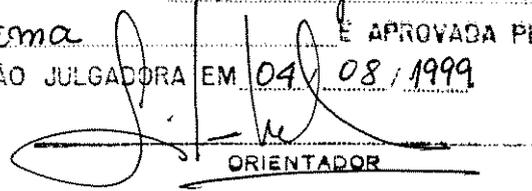


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *Antonio Gilson Barbosa*
de Lima E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 04/08/1999


ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Fenômeno de Difusão em Sólidos
Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso:
Secagem de Banana

Autor: **Antonio Gilson Barbosa de Lima**
Orientadora: **Silvia Azucena Nebra de Perez**
Co-Orientadora: **Marlene Rita de Queiroz**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

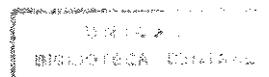
**Fenômeno de Difusão em Sólidos
Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso:
Secagem de Banana**

**Autor: Antonio Gilson Barbosa de Lima
Orientadora: Silvia Azucena Nebra de Perez
Co-Orientadora: Marlene Rita de Queiroz**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Flúidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1999
S.P. – Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	L628f
V.	EX
TOMBO BC/	39345
PRUC.	229/99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input type="checkbox"/>
X	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/10/99
N.º GPD	

CM-00136596-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L628f

Lima, Antonio Gilson Barbosa de.

Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos.
Estudo de caso: secagem de banana / Antonio Gilson
Barbosa de Lima.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientadores: Silvia Azucena Nebra de Perez, Marlene
Rita de Queiroz.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Difusão em sólidos. 2. Elipsóide. 3. Secagem. 4.
Banana – Secagem. 5. Modelos matemáticos. 6. Métodos
de simulação. I. Perez, Silvia Azucena Nebra de. II.
Queiroz, Marlene Rita de. III. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

TESE DE DOUTORADO

**Fenômeno de Difusão em Sólidos
Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso:
Secagem de Banana**

Autor: Antonio Gilson Barbôsa de Lima
Orientadora: Silvia Azucena Nebra de Perez
Co-Orientadora: Marlene Rita de Queiroz

Profa. Dra. Silvia Azucena Nebra de Perez, Presidente
Unicamp

Profa. Dra. Odélsia Leonor Sanchez de Alsina
UFPb

Profa. Dra. Florência Cecília Menegalli
Unicamp

Prof. Dr. José Ricardo Figueredo
Unicamp

Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani
Unicamp

Campinas, 4 de agosto de 1999

Dedicatória:

Dedico este trabalho a DEUS, por ter me dado saúde e sabedoria para alcançar o objetivo desejado;

a meus pais Severino Pedro da Silva (Padrasto) e Janete Barbosa de Lima Silva, pelo amor, apoio e incentivo;

a minha querida e amada esposa Telma Paiva Barbosa de Lima pelo carinho, amor, compreensão e dedicação;

a meus queridos e sempre amados filhos Wagner Celso Paiva Barbosa de Lima e Wanderson Magno Paiva Barbosa de Lima pelo apoio, compreensão, alegria, e sobretudo pelo amor. Sinto muito orgulho de vocês.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e Instituições às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, esposa e filhos pelo incentivo e amor em todos os momentos da minha vida.

À minha orientadora Prof. Dra. Silvia Azucena Nebra de Perez, que me mostrou os caminhos a serem seguidos, que me ensinou e guiou-me com muita sabedoria e dedicação. A esta grande amiga que nas horas boas ou difíceis sempre esteve ao meu lado. Muito obrigado. Jamais esquecerei.

À minha Co-Orientadora Prof. Dra. Marlene Rita de Queiroz, pela co-orientação, amizade e dedicação, imprescindíveis à realização deste e de futuros trabalhos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa PICD.

Ao DEM/CCT/UFPB pela liberação integral das atividades para cursar o Doutorado.

À FEM/UNICAMP, FEQ/UNICAMP e FEAGRI/UNICAMP pela estrutura e pelos ensinamentos.

Ao Professor Dr. José Tomáz Vieira Pereira (DE/FEM/UNICAMP) pelo apoio e confiança na minha pessoa, decisivos na realização deste trabalho. Meu muito obrigado.

Ao Professor Dr. Carlos Alberto C. Altemani (DE/FEM/UNICAMP) pelo ensino e pelas discussões sobre métodos numéricos, decisivos na realização deste trabalho. Meu muito obrigado.

Ao Professor Dr. Paulo H. Sakanaka (IFGW/UNICAMP) pelo ensino e pelas discussões sobre métodos analíticos e numéricos, imprescindíveis à conclusão deste trabalho. Muito obrigado.

À Prof. Dra. Maria Aparecida Silva (FEQ/UNICAM), ao Prof. Dr. Zdzislaw Pakowski (Faculty of Process and Environmental Engineering / Lodz Technical University / Poland), ao Prof. Dr. Roger B. Keey (Department of Chemical and Process Engineering / University of Canterbury / New Zealand), ao Prof. Dr. Waldir Luiz R. Gallo (DE/FEM/UNICAM), ao Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli (DE/FEM/UNICAMP), ao Prof. Dr. Kamal Abdel R. Ismail (DETF/FEM/UNICAMP) pelo apoio, ensino, amizade e fornecimento de material bibliográfico.

Aos professores do DEM/CCT/UEPB, particularmente aos Prof. Antonio Pralon F. Leite, Raimundo Nonato C. Duarte, Yoge Gerônimo R. Costa, Manoel Cordeiro de Barros, Francisco Marcondes e Francisco José Simões, por assumirem todas as minhas atividades durante a minha ausência no Departamento de Engenharia Mecânica.

Aos colegas de Doutorado pela amizade e apoio. Em especial a Sérgio, Ednildo, Lourenço, Jailson, Barbara, Edna e Mônica.

À todos os professores, funcionários e colegas da UNICAMP, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Na Natureza não existem nem prêmios nem punições - há apenas conseqüências.

Robert G. Ingersoll

Índice

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura	5
2.1	Teoria e modelagem do processo de secagem	5
2.2	Modelagem da secagem	7
2.2.1	Modelos empíricos e semi-empíricos	8
2.2.2	Modelos difusivos	12
2.2.3	Modelos baseados na Termodinâmica dos processos irreversíveis	18
2.2.3.1	Modelo de Luikov	18
2.2.3.2	Modelo de Fortes e Okos	21
2.2.4	Comparação entre os modelos de Luikov, difusivo, empírico e semi-empírico	24
2.3	Banana: aspectos científicos e tecnológicos	26
2.3.1	Características da fruta	26
2.3.2	Aproveitamento e técnica de conservação: desidratação	30
2.3.3	Propriedades termo-físico-químicas da banana	41
3	Modelagem da Transferência de Calor e Massa	46
3.1	A equação de difusão de massa no sistema esferoidal prolato	47
3.2	Resolução do problema de difusão de massa em corpos elipsoidais	55
3.2.1	Resolução analítica	55
3.2.2	Resolução numérica	65

3.2.2.1 Modelos numéricos difusionais	72
Modelo I - Modelo difusional com condição de equilíbrio na superfície do sólido.	72
Modelo II - Modelo difusional com condição convectiva na superfície do sólido.	79
Modelo III - Modelo difusional com condição convectiva na superfície e fenômenos simultâneos de transferência de umidade e encolhimento	85
Modelo IV - Modelo difusional com condição convectiva na superfície e fenômenos simultâneos de transferência de calor e massa	90
Modelo V - Modelo difusional de temperatura.	96
Modelo VI - Modelo difusional com condição convectiva na superfície, propriedades variáveis e fenômenos simultâneos de transferência de calor, massa e encolhimento	101
3.3 Aplicação da modelagem a dados experimentais de secagem de banana	102
4 Resultados e Discussões	111
4.1 Resolução Analítica	111
4.2 Resolução Numérica	120
4.2.1 Refinamento de malha e de tempo	120
4.2.2 Resultados do modelo I	125
4.2.3 Resultados do modelo II	135
4.2.4 Resultados do modelo III	144
4.2.5 Resultados do modelo V	149
4.2.6 Aplicação do modelo VI à secagem de trigo	156
4.2.7 Aplicação dos modelos analítico e numérico à secagem de banana	158
4.2.7.1 Estimação não-linear dos parâmetros	158

4.2.7.2 Aplicação dos modelos numéricos	166
• Modelo I	166
• Modelo II	170
• Modelo III	175
• Modelo IV	184
• Modelo VI	185
4.2.7.3 - Estimativa dos coeficientes de transponte (D , α , h_m e h_c)	195
5 Conclusões e Sugestões para próximos trabalhos	207
Referências Bibliográficas	213
Anexos	241

Resumo

Lima, Antonio Gilson Barbosa de, *Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: Secagem de banana*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 265 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho foram desenvolvidos vários modelos matemáticos bidimensionais analíticos e numéricos para simular o fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos (elipsoidais axi-simétricos). Na formulação numérica, o método de volumes finitos, usando uma malha regular, é explorado para discretizar a equação de difusão, considerando o fenômeno com ou sem encolhimento, com ou sem têmpera, com ou sem transporte simultâneos de umidade e calor. O conjunto de equações lineares é resolvido iterativamente pelo método de Gauss-Seidel, usando condição de fronteira de equilíbrio ou convectiva e coeficiente de difusão constante ou variável. Os modelos predizem a transferência interna de umidade e/ou calor no sólido, bem como o seu teor de umidade médio e/ou temperatura média ao longo do processo. Vários casos foram estudados, variando-se os números de Fourier e Biot para transferência de calor ou de massa e a razão de aspecto do corpo. Foi feita uma análise dos efeitos da geometria do corpo, do encolhimento e da secagem em multipasses (têmpera), no fenômeno de difusão de umidade. Como aplicação, os modelos foram usados para descrever a transferência de calor e massa durante a secagem de banana, variedade “nanição”. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais da literatura. Equações para as difusividades térmica e de massa e o coeficiente de transferência de calor convectivo foram obtidas utilizando o método dos mínimos quadrados.

Palavras Chave

Esferóide prolato, Difusão, Modelagem, Simulação, Secagem, Banana

Abstract

LIMA, Antonio Gilson Barbosa de, *Diffusion phenomenon in prolate spheroidal solids. Case studied: Drying of banana*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 265 p. Tese (Doutorado)

In this work, various two dimensions mathematical models to simulate the diffusion phenomenon in prolate spheroidal solids (ellipsoids axisymmetric) were developed. In the numerical formulation, the finite-volume method, a regular grid is employed to discretize the diffusion equation, considering the phenomenon with and without shrinkage, with or without tempering, and simultaneous moisture and heat transfer. The linear equations set was solved iteratively utilizing the Gauss-Seidel method, with convective or equilibrium boundary conditions and constant or variable diffusion coefficient. The models predict the temperature and/or moisture content distribution inside the solid and the mean moisture content and/or mean temperature along the time. Various cases were analyzed, changing the Fourier and Biot numbers applied to heat or mass transfer and the aspect ratios of the body. The effects in the diffusion phenomenon due to the body geometry, shrinkage and tempering were showed. As an application, the models were used to describe the heat and mass transfer during the drying of banana, variety “nanicão”, and the results were compared with experimental data from the literature. Equations for mass and thermal diffusivity and convective heat transfer coefficient were obtained using the least square method.

Key Words

Prolate spheroid, Diffusion, Modeling, Simulation, Drying, Banana

Lista de Figuras

Figura 3.1	Características de um esferóide prolato sólido	48
Figura 3.2	Sistema de coordenadas esferoidal prolato	49
Figura 3.3	Configuração geométrica do problema físico	66
Figura 3.4	Ponto na superfície do corpo	70
Figura 3.5	Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E	72
Figura 3.6	Diagrama de blocos do programa computacional SPHEROIDIFF	81
Figura 3.7	Encolhimento do sólido esferoidal prolato durante o processo de difusão	87
Figure 3.8	Ponto nodal próximo a superfície	100
Figura 4.1	Comparação do teor de umidade no centro e no ponto focal de um com $L_2/L_1=1,1$, obtidos analiticamente pelo método proposto pelo autor e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966)	112
Figura 4.2	Teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=1,1$, em função de ξ , obtidos analiticamente para $Fo=0,0089, 0,2423$ e $0,6550$, para três posições angulares diferentes	114
Figura 4.3	Teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=1,1$, em função de η , obtidos analiticamente para $Fo=0,0089, 0,2423$ e $0,6550$, para três posições radiais diferentes	115
Figura 4.4	Teor de umidade como função da coordenada esferoidal radial na posição $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$) para vários números de Fourier e $L_2/L_1=1,1$, obtido analiticamente	116
Figura 4.5	Teor de umidade como uma função da coordenada esferoidal angular na posição $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários números de Fourier e $L_2/L_1=1,1$, obtido analiticamente	116
Figura 4.6	Pontos de iso-concentração para $Fo=0,124883, 0,470230$ e $0,912458$	117
Figura 4.7	Teor de umidade no centro, ponto focal e próximo da superfície de um elipsóide com $L_2/L_1=1,1$, para vários números de Fourier (Fo)	118
Figura 4.8	Comparação entre os teores de umidade médio obtidos pelo método proposto e os obtidos com as soluções analíticas para cilindro e esfera dadas por Luikov (1968)	119
Figura 4.9	Influência do número de pontos da malha numérica no teor de umidade médio de um esferóide com $L_2/L_1=1,8$ e $\Delta Fo=1,0892 \cdot 10^{-4}$	120

Figura 4.10	Influência do número de pontos da malha numérica no teor de umidade médio de um esferóide com $L_2/L_1=1,8$ e $\Delta Fo = 1,6339 \cdot 10^{-4}$	121
Figura 4.11	Influência do valor ΔFo , no teor de umidade médio de um esferóide com $L_2/L_1=1,8$ para uma malha de 20×20 pontos	122
Figura 4.12	Malha numérica no plano físico de elipsóides para quatro razões de aspecto	123
Figura 4.13	Malha numérica no plano computacional para um elipsóide com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$	124
Figura 4.14	Comparação entre os teores de umidade no interior de uma esfera ($L_2/L_1=1,0$), obtidos pelos métodos numérico, proposto pelo autor e o analítico dado por Luikov (1968)	125
Figura 4.15	Comparação entre os teores de umidade médio para uma esfera, obtidos pelos métodos, numérico proposto pelo autor e o analítico dado por Luikov (1968)	126
Figura 4.16	Comparação entre os teores de umidade no centro e no ponto focal de um corpo com $L_2/L_1=1,1$, obtidos pelos métodos numérico proposto pelo autor e o analítico formulado por Haji-Sheikh e Sparrow (1966)	126
Figura 4.17	Comparação entre os teores de umidade médio de um corpo com $L_2/L_1=1,1$, obtidos pelos métodos numérico e analítico, propostos pelo autor	127
Figura 4.18	Razão de umidade média em função do número de Fourier, para vários esferóides prolatos	128
Figura 4.19	Razão de umidade no centro de vários esferóides prolatos em função do número de Fourier	129
Figura 4.20	Razão de umidade no ponto focal de vários esferóides prolatos em função do número de Fourier	129
Figura 4.21	Efeito da área superficial de elipsóides de iguais volumes na sua cinética de secagem	130
Figura 4.22	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial, para vários Fo e para $L_2/L_1=1,5$ e $\eta=0,0$.	131
Figura 4.23	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para vários Fo e para $L_2/L_1=1,5$ e $\xi=1,0$.	131
Figura 4.24	A forma do elipsóide e os pontos de iso-concentração para $Fo=0,0366, 0,1098$ e $0,1952$	132
Figura 4.25	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial, para vários Fo e para $L_2/L_1=5,0$ e $\eta=0,0$.	134
Figura 4.26	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para vários Fo e para $L_2/L_1=5,0$ e $\xi=1,0$.	134
Figura 4.27	Comparação entre os teores de umidade em função do tempo de um elipsóide e da correspondente esfera de volume equivalente	135

Figura 4.28	Comparação entre os teores de umidade no interior de uma esfera obtidos pelos métodos analítico (Luikov, 1968) e numérico, proposto pelo autor, para $Bi=1,0$	136
Figura 4.29	Comparação entre os teores de umidade médio obtidos pelos métodos analítico (Luikov, 1968) e numérico, proposto pelo autor, para vários Fo e $Bi=1,0$	136
Figura 4.30	Teor de umidade médio de um esferóide prolato como função do número de Fourier e vários números de Biot para três razões de aspecto	137
Figure 4.31	Teor de umidade no centro de um esferóide prolato sólido como função do número de Fourier para e vários números de Biot para três razões de aspecto	138
Figure 4.32	Teor de umidade no ponto focal de um esferóide prolato sólido como função do número de Fourier e vários números de Biot	139
Figura 4.33	Diferença entre os teores de umidade no ponto focal e no centro para vários esferóides prolatos como função de Fo para $Bi=1,0$	140
Figura 4.34	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial para $Bi=1,0$, vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $\eta=0,0$.	141
Figura 4.35	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para $Bi=1,0$, vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $\xi=1,0$.	141
Figura 4.36	A forma do elipsóide e os pontos de iso-concentração para $Bi=1,0$ e $Fo=Dt/L_1^2=0,0732, 0,3660$ e $1,2200$	142
Figura 4.37	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial para $Fo=Dt/L_1^2=0,1464$, vários Bi , $L_2/L_1=2,0$ e $\eta=0,0$.	143
Figura 4.38	Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial para $Fo=Dt/L_1^2=0,1464$, vários Bi , $L_2/L_1=2,0$ e $\xi=1,0$.	143
Figura 4.39	Comparação entre os teores de umidade obtidos pelo modelo II e pelo modelo concentrado dado por Schneider (1985)	144
Figura 4.40	Evolução da forma do material durante a secagem de um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,3$, e Bi infinito	145
Figura 4.41	Evolução da malha numérica durante o encolhimento de um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,3$ e Bi infinito.	146
Figura 4.42	Efeito do coeficiente de encolhimento na cinética de secagem de um sólido esferoidal com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, vários coeficientes de encolhimento e Bi infinito.	146
Figura 4.43	Distribuição do teor de umidade no interior de um esferóide prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ para (a) $\bar{\beta}=0,0$ e (b) $\bar{\beta}=0,3$, em $Fo=0,1098$, Bi infinito	147

Figura 4.44	Teor de umidade em função do número de Fourier para vários esferóides prolatos com $L_2/L_1=1,1; 1,5$ e $5,0$, para $\bar{\beta}=0,3$ e Bi infinito	147
Figura 4.45	Cinética de encolhimento volumar de um elipsóide de revolução com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,0; 0,3$ e $0,6$ e Bi infinito	148
Figura 4.46	Cinética de encolhimento superficial de um elipsóide de revolução com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,0; 0,3$ e $0,6$ e Bi infinito	148
Figura 4.47	Distribuição radial do teor de umidade dentro de um esferóide prolato durante o período de têmpera em diferentes Fo, em $\eta=0,0$. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$	150
Figura 4.48	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $1,1$, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$	151
Figura 4.49	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $2,0$, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$	151
Figura 4.50	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $5,0$, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$	152
Figura 4.51	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $1,1$, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$	152
Figura 4.52	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $2,0$, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$	153
Figura 4.53	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $1,1$, p/ secagem com dois passes	154
Figura 4.54	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $2,0$, p/ secagem com dois passes	154
Figura 4.55	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $1,1$, p/ secagem com vários passes	155
Figura 4.56	Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto $2,0$, p/ secagem com vários passes	155
Figura 4.57	Valores experimentais e preditos do teor de umidade médio de grãos de trigo durante a secagem	157
Figura 4.58	Valores experimentais e preditos da temperatura no centro de grãos de trigo durante a secagem	157
Figura 4.59	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=29,9$ °C e $UR=35,7\%$.	159
Figura 4.60	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=39,9$ °C e $UR=19,3\%$.	159

Figura 4.61	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=49,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,2\%$.	160
Figura 4.62	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=60,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,9\%$.	160
Figura 4.63	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=60,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=10,7\%$.	161
Figura 4.64	Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=68,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=7,3\%$.	161
Figura 4.65	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=29,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=35,7\%$.	162
Figura 4.66	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=39,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,3\%$.	163
Figura 4.67	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=49,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,2\%$.	163
Figura 4.68	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=60,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,9\%$.	164
Figura 4.69	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=60,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=10,7\%$.	164
Figura 4.70	Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.144 para $T=68,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=7,3\%$.	165
Figura 4.71	Comparação entre os volumes de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.111 para $T=70\text{ }^{\circ}\text{C}$, secagem em estufa.	166
Figura 4.72	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	167
Figura 4.73	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	167
Figura 4.74	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	168
Figura 4.75	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	168
Figura 4.76	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	169
Figura 4.77	Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	169
Figura 4.78	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	172
Figura 4.79	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	172
Figura 4.80	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	173

Figura 4.81	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	173
Figura 4.82	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	174
Figura 4.83	Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	174
Figura 4.84	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	176
Figura 4.85	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	176
Figura 4.86	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	177
Figura 4.87	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	177
Figura 4.88	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	178
Figura 4.89	Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	178
Figura 4.90	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	181
Figura 4.91	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	181
Figura 4.92	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	182
Figura 4.93	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	182
Figura 4.94	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	183
Figura 4.95	Comparação entre os resultados teórico (modelo III, hm infinito) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.	183
Figura 4.96	Temperatura adimensional experimental no centro da banana, durante a secagem	184
Figura 4.97	Comparação entre os resultados teórico (modelo IV e VI) e experimental (teste 6) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.	186
Figura 4.98	Taxa de aquecimento experimental no centro da banana (teste 1) como função do tempo de secagem.	187
Figura 4.99	Taxa de aquecimento experimental no centro da banana (teste 6) como função do tempo de secagem.	187
Figura 4.100	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 1) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.	188
Figura 4.101	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 2) da temperatura no centro da banana, durante a secagem	188
Figura 4.102	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 3) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.	189

Figura 4.103	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 4) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.	189
Figura 4.104	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 5) da temperatura no centro da banana, durante a secagem	190
Figura 4.105	Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 6) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.	190
Figura 4.106	Variação do teor de umidade médio e da temperatura média da banana (teste 6), durante a secagem.	191
Figura 4.107	Distribuição do teor de umidade adimensional (M^*) no interior da banana em $t=1,11h$, $5,00h$ e $15,00h$ (teste 6), obtida com os modelos III ou VI	193
Figura 4.108	Distribuição da temperatura adimensional ($1-\theta^*$) no interior da banana em $t=1,11h$ e $5,00h$ (teste 6), obtida com o modelo VI.	194
Figura 4.109	Distribuição do teor de umidade adimensional (M^*) no interior da banana em $t=5,00h$ (teste 3), obtida com os modelos III ou VI	195
Figura 4.110	Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo I.	198
Figura 4.111	Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo II.	198
Figura 4.112	Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo III.	199
Figura 4.113	Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo III (hm infinito).	199
Figura 4.114	Variação da difusividade térmica em qualquer ponto dentro da banana, durante a secagem (teste 6).	204

Lista de Tabelas

2.1	Modelos empíricos e semi-empíricos reportados na literatura	11
2.2	Modelos paramétricos empíricos expressando o coeficiente de difusão como função da temperatura e/ou do teor de umidade do meio poroso	14
2.3	Composição da banana madura	29
2.4	Teor mineral da banana madura	29
2.5	Vitaminas existentes na banana madura	30
2.6	Dados de isotermas de sorção de banana reportados na literatura	31
2.7	Propriedades térmica, física e correlatas da banana	43
2.8	Difusividade de umidade de banana para várias temperaturas e geometrias	45
3.1	Parâmetros experimentais do ar e da banana para cada teste de secagem realizado	103
3.2	Dados de encolhimento da banana durante a secagem	104
3.3	Calor latente de vaporização da água livre e calor específico do vapor de água para cada condição de secagem de banana	108
4.1	Valores dos coeficientes e critério de ortogonalidade das funções esféricas	113
4.2	Teor de umidade médio para vários padrões de malha e de tempo.	121
4.3	Teor de umidade médio final, iniciando a têmpera em $Fo=0,01098$	149
4.4	Parâmetros da Equação 3.143 ajustados aos dados experimentais da razão de umidade	158
4.5	Parâmetros da Equação 3.144 ajustados aos dados experimentais da temperatura	162
4.6	Coeficiente de encolhimento adimensional e dados dimensionais da banana durante a secagem	179
4.7	Dados de encolhimento relativo durante a secagem de banana	179
4.8	Coeficientes de transporte estimados pelos modelos numéricos e variância, para cada teste de secagem	196
4.9	Coeficientes A_i da Equação 3.147 e os correspondentes valores de R e \bar{S}^2 .	197
4.10	Coeficientes A_i das equações 3.152-3.133 e os correspondentes erros relativos	202
4.11	Valores da difusividade térmica, coeficiente de transferência de calor e número de Biot, para cada teste de secagem	202
4.12	Coeficientes A_2 da Equação 3.154 para cada teste de secagem	206

Nomenclatura

Letras Latinas

a', b', c', d', e', f' - coeficiente das Equações 3.10-3.14	[-]
A_i - constantes $i=0, 1, 2, \dots, n; j= 1, 2, \dots, n$	[-]
A_j - constantes $i=0, 1, 2, \dots, n; j= 1, 2, \dots, n$	[-]
A_{mk} - constante da Equação 3.64	[-]
$A_o, A_P, A_N, A_S, A_E, A_W, A_p^o$ - constante	[-]
b - autovalor das Equações 3.42 e 3.43	[-]
Bi - número de Biot	[-]
Bi_c - número de Biot de transferência de calor	[-]
Bi_m - número de Biot de transferência de massa	[-]
c - calor específico	[J / kg / K]
c - constante da Equação 3.38	[-]
C^* - concentração de vapor	[-]
\hat{C} - meio perímetro da seção longitudinal da banana	[m]
c_a - calor específico do ar seco à pressão constante	[J / kg / K]
c_h - coeficiente de capacidade de ar úmido	[kg.m ² / kg / kN]
\bar{C}_1 - coeficiente da Equação 3.131	[-]
\bar{C}_L - coeficiente da Equação 3.131	[-]
\bar{C}_t - coeficiente da Equação 3.131	[-]
c_m - capacidade de umidade específica kg de água/kg de matéria seca	[kg / kg]
c_v - calor específico do vapor d'água, à pressão constante	[J / kg / K]
c_w - calor específico da água	[J / kg / K]
D - coeficiente de difusão	[m ² / s]
d - coeficiente esférico	[-]
\bar{d} - diâmetro médio da banana	[m]
d_1 - diâmetro vertical	[m]
d_2 - diâmetro horizontal	[m]
D_{ij} - coeficientes da Equação 3.69	[-]
dM/dt - taxa de difusão	[1 / s]
$dM/\hat{d}t$ - taxa de difusão	[1 / s]

ERMQ - erro médio quadrático	$[(\text{kg} / \text{kg})^2]$
e,w,s,n - faces dos pontos nodais	[-]
exp - exponencial	[-]
f - fronteira ou superfície do sólido	[-]
\hat{f}_i - fator de interpolação	[-]
\hat{f}_1 - constante da Equação 3.131	[-]
Fo - número de Fourier	[-]
Fo_c - número de Fourier de transferência de calor	[-]
Fo_m - número de Fourier de transferência de massa	[-]
g - aceleração da gravidade	$[\text{m} / \text{s}^2]$
g_m, g_p, v(x) - funções de variáveis	[-]
h_c - coeficiente de transferência de calor por convecção	$[\text{W} / \text{m}^2 / \text{K}]$
h_fg - calor latente de vaporização da água livre	$[\text{J} / \text{kg}]$
h_m - coeficiente de transferência de massa	$[\text{m} / \text{s}]$
h_w - calor diferencial específico de umidificação	$[\text{J} / \text{kg}]$
i, j - posição do ponto nodal na malha	[-]
\bar{J} - fluxo de uma substância	$[\text{kg} / \text{m}^2 / \text{s}]$
J - jacobiano da transformação	[-]
j(ξ) - função de Bessel esférica	[-]
\bar{J}_1 - fluxo de líquido	$[\text{kg} / \text{m}^2 / \text{s}]$
\bar{J}_v - fluxo de vapor	$[\text{kg} / \text{m}^2 / \text{s}]$
$(\bar{J}_q)_m$ - fluxo de calor na ausência de transporte de massa	$[\text{J} / \text{m}^2 \text{s}]$
k - condutividade térmica	$[\text{W} / \text{m} / \text{K}]$
k_f - coeficiente de filtração total	$[\text{kg} . \text{m} / \text{s} / \text{kN}]$
K_i, K_j - constantes $i=0, 1, 2, \dots, n; j= 1, 2, \dots, n$	[-]
K_{ij} - $i=j$ coeficientes fenomenológicos; $i \neq j$ coeficientes combinados	[-]
k_l - condutividade térmica de líquido	$[\text{s}]$
k_t - condutividade térmica aparente efetiva na ausência de transporte de massa	$[\text{W} / \text{m} / \text{K}]$
k_v - condutividade térmica de vapor	$[\text{m}^2 / \text{s}]$
\bar{k} - constante da Equação 3.132	[-]
\bar{k}' - constante da Equação 3.133	[-]
L' - comprimento característico	$[\text{m}]$
L - comprimento focal	$[\text{m}]$
L₁, L₂ - dimensões do esferóide prolato	$[\text{m}]$
M - teor de umidade (base seca ou base úmida)	$[\text{kg} / \text{kg}]$
m - massa	$[\text{kg}]$
M* - razão de umidade	$[\text{kg} / \text{kg}]$
\hat{m} - constante da Equação 3.131	[-]
\dot{M} - geração de M por unidade de volume	$[\text{l} / \text{m}^3]$
M'' - fluxo do teor de umidade por unidade de área	$[\text{l} / \text{m}^2]$

\bar{M} - teor de umidade médio	[kg / kg]
\bar{M}^* - razão de umidade médio	[kg / kg]
N, S, E, W, P - pontos nodais	[-]
\bar{Nu} - número de Nusselt médio	[-]
\bar{Nu} - número de Nusselt médio baseado no comprimento L'	[-]
P - pressão total	[Pa]
P^ϕ - termo de pressão	[-]
Pe - número de Peclet	[-]
Pe' - número de Peclet baseado no comprimento L'	[-]
P(η) - função de Legendre	[-]
P_o - pressão ambiente	[Pa]
Pr - número de Prandtl	[-]
P_v - pressão de vapor à temperatura T	[Pa]
P_{vs} - pressão do vapor de saturação	[Pa]
q'' - fluxo de calor	[W]
r - coordenada radial esférica, raio	[m]
R coeficiente de correlação	[-]
R_v - constante dos gases para o vapor d'água = $462,69 \text{ J.kg}^{-1}.\text{mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$	[J / kg / mol / K]
R_o - constante universal dos gases = $8314 \text{ J.kg}^{-1}.\text{mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$	[J / kg / mol / K]
S - área superficial do sólido	[m ²]
S_η - área \perp ao fluxo angular de Φ	[m ²]
S_ξ - área \perp ao fluxo radial de Φ	[m ²]
S_ζ - área \perp aos fluxos angular e radial de Φ	[m ²]
S^ϕ - termo fonte	[-]
\bar{s}^2 - variância	[(kg / kg) ²]
\bar{SM} - fator que incorpora à Equação 3.106, o efeito convectivo de umidade na superfície do sólido	[-]
\bar{ST} - fator que incorpora à Equação 3.126, o efeito convectivo de calor na superfície do sólido	[-]
t - tempo	[s]
T - temperatura	[°C]
t_c^* - tempo adimensional de transferência de calor	[-]
$\bar{TF}\bar{\theta}$ - termo fonte da Equação 3.126	[-]
t_m^* - tempo adimensional de transferência de massa	[-]
T_o - temperatura do ar nas condições ambientes	[°C]
$\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$ - coeficientes métricos	[-]
U, U₁, U₂ - funções da constante de separação	[-]
u, v, w - componentes do vetor velocidade	[m / s]
UR - umidade relativa	[%]
V - volume	[m ³]

v - velocidade	[m / s]
\vec{v} - vetor velocidade $\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j}$	[m / s]
x, y, z - coordenadas cartesianas	[m]
\tilde{x} - variável auxiliar	[-]

Letras Gregas

α_{ij} - parâmetros	[-]
α - difusividade térmica	[m ² / s]
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ - parâmetros da Equação 3.48	[-]
$\bar{\beta}, \bar{\beta}', \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ - coeficientes de encolhimento	[-]
χ - função esférica radial	[-]
$\hat{\delta}, \hat{\phi}$ - parâmetros das equações 3.53 e 3.54	[-]
δ' - coeficiente termo-gradiente	[1 / K]
ε' - razão do coeficiente de difusão de vapor ao coeficiente de difusão de umidade	[-]
ε - porosidade do leito (decimal)	[-]
Φ'' - fluxo de Φ por unidade de área	[1 / m ²]
Φ - função	[-]
Γ, Γ^Φ - propriedade do material	[-]
η - coordenada angular ($\perp x$)	[-]
λ - função esférica angular	[-]
μ, ϕ, ω - coordenadas esféricas prolatas	[-]
ϕ - potencial químico	[J / kg]
$\hat{\theta}$ - inclinação da reta rr	[Grau]
θ' - coordenada angular esférica	[-]
θ - temperatura do produto	[°C]
$\bar{\theta}_\infty, \theta_\infty$ - temperatura fora da camada limite	[°C]
ρ - densidade (massa específica)	[kg / m ³]
σ - fator de tortuosidade para difusão de gases em meios porosos	[-]
τ - função de tempo	[-]
ν_a - viscosidade cinemática do ar	[m ² / s]
ν - coeficiente de gradiente térmico	[-]
ξ - coordenada radial	[-]
$\xi_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty$ - valores constantes das coordenadas esféricas	[-]
ψ - função de posição	[-]
ζ - coordenada angular ($\perp z$)	[-]
\mathfrak{F} - propriedade física do sólido na Equação 3.73	[-]
∇ - gradiente	[-]
Δ, δ - Variação	[-]

Superescritos

- + - tempo posterior
- * - adimensional
- o - anterior

Subscritos

- η ; ζ ; ξ - direção perpendicular ao fluxo
- a - ar
- abs - absoluta
- b - média
- c - calor
- e - equilíbrio
- e, w, n, s - faces dos pontos nodais
- ep - efetiva do produto
- f - final; superfície
- i - material i
- l - líquido
- m - massa
- n - convecção natural
- n, m, r, k, p - números inteiros
- o - Inicial
- P - ponto nodal P
- p - produto
- ps - produto seco
- s - seco
- si - produto i seco
- so - aparente do sólido seco
- t - tempo
- u - úmido
- v - vapor
- vo - vapor no estado de saturação
- w - água

Abreviações

- Exp - experimental
- Num - numérico
- EMC - equilibrium moisture content

Capítulo 1

Introdução

A transferência de umidade dentro de um sólido pode ocorrer na forma de líquido e/ou vapor, dependendo do tipo de material e teor de umidade. Operações de desidratação ou secagem, assim como a dinâmica do movimento de umidade em um material biológico são importantes passos nas indústrias química e de processamento de alimentos, como também no armazenamento e processamento de grãos e outros produtos biológicos. A secagem é um processo que envolve fenômenos de transferência simultânea de calor, massa e “momentum”, gerando a necessidade de modelos efetivos para simulação do processo. O conhecimento dos mecanismos de movimento da umidade no interior dos materiais é de fundamental importância e precede à tentativa de descrever a migração da mesma no interior de um produto higroscópico. Devido à não-homogeneidade dos produtos biológicos e na tentativa de se aproximar do processo físico real, várias teorias de secagem foram propostas e vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o transporte de umidade e calor em meios capilares porosos, tendo por base o modelo de difusão.

Diversos parâmetros afetam a cinética de secagem de produtos biológicos, tais como: mecanismo de transporte de calor e umidade dentro do sólido; coeficiente de difusão variável, transferência simultânea de calor e massa; condições ambientais externas na vizinhança do sólido, encolhimento, entre outros. Assim, inserindo-se todos estes efeitos na construção dos modelos

matemáticos, torna-se possível descrever com grande realismo o fenômeno físico e aumentar consideravelmente a confiabilidade dos resultados obtidos.

O coeficiente de difusão geralmente tem sido considerado constante nos modelos, no entanto, observações experimentais mostram que ocorrem importantes discrepâncias entre os resultados experimentais e teóricos, quando comparados com os obtidos com coeficiente de difusão variável, principalmente no período de taxa decrescente.

Transferências acopladas de calor e massa também têm sido consideradas pelos pesquisadores, contudo, pode ser constatado que para alguns materiais, por exemplo, grãos de cereais, este efeito pode ser considerado desprezível, uma vez que o material praticamente atinge a temperatura do ar de secagem em poucos minutos, enquanto que a duração da secagem pode chegar a atingir várias horas. No entanto vale ressaltar que, em materiais tais como frutas, com teor de umidade inicial elevado, este efeito é mais significativo e não pode ser desprezado. Nestes materiais, a difusividade térmica é baixa e, em consequência, as transferências de calor e massa ocorram praticamente ao mesmo tempo.

O encolhimento de materiais sólidos durante a secagem é um fenômeno físico observável, que ocorre simultaneamente com a difusão de umidade, principalmente em produtos biológicos com alto teor de umidade inicial como é o caso de frutas e vegetais. Assim sendo, o encolhimento pode ter um significativo efeito na difusividade de massa, e conseqüentemente na taxa de remoção de umidade. Considerar-se o volume do corpo fixo durante a secagem tem gerado desvios maiores entre os dados experimentais e teóricos, em comparação com os modelos que incorporam o fenômeno do encolhimento. A modelagem do encolhimento é dificultada pela falta de informações na literatura sobre os coeficientes de encolhimento, assim como de relações matemáticas entre a difusividade de massa, encolhimento e densidade da matéria seca.

Quando a resistência interna do sólido ao transporte de umidade supera a transferência convectiva externa, a difusão de umidade é o mecanismo que controla o processo no período de taxa decrescente. Durante esse período, a taxa de secagem diminui, em virtude do decréscimo do

teor de umidade dentro do sólido, e o aquecimento contínuo tem pequeno efeito na remoção de umidade. Uma eficiente utilização de energia no processo de secagem, portanto, é muito importante e deve ser estudada cuidadosamente. Várias técnicas de secagem são utilizadas por pesquisadores para racionalizar o uso da energia na secagem de sólido, bem como reduzir a perda de qualidade produzida em vários produtos por aquecimento a altas temperaturas, especialmente em produtos biológicos. Uma dessas técnicas é a secagem intermitente que junto com a aeração e seca-aeração, tem sido usada extensivamente na secagem de grãos de cereais.

A secagem intermitente consiste em um processo que inclui um período de secagem, seguido de um período de repouso ou relaxamento e novamente de um período de secagem. Este procedimento é chamado de têmpera. Dependendo do número de períodos de repouso, tem-se secagem com um passe, com dois passes e secagem em multi-passes. O processo de têmpera tem como objetivo uniformizar o teor de umidade dentro do sólido, por migração de umidade do centro para a periferia do mesmo. A determinação do tempo e número de passes ótimos da têmpera é importante, principalmente, devido à diminuição da energia utilizada na secagem e da melhor qualidade obtida no produto ao final do processo.

Soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão para vários casos, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante ou do tipo convectiva, para várias geometrias podem ser encontradas na literatura. Contudo poucos trabalhos reportam a difusão em corpos esferoidais, e mesmo assim restrita a certas condições de contorno e/ou tipo de produto. Sendo a forma esferoidal muito comum nos produtos biológicos, é evidente a necessidade de soluções mais amplas para o problema de difusão neste tipo de geometria que possam ser aplicadas diretamente a fenômenos de secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento de produtos.

O presente estudo constitui-se numa análise numérica/analítica do processo de difusão em corpos esferoidais prolatos, adotando como estudo de caso a secagem de banana, mediante a abordagem de duas metodologias (analítica e numérica) para a solução do problema de difusão

transiente em corpos com forma elipsoidal. O autor se propõe, em síntese, a atingir os seguintes objetivos:

- Apresentar soluções analítica e numérica para o problema de difusão transiente, em corpos com forma elipsoidal, baseando-se no modelo de difusão líquida.
- Simular a distribuição do teor de umidade no interior de sólidos e suas respectivas cinéticas de difusão.
- Modelar e estudar numericamente a secagem intermitente.
- Modelar e analisar o efeito do encolhimento.
- Modelar e analisar o efeito do fenômeno de difusão de calor e massa simultâneos.
- Aplicar os modelos desenvolvidos à secagem de banana;
- Comparar os resultados numéricos e experimentais de banana, para várias condições de secagem;
- Estudar o efeito das considerações adotadas em cada modelo sobre os coeficientes de transporte;
- Obter correlações para os coeficientes de difusão de calor e massa e de transferência convectiva de calor e massa, como função dos parâmetros de secagem e dimensões do sólido.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 - Teoria e modelagem do processo de secagem

Operações de desidratação ou secagem são importantes processos nas indústrias químicas e de alimentos, como também no armazenamento de grãos e outros produtos biológicos. Durante a secagem de produtos biológicos ocorrem variações nas suas características físicas, químicas e biológicas, que, dependendo da intensidade do efeito, causam sua perda ou inutilidade para uma determinada função (alimentícia ou germinativa). Assim sendo, é importante o conhecimento dos efeitos da secagem sobre as propriedades químicas e biológicas do produto, uma vez que afetam sensivelmente os fenômenos de transferência de massa, principalmente em alimentos.

Um vasto número de estudos tem sido conduzido para analisar o processo de secagem. Uns consideram as condições externas do ar, tais como temperatura, umidade relativa e velocidade, correlacionadas à taxa de secagem do sólido, enquanto outros consideram as condições internas ao produto com ênfase nos mecanismos de movimento da umidade.

Discussões sobre os modelos de secagem podem ser encontradas, por exemplo, em Fortes e Okos (1980), Alvarenga et al. (1980), Fortes (1982), Keey(1992), Lima (1995), Mariz (1986),

Dand (1986), citado por Ibrahim et al. (1997), contudo alguns destes modelos serão abordados neste trabalho.

O fenômeno de migração de umidade no interior do produto biológico ainda não é bem conhecido. Alguns autores afirmam que a migração pode ser uma combinação de movimentos de umidade por difusão de líquido e de vapor, cada um predominando em certas etapas da secagem (Steffe e Singh, 1980a).

Os seguintes mecanismos de transporte em sólidos têm sido propostos na literatura (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kudra, 1986; Brooker et al., 1992; Lima, 1995).

- transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (causados por gradientes de temperatura);
- transporte por efusão (escoamento Knudsen). Ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros. É importante para condições de alto vácuo, como por exemplo, secagem por criogenia;
- transporte de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura;
- transporte de líquido por forças capilares;
- transporte de líquido por pressão osmótica;
- transporte de líquido devido à gravidade;
- transporte de líquido e de vapor, devido à diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade;
- transporte por difusão superficial.

Embora aqui não se tenha detalhado cada um dos mecanismos de transporte de umidade listados acima, informações adicionais podem ser encontradas nas referências citadas.

2.2 - Modelagem da secagem

O desenvolvimento de modelos matemáticos para descrever o processo de secagem tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores por várias décadas. Na tentativa de correlacionar dados experimentais da secagem de cada material particular a um modelo matemático, tem sido apresentada uma gama de modelos que representam a cinética de secagem de cada material em particular.

Dependendo da espessura da camada do material estudado ou se o material seco é apenas uma partícula, estes modelos podem ser classificados em modelos em nível de partícula e modelos em nível de secador. Particularmente para grãos, a importância prática da secagem de uma partícula isolada ou de uma camada fina do produto é muito limitada, porque geralmente os materiais são secos em camadas espessas: estacionárias ou em movimento. Contudo no caso das frutas, estas são secas em camadas finas.

Numerosos modelos têm sido propostos para descrever a taxa de perda de umidade durante a secagem de produtos agrícolas, podendo ser divididos em grandes grupos:

- modelos empíricos e semi-empíricos;
- modelos difusivos;
- modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Os modelos empíricos e semi-empíricos normalmente são usados para descrever a secagem de uma partícula ou de uma camada fina de partículas.

Os modelos empíricos consistem numa correlação direta entre o teor de umidade e o tempo de secagem, enquanto os semi-empíricos baseiam-se na hipótese da validade da lei de Newton do resfriamento, assumindo que a taxa de secagem é proporcional à diferença entre o teor de umidade do produto e seu respectivo teor de umidade de equilíbrio, para as condições de secagem especificadas.

Os modelos difusivos geralmente baseiam-se na difusão de líquido e/ou vapor dentro do produto. Estes modelos descrevem as taxas de transferência de calor e massa como função da posição dentro do sólido e do tempo de secagem e consideram as resistências aos fluxos de calor e massa externa e interna.

Os modelos baseados na Termodinâmica dos processos irreversíveis assumem basicamente a validade das relações recíprocas de Onsager, o princípio de Curie e a existência de um equilíbrio termodinâmico local no interior do produto.

Os modelos empíricos e semi-empíricos são aplicados para número de Biot de transferência de massa menor que 10 e número de Biot de transferência de calor menor que 1,5 (Parti, 1993). Obviamente esta afirmação depende da geometria do corpo em estudo e da definição dada a estes parâmetros.

2.2.1 - Modelos empíricos e semi-empíricos

Segundo Parti (1990), Simmonds et al. (1953) foram os primeiros pesquisadores a aplicar o modelo semi-empírico análogo à lei de Newton do resfriamento, sugerido por Lewis (1921), o qual é citado por Jayas et al. (1991). Neste modelo, a taxa de secagem é função da diferença entre o teor de umidade do produto, variando no tempo, e do teor de umidade de equilíbrio, dependendo este último das condições de secagem (T, UR, v). Em símbolos tem-se:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -K_1(\bar{M} - \bar{M}_e) \quad (2.1)$$

Definindo a razão de umidade como: $\bar{M}^* = (\bar{M} - \bar{M}_e) / (\bar{M}_0 - \bar{M}_e)$ e integrando a Equação 2.1 no tempo, tem-se:

$$\bar{M}^* = \exp(-K_1 t) \quad (2.2)$$

Este modelo é conhecido como “lei exponencial”. Deve ser mencionado que no caso de se determinar a taxa de secagem pela Equação 2.1, K_1 depende do tempo de secagem também. Além disso, Misra e Brokker (1980) reportaram que a umidade relativa do ar (UR) afeta a taxa de secagem. Assim, apesar desta equação ter sido bastante aplicada por numerosos pesquisadores, este modelo não apresentou resultados satisfatórios em alguns casos e várias modificações foram sugeridas por diversos autores. Beke e Vaz (1994) assinala que a Equação 2.2 tem algumas limitações porque a linearidade das isotermas de sorção da maior parte dos produtos foi observada apenas dentro da faixa de UR entre 0,2 e 0,8.

Barre et al. (1971) afirmam que o efeito da velocidade do ar na constante de secagem é negligenciada, no entanto há ampla evidência que a velocidade tem grande efeito na mesma, particularmente quando se estuda leito espesso, onde estas equações auxiliam na modelagem a nível de secador. Devido a isto, os autores propõem modificações na constante de secagem.

Uma pequena modificação na equação do modelo da lei exponencial que envolve a adição de um termo exponencial na variável tempo gera um novo modelo exponencial mais preciso para descrever as variações dos dados medidos, especialmente para o 1º estágio do processo de secagem. Este modelo é expresso por:

$$\bar{M}^* = A_1 \exp(-K_1 t^{K_2}) \quad (2.3)$$

Este modelo é conhecido como equação de Page para camada fina (Parti, 1990; Zhang e Litchfield, 1991; Brooker et al., 1992; Sokhansanj, 1984; Jayas et al., 1991; Lima e Rocha, 1997; Park et al., 1997; Cavalcanti Mata e Menegalli, 1997a; Soponronnarit et al., 1996).

Uma versão da equação de Page foi proposta por Overhults et al. (1973), para secagem de soja. Esta equação é dada por:

$$\bar{M}^* = \exp[-(K_1 t)^{K_2}] \quad (2.4)$$

onde $K_2=K_4+K_5t$ e $\ln(K_1)= K_2+K_3/T$. Segundo os autores, houve um melhor ajuste dos dados experimentais da secagem de soja, em comparação com o obtido utilizando-se o modelo de Page na sua forma original. Esta equação também foi utilizada por White et al. (1981) em seu estudo sobre secagem de soja, sendo que $K_1= f(\text{UR}, T)$ e $K_2= f(T, M_o, \text{UR})$.

De acordo com Sharaf-Eldeen et al. (1980), uma forma geral da equação da lei exponencial é dada em termos de somatório, expressa por:

$$\bar{M}^* = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-K_i t) \quad (2.5)$$

onde os termos A_i são constantes.

Outras variações dos modelos empíricos e semi-empíricos têm sido usadas. Algumas destas variantes estão apresentadas na Tabela 2.1, com suas respectivas referências.

Convém ressaltar que em todos os modelos aqui referenciados, as constantes de secagem K_i , são determinadas sem referência à forma e às variações dimensionais do material. Isto pode ser vantajoso em casos onde a geometria da partícula não pode ser especificada com precisão, ou onde não ocorrem grandes variações geométricas do produto durante a secagem (Rapusas e Driscoll, 1995).

Para finalizar, pode-se mostrar, de uma forma geral, que as variações do teor de umidade do produto secando em um secador de camada fina sob condições constantes do ar pode ser expresso pela equação seguinte:

$$\bar{M}^* = f(T_a, \text{UR}_a, v_a, \bar{M}_o, t, \text{encolhimento e outros}) \quad (2.6)$$

Tabela 2.1 - Modelos empíricos e semi-empíricos reportados na literatura

Equação	Coefficientes	Aplicação	Referência
$\bar{M}^* = \sum_{j=1}^n A_j \exp(-K_j Dt)$	A_j e K_j constantes ou $f(T, UR, v \text{ e } M)$	----	Newman (1931), citado por Verma e Noomhorm (1986)
$\bar{M}^* = A_1 \exp(-K_1 t) + A_2 \exp(-K_2 t) + A_3$	$A_i = f(T, UR, M)$ $K_i = f(T, UR, \text{fluxo específico do ar de secagem})$	arroz	Noomhorm e Verma (1986), citados por Jayas et al. (1991)
$\bar{M}^* = A_1 \exp(-K_1 t) + (1 - A_1) \exp(-A_2 K_1 t)$	A_i e K_i constantes	arroz e soja	Sharaf-Eldeen et al. (1979), citados por Sharma et al. (1982)
		alfafa	Patil e Sokhansanj (1992)
		alfafa	Sokhansanj e Patil (1996)
$\bar{M}^* = A_1 \exp(-K_1 t) + (1 - A_1) \exp(-A_1 K_1 t)$	A_1 constante $K_1 = f[\text{Exp}(M_0, T)]$	milho	Sharaf-Eldeen et al. (1980)
$\bar{M}^* = (1 - A_2 - A_4) \exp(A_1 K_1 t) + A_2 \exp(A_3 K_1 t) + A_4 \exp(A_5 K_1 t)$	A_i constante $K_1 = f[1/\text{Exp}(T)]$	arroz	Byler e Brook (1984), citados por Jayas et al. (1991),
$\bar{M}^* = A_1 \exp(-K_1 t) + A_2 \exp(-K_2 t)$	A_i e K_i constantes	feijão	Ptasznik et al. (1992)
$\bar{M}^* = K_1 + K_2 \ln(t)$	K_1 e K_2 constantes	----	VanRest e Isaacs, citados por Fioreze (1986).
$t = K_1 \ln(\bar{M}^*) + K_2 [\ln(\bar{M}^*)]^2$	$K_1 = f(M, T)$ $K_2 = f(M, T)$	grãos	Brooker et al. (1992); Sokhansanj (1984); Cavalcanti Mata e Menegalli (1997b); Uçkan e Ulku (1986)
$\bar{M}^* = 1 + K_1 t + K_2 t^2$	$K_1 = f(T, UR)$ $K_2 = f(T, UR)$	arroz	Wang e Singh (1978), citados por Parry (1985),
$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = \frac{\bar{M}_e - \bar{M}}{3600 \left[A_1^2 + \left(\frac{1}{900} \right) A_2 t \right]^{1/2}}$	$A_i = f(T)$	----	Franca et al. (1994); Giner e Mascheroni (1990)
$\bar{M}^* = \exp \left[-A_1 (P_{vs} - P_v)^{A_3} t^{A_2} \right]$	A_i constantes	----	Roa e Macedo (1976), citados por Rossi e Roa (1980)
$\frac{d\bar{M}}{dt} = -K_1 (\bar{M} - \bar{M}_e)^{K_2}$	K_1 e $K_2 = f(\text{período de secagem, } \bar{M}_e \text{ no fim de cada período})$	----	Chen e Johnson (1969)

2.2.2 - Modelos difusivos

Diversos autores consideram a difusão de água líquida como principal mecanismo de transporte de umidade em produtos biológicos (Zogzas e Maroulis, 1996; Sarker et al., 1994; Brooker et al., 1992; Liu e Simpson, 1997; Park et al., 1997; Freire e Chau, 1997; Baroni e Hubinger, 1997; Sabadini et al., 1997; Park e Brod, 1997; Tolaba et al., 1997; Quintana-Hernandez et al., 1997; Li et al., 1997).

Fick, em 1855, seguindo o trabalho de Fourier de 1822 (Bird et al., 1960), estudou o processo de difusão de mistura de soluções e formulou duas leis. A primeira lei de Fick é fenomenológica e indica que o fluxo \bar{J} de uma substância difundida através de uma área de secção transversal unitária é proporcional ao gradiente de concentração medido normalmente à esta secção. Em símbolos tem-se:

$$\bar{J} = -D_p \frac{dM}{dy} \quad (2.7)$$

A noção da difusão de líquidos no interior de sólidos foi introduzida por Lewis em 1921 (Keey, 1992). Ele assumiu que a taxa de transferência de umidade é proporcional ao gradiente de concentração de umidade dentro do sólido.

A segunda lei de Fick tem sido muito utilizada, uma vez que estabelece a difusão de umidade em termos do gradiente de concentração no sólido:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) \quad (2.8)$$

Em geral o coeficiente de difusão D é considerado constante, ou dependente da temperatura e/ou do teor de umidade do sólido. Contudo, vale salientar que a compressão mecânica reduz a porosidade e a difusividade de umidade efetiva; portanto a pressão tem efeito negativo na difusividade de água, (Karathanos et al., 1991, citados por Saravacos, 1995). A Tabela 2.2 fornece um sumário dos vários modelos paramétricos, reportados na literatura.

O conceito de difusão líquida como único mecanismo de transporte de umidade tem sido objeto de várias críticas, apresentando constantemente discrepâncias entre os valores experimentais e teóricos (Berger, citado por Alvarenga et al., 1980; Fortes e Okos, 1980; Mariz, 1986; Keey, 1992;). Os principais problemas podem ser atribuídos à consideração do coeficiente de difusão constante, condições de contorno inadequadas e ocorrência de encolhimento do material.

O encolhimento de produtos agrícolas durante a secagem é um fenômeno físico que ocorre simultaneamente com a e em decorrência da difusão de umidade. Este fenômeno pode produzir um efeito considerável no coeficiente de difusão de massa, e conseqüentemente na taxa de secagem.

Apesar das críticas, a teoria da difusão líquida tem ganho ao longo do tempo a preferência dos pesquisadores, principalmente com referência a alimentos e grãos (Brooker et al., 1974; Steffe e Singh, 1980b; Sokhansanj, 1984; Dalpasquale, 1985; Parti, 1990; Brooker et al., 1992; Zogzas e Maroulis, 1994; Sarker et al., 1994; Queiroz, 1994; Rovedo et al., 1995; Ben Mabrouk e Belghith, 1995; Queiroz e Nebra, 1996; Alsina et al., 1997).

*** Difusão em corpos esferoidais prolato e oblato**

Soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante (equilíbrio) ou do tipo convectivo, para várias geometrias (paralelepípedo, cilindro e esfera), podem ser encontradas em Carslaw e Jaeger (1959); Luikov e Mikhailov (1965); Luikov (1968); Skelland (1974); Crank (1992); Gebhart (1993). Para corpos de forma elíptica podem ser citados Niven (1880); Normiton e Blackwell (1964); Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Haji-Sheikh e Sparrow (1967); Smith et al. (1967); Smith et al. (1968); Smith e Nelson (1969); Zienkiewicz e Parekh (1970); Sokhansanj (1980); Wrobel e Brebbia (1981); Haji-Sheikh (1986); Elvira (1990); Haghighi et al (1990); Lu e Siebenmorgen (1992); Sarker et al (1994); Lima et al. (1997).

Tabela 2.2 - Modelos paramétricos empíricos expressando o coeficiente de difusão como função da temperatura e/ou do teor de umidade do meio poroso

NÚMERO	MODELO PARAMÉTRICO
1	$D(M, T) = A_0 \exp(A_1 M) \exp\left(-\frac{A_2}{T_{\text{abs}}}\right)$
2	$D(M, T) = A_0 \exp\left(-\frac{A_1}{M}\right) \exp\left(-\frac{A_2}{T_{\text{abs}}}\right)$
3	$D(M, T) = A_0 \exp\left(\sum_{i=1}^3 A_i M^i\right) \exp\left(-\frac{A_4}{T_{\text{abs}}}\right)$
4	$D(M, T) = A_0 [1 - \exp(-A_1 M)] \exp\left(-\frac{A_2}{T_{\text{abs}}}\right)$
5	$D(M, T) = A_0 [1 + \exp(A_1 - A_2 M)]^{-1} \exp\left(-\frac{A_3}{T_{\text{abs}}}\right)$
6	$D(M, T) = A_0 [1 - \exp(-A_1 M^{A_2}) + M^{A_3}] \exp\left(-\frac{A_4}{T_{\text{abs}}}\right)$
7	$D(M, T) = (A_0 + A_1 M + A_2 M^2) \exp\left(-\frac{A_3}{T_{\text{abs}}}\right)$
8	$D(M, T) = A_0 \exp(A_1 M) \exp\left(-\frac{A_2 M + A_3}{T_{\text{abs}}}\right)$
9	$D(M, T) = A_0(M) \exp\left[-\frac{A_1 \exp(-A_2 M) + A_3}{T_{\text{abs}}}\right]$
10	$D(M, T) = A_0 \exp\left(-\frac{A_1 + A_2 M}{1 + A_3 M}\right) \exp\left[-\frac{A_4 + A_5 \exp(-A_6 M)}{T_{\text{abs}}}\right]$
11	$D(M, T) = A_0 \exp[(A_1 T_{\text{abs}} - A_2) M] \exp\left(-\frac{A_3}{T_{\text{abs}}}\right)$
12	$D(M, T) = (A_0 - A_1 T_{\text{abs}}) \exp[(A_2 T_{\text{abs}} - A_3) M]$
13	$D(M, T) = (A_0 + A_1 T_{\text{abs}}) \left(\frac{M_0}{1 + M_0} - \frac{M}{1 + M}\right)^{A_2}$
14	$D(M) = (A_0 + A_1 M)$
15	$D(T) = A_0 \exp\left(-\frac{A_1}{R_0 T_{\text{abs}}}\right)$

FONTE: Zogzas et al. (1996)

Smith et al. (1967) apresentam um método analítico aproximado de análise geométrico aplicado a formas finitas, que prediz a temperatura local dentro do elipsóide considerando condição de contorno convectiva na superfície do mesmo. Contudo, em vez de derivar o número de Biot dependente do fator de forma, Smith et al. (1967) ajustaram empiricamente o valor de Bi. Dados experimentais da temperatura foram obtidos para validar os modelos elipsoidal e de formas anômalas. Razoável ajuste foi obtido. Posteriormente, Smith et al. (1968) e Smith e Nelson (1969) apresentaram uma aplicação semelhante da metodologia descrita acima, bem como uma revisão de outros trabalhos similares. Metodologias aproximadas para descrever o fenômeno de difusão com aplicação a resfriamento assumindo condição de contorno convectiva, podem ser encontradas em Lin et al. (1996a e 1996b).

Haji-Sheikh e Sparrow (1966) apresentam uma solução analítica para condução de calor transiente em corpos esferoidais prolatos para o caso de temperatura constante na superfície. Resultados das temperaturas no centro e no ponto focal são apresentadas para vários esferóides.

Normiton e Blackwell (1964) propõem uma solução formal para transferência de calor transiente de esferóides prolato e oblato com temperatura constante na superfície. A metodologia foi aplicada apenas para calcular numericamente a temperatura ao longo da coordenada radial de um disco circular ao longo do tempo.

Niven (1880) apresenta a solução analítica para o problema de difusão em esferóides, considerando condição de temperatura constante na superfície. Embora utilize poucos termos da série, não apresenta resultados numéricos.

Haji-Sheikh e Sparrow (1967) apresentam uma solução numérica para a temperatura no interior de corpos esferoidais, assumindo condição de contorno convectiva e radiativa e usando o método de Monte Carlo, em coordenadas cartesianas. Os resultados obtidos são comparados com os dados analíticos reportados num trabalho anterior de Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e bom ajuste foi obtido.

Wrobel e Brebbia (1981) reportam uma formulação numérica usando o método de elementos de fronteira em coordenadas polares, para análise do problema de condução de calor transiente em corpos axialmente simétricos com condição de contorno de equilíbrio na superfície. Como uma das aplicações, o método é usado para descrever a temperatura no centro de um esferóide prolato. Os resultados são comparados com dados analíticos obtidos por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e numéricos obtidos pelo uso de elementos finitos, por Zienkiewicz e Parekh (1970). Nestas comparações, excelentes ajustes são obtidos.

Haji-Sheikh (1986) apresenta uma solução da equação de difusão em uma fronteira irregular usando o método de Galerkin e condição de equilíbrio na superfície. Como aplicação, o método foi usado para fornecer a distribuição de temperatura no interior de esferóides. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os dados analíticos reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) mostrando excelente concordância.

Elvira (1990) reporta uma solução numérica para o problema de difusão em corpos elípticos com condição de equilíbrio na superfície, usando um método implícito de direção alternada, em coordenadas polares, com malhas ortogonais e não-ortogonais. Como aplicação, o método foi testado para descrever os processos de umidificação de arroz e batata, apresentando boa concordância com dados experimentais.

Haghighi et al. (1990) apresentam uma formulação utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor e massa em corpos com simetria axial. O modelo foi usado para simular o processo de secagem de grãos de cevada. Os resultados do modelo ajustaram-se bem aos dados experimentais. Procedimentos similares foram utilizados por Sokhansanj (1980) e Sarker et al. (1994) para simular processo de secagem de grãos de arroz. Em todos os casos foi assumida condição de contorno convectiva.

Lu e Siebenmorgen (1992) usando o método de elementos finitos em coordenadas polares, apresentam um modelamento para descrever a adsorção de umidade em grãos de arroz, assumindo

condição de equilíbrio na superfície. Os resultados obtidos numericamente são comparados com os dados experimentais e excelente concordância foi obtida.

Em virtude da não-homogeneidade dos produtos biológicos e na tentativa de se aproximar o modelo ao processo físico real, são sugeridas modificações por vários autores tendo por base o modelo de difusão, considerando o material um sólido poroso e incluindo o efeito de transferência de calor.

Young (1969) propôs um modelo assumindo o grão como uma esfera, composto de uma mistura de poros com ar e vapor d'água, água líquida e sólido seco. O autor, considerando uma condição de contorno de equilíbrio, desenvolveu as seguintes equações:

- para transferência de umidade dentro do sólido:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_v \frac{\partial C^*}{\partial r} \right) = \varepsilon_p \frac{\partial C^*}{\partial t} + (1 - \varepsilon_p) \rho_{ps} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (2.9)$$

onde C^* é a concentração de vapor nos vazios de ar e ε_p é a porosidade intragranular.

- para transferência de calor:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = (1 - \varepsilon_p) \rho_{ps} (c_{ps} + c_w M) \frac{\partial \theta}{\partial t} - h_{fg} (1 - \varepsilon_p) \rho_{ps} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (2.10)$$

Posteriormente Young e Whitaker (1971), assumindo que o produto é não-homogêneo, desenvolveram um modelo de difusão de vapor que consiste de uma esfera composta por vários materiais. A equação de difusão de vapor dentro do material i é dada por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_i \frac{\partial C^*}{\partial r} \right) = \varepsilon_i \frac{\partial C^*}{\partial t} + (1 - \varepsilon_i) \rho_{si} \frac{\partial M_i}{\partial t} \quad (2.11)$$

Neste estudo, os autores assumiram condição de contorno de equilíbrio na superfície e que o teor de umidade dentro do material é linearmente dependente da concentração de vapor e da temperatura. Obviamente, problemas são encontrados para determinar ε_i dentro do produto, dificultando assim o seu uso.

2.2.3 - Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis

2.2.3.1 - Modelo de Luikov

Luikov (1966), baseando-se em trabalhos prévios de Prigogine (1947), DeGroot (1951), Luikov e Mikhailov (1965) e considerando os vários fluxos envolvidos em uma mistura de ar, vapor, líquido e sólido, partiu dos princípios da termodinâmica de não-equilíbrio e propôs a utilização de um modelo para descrever o processo de secagem de produtos capilares porosos baseado nos mecanismos de difusão, efusão, convecção de vapor e difusão e convecção de água no interior do meio poroso. O processo é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais acopladas para a temperatura, umidade e em casos de intensa secagem também pressão. O conjunto de equações é da forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2(K_{11}M) + \nabla^2(K_{12}\theta) + \nabla^2(K_{13}P) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2(K_{21}M) + \nabla^2(K_{22}\theta) + \nabla^2(K_{23}P) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \nabla^2(K_{31}M) + \nabla^2(K_{32}\theta) + \nabla^2(K_{33}P) \quad (2.14)$$

onde K_{ij} , $i,j=1,2$ e 3 , são os coeficientes fenomenológicos para $i=j$ e os coeficientes combinados para $i \neq j$.

O fluxo de umidade devido a gradientes de pressão total é significativo para temperaturas de secagem bem acima da faixa de temperatura empregada na secagem de grãos. Sendo assim, os termos de pressão podem ser eliminados e as equações tomam a forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2(K_{11}M) + \nabla^2(K_{12}\theta) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2(K_{21}M) + \nabla^2(K_{22}\theta) \quad (2.16)$$

Segundo Husain et al. (1972), as duas equações acima têm sido aplicadas para diversos produtos. Concluiu-se que os efeitos combinados de temperatura e de umidade na análise da secagem de grãos são requeridos em um número muito limitado de casos. De acordo com Parry (1985), os efeitos dos gradientes de temperatura na difusão de umidade somente tornam-se significantes em secagem por condução ou onde métodos de intenso aquecimento, tal como secagem por microondas ou dielétrica, são utilizados. Assim as equações fenomenológicas podem ser reduzidas a:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2(K_{11}M) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2(K_{22}\theta) \quad (2.18)$$

Com o que as equações propostas por Luikov ficam reduzidas às difusivas, antes apresentadas.

Os coeficientes fenomenológicos K_{11} e K_{22} podem ser assemelhados aos coeficientes de massa e calor, e denotados por D ou α , respectivamente. Posteriormente, Luikov (1975), apresenta uma revisão detalhada do seu modelo.

Vieira e Silva (1997), utilizando em seu trabalho um modelo de Luikov modificado, que leva em consideração o acoplamento de transferência de calor e massa no interior do produto, considerando um sólido poroso, propuseram uma solução numérica utilizando a técnica de elementos de fronteira (Brebbia e Dominguez, 1989). As equações utilizadas foram:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\nabla^2 M + D\mathfrak{S}\nabla^2\theta \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h_{fg}\sigma}{c_p} D\nabla^2 M + \left(\alpha + \frac{h_{fg}\sigma\mathfrak{S}}{c_p} D \right) \nabla^2\theta \quad (2.20)$$

Os coeficientes \mathfrak{S} e σ são encontrados a partir de experimentos em laboratório em materiais porosos, sendo de difícil determinação. Esta complexidade de obtenção reduz a aplicabilidade das idéias de Luikov (Keey, 1992). Contudo, Ribeiro et al. (1993) apresentam em seus trabalhos a solução das equações de Luikov aplicadas a uma placa porosa úmida, num caso unidimensional, utilizando o método clássico de transformada integral. Recentemente, Mukherjee et al. (1997) realizaram experimentos de secagem em quatro tipos de vegetais, e determinaram os coeficientes K_{12} e K_{21} contidos no modelo de Luikov, assumindo um tratamento unidimensional.

Oliveira et al. (1995), apresentaram uma metodologia utilizando a técnica de elementos finitos no modelo de Luikov, para estudar a secagem de madeira e argila, assumindo que a pressão total é constante dentro do corpo, isto é, o gradiente de pressão é nulo. Segundo os autores, a precisão dos resultados obtidos foi boa.

Irudayaraj e Wu (1995), estudando o efeito da pressão na transferência de umidade durante o processo de adsorção de umidade em cevada, utilizaram o modelo de Luikov. O conjunto de equações é formado por:

$$\rho_{pso} c_p \frac{\delta'}{c_m} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \left[\left(k_p \frac{\delta'}{c_m} + \frac{\delta' \varepsilon' h_{fg} D}{c_m} \right) \nabla \theta + \left(\varepsilon' h_{fg} \frac{\delta'}{c_m} D \right) \nabla M + \left(k_f \varepsilon' h_{fg} \frac{\delta'}{c_m} \right) \nabla P \right] \quad (2.21)$$

$$\rho_{pso} c_m h_{fg} \varepsilon' \frac{\partial M}{\partial t} = \text{div} \left[\left(\frac{\delta' \varepsilon' h_{fg} D}{c_m} \right) \nabla \theta + (\varepsilon' h_{fg} D) \nabla M + (k_f \varepsilon' h_{fg}) \nabla P \right] \quad (2.22)$$

$$-\rho_{pso} \frac{c_h h_{fg} k_f}{D} \frac{\partial P}{\partial t} = \text{div} \left[\left(\frac{\delta'^2 \varepsilon' k_f}{c_m} \right) \nabla \theta + (\varepsilon' h_{fg} k_f) \nabla M + \left(\frac{h_{fg} k_f^2 (\varepsilon' - 1)}{D} \right) \nabla P \right] \quad (2.23)$$

Segundo os autores, foi notado que o gradiente de pressão que causa transferência de massa adicional pelo efeito de filtração, tem menos efeito no início do processo de adsorção. Esta transferência adicional de umidade perturbou o grão, de forma que ele alcançou equilíbrio rapidamente. Eles afirmaram que esta técnica também pode ser usada para estudar as características de materiais biológicos durante a secagem intensa em altas temperaturas. Este modelo também foi aplicado para estudar a sensibilidade e estimação de parâmetros do modelo de Luikov, para abeto norueguês, com grande sucesso (Irudayaraj e Wu, 1996).

2.2.3.2 - Modelo de Fortes e Okos

Tendo por base os conceitos termodinâmicos de processos irreversíveis, Fortes e Okos (1981a), propuseram um modelo, que desconsidera o fenômeno de encolhimento e efeitos de pressão total, e assume:

- existência de equilíbrio local entre as fases sólida, líquida e vapor;
- validade da equação de Gibbs para condições de não-equilíbrio;
- validade das leis fenomenológicas lineares;
- validade das relações fundamentais de Onsager;
- sólido contínuo¹ e isotrópico;
- a água migra nas fases líquida e vapor;
- a razão de transferência de calor e massa é mais lenta que a razão de mudança de fase;
- validade do princípio de Curie.

¹ Meio material no qual o caminho livre das moléculas, da substância considerada, é muito menor que a ordem de grandeza da menor dimensão relevante característica do problema.

O princípio de Curie não permite a interação e acoplamento de características tensoriais diferentes, por exemplo, difusão e reação química. Maiores detalhes sobre este princípio podem ser encontrados em Luikov (1966).

Segundo Fortes e Okos (1981a), a diferença fundamental entre sua teoria e as anteriores, é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio² e não do teor de umidade, sendo isto devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz para a transferência de líquido e vapor é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Neste modelo, é postulado que a água em meios capilares porosos pode até mover-se no sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio. Assim, o teor de umidade de equilíbrio é apresentado como uma escolha mais natural para o potencial de transporte de massa que simplesmente o teor de umidade.

Os autores propõem as seguintes equações para os fluxos:

- **De líquido**

$$\bar{J}_l = \rho_l k_l \nabla \phi \quad (2.24)$$

- **De vapor**

$$\bar{J}_v = -k_v \nabla \rho_v \quad (2.25)$$

- **De calor na ausência de transporte de massa**

$$\left(\bar{J}_q \right)_m = -k_t \nabla T \quad (2.26)$$

² O teor de umidade de equilíbrio define-se como sendo o teor de umidade que o produto atinge quando é submetido, por um tempo suficientemente longo, a condições controladas de temperatura e umidade do ar.

Admitindo-se ainda as considerações do modelo, considerando-se desprezíveis os efeitos da gravidade no transporte de vapor e aplicando-se as relações de Onsager, Fortes e Okos (1981a) derivaram as seguintes equações para corpos capilares porosos.

*** Fluxo de calor**

$$\begin{aligned} \bar{J}_q = & -k_t \nabla T - \left[\rho_l k_l R_v \ln(UR) + k_v \left(\rho_{vo} \frac{\partial UR}{\partial T} + UR \frac{d\rho_{vo}}{dT} \right) \right] \frac{R_v T^2}{UR} \frac{\partial UR}{\partial T} \nabla M + \\ & + T \left[\rho_l k_l R_v \ln(UR) + k_v \left(\rho_{vo} \frac{\partial UR}{\partial T} + UR \frac{d\rho_{vo}}{dT} \right) \right] \bar{g} \end{aligned} \quad (2.27)$$

*** Fluxo de líquido**

$$\bar{J}_l = -\rho_l k_l R_v \ln(UR) \nabla T - \rho_l k_l \frac{R_v T}{UR} \left(\frac{\partial UR}{\partial M} \right) \nabla M + \rho_l k_l \bar{g} \quad (2.28)$$

*** Fluxo de vapor**

$$\bar{J}_v = -k_v \left(\rho_{vo} \frac{\partial UR}{\partial T} + UR \frac{d\rho_{vo}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{vo} \left(\frac{\partial UR}{\partial M} \right) \nabla M \quad (2.29)$$

Assumindo-se que não há fase sólida da água e que a massa de ar presente nos poros do material é desprezível, pode-se escrever a equação da conservação da massa como:

$$\frac{\partial (\rho_{ps} M)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{J}_l + \bar{J}_v) \quad (2.30)$$

Com a consideração da não existência de fenômenos de encolhimento, esta equação se reduz

a:

$$\rho_{ps} \frac{\partial M}{\partial t} = - \nabla \cdot (\bar{J}_l + \bar{J}_v) \quad (2.31)$$

A equação da conservação de energia pode ser obtida partindo do pressuposto de que a taxa de variação da entalpia volumétrica do sistema, menos o calor de adsorção, é igual ao divergente do fluxo de entalpia. Assim:

$$\rho_{ps} c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_{ps} h_w \frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot \bar{J}_q - h_{fg} \nabla \cdot \bar{J}_v - \bar{J}_l \cdot c_l \nabla T - \bar{J}_v \cdot c_v \nabla T \quad (2.32)$$

Como pode ser constatado, este modelo descreve mais acuradamente a física do processo de transferência de calor e massa que o modelo de difusão líquida simples, no entanto a sua aplicabilidade é grandemente limitada em virtude das equações governantes do fenômeno incluírem muitos coeficientes de difícil determinação experimental. De acordo com os autores, esta metodologia permite verificar a importância relativa dos fluxos de vapor, líquido e calor, levando-se em consideração os gradientes hídrico e térmico, para uma determinada condição de secagem. Isto possibilita determinar se existe um fenômeno dominante e no caso afirmativo, se é o de difusão de líquido ou de vapor.

Estas equações já foram usadas para analisar a transferência de calor e massa em solos, em regime transiente, (Fortes e Okos, 1978, citados por Alvarenga et al., 1980); para grãos de feijão preto, (Alvarenga et al., 1980); para secagem de milho, (Fortes e Okos, 1981b); para trigo, (Fortes et al., 1981c) e por Neves et al. (1983), para modelagem físico-matemática do processo de seca-aeração de grãos de milho.

2.2.4 - Comparação entre os modelos de Luikov, difusivo, empírico e semi-empírico

Como explanado anteriormente, o modelo de Luikov, considerando desprezíveis os efeitos de gradientes de pressão e de temperatura e umidade combinados, assemelha-se ao modelo de difusão.

A equação de difusão, para geometrias simples, tem solução analítica para o valor médio da grandeza, cuja forma geral é dada por:

$$\bar{M}^* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-B_n t) \quad (2.33)$$

onde os valores de A_n e B_n , dependem da geometria do corpo (placa, cilindro ou esfera), e das condições de contorno admitidas (de equilíbrio ou convectivas).

Nesta solução, os termos sucessivos em cada uma das séries infinitas convergentes diminuem com o aumento de n e para tempos longos, a convergência pode ser rápida. Para valores suficientemente altos de t e condições de equilíbrio na superfície do sólido, os primeiros 5 termos dominam a série, e conseqüentemente os outros termos da série podem ser desprezados. De qualquer forma, para n inteiro finito tem-se:

$$\bar{M}^* = \sum_{r=1}^m A_r \exp(-B_r t) \quad (2.34)$$

O valor de m determina a precisão do valor de \bar{M}^* calculado em cada instante de tempo. Observando-se a Equação 2.34, vê-se por exemplo, que:

- se $m=1$, $A_n=1$ e $B_n=K_1$, esta equação reduz-se a Equação 2.2;
- se $m=1$, $A_n=A_1$, $B_n=K_1$ e $K_2=1$, esta equação reduz-se a Equação 2.3;
- se $m=1$, $A_n=1$, $B_n = K_1^{K_2}$ e $K_2=1$, esta equação reduz-se a Equação 2.4;
- se $m=n$, $A_n=A_i$ e $B_n=K_i$, esta equação reduz-se a Equação 2.5, e assim por diante.

Então, a maioria dos modelos empíricos e semi-empíricos são derivados do modelo de difusão, e portanto, suas equações são aproximações e variações do modelo difusional, dependendo do número de termos usado. Sendo que os coeficientes A_n e B_n dependem da forma do corpo e das condições de contorno. Portanto, quando a Equação 2.34 é utilizada ajustando seus coeficientes a dados de cinética de secagem de um produto particular, estes mesmos

coeficientes contém informações das condições externas (T, UR, v, ...). Portanto, é perfeitamente aceitável e tem significado físico que esses coeficientes sejam considerados constantes ou funções das condições termodinâmicas e velocidade do ar de secagem.

2.3 - Banana: aspectos científicos e tecnológicos

2.3.1 - Características da fruta

A origem da bananeira é incerta. Atualmente, admite-se que seja originária do Oriente, sul da China ou Indochina. Há informações da sua presença na Índia, Malásia ou Filipinas, há mais de 4000 anos. No Brasil, ela existe desde antes do seu descobrimento.

A banana, fruto da bananeira, é apreciada por pessoas de todas as classes e de todas as idades, que a consomem “in natura”, frita, assada, cozida, em calda, em doces caseiros, ou em produtos industrializados. Com o crescimento da população e desenvolvimento da capacidade aquisitiva dos povos, houve aumento de consumo deste alimento barato no mundo todo.

As bananas cultivadas podem ser divididas em duas classes: as que se consomem fritas ou assadas, conhecidas na língua espanhola por “plátanos” e as consumidas frescas, ou industrializadas, que naquela mesma língua são chamadas, simplesmente bananas. As primeiras não apresentam grande interesse, tanto aqui como no exterior; em contraste, as do segundo grupo têm maior valor comercial, particularmente as do subgrupo Cavendish, variedades nanica e nanição, (Moreira, 1987).

As maiores diferenças entre banana e plátanos são:

- o baixo teor de umidade da polpa do plátano verde comparado com o da banana madura;
- a baixa concentração de açúcar em plátanos maduros comparada com a banana madura;
- plátanos são mais ricos em vitamina A que bananas.

Do ponto de vista de consumo, frutas são produtos de plantas com sabor aromático que são naturalmente doces ou normalmente adoçadas antes de comê-las. Fora o fato de elas fornecerem sabor e variedade à dieta humana, servem também como importante e indispensável fonte de vitaminas e minerais, embora em geral não sejam boas e econômicas fontes de proteínas, gordura e energia. Devido a isso, e aliado ao crescimento populacional, a produção e o consumo de frutas processadas está aumentando a cada dia.

Muitas frutas e vegetais contêm mais que 80% de água e são portanto altamente perecíveis. A perda de água e a deterioração são responsáveis por muitas de suas perdas, que são estimadas em mais de 30 a 40% nos países desenvolvidos e nos trópicos e sub-trópicos, devido a manuseio, transporte e armazenagem inadequadas (Jayaraman e Das Gupta, 1995).

A perda de banana tem sido estimada entre 25 a 50% da produção total colhida dos 125000 hectares plantados na América central e do Sul (Clavijo e Maner, 1974, citados por Hammond et al., 1996). As perdas provêm daquelas frutas que não estão de acordo com o padrão de exportação devido à variação de tamanho ou manchas ou resultantes do excesso de produção, que proporciona uma oferta do produto maior que a procura, culminando com o apodrecimento da fruta e conseqüentemente sua perda. Devido ao alto índice de perdas pós-colheita, é muito grande a necessidade de se estudar formas de reduzi-las.

As bananas constituem-se em fonte importante na alimentação humana pelo valor calorífico, energético e principalmente pelo conteúdo mineral e vitamínico que apresentam. Esta fruta madura apresenta 19% de açúcares e 1% de amido. O fruto é basicamente composto de: água (70%); proteína (1,2%); carboidrato rico em fósforo (27%), apresentando regular teor de cálcio, ferro, cobre, zinco, iodo, manganês e cobalto, vitamina A, tiamina, riboflavina, niacina e vitamina C (Simão, 1971). As Tabelas 2.3-2.5 apresentam respectivamente, a constituição, o conteúdo de vitaminas e o teor mineral aproximados da banana madura, segundo vários autores reportados na literatura.

Como pôde ser percebido, pela análise das Tabelas 2.3-2.5, a banana madura apresenta uma grande diversidade de componentes e teor mássico, apresentando resultados diferentes segundo os autores citados, provavelmente devido à origem da fruta, variedade e instrumentação utilizada. Devido a essa grande variedade de vitaminas e nutrientes, o aproveitamento para consumo “in natura” e industrial tem sido elevado.

Devido as suas características aromáticas, as bananas têm recebido considerável atenção dos pesquisadores, com mais de 350 compostos identificados. Os maiores constituintes são os éster amil e éster isoamil de ácidos butírico, propiônico e acético.

O processamento de bananas para obtenção de produtos elaborados tem sido direcionado para farinha de banana verde, farinha ou pó de banana verde e madura, cremes, flocos, passa, purê, néctar, geleia, bananada, rapadura, balas, vinagre, vinho, banana-passa, licor, suco, bolo, torta e banana ao rum. Da planta, dos restos dos cachos e das próprias bananas obtém-se ainda fibra para fabricação de sacos para cereais, palmito em salmoura, torta da casca de banana, torta de engajo e torta de “coração”. Os restos da banana e dos cachos também têm sido usados na alimentação animal, (Simão, 1971; Moreira, 1987; Medina et al., 1978; Tanaka, 1996; Vitti e Ruggiero, 1984; Andrade, 1984 e Marriott e Lancaster, 1984).

A banana é um produto biológico altamente higroscópico. Os produtos higroscópicos têm a propriedade de realizar trocas de água, sob a forma de vapor ou líquido, com o ambiente que os envolve, por absorção ou dessorção, considerando as características hídricas dos produtos e do meio que o circunda. Sendo assim, a determinação das isotermas de sorção é de grande importância no estudo da conservação de alimentos desidratados, em particular as bananas.

O conhecimento das isotermas de sorção é essencial para um projeto adequado de embalagens permeáveis e para estabelecer o teor de umidade que possibilite aumentar o “tempo de prateleira”. Particularmente para bananas, dados de umidade de equilíbrio em várias temperaturas e umidades relativas podem ser encontrados em trabalhos reportados na literatura. A Tabela 2.6 apresenta algumas informações obtidas.

Tabela 2.3 - Composição da banana madura

Constituinte	Referência					
	Jacobs (1951) (%)		Mohsenin (1986) (%)	Moreira (1987)** (g/100g)	Macrae et al (1993) (g/100g)	Potter e Hotchkiss (1995) (%)
	Fresca	Seca				
Proteína	1,2	3,6	1,6	1,1	1,1	1,3
Gordura	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,4
Fibra	0,6	1,7	0,50	0,3	3,4	---
Cinza	0,84	2,5	0,90	1	---	0,8
Amido	---	---	3,0	1	3,0	---
Açúcar	19,2	---	20,2	---	16,2	---
Sacarose	---	---	---	0,0122	---	---
Glicose	---	---	---	0,0046	---	---
Frutose	---	---	---	0,0035	---	---
Sólido	---	---	27,54	---	---	---
Sucrose	---	---	8,27	---	---	---
Ácidos	0,39 [†]	1,4 [†]	0,41	---	---	---
Água	74,8	23,0	---	74,3	70,7	73,5
Carboidrato	23,0	70,6	---	23,5	---	24,0
Nitrogênio	---	---	---	---	0,18	---

* Ácido málico; ** "Nanica"

Tabela 2.4 - Teor mineral da banana madura

Teor mineral	Referência		
	Jacobs (1951) (mg/100g)	Moreira (1987)* (mg/100g)	Macrae et al (1993) (mg/100g)
Sódio	---	1	1,0
Potássio	---	881	350,0
Cálcio	8,8	29	7,0
Magnésio	---	31	42,0
Fósforo	28	29	28,0
Ferro	0,6	0,89	0,4
Cobre	---	0,10	0,16
Zinco	---	0,19	0,2
Enxofre	---	10	13,0
Cloro	---	118	79,0
Manganês	---	0,99	---

* "Nanica"

Tabela 2.5 - Vitaminas existentes na banana madura

Vitaminas	Referência		
	Jacobs (1951) (mg/100g)	Moreira (1987)* (mg/100g)	Macrae et al (1993) (mg/100g)
Carotene (A)	430 U.I	540-500 U.I.**	0,200
Tiamina (B ₁)	0,09	0,04-0,06	0,040
Riboflavina (B ₂)	0,06	0,06-0,08	0,070
Ácido nicotínico	---	---	0,600
Ácido Ascórbico (C)	10,0	0,10-0,11**	10,000
Vitamina E	---	---	0,200
Vitamina B ₆	---	---	0,510
Folato	---	---	0,022
Pantotenato	---	---	0,260
Niacina	0,6	---	---

* “Nanica”; ** Casca amarela

2.3.2 - Aproveitamento e técnicas de conservação: desidratação

Uma das primeiras regras de processamento de alimentos ou preservação é converter alimentos perecíveis tais como frutas e vegetais em produtos estáveis que podem ser armazenados por longos períodos de tempo, reduzindo desta forma suas perdas. Vários processos tecnológicos têm sido explorados em escala industrial para preservar frutas e vegetais, tais como, enlatamento, congelamento e desidratação, sendo esta última, a mais antiga.

Operações de desidratação têm sido usadas por décadas em indústrias de processamento alimentar e químico para uma eficiente preservação dos produtos finais por longo período. O objetivo básico é a remoção de água do sólido até o nível onde os danos por microorganismos sejam evitados (Drouzas e Shubert, 1996).

Tabela 2.6 - Dados de isotermas de sorção de banana reportados na literatura

Método de secagem	T (°C)	UR (%)	Tipo de isoterma	Referência
Liofilizada	21	0-80	A; D	Teixeira Neto e Quast (1977)
Seca em cilindro rotativo	21	0-85	A; D	
Seca em estufa a vácuo sem pré-tratamento	27	0-85	A	
Seca em estufa a vácuo tratada com SO ₂	27	0-85	A	
Com soja integral e seca em cilindro rotativo	24	0-80	A	
Seca em estufa com ar forçado	48,9	47	D	Gee et al. (1977)
Seca em estufa com ar forçado	25	5-80	A	Iglesias e Chirife (1978)
Seca por congelamento	25	5-80	A	
Seca por congelamento	25, 45 e 60	5-40	A	Iglesias e Chirife (1976)
----	25, 45 e 60	0-100	A	Garcia et al. (1988)
----	25	5-80	A	Lomauro et al. (1985)
Seca em leite fluidizado e estufa com ar forçado	25	0-90	A	Luccas (1996)
Seca por congelamento e à vácuo	25, 45 e 60	10-80	A	Iglesias e Chirife (1982)
Seca por congelamento e à vácuo	45	30-75	D	Iglesias e Chirife (1982)
Seca por congelamento	10	0-80	A	Iglesias e Chirife (1982)
Seca em estufa	50,60 e 70	11-70		Nogueira (1991)
----	30 à 70	7,3 à 35,7	----	Queiroz (1994)
----	35 à 70	0-100	D	Kenchaou e Maalej (1994)
Seca em estufa à vácuo	5, 22, 38 e 57	5-75	A	Lima e Cal-Vidal (1983)
Seca em estufa	16, 25 e 35	5-85	D	Adambounou e Castaigne (1983)
Seca em estufa à vácuo	41 à 72	5-32	D	Ben Mabrouk e Belghith (1994)

A - Adsorção; D - Dessorção

A remoção de umidade previne o crescimento e reprodução de microorganismos que causam deterioração e minimiza reações oriundas de umidades elevadas. Aliado a isto, está a redução de peso e volume, que diminuem a embalagem, o volume de armazenagem e custo de

transporte do produto, à temperatura ambiente. Vários métodos de desidratação de frutas tem sido reportados na literatura, tais como “explosion puffing” e a secagem solar, com ar quente, com espuma, com microondas, por spray, por cilindro, criogênica e em leite fluidizado.

Detalhes de cada um destes métodos podem ser encontrados em Holdsworth (1971), Masters (1972), Maltini e Giangiacomo (1976); Medina et al. (1978); Jayaraman e das Gupta (1995), Lewicki e Lenart (1995), Nijhuis et al. (1996) e Bonazzi et al. (1996).

Frutas e vegetais são submetidos a pré-tratamento para melhorar as características de secagem e reduzir efeitos adversos durante o processamento e subsequente armazenagem dos produtos. Estes efeitos incluem: imersão em alcalinos; sulfitação e cozimento parcial (blanching).

Em geral, a desidratação de frutas e vegetais é normalmente acompanhada por secagem com ar quente ou criogênica. Desidratação em pedaços é um processo lento e limites práticos de tempo de secagem obrigam a limitar o tamanho dos pedaços (Labuza, 1972, citado por Sullivan e Craig Jr., 1984). Com respeito à qualidade, o produto reidratado aproxima-se de um material fresco preparado convencionalmente, contudo, especialmente o sabor é degradado pelo longo tempo de exposição a altas temperaturas, durante a secagem com ar quente (Duckworth, 1966, citado por Sullivan e Craig Jr., 1984).

Produtos secados por criogenia reidratam rapidamente e são de melhor qualidade que os produtos desidratados por ar quente (Van Arsdel et al., 1973, citados por Sullivan e Craig Jr., 1984). No entanto, a secagem é mais demorada e custosa.

Um outro processo, o de “explosion puffing”, consiste de uma desidratação rápida por ar quente (Eisenhardt et al, 1962, citados por Sullivan e Craig Jr., 1984). Esta técnica produz uma rehidratação mais rápida, retenção da textura e sabor característicos de alimentos frescos cozidos, e baixo custo de processamento unitário. A economia no tempo de secagem chega aos 40%.

A técnica de preparar alimentos com umidade intermediária tem conseguido considerável aceitação por produzir frutas processadas prontas para comer, apresentando textura macia e sendo boa substituta de frutas frescas. Nesta técnica, as frutas contendo 20 a 50% de umidade são estabilizadas por uma combinação de aditivos parecidos com glicerol, açúcar e um antimicótico. Maiores detalhes do pré-tratamento podem ser encontrados em Ramanuja e Jayaraman (1980).

A maior desvantagem concernente à secagem convencional é a degradação térmica de importantes substâncias nutricionais e de sabor. Para reduzir significativamente a perda dessas substâncias, a secagem por vácuo é usada com grande sucesso. Neste caso, a remoção de água é acelerada e além disso, a transferência de calor para o sólido é diminuída significativamente devido à ausência de convecção. Contudo, a maior desvantagem é o alto custo da energia utilizada em tal aplicação. A seguir são apresentados alguns trabalhos referentes a formas de aproveitamento e técnicas de preservação da banana.

*** Álcool e fermentação**

Bananas contém muitos carboidratos e pouca quantidade de fibras, o que favorece a produção de etanol. Segundo Hammond et al. (1996), o uso das sobras de banana para produção de etanol parece muito promissor.

Na Índia há mais de 18 mil indústrias de processamento de alimentos que produzem uma grande quantidade de sobras de sólidos (Nand e Viswanath, 1989, citados por Bardiya et al., 1996). Estas perdas são utilizadas de forma pouco econômica ou são descartadas como estão, causando sérios problemas de poluição. A perda de banana depois de processada atinge os 33% (Vimal e Adsul, 1976, citados por Bardiya et al., 1996). As sobras de processamento de frutas são altamente biodegradáveis por serem ricas em matéria orgânica e possuírem elevado teor de umidade. A biometanação de sobras de frutas é o melhor tratamento como processo de reutilização, pois não somente adiciona energia na forma de metano, como também, resulta em efluentes altamente estabilizados, quase neutros em pH e inodoros, possibilitando o controle da poluição.

Baldensperger et al. (1985) estudaram a fermentação de sobras de bananas para serem utilizadas como ração de gado. Neste estudo, a produção de proteína foi calculada em 150% da obtida nas condições iniciais, passando de 6 para 18%, por fermentação no estado sólido.

* **Sucos e purês**

A produção anual de frutas em todo o mundo está estimada em torno de 360 milhões de toneladas métricas ou 60 kg por pessoa. Menos da metade desta quantidade é produzida pelos países tropicais nas vizinhanças do Equador, embora a maior parte da população esteja concentrada nestes países. Somente 15% das frutas são usadas para a produção industrial de sucos de frutas. Particularmente sucos de banana têm conseguido uma grande aceitabilidade no mercado e tem ampliado o comércio de exportação de bananas dos países das América Central e do Sul, como também da Ásia, (Korgo, 1996).

Nos últimos anos, devido a ação de algumas campanhas educacionais sobre as propriedades nutricionais das frutas e sucos naturais, foi despertado um grande interesse de consumidores especialmente pelos sucos de frutas tropicais, (Décio, 1995).

Purês de frutas são consumidos diretamente como sobremesa ou alimento infantil e usados como ingredientes em alguns produtos como geléia, iogurte sabor de fruta e calda em conserva, bebidas e itens de confeitaria. Kitson e MacGregor (1982) estudaram a secagem de purê de frutas em secador de cilindros. Segundo os autores, este método é mais simples, mais rápido e provavelmente o meio menos caro de produção de purês de baixa umidade.

* **Banana-passa**

A banana seca ou banana-passa, é obtida da secagem artificial da banana bem madura. Geralmente é obtida da banana nanica ou nanição. É um produto industrializado em pequena escala, contudo dados numéricos do volume de comercialização nacional não foram encontrados

na literatura. O produto obtido é de coloração bem escura, consistência firme e sabor pouco persistente de banana.

Banana madura seca pode ser armazenada satisfatoriamente por mais de alguns anos sem adição de conservantes. Presume-se ser devido ao elevado teor de açúcares, que excede 50%. A utilização de técnicas adequadas de secagem pode levar à obtenção de um produto de coloração clara, consistência macia e de sabor e aroma agradáveis (Medina et al., 1978).

Marriott e Lancaster (1984) e Torrey (1983) apresentam vários métodos de preservação de bananas e plátanos, entre os quais pode-se citar: secagem solar, por congelamento, em estufa e com cilindro, com e sem tratamento.

De acordo com Travaglini et al. (1993), a banana é um sólido não-poroso, cuja umidade está ligada à estrutura e, durante a secagem, o período de taxa de secagem constante não é percebido.

Bansal e Garg (1987) recomendam que a máxima temperatura para secagem de banana seja de 70 °C, sendo que o teor de umidade inicial da mesma é geralmente de 80% (b. u.) e o final, recomendado pelos autores, de 15% (b. u.). No entanto, encontram-se na literatura vários estudos nas mais diversas condições de secagem.

Segundo Medina et al. (1978), as condições ideais de secagem de banana em secadores tipo túnel, considerando-se os fatores de qualidade e cor do produto, velocidade e temperatura do ar de secagem são: temperatura de 70 °C e velocidade tangencial do ar de 3m/s. O tempo de secagem é de cerca de 12 a 16 horas, quando a umidade relativa exterior se situa entre 70 a 90%. No final da secagem, o teor de umidade do produto está em torno de 25% (b. u), de acordo com a Resolução 12/78 da CNNPA (1985).

Efeitos do calor sobre a polpa de banana têm sido estudados por Holdsworth (1979), Ranganna e Parpia (1979a) e Ranganna e Parpia (1979b). Nestes trabalhos, aspectos de descoloração e oxidação são apresentados e discutidos. Um estudo minucioso sobre o efeito das

condições e métodos de secagem nas variações de cor da maçã, banana, batata e cenoura foi dado por Krokida et al. (1998b).

Drouzas e Shubert (1996) investigaram experimentalmente a secagem a vácuo de fatias de banana, utilizando microondas como meio de aquecimento, e obtendo excelente qualidade do produto, examinada por testes de gosto, aroma, cheiro e rehidratação.

Garcia et al. (1988) estudando a secagem de fatias de bananas verde e madura, concluíram que o tempo de secagem em forno de microondas foi de 17 a 20 vezes menor que o obtido em um forno de tiragem forçada. Neste caso, a eficiência energética da secagem no forno de microondas foi de cerca de 30%.

Bananas secas são estáveis à ação de microorganismos se o teor de umidade for menor que 23% (b. u.). Industrialmente, a secagem é conduzida até que a umidade da banana atinja cerca de 20-25%(b. u.), sendo o seu controle realizado de maneira prática, pela observação da cor, consistência e teor de água do produto final (Medina et al., 1978). No entanto, a companhia Hamey & Co., citada por Bowkey et al. (1980), tem encontrado que para produzir um produto de aceitável textura, mastigação e cor, as bananas devem ser secadas até um teor de umidade de 14 a 15% (b.u.), usando uma temperatura máxima de 60 °C, neste teor de umidade, a atividade da água é de $\approx 0,55$. Energia solar tem sido usada para tal fim.

Altemani (1976) reporta um estudo experimental de coletores solares planos de convecção natural. O sistema desenvolvido foi aplicado para secagem de frutas, particularmente bananas inteiras, em metades cortadas longitudinalmente e em rodela (1 cm de espessura). Testes experimentais foram realizados com temperaturas do ar na entrada da câmara variando de 30 a 67°C. Segundo o autor, a influência da geometria na taxa de secagem é nítida, sendo que as bananas cortadas apresentaram uma taxa de secagem sensivelmente maior do que às apresentadas para as bananas inteiras.

Schirmer et al. (1996) investigando a secagem de banana com energia solar, apresentam um secador solar tipo túnel. Segundo os autores, a temperatura do ar de secagem na saída do coletor solar variou de 40 a 65 °C durante a secagem, dependendo das condições climáticas e da hora do dia, sendo que o processo demorou de 3 a 5 dias, em comparação aos 5 a 7 dias necessários para a secagem solar com ar natural. Aliado a esta vantagem, o produto apresentou alta qualidade em sabor, cor e textura.

Nogueira (1991) e Nogueira e Park (1992) estudaram a secagem de banana para obtenção de banana-passa às temperaturas de 50, 60 e 70°C e velocidades do ar de secagem de 0,5; 1,0 e 1,5 m/s. Os dados experimentais foram ajustados usando o modelo difusional assumindo forma cilíndrica e apresentaram resultados satisfatórios. Dados da umidade de equilíbrio para as temperaturas citadas e umidade relativa de 11 a 70% são fornecidos.

Ben Mabrouk e Belghith (1994), estudando a secagem de bananas, uvas e cenouras, propõem uma solução analítica simplificada para o modelo de simulação de secagem a baixa temperatura. Os experimentos foram realizados com temperaturas variando de 20 a 70 °C e velocidade do ar de 1,68 a 5,59 m/s. Segundo os autores, a comparação dos resultados experimentais e analíticos apresentou razoável concordância.

Queiroz (1994), Queiroz e Nebra (1995, 1996 e 1997), reportam um estudo teórico-experimental da secagem de bananas na faixa de temperatura de 29,9 °C a 68,4 °C, umidades relativa do ar de 35,7 % a 7,3 %, considerando o produto como um cilindro infinito. Vários aspectos são considerados, tal como encolhimento e efeitos convectivos na superfície da fruta. Nestes estudos, são apresentados vários resultados numéricos da cinética de secagem e distribuição interna do teor de umidade do sólido, obtidos a partir da aplicação do modelo difusional. Segundo os autores, o modelo mostrou-se adequado para solucionar problemas de secagem de fruta, apresentando resultados satisfatórios quando comparado com a solução analítica e os dados experimentais. Para todos os casos estudados, o coeficiente de difusão e o coeficiente de transferência de massa foram obtidos por ajuste com os dados experimentais, contudo nenhuma abordagem sobre a qualidade do produto após a secagem foi dada.

Brekke e Allen (1967) reportam em seu trabalho que fatias de banana foram desidratadas por secagem com ar quente forçado, por cilindro rotativo e por congelamento. As amostras, ao final da secagem, foram comparadas com produtos de banana produzidos comercialmente e a estabilidade dos produtos, mantidos nas temperaturas de 12,8; 23,9 e 37,8°C, foi estudada por um ano. Concluíram que a 12,8°C, todos os produtos foram aceitáveis depois de um ano, contudo a temperaturas mais elevadas, este período é bem menor. Outras conclusões sobre a qualidade do produto neste mesmo período são fornecidas.

Luccas (1996) estudando a secagem de bananas em leito fluidizado, desenvolveu um processo em que rodela do produto são submetidas a uma velocidade de ar de 10 m/s a altas temperaturas, 110 a 150°C, por 15 e 6 minutos respectivamente, seguido de secagem convencional por 5,5 horas a 70°C e 1,25 m/s de velocidade de ar. Segundo o autor, o produto final apresentou alto índice de rehidratação, cor atraente, baixa densidade real e crocância, após comparação com a secagem convencional. Em ambos os casos, as rodela de banana foram pré-tratadas por 2 minutos em suspensão de amido de mandioca gelatinizado na concentração 2%, à temperatura ambiente ($\approx 25^\circ\text{C}$).

May et al. (1998) realizando uma análise do comportamento da secagem de várias frutas e vegetais, encontraram, durante a secagem de banana em um analisador termogravimétrico, na temperatura de 60 °C e velocidade do nitrogênio (gás de secagem) de 1,25 cm/s, um período de taxa constante. De acordo com os autores, o teor de umidade crítico foi de 0,69 (b. s.). Ainda segundo os autores, a existência deste período de taxa constante deveu-se à baixa velocidade do gás, que é o maior fator determinante da presença ou ausência deste período inicial.

Secagem com bomba de calor permite um ambiente de secagem controlável e melhor qualidade dos produtos, com baixo consumo de energia. Prasertsan e Saen-saby (1998) realizaram experimentos de secagem de banana e madeira com bomba de calor na temperatura de aproximadamente 50°C. Num dos experimentos realizados, os teores de umidade inicial e final da banana decresceram de 254,0 % (b. s.) para 26,6% (b. s.) num período de tempo de 50 horas. Neste estudo, aspectos energéticos são discutidos e comentados.

Saca e Lozano (1992) investigando o efeito da “explosion puffing” dentro do processo de secagem de fatias de banana, concluíram que a incorporação deste fenômeno na desidratação, resultou em taxas de secagem e desidratação mais rápidas devido à formação de uma estrutura mais porosa. Testes analíticos para diferença de cor, densidade média, porosidade, parâmetros de rehidratação, etc. foram realizados para ambos os casos de secagem convencional com ar quente somente e secagem convencional incorporando “explosion puffing”.

Kiranoudis et al. (1997) estudaram a cinética de secagem de 4 tipos de frutas: maçã, pêra; kiwi e banana. Neste trabalho são apresentados resultados do teor de umidade de equilíbrio para várias condições de secagem, bem como parâmetros da equação de GAB, que foram ajustados a partir dos dados experimentais. Um modelo para descrever a transferência de umidade dentro do sólido durante a secagem também é reportado.

* **Banana desidratada osmoticamente**

A transferência de massa por desidratação osmótica tem sido objeto de intensa investigação. Desidratação osmótica é descrita como uma desidratação parcial de frutas, através do processo de osmose que essencialmente envolve imersão de frutas por um dado período de tempo em uma solução de açúcar (Sankat et al., 1996). Enquanto a água difunde da fruta para a solução, há um movimento simultâneo de açúcar da solução para a fruta. Neste processo, uma perda de água de 30 a 50% do peso inicial da fruta é atingido, sendo este valor dependente da concentração da solução de açúcar. Depois deste pré-tratamento, a secagem convencional (com ar quente) é necessária para produzir uma variedade de produtos com características especiais como resultado deste pré-tratamento.

Sankat et al. (1996) investigando o comportamento da secagem com ar de fatias de banana desidratada osmoticamente e frescas, verificaram que a secagem de ambas ocorrem no período de taxa decrescente e que a velocidade do ar até 1,03 m/s não teve qualquer efeito na cinética. O efeito do tratamento osmótico foi que, o nível de açúcar nas fatias de bananas foi aumentado e ocorreu decréscimo do seu teor de umidade. Contudo, na secagem convencional subsequente

destas mesmas fatias, a taxa de secagem foi diminuída. Apesar deste inconveniente, os produtos foram de boa cor e textura.

Rastogi et al. (1997) estudaram a secagem de banana por desidratação osmótica e, assumindo uma configuração cilíndrica para a banana e difusão Fickiana, calcularam o coeficiente de difusão efetivo do produto para uma variação de temperatura de 25 a 35 °C. Um estudo semelhante foi conduzido por Mauro e Menegalli (1995). Nesta pesquisa, considerando as fatias de banana como um corpo bidimensional cilíndrico, o efeito do tempo de exposição, concentração da solução e temperatura na concentração osmótica das fatias de banana, foi verificado. Dados para o coeficiente de difusão efetivo em várias temperaturas são mostrados. Similar investigação foi realizada por Waliszewski et al. (1997).

Adambounou e Castaigne (1983) estudaram a desidratação parcial por osmose de rodela de bananas a 65°C sob vácuo. As isotermas de sorção indicam que as amostras de bananas secas (9,5% de água) podem ser classificadas como produtos altamente higroscópicos. Experimentos de desidratação usando osmose a 40 e 60°C, mostraram que o ganho de sacarose e a perda de água foram mais rápidas a 60°C do que a 40°C, especialmente nos primeiros 20 minutos do processo.

Mowlah et al. (1983) investigaram fenômenos de desidratação de cubos de bananas utilizando a lei de Fick aplicada a placa plana. Nesta pesquisa foram testados cubos de banana, curadas em vapor (blanched) e sem tratamento. Verificou-se que a taxa de secagem foi aumentada no primeiro caso. As bananas foram desidratadas em ar quente a 60°C e 1,5m/s.

Sankat et al. (1992) estudaram a secagem de fatias de bananas maduras frescas e desidratadas osmoticamente em soluções de açúcar. De acordo com os autores, as bananas tratadas apresentaram taxas de secagem menor em comparação com as apresentadas pelas bananas frescas e sem pré-tratamento. A secagem ocorreu no período de taxa decrescente e foi realizada de três formas: desidratação osmótica; secagem com ar quente forçado e secagem solar.

Panagiotou et al. (1998) apresentaram um modelo empírico de primeira ordem, para prever a perda de água e o ganho de açúcar durante a desidratação osmótica de maçã, banana e kiwi. Segundo os autores, o modelo se ajustou muito bem aos dados experimentais.

Garcia et al. (1974a) realizaram um estudo comparativo do processo de secagem osmótica de banana, abacaxi e “papaya” com alguns métodos tradicionais: ar quente, vácuo, ar quente-osmose e vácuo-osmose. Neste trabalho apresentam-se resultados referentes a custo, qualidade do produto, cor, acidez, teor de umidade e teor de SO₂, antes e depois da secagem.

*** Banana irradiada**

Muitos métodos de preservação de alimentos constituem-se da combinação de dois ou mais métodos convencionais. A combinação de tratamento radioativo com outros meios de preservação tem sido usados. Farkas (1990) apresenta uma revisão de vários métodos combinados de preservação de alimentos, bem como suas peculiaridades. Em adição, o autor cita uma extensa referência sobre o assunto, onde consta, dentre várias frutas, a banana. De acordo com o autor, no caso de bananas irradiadas para amadurecimento prolongado, utilizando tratamento com calor (ambiente úmido), incidência de podridão no fim da haste, foi reduzida.

2.3.3 - Propriedades termo-físico-químicas da banana

Propriedades de alimentos, do ponto de vista da Engenharia de Processos, podem ser definidas como aquelas qualidades e quantidades que são importantes para o projeto de equipamentos e processamento de alimentos. Incluem as propriedades reológicas, térmicas, de mudança de fase, elétricas, químicas, colorimétricas e ópticas. Um grande número de referências tem sido encontrado na literatura que fornece valores destas propriedades para um vasto número de produtos alimentares (frutas, cereais, carnes, peixe, açúcar, etc.) e seus derivados. Concentrando-se neste estudo, a Tabela 2.7 apresenta várias propriedades da banana bem como suas respectivas referências, que serão úteis para este e futuros trabalhos.

Propriedades reológicas de suco, purê e concentrado de banana podem ser obtidas em Charles e Tung (1973), Garcia et al. (1974b), Rao e Palomino (1974), e Jiménez e Durán (1979), e para banana durante o amadurecimento, em Charles e Tung (1973).

As propriedades térmicas dos produtos biológicos são afetadas pelas variações de temperatura e teor de umidade, assim como pela sua composição e porosidade. Desde que no processo de secagem o teor de água e temperatura do material podem variar consideravelmente, pode-se esperar uma variação do valor da difusividade térmica dentro do produto. Além disso, muitos alimentos são heterogêneos e portanto esta mesma difusividade pode variar de um ponto para outro dentro do mesmo produto.

Estudos nesse sentido têm sido conduzidos por Riedel (1969), citado por Singh (1982), Kostaropoulos (1979), citado por Saravacos e Kostaropoulos (1995), Sweat (1995), Niesteruk (1996) e Rahman et al. (1997).

Krokida e Maroulis (1997) e Krokida et al. (1998a), estudando o efeito do método de secagem na densidade média, densidade da partícula úmida, volume específico e porosidade da banana, maçã, batata e cenoura, apresentaram as seguintes equações para as duas primeiras propriedades:

$$\rho_p = \frac{(1 + \bar{M})}{\left(\frac{1}{\rho_s} + \frac{\bar{M}}{\rho_w} \right)} \quad (2.35)$$

$$\rho_b = \frac{(1 + \bar{M})}{\left(\frac{1}{\rho_{b_{\bar{M}=0}}} + \frac{\bar{\beta} \bar{M}}{\rho_w} \right)} \quad (2.36)$$

Tabela 2.7 - Propriedades térmica, física e correlatas da banana

Especificação		Valor	Referência
Teor de umidade (% b. u.)		75,7	Sweat (1974)
		75,0	Rao (1992)
		76,0 (purê)	Singh(1992)
		76,0	Szczesniak (1983)
		74,8	Polley et al. (1980)
		74,8	Woolrich (1966)
		74,8	Mohsenin (1980)
		76,0	ASHRAE (1993)
		74,8	Potter e Hotchkiss (1995)
		73,5	Marin et al. (1985)
Densidade(g/cm ³)		0,98	Sweat (1974)
		1,01-0,96	Finney Jr. et al. (1967)
Condutividade térmica (W/m°C)		0,481 à 27°C	Sweat (1974)
		0,509*	Marin et al. (1985)
Calor específico (kJ/kgK)	Acima do ponto de congelamento	3,684	Rao (1992)
		3,346	Szczesniak (1983)
		3,496	Mohsenin (1980)
		3,349	Potter e Hotchkiss (1995)
		3,349-3,558	Bleinroth (1984)
	Abaixo do ponto de congelamento	1,905	Rao (1992)
		1,756	Szczesniak (1983)
		1,758	Mohsenin (1980)
		1,758	Potter e Hotchkiss (1995)
Calor Latente de Fusão (kJ/kg)		250,16	Rao (1992)
		250,92	Szczesniak (1983)
		251,20	Woolrich (1966)
Difusividade térmica (m ² /s).10 ⁷		1,18 à 5°C (purê)	Singh (1992)
		1,42 à 65 °C (purê)	Singh (1992)
		1,187 à 5 °C (purê)	ASHRAE (1993)
		1,2575 à 5,9°C	Ansari e Afaq (1986a)
Módulo de elasticidade (MPa)		0,85-2,27	Rao e Skinner (1986)
		0,8 - 1,2	Mohsenin (1986)
Ponto de congelamento (°C)		-2,2	Polley et al. (1980)
		-0,8	Rao (1992)
		-1,3	Potter e Hotchkiss (1995)
Calor de respiração (W/kg de produção)		0,10258-0,11235 à 20 °C	Mohsenin (1980)
		0,07918-0,11878 à 15 °C	ASHRAE (1993)
		0,08798-0,21996 à 20 °C	ASHRAE (1993)
pH		5,6	Daza (1997)
		4,5-4,7	Mohsenin (1980)
		4,58	Garcia et al. (1974b)

* Estimado por uma equação linear

Segundo os autores, durante a secagem com uso de microondas, a banana encolheu 25%; na secagem a vácuo 70% e na secagem por congelamento 80 à 90 %. Especificamente para banana, os autores reportam:

Tipo de secagem	ρ_s (kg/m ³)	ρ_w (kg/m ³)	$\rho_{b_{\bar{M}=0}}$ (kg/m ³)	$\bar{\beta}$
Convencional	1970	1020	1810	1,04
A vácuo	1940	980	630	0,90
Por microondas	1870	1060	1790	1,05
Criogênica	1880	1040	260	0,43
Desidratação osmótica	1670	1060	1330	1,04

A difusividade de massa é uma das mais importantes propriedades de transporte, essencial para o projeto e otimização de processos de transferência de massa no interior de sólidos, tal como, secagem e desidratação osmótica. Esta propriedade tem uma particularidade muito importante, em relação às propriedades térmicas: até o presente momento não existe um equipamento que possa quantificá-la. Sendo assim, os pesquisadores utilizam-se dos métodos e modelos matemáticos (numérico ou analítico) para sua determinação, por comparação direta entre os valores numéricos ou analíticos e os experimentais, procurando minimizar o erro nesta diferença.

Os valores da difusividade de massa obtidos por meios numéricos ou analíticos dependem de muitos fatores tais como: tipo de modelo, considerações adotadas em cada um, geometria adotada, tipo de método numérico usado, e assim por diante. Desta forma, os seus valores, evidentemente variam de caso para caso, mesmo relacionando-se com um mesmo experimento. A mesma dificuldade existe com o coeficiente de transferência de calor, quando o mesmo é obtido com uma metodologia similar à utilizada na de transferência de massa.

O valor da difusividade de massa obtido por um modelo não deve ser usado em outro modelo, sob pena da margem de erro aumentar consideravelmente. De qualquer forma, a ordem

de grandeza é a mesma em todos os casos, independentemente do modelo e considerações adotadas, a menos que a pesquisa não tenha sido conduzida corretamente, ou métodos não-convencionais tenham sido usados, contudo isto não tem sido observado na prática.

A Tabela 2.8 apresenta alguns valores da difusividade de umidade efetiva resultante da aplicação de alguns modelos e técnicas aos dados experimentais de secagem e desidratação osmótica de banana, obtidas por diferentes pesquisadores. Em todos estes estudos, utilizou-se o modelo de difusão, segundo a geometria utilizada e as considerações feitas em cada caso.

Tabela 2.8 - Difusividade de umidade de banana para várias temperatura e geometrias.

Geometria (Consideração)	M** (b. s.)	T (° C)	D.10 ⁺¹⁰ (m ² /s)	Referência
Pedaços (Placa semi-infinita)	0,027	25	0,0251	Hong et al. (1986)
Inteiras descascadas (cilindro infinito)	3,77 a	50 à	2,62 a	Nogueira (1991) Nogueira e Park (1992)
	0,06	70	6,53	
----	3,50 a	20 à	0,003 a	Kenchou e Maalej (1994)
	0,01	40	2,10	
Fatias (Placas)	2,10	60	34,80 (fresca 15 °Brix)	Sankat et al. (1996)
	0,20		8,80 (39°Brix)	
Inteiras descascadas (cilindro infinito)	3,43 a	29,9 a	1,25 a 29,7	Queiroz (1994) Queiroz e Nebra (1996)
	0,22	68,4		
Pedaços cilíndricos	2,64 a	25 à	8,50 a 24,30	Rastogi et al. (1997)
	1,85	45		
Fatias (cilindro finito)	Início: 3,20 a 2,39	35 a 50	1,60 a 4,80	Mauro (1992) Mauro e Menegalli (1995)
	Final: 0,89 a 0,28			
Cubos	3,54 a 0,11	60	8,33	Mowlah et al. (1982)
Fatias	3,00 a 0,15	60	2,80 a 163,40	Garcia et al. (1988)
Fatias (Placa)	----	50	27,7 (60°Brix) 26,6 (70°Brix)	Waliszewski et al. (1997)

** A faixa de valores refere-se aos teores de umidade inicial e final da fruta.

Capítulo 3

Modelagem da Transferência de Calor e Massa

Uma intensa pesquisa em transferência de calor e massa tem sido realizada por vários investigadores, devido a sua grande aplicação em processos industriais. Do estudo da literatura, é aparente que somente considerações geométricas limitadas têm sido usadas para resolver problemas de difusão. As geometrias largamente usadas foram placa, cilindro e esfera. É por este motivo que decidiu-se abordar neste trabalho uma outra forma geométrica: sólidos esferoidais prolatos, forma muito comum na natureza que corresponde a diversos produtos agrícolas.

O problema de difusão em regime transiente é muito importante, principalmente em operações de secagem, onde é necessário ter conhecimento da distribuição do teor de umidade e/ou temperatura do produto em função da posição no seu interior e do tempo, como também da relação entre o teor de umidade médio e/ou temperatura e a duração da secagem. A análise teórica que será apresentada a seguir envolve dois estudos: um analítico e outro numérico, que foram desenvolvidos, baseando-se em trabalhos reportados na literatura, e que fazem parte da contribuição dada por este trabalho ao estado da arte.

3.1 - A equação de difusão de massa no sistema esferoidal prolato

Como já mencionado no Capítulo 2, a segunda lei de Fick da difusão tem sido usada por um número de pesquisadores com a consideração que o gradiente de umidade é a força motriz do processo de transferência de massa e admite que a difusão de líquido é o único mecanismo de movimento de umidade, no interior do sólido.

A equação de Fick de difusão de massa em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

A equação correspondente a esta em condução de calor é a lei de Fourier, que é obtida substituindo M por θ e D por α , a difusividade térmica, assumindo-se que as propriedades térmicas c_p e ρ sejam constantes.

Em muitos problemas físicos, as condições de contorno são tais que os valores de uma função (ou de sua derivada) são especificados em curvas ou superfícies (esferas, cilindros, etc.). A escolha de um particular sistema de coordenadas deve ser motivada pela forma geométrica do corpo em estudo e resulta numa melhor adequação e validade dos resultados obtidos.

No caso específico de elipsóides de revolução, um sistema de coordenadas que se adequa muito bem à forma do corpo é o esferoidal prolato. Um elipsóide de revolução, em que o eixo de revolução é maior que outro eixo, é chamado esferóide prolato. Em contraste, se o eixo de revolução é menor, é chamado esferóide oblato.

As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (x,y,z) e o esferoidal prolato (elíptico) (μ,ϕ,ω) são dados a seguir, (Haji-Sheikh e Sparrow, 1966):

$$x=L \operatorname{senh}\mu \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{cos}\omega \quad y=L \operatorname{senh}\mu \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\omega \quad z=L \operatorname{cosh}\mu \cdot \operatorname{cos}\phi \quad (3.2)$$

onde L é o comprimento focal, igual a $(L_2^2 - L_1^2)^{1/2}$, sendo L_1 e L_2 os semi-eixos menor e maior da elipse, respectivamente (Figura 3.1).

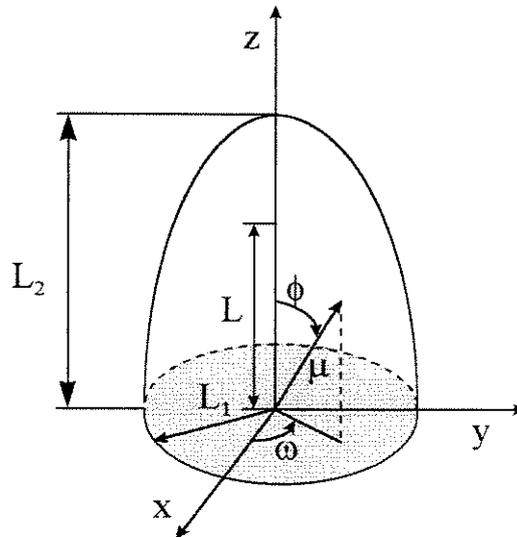


Figura 3.1- Características de um esferóide prolato sólido

Para expressar a equação no novo sistema de coordenadas, serão utilizadas as seguintes variáveis:

$$\xi = \operatorname{cosh}\mu; \quad \eta = \operatorname{cos}\phi \quad \zeta = \operatorname{cos}\omega \quad (3.3)$$

Sendo assim, por substituição direta destas variáveis nas Equações 3.2 tem-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesiano e esferoidal prolato (Magnus et al., 1966):

$$x = L\sqrt{(1-\xi^2)(\eta^2-1)} \zeta \quad y = L\sqrt{(1-\xi^2)(\eta^2-1)} \sqrt{(1-\zeta^2)} \quad z = L\xi\eta \quad (3.4)$$

O domínio das variáveis ξ , η e ζ (em termos de ω) com relação à Figura 3.1 é dado por:

$$1 \leq \xi \leq L_2/L \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (3.5)$$

As superfícies $\xi=\xi_0$ (constante), $\xi_0>1$, são elipsóides de revolução cofocais alongados em torno do eixo z. A superfície $\xi=1$ é a linha reta que une a origem ($z=0$) e o ponto focal ($z=L$). As superfícies $\eta=\eta_0$ (cte), $\eta_0<1$, são hiperbolóides de duas capas, com um cone assintótico que é gerado por linhas que passam pela origem e estão inclinadas com um ângulo $\phi=\cos^{-1}\eta$ em relação ao eixo z. A superfície $\eta=1$ é parte do eixo $z>L$. As superfícies $\omega=\omega_0$ (cte) são planos que passam pelo eixo z e perpendiculares ao plano xy, formando o ângulo ω com o eixo x.

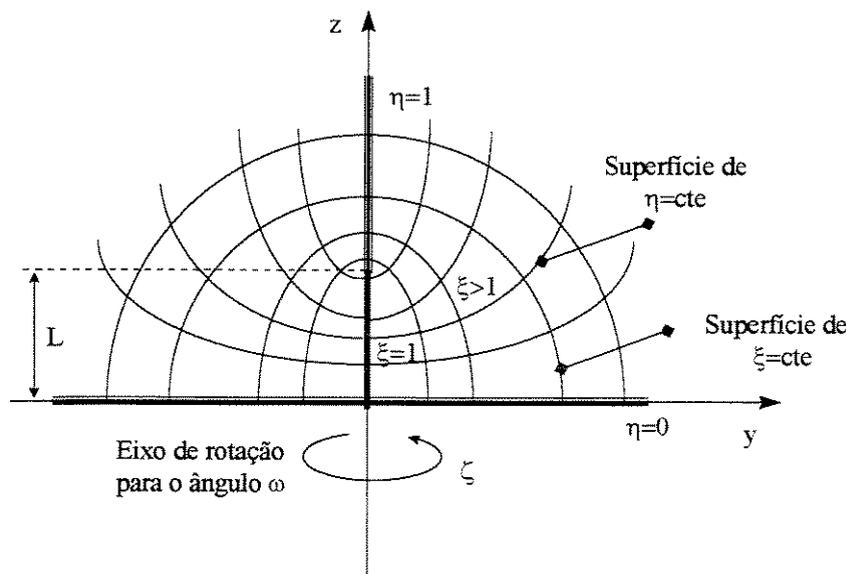


Figura 3.2 - Sistema de coordenadas esférico prolato

De acordo com a Figura 3.1, para $L_2=L_1$, o esferóide será uma esfera; para $L_2<L_1$, o esferóide é dito oblato. Sendo assim, no limite quando a distância interfocal tende a zero, o sistema de coordenadas esférico prolato se reduz a um sistema de coordenadas esféricas. Para L finito, as superfícies ξ constante serão esféricas quando ξ se aproxima ao infinito. Isto é: $L\xi\rightarrow r$; $\eta\rightarrow\cos\theta'$, quando $\xi\rightarrow\infty$, onde r e θ' , são as coordenadas esféricas. Informações adicionais sobre o sistema esférico prolato podem ser obtidas em Page et al. (1938); Page (1944a); Page (1944b); Aoi (1955); Acho (1992); Do-Nhat e MacPhie (1996a) e Do-Nhat e MacPhie (1996b) além de outras que são reportadas nas páginas seguintes.

A obtenção da equação de difusão no novo sistema de coordenadas segue a metodologia descrita abaixo (Maliska, 1995).

A equação geral de conservação de uma magnitude, representada pela variável geral Φ , escrita de forma a ser aplicada ao novo sistema de coordenadas, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v \Phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho w \Phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - P^\Phi + S^\Phi \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde J é o jacobiano da transformação, expresso por:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

A determinação da inversa do jacobiano fornece como resultado:

$$J^{-1} = \frac{L^3(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.8)$$

Sendo os coeficientes α_{ij} , fornecidos pelas seguintes relações matemáticas:

$$\alpha_{11} = \frac{a'}{J^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{b'}{J^2}, \quad \alpha_{33} = \frac{c'}{J^2},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{d'}{J^2}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{13} = \frac{e'}{J^2}, \quad \alpha_{32} = \alpha_{23} = \frac{f'}{J^2}, \quad (3.9)$$

com:

$$a' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \quad (3.10)$$

$$b' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \quad (3.11)$$

$$c' = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$d' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \quad (3.13)$$

$$e' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (3.14)$$

$$f' = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (3.15)$$

Na equação geral, os termos que contém α_{ij} , com $i \neq j$, são os termos difusivos referentes à não-ortogonalidade da malha. Desta forma, torna-se necessária a verificação da ortogonalidade do sistema de coordenadas a ser utilizado.

As condições necessárias e suficientes para que um sistema de coordenadas seja ortogonal são (MacRobert, 1967):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) = 0 \quad (3.18)$$

Pode ser verificado que estas condições são satisfeitas para o sistema de coordenadas esferoidal prolato, nas variáveis ξ , η e ζ . Então os termos d' , e' e f' (Equações 3.13 - 3.15), serão eliminados da Equação 3.6. Em adição, o problema é puramente difusivo, sem geração de energia ou qualquer outro termo fonte. Sendo assim, a equação geral reduz-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.19)$$

Substituindo-se os valores do jacobiano J e dos coeficientes α_{ij} , com $i=j$; para o caso onde $\Phi=M$, o teor de umidade do material, $\Gamma^\Phi=\rho D$ e re-arranjando os termos, a Equação 3.19, para o caso de ρ constante, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) D \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Quando existe simetria em torno do eixo z , tem-se $\partial/\partial \omega=0$ e portanto $\partial/\partial \zeta=0$, assim, o terceiro termo da equação é nulo e ela se reduzirá a:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.21)$$

Como esta equação é de segunda ordem na posição e de primeira ordem no tempo, a sua solução requer no mínimo duas condições de contorno e uma condição inicial. Elas são:

$$M(\xi, \eta, t=0) = f_1(\xi, \eta) \quad M(\xi=L_2/L, \eta, t) = f_2(\eta, t) \quad \frac{\partial M(\xi; \eta=0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.22)$$

que correspondem as condições inicial ($t=0$), de fronteira ($\xi=L_2/L$) e de simetria ($\eta=0$).

Procedendo-se semelhantemente, a partir da Equação 3.19, substituindo-se Γ^Φ por k , ρ por ρc_p e Φ por θ , obtém-se a equação de difusão de calor.

O gradiente de Φ , as áreas de troca de massa e o volume do corpo no novo sistema de coordenadas, podem ser obtidos, usando as relações matemáticas dadas por Magnus et al.(1966); Brodkey (1967); Abramowitz e Stegun (1972) e Kreyszig (1988):

- Volume diferencial:

$$dV = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.23)$$

- Área diferencial de fluxo de Φ

$$dS_\xi = \frac{1}{\hat{V}\hat{W}} d\eta d\zeta \quad (3.24)$$

$$dS_\eta = \frac{1}{\hat{W}\hat{U}} d\zeta d\xi \quad (3.25)$$

$$dS_{\zeta} = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta \quad (3.26)$$

- Gradiente de Φ :

$$\nabla\Phi = \text{Grad } \Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \hat{V} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \hat{W} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \quad (3.27)$$

onde:

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.30)$$

são os coeficientes métricos, cujo produto dá como resultado o próprio jacobiano da transformação (J).

Com a substituição dos resultados, para $\Phi=M$, tem-se:

$$dV = \frac{L^3(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.31)$$

$$dS_{\xi} = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)} \sqrt{(\xi^2 - 1)}}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} d\eta d\zeta \quad (3.32)$$

$$dS_{\eta} = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)} \sqrt{(1 - \eta^2)}}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} d\xi d\zeta \quad (3.33)$$

$$dS_{\zeta} = \frac{L^2(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} d\xi d\eta \quad (3.34)$$

$$\nabla M = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi}, \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta}, \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \quad (3.35)$$

o que completa o equacionamento necessário.

3.2 - Resolução do problema de difusão de massa em corpos elipsoidais

3.2.1 - Resolução analítica

Haji-Sheikh e Sparrow (1966), apresentaram uma solução analítica para o problema de difusão de calor em esferóide prolato. Neste trabalho essa solução foi estendida ao caso de difusão de massa e foi obtido o valor médio volumétrico da grandeza.

Tendo em vista a complexidade da solução do problema proposto, e visando simplificar o método, algumas considerações foram adotadas:

- a) O sólido é homogêneo e com propriedades físicas constantes;
- b) O campo do teor de umidade é axi-simétrico em torno do eixo z ao longo do processo;
- c) A secagem ocorre sob condições de equilíbrio na superfície, com teor de umidade constante, igual ao teor de umidade de equilíbrio;
- d) O encolhimento do material é desprezível durante o processo de secagem.
- e) O campo do teor de umidade é uniforme no início da secagem;
- f) O único mecanismo de transporte de umidade no interior do sólido é o de difusão em fase líquida. A água evapora na superfície do material.
- g) O coeficiente de difusão é constante;

A determinação do campo do teor de umidade no interior de um esferóide prolato, envolve a solução da equação diferencial (Equação 3.21). Segundo as considerações listadas, as condições inicial, de contorno e de simetria são:

$$M(\xi, \eta, t=0) = M_0 = \text{cte} \quad (3.36a)$$

$$M(\xi=L_2/L, \eta, t) = M_e = \text{cte. (Na superfície)} \quad (3.36b)$$

$$\frac{\partial M(\xi; \eta = 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.36c)$$

A Equação 3.36b chamada de condição de contorno EMC, é baseada na consideração de que o coeficiente de transferência de massa na superfície do corpo aproxima-se de um valor infinito (tipo Φ prescrita), a secagem é controlada exclusivamente pelo mecanismo de difusão interna de umidade.

A técnica de solução que será utilizada é a da separação de variáveis, assumindo-se que a função M seja obtida por:

$$M(\xi, \eta, t) = \psi(\xi, \eta)\tau(t) \quad (3.37)$$

e supondo-se ainda que a solução de M seja da forma (Haji-Sheikh e Sparrow, 1966):

$$M = \psi(\xi, \eta)\exp(-c^2Dt/L^2) \quad (3.38)$$

Então, derivando-se esta equação duas vezes e substituindo os resultados na Equação 3.21, tem-se:

$$\left(\frac{-c^2}{L^2}\right)\psi = \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.39)$$

que pode ser escrita em forma mais reduzida como:

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{c^2}{L^2} \right) \psi = 0 \quad (3.40)$$

Esta expressão é chamada equação de Helmholtz (Morse e Feshbach, 1953a). Sendo $\psi = \psi(\xi, \eta)$, pode-se admitir:

$$\psi(\xi, \eta) = \chi(\xi) \cdot \lambda(\eta) \quad (3.41)$$

A função χ é a função radial ou de variação em função da posição radial, enquanto que a função λ é a função angular ou de posição numa superfície do esferóide (interna ou externa). Informações adicionais sobre as funções esferoidais podem ser encontradas em Stratton et al. (1941), Morse e Feshbach (1953b), Stratton et al. (1956), Flammer (1957), Robin (1959) e Abramowitz e Stegun (1972), além daqueles citados anteriormente.

Derivando-se ψ com relação a ξ e a η , substituindo os resultados obtidos na equação acima, separando as variáveis e reagrupando os termos comuns, obtém-se duas equações diferenciais ordinárias homogêneas:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\chi}{d\xi} \right) \right] + (b - c^2 \xi^2) \chi = 0 \quad (3.42)$$

$$\left[\frac{d}{d\eta} \left((1 - \eta^2) \frac{d\lambda}{d\eta} \right) \right] + (b - c^2 \eta^2) \lambda = 0 \quad (3.43)$$

Nas Equações 3.42 e 3.43, b é a constante de separação ou autovalor. As duas equações têm a mesma forma, sendo que a referente a λ envolve um comportamento da solução entre o ponto singular $+1$ e o ponto 0 , enquanto que a referente a χ , do ponto singular $+1$ até L_2/L . A exigência de que as soluções das Equações 3.42 e 3.43 sejam finitas nos pontos singulares, torna-as equações de autovalor característico para b , isto é, b deve ser determinado para que as equações em χ e λ sejam finitas nestes pontos. Assim, as soluções das Equações 3.42 e 3.43

devem ser funções de 1ª espécie (funções de 2ª espécie são infinitas nos intervalos $0 \leq \eta \leq 1$ e $1 \leq \xi \leq L_2/L$).

Quando $c \neq 0$, a Equação 3.43 difere da equação de Legendre associada, por ter uma singularidade essencial no infinito. Isto sugere que as funções angulares de 1ª espécie sejam dadas por uma soma infinita. Particularmente, as funções radiais de 2ª espécie convergem lentamente para pequenos valores de $c\xi$, e em outros casos, elas não são absolutamente convergentes para qualquer valor de $c\xi$, (Flammer, 1957). Do exposto, a solução da função angular $\lambda(\eta)$ é expressa em termos de uma série de funções de Legendre, enquanto $\chi(\xi)$ é obtida a partir de uma série de funções de Bessel esféricas. As soluções das respectivas equações são dadas por:

$$\chi_m(c, \xi) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m} \right]^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot d_{n,m} j_n(c\xi) \quad (3.44)$$

$$\lambda_m(c, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m}(c) \cdot P_n(\eta) \quad (3.45)$$

com $m=0, 2, 4, \dots$ e $n=0, 2, 4, \dots$. Nas Equações 3.44 e 3.45, $j_n(c\xi)$ é a função de Bessel esférica de 1ª espécie de ordem n , enquanto que $P_n(\eta)$ é a função de Legendre de 1ª espécie, respectivamente. Embora as Equações 3.42 e 3.43 não sejam definidas para $\xi=1$ e $\eta=1$, as soluções apresentadas são analíticas e finitas nestes pontos. Em particular, condições físicas geralmente exigem que a solução obtida seja analítica em $|x|=1$.

As funções χ e λ são funções ortogonais duas a duas com peso $v(x)$. Duas funções $g_m(x)$ e $g_p(x)$, são ditas ortogonais com relação a função de peso $v(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ se:

$$\int_a^b g_m(x) g_p(x) v(x) dx = 0 \quad (3.47)$$

com $m \neq p$, (Kreyszig, 1983). Se estas funções devem ser reais, a função $v(x)$ deve ser não-negativa.

Quando a Equação 3.45 é substituída na Equação 3.43, e relações conhecidas para as funções de Legendre associadas são usadas, os coeficientes $d_{n,m}$ são determinados através da seguinte relação de recorrência (Flammer, 1957):

$$\hat{\alpha}_r d_{r+2,m} + (\hat{\beta}_r - b_n) d_{r,m} + \hat{\gamma}_r d_{r-2,m} = 0 \quad (3.48)$$

onde:

$$\hat{\alpha}_r = \frac{(r+2)(r+1)c^2}{(2r+5)(2r+3)} \quad (3.49)$$

$$\hat{\beta}_r = \frac{[(2r)(r+1) - 1]c^2}{(2r-1)(2r+3)} + r(r+1) \quad (3.50)$$

$$\hat{\gamma}_r = \frac{r(r-1)c^2}{(2r-3)(2r-1)} \quad (3.51)$$

com $r=0, 2, 4, \dots$

Os valores dos coeficientes b_n são dados pela equação transcendental seguinte:

$$U(b_n) = U_1(b_n) + U_2(b_n) = 0 \quad (3.52)$$

com:

$$U_1(b_n) = \hat{\phi}_n - b_n - \frac{\hat{\delta}_n}{(\hat{\phi}_{n-2} - b_n) - \frac{\hat{\delta}_{n-2}}{(\hat{\phi}_{n-4} - b_n) - \dots}} \quad (3.53)$$

$$U_2(b_n) = - \frac{\hat{\delta}_{n+2}}{(\hat{\phi}_{n+2} - b_n) - \frac{\hat{\delta}_{n+4}}{(\hat{\phi}_{n+4} - b_n) - \dots}} \quad (3.54)$$

sendo que:

$$\hat{\delta}_n = \frac{n^2(n-1)^2 c^4}{(2n-1)^2(2n+1)(2n-3)}; \quad n \geq 2 \quad (3.55)$$

$$\hat{\phi}_n = n(n+1) + \frac{c^2}{2} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right]; \quad n \geq 0 \quad (3.56)$$

A técnica utilizada para determinar os coeficientes b_n é denominada técnica da fração continuada; comentários adicionais podem ser encontrados em Stratton et al. (1941), Morse e Feshbach (1953a) e Stratton et al. (1956). Esta técnica é adotada para a determinação dos autovalores, para $c \leq 7,5$. Quando $c > 10$, os autovalores são conseguidos através de uma expansão assintótica. O desenvolvimento assintótico de b_n é dado a partir do método de aproximações sucessivas:

$$\begin{aligned} b_n = (2n+1)c & - \frac{(2n^2+2n+3)}{2^2} - \frac{(2n+1)(n^2+n-3)}{2^4 c} - \frac{5(n^4+2n^3+7n+3)}{2^6 c^2} - \\ & - \frac{(66n^5+165n^4+962n^3+1278n^2+1321n+453)}{2^{10} c^3} - \\ & - \frac{(252n^6+75n^5+5885n^4+10510n^3+18478n^2+13349n+4425)}{2^{12} c^4} - \\ & - \frac{[527(2n+1)^7+61529(2n+1)^5+1043961(2n+1)^3+2241599(2n+1)]}{2^{20} c^5} + O(c^{-6}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

No intervalo $7,5 < c \leq 10$, nenhuma das soluções fornece resultados coerentes.

Uma série convergente para $d_{n,m}$ pode ser obtida para um conjunto de valores discretos da constante de separação b . Desta forma, tornam-se possíveis dois conjuntos de soluções finitas, um para cada valor de n par, e outro quando n for ímpar. Para n par, o menor valor de b está relacionado com $n=0$, o próximo com $n=2$, e assim por diante (Morse e Feshbach, 1953b). Dependendo do esquema de normalização adotado, os valores dos coeficientes $d_{n,m}$ serão diferentes, contudo, os coeficientes devem ser normalizados para que cada função esferoidal se

reduza à correspondente função esférica quando $c \rightarrow 0$. O critério adotado neste trabalho é apresentado na Equação 3.58:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r/2} (r)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!} d_{r,m} = \frac{(-1)^{n/2} (n)!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (3.58)$$

válida para $r=0,2, \dots$ e $n=0,2, \dots$. Esta equação adicional é que possibilita a determinação dos coeficientes $d_{n,m}$, completamente. Vale ressaltar que quando $n < 0$, tem-se $P_n(\eta)=0$, implicando que a série realmente começa em $n=0$. A condição que restringe \underline{b} nas equações diferenciais é refletida na Equação 3.48 como um requisito de que a relação de coeficientes $d_n/d_{n-2} \rightarrow 0$ (tende a zero), quando $n \rightarrow \infty$, (Stratton et al., 1956). Além disso, como n é par, os coeficientes d_1, d_3, \dots são irrelevantes e não devem ser considerados. A solução geral do problema é dada pela soma das soluções particulares para χ e λ . Isto é:

$$M(\xi, \eta, t) - M_e = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} e^{-c_{mk}^2 \frac{Dt}{L^2}} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.59)$$

Os coeficientes A_{mk} são obtidos, aplicando a condição de contorno em $t=0$:

$$M_o - M_e = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.60)$$

Multiplicando ambos os membros da Equação 3.60 por $\chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2)$, e integrando-os sobre o volume de controle em estudo (Figura 3.1), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) (M_o - M_e) d\xi d\eta = \\ & = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) A_{mk} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) d\xi d\eta \quad (3.61) \end{aligned}$$

onde foram trocadas as operações de somatório e integração. Supondo válida a integração termo a termo, conclui-se que o único termo no lado direito que fornece uma integral não nula é o termo em $m=p$, devido à propriedade de ortogonalidade das funções, expressada pela equação:

$$\int_0^1 \int_1^{L_2/L} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta = 0, m \neq p \quad (3.62)$$

Observe que o termo $(\xi^2 - \eta^2)$ é a função de peso referenciada na Equação 3.47.

Para $p=m$, o resultado da Equação 3.61 será:

$$A_{mk} = \frac{\int_0^1 \int_1^{L_2/L} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) (M_o - M_e) d\xi d\eta}{\int_0^1 \int_1^{L_2/L} [\chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta)]^2 (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta} \quad (3.63)$$

onde o denominador é a norma de $(\chi_m \lambda_m)(\xi^2 - \eta^2)$. No caso em que $(M_o - M_e)$ é um valor constante, este termo pode ser isolado da integral acima, e portanto, a solução apresentada na Equação 3.59 passa a referir-se à razão de umidades $(M - M_e) / (M_o - M_e)$, em vez de $(M - M_e)$. Assim, pode-se escrever a solução geral para o problema como segue:

$$M^* = \sum_{m=0.2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{mk}}{(M_o - M_e)} \right] e^{-c_{mk}^2 \frac{Dt}{L^2}} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.64)$$

onde $M^* = [M(\xi, \eta, t) - M_e] / [M_o - M_e]$ é o teor de umidade adimensional. Os coeficientes c , b e d devem ser obtidos satisfazendo a condição de $\chi_m = 0$ na superfície do esferóide prolato ($\xi = L_2/L$), condição única que satisfaz a condição de contorno na superfície do corpo.

Para determinar a perda de umidade no processo de secagem, torna-se necessário determinar o teor de umidade médio no volume total do elipsóide. A definição da média espacial do teor de umidade (\bar{M}) é expressa por (Whitaker, 1980):

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (3.65)$$

onde V é o volume total do domínio em estudo.

Substituindo os valores do teor de umidade adimensional e dos volumes infinitesimal e total na Equação 3.65, tem-se que o teor de umidade médio será dado por:

$$\bar{M}^* = \frac{\int_0^1 \int_1^{L_2/L} \left\{ \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{mk}}{(M_o - M_e)} \right] e^{-c_{mk}^2 \frac{Dt}{L^2}} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \right\} (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta}{\int_0^1 \int_1^{L_2/L} (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta} \quad (3.66)$$

A Equação 3.66 assume esta forma, em virtude da simetria em torno do eixo z , isto é, da independência da razão de umidade na direção de ζ .

Observe que, pela substituição direta de M por θ e D por α , os resultados deste equacionamento passam a representar a distribuição de temperatura e seu valor médio, durante o processo de difusão.

Uma peculiaridade da solução destas equações é que para pequenos valores de Dt/L^2 é necessário utilizar um alto número de termos das séries, resultando num considerável inconveniente. Todavia, para altos valores desta grandeza, o termo exponencial predomina e a solução converge rapidamente, em virtude do rápido decréscimo da função exponencial.

A formulação aqui apresentada pode ser utilizada para descrever fenômenos difusivos transientes, de difusão de massa (secagem ou umidificação) e calor (aquecimento ou resfriamento) em corpos com geometria esférica ($L_2/L_1=1$), cilíndrica ($L_2/L_1=\infty$) e elipsoidal ($0 < L_2/L_1 < \infty$), com as condições de contorno indicadas.

Vale salientar que a complexidade para obter a solução analítica do problema, para condição de contorno convectiva, é muito grande, e métodos numéricos mostram-se mais adequados para obter soluções mais rápidas. No entanto, estudos podem ser conduzidos neste sentido.

Para demonstrar o mérito relativo do presente método de solução, no que diz respeito à utilidade e limitações, foi decidido selecionar, para ilustrar, um corpo simples ($L_2/L_1=1,1$) para que uma solução convencional pudesse ser realmente obtida e comparada com outros resultados da literatura, obtidos para esfera ($L_2/L_1=1,0$), elipsóide ($L_2/L_1=1,1$) e cilindro ($L_2/L_1=100,0$).

Para obtenção dos valores dos coeficientes c , b e d_{nm} da solução final do perfil de umidade adimensional, assim como o próprio teor de umidade dentro do sólido, apresentados na Equação 3.63, dois programas computacionais utilizando o Software Fortran Power Station foram implementados, enquanto que para determinar os coeficientes A_{mk} (Equação 3.63), a condição de ortogonalidade (Equação 3.62) e o teor de umidade médio (Equação 3.66), foram implementados três programas computacionais utilizando o Software Mathematica[®]. Particularmente com referência às determinações de A_{mk} e à condição de ortogonalidade, problemas foram encontrados para resolver analiticamente as integrais que envolvem estas equações, especificamente a integral do tipo:

$$\int j_m(c\xi)j_p(c\xi)\xi^2 d\xi \quad (3.67)$$

Todas as integrais que envolvem χ e λ podem ser reduzidas a integrais mais simples que envolvem as funções de Bessel esféricas e polinômios de Legendre, respectivamente. Contudo uma extensa bibliografia especializada sobre funções de Bessel, suas derivadas e integrais, foi consultada, mas não foram encontradas expressões que auxiliassem na tarefa de reduzir as integrais referenciadas a expressões mais simples para se poder obter a solução totalmente analítica. Como exemplos citam-se: Watson (1944), Batteman (1951), Robin (1959), Farrel e Ross (1963), Gradshteyn e Ryzhik (1965) e Abramowitz e Stegun (1972). Sendo assim, técnicas numéricas já implementadas no Software Mathematica[®] foram usadas para resolver estas integrais.

3.2.2 - Resolução numérica

Obter uma solução analítica de uma equação diferencial parcial com alto nível de complexidade é muitas vezes difícil, principalmente em casos onde existem não-linearidades. Nestes casos, uma solução numérica pode ser usada para prever o fenômeno.

Como já mencionado, a transferência de massa em corpos com geometria elíptica ainda é pouco estudada. A solução analítica apresentada é demorada para ser obtida, e ainda, restrita à condição de contorno de equilíbrio na superfície do material. Tendo em vista o avanço das técnicas computacionais que geram alternativas viáveis para analisar problemas de grande complexidade, vários métodos numéricos têm sido utilizados, tais como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de fronteira e volumes finitos. Várias discussões sobre cada um destes métodos podem ser encontradas (Shih, 1984; Minkowicz et al., 1988; Brebbia, 1989, Patankar, 1980 e Maliska, 1995). Em particular, com o objetivo de otimizar a solução para o problema de difusão transiente, esta seção sumariza uma metodologia, desenvolvida neste trabalho, para a solução numérica do problema de difusão em corpos elipsoidais, utilizando-se do conceito de volumes finitos.

O método de volumes finitos requer o desenvolvimento de equações elementares, a partir da equação diferencial governante do problema. O conceito fundamental do método de volumes finitos é que qualquer quantidade contínua pode ser aproximada por um modelo discreto composto de um conjunto de funções contínuas em degraus ou lineares, definidas sob um número finito de subdomínios. Os subdomínios são chamados de volumes de controle e os pontos nodais de centróide do volume de controle. Esta formulação numérica tem sido utilizada na resolução de problemas de transferência de calor e massa, em diversas geometrias.

Na simulação do fenômeno de difusão em esferóide prolato sólido, foi utilizado um domínio computacional devido à simetria que existe no corpo (Figura 3.3). Desde que a equação diferencial parcial é do tipo elíptica, as condições de contorno devem ser especificadas em toda a fronteira do domínio. Além disso, pode ser observado que existe simetria nos quatro quadrantes

do elipsóide formados pelos planos que passam pelos pontos $(x=0; y=0; z=0)$ e $(x=0; y=0; z=L)$. Particularmente no plano em que $\omega=90^\circ$, ocorre simetria em cada quadrante da elipse. Desta forma optou-se por adotar neste trabalho como domínio computacional o quadrante $y \geq 0$ e $z \geq 0$ no plano $\omega=90^\circ$. Na Figura 3.3a, são mostradas linhas de ξ e η constantes, que delimitam o volume de controle associado ao ponto nodal P. Os pontos N, S, E e W são os seus pontos nodais vizinhos, norte, sul, leste e oeste, respectivamente, na nomenclatura usual. Na Figura 3.3b, são mostradas as faces do volume de controle e, w, n e s, ao redor do ponto P; as dimensões do volume de controle, $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, bem como as distâncias entre o ponto P e seus vizinhos adjacentes.

Como foi demonstrado anteriormente, o sistema esferoidal prolato é ortogonal. Segundo Patankar (1980), esta ortogonalidade do sistema de coordenadas, e portanto da malha numérica, é essencial para a aplicação do método de volumes finitos: quando se calcula o fluxo de Φ através da face do volume de controle, a face deve ser normal à linha que une os dois pontos nodais (por exemplo, linha PN, na Figura 3.3b).

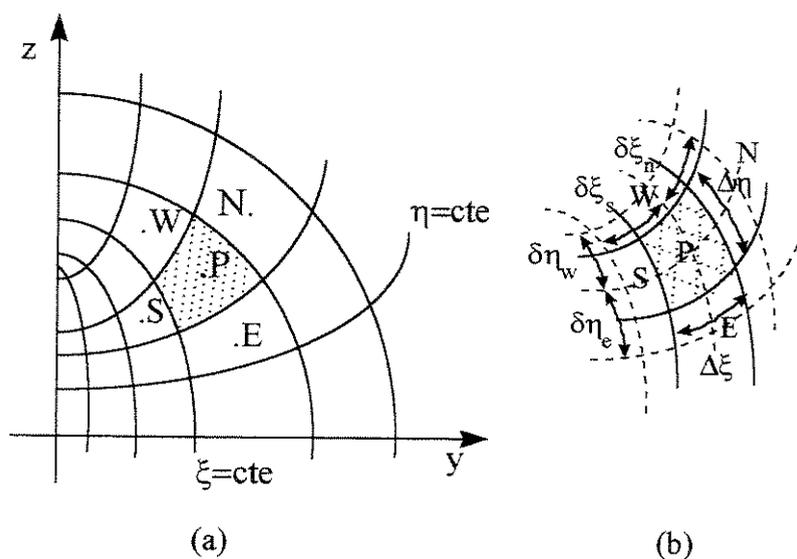


Figura 3.3 - Configuração geométrica do problema físico

A equação de difusão em coordenadas elípticas é resolvida numericamente utilizando o método de volumes de controle finitos, usando a prática B. Neste esquema, os pontos nodais estão centrados no volume de controle e a malha adotada possui volumes inteiros em todo o domínio, (Patankar, 1980 e Maliska, 1995). O procedimento foi preferido por duas razões: porque facilita a generalização da determinação dos coeficientes e por que simplifica a aplicação das condições de contorno. Aliado a estas características, o uso da prática B elimina o problema de singularidade da Equação 3.21 que ocorre nos pontos $(\xi=1; \eta)$ e $(\xi; \eta=1)$.

Assumindo-se uma formulação completamente implícita, isto é, todos os termos difusivos da equação são avaliados no instante $t+\Delta t$, a Equação 3.19, integrada sobre o volume de controle (Figura 3.1), que corresponde aos pontos internos do domínio, e no tempo, é:

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\rho_p \Phi_p - \rho_p^o \Phi_p^o}{\Delta t} \right] = \left[\left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.68)$$

onde assumiu-se que a integração da variável Φ no tempo é obtida a partir de um perfil do tipo degrau. Nesta equação, os coeficientes D_{ij} , são:

$$D_{11} = \Gamma^\Phi J \alpha_{11} \Delta \eta \Delta \zeta; \quad D_{22} = \Gamma^\Phi J \alpha_{22} \Delta \xi \Delta \zeta; \quad \Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \quad (3.69)$$

A opção pelo uso do procedimento implícito baseia-se no fato de ser incondicionalmente estável. Entretanto, usar esta formulação não significa trabalhar com qualquer intervalo de tempo, pois o problema de acoplamento pode limitar com grande intensidade o Δt . Recomendam-se estudos de refino de tempo para determinar o intervalo.

Para o problema físico proposto tem-se apenas efeitos difusivos, então é mais simples utilizar uma função linear como função de interpolação espacial entre os pontos nodais. Assim, as derivadas diretas relativas ao fluxo difusivo, referentes à Figura 3.3, são dadas por:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta \xi_n}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta \xi_s} \quad (3.70)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta \eta_e}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta \eta_w}$$

Aplicando as respectivas derivadas nas interfaces do volume de controle, fazendo as demais substituições dos coeficientes J_P , ΔV e D_{ij} , $i=j$, reorganizando e rearranjando os termos comuns, pode-se escrever a Equação 3.68, na forma linear discretizada, aplicada ao ponto P, como:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_P^o \Phi_P^o \quad (3.71)$$

com:

$$A_N = \frac{\Gamma_n^\Phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \quad A_S = \frac{\Gamma_s^\Phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s \sqrt{1 - \zeta_s^2}} \quad A_E = \frac{\Gamma_e^\Phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e \sqrt{1 - \zeta_e^2}}$$

$$A_W = \frac{\Gamma_w^\Phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w \sqrt{1 - \zeta_w^2}} \quad A_P^o = \frac{\Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta_P^2}} \rho_P^o$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\rho_P \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta_P^2}}$$

Como o estudo é feito num plano $\zeta = \text{cte}$, os termos $\sqrt{1 - \zeta^2}$, que aparecem no denominador da Equação 3.71, podem ser eliminados. Em adição, por substituição de Φ por M , o teor de umidade do produto, e de Γ^Φ por ρD , a Equação 3.71, passa a representar a difusão de umidade no interior de corpos com forma elíptica.

Na sua forma mais reduzida, assumindo ρ constante, a Equação 3.71 será:

$$A_P M_P = A_N M_N + A_S M_S + A_E M_E + A_W M_W + A_P^o M_P^o \quad (3.72)$$

com:

$$A_N = \frac{D_n (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} \quad A_S = \frac{D_s (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s} \quad A_E = \frac{D_e (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e}$$

$$A_W = \frac{D_w (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w} \quad A_P^o = \frac{\Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t} \quad A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_P^o$$

Os coeficientes A_K , com $K \neq P$, refletem a contribuição dos diferentes nodos, devido ao transporte difusivo de M dos pontos vizinhos na direção do nodo P . O termo A_P^o reflete a influência da variável M no tempo anterior, sobre seu valor no tempo presente.

Com a substituição direta de Φ por θ , Γ^Φ por k e ρ por ρc_p , a Equação 3.71, passa a representar a equação de difusão de calor. Assumindo-se ρ e c_p constantes, esta equação na sua forma reduzida é idêntica a Equação 3.72.

Esta equação é aplicada a todos os pontos internos no domínio computacional, exceto os pontos de fronteira, que são os volumes de controle adjacentes à superfície do corpo, volumes de fronteira. Para estes volumes, o procedimento adotado foi a integração das equações de conservação, considerando-se as condições de contorno existentes. Em outras palavras, realizar um balanço da propriedade em estudo, para o volume de controle de fronteira, incorporando a condição de contorno à equação aproximada do volume de fronteira.

A discretização da equação de difusão integrada para os volumes de fronteira (ponto P da Figura 3.4), é dada a partir da seguinte equação:

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\rho_P \Phi_P - \rho_P^o \Phi_P^o}{\Delta t} \right] = \left[\mathfrak{I} \Phi'' dS_s - \left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.73)$$

$$\Phi'' dS_{\xi} = \text{valor conhecido} = D_{11} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n \quad (3.75)$$

- Convecção

Para esta situação, o fluxo difusivo que atravessa a fronteira é igualado ao fluxo convectivo na vizinhança da mesma e fora do domínio em estudo. Isto é:

$$\Phi'' dS_{\xi} = D_{11} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \text{fluxo convectivo, função de } \Phi_n \quad (3.76)$$

A discretização da equação segue o mesmo procedimento apresentado para os pontos internos ao domínio computacional.

A formulação numérica apresentada é válida:

- para qualquer tipo de material homogêneo;
- para condições de contorno na superfície do corpo de tipo constante ou convectiva;
- para coeficiente de difusão constante ou variável;
- para padrão de malha uniforme ou não-uniforme;
- para qualquer intervalo de tempo;
- para corpos com formas que variam desde esférica até cilíndrica infinita, passando por elipsoidal, dependendo do valor da razão de aspecto L_2/L_1 .

Para problemas de difusão com Γ^{Φ} variável, de acordo com a Figura 3.4, o procedimento para obter o seu valor nas interfaces do volume de controle é assumir uma variação de Γ^{Φ} entre os pontos P e seu vizinho em qualquer direção (N, S, E ou W), expressa por (Patankar, 1980):

$$\Gamma_i^{\Phi} = \left(\frac{1 - \hat{f}_i}{\Gamma_P^{\Phi}} - \frac{\hat{f}_i}{\Gamma_E^{\Phi}} \right)^{-1} \quad (3.77)$$

onde \hat{f}_i é o fator de interpolação, dado por $\hat{f}_i = \frac{(\delta d)_{i+}}{(\delta d)_i}$.

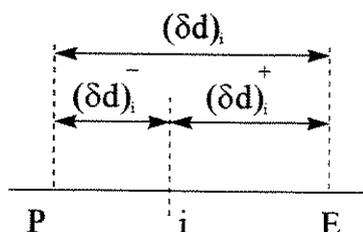


Figura 3.5 - Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E

Se a interface i está situada no ponto médio que une os pontos P e E (malha uniforme), então $\hat{f}_i = 0,5$, e portanto Γ_i^Φ é dado pela média harmônica de Γ_P^Φ e Γ_E^Φ . Isto é:

$$\Gamma_i^\Phi = \frac{2\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{\Gamma_P^\Phi + \Gamma_E^\Phi} \quad (3.78)$$

Esta é uma formulação mais efetiva, uma vez que, se Γ_P^Φ ou Γ_E^Φ forem zero, não haverá fluxo de Φ e portanto Γ_i^Φ será nulo, o que é fisicamente realista.

Utilizando os resultados obtidos nesta seção, a seguir são apresentados alguns modelos de difusão, para as condições de contorno antes mencionadas.

3.2.2.1 - Modelos numéricos difusionais

Modelo I - Modelo difusional com condição de equilíbrio na superfície do sólido.

* Formulação analítica

Para a formulação matemática deste problema, adotaram-se as mesmas suposições do modelo analítico, listadas no item 3.2.1:

As condições inicial e de contorno são expressas pelas Equações 3.36:

Nos planos de simetria, os gradientes angulares e radial do teor de umidade são iguais a zero.

$$\frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.79)$$

Para obter a equação de difusão na forma adimensional, foram adotadas as seguintes variáveis adimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_e}{M_o - M_e} \quad \eta^* = \eta \quad \xi^* = \xi \quad t_m^* = \frac{Dt}{L^2} \quad V^* = \frac{V}{L^3} \quad (3.80)$$

onde t_m^* é chamado número de Fourier (de transferência de massa). O número de Fourier de transferência de massa é definido como sendo a razão entre a taxa de difusão de massa no sólido e a taxa de acúmulo de massa no mesmo.

Desta forma, a Equação 3.21 adimensional é:

$$\frac{\partial M^*}{\partial t_m^*} = \frac{1}{(\xi^{*2} - \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left((\xi^{*2} - 1) \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \right) \right] + \frac{1}{(\xi^{*2} - \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \eta^*} \left((1 - \eta^{*2}) \frac{\partial M^*}{\partial \eta^*} \right) \right] \quad (3.81)$$

Nas variáveis adimensionais, as condições iniciais e de contorno são:

$$M^*(\xi^*; \eta^*; 0) = 1 \quad M^*(\xi^* = \xi_o; \eta^*; t_m^*) = 0$$

$$\frac{\partial M^*(\xi^*; 1; t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(\xi^*; 0; t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(1; \eta^*; t_m^*)}{\partial \xi^*} = 0 \quad (3.82)$$

O teor de umidade médio do produto é calculado a partir da Equação 3.65, por substituição direta das grandezas adimensionais já definidas. Desta forma:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} M^* dV^* \quad (3.83)$$

ou ainda:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{\int_0^1 \int_1^{\frac{L_2}{L}} (\xi^{*2} - \eta^{*2}) d\xi^* d\eta^*} \int_0^1 \int_1^{\frac{L_2}{L}} M^*(\xi^*, \eta^*) (\xi^{*2} - \eta^{*2}) d\xi^* d\eta^* \quad (3.84)$$

onde V^* é o volume total no domínio considerado.

* Formulação numérica

Procedendo similarmente à metodologia mostrada, integrando-se a Equação 3.81 sobre o volume de controle (Figura 3.3) e no tempo, a equação discretizada é obtida:

$$A_P M_P^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_N M_N^* + A_S M_S^* + A_P^o M_P^{*o} \quad (3.85)$$

onde:

$$A_E = \frac{(1 - (\eta_e^*)^2)}{\delta \eta_e^*} \Delta \xi^* ; A_W = \frac{(1 - (\eta_w^*)^2)}{\delta \eta_w^*} \Delta \xi^* ;$$

$$A_N = \frac{((\xi_n^*)^2 - 1)}{\delta \xi_n^*} \Delta \eta^* ; A_S = \frac{((\xi_s^*)^2 - 1)}{\delta \xi_s^*} \Delta \eta^*$$

$$A_P^o = \left(\frac{(\xi_p^*)^2 - (\eta_p^*)^2}{\Delta t_m^*} \right) \Delta \eta^* \Delta \xi^* ; \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^o$$

Esta equação é válida para qualquer ponto interno ao domínio, inclusive os pontos de fronteira.

A discretização das condições de simetria fornece os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 M^*(\xi^*; \eta^* = 0; t_m^*) &= M^*\left(\xi^*; \eta^* = \frac{\Delta\eta^*}{2}; t_m^*\right) \\
 M^*(\xi^* = 1; \eta^*; t_m^*) &= M^*\left(\xi^* = 1 + \frac{\Delta\xi^*}{2}; \eta^*; t_m^*\right) \\
 M^*(\xi^*; \eta^* = 1; t_m^*) &= M^*\left(\xi^*; \eta^* = 1 - \frac{\Delta\eta^*}{2}; t_m^*\right)
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Na forma discretizada, o teor de umidade médio dado pela Equação 3.86 será:

$$\overline{M} = \frac{1}{V^*} \sum_{i=2,4}^{nn} \sum_{j=2,4}^{mm} M_{i,j}^* \Delta V_{i,j}^* \tag{3.87}$$

onde mm e nn representam os números totais de pontos nas direções das coordenadas ξ e η , respectivamente e i e j, a localização destes pontos na malha numérica.

A malha numérica utilizada foi uma malha ortogonal, regular e em coordenadas esféricas prolatas. A distância do j-ésimo ponto nodal ao eixo z ao longo de uma linha de η constante é dada pela seguinte equação:

$$\xi_j^* = 1 + (j-1) \frac{\Delta\xi^*}{2}; j= 1, 2, 4, \dots, m. \tag{3.88}$$

com:

$$\Delta\xi^* = \frac{\left(\frac{L_2}{L} - 1\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)}, m=(2mm+1), mm \text{ par}$$

que representa o espaçamento de ξ .

Similarmente, a distância do i -ésimo ponto nodal ao eixo y ao longo de uma linha de ξ constante é dada por:

$$\eta_i^* = (i-1) \frac{\Delta\eta^*}{2}; i= 1, 2, 4, \dots, n. \quad (3.89)$$

com:

$$\Delta\eta^* = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, n=(2n+1), n \text{ par.}$$

que representa o espaçamento na direção de η . Em acordo com a Figura 3.4, o ponto nodal P corresponde ao ponto $j=mm$ e o ponto f ao $j=m$, com $m=mm+1$ (Ver também Figura 3.8).

Para resolver o sistema de equações gerado pela Equação 3.85, um programa computacional, denominado de SPHEROIDIFF, utilizando o Microsoft Fortran Power Station, foi implementado. As equações foram resolvidas iterativamente usando o método de Gauss-Seidel. Este método foi usado por livre escolha, mas qualquer outro método de solução de equações lineares, por exemplo, método linha por linha, entre outros, pode ser usado.

Assumi-se que a solução numérica convergiu quando partindo de uma condição inicial os seguintes critérios de convergência foram satisfeitos

- * Em cada ponto do domínio computacional num certo instante de tempo:

$$\left| M^{*n+1} - M^{*n} \right| \leq 10^{-8} \quad (3.90a)$$

- * Para a equação discretizada em qualquer instante de tempo:

$$\frac{\sum |A_K|}{|A_P|} \leq 1 \text{ para todas as equações} \quad (3.90b)$$

onde \underline{n} representa a \underline{n} -ésima iteração em cada instante de tempo e K os pontos nodais vizinhos do ponto nodal P . Aliado a estes critérios, está o requerimento que todos os coeficientes A_K sejam positivos.

Os pontos de simetria não entram no conjunto de equações a serem resolvidas. Após o sistema de equações ter sido resolvido, sua estimativa é feita. Neste caso, assume-se que o fluxo de umidade que sai do ponto adjacente ao ponto de simetria é igual ao fluxo de umidade que chega neste ponto. Em símbolos:

* Para os pontos em $\eta=0$ ($0 < y < L_1$)

$$\left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_e = \left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_w \quad (3.91)$$

Discretizando e re-arranjando termos, tem-se:

$$M_E = \left[1 + \frac{\left(\frac{D_w}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2-\eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{D_P}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_P^2-\eta_e^2}} \right)} \right] M_P - \frac{\left(\frac{D_w}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2-\eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{D_P}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_P^2-\eta_e^2}} \right)} M_W \quad (3.92)$$

Para coeficiente de difusão constante, tem-se, após substituição das variáveis adimensionais, dadas pelas Equações 3.80:

$$M_E^* = \left[1 + \frac{\left(-\frac{1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2-(\eta_w^*)^2}} \right)}{\left(-\frac{1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_P^*)^2-(\eta_e^*)^2}} \right)} \right] M_P^* - \frac{\left(-\frac{1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2-(\eta_w^*)^2}} \right)}{\left(-\frac{1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_P^*)^2-(\eta_e^*)^2}} \right)} M_W^* \quad (3.93)$$

* Para os pontos em $\eta=1$ ($L < z < L_2$)

$$\left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_w = \left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_e \quad (3.94)$$

Discretizando e re-arranjando termos, tem-se:

$$M_w = \left[1 + \frac{\left(\frac{D_e}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_p^2-\eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{D_p}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_p^2-\eta_w^2}} \right)} \right] M_p - \frac{\left(\frac{D_e}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_p^2-\eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{D_p}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_p^2-\eta_w^2}} \right)} M_E \quad (3.95)$$

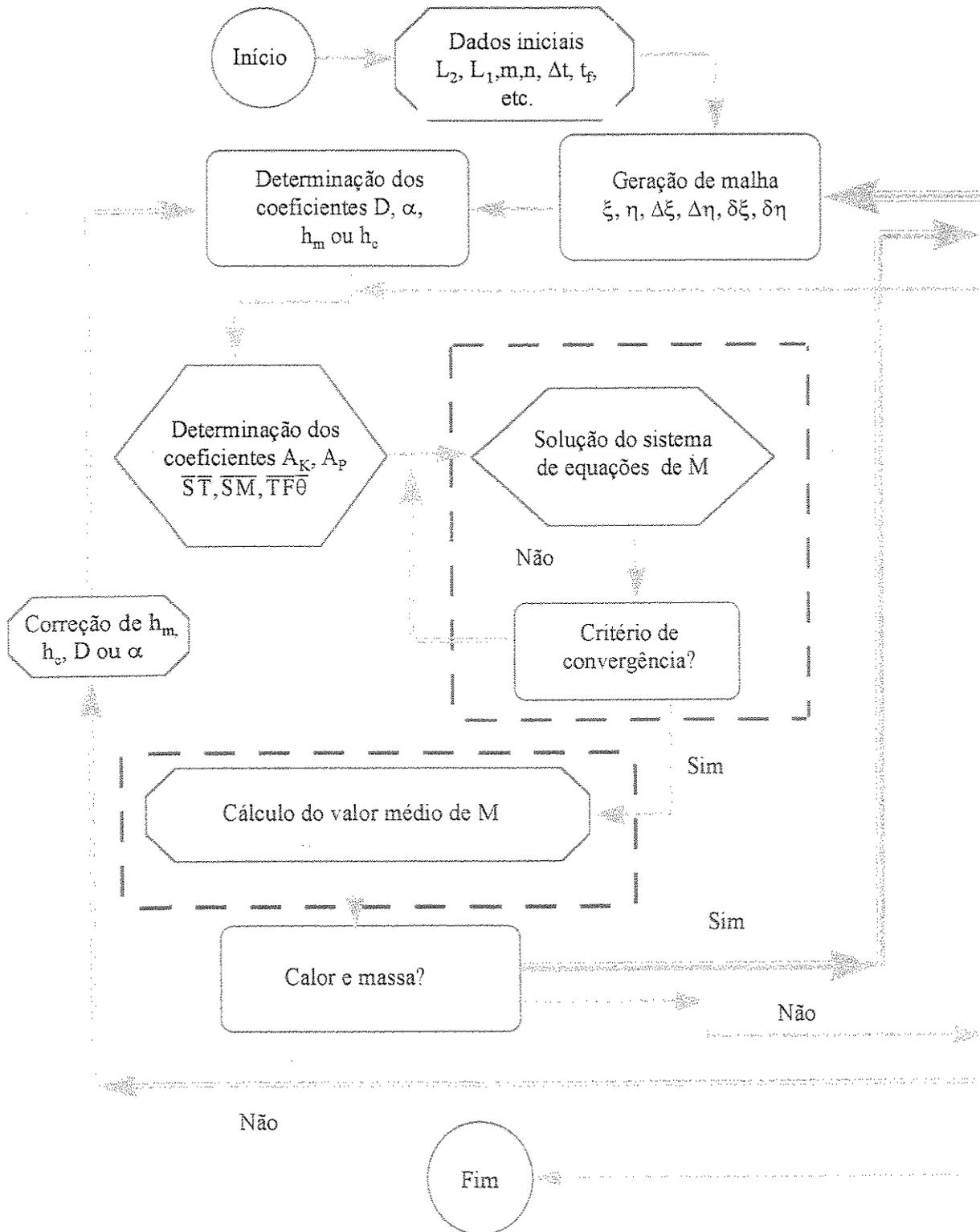
Para coeficiente de difusão constante, tem-se como no caso anterior:

$$M_w^* = \left[1 + \frac{\left(-\frac{1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_p^*)^2-(\eta_e^*)^2}} \right)}{\left(-\frac{1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_p^*)^2-(\eta_w^*)^2}} \right)} \right] M_p^* - \frac{\left(-\frac{1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_p^*)^2-(\eta_e^*)^2}} \right)}{\left(-\frac{1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_p^*)^2-(\eta_w^*)^2}} \right)} M_E^* \quad (3.96)$$

* Para os pontos em $\xi=1$ ($0 < z < L$)

$$\left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_n = \left(-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \Big|_s \quad (3.97)$$

Discretizando e re-arranjando termos:



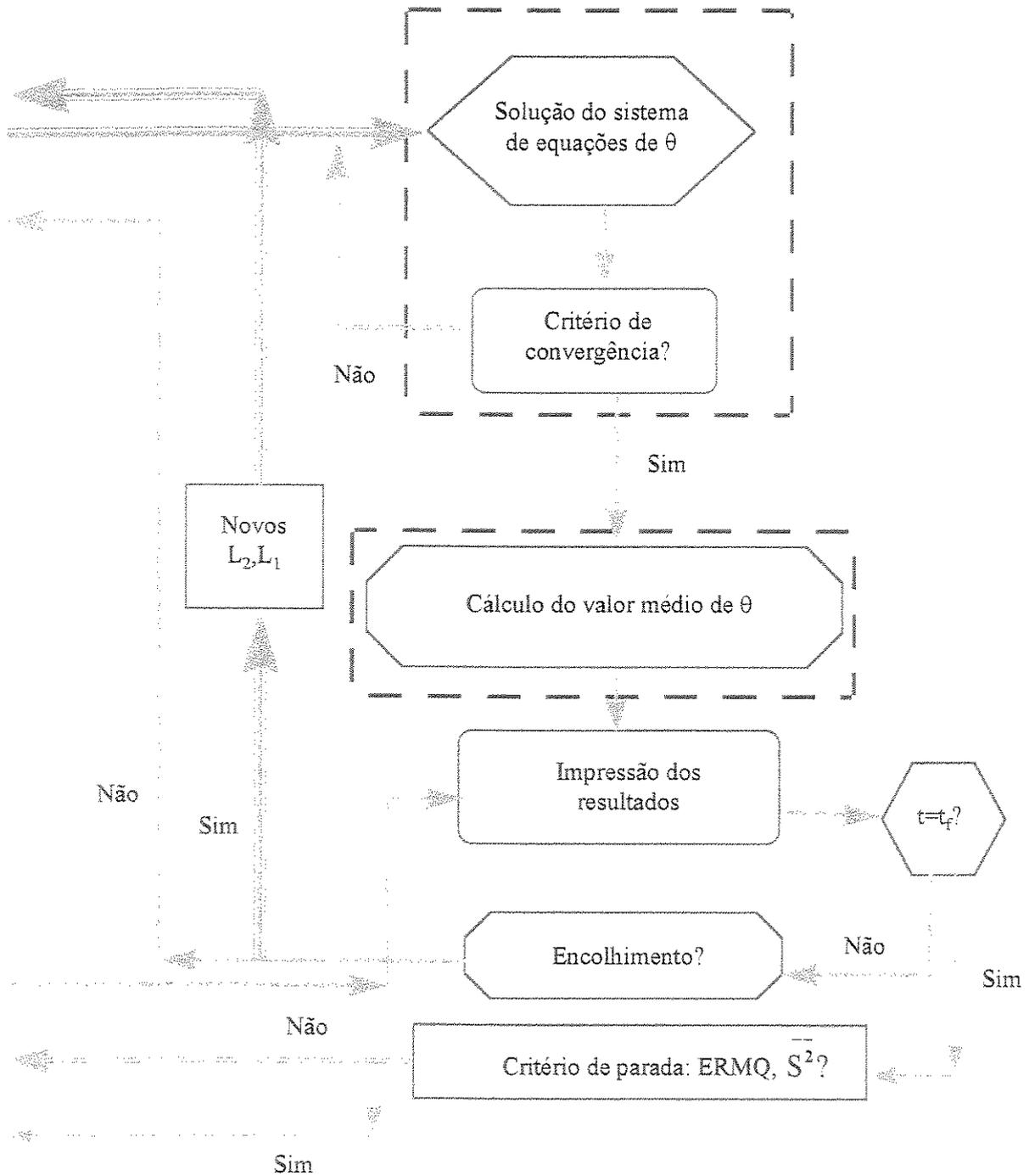


Figura 3.6 - Diagrama de blocos do programa computacional SPHEROIDIFF

Pela substituição das variáveis adimensionais apresentadas na Equação 3.21, obtém-se a Equação 3.81. Similarmente, o teor de umidade médio é dado pela Equação 3.84.

* Formulação numérica

A formulação numérica para os pontos internos (exceto os pontos imediatamente próximos à fronteira do corpo) segue o mesmo procedimento apresentado no modelo I. Para os pontos de fronteira o procedimento é descrito abaixo.

A Equação 3.100 na forma discretizada é:

$$M'' = h_m [M_f - M_s] = \frac{D}{L} \sqrt{\frac{(\xi_f^2 - 1)}{(\xi_f^2 - \eta_p^2)}} (M_p - M_f) \quad (3.103)$$

(I) (II) (III)

Igualando-se os membros (II) e (III), isolando-se M_s e substituindo em (II), tem-se:

$$M'' = \frac{(M_p - M_f)}{\left[\frac{1}{h_m} + \frac{\delta \xi_s L}{D \sqrt{\frac{(\xi_f^2 - 1)}{(\xi_f^2 - \eta_p^2)}}} \right]} \quad (3.104)$$

Substituindo-se a Equação 3.104 na Equação 3.68, utilizando-se das variáveis adimensionais já definidas, eliminando e rearranjando alguns termos do resultado obtido e por fim assumindo que o volume finito tem profundidade unitária, isto é, $\Delta \zeta = 1$, tem-se a equação na sua forma discretizada, dada pela Equação 3.85 anterior, sendo os coeficientes A_E , A_W , A_S e A_P^o iguais aos apresentados como antes e:

$$A_P = \sum A_K + A_P^\circ + \overline{SM} \quad (3.105)$$

onde:

$$\overline{SM} = \frac{\Delta\eta^*}{\frac{1}{\text{Bi}_m \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - 1]}} + \frac{\delta\xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 - 1]}}$$

Sendo assim, as equações referentes a este modelo podem ser reunidas como segue:

$$A_P M_P^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_N M_N^* + A_S M_S^* + A_P^\circ M_P^{*\circ} \quad (3.106)$$

onde A_E , A_W , A_S e A_P° são como no caso anterior, e:

$$A_N = \begin{cases} 0 & \text{p / os pontos de fronteira} \\ \frac{((\xi_n^*)^2 - 1)}{\delta\xi_n^*} \Delta\eta^* & \text{p / os demais pontos internos} \end{cases} \quad A_P = \sum A_K + A_P^\circ + \overline{SM}$$

Sendo:

$$\overline{SM} = \begin{cases} \frac{\Delta\eta^*}{\frac{1}{\text{Bi}_m \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - 1]}} + \frac{\delta\xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 - 1]}} & \text{p / os pontos de fronteira} \\ 0 & \text{p / os demais pontos internos} \end{cases}$$

A quantidade $\bar{S}\bar{M}$ é o termo fonte que contém o teor de umidade na superfície do sólido adicionado aos pontos nodais que precedem a fronteira do mesmo. Somente para estes pontos, os coeficientes A_N são iguais a zero. Para os demais, S é igual a zero e A_N é dado pela expressão apresentada acima. Os métodos de solução deste conjunto de equações e o critério de convergência são idênticos ao utilizado no modelo I, assim como a determinação do teor de umidade médio.

Os pontos de simetria são estimados semelhantemente ao equacionamento apresentado no modelo I. Para os pontos situados na superfície do material, após a discretização da equação de condição de contorno na superfície (Equação 3.102), tem-se, que o teor de umidade nesses pontos pode ser calculado pela expressão:

$$M_f^* = \left(1 + \frac{Bi_m \delta \xi_s}{\sqrt{\frac{\xi_f^{*2} - 1}{(\xi_f^{*2} - \eta_f^{*2})}}} \right)^{-1} M_p^* \quad (3.107)$$

Esta equação não entra no sistema de equações a ser resolvido, servindo apenas para determinar o teor de umidade na superfície, uma vez conhecido o teor de umidade dos pontos de fronteira (ponto P, na Figura 3.4).

Modelo III - Modelo difusional com condição convectiva na superfície e fenômenos simultâneos de transferência de umidade e encolhimento

O encolhimento de materiais sólidos durante a secagem é um fenômeno físico observável, que ocorre simultaneamente com a difusão de umidade, principalmente em produtos biológicos com alto teor de umidade inicial como é o caso de frutas e vegetais. Assim sendo, o encolhimento

pode ter um significativo efeito na difusividade de massa, e conseqüentemente na taxa de remoção de umidade.

A consideração do efeito de encolhimento nos modelos de secagem depende do conhecimento das propriedades relativas ao fenômeno. Há falta de informações na literatura sobre os coeficientes de encolhimento, assim como de relações matemáticas entre a difusividade de massa, encolhimento e densidade. Apesar deste inconveniente, vários trabalhos incluem o efeito de encolhimento volumétrico no estudo do processo de secagem, fornecendo interpretações teóricas sobre o mesmo, (Sokhansanj e Patil, 1996; Misra e Young, 1980). Contudo, relativamente poucas pesquisas têm sido reportadas na literatura sobre estudos do fenômeno de encolhimento em problemas bidimensionais (Fusco et al., 1991; Jomaa e Puiggali, 1991), e tridimensionais (Rovedo et al., 1995).

*** Formulação analítica**

Neste modelo, foram assumidas todas as considerações de a até e, apresentadas no modelo analítico, acrescentando-se que:

- f) o fenômeno ocorre sob condição convectiva na superfície do corpo, com teor de umidade dependente da posição angular e do tempo.
- g) o número de Biot é assumido variável em todo o processo.
- h) o encolhimento durante a secagem, devido a perda de umidade é proporcionalmente linear à variação do teor de umidade médio do sólido;

As condições inicial, de simetria e de contorno para este modelo são as mesmas apresentadas no modelo II. De acordo com o item h listado acima, existe o encolhimento volumétrico, e então o volume do corpo é mudado a cada intervalo de tempo. Normalmente é assumido que o material se contrai linearmente com o teor de umidade. No caso de materiais biológicos, o encolhimento pode ser anisotrópico, modificando a estrutura. Baseando-se nos

trabalhos de Keeey (1992), Queiroz (1994), Queiroz e Nebra (1996) e Sokhansanj e Patil (1996), propõe-se a seguinte equação para a determinação do volume do corpo em qualquer instante:

$$(V)_t = V_o(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2\bar{M}) \quad (3.108)$$

Para a determinação do volume em um certo intervalo de tempo, considere a Figura 3.7.

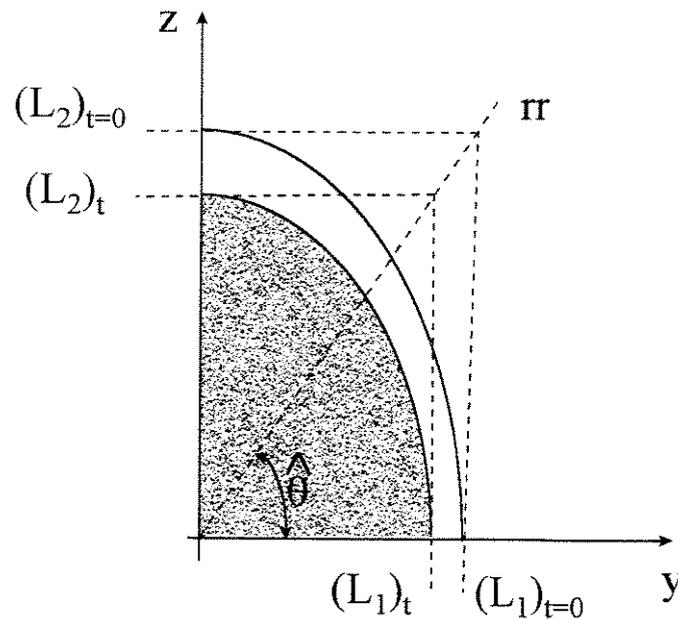


Figura 3.7 - Encolhimento do sólido esférico prolatado durante o processo de difusão

Desde que, em $t=0$, $\bar{M} = \bar{M}_o$ e $(V)_t = V_o$, tem-se por substituição direta na Equação 3.108, que:

$$\bar{\beta}_1 = (1 - \bar{\beta}_2\bar{M}_o) \quad (3.109)$$

Então a Equação 3.108, pode ser reescrita na forma:

$$\frac{(V)_t}{V_o} = 1 - \bar{\beta}_2(\bar{M}_o - \bar{M}) \quad (3.110)$$

ou ainda na forma adimensional, usando os parâmetros adimensionais já definidos no modelo I:

$$\frac{(V)_t^*}{V_o^*} = 1 - \bar{\beta}(\bar{M}_o^* - \bar{M}^*) \quad (3.111)$$

com $\bar{\beta} = \beta_2(\bar{M}_o - \bar{M}_e)$.

Assim, conhecendo-se o valor do parâmetro $\bar{\beta}$, determina-se o novo volume do corpo em qualquer instante do processo. $\bar{\beta}$ deve ser positivo e finito, sendo seu intervalo de valores:

$$0 \leq \bar{\beta} < 1 \quad (3.112)$$

onde $\bar{\beta}=0$ significa não- encolhimento.

O significado físico do coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}$ está associado com a variação máxima de volume sofrida por um sólido durante o fenômeno de difusão. Assim, por exemplo, se seu valor for 0,30, significa que o volume do corpo ao final do processo, quando este atinge seu teor de umidade de equilíbrio, será exatamente 70% do seu valor inicial.

Para a determinação de $\bar{\beta}$ pode ser adotado o critério de que a variação de volume sofrida pelo corpo é igual ao volume da água evaporada até esse instante. Em adição, se o teor de umidade é dado base seca e sabendo-se que a variação de volume sofrida pelo corpo é igual a massa de água evaporada dividida pela densidade da água, pode ser mostrado que:

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\left(\frac{m_s}{V_o}\right)}{\rho_w} \quad (3.113)$$

ou ainda:

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\rho_{so}}{\rho_w} \quad (3.114)$$

onde $\rho_{so} = m_s/V_o$, pode ser considerada como uma densidade aparente da fase sólida no início do processo.

Assumiu-se que o encolhimento é isotrópico e que a taxa de variação de L_1 relaciona-se à taxa de variação de L_2 , de tal forma que a relação L_2/L_1 permanece constante durante todo o processo. Assim, o coeficiente angular da reta apresentada na Figura 3.7 é constante em cada instante de tempo. Isto é:

$$\text{Tg}\hat{\theta} = (L_2/L_1)_t = \text{cte.} \quad (3.115)$$

Por outro lado, conhecendo-se o volume de um elipsóide:

$$(V)_t = \frac{4}{3}\pi(L_2)_t(L_1)_t^2 \quad (3.116)$$

e usando a Equação 3.115, pode-se determinar as dimensões do corpo em qualquer instante do processo.

A área superficial do esferóide prolato ($L_2 > L_1$) é dada por (Pólya e Szegő, 1945):

$$(S)_t = 2\pi(L_1)_t(L_2)_t \left\{ \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} + \frac{\arcsen \left[\sqrt{1 - \left(\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right)^2} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right)^2}} \right\} \quad (3.117)$$

* Formulação numérica

Toda a formulação numérica segue procedimento idêntico ao relatado para os modelos I (condição de equilíbrio na superfície) e II (condição convectiva na superfície), inclusive os critérios de convergência.

Modelo IV - Modelo difusional com condição convectiva na superfície e fenômenos simultâneos de transferência de calor e massa.

* Formulação analítica

Um grande número de pesquisadores tem estudado o processo de difusão e desenvolvido modelos computacionais para prever o teor de umidade e temperatura dentro do material em qualquer tempo. Não há uma análise global nas limitações dos diferentes tipos de modelos ou equações, contudo considerações tem sido adotadas para verificar o efeito da temperatura durante o processo de difusão. No modelo IV, foram assumidas as considerações: a até e, propostas no modelo analítico; f, proposta para o modelo II, acrescentando-se:

- g) a distribuição de temperatura inicialmente é uniforme e simétrica em torno do eixo z , durante o processo;
- h) a transferência de calor dentro da partícula é por condução e na superfície do material é por convecção;

O modelo para transferência de massa é idêntico ao apresentado para o modelo II, inclusive as condições de contorno e os parâmetros adimensionais. Portanto, o mesmo é composto pelas Equações 3.81, 3.82 (exceto a condição na superfície do sólido), 3.84 e 3.106.

A equação de conservação de energia é dada pela Equação 3.21, trocando-se D por α , a difusividade térmica do material, e M por θ , a temperatura do sólido. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.118)$$

com $\alpha = k / (\rho c_p)$. Nesta formulação assumiu-se ρ e c_p constantes.

As condições iniciais e de contorno, para o referido modelo são as seguintes:

- Superfície livre: o fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo do calor na superfície do sólido, adicionadas a energia necessária para evaporar a água e a energia necessária para aquecer o vapor de água produzido na evaporação.

$$-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = h_c [\theta_\infty - \theta(\xi = \xi_f, \eta, t)] + \frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} [h_{fg} + c_v (\theta_\infty - \theta_f)] \quad (3.119)$$

com $\xi_f = L_2/L$ na superfície do sólido.

- Planos de simetria: os gradientes angulares e radial da temperatura são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial \theta(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \theta(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial \theta(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.120)$$

- Condição inicial de temperatura no interior do sólido:

$$\theta(\xi; \eta; 0) = \theta_o = \text{cte} \quad (3.121)$$

Para generalizar os resultados, alguns novos parâmetros adimensionais foram definidos. São eles:

$$\theta^* = \frac{\theta_\infty - \theta}{\theta_\infty - \theta_o} \quad t_c^* = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{Bi}_c = \frac{h_c L}{k} \quad (3.122)$$

O número de Biot de transferência de calor é definido como sendo a razão de difusão de calor no sólido e a taxa de acúmulo de energia no mesmo.

Desta forma, a Equação 3.118, pode ser escrita por:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t_c^*} = \frac{1}{(\xi^{*2} - \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left((\xi^{*2} - 1) \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi^*} \right) \right] + \frac{1}{(\xi^{*2} - \eta^{*2})} \left[\frac{\partial}{\partial \eta^*} \left((1 - \eta^{*2}) \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta^*} \right) \right] \quad (3.123)$$

onde t_c^* é o número de Fourier (de transferência de calor).

Sendo assim, baseando-se nas variáveis adimensionais, as condições inicial, de simetria e de fronteira para a Equação 3.123 são:

$$\theta^*(\xi^*; \eta^*; 0) = 1 \quad \frac{\partial \theta^*(\xi^*; 1; t_c^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta^*(\xi^*; 0; t_c^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta^*(1; \eta^*; t_c^*)}{\partial \xi^*} = 0 \quad (3.124)$$

$$-\frac{1}{Bi_c} \sqrt{\frac{(\xi^{*2} - 1)}{(\xi^{*2} - \eta^{*2})}} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi^*} \right|_{\xi=\xi_f} = \theta_f^* + \frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_o)} + c_v \theta_f^* \right] \quad (3.125)$$

A temperatura média do sólido é determinada a partir da Equação 3.84, trocando-se M por θ .

* Formulação numérica

A formulação numérica para transferência de calor e massa, segue o mesmo procedimento apresentado no modelo II. Para transferência de energia, o seguinte conjunto de equações adimensionais pode ser obtido:

- **Pontos internos**

$$A_p \theta_p^* = A_E \theta_E^* + A_W \theta_W^* + A_S \theta_S^* + A_p^\circ \theta_p^{*\circ} + \overline{TF\theta} \quad (3.126)$$

onde A_E , A_W , A_S , A_N e A_p° são como antes, e:

$$A_p = \sum A_K + A_p^\circ + \overline{ST} \quad (3.127)$$

com $\overline{TF\theta} = 0$ e $\overline{ST} = 0$.

- **Pontos de fronteira**

Se aplica a Equação 3.126 fornecida acima com todos os coeficientes A_E , A_W e A_S iguais, sendo que desta feita, $A_N=0$ e:

$$\overline{ST} = \frac{\Delta \eta^*}{\left[\frac{1}{\text{Bi}_c \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - 1]}} + \frac{\delta \xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 - 1]} \right]} \quad (3.128)$$

$$\overline{TF\theta} = \frac{-\frac{\rho_s V}{S} \frac{\partial \overline{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_o)} + c_v \theta_f^* \right] \frac{\Delta \eta^*}{h_c}}{\left[\frac{1}{\text{Bi}_c \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - (\eta_p^*)^2]} \sqrt{[(\xi_f^*)^2 - 1]}} + \frac{\delta \xi_n^*}{[(\xi_f^*)^2 - 1]} \right]}$$

com:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = (M_o - M_e) \frac{(\bar{M}^* - \bar{M}^{*o})}{\Delta t} \quad (3.129)$$

A temperatura dos pontos de simetria é dada pelas Equações 3.91-3.99, substituindo-se M^* por θ^* . Procedendo-se semelhantemente ao modelo II, a temperatura nos pontos situados na superfície do sólido é determinada, segundo:

$$\theta_f^* = \frac{\frac{1}{Bi_c \delta \xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} - 1}{(\xi_f^{*2} - \eta_f^{*2})}}}{\left(1 + \frac{1}{Bi_c \delta \xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} - 1}{(\xi_f^{*2} - \eta_f^{*2})}}\right)} \theta_p^* - \frac{\left\{ \frac{\rho_s V}{h_c S} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \left[\frac{h_{fg}}{(\theta_\infty - \theta_o)} + c_v \theta_f^{*o} \right] \right\}}{\left(1 + \frac{1}{Bi_c \delta \xi_n^*} \sqrt{\frac{\xi_f^{*2} - 1}{(\xi_f^{*2} - \eta_f^{*2})}}\right)} \quad (3.130)$$

Estes pontos não são pontos reais, e portanto, esta equação não entra no sistema de equações para ser resolvida, servindo apenas para determinar a temperatura na superfície, uma vez conhecido a temperatura dos pontos de fronteira (ponto P, na Figura 3.4).

* Número de Nusselt para corpos esferoidais

Muitos pesquisadores têm estudado o escoamento de fluido sobre corpos esferoidais, contudo, pouquíssimos trabalhos são dedicados à determinação do coeficiente de transferência de calor ou massa na superfície do sólido. Raithby et al. (1976) estudando a transferência de calor de esferóides isotérmicos para convecção natural, fornece equações de correlação para determinação do número de Nusselt médio, que são válidas para uma extensa variação de excentricidade e para qualquer número de Rayleigh. Para esferóide prolato a seguinte correlação é reportada:

$$\begin{aligned}
 (\overline{\text{Nu}})^{\hat{m}} = & \left[\frac{4\sqrt{1 - \left(\frac{2L_1}{2L_2}\right)^2}}{\bar{f}_1 \left(\frac{2L_1}{2L_2}\right) \ln \left[\tanh \left(0,25 \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2L_1}{2L_2}\right)}{1 - \left(\frac{2L_1}{2L_2}\right)} \right] \right) \right]} + \bar{C}_1 \bar{C}_L \text{Ra}^{1/4} \right]^{\hat{m}} + \\
 & + [\bar{C}_1 \text{Ra}^{1/3}]^{\hat{m}} \quad (3.131)
 \end{aligned}$$

Os valores das constantes da Equação 3.131, que são dados pela referência citada, também podem ser encontradas em Raithby e Hollands (1985).

Sehlin (1969), citado por Masliyah e Epstein (1972) apresenta uma solução das equações da camada limite para altos números de Peclet e número de Reynolds tendendo para zero (“creeping flow”), para escoamento axisimétrico relativos a esferóides prolato e oblato. A equação para determinação do número de Nusselt (ou Sherwood) é a seguinte:

$$\overline{\text{Nu}} = 0,991 \bar{k} \text{Pe}^{1/3} \quad (3.132)$$

O fator de correção \bar{k} foi tabelado pelo autor referenciado para várias razões de aspecto dos esferóides. Valores desta constante também são fornecidos por Clift et al. (1978). Nesta equação, o comprimento característico é o diâmetro equatorial ($2L_1$).

Para altos números de Reynolds, Pasternak e Gauvin (1960) propuseram um comprimento característico L' dado pela relação entre a área da superfície da partícula e o perímetro da máxima área projetada perpendicular ao escoamento. Sendo assim, a Equação 3.132 pode ser usada e assume a forma:

$$\bar{Nu} = 0,991\bar{k}(Pe')^{1/3} \quad (3.133)$$

Valores de \bar{k} são dados graficamente em Clift et al. (1978). Outros dados para número de Nusselt e Sherwood para esferóides prolato e oblato têm sido apresentados por Masliyah e Epstein (1972) para $Re < 100,0$. Os autores apresentam correlações aproximadas para a determinação do número de Nusselt médio, bem como o comportamento do Nusselt ao longo da superfície do esferóide, na forma gráfica. Alguns resultados deste trabalho podem também ser obtidos em Clift et al. (1978).

Como pode ser constatado, o número de correlações para determinação do coeficiente de transporte na superfície do sólido é muito pequeno, além disso limitada para pequenos números de Reynolds e determinadas a partir de estudos para produtos não-biológicos. Como o coeficiente de transferência de calor e/ou massa é dependente da rugosidade da superfície, características dimensionais do sólido e velocidade e condições termodinâmicas do ar na camada limite que o envolve, erros significativos podem ser obtidos ao usar-se estas correlações para estudo dos fenômenos de transferência em produtos biológicos.

É conhecido que a analogia entre a transferência de calor e massa não funciona bem no caso de produtos biológicos, ainda assim, alguns pesquisadores utilizam-se dela no estudo dos fenômenos de difusão de massa, outros, na sua grande maioria, preferem obter o coeficiente de transferência de massa a partir do ajuste do modelo matemático usado aos dados experimentais. Considerando que freqüentemente esta última tem apresentado melhores ajustes, a mesma foi adotada neste trabalho.

Modelo V - Modelo difusional de têmpera.

Durante o período de taxa decrescente, a taxa de secagem diminui em virtude do decréscimo do teor de umidade dentro do sólido, e portanto o aquecimento contínuo tem pequeno efeito na remo o de umidade. Desta forma, uma eficiente utiliza o de energia no processo de secagem

neste período é muito importante e deve ser estudada cuidadosamente. Várias técnicas de secagem são utilizadas por pesquisadores para racionalizar o uso da energia na secagem de sólidos, bem como reduzir os problemas produzidos em vários produtos por aquecimento em altas temperaturas, especialmente em produtos biológicos. Tais problemas podem ser, por exemplo, problemas de germinabilidade, vigor e fissuras. Uma das técnicas bastante utilizada é a secagem intermitente, que tem sido usada extensivamente na secagem de grãos de cereais, (Brooker et al., 1974 e Hall, 1980).

O processo de têmpera tem como objetivo uniformizar o teor de umidade dentro do sólido, por migração de umidade. Numerosos pesquisadores tem estudado o processo de têmpera. O efeito do tempo de têmpera na quantidade de umidade removida de milho foi estudado por Sabbah et al. (1972) e Tolaba et al. (1997), e de arroz por Steffe et al. (1979), Walker e Bakker-Arkema (1981) e Elbert et al. (1997).

O conhecimento do tempo ótimo de têmpera é muito importante, principalmente, devido à vantagem na redução do uso da energia na secagem e na melhor qualidade do produto ao final do processo. De acordo com Steffe e Singh (1980b), se o tempo de têmpera for muito curto, podem ocorrer fissuras, rachaduras ou trincas dentro do grão, e isto afetará a qualidade do mesmo. Isto ocorre, principalmente, devido a gradientes de umidade e tensões térmicas geradas a partir de gradientes de temperatura. Apesar deste inconveniente, existem muitas vantagens no uso de tempo de têmpera curto, tais como: minimizar danos produzidos por variações químicas e ações de insetos e microorganismos; aumento da capacidade de secagem e aumento da flexibilidade do secador, em virtude do decréscimo do tempo de secagem.

A secagem intermitente é baseada em análise empírica e poucos trabalhos são publicados, em comparação à grande variedade de produtos biológicos que podem utiliza-la, (Singh et al., 1980; Zhang e Litchfield, 1991). Utilizando-se de análise numérica é possível descrever o processo de secagem intermitente sob determinadas condições de contorno, (Steffe e Singh, 1980b; Zhang e Mujumdar, 1992; Franca et al., 1994; Tolaba et al., 1997).

* Formulação analítica

Durante o período de têmpera, o perfil do teor de umidade dentro do sólido no fim do período de secagem contínua deve ser uniformizado. O tempo necessário para que esta condição seja alcançada é o tempo de têmpera. Uma das formas de calculá-lo é impor a condição de que a superfície do sólido seja impermeável. A consideração de uma superfície impermeável gera a necessidade do desenvolvimento de um modelo matemático para descrever a difusão de umidade no interior do sólido. Idealmente, na têmpera o material pode ser considerado como um sistema isolado, sem perda de umidade e nem calor. Na prática, existe pequena perda de umidade do sólido, mas ela foi considerada desprezível. Assim, sob estas condições, a variação do teor de umidade médio do sólido durante o período de repouso é desprezível, e são aceitas variações na distribuição do teor de umidade dentro do mesmo.

O modelo matemático que descreve o processo de têmpera é baseado na consideração de que a difusão é o único mecanismo de migração de umidade. É dado pela Equação 3.21, com as seguintes condições inicial e de contorno:

$$\frac{\partial M(L_2 / L; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.134)$$

$$M(\xi; \eta; 0) = f(\xi; \eta) \quad (3.135)$$

A função $f(\xi, \eta)$ no início do período de têmpera corresponde ao perfil do teor de umidade no sólido no final do período de secagem contínua, fornecido por qualquer dos modelos já apresentados. Esta função não é uniforme dentro do sólido, mas é uma função das coordenadas esferoidais radial e angular.

A consideração de que a superfície é impermeável à migração de umidade durante a têmpera implica em considerar desprezível a quantidade de umidade perdida pelo sólido. Então pode-se escrever que a taxa de variação do teor de umidade médio do sólido é zero, e portanto, a taxa de

armazenagem do teor de umidade deve ser igual à variação do teor de umidade dentro do sólido, ao longo da têmpera. Em outras palavras, a umidade que migra do centro do sólido para sua superfície, é armazenada nessa região. Matematicamente, pode-se escrever isto na forma:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_p dV = \frac{D}{L} \left(\sqrt{\frac{\xi_s^2 - 1}{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_s dS_\xi \quad (3.136)$$

onde dV e dS_ξ são o volume e a área de fluxo de massa de um elemento infinitesimal, no sistema de coordenadas esferoidais prolato, respectivamente. Substituindo os valores de dV e dS_ξ , na Equa o 3.136, tem-se:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_p \Delta\eta(\xi_p^2 - \eta_p^2) = \frac{D}{L^2} (\xi_s^2 - 1) \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_s \quad (3.137)$$

válida para os pontos imediatamente próximos   superfície do corpo (volumes de fronteira), de acordo com a Figura 3.8. Para os pontos internos foi utilizada a mesma formula o dada para os modelos anteriores.

Utilizando os parâmetros adimensionais definidos anteriormente para os modelos I e II, as Equa es 3.134, 3.135 e 3.137 podem ser escritas como:

$$\frac{\partial M^*(L_2/L; \eta^*; t_m^*)}{\partial \xi^*} = 0 \text{ (na superfície)} \quad (3.138)$$

$$M^*(\xi^*; \eta^*; 0) = f^*(\xi^*; \eta^*) \quad (3.139)$$

$$\left(\frac{\partial M^*}{\partial t^*}\right)_p \Delta\eta^*(\xi_p^{*2} - \eta_p^{*2}) = (\xi_s^{*2} - 1) \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \Big|_s \quad (3.140)$$

$$\Phi_s = \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{m-3} \left[(M^{*0} - M^*)_{i,j} \Delta V_{i,j} \right]}{\sum_{i=2}^{n-1} \Delta V_{i,m-3}} + M_{i,m-3}^*$$

Em todos os cálculos utilizaram-se os mesmos critérios de convergência e tipo de malha já apresentados para o modelo I. Contudo, para determinar o Fourier de têmpera sob a condição que a distribuição do teor de umidade seja uniforme dentro do sólido, foi necessário assumir um critério de parada, que é dependente da precisão requerida no modelo. Neste trabalho foi assumido $|M^{*0} - M^*| \leq 10^{-7}$ em todos os pontos nodais.

Modelo VI - Modelo difusional com condição convectiva na superfície, propriedades variáveis e fenômenos simultâneos de transferência de calor, massa e encolhimento.

Este modelo é uma fusão de todos os modelos estudados acrescentando-se o fato de que as propriedades do sólido são consideradas variáveis com temperatura, teor de umidade, etc. Engloba os fenômenos mais importantes (no nível deste trabalho) que podem afetar os desvios relativos existentes entre os valores experimentais e teóricos obtidos, tornando-o assim o modelo mais completo dentre todos os modelos considerados neste trabalho, e portanto mais realista fisicamente, que proporciona valores mais confiáveis.

As equações que compõem este modelo são as Equações 3.21, 3.22, 3.31-3.35 e 3.65, e as Equações 3.71, 3.73, 3.76, 3.78, 3.87 e 3.110, para o caso bidimensional. A geração de malha, método de solução iterativa, critérios de convergência e determinação dos pontos de simetria são obtidos similarmente aos outros modelos.

3.3 - Aplicação da modelagem a dados experimentais de secagem de banana

Tendo por objetivo avaliar os modelos apresentados para materiais com alto teor de umidade, deformáveis durante a secagem e onde o efeito da temperatura está presente em todo o processo, os mesmos foram usados para simular a cinética de secagem de bananas Musa acuminata, subgrupo Cavendish, variedade nanicão. Os dados experimentais do teor de umidade, temperatura e encolhimento foram determinados por Queiroz (1994).

Em virtude do grande volume de dados obtidos experimentalmente, e da modelagem matemática adotada, Queiroz (1994) apresenta em seu trabalho apenas dados do teor de umidade e variações dimensionais na direção radial da banana, durante a secagem. Os dados da temperatura no centro da banana e correspondente procedimento experimental são posteriormente apresentados por Pérez (1998). Nos casos estudados, o produto foi tratado como um cilindro infinito.

A Tabela 3.1 apresenta as condições de secagem, bem como dados da umidade de equilíbrio, dimensões iniciais da banana e tempo total de secagem, para cada um dos experimentos realizados, de acordo com Queiroz (1994), exceto o comprimento L_2 que foi calculado.

Particularmente com relação ao encolhimento da banana, dados experimentais na direção axial não foram ainda publicados. Neste caso, gentilmente cedidos pela Prof. Dra. Marlene Rita de Queiroz, estes dados são apresentados na Tabela 3.2.

A metodologia experimental para estudo do encolhimento utilizada por Queiroz (1994) é descrita a seguir. As bananas inteiras, no total de 6, foram descascadas e colocadas em uma estufa com circulação forçada de ar à 70°C. Em intervalos de tempo pré-estabelecidos, foram realizadas medidas de massa, de dois diâmetros perpendiculares e do comprimento, de cada amostra.

Tabela 3.1 - Parâmetros experimentais do ar e da banana para cada teste de secagem realizado

T e s t e	Ar			Banana						t (h)	
	T _a (°C)	UR (%)	v (m/s)	M _o (b.s.)	M _f (b.s.)	M _e (b.s.)	θ _o (°C)	θ _f (°C)	L ₂ (m)		L ₁ (m)
1	29,9	35,7	0,38	3,43	0,32	0,1428	19,1	29,7	0,05856	0,01613	121,85
2	39,9	19,3	0,33	3,17	0,33	0,0664	21,0	38,9	0,05878	0,01569	72,00
3	49,9	19,2	0,37	3,21	0,32	0,0579	20,3	47,1	0,05901	0,01522	40,80
4	60,2	19,9	0,36	2,96	0,25	0,0426	30,6	57,5	0,05897	0,01530	35,3
5	60,5	10,7	0,35	3,04	0,31	0,0211	23,4	57,0	0,05909	0,01506	27,80
6	68,4	7,3	0,39	2,95	0,22	0,0121	25,3	64,2	0,05890	0,01545	27,60

Para a leitura da massa da banana, utilizou-se uma balança analítica. As leituras das dimensões radiais das amostras foram realizadas em paquímetro vertical e horizontal, enquanto que as dimensões do comprimento externo da banana (curvatura maior de uma ponta a outra), foram obtidas indiretamente utilizando-se de fio de cobre flexível, para acompanhar a curvatura. Com esta última medida determinou-se seu valor numérico (\hat{C}) utilizando uma régua milimetrada.

O comprimento L_2 constante na Tabela 3.2, foi determinado indiretamente, a partir do comprimento \hat{C} , utilizando a seguinte equação:

$$\frac{\hat{C}}{2} = L_2 \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \frac{\tilde{x}^2}{(1 - \tilde{x}^2)}} d\tilde{x} \quad (3.142)$$

onde \tilde{x} é uma variável auxiliar igual a z/L_2 . Esta determinação se deu por aproximação do valor de L_2 , através de sucessivas tentativas até que a igualdade fosse satisfeita.

Tabela 3.2 - Dados de encolhimento da banana durante a secagem

t (h)	d ₁ (m)	d ₂ (m)	\bar{C} (m)	$\bar{d} = 2L_1$ (m)*	L ₂ (m)*	M* (d.b.)
0	0,03134	0,03088	0,12700	0,03111	0,05900	3,1599
1	0,03024	0,02888	0,12500	0,02956	0,05800	2,6018
2	0,02972	0,02762	0,12200	0,02867	0,05700	2,5409
3	0,02898	0,02638	0,11600	0,02768	0,05400	2,2879
4	0,02792	0,02620	0,11400	0,02706	0,05300	2,0923
5	0,02740	0,02442	0,11400	0,02591	0,05300	1,9354
6	0,02612	0,02394	0,11300	0,02503	0,05300	1,7735
7	0,02518	0,02332	0,11300	0,02425	0,05300	1,6254
23	0,01932	0,01744	0,10200	0,01838	0,04900	0,4580
24	0,01904	0,01766	0,10200	0,01835	0,04900	0,4380
25	0,01868	0,01728	0,10200	0,01798	0,04900	0,4193
26	0,01872	0,01706	0,10200	0,01789	0,04900	0,4029
28	0,01764	0,01644	0,10200	0,01704	0,04900	0,3678
30	0,01832	0,01636	0,10200	0,01734	0,04900	0,3365

* Calculados

A Equação 3.142 foi deduzida, partindo de equações de comprimento de arco e da curva elíptica, (Provenza, 1989) e foi resolvida por um programa computacional implementado no Software Mathematica®.

A partir dos dados de L₁ e L₂ constantes na Tabela 3.2, calculou-se o volume do corpo em cada instante de tempo, e fez-se um ajuste linear da Equação 3.116 a estes dados. Utilizou-se para isto o Software Statistica e o método simplex e quasi-Newton, com critério de convergência 0,0001, que possibilitou a determinação do coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}_2$. Posteriormente, com o conhecimento deste coeficiente e dos teores de umidade inicial e de equilíbrio, determinou-se o coeficiente de encolhimento adimensional $\bar{\beta}$, em cada teste experimental.

Vale salientar que, como não se dispunha de dados do comprimento externo da banana (\bar{C}) nas condições reais de cada experimento de secagem constantes na Tabela 3.1, assumiu-se que em todos os experimentos este comprimento foi constante e igual ao valor determinado experimentalmente no início dos testes de encolhimento ($t=0$ h) e que consta na Tabela 3.2 .

Com respeito aos dados do teor de umidade ao longo do processo de secagem, é conhecido que no período inicial da secagem, os gradientes de umidade são mais elevados, requerendo do pesquisador a leitura destes dados em intervalos de tempo menores, podendo ser ampliado, à medida que o processo vai se desenvolvendo. Semelhante procedimento foi adotado por Queiroz (1994). Sob o aspecto físico, esta metodologia é extremamente satisfatória, em virtude de possibilitar a descrição do fenômeno com grande precisão. Contudo, sob o aspecto de tratamento estatístico dos dados não é satisfatório, tendo em vista que uma grande densidade de pontos ocorre nos tempos iniciais em comparação à que existe para tempos maiores. É estatisticamente mais adequado realizar o ajuste de parâmetros a partir de uma distribuição uniforme de pontos ao longo do processo; desta forma, propõe-se um ajuste destes dados experimentais a uma equação exponencial a 3 termos e 6 parâmetros. A equação tem a forma:

$$M^* = A_1 \exp(-K_1 t) + A_2 \exp(-K_2 t) + A_3 \exp(-K_3 t) \quad (3.143)$$

onde t é dado em horas. A estimação não-linear dos parâmetros da Equação 3.143 foi realizada utilizando o Software Statistica e o método numérico de Rosembrock e quasi-Newton, para todos os testes, com critério de convergência de 0,001. A escolha da forma desta equação foi baseada nos trabalhos de Lima (1995), Lima e Mata (1996) e Lima et al. (1998), onde verificaram que equações exponenciais com maior número de termos se ajustam muito bem aos dados experimentais.

Com a equação ajustada, estabeleceram-se instantes de “tomada de dados” ao longo do processo em que o teor de umidade médio pudesse ser determinado, de forma que a distribuição destes pontos ficasse aproximadamente uniforme. Posteriormente, estas equações foram utilizadas

no programa computacional SPHEROIDIFF, para ajustar os coeficientes de difusão efetivo e convectivo de transferência de massa para banana.

Semelhante procedimento foi adotado para a temperatura no centro da banana. Neste caso, baseando-se nos trabalhos de Azzouz et al. (1996) e Pérez (1998), propõe-se uma equação parabólica a quatro parâmetros, para a temperatura no centro da banana em função do tempo de secagem. A equação é a seguinte:

$$\theta = A_1 + A_2 \log_{10}(t^{K_1} + A_3) \quad (3.144)$$

onde t é dado em horas. Neste caso, para os testes 1, 2 e 3, o método de estimação de parâmetros foi o de Rosembrock e quasi-Newton, para os testes 4, 5 e 6, o método de Hooke-Jeeves e quasi-Newton. A opção de modificar a equação proposta por Azzouz et al. (1996) e Pérez (1998), se deu em decorrência do melhor ajuste da Equação 3.144 aos dados experimentais, em comparação ao obtido com a equação proposta pelos autores referenciados, particularmente, para os tempos iniciais e finais de secagem. Similarmente ao caso de difusão de massa, esta equação aplicada a cada experimento, foi utilizada no programa computacional SPHEROIDIFF, para ajustar os coeficientes de difusão térmica e de transferência de calor para banana.

Os desvios entre os valores experimentais e calculados e a variância foram calculados como segue:

$$\text{ERMQ} = \sum_{i=1}^n (\Phi_{i,\text{Num}}^* - \Phi_{i,\text{Exp}}^*)^2 \quad (3.145)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\text{ERMQ}}{(n - \hat{n})} \quad (3.146)$$

onde n é o número de pontos experimentais e \hat{n} o número de parâmetros ajustados (número de graus de liberdade), (Figliola e Beasley, 1995).

Os menores valores de ERMQ e \bar{S}^2 obtidos durante a comparação foram usados para obter os melhores valores dos coeficientes de difusão D e α , e os coeficientes de transferência de massa h_m , e de calor h_c na superfície do sólido. No caso da estimativa de D e h_m , Φ foi substituído por M^* , enquanto que para estimar α e h_c , Φ foi substituído pela temperatura (θ) no centro do produto. Neste ajuste, $\hat{n}=1$ para o modelo I e $\hat{n}=2$ para os demais modelos.

Tendo sido determinados os coeficientes de transporte difusivo de massa, os mesmos foram ajustados a uma equação exponencial.

Para os modelos em que as propriedades foram consideradas constantes (modelos I, II e III), foi assumido que o coeficiente de difusão de massa é uma função da temperatura do ar de secagem. A equação matemática para sua determinação é dada a seguir:

$$D(\theta) = A_1 \exp\left(\frac{A_2}{\theta_{abs}}\right) \quad (3.147)$$

Para o ajuste do coeficiente de difusão, usando a Equação 3.147, utilizou-se do Software Statistica e o método de estimação de parâmetros de Hooke-Jeeves e quasi-Newton, com critério de convergência de 0,001.

A solução numérica da equação de difusão de calor requer o conhecimento prévio de algumas propriedades físicas e térmicas da banana e do ar de secagem. No modelo IV foi usada a densidade de $\rho_b=980 \text{ kg/m}^3$ para a banana, reportada na Tabela 2.8. Assumiu-se que o calor latente de vaporização do produto, assim como o calor específico do vapor, tem o mesmo valor que o da água livre, na temperatura e umidade relativa do ar de secagem. Os valores destas propriedades são reportadas na Tabela 3.3, para cada teste de secagem. Os valores destas propriedades foram obtidas a partir do uso do programa computacional DryPak.

As propriedades difusionais de massa (D e h_m) utilizadas no modelo que considera os fenômenos acoplados foram aquelas obtidas com o uso do modelo II que considera somente difusão de massa.

Chegou-se à conclusão que o modelo IV não era adequado para descrever o aquecimento do sólido durante a secagem. Isto conduziu o autor a sugerir um novo modelo que pudesse prever fenômenos de encolhimento e propriedades variáveis, surgindo então, desta forma, o modelo VI.

Para o modelo VI, foram usadas as propriedades de massa (D e h_m) obtidas a partir do modelo III, aplicado à secagem de banana. A densidade em cada instante de secagem foi obtida a partir da Equação 2.36, enquanto que o calor específico e condutividade térmica foram calculados por (Sweat, 1995):

$$c_p = 0,837 + 3,349\bar{M} \quad \text{e} \quad k = 0,148 + 0,493\bar{M} \quad (3.148)$$

com o teor de umidade médio decimal em base úmida. Vale salientar que estas equações não são aplicadas apenas para banana, mas sim para frutas em geral. Elas foram obtidas pela correlação entre o calor específico e condutividade térmica de várias frutas e o seus respectivos teores de umidade.

Tabela 3.3 - Calor latente de vaporização da água livre e calor específico do vapor de água para cada condição de secagem de banana

Teste	h_{fg} (kJ/kg)	c_v (kJ/kgK)
1	2430,75	1,9023
2	2407,18	1,9050
3	2383,14	1,9079
4	2357,85	1,9110
5	2357,10	1,9111
6	2337,31	1,9135

Para as propriedades térmicas (α e h_c), baseando-se nos trabalhos de Singh (1992) e Niesteruk (1996), o autor sugeriu inicialmente:

$$\alpha = A_1 + A_2M \quad \text{e} \quad h_c = \text{constante} \quad (3.149)$$

Esperava-se melhores resultados em relação ao modelo IV. Para surpresa, os resultados foram similares.

Na persistência da busca por melhores resultados o autor sugeriu:

$$\alpha = A_1 + A_2M^2 \quad \text{e} \quad h_c = \text{constante} \quad (3.150)$$

No entanto nenhuma melhora significativa foi obtida. Observando o comportamento da curva obtida e associando o fenômeno de encolhimento sugeriu-se:

$$\alpha = A_1 + A_2M \quad \text{e} \quad h_c = A_1 / (L')^{1/3} \quad (3.151)$$

Novamente, o comportamento dos resultados foi muito similar aos obtidos com os demais modelos. Então o que fazer? O modelo difusivo não é adequado para descrever o transporte de calor neste tipo de produto? A difusividade não varia linearmente com o teor de umidade? O coeficiente de transferência de calor é variável de uma outra forma?

Respondendo a estas perguntas, surgiu a idéia de verificar o comportamento da taxa de variação temporal da temperatura no centro da banana, a partir dos dados experimentais. Esta verificação forneceu a informação de que a difusividade térmica deveria ter um comportamento de decréscimo muito acentuado nas duas primeiras horas de secagem, ficando praticamente constante ao longo do restante do processo. Então que função seria esta? De novo, respondendo a pergunta, partindo da Equação 3.144, obteve-se a derivada temporal ($\partial\theta/\partial t$) e verificou-se o comportamento desta última graficamente. Isto conduziu à decisão que a difusividade térmica tem a forma:

$$\alpha = \frac{A_1}{\left[A_2 \left(1 - M^{*A_3} \right) + A_4 \right]} \quad (3.152)$$

Com respeito ao coeficiente de transferência de calor convectivo, o mesmo foi obtido a partir da Equação 3.133. Sendo assim, pode-se demonstrar que:

$$h_c = \frac{A_1}{\left[(L')^{2/3} \right]} \quad (3.153)$$

O comprimento característico é dado pela relação entre a Equação 3.117 e o perímetro da área máxima projetada perpendicular ao escoamento, que é igual a $2\pi(L_1)_t$.

A Equação 3.153 não considera explicitamente os efeitos das propriedades físicas e velocidade do ar no coeficiente de transferência de calor. As propriedades do ar poderiam ser consideradas na forma:

$$h_c = \frac{\left[A_2 \left(\frac{k_a}{v_a^{1/3}} \right) v^{1/3} Pr^{1/3} \right]}{(L')^{2/3}} \quad (3.154)$$

onde o numerador seria o valor de A_1 .

É importante frisar que devido a problemas de convergência no início do processo, nos modelos IV e VI, no termo que representa a evaporação na superfície do sólido e o aquecimento do vapor produzido, a densidade ρ_s do sólido seco foi substituída por ρ_b , a densidade do sólido úmido. Em consequência, o termo da taxa de variação do teor de umidade foi usado em base úmida, para dar coerência de unidades às Equações 3.119 e 3.125.

Tabela 4.1 - Valores dos coeficientes e critério de ortogonalidade das funções esferoidais

m	k	c	b	$A_{mk} / (M_o - M_e)$	$\int_0^1 \int_1^{L_2/L} \chi_m \lambda_m \chi_p \lambda_p (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta, m \neq p$
0	1	1.397161	0.597864	2.20921	7.31×10^{-5}
	2	2.810801	1.941011	-2.56547	8.19×10^{-6}
	3	4.239071	3.417864	2.74925	-3.25×10^{-7}
	4	5.673506	4.878233	-2.82125	3.81×10^{-8}
	5	7.110252	6.327193	2.85634	-5.63×10^{-8}
	6	14.415977	13.677683	4.24925	4.29×10^{-5}
	7	15.730222	14.991063	-6.64284	1.03×10^{-4}
2	1	2.498990	9.546556	0.93749	7.31×10^{-5}
	2	3.939209	15.029440	-1.46940	-2.89×10^{-6}
	3	5.350201	21.975240	1.91801	1.02×10^{-6}
	4	6.767435	29.354480	-2.25566	6.01×10^{-7}
	5	11.213435	52.182143	1.34006	1.79×10^{-5}
	6	14.277787	67.545189	-1.44475	2.58×10^{-5}
	7	17.027654	81.314800	-3.85214	1.15×10^{-4}
4	1	3.560427	26.723961	0.20851	-5.65×10^{-5}
	2	5.080160	34.387491	-0.65941	-7.44×10^{-6}
	3	6.511387	44.760996	1.12838	-4.96×10^{-6}
	4	7.661939	74.551175	0.40166	6.33×10^{-6}
	5	12.215065	98.015325	1.81058	-3.31×10^{-5}
	6	13.697456	111.542129	-1.56309	-3.47×10^{-5}
	7	19.623852	165.259385	4.19315	1.11×10^{-4}
6	1	4.578694	52.897881	-0.07087	-1.05×10^{-4}
	2	6.179835	62.422934	-0.17630	1.29×10^{-6}
	3	13.324302	147.588863	1.85300	3.57×10^{-5}
	4	14.756208	166.798766	-1.78276	-1.90×10^{-6}
	5	16.212916	186.179002	1.56258	-1.75×10^{-5}
	6	17.712867	206.024129	-1.19208	1.33×10^{-5}
	7	20.776639	246.348095	0.93516	4.61×10^{-5}
8	1	7.244554	99.597313	-0.03961	-1.25×10^{-5}
	2	15.893173	225.716049	-1.69836	4.24×10^{-5}
	3	17.313937	250.899657	1.78127	7.65×10^{-6}
	4	18.754075	276.179925	-1.66311	-6.38×10^{-6}
	5	20.226143	301.844828	1.35443	-3.82×10^{-6}
10	1	18.469751	319.065393	1.87432	6.00×10^{-5}
	2	21.311389	381.524835	1.55890	-9.07×10^{-7}
	3	22.766709	413.099241	-1.42828	-6.11×10^{-6}
12	1	21.051540	427.609452	-1.46840	7.30×10^{-5}
	2	23.877066	502.122386	-1.56875	1.59×10^{-6}
14	1	26.448771	637.942151	1.35442	-5.44×10^{-6}

Nas Figuras 4.2a - c vêm-se os dados analíticos do teor de umidade em função da coordenada radial ξ , para $Fo=Dt/L^2= 0,0089; 0,2423$ e $0,6550$, respectivamente, para três posições angulares diferentes.

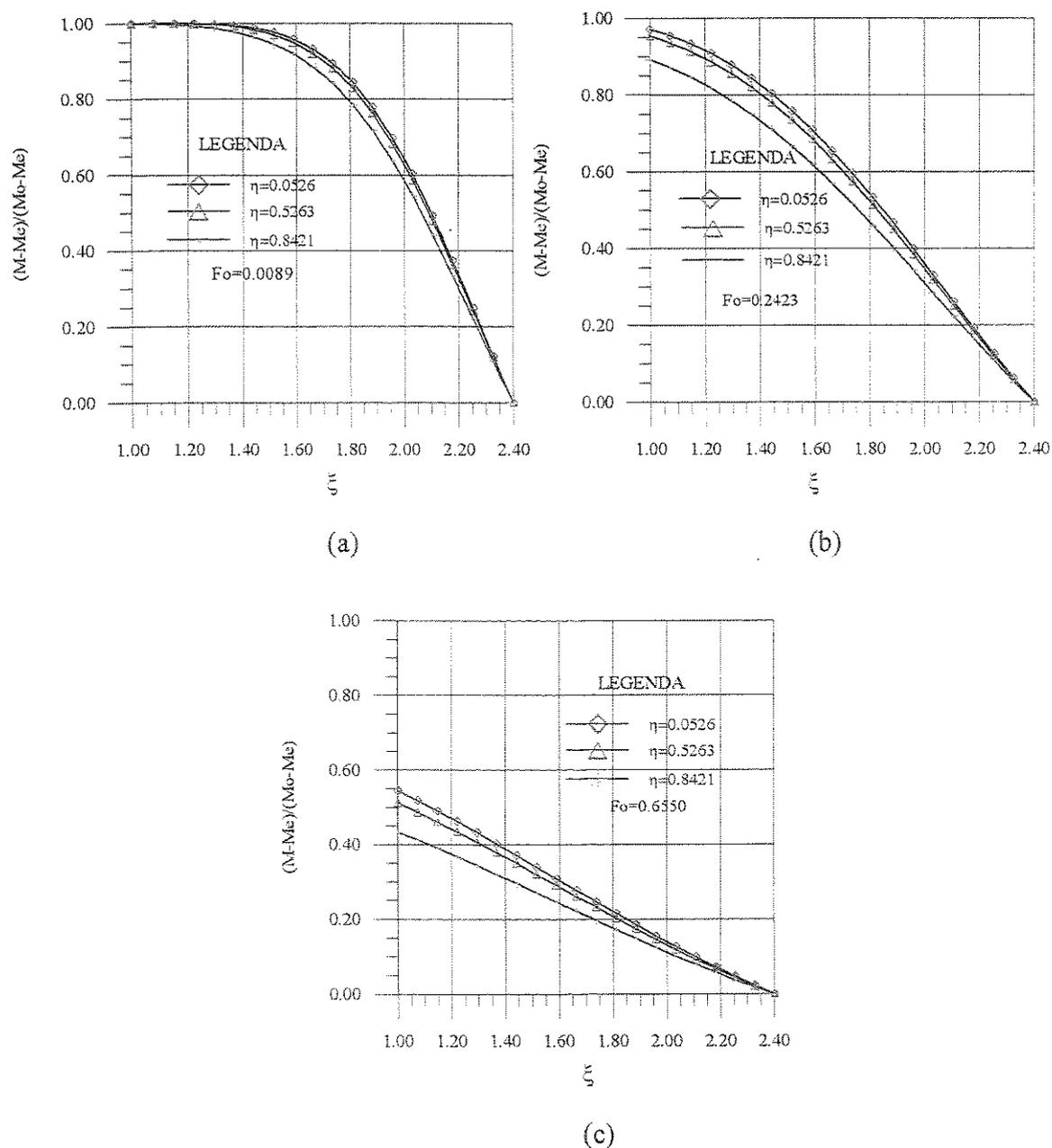


Figura 4.2 - Teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=1,1$, em função de ξ , obtidos analiticamente para $Fo=0,0089, 0,2423$ e $0,6550$, para três posições angulares diferentes.

As Figuras 4.3a - c, mostram os dados analíticos do comportamento do teor de umidade como função da coordenada angular (η), para ξ e Fo constantes. Comparando-se as Figuras 4.1-4.3 pode-se verificar que para esta razão de aspecto, a forma do perfil de umidade é fundamentalmente determinada pela variável ξ , apresentando um comportamento quase constante em relação a η . Este comportamento é esperável devido à baixa razão de aspecto ($L_2/L_1=1,1$).

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 - Resolução analítica

Para elucidar o comportamento do perfil de umidade do produto como função da posição e do tempo, vários resultados foram analisados. Dois grupos de resultados são de interesse: o primeiro concernente à cinética de secagem do produto e o segundo referente aos perfis de umidade nos vários instantes de secagem. A Tabela 4.1 apresenta, para razão de aspecto $L_2/L_1=1,1$ e $L_1=1,0$: os valores de c , raízes da função esférica angular χ para $\xi=L_2/L$; os autovalores b ; os coeficientes da expansão d_{nm} , os coeficientes A_{mk} e finalmente, os valores obtidos para o critério de ortogonalidade das funções radial e angular.

A obtenção desta solução analítica é um tanto quanto trabalhosa, e requer meses de trabalho e um excessivo número de horas de computador, comparada à solução numérica reportada em Lima et al. (1997). Alguns dos resultados obtidos para certas condições prefixadas foram exaustivamente comparados com os resultados fornecidos nos trabalhos de Stratton et al. (1941), Morse e Feshbach (1956a), Flammer (1957), Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e Abramowitz e Stegun (1972). Particularmente com relação aos resultados apresentados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), alguns deles apresentavam certos desvios que não comprometem significativamente a precisão da solução. Acredita-se que estes desvios tenham sido gerados pelo

número de termos utilizados para obter os coeficientes d_{nm} , cujo valor não foi informado pelos autores. Neste trabalho utilizou-se $n=0,2,\dots,30$ e $\chi_m \leq 10^{-6}$, em $\xi=L_2/L$.

A Tabela A1, anexo A, apresenta os valores numéricos dos coeficientes de expansão das funções esferoidais d_{nm} , para vários valores do coeficiente c . Com os dados fornecidos é possível obter resultados satisfatórios. Obviamente esta afirmação depende da precisão numérica requerida.

A Figura 4.1 ilustra a comparação dos teores de umidade no centro e no ponto focal em função do Fo , obtido pelo presente método e os que são reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966). Os resultados obtidos apresentam excelente concordância.

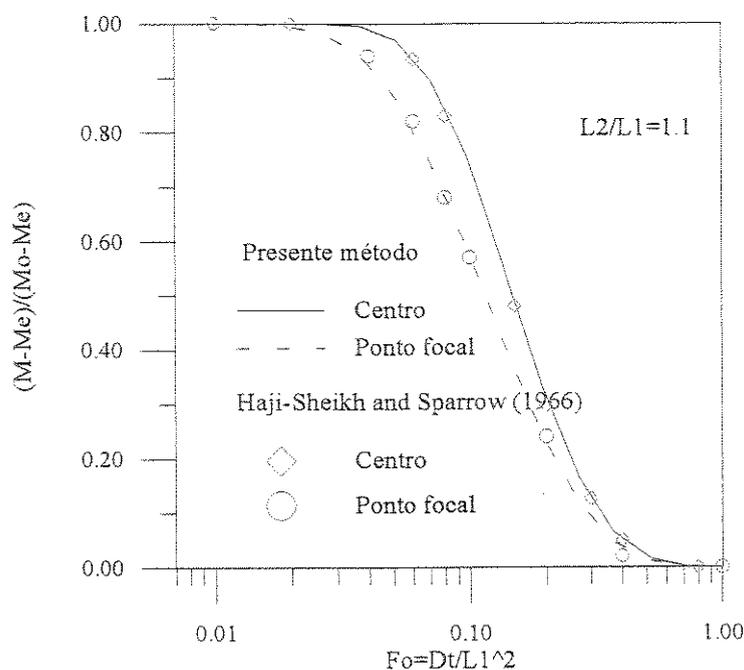


Figura 4.1 - Comparação do teor de umidade no centro e no ponto focal de um corpo com $L_2/L_1=1,1$, obtidos analiticamente pelo método proposto pelo autor e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966)

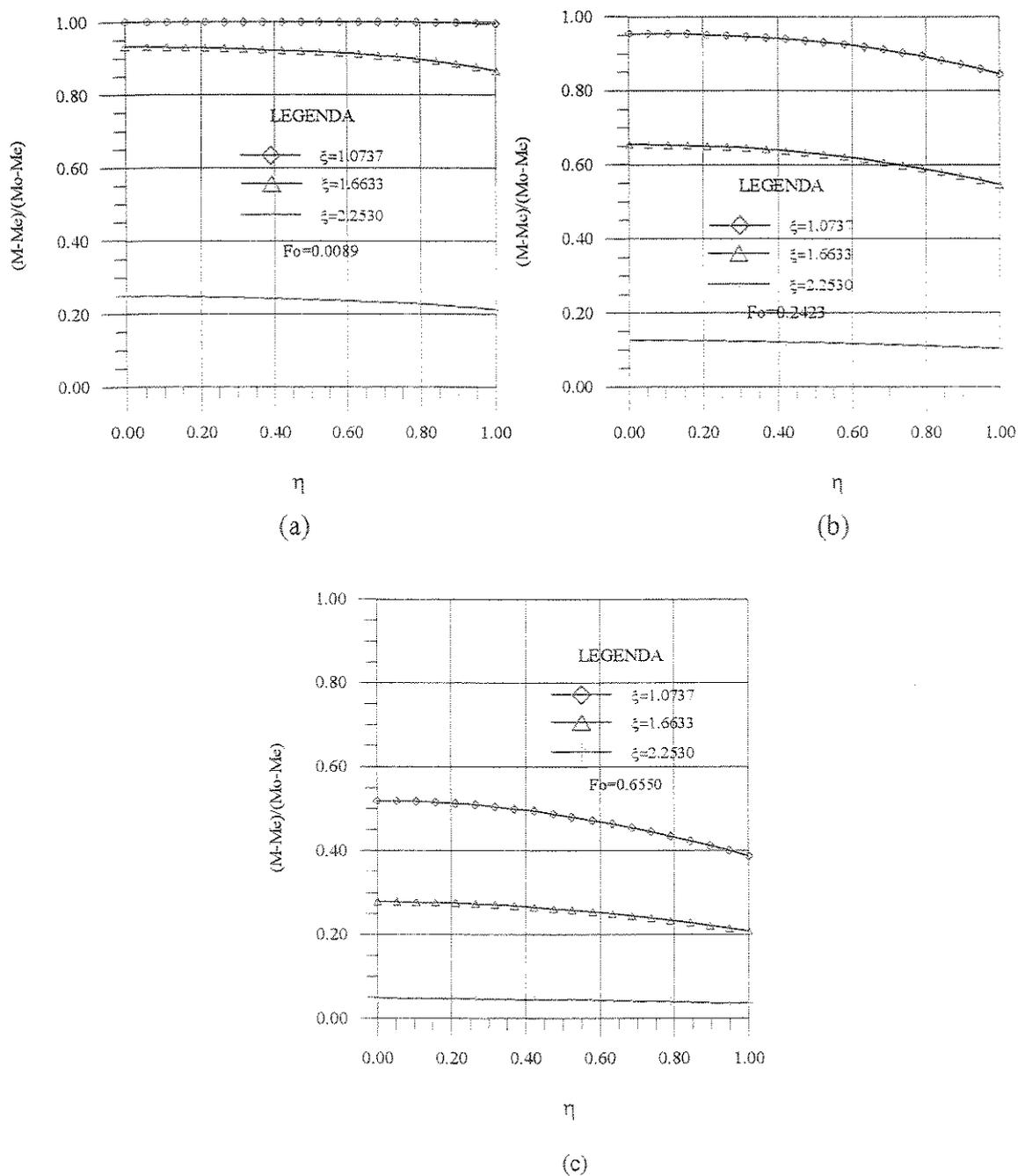


Figura 4.3 - Teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=1,1$, em função de η , obtidos analiticamente para $Fo=0,0089$, $0,2423$ e $0,6550$, para três posições radiais diferentes.

As Figuras 4.4 e 4.5, mostram a variação do teor de umidade como uma função das coordenadas ξ e η , respectivamente, para vários números de Fourier de transferência de massa.

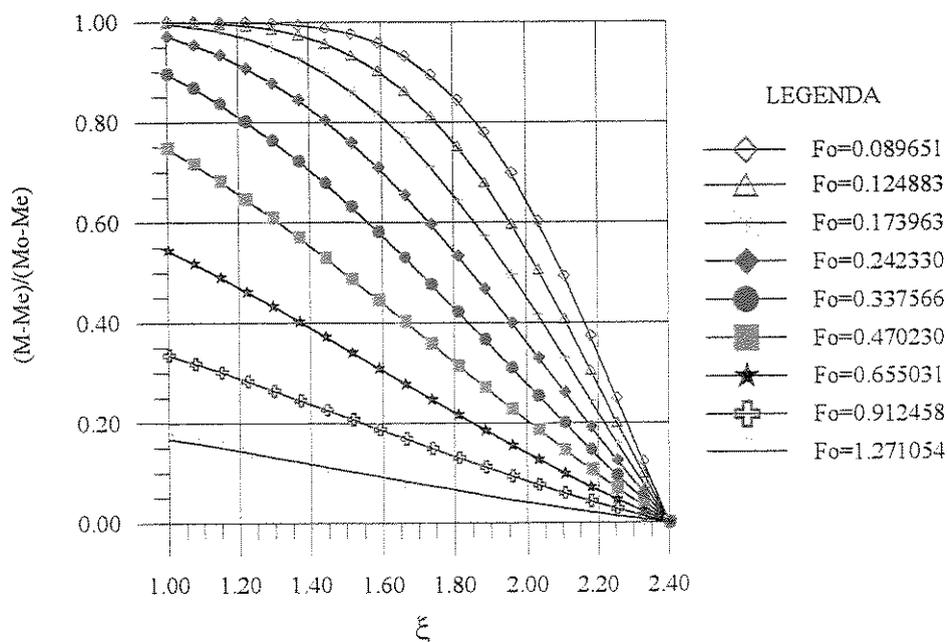


Figura 4.4 - Teor de umidade como função da coordenada esférica radial na posição $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$) para vários números de Fourier e $L_2/L_1=1,1$, obtido analiticamente

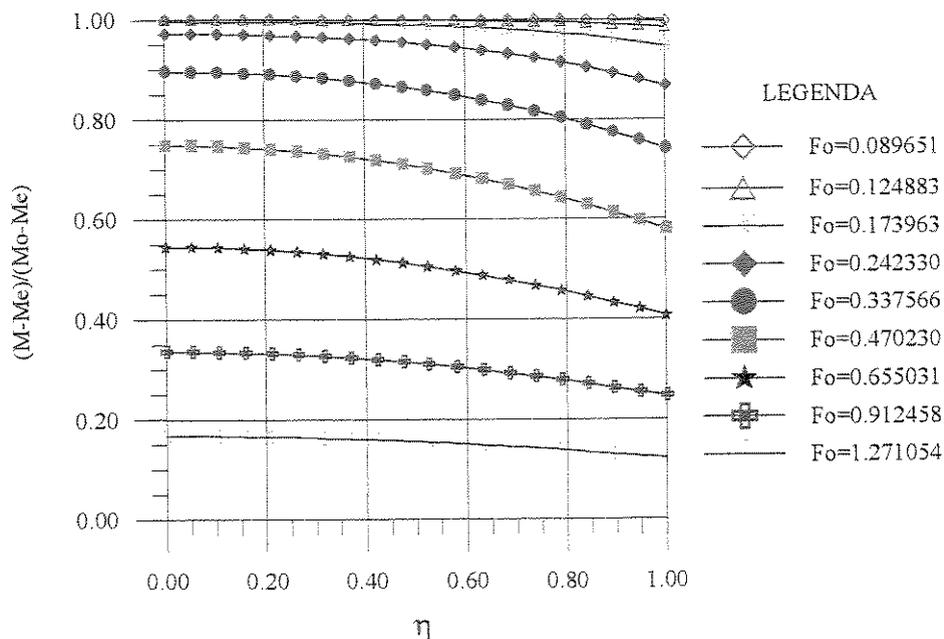


Figura 4.5 - Teor de umidade como uma função da coordenada esférica angular na posição $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários números de Fourier e $L_2/L_1=1,1$, obtido analiticamente

A distribuição espacial do teor de umidade dentro do sólido foi obtida para três números de Fourier, selecionados como mostram as Figuras 4.6a - c. Todos os gráficos de contorno mostrados são para razão de aspecto $L_2/L_1=1,1$.

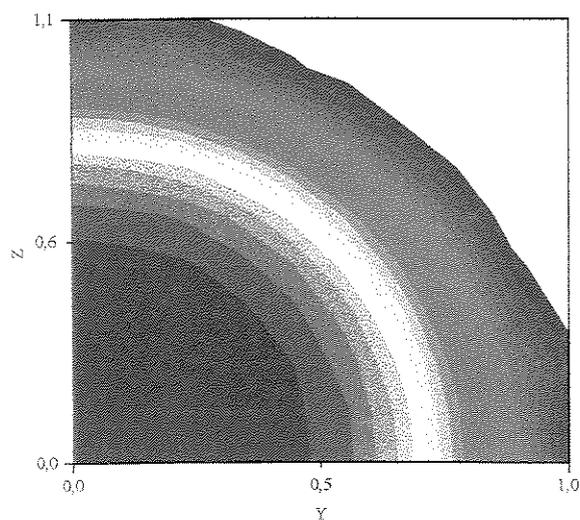
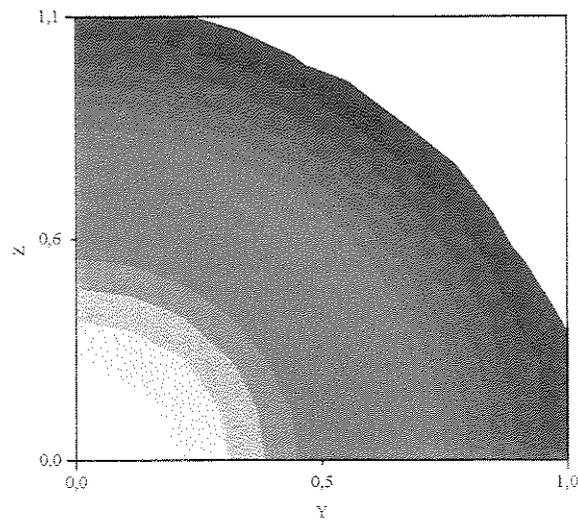
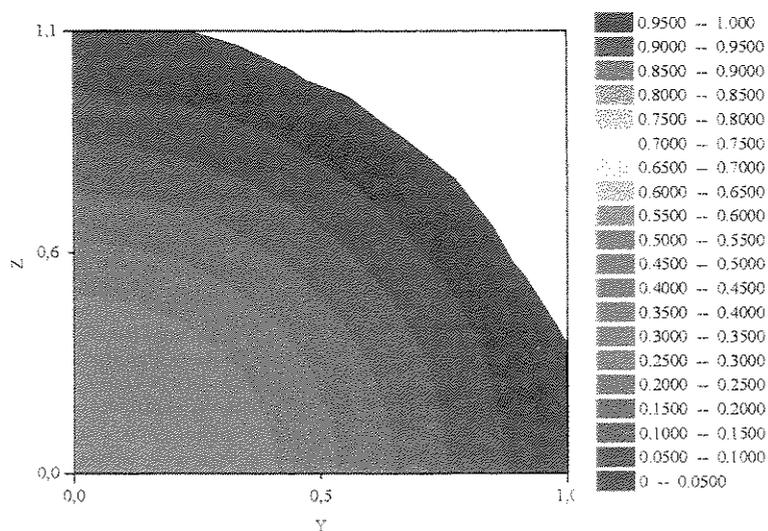
(a) $Fo=0,124883$ (b) $Fo=0,470230$ (c) $Fo=0,912458$

Figura 4.6 - Pontos de iso-concentração para $Fo=0,124883$, $0,470230$ e $0,912458$

A Figura 4.7 mostra o teor de umidade desenvolvido no interior do esferóide prolato no centro, no ponto focal e próximo à superfície, durante os vários estágios de secagem, para vários valores de Fo . O teor de umidade depende fortemente do número de Fourier; para $Fo \geq 4,0$, o teor de umidade de equilíbrio do produto é atingido em todos os pontos, para a razão de aspecto $L_2/L_1=1,1$ e $Fo=Dt/L^2$.

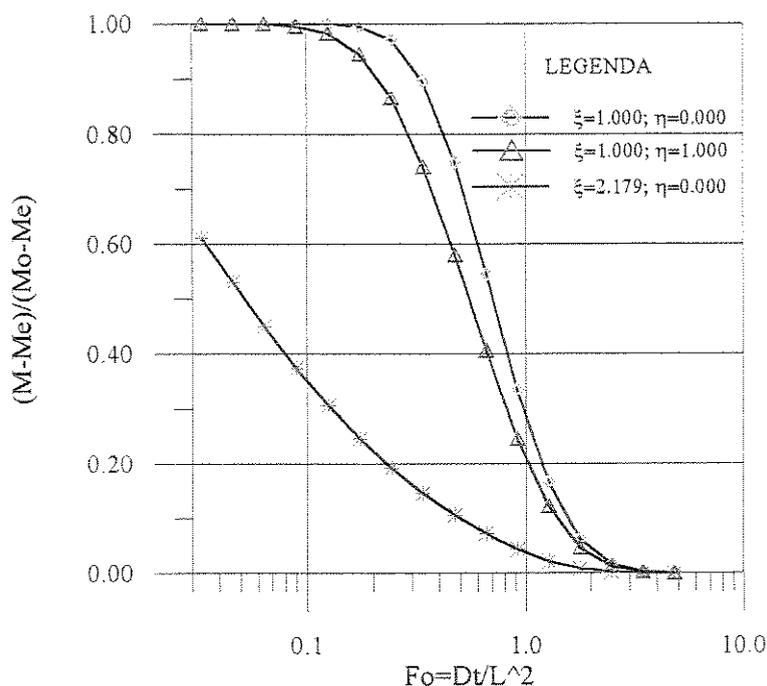


Figura 4.7 - Teor de umidade no centro, ponto focal e próximo da superfície de um elipsóide com $L_2/L_1=1,1$, para vários números de Fourier (Fo)

A Figura 4.8 ilustra a comparação entre os teores de umidade médio obtido para o esferóide prolato com $L_2/L_1=1,1$ e $L_1=1,0$, de acordo com o método apresentado, e os de cilindro finito ($L_2/L_1=100,0$) e esfera ($L_2/L_1=1,0$) obtidos também analiticamente, (Luikov, 1968), considerando fixo $L_1=1,0$. Observe que o Fo foi definido de uma forma diferente para permitir a comparação dos resultados. Verifica-se que ocorre um pequeno erro na determinação do teor de umidade para números de Fourier pequenos ($Fo < 4 \cdot 10^{-3}$), cujo valor atinge um máximo de 4%. Atribui-se esta divergência (para esta aplicação), ao fato que a solução é obtida por uma série discreta de valores, obtidos por sua vez por uma série de aproximações e equações transcendentais, bem como de funções de Bessel esférica e polinômios de Legendre de alta ordem. Parte destes problemas podem

ser reduzidos, utilizando-se número de termos mais elevados nas séries, principalmente para determinar os coeficientes de expansão d_{nm} e os autovalores b_n . Outra parcela de erro é devida às aproximações numéricas ocorridas durante os cálculos das integrais contidas na Equação 3.66 que calcula o teor de umidade médio do material. Para altos valores de Fo , como esperado, o teor de umidade médio é sempre um pouco superior ao obtido para esfera até o término do processo, onde ambos praticamente se igualam.

As três geometrias coincidem, atingindo o teor de umidade de equilíbrio para $Fo \approx 1,0$.

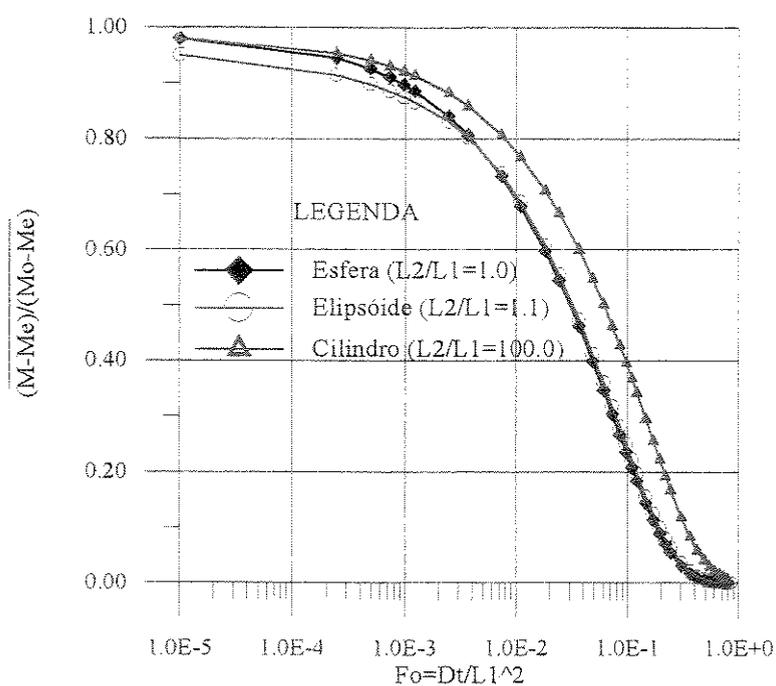


Figura 4.8 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos pelo método proposto e os obtidos com as soluções analíticas para cilindro e esfera dadas por Luikov (1968)

Somente a solução para coeficiente de difusão constante e teor de umidade de equilíbrio na superfície foi obtida analiticamente. A solução apresentada pode ser usada para obter resultados que descrevem fenômenos de difusão transiente em corpos com geometrias esférica, cilíndrica e elipsoidal para $Fo \geq 0,004$.

4.2 - Resolução numérica

4.2.1 - Refinamento de malha e de tempo

A aplicação do método numérico de volumes finitos é condicionada pelos valores de $D\Delta t/L^2$ e também pelo número de pontos da malha utilizada nos cálculos. Para verificar a independência dos resultados com os intervalo de tempo e tamanho da malha, vários resultados foram obtidos com 3 padrões de malha e de tempo.

As Figuras 4.9 e 4.10 ilustram o efeito do número de pontos da malha sobre a resposta da solução numérica para dois valores de $\Delta Fo = D\Delta t/L^2$ e $L_2/L_1 = 1,8$. Observa-se que, com exceção do período inicial, as três malhas apresentam resultados semelhantes. Contudo devido às discrepâncias apresentadas pela malha de 10x10 pontos nos valores iniciais, esta não foi utilizada. Em adição, devido ao maior tempo de computação requerido pela solução com a malha de 40x40 pontos, sem contudo prejudicar o resultado, optou-se por não utilizá-la. Finalmente concluiu-se que a malha de 20x20 pontos era adequada.

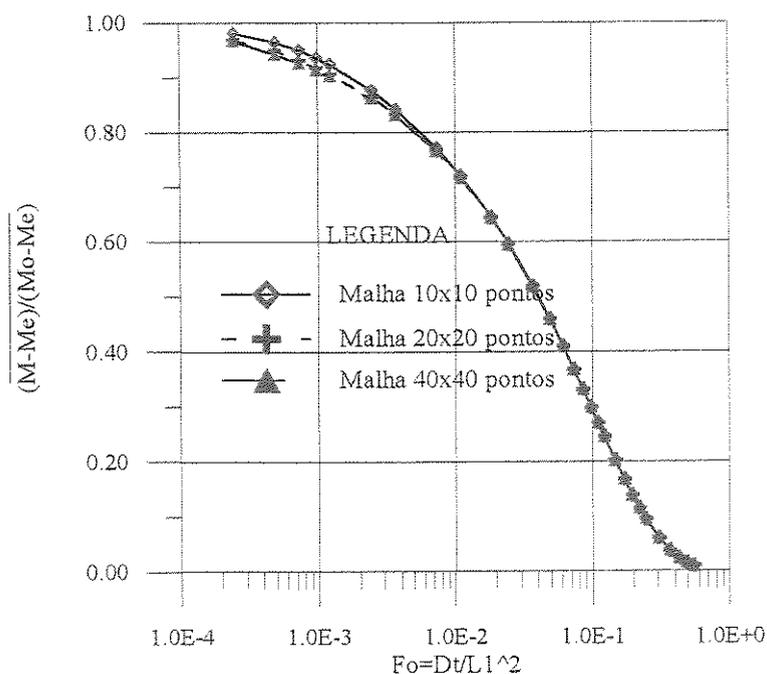


Figura 4.9 - Influência do número de pontos da malha numérica no teor de umidade médio de um esferoide com $L_2/L_1 = 1,8$ e $\Delta Fo = 1,0892 \cdot 10^{-4}$

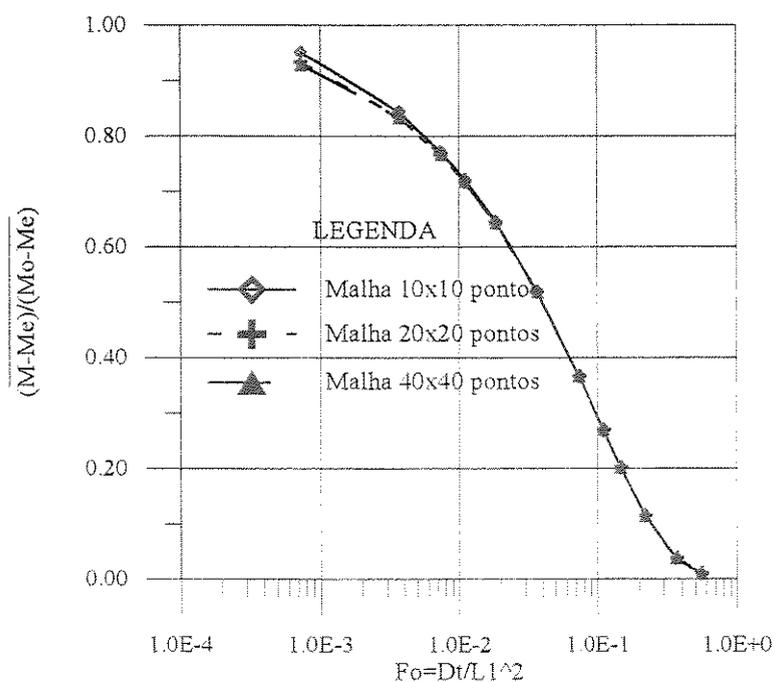


Figura 4.10 - Influência do número de pontos da malha numérica no teor de umidade médio de um esferóide com $L_2/L_1=1,8$ e $\Delta Fo = 1,6339 \cdot 10^{-4}$

A Figura 4.11 apresenta a dependência do teor de umidade médio com ΔFo , para a malha de 20x20 pontos. Observa-se praticamente independência de resultados para os três casos estudados. Contudo, por ser necessário obter o teor de umidade em tempos menores, optou-se por trabalhar com o menor valor, $\Delta Fo = 1,0892 \cdot 10^{-4}$.

A Tabela 4.2 apresenta um resumo que possibilita verificar os desvios entre os resultados obtidos.

Tabela 4.2 - Teor de umidade médio para vários padrões de malha e de tempo.

$\Delta Fo = D\Delta t/L^2$	$Fo = Dt/L_1^2$	MALHA		
		A: 10 x 10	B: 20 x 20	C: 40 x 40
$1,0892 \cdot 10^{-4}$	0,00732	0,771	0,766	0,765
	0,03660	0,519	0,518	0,518
$1,6339 \cdot 10^{-4}$	0,00732	0,772	0,767	0,766
	0,03660	0,520	0,518	0,518
$2,1785 \cdot 10^{-4}$	0,00732	0,772	0,767	0,766
	0,03660	0,520	0,519	0,518

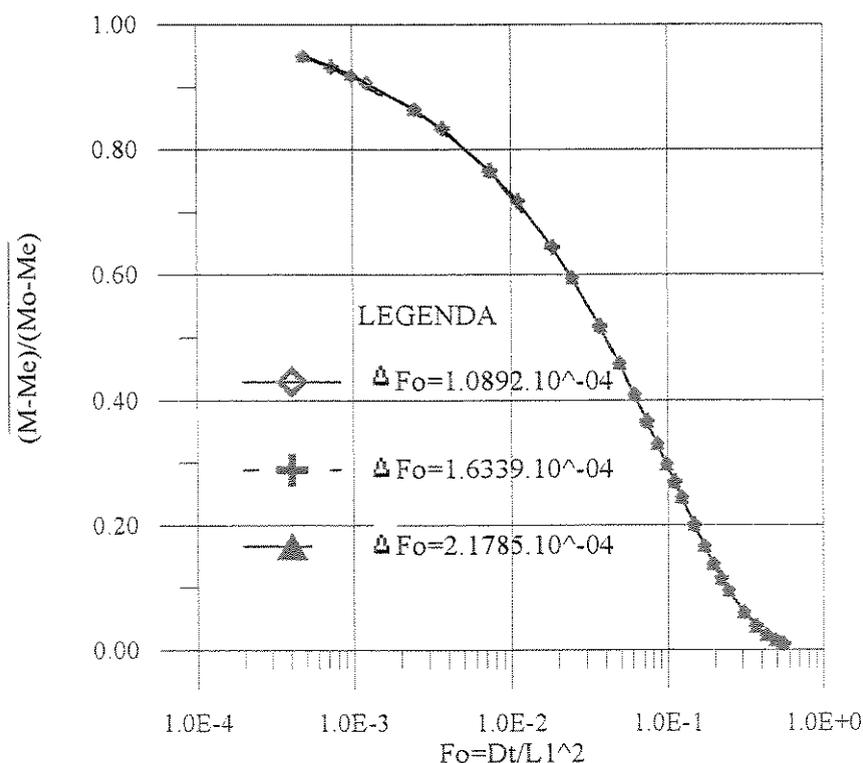


Figura 4.11 - Influência do valor ΔFo , no teor de umidade médio de um esferóide com $L_2/L_1=1,8$ para uma malha de 20×20 pontos

A seguir, nas Figuras 4.12a - d, são ilustradas algumas malhas numéricas utilizadas, no plano $z-y$ e nas coordenadas $\xi-\eta$. No plano zy , os volumes de controle não são igualmente espaçados, concentrando-se mais na superfície do corpo com relação a ξ e no eixo y , com relação à coordenada angular η , caracterizando a malha gerada como uma malha irregular. Contudo, no plano $\xi \eta$, esta malha é regular e ortogonal, como mostrado na Figura 4.13 para a razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, como um exemplo. É neste plano que toda a resolução numérica é concentrada. Quando $L_2/L_1 \rightarrow \infty$, o ponto focal desloca-se para a superfície do corpo, e inversamente, para $L_2/L_1 \rightarrow 1$, este mesmo ponto tende a ser coincidente com o centro geométrico do corpo.

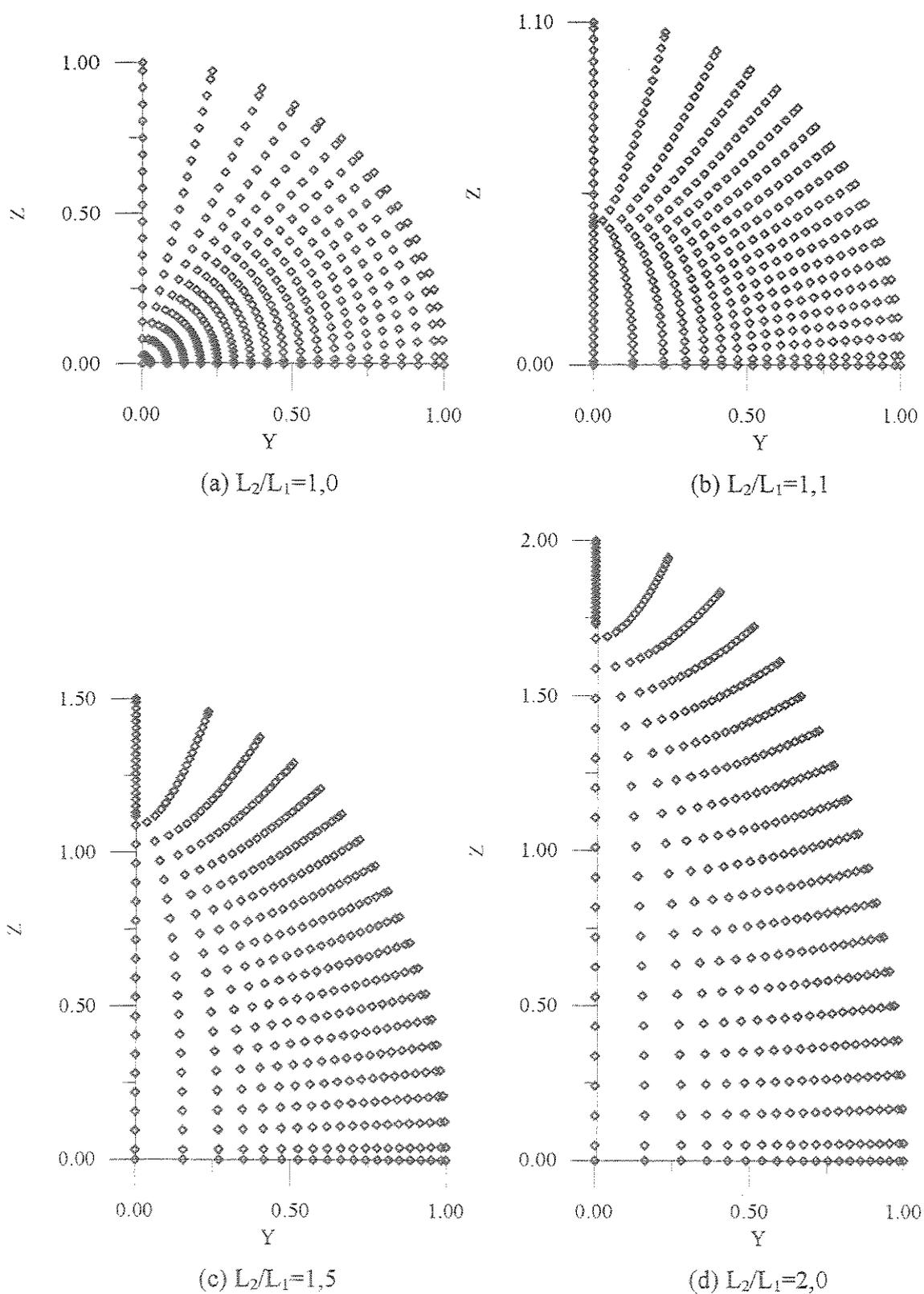


Figura 4.12 - Malhas numéricas no plano físico de elipsóides para quatro razões de aspecto

Os valores de fronteira têm forte influência no espaçamento da malha, nos pontos nodais imediatamente próximos à superfície do corpo, apesar do caráter elíptico da equação de difusão. Especialmente nestes pontos, é crucial ter um bom controle sobre o espaçamento da malha, principalmente se existem altos gradientes e requer-se solução mais precisa.

Como foi explanado, os pontos $(\xi=1; \eta)$ e $(\xi; \eta=0)$ são pontos singulares; embora exista um considerável espaçamento dos primeiros pontos nodais em relação a estes pontos, isto é benéfico para a solução, pois quanto mais próximos estivermos destes pontos, menos preciso será o resultado obtido.

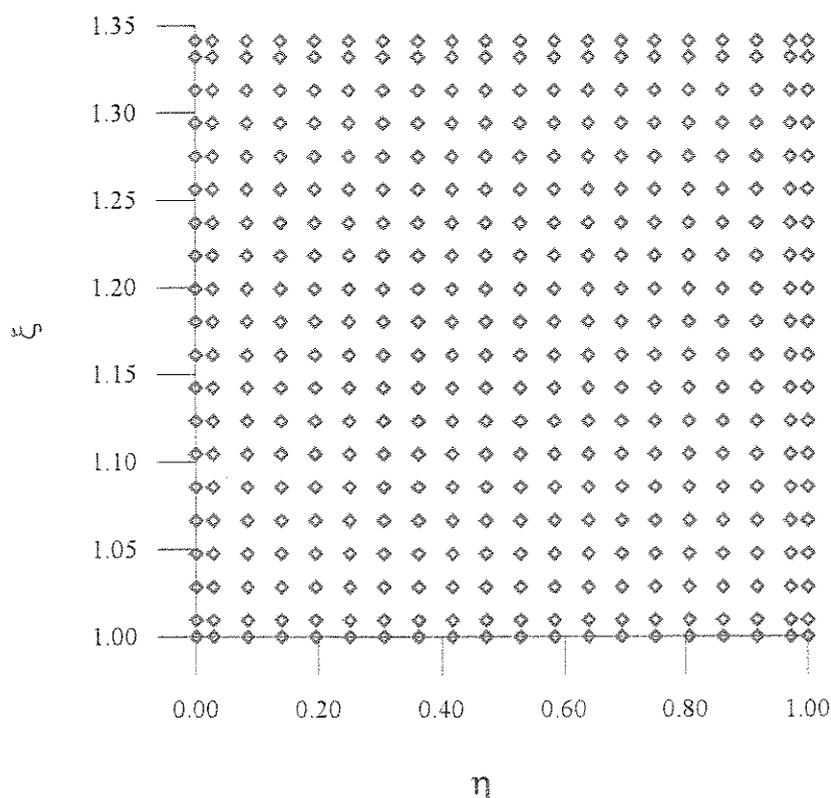


Figura 4.13 - Malha numérica no plano computacional para um elipsóide com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$

4.2.2 - Resultados do modelo I

O modelo aqui apresentado foi utilizado para determinar a razão de umidade em vários elipsóides, variando sua forma desde esfera até cilindro, casos estes particulares extremos.

A validação do Modelo I foi feita por comparação com resultados analíticos bem conhecidos de difusão em esfera e cilindro finito (Luikov, 1968), assim como dos resultados apresentados pelo próprio autor e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966). Os três primeiros resultados foram obtidos através de programas computacionais implementados no Software Mathematica[®], sendo que nos dois primeiros estudos utilizou-se 20 termos da série e no terceiro 39 termos.

As Figuras 4.14-4.17 mostram a comparação dos diferentes resultados de soluções analíticas com a numérica aqui proposta. Pode-se destacar a boa concordância dos perfis de umidade no caso da geometria esférica. No que diz respeito ao teor de umidade média, observa-se leve desvio (<3%) no início do processo. A concordância é excelente para os valores de umidade no centro e ponto focal e os médios, quando comparados aos de Haji-Sheik e Sparrow (1966) e do próprio autor.

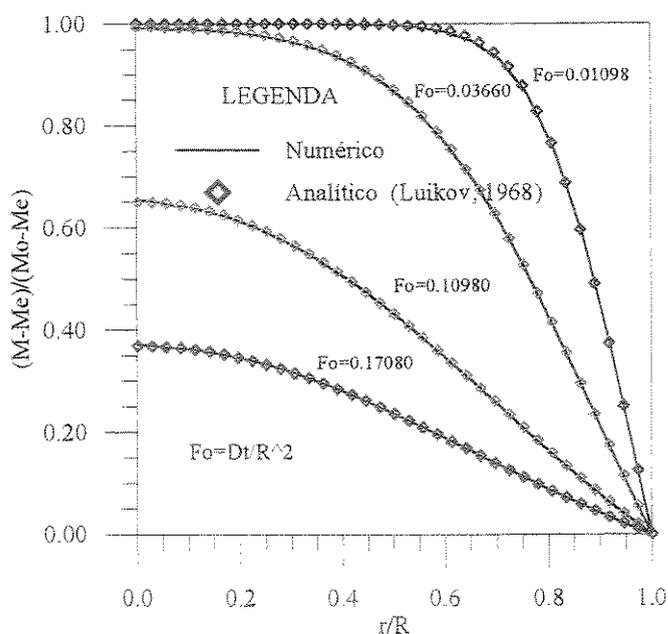


Figura 4.14 - Comparação entre os teores de umidade no interior de uma esfera ($L_2/L_1=1,0$), obtidos pelos métodos numérico, proposto pelo autor e o analítico dado por Luikov (1968)

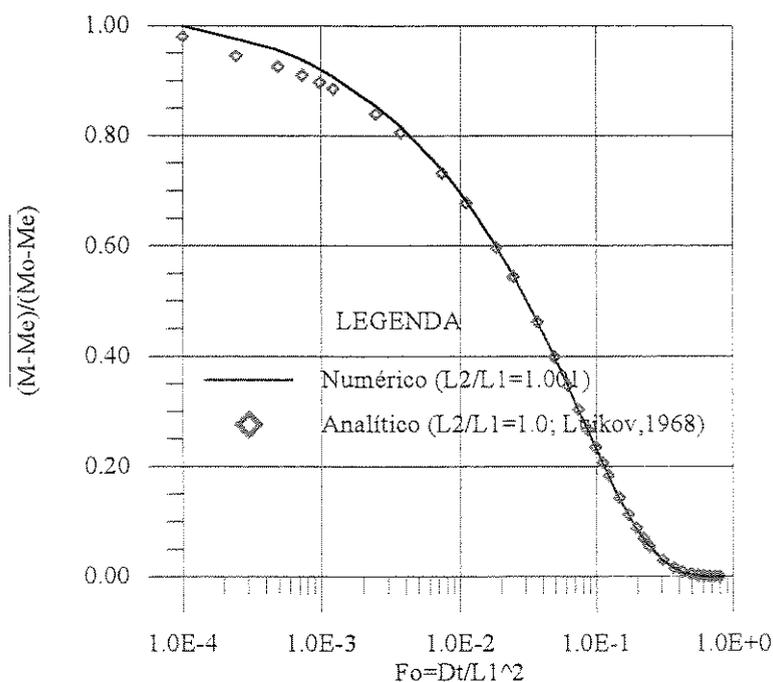


Figura 4.15 - Comparação entre os teores de umidade médio para uma esfera, obtidos pelos métodos numérico proposto pelo autor e o analítico dado por Luikov (1968)

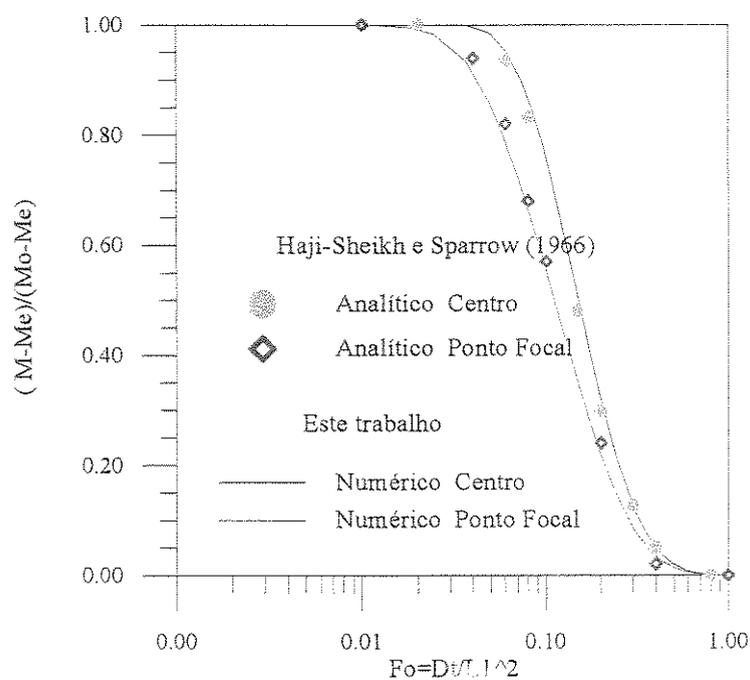


Figura 4.16 - Comparação entre os teores de umidade no centro e no ponto focal de um corpo com $L_2/L_1=1,1$, obtidos pelos métodos numérico proposto pelo autor e o analítico formulado por Haji-Sheikh e Sparrow (1966)

Do exposto, pode-se concluir que o modelo é perfeitamente válido para descrever problemas de difusão transiente em corpos com geometria elipsoidal.

A seguir é apresentada uma série de resultados referentes a elipsóides de revolução obtidos com o Modelo I. Nos cálculos numéricos foi considerado arbitrariamente um coeficiente de difusão de $1,22 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, igual ao utilizado por Lima et al. (1997) para um corpo com $L_2/L_1 \approx 1,8$, e $L_1=1,0$, em todos os casos estudados. Na Figura 4.18 é apresentada a razão de umidade média para vários esferóides prolatos em função do número de Fourier ($Fo=Dt/L_1^2$). A esfera tem um volume menor e uma relação área/volume maior de todos os sólidos comparados e por isso seca mais rápido. Para uma comparação, a esfera tem uma relação área/volume de 3 (unidades de comprimento)⁻¹, enquanto que o elipsóide com $L_2/L_1=100,0$ apresenta uma relação área/volume de 2,36 (unidades de comprimento)⁻¹. A relação entre os volumes da esfera e do elipsóide é 1/100. Sólidos com $L_2/L_1=1,001$ correspondem aproximadamente a uma esfera e $L_2/L_1=100,0$ a um cilindro de ponta afunilada.

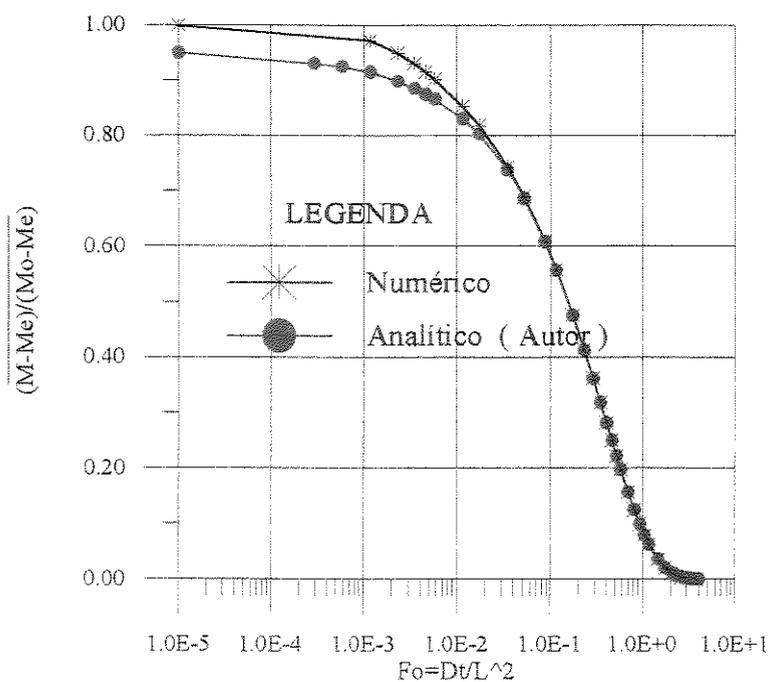


Figura 4.17 - Comparação entre os teores de umidade médio de um corpo com $L_2/L_1=1,1$, obtidos pelos métodos numérico e analítico, propostos pelo autor

A razão de umidade no centro e no ponto focal para vários esferóides prolatos são apresentadas nas Figuras 4.19 e 4.20, respectivamente. O efeito da geometria do sólido é maior no ponto focal, mais próximo da superfície.

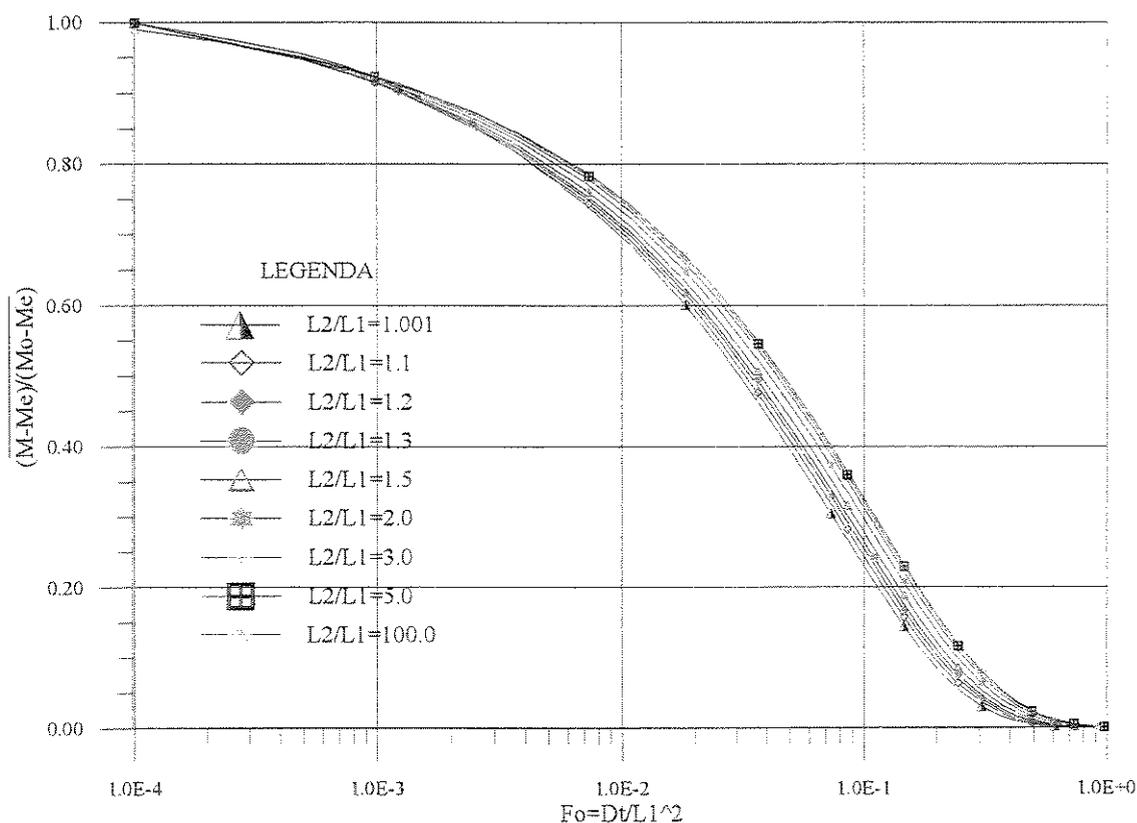


Figura 4.18- Razão de umidade média em função do número de Fourier, para vários esferóides prolatos

Para verificar o efeito da área superficial do elipsóide na sua cinética de secagem, selecionou-se arbitrariamente um volume de $6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3$, e calcularam-se as dimensões de três elipsóides cujo volume é igual ao volume considerado. Com estas dimensões determinaram-se as áreas de cada um dos corpos usando a Equação 3.118, e também as suas respectivas cinéticas de difusão, utilizando o modelo I. A Figura 4.21 ilustra a cinética de difusão destes elipsóides, com suas respectivas áreas superficiais. Como pode-se esperar, a igual volume, o elipsóide de razão de aspecto maior seca mais rápido.

Nas Figuras 4.22 e 4.23 é ilustrado o teor de umidade em função das coordenadas radial e angular, para $L_2/L_1=1,5$. Podem ser observadas as mesmas tendências antes apontadas na solução analítica.

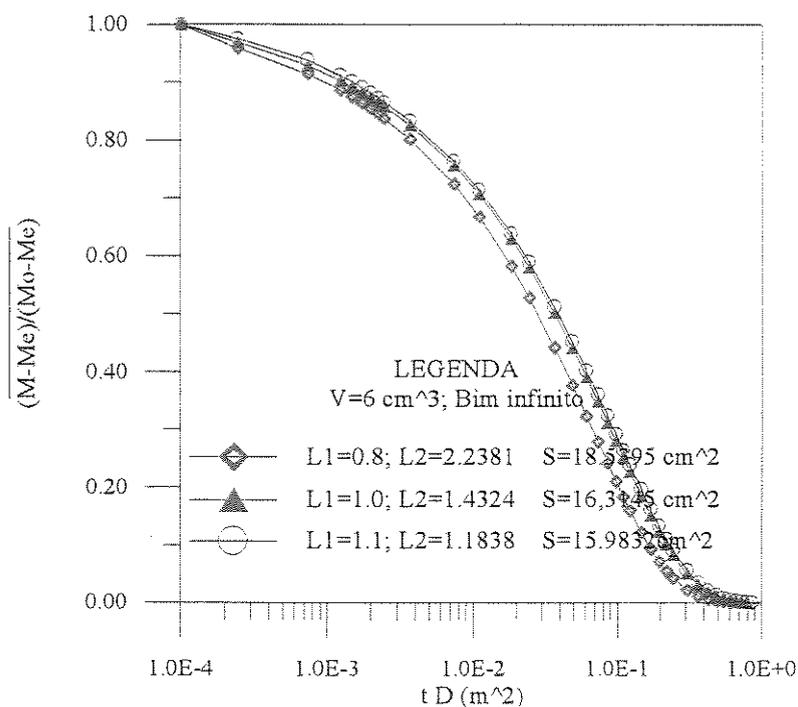


Figura 4.21 - Efeito da área superficial de elipsóides de iguais volumes na sua cinética de secagem

As Figuras 4.24a - c, ilustram a forma de um elipsóide com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, bem como a sua distribuição de umidade para $Fo= 0,0366, 0,1098$ e $0,1952$, respectivamente. Em razão da simetria em ζ assumida inicialmente, as linhas de iso-concentração são elipses co-focais. Observa-se ainda o decréscimo mais acentuado do teor de umidade na extremidade superior do eixo z ($z=L_2$), reduzindo-se este efeito gradativamente até a extremidade do eixo y ($y=L_1$). Este comportamento foi, evidente em todos os elipsóides estudados.

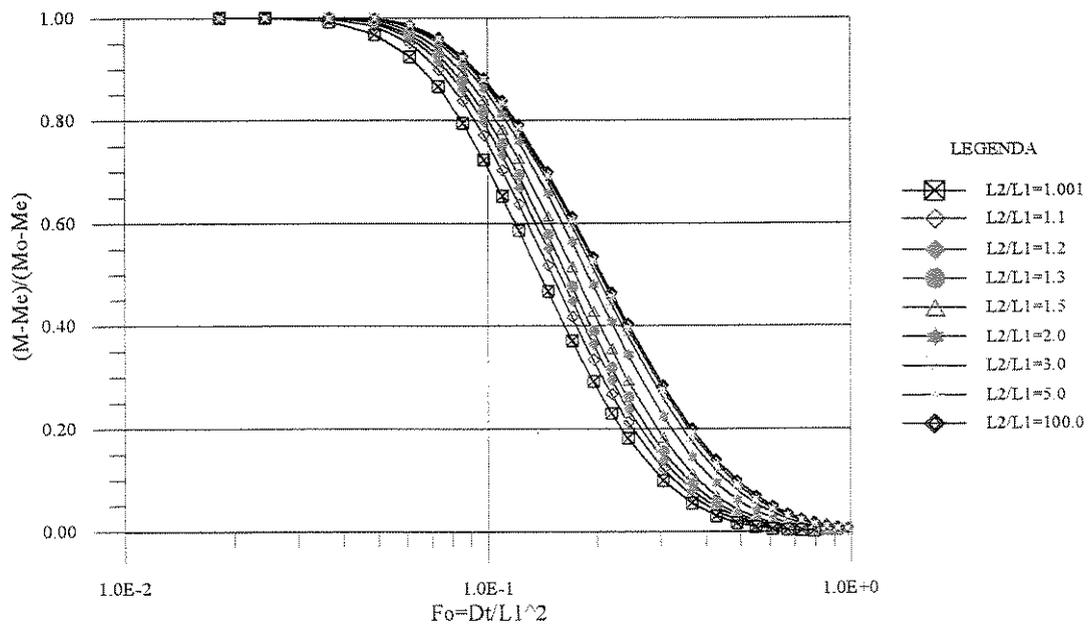


Figura 4.19- Razão de umidade no centro de vários esferóides prolatos em função do número de Fourier

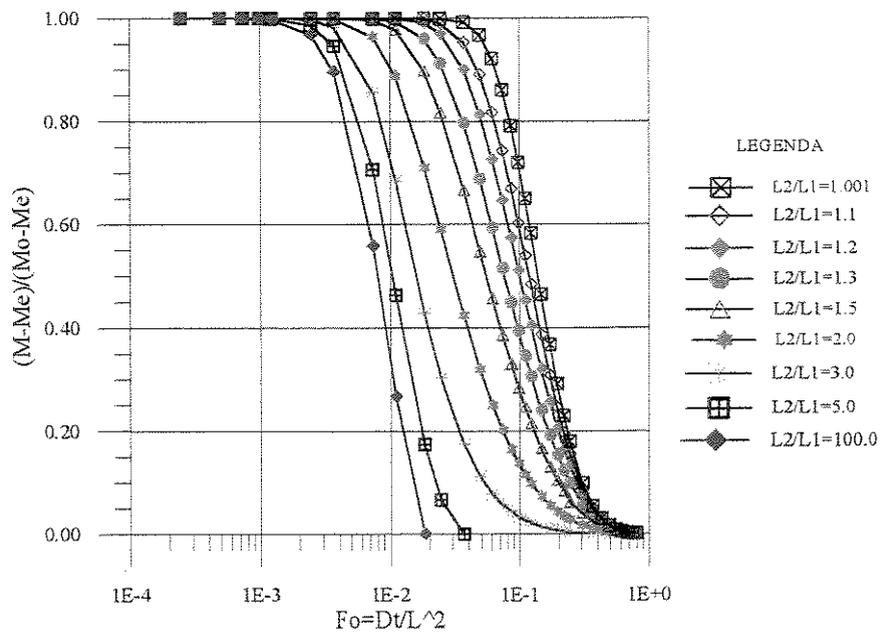


Figura 4.20 - Razão de umidade no ponto focal de vários esferóides prolatos em função do número de Fourier

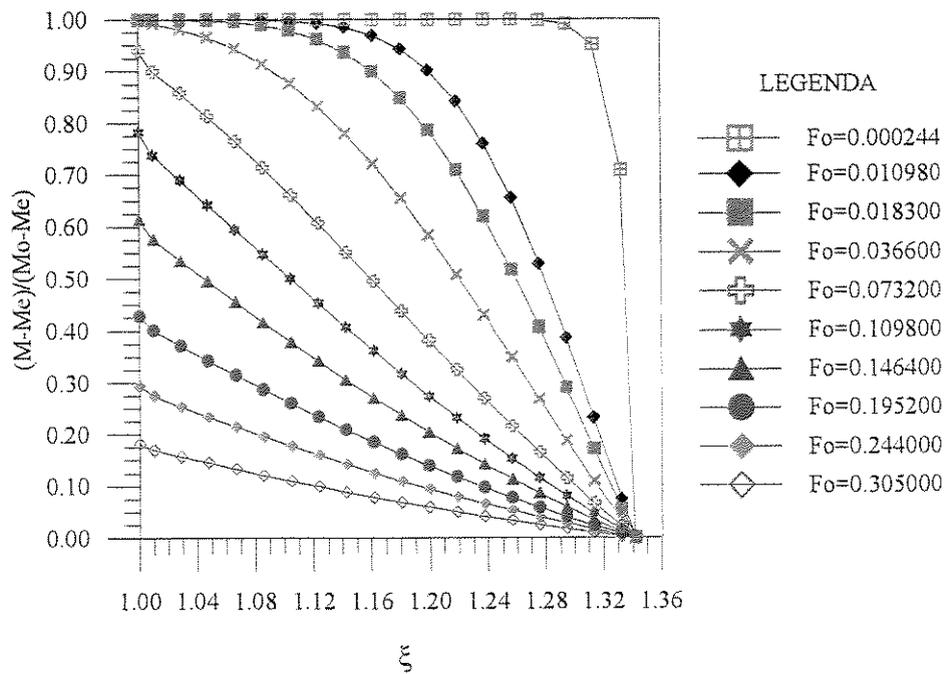


Figura 4.22 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial, para vários Fo e para $L_2/L_1=1,5$ e $\eta=0,0$.

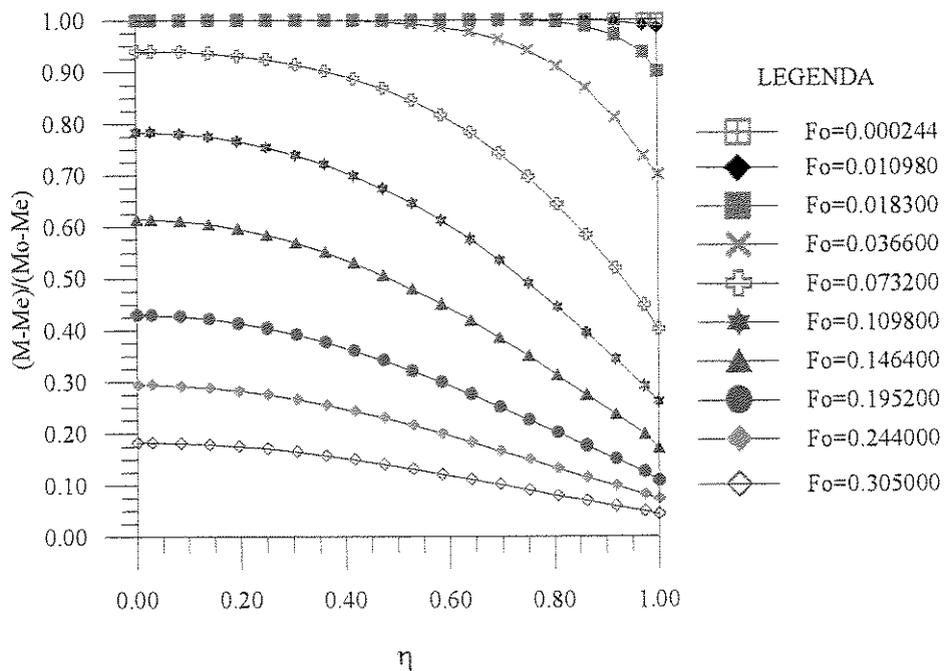


Figura 4.23 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para vários Fo e para $L_2/L_1=1,5$ e $\xi=1,0$.

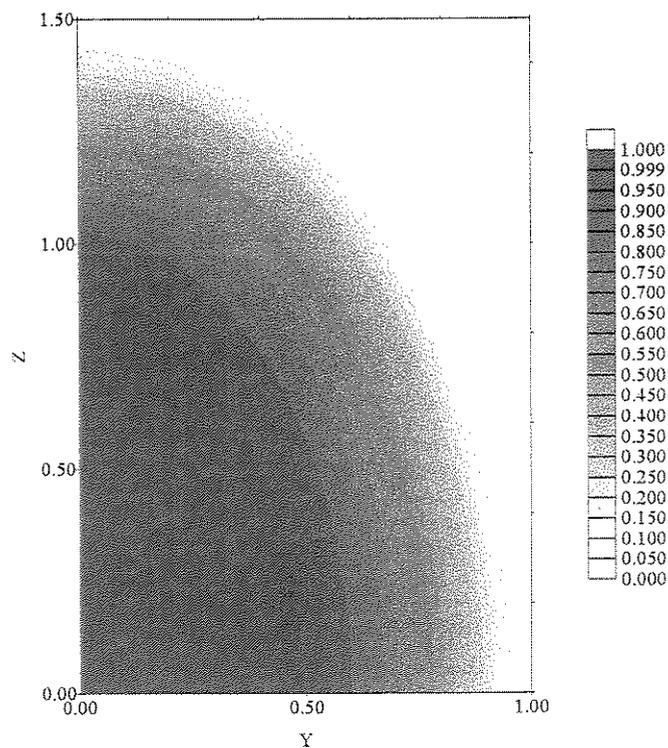
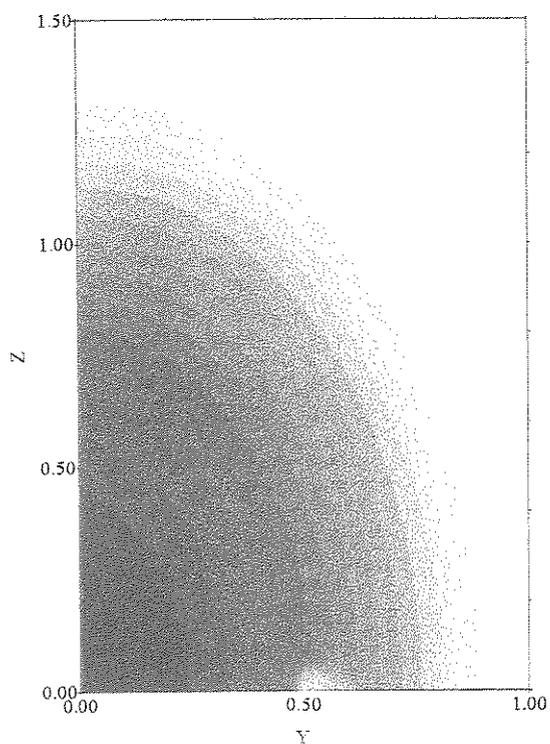
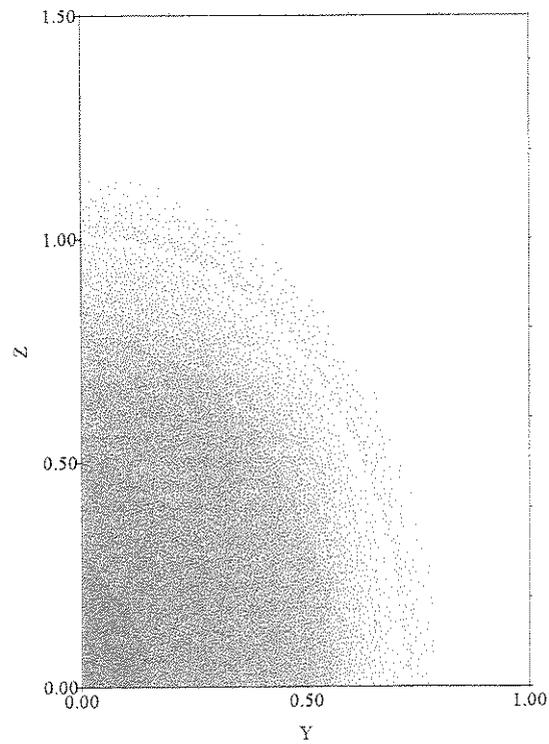
(a) $Fo = 0,0366$ (a) $Fo = 0,1098$ (b) $Fo = 0,1952$

Figura 4.24 - A forma do elipsóide e as linhas de iso-concentração para $Fo = 0,0366$, $0,1098$ e $0,1952$

As Figuras 4.25 e 4.26 mostram a variação do teor de umidade no interior de um elipsóide com $L_2/L_1 = 5,0$, para vários Fo , em função das coordenadas ξ e η , respectivamente. A dependência do teor de umidade com a coordenada angular aumentou sensivelmente, quando comparada ao caso $L_2/L_1 = 1,1$. A forte dependência com a coordenada radial também é notada. De uma forma geral, existem duas regiões distintas para difusão de massa: uma nas proximidades do ponto focal e a outra no restante do corpo. A medida que L_2/L_1 cresce, a difusão de massa nas proximidades do ponto focal aumenta, decrescendo para regiões mais afastadas do mesmo. Este efeito é reduzido com o decréscimo de L_2/L_1 até o caso limite de $L_2/L_1 = 1,0$, onde as regiões se fundem formando uma única região, com um comportamento da difusão de massa independente da coordenada angular. De forma mais abrangente, pode-se dizer que a medida que a razão de aspecto aumenta, aumenta a variação do teor de umidade com a variável η (ver Figuras 4.22 e 4.23).

Uma prática comum no estudo de secagem de sólidos é a de se considerar um corpo com geometria complexa como se fosse uma esfera ou um cilindro, dependendo da forma. A metodologia resume-se em calcular o volume deste corpo em estudo e igualá-lo ao volume de uma esfera ou cilindro, determinando desta forma um diâmetro equivalente, que servirá de dimensão característica (Alvarenga et al., 1980; Mohsenin, 1986; Soares, 1986; Cavalcanti Mata, 1997). Para verificar o erro existente nesta metodologia, considerou-se arbitrariamente um corpo com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,0$ e aplicou-se a metodologia citada, obtendo-se um raio equivalente de 1,2599. Nos cálculos numéricos foi considerado arbitrariamente um coeficiente de difusão de $1,22 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ (Lima et al., 1997).

A Figura 4.27 apresenta as curvas de difusão do elipsóide e da esfera equivalente cujo volume é igual ao volume do elipsóide, obtidas com o uso do modelo I. Como as variáveis comuns aos dois corpos são o tempo e a difusividade de massa, as curvas estão graficadas em função do produto entre elas. A análise da figura elucida claramente o erro que existe nesta aproximação ao longo do tempo. Para $Dt \leq 0,01$, obtém-se um erro médio e desvio-padrão entre as curvas de aproximadamente 2,67% e $0,953 \text{ m}^2$, respectivamente. Contudo, para $Dt > 0,01$ até o

final da secagem, este erro cresce, alcançando a incrível marca de 43,31% e desvio-padrão de 35,584 m². Os cálculos do erro e do desvio-padrão foram feitos utilizando o Software Grapher.

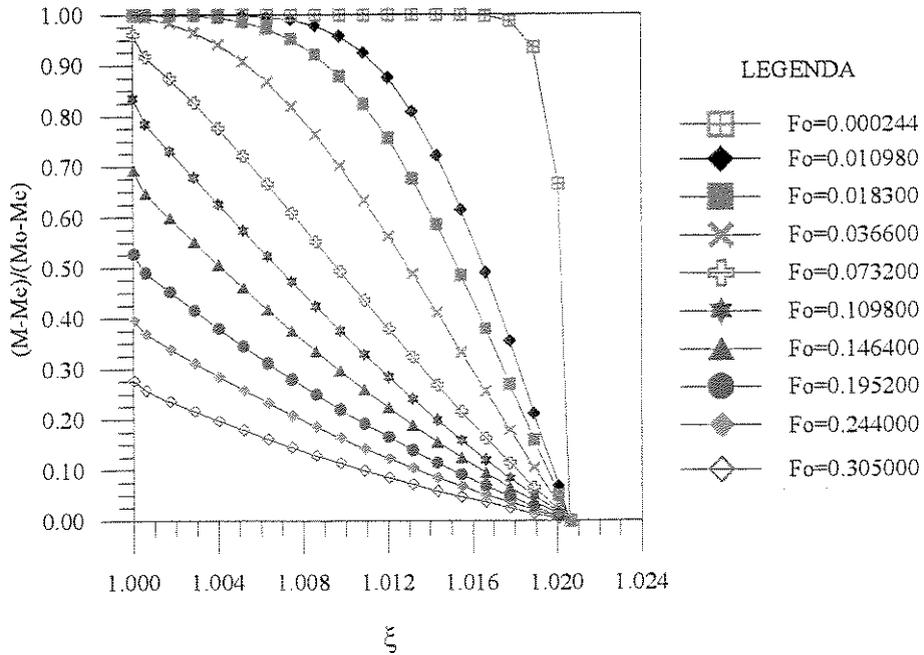


Figura 4.25 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial, para vários Fo e para $L_2/L_1=5,0$ e $\eta=0,0$.

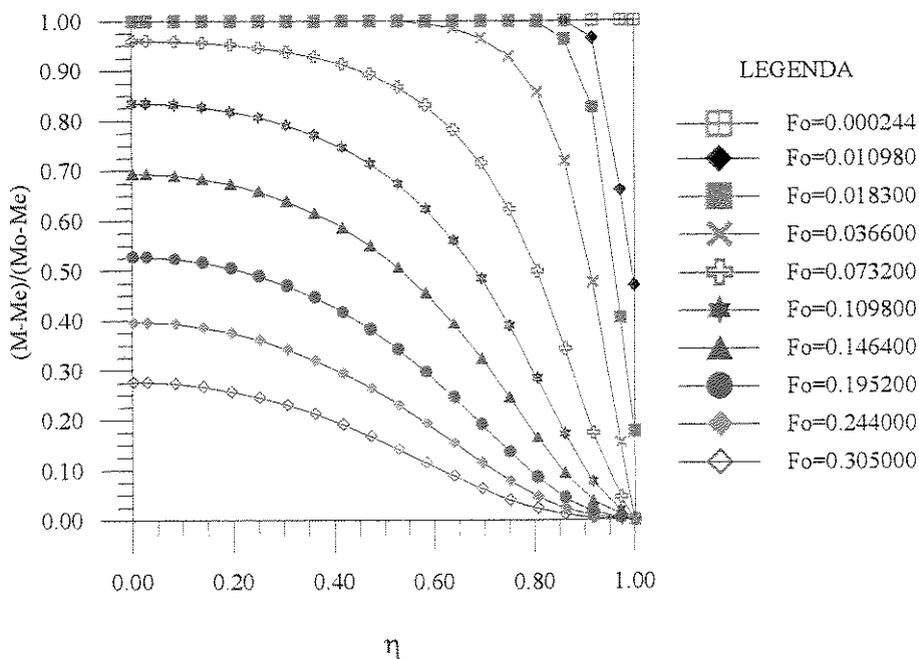


Figura 4.26 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para vários Fo e para $L_2/L_1=5,0$ e $\xi=1,0$.

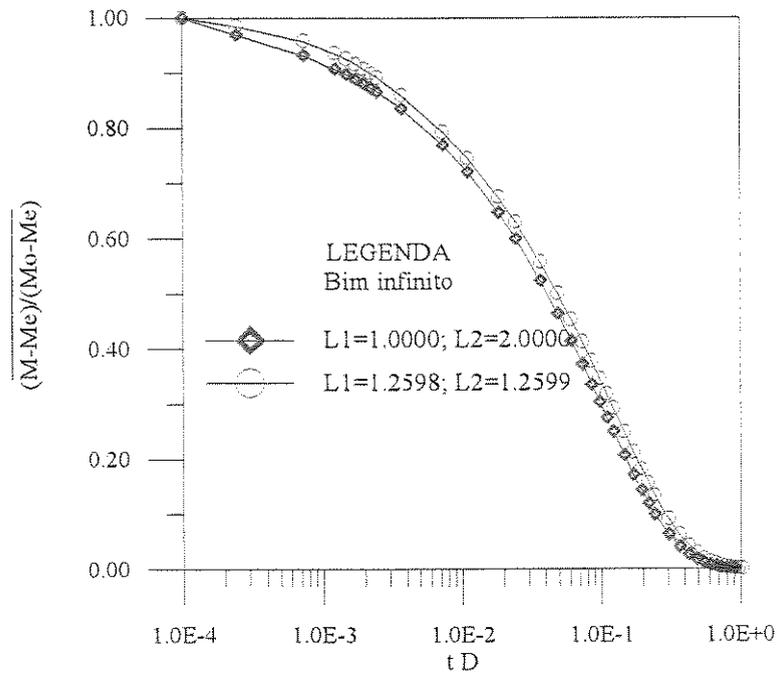


Figura 4.27 - Comparação entre os teores de umidade em função do tempo de um elipsóide e da correspondente esfera de volume equivalente

4.2.3 - Resultados do modelo II

A validação do modelo II foi verificada por comparação dos resultados numéricos com os analíticos, obtidos da solução do problema de difusão em esferas com número de Biot finito, em particular $Bi=1,0$, reportada por Luikov (1968). A escolha do valor do número de $Bi=1,0$ foi feita em virtude de que este valor está compreendido aproximadamente no ponto médio do intervalo de valores do número de Biot onde seu efeito é relevante. A Figura 4.28 apresenta os teores de umidade analítico e numérico, como função da coordenada radial, para vários números de Fourier. É evidente a concordância dos resultados.

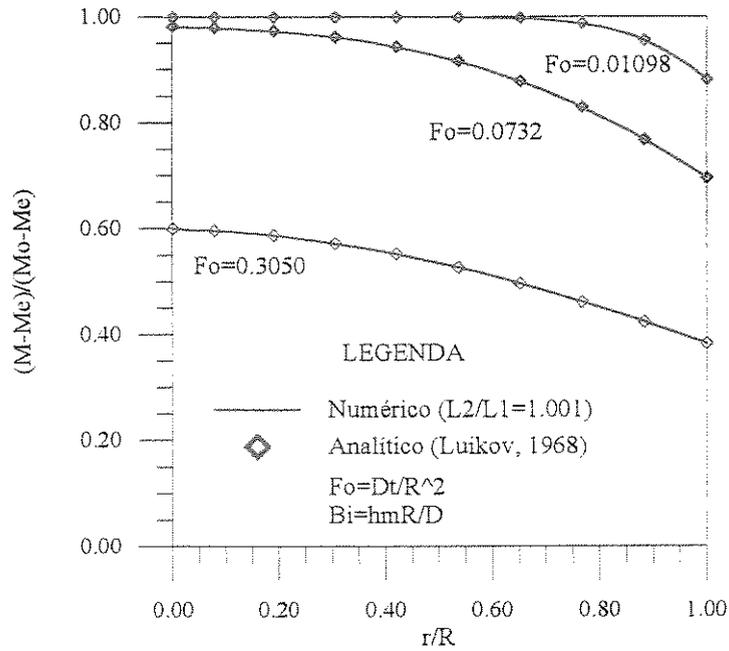


Figura 4.28 - Comparação entre os teores de umidade no interior de uma esfera obtidos pelos métodos analítico (Luikov, 1968) e numérico, proposto pelo autor, para $Bi=1,0$

A Figura 4.29 apresenta uma comparação entre os teores de umidade médios, das soluções analítica e numérica. Os resultados são praticamente coincidentes.

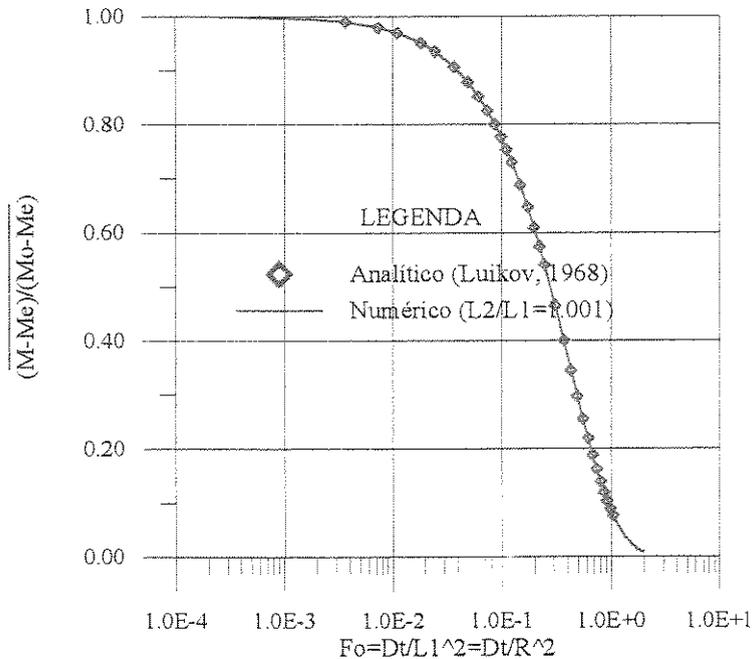
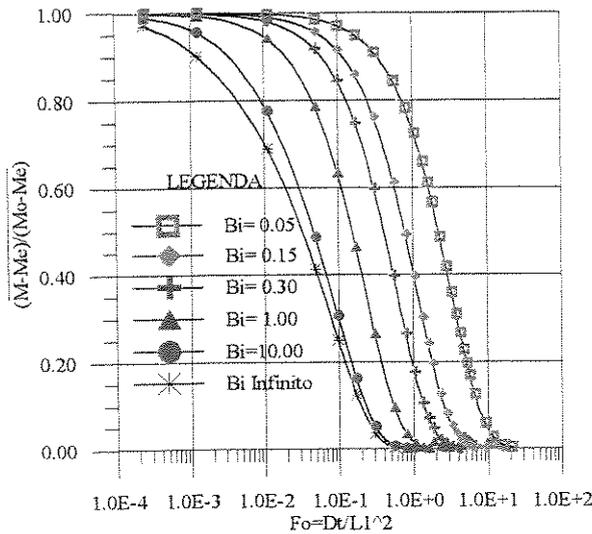
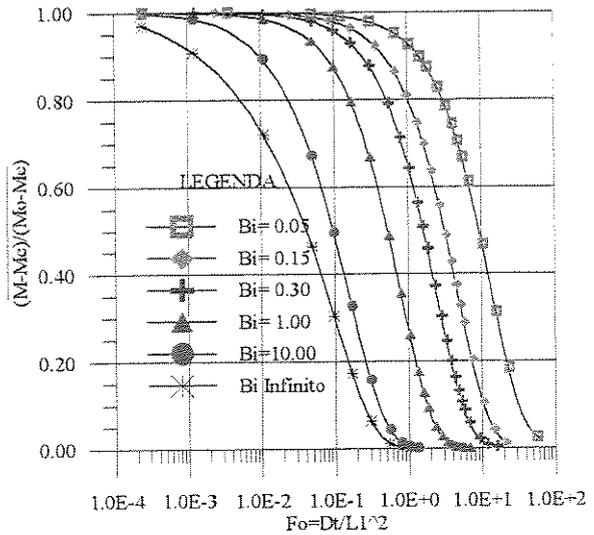


Figura 4.29 - Comparação entre os teores de umidade médios obtidos pelos métodos analítico (Luikov, 1968) e numérico, proposto pelo autor, para vários Fo e $Bi=1,0$

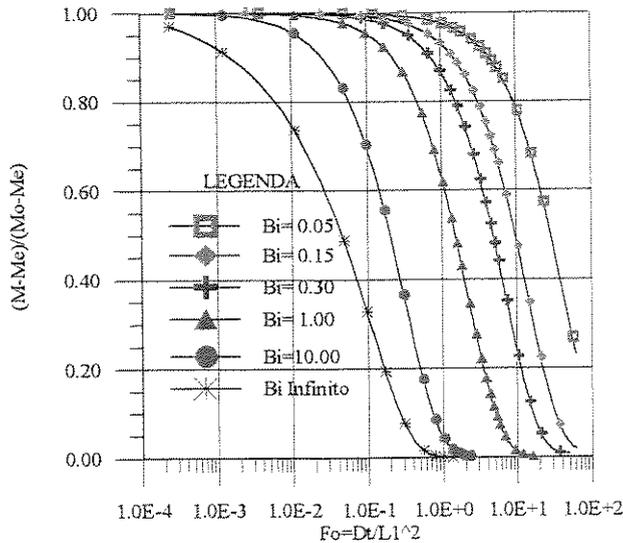
Soluções numéricas da equação de difusão de massa para um sólido esferoidal prolato foram determinadas para vários valores dos parâmetros de entrada. A análise desses resultados é mostrada a seguir. As Figuras 4.30a - c, ilustram o efeito do Fo na cinética de secagem do sólido para valores fixos da razão de aspecto e diversos valores do número de Biot.



(a) $L_2/L_1 = 1,1$



(b) $L_2/L_1 = 2,0$



(c) $L_2/L_1 = 5,0$

Figura 4.30 - Teor de umidade médio de um esferóide prolato como função do número de Fourier e vários números de Biot para três razões de aspecto

As Figuras 4.31a - c, mostram o efeito do aumento do Fourier e do Biot, no teor de umidade no centro do esferoide prolato, para três razões de aspecto, $L_2/L_1=1,1$; 2,0 e 5,0, respectivamente. As Figuras 4.32a - c, ilustram o mesmo efeito no ponto focal destes sólidos.

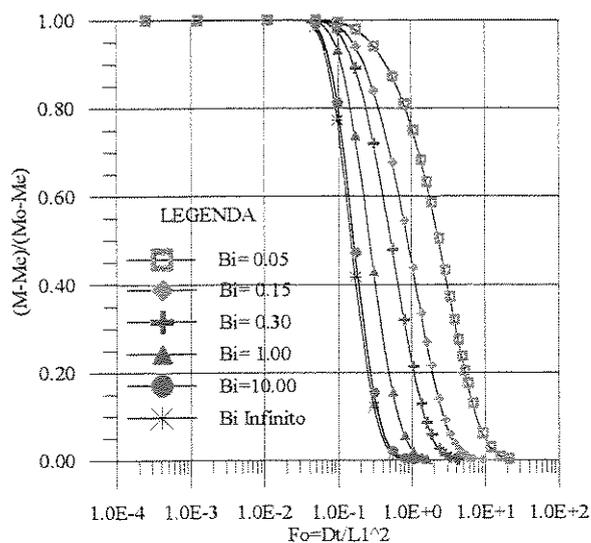
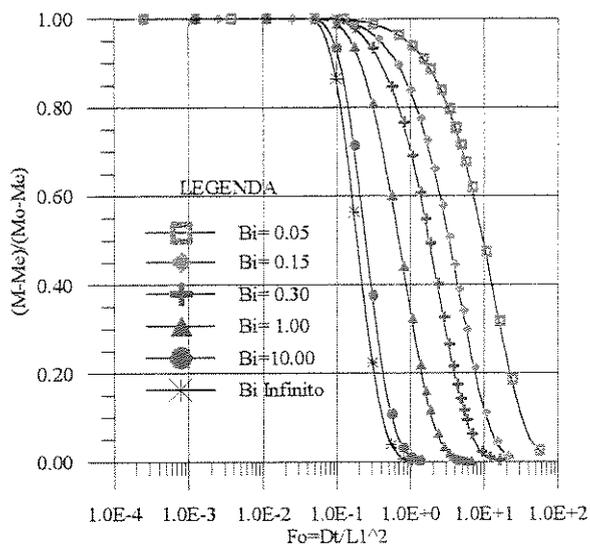
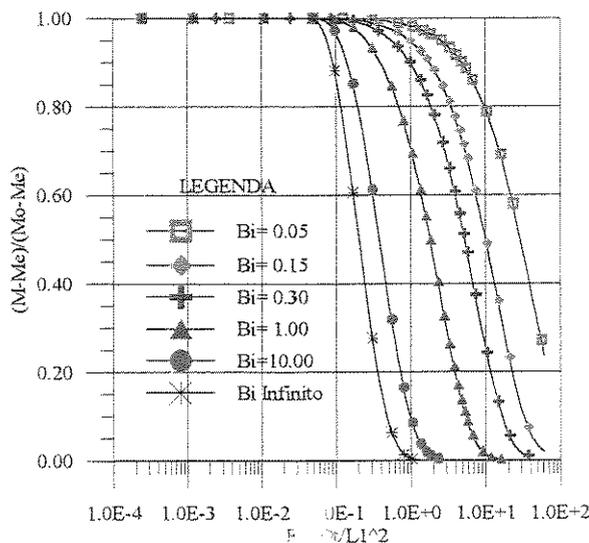
(a) $L_2/L_1=1,1$ (b) $L_2/L_1=2,0$ (c) $L_2/L_1=5,0$

Figura 4.31 - Teor de umidade no centro de um esferoide prolato sólido como função do número de Fourier e vários números de Biot para três razões de aspecto

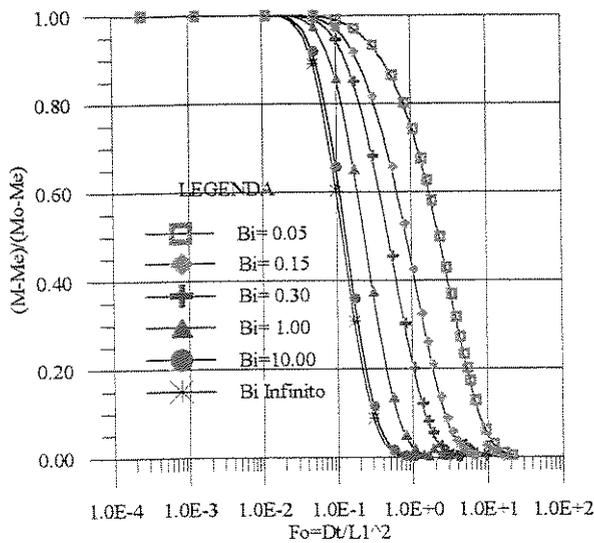
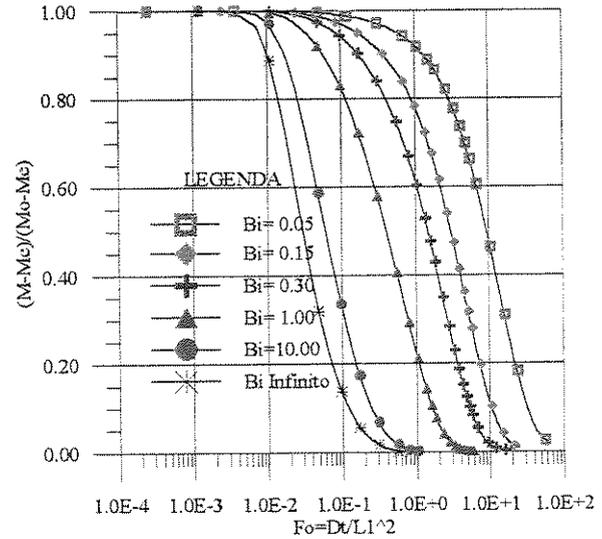
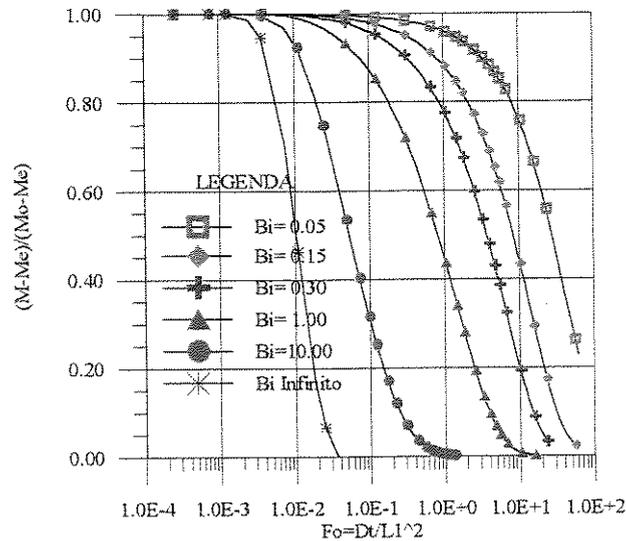
(a) $L_2/L_1 = 1,1$ (b) $L_2/L_1 = 2,0$ (c) $L_2/L_1 = 5,0$

Figure 4.32 - Teor de umidade no ponto focal de um esferóide prolato sólido como função do número de Fourier e vários números de Biot

Na Figura 4.33 é evidenciada a diferença entre os teores de umidade no centro e no ponto focal de vários esferóides prolatos, para um determinado valor do número de Biot. Como era

esperado, esta diferença é mais acentuada em corpos com razão de aspecto mais elevada. Este comportamento é verificado para qualquer número de Biot.

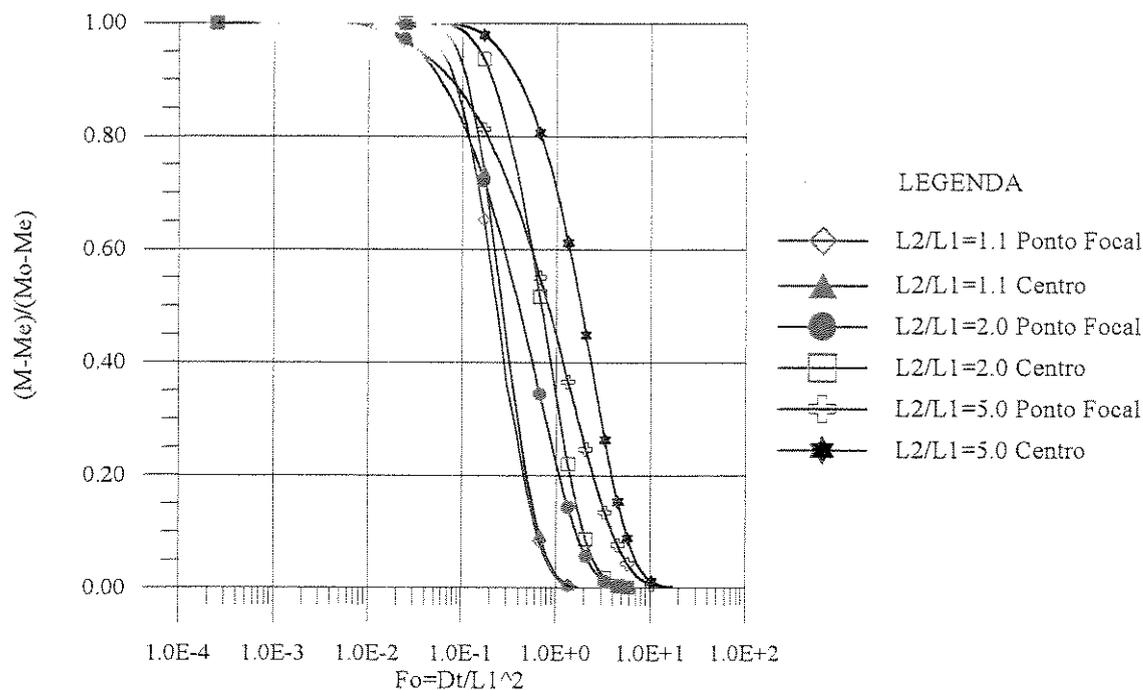


Figura 4.33 - Diferença entre os teores de umidade no ponto focal e no centro para vários esferóides prolatos como função de Fo para Bi=1,0

As distribuições do teor de umidade para um esferóide prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$, em função das coordenadas ξ e η , para $Bi=1,0$, estão ilustradas nas Figuras 4.34 e 4.35, respectivamente. Contudo, é observado que desta feita, a dependência do teor de umidade com a coordenada angular é levemente mais forte que a sua dependência com a coordenada radial. Este efeito é mais acentuado com o crescimento de L_2/L_1 .

O mapeamento de um esferóide prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$ e $Bi=1,0$, para três números de Fourier, é apresentado nas Figuras 4.36a - c. Como pode-se esperar, para um número de Biot baixo, a distribuição de umidade se dá numa faixa estreita para cada Fo, apresentando maior taxa de secagem nas pontas.

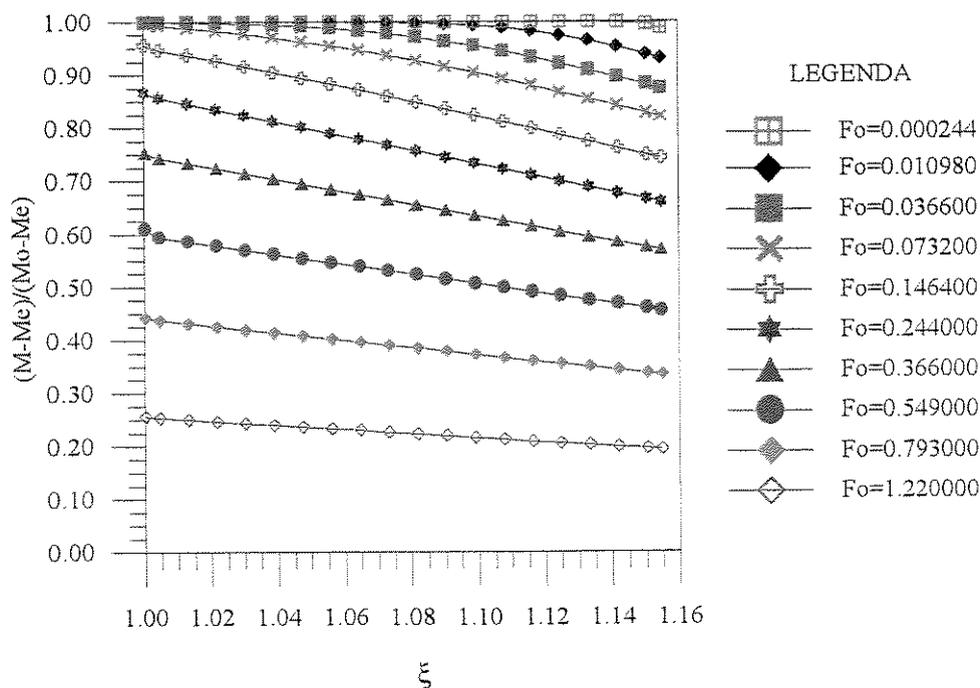


Figura 4.34- Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial para $Bi=1,0$, vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $\eta=0,0$.

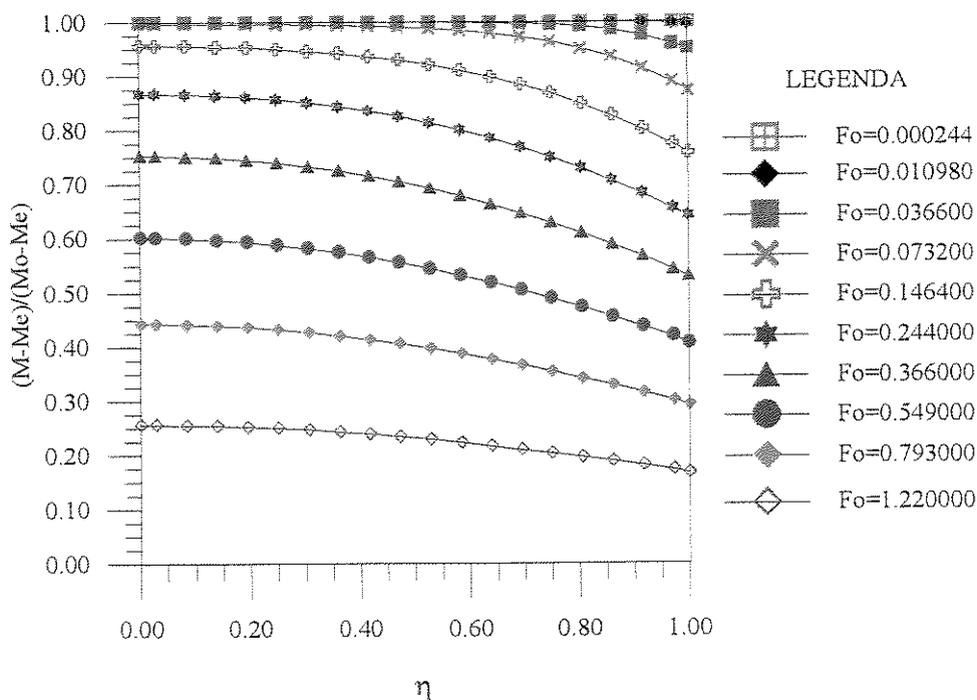


Figura 4.35 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular, para $Bi=1,0$, vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $\xi=1,0$.

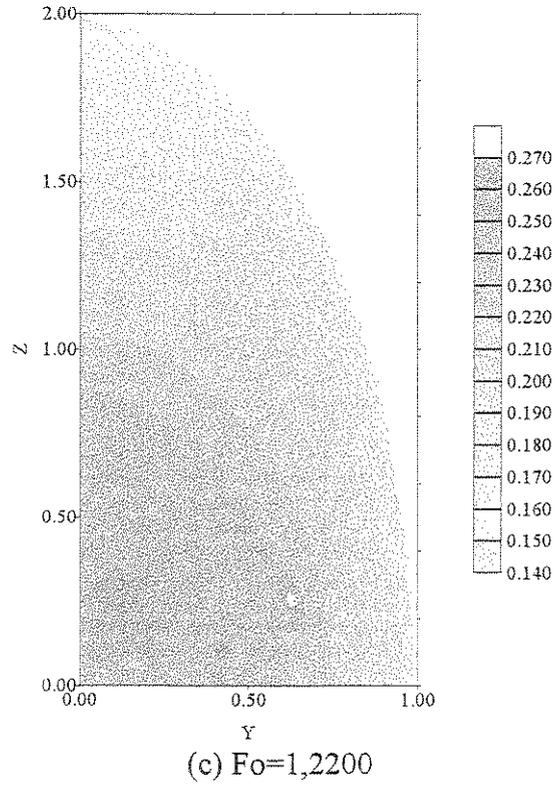
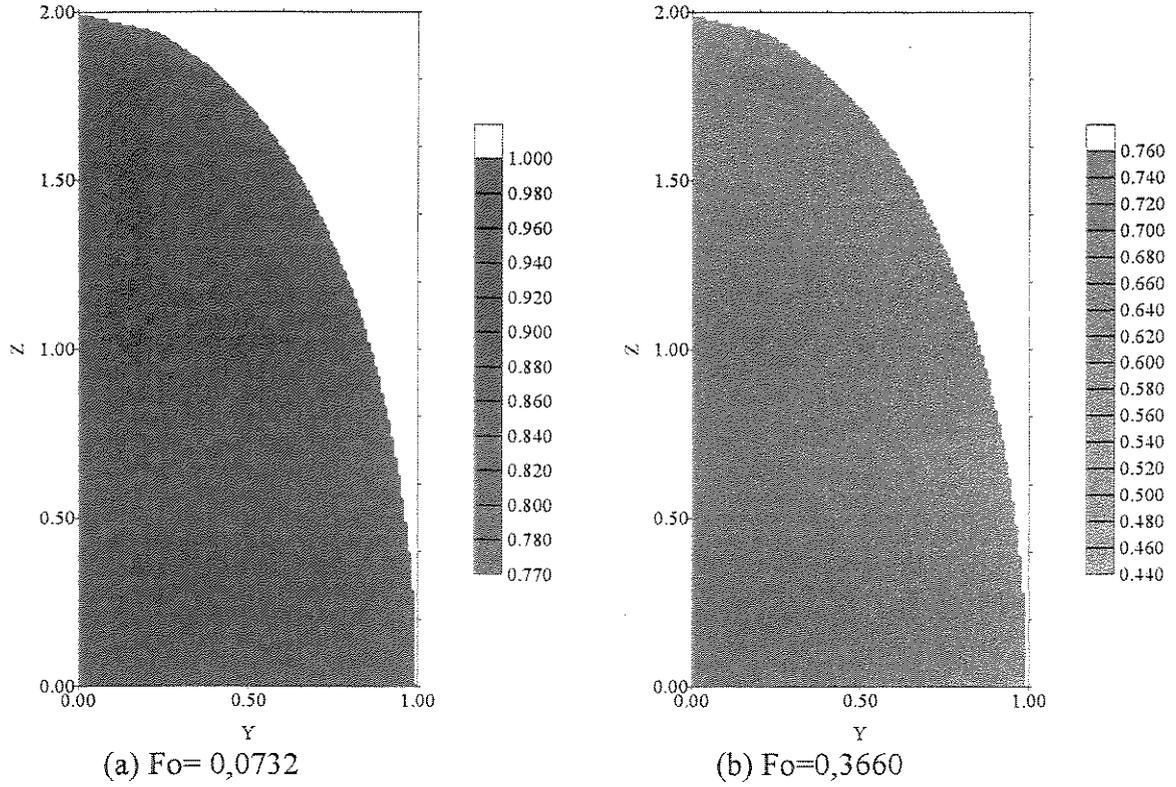


Figura 4.36 - A forma do elipsóide e os pontos de iso-concentração para $Bi=1,0$ e $Fo=Dt/L1^2= 0,0732, 0,3660$ e $1,2200$.

As Figuras 4.37 e 4.38, ilustram a dependência do teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=2,0$, com as coordenadas radial e angular, respectivamente, para vários números de Biot e $Fo=0,1464$.

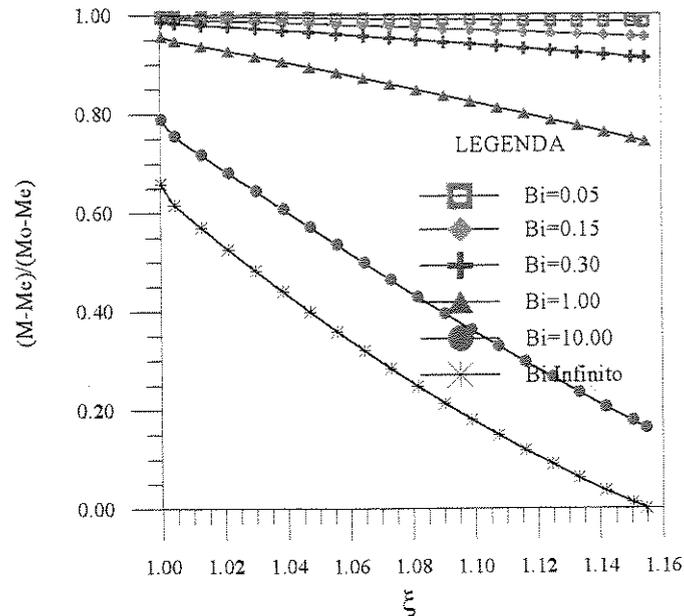


Figura 4.37 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada radial para $Fo=Dt/L_1^2=0,1464$, vários Bi , $L_2/L_1=2,0$ e $\eta=0,0$.

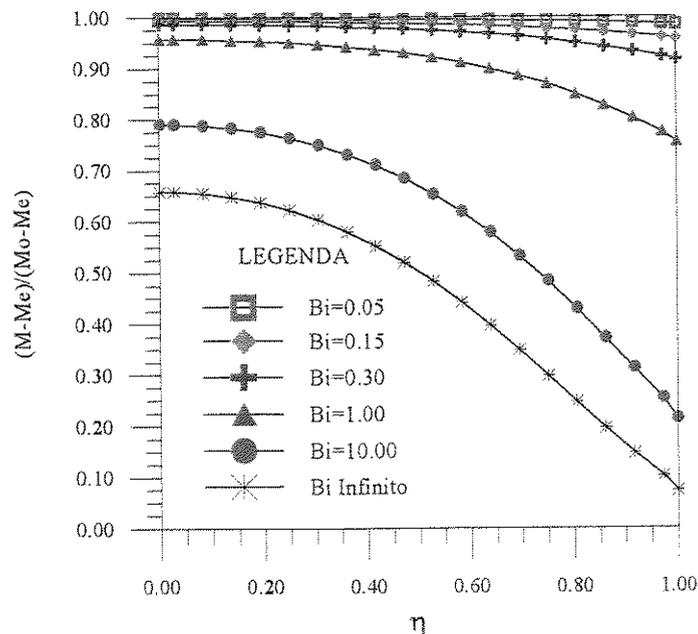


Figura 4.38 - Distribuição da razão de umidade no interior de um esferóide prolato em função da coordenada angular para $Fo=Dt/L_1^2=0,1464$, vários Bi , $L_2/L_1=2,0$ e $\xi=1,0$.

A análise das figuras evidencia que para $Bi \leq 0,05$, o modelo concentrado pode ser usado. Já para uma esfera, o autor recomenda que os modelos concentrados podem ser usados desde que $Bi \leq 0,005$. Ambos os resultados foram verificados pela comparação dos resultados numéricos e analíticos obtidos a partir de uma equação similar à Equação 2.2, com $K_1 = h_m S/V$ (Schneider, 1985) conforme ilustram as Figuras 4.39a - b.

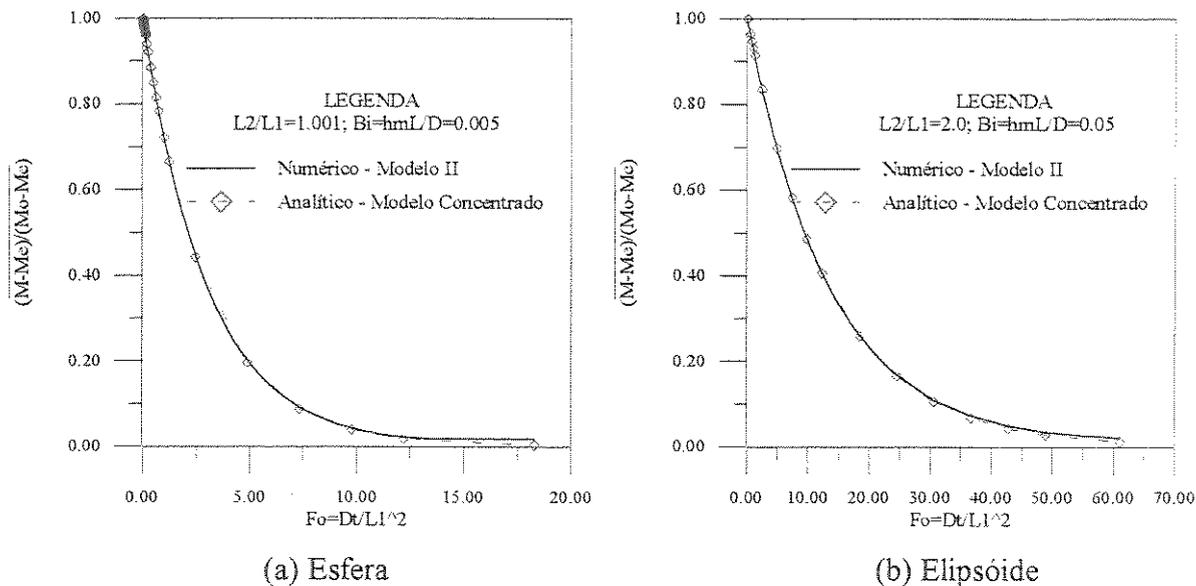


Figura 4.39 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos pelo modelo II e pelo modelo concentrado reportado por Schneider (1985)

4.2.4 - Resultados do modelo III

Um programa computacional foi implementado para simular a transferência simultânea de umidade e encolhimento, durante a secagem de sólidos esferoidais prolatos. Como aplicação foi selecionado um sólido com razão de aspecto $L_2/L_1 = 1,5$ e $L_1 = 1,0$. O encolhimento é proporcional nos dois eixos como assumido na Equação 3.115. A Figura 4.40 apresenta a forma do material durante a secagem, para vários números de Fourier, considerando-se o coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}$ fixo e igual a 0,3.

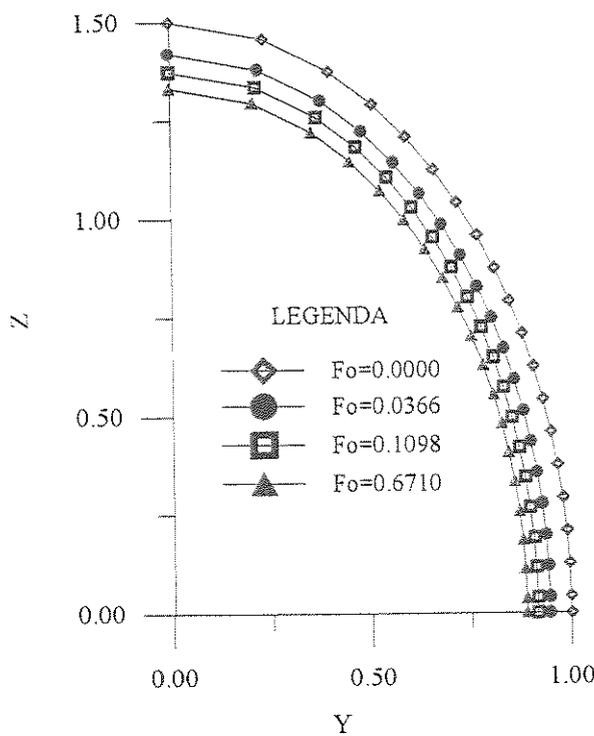


Figura 4.40 - Evolução da forma do material durante a secagem de um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, $\bar{\beta}=0,3$ e Bi infinito.

A Figura 4.41 ilustra a malha numérica utilizada na formulação, para dois números de Fourier. Este tipo de malha é conveniente por se adequar à forma do corpo.

A Figura 4.42 apresenta o teor de umidade médio em função do número de Fourier, para três valores do coeficiente de encolhimento, 0,0; 0,3 e 0,6. É evidente a significativa influência do encolhimento na taxa de remoção de umidade. Observa-se que o crescimento do coeficiente de encolhimento produz secagem mais rápida. Este mesmo efeito está ilustrado nas Figuras 4.43a - b, onde apresenta-se a distribuição do teor de umidade no interior do sólido, para $Fo=0,1098$, com $\bar{\beta}=0,0$ (sem encolhimento) e $\bar{\beta}=0,3$.

A Figura 4.44 ilustra o efeito das dimensões do corpo na cinética de secagem de elipsóides de revolução com razões de aspecto $L_2/L_1=1,1$; 1,5 e 5,0.

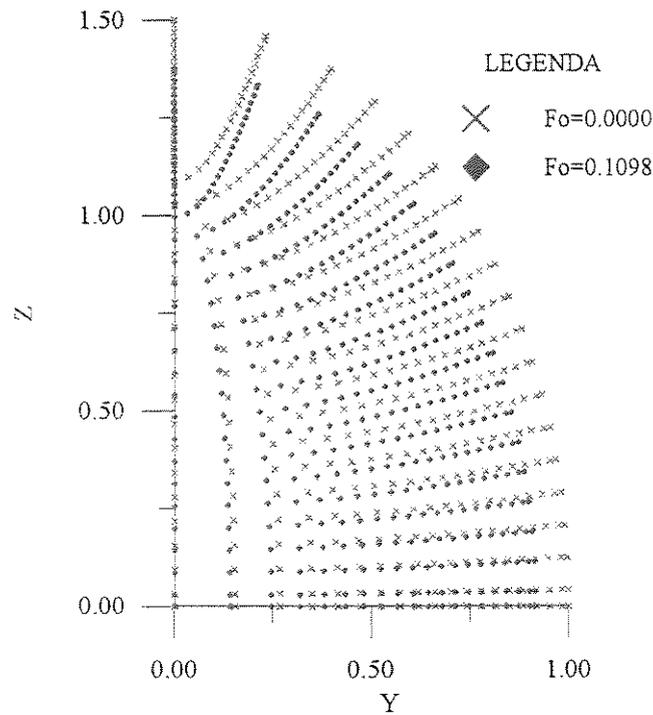


Figura 4.41 - Evolução da malha numérica durante o encolhimento de um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, $\bar{\beta}=0,3$ e Bi infinito.

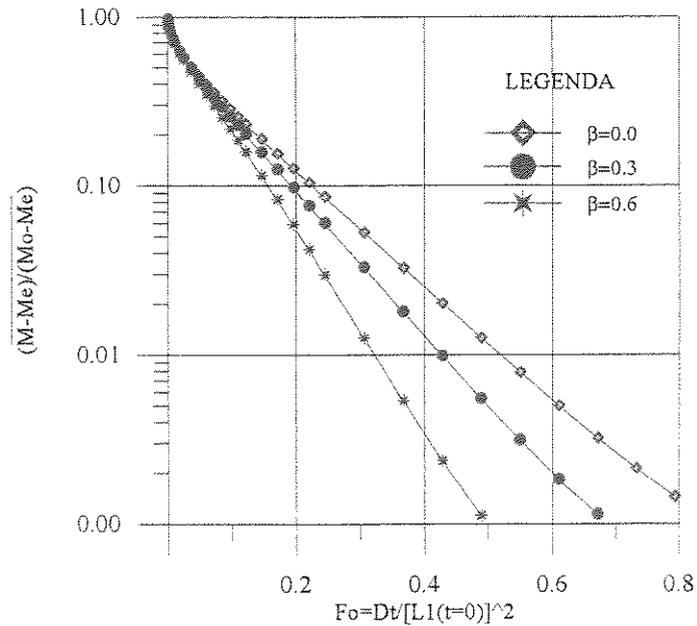


Figura 4.42 - Efeito do coeficiente de encolhimento na cinética de secagem de um sólido esferoidal com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$, vários coeficientes de encolhimento e Bi infinito

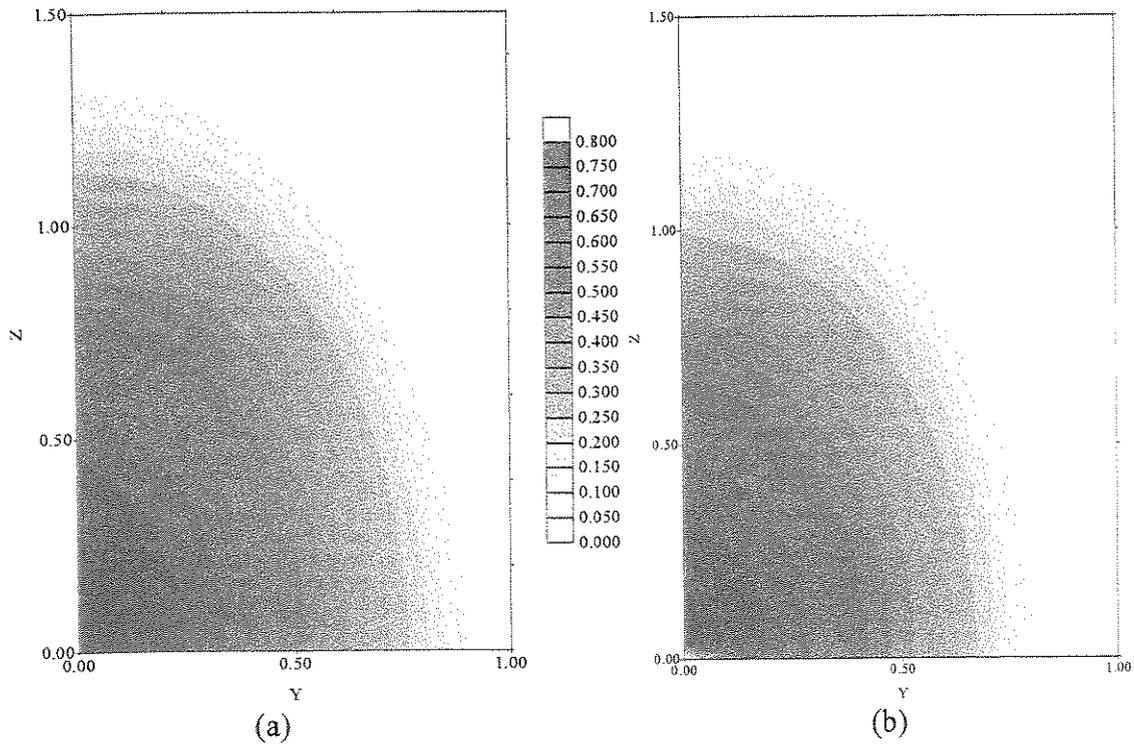


Figura 4.43 - Distribuição do teor de umidade no interior de um esferóide prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ para (a) $\bar{\beta} = 0,0$ e (b) $\bar{\beta} = 0,3$, em $Fo=0,1098$, Bi infinito

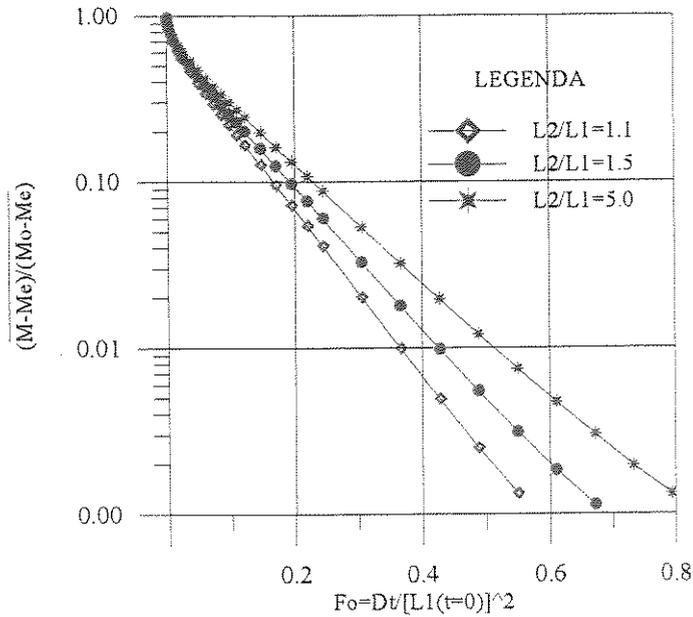


Figura 4.44 - Teor de umidade em função do número de Fourier para vários esferóides prolatos com $L_2/L_1=1,1; 1,5$ e $5,0$, para $\bar{\beta} = 0,3$ e Bi infinito.

Na Figura 4.45 é apresentado o encolhimento volumétrico em função do número de Fourier, para três valores do coeficiente de encolhimento 0,0; 0,3 e 0,6. A Figura 4.46 ilustra a contração da área do corpo durante o fenômeno de difusão para as mesmas condições. O volume do sólido variou 0%, 30% e 60%, respectivamente, e sua área se contraiu 0%, 21% e 46%.

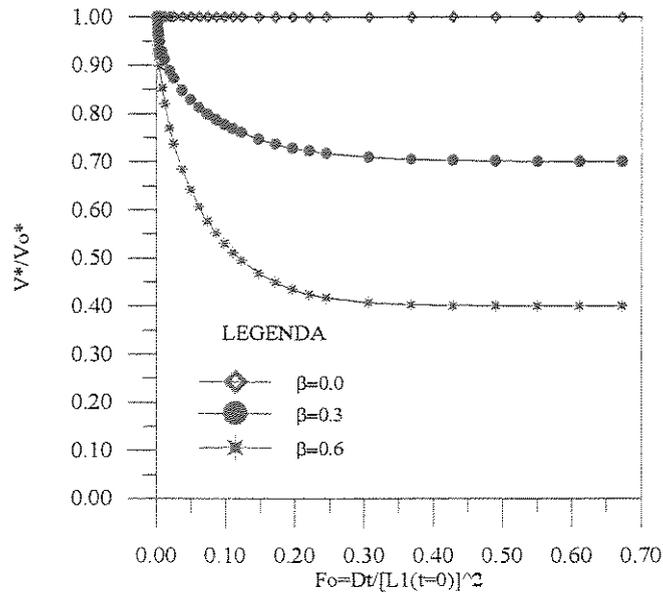


Figura 4.45 - Cinética de encolhimento volumar de um elipsóide de revolução com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,0; 0,3$ e $0,6$, Bi infinito

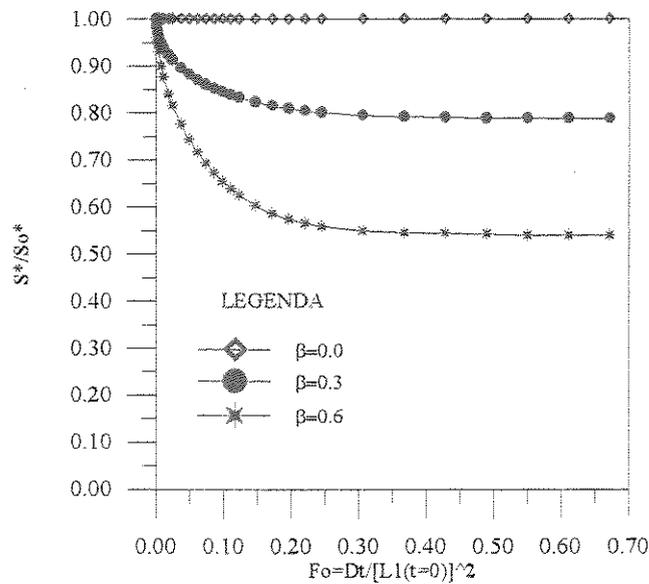


Figura 4.46 - Cinética de encolhimento superficial de um elipsóide de revolução com razão de aspecto $L_2/L_1=1,5$ e $\bar{\beta}=0,0; 0,3$ e $0,6$, Bi infinito.

4.2.5 - Resultados do modelo V

O modelo de secagem intermitente foi usado para determinar o efeito do aumento do tempo de têmpera e número de passes na taxa de difusão de sólidos esferoidais, para o caso de Bi infinito. Este estudo é muito importante no aumento da eficiência energética de um secador, redução do custo de secadores e na diminuição da geração de tensões internas no material, que se originam nos altos gradientes de umidade.

A têmpera completa foi obtida para os sólidos com razão de aspecto $L_2/L_1=1,1$; 2,0 e 5,0, admitindo que o início da têmpera ocorre em $Fo=Dt/L_1^2=0,01098$. Para o caso $L_2/L_1=1,1$, o número de Fourier para atingir uma têmpera completa foi $Fo=0,42700$, enquanto que para $L_2/L_1=2,0$ foi 0,73200 e $L_2/L_1=5,0$, 0,79300.

Na Tabela 4.3 são apresentados alguns resultados numéricos do teor de umidade médio de três elipsóides no final do processo de secagem, para quatro períodos de têmpera. O número de Fourier excluindo o Fourier de têmpera, corresponde ao período efetivo de secagem.

Tabela 4.3- Teor de umidade médio final, iniciando a têmpera em $Fo=0,01098$

Fo Fim da têmpera	\bar{M}^*			Fo (Excluindo Fourier de têmpera)
	$L_2/L_1=1.1$	$L_2/L_1=2.0$	$L_2/L_1=5.0$	
0.01098	2.114E-3	6.799E-3	10.413E-3	0.61000
0.05490	2.697E-3	8.249E-3	12.496E-3	0.56608
0.09760	3.781E-3	10.699E-3	15.737E-3	0.52338
0.24400	14.074E-3	29.669E-3	38.935E-3	0.37698

Na Figura 4.47 apresenta-se o comportamento radial do teor de umidade do sólido durante o período de têmpera, para um sólido com $L_2/L_1=1,1$, em vários Fo e $\eta=0,0$. Neste caso, a têmpera teve início em $Fo=0,02440$.

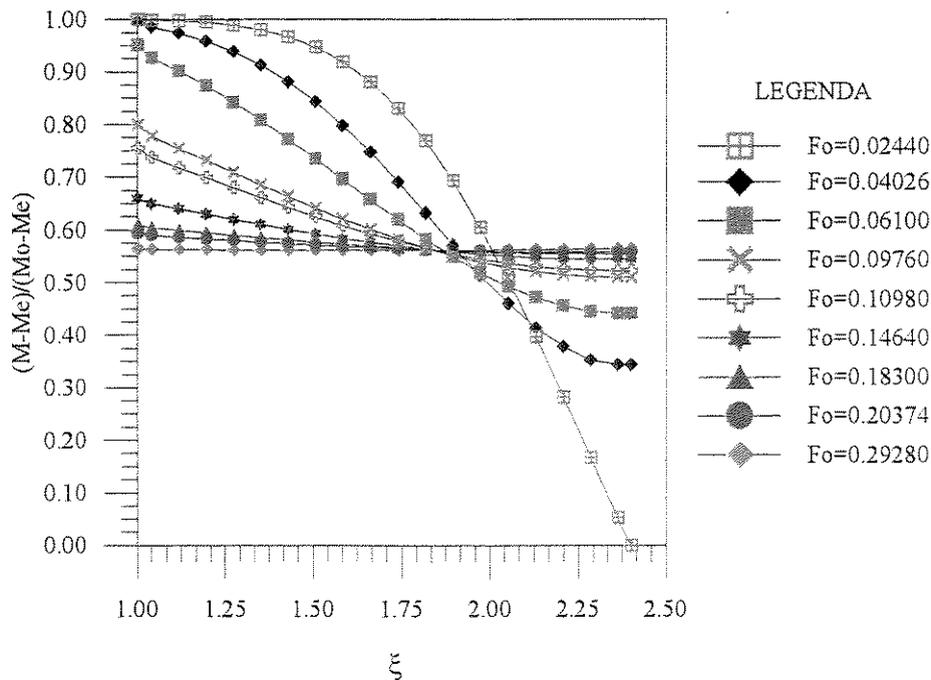


Figura 4.47 - Distribuição radial do teor de umidade dentro de um esferóide prolatado durante o período de têmpera para diferentes Fo , em $\eta=0,0$. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$.

As Figuras 4.48-4.50 ilustram o efeito do Fourier de têmpera na taxa de secagem de sólidos com razões de aspecto $L_2/L_1=1,1; 2,0$ e $5,0$, respectivamente. Em todos os casos, tem-se um único período de repouso, que inicia-se em $Fo=0,01098$. Comparando-se os resultados com a curva de secagem contínua, é observado que a taxa de secagem aumenta com o aumento do tempo de repouso. Isto é esperado, em virtude de ter-se, em tempos de repouso maiores, uma maior uniformidade do teor de umidade no interior do sólido, e portanto no reinício do processo de secagem, tem-se um maior gradiente do teor de umidade na superfície do sólido,.

Comparando as Figuras 4.48 - 4.50, para os mesmos casos com relação ao Fourier de têmpera, a taxa de secagem varia levemente, para cada caso. As curvas mostram que o teor de umidade médio no final do processo de secagem foi aproximadamente igual em todos os casos, para uma mesma razão de aspecto. Contudo, aumentando com o aumento da razão de aspecto, como esperado, já que o volume do corpo aumenta.

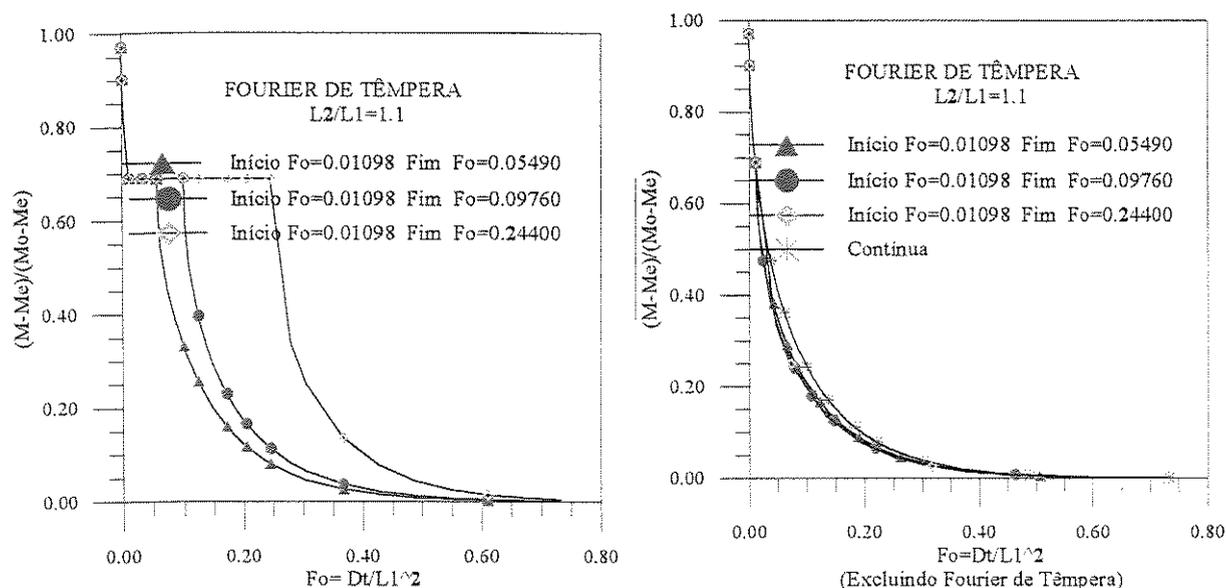


Figura 4.48- Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 1,1, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$.

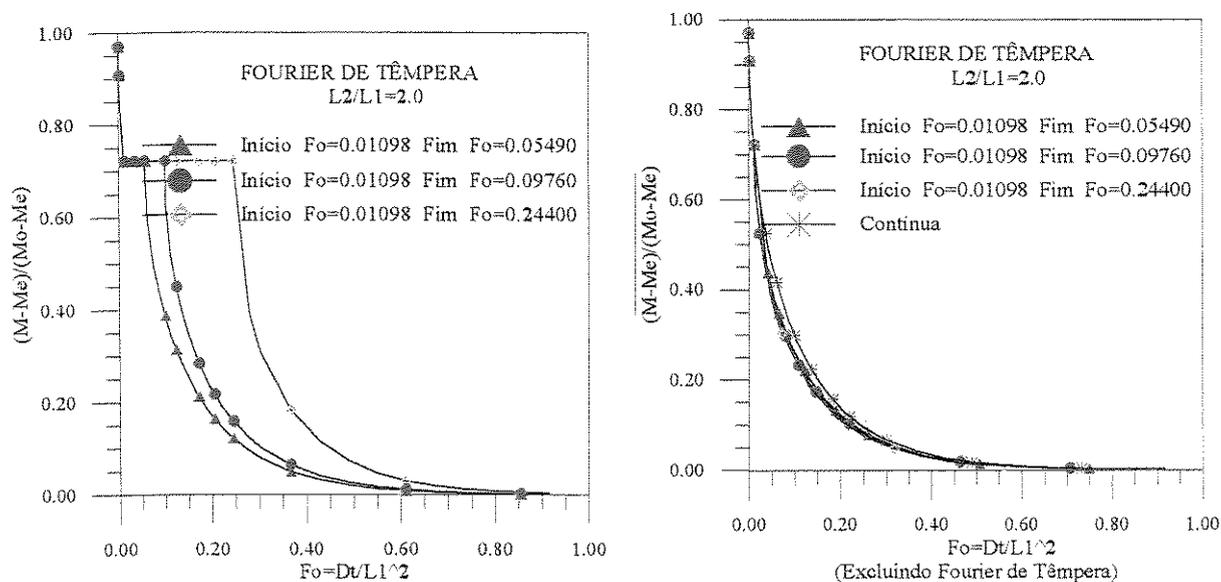


Figura 4.49 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 2,0, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$.

Nas Figuras 4.51-4.52 apresenta-se o teor de umidade médio como função do número de Fourier para os casos $L_2/L_1=1,1$ e $2,0$. Neste caso, o início do período de repouso é $Fo=0,02440$.

Verifica-se que existe um aumento da taxa de secagem, em comparação com os resultados plotados na Figura 4.48-4.49, onde o $Fo=0,01098$. Este efeito é mais acentuado para teores de umidade variando entre 0,10 e 0,40. Em todos os casos, a taxa de secagem supera a obtida numa secagem contínua.

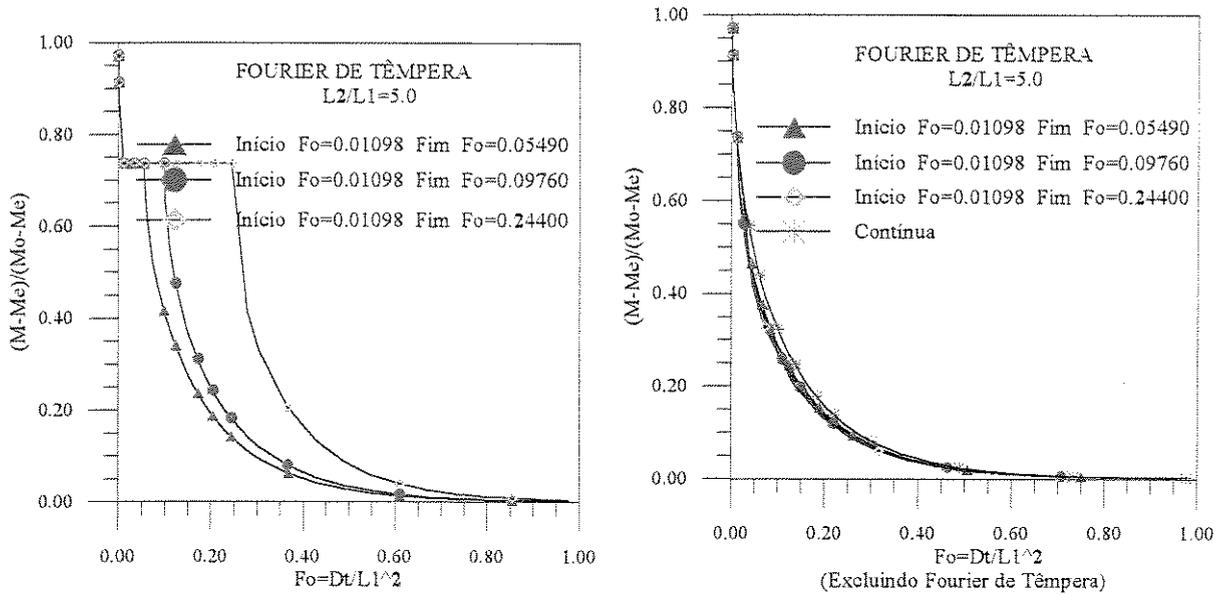


Figura 4.50 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 5,0, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,01098$

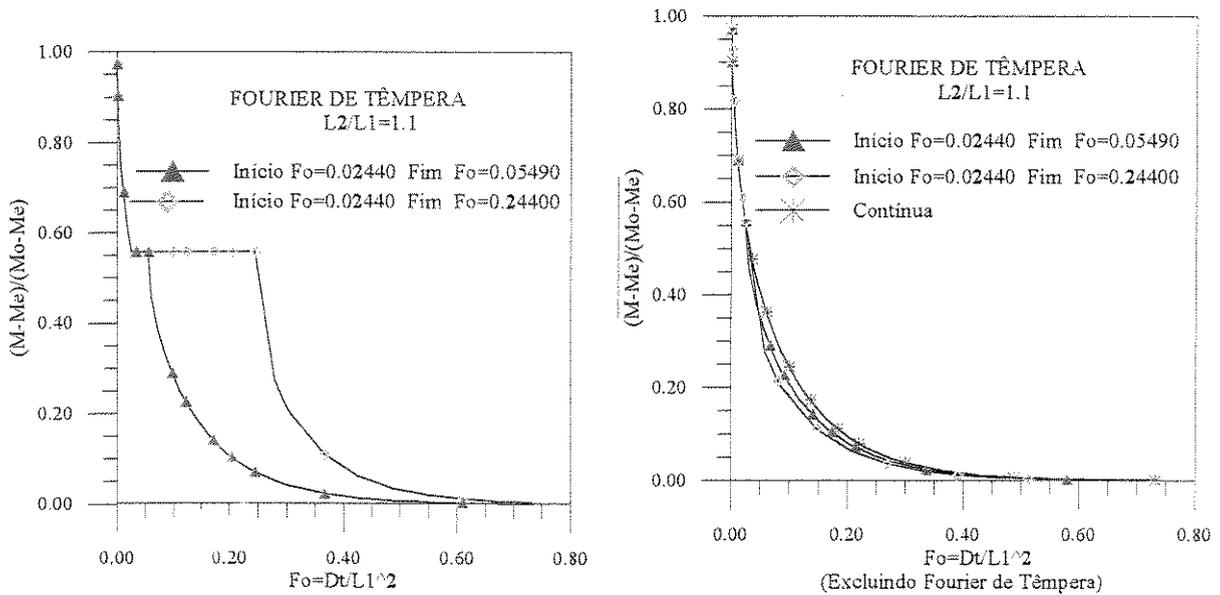


Figura 4.51 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 1,1, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$.

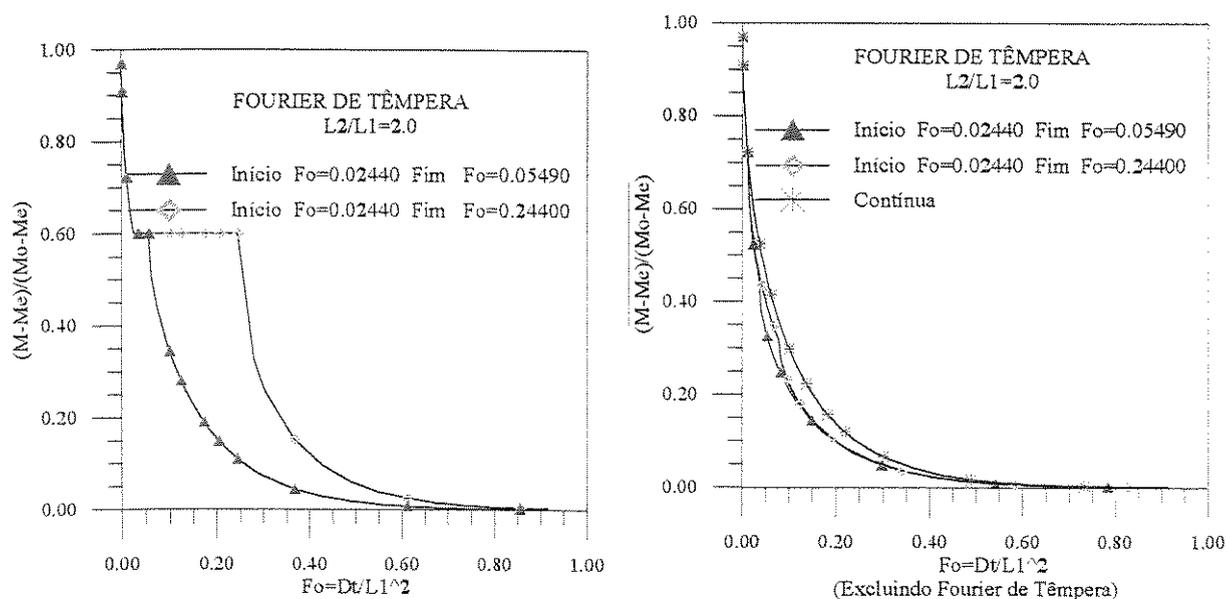


Figura 4.52- Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 2,0, p/ secagem com um passe. O período de têmpera inicia em $Fo=0,02440$.

As Figuras 4.53-4.54 mostram o efeito do aumento do Fourier de têmpera e o uso de dois períodos de repouso, na taxa de secagem de sólidos com geometria elipsoidal com razões de aspecto $L_2/L_1=1,1$ e 2,0. Examinando as curvas, observa-se que existe, em todos os casos, um aumento na taxa de secagem em compara o com a secagem contínua. Com o aumento do Fourier de têmpera, tanto a quantidade de umidade removida quanto a taxa de secagem aumentaram. Portanto, o Fourier requerido para uma secagem completa do produto   menor. Observa-se ainda que o efeito na varia o da taxa de secagem depois da têmpera é praticamente nulo quando o teor de umidade   menor que 0.15.

As Figuras 4.55 -4.56 ilustram o efeito do uso da secagem em multipasses na taxa de secagem para os casos $L_2/L_1=1,1$ e 2,0, como fun o do número de Fourier. A análise das curvas evidencia que a secagem em multipasses aumenta a taxa de secagem, contudo, o uso de dois períodos de repouso apresentou melhores resultados em compara o aos obtidos para os demais casos estudados.

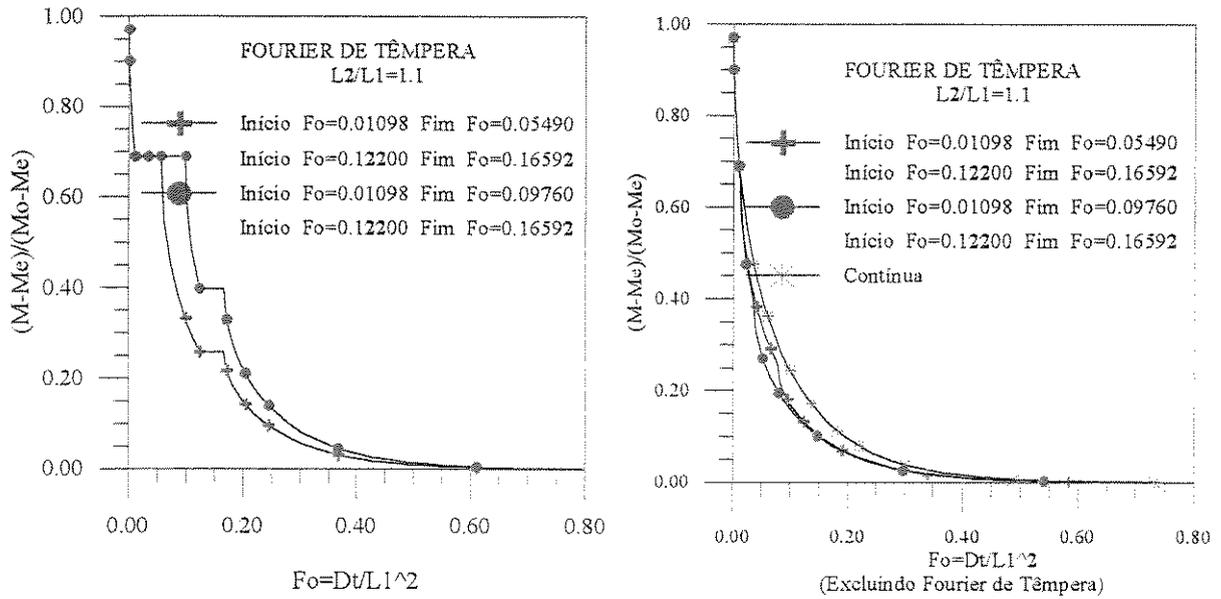


Figura 4.53 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 1,1, p/ secagem com dois passes

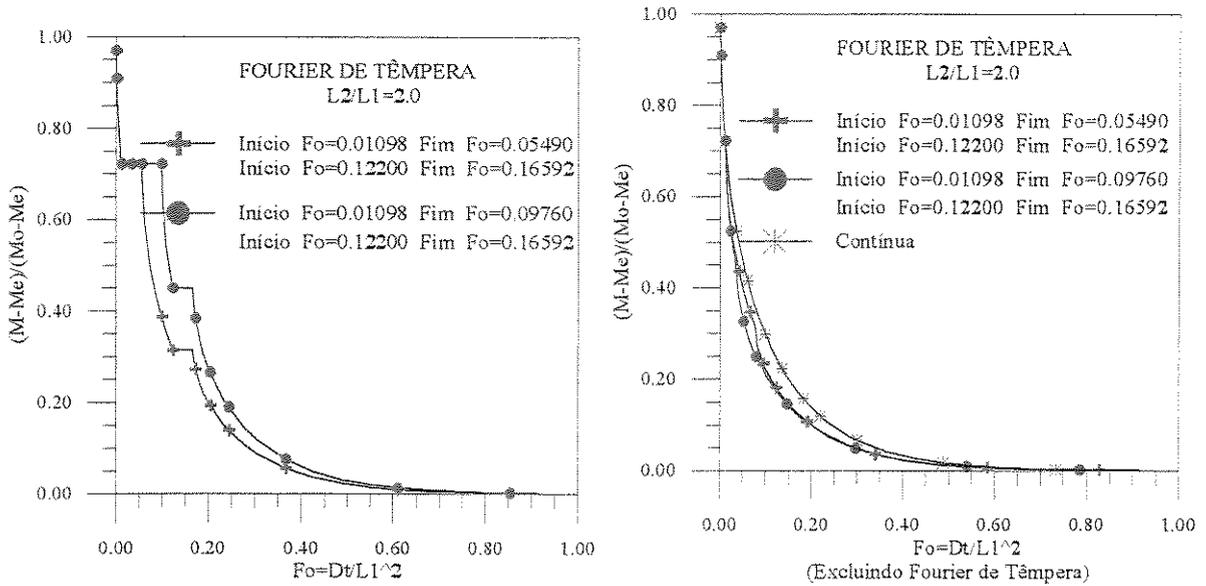


Figura 4.54- Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 2,0, p/ secagem com dois passes

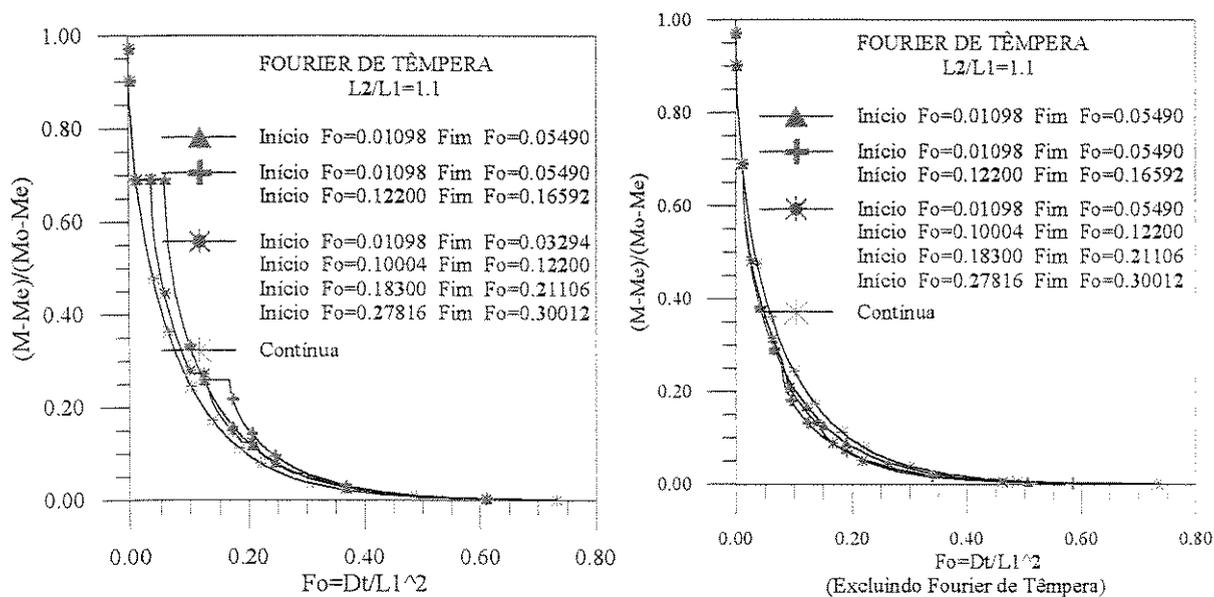


Figura 4.55 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 1,1, p/ secagem com vários passes

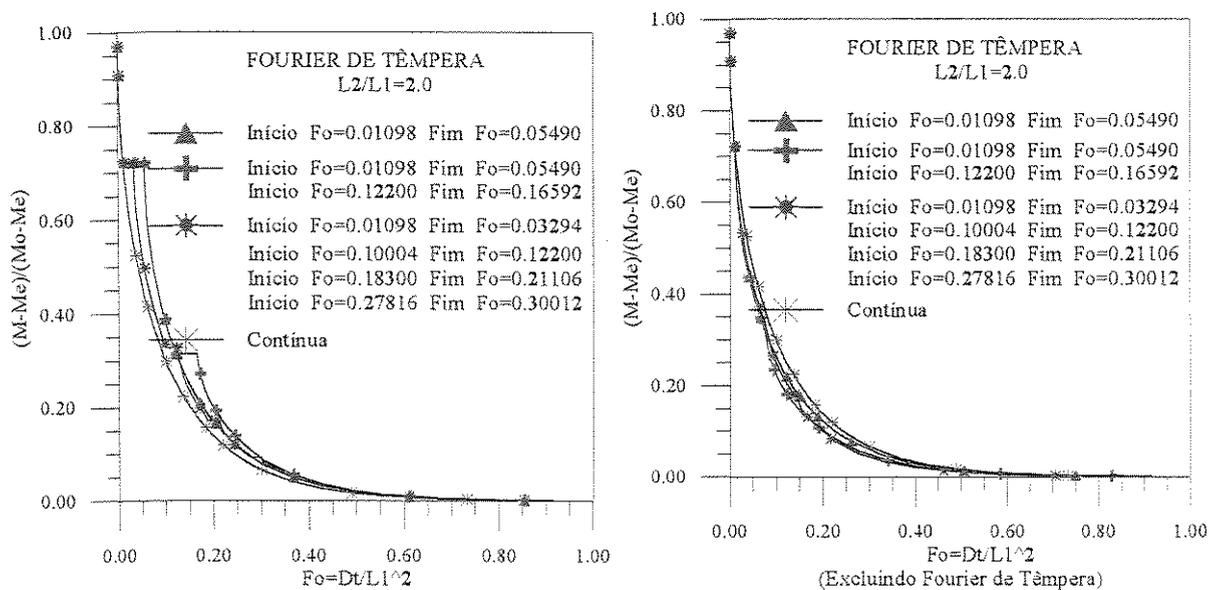


Figura 4.56 - Efeito do Fourier de têmpera na cinética de difusão de um elipsóide com razão de aspecto 2,0, p/ secagem com vários passes

4.2.6 - Aplicação do modelo VI à secagem de trigo

Para validar os modelos numéricos IV e VI, fez-se um ajuste dos dados numéricos aos dados experimentais do teor de umidade e temperatura de grãos de trigo fornecidos por Fortes et al. (1981c). Por aproximações sucessivas, em acordo com as Equações 3.145-3.146, foram obtidos os coeficientes de difusão e convectivo de transferência de massa na superfície do grão, para o caso selecionado. Os dados iniciais de dimensões e propriedades físicas do trigo, as propriedades físicas do ar e os resultados obtidos do coeficiente de difusão de massa e convectivo de transferência de massa são dados a seguir.

Para o coeficiente de difusão, foi utilizada uma equação proposta por Fioreze (1986), a qual foi ajustada para uma consideração de sólido esférico. Neste caso, tornou-se necessário um ajuste para o modelo aqui considerado, uma vez que neste trabalho, a partícula é considerada elipsoidal. O resultado do ajuste está representado na equação do coeficiente de difusão de massa, pela constante 0,543. As dimensões do trigo e a densidade média do produto úmido foram obtidas de Brooker et al. (1992). As condições do ar de secagem foram: $T_a=87,8^\circ\text{C}$; $UR_a= 5,6 \%$ e $v_a=1,71$ m/s e a temperatura inicial do produto $\theta_p= 26^\circ\text{C}$. O coeficiente de transferência de calor foi determinado assumindo-se o trigo como uma esfera de igual volume do corpo real considerado como elipsóide, de acordo com Fortes et al. (1981c).

* Dimensões e propriedades físicas do trigo e parâmetros de secagem

$$L_2= 0,32760 \text{ cm}; \quad L_1= 0,15748 \text{ cm}; \quad M_o= 0,2110 \text{ (b.s.)}; \quad M_e= 0,0165 \text{ (b.s.)}$$

$$D= 0,543 \bar{M}^{(-2,8554e-5T_a + 1,6432)} \exp[(0,4113T_a - 30,2634) \bar{M} + (-0,022776T_a - 9,7271)] \text{ m}^2/\text{h}$$

$$k_p= 0,1170+0,00113[100 \bar{M}/(1+\bar{M})] \text{ (W/m}^2\text{K)}$$

$$c_p=1,394+0,0409[100 \bar{M}/(1+\bar{M})] \text{ kJ/(kg.K)} \quad c_v=1,919849 \text{ kJ/(kg.K)}$$

$$\rho_p=769,0 \text{ kg/m}^3; \quad \rho_{ps}=1265,0 \text{ kg/m}^3$$

$$h^*_{fg}=2502,2-2,39T_f [1+2,5348\exp(-23,628 \bar{M})] \text{ kJ/kg}$$

$$h_c=129,413 \text{ W/(m}^2\text{K)}; \quad h_m=9,0 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}; \quad \beta_2 = 0,00$$

Os resultados numéricos do teor de umidade e da temperatura no centro de grãos de trigo comparados aos obtidos experimentalmente por Fortes et al. (1981c) são mostrados nas Figuras 4.57-4.58. Como pode ser observado, existe um satisfatório ajuste entre os dados numéricos e experimentais. O erro médio e desvio-padrão obtidos para o teor de umidade foi de $3,98 \cdot 10^{-3}$ (b.s.) e $8,29 \cdot 10^{-4}$ (b.s.), respectivamente. Já para a temperatura no centro dos grãos foi obtido um erro médio de $3,58 \cdot 10^{-2}$ (b.s.) e desvio-padrão de $6,40 \cdot 10^{-3}$ (b.s.).

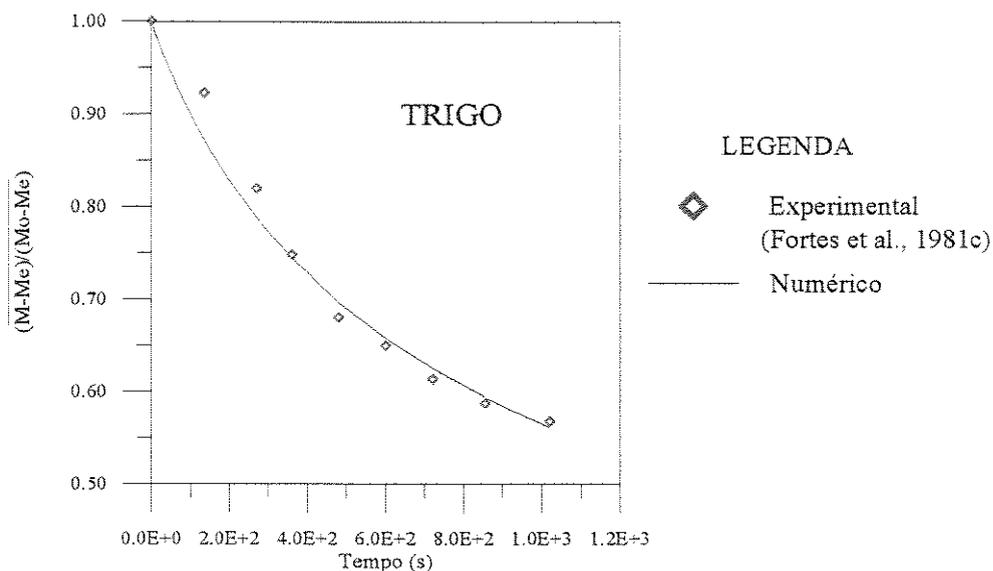


Figura 4.57 - Valores experimentais e preditos do teor de umidade médio de grãos de trigo durante a secagem

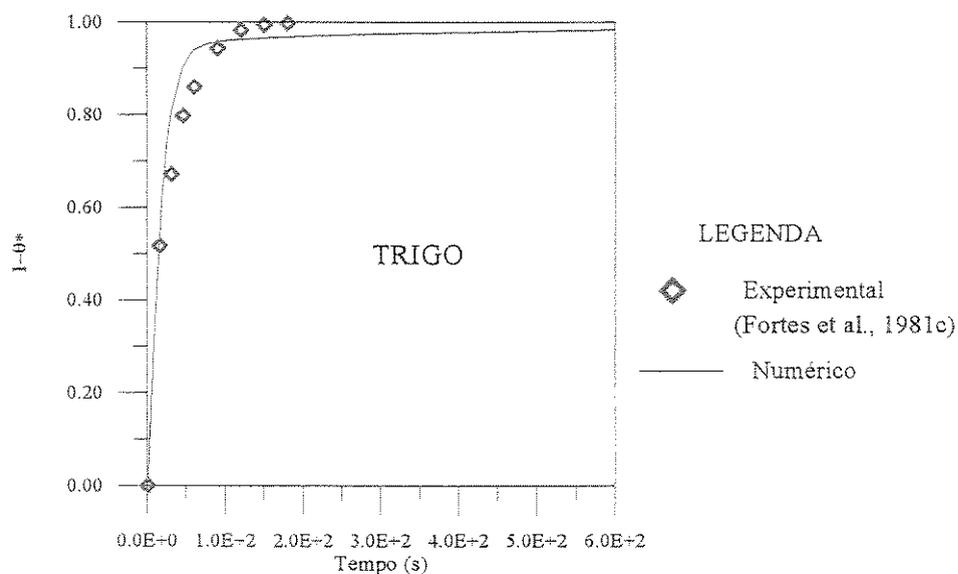


Figura 4.58 - Valores experimentais e preditos da temperatura no centro de grãos de trigo durante a secagem

4.2.7 - Aplicação dos modelos analítico e numérico à secagem de banana

4.2.7.1 - Estimação não-linear dos parâmetros

Para calcular os coeficientes de difusão e de transferência convectiva para a banana, nas diferentes condições de secagem, tornou-se necessário obter correlações dos pontos experimentais do teor de umidade e temperatura, como mencionado no Capítulo 3.

As Figuras 4.59-4.64 mostram o resultado referente ao ajuste do teor de umidade e as Figuras 4.65-4.70 o da temperatura no centro da banana. As Tabelas 4.4-4.5 apresentam um resumo do resultado dos parâmetros obtidos, bem como o coeficiente de determinação, para cada experimento realizado.

Tabela 4.4 - Parâmetros da Equação 3.143 ajustados aos dados experimentais de razão de umidade

T e s t e	Nº de Pts. Exp.	Parâmetros						R
		A ₁	K ₁	A ₂	K ₂	A ₃	K ₃	
1	488	0,432953	0,000406	0,757125	0,031235	-0,204949	-0,005448	0,9994
2	298	0,393651	0,061946	0,594578	0,023874	-0,009450	-0,012656	0,9999
3	164	0,332960	0,067023	0,352633	0,044358	0,295890	0,081414	0,9997
4	142	1,598885	0,077787	-0,288731	0,093555	-0,313732	0,068059	0,9998
5	112	0,333590	0,075287	0,329089	0,070072	0,329085	0,128385	0,9999
6	111	0,327119	0,091021	0,536508	0,093658	0,151473	0,090926	0,9997

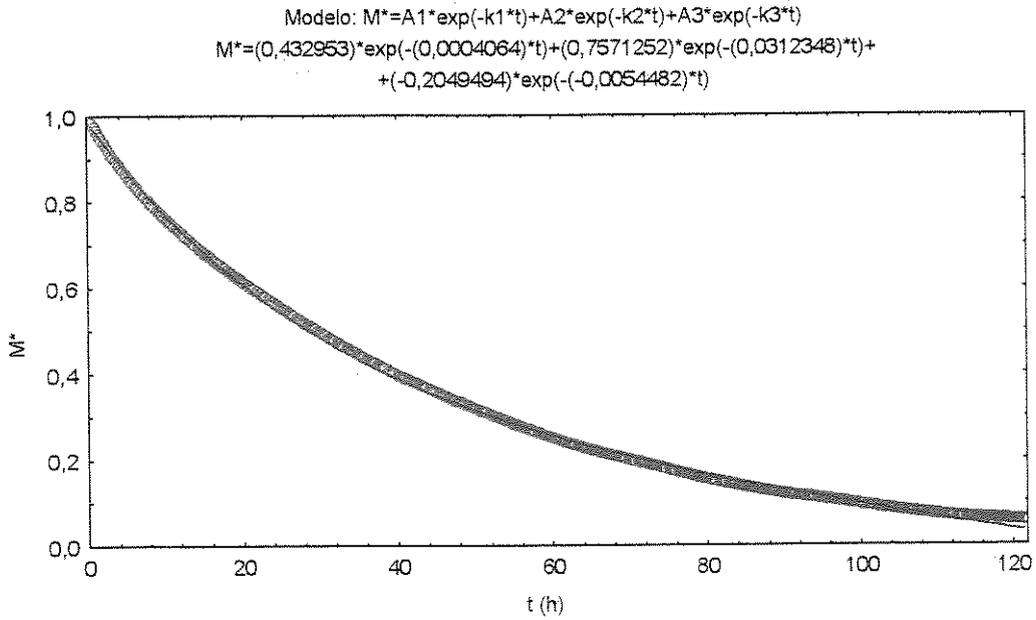


Figura 4.59 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para T=29,9 °C e UR=35,7%.

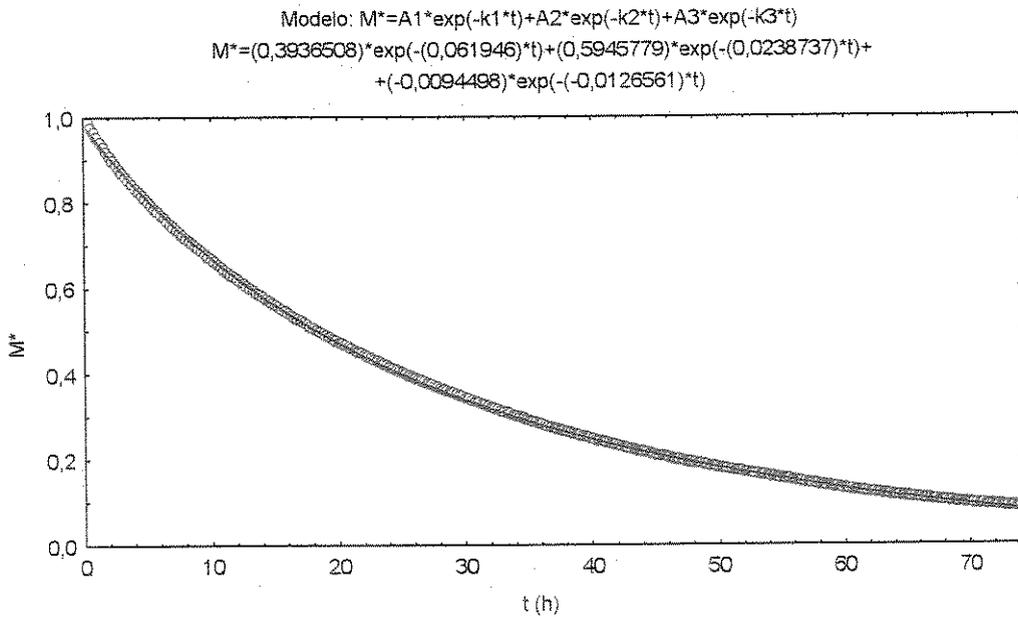


Figura 4.60 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para T=39,9 °C e UR=19,3%.

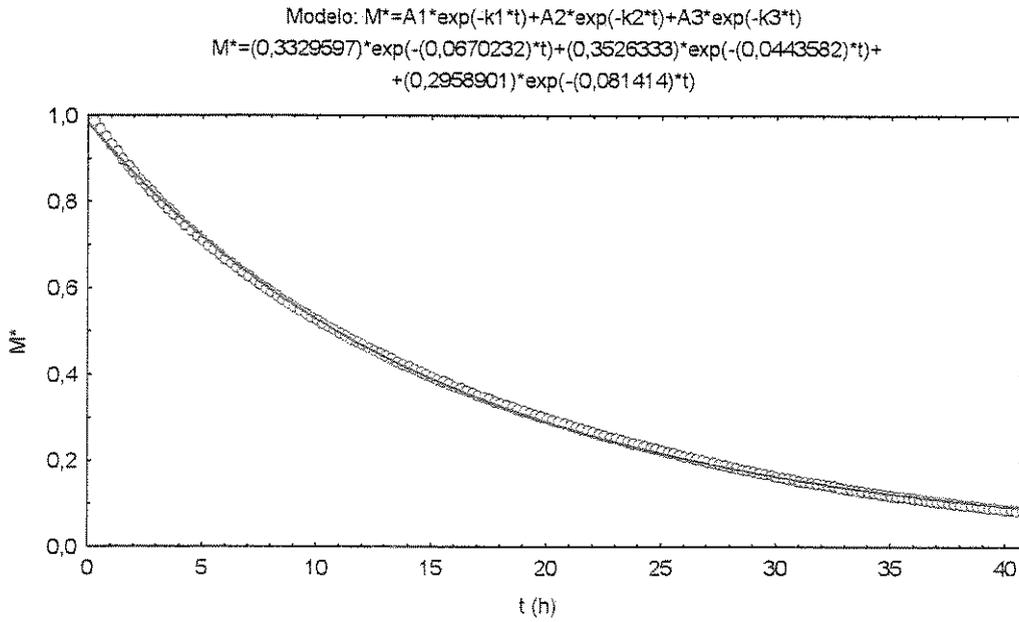


Figura 4.61 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=49,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,2\%$.

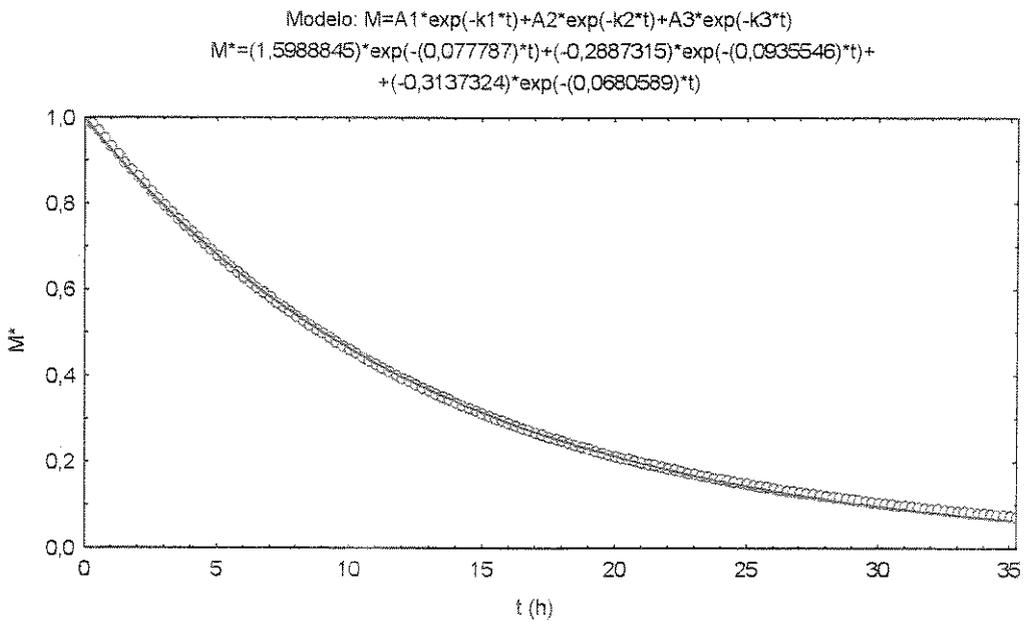


Figura 4.62 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para $T=60,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=19,9\%$.

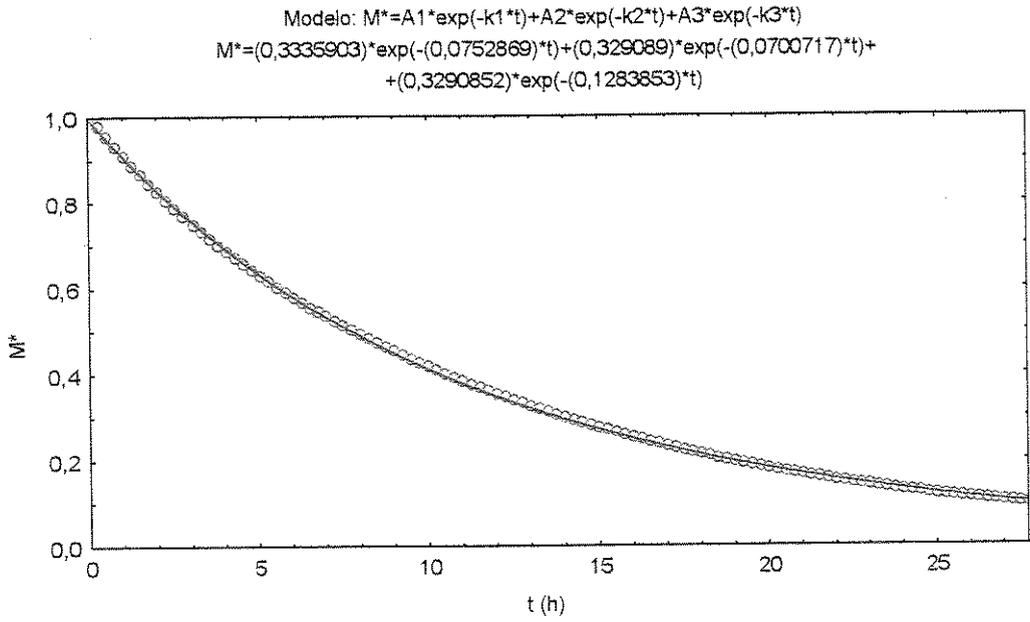


Figura 4.63 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para T=60,5 °C e UR=10,7%.

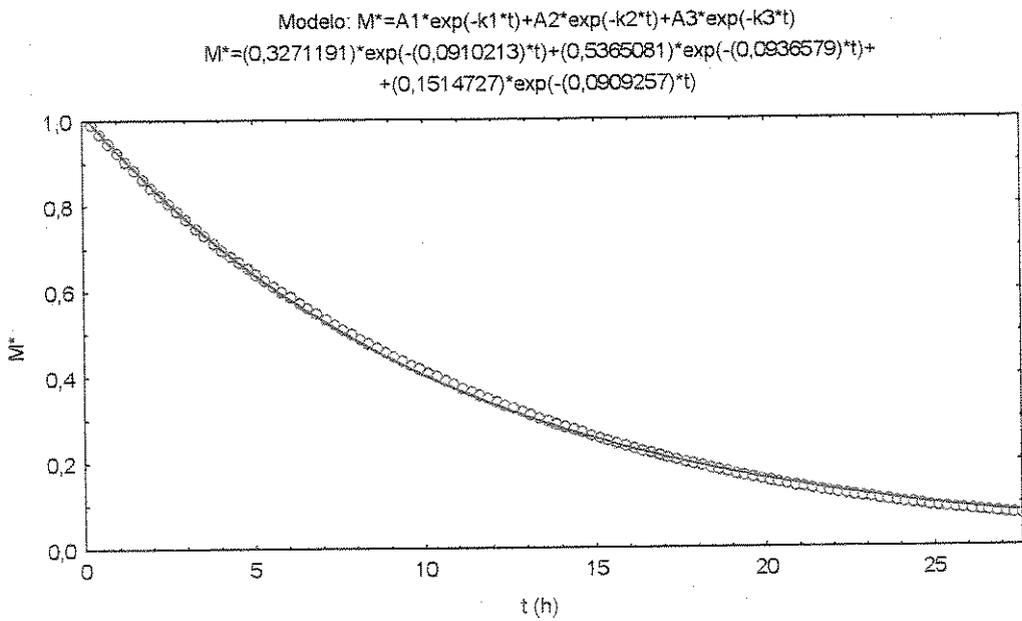


Figura 4.64 - Comparação entre os teores de umidade médios de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.143 para T=68,4 °C e UR=7,3%.

Tabela 4.5 - Parâmetros da Equação 3.144 ajustados aos dados experimentais de temperatura

T e s t e	Nº de Pts. Exp.	Parâmetros				R
		A ₁	A ₂	A ₃	K ₁	
1	570	20,00537	1,604199	0,283563	2,780120	0,9979
2	392	25,49379	3,471352	0,069817	2,087094	0,9987
3	240	30,95807	1,746801	0,000002	5,874428	0,9986
4	222	-5784,90	2705,290	141,2500	0,327200	0,9968
5	192	34,26393	14,37498	0,190139	1,104088	0,9993
6	215	39,93871	13,60871	0,085939	1,247985	0,9996

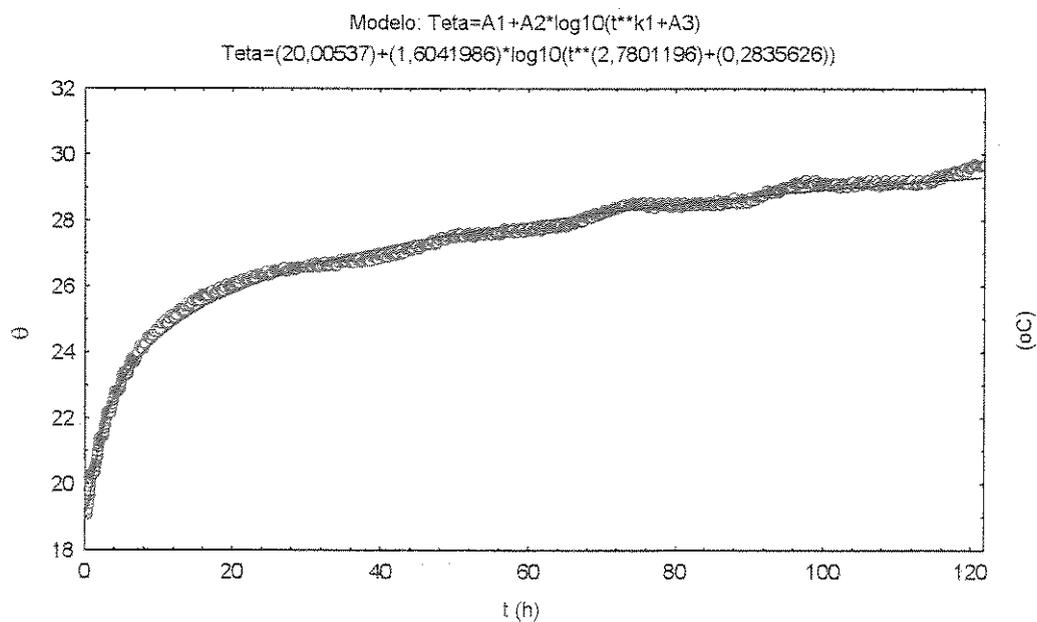


Figura 4.65 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=29,9^{\circ}\text{C}$ e $UR=35,7\%$.

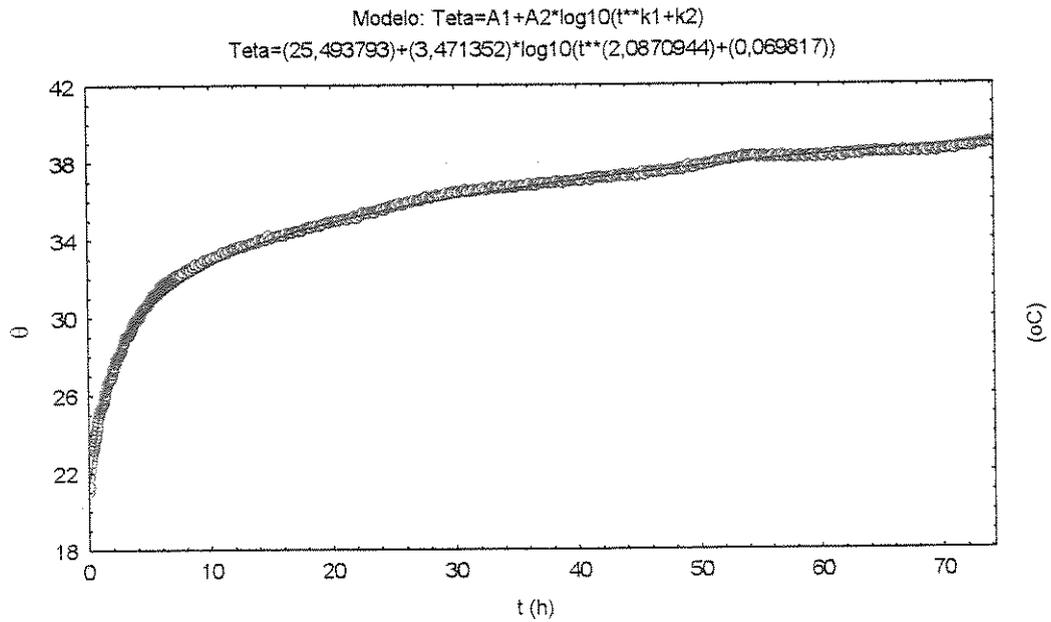


Figura 4.66 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=39,9$ °C e $UR=19,3\%$.

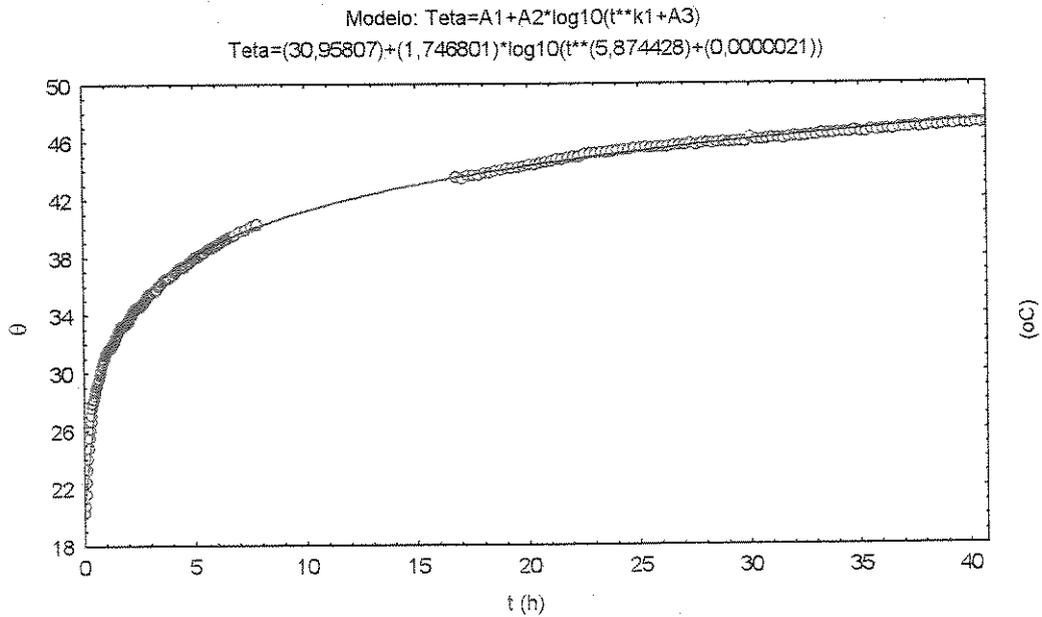


Figura 4.67 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=49,9$ °C e $UR=19,2\%$.

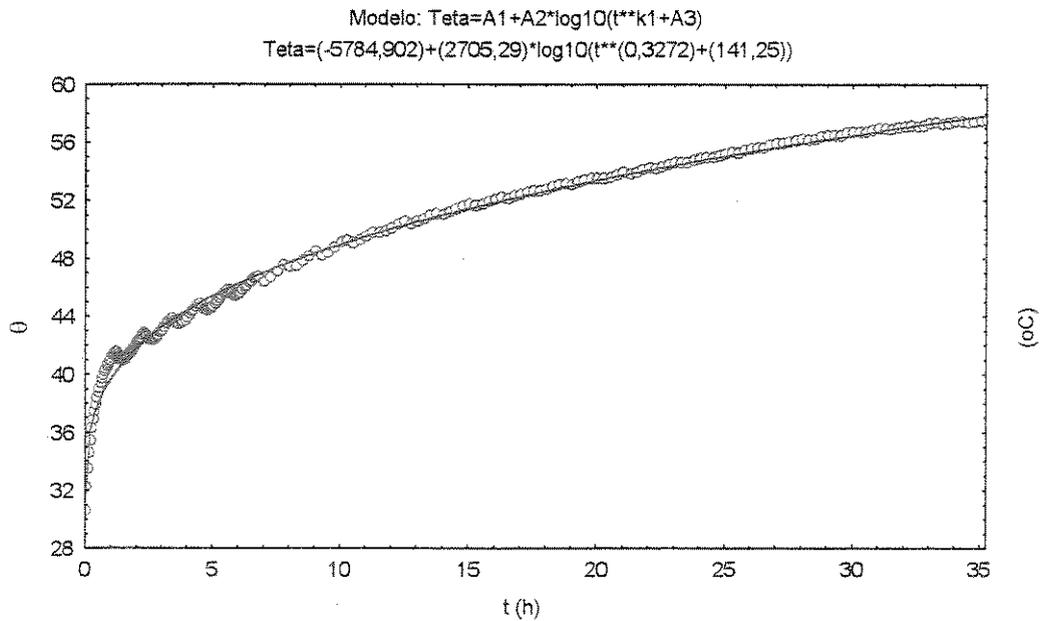


Figura 4.68 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=60,2$ °C e $UR=19,9\%$.

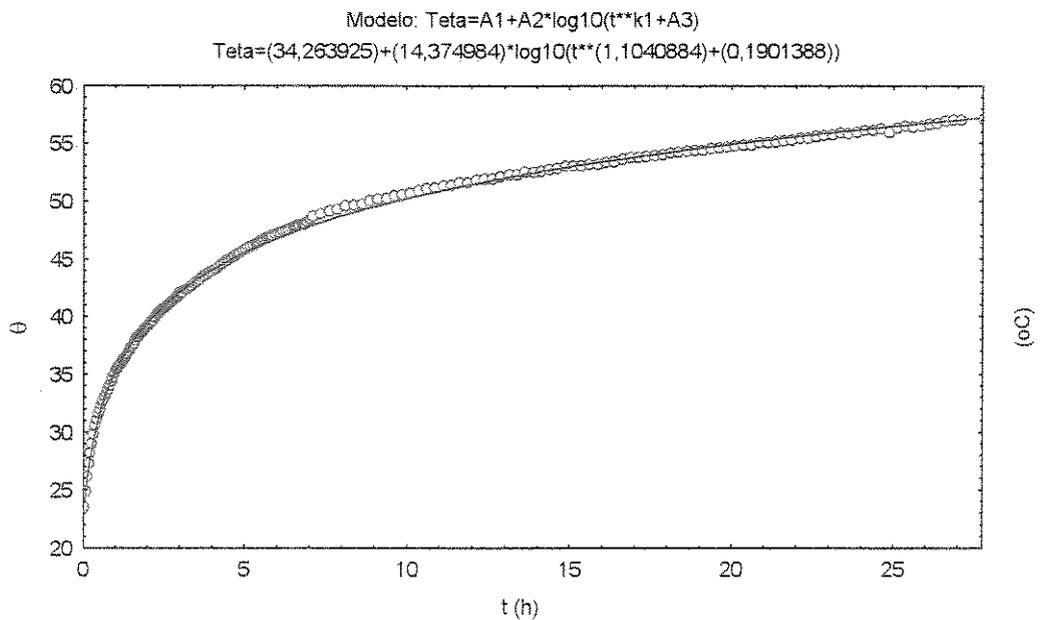


Figura 4.69 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=60,5$ °C e $UR=10,7\%$.

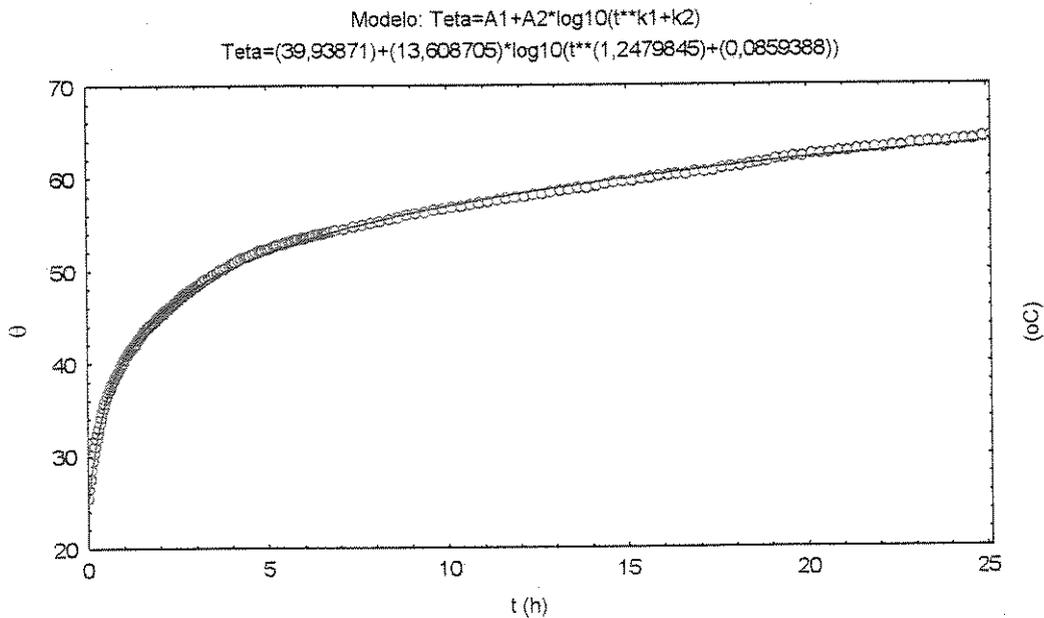


Figura 4.70 - Comparação entre as temperaturas no centro de banana, experimental (o) e predita pela Equação 3.144 para $T=68,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $UR=7,3\%$.

Pode ser observado nos gráficos e nas tabelas apresentadas que foi obtida excelente concordância, com coeficiente de determinação superior a 0,995. Agora é possível determinar o valor dos coeficientes de difusão e de transferência convectiva da banana, nas várias condições experimentais, utilizando-se os vários modelos numéricos descritos no capítulo 3.

A Figura 4.71 apresenta uma comparação entre os resultados preditos e experimentais para o encolhimento do material ao longo do processo, resultante da análise de regressão da Equação 3.110 aos dados experimentais. Como pode ser visto, há uma satisfatória concordância entre os resultados. Neste ajuste, o coeficiente de correlação obtido foi de 0,9938. A perda total (erro relativo), dada pela Equação 3.145 foi de 0,0112056. A partir do ajuste obteve-se um coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}_2 = 0,269$. Vale salientar que, utilizando-se da Equação 3.114 para estimar o valor de $\bar{\beta}_2$, obtém-se um valor de 0,291, o que comprova que neste caso pode ser aceito que o volume encolhido é igual ao volume da água perdida. Neste cálculo foi usado o valor $m_s=17,38\text{g}$, calculado pela Profa. Dra. Marlene Rita de Queiroz e adotado $\rho_w=1000,0\text{ kg/m}^3$.

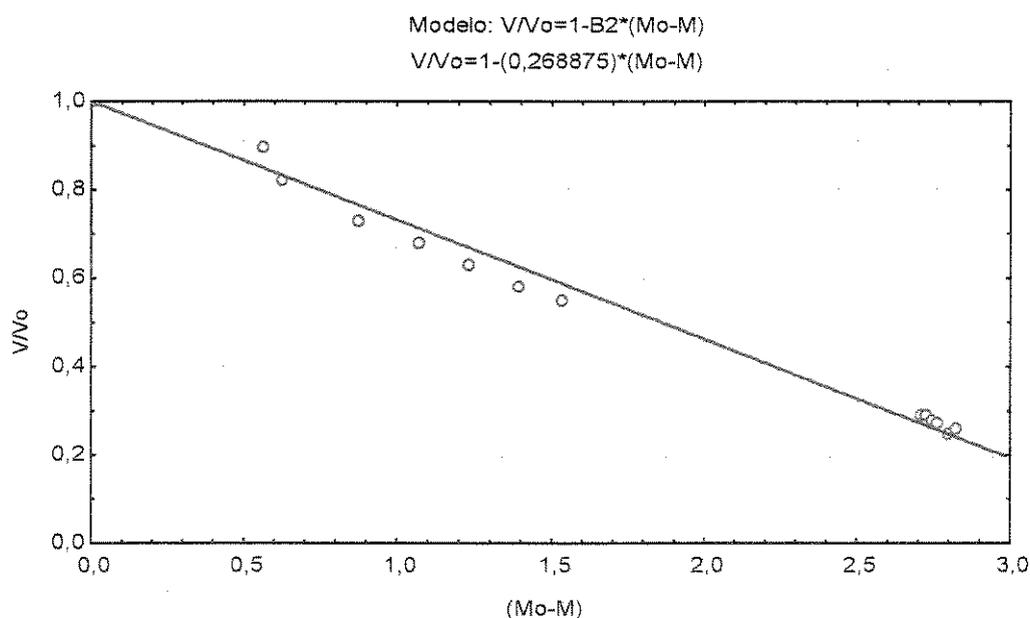


Figura 4.71 - Comparação entre os volumes de banana, experimental (o) e predito pela Equação 3.111 para $T=70\text{ }^{\circ}\text{C}$, secagem em estufa.

4.2.7.2 - Aplicação dos modelos numéricos

Neste tópico serão mostrados inicialmente os resultados obtidos para a cinética de secagem e para a temperatura no centro da banana nas condições de secagem descritas no Capítulo 3, Tabela 3.1. Posteriormente nas Tabelas 4.8-4.12 serão apresentados e discutidos os valores dos coeficientes de difusão de massa e térmico, bem como os coeficientes de transferência convectiva de calor e de massa correspondentes a cada modelo.

a) Modelo I

As Figuras 4.72-4.77 ilustram uma comparação entre os valores do teor de umidade médio experimental e o predito pelo método numérico, para as várias condições de secagem definidas na Tabela 3.1.

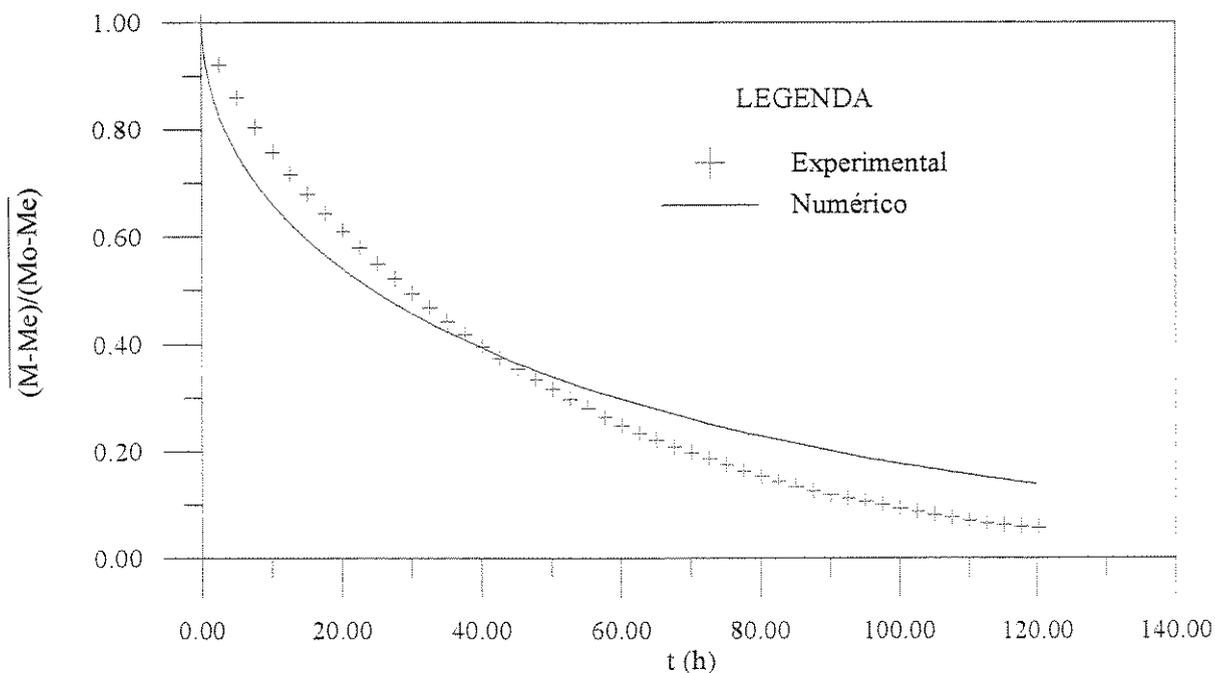


Figura 4.72- Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

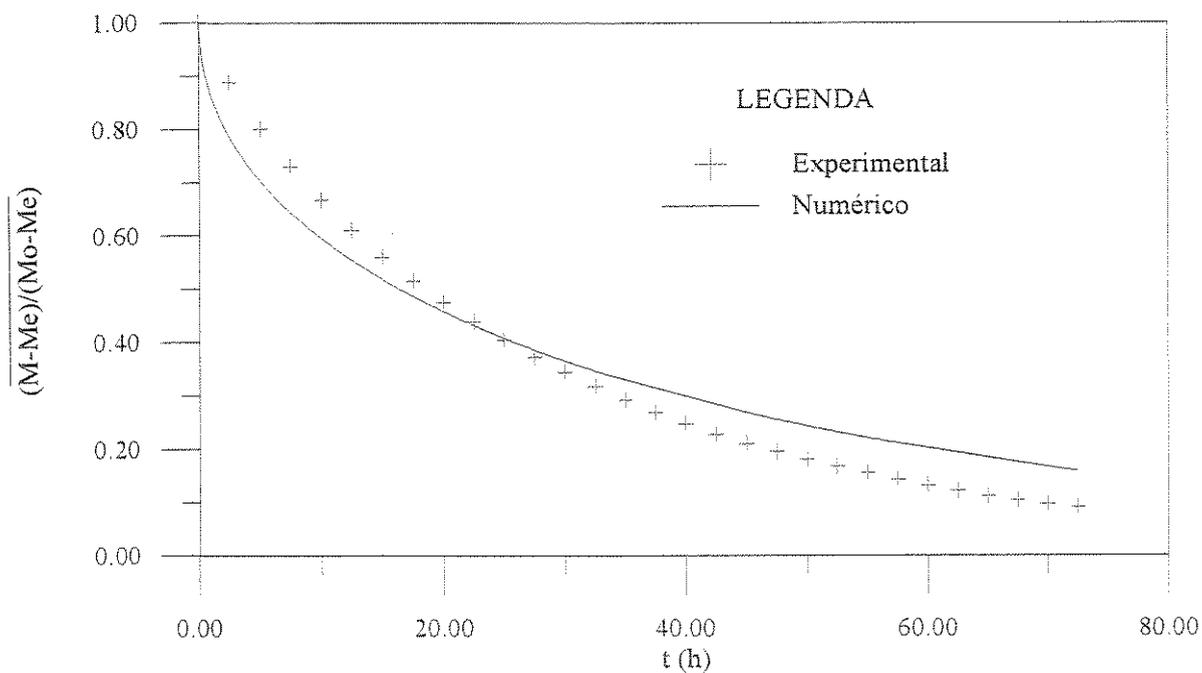


Figura 4.73- Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

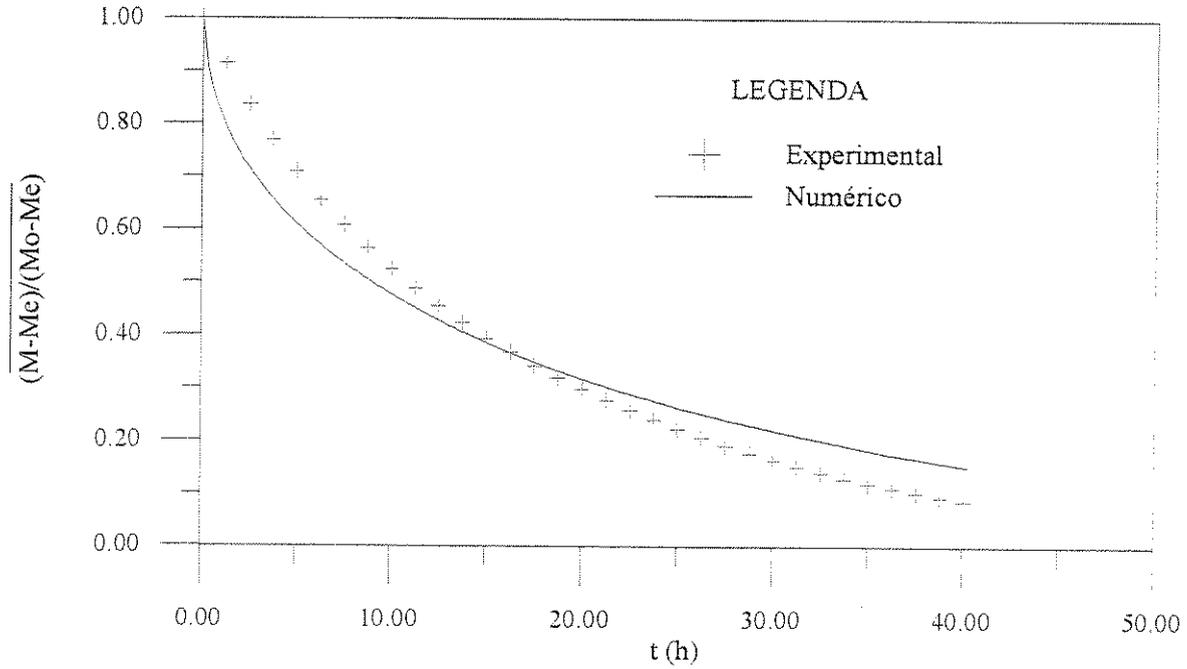


Figura 4.74 - Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

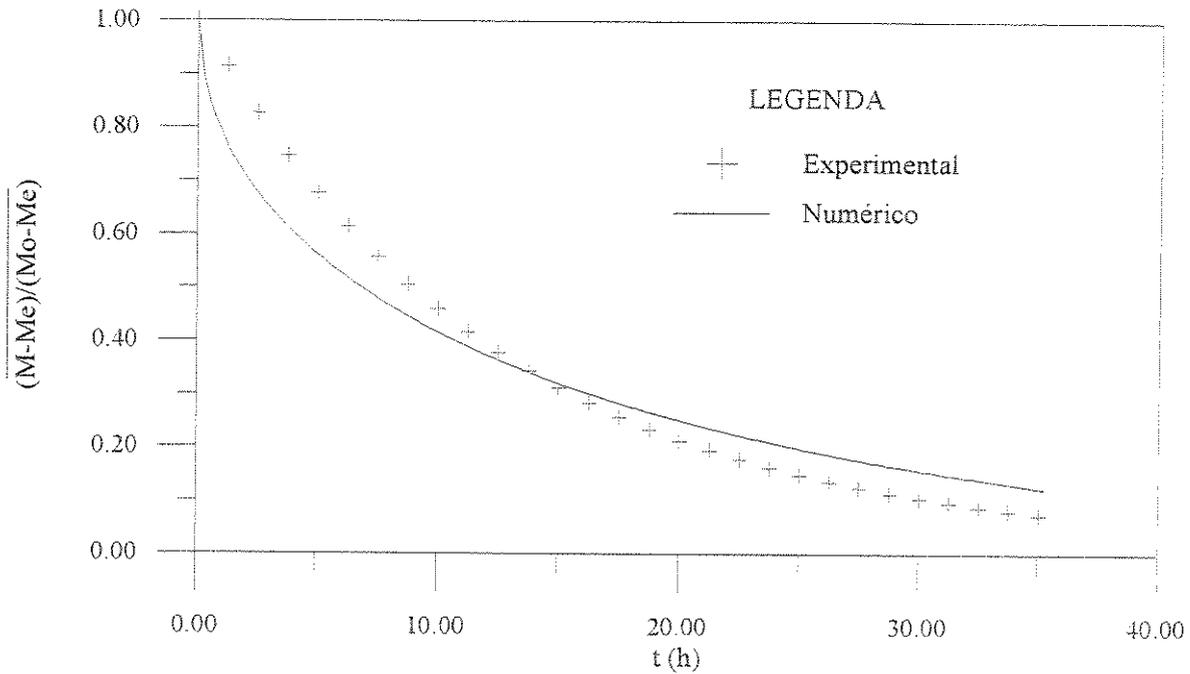


Figura 4.75 - Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

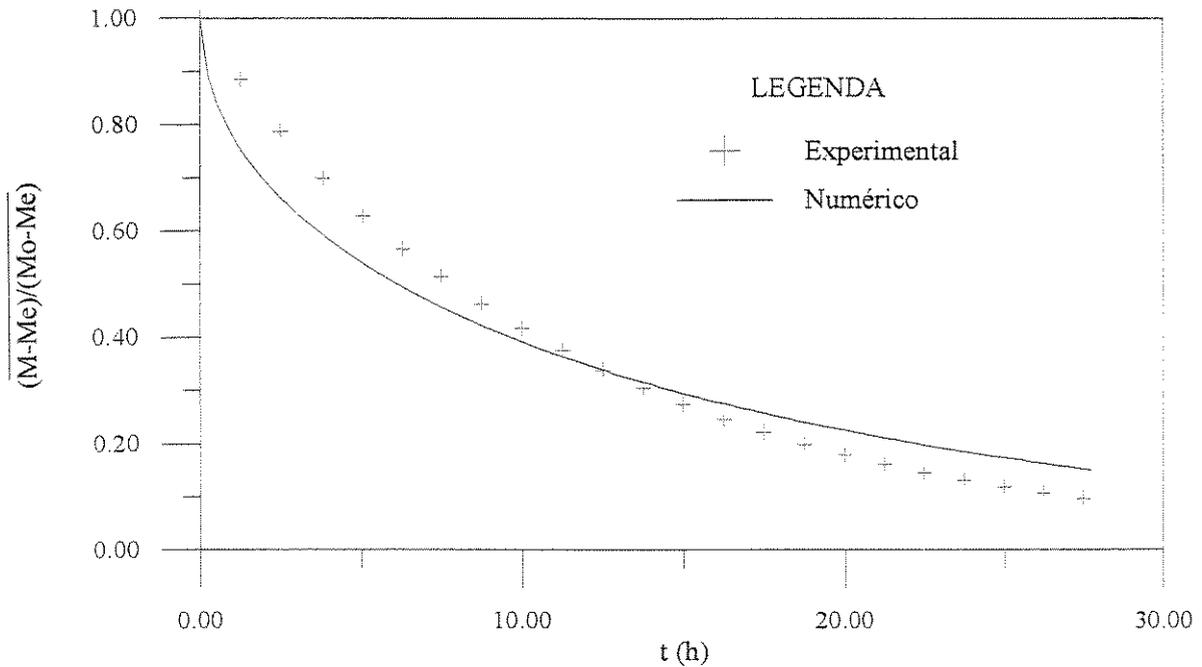


Figura 4.76 - Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

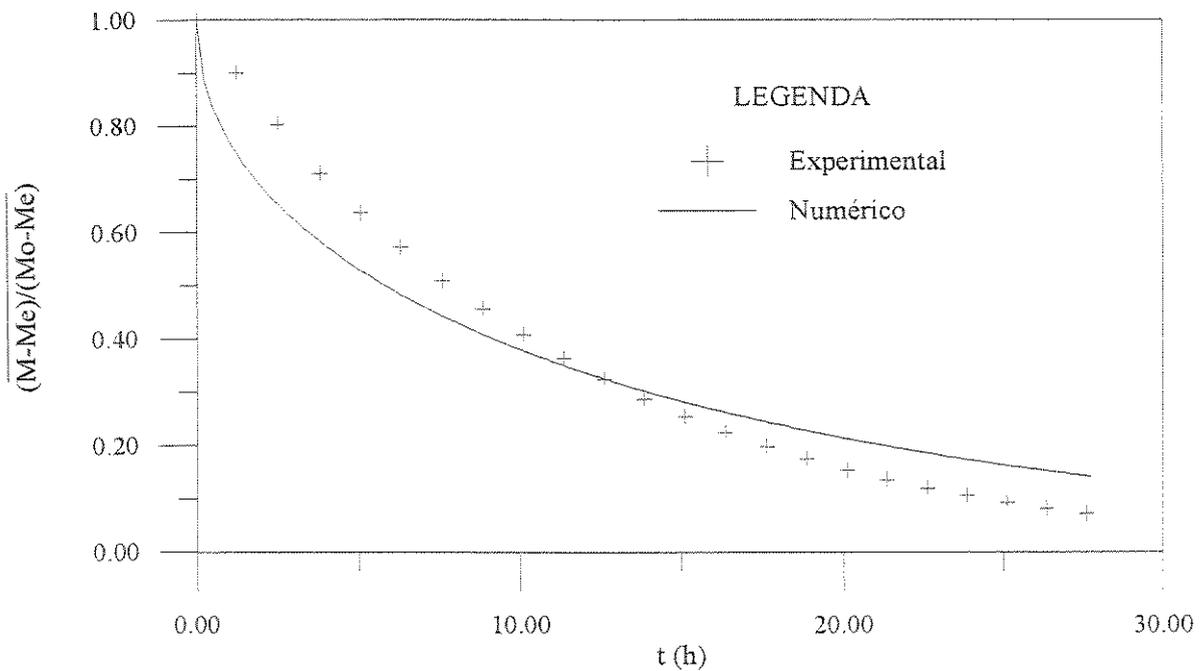


Figura 4.77 - Comparação entre os resultados teórico (modelo I) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

Numa análise das curvas observa-se em todos os casos, um decréscimo mais acentuado da razão de umidade na curva predita durante as primeiras horas do processo, ocorrendo uma inversão deste resultado para tempos maiores. Isto provoca um retardo na cinética e faz com que um teor de umidade igual ao obtido experimentalmente no final da secagem seja obtido num tempo maior que o real. Este comportamento é esperado, e é devido às condições de contorno usadas, à não consideração do fenômeno de encolhimento, e ao fato de considerar-se o coeficiente de difusão constante. Um comportamento similar foi verificado por Queiroz (1994), que considerou a fruta como cilindro infinito.

A variância (Equação 3.146) obtida por Queiroz (1994), foi 45,7% menor que a obtida assumindo uma geometria esferoidal prolato, para o teste 1 e de 12,2% menor, para o teste 6. Há uma tendência que para temperaturas mais elevadas, ambos os modelos converjam para um mesmo erro médio quadrático. Com relação ao coeficiente de difusão de massa, o valor obtido com o modelo esferoidal prolato foi menor que o obtido com o modelo cilíndrico, para todos os testes realizados, sendo que seu valor foi 33,8% menor, para o teste 1, e 26,5% menor, para o teste 6.

Do exposto, se a variável de interesse é a cinética de secagem do sólido em temperaturas menores que 80 °C, o autor recomenda utilizar o tratamento de cilindro infinito, mais simples. Contudo, se a pesquisa está centrada na distribuição de umidade no interior do sólido, o modelo esferoidal prolato, em qualquer temperatura, é o mais indicado. Para temperaturas iguais ou maiores que 80 °C, o modelo esferoidal prolato é sem dúvida o mais apropriado, para estudar ambos os casos.

b) Modelo II

As Figuras 4.78-4.83 ilustram uma comparação entre os valores obtidos numericamente e os dados experimentais do teor de umidade médio da banana, para os vários testes constantes na Tabela 3.1.

O excelente ajuste da solução pode ser verificado por comparação dos resultados nestas figuras.

Um comportamento similar foi encontrado por Queiroz (1994), confirmando que a consideração de uma condição de contorno convectiva na superfície do produto possibilita que o comportamento da secagem durante todo o processo seja representado fisicamente com maior realismo e precisão. No entanto, a banana sofre fortes variações dimensionais durante o processo, e portanto, os resultados obtidos para os coeficientes de difusão e convectivo, sem a consideração deste efeito, são valores efetivos, uma vez que englobam este e outros fenômenos.

Para uma comparação deste modelo com o modelo cilíndrico infinito utilizado por Queiroz (1994), a variância obtida com o modelo cilíndrico foi 29,5% menor que o modelo esferoidal prolato, para o teste 1. Contudo para todos os demais testes realizados, o modelo esferoidal prolato apresentou variância menor que o modelo cilíndrico. Como exemplo, para o teste 6, a variância foi 37,9% menor, sendo esta a menor diferença. A maior diferença ocorreu no teste 5, atingindo a marca de 92,2% a menos. Com relação ao coeficiente de difusão, exceto no teste 3, o modelo cilíndrico apresentou valores inferiores aos obtidos com o uso do modelo esferoidal prolato. Como um exemplo, esta diferença foi de 17,8%, para o teste 1, e de 13,4% para o teste 6.

Com respeito ao coeficiente de transferência convectiva de massa, os valores obtidos com o modelo esferoidal foram sempre inferiores. Por exemplo, para o teste 1, o seu valor foi 32,7% menor que o dado pelo modelo cilíndrico. Embora o modelo cilíndrico tenha, no teste 1, apresentado menor variância que o modelo esferoidal prolato, ambos os modelos se ajustaram muito bem aos dados experimentais. Assim sendo, este último é recomendado para ser utilizado em futuros trabalhos de secagem e determinação de propriedades termo-físicas de materiais com forma elipsoidal.

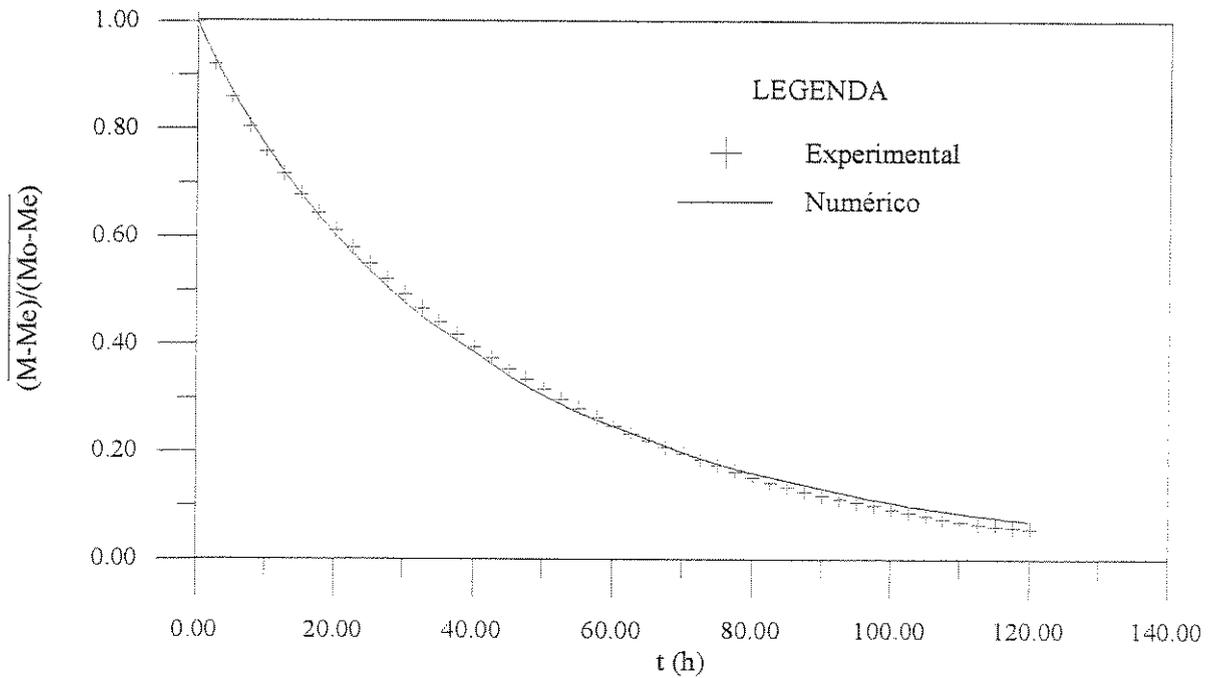


Figura 4.78 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

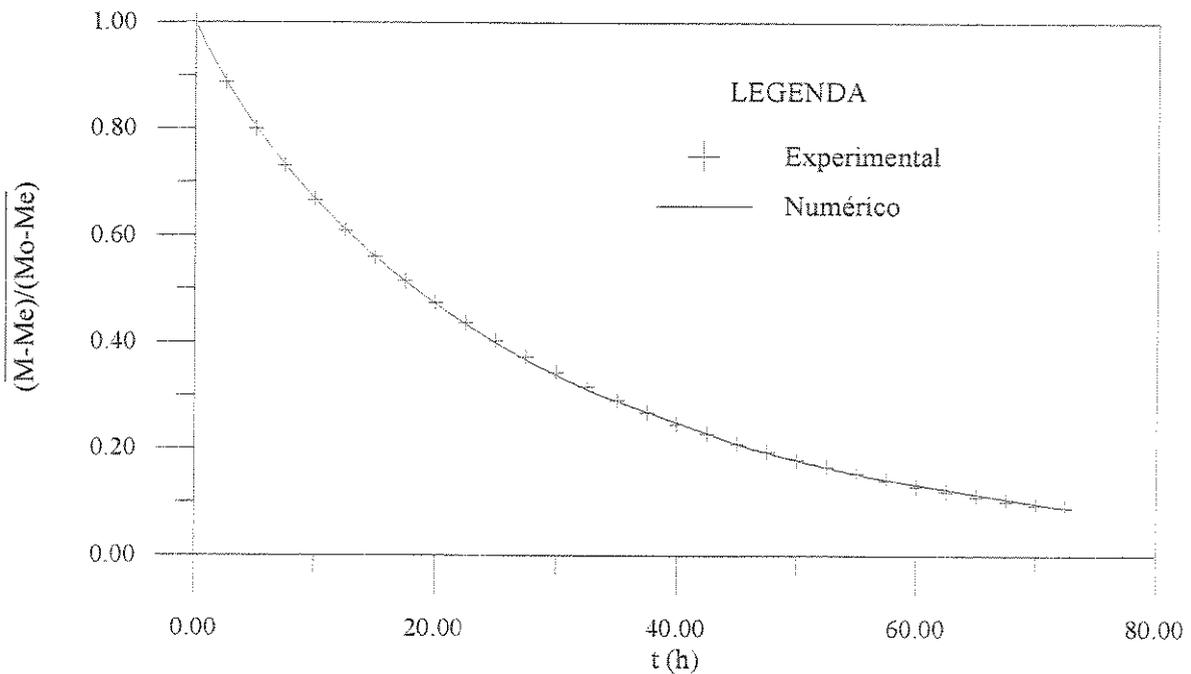


Figura 4.79 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

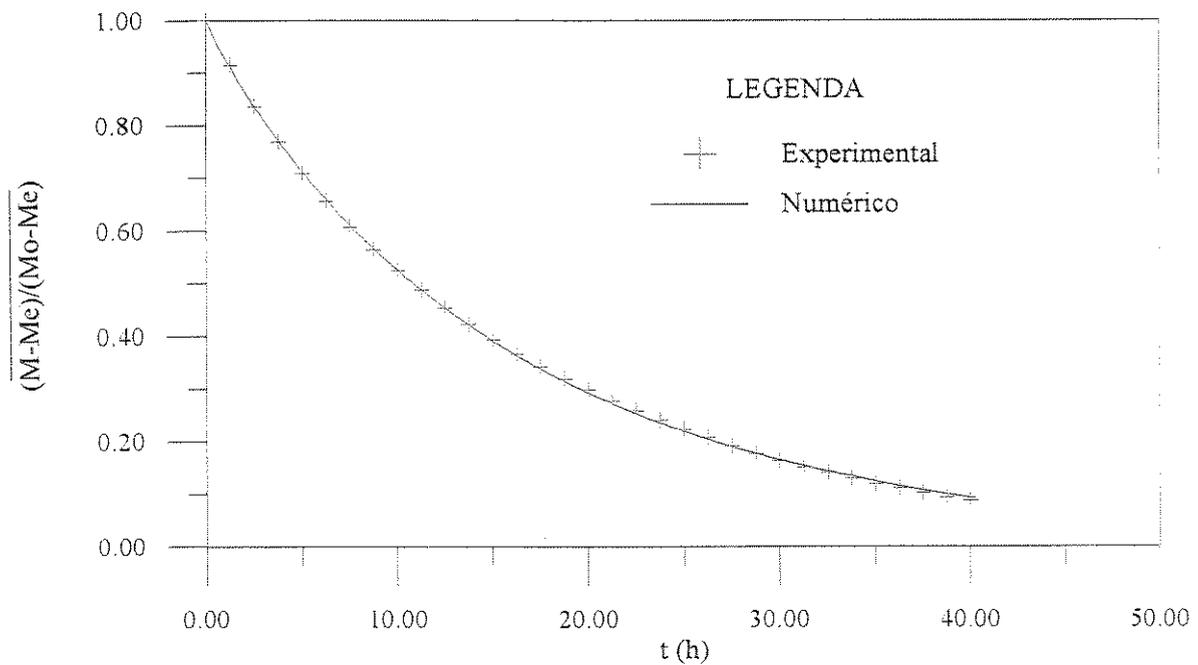


Figura 4.80 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

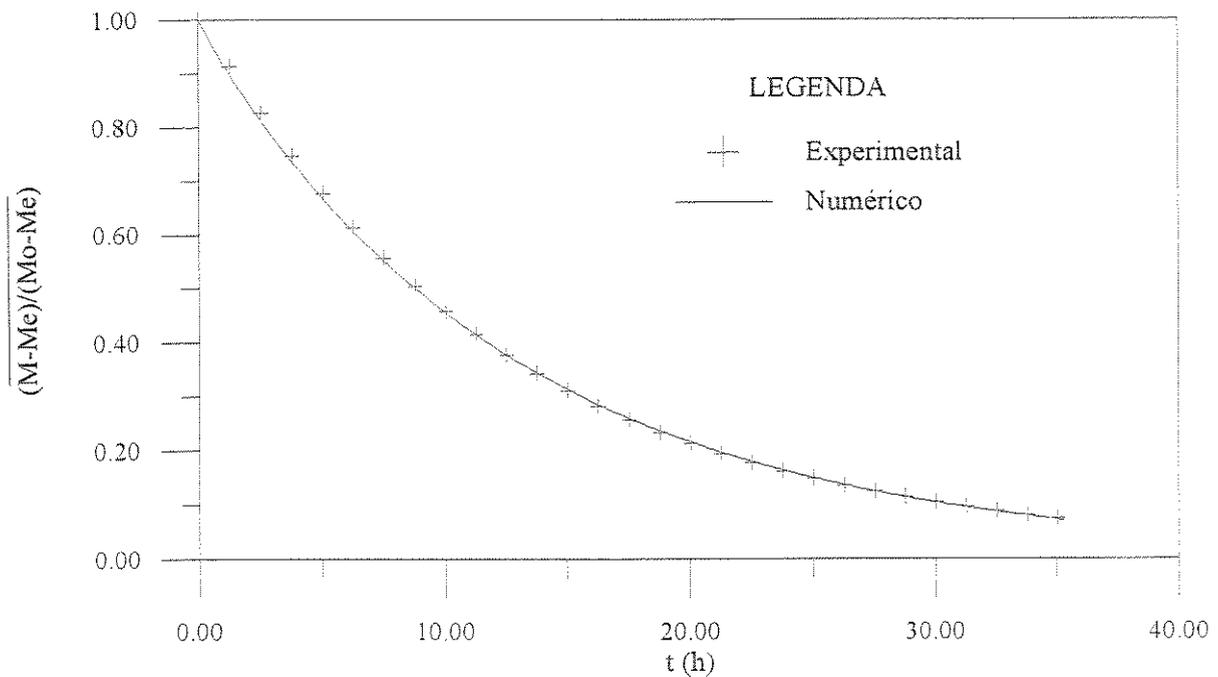


Figura 4.81 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

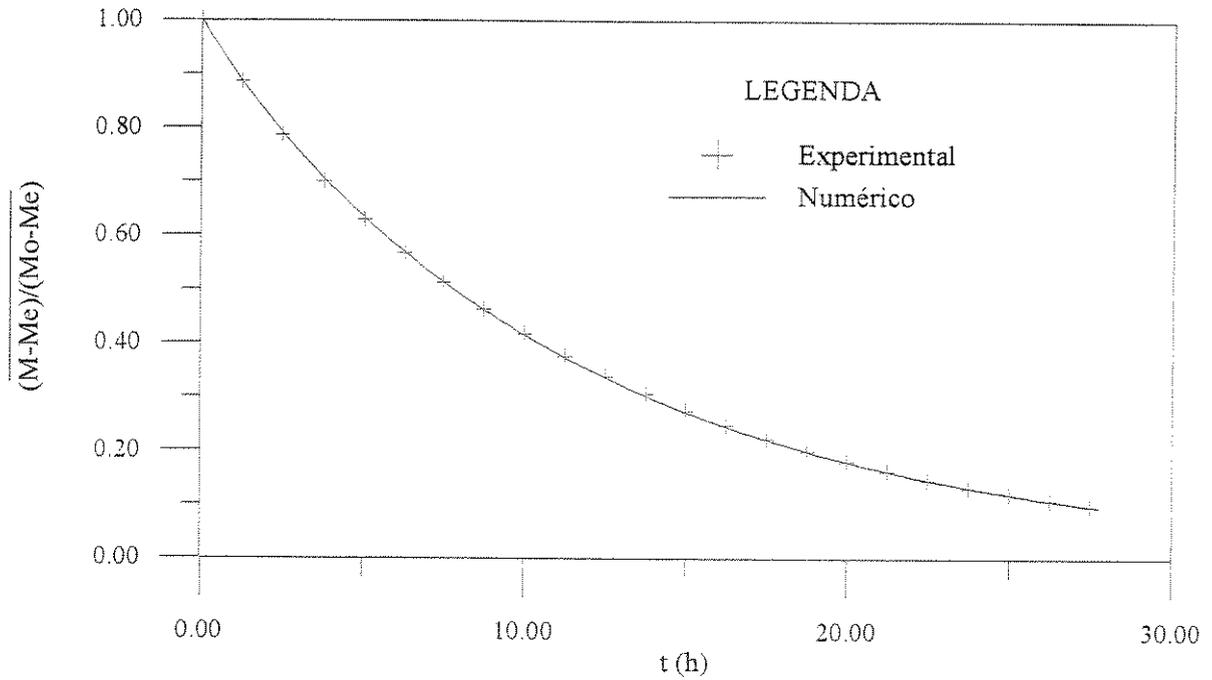


Figura 4.82 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

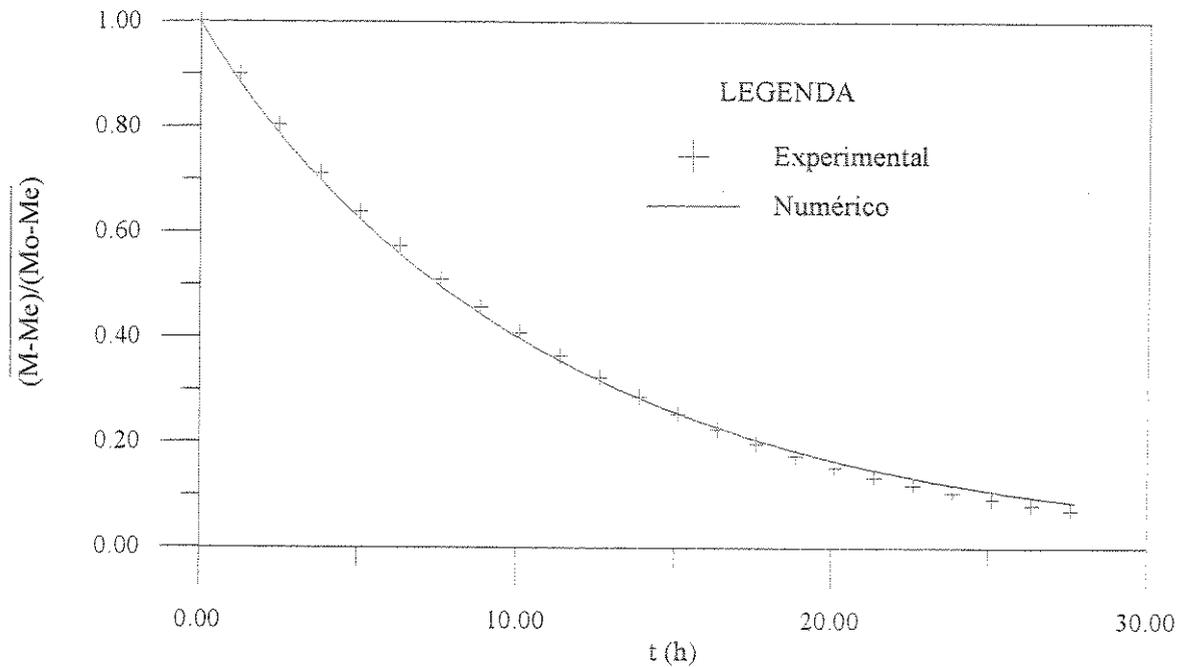


Figura 4.83 - Comparação entre os resultados teórico (modelo II) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

c) Modelo III

Nesta seção será analisado o comportamento da secagem convectiva da banana sofrendo encolhimento, assumindo propriedades constantes e condições isotérmicas.

A comparação entre os resultados simulados e experimentais estão mostrados nas Figuras 4.84-4.89. Estes gráficos evidenciam o excelente ajuste obtido. De fato, este modelo embora apresente uma variância maior que o modelo II, é mais realista fisicamente que os apresentados anteriormente (modelos I e II), e portanto seus resultados são mais consistentes. Particularmente no final do processo, ocorre uma leve discrepância entre os resultados experimentais e preditos, dando um forte indício de que nos tempos finais, onde os teores de umidade são sensivelmente menores, a linearidade da variação volumar com esta grandeza deixa de existir.

No entanto, o valor estimado do coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}_2$, servirá como uma boa referência para futuras pesquisas relativas a encolhimento de banana. Observa-se que o coeficiente de encolhimento adimensional $\bar{\beta}$ varia em cada teste experimental, em virtude da sua dependência com os teores de umidade inicial e de equilíbrio da amostra, sendo este último dependente da temperatura e da umidade relativa do ar de secagem. Sendo assim, tem-se encolhimento diferenciado para cada amostra, em cada condição experimental.

Comparando este modelo como o modelo cilíndrico considerando encolhimento unidirecional apresentado por Queiroz (1994), pode-se dizer que em todos os testes, a variância dada pelo modelo esferoidal prolato foi menor, variando a menos na faixa de 87,0% (teste 4) a 46,7% (teste 6). Com relação aos coeficientes de difusão, os mesmos apresentaram valores sempre superiores aos reportados pela autora referenciada, em todos os testes de secagem. Como exemplos citam-se como limites extremos, 11,5% a mais, para o teste 1, e 59,0% a mais, para o teste 4. Já os coeficientes de transferência convectiva de massa obtidos com o modelo III, apresentaram, em todos os testes, resultados sempre inferiores aos reportados por Queiroz (1994), variando na faixa de 46,8% a menos para o teste 6 a 77,7% a menos, para o teste 2.

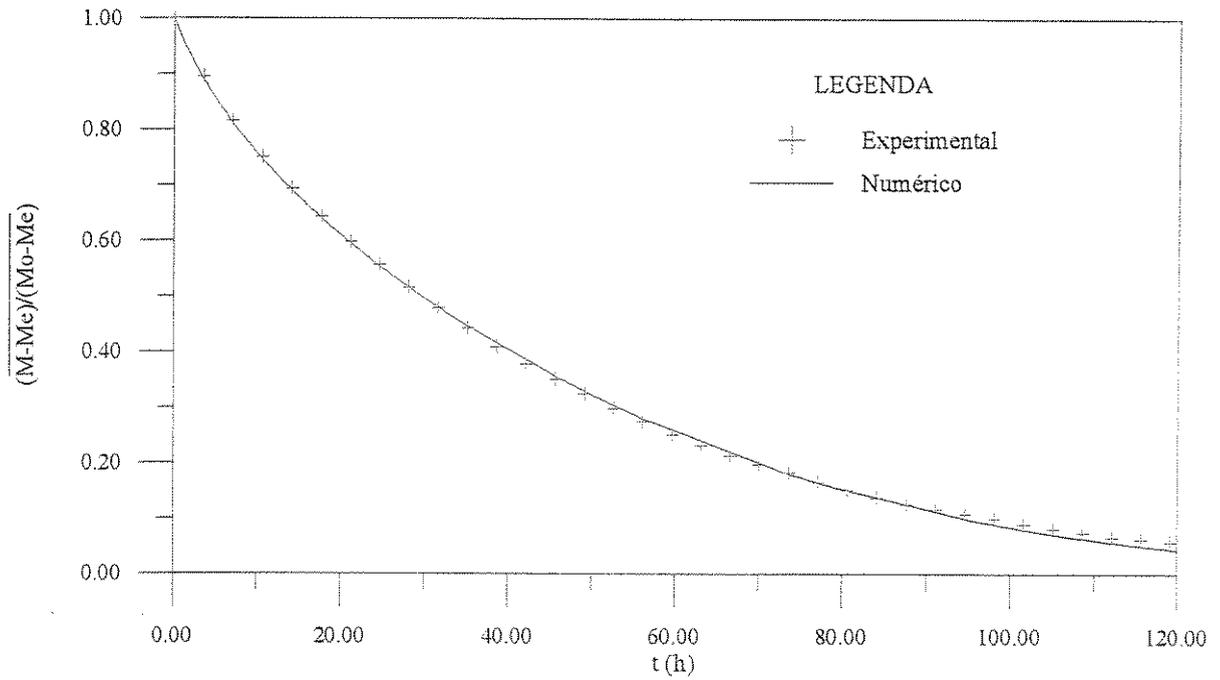


Figura 4.84 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

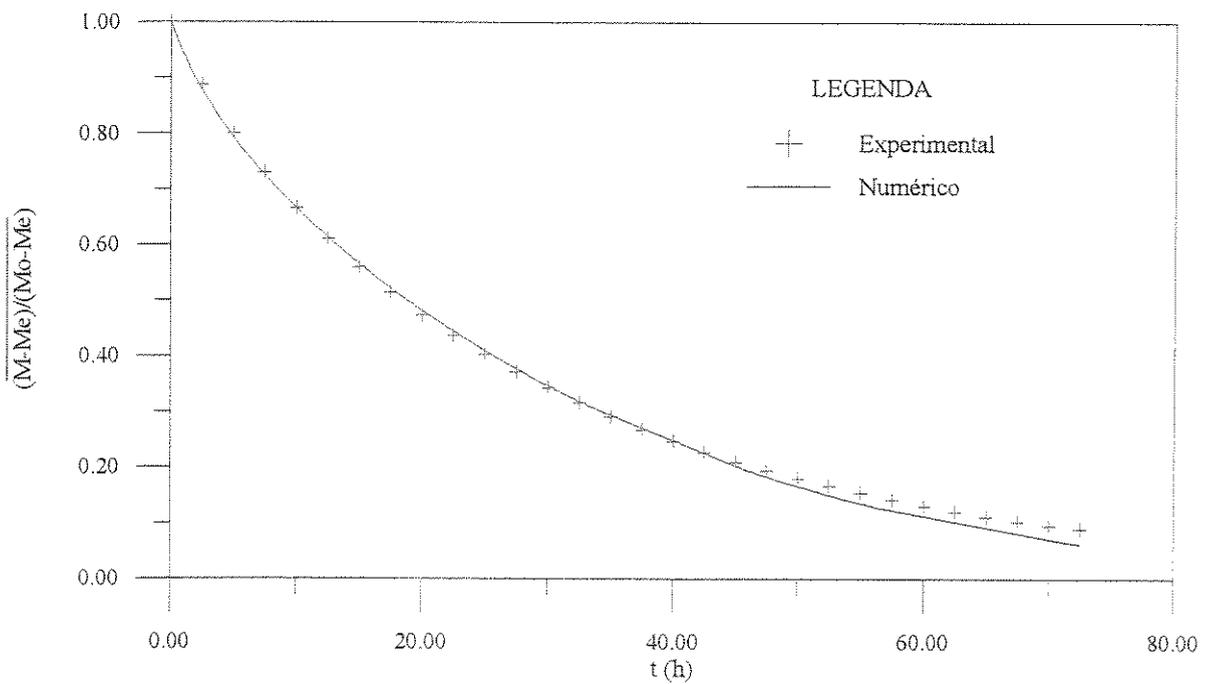


Figura 4.85 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

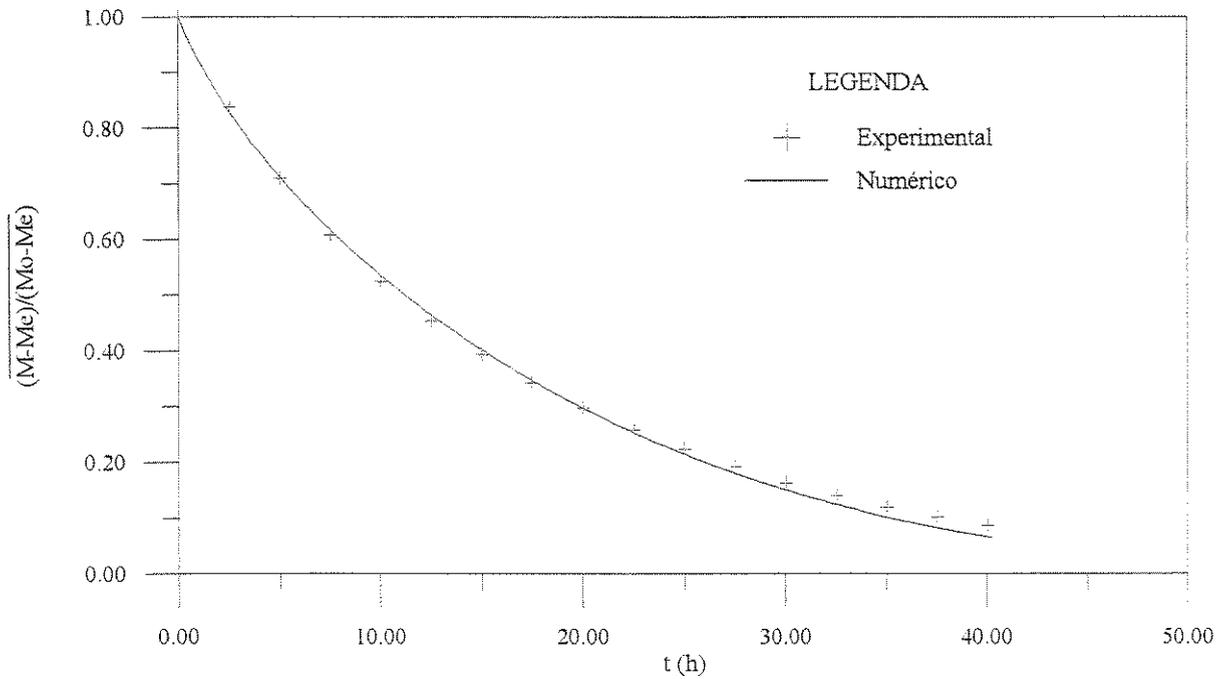


Figura 4.86 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

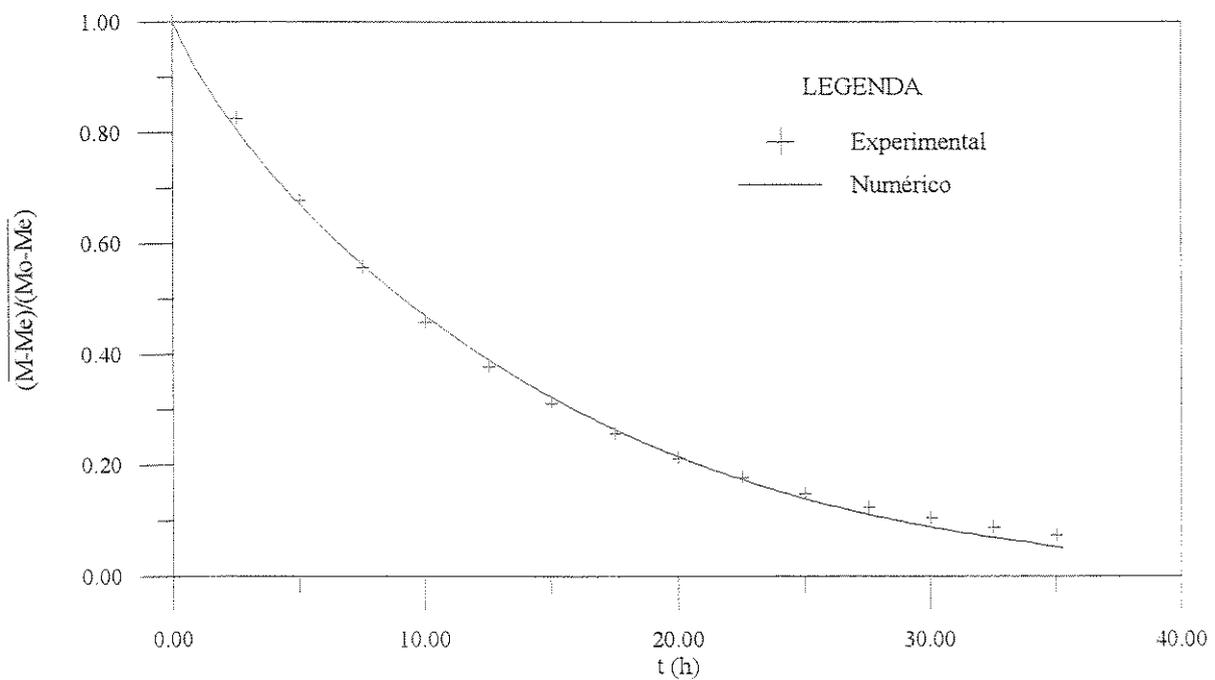


Figura 4.87 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

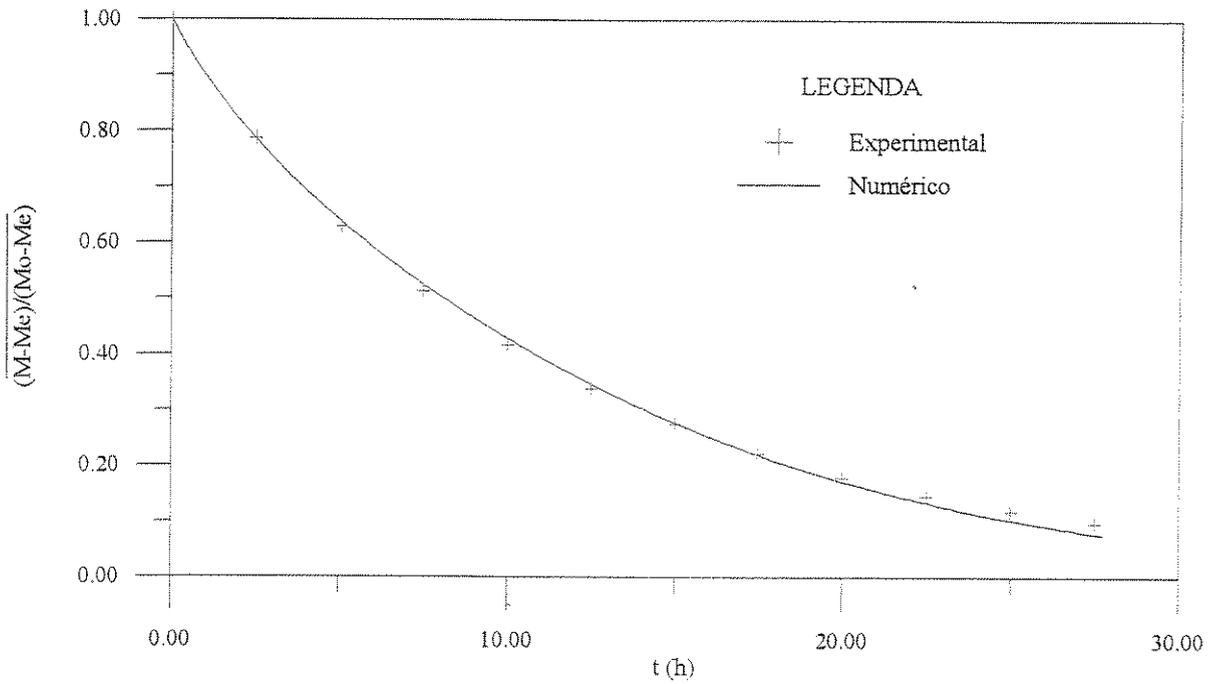


Figura 4.88 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

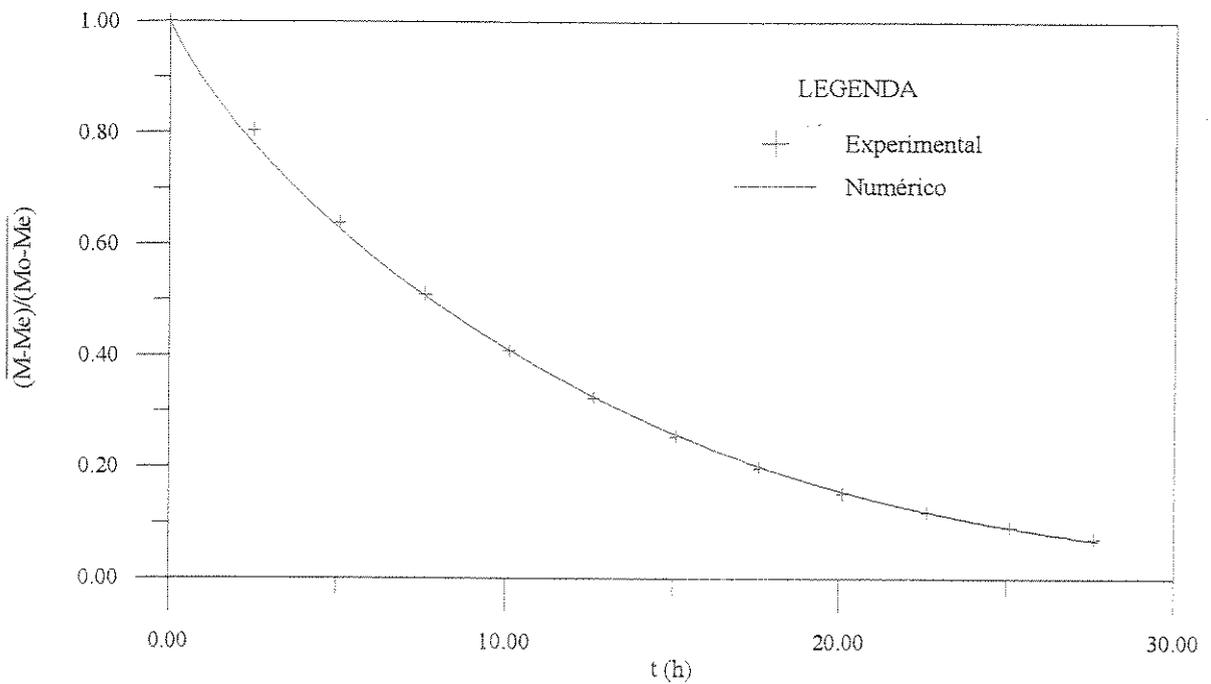


Figura 4.89 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

Valores das condições iniciais e finais da área superficial, volume e comprimento da banana, bem como dos coeficientes de encolhimento adimensional, são apresentados na Tabela 4.6, para cada teste experimental.

Tabela 4.6 - Coeficiente de encolhimento adimensional e dados dimensionais da banana durante a secagem

Teste	Início				Final				$\bar{\beta}$
	L ₁ (cm)	L ₂ (cm)	V(cm ³)	S(cm ²)	L ₁ (cm)	L ₂ (cm)	V(cm ³)	S(cm ²)	
1	1,6130	5,8562	63,822	96,099	0,8614	3,1274	9,720	27,407	0,8838
2	1,5690	5,8784	60,616	93,676	0,9457	3,5433	13,275	34,035	0,8345
3	1,5220	5,9016	57,265	91,074	0,9001	3,4903	11,846	31,856	0,8475
4	1,530	5,8977	57,830	91,518	0,9729	3,7503	14,869	37,006	0,7844
5	1,5060	5,9095	56,142	90,184	0,9481	3,7205	14,010	35,746	0,8117
6	1,5450	5,8903	58,896	92,349	0,9915	3,7800	15,565	38,032	0,7899

A Tabela 4.7 apresenta as relações dimensionais de comprimento, área superficial e volume, para cada teste de secagem, bem como o tempo total de cada experimento. Em ambas as tabelas, os valores finais foram obtidos numericamente.

Tabela 4.7 - Dados de encolhimento relativo durante a secagem de banana

Teste	t (h)	L_{1f}/L_{1o}	L_{2f}/L_{2o}	S_f/S_o	V_f/V_o
1	121,85	0,5340	0,5340	0,2852	0,1523
2	72,00	0,6027	0,6027	0,3633	0,2190
3	40,80	0,5914	0,5914	0,3498	0,2069
4	35,30	0,6359	0,6359	0,4044	0,2571
5	27,80	0,6296	0,6296	0,3964	0,2495
6	27,60	0,6417	0,6417	0,4118	0,2643

Após análise da Tabela 4.7, observa-se que a variação volumétrica apresenta uma leve tendência a aumentar com a elevação da temperatura, o que é naturalmente esperado. Similar comportamento ocorre com a variação da área superficial, bem como com as dimensões da banana.

Como comentário final, pode ser dito que apesar do bom ajuste apresentado por este modelo, quando aplicado à banana, é necessário dar maior atenção ao estudo quantitativo das variações de área superficial e volume durante o processo de desidratação, especialmente com considerações mais complexas. Dentro destas considerações citam-se: deformações em várias direções e condições não-isotérmicas simultâneas. Deformações multidirecionais ocorrem por exemplo, na secagem para obtenção de uva-passa, onde no final da secagem o produto apresenta-se com uma textura totalmente enrugada, ao contrário do que este modelo assume.

A seguir é apresentado um caso particular deste modelo, que considera um coeficiente de transferência convectiva de massa infinito na superfície do material. Este procedimento é equivalente a uma condição de contorno de equilíbrio na superfície da fruta, similar à apresentada no modelo I, portanto, os resultados obtidos aqui também podem ser obtidos incorporando efeitos de encolhimento no modelo I.

A comparação entre os dados do teor de umidade da banana obtidos numericamente e os obtidos durante os testes experimentais está ilustrada nas Figuras 4.90-4.95. Analisando as figuras vê-se que a inclusão do efeito de encolhimento no modelo I, melhora sensivelmente o ajuste. Contudo, no início do processo, continua ocorrendo grande discrepância entre os resultados, devido à condição de contorno inadequada.

De fato, a condição de contorno de equilíbrio prejudica demasiadamente a solução, por não ser uma condição realista principalmente no início do processo. Esta condição de contorno é verdadeira apenas no final do processo, onde o teor de umidade do material na superfície está próximo do teor de umidade de equilíbrio.

De qualquer modo, apesar das incertezas geradas com esta condição de contorno, o modelo será de grande valia para prever o tempo total de secagem, como pode ser constatado pela análise das figuras.

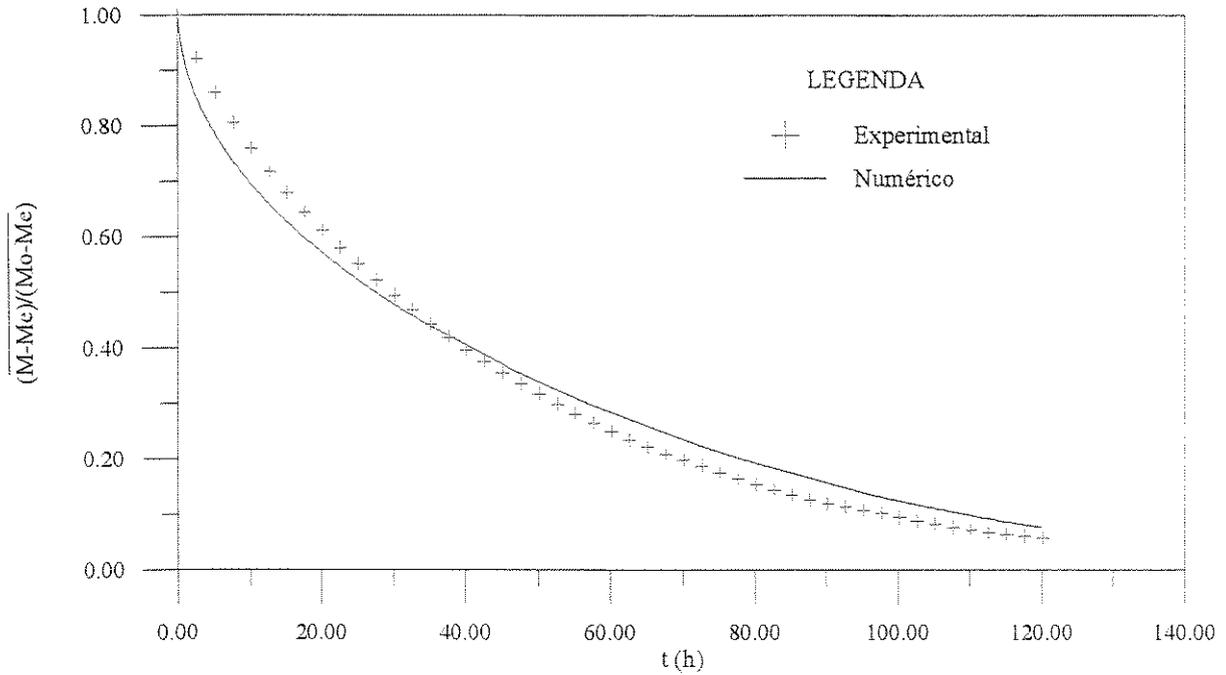


Figura 4.90 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 1) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

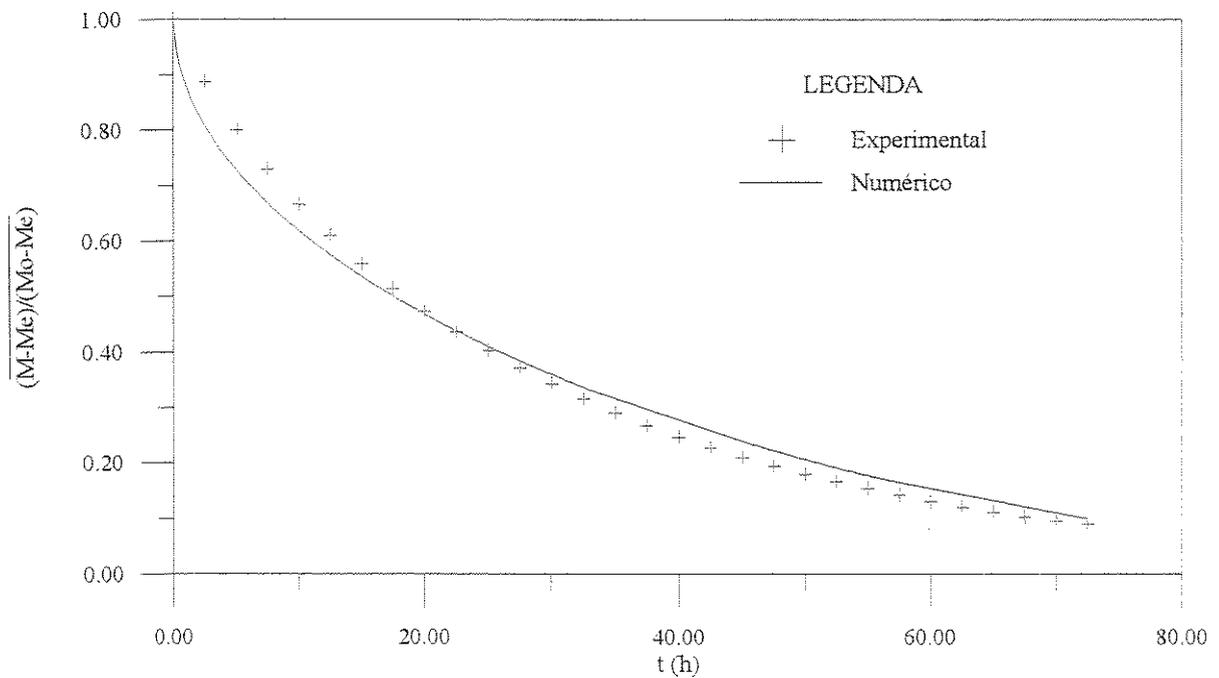


Figura 4.91 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 2) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

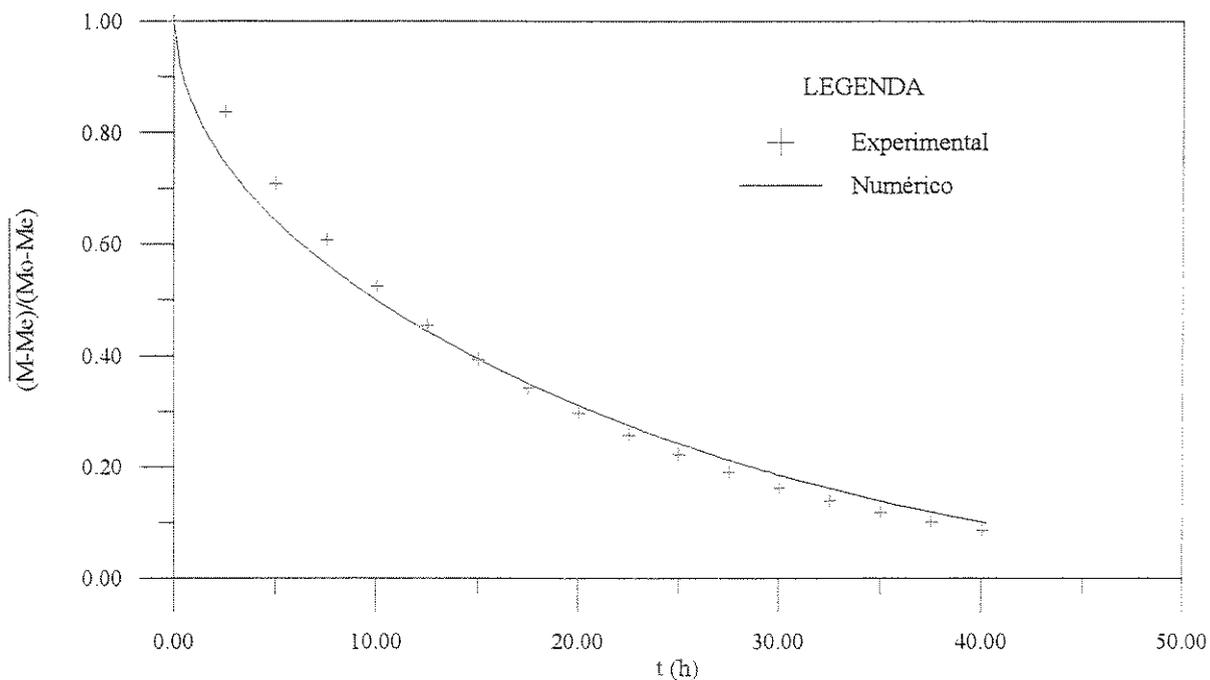


Figura 4.92 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 3) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

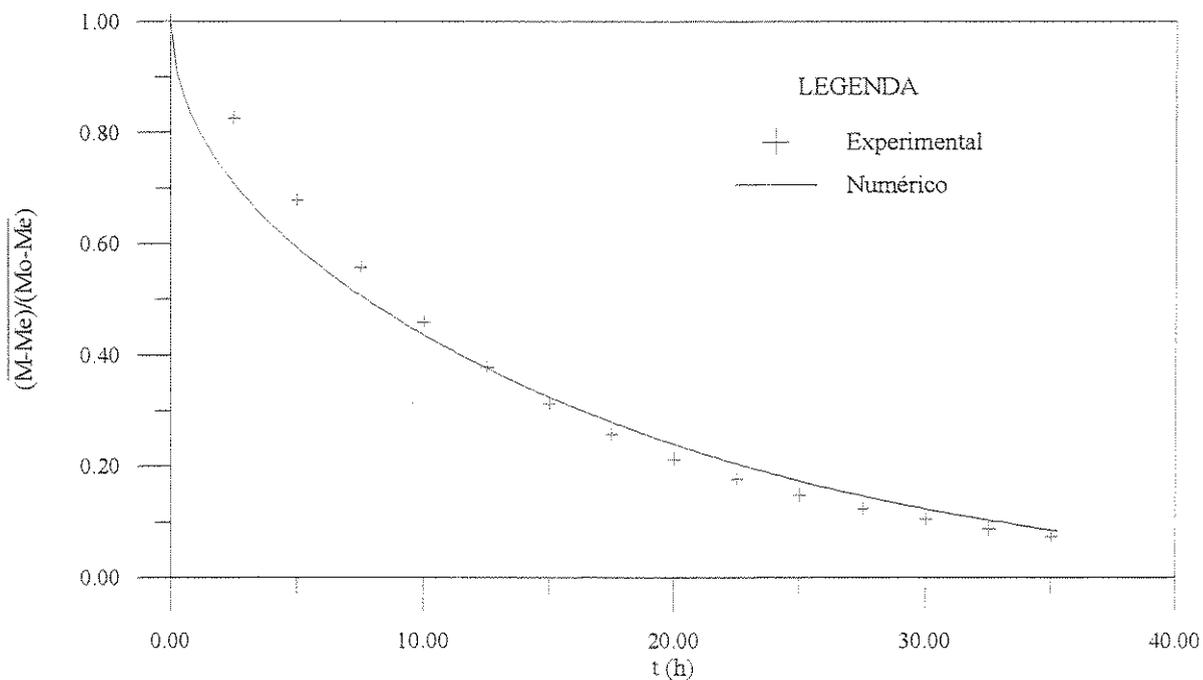


Figura 4.93 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 4) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

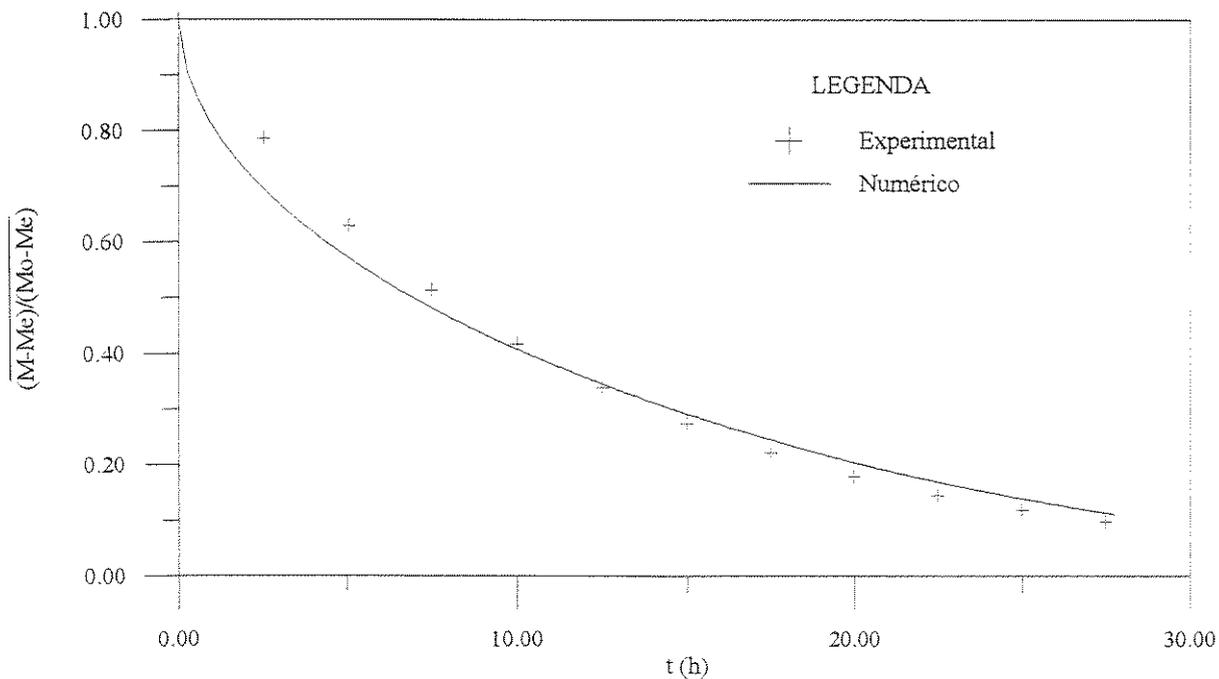


Figura 4.94 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 5) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

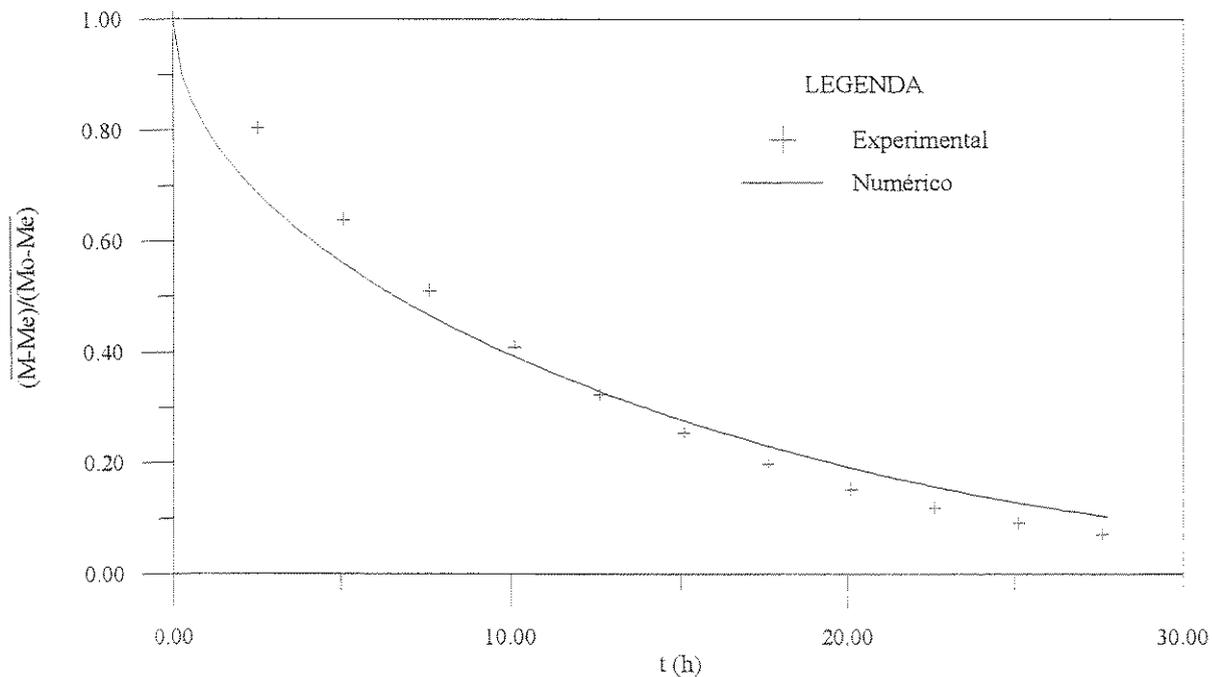


Figura 4.95 - Comparação entre os resultados teórico (modelo III, h_m infinito) e experimental (teste 6) do teor de umidade, durante a secagem de banana.

d) Modelo IV

Foi proposto este modelo, para verificar os efeitos térmicos e de transferência de umidade simultâneas,

Para dar uma visão geral e comparativa, a Figura 4.96 apresenta a temperatura experimental no centro da banana, na forma adimensional relativa ao ar de secagem, para todos os testes de secagem realizados. Observando a figura, verifica-se que para temperaturas menores as curvas são mais suaves, implicando numa tendência que a difusividade térmica seja menor para uma menor temperatura. Observa-se ainda que os testes 3 e 4 possuem temperaturas do ar de secagem diferentes, no entanto, as umidades relativas e a diferença entre as temperaturas inicial e final da banana, são aproximadamente iguais (Tabela 3.1). Como a temperatura inicial do teste 3 é aproximadamente 50% menor, tem-se taxas de aquecimento mais elevadas, implicando num possível aumento da difusividade térmica da banana, para esta condição. Neste sentido, a difusividade térmica também deve ser influenciada pelas temperaturas locais dentro do sólido. Pode ainda acontecer um aumento do coeficiente de transferência de calor convectivo, ou até mesmo a combinação de um aumento de ambos coeficientes.

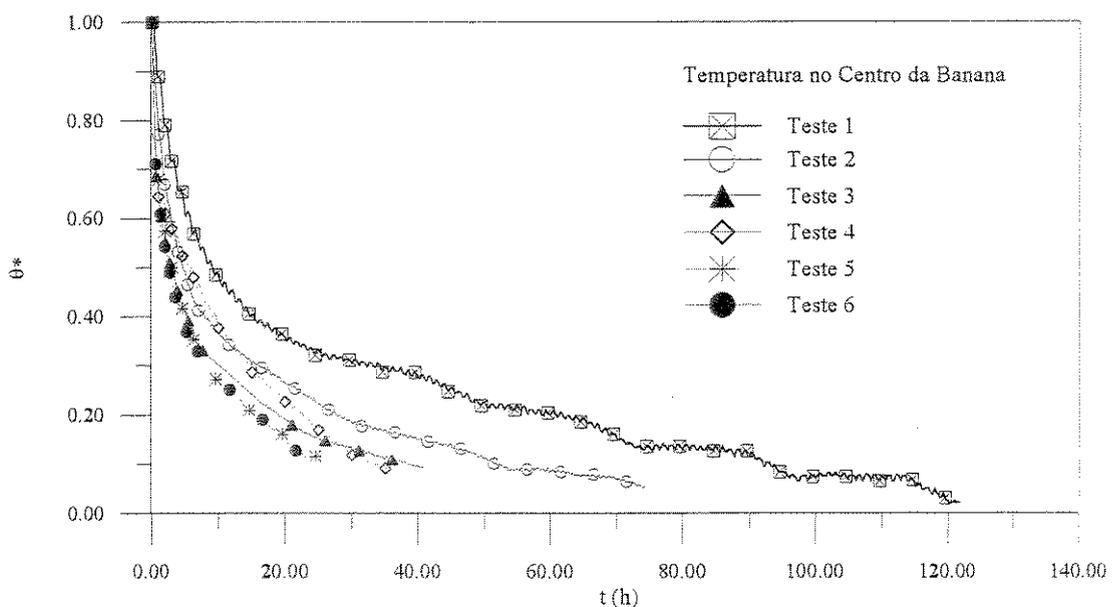


Figura 4.96 - Temperatura adimensional experimental no centro da banana, durante a secagem

As variações de temperatura no centro da banana em função do tempo de secagem obtidas numericamente com o modelo IV (α , ρ_b e h_c constantes e sem encolhimento) estão mostradas na Figura 4.97, para o teste 6 de secagem. Da análise desta curva, observa-se que o ajuste aos dados experimentais não foi satisfatório. Esta aparente discrepância pode ser atribuída à consideração de propriedades térmicas constantes, e não à consideração do encolhimento da banana ao longo do processo de secagem. Assim, pode-se concluir que a difusividade térmica da banana não é constante, mas uma função da temperatura, umidade da fruta, etc.

e) Modelo VI

Este modelo é o mais completo dentre todos os demais modelos numéricos já apresentados neste trabalho. Nele, foram considerados efeitos de propriedades variáveis, térmicas e de encolhimento. Neste modelo, considerou-se a difusividade térmica como função do teor de umidade e coeficiente de transferência de calor convectivo constante e variável.

A Figura 4.97 também apresenta uma comparação entre os valores numéricos e experimentais da temperatura no centro da banana, para diversas combinações das propriedades de transporte α e ρ e do coeficiente de transferência de calor, considerando o modelo VI com e sem encolhimento, como descrito no Capítulo 3. Como pode ser constatado, apesar de ter-se usado diferentes combinações das propriedades de transporte e do coeficiente de transferência de calor convectivo, nenhuma melhora significativa foi obtida, comparando-se com o caso base (modelo IV, que considera propriedades constantes). Os comportamentos das curvas de aquecimento geradas por cada um dos modelos são muito similares, proporcionando valores da difusividade térmica muito inferiores aos reportados na literatura. Como já mencionado, outras formas para a difusividade térmica foram testadas (modelos exponencial e quadrático) sem contudo obter-se êxito.

Como alternativa, procurou-se estudar melhor os resultados experimentais, a partir de uma análise da taxa de aquecimento no centro da banana ($\partial\theta/\partial t$). As Figuras 4.98-4.99 apresentam a taxa de aquecimento no centro da banana em função do tempo de secagem, para os testes 1 e 6, respectivamente.

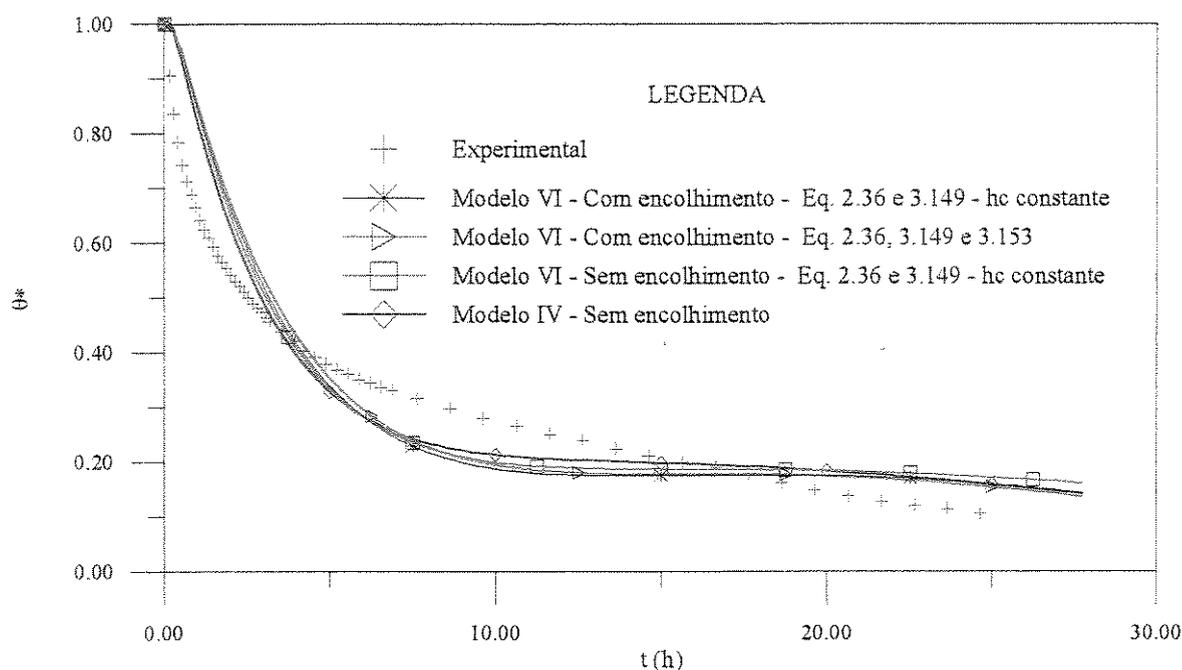


Figura 4.97 - Comparação entre os resultados teórico (modelo IV e VI) e experimental (teste 6) da temperatura no centro da banana, durante a secagem.

Como pode ser observado, a taxa de variação de temperatura nos dois casos extremos decresce muito rápido no início do processo, ficando logo depois praticamente constante até o final da secagem. Assim, é de se esperar que a difusividade térmica também apresente tal comportamento. De fato, a hipótese adotada, descrita pela Equação 3.152, possibilitou a obtenção de resultados bons, comparados às situações anteriores. É possível verificar também, comparando-se as duas curvas, que a taxa de aquecimento no centro da banana é maior para maior temperatura.

As temperaturas no centro da banana previstas pelo modelo VI utilizando as Equações 3.152 e 3.153, são comparadas com os dados experimentais, nas Figuras 4.100-4.105. Como pode ser visto, os resultados simulados ajustam-se muito bem aos dados experimentais durante quase toda a

secagem, exceto nos períodos finais, exatamente onde o modelo de encolhimento falha. Neste período, o modelo esferoidal apresenta em média, resultados $\approx 0,9$ °C abaixo dos valores experimentais, na faixa de temperatura do ar de 29,9 a 68,4 °C. Esta diferença se encontra dentro da margem de erro aceitável para fins de aplicação do modelo a processos de secagem.

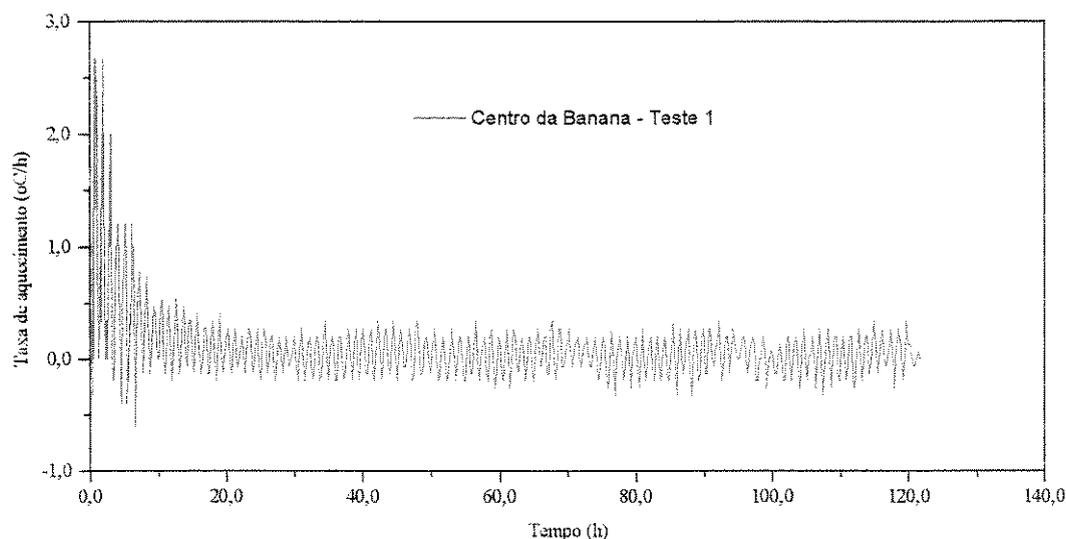


Figura 4.98 - Taxa de aquecimento experimental no centro da banana (teste 1) como função do tempo de secagem.

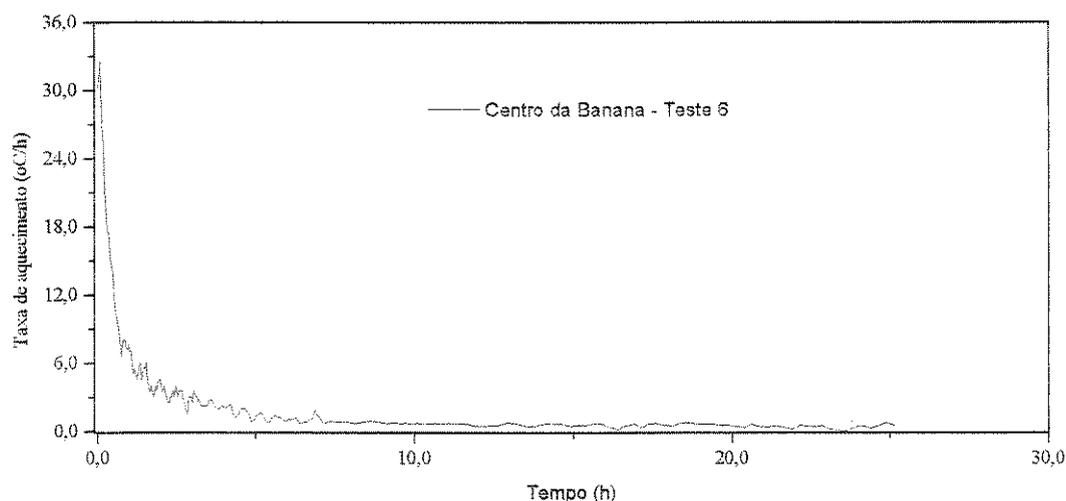


Figura 4.99 - Taxa de aquecimento experimental no centro da banana (teste 6) como função do tempo de secagem.

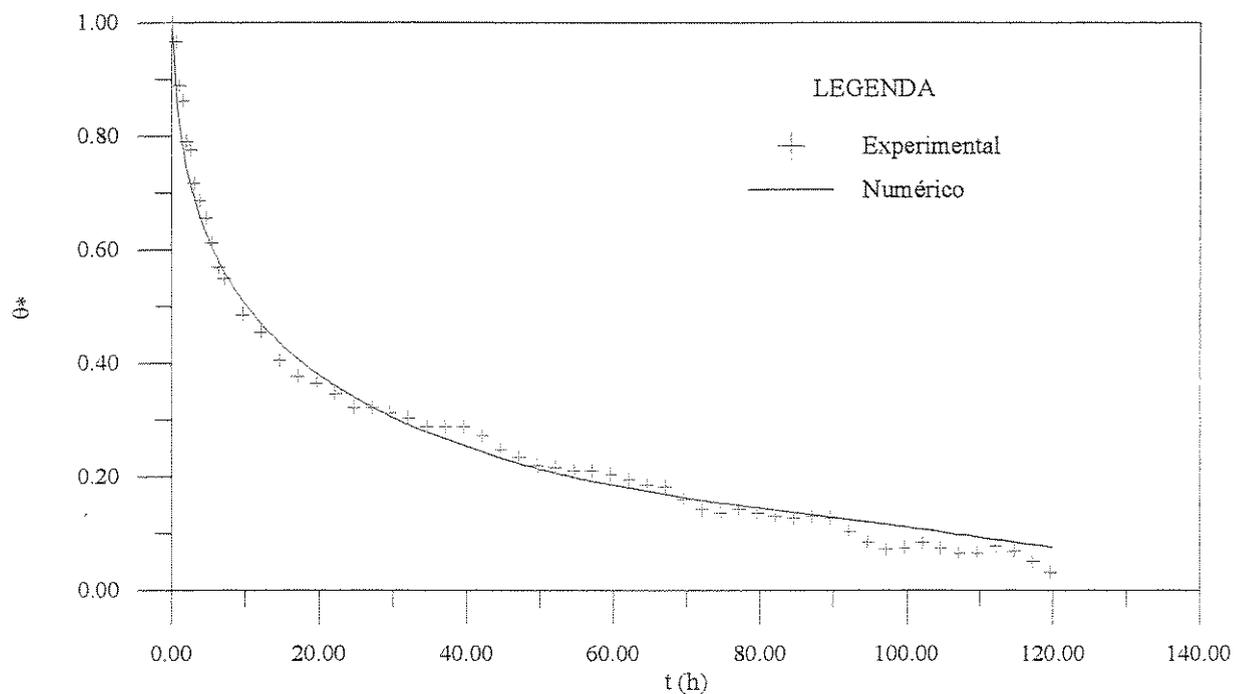


Figura 4.100 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 1) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

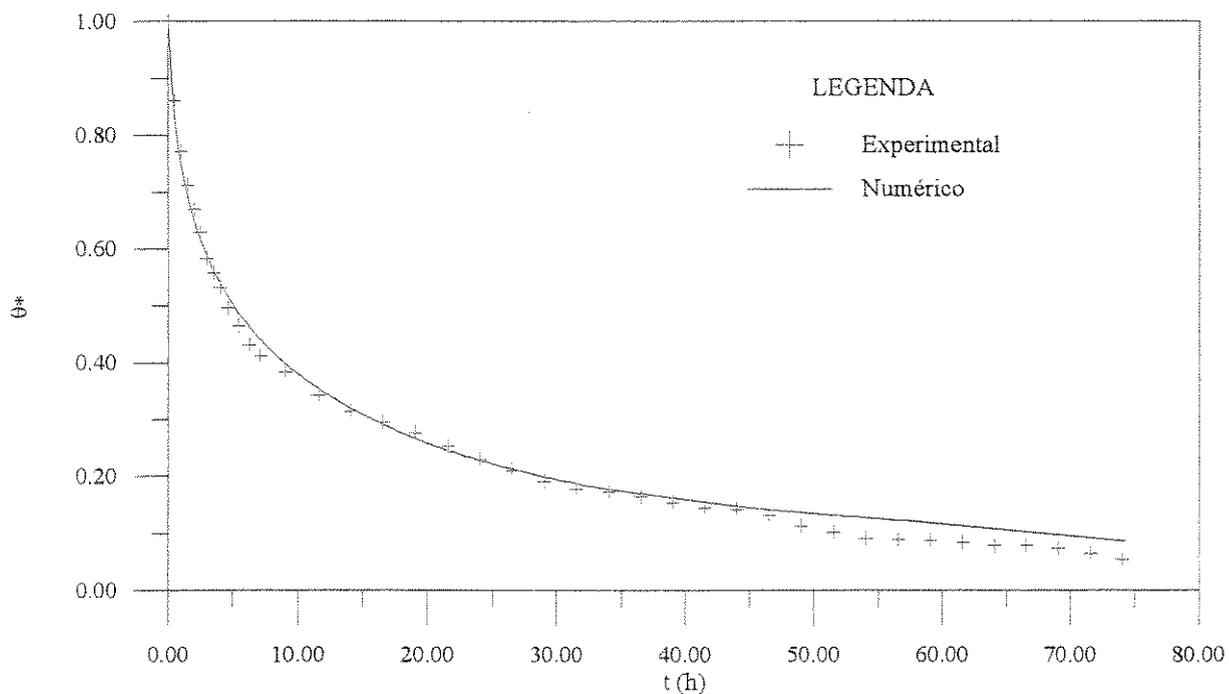


Figura 4.101 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 2) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

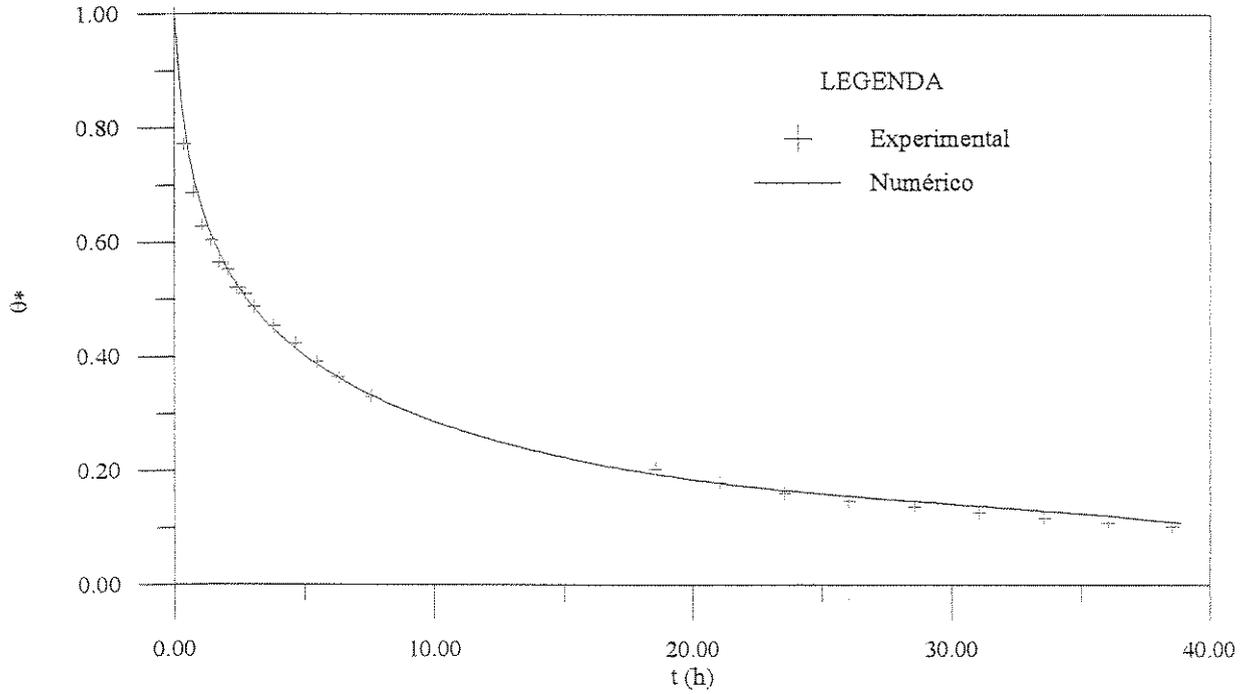


Figura 4.102 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 3) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

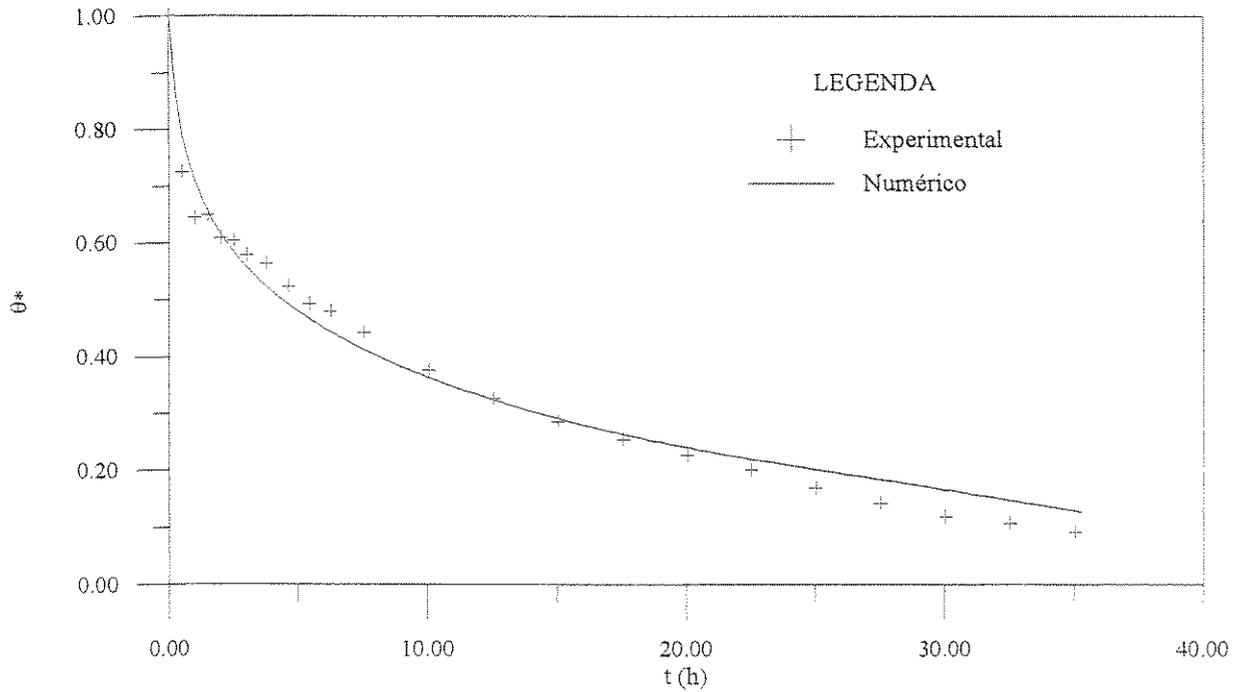


Figura 4.103 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 4) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

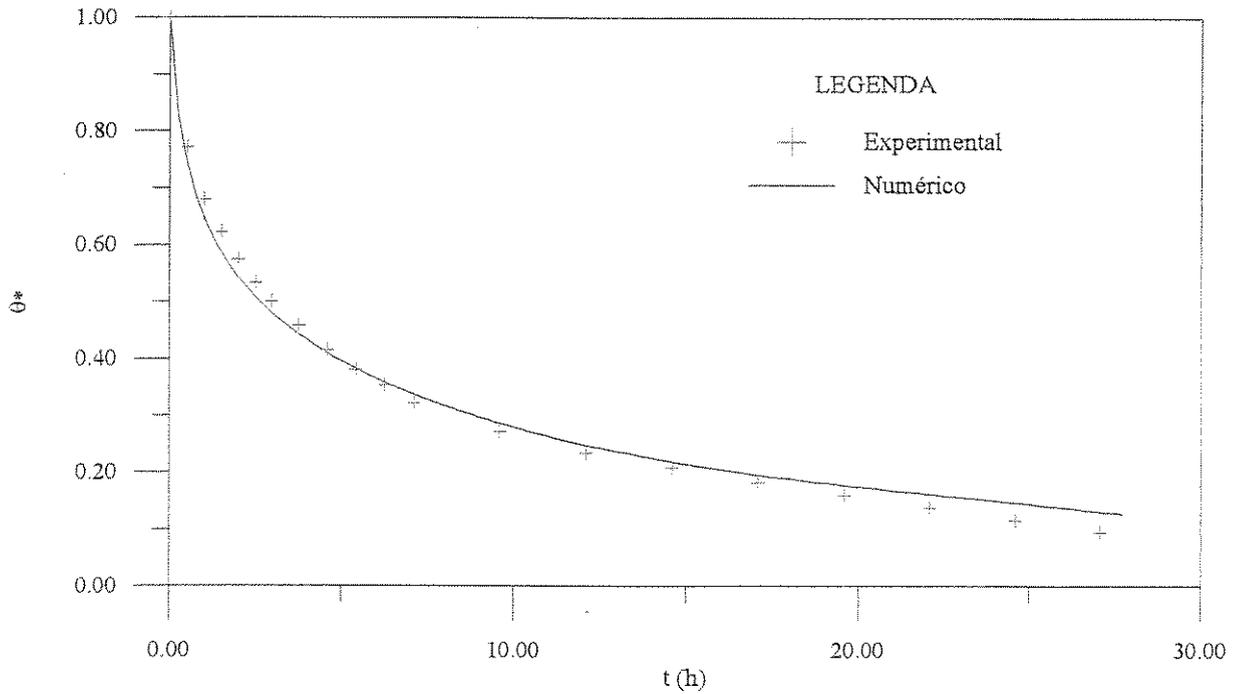


Figura 4.104 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 5) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

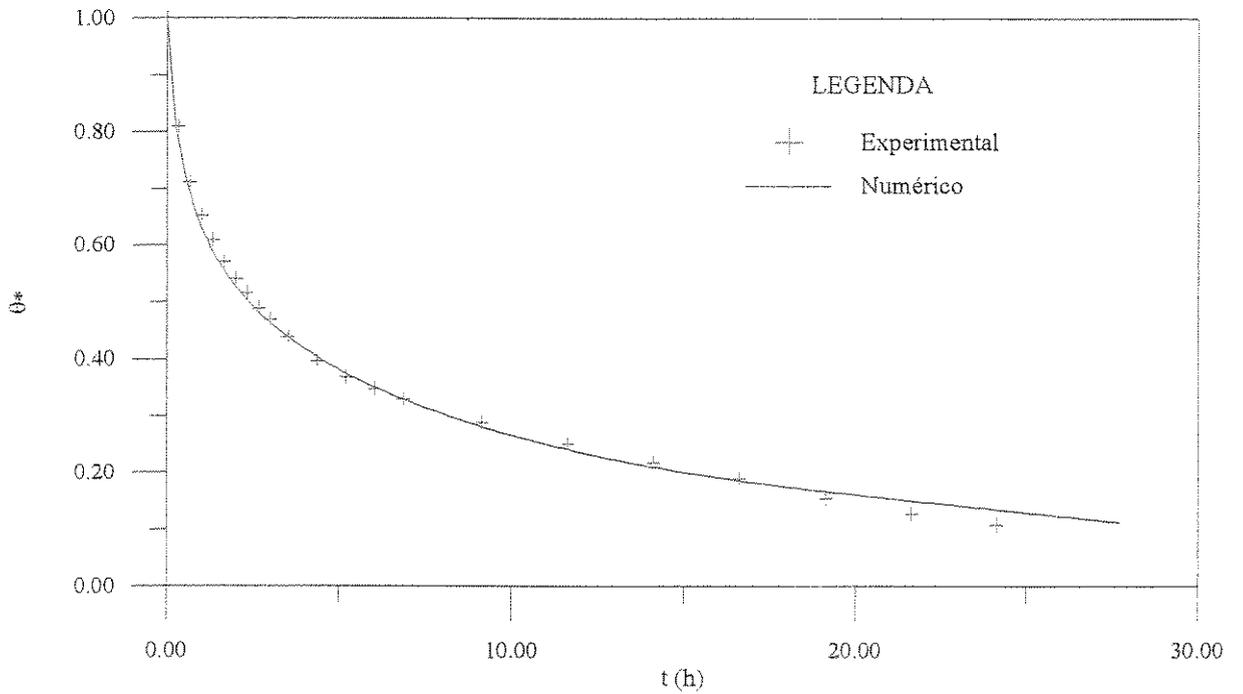


Figura 4.105 - Comparação entre os resultados teórico (modelo VI) e experimental (teste 6) da temperatura no centro da banana, durante a secagem

A Figura 4.106 mostra as variações da temperatura média e teor de umidade médio da banana com o tempo, para o teste 6. Verifica-se que num primeiro estágio, as taxas de variação de temperatura são mais pronunciadas nas primeiras horas de secagem, em comparação com as taxas de variação do teor de umidade. Posteriormente, num segundo estágio, aproximadamente após 5 h de secagem, ocorre a inversão de tendências, passando a ser mais elevados as taxas de variação do teor de umidade. Por fim, num terceiro e último estágio, ambas as taxas são pequenas, diminuindo a medida que o ponto de equilíbrio se aproxima.

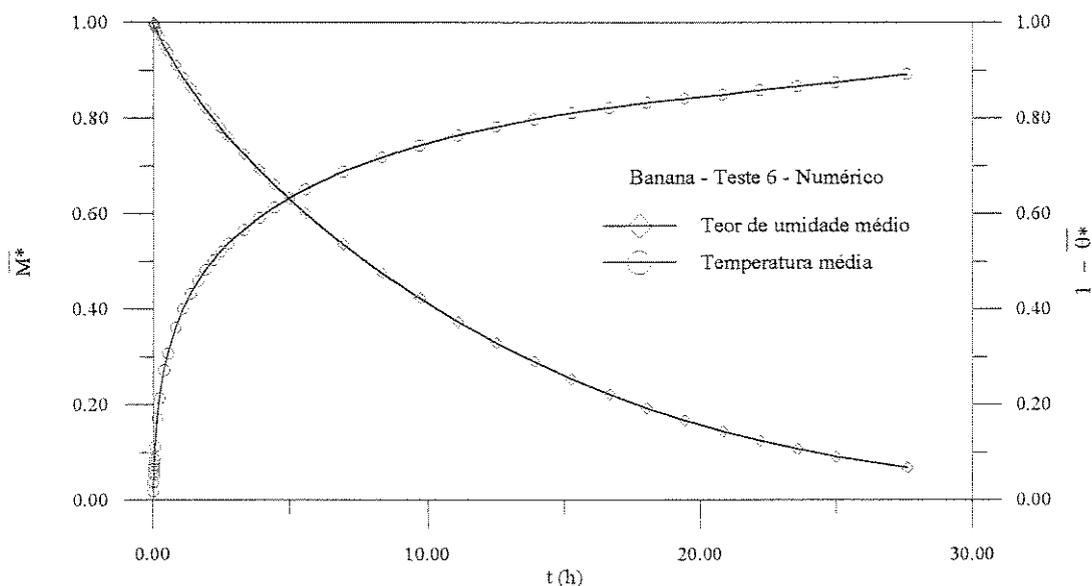


Figura 4.106 - Variação do teor de umidade médio e da temperatura média da banana (teste 6), durante a secagem

O prolongamento do experimento numérico para o teste 6 permitiu verificar que o teor de umidade do produto alcançou o valor de equilíbrio ($\bar{M}^* = 7,98 \cdot 10^{-4}$) em cerca de 64,15 h. Já a temperatura média ($\bar{\theta}^* = 1,49 \cdot 10^{-3}$) e na superfície ($\bar{\theta}_s^* = 1,27 \cdot 10^{-3}$), atingiram seus valores de equilíbrio em $t=70,67$ h.

A distribuição do teor de umidade dentro da banana é muito importante para estudar a evolução das tensões que podem ser desenvolvidas no corpo devido a gradientes de umidade acentuados.

As Figuras 4.107a - c mostram a distribuição do teor de umidade dentro da banana exposta a secagem por 1,11 h, 5,00 h e 15,00 h, respectivamente, para o teste 6. Pode ser observado, pelas linhas de iso-concentração, que os maiores gradientes de umidade se encontram exatamente próximos à superfície do material, e particularmente na região próxima ao ponto focal existe uma secagem mais acentuada, caracterizando a existência dos mais altos gradientes de umidade. Sendo assim, esta região é mais susceptível a problemas decorrentes de um maior aquecimento e maior velocidade de encolhimento no produto com possibilidade da existência de fissuras e trincas.

As Figuras 4.108a - b apresentam a distribuição de temperatura dentro da banana depois de aquecida por 1,11 h e 5,00 h, respectivamente, para o teste 6. Os mais elevados gradientes de temperatura ocorrem nas proximidades do ponto focal, tornando esta área mais susceptível a tensões térmicas, que contribuem para o surgimento de trincas, além de fornecer ao produto a possibilidade de alterar sua cor (acelerando os efeitos de escurecimento), textura e sabor, reduzindo desta forma a sua qualidade.

Observa-se que o comportamento das linhas isotérmicas é completamente diferente do apresentado pelas linhas de umidade dentro do sólido em cada tempo de secagem. Enquanto as de umidade são elipses co-focais, devidas à suposição de simetria em ζ e coeficiente de difusão de massa constante, as de temperatura, embora simétricas, não são elípticas, devido à variação da difusividade térmica com a umidade.

Comparando-se os gradientes de temperatura aos gradientes de umidade dentro da banana (Figuras 4.107a - c), pode-se verificar que estes últimos são mais pronunciados. No entanto, isto não significa que efeitos térmicos devam ser desprezados durante o processo, principalmente nas cinco primeiras horas de secagem.

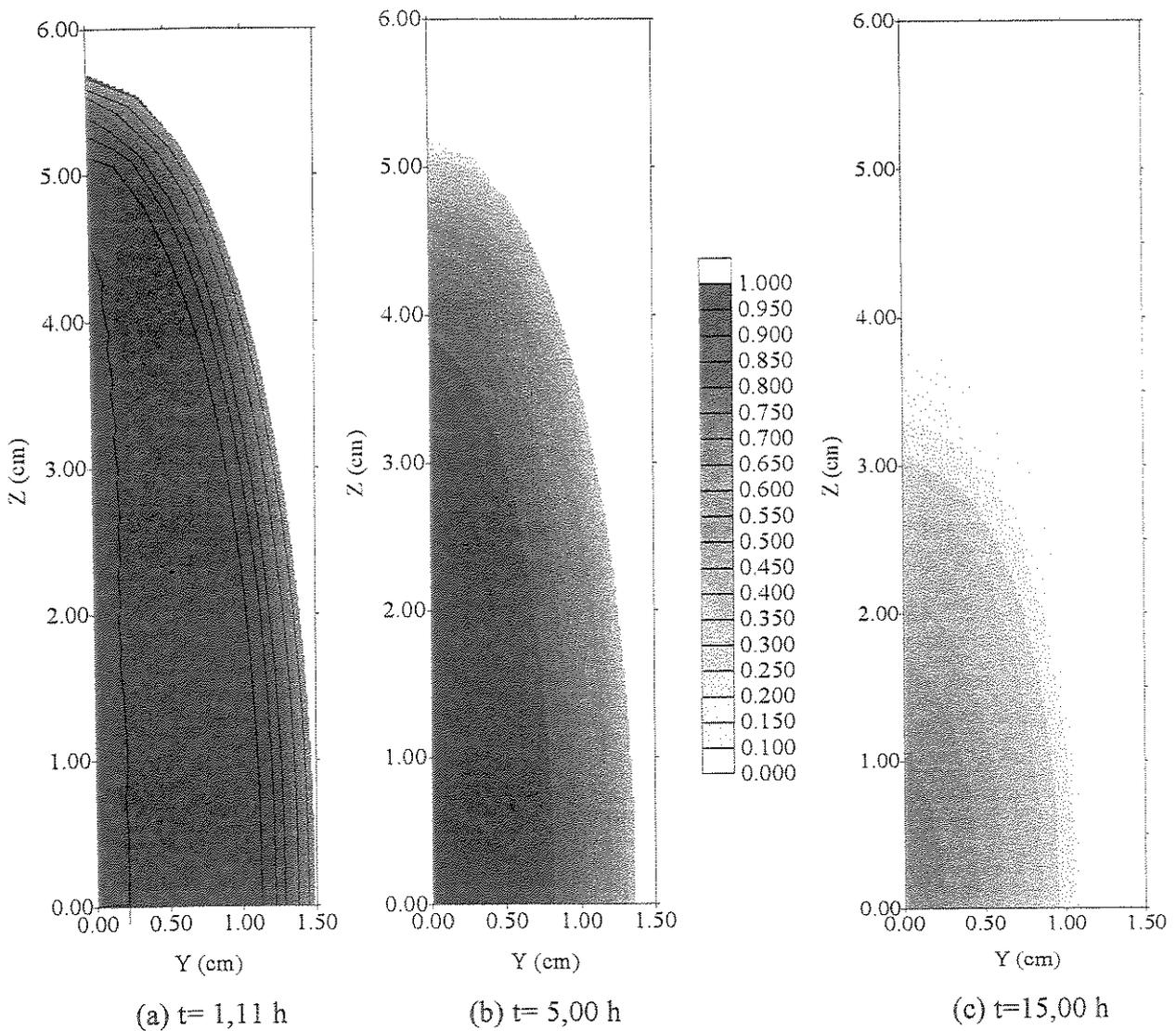


Figura 4.107 - Distribuição do teor de umidade adimensional (M^*) no interior da banana em $t=1,11$ h 5,00 h e 15,00 h (teste 6), obtida com os modelos III ou VI

A Figura 4.109 mostra a distribuição do teor de umidade no interior da banana exposta a secagem por 15,00 h, para o teste 3. Comparando com a Figura 4.107, verifica-se uma distribuição com maiores gradientes, em virtude da temperatura do ar neste caso, ser menor, e portanto ter-se uma secagem mais lenta. Vale salientar que uma melhor comparação seria aquela em que os teores de umidade médios fossem iguais em ambos os testes.

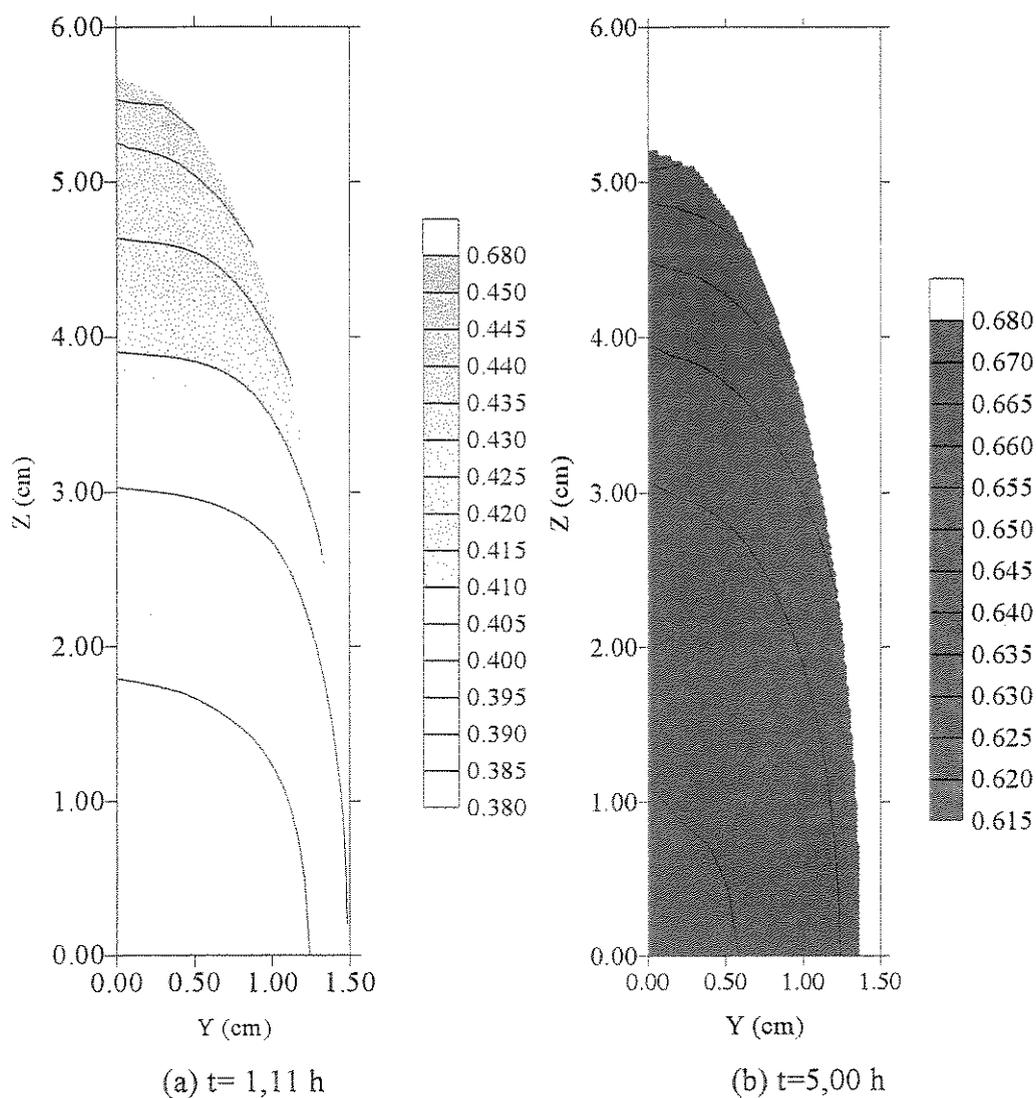


Figura 4.108 - Distribuição da temperatura adimensional ($1-\theta^*$) no interior da banana (teste 6), obtida com o modelo VI

É importante comentar que, apesar do longo tempo de secagem em todos os experimentos realizados, os efeitos do calor de respiração da banana (energia gerada internamente) foi negligenciado. Um estudo simples da ordem de grandeza desta energia gerada no produto, na equação de difusão, realizado pelo autor, a partir dos dados experimentais da temperatura e do calor de respiração fornecido na Tabela 2.7, mostrou que seu efeito é menor que 0,8% da taxa de variação da temperatura no centro da banana, para o teste 4, nos primeiros instantes do processo.

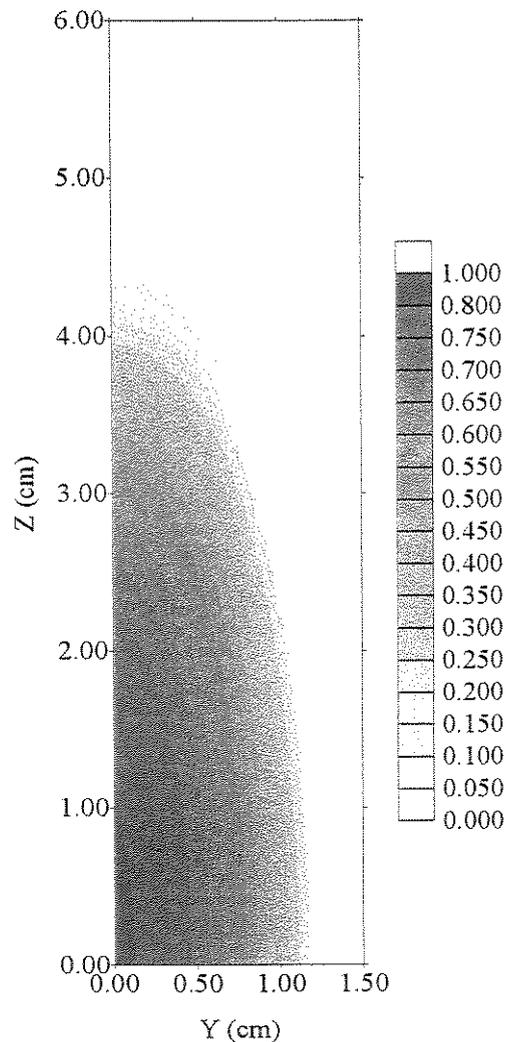


Figura 4.109 - Distribuição do teor de umidade adimensional (M^*) no interior da banana em $t=15,00$ h (teste 3), obtida com os modelos III ou VI

4.2.7.3 - Estimativa dos coeficientes de transporte (D , α , h_m e h_c)

As estimativas dos coeficientes de transporte foram feitas pela minimização da soma dos quadrados dos resíduos, como mencionado. A Tabela 4.8 sumariza os valores dos coeficientes de transporte, bem como do erro relativo, para cada teste experimental, obtido por cada modelo numérico apresentado. Nesta tabela, os dois valores do número de Biot de transferência de massa, dados pelo modelo III, referem-se aos seus valores iniciais e finais, para cada experimento.

Tabela 4.8 - Coeficientes de transporte estimados pelos modelos numéricos e variância, para cada teste de secagem

Modelo	Teste	$D \cdot 10^{+10}$ (m ² /s)	$h_m \cdot 10^{+8}$ (m/s)	Bi_m	\bar{S}^2 (10^{+4})	$\alpha \cdot 10^{+7}$ (m ² /s)	h_c (W/m ² ·°C)	Bi_c	\bar{S}^2 (10^{+4})
I	1	1,33	---	---	55,80	---	---	---	---
	2	1,89	---	---	35,02	---	---	---	---
	3	3,25	---	---	39,80	---	---	---	---
	4	4,32	---	---	50,98	---	---	---	---
	5	4,65	---	---	41,16	---	---	---	---
	6	5,13	---	---	57,34	---	---	---	---
II	1	6,02	6,10	5,78	1,14	---	---	---	---
	2	6,25	10,51	9,53	0,07	---	---	---	---
	3	13,27	15,43	6,63	0,07	---	---	---	---
	4	25,87	17,03	3,75	0,42	---	---	---	---
	5	25,90	19,38	4,27	0,03	---	---	---	---
	6	34,28	19,76	3,28	0,90	---	---	---	---
III	1	1,65	10,10	34,46 18,40	0,96	---	---	---	---
	2	2,48	15,53	35,47 21,38	1,20	---	---	---	---
	3	4,57	21,35	26,64 15,75	0,91	---	---	---	---
	4	7,25	22,30	17,52 11,14	0,68	---	---	---	---
	5	7,30	26,15	20,47 12,89	1,49	---	---	---	---
	6	8,63	26,56	17,49 11,23	1,43	---	---	---	---
III*	1	0,93	---	---	20,26	---	---	---	---
	2	1,40	---	---	15,32	---	---	---	---
	3	2,31	---	---	17,56	---	---	---	---
	4	3,08	---	---	24,81	---	---	---	---
	5	3,29	---	---	18,36	---	---	---	---
	6	3,66	---	---	29,73	---	---	---	---
IV	6	34,28	19,76	3,28	0,90	0,34	10,56	1,25	34,44

* Variante do modelo III (h_m infinito)

A maior resistência interna ao fluxo de umidade é dada pela variante do modelo III (caso de h_m infinito) que apresenta, para uma mesma condição de secagem, a menor difusividade dentre todos os modelos. Os valores baixos do erro médio quadrático indicam que os modelos ajustam-se muito bem aos dados experimentais, exceto o modelo I. Esta grande diferença se dá principalmente em função da condição de contorno inadequada para este tipo de produto.

Como esperado, todos os coeficientes de transporte de massa tendem a aumentar com o aumento da temperatura, e levemente com o decréscimo da umidade relativa do ar. Este comportamento da difusividade de massa conduziu a uma decisão de ajustar estes dados como função da temperatura e umidade relativa. A difusividade de massa em função destas duas variáveis se ajustou muito bem aos dados obtidos com os modelos, substancialmente melhor que o obtido assumindo-se esta propriedade como função apenas da temperatura, como é utilizado por diversos pesquisadores, principalmente para grãos. Contudo, os resultados obtidos com o uso das equações não são confiáveis para outras condições de secagem, em virtude de terem apresentado caráter oscilatório com a umidade relativa, para uma temperatura constante. Este inconveniente pode ser atribuído ao baixo número de pontos usados no ajuste. Por esta razão optou-se por ajustar os dados da difusividade de massa como função apenas da temperatura.

A Tabela 4.9 sumariza os valores das constantes da Equação 3.147, para cada modelo apresentado, excetuando-se o modelo VI, em que as propriedades são variáveis com o teor de umidade e a temperatura do produto.

Tabela 4.9 - Coeficientes A_i da Equação 3.147 e os correspondentes valores de R e \bar{S}^2

Modelo	$A_1 \cdot 10^{+10}$ (m ² /s)	A_2 (K)	R	\bar{S}^2
I	145838,408	-3480,425	0,9838	0,0962
II	263214956,779	-5399,435	0,9895	3,5965
III	2448930,845	-4265,277	0,9871	0,2615
III*	96776,477	-3456,711	0,9859	0,0417

* Variante do modelo III (h_m infinito)

As Figuras 4.110 - 4.113 apresentam uma comparação entre os resultados do coeficiente de difusão de massa preditos pela Equação 3.147 e aqueles obtidos com o ajuste dos diversos modelos numéricos aos dados experimentais.

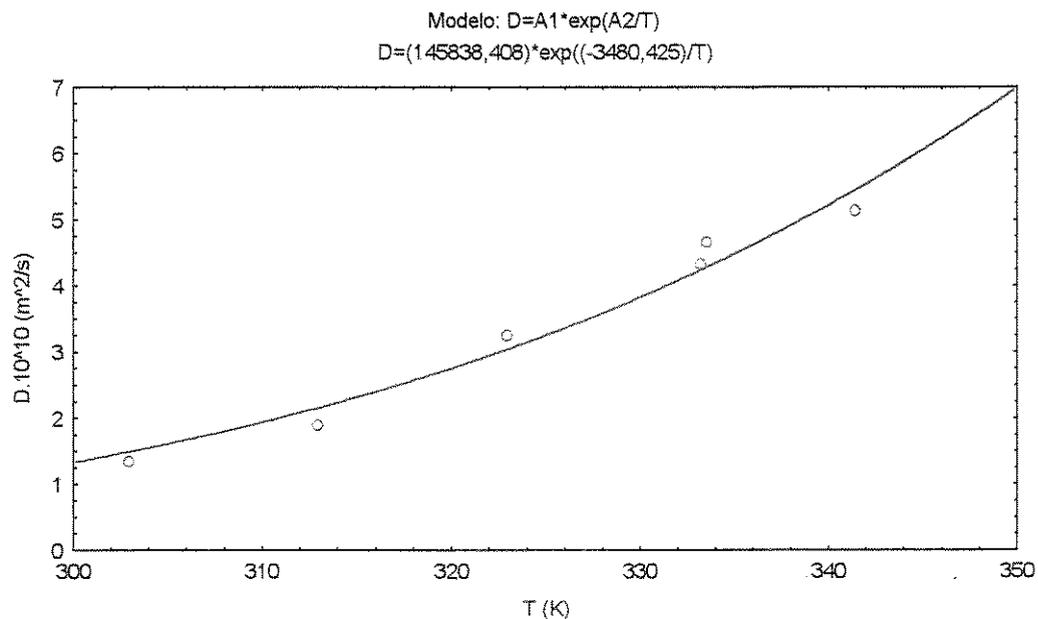


Figura 4.110 - Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo I

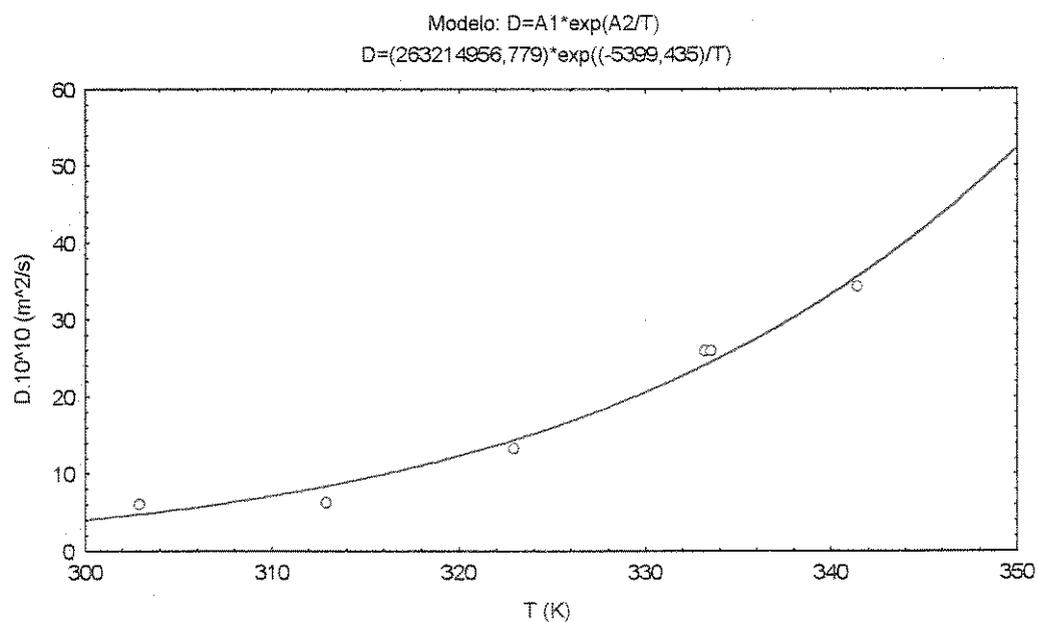


Figura 4.111 - Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo II

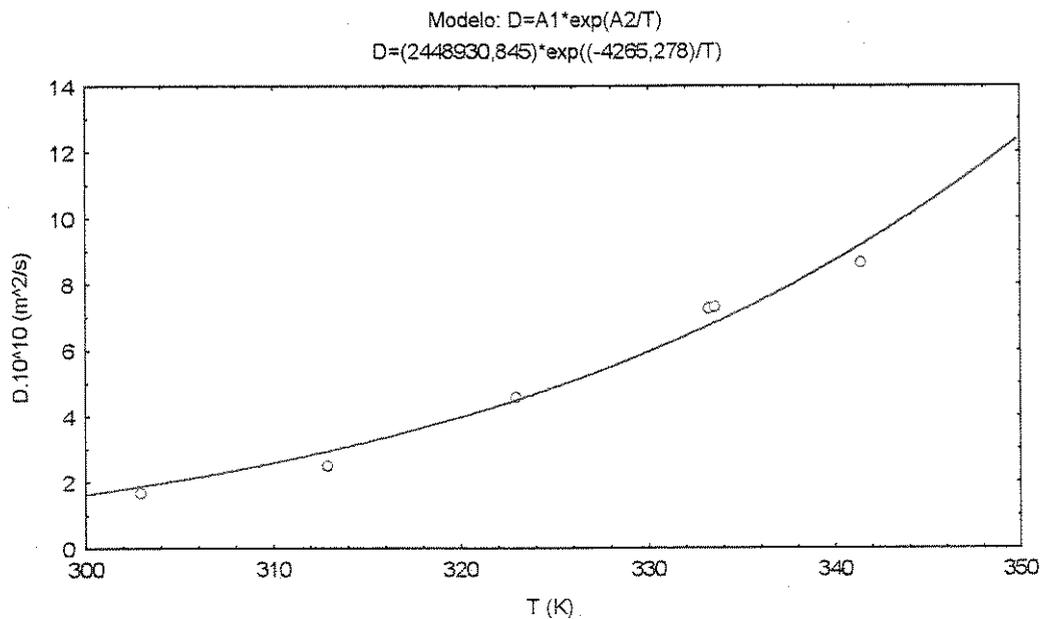


Figura 4.112 - Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo III

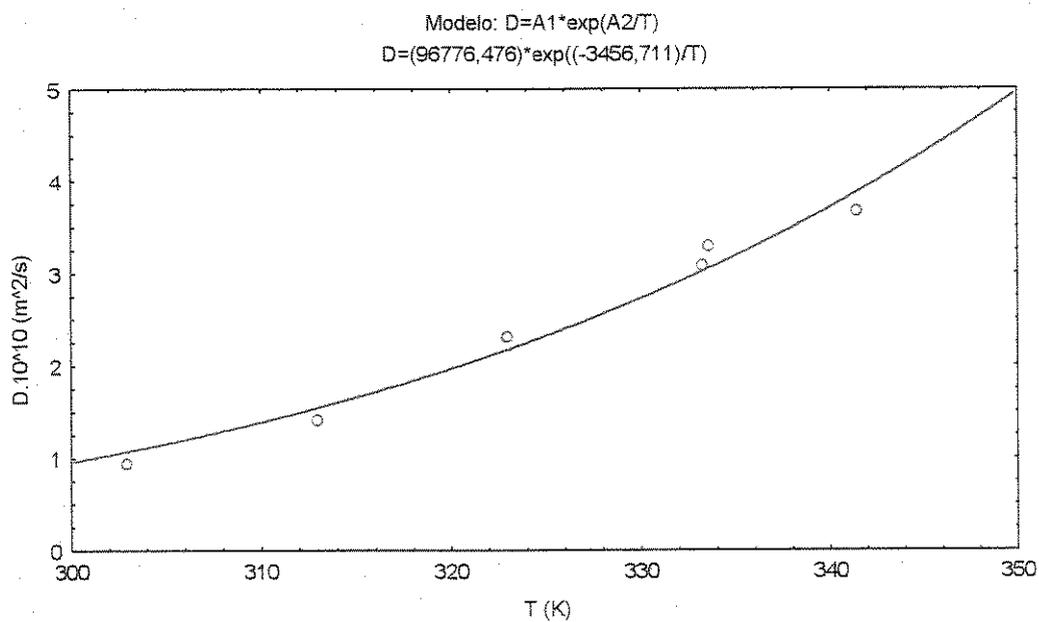


Figura 4.113 - Comparação entre os resultados da difusividade de massa predito pela Equação 3.147 e os valores obtidos (o) com o uso do modelo III (h_m infinito)

Ainda referindo-se aos coeficientes D e h_m , alguns autores tendem a negligenciar os efeitos da resistência externa (coeficiente de transferência de massa convectivo) e implicitamente incluem este efeito no coeficiente de difusão, que por sua vez apresenta resultados mais baixos, como pode ser constatado nos resultados obtidos para o modelo I em comparação com o modelo II. De acordo com Vagenas e Marinos-Kouris (1991), estes valores não são considerados como uma propriedade física do material, em virtude deles representarem uma combinação de dois efeitos (externo e interno), recomendando cautela no seu uso.

Segundo Vagenas e Marinos-Kouris (1991), o valor do coeficiente de difusão obtido com o modelo I é menor em virtude de considerar os efeitos externo e de encolhimento. Com a inclusão do efeito convectivo na superfície do sólido, o coeficiente de difusão aumentou, confirmando a hipótese dos autores. No entanto, seu valor ainda incorpora o efeito de encolhimento. A inclusão do efeito de encolhimento no modelo numérico III e sua variante (h_m infinito), reduziu o coeficiente de difusão, e no caso do modelo III, o coeficiente convectivo de transferência de massa aumentou. Este comportamento apresenta um forte indicio de que o encolhimento influencia à transferência de massa apenas na superfície do sólido, caracterizado pela redução da área superficial do mesmo. O encolhimento modifica a estrutura externa do material, tal como sua rugosidade, o que conduz a alterar o h_m , o que é perfeitamente possível fisicamente.

Com relação ao número de Biot de massa, observa-se que há uma tendência que, a temperaturas mais elevadas sejam, obtidos números de Biot menores, caracterizando que nestas condições, a resistência externa à transferência de umidade é mais elevada, comparada à resistência interna.

Em geral a comparação entre as difusividades de massa reportadas na literatura é muito difícil em virtude dos diferentes métodos de estimação, variação da composição do alimento e suas estruturas física e química. Apesar disso, a difusividade mássica do sistema banana-água, obtida neste estudo comparada com aquelas reportadas na literatura e que estão listadas na Tabela 2.8, evidencia a eficácia da metodologia utilizada.

Como o modelo difusivo foi usado em todos os casos listados na Tabela 2.8, as mais altas diferenças no coeficiente de difusão de massa podem ser atribuídas principalmente aos seguintes fatores:

- variedade do produto;
- considerações geométricas diferentes;
- teor de umidade de equilíbrio diferente (fenômeno de histerese na isoterma de sorção);
- condições de contorno consideradas;
- variações na estrutura física do produto;
- provável formação de poros, por evaporação de água.

A difusividade térmica pode ser calculada pela relação entre a condutividade térmica dividida pelo produto do calor específico e a massa específica. Fisicamente ela define a característica de um material para conduzir e armazenar ou perder calor. Segundo Singh (1982), a difusividade térmica de um material é afetada por seu teor de umidade, temperatura, composição e porosidade.

Precisão e acurácia de medidas são importantes fatores para considerar quando um método é suficientemente bom para ser usado. De acordo com Sweat (1974) erros sistemáticos de $\pm 5\%$, e erro padrão de 2 a 3%, devido a limitação na precisão do instrumento, são esperáveis, ao usar-se o método da sonda para medida da condutividade térmica. Sendo assim, estes erros são repassados diretamente para o cálculo da difusividade térmica.

Segundo Szczesniak (1983), os valores da difusividade térmica de alimentos variam de 1.10^{-7} a $2.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, elevando seu valor com o aumento da temperatura. Obviamente esta afirmação está vinculada ao teor de umidade do produto durante o processo a que foi submetido.

A Tabela 4.10 apresenta os coeficientes das Equações 3.152-3.153, referentes a difusividade térmica e coeficiente de transferência de calor convectivo, utilizadas no modelo VI, bem como o erro obtido na comparação entre os resultados numérico e experimental da temperatura no centro da banana.

Tabela 4.10 - Coeficientes A_i das Equações 3.152-3.153 e os correspondentes erros relativos

Teste	α (m ² /s)*				h_c (W/m ² K)**	\bar{S}^2 (.10 ⁻⁴)
	$A_1 \cdot 10^{+9}$	A_2	A_3	A_4	A_1	
1	0,88	0,60	2,46	0,01	57,04	2,37
2	1,47	0,60	2,46	0,01	57,98	1,90
3	2,38	0,60	2,46	0,01	58,49	0,89
4	2,15	0,54	2,92	0,01	59,06	6,28
5	2,57	0,54	2,86	0,01	62,80	4,91
6	2,70	0,54	2,93	0,01	63,56	1,48

$$* \alpha = \frac{A_1}{\left[A_2(1 - M^{A_3}) + A_4 \right]}$$

$$** h_c = \frac{A_1}{\left[(L')^{2/3} \right]}$$

A Tabela 4.11 apresenta os resultados da difusividade térmica e do coeficiente de transferência de calor na superfície da banana, no início e no final do processo de secagem, obtidas a partir das Equações 3.152 - 3.153.

Tabela 4.11 - Valores da difusividade térmica, coeficiente de transferência de calor e número de Biot, para cada teste de secagem

Teste	$\alpha \cdot 10^{+7}$ (m ² /s)*		h_c (W/m ² °C)		Bi_c		Tempo (h)
	Início	Final	Início	Final	Início	Final	
1	0,88	$1,44 \cdot 10^{-2}$	12,73	19,42	1,35	2,30	121,85
2	1,47	$2,43 \cdot 10^{-2}$	12,92	18,16	1,40	2,49	72,00
3	2,38	$3,93 \cdot 10^{-2}$	13,02	18,51	1,42	2,51	40,80
4	2,15	$3,91 \cdot 10^{-2}$	13,15	17,80	1,45	2,83	35,30
5	2,57	$4,70 \cdot 10^{-2}$	13,97	19,04	1,54	2,79	27,80
6	2,70	$4,92 \cdot 10^{-2}$	14,16	19,05	1,56	2,97	27,60

* Próximo do centro da banana. Ponto (i=2, j=2).

Observando a Tabela 4.11, é evidente a dependência da difusividade térmica também com a temperatura, principalmente no final da secagem, onde os teores de umidade são baixos. A variação dos valores iniciais da difusividade térmica para as amostras estudadas foi entre $0,88.10^{-7}$ e $2,70.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, mostrando um razoável desvio com respeito aos valores reportados na literatura e que constam na Tabela 2.7. Estas diferenças são devidas principalmente ao teor de umidade e temperatura do produto. Outros erros podem ser atribuídos à diferente natureza das frutas e a própria incerteza na determinação da difusividade, que podem ser atribuídas sob o ponto de vista experimental, a erros de medida, de metodologia e a consideração geométrica do corpo.

A Figura 4.114 ilustra a dependência da difusividade térmica com o teor de umidade durante a secagem de banana, para o teste 6. O decréscimo muito acentuado que a Equação 3.152 tem nos primeiros instantes do processo produz alguns erros na predição da difusividade térmica nestes tempos. Por exemplo, se o teor de umidade em $t=0$ s fosse $M^*=0,997$ em vez de $M^*=1,000$ (que corresponde a um erro de 0,3%) para o teste 4, com $M_0=74,76\%$ (b.u) e $\theta_0=30,57 \text{ }^\circ\text{C}$, a difusividade térmica dada pela Equação 3.152 seria $1,46.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, em vez de $2,15.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Assumindo-se da Tabela 2.7, $\rho_b=980 \text{ kg/m}^3$, $k=0,481 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ e $c_p=3,346 \text{ kJ/kgK}$, o valor de $\alpha=k/(\rho_b.c_p)$ seria $1,47.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, para $M_0=75,7\%$ (b.u) e $\theta_0=27 \text{ }^\circ\text{C}$. Assim, comparando-se os dois resultados, obtém-se um erro de 0,7% que é atribuído à diferença de temperatura, do teor de umidade e variedade da fruta.

De acordo com Gaffney et al., citado por Ansari e Afaq (1986a), a diferença nos valores da difusividade térmica de um mesmo produto, reportadas por diferentes pesquisadores, varia de 50% a 93%. Assim, comparado com este trabalho, as diferenças nos valores de α obtidos pelo presente método e aqueles de estudos prévios estão dentro dos limites aceitáveis.

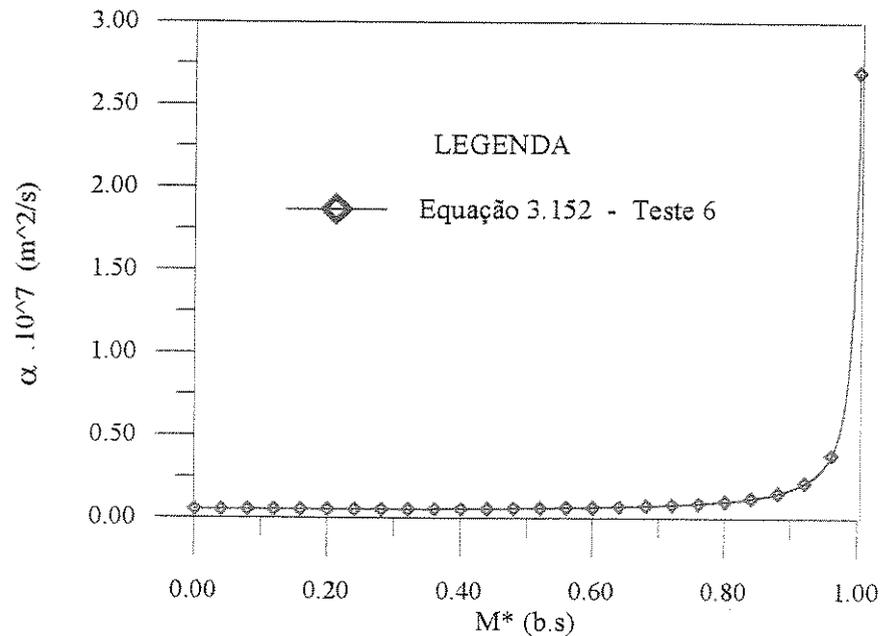


Figura 4.114 - Variação da difusividade térmica em qualquer ponto dentro da banana, durante a secagem (teste 6)

O coeficiente convectivo de transferência de calor não é realmente uma propriedade de um material. Ele é usado para quantificar a taxa de transferência de calor na superfície do corpo. Como mencionado no capítulo 3, ele é dependente da velocidade do fluido, das propriedades do fluido, da rugosidade da superfície e forma do corpo, como também da diferença de temperatura entre a superfície e o fluido que envolve o corpo.

Na prática, o fluxo de calor e a temperatura na superfície são muito difíceis de medir sem perturbar a transferência de calor. Em alimentos com alto teor de umidade, a transferência de calor é acompanhada por transferência de massa complicando ainda mais a medida do coeficiente convectivo de transferência de calor.

De acordo com Saravacos e Kostaropoulos (1995) os baixos valores de h_c de sistemas sólido-ar, são uma séria limitação na secagem de alimentos com ar aquecido. Segundo os autores, os coeficientes de transferência de calor variam de 10 a 200 $\text{W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, quando a velocidade varia de 0,1 m/s (convecção natural) para 5,0 m/s (sistema de leito fluido).

Segundo ASHRAE (1993), o coeficiente de transferência de calor na superfície de maçã é $h_c=17,03 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, para uma velocidade do ar de $0,39 \text{ m/s}$ e $T=27,2 \text{ }^\circ\text{C}$. Ansari e Afaq (1986a), estudando o resfriamento de banana, usaram um coeficiente de transferência de calor $h_c=66,44 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, para uma velocidade do ar de $6,6 \text{ m/s}$, na temperatura do ar de $T=5,9 \text{ }^\circ\text{C}$ e temperatura inicial do produto de aproximadamente $\theta_o=42 \text{ }^\circ\text{C}$. Todos os valores de h_c foram obtidos de correlações. Como pode ser constatado, existe uma pequena diferença entre estes coeficientes e os obtidos com o modelo VI, contudo para velocidades iguais, a concordância foi boa.

A variação do coeficiente de transferência de calor convectivo no início e no final do processo de secagem de banana, obtidos numericamente, para todos os experimentos realizados, foi de $12,73$ à $14,16 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ no início e de $17,80$ à $19,42 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ no final, respectivamente. Observa-se que há uma tendência de aumento de h_c com a temperatura do ar de secagem, como esperado. Particularmente ao final da secagem, alguns experimentos apresentaram um coeficiente de transferência de calor mais elevado do que o esperado (teste 1) e mais baixo que o esperado (teste 4), podendo ser atribuído este comportamento, ao tempo de secagem, ao encolhimento e às dimensões diferentes. Assim, os valores obtidos neste trabalho, estão próximos dos resultados reportados na literatura.

Por outro lado, durante o fenômeno de secagem, a banana encolhe. Isto modifica a forma do corpo, diminui a área de transferência de calor e aumenta a rugosidade superficial do material. Esta última característica proporciona um aumento do nível de turbulência na camada limite, favorecendo desta forma a troca de energia entre o ar e o material. O coeficiente de transferência de calor convectivo também é dependente da velocidade da corrente livre de ar, contudo este efeito não está colocado explicitamente na Equação 3.153, em virtude que a velocidade do ar, em todos os experimentos, permaneceu praticamente constante. Sendo assim, seu efeito está incorporado na constante A_1 , assim como os efeitos das propriedades do ar.

Determinando as propriedades do ar de secagem e utilizando-se da Equação 3.154, pode-se desacoplar os efeitos das propriedades do ar e da velocidade do fluido. A Tabela 4.12 apresenta os valores da constante A_2 da Equação 3.154, para cada condição de secagem.

Tabela 4.12 - Coeficientes A_2 da Equação 3.154 para cada teste de secagem

Teste	A_2
1	91,805
2	94,522
3	87,888
4	84,019
5	90,335
6	85,390

Recomenda-se cautela no uso destas correlações (Equações 3.153-3.154), pois as mesmas foram obtidas com a finalidade de estimar aproximadamente o valor do coeficiente de transferência de calor. Seu intervalo de validade é restrito, resumindo-se para baixas velocidades, em torno do valor em que foram geradas. É possível que elas sejam válidas para velocidades mais elevadas, contudo mais experimentos são requeridos para melhorar o ajuste da constante A_2 e ampliar desta forma o intervalo de validade das equações.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Considerando os resultados obtidos e da simulação da secagem em corpos com geometria elipsoidal, pode-se concluir de maneira geral que:

O tratamento matemático utilizado para obtenção da solução analítica da equação de difusão em coordenadas esferoidais prolato com condição de equilíbrio na superfície foi adequado e pode ser usado para obter outros fenômenos difusivos, tais como aquecimento, resfriamento, secagem e umidificação, bem como para validar modelos numéricos. A partir da solução, é possível obter a distribuição interna da grandeza requerida, bem como a sua cinética de difusão em corpos com geometrias esféricas e elipsoidais.

O método de volumes finitos mostrou-se adequado para discretizar a equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidal prolato, que possibilitou prever o fenômeno de difusão transiente no interior de um sólido com forma esférica ou elipsoidal. Os modelos apresentados são versáteis, podendo ser com coeficiente de difusão constante ou variável, com condição de contorno constante ou do tipo convectiva, e também com outras condições de contorno, sob pequenas modificações. As principais vantagens dos modelos e do método numérico utilizado são:

- razoável grau de aproximação, permitindo obter bons ajustes;
- uso de volumes de controle desiguais no plano físico, e que beneficia a solução próxima dos pontos de singularidade e na fronteira do corpo;
- simplicidade e eficácia computacional;
- facilidade de extensão para outras situações que envolvam difusão;
- aplicável para diversos produtos biológicos, sem restrição do tipo (frutas, cereais, vegetais, etc.);
- alta estabilidade numérica e baixo tempo computacional ($\Delta t=20$ s), quando comparado com o método de elementos finitos usado por Haghghi et al. (1990) com $\Delta t=2,5$ s; diferenças finitas usado por Queiroz (1994) com $\Delta t=3,6$ s e elementos de fronteira usado por Wrobel e Brebbia (1981) com $\Delta t=5,0$ s.

O modelo esferoidal prolato além de predizer uma taxa de secagem mais alta que o modelo esférico, também prediz um mais rápido aquecimento do produto e secagem em algumas regiões do corpo esferoidal. Além do mais, o teor de umidade final da banana em cada teste de secagem foi maior que 0,22 (b.s.) e realmente o fluxo de líquido é dominante em relação ao fluxo de vapor, principalmente em baixas temperatura (Fortes et al., 1981 e Fortes, 1982), como consequência a teoria da difusão líquida pôde ser aplicada sem problemas.

A razão de umidade pontual é fortemente dependente da coordenada radial, decrescendo com o aumento de ξ , e praticamente independente da coordenada angular η para $L_2/L_1=1,1$, sendo fortemente dependente de ambas coordenadas para $L_2/L_1 \geq 2,0$.

O efeito do encolhimento na difusão de umidade durante o processo de secagem altera a taxa de secagem do material. A análise dos resultados evidenciou que a taxa de secagem é maior quando ocorre encolhimento, em comparação à obtida quando não se considera este efeito, e que esta mesma taxa cresce proporcionalmente ao aumento do coeficiente de encolhimento.

O processo de secagem intermitente é um importante método que permite minimizar o uso de energia na secagem, podendo ser aplicado em secadores industriais, para aumentar a sua

eficiência de secagem e reduzir seu custo. Em todos os casos de temperatura estudados, a taxa de secagem foi maior, quando comparada com o caso de secagem contínua. No entanto, a taxa de secagem de elipsóides em processos com dois períodos de repouso foi maior quando comparada com os outros casos estudados. Pôde-se perceber que o início e o tempo de repouso também afetam a taxa de secagem do produto depois da temperatura. Quanto mais prolongado for o período de temperatura, maior será a taxa de secagem no início do período pós-temperatura.

Todos os modelos numéricos, exceto o modelo I, apresentaram satisfatória concordância com os dados experimentais do teor de umidade da banana. A ineficiência do modelo I é atribuída principalmente à condição de contorno usada neste modelo, que distorce completamente a taxa de difusão do sólido no início do processo, e compromete toda a solução do problema.

Os modelos com condição de contorno convectiva (modelos II e III), apresentaram excelente concordância com os dados experimentais, dando um forte indício de que a metodologia usada para estimar os coeficientes de transporte é satisfatória.

A banana apresentou um coeficiente de encolhimento $\bar{\beta}_2 = 0,269$, que poderá ser de grande utilidade em futuras pesquisas sobre o fenômeno de encolhimento desta fruta, e para comparação com resultados referentes ao encolhimento de outras variedades de frutas. A banana encolheu, durante a secagem, 78,44% a 88,38% do seu volume inicial, enquanto que sua área decresceu 58,82% a 71,48%. Já os semi-eixos maior (L_2) e menor (L_1) da mesma, diminuíram ambos de 35,83% a 46,60%, nas condições experimentais apresentadas.

O modelo que incluiu os fenômenos convectivo e de encolhimento (modelo III) foi o mais realista fisicamente, fornecendo resultados mais confiáveis dos coeficientes de transporte, em virtude de incluir mais efeitos físicos que incidem diretamente na cinética de secagem da banana, apesar do modelo II ter apresentado o menor erro relativo.

A banana apresenta uma taxa de aquecimento cujo comportamento é de decréscimo acentuado nas primeiras 5 horas de secagem, ficando praticamente constante para tempos posteriores, na faixa de temperatura de 29,9 a 68,4 °C.

O modelo IV (modelo II e transporte de calor com propriedades constantes) não é adequado para descrever a difusão de calor no interior da banana inteira descascada.

O modelo VI (modelo III e transporte de calor com propriedades variáveis) ajustou-se muito bem aos dados experimentais, apresentando no máximo, em média, aproximadamente 0,9 °C abaixo dos valores experimentais da temperatura no centro da banana no final da secagem.

Os efeitos da evaporação na superfície da banana e o aquecimento do vapor produzido são muito importantes na difusão de calor, comprometendo fortemente a distribuição de temperatura dentro do sólido, e portanto não devem ser negligenciados. Modelos que assumem temperatura constante na superfície não são adequados.

Os coeficientes convectivos de transporte de massa mostraram-se dependentes da temperatura e da umidade relativa do ar de secagem, tendendo a aumentar com o aumento da temperatura e o decréscimo da umidade relativa.

O coeficiente de difusão de massa variou de $1,33 \cdot 10^{-10}$ a $5,13 \cdot 10^{-10}$ m²/s, no modelo I (equilíbrio na superfície e sem encolhimento) e de $6,02 \cdot 10^{-10}$ a $34,28 \cdot 10^{-10}$ m²/s, no modelo II (convecção na superfície e sem encolhimento). Contudo, esta mesma grandeza variou de $1,65 \cdot 10^{-10}$ a $8,63 \cdot 10^{-10}$ m²/s, no modelo III (convecção na superfície e encolhimento), e de $0,93 \cdot 10^{-10}$ a $3,66 \cdot 10^{-10}$ m²/s, na variante do modelo III (equilíbrio na superfície e encolhimento), o que evidencia que a metodologia utilizada para a determinação do coeficiente de difusão vincula o modelo de secagem utilizado ao valor obtido para o mesmo.

O coeficiente convectivo de transferência de massa variou de $6,10 \cdot 10^{-8}$ a $19,76 \cdot 10^{-8}$ m/s, no modelo II, enquanto que no modelo III, houve uma variação de $10,10 \cdot 10^{-8}$ para $26,56 \cdot 10^{-8}$ m/s.

A Equação 3.147, que reflete a influência da temperatura do ar de secagem no coeficiente de difusão, ajustou-se razoavelmente bem aos dados estimados pelos modelos numéricos, apresentando coeficientes de determinação maiores que 0,983, para os modelos I, II e III.

A difusividade térmica da banana não é constante durante o fenômeno de secagem, mas uma função não-linear da temperatura e/ou do teor de umidade.

A difusividade térmica da banana num ponto próximo do centro, variou de $0,88 \cdot 10^{-7}$ a $2,70 \cdot 10^{-7}$ m²/s, no início da secagem e de $1,44 \cdot 10^{-9}$ a $4,92 \cdot 10^{-9}$ m²/s, no final, valores estes obtidos utilizando-se o modelo VI.

O coeficiente de transferência de calor no modelo VI, variou de 12,73 a 14,16 W/m² °C no início e de 17,80 a 19,42 W/m² °C, no final da secagem.

Sugestões para trabalhos futuros

- Estudar a difusão em corpos esferoidais prolatos no caso tridimensional;
- Estudar o fenômeno de difusão em corpos esferoidais oblatos;
- Incorporar termos convectivos na formulação e estudar escoamento de fluido sobre esferoides prolato e oblato, visando obter os coeficientes de transferência na superfície do sólido, comportamento do fluido na camada limite e efeitos hidrodinâmicos no sólido;
- Aplicar os modelos apresentados neste trabalho à secagem de outros produtos biológicos;
- Resolver analiticamente o problema de difusão em corpos esferoidais prolato com condição de contorno convectiva;
- Ampliar os modelos apresentados, incorporando o efeito de transferência de calor por radiação, para processos a altas temperaturas;
- Obter procedimentos numéricos/analíticos/experimentais mais precisos, para determinar os coeficientes de difusão e de transferência simultâneos em produtos biológicos;
- Incorporar nos modelos, termos de difusão de vapor e porosidade intra-granular, bem como estudar o fenômeno de difusão simultânea de líquido e vapor;

- Ampliar os modelos para os casos onde se tem efeitos eletromagnéticos (secagem com microondas, infravermelho, etc.) com ou sem efeitos convectivos, e aplicá-lo a situações práticas;
- Validar experimentalmente o modelo numérico de secagem intermitente (têmpera), e estudar o comportamento do coeficiente de difusão, comparando-o inclusive com os obtidos na secagem contínua;
- Utilizando-se da metodologia apresentada, estudar o fenômeno de convecção natural em cavidades elípticas;
- Estudar os efeitos da interação partícula-partícula para corpos esferoidais prolato e oblato;
- Estudar os efeitos das tensões termo-mecânicas em produtos biológicos com geometria elipsoidal.
- Estudar o fenômeno de anisotropia, bastante comum em alimentos.

Referências Bibliográficas

Abramowitz, Milton, Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, Inc., 1972, p. 752-772.

Acho, T. M. Scalar wave scattering of a prolate spheroid as a parameter expansion of that of a sphere. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. L, n. 3, p. 451-468, 1992.

Adambounou, T. L., Castaigne, F. Déshydratation partielle par osmose des bananes et détermination de courbes de sorption isotherme. *Lebensmittel - Wissenschaft + Technologie*, v. 16, p. 230-234, 1983.

Alsina, O L. S., Brasileiro, I. M. N. Drying kinetics of west indian cherry. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 434-440.

Altemani, Carlos Alberto Carrasco. *Estudo de aquecedores solares de convecção natural para secagem*. Campinas: Faculdade de Engenharia de Campinas, Universidade Estadual de Campinas, 1976. 87p. Dissertação (Mestrado)

Alvarenga, L. C., Fortes, M., Pinheiro Filho, J. B. Hara, T. Transporte de umidade no interior de grãos de feijão preto sob condições de secagem. *Revista Brasileira de Armazenamento*, v.5, n.1, p. 5-18, Junho 1980.

- Andrade, P. Aproveitamento de sub-produtos da bananeira na alimentação de ruminantes. In: I Simpósio Brasileiro sobre Bananicultura, 1984, Jaboticabal. *Anais* p. 405-416.
- Ansari, F. A., Afaq, A. Precooling of cylindrical food products. *International Journal of Refrigeration*. v. 9, n. 3, p. 161-163, 1986b.
- Ansari, F. A., Afaq, A. New method of measuring thermal diffusivity of spherical produce. *International Journal of Refrigeration*. v. 9, n. 3, p. 158-160, 1986a.
- Aoi, T. On spheroidal functions. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 10, n. 2, p. 130-141, 1955.
- ASHRAE Handbook - Fundamentals*, Atlanta; American Society of heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers, Inc., 1993. Chapter 30: Thermal properties of foods. p. 30.1-30.26.
- Azzouz, S., Guizani, A., Belguith, A. Experimental analysis of heat and mass transfer during grape air drying. In: International drying Symposium (IDS'96), 1996, Krakow. *Proceedings...*, v. B, p. 881-887.
- Baldensperger, J., Le Mer, J., Hannibal, L., Quinto, P. J. Solid state fermentation of banana wastes. *Biotechnology Letters*, v. 7, n. 10, p. 743-748, 1985.
- Bansal, N. K., Garg, H. P. *Advances in drying*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1987. Chapter 6: Solar crop drying , v. 4, p. 293-294.
- Bardiya, N., Somayaji, D., Khanna, S. Biomethanation of banana peel and pineapple waste. *Bioresource Technology*, v. 58, p. 73-76, 1996.
- Baroni, A. F., Hubinger, M. D. Drying of onion: effects of pre-treatment on moisture transport. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p.419-426.

Barre, H. J., Baughman, R., Hamdy, M. Y. Application of the logarithmic model to cross-flow deep-bed grain drying. *Transactions of the ASAE*, p.1061-1064, 1971.

Batteman, H. *Tables of integral transforms*. V.II. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954, 451p.

Beke, J., Vaz, A. Testing the drying process of shelled corn on aspects of nutritional quality and thermal efficiency. *Drying Technology, Special Issue*, v.5, p. 1007-1027, 1994.

Ben Mabrouk, S., Belghith, A. Numerical simulation of the drying of a derfomable material: evolution of the diffusion coefficient. *Drying Technology*, v. 13, n. 8-9, p.1789-1805, 1995.

Ben Mabrouk, S., Belghith, A. Experimental study of the low drying temperature: drying of agricultural products. In: International Drying Symposium (IDS'94), 1994, Gold Coast: *Proceedings...* v. B, p. 1085-1092.

Bird, R. B.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N. *Transport phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960, 780 p.

Bleinroth, E. W. Manuseio pós-colheita, classificação embalagem e transporte da banana. In: Simpósio Brasileiro sobre Bananicultura, 1984, Jaboticabal. *Anais* p. 368-385.

Bonazzi, C., Dumoulin, E. Raoult-Wack, A., Berk, Z. Food drying and dewatering. *Drying Technology*, v. 14, n. 9, p. 2135-2170, 1996.

Bowrey, R. G., Buckle, K. A., Hamey, I., Pavenayotin, P. Use of solar energy for banana drying. *Food Technology in Australia*, v. 32, n. 6, p. 290-291, 1980.

Brebbia, C. A., Dominguez, J. *Boundary elements an introductory course*. New York: McGraw-Hill Company, 1989, 292 p.

- Brekke, J. E., Allen, L. Dehydrated bananas. *Food Technology*, v. 21, n. 10, p. 101-105, 1967.
- Brodkey, Robert S. *The phenomena of fluid motions*. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1967, p.18-23.
- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F. W., Hall, C. W. *Drying cereal grains*, Connecticut: AVI Publishing Company, Inc., 1974, 265 p.
- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F.W., Hall, C.W. *Drying and storage of grains and oilseeds*. New York: AVI Book, 1992, 450 p.
- Butkov, E. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1988, 725 p.
- Comissão Nacional de Normas e Padrões para Alimentos (CNNPA), São Paulo. RESOLUÇÃO 12/78 (12/7 frutas secas ou dessecadas). Compêndio da Legislação de Alimentos: consolidação das normas e padrões de alimentos. Associação Brasileira das Indústrias de Alimentos (ABIA). v.1/A, p. 7.5 (78), 1985.
- Carslaw, H. S., Jaeger, J. C. *Conduction of heat in solids*. 2. ed. Oxford: University Press, New York, 1959, 510p.
- Cavalcanti Mata, Mário Eduardo Rangel Moreira *Efeitos da secagem em altas temperaturas por curtos períodos de tempo, em camada estacionária, sobre a armazenabilidade de sementes de feijão (Phaseolus vulgaris L.), variedade "carioca": avaliação experimental, modelagem e simulação*. Campinas: Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 314p. Tese (Doutorado).
- Cavalcanti Mata, M. E. R. M., Menegalli, F. C. Bean seeds drying simulation. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997b, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 508-515.

Cavalcanti Mata, M. E. R. M., Menegalli, F. C. Influence of the initial moisture contents and air velocity in the drying rate in thin layers of bean grains. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997a, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 569-577.

Charles, R. J., Tung, M. A. Physical, rheological and chemical properties of bananas during ripening. *Journal of Food Science*, v. 38, n. 3, p. 456-459, 1973.

Chen, C. S., Johnson, W. H. Kinetics of moisture movement in higroscopic materials, (I. theoretical considerations of drying phenomena.). *Transactions of the ASAE*, v.12, n. 1, p. 103-113, v.12, n.4, p. 478-481, 1969.

Clift, R., Grace, J. R., Weber, M. E. *Bubbles, drops and particles*. San Diego: Academic Press, Inc., 1978, 380p.

Crank, J. *The mathematics of diffusion*. 2.ed. New York: Oxford Science Publications, 1992, 414p.

Dalpasquale, V. A., Queiroz, D. M., Pereira, J. A. M., Sasseron, J. L. Curvas de secagem de amendoim utilizando a teoria de difusão de líquido. *Revista Brasileira de Armazenamento*, v. 9 e 10, n. 1 e 2, p.16-19, 1984/1985.

Daza, M. S. T., Alzamora, S. M., Welti-Chanes, J. *Food Engineering 2000*. New York: ITP International Thomson Publishing, 1997. Chapter 10: Minimally processed high-moisture fruit products by combined methods: result of a multinational project. p.161-180.

Décio, P., Lodigiani, G. Squeezing tropical: a professional job. *Fruit Processing*, v. 5, n.3, p. 46-47, 1995.

DeGroot, S. R. *Thermodynamics of irreversible processes*. Amsterdan: North Holland Publishing Company, 1951.

Do-Nhat, T., MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. LIV, n. 4, p.677-685, 1996a.

Do-Nhat, T., MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. LIV, n. 4, p.721-725, 1996b.

Drouzas, A. E., Schubert, H. Microwave application in vacuum drying of fruits. *Journal of Food Engineering*, v. 28, p. 203-209, 1996.

Elbert, G., Tolaba, M.P., Suárez, C. Effects of drying and tempering on head parboiled rice yield. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 502-507.

Elvira, C. de Diffusion process modelling in elliptic shaped bodies. In: International Congress Engineering and Food, 1990, London. *Proceedings...* v. 1, p.456-464.

Farkas, J. Combination of irradiation with mild heat treatment. *Food Control*, v. 1, n.4, p. 223-229, 1990.

Farrell, O. J., Ross, B. *Solved problems: Gamma and Beta functions, Legendre polynomials, Bessel functions*. New York: The MacMillan Company, 1963, 410p.

Fasina, O. O., Sokhansanj, S., Tyler, R. T. Optimizing the drying and cooling of alfalfa pellets. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 530-537.

Figliola, R. S.; Beasley, D. E. *Theory and desing for mechanical measurements* 2.ed., New York: John Wiley & Sons, 1995, 607p.

Finney Jr., E.E., Ben-Gera, I., Massie, D. R. An objective evaluation of changes in firmness of ripening bananas using a sonic technique. *Journal of Food Science*, v. 32, n. 6, p. 642-646, 1967.

Fioreze, Romeu *The intermittent drying agricultural crops with particular reference to energy requirements*. Granfield Institute of Technology, Silsoe College, 1986. 153 p. Tese (Doutorado).

Flammer, C. *Spheroidal wave functions*. Stanford: Stanford University Press, 1957, 220p.

Fortes, M., Okos, M. R. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media. *Transactions of the ASAE*, v.24, p.756-760, 1981a.

Fortes, M., Okos, M. R. *Advances in drying*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, Chapter Five: Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, v.1, p. 119-154.

Fortes, Mauri *Um estudo fundamental das equações de transporte de massa e energia em meios capilares porosos*. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, 1982. 100 p. Tese (Livre Docência).

Fortes, M., Okos, M. R. Non-equilibrium thermodynamics approach to heat and mass transfer in corn kernels. *Transactions of the ASAE*, v. 24, p. 761-769, 1981b.

Fortes, M., Okos, M.R., Barret Jr., J. R. Heat and mass transfer analysis of intra-kernel wheat drying and rewetting. *Journal Agricultural Engineering Research*, v.26, p.109-125, 1981c.

Franca, A. S., Fortes, M., Haghghi, K. Numerical simulation of intermittent and continuous deep-bed drying of biological materials, *Drying Technology*, v.12, n.7, p. 1537-1560, 1994.

Freire, E. S., Chau, K. V. Simulation of the drying process of fermented cacao beans. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p.356-363.

Fusco, A. J., Aguerre, R. J., Gabitto, J. F. A diffusional model for drying with volume change. *Drying Technology*, v 9, n.2, p.397-417, 1991.

García, R., Leal, F., Rolz, C. Drying of bananas using microwave and air ovens. *International Journal of Food Science and Technology*, v. 23, p. 73-80, 1988.

García, R., Menchú, J. F., Rolz, C. Tropical fruit drying, a comparative study. In: International Congress Food Science and Technology, 1974a, Madrid. *Proceedings...* v. IV. p. 32-40.

García, R., Rivera, J., Rolz, C. Rheological properties of some tropical fruit products and their enzymic clarification. In: International Congress Food Science and Technology, 1974b, Madrid. *Proceedings...* v. IV, p. 18-26.

Gebhart, B. *Heat conduction and mass diffusion*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1993, 634 p.

Gee, M., Farkas, D., Rahman, A. R. Some concepts for the development of intermediate moisture foods. *Food Technology*, v. 31, n. 4, p. 58-64, 1977.

Giner, S. A., Mascheroni, R. M. Simulation of the cross-flow drying of maize with reversed direction airflow effect of thin layer equation. In: International Drying Symposium (IDS'90/CHISA'90), 1990, Praha: *Proceedings...* v.3, p. 1518-1527.

Gradsteyn, I.S., Ryzhik, I. M. *Tables of integrals, series, and products*. New York: Academic Press, 1965, 1086 p.

Haghighi, K., Irudayaraj, J., Stroshine, R. L., Sokhansanj, S. Grain kernel drying simulation using the finite element method. *Transaction of the ASAE*, v. 33, n. 6, p. 1957-1965, 1990.

Haji-Sheikh, A. *Integral methods in science and engineering*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1986, Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions, p. 467-479.

Haji-Sheikh, A., Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. *Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer*, v.88, n.3, p.331-333, August 1966.

Haji-Sheikh, A., Sparrow, E. M. The solution of heat conduction problems by probability methods. *Transactions of the ASAE. Journal of Heat transfer*, v. 89 series C, n. 2, May 1967.

Hammond, J. B., Egg, R., Diggins, D., Coble, C. G. Alcohol from banana. *Bioresource Technology*, n.56, p. 125-130, 1996.

Holdsworth, S. D. Dehydration of food products: a review. *Journal of Food Technology*, v. 6, p. 331-370, 1971.

Holdsworth, S. D. *Effects of heating on foodstuffs*. London: Applied Science Publishers Ltd., 1979, Chapter 9: Fruits, p. 255-305.

Hong, Y. C., Bakshi, A. S., Labuza, T. P. Finite element modelling of moisture transfer during storage of mixed multicomponent dried foods. *Journal of Food Science*, v. 51, n. 3, p. 554-558, 1986.

Husain, A., Chen, C. S., Clayton, J. T., Whitney, L. F. Mathematical simulation of mass and heat transfer in high moisture foods. *Transactions of the ASAE*, V.15, p. 732-736, 1972.

Ibrahim, M. H., Daud, W. R. W., Talib, M. Z. M. Drying characteristics of oil palm kernels. *Drying Technology*, v 15, n. 3-4, p. 1103-1117, 1997.

Iglesias, H. A., Chirife, J. An empirical equation for fitting water sorption isotherms of fruits and related products. *Canadian Institute of Food Science and Technology Journal*, v. 11, n. 1, p. 12-15, 1978.

- Iglesias, H. A., Chirife, J. B.E.T. monolayer values in dehydrated foods and food components. *Lebensmittel-Wissenschaft+ Technologie*, v. 9, n. 2, p. 107-113, 1976.
- Iglesias, H. A., Chirife, J. *Handbook of food isotherms: water sorption parameters for food and food componentes*, New York: Academic Press, 1982, 347p.
- Irudayara, J., Wu, Y. Analysis and application of Luikov's heat, mass and pressure transfer model to a capillary porous media. *Drying Technology*, v. 14, n. 3-4, p.803-824, 1996.
- Irudayara, J., Wu, Y. Effect of pressure on moisture transfer during moisture adsorption. *Drying technology*, v. 13, n. 5-7, p. 1603-1617, 1995.
- Jacobs, M. B. *The chemistry and technology of food and food products*. New York: Interscience Publishers, Inc., v. II, 1951, p. 1556-1559.
- Jayaraman, K. S., Das Gupta, D. K. *Handbook of Industrial drying*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1995. Chapter: Drying of fruits and vegetables. v. 1.p. 643-690.
- Jayas, D. S., Cenkowski, S., Pabis, S., Muir, W. E. Review of thin-layer drying and rewetting equations. *Drying Technology*, v. 9, n. 3, p. 551-588, 1991.
- Jiménez, G., Durán, L. Propiedades reológicas de productos derivados de frutas y de tomate. Revisión bibliográfica. *Revista de Agroquímica y Tecnología de Alimentos*, v. 19, n. 2, p. 203-216, 1979.
- Jomaa, W., Puiggali, J.R. Drying of shrinkage materials: modellings with shrinkage velocity. *Drying Technology*, v. 9, n.5, p.1271-1293, 1991.
- Keey, R.B. *Drying of loose and particulate materials*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1992. 502 p.

Kenchou, N., Maalej, M., Evaluation of diffusion coefficient in the case of banana drying, In: International Drying Symposium (IDS'94), 1994, Gold Coast: *Proceedings...* v. B, p. 841-8848.

Kiranoudis, C. T., Tsami, E., Maroulis, Z. B., Marinos-Kouris, D. Drying kinetics of some fruits. *Drying Technology*, v. 15, n. 5, p. 1399-1418, 1997.

Kitson, J. A., MacGregor, D. R. Drying fruit purées on an improved pilot plant drum-drier. *Journal of Food Technology*, v. 17, p. 285-288, 1982.

Korgo, A. Development of consumption and raw materials: till today and in the future. *Fruit Processing*, v. 6, n. 12, p. 478-481, 1996.

Kreyszig, E. *Matemática superior*. 2.ed. v. 1, Rio de Janeiro: LTC: Livros Técnicos e Científicos S. A., 1983, p. 211-215.

Kreyszig, E. *Advanced engineering mathematics*. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, 1988. p. 498-504.

Krokida, M. K., Maroulis, Z. B. Effect of drying method on shrinkage and porosity. *Drying Technology*, v.15, n. 10, p. 2441-2458, 1997.

Krokida, M. K., Maroulis, Z. B., Marinos-Kouris, D. Effect of drying methods on physical properties of dehydrated products. In: International drying Symposium (IDS'98), 1998a, Halkidiki. *Proceedings...*, v. A, p. 809-816.

Krokida, M. K., Tsami, E., Maroulis, Z. B. Kinetics on color changes during drying of some fruits and vegetables. *Drying Technology*, v.16, n. 3-5, pp. 667-685, 1998b.

Lewicki, P. P., Lenart, A. *Handbook of Industrial drying*. New York: Marcel Dekker, Inc. 1995. Chapter: Osmotic dehydration of fruits and vegetables, v. 1, p. 691-713.

Li, Ye-Bo, Cao, Cheng-Wen, Liu, Deng-Ying. Simulation of recirculating circular grain dryer with tempering stage. *Drying Technology*, v. 15, n. 1, p. 201-214, 1997.

Lima, A. C. C., Rocha, S. C. S. Bean drying in fixed spouted and spoute-fluid beds - comparison and empirical modeling. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. A, p. 165-173.

Lima, Antonio Gilson Barbosa de *Estudo da secagem e dimensionamento de secador de casulos do bicho-da-seda*. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 1995. 190 p. Dissertação (Mestrado).

Lima, A. G. B., Mata, S. F. Secagem de casulos do bicho-da-seda: modelagem e simulação. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola/ Congresso Latinoamericano de Ingenieria Agrícola, 1996. Bauru: *Anais...*

Lima, A. G. B., Nebra, S. A. Influência de parâmetros geométricos na cinética de secagem de elipsóides sólidos. In: Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados (XXV ENEMP), 1997, São Carlos: *Anais...* v. 1, p. 195-202.

Lima, A. G. B., Nebra, S. A., Altemani, C. A. C. Simulation of the drying kinetics of the silkworm cocoon considering diffusive mechanism in elliptical coordinate, In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 317-324.

Lima, A. G. B., Nebra, S. A., Mata, S. F. Equação de secagem em camada fina para casulos do bicho-da-seda (*Bombix mori* L.), In: Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola, 1998. Poços de Caldas: *Anais...*, v. IV, p. 1-3.

Lima, A. W. O., Cal-Vidal, J. Hygroscopic behaviour of freeze dried bananas. *Journal of Food Technology*, v. 18, n. 6, p. 687-696, 1983.

Lin, Z., Cleland, A. C., Cleland, D. J., Serrallach, G. F. A simple method for prediction of chilling times for objects of two-dimensional irregular shape. *International Journal of refrigeration*, v. 19, n. 2, p. 95-106, 1996a.

Lin, Z., Cleland, A. C., Cleland, D. J., Serrallach, G. F. A simple method for prediction of chilling times: extension to three-dimensional irregular shapes. *International Journal of refrigeration*, v. 19, n. 2, p. 107-114, 1996b.

Liu, J. Y., Simpson, W. T. Solutions of diffusion equation with constant diffusion and surface emission coefficients. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. A, p. 73-80.

Lomauro, C. J., Bakshi, A. S., Labuza, T. P., Evaluation of food moisture sorption isotherm equations Part I: fruit, vegetables and meat products. *Lebensmittel-Wissenschaft+ Technologie*, v. 18, n. 2, p. 111-117, 1985.

Lu, R., Siebenmorgen, T. J. Moisture diffusivity of long-grain in rice componentes. *Transactions of the ASAE*, v. 35, n. 6, p. 1955-1961, 1992.

Luccas, Valdecir, *Obtenção de fatias de banana desidratada crocantes através da pré-secagem a altas temperaturas e curto tempo em leito fluidizado*, Campinas: Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 104 p. Dissertação (Mestrado).

Luikov, A. V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies: review. *International Journal heat and mass transfer*, v. 18, p.1-14, 1975.

Luikov, A. V. *Heat and mass transfer in capillary porous bodies*. New York: Pergamon Press, 1966, 523p.

Luikov, A. V., Mikhailov, Y. A. *Theory of energy and mass transfer*. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1965, 392 p.

Luikov, A.V. *Analytical heat diffusion theory*. London: Academic Press, Inc. Ltd., 1968, 684p.

Macrae, R., Robison, R. K., Sadler, M. J. *Encyclopedia of food science, food technology and nutrition*. London: Academic Press, 1993, p.302-308.

MacRobert, T. M. *Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic functions with applications*. Oxford: Pergamon Press, 1967, 349 p.

Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966, p. 472-495.

Maliska, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluido computacional*. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995, 424 p.

Maltini, E., Giangiacomo, R. Aspetti tecnici della liofilizzazione delle fragole e delle banane. *Industria Alimentari*. v. 15, n. 6, p. 49-55, 1976.

Marin, M., Rios, G. M., Gibert, H. Use of time-temperature data during fluidized bed freezing to determine frozen food properties. *Journal of Food process Engineering*, v. 7, n. 4, p. 253-264, 1985.

Mariz, Thompson Fernandes. *Secagem da casca de caroço de algodão em leito fixo*. Campina Grande: Departamento de Engenharia Química, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 1986. 139p. Dissertação (Mestrado).

Marriot, J., Lancaster, P. A. *Handbook of tropical foods*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1983, Chapter 3: Bananas and Plantains, p. 85-143.

Martinez, C., Vizcarra, M. G., Ruiz, R. S. On the simulation of batch fluidized bed dryers. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 364-371.

Masters, K. *Spray drying*. London: Leonard Hill Books. 1972, p. 581-583.

Mauro, Maria Aparecida *Cinética de desidratação osmótica de banana nanica*. Campinas: Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, 1992. 184 p. Dissertação (Mestrado).

Mauro, M. A., Menegalli, F. C. Evaluation of diffusion coefficients in osmotic concentration of bananas (*Musa Cavendish Lambert*). *International Journal of Food Science and Technology*, v. 30. p. 199-213, 1995.

May, B. K., Sinclair, A. J., Halmos, A. L., Tran, V. Quantitative analysis of drying behaviour of fruits and vegetables. In: International drying Symposium (IDS'98), 1998, Halkidiki. *Proceedings...*, v. B, p. 1100-1107.

Medina, J. C., Bleinroth, E. W., De Martin, Z. J., Travaglini, D. A., Okada, M., Quast, D. G., Hashizume, T., Renesto, O. V., Moretti, V. A. *Banana: da cultura ao processamento e comercialização*. São Paulo: Secretaria da Agricultura, 1978. 197p. (Série Frutas Tropicais, 3).

Minkowycz, W. J., Sparrow, E. M., Schneider, G. E., Pletcher, R. H. *Handbook of numerical heat transfer*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1024p.

Misra, M. K., Brooker, D. B. Thin-layer drying and rewetting equation for shelled yellow corn. *Transactions of the ASAE*, p. 1254-1260, 1980.

Misra, R. N., Young, J. H. Numerical solution of simultaneous moisture diffusion and shrinkage during soybean drying. *Transactions of the ASAE*, v. 23, p. 1277-1282, 1980.

Mohsenin, N. N. *Thermal properties of foods and agricultural materials*. New York: Gordon and Breach Science publishers, 1980, 407p.

Mohsenin, N. N., *Physical properties of plant and animal materials*. New York: Gordon and Breach Publishers, 1986, 891p.

Moreira, R. S. *Banana: teoria e prática de cultivo*. Campinas: Fundação Cargill, 1987.

Morse, P. M., Feshbach, H. *Methods of theoretical physics*. Part I. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953a, p. 557-560.

Morse, P. M., Feshbach, H. *Methods of theoretical physics*. Part II. new York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953b, p. 1502-1513.

Mowlah, G., Takano, K., Kamoi, I., Obara, T. Water transport mechanism and some aspects of quality changes during air dehydration of bananas. *Lebensmittel - Wissenschaft + Technologie*, v. 16, p. 103-107, 1983.

Mukherjee, D., Puri, V. M., Anantheswaran, R. C. Measurement of coupled heat and moisture transfer coefficients for selected vegetables. *Drying Technology*, v. 15, n. 1, p.71-94, 1997.

Neves, M. J. B. , Fortes, M., Moreira, S. M. C., Filho, J. B. P. Simulação físico-matemática do processo de seca-aeração. *Revista Brasileira de Armazenamento*, v. 8, n.1 e 2, p. 3-10, Junho/Dezembro 1983.

Niesteruk, R. Changes of thermal properties of fruits and vegetables during drying. *Drying technology*, v. 14, n. 2, p. 415-422, 1996.

Nijhuis, H. N., Topping, E., Luyten, H., René, F., Jone, P., Funebo, T., Ohlsson, T. Research needs and opportunities in the dry conservation of fruits and vegetables. *Drying Technology*, v. 14, n. 6, p. 1429-1457, 1996.

Niven, C. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. *Philosophical transactions Royal Society*, London, v. 171, p. 117-151, 1880.

Nogueira, R. I. *Processo de secagem de banana (Musa acuminata subgrupo Cavendish cultivar nanica) parâmetros ótimos na obtenção de banana-passa*. Campinas:Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas. 1991. 154p., Dissertação (Mestrado).

Nogueira, R. I., Park, K.J. Drying parameters to obtain "banana-passa". In: International Drying Symposium (IDS'92), 1992, Montreal: *Proceedings...* part A, p. 874-883.

Norminton, E. J., Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids and the thin circular disk. *The Quarterly Journal of Mechanics and applied mathematics*, v. XVII, Part 1, p. 65-72, 1964.

Oliveira, L. S., Franca, A. S., Haghghi, K. An adaptive approach to finite element modeling of drying problems. *Drying Technology*, v. 13, n. 5-7, p. 1167-1185, 1995.

Overhults, D. G., White, H. E., Hamilton, H. E., Ross, I. J. Drying soybeans with heated air. *Transactions of the ASAE*, v. 16, p. 112-113, 1973.

Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper II. Prolate spheroidal wave functions. *The Physical Review*, v. 65, n. 3 e 4, p. 98-110, 1944a.

Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper III. The antenna problem. *The Physical Review*, v. 65, n. 3 e 4, p. 111-117, 1944b.

Paje, L., Adams Jr, N. I. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper I. *The Physical Review*, v. 53, p. 819-831, 1938.

Panagiotou, N. M., Karathanos, V. T., Maroulis, Z. B., Modelling of osmotic dehydration of fruits. In: International drying Symposium (IDS'98), 1998, Halkidiki. *Proceedings...*, v. A, p. 954-961.

Park, K. J., Brod, F. P. R. Comparative study of grated coconut (*cocos nucifera*) drying using vertical and horizontal dryers. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 469-475.

Park, K. J., Godoi, L. F. G., Alonso, L. F. T., Corrêa Jr., W. A. Drying behavior parameters in a continuous vertical annular static mixer dryer. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. A, p. 204-209.

Parry, J. L. Mathematical modelling and computer simulation of heat and mass transfer in agricultural grain drying. A review. *Journal of Agricultural Engineering Research*, v. 32, p. 1-29, 1985.

Parti, M. Evaluation of selected mathematical models for grain drying. In: International Drying Symposium (IDS'90/CHISA'90), 1990, Praha: *Proceedings...* v.3, p. 153-162.

Parti, M. Selection of mathematical models for drying grain in thin-layers. *Journal of Agricultural Engineering Research*, v. 54, p. 339-352, 1993.

Pasternak, I. S., Gauvin, W. H. Turbulent heat and mass transfer from stationary particles. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 38, p. 35-42, 1960.

Patankar, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 197 p.

Patil, R. T., Sokhansanj, S. Drying rates of alfalfa components parts. In: International Drying Symposium (IDS'92), 1992, Montreal: *Proceedings...* Part B, p. 1850-1857.

Pérez, Victor Haber *Estudo do comportamento da temperatura da banana durante o processo de secagem*. Campinas: Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 127p. Tese (Mestrado).

Polley, S. L., Snyder, O. P., Kotnour, P. A compilation of thermal properties of foods. *Food Technology*, v.34, n. 11, p. 76-94, 1980.

Pólya, G., Szegő, G. Inequalities for the capacity of a condenser. *American Journal of Mathematics*, Vol. LXVII, p. 1-32, 1945.

Potter, N. N., Hotchkiss, J. H. *Food science*. Fifth edition. New York: Chapman & Hall. 1995, p. 169.

Prasertsan, S., Saen-saby, P. Heat pump drying of agricultural materials. *Drying Technology*, v. 16, n. 1-2, p. 235-250, 1998.

Prigogine, I. *Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Lieja: Editora Desoer, 1947.

Provenza, F. *Projetista de máquinas*. São paulo: Editora F. Provenza, 1989, p. 2.47.

Ptasznik, W., Barnard, J., Khan, A. A., Development of a drying procedure following matricorditioning of snap bean seeds. In: International Drying Symposium (IDS'92), 1992, Montreal: *Proceedings...* Part B, p. 1341-1349.

Queiroz, Marlene Rita de *Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1994. 176p. Tese (Doutorado)

Queiroz, M. R., Nebra, S. A. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas. In: International Drying Symposium (IDS'96), 1992, Krakow: *Proceedings... Part B*, p. 1045-1052.

Queiroz, M. R., Nebra, S. A. Modelo de difusão aplicado à secagem de banana: análise da condição de contorno convectiva. In: Congreso Ibero-Americano de ingeniería de Alimentos, 1995, Campinas. *Anales... Tomo II*, p.301-311.

Queiroz, M. R., Nebra, S. A. Soluções analítica e numérica do modelo de difusão aplicadas à secagem de bananas. *Revista de Engenharia Agrícola, Jaboticabal*. v. 17, n. 1, p. 74-83, 1997.

Quintana-Hernandez, P., Rodrigues-Ramirez, J., Mendes-Lagunas, L., Cornejo-Serrano, L. Humidity diffusion within sugarcane fibers. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings... v. B*, p. 538-542.

Rahman, M. S., Chen, X. D., Perera, C. O. An improved thermal conductivity prediction model for fruits and vegetables as a function of temperature, water content and porosity. *Journal of Food Engineering*, v. 31, p. 163-170, 1997.

Raithby, G. D., Hollands, K. G. T. *Handbook of heat transfer. Fundamentals*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985. Chapter 6: Natural convection, p. 6.1-6.94.

Raithby, G. D., Pollard, A., Hollands, K. T. G., Yovanovich, M. M., Free convection heat transfer from spheroids. *Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer*, v. 98, Series C, n. 3, p. 452-458, 1976.

Ramanuja, M. N., Jayaraman, K. S. Studies on the preparation and storage stability of intermediate moisture banana. *Journal of Food Science and Technology*, v. 17, p. 183-186, July-August 1980.

Ranganna, S., Parpia, H. A. B. Pink discolouration in canned banana (*Musa paradisiaca*) and field bean (*Dolichos lablab* var. *lignosus* Prain): I processing factors contributing to discolouration, *Lebensmittel-Wissenschaft+technologie*, v. 7, n. 2, p. 101-110, 1974a.

Ranganna, S., Parpia, H. A. B. Pink discolouration in canned banana (*Musa paradisiaca*) and field bean (*Dolichos lablab* var. *lignosus* Prain): II chemical changes in leucoanthocyanidins during processing, *Lebensmittel-Wissenschaft+technologie*, v. 7, n. 2, p. 111-119, 1974b.

Rao, M. A. *Handbook of Food Engineering*. New York: Marcel Dekker, Inc. 1992. Chapter 4: Transport and storage of food products. p. 199-246.

Rao, M. A., Palomino, L. N. O., Bernhardt, L. W. Flow properties of tropical fruit purees. *Journal of Food Science*, v. 39, n. 1, p. 160-161, 1974.

Rao, V. N. M., Skinner, G. E. *Engineering properties of foods*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1986, Chapter 5: Rheological properties of solid foods. p.215-254.

Rapusas, R. S., Driscoll, R. H. The thin-layer drying characteristics of white onion slices. *Drying Technology*, v. 13, n. 8-9, p. 1905-1931, 1995.

Rastogi, N. K., Raghavarao, K. S. M. S., Niranjana, K. Mass transfer during osmotic dehydration of banana: Fickian diffusion in cylindrical configuration. *Journal of Food Engineering*, v. 31, p. 423-432, 1997.

Ribeiro, J. W., Cotta, R.M., Mikhailov, M.D. Integral transform solution of Luikov's equations for heat and mass transfer in capillary porous media. *International Journal heat and mass transfer*, v. 36, n. 18, p. 4467-4475, 1993.

Robin, L. *Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidales*. Tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1959, 288p.

- Rossi, S. J., Roa, G. *Secagem e armazenamento de produtos agropecuários com uso de energia solar e ar natural*. São Paulo: Academia de Ciências do Estado de São Paulo, 1980, 295p.
- Rovedo, C. O., Suarez, C., Viollaz, P. E. Drying simulation of a solid slab with three dimensional shrinkage. *Drying technology*, v. 13, n. 1-2, p. 371-393, 1995.
- Sabadini, E., Carvalho, B. C. Jr., Sobral, P. J. A., Hubinger, M. D. Mass transfer and diffusion coefficient determination in salted and dried meat pieces. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 441-447.
- Sabbah, M. A., Foster, G.H., Haugh, C.G., Peart, R.M. Effect of tempering after drying on cooling shelled corn. *Transaction of the ASAE*, v.15, n.4, p. 763-765, 1972.
- Saca, S. A., Lozano, J. E. Explosion puffing of bananas. *International Journal of Food Science and Technology*, v. 27, p. 419-426, 1992.
- Sankat, C. K., Castaigne, F. Banana dehydration: osmotic, air and solar effect. In: International Drying Symposium (IDS'92), 1992, Montreal: *Proceedings...* Part B, p. 1679-1688.
- Sankat, C. K., Castaigne, Maharaj, R. The air drying behavior of fresh and osmotically dehydrated banana slices. *International Journal of Food Science and Technology*, v. 31, p.123-135, 1996.
- Saravacos, G. D., *Engineering properties of foods*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1995. Chapter. Mass transfer properties of foods, p. 169-221.
- Saravacos, G. D., Kostaropoulos, A. E. Transport properties in processing of fruits and vegetables. *Food Technology*, p. 99-105, September 1995.
- Sarker, N. N., Kunze, O. R., Stroubolis, T. Finite element simulation of rough rice drying. *Drying Technology*, v. 12, n. 4, p. 761-775, 1994.

Schirmer, P., Janjai, S., Esper, A., Smitabhindu, R., Mühlbauer, W. Experimental investigation of the performance of the solar tunnel dryer for drying bananas. *Renewable Energy*, v. 7, n. 2, p. 119-129, 1996.

Schneider, P. J. *Handbook of heat transfer: Fundamentals*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985. Chapter 4: Conduction, p. 4.1-4.187.

Sharaf-Eldeen, Y. I., Blais del, J. L., Hamdy, M. Y. A model for ear corn drying. *Transaction of the ASAE*, v. 23, p.1261-1271, 1980.

Sharma, A. D., Kunze, O. R., Tolley, H. D. Rough rice drying as a two-compartment model. *Transactions of the ASAE*, v. 25, p. 221-224, 1982.

Shih, T. *Numerical heat transfer*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1984, 536p.

Simão, S. *Manual de Fruticultura*. São Paulo: Editora Agronômica Ceres Ltda., 1971, 530p.

Singh, R. P. *Handbook of Food Engineering*. New York.: Marcel Dekker, Inc. 1992. Chapter 5: Heating and cooling processes for foods. p.247-276.

Singh, R. P. Thermal diffusivity in food processing. *Food Technology*, v. 36, n. 2, p. 87-91, 1982.

Singh, R. P., Wang, C.Y., Zuritz, C. A numerical approach to simulate rice drying, In: International Drying Symposium (IDS'80), 1980, Montreal: *Proceedings...* v. 1, p. 227-232.

Skelland, A. H. P. *Diffusional mass transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1974, 510 p.

Smith, R. E., Nelson, G. L. Transient heat transfer in solids: theory versus experiment. *Transactions of the ASAE*, v. 12, n. 6, p. 833-844, 1969.

Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L. Analyses on transient heat transfer from anomalous shapes. *Transactions of the ASAE*, v. 10, n. 2, p. 236-245, 1967.

Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L. Application of geometry analysis on anomalous shapes to problems in transient heat transfer. *Transactions of the ASAE*, v. 11, n. 2, p. 296-302, 1968.

Soares, João Batista *Curvas de secagem em camada fina e propriedades físicas de soja (Glycine max L.)*. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 91p., Tese (Mestrado).

Sokhansanj, S. Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel - a finite element application, In: International Drying Symposium (IDS'80), 1980, Montreal: *Proceeding...* v. 2., p. 229-232.

Sokhansanj, S. Improved heat and mass transfer models to predict grain quality. *Drying Technology*, v. 5, n. 4, p. 511-525, 1987.

Sokhansanj, S., Patil, R. T. Kinetics of dehydration of green alfalfa. *Drying Technology*, v. 14, n. 5, p. 1197-1234, 1996.

Sokhansanj, S. *Advances in drying*. New York: Hemisphere Publishing Corporation. v.3, 1984. Chapter four: Grain drying simulation with respect to energy conservation and grain quality, p. 121-179.

Soponronnarit, S., Prachayawarakorn, S., Sripawatakul, O. Development of cross-flow fluidized bed paddy dryer. *Drying Technology*, v. 14, n. 10, p. 2397-2410, 1996.

Steffe, J. F., Singh, R. P. Liquid diffusivity of rough rice components. *Transactions of the ASAE*, v. 23, n. 3, p. 767-774, 1980a.

- Steffe, J. F., Singh, R.P., Bakshi, A. S. Influence of tempering time and cooling on rice milling yields and moisture removal. *Transactions of the ASAE*, v.22, p. 1214-1218 e 1224, 1979.
- Steffe, J. T., Singh, R. P. Theoretical and practical aspects of rough rice tempering. *Transactions of the ASAE*, v. 23, p. 775-782, 1980b.
- Stratton, J. A., Morse, P. M., Chu, L. J., Little, J. D. C., Corbató, F. J. *Spheroidal wave functions*. New York: The Technology Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, Inc., 1956, 613 p.
- Stratton, J. A., Morse, P. M., Chu, L. J., Little, J. D. C., Huntner, R. A.. *Elliptic cylinder and Spheroidal wave functions*, New York: The Tech. Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, Inc., 1941, 127p.
- Strumillo, C., Kudra, T. *Drying: principles, science and design*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986, 448 p.
- Sullivan, J. F., Craig Jr., J. C. The development of explosion puffing. *Food Technology*, p. 52-55 e 131, February 1984.
- Sweat, V. E. Experimental values of the thermal conductivity of selected fruits and vegetables. *Journal of Food Science*, v. 39, p. 1080-1083, 1974.
- Sweat, V. E. *Engineering properties of foods*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1995. Chapter 3: Thermal properties of foods, p. 99-138.
- Szczesniak, A. S. *Physical properties of foods*. Westport: AVI Publishing Company, Inc. 1983. Chapter 1: Physical properties of foods: what they are and their relation to other food properties, p. 1-41.

Tanada, P. S. *Obtenção de extrato de banana (Musa Cavendishii) isento de polifenol oxidase por ultrafiltração e concentrado por osmose inversa*. Campinas: Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 101p. Dissertação (Mestrado)

Teixeira Neto, R. O., Quast, D. G., Isotermas de adsorção de umidade em alimentos, *Coletânea do Instituto de Tecnologia de Alimentos*, v. 8, Tomo I, p. 141-197, 1977.

Tolaba, M. P., Aguerre, R. J., Suarez, C. Drying of corn with tempering: simulation and experimental verification. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 516-523.

Torrey, M. *Dehydration of fruits and vegetables*, New Jersey: Noyes Data Corporation, 1983, 287p.

Travaglini, D. A., Neto, M. P., Bleinroth, E. W., Leitão, M. F. F. *Banana-passa: princípios de secagem, conservação e produção industrial*, Campinas: ITAL, 1993, 73p. (Manual Técnico 12).

Uçkan, G., Ulku, S. Drying of corn grains in a batch fluidized bed dryer. *Drying of solids. Recent International Developments*. New York: John Wiley & Sons, 1986, v.1, p. 91-96.

Vagena, G. K., Marinos-Kouris, D. Drying kinetics of apricots. *Drying Technology*. v. 9, n. 3, p. 735-752, 1991.

Verma, L., Noomhorm, A. Rice drying simulation. In: International Drying Symposium (IDS'86), 1986, Montreal: *Proceedings...* v.2, p. 461-469.

Vieira, W. G., Silva, L. H. M. Modeling drying process of granular cereal: a boundary element approach. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. *Proceedings...* v. B, p. 347-355.

- Vitti, G. C., Ruggiero, C. Aproveitamento do engaço, coração e ráquis, como fonte de nutrientes. In: Simpósio Brasileiro sobre Bananicultura, 1984, Jaboticabal. *Anais* p. 392-399.
- Waliszewski, K. N., Salgado, M. A., Garcia, M. A. Mass transfer in banana chips during osmotic dehydration. *Drying Technology*, v. 15, n. 10, p. 2597-2607, 1997.
- Walker, L. P., Bakker-Arkema, F. W. Energy efficiency in concurrent flow rice drying. *Transactions of the ASAE*, v. 24, p. 1352-1356, 1981.
- Watson, G. N. *Theory of Bessel functions*. Cambridge, 1944.
- Whitaker, S. *Advances in drying*, New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, v.1, Chapter Two: Heat and mass transfer in granular porous media, p. 23-61.
- White, G. M., Bridges, T. C., Loewer, O. J., Ross, I. J. Thin-layer drying model for soybeans. *Transactions of the ASAE*, v. 24, p. 1643-1646, 1981.
- Woolrich, W. R. Specific and latent heat of foods in the freezing zone, *ASHRAE Journal*, v. 8, n. 4, p. 43-47, 1966.
- Wrobel, L. C., Brebbia, C. A. A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. *International Journal Heat and Mass Transfer*, v. 24, n. 5, p. 843-850, 1981.
- Young, J. H. Simultaneous heat and mass transfer in porous higroscopic solid. *Transactions of the ASAE*, v. 12, n. 5, p. 720-725, 1969.
- Young, J. H., Whitaker, T. B. Numerical analysis of vapor diffusion in a porous composite sphere with concentric shells. *Transactions of the ASAE*, p. 1051-1057, 1971.

Zhang, D., Mujumdar, A. S. Deformation and stress analysis of porous capillary bodies during intermittent volumetric thermal drying. *Drying Technology*, v. 10, n.2, p. 421-443, 1992.

Zhang, Q., Litchfield, J. B., An optimization of intermittent corn drying in a laboratory scale thin layer dryer. *Drying Technology*, v.9, n.2, p. 383-395, 1991.

Zienkiewicz, O. C., Parekh, C. J. Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n. 2, p. 61-71, 1970.

Zogzas, N. P., Maroulis, Z. B. Effective moisture diffusivity estimation from drying data: a comparison between various methods of analysis. *Drying Technology*, v. 14, n. 7 e 8, p. 1543-1573, 1996.

Zogzas, N. P., Maroulis, Z. B., Marinos-Kouris, D. Moisture diffusivity data compilation in foodstuffs. *Drying Technology*, v. 14, n. 10, p. 2225-2253, 1996.

Anexos

Tabela A1 - Coeficientes de expansão das funções esferoidais

C_{mk}		$d_{n,m}$									
m	k	n=0	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=14	n=16	
0	1	9.057968 E-01	-1.838270 E-01	6.035341 E-03	-8.423873 E-05	6.524434 E-07	-3.215064 E-09	1.096811 E-11	-2.744042 E-14	5.250038 E-17	
	2	7.350152 E-01	-4.832056 E-01	5.957555 E-02	-3.243089 E-03	9.945129 E-05	-1.954869 E-06	2.671500 E-08	-2.684403 E-10	2.066362 E-12	
	3	6.079204 E-01	-6.525968 E-01	1.592335 E-01	-1.830900 E-02	1.220368 E-03	-5.292157 E-05	1.609392 E-06	-3.618376 E-08	6.254849 E-10	
	4	5.261319 E-01	-7.173101 E-01	2.623813 E-01	-4.872654 E-02	5.444264 E-03	-4.404005 E-04	2.128801 E-05	-8.359907 E-07	2.538032 E-08	
	5	4.700184 E-01	-7.338645 E-01	3.481281 E-01	-8.992445 E-02	1.454107 E-02	-1.599176 E-03	1.267711 E-04	-7.564933 E-06	3.514272 E-07	
	6	2.299168 E-01	-6.626143 E-01	5.389631 E-01	-2.964657 E-1	1.193592 E-01	-3.656112 E-02	8.755965 E-03	-1.675909 E-03	2.611833 E-04	
	7	3.158584 E-01	-6.466422 E-01	5.494043 E-01	-3.226339 E-01	1.412750 E-01	-4.779404 E-02	1.280033 E-02	-2.767574 E-03	4.911836 E-04	
2	1	1.234925 E-01	1.109490 E+00	-1.175360 E-01	9.332904 E-03	-2.552931 E-04	4.289314 E-06	-4.894432 E-08	4.048408 E-10	-2.541461 E-12	
	2	2.229313 E-01	1.062380 E+00	-4.563002 E-01	6.211793 E-02	-4.284450 E-03	1.804736 E-04	-5.148053 E-06	1.062709 E-07	-1.663199 E-09	
	3	2.519078 E-01	8.206568 E-01	-7.339649 E-01	1.893954 E-01	-2.437142 E-02	1.905303 E-03	-1.006371 E-04	3.842117 E-06	-1.111309 E-07	
	4	2.384407 E-01	5.501176 E-01	-8.745891 E-01	3.609476 E-01	-7.378270 E-02	9.166747 E-03	-7.703638 E-04	4.684377 E-05	-2.159835 E-01	
	5	1.895430 E-01	1.071619 E-01	-7.514643 E-01	7.223455 E-01	-3.513165 E-01	1.072964 E-01	-2.272811 E-02	3.547289 E-03	-4.253915 E-04	
	6	1.669647 E-01	-6.561726 E-03	-5.767323 E-01	7.619494 E-01	-5.147176 E-01	2.247417 E-01	-6.975309 E-02	1.625869 E-02	-2.954767 E-03	
	7	1.525198 E-01	-6.281175 E-02	-4.467457 E-01	7.308943 E-01	-6.064366 E-01	3.320640 E-01	-1.319383 E-01	4.005620 E-02	-9.615281 E-03	
4	1	1.378063 E-02	1.878451 E-01	1.047426 E+00	-1.875269 E-01	1.324991 E-02	-5.226006 E-04	1.335465 E-05	-2.407728 E-07	3.238708 E-09	
	2	5.246794 E-02	3.934286 E-01	1.006377 E+00	-3.983831 E-01	5.894961 E-02	-4.804355 E-03	2.522841 E-04	-9.319902 E-06	2.564403 E-07	
	3	1.066669 E-01	5.779170 E-01	8.111783 E-01	-6.447509 E-01	1.663466 E-01	-2.294924 E-02	2.016543 E-03	-1.239329 E-04	5.653946 E-06	
	4	-3.292584 E-02	-2.312843 E-01	-6.666193 E-01	-9.653063 E-01	6.936772 E-01	-1.804102 E-01	2.642586 E-02	-2.552367 E-03	1.769176 E-04	
	5	1.363602 E-01	3.138278 E-01	-3.242273 E-01	-5.381840 E-01	7.601255 E-01	-4.180996 E-01	1.363932 E-01	-3.032135 E-02	4.945212 E-03	
	6	1.280795 E-01	2.401377 E-01	-3.994621 E-01	-3.570717 E-01	7.664441 E-01	-5.341734 E-01	2.167009 E-01	-5.975067 E-02	1.209485 E-02	
	7	1.063192 E-01	7.333401 E-02	-4.145645 E-01	1.356401 E-01	4.590432 E-01	-7.009658 E-01	5.348931 E-01	-2.729648 E-01	1.028781 E-01	
6	1	3.399567 E-04	2.325055 E-02	2.079339 E-01	1.015328 E+00	-2.092646 E-01	1.814609 E-02	-9.165146 E-04	3.093394 E-05	-7.543681 E-07	
	2	8.274795 E-03	8.168098 E-02	3.799673 E-01	9.610676 E-01	-3.854178 E-01	6.223573 E-02	-5.791728 E-03	3.586329 E-04	-1.600995 E-05	
	3	1.168123 E-01	3.970592 E-01	1.617174 E-01	-4.853585 E-01	-4.258442 E-01	7.614032 E-01	-4.430509 E-01	1.496613 E-01	-3.440750 E-02	
	4	1.071050 E-01	3.271924 E-01	-6.131554 E-03	-5.396268 E-01	-1.638148 E-01	7.352479 E-01	-5.707809 E-01	2.435288 E-01	-6.959430 E-02	
	5	1.003418 E-01	2.698503 E-01	-1.221841 E-01	-5.142249 E-01	6.211901 E-02	6.361357 E-01	-6.610150 E-01	3.497572 E-01	-1.217126 E-01	
	6	9.507219 E-02	2.222900 E-01	-2.000313 E-01	-4.456857 E-01	2.359090 E-01	4.894298 E-01	-7.022603 E-01	4.558987 E-01	-1.903155 E-01	
	7	8.696644 E-02	1.504060 E-01	-2.783414 E-01	-2.695057 E-01	4.204488 E-01	1.607124 E-01	-6.400357 E-01	6.137195 E-01	-3.536866 E-01	

8	1	8.549274 E-04	1.328320 E-02	8.484507 E-02	3.868125 E-01	9.298966 E-01	-3.932323 E-01	6.927747 E-02	-7.218857 E-03	5.107660 E-05
	2	9.335081 E-02	3.429933 E-01	2.963786 E-01	-1.255336 E-01	-5.371742 E-01	-9.451177 E-02	6.697181 E-01	-5.365948 E-01	2.329702 E-01
	3	8.640261 E-02	3.013089 E-01	1.613045 E-01	-2.896266 E-01	-4.782098 E-01	1.672709 E-01	5.577565 E-01	-6.387510 E-01	3.504668 E-01
	4	8.140540 E-02	2.614553 E-01	5.051087 E-02	-3.738711 E-01	-3.468435 E-01	3.548735 E-01	3.766817 E-01	-6.750895 E-01	4.661317 E-01
	5	7.758698 E-02	2.260132 E-01	-3.500450 E-02	-3.998128 E-01	-1.922632 E-01	4.578162 E-01	1.691524 E-01	-6.432917 E-01	5.626440 E-01
10	1	8.928188 E-02	3.318347 E-01	3.737679 E-01	1.172322 E-01	-3.507113 E-01	-4.951998 E-01	1.846995 E-01	5.641231 E-01	-6.472164 E-01
	2	7.172353 E-02	2.537744 E-01	1.526838 E-01	-2.040371 E-01	-4.378789 E-01	-8.917974 E-02	4.939170 E-01	9.583078 E-02	-6.178734 E-01
	3	6.758072 E-02	2.234678 E-01	7.038584 E-02	-2.806922 E-01	-3.692815 E-01	1.014348 E-01	4.851704 E-01	-1.292481 E-01	-4.976874 E-01
12	1	7.691996 E-02	2.768847 E-01	3.522793 E-01	2.414545 E-01	-8.248997 E-02	-4.173685 E-01	-2.917398 E-01	3.500529 E-01	3.210233 E-01
	2	6.252995 E-02	2.324179 E-01	2.038278 E-01	-5.031089 E-02	-3.509098 E-01	-3.290637 E-01	1.583704 E-01	4.593288 E-01	-1.589207 E-01
14	1	6.091929 E-02	2.300569 E-01	2.452170 E-01	6.452611 E-02	-2.358586 E-01	-4.034449 E-01	-1.593333 E-01	3.453866 E-01	3.467615 E-01

C_{mk}		$d_{n,m}$						
m	k	n=18	n=20	n=22	n=24	n=26	n=28	n=30
0	1	-7.930276 E-20	9.697460 E-23	-9.796374 E-26	8.313077 E-29	-6.009393 E-32	3.744969 E-35	-2.032702 E-38
	2	-1.257315 E-14	6.198760 E-17	-2.526311 E-19	8.653174 E-22	-2.525843 E-24	6.358025 E-27	-1.394293 E-29
	3	-8.568607 E-12	9.528747 E-14	-8.771802 E-16	6.793827 E-18	-4.487956 E-20	2.558350 E-22	-1.271211 E-24
	4	-6.130130 E-10	1.205346 E-11	-1.966141 E-13	2.702785 E-15	-3.173109 E-17	3.218038 E-19	-2.847051 E-21
	5	-1.305310 E-08	3.961612 E-10	-1.000269 E-11	2.133083 E-13	-3.891614 E-15	6.141745 E-17	8.464619 E-19
	6	-3.368074 E-05	3.644737 E-06	-3.350930 E-07	2.646173 E-08	-1.812298 E-09	1.085783 E-10	-5.721538 E-12
	7	-7.260604 E-05	9.054410 E-06	-9.635025 E-07	8.838091 E-08	-7.052098 E-09	4.934732 E-10	-3.040951 E-11
2	1	1.253042 E-14	-4.982645 E-17	1.632223 E-19	-4.481904 E-22	1.046635 E-24	-2.104273 E-27	3.680870 E-30
	2	2.042904 E-11	-2.022762 E-13	1.649326 E-15	-1.126964 E-17	6.547410 E-20	-3.274376 E-22	1.424504 E-24
	3	2.521609 E-09	-4.610862 E-11	6.941574 E-13	-8.756038 E-15	9.389904 E-17	-8.667105 E-19	6.958492 E-21
	4	7.817130 E-08	-2.281141 E-09	5.482746 E-11	-1.104467 E-12	1.8919993 E-14	-2.790192 E-16	3.579430 E-18
	5	4.043972 E-05	-3.122788 E-06	1.997657 E-07	-1.075916 E-08	4.945650 E-10	-1.962879 E-11	6.787498 E-13
	6	4.305209 E-04	-5.140576 E-05	5.120420 E-06	-4.318262 E-07	3.122292 E-08	-1.956504 E-09	1.069875 E-10
	7	1.871437 E-03	-3.012155 E-04	4.074331 E-05	-4.694239 E-06	4.660137 E-07	-4.025944 E-08	3.038903 E-09
4	1	-3.382265 E-11	2.825572 E-13	-1.932953 E-15	1.103377 E-17	-5.337568 E-20	2.216778 E-22	-7.992095 E-25
	2	-5.472163 E-09	9.334050 E-11	-1.303061 E-12	1.517310 E-14	-1.496815 E-16	1.267413 E-18	-9.313888 E-21
	3	-1.996086 E-07	5.624839 E-09	-1.295899 E-10	2.488357 E-12	-4.045602 E-14	5.643007 E-16	-6.828245 E-18
	4	-9.288256 E-06	3.835749 E-07	-1.281611 E-08	3.541378 E-10	-8.236480 E-12	1.635882 E-13	-2.807839 E-15
	5	-6.203849 E-04	6.191116 E-05	-5.041115 E-06	3.416722 E-07	-1.959108 E-08	9.632002 E-10	-4.100913 E-11
	6	-1.885835 E-03	2.342394 E-04	-2.376978 E-05	2.010008 E-06	-1.439280 E-07	8.843963 E-09	-4.705271 E-10
	7	-3.017695 E-02	7.125207 E-03	-1.387351 E-03	2.269316 E-04	-3.165035 E-05	3.810043 E-06	-3.964830 E-07

6	1	1.398883 E-08	-2.045639 E-10	2.424457 E-12	-2.379277 E-14	1.9670984 E-16	-1.389799 E-18	8.492130 E-21
	2	5.427760 E-07	-1.449914 E-08	3.137310 E-10	-5.618783 E-12	8.475153 E-14	-1.092189 E-15	1.216966 E-17
	3	5.827478 E-03	-7.636220 E-04	8.009494 E-05	-6.896491 E-06	4.971490 E-07	-3.048252 E-08	1.606987 E-09
	4	1.455658 E-02	-2.348357 E-03	3.027488 E-04	-3.201052 E-05	2.832037 E-06	-2.130398 E-07	1.376052 E-08
	5	3.080147 E-02	-5.996228 E-03	9.317564 E-04	-1.186894 E-04	1.264878 E-05	-1.146124 E-06	8.904234 E-08
	6	5.737644 E-02	-1.327442 E-02	2.449542 E-03	-3.705111 E-04	4.689514 E-05	-5.048000 E-06	4.651224 E-07
	7	1.446656 E-01	-4.518328 E-02	1.124640 E-02	-2.296124 E-03	3.927571 E-04	-5.720820 E-05	7.101967 E-06
8	1	-2.648386 E-05	1.057104 E-06	-3.362911 E-08	8.751190 E-10	-1.901022 E-11	3.504063 E-13	-5.553714 E-15
	2	-6.783836 E-02	1.452636 E-02	-2.412522 E-03	3.219881 E-04	-3.543583 E-05	3.279646 E-06	-2.580127 E-07
	3	-1.250160 E-01	3.237975 E-02	-6.462849 E-03	1.032828 E-03	-1.357903 E-04	1.499043 E-05	-1.402263 E-06
	4	-2.010924 E-01	6.209901 E-02	-1.468092 E-02	2.769197 E-03	-4.288508 E-04	5.569177 E-05	-6.107178 E-06
	5	-2.911611 E-01	1.060482 E-01	-2.936035 E-02	6.463031 E-03	-1.165877 E-03	1.761579 E-04	-2.238729 E-05
10	1	3.555361 E-01	-1.276298 E-01	3.346166 E-02	-6.799431 E-03	1.112224 E-03	-1.504041 E-04	1.698319 E-05
	2	5.697888 E-01	-3.022136 E-01	1.120390 E-01	-3.153071 E-02	7.061017 E-03	-1.297522 E-03	1.965530 E-04
	3	6.267454 E-01	-4.030141 E-01	1.756808 E-01	-5.741053 E-02	1.483444 E-02	-3.132996 E-03	5.412741 E-04
12	1	-5.983657 E-01	4.155783 E-01	-1.809499 E-01	5.683977 E-02	-1.378760 E-02	2.690085 E-03	-4.259585 E-04
	2	-4.538319 E-01	5.963536 E-01	-3.892632 E-01	1.714692 E-01	-5.661088 E-02	1.477520 E-02	-3.056267 E-03
14	1	-3.569636 E-01	-2.704482 E-01	6.075105 E-01	-4.941815 E-01	2.571345 E-01	-9.795104 E-02	2.761411 E-02