

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR PAULO ALEXANDRE
GALARCE ZAVALA E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 04/05/1999

Renato Pavanello
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN)

Autor: Paulo Alexandre Galarce Zavala
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

36/99

Campinas, 1999
S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Análise Vibro-Acústica Utilizando o
Método de Elementos Finitos com
Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN)

Autor: Paulo Alexandre Galarce Zavala
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	UNICAMP
	Z19a
V.	Ex.
TOMADO BC/	39342
PREÇO	229/99
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/10/99
N.º CPD	

CM-00136481-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Z19a

Zavala, Paulo Alexandre Galarce

Análise vibro-acústica utilizando o método de elementos finitos com mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN). / Paulo Alexandre Galarce Zavala.-- Campinas. SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Renato Pavanello

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Radiação. 2. Emissão acústica. 3. Método dos elementos finitos. 4. Vibração. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

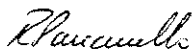
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

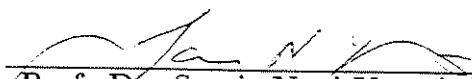
Análise Vibro-Acústica Utilizando o
Método de Elementos Finitos com
Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN)

Autor: Paulo Alexandre Galarce Zavala

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. Samir Nagi Yousri Gerges
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Campinas, 04 de Maio de 1999.

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente à meus pais, Maria Angélica e Hernan Andres, por terem me apoiado em todos os momentos. E à minhas irmãs, Viviana Andrea e Maria Verônica, e à minha namorada Alessandra, por terem me incentivado a concluir esta Dissertação de Mestrado.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Renato Pavanello, pelo apoio, confiança, e incentivo recebidos nos momentos mais difíceis. Destacando-se também a grande dedicação e competência que foram fundamentais para a realização desta Dissertação de Mestrado.

Gostaria de agradecer a todos os colegas e professores do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica pela atenção prestada quando solicitada, pela amizade, e incentivo.

Devo agradecer também a Coordenação de Pós Graduação pelo apoio recebido para a participação como autor no V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste (outubro de 1998, Fortaleza-Ce), e no VII Congresso e Exposição Internacionais da Mobilidade - SAE BRASIL 98 (novembro de 1998, São Paulo-SP). Agradecendo também a CAPES, Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, e CNPQ, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro nestas duas participações.

Gostaria de agradecer a CAPES pela bolsa de mestrado que me possibilitou dedicar tempo exclusivo a este trabalho durante quase dois anos. E a FAPESP, Fundação de Apoio a Pesquisa do Estado de São Paulo, por fornecer as estações de trabalho utilizadas neste trabalho, obtidas através de projetos de pesquisa suportados por esta fundação.

Conteúdo

Resumo	x
Abstract	xi
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xx
1 Introdução	1
1.1 Posicionamento e Motivação desta Dissertação	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Descrição do Trabalho	3
2 Revisão da Literatura	5
2.1 Introdução	5
2.2 Surgimento e Desenvolvimento do Método de Elementos Finitos para Trata- mento de Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura	5
2.3 Investigação e Aplicação em Problemas de Acoplamento Fluido-Estrutura .	8

2.4	Trabalhos sobre o Tratamento de Meios Infinitos	13
2.4.1	Literatura sobre Elementos Infinitos	14
2.4.2	Literatura sobre o Método de Mapeamento DtN	17
2.5	Conclusões	19
3	Modelagem do Meio Estrutural	21
3.1	Introdução	21
3.2	Formulação Geral em Deslocamentos	21
3.3	Formulação do Elemento de Barra	28
3.4	Formulação do Elemento de Viga	32
3.5	Formulação do Elemento Pórtico	37
4	Modelagem do Meio Fluido	39
4.1	Introdução	39
4.2	Formulação em Pressão	39
4.3	Formulação em Potencial de Velocidades	49
4.4	Discretização em Elemento Triangular Linear	53
4.5	Discretização em Elemento Quadrangular Bi-linear	58
5	Modelagem de Problemas Acústicos em Meio Infinito via Mapeamento DtN	64

5.1	Introdução	64
5.2	Problema de Valor de Contorno para a Equação de Helmholtz em Meio Infinito	65
5.3	Tratamento de Meio Infinito via Mapeamento DtN	66
5.4	Tratamento de Meio Semi-Infinito Bi-dimensional via Mapeamento DtN	70
5.5	Inclusão do Mapeamento DtN na Discretização por Elementos Finitos	73
5.6	Aspectos Computacionais da Inclusão do Mapeamento DtN	78
5.7	Obtenção de Resultados fora do Domínio Discretizado	80
6	Modelagem do Acoplamento Fluido-Estrutura	84
6.1	Introdução	84
6.2	Formulação Discreta do Problema em Pressão	85
6.3	Inclusão do Mapeamento DtN na Formulação em Pressão	89
6.4	Formulação Discreta do Problema em Potencial de Velocidades	92
6.5	Inclusão do Mapeamento DtN na Formulação em Potencial de Velocidades	95
6.6	Obtenção da Matriz de Acoplamento	96
7	Investigação do Método de Mapeamento DtN	98
7.1	Introdução	98
7.2	Cilindro Pulsante	99
7.3	Cilindro Vibrando Harmonicamente	106

7.4	Cilindro com Arco Vibrante	109
7.5	Análise da Influência dos Parâmetros	117
7.6	Análise da Expansão de Resultados	119
8	Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Infinito com Mapeamento DtN	127
8.1	Introdução	127
8.2	Placa Vibrante em Meio Fluido Infinito	127
8.3	Análise da Influência do Mapeamento DtN na Resposta da Estrutura . . .	128
8.4	Comparação com Resultados Experimentais	138
9	Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Semi-Infinito com Mapeamento DtN	149
9.1	Introdução	149
9.2	Viga Engastada-Livre em Meio Fluido Semi-Infinito	150
9.3	Resultados Obtidos Usando-se o Método de Elementos de Contorno	150
9.4	Resultados Obtidos Usando-se o MEF/DtN	152
9.5	Comparação das Respostas Obtidas via MEC e MEF/DtN	160
10	Conclusões	164
10.1	Conclusões Principais	164
10.2	Trabalhos Futuros	166

Bibliografia	167
A Metodologia de Pesquisa Bibliográfica	175

Resumo

ZAVALA, Paulo Alexandre Galarce, *Análise Vibro-Acústica em Meio Fluido Infinito Utilizando o Método de Elementos Finitos e Mapeamento DtN*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 175p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho buscou-se um Método de Acoplamento Fluido-Estrutura que levasse em consideração a presença de meio fluido infinito. Após uma revisão de literatura sobre tratamento de meios infinitos, adotou-se o Método Dirichlet-to-Neumann (DtN), por ser exato, não reflexivo e podendo ser diretamente inserido no Método de Elementos Finitos (MEF) usado na modelagem Fluido-Estrutura. Assim, a modelagem clássica em elementos finitos para meios estrutural e fluido são apresentadas conjuntamente com a formulação para alguns elementos simples bi-dimensionais. O Método DtN para meios fluido infinitos e semi-infinitos é apresentado junto com sua forma discretizada para inclusão no MEF, sendo discutida suas principais implicações. Um Método de Expansão de Resultados para fora do domínio discretizado é apresentado. A modelagem Fluido-Estrutura em meio fluido infinito usando-se o Mapeamento DtN (MEF/DtN) é apresentada. Na sequência, é feita a investigação do Método DtN, com a validação da implementação adotada, análise da influência dos parâmetros do Método DtN e análise do Método de Expansão dos Resultados. Para a investigação da modelagem Fluido-Estrutura com Mapeamento DtN foram escolhidos dois exemplos, o primeiro traz a comparação de resultados experimentais (de outro autor) do campo acústico radiado a partir de uma placa vibrando em meio aéreo (espaço completo) com resultados usando-se o MEF/DtN. O segundo exemplo traz a comparação de resultados obtidos usando-se o Método de Elementos de Contorno para o comportamento dinâmico estrutural de uma viga cantilever (engastada-livre) em uma parede infinita (semi-espaço) com resultados usando-se o MEF/DtN. Ao final, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros dentro desta área de pesquisa.

Palavras Chave

- Método Dirichlet-to-Neumann (DtN), Meios Infinitos, Método dos Elementos Finitos

Abstract

ZAVALA, Paulo Alexandre Galarce, *Vibro-Acoustic Analysis in Infinite Fluid Medium Using The Finite Element Method and DtN Mapping*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 175p. Dissertação (Mestrado)

This work were interested in finding a method of fluid-structure coupling with infinite fluid medium. After a literature analysis in infinite fluid medium modeling, were adopted the Dirichlet-to-Neumann (DtN) Method, wich is exact, non reflexive and can be directly included in the Finite Element Method (FEM) wich is used in fluid-structure modeling. First, the classic finite element modeling for structure and fluid are presented with the formulation of some simple bi-dimensional elements. The DtN Method for infinite and semi-infinite fluid medium is presented with the discretized form for inclusion in FEM. The main implications of that are discussed. A method of expansion of results for outside of the discretized domain is presented. The fluid-structure modeling with DtN mapping (FEM/DtN) is presented. A investigation of the DtN Method is shown, with validation of the computational code adopted, analysis of the influence of the DtN parameters and analysis of the Method of Expansion of Results. Two examples were choosen for the investigation of the fluid-structure modeling with DtN mapping. The first is a comparision of experimental results (made by other author) of the acoustic field radiated from a vibrating plate in air medium (full space) with results obtainned using FEM/DtN. The second, brings a comparision of results obtainned using the Boundary Element Method for the dynamic behaviour of a cantilever beam (clamped-free) in an infinite wall (semi-space) with results obtainned using the FEM/DtN. Finally, are presented sugestions for future works in this research area.

Key Words

- Dirichlet-to-Neumann (DtN) Method, Infinite Medium, Finite Element Method

Lista de Figuras

3.1	Domínio Estrutural Genérico com Condições de Contorno Clássicas	22
3.2	Elemento de Barra no Espaço Real	28
3.3	Elemento de Barra no Espaço Isoparamétrico	29
3.4	Elemento de Viga no Espaço Real	32
3.5	Elemento de Viga no Espaço Isoparamétrico	33
4.1	Domínio fluido genérico com as condições de contorno escolhidas.	40
4.2	Domínio Fluido Genérico com Condições de Contorno Clássicas	49
4.3	Espaço Real e Espaço Isoparamétrico para as Coordenadas Locais	54
4.4	Espaço Real e Espaço Isoparamétrico para as Coordenadas Locais	59
5.1	Domínio Fluido Ilimitado com Contorno Interno	65
5.2	Problema Equivalente	67
5.3	Problema Equivalente, Meio Semi-Infinito.	71
5.4	Função de Forma da Fronteira Artificial	75

6.1	Exemplo de Problema de Interação Fluido-Estrutura	85
6.2	Problema Fluido-Estrutura Equivalente	90
7.1	Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 2a$; seis elementos por comprimento de onda.	99
7.2	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Real.	100
7.3	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.	100
7.4	Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Seis elementos por comprimento de onda.	101
7.5	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Real.	102
7.6	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.	102
7.7	Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Dez elementos por comprimento de onda.	103
7.8	Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Vinte elementos por comprimento de onda.	103
7.9	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, dez elementos por comprimento de onda. Parte Real.	104
7.10	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, dez elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.	104

7.11	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, vinte elementos por comprimento de onda. Parte Real.	105
7.12	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, vinte elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.	105
7.13	Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.	107
7.14	Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.	107
7.15	Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, seis elementos por comprimento de onda, ao longo da fronteira artificial. Parte Real.	108
7.16	Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, seis elementos por comprimento de onda, ao longo da fronteira artificial. Parte Imaginária.	108
7.17	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.	110
7.18	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.	110
7.19	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Real.	111

7.20	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Imaginária.	111
7.21	Comportamento da aproximação em relação ao número de termos da série considerados, malha 3×32 elementos.	112
7.22	Malha de Elementos Finitos escolhida para uma discretização mais refinada do fluido próximo ao arco radiante: $R = 2a$	113
7.23	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real. . . .	114
7.24	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.	114
7.25	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Real. . . .	115
7.26	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Imaginária.	115
7.27	Comportamento da aproximação em relação ao número de termos da série considerados, malha refinada.	116
7.28	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Expansão para $R_{DE} = 10a$. Parte Real. . . .	120
7.29	Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Expansão para $R_{DE} = 10a$. Parte Imaginária. .	120

7.30	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.	122
7.31	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.	123
7.32	Radiação a partir de um arco do semi-cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.	124
7.33	Radiação a partir de um arco do semi-cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.	124
7.34	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Resultados em $\theta = 0$. Parte Real.	125
7.35	Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 rad$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Resultados em $\theta = 0$. Parte Imaginária.	125
8.1	Malha Inicial do Modelo Bi-dimensional da Placa Vibrante.	129
8.2	Posição da Força de Excitação da Placa Vibrante no Modelo Bi-dimensional.	129
8.3	Comparação das Frf's do ponto onde atua a excitação.	130
8.4	Comparação das Frf's do ponto da extremidade oposta ao da excitação. . .	130

8.5	Comparação das Frf's do ponto central da placa.	131
8.6	Comparação das Frf's do ponto a $L/4$ do ponto da excitação.	131
8.7	Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	133
8.8	Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	133
8.9	Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	134
8.10	Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	134
8.11	Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	135
8.12	Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	135
8.13	Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	136
8.14	Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	136
8.15	Quinto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	137
8.16	Quinto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	137
8.17	Malha do Modelo Bi-dimensional da Placa Vibrante para Comparação. . .	139
8.18	Posição da Força de Excitação na Placa para Comparação, $x = 0.622$ m. .	139
8.19	Comparação das Frf's na Extremidade $x = 0$	140
8.20	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.05$ m.	140
8.21	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.100$ m.	141
8.22	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.174$ m.	141
8.23	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.224$ m.	142

8.24	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.274$ m.	142
8.25	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.373$ m.	143
8.26	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.423$ m.	143
8.27	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.473$ m.	144
8.28	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.523$ m.	144
8.29	Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.572$ m.	145
8.30	Comparação das Frf's no Ponto da Excitação, $x = 0.622$ m.	145
8.31	Comparação das Frf's na Extremidade $x = 0.672$ m.	146
8.32	Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Primeiro Modo. . .	146
8.33	Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Segundo Modo. . .	147
8.34	Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Terceiro Modo. . .	147
9.1	Comparação das Frf's no ponto da excitação.	152
9.2	Malhas com diferentes discretizações para a estrutura: (a) 20 elementos (b) 30 elementos.	153
9.3	Malhas com diferentes discretizações para a estrutura: (c) 40 elementos (d) 50 elementos.	154
9.4	Comparação das Frf's no ponto da excitação.	155
9.5	Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	156
9.6	Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	156
9.7	Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	157

9.8	Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	157
9.9	Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	158
9.10	Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	158
9.11	Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.	159
9.12	Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.	159
9.13	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L/5$	160
9.14	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=2L/5$	161
9.15	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L/2$, ponto da excitação.161	
9.16	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=3L/5$	162
9.17	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=4L/5$	162
9.18	Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L$, extremidade livre. .	163

Lista de Tabelas

7.1	EMQ para seis, dez e vinte elementos por comprimento de onda.	106
8.1	Frequências de Ressonância da Estrutura.	128
8.2	Frequências de Maior Amplitude de Resposta da Estrutura.	132
8.3	Frequências Naturais da Placa usando o MEF.	139
9.1	Frequências de Ressonância da Estrutura.	150
9.2	Características importantes das malhas usadas.	154
9.3	Frequências de Ressonância do Sistema Acoplado.	155

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo inicialmente é posicionado o assunto tratado neste trabalho em relação as pesquisas feitas anteriormente, e em seguida indica-se a motivação para a realização desta pesquisa. Na sequência são apresentados os objetivos gerais e específicos propostos para esta dissertação de mestrado. Por último é feita uma descrição de cada capítulo, explicitando-se a ordem lógica usada para se alcançar os objetivos estabelecidos.

1.1 Posicionamento e Motivação desta Dissertação

Considera-se neste trabalho, que os problemas vibro-acústicos são aqueles onde tem-se a dinâmica de estruturas, especificamente para o caso de vibrações, acopladas com a dinâmica de fluidos, neste caso restrita aos fenômenos da acústica. Este tipo de problema, está presente em análises de vários sistemas mecânicos, como por exemplo: habitáculos de veículos, radiação acústica de veículos em meio externo ilimitado, acústica submarina, acústica aeroespacial, entre outras.

Em todos estes problemas é importante considerar-se o acoplamento entre os meios estrutural e fluido. Segundo ZIENKIEWICZ (1984) [67], os sistemas acoplados podem ser definidos da seguinte maneira:

Coupled systems and formulation are those applicable to multiple domains and de-

pendent variables wich usually (but not always) describe different physical phenomena and in wich (a) neither domain can be solved while separated from the other; (b) neither set of dependent variables can be explicitly eliminated at the differential equation level.

Com esta definição, o problema de vibro-acústica pode ser situado dentro de uma gama mais abrangente de problemas, os de acoplamento fluido-estrutura. Este tipo de acoplamento pode ser dividido em duas classes, ainda segundo ZIENKIEWICZ (1991) [73]. A primeira surge quando o acoplamento se dá através da interface, e a segunda onde há uma superposição parcial ou não entre os domínios. Assim, o problema vibro-acústico se enquadra na primeira classe, onde a interação se dá através da compatibilidade cinemática das partículas da interface.

Os problemas vibro-acústicos podem ser divididos em duas categorias: (a) Problemas acoplados fluido-estrutura em meio fluido finito (b) Problemas acoplados fluido-estrutura em meio fluido infinito. Nestes dois tipos de problema assume-se pequenos deslocamentos em torno de uma posição de equilíbrio, caracterizando um comportamento harmônico do sistema.

Vários trabalhos já foram realizados no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp, destacando-se: GALLI (1995) [19], MARTINI (1996) [41] e CASAS (1998) [10]. Todos estes trabalhos enquadrando-se na primeira categoria, problemas em meios finitos. Esta dissertação trata de problemas da categoria (b), problemas em presença de meio fluido infinito. Assim, a principal motivação consiste em estudar um método que capacite o Método dos Elementos Finitos (MEF) para o tratamento de sistemas fluido-estrutura acoplados em presença de meio fluido infinito.

1.2 Objetivos

O objetivo principal, ou geral, deste trabalho é implementar, investigar e aplicar um método que trate de problemas de acoplamento fluido-estrutura, em especial, vibro-acústicos, considerando-se a presença de meio fluido infinito e utilizando o método de elementos finitos.

Como objetivos específicos, ou secundários, tem-se o de fazer-se a comparação dos resultados do campo acústico simulado com resultados experimentais, e o de fazer-se a comparação de resultados de vibração da estrutura obtidos pelo método investigado, que usa o método de elementos finitos, com outros métodos, como por exemplo, o método de elementos de contorno. Estas comparações são feitas em problemas que ilustram as aplicações possíveis do método.

1.3 Descrição do Trabalho

Para o alcance dos objetivos propostos, o trabalho foi dividido em dez capítulos. Sendo que neste primeiro capítulo tem-se o posicionamento do assunto tratado neste trabalho em relação às pesquisas já desenvolvidas, a motivação para a realização desta pesquisa, a apresentação dos objetivos, e a organização escolhida para apresentação do trabalho.

No segundo capítulo tem-se uma revisão da literatura relevante ao assunto abordado, onde destacam-se as diferentes abordagens pesquisadas. A metodologia empregada para esta revisão de literatura está descrita no Apêndice A. Esta revisão serviu como base para a escolha do método a ser desenvolvido.

Nos capítulos 3 e 4, apresenta-se a modelagem clássica para os meios estrutural e fluido respectivamente. As formulações partem das equações diferenciais, aplicando-se resíduos ponderados e o método de Galerkin, chegando-se a forma matricial do Método dos Elementos finitos para alguns tipos de elementos a serem usados no trabalho. Sendo que nestas formulações os sistemas são considerados em separado.

No Capítulo 5, desenvolve-se o Método de Mapeamento DtN (Dirichlet-to-Neumann) para problemas da equação da onda em meios fluidos infinitos. Parte-se do problema de valor de contorno com a Condição de Radiação de Sommerfeld, chegando-se ao problema DtN. O Mapeamento DtN para problemas bi-dimensionais em meio infinito e semi-infinito, e a forma discretizada para inclusão no sistema matricial do Método de Elementos Finitos são apresentados. Sendo, por último, apresentada uma forma de extrapolação dos

resultados obtidos para regiões mais distantes.

No Capítulo 6, apresenta-se a formulação para problemas fluido-estrutura com Mapeamento DtN, sendo também apresentada uma formulação simétrica a partir do potencial de velocidades.

No Capítulo 7, faz-se a investigação do método de Mapeamento DtN em relação a seus parâmetros principais. Neste momento, valida-se o método em relação a solução analítica para problemas clássicos, validando-se também o método de expansão dos resultados.

No Capítulo 8, faz-se uma comparação dos resultados obtidos do campo acústico gerado a partir de uma placa vibrante em meio aéreo aberto com resultados experimentais.

No Capítulo 9, tem-se a comparação dos resultados obtidos pelo método DtN para uma viga engastada-livre em meio fluido semi-infinito com os resultados obtidos usando-se o Método de Elementos de Contorno. Nesta comparação, os resultados em relação à vibração da estrutura são analisados levando-se em conta diferentes discretizações.

No Capítulo 10, tem-se a apresentação das principais conclusões do trabalho em relação ao comportamento do método DtN para problemas vibro-acústicos em meio fluido infinito. Por último, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros na área pesquisada.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Introdução

Utilizando-se a metodologia descrita no Apêndice A, foi feito um levantamento da literatura mais relevante sobre o assunto deste trabalho, problemas com interação fluido-estrutura, em especial vibro-acústica, e trabalhos sobre tratamento de meio fluido infinito. Obteve-se um panorama que inclui a literatura básica com os conceitos fundamentais, e também o surgimento e desenvolvimento até o estágio atual das pesquisas nesta área. Serão destacados aqueles trabalhos que utilizam o Método de Elementos Finitos para a discretização dos domínios.

2.2 Surgimento e Desenvolvimento do Método de Elementos Finitos para Tratamento de Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

A investigação sobre a modelagem de sistemas acoplados fluido-estrutura surgiu conjuntamente com a fundamentação da modelagem dos domínios sólidos - POPOV (1968) [50], TIMOSHENKO (1983) [60], e outros - e fluidos - LAMB (1945) [38], RAYLEIGH (1945) [52], e outros. Através das equações para cada domínio pode-se incluir o efeito da interação entre os domínios através de condições especiais na interface. Assim, é obtido

um sistema com duas equações, uma para cada domínio, e o problema é solucionado, por exemplo, iterativamente, resolvendo-se cada domínio em separado. Desta forma, os cálculos eram trabalhosos e nem sempre eram obtidas soluções precisas.

No âmbito das soluções aproximadas, um dos trabalhos considerados como pioneiros na resolução de sistemas fluido-estrutura acoplados utilizando o Método de Elementos Finitos - DHATT & TOUZOT (1985) [14], COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], ZIENKIEWICZ & MORGAN (1983) [71], ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1994) [73], e outros - é o de ZIENKIEWICZ (1969) [72]. Na formulação proposta por ZIENKIEWICZ (1969) [72] um único sistema global é resolvido, onde a solução obtida já leva em conta a interação entre os domínios. O autor apresenta uma abordagem para a simetrização do sistema, requisito para a utilização dos processos computacionais comumente utilizados em análises estruturais, sendo este problema alvo de grande atenção durante o desenvolvimento do método. Duas abordagens ao problema fluido-estrutura são propostas, a primeira para casos onde o fluido pode ser tratado como incompressível, e a segunda onde o fluido deve ser tratado como compressível. Estas abordagens são adotadas até hoje, e sua validade foi constatada em problemas aplicados de variada complexidade. No trabalho são apresentados exemplos bastante simplificados mas os resultados demonstram o grande potencial do método.

KIEFLING & FENG (1976) [37] apresentam a formulação para elementos fluidos e estruturais obtidos de forma semelhante, preservando portanto a estrutura dos sistemas matriciais e possibilitando a utilização de métodos de resolução de sistemas voltados para problemas estruturais. Apesar de trazer de forma clara a formulação, os exemplos utilizados não foram muito explorados, faltando uma comparação numérica das formulações existentes.

Na primeira abordagem utilizada para o domínio fluido no surgimento do método, o fluido possuía como variável incógnita a pressão. HAMDI & OUSSET (1978) [26] apresentam uma formulação baseada em deslocamentos tanto para a estrutura como para o fluido. A forma encontrada para contornar o surgimento de modos espúrios é a adoção de um coeficiente de penalidade para a irrotacionalidade dos deslocamentos no fluido. O problema colocado por princípios variacionais leva a um sistema algébrico de autovalor

com matrizes simétricas positivas definidas em banda, e portanto, podem ser utilizados os métodos tradicionais de extração de autovalores, permitindo o estudo dos parâmetros modais do sistema. Embora haja um controle maior sobre a região onde os modos espúrios aparecem, este método não os elimina totalmente.

ZIENKIEWICZ & BETTESS (1978) [69] trazem uma classificação dos tipos de problemas com interação fluido-estrutura e especifica que tipo de abordagem é aplicada em cada caso. Apresenta-se também a formulação Lagrangeana e Euleriana para o fluido, comentando-se suas particularidades. Neste trabalho estão colocados exemplos mais completos para cada tipo de problema e métodos específicos para o tratamento da fronteira em meio infinito, onde condições de contorno especiais, elementos infinitos e integrais na fronteira são discutidos.

DUNGAR (1978) [15] apresenta um método onde a inclusão dos efeitos de inércia do fluido é feita durante a solução iterativa, sendo a principal vantagem a economia em não processar os graus de liberdade do fluido. Esta solução é aplicável à problemas onde os efeitos de compressibilidade do fluido podem ser desprezados. Exemplos para domínios grandes são mostrados, porém não há uma comparação detalhada dos resultados com o método completo.

TABARROK (1978) [59] apresenta a formulação Hamiltoniana, que é baseada nos princípios variacionais. Este método é baseado em deslocamento como variável incógnita tanto para a estrutura como para o fluido, e traz também o problema do surgimento de modos espúrios de frequência zero.

MORAND & OHAYON (1979) [42] apresentam o método direto (tradicional) e um novo método, o indireto, para problemas de hidroelasticidade (interação entre estrutura flexível e fluido incompressível). A análise dinâmica subestruturada é obtida usando os princípios variacionais. Os resultados mostram pequenas diferenças em relação ao método direto, porém o modelo de interação é simplificado e não está discutida a implementação de fenômenos básicos, como radiação para meio infinito, e ondas de superfície, por exemplo.

Uma questão sempre presente no desenvolvimento do método é a obtenção de matrizes simétricas, e neste sentido EVERSTINE (1981) [18] apresenta um método de

simetrização da formulação que utiliza a pressão como variável no fluido. Este método porém só traz vantagens se o sistema já apresenta matrizes de amortecimento no sistema original, caso contrário, este aumentaria o sistema introduzindo uma matriz de amortecimento. O método, que utiliza como variável o potencial de velocidade, pode ser aplicado em problemas transientes como também para problemas em regime permanente. Apesar de inovador, o autor não apresenta comparações com outros métodos de simetrização, e nem apresenta exemplos práticos.

2.3 Investigação e Aplicação em Problemas de Acoplamento Fluido-Estrutura

O método de acoplamento fluido-estrutura utilizando discretização em Elementos Finitos se consolidou como um método prático e de boa precisão. A formulação pode ser obtida de diversas formas, e a abordagem a diversos tipos de problemas foram apresentadas. A partir da década de oitenta observou-se sua investigação e aplicação por pesquisadores do mundo inteiro.

MÜLLER (1981) [44] apresenta um método de condensação estática, utilizando os graus de liberdade da fronteira, especialmente aplicável em problemas onde o fluido é considerado como sendo incompressível. Os resultados porém estão restritos a exemplos bastante simplificados.

WILSON & KHALVATI (1983) [62] propõem um método baseado em deslocamento para o fluido e para a estrutura onde se evita os modos espúrios através de uma restrição na rotacionalidade do campo de deslocamento. O método é investigado em propagação de ondas no meio e na superfície. Um exemplo simples mostra a funcionalidade do método.

OLSON & BATHE (1985) [48] apresentam uma nova formulação baseada em pressão hidrostática e potencial de velocidades como variáveis no domínio fluido, e deslocamento para a estrutura. Desta forma, obtém-se um sistema com matrizes simétricas. Exemplos simples com solução analítica são comparados. Fica então ressaltada a qualidade do método, tendo um menor número de graus de liberdade em relação à formulação

em deslocamentos, e possuindo suas matrizes simétricas, possibilitando a utilização dos processos computacionais que utilizam esta propriedade.

SHARAM & GLADWELL (1985) [56] analisam a formulação em deslocamento e pressão (u-p), e propõem simplificações para a diagonalização das matrizes de massa e amortecimento, e com isto ganha-se rapidez no processo computacional, possibilitando análises de grandes estruturas e em três dimensões. Um exemplo é mostrado, e os resultados são comparados com o método completo, mostrando o desvio devido às simplificações adotadas.

Os trabalhos já apresentados tratam os dois domínios com discretização em Elementos Finitos, MARIEM & HAMDI (1987) [40] são um dos pioneiros em apresentar uma abordagem a problemas acoplados fluido-estrutura onde o domínio fluido é discretizado usando Elementos de Contorno, e acoplado à discretização do domínio estrutural feita em Elementos Finitos. O problema é colocado de forma variacional e exemplificado em dois casos, parede parcialmente flexível em meio externo e parede flexível numa cavidade acústica. Uma característica importante é a obtenção de um sistema com matrizes simétricas, e a possibilidade de um tratamento mais adequado à meios fluidos infinitos.

TSAI & LEE (1987) [61] também apresentam um método onde o fluido é discretizado em Elementos de Contorno, porém neste caso o efeito de compressibilidade é desprezado, e o acoplamento se dá através de Massa Adicional. O tratamento de meios infinitos é verificado, e a obtenção de matrizes simétricas é feita a partir de artifícios numéricos. Resultados em análises semelhantes para reservatórios são comparados e discutidos, porém não é feita comparação com análises que levem em conta efeitos de compressibilidade.

KANARACHOS & ANTONIADIS (1988) [35] propõem um novo método variacional para problemas de acustoelasticidade em interação fluido-estrutura. Utilizando um campo reduzido de variáveis, o problema fica definido para cada tipo de Caso Limite, por exemplo, incompressível, hypercompressível, estrutura hiperleve, hiperflexível, e formulações quasi-estáticas e quasi-dinâmicas. Estas abordagens são pouco exemplificadas e não possuem análise experimental.

SANLBERG & GÖRANSSON (1988) [53] fazem uma investigação dos métodos de

simetrização que utilizam o potencial de deslocamento e pressão como variáveis no fluido. Condensação estática também é analisada de forma a reduzir o número de incógnitas no domínio fluido. Um exemplo clássico com solução analítica é utilizado para verificar a precisão do método, obtendo-se bons resultados neste caso simplificado.

Com o surgimento de computadores cada vez mais rápidos, houve a necessidade de se desenvolver métodos que tratassem de problemas com grandes domínios. ANTONIADIS & KANARACHOS (1988) [2] apresentam métodos de condensação que mantêm ou proporcione sistemas reduzidos simétricos. O método é apresentado para cada caso limite, porém a simplicidade do exemplo utilizado para a comparação dos resultados, e a forma de apresentação dificulta uma análise mais detalhada dos métodos.

SHAHRUZ & MA (1989) [55] apresentam um método de simetrização de sistemas matriciais através de transformação de coordenadas. As características necessárias para a simetrização são discutidas e um problema numérico é exemplificado.

Ainda sobre a preocupação da resolução de sistemas provenientes do acoplamento fluido-estrutura via Método de Elementos Finitos, OLSON & VANDINI (1989) [49] propõem um método para extração de auto-valores adaptado para este tipo de análise. No trabalho são discutidos alguns dos procedimentos comumente utilizados, iteração inversa e sub-espaço. Um exemplo simples é usado para comparação dos resultados mostrando suas vantagens em relação ao tempo de processamento computacional.

CHEN & TAYLOR (1990) [11] propõem um método utilizando a formulação em deslocamento para o fluido onde os modos espúrios são evitados de duas formas: Utilização de integração reduzida na montagem da matriz de rigidez do fluido; e projeção da matriz de massa do elemento fluido. Um exemplo com paredes rígidas é analisado, mostrando bons resultados.

IZADPANAH *et al.* (1991) [33] faz a aplicação dos métodos desenvolvidos para interiores de automóveis e aviões. Introduzindo elementos de Absorção e de barreira acústica, demonstram a aplicabilidade dos métodos a problemas mais realistas e práticos.

Tratando-se de problemas mais aplicados, BATHE, WALCZAK & ZHANG (1993)

[5] fazem um apanhado das possibilidades de análise em interação fluido-estrutura, entre elas, onde o fluido possui escoamento e deforma uma estrutura flexível. Dentro deste tipo de problema, pode-se citar NITIKITPAIBOON & BATHE (1993) [46], que utilizam como incógnitas para o fluido, potencial de velocidades e densidade. O método utiliza uma formulação Lagrangeana-Euleriana para a interação fluido-estrutura. Esta abordagem permite tratar problemas onde o fluido é compressível ou incompressível, e onde o deslocamento da fronteira pode ser grande. Alguns exemplos clássicos são resolvidos trazendo bons resultados. Ainda neste tipo de formulação, NOMURA (1994) [47] trata de problemas com não-linearidades. São apresentados resultados em casos onde há a formação de vórtices em torno de cilindros oscilantes. Estes resultados são comparados com soluções analíticas clássicas, comprovando-se a obtenção de bons resultados.

Analisando-se os trabalhos mais recentes observa-se que existem basicamente duas tendências de pesquisa na área, a primeira está relacionada a estudos mais teóricos dos métodos já utilizados ou em pesquisa, e a segunda tendência é a investigação desses métodos em problemas práticos, onde investigam-se vantagens e desvantagens entre diferentes abordagens.

Dentre os trabalhos de Desenvolvimento dos Métodos analisados destaca-se o de SANDBERG (1995) [54], onde este propõe um artifício matemático de forma a melhorar o tratamento de sistemas não-simétricos que surgem no acoplamento entre problemas de interação fluido-estrutura. Este artifício é bastante útil quando deseja-se utilizar métodos de resolução somente aplicáveis a sistemas simétricos, comuns na maioria dos problemas tratados por Elementos Finitos. Uma vez obtido o sistema simétrico, trata-se o problema da mesma forma que um problema sem acoplamento. Mas deve ser tomado um certo cuidado em observar as transformações utilizadas para recuperação dos resultados e não perder-se o significado físico do problema.

Analisando-se agora os trabalhos com aplicação e investigação dos métodos, com as diversas abordagens aplicadas a problemas de interação fluido-estrutura, pode-se distinguir dois tratamentos, o primeiro é baseado em discretização em elementos finitos tanto para o meio estrutural como para o meio fluido, e o segundo tratamento é baseado em discretização com elementos finitos para o meio estrutural e com elementos de contorno

para o meio fluido. Cada um se propõe a um tipo de problema.

Dentre os trabalhos baseados em métodos MEF/MEF analisados, dois trabalhos são representativos. BATHE *et al.* (1995) [4] propõe uma solução que inclui a vorticidade do fluido como variável independente de forma a usar elementos no fluido que evitem o surgimento de modos espúrios de circulação. Embora aumente o tamanho do sistema a ser resolvido e alguns cuidados devam ser tomados, como por exemplo, o escorregamento do fluido na interface com a estrutura, a aplicação em geometrias que apresentem problemas no surgimento de modos espúrios pode ser vantajosa.

HAMDAN & DOWLING (1995) [25] apresentam um estudo mais completo, no qual a fronteira é não reflexiva para caso de malhas de elementos finitos para a estrutura com condições de contorno especiais, simulando-se meios infinitos. Os resultados para dois casos, onda exponencial e onda plana, são obtidos e comparados com resultados numéricos e analíticos existentes.

Em relação a trabalhos com acoplamento entre MEF e MEC, o trabalho de SYGULSKI (1994) [57] é representativo deste tipo de abordagem, pois usa o MEF para discretização de uma estrutura leve e flexível, e o MEC para incorporar o efeito do meio externo no comportamento dinâmico da estrutura. Este trabalho ressalta a importância de considerar-se a influência do meio externo em estruturas leves e apresenta um acoplamento simples para problemas aeroelásticos para estruturas fabris. A abordagem usada porém fica restrita a casos simples de estrutura leve cercada por ar em equilíbrio (sem escoamento).

ETTOUNEY (1994) [17] *et al.* apresenta uma abordagem específica para problemas de estruturas axissimétricas submersas com estruturas internas, onde utiliza discretização em elementos finitos para a estrutura e elementos de contorno para o fluido. Os resultados são de difícil interpretação e o exemplo numérico é bastante simplificado, faltando uma comparação com os métodos existentes para o mesmo problema. Apesar disto, este tipo de análise levando-se em conta a interação entre diferentes estruturas submersas certamente é um desafio na área de problemas de interação fluido-estrutura.

RAJAKUMAR & ALI (1996) [51] são precisos em seu trabalho, propondo-se a re-

solver o acoplamento entre fluido-estrutura onde o fluido é interno à estrutura. O trabalho é completo e traz a comparação dos resultados numéricos obtidos com resultados existentes para dois casos clássicos, e um caso mais específico de caixas acústicas. Este trabalho traz as vantagens e desvantagens indicando os métodos de solução numéricas atualmente utilizados.

JEANS & MATHEWS (1994) [34] demonstram a aplicação do acoplamento do MEF com o MEC para o caso de estruturas cilíndricas com fluido submersas em meio acústico. Apesar de ser um trabalho específico para este tipo de fenômeno, este traz uma solução independente da frequência, problema este encontrado na maioria das formulações para acoplamento MEF/MEC.

ZENG & BIELAK (1995) [66] trazem exemplos numéricos que ilustram a aplicabilidade e os desenvolvimentos mais recentes nos métodos de acoplamento entre MEF e MEC na solução de radiação e propagação que envolvem estruturas elásticas imersas em meio acústico infinito. Apontando-se os novos desafios no aprimoramento do método. Infelizmente também se restringe a exemplos simples de seção cilíndrica (2D) e um exemplo em 3D (esfera).

2.4 Trabalhos sobre o Tratamento de Meios Infinitos

Inicialmente, a forma de se tratar problemas por elementos finitos que apresentavam domínios muito grandes (chamados meios infinitos), ou era estendendo-se a região discretizada a um ponto em que já não influenciava tanto a solução, ou era a de adotar-se condições especiais de contorno. O estendimento do domínio e o posterior truncamento, apesar de merecer uma atenção ao critério de escolha da região de truncamento, consegue simular alguns fenômenos clássicos com um custo computacional razoável. Porém, para problemas mais complexos, onde a discretização das geometrias é mais apurada, este tipo de procedimento eleva o custo computacional a valores proibitivos. Uma alternativa nestes casos é a utilização de elementos especiais que possuem em sua formulação a consideração de meio infinito, e por isso são chamados de Elementos Infinitos.

2.4.1 Literatura sobre Elementos Infinitos

Um dos trabalhos pioneiros sobre elementos infinitos é o de BETTESS (1977) [6], onde é apresentada a formulação de um elemento com função de forma incluindo uma função de decaimento. A escolha da função de decaimento é feita para atender as condições de contorno do elemento. Exemplos de escoamento uni e bi-dimensionais são mostrados apresentando uma boa aproximação dos resultados com os resultados analíticos.

Neste mesmo ano, o trabalho de BETTESS & ZIENKIEWICZ (1977) [9] trata mais especificamente de problemas de onda, onde aplicam elementos infinitos para solução do problema de ondas de superfície. As vantagens e desvantagens da escolha deste tipo de solução são discutidas e vários exemplos, com geometrias mais complexas, são mostrados. Os resultados indicam que a adoção deste tipo de solução é viável e até preferível em relação à adoção de integrais de contorno ou solução em séries acopladas aos elementos finitos.

Novamente, o trabalho de BETTESS (1980) [7] reafirma a simplicidade da utilização de elementos infinitos do tipo função de decaimento, apresentando-se uma discussão mais detalhada da escolha da função de decaimento e da distorção dos elementos infinitos. Um exemplo de elasticidade é mostrado, onde a comparação dos resultados obtidos com a solução analítica comprova a aproximação dos resultados. Neste trabalho, é apresentada a forma de implementação do elemento infinito, confirmando que sua inclusão nos métodos tradicionais pode ser feita sem maiores dificuldades.

No trabalho de ZIENKIEWICZ, EMSON & BETTESS (1983) [70] um novo tipo de elemento infinito é proposto. O elemento é baseado no princípio de mapeamento das funções de forma. Os resultados são comparados para escoamento bi-dimensional e elasticidade com axissimetria, confirmando um melhor comportamento em certos casos do elemento infinito mapeado em relação ao com função de decaimento exponencial. Outra característica deste tipo de elemento é a utilização de funções de forma comuns aos elementos finitos, bastando apenas calcular-se a matriz jacobiana de forma diferente. Embora os exemplos demonstrem bons resultados, as dificuldades encontradas em elementos infinitos com decaimento exponencial, como por exemplo, distorções dos elementos, não são

discutidas.

Os elementos infinitos já apresentados conseguem representar bem o fenômeno dentro do domínio discretizado, onde geralmente se deseja obter a solução aproximada do problema. O trabalho de ASTLEY (1983) [3] apresenta um tipo de elemento capaz de representar o fenômeno acústico em meios infinitos também longe do domínio discretizado. O elemento, chamado de elemento de contorno de onda (“Wave Envelope Element”), é comparado com elementos infinitos para um problema de radiação acústica na entrada de uma turbina, sendo os resultados dentro e fora do domínio coerentes com os resultados experimentais. O autor ressalta que em problemas onde se deseja obter soluções aproximadas em campos distantes, o uso de elementos de contorno de onda trazem bons resultados, inclusive em relação aos resultados experimentais obtidos.

ZIENKIEWICZ *et al.* (1985) [68] apresentam uma reformulação do elemento infinito com decaimento r^{-1} , para um elemento infinito mapeado com decaimento $r^{-1/2}$, que não apresenta maiores dificuldades em seu posicionamento como o elemento anterior. Quatro exemplos são resolvidos e comparados com soluções analíticas, todos problemas de propagação de ondas. Os autores apresentam inclusive as rotinas computacionais para este tipo de elemento, porém falta uma maior complexidade dos problemas usados como exemplos para demonstrar a acuracidade dos resultados.

NEDELEC (1987) [45] apresenta o método de integrais de contorno acopladas a elementos finitos para problemas com meio externo ilimitado. Apesar de trazer uma formulação simples, o trabalho carece de exemplos numéricos e de uma comparação dos resultados com outros métodos aplicáveis a este tipo de problema.

ZIENKIEWICZ (1991) [73] dedica uma parte de seu livro a problemas de ondas, e aborda as várias possibilidades de se modelar meios ilimitados. São discutidos e apresentados os elementos infinitos desenvolvidos até então, inclusive elemento de contorno de onda (“Wave Envelope Element”). Apesar de trazer reunidos os principais desenvolvimentos, falta uma discussão mais detalhada, e uma comparação mais criteriosa entre os métodos.

Uma das literaturas mais completas sobre elementos infinitos é a de BETTESS

(1992) [8]. Neste livro estão colocados os principais tipos e formulações dos elementos que se propõem a simular o comportamento de meios infinitos acoplados a malhas de elementos finitos tradicional. O livro aborda os diversos tipos de problemas possíveis de se utilizar este recurso. Além de trazer rotinas computacionais para algumas formulações, traz também algumas regras de integração numérica mais utilizadas neste tipo de elemento.

EL-ESNAWY, AKL & BAZARAA (1995) [16] propõem uma formulação nova para elementos infinitos, chamando-a de elemento infinito paramétrico. Apesar de nova, a formulação se assemelha aos elementos infinitos com função de decaimento, apresentando, porém, algumas vantagens como a escolha de funções de decaimento simples. Outra característica é a de possuir nós somente na fronteira de transição, o que permite a simulação de decaimentos simples, mas o uso de nós adicionais permitiria a utilização de padrões de decaimento compostos, segundo o autor. O trabalho traz exemplos clássicos deste tipo de problema, e faz uma comparação com malhas truncadas, faltando, porém, uma comparação com outros tipos de elementos.

Um trabalho que se destaca é o realizado por GERDES & DEMKOWICZ (1996) [20], onde faz-se um estudo sobre discretização em elementos finitos da equação da onda (Equação de Helmholtz) para domínios externos usando elementos infinitos. Apesar de ser um problema particularizado para propagação radial, este trabalho tem o mérito de trazer a formulação matemática do elemento, e um estudo de convergência para a solução aplicada à equação de Laplace. Porém, como dificuldade, além das particularizações assumidas, possui um tratamento pesadamente analítico, o que dificulta a aplicação em casos mais genéricos.

Mais recentemente, YANG, KUO & HUNG (1996) [63] apresentaram a formulação de elementos infinitos não dependente da frequência. Este problema surge nos elementos infinitos desenvolvidos até então, onde para cada frequência tem-se uma malha de discretização adequada. Este problema é contornado atendendo-se a alguns pré-requisitos que permitem através da condensação dinâmica da matriz de impedância dos elementos infinitos para alta e baixa frequência, a utilização destes elementos para problemas de variada frequência. Os exemplos simples mostrados trazem resultados que confirmam o proposto, faltando apenas a comprovação em casos mais complexos.

2.4.2 Literatura sobre o Método de Mapeamento DtN

Dentre as diversas abordagens propostas para solução de problemas em meio fluido infinito, a utilização de condições de contorno especiais que simulem a radiação para meio infinito se mostra como uma alternativa atrativa. Neste tipo de abordagem se destaca a formulação via mapeamento DtN, como sendo uma formulação exata e não reflexiva, KELLER & GIVOLI (1989) [36]. Neste trabalho, mostrou-se uma prova de convergência para o método, e uma análise numérica da relação entre o tamanho do domínio discretizado e o número de termos a serem considerados na formação do Kernel DtN. Resultados numéricos foram comparados com outros tipos de condições de contorno. Seus exemplos, apesar de simples, mostram a potencialidade do método. Como esta formulação é tida atualmente como uma das abordagens mais promissoras, está sendo alvo de investigação e ampliação de sua aplicação por pesquisadores de centros reconhecidos mundialmente neste assunto. Sendo este trabalho considerado como a base do método a ser desenvolvido nesta dissertação de mestrado.

Outro trabalho que ajuda a entender este método, é o de GIVOLI & KELLER (1989) [23], onde o método é estendido a problemas finitos. Neste trabalho, restringe-se a investigação a problemas de elastodinâmica e problemas de Laplace.

Outro trabalho a demonstrar o interesse de grandes centros pelo método é o de HARARI & HUGHES (1991) [28], onde investiga-se o uso do método DtN com o Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ). Neste trabalho é dada ênfase ao estudo da robustez do método acoplado, sendo usados exemplos simples de solução exata conhecida. Como conclusão chega-se que o método GMQ/DtN é superior ao Galerkin/DtN.

No trabalho HARARI & HUGHES (1992) [31], o método de Galerkin Mínimos Quadrados é utilizado numa comparação com o Galerkin Clássico num problema com radiação para meio infinito, usando-se como referência a solução analítica exata. Neste trabalho, ao contrário do anterior, deve-se ressaltar a qualidade dos problemas usados para validação do método.

Um dos trabalhos indicadores da potencialidade do método DtN é o de HARARI

& HUGHES (1992) [29], onde é feita uma comparação dos custos computacionais do Método dos Elementos Finitos com Mapeamento DtN, com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Neste trabalho, discute-se do ponto de vista computacional as vantagens e desvantagens de cada método. Apesar de que assumiu-se a resolução de problemas elípticos e tridimensionais, que estão sendo desenvolvidos apenas recentemente, chegou-se a conclusão de que o método MEF/DtN é superior ao MEC no que diz respeito ao número de operações computacionais a serem feitas. Este trabalho deve ser tomado como um indicador da capacidade do método de colocar o MEF comparável ao MEC para problemas elasto-acústicos, mas ainda são necessários alguns desenvolvimentos para tal, como por exemplo, fronteiras elípticas ou elipsoidais, e tratamento de subregiões cheias da matriz global.

Por ser um método relativamente novo, os trabalhos iniciais procuraram firmar matematicamente sua robustez. Nesse sentido, o trabalho de HARARI & HUGHES (1992) [30] traz um estudo detalhado da formulação do método, sendo verificada a unicidade da solução no contorno artificial proposto. Um dos pontos importantes é a observação que do ponto de vista numérico, o método é exato e não reflexivo em função do número de termos considerados na formação do Kernel DtN, chegando-se a uma expressão simples para determinar-se o número de termos razoável. Esta expressão deve ser tomada como um indicador, já que cada problema possui particularidades não levadas em conta nesta expressão. A investigação numérica deste fato está no trabalho de HARARI & HUGHES (1994) [32], onde através de exemplos simples fica mostrado esta característica do método.

Aproveitando-se o material de uma Tese de Doutorado, GIVOLI (1992) [22] traz uma série de desenvolvimentos usando o método DtN. Este trabalho possui uma introdução bastante boa sobre os tratamentos a meios infinitos usados até então. Neste livro são abordados problemas de elasticidade, aeroelasticidade, incluindo-se não linearidades, e problemas da equação da onda. Neste último, é mostrada a solução de semi-espaço, bastante interessante para acústica. Embora o livro tenha um conteúdo bastante importante, a investigação numérica dos métodos é simples e pouco ilustrativa.

Uma tentativa de melhorar o tratamento de subregiões cheias das matrizes globais resultantes de problemas DtN, esta no trabalho de MALHOTRA & PINSKY (1996)

[39], onde é proposto um método a ser usado conjuntamente com método de resolução iterativos, onde não se encontram dificuldades de armazenamento de memória devido ao operador DtN ser não-local. Este trabalho é um dos pioneiros em se desenvolver alternativas de processamento do problema original, trazendo novamente potencialidade ao método para tratamento de problemas grandes ou tri-dimensionais mais realistas.

Mais recentemente, pode-se citar o trabalho de GIVOLI, PATLASHENKO & KELLER (1997) [24] como um trabalho de estudo do método, trazendo discussões sobre a estabilidade do método e uma análise de erro. No trabalho de GILJOHANN & BITTNER (1998) [21] é apresentada uma aplicação do método DtN num problema tri-dimensional, onde é feita comparação com resultados experimentais. Neste trabalho, discute-se a utilização de um método de otimização do armazenamento da matriz global. Este trabalho também é pioneiro em usar o método para problemas mais realistas, porém sua discussão dos resultados é simplificada.

2.5 Conclusões

O problema de interação fluido-estrutura ganhou uma nova dimensão a partir do acoplamento via Elementos Finitos. Muitos trabalhos podem ser citados, restringindo-se nesta revisão aos trabalhos mais relevantes e que mostrem a evolução das pesquisas. Atualmente o método está sendo amplamente investigado e diversas abordagens estão sendo desenvolvidas. Destacam-se as que utilizam o MEF acoplado ao MEC e as que utilizam dentro da formulação de Elementos Finitos para o fluido condições especiais de tratamento da fronteira, seja nas condições de contorno ou com o uso de elementos infinitos.

Desta forma, foram apresentados os trabalhos mais relevantes na área de simulação de meios acústicos ilimitados usando o MEF. Pode-se dividir estes trabalhos em duas abordagens: A primeira utiliza elementos infinitos, que preservam a estrutura em banda do método de elementos finitos clássica; A segunda é a utilização de condições de contorno especiais, que também preserva a estrutura do método de elementos finitos clássica, porém introduzem subregiões cheias da matriz global. Outras formas de se tratar meios infinitos,

como o acoplamento com o método de elementos de contorno surgem na literatura, porém, fogem ao escopo deste trabalho, já que nestas abordagens existe a perda da estrutura básica do método de elementos finitos.

Neste trabalho será utilizado o método MEF/DtN, por ser um método diretamente introduzido na estrutura do Método dos Elementos Finitos e por ter características vantajosas, como ser exato e não reflexivo.

Capítulo 3

Modelagem do Meio Estrutural

3.1 Introdução

A modelagem apresentada neste capítulo visa simular problemas estruturais em relação ao comportamento dinâmico. Esta modelagem é clássica e será utilizada posteriormente para se obter a formulação com a interação fluido-estrutura, incluindo-se o efeito de meio fluido infinito.

Inicialmente é apresentada a formulação geral em deslocamentos. Em seguida, é apresentada a formulação para barra e viga, chegando-se à formulação do elemento de pórtico.

3.2 Formulação Geral em Deslocamentos

Para desenvolver-se a formulação em deslocamentos para um meio estrutural será utilizado como exemplo um domínio sólido elástico linear genérico com condições de contorno clássicas.

Assim, para um domínio fechado Ω_s , visto na figura 3.1, pode-se representar o problema de valor de contorno como:

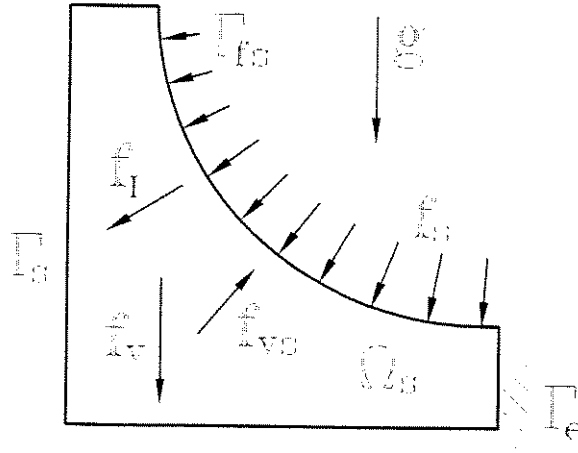


Figura 3.1: Domínio Estrutural Genérico com Condições de Contorno Clássicas

$$\sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i - C_{ai} \dot{u}_i + f_{vi} = 0 \quad \text{em } \Omega_s \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_i = f_{si} \quad \text{em } \Gamma_{fs} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_{sl} \quad (3.3)$$

$$u_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_e \quad (3.4)$$

onde Ω_s é o domínio estrutural elástico linear;

Γ_{fs} é a fronteira do domínio estrutural onde atua a força de superfície;

Γ_s é a fronteira do domínio estrutural;

Γ_{sl} é a fronteira livre do domínio estrutural;

Γ_e é a fronteira do domínio onde se tem engastamento como condição de contorno;

i, j e k representam as direções ortonormais na notação indicial adotada;

$\sigma_{ij}(u)$ representa o tensor de tensões da estrutura;

$\dot{u}_i$ e $\ddot{u}_i$ são as derivadas no tempo do deslocamento u_i ;

$\rho_s \ddot{u}_i$ representa as forças de inércia, f_{Li} ;

ρ_s é a densidade da estrutura;

$C_{ai} \dot{u}_i$ representa as forças viscosas (amortecimento), f_{vsi} ;

C_{ai} é o coeficiente de amortecimento estrutural na direção i ;

f_{vi} são as forças de volume;

f_{si} é a força de superfície que atua na fronteira;

n_i é a componente i do vetor $\vec{n}$ normal externo à estrutura.

Uma vez obtida a representação do problema, deseja-se buscar um campo de deslocamentos u que satisfaça o equilíbrio e portanto seja solução do problema. A forma adotada para encontrar-se este campo solução é a de utilizar-se o Método de Resíduos Ponderados, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 15. Sendo assim,

$$W(u) = \int_{\Omega_s} v_i (\sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i - C_{ai} \dot{u}_i + f_{vi}) d\Omega_s \quad (3.5)$$

sendo v_i uma função de ponderação não dependente do tempo. Reescrevendo-se a equação (3.5) tem-se

$$W(u) = \int_{\Omega_s} v_i \sigma_{ij,j} d\Omega_s - \int_{\Omega_s} v_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s - \int_{\Omega_s} v_i C_{ai} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} v_i f_{vi} d\Omega_s \quad (3.6)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} W(u) = & - \int_{\Omega_s} v_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega_s + \oint_{\Gamma_s} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s - \int_{\Omega_s} v_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s \\ & - \int_{\Omega_s} v_i C_{ai} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} v_i f_{vi} d\Omega_s \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde v_i deve ser ao menos uma vez diferenciável. O primeiro termo da equação (3.7) pode ser reescrito se levar-se em conta a simetria

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.8)$$

que faz com que

$$v_{i,j} \sigma_{ij} = v_{j,i} \sigma_{ji} = v_{j,i} \sigma_{ij} \quad (3.9)$$

E usando as equações (3.8) e (3.9) pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} v_{i,j}\sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j}\sigma_{ij} + v_{i,j}\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}(v_{i,j}\sigma_{ij} + v_{j,i}\sigma_{ji}) = \\ &= \frac{1}{2}(v_{i,j}\sigma_{ij} + v_{j,i}\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Adotando-se

$$\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \varepsilon_{ij}^v \quad (3.11)$$

onde ε_{ij}^v é o tensor das deformações infinitesimais que caracteriza o modelo cinemático do problema em relação a função de ponderação v , a equação (3.7) fica,

$$W(u) = - \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^v \sigma_{ij} d\Omega_s + \oint_{\Gamma_s} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s - \int_{\Omega_s} v_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s - \int_{\Omega_s} v_i C_{ai} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} v_i f_{vi} d\Omega_s \quad (3.12)$$

Considerando-se que para u solução, $W(u) = 0$, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 15, e DHATT & TOUZOT (1985) [14], capítulo 3, pode-se reescrever a equação como

$$\int_{\Omega_s} v_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} v_i C_{ai} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^v \sigma_{ij} d\Omega_s = \oint_{\Gamma_s} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s + \int_{\Omega_s} v_i f_{vi} d\Omega_s \quad (3.13)$$

Sabendo-se que

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{kl}^u = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.15)$$

usando-se notação indicial, onde E_{ijkl} é o tensor elástico, que caracteriza a lei constitutiva do material; k e l , assim como i e j representam as direções ortonormais na notação indicial adotada; ε_{kl}^u é o tensor das deformações infinitesimais na variável u . Devendo u_i , componente do deslocamento u , ser ao menos uma vez diferenciável. Pode-se substituir na equação (3.13), obtendo-se

$$\int_{\Omega_s} v_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} v_i C_{a i} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^v E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u d\Omega_s = \oint_{\Gamma_s} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s + \int_{\Omega_s} v_i f_{vi} d\Omega_s \quad (3.16)$$

Aplicando-se Galerkin para escolha da função de ponderação v_i , DHATT & TOUZOT (1985) [14], ou seja, adotando como sendo uma variação virtual do deslocamento u_i ,

$$v_i = \delta u_i \quad (3.17)$$

A forma fraca torna-se

$$\int_{\Omega_s} \delta u_i \rho_s \ddot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \delta u_i C_{a i} \dot{u}_i d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^{\delta u} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u d\Omega_s = \oint_{\Gamma_s} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s + \int_{\Omega_s} \delta u_i f_{vi} d\Omega_s \quad (3.18)$$

onde

$$\varepsilon_{ij}^{\delta u} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (3.19)$$

Usando-se uma aproximação por elementos finitos para um caso bi-dimensional, e considerando que as variáveis no tempo e no espaço são separáveis, tem-se que a variável u pode ser aproximada, usando-se funções de forma que são definidas para cada elemento finito definido por uma discretização, como

$$u_i(x, y, t) = N_m(x, y) u_{im}(t) \quad (3.20)$$

$$\dot{u}_i(x, y, t) = N_m(x, y) \dot{u}_{im}(t) \quad (3.21)$$

$$\ddot{u}_i(x, y, t) = N_m(x, y) \ddot{u}_{im}(t) \quad (3.22)$$

$$\delta u_i(x, y, t) = N_m(x, y) \delta u_{im}(t) \quad (3.23)$$

onde m é o índice que indica o nó associado a variável.

Como as funções de forma dependem apenas das variáveis de espaço, o problema na forma discreta é dado para um elemento como sendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s^e} \rho_s N_m \delta u_{im} N_n \ddot{u}_{in} d\Omega_s^e + \int_{\Omega_s^e} N_m \delta u_{im} C_{ai} N_n \dot{u}_{in} d\Omega_s^e + \int_{\Omega_s^e} \varepsilon_{ij}^{N_m \delta u_m} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{N_n u_n} d\Omega_s^e = \\ \oint_{\Gamma_s^e} N_m \delta u_{im} \sigma_{ij} n_j d\Gamma_s^e + \int_{\Omega_s^e} N_m \delta u_{im} f_{vi} d\Omega_s^e \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde n também é um índice que indica o nó associado a variável. E adotando-se, por simplicidade, notação matricial, tem-se

$$\varepsilon_{ij}^{N_m \delta u_m} = \frac{1}{2} (N_{m,j} \delta u_{i,jm} + N_{m,i} \delta u_{j,im}) = [B] \{\delta u\} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{kl}^{N_n u_n} = \frac{1}{2} (N_{n,l} u_{k,ln} + N_{n,k} u_{l,kn}) = [B] \{u\} \quad (3.26)$$

Pode-se reescrever o terceiro termo do lado esquerdo da equação (3.24) como sendo

$$\varepsilon_{ij}^{N_m \delta u_m} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{N_n u_n} = \{\delta u\}^T [B]^T [E] [B] \{u\} \quad (3.27)$$

Onde $[E]$ é o tensor elástico arrumado matricialmente. Substituindo-se $\sigma_{ij} n_j$ por f_s , pode reescrever-se a equação (3.24) na forma matricial como:

$$\{\delta u\}^T \left(\int_{\Omega_s^e} \rho_s [N]^T [N] d\Omega_s^e \right) \{\ddot{u}\} + \{\delta u\}^T \left(\int_{\Omega_s^e} [N]^T [C_a] [N] d\Omega_s^e \right) \{\dot{u}\}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\delta u\}^T \left(\int_{\Omega_s^e} [B]^T [E] [B] d\Omega_s^e \right) \{u\} = \{\delta u\}^T \left(\oint_{\Gamma_s^e} [N]^T \{f_s\} d\Gamma_s^e \right) \\
& + \{\delta u\}^T \left(\int_{\Omega_s^e} [N]^T \{f_v\} d\Omega_s^e \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $[C_a]$ é a matriz com os coeficientes de amortecimento.

Simplificando-se a equação (3.28) em relação a $\{\delta u\}^T$, pode-se obter a expressão para cada termo da equação (3.28), como sendo:

$$[m^e] = \int_{\Omega_s^e} \rho_s [N]^T [N] d\Omega_s^e \tag{3.29}$$

$$[c^e] = \int_{\Omega_s^e} [N]^T [C_a] [N] d\Omega_s^e \tag{3.30}$$

$$[k^e] = \int_{\Omega_s^e} [B]^T [E] [B] d\Omega_s^e \tag{3.31}$$

$$\{f_s^e\} = \oint_{\Gamma_s^e} [N]^T \{f_s\} d\Gamma_s^e \tag{3.32}$$

$$\{f_v^e\} = \int_{\Omega_s^e} [N]^T \{f_v\} d\Omega_s^e \tag{3.33}$$

Considerando que o resíduo do domínio Ω_s corresponde ao somatório dos resíduos de cada elemento, o problema pode ser representado na sua forma global, o que implica no processo clássico de montagem das matrizes, resultando em:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_s\} + \{F_v\} \tag{3.34}$$

onde $[M]$ é a matriz de massa da estrutura;

$[C]$ é a matriz de amortecimento da estrutura;

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura;

$\{F_s\}$ é o vetor com a contribuição das forças de superfícies;

$\{F_v\}$ é o vetor com a contribuição das forças de volume;

$\{u\}$ é o vetor com as variáveis nodais, $\{\dot{u}\}$ e $\{\ddot{u}\}$ são suas derivadas no tempo.

3.3 Formulação do Elemento de Barra

A formulação do elemento de barra tem como hipótese a capacidade de se deformar, ou suportar carregamentos, ao longo de seu maior comprimento, sentido longitudinal. Desprezando-se neste modelo simplificado outros efeitos presentes em elementos reais.

Dada a barra mostrada na figura 3.2, onde L é o comprimento longitudinal do elemento, e adotando-se a hipótese que a seção transversal permanece reta, pode-se escrever o modelo cinemático da seguinte maneira, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 4,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u_{,x} \quad (3.35)$$

onde u são os deslocamentos na direção longitudinal do elemento.

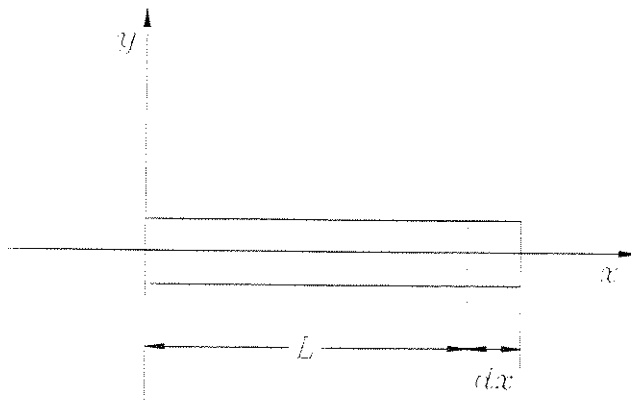


Figura 3.2: Elemento de Barra no Espaço Real

Tendo a relação dada pela equação (3.35), pode-se montar a formulação de um elemento isoparamétrico de barra, visto na figura 3.3. Assumindo-se portanto, uma função de forma linear para os deslocamentos, tem-se

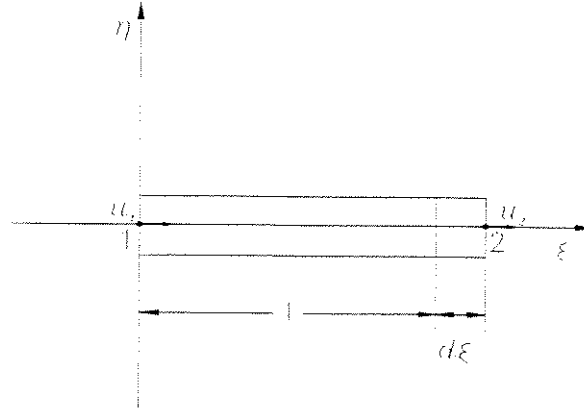


Figura 3.3: Elemento de Barra no Espaço Isoparamétrico

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi \\ N_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (3.36)$$

Portanto

$$N_m(\xi) u_m(t) = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

o que caracteriza uma aproximação nodal, sendo u_1 e u_2 os deslocamentos axiais dos nós 1 e 2, respectivamente.

Reescrevendo-se a equação (3.29) no espaço isoparamétrico, tem-se

$$[m^e] = \int_0^1 \rho_s [N(\xi)]^T [N(\xi)] L A d\xi \quad (3.38)$$

Onde A é a área da seção transversal do elemento. E para a transformação de variáveis sabe-se que

$$dx = L d\xi \quad (3.39)$$

Portanto

$$[m^e] = \rho_s AL \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \quad (3.40)$$

Avaliando-se a expressão dada pela equação (3.40), chega-se a

$$[m^e] = \rho_s AL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez, tem-se pela regra da cadeia que

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (3.42)$$

Sabendo-se também que

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \quad (3.43)$$

Portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dN_m(\xi)}{d\xi} u_m(t) \quad (3.44)$$

Ou ainda,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = [B]\{u\} \quad (3.45)$$

Sendo E o módulo de elasticidade longitudinal. Pode-se substituir a matriz $[B]$ na equação (3.31), obtendo-se para o espaço isoparamétrico,

$$[k^e] = \int_0^1 [B]^T [B] E A L d\xi \quad (3.46)$$

Substituindo-se a expressão obtida na equação (3.45) na equação (3.46) tem-se

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \quad (3.47)$$

Obtendo-se finalmente,

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Para obterem-se as expressões para um carregamento axial ou peso próprio na direção longitudinal, forças de superfície e de volume respectivamente, devem-se deduzir as equações (3.32) e (3.33). Sendo, inicialmente, para um carregamento axial, f_a , tem-se, em coordenadas isoparamétricas,

$$\{f_s^e\} = \int_0^1 [N(\xi)]^T f_a L d\xi \quad (3.49)$$

Obtendo-se para f_a constante,

$$\{f_s^e\} = \frac{L f_a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Para o peso próprio na direção da barra, de forma análoga a anterior pode-se obter a expressão para uma força de volume constante, f_v , sendo

$$\{f_v^e\} = \frac{L A f_v}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

3.4 Formulação do Elemento de Viga

A formulação do elemento de viga tem como hipótese a capacidade de fletir, ou suportar carregamentos transversais, ao longo de seu maior comprimento, mantendo sua seção transversal reta. Desprezando-se neste modelo simplificado outros efeitos presentes em elementos reais.

Desta forma, pode-se obter o modelo cinemático, ou seja, como ela se deforma, para a viga mostrada na figura 3.4, onde L é o comprimento longitudinal do elemento; θ é o ângulo entre o elemento não fletido e o elemento fletido.

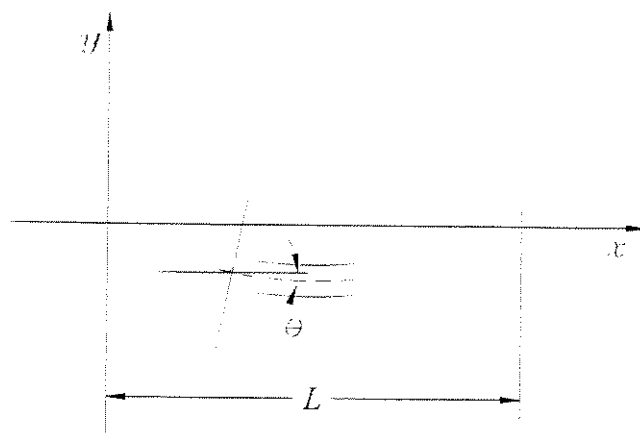


Figura 3.4: Elemento de Viga no Espaço Real

O modelo cinemático pode ser dado por, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 4,

$$\varepsilon = -Y \frac{d^2 v}{dx^2} = -Y v_{,xx} \quad (3.52)$$

onde Y é a distância de uma fibra em relação à linha neutra do elemento; v são os deslocamentos transversais ao eixo do elemento.

Tendo a relação dada pela equação (3.52), pode-se montar a formulação de um elemento isoparamétrico de viga, visto na figura 3.5, onde L é o comprimento longitu-

dinal do elemento; $\theta(\xi, \eta)$ é o ângulo entre o elemento não fletido e o elemento fletido, considerando-se pequenos ângulos, ou seja, $\theta \approx dv/dx$.

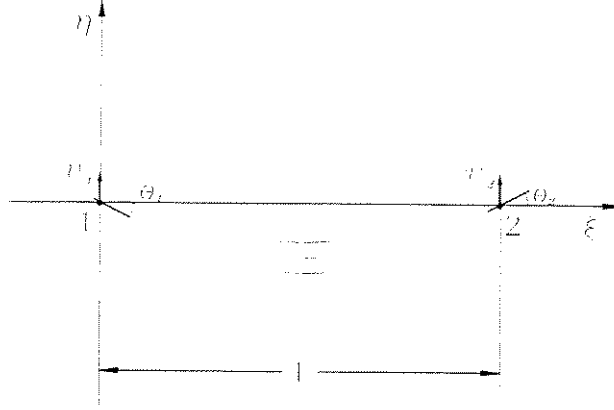


Figura 3.5: Elemento de Viga no Espaço Isoparamétrico

Assumindo-se portanto, uma função de forma cúbica para os deslocamentos, em uma aproximação polinomial nodal em um espaço isoparamétrico, tem-se:

$$\left\{ v(\xi, t) \right\} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & \xi - 2\xi^2 + \xi^3 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & -\xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(\xi) \\ \theta_1(\xi) \\ v_2(\xi) \\ \theta_2(\xi) \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Sendo

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ N_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Portanto

$$[N(\xi)] = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & \xi - 2\xi^2 + \xi^3 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & -\xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Lembrando-se que

$$\theta(x) \approx \frac{dv(x)}{dx} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \theta(\xi) \frac{d\xi}{dx} \quad (3.56)$$

e sabendo-se que

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \quad (3.57)$$

tem-se,

$$\theta(\xi) = L\theta(x) \quad (3.58)$$

Reescrevendo-se a equação (3.29) no espaço isoparamétrico, tem-se

$$[m^e] = AL\rho_s \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \times \\ \left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad L(-\xi^2 + \xi^3) \right] d\xi \quad (3.59)$$

onde A é a área da seção transversal do elemento, considerada constante ao longo do elemento. Portanto, avaliando-se a expressão dada pela equação (3.59), chega-se a expressão da Matriz de Massa Consistente da Viga de Bernoulli,

$$[m^e] = \frac{\rho_s AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez, onde deve-se avaliar o tensor das deformações definido na equação (3.52), aplica-se a regra da cadeia o que conduz a:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{d^2 v(x)}{d\xi^2} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (3.61)$$

Sabendo-se também que

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \quad (3.62)$$

Portanto

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 N_m(\xi)}{d\xi^2} \quad (3.63)$$

Ou ainda,

$$-Y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{Y}{L^2} \begin{bmatrix} -6 + 12\xi & L(-4 + 6\xi) & 6 - 12\xi & L(2 - 6\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(x) \\ \theta_1(x) \\ v_2(x) \\ \theta_2(x) \end{Bmatrix} = [B]\{v\} \quad (3.64)$$

Sendo E o Módulo de Elasticidade, pode-se substituir a matriz $[B]$ na equação (3.31), obtendo-se para o espaço isoparamétrico,

$$[k^e] = \int_0^1 \int_A [B]^T [B] E dA L d\xi \quad (3.65)$$

Substituindo-se a expressão obtida na equação (3.64) na equação (3.65) tem-se

$$[k^e] = \frac{E}{L} \int_0^1 \int_A \frac{Y^2}{L^4} \begin{bmatrix} -6 + 12\xi \\ L(-4 + 6\xi) \\ 6 - 12\xi \\ L(2 - 6\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 + 12\xi & L(-4 + 6\xi) & 6 - 12\xi & L(2 - 6\xi) \end{bmatrix} dA d\xi \quad (3.66)$$

Reordenando-se

$$[k^e] = \frac{E}{L^3} \int_A Y^2 dA \int_0^1 \begin{bmatrix} -6 + 12\xi \\ L(-4 + 6\xi) \\ 6 - 12\xi \\ L(2 - 6\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 + 12\xi & L(-4 + 6\xi) & 6 - 12\xi & L(2 - 6\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.67)$$

Lembrando-se que a primeira integral é o momento de inércia, I , da seção transversal do elemento, tem-se como resultado final da integral em ξ , a Matriz de Rigidez da Viga de Bernoulli, sendo esta dada por

$$[k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Para a obtenção das expressões de um carregamento transversal ou peso próprio na direção transversal, forças de superfície e de volume respectivamente, devem-se deduzir as equações (3.32) e (3.33). Sendo, inicialmente, para um carregamento transversal, f_q , tem-se que

$$\{f_s^e\} = \int_{\Gamma_s^e} [N]^T f_q d\Gamma_s^e \quad (3.69)$$

Ou escrevendo-se em coordenadas isoparamétricas, tem-se

$$\{f_s^e\} = \int_0^1 [N(\xi)]^T f_q AL d\xi \quad (3.70)$$

Substituindo-se as funções de forma, tem-se

$$\{f_s^e\} = AL \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} f_q d\xi \quad (3.71)$$

Considerando-se f_q uma força constante na direção transversal, obtém-se

$$\{f_s^e\} = Lf_q \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/12 \\ 1/2 \\ -1/12 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Para o peso próprio na direção transversal ao elemento, de forma análoga a anterior pode-se obter a expressão para uma força de volume constante, f_v , como sendo

$$\{f_v^e\} = ALf_v \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/12 \\ 1/2 \\ -1/12 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

3.5 Formulação do Elemento Pórtico

A junção das propriedades do elemento de barra e do elemento de viga permite escrever-se o elemento de pórtico. Portanto, este pode suportar carregamentos axiais, e também pode suportar carregamentos transversais, ou cortantes.

Assim, para obter-se as matrizes de massa e rigidez do elemento, basta agrupar-se as linhas e colunas correspondentes obtidas anteriormente para os graus de liberdade de translação, u , deslocamento na direção do eixo x , v , deslocamento na direção do eixo y , e θ , rotação do elemento no plano xy . Sendo o vetor de variáveis incógnitas do elemento pórtico:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Assim, para a matriz de massa, tem-se

$$[m^e] = \frac{\rho_s AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

E para a matriz de rigidez, tem-se

$$[k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 0 & -AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -AL^2/I & 0 & 0 & AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Para obterem-se os termos correspondentes aos carregamentos axial e transversal constantes, f_a e f_q , novamente devem-se agrupar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdades do elemento pórtico. Sendo assim, para forças de superfícies, tem-se

$$\{f_s^e\} = L \begin{bmatrix} f_a/2 \\ f_q/2 \\ f_q/12 \\ f_a/2 \\ f_q/2 \\ -f_q/12 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

e analogamente pode ser aplicado para a força de volume constante, f_v :

$$\{f_v^e\} = ALf_v \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/12 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/12 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Para a montagem das matrizes globais do sistema, deve-se usar uma transformação de coordenadas clássica, definida em COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13].

Capítulo 4

Modelagem do Meio Fluido

4.1 Introdução

A modelagem apresentada neste capítulo visa simular problemas cujo comportamento dinâmico do fluido apresente pequenos deslocamentos harmônicos em torno de uma posição de equilíbrio. Esta modelagem é clássica e será utilizada posteriormente para se obter a formulação com a interação fluido-estrutura, incluindo-se o efeito de meio fluido infinito.

Inicialmente é apresentada a formulação em pressão como variável incógnita para o fluido. Em seguida, a formulação em potencial de velocidades também é apresentada.

A formulação de dois tipos de elementos de fluido, o elemento triangular linear e o quadrangular bi-linear, são apresentadas para cada escolha de variável incógnita, pressão ou potencial de velocidades.

4.2 Formulação em Pressão

Para desenvolver-se a formulação em pressão para um meio fluido. Serão considerados as oscilações de pressão em torno de uma posição de equilíbrio, o que pode ser entendido como uma pressão em excesso. Será utilizado como exemplo um domínio fluido

genérico com as condições de contorno clássicas, de superfície livre e de paredes rígidas, e outras condições de contorno normalmente encontradas neste tipo de formulação.

Seja o domínio fluido genérico Ω_f , com densidade ρ_f , e velocidade de propagação do som c e fronteira Γ_f , como pode ser observado na figura 4.1.

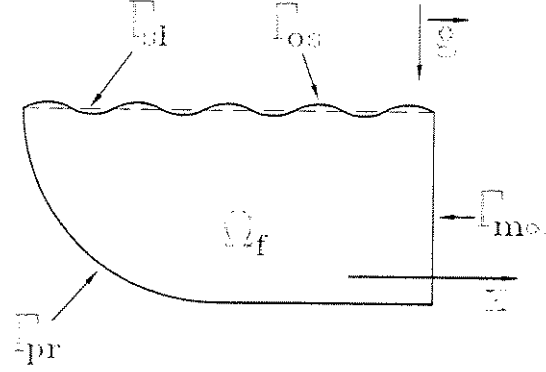


Figura 4.1: Domínio fluido genérico com as condições de contorno escolhidas.

Na fronteira superior em contato com o meio externo, pode-se ter $p = 0$, uma simplificação para superfícies livres, tendo-se Γ_{sl} ; ou pode-se ter a formação de ondas de superfície, neste caso, tendo-se Γ_{os} . Na Fronteira do fluido com paredes rígidas, tem-se Γ_{pr} . E onde há propagação de onda para meio fluido infinito, tem-se $\Gamma_{m\infty}$.

Para encontrar-se a distribuição de pressão, dentro das condições de propagação linear, solução do problema, deve-se buscar um campo de soluções que atenda a equação da onda em meios fluidos. Assim, pode-se colocar o problema de valor de contorno em Ω_f como sendo, MORAND & OHAYON (1979) [42] e ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991) [73],

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} + q &= 0 & \text{em } \Omega_f & (a) \\
 p &= 0 & \text{em } \Gamma_{sl} & (b) \\
 p_{,n} &= -\frac{1}{g} \ddot{p} & \text{em } \Gamma_{os} & (c) \\
 p_{,n} &= -\frac{1}{c} \dot{p} & \text{em } \Gamma_{m\infty} & (d) \\
 p_{,n} &= 0 & \text{em } \Gamma_{pr} & (e)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano;

p é pressão em cada ponto do domínio;

q é a contribuição de fontes acústicas internas ao domínio;

$p_{,n}$ é a derivada normal da pressão;

n representa o vetor normal exterior;

$\dot{p}$ e $\ddot{p}$ são as derivadas no tempo da variável p .

Uma forma de se obter a solução do problema (4.1) é aplicar-se o Método de Resíduos Ponderados, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 15. Para isso, primeiro deve-se definir um resíduo na forma:

$$R(p) = \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} + q \quad (4.2)$$

O Método de Resíduos Ponderados consiste em encontrar a solução p que anule a seguinte forma integral:

$$W(p) = \int_{\Omega_f} \Psi(x, y) R(p) d\Omega_f = 0 \quad (4.3)$$

onde $\Psi(x, y)$ é a função ponderadora. Para um problema bi-dimensional, usando-se a definição de $R(p)$, dada na equação (4.2), tem-se:

$$W(p) = \int_{\Omega_f} \Psi \left(\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} + q \right) d\Omega_f \quad (4.4)$$

$$W(p) = \int_{\Omega_f} \Psi(\nabla^2 p) d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \Psi \left(\frac{1}{c^2} \ddot{p} \right) d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \quad (4.5)$$

Sabendo-se que para um problema bi-dimensional,

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (4.6)$$

tem-se

$$W(p) = \int_{\Omega_f} \Psi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} d\Omega_f - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \quad (4.7)$$

Fazendo-se uma integração por partes nos dois primeiros termos:

$$\int_{\Omega_f} \Psi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial x} dy \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega_f} \Psi \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega_f - \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial y} dx \quad (4.9)$$

Substituindo-se (4.8) e (4.9) em (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} W(p) = & - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial x} dy - \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial y} dx \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.10)$$

Relacionando-se as derivadas de p em relação a x e y com suas derivadas em relação à direção normal exterior (vetor $\vec{n}$):

$$\frac{\partial p}{\partial n} = l \frac{\partial p}{\partial x} + m \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.11)$$

sendo

$$dx = -md\Gamma \quad (4.12)$$

$$dy = +ld\Gamma \quad (4.13)$$

onde $d\Gamma$ é um diferencial de linha.

Assim, substituindo-se dx e dy nas integrais de linha, obtém-se

$$\oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial x} dy = \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial x} l d\Gamma \quad (4.14)$$

$$-\oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial y} dx = -\oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial y} (-m) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial y} m d\Gamma \quad (4.15)$$

e a expressão (4.10) torna-se então,

$$\begin{aligned} W(p) = & -\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \Psi \left(l \frac{\partial p}{\partial x} + m \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Gamma \\ & -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como

$$l \frac{\partial p}{\partial x} + m \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.17)$$

então tem-se a forma fraca do problema escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} W(p) = & -\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \\ & -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desmembrando-se a integral de linha para as diversas condições de contorno, tem-se

$$\oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{sl}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{os}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{pr}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{m\infty}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \quad (4.19)$$

Em Γ_{sl} tem-se uma simplificação para superfícies livres, considerando-se $p = 0$ em Γ_{sl} , Condição de Contorno Essencial ou de Dirichelet. Com isto, tem-se

$$\int_{\Gamma_{st}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} p d\Gamma + (\Psi p) |_{\Gamma_{st}} = 0 \quad (4.20)$$

Em Γ_{os} tem-se a formação de ondas de superfície, que pode ser aproximado como uma elevação η em relação a uma elevação média, já que no caso do exemplo mostrado a direção da normal $\vec{n}$ coincide com a direção da força gravitacional. Assim a pressão na superfície média pode ser aproximada como

$$p = \rho g \eta \quad (4.21)$$

E sabendo-se que

$$\rho \frac{\partial v_n}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.22)$$

E, eliminando-se η , tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{1}{g} \ddot{p} \quad (4.23)$$

Sendo a equação (4.23) conhecida como a Condição Linearizada de Ondas de Superfície. Aplicando-se esta condição na integral de linha, tem-se

$$\int_{\Gamma_{os}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = - \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} \Psi \ddot{p} d\Gamma \quad (4.24)$$

Em Γ_{pr} tem-se fronteira do fluido com paredes rígidas, neste caso a simplificação adotada é a Condição de Contorno Natural ou de Neumann Homogênea, sendo então:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (4.25)$$

Ficando a integral em Γ_{pr} igual a

$$\int_{\Gamma_{pr}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4.26)$$

Em $\Gamma_{m\infty}$ tem-se Condição de Radiação para Meio Infinito ou Condição de Sommerfeld. Neste caso, considera-se na fronteira a propagação da onda somente na direção externa ao domínio Ω_f e paralela a um eixo único, por exemplo, eixo x , tem-se que a solução geral neste caso pode ser escrita como

$$p = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (4.27)$$

sendo F e G funções que representam as ondas nas direções externa e interna ao domínio respectivamente, e seguindo a simplificação adotada, G é nula, obtendo-se

$$p = F(x - ct) \quad (4.28)$$

Desta forma, pode-se obter as derivadas de p como sendo

$$\frac{\partial p}{\partial n} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} = F' \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -cF' \quad (4.30)$$

onde F' é a derivada de F em relação a $(x - ct)$. Eliminado-se a função F' pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \dot{p} \quad (4.31)$$

Substituindo-se esta relação na integral de linha correspondente, tem-se

$$\int_{\Gamma_{m\infty}} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} \Psi \dot{p} d\Gamma \quad (4.32)$$

Desta forma, substituindo-se as condições de contorno na forma fraca do problema, chega-se a

$$\begin{aligned} W(p) = & - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega_f - \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} \Psi \ddot{p} d\Gamma - \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} \Psi \dot{p} d\Gamma \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sendo esta expressão a forma fraca do problema com as condições de contorno aplicadas. Agora, aplicando Galerkin para escolha da função de ponderação, ou seja, assumindo a função de ponderação como sendo uma variação virtual da incógnita do problema, tem-se

$$\Psi = \delta p \quad (4.34)$$

E a forma fraca do problema se torna

$$\begin{aligned} W(p) = & \int_{\Omega_f} \left[\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right] d\Omega_f + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} (\delta p) \ddot{p} d\Gamma + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} (\delta p) \dot{p} d\Gamma \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} (\delta p) \ddot{p} d\Omega_f - \int_{\Omega_f} (\delta p) q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.35)$$

Fazendo-se uma discretização espacial do problema, e adotando-se uma aproximação por elementos finitos, considerando-se as variáveis de tempo e espaço separáveis, pode-se escrever para este exemplo bi-dimensional a formulação usando funções de forma para um elemento genérico como sendo

$$p(x, y, t) = N_m(x, y) p_m(t) \quad (4.36)$$

$$\dot{p}(x, y, t) = N_m(x, y) \dot{p}_m(t) \quad (4.37)$$

$$\ddot{p}(x, y, t) = N_m(x, y) \ddot{p}_m(t) \quad (4.38)$$

$$\delta p(x, y, t) = N_m(x, y) \delta p_m(t) \quad (4.39)$$

onde m é um índice que indica o nó associado a variável. Substituindo-se estas expressões na forma fraca do problema, tem-se para cada elemento, o resíduo calculado a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} W(p) = & \int_{\Omega_f} \left[\frac{\partial(N_m \delta p_m)}{\partial x} \frac{\partial(N_n p_n)}{\partial x} + \frac{\partial(N_m \delta p_m)}{\partial y} \frac{\partial(N_n p_n)}{\partial y} \right] d\Omega_f \\ & + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} (N_m \delta p_m)(N_n \ddot{p}_n) d\Gamma + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} (N_m \delta p_m)(N_n \dot{p}_n) d\Gamma \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} (N_m \delta p_m)(N_n \ddot{p}_n) d\Omega_f - \int_{\Omega_f} (N_m \delta p_m) q d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde n também é um índice que indica o nó associado a variável. Rearranjando, tem-se

$$\begin{aligned} W(p) = & \delta p_m \left[\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) d\Omega_f \right] p_j + \delta p_m \left[\frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} N_m N_n d\Gamma \right] \ddot{p}_n \\ & + \delta p_m \left[\frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} N_m N_n d\Gamma \right] \dot{p}_n + \delta p_m \left[\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} N_m N_n d\Omega_f \right] \ddot{p}_n \\ & - \delta p_m \left[\int_{\Omega_f} N_m q d\Omega_f \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Considerando-se que a solução faz com que $W(p)$ seja nulo para cada elemento e por conseguinte para todo o domínio, pode-se reescrever a equação (4.41) na forma matricial como:

$$\begin{aligned} & \{\delta p\}^T \left[\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial[N]}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right) d\Omega_f \right] \{p\} + \{\delta p\}^T \left[\frac{1}{g} \int_{\Gamma_{os}} [N]^T [N] d\Gamma \right] \{\ddot{p}\} \\ & + \{\delta p\}^T \left[\frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}} [N]^T [N] d\Gamma \right] \{\dot{p}\} + \{\delta p\}^T \left[\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} [N]^T [N] d\Omega_f \right] \{\ddot{p}\} \\ & - \{\delta p\}^T \left[\int_{\Omega_f} [N]^T \{q\} d\Omega_f \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Eliminando-se a variável virtual $\{\delta p\}$ e definindo-se as matrizes para cada elemento como:

$$[H^e] = \int_{\Omega_f^e} \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right) d\Omega_f \quad (4.43)$$

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f^e} [N]^T [N] d\Omega_f \quad (4.44)$$

$$[B^e] = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{fs}^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.45)$$

$$[A^e] = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{m\infty}^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (4.46)$$

$$\{q^e\} = \int_{\Omega_f^e} [N]^T \{q\} d\Omega_f \quad (4.47)$$

usa-se as matrizes globais $[H]$, $[E]$, $[B]$ e $[A]$, e o vetor global $\{Q\}$, que são formados a partir das matrizes de cada elemento, para representar o problema global pela seguinte equação:

$$[S]\{\ddot{p}\} + [A]\{\dot{p}\} + [H]\{p\} = \{Q\} \quad (4.48)$$

onde $[S] = [E] + [B]$;

$[E]$ é a Matriz de Compressibilidade do fluido;

$[B]$ é a matriz com a condição de contorno de ondas de superfície;

$[A]$ é a matriz com a condição de contorno de radiação para meio infinito;

$[H]$ é a Matriz Volumétrica do fluido;

$\{Q\}$ é o vetor com a contribuição das fontes acústicas;

$\{p\}$ é o vetor com as variáveis nodais, e $\{\dot{p}\}$ e $\{\ddot{p}\}$ são suas derivadas no tempo.

Sendo a equação (4.48) a formulação do fluido em pressão utilizando o Método dos Elementos Finitos.

4.3 Formulação em Potencial de Velocidades

A formulação estudada neste ítem se baseia em potencial de velocidades, ψ , como variável incógnita para o fluido. Esta formulação foi frequentemente utilizada pelos autores clássicos de meios contínuos, LAMB (1945) [38], MORSE & FESHBACH (1953), entre outros, e será utilizada posteriormente neste trabalho para a modelagem de domínios com condições de contorno especiais que levam em conta a radiação para meio fluido infinito.

Para desenvolver-se a formulação em potencial de velocidades para um meio fluido será utilizado como exemplo um domínio fluido genérico com as condições de contorno clássicas, figura 4.2. Novamente são consideradas apenas pequenas variações harmônicas em torno de uma posição de equilíbrio.

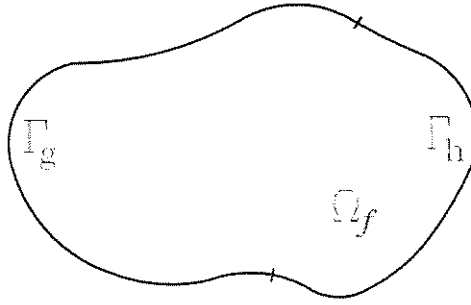


Figura 4.2: Domínio Fluido Genérico com Condições de Contorno Clássicas

Seja o domínio fluido genérico fechado Ω_f , com fronteira Γ , onde $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, com velocidade de propagação do som c , a distribuição do potencial de velocidades satisfaz a equação da onda, dentro das condições de propagação linear. O problema em Ω_f pode ser representado por:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} + d = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (4.49)$$

$$\psi = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad (4.50)$$

$$\psi_{,n} = h \quad \text{em } \Gamma_h \quad (4.51)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano;

d , g e h são funções conhecidas;

d é a contribuição das forças externas,

g e h representam as condições de contorno clássicas;

$\psi_{,n}$ é a derivada em relação ao vetor normal exterior $\vec{n}$.

Equação (4.50) é a Condição de Contorno de Dirichlet ou Essencial, e a equação (4.51) é a Condição de Contorno de Neumann ou Natural.

Para encontrar-se a solução do problema em potencial de velocidades (4.49) - (4.51), deve-se buscar um campo de soluções que atenda a equação da onda em meios fluidos. Uma forma de se obter este campo de soluções é aplicando-se o Método de Resíduos Ponderados, COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], capítulo 15.

Aplicando-se o Método de Resíduos Ponderados de forma análoga à feita na formulação em pressão, obtém-se a forma fraca do problema:

$$\begin{aligned} W(\psi) = & - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{\psi} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi d d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.52)$$

Desmembrando-se a integral de linha em Γ para as duas condições de contorno, tem-se

$$\oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (4.53)$$

Em Γ_g , Condição de Contorno Essencial ou de Dirichlet, pode ter-se uma simplificação para superfícies livres se considerar-se $\psi = 0$. Assim,

$$\int_{\Gamma_g} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_g} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \psi d\Gamma + (\Psi \psi) |_{\Gamma_g} = 0 \quad (4.54)$$

Em Γ_h , Condição de Contorno Natural ou de Neumann, pode ter-se fronteira do fluido com paredes rígidas, neste caso a simplificação adotada é:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (4.55)$$

Ficando a integral em Γ_h igual a

$$\int_{\Gamma_h} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4.56)$$

Desta forma, substituindo-se as condições de contorno na forma fraca do problema, chega-se a

$$W(\psi) = - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega_f - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \Psi \ddot{\psi} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \Psi d d\Omega_f \quad (4.57)$$

Aplicando Galerkin para escolha da função de ponderação, ou seja, assumindo a função de ponderação como sendo uma variação virtual da incógnita do problema, a forma fraca do problema se torna

$$W(\psi) = + \int_{\Omega_f} \left[\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] d\Omega_f + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} (\delta\psi) \ddot{\psi} d\Omega_f - \int_{\Omega_f} (\delta\psi) d d\Omega_f \quad (4.58)$$

Adotando-se uma aproximação por elementos finitos, considerando-se as variáveis de tempo e espaço separáveis, e usando notação indicial, pode-se escrever para este exemplo bi-dimensional a formulação usando funções de forma para um elemento genérico como sendo

$$\psi(x, y, t) = N_m(x, y) \psi_m(t) \quad (4.59)$$

$$\dot{\psi}(x, y, t) = N_m(x, y) \dot{\psi}_m(t) \quad (4.60)$$

$$\ddot{\psi}(x, y, t) = N_m(x, y) \ddot{\psi}_m(t) \quad (4.61)$$

$$\delta\psi(x, y, t) = N_m(x, y) \delta\psi_m(t) \quad (4.62)$$

onde m é um índice que indica o nó associado a variável. Substituindo-se estas expressões na forma fraca do problema, tem-se

$$\begin{aligned} W(\psi) = & +\delta\psi_m \left[\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) d\Omega_f \right] \psi_n + \delta\psi_m \left[\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} N_m N_n d\Omega_f \right] \ddot{\psi}_n \\ & -\delta\psi_m \left[\int_{\Omega_f} N_m d\Omega_f \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde n também é um índice que indica o nó associado a variável. Considerando-se que a solução faz com que $W(\psi)$ seja nulo, pode-se reescrever a equação (4.63) na forma matricial como:

$$\begin{aligned} & +\{\delta\psi\}^T \left[\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) d\Omega_f \right] \{\psi\} + \{\delta\psi\}^T \left[\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} [N]^T [N] d\Omega_f \right] \{\ddot{\psi}\} \\ & -\{\delta\psi\}^T \left[\int_{\Omega_f} [N]^T \{d\} d\Omega_f \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Definindo-se as matrizes e o vetor para cada elemento como:

$$[H^e] = \int_{\Omega_f^e} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) d\Omega_f \quad (4.65)$$

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f^e} [N]^T [N] d\Omega_f \quad (4.66)$$

$$\{D^e\} = \int_{\Omega_f^e} [N]^T \{d\} d\Omega_f \quad (4.67)$$

Observa-se que as matrizes $[H]$ e $[E]$ são as mesmas obtidas na formulação em pressão, equações (4.43) e (4.44), e o vetor $\{D\}$ é análogo ao encontrado para uma entrada q , equação (4.47).

Eliminando-se a variável virtual $\{\delta\psi\}$, o problema global em potencial de velocidades pode ser representado em forma matricial pela seguinte equação:

$$[E]\{\ddot{\psi}\} + [H]\{\dot{\psi}\} = \{D\} \quad (4.68)$$

onde $[E]$ é a Matriz de Compressibilidade global do fluido;

$[H]$ é a Matriz Volumétrica global do fluido;

$\{D\}$ é o vetor com a contribuição das forças externas;

$\{\psi\}$ é o vetor com as variáveis nodais, e $\{\dot{\psi}\}$ e $\{\ddot{\psi}\}$ são suas derivadas no tempo.

4.4 Discretização em Elemento Triangular Linear

Como as matrizes $[E]$ e $[H]$ são obtidas da mesma forma tanto para a formulação em pressão em excesso como para a formulação em potencial de velocidades, e o vetor com a contribuição de fontes acústicas é obtido de forma semelhante (apenas as variáveis nodais são diferentes), pode-se adotar as mesmas funções de forma para as duas formulações. A seguir será obtido o elemento triangular linear a partir do potencial de velocidades.

Pode-se reescrever matricialmente as expressões (4.65) a (4.67) como sendo

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f^e} [N]^T [N] d\Omega_f \quad (4.69)$$

$$[H^e] = \int_{\Omega_f^e} [B]^T [B] d\Omega_f \quad (4.70)$$

$$\{D^e\} = \int_{\Omega_f^e} [N]^T \{d\} d\Omega \quad (4.71)$$

onde a matriz $[B]$ contém as derivadas das funções de forma de cada elemento.

Para calcularem-se as matrizes $[E]$ e $[H]$, e o vetor $\{D\}$ para um elemento triangular linear, ou seja, com três nós, adota-se uma formulação isoparamétrica para as coordenadas locais, figura 4.3.

$$\psi(x, y, t) = N_m(x, y)\psi_m(t) = N_m(\xi, \eta)\psi_m(t) \quad (4.72)$$

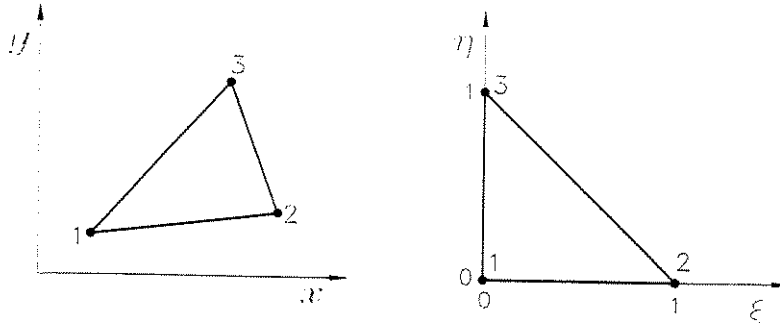


Figura 4.3: Espaço Real e Espaço Isoparamétrico para as Coordenadas Locais

Podendo ser escrito como

$$N_m(\xi, \eta)\psi_m(t) = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

A integral sobre o domínio do elemento pode ser reescrita para as variáveis locais segundo DHATT & TOUZOT (1985) [14], como

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [N]^T [N] \det(J) d\eta d\xi \quad (4.74)$$

$$[H^e] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B]^T [B] \det(J) d\eta d\xi \quad (4.75)$$

$$\{D^e\} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [N(\xi)]^T \{d\} \det(J) d\eta d\xi \quad (4.76)$$

Onde as expressões para $[B]$, $[N]$ e $\det(J)$ são dadas a seguir.

Para encontrar-se as funções de forma, deve-se tomar como base polinomial os três primeiros termos linearmente independentes. Podendo-se escrever

$$N_m(\xi, \eta)\psi_m(t) = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

Sendo

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (4.78)$$

Portanto

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Para transformar-se as variáveis globais, x e y , nas variáveis locais, ξ e η , é necessário conhecer-se a Matriz Jacobiana, $[J]$, definida como

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Cujo determinante pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\det(J) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 2A \quad (4.81)$$

onde A é a área do triângulo no espaço real (xy). Pode-se agora reescrever a integral da equação (4.74) como sendo

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \det(J) d\eta d\xi \quad (4.82)$$

Obtendo-se após integração dupla a seguinte expressão:

$$[E^e] = \frac{A}{12c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Por outro lado, sabendo-se que a transformação das derivadas é feita utilizando a inversa da matriz jacobiana $[j] = [J]^{-1}$, logo pode-se escrever

$$[B] = [j][B_{(\xi,\eta)}] \quad (4.84)$$

onde a inversa da jacobiana $[j]$, é dada por:

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

e

$$[B_{(\xi,\eta)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Ou seja,

$$[B_{(\xi,\eta)}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Substituindo-se as equações (4.86) e (4.85) na equação (4.84), tem-se a expressão para a matriz $[B]$, sendo portanto:

$$[B] = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Para a matriz $[H]$, pode-se reescrever a equação (4.75) considerando-se que a matriz $[B]$ obtida na equação (4.88) não depende das variáveis ξ e η , sendo portanto

$$[H^e] = [B]^T[B] \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \det(J) d\eta d\xi \quad (4.89)$$

Substituindo-se as expressões obtidas na equação acima, tem-se

$$[H^e] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} \{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\} & \{(y_3 - y_2)(y_1 - y_3) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\} & \{(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\} \\ & \{(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2\} & \{(y_1 - y_3)(y_2 - y_1) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\} \\ Sim. & & \{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2\} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Para o cálculo de $\{D\}$, pode-se separar em dois termos, $\{D_v\}$ para a atuação sobre o domínio Ω_f , e $\{D_s\}$ para a atuação sobre o contorno do elemento.

Para o cálculo de $\{D_v\}$, considerando um carregamento constante, d_v , sobre um elemento, tem-se que

$$[D_v^e] = \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} d_v \det(J) d\eta d\xi \quad (4.91)$$

Obtendo-se

$$[D_v^e] = \frac{Ad_v}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

Ou considerando-se a formulação em pressão, com um carregamento constante, q_v , sobre o elemento,

$$[Q_v^e] = \frac{Aq_v}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

Para o cálculo de $\{D_s\}$, deve-se tomar a integral da equação (4.91) sobre o contorno, por exemplo, do nó 1 ao nó 2, obtendo-se

$$[D_s^e] = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \{d_s\} L d\xi \quad (4.94)$$

onde L é a distância no sistema de coordenadas global entre os nós 1 e 2. Desta forma, a expressão para a integral no contorno para um carregamento constante, d_s , fica igual a

$$[D_s^e] = \frac{Ld_s}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.95)$$

Ou considerando-se a formulação em pressão, e novamente um carregamento constante, q_s , tem-se

$$[Q_s^e] = \frac{Lq_s}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.96)$$

4.5 Discretização em Elemento Quadrangular Bilinear

Para calcularem-se as matrizes $[E]$ e $[H]$, e os vetores $\{Q\}$ e $\{D\}$ para um elemento quadrangular bilinear, ou seja, com quatro nós, adota-se uma formulação isoparamétrica para as coordenadas locais, figura 4.4. A aproximação é definida pela expressão clássica:

$$\psi(x, y, t) = N_m(x, y)\psi_m(t) = N_m(\xi, \eta)\psi_m(t) \quad (4.97)$$

Podendo ser escrito como

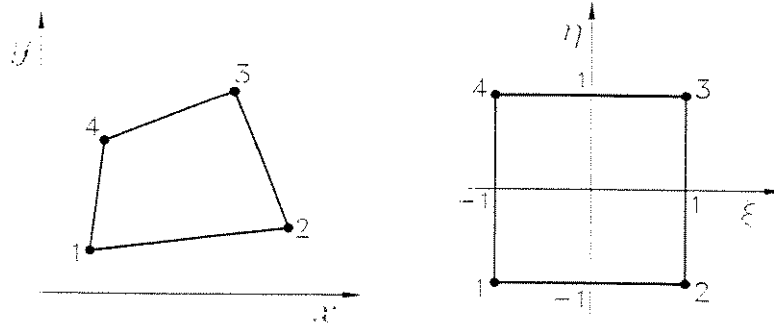


Figura 4.4: Espaço Real e Espaço Isoparamétrico para as Coordenadas Locais

$$N_m(\xi, \eta) \psi_m = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} \quad (4.98)$$

sendo as funções de forma dadas por, DHATT & TOUZOT (1985) [14], capítulo 2,

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para transformarem-se as variáveis globais, x e y , nas variáveis locais, ξ e η , é necessário conhecer-se a Matriz Jacobiana, $[J]$, definida como

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Sendo a expressão para $[J]$ obtida como

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Sendo calculado como

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \{-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & \{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ +\eta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\} & +\eta(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\} \\ \{-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & \{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ +\xi(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\} & +\xi(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Na transformação de variáveis numa integral, usa-se o determinante da matriz jacobiana, expresso como

$$\det(J) = A_0 + A_1\xi + A_2\eta \quad (4.103)$$

onde

$$A_0 = \frac{1}{8}[(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)] \quad (4.104)$$

$$A_1 = \frac{1}{8}[(y_3 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)] \quad (4.105)$$

$$A_2 = \frac{1}{8}[(y_4 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_1)] \quad (4.106)$$

Pode-se agora reescrever a integral da equação (4.74) como sendo

$$\begin{aligned} [E^e] &= \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) & (1 + \xi)(1 - \eta) & (1 + \xi)(1 + \eta) & (1 - \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix} \det(J) d\eta d\xi \end{aligned} \quad (4.107)$$

Sabendo-se que

$$[B] = [j][B_{(\xi,\eta)}] \quad (4.108)$$

e que

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

e

$$[B_{(\xi,\eta)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Pode-se calcular finalmente:

$$[B_{(\xi,\eta)}] = \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Para a matriz $[H]$, pode-se reescrever a equação (4.75), sendo portanto

$$[H^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [j]^T [B_{(\xi,\eta)}]^T [j] [B_{(\xi,\eta)}] \det(J) d\eta d\xi \quad (4.112)$$

Para o cálculo de $\{D\}$ (ou $\{Q\}$), pode-se separar em dois termos, $\{D_v\}$ para a atuação sobre o domínio Ω_f , e $\{D_s\}$ para a atuação sobre o contorno do elemento.

Para o cálculo de $\{D_v\}$, considerando-se d_v constante sobre o elemento, tem-se que

$$[D_v^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} d_v \det(J) d\eta d\xi \quad (4.113)$$

Para o cálculo de $\{D_s\}$, pode-se considerar a mesma formulação obtida na equação (4.95), ou em pressão em excesso, equação (4.96).

Com as equações (4.107) e (4.112), aplica-se integração numérica para calcularem-se as matrizes $[E]$ e $[H]$, como sugerido em DHATT & TOUZOT (1985) [14]. Para este tipo de elemento foi utilizada integração de Gauss 2x2. A fórmula bi-direcional pode ser dada por:

$$\int_0^1 \int_0^1 F(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 F(\xi_i, \eta_j) \quad (4.114)$$

Desse modo, a matriz $[E]$ pode ser dada por

$$[E^e] = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \begin{bmatrix} (1 - \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 + \eta_j) \\ (1 - \xi_i)(1 + \eta_j) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (1 - \xi_i)(1 - \eta_j) & (1 + \xi_i)(1 - \eta_j) & (1 + \xi_i)(1 + \eta_j) & (1 - \xi_i)(1 + \eta_j) \end{bmatrix} \det(J_{(\xi_i, \eta_j)}) \quad (4.115)$$

A matriz $[H]$ pode ser dada por

$$[H^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [j_{(\xi_i, \eta_j)}]^T [B_{(\xi_i, \eta_j)}]^T [j_{(\xi_i, \eta_j)}] [B_{(\xi_i, \eta_j)}] \det(J_{(\xi_i, \eta_j)}) \quad (4.116)$$

E o vetor $\{D_v\}$, considerando um carregamento constante, d_v , pode ser obtido como

$$[D_v^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \begin{bmatrix} (1 - \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 + \eta_j) \\ (1 - \xi_i)(1 + \eta_j) \end{bmatrix} d_v \det(J_{(\xi_i, \eta_j)}) \quad (4.117)$$

Ou na formulação em pressão em excesso, com um carregamento constante, q_v , tem-se

$$[Q_v^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \begin{bmatrix} (1 - \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 - \eta_j) \\ (1 + \xi_i)(1 + \eta_j) \\ (1 - \xi_i)(1 + \eta_j) \end{bmatrix} q_v \det(J_{(\xi_i, \eta_j)}) \quad (4.118)$$

Desta forma, obteve-se a discretização em elementos finitos para elemento fluido quadrilateral bi-linear em potencial de velocidades ou em pressão em excesso.

Capítulo 5

Modelagem de Problemas Acústicos em Meio Infinito via Mapeamento DtN

5.1 Introdução

Neste Capítulo é apresentado um método que permite a inclusão nos domínios discretizados por elementos finitos da consideração de meio externo infinito. Inicialmente é apresentado o problema acústico em meio infinito, onde é apresentada a Condição de Radiação de Sommerfeld. Depois, o método de Mapeamento DtN (Dirichlet-to-Neumann) é desenvolvido para um problema genérico, sendo também apresentadas formulações voltadas para problemas bi-dimensionais e tri-dimensionais. A forma de inclusão da formulação bi-dimensional no método de elementos finitos é mostrada, e os principais aspectos computacionais são analisados. Por último, é apresentado um método de expansão dos resultados obtidos no domínio finito para campos distantes usando a mesma solução analítica empregada para obter-se o mapeamento DtN.

5.2 Problema de Valor de Contorno para a Equação de Helmholtz em Meio Infinito

O problema para a equação de Helmholtz não homogênea para o potencial de velocidades, ψ , sendo que pode-se usar de forma análoga a pressão, p , como variável incógnita, num domínio infinito, $\mathcal{R}$, com contorno interno, Γ , onde $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, figura 5.1, pode ser representado, segundo KELLER & GIVOLI (1989) [36], como:

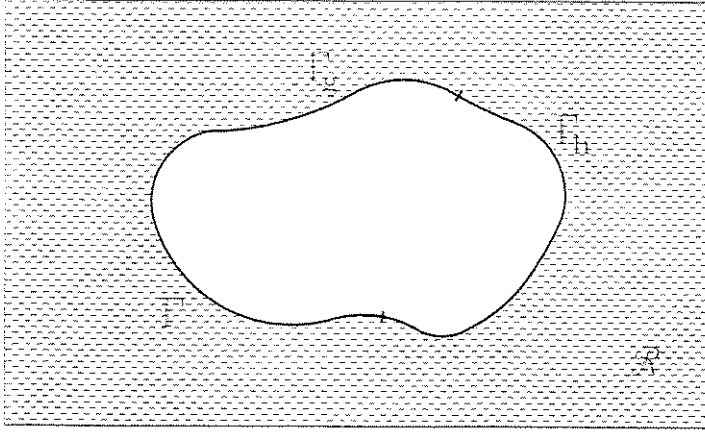


Figura 5.1: Domínio Fluido Ilimitado com Contorno Interno

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi + f = 0 \quad \text{em } \mathcal{R} \quad (5.1)$$

$$\psi = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad (5.2)$$

$$\psi_{,n} = ikh \quad \text{em } \Gamma_h \quad (5.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (\psi_{,r} - ik\psi) = 0 \quad (5.4)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano;

ψ é o potencial de velocidades;

k é o número de onda ($k = \omega/c$);

f é a contribuição devido as fontes acústicas;

$\psi_{,n}$ é a derivada na direção normal exterior $\vec{n}$;

i é a unidade imaginária;

g e h são funções com as condições de contorno;

r é a distância ao ponto de origem;
 d é a dimensão espacial do problema.

Neste problema, f , g e h são funções conhecidas. Em Γ_g tem-se a Condição de Contorno Essencial ou de Dirichlet, e em Γ_h tem-se a Condição de Contorno Natural ou de Neumann. Condições de contorno como o de superfícies livres, paredes rígidas e de interação fluido-estrutura entre outras, estão entre estes dois tipos de condição de contorno. A equação (5.4) é a Condição de Radiação de Sommerfeld, e representa o meio externo infinito.

Assim, a solução do problema (5.1) - (5.4) pode ser obtida analiticamente para alguns casos clássicos de geometria regular e simples. Mas a obtenção de soluções analíticas para problemas mais complexos, ou seja, geometrias e condições de contorno internos mais complexas, se torna inviável.

5.3 Tratamento de Meio Infinito via Mapeamento DtN

Para obter-se uma solução aproximada para o problema (5.1) - (5.4), resolve-se um problema equivalente consistindo de dois domínios separados por uma fronteira artificial, KELLER & GIVOLI (1989) [36]. Um domínio externo ilimitado, $\mathcal{D}$, onde se procura a solução da equação de Helmholtz homogênea, e um domínio interno finito, Ω , onde se deseja conhecer a solução da equação de Helmholtz não homogênea. Uma representação do problema pode ser visto na figura 5.2.

O problema em $\mathcal{D}$ é um Problema de Dirichlet, onde se assume uma dada distribuição da variável na fronteira artificial $\partial\mathcal{B}_R$, e se deseja obter a solução para esta variável no domínio ilimitado. Para obter-se a solução de forma analítica, a fronteira artificial é escolhida como sendo uma esfera com dimensão d , e portanto possuindo soluções conhecidas na literatura clássica para a equação da onda. Desta forma, o problema em $\mathcal{D}$, pode ser representado por:

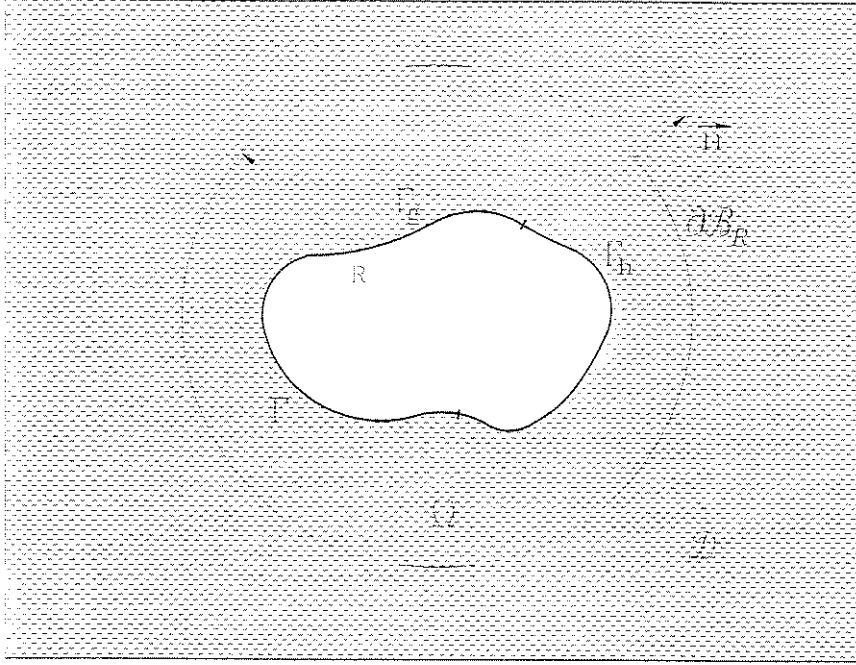


Figura 5.2: Problema Equivalente

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{em } \mathcal{D} \quad (5.5)$$

$$\psi = \psi(R, \theta) \quad \text{em } \partial B_R \quad (5.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (\psi_{,r} - ik\psi) = 0 \quad (5.7)$$

Para o caso bi-dimensional ($d = 2$), a fronteira artificial escolhida é um círculo de raio R , e sua solução pode ser dada segundo MORSE & FESHBACH (1953) [43], capítulo 11, como sendo:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.8)$$

onde ψ pode ser potencial de velocidade ou pressão;

r é o raio do ponto onde se está avaliando a solução;

θ é o ângulo associado ao ponto onde se está avaliando a solução;

n é o número de harmônicas da solução;

$H_n^{(1)}$ é a função de Hankel de Primeiro Tipo;
 k é o número de onda;
 R é o raio da fronteira artificial;
 θ_H é o ângulo usado para a integração na fronteira artificial.

A somatória com o símbolo primo significa que o primeiro termo ($n = 0$) é multiplicado pelo fator $1/2$. Esta solução pode ser usada para se achar a relação entre a derivada da variável e a própria variável, sendo esta relação chamada de operador DtN:

$$\psi_{,r} = M\psi \quad \text{em } \partial\mathcal{B}_R \quad (5.9)$$

Derivando-se a equação (5.8) em relação a r , pode-se obter a expressão para a derivada normal exterior na fronteira artificial $\partial\mathcal{B}_R$, sendo assim:

$$\psi_{,r}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.10)$$

onde o símbolo primo depois de uma função indica diferenciação em relação ao seu argumento. Desta forma, o operador DtN pode ser expresso como

$$M\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{2\pi} \cos n(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.11)$$

onde

$$\alpha_n = -\frac{k}{\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \quad (5.12)$$

Para o caso tri-dimensional, a fronteira artificial escolhida é uma esfera de raio R , e desta forma a solução do problema passa a ser representada, segundo KELLER & GIVOLI (1989) [36], por:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \frac{\sqrt{R/r}}{2\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n'} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{H_{n+1/2}^{(1)}(kR)} \frac{(2n+1)(n-j)!}{(n+j)!} \\ &\times \int_{\partial \mathcal{B}_R} P_n^j(\cos \phi) P_n^j(\cos \phi_H) \cos j(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H, \phi_H) d\Gamma \quad (5.13) \end{aligned}$$

onde $d\Gamma = R^2 \sin \phi_H d\theta_H d\phi_H$, e P_n^j é a função de Legendre associada de primeiro tipo. Novamente, derivando-se a expressão anterior em relação a r pode-se obter a expressão para a derivada normal exterior na fronteira artificial como sendo

$$\begin{aligned} \psi_{,r}(R, \theta, \phi) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n'} \frac{(\partial/\partial r) [R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)]}{R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)} \frac{(2n+1)(n-j)!}{2\pi R^2 (n+j)!} \\ &\times \int_{\partial \mathcal{B}_R} P_n^j(\cos \phi) P_n^j(\cos \phi_H) \cos j(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H, \phi_H) d\Gamma \quad (5.14) \end{aligned}$$

Sendo o operador DtN obtido como

$$M\psi = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial \mathcal{B}_R} m_n(\theta, \phi, \theta_H, \phi_H) \psi(R, \theta_H, \phi_H) d\Gamma \quad (5.15)$$

onde o Kernel DtN é dado por:

$$m_n(\theta, \phi, \theta_H, \phi_H) = \sum_{j=0}^{n'} \beta_{jn} P_n^j(\cos \phi) P_n^j(\cos \phi_H) \cos j(\theta - \theta_H) \quad (5.16)$$

$$\beta_{jn} = - \frac{(2n+1)(n-j)! \gamma_n}{2\pi R^2 (n+j)!} \quad (5.17)$$

$$\gamma_n = \frac{(\partial/\partial R) [R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)]}{R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)} \quad (5.18)$$

Assim, determinado-se $M\psi$, pode-se colocar o problema no domínio limitado Ω como sendo um Problema DtN, que é chamado assim tendo em vista que relaciona a condição de contorno de Dirichlet (ψ) com a condição de contorno de Neumann ($\psi_{,r}$), sendo representado por:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi + f = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.19)$$

$$\psi = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad (5.20)$$

$$\psi_{,n} = ikh \quad \text{em } \Gamma_h \quad (5.21)$$

$$\psi_{,n} = -M\psi \quad \text{em } \partial\mathcal{B}_R \quad (5.22)$$

onde $\psi_{,n}$ é a derivada em relação à normal exterior ao domínio Ω .

Para este problema de domínio finito, o Método de Elementos Finitos pode ser aplicado diretamente sobre o domínio e as fronteiras com condições de contorno clássicas, na fronteira artificial o mapeamento DtN pode ser utilizado como condição de contorno natural, como sugerido por KELLER & GIVOLI (1989) [36].

5.4 Tratamento de Meio Semi-Infinito Bi-dimensional via Mapeamento DtN

Para obter-se uma solução aproximada para o problema em meios semi-infinitos bi-dimensionais deve-se proceder de forma análoga a feita para problemas em meios infinitos bi-dimensionais. Resolve-se um problema equivalente consistindo de dois domínios separados por uma fronteira artificial. Um domínio externo em semi-espço ilimitado, $\mathcal{D}$, onde se procura a solução da equação de Helmholtz homogênea, e um domínio interno finito, Ω , onde se deseja conhecer a solução da equação de Helmholtz não homogênea. Uma representação do problema pode ser visto na figura 5.3.

O problema em $\mathcal{D}$ é um Problema com Condição de Contorno de Dirichlet na fronteira artificial $\partial\mathcal{B}_R$, onde se assume uma dada distribuição da variável, e Condição de Contorno de Neumann homogênea em γ_0 e γ_π , Condição de paredes rígidas. A fronteira artificial escolhida é um semi-círculo de raio R , e sua solução, GIVOLI (1992) [22], pode ser dada como sendo:

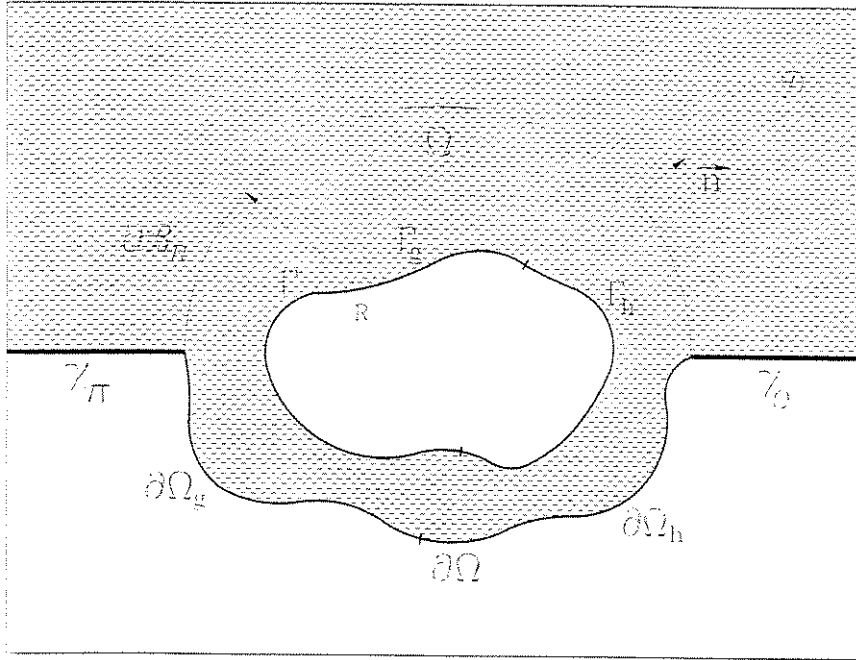


Figura 5.3: Problema Equivalente, Meio Semi-Infinito.

$$\psi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n\theta \int_0^\pi \cos n\theta_H \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.23)$$

onde ψ pode ser potencial de velocidade ou pressão;

r é o raio do ponto onde se está avaliando a solução;

θ é o ângulo associado ao ponto onde se está avaliando a solução;

n é o número de harmônicas da solução;

$H_n^{(1)}$ é a função de Hankel de primeiro tipo;

k é o número de onda;

R é o raio da fronteira artificial;

θ_H é o ângulo usado para a integração na fronteira artificial;

A somatória com o símbolo primo significa que o primeiro termo ($n = 0$) é multiplicado pelo fator $1/2$.

Derivando-se a equação (5.23) em relação a r , pode-se obter a expressão para a derivada normal exterior na fronteira artificial $\partial\mathcal{B}_R$, sendo assim:

$$\psi_{,r}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k}{\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n\theta \int_0^\pi \cos n\theta_H \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.24)$$

onde o símbolo primo depois de uma função indica diferenciação em relação ao seu argumento. Desta forma, o operador DtN pode ser expresso segundo GIVOLI (1992) [22], capítulo 10, como

$$M\psi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\alpha_n \cos n\theta \int_0^\pi \cos n\theta_H \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.25)$$

onde α_n é o mesmo dado pela equação (5.12), para o problema em espaço completo infinito.

Assim, determinado-se $M\psi$, pode-se colocar o problema no domínio limitado Ω como sendo um Problema DtN, sendo representado por:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi + f = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.26)$$

$$\psi = g_\Gamma \quad \text{em } \Gamma_g \quad (5.27)$$

$$\psi = g_{\partial\Omega_g} \quad \text{em } \partial\Omega_g \quad (5.28)$$

$$\psi_{,n} = ikh_\Gamma \quad \text{em } \Gamma_h \quad (5.29)$$

$$\psi_{,n} = ikh_{\partial\Omega_h} \quad \text{em } \partial\Omega_h \quad (5.30)$$

$$\psi_{,n} = -M\psi \quad \text{em } \partial\mathcal{B}_R \quad (5.31)$$

onde $\psi_{,n}$ é a derivada em relação à normal exterior ao domínio Ω ;

g_Γ , $g_{\partial\Omega_g}$, h_Γ e $h_{\partial\Omega_h}$ são funções conhecidas.

Em Γ_g e $\partial\Omega_g$ tem-se a Condição de Contorno Essencial ou de Dirichlet, e em Γ_h e $\partial\Omega_h$ tem-se a Condição de Contorno Natural ou de Neumann. Condições de contorno como os de superfícies livres, paredes rígidas e de interação fluido-estrutura entre outras, estão entre estes dois tipos de condição de contorno.

Para este problema de domínio finito, o Método de Elementos Finitos pode ser aplicado diretamente sobre o domínio e as fronteiras com condições de contorno clássicas. Na fronteira artificial o mapeamento DtN pode ser utilizado como condição de contorno natural.

5.5 Inclusão do Mapeamento DtN na Discretização por Elementos Finitos

A inclusão da condição de contorno natural na formulação do problema finito se dá através da forma fraca do problema, ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991) [73]. Considerando-se o problema em potencial de velocidades ou pressão, o termo do contorno pode ser representado por

$$\int_{\Gamma} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_g} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\partial \mathcal{B}_R} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (5.32)$$

onde w é a função de ponderação.

Nos dois primeiros termos do lado direito da equação são aplicadas as condições de contorno clássicas. Na fronteira artificial o operador DtN é substituído conforme equação (5.22).

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -M\psi \quad \text{em } \partial \mathcal{B}_R \quad (5.33)$$

Ficando a integral em $\partial \mathcal{B}_R$ como

$$\int_{\partial \mathcal{B}_R} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\partial \mathcal{B}_R} w M \psi d\Gamma \quad (5.34)$$

Aplicando-se Galerkin para a escolha da função de ponderação, tem-se

$$\int_{\partial \mathcal{B}_R} w \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\partial \mathcal{B}_R} (\delta \psi) M \psi d\Gamma \quad (5.35)$$

Assumindo-se uma discretização do domínio, e funções de forma clássicas para a aproximação, onde as variáveis de tempo e espaço são separáveis, pode-se reescrever a equação (5.35) da seguinte maneira,

$$- \int_{\partial \mathcal{B}_R} (\delta \psi) M \psi d\Gamma = -(\delta \psi_i) \left[\int_{\partial \mathcal{B}_R} N_i M N_j d\Gamma \right] \psi_j \quad (5.36)$$

Eliminando-se a variável virtual, e rearranjando em forma matricial, tem-se

$$- \left[\int_{\partial \mathcal{B}_R} N_i M N_j d\Gamma \right] \psi_j = [D] \{ \psi_{\partial \mathcal{B}_R} \} \quad (5.37)$$

Para se calcular a matriz $[D]$ considerando o caso bi-dimensional em meio infinito, deve-se rearrumar a expressão do operador M para fronteira artificial circular, equação (5.11), separando-se suas variáveis. Assim

$$M\psi = \sum_{n=0}^{\infty'} \alpha_n \int_0^{2\pi} (\cos n\theta \cos n\theta_H + \text{sen } n\theta \text{ sen } n\theta_H) \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.38)$$

onde α_n é definido na equação (5.12). Ou ainda,

$$M\psi = \sum_{n=0}^{\infty'} \alpha_n \left(\cos n\theta \int_0^{2\pi} \cos n\theta_H \psi(R, \theta_H) d\theta_H + \text{sen } n\theta \int_0^{2\pi} \text{sen } n\theta_H \psi(R, \theta_H) d\theta_H \right) \quad (5.39)$$

Agora, substituindo-se a expressão do operador DtN na equação (5.37), tem-se

$$\begin{aligned} D_{ij} = & - \sum_{n=0}^{\infty'} \alpha_n \left[\left(\int_{\partial \mathcal{B}_R} N_i \cos n\theta d\Gamma \right) \left(\int_0^{2\pi} N_j \cos n\theta_H d\theta_H \right) \right. \\ & \left. + \left(\int_{\partial \mathcal{B}_R} N_i \text{sen } n\theta d\Gamma \right) \left(\int_0^{2\pi} N_j \text{sen } n\theta_H d\theta_H \right) \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Para obter-se a matriz $[D]$, tem-se que avaliar $2 \times n_B$ integrais para cada termo da série em n , sendo n_B o número de nós na fronteira artificial. A escolha da função de forma é feita para que se tenham que avaliar as integrais associadas ao nó j , somente nos elementos conectados a este nó, pois a função de forma é nula no restante da fronteira. Um desenho esquemático pode ser observado na figura 5.4.

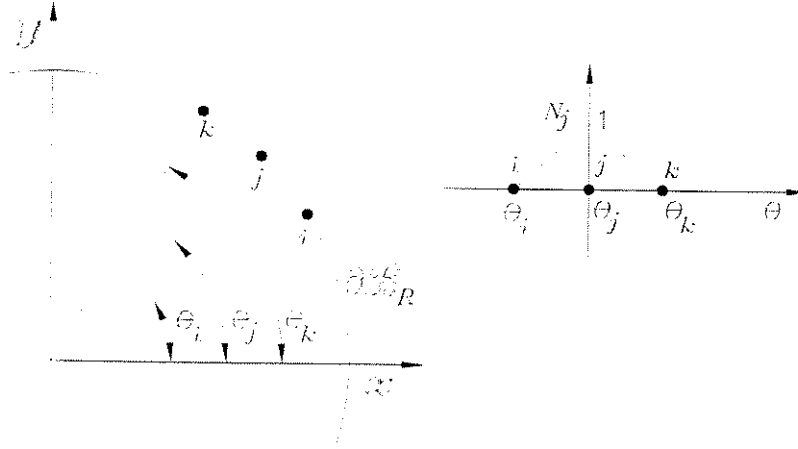


Figura 5.4: Função de Forma da Fronteira Artificial

Desta forma, pode-se avaliar a integral sobre os elementos que possuem um nó em comum de forma explícita. Assim

$$\int_{\partial B_R} N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \int_{\theta_i}^{\theta_k} N_j \cos n\theta \, R \, d\theta \quad (5.41)$$

$$\int_{\partial B_R} N_j \sin n\theta \, d\Gamma = \int_{\theta_i}^{\theta_k} N_j \sin n\theta \, R \, d\theta \quad (5.42)$$

Adotando a função de forma proposta, tem-se para as equações (5.41) e (5.42) que

$$\int_{\theta_i}^{\theta_k} N_j \cos n\theta \, R \, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_j} N_j^{(1)} \cos n\theta \, R \, d\theta + \int_{\theta_j}^{\theta_k} N_j^{(2)} \cos n\theta \, R \, d\theta \quad (5.43)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_k} N_j \sin n\theta \, R \, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_j} N_j^{(1)} \sin n\theta \, R \, d\theta + \int_{\theta_j}^{\theta_k} N_j^{(2)} \sin n\theta \, R \, d\theta \quad (5.44)$$

Sendo

$$N_j^{(1)} = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \quad (5.45)$$

$$N_j^{(2)} = \frac{\theta - \theta_k}{\theta_j - \theta_k} \quad (5.46)$$

Substituindo-se (5.45) e (5.46) em (5.43) e (5.44), e avaliando-se as integrais, obtêm-se expressões fechadas para as integrais em $\partial\mathcal{B}_R$. Para $n = 0$, devem-se usar as seguintes expressões para o cálculo das integrais

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R(\theta_k - \theta_i)}{2} \quad (5.47)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \operatorname{sen} n\theta \, d\Gamma = 0 \quad (5.48)$$

E para as integrais em θ_H e $n = 0$, tem-se

$$\int_0^{2\pi} N_j \cos n\theta_H \, d\theta_H = \frac{\theta_k - \theta_i}{2} \quad (5.49)$$

$$\int_0^{2\pi} N_j \operatorname{sen} n\theta_H \, d\theta_H = 0 \quad (5.50)$$

Para $n > 0$, deve-se usar

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \cos n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\cos n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \quad (5.51)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \operatorname{sen} n\theta \, d\Gamma = \frac{R}{n^2} \left(\frac{\operatorname{sen} n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \operatorname{sen} n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\operatorname{sen} n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \quad (5.52)$$

E para as integrais em θ_H e $n > 0$, tem-se

$$\int_0^{2\pi} N_j \cos n\theta_H \, d\theta_H = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \cos n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\cos n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \quad (5.53)$$

$$\int_0^{2\pi} N_j \operatorname{sen} n\theta_H \, d\theta_H = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\operatorname{sen} n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \operatorname{sen} n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\operatorname{sen} n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \quad (5.54)$$

Com estas expressões, obtém-se cada termo da matriz $[D]$ para o caso bi-dimensional em meio infinito.

Para resolver-se o problema bi-dimensional em meio semi-infinito, a matriz $[D]$ pode ser dada de forma análoga ao caso bi-dimensional em meio infinito, por

$$D_{ij} = -\sum_{n=0}^{\infty'} 2\alpha_n \left[\left(\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_i \cos n\theta \, d\Gamma \right) \left(\int_0^\pi N_j \cos n\theta_H \, d\theta_H \right) \right] \quad (5.55)$$

Onde deve-se usar as mesmas expressões para as integrais na fronteira deduzidas anteriormente, porém deve-se usar para os elementos que possuem um nó em γ_0 ou γ_π , expressões que considerem apenas a função de forma de um elemento.

Para $n = 0$, devem-se usar as seguintes expressões para o cálculo das integrais em $\partial\mathcal{B}_R$, dependendo da fronteira em contato, para γ_0 :

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_i \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R(\theta_j - \theta_i)}{2} \quad (5.56)$$

e para γ_π :

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R(\theta_j - \theta_i)}{2} \quad (5.57)$$

E para as integrais em θ_H e $n = 0$, tem-se para γ_0 :

$$\int_0^\pi N_i \cos n\theta \, d\theta_H = \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \quad (5.58)$$

e para γ_π :

$$\int_0^\pi N_j \cos n\theta \, d\theta_H = \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \quad (5.59)$$

Para $n > 0$, deve-se usar para γ_0 :

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_i \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R [\cos n\theta_j - \cos n\theta_i + n(\theta_j - \theta_i) \operatorname{sen} n\theta_i]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \quad (5.60)$$

e para γ_π :

$$\int_{\partial\mathcal{B}_R} N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{R [\cos n\theta_i - \cos n\theta_j + n(\theta_i - \theta_j) \operatorname{sen} n\theta_j]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \quad (5.61)$$

E para as integrais em θ_H e $n > 0$, tem-se para γ_0 :

$$\int_0^\pi N_i \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{[\cos n\theta_j - \cos n\theta_i + n(\theta_j - \theta_i) \operatorname{sen} n\theta_i]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \quad (5.62)$$

e para γ_π :

$$\int_0^\pi N_j \cos n\theta \, d\Gamma = \frac{[\cos n\theta_i - \cos n\theta_j + n(\theta_i - \theta_j) \operatorname{sen} n\theta_j]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \quad (5.63)$$

Com as expressões (5.47) a (5.54) e (5.56) a (5.63), obtém-se cada termo da matriz $[D]$ para o caso bi-dimensional em meio semi-infinito.

5.6 Aspectos Computacionais da Inclusão do Mapeamento DtN

Com a matriz $[D]$ determinada, esta pode ser incluída no sistema discretizado obtido anteriormente. Sendo a equação discretizada do sistema acústico em meio infinito representada por:

$$[S]\{\vec{\psi}\} + ([H] + [D])\{\psi\} = \{F\} \quad (5.64)$$

onde $[S]$ é a Matriz de Compressibilidade;

$[H]$ é a Matriz Volumétrica;

$\{F\}$ é o vetor com a contribuição das fontes acústicas;

$\{\psi\}$ é o vetor com as variáveis nodais, e $\{\ddot{\psi}\}$ é sua derivada segunda no tempo.

Deve-se observar que a solução, equação (5.40), é não local, ou seja, a determinação da variável em uma dada posição depende das variáveis de toda a fronteira artificial $\partial\mathcal{B}_R$. Isto implica no acoplamento entre todas as variáveis da fronteira. A inclusão dos termos devido ao mapeamento DtN se dá direto na matriz global do sistema, pois sendo um operador não local não cabe a definição de matrizes elementares. Esta característica altera a forma de estruturação em banda usual em implementações por elementos finitos. Apesar disto, alguns procedimentos podem ser adotados para minimizar o efeito de acoplamento entre todas as variáveis da fronteira, como por exemplo, a numeração sequencial de todos os nós da fronteira artificial faz com que apenas uma subregião da matriz global seja cheia.

Outro aspecto computacional importante é a introdução de termos complexos na matriz volumétrica devido à solução analítica no contorno ser complexa. Desta forma, a implementação computacional deve permitir a operação com matrizes complexas e esparsas, prevendo-se um armazenamento de dados adequado. Outra consequência é a obtenção de resposta complexa à uma excitação harmônica, cuja interpretação deve considerar as informações de módulo e fase da resposta.

O custo computacional associado à avaliação das funções de Bessel da solução analítica que aparecem no Kernel DtN, é pequena, já que estas são avaliadas uma vez para cada escolha de kR , e sendo considerados apenas os termos da série correspondentes ao número de harmônicas que se deseje considerar, em geral considera-se um número pequeno de termos.

O maior custo computacional pode ser associado à avaliação das integrais que envolvem funções trigonométricas. Este custo é minimizado se as integrais são obtidas explicitamente, como foi feito para o caso bi-dimensional.

Em relação ao custo computacional do sistema resultante para todo o problema discretizado, o esforço computacional devido à inclusão do mapeamento DtN é pequeno, sobretudo para problemas grandes, onde o maior custo está associado ao grande número de elementos da malha do que o número de nós da fronteira artificial.

Ainda sobre a questão do custo de resolução do problema, no trabalho de HARARI & HUGHES (1992) [29] mostra-se que o custo computacional associado à formulação de problemas acústicos em meio fluido infinito usando o Método de Elementos Finitos com mapeamento DtN comparada ao custo da discretização que utiliza o Método de Elementos de Contorno possui uma vantagem computacional de forma geral. Confirmando-se o método proposto como sendo um método competitivo para análise acústica de exteriores.

5.7 Obtenção de Resultados fora do Domínio Discretizado

O método de mapeamento DtN permite a expansão dos resultados aproximados utilizando-se a mesma solução analítica usada para encontrar o Kernel DtN. No caso bidimensional em meio infinito, tem-se portanto que a solução para radiação a partir de uma fronteira circular segundo MORSE & FESHBACH (1953) [43], capítulo 11, pode ser dada por

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n(\theta - \theta_H) \psi(R, \theta_H) d\theta_H \quad (5.65)$$

onde ψ pode ser potencial de velocidade ou pressão;

r é o raio do ponto onde se está avaliando a solução;

θ é o ângulo associado ao ponto onde se está avaliando a solução;

n é o número de harmônicas da solução;

$H_n^{(1)}$ é a função de Hankel de primeiro tipo;

k é o número de onda;

R é o raio da fronteira circular radiante;

θ_H é o ângulo usado para a integração na fronteira circular.

A somatória com o símbolo primo significa que o primeiro termo ($n = 0$) é multiplicado pelo fator 1/2. Com esta expressão analítica pode-se achar uma expressão discretizada a partir dos resultados obtidos na fronteira artificial.

Considerando-se as mesmas funções de forma adotadas para a variável na formação do Kernel DtN, figura 5.4, pode-se reescrever a expressão na forma discretizada como sendo

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta - \theta_H) [N] \{\psi_R\} d\theta_H \quad (5.66)$$

onde $[N]$ é a matriz com as funções de forma de cada elemento da fronteira;

$\{\psi_R\}$ é o vetor com as variáveis nodais da fronteira artificial.

Separando-se as variáveis da expressão anterior tem-se

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} & \left(\cos n\theta \int_0^{2\pi} \cos n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H \right. \\ & \left. + \sin n\theta \int_0^{2\pi} \sin n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H \right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Podem-se avaliar as integrais sobre a fronteira como sendo, para $n = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = \sum_{j=1}^{n_B} \left[\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{2} \right) \psi_{Rj} \right] \quad (5.68)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = 0 \quad (5.69)$$

onde n_B é o número de nós da fronteira artificial do domínio discretizado.

As integrais para $n > 0$, são

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = \\ \sum_{j=1}^{n_B} \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \cos n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\cos n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \psi_{Rj} \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = \sum_{j=1}^{n_B} \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{\text{sen } n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \text{sen } n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\text{sen } n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \psi_{Rj} \right] \quad (5.71)$$

Para o caso bi-dimensional em meio semi-infinito, de forma análoga a anterior, pode-se obter a expressão para a solução analítica exterior na forma discreta como sendo

$$\psi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n\theta \int_0^{\pi} \cos \theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H \quad (5.72)$$

onde $[N]$ é a matriz com as funções de forma de cada elemento da fronteira;

$\{\psi_R\}$ é o vetor com as variáveis nodais da fronteira artificial obtidas.

Podem-se avaliar as integrais sobre a fronteira como as mesmas obtidas anteriormente, lembrando-se que para os nós da fronteira em contato com as paredes rígidas deve-se usar expressões com a função de forma de apenas um elemento. Sendo então para cada região de contato, para $n = 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = \sum_{n_B-2} \left[\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{2} \right) \psi_{Rj} \right] + \left[\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \psi_{Ri} \right]_{i=n_{\gamma_0}} + \left[\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \psi_{Rj} \right]_{j=n_{\gamma_{\pi}}} \quad (5.73)$$

onde n_{γ_0} é o nó em γ_0 ;

$n_{\gamma_{\pi}}$ é o nó em γ_{π} .

A integral para $n > 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos n\theta_H [N] \{\psi_R\} d\theta_H = & \sum_{n_B-2} \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta_i}{\theta_i - \theta_j} + \frac{(\theta_i - \theta_k) \cos n\theta_j}{(\theta_j - \theta_i)(\theta_j - \theta_k)} + \frac{\cos n\theta_k}{\theta_j - \theta_k} \right) \psi_{Rj} \right] \\ & + \left[\frac{[\cos n\theta_j - \cos n\theta_i + n(\theta_j - \theta_i) \text{sen } n\theta_i]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \psi_{Ri} \right]_{i=n_{\gamma_0}} \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{[\cos n\theta_i - \cos n\theta_j + n(\theta_i - \theta_j)\text{sen } n\theta_i]}{n^2(\theta_i - \theta_j)} \psi_{Rj} \right]_{j=n-\pi} \quad (5.74)$$

Com estas expressões pode-se obter desde apenas um ponto distante, como também um campo distante completo. A qualidade da aproximação depende da qualidade dos resultados obtidos na fronteira artificial do domínio discretizado. A escolha do número de termos da série deve considerar o número de termos usados na formação do Kernel DtN no problema discretizado.

Capítulo 6

Modelagem do Acoplamento Fluido-Estrutura

6.1 Introdução

Foram obtidas anteriormente as equações dinâmicas discretas que governam o problema em meio fluido e em meio estrutural para pequenas oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. Neste capítulo são apresentadas as formulações que levam em conta a interação entre o meio fluido e o meio estrutural, tanto para meio fluido finito como meio fluido infinito.

Inicialmente é apresentada a formulação clássica em pressão (em torno de uma pressão de referência) para interação entre meios estruturais e meios fluidos finitos e infinitos. Em seguida é apresentada a formulação em potencial de velocidades para interação entre meios estruturais e meios fluidos finitos e infinitos. Para a formulação em potencial de velocidades é apresentado um artifício usado para simetrizar o sistema discreto acoplado.

6.2 Formulação Discreta do Problema em Pressão

O acoplamento entre o meio estrutural e o meio fluido no problema discretizado se dá através da interface, Γ_I , ou seja, a interação entre os domínios é governada pela dinâmica da região de fronteira em comum. Veja, como exemplo de problema de interação fluido estrutura, a figura 6.1. Neste problema, tem-se presente também a Condição de Radiação de Sommerfeld para propagação de ondas planas sem reflexão.

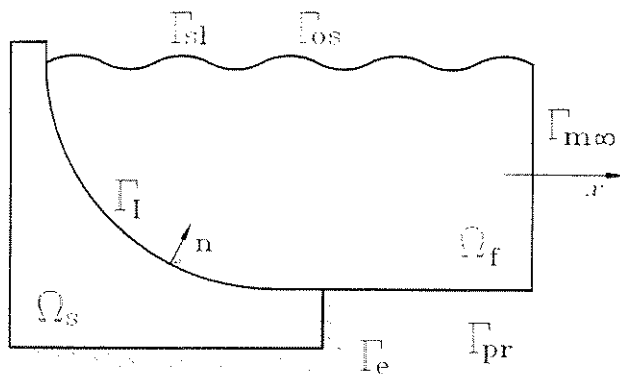


Figura 6.1: Exemplo de Problema de Interação Fluido-Estrutura

Na figura 6.1, Ω_f representa o domínio fluido e Ω_s o domínio estrutural. Em Γ_{sl} tem-se $p = 0$, uma simplificação para superfícies livres. Em Γ_{os} tem-se a formação de ondas de superfície, em Γ_{pr} tem-se fronteira do fluido com paredes rígidas, e em $\Gamma_{m\infty}$ tem-se propagação de onda plana em meio fluido infinito. Em Γ_I tem-se a interface do meio fluido com o meio estrutural, e em Γ_e a região da fronteira da estrutura engastada.

O Problema de Valor de Contorno pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} p &= f_f & \text{em } \Omega_f & (a) \\
p &= 0 & \text{em } \Gamma_{sl} & (b) \\
p_{,n} &= -\frac{1}{g} \ddot{p} & \text{em } \Gamma_{os} & (c) \\
p_{,n} &= -\frac{1}{c} \dot{p} & \text{em } \Gamma_{m\infty} & (d) \\
p_{,n} &= 0 & \text{em } \Gamma_{pr} & (e) \\
p_{,n} &= \rho_f \ddot{u}_{sn} & \text{em } \Gamma_I & (f)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i &= f_s & \text{em } \Omega_s & (g) \\
\sigma_{ij}(u) n_i &= F_i & \text{em } \Gamma_{sFS} & (h) \\
u_i &= 0 & \text{em } \Gamma_e & (i) \\
\sigma_{ij}(u) n_i &= -pn_i & \text{em } \Gamma_I & (j)
\end{aligned}$$

onde Ω_f é o domínio fluido discretizado;

Γ_{os} é a região da fronteira com a condição de contorno de ondas de superfícies;

Γ_{sl} é a região da fronteira com a condição de contorno de superfícies livres;

Γ_I é a região da fronteira com interface fluido-estrutura;

Ω_s é o domínio estrutural;

Γ_{sFS} é a superfície onde atua força;

Γ_e é região onde atua a condição de contorno de engastamento;

∇^2 é o operador Laplaciano;

p é a pressão;

k é o número de onda ($k = \omega/c$);

f_f é a contribuição devido as fontes acústicas;

$p_{,n}$ é a derivada em relação à normal no contorno;

ρ_f é a densidade do fluido;

$\ddot{u}_{sn}$ é a aceleração normal da partícula do sólido;

$\sigma_{ij,j}(u)$ é derivada da tensão na direção j ;

ρ_s é a densidade estrutural;

$\ddot{u}_i$ é a componente i da aceleração $\ddot{u}$;

f_s é a contribuição das forças externas sobre a estrutura;

$\sigma_{ij}(u) n_j$ é a componente da tensão na direção j ;

F_i é a força de superfície;

u_i é a componente i do deslocamento u ;

$u_{i,n}$ é a derivada normal da componente i ;

pn_i é a componente i da derivada na direção normal da pressão.

As condições de contorno mostradas nas equações (6.1) (f) e (j), representam a Condição de Compatibilidade Cinemática na interface entre os dois meios para o problema fluido-estrutura.

Após aplicar-se o Método de Resíduos Ponderados na equação (6.1) (a), pode-se escrever como integral sobre a interface:

$$\int_{\Gamma_I} \Psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_f = - \int_{\Gamma_I} \Psi \rho_f \frac{\partial v_{fn}}{\partial t} d\Gamma_f = - \int_{\Gamma_I} \Psi \rho_f \ddot{u}_{sn} d\Gamma_f \quad (6.2)$$

Aplicando-se Galerkin e substituindo-se as expressões das funções de forma, tem-se:

$$\int_{\Gamma_I} \Psi \rho_f \ddot{u}_{sn} d\Gamma_f = \rho_f \int_{\Gamma_I} (N_{fm}) \vec{n} (N_{sn} \ddot{u}_{sn}) d\Gamma_f \quad (6.3)$$

Reescrevendo-se em forma matricial, chega-se a:

$$\rho_f \left(\int_{\Gamma_I} [N_f]^T \vec{n} [N_s] d\Gamma_f \right) \{\ddot{u}_I\} = \rho_f [L]^T \{\ddot{u}_I\} \quad (6.4)$$

Pode-se então reescrever a equação dinâmica para o fluido na forma discreta como sendo

$$[S]\{\ddot{p}\} + [A]\{\dot{p}\} + [H]\{p\} = \{Q_s\} + \{Q_v\} - \rho_f [L]^T \{\ddot{u}_I\} \quad (6.5)$$

onde $\rho_f [L]^T$ é a matriz de acoplamento dinâmico para o fluido.

Agora, aplicando-se o Método de Resíduos Ponderados na equação (6.1) (g), pode-se escrever como integral sobre a interface:

$$\int_{\Gamma_I} v_i \sigma_{ij}(u) n_j d\Gamma_s = - \int_{\Gamma_I} v \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_s \quad (6.6)$$

Aplicando-se Galerkin para a discretização, utilizando-se as funções de forma propostas anteriormente, tem-se

$$\int_{\Gamma_I} v \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_s = \int_{\Gamma_I} (N_{sm})(\vec{n} N_{fn} p_n) d\Gamma_s \quad (6.7)$$

Que reescrito em forma matricial, fica

$$\int_{\Gamma_I} v \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_s = \left(\int_{\Gamma_I} [N_s]^T \vec{n} [N_f] d\Gamma_s \right) \{p_I\} \quad (6.8)$$

E adotando-se

$$\left(\int_{\Gamma_I} [N_s]^T \vec{n} [N_f] d\Gamma_s \right) \{p_I\} = [L] \{p_I\} \quad (6.9)$$

Pode-se reescrever a equação dinâmica da estrutura na forma discreta como sendo

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_s\} + \{F_v\} + [L]\{p_I\} \quad (6.10)$$

onde $[L]$ é a matriz de acoplamento dinâmico para a estrutura.

Agrupando as equações dinâmicas (6.5) e (6.10) num sistema matricial único, tem-se que o sistema acoplado pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^T & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

A equação (6.11), que é um sistema matricial não simétrico, representa o problema de interação fluido-estrutura discretizado em elementos finitos. A partir desta equação pode-se fazer uma análise modal, ou calcular a resposta forçada, por exemplo.

Caso o problema não considere o amortecimento estrutural, e não possua Condição de Radiação de Sommerfeld para ondas planas e nem termos proporcionais à derivada no tempo da pressão, o sistema pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^T & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Sendo este sistema o mais comumente usado devido ao menor número de equações a serem resolvidas.

6.3 Inclusão do Mapeamento DtN na Formulação em Pressão

Considerando-se agora um problema de interação entre meio estrutural e meio fluido infinito, pode-se aplicar a discretização em elementos finitos para o problema DtN com interação fluido-estrutura, ilustrado na figura 6.2.

O Problema de Valor de Contorno pode ser dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} p &= f_f & \text{em } \Omega_f & (a) \\ p &= g_f & \text{em } \Gamma_{fg} & (b) \\ p_{,n} &= h_f & \text{em } \Gamma_{fh} & (c) \\ p_{,n} &= \rho_f \ddot{u}_{sn} & \text{em } \Gamma_I & (d) \\ p_{,n} &= -Mp & \text{em } \partial\mathcal{B}_R & (e) \\ \sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i &= f_s & \text{em } \Omega_s & (f) \\ \sigma_{ij}(u)n_i &= F_i & \text{em } \Gamma_{sFS} & (g) \\ u_i &= g_{si} & \text{em } \Gamma_{sg} & (h) \\ u_{i,n} &= h_{si} & \text{em } \Gamma_{sh} & (i) \\ \sigma_{ij}(u)n_i &= -pn_i & \text{em } \Gamma_I & (j) \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde Ω_f é o domínio fluido discretizado;

Γ_g é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Dirichlet;

Γ_h é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Neumann;

∇^2 é o operador Laplaciano;

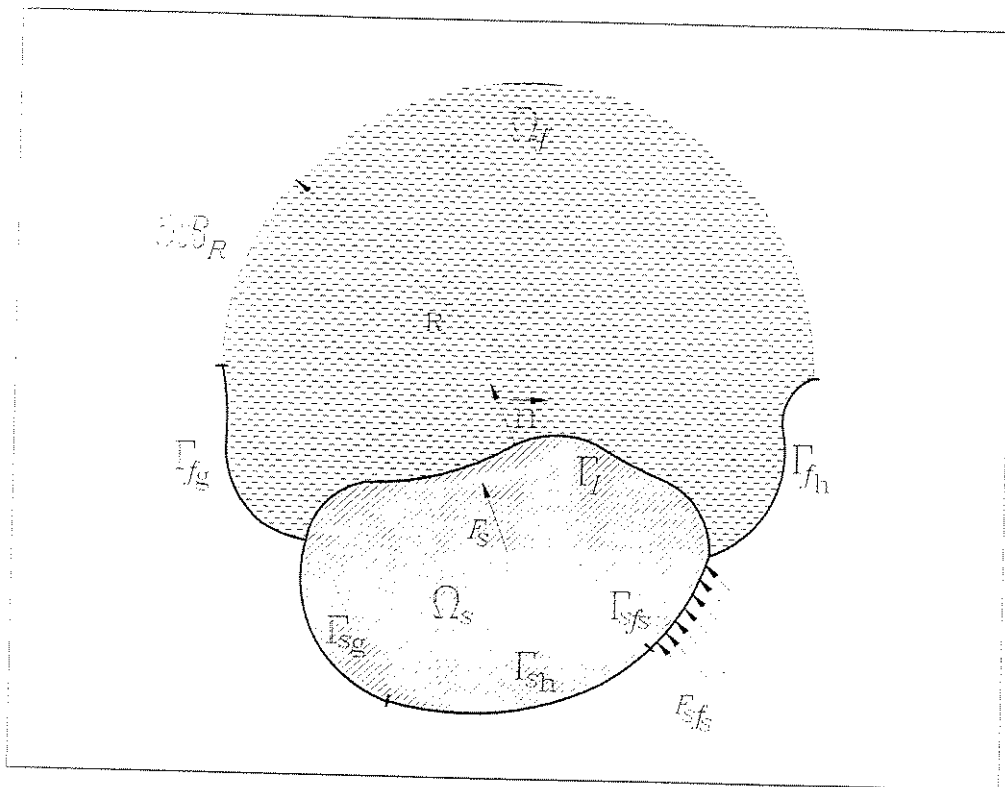


Figura 6.2: Problema Fluido-Estrutura Equivalente

- ψ é o potencial de velocidades;
- f é a contribuição devido as fontes acústicas;
- g_f e h_f são funções conhecidas;
- $\dot{\psi}_{,n}$ é a derivada em relação à normal no contorno da derivada no tempo;
- ρ_f é a densidade do fluido;
- M é o operador DtN ;
- B_R é a fronteira artificial;
- Γ_I é a região da fronteira com interface com a estrutura;
- Ω_s é o domínio estrutural;
- Γ_{sg} é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Dirichlet;
- Γ_{sh} é a região com a Condições de Contorno de Dirichlet;
- $\sigma_{ij,j}(u)$ é derivada da tensão na direção j ;
- ρ_s é a densidade estrutural;
- $\ddot{u}_i$ é a componente i da aceleração $\ddot{u}$;
- f_s é a contribuição das forças externas sobre a estrutura;

$\sigma_{ij}(u)n_j$ é a componente da tensão na direção j ;

F_i é a força de superfície atuando em Γ_{sFS} ;

u_i é a componente i do deslocamento u ;

g_{si} e h_{si} são funções conhecidas;

$u_{i,n}$ é a derivada normal da componente i .

Para este problema de domínio finito, o Método de Elementos Finitos pode ser aplicado diretamente sobre o domínio com as fronteiras com condições de contorno clássicas e de interação fluido-estrutura, sendo que na fronteira artificial o mapeamento DtN pode ser utilizado como condição de contorno natural, como sugerido por KELLER & GIVOLI (1989) [36], obtendo-se a matriz $[D]$. Desta forma, o problema fluido-estrutura em meio fluido infinito discretizado, pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^T & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H + D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

onde $[D]$ é a matriz com os termos do Kernel DtN.

Caso se desconsidere o amortecimento estrutural e os termos proporcionais à derivada no tempo da pressão, tem-se que o sistema pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^T & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H + D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Deve-se notar, que apesar da matriz $[D]$ ser simétrica, a formulação em pressão não é simétrica. Sendo esta uma desvantagem considerável desta formulação, levando-se em conta que seu método de resolução em geral é mais demorado. Outro fator ligado a esta desvantagem é a de que normalmente os programas comerciais de elementos finitos possuem métodos bem desenvolvidos para sistemas simétricos, sendo portanto sistemas deste tipo procurados para a utilização destes programas, GALLI (1995) [19].

Outra característica do sistema encontrado é a dependência da frequência analisada na formação do Kernel DtN. Isto impossibilita obter-se a resposta a vibrações livres di-

retamente, introduzindo-se uma dificuldade em se obter os modos de vibração. Desta forma, a análise mais coerente é a de se obter a resposta à entrada forçada ou resposta à condição de contorno imposta não homogênea.

Por último, deve-se lembrar que a introdução da matriz $[D]$, em geral uma matriz cheia, implica na introdução de uma subregião cheia da matriz global. Esta característica pode ser amenizada considerando-se as técnicas propostas por KELLER & GIVOLI (1989) [36], e discutida no capítulo de análise dos parâmetros do mapeamento DtN. Para sistemas grandes, a introdução desta subregião da matriz cheia não tem uma grande influência no custo computacional total de uma análise.

6.4 Formulação Discreta do Problema em Potencial de Velocidades

O problema de valor de contorno em potencial de velocidades pode ser representado por

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \psi &= f_f & \text{em } \Omega_f & (a) \\
 \psi &= g_f & \text{em } \Gamma_{fg} & (b) \\
 \psi_{,n} &= h_f & \text{em } \Gamma_{fh} & (c) \\
 \psi_{,n} &= \dot{u}_{ni} & \text{em } \Gamma_I & (d) \\
 \sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i &= f_s & \text{em } \Omega_s & (e) \\
 \sigma_{ij}(u)n_i &= F_i & \text{em } \Gamma_{sFS} & (f) \\
 u_i &= g_{si} & \text{em } \Gamma_{sg} & (g) \\
 u_{i,n} &= h_{si} & \text{em } \Gamma_{sh} & (h) \\
 \sigma_{ij}(u)n_i &= -\rho_f \dot{\psi}_{,n} & \text{em } \Gamma_I & (i)
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

onde Ω_f é o domínio fluido discretizado;

Γ_g é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Dirichlet;

Γ_h é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Neumann;

∇^2 é o operador Laplaciano;

ψ é o potencial de velocidades;

f é a contribuição devido as fontes acústicas;

g_f e h_f são funções conhecidas;
 $\dot{\psi}_{,n}$ é a derivada em relação à normal no contorno da derivada no tempo;
 ρ_f é a densidade do fluido;
 Γ_I é a região da fronteira com interface com a estrutura;
 Ω_s é o domínio estrutural;
 Γ_{sg} é a região da fronteira com a Condição de Contorno de Dirichlet;
 Γ_{sh} é a região com a Condições de Contorno de Dirichlet;
 $\sigma_{ij,j}(u)$ é derivada da tensão na direção j ;
 ρ_s é a densidade estrutural;
 $\ddot{u}_i$ é a componente i da aceleração $\ddot{u}$;
 f_s é a contribuição das forças externas sobre a estrutura;
 $\sigma_{ij}(u)n_j$ é a componente da tensão na direção j ;
 F_i é a força de superfície atuando em Γ_{sFS} ;
 u_i é a componente i do deslocamento u ;
 g_{si} e h_{si} são funções conhecidas;
 $u_{i,n}$ é a derivada normal da componente i .

Reformulando-se os termos da interface em pressão para potencial de velocidades, usando-se a igualdade - EVERSTINE (1981) [18],

$$p = -\rho_f \dot{\psi} \quad (6.17)$$

E escolhendo-se as mesmas funções de forma utilizadas anteriormente, tem-se para a integral sobre a interface para o fluido:

$$\left(\int_{\Gamma_I} [N_f]^T \bar{n} [N_s] d\Gamma_f \right) \{\dot{u}_I\} = [L]^T \{\dot{u}_I\} \quad (6.18)$$

Pode-se então reescrever-se a equação dinâmica para o fluido na forma discreta como sendo

$$[E]\{\ddot{\psi}\} + [L]^T \{\dot{u}_I\} + [H]\{\psi\} = \{Q_s\} + \{Q_v\} \quad (6.19)$$

Onde $[L]^T$ é a matriz de acoplamento dinâmico para o fluido.

Agora, tem-se para a integral sobre a interface para a estrutura:

$$\int_{\Gamma_I} v_i \sigma_{ij}(u) n_j d\Gamma_s = -\rho_f \int_{\Gamma_I} v \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma_s \quad (6.20)$$

Aplicando-se Galerkin para escolha da função de ponderação, escolhendo-se as mesmas funções de forma utilizadas anteriormente, pode-se escrever o termo do acoplamento de forma matricial como

$$\rho_f \left(\int_{\Gamma_I} [N_s]^T \tilde{n} [N_f] d\Gamma_s \right) \{\dot{\psi}_I\} = \rho_f [L] \{\dot{\psi}_I\} \quad (6.21)$$

Podendo-se reescrever a equação dinâmica da estrutura na forma discreta como sendo

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_s\} + \{F_v\} - \rho_f [L]\{\dot{\psi}_I\} \quad (6.22)$$

onde $[L]$ é a matriz de acoplamento dinâmico para a estrutura.

Agora, se agruparmos as duas equações dinâmicas num sistema matricial único, tem-se que o sistema acoplado pode ser dado por:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & \rho_f L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

A equação (6.23), que é um sistema matricial não simétrico, representa o problema de interação fluido-estrutura discretizado em elementos finitos para deslocamentos e potencial de velocidades como variáveis incógnitas (u, ψ) . Se utilizar-se o artifício proposto por EVERSTINE (1981) [18], e adotar-se a variável q como sendo

$$\dot{q} = p \quad (6.24)$$

Pode-se reescrever o sistema matricial (6.23) como um sistema simétrico, sendo então

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -E/\rho_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -H/\rho_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ -\frac{Q_s + Q_v}{\rho_f} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Este sistema matricial tem também a vantagem para o caso de oscilações harmônicas de poder resgatar diretamente a pressão como sendo a derivada no tempo dos resultados.

6.5 Inclusão do Mapeamento DtN na Formulação em Potencial de Velocidades

Considerando-se agora um problema de interação entre meio estrutural e meio fluido infinito, pode-se aplicar a discretização em elementos finitos para o problema DtN com interação fluido-estrutura.

Sendo o problema de valor de contorno em potencial de velocidades representado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \psi &= f_f & \text{em } \Omega_f & (a) \\ \psi &= g_f & \text{em } \Gamma_{fg} & (b) \\ \psi_{,n} &= h_f & \text{em } \Gamma_{fh} & (c) \\ \psi_{,n} &= \dot{u}_{ni} & \text{em } \Gamma_I & (d) \\ \psi_{,n} &= -M\psi & \text{em } \partial\mathcal{B}_R & (e) \\ \sigma_{ij,j}(u) - \rho_s \ddot{u}_i &= f_s & \text{em } \Omega_s & (f) \\ \sigma_{ij}(u)n_i &= F_i & \text{em } \Gamma_{sFS} & (g) \\ u_i &= g_{si} & \text{em } \Gamma_{sg} & (h) \\ u_{i,n} &= h_{si} & \text{em } \Gamma_{sh} & (i) \\ \sigma_{ij}(u)n_i &= \rho_f \dot{\psi}_{,n} & \text{em } \Gamma_I & (j) \end{aligned} \quad (6.26)$$

onde $M\psi$ é o operador DtN;

B_R é a fronteira artificial.

Para este problema de domínio finito, o Método de Elementos Finitos pode ser aplicado diretamente sobre o domínio e as fronteiras com condições de contorno clássicas e de interação fluido-estrutura, na fronteira artificial o mapeamento DtN pode ser utilizado como condição de contorno natural, como sugerido por KELLER & GIVOLI (1989) [36], obtendo-se a matriz $[D]$. Desta forma, o problema fluido-estrutura em meio fluido infinito discretizado, pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & \rho_f L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H + D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ Q_s + Q_v \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Caso se deseje um sistema matricial simétrico na variável q , pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -E/\rho_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -\frac{H+D}{\rho_f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s + F_v \\ -\frac{Q_s + Q_v}{\rho_f} \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

Sendo este sistema o preferido caso se dejesse usar programas comerciais que utilizem a propriedade de simetria do sistema para extração dos resultados.

6.6 Obtenção da Matriz de Acoplamento

Para obter-se a matriz de acoplamento entre o elemento de pórtico e o elemento de fluido, deve-se avaliar a integral dada por

$$[L] = \left(\int_{\Gamma_f} [N_s]^T \tilde{n} [N_f] d\Gamma_s \right) \quad (6.29)$$

Sabendo-se que

$$[N_s] = \begin{bmatrix} \xi & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 1 - \xi & 3\xi^2 - 2\xi^3 & L(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

E que

$$[N_f] = \begin{bmatrix} \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Efetutando-se os cálculos da equação (6.29), para o caso de um elemento alinhado com o eixo x do referencial global, chega-se a:

$$[L] = L \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7/20 & 3/20 \\ L/20 & L/30 \\ 0 & 0 \\ 3/20 & 7/20 \\ -L/30 & -L/20 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Sendo a matriz dada por (6.32) a matriz de acoplamento para problemas com acoplamento entre elementos pórticos e elementos de fluido triangulares ou quadrangulares lineares.

Capítulo 7

Investigação do Método de Mapeamento DtN

7.1 Introdução

Neste capítulo investiga-se o comportamento do método de mapeamento DtN proposto para o caso bi-dimensional em relação a escolha do raio da fronteira artificial, do nível de discretização necessário para uma boa resolução numérica, e da escolha adequada do número de termos do Kernel DtN. Para isso, foram obtidos alguns resultados onde se comparam as soluções analíticas exatas de problemas clássicos com os resultados obtidos usando-se a discretização por elementos finitos com mapeamento DtN, apresentados também em ZAVALA & PAVANELLO (1998) [64]. Nesta investigação, o comportamento obtido para o método para meios infinitos e para o método para meios semi-infinitos é o mesmo. Escolhendo-se, por simplicidade, exemplos em meio infinito. A discussão da influência da escolha dos parâmetros do Mapeamento DtN é feita levando-se em conta os resultados obtidos por KELLER & GIVOLI (1989) [36], e HARARI & HUGHES (1992) [31], para exemplos em meio infinito. Por último, analisa-se o comportamento do método de expansão de resultados para meios infinitos e semi-infinitos, discutindo-se suas principais características, confirmando os resultados obtidos em ZAVALA & PAVANELLO (1998) [65].

7.2 Cilindro Pulsante

O primeiro exemplo escolhido é um cilindro infinito, de raio a , pulsando uniformemente. A solução exata é a mesma de radiação para meio infinito a partir de uma fronteira circular, sendo que neste exemplo, a solução se reduz ao primeiro termo da série. Adotando-se o potencial de velocidades real e unitário no contorno do cilindro, tem-se como solução exata com a condição de contorno aplicada, HARARI & HUGHES (1992) [31]:

$$\psi(r, \theta) = \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(ka)} \quad (7.1)$$

A fronteira artificial é posicionada inicialmente em $R = 2a$, e o domínio computacional é discretizado em 3×32 elementos quadrilaterais bi-lineares. A malha com a numeração dos nós escolhida segundo sugestão de KELLER & GIVOLI (1989) [36] está mostrada na figura 7.1.

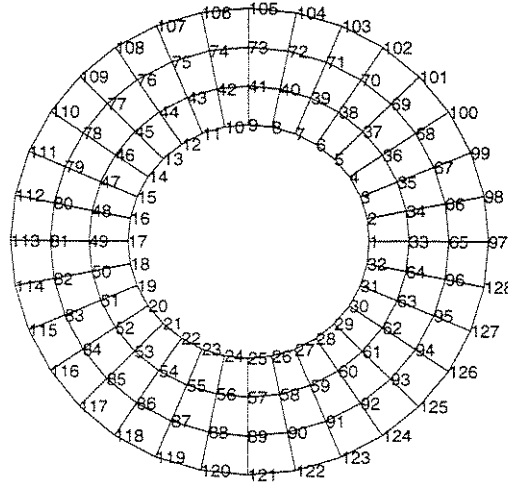


Figura 7.1: Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 2a$; seis elementos por comprimento de onda.

Com esta malha obteve-se resultados para $ka = \pi$, ou seja, uma discretização de seis elementos por comprimento de onda. Esta discretização é considerada uma discretização mínima necessária para boa resolução da forma da resposta. Verificou-se que a utilização de apenas um termo da série na formação do Kernel DtN ($n = 0$), com a contribuição da

primeira harmônica, trouxe bons resultados, sendo que o uso de um número de termos maior não implicou em melhoria significativa dos resultados. Isto pode ser explicado se levar-se em conta que a solução exata do problema possui apenas a contribuição da primeira harmônica. Baseados nisto, foram usados apenas quatro termos para a formação do Kernel DtN, obtendo-se resultados idênticos aos encontrados na literatura, HARARI & HUGHES (1992) [31]. Os resultados podem ser observados nas figuras 7.2 e 7.3.

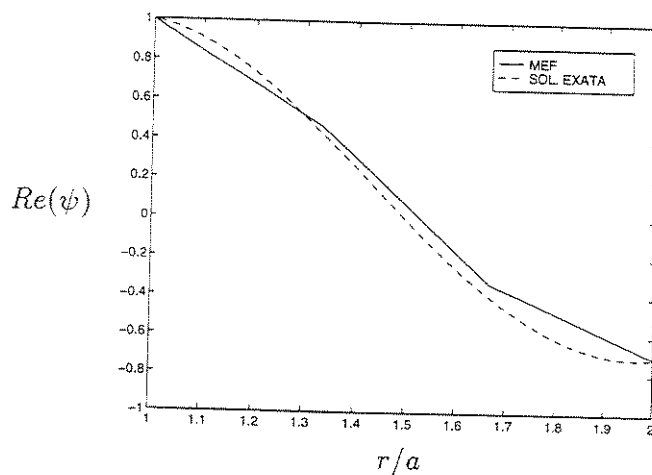


Figura 7.2: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Real.

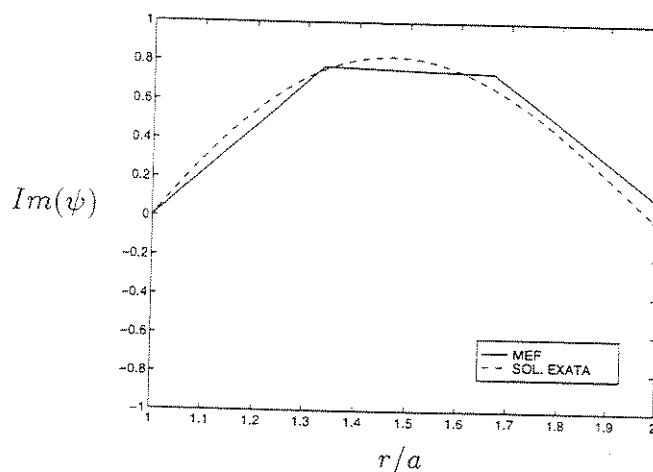


Figura 7.3: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.

Observa-se que apesar da discretização ser bastante baixa, os valores obtidos são próximos ao da solução exata. Observa-se também que na fronteira artificial a parte real da resposta se aproxima melhor do que a parte imaginária, que indica uma pequena deterioração dos resultados.

Para analisar-se a influência da escolha do parâmetro R , raio da fronteira artificial, escolheu-se uma malha com $R = 5a$, sendo o domínio computacional discretizado em 12×32 elementos quadriláteros bi-lineares. A malha obtida para este caso pode ser visualizada na figura 7.4.

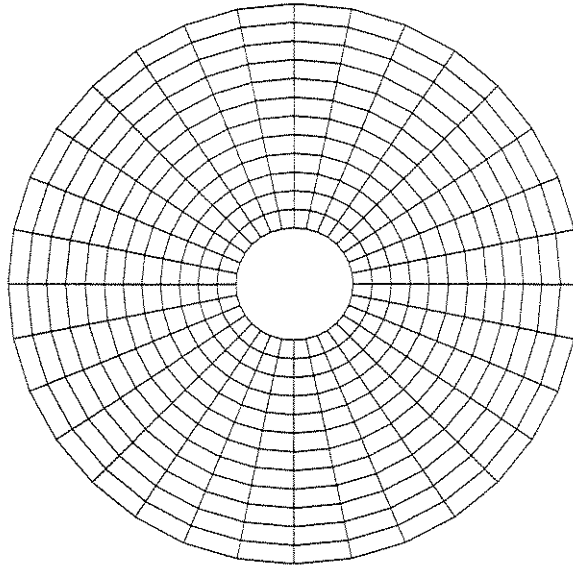


Figura 7.4: Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Seis elementos por comprimento de onda.

Obteve-se resultados mantendo-se a mesma discretização, ou seja, para $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda, e novamente considerando-se quatro termos da série na formação do Kernel DtN. Sendo os resultados mostrados nas figuras 7.5 e 7.6.

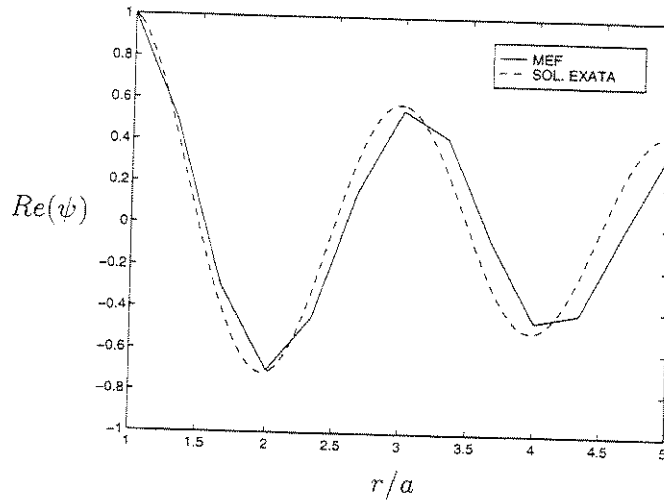


Figura 7.5: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Real.

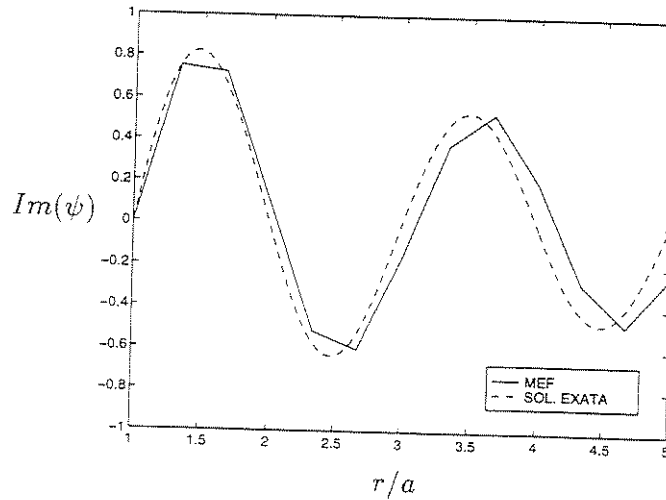


Figura 7.6: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.

Observa-se que para este caso tem-se que o aumento da fronteira artificial piora os resultados na fronteira. Este fato está intimamente relacionado à baixa resolução da malha, já que os resultados até $r/a = 2$ são os mesmos da análise anterior. Observa-se

claramente que há um desvio na fase entre as soluções numéricas e analíticas, que se propaga ao longo do domínio.

Para se verificar a influência da discretização radial utilizada, testaram-se duas malhas mais refinadas, dez e vinte elementos por comprimento de onda. O domínio computacional nestes casos possuem 20×32 e 40×32 elementos quadrilaterais bi-lineares. As malhas utilizadas podem ser vistas nas figuras 7.7 e 7.8.

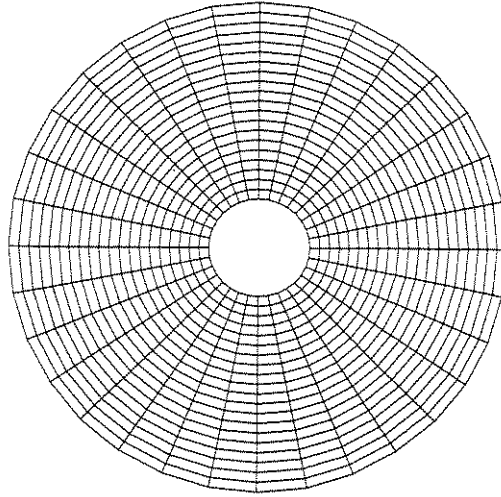


Figura 7.7: Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Dez elementos por comprimento de onda.

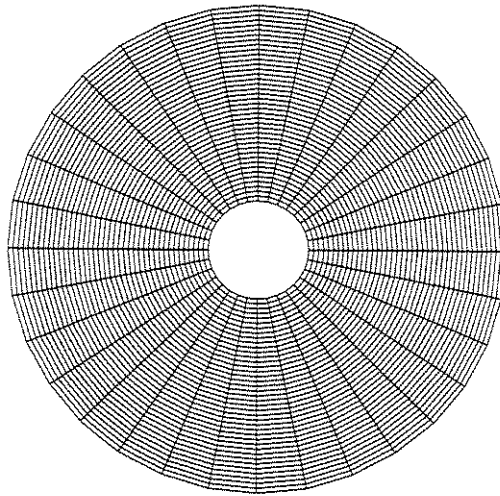


Figura 7.8: Malha de Elementos Finitos escolhida para a discretização do fluido em torno do cilindro: $R = 5a$; Vinte elementos por comprimento de onda.

Obteve-se uma melhora substancial dos resultados, como pode ser visto nas figuras 7.9 a 7.12.

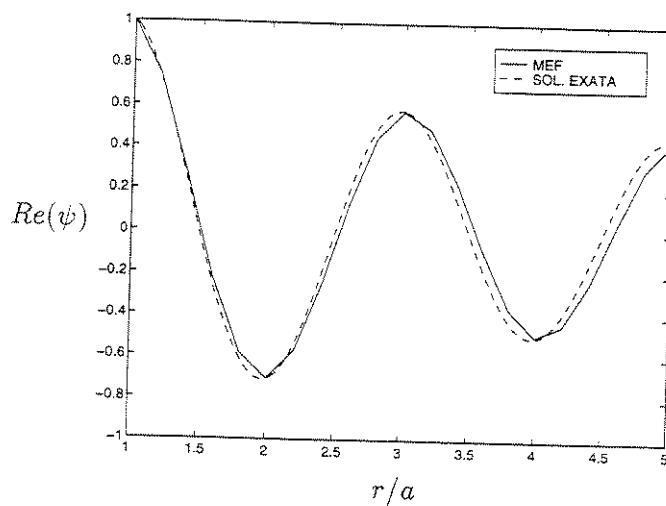


Figura 7.9: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, dez elementos por comprimento de onda. Parte Real.

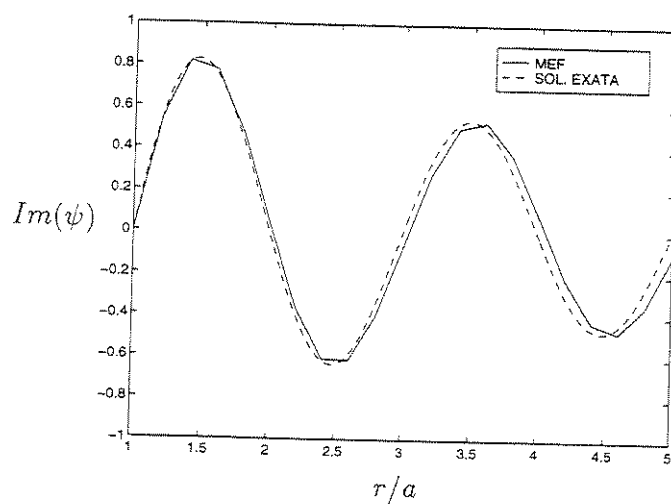


Figura 7.10: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, dez elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.

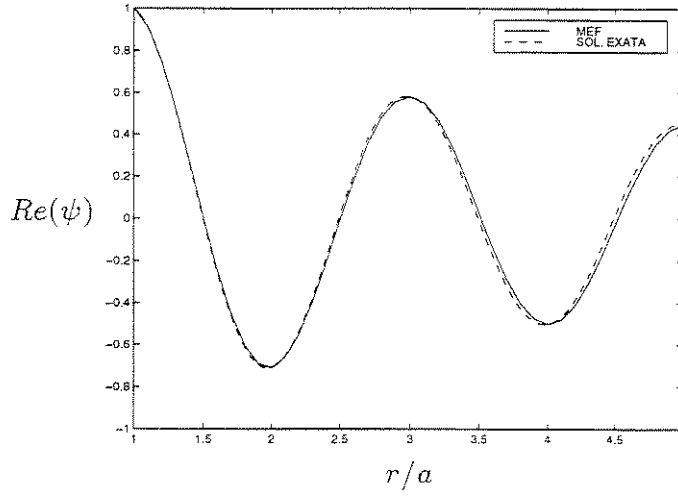


Figura 7.11: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, vinte elementos por comprimento de onda. Parte Real.

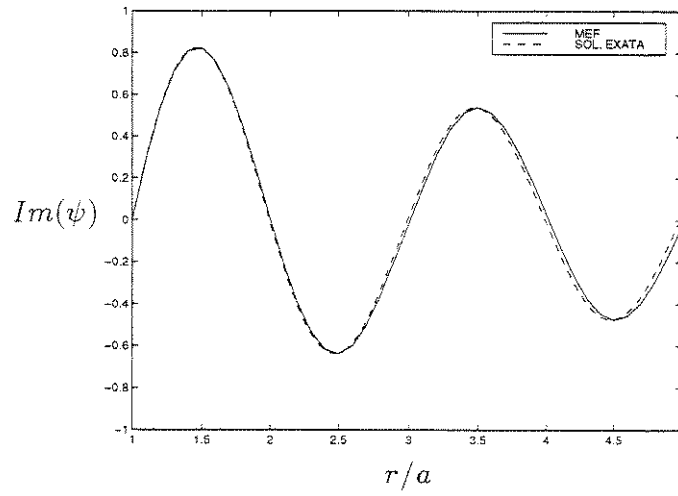


Figura 7.12: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 5a$, $ka = \pi$, vinte elementos por comprimento de onda. Parte Imaginária.

Para ter-se uma idéia melhor da aproximação em relação a solução exata em todo o domínio foi utilizado um Erro Médio Quadrático (E_{mq}), definido neste trabalho como:

$$E_{mq} = \sqrt{\frac{1}{n_{\Omega} - 1} \sum_{n_{\Omega}} (\psi_i - \psi_{exato})^2} \quad (7.2)$$

onde n_{Ω} é o numero total de nós do problema discretizado. Assim, para as discretizações de seis, dez e vinte elementos por comprimento de onda para $R = 5a$, tem-se os erros encontrados mostrados na tabela 7.1.

<i>Erro Médio Quadrático</i>		
<i>Discretização</i>	<i>Parte Real</i>	<i>Parte Imaginária</i>
seis	0,1338	0,1279
dez	0,05611	0,05748
vinte	0,02413	0,02423

Tabela 7.1: EMQ para seis, dez e vinte elementos por comprimento de onda.

Estes resultados confirmam a melhora substancial da aproximação em todo o domínio ao se aumentar a discretização interna, sem alterar-se a discretização da fronteira artificial, todavia o erro na fase continua presente. O estudo de técnicas de modelagem que evite este tipo de erro, é bastante atual, e estão fora do escopo deste trabalho.

7.3 Cilindro Vibrando Harmonicamente

O segundo exemplo considerado é o de um cilindro, de raio a , vibrando harmonicamente para o meio infinito, sendo que em seu contorno a radiação segue $\cos n\theta$. A solução analítica exata pode ser dada por (HARARI & HUGHES (1992) [31]):

$$\psi(r, \theta) = \frac{H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta)}{H_n^{(1)}(ka)} \quad (7.3)$$

onde $H_n^{(1)}$ é a função de Hankel de primeira ordem; θ é o ângulo associado a cada ponto na fronteira artificial em relação ao seu centro. Tomando-se a discretização inicial de 3×32 elementos e $R = 2a$, obteve-se o comportamento da variável no domínio, figuras 7.13 e 7.14.

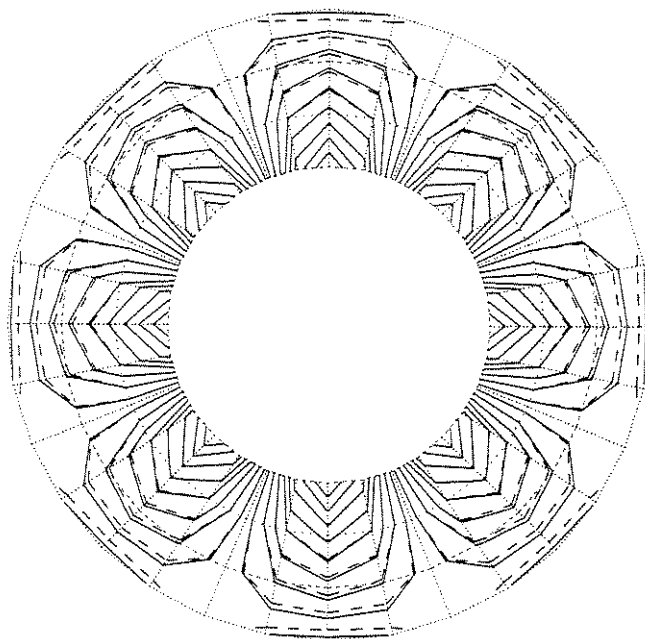


Figura 7.13: Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.

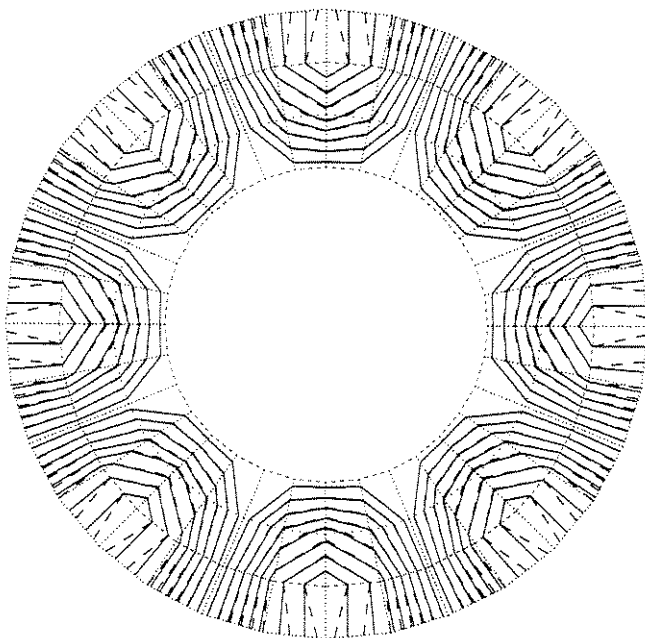


Figura 7.14: Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.

Para este problema, obteve-se também a solução na fronteira, cujas partes real e imaginária são mostradas nas figuras 7.15 e 7.16.

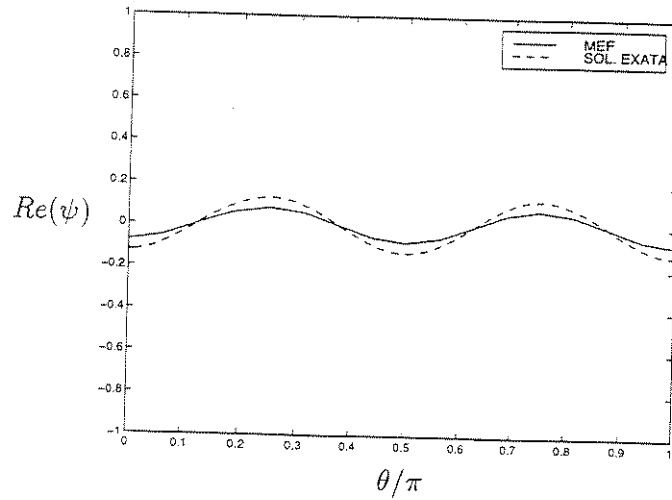


Figura 7.15: Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, seis elementos por comprimento de onda, ao longo da fronteira artificial. Parte Real.

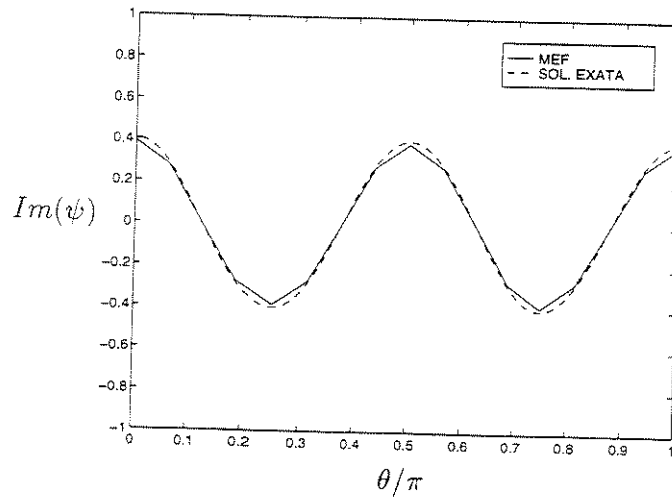


Figura 7.16: Radiação circunferencialmente harmônica ($n = 4$) de um cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, seis elementos por comprimento de onda, ao longo da fronteira artificial. Parte Imaginária.

Os resultados foram obtidos considerando-se cinco termos da série para formação do Kernel DtN, pois verificou-se que menos do que isso, trariam resultados ruins e maiores não melhorariam os resultados significativamente. Este fato pode ser explicado se levar-se em conta que a solução analítica para este problema tem a forma da quinta harmônica ($n = 4$), assim, os resultados só são bem aproximados se este termo é incorporado na formação do Kernel DtN. Observa-se também, que os resultados são menos precisos nas regiões próximas as fronteiras artificiais, devido a degradação da fase.

7.4 Cilindro com Arco Vibrante

Para investigar-se o comportamento do método proposto para a obtenção de soluções aproximadas para campos mais complexos, considera-se como problema a radiação a partir de um arco (de $-\alpha$ a α) de um cilindro de raio a , ou seja, potencial de velocidades igual a um no arco (condição de contorno de Dirichlet não homogênea) e zero no restante do cilindro (condição de contorno de Dirichlet homogênea), considerando-se novamente as mesmas propriedades e discretizações utilizadas no primeiro exemplo. A solução analítica para este caso pode ser dada por (HARARI & HUGHES (1992) [31]):

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} \cos n(\theta - \theta_H) d\theta_H \quad (7.4)$$

onde $H_n^{(1)}$ é a função de Hankel de primeira ordem; O símbolo primo depois do somatório indica que o primeiro termo é multiplicado pelo fator $1/2$; θ é o ângulo do ponto onde se deseja a solução; θ_H é o ângulo usado na integração ao longo do arco.

Os resultados numéricos foram obtidos considerando-se $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, utilizando-se condição de contorno imposta não homogênea no arco, vide COOK, MALKUS & PLESHA (1989) [13], e homogênea no resto do cilindro. O comportamento da variável no domínio pode ser observado nas figuras 7.17 e 7.18.

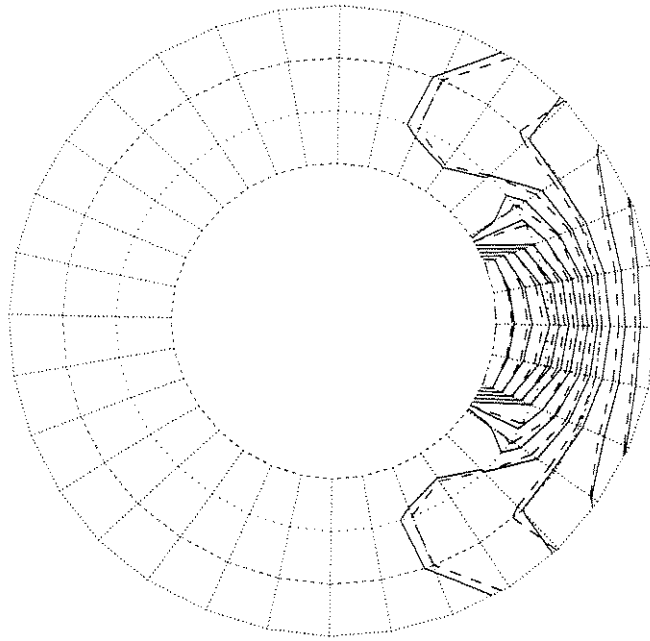


Figura 7.17: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.

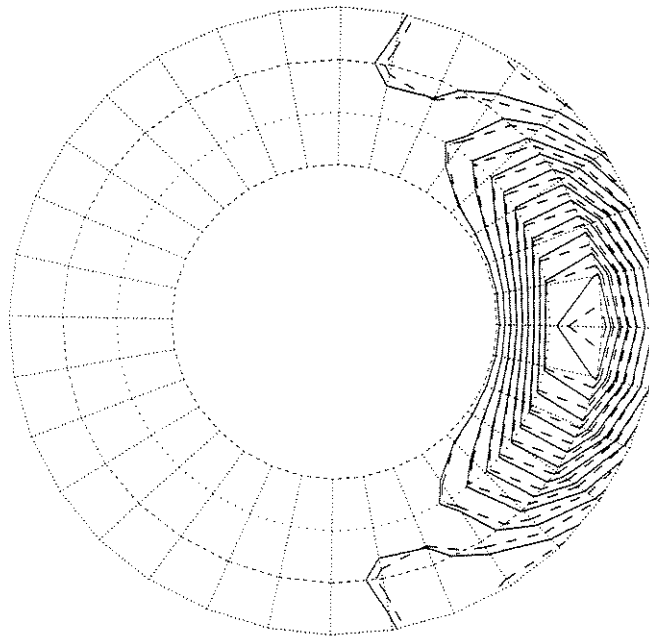


Figura 7.18: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.

Obteve-se também a solução na fronteira, cujas partes real e imaginária são mostradas nas figuras 7.19 e 7.20.

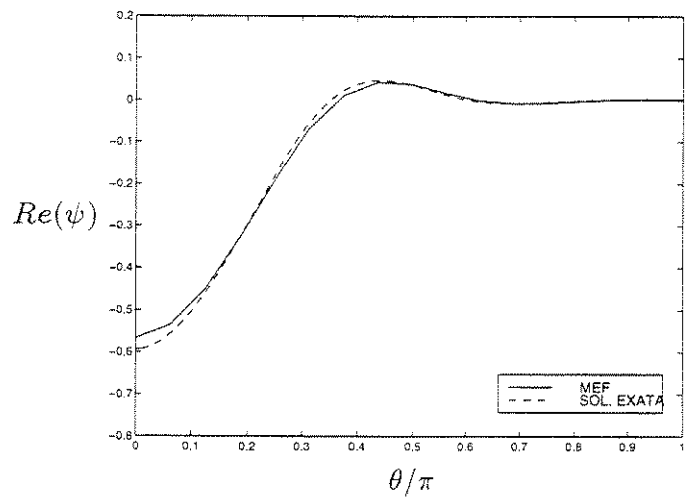


Figura 7.19: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Real.

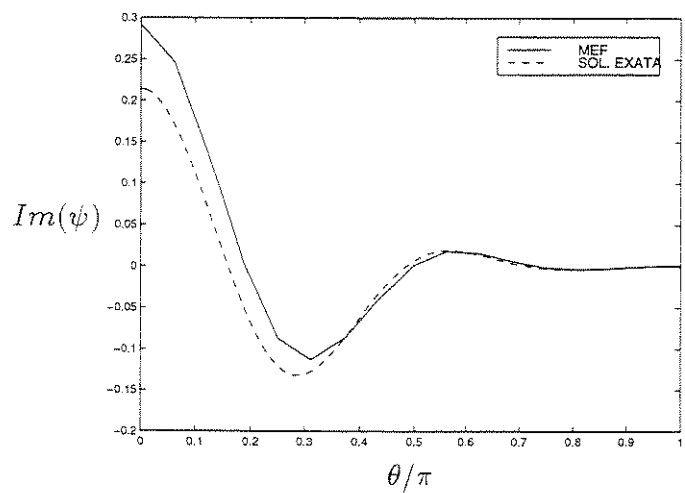


Figura 7.20: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, discretização inicial, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Imaginária.

Os resultados foram obtidos considerando-se 8 termos para a formação do Kernel DtN ($n = 7$). Na figura 7.21 mostra-se o comportamento da aproximação avaliada a partir do erro definido na equação (7.2), ao considerar-se diferentes números de termos na série.

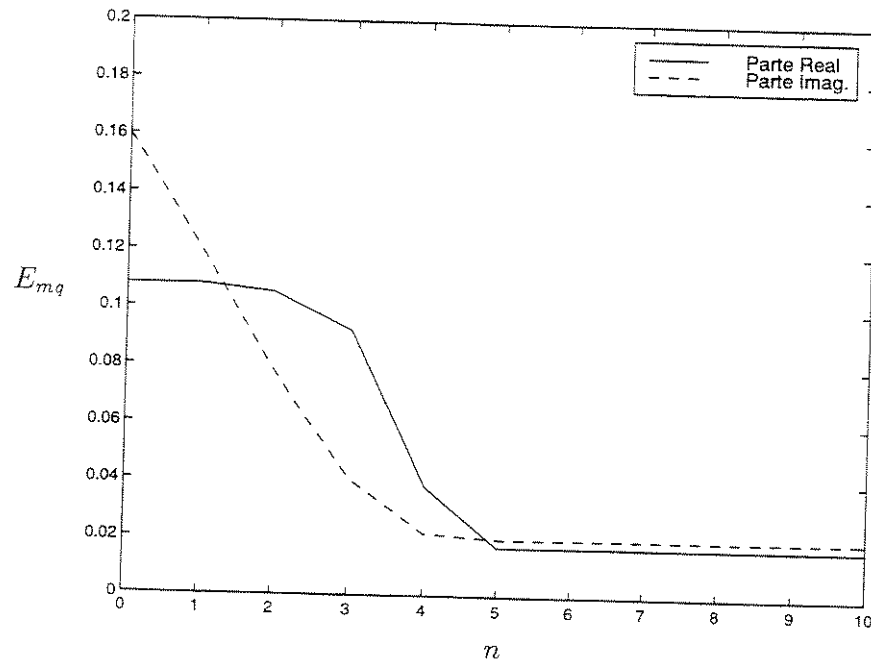


Figura 7.21: Comportamento da aproximação em relação ao número de termos da série considerados, malha 3×32 elementos.

Nesta figura observa-se que a partir de um número pequeno de termos a aproximação alcança um nível baixo de erro em relação a solução exata. Deve-se levar em conta que a solução exata utilizada na comparação foi obtida com 176 termos na série, indicando uma dificuldade na representação da condição de contorno adotada no contorno do cilindro pela solução analítica. Em contrapartida, a consideração de poucos termos na solução numérica pode ser explicada por ter-se a dificuldade de representação da variável na fronteira artificial amenizada em relação à representação da variável no contorno do cilindro.

Para analisar-se a influencia da discretização do domínio como um todo na qualidade dos resultados, foi construída uma malha refinada nos pontos com altos gradientes mantendo-se o número total de elementos. A malha pode ser vista na figura 7.22.

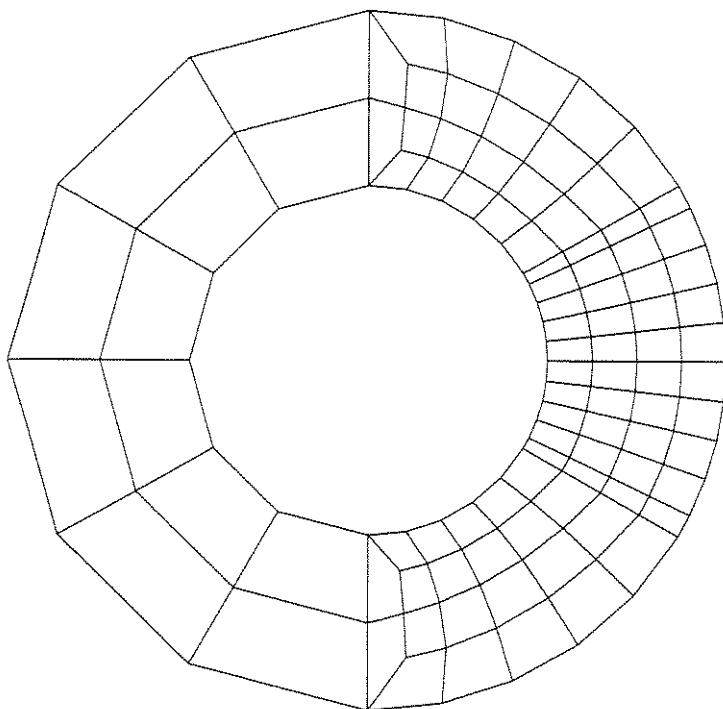


Figura 7.22: Malha de Elementos Finitos escolhida para uma discretização mais refinada do fluido próximo ao arco radiante: $R = 2a$.

O comportamento do campo solução aproximado, partes real e imaginária, pode ser visto nas figuras 7.23 e 7.24, respectivamente. Nestas figuras observa-se uma melhora substancial dos resultados na região mais refinada.

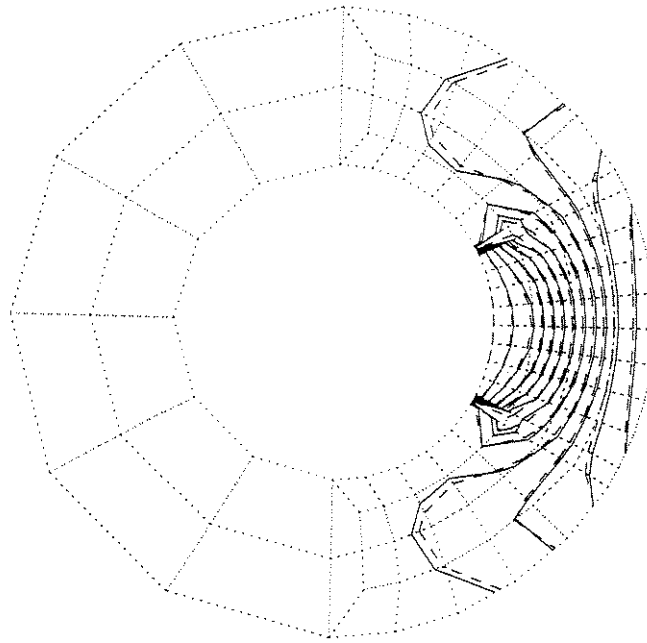


Figura 7.23: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.

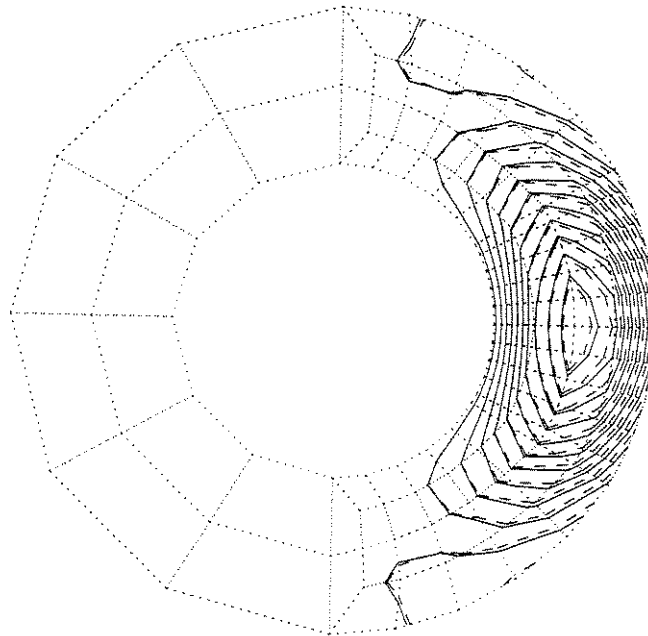


Figura 7.24: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, $R = 2a$, linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.

Obteve-se também a solução na fronteira, cujas partes real e imaginária são mostradas nas figuras 7.25 e 7.26.

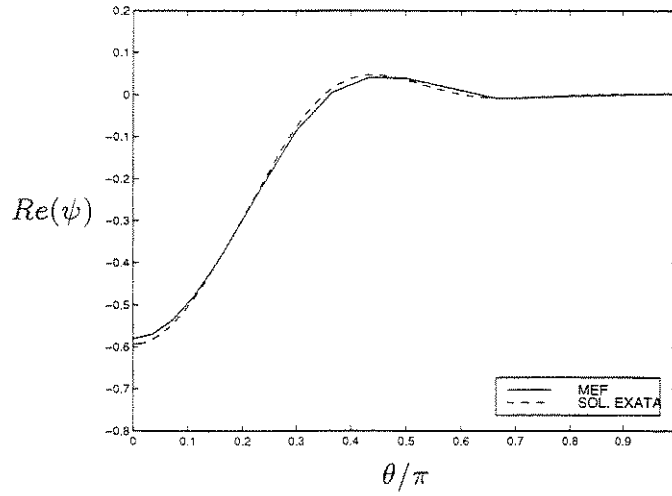


Figura 7.25: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Real.

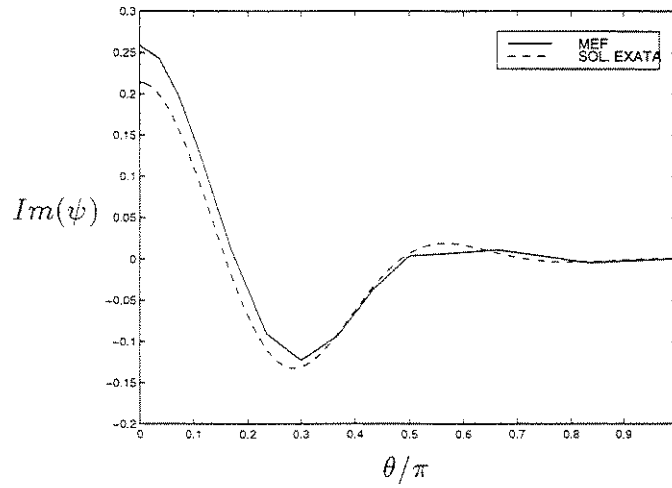


Figura 7.26: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, domínio refinado, ao longo da fronteira artificial $R = 2a$. Parte Imaginária.

Obteve-se resultados considerando-se 8 termos para a formação do Kernel DtN. Na figura 7.27 mostra-se o comportamento da aproximação ao considerar-se diferentes números de termos na série.

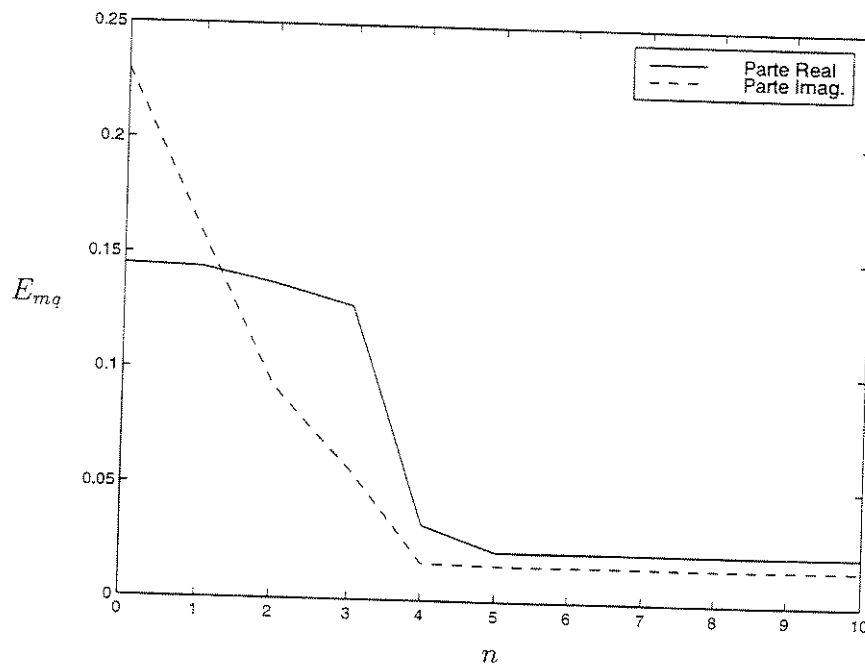


Figura 7.27: Comportamento da aproximação em relação ao número de termos da série considerados, malha refinada.

Novamente, considerando-se poucos termos da série para formação do Kernel DtN, este atinge um valor mínimo de erro. Desta vez, porém, o erro para a parte real se estabiliza num patamar um pouco acima do anterior, e a parte imaginária, por sua vez, alcança um patamar mais baixo, mostrando uma aproximação melhor.

Os resultados mostram que um baixo refinamento numa região com baixo gradiente do campo aproximado, incluindo-se o refinamento da fronteira artificial, não compromete os resultados numa região mais refinada e com gradientes maiores, sendo a escolha do número de termos pouco dependente da distribuição da discretização ao longo da fronteira artificial, neste exemplo.

Tal constatação, embora feita a partir de testes simples, permite afirmar que o uso

de malhas não uniformes na fronteira artificial, não deterioram as soluções do problema.

De uma forma global, pode-se dizer que os resultados obtidos concordam com as soluções analíticas de forma satisfatória, indicando o bom desempenho do Método e a adequação da implementação realizada.

7.5 Análise da Influência dos Parâmetros

Segundo KELLER & GIVOLI (1989), dois enfoques podem ser dados para a escolha dos parâmetros R e n , raio da fronteira artificial e número de termos da série do Kernel DtN respectivamente. A primeira consiste em tomar-se o raio da fronteira artificial como sendo o menor possível que contenha a região de interesse, sendo necessário, nesse caso, adotar-se um número de termos da série do Kernel DtN que represente bem a distribuição da variável na fronteira artificial. O outro enfoque, é o de considerar-se apenas um termo da série do Kernel DtN e buscar-se um valor para o raio da fronteira artificial, R , onde a distribuição da variável na fronteira artificial siga aproximadamente a primeira harmônica da solução exata. Sendo, a melhor escolha, uma relação intermediária entre estes dois enfoques.

No primeiro enfoque, minimiza-se o custo computacional da resolução do domínio discretizado, e no segundo minimiza-se o custo computacional da obtenção do mapeamento DtN. A importância de cada enfoque na escolha dos parâmetros deve levar em conta o tamanho do domínio discretizado, e a complexidade do comportamento da variável incógnita no contorno externo. Para problemas com região de interesse muito grande, deve-se privilegiar o primeiro enfoque, e para problemas complexos deve-se privilegiar o segundo enfoque. Esta característica do método é uma vantagem considerável em termos de economia de processamento para problemas com região de interesse grandes, onde se deseja obter uma solução aproximada a um custo computacional aceitável.

A partir dos exemplos mostrados vai-se investigar estas características do método. Assim, no primeiro exemplo mostrado, cilindro pulsando uniformemente, tomando-se o primeiro caso, $R = 2a$ e discretização de seis elementos por comprimento de onda, e

comparando-se com o caso em que $R = 5a$, tendo a mesma discretização de seis elementos por comprimento de onda, observou-se que a escolha de R tanto mais perto possível da região de interesse traz resultados menos deteriorados pela baixa discretização. Para este caso, onde a forma da distribuição da variável na fronteira artificial segue a primeira harmônica, o primeiro enfoque deve ser adotado, já que o estendimento da fronteira artificial ao invés de melhorar a aproximação, introduz erro devido a baixa discretização.

Ao comparar-se agora, os casos onde $R = 5a$, com discretização de seis, dez e vinte elementos por comprimento de onda, observa-se que um maior refinamento do domínio discretizado melhora a solução aproximada em todo o domínio, sendo a discretização com dez elementos por comprimento de onda considerada adequada para análises com este método.

No segundo exemplo, cilindro vibrando harmonicamente, observou-se que a escolha adequada do número de termos da série para formação do Kernel DtN está exclusivamente ligada a forma da solução na fronteira artificial em relação as harmônicas da solução analítica exata. A solução completa é a soma da contribuição de todos os modos harmônicos ao longo da fronteira, e neste exemplo a radiação segue a forma do quarto modo. Sendo portanto os resultados melhor aproximados ao considerar-se até o quarto modo.

No exemplo do arco do cilindro vibrando, com $R = 2a$, $ka = \pi$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, observou-se que a influência da escolha da discretização sobre o número de termos para a formação do Kernel DtN se mostrou pequena, já que o número de termos considerados é o mesmo para as duas malhas escolhidas. Mas, a influência da discretização do domínio, discretização radial e angular, melhora os resultados nodais onde este está bem representado e piora onde este não está bem representado, figuras 7.17 a 7.20, e 7.23 a 7.26. Esta característica indica que o maior refinamento deve ser priorizado na região de interesse sem um comprometimento do Mapeamento DtN.

Desta forma, para problemas mais complexos, onde a distribuição da radiação ao longo da fronteira segue formas mais complexas e variadas, a escolha de um maior número de termos da série para formação do DtN melhora os resultados, porém existe um número

mínimo para uma boa aproximação e um número máximo, a partir do qual não se acrescenta muita informação, e pode-se até introduzir erros numéricos devido a avaliação numérica da função de Hankel e sua derivada.

Em relação à discretização da fronteira artificial, esta deve ser coerente com a discretização do domínio interno, já que a solução aproximada na fronteira depende da boa representação da variável no domínio interno. O refinamento angular na fronteira artificial portanto deve seguir o refinamento adequado ao domínio finito, não exigindo um posicionamento especial para a formação do mapeamento DtN.

Assim, o método DtN para tratamento de meio infinito utilizando o MEF possui uma série de características vantajosas. Entre elas, a de possibilitar a escolha do domínio discretizado tanto menor quanto possível sem comprometer os resultados (importante para análise de domínios grandes), a inclusão no método de Galerkin de maneira direta na forma fraca do problema, e a propriedade de ser derivada da solução exata e por isso corresponder a uma solução única e não reflexiva na fronteira. Porém algumas características devem ser observadas com cautela: A criação de uma subregião cheia na matriz global do sistema; o compromisso entre o refinamento da malha, a resolução numérica, e a frequência estudada; e o número de termos necessários para a convergência do operador DtN.

7.6 Análise da Expansão de Resultados

Para analisar-se o comportamento do método de expansão de resultados, para obtenção de campos distantes, considera-se inicialmente o primeiro exemplo utilizado, cilindro pulsante. Neste exemplo, tem-se 3×32 elementos, $R = 2a$, onde a é o raio do cilindro, $ka = \pi$, e seis elementos por comprimento de onda. Os resultados foram obtidos com o mesmo número de termos do DtN Kernel, 4 termos, sendo a distribuição radial mostrada nas figuras 7.28 e 7.29, onde R_{DE} é o raio do domínio estendido.

Os resultados demonstram que apesar da baixa discretização, da deterioração dos resultados obtidos na fronteira, os resultados expandidos (identificados por RES. EXP.) mantêm a forma da solução exata, com uma pequena diferença de fase.

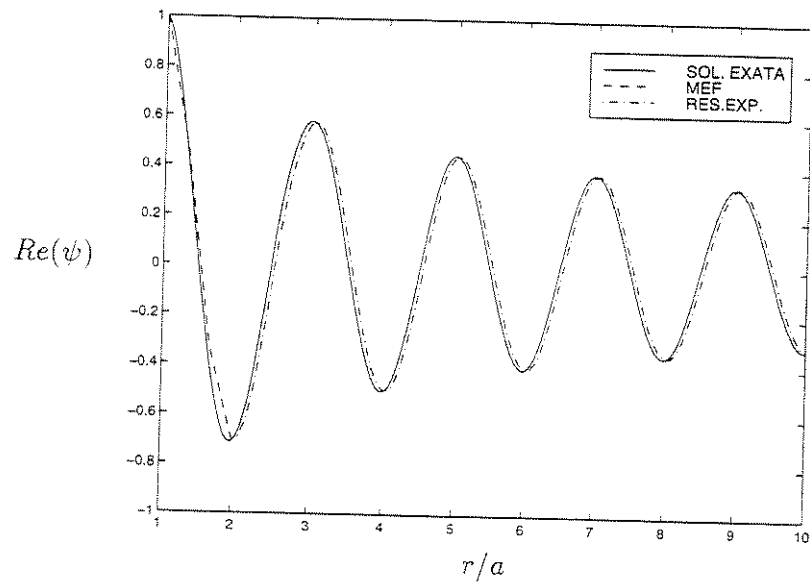


Figura 7.28: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Expansão para $R_{DE} = 10a$. Parte Real.

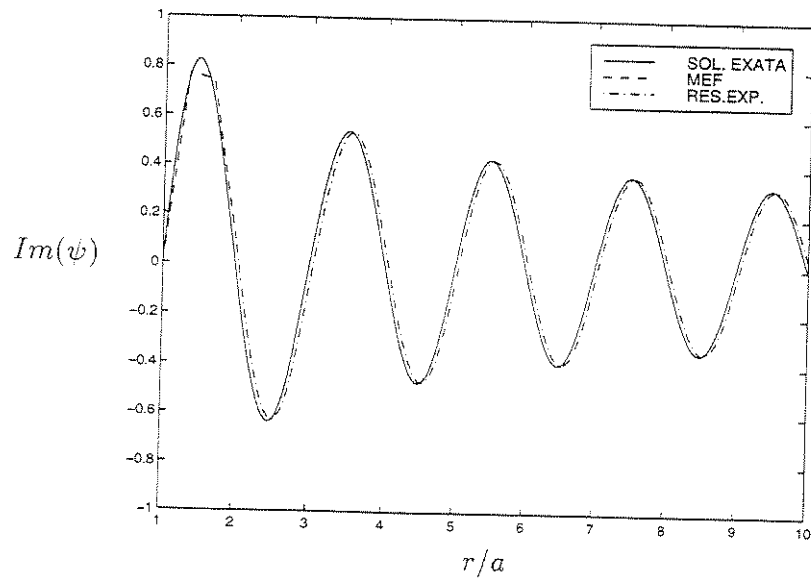


Figura 7.29: Cilindro uniformemente pulsante de raio a , $R = 2a$, $ka = \pi$, seis elementos por comprimento de onda. Expansão para $R_{DE} = 10a$. Parte Imaginária.

Para analisar-se o comportamento do método em campos mais complexos foi escolhido o exemplo de cilindro com arco radiante. Neste exemplo tem-se $R = 2a$, $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$, e a mesma discretização anterior. O arco $(-\alpha \text{ a } \alpha)$ possui condição de contorno não homogênea imposta e no restante do cilindro tem-se condição de contorno homogênea. Os resultados para o domínio estendido foram obtidos com o mesmo número de termos usada na formação do Kernel DtN para solução do domínio discretizado, ou seja, 8 termos. Optou-se por mostrar-se os resultados expandidos para um domínio com $R_{DE} = 4a$, sendo R_{DE} o raio do domínio estendido, mas a escolha de qualquer região fora do domínio discretizado pode ser feita. O comportamento da variável no domínio estendido podem ser vistas nas figuras 7.30 e 7.31.

Para analisar-se o método para problemas em meio semi-infinito, o exemplo escolhido é análogo ao de arco de cilindro radiante, porém neste caso sendo arco de semi-cilindro vibrando em meio semi-infinito. Com semi-cilindro de raio a , fronteira artificial com $R = 2a$, $ka = \pi$, $\alpha = 5\pi/32$ (arco de 0 a $\alpha \text{ rad}$), e a mesma discretização anterior, seis elementos por comprimento de onda, ou 3×16 elementos.

Por ter-se simetria no problema de cilindro com arco radiante, os resultados obtidos são iguais para a região considerada. Os resultados da expansão de resultados para $R_{DE} = 4a$, podem ser observados nas figuras 7.32 e 7.33. Novamente, o comportamento dos métodos é o mesmo.

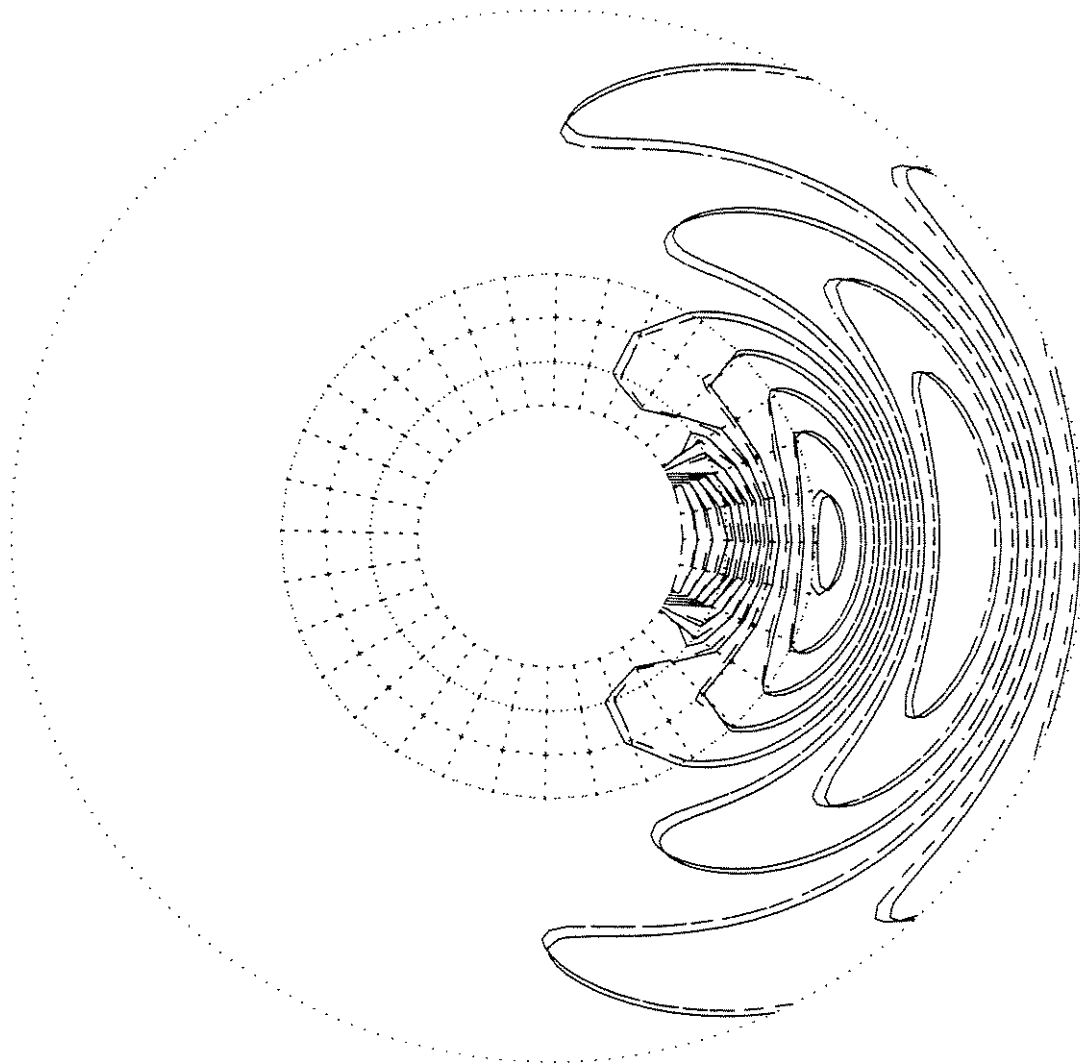


Figura 7.30: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.

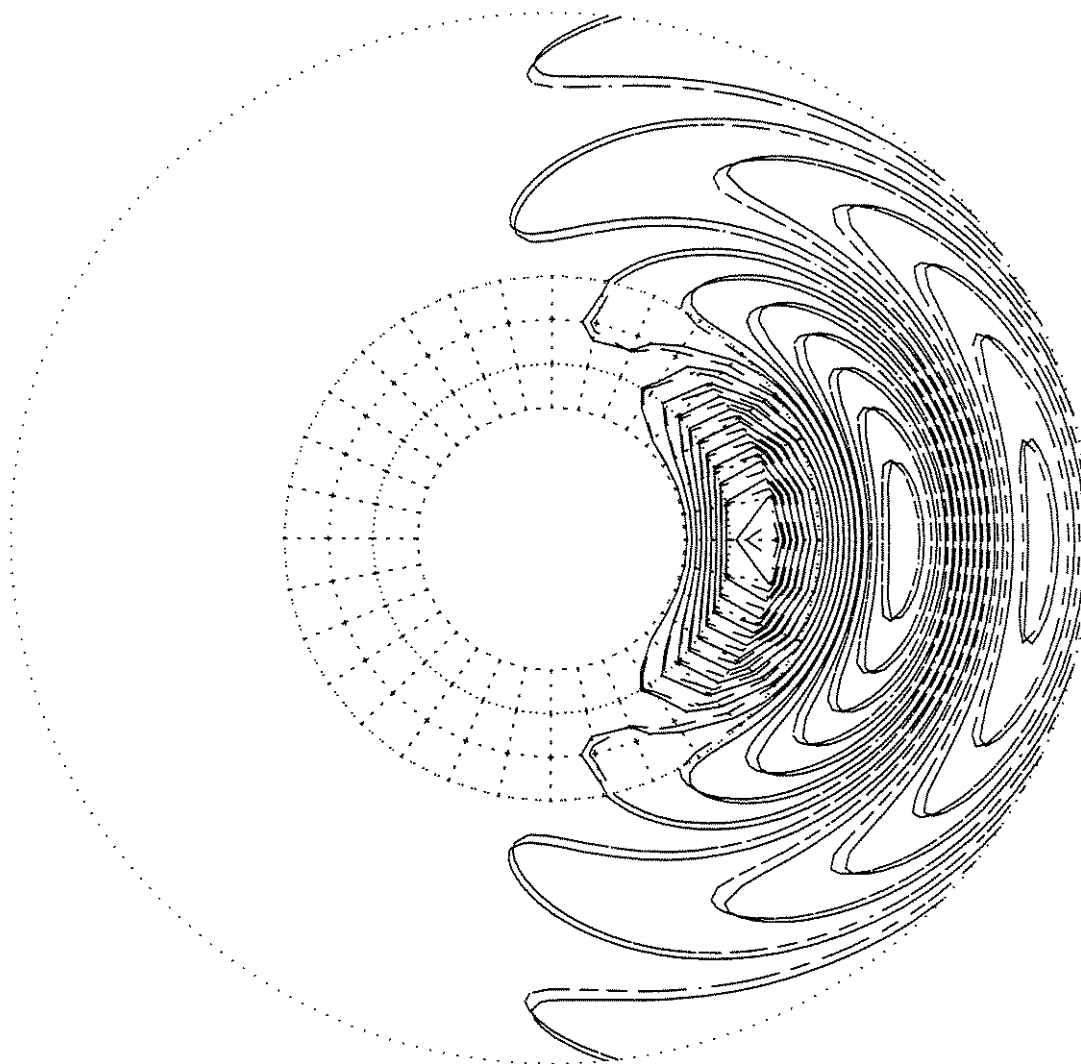


Figura 7.31: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.

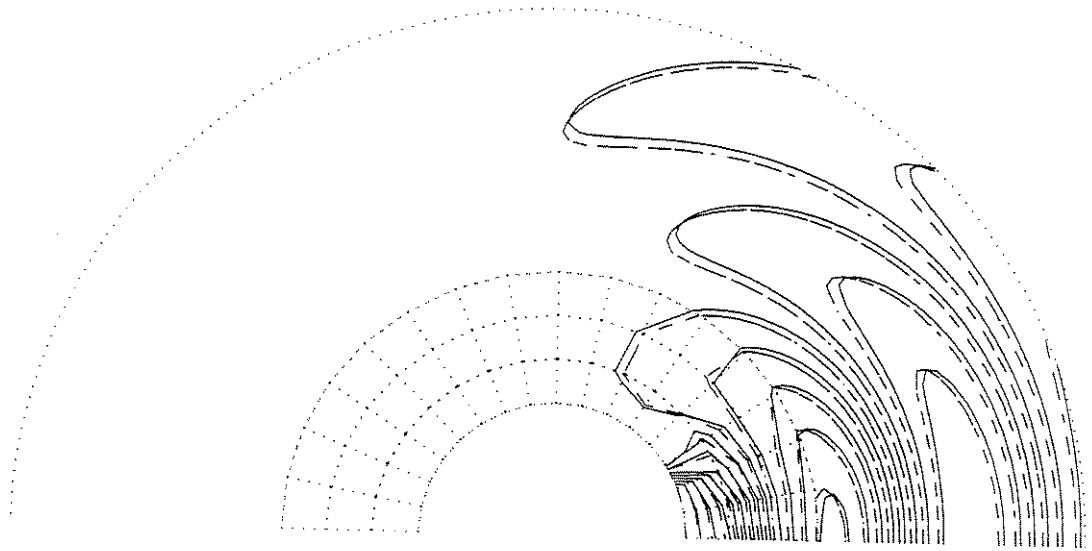


Figura 7.32: Radiação a partir de um arco do semi-cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Real.

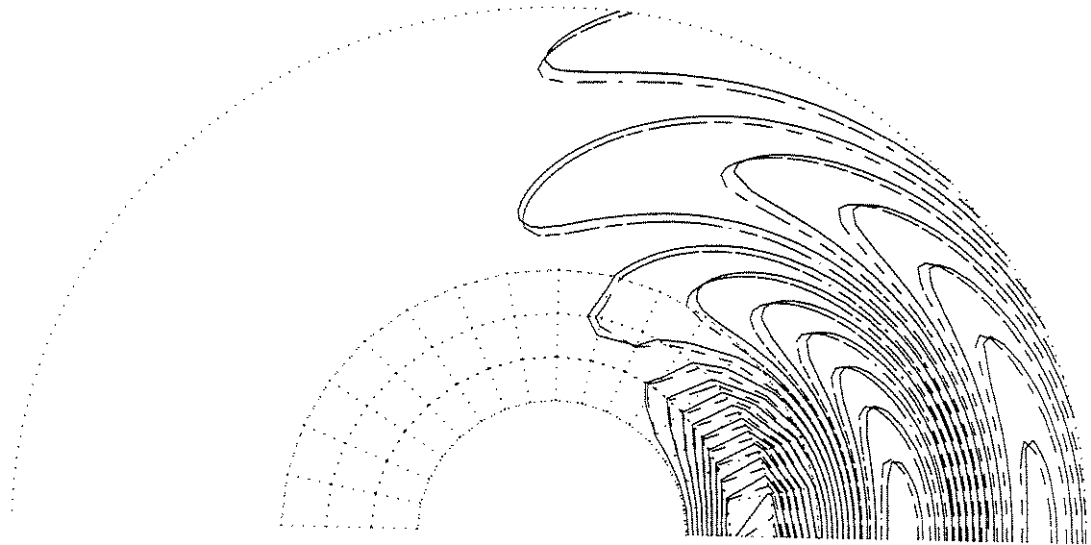


Figura 7.33: Radiação a partir de um arco do semi-cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Linhas de contorno obtidas pelo MEF (linha contínua) e solução nodalmente exata (linha tracejada). Parte Imaginária.

Observa-se novamente, que apesar da baixa discretização adotada, e da deterioração dos resultados obtidos pelo MEF na fronteira artificial para os dois problemas considerados, meio infinito e semi-infinito, os resultados expandidos conseguem manter a forma da

solução exata, esta obtida com 176 termos, sendo o erro uma pequena diferença de fase. Nas figuras 7.34 e 7.35 mostra-se o comportamento da variável para $\theta = 0$.

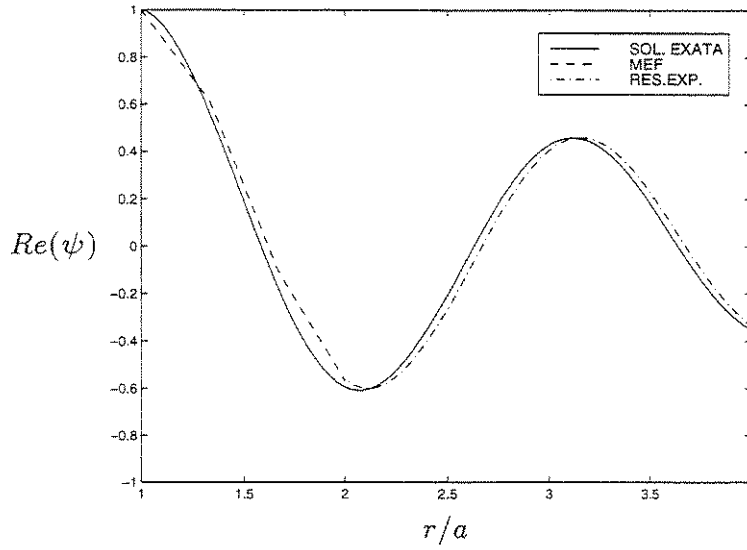


Figura 7.34: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Resultados em $\theta = 0$. Parte Real.

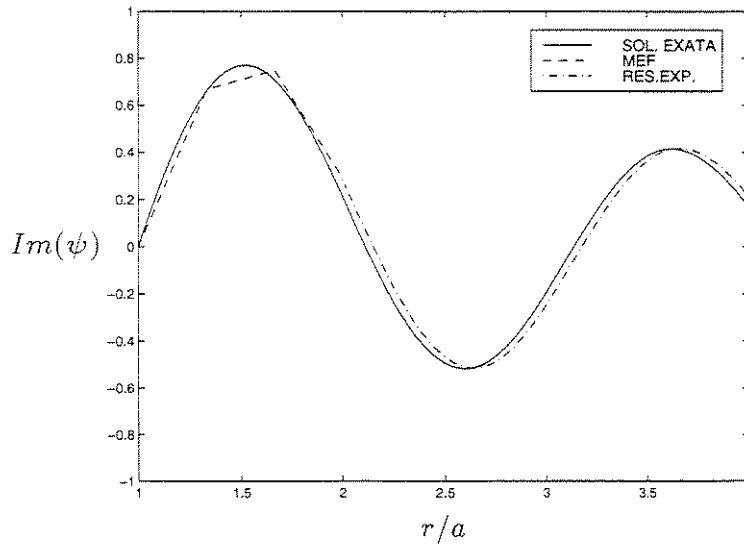


Figura 7.35: Radiação a partir de um arco do cilindro de raio a , $ka = \pi$, $R = 2a$, e $\alpha = 5\pi/32 \text{ rad}$. Expansão para $R_{DE} = 4a$. Resultados em $\theta = 0$. Parte Imaginária.

Estes resultados confirmam o enfoque de escolher-se o domínio tanto reduzido quanto possível, sugerido por KELLER & GIVOLI (1989) [36], porém deve-se usar uma boa representação do domínio discretizado para que se tenham bons resultados na fronteira, os quais são usados para a expansão do campo acústico calculado.

Assim, o método de expansão dos resultados traz uma série de vantagens para obtenção de campo distante, entre elas: Escolha do domínio discreto reduzido em relação a um campo desejado, possibilitando a análise em frequências mais altas; O campo expandido utiliza apenas os resultados da fronteira artificial, diminuindo a introdução de erros devido à difícil representação de campos discretizados complexos; e obtenção direta de valores em qualquer ponto externo (não havendo interpolação dos resultados para tal).

Porém, algumas características devem ser observadas. A solução analítica empregada assume um problema externo homogêneo, ou seja, sem a presença de fontes acústicas, e a solução analítica também não admite a presença de barreiras de qualquer tipo para o campo acústico no meio fora do domínio discretizado.

Capítulo 8

Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Infinito com Mapeamento DtN

8.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma análise do comportamento do método de acoplamento Fluido-Estrutura com meio fluido infinito usando-se o Mapeamento DtN. Inicialmente é escolhido como exemplo uma placa vibrando em meio aéreo infinito. Neste exemplo, inicialmente é analisada a influência do meio fluido na resposta da placa quando comparada à resposta da placa no vácuo, e num segundo momento, é feita a comparação do comportamento obtido no meio fluido com resultados experimentais.

8.2 Placa Vibrante em Meio Fluido Infinito

Para analisar-se a influência do meio fluido infinito na resposta simulada da placa, construiu-se um modelo bi-dimensional que representa a seção central da placa escolhida em sua maior dimensão. As dimensões da placa são de $672 \times 217 \times 3,2$ mm. O material da placa é alumínio, com densidade de 2700 Kg/m^3 , e módulo de elasticidade de $7,1 \times 10^{10} \text{ N/m}$.

Nesta análise bi-dimensional, o comportamento na seção longitudinal central da placa foi simulado usando-se elementos de viga de Euler-Bernouilli, com propriedades geométricas de área de $0,0032 \text{ m}^2$ e Momento de Inércia de $2,7307 \times 10^{-9} \text{ m}^4$. Na tabela 8.1 pode-se observar as cinco primeiras frequências de ressonância do modelo bi-dimensional estrutural desacoplado usando-se 20 elementos, e considerando a condição de contorno livre-livre.

<i>Frequências de Ressonância</i>	
1 ^a	38.58 Hz
2 ^a	106.34 Hz
3 ^a	208.48 Hz
4 ^a	344.67 Hz
5 ^a	514.98 Hz

Tabela 8.1: Frequências de Ressonância da Estrutura.

O fluido no domínio finito foi discretizado em elementos quadrangulares bi-lineares, sendo as propriedades do fluido (ar) de densidade de $1,2 \text{ Kg/m}^3$, e velocidade do som de 342 m/s .

8.3 Análise da Influência do Mapeamento DtN na Resposta da Estrutura

Como discretização inicial, para uma análise que permita obter-se até o quinto modo acoplado, foi construída a malha mostrada na figura 8.1. A malha possui o total de 580 elementos e 612 nós, sendo 20 elementos estruturais e o restante de fluido. Esta configuração tem um refinamento do fluido numa região próxima à placa vibrante, onde espera-se grandes variações de amplitude do campo de pressão obtido, e uma discretização homogênea perto da fronteira artificial.

Para a escolha do número de termos da série para formação do Kernel DtN verificou-se que com um número baixo de termos, quatro termos, já se consegue uma boa representatividade até o quinto modo no fluido, sendo que acima disto altera-se pouco os resultados. Foi adotado $n = 10$ para formação do Mapeamento DtN.

Para comparação da resposta da placa em meio fluido infinito em relação à resposta no vácuo, análise clássica, escolheu-se uma das extremidades como ponto da excitação, figura 8.2. Com isto, espera-se a presença de todos os modos da faixa de frequências analisada.

As funções de resposta em frequência entre o deslocamento vertical de alguns pontos da placa e a força podem ser observadas nas figuras 8.3 a 8.6, onde a posição dos pontos escolhidos é dada em relação à distância à extremidade onde está a excitação, sendo L o comprimento total da placa, 672 mm.

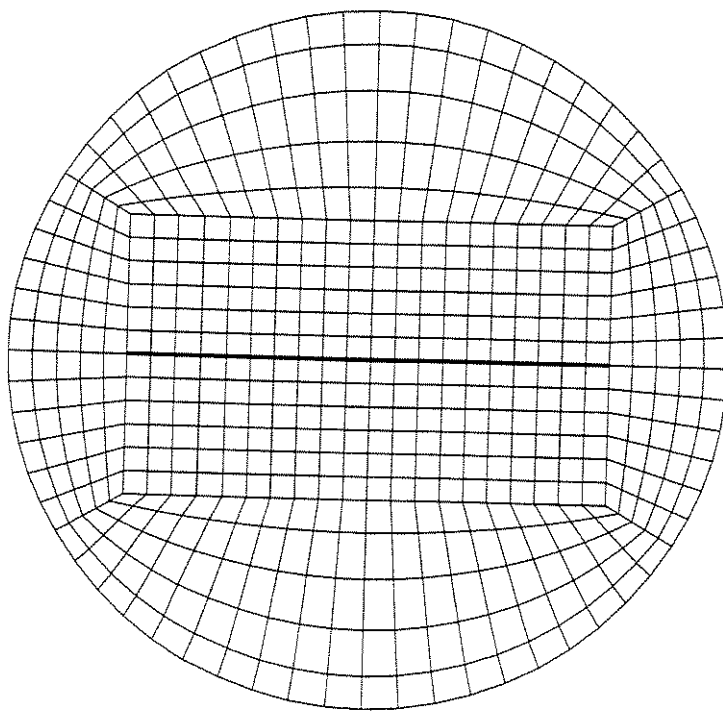


Figura 8.1: Malha Inicial do Modelo Bi-dimensional da Placa Vibrante.



Figura 8.2: Posição da Força de Excitação da Placa Vibrante no Modelo Bi-dimensional.

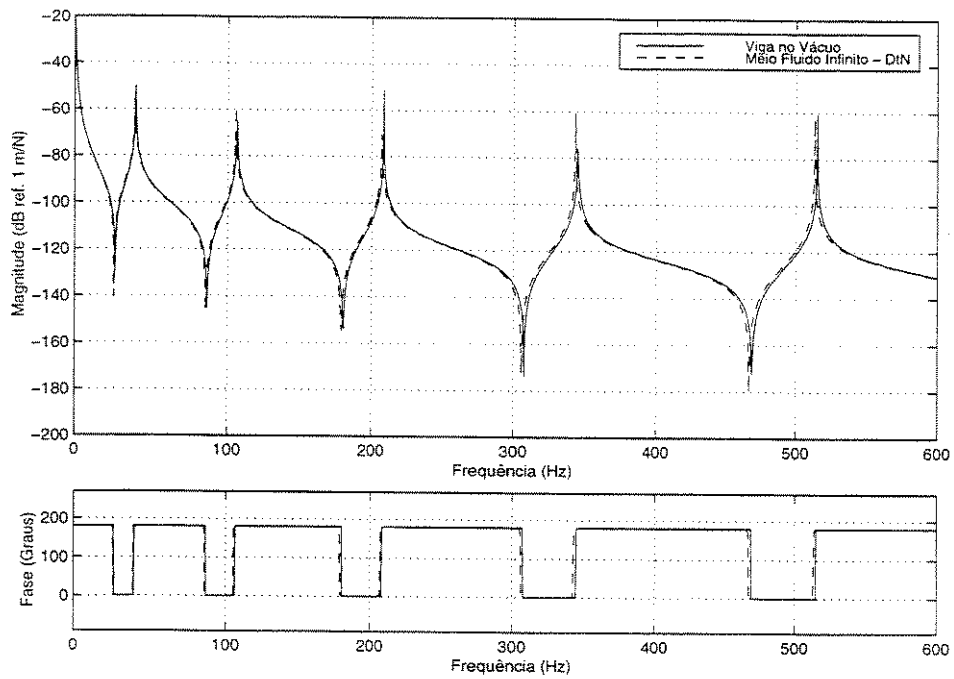


Figura 8.3: Comparação das Frf's do ponto onde atua a excitação.

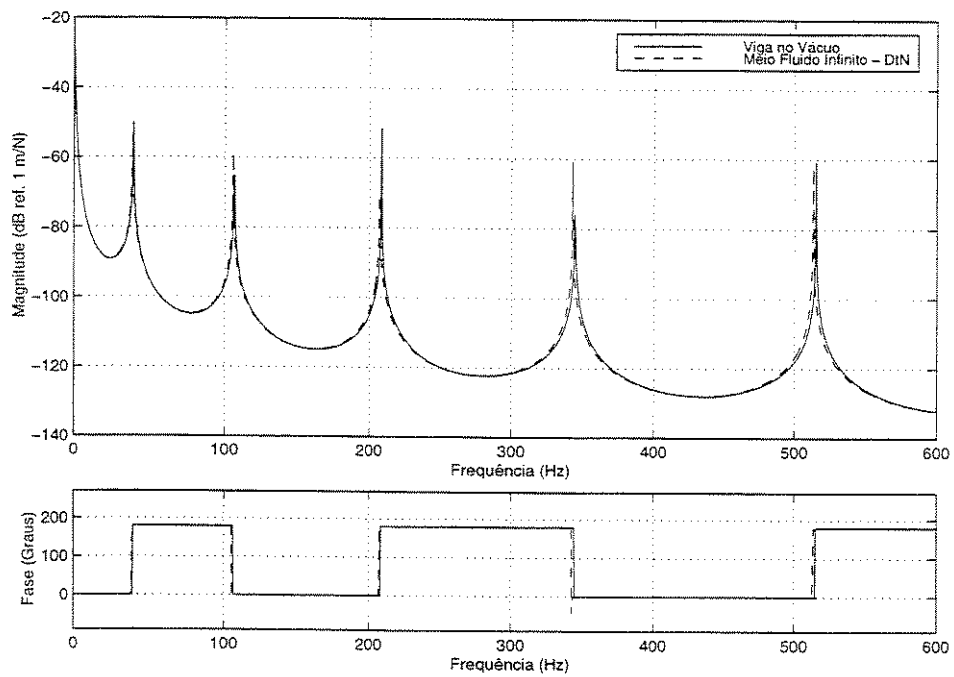


Figura 8.4: Comparação das Frf's do ponto da extremidade oposta ao da excitação.

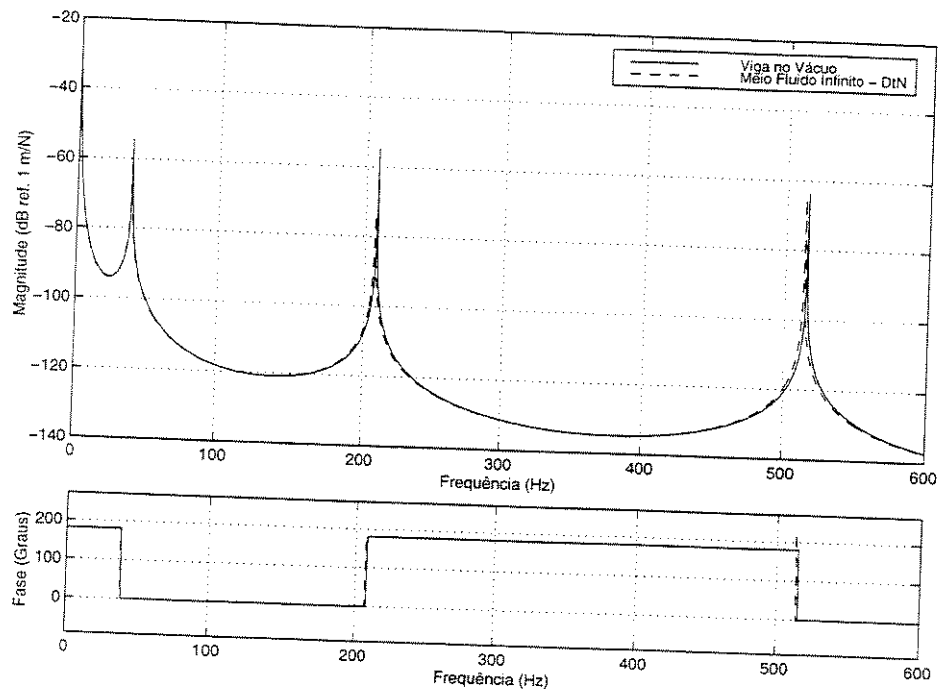


Figura 8.5: Comparação das Frf's do ponto central da placa.

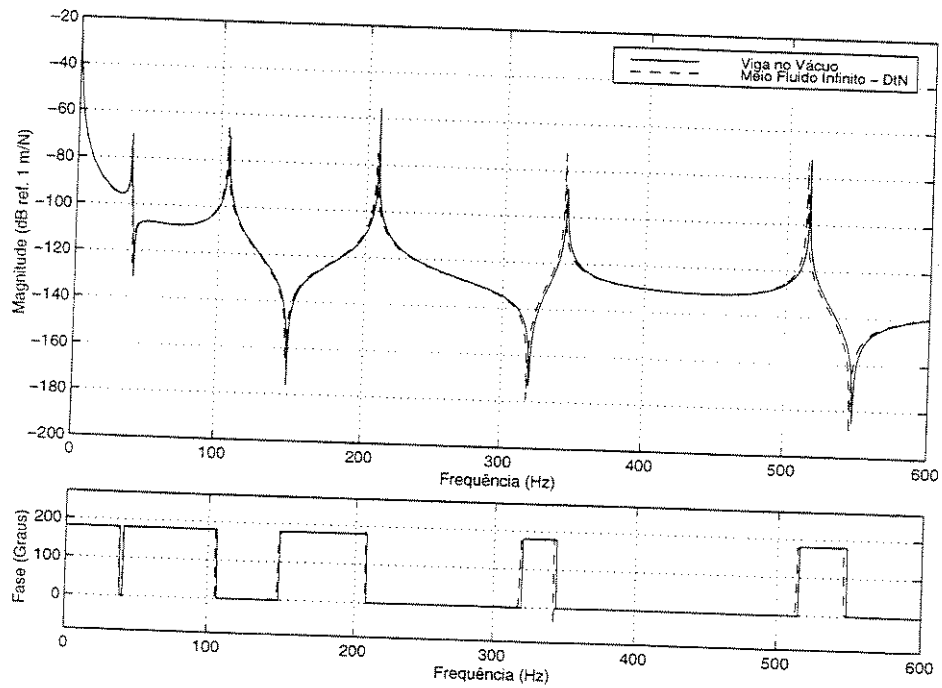


Figura 8.6: Comparação das Frf's do ponto a $L/4$ do ponto da excitação.

Observa-se que a influência da consideração de meio fluido infinito através de Mapeamento DtN nas funções de Resposta em Frequência de um modo geral é muito baixa neste exemplo. Sendo sua influência de caráter independente em relação à distância ao ponto de excitação, ou da obtenção da resposta num ventre ou nó dos modos da estrutura. Isto indica estabilidade da inclusão do Mapeamento DtN em relação à resposta desacoplada da estrutura, ou seja, sem singularidades numéricas do método.

Apesar desta baixa influência de um modo geral, observa-se que para frequências mais altas, onde o refinamento adotado está no limite de precisão requerida para boa representação dos modos, a resposta se altera levemente no sentido de um sistema com massa adicional, a do fluido.

Para analisar-se o comportamento do fluido em relação à vibração da placa, foram obtidos os modos nas frequências de maior amplitude das respostas na estrutura. A tabela 8.2 mostra as frequências obtidas. Observa-se neste caso, que o efeito do amortecimento geométrico, devido a presença do meio infinito foi pouco pronunciado.

<i>Frequências Obtidas das Frf's</i>	
1 ^a	38,0 Hz
2 ^a	105,5 Hz
3 ^a	207,0 Hz
4 ^a	343,0 Hz
5 ^a	513,0 Hz

Tabela 8.2: Frequências de Maior Amplitude de Resposta da Estrutura.

Nas figuras 8.7 a 8.16, pode-se observar os modos acoplados obtidos para o fluido e a estrutura nestas frequências obtidas, onde as amplitudes do deslocamento da estrutura foram exagerados para melhor visualização dos modos. Os resultados de pressão estão em Pa (N/m^2).

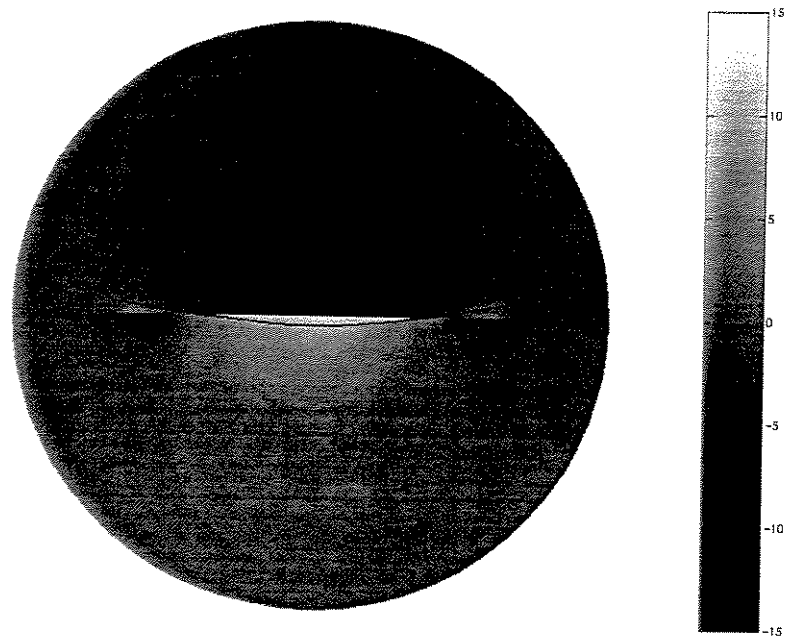


Figura 8.7: Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

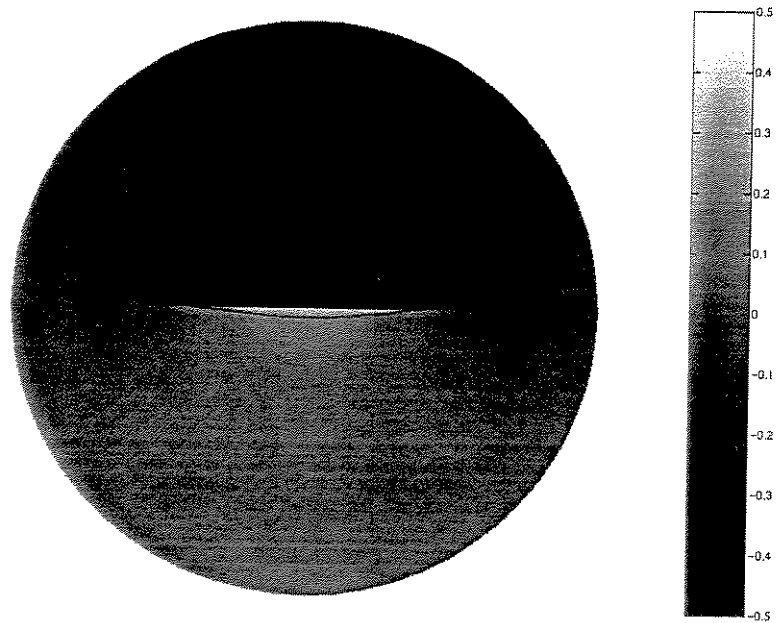


Figura 8.8: Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

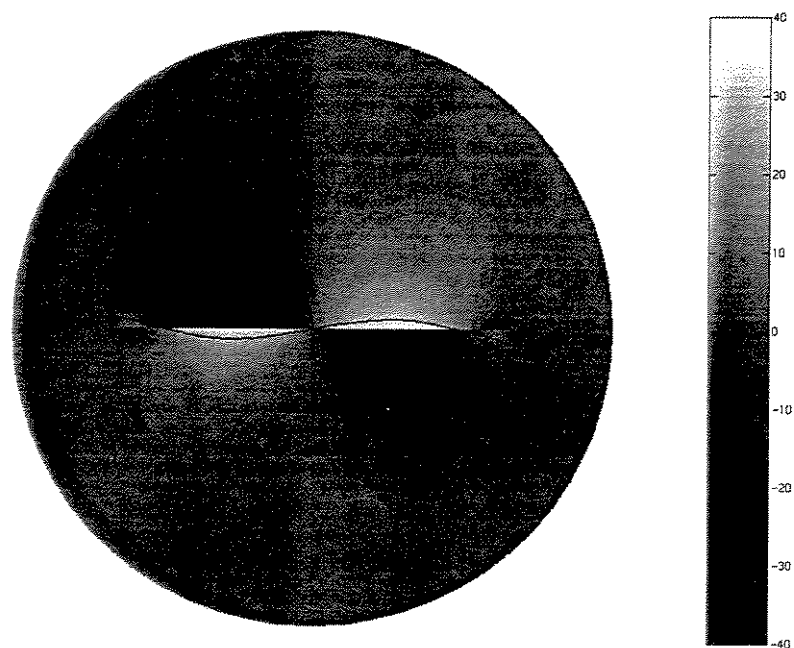


Figura 8.9: Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

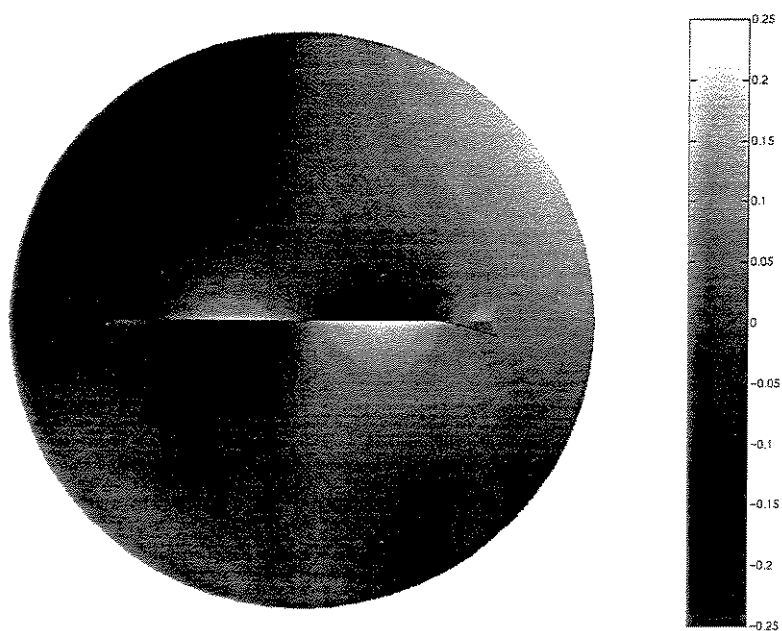


Figura 8.10: Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

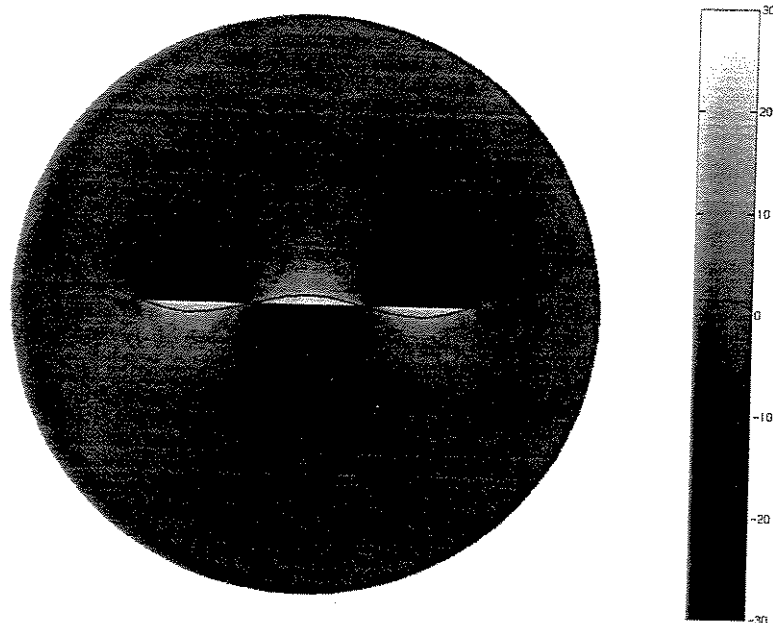


Figura 8.11: Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

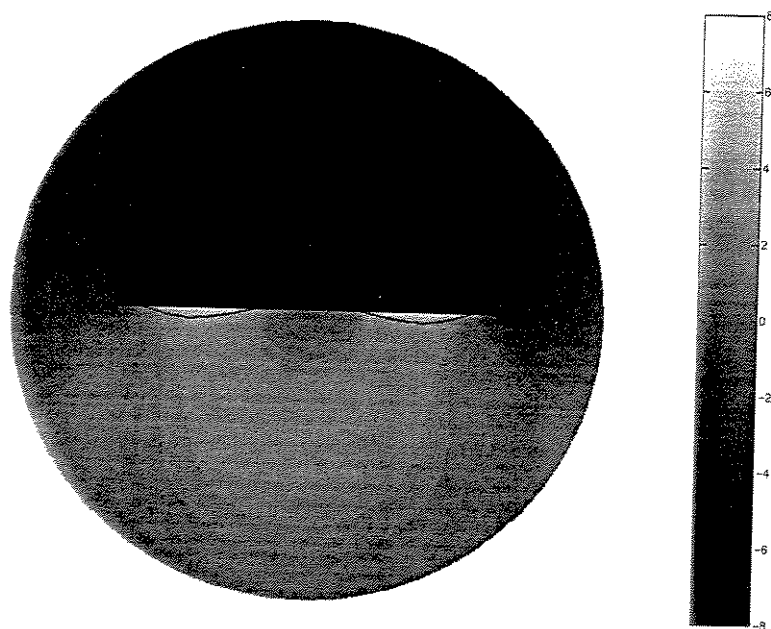


Figura 8.12: Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

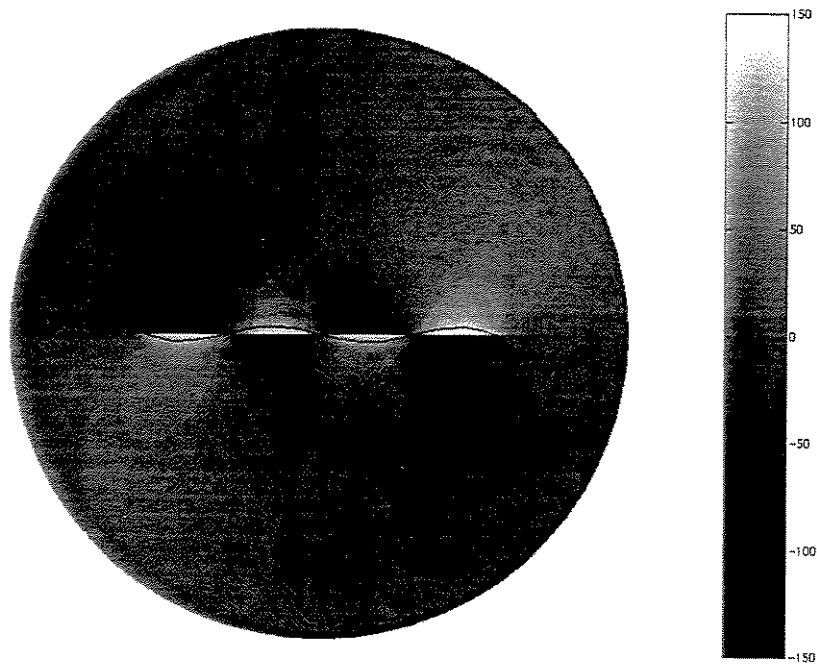


Figura 8.13: Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

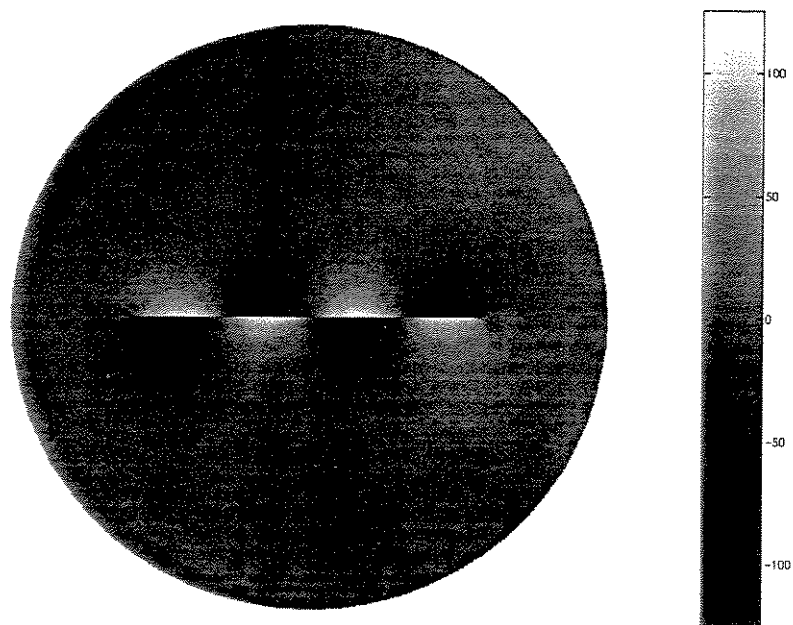


Figura 8.14: Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

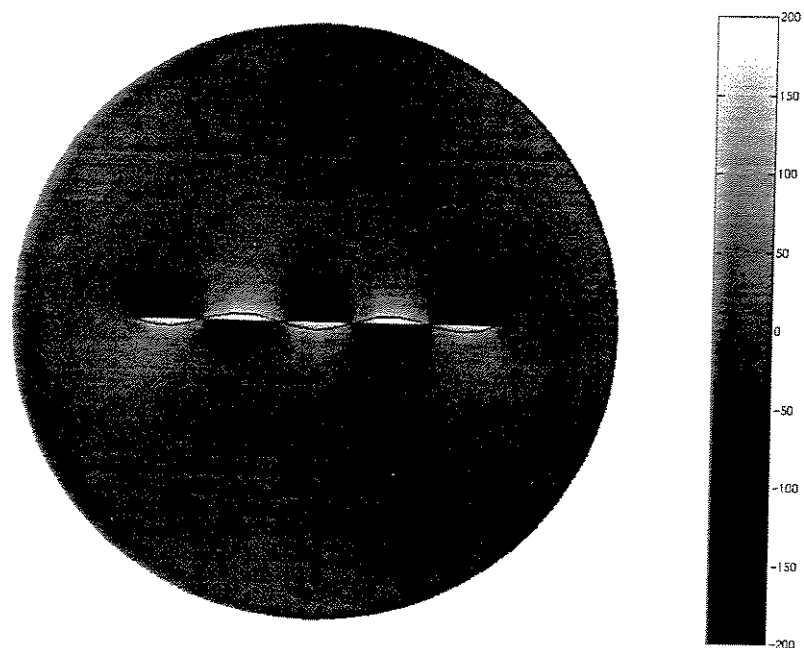


Figura 8.15: Quinto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

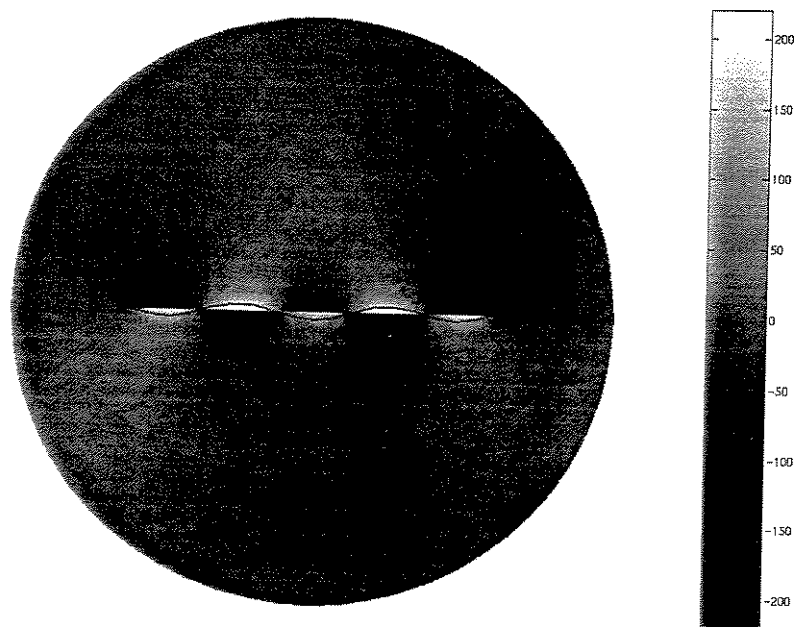


Figura 8.16: Quinto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

Observa-se nos modos do fluido obtidos que a maior variação de amplitude se encontra numa região próxima à placa, justificando o refinamento adotado. Outra característica deste comportamento é a possibilidade da escolha de um número reduzido de termos na formação do Kernel DtN, já que a variação ao longo da fronteira artificial é pequena e segue a forma das primeiras harmônicas da solução analítica exterior.

Deve-se observar que o quinto modo está no limite de representatividade da malha escolhida, e por isso mostra dificuldade de representação suave do campo de pressão próximo à placa. Este fato porém não afeta diretamente a formação do mapeamento DtN, já que este depende apenas das variáveis da fronteira artificial.

8.4 Comparação com Resultados Experimentais

As medições do campo de pressão foram feitas numa câmara semi-aneecóica. Os pontos de medição, num total de 28, estão à 2 cm da placa, na direção da linha longitudinal central, sendo igualmente espaçados. Os microfones 1/4" (num total de 28) foram posicionados perpendiculares à placa que se encontrava dependurada por tirantes flexíveis. Um pequeno vibrador (Shaker) eletrodinâmico foi colocado perpendicularmente à placa, possuindo em sua parte móvel uma célula de carga para registrar a força aplicada por um arame fixo à placa. Os sinais de força e pressão sonora foram registrados e analisados no Analisador de Espectro dinâmico HP 35650. A descrição detalhada do experimento pode ser encontrada em COLINAS (1999) [12].

Para ter-se uma idéia do comportamento da placa real, foram obtidos as frequências naturais da placa na faixa de frequências usada na comparação usando-se um modelo de elementos finitos. A tabela 8.3 mostra os resultados obtidos simulando-se a placa real no Ansys 5.4, ANSYS (1994) [1], com 8×27 elementos quadrangulares de placa (Shell63), num total de 216 elementos e 252 nós.

Para fazer-se a comparação das respostas do fluido obtidas nos pontos de medição, foi adotada uma malha contendo em sua discretização, estes pontos, visando uma comparação direta dos resultados. A malha adotada possui 27 elementos de viga de Euler-Benouilli,

<i>Frequências Naturais da Placa</i>		<i>Características do Modo</i>
1 ^a	37,53 Hz	Modo de Flexão
2 ^a	72,43 Hz	Modo de Torsão
3 ^a	104,30 Hz	Modo de Flexão
4 ^a	152,68 Hz	Modo de Flexão/Torsão
5 ^a	205,59 Hz	Modo de Flexão
6 ^a	247,96 Hz	Modo de Flexão/Torsão

Tabela 8.3: Frequências Naturais da Placa usando o MEF.

518 elementos de fluido quadrangulares bi-lineares, e 574 nós. Foi dada importância a uma distribuição homogênea da malha, levando-se em conta que serão comparados apenas os três primeiros modos acoplados do sistema. A malha pode ser observada na figura 8.17.

Para a análise bi-dimensional da placa foi adotado como ponto de excitação um ponto a aproximadamente 5 cm da extremidade na linha central da placa, representado na figura 8.18. Com este modelo, foram obtidas as funções de resposta em frequência entre a pressão acústica e a força de excitação. A comparação com os resultados experimentais pode ser vista nas figuras 8.19 a 8.31.

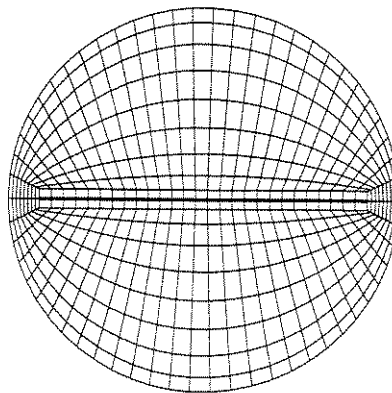


Figura 8.17: Malha do Modelo Bi-dimensional da Placa Vibrante para Comparação.



Figura 8.18: Posição da Força de Excitação na Placa para Comparação, $x = 0.622$ m.

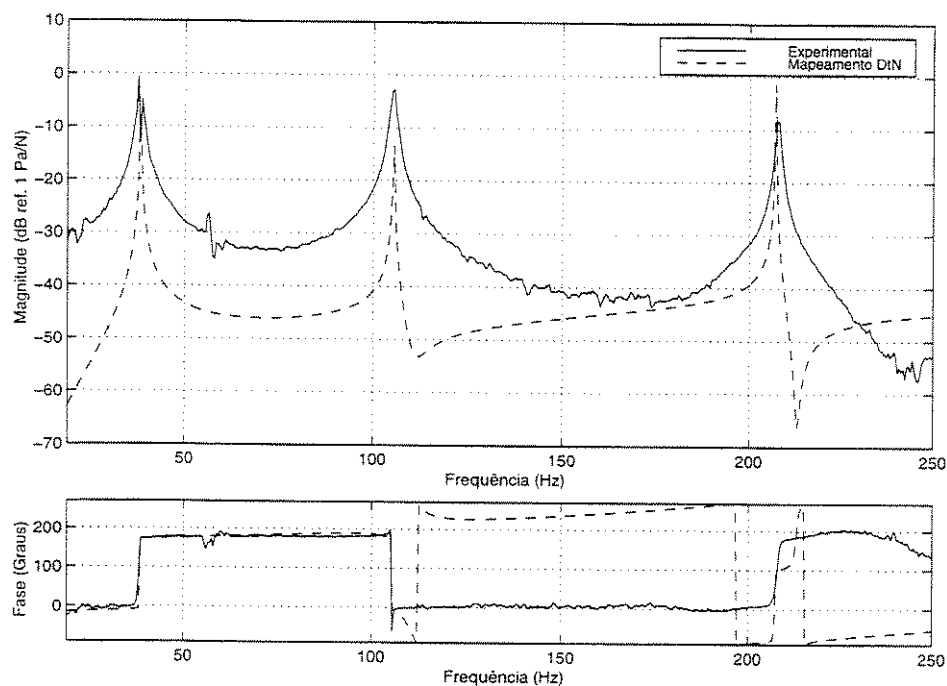


Figura 8.19: Comparação das Frf's na Extremidade $x = 0$.

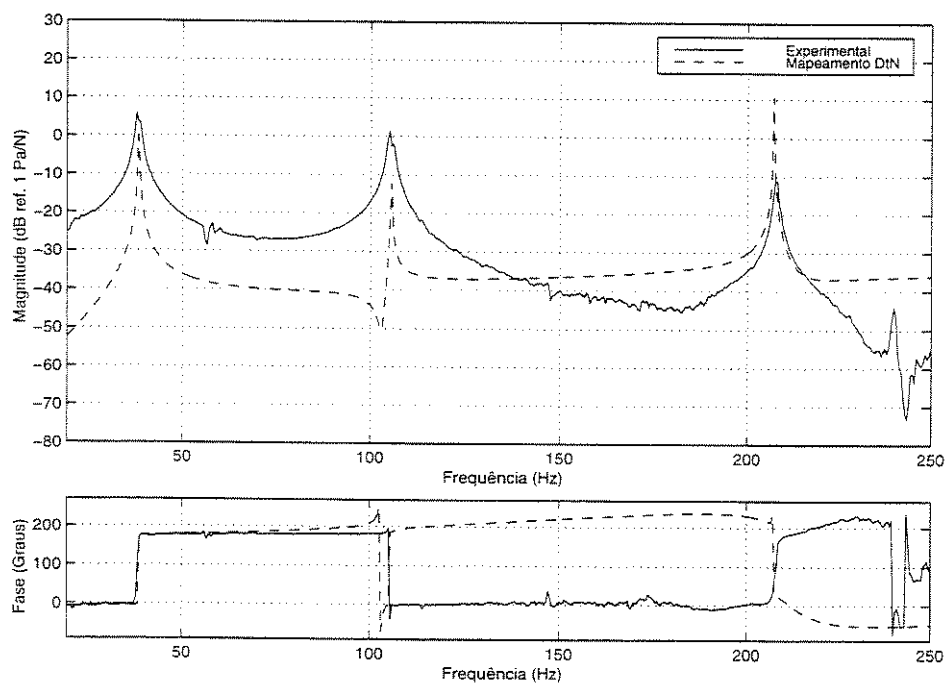


Figura 8.20: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.05$ m.

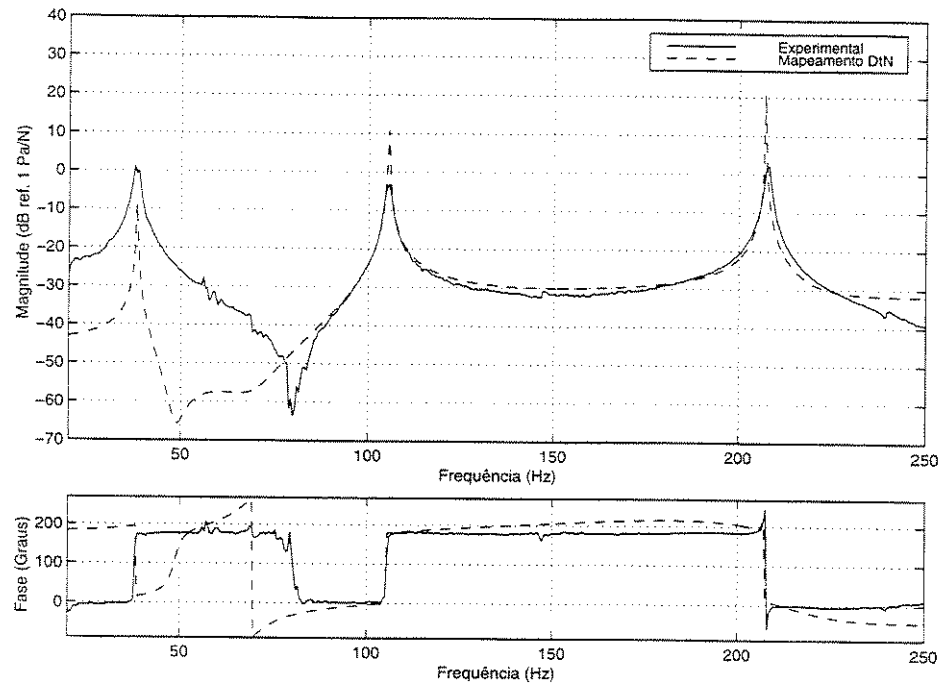


Figura 8.21: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.100$ m.

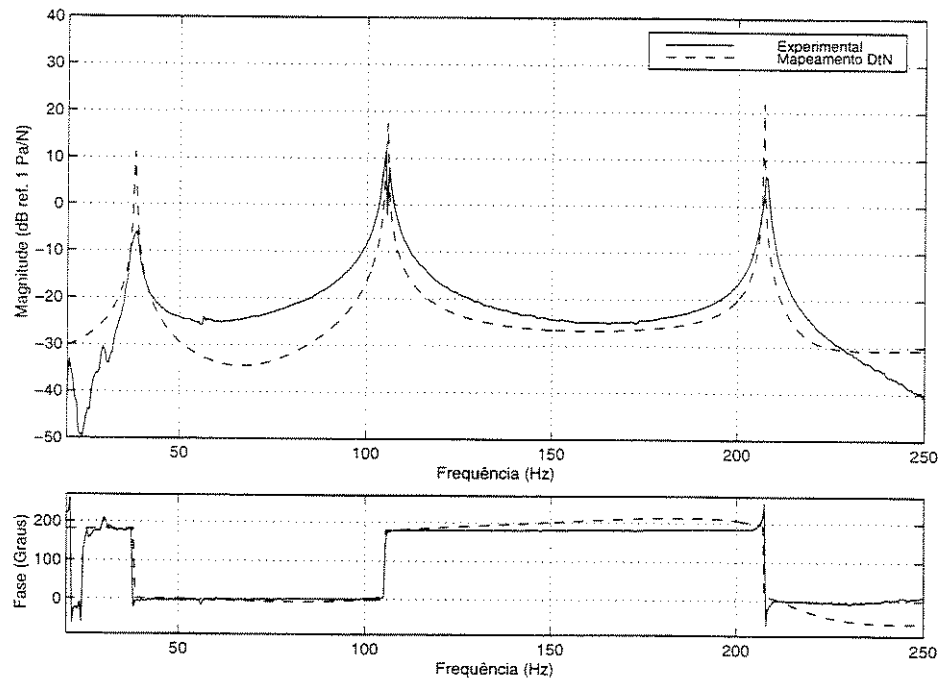


Figura 8.22: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.174$ m.

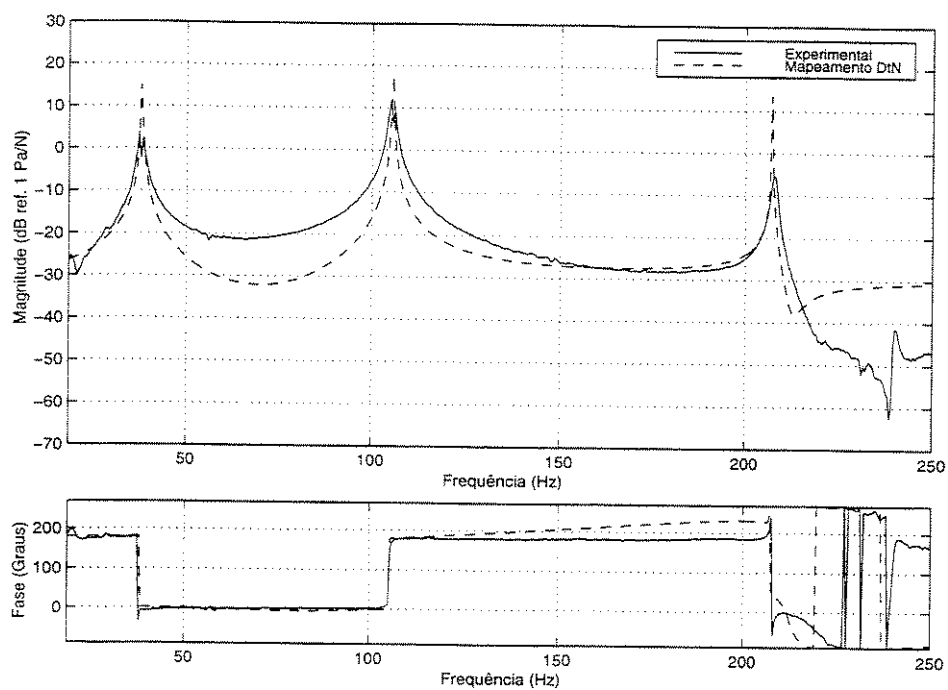


Figura 8.23: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.224$ m.

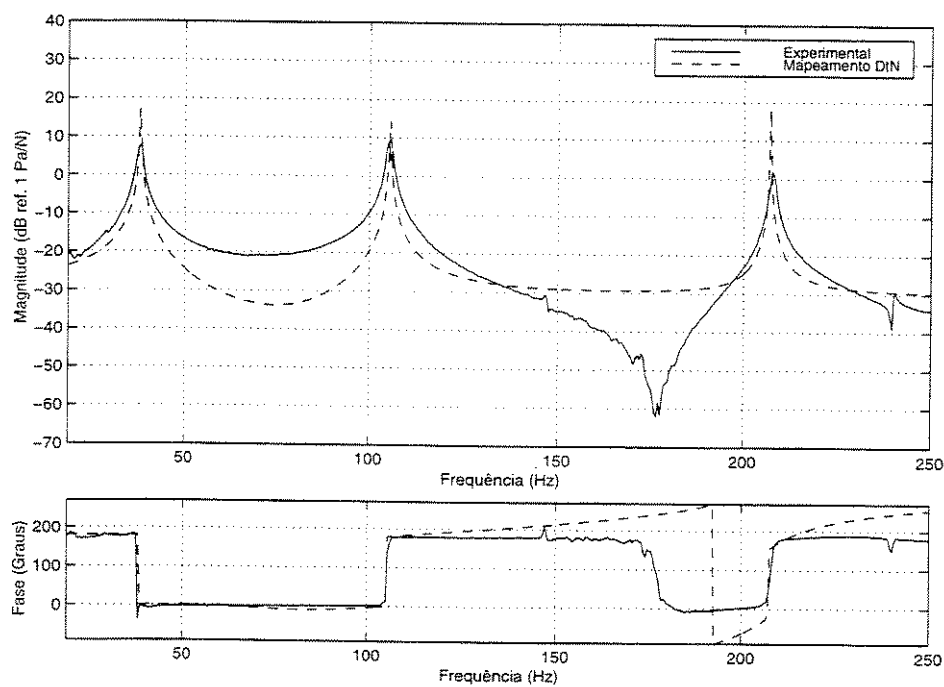


Figura 8.24: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.274$ m.

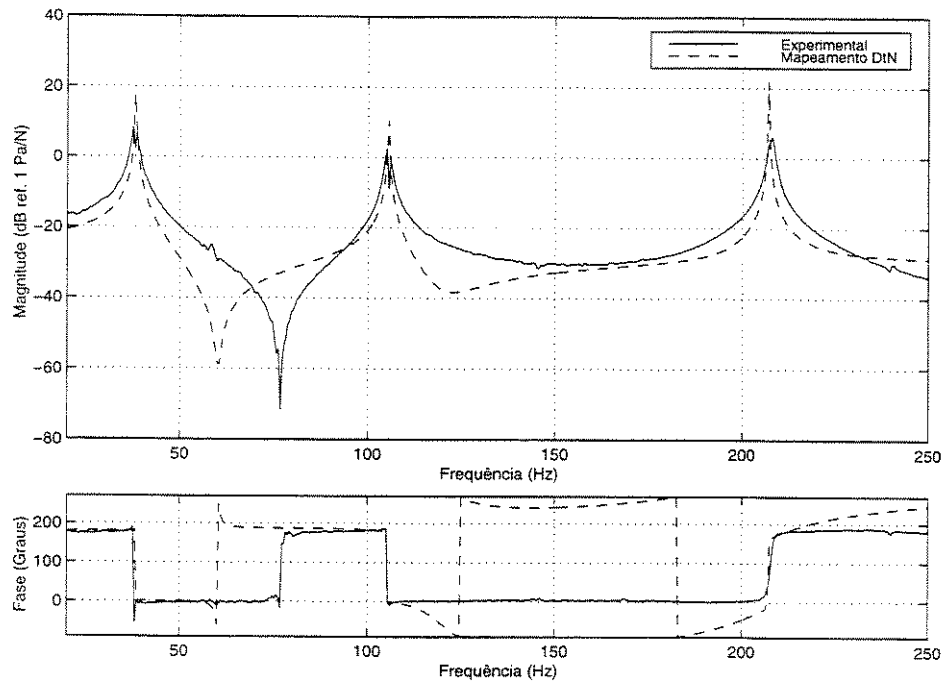


Figura 8.25: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.373$ m.

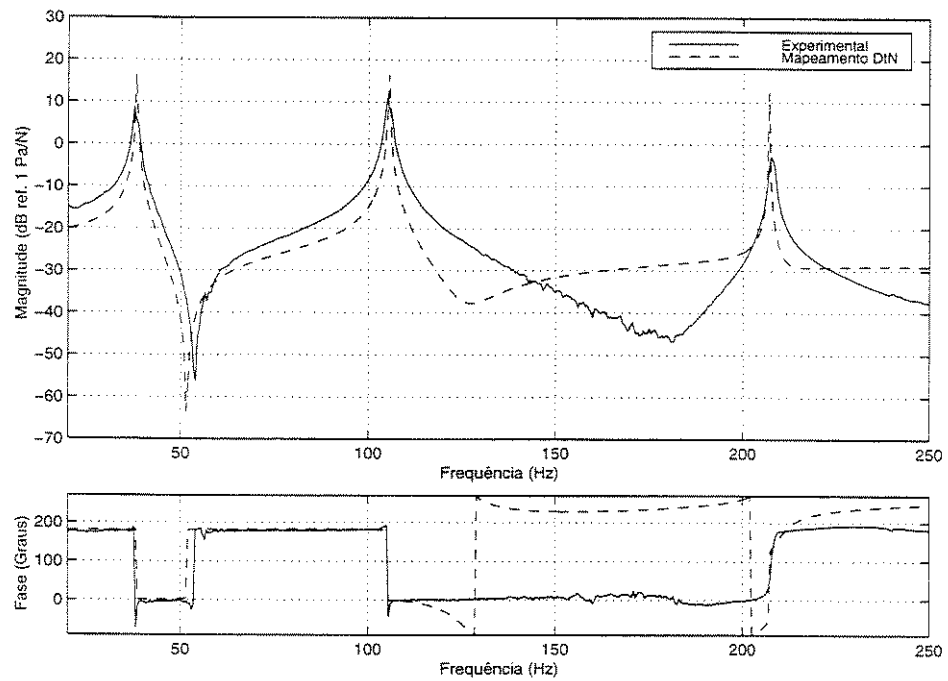


Figura 8.26: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.423$ m.

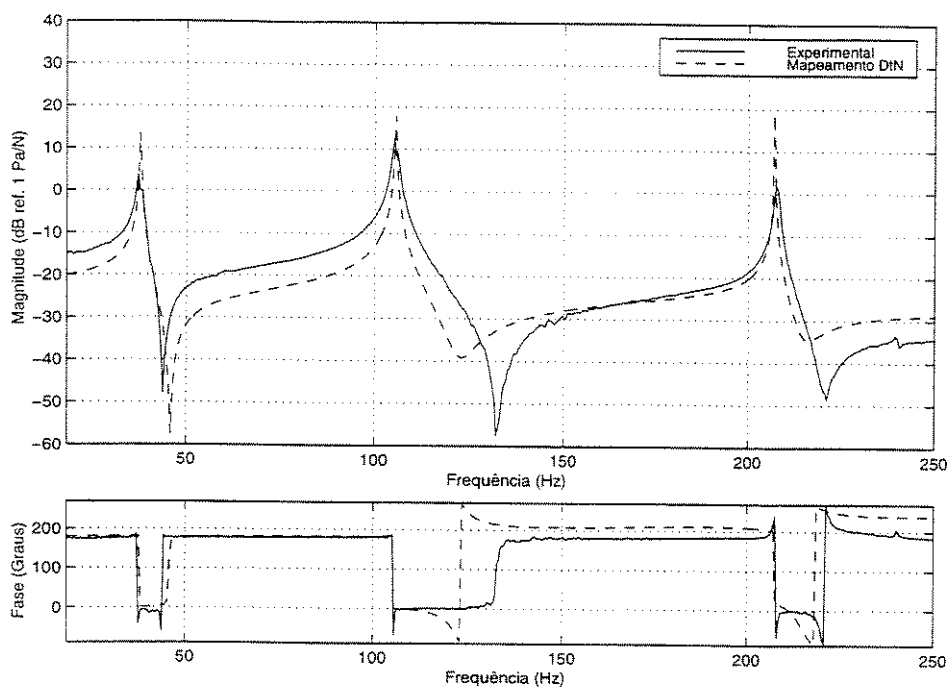


Figura 8.27: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.473$ m.

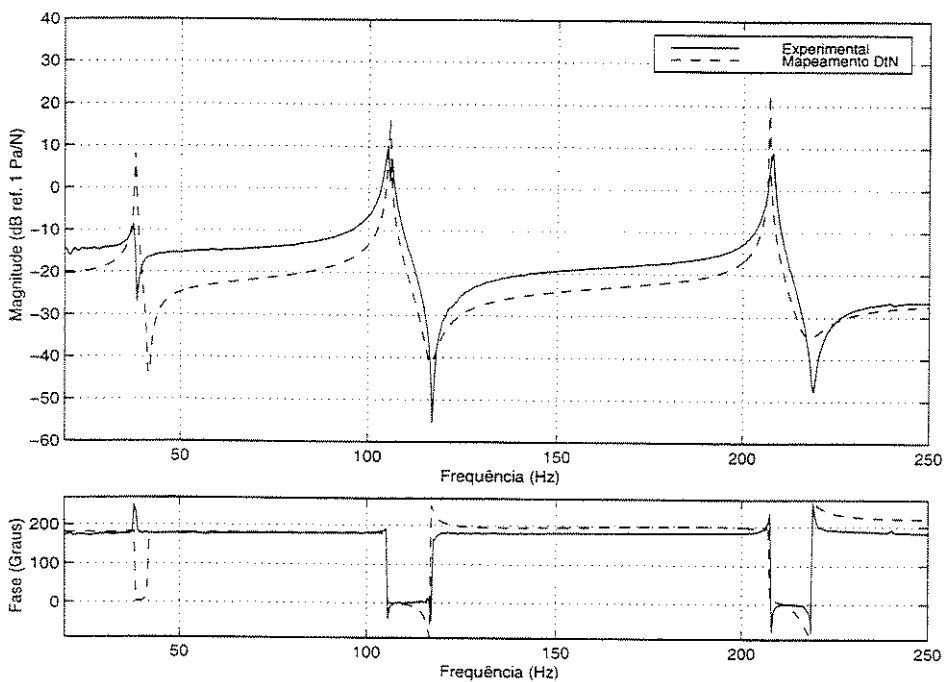


Figura 8.28: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.523$ m.

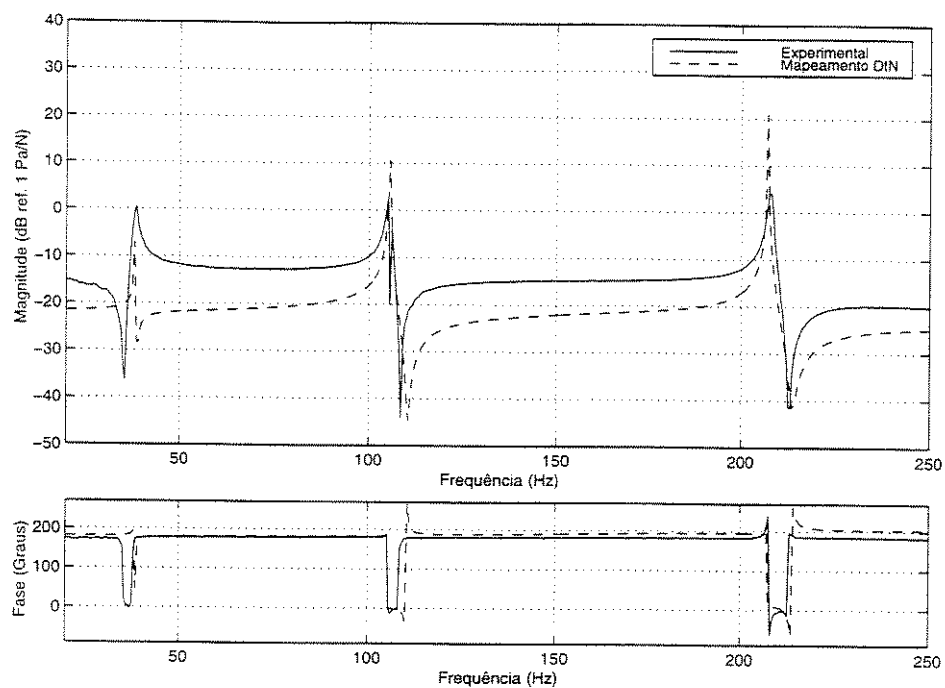


Figura 8.29: Comparação das Frf's no Ponto $x = 0.572$ m.

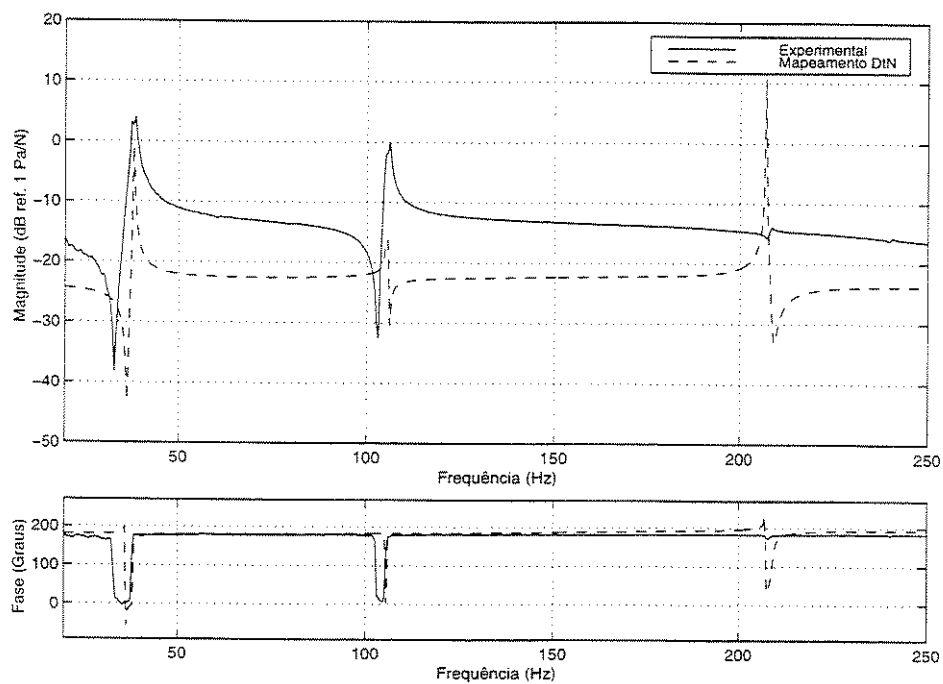


Figura 8.30: Comparação das Frf's no Ponto da Excitação, $x = 0.622$ m.

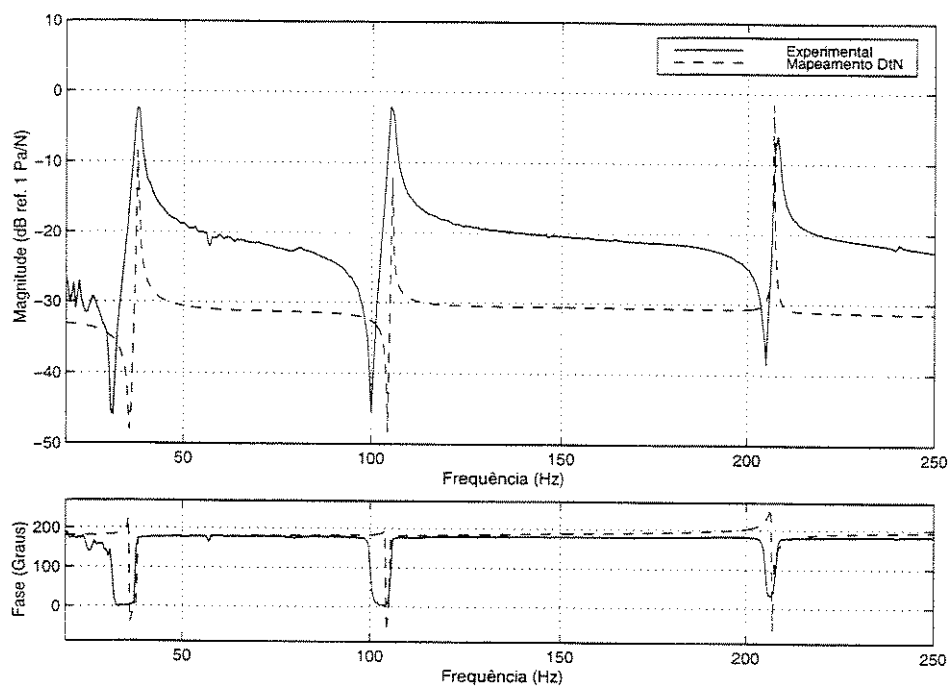


Figura 8.31: Comparação das Frf's na Extremidade $x = 0.672$ m.

Nas figuras 8.32 a 8.34 tem-se a comparação entre as partes reais da resposta para todos os pontos da medição ao longo do comprimento da placa. As frequências escolhidas são as mostradas na tabela 8.2, isto é, as frequências de ressonância do modelo numérico.

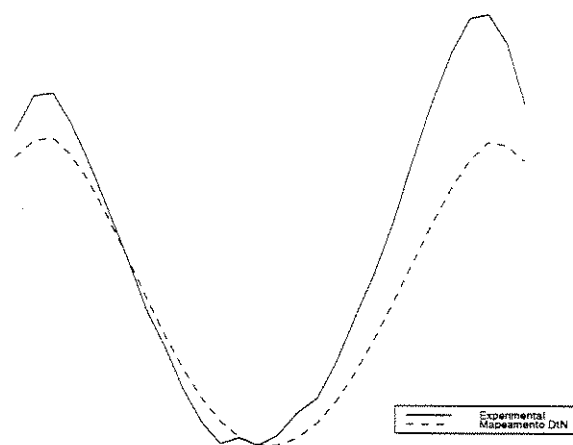


Figura 8.32: Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Primeiro Modo.

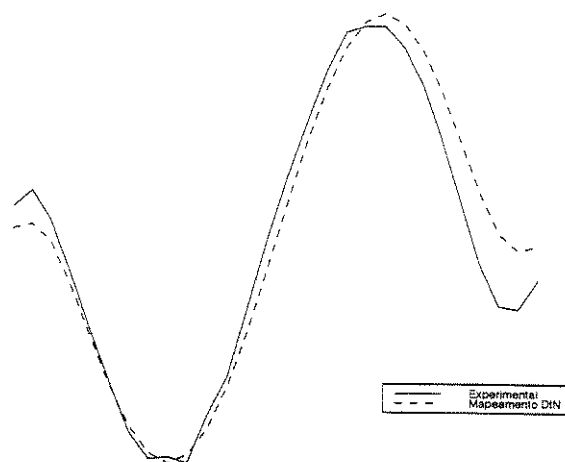


Figura 8.33: Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Segundo Modo.

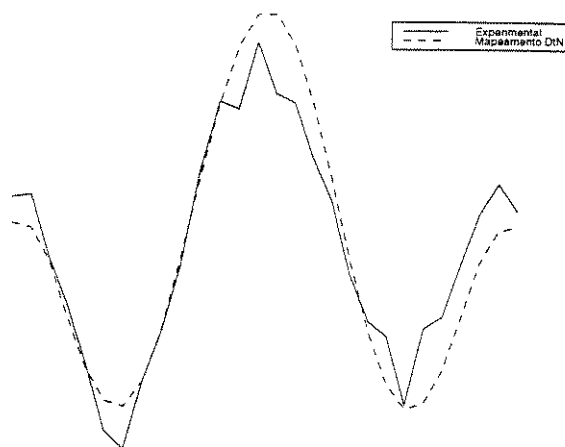


Figura 8.34: Comparação dos Modos de pressão ao longo da placa. Terceiro Modo.

Observa-se nas comparações que de um modo geral verifica-se uma concordância dos resultados experimentais com os resultados do modelo bi-dimensional. Diferenças de fase e algumas diferenças da magnitude de resposta podem ser atribuídas a alguns fatores como a influência de modos de torsão da placa real não representados no modelo bi-dimensional, e o posicionamento aproximado das medições em relação a placa, considerando-se as dimensões do microfone ($1/4''$), e a distância em relação a placa (2cm).

Outros fatores que devem ser levados em conta na comparação: o amortecimento estrutural presente na placa real e não presente no modelo estrutural bi-dimensional, a montagem experimental utilizada (placa dependurada por tirantes leves e flexíveis), em

relação à consideração de condição livre-livre no modelo numérico, e também a medição em câmara semi-anecóica, que introduz amortecimento na resposta do fluido de forma diferente à consideração de meio fluido infinito, usado no Mapeamento DtN.

Levando-se em conta estes fatores, a comparação para alguns pontos, em particular os pontos centrais da placa, se mostrou mais coerente, e com bons resultados tanto em magnitude como em fase.

No que se refere às respostas em frequência, figuras 8.19 a 8.31, pode-se dizer que de uma maneira geral os resultados foram satisfatórios, principalmente levando-se em conta que não foi realizado nenhum ajuste nos parâmetros do modelo.

Capítulo 9

Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Semi-Infinito com Mapeamento DtN

9.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma análise do comportamento do método de acoplamento Fluido-Estrutura com meio fluido semi-infinito usando-se o Mapeamento DtN. Neste segundo exemplo fluido-estrutura escolhido tem-se uma viga cantilever vibrando, engastada em uma parede rígida considerada infinita, condição engastada-livre. Para este exemplo, foram realizadas comparações das respostas da estrutura usando-se o Método de Elementos Finitos com Mapeamento DtN, MEF/DtN, com respostas obtidas pelo Método de Elementos de Contorno, MEC, para o mesmo problema. Nesta comparação, a influência das discretizações dos dois métodos é discutida.

9.2 Viga Engastada-Livre em Meio Fluido Semi-In-finito

O modelo bi-dimensional construído representa uma viga de dimensões: 0,4064 m de comprimento e 0,00267 m de altura. O material da viga é aço, com densidade de 7830 kg/m³, e módulo de elasticidade de $2,068 \times 10^{11}$ N/m.

Nesta análise bi-dimensional, o comportamento da viga foi simulado usando-se elementos de viga de Euler-Bernoulli, com propriedades geométricas de área de 0,00267 m² e Momento de Inércia de $1,5862 \times 10^{-9}$ m⁴. Na tabela 9.1 tem-se as cinco primeiras frequências de ressonância do modelo bi-dimensional estrutural usando-se 20 elementos sem a influência de meio fluido.

<i>Frequências de Ressonância</i>	
1 ^a	13,4 Hz
2 ^a	84,1 Hz
3 ^a	235,5 Hz
4 ^a	461,5 Hz
5 ^a	763,0 Hz

Tabela 9.1: Frequências de Ressonância da Estrutura.

Para explorar-se a influência do fluido no comportamento da estrutura foi considerado um fluido com densidade significativa, a água. Assim, o domínio fluido foi discretizado em elementos quadrangulares bi-lineares, sendo as propriedades do fluido de densidade de 998 Kg/m³, e velocidade do som de 1500m/s.

9.3 Resultados Obtidos Usando-se o Método de Elementos de Contorno

Para obter-se uma solução de referência para validação dos resultados obtidos pelo método MEF/DtN, o método de elementos de contorno foi escolhido por ter a vantagem da modelagem de meio fluido semi-infinito, e parede perfeita infinita, entre as várias opções

do método. Sendo sua utilização para problemas vibro-acústicos em meios abertos feita de forma simples e direta.

Para a modelagem da viga engastada-livre em meio fluido semi-infinito foi utilizado o software Sysnoise, revisão 5.2, SYSNOISE (1995) [58], sendo testadas várias discretizações da estrutura para convergência dos resultados considerando-se os quatro primeiros modos de vibração.

A viga é modelada usando-se o Método de Elementos Finitos e o elemento descrito anteriormente, e o fluido é modelado usando-se o Método de Elementos de Contorno com elementos lineares de fluido. Os resultados foram obtidos usando-se a opção: BEM INDIRECT VARIATIONAL COUPLED. Com graus de liberdade restringidos na fronteira da estrutura com a parede, com plano de simetria acústica simulando a parede infinita, e na borda da placa é imposta igualdade de pressões para ambos os lados.

Na figura 9.1 tem-se a comparação das respostas obtidas usando-se a opção: Direct Response, no ponto da excitação, adotada como 100 N , sendo esta no centro da viga, para discretizações de 20 a 40 elementos estruturais.

Observou-se que a partir de 40 elementos a resposta converge na faixa de frequências escolhidas, ou seja, considerando-se até o quarto modo. Sendo esta discretização a escolhida para obtenção da solução de referência para a comparação com o método MEF/DtN.

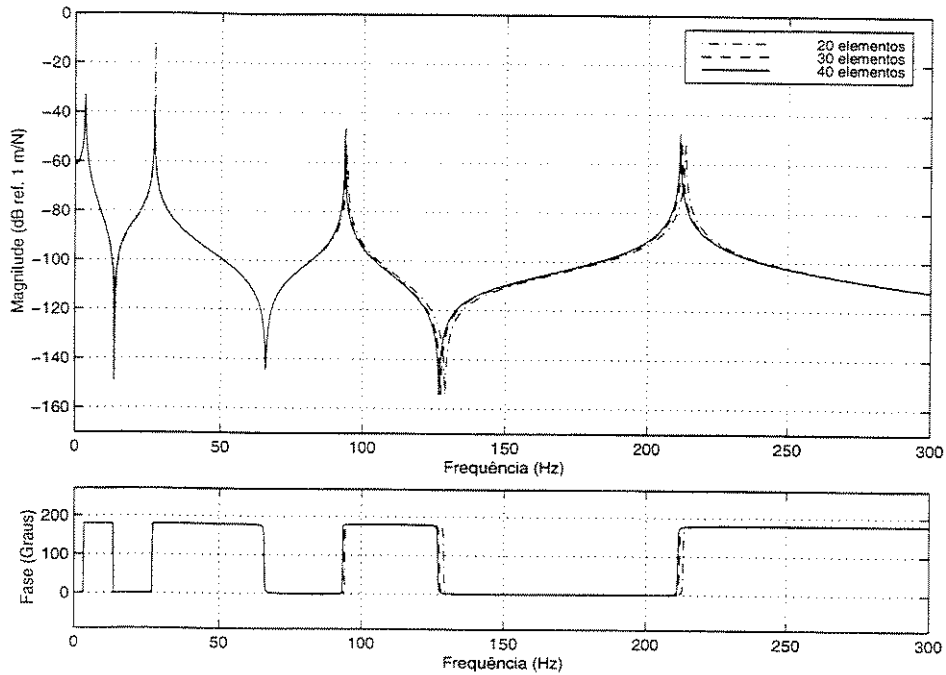


Figura 9.1: Comparação das Frf's no ponto da excitação.

9.4 Resultados Obtidos Usando-se o MEF/DtN

Para comparar-se os resultados obtidos pelo MEC com os resultados obtidos pelo MEF/DtN, foram construídas quatro malhas com discretizações da estrutura de 20 a 50 elementos. Nesta análise não foi dada ênfase a uma otimização do tamanho do problema mas sim foi dada ênfase a uma análise do comportamento do método DtN em relação a uma discretização mais refinada como um todo, mantendo-se as características gerais da distribuição da malha. As malhas obtidas podem ser observadas nas figuras 9.2 a 9.3.

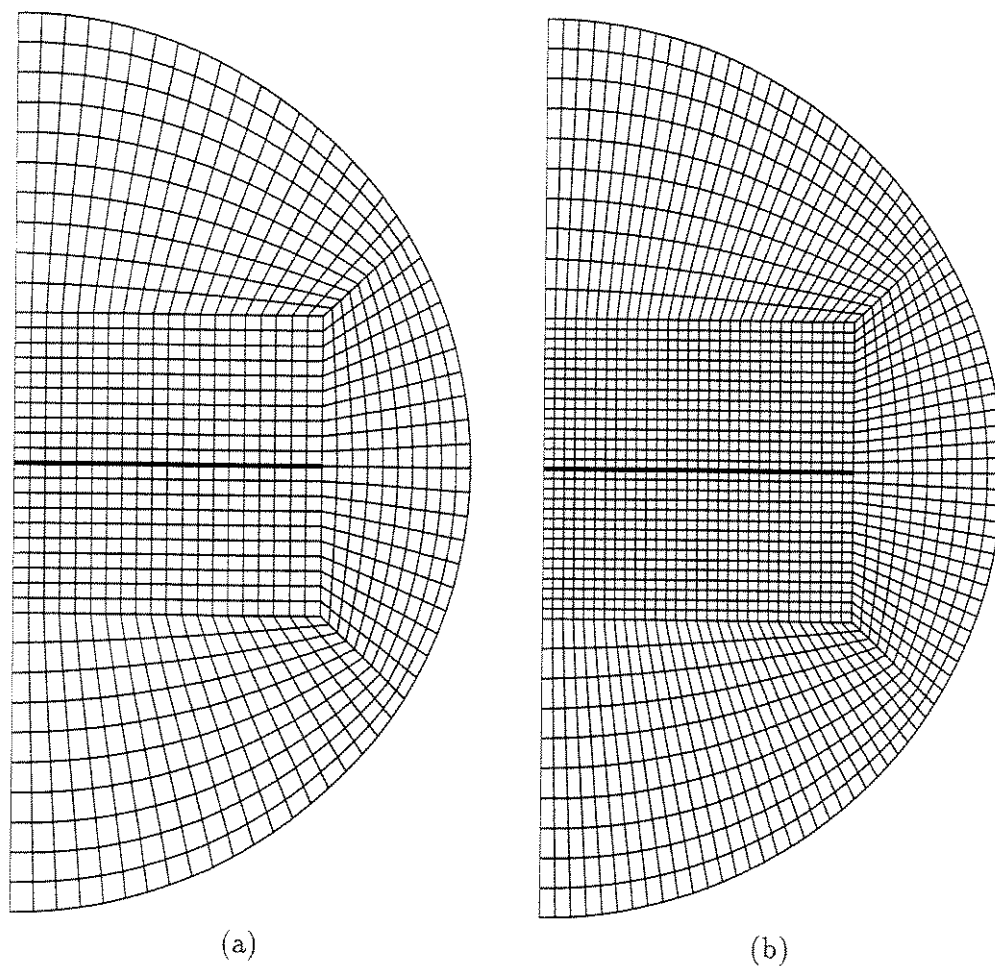


Figura 9.2: Malhas com diferentes discretizações para a estrutura: (a) 20 elementos (b) 30 elementos.

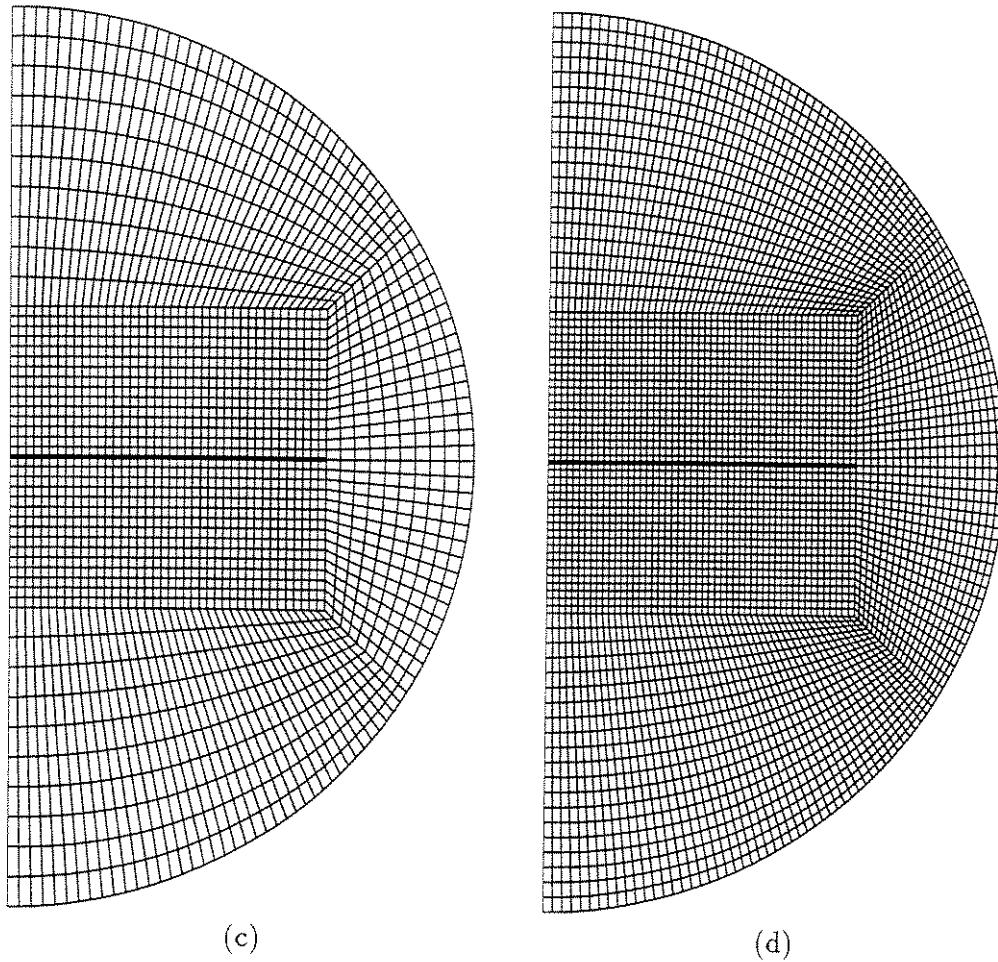


Figura 9.3: Malhas com diferentes discretizações para a estrutura: (c) 40 elementos (d) 50 elementos.

Na tabela 9.2 pode-se observar as características gerais de cada malha usada.

Malha	Nº Elem. Estrut.	Nº Elem. Fluido	Nº GDL's (Total)	Nº GDL's (Front.)
(a)	20	1000	1111	61
(b)	30	1800	1961	91
(c)	40	2300	2501	111
(d)	50	4800	5061	141

Tabela 9.2: Características importantes das malhas usadas.

Com estas discretizações, verificou-se que a utilização de onze termos na formação do Kernel DtN, $n = 10$, seriam adequados para este problema. Obteve-se então, as respostas

do deslocamento da estrutura no ponto da excitação, $x = L/2$. Sendo as respostas para as diversas discretizações observadas na figura 9.4. Considerou-se a resposta para a discretização de 50 elementos estruturais como sendo uma boa resposta.

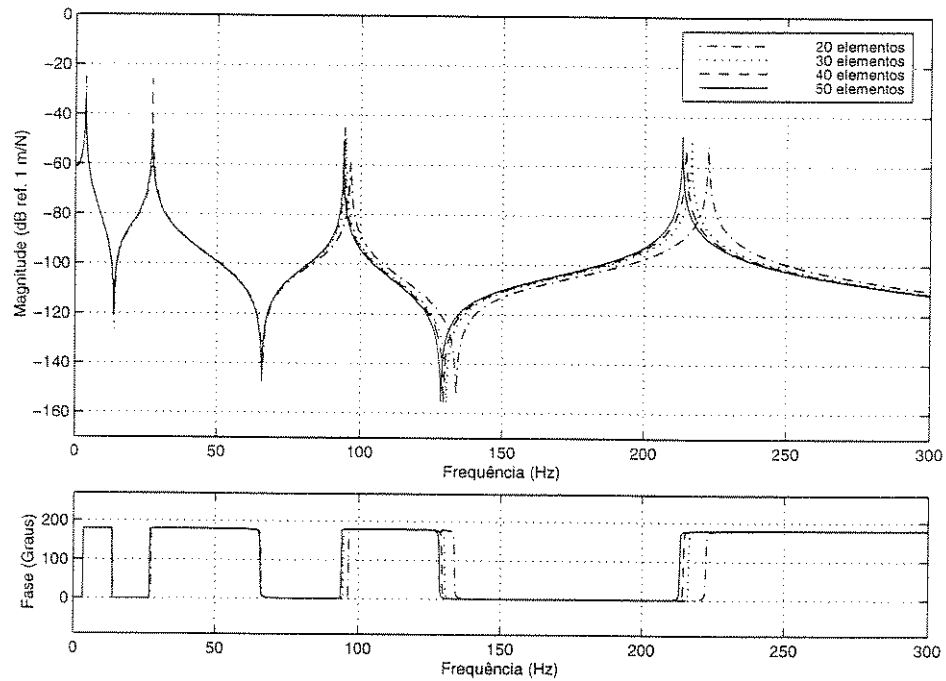


Figura 9.4: Comparação das Frf's no ponto da excitação.

O comportamento do fluido pode ser visualizado nas figuras 9.5 a 9.12, onde são mostradas as partes real e imaginária da resposta no fluido para o domínio discretizado em cada um dos quatro modos analisados. Novamente, os deslocamentos da estrutura estão exagerados para melhor visualização dos modos, e a pressão esta em Pa. As frequências de ressonância obtidas das frf's estão mostradas na tabela 9.3.

<i>Modo</i>	<i>Vácuo</i>	<i>Fluido-Estrutura</i>	<i>Variação</i>
1 ^a	13,4 Hz	3,5 Hz	383%
2 ^a	84,1 Hz	27,0 Hz	311%
3 ^a	235,5 Hz	93,8 Hz	251%
4 ^a	461,5 Hz	213,3 Hz	216%

Tabela 9.3: Frequências de Ressonância do Sistema Acoplado.

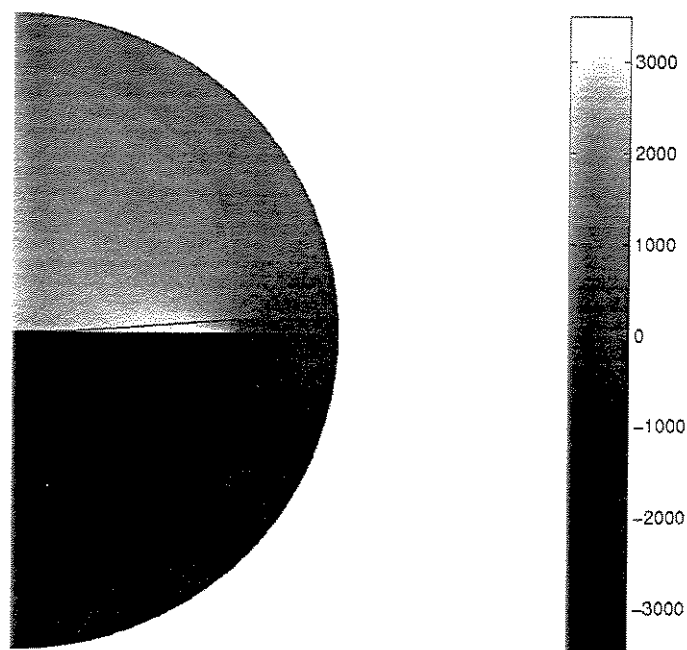


Figura 9.5: Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

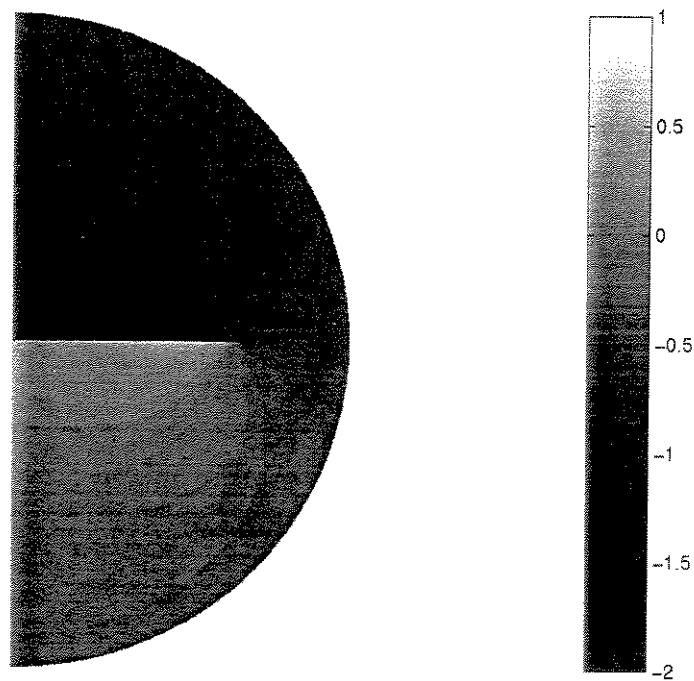


Figura 9.6: Primeiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

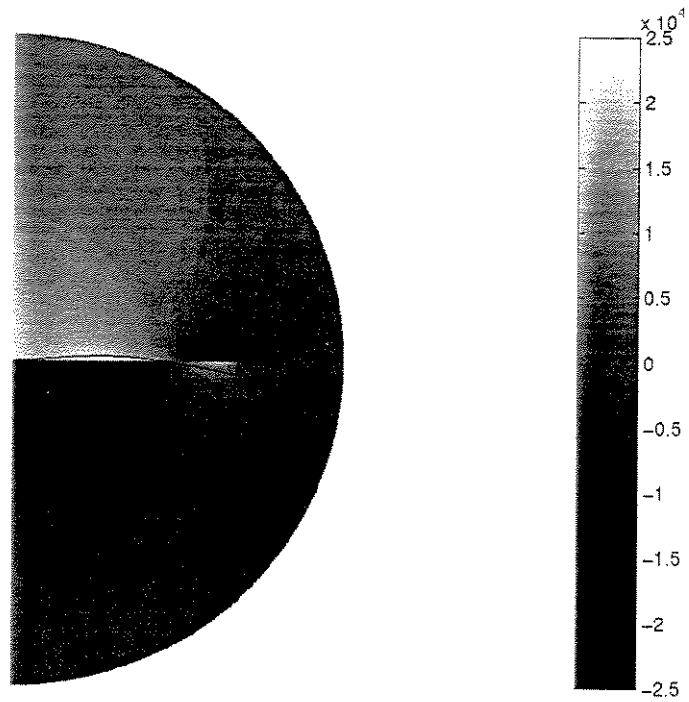


Figura 9.7: Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

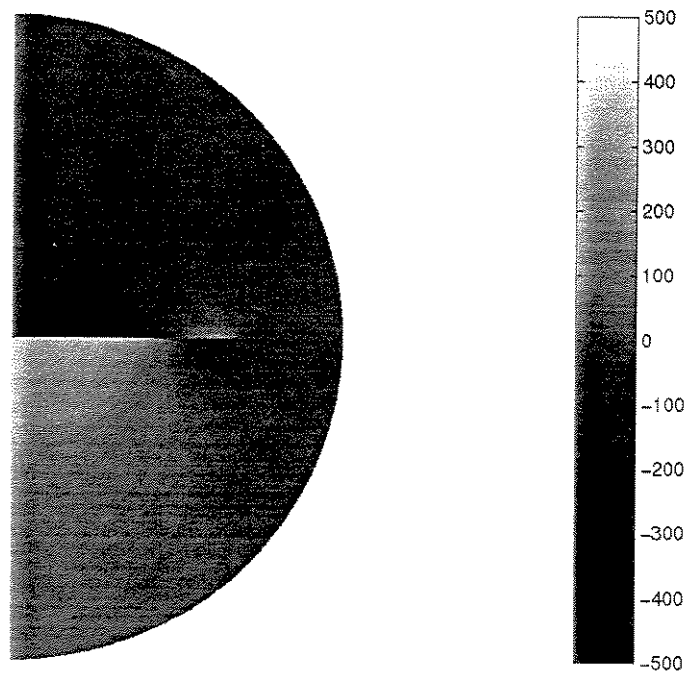


Figura 9.8: Segundo Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

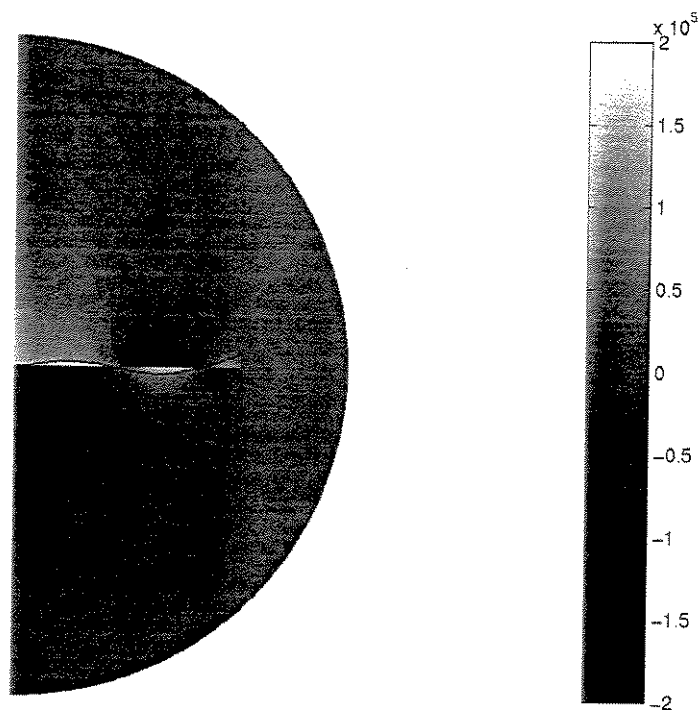


Figura 9.9: Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

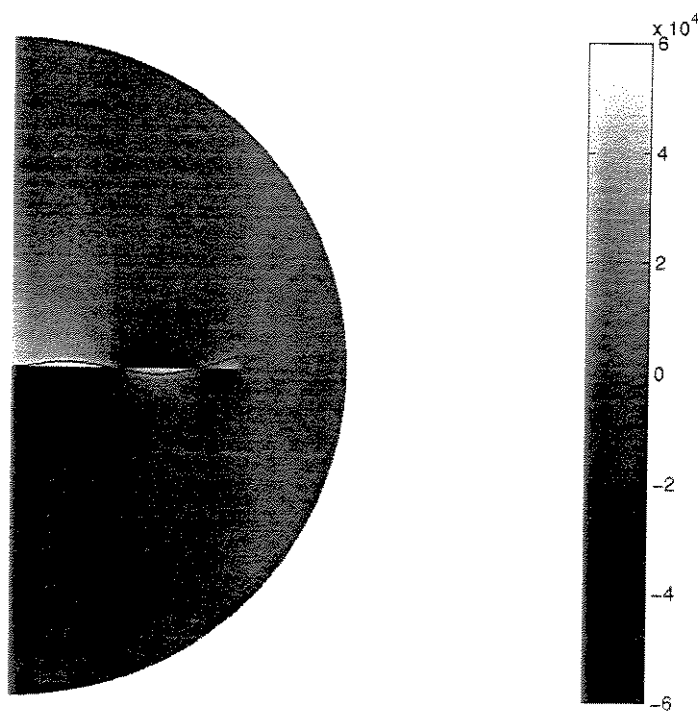


Figura 9.10: Terceiro Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

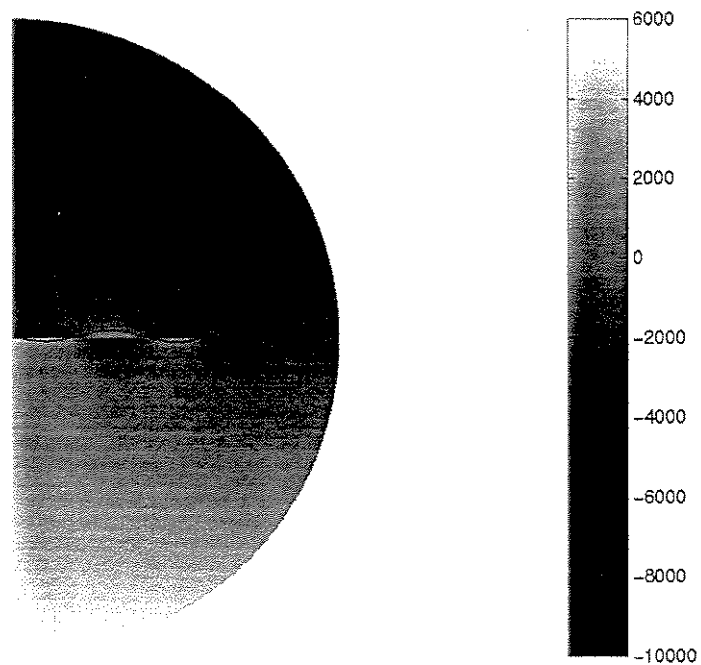


Figura 9.11: Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Real.

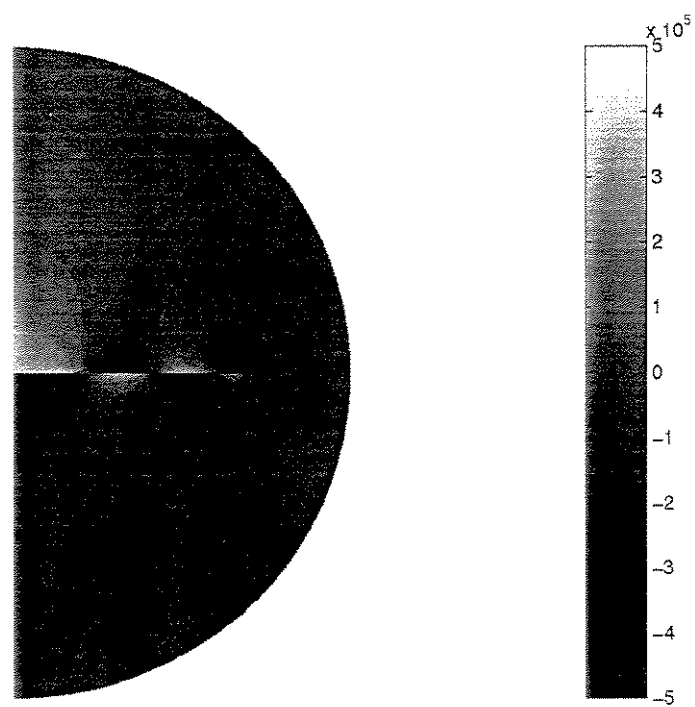


Figura 9.12: Quarto Modo Acoplado com Mapeamento DtN. Parte Imaginária.

9.5 Comparação das Respostas Obtidas via MEC e MEF/DtN

Com as respostas convergidas obtidas para o método de elementos de contorno, com 40 elementos estruturais, e para o método MEF/DtN, com 50 elementos estruturais, pode-se fazer a comparação em relação ao comportamento da estrutura para uma excitação em $L/2$, mostrada nas figuras 9.13 a 9.18, onde L é o comprimento da viga, e x é a distância em relação à parede infinita.

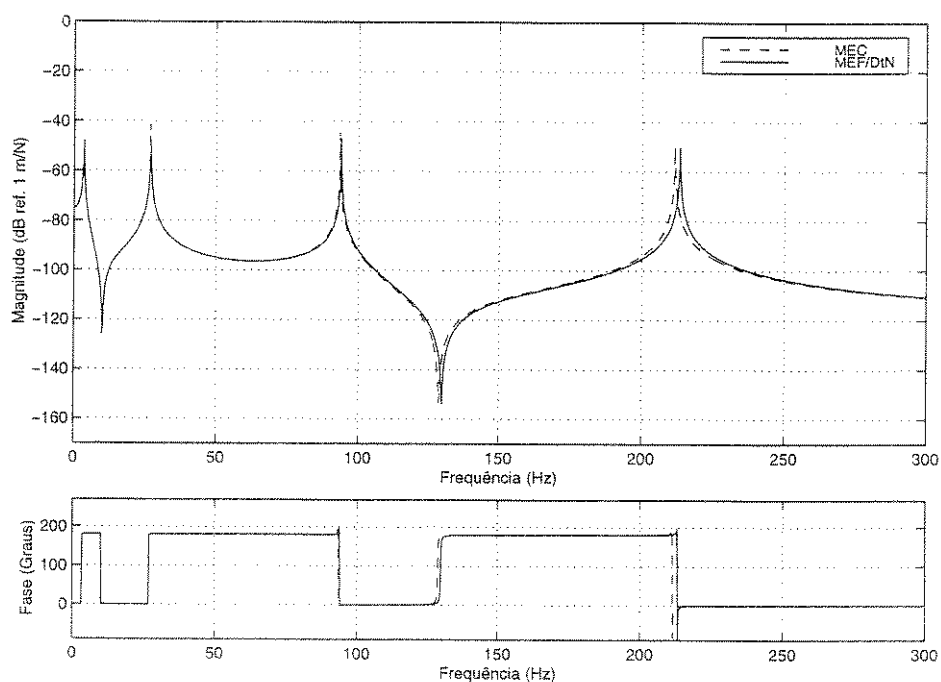


Figura 9.13: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L/5$.

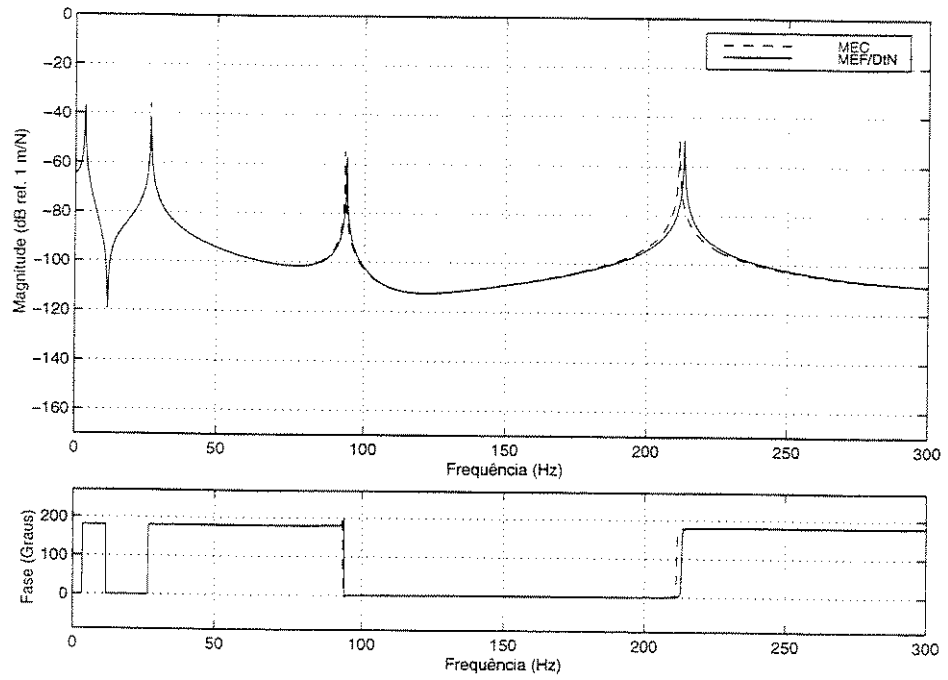


Figura 9.14: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=2L/5$.

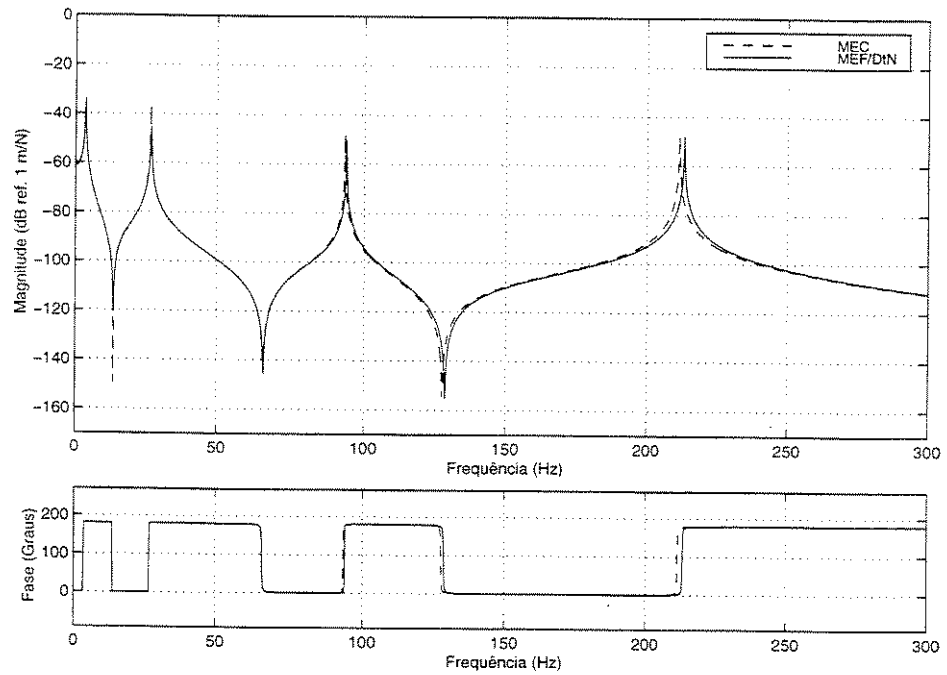


Figura 9.15: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L/2$, ponto da excitação.

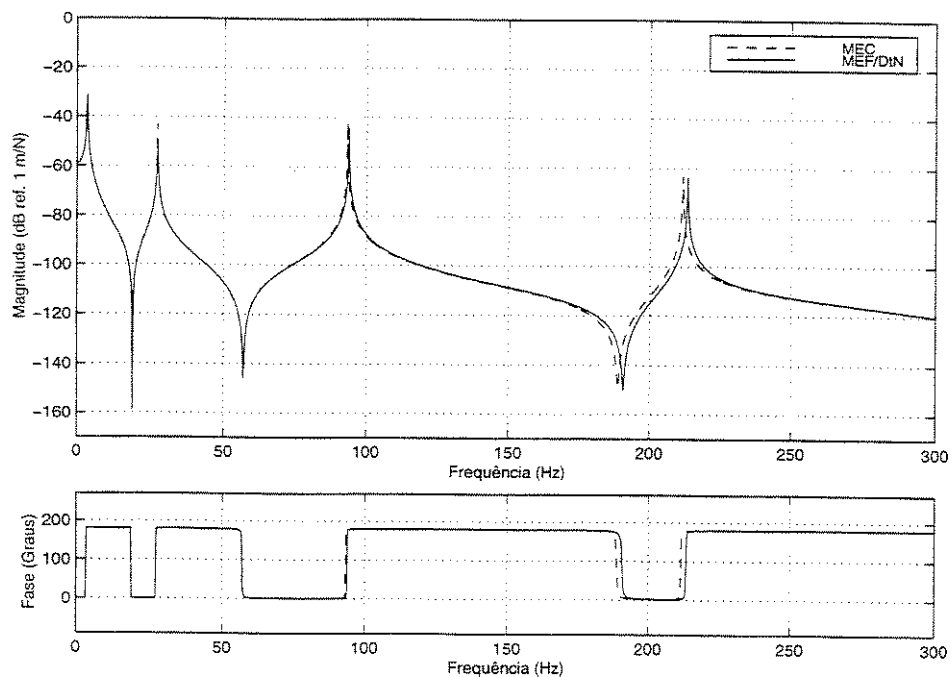


Figura 9.16: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=3L/5$.

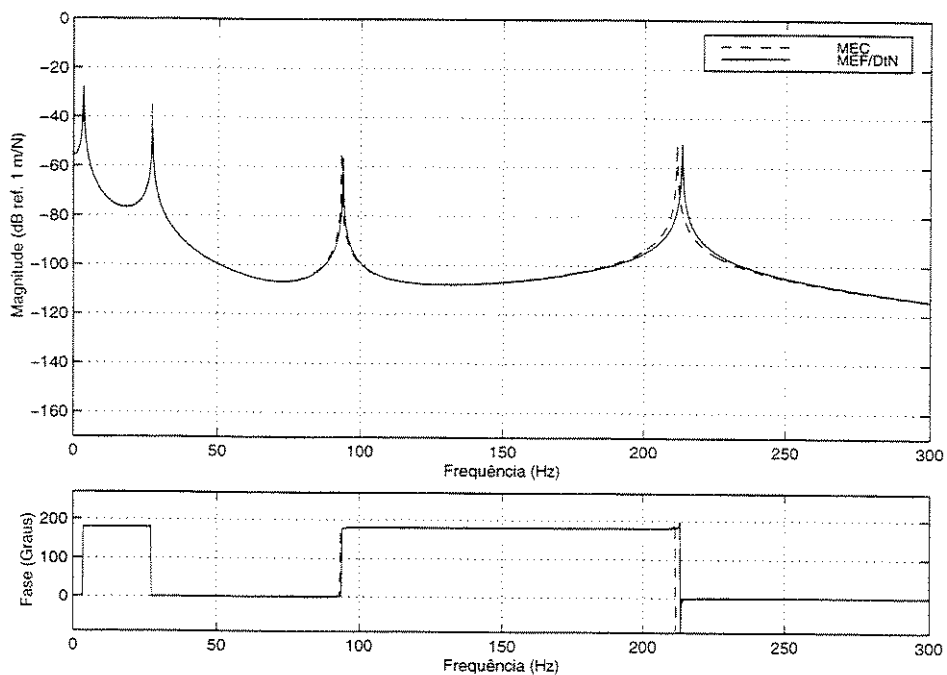


Figura 9.17: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=4L/5$.

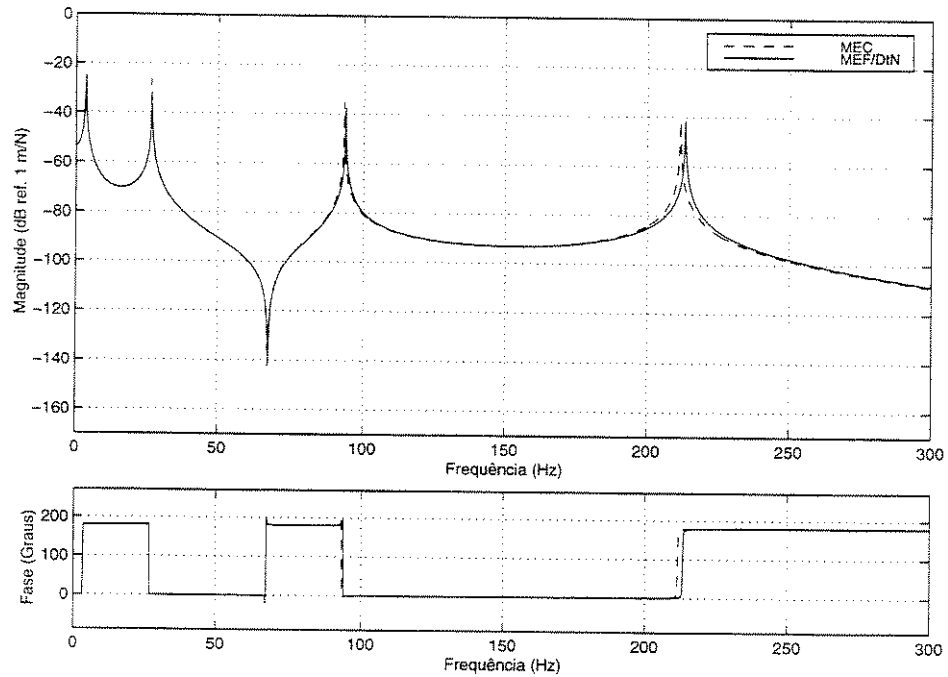


Figura 9.18: Comparação das Frf's de deslocamento no ponto $x=L$, extremidade livre.

Observa-se nas comparações uma pequena diferença em frequência para os modos mais altos, sendo que de um modo geral as respostas tem o mesmo comportamento tanto em magnitude como em fase. Com isto, mostra-se nos resultados que o método consegue trazer a influência do meio fluido semi-infinito para o comportamento da estrutura de forma estável em frequência e em magnitude, sem o surgimento de singularidades numéricas, ou imprecisões devido a reflexões da fronteira artificial.

A diferença em frequência, novamente no sentido de indicar uma massa adicional, nos mostra que a interface modelada com elementos de viga, com funções de forma cúbicas para o deslocamento, acoplados com elementos lineares em pressão, sofrem em introduzir uma dificuldade de representação direta do acoplamento, sendo necessários um grande numero de elementos lineares de fluido para uma boa representação do comportamento dinâmico acoplado.

O estudo de Métodos de Modelagem para a região do campo próximo se faz necessário para a resolução mais eficiente deste tipo de problema.

Capítulo 10

Conclusões

Neste Capítulo são apresentadas as principais conclusões deste trabalho, levando-se em conta os objetivos propostos no primeiro capítulo. Assim, inicialmente são apresentadas as conclusões em relação a investigação do Método de Mapeamento DtN. Em seguida são apresentadas as conclusões sobre os resultados obtidos para os exemplos com interação fluido-estrutura em meio infinito e meio semi-infinito. Ao final do capítulo, são levantadas sugestões para trabalhos futuros nesta área de pesquisa.

10.1 Conclusões Principais

O capítulo 7, Investigação do Método de Mapeamento DtN, apesar de trazer resultados para problemas simples, serviu como forma de validação da modelagem implementada. Nesta investigação, algumas características importantes do método foram explicitadas. Destacando-se a vantagem de poder usar-se domínios reduzidos, sem estendimento desnecessário da fronteira, o uso de poucos termos na formação do Kernel DtN trazendo bons resultados, e a possibilidade de expandir-se os resultados obtidos na fronteira artificial para fora do domínio de forma simples e direta.

Outros aspectos que foram observados nesta investigação foram: A necessidade de uma boa discretização interna para assegurar a qualidade dos resultados na fronteira, sendo que esta não necessita de uma discretização especial, diferenciada do domínio in-

terno; E a escolha do número de harmônicas para a formação do Kernel DtN levar em conta a forma esperada da resposta no domínio externo para uma boa representação do domínio finito discretizado.

No capítulo 8, Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Infinito com Mapeamento DtN, constatou-se a possibilidade do método MEF/DtN de simular problemas reais com boa aproximação para o campo acústico quando comparado com resultados experimentais. A comparação do comportamento da estrutura obtido com e sem a influência do meio aéreo, simulado através do Método DtN, confirma o método como sendo estável em não introduzir singularidades numéricas devidas a avaliação do Kernel DtN no comportamento do sistema analisado, sendo esta uma característica vantajosa do método.

A obtenção do campo acústico simulado aliado a resultados experimentais pode promover um ajuste dos modelos discretizados para a obtenção de resultados em problemas vibro-acústicos mais realistas.

No capítulo 9, Exemplo de Modelagem Fluido-Estrutura em Meio Fluido Semi-Infinito com Mapeamento DtN, a comparação dos resultados obtidos para o comportamento da estrutura com o MEF/DtN com os resultados obtidos utilizando o Método de Elementos de Contorno, confirmam a proximidade dos resultados aumentando-se o refinamento da discretização. O exemplo utilizado indica a possibilidade de utilizar-se o Método MEF/DtN em problemas onde normalmente é utilizado o Método de Elementos de Contorno. Com isto, aumenta-se o número de ferramentas de análise para problemas vibro-acústicos em meio aberto, em espaço completo ou semi-espaço.

Desta forma, neste trabalho alcançou-se o objetivo de investigar, implementar e aplicar um método que trate de problemas de acoplamento fluido-estrutura, em especial vibro-acústica, considerando-se a presença de meio fluido Infinito e Utilizando o Método de Elementos Finitos.

10.2 Trabalhos Futuros

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho surgiram idéias para trabalhos futuros nesta área de análise, Vibro-Acústica em meio fluido infinito usando o Mapeamento DtN.

Como por exemplo, a utilização de soluções para o domínio externo que leve em conta a presença de fontes acústicas ou barreiras, aumentando-se a abrangência do Método DtN para problemas em meio aberto.

Outro exemplo seria a possibilidade de explorar-se a simetria cíclica da solução analítica para a representação de problemas com paredes infinitas em ângulos variados, por exemplo, paredes ortonormais.

Outra sugestão seria a utilização de fronteiras artificiais elípticas com soluções próprias para representar problemas com domínio de interesse estreito, economizando-se esforço de cálculo para o domínio discretizado.

Bibliografia

- [1] ANSYS, inc., **ANSYS Workbook AND User's Guide - Release 5.4**, Ansys Inc. USA, 1994.
- [2] ANTONIADIS, I., KANARACHOS, A., *Decoupling Procedures for Fluid-Structure Interaction Problems*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.70, p.1-25, 1988.
- [3] ASTLEY, R. J., *Wave Envelope and Infinite Elements for Acoustical Radiation*. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, England, v.3, p.507-526, 1983.
- [4] BATHE, K. J., NITIKITPAIBOON, C., WANG, X., *A Mixed Displacement-Based Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction*. **Computers and Structures**, England, v.56, n.2/3, p.225-237, Jul. 1995.
- [5] BATHE, K. J., WALCZAK, J., ZHANG, H., *Some Recent Advances for Practical Finite Element Analysis*. **Computers and Structures**, Great Britain, v.47, n.4/5, p.511-521, 1993.
- [6] BETTESS, P., *Infinite Elements*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.11, p.53-64, 1977.
- [7] BETTESS, P., *More on Infinite Elements*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.15, p.1613-1626, 1980.
- [8] BETTESS, P., **Infinite Elements**, England: Penshaw Press, 1992.
- [9] BETTESS, P., ZIENKIEWICZ, O.C., *Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements*. **International Journal for Numerical**

Methods in Engineering, England, v.11, p.1271-1290, 1977.

- [10] CASAS, W.J.P., *Concepção Ótima de Sistemas Elasto-Acústicos Interiores Acoplados* São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 180p. Tese (Doutorado)
- [11] CHEN, H. C., TAYLOR, R., *Vibration Analysis of Fluid-Solid Systems Using a Finite Element Displacement Formulation*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.29, p.683-698, 1990.
- [12] COLINAS, N. G., *Caracterização das Propriedades Vibratórias de Estruturas Utilizando o Campo Sonoro Irrradiado* São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, a ser apresentado em 1999. Tese (Mestrado)
- [13] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, New York: Wiley, 1989. 630 p.
- [14] DHATT, G., TOUZOT, G., **The Finite Element Method Displayed**, New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [15] DUNGAR, R., *An Efficient Method of Fluid-Structure Coupling in the Dynamic Analysis of Structures*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.13, p.93-107, 1978.
- [16] EL-ESNAWY, N.A., AKL, A.Y., BAZARAA, A.S., *A New Parametric Infinite Domain Element*. **Finite Elements in Analysis and Design**, England, v.19, p.103-114, 1995.
- [17] ETTOUNEY, M.M., DADDAZIO, R.P., ABOUD, N.N., *The Interaction of a Submerged Axisymmetric Shell and Three-Dimensional Internal Systems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.37, p. 2951-2970, Sep. 1994.
- [18] EVERSTINE, G. C., *Letter to the Editor: A Symetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction*. **Journal of Sound and Vibration**, England, v.79, n.1, p.157-160, 1981.

- [19] GALLI, L.A.F., *Estudo do Comportamento Dinâmico de Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura Utilizando-se uma Formulação Simétrica em Potenciais de Velocidade*. São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995. 111p. Tese (Mestrado)
- [20] GERDES, K., DEMKOWICZ, L., *Solution of 3D-Laplace and Helmholtz Equations in Exterior Domains using hp-infinite Elements*. **Computer Methods in Applied Mechanical Engineering**, Switzerland, v.137, n.3-4, p. 239-273, Nov. 1996.
- [21] GILJOHANN, D., BITTNER, M., *The Three-Dimensional DtN Finite Element Method for Radiation Problems of the Helmholtz Equation*. **Journal of Sound and Vibration**, London, v.212, n.3, p.383-394, 1998.
- [22] GIVOLI, D., **Numerical Methods for Problems in Infinite Domains**, Holanda: Elsevier, 1992.
- [23] GIVOLI, D., KELLER, J.B., *A Finite Element Method for Large Domains*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.76, p.41-66, 1989.
- [24] GIVOLI, D., PATLASHENKO, I., KELLER, J.B., *High-Order Boundary Conditions and Finite Elements for Infinite Domains*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.143, p.13-39, 1997.
- [25] HAMDAN, F.H., DOWLING, P.J., *Far-field Fluid Structure Interaction-Formulation and Validation*. **Computers and Structures**, England, v.56, n.6, p.949-958, Sep. 1995.
- [26] HAMDI, M. A., OUSSET, Y., *A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.13, p.139-150, 1978.
- [27] HARARI, I., BARBONE, P.E., SLAVUTIN, M., SHALOM, R., *Boundary Infinite Elements for The Helmholtz Equation in Exterior Domains*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.41, p.1105-1131, 1998.

- [28] HARARI, I., HUGHES, T.J.R., *Finite Element Methods for the Helmholtz Equation in an Exterior Domain: Model Problems*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.87, p.59-96, 1991.
- [29] HARARI, I., HUGHES, T.J.R., *A Cost Comparison of Boundary Element and Finite Element Methods for Problems of Time-Harmonic Acoustics*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.97, p.77-102, 1992.
- [30] HARARI, I., HUGHES, T.J.R., *Analysis of Continuous Formulations Underlying the Computation of Time-Harmonic Acoustics in Exterior Domains*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.97, p.103-124, 1992.
- [31] HARARI, I., HUGHES, T.J.R., *Galerkin/Least-Squares Finite Element Methods for the Reduced Wave Equation with Non-Reflecting Boundary Conditions in Unbounded Domains*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.98, p.411-454, 1992.
- [32] HARARI, I., HUGHES, T.J.R., *Studies of Domain Based Formulations for Computing Exterior Problems of Acoustics*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.37, p.2935-2950, Sep. 1994.
- [33] IZADPANAH, K., HARDER, R. L., KANSAKAR, R., REYMOND, M., *Coupled Fluid-Structure Interaction Analysis*. **Finite Elements in Analysis and Design**, England, v.7, p.331-342, 1991.
- [34] JEANS, R.A., MATHEWS, I.C., *Elastoacoustics Analysis of Submerged Fluid-Filled Thin Shells*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.37, p. 2911-2919, Sep. 1994.
- [35] KANARACHOS, A., ANTONIADIS, I., *Symmetric Variational Principles and Modal Methods in Fluid-Structure Interaction Problems*. **Journal of Sound and Vibration**, London, v.121, n.1, p.77-104, 1988.
- [36] KELLER, J.B., GIVOLI, D., *Exact Non-reflecting Boundary Conditions*. **Journal of Computational Physics**, Academic Press inc., n.82, p.172-192, 1989.

- [37] KIEFLING, L., FENG, G. C., *Fluid-Structure Finite Element Vibrational Analysis.. AIAA Journal*, Washington, v.14, n.2, p.199-203, Feb. 1976.
- [38] LAMB, H., **Hydrodynamics**, New York: Dover, 1945. 738p.
- [39] MALHOTRA, M., PINSKY, P.M., *A Matrix-Free Interpretation of The Non-Local Dirichlet-to-Neumann Radiation Boundary Condition. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.39, p.3705-3713, 1996.
- [40] MARIEM, J. B., HAMDI, M. A., *A New Boundary Finite Element Method for Fluid-Structure Interaction Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.24, p.1251-1267, 1987.
- [41] MARTINI, J.N., *Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas* São Paulo: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 146p. Tese (Mestrado)
- [42] MORAND, H., OHAYON, R., *Substructure Variational Analysis of the Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems. Finite Element Results. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.14, p.741-755, 1979.
- [43] MORSE, P.M., FESHBACH, H., **Methods of Theoretical Physics**, New York: McGraw-Hill, 1953.
- [44] MÜLLER, W. C., *Simplified Analysis of Linear Fluid-Structure Interaction. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.17, p.113-121, 1981.
- [45] NEDELEC, J.C., *Finite Elements for Exterior Problems Using Integral Equations. Finite Elements in Fluids*, England: John Wiley & Sons Ltd., v.7, p.241-246, 1987.
- [46] NITIKITPAIBOON, C., BATHE, K. J., *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Velocity Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction. Computers and Structures*, Great Britain, v.47, n.4/5, p.871-891, 1993.

- [47] NOMURA, T., *ALE Finite Element Computations of Fluid-Structure Interaction Problems*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.112, p.291-308, 1994.
- [48] OLSON, L. G., BATHE, K. J., *Analysis of Fluid-Structure Interactions. A Direct Symetric Coupled Formulation Based on th Fluid Velocity Potential*. **Computers and Structures**, USA, v.21, n.1/2, p.21-32, 1985.
- [49] OLSON, L. G., VANDINI, T., *Eigenproblems from Finite Element Analysis of Fluid-Structure Interactions*. **Computers and Structures**,
- [50] POPOV, E. P., **Introduction to Mechanics of Solids**, Englewood Cliffs,N. J.:Prentice-Hall, 1968. 571p.
- [51] RAJAKUMAR, C., ALI, A., *Bondary Element-Finite Element Coupled Eigenanalysis of Fluid-Structure Systems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.39, p. 1625-1634, May. 1996.
- [52] RAYLEIGH, W. J., **The Theory of Sound**, New York: Dover, 1945.
- [53] SANDBERG, G., GÖRANSSON, P., *A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis*. **Journal of Sound and Vibration**, London, v.123, n.3, p.507-515, 1988.
- [54] SANDBERG, G., *A New Strategy for Solving Fuid-Structure Problems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.38, p. 357-370, Feb. 1995.
- [55] SHAHRUZ, S. M., MA, F., *On Symmetrizability of Asymmetric Nonconservative Systems*. **Journal of Applied Mechanics**, USA, v.56, jun., 1989.
- [56] SHARAN, S. K., GLADWELL, G. M. L., *A General Method for the Dynamic Response Analysis of Fluid-Structure Systems*. **Computers and Structures**, v.21, n.5, p.937-943, 1985.
- [57] SYGULSKI, R., *Dynamic Analysis of Open Membrane Structures Interacting with Air*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.37, p. 1807-1823, Jun. 1994.

- [58] SYSNOISE, inc., **User's Manual AND Examples Manual**, Revisão 5.2, Vol. I e IV, 1995.
- [59] TABARROK, B., *Dual Formulations for Acousto-Structural Vibrations*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.13, p.197-201, 1978.
- [60] TIMOSHENKO, S. P., GERS, J. E., **Mecânica dos sólidos**, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.
- [61] TSAI, C. S., LEE, G. C., *Arch Dam-Fluid Interactions: By FEM-BEM and Substructure Concept*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.24, p.2367-2388, 1987.
- [62] WILSON, E. L., KHALVATI, M., *Finite Elements for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.19, p.1657-1668, 1983.
- [63] YANG, Y.B., KUO, S.R., HUNG, H.H., *Frequency-Independent Infinite Elements for Analysing Semi-Infinite Problems*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, v.39, p.3553-3569, 1996.
- [64] ZAVALA, P. A. G., PAVANELLO, R., *Modelagem de Meios Acústicos Ilimitados Utilizando o Método de Elementos Finitos e Mapeamento DtN* Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte e Nordeste, Fortaleza-CE, out. 1998.
- [65] ZAVALA, P. A. G., PAVANELLO, R., *Vibro-Acoustic Modeling of Vehicle Interiors and Exteriors Using Finite Element Method*, Anais do VII Congresso e Exposição Internacionais da Mobilidade - SAE BRASIL 98, São Paulo-SP, Nov. 1998.
- [66] ZENG, X., BIELAK, J., *Stable Symmetric Finite Element-Boundary Integral Coupling Methods for Fluid-Structure Interface Problems*. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, England, v.15, n.1, p.79-91, 1995.
- [67] ZIENKIEWICZ, O. C., *Coupled Problems and their Numerical Solution*. **Numerical Methods in Coupled Systems**, Wiley, Chichester, cap. 1, p.35-68, 1984.

- [68] ZIENKIEWICZ, O. C., BANDO, K., BETTESS, P., EMSON, C., CHIAM, T.C., *Mapped Infinite Elements for Exterior Wave Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.21, p.1229-1251, 1985.
- [69] ZIENKIEWICZ, O. C., BETTESS, P., *Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.13, p.1-16, 1978.
- [70] ZIENKIEWICZ, O. C., EMSON, C., BETTESS, P., *A Novel Boundary Infinite Element. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, England, v.19, p.393-404, 1983.
- [71] ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, **Finite Elements and Approximation**, New York: J. Wiley, 1983. 328p.
- [72] ZIENKIEWICZ, O. C., NEWTON, R. E., *Coupled Vibrations of a Compressible Fluid. In: Proceedings International Symposium on Finite Elements Techniques*, Stuttgart, Junho, 1969. p.359-379.
- [73] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., **The Finite Element Method**, Berkshire: McGraw-Hill, 1991.

Apêndice A

Metodologia de Pesquisa Bibliográfica

A Metodologia de Pesquisa Bibliográfica utilizada neste trabalho consistiu em duas formas de obtenção das referências relevantes ao trabalho.

A primeira foi a de obter-se referências chaves nos trabalhos desenvolvidos no departamento sobre o assunto. Podendo-se citar Teses de Mestrado, Artigos de Revistas e Trabalhos de Congressos. Desta forma, obteve-se as referências mais clássicas em cada assunto abordado.

A segunda forma foi a de consultar-se bases como a Compendex da BAE, Biblioteca da Área de Engenharia da Unicamp, disponível em CD-ROM, bem como pela internet, as bases da EI, Engineering Index (<http://www.ei.org/>), e o ISI, Institute for Scientific Information (<http://www.webofscience.com/>), em momentos onde a Unicamp detinha licença para pesquisas. Sendo utilizadas para pesquisas mais atuais sobre os assuntos abordados no trabalho.

Após uma seleção dos trabalhos mais relevantes, constatou-se que cerca de 80% dos artigos poderiam ser obtidos nas bibliotecas da Unicamp, não sendo necessária a utilização de serviços como o Unibibli ou o Comut, oferecidos pela BAE, para obtenção dos trabalhos não recuperados.