ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR Mariana Godoy Vazquez Miano E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 25/11/09

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TENSORIZAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ PARA QUADRADOS E HEXAEDROS USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA ORDEM

Autora: Mariana Godoy Vazquez Miano
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

122/2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TENSORIZAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ PARA QUADRADOS E HEXAEDROS USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA ORDEM

Autora: Mariana Godoy Vazquez Miano
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Miano, Mariana Godoy Vazquez
M58t	Tensorização de matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros usando o método de elementos finitos de alta ordem / Mariana Godoy Vazquez Miano. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.
	Orientador: Marco Lúcio Bittencourt. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Método de Elementos Finitos. I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Tensorization of stiffness matrices for squares and hexaedral using high order FEM
Palavras-chave em Inglês: Finite Element Method
Área de concentração: Mecânica do Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Alberto Luiz Serpa, Renato Pavanello, Cleonice Fátima Bracciali, Marcílio Alves
Data da defesa: 25/11/2009
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

TENSORIZAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ PARA QUADRADOS E HEXAEDROS USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE ALTA ORDEM

Autora: Mariana Godoy Vazquez Miano
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
DCCE/IBILCE/UNESP

Prof. Dr. Marcílio Alves
Depto de Eng. Mecatrônica e Sistemas Mecânicos/USP

Campinas, 25 de Novembro de 2009.

À luz dos olhos meus, Júlia.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela sabedoria, paciência e generosidade no compartilhamento de suas idéias, fatores determinantes para a realização deste trabalho.

Ao meu querido companheiro Gleberson, pela compreensão na minha ausência, motivação no dia-a-dia e pela paciência nos momentos mais difíceis.

À minha amada filha Júlia, pela contagiante alegria em seu sorriso, me iluminando a cada novo dia.

Aos grandes e fortes pilares de minha existência, Elisabete e Ramon, meus queridos pais, pelo apoio incondicional.

Aos irmãos, Thais, Ramon e "Dani", pela amizade e carinho demonstrados; em especial à querida irmã Thais, pela prestatividade e colaboração em muitos momentos cruciais, principalmente durante a gestação da Júlia.

Aos amigos da FATEC-Americana, em especial aos professores Elizete, Rossano e Rafael, pelo apoio e incentivo, principalmente no período de finalização deste trabalho.

À amiga Ludmila, pelo companheirismo.

Aos colegas do laboratório de Simulação Computacional, em especial Fabiano e Rodrigo, pela colaboração e prestatividade.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

À Deus, energia e onipotência cósmica que está presente em todas as nobres ações que colaboram para a expansão do limitado conhecimento humano.

"Todo grande progresso da ciência resultou de uma nova audácia da imaginação."

John Dewey

Resumo

MIANO, Mariana Godoy Vazquez, *Tensorização de matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros usando o método de elementos finitos de alta ordem*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 86p. Tese de Doutorado.

Os Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem têm sido aplicados com sucesso em problemas de Mecânica dos Fluidos e Eletromagnetismo por apresentar uma taxa de convergência exponencial para problemas com solução polinomial. No entanto, devido ao uso de funções de interpolação de alta ordem, as matrizes dos elementos são mais densas. Este trabalho apresenta uma formulação que permite obter matrizes de rigidez de quadrados e hexaedros altamente esparsas para Problemas de Poisson. Para isso, utiliza-se a equivalência da solução de problemas de projeção unidimensionais que envolvem as matrizes de massa, mista e rigidez. Mostra-se que as matrizes de quadrados e hexaedros podem ser obtidas pela combinação ou tensorização dessas matrizes unidimensionais. A matriz de massa unidimensional que compõe a formulação das matrizes de rigidez de quadrados e hexaedros é densa e pode ser substituída pela matriz de rigidez unidimensional que se mostra bastante esparsa com as funções de base utilizadas no trabalho. A formulação é validada para quadrados e hexaedros locais e estendida para malhas não distorcidas desses mesmos elementos. Erros de aproximação da solução, esparsidade das matrizes de rigidez globais e tempo de execução são apresentados.

Palavras Chave

Método de Elementos Finitos, Métodos de Alta Ordem, Esparsidade, Problema de Poisson, Matriz de Rigidez.

Abstract

MIANO, Mariana Godoy Vazquez, *Tensorization of Stiffness Matrices for Squares and Hexahedral using High Order FEM*, Campinas: Faculty of Mechanical Engineering (FEM), State University of Campinas (UNICAMP), 2009, 86p. Phd Thesis.

High-order Finite Element Methods have been applied with success to problems of Fluid Dynamics and Electromagnetism. The main feature of these methods is to present an exponential convergence rate for problems with polinomial solution. However, due to the use of high-order interpolation functions, the elemental matrices are denser. This work shows a mathematical formulation, with tensorization concepts applied to the base functions that make up the matricial system matrices which will enable to write uniformly the systems resulting from the application of mass, mix and stiffness matrices. This possibility arises from the proposed formulation, which makes the solution vector equal to the three systems. Consequently, the 1D array mass, usually dense, that makes up the formulation of the rigid 2D and 3D matrices, in squares and hexahedra, may be replaced by the stiffness matrix 1D, which shows itself very sparse related to the base functions used in this work. The formulation is validated to quadratic and hexahedral elements and it is extended to non-distorted meshes of the same elements in the Poisson problems resolution. Approximation errors in solution, sparsity of the global stiffness and run time are also observed.

Keywords

Finite Element Method, High-Order Methods, Sparsity, Poisson Problem, Stiffness Matrix.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Símbolos

Matrizes e Vetores

$[D_{1D}]$	- Matriz unidimensional mista
D_{ij}^{1D}	- Coeficientes da matriz unidimensional mista
D_{ij}^{2D}	- Coeficientes da matriz mista do quadrado
D_{ij}^{3D}	- Coeficientes da matriz mista do hexaedro
$[H]$	- Matriz quadrada qualquer
$[J]$	- Jacobiano da transformação do sistema de referência local para o global
$[K_{1D}]$	- Matriz unidimensional de rigidez
$[K_{2D}]$	- Matriz de rigidez do quadrado
$[K_{3D}]$	- Matriz de rigidez do hexaedro
K_{ij}^{1D}	- Coeficientes da matriz unidimensional de rigidez
K_{ij}^{2D}	- Coeficientes da matriz de rigidez do quadrado
K_{ij}^{3D}	- Coeficientes da matriz de rigidez do hexaedro
$[M_{1D}]$	- Matriz unidimensional de massa
M_{ij}^{1D}	- Coeficientes da matriz unidimensional de massa
M_{ij}^{2D}	- Coeficientes da matriz de massa do quadrado
M_{ij}^{3D}	- Coeficientes da matriz de massa do hexaedro

$\{a_d\}$	- Vetor solução para a matriz mista
$\{a_k\}$	- Vetor solução para a matriz de rigidez
$\{a_m\}$	- Vetor para a matriz de massa
$\{f\}$	- Vetor do termo independente
$\{f_{1D}^d\}$	- Vetor de carregamento unidimensional da matriz mista
$\{f_{1D}^k\}$	- Vetor de carregamento unidimensional da matriz de rigidez
$\{f_{2D}^k\}$	- Vetor de carregamento da matriz de rigidez do quadrado
$\{f_{3D}^k\}$	- Vetor de carregamento da matriz de rigidez do hexaedro
$\{f_{1D}^m\}$	- Vetor de carregamento unidimensional da matriz de massa
$f_i^{1D,b,m}$	- Coeficiente do vetor unidimensional de corpo da matriz de massa
$f_i^{1D,b,d}$	- Coeficiente do vetor unidimensional de corpo da matriz mista
$f_i^{1D,b,k}$	- Coeficiente do vetor unidimensional de corpo da matriz de rigidez
$f_i^{1D,b,m}$	- Coeficiente do vetor unidimensional de corpo da matriz de massa
$f_i^{1D,k}$	- Coeficiente do vetor unidimensional da matriz de rigidez
$f_i^{2D,b,k}$	- Coeficiente do vetor de corpo da matriz de rigidez do quadrado
$f_i^{2D,s,k}$	- Coeficiente do vetor de superfície da matriz de rigidez do quadrado
$f_i^{2D,s,d}$	- Coeficiente do vetor de superfície da matriz mista do quadrado
$f_i^{3D,b,k}$	- Coeficiente do vetor de corpo da matriz de rigidez do hexaedro
$f_i^{3D,s,d}$	- Coeficiente do vetor de superfície da matriz mista do hexaedro
$\mathbf{n}$	- vetor normal

a_j - Coeficientes das combinações lineares das funções de base

B - Volume do elemento

$||e||_A$ - Erro relativo em energia

$f_{,\xi 1}$, $f_{,\xi 2}$, $f_{,\xi 3}$ - Derivadas parciais de primeira ordem nas três direções locais

$f_{\xi 1,\xi 1}$, $f_{\xi 2,\xi 2}$, $f_{\xi 3,\xi 3}$ - Derivadas parciais de segunda ordem nas três direções locais

$f_{,x}$, $f_{,y}$, $f_{,z}$ - Derivadas parciais globais de primeira ordem

F_i - Faces do elemento

k_{pq} - Coeficientes da matriz de rigidez espectral unidimensional

$l_p(\xi_1)$ - Polinômios de Lagrange

$L_P(.)$ - Polinômios de Lagrange de grau P

n - Grau dos polinômios

$N_p(.)$ - Função de interpolação unidimensional

$N_{pq}(.)$ - Função de interpolação bidimensional (quadrado)

$N_{pqr}(.)$ - Função de interpolação tridimensional (hexaedro)

P - Grau das funções de base

P_i - Grau das funções de base na direção ξ_i

$P_n^{\alpha,\beta}(.)$ - Polinômios de Jacobi de grau n e ponderação α, β

$u(.)$ - Função polinomial qualquer

$||u||_A$ - Norma de energia

V_i - Vértices do elemento

w_i - Peso da regra de quadratura

α, β - Coeficientes de ponderação dos polinômios de Jacobi

α_i, β_i - Coeficientes de ponderação dos polinômios de Jacobi na direção ξ_i ou L_i

δ_{nm} - Delta de Kronecker

Γ - Contorno do domínio

ϕ_n - Funções de base

ξ_i - Coordenada local em $[-1, 1]$

ξ_{ip} - Pontos na direção ξ_i

$\phi_a(.), \phi_b(.), \phi_c(.), \phi_p(.), \phi_q(.), \phi_r(.)$	- Funções de interpolação unidimensionais
Ω	- Domínio

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

No estudo do comportamento de sistemas físicos, modelos matemáticos são amplamente utilizados. O avanço da ciência tem motivado um grande desenvolvimento, o que propicia modelagens realísticas, confiáveis e de aplicações práticas na engenharia. A análise desses modelos matemáticos habitualmente requer o uso de métodos numéricos, entre eles está o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método foi desenvolvido inicialmente para a análise de meios contínuos, com foco no caráter estrutural.

Basicamente, aproxima a forma fraca de problemas de valor de contorno usando bases polinomiais.

No MEF, o domínio de definição do problema é dividido em um número discreto de subdomínios de dimensões finitas, denominados elementos finitos, interligados por meio de um número reduzido de pontos denominados nós. Arbitra-se o campo de deslocamentos em cada elemento em função das grandezas nodais desconhecidas. A partir das equações algébricas escritas para cada elemento, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos. Esse sistema global, após a introdução de condições de contorno, permite a determinação da solução para os coeficientes nodais (Soriano, 2003).

Assim, no MEF, uma função unidimensional contínua desconhecida $u(x)$ será representada pela combinação linear de N funções conhecidas $\phi_n(x)$, ponderadas por coeficientes indeterminados a_n, tal que

$$u(x) \cong u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x), \tag{1.1}$$

onde os coeficientes a_n são determinados pela aplicação das equações que governam o problema. O conjunto de funções $\phi_n(x)$ também é chamado de funções de base, por constituir uma base no espaço de funções. Essas funções podem ser polinômios de Lagrange, Legendre, Chebyshev, Jacobi (polinômios ortogonais).

Um problema de aproximação é equivalente a resolver uma equação matricial da forma $[H]\{a\} = f$, a qual é resolvida invertendo-se a matriz $[H]$, tal que $\{a\} = [H]^{-1}\{f\}$, onde $[H]$ é uma matriz, $\{a\}$ o vetor solução e $\{f\}$ o vetor dos termos independentes (Karniadakis e Sherwin, 1999). Porém, o custo computacional para inverter sistemas matriciais é muito alto. Portanto, quanto mais próxima de uma matriz diagonal for possível representar a aproximação, mais fácil será a solução do problema inicial. Também, o condicionamento numérico da matriz $[H]$ está relacionado com a independência linear da expansão. Quando inverte-se numericamente um sistema matricial, existe um erro associado com a representação exata da matriz. Se a matriz for mal condicionada, a inversão pode conduzir a erros muito grandes na solução (Karniadakis e Sherwin, 1999).

A versão h do MEF permite melhorar a qualidade da aproximação através do refinamento da malha de elementos. Já na versão p, obtém-se uma melhor qualidade alterando a ordem das funções de interpolação dos elementos. Existe ainda a versão mista hp, que procura alterar simultaneamente o tamanho do elemento e a ordem do polinômio empregando algum critério de refinamento e a versão r que recoloca os nós da malha de forma a melhorar a qualidade da aproximação (Vazquez, 2008).

A eficiência de um elemento, em um sistema computacional, tem sentido amplo, referindo-se à forma como foi implementado (pré-processamento), às rotinas de montagem e de solução do sistema global de equações (solução numérica) e ao tratamento posterior de seus resultados (pós-processamento) (Soriano, 2003).

Do ponto de vista computacional, a escolha da base para o espaço de aproximação influencia a estabilidade e eficiência dos procedimentos numéricos usados para o cálculo da solução aproximada. Em geral, as bases de elementos finitos consistem de funções polinomiais por partes, definidas sobre os elementos da partição que interpolam o domínio do problema.

A eficiência do MEF de Alta Ordem (p e hp) está bem estabelecida e o método tem sido aplicado aos mais diversos problemas nos últimos anos. No entanto, o aumento da ordem da expansão polinomial implica em um aumento da ordem das matrizes dos elementos. Esse aumento torna-se crítico, principalmente em problemas 3D, resultando em maior custo computacional para solução dos problemas. A base de funções é de fundamental importância na eficiência do método. Assim, a identificação de funções que resultem em matrizes esparsas e mais bem condicionadas tem recebido grande atenção (Bargos, 2009).

Assim, a principal motivação desse trabalho está relacionada ao desenvolvimento de uma metodologia que permite obter matrizes de rigidez de quadrados e hexaedros altamente esparsas.

1.2 Revisão Bibliográfica

O MEF surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de modelos reticulados (concebida no início da década de 30 na indústria aeronáutica britânica), com a disponibilidade de computadores digitais e devido à necessidade de projetar estruturas de modelos contínuos.

Os primeiros elementos foram concebidos por engenheiros aeronáuticos para análise de distribuição de tensões em chapas de asa de avião. Sua formulação foi tratada pioneiramente por Argyris e Kelsey em 1955 (republicada em 1960) e por Turner, Clough, Martin e Topp (1956). Gallagher, Padlog e Bijlard foram pioneiros, em 1962, na análise de problema tridimensional de tensões por meio de elementos finitos, quando então consideraram o efeito de temperatura em sólidos de formas complexas. Archer (1963) utilizou campos de deslocamentos em elemento finito para determinar a correspondente matriz de massa, denominada consistente. Melosh (1963) apresentou formulação do MEF a partir da minimização da grandeza escalar funcional energia potencial total. Veubeke (1965) apresentou a formulação do método a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis (Soriano, 2003).

Verificou-se, então, que as bases do método já tinham sido estabelecidas por Lord Rayleigh em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant (1943). Mostrou-se que o MEF é um caso particular do método de Rayleigh-Ritz, estabeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema do meio contínuo regido por um funcional. Essa é a denominada formulação variacional (Assan, 2003).

A consistência matemática da formulação variacional permitiu a extensão do MEF à solução de uma ampla gama de problemas de meio contínuo, como os de meios porosos, transferência de calor e eletrostáticos, como apresentado pioneiramente por Zienkiewicz e Cheung (1965), Zienkiewicz e co-autores (1966) e Wilson e Nickell (1966). Além da resolução desses problemas, Cheung e Zienkiewicz (1965) apresentaram a primeira aplicação do método em interação solo-estrutura, utilizando a hipótese de Winkler em semi-espaço elástico isótropo. Após o desenvolvimento da formulação variacional, Szabó e Lee (1969) verificaram que o método poderia ser formulado diretamente a partir das equações diferenciais e respectivas condições de contorno de problema de meio contínuo, como aplicação do método de Galerkin, que é um dos métodos de resíduos ponderados.

A seguir, uma breve revisão sobre funções de base do MEF de alta ordem.

Vários conjuntos de funções de forma p estão apresentados na literatura. Peano considerou famílias de funções de interpolação hierárquicas para elementos triangulares de lados retos que podem ser aplicadas para qualquer ordem polinomial (Peano, 1975). Cada novo grau de liberdade para $p \geq 2$ representa a p-ésima derivada da aproximação. As funções são mapeadas diretamente sobre os elementos da malha usando coordenadas baricêntricas.

Zienkiewicz apresentou funções para elementos hierárquicos quadrilaterais com um bom número de condicionamento das matrizes locais, fácil imposição da continuidade entre os elementos e o uso de estimadores de erro (Zienkiewicz et al., 1981).

Um conjunto de funções de forma espectrais, bastante citado na literatura, está baseado nos polinômios de Lagrange de grau P colocados em $(P + 1)$ pontos nodais (Karniadakis e Sherwin, 1999). Esses polinômios obedecem à propriedade de colocação, em que os coeficientes representam a aproximação da solução nos pontos de colocação. Os pontos de colocação são chamados de nós e portanto a expansão usando a base de Lagrange é referenciada como uma expansão nodal. Existem também expansões modais, como por exemplo, um conjunto de funções usando polinômios ortogonais de Jacobi. Com a escolha ótima das ponderações desses polinômios é possível melhorar a esparsidade e o condicionamento das matrizes de massa e rigidez para os problemas de Poisson e dinâmica dos fluidos (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Carnevali introduziu funções de forma hieráquicas para triângulos e tetraedros com a propriedade de que as funções de aresta, face e corpo são ortogonais, no sentido do operador laplaciano, para as mesmas funções com ordens não superiores a $p - 2$, $p - 3$ e $p - 4$, respectivamente (Carnevali et al., 1993). Esse fato resultou em uma matriz de rigidez local com melhor número de condicionamento e esparsidade das matrizes locais comparado às funções definidas em (Szabó e Babuška, 1991).

As funções hierárquicas clássicas para quadriláteros e hexaedros introduzidas por Szabó & Babuška (Szabó e Babuška, 1991) têm excelente esparsidade e propriedades de condicionamento, devido ao uso de polinômios de Legendre e sua natureza tensorial (Edgar e Surana, 1996; Maitre e Pourquier, 1995). Entretanto, as funções para triângulos e tetraedros não têm propriedades similares e há um aumento exponencial do número de condicionamento local com a ordem do elemento p (Carnevali et al., 1993; Adjerid et al., 2001; Nogueira Jr., 2002).

Sherwin & Karniadakis apresentaram funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros baseadas em sistemas cartesianos colapsados, produto tensorial, polinômios ortogonais de Jacobi e integração numérica exata usando a quadratura de Gauss-Jacobi (Sherwin e Karniadakis, 1995; Karniadakis e Sherwin, 1999). Os sistemas de coordenadas colapsadas para triângulos e tetraedros são obtidos dos sistemas de coordenadas cartesianas definidos sobre quadriláteros e hexaedros, respectivamente. Tais funções foram aplicadas no estudo de problemas de fluidos definindo os métodos *hp* espectrais (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Webb & Abouchakra usaram polinômios de Jacobi para definir funções de forma para o triângulo referência [0,1] 2-simplex (Webb e Abouchakra, 1995). A regra de quadratura definida em (Dunavant, 1985) foi usada.

Nogueira Jr. & Bittencourt mostraram as vantagens de usar polinômios de Jacobi para melhorar a eficiência computacional e a esparsidade das matrizes locais e globais (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001) Também foi verificado que as funções propostas em Carnevalli (Carnevali et al., 1993) têm um aumento exponencial do número de condição com a ordem do elemento, mas inferior ao verificado nas funções apresentadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991).

Adjerid (Adjerid et al., 2001) propôs novas funções para triângulos e tetraedros com melhor esparsidade e propriedades de condicionamento quando comparadas a Szabó & Carnevalli (Szabó e Babuška, 1991; Carnevali et al., 1993). As funções são baseadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991) e usam a ortogonalização das funções de face (2D) e de face e corpo (3D). A estratégia apresentada é muito similar a que foi usada em Mandel (Mandel, 1990b; Mandel, 1990a) para definir pré-condicionadores, esparsidade das matrizes locais e globais (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001) para métodos de decomposição de domínios em malhas de hexaedros.

Nogueira Jr. em (Nogueira Jr., 2002) apresentou novos conjuntos de funções baseados em polinômios de Jacobi e tensorização em coordenadas colapsadas. As ponderações foram obtidas de tal maneira a diagonalizar as funções de face (2D) e de corpo (3D). Além disso, aplicou-se o método *hp* espectral em problemas de elasticidade linear com o uso de métodos iterativos e multigrid *hp*-adaptáveis.

As funções modais para quadriláteros e hexaedros apresentadas em (Karniadakis e Sherwin, 1999) aplicam a definição padrão de produto tensorial. Entretanto, triângulos e tetraedros usam um produto deformado ou generalizado, devido ao uso do sistema de coordenadas colapsadas.

Vazquez apresentou processos de construção tensorial de funções de interpolação para as versões h e p do MEF usando, respectivamente, polinômios de Lagrange e Jacobi aplicados à quadrados, hexaedros, triângulos e tetraedros (Vazquez, 2004).

Em (Bittencourt, 2005), apresentam-se funções de forma modal e nodal para triângulos e tetraedros baseadas no produto tensorial de funções unidimensionais expressas em coordenadas baricêntricas. As funções nodais usam polinômios de Lagrange e são as funções de forma h padrão apresentadas na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991). As bases modais usam polinômios de Jacobi. O procedimento tensorizável para construir os conjuntos de funções modais e nodais é muito simples. As funções modais têm uma continuidade global C^0 automática entre os elementos. Assim, não é necessário um procedimento adicional para impor tal continuidade, como ocorre com as funções de interpolação p presentes na literatura.

Prabhakar & Reddy exploraram a ortogonalidade das bases modais usadas em modelos hp de elementos finitos (Prabhakar e Reddy, 2007). Os coeficientes da matriz são calculados analiticamente sem usar qualquer processo de integração numérica, o que pode ser computacionalmente muito caro. São usadas as propriedades dos polinômios de Jacobi e o MEF por mínimos quadrados. A limitação do procedimento desenvolvido é que só pode ser usado por elementos retangulares.

Em (Vazquez, 2008), apresenta-se a construção de uma base unidimensional nodal que permite obter uma matriz de rigidez praticamente diagonal para problemas de Poisson unidimensionais.

Em todas as bases anteriores, observa-se um crescimento do número de condição e de coeficientes das matrizes de massa e rigidez dos elementos. Isso implica em um custo maior de solução dos sistemas de equações envolvidos.

Como contribuição deste trabalho, constrói-se uma formulação matemática, que utilizando o processo de tensorização de bases apresentado em (Vazquez, 2004), obtem matrizes de rigidez para quadrados e hexaedros altamente esparsas.

Considera-se o Problema de Poisson, a base proposta em (Vazquez, 2008) e polinômios ortogonais de Jacobi. A formulação aqui apresentada tem dois objetivos principais. Primeiramente, mostrar a equivalência de problemas de projeção matriciais que envolvem matrizes de massa, mista e rigidez, uma vez que o vetor solução é o mesmo para os três problemas. A formulação é estendida para quadrados e hexaedros, revelando que é possível expressar os coeficientes das matrizes de rigidez pela combinação dos coeficientes ou tensorização das matrizes de massa e rigidez provenientes da aproximação de problemas unidimensionais.

O outro objetivo é mostrar que a matriz de massa unidimensional encontrada na formulação das matrizes de rigidez de quadrados e hexaedros, pode ser substituída pela matriz de rigidez de problemas unidimensionais, gerando bons resultados em termos de esparsidade das matrizes de rigidez globais.

1.3 Organização do texto

O Capítulo 2 apresenta uma revisão da construção de funções de base unidimensionais nodal e modal, assim como a construção de funções de base para quadrados e hexaedros por processo de tensorização.

O Capítulo 3 apresenta a tensorização de matrizes de massa e rigidez de problemas unidimensionais para construir as matrizes locais de quadrados e hexaedros.

No Capítulo 4, a formulação apresentada no Capítulo 3 é estendida para malhas não-distorcidas de quadrados e hexaedros, com jacobiano constante. Também são apresentados casos de validação para essas malhas.

O Capítulo 5 considera as conclusões e perspectivas futuras do trabalho.

Capítulo 2

Construção das Funções de Base

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão da construção de funções de base unidimensionais nodal e modal, assim como funções de base para quadrados e hexaedros por processo de tensorização apresentada em (Vazquez, 2004) e as funções propostas em (Vazquez, 2008).

2.1 Bases Unidimensionais

2.1.1 Base Nodal

Considere o sistema de coordenadas ξ_1, definido no intervalo fechado $[-1, 1]$, e o conjunto de P_1+1 pontos ξ_{1p} $(p = 0, ..., P_1)$ definidos em ξ_1, conforme ilustrado na Figura 2.1.

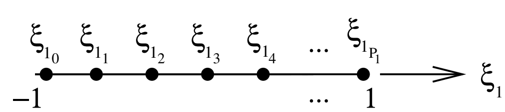


Figura 2.1: Sistema local de coordenadas ξ_1 (Vazquez, 2004).

O polinômio de Lagrange de ordem P_1 associado à cada coordenada ξ_{1p} é dado por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$l_p^{(P_1)}(\xi_1) \quad = \quad \prod_{q=0(p\neq q)}^{P_1} \frac{(\xi_1 - \xi_{1_q})}{(\xi_{1_p} - \xi_{1_q})} \tag{2.1}$$

$$= \frac{(\xi_1 - \xi_{1_0})(\xi_1 - \xi_{1_1})\dots(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})(\xi_1 - \xi_{1_{p+1}})\dots(\xi_1 - \xi_{1_{P_1}})}{(\xi_{1_p} - \xi_{1_0})(\xi_{1_p} - \xi_{1_1})\dots(\xi_{1_p} - \xi_{1_{p-1}})(\xi_{1_p} - \xi_{1_{p+1}})\dots(\xi_{1_p} - \xi_{1_{P_1}})}$$

e $l_p^{(0)}(\xi_1) = 0$.

As funções de interpolação nodais $N_p(\xi_1)$ associadas aos nós p ($p = 0, \dots, P_1$) dos elementos finitos unidimensionais são os próprios polinômios de Lagrange, ou seja,

$$N_p(\xi_1) = l_p^{(P_1)}(\xi_1). \tag{2.2}$$

A seguinte expressão pode ser empregada para denotar as funções de forma de vértice ($p = 0$ e $p = P_1$) e internas ($0 < p < P_1$)

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \tag{2.3}$$

sendo $L_p^{(P_1-1)}(\xi_1)$ obtido da expressão geral (2.1) dos polinômios de Lagrange tal que

$$L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) = 4\frac{\prod_{q=1,q\neq p}^{P_1-1}(\xi_1 - \xi_{1_q})}{\prod_{q=0,q\neq p}^{P_1}(\xi_{1_p} - \xi_{1_q})}. \tag{2.4}$$

Devido à definição dos polinômios de Lagrange, observa-se que se trata de uma base nodal.

2.2 Base Modal

No caso de uma base modal, tem-se apenas os nós de vértice do elemento. As funções de interpolação para elementos a partir do segundo grau não estão associadas às variáveis nodais. Para isso, deve-se empregar uma base polinomial cuja definição não dependa de coordenadas nodais do elemento. Utiliza-se aqui os polinômios ortogonais de Jacobi, sendo os polinômios de Legendre e Chebyshev casos particulares.

Os polinômios de Jacobi unidimensionais de grau n, $P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1)$, são uma família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville (Karniadakis e Sherwin, 1999). Estes polinômios são ortogonais (Chihara, 1978) no intervalo $[-1, 1]$ com respeito à função peso $(1-\xi_1)^\alpha(1+\xi_1)^\beta$, $(\alpha,\beta > -1; \alpha,\beta \in \Re)$, da seguinte maneira

$$\int_{-1}^{1}(1-\xi_1)^\alpha(1+\xi_1)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1)P_m^{\alpha,\beta}(\xi_1)d\xi_1 = C\delta_{nm}, \quad \xi_1 \in [-1,1], \tag{2.5}$$

sendo $C = \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ uma constante. A função Γ está definida em (Chihara, 1978) e para números naturais $\Gamma(n+1) = n!$.

Os polinômios de Legendre e de Chebyshev correspondem às ponderações ($\alpha = \beta = 0$) e ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$), respectivamente.

A partir das definições anteriores, as funções de interpolação modal podem ser definidas no sistema de coordenada ξ_1, bastando substituir os polinômios de Lagrange por Jacobi, ou seja,

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1+\xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_1)P_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Observe que as funções de vértice são as mesmas funções do elemento linear de Lagrange. As funções de interpolação são hierárquicas, pois o conjunto de funções de grau P_1 está incluído no conjunto de funções de grau $P_1 + 1$.

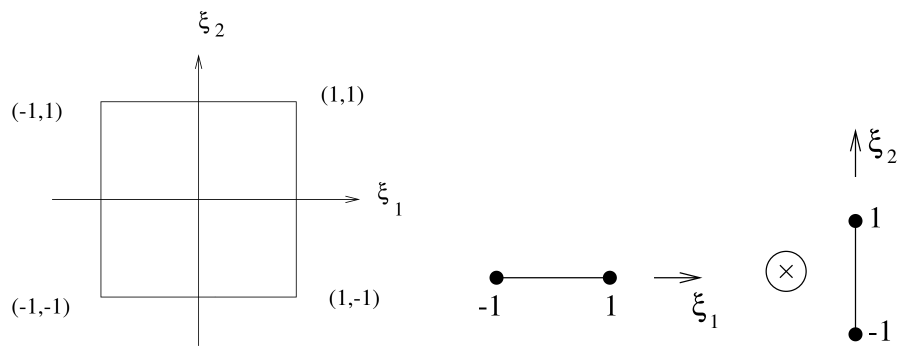
2.3 Construção das Funções de Base para Quadrados e Hexaedros

2.3.1 Funções de Interpolação para Quadrados

As funções de interpolação nodais e modais para elementos finitos quadrangulares são construídas pelo produto tensorial de funções unidimensionais nas direções ξ_1 e ξ_2 como ilustrado na Figura 2.2 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

A partir da equação (2.3) e da Figura 2.2, as expressões das funções de interpolação para quadrados podem ser escritas através do seguinte produto de funções nas direções ξ_1 e ξ_2

$$N_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 \le p \le P_1 \quad \text{e} \quad 0 \le q \le P_2, \tag{2.7}$$

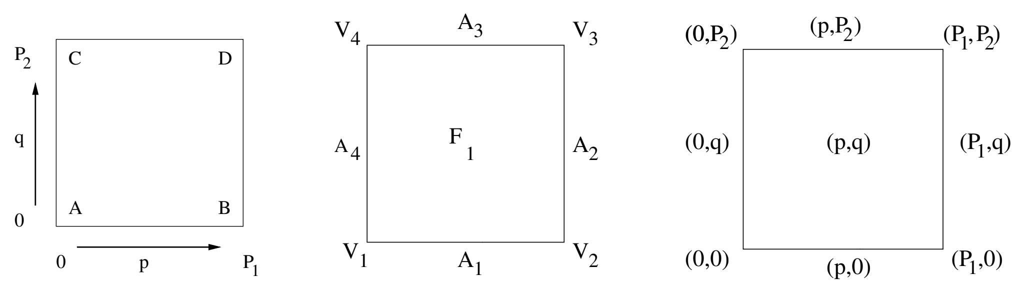


(a) Domínio quadrado.   (b) Processo de tensorização.

Figura 2.2: Construção tensorial das funções de interpolação para quadrados (Vazquez, 2004).

sendo P_1 e P_2 os graus dos polinômios nas direções ξ_1 e ξ_2, conforme ilustrado na Figura 2.3.

De forma análoga ao caso unidimensional, pode-se associar as funções de interpolação às entidades topológicas do elemento que no caso do quadrado são os vértices (V_1, V_2, V_3, V_4), as arestas (A_1, A_2, A_3, A_4) e a face (F_1) ilustradas na Figura 2.3(b). Os índices p e q da equação (2.7) estão associados às entidades topológicas do quadrado de acordo com a Figura 2.3(c).



(a) Intervalos de p e q.   (b) Entidades topológicas.   (c) Entidades e índices p e q.

Figura 2.3: Associação entre entidades topológicas e índices p e q no quadrado (Vazquez, 2004).

A partir daí, as expressões para as funções de interpolação dos vértices V_1, V_2, V_3, V_4 são dadas, respectivamente, por

$$N_{00}(\xi_1, \xi_2) \quad = \quad \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2),$$

$$
\begin{aligned}
N_{P_1 0}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \\
N_{P_1 P_2}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \\
N_{0 P_2}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2).
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Analogamente, as funções das arestas A_1, A_2, A_3, A_4 são, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
N_{p0}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\
N_{P_1 q}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \\
N_{p P_2}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\
N_{0q}(\xi_1,\xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Finalmente, as funções da face F_1 ou modos internos são

$$
N_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2). \tag{2.10}
$$

A base nodal lagrangiana padrão (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999) para quadrados é obtida substituindo em (2.7) a definição da base unidimensional dada em (2.3). Já a base modal é obtida substituindo (2.6) em (2.7).

2.3.2 Funções de Interpolação para Hexaedros

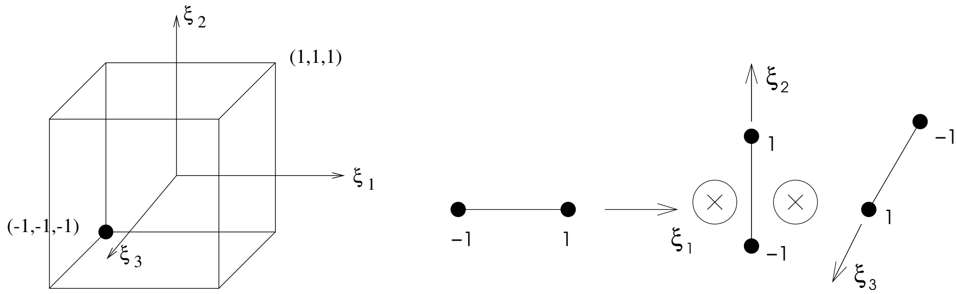
De forma análoga aos quadrados, as funções de interpolação para hexaedros são construídas através do produto tensorial de polinômios unidimensionais nas direções ξ_1, ξ_2 e ξ_3, conforme ilustrado na Figura 2.4 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

A expressão geral das funções de interpolação para hexaedros obtida pelo produto tensorial é dada por

$$
N_{pqr}(\xi_1,\xi_2,\xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \tag{2.11}
$$

com $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$ e $0 \leq r \leq P_3$, sendo P_1, P_2 e P_3 os graus dos polinômios nas direções ξ_1, ξ_2 e ξ_3, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2.5(a).

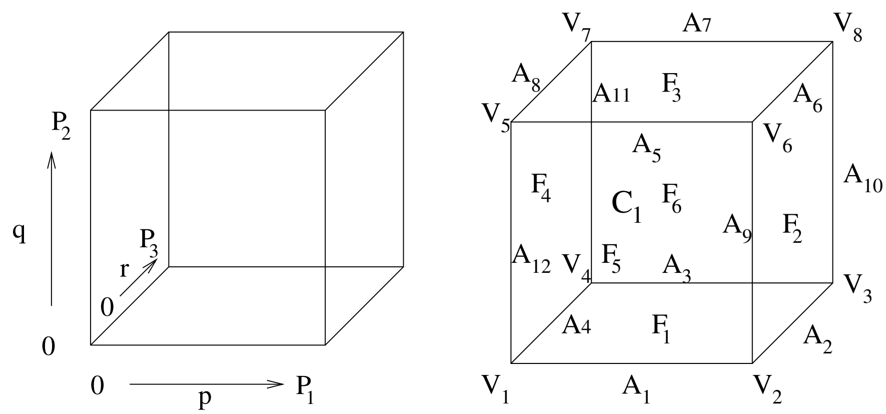
A Figura 2.5(b) ilustra as entidades topológicas do hexaedro, as quais são constituídas de 8 vértices (V_1 a V_8), 12 arestas (A_1 a A_{12}), 6 faces (F_1 a F_6) e um volume (B_1).



(a) Sistema de coordenadas. (b) Processo de tensorização.

Figura 2.4: Construção tensorial das funções de interpolação para hexaedros (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004).

A Figura 2.6 apresenta a relação entre os índices p, q e r e as entidades topológicas do hexaedro.

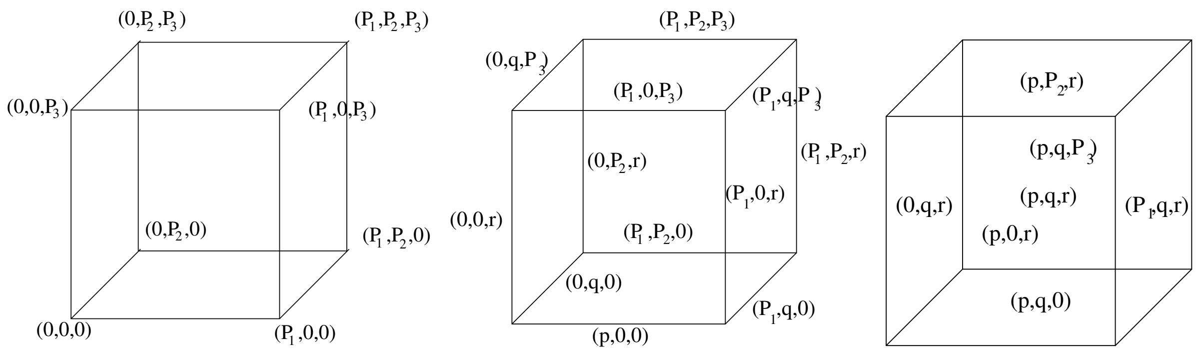


(a) Intervalos de p, q e r. (b) Entidades topológicas.

Figura 2.5: Índices p, q e r e entidades topológicas no hexaedro (Vazquez, 2004).

A partir da Figura 2.6 e da equação (2.11), as expressões das funções de interpolação dos vértices (V_1 a V_8) são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
N_{000}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{P_1 00}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{P_1 P_2 0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{0 P_2 0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{00P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \qquad (2.12)
\end{aligned}$$



(a) Vértices. (b) Arestas. (c) Faces e volume.

Figura 2.6: Associação entre os índices p, q e r e as entidades topológicas do hexaedro (Vazquez, 2004).

$$
\begin{aligned}
N_{P_1 0 P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{0 P_2 P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{P_1 P_2 P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3).
\end{aligned}
$$

Analogamente, as funções de aresta são

$$
\begin{aligned}
N_{p00}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{P_1 q 0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{p P_2 0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{0q0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{0 P_2 r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{P_1 q P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{p P_2 P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \qquad (2.13)\\
N_{0 q P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{P_1 0 r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{P_1 P_2 r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{p 0 P_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{00r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3).
\end{aligned}
$$

com $0 < p < P_1$, $0 < q < P_2$ e $0 < r < P_3$.

As expressões das funções de face são dadas, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
N_{pq0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3),\\
N_{P_1qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{pqP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),\\
N_{0qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{p0r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3),\\
N_{pP_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Finalmente, a expressão geral da função de volume é

$$
N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \;\; 0 < p < P_1, \;\; 0 < q < P_2, \;\; 0 < r < P_3. \tag{2.15}
$$

A família lagrangiana de elementos é determinada substituindo (2.3) nas expressões (2.12) a (2.15). Para o caso $P_1 = P_2 = P_3 = P$, têm-se 8 funções de vértice, $12(P-1)$ funções de aresta, $6(P-1)^2$ funções de face e $(P-1)^3$ funções de volume. O número total de nós é dado pelo produto $(P_1+1)(P_2+1)(P_3+1)$.

A base modal apresentada em (Karniadakis e Sherwin, 1999) é obtida substituindo a definição (2.6) nas equações (2.12) a (2.15).

Nesse trabalho, consideram-se expansões isotrópicas, ou seja, $P_1 = P_2 = P_3 = P$.

2.4 Matriz de Rigidez Espectral Unidimensional

Em (Vazquez, 2008), novas funções de forma nodais unidimensionais foram propostas com o objetivo de encontrar uma matriz de rigidez espectral para o problema de Poisson. A base proposta fornece uma matriz de rigidez unidimensional quase diagonal. Apresenta, ainda, melhor condicionamento do que as matrizes de rigidez obtidas usando as bases de Lagrange e Jacobi.

A tensorização dessa base não permite obter matrizes de rigidez diagonais para quadrados e hexaedros. Essas matrizes são escritas por combinações das matrizes de massa e rigidez unidimensionais. As matrizes não são diagonais pelo fato que a matriz de massa unidimensional é densa.

Para construir uma matriz de rigidez espectral nodal, o seguinte conjunto de funções foi definido

$$N_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi_1), & p = 0 \\ (1-\xi_1)\phi_p(\xi_1), & 1 \leq p \leq P+1 \\ \frac{1}{2}(1+\xi_1), & p = P+2 \end{cases}, \tag{2.16}$$

com

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1) \;\; = \;\; & 8\Big((\xi_1 - \xi_{1_P})^2(\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})\ldots(\xi_1 - \xi_{1_{P-1}}) \\ & + \sum_{i=3}^{P+1}(-1)^i\frac{2}{i!}(\xi_1 - \xi_{1_P})^i\frac{d^{i-2}}{d\xi_1}((\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})\ldots(\xi_1 - \xi_{1_P-1})) \\ & -(-1-\xi_{1_P})^2(-1-\xi_{1_1})(-1-\xi_{1_2})\ldots(-1-\xi_{1_{P-1}}) \\ & - \sum_{i=3}^{P+1}(-1)^i\frac{2}{i!}(-1-\xi_{1_P})^i\frac{d^{i-2}}{d\xi_1}((\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})\ldots(\xi_1 - \xi_{1_{P-1}}))_{\xi_1=-1}\Big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

e para $2 < p < P+1$

$$\begin{aligned} \phi_p(\xi_1) \;\; = \;\; & 8\left((\xi_1 - \xi_{1_0})^2\frac{(\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})\ldots(\xi_1 - \xi_{1_P})}{(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})}\right. \\ & \left. + \sum_{i=3}^{P+1}(-1)^i\frac{2}{i!}(\xi_1 - \xi_{1_0})^i\frac{d^{i-2}}{d\xi_1}\left(\frac{(\xi_1 - \xi_{1_1})(\xi_1 - \xi_{1_2})\ldots(\xi_1 - \xi_{1_P})}{(\xi_1 - \xi_{1_{p-1}})}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Essa escolha garante que as funções de vértice são lineares e as funções internas zeram para $\xi_{1_0} = -1$ e $\xi_{1_P} = 1$. Em adição, a continuidade C^0 entre os elementos é preservada.

Observa-se que, por exemplo, para $P = 4$, são necessárias 7 funções de forma para completar o espaço, já que o grau das funções é 6. Assim, têm-se sempre $P+3$ funções de interpolação. A constante 8 em (2.17) foi obtida por experimentação em (Vazquez, 2008) e usada apenas para melhorar o condicionamento numérico da matriz de rigidez obtida usando a base definida.

As funções $\phi_p(\xi_1)$ indicadas em (2.17) e (2.18) são tais que as suas derivadas $\phi_p'(\xi_1)$ têm a propriedade de colocação. Para exemplificar, considere $P = 4$ e os pontos de colocação $\xi_{1_0}=-1$, ξ_{1_1}, ξ_{1_2}, ξ_{1_3} e $\xi_{1_4}=1$. As expressões das derivadas $\phi'_p(\xi_1)$ são

$$\phi'_1(\xi_1)=16(\xi_1-\xi_{1_4})(\xi_1-\xi_{1_1})(\xi_1-\xi_{1_2})(\xi_1-\xi_{1_3}),$$
$$\phi'_2(\xi_1)=16(\xi_1-\xi_{1_0})(\xi_1-\xi_{1_2})(\xi_1-\xi_{1_3})(\xi_1-\xi_{1_4}),$$
$$\phi'_3(\xi_1)=16(\xi_1-\xi_{1_0})(\xi_1-\xi_{1_1})(\xi_1-\xi_{1_3})(\xi_1-\xi_{1_4}),$$
$$\phi'_4(\xi_1)=16(\xi_1-\xi_{1_0})(\xi_1-\xi_{1_1})(\xi_1-\xi_{1_2})(\xi_1-\xi_{1_4}),$$
$$\phi'_5(\xi_1)=16(\xi_1-\xi_{1_0})(\xi_1-\xi_{1_1})(\xi_1-\xi_{1_2})(\xi_1-\xi_{1_3}),$$

as quais correspondem aos polinômios de Lagrange, a menos de uma constante.

Para o bloco das funções internas na matriz de rigidez, a expressão dos coeficientes será

$$\begin{aligned}
k_{pq} &= \int_{-1}^{1} N'_p(\xi_1)N'_q(\xi_1)d\xi_1 \\
&= 64\int_{-1}^{1}[(1-\xi_1)\phi'_p(\xi_1)-\phi_p(\xi_1)][(1-\xi_1)\phi'_q(\xi_1)-\phi_q(\xi_1)]d\xi_1 \\
&= 64\int_{-1}^{1}[(1-\xi_1)^2\phi'_p(\xi_1)\phi'_q(\xi_1)-(1-\xi_1)\phi'_p(\xi_1)\phi_q(\xi_1)+ \\
&\quad -(1-\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi'_q(\xi_1)+\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_1)]d\xi_1.
\end{aligned}$$

Após a integração por partes em $(1-\xi_1)\phi'_p(\xi_1)\phi_q(\xi_1)$, conclui-se que

$$k_{pq} = 64\int_{-1}^{1}(1-\xi_1)^2\phi'_p(\xi_1)\phi'_q(\xi_1)d\xi_1. \tag{2.19}$$

Escolhendo-se como pontos de colocação e integração os $P+1$ zeros de Gauss-Lobatto-Jacobi para $\alpha=2$ e $\beta=0$, a integral anterior pode ser aproximada por

$$k_{pq}=64\sum_{i=0}^{P}\phi'_p(\xi_{1_i}^{2,0})\phi'_q(\xi_{1_i}^{2,0})w_i^{2,0}=64w_{p-1}^{2,0}\delta_{pq},$$

onde a propriedade de colocação das derivadas $\phi'_p(\xi_1)$ foi usada. Baseado nisso, o bloco interno da matriz de rigidez será diagonal. O erro cometido na integração será da mesma ordem que o erro da aproximação da função polinomial. Observe que o termo $(1-\xi_1)^2$ corresponde à função de ponderação da quadratura de Gauss-Jacobi e não precisa ser integrado explicitamente tomando-se $\alpha=2$ e $\beta=0$.

Os coeficientes do bloco das funções de vértice da matriz de rigidez são iguais a $\pm\dfrac{1}{2}$. Já os coeficientes do bloco de acoplamento vértice-interno zeram naturalmente integrando-se por partes, pois

$$\int_{-1}^{1}N'_p(\xi_1)N'_q(\xi_1)d\xi_1 \;=\; \pm\frac{8}{2}\int_{-1}^{1}[(1-\xi_1)\phi'_q(\xi_1)-\phi_q(\xi_1)]d\xi_1$$

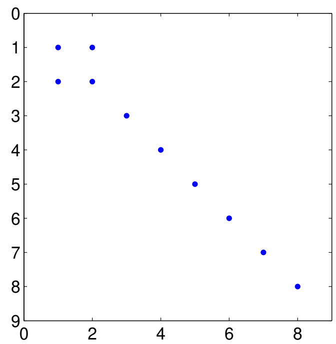


Figura 2.7: Esparsidade das matriz de rigidez unidimensional para $P = 4$ (Vazquez, 2008).

$$
\begin{aligned}
&= \pm 4 \left[\int_{-1}^{1} (1-\xi_1)\phi_q'(\xi_1) d\xi_1 - \int_{-1}^{1} \phi_q(\xi_1) d\xi_1 \right] \qquad (2.20)\\
&= \pm 4 \left[(1-\xi_1)\phi_q(\xi_1)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(-\phi_q(\xi_1)\right) d\xi_1 - \int_{-1}^{1} \phi_q(\xi_1) d\xi_1 \right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

A Figura 2.7 ilustra o perfil da matriz de rigidez unidimensional empregando a base nodal definida anteriormente.

Para os casos de validação da formulação proposta no próximo Capítulo, as funções acima serão utilizadas. Essas funções foram implementadas em Matlab, usando recursos disponíveis de integração simbólica.

Capítulo 3

Tensorização de Matrizes de Rigidez para os Elementos Locais

Neste capítulo, apresenta-se a aplicação de conceitos de tensorização das funções de base dos elementos, que permitirá escrever os sistemas matriciais das matrizes de massa, mista e rigidez com o mesmo vetor solução para um único elemento local. Essa uniformização torna possível a substituição da matriz unidimensional de massa, presente na formulação das matrizes de rigidez de quadrados e hexaedros, pela matriz unidimensional de rigidez. Essa matriz é quase diagonal e portanto bem mais esparsa que as matrizes de massa resultantes da utilização das funções propostas em (Vazquez, 2008) e dos polinômios de Jacobi. A formulação unidimensional é estendida para quadrados e hexaedros em problema de Poisson.

3.1 Elementos Unidimensionais

Considere o elemento finito unidimensional representado no seu sistema local $\xi_1 \in [-1, 1]$. Sejam ainda os problemas de interpolação locais

$$u(\xi_1) = -f(\xi_1), \tag{3.1}$$

$$u'(\xi_1) = -f'(\xi_1), \tag{3.2}$$

$$u''(\xi_1) \quad = \quad -f''(\xi_1), \tag{3.3}$$

sendo $u(\xi_1)$, $u'(\xi_1)$ e $u''(\xi_1)$ as funções incógnitas e as respectivas funções $f(\xi_1)$, $f'(\xi_1)$ e $f''(\xi_1)$ os termos independentes.

Dada uma base $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ com n funções de interpolação, as funções $u(\xi_1)$, $u'(\xi_1)$ e $u''(\xi_1)$ são aproximadas, respectivamente, como

$$u(\xi_1) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(\xi_1), \tag{3.4}$$

$$u'(\xi_1) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \phi'_i(\xi_1), \tag{3.5}$$

$$u''(\xi_1) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \phi''_i(\xi_1), \tag{3.6}$$

Observe que os mesmos coeficientes a_i são empregados nas aproximações anteriores.

As projeções das equações (3.1) a (3.3), no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i\}$, são dadas pelas seguintes expressões integrais

$$\int_{-1}^{1} u(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1 \quad = \quad -\int_{-1}^{1} f(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1, \tag{3.7}$$

$$\int_{-1}^{1} u'(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1 \quad = \quad -\int_{-1}^{1} f'(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1, \tag{3.8}$$

$$\int_{-1}^{1} u''(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1 \quad = \quad -\int_{-1}^{1} f''(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1, \tag{3.9}$$

sendo $v(\xi_1)$ a função teste. Usando o Método de Galerkin, a função teste é aproximada usando as mesmas funções de interpolação $\{\phi_i\}$, ou seja,

$$v(\xi_1) = \sum_{j=1}^{n} b_j \phi_j(\xi_1), \tag{3.10}$$

Integrando (3.9) por partes, obtém-se

$$\int_{-1}^{1} u'(\xi_1) v'(\xi_1) d\xi_1 \quad = \quad \int_{-1}^{1} f''(\xi_1) v(\xi_1) d\xi_1 + u'(\xi_1) v(\xi_1)|_{-1}^{1}. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.4) a (3.6) e (3.10) em (3.7), (3.8) e (3.11), obtém-se as seguintes expressões para $i = 1, ..., n$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_1) d\xi_1 \right) a_j \quad = \quad -\int_{-1}^{1} f(\xi_1) \phi_i(\xi_1) d\xi_1, \tag{3.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} \phi'_i(\xi_1) \phi_j(\xi_1) d\xi_1 \right) a_j \quad = \quad -\int_{-1}^{1} f'(\xi_1) \phi_i(\xi_1) d\xi_1, \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} \phi'_i(\xi_1) \phi'_j(\xi_1) d\xi_1 \right) a_j \quad = \quad \int_{-1}^{1} f''(\xi_1) \phi_i(\xi_1) d\xi_1 + u'(\xi_1) \phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1}. \tag{3.14}$$

Os coeficientes das matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{1D} = \int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1, \tag{3.15}$$

$$D_{ij}^{1D} = \int_{-1}^{1} \phi'_i(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1, \tag{3.16}$$

$$K_{ij}^{1D} = \int_{-1}^{1} \phi'_i(\xi_1)\phi'_j(\xi_1)d\xi_1. \tag{3.17}$$

Utiliza-se aqui a nomenclatura usual na literatura sobre o MEF, de denominar matrizes de massa, mista e rigidez aquelas cujos coeficientes são obtidos através da integração dos produtos de funções, derivadas e funções e derivadas, respectivamente (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Os coeficientes dos termos de carregamento são expressos como

$$f_i^{1D,b,m} = -\int_{-1}^{1} f(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1, \tag{3.18}$$

$$f_i^{1D,b,d} = -\int_{-1}^{1} f'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1, \tag{3.19}$$

$$f_i^{1D,b,k} = \int_{-1}^{1} f''(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1, \tag{3.20}$$

$$f_i^{1D,s,k} = u'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1}, \tag{3.21}$$

$$f_i^{1D,k} = f_i^{1D,b,k} + f_i^{1D,s,k} = \int_{-1}^{1} f''(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1 + u'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1}, \tag{3.22}$$

Os índices m, d e k denotam que os termos de carregamento estão relacionados à função f e suas derivadas primeira e segunda, respectivamente. Já os índices b e s indicam cargas de corpo e superfície, respectivamente. Observa-se que, em problemas aplicados, as intensidades u' e f'' são conhecidas, respectivamente, no contorno e domínio.

Matricialmente, os sistemas de equações (3.12) a (3.14) são expressos por

$$[M_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^{m}\}, \tag{3.23}$$

$$[D_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^{d}\}, \tag{3.24}$$

$$[K_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^{k}\}, \tag{3.25}$$

sendo $[M_{1D}]$ e $[K_{1D}]$ as matrizes simétricas de massa e rigidez; $[D_{1D}]$ é uma matriz não-simétrica mista.

Usando o teorema da divergência, o termo do contorno (3.21) pode ser escrito como o seguinte carregamento de corpo

$$u'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1}[u'(\xi_1)\phi_{i,\xi_1} + u''(\xi_1)\phi_i(\xi_1)]d\xi_1 \tag{3.26}$$

Para $u = -f$ de acordo com (3.1), tem-se

$$-f'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1} = -\int_{-1}^{1}[f'(\xi_1)\phi_{i,\xi_1}(\xi_1) + f''(\xi_1)\phi_i(\xi_1)]d\xi_1 \tag{3.27}$$

Consequentemente, a equação (3.22) pode ser denotada por

$$f_i^{1D,k} = -\int_{-1}^{1} f'(\xi_1)\phi_{i,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1 \tag{3.28}$$

A vantagem da expressão anterior é utilizar apenas carregamento de corpo em cada elemento, ao invés de um carregamento de superfície no contorno do elemento.

3.2 Quadrados

Considere agora os seguintes problemas de projeção bidimensionais definidos no quadrado local $\Omega = [\xi_1, \xi_2] \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$u(\xi_1, \xi_2) = -f(\xi_1, \xi_2), \tag{3.29}$$

$$u_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + u_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) = -\left(f_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + f_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right), \tag{3.30}$$

$$\triangle u(\xi_1, \xi_2) = -\triangle f(\xi_1, \xi_2), \tag{3.31}$$

com $u_{,\xi_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1}$.

Dada uma base $\{\phi_i(\xi_1, \xi_2)\}_{i=1}^{n}$, a função $u(\xi_1, \xi_2)$ é aproximada como

$$u(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(\xi_1, \xi_2). \tag{3.32}$$

As projeções das equações (3.29) a (3.31), no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i(\xi_1, \xi_2)\}$, são dadas, respectivamente, por

$$\int_\Omega u(\xi_1, \xi_2)v(\xi_1, \xi_2)d\Omega = -\int_\Omega f(\xi_1, \xi_2)v(\xi_1, \xi_2)d\Omega, \tag{3.33}$$

$$\int_\Omega \left(u_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + u_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right) v(\xi_1, \xi_2)d\Omega = -\int_\Omega \left(f_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + f_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right) v(\xi_1, \xi_2)d\Omega, \tag{3.34}$$

$$\int_\Omega \triangle u(\xi_1, \xi_2)v(\xi_1, \xi_2)d\Omega = -\int_\Omega \triangle f(\xi_1, \xi_2)v(\xi_1, \xi_2)d\Omega, \tag{3.35}$$

sendo $v(\xi_1, \xi_2)$ a função teste.

Integrando (3.35) por partes, obtém-se

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2)\cdot\nabla\mathbf{v}(\xi_1,\xi_2)d\Omega = \int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2)v(\xi_1,\xi_2)d\Omega + \int_\Gamma(\nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2)\cdot\mathbf{n})v(\xi_1,\xi_2)d\Gamma, \quad (3.36)$$

sendo Γ o contorno de Ω e $\mathbf{n}(\xi_1,\xi_2)$ o vetor normal em cada ponto de Γ.

Usando o Método de Galerkin, a função teste $v(\xi_1,\xi_2)$ é aproximada por

$$v(\xi_1,\xi_2) = \sum_{j=1}^{n} b_j\phi_j(\xi_1,\xi_2). \quad (3.37)$$

Substituindo (3.32) e (3.37) em (3.33), (3.34) e (3.36), obtém-se as seguintes aproximações para $i = 1,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\Omega\right)a_j = -\int_\Omega f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Omega, \quad (3.38)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega (\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2))\,\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\Omega\right)a_j = -\int_\Omega (f_{,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+f_{,\xi_2}(\xi_1,\xi_2))\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Omega, \quad (3.39)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega (\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2))\,d\Omega\right)a_j = \int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Omega + \int_\Gamma(\nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2)\cdot\mathbf{n})\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Gamma. \quad (3.40)$$

Os coeficientes da matriz de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.41)$$

$$D_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)]\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.42)$$

$$K_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.43)$$

Conforme apresentado no Capítulo 2, as funções de interpolação do quadrado podem ser escritas, usando o produto tensorial de funções unidimensionais, como

$$\phi_i(\xi_1,\xi_2) = \phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2) \quad \text{e} \quad \phi_j(\xi_1,\xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2). \quad (3.44)$$

Substituindo as expressões anteriores em (3.41) e efetuando algumas simplificações, pode-se escrever os coeficientes da matriz de massa do quadrado local através da combinação dos coeficientes da matriz de massa unidimensional como

$$\begin{aligned} M_{ij}^{2D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)][\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right) \end{aligned}$$

$$= M_{ap}^{1D} M_{bq}^{1D}. \tag{3.45}$$

Analogamente, os coeficientes da matriz mista do quadrado local podem ser obtidos pela combinação dos coeficientes das matrizes de massa e mista unidimensionais como

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{2D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2) + \phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)]\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2) + \phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \left(\int_{-1}^{1} \phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1) d\xi_1\right) \left(\int_{-1}^{1} \phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2) d\xi_2\right) \\
&+ \left(\int_{-1}^{1} \phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1) d\xi_1\right) \left(\int_{-1}^{1} \phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2) d\xi_2\right) \\
&= D_{ap}^{1D} M_{bq}^{1D} + M_{ap}^{1D} D_{bq}^{1D}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

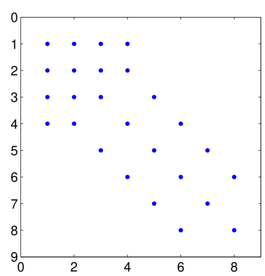
Finalmente, os coeficientes da matriz de rigidez do quadrado local são expressos como a combinação dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais como

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{2D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_{p,\xi_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2) + \phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_p(\xi_1)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \left(\int_{-1}^{1} \phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_{p,\xi_1}(\xi_1) d\xi_1\right) \left(\int_{-1}^{1} \phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2) d\xi_2\right) \\
&+ \left(\int_{-1}^{1} \phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1) d\xi_1\right) \left(\int_{-1}^{1} \phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2) d\xi_2\right) \\
&= K_{ap}^{1D} M_{bq}^{1D} + M_{ap}^{1D} K_{bq}^{1D}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

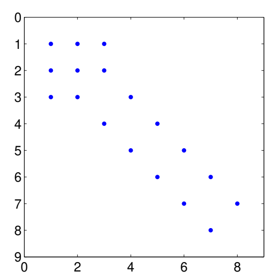
Assim, observa-se que é possível expressar os coeficientes das matrizes do quadrado local pela combinação ou tensorização das matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez.

A Figura 3.1 ilustra os perfis de esparsidade das matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez usando polinômios de Jacobi ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e as funções definidas na Seção 2.4 para $P = 7$. Observa-se que as matrizes de rigidez são bem mais esparsas que as matrizes de massa e mista.

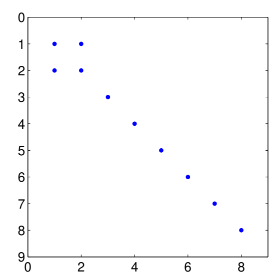
Como os problemas unidimensionais (3.1) a (3.3) possuem os mesmos coeficientes de aproximação, conforme as equações (3.4) a (3.6), deseja-se substituir os termos relativos às matrizes de massa e os termos de carregamento pelos respectivos termos da matriz rigidez. Por exemplo, substitui-se M_{bq}^{1D} por K_{bq}^{1D} e $f_q^{1D,b,m}$ por $f_q^{1D,b,k}$.



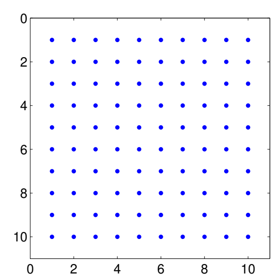
(a) Jacobi - Massa ($nz = 26$).



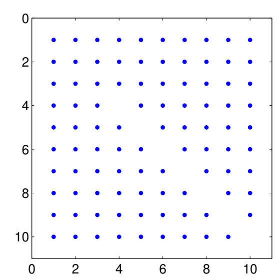
(b) Jacobi - Mista ($nz = 18$).



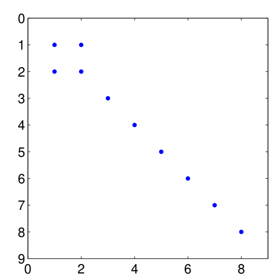
(c) Jacobi - Rigidez ($nz = 10$).



(d) Vazquez - Massa ($nz = 100$).



(e) Vazquez - Mista ($nz = 93$).



(f) Vazquez - Rigidez ($nz = 10$).

Figura 3.1: Perfis de esparsidade das matrizes de massa, mista e rigidez unidimensionais com grau $P = 7$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

Para os coeficientes da matriz de rigidez do quadrado dados em (3.47), obtém-se

$$K_{ij}^{2D} = K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D} + K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D} = 2K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}. \tag{3.48}$$

Na sequência, considera-se as respectivas substituições dos termos independentes de corpo e superfície.

Suponha que a função $f(\xi_1, \xi_2)$ possa ser escrita de forma separável, ou seja,

$$f(\xi_1, \xi_2) = f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2). \tag{3.49}$$

O termo de carga de corpo em (3.40) fica dado por

$$\begin{aligned} f_i^{2D,b,k} &= \int_\Omega \triangle f(\xi_1, \xi_2)\phi_i(\xi_1, \xi_2)d\Omega \\ &= \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial \xi_1^2} f_{\xi_2}(\xi_2) + f_{\xi_1}(\xi_1)\frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial \xi_2^2}\right] \phi_i(\xi_1, \xi_2)d\Omega. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Substituindo ϕ_i dado em (3.44), tem-se

$$\begin{aligned} f_i^{2D,b,k} &= \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial \xi_1^2}\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial \xi_2^2}\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right) \\ &= f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,k}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Logo, usando a hipótese (3.49), pode-se expressar o termo da carga de corpo em quadrados a partir dos termos de carga de corpo unidimensionais. Os termos que envolvem as derivadas parciais segundas de f_{ξ_1} e f_{ξ_2} são identificados pelo índice k. Da mesma maneira, utiliza-se m para os termos que envolvem f_{ξ_1} e f_{ξ_2}.

Para $u = -f$, a integral de superfície em (3.40) é expressa como

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= \int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2)\cdot\mathbf{n})\phi_i(\xi_1, \xi_2)d\Gamma \\ &= -\int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}(\xi_1, \xi_2)(\xi_1, \xi_2)\cdot\mathbf{n})\phi_i(\xi_1, \xi_2)d\Gamma \\ &= -\int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)n_{\xi_2}]\phi_i(\xi_1, \xi_2)d\Gamma \\ &= -\int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)n_{\xi_2}]\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.52}$$

O termo de superfície anterior deve ser considerado para as quatro arestas do quadrado local ilustrado na Figura 3.2. Logo,

- Aresta 1: nesse caso, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, -1)$ e todos os pontos

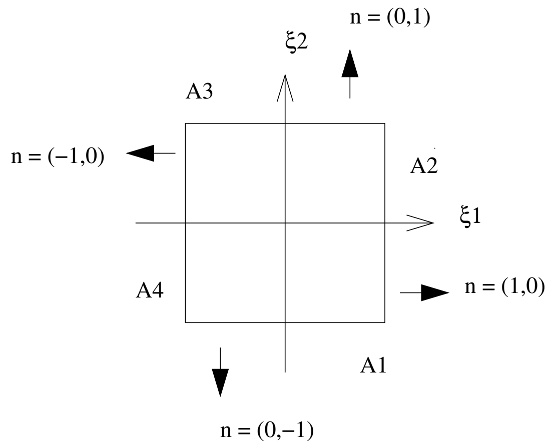


Figura 3.2: Arestas do quadrado e seus vetores normais.

possuem coordenada $\xi_2 = -1$. A partir daí, a equação (3.52) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2))|_{\xi_2=-1} \\ &= f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_1}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

A única função $\phi_b(\xi_2)$ não-nula em $\xi_2 = -1$ é $\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi_2)|_{\xi_2=-1} = 1$. De fato, todas as funções de forma da aresta 1 possuem o índice $b = 1$. Consequentemente, o termo $f_b^{1D,s,m}|_{A_1}$ se reduz a um valor constante igual a $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = -1)$ que multiplica o vetor com coeficientes $f_a^{1D,b,m}$.

- Aresta 2: o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (1,0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = 1$. A partir daí, a equação (3.52) fica

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= -\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1))|_{\xi_1=1} \\ &= -f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_2}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Analogamente à aresta 1, todas as funções de interpolação da aresta 2 tem índice

$a = 2$ e o segundo termo da expressão anterior se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = 1)$.

- Aresta 3: para essa aresta, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, 1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = 1$. Assim, a equação (3.52) é explicitada como

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= -\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)\right)|_{\xi_2=1} \\ &= -f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_3}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

O termo $f_b^{1D,s,k}|_{A_3}$ se reduz à constante $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = 1)$.

- Aresta 4: analogamente às arestas anteriores, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (-1, 0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = -1$ e a equação (3.52) torna-se

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)\right)|_{\xi_1=-1} \\ &= f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

O termo $f_a^{1D,s,k}|_{A_4}$ se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = -1)$.

O termo independente total é a soma das parcelas de corpo e de superfície, ou seja,

$$f_i = f_i^b + f_i^s, \tag{3.57}$$

sendo

$$f_i^b = f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,k}, \tag{3.58}$$

$$f_i^s = f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_1} - f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_2} - f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_3} + f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_4} \tag{3.59}$$

Substituindo $f_a^{1D,b,m}$ e $f_b^{1D,b,m}$ por $f_a^{1D,b,k}$ e $f_b^{1D,b,k}$ dados, respectivamente, em (3.18) e (3.20), em f_i^b tem-se

$$f_i^b = -(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k}) = -2 f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k}. \tag{3.60}$$

O sinal $-$ vem ao se comparar os lados direito das equações (3.7) e (3.11). Além disso, tem-se um termo de contorno adicional idêntico a f_i^s, ou seja, multiplica-se f_i^s dado em (3.59) por 2. Logo,

$$f_i^s = -2f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,s,k}|_{A_1} + 2f_b^{1D,b,m}f_a^{1D,s,k}|_{A_2} + 2f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,s,k}|_{A_3} - 2f_b^{1D,b,m}f_a^{1D,s,k}|_{A_4} \quad (3.61)$$

Substitui-se agora $f_a^{1D,b,m}$ e $f_b^{1D,b,m}$ pelos seus equivalentes unidimensionais de rigidez de acordo com (3.22). Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s = \quad & -2(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})f_b^{1D,s,k}|_{A_1} \\ & +2(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_2} \\ & +2(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})f_b^{1D,s,k}|_{A_3} \\ & -2(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Assim, a partir de (3.48), (3.60) e (3.62), o sistema de equações no elemento fica dado por

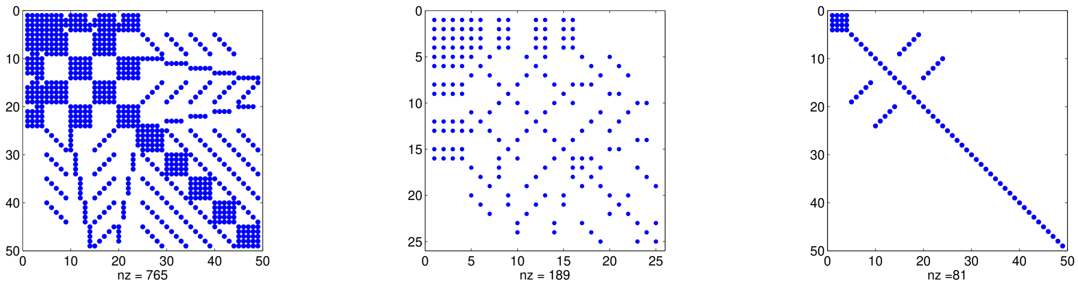
$$\begin{aligned} (K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D})a_j \quad = \quad & -f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k} \\ & -(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})f_b^{1D,s,k}|_{A_1} \\ & +(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_2} \\ & +(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})f_b^{1D,s,k}|_{A_3} \\ & -(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Matricialmente,

$$[K_{2D}]\{a_{2D}\} \quad = \quad \{f_{2D}^k\}. \quad (3.64)$$

O efeito das substituições anteriores em termos do número de coeficientes não-nulos da matriz de rigidez do quadrado local pode ser observado na Figura 3.3, na qual se comparam os perfis de esparsidade das matrizes para $P = 4$ usando as funções de base propostas em (Vazquez, 2008), polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e a técnica aqui proposta. Observa-se pela Figura 3.4 que a técnica de utilização apenas da matriz de rigidez unidimensional em substituição à matriz de massa resulta em melhor esparsidade do que a técnica convencional.

Usando o teorema da divergência, pode-se reescrever a integral do contorno em



(a) Funções propostas em (Vazquez, 2008)($nz = 765$).

(b) Jacobi ($nz = 189$).

(c) Substituição da matriz de massa ($nz = 81$).

Figura 3.3: Perfis de esparsidade da matriz de rigidez para quadrados e grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

(3.36) como uma integral de domínio, ou seja,

$$\int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2)\cdot\mathbf{n})v(\xi_1,\xi_2)d\Gamma = \int_\Omega \nabla\cdot(v(\xi_1,\xi_2)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2))d\Omega. \tag{3.65}$$

Para $u = -f$, a i-ésima componente desse vetor de força de corpo é

$$\begin{aligned} f_i^{2D,b,k} &= -\int_\Omega \nabla\cdot(\phi_i(\xi_1,\xi_2)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2))d\Omega \\ &= -[\phi_{i,\xi_1} f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2} + \phi_{i,\xi_2} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2) + \\ &\qquad \phi_i(\xi_1,\xi_2)(f_{\xi_1,\xi_1\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2}(\xi_2) + f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2,\xi_2\xi_2}(\xi_2))] \end{aligned} \tag{3.66}$$

Substituindo $\phi_i(\xi_1,\xi_2)$ dada em (3.44) e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} f_i^{2D,b,k} &= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)d\xi_2\right) \\ &= -(f_p^{1D,b,d} + f_p^{1D,b,k}) f_q^{1D,b,m} + (f_q^{1D,b,d} + f_q^{1D,b,k}) f_p^{1D,b,m} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Para problemas que possuem cargas de corpo e superfície, a resultante em termos de carga de corpo é a soma de (3.58) e (3.67). Logo,

$$f_i^b = -(f_a^{1D,b,d} f_b^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,d}). \tag{3.68}$$

Novamente, a expressão anterior emprega apenas cargas de corpo no elemento. Para a técnica aqui proposta, essa possibilidade é interessante devido à maior complexidade

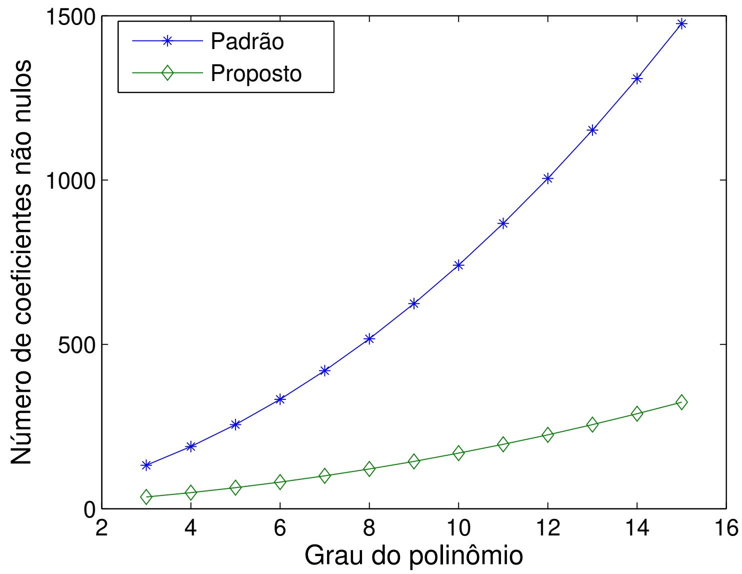


Figura 3.4: Número de coeficientes não nulos da matriz de rigidez do quadrado local para funções de Jacobi ($P = 3$ a $P = 15$).

das expressões envolvendo o carregamento de superfície.

3.3 Hexaedros

Considere os mesmos problemas de projeção anteriores, mas agora definidos em um hexaedro local $\Omega = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, ou seja,

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -f(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} & u_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + u_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + u_{,\xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \\ - \quad & \left(f_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + f_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + f_{,\xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right), \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\triangle u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\triangle f(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{3.71}$$

Dada uma base $\{\phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}_{i=1}^{n}$, a função $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ é aproximada como

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{3.72}$$

As projeções das equações (3.69) a (3.71) no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\}$ são dadas, respectivamente, por

$$\int_\Omega u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega = -\int_\Omega f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega, \tag{3.73}$$

$$\int_\Omega (u_{,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + u_{,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + u_{,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))\, v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega =$$
$$-\int_\Omega (f_{,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + f_{,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + f_{,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))\, v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega, \tag{3.74}$$

$$\int_\Omega \triangle u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega = -\int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega. \tag{3.75}$$

Integrando (3.75) por partes, obtém-se

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\nabla\mathbf{v}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega = \int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega + \int_\Gamma (\nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\mathbf{n})v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma, \tag{3.76}$$

sendo Γ o contorno de Ω e $\mathbf{n}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ o vetor normal em cada ponto de Γ.

Usando o Método de Galerkin, a função teste $v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ é aproximada por

$$v(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \sum_{j=1}^{n} b_j\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \tag{3.77}$$

Substituindo (3.72) e (3.77) em (3.73), (3.74) e (3.76), obtém-se as seguintes aproximações para $i = 1,...,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega \phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega\right)a_j = -\int_\Omega f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega, \tag{3.78}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega (\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))\,\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega\right)a_j =$$
$$-\int_\Omega (f_{,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + f_{,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + f_{,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))\,\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega, \tag{3.79}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega [\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \right.$$
$$\left.\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)]d\Omega\right)a_j =$$
$$\int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega + \int_\Gamma (\nabla\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\mathbf{n})\,\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma. \tag{3.80}$$

Os coeficientes da matriz de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{3.81}$$

$$D_{ij}^{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)]$$
$$\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{3.82}$$

$$K_{ij}^{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) +$$

$$\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)]d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (3.83)$$

Conforme visto no Capítulo 2, as funções de interpolação do hexaedro local podem ser escritas, usando o produto tensorial de funções unidimensionais, como

$$\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3) \quad \text{e} \quad \phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3). \quad (3.84)$$

Substituindo as expressões anteriores em (3.81) e efetuando algumas simplificações, pode-se escrever os coeficientes da matriz de massa do hexaedro local através da combinação dos coeficientes da matriz de massa unidimensional como

$$\begin{aligned} M_{ij}^{3D} &= \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &= M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Analogamente, os coeficientes da matriz mista do hexaedro local podem ser obtidos pela combinação dos coeficientes das matrizes de massa e mista unidimensionais como

$$\begin{aligned} D_{ij}^{3D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3) + \phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_c(\xi_3) + \phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)] \\ &\quad \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) + \\ &\quad \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &= D_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + M_{ap}^{1D}D_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}D_{cr}^{1D}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Finalmente, os coeficientes da matriz de rigidez do hexaedro local são expressos como a combinação dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais como

$$\begin{aligned} K_{ij}^{3D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[(\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3))(\phi_{p,\xi_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3)) \\ &\quad +(\phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_c(\xi_3))(\phi_p(\xi_1)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3)) \\ &\quad +(\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3))(\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{r,\xi_3}(\xi_3))]d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_{p,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &= K_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + M_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Devido à equivalência entre os problemas unidimensionais, indicada em (3.1) a (3.3) e os perfis de esparsidade dados na Figura 3.1, deseja-se substituir em (3.87) os termos relativos às matrizes de massa e os termos de carregamento pelos respectivos termos de rigidez. Por exemplo, substitui-se M^{1D}_{bq} por K^{1D}_{bq}, M^{1D}_{cr} por K^{1D}_{cr}, M^{1D}_{ap} por K^{1D}_{ap} e $f^{1D,b,m}_{q}$ por $f^{1D,b,k}_{q}$. Para os coeficientes da matriz de rigidez do hexaedro dados em (3.87), obtém-se

$$K^{3D}_{ij} = K^{1D}_{ap}K^{1D}_{bq}K^{1D}_{cr} + K^{1D}_{ap}K^{1D}_{bq}K^{1D}_{cr} + K^{1D}_{ap}K^{1D}_{bq}K^{1D}_{cr} = 3K^{1D}_{ap}K^{1D}_{bq}K^{1D}_{cr}. \tag{3.88}$$

Na sequência, considera-se as respectivas substituições dos termos independentes de corpo e superfície.

Suponha que a função $f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ possa ser escrita de forma separável como

$$f(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3). \tag{3.89}$$

O termo de carga de corpo em (3.80) fica

$$\begin{aligned} f^{3D,b,k}_{i} &= \int_\Omega \triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 f_{\xi_1}}{\partial \xi_1^2}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3) + f_{\xi_1}(\xi_1)\frac{\partial^2 f_{\xi_2}}{\partial \xi_2^2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)\right. \\ &\quad \left. + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\frac{\partial^2 f_{\xi_3}}{\partial \xi_3^2}(\xi_3)\right)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Omega. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Substituindo ϕ_i dado em (3.84), tem-se

$$\begin{aligned} f^{3D,b,k}_{i} &= \left(\frac{\partial^2 f_{\xi_1}}{\partial \xi_1^2}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &+ \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\frac{\partial^2 f_{\xi_2}}{\partial \xi_2^2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &+ \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\frac{\partial^2 f_{\xi_3}}{\partial \xi_3^2}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right) \\ &= f^{1D,b,k}_{a}f^{1D,b,m}_{b}f^{1D,b,m}_{c} + f^{1D,b,m}_{a}f^{1D,b,k}_{b}f^{1D,b,m}_{c} + f^{1D,b,m}_{a}f^{1D,b,m}_{b}f^{1D,b,k}_{c}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Para $u = -f$, a integral de superfície em (3.80) fica

$$\begin{aligned} f^{3D,s,k}_{i} &= -\int_\Gamma (\nabla \mathbf{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot \mathbf{n})\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma \\ &= -\int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_2} + \\ &\quad f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_3}]\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma \end{aligned}$$

$$
= \; -\int_{\Gamma}[f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_2} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_3}]\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\Gamma. \tag{3.92}
$$

A força de superfície anterior será considerada para as seis faces do hexaedro local ilustradas na Figura 3.5. Assim,

- Face 1: nesse caso, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_3 = -1$. A partir daí, a equação (3.92) toma a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}) \\
&= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}) \\
&= f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_1}. \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

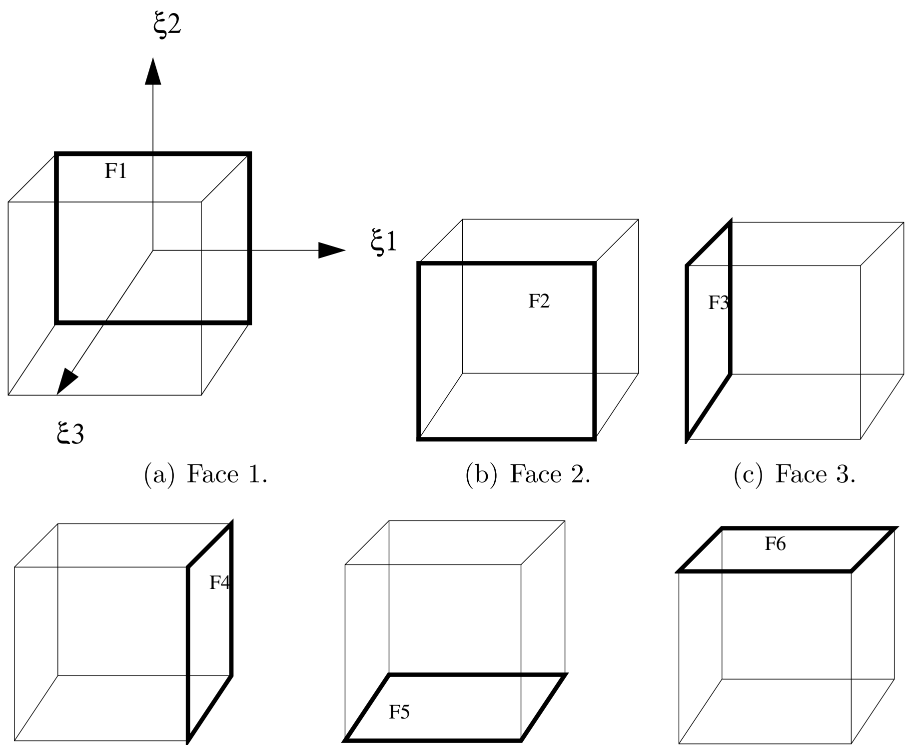
  Todas as funções de forma da face 1 possuem $c = 1$. A função de forma correspondente é $\phi_1(\xi_3) = \frac{1}{2}(1-\xi_3)$ e $\phi_1(\xi_3 = -1) = 1$. Dessa maneira, o termo $f_c^{1D,s,k}|_{F_1}$ se reduz à constante $f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3 = -1)$.

- Face 2: o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_3 = 1$. A partir daí, a equação (3.92) fica

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= -\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=1}) \\
&= -\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=1}) \\
&= -f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_2}. \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

  Analogamente à face 1, todas as funções da face 2 possuem $c = 2$ e $\phi_2(\xi_3) = \frac{1}{2}(1+\xi_3)|_{\xi_3} = 1$. Logo, o termo $f_c^{1D,s,k}|_{F_2}$ se reduz à constante $f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3 = 1)$.

- Face 3: da mesma maneira, nessa face o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} =$



(a) Face 1. (b) Face 2. (c) Face 3.

(d) Face 4. (e) Face 5. (f) Face 6.

Figura 3.5: Faces do hexaedro.

$(-1,0,0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = -1$ e a equação (3.92) torna-se

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\xi_2 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}\right) \\
&= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}\right) \\
&= f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_3}. \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

Analogamente, o termo $f_a^{1D,s,k}|_{F_3}$ se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = -1)$.

- Face 4: para essa face, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (1,0,0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = 1$. Assim, a equação (3.92) é explicitada como

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= -\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\xi_2 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=1}\right) \\
&= -\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=1}\right) \\
&= -f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_4}. \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

Todas as funções de forma da face 4 possuem $a = 2$. A única função não nula é $\phi_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1-\xi_1)|_{\xi_1=-1} = 1$. Logo, o termo $f_a^{1D,s,k}|_{F_4}$ se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = 1)$.

- Face 5: aqui o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0,-1,0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = -1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_a(\xi_1)\phi_c(\xi_3)d\xi_1 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\
&= \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\
&= f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_5}. \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

O termo $f_b^{1D,s,k}$ se reduz à constante $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = -1)$.

- Face 6: analogamente, nessa face o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0,1,0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = 1$. A equação (3.92) torna-se

$$\begin{aligned} f_i^{3D,s,k} &= -\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_a(\xi_1)\phi_c(\xi_3) d\xi_1 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\ &= -\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3) d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\ &= -f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_6}. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Novamente, o termo $f_b^{1D,s,k}|_{F_6}$ se reduz à constante $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = -1)$.

O termo independente total é a soma das parcelas de corpo e de superfície, ou seja,

$f_i = f_i^b + f_i^s$,

sendo

$$f_i^b = f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,k}, \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned} f_i^s &= f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_1} - f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_2} \\ &+ f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_3} - f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_4} \\ &+ f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_5} - f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_6}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Substituindo $f_a^{1D,b,m}$, $f_b^{1D,b,m}$ e $f_c^{1D,b,m}$, respectivamente, por $f_a^{1D,b,k}$, $f_b^{1D,b,k}$ e $f_c^{1D,b,k}$, em f_i^b, de acordo com (3.18) e (3.20), tem-se

$$\begin{aligned} f_i^b &= -(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k}) \\ &= -3 f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k}. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Além disso, tem-se um termo de contorno adicional idêntico a f_i^s, ou seja, multiplica-se f_i^s por 2. Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s &= 2 f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_1} - 2 f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_2} \\ &+ 2 f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_3} - 2 f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_4} \\ &+ 2 f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_5} - 2 f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_6}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Substitui-se agora $f_a^{1D,s,m}$, $f_b^{1D,s,m}$ e $f_c^{1D,s,m}$ pelos seus equivalentes unidimensionais de rigidez. Logo,

$$
\begin{aligned}
f_i^s &= -2(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})(f_c^{1D,s,k}|_{F_1} - f_c^{1D,s,k}|_{F_2}) \\
&- 2(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})(f_c^{1D,b,k} + f_{\xi_3,\xi_3}\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})(f_a^{1D,s,k}|_{F_3} - f_a^{1D,s,k}|_{F_4}) \\
&- 2(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})(f_c^{1D,b,k} + f_{\xi_3,\xi_3}\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})(f_b^{1D,s,k}|_{F_5} - f_a^{1D,s,k}|_{F_6})
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

Assim, a partir de (3.89), (3.101) e (3.103), o sistema de equações no elemento fica dado por

$$
\begin{aligned}
&(K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D})a_j = \frac{1}{3}(f_i^b + f_i^s) = -f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k} \\
&-\frac{2}{3}(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})(f_c^{1D,s,k}|_{F_1} - f_c^{1D,s,k}|_{F_2}) \\
&-\frac{2}{3}(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})(f_c^{1D,b,k} + f_{\xi_3,\xi_3}\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})(f_a^{1D,s,k}|_{F_3} - f_a^{1D,s,k}|_{F_4}) \\
&-\frac{2}{3}(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})(f_c^{1D,b,k} + f_{\xi_3,\xi_3}\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})(f_b^{1D,s,k}|_{F_5} - f_a^{1D,s,k}|_{F_6}).
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

Um fato importante do sistema resultante acima é usar apenas matrizes de problemas unidimensionais. Isso é computacionalmente mais barato,em termos de cálculo, do que utilizar matrizes de funções tridimensionais, segundo a técnica convencional.

Matricialmente,

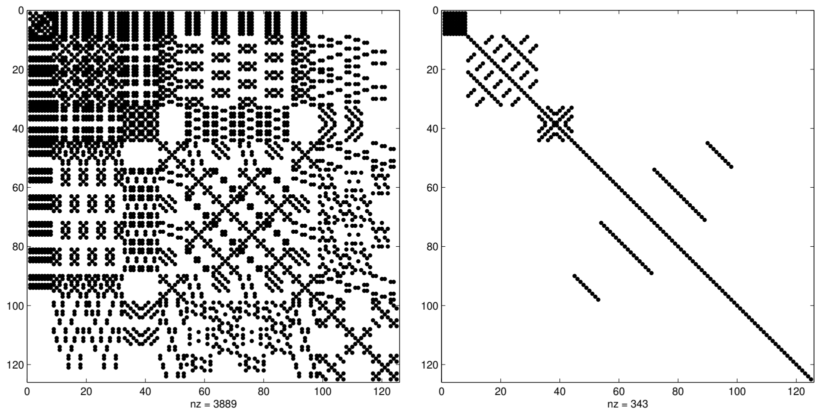
$$[K_{3D}]\,\{a_{3D}\} \quad = \quad \{f_{3D}^k\}. \tag{3.105}$$

O efeito em termos do número de coeficientes não-nulos da matriz de rigidez do hexaedro local pode ser observado na Figura 3.6, na qual se comparam os perfis de esparsidade das matrizes para $P = 4$ usando polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e a técnica aqui proposta.

Observa-se pela Figura 3.7 que a técnica de utilização apenas da matriz de rigidez em substituição à matriz de massa resulta em melhor esparsidade do que a técnica convencional.

Novamente, aplicando-se o teorema da divergência, pode-se transformar a força de superfície dada em (3.80) em uma força de corpo, ou seja,

$$\int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\mathbf{n})v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma = \int_\Omega \nabla\cdot(v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))d\Omega \tag{3.106}$$



(a) Jacobi ($nz = 3889$). (b) Substituição da matriz de massa ($nz = 343$).

Figura 3.6: Perfis de esparsidade da matriz de rigidez para hexaedros com grau $P = 4$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

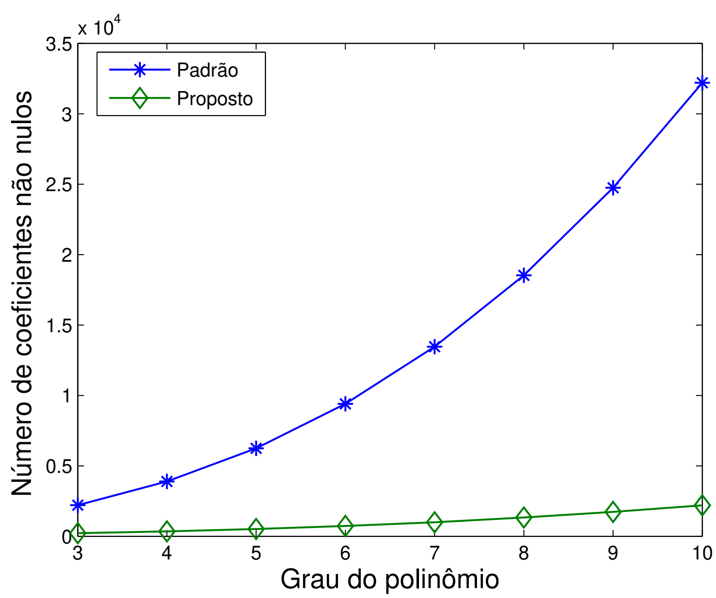


Figura 3.7: Número de coeficientes não nulos da matriz de rigidez do hexaedro local para funções de Jacobi ($P = 3$ a $P = 10$).

Para $u = -f$, a i-ésima componente dessa carga de corpo é

$$\begin{aligned}
f_i^{3D,b,k} &= -\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)d\Omega \\
&= -\int_\Omega [\phi_{i,\xi_1} f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2} f_{\xi_3} + \phi_{i,\xi_2} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3) + \\
&\quad \phi_{i,\xi_3} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3) + \phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)(f_{\xi_1,\xi_1\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3) + \\
&\quad f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2,\xi_2\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3) + f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3,\xi_3\xi_3}(\xi_3))]
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Substituindo $\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ dada em (3.84) e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned}
f_i^{3D,b,k} &= -\left[\left(\int_{-1}^1 \phi_{a,\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 \phi_b(\xi_2) f_{\xi_2}(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3) d\xi_3\right) + \right. \\
&\quad \left(\int_{-1}^1 f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3) d\xi_3\right) + \\
&\quad \left(\int_{-1}^1 f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3) d\xi_3\right) + \\
&\quad \left(\int_{-1}^1 f_{\xi_1,\xi_1\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3) d\xi_3\right) + \\
&\quad \left(\int_{-1}^1 f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_2,\xi_2\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3) d\xi_3\right) + \\
&\quad \left.\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^1 f_{\xi_3,\xi_3\xi_3}(\xi_3)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3) d\xi_3\right)\right] \\
&= -\left[f_a^{1D,b,d} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,d} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,d} + \right. \\
&\quad \left. f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,k} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,k}\right] \\
&= -\left[(f_a^{1D,b,d} + f_a^{1D,b,k}) f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + (f_b^{1D,b,d} + f_b^{1D,b,k}) f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + \right. \\
&\quad \left.(f_c^{1D,b,d} + f_c^{1D,b,k}) f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m}\right].
\end{aligned} \tag{3.108}$$

De forma análoga aos quadriláteros, a vantagem da expressão anterior é empregar apenas cargas de corpo no elemento.

3.4 Casos de Validação

Nessa seção, apresentam-se alguns exemplos com soluções analíticas em um elemento, visando validar a técnica de substituição apresentada anteriormente e mostrar a equivalência das soluções dos problemas envolvendo as matrizes de massa, mista e rigidez.

Sendo u a solução exata, a norma de energia é calculada como

$$||u||_A = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.109}$$

Já as normas de $||u||$ e $||u'||$ são dadas, respectivamente, por

$$||u|| = \left(\int_\Omega u^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad e \quad ||u'|| = \left(\int_\Omega |uu'| d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.110}$$

Como u é dado, os termos independentes são calculados através da substituição nas respectivas equações. Por exemplo, para os problemas unidimensionais, as intensidades $f(\xi_1)$, $f'(\xi_1)$ e $f''(\xi_1)$ são determinados usando (3.1) a (3.3), respectivamente.

As normas das soluções aproximadas dos problemas de projeção em termos das matrizes de massa, mista e rigidez são calculadas, respectivamente, como

$$||u^m_{ap}|| = \left(\{a\}^T [M] \{a\} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.111}$$

$$||u^d_{ap}|| = \left(\{a\}^T [D] \{a\} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.112}$$

$$||u^k_{ap}|| = \left(\{a\}^T [K] \{a\} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.113}$$

Os respectivos erros relativos são calculados como

$$||e^m|| = \frac{||u|| - ||u^m_{ap}||}{||u||}, \tag{3.114}$$

$$||e^d|| = \frac{||u'|| - ||u^d_{ap}||}{||u'||}, \tag{3.115}$$

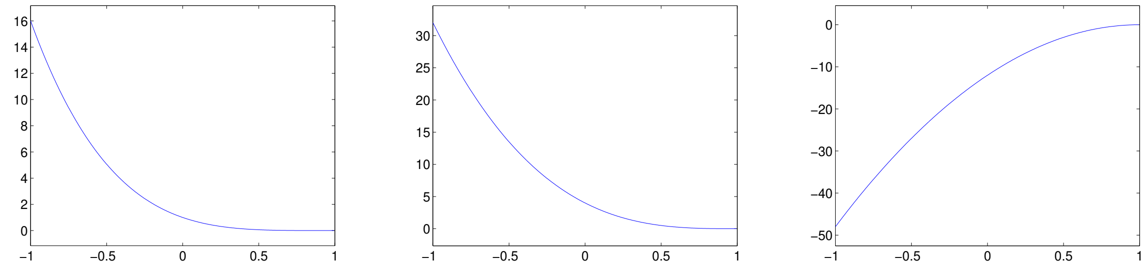
$$||e^k|| = \frac{||u||_A - ||u^k_{ap}||}{||u||_A}. \tag{3.116}$$

Todos os resultados foram obtidos usando Matlab e os recursos de manipulação simbólica disponíveis, principalmente nos processos de diferenciação e integração.

3.4.1 Unidimensional

Apresenta-se aqui a validação do caso unidimensional, de acordo com as equações (3.23) a (3.25), para $P = 4$. A solução exata é $u(\xi_1) = (1 - \xi_1)^4$, satisfazendo $u(1) = 0$ e $u'(-1) = -32$. As funções aproximadas são, respectivamente, $f(\xi_1) = -(1 - \xi_1)^4$, $f'(\xi_1) = 4(1 - \xi_1)^3$ e $f''(\xi_1) = -12(1 - \xi_1)^2$. O gráfico das funções u, f' e f'' podem ser vistos na Figura 3.8.

De acordo com a formulação apresentada neste capítulo, o vetor solução {a} é o



(a) $u = (1-\xi)^4$ (b) $f' = -4(1-\xi)^3$ (c) $f'' = 12(1-\xi)^2$

Figura 3.8: Funções unidimensionais

mesmo para as matrizes de massa, mista e rigidez. Na sequência, a resolução dos problemas indicados em (3.1), (3.2) e (3.3).

Utilizando as funções descritas em (Vazquez,2008), tem-se o seguinte vetor solução

$$\{a\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} -16,0000 & 0,0000 & 6,4143 & 10,2096 & 4,3461 & 0,5507 & 0,0000 \end{array} \right\}^T$$

onde $u(-1) = -16$ e $u(1) = 0$.

As matrizes de massa, mista e rigidez unidimensionais do elemento para $P = 4$ são, respectivamente,

$$[M_{1D}] = \begin{bmatrix} 0,6667 & 0,3333 & 0,1782 & 0,3244 & 0,1958 & 0,0495 & 0,0000 \\ 0,3333 & 0,6667 & 0,0891 & 0,2323 & 0,2804 & 0,1906 & 0,0309 \\ 0,1782 & 0,0891 & 0,2017 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,3244 & 0,2323 & 0,0000 & 0,4891 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1958 & 0,2804 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4681 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0495 & 0,1906 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,2066 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0309 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0116 \end{bmatrix},$$

$$[D_{1D}] = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0,5000 & 0,1336 & 0,2784 & 0,2381 & 0,1200 & 0,0154 \\ -0,5000 & 0,5000 & -0,1336 & -0,2784 & -0,2381 & -0,1200 & -0,0154 \\ -0,1336 & 0,1336 & -0,0000 & 0,1053 & 0,0424 & 0,0416 & 0,0079 \\ -0,2784 & 0,2784 & -0,1053 & 0,0000 & 0,2171 & 0,0683 & 0,0164 \\ -0,2381 & 0,2381 & -0,0424 & -0,2171 & 0,0000 & 0,1990 & -0,0049 \\ -0,1200 & 0,1200 & -0,0416 & -0,0683 & -0,1990 & 0,0000 & 0,0915 \\ -0,0154 & 0,0154 & -0,0079 & -0,0164 & 0,0049 & -0,0915 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$[K_{1D}] = \begin{bmatrix} 0,5000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

A validação seguinte é análoga à anterior, com a única diferença de agora utilizar-se polinômios de Jacobi. Assim, tem-se o seguinte vetor solução para $P = 4$

$$\{a\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} -16,0000 & 0,0000 & 28,8000 & -8,0000 & 1,0667 \end{array} \right\}^T.$$

As respectivas matrizes de massa, mista e rigidez unidimensionais do elemento para $P = 4$ calculadas com polinômios de Jacobi são

$$[M_{1D}] = \begin{bmatrix} 0,6667 & 0,3333 & 0,1667 & -0,0667 & 0,0000 \\ 0,3333 & 0,6667 & 0,1667 & 0,0667 & 0,0000 \\ 0,1667 & 0,1667 & 0,0667 & 0,0000 & -0,0143 \\ -0,0667 & 0,0667 & 0,0000 & 0,0381 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0143 & 0,0000 & 0,0286 \end{bmatrix},$$

$$[D_{1D}] = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0,5000 & 0,1667 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,5000 & -0,1667 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1667 & 0,1667 & 0,0000 & 0,0667 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0667 & 0,0000 & 0,0857 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0857 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$[K_{1D}] = \begin{bmatrix} 0,5000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,5000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,1667 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6429 \end{bmatrix}.$$

A norma da solução exata é $||u|| = 7,5425$. Resolvendo-se o problema de projeção para a matriz de massa unidimensional, tem-se o erro relativo em energia igual a $||e|| = 1,6486 \times 10^{-15}$. Para a matriz mista, tem-se a norma da solução $||u'|| = 11,3137$ e o erro relativo em energia $||e^d|| = 1,5701 \times 10^{-16}$. Finalmente, para a matriz de rigidez, $||u||_A = 17,1047$ e o erro relativo em energia é nulo.

Considere agora $u(\xi_1) = (1 - \xi_1)^{10}$. As soluções aproximadas com polinômios de Jacobi são obtidas para $P = 2$ a $P = 10$. Os erros relativos em energia são apresentados na Tabela 3.1 e na Figura 3.9. Observa-se uma convergência exponencial das soluções para os 3 problemas de projeção.

3.4.2 Quadrado

Considere a seguinte solução exata no quadrado local

$$u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2), \tag{3.117}$$

com condição de contorno homogênea nas arestas do elemento. A norma de energia da solução exata é $||u||_A = 2,385139$. A Figura 3.10(a) ilustra essa solução. Tem-se o respectivo laplaciano $\triangle(\xi_1, \xi_2) = -2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2$, ilustrada na Figura 3.10(b).

Resolvendo o problema de Poisson, usando a base nodal da Seção 2.4, com a matriz de rigidez calculada utilizando-se as matrizes de rigidez e massa unidimensionais, tem-se

Tabela 3.1: Erros relativos para o problema unidimensional com $u(\xi_1) = (1 - \xi_1)^{10}$, para um elemento.

P	$\|\|e^m\|\|$	$\|\|e^d\|\|$	$\|\|e^k\|\|$
2	0,0923	0,5455	0,2440
3	$0,0223$	0,2937	0,0758
4	$0,0035$	$0,1259$	0,0156
5	$3,439 \times 10^{-4}$	$0,0420$	0,0020
6	$1,9036 \times 10^{-5}$	$0,0105$	$1,4085 \times 10^{-4}$
7	$5,2879 \times 10^{-7}$	$0,0019$	$4,9514 \times 10^{-6}$
8	$5,8591 \times 10^{-9}$	$2,0568 \times 10^{-4}$	$6,8531 \times 10^{-8}$
9	$1,4648 \times 10^{-11}$	$1,0825 \times 10^{-5}$	$2,1151 \times 10^{-10}$
10	$4,1372 \times 10^{-15}$	$< 1 \times 10^{-16}$	$1,3688 \times 10^{-16}$

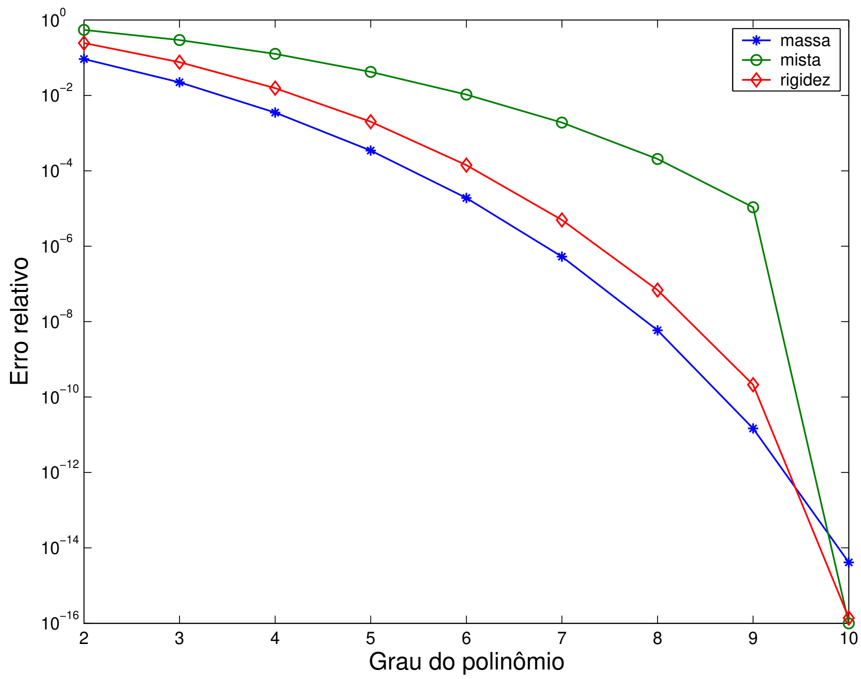
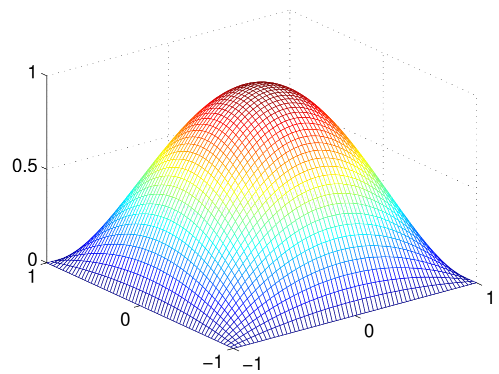
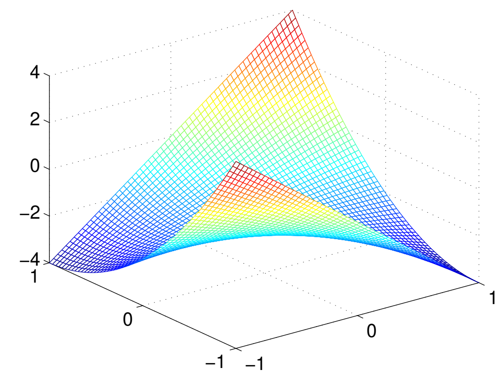


Figura 3.9: Convergência exponencial para os problemas de projeção com $u(\xi_1) = (1 - \xi_1)^{10}$.



(a) Solução zero em todas as arestas: $u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)$.



(b) Laplaciano da solução: $f''(\xi_1, \xi_2) = -2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2$.

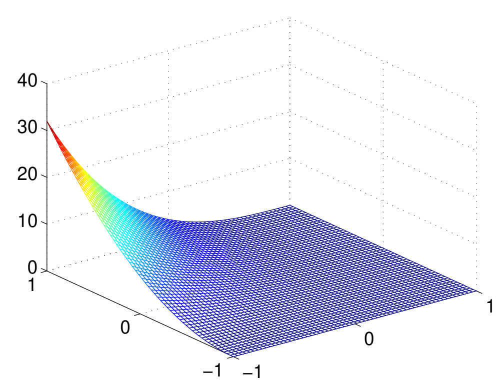
Figura 3.10: Solução exata e Laplaciano para quadrados.

o erro relativo em energia $||e^k|| = 1,861901 \times 10^{-16}$. Para o cálculo da matriz de rigidez utilizando apenas a matriz de rigidez unidimensional, tem-se o erro relativo em energia $||e^k|| = 2,081668 \times 10^{-16}$.

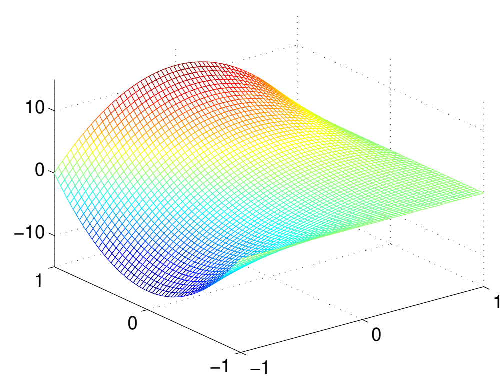
Considere agora a solução solução exata

$$u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)^3(1 + \xi_2)^2, \tag{3.118}$$

com solução zero em apenas duas arestas, conforme ilustrado na Figura 3.11(a). A norma de energia obtida é $||u||_A = 23,74211$. O laplaciano de f está ilustrado na Figura 3.11(b).



(a) Solução zero em duas arestas: $u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)^3(1 + \xi_2)^2$.



(b) Laplaciano da solução: $\triangle u(\xi_1, \xi_2) = 6(1 - \xi_1)(\xi_2 + 1)^2 - 6(1 - \xi_1)^2(\xi_2 + 1)$.

Figura 3.11: Solução exata e Laplaciano para quadrados.

Tabela 3.2: Erros relativos para o problema bidimensional com $u(\xi_1, \xi_2) = (1-\xi_1)^5(1+\xi_1)^5(1-\xi_2)^5(1+\xi_2)^5$ para um elemento.

P	$\|\|e^m\|\|$	$\|\|e^k\|\|$	$\|\|e^k proposta\|\|$
2	$1,216006 \times 10^{-1}$	$5,423092 \times 10^{-1}$	$3,940837 \times 10^{-1}$
3	$1,216006 \times 10^{-1}$	$5,423092 \times 10^{-1}$	$3,940837 \times 10^{-1}$
4	$1,404151 \times 10^{-2}$	$1,293595 \times 10^{-1}$	$7,379657 \times 10^{-2}$
5	$1,404151 \times 10^{-2}$	$1,293595 \times 10^{-1}$	$7,379657 \times 10^{-2}$
6	$6,017947 \times 10^{-4}$	$1,123611 \times 10^{-2}$	$5,767737 \times 10^{-3}$
7	$6,017947 \times 10^{-4}$	$1,123611 \times 10^{-2}$	$5,767737 \times 10^{-3}$
8	$5,412544 \times 10^{-6}$	$1,909913 \times 10^{-4}$	$1,25019 \times 10^{-4}$
9	$5,412544 \times 10^{-6}$	$1,909913 \times 10^{-4}$	$1,25019 \times 10^{-4}$
10	$5,940137 \times 10^{-13}$	$2,405386 \times 10^{-16}$	$< 1 \times 10^{-16}$

Resolvendo-se o problema de Poisson com $P = 3$ e a matriz de rigidez calculada utilizando-se as matrizes de rigidez e massa unidimensionais, tem-se o erro relativo em energia $||e^k|| = 1,117140 \times 10^{-16}$. Usando a matriz de rigidez aqui proposta, o erro em energia é menor que 1×10^{-16}. Resultados semelhantes foram obtidos usando polinômios de Jacobi.

Considere agora $u(\xi_1, \xi_2) = (1-\xi_1)^5(1+\xi_1)^5(1-\xi_2)^5(1+\xi_2)^5$, com solução nula na borda do elemento. As soluções aproximadas com polinômios de Jacobi são obtidas para $P = 2$ a $P = 10$. Os erros relativos em energia são apresentados na Tabela 3.2 e na Figura 3.12. Observa-se uma convergência exponencial das soluções para os problemas de projeção de massa e rigidez.

3.4.3 Hexaedro

Considera-se a seguinte solução exata

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2), \tag{3.119}$$

com condição de contorno nula em todas as faces do hexaedro. A norma de energia da solução exata é $||u||_A = 3,016989$.

Resolvendo o problema de Poisson com polinômios de Jacobi, $P = 2$ e a matriz de rigidez calculada utilizando-se as matrizes de rigidez e massa unidimensionais, tem-se o

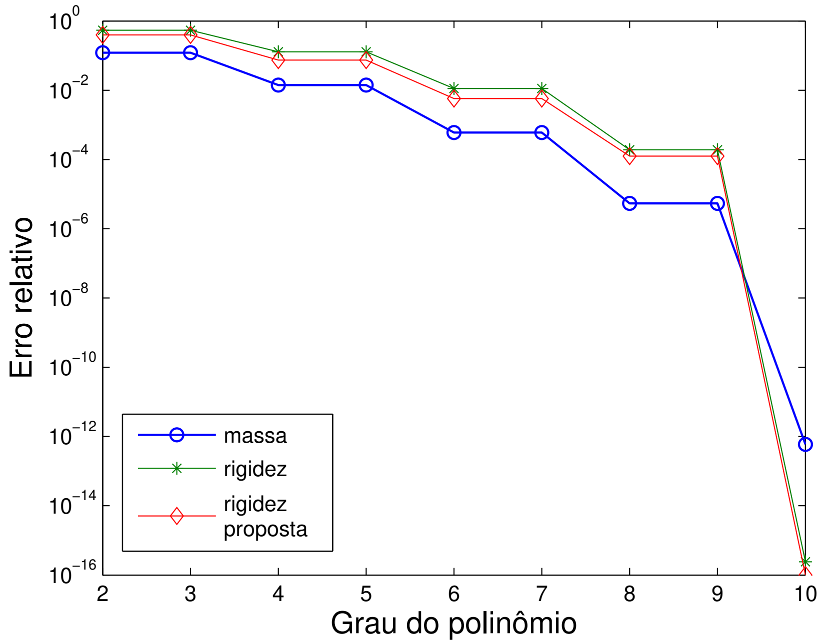


Figura 3.12: Convergência exponencial para o problema de Poisson com $u(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)^5(1 + \xi_1)^5(1 - \xi_2)^5(1 + \xi_2)^5$.

erro relativo em energia $||e^k|| = 1,471962 \times 10^{-16}$. Para o cálculo da matriz de rigidez utilizando-se a matriz de rigidez aqui proposta, tem-se o erro relativo menor que 1×10^{-16}.

Considere agora $u(\xi_1) = (1 + \xi_1)^5(1 + \xi_2)^5(1 + \xi_3)^5$ com soluções nulas em todas as faces do hexaedro. As soluções aproximadas e com polinômios de Jacobi são obtidas para $P = 2$ a $P = 10$. Os erros relativos são apresentados na Tabela 3.3 e na Figura 3.13. Observa-se uma convergência exponencial das soluções para os problemas de projeção de massa, rigidez e a rigidez proposta.

Portanto, a formulação proposta é validada para os casos unidimensional, quadrados e hexaedros.

Tabela 3.3: Erros relativos para o problema tridimensional com $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1-\xi_1)^5(1+\xi_1)^5(1-\xi_2)^5(1+\xi_2)^5(1-\xi_3)^5(1+\xi_3)^5$, para um elemento.

P	$\|\|e^m\|\|$	$\|\|e^k\|\|$	$\|\|e^k proposta\|\|$
2	$1,767381 \times 10^{-1}$	$5,889200 \times 10^{-1}$	$5,283510 \times 10^{-1}$
3	$1,767381 \times 10^{-1}$	$5,889200 \times 10^{-1}$	$5,283510 \times 10^{-1}$
4	$2,098816 \times 10^{-2}$	$1,392523 \times 10^{-1}$	$1,086268 \times 10^{-1}$
5	$2,098816 \times 10^{-2}$	$1,392523 \times 10^{-1}$	$1,086268 \times 10^{-1}$
6	$9,025563 \times 10^{-4}$	$1,179506 \times 10^{-2}$	$8,639118 \times 10^{-3}$
7	$9,025563 \times 10^{-4}$	$1,179506 \times 10^{-2}$	$8,639118 \times 10^{-3}$
8	$8,118807 \times 10^{-6}$	$1,967472 \times 10^{-4}$	$1,875229 \times 10^{-4}$
9	$8,118807 \times 10^{-6}$	$1,967472 \times 10^{-4}$	$1,875229 \times 10^{-4}$
10	$7,045968 \times 10^{-11}$	$4,007046 \times 10^{-16}$	$5,587559 \times 10^{-16}$

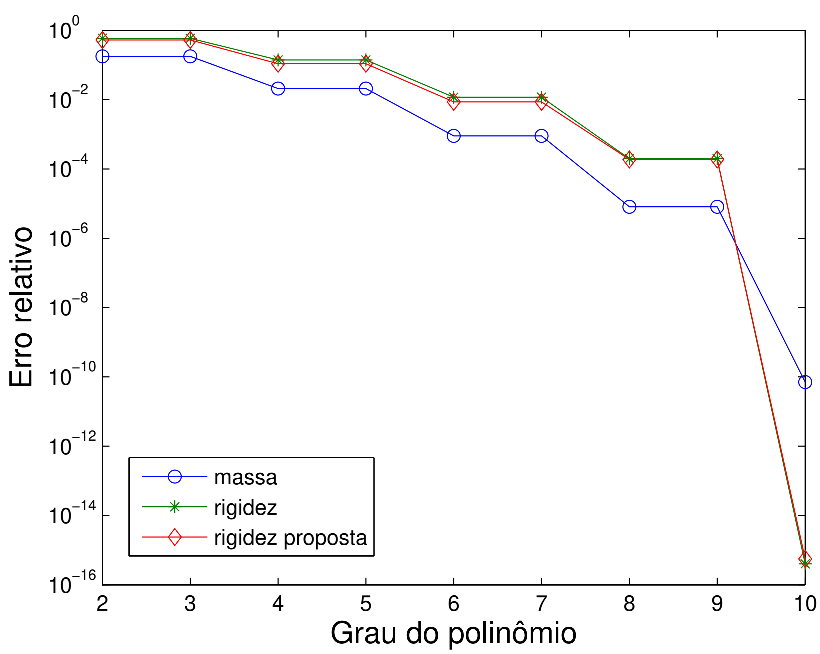


Figura 3.13: Convergência exponencial para o problema de Poisson com $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1-\xi_1)^5(1+\xi_1)^5(1-\xi_2)^5(1+\xi_2)^5(1-\xi_3)^5(1+\xi_3)^5$.

Capítulo 4

Tensorização de Matrizes de Rigidez para Malhas Não-distorcidas

Nesse capítulo, estendem-se os resultados do Capítulo 3 para malhas não-distorcidas de quadrados e hexaedros. Nesse caso, a matriz do Jacobiano é diagonal e seus coeficientes constantes. Assim, os mesmos funcionam como fatores de escala que multiplicam as integrais dos coeficientes das matrizes locais de massa, rigidez e mista.

4.1 Elementos Unidimensionais

Considere os problemas de interpolação dados em termos da coordenada global x

$$u(x) = -f(x), \tag{4.1}$$

$$u'(x) = -f'(x), \tag{4.2}$$

$$u''(x) = -f''(x), \tag{4.3}$$

sendo $u(x)$, $u'(x)$ e $u''(x)$ as funções incógnitas e as respectivas funções $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ os termos independentes.

Assumindo que o elemento é reto, a coordenada x pode ser interpolada localmente usando apenas as funções lineares de vértice. Logo,

$$x(\xi_1) = \frac{1}{2}(1-\xi_1)X_1 + \frac{1}{2}(1+\xi_1)X_2, \tag{4.4}$$

sendo X_1 e X_2 as coordenadas globais dos nós de vértice.

No caso unidimensional, o único coeficiente não-nulo da matriz do Jacobiano é $x,_{\xi_1}(\xi_1)$. Portanto,

$$[J] = x,_{\xi_1}(\xi_1) = \frac{dx(\xi_1)}{d\xi_1} = \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{L_x}{2}, \tag{4.5}$$

sendo L_x o comprimento do elemento.

As projeções das equações (4.1) a (4.3) em um elemento, no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i\}$, são dadas pelas seguintes expressões integrais

$$\int_{-1}^{1} u(x)v(x)|J|d\xi_1 = -\int_{-1}^{1} f(x)v(x)|J|d\xi_1, \tag{4.6}$$

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)|J|d\xi_1 = -\int_{-1}^{1} f'(x)v(x)|J|d\xi_1, \tag{4.7}$$

$$\int_{-1}^{1} u''(x)v(x)|J|d\xi_1 = -\int_{-1}^{1} f''(x)v(x)|J|d\xi_1, \tag{4.8}$$

sendo $v(x)$ a função teste e $|J| = \frac{L_x}{2}$ o determinante do Jacobiano. Integrando (4.8) por partes, obtém-se

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)|J|d\xi_1 = \int_{-1}^{1} f''(x)v(x)|J|d\xi_1 + u'(x(\xi_1))v(x(\xi_1))|_{-1}^{1}. \tag{4.9}$$

As derivadas globais $u'(x)$ e $v'(x)$ podem ser encontradas usando a regra da cadeia e a expressão (4.5) como

$$\frac{du}{d\xi_1} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\xi_1} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{L_x}\frac{du}{d\xi_1}, \tag{4.10}$$

$$\frac{dv}{d\xi_1} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{d\xi_1} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{L_x}\frac{dv}{d\xi_1}. \tag{4.11}$$

Usando o Método de Galerkin, as funções $u(x)$ e $v(x)$ são aproximadas usando as mesmas funções de interpolação $\{\phi_i\}$, ou seja,

$$u(x(\xi_1)) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(\xi_1), \tag{4.12}$$

$$v(x(\xi_1)) = \sum_{j=1}^{n} b_j\phi_j(\xi_1). \tag{4.13}$$

Substituindo (4.5) e (4.10) a (4.13) em (4.6), (4.7) e (4.9), obtém-se as seguintes expressões para $i = 1, ..., n$

$$\frac{L_x}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1\right) a_j = -\frac{L_x}{2}\int_{-1}^{1} f(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1, \tag{4.14}$$

$$\frac{2}{L_x}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1\right)a_j = -\int_{-1}^{1} f'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1, \tag{4.15}$$

$$\frac{2}{L_x}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right)a_j = \frac{L_x}{2}\int_{-1}^{1} f''(\xi_1)\phi_i(\xi_1)d\xi_1 + \frac{2}{L_x}u'(\xi_1)\phi_i(\xi_1)|_{-1}^{1}. \tag{4.16}$$

Os coeficientes das matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{1D} = \frac{L_x}{2}\int_{-1}^{1}\phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1, \tag{4.17}$$

$$D_{ij}^{1D} = \frac{2}{L_x}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1)\phi_j(\xi_1)d\xi_1, \tag{4.18}$$

$$K_{ij}^{1D} = \frac{2}{L_x}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1. \tag{4.19}$$

Os coeficientes dos termos de carregamento são os mesmos dados em (3.18) a (3.22), multiplicados pelas respectivas constantes. Matricialmente,

$$[M_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^m\}, \tag{4.20}$$

$$[D_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^d\}, \tag{4.21}$$

$$[K_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^k\}, \tag{4.22}$$

sendo $[M_{1D}]$ e $[K_{1D}]$ as matrizes simétricas de massa e rigidez; $[D_{1D}]$ é a matriz local não-simétrica mista.

4.2 Quadrados

Considere agora os seguintes problemas de projeção bidimensionais nas variáveis globais x e y definidos em uma malha não-distorcida de quadrados

$$u(x,y) = -f(x,y), \tag{4.23}$$

$$u_{,x}(x,y) + u_{,y}(x,y) = -\left(f_{,x}(x,y) + f_{,y}(x,y)\right), \tag{4.24}$$

$$\triangle u(x,y) = -\triangle f(x,y). \tag{4.25}$$

Assumindo que o elemento quadrangular não-distorcido tem lados retos, as coordenadas x e y podem ser interpoladas localmente usando apenas as funções lineares de vértice. Logo,

$$\begin{aligned} x(\xi_1,\xi_2) &= \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)X_1 + \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)X_2 + \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)X_3 \\ &+ \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)X_4, \qquad (4.26) \\ y(\xi_1,\xi_2) &= \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)Y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)Y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)Y_3 \\ &+ \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)Y_4, \qquad (4.27) \end{aligned}$$

sendo (X_i, Y_i), $i = 1, ..., 4$ as coordenadas globais dos nós de vértice.

No caso de um quadrado não-distorcido, a matriz do Jacobiano é diagonal e os coeficientes constantes. Logo,

$$[J] = \begin{bmatrix} x,_{\xi_1} & 0 \\ 0 & y,_{\xi_2} \end{bmatrix}. \qquad (4.28)$$

A partir de (4.27), observa-se que

$$\begin{aligned} x,_{\xi_1} &= \frac{1}{4}(1-\xi_1)(X_2-X_1) + \frac{1}{4}(1+\xi_1)(X_3-X_4) = \frac{L_x}{2}, \qquad (4.29) \\ y,_{\xi_2} &= \frac{1}{4}(1-\xi_2)(Y_4-Y_1) + \frac{1}{4}(1+\xi_2)(Y_3-Y_2) = \frac{L_y}{2}, \qquad (4.30) \end{aligned}$$

sendo L_x e L_y a base e a altura do elemento. Observa-se, então, que o determinante do Jacobiano é $|J| = \frac{L_x L_y}{4}$.

As projeções das equações (4.23) a (4.25) em um quadrado, no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i(\xi_1, \xi_2)\}$, são dadas, respectivamente, por

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x,y)v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2, \qquad (4.31)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[u,_x(x,y) + u,_y(x,y)\right] v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[f,_x(x,y) + f,_y(x,y)\right] v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2, \qquad (4.32)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle u(x,y)v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(x,y)v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2, \qquad (4.33)$$

sendo $v(x, y)$ a função teste.

Integrando (4.33) por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(x,y)\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(x,y)v(x,y)|J|d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \int_{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(x,y)\cdot\mathbf{n})v(x,y)|J_c|d\Gamma, \qquad (4.34) \end{aligned}$$

sendo Γ o contorno do elemento, $|J_c|$ o jacobiano do contorno e $\mathbf{n}(\xi_1, \xi_2)$ o vetor normal em cada ponto de Γ.

Dada uma base $\{\phi_i(\xi_1,\xi_2)\}_{i=1}^n$, as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são aproximadas, respectivamente, como

$$u(x(\xi_1,\xi_2),y(\xi_1,\xi_2)) = \sum_{i=1}^n a_i\phi_i(\xi_1,\xi_2), \tag{4.35}$$

$$v(x(\xi_1,\xi_2),y(\xi_1,\xi_2)) = \sum_{j=1}^n b_j\phi_j(\xi_1,\xi_2). \tag{4.36}$$

Substituindo (4.35) e (4.36) em (4.31), (4.32) e (4.37), obtém-se as seguintes aproximações para $i=1,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$
$$= -\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.37}$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (\phi_{i,x}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,y}(\xi_1,\xi_2))\,\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$
$$= -\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (f_{,x}(\xi_1,\xi_2)+f_{,y}(\xi_1,\xi_2))\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.38}$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (\phi_{i,x}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,x}(\xi_1,\xi_2)+\phi_{i,y}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,y}(\xi_1,\xi_2))\,|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$
$$= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \triangle f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2 + \int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J_c|d\Gamma. \tag{4.39}$$

As derivadas globais da função de interpolação ϕ_i são dadas por

$$\left\{\begin{array}{c}\phi_{i,x}\\ \phi_{i,y}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}\frac{L_x}{2} & 0\\ 0 & \frac{L_y}{2}\end{array}\right]^{-1}\left\{\begin{array}{c}\phi_{i,\xi_1}\\ \phi_{i,\xi_2}\end{array}\right\}. \tag{4.40}$$

Logo,

$$\phi_{i,x} = \frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1} \quad \text{e} \quad \phi_{i,y} = \frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}. \tag{4.41}$$

Substituindo (4.41) nas equações (4.38) e (4.39) e simplificando, obtém-se

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$
$$= -\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.42}$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \left(\frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\right)\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$
$$= -\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (f_{,x}(\xi_1,\xi_2)+f_{,y}(\xi_1,\xi_2))\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.43}$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{L_x^2}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)+\frac{4}{L_y^2}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\right)|J|d\xi_1 d\xi_2\right) a_j$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(\xi_1,\xi_2)\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{u}\cdot \mathbf{n})\,\phi_i(\xi_1,\xi_2)|J_c|d\Gamma. \quad (4.44)$$

Os coeficientes da matriz de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.45)$$

$$D_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2) + \frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\right]\phi_j(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.46)$$

$$K_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{4}{L_x^2}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2) + \frac{4}{L_y^2}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\right]|J|d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.47)$$

Substituindo as expressões (3.44) em (4.45) e efetuando algumas simplificações, pode-se escrever os coeficientes da matriz de massa do quadrado através da combinação dos coeficientes da matriz de massa unidimensional como

$$\begin{aligned} M_{ij}^{2D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)][\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)]|J|d\xi_1 d\xi_2 \\ &= |J|\left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right) \\ &= |J|M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Analogamente, os coeficientes da matriz mista do quadrado podem ser obtidos pela combinação dos coeficientes das matrizes de massa e mista unidimensionais como

$$\begin{aligned} D_{ij}^{2D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{L_x}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2) + \frac{2}{L_y}\phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\right]\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2}{L_x}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2}{L_y}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \left[\frac{2}{L_x}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\right. \\ &+ \left.\left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\frac{2}{L_y}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\right]|J| \\ &= \left(\frac{2}{L_x}D_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D} + \frac{2}{L_y}M_{ap}^{1D}D_{bq}^{1D}\right)|J| \\ &= \left(\frac{L_y}{2}D_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D} + \frac{L_x}{2}M_{ap}^{1D}D_{bq}^{1D}\right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Finalmente, os coeficientes da matriz de rigidez do quadrado são expressos como a combinação dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais como

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{2D} &= \frac{4}{L_x^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\\
&+ \frac{4}{L_y^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)|J|d\xi_1 d\xi_2\\
&= \frac{4}{L_x^2}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_{p,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b}(\xi_2)\phi_{q}(\xi_2)d\xi_2\right)|J|\\
&+ \frac{4}{L_y^2}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a}(\xi_1)\phi_{p}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2)d\xi_2\right)|J|\\
&= \left(\frac{4}{L_x^2}K_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}+\frac{4}{L_y^2}M_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}\right)|J|. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Devido à equivalência entre os problemas unidimensionais indicada em (4.20) a (4.22), substitui-se as matrizes de massa unidimensionais pelas matrizes de rigidez unidimensionais em (4.50), obtendo-se

$$K_{ij}^{2D} = \left(\frac{4}{L_x^2}\frac{4}{L_y^2}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}+\frac{4}{L_y^2}\frac{4}{L_x^2}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}\right)|J| = \frac{8}{L_xL_y}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}. \qquad (4.51)$$

Na sequência, consideram-se as respectivas substituições dos termos independentes de corpo e superfície.

Como para malhas não-distorcidas, os sistemas locais de referência dos elementos são paralelos ao sistema global, pode-se expressar diretamente f em termos de ξ_1 e ξ_2. Assumindo novamente que f é separável, como indicado em (3.49), tem-se para a carga de corpo

$$\begin{aligned}
f_i^{2D,b,k} &= \frac{L_xL_y}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\triangle f(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\\
&= \frac{L_xL_y}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial\xi_1^2}f_{\xi_2}(\xi_2)+\frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial\xi_2^2}f_{\xi_1}(\xi_1)\right]\phi_j(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\\
&= \frac{L_xL_y}{4}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial\xi_1^2}\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)+\\
&\quad \frac{L_xL_y}{4}\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial\xi_2^2}\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\\
&= \frac{L_xL_y}{4}(f_p^{1D,b,k}f_q^{1D,b,m}+f_p^{1D,b,m}f_q^{1D,b,k}). \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

Para $u=-f$, a integral de superfície em (4.44) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
f_i^{2D,s,k} &= -|J_c|\int_{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}(x,y)\cdot\mathbf{n})\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Gamma\\
&= -|J_c|\int_{\Gamma}[f_{\xi_1,\xi_1}f_{\xi_2}n_{\xi_1}+f_{\xi_1}f_{\xi_2,\xi_2}n_{\xi_2}]\phi_i(\xi_1,\xi_2)d\Gamma
\end{aligned}$$

$$= -|J_c| \int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2}(\xi_2) n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2) n_{\xi_2}] \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2) d\Gamma. \quad (4.53)$$

O termo de superfície anterior deve ser considerado para as quatro arestas do quadrado local ilustrado na Figura 3.2. Logo,

- Aresta 1: nesse caso, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, -1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = -1$. A partir daí, a equação (4.53) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= \frac{L_x}{2} \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1 \right) \left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) \right)|_{\xi_2=-1} \\ &= \frac{L_x}{2} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_1}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

- Aresta 2: o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (1, 0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = 1$. A partir daí, a equação (4.53) fica

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= -\frac{L_y}{2} \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2 \right) \left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) \right)|_{\xi_1=1} \\ &= -\frac{L_y}{2} f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

- Aresta 3: para essa aresta, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, 1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = 1$. Assim, a equação (4.53) é explicitada como

$$\begin{aligned} f_i^{2D,s,k} &= -\frac{L_x}{2} \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) d\xi_1 \right) \left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) \right)|_{\xi_2=1} \\ &= -\frac{L_x}{2} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_3}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

- Aresta 4: analogamente às arestas anteriores, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (-1, 0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = -1$ e a equação (4.53) torna-se

$$f_i^{2D,s,k} = \frac{L_y}{2} \left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2) d\xi_2 \right) \left(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1) \right)|_{\xi_1=-1}$$

$$= \frac{L_y}{2} f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \tag{4.57}$$

O termo independente total é a soma das parcelas de corpo e de superfície, ou seja, $f_i = f_i^b + f_i^s$,

sendo

$$f_i^b = \frac{L_x L_y}{4}(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,k}) \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} f_i^s &= \frac{L_x}{2} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_1} - \frac{L_y}{2} f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_2} \\ &\quad -\frac{L_x}{2} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_3} + \frac{L_y}{2} f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_4} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Substituindo $f_a^{1D,b,m}$ e $f_b^{1D,b,m}$ por $f_a^{1D,b,k}$ e $f_b^{1D,b,k}$, dados, respectivamente em (3.18) e (3.20), em f_i^b tem-se

$$f_i^b = -\frac{L_x L_y}{4}(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k}) = -\frac{L_x L_y}{2}(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k}). \tag{4.60}$$

O sinal $-$ vem da analogia dos problemas unidimensionais. Além disso, tem-se um termo de contorno adicional idêntico a f_i^s, ou seja, multiplica-se f_i^s dado em (4.59) por 2. Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s &= -L_x f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_1} + L_y f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_2} \\ &\quad +L_x f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{A_3} - L_y f_b^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Substitui-se agora $f_a^{1D,b,m}$ e $f_b^{1D,b,m}$ pelos seus equivalentes unidimensionais de rigidez de acordo com (3.22). Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s &= -L_x(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1}) f_b^{1D,s,k}|_{A_1} \\ &\quad +L_y(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1}) f_a^{1D,s,k}|_{A_2} \\ &\quad +L_x(f_a^{1D,b,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1}) f_b^{1D,s,k}|_{A_3} \\ &\quad -L_y(f_b^{1D,b,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1}) f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Assim, a partir de (4.51), (4.60) e (4.62), o sistema de equações no elemento fica dado por

$$\left(\frac{8}{L_x L_y} K_{ap}^{1D} K_{bq}^{1D}\right) a_j = -\frac{L_x L_y}{2}(f_a^{1D,b,k} f_b^{1D,b,k})$$
$$-L_x(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1}) f_b^{1D,s,k}|_{A_1}$$

$$+L_y(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_2}$$
$$+L_x(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})f_b^{1D,s,k}|_{A_3}$$
$$-L_y(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})f_a^{1D,s,k}|_{A_4}. \quad (4.63)$$

Matricialmente,

$$[K_{2D}]\{a_{2D}\} = \{f_{2D}^k\}. \quad (4.64)$$

4.3 Hexaedros

Considere agora os seguintes problemas de projeção tridimensionais nas variáveis globais x , y e z definidos em uma malha não-distorcida

$$u(x,y,z) = -f(x,y,z), \quad (4.65)$$

$$u,_x(x,y,z) + u,_y(x,y,z) + u,_z(x,y,z) =$$
$$-\left(f,_x(x,y,z) + f,_y(x,y,z) + f,_z(x,y,z)\right), \quad (4.66)$$

$$\triangle u(x,y,z) = -\triangle f(x,y,z). \quad (4.67)$$

Assumindo que o hexaedro não-distorcido tem lados retos, as coordenadas x, y e z podem ser interpoladas localmente usando apenas as funções lineares de vértice. Logo,

$$\begin{aligned} x(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = {} & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)X_1 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)X_2 + \\ & \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)X_3 + \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)X_4 + \\ & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)X_5 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)X_6 + \\ & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)X_7 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)X_8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = {} & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)Y_1 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)Y_2 + \\ & \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)Y_3 + \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)Y_4 + \\ & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)Y_5 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)Y_6 + \\ & \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)Y_7 + \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)Y_8. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \;&=\; \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)Z_1+\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)Z_2+\\
&\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)Z_3+\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3)Z_4+\\
&\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)Z_5+\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3)Z_6+\\
&\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)Z_7+\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)Z_8. \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

sendo (X_i, Y_i, Z_i), $i = 1, ..., 8$, as coordenadas globais dos nós de vértice.

No caso de um hexaedro não-distorcido, a matriz do Jacobiano é diagonal e os coeficientes constantes. Logo,

$$
[J] = \begin{bmatrix} x,_{\xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & y,_{\xi_2} & 0 \\ 0 & 0 & z,_{\xi_3} \end{bmatrix} \qquad (4.69)
$$

A partir de (4.68), observa-se que

$$
\begin{aligned}
x,_{\xi_1} \;&=\; \frac{1}{8}(1-\xi_1)(X_2-X_1)+\frac{1}{8}(1+\xi_1)(X_3-X_4)+\frac{1}{8}(1-\xi_1)(X_6-X_5)+\\
&\frac{1}{8}(1+\xi_1)(X_7-X_8)=\frac{L_x}{2}, \qquad (4.70)\\
y,_{\xi_2} \;&=\; \frac{1}{8}(1-\xi_2)(Y_4-Y_1)+\frac{1}{8}(1+\xi_2)(Y_3-Y_2)+\frac{1}{8}(1-\xi_2)(Y_8-Y_5)+\\
&\frac{1}{8}(1+\xi_2)(Y_7-Y_6)=\frac{L_y}{2}, \qquad (4.71)\\
z,_{\xi_3} \;&=\; \frac{1}{8}(1-\xi_3)(Z_5-Z_1)+\frac{1}{8}(1+\xi_3)(Z_6-Z_2)+\frac{1}{8}(1-\xi_3)(Z_7-Z_3)+\\
&\frac{1}{8}(1+\xi_3)(Z_8-Z_4)=\frac{L_z}{2}, \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

sendo L_x, L_y e L_z os comprimentos da base, altura e largura do elemento.

As projeções das equações (4.65) a (4.67) no espaço de dimensão finita definido pela base $\{\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\}$, são dadas, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x,y,z)v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 =\\
-\;&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \qquad (4.73)\\
&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[u,_x(x,y,z)+u,_y(x,y,z)+u,_z(x,y,z)\right] v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 =\\
-\;&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[f,_x(x,y,z)+f,_y(x,y,z)+f,_z(x,y,z)\right] v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \qquad (4.74)
\end{aligned}
$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle u(x,y,z)v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = $$
$$- \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(x,y,z)v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4.75)$$

sendo $v(x,y,z)$ a função teste.

Integrando (4.75) por partes, obtém-se

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})v(x,y,z)|J_c|d\Gamma$$
$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(x,y,z)v(x,y,z)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4.76)$$

sendo Γ o contorno do elemento, $|J_c|$ o jacobiano do contorno e $\mathbf{n}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ o vetor normal em cada ponto de Γ.

Dada uma base $\{\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\}_{i=1}^{n}$, as funções $u(x,y,z)$ e $v(x,y,z)$ são aproximadas, respectivamente, como

$$u(x(\xi_1,\xi_2,\xi_3),y(\xi_1,\xi_2,\xi_3),z(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad (4.77)$$
$$v(x(\xi_1,\xi_2,\xi_3),y(\xi_1,\xi_2,\xi_3),z(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = \sum_{j=1}^{n} b_j\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \quad (4.78)$$

Substituindo as duas relações anteriores em (4.73), (4.74) e (4.76), obtém-se as seguintes aproximações para $i = 1,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right)a_j$$
$$= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4.79)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\phi_{i,x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\phi_{i,y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\phi_{i,z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))\right.$$
$$\left.\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right)a_j$$
$$= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(f_{,x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+f_{,y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+f_{,z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4.80)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\phi_{i,x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\phi_{i,y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\right.$$
$$\left.\phi_{i,z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3))|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right)a_j$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \int_{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J_c|d\Gamma. \quad (4.81)$$

As derivadas globais da função de interpolação ϕ_i são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_{i,x} \\ \phi_{i,y} \\ \phi_{i,z} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{L_x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_y}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_z}{2} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \phi_{i,\xi_1} \\ \phi_{i,\xi_2} \\ \phi_{i,\xi_3} \end{array} \right\}. \tag{4.82}$$

Logo,

$$\phi_{i,x} = \frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1}, \tag{4.83}$$

$$\phi_{i,y} = \frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}, \tag{4.84}$$

$$\phi_{i,z} = \frac{2}{L_z}\phi_{i,\xi_3}. \tag{4.85}$$

Substituindo (4.83) a (4.85) nas equações (4.79) a (4.81) e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right)a_j \\ = &-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\frac{2}{L_z}\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)\right. \\ &\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3)\, a_j \\ = &-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(f_{,x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+f_{,y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+f_{,z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{4}{L_x^2}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\frac{4}{L_y^2}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{4}{L_z^2}\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right)a_j \\ = &\frac{L_x L_y L_z}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &+\int_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\right)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J_c|d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Os coeficientes da matriz de massa, mista e rigidez são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned} D_{ij}^{3D} = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{L_x}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\frac{2}{L_y}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\frac{2}{L_z}\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right] \\ &\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$K_{ij}^{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{4}{L_x^2}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\frac{4}{L_y^2}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right.$$

$$+\frac{4}{L_z^2}\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\Bigg]|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{4.91}$$

Substituindo as expressões (3.44) em (4.89) e efetuando algumas simplificações, pode-se escrever os coeficientes da matriz de massa do hexaedro através da combinação dos coeficientes da matriz de massa unidimensional como

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{3D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)][\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3)]|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= |J|\left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&= |J|M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Analogamente, os coeficientes da matriz mista do hexaedro podem ser obtidos pela combinação dos coeficientes das matrizes de massa e mista unidimensionais como

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{3D} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{L_x}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)+\frac{2}{L_y}\phi_a(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_c(\xi_3)+\right. \\
&\quad \left.\frac{2}{L_z}\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\right]\phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2}{L_x}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2}{L_y}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2}{L_z}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\phi_r(\xi_3)|J|d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= |J|\frac{2}{L_x}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&+ |J|\left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\frac{2}{L_y}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_c(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&+ |J|\left(\int_{-1}^{1}\phi_a(\xi_1)\phi_p(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_b(\xi_2)\phi_q(\xi_2)d\xi_2\right)\frac{2}{L_z}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\phi_r(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&= |J|\frac{2}{L_x}D_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}+|J|\frac{2}{L_y}M_{ap}^{1D}D_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}+|J|\frac{2}{L_z}M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}D_{cr}^{1D} \\
&= \frac{L_yL_z}{4}D_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}+\frac{L_xL_z}{4}M_{ap}^{1D}D_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D}+\frac{L_xL_y}{4}M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}D_{cr}^{1D}.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Finalmente, os coeficientes da matriz de rigidez do hexaedro são expressos como a combinação dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez unidimensionais como

$$K_{ij}^{3D} = |J|\frac{4}{L_x^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad |J|\frac{4}{L_y^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&+ \quad |J|\frac{4}{L_z^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{i,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_{j,\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \quad |J|\frac{4}{L_x^2}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a,\xi_1}(\xi_1)\phi_{p,\xi_1}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{j}(\xi_2)\phi_{q}(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c}(\xi_3)\phi_{r}(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&+ \quad |J|\frac{4}{L_y^2}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a}(\xi_1)\phi_{p}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b,\xi_2}(\xi_2)\phi_{q,\xi_2}(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c}(\xi_3)\phi_{r}(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&+ \quad |J|\frac{4}{L_z^2}\left(\int_{-1}^{1}\phi_{a}(\xi_1)\phi_{p}(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{b}(\xi_2)\phi_{q}(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}\phi_{c,\xi_3}(\xi_3)\phi_{r,\xi_3}(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&= \quad |J|\frac{4}{L_x^2}K_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + |J|\frac{4}{L_y^2}M_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}M_{cr}^{1D} + |J|\frac{4}{L_z^2}M_{ap}^{1D}M_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D}. \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

Devido à equivalência entre os problemas unidimensionais, indicada em (4.20) a (4.22), substituem-se as matrizes de massa unidimensionais pelas matrizes de rigidez unidimensionais em (4.94), obtendo-se

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{3D} &= |J|\frac{4}{L_x^2}\frac{4}{L_y^2}\frac{4}{L_z^2}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D} + |J|\frac{4}{L_x^2}\frac{4}{L_y^2}\frac{4}{L_z^2}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D} + |J|\frac{4}{L_x^2}\frac{4}{L_y^2}\frac{4}{L_z^2}K_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D} \\
&= 24L_xL_yL_zK_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D}. \qquad (4.95)
\end{aligned}
$$

Na sequência, consideram-se as respectivas substituições dos termos independentes de corpo e superfície.

Como para malhas não-distorcidas, os sistemas locais de referência dos elementos são paralelos ao sistema global, pode-se expressar diretamente f em termos de ξ_1, ξ_2 e ξ_3. Assumindo novamente que f é separável, como indicado em (3.89), tem-se para a carga de corpo

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,b,k} &= \frac{L_xL_yL_z}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\triangle f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \frac{L_xL_yL_z}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial\xi_1^2}f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3) + f_{\xi_1}(\xi_1)\frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial\xi_2^2}f_{\xi_3}(\xi_3) + \right. \\
&\qquad \left. f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\frac{\partial^2 f_{\xi_3}(\xi_3)}{\partial\xi_3^2}\right]\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&= \frac{L_xL_yL_z}{8}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f_{\xi_1}(\xi_1)}{\partial\xi_1^2}\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right) \\
&+ \frac{L_xL_yL_z}{8}\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f_{\xi_2}(\xi_2)}{\partial\xi_2^2}\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1}f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{L_xL_yL_z}{8}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 f_{\xi_3}(\xi_3)}{\partial\xi_3^3}\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\\
&= \quad \frac{L_xL_yL_z}{8}(f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,b,k}).
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

Para $u = -f$, a integral de superfície em (4.88) pode ser expressa como

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= -|J_c|\int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n})\phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma\\
&= -|J_c|\int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}f_{\xi_2}f_{\xi_3}n_{\xi_1} + f_{\xi_1}f_{\xi_2,\xi_2}f_{\xi_3}n_{\xi_2} + f_{\xi_1}f_{\xi_2}f_{\xi_3,\xi_3}n_{\xi_3}]\phi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\Gamma\\
&= -|J_c|\int_\Gamma [f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_1} + f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_2} +\\
&\quad f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)n_{\xi_3}]\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

A força de superfície anterior será considerada para as seis faces do hexaedro ilustradas da Figura 3.5. Assim,

- Face 1: nesse caso, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_3 = -1$. A partir daí, a equação (4.97) toma a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \frac{L_xL_y}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)d\xi_1d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1})\\
&= \frac{L_xL_y}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1})\\
&= \frac{L_xL_y}{4}f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,s,k}|_{F_1}.
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

  Todas as funções de forma da face 1 possuem $c = 1$. A função de forma correspondente é $\phi_1(\xi_3) = \frac{1}{2}(1-\xi_3)$ e $\phi_1(\xi_3 = -1) = 1$. Dessa maneira, o termo $f_c^{1D,s,m}|_{F_1}$ se reduz à constante $f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3 = -1)$.

- Face 2: o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0,0,1)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_3 = 1$. A partir daí, a equação (4.97) fica

$$
f_i^{3D,s,k} = -\frac{L_xL_y}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_a(\xi_1)\phi_b(\xi_2)d\xi_1d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=1})
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{L_x L_y}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)(f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=1}) \\
&= -\frac{L_x L_y}{4} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_2}. \qquad (4.99)
\end{aligned}
$$

Analogamente à face 1, todas as funções da face 2 possuem $c = 2$ e $\phi_2(\xi_3) = \frac{1}{2}(1+\xi_3)|_{\xi_3} = 1$. Logo, o termo $f_c^{1D,s,k}|_{F_2}$ se reduz à constante $f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3 = 1)$.

- Face 3: da mesma maneira, nessa face o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (-1,0,0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = -1$ e a equação (4.97) torna-se

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \frac{L_y L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\xi_2 d\xi_3\right)(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}) \\
&= \frac{L_y L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}) \\
&= \frac{L_y L_z}{4} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_3}. \qquad (4.100)
\end{aligned}
$$

Analogamente, o termo $f_a^{1D,s,k}|_{F_3}$ se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = -1)$.

- Face 4: para essa aresta, o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (1,0,0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_1 = 1$. Assim, a equação (4.97) é explicitada como

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= -\frac{L_y L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_b(\xi_2)\phi_c(\xi_3)d\xi_2 d\xi_3\right)(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=1}) \\
&= -\frac{L_y L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)d\xi_2\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)(f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=1}) \\
&= -\frac{L_y L_z}{4} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_4}. \qquad (4.101)
\end{aligned}
$$

Todas as funções de forma da face 4 possuem $a = 2$. A única função não nula é $\phi_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1-\xi_1)|_{\xi_1=-1} = 1$. Logo, o termo $f_a^{1D,s,k}|_{F_4}$ se reduz à constante $f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1 = 1)$.

- Face 5: aqui o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0,-1,0)$ e todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = -1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= \frac{L_x L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_a(\xi_1)\phi_c(\xi_3)d\xi_1 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\
&= \frac{L_x L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}\right) \\
&= \frac{L_x L_z}{4} f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,m}|_{F_5}. \qquad (4.102)
\end{aligned}
$$

O termo $f_b^{1D,s,k}$ se reduz à constante $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = -1)$.

- Face 6: analogamente, nessa face o vetor normal tem componentes $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, todos os pontos possuem coordenada $\xi_2 = 1$. A equação (4.97) torna-se

$$
\begin{aligned}
f_i^{3D,s,k} &= -\frac{L_x L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1) f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_a(\xi_1)\phi_c(\xi_3)d\xi_1 d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=1}\right) \\
&= -\frac{L_x L_z}{4}\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)d\xi_1\right)\left(\int_{-1}^{1} f_{\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)d\xi_3\right)\left(f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=1}\right) \\
&= -\frac{L_x L_z}{4} f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_6}. \qquad (4.103)
\end{aligned}
$$

Novamente, o termo $f_b^{1D,s,k}|_{F_6}$ se reduz à constante $f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2 = -1)$.

O termo independente total é a soma das parcelas de corpo e de superfície, ou seja, $f_i = f_i^b + f_i^s$,

sendo

$$
\begin{aligned}
f_i^b &= \frac{L_x L_y L_z}{8}\Big(f_a^{1D,s,k} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} + f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k} f_c^{1D,b,m} + \\
&\quad f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}\Big), \qquad (4.104) \\
f_i^s &= \frac{L_x L_y}{4} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_1} - \frac{L_x L_y}{4} f_a^{1D,b,m} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,s,k}|_{F_2} \\
&+ \frac{L_y L_z}{4} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_3} - \frac{L_y L_z}{4} f_b^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_a^{1D,s,k}|_{F_4} \\
&+ \frac{L_x L_z}{4} f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_5} - \frac{L_x L_z}{4} f_a^{1D,b,m} f_c^{1D,b,m} f_b^{1D,s,k}|_{F_6}. \qquad (4.105)
\end{aligned}
$$

Substituindo $f_a^{1D,b,m}$, $f_b^{1D,b,m}$ e $f_c^{1D,b,m}$, respectivamente por $f_a^{1D,b,k}$, $f_b^{1D,b,k}$ e $f_c^{1D,b,k}$, em f_i^b de acordo com (3.18) e (3.20) tem-se

$$f_i^b = -\frac{L_xL_yL_z}{8}(f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k} + f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}),$$

$$f_i^b = -\frac{3L_xL_yL_z}{8}(f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}) \tag{4.106}$$

Além disso, tem-se um termo de contorno adicional idêntico a f_i^s, ou seja, multiplica-se f_i^s por 2. Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s &= \frac{2L_xL_y}{4}f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,s,m}|_{F_1} - \frac{2L_xL_y}{4}f_a^{1D,b,m}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,s,m}|_{F_2} \\ &+ \frac{2L_yL_z}{4}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,b,m}f_a^{1D,s,m}|_{F_3} - \frac{2L_yL_z}{4}f_b^{1D,b,m}f_c^{1D,b,m}f_a^{1D,s,m}|_{F_4} \\ &+ \frac{2L_xL_z}{4}f_a^{1D,b,m}f_c^{1D,b,m}f_b^{1D,s,m}|_{F_5} - \frac{2L_xL_z}{4}f_a^{1D,b,m}f_c^{1D,b,m}f_b^{1D,s,m}|_{F_6}. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Substitui-se agora $f_a^{1D,s,m}$, $f_b^{1D,s,m}$ e $f_c^{1D,s,m}$ pelos seus equivalentes unidimensionais de rigidez. Logo,

$$\begin{aligned} f_i^s &= \frac{L_xL_y}{2}f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}(f_c^{1D,s,k} + f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})|_{F_1} \\ &- \frac{L_xL_y}{2}f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}(f_c^{1D,s,k} + f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})|_{F_2} \\ &- \frac{L_yL_z}{2}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})|_{F_3} \\ &+ \frac{L_yL_z}{2}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})|_{F_4} \\ &- \frac{L_xL_z}{2}f_a^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})|_{F_5} \\ &+ \frac{L_xL_z}{2}f_a^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})|_{F_6}. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Assim, a partir de (4.95), (4.107) e (4.108), o sistema de equações no elemento fica dado por

$$\begin{aligned} &\left[24L_xL_yL_zK_{ap}^{1D}K_{bq}^{1D}K_{cr}^{1D}\right]a_j = f_i^b + f_i^s \\ &= -\frac{3L_xL_yL_z}{8}(f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}) \\ &+\frac{L_xL_y}{2}f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}(f_c^{1D,s,k} + f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})|_{F_1} \\ &-\frac{L_xL_y}{2}f_a^{1D,b,k}f_b^{1D,b,k}(f_c^{1D,s,k} + f_{\xi_3,\xi_3}(\xi_3)\phi_c(\xi_3)|_{\xi_3=-1}^{\xi_3=1})|_{F_2} \\ &-\frac{L_yL_z}{2}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})|_{F_3} \\ &+\frac{L_yL_z}{2}f_b^{1D,b,k}f_c^{1D,b,k}(f_a^{1D,s,k} + f_{\xi_1,\xi_1}(\xi_1)\phi_a(\xi_1)|_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1})|_{F_4} \end{aligned}$$

Tabela 4.1: Erros relativos para o problema bidimensional com $u(x,y) = x^9y^9(16-x)(8-y)$ para 128 elementos, com $P = 2$ a $P = 10$.

P	$\|\|e^k\|\|$	$\|\|e^k\|\| proposta$
2	$9,403782266596257 \times 10^{-3}$	$8,654993529754955 \times 10^{-3}$
3	$1,176031418113168 \times 10^{-4}$	$9,610714075698125 \times 10^{-5}$
4	$5,278309554428519 \times 10^{-7}$	$3,698356083368990 \times 10^{-7}$
5	$9,764067770019491 \times 10^{-10}$	$5,230731611849456 \times 10^{-10}$
6	$7,828043719490331 \times 10^{-13}$	$2,152660126521208 \times 10^{-13}$
7	$2,075853545343498 \times 10^{-16}$	$8,303414181373993 \times 10^{-16}$
8	$2,075853545343498 \times 10^{-16}$	$2,075853545343498 \times 10^{-16}$
9	$< 1 \times 10^{-16}$	$2,075853545343498 \times 10^{-16}$
10	$< 1 \times 10^{-16}$	$< 1 \times 10^{-16}$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{L_x L_z}{2} f_a^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k} (f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})|_{F_5} \\
&+\frac{L_x L_z}{2} f_a^{1D,b,k} f_c^{1D,b,k} (f_b^{1D,s,k} + f_{\xi_2,\xi_2}(\xi_2)\phi_b(\xi_2)|_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1})|_{F_6}.
\end{aligned} \tag{4.109}
$$

Matricialmente,

$$
[K_{3D}]\{a_{3D}\} = \{f_{3D}^k\}. \tag{4.110}
$$

4.4 Casos de Validação

4.4.1 Quadrado

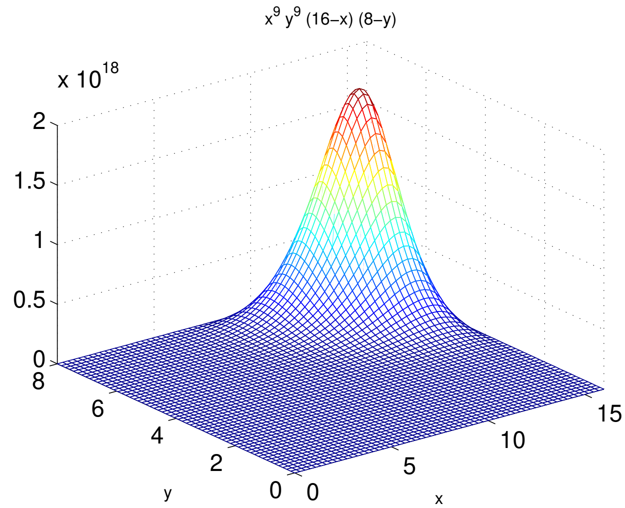
Considere a seguinte solução polinomial de grau 10 no domínio retangular 16×8

$$
u(x,y) = x^9y^9(16-x)(8-y), \tag{4.111}
$$

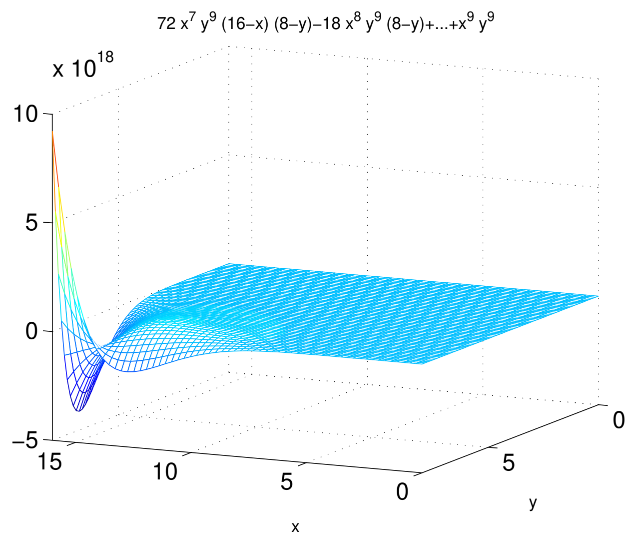
com condição de contorno homogênea no contorno do domínio. A solução $u(x,y)$ e seu laplaciano estão mostrados na Figura 4.1. Foi gerada uma malha de 128 elementos não distorcidos ilustrada na Figura 4.3 para $P = 2$.

Resolvendo o problema de Poisson usando polinômios de Jacobi, tem-se os erros relativos apresentados na Tabela 4.1.

Observa-se uma convergência exponencial das soluções para os problemas de projeção de massa, rigidez e a rigidez proposta, conforme mostrado na Figura 4.3.



(a) Solução exata: $u(x, y) = x^9 y^9 (16 - x)(8 - y)$.



(b) Laplaciano da solução.

Figura 4.1: Solução exata e Laplaciano para quadrados, com $P = 10$.

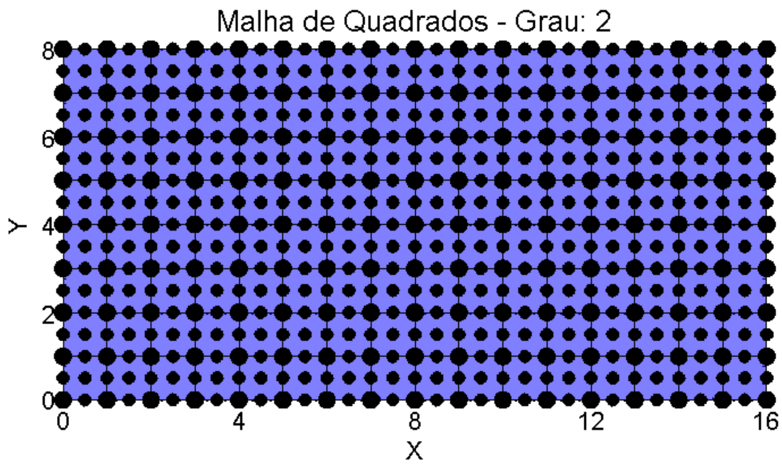


Figura 4.2: Malha gerada com 128 quadrados e $P = 2$.

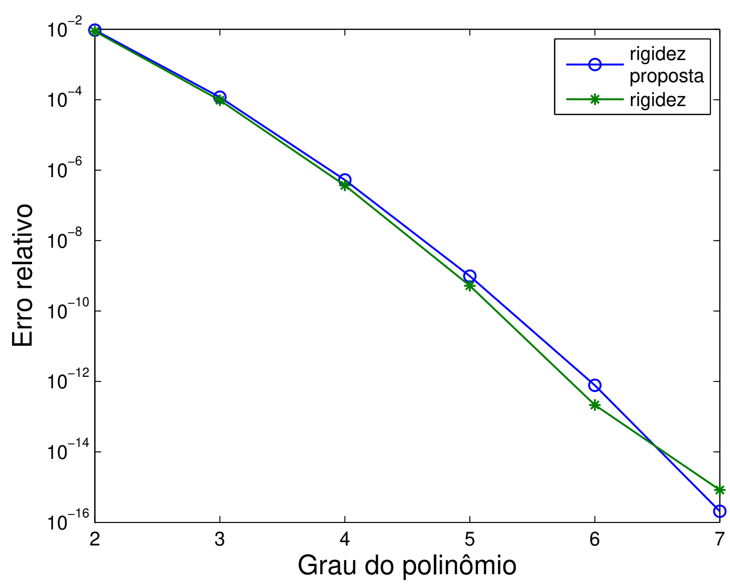


Figura 4.3: Convergência exponencial para os problemas de projeção com $u(x, y) = x^9 y^9 (16 - x)(8 - y)$.

Tabela 4.2: Número de coeficientes não nulos das matrizes globais de rigidez e rigidez proposta para o problema bidimensional com $u(x, y) = x^9 y^9 (16 - x)(8 - y)$ para 128 elementos, com $P = 2$ a $P = 10$.

P	k	$k(proposta)$
2	6337	2145
3	13753	3321
4	20353	4753
5	28233	6441
6	37393	8355
7	42609	10585
8	59553	13041
9	72553	15753
10	86833	18721

Nas Tabelas 4.2 e 4.3 são apresentados os números de coeficientes não nulos das matrizes de rigidez padrão e proposta. A redução do número de coeficientes é bastante significativa.

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam os números de coeficientes não-nulos das matrizes globais de rigidez padrão e proposta. Verifica-se que a técnica proposta de utilização apenas da matriz de rigidez unidimensional em substituição à matriz de massa resulta em uma redução expressiva do número de coeficientes não-nulos da matriz de rigidez global. Na Figura 4.6 estão ilustrados os perfis de esparsidade para $P = 5$ da matriz de rigidez e da rigidez proposta globais.

A Tabela 4.4 apresenta o tempo de execução da solução aproximada global, em segundos, para os graus $P = 2$ a $P = 10$, resultante da aplicação do método da matriz esparsa, do software Matlab.

Tabela 4.3: Número de coeficientes não nulos das matrizes globais com condições de contorno de rigidez e rigidez proposta para o problema bidimensional com $u(x, y) = x^9 y^9 (16 - x)(8 - y)$ para 128 elementos, com $P = 2$ a $P = 10$.

P	k	$k(proposta)$
2	4865	1593
3	11025	2625
4	17001	3913
5	24257	5457
6	32793	7257
7	47833	9313
8	53705	11625
9	66081	14193
10	79737	17017

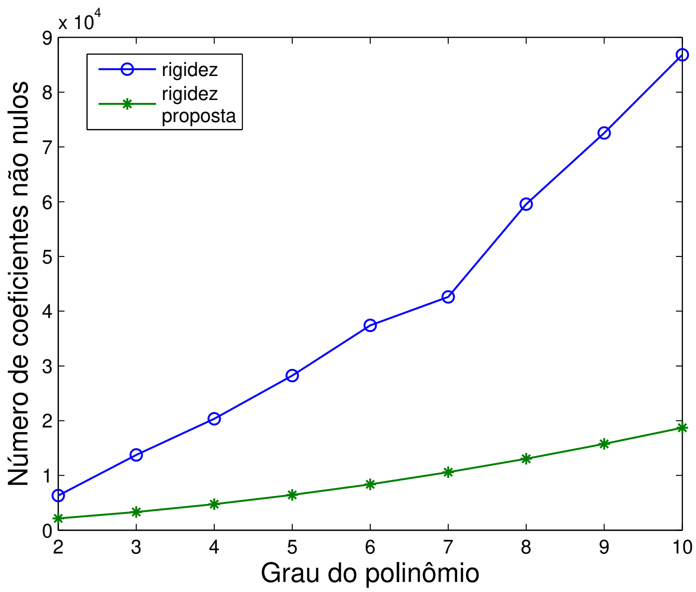


Figura 4.4: Número de coeficientes não-nulos das matrizes globais de rigidez padrão e rigidez proposta com funções de Jacobi ($P = 2$ a $P = 10$) para 128 elementos.

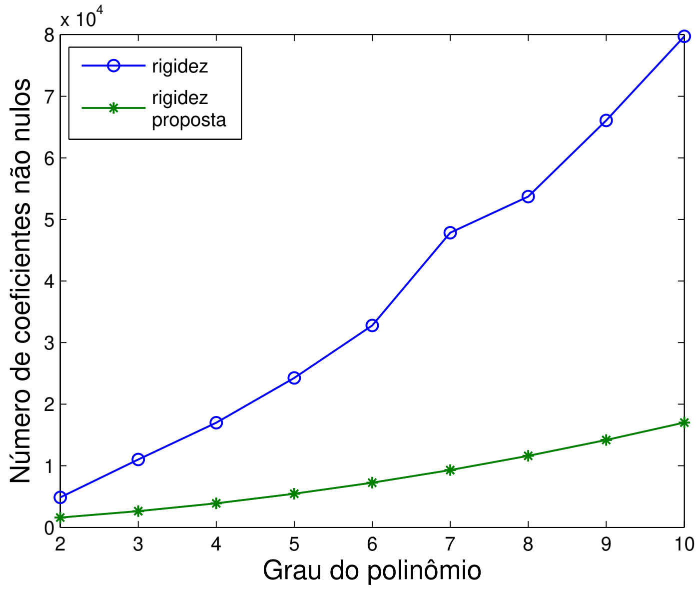
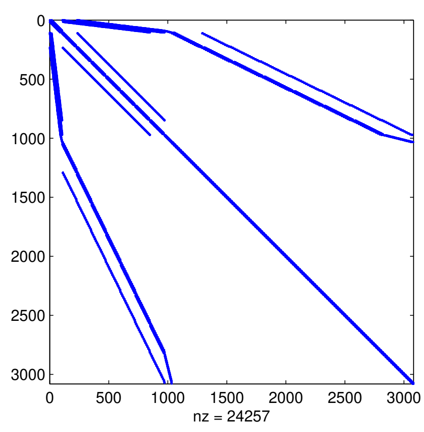
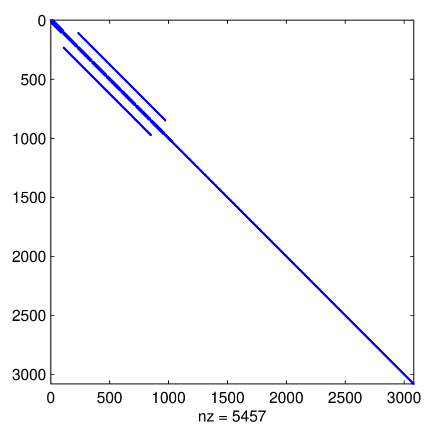


Figura 4.5: Número de coeficientes não-nulos das matrizes globais de rigidez padrão e rigidez proposta com funções de Jacobi ($P = 2$ a $P = 10$) para 128 elementos, após a aplicação das condições de contorno.



(a) Rigidez ($nz = 24257$).



(b) Rigidez proposta ($nz = 5457$).

Figura 4.6: Perfis de esparsidade da matriz global de rigidez e rigidez proposta para quadrados e grau $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

Tabela 4.4: Tempos de execução (Sistema ALTIX XE 240, com 4 processadores Intel Xeon 5160 Dual Core, 3GHz) da solução aproximada global para o problema bidimensional com $u(x,y) = x^9y^9(16-x)(8-y)$ para 128 elementos, utilizando a matriz de rigidez e a matriz de rigidez proposta.

P	k	$k(proposta)$	$Performance$
2	$0,0029$	$6,89 \times 10^{-4}$	$4,2$
3	$0,0076$	$0,0014$	$5,4$
4	$0,0108$	$0,0018$	$6,0$
5	$0,0148$	$0,0018$	$8,2$
6	$0,0219$	$0,0027$	$8,1$
7	$0,0279$	$0,0039$	$7,1$
8	$0,0320$	$0,0042$	$7,6$
9	$0,0805$	$0,0078$	$10,3$
10	$0,0582$	$0,0112$	$5,2$

Tabela 4.5: Erros relativos para o problema tridimensional com $u(x,y,z) = x^7y^7z^7(8-x)(4-y)(2-z)$ para 32 elementos, com $P = 2$ a $P = 8$.

P	$\|\|e^k\|\|$	$\|\|e^k\|\|proposta$
2	$3,000753345674755 \times 10^{-1}$	$2,827447900136044 \times 10^{-1}$
3	$3,928945226158135 \times 10^{-2}$	$3,216722517785438 \times 10^{-2}$
4	$1,911800257750261 \times 10^{-3}$	$1,307257768040519 \times 10^{-3}$
5	$3,109033733068611 \times 10^{-5}$	$1,232795547433530 \times 10^{-5}$
6	$1,514815472294366 \times 10^{-7}$	$4,177212251839478 \times 10^{-8}$
7	$2,376338663929461 \times 10^{-10}$	$2,788642285202150 \times 10^{-10}$
8	$3,821117019925819 \times 10^{-16}$	$1,273705673308607 \times 10^{-16}$

4.4.2 Hexaedro

Considere a seguinte solução polinomial de grau 8 no hexaedro global $8 \times 4 \times 2$

$$u(x,y,z) = x^7y^7z^7(8-x)(4-y)(2-z), \tag{4.112}$$

com condição de contorno homogênea nas arestas dos elementos, foi gerada uma malha com 32 elementos, conforme ilustrado na Figura 4.7 para grau 3.

Para a solução dos problemas de Poisson usando polinômios de Jacobi, têm-se os erros relativos apresentados na Tabela 4.5. Observa-se uma convergência exponencial das soluções com as matrizes de rigidez padrão e a proposta, conforme a Figura 4.8.

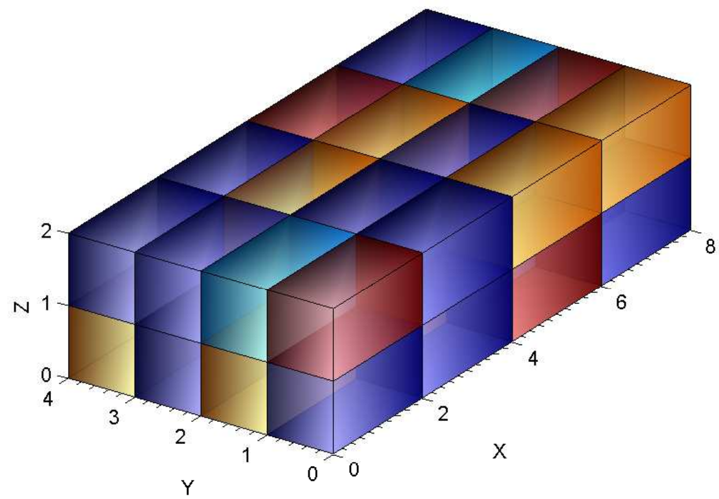


Figura 4.7: Malha gerada com 32 elementos com $P = 3$.

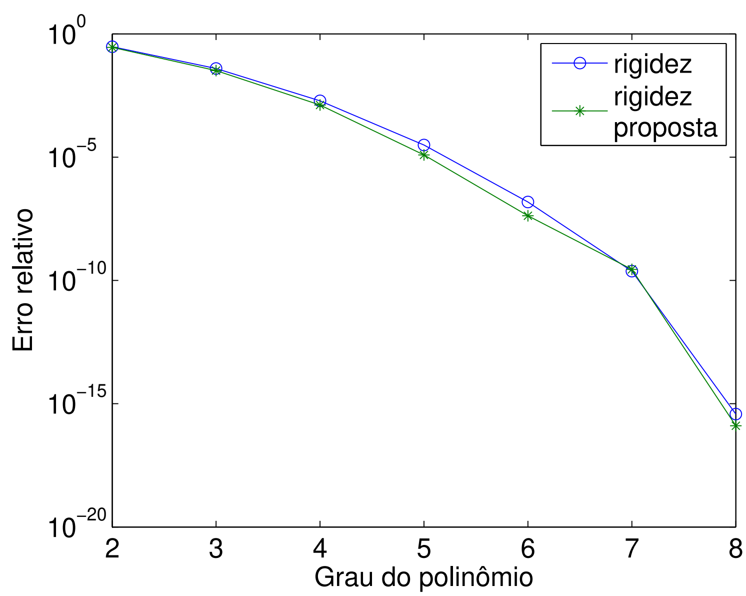
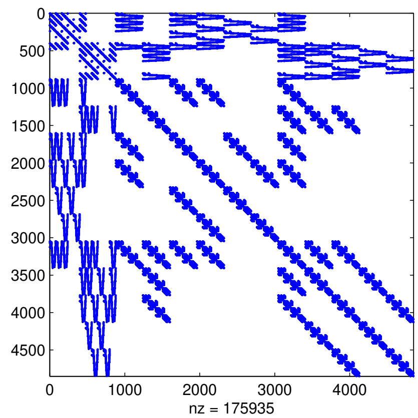
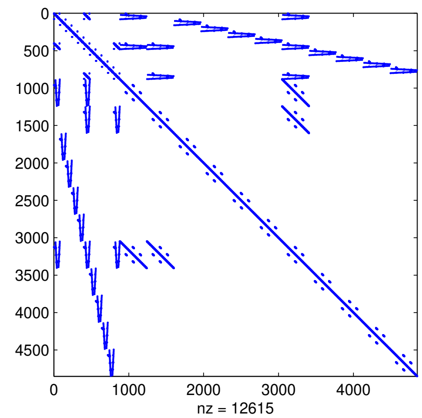


Figura 4.8: Convergência exponencial para os problemas de projeção com $u(x, y, z) = x^7y^7z^7(8 - x)(4 - y)(2 - z)$.

Analogamente ao caso bidimensional, nas Tabelas 4.7 e 4.8 são apresentados os números de coeficientes não nulos das matrizes de rigidez e da rigidez proposta, com expressiva redução. Na Figura 4.9 estão ilustrados os perfis de esparsidade para $P = 5$ da matriz de rigidez e da rigidez proposta globais do hexaedro.



(a) Rigidez ($nz = 175935$).



(b) Rigidez proposta ($nz = 12615$).

Figura 4.9: Perfis de esparsidade da matriz global de rigidez padrão e proposta para hexaedros e grau $P = 5$ (nz é o número de coeficientes diferentes de zero).

A Tabela 4.6 apresenta o tempo de execução da solução aproximada global, em segundos, para os graus $P = 2$ a $P = 8$, resultante da aplicação do método da matriz esparsa, do software Matlab.

Observa-se pelas Figuras 4.10 e 4.11 que a técnica proposta nesse trabalho resulta em uma grande redução no número de coeficientes não-nulos quando comparada com a técnica convencional.

Tabela 4.6: Tempos de execução (Sistema ALTIX XE 240, com 4 processadores Intel Xeon 5160 Dual Core, 3GHz) da solução aproximada global para o problema tridimensional com $u(x,y,z) = x^7y^7z^7(8-x)(4-y)(2-z)$ para 32 elementos, com $P = 2$ a $P = 8$, utilizando a matriz de rigidez e a matriz de rigidez proposta.

P	k	$k(proposta)$	$Performance$
2	$0,0011$	$4,78 \times 10^{-4}$	$2,3$
3	$0,0087$	$7,21 \times 10^{-4}$	$12,1$
4	$0,0171$	$0,0014$	$12,2$
5	$0,0338$	$0,0024$	$14,1$
6	$0,0717$	$0,0037$	$19,4$
7	$0,1361$	$0,0053$	$25,7$
8	$0,3084$	$0,0102$	$30,2$

Tabela 4.7: Número de coeficientes não nulos das matrizes globais de rigidez e rigidez proposta para o hexaedro com $u(x,y,z) = x^7y^7z^7(8-x)(4-y)(2-z)$ para 32 elementos, com $P = 2$ a $P = 8$.

P	k	$k(proposta)$
2	16465	2601
3	59459	4851
4	107425	8125
5	175935	12615
6	266632	18513
7	389179	26011
8	541209	35301

Tabela 4.8: Número de coeficientes não nulos das matrizes globais com condições de contorno de rigidez e rigidez proposta para o hexaedro com $u(x,y,z) = x^7y^7z^7(8-x)(4-y)(2-z)$ para 32 elementos, com $P = 2$ a $P = 8$.

P	k	$k(proposta)$
2	3127	363
3	15165	1125
4	37131	2527
5	73625	4761
6	128295	8019
7	204789	12493
8	306755	18375

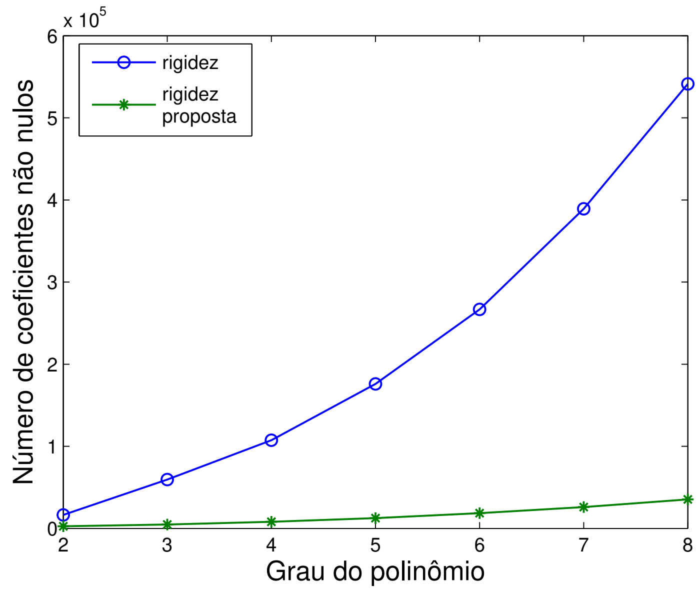


Figura 4.10: Número de coeficientes não-nulos das matrizes globais de rigidez e rigidez com a técnica proposta para o hexaedro global, funções de Jacobi ($P = 2$ a $P = 8$) e 32 elementos.

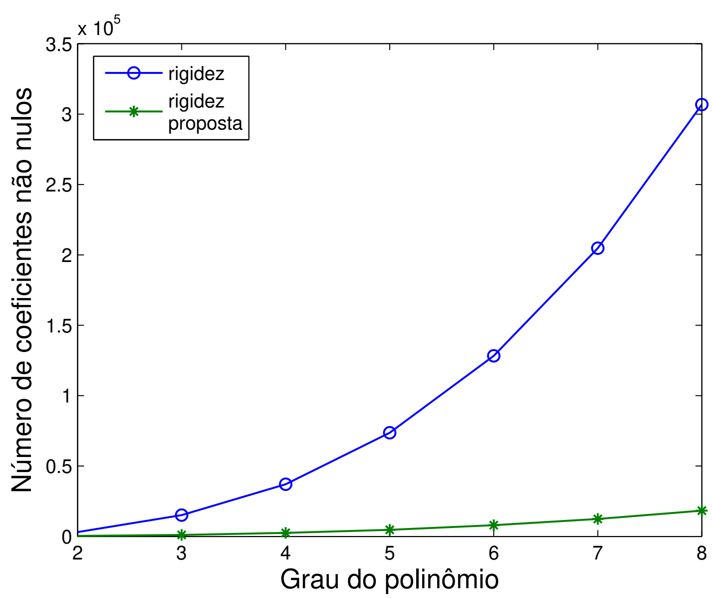


Figura 4.11: Número de coeficientes não-nulos das matrizes globais de rigidez e rigidez com a técnica proposta para o hexaedro global, funções de Jacobi ($P = 2$ a $P = 8$) e 32 elementos após a condição de contorno.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

O uso do Método de Elementos Finitos de Alta Ordem é bastante eficaz por apresentar covergência exponencial em muitas soluções. Entretanto, as matrizes dos elementos são muito densas, o que resulta em alto custo computacional. Assim, na busca dessa melhoria, o processo de tensorização mostra-se eficaz. Nesse trabalho, através da substituição das matrizes de massa pelas matrizes de rigidez unidimensionais em quadrados e hexaedros, obteve-se um bom ganho na esparsidade das matrizes dos elementos e globais.

Como limitações principais, têm-se o uso de malhas não-distorcidas de quadrados e hexaedros, a intensidade da carga de corpo ser representada de forma separável e o fato das matrizes de rigidez dos elementos e globais apresentarem um número maior de autovalores nulos. Para quadrados, esse número pode ser quantificado em $2P + 1$.

Para superar essas limitações, a formulação pode ser estendida para malhas distorcidas. Em particular, elementos com arestas e faces opostas paralelas possuem jacobiano constante e pode-se aplicar a formulação aqui proposta diretamente. Para matrizes obtidas por integração numérica, a intensidade da carga de corpo não precisa ser escrita de forma separável. Da mesma maneira, o jacobiano pode não ser constante. A matriz de rigidez global possui o mesmo número de autovalores nulos da matriz de rigidez de cada elemento. Para eliminar esses autovalores da matriz global, necessita-se do mesmo número de condições de contorno nulas. Como no MEF de Alta Ordem, o número de variáveis cresce de forma pronunciada, em geral, não é difícil alcançar o número mínimo de condições de contorno. Caso isso não seja possível, pode-se por exemplo, refinar a malha de elementos nas regiões com condições de contorno. Como a matriz de rigidez proposta é altamente esparsa, não ocorre um aumento significativo no número de incógnitas do problema.

Quanto ao tempo computacional para a solução dos sistemas de equações dos problemas de projeção bidimensional, observou-se uma redução significativa no tempo de processamento usando a matriz de rigidez proposta nesse trabalho. É interessante implementar um método de solução mais efetivo que explore a esparsidade das matrizes de rigidez obtidas. Por exemplo, como a matriz de rigidez relativa aos modos internos é diagonal, não é necessário o cálculo do complemento de Schur, como ocorre tradicionalmente no MEF de Alta Ordem.

Como pode ser visto nos casos de validação, conseguiu-se convergência exponencial para os problemas de projeção, em termos de erro relativo, utilizando polinômios de Jacobi e as funções nodais propostas em (Vazquez, 2008).

Como sugestões de trabalhos futuros, tem-se a construção e implementação de códigos que possibilitem exemplos maiores com um método de solução de sistemas de equações mais apropriado, o uso de malhas distorcidas, a extensão para triângulos e tetraedros e aplicação para elasticidade linear e problemas de grandes deformações.

Referências Bibliográficas

Adjerid, S., Aiffa, M. , Flaherty, J. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190, p.2925–2941, 2001.

Assan, A. E. *Método de Elementos Finitos.* Editora da Unicamp, Campinas, 2003.

Bargos, F. *Implementação de Elementos Finitos de Alta Ordem baseada em Produto Tensorial.* Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, Dissertação (Mestrado).

Bittencourt, M. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 63, n.11, p.1530–1558, 2005.

Bittencourt, M. L. *Introdução ao Método de Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural.* Campinas, 1991.

Carnevali, P., Morris, R. B., Tsuji, Y. , Taylor, G. New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.36, p.3759–3779, 1993.

Chihara, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Mathematics and its Applications Series. Gordon and Breach - Science Publishers, New York, 1978.

Cook, R., Malkus, D. , Plesha, M. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, USA, third ed., 1991.

Dunavant, D. A. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.21, p.1129–1148, 1985.

Edgar, N. B., Surana, K. S. On the conditioning number and the selection criteria for p-version approximation functions. *Computers & Structures*, v. 60, n.4, p.521–530, 1996.

Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J. *Spectral/hp Element Methods for CFD.* Oxford University Press, Oxford, 1999.

Maitre, J., Pourquier, O. About the conditioning of matrices in the p-version of the finite element method for second order elliptic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.63, p.341–348, 1995.

Mandel, J. Hierarchical preconditioning and partial orthogonalization for the p-version finite element method. In: Chan, T., Glowinski, R. , Windlund, O., (Eds.), *Proceedings of the 3th International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, p. 141–156, Huston, Texas. SIAM, 1990a.

Mandel, J. Two-level domain decomposition preconditioning for the p-version finite element method in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.29, p.1095–1108, 1990b.

Nogueira Jr. *Formulação* p *do Método de Elementos Finitos em problemas de elasticidade linear e não-linear com malhas 3D não-estruturadas e em métodos multigrid algébricos.* Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, Tese (Doutorado).

Nogueira Jr. A., Bittencourt, M. L. Hierarchical basis functions for the p-version of the finite element method (in portuguese). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 17, n.1, p.37–59, 2001.

Peano, A. *Hierarchies of conforming finite elements.* Washington University - St. Louis, 1975, Dissertação (Mestrado).

Prabhakar, V., Reddy, J. N. Orthogonality of modal basis in *hp* finite element models. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v.54, p.1291–1312, 2007.

Sherwin, S. J., Karniadakis, G. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, p.3775–3802, 1995.

Soriano, H. L. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. EDUSP, São Paulo, 2003.

Szabó, B. A., Babuška, I. *Finite Element Analysis*. Wiley Interscience, New York, 1991.

Vazquez, M. *Construção de funções de interpolação para as versões h e p do MEF através de produto tensorial*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, Dissertação (Mestrado).

Vazquez, T. *Funções de Base e Regras de Integração Tensorizáveis para o MEF de Alta Ordem*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008, Tese (doutorado), São Paulo, Brasil.

Webb, J. P., Abouchakra, R. Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, p.245–257, 1995.

Zienkiewicz, O., Kelly, D., de S.R. Gago, J. , Babuška, I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. In: *MAFELAP*, p. 313–346, Brunel University, 1981.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*, v. 1. McGraw-Hill International Editions, London, fourth ed., 1989.