} \tag{4.38}$$

$$= \frac{\Delta\bar{x}}{L}\sum_{i=2}^{L1} h_{xi} \tag{4.39}$$

A massa de cada cristal de gelo = $\rho\, V_{cristal}$, e a massa total de gelo no escoamento por unidade de largura da placa, Δz, é

$$m = \frac{\pi\rho}{6hL}\int_0^h\int_0^L (\bar{d}^3 - \bar{d}_{in}^3)\, d\bar{x}\, d\bar{y} \tag{4.40}$$

$$m = \frac{\pi\rho}{6}\sum_{i=2}^{L1}\sum_{j=2}^{M1}\left(\bar{d}_{ij}^3 - \bar{d}_{in}^3\right) \tag{4.41}$$

onde L1 e M1 designa o número de pontos da grade nas direções x e y respectivamente. Sendo que a velocidade ao longo do eixo y não uniforme e consequentemente o tempo de residência, t_R, varia na direção y como $t_R = \frac{L}{\bar{u}}$. A taxa de crescimento dos cristais de gelo no filme descendente em qualquer posição y é a diferença entre os diâmetros final e inicial do cristal $d_{L1,j}$ e $d_{1,j}$ respectivamente, dividido pelo tempo de residência de um cristal de gelo. A taxa de crescimento de cristais de gelo para placa de largura, W, e comprimento, L, é:

$$\dot{m} = \frac{(L1-1)\pi\rho}{6L}\left(\frac{W}{\Delta\bar{z}}\right)\sum_{j=2}^{M1}\left(\bar{d}_{L1,j}^3 - \bar{d}_{1,j}^3\right)\bar{u}_i \tag{4.42}$$

O termo fonte na equação de energia, Equação 4.26, é uma função implícita da

temperatura de mistura e a distribuição do diâmetro de cristal de gelo, e portanto, não existe uma solução analítica. Consequentemente o método de diferenças finitas baseado no volume de controle é usado para prever a temperatura adimensional, ϕ, da Equação 4.26, e o diâmetro do cristal de gelo da Equação 4.28. A solução é considerada terminada quando a mudança nos valores de ϕ subsequente, é menor que 10^{-6}. Neste método de solução as formas discretizadas das Equações 4.26 a 4.28 são obtidas aplicando as leis de conservação sobre o volume de controle finito circundando cada nó da malha e integrando sobre o volume de controle. A média harmônica da condutividade térmica é usada nas faces de volume de controle. A seqüência dos cálculos numéricos é idêntica a que foi usada para resolver os problemas convencionais de fase única. O acoplamento que existe entre as equações da energia e a equação do diâmetro do cristal de gelo é realizado por iteração e sub relaxação. Dentro do esquema iterativo, as Equações 4.26 a 4.29 fornece a descrição necessária do campo de temperatura como também a distribuição de diâmetro de cristal de gelo para avaliação dos valores efetivos da condutividade térmica, difusividade térmica, viscosidade cinemática e o calor especifico. Cálculos numéricos suplementares realizados em malhas de 20x20 a 75x75 sugerem que uma malha de 50x50 fornecem resultados satisfatórios.

Para uma dada malha, os volumes de controle podem ser definidos de várias maneiras, a prática usada neste trabalho é apresentada na Figura 4.2. Nesta prática, é conveniente em primeiro lugar decidir os contornos dos volumes de controle e depois alocar os pontos de grade. Como mostrado na Figura 4.2, o domínio de cálculo é dividido em volumes de controle não sobrepostos e as linhas descontínuas apresentam os contornos de volume de controle, enquanto os pontos da grade são alocados no centro geométrico do volume de controle.

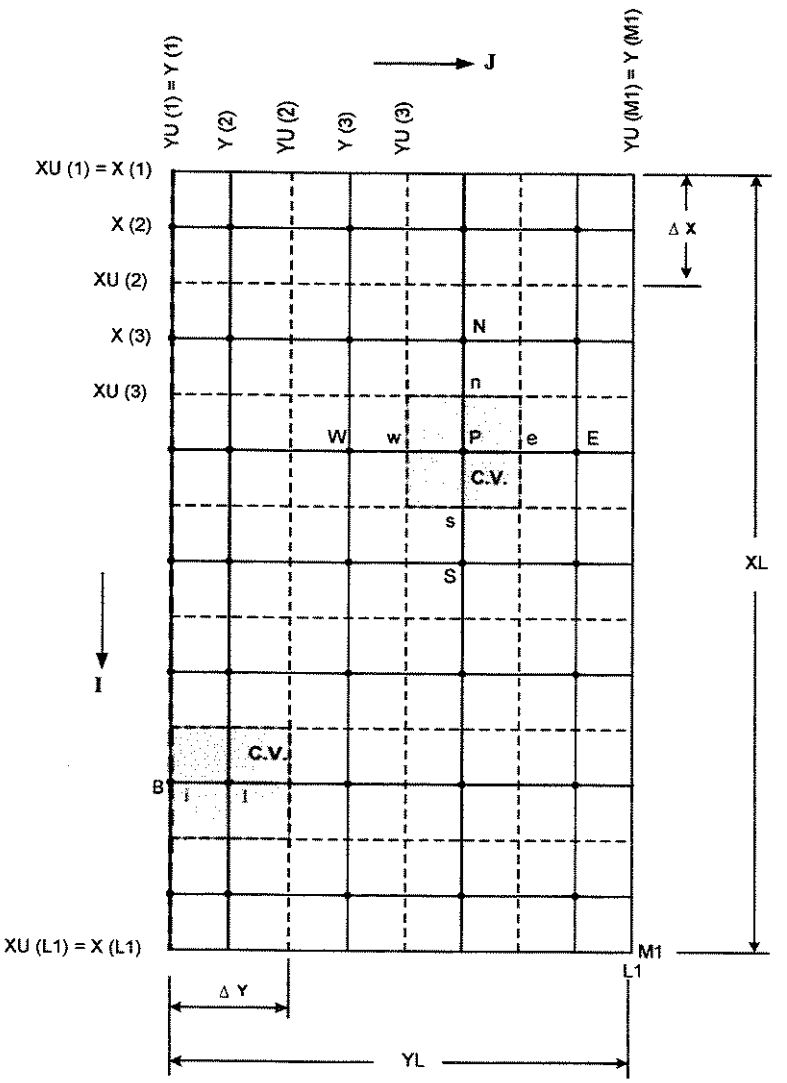

Figura. 4.2: Grade e volumes de controle.

Para um volume de controle no contorno, uma face do volume de controle coincide com o contorno do domínio que é alocado no centro da face do volume de controle. Este arranjo facilita o tratamento de diversas condições de contorno.

A espessura do filme, h, na direção y é tomada como 0,5 mm, 0,75 mm e 1,0 mm, correspondente aos números de Reynolds de 137, 458 e 1051, respectivamente. Uma placa de comprimento de 1,0 m é adotada em todas as simulações, o diâmetro inicial na entrada do cristal de gelo, d_{in} é tomado como 0,025 mm para inicializar os cálculos. Assumindo que existem cerca de 25000 cristal de gelo em cada mm de espessura de filme de uma área de

superfície de $1m^2$, o total de cristais por m^3 de filme é $2,5x10^7$ cristal. A temperatura da entrada é assumida como sendo a temperatura inicial de congelamento da superfície, sendo que a temperatura de congelamento decresce com o aumento da concentração dos cristais de gelo durante seu crescimento. Na superfície livre do filme o coeficiente de troca de calor, h_∞ é assumido como $10W/m^2k$.

A temperatura de congelamento (ou fusão) da solução, T_m, é uma função da concentração dos cristais de gelo. A relação entre a concentração e a temperatura de congelamento da solução é assumida como polinomial da forma

$$T_m = a_0 + a_1C + a_2C^2 \qquad (4.43)$$

onde os coeficientes, a_i, são calculados a partir do diagrama de fase do sistema $NaCl-H_2O$.

A formulação e os resultados numéricos foram verificados pela comparação com a solução de Stewart et al. (1993) para o caso especial sem difusão axial, onde as previsões de tamanho de cristal e a distribuição de temperatura perfeitamente coincidem. Maior validação do código numérico para os casos de difusão foi realizado por comparação e boa concordância com a solução analítica bidimensional de condução de uma placa vertical com condições de contorno prescritas.

4.4 Resultados e discussão

A universalidade da solução deste problema foi verificado através da realização de diversos testes, utilizando-se diferentes malhas. Verificou-se também , o efeito do número de pontos nodais na solução. A figura 4.3 apresenta a distribuição da temperatura adimensional para malhas quadradas uniformemente distribuídas , de 20x20 a 50x50. De acordo com esta figura, a malha de 50x50 foi considerada suficiente para a validação dos resultados.

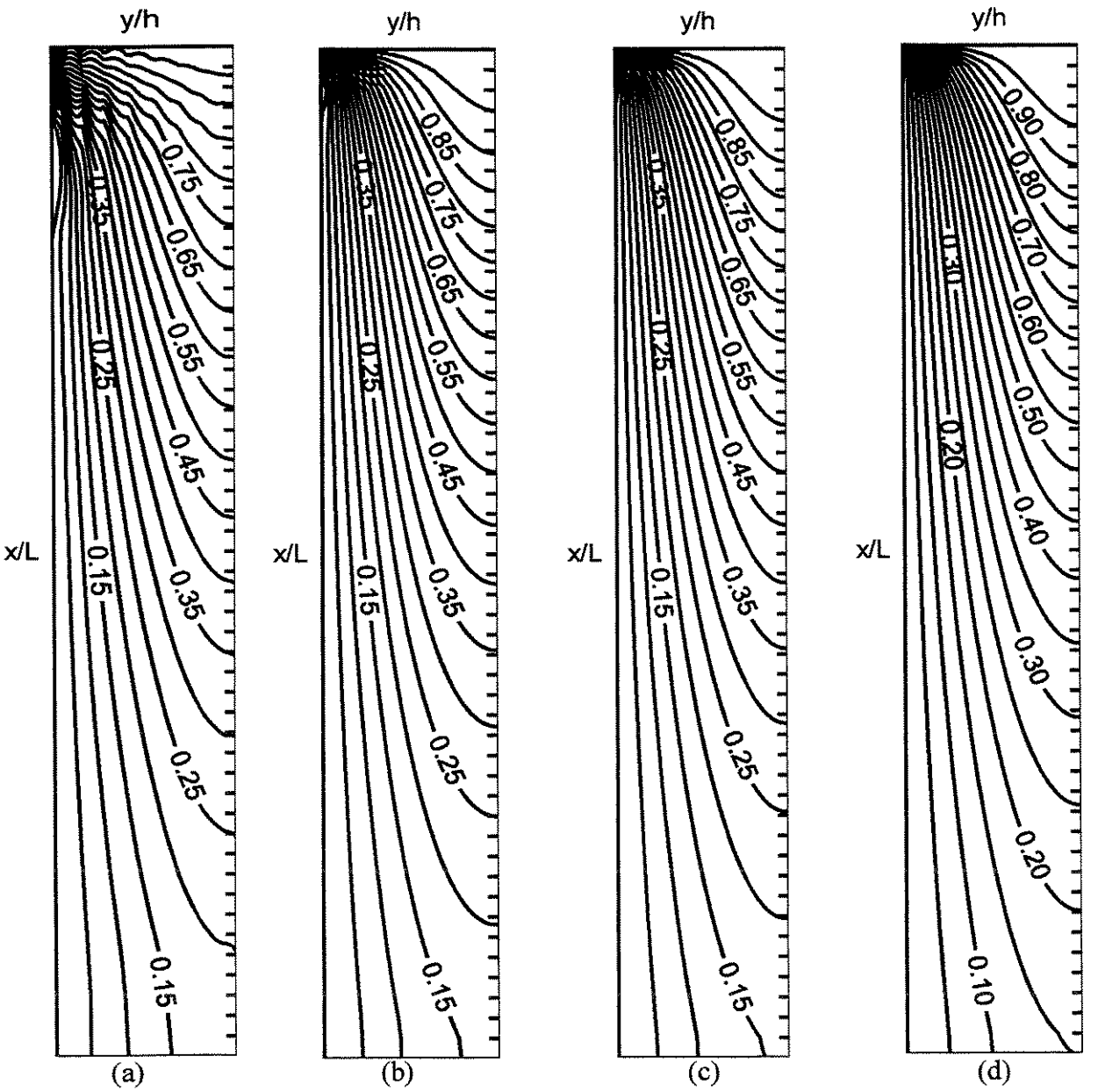

Figura 4.3 O efeito do número das pontos nodais sobre a distribuição da temperatura adimensional, (a) 20x20, (b) 35x35, (c) 40x40, (d) 50x50

Os resultados são apresentados em termos de diâmetro adimensional da partícula, perfis de temperatura, número de Nusselt local, número de Nusselt da partícula e super resfriamento local. Estes resultados foram obtidos para diversas temperaturas de placa fria, espessura de filme e densidade de cristal de gelo. Os perfis de temperatura adimensional em regime permanente no filme para o caso de T_w = 267 K, T_{in} = 271 K (Ste = 0.05), h = 0,5mm e d_{in} = 0.025 mm, sem difusão axial e com difusão axial são mostrados na Figuras

4.4 (a) e 4.4 (b), respectivamente. Pode verificar da Figura 4.4 (b) que a temperatura da mistura aumenta por causa da contribuição do fluxo de calor na direção axial. Para as mesmas condições, os perfis de diâmetro de cristal de gelo são mostrados na Figura 4.5 (a) sem condução axial e com condução axial na Figura 4.5 (b). Figura 4.5 (a) mostra o mesmo resultado de Stewart et al. (1993), mostrando maior aumento no diâmetro perto da superfície da placa. A presença da condução axial resulta no abaixamento do crescimento dos cristais de gelo por causa da redução do super resfriamento do fluído.

Figura 4.6 mostra a variação do número de Nusselt local ao longo da direção axial para temperatura constante da placa. É observado que pela inclusão da difusão axial, o número de Nusselt local aumenta com o aumento da distância (x) ao longo da placa e decresce com o aumento da espessura do filme. Figura 4.7 mostra a variação do número de Nusselt local com a espessura do filme em várias posições transversais. Como pode - ser verificado nas Figuras 4.6 e 4.7, a inclusão da difusão axial resulta em números de Nusselt maiores especialmente para espessura do filme de 0,5 mm e 0,75 mm.

Figuras 4.8 e 4.9 mostram a variação do super resfriamento local para diferentes posições ao longo do comprimento da placa. A difusão axial provoca um super resfriamento do fluído e este fenômeno podem ser atribuído à possível depressão do ponto de congelamento da solução. Também pode ser verificar que os efeitos da difusão axial são maiores para o caso de espessura do filme de 0,5 mm.

Figuras 4.10 e 4.11 mostram a variação do número de Nusselt dos cristais de gelo em diversas posições ao longo da direção do escoamento. Sendo que o número de Nusselt da partícula é uma função do diâmetro do cristal de gelo e super resfriamento do fluído, o número de Nusselt da partícula calculado é menor quando a difusão axial é considerada. Simulações numéricas foram realizadas para os casos de 1, 2 e 4 cristais de gelo por elemento de fluído, e o número de Nusselt médio na superfície da placa é calculado para cada caso como representa na Figura 4.12. Aumentando a densidade do cristal de gelo provoca-se a redução da temperatura do fluído e aumenta o crescimento mássica do gelo.

Como conclusão deste modelo a difusão axial somente é importante para $h \leq 0{,}75\,mm$ Para valores fora desta faixa, a difusão axial não exerce influência sobre o número de Nusselt e a troca de calor.

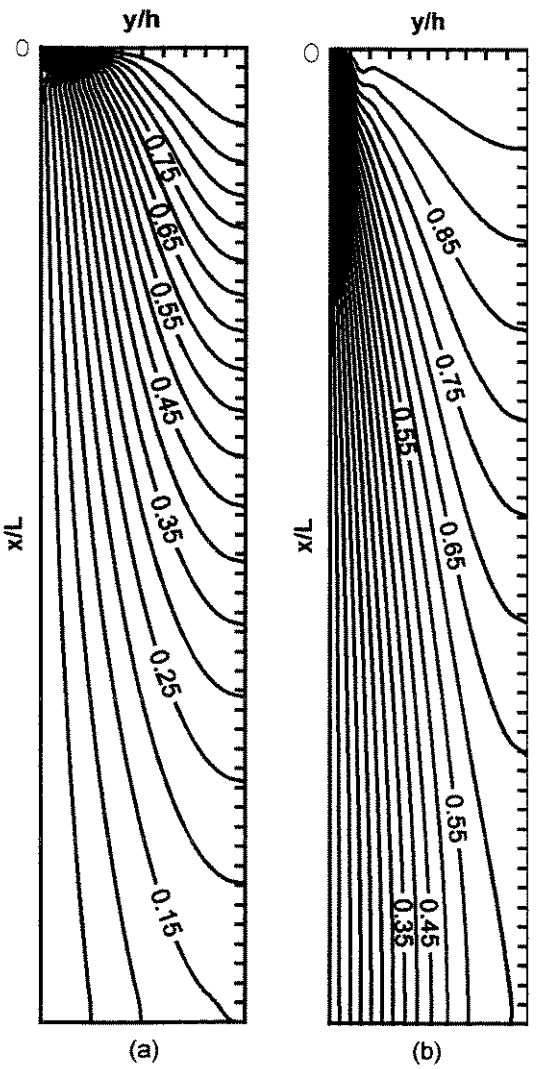

Figura 4.4: Influência da condução axial no campo de temperatura do filme para Ste = 0.05 (T_w = 267 K, e T_{in} = 271 K), h = 0.5 mm e d_{in} = 0.025 mm. (a) sem condução axial, (b) incluindo condução axial.

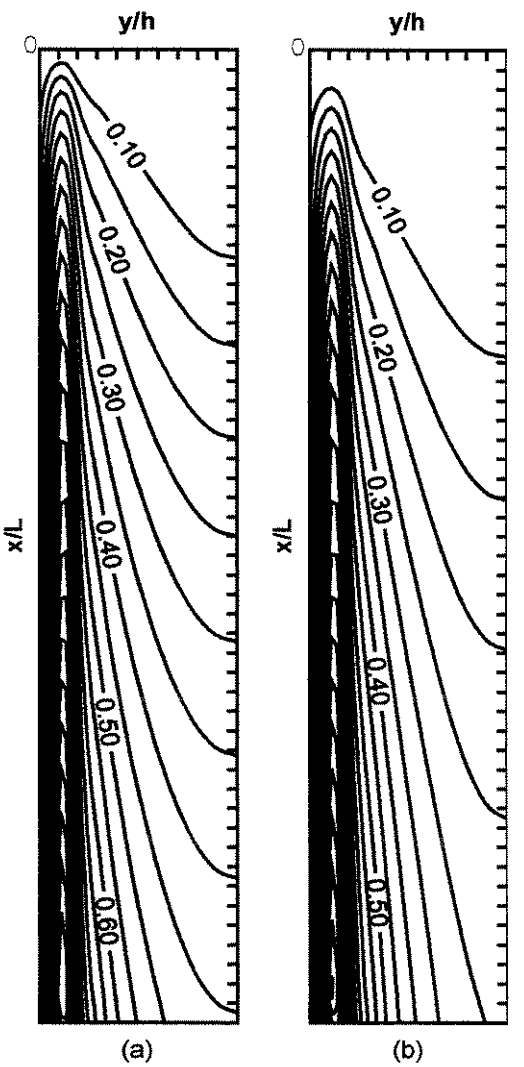

Figura 4.5: Influência da condução axial na distribuição do diâmetro de cristais de gelo do filme para Ste = 0.05, h = 0.5 mm, e d_{in} = 0.025 mm, (a) sem condução axial, (b).incluindo condução axial.

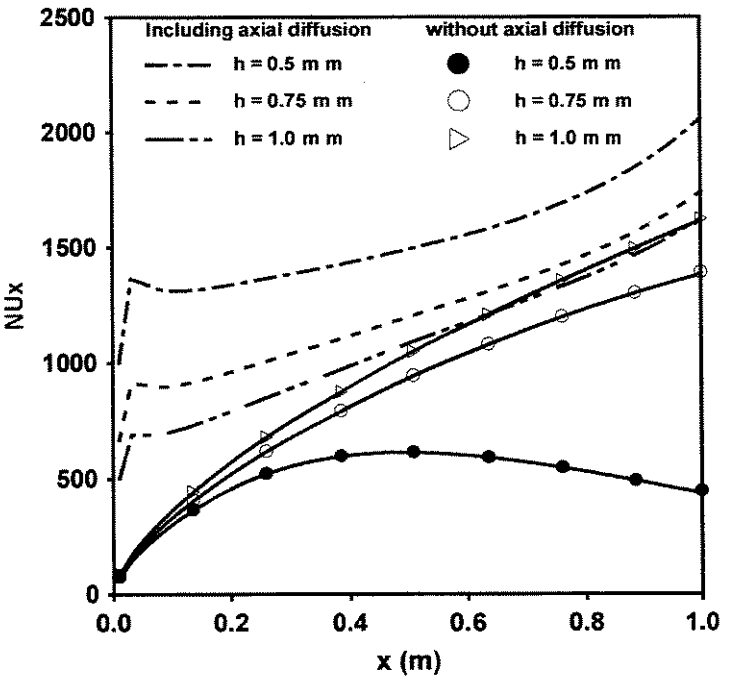

Figura 4.6: Variação do número de Nusselt local na superfície da placa com a direção axial para três espessuras diferentes de filme; Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm

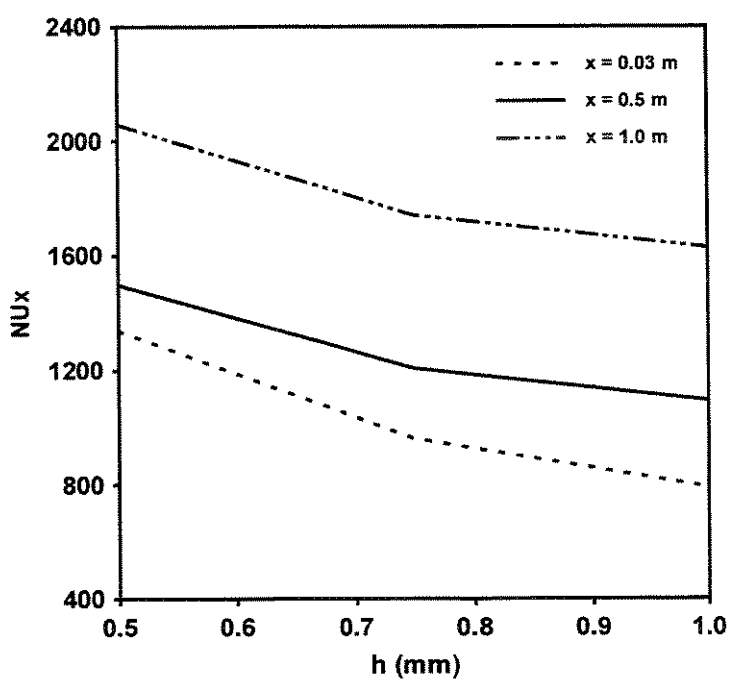

Figura 4.7: O efeito da espessura de filme, h, no número de Nusselt local na superfície da placa (incluindo difusão axial) para vários posições em, x, de cima para baixo ao longo da placa para Ste = 0.05, d_{in} = 0.025 mm.

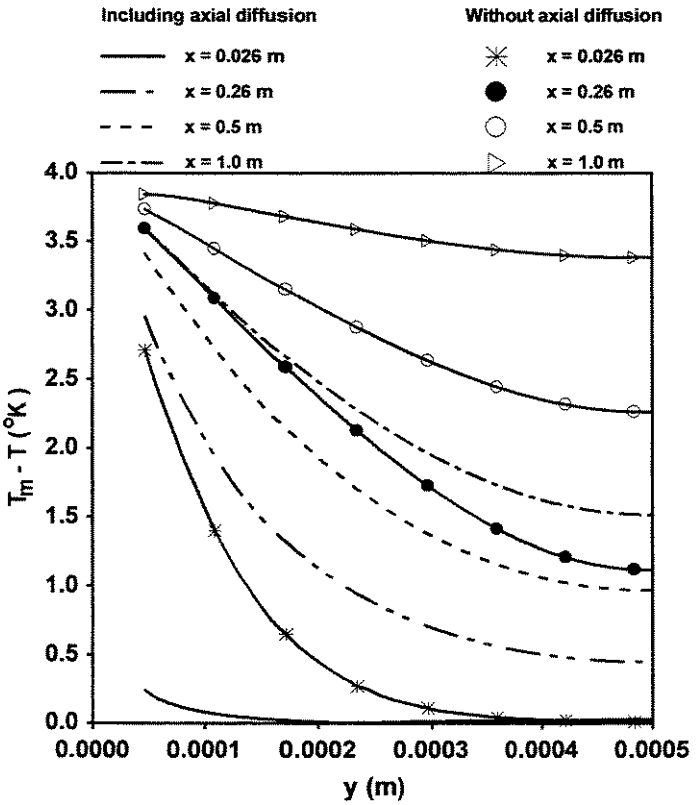

Figura 4.8: Variação do super- resfriamento do fluido, (T_m – T), com a espessura de filme, y, para várias posições em, x, ; h = 0.5 mm, Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm.

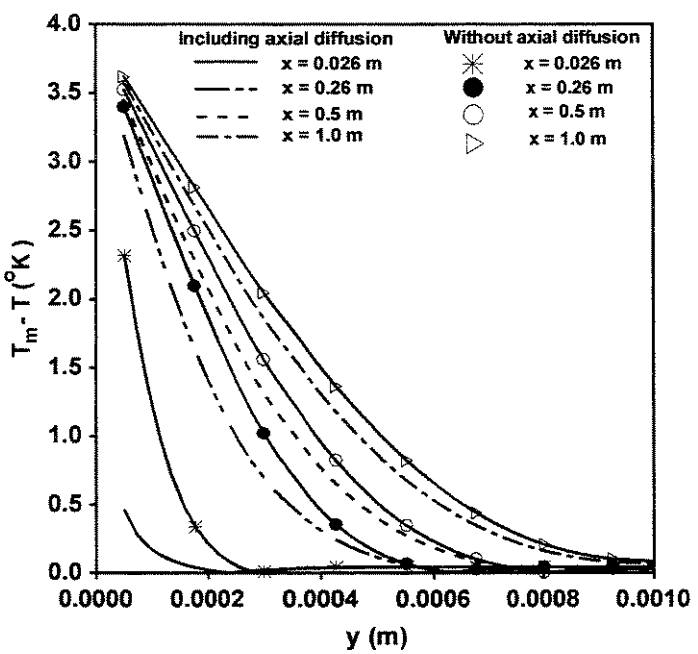

Figura 4.9: Variação do super resfriamento do fluido, (T_m – T), com a espessura de filme, y, para várias posições em x, h = 1.0 mm, Ste = 0.05, e d_{in} = 0.025 mm.

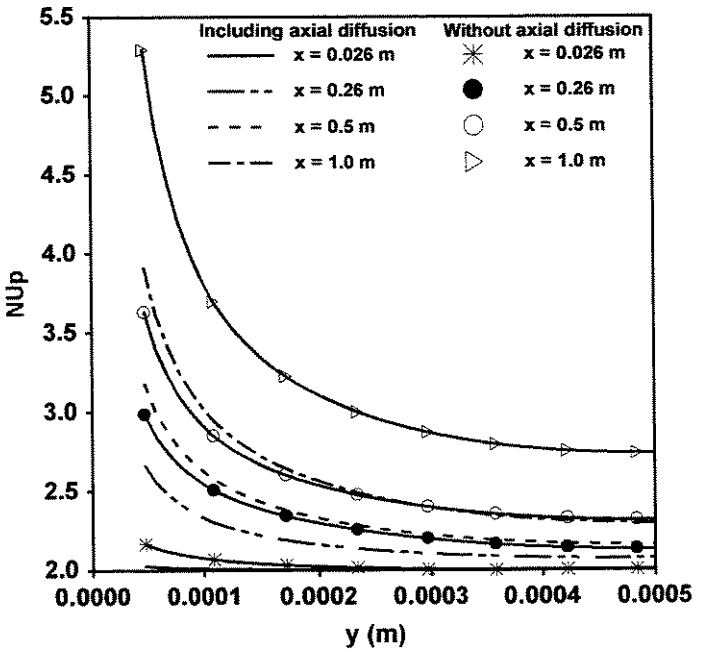

Figura 4.10: Variação do número do Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a espessura de filme, y, para várias posições ao longo do comprimento da placa; Ste = 0.05, h = 0.5 mm, e d_{in} = 0.025 mm.

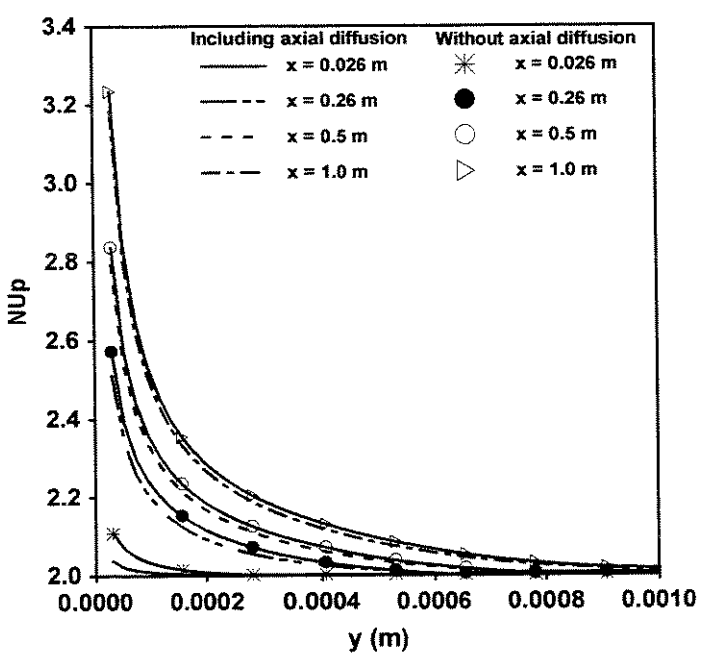

Figura 4.11: Variação do número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a espessura de filme, y, em várias posições ao longo do comprimento da placa, para Ste = 0.05, h = 1.0 mm, e d_{in} = 0.025 mm.

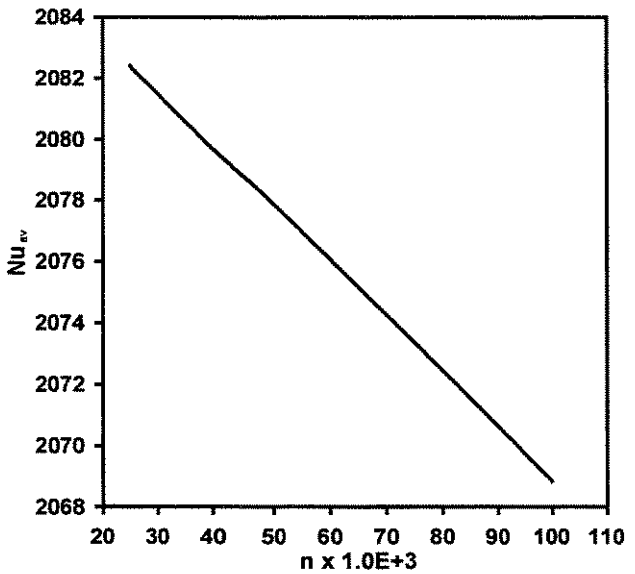

Figura 4.12: Variação do número de Nusselt médio na superfície da placa com o número inicial dos cristais de gelo incluindo difusão axial para h = 0.5 mm, Ste = 0.05 e d_{in} = 0.025 mm.

Capítulo 5

Modelo Generalizado de Crescimento de Cristais de Gelo num Filme Descendente

5.1 Introdução

A mistura de água e cristais de gelo representa uma suspensão líquido-sólido de natureza não comuns. Esta mistura é bastante usada no processamento de alimentos e particularmente no processo de resfriamento de queijos, Gladis (1997). O gelo foi sempre considerado como meio eficiente e barato para usar nas aplicações de engenharia necessitando armazenamento de frio para futura utilização. Entretanto, sua aplicação vasta foi, de modo geral, prejudicada pela ineficiência dos sistemas disponíveis para geração de gelo. Na corrida interminável de conservar a energia e melhorar sua utilização, um certo esforço científico foi destinado a fabricação eficiente do gelo. Como conseqüência, este esforço e os resultados associados, novas técnicas que utilizam mistura de gelo fino e água numa forma pastosa foram pensadas para aplicação de conforto térmico e controle ambiental. Tipicamente em centrais de refrigeração e condicionamento ambiental, o efeito refrigerativo é produzido num equipamento central de onde a água gelada é distribuída através de uma rede de tubulação para os pontos de utilização. O uso de mistura água e gelo pode reduzir significativamente o fluxo de massa necessário . Entretanto, o conhecimento das características hidrodinâmicas e térmicas de sistemas de mistura são essenciais para a produção de "*slurry*" e a implementação efetiva do conceito e do sistema.

Recentemente, o conceito de "*slurry de gelo*", tem sido viabilizado graças aos avanços nas técnicas dinâmicas de formação de gelo sobre superfícies metálicas e frias, formação de

gelo em caixa pressurizada e o processo dinâmico de formação de gelo pelo uso de água super resfriada. Recentemente, soluções baseadas em água foram sugeridas para a implementação e uso na geração de cristais de gelo nos filmes descendentes para aplicação em armazenamento de energia térmica juntmente com o modelo simplificado, para prever a taxa de crescimento de cristais de gelo, (Stewart et al. 1993).

A maioria dos estudos iniciais e experimentos com formação dinâmica e contínua de gelo, indicam seu potencial como soluções promissoras nas aplicações em armazenamento térmico como meio de transporte e armazenamento. Os dados necessários para projetar sistemas de forma satisfatória são incompletos ou simplesmente não existem. De modo geral, a falta de procedimento geral e sistemático nos estudos anteriores, dificulta a interpretação dos resultados, aliado a isto, o fato que os estudos antecedentes visavam o aspecto prático do problema, e sua aplicação em sistemas de armazenamento, deixando de lado o aspecto fundamental da modelagem do problema de produção de gelo, ou seja o acoplamento das equações de calor, massa e momento. Para resolver este problema, um modelo teórico generalizado que descreve características hidrodinâmicas do filme descendente de cristais de gelo em formação foi desenvolvido. Baseado neste modelo, soluções numéricas válidas para escoamento totalmente desenvolvido foi analisado nos capítulos anteriores.

5.2 Formulação do Modelo.

A Figura 5.1 mostra um diagrama esquematizado do modelo de filme descendente ao longo de uma superfície sólida. Para formular o modelo várias simplificações foram adotas:

i. o filme descendente é laminar, incompressível e sem ondas na superfície;

ii. o escoamento é Newtoniano, que é aproximadamente o caso quando a concentração dos cristais de gelo é menor que 45%, (Rutgers, 1962). Casos de alta concetração, em que os efeitos não Newtonianos são importantes, não foram considerados neste modelo pelo fato de que as informações e as correlações da viscosidade e da condutividade térmica para estas concentrações não são disponíveis;

iii. os cristais de gelo são esféricos e inertes;

iv. existe um equilíbrio termodinâmico entre os cristais e a solução;

v. as partículas de gelo (cristais) não aderem a superfície sólida;

vi. as propriedades termofísicas da mistura são dependentes da concentração dos cristais de gelo que varia localmente ao longo do filme;

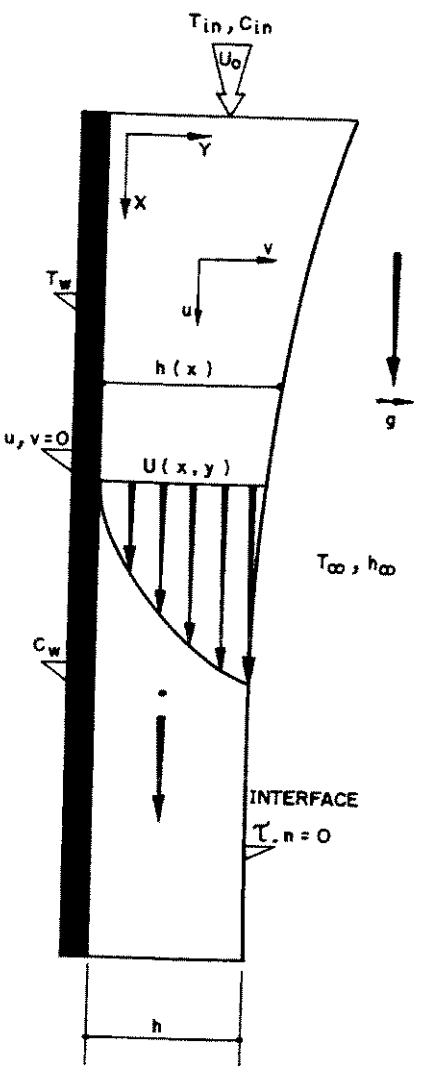

Figura 5.1:Modelo físico generalizado de filme livre descendente.

Baseado nestas considerações simplificadoras, as equações de conservação da massa, momento, energia e fases em regime permanente, são:

Continuidade:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v})}{\partial \overline{y}}=0 \tag{5.1}$$

Momento-em x

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{u})}{\partial \overline{y}}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}\right)+\overline{\rho}\,g \tag{5.2}$$

Momento-em y

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{u})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{v})}{\partial \overline{y}}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(\mu\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\mu\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}}\right) \tag{5.3}$$

Energia:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{T})}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{T})}{\partial \overline{y}}=\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(\frac{k_e}{c_e}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\frac{k_e}{c_e}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}}\right)+S \tag{5.4}$$

Fases:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{u}\,C)}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{C})}{\partial \overline{y}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial \overline{C}}{\partial \overline{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\rho D\frac{\partial \overline{C}}{\partial \overline{x}}\right) \tag{5.5}$$

as condições de contorno associadas com as equações são:

equações do momento:

$$\overline{u}=\overline{v}=0\ ;\overline{y}=0 \tag{5.6}$$

$$\overline{u}=\overline{u}_0,\quad \overline{v}=0\quad ;\overline{x}=0 \tag{5.7}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}}\right)_{\overline{y}=h(x)}=0 \tag{5.8}$$

onde a Equação 5.8 indica a tensão de cisalhamento nula na superfície livre do filme descendente.

equação da energia

$$T(\bar{x},0) = T_w \tag{5.9}$$

$$T(0,\bar{y}) = T_m = T_{in} \tag{5.10}$$

$$k_e \frac{\partial T(\bar{x},h)}{\partial \bar{y}} = h_\infty \left(T(\bar{x},h) - T_\infty \right) \tag{5.11}$$

que despreza as perdas ou ganhos por radiação e evaporação, mas admite ganhos ou perdas convectivas na superfície livre do filme descendente.

equações das fases:

Como a formação de cristais de gelo depende da temperatura de geração na parede e também da temperatura inicial na entrada, as condições de contorno na superfície sólida e na superfície livre do filme foram formuladas usando conservação de energia local nos volumes de controle adjacentes a estas superfícies. Uma pesquisa atenta à literatura não trouxe qualquer informação sobre a especificação de condições de contorno.

A Figura 5.2 mostra os volumes de controle de fronteira em uma seção transversal qualquer do filme descendente e os fluxos de calor associados entrando e saindo do volume de controle. O balanço de energia nos volumes de controle adjacentes à placa é feito entre a fluxo de calor na parede q_w, e a soma das parcelas devidas ao resfriamento sensível do filme, q_s e a fluxo de calor latente devido ao crescimento do cristal, q_L. A equação resultante é:

$$q_w = q_s + q_L. \tag{5.12 a}$$

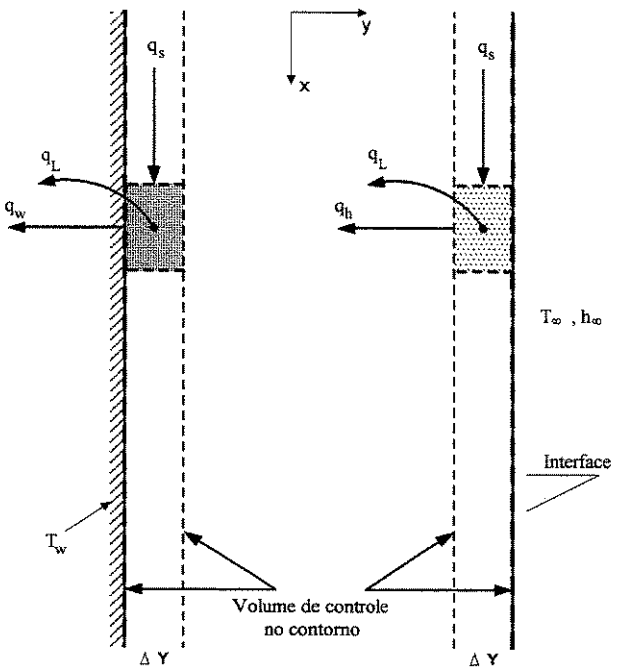

Figura 5.2 Volumes de controle mostrando os fluxos envolvidas no balanço de energia.

Onde,

$$q_w = \bar{k}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}; \quad q_s = \dot{m}_{mist}\, c_f \left(\overline{T}_{x,2} - \overline{T}_{in}\right); \quad q_L = \dot{m}_{mist}\, h_{if}\, \overline{C}_{x,2}$$

e

$$\overline{C}_{x,2} = \frac{\bar{k}}{\dot{m}_{mist} h_{if}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - \frac{c_f}{h_{if}} \left(\overline{T}_{x,2} - \overline{T}_{in}\right) \qquad (5.12\ b)$$

A condição de contorno na superfície livre do filme é formulada através de um balanço de energia entre o calor transferido por convecção q_h , com um certo coeficiente de transferência de calor h_∞, e a soma das fluxos devido ao resfriamento sensível do filme, q_s , e o calor latente, q_L, devido ao crescimento do cristal. A equação resultante é:

$$q_h = q_s + q_L \qquad (5.13\ a)$$

Onde,

$$q_h = h_\infty\left(\overline{T}_{x,h} - \overline{T}_\infty\right); \quad q_s = \dot{m}_{mist}\, c_f \left(\overline{T}_{x,L2} - \overline{T}_{in}\right); \quad q_L = \dot{m}_{mist}\, h_{if}\, \overline{C}_{x,L2}$$

e

$$C_{x,L2} = \frac{h_\infty}{\dot{m} h_{if}}\left(T_{x,h} - T_\infty\right) - \frac{c_f}{h_{if}}\left(T_{x,h} - T_\infty\right) \qquad (5.13\ b)$$

O termo fonte, S, na equação da energia representa a energia liberada na forma de calor latente pelos cristais de gelo como conseqüência do processo de mudança de fase. Durante a mudança de fase, o calor liberado pelos cristais é igual ao calor transferido por convecção entre os cristais assumidos esféricos e a solução circundante. O balanço de energia entre os cristais de gelo e a solução pode ser escrito como:

$$S = \overline{\rho}\,\overline{u}\, h_{if} \nabla \cdot C = A_p h_d \left(\overline{T}_m - \overline{T}\right) \qquad (5.14)$$

Nesta equação , h_{if}, é o calor de fusão da solução, A_p, é a área de superfície dos cristais de gelo, h_d, é o coeficiente de troca de calor e T_m é a temperatura de congelamento da solução que é assumido como funçào da concentração dos cristais de gelo, segundo Stewart et al. (1993), como:

$$T_m = a_0 + a_1 C + a_2 C^2 . \qquad (5.15)$$

onde os coeficientes a_o, a_1 e a_2 dependem do soluto específico utilizado na solução.

Na equação da difusão de massa, o termo fonte é nulo. Isto pode ser explicado pelo fato que como o resultado do super resfriamento, um processo de congelamento seletivo inicia na região significa que na vizinhança da superfície do cristal de gelo existirá um acúmulo de gelo resultando no crescimento do cristal de gelo que significa que existe uma transferência local de massa a partir de um componente único da soluçào,(a custa de outro componente da mistura) para a superfície do cristal de gelo. Como resultado, a massa total dentro do volume de controle fica inalterada e a massa da mistura é conservada.

5.2.1 Variação das Propriedades da Mistura

Sendo que as propriedades termofísicas dos cristais de gelo e de fluído são diferentes, as propriedades da mistura devem ser calculadas considerando as propriedades individuais dos componentes. A densidade e o calor específico da mistura são avaliadas como segue:

$$\rho = \rho_s(C) + (1-C)\rho_f \tag{5.16}$$

$$c_e = c_s(C) + (1-C)c_f \tag{5.17}$$

onde os subescritos *s* e *f* referem-se às fases do sólido e do líquido, respectivamente, enquanto o subescrito, *e*, representa o valor efetivo. No caso de um fluído Newtoniano de fase única, a queda de pressão é uma função linear da viscosidade do fluído. Entretanto, as características do escoamento da mistura podem desviar ligeiramente do comportamento do escoamento de fase única, (Ahuja , 1975). A presença de partículas no escoamento provoca aumento da viscosidade da mistura em relação ao fluído e portanto deve-se investigar a correlação entre a viscosidade da mistura e concentração dos cristais de gelo. Vand (1945) apresentou uma correlação na forma

$$\frac{\mu_b}{\mu_f} = (1 - C - 1.18C^2)^{-2.5} \tag{5.18}$$

válida para concentração menor do que 45% e diâmetro médio da partícula de até 0,4 mm, conforme Rutgers (1962). Como resultado a viscosidade cinemática efetiva é:

$$\nu_e = \frac{\mu_b}{\rho} \tag{5.19}$$

onde ρ é a densidade da mistura.

O coeficiente de difusão de massa da mistura é relacionado com a concentração de cristais de gelo conforme Bennon et al. (1987) pela equação:

$$\overline{D} = \overline{D}_f C \tag{5.20}$$

A condutividade térmica da mistura é um valor efetivo que inclui micro convecção por causa do movimento das vorticidades do fluído em torno da partícula de gelo e depende da concentração de cristais de gelo e do número de Peclet da partícula, P_{ep}. É conhecido que a taxa de troca de calor num sistema de duas fases é frequentemente maior que no caso de sistema de uma única fase nas condições de escoamento comparaveis. Vários mecanismos podem provocar este aumento, como efeitos de calor latente, efeitos associados com as partículas, bolhas e micro convecção, aumento o gradiente da velocidade perto da parede e a presença da vorticidade turbulenta. Usualmente esses mecanismos não podem ser separadamente tratados. Entretanto, sendo que os campos de cisalhamento são presentes na maioria dos escoamentos bifásicosa, micro convecção induzida pelo cisalhamento é uma característica comum. Entretanto, Sohan e Chen (1981), concluiram que os fundamentos básicos de transporte micro convectivos no sistema bifásico de fluído-sólido deve ser similar ao caso de sistema bifásico fluído-fluído. Isto deve ser particularmente verdadeiro se a fase é descontínua no sistema fluído-fluído. Consiste de pequenas partículas que se comportam, de modo geral, como esferas sólidas com aparentemente não deslizamento nos contornos. Maxwell (1954), apresentou esta relações para a condutividade térmica da mistura de uma suspensão estática diluída.

$$\frac{k_b}{k_f} = \frac{2 + \frac{k_p}{k_f} + 2C\left(\frac{k_p}{k_f} - 1\right)}{2 + \frac{k_p}{k_f} - C\left(\frac{k_p}{k_f} - 1\right)} \tag{5.21}$$

Por causa do aumento criado pelas interações partículas/fluído, a condutividade térmica efetiva de um escoamento de mistura é maior que a previsão dada pela Equação 5.21. Leal (1973), estudou o aumento da condutividade térmica numa suspensão diluída para baixo valor do número de Peclet de partícula e mostrou a seguinte relação para

suspensão cuja condutividade térmica de partícula de fluído são iguais, como apresentados na equação seginte:

$$\frac{k_e}{k_b} = 1 + 3.0(C)Pe_p^{1.5} \tag{5.22}$$

onde Pe_p é o número de Peclet da partícula definido como:

$$Pe_p = \frac{e\,d^2}{\alpha_f} \tag{5.23}$$

onde e é a taxa de cisalhamento, d é o diâmetro de partícula, e α_f é a difusividade térmica de fluído. O número de Peclet definido pela Equaçào 5.23 representa a razão dos efeitos da convecção causada pelas pequenas vorticidades/condução.

Nos altos valores do número de Peclet, os efeitos de início de convecção representam um mecanismo adicional de transporte ao transporte molecular assim, provocando aumento da condutividade aparente. Este fenômeno existe claramente em todos os escoamentos bifásico dispersos e pode certamente ser o caso em sistemas bifásicos com mudança de fase. Nai e Acrivos (1976) aplicaram um modelo similar ao escoamento de suspensões diluído para alto número de Peclet e apresentaram a seguinte relação:

$$\frac{k_e}{k_b} = 1 + A(C)Pe_p^{1/11} \tag{5.24}$$

onde A é uma constante experimental.

Sohan e Chen (1981) conduziram experimentos para médios valores de número de Peclet e propuseram a correlação da forma:

$$\frac{k_e}{k_b} = F(C)\,Pe_p^m \qquad (5.25)$$

onde F é uma função a ser determinada.

Baseado nos resultados apresentados, a correlação geral da forma usada no presente estudo é:

$$\frac{k_e}{k_b} = 1 + B(C)\,Pe_p^m \qquad (5.26)$$

Para as constantes B e m, que dependem do número de Peclet, os valores de 1,8 e 0,18 respectivamente foram adotados conforme Stewart et al. (1993). A Tabela 5.1 mostra um resumo das correlações empíricas da condutividade térmica de misturas em diferentes condições de escoamento.

Tabela 5.1: Correlações empíricas para calcular a condutividade térmica efetiva da mistura , cristais de gelo e fluido do trabalho (*ice slurry*).

Condutavidade efetiva	Coeficiente B	Exponente m	Faixa de Pe_p, ou Re_p	Fonte
$\frac{k_e}{k_b} = 1 + B\,C\,Pe_p^{\,m}$	3.0	1.5	$Pe_p \leq 1.0$	Leal (1973)
$\frac{k_e}{k_b} = 1 + B\,C\,Pe_p^{\,m}$	Calculdo numericamente	1/11	$1.0 \leq Pe_p \leq 300$	Near et al. (1976)
$\frac{k_e}{k_b} \propto Pe_p^{\,m}$	Não encontrado	1/2	$300 \leq Pe_p \leq 2000$	Sohan et al. (1984)
$\frac{k_e}{k_b} = 1 + B\,(C\chi)^m$; $\chi = Pe_p\,Re_p\,(R/a)^2\,L/2\,a$	6.6×10^{-12}	1.7	$0.05 \leq \chi \leq 1.0$	Ahuja (1975)
$\frac{k_e}{k_b} = 1 + B\,C\,Pe_p^{\,m}$	1.8	0.18	$1.0 \leq Pe_p \leq 300$	Charunyakorn et al. (1991)

5.3 Discretização e Método de Solução

Para apresentar as equações governantes na forma adimensional, foram adotadas as seguintes variáveis adimensionais.

$$x = \frac{\overline{x}}{h\,Re\,Pr};\quad y = \frac{\overline{y}}{h};\quad u = \frac{\overline{u}}{u_0};\quad v = \frac{\overline{v}h}{\alpha};\quad p = \frac{\overline{p} - p_0}{\rho u_0^2}$$

$$k = \frac{\overline{k}}{k_0};\quad \mu = \frac{\overline{\mu}}{\mu_0};\quad \rho = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0};\quad D = \frac{\overline{D}}{D_0};\quad c = \frac{\overline{c}_e}{c_0} \tag{5.27}$$

$$\phi = \frac{T - T_w}{T_{in} - T_w};\quad \Phi = \frac{\overline{C}}{C_\infty} \tag{5.28}$$

onde o subscrito, 0, indica que os valores são analisados na entrada (valores de referência).

As equações de conservação e as condições de contorno associadas podem ser escritas em termos das novas variáveis adimensionais na forma:

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{5.29}$$

x- Momento:

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(Pr\,\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{Pe^2\,Pr}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\rho Pr \tag{5.30}$$

y- Momento:

$$\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(Pr\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{Pe^2\,Pr}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{5.31}$$

Energia

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{Pe^2}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{1}{c}\frac{1}{ste}\rho u\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{5.32}$$

Fases

$$\frac{\partial(\rho u \Phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v \Phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left((Sc\rho D)\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Sc}{Pe^2}\rho D\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \tag{5.33}$$

Condições de contorno

$$u = v = 0 \;\; ; y = 0 \tag{5.34}$$

$$u = 1; \quad v = 0 \quad ; x = 0 \tag{5.35}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=1}=0 \tag{5.36}$$

$$\phi(x,0)=0 \tag{5.37}$$

$$\phi(0,y)=1 \tag{5.38}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=1}=\frac{h\,h_\infty}{k}(\phi-\phi_\infty) \tag{5.39}$$

$$\Phi(x,0) = \mathrm{Ste}\left[\frac{k}{\dot{m}\, c_f\, h}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \left(\phi_{x,2} - \phi_{in}\right)\right] \tag{5.40}$$

$$\Phi(0,y) = \Phi_{in} \tag{5.41}$$

$$\Phi(x,y=1) = \mathrm{Ste}\left[\frac{h_\infty}{\dot{m} c_f}\left(\phi_{x,h} - \phi_\infty\right) - \left(\phi_{x,L2} - \phi_{in}\right)\right] \tag{5.42}$$

As equações adimensionais e as condições de contorno associadas são discretizadas seguindo o método de Patankar (1980). Neste método o domínio computacional é dividido em número de volumes de controle com os nós localizados no centro geométrico de cada volume de controle. Na grade computacional as grandezas escalares como temperatura, concentração e pressão são avaliadas nos centros dos volumes de controle principais enquanto que as variáveis primitivas como as velocidades *u* e *v* são calculadas nas interfaces dos volumes de controle. Este procedimento resulta em uma solução realística.

O método de discretização é iniciado colocando cada uma das equações governantes na forma geral:

$$\nabla(\rho u\theta) = \nabla \cdot \nabla(\Gamma\theta) + S \tag{5.43}$$

onde a variável, θ, pode representar os componentes de velocidade, temperatura, e concentração. S e Γ são os termos fonte e o coeficiente de difusão associados as variáveis escalares respectivamente. O esquema de discretização de Patankar (1980) é usado novamente para discretizar as equações governantes de forma similar ao que foi feito no capítulo 3 e 4 e mostrado em maiores detalhes no apêndice (A). Somente no presente caso as propriedades termofísicas variam em função da concentração dos cristais de gelo. Como foi feito anteriormente, as equações básicas podem ser colocadas em termos dos fluxos totais, convectivo e difusivo ou seja:

$$J_x + J_y = s \tag{5.44}$$

onde os fluxos totais de energia nas direções *x* e *y* são respectivamente

$$J_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\phi - \Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$
$$J_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\phi - \Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \tag{5.45}$$

de forma similar os fluxos totais das fases nas direções x e y respectivamente:

$$J_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\Phi - \Gamma^{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$$
$$J_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\Phi - \Gamma^{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \tag{5.46}$$

A integração da Equação 5.44 sobre o volume de controle resulta em

$$J_e - J_w + J_n - J_s = \overline{S}\,dx\,dy \tag{5.47}$$

A equação da continuidade é integrada sobre o mesmo volume de controle para obter

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \tag{5.48}$$

onde os F's são as taxas de fluxo de massa através do volume de controle, ou podemos escrever:

$$F_e = (\rho u)_e dy$$

$$F_w = (\rho u)_w dy$$

$$F_n = (\rho u)_n dx \tag{5.49}$$

$$F_s = (\rho u)_s dx$$

combinando as Equações 5.47 a 5.49 podemos escrever a forma final discretizada

$$a_s u_s = a_{ss}\, u_{ss} + a_{ns}\, u_{ns} + a_{e,es}\, u_{e,es} + a_{w,ws}\, u_{w,ws} + A_s \left(P_p - P_s\right) + b \tag{5.50}$$

$$a_e v_e = a_{ee} v_{ee} + a_w v_w + a_{s,se} v_{s,se} + a_{n.ne} v_{n,ne} + A_e \left(P_p - P_E\right) \tag{5.51}$$

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \tag{5.52}$$

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S \tag{5.53}$$

onde os valores de coeficientes, a, das Equações 5.52 a 5.53 são definidos como:

$$a_E = D_e\, A\left(|P_e|\right) + [\![-F_e, 0]\!]$$

$$a_w = D_w\, A\left(|P_w|\right) + [\![F_w, 0]\!]$$

$$a_N = D_n\, A\left(|P_n|\right) + [\![-F_n, 0]\!] \tag{5.54}$$

$$a_S = D_s\, A\left(|P_s|\right) + [\![F_s, 0]\!]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N$$

os valores de a para as equações de momentum discretizadas são definidos para u e v respectivamente como:

$$
\begin{aligned}
a_{ss} &= D_S A(|P_S|) + [[-F_S, 0]] \\
a_{ns} &= D_P A(|P_P|) + [[-F_P, 0]] \\
a_{e,es} &= D_{es} A(|P_{es}|) + [[-F_{es}, 0]] \\
a_{w,ws} &= D_{ws} A(|P_{ws}|) + [[-F_{ws}, 0]]
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{ee} &= D_E A(|P_E|) + [[-F_E, 0]] \\
a_{w} &= D_P A(|P_P|) + [[-F_P, 0]] \\
a_{n,ne} &= D_{ne} A(|P_{ne}|) + [[-F_{ne}, 0]] \\
a_{s,se} &= D_{se} A(|P_{se}|) + [[-F_{se}, 0]]
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

5.4 Resultados e Discussão

Neste estudo um modelo generalizado foi proposto para prever a taxa de crescimento dos cristais de gelo e os parâmetros associados de troca de calor num filme vertical descendente. Neste modelo foi considerado o desenvolvimento hidrodinâmico na região de entrada e seus efeitos nos campos térmicos e de concentração. Os valores efetivos são usados para correlação das propriedades termofísicas da mistura tais como o calor especifico, a condutividade térmica, a difusividade térmica e a viscosidade cinemática em termos de concentração dos cristais de gelo, e apresentados numa forma adimensional

baseada nos seus valores calculado na temperatura e na concentração iniciais existentes na temperatura de solidificação da solução. A densidade da mistura é aproximada como média mássica ponderada das fases sólidas e líquida. As soluções obtidas expressando as equações de conservação de massa, momento, energia e especies (*cristais de gelo*) numa forma discreta usando o método do volume de controle. As equações discretizadas foram resolvidas simultaneamente usando o algoritmo SIMPLE, no qual as velocidades e as pressões são interligadas pela equação da continuidade. Uma malha deslocada é usada para armazenar os componentes de velocidade nas faces de volume de controle. O conjunto das equações discretizadas resultantes foi resolvido varrendo-se plano por plano nas direções axial e normal. Ao longo de cada plano, o procedimento linha por linha é usado, que é uma combinação de Gauss Seidel e o TDMA. Em cada direção quatro varreduras foram realizadas.

A distribuição da grade utilizada é uniforme em ambas as direções normal e axial, sendo uma malha fina utilizada para garantir uma solução precisa. O tamanho da malha foi variado de 20x20 a 50x50 para otimizar seu tamanho, de modo a garantir resultados independentes do tamanho da malha utilizado. A malha uniforme de 50 x 50 pontos ao longo das direções normal e axial foi verificada como adequada para a faixa de números de Reynolds até 1051, como esta mostrado na Figura 5.3.

Os critérios de convergência são alcançados quando os resíduos normalizados das velocidades, pressão, temperatura e da concentração, dados pelas relações a seguir são alcançados:

$$R_u = \frac{\sum_{\text{Nodes}} \left| a_e u_e - \sum a_{nb} u_{nb} - b_u - A_e (p_p - p_E) \right|}{\sum_{\text{Nodes}} \left| a_e u_e \right|} \leq 10^{-5} \qquad (5.57)$$

para velocidade u

$$R_v = \frac{\sum_{\text{Nodes}} \left| a_n v_n - \sum a_{nb} v_{nb} - b_v - A_n (p_p - p_N) \right|}{\sum_{\text{Nodes}} \left| a_n v_n \right|} \leq 10^{-5} \qquad (5.58)$$

para velocidade v

$$R_p = \sum_{CVs} \left| (u_w - u_e) + (v_s - v_n) \right| \leq 10^{-3} \tag{5.59}$$

para pressão p

$$R_T = \sum_{Nodes} \left| a_p T_p - \sum a_{nb} T_{nb} - b_T \right| \leq 10^{-6} \tag{5.60}$$

para temperatura T

$$R_C = \sum_{Nodes} \left| a_p C_p - \sum a_{nb} C_{nb} - b_c \right| \leq 10^{-6} \tag{5.61}$$

para concentração C

Os resultados das simulações numéricas são apresentadas em termos de perfis de temperatura e concentração adimensionais, número de Nusselt local ao longo da superfície da placa, o grau de resfriamento, o coeficiente global de troca de calor e a variação da taxa de crescimento de cristais de gelo com o número de Stefan e Reynolds. Em cada simulação, a temperatura de entrada foi mantida constante em 271 K, quando a temperatura da placa foi variada na faixa de 263 a 267 K correspondente ao número de Stefan de 0,05 a 0,1. O coeficiente de troca de calor na superfície livre do filme foi mantida constante no valor de 10 W/m °C. O ponto de congelamento da solução, T_m, foi assumido como função polinomial da concentração dos cristais de gelo e foi formulada conforme a curva normalizada de líquido no diagrama de fase do sistema NaCl-H_2O. A temperatura de congelamento decresce com o aumento da concentração na direção do escoamento e próxima da superfície da placa. A medida que o filme descendente da mistura continua escoando sobre a superfície fria, do lado superior para o lado inferior, o diâmetro ou a concentração dos cristais de gelo aumenta com a liberação de calor latente para o fluído em volta deixando atrás uma solução mais concentrada que provoca queda na temperatura chamada o grau de superesfriamento da mistura.

Os resultados são analisados baseados nos efeitos térmicos e hidrodinâmicos combinados sobre o crescimento dos cristais, também o efeito de cristais de gelo sobre a intensificação da propriedades termofísicas que manifestam seus efeitos sobre o coeficiente global de troca de calor, número de Nusselt local na superfície da placa. Mesmo que as

equações governantes e as condições de contorno mostraram quatro parâmetros adimensionais, Re, Pr, Sc, e Ste, somente foi analisado aqui, os efeitos do número de Reynolds e Stefan sobre os campos térmicos e de concentração. Os dois outros parâmetros foram mantidos constantes nos valores de referência para dados de temperatura e concentração iniciais.

Como foi mencionado anteriormente, o objetivo destes experimentos numéricos é de analisar os efeitos de vazão e a temperatura da parede sobre os campos térmicos e da concentração do filme descendente da mistura. Este objetivo foi alcançado investigando separadamente os efeitos de Reynolds e Stefan sobre as distribuições de temperatura e da concentração de cristais de gelo, número de Nusselt local, superesfriamento de fluído e o número de Nusselt da partícula.

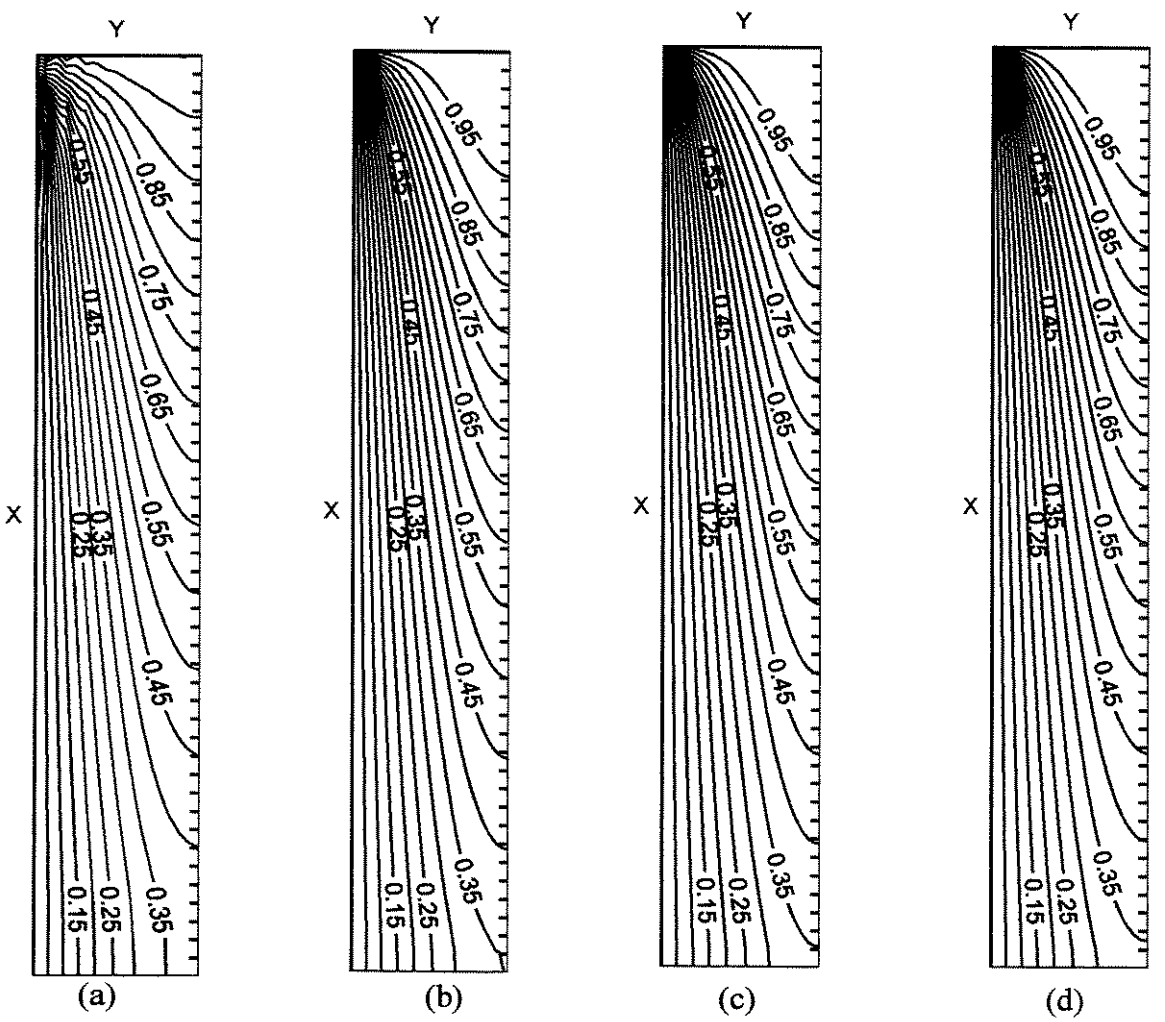

Figura 5.3 O efeito do número do pontos nodais sobre a distribuição da temperatura
(a) 20x20, (b) 35x35, (c) 40x40, (d) 50x50

5.4.1 Efeito do Número de Reynolds

As Figuras 5.4 a 5.12 resumem os resultados mais significativos obtidos neste estudo. A Figura 5.4 mostra a distribuição de temperatura para diferentes condições de escoamento e para um dado número de Stefan. Como pode ser observado, os efeitos de número de Reynolds são significativos e a redução de vazão provoca queda drástica na temperatura. Nos três casos diferentes considerados, a temperatura adimensional do filme decresce ao longo do filme e também próximo da superfície da placa. Esta queda na temperatura é causada pelo resfriamento sensível do filme e também pelo calor latente liberado pelos cristais de gelo para esta dada concentração. Figura 5.4 mostra os efeitos da vazão na distribuição da concentração adimensional dos cristais de gelo no filme descendente. A concentração dos cristais de gelo aumenta ao longo do filme e próximo da superfície da placa por causa da queda de temperatura. Estes resultados da concentração dos cristais de gelo indica que a redução da vazão pode resultar numa mistura mais densa e como conseqüência, provocar intensificação das propriedades termofísicas como calor específico e a condutividade térmica. Estas tendências gerais dos cristais de gelo, podem resultar em benefícios potenciais como redução da vazão de massa e conseqüentemente a potência de bombeamento.

A variação do número de Nusselt local ao longo da superfície da placa é mostrada na Figura 5.5 para diferentes condições de escoamento. Como pode ser observado, para número de Reynolds de até 1051, o número de Nusselt aumenta ao longo da direção do escoamento. Entretanto, para número de Reynolds de 137 a 458, o número de Nusselt aumenta ao longo da direção da superfície até uma distância adimensional X = 0.4 e logo decresce a medida que o escoamento ao longo da placa. Esto ocorre provoca a temperatura do filme se aproxima da temperatura da placa.

A variação do superesfriamento do fluído ($T_m - T$) K com a espessura adimensional do filme, Y, em diferentes posições ao longo da placa é mostrada nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9

calculadas para o mesmo número de Reynolds e o número de Stefan. Como pode ser observado nas três figuras, o superesfriamento é máximo na região próximo á superfície da placa e diminui através da espessura do filme até atingir um valor mínimo próximo da superfície livre. Esta variação do superesfriamento através da espessura do filme para número de Reynolds de 137 é muito forte na região de entrada do filme descendente até cerca de X = 0,5. Após esta distância a variação é moderada e perto da saída, a variação no superesfriamento é muito pouca. Estes perfis de superesfriamento concordam com a concentração local dos cristais de gelo onde uma maior concentração resulta no aumento do superesfriamento qual é influenciado pelo número de Reynolds de escoamento ou simplesmente pela vazão da mistura. Como pode ser observado, o superesfriamento se mantém aproximadamente constante próximo da superfície da placa, para a faixa de número de Reynolds considerada (137 à 1051), entretanto, longe da superfície da placa o comportamento é diferente. Neste caso, o aumento da vazão resultará na redução do grau de superesfriamento enquanto as variações através da espessura do filme são fortes mesmo na região proxima da saída da placa fria.

A medida que a mistura é resfriada abaixo do ponto de congelamento da solução, um processo de congelamento seletivo inicia-se perto da superfície de cristal causando a troca de energia na forma de calor latente entre os cristais e a solução em volta. O coeficiente convectivo de troca de calor em torno de cada cristal na forma de número de Nusselt Nu_p é calculado a partir do modelo condutivo proposto por Chrnyarnoka et al. 1991 baseado na condutividade térmica efetiva que inclui os efeitos da difusão molecular e a turbulência convectiva em torno dos cristais de gelo. Assim, o número de Nusselt da partícula é calculado pela equação:

$$Nu_p = \frac{k_e}{k_b}\frac{2(1-C)}{\left(2-3C^{1/3}+C\right)} \qquad (5.62)$$

Os resultados da Equação 5.62 são demonstrados nas Figuras 5.10 à 5.12 mostrando a variação do número de Nusselt da partícula para diferentes posições X ao longo da direção do escoamento. Como no caso de superesfriamento, o número de Nusselt da

partícula Nu_p na superfície sólida é independente do número de Reynolds, entretanto longe da superfície sólida, as variações são significativas para diferentes condições de escoamento.

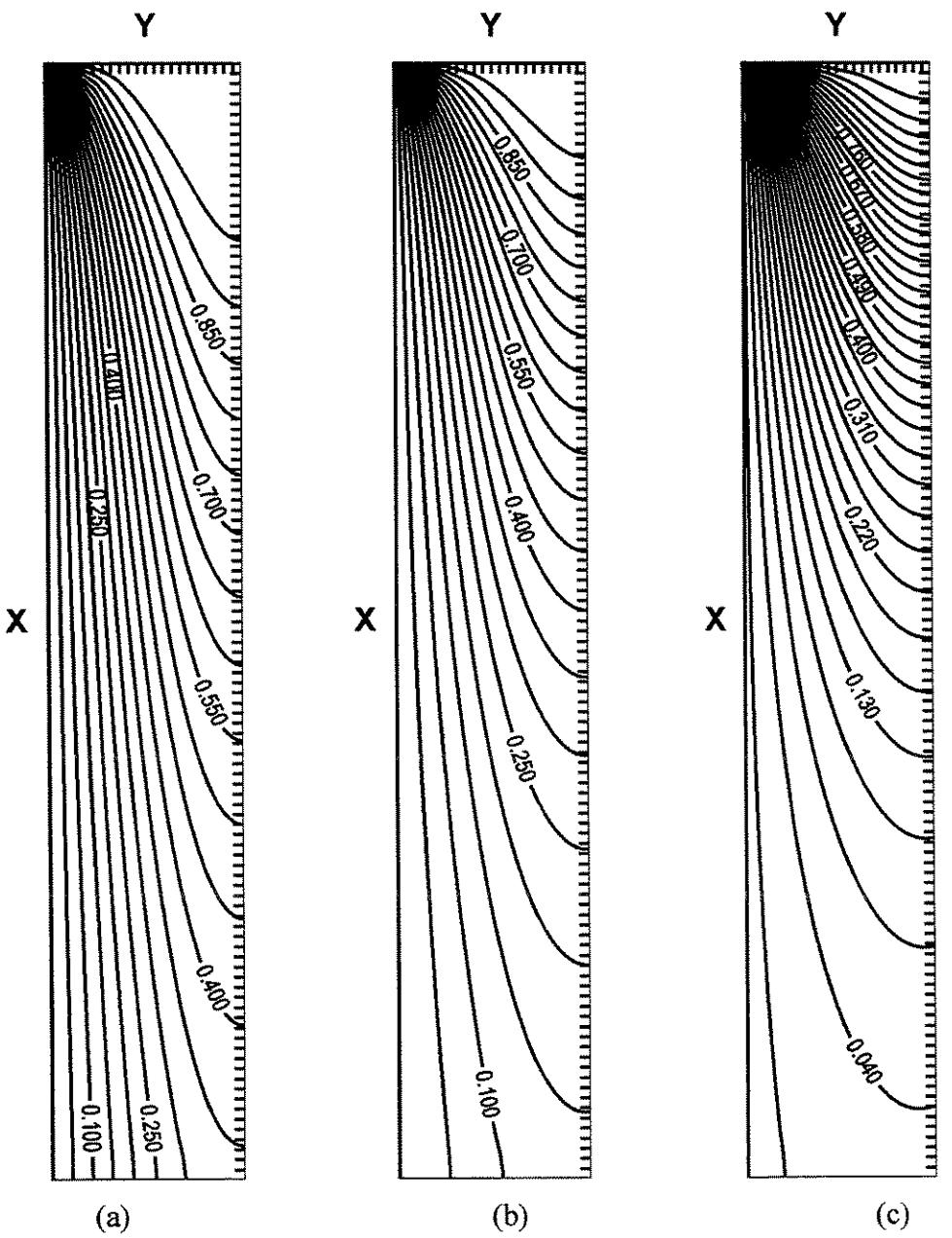

Figura 5.4: Efeito do número de Reynolds sobre a distribuição de temperatura adimensional para o caso de Ste = 0.05, (a) Re = 137; (b) Re = 458; (c) Re = 1051.

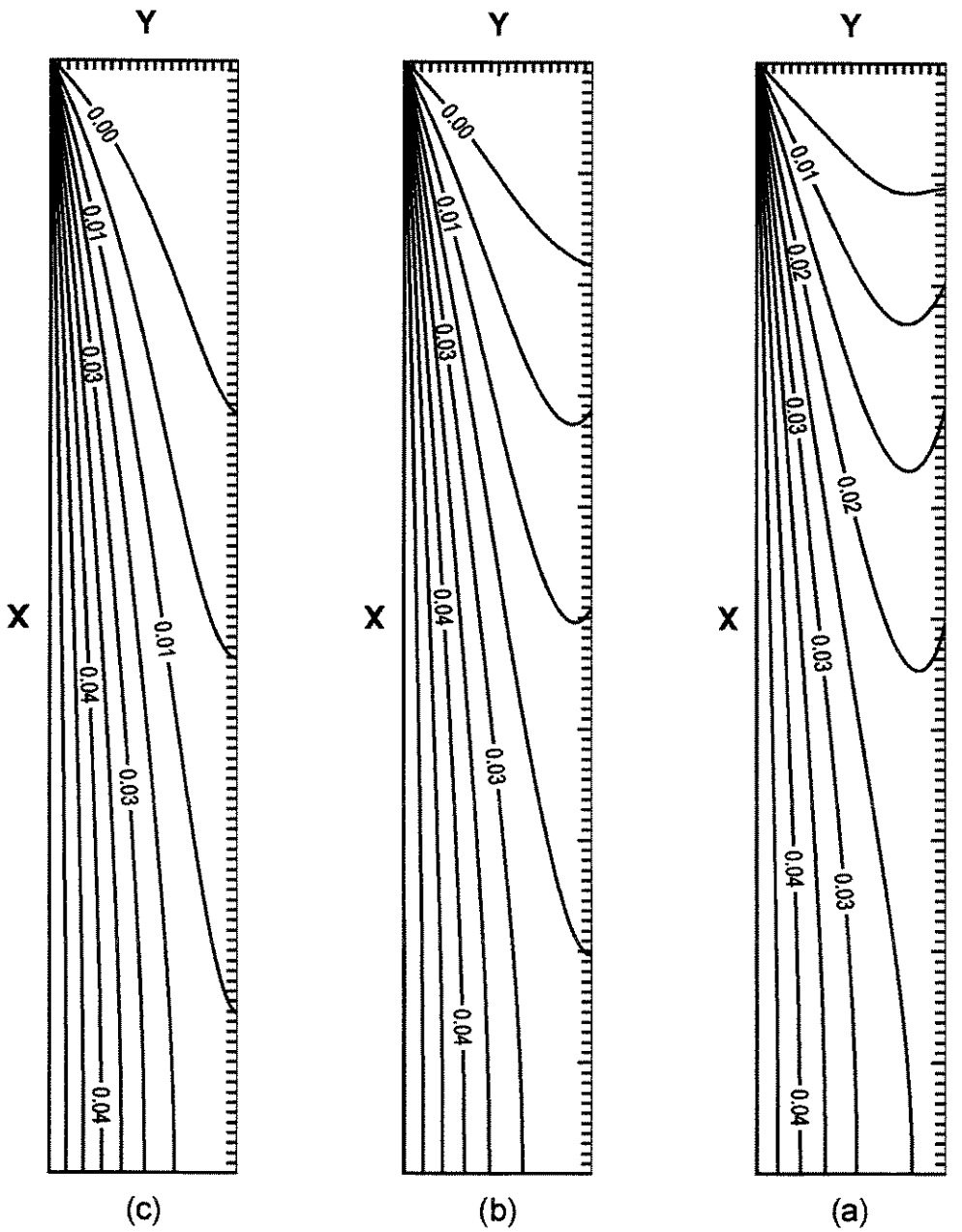

Figura 5.5: Efeito do número de Reynolds sobre a concentração adimensional dos cristais de gelo (a) Re = 137; (b) Re = 458; (c) Re = 1051.

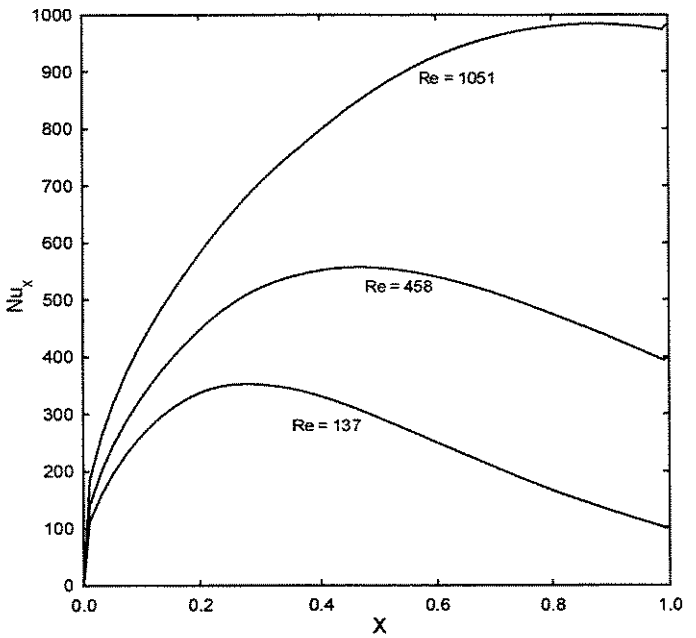

Figura 5.6:Variação do número de Nusselt local à superfície sólida para vários números de Reynolds.

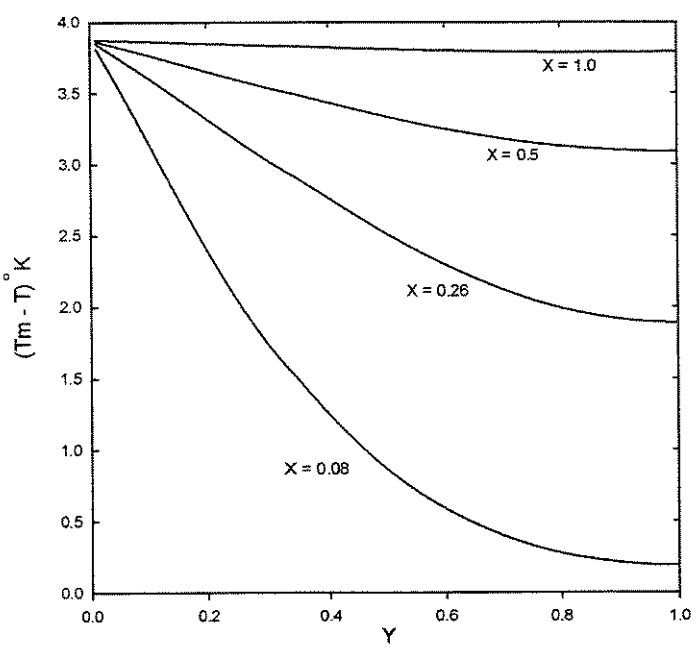

Figura 5.7: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 137.

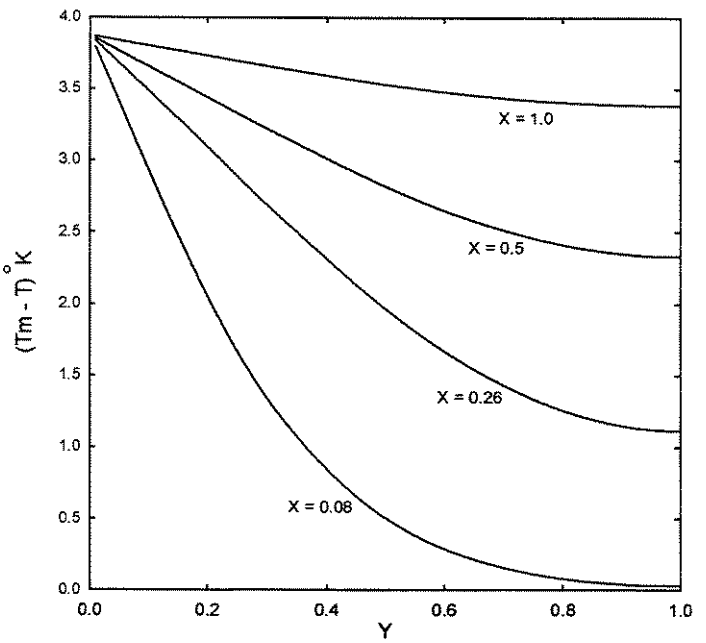

Figura 5.8: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 458.

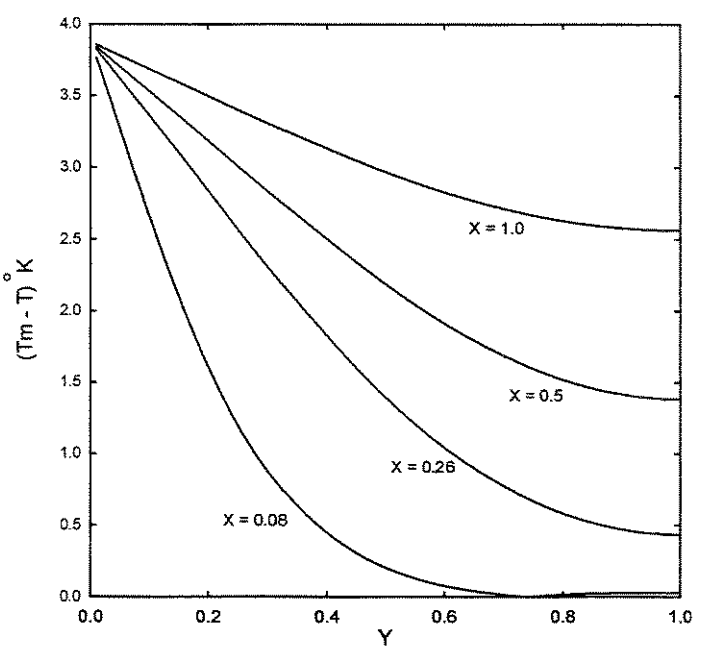

Figura 5.9: Super resfriamento do fluido (T_m –T) K com a profundidade adimensional de filme descendente, Y, em várias posições ao longo do escoamento, para o caso de Reynolds = 1051.

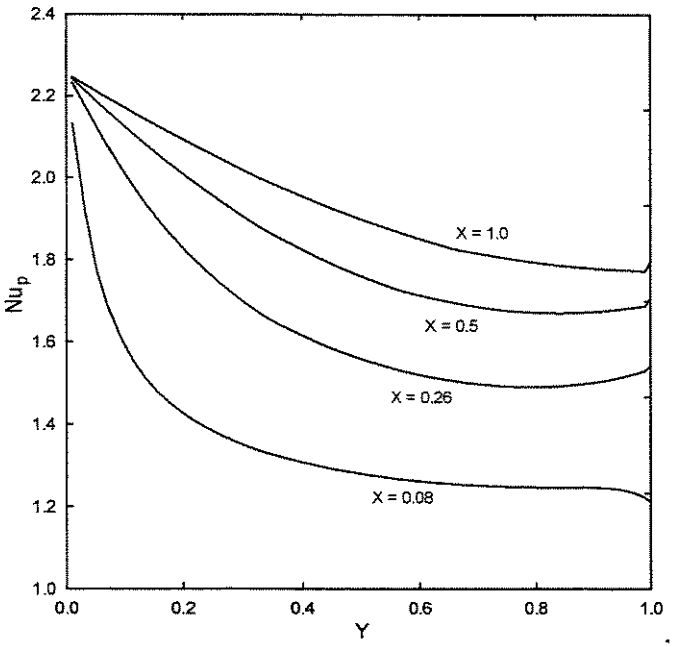

Figura 5.10: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme, Y, em várias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 137.

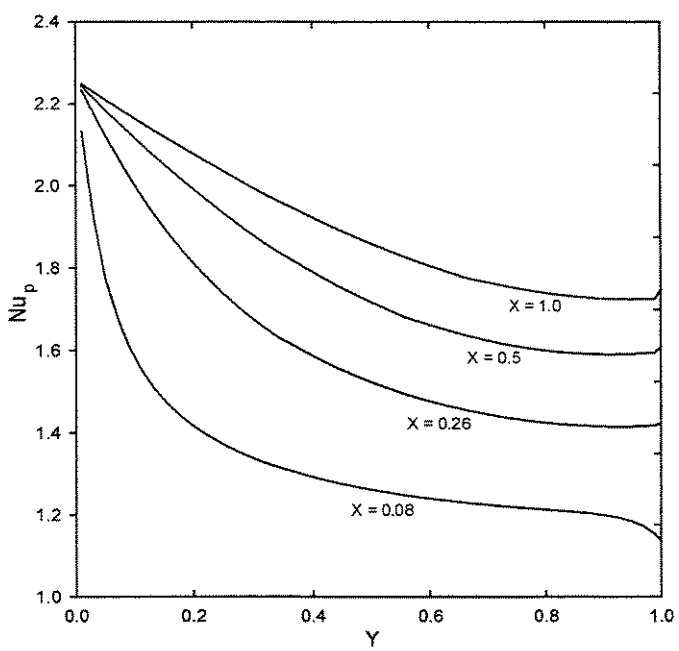

Figura5.11: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme, Y, em várias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 458.

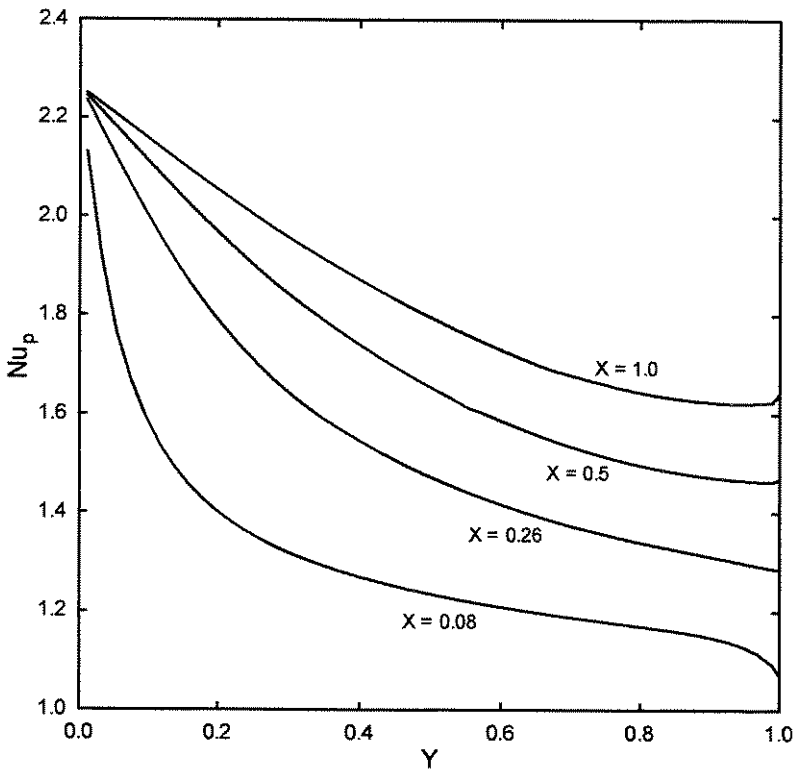

Figura 5.12: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme, Y, a várias posições ao longo do escoamento para o caso de Reynolds = 1051.

5.4.2 Efeitos do Número de Stefan

Para investigar os efeitos do número de Stefan sobre o crescimento de cristais de gelo, simulações numéricas foram realizadas na faixa de número de Stefan de 0,05 a 0,1 correspondente a faixa de temperatura de parede de 263 a 267 K, onde o número de Reynolds foi mantido no valor de 137 para todos os casos. O número de Stefan foi definido como sendo a razão de calor sensível pelo calor latente da mistura, ou seja:

$$\mathrm{Ste} = \frac{c\left(T_{in} - T_{w}\right)}{h_{if}} \tag{5.63}$$

onde, c, é o calor específico da mistura e h_{if} é o calor latente de fusão. É claro da equação (5.63) que a fixar a temperatura da entrada para todas as simulações, o número de Stefan dependerá da temperatura imposta na parede, ou em outras palavras, reduzindo a temperatura da parede provoca aumento no número de Stefan.

As Figuras 5.13 e 5.14 demonstram o efeito de número de Stefan sobre os perfis adimensionais da concentração e da temperatura. Como pode ser observado, reduzindo a temperatura da placa fria (maior número de Stefan), causa aumento da concentração de cristais de gelo e os perfis de temperatura se comportam da maneira contrario a concentração. Estes resultados indicam que o crescimento dos cristais de gelo dependem fortemente da temperatura da parede. Entretanto, outros fatores podem afetar o crescimento do cristais como impurezas e os sais que provocam a queda da temperatura de congelamento da mistura. Estes dois fatores não foram investigados na presente pesquisa e podem ser incluídas em futuros estudos.

Como foi mencionado na introdução, um dos objetivos mais atraentes na utilização da mistura com cristais de gelo, como fluído de trabalho, é a possibilidade de aumentar o coeficiente de troca de calor na superfície sólida. Para isto foi calculado o número de Nusselt local na superfície sólida para diferentes valores de números de Stefan como está representado na Figura 5.15. como pode ser verificado, o aumento do número de Stefan provoca um elevação no coeficiente de troca de calor na superfície sólida. Examinando os resultados da Figura 5.15 verifica-se que este aumento é menor na região de entrada $X \leq 0{,}15$ onde a concentração dos cristais é relativamente baixa.

O superesfriamento da mistura na faixa de número de Stefan considerada é mostrado nas Figuras 5.16 a 5.18. Os dados apresentados mostram o efeito significativo do número de Stefan sobre o grau de superesfriamento. O número de Nusselt da partícula calculado pelo modelo condutivo descrito pela Equação 5.62 e os resultados correspondentes são apresentados nas Figuras 5.19 a 5.21. Os resultados mostram que a variação de Stefan é influencia moderadamente o número de Nusselt da partícula.

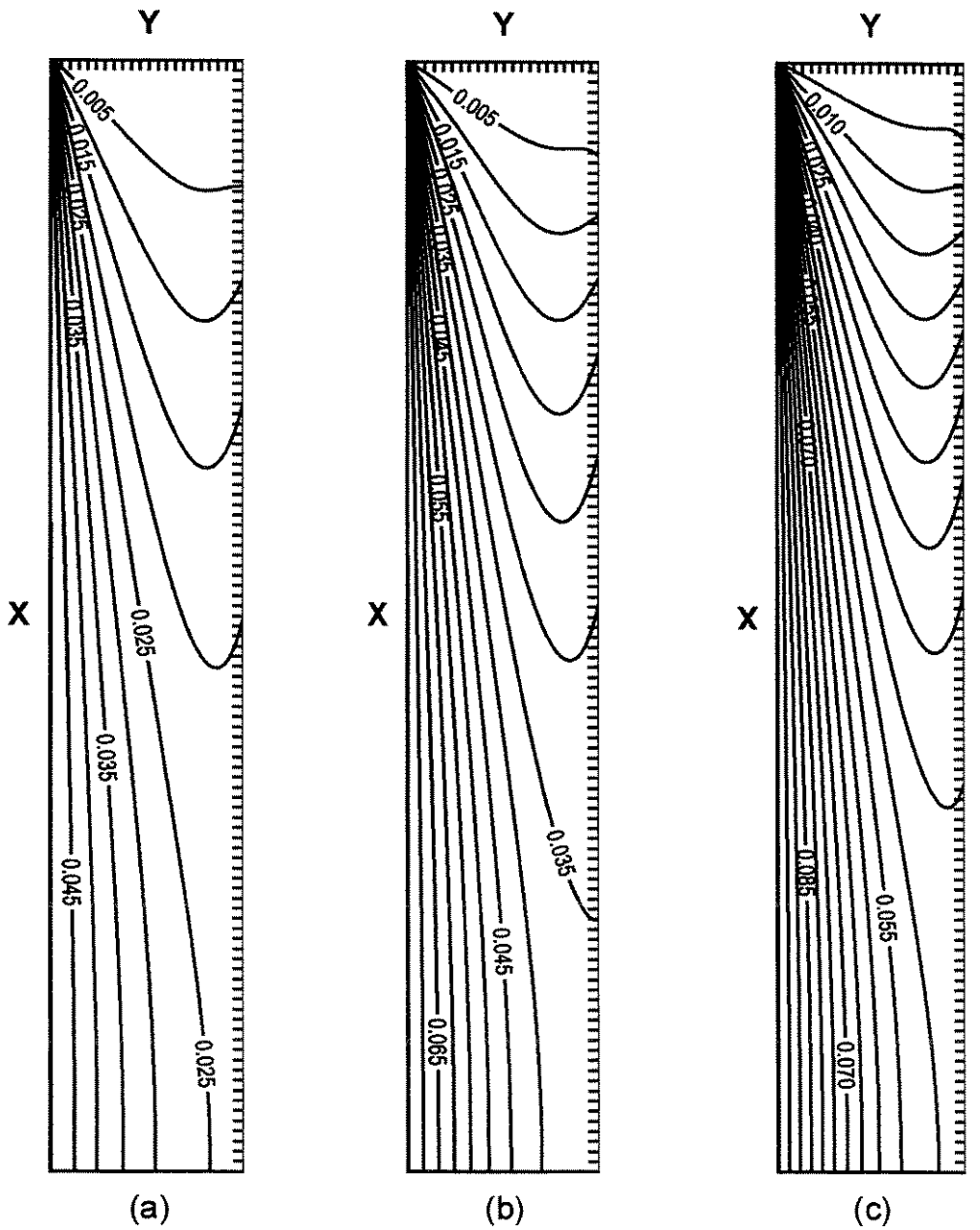

Figura 5.13: Efeito do número de Stefan (temperatura da parede) sobre a distribuição da concentração de cristais de gelo para o caso de Reynolds = 137 (a) Ste = 0.05; (b) Ste = 0.075; (c) Ste =0.1.

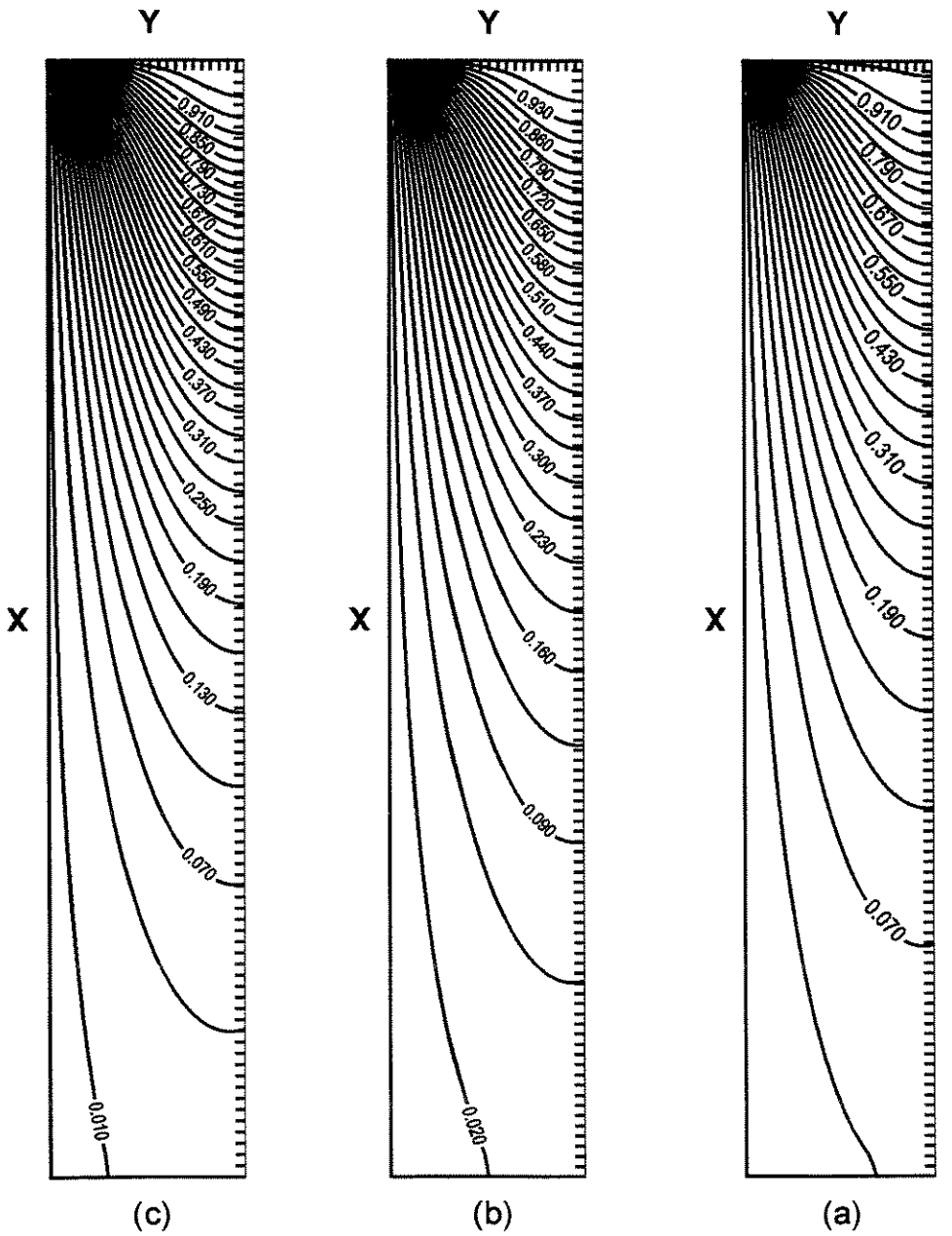

Figura 5.14: Efeito do número de Stefan (temperatura da parede) sobre a distribuição de temperatura adimensional para o caso de Reynolds = 137; (a) Ste = 0.05; (b) Ste = 0.075; (c) Ste =0.1

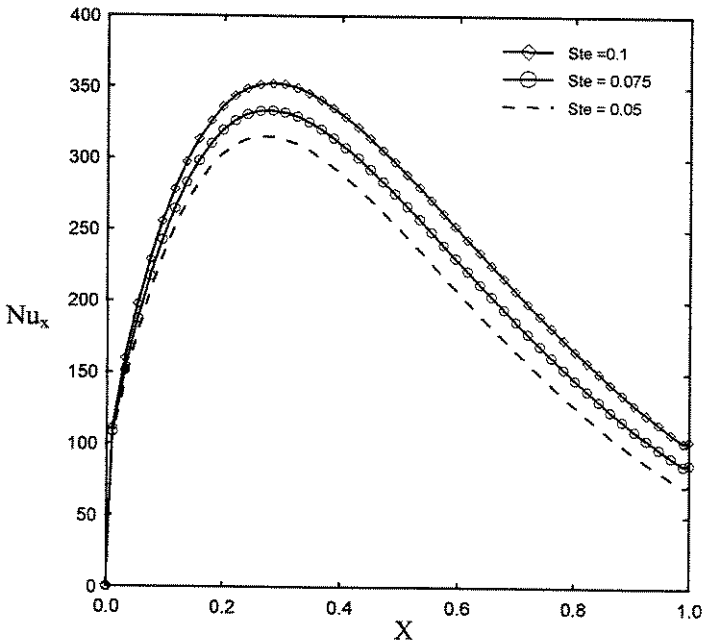

Figura 5.15: Número de Nusselt local ao longo da superficie sólida para o caso especial de Reynolds = 137 e para vários números de Stefan.

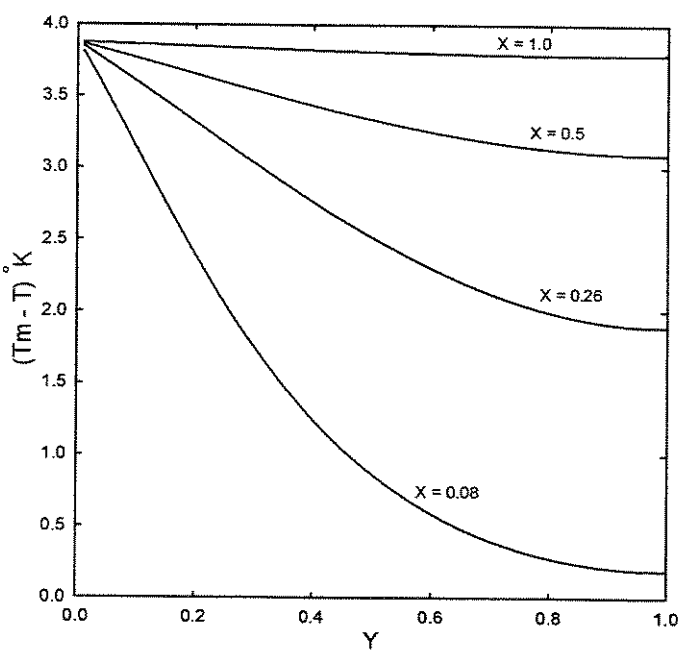

Figura 5.16: Super resfriamento do fluido (T_m – T) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.05 ; Reynolds = 137.

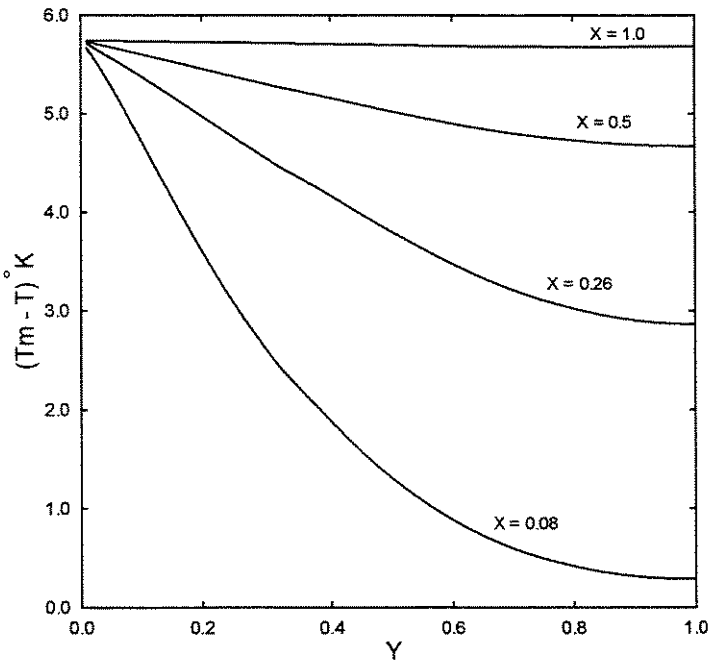

Figura 5.17: Super resfriamento do fluido (T_m – T) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.075 ; Reynolds = 137.

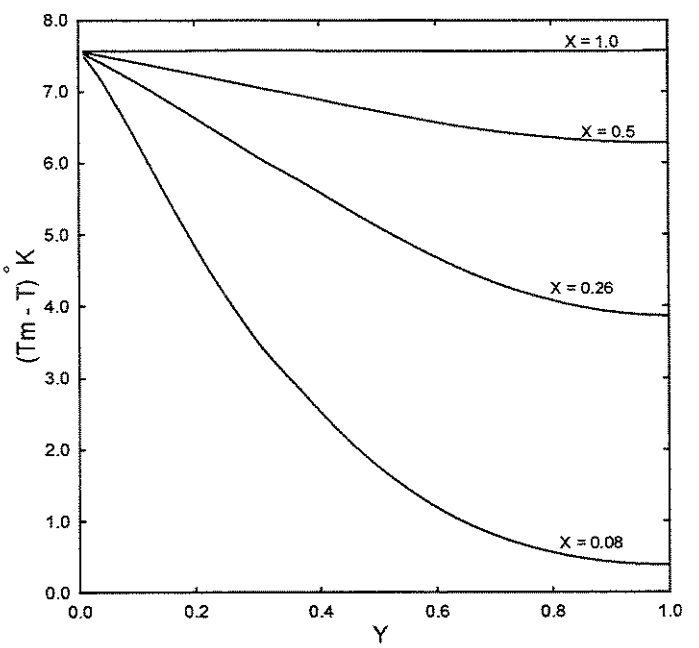

Figura 5.18: Super- resfriamento do fluido (T_m – T) K em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.1 ; Reynolds = 137.

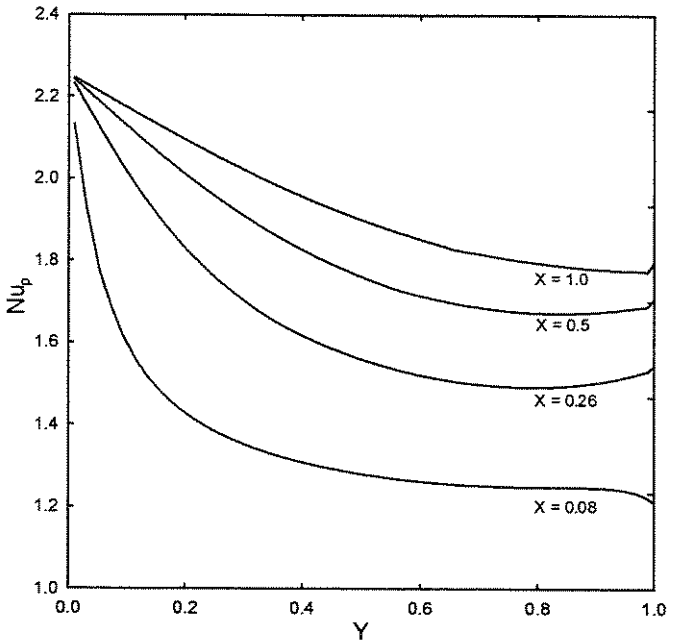

Figura 5.19: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.05.

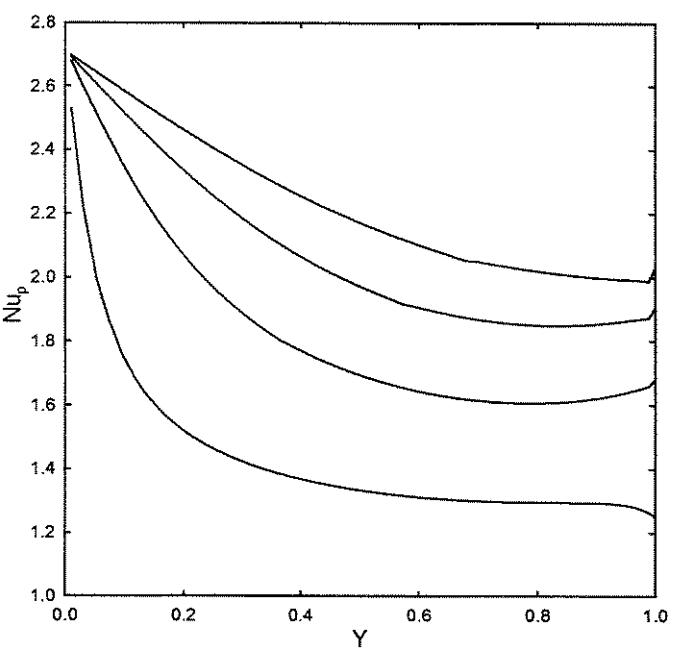

Figura 5.20: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo da direção do escoamento para o Ste = 0.075.

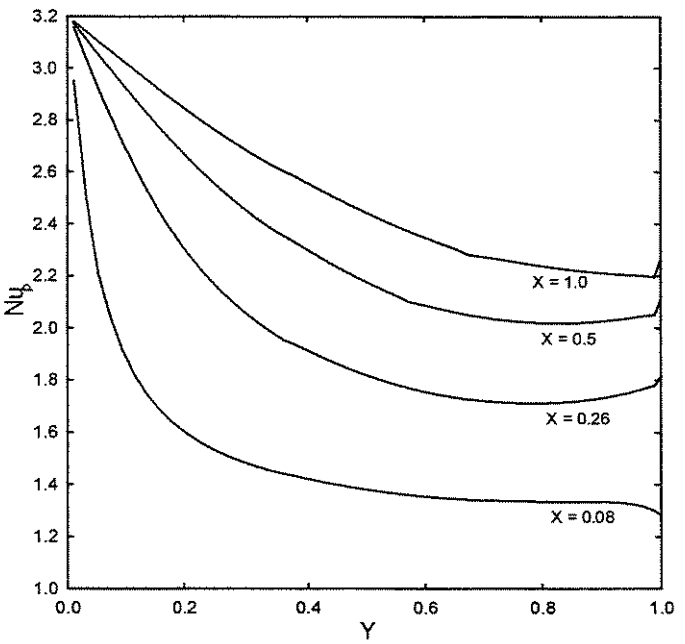

Figura 5.21: Número de Nusselt das partículas (cristais de gelo), Nu_p, com a profundidade adimensional de filme descendente Y, em várias posições ao longo do direção do escoamento para o Stefan = 0.1.

5.4.3 Efeitos Combinados dos Números de Reynolds e Stefan

Para investigar os efeitos combinados de números de Stefan e de Reynolds sobre a taxa de crescimento dos cristais e o coeficiente global de troca de calor, simulações numéricas foram realizadas dentro da faixa dos parâmetros adimensionais citados anteriormente. Figura 5.22 mostra a variação da taxa de crescimento dos cristais com o número de Stefan para diferentes valores do número de Reynolds. Da figura pode verificar que a taxa de crescimento aumenta monotonicamente com o número de Stefan para qualquer valor de número de Reynolds, entretanto, os dados mostram um efeito oposto de número de Reynolds sobre a taxa de crescimento. Figura 5.23 mostra a variação do coeficiente global de troca de calor com o número de Stefan para valores diferentes de número de Reynolds. Como pode-se observar, a variação do coeficiente global de troca de

calor com o número de Stefan é desprezível para altos números de Reynolds, isto é, 458 a 1051, e mostra uma variação moderada para baixos valores de Reynolds, isto é, 137. Portanto, o aumento de número de Reynolds tem efeito significativo sobre o coeficiente global de troca de calor.

Para finalizar esta discussão, o coeficiente global de troca de calor foi analizado graficamente contra o número de Reynolds incluindo uma comparação entre a mistura e o fluído de fase única, como está representado na Figura 5.24. Como é mostrado, os resultados com misturas são melhores e apresentam um aumento em torno 60% maior no coeficiente de transferência de calor global, quando comparado com o caso de fase única. A variação do coeficiente global com o numero de Reynolds é pequena no caso de fase única em comparação com o caso de mistura que mostre uma variação moderada. Este resultado confirma uma das conclusões mais importantes deste estudo, isto é, a mistura de cristais com o fluido resulta em excelente taxas de troca de calor que é de grande interesse em aplicações de armazenamento de frio.

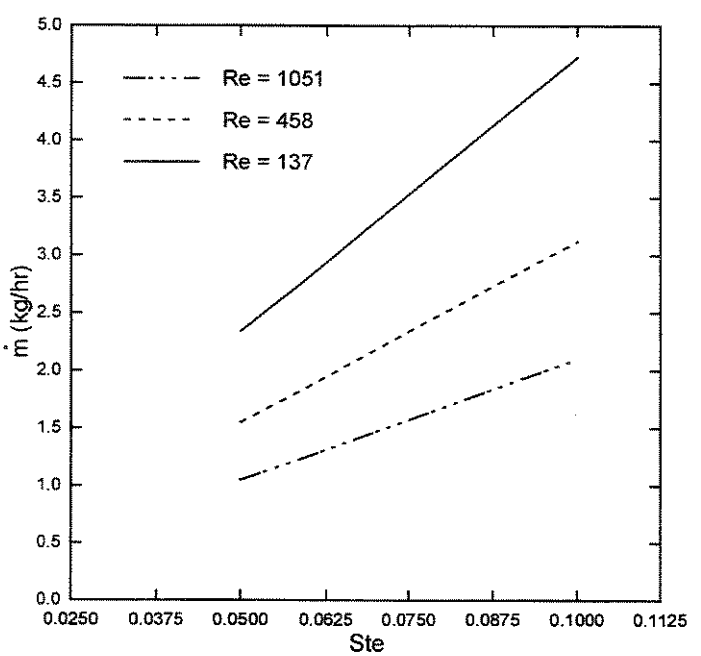

Figura 5.22: Variação da taxa de crescimento dos cristais de gelo com o número do Stefan.

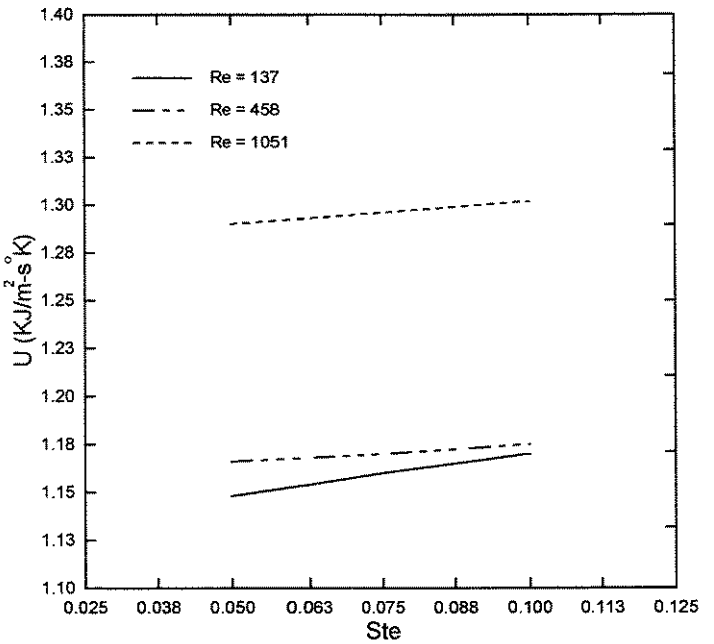

Figura 5.23: Efeito do número de Stefan sobre o coeficiente de transferência de calor global para diferentes números de Reynolds.

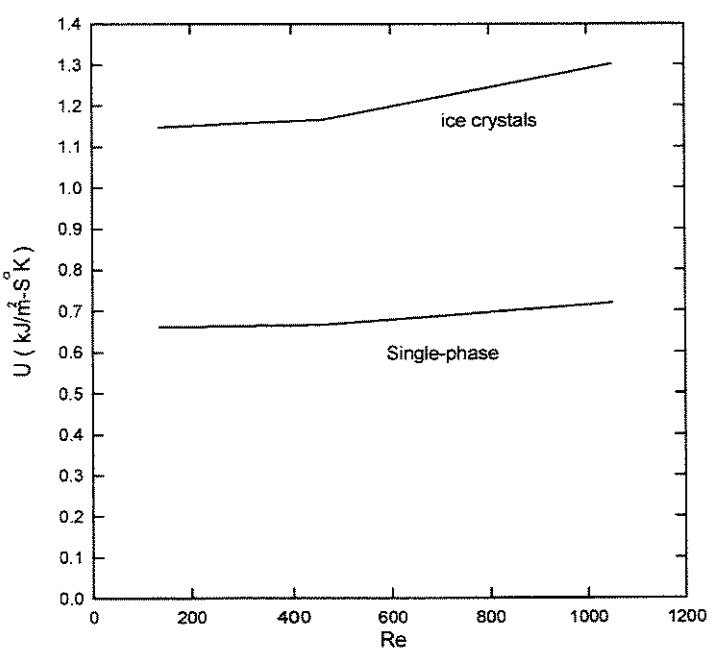

Figura 5.24: Variação do coeficiente de transferência de calor global com o número de Reynolds para casos de fase única e cristais de gelo (Ste = 0.1).

Capitulo 6

Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

O objetivo principal deste estudo foi desenvolver um modelo térmico de solução numérica capaz de prever a taxa de crescimento de cristais de gelo em filme laminar descendente ao longo de uma superfície fria, necessária para a produção de mistura bombeável a qual pode ser usada como alternativa nos processos de climatização ambiental no lugar dos processos convencionais. Para alcançar este objetivo, o estudo foi realizado em três etapas fundamentais. Na primeira etapa foram estudadas separadamente as características hidrodinâmicas de filme laminar descendente com as propriedades termofísicas constantes. Foram considerados os efeitos da região da entrada sobre o campo de velocidade, a velocidade na superfície e a espessura do filme. O número de Reynolds foi usado como critério para comparação dos presentes resultados com resultados teóricos e experimentais disponíveis na literatura. As seguintes conclusões podem ser comentadas:

- Os perfis de velocidade tendem ao formato parabólico longe da região de entrada, onde o escoamento se aproxima do perfil totalmente desenvolvido.
- A velocidade na superfície aumenta ao longo da direção do escoamento, aproximando - se de um valor assintótico longe da região de entrada.
- A partir da região de entrada, a espessura de filme desenvolve-se em concordância com o perfil de velocidade e, no final atinge o valor assintótico dado pela teoria de Nusselt.
- A espessura do filme é influenciada pelo número de Reynolds e aumenta com a vazão, ao longo da distância axial, a espessura do filme fica practicamente constante para baixos valores de número de Reynolds.

Na Segunda etapa, desenvolveu-se um modelo numérico aproximado para o crescimento de cristais de gelo no filme descendente. Esta parti foi iniciada para o caso em que o perfil da velocidade foi considerado totalmente desenvolvido, desprezando-se o gradiente de velocidade e de temperatura ao longo da direção do escoamento. Deste modo, o modelo foi usado para validação com os resultados existentes na literatura. Em seguida, foi introduzido o termo de difusão axial na equação da energia enquanto e as propriedades termofísicas foram avaliadas nos seus valores efetivos, os quais são dependentes da concentração dos cristais de gelo. Neste procedimento, o crescimento dos cristais de gelo foi calculado a partir do balanço de energia entre os cristais de gelo e a solução. Dos resultados obtidos deste modelo pode-se citar as seguintes conclusões.

O crescimento de cristais de gelo depende principalmente do número de Stefan.

A variação da espessura de filme afeta o número de Nusselt de cristais de gelo e o grau de superesfriamento.

A concentração inicial dos cristais de gelo afeta o número de Nusselt médio.

A inclusão do termo de difusão axial afeta, de forma significativa, a distribuição de temperatura e da concentração.

A influência da difusão axial é pequena em se tratando de grandes vazões de solução.

Os resultados obtidos nos casos estudados anteriormente foram utilizados para generalizar os resultados e para obter maior e melhor entendimento de um modelo generalizado baseado nas equações de transporte de massa, momento, energia e concentração. Neste modelo foram incorporados os conhecimentos e informações obtidas nos estudos anteriores tal como perfil de velocidade em desenvolvimento, além de tratar o escoamento como um fluído binario o que apresenta os cristais de gelo em difusão na solução. Esta difusão é cousado pelo superesfriamento de fluido. A densidade da mistura foi calculada baseada na média das massica os fases líquida e sólida em cada volume de controle. Dos resultados obtidos, pode-se citar as seguintes conclusões:

- Os perfis de temperatura e de concentração são afetados pelos número de Stefan e de Reynolds
- O modelo aproximado de espessura constante super estima o número de Nusselt local na superfície da placa

- número de Stefan influencia o número de Nusselt na superfície de sólido e, portanto, o aumento do número de Stefan resulta no aumento da transferência de calor.
- Enquanto o número de Nusselt dos cristais de gelo e o grau de superesfriamento são dependentes do número de Stefan, o número de Reynolds tem menor influência sobre aqueles parámeteros.
- A taxa de crescimento dos cristais de gelo é afetada de forma direta pelos números de Stefan e Reynolds.
- coeficiente global de troca de calor é influenciado pelos números de Stefan e de Reynolds.

- coeficiente global de troca de calor da mistura fluido/cristais de gelo é superior ao caso de fluido monofásico.

- É interessante, como parte complementar deste estudo, o desenvolvimento de uma montagem experimental que permita convalidar os modelos apresentados e obter maior número de dados experimentais e operacionais.

Referências Bibliográficas

Ahmad, R., Julio, M., & Kawaji, M. Falling Film Hydrodynamics in Slug Flow. *Chemical Engineering Science*, v. 53, n. 1, p. 123-130, 1998.

Ahuja, A. S. Augmentation of heat transport in laminar flow of polystyrene suspensions I Experiments and results. *J. of Applied physics*. v. 46, p. 3408-3416, 1975.

Burns, A. S., Stickler, L. A., Stewart, W. E. Solidification of an aqueous salt solution in a circular cylinder. *Asme Trans. J. Heat Transfer*.v. 114, p. 30-33, 1992.

Charunyakorn, P., Roy, S. K. Forced convection heat transfer in microencapsulated phase change maretial slurries: flow in circular ducts. *Int. J. Heat Mass Transfer*.v. 34, p. 819-832, 1991.

Cheung, F. B., Chen, Y. L. & Nee, V. W. Forced Convection Flow over a Melting Surface", Proc. Fifth. Int. Heat Transfer Conf. , Paper FC 2.4, Tokyo, Japan, 1974.

Chung, T. J. Finite Element Analysis in Fluid Dynamics. McGraw-Hill Inc, 1978.

Chun, K. R., & Seban, R. Heat Transfer to Evaporating Liquid Films. *Jornal of Heat Transfer* v. 91, p. 391-402, 1971.

Datta, P., Sengupta, S., & Roy, K. Natural Convection Heat Transfer in an enclosure with Suspension of Micro-encapsulated Phase-Change Material. *In General Papers in Heat Transfer, HTD*. v. 204, p. 133-144, 1992.

Dukler, A. E., & Wadson, F. K.. Numerical Investigation of Large Wave Interactions on Free Falling Films. *Int. J. Multiphase Flow*. v. 15, n. 3, p. 357-370, 1989.

Dukler, A. E., Fredric, K. W. Insights into the Hydrodynamics of Free Falling Wavy Films. *AIChE Journal*. v. 35, n. 2, p. 187-195, 1989.

Dukler, A. E., Sheintuch, M. Phase Plane and Bifurcation Analysis of Thin Wavy Films Under Shear. *AIChE Journal*. v. 35, n. 2, p. 177-186, 1989.

Elmas, M., On the solidification of a Warm Liquid flowing over a Cold Vertical Wall *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 13, p. 1060-1062, 1970.

Emmer, R., pigford, R. A Study of Gas Absorption in Falling Liquid Films. *Chem.Eng Progress*. v. 50, p. 87-89, 1954.

Fang, L. J., Cheung, F. B., Linehan, J. H., Pedersen, D. R. Selective freezing of a dilute salt solution on a cold ice surface. *J. of Heat Transfer*. v. 106, p. 385-393, 1984.

Fulford, G. C. The Flow of Liquids in thin Films. *Advanc. Chem. Eng*. v.5, p. 151-223, 1964.

Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T. High-resolution for Incompressible Flow Usin The Navier-Stokes Equations and A Multigrid Method. *J. Comput. Physics*. v. 48, p. 387-411, 1982.

Griffen, O M. Heat, Mass , and Momentum Transfer During the Melting of Glacial Ice in Sea Water. *J. Heat Transfer*. v. 95, p. 317-323, 1973.

Griffen, O. M., Szewezyk, A. A. Heat and Mass Transfer During Mixed Convection Near a Melting Flat Surface of Glacial Ice in Saline Water. *J. Heat Transfer*. v. 1, p. 199-208, 1970.

Hale, D. V., Hoover, M. J., O'Neil, M. J. Phase-change materials Handbook. CR-61363, NASA, 1971.

Hart, R., Thornton, F. Final Report Contract No. 82-80, Department of Energy, Ohio 1982.

Heaubouef, R. T. & Champman, A. J. Numerical Solution of Transient Ice Formation Over a cold Isothermal Surface. *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 10, p. 1581-1587, 1967.

Hirata, T., Gilpin, R. R, Cheng K. C., Gates, E. M. The Steady State Ice Layer Profile on a Constant Temperature Plate In a Forced Convection Flow – I Laminar Regime. *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 22, p. 1425-1433, 1979.

Hirshburg, R. I., Florschuetz, L. W. Laminar Wavy-Film Flow: Part I, Hydrodynamic analysis. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME*. v. 104, p. 452-464, 1982.

Irbarne, A., Gosman, A., Spalding, D. A Theoretical and Experimental Investigation of Diffusion Controlled Electrolytic Mass Transfer Between a Falling Liquid Film and a Wall. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. v. 10, p. 1661-1676, 1970.

Ismail, K. A., Radwan, M. M. Effect of axial conduction on the ice crystal growth in laminar falling films. *International Journal of Refrigeration.* v. 22, p. 389-401, 1999.

Ismail, K. A., Radwan, M. M. Numerical prediction of ice crystal growth due to film flowing down a vertical cooled plate. In: Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, HTD-357-3, 1998, ASME Proceedings of the 7th. AIAA/ASME.

Ismail, K. A., Radwan, M. M. Augmentation of Heat Transport in Laminar Falling Film of Ice Crystals. In: 11th International Heat Transfer Conference, v. 5, 1998, p. 267-271.

Karapantsios, T. D., Karabels, A. J. Longitudinal Characteristics of Wavy Falling Films. *Int. J. Multiphase Flow*. v. 21, n. 1, p. 119-127, 1995.

Kasza, K. E., Chen, M. M. Improvement of the performance of solar energy or waste heat utilization systems by using phase-change slurry as an enhanced heat-transfer storage fluid. *J. of Solar Energy Engineering.* v. 107, p. 229-236, 1985.

Katz, L. Natural Convection Heat Transfer with fluids Using Suspending Particles Which Undergo Phase-Change. Ph. D. Dissertation, Massachusetts institute of Technology, Massachusetts, 1967.

Kim, J., Moin, P., Mosser, R. Turbulent Statistic in Fully developed Flow at Low Reynolds Number. *J. Fluid Mech.* v. 177, p. 133-136, 1987.

Knudsen, J. G., Katz, D. L. Fluid Dynamics and Heat Transfer. McGrow-Hill, New York, 1958.

Kuiken, H. K. Solidification of a Liquid on a Moving Sheet. *Int. J. Heat Mass Transfer.* v. 20, p. 309-314, 1977.

Lapadula, C., Muller, W. K. Heat Conduction with Solidification and a Convective Boundary Condition at the Freezing Front. *Int. J. Heat Mass Transfer.* v. 9, p. 702-704, 1966.

Lapadula, C. A., Mueller, W. K. The Effect of Buoyancy on the Formation of a Solid Deposit Freezing onto a Vertical Surface. *Int. J. Heat Mass Transfer.* v. 13, p. 13 –26, 1970.

Leal, L. G., On the effective conductivity of dilute suspension of spherical drops in the limit of low particle Peclet number. *Chem. Engng. Commun.* v.1, p. 21-31, 1973.

Levich, V. G. Physiochemical Hydrodynamics. Prentice-Hall, NJ., 1962.

Libby, P. A., Chen, S. The Growth of a Deposited Layer on a Cold Surface. *Int. J. Heat Mass Transfer.* v. 8, p. 395-402, 1964.

McMa han, W. A., Feasibility Study of Utilizing Phase change Coolant for Protective Germinates. Florida High Technology and Industry Council Annual Report, 1988.

Merte, H. Condensation Heat Transfer. *In Advances in Heat Transfer.* v. 9, Academic Press, New York, 1973.

Mills, A., Chung, D. Experimental Study of Gas Absorption Into Turbulent Falling Films. *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 19, p. 51-60, 1976.

Muller, Schmidt, G. E., Kyr, P. The Effect of Natural Convection in the Liquid Phase, During Phase Change Transformation. *J. Crystal Growth*. v. 49, p. 387-395, 1980.

Nir, A., Acrivos, A. The effective thermal conductivity of sheared suspensions. *J. Fluid Mech*. v. 78, p. 33-48, 1976.

Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Co., New York, 1980.

Pozvonkov, F. M., Shurgalskii, E. F., Akselrod, L. S. Heat Transfer at Melting Flat Surface Under Conditions of Forced Convection and Laminar Boundary Layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 13, p. 957-962, 1970.

Ramsey, J. W., Sparrow, E. M. Melting and Natural Convection Due to a Vertical Embaded Heater. *Journal of Heat Transfer*. v. 100, p. 368-370, 1978.

Rutgers, I. R. Relative viscosity of suspensions of rigid spheres in Newtonian liquids. *Rheologica Acta*, v. 2, n. 4, p. 305-348, 1962.

Sanjay, K., Sengupta, S. Na Evaluation of Phase-Change Micro-capsules for Use in Enhanced Heat Transfer Fluid. *Int.Comm. Heat Transfer*. v. 18, p. 495-507, 1991.

Savino, J. M., Siegel, R. An Analytical solution for solidification of a Moving Warm Liquid Onto Isothermal Cold Wall. *Int. J. Heat Mass Transfer*. v. 12, p. 803-809, 1969.

Savino, J. M., Siegel, R. Approximate solution for the solidification of steady plane flow over chilled flat plate. *NASA TND*. v. 4015, 1967.

Savino, J. M., Zumdieck, J. F., Siegel, R. Solidification of Stagnate Warm Liquid Directed Against a Cold Surface. Proc. 4th. Int. Heat Transfer Conf. , Paper, Cu 2.10, 1970.

Seki, N., Fukusaco, S., Younan, G. W. Ice Formation Phenomena for Water Flow Between Two Cooled Parallel Plates. *Journal Heat Transfer*, v. 106, p. 498-505, 1984.

Shyy, W., Bratten, M. E. Concert-Cartesian or Natural Coordinates for Elliptic Reacting Turbulent Flows. *Int. J. heat Mass Transfer*. v. 33, p. 495-506, 1988.

Sohn, C. W., Chen, M. M. Microconvective thermal conductivity in disperse two-phase mixtures as observed in a low velocity couette flow experiment. *J. of Heat Transfer,* v. 106, p. 539-542, 1984.

Sparrow, E. M. Lee, L. Shamsunder, N. Convective Instability in a Melt Layer Heated from Below. *Journal of Heat Transfer*. v. 98, p. 88-94, 1976.

Sparrow, E. M. Patankar, S. V. Ramadhyani, S. Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region. *Journal of Heat Transfer*. v. 99, p. 520-526, 1977.

Sparrow, E. M. Ramsey, J. W., Kemik, R. G. Freezing Controlled by Natural Convection. *Journal of Heat Transfer*. v. 101, p. 578-584, 1979.

Stewart, W. E. Jr., Kaupang, R. L., Tharp, C. G., Wendland, R. D., Stickler, L. A. An approximate numerical model of falling-film ice crystal growth for cool thermal energy storage. *Ashrae Trans. Research*. v. 99, p. 347-355, 1993.

Telks, M. Phase Change Thermal storage Material with Crust Forming Stabilizer. U.S Patent, n. 4, p. 187-189, 1980.

Vand, V., J. Viscosity of solutions and suspensions. *Phys. Coll. Chem.* v. 52, p. 300-321, 1948

Van der Walt, J., Kroger, D. Heat Transfer resistances During Film Condensation. *Proceedings* Fifth International Heat transfer Conference, v. 3, p. 284-288, 1974.

Withington, J. P., Shuen, J. S., Yang, V. A Time Accurate, Implicit Method for Chemically Reacting Flows at all Mach Numbers. *AIAA*. paper 81, p. 0581, 1991.

Appendix-A

A. 1 Discretization of the governing equations

In this appendix, the details of the discretization procedure is described starting with Equations 3.42 and 3.43.To facilitate the discretization procedure it will be more convenient to put the above two mentioned equations in the following general form

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S^{\Theta} \qquad (A.1)$$

where J_x and J_y are the total convection and diffusion fluxes, and S^{Θ} is the appropriate source term of the equation under consideration. The momentum equations are discretized using the staggered grid arrangement shown by Figures A.1 and A.2, the location for which the velocity components are calculated are shown by short arrows. In the staggered grid the velocity components are computed for the points laying on the control volume faces. All other

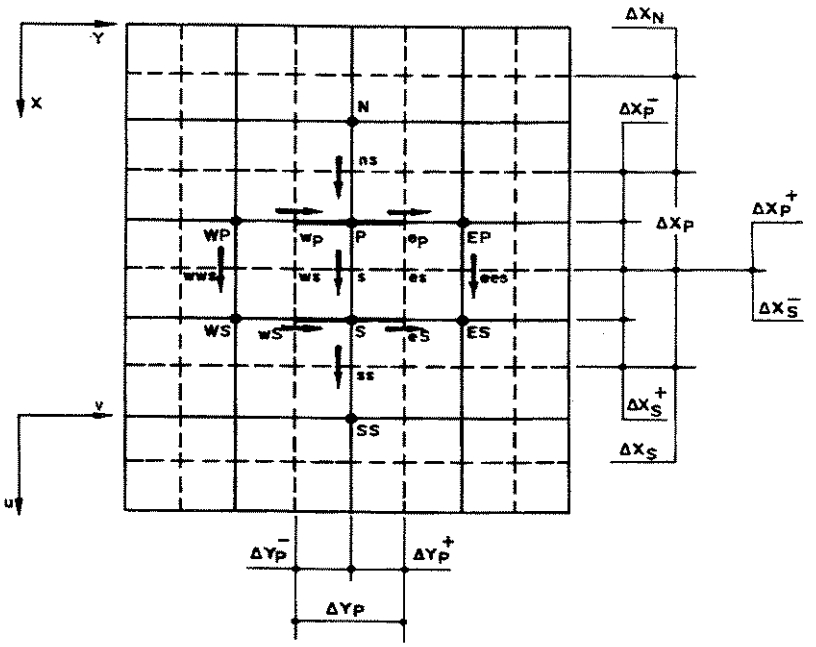

Figure A.1: Staggered control volume for the velocity component, u.

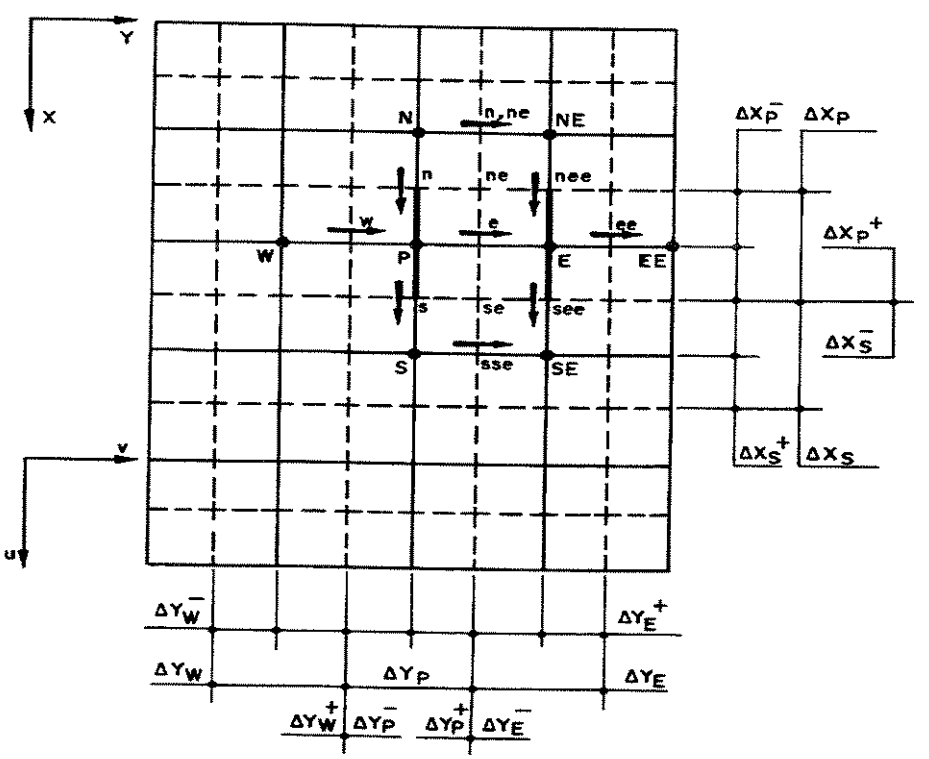

Figure A.2: Staggered control volume for the velocity component, v.

variables including the pressure are calculated at the main grid points shown by dots. A consequences of this arrangement is that the normal velocity components are directly available at the control volume faces, where they are needed for the calculation of the mass flow rates. The pressure difference between two main grid points can be used to drive the velocity component located between them.

The integration of Equation 44 over the u control volume shown in Figure A.2 leads to

$$J_S - J_P + J_{es} - J_{ws} = \overline{S}\,\Delta V \tag{A.2}$$

the same equation when integrated over the v control volume leads to

$$J_E - J_P + J_{se} - J_{ne} = 0 \tag{A.3}$$

Here, the J's represent the total fluxes at the control volume faces, $\overline{S}$, is the average source term over the control volume, and ΔV is the volume of the control volume. The total flux at each face of the control volume must be expressed in terms of the two velocities upstream and down stream of the face of the control volume. To do this consider the region between the grid points s, ss in Figure A.2. Where, s and ss, are the upstream and down stream of the grid point, S, at the control volume face. If a one dimensional convection-diffusion problem is solved between these two grid points na exponential profile of, u, is obtained as an exact solution. This is given by Spalding (1972); Raithby and Torrance, (1974). The exponential solution leads to

$$J_S = F_S\left(u_s + \frac{u_s - u_{ss}}{\exp P_S - 1}\right) \tag{A.4}$$

where the Peclet number, P_S, is given by

$$P_S = \frac{F_S}{D_S} \tag{A.5}$$

Here, F_S, is the flow rate $(\rho u)_s A_s$ and D_S is the diffusion conductance. If the diffusion coefficient, Γ, is regarded as uniform over each control volume, the appropriate expression for the diffusion conductance is

$$D_s = A_s\left[\frac{(\delta_x)_{s^-}}{\Gamma_s} + \frac{(\delta_x)_{s^-}}{\Gamma_{ss}}\right]^{-1} \qquad (A.6)$$

where the distances are shown in Figure A.2. The advantages of defining D_S in this manner are discussed in Patankar, (1978).

Because the exponential function appearing in Equation A.4 is time consuming to compute, approximation to the flux expression have been sought. One such approximation is the hybrid scheme proposed in Spalding, 1972. A better approximation to Equation A.4 is given by the following expression:

$$J_s = F_s u_s \{D_s A(|P_s|) + [\![-F_s, 0]\!]\}(u_s - u_{ss}) \qquad (A.7)$$

where the function, $A(|P|)$, is defined as

$$A(|P|) = [\![0, (1-0.1|P|)^5]\!] \qquad (A.8)$$

because of the presence of the fifth power in Equation A.8, the discretization scheme resulting from the use of Equations A.7 ; A.8 is called the power-law scheme. It can be shown that the function, A, in Equation A.8 is much easier to compute than the exponential function and that Equations A.7; A.8 provide an extremely good approximation to the exact expression given in equation A.4 (Patankar, 1981).

In a similar manner the continuity equation is integrated over the principle control volume which leads to the following discretization equation

$$[(\rho u)_s - (\rho u)_n]\Delta y + [(\rho v)_e - (\rho v)_w]\Delta x = 0 \qquad (A.9)$$

Equation A.9 can be written in the following form

$$F_s - F_n + F_e - F_w = 0 \qquad (A.10)$$

If Equation A.10 is multiplied by, u_s, and subtracted from Equation A.2, using equations A.7 and A.8 the resulting discretization equation for the velocity, u, is:

$$a_s u_s = a_{ss} u_{ss} + a_{ns} u_{ns} + a_{e,es} u_{e,es} + a_{w,ws} u_{w,ws} + A_s (P_p - P_S) + b \qquad (A.11)$$

by following the same analogy the final discretization equation for the velocity, v, is

$$a_e v_e = a_{ee} v_{ee} + a_w v_w + a_{s,se} v_{s,se} + a_{n.ne} v_{n.ne} + A_e (P_P - P_E) \qquad (A.12)$$

In Equations A.10-A.12 the, a´s, coefficients contain mass fluxes and diffusion coefficients and the, b´s, coefficients express the effects of source terms including body forces and the, F´s, coefficients contain mass fluxes and areas normal to the flow direction.

The coefficients of the, u, equation can be expressed as

$$\begin{aligned} a_{ss} &= D_S A(|P_S|) + [[-F_S, 0]] \\ a_{ns} &= D_P A(|P_P|) + [[-F_P, 0]] \\ a_{e,es} &= D_{es} A(|P_{es}|) + [[-F_{es}, 0]] \\ a_{w,ws} &= D_{ws} A(|P_{ws}|) + [[-F_{ws}, 0]] \end{aligned} \qquad (A.13)$$

and the coefficients for the, v, equation are

$$
\begin{aligned}
a_{ee} &= D_E A\left(|P_E|\right) + [\![-F_E, 0]\!] \\
a_{w} &= D_P A\left(|P_P|\right) + [\![-F_P, 0]\!] \\
a_{n,ne} &= D_{ne} A\left(|P_{ne}|\right) + [\![-F_{ne}, 0]\!] \\
a_{s,se} &= D_{se} A\left(|P_{se}|\right) + [\![-F_{se}, 0]\!]
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

the expressions of the diffusion conductances for the, u, equation are

$$
D_S = \frac{\Gamma_S}{\Delta x_S} \Delta y_P \; ; \; D_N = \frac{\Gamma_N}{\Delta x_N} \Delta y_P \tag{A.15}
$$

where D_S and D_N represent the diffusion coefficient in the x-direction. It should be noted that the diffusion flux at N and P involve the same material of the principle control volumes N and P.

The diffusion flux in the y-direction at the east face of, u, control volume (point, es,) is the sum of the diffusion flux by material S of the control volume s and the diffusion flux by material P of the same control volume, s. In equation form this can be written as

$$
D_{es} = D_{es,S} + D_{es,P} = \frac{\Gamma_{es,S}}{dy_P^+ + dy_P^-} dx_S^- + \frac{\Gamma_{es,P}}{dy_P^+ + dy_P^-} dx_S^- \tag{A.16}
$$

where the first term on the right hand-side of this equation represent diffusion flux by material S of the control volume s, and the second term represent diffusion flux by material P of the same control volume, s. The values of $\Gamma_{es,S}$ and $\Gamma_{es,p}$ are at the interface of the control volumes S and ES and the control volumes EP and P respectively. As we can see their values will be given by the respective harmonic means as

$$\Gamma_{es,P} = \left[\frac{1 - \left(\frac{dy_{EP}^{-}}{dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}} \right)}{\Gamma_P} + \frac{\frac{dy_{EP}^{-}}{dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}}}{\Gamma_{EP}} \right]^{-1} \tag{A.17}$$

$$\Gamma_{es,S} = \left[\frac{1 - \left(\frac{dy_{ES}^{-}}{dy_{ES}^{-} + dy_{S}^{+}} \right)}{\Gamma_S} + \frac{\frac{dy_{ES}^{-}}{dy_{ES}^{-} + dy_{S}^{+}}}{\Gamma_{ES}} \right]^{-1} \tag{A.18}$$

the above two expressions can also be written as

$$\Gamma_{es,P} = \left[\frac{\left(\frac{dy_{P}^{+}}{dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}} \right)}{\Gamma_P} + \frac{\frac{dy_{EP}^{-}}{dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}}}{\Gamma_{EP}} \right]^{-1} \tag{A.19}$$

$$\Gamma_{es,S} = \left[\frac{\left(\frac{dy_{S}^{+}}{dy_{S}^{+} + dy_{ES}^{-}} \right)}{\Gamma_S} + \frac{\frac{dy_{ES}^{-}}{dy_{ES}^{-} + dy_{S}^{+}}}{\Gamma_{ES}} \right]^{-1} \tag{A.20}$$

Finally,

$$\Gamma_{es,P} = \frac{\Gamma_P \Gamma_{EP}}{\frac{\Gamma_{EP} dy_{P}^{+}}{\left(dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}\right)} + \frac{\Gamma_P dy_{EP}^{-}}{\left(dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}\right)}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_{EP} \left(dy_{EP}^{-} + dy_{P}^{+}\right)}{\Gamma_{EP} dy_{P}^{+} + \Gamma_P dy_{EP}^{-}} \tag{A.21}$$

$$\Gamma_{es,S} = \frac{\Gamma_S \Gamma_{ES} \left(dy_{S}^{+} + dy_{ES}^{-}\right)}{\Gamma_{ES} dy_{S}^{+} + \Gamma_S dy_{ES}^{-}} \tag{A.22}$$

$$D_{es} = \frac{\Gamma_S \Gamma_{ES} dx_S^-}{\Gamma_{ES} dy_S^+ + \Gamma_S dy_{ES}^-} + \frac{\Gamma_P \Gamma_{ES} dx_P^+}{\Gamma_{ES} dy_P^+ + \Gamma_P dy_{ES}^-} \tag{A.23}$$

by the same analogy

$$D_{ws} = \frac{\Gamma_{WS} \Gamma_S dx_S^-}{\Gamma_S dy_{WS}^+ + \Gamma_{WS} dy_S^-} + \frac{\Gamma_{WS} \Gamma_P dx_P^+}{\Gamma_P dy_S^+ + \Gamma_{WS} dy_P^-} \tag{A.24}$$

Turning to the mass fluxes in the y-direction, we should note that, the mass flux at the east face of the, u, control volume is the result of the participation of the mass fluxes by side P (material P; EP) and part by the side S (material S; ES). In this form we have

$$F_{es} = F_{es,S} + F_{es,P} = \rho_{P,EP} v_{eP} . dx_P^+ + \rho_{S,ES} v_{eS} . dx_S^- \tag{A.25}$$

note that the values $\rho_{P,EP}$, $\rho_{S,ES}$ are the average values between ρ_P, ρ_{EP} and ρ_S, ρ_{ES} respectively. As a result the densities between two main grid points can be written as

$$\rho_{P,EP} = \frac{\rho_P dy_P^+ + \rho_{EP} dy_{EP}^-}{dy_P^+ + dy_{EP}^-} \quad \text{and} \quad \rho_{S,ES} = \frac{\rho_S dy_S^+ + \rho_{ES} dy_{ES}^-}{dy_S^+ + dy_{ES}^-} \tag{A.26}$$

with these average densities, the mass flux, F_{es}, at the interface of the control volume can be written as

$$F_{es} = \left[\frac{\rho_P dy_P^+ + \rho_S dy_S^-}{\left(dy_P^+ + dy_P^- \right)} \right] v_{eP} dx_P^+ + \left[\frac{\rho_S dy_S^+ + \rho_{ES} dy_{ES}^-}{\left(dy_S^+ + dy_{ES}^- \right)} \right] v_{e,es} dx_S^- \tag{A.27}$$

by the same analogy the mass flux at the west interface of the control volume, ws, is

$$F_{ws} = \left[\frac{\rho_P dy_P^- + \rho_{Wp} dy_{Wp}^+}{\left(dy_P^- + dy_{WP}^+ \right)} \right] v_{wP} dx_P^+ + \left[\frac{\rho_S dy_S^- + \rho_{WS} dy_{WS}^+}{\left(dy_S^- + dy_{WS}^+ \right)} \right] v_{ws} dx_S^- \tag{A.28}$$

it should be noted that the term

$$\frac{dy_p^+}{\left(dy_p^+ + dy_{Ep}^-\right)}$$

represent the participation of the control volume, P, in the flow and the same thing happens in the case of the other three control volumes, EP, ES and S when they participate in the flow.

Turning to the mass flux in the x-direction, we observe that in determining the mass flux through face, S, we must consider the velocities at the interfaces s, ss of the control volume, S. In fact, the mass flux at these interfaces must be considered or calculated and with this, we determine the average mass flux at S.

$$F_S = \frac{F_s dx_s^-}{dx_s} + \frac{F_{ss} dx_s^+}{dx_s} = \frac{\rho_s u_s dy_s}{dx_s} dx_s^- + \frac{\rho_{ss} u_{ss} dy_{ss}}{dx_s} dx_s^+ \qquad (A.29)$$

where $\frac{dx_E^-}{dx_E}$ and $\frac{dx_E^+}{dx_E}$ represent the participation coefficient of the mass fluxes F_s, F_{ss}.

As in the case of calculating the mass flux in the y-direction, ρ_s, ρ_{ss} are just the average value between ρ_s and ρ_p; ρ_{ss} and ρ_s respectively.

$$\rho_s = \rho_{S,P} = \left[\rho_S \frac{dx_s^-}{dx_p^+ + dx_s^-} + \rho_P \frac{dx_P^+}{dx_P^+ + dx_s^-}\right] \qquad (A.30)$$

$$\rho_{ss} = \rho_{S..ss} = \left[\rho_{ss} \frac{dx_{SS}^-}{dx_{SS}^+ + dx_S^-} + \rho_S \frac{dx_E^+}{dx_E^+ + dx_{EE}^-}\right] \qquad (A.31)$$

The coefficients of the, v, equation, Equation A.12, are described with the help of the, v, control volume shown in Figure A.2 where the control volume is staggered in the y-direction only. The diffusion fluxes at the face of the control volume in the y-direction can be written as

$$D_E = \frac{\Gamma_E}{dy_E} dx_P \; ; \quad D_W = \frac{\Gamma_W}{dy_W} dx_P \tag{A.32}$$

The diffusion flux in the x-direction at the control volume faces se, ne can be expressed as:

$$\begin{aligned} D_{se} &= D_{seE} + D_{seP} \\ D_{ne} &= D_{neE} + D_{neP} \end{aligned} \tag{A.33}$$

the diffusion flux in the x-direction at the interface, se, is

$$D_{se} = \frac{\Gamma_{seE}}{dx_E^+ + dx_S^-} dy_E^- + \frac{\Gamma_{seP}}{dx_P^+ + dx_S^-} dy_P^+ \tag{A.34}$$

the first term in the right hand side of Equation A.34 represent the diffusion flux by material, E, of the control volume, e, and the second term of the same equation represent the diffusion flux by material, P, of the control volume, e. But the values of, Γ_{seE} and Γ_{seP}, are at the interface between the control volumes, E, SE and P, S respectively, their values is calculated from the values at the main grid points of the respective control volume using the harmonic mean.

$$\Gamma_{seE} = \frac{1 - dx_{SE}^-}{\frac{(dx_{SE}^- + dx_E^+)}{\Gamma_E}} + \frac{dx_{SE}^-}{\frac{(dx_{SE}^- + dx_E^+)}{\Gamma_{SE}}} \tag{A.35}$$

$$\Gamma_{seP} = \frac{1 - dx_S^-}{\frac{(dx_S^- + dx_P^+)}{\Gamma_P}} + \frac{dx_S^-}{\frac{(dx_S^- + dx_P^+)}{\Gamma_S}} \tag{A.36}$$

$$\Gamma_{seE} = \frac{dx_E^+}{\frac{(dx_{SE}^- + dx_E^+)}{\Gamma_E}} + \frac{dx_{SE}^-}{\frac{(dx_{SE}^- + dx_E^+)}{\Gamma_{SE}}} \tag{A.37}$$

$$\Gamma_{seP} = \frac{dx_P^+}{\left(dx_S^- + dx_P^+\right)\Gamma_P} + \frac{dx_S^-}{\left(dx_S^- + dx_P^+\right)\Gamma_S} \tag{A.38}$$

Finally,

$$\Gamma_{seE} = \frac{\Gamma_E\Gamma_{SE}\left(dx_E^+ + dx_{SE}^-\right)}{\Gamma_{SE}dx_E^+ + \Gamma_E dx_{SE}^-} \tag{A.39}$$

$$\Gamma_{seP} = \frac{\Gamma_P\Gamma_S\left(dx_P^+ + dx_S^-\right)}{\Gamma_S dx_P^+ + \Gamma_P dx_S^-} \tag{A.40}$$

$$D_{se} = \frac{\Gamma_E\Gamma_{SE}\left(dx_E^+ + dx_{SE}^-\right)}{\Gamma_{SE}dx_E^+ + \Gamma_E dx_{SE}^-} + \frac{\Gamma_P\Gamma_S\left(dx_P^+ + dx_S^-\right)}{\Gamma_S dx_P^+ + \Gamma_P dx_S^-} \tag{A.41}$$

by the same analogy;

$$D_{ne} = \frac{\Gamma_E\Gamma_{NE}\left(dx_E^- + dx_{NE}^+\right)}{\Gamma_E dx_{NE}^+ + \Gamma_{NE}dx_E^-} + \frac{\Gamma_P\Gamma_N\left(dx_P^- + dx_N^+\right)}{\Gamma_p dx_N^+ + \Gamma_N dx_P^-} \tag{A.42}$$

To calculate the mass flux in the x and y direction, consideration has been now given to the, v, control volume, shown in Figure A.2. The mass flux in the x-direction is calculated as

$$F_{se} = F_{seE} + F_{seP} = \rho_{E,SE}u_{ese}dy_E^+ + \rho_{P,S}u_s dy_P^+ \tag{A.43}$$

the values of $\rho_{E,SE}$ and $\rho_{P,S}$ are just the average between the values of $\rho_{E,SE}$ and $\rho_{P,S}$; ρ_P and ρ_S respectively.

$$\rho_{E,SE} = \frac{\rho_E dx_E^+ + \rho_{SE}dx_{SE}^-}{dx_E^+ + dx_{SE}^-} \tag{A.44}$$

$$\rho_{P,S} = \frac{\rho_P dx_P^+ + \rho_S dx_S^-}{dx_P^+ + dx_S^-} \tag{A.45}$$

using these average densities between the main grid points the mass flux at the control volume face, se, can be put in the following form

$$F_{se} = \left(\frac{\rho_E dx_E^+ + \rho_S dx_{SE}^-}{dx_E^+ + dx_{SE}^-} \right) u_{ese} dy_E^- + \left(\frac{\rho_P dx_P^+ + \rho_S dx_S^-}{dx_P^+ + dx_S^-} \right) u_s dy_P^+ \tag{A.46}$$

by the same analogy the mass flux at the face, ne, of the same control volume can be expressed as

$$F_{ne} = \left(\frac{\rho_E dx_E^- + \rho_{NE} dx_{NE}^+}{dx_E^- + dx_{NE}^+} \right) u_{nee} dy_E^- + \left(\frac{\rho_P dx_P^- + \rho_N dx_N^+}{dx_P^- + dx_N^+} \right) u_n dy_P^+ \tag{A.47}$$

The mass flux at the faces, E and P, of the control volume is expressed as

$$F_E = \frac{F_e dy_E^-}{dy_E} + \frac{F_{ee} dy_E^+}{dy_E} = \frac{\rho_e v_e dx_e}{dy_E} dy_E^- + \frac{\rho_{ee} v_{ee} dx_{ee}}{dy_E} dy_E^+ \tag{A.48}$$

where $\frac{dy_E^-}{dy_E}$ and $\frac{dy_E^+}{dy_E}$ represent the coefficient of participation of the flow, F_e, F_{ee}, and the densities ρ_e and ρ_{ee} are just the average between the values of ρ_P and ρ_E ; ρ_E and ρ_{EE} respectively.

$$\rho_e = \rho_{E,P} = \left(\frac{\rho_E dy_E^-}{dy_P^+ + dy_E^-} + \frac{\rho_P dy_P^+}{dy_P^+ + dy_E^-} \right) \tag{A.49}$$

$$\rho_{ee} = \rho_{E,E,E} = \left(\frac{\rho_{EE} dy_{EE}^-}{dy_{EE}^- + dy_E^+} + \frac{\rho_E dy_E^+}{dy_{EE}^- + dy_E^+} \right) \tag{A.50}$$

The discretized form of the momentum equations contain the pressure gradient as the source term, and can be solved only when the pressure field is known or somehow being estimated. Unless the correct pressure field is employed, the resulting velocity field will not satisfy the continuity equation. In the set of fluid flow equations, pressure is the only variable that does not have a governing equation which could be used in conjunction with the momentum equations to solve for the flow field. The Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, SIMPLE, (Patankar, 1980) is intended to overcome this problem. The essential features is the replacement of the continuity equation (which does not include pressure) with a pressure correction equation and subsequent sequential manipulation of the velocity field, this procedure can be illustrated as follows;

One of the steps in the solution procedure is to obtain a preliminary set of u and v from :

$$a_s u_s^* = a_{ss}\, u_{ss}^* + a_{ns}\, u_{ns}^* + a_{e,es}\, u_{e,es}^* + a_{w,ws}\, u_{w,ws}^* + A_s \left(P_p^* - P_s^*\right) + b \qquad (A.51)$$

$$a_e v_e^* = a_{ee} v_{ee}^* + a_w v_w^* + a_{s,se} v_{s,se}^* + a_{n.ne} v_{n,ne}^* + A_e \left(P_p^* - P_E^*\right) \qquad (A.52)$$

where the subscript, $*$, given to u and v denotes that these are based on an estimated pressure field, P*, usually the upstream values of p are a good estimate.

The starred velocities, u* and v*, will in general not satisfy the continuity equation but will produce a mass source, b, for the point, p. This is defined by:

$$\left[\left(\rho u_s^*\right) - \left(\rho u_n^*\right)\right] \Delta y + \left[\left(\rho v_e^*\right) - \left(\rho v_w^*\right)\right] \Delta x = b \qquad (A.53)$$

the pressure and velocities have to be corrected so as the mass source becomes very close to zero; for this we write

$$P = P^* + P' \qquad (A.54)$$

where, P', is the pressure correction. The velocity correction then follow:

$$u_s = u_s^* + A_s\left(P'_P - P'_S\right) + \sum \frac{a_{nb}\, u'_{nb} + b}{a_s} \tag{A.55}$$

$$v_e = v_e^* + A_e\left(P'_P - P'_E\right) + \sum \frac{a_{nb}\, v'_{nb}}{a_e} \tag{A.56}$$

If the above two equations are substituted into the continuity equation, Equation A.9, for the velocities u_s and v_e this will lead to the complete pressure equation. This equation (complete pressure equation) is virtually intractable in such a form. The equation directly contain links between 8 neighboring points. In addition it contains the velocity corrections at neighboring points, which in turn depend on the neighboring pressure corrections, the system of equations represent a full matrix. Any attempt to directly solve such a system of equations would require too large a computing resource to be practical. There are several approximations that will lead to a suitable pressure equation. The approach developed by Patankar, (1981) which suggested that the velocity corrections at the right hand side of Equations, A.55 and A.56, are dropped out to make the pressure equation more manageable to compute. By doing this the above two equations reduced to:

$$u_s = u_s^* + A_s\left(P'_P - P'_S\right) \tag{A.57}$$

$$v_e = v_e^* + A_e\left(P'_P - P'_E\right) \tag{A.58}$$

if the last two equations are substituted to the continuity equation, Equation, A.9, this will lead to the approximate form of the pressure correction equation;

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_S P'_S + a_N P'_N + b \tag{A.59}$$

where

$$
\begin{aligned}
a_E &= \rho_e d_e dy \\
a_w &= \rho_W d_W dy \\
a_n &= \rho_N d_N dx \\
a_s &= \rho_s d_s dx \\
a_P &= a_E + a_W + a_S + a_N
\end{aligned}
\qquad \text{(A.60)}
$$

and the mass source term, b is:

$$
b = \left[\left(\rho u_s^*\right) - \left(\rho u_n^*\right)\right]\Delta y + \left[\left(\rho v_e^*\right) - \left(\rho v_w^*\right)\right]\Delta x \qquad \text{(A.61)}
$$

it is fond that this approximate form of the pressure equation leads to a more efficient algorithm and much easier to solve.

Now that the operations required for the flow field calculation have been assembled, the procedure can be described following the spirit of ,SIMPLE, by the listing the calculation steps as

1. Guess the pressure field p^*
2. Solve the momentum equations such as equations (54) and (55) to get u^* and v^*
3. Hence obtain the mass source, b, from Equation, A.61, and solve the pressure correction from Equation, A.59.
4. Correct the pressure field and velocities field by the use of Equation like A.57 and A.58).
5. Solve the other discretization equations if the influence the flow field through density, viscosity, or source terms.
6. Regarding the corrected pressure field , p, as a new guess p^*, return to step 2, and repeat the procedure until convergence.

A. 2 Description of the Numerical Algorithm

By writing equations (54) and (55) for each control volume in the calculation domain, we get a system of m × m equations which can be written in a matrix form as:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{m-1} b_{m-1} c_{m-1} & \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix} \quad \text{(A.62)}$$

where the first term on the left hand side of the above equation represent the coefficient matrix and the second term represent the column vector and the right hand side contains the source terms or the force vector. This system of equations have an interested characteristics with relation to the computational implementation:

- small memory is used to store the formed system of equations, even for a large system of equations, only four indexed variables are necessary to store the system.
- the algorithm used to solve these system of equations is very simple and requires a small number of arithmetic operations, which reduce the computational time if compared to other methods of solving a system of equations.
- reducing the number of arithmetic operations results in reducing errors in the final results
  This system of equations have another particularity. The term c_m is null when m is equal to the initial m, the same thing is true for the term b_m.

  These factors are fundamentally important when choosing an algorithm for the solution of system of equations.

The solution procedure described so far has assumed that a set of linear algebraic equations can be solved by a convenient method. If the discretization equations such as equations (54 and 55) are written for one dimensional situation, they lead to a system with a tridiagonal matrix of coefficients. There is a particularly efficient algorithm to solve these systems of algebraic equations; it is known as the Thomas algorithm or the tri-iagonal matrix algorithm (TDMA). It is commonly used in computations of one dimensional unsteady heat conduction and of two-dimensional boundary layers.

However, such a convenient direct method for solving the discretization equations for two or three dimensional problems does not exist. Further, since the set of nominally linear equations, must be solved every iteration, the expense of direct solution seems unacceptable, Patankar and Spalding, (1972). Therefore, an iterative method for solving the algebraic equations is employed. As suggested by Patankar, (1980), the line by line technique is used. This method uses the TDMA as it is basic unit. In a two dimensional problem, the equations for all the u or v values along a one grid line are considered simultaneously. These equations, of course, also contain the u or v values along the two neighboring grid lines. If these neighboring-line values of the dependent variable are substituted from the best available estimate, then the equations along a chosen line have the same *appearance* as the one dimensional equations and can be solved simultaneously by the TDMA. When all lines are visited in this manner, one iteration of the line by line technique is complete. The same process can be repeated by choosing lines in other direction. To make this process more clear, the above discussion can be illustrated in the equation form as

$$a_s u_s^I = a_{ss} u_{ss}^I + a_{ns} u_{ns}^I + (a_{e,es} u_{e,es} + a_{w,ws} u_{w,ws} + A_s (P_p - P_S) + b) \qquad (A.63)$$

the algebraic equations are solved by the successive use of the TDMA in the x and y directions. For the x-direction sweep, the expression between parenthesis in the above equation is known and the TDMA can be applied to solve for the coefficients along that line in the x-direction. The subscript, I, denotes the values obtained from the first phase of solution. The second phase, namely the y-direction sweep, is the solution of:

$$a_s u_s^{II} = a_{e,es} u_{e,es}^{II} + a_{w,ws} u_{w,ws}^{II} + (a_{ss} u_{ss} + a_{ns} u_{ns} + A_s (P_p - P_S) + b) \qquad (A.64)$$

in a similar manner, the subscript, II, denotes the values obtained from the second phase of solution along the y-direction.