

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese defendida por Osvair Vidal Trevisan  
e aprovada pela Comissão Julgadora em  
07/05/86



CONVECÇÃO NATURAL POR  
DIFUSÃO DUPLA EM CAVIDADES

018/86

Autor: Osvair Vidal Trevisan  
Orientador: Prof. Adrian Bejan

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

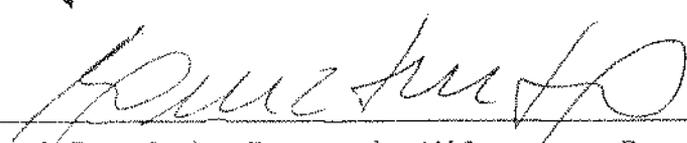
Tese de: Doutorado

Titulo da Tese: Convecção Natural por Difusão  
Dupla em Cavidades

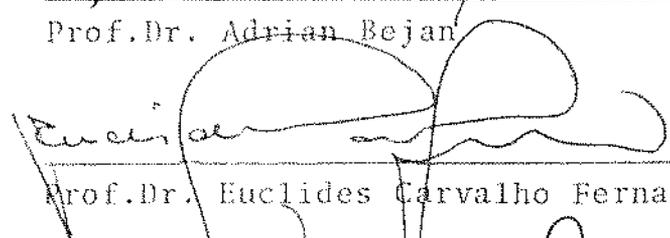
Autor: Osvaldo Vidal Trevisan

Orientador: Prof. Adrian Bejan

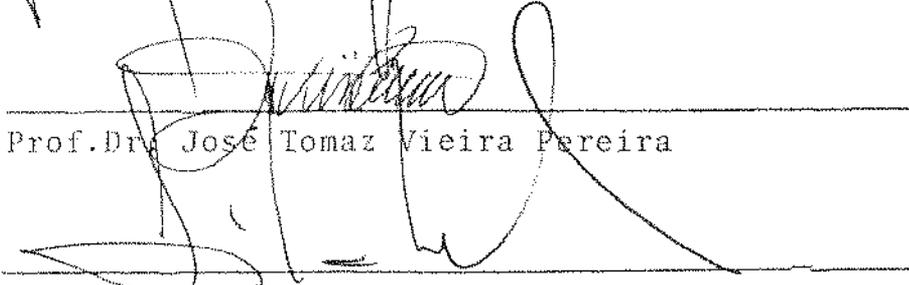
Aprovado por:

  
Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez - Presidente

  
Prof. Dr. Adrian Bejan

  
Prof. Dr. Euclides Carvalho Fernandes

  
Prof. Dr. José Tomaz Vieira Pereira

  
Prof. Dr. Sílvia Azucena Nebra

Campinas, 7 de maio

1986

Quero, com a alegria de ver este trabalho concluído, dedicá-lo à ROSE, minha esposa, e aos meus filhos FRANCISCO e JÚLIA, grandes companheiros na jornada da qual a presente Tese é o fruto primo.

## AGRADECIMENTOS

Quero lavrar meu reconhecimento ao Prof. ADRIAN BEJAN pela segura orientação e em especial pela sólida confiança creditada à minha pessoa.

Destaco também meu agradecimento à UNIVERSIDADE DO COLORADO em Boulder, EUA, pelo suporte material proporcionado à pesquisa de que trata esta dissertação, e especificamente aos professores e secretárias do Departamento de Engenharia Mecânica pela hospitalidade oferecida durante a minha estadia naquela instituição.

Registro meus débitos de gratidão com os colegas da Divisão de Energia-DEM-UNICAMP, particularmente com os Prof. LUIZ FERNANDO MILANEZ e MARCELO MOREIRA GANZAROLLI, pelo incentivo e apoio.

À UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS agradeço a oportunidade de conferida pela licença de afastamento ao exterior.

A datilografia do texto é devida a Maria Paulina Juliani.

## RESUMO

Apresenta-se nesta dissertação um conjunto de estudos analíticos e extensa cobertura de simulação numérica sobre a convecção natural em cavidades. A atenção é voltada para a convecção promovida pela combinação dos efeitos de empuxo devidos às variações de temperatura e concentração. O fenômeno é examinado para as configurações verticais: o transporte de calor e massa se dá na direção horizontal, com os gradientes aplicados nas paredes verticais da geometria retangular. Ambas as configurações porosas e não porosas são contempladas. A análise de escala e a linearização de Oseen são as técnicas analíticas utilizadas. O problema é investigado para diferentes condições de contorno e os resultados numéricos se estendem pelos domínios não abrangidos pela parte analítica do estudo.

## ABSTRACT

The present dissertation reports a set of analytical studies and extensive coverage by numerical simulation on natural convection occurring in enclosures. The focus is on convection promoted by the combination of buoyancy effects due to both temperature and concentration variations. The phenomenon is examined for the vertical configurations: the heat and mass transfer occur in the horizontal direction while the gradients are applied at the end vertical walls of a rectangular geometry. Both porous and non-porous configurations are considered. Scale analysis and an Oseen linearized solution are the analytical techniques used. The problem is investigated for different boundary conditions and the numerical experiments are extended to the domains not covered by the analytical branch.

CONVECÇÃO NATURAL POR DIFUSÃO  
DUPLA EM CAVIDADES

ÍNDICE

Nomenclatura .....	01
I. Introdução .....	04
II. Cavityde Porosa com Paredes Laterais Isotérmicas e Isotônicas .....	21
II.1. Formulação .....	21
II.2. Análise de Escala .....	26
II.3. Solução Numérica .....	37
II.4. Resultados e Discussão .....	43
III. Cavityde Porosa com Fluxos Constantes nas Paredes Laterais .....	58
III.1. Formulação e Solução Linearizada .....	58
III.2. Solução Similar .....	67
III.3. Solução Numérica .....	73
III.4. Resultados e Discussão .....	76
III.5. Comentários Adicionais .....	91
IV. Cavityde Vertical Contendo Fluido Viscoso e sob Fluxos Constantes nas Paredes Laterais .....	100
IV.1. Formulação .....	100
IV.2. Solução Analítica .....	102
IV.3. Solução Numérica e Discussão .....	113
IV.4. Comentários .....	125
V. Conclusões .....	127

Referências .....	132
-------------------	-----

Apêndices:

A - Equações no Regime de Camada Limite .....	143
B - Solução Linearizada para a Convecção Térmica .....	145
C - Linhas de Massa .....	153

## NOMENCLATURA

- a - gradiente de temperatura na região central
- A - constante
- b - gradiente de concentração na região central
- B - parâmetro definido na eq. 4-33
- c - perfil de concentração na camada limite
- $c_p$  - calor específico a pressão constante
- C - concentração do constituinte químico
- $C_b$  - concentração de referência no cálculo da função de massa
- D - difusividade de massa do constituinte no meio
- f - perfil similar de concentração
- $f_r$  - fator de relaxação
- g - aceleração da gravidade
- Gr - número de Grashof,  $Ra_f/Pr$
- H - altura da cavidade
- $j', j''$  - fluxo de massa
- k - condutividade térmica efetiva do meio
- K - permeabilidade do meio poroso
- L - largura da cavidade
- Le - número de Lewis,  $\alpha/D$
- m - parâmetro da grade, número de nós na direção vertical
- M - função de massa
- n - razão de empuxo,  $\beta_c j'' k / \beta q'' D$
- N - razão de empuxo,  $\beta_c \Delta C / \beta \Delta T$
- Nu - número de Nusselt
- p - parâmetro da grade, número de nós da direção horizontal
- P - pressão
- Pr - número de Prandtl,  $\nu/\alpha$

- $q', q''$  - fluxo de calor  
 $Ra, Ra_\lambda$  - números de Darcy-Rayleigh  
 $Ra_f$  - número de Rayleigh  
 $s$  - parâmetro de refinamento da grade  
 $Sh$  - número de Sherwood  
 $t$  - perfil de temperatura na camada limite  
 $T$  - temperatura  
 $u, v$  - componentes de velocidade  
 $x, x', y, z$  - coordenadas cartesianas

#### SÍMBOLOS GREGOS

- $\alpha$  - difusidade térmica efetiva do meio  
 $\beta$  - coeficiente de expansão térmica  
 $\beta_c$  - coeficiente de expansão química  
 $\gamma$  - parâmetro definido na eq. 3-14  
 $\delta$  - espessura da camada limite hidrodinâmica  
 $\delta_c$  - espessura da camada limite de concentração  
 $\delta_t$  - espessura da camada limite térmica  
 $\Delta C$  - diferença de concentração de parede a parede  
 $\Delta T$  - diferença de temperatura de parede a parede  
 $n$  - variável de similaridade  
 $\nu$  - viscosidade dinâmica  
 $\nu$  - viscosidade cinemática  
 $\rho$  - densidade da solução  
 $r$  - parâmetro definido na eq. 4-17  
 $\psi$  - função corrente  
 $\omega$  - vorticidade

## Índices

- $()_0$  - valores de referência
- $()_x, \bar{()}, \bar{()}$  - variáveis adimensionais
- $()_R$  - relativos à camada limite ao longo da parede direita
- $()_c$  - relativos à região central da cavidade
- $()_1$  - valor na parede esquerda da cavidade
- $()_2$  - valor na parede direita da cavidade

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

O estudo apresentado neste texto refere-se a uma área de conjugação de diferentes ramos do conhecimento sobre os processos de transferência. Convecção natural é atualmente um tema suficientemente amplo, que mesmo subdividido nas categorias

- a) confinada em cavidades
- b) duplamente difusiva
- c) em meios porosos

o volume das publicações é tal que nos permite acreditar cada uma dessas categorias como auto sustentáveis.

O fenômeno da convecção natural tem permanecido na ordem do dia, particularmente motivado pelos anseios da sociedade em compreender e procurar gerenciar os diversos problemas ambientais surgidos contemporaneamente. Situam-se sob a óptica da poluição, aspectos diferentes e cada vez mais críticos como o da contaminação do solo e das águas por elementos químicos e radioativos, o da deterioração da qualidade do ar nos centros urbanos e mesmo problemas mais graves como o da chuva ácida e o da acumulação de gás carbônico nas altas camadas da atmosfera. Outro problema de envergadura global, a escassez dos recursos energéticos, embora momentaneamente fora do foco das luzes da comunicação de massa, continua a reclamar solução. Dentre as medidas possíveis destaca-se a saída da conservação, onde o entendimento da convecção natural desempenha papel de indispensável significado.

A categoria específica da convecção natural dirigida pela combinação de dois ou mais efeitos motrizes tem também um am

plo espectro de aplicações. O fenômeno se manifesta tanto em sistemas com fluidos em meios monofásicos, como naqueles em que o meio é constituído por material poroso. Neste último caso situa-se o interesse dos geólogos na tentativa de compreender a origem dos depósitos minerais, sejam eles provenientes de um magma fluido ou carregados na forma dissolvida. O movimento dos fluidos no solo - particularmente aqueles relacionados com a questão energética, como o da pesquisa e exploração das reservas petrolíferas e o das potencialidades das áreas geotérmicas - foi o motivo principal dos primeiros estudos sobre o assunto.

Das fontes quentes, que constituem o mais acessível e caracterizado dos recursos geotérmicos, as aplicações se estendem para a geografia do solo menos profundo. Os hidrólogos se preocupam com a poluição dos lençóis de água subterrâneos, eventualmente possível pelo aquecimento de origem geotérmica, aquecimento solar do solo ou por descarga de efluentes industriais quentes. A poluição é também matéria da ciência do solo, onde a contaminação radioativa em solos saturados de água assume caráter crítico, dentre as suas congêneres químicas.

À produção de alimentos dá-se a esperança de poder contar com esse ferramental no controle da migração de fertilizantes no solo. Também durante os processos de secagem e estocagem, a filtração de umidade no ar contido entre os grãos tem o seu desenvolvimento regido segundo os parâmetros da convecção duplamente difusiva em um meio poroso.

Outras áreas de ocorrência do fenômeno podem ser apontadas, incluindo-se os processos na indústria química em que enchimentos porosos são usados como catalisadores em reatores.

No panorama da conservação de energia, a penetração de

de umidade e seu movimento através de isolamentos fibrosos tem considerável influência sobre a resistência térmica do isolante. Se os mecanismos e as condições de transporte da umidade forem conhecidos, um meio mais efetivo de controlá-los poderá ser eventualmente encontrado. O mesmo pode ser afirmado com relação às cavidades não porosas presentes nas construções civis, o que certamente terá impacto sobre projetos concebidos no esquema dos sistemas solares passivos.

Mais recentemente, o estudo do movimento convectivo por múltipla difusão vem colaborando na área de ciência dos materiais, com destaque para os processos de crescimento de cristais. Com a necessidade de cristais cada vez mais perfeitos, a atenção dos pesquisadores se volta para o papel do processo de transporte na fase líquida durante a solidificação. Nesta configuração, de meios livres da presença porosa, há que citar ainda as ocorrências da circulação da água salgada nos oceanos e da massa de ar úmido na atmosfera. Fenômenos estes que motivaram as primeiras pesquisas sobre o tema no meio monofásico.

A seguir apresentamos uma revisão resumida dos trabalhos já publicados nas áreas relacionadas ao tema do nosso estudo. A classificação esquemática adotada na sequência da exposição segue basicamente a mesma terminologia vista em revisões anteriores ou se estende por semelhança nas áreas ainda não visitadas.

Em meio poroso: No campo da convecção natural em meios porosos, a grande parte do esforço de pesquisa tem sido dedicada a estudar os fluxos dirigidos por um único efeito de empuxo, precisamente aquele devido às variações de temperatura. Os primeiros trabalhos voltaram-se para as condições de surgimento (críticas) da convecção celular em superfícies horizontais com gradientes de temperatura

desestabilizantes. A revisão bibliográfica de Combarous e Bories [1], dirigida para os aspectos das aplicações geotérmicas, reflete a tendência da pesquisa de então para o estudo da configuração horizontal. Mais recentemente a atenção tem sido paralelamente trazida para o campo da convecção do tipo externa - em torno de placas, cilindros, esferas, fontes lineares e pontuais - e particularmente para cavidades verticais associadas com diferenciais de temperatura impostos na direção horizontal.

Numa revisão das publicações posteriores a 1977 e avançando até o final de 1983 inclusive, Nield [2] classifica os trabalhos conforme a geometria considerada. Como um indicador de tendência atual, o volume das publicações é compartilhado pelas diversas configurações. Ampliamos aqui aquela revisão no domínio das geometrias retangulares verticais, de interesse específico para o trabalho exposto nesta dissertação.

Ainda em 1963, Schneider [3] mostra em trabalho experimental, que o fluxo líquido de calor através de uma camada porosa aumenta monotonicamente com o número de Rayleigh. A mesma tendência é confirmada por Mordchelles-Regnier e outros [4] em trabalho experimental posterior. A dependência do aspecto geométrico foi levantada por Klarsfeld [5] que também identifica a existência de três tipos de comportamento para o fluxo de calor. A visualização do campo de temperaturas dentro do meio poroso apresentada neste trabalho merece menção. O autor explora uma técnica interessante, através da seleção de combinações de fluido e meio poroso com índices de refração aproximados para detetar as isotermas num meio via de regra opaco. A simulação numérica levada a efeito pelo autor é contemporânea com outro trabalho computacional onde Chan, Ivey e Barry [6] confirmam suas observações. Na mesma perspecti

va Holst e Aziz [7] incluem uma simulação numérica do problema com gradiente horizontal.

Interessado no processo de transferência de calor em pa redes comuns na construção civil Bankvall [8] desenvolve um estu do numérico do problema da cavidade para valores baixos na esca la do número de Rayleigh. A linha é retomada mais tarde por Burns, Chow e Tien [9] que, além da solução numérica, apresentam um modelo analítico simples, com coeficientes a determinar experi mentalmente, para o limite de paredes muito delgadas ( $H/L \rightarrow \infty$ ). O mesmo trabalho ilustra também o efeito de infiltrações nas pare des laterais (por rachaduras) sobre o comportamento do fluxo.

Seki, Fukusako e Inaba [10] desenvolveram estudo experi mental para uma extensa gama de valores do número de Rayleigh, com diversos fluidos e em geometrias de aspecto geométrico relativa mente altos. A faixa de valores elevados de Rayleigh é matéria da pesquisa de Shiralkar, Haagizadieh e Tien [11], estimulados que são pelos recentes aprimoramentos dos métodos numéricos.

O comportamento transitório do fenômeno confinado é ava liado numérica e experimentalmente por Inaba e Seki [12] para di versas combinações de matrizes porosas, fluidos e aspectos geomé tricos da cavidade. Uma análise baseada em argumentos de ordem-de grandeza é desenvolvida por Poulikakos e Bejan [13] para identifi car as escalas de tempo coerentes com as diferentes fases da evo lução do fenômeno para o regime permanente. A verificação da aná lise inclui também uma simulação numérica.

O trabalho teórico sobre os regimes dominados pelo meca nismo convectivo foi pioneiramente trazido para as configurações porosas por Weber [14], que desenvolveu uma solução linearizada segundo a técnica de Oseen modificada para o regime de camada li

mite. Inspirado pelo tratamento dado dez anos antes por Gill ao problema similar de convecção numa cavidade não porosa, Weber transfere ao caso poroso as mesmas hipóteses assumidas por aquele autor. Esta solução foi depois modificada por Bejan [15], numa reavaliação das constantes flutuantes então utilizadas. A condição alternativa introduzida leva em conta a transferência de calor que ocorre verticalmente através da região central em cavidades moderadamente delgadas. Baseados nos mesmos aspectos característicos do fluxo no regime fortemente convectivo Simpkins e Blythe [16] apresentam uma solução distinta, empregando um método original, baseado em relações do tipo integral. Os mesmos autores estendem, depois [17], a teoria para o caso mais geral em que a viscosidade do fluido é sensível às mudanças de temperatura.

Num trabalho de destacável envergadura Walker e Homsy [18] empregam diferentes técnicas analíticas para obter soluções em distintas combinações dos parâmetros de Rayleigh e da razão geométrica. Para cavidades com  $(H/L) \rightarrow 0$  e  $Ra$  fixo, as soluções são encontradas via expansões assintóticas casadas. Expansões regulares de  $Ra$ , obtidas com auxílio de técnicas semi-numéricas, são empregadas em casos de  $(H/L)$  fixo e  $Ra$  variando a partir do estado de aparecimento da convecção. No limite de  $Ra \rightarrow \infty$ , os autores propõem um modelo auto-coerente para o regime de camada limite.

Em um trabalho de revisão das expressões analíticas existentes, Bejan [19] dirige a atenção para os efeitos do aspecto geométrico da cavidade. Estudos recentes tem mostrado que o padrão de fluxo numa cavidade rasa ( $H/L < 1$ ) difere daqueles encontrados em geometrias delgadas. Voltados especificamente para cavidades com  $(H/L) \ll 1$ , Bejan e Tien [20] publicaram estudo em que sugerem relações distintas para cada um dos três regimes que identificam co

mo existentes naquele tipo de configuração. Cobrindo uma faixa intermediária da razão de altura ( $0,1 < H/L < 0,5$ ) e para números de Rayleigh relativamente baixos, Hickox e Gartling [21] simularam o fenômeno numericamente pela técnica de elementos finitos, mostrando que os mapas de linhas de corrente e isothermas diferem consideravelmente dos padrões observados em cavidades delgadas. A presença de um quarto regime é sugerida mais recentemente por Prasad e Kulacki [22] num estudo numérico sobre os efeitos da razão geométrica sobre a estrutura do fluxo. Blythe, Daniels e Simpkins [23,24] descrevem a mudança dos regimes de fluxo conforme o número de Rayleigh é aumentado para valores de  $H/L$  fixos na faixa de cavidades rasas. Sugerem fronteiras de transição entre quatro regimes e avaliam a influência das características de cada estrutura de fluxo sobre a transferência global de calor.

Poucos são os trabalhos em que as condições de contorno diferem daquelas de paredes isotérmicas em ambas as extremidades horizontais da cavidade. Bejan [25] aplica a técnica de Oseen para resolver o problema de fluxos de calor constantes nas paredes laterais e obtém soluções explícitas com forma extremamente simples para os perfis de velocidade e temperatura. O autor verifica numericamente a validade da solução e levanta as principais características da estrutura convectiva no regime de camada limite. Ainda recentemente, Prasad e Kulacki [26] simularam em computador o fenômeno quando sujeito a condições de contorno mistas. Os padrões de fluxo são distintos daqueles observados no caso mais tradicional, sendo que a simetria central deixa de prevalecer na nova situação. A correlação obtida para a taxa global de transporte é muito próxima daquela válida para o caso de diferencial constante de temperatura entre as paredes da camada porosa.

Cavidades não porosas: O interesse pela convecção natural experimentada por fluidos contidos em cavidades não porosas antecede historicamente ao interesse pela sua congênere porosa. Não fosse pela ênfase dada no trabalho e a cronologia recomendaria a apresentação da parte que se segue no início deste trabalho de revisão.

O primeiro trabalho publicado sobre o tema data de três décadas e desde então tem sido crescente o volume de estudos referentes à matéria. Uma imagem deste crescimento, e da direção do avanço do conhecimento sobre o fenômeno, pode ser obtida pela leitura comparativa da monografia de revisão de Ostrach [27] e do capítulo, especialmente devotado ao título, inserido no recente texto de Bejan [28]. Evitaremos aqui fazer uma revisão bibliográfica ampla no assunto, ademais já realizada de forma completa e atualizada na referência anterior. Desta forma, serão destacados apenas os trabalhos de estreita relação com o estudo descrito na presente dissertação.

Embora não sendo a primeira análise teórica sobre o problema, Gill [29] apresentou uma solução analítica para o regime convectivo de fluidos com  $Pr > 1$ . A técnica de Oseen, sugerida anteriormente por Lewis e Carrier [30], é usada para sobrepujar as dificuldades inerentes às não-linearidades das equações governantes. Seu outro mérito foi o de ser o primeiro a introduzir a hipótese de ser a região central não isotérmica. Sua solução firmou-se e as discussões posteriores [31] confirmam a sua importância. Na esteira das questões das condições arbitrárias assumidas nos vértices da cavidade, precisamente onde falha a solução proposta, Bejan [32] sugere uma alternativa que satisfaz na média as condições naquelas posições, e a concordância com os resultados experimentais melhora ainda mais.

Raros são os trabalhos em que as condições de contorno nas paredes verticais divergem do modelo tradicional de superfícies isotérmicas. Destaca-se entre eles o estudo de Kimura e Bejan [33] sobre a cavidade retangular com fluxos uniformes de calor ao longo das paredes verticais. Os autores desenvolveram uma solução analítica para o novo problema, equivalente à apresentada por Gill no caso das paredes laterais isotérmicas. O teste numérico é favorável à solução obtida, que na situação tem a forma explícita como um aspecto vantajoso.

A estrutura do fluxo nesta classe de problemas é unicelular para uma extensa faixa de valores da razão geométrica e do número de Rayleigh, como aparece nos ensaios com ar de Eckert e Carlson [34]. Seu comportamento torna-se porém distinto em cavidades suficientemente delgadas ( $H/L > 12$ ), para valores de Ra elevados ( $Ra > 10^5$ , Ra baseado no diferencial de temperatura), como foi verificado experimentalmente por Elder [35] e Seki e Fukusako [36]. Também usando técnicas de visualização, Elder fez o ensaio com água em cavidades delgadas porém com superfície superior livre. Os dois outros autores trabalharam com diferentes tipos de fluidos em confinamentos fechados. Em ambos os estudos, observou-se o aparecimento de células secundárias quando os valores dos parâmetros superaram a ordem de grandeza referida anteriormente. Embora sem o apoio de um modelo teórico que preveja tal comportamento, estas observações de laboratório recomendam aqueles limites como prudentes no uso dos resultados das análises teóricas sobre o regime de camada limite em cavidades verticais.

Convecção duplamente difusiva: A convecção natural promovida pela combinação de vários efeitos sobre a densidade do fluido, e portanto sobre a força de empuxo, é matéria de estudo bem recente.

Muitos processos de transporte presentes na natureza são devidos a escoamentos dirigidos, ou com o comportamento modificados, pela ocorrência simultânea de gradientes de temperatura e concentração. Alguns fenômenos oceanográficos como os das "fontes de sal" e dos "salt fingers" encontram explicação na presença acoplada dos gradientes térmicos e salinos. Os movimentos do ar na atmosfera são promovidos por gradientes de componentes distintos entre eles a temperatura e a concentração de vapor. A atenção dos primeiros trabalhos é voltada principalmente para o fenômeno marítimo, e em sua ampla maioria se dedicam a analisar as características da estabilidade do escoamento em camadas horizontais. Uma discussão dos processos envolvidos quando os gradientes tem a mesma direção da força de gravidade, bem como uma revisão dos trabalhos até então publicados, é feita por Turner [37].

Mais recentemente, novas e importantes aplicações chamam a atenção para os fluxos dirigidos por difusões combinadas, ou mesmo por difusão simples em meio estratificado em um segundo componente. Tratam-se dos vários aspectos associados ao processamento de materiais, como na solidificação, no controle de oxidação superficial e principalmente nos mecanismos do crescimento de cristais. Este último campo tem motivado as pesquisas mais atuais na área e também ampliou o espectro das atenções no que diz respeito às configurações estudadas. Os problemas associados aos gradientes na direção ortogonal à gravidade passam a receber o exame dos estudiosos. Ostrach faz um levantamento destes trabalhos e discute os principais aspectos do fenômeno em sua monografia de 1980 [38].

No que concerne às cavidades retangulares, apenas um trabalho foi publicado recentemente. No estudo experimental desenvolvido por Kamotani e outros [39], a convecção de um fluido com

Pr = 7 é examinada numa cavidade retangular rasa ( $0,13 < H/L < 0,55$ ). Íons de cobre dissolvidos na solução são usados como o segundo componente difusivo. Sua difusão é muito baixa (número de Schmidt = 2100) o que é traduzido pelo alto valor do número de Lewis (Le = 300). Variando a potência da célula eletroquímica os autores variam a razão de empuxo N entre 4 e 40. Infelizmente, suas observações são apenas qualitativas e não se pode garantir as condições de contorno laterais para o constituinte químico.

A ocorrência do fenômeno de múltipla difusão em meios porosos só veio a receber a atenção da ciência a partir do final da década de 60. O primeiro estudo na área é de Nield [40] que analisa, com auxílio do método de perturbação linear, as condições de estabelecimento da convecção numa camada porosa horizontal. Os valores do número de Rayleigh e do número de onda críticos são obtidos teoricamente para diversas condições de contorno horizontais da placa porosa. O trabalho pioneiro de Nield baliza as pesquisas vindouras sobre o tema, sendo seguido por poucas dezenas de trabalhos relacionados ao problema da estabilidade dos escoamentos convectivos próximos à condição do seu surgimento. Vankat e Schowalter [41] ilustram, em seu trabalho, a análise da mesma questão utilizando o método da energia. Taunton, Lighfoot e Green [42] aprofundam o estudo de Nield, detalhando a análise para o caso de contornos horizontais condutores e discutindo as características das estruturas de escoamento possíveis. Os efeitos da linearidade do perfil de concentração química, até então assumida como tal, é investigada por Rubin [43]. O mesmo autor avalia o impacto da anisotropia da dispersão do soluto no estabelecimento do movimento do fluido em uma publicação posterior [44]. Após as observações de Nield [45] sobre as formas possíveis para as células convectivas,

Rubin amplia seu estudo sobre anisotropia para a configuração tri-dimensional [46]. Observa-se que a superestabilidade é iniciada pela formação de células na forma de rolos com eixos paralelos à direção da velocidade de regime permanente, embora nas proximidades das condições de estabilidade marginal as células tenham os seus eixos perpendiculares àquela direção.

Rubin [47] investiga também as características do surgimento do movimento convectivo em meios porosos cavernosos (de poros relativamente grandes), onde não vale a lei de Darcy. Os efeitos da turbulência e da dispersão do calor, então prováveis, são levados em conta. A combinação da convecção natural com a forçada, na configuração de um fluxo forçado de velocidade uniforme através de uma camada porosa horizontal, quando na presença de gradientes de concentração e temperatura verticais, é estudada por Rubin e Roth [48]. Neste trabalho os autores tentam estender o problema para condições de empuxo moderadamente acima do nível crítico, embora resumam os resultados em observações apenas qualitativas.

Examinando a questão das características de permeabilidade de variáveis Rubin [49],[50],[51] usa duas aproximações diferentes para tratar a heterogeneidade da camada porosa. As propriedades são então avaliadas ou pela sua média devidamente ponderada, ou têm sua variação expressa na expansão em série de Fourier. Nos dois casos o autor mostra que a heterogeneidade não modifica os parâmetros da estabilidade e a estrutura das células geradas. A anisotropia vertical do meio poroso é também motivo do trabalho teórico de Tyvand [52]. Variando juntamente a condutividade da fase sólida, o autor encontra características do diagrama de estabilidade para matrizes sólidas isolantes semelhantes às do caso isotrópico. O efeito da viscosidade variável sobre a estabilidade do

escoamento é analisado por Patil e Vaidyanathan [53], usando am os modelos de Darcy e Brinkman para representar o movimento da solução através da matriz porosa.

Lawson, Yang e Bunditkul [54], num estudo relacionado ao fenômeno, predizem a instabilidade numa camada porosa saturada com uma mistura gasosa. No sistema, sem influxo permanente de massa e com o gradiente de concentração mantido através do efeito Soret, ocorrem apenas estados estacionários neutros. O mesmo problema foi investigado por Patil e Rudraiah [55] num modelo em que os efeitos viscosos são considerados na equação da variação da quantida de de movimento da mistura. O efeito Soret volta a ser considera do no estudo de Brand e Steimberg [56]. Os autores apontam para a possibilidade de ocorrência de instabilidades oscilatórias mesmo quando o aquecimento é feito por cima da camada.

Gershuni, Zhukhouvitskii e Lyubimov [57] mostram que a instabilidade do tipo oscilatório é possível numa mistura gasosa binária preenchendo a matéria porosa de uma placa horizontal. Seu estudo, no entanto, se refere à combinação de gradientes verti cais constant es de tempertatura e concentração associados a um ter ceiro gradiente, horizontal, de temperatura e também constante. Em outro artigo [58], os autores verificam que o escoamento se torna instável quando um gradiente térmico horizontal é aplicado sobre uma solução binária com estratificação suficientemente elevada da concentração.

A teoria linear da estabilidade pode prever somente as condições de surgimento do movimento convectivo, mas não é capaz de permitir maiores avanços e avaliar o fenômeno para valores aci ma dos chamados "valores críticos". A este último domínio dedica-se a análise de amplitudes finitas, técnica usada no trabalho de

Rubin e Roth [48]. Rudraiah, Shrimani e Friedrich [59] aplicam o mesmo método, baseado em séries de Fourier, para calcular os números de transporte no caso da convecção duplamente difusiva em uma placa horizontal aquecida por baixo. Brand e outros [60, 61] também derivam uma equação para a amplitude das instabilidades oscilatórias, e por ela avaliam as taxas de transferência para valores moderados dos números de Rayleigh.

Diferentes mecanismos podem se responsabilizar pelo provimento da segunda componente do termo de empuxo. Outro exemplo, além do efeito Soret já citado, é o da reação química simultânea com o desenvolvimento do movimento do fluido. Patil [62] examina esta possibilidade no caso em que o gradiente de concentração é mantido conjuntamente pelo efeito Soret numa camada com superfícies horizontais livres. Steinberg e Brand [63] analisam o caso em que uma reação rápida é responsável pela manutenção do diferencial de concentração e por geração interna de calor. A geração interna de calor independente da presença química é considerada por Selimos e Poulikakos [64], que usam o modelo de Brinkman para equacionar a variação da quantidade de movimento do sistema.

O fenômeno pode contar ainda, como certamente conta na natureza, com outros graus de liberdade. A rotação, em Chakrabarti e Gupta [65], é incluída entre os efeitos presentes numa camada porosa com superfícies livres e submetida a gradientes desestabilizantes de temperatura e concentração. Os autores também exploram a possibilidade de instabilidade subcrítica pelo método das amplitudes finitas aplicado em torno de um estado estável. Com a extensão de que a espécie química possa também ser constituída de partículas em suspensão, o mesmo problema é estudado por Sharma e Sharma [66]. A estabilidade do escoamento numa situação

triplamente difusiva é matéria de análise no artigo publicado por Rudraiah e Vortmeyer [67].

Em estudo experimental Griffiths [68] investiga o problema da convecção duplamente difusiva em camadas sobrepostas com concentrações distintas. Observadas por meio de técnicas de visualização, a formação das células de convecção é acompanhada tanto em uma célula Hele-Shaw como, pela primeira vez ao que se sabe sobre dupla difusão, em uma cavidade porosa.

Todas as publicações sobre convecção natural de empuxo combinado num meio poroso até aqui referidas tratam do fenômeno na configuração horizontal. Com relação as geometrias verticais, apenas alguns escassos trabalhos foram publicados. Khan e Zebib [69] estudaram a instabilidade da estrutura de camada limite dupla que se forma próxima a uma parede vertical imersa num ambiente poroso com campos estratificados de temperatura e concentração. Raptis, Tzivanidis e Kafousias [70] desenvolveram soluções de similaridade para as camadas limites próximas a uma parede imersa num meio poroso de temperaturas e concentrações constantes e sujeita à condição de sucção constante. A solução é obtida com base na hipótese de que o fluxo e suas características são independentes da posição vertical. Mais recentemente Bejan e Khair [71] desenvolveram uma solução de similaridade geral para o problema, após classificarem os regimes possíveis do escoamento de acordo com os valores dos parâmetros que o caracterizam.

Dentro do quadro levantado dos trabalhos já publicados nas áreas correlatas, o estudo apresentado nesta dissertação coloca-se como original. Trata-se do primeiro trabalho sobre a convecção natural promovida por dupla difusão em cavidades porosas e do primeiro tratamento teórico conferido ao problema em cavidades não porosas.

O estudo é composto basicamente de três partes, correspondentes a cada um dos capítulos que se seguem a este. Referentes às investigações sobre as combinações mais importantes de meios e condições de contorno, as partes tratam da convecção natural por dupla difusão nas configurações de:

- 1 - cavidades porosas com diferenciais constantes
- 2 - cavidades porosas com fluxos constantes
- 3 - cavidades não porosas com fluxos constantes

A ordem dos trabalhos acima teve como diretriz obter primeiramente uma compreensão geral sobre o comportamento do fenômeno quando confinado. Após este entendimento, propiciado pela análise de escala e pela simulação numérica do problema, avançamos no esforço de aprimorar a solução ao descrever analiticamente suas principais características. Neste processo, a mudança de condições de contorno é empreendida não somente no intuito de facilitar a matemática envolvida, mas também de tornar o estudo mais abrangente do ponto de vista de suas aplicações na engenharia. No mesmo sentido, incluímos, como disposto no terceiro capítulo, a extensão das relações concluídas da análise, para os casos em que as condições de contorno se apresentam na forma mista. E por fim, os ensinamentos adquiridos com o trabalho teórico são levados para o terreno das cavidades não porosas.

Um trabalho extensivo de simulação numérica acompanha todo o desenvolvimento do estudo. Sua realização simultânea com o encaminhamento da análise de escala é tão imprescindível para a derivação adequada da análise como o entendimento físico propiciado por estudos de problemas similares em configurações mais simples (p. ex. [71]). De outro lado a mesma análise de escala é providencial em organizar parametricamente o problema e em indicar

a composição das séries a serem submetidas ao exame numérico. Nas etapas referentes aos terceiro e quarto capítulos o trabalho numérico dedica-se não somente a verificar a validade dos modelos teóricos apresentados, mas estende o seu raio de ação para prover de dados os domínios não cobertos pela análise teórica. Indo além das restrições assumidas no desenvolvimento analítico, em ambos os casos o método numérico é aplicado sobre a forma geral das equações governantes. Na situação não porosa, a hipótese simplificadora de tratar-se de fluidos com número de Prandtl relativamente altos ( $Pr \gg 1$ ) é verificada pela solução numérica como sendo de impacto menor. As características dos dois fluidos mais frequentes na natureza são usadas nos ensaios de simulação.

Com o enfoque principalmente voltado para as possíveis contribuições que o estudo possa trazer para a engenharia dos fenômenos de transferência, as conclusões são invariavelmente traduzidas em termos dos efeitos dos parâmetros sobre os números de transporte.

## CAPÍTULO II

CAVIDADE POROSA COM PAREDES LATERAIS  
ISOTÉRMICAS E ISOTÔNICAS1 - Formulação

Consideremos a cavidade porosa bidimensional da Fig. 2.1. A cavidade tem suas paredes horizontais impermeáveis e termicamente isoladas, enquanto as paredes verticais são mantidas em temperaturas e concentrações constantes e distintas.

Neste modelamento assumimos que:

- 1 - o meio poroso e o fluido que o satura são homogeneamente distribuídos e suas propriedades são isotrópicas
- 2 - em qualquer ponto do meio, a matriz porosa e o fluido estão em equilíbrio térmico
- 3 - a aproximação de Boussinesq é válida para as variações de densidade devido a mudanças tanto de temperatura quanto de concentração

Assim, no termo da força de empuxo, as variações de densidade podem ser expressas por:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) - \beta_c(C - C_0)] \quad (2-1)$$

onde  $\beta$  e  $\beta_c$  são os coeficientes de expansão volumétrica térmica e química, respectivamente

$$\beta = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2-2)$$

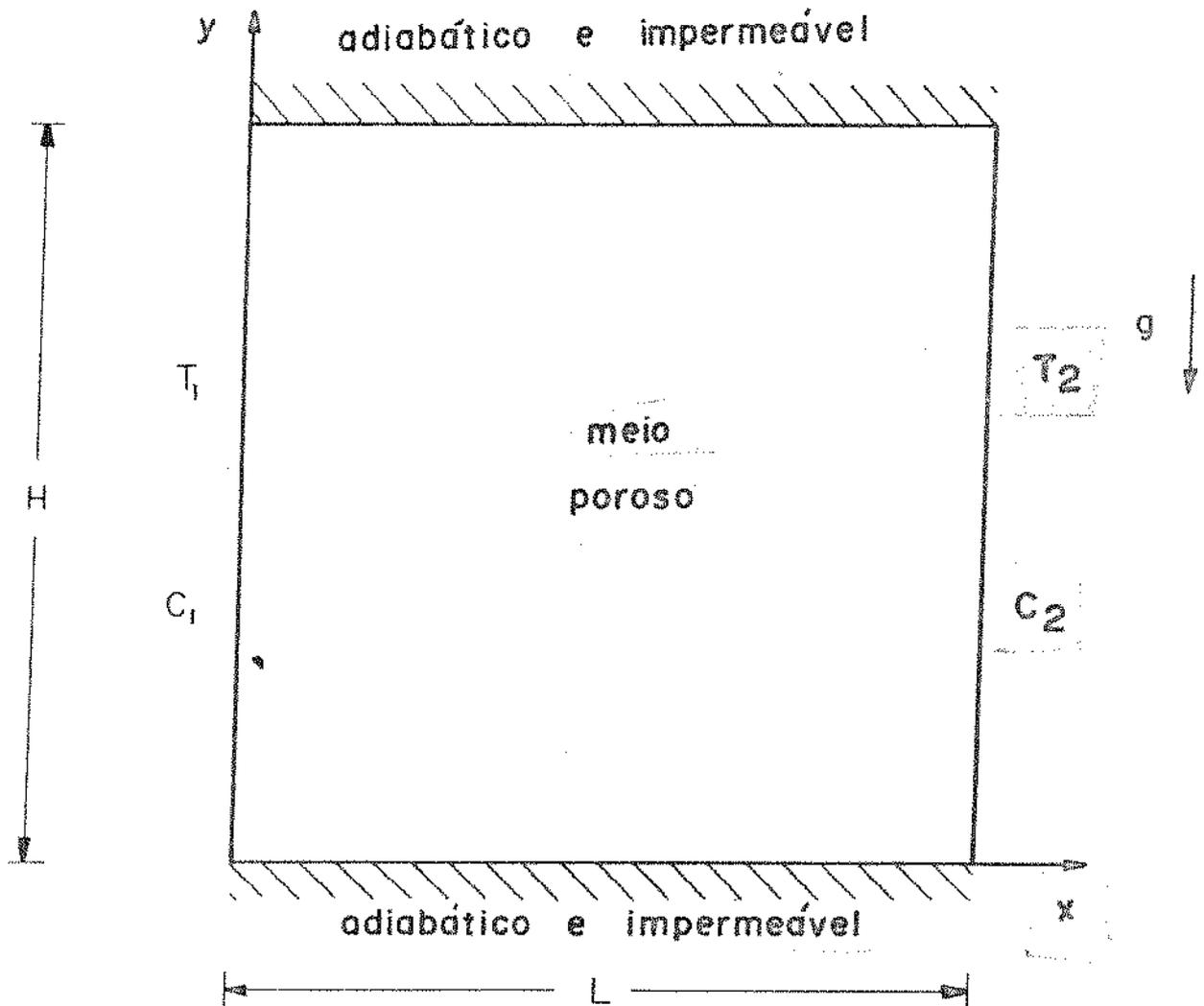


FIGURA 2.1 - Esquema da camada porosa sujeita a diferenças laterais constantes de temperatura e concentração

$$S_c = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_p \quad (2-3)$$

- 4 - a lei de Darcy é aplicável, ou seja, as circunstâncias são tais que o número de Reynolds local, baseado na velocidade média de penetração local e  $K^{1/2}$ , é menor que um [72]
- 5 - a matriz porosa é rígida, o fluido incompressível e de propriedades constantes
- 6 - não ocorrem reações químicas e dissipação viscosa é desprezível

Com base nas hipóteses acima especificadas, as equações governantes da convecção natural em meios porosos [73, 28], podem ser reescritas para o regime permanente na forma:

conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-4)$$

conservação da variação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gK}{\nu} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (2-5)$$

conservação da energia

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-6)$$

conservação do constituinte químico

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2-7)$$

Nas equações anteriores os termos de velocidade (u,v) representam a velocidade média por unidade de volume do meio poroso (velocidade de penetração), T é a temperatura de equilíbrio local entre o fluido e a matriz porosa enquanto C representa a concentração do constituinte químico em unidades de massa do constituinte por unidade de volume do meio poroso. O termo  $\alpha$  é definido como a difusividade térmica efetiva, ou seja, a condutividade térmica efetiva do meio poroso saturado (sólido mais fluido) dividido pela capacidade térmica específica do fluido que satura a matriz. O parâmetro D representa a difusividade do constituinte no meio poroso saturado pelo fluido. Os demais termos encontram-se definidos na Nomenclatura.

As condições de contorno do problema, também esquematizadas na Fig. 2.1, são:

$$x = 0 \quad u = 0, T = T_1, C = C_1 \quad (2-8)$$

$$x = L \quad u = 0, T = T_2, C = C_2 \quad (2-9)$$

$$y = 0 \text{ e } y = H \quad v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2-10)$$

As equações de (2-4) a (2-10) podem ser convenientemente adimensionalizadas pela introdução das seguintes variáveis:

$$x_* = \frac{x}{L} \quad y_* = \frac{Y}{L} \quad \Psi_* = \frac{\Psi v}{gK\beta\Delta TL} \quad (2-11)$$

$$T_* = \frac{T-T_2}{\Delta T} \quad C_* = \frac{C-C_2}{C_1-C_2} \quad \Delta T = T_1 - T_2 \quad (2-11)$$

A variável  $\Psi$  é definida como a função corrente ( $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ) e satisfaz automaticamente a equação da conservação de massa. As demais equações tomam a forma, já omitindo o asterisco da notação,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial T}{\partial x} - N \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2-12)$$

$$\left(\frac{L}{H}\right) Ra \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2-13)$$

$$\left(\frac{L}{H}\right) LeRa \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2-14)$$

e as condições de contorno ficam

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \Psi = 0, \quad T=1, \quad C=1 \\ x=1 & \quad \Psi = 0, \quad T=0, \quad C=0 \\ y=0 \text{ e } y=\frac{H}{L} & \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial C}{\partial y}=0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

Nas equações de (2-12) a (2-15) destacam-se quatro parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \frac{L}{H} & \quad \text{razão geométrica da cavidade} \\ N = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta \Delta T} & \quad \text{razão de empuxo} \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$Ra = \frac{gKB\Delta TH}{\alpha v} \quad \text{número de Rayleigh modificado} \quad (2-17)$$

$$Le = \frac{\alpha}{D} \quad \text{número de Lewis} \quad (2-18)$$

Apontar os grupos adimensionais que regem o fenômeno é um dos objetivos da adimensionalização das equações governantes, como a anteriormente afetuada. No caso do nosso estudo, é relativamente grande o número daqueles grupos e devemos esperar uma variedade igualmente grande de regimes de fluxos possíveis dentro do domínio representado na Fig. 2.1.

À exceção do parâmetro  $N$ , os grupos adimensionais então apontados têm os seus valores variando no domínio  $(0, \infty)$ . O grupo  $N$  nos fornece a proporção entre as forças de empuxo térmica e as devidas ao gradiente de concentração, cuja combinação dirige o movimento do fluido, como expresso na equação da conservação da variação da quantidade de movimento (eq.2-12). O valor  $N$  pode ser positivo ou negativo, conforme as forças de empuxo sejam concordantes, ou adversas.

## 2 - Análise de Escala

A diversidade de fluxos possíveis no problema de convecção natural formulado no item anterior pode ser eficazmente investigada pela técnica da análise de escala [28]. Em vista da multiplicidade de grupos adimensionais representados nas equações governantes e seus efeitos associados, a análise pode ser estruturada de diferentes formas. Decidimos construí-la a partir da identificação prévia de dois importantes campos extremos nos quais o fenômeno

pode ocorrer. Dependendo da magnitude relativa de cada um dos gra  
dientes que compoem a força de empuxo, os fluxos podem ser dividi  
dos em duas importantes classes:

- 1 - fluxos dirigidos pelo calor, dominados basicamente pe  
lo empuxo devido ao aquecimento lateral

$$|BAT| \gg |\beta_c \Delta C| \quad (2-19)$$

- 2 - fluxos dirigidos pelo transporte de massa, onde o  
efeito de empuxo é causado principalmente pela varia  
ção da concentração

$$|BAT| \ll |\beta_c \Delta C| \quad (2-20)$$

A razão da notação de valor absoluto nas desigualdades an  
teriores é que, embora os parâmetros  $\beta$ ,  $\Delta T$ ,  $\beta_c$  e  $\Delta C$  possam assu  
mir valores positivos ou negativos, apenas os seus valores absolu  
tos interessam à análise de ordem grandeza. A distinção entre  
os fluxos da classe (1) e os da classe (2) pode também ser feita  
pelo valor de  $|N|$ , como pode ser depreendida do exposto anterior  
mente. Lembrando sempre que estamos tratando de valores absolutos,  
omitimos doravante a notação  $| |$ .

Para o estudo dos fenômenos de transporte, interessa o  
comportamento do movimento do fluido situado na região em que os  
efeitos são significativos, ou seja, na camada limite. No caso em  
análise, três são as componentes estudadas e portanto três são as camadas li  
mites em questão: camadas limites hidrodinâmica, térmica e de  
constituente químico. A priori, em cada uma das classes de fluxo  
das anteriores podem ocorrer tantos regimes quantas forem as com  
binações possíveis das escalas das três diferentes camadas limi  
tes. Examinamos a seguir as escalas e as combinações que caracte

rizam os regimes possíveis, separadamente para cada uma das classes de fluxo definidas e delimitadas pelas eqs. (2-19) e (2-20).

### 1 - Fluxos dirigidos pelo calor

Neste caso  $N \ll 1$  e a distribuição de constituinte químico não influencia o movimento do fluido. Uma observação importante pela simplificação que traz à nossa análise é a de que nas condições do problema em questão as camadas limites térmica e hidrodinâmica apresentam a mesma escala [74]. A referência a uma delas é portanto suficiente para compreender ambos os efeitos térmico e fluidomecânico.

Considerando primeiramente a escala das camadas limites térmicas na cavidade, temos que elas podem ser distintas ( $\delta_t \ll L$ ) ou que o efeito da difusão térmica pode ser sentido através de toda a extensão da cavidade ( $\delta_t \sim L$ ). O mesmo raciocínio vale para as camadas limites do constituinte químico ( $\delta_c \ll L$ ), adicionando-se que as mesmas podem ser mais espessas ( $\delta_c > \delta_t$ ) ou mais finas ( $\delta_c < \delta_t$ ) que as camadas limites térmicas. Composto e estas possibilidades, os casos possíveis estão resumidos na Tabela 2.1.

TABELA 2.1 - Sumário dos casos possíveis em fluxos dirigidos pelo calor

$\delta_t$	$\delta_c$		caso
$<L$	$<\delta_t$		1.1.a
$<L$	$>\delta_t$	$<L$	1.1.b.1
$<L$	$>\delta_t$	$\sim L$	1.1.b.2
$\sim L$	$<\delta_t$		1.2.a
$\sim L$	$\sim \delta_t$		1.2.b

Visitamos a seguir com nossa análise cada um dos casos classificados.

Casos 1.1 - Considerando primeiramente a região da camada limite térmica vertical, de espessura  $\delta_t$  e altura H, as equivalências de escalas recomendadas pelas equações de conservação de massa, variação da quantidade de movimento e energia são, em ordem:

$$\frac{u}{\delta_t} \sim \frac{v}{H} \quad (2-21)$$

$$\frac{v}{\delta_t} \sim \frac{g}{\nu} K \beta \frac{\Delta T}{\delta_t} \quad (2-22)$$

$$v \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \quad (2-23)$$

Resolvendo o sistema anterior para as três escalas desconhecidas ( $u$ ,  $v$ ,  $\delta_t$ ) temos:

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra^{1/2} \quad (2-24)$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra \quad (2-25)$$

$$\delta_t \sim H Ra^{-1/2} \quad (2-26)$$

Os casos 1.1 se caracterizam por ter as camadas limites verticais distintas,  $\delta_t < L$ , o que implica em:

$$\frac{L}{H} \text{ Ra}^{1/2} > 1 \quad (2-27)$$

A identificação das diferentes subdivisões de 1.1 se dá com base na escala da espessura  $\delta_c$  da camada limite da concentração. Para determinar a escala de  $\delta_c$ , bem como esclarecer o critério da subdivisão - o da comparação das dimensões de  $\delta_t$ ,  $\delta_c$  e  $L$  -, lançamos novamente mão da eq. (2-7), que descreve o transporte do constituinte químico.

As ordens de grandeza dos dois termos do lado direito da equação são respectivamente:

$$D \frac{\Delta C}{\delta_c^2} \quad \text{e} \quad D \frac{\Delta C}{H^2} \quad (2-28)$$

O segundo termo tem escala comparável à do primeiro somente quando  $\delta_c \sim L$  e pode portanto, para efeitos da análise de escala, ser ignorado.

Integrando a eq. (2-7) através da camada limite de concentração, isto é, da parede lateral até a região central da cavidade, onde a concentração é basicamente uma função da altitude, obtemos:

$$\frac{d}{dy} \int_0^{\infty} vC \, dx = -D \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2-29)$$

que traduz o balanço da difusão de constituinte da parede para o interior da camada limite com a variação do fluxo vertical de constituinte dentro da mesma camada. Em ordem de grandeza a eq. (2-29) fica:

$$\frac{1}{H} v \Delta C x_{\text{escala}} = D \frac{\Delta C}{\delta_c} \quad (2-30)$$

onde  $x_{\text{escala}}$  é a escala da largura da corrente vertical de constituente químico.

Para determinar  $x_{\text{escala}}$ , atentamos para o fato que a corrente de constituinte requer, ao mesmo tempo, o movimento do fluido e a presença de alta concentração do constituinte. A região que atende a ambos os requisitos é a comum às camadas limites hidrodinâmicas (espessura  $\delta_t$ ) e de constituente (espessura  $\delta_c$ ). Assim,  $x_{\text{escala}} = \min(\delta_t, \delta_c)$  e na determinação da escala de  $\delta_c$  a partir da expressão (2-30) necessitamos considerar em separado duas possibilidades:  $\delta_c < \delta_t$  e  $\delta_c > \delta_t$ .

1.1.a)  $\delta_c < \delta_t$  - Combinando as eq. (2-25) e (2-30) onde  $x_{\text{escala}}$  é substituído por  $\delta_c$ , temos:

$$\delta_c = H(Le Ra)^{-1/2} \quad (2-31)$$

Vale ressaltar que esta escala é válida desde que  $\delta_c$  seja menor que  $\delta_t$ , o que pelas eq. (2-31) e (2-26) resulta no critério de validade.

$$Le \gg 1 \quad (2-32)$$

1.1.b)  $\delta_c > \delta_t$  - Substituindo as eq. (2-25), (2-26) e  $x_{\text{escala}} = \delta_t$  na expressão (2-30) obtemos:

$$\delta_c = H Le^{-1} Ra^{-1/2} \quad (2-33)$$

e o critério de validade para esta escala é o oposto do encontrado no caso anterior, ou seja,  $Le \ll 1$ . Nota-se que como estamos tratando de situações em que as camadas limites térmicas são distintas ( $\delta_t \ll L$ ), a hipótese de  $\delta_c > \delta_t$  traz duas novas possibilidades: as camadas limites da concentração podem ser tanto distintas ( $\delta_c \ll L$ , caso 1.1.b.1) como indistintas ( $\delta_c \sim L$ , caso 1.1.b.2).

Baseando-se na eq.(2-33), concluimos que, dentro do domínio de validade do caso 1.1.b, o critério que garante a existência de camadas de concentração distintas é:

$$\left(\frac{L}{H}\right) Le Ra^{1/2} \gg 1 \quad (2-34)$$

Casos 1.2 - Quando as camadas limites térmicas são não distinguíveis, a circulação do fluido ocupa toda a cavidade. As escalas recomendadas pelas equações da continuidade e da variação da quantidade de movimento neste caso são:

$$\frac{u}{L} = \frac{v}{H} \quad (2-35)$$

$$\frac{v}{L} = \frac{gK}{\nu} \beta \frac{\Delta T}{L} \quad (2-36)$$

ou seja,

$$v = \frac{\alpha}{H} Ra \quad (2-37)$$

$$u = \frac{\alpha L}{H^2} Ra \quad (2-38)$$

As duas últimas expressões conduzem à conclusão esperada, que estes casos ocorrem quando o critério da eq. (2-27) para camadas térmicas distintas não é observado

$$\frac{L}{H} Ra^{1/2} \ll 1 \quad (2-39)$$

Observe que pelas escalas (2-37) e (2-38), a razão entre a convecção vertical e a difusão térmica lateral na equação da energia vale:

$$\frac{v\Delta T/H}{\alpha\Delta T/L} = \left(\frac{L}{H}\right)^2 Ra \quad (2-40)$$

A qual, de acordo com a expressão (2-39), é muito menor que a unidade. A conclusão é que o transporte de energia neste caso é comandado pela condução térmica, observação coerente com a delimitação inicial do efeito térmico lateral penetrar por toda a cavidade.

Para determinar a escala da espessura da camada limite da concentração nos referimos novamente à eq. (2-30). Como a inexistência de camadas térmicas não é empecilho à presença de camadas de concentração correspondentes, a análise se ramifica em dois casos possíveis:

1.2.a - Quando as camadas limites da concentração são distintas, substituindo a escala  $x_{escala} = \delta_c$  na eq. (2-30), temos

$$\delta_c = H(Le Ra)^{-1/2} \quad (2-41)$$

que é a mesma escala de  $\delta_c$  obtida no caso 1.1.a, eq. (2-31). Reescrevendo  $\delta_c \ll L$ , obtemos o critério de validade para a eq. (2-41)

$$\left(\frac{L}{H}\right)^2 Ra Le \gg 1 \quad (2-42)$$

1.2.b - Quando as camadas limites da concentração são não distintas, a razão convecção de massa vertical/difusão lateral de massa na equação da conservação do constituinte químico é de ordem:

$$\frac{v\Delta C/H}{D\Delta C/L^2} = \left(\frac{L}{H}\right)^2 Ra Le \quad (2-43)$$

que é consideravelmente menor que a unidade, para atender o critério oposto ao expresso na eq. (2-42). Portanto, neste caso a difusão é o mecanismo predominante tanto para o transporte térmico como para o do constituinte químico.

A análise de escala dos fluxos dirigidos pelo calor (classe 1) mostra que os regimes de fluxo possíveis ocupam regiões bem definidas no domínio bidimensional  $Le - (L/H)^2 Ra$ . A Figura 2.2 representa este domínio em escala bilogarítmica. Nela estão definidos todos os subdomínios delimitados pelos critérios obtidos anteriormente. Em cada subdomínio listamos as principais conclusões da análise de escala. Essas conclusões se referem aos números adimensionais relativos às taxas totais de transferência de calor e mas

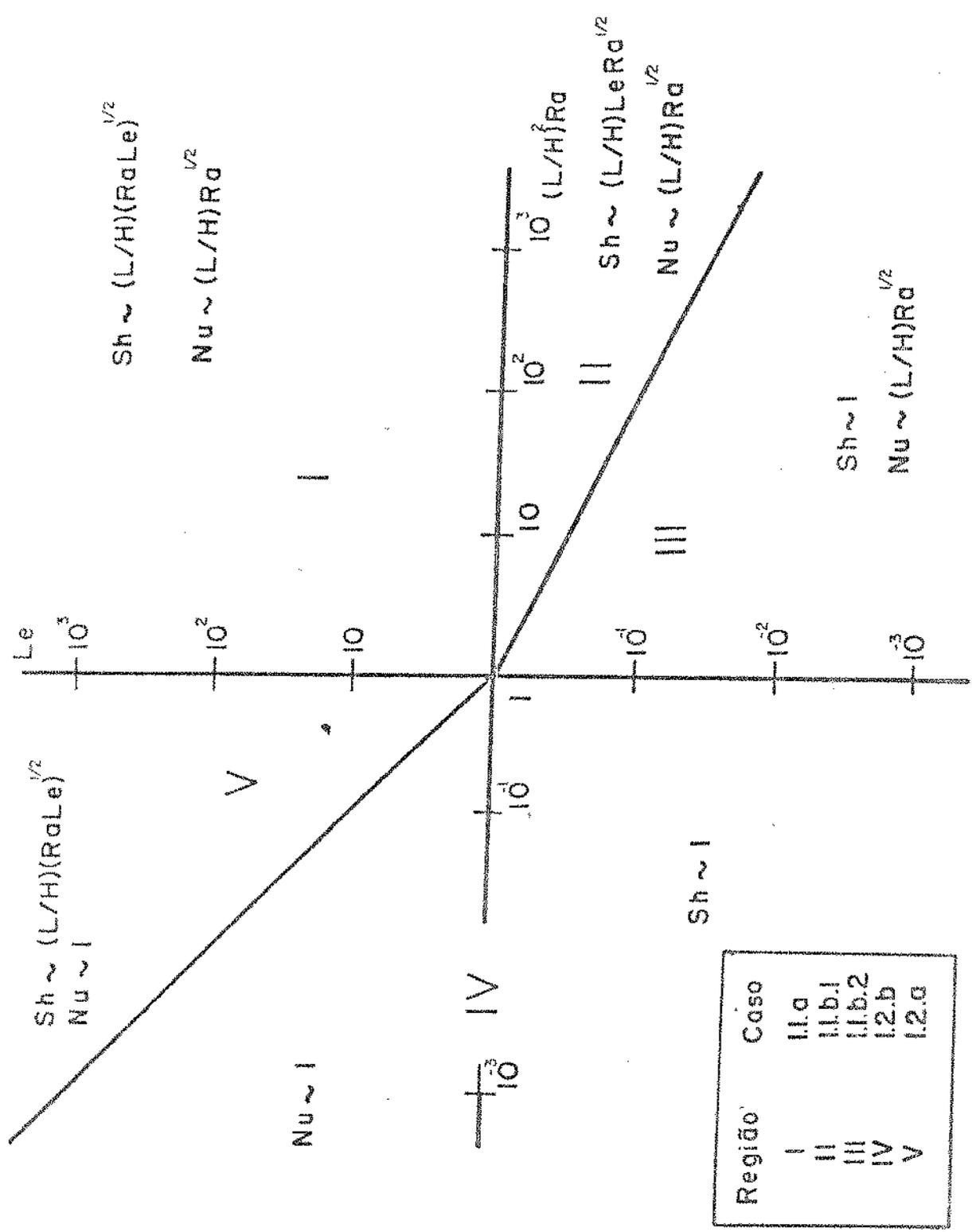


FIGURA 2.2 - Regimes de fluxo possíveis quando o efeito de empuxo é devido basicamente a gradientes térmicos ( $|N| \ll 1$ )

sa. Note-se que a escala dos números de Nusselt e Sherwood são conhecidas, já que as escalas de  $\delta_t$  e  $\delta_c$  foram determinadas na análise que se precedeu, e

$$\text{Nu} = \frac{q'}{kH \frac{\Delta T}{L}} = \frac{kH \frac{\Delta T}{\delta_t}}{kH \frac{\Delta T}{L}} = \frac{L}{\delta_t} \quad (2-44)$$

$$\text{Sh} = \frac{j'}{DH \frac{\Delta C}{L}} = \frac{DH \frac{\Delta C}{\delta_c}}{DH \frac{\Delta C}{L}} = \frac{L}{\delta_c} \quad (2-45)$$

## 2 - Fluxos dirigidos pelo transporte de massa

Os fluxos dirigidos por empuxo devido primariamente aos gradientes de concentração,  $N \gg 1$ , podem ser classificados de forma análoga aos da classe anterior. Para evitar a repetição de toda a sequência de raciocínios apresentada, chamamos a atenção para a simetria existente nas equações governantes (2-4) a (2-7). A simetria indica que as escalas dos fluxos da classe 2 podem ser obtidas a partir das escalas dos fluxos da classe 1 através do conjunto de transformações.

Classe 1

$\beta \Delta T$

$\delta_t$

$\delta_c$

$\alpha$

$D$

$Ra$

$Le$



Classe 2

$N \beta_c \Delta C$

$\delta_c$

$\delta_t$

$D$

$\alpha$

$Ra \sim N Le$

$Le^{-1}$

A figura 2.3 mostra o plano  $Le - \left(\frac{L}{H}\right)^2 Ra N$  com a subdivisão das regiões em que cada um dos diferentes regimes de fluxo ocorre. As associadas a cada região estão listadas na figura as previsões da análise de escala para as taxas adimensionais de transferência de calor e massa.

Ao completar a identificação dos fluxos possíveis e seus respectivos domínios de validade, observamos que a análise de escala é um instrumento muito útil também na escolha das séries de casos a serem testados experimental ou numericamente.

### 3 - Solução Numérica

Para resolver numericamente o problema, iniciamos discretizando as equações de (2-12) a (2-15) conforme a formulação de volume de controle desenvolvida por Patankar [75]. O esquema escolhido para calcular os fluxos de calor e massa através das fronteiras de cada volume de controle foi o da lei da potência. O termo de geração representado pelo lado direito da equação (2-12) foi assumido constante em cada volume de controle.

A configuração geométrica da Figura 2.1 foi coberta por uma malha de  $(m-2) \times (p-2)$  quadrados representando os volumes de controle. Os pontos discretos do domínio foram situados no centro de cada volume de controle e os quatro contornos da Fig. 2.1 entendidos como volumes de controle de espessura zero.

Para resolver as equações algébricas simultâneas resultantes da discretização, empregamos o método iterativo ponto-a-ponto, também referido na literatura como método Gauss-Siedel. O uso do artifício da relaxação se mostrou útil em acelerar a convergência da solução, sendo, de modo geral, a sub-relaxação mais

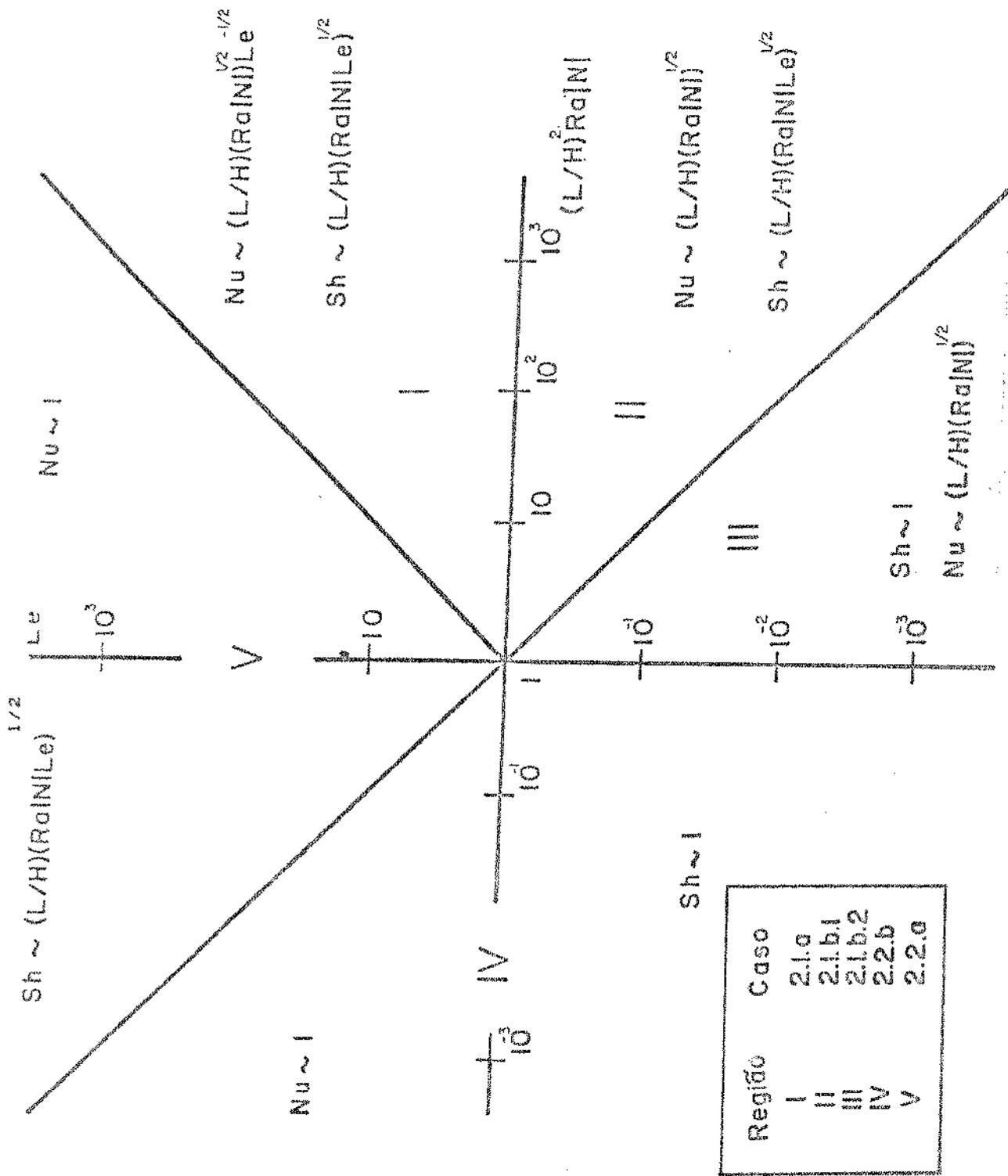


FIGURA 2.3 - Regimes de fluxo possíveis quando o efeito de empuxo é devido basicamente a gradiente de concentração ( $|N| > 1$ )

eficiente nos casos de valores altos de  $Ra$  e  $Rax|N|xLe$  e a sobre-relaxação adequada para os casos da faixa oposta. A Fig.2.4 mostra um diagrama simplificado da rotina usada na solução numérica. Como estado inicial supomos fluido estagnado ( $\Psi = 0$ ) na cavidade, temperatura e concentração uniformes ( $T = C = 0$ ) em todo o domínio a menos do contorno lateral esquerdo em que os valores atribuídos são mantidos iguais a um. O processo de atualização dos valores de  $\Psi$ ,  $T$  e  $C$  foi repetido em cada simulação até que os valores destas variáveis obtidos em duas iterações sucessivas satisfizessem o critério.

$$\frac{\sum_{ij} |\zeta_{\text{novo}} - \zeta_{\text{velho}}|}{\sum_{ij} |\zeta_{\text{novo}}|} < \text{Res} \quad (2-47)$$

onde  $\zeta$  representa os valores de  $\Psi$ ,  $T$ , ou  $C$ , enquanto  $\text{Res}$  é um número suficientemente pequeno para que as taxas médias de transferência de calor e massa calculadas em  $x=0$  e  $x=1$

$$\text{Nu} = \frac{L}{H} \int_0^{H/L} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\xi} dy \quad \begin{array}{l} \text{Nu}_L \text{ em } \xi = 0 \\ \text{Nu}_R \text{ em } \xi = 1 \end{array} \quad (2-48)$$

$$\text{Sh} = \frac{L}{H} \int_0^{H/L} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=\xi} dy \quad \begin{array}{l} \text{Sh}_L \text{ em } \xi = 0 \\ \text{Sh}_R \text{ em } \xi = 1 \end{array} \quad (2-49)$$

sejam tão próximas quanto o desejado.

As diferenças relativas entre os valores referentes aos lados direito e esquerdo na cavidade, das taxas definidas em (2-48) e (2-49), foram usadas como critério adicional na verificação da convergência da solução. Como segurança mantivemos, em todo o

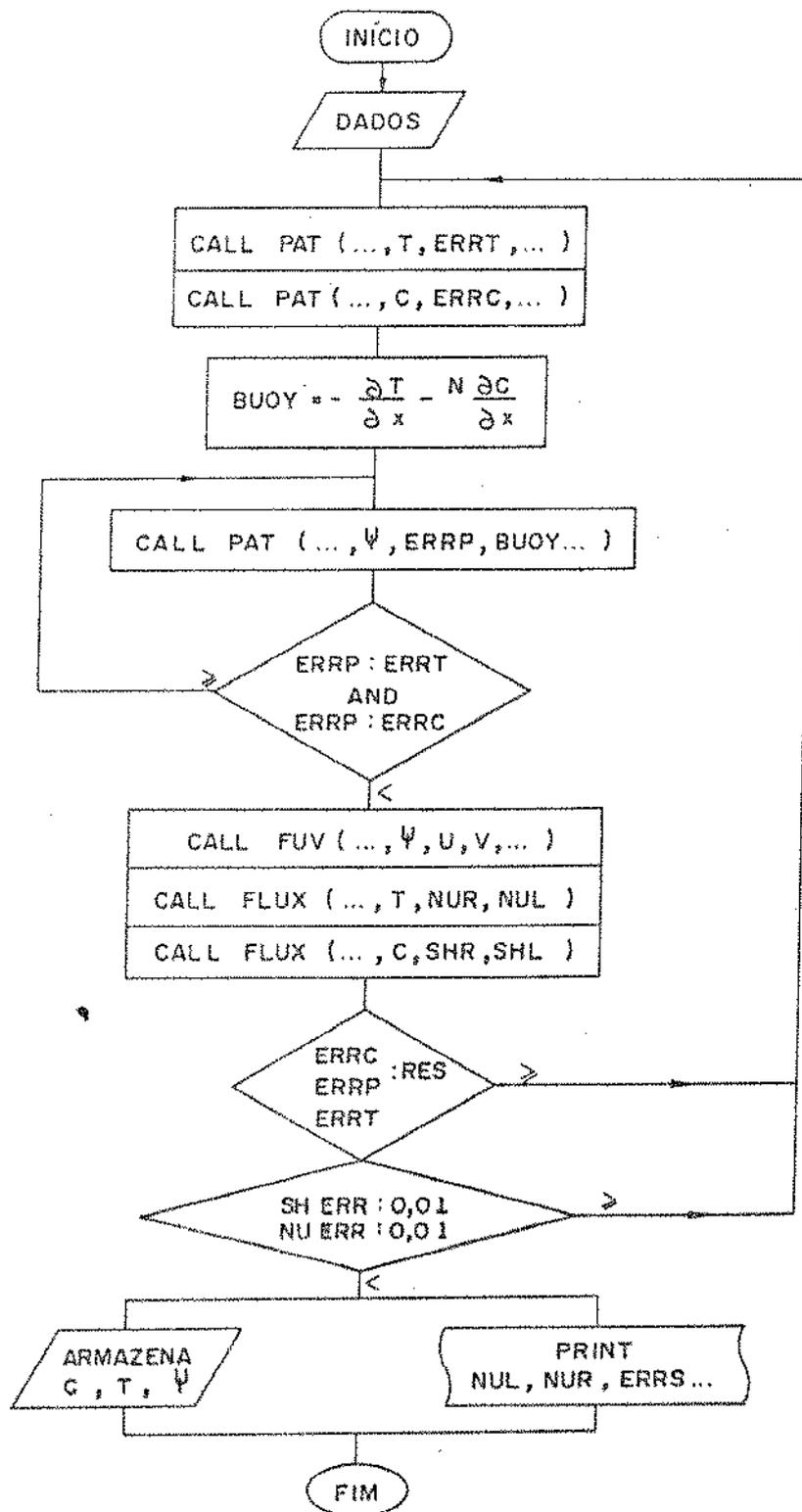


FIGURA 2.4 - Diagrama de fluxo do programa de cálculo empregado na solução numérica

TABELA 2.2 - Teste de refinamento da malha ( $Le=1$ ,  $N=0$ ,  $H/L=1$ )

Caso	Mesh da malha	Tempo por iteração (s)	Nu Eq. (2-48)	Nu $E_{rr}$ Eq. (2-50) (%)	$f_r$
Ra=50 Res= $10^{-4}$	12 x 12	0,179	2,24	0,91	1,0
	16 x 16	0,357	2,13	1,31	1,0
	22 x 22	0,730	2,06	1,81	1,0
Ra=50 Res= $10^{-5}$	12 x 12	0,173	2,24	0,10	1,0
	22 x 22	0,698	2,06	0,16	1,0
	32 x 32	1,530	2,02	0,31	1,0
	42 x 42	2,694	2,00	0,40	1,0
Ra=2000 Res= $10^{-5}$	12 x 12	0,173	12,86	0,07	1,0
	22 x 22	0,684	23,32	0,05	1,0
	32 x 32	1,535	27,10	0,06	1,0
	42 x 42	2,728	27,60	0,06	1,0
Ra=5000 Re= $10^{-5}$	32 x 32	1,513	36,59	0,19	0,7
	42 x 42	2,713	42,87	0,14	0,7
	52 x 52	4,254	44,66	0,16	0,7
Ra=10000 Re= $10^{-5}$	32 x 32	1,510	38,96	0,65	0,7
	52 x 52	4,241	58,41	0,20	0,7
	62 x 62	13,816	62,24	0,21	0,7

trabalho numérico, o valor absoluto dos parâmetros

$$(\text{Nu}, \text{Sh})_{\text{Err}} = \frac{(\text{Nu}, \text{Sh})_L - (\text{Nu}, \text{Sh})_R}{(\text{Nu}, \text{Sh})_L + (\text{Nu}, \text{Sh})_R} \quad (2-50)$$

abaixo de um por cento. Por esta verificação adicional são evitadas eventuais falsas convergências causadas por subrelaxação das variáveis do problema.

A Tabela 2.2 mostra os resultados da sequência de ensaios realizados com o objetivo de levantar a influência do tamanho da rede na solução numérica. Para grade uniforme, como depende-se da Tabela 2.2, o tamanho adequado da malha varia com o número de Rayleigh. Considerando tal variação e num compromisso entre a precisão obtida e o custo envolvido, escalamos a seleção do tamanho da rede conforme os parâmetros determinantes do fluxo. Assim, usamos uma grade de 32 x 32 volumes de controle para os casos em que os valores dos parâmetros  $Ra$  e  $Rax|N| \times Le$  eram menores que 5000. Para as poucas situações em que os valores destes parâmetros se situaram na faixa 5000-6000 refinamos a grade para 42 x 42, e no único caso testado em que tais parâmetros atingiram o valor de 10000, a malha foi diminuída para 62 x 62.

A Tabela 2.2 mostra também o efeito do resíduo  $Res$ , eq. (2-47), na precisão da solução obtida. Embora o critério de  $Res = 10^{-5}$  exija, de maneira geral, 40 por cento mais iterações do que o critério de  $Res = 10^{-4}$  para apresentar a solução como convergida, os resultados numéricos relatados neste estudo foram obtidos com aquele primeiro valor. Este critério assegurou uma concordância melhor que um por cento entre as taxas médias de transferência de calor e massa calculadas ao longo das paredes verticais laterais eq. (2-48) a (2-50) em todos os casos.

A validade do procedimento numérico detalhado anteriormente foi testada pela comparação apresentada na Fig.2.5. Os resultados obtidos, a partir do procedimento descrito, para transferência de calor sem a presença do empuxo devido aos gradientes de concentração, concordam muito bem com os resultados encontrados na literatura [18].

#### 4 - Resultados e Discussão

Como comentado no fim do item I deste capítulo, é grande o número de regimes possíveis de fluxo dentro da cavidade devido ao número relativamente grande de parâmetros adimensionais presentes nas equações que descrevem o fenômeno. A solução numérica tem como um dos objetivos avaliar a influência de cada um destes parâmetros, atuando em grupo ou isoladamente, sobre o comportamento do fluxo. Observando que um dos propósitos da análise de escala é o de descrever, então analiticamente, as mesmas influências, a solução numérica tem como objetivo correlato testar a validade dos critérios e tendências previstos pela análise de escala. Com base neste duplo propósito foram escolhidos os casos a serem submetidos ao tratamento numérico, representados por combinações de terminadas de valores dos parâmetros  $Ra$ ,  $Le$ ,  $H/L$  e  $N$ . Não se pode dispensar para esta tarefa da orientação proporcionada pela análise de escala na classificação dos regimes (ver Fig.2.2 e 2.3).

Partindo da distinção inicial entre os fluxos dirigidos pelo empuxo causado pelas variações de temperatura (classe 1) e os dirigidos pelo empuxo devido primordialmente às mudanças de concentração (classe 2); a primeira série de soluções dedica-se a investigar a influência dos números de Rayleigh ( $Ra$ ) e de Lewis ( $Le$ )

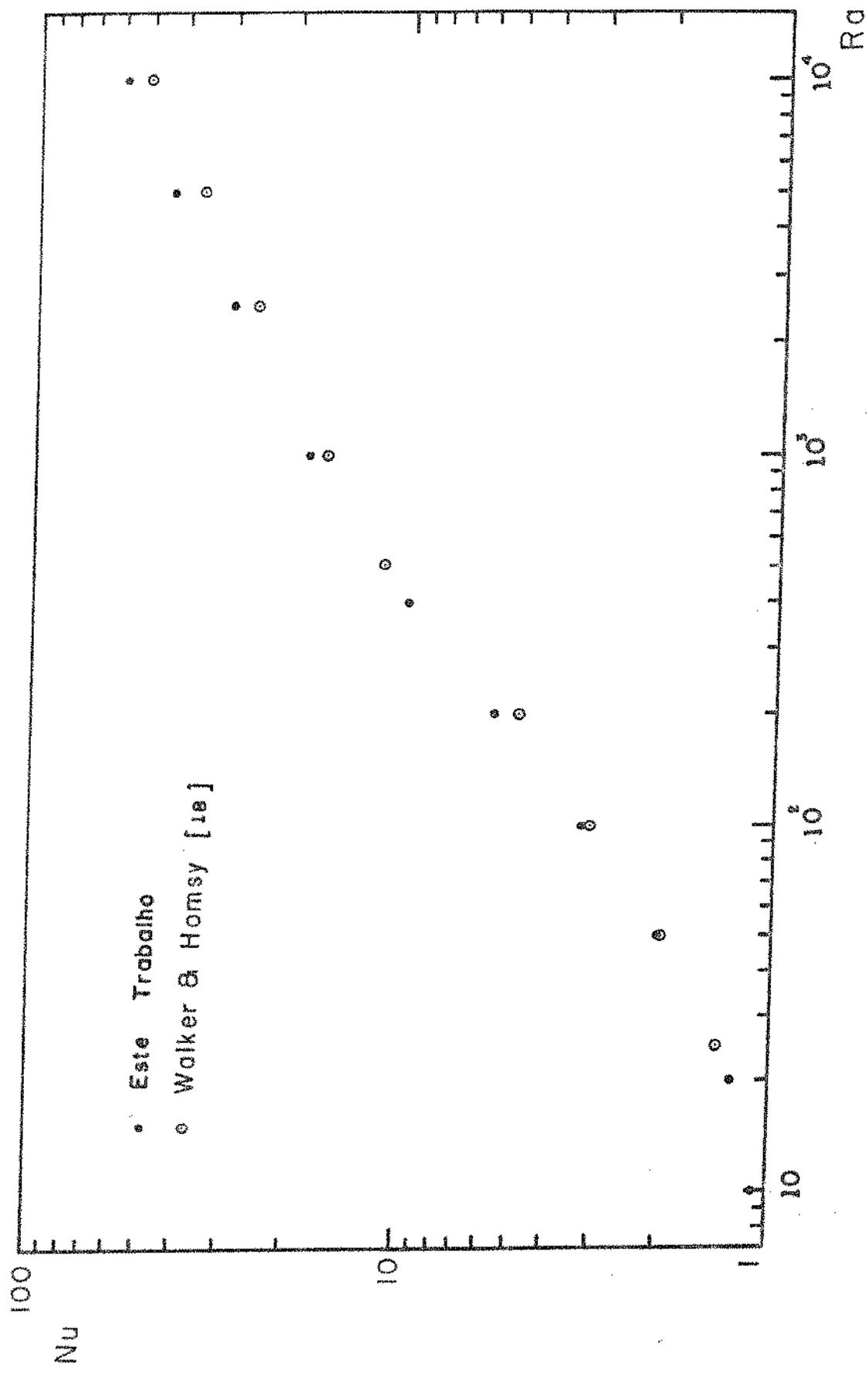


FIGURA 2.5 - Comparação dos resultados numéricos para transferência simples de calor ( $N=0, H/L=1$ ) com resultados publicados anteriormente

nos regimes da classe 1. Os casos selecionados para simulação numérica, cujos resultados encontram-se resumidos na Tabela 2.3, estendem-se pelas regiões I, II, III e V do gráfico da Fig.2.2 com maior concentração nas regiões I e II entre as quais as transições são mais sutis.

Nos regimes de fluxo da classe 1 a razão de empuxo  $N$  é de ordem de grandeza menor que a unidade, e para os propósitos da simulação foi fixada igual a zero. Neste limite o campo de temperaturas está interligado ao campo de fluxo, mas é independente da distribuição de concentração. Ambos os campos de fluxo e de temperaturas dependem do número de Rayleigh ( $Ra$ ), mas não do número de Lewis ( $Le$ ). A distribuição do constituinte químico, no entanto, depende de ambos os campos de temperatura e de fluxo - ver eq.(2-14). Assim, o mapa de concentração é influenciado tanto pelo número  $Ra$  como por  $Le$ , e a diferença entre os campos de temperatura e de concentração é ditada pelo número de Lewis. Como pode ser depreendido das equações (2-13) e (2-14), ambos os campos são idênticos para  $Le = 1$  e somente uma daquelas equações é suficiente para a descrição do problema neste caso singular.

Além da esperada relação de dependência entre os números de  $Nu$  e  $Ra$  - ver também as Fig. 2.5 e 2.6 - a Tabela 2.3 mostra que para um mesmo valor de  $Ra$  o número de Sherwood ( $Sh$ ) cresce monotonicamente com o aumento de  $Le$ . Em outras palavras, num determinado regime de fluxo a camada limite da concentração é tão mais fina quanto maior for o número de Lewis.

Como um primeiro teste de validade dos resultados da análise de escala, a Fig.2.6 mostra os valores numéricos da Tabela 2.3 na forma de um gráfico com  $Nu$  em função de  $Ra$ . Observe-se que embora os pontos experimentais do gráfico situem-se nas re

TABELA 2.3 - Resumo dos resultados numéricos sobre fluxos dirigido pelo calor ( $N=0$ ,  $H/L=1$ )

Ra	Le	Fator de relação de T	Nu Eq. (2-48)	Fator de relação de C	Sh Eq. (2-49)
50	0,01	1,0	2,02	1,0	1,00
50	0,10	1,0	2,02	1,0	1,02
50	0,30	1,3	2,02	1,0	1,13
50	1,00	1,5	2,02	1,2	2,02
50	3,00	1,2	2,02	1,2	4,64
50	10,0	1,5	2,02	1,2	9,69
50	30,0	1,1	2,02	1,0	17,84
50	100,0	1,4	2,00	1,0	31,88
100	0,01	1,0	3,27	1,5	1,00
100	0,10	1,5	3,27	1,2	1,04
100	0,30	1,2	3,27	1,4	1,35
100	1,0	1,5	3,27	1,2	3,27
100	3,0	1,2	3,27	1,0	7,63
100	10,0	1,0	3,27	1,2	15,61
100	30,0	1,2	3,27	1,0	25,99
200	0,01	1,5	5,61	1,2	1,00
200	0,03	1,0	5,61	1,3	1,01
200	0,10	1,5	5,61	1,2	1,12
200	0,30	1,0	5,61	1,4	1,87
200	1,0	1,5	5,61	1,5	5,61
200	3,0	1,2	5,61	1,0	12,52
200	10,0	1,0	5,61	1,0	23,23
200	30,0	1,3	5,37	1,0	37,30
400	0,01	1,2	9,69	1,5	1,00
400	0,10	1,2	9,69	1,5	1,29
400	0,30	1,0	9,69	1,1	2,96
400	1,0	1,2	9,69	1,0	9,69
400	3,0	1,0	9,69	1,1	19,36
400	10,0	1,0	9,69	1,0	30,73
1000	0,1	1,2	18,38	1,2	1,91
1000	0,3	1,1	18,38	1,1	6,22
1000	1,0	1,1	18,38	1,1	18,38
2000	0,03	1,0	27,10	1,3	1,23
2000	0,1	1,0	27,10	1,0	3,11
2000	0,3	1,0	27,10	1,1	11,16
4000	0,03	0,7	35,01	1,1	1,62
4000	0,1	0,7	35,01	1,0	5,90
4000	0,3	0,7	35,01	1,0	19,33
10	1,0	1,1	1,08	1,1	1,08
20	1,0	1,1	1,27	1,1	1,27
2500	1,0	1,1	29,98	1,1	29,98
5000	1,0	0,7	42,87	0,7	42,87
10000	1,0	0,7	62,24	0,7	62,24
0,10	10000	1,4	0,98	0,7	12,46
0,30	3000	1,4	0,98	0,7	11,76
1,0	1000	1,4	0,98	0,7	12,47
3,0	300	1,4	0,99	0,7	11,80
10	100	1,4	1,06	0,7	12,73

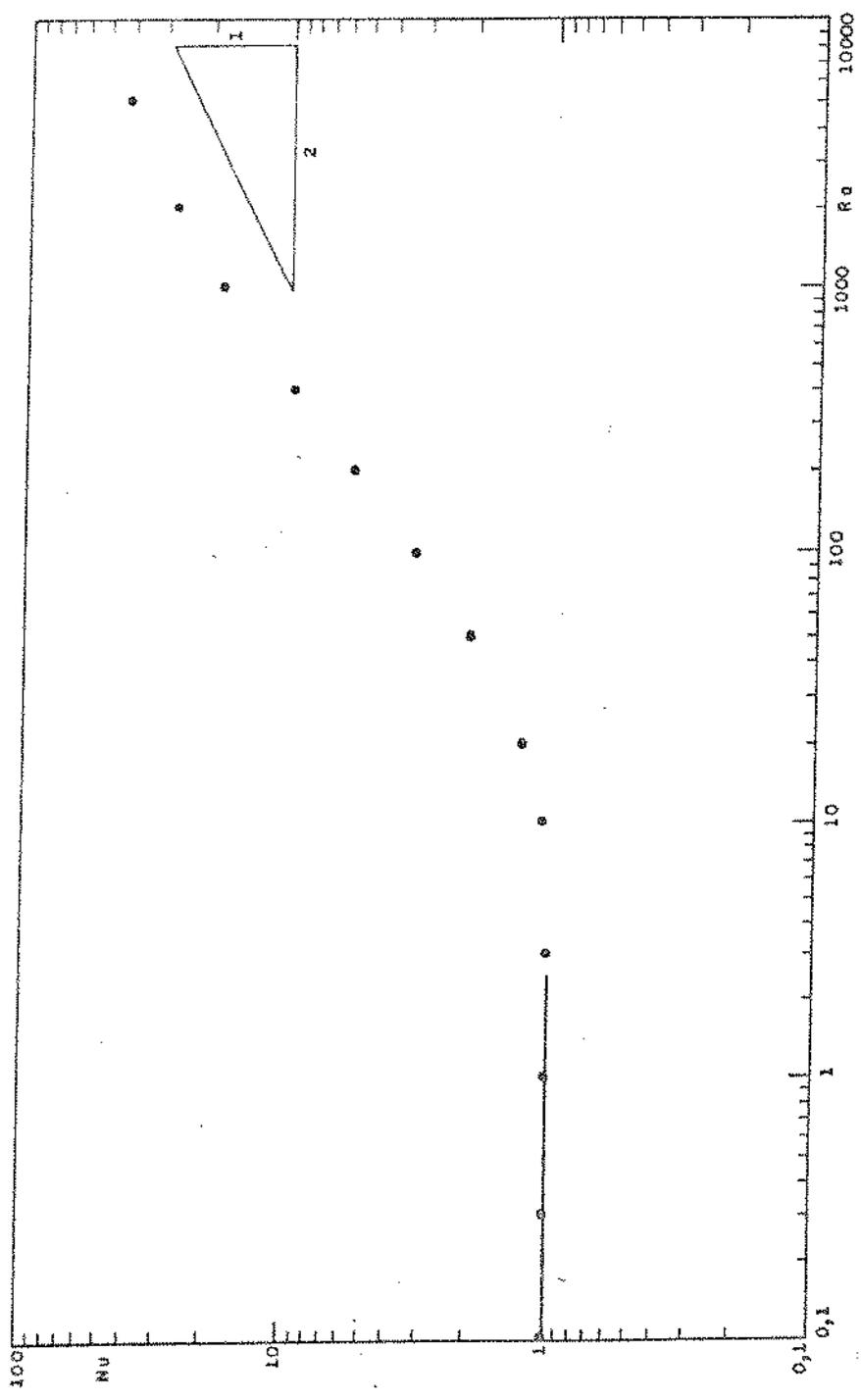


FIGURA 2.6 - Correlação dos resultados numéricos para os regimes 1.1.a e 1.2.a ( $n=0, H/L=1$ )

giões V e I da Fig. 2.2 dada a independência entre a transferência de calor e o número de Lewis no caso em questão, tais pontos representam também as demais regiões no mesmo valor fixo de  $Ra$ . A Fig. 2.6 mostra claramente que os dados obedecem leis escalares diferentes nas regiões extremas do gráfico e confirma as relações preconizadas pela análise de escala, que também são ratificadas pelas correlações para transferência de calor na ausência de constituinte químico encontradas na literatura [14, 18].

A Fig. 2.7 mostra os resultados numéricos da Tabela 2.3 dispostos nas coordenadas  $Sh Ra^{-1/2}$  e  $Le$ . Os dados se distribuem na faixa de 0,01 - 1000 para o número de Lewis enquanto o de Rayleigh varia entre 1 e 4000. O gráfico mostra convincentemente que para  $Le$  maiores que um a lei de escala é  $Sh = \left(\frac{L}{H}\right) (Le Ra)^{1/2}$ , o que está de acordo com a conclusão obtida pela análise de escala para o caso 1.1.a. A figura mostra também os dados da faixa de  $Le$  menores que um obedecendo a uma relação de escala diferente,  $Sh = \frac{L}{H} Le Ra^{1/2}$ , o que confirma a previsão da análise para o caso 1.1.b. Os resultados numéricos correspondentes ao regime da região III na Fig. 2.2 também foram colocados na forma gráfica na Fig. 3.7. Eles foram desenhados em linha tracejada de forma a distinguí-los dos dados referentes aos regimes de camada limite que ilustram a transição do regime 1.1.a para o regime 1.1.b.

A transição teórica entre os regimes 1.1.b.1 e 1.1.b.2 (regiões II e III na Fig. 2.2) é testada pela simulação numérica no gráfico da Fig. 2.8. Nesta figura os dados numéricos da Tabela 2.3 relativos àquelas regiões são colocados em gráfico com  $Sh$  em função de  $Le Ra^{1/2}$ . Fica evidente que quando o grupo  $Le Ra^{1/2}$  é menor que a unidade o número de  $Sh$  é igual a um, o que concorda

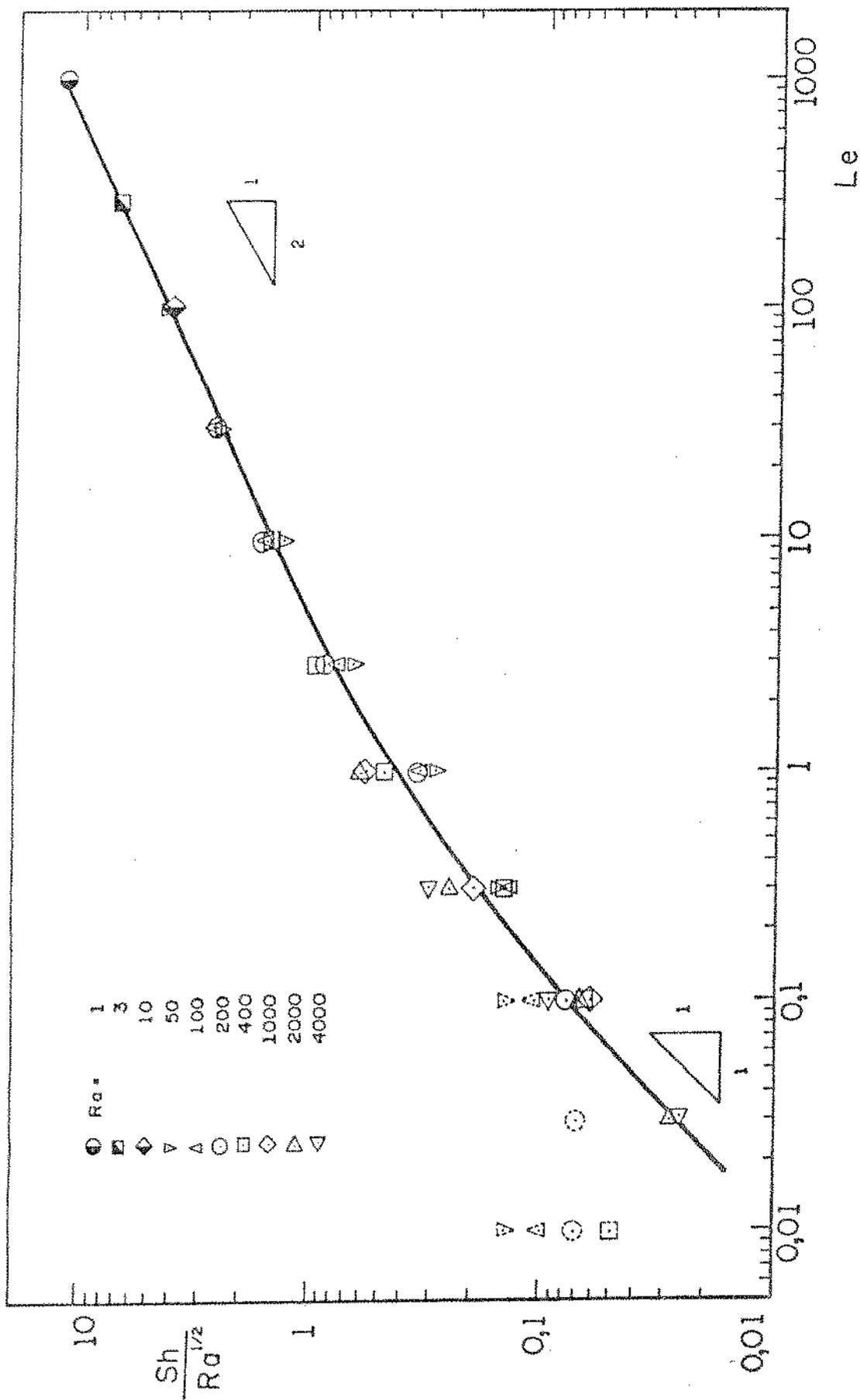


FIGURA 2.7 - Correlação dos resultados numéricos para os regimes 1.1.a e 1.1.b  
( $N=0$ ,  $H/L=1$ )

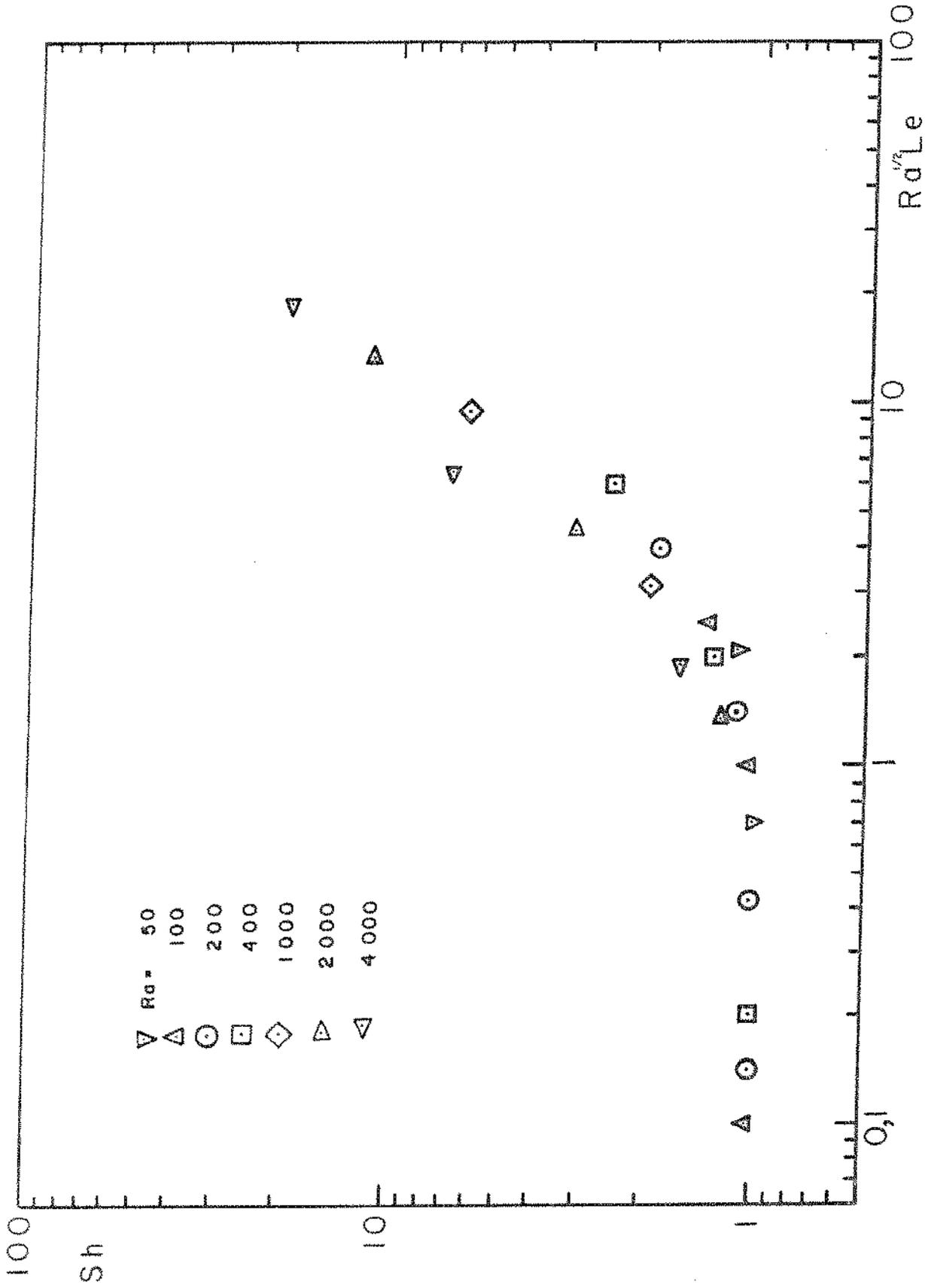


FIGURA 2.8 - Correlação dos resultados numéricos mostrando a transição do regime 1.1.b.1 para o regime 1.1.b.2 (N=0, H/L=1)

com o critério de transição da eq. (2-34) e com a escala do número de Sherwood na eq. (2-45). A Fig. 2.8 mostra também que quando o grupo  $Le Ra^{3/2}$  da abscissa excede a ordem 0(1), o número de Sherwood varia conforme  $Le Ra^{3/2}$ , confirmando o resultado da análise de escala para o regime 1.1.b.1.

Seguindo a lógica do estudo, a segunda série de experimentos numéricos deveria ser dedicada a explorar os fluxos pertencentes à classe 2. Este trabalho é, no entanto, poupado pela observação das propriedades de simetria das equações (2-4) a (2-7), que asseguram também que toda a argumentação apresentada vale, mutatis mutandis, identicamente para os fluxos desta outra classe. Portanto, retomando o conjunto de transformações (2-46) e o mapa da Fig. 2.3, os testes apresentados nas Fig. 2.7 e 2.8 validam também a análise de escala para os regimes correspondentes dos fluxos dirigidos pela transferência de massa.

Entre os fluxos limites representados pelas classe 1 e classe 2 temos os regimes com valores finitos do parâmetro  $N$ . A sequência de simulações planejada para investigar os efeitos da razão de empuxo sobre o movimento do fluido está documentada resumidamente na Tabela 2.4. A Fig. 2.9 nos fornece uma visão geral do comportamento do fluxo revelado pelas simulações. O aspecto mais notável da influência de  $N$  é a supressão da convecção como mecanismo de transporte. A supressão do movimento se acentua nas vizinhanças de  $N = -1$ , ou seja, nos fluxos em que os efeitos dos empuxos causados pelos gradientes de temperatura e concentração são da mesma ordem de grandeza e de sentidos opostos. No caso limite de  $Le = 1$  o fluxo desaparece completamente para  $N = -1$ .

Quando o número de Lewis é diferente de 1, a passagem de  $N$  pelo valor  $-1$  não é acompanhada pela extinção completa do movi

TABELA 2.4 - Resumo dos resultados numéricos sobre o efeito da razão de empuxo ( $R_a = 200$ ,  $H/L = 1$ )

N	Fator de relaxação de C	Sh Eq. (2-49)	Sh <sub>Err</sub> <sup>b</sup> Eq. (2-50)	Fator de relaxação de T	Nu Eq. (2-48)	Nu <sub>Err</sub> (%) Eq. (2-50)	
Le=10	-3,00	1,0	39,71	0,24	1,2	4,20	0,95
	-2,00	1,0	26,67	0,03	1,2	2,60	0,21
	-1,50	1,0	18,37	0,05	1,2	1,75	0,24
	-1,30	1,1	14,30	0,42	1,2	1,57	0,10
	-1,15	1,1	11,28	0,01	1,2	1,51	0,11
	-1,00	1,0	7,50	0,24	1,2	1,45	0,20
	-0,85	0,6	8,63	0,79	1,1	3,09	0,08
	-0,70	0,8	11,22	0,05	1,1	3,60	0,02
	-0,50	1,0	15,02	0,20	1,1	4,21	0,01
	+0,50	1,0	28,99	0,10	1,1	6,70	0,03
	+1,00	1,0	32,68	0,10	1,1	8,40	0,05
	+2,00	1,0	36,47	0,09	1,1	11,17	0,05
Le=1	-5,0	1,1	15,92	0,04	1,1	15,92	0,04
	-4,0	1,1	13,07	0,04	1,1	13,07	0,04
	-3,0	1,0	9,69	0,05	1,2	9,69	0,06
	-2,0	1,4	5,61	0,02	1,2	5,61	0,10
	-1,5	1,2	3,27	0,12	1,3	3,26	0,11
	-1,0	1,2	1,00	0,08	1,3	1,0	0,01
Le=0,1	-5,0	1,1	3,02	0,03	1,2	13,29	0,11
	-3,0	1,1	2,04	0,04	1,1	8,15	0,11
	-2,0	1,1	1,54	0,12	1,2	5,24	0,26
	-1,0	1,1	1,00	0,34	1,1	1,00	0,34
	+1,0	1,1	1,44	0,42	1,0	8,95	0,04
	+3,0	1,1	2,48	0,13	1,1	13,76	0,05

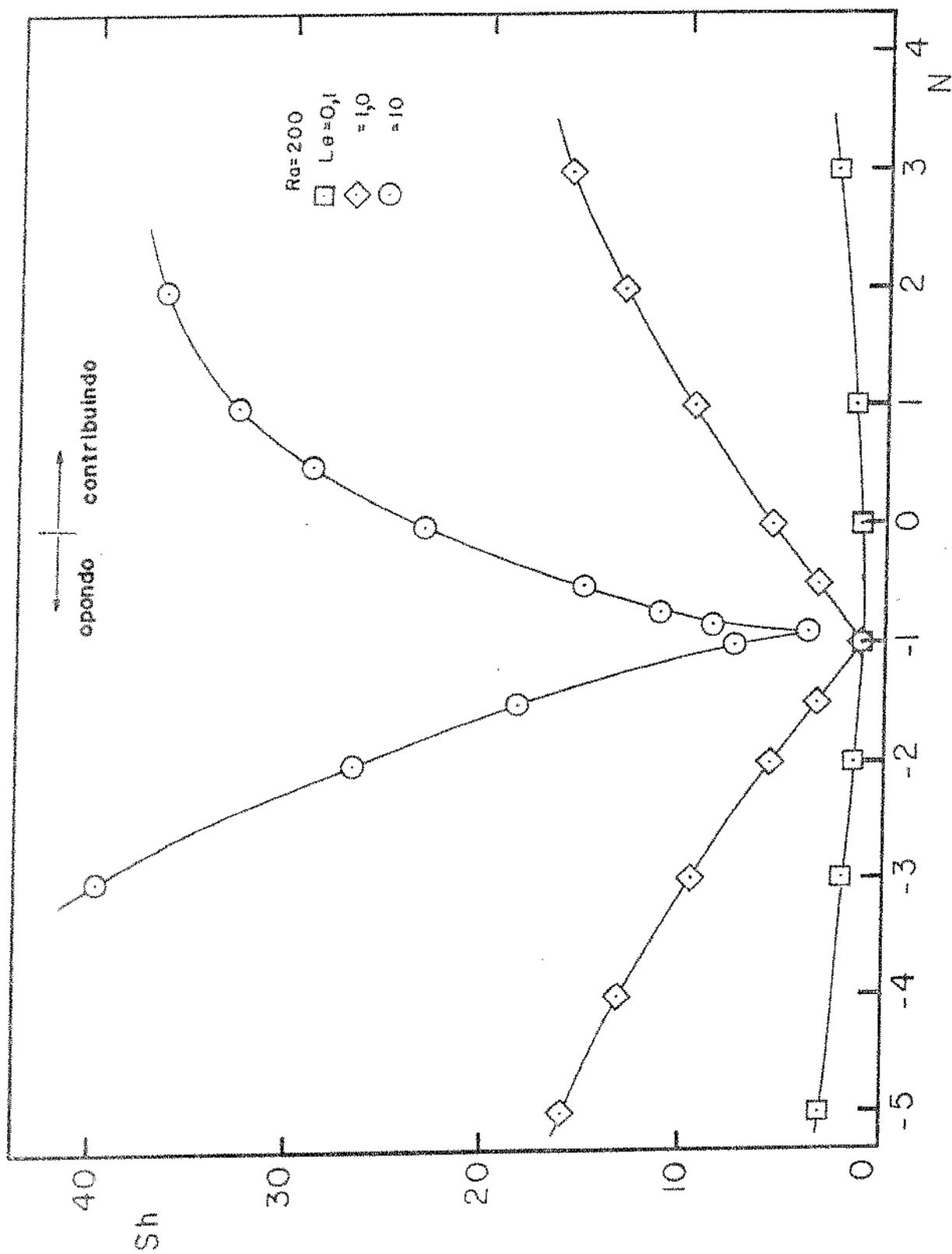


FIGURA 2.9 - Efeito da razão de empuxo sobre a taxa global de transferência de massa

mento do fluido. Este aspecto é ilustrado pela sequência de mapas de fluxo, temperatura e concentração dispostos na Fig. 2.10. Os fluxos apresentados nesta figura correspondem ao regime de camada limite quando os valores de  $N$  são suficientemente diferentes de  $-1$ . Também o valor de  $Le = 10$  significa que nestes casos a camada limite da concentração é mais fina que a camada limite térmica.

A Fig. 2.10(a) mostra que para valores de  $N$  algebricamente maiores que  $-0,85$  o padrão de movimento é aquele esperado para a convecção natural numa camada porosa sem a oposição de um segundo efeito de empuxo. O fluxo circula no sentido horário e as camadas limites de  $T$  e  $C$  partem dos vértices esquerdo inferior e direito superior. Esta configuração é completamente revertida para valores de  $N$  da ordem de  $-3,0$  ou menores (Fig. 2.10(e)). A mudança dos fluxos que começa a ser notada nas Fig. 2.10(b) e 2.10(d) ocorre bruscamente por volta de  $N = -0,90$ . Na transição da predominância de um efeito de empuxo para outro, o fluxo torna-se moroso e dividido em basicamente duas células. O centro da cavidade porosa que apresentava estratificação da temperatura e da concentração passa a ser dominado por linhas verticais de  $T$  e  $C$ . Esta observação é coerente com a tendência dos números  $Nu$  e  $Sh$  de se aproximarem do limite da difusão pura (ver as curvas em forma de  $V$  da Fig. 2.9).

Um teste adicional da análise de escala é mostrado na Fig. 2.11. Os resultados da Tabela 2.4 são usados para mostrar que o número de Sherwood dos fluxos dirigidos pela transferência de massa variam segundo a lei  $(Ra |N| Le)^{1/2}$ , de acordo com a relação obtida pela análise para os fluxos de classe 2 (Fig. 2.3). Notar que no denominador do parâmetro da ordenada na Fig. 2.11 foi usado o grupo  $(Ra Le |N+1|)^{1/2}$  em vez do  $(Ra Le N)^{1/2}$  recomendado pe

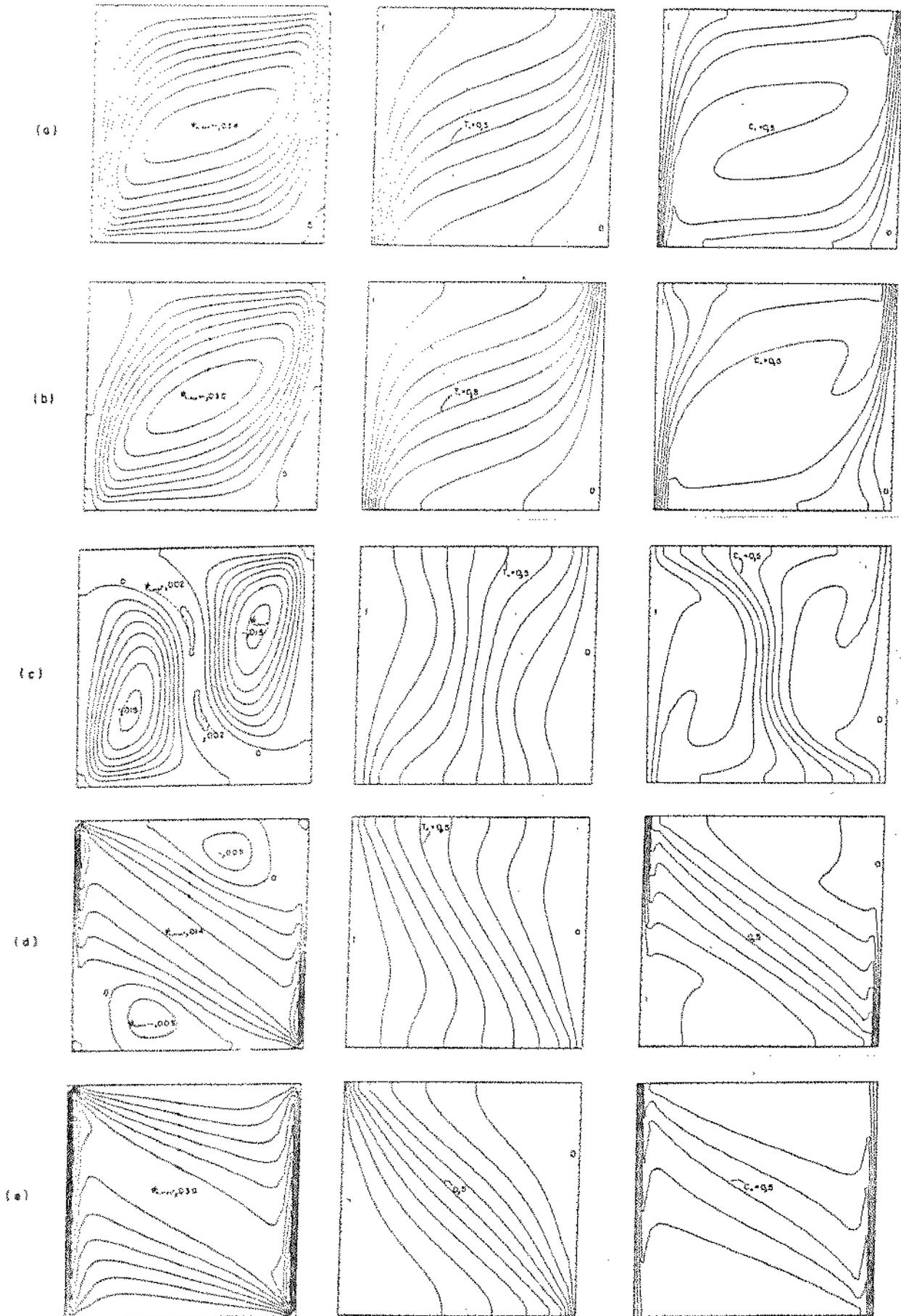


FIGURA 2.10 - Mapas de linhas de fluxo, isotermas e isotônicas, mostrando a reversão de fluxo em torno de  $N=-1$  ( $Ra=200, Le=10, H/L=1$ ) a)  $N=-0,50$  b)  $N=-0,85$  c)  $N=-0,90$  d)  $N=-1,50$  e)  $N=-3,0$

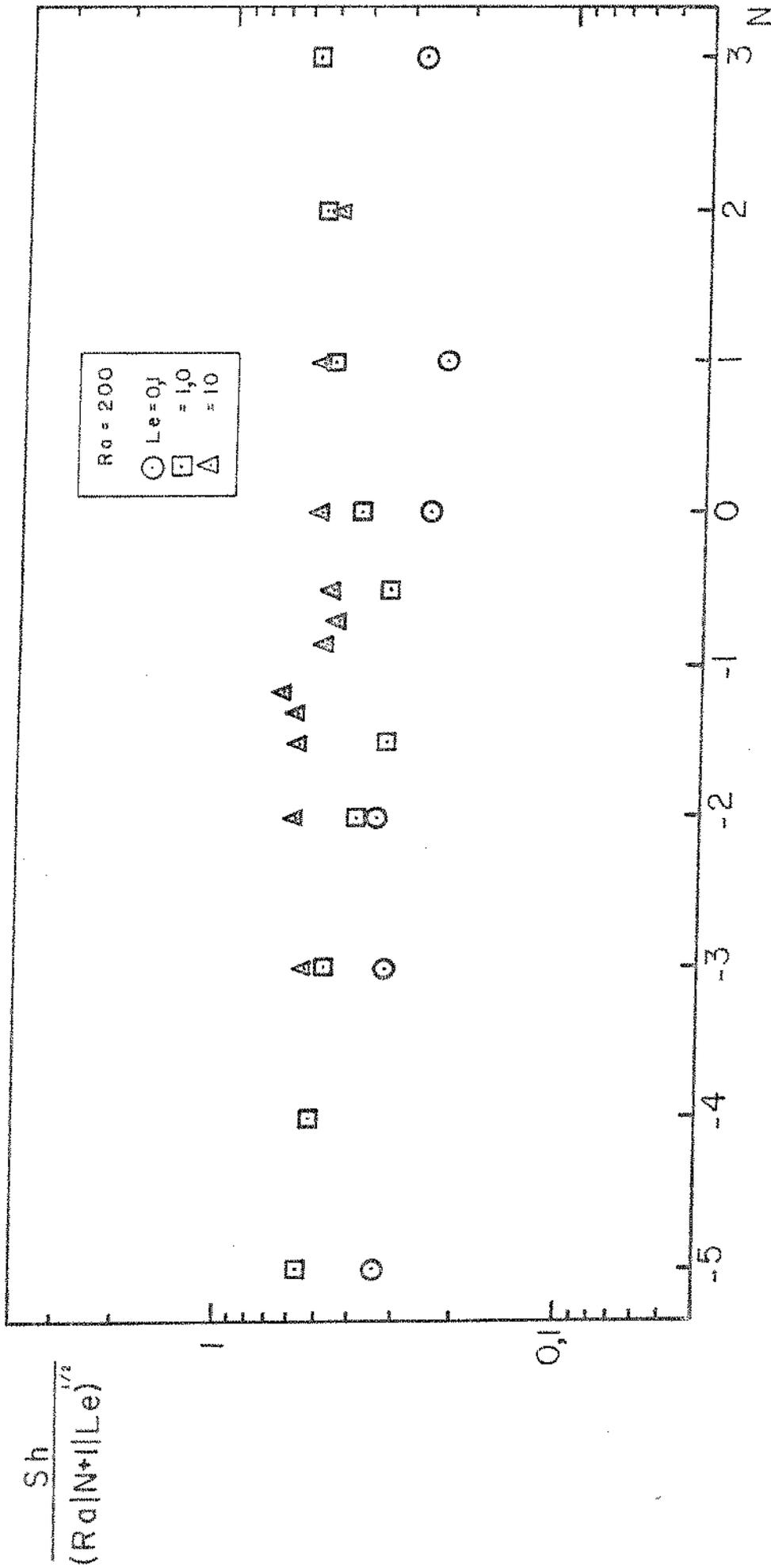


FIGURA 2.11 - Correlação dos resultados numéricos para fluxo em toda a faixa da razão de empuxo

la análise para os regimes de  $|N| \gg 1$ . Este pequeno ajuste é sugerido pela reversão do fluxo e supressão da convecção que, como já descrito, ocorre nas proximidades de  $N = -1$ . Como se depreende do gráfico, a razão  $Sh/(Ra Le|N+1|)^{1/2}$  é persistentemente constante na faixa de  $Le$  de  $-5$  a  $+3$ . Note-se que esta relação escalar vale também para as regiões limites de  $N$ , ou seja, para  $N$  de ordem  $O(1)$ .

Em resumo podemos concluir que os resultados numéricos confirmam as tendências, os domínios de validade e a classificação dos regimes de fluxo previstos pela análise teórica de ordem de grandeza.

## CAPÍTULO III

CAVIDADE POROSA COM FLUXOS CONSTANTES  
NAS PAREDES LATERAIS1 - Formulação e Solução Linearizada

Reconsideremos a geometria porosa estudada no capítulo anterior, agora sob a condição externa de fluxos constantes. Nesta nova situação as paredes verticais do retângulo poroso estão sujeitas a fluxos uniformes de calor e constituinte químico, enquanto as paredes horizontais são consideradas como termicamente isoladas e impermeáveis ao fluxo de massa. A Fig. 3.1 esquematiza o problema a ser estudado.

No modelamento teórico do fenômeno de transporte ora em análise, vale a formulação apresentada no Capítulo II mudando-se apenas as condições de contorno das paredes verticais, que passam então a ser:

$$q'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0,L} = \text{constante} \quad (3-1)$$

$$j'' = -D \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0,L} = \text{constante} \quad (3-2)$$

No regime de camada limite, a circulação da solução flui da se dá basicamente através de regiões muito estreitas ao longo

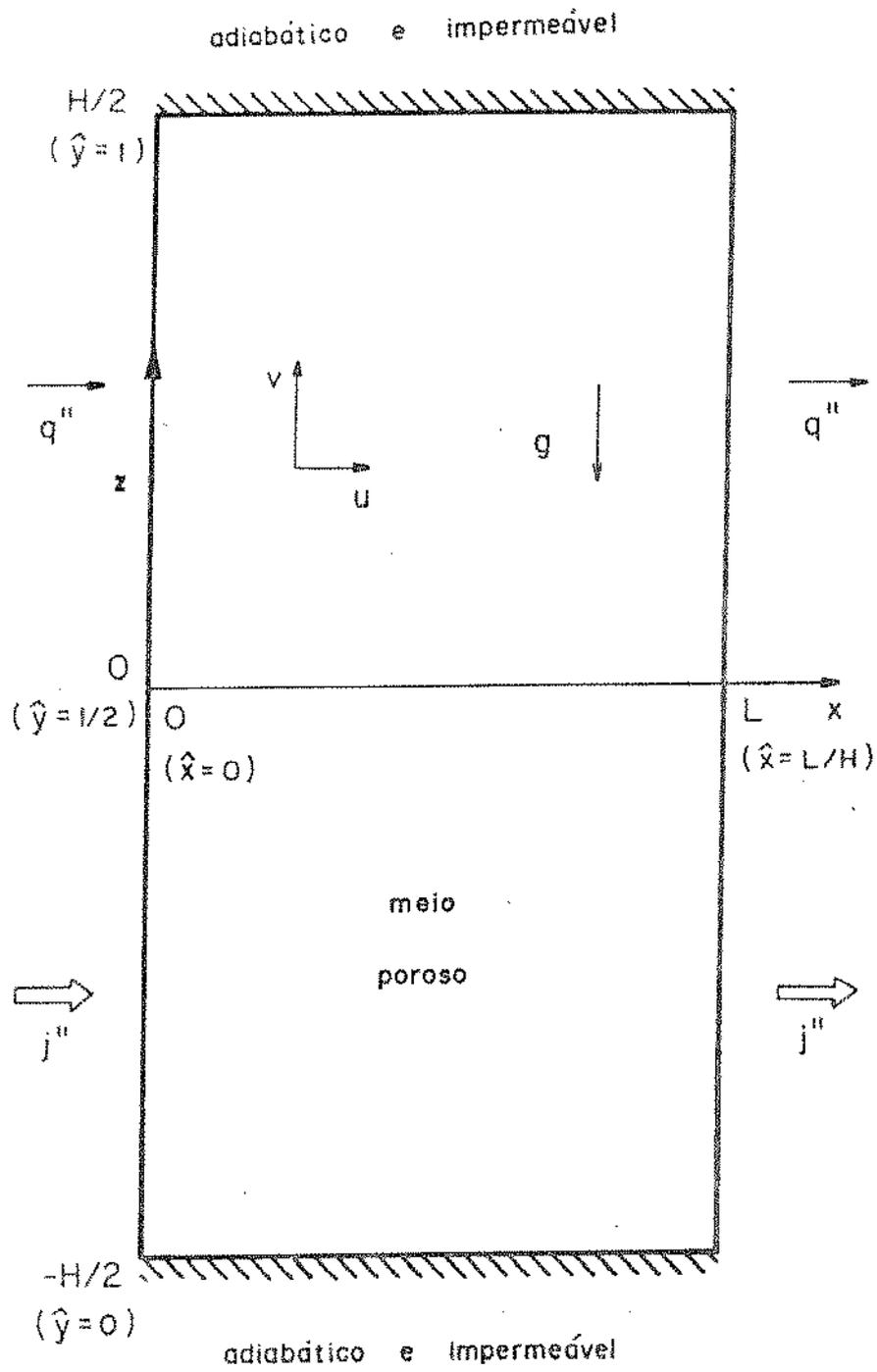


FIGURA 3.1 - Esquema da camada porosa sujeita a fluxos uniformes nas paredes laterais

das duas paredes verticais. A espessura dessas regiões é muito pequena quando comparada com a extensão horizontal da cavidade porosa e pode-se mostrar (Apêndice A) que dentro do domínio das referidas regiões o fenômeno é governado por equações mais simples do que as descritas no conjunto das eqs. (2-4) a (2-7). Pela avaliação da ordem de grandeza dos seus termos as equações se reduzem a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{gK}{\nu} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3-4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3-5)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial z} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3-6)$$

Observando a similaridade entre as equações acima e as referentes a outros problemas de camada limite estudados anteriormente [14, 25], somos sugeridos a procurar a solução pelos métodos que se mostraram eficazes e bem sucedidos naqueles casos, como o da técnica de linearização do tipo Oseen. Os aspectos principais da solução obtida via esta técnica para o problema de transferência de calor na ausência de constituinte químico (ver Apêndice B) são:

- a) espessura constante da camada limite
- b) fluido estagnante na região central da cavidade  
( $u=0, v=0$ )
- c) estratificação linear da temperatura na região cen.

tral da cavidade

- d) aumento da temperatura das paredes verticais na mesma proporção da temperatura da região central

Estas propriedades, trazidas para o contexto do problema de transferência de calor e espécie ora em estudo, recomendam a seguinte transformação para as funções de distribuição da temperatura e da concentração nas regiões das camadas limites verticais:

$$T(x, z) = t(x) + T_0 + a z \quad (3-7)$$

$$C(x, z) = c(x) + C_0 + b z \quad (3-8)$$

onde as constantes  $T_0$  e  $C_0$  representam os valores de referência medidos no centro geométrico do meio poroso ( $x=L/2$ ,  $z=0$  na Fig. 3.1) e  $a$  e  $b$  são os gradientes verticais constantes de temperatura e concentração medidos na região central da cavidade. As funções  $t(x)$  e  $c(x)$  representam os perfis na região próxima à parede vertical esquerda da Fig. 3.1, e têm a propriedade:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (t, c) = 0 \quad (3-9)$$

Substituindo as transformações (3-7) e 3-8) nas equações (3-3 a 3-6) obtemos, em ordem:

$$v = \frac{Kg}{\nu} (\beta t + \beta_c c) \quad (3-10)$$

$$av = \alpha t'' \quad (3-11)$$

$$bv = Dc'' \quad (3-12)$$

A equação da variação de quantidade de movimento (3-10) foi obtida da integração de (3-4) através da camada limite e posterior aplicação da condição limite (3-9). Eliminando-se  $v$  e  $c$  das equações (3-10) a (3-12) resulta a equação linear de quarta ordem em  $t$

$$t^{iv} - \gamma^2 t'' = 0 \quad (3-13)$$

$$\gamma^2 = \frac{Kg \beta a}{\alpha \nu} (1+n) \quad (3-14)$$

$$n = \frac{\alpha b \beta_c}{D a \beta} \quad (3-15)$$

cuja solução geral é da forma:

$$t(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} + A_3 + A_4 x \quad (3-16)$$

Usando a condição de concordância com a solução no centro do meio poroso (3-9) e a condição de fluxo uniforme no contorno lateral (3-1), a função perfil de temperatura (3-16) se reduz a

$$t(x) = \frac{q''}{\gamma k} e^{-\gamma x} \quad (3-17)$$

O perfil  $c(x)$  pode ser obtido dividindo-se lado a lado, uma pela outra, as equações (3-11) e (3-12) e integrando-se duas vezes o resultado através da região da camada limite.

$$c(x) = \frac{\alpha b q''}{D a \gamma} e^{-\gamma x} \quad (3-18)$$

Da aplicação da condição de fluxo constante (3-2) ao perfil de concentração (3-18) resulta uma relação importante entre os parâmetros  $a$  e  $b$  da estratificação na região central.

$$\frac{a}{b} = \frac{q''\alpha}{j''k} \quad (3-19)$$

Finalmente a velocidade vertical compatível com os resultados (3-17), (3-18) e a equação (3-10) é

$$v = \frac{\alpha\gamma q''}{ak} e^{-\gamma x} \quad (3-20)$$

Resumindo os resultados obtidos até este ponto, a camada limite próxima à parede vertical da Fig. 3.1 é caracterizada pelo perfil de velocidade (3-20), pela distribuição de temperatura expressa nas equações (3-7) e (3-17) associadas e pela distribuição de concentração descrita nas equações (3-8) e (3-18). A mesma sequência de raciocínio pode ser empregada para se obter os perfis válidos na camada limite que acompanha a parede direita da geometria. Estes perfis podem também ser obtidos, e de forma mais imediata, a partir do reconhecimento das propriedades de simetria central em relação ao ponto  $(x=L/2, z=0)$  que caracterizam o problema e cujas expressões matemáticas traduzem

$$\begin{aligned} v(x, z) &= -v(L-x, -z) \\ T(x, z) &= -T(L-x, -z) \\ C(x, z) &= -C(L-x, -z) \end{aligned} \quad (3-21)$$

Definindo  $x_1$  como uma nova coordenada horizontal, medida

no sentido negativo de  $x$  a partir da parede direita ( $x=l$ ), podemos escrever

$$v_R = - \frac{\alpha \gamma q''}{ak} e^{-\gamma x} \quad (3-22)$$

$$T_R = - \frac{q''}{k\gamma} e^{-\gamma x} + T_0 + az \quad (3-23)$$

$$C_R = \frac{-j''}{D\gamma} e^{-\gamma x} + C_0 + bz \quad (3-24)$$

Neste ponto do desenvolvimento a solução depende da de terminação dos gradientes  $a$  e  $b$ , ainda desconhecidos. As referi das constantes podem ser determinadas a partir da observação que no volume de controle da Fig. 3.2:

- a) o fluxo líquido de entalpia que cruza a fronteira si tuada em qualquer altura arbitrária  $z$  deve ser com pensado por igual soma de energia térmica transferida verticalmente por difusão. Ou seja,

$$\int_0^{\infty} \rho c_p v T dx + \int_0^{\infty} \rho c_p v_R T_R dx = \int_0^L k \frac{\partial T}{\partial z} dx \quad (3-25)$$

- b) um balanço equivalente deve ser obedecido para a trans ferência de massa. Neste caso,

$$\int_0^{\infty} v C dx + \int_0^{\infty} v_R C_R dx = \int_0^L D \frac{\partial C}{\partial z} dx \quad (3-26)$$

Substituindo as expressões dos perfis encontrados ante riormente, as condições (25) e (26) fornecem, respectivamente

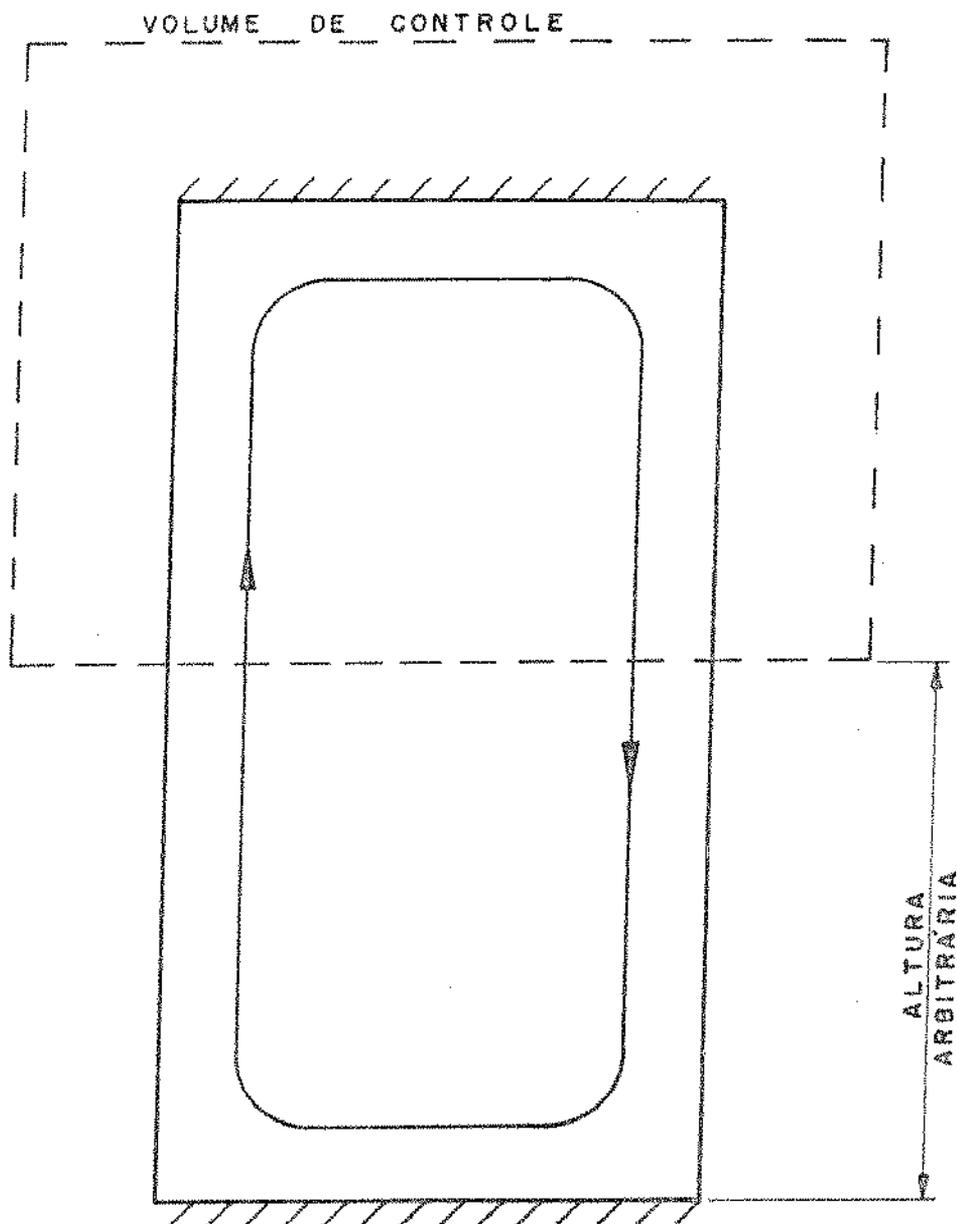


FIGURA 3.2 - Esquema do volume de controle usado para determinar os gradientes na região central

$$a = \frac{q''}{k(\gamma L)^{1/2}} \quad (3-27)$$

$$b = \frac{j''}{D(\gamma L)^{1/2}} \quad (3-28)$$

Uma limitação importante da solução analítica agora concluída surge da confrontação das expressões recém obtidas para os gradientes  $a$  e  $b$  (3-27) e (3-28), com a relação entre eles (3-19), derivada anteriormente na análise. Como resultado, as três equações são satisfeitas conquanto  $Le = 1$ , o que no plano mais geral significa que a solução linearizada desenvolvida é válida somente para os casos em que a difusividade térmica do meio poroso saturado é igual à difusividade de massa do constituinte envolvido.

As diferenças de temperatura e concentração calculadas de parede a parede são independentes da posição  $z$  e podem ser avaliadas como

$$\Delta T = T_{x=0} - T_{x=L} = 0 - 0 = 2t_{x=0} = \frac{2}{\gamma} \quad (3-29)$$

$$\Delta C = C_{x=0} - C_{x=L} = 0 - 0 = 2c_{x=0} = \frac{2}{\gamma} \quad (3-30)$$

As duas últimas expressões são úteis para determinar os números de Nusselt e Sherwood médios, calculados em referência a difusão para

$$Nu = \frac{q''}{k\Delta T/L} \quad (3-31)$$

$$Sh = \frac{j''}{D\Delta C/L} \quad (3-32)$$

que, conforme a notação original de  $\gamma$ , eq. (3-14), e os resultados expressos nas eq. (3-27) e (3-29) a (3-30), valem

$$Sh = Nu = \frac{1}{2} (H/L)^{-4/5} Ra_{\ell}^{2/5} (1+n)^{2/5} \quad (3-33)$$

onde  $Ra_{\ell}$  é o número de Darcy-Rayleigh calculado com base no fluxo de calor.

$$Ra_{\ell} = \frac{K g \beta H^2 q''}{\alpha v k} \quad (3-34)$$

O domínio de validade da expressão (3-33), bem como o de toda a análise que culmina na sua derivação, é aquele delimitado pela condição que as camadas limites são muito finas quando comparadas com a extensão da cavidade. Tal pressuposição, agora colocada como um requisito, pode ser entendida como a da predominância da convecção como mecanismo de transporte e, já que os números Nu e Sh foram definidos em referência à difusão pura, redundando na condição

$$(Nu, Sh) > 1 \quad (3-35)$$

## 2 - Solução Similar

O efeito do número de Lewis no transporte de constituinte químico pode ser determinado analiticamente se dirigirmos a atenção para os chamados "fluxos dirigidos pela transferência de calor", em cujos limites o valor do parâmetro  $n$  é bem menor que a unidade. Neste domínio, as equações de conservação da variação da quantidade de movimento e da energia constituem um sistema in

dependente e sua solução é a mesma apresentada para o caso de transferência de calor na ausência de espécie química (v. Apêndice B). Determinados os campos de velocidade e temperatura, resta examinar a transferência de massa efetuada por este fluxo. Para tanto necessitamos resolver a equação de conservação do constituinte químico (3-6) então com os termos das velocidades substituídos por  $u = 0$  e  $v$  dado pela equação (3-20) com  $n = 0$ . Nos casos em que o número de Lewis é muito maior que a unidade, a camada limite da concentração é muito mais fina que a sua correspondente camada hidrodinâmica. Em consequência, o termo da velocidade  $v$  na eq. (3-6) pode ser aproximado por seu valor em  $x = 0$ , simplificação que será tão mais válida quanto mais fina for a camada limite da concentração, ou quanto maior o número de Lewis. A equação (3-6) se reduz então a:

$$\frac{\alpha \gamma_0 q''}{a_0 k} \frac{\partial C}{\partial z} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3-36)$$

onde

$$\gamma_0 = \left[ \frac{kg \beta a_0}{\alpha v} \right]^{1/2}$$

$$a_0 = \frac{q''}{k(\gamma_0 L)^{1/2}}$$

que associada à condição de contorno lateral de fluxo uniforme de massa, eq. (3-2), e sujeita à condição de concentração média constante na região central da cavidade porosa, externa portanto à região da camada limite (ver perfis isotônicos da Fig. 3.3(d)), reproduz um sistema passível de solução por similaridade.

Tomando como variáveis de similaridade:

$$C - C_0 = \left(\frac{\lambda}{Le}\right)^{1/2} f(\eta) - \frac{j''}{D} H Ra_\ell^{-1/3} \quad (3-37)$$

$$\eta = \bar{x} \left(\frac{\lambda}{Le} \bar{y}\right)^{-1/2} \quad (3-38)$$

$$\lambda = \left(\frac{H}{L}\right)^{1/5} Ra_\ell^{1/15} \quad (3-39)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{H Ra_\ell^{1/3}} \quad (3-40)$$

$$\bar{y} = \frac{z}{H} + 1/2 \quad (3-41)$$

e substituindo-as na eq. (3-36), o problema passa a ser descrito pela formulação:

$$f'' + \frac{\eta}{2} f' - \frac{1}{2} f = 0 \quad (3-42)$$

$$f' = -1 \quad \text{em } \eta = 0 \quad (3-43)$$

$$f \rightarrow 0 \quad \text{para } \eta \rightarrow \infty \quad (3-44)$$

O sistema diferencial ordinário (3-42) a (3-44) foi resolvido usando-se um esquema de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. Os valores da função integral no ponto  $\eta = 0$  foram sucessivamente refinados pelo método "shooting" contendo aproximações do tipo Newton-Raphson. A integração de 0 a  $\eta$  foi repetida até que o critério  $f(\eta) < 10^{-4}$ , com  $\eta \geq 10$ , fosse satisfeito. A solução numérica apresentada na Tabela 3.1 foi obtida usando-se  $\Delta\eta = 0,001$  como valor do passo entre os pontos de integração. A solução então de

se desenvolvida mostrou-se insensível a posteriores decréscimos no valor do passo.

Como resultado da solução similar podemos calcular o valor local do número de Sherwood. Retomando a definição dada na eq. (3-32)

$$Sh_y = \frac{j''L}{D \cdot 2(C-C_0)_{x=0}} \quad (3-45)$$

Note-se que o fator 2 aparece multiplicando a diferença de concentração através da camada limite devido ao fato de a diferença total, de parede a parede, da concentração ser duas vezes a primeira diferença. Mas a diferença  $(C-C_0)$  é dada pela eq. (3-37), portanto:

$$Sh_y = \frac{L}{H} Ra_g^{1/3} \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{Le} y \right)^{-1/2} \left[ f(\eta=0) \right]^{-1/2} \quad (3-46)$$

Integrando-se a expressão (3-46) ao longo da extensão vertical da parede, derivamos o número de Sherwood médio para a transferência de massa em questão

$$Sh = 0,665 \left( \frac{L}{H} \right)^{11/10} Le^{1/2} Ra_g^{3/10} \quad (3-47)$$

A fórmula (3-47) se aplica no regime de camada limite, que neste caso traduz-se na exigência de que as camadas limites hidrodinâmica e térmica sejam finas em relação à dimensão da cavidade. A camada limite da concentração obedece automaticamente esta restrição na medida em que o número de Lewis foi assumido por hipótese maior que a unidade. A condição de validade da expressão

TABELA 3.1 - Perfis similares da concentração para fluxos dirigidos pelo calor em números de Lewis elevados

$n$	$f$	$f'$
0,0	1,128	-1,000
0,5	0,698	-0,724
1,0	0,399	-0,479
1,5	0,209	-0,289
2,0	0,100	-0,157
2,5	0,044	-0,077
3,0	0,017	-0,034
3,5	0,006	-0,013
4,0	0,002	-0,005
4,5	0,001	-0,001
5,0	0,000	-0,000

(3-47) é definida a partir da escala da espessura da camada limite térmica, recaindo portanto sobre o transporte térmico que se processa independentemente da presença do constituinte químico. Fazendo  $n = 0$  na expressão (3-33) deduz-se que a espessura da camada térmica é de grandeza  $L Ra_\ell^{-2/5} (H/L)^{4/5}$ , o que torna a condição de validade em

$$Ra_\ell (L/H)^2 > 1 \quad (3-48)$$

Desenvolvimento semelhante pode ser empregado para levantar a influência do número de Lewis na transferência de calor que se processa nos fluxos dirigidos pelo empuxo proveniente das variações de concentração. A bem da brevidade, as propriedades de simetria das eq. (3-3) a (3-6) conferem a oportunidade de resumir os resultados principais usando-se apenas o conjunto de transformações.

$$\begin{aligned} Sh &\rightarrow Nu \\ Le &\rightarrow Le^{-1} \\ Ra_\ell &\rightarrow Ra_\ell n Le \end{aligned} \quad (3-49)$$

Portanto, para os fluxos dirigidos pela transferência de massa o transporte térmico tem o número médio dado por

$$Nu = 0,665 \left(\frac{L}{H}\right)^{11/10} Le^{-1/2} (Ra_\ell n Le)^{3/10} \quad (3-50)$$

quando obedecidos os limites de  $Le < 1$  e  $Ra_\ell n Le \left(\frac{L}{H}\right)^2 < 1$ .

### 3 - Solução Numérica

Para verificar a procedência dos resultados produzidos pela análises anteriores, bem como prover dados sobre a transferência de calor e massa no campo não coberto pela análise, simulamos numericamente o fenômeno a partir do conjunto de equações governantes na forma completa eq. (2-4) a (2-7).

Introduzindo como variáveis adimensionais

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{x}{H} & \hat{y} &= (z + H/2)/H \\ \hat{\psi} &= \frac{\psi}{Ra_\lambda} & & \\ \hat{T} &= \frac{T-T_o}{q''H/k} & \hat{C} &= \frac{C-C_o}{j''H/D}\end{aligned}\tag{3-51}$$

onde  $\psi$  é a função corrente tal que  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  as equações governantes se transformam em

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{T} + n\hat{C}) = -\nabla^2 \hat{\psi}\tag{3-52}$$

$$Ra_\lambda \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) = \nabla^2 \hat{T}\tag{3-53}$$

$$Le Ra_\lambda \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}} \right) = \nabla^2 \hat{C}\tag{2-54}$$

com os parâmetros  $n, Ra_\lambda$  e  $Le$  representando os mesmos números identificados anteriormente na análise do regime de camada limite.

As condições de contorno escritas na mesma formulação fi

CAMI:

$$\bar{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} = -1 \quad \text{em} \quad \hat{x} = 0, \frac{L}{H} \quad (3-55)$$

$$\bar{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{y} = 0,1 \quad (3-56)$$

A discretização das eq.(3-52)-(3-56) foi desenvolvida através da mesma formulação empregada na solução numérica descrita no Capítulo II.

Uma grade não uniforme foi projetada para cobrir a geometria do problema. Com  $(m-1) \times (p-1)$  linhas definindo  $m \times p$  volumes de controle a rede dispunha os menores volumes de controle ao longo dos contornos da geometria. De tamanhos ajustáveis para cada caso, estes volumes de controle foram feitos suficientemente pequenos de modo que, em todas as situações simuladas, ao menos três pontos (nós) se situassem dentro da região da camada limite mais estreita. O refinamento da rede foi desenvolvido mantendo-se constante o seu número total de pontos. Assim, por consequência, o interior afastado das fronteiras foi coberto por um número de volumes de controle proporcionalmente menor, tão menor quanto mais refinada a rede ao longo das paredes. A grade foi de tal forma construída que a dimensão de um volume de controle refinado é  $1/s$  da dimensão de um não refinado, situado na região central da cavidade. Relativamente ao uso de uma grade uniforme, o emprego da rede não uniforme desenvolvida acelerou a convergência da solução, principalmente nos casos de números de Rayleigh mais elevados.

O efeito da não uniformidade da grade nos resultados numéricos está ilustrado na Fig. 3.4 e Tabela 3.2 para o caso da trans

ferência de calor para numa cavidade quadrada sob um elevado número de Rayleigh ( $Ra_g = 10^5$ ,  $n=0$ ,  $Le=1$ ,  $H/L=1$ ). O parâmetro  $s$ , listado ao lado dos pontos dispostos verticalmente acima da abscissa  $10^5$ , representa o número de volumes de controle menores situados próximos a cada parede.

Em toda simulação numérica desenvolvida para a geometria quadrada, usamos a malha de  $32 \times 32$ . Tal número de rede é sugerido pelo teste próprio realizado na solução numérica do Cap.II. Para as cavidades delgadas,  $H/L > 1$ , o número de volumes de controle na direção vertical foi aumentado até 56 (v.Tabela 3.4). Os números  $m$  e  $p$  nestes casos foram tais que a relação  $(m-2s)/(p-2s)$  reproduzisse a razão geométrica da cavidade.

A solução das equações algébricas resultantes da discretização de cada equação governante foi obtida iterativamente pelo esquema ponto-a-ponto. Não se observando benefícios advindos do uso de fatores de relaxação, este artifício foi dispensado nos cálculos. A rotina de atualização dos valores das variáveis  $\hat{\Psi}$ ,  $\hat{T}$  e  $\hat{C}$  obedeceu sequência idêntica à exposta no capítulo anterior. Como primeira distribuição, supusemos fluido estagnado ( $\hat{\Psi}=0$ ) em toda a cavidade, temperaturas e concentrações uniformes ( $\hat{T} = \hat{C} = 0$ ) em todos os pontos a menos daqueles situados nas paredes laterais, em que tiveram seus valores atribuídos de modo a reproduzirem derivadas unitárias ( $\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} = -1$ ). O resíduo Res, definido no critério de convergência, eq. (2-47), foi mantido pequeno o suficiente para produzir valores menores que 1% no cálculo da diferença relativa entre as duas últimas estimativas dos números médios de Nusselt e Sherwood definidos com base na difusão pura.

$$Nu = \frac{L}{H} \left( \int_0^1 \Delta \hat{T} d\hat{y} \right)^{-1} \quad (3-57)$$

$$\text{Sh} = \frac{1}{H} \left( \int_0^1 \bar{\Delta C} \, d\bar{y} \right)^{-1} \quad (3-58)$$

#### 4 - Resultados e Discussão

Neste ítem relatamos os principais resultados obtidos pela via numérica, os confrontamos com aqueles produzidos pelas diferentes análises e comentamos os aspectos de maior interesse das soluções. A escolha dos valores dos parâmetros adimensionais e a seleção de suas combinações ( $Ra_\rho$ ,  $n$ ,  $Le$ ,  $H/L$ ) foram organizadas com o objetivo de investigar o efeito de cada grupo adimensional e, por fim, testar a validade das análises desenvolvidas.

Iniciemos por verificar as Figs. 3.3(a) - 3.3(d), que apresentam uma configuração representativa do fenômeno estudado. Nelas estão ilustrados os conjuntos de linhas de fluxo, isothermas e isotônicas de um fluxo dirigido pelo calor, a um número de Rayleigh suficientemente elevado para que as camadas limites hidrodinâmicas laterais sejam distintas. As isothermas traçadas na Fig. 3.3 (b) confirmam as principais hipóteses assumidas na análise apresentada no ítem 1 deste capítulo. As camadas limites térmicas têm espessura constante e a região central é termicamente estratificada - a temperatura é basicamente uma função da altura.

A concentração, que tem sua distribuição movida pelo fluxo termicamente dirigido, depende significativamente do número de Lewis. Esta dependência é mostrada nas Figs. 3.3(b) - 3.3(d) onde o número de Lewis assume, em sequência, os valores 1; 0,1 e 10. Observe-se que as isothermas do gráfico em 3.3(b) são também as isotônicas, pois neste caso  $Le = 1$ . Para baixos valores do número de

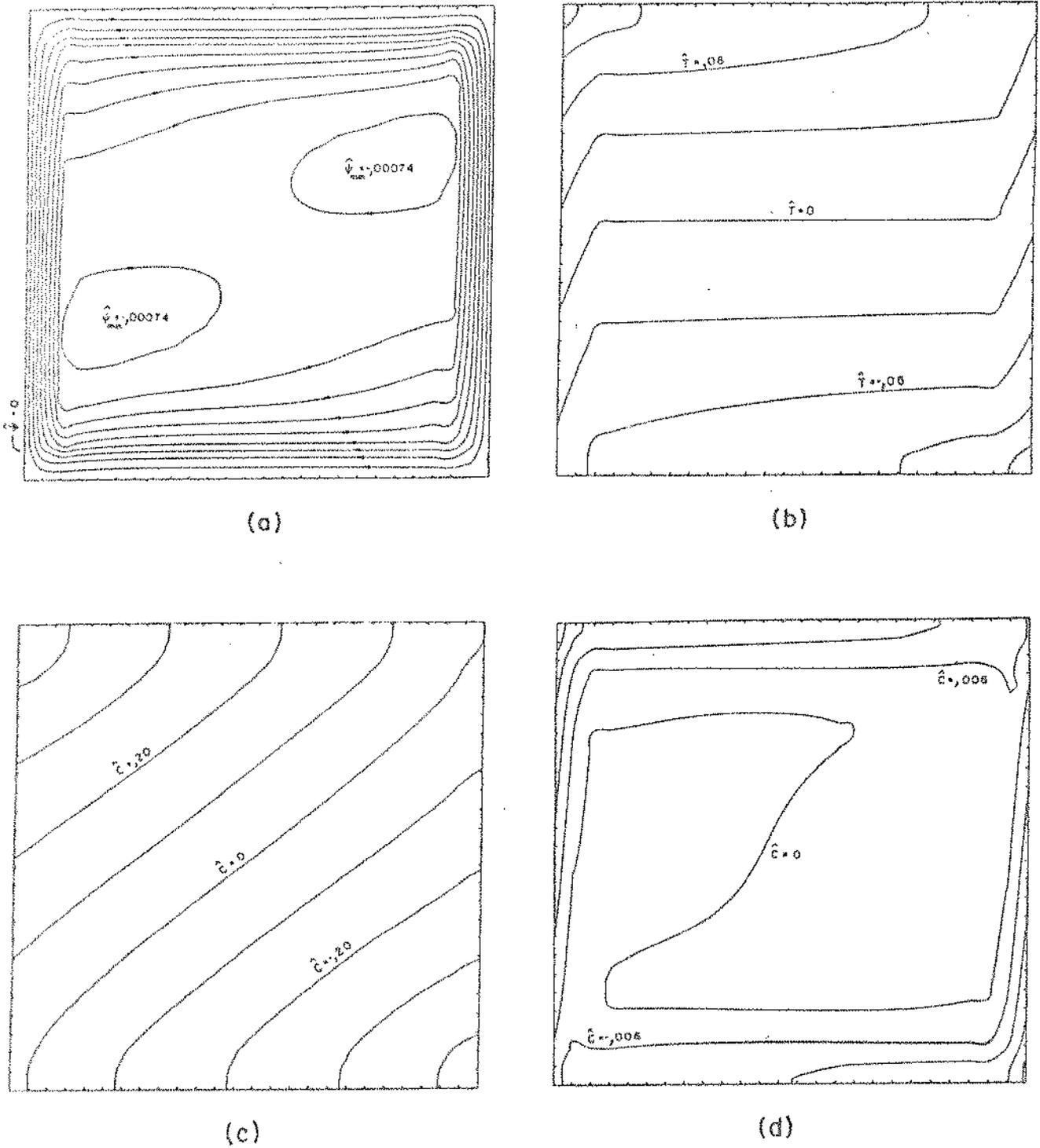


FIGURA 3.3 - Mapas de fluxo, isothermas e isotônicas ( $n=0$ ,  $Ra=10^4$ ,  $H/L=1$ ) a) linhas de fluxo b) isothermas e isotônicas ( $Le=1$ ) c) isotônicas com  $Le=0,1$  d) isotônicas com  $Le=10$

Lewis as camadas limites de concentração são muito espessas, a ponto de se coalescerem, e a transferência de constituinte químico se processa basicamente por difusão. Acoplado à estratificação vertical temos o gradiente horizontal da concentração através da cavidade. Efeito diferente é encontrado nos casos de número de Lewis elevados, onde a camada limite química é mais estreita que a camada térmica. As camadas de intrusão horizontais são também mais finas que as correspondentes térmicas e a distribuição de concentração na região central é praticamente uniforme. Esta última observação vem confirmar a hipótese assumida quando no desenvolvimento da solução similar apresentada no ítem 2 deste capítulo.

A solução linearizada do tipo Oseen, cuja conclusão expressa-se nas correlações de transferência de calor e massa (eq. 3-33), é testada quantitativamente pelas experiências numéricas resumidas nas Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 e nos gráficos das Figs. 3.4, 3.5 e 3.6.

Os resultados documentados nas Tabelas 3.2 e 3.3 foram projetados para investigar a influência dos parâmetros  $Ra_L$  e  $n$ , um por vez, numa cavidade quadrada. O aspecto geométrico da cavidade foi depois variado e o seu efeito pesquisado para valores de  $n$  fixos, matéria de que trata a Tabela 3.4. Constam destas Tabelas, além dos parâmetros adimensionais que caracterizam o problema e do número de transporte resultante da experiência, os valores máximos da função corrente obtidos numericamente, e no caso da Tabela 3.2, o contraponto dos valores previstos pela teoria. Também as diferenças de temperatura (ou concentração), calculadas de parede a parede, são mostradas em duas colunas: uma referente à meia altura da cavidade e a outra avaliada junto aos vértices da geometria.

TABELA 3.2 - Resultados numéricos para fluxos dirigido pelo calor  
( $n=0$ ), numa cavidade quadrada ( $H/L=1$ ) com  $Le=1$  (grade  
de  $32 \times 32$ )

$Ra_\ell$	s	Nu, Sh	$\hat{\Psi}_{\min}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\hat{\Psi}_0$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\hat{\Delta T}, \hat{\Delta C}$ ( $\hat{y}=0,1$ )	$\hat{\Delta T}, \hat{\Delta C}$ ( $\hat{y}=1/2$ )
20	1	1,29	-51,6	-91,0	0,802	0,747
40	1	1,61	-37,5	-52,3	0,669	0,580
100	1	2,29	-21,8	-25,1	0,503	0,387
200	1	3,06	-13,7	-14,4	0,398	0,281
400	1	4,12	- 8,3	- 8,3	0,312	0,205
1000	1	6,15	- 4,2	- 4,0	0,221	0,136
2000	1	8,34	- 2,5	- 2,3	0,166	0,101
4000	1	11,26	- 1,5	- 1,3	0,122	0,076
10000	1	16,36	- 0,9	- 0,6	0,079	0,055
20000	1	20,82	- 0,6		0,057	0,045
	2	22,07	- 0,5	- 0,4	0,063	0,040
40000	1	24,88	- 0,5		0,044	0,039
	2	28,85	- 0,3	- 0,2	0,045	0,032
100000	1	28,12	- 0,4		0,037	0,035
	3	40,80	- 0,2		0,030	0,023
	4	42,58	- 0,1	- 0,1	0,032	0,021

TABELA 3.5 - Resultados numéricos mostrando os efeitos da razão de empuxo  $n$  no regime de camada limite para uma cavidade quadrada ( $Ra_\rho = 2 \times 10^4$ ,  $H/L=1$ ,  $Le=1$ , grade de  $32 \times 32$ )

$n$	$s$	$Nu, Sh$	$\hat{\psi}_{\min}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\hat{\psi}_{\min}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$\Delta\hat{T}, \Delta\hat{C}$ ( $\hat{y}=0,1$ )	$\Delta\hat{T}, \Delta\hat{C}$ ( $\hat{y}=1/2$ )
-11	4	54,84	8,8	0	0,023	0,017
- 5	3	38,92	6,8	0	0,034	0,024
- 3	2	29,46	5,8	0	0,045	0,031
- 2	1	20,82	5,6	0	0,057	0,045
- 1	1	1,01	0	0	0,993	0,993
0	2	22,07	0	-5,0	0,063	0,040
1	2	29,46	0	-5,8	0,045	0,031
3	2	37,45	0	-7,8	0,032	0,025
9	4	54,84	0	-8,8	0,023	0,017

TABELA 3.4 - Resultados numéricos para fluxos dirigidos pelo gradiente de concentração numa geometria moderadamente alta ( $Le=1$ ,  $p=32$ )

Aspecto				$\Psi_{\min}$	$\Delta\hat{T}, \Delta\hat{C}$	$\Delta\hat{T}, \Delta\hat{C}$
Geomético	$Ra_g$	m/s	Nu, Sh	( $\times 10^{-4}$ )	( $\hat{y}=0,1$ )	( $\hat{y}=1/2$ )
H/L=2	5000	44/4	13,48	-13,0	0,0597	0,0336
	10000	44/4	17,85	- 0,8	0,0444	0,0258
	20000	44/4	23,44	- 5,0	0,0325	0,0199
	40000	44/4	30,48	- 3,0	0,0234	0,0156
H/L=4	10000	56/4	10,52	- 5,7	0,0380	0,0225
	20000	56/4	13,82	- 3,5	0,0283	0,0173
	40000	56/4	17,73	- 2,0	0,0216	0,0130
	100000	48/8	22,72	- 1,5	0,0144	0,0108

A Fig. 3.4 testa um dos detalhes da solução linearizada do tipo Oseen, representado pelo decaimento exponencial dos perfis de temperatura na região da camada limite. No gráfico da figura aparecem os perfis de temperatura, calculados numericamente ao longo da ordenada  $\hat{y} = 1/2$ , para dois regimes distintos de fluxo. Os valores obtidos pela via numérica concordam muito bem com os perfis derivados na análise e expressos na eq. (3-17).

A Fig. 3.5, já citada na discussão dos efeitos do parâmetro de não uniformidade da grade ( $s$ ), mostra uma comparação entre os valores dos números de transporte listados nas Tabelas 3.2 e 3.3 e as previsões analíticas da eq. (3-33). Os resultados numéricos correspondem a fluxos de elevados números de Rayleigh, com número de Lewis igual a 1 e confinados numa cavidade quadrada. Os dados pertencem tanto a fluxos dirigidos pelo calor ( $n=0$ , Tabela 3.2) como a fluxos dirigidos pela transferência de constituinte (Tabela 3.3). No gráfico log-log da Fig. 3.5, os pontos seguem de perto a inclinação  $(Ra_\ell(1+n))^{2/5}$ , tendência antecipada pela teoria apresentada. Os resultados numéricos aproximam-se ainda mais da curva teórica assim que as características do regime de camada limite se tornam mais pronunciadas, isto é, à medida que os valores da abcissa aumentam. As Fig. 3.4 e Tabela 3.3 dispõem resultados referentes a valores negativos do grupo  $(1+n)$ , cujo domínio não é abrangido pela análise linear que implicitamente assumiu como positivo o sinal daquele grupo. Da Tabela e gráfico conclui-se que as taxas de transferência de calor e massa previstas pela solução teórica para valores positivos de  $(1+n)$  valem também para valores negativos, se na eq. (3-33) o termo for substituído por seu valor absoluto. Pela simetria dos dados da Tabela 3.3 vê-se que o único efeito líquido da mudança de sinal do grupo é o da rever

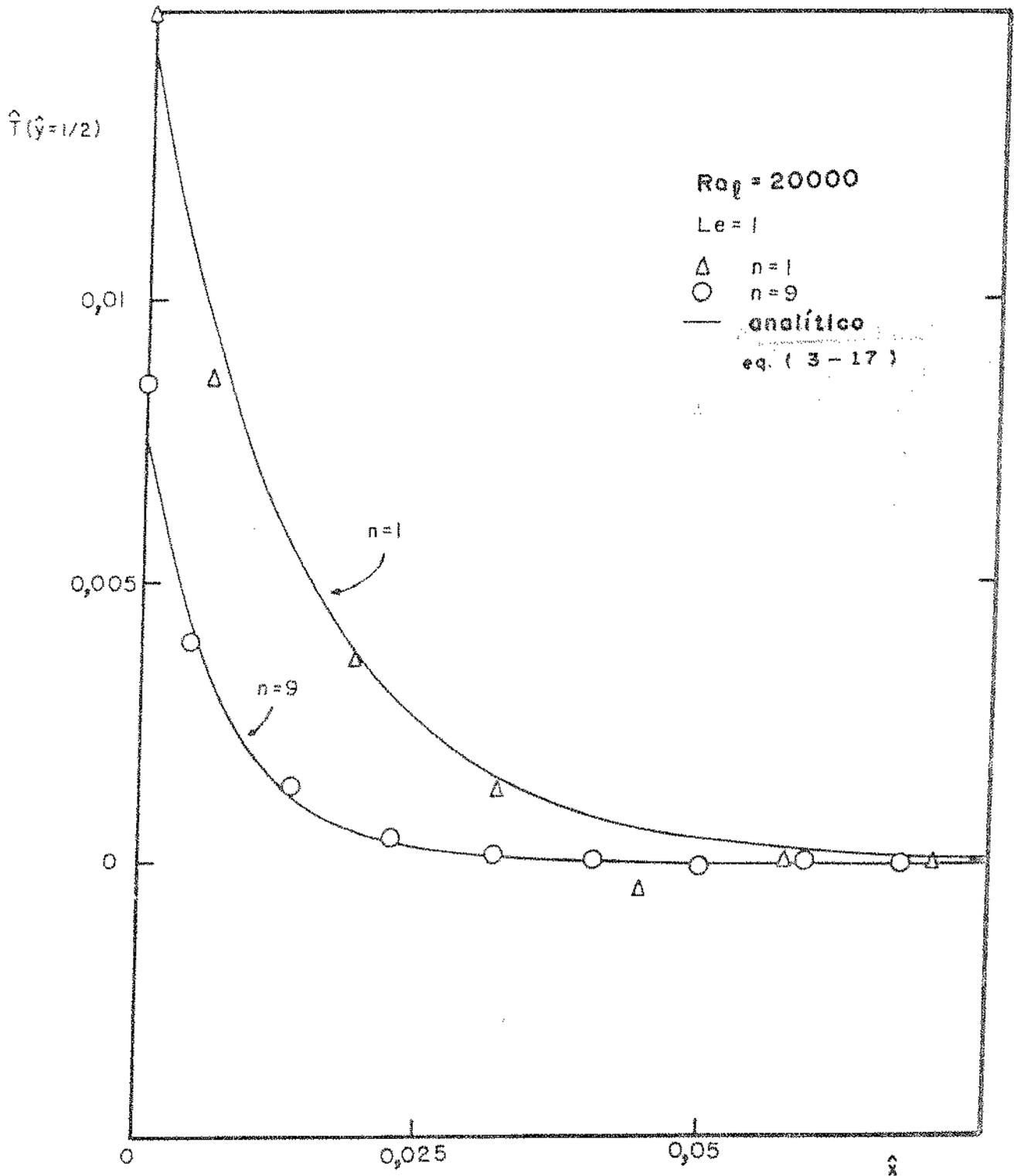


FIGURA 3.4 - Perfis de temperatura na região da camada li mite. Comparação entre a solução linearizada de Oseen e os resultados numéricos

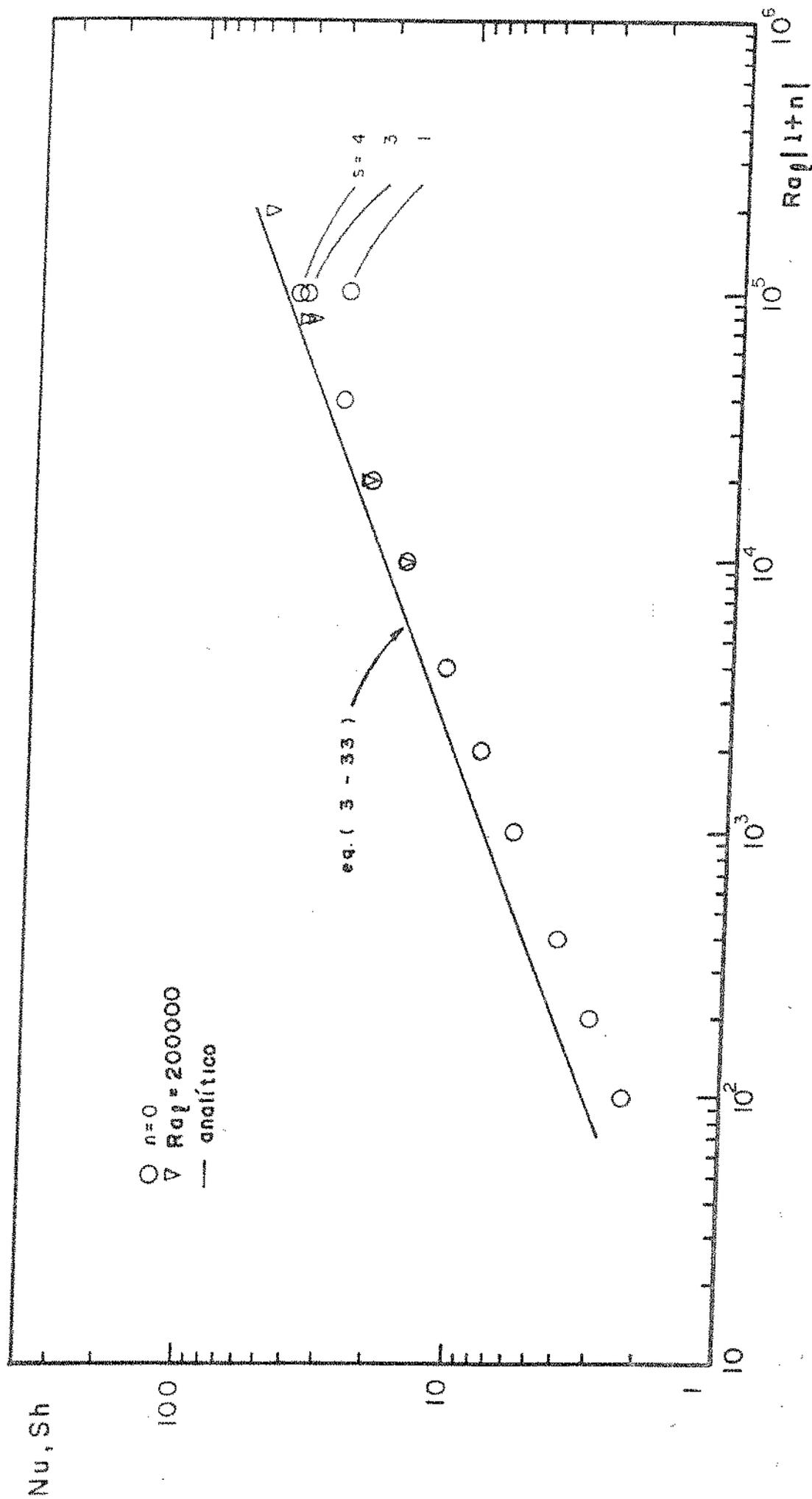


FIGURA 3.5 - Teste de validade da solução linearizada ( $Le=1$ ) contra resultados numéricos em termos de taxas globais de transporte. Efeito do parâmetro de refinamento  $s$ .

são da circulação do escoamento.

O efeito do aumento da razão geométrica característica da cavidade porosa está registrado na Fig. 3.6. A concordância entre os resultados numéricos e a solução analítica melhora com o aumento da razão geométrica, ou seja, com a esbeltez da geometria. Esta tendência é coerente com a hipótese de estrutura paralela da camada limite, sobre a qual a análise foi desenvolvida. Desde que as camadas limites sejam finas o suficiente para que se mantenham distintas, a hipótese será tão mais verdadeira quanto mais delgada for a geometria porosa. O mesmo raciocínio vale na constatação que a concordância na Fig. 3.6 é ainda muito melhor quando a taxa de fluxo local calculada à meia altura de cavidade é considerada, em lugar de sua média global.

Voltando agora a atenção para a solução similar que levou à conclusão da eq. (3-47), as Tabelas 3.5 e 3.6 resumem os resultados numéricos obtidos em ensaios com números de Lewis diferentes da unidade. Todos os casos considerados nestas séries de simulações numéricas são de fluxos dirigidos pelo calor ( $n=0$ ), obedecendo a hipótese principal usada na obtenção da solução similar. Os dados numéricos das duas Tabelas estão convenientemente dispostos nas Figs. 3.7 e 3.8. Na primeira delas os resultados expressos na forma do número de Sherwood são usados para verificar a validade da eq. (3-47). Embora os pontos provenientes dos ensaios se situem persistentemente acima da curva teórica descrita pela eq. (3-47), a tendência  $Sh \sim Le^{1/2} Ra^{3/10}$  antecipada pela análise, é confirmada com muita clareza.

A Fig. 3.8 ilustra o efeito de uma variação ainda mais pronunciada do número de Lewis na taxa de transferência global de constituinte químico. Ocorrendo numa geometria quadrada os fluxos

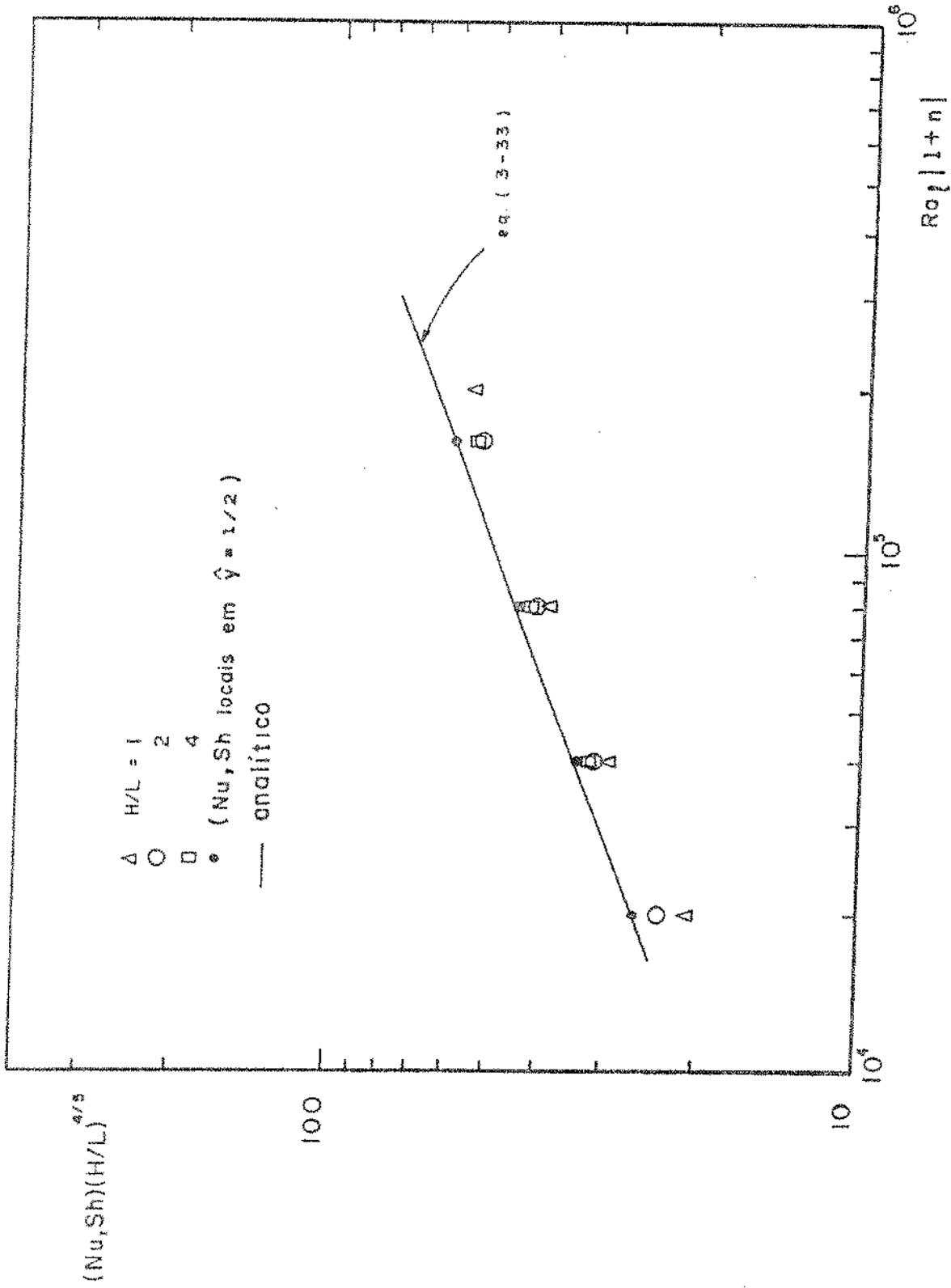


FIGURA 3.6 - Taxas globais de transferência em cavidades moderadamente altas (n=3)

TABELA 3.5 - Resultados numéricos para fluxos dirigidos pelo calor com  $Le \neq 1$ , mostrando o efeito do aumento do número de Rayleigh ( $n=0$ ,  $H/L=1$ , grade de  $32 \times 32$ )

$Ra_\ell$	s	Nu	Sh	
			Le=0,1	Le=10
20	1	1,29	1,00	6,06
40	1	1,61	1,01	7,89
100	1	2,29	1,02	10,89
200	1	3,06	1,03	13,59
400	1	4,12	1,05	16,66
1000	1	6,15	1,09	20,92
	3	6,12	-	24,03
2000	1	8,34	1,14	23,95
	2	8,28	-	29,05
4000	1	11,26	1,23	26,48
	2	11,20	-	34,67
10000	1	16,36	1,50	28,73
	4	16,55	-	50,71
20000	1	20,82	2,00	
40000	1	24,88	3,23	

TABELA 3.6 - Resultado numérico mostrando a influência do número de Lewis no transporte de constituinte químico ( $n=0$ ,  $H/L=1$ , grade de  $32 \times 32$ )

$Ra_g$	$Le$	$s$	$Nu$	$Sh$
1000	0,03	1	6,15	1,00
	0,3	1	6,15	1,76
	2	2	6,13	11,05
	4	3	6,12	15,95
	20	4	6,12	33,23
	40	5	6,12	45,44
10000	4	4	16,63	36,06
	40	8*	16,37	98,58

\* Neste caso a grade foi refinada para  $42 \times 42$

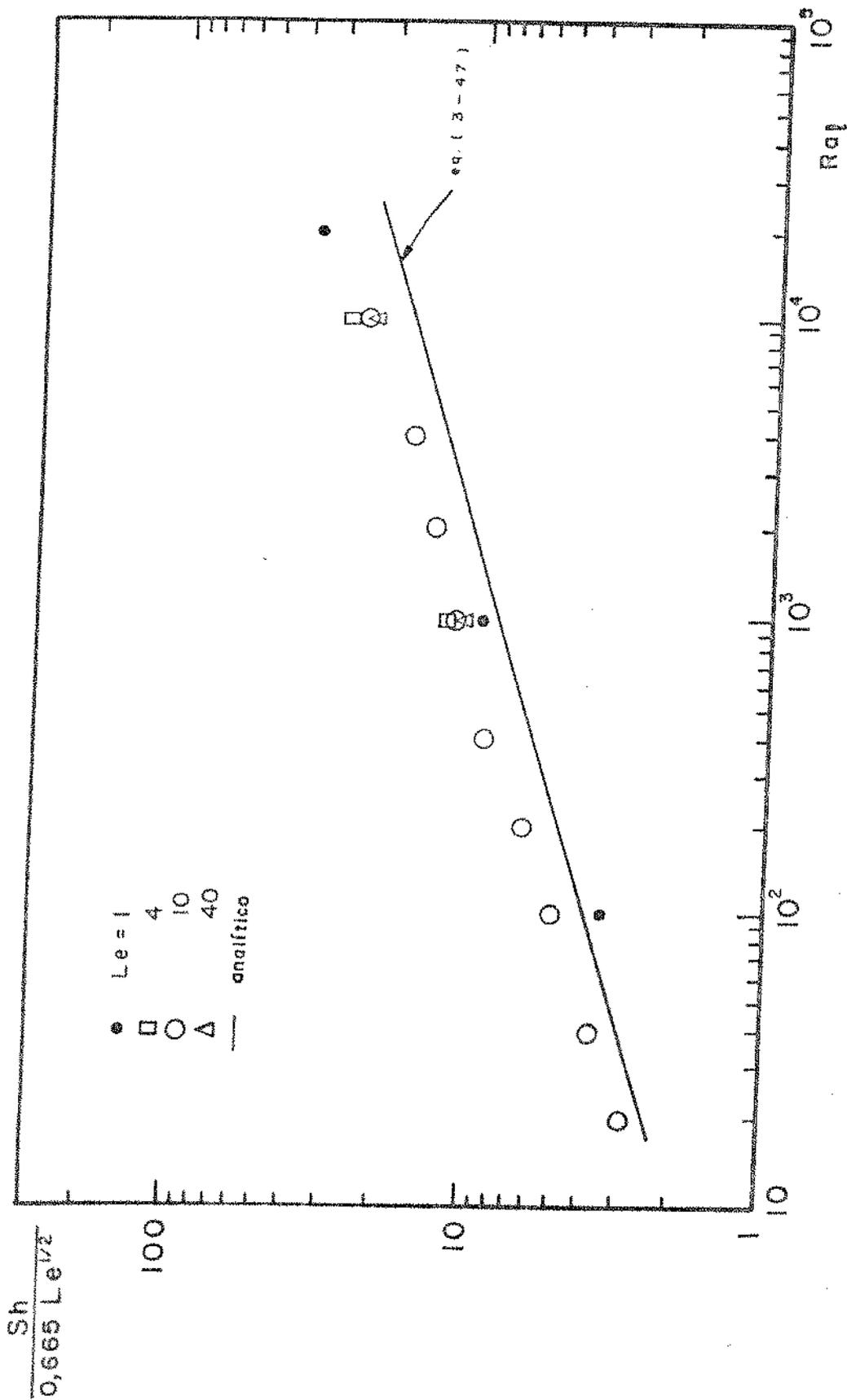


FIGURA 3.7 - Teste de validade da solução similar. Efeito do número de Lewis na transferência de massa em fluxos dirigidos pelo calor ( $n=0, H/L=1$ )

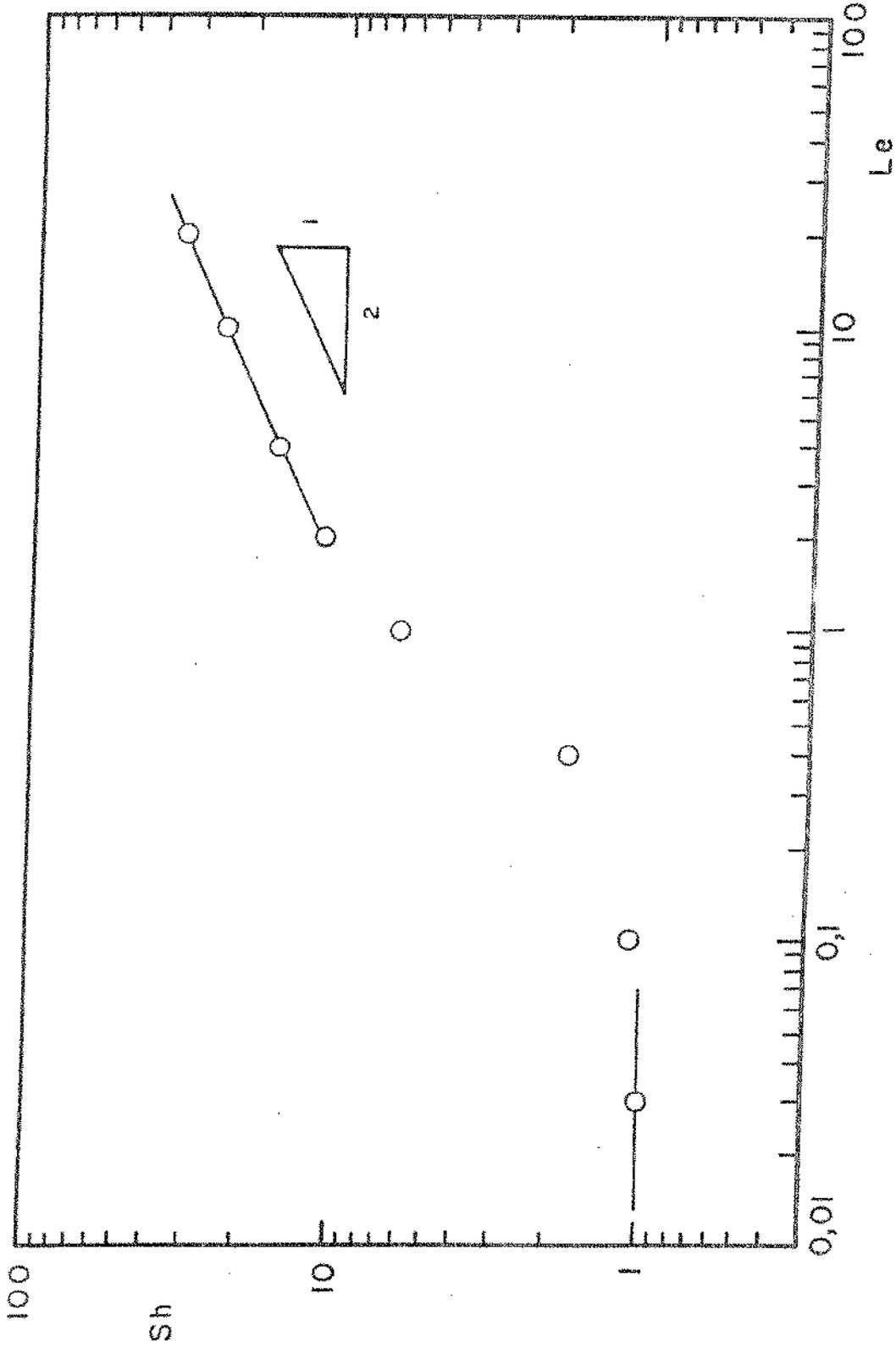


FIGURA 3.8 - Transição para o regime puramente difusivo com o decréscimo do número de Lewis ( $n=0$ ,  $Ra=1000$ ,  $H/L=1$ )

são do tipo dirigido pelo calor ( $n=0$ ) e se situam no campo do regime de camada limite. Como sugerido anteriormente pela mudança vista nas distribuições de concentração entre as Figs. 3.3(b) e 3.3(c), quando o número de Lewis é suficientemente pequeno para que a espessura da camada limite seja da ordem de grandeza da extensão da cavidade, o processo de transporte de massa entre as paredes verticais é comandado pela difusão e o número de Sherwood é de ordem um. Na outra extremidade do espectro, quando a camada limite de concentração é mais estreita que a correspondente camada térmica, o número de Sherwood varia com  $Le^{1/2}$  como previsto pela análise de similaridade. Ainda mais, as Figs. 3.7 e 3.8 nos mostram que a concordância com a previsão teórica se estabelece rapidamente na escala do parâmetro  $Le$ . Em outras palavras, o requisito de  $Le > 1$ , comprometido no desenvolvimento da análise similar, é satisfeito para valores tão próximos de um quanto aquele de  $Le = 2$ .

##### 5 - Comentários Adicionais

Concluída a comprovação pelos resultados numéricos dos modelos analíticos então desenvolvidos, o momento é oportuno para trazer os resultados numéricos pertinentes ao estudo do Capítulo II e, assim, avaliar o impacto das diferenças entre as condições de contorno de cada caso nas taxas globais de transferência de calor e de massa.

Para conduzir devidamente o processo de comparação é necessário lembrar que os parâmetros da razão de empuxo e do número de Rayleigh foram definidos de forma distinta nos dois problemas.

Como são diferentes as bases usadas em suas definições, há que convertê-los convenientemente para uma única referência. Na transformação do número de Rayleigh baseado na diferença de temperatura  $\Delta T$  eq. (2-17) para a versão definida na eq. (3-34), a fórmula de conversão a usar é:

$$Ra_{\text{cap.III}} = Ra_{\text{cap.II}} \cdot Nu_{\text{cap.II}} \quad (3-59)$$

Quanto à razão de empuxo, o parâmetro  $N$  estabelecido pela eq. (3-16) pode ser convertido para a mesma base empregada na avaliação daquele termo no segundo estudo, pela transformação:

$$n_{\text{cap.III}} = N_{\text{cap.II}} \times \frac{Sh_{\text{cap.II}}}{Nu_{\text{cap.II}}} \quad (3-60)$$

As Figs. 3.9 e 3.10 mostram os resultados, já devidamente convertidos, expressos pelas taxas adimensionais de transferência global de calor e de massa. Os pontos em círculos e triângulos dos gráficos representam os resultados obtidos nas condições de contorno distintas dos ensaios relatados neste capítulo e no anterior.

É claro das figuras que a forma em que os transportes de calor e de massa são especificados ao longo das paredes verticais da cavidade porosa tem pequeno impacto sobre grandezas médias como as taxas globais de transferência. Esta conclusão é importante porque, dado o sucesso das análises apresentadas em prever os valores das taxas de transferência no caso de fluxos laterais constantes, significa que as mesmas correlações teóricas podem ser empregadas para estimar as referidas taxas nos casos em que as condições de contorno se afastem daquelas consideradas no modelo analisado.

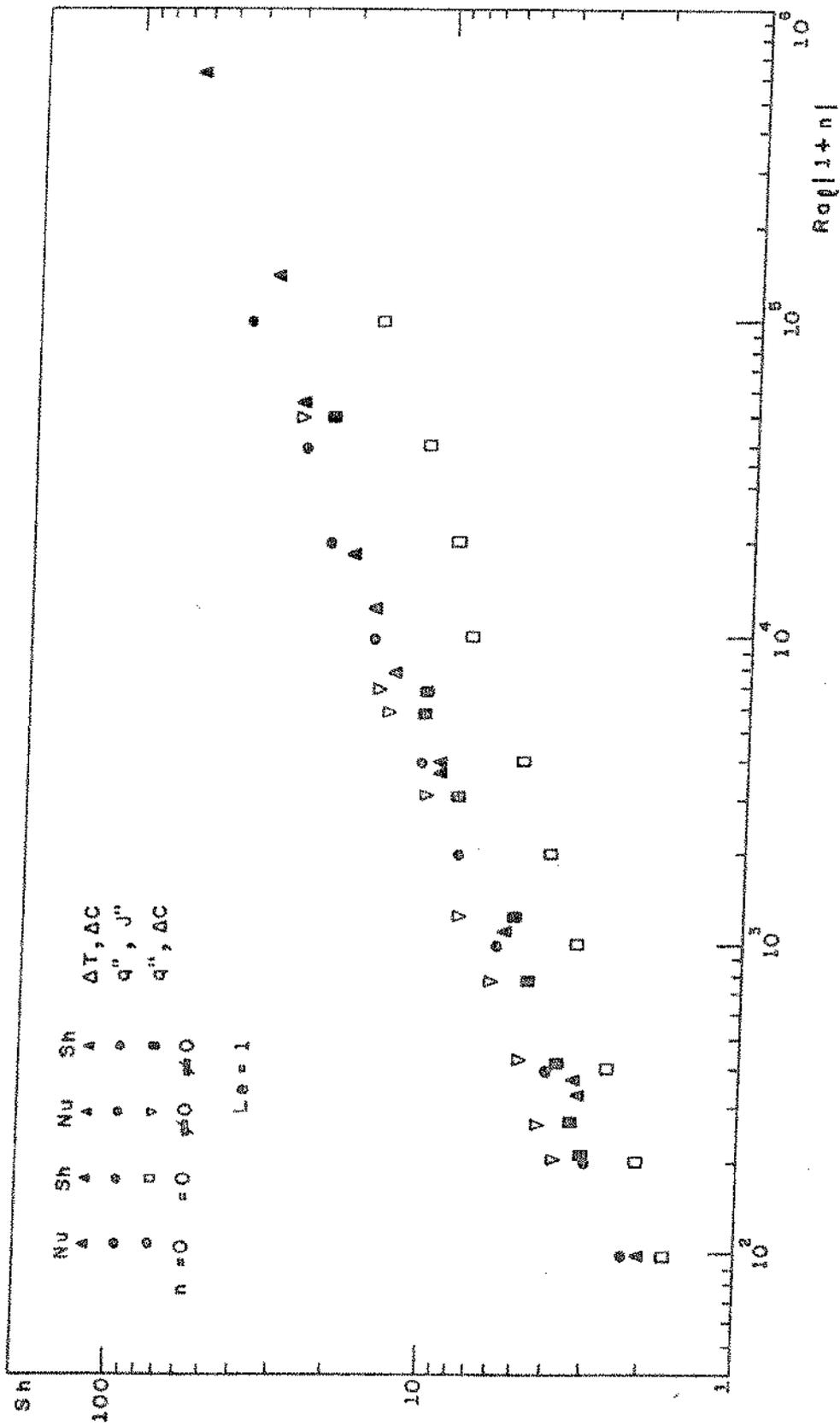


FIGURA 3.9 - Efeito das condições de contorno sobre as taxas globais de transferência em regimes no domínio da solução linearizada

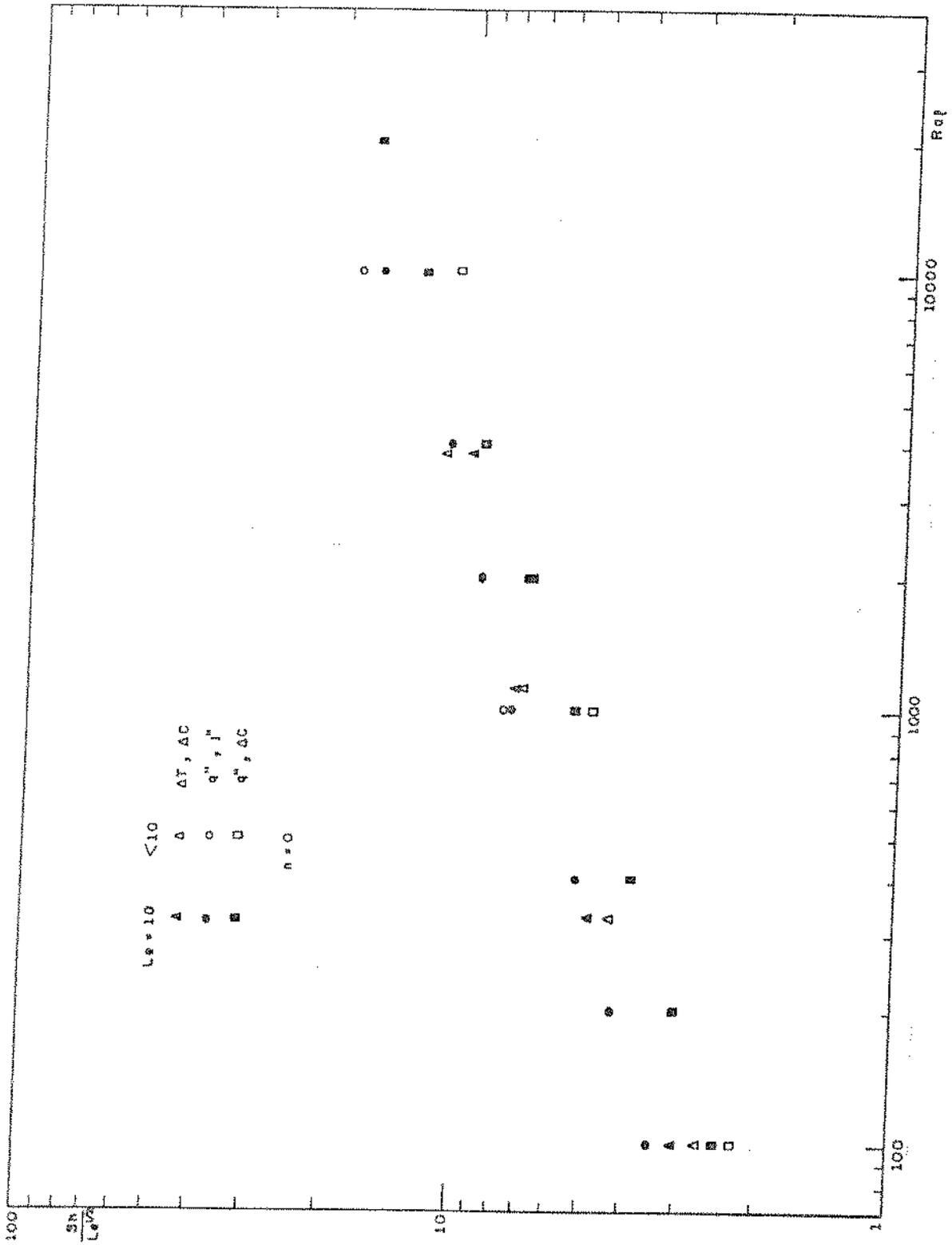


FIGURA 3.10 - Efeito das condições de contorno sobre as taxas globais de transferência em regimes no domínio da solução similar

Estimulados pelos ensinamentos das Figs. 3.9 e 3.10, realizamos ainda um outro estudo numérico. Consideramos a cavidade porosa, desta feita, submetida a condições de contorno laterais de fluxo de calor constante e distribuição de concentração uniforme, isto é, com condições mistas nas fronteiras. A formulação e a estrutura numérica empregada na simulação deste novo problema foram, salvas as devidas mudanças na rotina de cálculo do número de Sherwood e na rotina de satisfação das condições de fronteira, idênticas às aquelas usadas na solução numérica exposta anteriormente neste capítulo. O resumo dos resultados obtidos na série de ensaios está disposto nas Tabelas 3.7 e 3.8. Cobrindo uma larga faixa de valores dos parâmetros  $Ra_\ell$ ,  $n_m$  e  $Le$  os dados destas tabelas estão também dispostos na forma de gráficos, em símbolos quadrados nas Figs. 3.9 e 3.10. Novamente, é importante lembrar que, para guardar a mesma escala nas coordenadas dos gráficos, os parâmetros precisam ser convertidos para uma base única. O número de Rayleigh empregado na simulação do novo problema foi o mesmo usado no desenvolvimento das soluções para o caso de convecção com fluxos constantes. A razão de empuxo, no entanto, esteve representada por um novo termo, definido na forma:

$$n_m = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta \frac{q''H}{k}} \quad (3-61)$$

que deve, portanto, ser convertido usando-se

$$n_{\text{cap.II}} = n_m \times Sh_m \quad (3-62)$$

onde  $Sh_m$  é o valor do número de Sherwood obtido na solução do problema com condições mistas, calculado por:

TABELA 3.7 - Resultados numéricos para convecção dirigida pelo calor numa cavidade porosa com condições de contorno mistas ( $n=0$ ,  $H/L=1$ , grade de  $32 \times 32$ ,  $s=4$  salvo quando especificado entre parêntesis)

Ra	Nu	Sh				
		Le=0,1	0,3	1	3	10
100	2,29	1,00	1,06 (s=1)	1,69	3,86 (s=1)	7,79
200	3,05			2,07		9,83
400	4,10			2,55		12,44
1000	6,11	1,04	1,34 (s=1)	3,37	8,61 (s=2)	17,17
2000	8,28			4,17		22,16
4000	11,20			5,17		28,78
10000	16,61	1,15	2,11	6,88	18,73	40,72
20000	22,26			8,60		52,69
40000	29,60			10,96		
100000	42,46			16,03		

TABELA 3.8 - Resultados numéricos para convecção natural em cavidade porosa com condições de contorno mistas ( $H/L=1, Ra=200, Le=1$ , grade de  $32 \times 32$  e  $s=4$ )

n	Nu	Sh	$\bar{\Psi}_{\max}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\bar{\Psi}_{\min}$ ( $\times 10^{-3}$ )
- 3	13,82	10,78	76,2	0
- 2	10,59	8,12	59,2	0
- 1	6,27	4,78	37,0	-0,1
-0,8	5,01	3,89	30,9	-0,2
-0,7	4,23	3,35	27,1	-0,6
-0,65	3,98	3,11	25,4	-0,9
-0,6	1,39	1,21	0	-5,5
-0,5	1,55	1,30	0	-6,5
0	3,05	2,07	0	-13,7
1	8,08	5,37	0	-38,3
3	14,71	10,97	0	-76,1
9	27,78	22,66	0	-145,0

$$\text{Sh} = \frac{\bar{j}''H}{D\Delta C}, \quad \bar{j}'' = \int_0^H j'' dy \quad (3-63)$$

Vale destacar que no caso agora considerado, a igualdade das difusividades ( $Le = 1$ ) não corresponde a identidade das distribuições de temperatura e concentração e, conseqüentemente, a igualdade de suas taxas de transferência. Na esteira deste fato, observamos que os pontos dispostos na Fig. 3.9, embora referindo-se a condições de fronteira conceitualmente diversas, se condensam em uma faixa relativamente estreita. A extensão da capacidade de previsão das correlações deduzidas da análise linear do tipo Oseen é assim confirmada. Observe-se também que, tal previsão no caso de condições laterais mistas é, generalizando-se os termos de modo a compreender também a situação alternativa ( $\Delta T, j''$  constantes), mais precisa na avaliação das taxas de transferência referentes à variável de cuja variação deriva a primordial força motriz do movimento do fluido. No caso de  $q''$  e  $\Delta C$  constantes, a observação refere-se alternativamente ao número de Nusselt para  $n = 0$  ou ao número de Sherwood para  $|n| > 1$ . Tal tendência é claramente vista na Fig. 3.9, muito embora também os valores numéricos obtidos para a taxa de transporte da variável remanescente, quando submetida à condição de fluxo constante na lateral ( $Nu, |n| > 1$ , no caso), não se apresentem substancialmente afastados da nuvem principal.

Na Fig. 3.10 estão dispostos os resultados numéricos relativos aos fluxos dirigidos pelo calor nas situações em que  $Le > 1$ . A distribuição dos pontos indica que as expressões oriundas da solução similar servem ao interesse da engenharia em avaliar as taxas de transferência globais nas diferentes condições de contor

no. Como no caso das fronteiras submetidas a fluxos constantes a aproximação será tão melhor quanto maior for o número de Lewis.

Em quaisquer das estimativas é preciso ter sempre o cuidado de calcular os parâmetros adimensionais  $Ra$  e  $n$  com base nos fluxos de calor e de massa médios ao longo das paredes verticais.

## CAPÍTULO IV

CAVIDADE VERTICAL CONTENDO FLUIDO VISCOSO  
E SOB FLUXOS CONSTANTES NAS PAREDES LATERAIS1 - Formulação

Para examinar o comportamento da convecção natural por dupla difusão em cavidades destituídas de enchimento poroso, persistimos com a geometria estudada no capítulo anterior. Também como naquele caso, as paredes horizontais da geometria são tidas como adiabáticas e impermeáveis, enquanto nas paredes verticais são garantidos fluxos uniformes de calor e de massa. Assim, desconsiderando-se a presença do meio poroso preenchendo a cavidade da Fig. 3.1 (Cap. III), aquela figura representa esquematicamente o problema a ser analisado.

Assumindo o fluido como incompressível e de propriedades constantes, ressalvada a variação da densidade responsável pelo mecanismo de empuxo, o problema bidimensional é descrito na sua fase de regime permanente pelo conjunto das equações de conservação seguintes [28].

da massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4-1)$$

da variação da quantidade de movimento

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z}) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \quad (4-2)$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z}\right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \rho g \quad (4-3)$$

da energia térmica

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \quad (4-4)$$

do constituinte químico

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) \quad (4-5)$$

Limitaremos as análises desta fase do estudo aos regimes de transporte comandados pela convecção, ou seja, aos regimes ditos do tipo camada limite. Novas simplificações, oriundas desta delimitação, podem ser introduzidas nas equações governantes. Assumindo como válida a aproximação de Boussinesq para o cálculo das variações de densidade do fluido em sua dupla dependência das variáveis de temperatura e concentração, as eq. (4-1) a (4-5) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4-6)$$

$$0 = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + g\beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4-7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-8)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial z} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4-9)$$

No processo de obtenção destas equações, os termos de inércia que normalmente aparecem no lado esquerdo da eq.(4-7) foram desprezados com base na hipótese que a solução fluida tem números de Prandtl e/ou Schmidt maiores do que um [29]. A alternativa e/ou se explica pela exigência se referir apenas ao parâmetro  $Pr$  quando a presença do constituinte químico é neutra para efeitos do movimento do fluido, se referir apenas ao número de Schmidt  $Sc$  quando o gradiente de concentração é quem rege o fluxo e a ambos  $Pr$  e  $Sc$  nos casos restantes.

Nas etapas que se seguem procuraremos acompanhar a mesma sequência de raciocínio expressa no capítulo anterior, na busca de soluções analíticas para o sistema não linear das eq. (4-6) a (4-9).

## 2 - Solução Analítica

O problema clássico no qual o efeito da força de empuxo é devido somente às variações de temperatura no fluido, é analiticamente solúvel através da técnica de Oseen de linearização das equações governantes. Duas publicações anteriores [29 , 33] apresentam este tipo de solução e descrevem como principais características do regime de camada limite os seguintes aspectos:

- 1) região central da cavidade com fluido estagnante e termicamente estratificado
- 2) espessura das camadas limites constante e independente da coordenada vertical

5) variação linear da temperatura das paredes verticais no mesmo gradiente da região central da cavidade

Dadas as semelhanças das características com o caso da cavidade porosa já apresentado, relataremos apenas os principais passos do desenvolvimento da solução e suas conclusões mais importantes.

Como anteriormente, procuraremos soluções para as distribuições de temperatura e de concentração na forma:

$$T(x,y) = t(x) + T_0 + az \quad (4-10)$$

$$C(x,y) = c(x) + C_0 + bz \quad (4-11)$$

onde as funções  $t(x)$  e  $c(x)$  representam os perfis de temperatura e concentração dentro da região da camada limite. Fora daquela região a velocidade vertical e as funções  $t$  e  $c$  devem satisfazer a condição:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (t, c, v) = 0 \quad (4-12)$$

Introduzindo os perfis (4-10) e (4-11) nas equações governantes obtemos, em sequência:

$$0 = v''' + \frac{g}{\nu} (\beta t' + \beta_c c') \quad (4-13)$$

$$av = \alpha t'' \quad (4-14)$$

$$bv = Dc'' \quad (4-15)$$

Eliminando  $t$  e  $c$ , as eq. (4-13) a (4-15) fornecem:

$$v^4 + \Gamma^4 v = 0 \quad (4-16)$$

com

$$\Gamma = \left[ g \frac{\beta a (1+n)}{\alpha v} \right]^{1/4} \quad (4-17)$$

$$n = \frac{\beta_c b \alpha}{\beta a D} \quad (4-18)$$

A solução da equação (4-16) sujeita à condição de não deslizamento na parede e à condição expressa na eq. (4-12) é:

$$v = A e^{(-\Gamma/\sqrt{2})x} \operatorname{sen} \left( \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} x \right) \quad (4-19)$$

As funções dos perfis de temperatura e concentração  $t(x)$  e  $c(x)$ , podem ser determinadas a partir da integração das eq. (4-14) e (4-15), seguindo-se do ajuste da expressão geral à condição limite expressa em (4-12). Ainda assim permanece desconhecida a constante  $A$ , presente na expressão da velocidade  $v$  e agora também em  $t(x)$  e  $c(x)$ . As condições de fluxos constantes nas paredes laterais devem ser satisfeitas pelos perfis obtidos e duas expressões diferentes resultam para  $A$ , da aplicação das condições para as duas distribuições:

$$A = \frac{\sqrt{2} \Gamma \alpha q''}{ka} \quad (4-20)$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \Gamma j''}{b} \quad (4-21)$$

Em outras palavras, a solução requer que os gradientes da região central guardem a relação:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha q''}{k j''} \quad (4-22)$$

Em vista da simetria central apresentada pelo fluxo e campos de temperatura e concentração, os resultados até o momento podem ser resumidos como:

$$T = \pm \frac{\sqrt{2} q''}{k \Gamma} \exp\left(\frac{-\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) + T_0 + az \quad (4-23)$$

$$C = \pm \frac{\sqrt{2} j''}{D \Gamma} \exp\left(\frac{-\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) + C_0 + bz \quad (4-24)$$

$$v = \pm \frac{\sqrt{2} \Gamma \alpha q''}{ka} \exp\left(\frac{-\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) \sin\left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2}} x\right) \quad (4-25)$$

onde os sinais (+) e (-) se referem à solução para a camada limite próxima aos lados direito e esquerdo da cavidade, respectivamente. Na solução referente ao lado direito a coordenada horizontal é medida à partir da parede direita no sentido negativo de  $x$  na Fig. 3.1 (Cap. III).

A respeito dos parâmetros  $a$  e  $b$ , ainda por determinar, também neste caso vale o balanço entre o fluxo vertical de entalpia e a difusão térmica através do plano horizontal situado em qualquer altura arbitrária da cavidade. Deste balanço térmico resulta que:

$$a = 2^{-1/4} \frac{q''}{k(\Gamma L)^{1/2}} \quad (4-26)$$

Escrevendo o balanço equivalente para a transferência vertical de massa obtemos:

$$b = \bar{z}^{1/4} \frac{j''}{D(\Gamma L)^{1/2}} \quad (4-27)$$

A solução agora está completa, contudo, uma limitação importante do campo de aplicação da análise recém concluída é trazida à luz pela eliminação de  $a$  e  $b$  na eq. (4-22) via eq. (4-26) e (4-27). Obtemos que  $\alpha = D$ , ou seja, embora válida para combinações fluido-aditivo químico com razões de empuxo quaisquer, a análise se auto restringe àquelas combinações cuja difusividade térmica seja igual a difusividade de massa do constituinte diluído na mistura.

A conclusão, relevante para a engenharia, da análise anterior é a fórmula compacta que se segue, que exprime os números globais de transferência de calor e de massa na cavidade.

$$Nu = 2^{-3/2} \Gamma L \quad (4-28)$$

$$Sh = 2^{-3/2} \Gamma L \quad (4-29)$$

Retomando as expressões que definem  $\Gamma$  e  $n$ , eq. (4-17) e (4-18), as conclusões anteriores podem ser reescritas sob forma mais universal como:

$$Nu = Sh = 0,340 \left(\frac{L}{H}\right)^{8/9} Ra_f^{2/9} |1+n|^{2/9} \quad (4-30)$$

onde  $Ra_f$  é o número de Rayleigh baseado no fluxo de calor imposto na lateral  $Ra_f = g\beta q'' H^4 / (\alpha\nu k)$ , e  $n$  a razão de empuxo definida em (4-18).

Como a solução linearizada tem a sua aplicação limitada pela condição de  $Le = 1$ , a influência do número de Lewis sobre o

transporte de massa e de calor deve ser buscada de forma alternati  
va. A descrição analítica desta influência é possível em dois cam  
pos diferenciados pela grandeza da razão de empuxo, a saber: nos  
 casos dos fluxos dirigidos pelo calor,  $|n| \ll 1$ , e nos casos dos  
 fluxos dirigidos pela transferência de massa,  $|n| \gg 1$ . O caminho  
 matemático é o mesmo nos dois casos e ilustraremos somente a análi  
se para a primeira classe de fluxos.

Nos fluxos movidos pelo calor a distribuição de constitu  
inte químico não afeta o comportamento do fluxo ou a transferência  
 de calor. Os campos de velocidades e temperaturas são determina  
dos fazendo  $n = 0$  na solução obtida pela linearização de Oseen. O  
 número de Lewis certamente influencia na distribuição de concentra  
ção e seu efeito está ilustrado na Fig. 4.1 para os casos de cavi  
dades com e sem a presença de meio poroso. Consideremos a faixa de  
 valores de  $Le$  maiores que 1, cujo efeito é o de produzir camadas  
limites de concentração mais finas do que a camada térmica. Dife  
rentemente do caso poroso, dentro da camada limite de concentração,  
 o perfil de velocidade vertical é proporcional à distância da pare  
de e pode ser aproximado por:

$$v = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} x \quad (4-31)$$

Usando a eq. (4-19) para calcular a inclinação em (4-31)  
 e lembrando que  $u = 0$ , a equação de conservação da espécie quími  
ca se reduz a:

$$2^{1/4} \Gamma^{5/4} \alpha L^{1/2} x \frac{\partial C}{\partial z} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4-32)$$

Associada à eq. (4-32) está a condição de contorno de flu

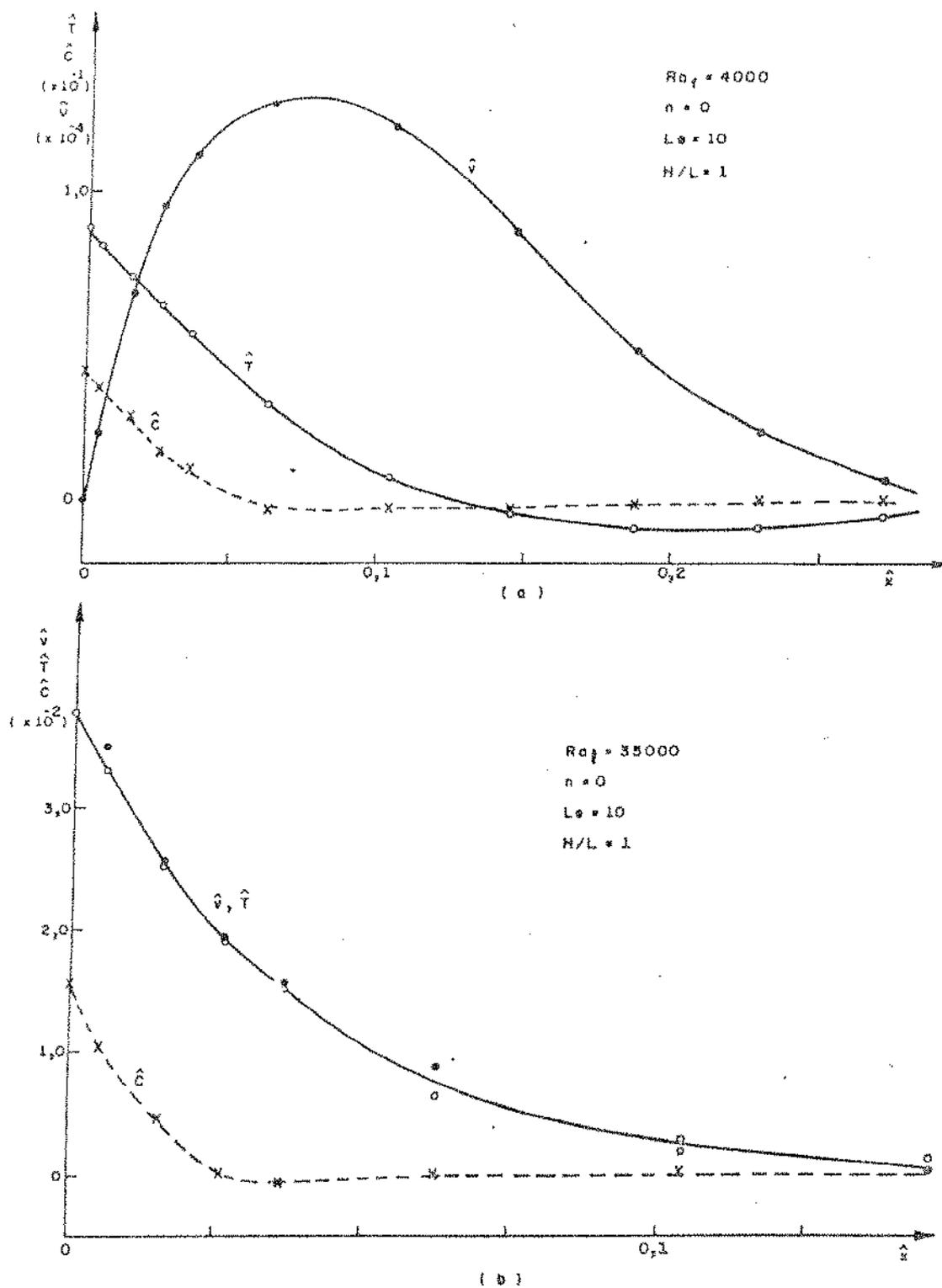


FIGURA 4.1 - Perfis de velocidade, temperatura e concentra<sub>ção</sub> na região da camada limite de fluxos dirigidos pelo calor. a) em fluido viscoso com  $Pr > 1$  e  $Le > 1$  b) numa cavidade porosa com  $Le > 1$

xo de massa uniforme na parede lateral. A segunda condição vem da observação que para  $Le \gg 1$  a distribuição de constituinte é predominantemente uniforme na região central da cavidade (ver Fig.4.5(d)). A transferência de calor está então colocada como um problema independente e a equação que a descreve é passível de solução por similaridade. As variáveis de similaridade adequadas ao problema são:

$$\eta = \hat{x} (\hat{y}/B)^{-1/3} \quad f = \frac{C-C_0}{j'' H/D} (\hat{y}/B)^{-1/3} \quad (4-33)$$

$$\hat{x} = x/H \quad \hat{y} = (z+H/2)/H$$

$$B = 2^{1/4} \Gamma^{5/2} \alpha L^{1/2} Le H^2$$

que reduzem sua formulação para:

$$f'' + \frac{\eta^2}{3} f' - \frac{\eta}{3} f = 0 \quad (4-34)$$

$$f'(0) = -1, \quad f(\infty) = 0 \quad (4-35)$$

O sistema (4-34), (4-35) foi resolvido numericamente através de um esquema de integração de Runge-Kutta de quarta ordem com auxílio do método "shooting" para avaliar a função no ponto de partida  $\eta = 0$ . A equação foi integrada de  $\eta = 0$  a  $\eta \geq 0$  usando como passo  $\Delta\eta = 0,001$  e como critério de sucesso para o "shooting" o valor  $f \leq 10^{-4}$ . A solução obtida está listada na Tabela 4.1 e foi assim considerada após mostrar-se insensível a refinamentos posteriores.

A taxa de transferência global é determinada em procedi

TABELA 4.1 - Perfis similares de concentração para fluxos dirigidos pelo calor quando  $Le \gg 1$

$\eta$	$f$	$f'$
0,0	1,536	-1,000
0,5	1,046	-0,936
1,0	0,619	-0,755
1,5	0,304	-0,501
2,0	0,116	-0,257
2,5	0,033	-0,095
3,0	0,006	-0,023
3,5	0,001	-0,004
4,0	0,000	-0,000

mento análogo ao usado anteriormente e a partir dos resultados obtidos na solução similar vale:

$$Sh = \frac{j''}{\Delta C/L} = 0,445 \, Ra_f^{5/27} \, Le^{1/3} \left(\frac{L}{H}\right)^{25/27} \quad (4-36)$$

onde  $\Delta C$  representa a diferença média de concentração entre as paredes laterais da geometria.

A mesma análise pode ser conduzida para a classe de fluxos dirigidos pela transferência de massa,  $|n| \gg 1$ , no limite de camadas térmicas relativamente finas ( $Le \ll 1$ ) e a solução análoga para a taxa global de transferência de calor será:

$$Nu = \frac{q''}{k\Delta T/L} = 0,445 \, (Ra_f |n| Le)^{5/27} \, Le^{-1/3} \left(\frac{L}{H}\right)^{29/27} \quad (4-37)$$

A taxa de transferência de massa nesse caso será interpretada através do resultado obtido na análise linearizada, ou seja, pela eq. (4-30).

Para finalizar, é importante frisar que as análises concluídas se referem ao regime de camada limite, ou seja, para regimes em que as camadas limites laterais se mantenham distintas. Observando que as definições do número de Nusselt e Sherwood foram feitas em referência ao estado de difusão pura, a hipótese de regime fortemente convectivo equivale a considerar  $Nu \gg 1$  e  $Sh \gg 1$ . A Tabela 4.2 serve de orientação no uso adequado das fórmulas para as taxas de transferência em cada um dos regimes investigados.

TABELA 4.2 - Resumo dos resultados analíticos e seus respectivos domínios de validade ( $Pr > 1$ )

resultado analítico		domínio de validade			
Nu	Sh	$ n $	Le	Nu	Sh
eq. (4-30)	eq. (4-30)	$0 - \infty$	1	$>> 1$	$>> 1$
eq. (4-30)	eq. (4-36)	$<< 1$	$>> 1$	$>> 1$	$>> 1$
eq. (4-37)	eq. (4-30)	$>> 1$	$<< 1$	$>> 1$	$>> 1$

### 3 - Solução Numérica e Discussão

As equações governantes para o regime permanente contidas nas expressões (4-1) a (4-5) podem ser colocadas na forma adimensional pela introdução das variáveis:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{x}{H} & \hat{y} &= z/H + 1/2 \\ \hat{u} &= \frac{u}{Gr\nu/H} & \hat{v} &= \frac{v}{Gr\nu/H} & \hat{\psi} &= \frac{\Psi}{Gr\nu} \\ \hat{T} &= \frac{T-T_0}{q''H/k} & \hat{C} &= \frac{C-C_0}{j''H/D}\end{aligned}\quad (4-38)$$

com  $\Psi$  representando a função corrente,  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , e  $Gr = Ra_f Pr$ , onde  $Pr$  é o número de Prandtl do fluido ( $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ ).

Subtraindo uma da outra as derivadas cruzadas das equações correspondentes às (4-2) e (4-3) de modo a suprimir os termos contendo a variável da pressão, obtemos a formulação de vorticidade-função corrente para a variação da quantidade de movimento. Usando a aproximação de Boussinesq no desenvolvimento obtemos o sistema:

$$Gr(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}}) = \nabla^2 \hat{w} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + n \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} \quad (4-39)$$

$$Ra_f(\hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}) = \nabla^2 \hat{T} \quad (4-40)$$

$$Ra_f Le (\hat{u} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}}) = \nabla^2 \hat{C} \quad (4-41)$$

$$\bar{w} = -V^2 \hat{\psi} \quad (4-42)$$

e as condições de contorno, já escritas na forma adimensional, são:

$$\hat{\psi} = \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} = -1 \quad \text{em } \hat{x} = 0, L/H \quad (4-43)$$

$$\hat{\psi} = \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad \text{em } \hat{y} = 0, 1$$

O método numérico empregado na solução do problema é basicamente o mesmo descrito no Capítulo III. Idênticos são a formulação usada na discretização das equações governantes e o procedimento iterativo de cálculo. A vorticidade nas fronteiras foi obtida a partir dos valores das velocidades empregando-se a formulação de dois pontos no cálculo das derivadas. Há também que se destacar que na presente configuração o uso de sub-relaxação foi necessário para conferir convergência aos cálculos. Os valores mais adequados dos fatores de relaxação situaram-se entre 0,3 e 0,8 para a vorticidade  $\bar{w}$  e entre 0,5 e 0,8 para as variáveis da concentração e da temperatura.

A geometria foi subdividida por um procedimento de geração de grade não uniforme, idêntico ao usado na solução do problema da cavidade porosa. Para selecionar a rede mais adequada, foi conduzido um teste de avaliação da sensibilidade da solução ao tamanho da grade. O resultado está mostrado na Fig. 4.2, onde o parâmetro da abcissa representa o comprimento da célula na região central da cavidade. Muito embora, como se vê no gráfico da figura, qualquer rede com célula central de comprimento menor que 0,05, por exemplo redes com  $m=28$  e  $s=4$  ou redes com  $m=24$  e  $s=2$ ,

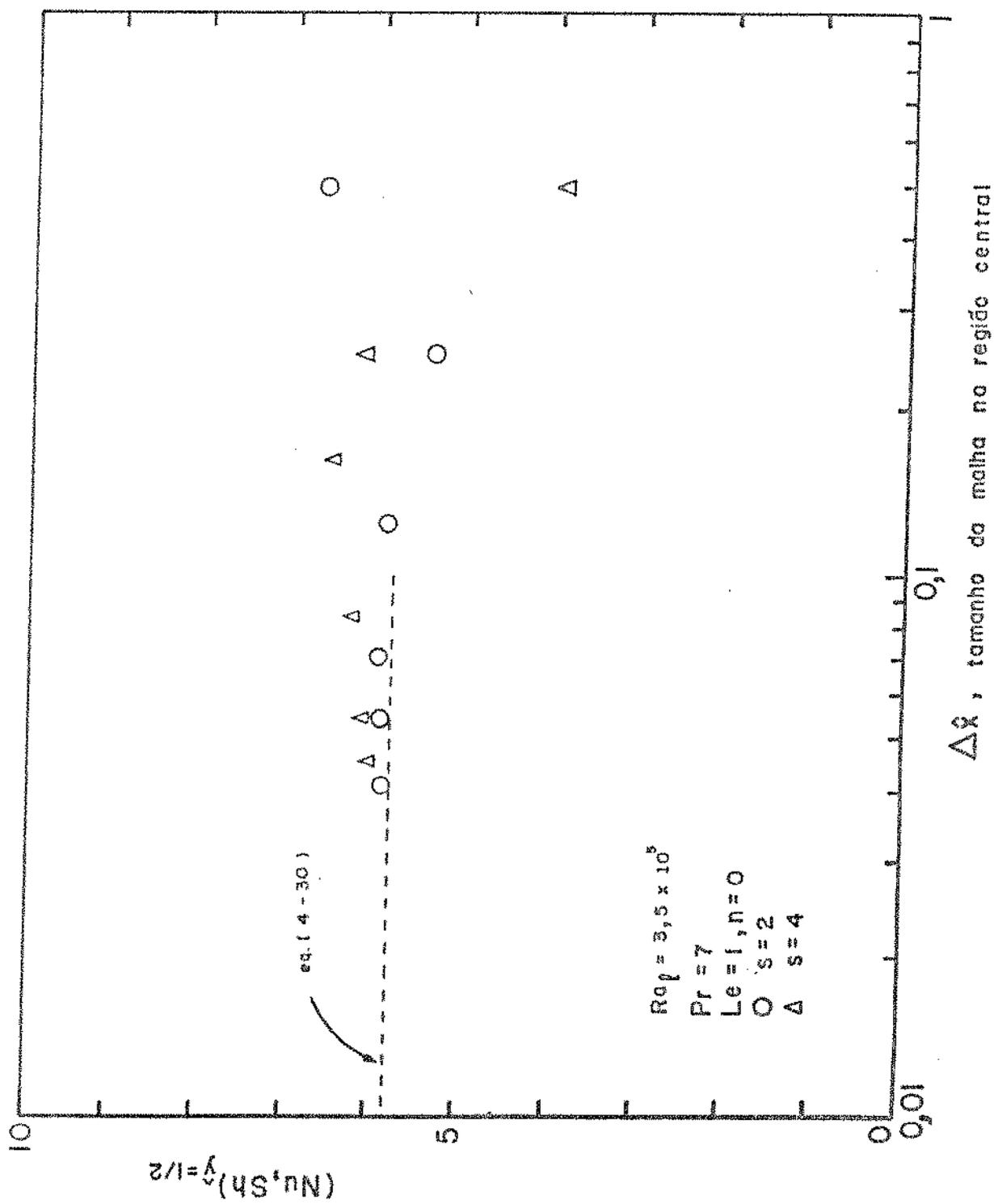


FIGURA 4.2 - Efeito do tamanho da grade nos resultados numéricos

fossem finas o bastante para fornecer resultados de  $Nu$  e  $Sh$  globais razoavelmente insensíveis a refinamentos posteriores, utilizamos no trabalho grades de  $m=p=32$  para as geometrias quadradas. Nas simulações em cavidades verticais,  $H/L > 1$ , o número de volumes de controle na direção vertical foi aumentado até 44, sempre de tal forma que  $(m-2s)/(p-2s)$  restabelecesse a razão do aspecto geométrico  $H/L$ . O parâmetro  $s$ , cujo efeito sobre os resultados globais está ilustrado na Fig. 4.2, teve sempre o seu valor ajustado em valores suficientes altos para que ao menos dois volumes de controle se situassem dentro da região da camada limite mais fina.

Cada configuração de fluxo é caracterizada por um conjunto de 5 parâmetros -  $Ra_f$ ,  $Pr$ ,  $n$ ,  $H/L$  e  $Le$ . A seleção dos valores destes parâmetros para a análise numérica foi feita com o objetivo de testar isoladamente os seus efeitos e por sua vez verificar a procedência da análise desenvolvida.

A Tabela 4.3 resume os resultados para as taxas de transferência globais de massa e de calor obtidas numa cavidade contendo um fluido com número de Prandtl maior do que um ( $Pr=7$ ) ou com um fluido com número de Prandtl de ordem um ( $Pr=0,7$ ), sempre com número de Lewis unitário. Os valores relativos ao fluido de  $Pr=0,7$  aparecem entre parêntesis. Dispostos na Tabela estão os dados que assinalam a influência da variação do número de Rayleigh, da razão de empuxo e da relação de esbeltez da cavidade. Referindo-se a soluções com  $Le = 1$ , os dados servem para testar a solução analítica linearizada. A Fig. 4.3 mostra que o efeito da razão de empuxo  $n$  sobre números como  $Nu$  e  $Sh$  é o mesmo previsto pela eq. (4-30). Neste gráfico os resultados correspondem a um fluxo com  $Ra_f = 3,5 \times 10^5$ , relativamente elevado, e a relação de empuxo varia na faixa de  $-11$  a  $+9$ . A concordância entre os valores numéri

TABELA 4.3 - Resumo dos resultados numéricos para convecção natural com transferência conjunta de calor e massa numa cavidade.

H/L	Ra <sub>F</sub> (x10 <sup>6</sup> )	n+1	m/s	Nu, Sh	(Nu, Sh) ( $\bar{y}=1/2$ )
1	0,35	0	32/4	1,04 (1,04)	1,05 (1,05)
		1		4,83 (4,78)	5,88 (5,82)
		±2		5,73 (5,72)	6,83 (6,87)
		±4		6,88 (6,76)	8,05 (7,92)
		±10		8,67 (8,44)	9,86 (9,55)
2	0,35	4	32/4	7,74	8,74
				0,70	10,24
				1,4	11,96
				3,5	14,58
				7,0	16,86
4	0,35	4	40/4	8,51	9,17
				0,70	10,88
				1,4	12,72
				3,5	15,58
				7,0	18,18

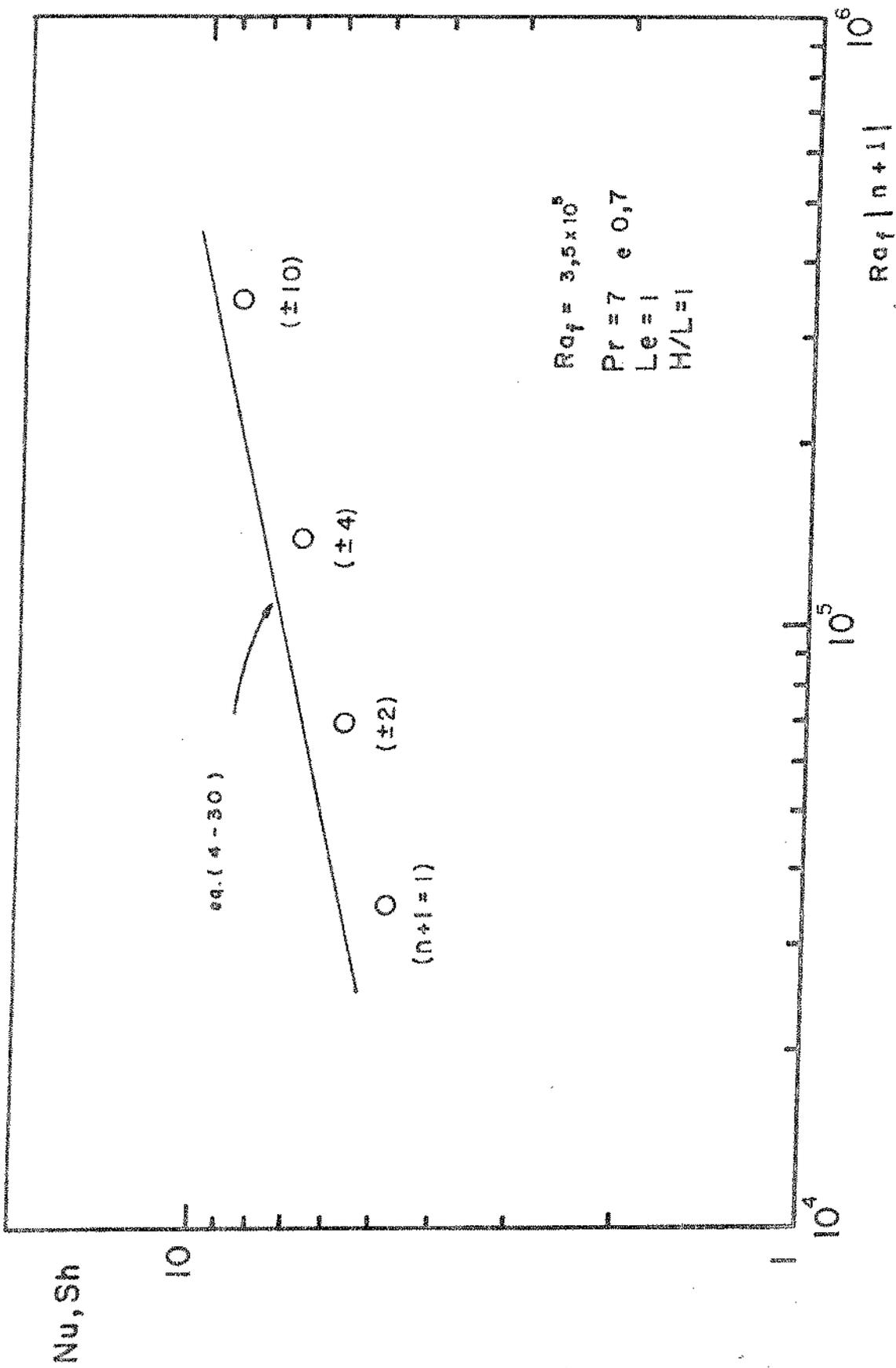


FIGURA 4.3 - Efeito da razão de empuxo nas taxas globais de transferência

cos e a previsão analítica melhora conforme  $|n|$  aumenta, isto é, conforme a circulação se acelera e as camadas limites se tornam ainda mais finas, ou ainda conforme o regime convectivo se fortalece.

Na Fig. 4.4 vemos que o efeito de  $H/L$  e  $Ra_f$  sobre os resultados também é o mesmo previsto pela análise. A concordância será ainda melhor caso os resultados numéricos dispostos no gráfico correspondessem aos valores locais de  $Nu$  e  $Sh$  avaliados à meia altura da geometria, isto é, na região da cavidade em que a estrutura paralela assumida para as camadas limites mais se aproxima das estruturas reveladas pelas simulações numéricas. Os valores de  $Nu$  e  $Sh$  estimados em  $\bar{y} = 1/2$  estão listados na sexta coluna da Tabela 4.3.

Embora desenvolvidas com base na hipótese de  $Pr > 1$ , as conclusões da análise são extensíveis a fluidos com número de Prandtl de ordem um. A pequena variação das taxas globais de transferência, obtidas numericamente para os dois valores de  $Pr$  examinados (de fato, os pontos são indistinguíveis no gráfico), confirma a observação anterior.

A sequência de mapas da Fig. 4.5 mostra os principais aspectos da convecção estudada. O padrão de fluxo no regime de camada limite aparece na Fig. 4.5(a), enquanto as distribuições de temperatura e de concentração (que são idênticas quando  $Le = 1$ ) são observadas na Fig. 4.5(b). Verifique-se que os aspectos revelados nestes dois mapas confirmam as hipóteses (1)-(3) assumidas como ponto de partida da análise linearizada. A distribuição de concentração tem seu aspecto fortemente marcado pelo número de Lewis. A sequência de padrões de distribuição de concentração das Fig. 4.5(b) a 4.5(d) ilustram essa influência. Conforme o número

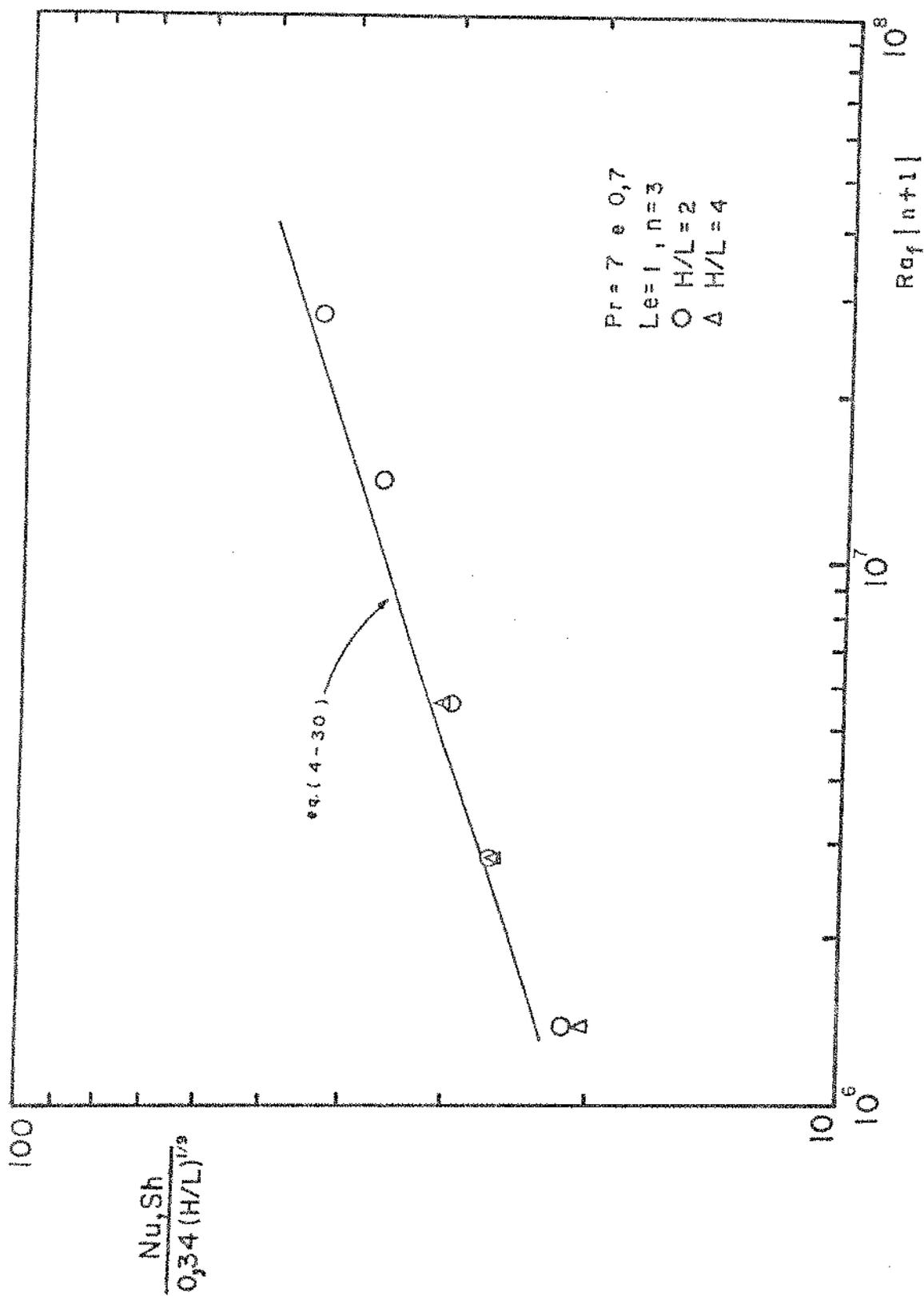


FIGURA 4.4 - Efeito da razão do aspecto geométrico da cavidade nas taxas globais de transporte

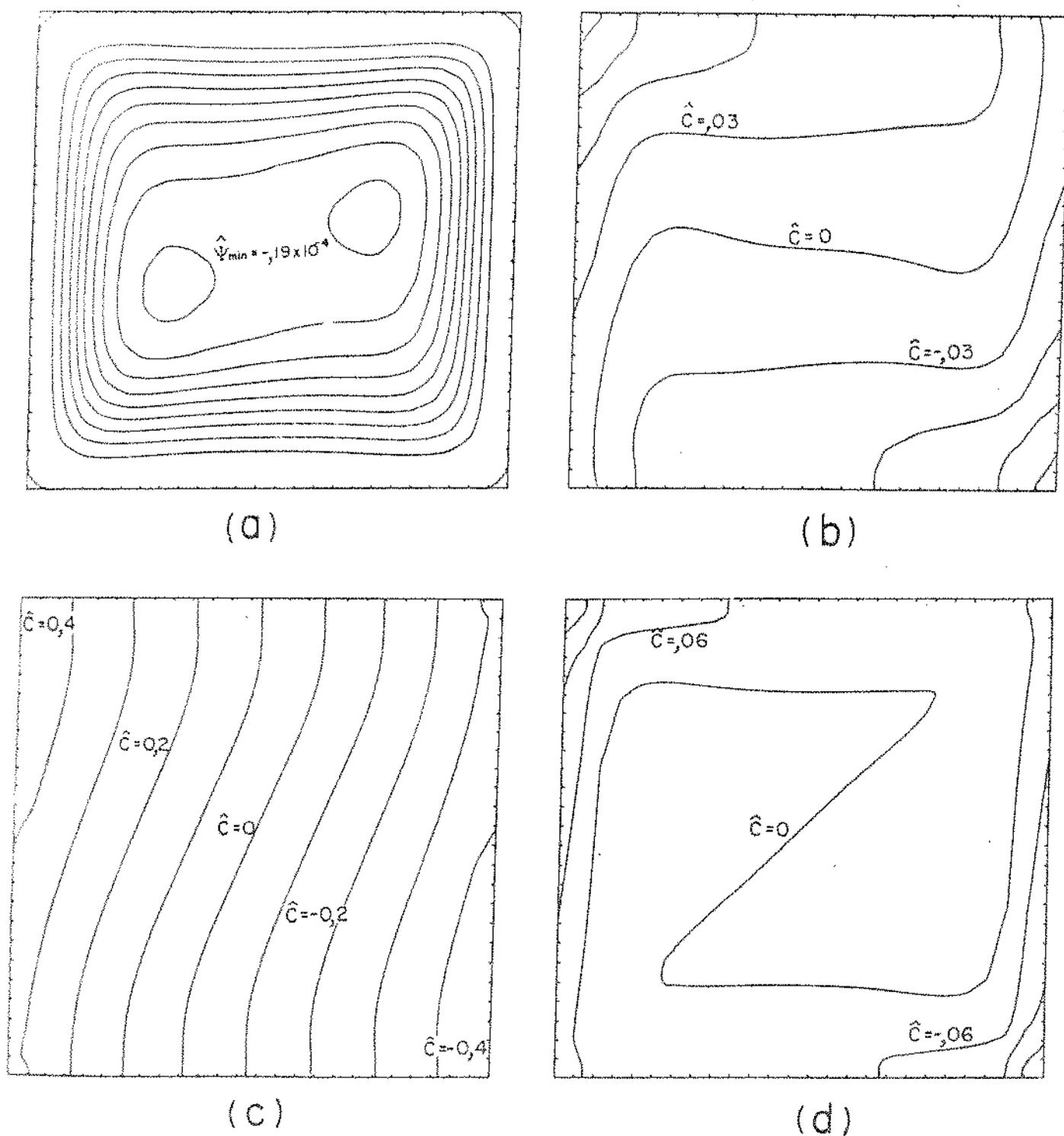


FIGURA 4.5 - Exemplos de campos de fluxo; isothermas e isotônicas ( $H/l=1$ ,  $Pr=7$ ,  $n=0$ ,  $Ra=3,5 \times 10^5$ ) a) linhas de fluxo b) isothermas e isotônicas ( $Le=1$ ) c) isotônicas com  $Le=0,1$  d) isotônicas com  $Le=10$

de Lewis diminui de  $Le = 1$  do mapa (b) para  $Le = 0,1$  do mapa (c), as camadas limites de concentração engrossam ao ponto de se confundirem no centro da cavidade. O transporte passa a ter forte contribuição do mecanismo de difusão. A tendência contrária é observada assim que  $Le$  aumenta de  $Le = 1$  na Fig. 4.5(b) para  $Le = 10$  no mapa (d). As camadas limites de concentração ficam mais finas do que as suas correspondentes camadas hidrodinâmicas, em (a), e térmicas, (b). Ao mesmo tempo, a distribuição de constituinte se torna praticamente constante na região central da cavidade, coerentemente com a hipótese da condição de contorno  $f(\infty) = 0$  invocada no desenvolvimento da solução similar.

A série de experimentos numéricos levados a efeito para avaliar quantitativamente a influência do número de Lewis sobre a taxa de transferência global de massa encontra-se disposta na Tabela 4.4. Nestas simulações o fluxo foi mantido como dirigido somente pelo fluxo de calor  $n = 0$  em um número de Rayleigh suficientemente alto ( $Ra_f = 3,5 \times 10^5$ ) e o número de Lewis foi variado na faixa de 2 a 40. A Fig. 4.6 mostra os resultados numéricos dispostos contra a solução obtida por similaridade, que pela concordância dão suporte à previsão analítica. Novamente, são insignificantes as diferenças verificadas nos resultados obtidos para os dois fluidos examinados ( $Pr = 7$  e  $Pr = 0,7$ ).

Dada a analogia entre as derivações das eq. (4-36) e (4-37) o teste apresentado na Fig. 4.6 também serve para validar a fórmula da Eq. (4-37) para os fluxos dirigidos pela transferência de massa com fluidos de  $Sc > 1$  e  $Le < 1$ .

TABELA 4.4 - Resultados numéricos para fluxos dirigidos pelo calor na  
 conjuntura de números de Lewis altos ( $n=0$ ,  $H/L=1$ ,  $Pr=7$  e  
 $0,7$ ,  $Ra_f = 3,5 \times 10^5$ )

Le	Nu	Sh	$\Delta C$ ( $\hat{y} = 1/2$ )	$\Delta C$ ( $y = 0,1$ )	$\epsilon$
2	4,81 (4,78)	6,46 (6,47)	0,1340 (0,1325)	0,2173 (0,2173)	4
4	4,81 (4,78)	8,15 (8,17)	0,1104 (0,1088)	0,1733 (0,1737)	4
10	4,81 (4,78)	10,99 (11,01)	0,0837 (0,0824)	0,1322 (0,1330)	4
20	4,77 (4,76)	13,93 (13,90)	0,0658 (0,0651)	0,1086 (0,1096)	5
40	4,70 (4,70)	18,00 (17,80)	0,0512 (0,0512)	0,0867 (0,0875)	7

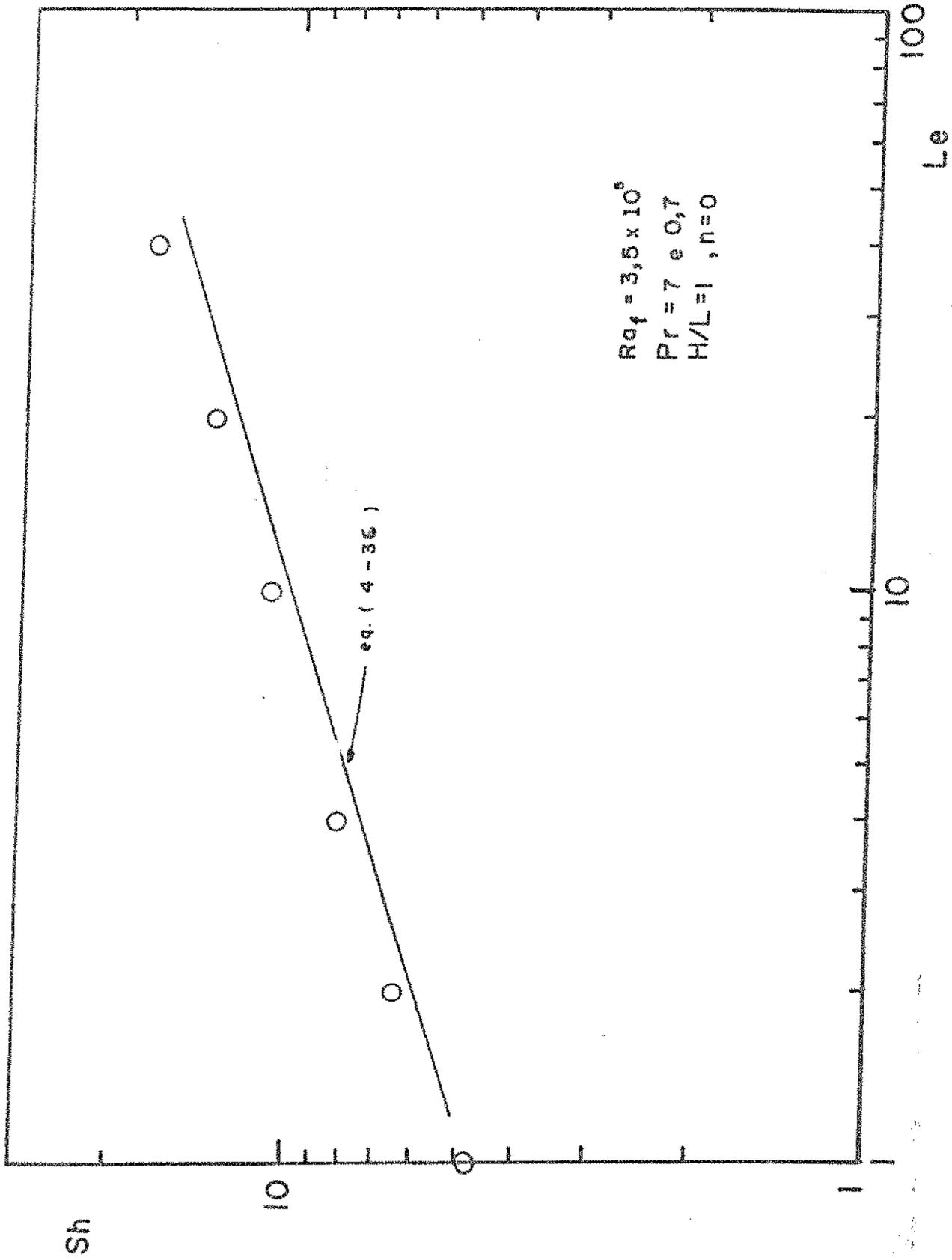


FIGURA 4.6 - Efeito do número de Lewis na taxa de transferência de massa para fluxos dirigidos pelo calor

### 3 - Comentários

As linhas de concentração constante, ou isotônicas, como as mostradas na Fig.4.5 propiciam uma boa visão da distribuição da concentração na geometria do problema. Esta visão é por vezes de grande utilidade na elaboração de soluções analíticas e dá idéia da direção do escoamento de massa perto das paredes, onde o movimento do fluxo é pequeno. No entanto, o mapa das isotônicas não é um indicador apropriado do escoamento global de massa enquanto soma das parcelas transportadas por difusão e por convecção.

A Fig. 4.7 mostra uma seqüência de configurações para as linhas de massa (ver Apêndice C) obtidas para um número de Rayleigh relativamente elevado, numa cavidade quadrada contendo solução com  $Le = 1$ . A seqüência dos cinco gráficos foi montada com o objetivo de ilustrar o efeito da variação da razão de empuxo,  $n$ , quando cruzando o valor crítico  $-1$ , sobre o transporte global de massa. Nos fluxos dirigidos primordialmente pela transferência de massa ( $n = 4$  na Fig. 4.7(a) e  $n = +2$  na Fig. 4.7(e)), as linhas de massa mostram claramente a existência das duas camadas limites verticais e o movimento do constituinte químico é canalizado por corredores próximos as paredes horizontais. Conforme o grupo  $(n+1)$  troca de sinal, a circulação muda do sentido anti-horário para o horário. Esta mudança é refletida pela mudança na forma das linhas de massa, da Fig. 4.7(a) para a Fig. 4.7(e).

Assim que a razão de empuxo se aproxima de  $-1$ , Fig. 4.7 (b) e Fig. 4.7(d), o mecanismo de convecção perde sua importância no processo de transporte. A difusão passa então a ter caráter dominante, ao ponto de ser o único mecanismo atuante em  $n = -1$ , quando os efeitos opostos de empuxo são perfeitamente cancelados.

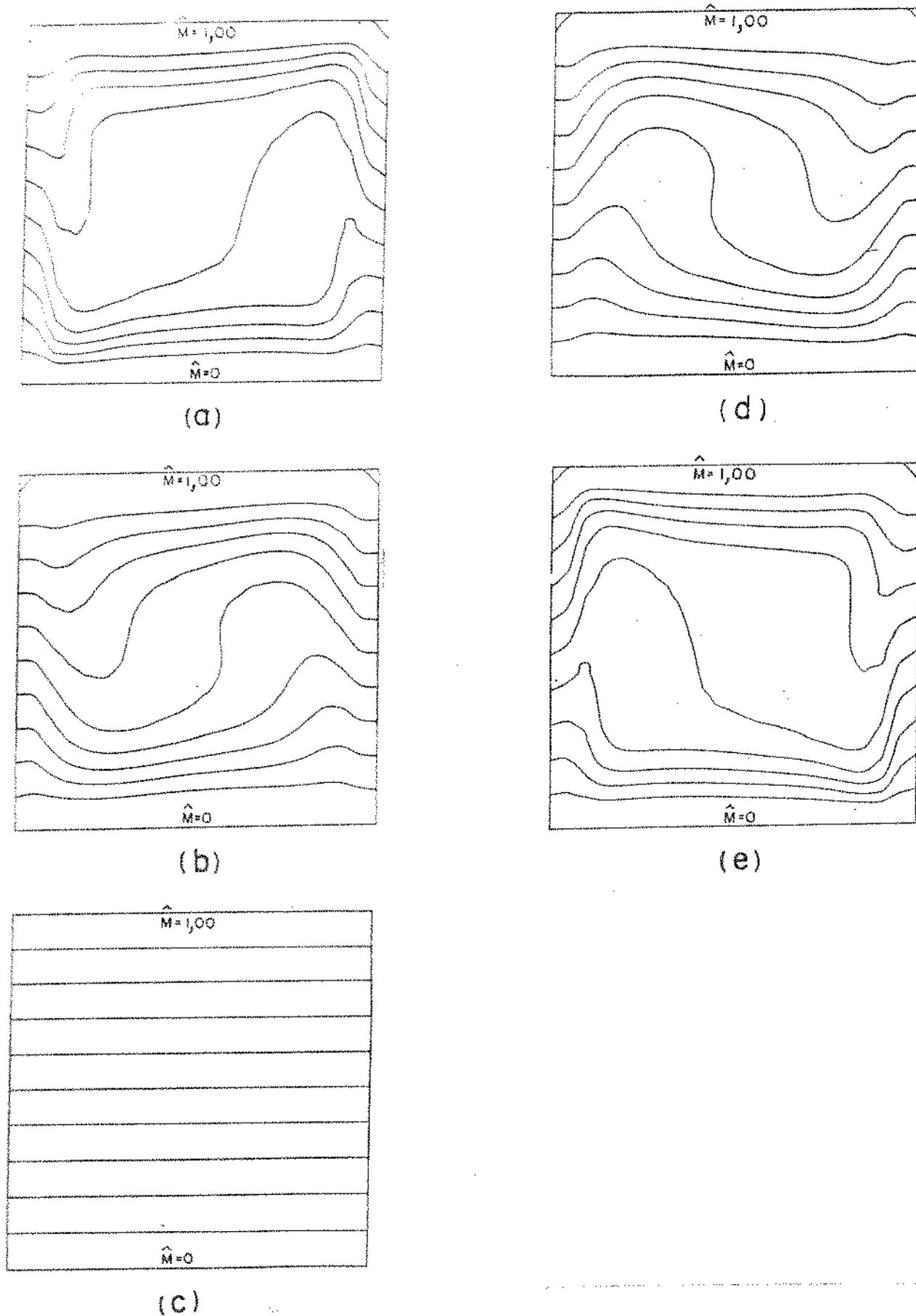


FIGURA 4.7 - Padrões de linhas de massa mostrando o efeito da razão de empuxo e a reversão do fluxo. ( $Ra=3,5 \times 10^5$ ,  $H/L=1$ ,  $Le=1$ ,  $Pr=7$ ) a)  $n=-4$  b)  $n=-1.1$  c)  $n=-1$  d)  $n=-0,9$  e)  $n=2$

## CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES

O movimento convectivo de misturas fluidas confinadas em cavidades e em circunstâncias duplamente difusivas é investigado neste trabalho através do uso de diferentes técnicas, numérica e analíticas. Diversas também são as situações de fronteira consideradas, de modo a tornar o estudo abrangente. As variantes de configurações e técnicas compoem o tema dos capítulos da dissertação. Em cada um deles encontram-se as respectivas discussões de resultados e as conclusões pertinentes. Condensamos a seguir as conclusões que permeiam ao longo dos capítulos, bem como o relato dos principais feitos alcançados no desenvolvimento do trabalho.

Os regimes possíveis de escoamento dentro da cavidade porosa vertical foram classificados de forma eficaz pela análise de escala, que também expôs com plausibilidade física os números adimensionais característicos do fenômeno.

As relações de transferência reveladas pela análise de escala foram confirmadas pelos resultados obtidos pela via da simulação numérica. O método numérico empregado na simulação foi previamente avaliado e forneceu resultados que se comparam favoravelmente com dados experimentais e numéricos encontrados na literatura. A verificação numérica das relações de escala é simultânea com a corroboração dos limites de seus domínios de validade.

As leis escalares válidas para os fluxos dirigidos por gradientes térmicos ( $|N| \ll 1$ ) em configurações com diferenças laterais constantes estão resumidas no quadro da Tabela 5.1.

TABELA 5.1 - Resumo das relações escalares e seus domínios de validade

domínio de validade				relações escalares	
Ra	Le	Le Ra <sup>1/2</sup>	Le Ra	Nu	Sh
> 1	> 1			$\frac{L}{H} Ra^{1/2}$	$\frac{L}{H} (Ra Le)^{1/2}$
> 1	< 1	> 1		$\frac{L}{H} Ra^{1/2}$	$\frac{L}{H} Ra^{1/2} Le$
> 1	< 1	< 1		$\frac{L}{H} Ra^{1/2}$	1
< 1			> 1	1	$\frac{L}{H} (Ra Le)^{1/2}$
< 1			< 1	1	1

As relações e os domínios de validade nos casos de fluxos dirigidos predominantemente por gradientes de concentração ( $|N| > 1$ ) são obtidas como extensão da Tabela 5.1, bastando substituir Ra por  $Ra|N|Le$ , Le por  $1/Le$ , Nu por Sh e vice-versa.

A sensibilidade do escoamento à variação da razão de empuxo foi documentada através de ensaios numéricos realizado para valores finitos do parâmetro N, principalmente para aqueles situados na região de transição ( $N \approx -1$ ) entre as duas grandes classes de escoamento.

Uma solução analítica desenvolvida através da técnica de linearização de Oseen foi apresentada para o regime de camada limi

te da convecção natural em uma cavidade vertical porosa com fluxos constantes nas laterais. Mostra-se também que a solução obtida é válida somente nas situações em que  $Le = 1$ . Nesta condição a solução apresenta como principal resultado analítico a expressão:

$$Nu = Sh = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{L}\right)^{-4/5} Ra_{\ell}^{2/5} |1+n|^{2/5} \quad (3-33)$$

Para os casos em que o número de Lewis é diferente de um, foi apresentada uma solução de similaridade. Tal solução é possível quando o escoamento for predominantemente dirigido por um dos gradientes. Associando-se à cada condição o respectivo resultado analítico, temos para as taxas globais de transferência (Ítem 2 do Capítulo 3)

a) escoamentos dirigidos por gradientes térmicos e  $Le \geq 1$

$$Nu = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{L}\right)^{-4/5} Ra_{\ell}^{2/5} \quad (5-1)$$

$$Sh = 0,665 \left(\frac{L}{H}\right)^{11/10} Ra_{\ell}^{3/10} Le^{1/2} \quad (3-47)$$

b) escoamentos dirigidos por gradientes químicos e  $Le < 1$

$$Nu = 0,665 \left(\frac{L}{H}\right)^{11/10} (Ra_{\ell} |N|)^{3/10} Le^{-1/5} \quad (5-2)$$

$$Sh = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{L}\right)^{-4/5} Ra^{2/5} |1+n|^{2/5} \quad (3-33)$$

As equações completas do problema na cavidade porosa com fluxos laterais constantes foram resolvidas numericamente. Os resultados numéricos confirmam as soluções analíticas obtidas tanto pela via da linearização como pela formulação similar.

O impacto de mudanças nas condições de contorno sobre as taxas de transporte de calor e massa foi avaliado através da comparação entre os resultados obtidos para a configuração de diferencial constante e aqueles para a configuração de fluxo constante. A extensão para as situações mistas de condições de contorno foi efetuada por ensaios numéricos. De modo geral, tal impacto foi verificado como sendo de menor significado.

A convecção duplamente difusiva de um fluido com número de Prandtl elevado em uma cavidade não porosa foi estudada analítica e numericamente. Mostrou-se que a solução linearizada obtida pela técnica de Oseen é válida somente quando as difusividades térmica e química da mistura forem do mesmo valor. Neste caso o resultado fornece os números de transporte na relação

$$\text{Nu} = \text{Sh} = 0,340 \left(\frac{L}{H}\right)^{8/9} \text{Ra}_f^{2/9} |1+n|^{2/9} \quad (4-30)$$

A formulação similar foi empregada como alternativa na análise do problema com difusividades térmica e de massa distintas. As soluções encontradas (Ítem 2 do Capítulo 4) conforme as classes do escoamento são:

a) escoamento dirigido por gradientes térmicos e  $\text{Le} \gg 1$

$$\text{Nu} = 0,340 \left(\frac{L}{H}\right)^{8/9} \text{Ra}_f^{2/9} \quad (5-3)$$

$$\text{Sh} = 0,445 \text{Ra}_f^{5/27} \text{Le}^{1/3} \left(\frac{L}{H}\right)^{29/27} \quad (4-36)$$

b) escoamento dirigido por gradientes de concentração e  $\text{Le} < 1$

$$\text{Nu} = 0,445 (\text{Ra}_f n \text{Le})^{5/27} \text{Le}^{-1/3} \left(\frac{L}{H}\right)^{29/27} \quad (4-37)$$

$$\text{Sh} = 0,340 \left(\frac{L}{H}\right)^{8/9} \text{Ra}_f^{2/9} |1+n|^{2/9} \quad (4-30)$$

O problema foi simulado numericamente com as equações governantes na forma completa, para os números de Prandtl correspondentes ao ar (0,7) e à água (7). As soluções analíticas e numéricas apresentaram boa concordância, não havendo diferença significativa entre os resultados numéricos obtidos para os dois valores distintos do número de Prandtl. Em consequência, conclui-se que os fluidos com Pr de ordem um podem ser marginalmente incluídos nas soluções analíticas desenvolvidas.

Finalmente, introduziu-se o conceito de linhas de massa, que se mostra muito útil na apresentação gráfica do escoamento de constituinte químico em sistemas difusivo-convectivos.

## REFERÊNCIAS

- 1 - COMBARNOUS, M.A. e BORIES, S.A., Hydrothermal Convection in Saturated Porous Media, Advances in Hydrosience, V.10, 231-307, 1975.
- 2 - NIELD, D.A., Recent research on convection in a saturated porous medium, in Convective Flows in Porous Media, seminário, Institute of Physical Sciences, Wairakei, New Zealand, May 3-4, 1984.
- 3 - SCHNEIDER, J.J., Investigation of the influence of free thermal convection on heat transfer through granular material, International Institute of Refrigeration, Proceedings, paper 11-4, 1963.
- 4 - MORDCHELLES-REGNIER, G., MICHEAN, P., PIROVANO, A., JUMENTIER, C., TERPSTRA, J.S., LECOURT, Y., CAVE, P. e BREUILLE, M., Recherches recentes effectuées en France sur l'isolation thermique des reacteurs nucléaires, International Atomic Energy Agency, Viena, 1969.
- 5 - KLARSFELD, S., Champs de température associés aux mouvements de convection naturelle dans un milieu poreux limité, Revue Generale de Thermique, v.108, 1403-1423, 1970.
- 6 - CHAN, B.K.C., IVEY, C.M. e BARRY, J.M., Natural convection

- in porous media with rectangular boundaries, *Journal of Heat Transfer*, v.20, 919-926, 1977.
- 7 - HOLST, P.H. e AEIZ, K., Transient three dimensional natural convection in confined porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.15, 73-90, 1972.
  - 8 - BANKVALL, C.G., Natural convection in vertical permeable space, *Warm-und-Stoffubertragung*, v.7, 22-30, 1974.
  - 9 - BURNS, P.J., CHOW, L.C. e TIEN, C.L., Convection in a vertical slot filled with porous insulation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.20, 919-926, 1977.
  - 10 - SEKI, N., FUKUSAKO, S. e INABA H., Heat transfer in a confined rectangular cavity packed with porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.21, 985-989, 1978.
  - 11 - SHIRALKAR, G.S., HAAJIZADEH, M. e TIEN, C.L., Numerical study of high Rayleigh number convection in a vertical porous enclosure, *Numerical Heat Transfer*, v.6, 223-234, 1983.
  - 12 - INABA, H. e SEKI, N., Transient behaviours of natural convective heat transfer through a vertical porous layer, *Applied Scientific Research*, v.37, 257-273, 1981.
  - 13 - POULIKAKOS, D. e BEJAN, A., Unsteady natural convection in a porous layer, *Physics of Fluids*, v.26, 1183-1191, 1983.

- 14 - WEBER, J.E., The boundary layer regime for convection in a vertical porous layer, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.18, 569-573, 1975.
- 15 - BEJAN, A., On the boundary layer regime in a vertical enclosure filled with a porous medium, Letters in Heat and Mass Transfer, v.6, 93-102, 1979.
- 16 - SIMPKINS, P.G. e BLYTHE, P.A., Convection in a porous layer, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.23, 881-887, 1980.
- 17 - BLYTHE, P.A. e SIMPKINS, P.G., Convection in a porous layer for a temperature dependent viscosity, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.24, 497-506, 1981.
- 18 - WALKER, K.L. e HOMSAY, G.M., Convection in a porous cavity, Journal of Fluid Mechanics, v.87, 449-474, 1978.
- 19 - BEJAN, A., A synthesis of analytical results for natural convection heat transfer across rectangular enclosures. International Journal of Heat and Mass Transfer, v.23, 723-726, 1980.
- 20 - BEJAN, A. e TIEN, C.L., Natural convection in a horizontal porous medium subjected to an end-to-end temperature difference, Journal of Heat Transfer, v.100, 191-198, 1978. Também, v.105, 881-887, 1980.

- 21 - HICKOX, C.E. e GARTLING, D.K., A numerical study of natural convection in a horizontal porous layer subjected to an end-to-end temperature difference, Journal of Heat Transfer, v. 103, 797-802, 1981.
- 22 - PRASAD, V. e KULACKI, F.A., Convective heat transfer in a rectangular porous cavity - Effect of aspect ratio on flow structure and heat transfer, Journal of Heat Transfer, v.106, 158-165, 1984.
- 23 - BLYTHE, P.A., SIMPKINS, P.G. e DANIELS, P.G., Thermal convection in a cavity filled with a porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.26, 701-708, 1983.
- 24 - BLYTHE, P.A., DANIELS, P.G. e SIMPKINS, P.G., Limiting behaviours in porous cavity flows, in Natural Convection: Fundamentals and Applications, ed. Kaçac, S. et al, Hemisphere, Washington D.C., 1985.
- 25 - BEJAN, A., The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.26, 1339-1346, 1983.
- 26 - PRASAD, V. e KULACKI, F.A., Natural convection in a rectangular porous cavity with constant heat flux on one vertical wall, Journal of Heat Transfer, v.106, 152-157, 1984.
- 27 - OSTRACH, S., Natural convection in enclosures, Advances in

Heat Transfer, v.8, 161-227, 1972.

- 28 - BEJAN, A., Convection Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- 29 - GILL, A.E., The boundary layer regime for convection in a rectangular cavity, Journal of Fluid Mechanics, v.26, 515-536, 1966.
- 30 - LEWIS, J.A. e CARRIER, G.F., Some remarks on the flat plate boundary layer, Quarterly Applied Mathematics, v.7, 228-234, 1949.
- 31 - QUON, C., Free convection in an enclosure revisited, Journal of Heat Transfer, v.99, 340-342, 1977.
- 32 - BEJAN, A., Note on Gill's solution for free convection in a vertical enclosure, Journal of Fluid Mechanics, v.90, 561-568, 1979.
- 33 - KIMURA, S. e BEJAN, A., The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, Journal of Heat Transfer, v.106, 98-103, 1984.
- 34 - ECKERT, E.R.G. e CARLSON, W.O., Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.2, 106-120, 1961.

- 35 - ELDER, J.W., Laminar convection in a vertical slot, *Journal of Fluid Mechanics*, v.23, 77-98, 1965.
- 36 - SEKI, N., FUKUSAKO, S. e INABA, H., Visual observation of natural convection flow in a narrow vertical cavity, *Journal of Fluid Mechanics*, v.84, 695-704, 1978.
- 37 - TURNER, J.S., Double diffusive phenomena, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.6, 37-56, 1974.
- 38 - OSTRACH, S., Natural convection with combined driving forces, *Physicochemical Hydrodynamics*, v.1, 233-247, 1980.
- 39 - KAMOTANI, Y., WANG, L.W., OSTRACH, S. e JIANG, H.D., Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.28, 165-173, 1985.
- 40 - NIELD, D.A., Onset of thermohaline convection in a porous medium, *Water Resources Research*, v.4, 553-560, 1968.
- 41 - WANKAT, P.C. e SCHOWALTER, W.R., Stability of combined heat and mass transfer in a porous medium, *The Physics of Fluids*, v.13, 2418-2420, 1970.
- 42 - TAUNTON, J.W. e LIGHTFOOT, E.N., Thermohaline instability and salt fingers in a porous medium, *The Physics of Fluids*, v.15, 748-753, 1972.

- 43 - RUBIN, H., Effect of nonlinear stabilizing salinity profiles on thermal convection in a porous medium layer, Water Resources Research, v.9, 211-221, 1973.
- 44 - RUBIN, H., Effect of solute dispersion on thermal convection in a porous medium layer, Water Resources Research, v.9, 968-973, 1973.
- 45 - NIELD, D.A., Comments on "Effect of solute dispersion on thermal convection in a porous medium layer, Water Resources Research, v.10, 889, 1974. Ver também Hillel R., Reply, p. 890 no mesmo volume.
- 46 - RUBIN, H., Effect of solute dispersion on thermal convection in a porous medium layer, 2, Water Resources Research, v.11, 154-158, 1975.
- 47 - RUBIN, H., Onset of thermohaline convection in a cavernous aquifer, Water Resources Research, v.12, 141-147, 1976.
- 48 - RUBIN, H. e ROTH, C., Instability of horizontal thermohaline flow in a porous medium layer, Israel Journal of Technology, v.16, 216-223, 1978.
- 49 - RUBIN, H., Thermohaline convection in a nonhomogeneous aquifer, Journal of Hydrology, v.57, 307-320, 1982.
- 50 - RUBIN, H., Application of the aquifer's average characteristics for determining the onset of thermohaline convection

- tion in a heterogeneous aquifer, *Journal of Hydrology*, v.57, 521-526, 1982.
- 51 - RUBIN, H., Onset of thermohaline convection in heterogeneous porous media, *Israel Journal of Technology*, v.19, 110-117, 1981.
- 52 - TYVAND, P.A., Thermohaline instability in anisotropic porous media, *Water Resources Research*, v.16, 325-330, 1980.
- 53 - PATIL, P.R. e VAIDYANATHAN, G., Effect of variable viscosity on thermohaline convection in a porous medium, *Journal of Hidrology*, v.57, 147-161, 1982.
- 54 - LAWSON, M.L., YANG, W. e BUNDITKUL, S., Theory on thermal instability of binary gas mixtures in porous media, *Journal of Heat Transfer*, v.98, 35-41, 1976.
- 55 - PATIL, P.R. e RUDRAIAH, N., Linear convective stability and thermal diffusion of a horizontal quiescent layer of a two component fluid in a porous medium, *International Journal of Engineering Science*, v.18, 1055-1059, 1980.
- 56 - BRAND, H. e STEINBERG, V., Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium, *Physica*, v.119A, 327-338, 1983.
- 57 - GERSHUNI, G.Z., ZHUKHOVITSKII, E.M. e LYUBIMOV, D.V., Thermal concentration instability of a mixture in a porous

- medium, Soviet Physics Doklady, v.21, 375-377, 1976.
- 58 - GERSHUNI, G.Z., ZHUKHOVITSKII, E.M. e LYUBIMOV, D.V., Stability of stationary convective flow of a mixture in a vertical porous layer, Fluid Dynamics, v.15, 122-127, 1980.
- 59 - RUDRAIAH, N., SRIMANI, P.K. e FRIEDRICH, R., Finite amplitude convection in a two component fluid saturated porous layer, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.25, 715-722, 1982.
- 60 - BRAND, H.R., HOHENBERG, P.C. e STEINBERG, V., Amplitude equation near a polycritical point for the convective instability of a binary fluid mixture in a porous medium, Physical Review A, v.27, 591-593, 1983.
- 61 - BRAND, H. e STEINBERG, V., Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold, Physics Letters, v.93A, 333-336, 1983.
- 62 - PATIL, P.R., Soret driven instability of a reacting fluid in a porous medium, Israel Journal of Technology, v.19, 193-196, 1981.
- 63 - STEINBERG, V. e BRAND, H., Convective instabilities of binary mixtures with fast chemical reaction in a porous medium, Journal of Chemistry Physics, v.78, 2655-2660, 1983.

- 64 - SELIMOS, R. e POULIKAKOS, D., On double diffusion in a Brinkman heat generating porous layer, International Communications in Heat and Mass Transfer, v.12, 149-158, 1985.
- 65 - CHAKRABARTI, A. e GUPTA, A.S., Nonlinear thermohaline convection in a rotating porous medium, Mechanics Research Communications, v.8, 9-22, 1981.
- 66 - SHARMA, R.C. e SHARMA, K.N., Thermal instability of fluids through a porous medium in the presence of suspended particles, rotation and solute gradient, Journal of Mathematics and Physics Science, v.16, 167-181, 1982.
- 67 - RUDRAIAH, N. e VORTMEYER, D., The influence of permeability and of a third diffusing component upon the onset of convection in a porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.25, 457-464, 1982.
- 68 - GRIFFITHS, R.W., Layered double-diffusive convection in porous media, Journal of Fluid Mechanics, v.102, 221-248, 1981.
- 69 - KHAN, A.A. e ZEBIB, A., Double diffusive instability in a vertical layer of a porous medium, Journal of Heat Transfer, v.103, 179-181, 1981.
- 70 - RAPTIS, A., TZIVANIDIS e KAPOUSIAS, N., Free convection and mass transfer flow through a porous medium bounded by

an infinite vertical limiting surface with constant suction, International Communications in Heat and Mass Transfer, v.8, 417-424, 1981.

- 71 - BEJAN, A. e KHAIR, K.R., Heat and mass transfer by natural convection in a porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, v.28, 909-918, 1985.
- 72 - WARD, J.C., Turbulent flow in porous media, Journal of Hydraulic Division of ASCE, v.90, 1-12, 1964.
- 73 - CHENG, P., Heat transfer in geothermal systems, Advances in Heat Transfer, v.14, 1-105, Academic Press, 1978.
- 74 - CHENG, P. e MINKOWICZ, W.J., Free convection about a vertical flat embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike, Journal of Geophysical Research, v.82, 2040-2044, 1977.
- 75 - PATANKAR, S., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980.

## APÊNDICE A

## EQUAÇÕES NO REGIME DE CAMADA LIMITE

As equações gerais do fenômeno da convecção na presença de dupla difusão, conforme o modelo descrito no Capítulo II, são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gK}{\nu} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (\text{A-2})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A-3})$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A-4})$$

Reconhecendo que no regime de camada limite a escala da coordenada  $x$  é reduzida para a extensão da camada limite  $\delta$ , permanecendo a altura  $H$  como escala de  $y$ ; das equações de conservação anteriores resulta o seguinte balanço:

$$\frac{u}{\delta} - \frac{v}{H} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{v}{\delta} , \frac{u}{H} = \frac{gK\beta}{\nu} \frac{T}{\delta} , \frac{gK\beta}{\nu} \frac{C}{\delta} \quad (\text{A-6})$$

$$u \frac{T}{\delta} , v \frac{T}{H} - \alpha \frac{T}{\delta^2} , \alpha \frac{T}{H^2} \quad (\text{A-7})$$

$$u \frac{C}{\delta} , v \frac{C}{H} - D \frac{C}{\delta^2} , D \frac{C}{\delta^2} \quad (\text{A-8})$$

Substituindo a equivalência (A-5) na equação da conservação da variação da quantidade de movimento (A-6) resulta:

$$\frac{v}{\delta} , \frac{v}{\delta} \left( \frac{\delta}{H} \right)^2 - g \frac{K \beta}{\nu} \frac{T}{\delta} , g \frac{K \beta}{\nu} \frac{C}{\delta}$$

e, como por hipótese estamos assumindo que  $\delta \ll H$ , o segundo termo da equivalência acima é de ordem desprezível.

Procedendo semelhantemente com as equações da conservação da energia e do constituinte químico concluimos pela insignificância, historicamente conhecida, dos termos de difusão na direção do fluxo, ou seja, em  $y$ . As equações gerais ficam então simplificadas para:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{gK}{\nu} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (\text{A-10})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{A-11})$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (\text{A-12})$$

## APÊNDICE B

## SOLUÇÃO LINEARIZADA PARA A CONVECÇÃO TÉRMICA

Apresentamos aqui em detalhes, de forma a explicitar as passagens e considerações feitas no seu desenvolvimento, a solução linearizada pela técnica de Oseen para a convecção térmica em cavidades. Sendo uma peça teórica de modelo já apresentado em literatura [14, 29], nos atemos à parte da análise relevante para o estudo exposto no corpo principal da dissertação.

Para o caso em que o constituinte químico não está presente, as equações que governam o fenômeno em regime de camada limite são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g \frac{K\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{B-2})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{B-3})$$

e a condição de fluxo constante se expressa por:

$$q'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \text{constante}$$

As eq.(B-1) a (B-3) podem ser adimensionalizadas com base nas seguintes variáveis de referência:

$$\bar{x} = \frac{x}{H Ra_\ell^{-1/3}} \quad \bar{y} = \frac{z}{H}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\frac{\alpha}{H} Ra_\ell^{-1/3}} \quad \bar{v} = \frac{v}{\frac{\alpha}{H} Ra_\ell^{2/3}} \quad (B-4)$$

e

$$\bar{T} = \frac{T}{\frac{q''}{k} H Ra_\ell^{-1/3}}$$

resultando no seguinte sistema:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (B-5)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \quad (B-6)$$

$$u \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \quad (B-7)$$

com a condição associada de  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = -1$  em  $\bar{x} = 0$ .

Vale lembrar que o problema completo se refere à convecção em uma cavidade porosa retangular fechada e que as equações acima descrevem o fenômeno dentro de estreitas regiões próximas às duas paredes verticais da cavidade. Para que a solução do problema da cavidade seja correta é necessário que a solução das equações da camada limite concorde no limite com a solução válida para o centro de cavidade.

Uma diferença importante entre o centro e a camada limi

te é a das escalas horizontais dessas duas regiões. A largura do retângulo é a escala da região central e é suposta ser muito maior que  $\delta$ , a espessura da camada limite. Como a ordem de grandeza do fluxo na região central não é maior que a do fluxo na camada limite, a função corrente do centro tem a forma:

$$\bar{\psi}_c \left( \frac{x}{L}, \frac{z}{H} \right) = \bar{\psi}_c \left( \frac{\delta \bar{x}}{L}, \bar{y} \right) \quad (\text{B-8})$$

O processo de casamento das soluções envolve pontos tais que podemos ter  $\frac{\delta}{L} \bar{x} \rightarrow 0$  quando  $\frac{\delta}{L} \rightarrow 0$  mesmo que  $\bar{x} \rightarrow \infty$ . A solução então fica:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}_c(0, \bar{y}) = \bar{\psi}_c(\bar{y}) \quad (\text{B-9})$$

Segundo o mesmo raciocínio, a distribuição de temperatura no centro da cavidade é função somente da coordenada  $y$ . Portanto, as condições de contorno a serem satisfeitas pela solução da camada limite são:

$$\bar{x} \rightarrow \infty ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}_c(\bar{y}) \quad \text{ou} \quad \bar{v} \rightarrow 0 \quad (\text{B-10})$$

$$\bar{x} \rightarrow \infty ; \quad \bar{T} \rightarrow \bar{T}_c(\bar{y})$$

ou, de outra forma, podemos escrever:

$$\bar{T} = \theta(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{T}_c(\bar{y}) \quad (\text{B-11})$$

$$\bar{\psi} = \phi(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\psi}_c(\bar{y})$$

com  $\theta(\bar{x}, \bar{y}), \phi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow 0$  conforme  $x \rightarrow \infty$

Integrando as eq. (B-6) e (B-7) e aplicando as condições limites expressas em (B-11) obtemos:

$$\bar{v} = \theta \quad (\text{B-12})$$

$$\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} \quad (\text{B-13})$$

A não linearidade do sistema acima pode ser removida pela técnica de Oseen modificada [29], que consiste em substituir  $\bar{u}$  e  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$  na eq. (B-13) pelos seus valores médios em  $\bar{x}$ :  $\bar{U}_A(\bar{y})$  e  $\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|_A(\bar{y})$ .

Deste modo a eq. (B-13) se reduz a:

$$\theta'' - \bar{U}_A \theta' - \bar{T}_A' \theta = 0 \quad (\text{B-14})$$

Para a camada limite próxima à parede esquerda do meio poroso a solução da eq. (B-14) acoplada à condição de fluxo uniforme em  $x = 0$  é da forma:

$$\bar{v} = \theta = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \bar{x}}$$

ou seja:

$$\bar{v} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \bar{x}} \quad (\text{B-15})$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \bar{x}} + \bar{T}_C(\bar{y}) \quad (\text{B-16})$$

O parâmetro  $\lambda$  é função de  $\bar{U}_A(\bar{y})$  e  $\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|_A(\bar{y})$ , como se conclui da eq. (B-14). Estas duas funções guardam relações com a solução para o centro da cavidade, as quais podem ser avaliadas a par

tir da integração das equações da energia e da continuidade.

Da equação da continuidade:

$$\int_0^{\infty} -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = \int_0^{\infty} \bar{v} d\bar{x}$$

resulta:

$$\bar{\psi}_c = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{B-17})$$

Integrando a equação da energia da parede ao centro:

$$\int_0^{\infty} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \int_0^{\infty} \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}$$

$$\bar{u} \bar{T} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{v} \bar{T}) d\bar{x} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \Big|_0^{\infty}$$

ou

$$\frac{d \bar{\psi}_c}{d \bar{y}} \bar{T}_c + \frac{d}{d \bar{y}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \bar{x}} \left( \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \bar{x}} + \bar{T}_c \right) d\bar{x} = 1$$

que produz a relação:

$$\frac{d}{d \bar{y}} \left( \frac{-1}{2\lambda^3} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d \bar{T}_c}{d \bar{y}} - 1 \quad (\text{B-18})$$

Observando que o problema estudado apresenta simetria central em relação ao ponto  $(x = L/2, z = 0)$ , importantes conclusões podem ser tiradas a partir das expressões (B-17) e (B-18). De acordo com a configuração centrosimétrica a solução deve apresen

tar as seguintes características:

$\bar{T}_c$  - função ímpar de  $\bar{y}$

$\bar{u}_c$  - função ímpar de  $\bar{y}$

Mas, da definição de função corrente ( $\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}}$ ,  $\bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}}$ ) a velocidade horizontal no centro é:

$$\bar{u}_c = \frac{d}{d\bar{y}} (\bar{\Psi}_c) = -\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (\text{B-19})$$

e a simetria central requer portanto que  $1/\lambda^2$  seja uma função par de  $\bar{y}$ . De outro lado,  $1/\lambda$  representa a espessura adimensionalizada da camada limite, um valor finito positivo, não podendo ser uma função ímpar de  $\bar{y}$  de nenhuma forma. Segue-se que, sendo  $1/\lambda$  uma função também par de  $\bar{y}$ , a simetria central do fenômeno permanece somente se:

$\lambda =$  função par de  $\bar{y}$

Voltando a atenção para a eq.(B-18), observamos que:

(a)  $\frac{1}{\lambda^2} \frac{d T_c}{d\bar{y}} - 1$  é sempre uma função par de  $\bar{y}$

(b)  $\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{1}{2\lambda^3} \right)$  é sempre uma função ímpar de  $\bar{y}$

A única forma de satisfazer às duas condições é a de ambos os lados da eq.(B-18) serem identicamente nulos, ou seja,

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{1}{2\lambda^3} \right) = 0$$

donde  $\lambda = \text{constante}$  (B-20)

e

$$\frac{dT_c}{dy} - \lambda^2 = 0$$

daí

$$T_c = \lambda^2 y \quad \text{(B-21)}$$

Também, substituindo a eq.(B-20) na (B-19) obtemos:

$$\bar{u}_c = 0 \quad \text{(B-22)}$$

Resumindo as conclusões mais importantes obtidas a partir da solução linearizada sobre o regime de camada limite, enumeramos:

- 1) a espessura da camada limite é constante e independente de  $y$  - eq.(B-15)-(B-16) e (B-20).
- 2) a região central da cavidade porosa apresenta fluido estagnante ( $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{v} = 0$ ) - eq.(B-10)-(B-15) e (B-22).
- 3) a distribuição da temperatura é estratificada na região central do meio poroso - eq.(B-20) e (B-21).
- 4) a temperatura das paredes verticais aumenta linearmente na mesma proporção que a do centro da cavidade, daí, a diferença de temperatura entre as paredes é independente da altura  $y$ , eq.(B-16)-(B-20) e (B-21).

5) a velocidade horizontal  $\bar{u}$  é nula também na região da camada limite e a distribuição de temperatura tem a forma

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \theta(\bar{x}) + a\bar{y} \quad a = \text{cte} = \lambda^2 \quad (\text{B-23})$$

## APÊNDICE C

## LINHAS DE MASSA

Estendendo a idéia de "linhas de fluxo" e de "linhas de calor" [28, 33] para a apresentação gráfica do transporte de massa, introduzimos aqui o conceito de "linhas de massa". Analogamente ao caso do transporte de energia, o movimento do constituente químico através do campo de escoamento é composto da soma de um componente difusivo e de um componente carregado pelo movimento do fluido. Para delinear os caminhos seguidos pela espécie química, definimos uma função de massa M de tal forma que o fluxo líquido de constituente através de cada linha com M = constante seja zero. Numa mistura com propriedades constantes esta definição equivale a ter:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = u(C - C_b) - D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (C-1)$$

$$- \frac{\partial M}{\partial x} = v(C - C_b) - D \frac{\partial C}{\partial y} \quad (C-2)$$

Assim estabelecida, a função M satisfaz identicamente a equação da conservação do constituente químico em sistemas bidimensionais contendo misturas de propriedades constantes, sejam eles porosos ou não.

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (C-3)$$

Derivando as eq. (C-1) e (C-2) em  $y$  e  $x$ , respectivamente, e subtraindo uma expressão da outra obtemos:

$$\nabla^2 M = \frac{\partial}{\partial y} \left[ u(C - C_b) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ v(C - C_b) \right] \quad (C-4)$$

que descreve o comportamento da função sob um novo formato. Na eq. (C-4), os termos do lado direito são conhecidos a partir da solução do problema em questão. O caminho para obter a configuração das linhas de massa consiste, portanto, em resolver a eq. (C-4) si multaneamente com as equações governantes do fenômeno.

Os mapas do transporte de massa verificados na convecção natural por dupla difusão estudada no Capítulo V - em cavidades retangulares submetidas a fluxos laterais uniformes de massa e calor e com as paredes horizontais isoladas e impermeáveis - provêm da solução do sistema que, adimensionalizado pelas transformações:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{H} & \hat{y} &= z/H + 1/2 \\ \hat{u}, \hat{v} &= \frac{u, v}{Gr\nu/H} & \hat{\psi} &= \frac{\psi}{Gr\nu} \\ \hat{T} &= \frac{T - T_0}{q'' H/k} & \hat{C} &= \frac{C - C_0}{j'' H/D} \\ \hat{M} &= \frac{M}{j'' H} \end{aligned} \quad (C-5)$$

se escreve:

$$\text{Gr} \left( \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right) = \nabla^2 \hat{w} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + n \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} \quad (\text{C-6})$$

$$\text{Ra} \left( \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) = \nabla^2 \hat{T} \quad (\text{C-7})$$

$$\text{RaLe} \left( \hat{u} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}} \right) = \nabla^2 \hat{C} \quad (\text{C-8})$$

$$\hat{w} = - \nabla^2 \hat{\psi}$$

$$\text{RaLe} \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} (\hat{u} \hat{C}) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{v} \hat{C}) \right] = \nabla^2 \hat{M} \quad (\text{C-9})$$

Sendo as condições de contorno correspondentes às seguintes:

$$\hat{\psi} = \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} = -1, \quad \hat{M} = \hat{y} \text{ em } \hat{x} = 0, L/H$$

$$\hat{\psi} = \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}} = 0, \quad \hat{M} = 0 \text{ em } \hat{y} = 0 \quad (\text{C-10})$$

$$\hat{\psi} = \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{y}} = 0, \quad \hat{M} = 1 \text{ em } \hat{y} = 1$$

Especial atenção deve ser dedicada ao termo  $C_b$  embutido na definição da função de massa. Mais do que um valor de referência, a constante tem a importante função de compatibilizar a grandeza do transporte convectivo - a qual depende da base em que é calculada - com a grandeza do componente difusivo.

No caso do problema formulado nas eq. (C-6)-(C-10) o valor adequado de  $C_b$  pode ser determinado a partir da observação da si

metria central da configuração do problema. Tal propriedade de simetria dos campos de fluxo e de níveis isotônicos significa que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -u(L - x, H - y) \\ v(x, y) &= -v(L - x, H - y) \end{aligned} \quad (C-11)$$

$$(C - C_0)(x, y) = -(C - C_0)(L - x, H - y)$$

O campo das funções de massa será também centrosimétrico, ou seja  $M(x, y) = -M(L - x, H - y)$ , se:

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x}(L - x, H - y) \quad (C-12)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}(L - x, H - y) \quad (C-13)$$

Retomando a definição da função obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) &= u(x, y) \cdot (C - C_b)(x, y) - D \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) \\ &= u \cdot (C - C_0) - D \frac{\partial C}{\partial x}(L - x, H - y) + u(x, y) \cdot (C_0 - C_b) \\ &= \frac{\partial M}{\partial y}(L - x, H - y) + u(x, y) \cdot (C_0 - C_b) \end{aligned} \quad (C-14)$$

e analogamente

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x}(L - x, H - y) - u(x, y) \cdot (C_0 - C_b) \quad (C-15)$$

Donde se conclui que a função de massa apresentará a propriedade da simetria central, se e somente se:

$$C_b = C_o \quad (C-16)$$

A eq.(C-9) já satisfaz o requisito anterior, conquanto aquele foi o valor usado no desenvolvimento para obtê-la.