

INFLUÊNCIA DO SUPERAQUECIMENTO NO
COMPORTAMENTO TÉRMICO DE SISTEMAS
METAL/MOLDE DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO

22/79

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INFLUÊNCIA DO SUPERAQUECIMENTO NO
COMPORTAMENTO TÉRMICO DE SISTEMAS
METAL/MOLDE DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO

*eng.
solidad
07/07/79*

Márcio Dantas de Medeiros

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

- CAMPINAS -

1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A

MEU PAI

OLAVO S. DE MEDEIROS

MINHA MÃE

SEVERINA D. DE MEDEIROS

MINHA ESPOSA

ISABEL CRISTINA C. DE MEDEIROS

A G R A D E C I M E N T O S

Ao meu orientador, Prof. Dr. AMAURI GARCIA pela dedicação e amizade demonstradas no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. TREVOR WILLIAM CLYNE, pelas proveitosas discussões, e aos colegas GILBERTO DOS SANTOS PRADO e PAULO SÉRGIO DA MOTTA PIRES pela ajuda que desinteressadamente sempre prestaram.

A RITA HELENA B. JACON e JOSÉ ANTÔNIO ALBINO pela colaboração nos trabalhos experimentais, a YOSHIKO HASHIMOTO pelo trabalho datilográfico, e a todo o pessoal do Laboratório de Fabricação e Montagem pela ajuda com o equipamento.

Finalmente, o autor agradece o apoio especial por parte da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que, através do programa PICD, tornou possível a realização deste trabalho, e em especial aos Professores FERNANDO ANTÔNIO DA NÓBREGA e JOSÉ BARTOLOMEU DOS SANTOS pela amizade e incentivo.

INFLUÊNCIA DO SUPERAQUECIMENTO NO COMPORTAMENTO TÉRMICO DE SISTEMAS METAL/MOLDE DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO

R E S U M O

O presente trabalho propõe uma extensão do modelo matemático para análise da solidificação unidirecional de metais recentemente desenvolvido por Garcia e Prates, capacitando-o a levar em conta os efeitos do superaquecimento e tornando-o, conseqüentemente, mais geral e versátil.

Inicialmente é feita uma introdução ao problema da transferência de calor durante a solidificação em sistemas metal/molde na presença de superaquecimento, sendo descritos o método analítico exato de Schwarz e o analítico aproximado de Hrycak, destacados como os mais representativos de suas classes. O método numérico de Dusenberry aplicado à solidificação é descrito em detalhes, sendo, inclusive, desenvolvido um novo algoritmo que permite a sua utilização sem a necessidade de uma reprogramação cada vez que mudem as condições de contorno do sistema metal/molde.

A suposição básica do modelo continua sendo a substituição da resistência térmica da interface metal/molde por espessuras virtuais do metal e do molde. A comprovação experimental é realizada por meio de experiências em um dispositivo que promove a solidificação unidirecional de metais, simulando a solidificação de um elemento de referência em um molde refrigerado a água. Assim, são obtidos dados de cinética e de distribuição de temperaturas na solidificação de Chumbo e de Alumínio, fazendo-se variar o grau de superaquecimento e as condições de contato térmico na interface metal/molde. Resultados experimentais obtidos por outros pesquisadores são também comparados com as previsões teóricas do modelo proposto, para casos de solidificação em moldes do tipo semi-infinito e em moldes refrigerados.

Finalmente, para situar o modelo proposto em rela

ção aos modelos ou métodos existentes na literatura, é feito um confronto, através dos resultados experimentais, com as previsões fornecidas pelos modelos de Schwarz, Hrycak e o método numérico de Dusingberre.

INFLUENCE OF THE SUPERHEAT IN THE THERMIC BEHAVIOR OF METAL/MOLD SYSTEMS DURING THE SOLIDIFICATION

A B S T R A C T

This paper proposes an extension of the mathematical model for the unidirectional solidification of metals recently developed by Garcia and Prates, thus capacitating it to analize cases where the superheat is present, making the model more general and versatile.

Initially it is done an introduction to the heat transfer problem during the solidification in the metal/mold systems in the presence of the superheat. Schwarz's analytical exact model and Hrycak's approximate analytical model are briefly aborded. Those are the most representative models of theirs category. Dusingherre's numerical technique, applied to the solidification, is explained in detail and a new computational algorithm, which avoids the reprograming necessity when the boundary conditions change, is presented.

The basic assumption of the model is still the substitution of the Newtonian resistance for virtuals layers of the mold and of the solidified metal.

An apparatus that promotes the unidirectional solidification of metals, simulating the solidification in a water cooled mold, was used during the experimental work. The kinetics of solidification and the thermal profile were obtained for Lead and Aluminium, varying the superheat and the thermal contact in the metal/mold interface. Experimental results obtained by other researches, for the cases of massive and water cooled molds, are also compared with the theoretic predictions of the proposed model.

Finally, in order to situate the proposed model among other existing models, graphics were drawn, comparing their previsions with the experimental results.

Í N D I C E

	<u>PAGINA</u>
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1.1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1.1
1.2. OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO.....	1.3
 CAPÍTULO 2 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR DURANTE A SOLIDIFICA- ÇÃO EM SISTEMAS METAL/MOLDE EM PRESENÇA DE SUPERAQUECIMENTO	 2.1
2.1. MÉTODOS ANALÍTICOS EXATOS.....	2.4
2.1.1. Solução de Schwarz.....	2.5
2.2. MÉTODOS ANALÍTICOS APROXIMADOS.....	2.7
2.2.1. Solução de Hrycak.....	2.8
2.3. MÉTODOS NUMÉRICOS.....	2.10
2.4. MÉTODO NÚMERICO DE DUSINBERRE APLICADO À SOLIDIFI- CAÇÃO.....	2.11
2.4.1. Desenvolvimento das Equações.....	2.13
2.4.2. Problema da Liberação do Calor Latente de Fusão.....	2.25
2.4.3. Desenvolvimento de um Algoritmo Computacio- nal Para o Emprego Generalizado do Método Numérico à Solidificação Unidirecional de Metais.....	2.26
 CAPÍTULO 3 - EXTENSÃO DE UM MODELO ANALÍTICO PARA ANÁLI- SE DA SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE ME- TAIS EM PRESENÇA DE SUPERAQUECIMENTO.....	 3.1
3.1. TEMPO E VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO.....	3.4

	<u>PÁGINA</u>
3.2. PERFIL TÉRMICO DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO.....	3.5
3.2.1. Perfil Térmico no Molde.....	3.5
3.2.2. Perfil Térmico no Metal Sólido.....	3.5
3.2.3. Perfil Térmico no Metal Líquido.....	3.6
3.2.4. Determinação da Temperatura de Equilíbrio na Interface Metal/Molde (T_i).....	3.7
3.3. DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO(ϕ)....	3.9
3.4. DETERMINAÇÃO DA PARCELA VIRTUAL DA ESPESSURA DO MOLDE.....	3.14
3.5. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL PREVIAMENTE SO- LIDIFICADA.....	3.16
3.6. DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO DE CALOR, DO LADO DO MOLDE (h_{im}) E DO LADO DO ME- TAL (h_{is}).....	3.17
3.7. FORMA DIMENSIONAL DO MODELO PROPOSTO.....	3.18
3.8. FORMA ADIMENSIONAL DO MODELO PROPOSTO.....	3.21
 CAPÍTULO 4 - MATERIAIS E MÉTODOS EXPERIMENTAIS.....	 4.1
4.1. METAIS UTILIZADOS.....	4.1
4.2. DISPOSITIVO DE SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL REFRI- GERADO A ÁGUA.....	4.1
4.3. TIPOS DE CONTATO TÉRMICO NA INTERFACE METAL/MOLDE.	4.3
4.4. SUPERAQUECIMENTOS UTILIZADOS.....	4.6
4.5. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS.....	4.6
4.6. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA PRECISÃO DOS RESULTA- DOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS TÉCNICAS UTILIZADAS.....	4.10
 CAPÍTULO 5 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS.....	 5.1
5.1. SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DO CHUMBO EM MOLDE REFRIGERADO A ÁGUA.....	5.1

5.2. SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DO ALUMÍNIO EM MOLDE REFRIGERADO A ÁGUA.....	5.14
CAPÍTULO 6 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	6.1
6.1. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO DE CALOR DA INTERFACE METAL/MOLDE.....	6.1
6.2. VERIFICAÇÃO QUANTITATIVA DO MODELO PROPOSTO PARA A SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE METAIS EM MOLDES REFRIGERADOS.....	6.6
6.2.1. Solidificação Unidirecional de Chumbo em Molde Refrigerado a Água.....	6.6
6.2.2. Solidificação Unidirecional de Alumínio em Molde Refrigerado a Água.....	6.14
6.3. CONFRONTO DO MODELO PROPOSTO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE METAIS EXISTENTES NA LITERATURA.....	6.20
6.3.1. Resultados Experimentais obtidos por Durhan, Verma e Berry.....	6.20
6.3.2. Resultados Experimentais obtidos por Prates, Fissolo e Biloni.....	6.22
6.4. VERIFICAÇÃO DA HIPÓTESE BÁSICA DE UMA ESPESSURA VIRTUAL PREVIAMENTE SOLIDIFICADA.....	6.25
6.5. CONFRONTO DO MODELO PROPOSTO COM OUTROS MODELOS EXISTENTES NA LITERATURA.....	6.28
6.5.1. Cinética de Solidificação.....	6.28
6.5.2. Perfil de Temperaturas na Camada Solidificada.....	6.36

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES.....	7.1
LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO.....	7.4
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	7.5
APÊNDICE 1 - SIMBOLOGIA UTILIZADA.....	A-1.1
APÊNDICE 2 - FUNÇÃO ERRO.....	A-2.1
APÊNDICE 3 - PROGRAMAS DESENVOLVIDOS PARA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO DE DUSINBERRE APLICADO A SO- LIDIFICAÇÃO DE METAIS.....	A-3.1
APÊNDICE 4 - PROGRAMA FORTRAN PARA O CÁLCULO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO.....	A-4.1
APÊNDICE 5 - TABELAS DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	A-5.1
APÊNDICE 6 - PROPRIEDADES FÍSICAS DOS MATERIAIS UTILIZA- DOS.....	A-6.1
APÊNDICE 7 - EXPRESSÃO SIMPLIFICADA PARA A CONSTANTE β NO CASO DO SUPERAQUECIMENTO NULO.....	A-7.1

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nas últimas décadas o ato de conformar metais por fundição vem deixando a sua milenar tradição de empirismo para se enquadrar, gradativamente, nos moldes da metodologia científica. Dentre os diversos assuntos a serem estudados em um campo tão vasto, destaca-se a análise da transferência de calor que ocorre durante a solidificação.

A solidificação em sistemas metal/molde é um processo que envolve transmissão de calor em regime transitório, acrescido da problemática de uma mudança de fase, com evolução contínua de calor latente na interface sólido/líquido, desenvolvendo-se o processo a medida que o sistema possa eliminar através do molde o calor de superaquecimento e o calor latente [1]. A importância do seu estudo deve-se ao fato de que a taxa de solidificação influencia fortemente a estrutura e as propriedades da peça fundida, correlação já amplamente difundida na literatura, sendo uma ferramenta de fundamental importância, tanto na otimização de sistemas de lingotamento convencional [2], quanto no projeto e controle dos sistemas de lingotamento contínuo. Também a previsão do perfil térmico ao longo da espessura solidificada é imprescindível para os estudos que procuram minimizar as tensões térmicas, frequentemente ocasionadoras de fissuras neste último sistema produtivo [3]. Atualmente tem sido desenvolvido um esforço considerável no tratamento do fenômeno, existindo na literatura diversos métodos de análise que tentam realizar previsões de cinética e distribuição de temperaturas no decorrer da solidificação em sistemas metal/molde [4]. Tais métodos ou apresentam limitações do ponto de vista prático, principalmente por admitirem condições de contorno que permitem o desenvolvimento analítico, mas que afastam o problema de sua realidade física, ou não permitem nenhum tipo de generalização, sendo especificamente aplicados a cada sistema metal/molde de "per si" [5].

Recentemente, Garcia e Prates desenvolveram um modelo analítico exato [4, 6, 7, 8], que, levando em consideração

a resistência térmica da interface metal/molde, destaca-se dos existentes anteriormente pela generalidade, confiabilidade e simplicidade. Este modelo fornece previsões tanto da cinética, quanto da distribuição de temperaturas no decorrer da solidificação unidirecional de metais, considerando o fenômeno sempre na ausência de superaquecimento.

Na prática o metal líquido é sempre vazado no molde com um ligeiro superaquecimento, nunca muito elevado, geralmente não ultrapassando 10% da temperatura de fusão [9]. Este superaquecimento é sempre necessário para permitir a acomodação do metal ao molde antes que tenha início a solidificação, evitando defeitos tais como vazios por falta de alimentação, gotas frias, etc [10, 11]. Muitos métodos de análise da transferência de calor na solidificação em sistemas metal/molde, consideram o processo como ocorrendo na ausência do superaquecimento. Esta é uma hipótese válida para vários sistemas onde o superaquecimento é dissipado pela ação das correntes de convecção em tempos muito inferiores ao tempo total de solidificação, estando, consequentemente, o líquido à temperatura de fusão durante a maior parte do processo [9, 12]. Porém, em sistemas onde a solidificação ocorre de forma muito rápida, como em moldes refrigerados, a presença do superaquecimento fortemente influencia a cinética e a distribuição de temperaturas durante o processo, uma vez que, nestes casos, o calor de superaquecimento é retirado por condução térmica através da camada solidificada. Assim, surge a necessidade de ferramentas analíticas ou numéricas, confiáveis, que permitam a análise prévia do comportamento térmico do sistema metal/molde na presença do superaquecimento.

1.2. OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho, parte de um programa geral que visa a análise da transferência de calor na solidificação, tem por objetivos fundamentais:

- (a) Estender o modelo analítico exato desenvolvido por Garcia e Prates [4, 6, 7, 8] para determinar a cinética e a distribuição de temperaturas durante o processo de solidificação unidirecional de metais em presença de superaquecimento.
- (b) Comprovar experimentalmente o modelo proposto, em relação a cinética e a distribuição de temperaturas durante o processo de solidificação, no caso de moldes refrigerados.
- (c) Verificar a confiabilidade do modelo proposto em relação a cinética de solidificação em moldes maciços, pelo confronto com resultados experimentais encontrados na literatura.
- (d) Confrontar o modelo proposto com outros modelos analíticos e métodos numéricos, sob o ponto de vista da cinética e da distribuição de temperaturas durante o processo de solidificação, objetivando o seu posicionamento relativo às técnicas já existentes na literatura.

CAPÍTULO 2

TRANSFERÊNCIA DE CALOR DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO EM UM SISTEMA METAL/MOLDE EM PRESENÇA DE SUPERAQUECIMENTO

Na abordagem usual do problema da transferência de calor na solidificação em um sistema metal/molde, utiliza-se um elemento de referência de tal forma que o seu comportamento térmico seja típico do sistema como um todo. Como pode ser visto na Figura 2.1, todos os modos de transferência de calor podem ocorrer durante a solidificação de um metal: condução térmica no metal e no molde, transferência Newtoniana na interface metal/molde, convecção térmica no metal líquido e no meio ambiente e radiação térmica do molde para o meio ambiente. Deve-se porém observar que em situações particulares, algumas das formas de transferência de calor deixam de ocorrer ou tornam-se desprezíveis. Assim é que, se o molde for suficientemente espesso para absorver todo o calor transferido pelo metal durante a solidificação, a temperatura externa do molde não sofre elevação durante o processo, não ocorrendo, conseqüentemente, radiação e convecção térmicas do molde para o meio ambiente. Este e outros casos particulares encontram-se agrupados na Tabela 2.1.

Com base no elemento de referência é efetuado o estudo do processo de transferência de calor, que ocorre durante a solidificação de um metal e cujos principais objetivos são:

- determinar a distribuição de temperatura, ou perfil térmico, durante a solidificação;
- determinar a cinética de solidificação, isto é, determinar o tempo necessário para solidificar uma certa porção do metal.

Os métodos dedutivos utilizados para atingir estes objetivos podem ser classificados em três grupos:

- Métodos Analíticos Exatos
- Métodos Analíticos Aproximados
- Métodos Numéricos

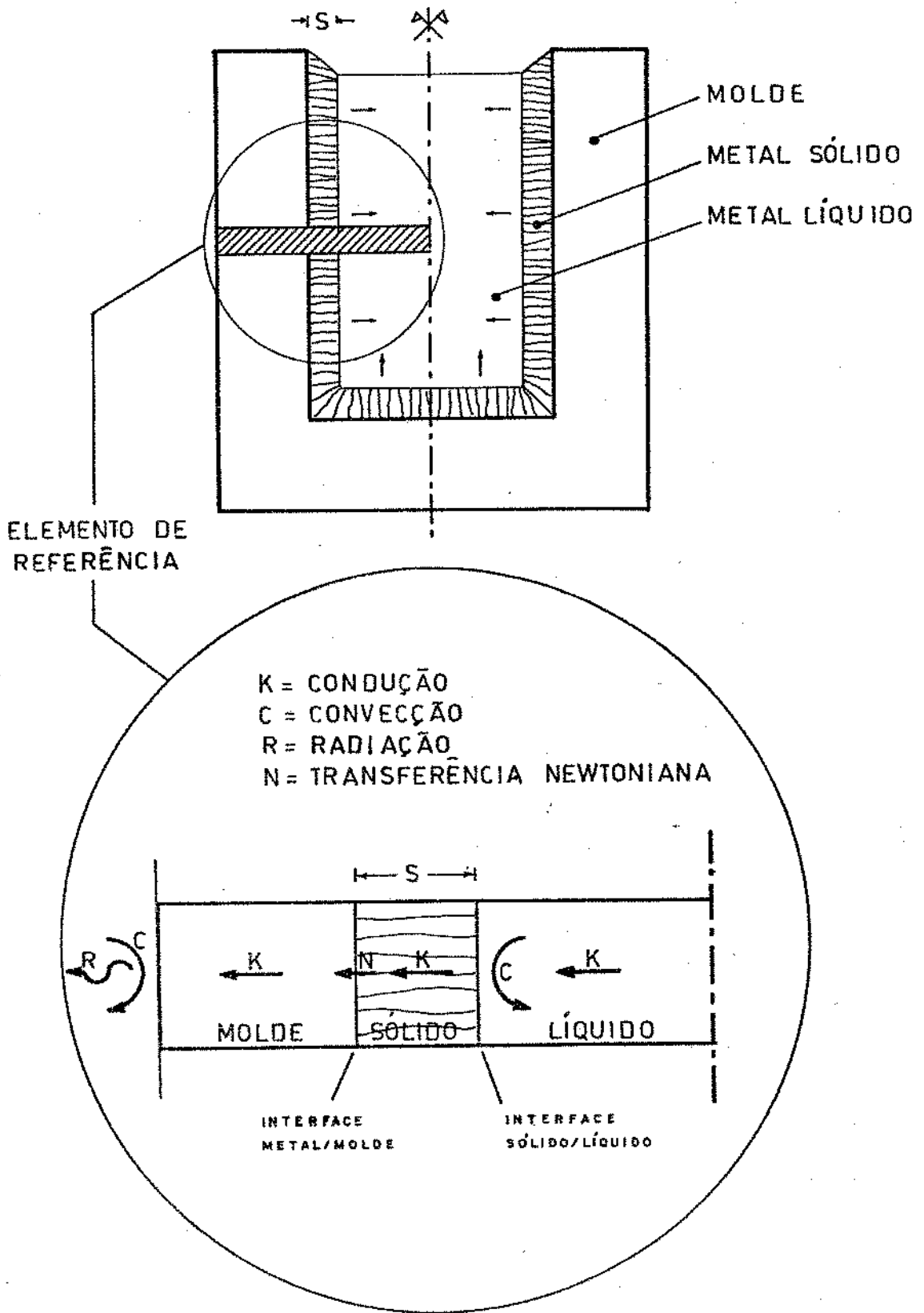


Figura 2.1 - Localização de um elemento de referência para a análise da transferência de calor durante a solidificação em um sistema metal/molde, juntamente com as possíveis formas de transferência de calor.

CASO PARTICULAR	MODOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR QUE DEIXAM DE SER SIGNIFICATIVOS
Molde suficientemente espesso para absorver todo o calor transmitido pelo metal durante a solidificação.	- Radiação do molde para o meio ambiente. - Convecção do molde para o meio ambiente.
Molde refrigerado	- Condução no molde. - Radiação do molde para o meio ambiente.
Metal vazado sem superaquecimento.	- Condução no metal líquido - Convecção no metal líquido
Molde de material isolante ou refratário	- Transferência Newtoniana [13]

Tabela 2.1. Casos particulares comumente encontrados na prática e sua influência sobre os modos de transferência de calor no sistema metal/molde.

O restante do presente capítulo será dedicado à análise das bases destes métodos, procurando evidenciar suas vantagens e desvantagens. Serão ligeiramente revisados os métodos de Schwarz (analítico exato) e Hrycak (analítico aproximado). O objetivo desta breve recapitulação será a comparação posterior, através de resultados experimentais, com o modelo a ser proposto no presente trabalho. Finalmente, os métodos numéricos serão abordados, desenvolvendo-se em detalhes e sob um novo enfoque o método numérico de Dusenberre.

2.1. MÉTODOS ANALÍTICOS EXATOS

Os métodos analíticos exatos são caracterizados por não admitirem simplificações de caráter matemático, sendo todas as hipóteses simplificadoras de caráter físico. Por este motivo, são utilizáveis somente para condições de contorno muito restritas. As hipóteses físicas adotadas para que se torne viável a solução do problema podem ser agrupados como se segue:

- (a) O fluxo de calor é unidirecional.
- (b) O contato térmico na interface metal/molde é perfeito.
- (c) O metal e o molde comportam-se como elementos semi-infinitos.
- (d) A temperatura na interface metal/molde permanece constante durante a solidificação.
- (e) A interface sólido/líquido é macroscopicamente plana.
- (f) Não existem fluxos de massa do metal líquido.
- (g) As propriedades físicas do metal e do molde não variam durante o processo de solidificação.

As hipóteses acima afastam-se bastante dos casos comumente encontrados na prática, sendo a principal restrição ao seu emprego o fato de considerar como perfeito o contato térmico na interface metal/molde. Contudo, recentemente foi desenvolvido um

modelo Analítico Exato [4] que consegue levar em conta o efeito da resistência Newtoniana, substituindo-a por espessuras virtuais do metal e do molde, para o caso de superaquecimento nulo.

2.1.1. Solução de Schwarz

A solução de Schwarz [4,14,15,16] pode ser considerada como a solução analítica exata mais geral possível para o problema da solidificação em um sistema metal/molde sujeito às hipóteses enunciadas no item anterior. O perfil térmico durante a solidificação encontra-se esquematizado na Figura 2.2, sendo a cinética de solidificação descrita por:

$$t^* = \frac{s^{*2}}{4\phi^2} \quad (2.1)$$

onde ϕ é denominada constante de solidificação e determinada iterativamente através da equação:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} - m \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \frac{\exp(-n^2\phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - \sqrt{\pi} H^* \phi = 0 \quad (2.2)$$

As distribuições de temperatura no molde, no metal sólido e no metal líquido são dadas respectivamente pelas equações:

$$T_m^* = \frac{M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{Nx^*}{2\sqrt{t^*}} \right) \right] \quad (x^* \leq 0) \quad (2.3)$$

$$T_s^* = \frac{1}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\frac{x^*}{2\sqrt{t^*}} \right) \right] \quad (0 \leq x^* \leq s^*) \quad (2.4)$$

$$T_l^* = 1 + (T_v^* - 1) \left[1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{nx^*}{2\sqrt{t^*}} \right) / \operatorname{erfc}(n\phi) \right] \quad (x^* \geq s^*) \quad (2.5)$$

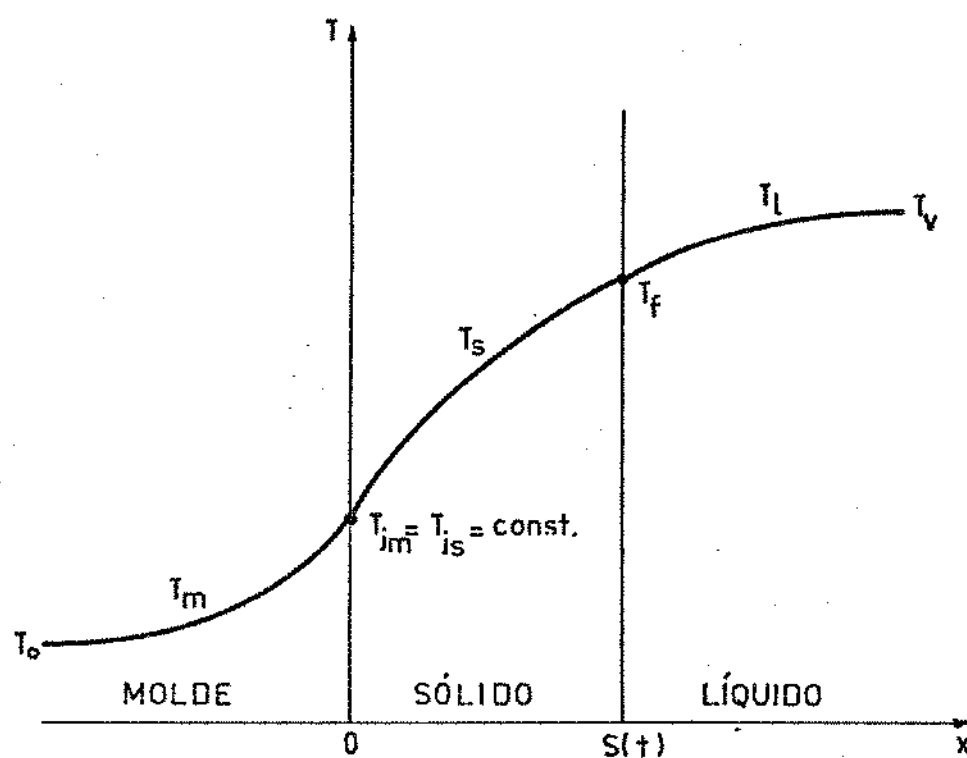


Figura 2.2 - Perfil térmico durante a solidificação conforme a forma geral do modelo de Schwarz.

É interessante notar que este modelo pode ser utilizado para o caso de um molde eficientemente refrigerado. Isto é possível fazendo-se $M \rightarrow 0$, o que só será verdade se a difusividade do calor no molde for considerada infinita, ou seja, o molde é um absorvedor perfeito de calor.

2.2. MÉTODOS ANALÍTICOS APROXIMADOS

Os métodos analíticos aproximados caracterizam-se por admitirem simplificações de caráter matemático, geralmente sendo suposto que os perfis térmicos podem ser descritos por funções, como por exemplo polinômios. Tais métodos têm se mostrado bastante eficientes na previsão da cinética de solidificação em moldes refrigerados por levarem em consideração o efeito da transferência Newtoniana na interface metal/molde.

As hipóteses simplificadoras adotadas no desenvolvimento de um método analítico aproximado podem ser agrupadas como se segue [4]:

- (a) O fluxo de calor é unidirecional.
- (b) O contato térmico entre o metal e o molde não é perfeito, apresentando um coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde finito.
- (c) A interface sólido/líquido é macroscopicamente plana.
- (d) O molde é considerado como um absorvedor perfeito de calor.
- (e) Não existem fluxos de massa no metal líquido.
- (f) As propriedades físicas do metal e do molde não variam durante o processo de solidificação.
- (g) O metal e o molde comportam-se como elementos semi-finitos.

A hipótese (d) restringe a aplicação do método ao caso de moldes refrigerados.

Como representativo desta classe de soluções, o tratamento de Hrycak [16,17] será o escolhido para efeito comparativo, sendo o único que, permitindo uma dedução analítica completa, leva em consideração o superaquecimento.

2.2.1. Solução de Hrycak

O efeito do superaquecimento em moldes refrigerados foi levado em conta por Hrycak [17], supondo para $t > 0$ uma distribuição de temperatura quadrática no metal líquido e um perfil linear no sólido. A Figura 2.3 ilustra estas suposições.

Partindo das hipóteses acima, conseguimos mostrar que a espessura solidificada está relacionada com o tempo pela equação:

$$t^* = \frac{H^*}{2} \left[\left(\frac{S^*}{F_2} + 1 \right)^2 - 1 \right] \quad (2.6)$$

Sendo F_2 a raiz positiva da equação:

$$\left[\frac{1}{F_1} \left(1 + \frac{2}{S^*} \right) + \frac{1_n f_o}{H^* S^{*2}} \right] F_2^2 - \left(\frac{2}{S^*} \right) F_2 - 1 = 0 \quad (2.7)$$

onde $f_o = \frac{1}{1 + S^*}$

Por sua vez F_1 é a raiz negativa da equação:

$$f_6 F_1^2 - (f_6 + f_7) F_1 + 1 = 0 \quad (2.8)$$

onde:

$$f_6 = 1 + \frac{(1 - f_o^2)}{2H^*} + \left[m \cdot n \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \cdot \frac{1}{H^*} \right] \quad (2.9)$$

e

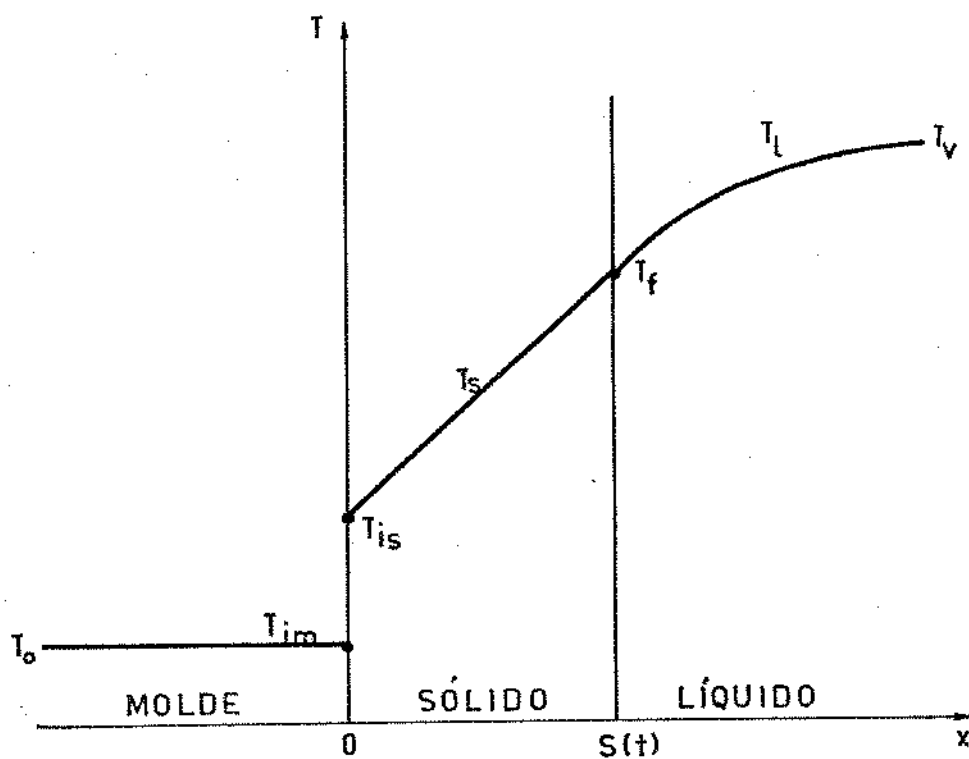


Figura 2.3 - Esquema do perfil térmico do sistema metal/molde segundo as hipóteses assumidas na solução de Hrycak.

$$f_7 = 1 + 2 \left[\left(m \frac{T_v - T_f}{T_f - T_o} \right)^2 / 3 H^* \right] \quad (2.10)$$

2.3. MÉTODOS NUMÉRICOS

As técnicas numéricas são muito poderosas e permitem grande flexibilidade, porém a sua aplicação é dificultada pela necessidade de uma nova programação cada vez que variam as condições de contorno de um determinado problema, além de requererem bastante tempo para os cálculos, exigindo normalmente a utilização de um computador. As técnicas aproximadas que necessitam da integração numérica de perfis térmicos impostos [18,19,20,21] podem também ser consideradas como métodos numéricos, porém, são menos flexíveis e poderosas, apresentando menor precisão do que as técnicas que utilizam-se de diferenças finitas.

A técnica das diferenças finitas baseia-se na aproximação da equação diferencial da condução térmica em regime transitório em equações de diferenças finitas, que são resolvidas passo a passo. Este procedimento permite que se leve em conta:

- (a) Fluxos de calor bi ou tri-dimensionais.
- (b) Contato térmico imperfeito na interface metal/molde.
- (c) Metal e molde de dimensões finitas.
- (d) Propriedades físicas variáveis.
- (e) Coeficiente de transmissão de calor por convecção na superfície externa do molde variável com a temperatura.

Dos métodos numéricos o proposto por Dusenberre [22] é o que apresenta maior versatibilidade, servindo de base para outros, tais como os desenvolvidos por Eyres et al. [23] e posteriormente estendidos por Sarjant e Slack [24], que analisam o processo de solidificação e posterior resfriamento de lingotes.

2.4. MÉTODO NUMÉRICO DE DUSINBERRE APLICADO À SOLIDIFICAÇÃO

Antes de aplicar um método numérico a um problema físico descrito por uma equação diferencial, são necessários alguns passos preliminares, cuja finalidade é aproximar a equação diferencial e as condições de contorno, por um conjunto de equações algébricas. O domínio contínuo é substituído por uma configuração de pontos discretos, entre os quais são introduzidas aproximações de diferenças finitas.

No caso da condução de calor unidimensional em um meio homogêneo, o primeiro passo para aplicação do método é a subdivisão do sistema em pequenos subvolumes conforme Figura 2.4. Admitte-se que os subvolumes são suficientemente pequenos, de maneira que a sua temperatura possa ser tomada como a temperatura do seu centro, chamado de ponto nodal ou simplesmente nó.

Em um sistema com N pontos nodais, podem ser obtidas N equações algébricas, efetuando-se balanços térmicos em cada um dos nós, para um intervalo de tempo Δt . Tal balanço pode ser escrito semanticamente [25] como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{fluxo líquido de calor} \\ \text{de todos os nós vizi-} \\ \text{nhos em direção ao nó} \\ i \text{ durante } \Delta t \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{aumento na energia} \\ \text{interna do material} \\ \text{associado com o nó } i \end{array} \right]$$

ou algebricamente

$$q_{i-1 \rightarrow i} + q_{i+1 \rightarrow i} = d c v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11.)$$

Utilizando-se a analogia elétrica e aproximando-se a diferencial por $\Delta T / \Delta t$, pode-se escrever:

$$\frac{(T_{i-1} - T_i)}{R_{i-1 \rightarrow i}} + \frac{(T_{i+1} - T_i)}{R_{i+1 \rightarrow i}} = d c v \frac{(T_i' - T_i)}{\Delta t} \quad (2.12)$$

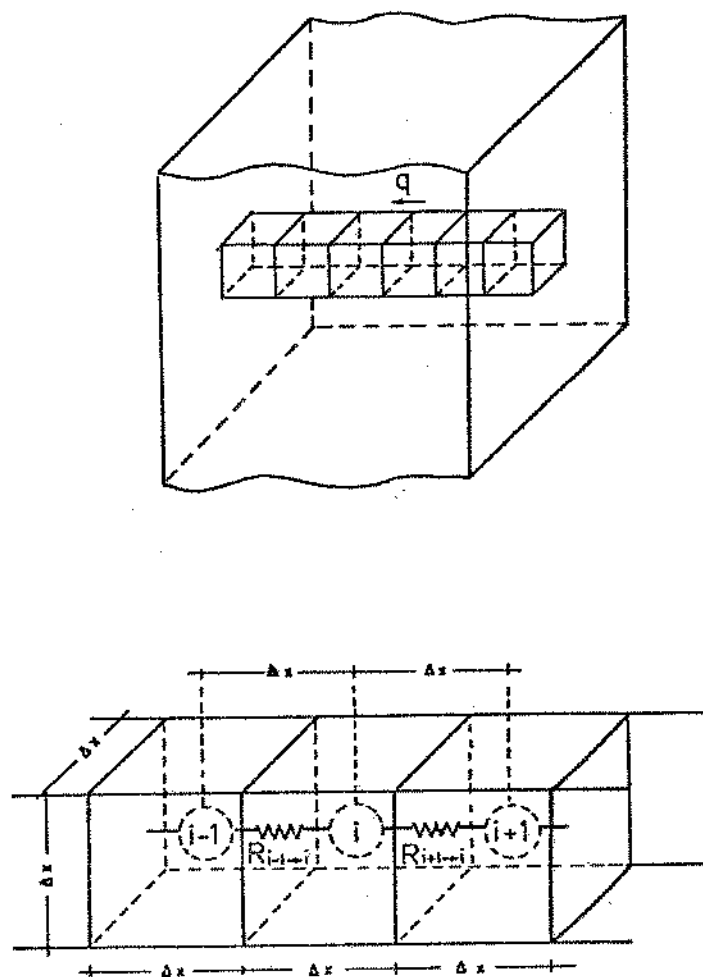


Figura 2.4 - Divisão do sistema físico em pequenos subvolumes finitos.

onde T_i' é a temperatura no ponto nodal i , após o intervalo de tempo Δt .

A equação (2.12) é bastante geral, uma vez que não especifica o tipo de resistência térmica existente entre os pontos nodais, sendo aplicável a maioria das condições de contorno e situações nas quais um nó pode ser encontrado na prática.

2.4.1. Desenvolvimento das Equações

a) Ponto nodal situado no seio de um meio homogêneo (molde, metal sólido, ou líquido)

Neste caso, representado na Figura 2.4, as resistências térmicas, $R_{i-1 \rightarrow i}$ e $R_{i+1 \rightarrow i}$, são iguais e devidas somente à condução, sendo dadas por:

$$R_{i-1 \rightarrow i} = R_{i+1 \rightarrow i} = \frac{\Delta x}{K \Delta x^2} = \frac{1}{K \Delta x} \quad (2.13)$$

Substituindo-se estes valores na equação (2.12) tem-se:

$$K \Delta x (T_{i-1} - T_i) + K \Delta x (T_{i+1} - T_i) = c d \Delta x^3 \frac{(T_i' - T_i)}{\Delta t} \quad (2.14)$$

que convenientemente rearranjada produz:

$$T_i' = \frac{T_{i-1} + T_{i+1} + \left(\frac{\Delta x^2}{a \Delta t} - 2 \right) T_i}{\frac{\Delta x^2}{a \Delta t}} \quad (2.15)$$

Fazendo-se $\frac{\Delta x^2}{a \Delta t} = M'$ a equação (2.15) fica reduzida finalmente a:

$$T_i' = \frac{1}{M'} T_{i-1} + \frac{1}{M'} T_{i+1} + \frac{(M' - 2)}{M'} T_i \quad (2.16)$$

Neste ponto do desenvolvimento deve-se notar que a escolha de Δx e Δt não é apenas um mero problema de conveniência, pois se M' for menor do que 2, o coeficiente de T_i na equação (2.16) torna-se negativo, o que leva a uma violação do 2º princípio da Termodinâmica [14,25].

Para um ponto situado no seio do molde, sólido ou líquido, tem-se respectivamente as equações:

$$T'_i = \frac{1}{M'_m} T_{i-1} + \frac{1}{M'_m} T_{i+1} + \frac{(M'_m - 2)}{M'_m} T_i \quad (2.17)$$

$$T'_i = \frac{1}{M'_s} T_{i-1} + \frac{1}{M'_s} T_{i+1} + \frac{(M'_s - 2)}{M'_s} T_i \quad (2.18)$$

$$T'_i = \frac{1}{M'_\ell} T_{i-1} + \frac{1}{M'_\ell} T_{i+1} + \frac{(M'_\ell - 2)}{M'_\ell} T_i \quad (2.19)$$

onde

$$M'_m = \frac{\Delta x^2}{a_m \Delta t}, \quad M'_s = \frac{\Delta x^2}{a_s \Delta t}, \quad M'_\ell = \frac{\Delta x^2}{a_\ell \Delta t}$$

e submetidas aos critérios de estabilidade:

$$M'_m \geq 2 \quad (2.20)$$

$$M'_s \geq 2 \quad (2.21)$$

$$M'_\ell \geq 2 \quad (2.22)$$

É prática comum, nas aplicações desta técnica à transferência de calor, adotar $M'=3$, o que representa um equilíbrio razoável entre precisão e volume de cálculo [14]. Tratando-se de um problema de solidificação, geralmente procura-se adotar $M'_s=3$ e verifica-se a obediência de M'_m e M'_l às equações (2.20) e (2.22).

b) Ponto nodal situado na superfície externa do molde

Para moldes maciços semi-infinitos, ou moldes refrigerados nos quais o coeficiente de transmissão de calor na superfície externa for considerado infinito, a temperatura externa do molde não constitui uma incógnita, já que será sempre igual à temperatura do ambiente ou fluido refrigerante.

$$T'_i = T_o \quad (2.23)$$

Em caso contrário, uma equação para o ponto nodal externo tem que ser armada, levando-se em conta a resistência térmica superficial $1/h_c \Delta x^2$, conforme Figura 2.5.

Substituindo-se as resistências esquematizadas na Figura 2.5 na equação (2.12), e lembrando-se que neste caso o volume, V , será apenas $\Delta x^3/2$, tem-se:

$$h_c \Delta x^2 (T_o - T_i) + K_m \Delta x (T_{i+1} - T_i) = d_m c_m \frac{\Delta x^3}{2} \frac{(T'_i - T_i)}{\Delta t} \quad (2.24)$$

que torna-se:

$$N'_{ex} (T_o - T_i) + (T_{i+1} - T_i) = \frac{M'_m}{2} (T'_i - T_i) \quad (2.25)$$

onde
$$N'_{ex} = \frac{h_c \Delta x}{K_m}$$

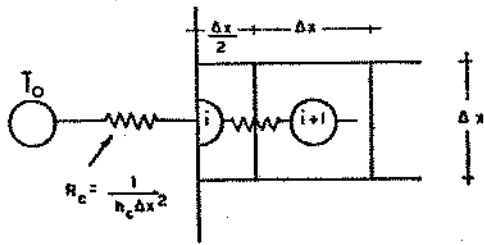


Figura 2.5 - Posicionamento dos subvolumes e resistências térmicas envolvidas no caso do ponto nodal situar-se na superfície externa do molde.

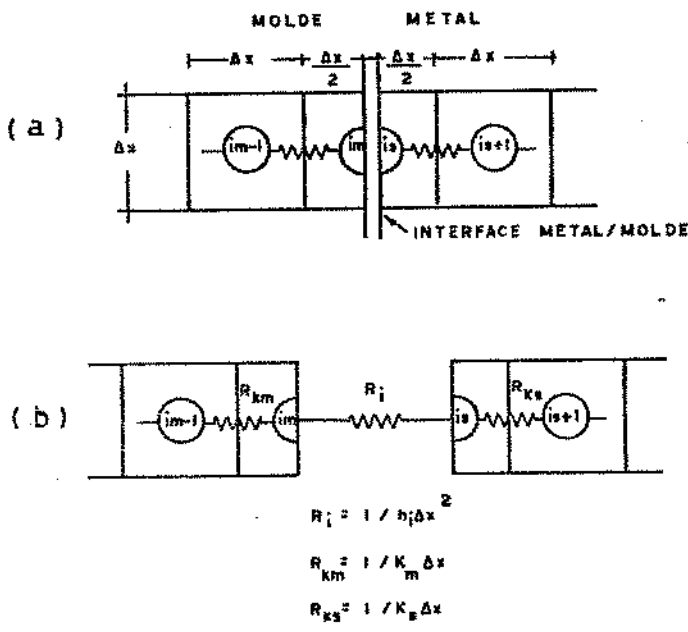


Figura 2.6 - Posicionamento dos subvolumes (a) e resistências térmicas envolvidas (b) no caso dos pontos nodais situados na interface metal/molde para moldes maciços.

Rearranjando os termos da equação (2.25) obtêm-se:

$$T'_i = \frac{2N'_{ex}}{M'_m} T_o + \frac{2}{M'_m} T_{i+1} + \left(1 - \frac{2N'_{ex} + 2}{M'_m} \right) T_i \quad (2.26)$$

que deve satisfazer a:

$$M'_m \geq 2N'_{ex} + 2 \quad (2.27)$$

c) Pontos nodais na interface metal/molde

Os pontos nodais adjacentes à interface metal/molde devem ser posicionados, para moldes maciços ou refrigerados, conforme Figuras 2.6 e 2.7, respectivamente, onde encontram-se esquematizadas as resistências térmicas envolvidas.

Para o caso de moldes maciços, Figura 2.6, aplicando-se a equação (2.12) ao ponto "im", obtêm-se:

$$K_m \Delta x (T_{im-1} - T_{im}) + h_i \Delta x^2 (T_{is} - T_{im}) = d_m c_m \frac{\Delta x^3}{2} \cdot \frac{(T'_{im} - T_{im})}{\Delta t} \quad (2.28)$$

Desenvolvendo-se a equação (2.28) chega-se a :

$$(T_{im-1} - T_{im}) + N'_{im} (T_{is} - T_{im}) = \frac{M'_m}{2} (T'_{im} - T_{im}) \quad (2.29)$$

onde $N'_{im} = \frac{h_i \Delta x}{K_m} .$

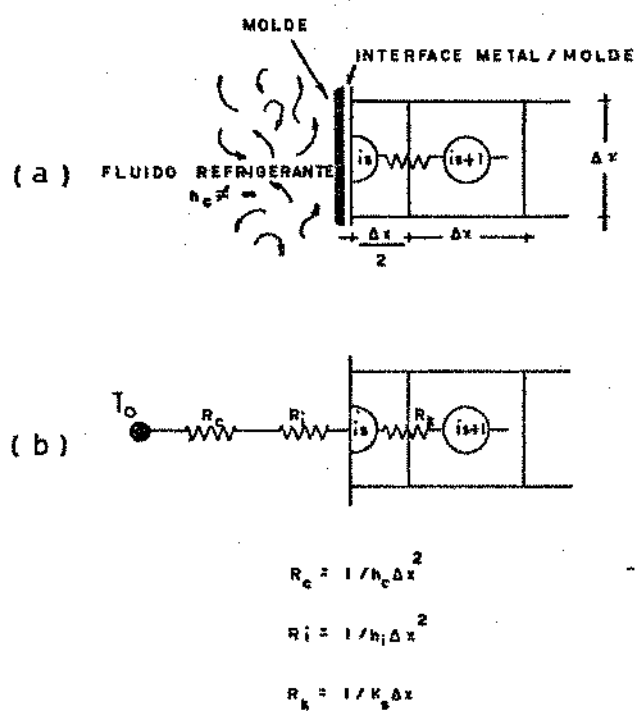


Figura 2.7 - Posicionamento dos subvolumes (a) e resistências térmicas envolvidas (b), para o caso de pontos nodais na interface metal/molde, em um molde refrigerado onde $h_c \neq \infty$.

Rearranjando a equação (2.29), obtém-se para o ponto nodal "im", na interface metal/molde do lado do molde, a expressão:

$$T'_{im} = \frac{2}{M'_m} T_{im-1} + \frac{2N'_{im}}{M'_m} T_{is} + \left(1 - \frac{2N'_{im} + 2}{M'_m}\right) T_{im} \quad (2.30)$$

Procedendo-se de maneira análoga para o ponto nodal "is" obtém-se:

$$T'_{is} = \frac{2N'_{is}}{M'_s} T_{im} + \frac{2}{M'_s} T_{is+1} + \left(1 - \frac{2N'_{is} + 2}{M'_s}\right) T_{is} \quad (2.31)$$

onde $N'_{is} = \frac{h_i \Delta x}{K_s}$.

As equações (2.30) e (2.31) dão origem aos seguintes critérios de estabilidade:

$$M'_m \geq 2 N'_{im} + 2 \quad (2.32)$$

$$M'_s \geq 2 N'_{is} + 2 \quad (2.33)$$

Para o caso de moldes refrigerados, levando-se em conta as resistências térmicas esquematizadas na Figura 2.7, obtém-se para o ponto "is" a equação:

$$T'_{is} = \frac{2Y}{M'_s} T_o + \frac{2}{M'_s} T_{is+1} + \left(1 - \frac{2Y + 2}{M'_s}\right) T_{is} \quad (2.34)$$

que dá origem ao critério de estabilidade:

$$M'_s \geq 2Y + 2 \quad (2.35)$$

onde
$$Y = \frac{h_c h_i \Delta x}{K_s (h_c + h_i)} .$$

No desenvolvimento das equações (2.31) e (2.34) foi suposto que os subvolumes "is" e "is+1" encontravam-se no estado sólido. Esta suposição deve-se à dificuldade de traduzir por meio de equações o comportamento real nos estágios iniciais do processo. É, porém, uma hipótese válida, pois sendo pequenos os dois primeiros subvolumes, logo solidificam, funcionando corretamente a equação para o restante do processo.

d) Pontos nodais situados na interface sólido/líquido

Duas hipóteses de cálculo podem ser adotadas no tratamento da interface sólido/líquido, estando a primeira delas esquematizada na Figura 2.8.

Nesta hipótese considera-se a interface sólido/líquido entre dois subvolumes, estando o primeiro solidificado e o segundo passando pelo processo de solidificação. Este último é considerado como líquido até liberar totalmente o calor latente de fusão (ver seção 2.4.2), quando então solidifica e a interface salta para a sua face direita.

Nota-se, Figura 2.8, que a resistência térmica entre os pontos adjacentes à interface será composta de duas parcelas: uma devido ao sólido e outra devido ao líquido. Substituindo-se as resistências térmicas correspondentes na equação (2.12), obtém-se para o ponto "i-1", a esquerda da interface:

$$T'_{i-1} = \frac{1}{M'_s} T_{i-2} + \frac{X_s}{M'_s} T_i + \left(1 - \frac{X_s + 1}{M'_s}\right) T_{i-1} \quad (2.36)$$

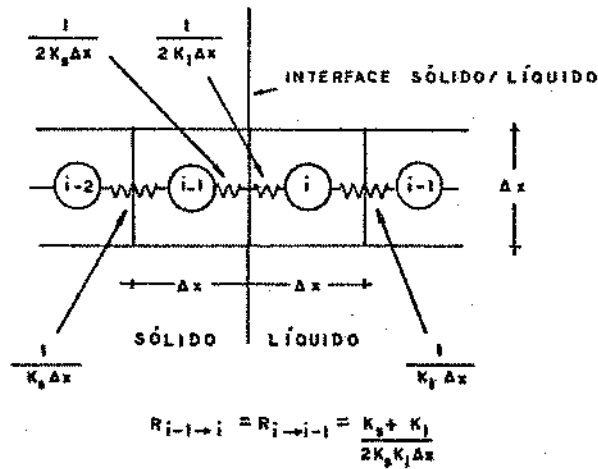


Figura 2.8 - Posicionamento dos subvolumes e resistências térmicas envolvidas no caso de pontos adjacentes à interface sólido/líquido, segundo a primeira hipótese de cálculo.

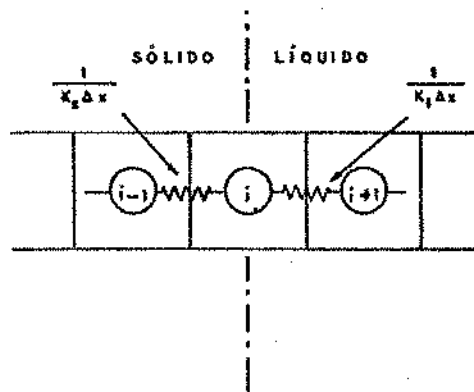


Figura 2.9 - Posicionamento dos subvolumes e resistências térmicas envolvidas no caso do ponto nodal situado na interface sólido/líquido, de acordo com a segunda hipótese de cálculo.

e para o ponto "i", situado no líquido:

$$T'_i = \frac{X_\ell}{M'_\ell} T_{i-1} + \frac{1}{M'_\ell} T_{i+1} + \left(1 - \frac{X_\ell + 1}{M'_\ell}\right) T_i \quad (2.37)$$

onde $X_s = \frac{2K_\ell}{K_\ell + K_s}$ e $X_\ell = \frac{2K_s}{K_\ell + K_s}$.

As equações (2.36) e (2.37) dão origem aos critérios de estabilidade:

$$M'_s \geq X_s + 1 \quad (2.38)$$

$$M'_\ell \geq X_\ell + 1 \quad (2.39)$$

Analisando-se o processo de solidificação de um dos subvolumes, imaginariamente demarcado no sistema real, nota-se que as suas propriedades físicas variam das do líquido, até às do sólido, enquanto é varrido pela interface.

Pode-se considerar, para efeito de cálculo, a interface sólido/líquido numa situação tal que represente o valor médio do seu deslocamento durante o processo de solidificação do subvolume. Esta posição é justamente sobre o nódulo. Quanto às propriedades físicas, o produto calor específico vezes densidade, é tomado como um valor médio dado por $(c_\ell d_\ell + c_s d_s)/2$. Esta é a segunda maneira de tratar a interface sólido/líquido e está esquematicamente representada na Figura 2.9.

Neste caso, os nódulos "i-1" e "i+1" são tratados como pontos no seio do sólido e do líquido, respectivamente, enquanto que para o nódulo "i" tem que ser desenvolvida uma nova equação.

Substituindo-se as resistências térmicas esquematizadas na Figura 2.9 na equação (2.12) obtém-se:

$$T'_i = \frac{2K_s}{Z} T_{i-1} + \frac{2K_\ell}{Z} T_{i+1} + \left(1 - \frac{2(K_s + K_\ell)}{Z}\right) T_i \quad (2.40)$$

que origina ao critério de estabilidade

$$Z \geq 2(K_s + K_\ell) \quad (2.41)$$

e onde $Z = M'_s K_s + M'_\ell K_\ell$.

e) Ponto nodal numa superfície isolada

Considerando-se inicialmente a situação esquematizada na Figura 2.10(a), onde o subvolume anterior ainda é líquido, tem-se:

$$T'_i = \frac{2}{M'_\ell} T_{i-1} + \frac{(M'_\ell - 2)}{M'_\ell} T_i \quad (2.42)$$

A equação (2.42) não dá origem a nenhum novo critério de estabilidade (ver equação 2.22).

Nos casos representados nas Figuras 2.10(b) e 2.10(c) o subvolume anterior já solidificou. Pode-se abordar o problema segundo a primeira hipótese vista na seção 2.4.1(d), conforme Figura 2.10(b), obtendo-se:

$$T'_i = \frac{2X_\ell}{M'_\ell} T_{i-1} + \left(1 - \frac{2X_\ell}{M'_\ell}\right) T_i \quad (2.43)$$

que origina o critério de estabilidade:

$$M'_\ell \geq 2X_\ell \quad (2.44)$$

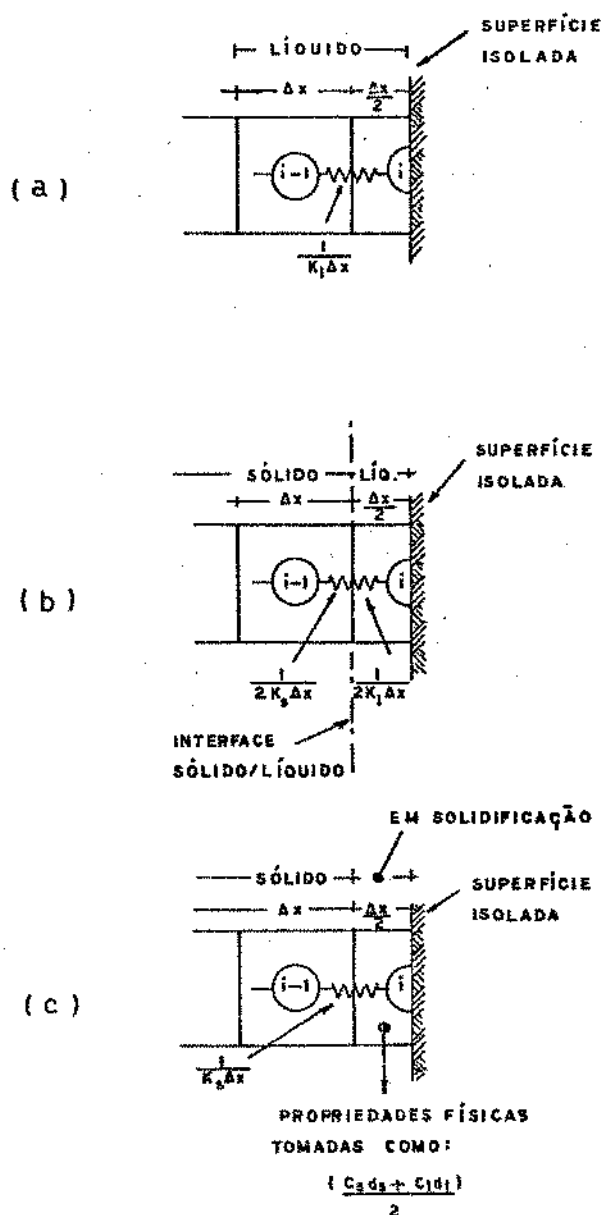


Figura 2.10. - Posicionamento e resistências térmicas no caso de um ponto nodal situado numa superfície isolada:

- (a) Os subvolumes representados pelos nós i e $i-1$ estão no estado líquido; (b) a interface sólido/líquido encontra-se entre os subvolumes i e $i-1$, conforme a primeira hipótese da seção 2.41(d) ; (c) o subvolume $i-1$ encontra-se solidificado, enquanto que o subvolume i em solidificação, conforme a segunda hipótese da seção 2.4.1.(d).

ou, de acordo com a segunda hipótese da seção 2.4.1(d), obtendo-se:

$$T'_i = \frac{4K_S}{Z} T_{i-1} + \left(1 - \frac{4K_S}{Z}\right) T_i \quad (2.45)$$

surgindo o último critério de estabilidade:

$$Z \geq 4K_S \quad (2.46)$$

2.4.2. Problema da Liberação do Calor Latente de Fusão

Para que o processo de solidificação seja adequadamente representado pelo método, é necessário levar-se em conta a liberação do calor latente de fusão. Para tanto, Dusinberre utilizou uma técnica aproximada [14], baseada em um parâmetro λ definido por:

$$\lambda = \frac{H}{c_s} \quad (2.47)$$

A quantidade λ pode ser considerada como uma mudança de temperatura no material, no decorrer da qual uma quantidade de calor específico igual ao calor latente de fusão deve ser liberada. Assim sendo, se no decorrer dos cálculos a temperatura de um ponto da rede cair abaixo da temperatura de fusão, deve-se guardar a diferença entre a temperatura de fusão e a nova temperatura num contador, e considerar para os cálculos posteriores a temperatura daquele nódulo igual à de fusão, até o instante no qual o somatório das diferenças ultrapasse o valor de λ , quando então o ponto pode continuar a resfriar normalmente.

2.4.3. Desenvolvimento de um Algoritmo Computacional para o Emprego Generalizado do Método Numérico à Solidificação Unidirecional de Metais.

As expressões desenvolvidas até aqui permitem o cálculo da temperatura de um dado subvolume, em um sistema específico, após um intervalo de tempo Δt , em função das temperaturas dos subvolumes vizinhos. A expressão apropriada para efetuar tal cálculo deve ser escolhida tendo-se em vista a situação particular do nó considerado. É fácil notar que para um mesmo nódulo a expressão pode variar durante o processo de solidificação. Por exemplo, usá-ríamos a equação (2.19) para um subvolume inicialmente no seio do líquido, a equação (2.40) quando este subvolume estivesse na interface sólido/líquido e a equação (2.18) quando, finalmente, estivesse no seio do sólido.

Uma das principais restrições à utilização do método numérico é a necessidade de um novo programa para cada sistema metal/molde. Porém, pelo menos para o caso da solidificação unidirecional, é possível incluir em um só programa todas as condições particulares até aqui abordadas. Tal feito pode ser alcançado associando-se a cada nódulo a informação de ser ele um ponto do molde, do sólido ou do líquido, por meio de uma matriz denominada de ESTADO. Com este artifício pode ser elaborado um algoritmo computacional generalizado que permita a escolha automática da equação correta para o cálculo do T'_i . Como exemplo, veja-se o caso em que se quer calcular o T'_i para um ponto na interface metal/molde do lado do metal solidificado. Este ponto pode ser perfeitamente identificado como aquele no qual (ver Apêndice 3):

ESTADO (I-1) = MOLDE

e

ESTADO (I) = SÓLIDO

Uma vez identificada a situação do nódulo, o fluxo do programa é encaminhado para a equação apropriada, calculando o valor de T'_i .

O algoritmo assim desenvolvido encontra-se na Figura 2.11. Os programas FORTRAN com ele elaborados encontram-se no Apêndice 3, juntamente com todas as instruções necessárias para a sua correta utilização.

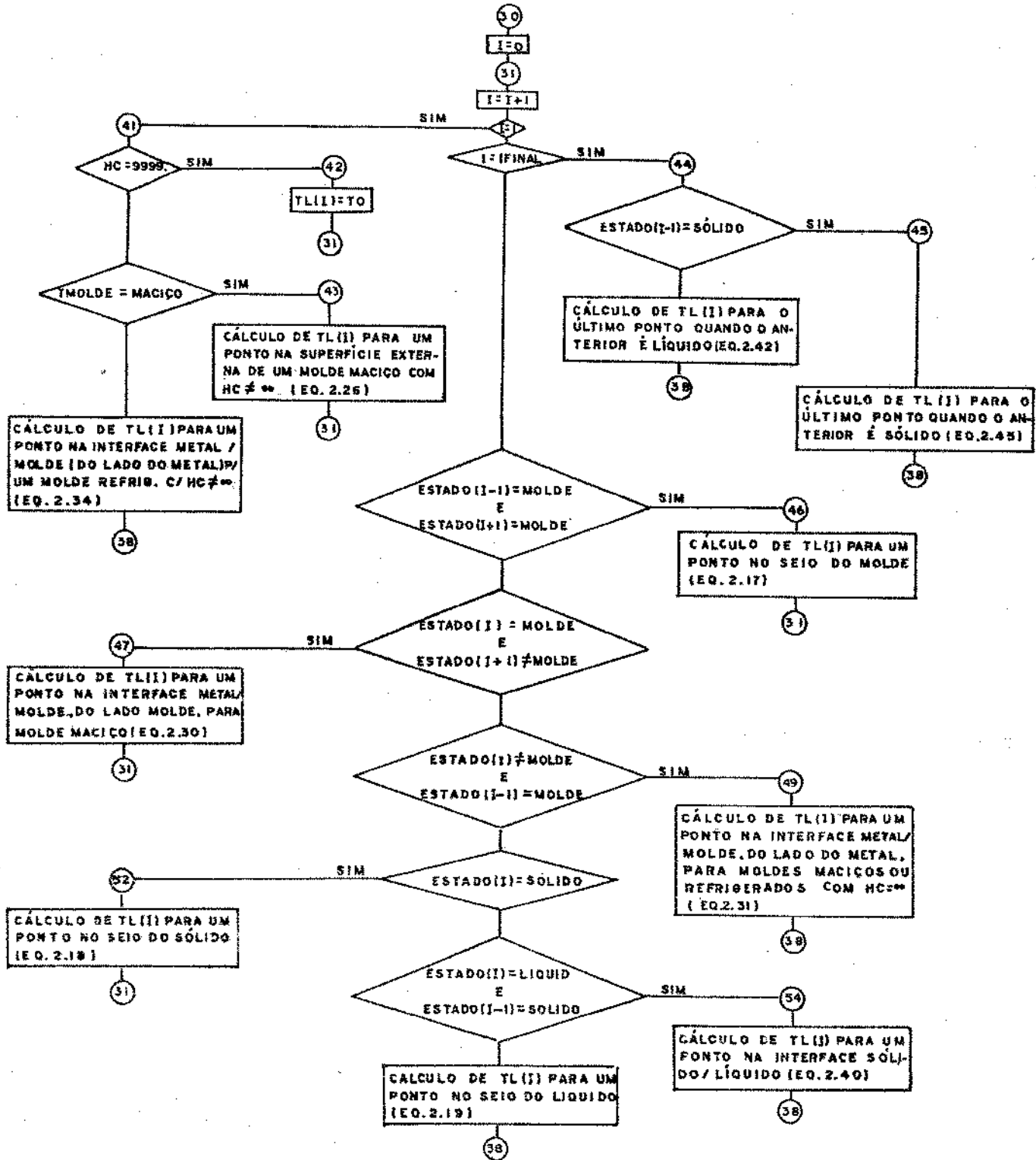


Figura 2.11 - Fluxograma do algoritmo computacional desenvolvido para escolha da equação apropriada para o cálculo de T'_i .

CAPÍTULO 3

EXTENSÃO DE UM MODELO ANALÍTICO PARA A ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE METAIS EM PRESENÇA DE SUPERAQUECIMENTO

Neste capítulo o modelo analítico desenvolvido por Garcia e Prates [4,6,7,8] será estendido para o caso da solidificação em presença de superaquecimento, tornando-se mais geral e versátil. Para tanto, faz-se necessário, inicialmente, a redefinição das suposições básicas:

- (1) O fluxo de calor é unidirecional durante o processo de solidificação, sendo o metal e o molde considerados como elementos semi-infinitos.
- (2) A resistência térmica na interface metal/molde é representada por um coeficiente de transmissão de calor, h_i , o qual permanece constante durante o processo.
- (3) O metal solidifica com uma interface sólido/líquido macroscopicamente plana.
- (4) O metal, como geralmente ocorre na prática da fundição, encontra-se inicialmente a uma temperatura (T_V) não muito acima da temperatura de fusão, de maneira que a convecção no líquido é desprezada, considerando-se apenas a condução térmica.
- (5) As propriedades físicas do metal e do molde permanecem constantes no decorrer da solidificação.

A hipótese básica para o desenvolvimento do modelo é a consideração da resistência Newtoniana como equivalente a duas parcelas: a primeira proveniente de uma espessura virtual acrescida ao molde e a segunda resultante de uma camada de metal virtual previamente solidificada, considerando-se um plano de referência imaginário entre o metal e o molde, o qual permanece a uma temperatura T_i . Esta situação é esquematizada na Figura 3.1.

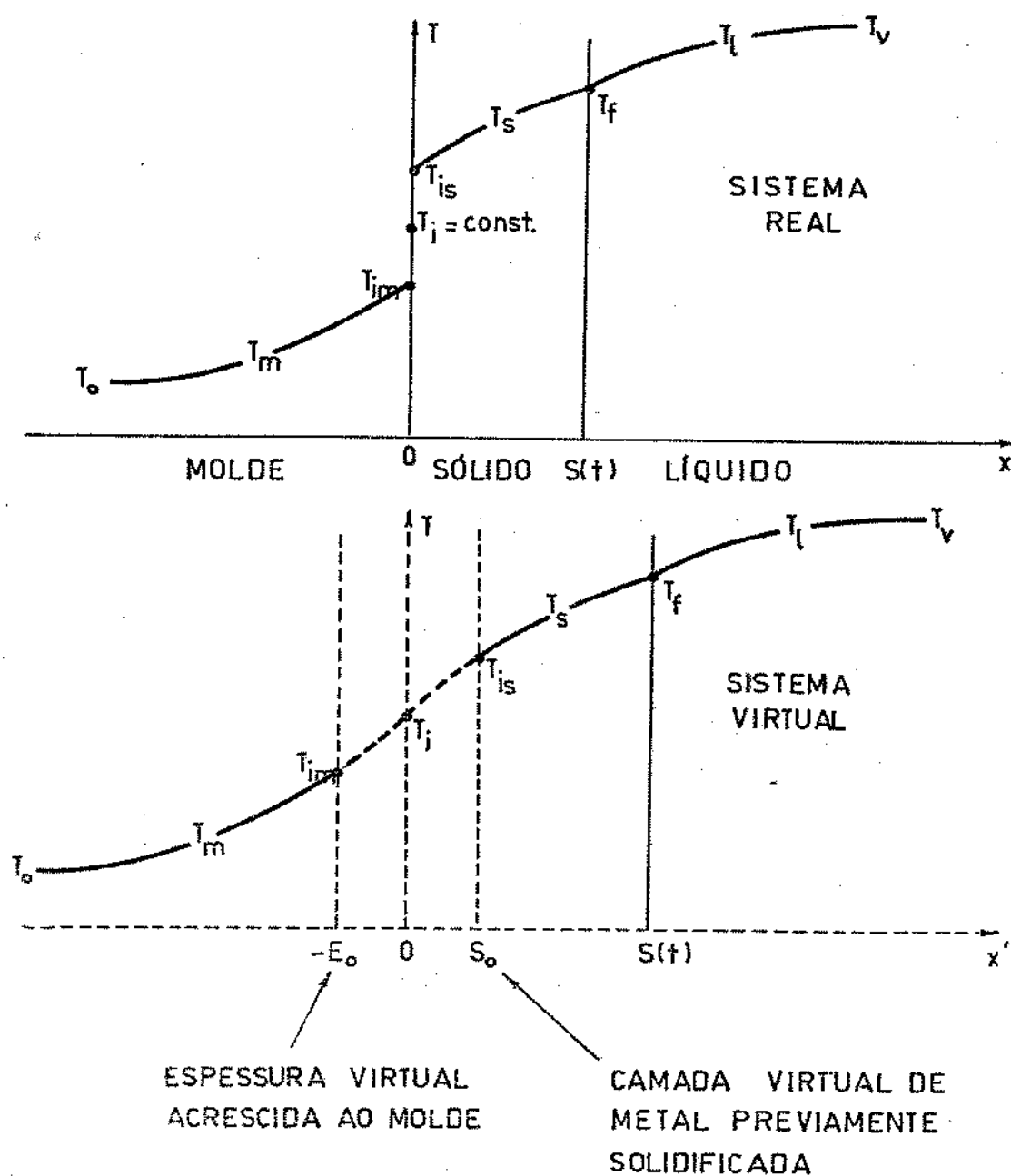


Figura 3.1 - Representação esquemática da transformação do sistema real no sistema virtual.

A transposição do sistema real para o virtual é feita através das seguintes relações:

$$x' = S_0 + x ; \text{ para } x > 0 \quad (3.1)$$

$$x' = -E_0 + x ; \text{ para } x < 0 \quad (3.2)$$

$$S' = S_0 + S \quad (3.3)$$

$$t' = t_0 + t \quad (3.4)$$

onde t_0 é o tempo no qual ocorre a solidificação da espessura virtual S_0 .

No sistema virtual todo o calor é removido por condução , sendo aplicável a equação diferencial de Fourier para condução em regime transitório [15]:

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} \quad (3.5)$$

cuja solução geral é da forma:

$$T = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{2\sqrt{at'}}\right). \quad (3.6)$$

O sistema virtual está sujeito as seguintes condições de contorno:

$$x' \rightarrow -\infty \rightarrow T_m = T_0 = \text{const.} \quad (3.7)$$

$$x' = 0 \rightarrow T_m = T_s = T_i = \text{const.} \quad (3.8)$$

$$x' = s' \rightarrow T_s = T_\ell = T_f = \text{const.} \quad (3.9)$$

$$x' \rightarrow +\infty \rightarrow T_\ell = T_v = \text{const.} \quad (3.10)$$

3.1. TEMPO E VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO

Pela aplicação da condição de contorno expressa pela equação (3.9) na equação (3.6), pode-se concluir que:

$$\phi = \frac{s'}{2\sqrt{a_s t'}} \quad (3.11)$$

ou

$$t' = \frac{s'^2}{4a_s \phi^2} \quad (3.12)$$

onde ϕ é chamado de constante de solidificação. Em particular para $s' = s_0$ e $t' = t_0$, obtém-se da equação (3.12) que:

$$t_0 = \frac{s_0^2}{4a_s \phi^2} \quad (3.13)$$

Substituindo-se as relações (3.3), (3.4) e (3.13) na equação (3.12), chega-se à seguinte expressão:

$$t = \frac{s^2}{4a_s \phi^2} + \frac{s_0 s}{2a_s \phi^2} \quad (3.14)$$

A velocidade de solidificação pode ser obtida pela derivação da equação (3.14), resultando:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2a_s \phi^2}{(s_0 + s)} \quad (3.15)$$

3.2. PERFIL TÉRMICO DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO

3.2.1. Perfil térmico no molde

De acordo com a equação (3.6) o perfil térmico no molde será expresso por:

$$T_m = A_m + B_m \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{2\sqrt{a_m t'}} \right) \quad (3.16)$$

As constantes A_m e B_m são facilmente determinadas pela aplicação das condições de contorno (3.7) e (3.8), sendo dadas por:

$$A_m = T_i \quad \text{e} \quad B_m = T_i - T_o \quad (3.17)$$

Porém, devido a identidade

$$\frac{x'}{2\sqrt{a_m t'}} = \phi \frac{x'}{s'} \sqrt{\frac{a_s}{a_m}} = N \phi \frac{x'}{s'} = N \phi \frac{-E_o + x}{s_o + s} \quad (3.18)$$

onde $N = \sqrt{a_s/a_m}$, pode-se escrever que:

$$T_m = T_i + (T_i - T_o) \operatorname{erf} \left[N \phi \left(\frac{-E_o + x}{s_o + s} \right) \right] \quad (3.19)$$

3.2.2. Perfil térmico no metal sólido

De acordo com a solução geral expressa pela equação (3.6) o perfil térmico no metal sólido será dado por:

$$T_s = A_s + B_s \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{2\sqrt{a_s t'}} \right) \quad (3.20)$$

As constantes A_s e B_s ficam determinadas pela aplicação das condições de contorno (3.8) e (3.9), sendo:

$$A_s = T_i \quad \text{e} \quad B_s = \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}\left(\frac{S'}{2\sqrt{a_s t'}}\right)} = \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)} \quad (3.21)$$

Porém

$$\frac{x'}{2\sqrt{a_s t'}} = \phi \frac{x'}{S'} = \phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \quad (3.22)$$

Combinando-se as expressões (3.21) e (3.22) com a equação (3.20), obtêm-se para o perfil térmico no metal sólido a expressão:

$$T_s = T_i + \frac{(T_f - T_i)}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\phi \frac{S_o + x}{S_o + S}\right) \quad (3.23)$$

3.2.3. Perfil térmico no metal líquido

O perfil término no metal líquido, conforme a solução geral dada pela equação (3.6), será dado por:

$$T_\ell = A_\ell + B_\ell \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{2\sqrt{a_\ell t'}}\right) \quad (3.24)$$

As constantes A_ℓ e B_ℓ são determinadas pela submissão da equação (3.24) às condições de contorno (3.9) e (3.10), sendo:

$$A_\ell = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \quad \text{e} \quad B_\ell = \frac{T_v - T_f}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \quad (3.25)$$

já que:

$$\frac{S'}{2\sqrt{a_\ell t'}} = \frac{n S'}{2\sqrt{a_s t'}} = n\phi \quad (3.26)$$

Contudo, podemos escrever que:

$$\frac{x'}{2\sqrt{a_\ell t'}} = n\phi \frac{x'}{S'} = n\phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \quad (3.27)$$

Substituindo-se os valores determinados pelas equações (3.25) e (3.27) na equação (3.24), pode-se obter o perfil térmico no metal líquido como:

$$T_\ell = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc}\left(n\phi \frac{S_o + x}{S_o + S}\right) \quad (3.28)$$

3.2.4. Determinação da temperatura de equilíbrio na interface metal/molde (T_i)

Fazendo-se um balanço térmico em $x' = 0$, obtém-se:

$$K_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial x'} \right)_0 = K_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial x'} \right)_0 \quad (3.29)$$

e derivando-se a equação (3.16) em relação a x' , tem-se:

$$\frac{\partial T_m}{\partial x'} = \frac{2(T_i - T_o)}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x'^2}{4a_m t'}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a_m t'}} \quad (3.30)$$

ou

$$\frac{\partial T_m}{\partial x'} = \frac{2N\phi(T_i - T_o)}{\sqrt{\pi} S'} \exp\left(-N^2 \phi^2 \frac{x'^2}{S'^2}\right) \quad (3.31)$$

Fazendo-se $x' = 0$ na equação (3.31) fica-se com:

$$\left(\frac{\partial T_m}{\partial x'} \right)_0 = \frac{2N\phi(T_i - T_o)}{\sqrt{\pi} S'} \quad (3.32)$$

Derivando-se a equação (3.20) em relação a x' , determina-se que:

$$\frac{\partial T_s}{\partial x'} = \frac{T_f - T_i}{\text{erf}(\phi)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4a_s t'}\right) \frac{1}{2\sqrt{a_s t'}} \quad (3.33)$$

ou

$$\frac{\partial T_s}{\partial x'} = \frac{T_f - T_i}{\text{erf}(\phi)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\phi}{S'} \exp\left(-\phi^2 \frac{x'^2}{S'^2}\right) \quad (3.34)$$

Fazendo-se $x' = 0$ na equação (3.34), obtêm-se:

$$\left(\frac{\partial T_s}{\partial x'} \right)_0 = \frac{2\phi (T_f - T_i)}{\sqrt{\pi} S' \text{erf}(\phi)} \quad (3.35)$$

Substituindo-se as equações (3.32) e (3.35) na equação (3.29), tem-se:

$$K_m N (T_i - T_o) = \frac{K_s (T_f - T_i)}{\text{erf}(\phi)} \quad (3.36)$$

ou

$$\frac{(T_f - T_i)}{(T_i - T_o)} = \frac{\text{erf}(\phi)}{M} \quad (3.37)$$

onde $M = \frac{b_s}{b_m} \quad (3.38)$

A equação (3.37) pode ainda ser escrita na forma:

$$(T_i - T_o) \frac{\text{erf}(\phi)}{M} = (T_f - T_i) \quad (3.39)$$

Somando-se e subtraindo-se T_o ao segundo membro da equação (3.39), obtém-se:

$$(T_i - T_o) \frac{\text{erf}(\phi)}{M} = (T_f - T_o) - (T_i - T_o) \quad (3.40)$$

ou

$$(T_i - T_o) \left[1 + \frac{\text{erf}(\phi)}{M} \right] = (T_f - T_o) \quad (3.41)$$

Finalmente pode-se obter que:

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o)M}{M + \text{erf}(\phi)} \quad (3.42)$$

3.3. DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO (ϕ)

Fazendo-se um balanço térmico na interface sólido/líquido, considerando-se um crescimento infinitesimal da camada solidificada (ds') no intervalo de tempo (dt'), tem-se:

$$K_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial x'} \right)_{s'} - K_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial x'} \right)_{s'} + H d_s \frac{ds'}{dt'} = 0 \quad (3.43)$$

Derivando-se a equação (3.24) em relação a x' , fica-se com:

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial x'} = \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4a_\ell t'}\right) \frac{1}{2\sqrt{a_\ell t'}} \quad (3.44)$$

ou

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial x'} = \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2 \phi^2 \frac{x'^2}{s'^2}\right) \cdot \frac{n\phi}{s'} \quad (3.45)$$

Em particular para $x' = s'$, tem-se:

$$\left(\frac{\partial T_\ell}{\partial x'}\right)_{s'} = \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \cdot \frac{2n\phi}{\sqrt{\pi}s'} \exp(-n^2 \phi^2) \quad (3.46)$$

Com base na equação (3.34) encontra-se facilmente que:

$$\left(\frac{\partial T_s}{\partial x'}\right)_{s'} = \frac{(T_f - T_i)}{\operatorname{erf}(\phi)} \cdot \frac{2\phi}{\sqrt{\pi}s'} \exp(-\phi^2) \quad (3.47)$$

e da equação (3.11) que:

$$\frac{ds'}{dt'} = \phi \sqrt{\frac{a_s}{t'}} = \frac{2a_s \phi^2}{s'} \quad (3.48)$$

Combinando-se as equações (3.46), (3.47) e (3.48) com a equação (3.43) resulta em:

$$nK_\ell(T_v - T_f) \frac{\exp(-n^2 \phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - K_s(T_f - T_i) \frac{\exp(-\phi^2)}{\operatorname{erf}(\phi)} + a_s d_s \phi H \sqrt{\pi} = 0 \quad (3.49)$$

Substituindo-se o valor de T_i dado pela equação (3.42) na equação (3.49) ao mesmo tempo que divide-se todos os termos por $K_s(T_f - T_o)$, encontra-se:

$$\frac{nK_l(T_v - T_f)}{K_s(T_f - T_o)} \frac{\exp(-n^2\phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - \frac{\exp(-\phi^2)}{M+\operatorname{erf}(\phi)} + \sqrt{\pi} H^* \phi = 0 \quad (3.50)$$

onde

$$H^* = \frac{H}{c_s(T_f - T_o)} .$$

A equação (3.50) pode ser colocada na forma:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M+\operatorname{erf}(\phi)} - n \frac{K_l}{K_s} \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \frac{\exp(-n^2\phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - \sqrt{\pi} H^* \phi = 0 \quad (3.51)$$

mas

$$n \frac{K_l}{K_s} = \frac{K_l}{K_s} \sqrt{\frac{K_s c_l d_l}{K_l c_s d_s}} = \frac{b_l}{b_s} = m . \quad (3.52)$$

Combinando-se as equações (3.51) e (3.52) obtém-se finalmente:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M+\operatorname{erf}(\phi)} - m \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \frac{\exp(-n^2\phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - \sqrt{\pi} H^* \phi = 0 \quad (3.53)$$

A equação (3.53) permite a determinação de ϕ por meio de técnicas iterativas. Nas Figuras 3.2 e 3.3 encontram-se as soluções desta equação, sob a forma gráfica, para diversos metais não ferrosos, solidificados respectivamente em molde refrigerado ($M = 0$) e molde maciço

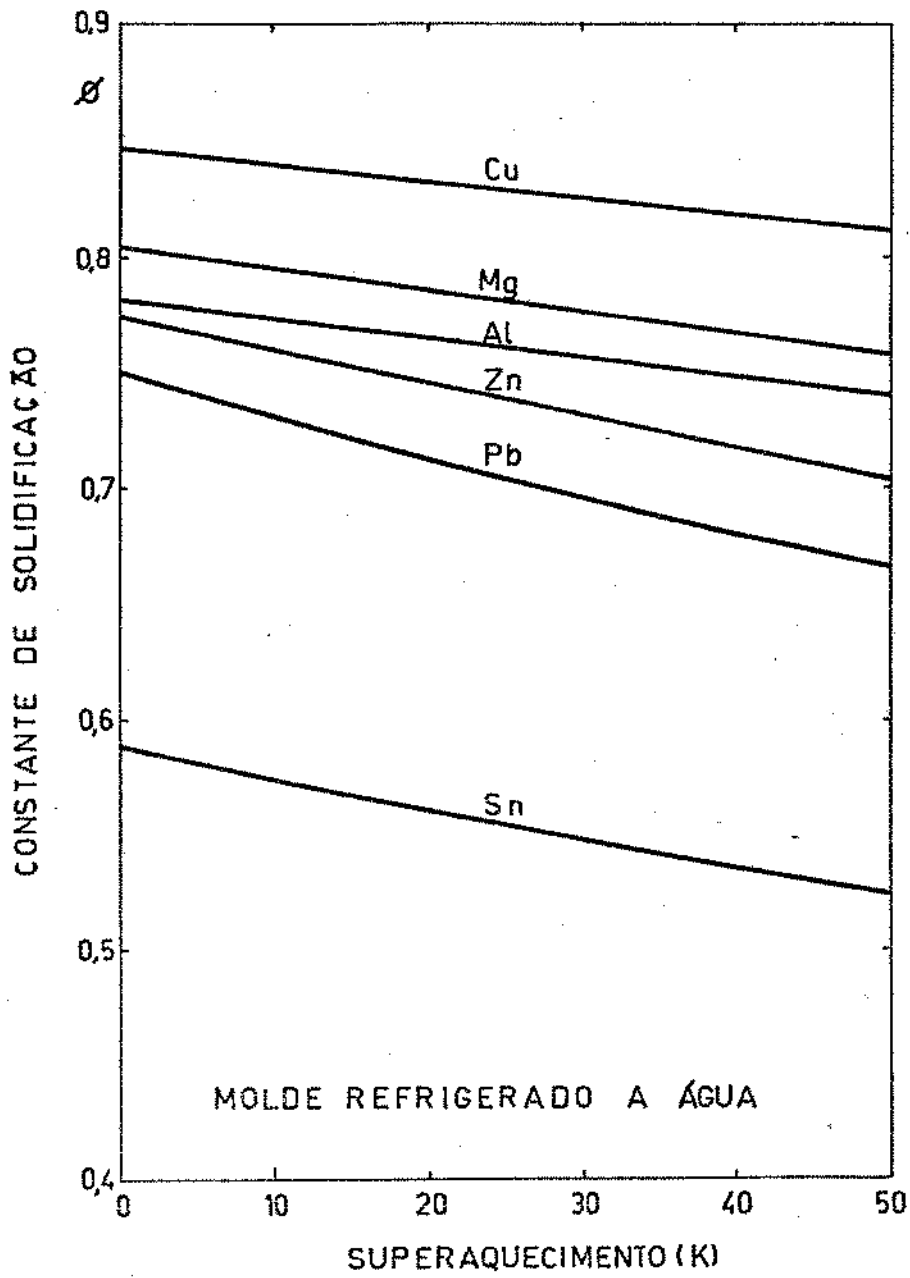


Figura 3.2 - Solução gráfica da equação que determina a constante de solidificação (ϕ), para diversos metais não ferrosos, solidificados em molde refrigerado ($M=0$) a diferentes graus de superaquecimento.

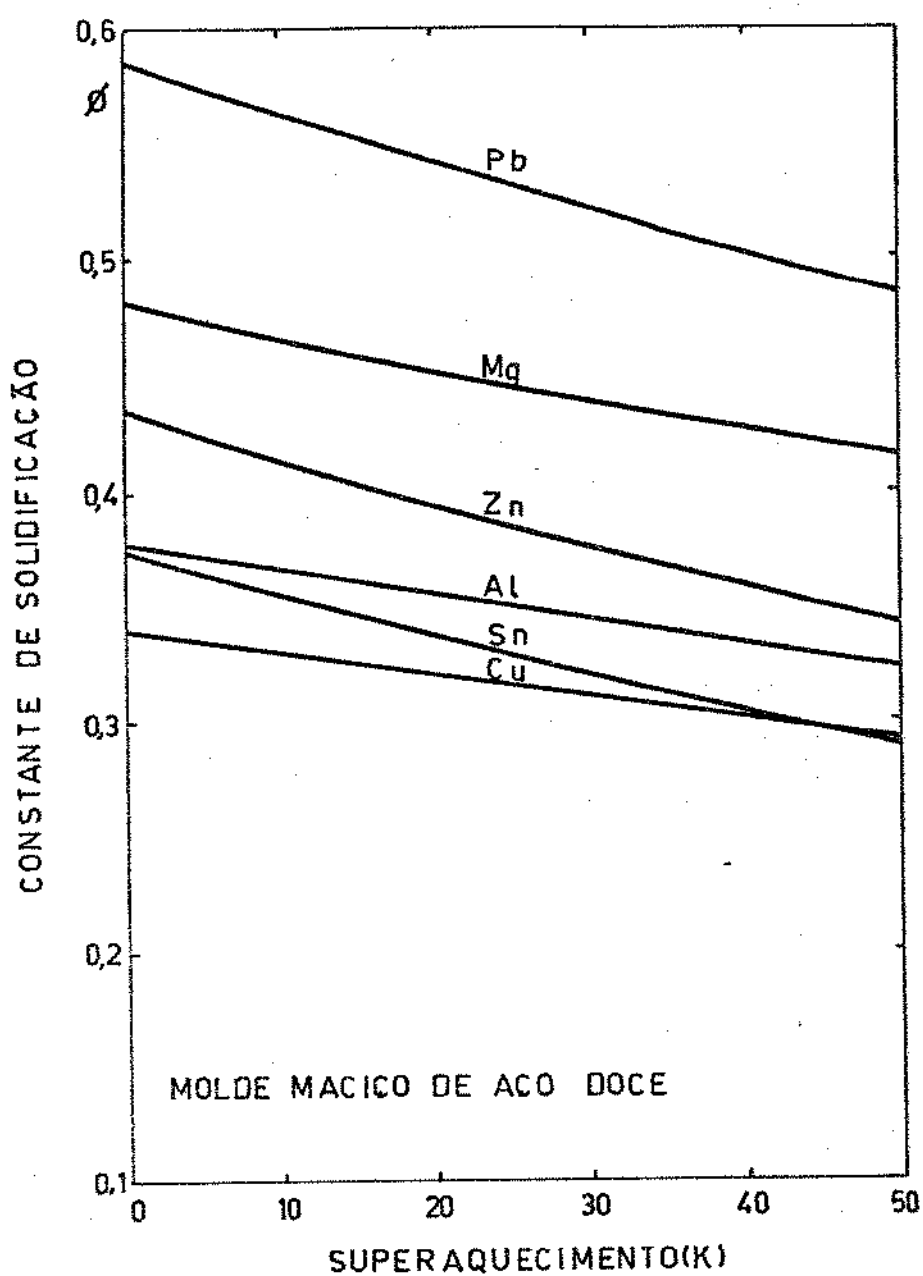


Figura 3.3 - Solução gráfica da equação que determina a constante de solidificação (ϕ), para diversos metais não ferrosos, solidificados em molde maciço de aço doce do tipo semi-infinito, a diferentes graus de superaquecimento.

de aço doce, a diferentes graus de superaquecimento. O programa FORTRAN utilizado nos cálculos pode ser encontrado no Apêndice 4, juntamente com todas as informações necessárias à sua utilização.

3.4. DETERMINAÇÃO DA PARCELA VIRTUAL DA ESPESSURA DO MOLDE

De conformidade com a Figura 3.4, fazendo-se um balanço térmico em $x' = -E_o$ no instante $t' \rightarrow t_o (t \rightarrow 0)$, obtém-se:

$$h_{im} (T_i - T_o) = K_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial x'} \right)_{-E_o} \quad (3.54)$$

Da equação (3.31) determina-se que:

$$\left(\frac{\partial T_m}{\partial x'} \right)_{-E_o} = \frac{2N\phi (T_i - T_o)}{\sqrt{\pi} S_o} \exp \left(-N^2 \phi^2 \frac{E_o^2}{S_o^2} \right) \quad (3.55)$$

Substituindo-se a equação (3.55) na equação (3.54):

$$h_{im} (T_i - T_o) = \frac{2N\phi K_m (T_i - T_o)}{\sqrt{\pi} S_o \exp(N^2 \phi^2 E_o^2 / S_o^2)} \quad (3.56)$$

ou ainda

$$\frac{N^2 \phi^2 E_o^2}{S_o^2} = \ln \left(\frac{2N\phi K_m}{\sqrt{\pi} h_{im} S_o} \right) \quad (3.57)$$

Sendo a espessura virtual do molde dada por:

$$E_o = \frac{S_o}{N\phi} \sqrt{\ln \left(\frac{2N\phi K_m}{\sqrt{\pi} h_{im} S_o} \right)} \quad (3.58)$$

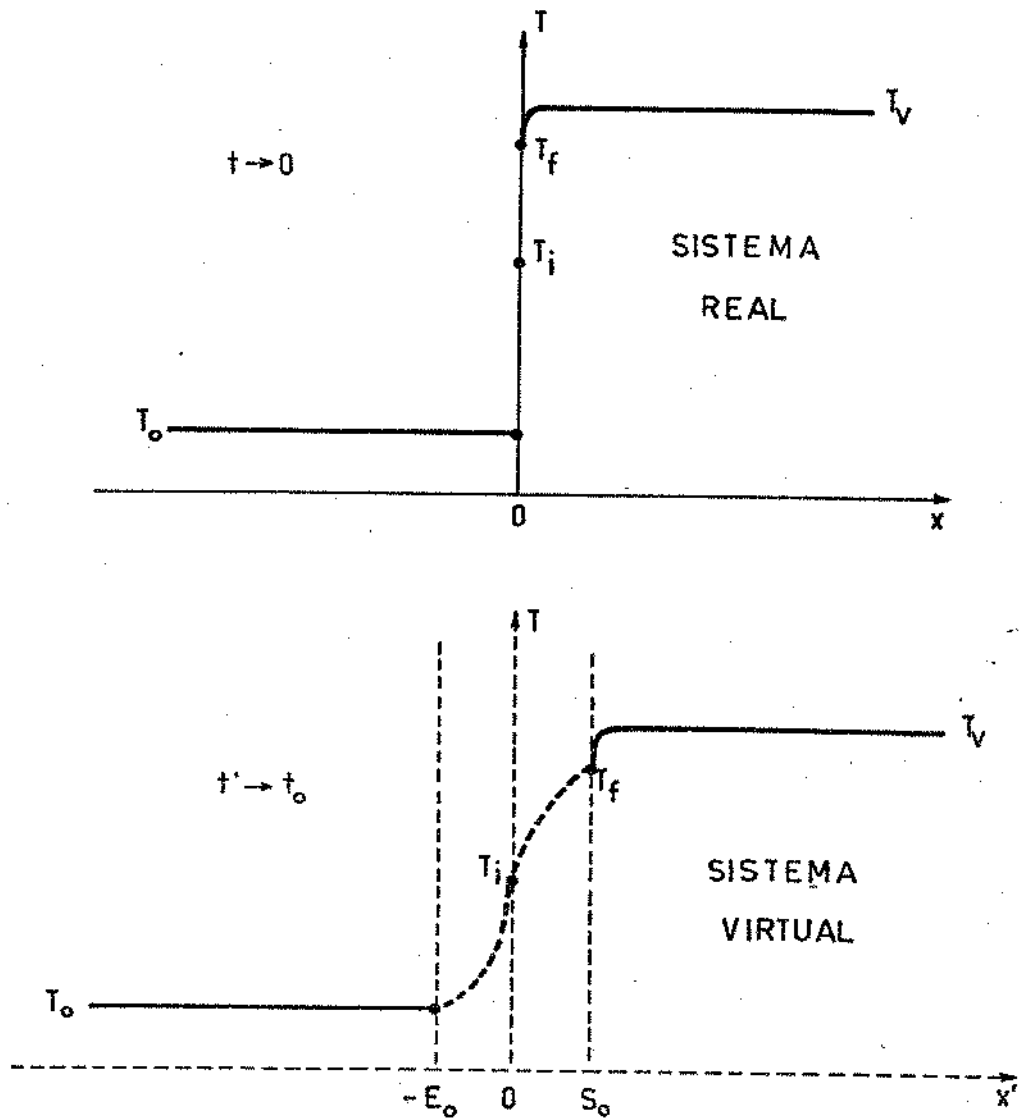


Figura 3.4 - Hipóteses básicas para o instante inicial da solidificação ($t \rightarrow 0$) e o relacionamento entre os sistemas real e virtual.

3.5. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL PREVIAMENTE SOLIDIFICADA

O valor de S_o é determinado por meio de um balanço térmico na interface metal/molde nos instantes iniciais do processo de solidificação. Para tanto, considera-se que o metal em contato com o molde atinge quase instantaneamente a temperatura de solidificação. Assim sendo, pode escrever que para $t \rightarrow 0$ ($t' \rightarrow t_o$):

$$h_{is}(T_f - T_i) = K_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial x'} \right)_{S_o} \quad (3.59)$$

Da equação (3.34) conclui-se que:

$$\left(\frac{\partial T_s}{\partial x'} \right)_{S_o} = \frac{2\phi(T_f - T_i)}{\sqrt{\pi} S_o \operatorname{erf}(\phi)} \exp(-\phi^2) \quad (3.60)$$

Substituindo-se a equação (3.60) na equação (3.59), tem-se:

$$h_{is}(T_f - T_i) = \frac{2\phi K_s (T_f - T_i)}{\sqrt{\pi} S_o \operatorname{erf}(\phi) \exp(\phi^2)} \quad (3.61)$$

Resultando finalmente:

$$S_o = \frac{2\phi K_s}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\phi) \exp(\phi^2) h_{is}} \quad (3.62)$$

3.6. DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO DE CALOR, DO LADO DO MOLDE (h_{im}) E DO LADO DO METAL (h_{is})

Como a resistência térmica do contato ficou dividida em duas parcelas, cada uma delas situada respectivamente no lado do metal e no lado do molde, pode-se escrever a seguinte relação:

$$R_i = R_{im} + R_{is} \quad (3.63)$$

ou colocada em termos dos coeficientes de transmissão de calor:

$$\frac{1}{h_i} = \frac{1}{h_{im}} + \frac{1}{h_{is}} = \frac{h_{im} + h_{is}}{h_{im}h_{is}} \quad (3.64)$$

Porém, para $t \rightarrow 0$ pode-se escrever:

$$h_{im}(T_i - T_o) = h_{is}(T_f - T_i) = h_i(T_f - T_o) \quad (3.65)$$

ou

$$\frac{(T_f - T_i)}{(T_i - T_o)} = \frac{h_{im}}{h_{is}} \quad (3.66)$$

Combinando-se a equação (3.66) com a equação (3.39), resulta em:

$$h_{im} = \frac{h_{is} \operatorname{erf}(\phi)}{M} \quad (3.67)$$

Da equação (3.65) pode-se ainda concluir que:

$$\frac{(T_i - T_o)}{(T_f - T_o)} = \frac{h_i}{h_{im}} \quad (3.68)$$

Combinando-se a equação (3.41) com a equação (3.68), obtém-se:

$$h_{im} = \left[1 + \frac{\text{erf}(\phi)}{M} \right] h_i \quad (3.69)$$

e pela combinação das equações (3.67) e (3.69) resulta:

$$h_{is} = \left[1 + \frac{M}{\text{erf}(\phi)} \right] h_i \quad (3.70)$$

3.7. FORMA DIMENSIONAL DO MODELO PROPOSTO

A cinética de solidificação é determinada pela combinação das equações (3.14), (3.62) e (3.70), sendo descrita por:

$$t = \frac{1}{4a_s \phi^2} S^2 + \frac{c_s d_s}{\sqrt{\pi} \phi h_i \exp(\phi^2) [\text{erf}(\phi) + M]} S \quad (3.71)$$

ou em uma forma mais simplificada:

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (3.72)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{4a_s \phi^2}$$

e

$$\beta = \frac{S_0}{2a_s \phi^2} = \frac{c_s d_s}{\sqrt{\pi} \phi h_i \exp(\phi^2) [\text{erf}(\phi) + M]} \quad (3.74)$$

Deve-se notar o fato do termo quadrático (αS^2) ser governado apenas por parâmetros do metal e do molde, enquanto que o termo linear (βS) é fortemente influenciado pelo tipo de contato térmico na interface metal/molde.

Combinando-se as equações (3.73) e (3.74) determina-se que:

$$S_o = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (3.75)$$

Pela combinação das equações (3.62), (3.69) e (3.70) com a equação (3.58) chega-se a:

$$E_o = \frac{S_o}{N\phi} \sqrt{\ln \left(\frac{M N K_m \exp(\phi^2)}{K_s} \right)} \quad (3.76)$$

Mas:

$$M N = \frac{K_s}{K_m} \quad (3.77)$$

Portanto, pode-se concluir que:

$$E_o = \frac{S_o}{N} \quad (3.78)$$

Combinando-se as equações (3.75) e (3.78) chega-se finalmente a:

$$E_o = \frac{\beta}{2\alpha N} \quad (3.79)$$

Pela substituição das equações (3.42), (3.75) e (3.79) na equação (3.19), determina-se a equação que dá o perfil térmico no molde:

$$T_m = T_o + \frac{(T_f - T_o)M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\phi \frac{2\alpha N x - \beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right] \quad (3.80)$$

Em particular, a maior temperatura no molde é dada por:

$$T_{im} = T_o + \frac{(T_f - T_o)M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(- \frac{\phi\beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right] \quad (3.81)$$

Substituindo-se as equações (3.42) e (3.75) na equação (3.23) chega-se à equação que permite o cálculo do perfil térmico no metal sólido:

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\phi \frac{2\alpha x + \beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right] \quad (3.82)$$

Em particular, a menor temperatura no metal sólido é dada por:

$$T_{is} = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\frac{\phi\beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right] \quad (3.83)$$

O perfil de temperatura do metal líquido, pode ser determinado pela substituição da equação (3.75) na equação (3.28), resultando:

$$T_l = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc} \left(n\phi \frac{2\alpha x + \beta}{2\alpha S + \beta} \right) \quad (3.84)$$

3.8. FORMA ADIMENSIONAL DO MODELO PROPOSTO

A relação entre tempo e espessura solidificada, equação (3.14), pode ser representada em termos de parâmetros adimensionais:

$$t^* = \frac{1}{4\phi^2} s^{*2} + \frac{s_o^* s^*}{2\phi^2} \quad (3.85)$$

onde

$$s_o^* = \frac{2\phi}{\sqrt{\pi} \exp(\phi^2) [\operatorname{erf}(\phi) + M]} \quad (3.86)$$

As equações que descrevem os perfis térmicos também podem ser adimensionalizadas resultando:

$$T_m^* = \frac{(T_m - T_o)}{(T_f - T_o)} = \frac{M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(N\phi \frac{x^* - E_o^*}{s_o^* - s^*} \right) \right] \quad (3.87)$$

$$T_s^* = \frac{(T_s - T_o)}{(T_f - T_o)} = \frac{1}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\phi \frac{s_o^* + x^*}{s_o^* + s^*} \right) \right] \quad (3.88)$$

$$T_l^* = \frac{(T_l - T_o)}{(T_f - T_o)} = 1 + (T_v^* - 1) \left[1 + \operatorname{erfc}(n\phi \frac{s_o^* + x^*}{s_o^* + s^*}) / \operatorname{erfc}(n\phi) \right] \quad (3.89)$$

CAPÍTULO 4

MATERIAIS E MÉTODOS EXPERIMENTAIS

4.1. METAIS UTILIZADOS

Com a finalidade de comprovar experimentalmente o modelo proposto, foram realizadas experiências de solidificação unidirecional com Chumbo e Alumínio comercialmente puros (Tabela 4.1). Estes metais foram escolhidos tanto por cobrirem uma faixa bastante representativa dos metais não ferrosos comumente utilizados em fundição, como por não possuírem pontos de fusão muito elevados, o que facilita a manipulação em laboratório.

METAL	COMPOSIÇÃO QUÍMICA - PORCENTAGEM EM PESO									CLASSIFICAÇÃO ABNT
	Al	Cu	Fe	Mg	Ni	Pb	Si	Sn	Zn	
CHUMBO	-	-	0,002	-	0,003	resto	-	0,25	0,0038	Chumbo Refinado
ALUMÍNIO	resto	0,0242	0,182	0,0013	0,0148	-	0,103	-	-	Al 1100

Tabela 4.1 - Composição química dos metais utilizados (análise realizada nos laboratórios da Metal Leve S.A.).

4.2. DISPOSITIVO DE SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL REFRIGERADO A ÁGUA

Os metais acima foram solidificados em um dispositivo especialmente projetado para promover a solidificação unidirecional na forma vertical ascendente, e que encontra-se representado esquematicamente na Figura 4.1. O dispositivo basicamente consiste em um tubo vertical de aço inoxidável de 54 mm de diâmetro interno e 60 mm de diâmetro externo, que funciona como lingoteira, tendo ao seu redor um forno elétrico tubular. As paredes internas do tubo são recobertas com uma pintura isolante à base de Alumina de maneira a dificultar as trocas laterais de calor durante a solidificação e garantir a unidirecionalidade do processo.

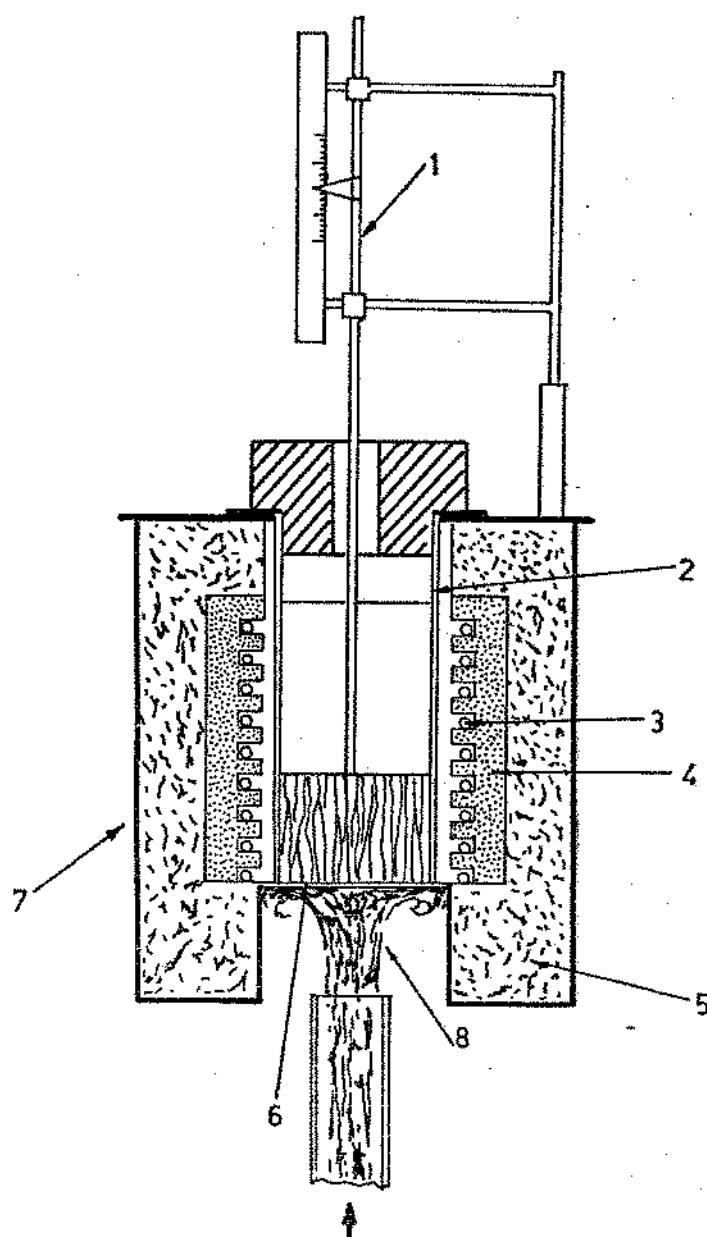


Figura 4.1 - Representação esquemática do dispositivo de solidificação unidirecional refrigerado a água.

1. Dipstick
2. Tubo de aço inoxidável
3. Resistências elétricas
4. Capa isolante de material cerâmico
5. Argamassa refratária
6. Chapa molde de aço ABNT 1020
7. Paredes externas de chapa de aço ABNT 1010
8. Fluxo de água refrigerante.

O forno é constituído por resistências elétricas de fio Kanthal A-1, distribuídas em duas zonas com potência de 1000 watts cada, incrustadas em material cerâmico isolante e controladas independentemente através de chaves automáticas. O material cerâmico é envolvido por uma camada de argamassa refratária, que por sua vez é protegida do exterior por uma carcaça de chapa de aço ABNT 1010.

A base da lingoteira consiste de uma chapa de aço ABNT 1020 com 2 mm de espessura, em contato com o fluxo de água, de maneira a só por aí se dar a extração do calor. O fluxo de refrigeração, 0,23 litros/segundo, foi ajustado previamente às experiências definitivas por tentativa e erro até resultar em estruturas regularmente unidirecionais como as mostradas nas Figuras 4.2 e 4.3. A solidificação na forma ascendente permite que a ação da força da gravidade favoreça o contato entre metal e molde, dificultando a formação de "gaps" de ar [26].

Para maiores detalhes construtivos sobre este dispositivo é recomendável uma consulta a referência [4].

4.3. TIPOS DE CONTATO TÉRMICO NA INTERFACE METAL/MOLDE

Como foi salientado por vários pesquisadores [33,34,35,36,37] a resistência térmica metal/molde é extremamente dependente do estado superficial do molde, sofrendo mudanças com fatores tais como a rugosidade, películas oxidadas e películas de recobrimentos protetores.

Nas experiências realizadas com Chumbo foram utilizadas duas condições de contato térmico na interface metal/molde: molde polido e molde recoberto. Nas realizadas com Alumínio, devido a dificuldades experimentais, provocadas pelo ataque químico do Alumínio ao molde, aos termopares e ao "dipstick", utilizou-se apenas o molde recoberto.

No caso do molde polido, este sofria um polimento com lixas d'água de granulação 220 e 240, enquanto que no caso do molde recoberto era aplicado um revestimento isolante a base de Alumina por meio de pistola pressurizada. A espessura deste revestimento era de aproximadamente 50 μm .



Figura 4.2 - Macrografia longitudinal de um lingote de Chumbo solidificado no dispositivo de solidificação unidirecional (molde polido e superaquecimento nulo).



Figura 4.3 - Macrografia longitudinal de um lingote de Alumínio solidificado no dispositivo de solidificação unidirecional (molde recoberto e superaquecimento de 46K).

4.4. SUPERAQUECIMENTOS UTILIZADOS

Para cada condição de contato na interface metal/molde foram realizadas experiências com superaquecimento nulo, objetivando a determinação do coeficiente de transmissão de calor desta interface [6,7,26] e uma verificação posterior da influência que o superaquecimento traria sobre o processo.

Na escolha dos superaquecimentos procurou-se não ultrapassar a faixa de trabalho industrial, nunca excedendo 10% da temperatura de fusão. O Chumbo foi submetido a superaquecimentos de 30 e 60 K, respectivamente 5 e 10% da temperatura de fusão, enquanto que o Alumínio a 46K, correspondente aproximadamente a 7% da temperatura de fusão.

4.5. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Cada experimento era iniciado pela fusão "in situ" do metal, seguida do aquecimento até cerca de 5K acima da temperatura desejada, sendo mantida esta temperatura por cerca de 30 minutos com a finalidade de estabelecer o equilíbrio térmico [19]. Em seguida, as resistências elétricas eram desligadas, deixando-se a temperatura cair lentamente. Pouco antes de ser atingida a temperatura especificada para o experimento, o metal era vigorosamente agitado com a finalidade de eliminar gradientes térmicos. A cronometragem do tempo tinha início no instante em que era aberto o fluxo de água, sendo o avanço da frente de solidificação medido por meio da técnica do "dipstick" [4,19,27]. Na solidificação do Chumbo todas as experiências foram repetidas com uma série de 4 termopares posicionados a 0, 2, 4 e 6 cm da interface metal/molde, enquanto que na solidificação do Alumínio, com 5 termopares posicionados a 0, 2, 3, 4 e 5 cm desta interface. Esta repetição visava a comprovação dos resultados obtidos com o "dipstick" e a determinação do perfil térmico no decorrer da solidificação. Os termopares utilizados eram de chromel-alumel de 0,3 mm de diâmetro, com junta isolada e isolação mineral, recobertos com bainha de aço inoxidável de 1,5 mm de diâmetro, acoplados a um registrador de temperaturas multi-canal.

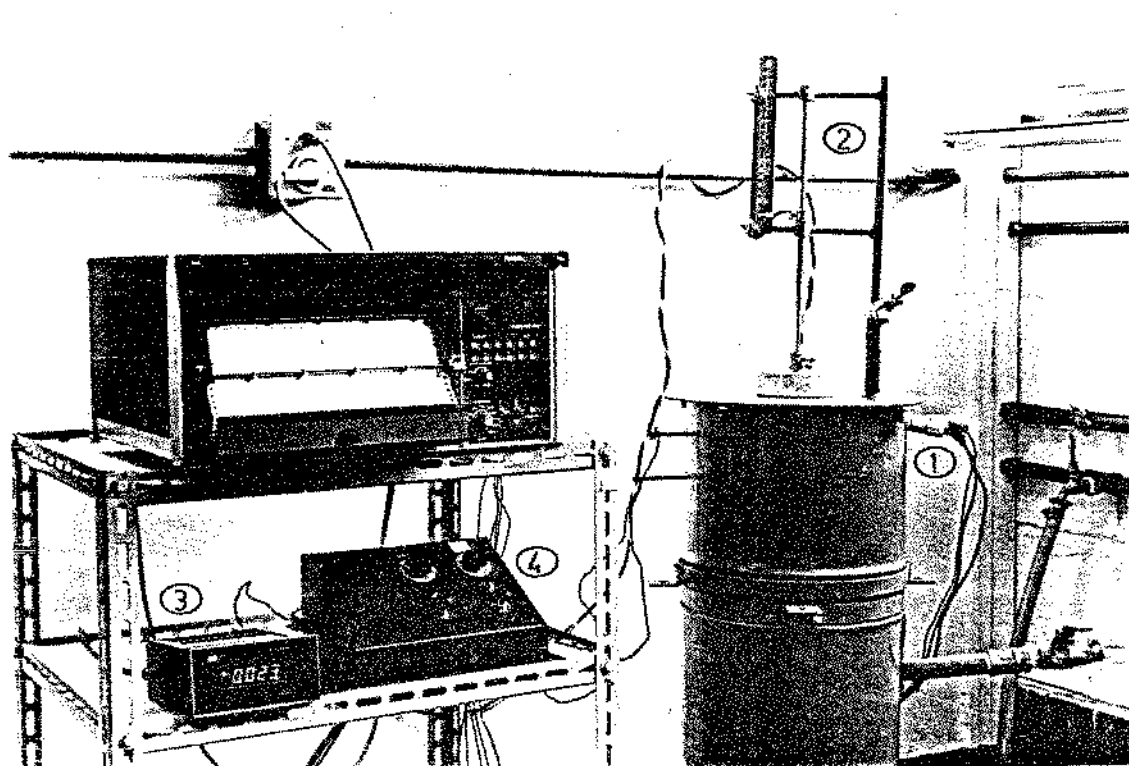


Figura 4.4 - Vista do instrumental utilizado na determinação do avanço da interface sólido/líquido pela técnica do "dipstick".

1. Dispositivo de solidificação unidirecional
2. "Dipstick"
3. Indicador de temperaturas
4. Chaves de controle das zonas de aquecimento.

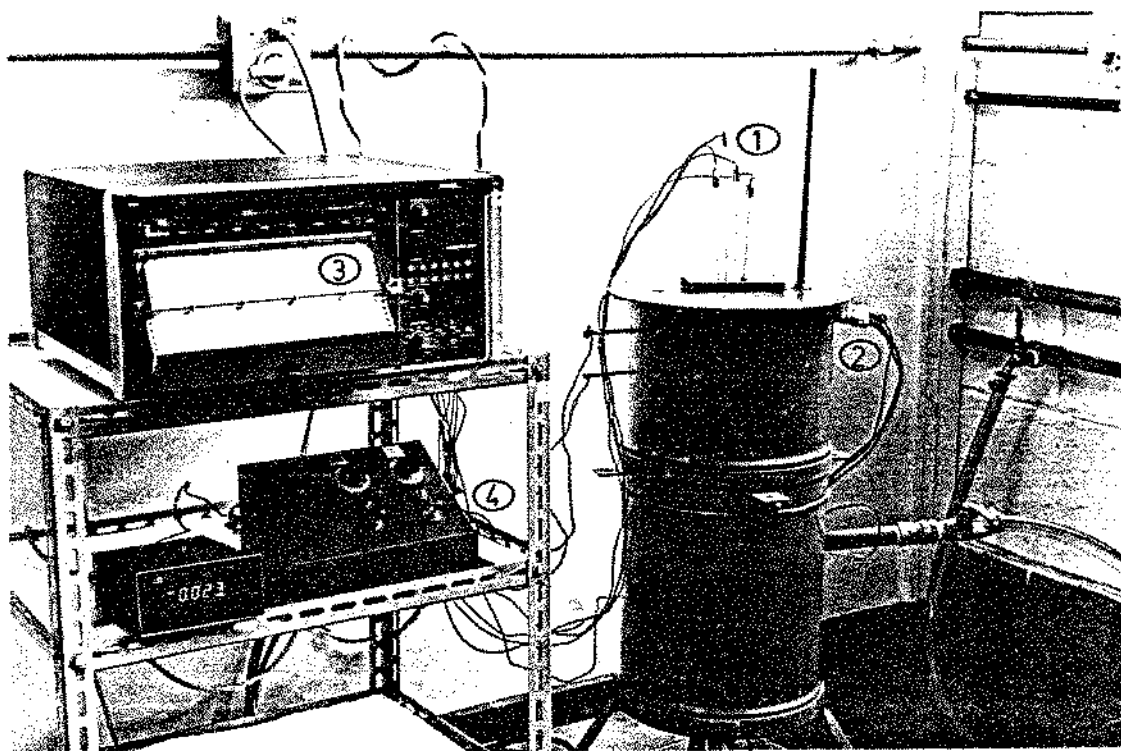


Figura 4.5 - Vista do instrumental utilizado na determinação do perfil térmico.

1. Termopares posicionados no interior do metal
2. Dispositivo de solidificação unidirecional
3. Registrador de temperaturas
4. Chaves de controle das zonas de aquecimento.

S ($\text{mx}10^{-2}$)	t_1 (S)	t_2 (S)	t_3 (S)	$\bar{t}$ (S)
2,0	27 3.18%	26.5 1.27%	25 -4.46%	26,17
2,5	36 -2.26%	37.5 1.81%	37 0.45%	36,83
3,0	48 -2.37%	49.5 0.68%	50 1.69%	49,17
3,5	62 -1.59%	63 0.00%	64 1.59%	63,00
4,0	78 -0.43%	78 -0.43%	79 0.85%	78,33
4,5	94 -1.74%	96 0.35%	97 1.39%	95,67
5,0	112 0.00%	112 0.00%	112 0.00%	112,0
5,5	128 -0.52%	129 0.26%	129 0.26%	128,67
6,0	145 -0.46%	146 0.23%	146 0.23%	145,67

Tabela 4.2 - Resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde recoberto refrigerado a água, superaquecimento de 30K, para três experiências distintas, realizadas nas mesmas condições de solidificação. Os valores percentuais indicam a variação dos resultados em torno da média.

A Figura 4.4 apresenta uma vista do instrumental utilizado na determinação do avanço da interface sólido/líquido pela técnica do "dipstick", enquanto que a Figura 4.5 a do utilizado na determinação do perfil térmico.

4.6. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA PRECISÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS TÉCNICAS UTILIZADAS

O registrador de temperaturas utilizado tem a precisão de 0,25% do fundo de escala. Como o fundo de escala utilizado foi de 800°C os dados relativos ao perfil térmico apresentam uma precisão de $\pm 2^{\circ}\text{C}$. Contudo, no posicionamento dos termopares a precisão é em torno de ± 1 mm.

Quanto a medida da espessura solidificada pela técnica do "dipstick", a precisão dos resultados está limitada principalmente pela habilidade de leitura do seu operador, sendo de aproximadamente $\pm 0,5$ mm. Deve ser salientado que trata-se de uma técnica consagrada, tendo a sua repetibilidade sido evidenciada por diversos pesquisadores [4,19,20,27]. Para verificação da dispersão dos resultados obtidos com esta técnica, repetiu-se por três vezes a experiência de solidificação unidirecional de Chumbo em molde recoberto e superaquecimento de 30K, todas realizadas nas mesmas condições de solidificação. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.2 juntamente com a variação percentual em relação a média, podendo-se observar que nenhum deles apresentou desvio maior do que 4,5%.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS

Neste capítulo os resultados experimentais, obtidos pelas técnicas descritas no capítulo 4, são apresentados na forma gráfica. Os respectivos valores numéricos podem ser encontrados no Apêndice 5, agrupados na forma de tabelas.

5.1. SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DO CHUMBO EM MOLDE REFRIGERADO A ÁGUA

A Figura 5.1 mostra a variação da espessura solidificada em função do tempo de solidificação, no caso da solidificação unidirecional do Chumbo em molde polido, a diferentes graus de superaquecimento: 0K (curva a), 30K (curva b) e 60K (curva c). Pode-se notar a sensível influência do superaquecimento no sentido de retardar a cinética de solidificação. Os mesmos tipos de resultados podem ser encontrados na Figura 5.2 para o caso do molde recoberto, notando-se o mesmo efeito retardador do superaquecimento. A comparação entre as Figuras 5.1 e 5.2 permite observar o efeito do tipo de contato térmico da interface metal/molde, o qual revela-se um fator de bastante importância na cinética do processo.

As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 mostram a variação da temperatura na interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada, para os casos de molde polido e molde recoberto, a diferentes graus de superaquecimento. Torna-se evidente a forte influência que o tipo de contato térmico nesta interface exerce sobre a temperatura. A variação da temperatura na interface metal/molde - (T_{is}) em função do tempo encontra-se apresentada na Figura 5.6, para os instantes iniciais do processo, onde pode-se observar que a camada de metal em contato com o molde solidifica quase instantaneamente ao ser iniciada a refrigeração.

As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostram a distribuição de temperaturas no metal para diversas espessuras solidificadas, no caso do molde polido, respectivamente para os superaquecimentos de 0, 30 e 60 K, enquanto que as Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 fornecem a mesma informação para o caso do molde recoberto.

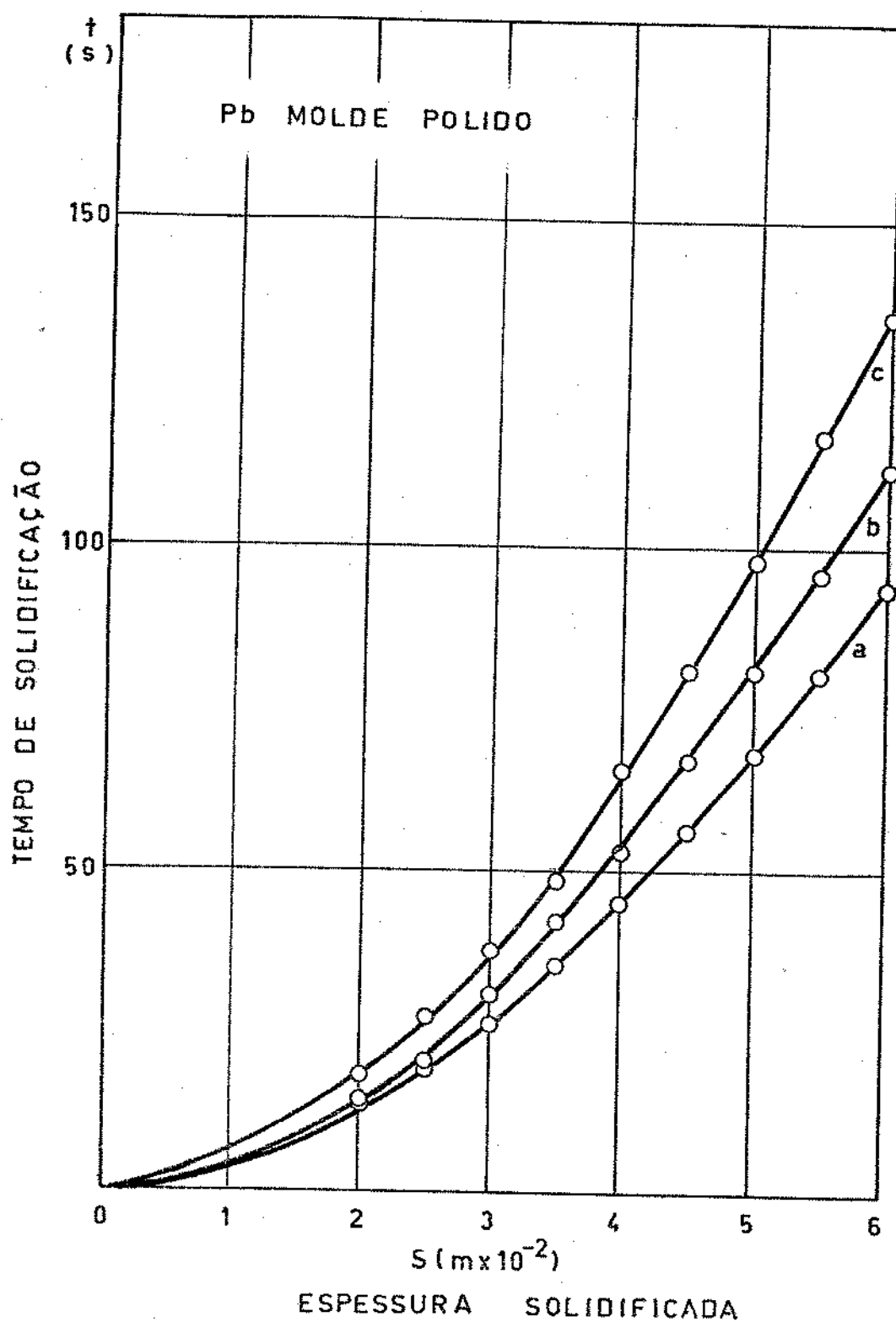


Figura 5.1 - Resultados experimentais da cinética de solidificação unidirecional do Chumbo, molde refrigerado a água e interface metal/molde polida, para diferentes graus de superaquecimento. Tempo (t) para solidificar uma espessura (S). a) Superaquecimento nulo. b) Superaquecimento de 30K. c) Superaquecimento de 60K.

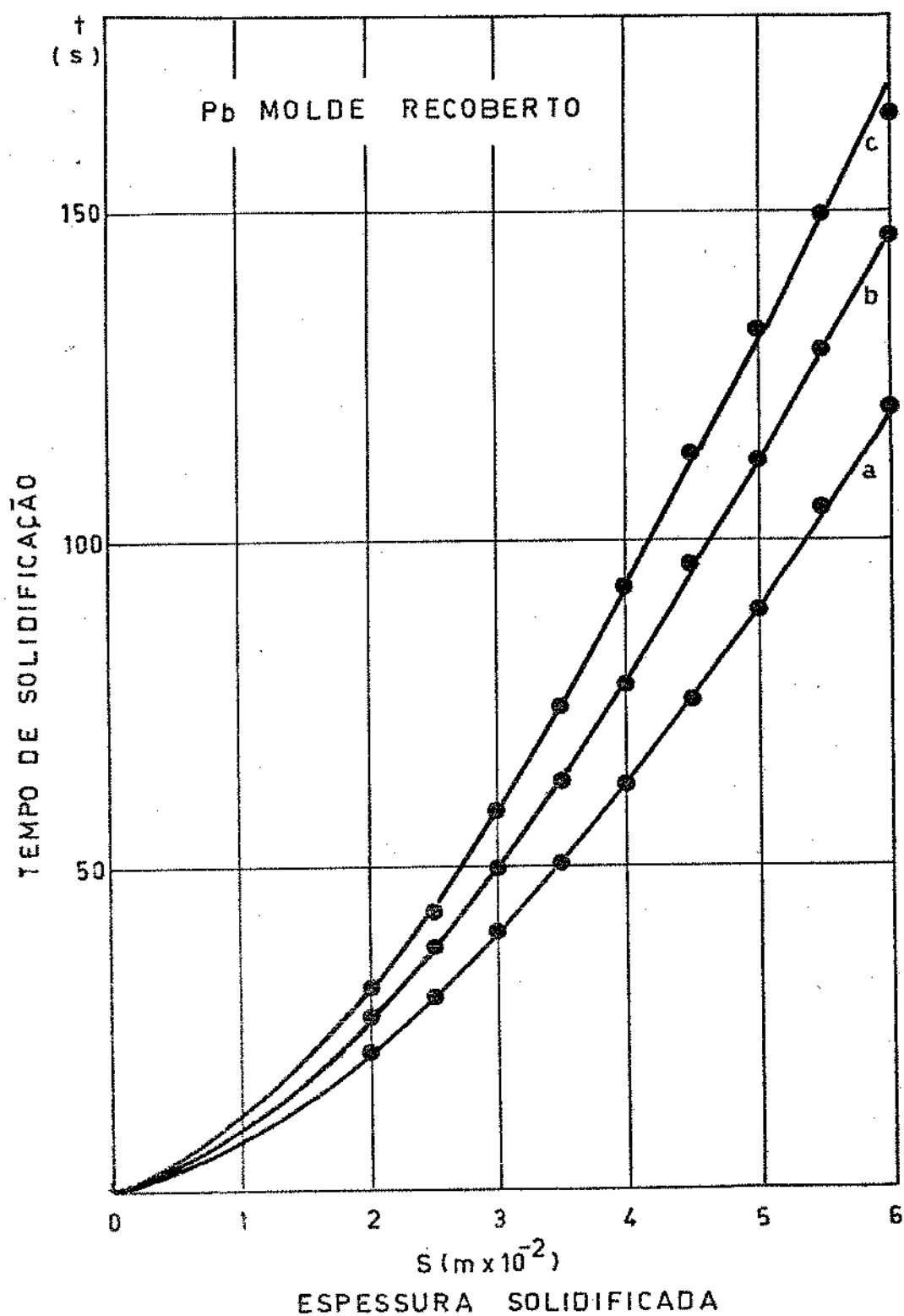


Figura 5.2 - Resultados experimentais da cinética de solidificação unidirecional do Chumbo, molde refrigerado a água e interface metal/molde recoberta, para diferentes graus de superaquecimento. Tempo (t) para solidificar uma espessura (S). a) Superaquecimento nulo. b) Superaquecimento de 30K. c) Superaquecimento de 60K.

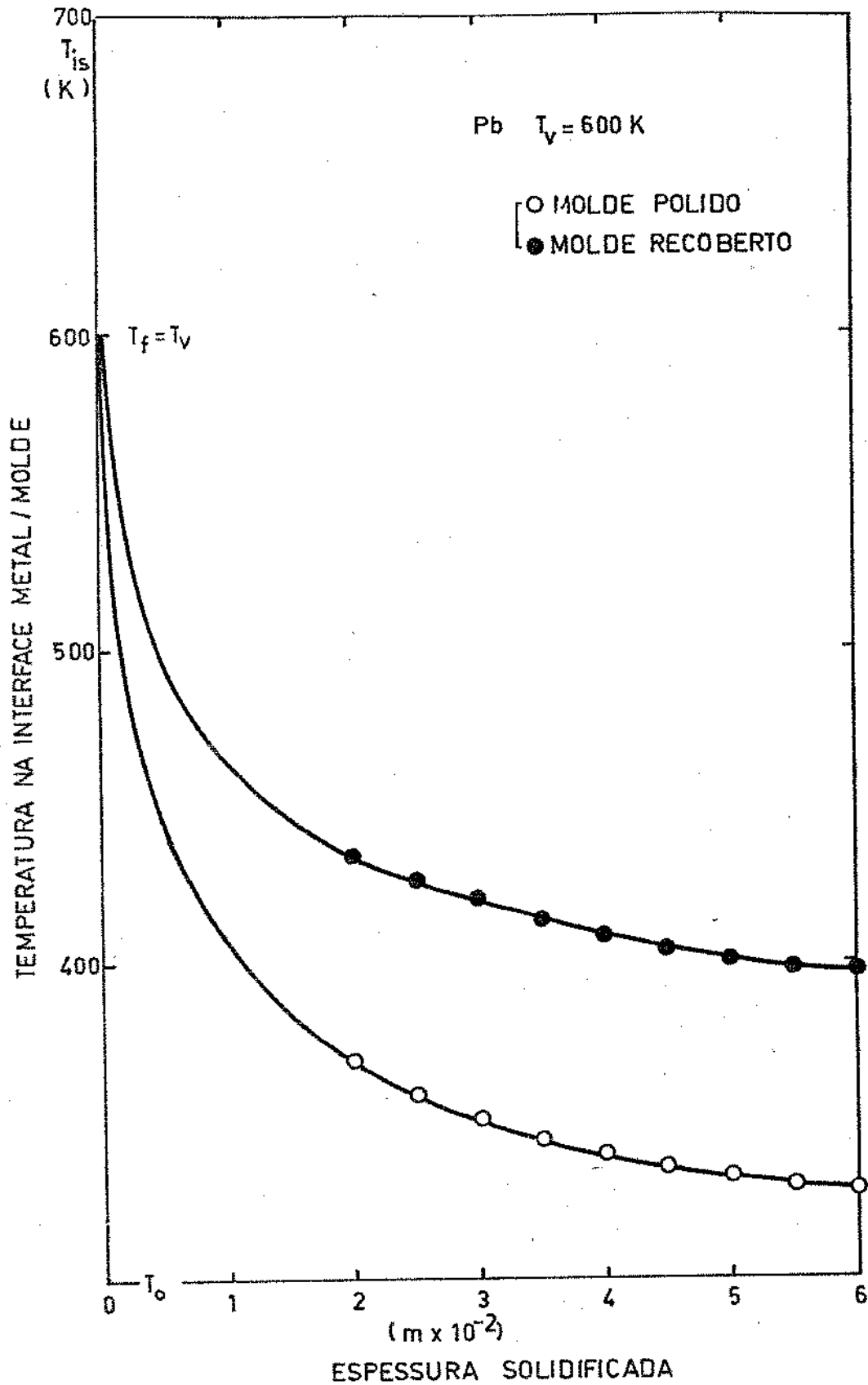


Figura 5.3 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada (S), na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, sob duas condições de contato térmico na interface metal/molde, sendo o superaquecimento nulo.

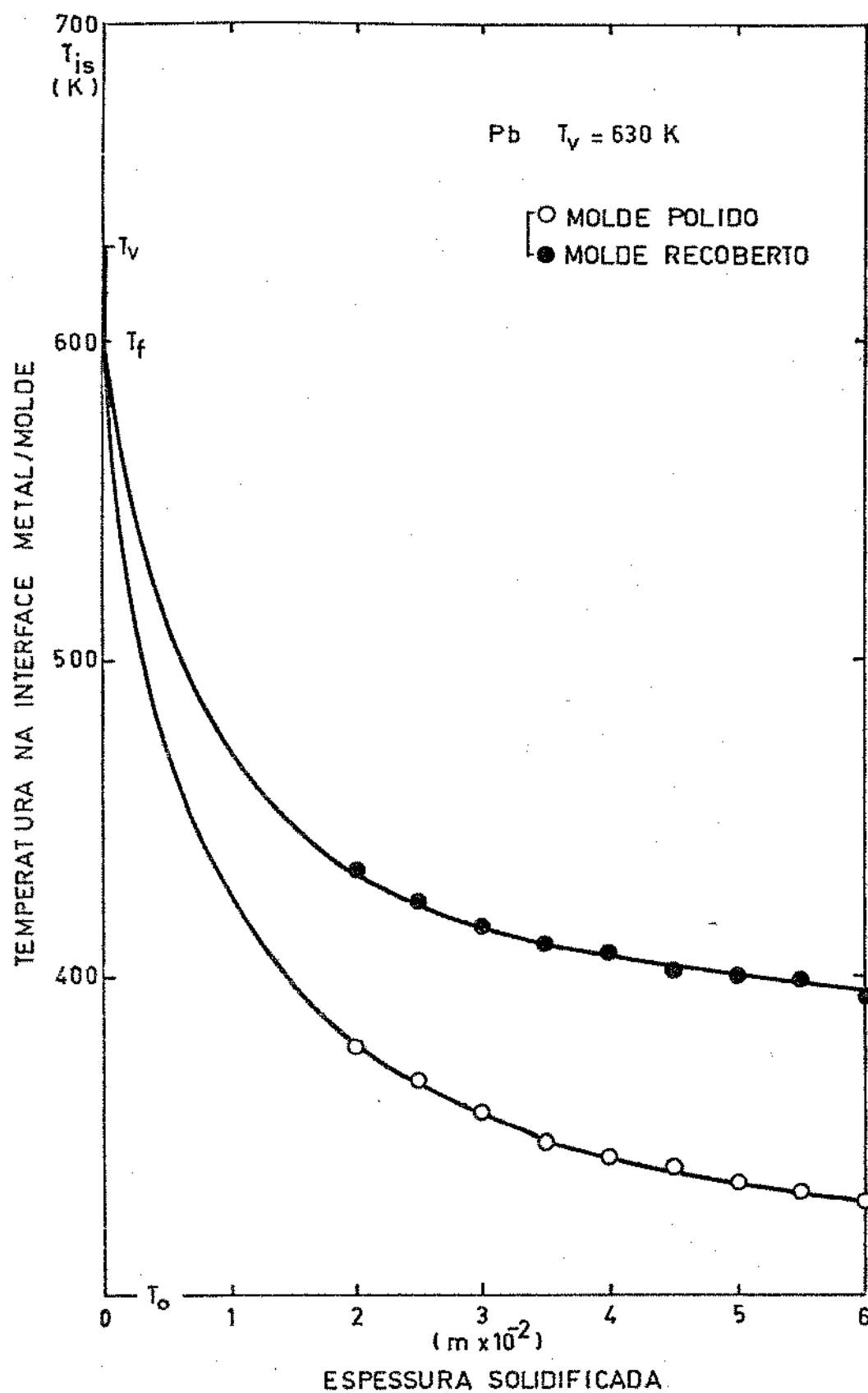


Figura 5.4 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada (S), na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, sob duas condições de contato térmico na interface metal/molde, sendo o superaquecimento de 30K.

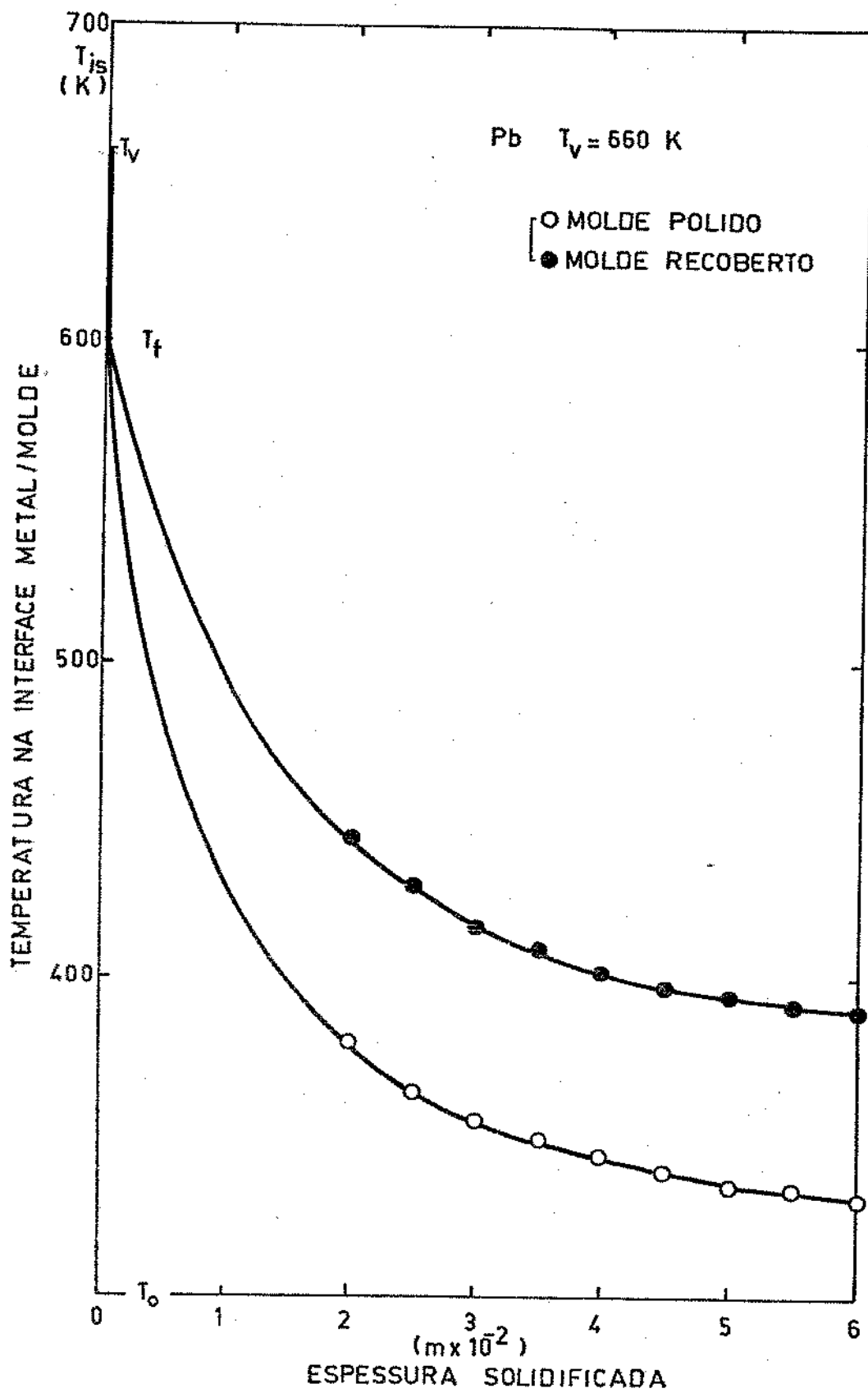


Figura 5.5 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada (S), na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, sob duas condições de contato térmico na interface metal/molde, sendo o superaquecimento de 60K.

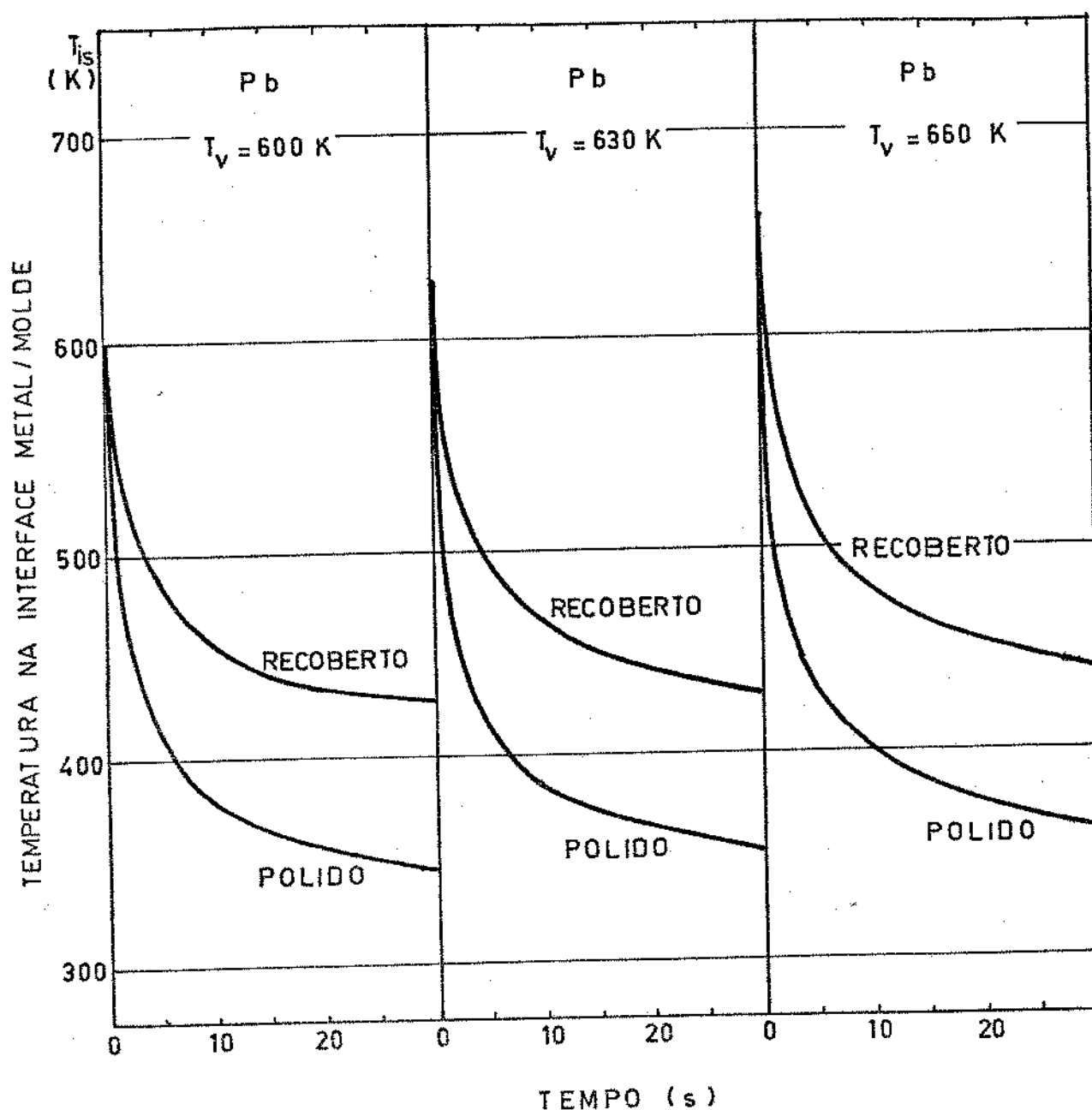


Figura 5.6 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função do tempo de solidificação (t), para os instantes iniciais do processo, na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, sob duas condições de contato térmico na interface metal/molde e graus variados de superaquecimento.

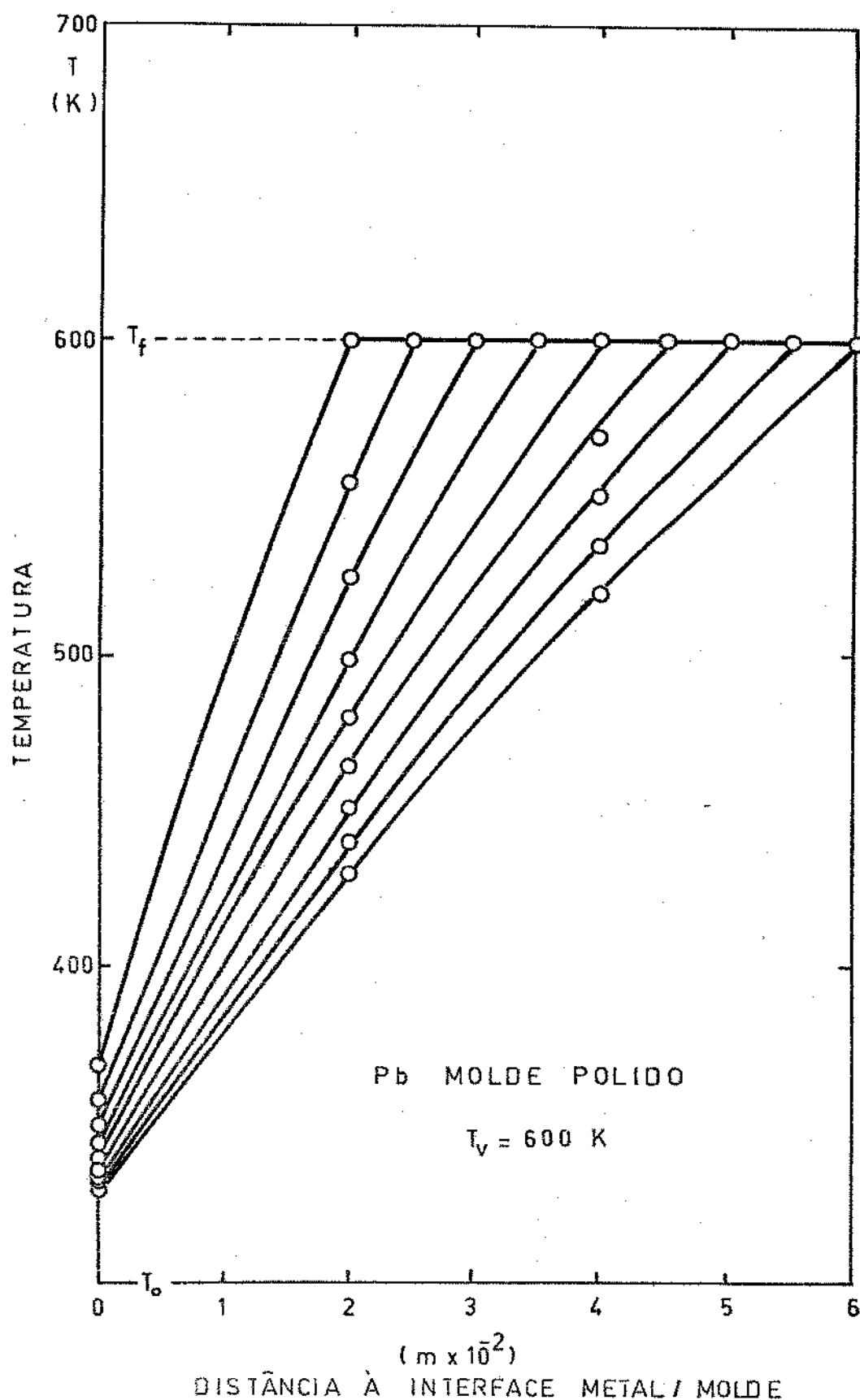


Figura 5.7 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde polida e superaquecimento nulo.

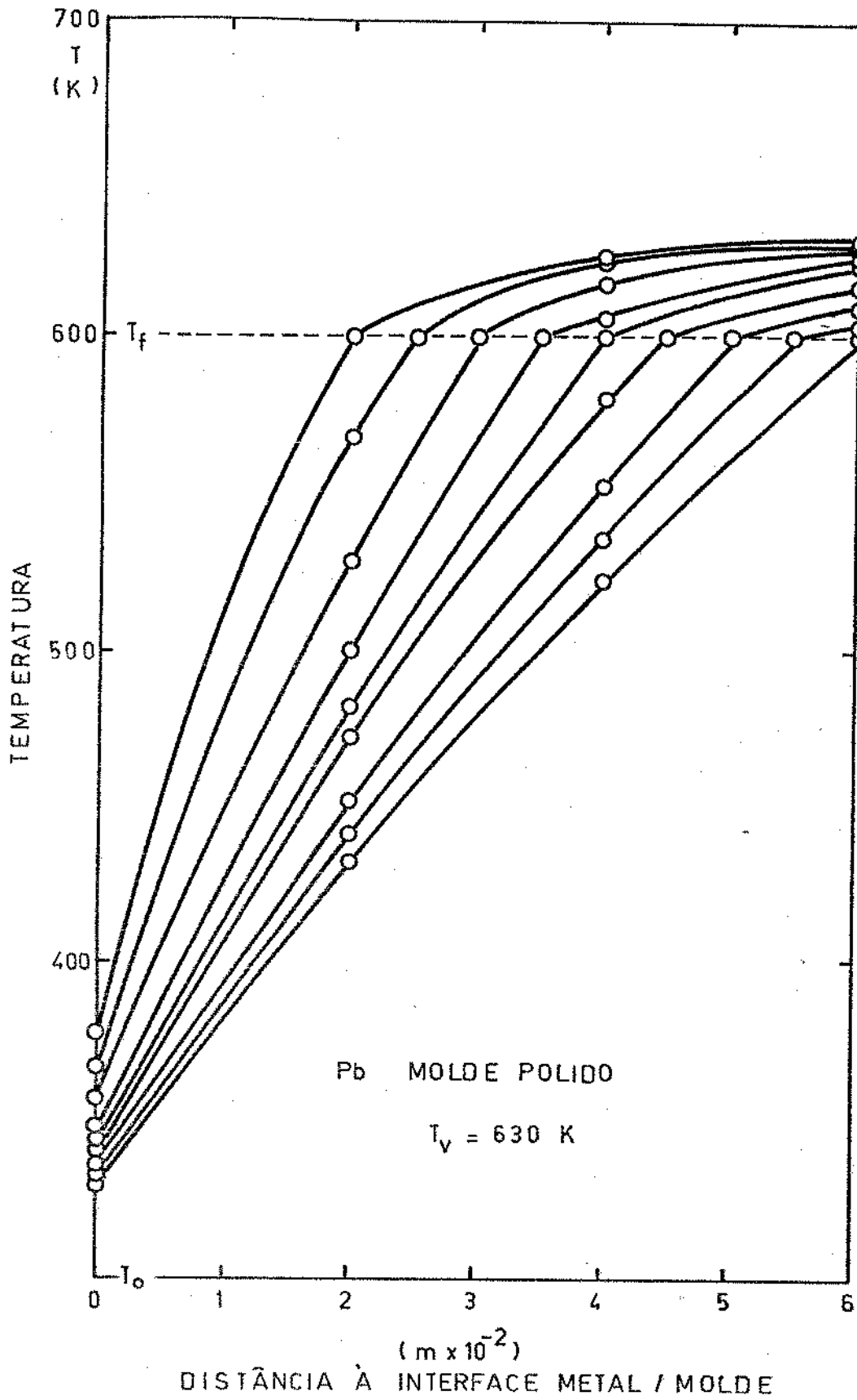


Figura 5.8 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde polida e superaquecimento de 30K.

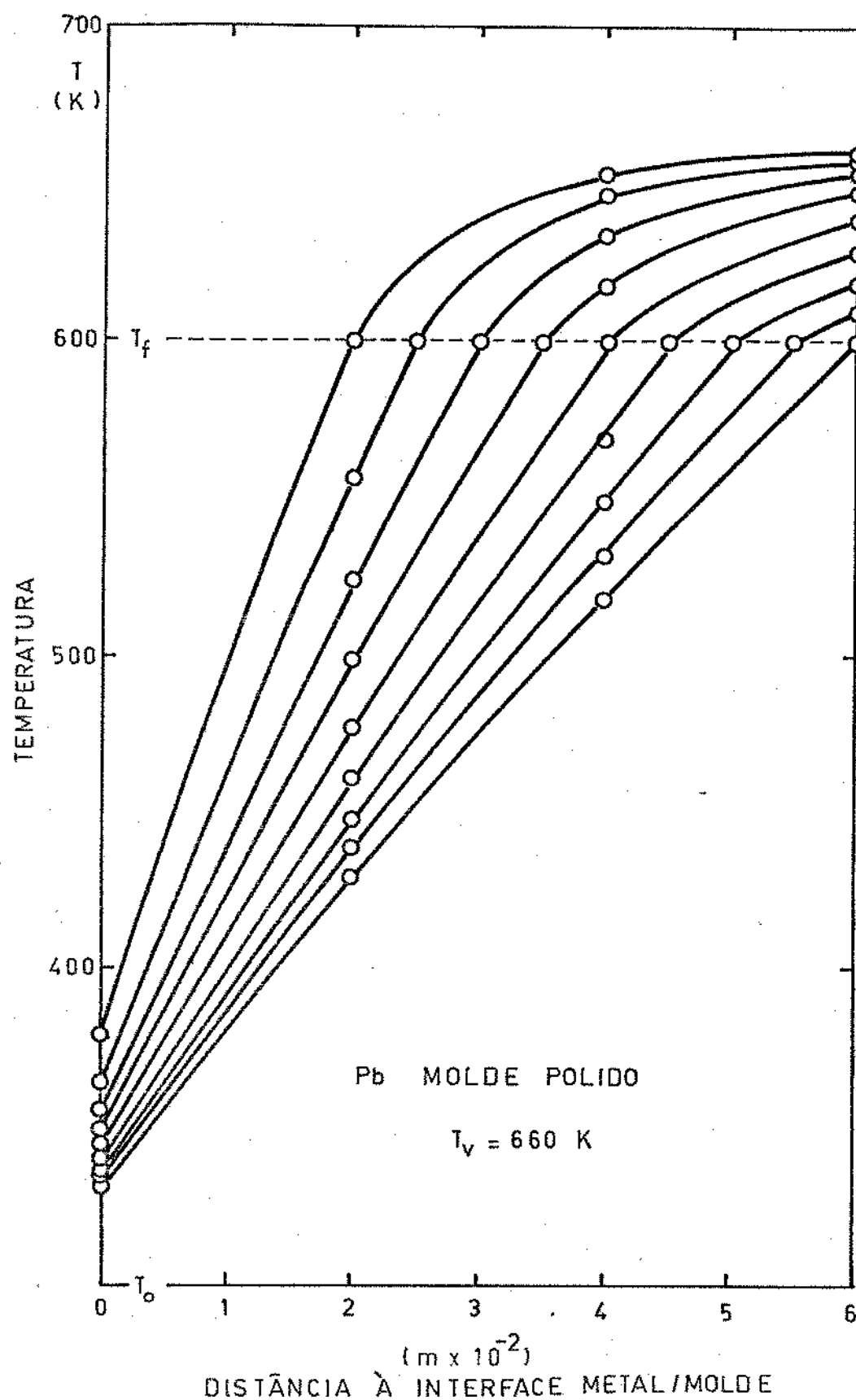


Figura 5.9 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde polida e superaquecimento de 60K.

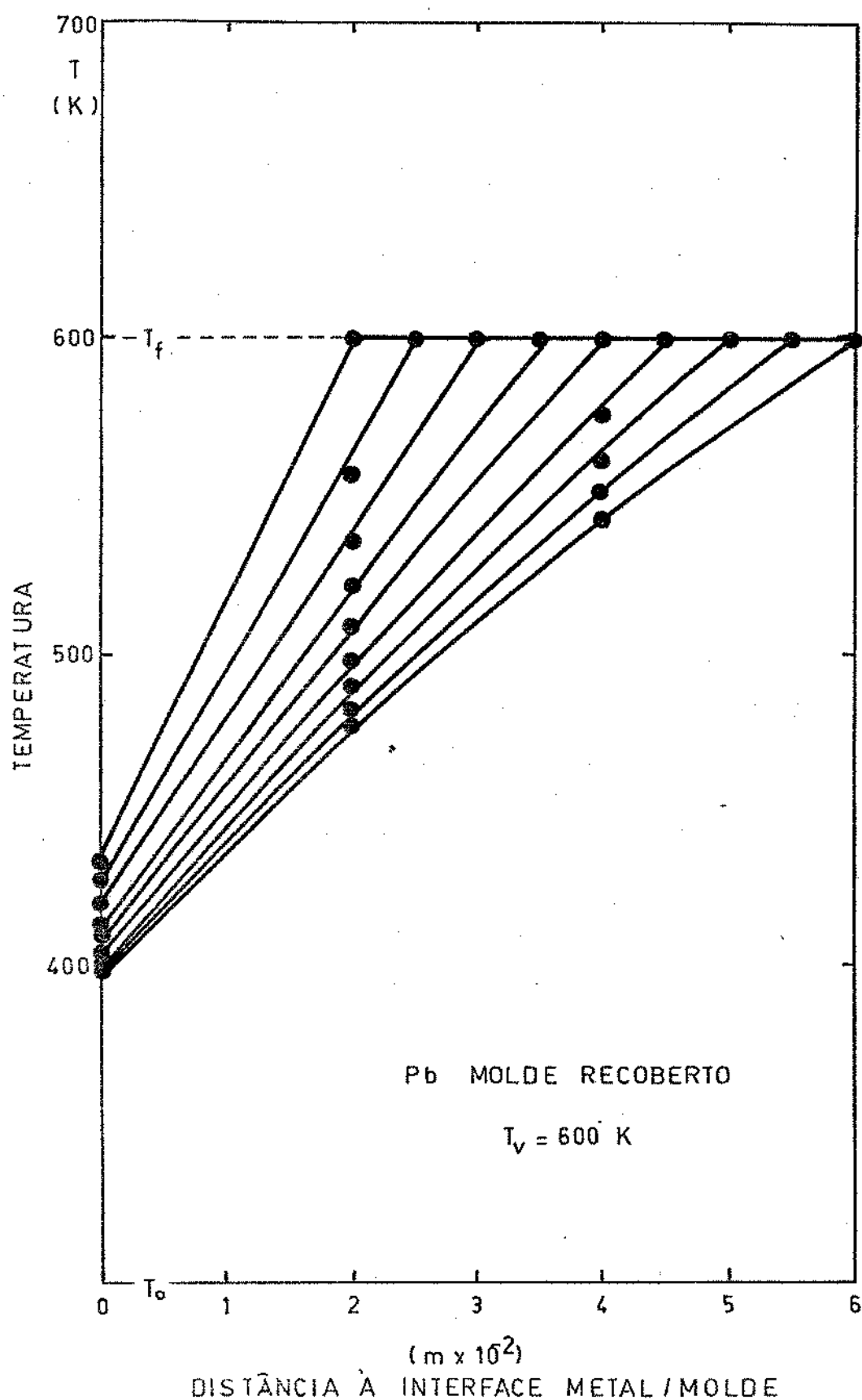


Figura 5.10 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento nulo.

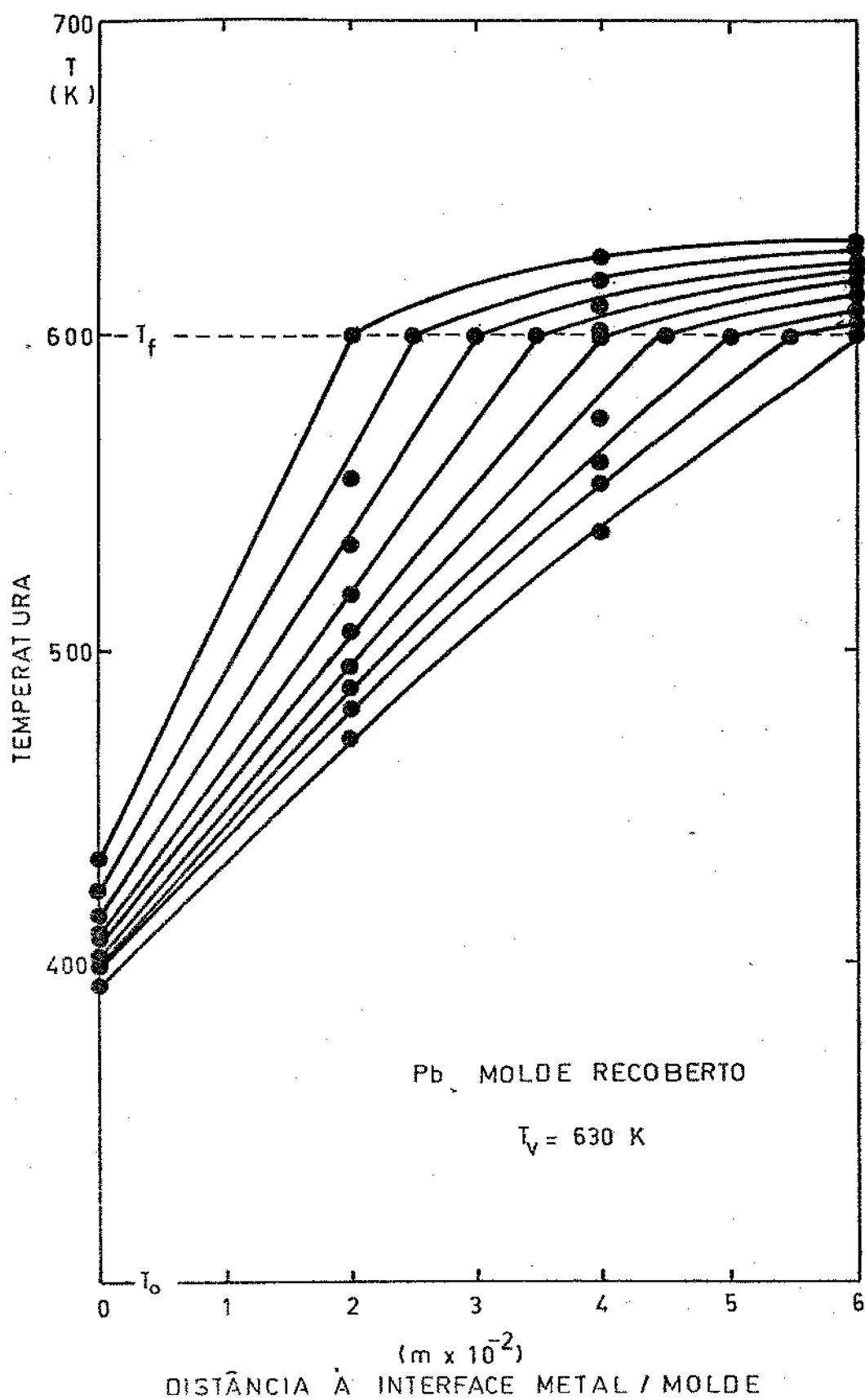


Figura 5.11 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento de 30K.

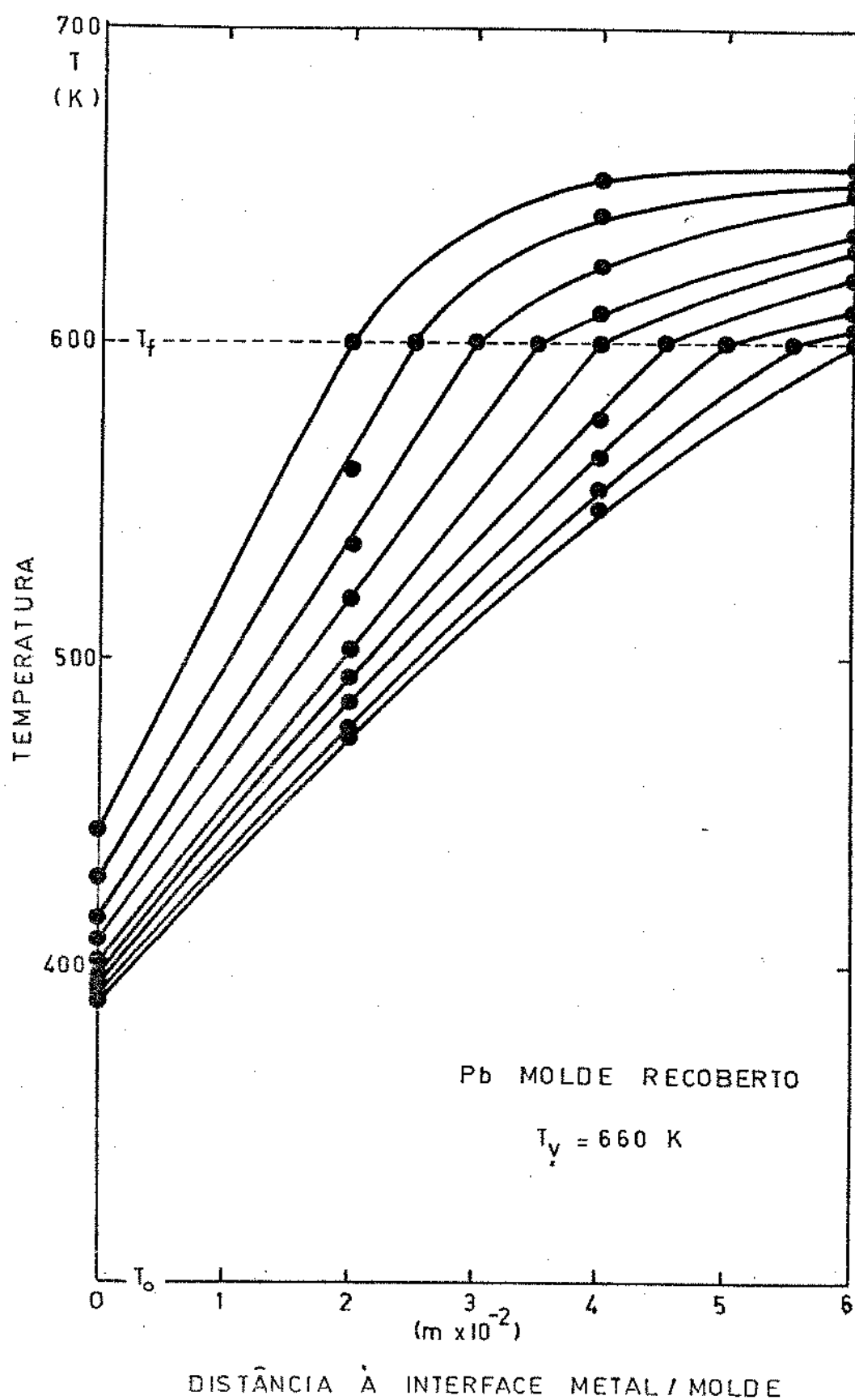


Figura 5.12 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento de 60K.

5.2. SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DO ALUMÍNIO EM MOLDE REFRIGERADO A ÁGUA

A Figura 5.13 mostra a variação da espessura solidificada em função do tempo, na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta, para os casos de superaquecimento nulo (curva a) e superaquecimento de 46K (curva b). Nota-se um sensível aumento dos tempos de solidificação com o aumento do superaquecimento.

A variação da temperatura na interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada encontra-se nas Figuras 5.14 e 5.15, enquanto que na Figura 5.16 encontra-se a variação desta temperatura em função do tempo, para os instantes iniciais do processo. Ao comparar-se as Figuras 5.14 e 5.15, com o objetivo de analisar a influência do superaquecimento sobre o comportamento da temperatura na interface metal/molde (T_{is}), deve-se ter o cuidado de não concluir, erroneamente, que esta temperatura decaiu mais rapidamente na experiência realizada em presença de superaquecimento. Por exemplo, para uma espessura solidificada de 0,05 m, T_{is} é menor na experiência realizada com superaquecimento, porém, neste caso o tempo decorrido é maior.

Os perfis térmicos no metal, para diversas espessuras solidificadas, encontram-se esquematizados nas Figuras 5.17 (superaquecimento nulo) e 5.18 (superaquecimento de 46K) para o caso da interface metal/molde recoberta. Pode-se observar que, nas condições analisadas, os perfis térmicos na camada de Alumínio solidificado são praticamente lineares.

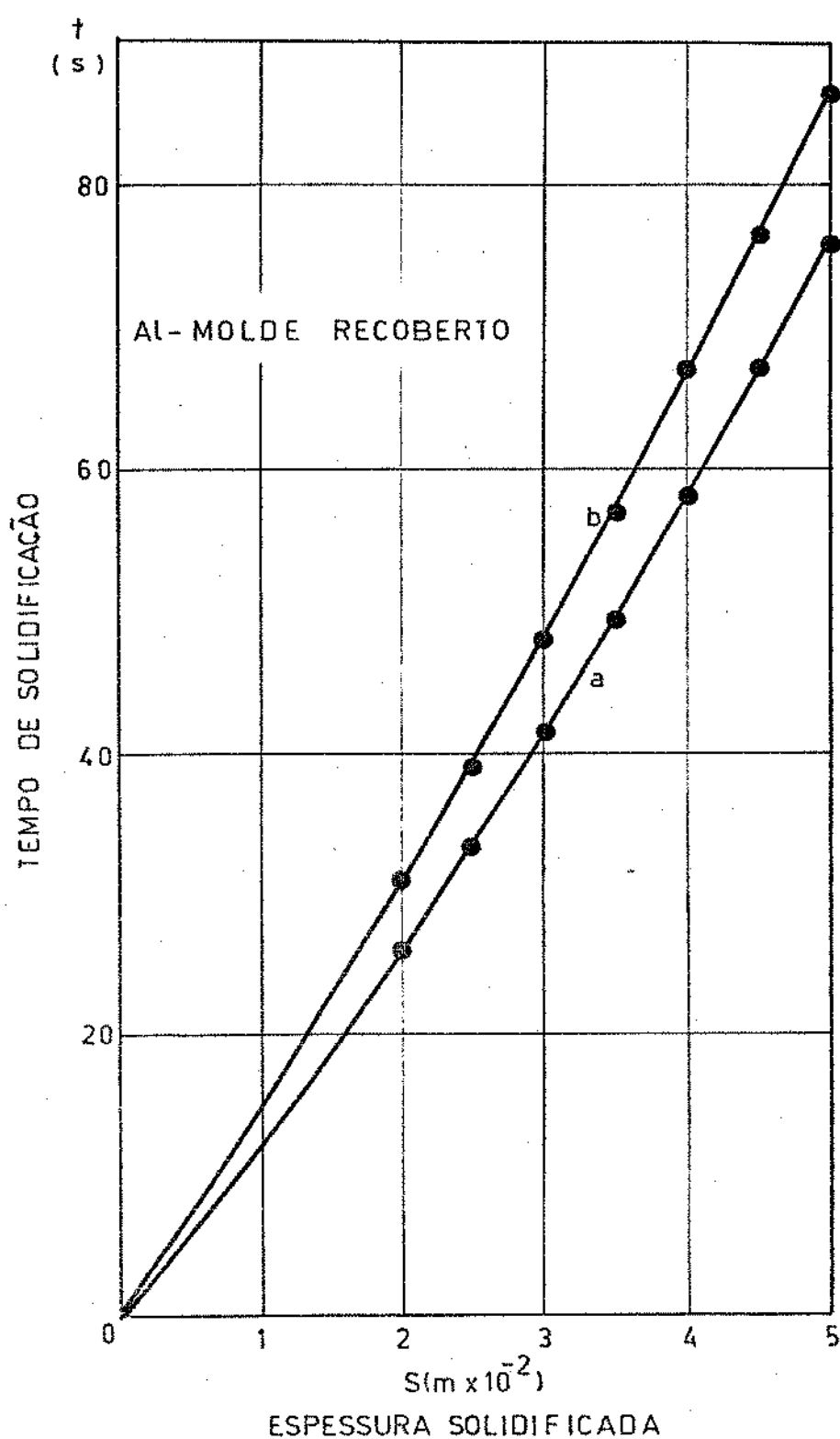


Figura 5.13 - Resultados experimentais da cinética de solidificação unidirecional do Alumínio, molde refrigerado a água e interface metal/molde recoberta, para diferentes graus de superaquecimento. Tempo (t) para solidificar uma espessura (S). a) Superaquecimento nulo. b) Superaquecimento de 46K.

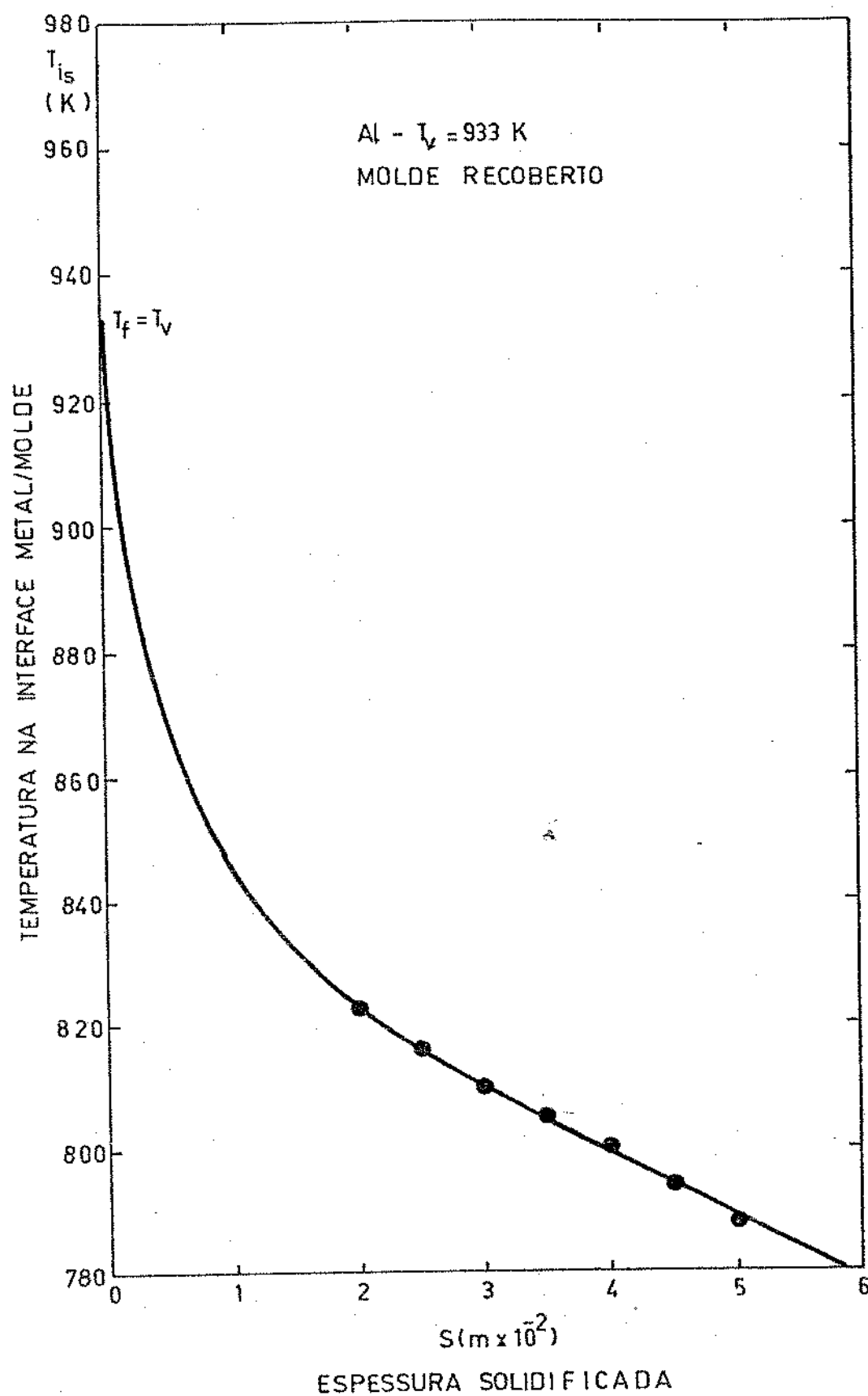


Figura 5.14 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada (S), na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento nulo.

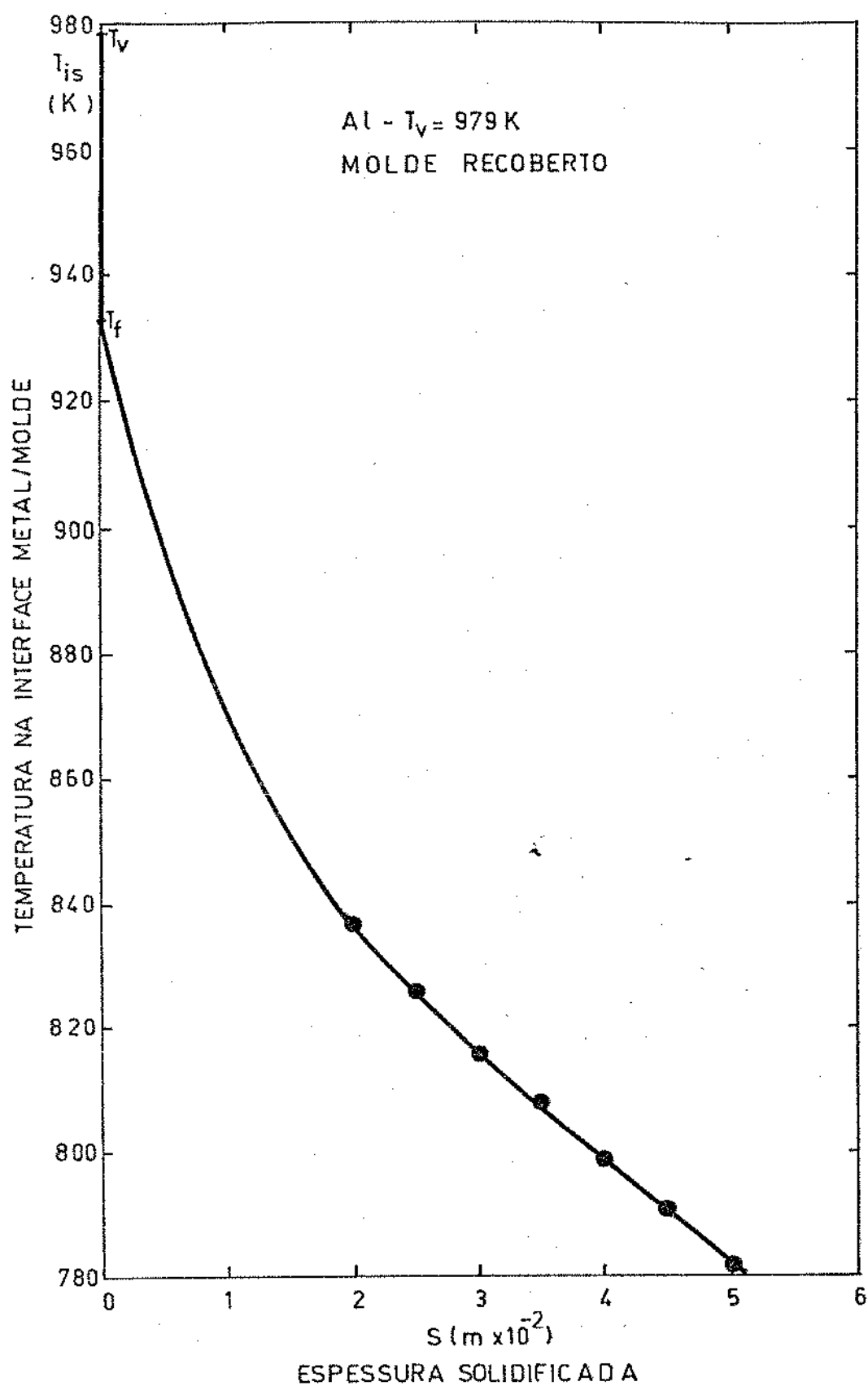


Figura 5.15 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função da espessura solidificada (S), na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento de 46K.

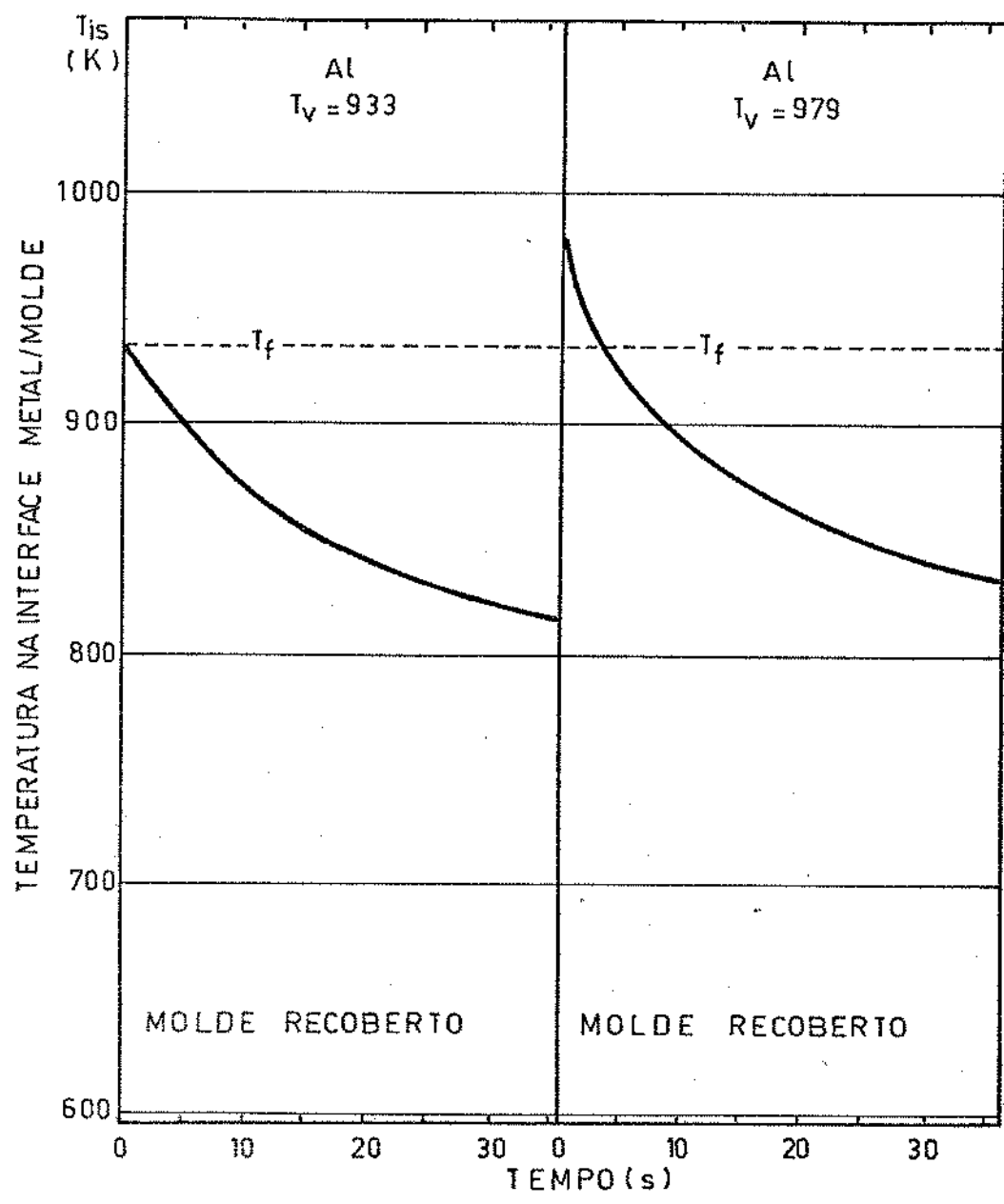


Figura 5.16 - Variação da temperatura da interface metal/molde (T_{is}) em função do tempo de solidificação (t), para os instantes iniciais do processo, na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimentos de 0 e 46K.

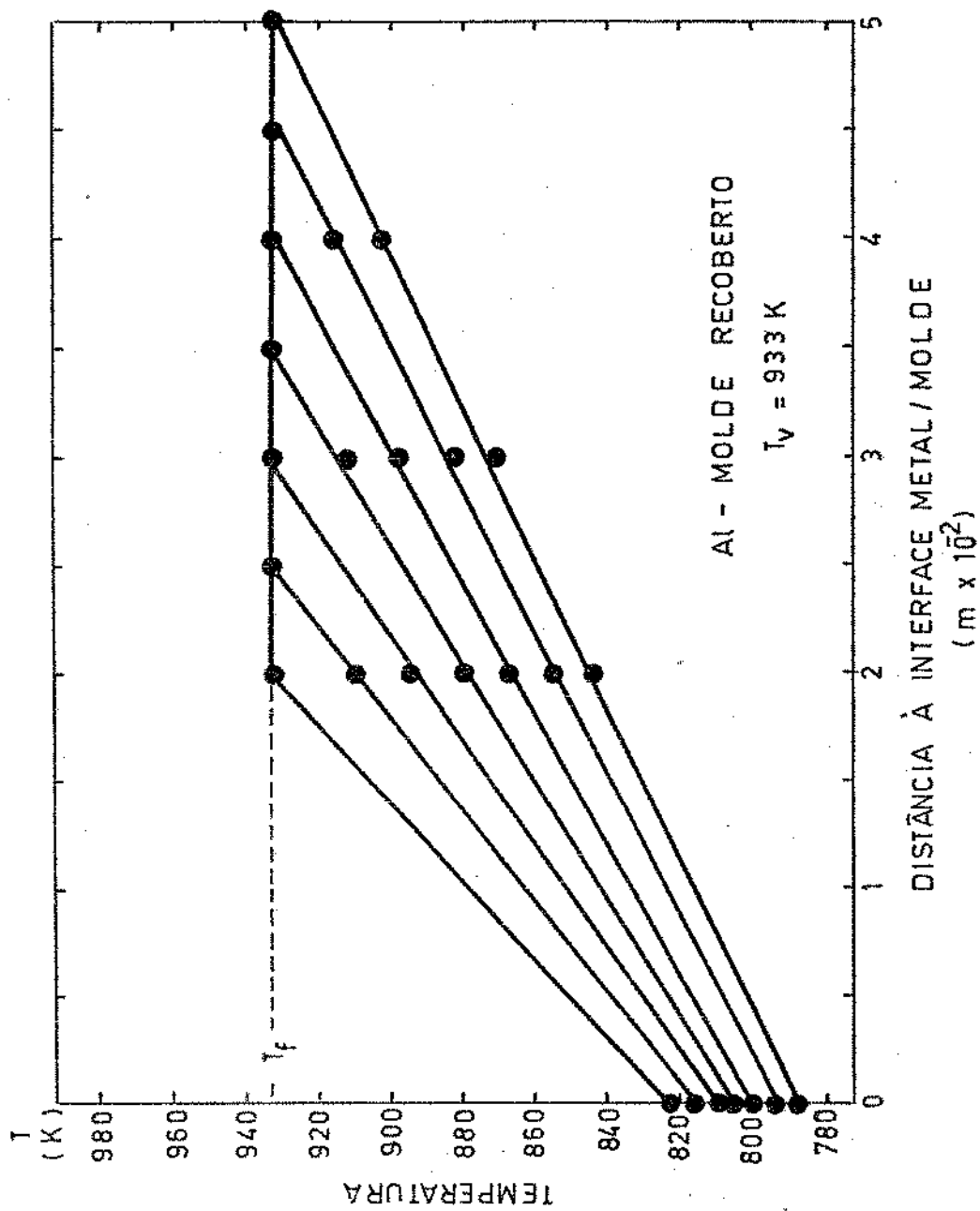


Figura 5.17 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento nulo.

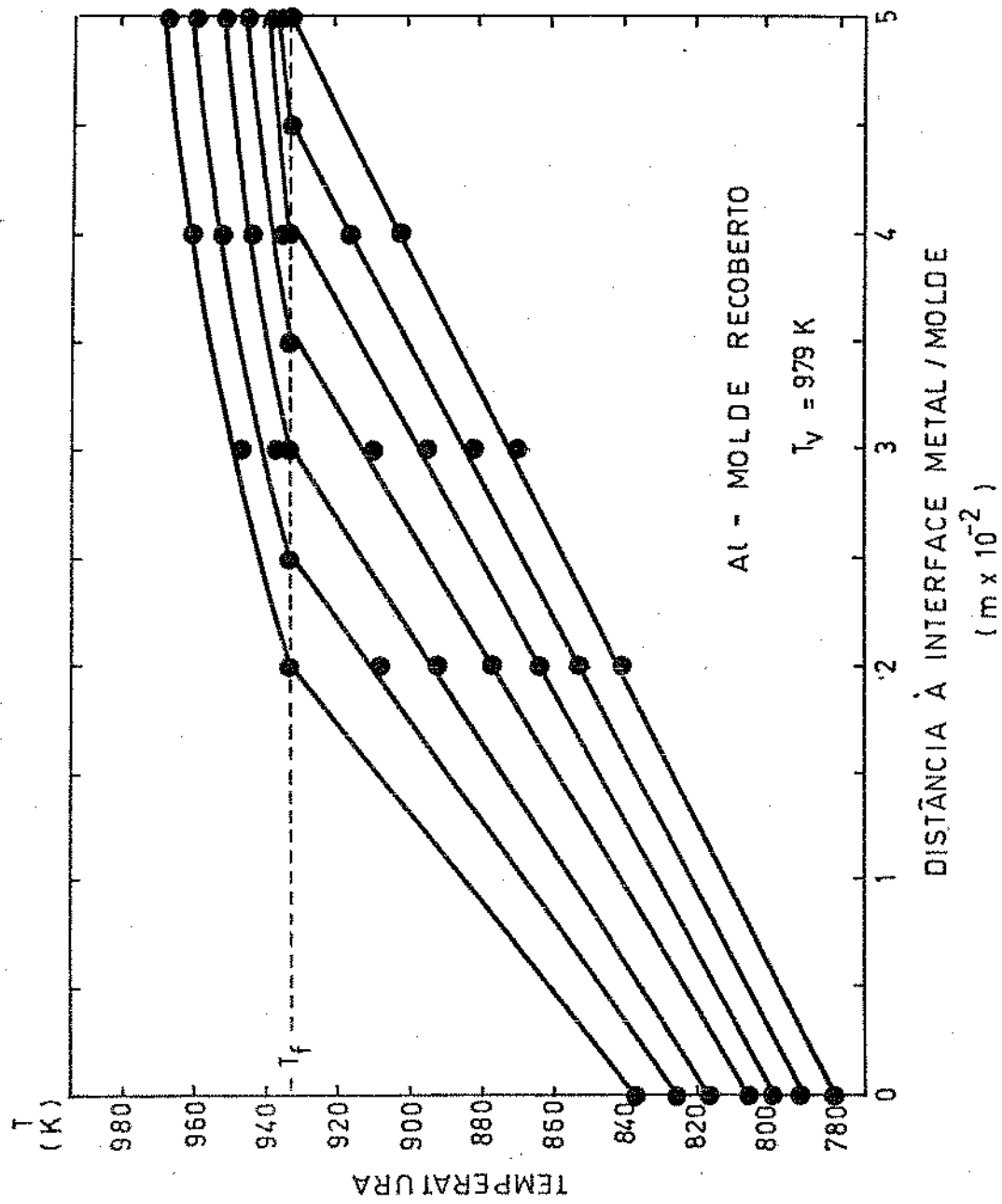


Figura 5.18- Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, interface metal/molde recoberta e superaquecimento de 46K.

CAPÍTULO 6

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

6.1. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO DE CALOR DA INTERFACE METAL/MOLDE

Fazendo-se um balanço térmico na interface metal/molde em $t = 0$, para uma experiência realizada sem superaquecimento, obtêm-se:

$$h_i (T_f - T_o) = Hd_s \left(\frac{dS}{dt} \right)_{t=0} \quad (6.1)$$

Da equação (3.72) pode-se obter que:

$$\left(\frac{dS}{dt} \right)_{t=0} = \frac{1}{\beta_{\Delta T=0}} \quad (6.2)$$

Combinando-se as equações (6.1) e (6.2) determina-se:

$$h_i = \frac{Hd_s}{(T_f - T_o) \beta_{\Delta T=0}} \quad (6.3)$$

Mas, a equação (3.72) pode ser escrita na forma:

$$\frac{t}{S} = \alpha S + \beta_{\Delta T=0} \quad (6.4)$$

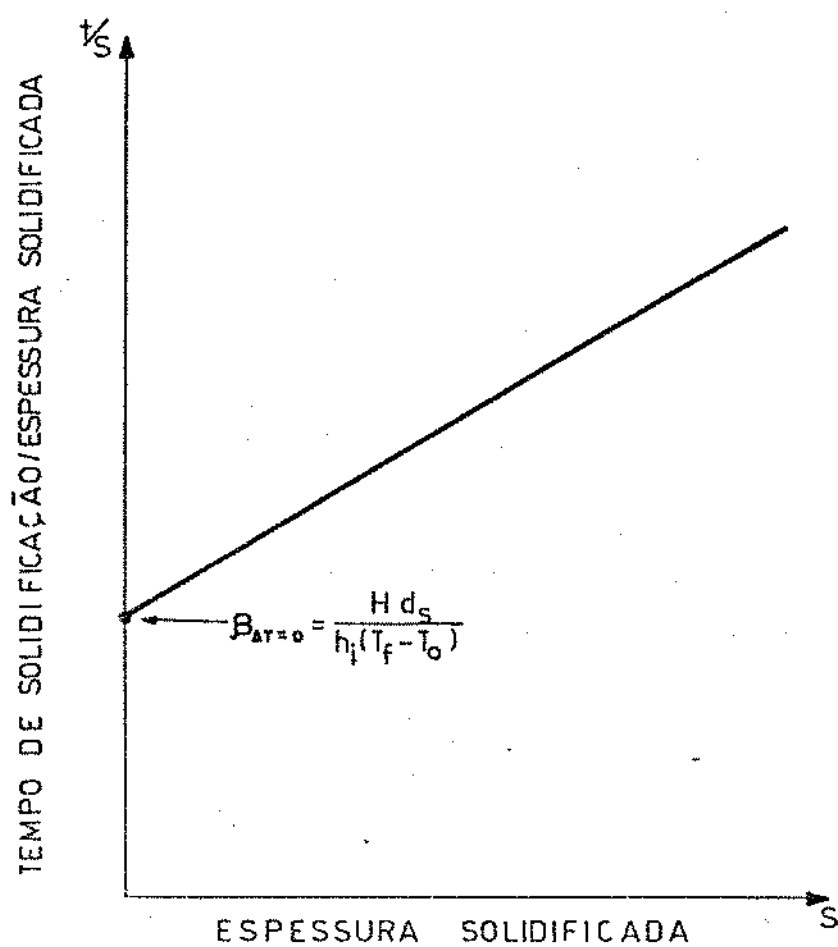


Figura 6.1 - Relação entre o tempo de solidificação (t) e a espessura solidificada (S) objetivando a determinação da constante $\beta_{\Delta T=0}$ [4,6].

Da equação (6.4) pode-se concluir que a constante $\beta_{\Delta T=0}$ é o coeficiente linear da reta obtida ao colocar-se os resultados experimentais na forma $t/S \times S$ (ver Figura 6.1). Determinando-se $\beta_{\Delta T=0}$ obtêm-se facilmente h_i pela equação (6.3).

O método acima descrito para determinação do coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde é o desenvolvido por Garcia e Prates [4,6,7,21]. Esta maneira de proceder tem demonstrado ser de precisão excelente, além de muito mais rápida e prática do que a determinação por ensaios de fluidez. O Apêndice 7 mostra como a equação (3.74), que fornece o valor de β segundo o modelo proposto, pode ser facilmente reduzida ao valor encontrado por Garcia e Prates ($\beta_{\Delta T=0}$), no caso do superaquecimento ser nulo.

Assim sendo, os resultados da cinética de solidificação do Chumbo e do Alumínio, obtidos em experimentos realizados sem superaquecimento, foram colocados na forma $t/S \times S$, obtendo-se $\beta_{\Delta T=0}$ por regressão linear como indicado nas Figuras 6.2 e 6.3. Com estes valores e as propriedades físicas apresentadas no Apêndice 6 pode-se determinar h_i pela equação (6.3), chegando-se aos valores agrupados na Tabela 6.1, que concordam plenamente com os obtidos por Garcia [4], considerando-se a diferente espessura do recobrimento utilizado no presente trabalho.

Metal	Condição da Superfície Interna do Molde	h_i (J/m ² s K)
Chumbo	Polida	4750
Chumbo	Recoberta	1553
Alumínio	Recoberta	1351

Tabela 6.1 - Coeficientes de transmissão de calor da interface metal/molde para as condições verificadas experimentalmente neste trabalho.

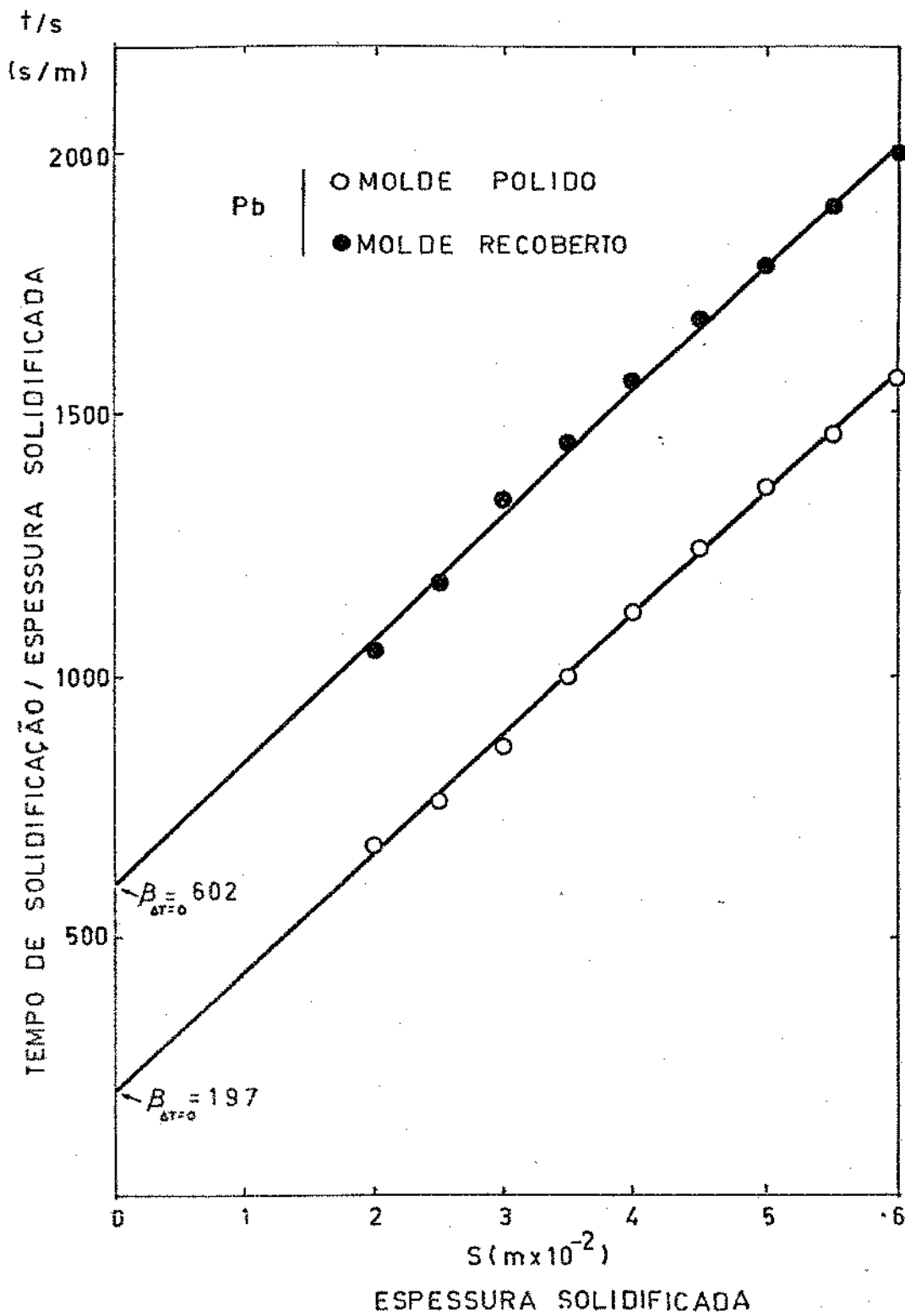


Figura 6.2 - Resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água, superaquecimento nulo, dispostos conforme a Figura 6.1 para a determinação dos valores da constante $\beta_{\Delta T=0}$.

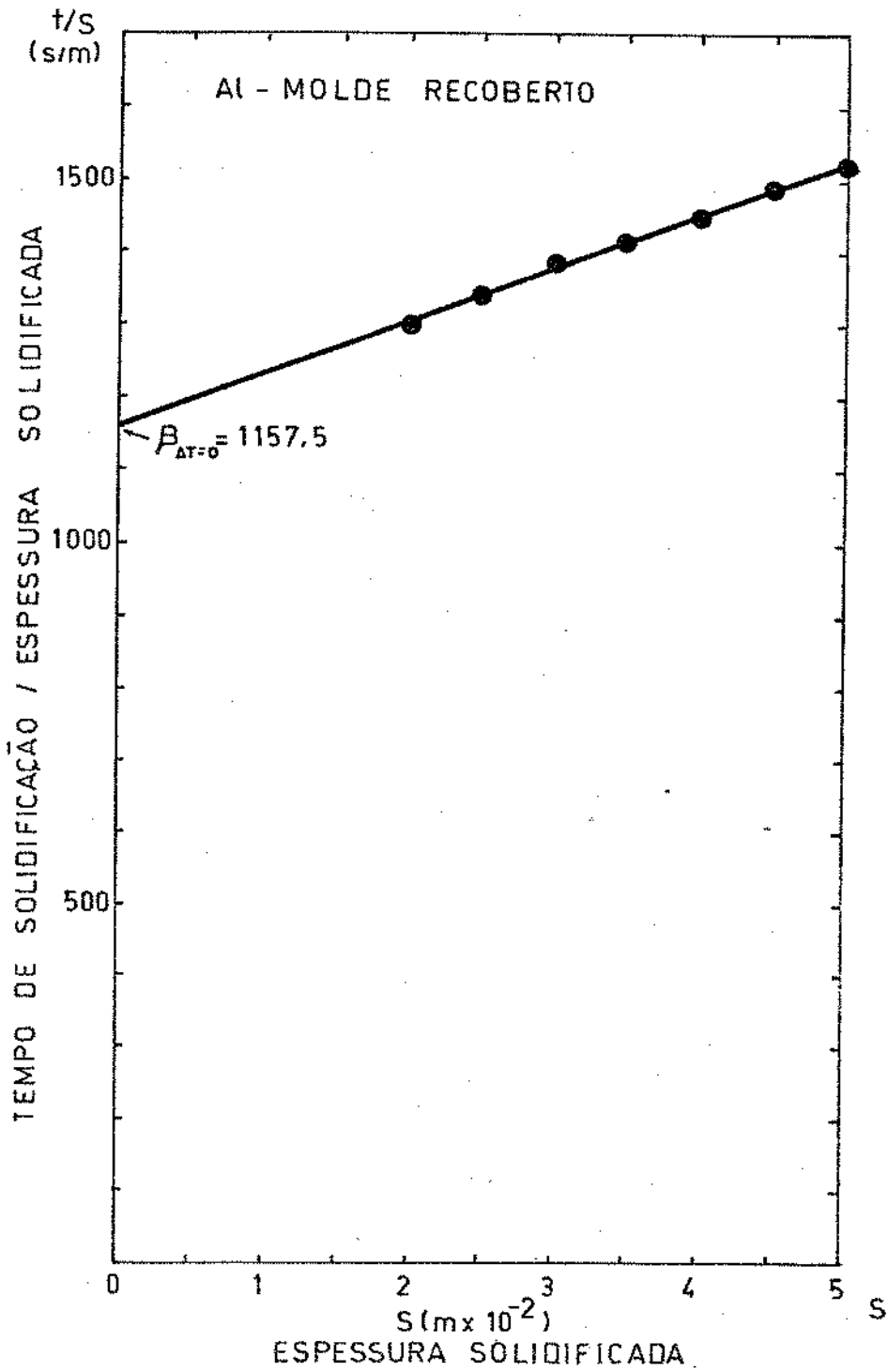


Figura 6.3 - Resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água, superaquecimento nulo, dispostos conforme a Figura 6.1 para a determinação do valor da constante $\beta_{\Delta T=0}$.

6.2. VERIFICAÇÃO QUANTITATIVA DO MODELO PROPOSTO PARA A SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE METAIS EM MOLDES REFRIGERADOS

Nesta seção os resultados experimentais apresentados no Capítulo 5 serão comparados com as equações representativas do modelo proposto. Esta comparação será feita na forma adimensional, mais geral e extensiva, uma vez que em uma só curva podem ser comparados resultados experimentais de experiências realizadas com diferentes condições de contato na interface metal/molde. Os parâmetros adimensionais encontram-se definidos no Apêndice 1, enquanto que as propriedades físicas dos metais utilizados no Apêndice 6.

6.2.1. Solidificação Unidirecional de Chumbo em Molde Refrigerado a Água

Para o caso de Chumbo solidificado unidirecionalmente em molde refrigerado a água, a equação (3.85) assume as formas seguintes, respectivamente para os superaquecimentos de 0,30 e 60K:

$$t^* = 0,44 S^{*2} + 0,60 S^* \quad (6.5)$$

$$t^* = 0,51 S^{*2} + 0,74 S^* \quad (6.6)$$

$$t^* = 0,59 S^{*2} + 0,87 S^* \quad (6.7)$$

As Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 apresentam a comparação das equações acima com os respectivos resultados experimentais, devidamente adimensionalizados, podendo-se notar a ocorrência de uma ótima concordância com as previsões fornecidas pelo modelo proposto.

Para comprovação no que diz respeito a determinação de temperaturas, foram escolhidos dois pontos: um na interface metal/molde do lado do metal, e um outro situado a uma distância adimensional desta interface (x^*) igual a 2,09, correspondente a distâncias da interface metal/molde iguais respectivamente a $1,31 \times 10^{-2}$ m para o molde polido e 4×10^{-2} m para o molde recoberto.

Substituindo-se os valores correspondentes nas equações (3.88) e (3.89), encontra-se para o caso do superaquecimento nulo:

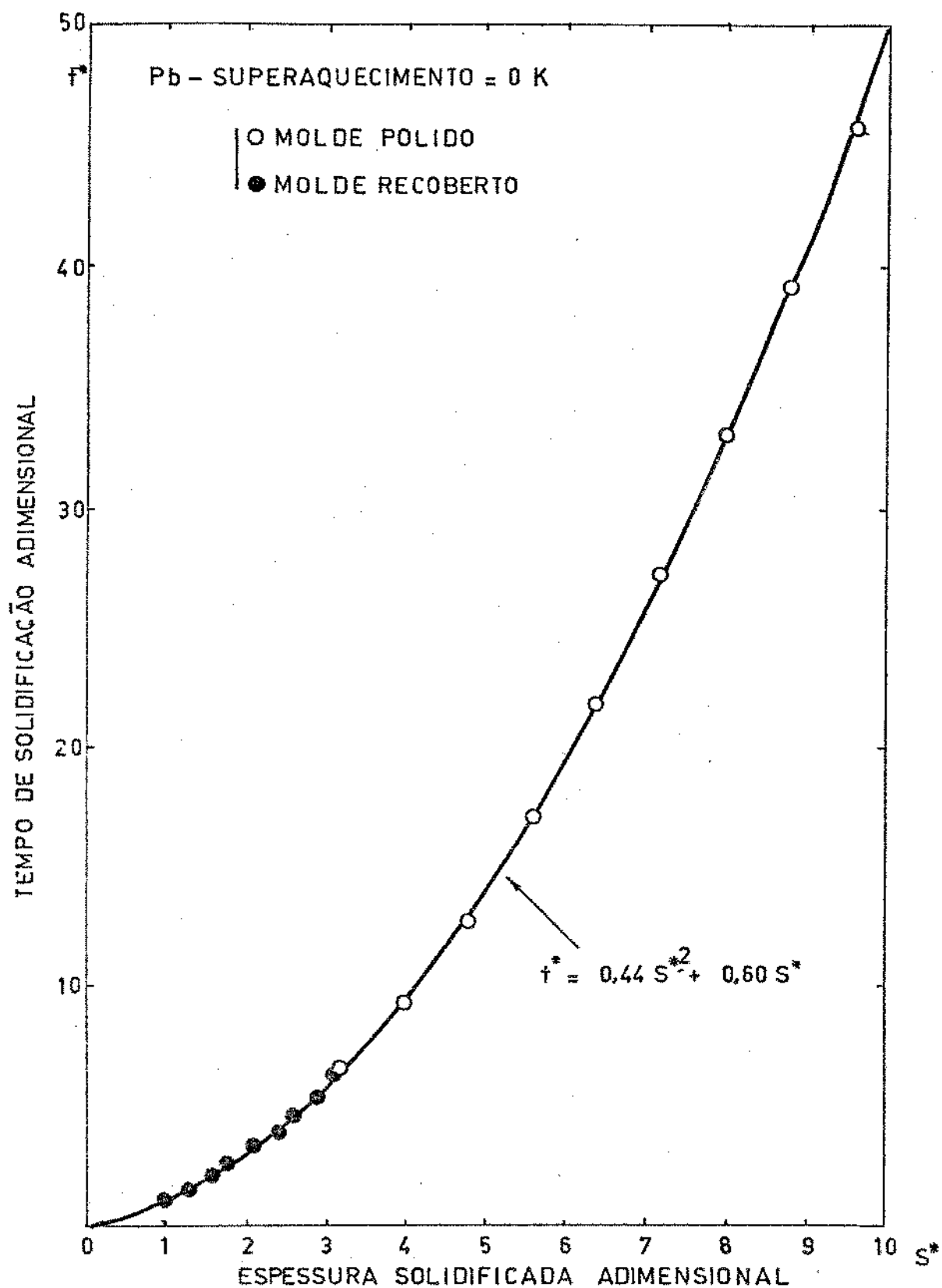


Figura 6.4 - Variação do tempo de solidificação (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, para o caso de superaquecimento nulo, comparado com os resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água.

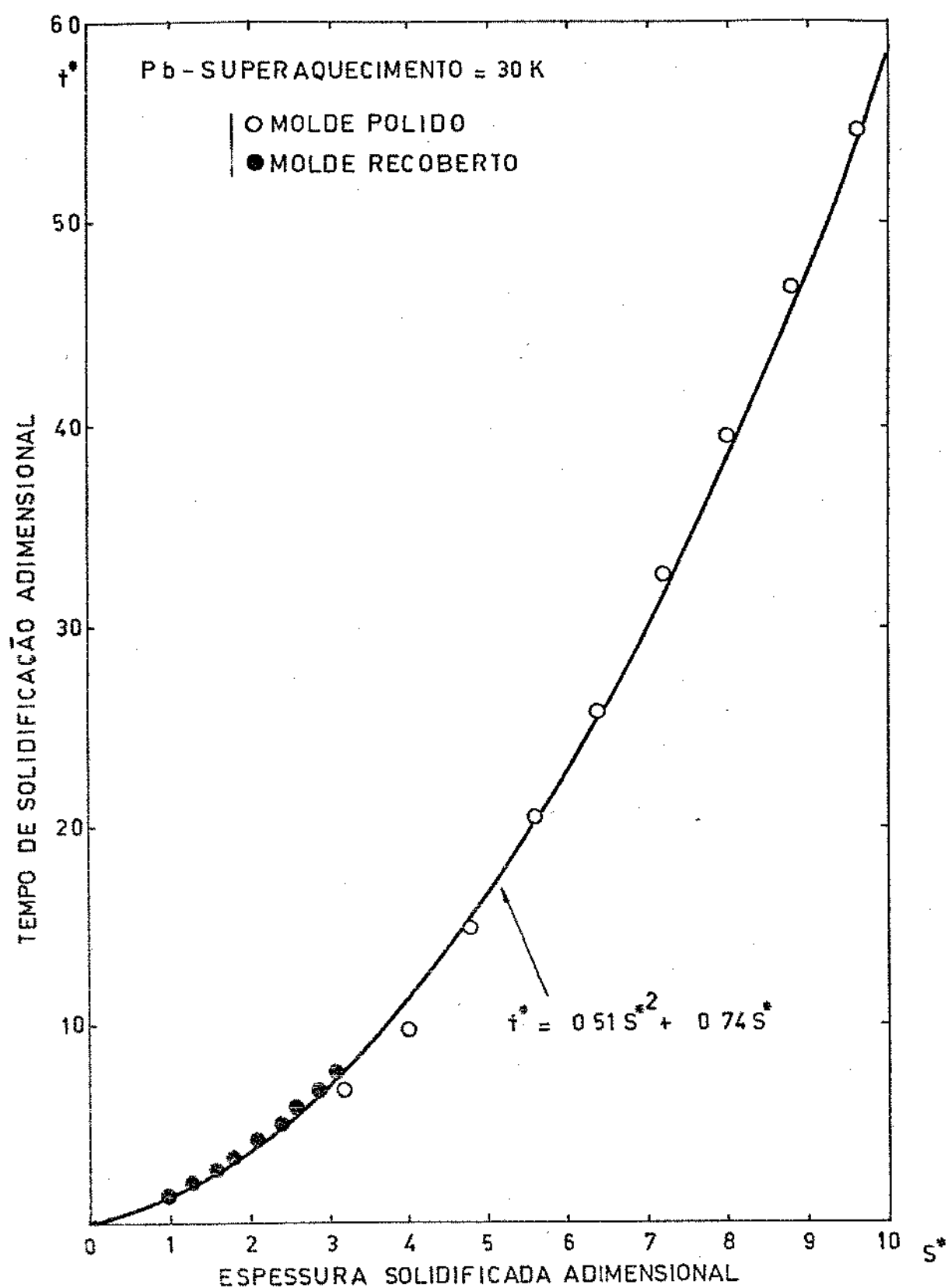


Figura 6.5 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, superaquecimento de 30K, comparado com os resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água.

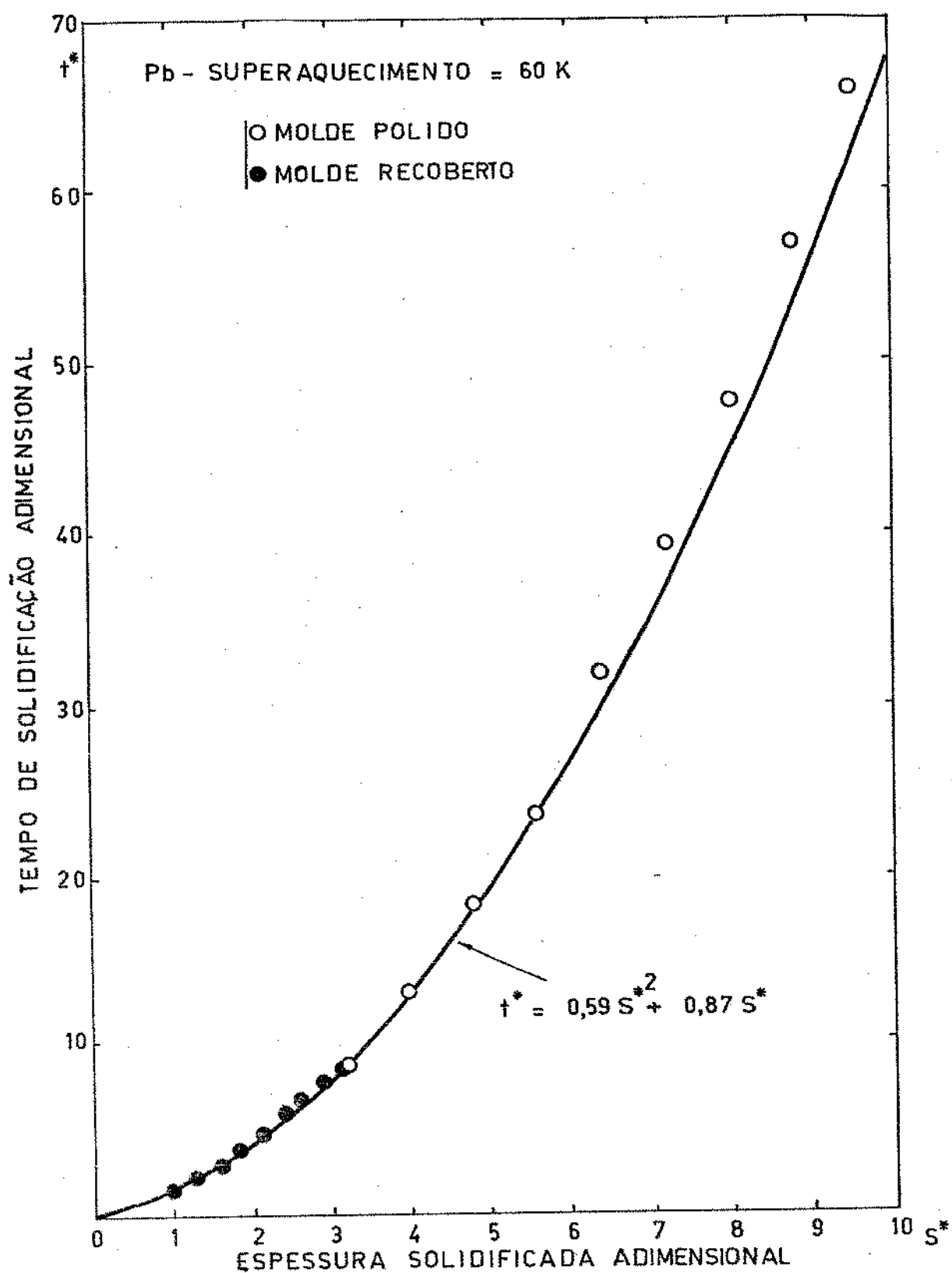


Figura 6.6 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, superaquecimento de 60K , comparado com os resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água.

6.10

$$T_{is}^* = 1,40 \operatorname{erf} \left(\frac{0,51}{0,68 + S^*} \right) \quad (6.8)$$

$$(T_{\ell}^*)_{x^*=2,09} = 1 \quad \text{para } S^* \leq 2,09 \quad (6.9)$$

$$(T_s^*)_{x^*=2,09} = 1,40 \operatorname{erf} \left(\frac{2,08}{0,68 + S^*} \right) \quad \text{para } S^* \geq 2,09 \quad (6.10)$$

Procedendo-se de forma análoga para o caso do superaquecimento de 30K, obtêm-se:

$$T_{is}^* = 1,48 \operatorname{erf} \left(\frac{0,50}{0,72 + S^*} \right) \quad (6.11)$$

$$(T_{\ell}^*)_{x^*=2,09} = 1,10 - 0,56 \operatorname{erfc} \left(\frac{2,68}{0,72 + S^*} \right)$$

$$\text{para } S^* \leq 2,09 \quad (6.12)$$

$$(T_s^*)_{x^*=2,09} = 1,48 \operatorname{erf} \left(\frac{1,96}{0,72 + S^*} \right)$$

$$\text{para } S^* \geq 2,09 \quad (6.13)$$

e para o superaquecimento de 60K:

$$T_{is}^* = 1,55 \operatorname{erf} \left(\frac{0,49}{0,75 + S^*} \right) \quad (6.14)$$

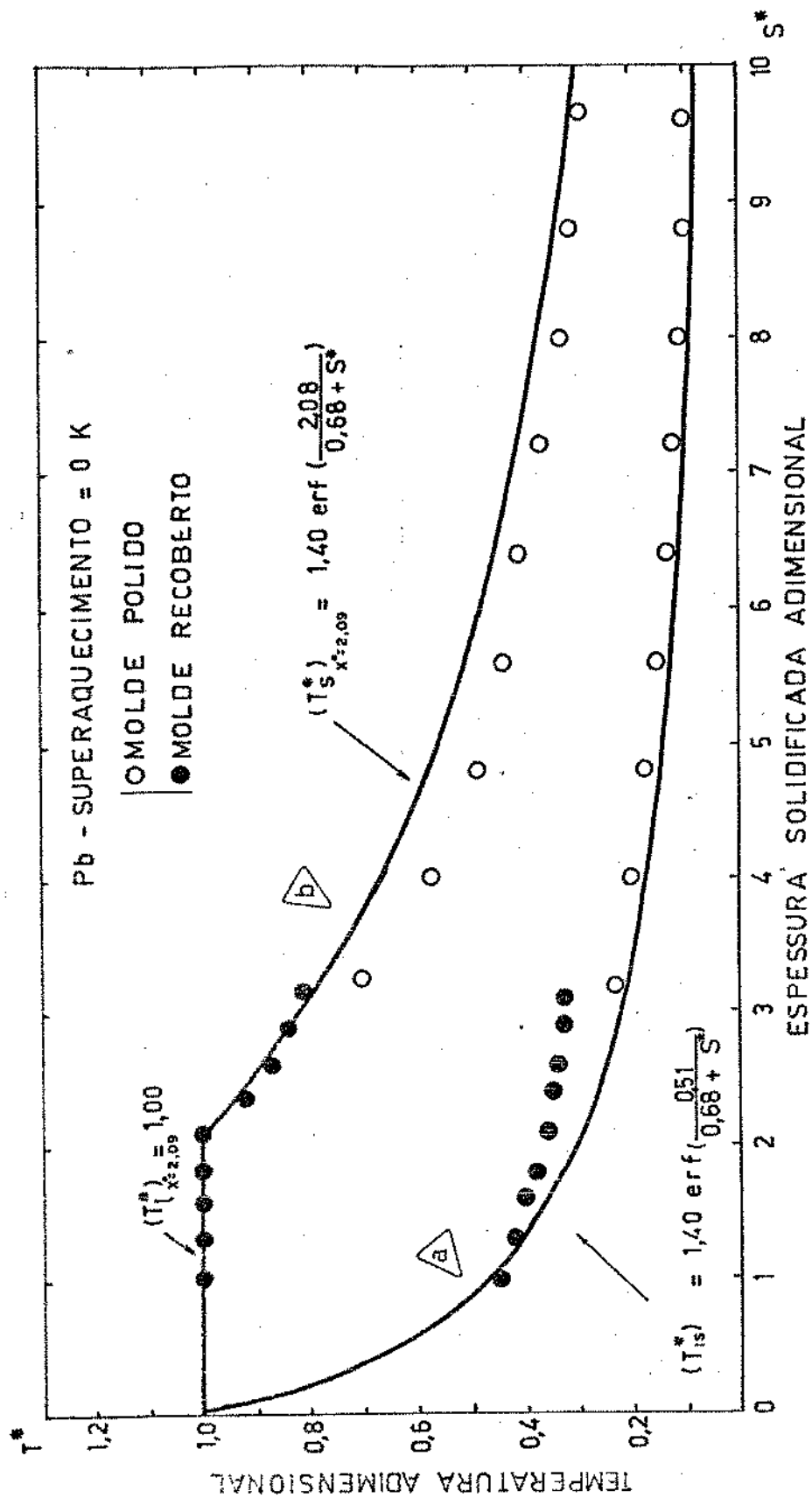


Figura 6.7 - Variação da temperatura adimensional do metal em função da espessura solidificada adimensional, na solidificação unidirecional do Chumbo, superaquecimento nulo, em molde refrigerado a água.

(a) junto à interface metal/molde

(b) em um ponto $x^* = 2,09$ da interface metal/molde.

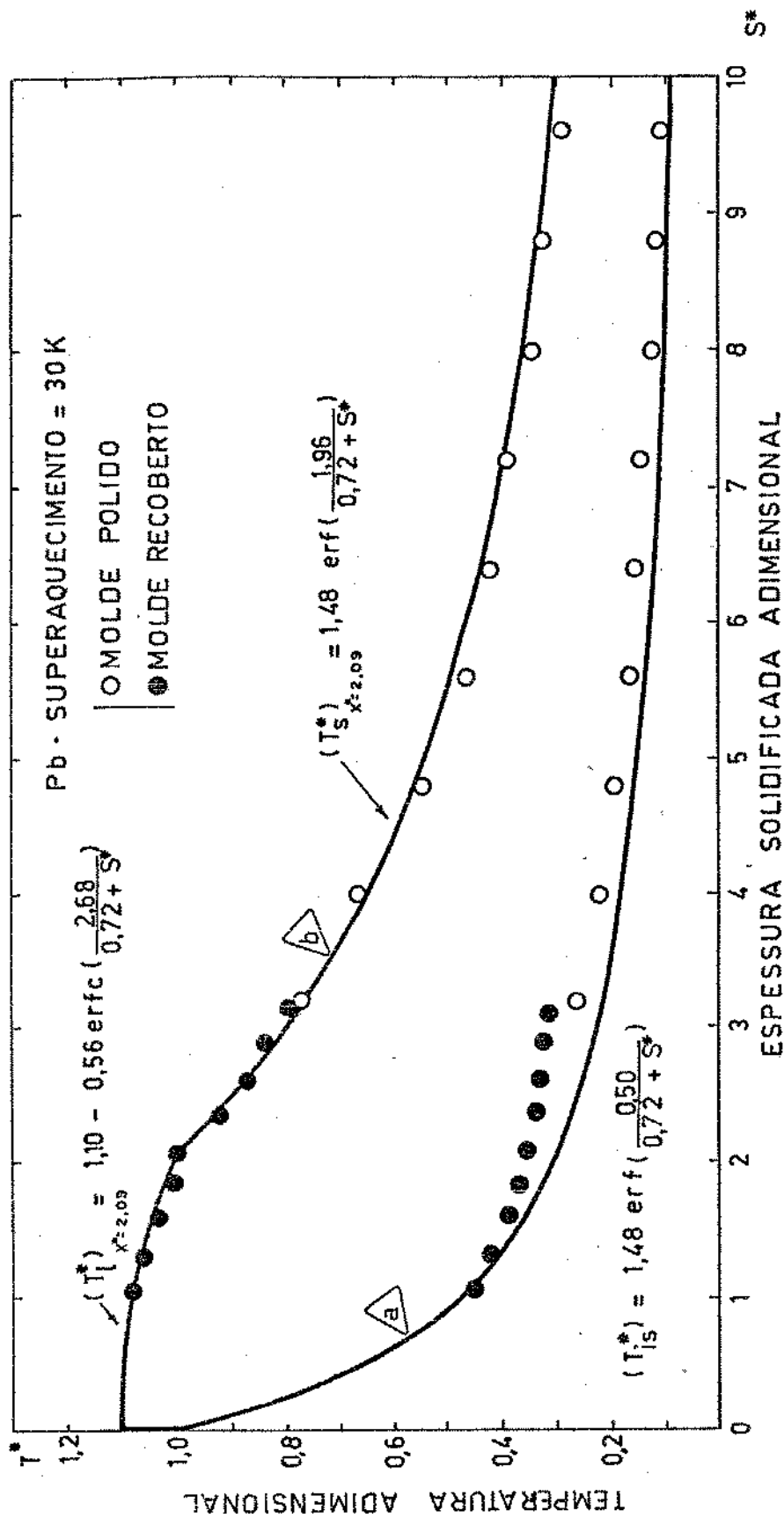


Figura 6.8 - Variação da temperatura adimensional do metal em função da espessura solidificada adimensional, na solidificação unidirecional do Chumbo, superaquecimento de 30K, em molde refrigerado a água:

(a) junto à interface metal/molde.

(b) em um ponto $x^* = 2,09$ da interface metal/molde.

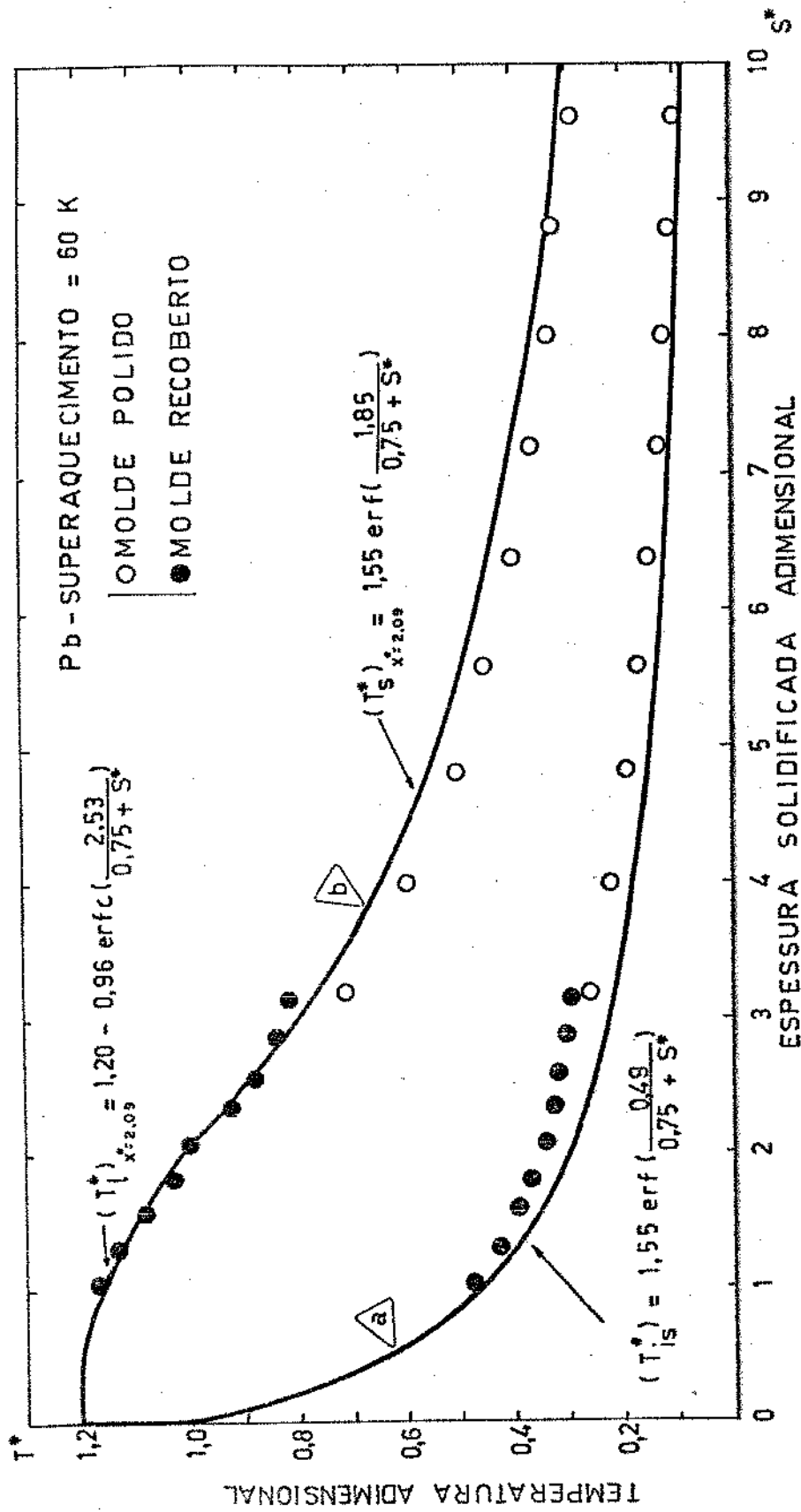


Figura 6.9 - Variação da temperatura adimensional do metal em função da espessura solidificada adimensional, na solidificação unidirecional do Chumbo, superaquecimento de 60K, em molde refrigerado a água:
(a) junto à interface metal/molde
(b) em um ponto $x^* = 2,09$ da interface metal/molde.

$$(T_l^*)_{x^*=2,09} = 1,20 - 0,96 \operatorname{erfc} \left(\frac{2,53}{0,75 + S^*} \right)$$

$$\text{para } S^* \leq 2,09 \quad (6.15)$$

$$(T_s^*)_{x^*=2,09} = 1,55 \operatorname{erf} \left(\frac{1,85}{0,75 + S^*} \right)$$

$$\text{para } S^* > 2,09 \quad (6.16)$$

As equações (6.8), (6.9) e (6.10) encontram-se sob a forma gráfica na Figura 6.7, enquanto que as equações (6.11), (6.12) e (6.13) na Figura 6.8 e as equações (6.14), (6.15) e (6.16) na Figura 6.9, onde são, respectivamente, comparadas com os correspondentes valores experimentais, devidamente adimensionalizados. Por meio destas Figuras pode-se observar que a concordância com as previsões teóricas, ainda que muito boa, não chega a ser excelente como a observada para a cinética de solidificação, fato este decorrente das dificuldades experimentais existentes para a medida precisa das temperaturas no interior do metal, o que já foi observado por diversos pesquisadores [4,6,19,28]. Entre estas dificuldades encontram-se o posicionamento preciso do termopar e sua manutenção nesta posição. Assim, pode-se concluir que o modelo proposto comporta-se eficientemente no cálculo de temperaturas durante a solidificação unidirecional do Chumbo.

6.2.2. Solidificação Unidirecional de Alumínio em Molde Refrigerado a Água

Para o caso de Alumínio solidificado unidirecionalmente em molde refrigerado a água, a equação (3.85) assume para os superaquecimentos de 0 e 46K, respectivamente as formas:

$$t^* = 0,41 S^{*2} + 0,54 S^* \quad (6.17)$$

$$t^* = 0,45 S^{*2} + 0,62 S^* \quad (6.18)$$

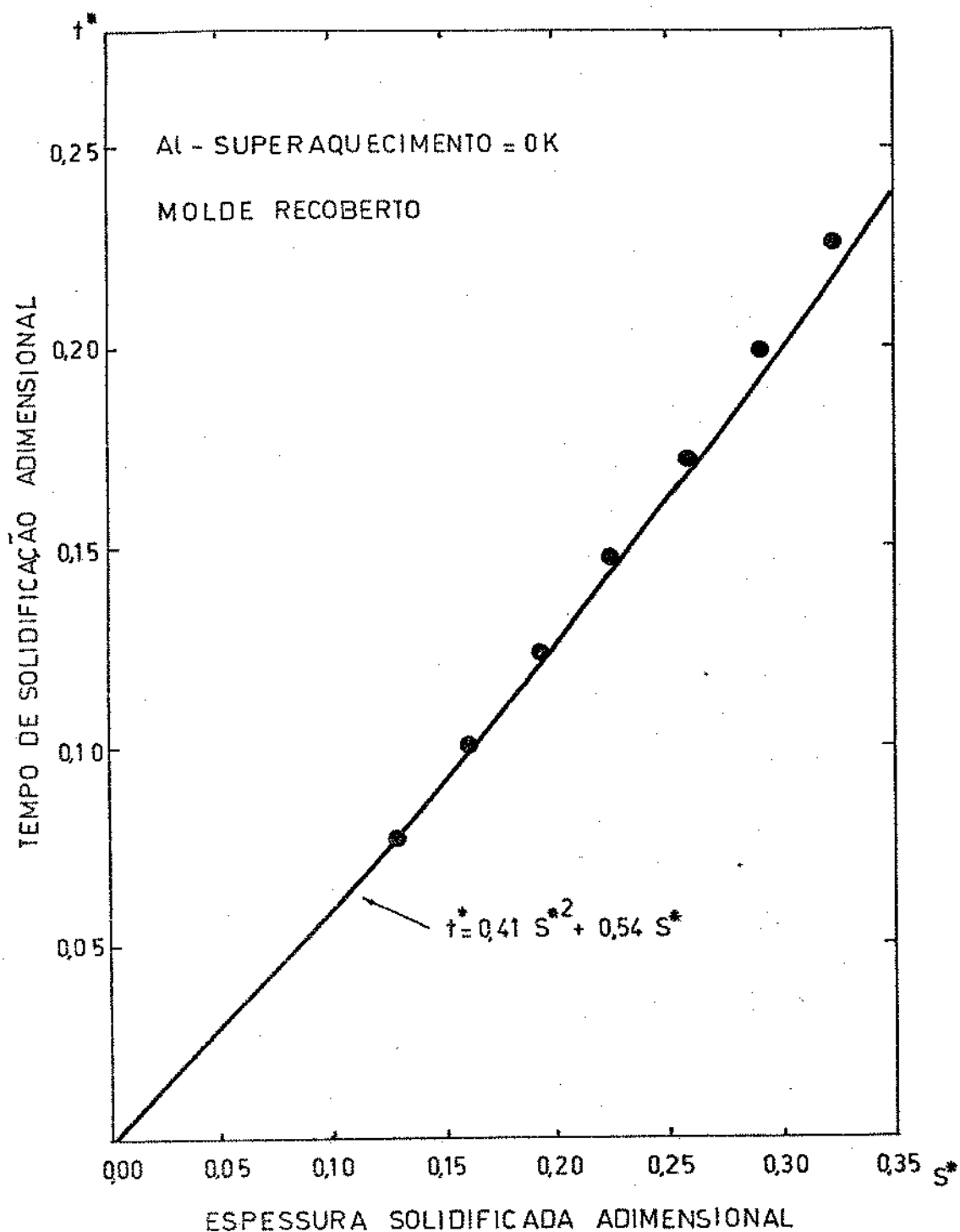


Figura 6.10 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, para o caso de superaquecimento nulo, comparado com os resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água.

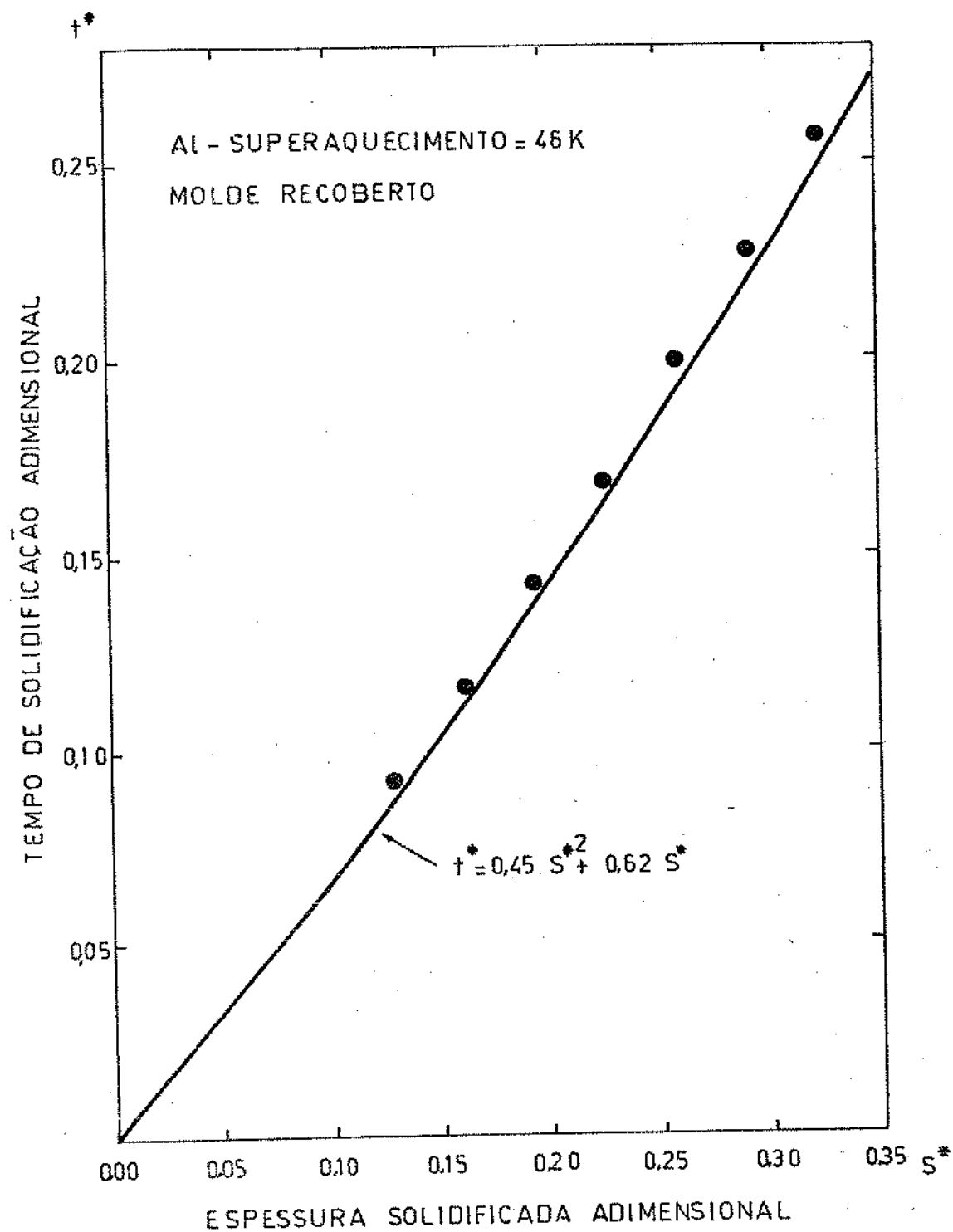


Figura 6.11 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, superaquecimento de 46K, comparado com os resultados experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água.

As Figuras 6.10 e 6.11 apresentam a comparação das equações acima com os respectivos resultados experimentais devidamente adimensionalizados. Observa-se uma concordância muito boa entre a teoria e os dados obtidos experimentalmente.

Para comprovação do modelo em relação a determinação de temperaturas foram escolhidos um ponto na interface metal/molde do lado do metal e um outro situado a uma distância adimensional desta interface (x^*) igual a 0,26, o que corresponde a uma distância de 4×10^{-2} m.

Substituindo-se os valores correspondentes nas equações (3.88) e (3.89), encontra-se para o caso de superaquecimento nulo:

$$T_{is}^* = 1,37 \operatorname{erf} \left(\frac{0,51}{0,66 + S^*} \right) \quad (6.19)$$

$$(T_{\ell}^*)_{x^*=0,26} = 1,00 \quad \text{para } S^* \leq 0,26 \quad (6.20)$$

$$(T_s^*)_{x^*=0,26} = 1,37 \operatorname{erf} \left(\frac{0,71}{0,66 + S^*} \right) \quad \text{para } S^* \geq 0,26 \quad (6.21)$$

e para o superaquecimento de 46K:

$$T_{is}^* = 1,41 \operatorname{erf} \left(\frac{0,51}{0,68 + S^*} \right) \quad (6.22)$$

$$(T_{\ell}^*)_{x^*=0,26} = 1,07 - 0,51 \operatorname{erfc} \left(\frac{0,98}{0,68 + S^*} \right) \quad \text{para } S^* < 0,26 \quad (6.23)$$

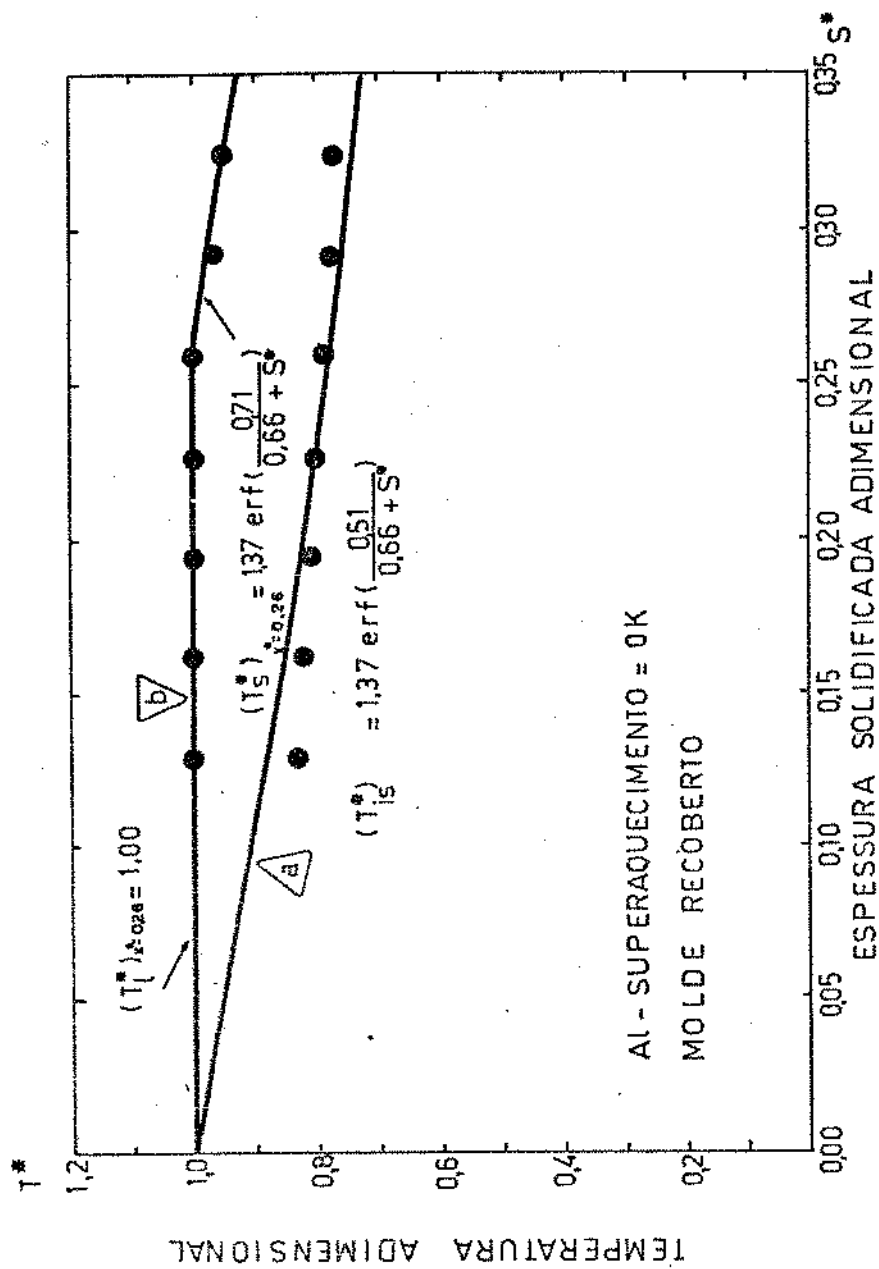


Figura 6.12 - Variação da temperatura adimensional do metal em função da espessura solidificada adimensional, na solidificação unidirecional do Alumínio, superaquecimento nulo, em mol de refrigerado a água:

(a) junto à interface metal/molde

(b) em um ponto $x^* = 0,26$ da interface metal/molde.

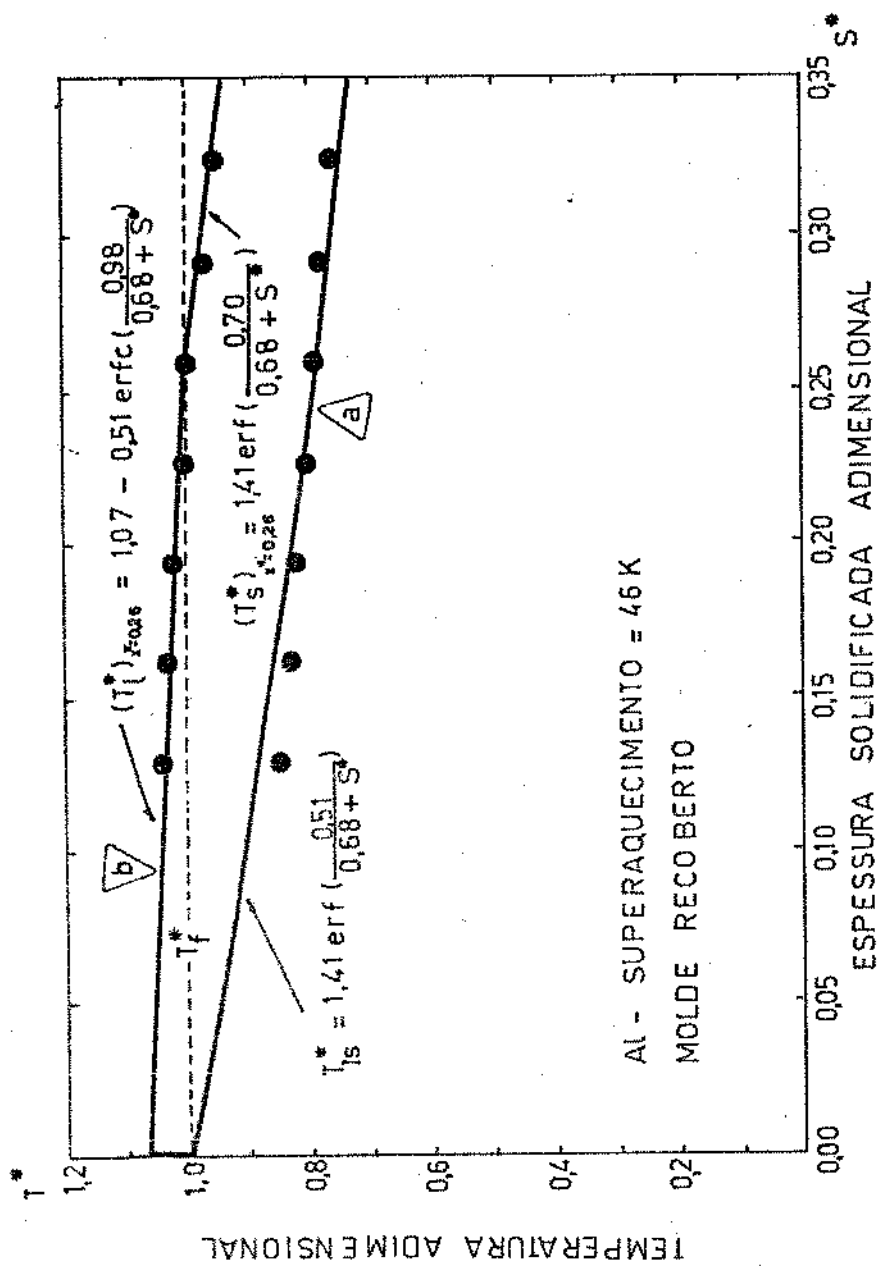


Figura 6.13 - Variação da temperatura adimensional do metal em função da espessura solidificada adimensional, na solidificação unidirecional do Alumínio, superaquecimento de 46K, em molde refrigerado a água:

(a) junto à interface metal/molde

(b) em um ponto $x^* = 0,26$ da interface metal/molde.

$$(T_s^*)_{x^*=0,26} = 1,41 \operatorname{erf} \left(\frac{0,70}{0,68 + S^*} \right)$$

$$\text{para } S^* > 0,26 \quad (6.24)$$

As equações (6.19), (6.20) e (6.21) encontram-se sob a forma gráfica na Figura 6.12, enquanto que as equações (6.22), (6.23) e (6.24) na Figura 6.13, onde são, respectivamente, comparadas com os correspondentes valores experimentais, devidamente adimensionalizados. Por meio destas Figuras pode-se observar que os resultados experimentais apresentam uma concordância muito boa, ainda melhor do que no caso do Chumbo, com as previsões teóricas fornecidas pelo modelo proposto, podendo-se afirmar que também neste caso o modelo revela-se bastante confiável.

6.3. CONFRONTO DO MODELO PROPOSTO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO UNIDIRECIONAL DE METAIS EXISTENTES NA LITERATURA

6.3.1. Resultados Experimentais Obtidos por Durhan, Verma e Berry

Durhan, Verma e Berry [29], utilizaram-se de um dispositivo refrigerado a água que promovia a solidificação unidirecional. Foram realizadas experiências com Chumbo a diferentes graus de superaquecimento, objetivando a comprovação experimental de um método que simulava em computador o processo de solidificação. O coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde foi determinado por tentativa e erro, efetuando-se a simulação com diferentes valores de h_i e adotando-se aquele que produzisse a melhor concordância com os resultados experimentais. Para o caso da interface Chumbo/Latão determinaram que este coeficiente era de aproximadamente 0,2 em unidades cgs (correspondente a 8372 J/m²sK).

Utilizando-se as propriedades físicas do Chumbo (Apêndice 6) na equação (3.85), encontra-se para os superaquecimentos de 42°F (23,3K) e 87°F (48,3K), respectivamente as equações:

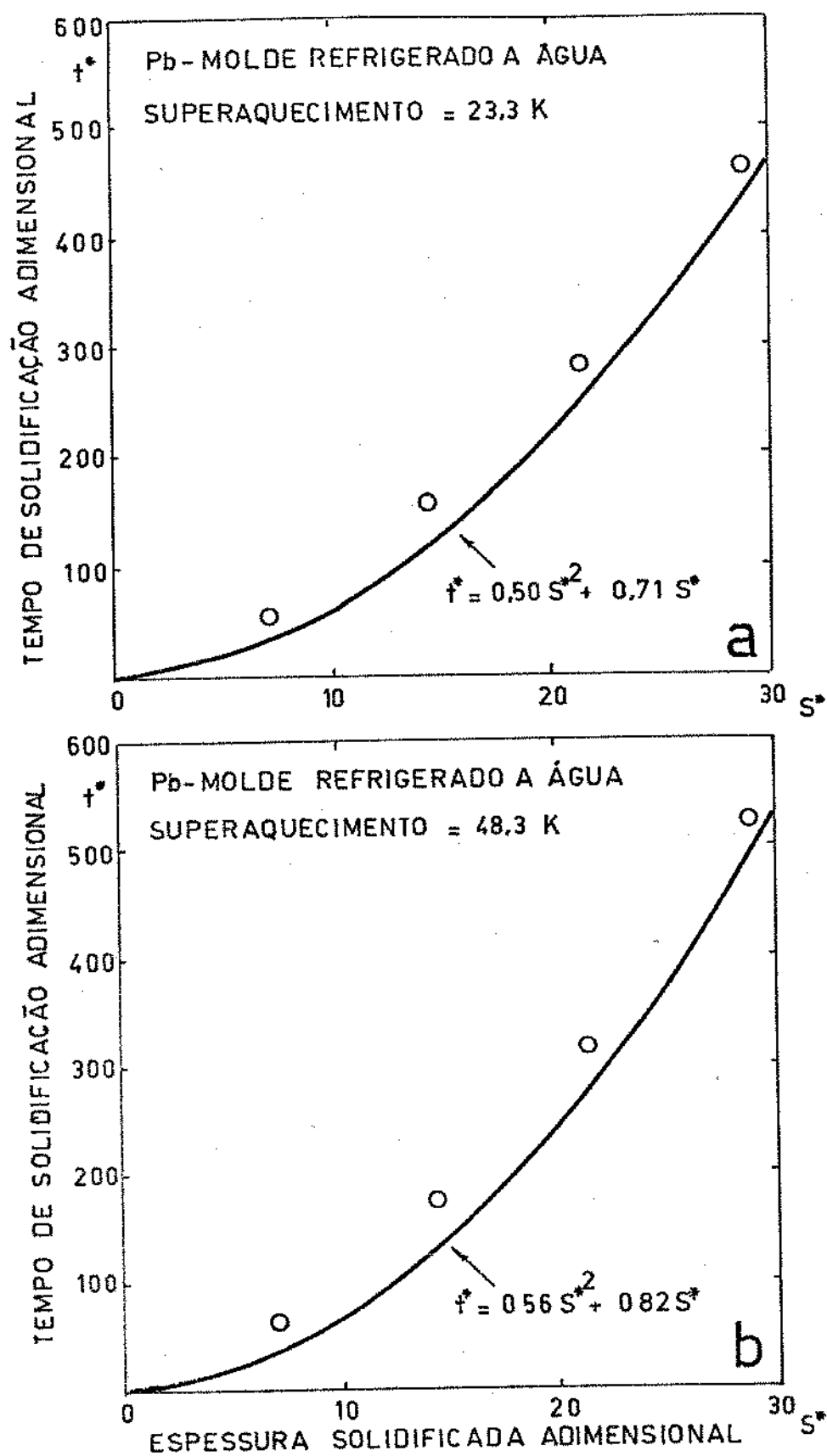


Figura 6.14 - Tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, comparado com os resultados experimentais de Durhan, Verma e Berry [29] para a solidificação unidirecional de Chumbo em molde refrigerado a água:

(a) superaquecimento de 23,3 K

(b) superaquecimento de 48,3 K.

$$t^* = 0,50 S^{*2} + 0,71 S^* \quad (6.25)$$

$$t^* = 0,56 S^{*2} + 0,82 S^* \quad (6.26)$$

Nas Figuras 6.14a e 6.14b as equações (6.25) e (6.26) são confrontadas com os respectivos resultados experimentais devidamente adimensionalizados. Pode-se observar que o modelo apresenta uma precisão razoável, não sendo, contudo, uma concordância tão boa quanto a que vinha sendo apresentada até este ponto. Este deveria ser um resultado esperado, tendo-se em vista a pouca precisão na determinação do coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde.

6.3.2. Resultados Experimentais Obtidos por Prates, Fissolo e Biloni

Prates, Fissolo e Biloni [30] estudaram a cinética de solidificação unidirecional dos metais em molde maciço semi-infinito, fazendo variar o superaquecimento, o material do molde e as condições de contato térmico na interface metal/molde. A solidificação unidirecional dos metais foi promovida em laboratório, sendo os tempos de solidificação determinados por análise térmica diferencial.

Para efeito de confronto com o modelo proposto neste trabalho, foram escolhidos os resultados obtidos na solidificação do Chumbo e do Alumínio em molde de aço doce semi-infinito. Pela substituição das correspondentes propriedades físicas na equação (3.85), determina-se para o Chumbo submetido a um superaquecimento de 50K:

$$t^* = 1,06 S^{*2} + 0,87 S^* \quad (6.27)$$

e para o Alumínio submetido a um superaquecimento de 100K:

$$t^* = 3,74 S^{*2} + 0,83 S^* \quad (6.28)$$

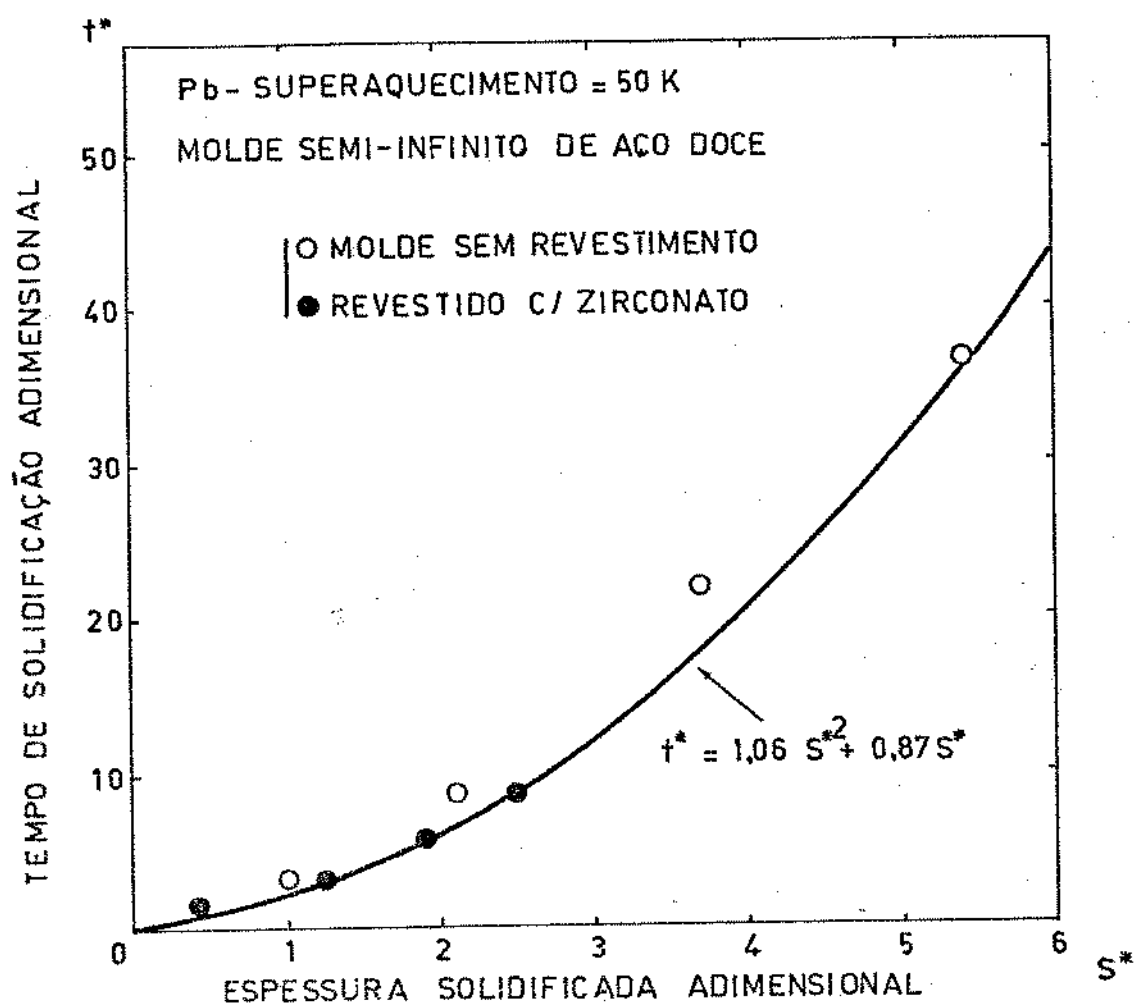


Figura 6.15 - Tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, comparado com os resultados experimentais de Prates, Fissolo e Biloni [30] para a solidificação unidirecional de Chumbo em molde maciço semi-infinito de aço doce, sendo o superaquecimento de 50K.

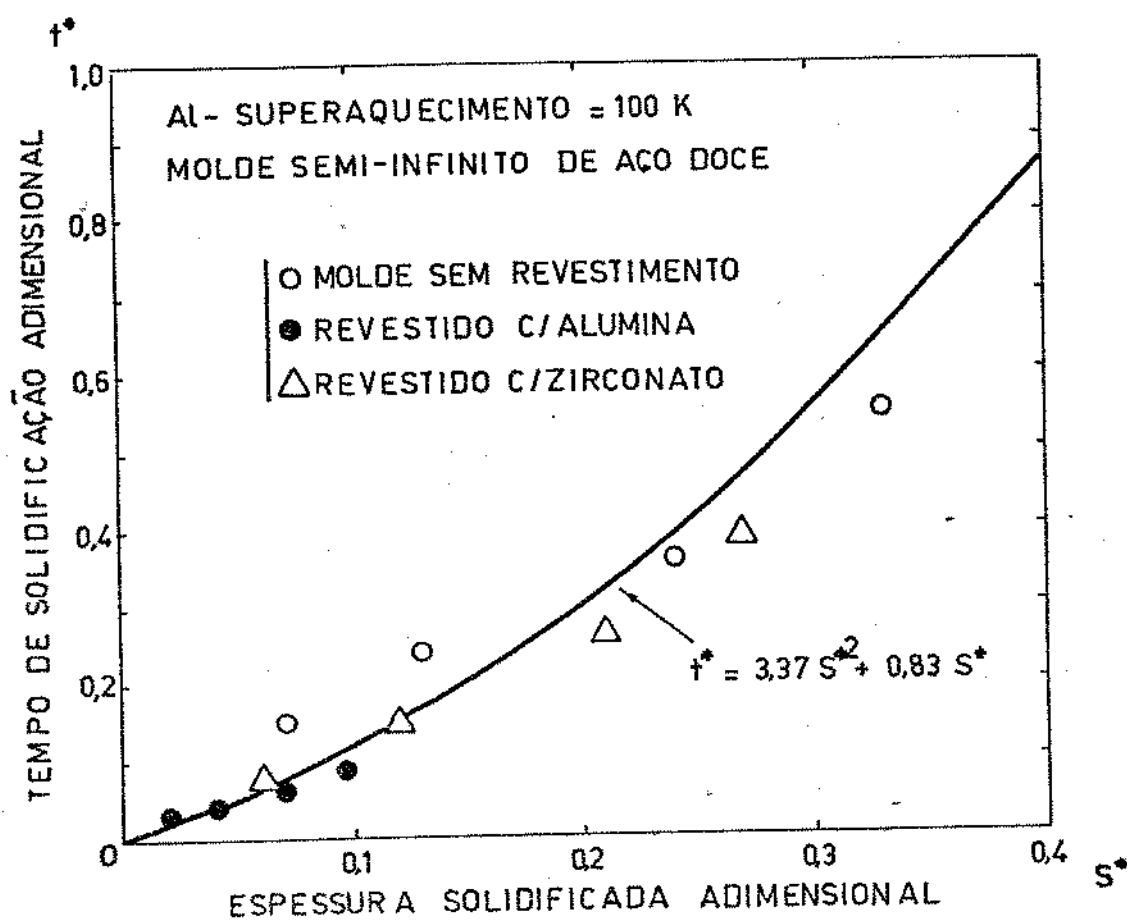


Figura 6.16 - Tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, comparado com os resultados experimentais de Prates, Fissolo e Biloni [30] para a solidificação unidirecional de Alumínio em molde maciço semi-infinito de aço doce, sendo o superaquecimento de 100K.

Estas equações são comparadas com os resultados experimentais, devidamente adimensionalizados, por meio das Figuras 6.15 e 6.16, onde observa-se que o modelo proposto comporta-se muito bem na solidificação em moldes maciços, estando as curvas teóricas bem ajustadas em relação ao conjunto de pontos experimentais, o que evidencia a possibilidade de aplicação do modelo proposto na análise de casos de solidificação com superaquecimento em coquilhas maciças semi-infinitas.

6.4. VERIFICAÇÃO DA HIPÓTESE BÁSICA DE UMA ESPESSURA VIRTUAL PREVIAMENTE SOLIDIFICADA

O modelo proposto tem como hipótese básica a suposição de que a resistência térmica da interface metal/molde pode ser substituída por espessuras virtuais do molde e do metal sólido. No caso de moldes refrigerados, situação verificada experimentalmente - neste trabalho, a espessura virtual previamente solidificada representa toda esta resistência.

Garcia e Prates [6] verificaram a validade desta hipótese para o caso de superaquecimento nulo, extrapolando os perfis térmicos obtidos durante a solidificação e verificando a sua convergência para um ponto, onde a temperatura era T_0 , situado a uma distância da interface metal/molde real aproximadamente igual ao valor teórico calculado para S_0 .

O mesmo tipo de comprovação pode ser feito para experiências realizadas na presença de superaquecimento. As Figuras 6.17 e 6.18 mostram a extrapolação dos perfis térmicos obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo, respectivamente para os casos de molde polido e recoberto, sendo o superaquecimento de 60K. Pode-se observar a convergência dos perfis térmicos para valores bem próximos dos previstos pela teoria (equação 3.62). Uma comparação entre estas Figuras permite observar que um aumento na resistência Newtoniana produz um aumento no valor de S_0 , fato plenamente de acordo com a teoria aqui proposta.

Deve ser salientado que embora estas observações da existência de um ponto de convergência dos perfis térmicos, correspon-

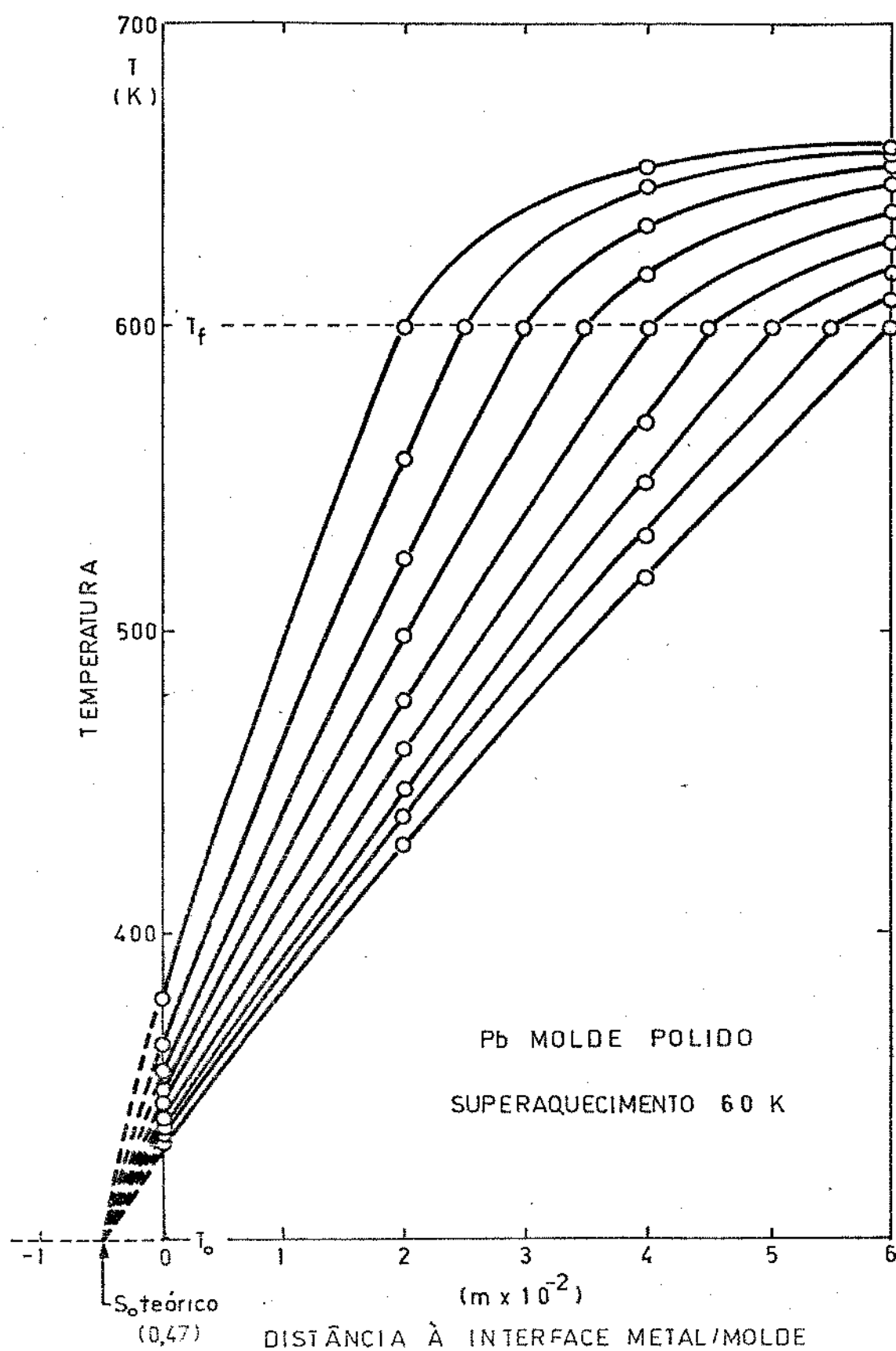


Figura 6.17 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação do Chumbo em molde polido refrigerado a água, superaquecimento de 60K, indicando o valor calculado da espessura virtual previamente solidificada.

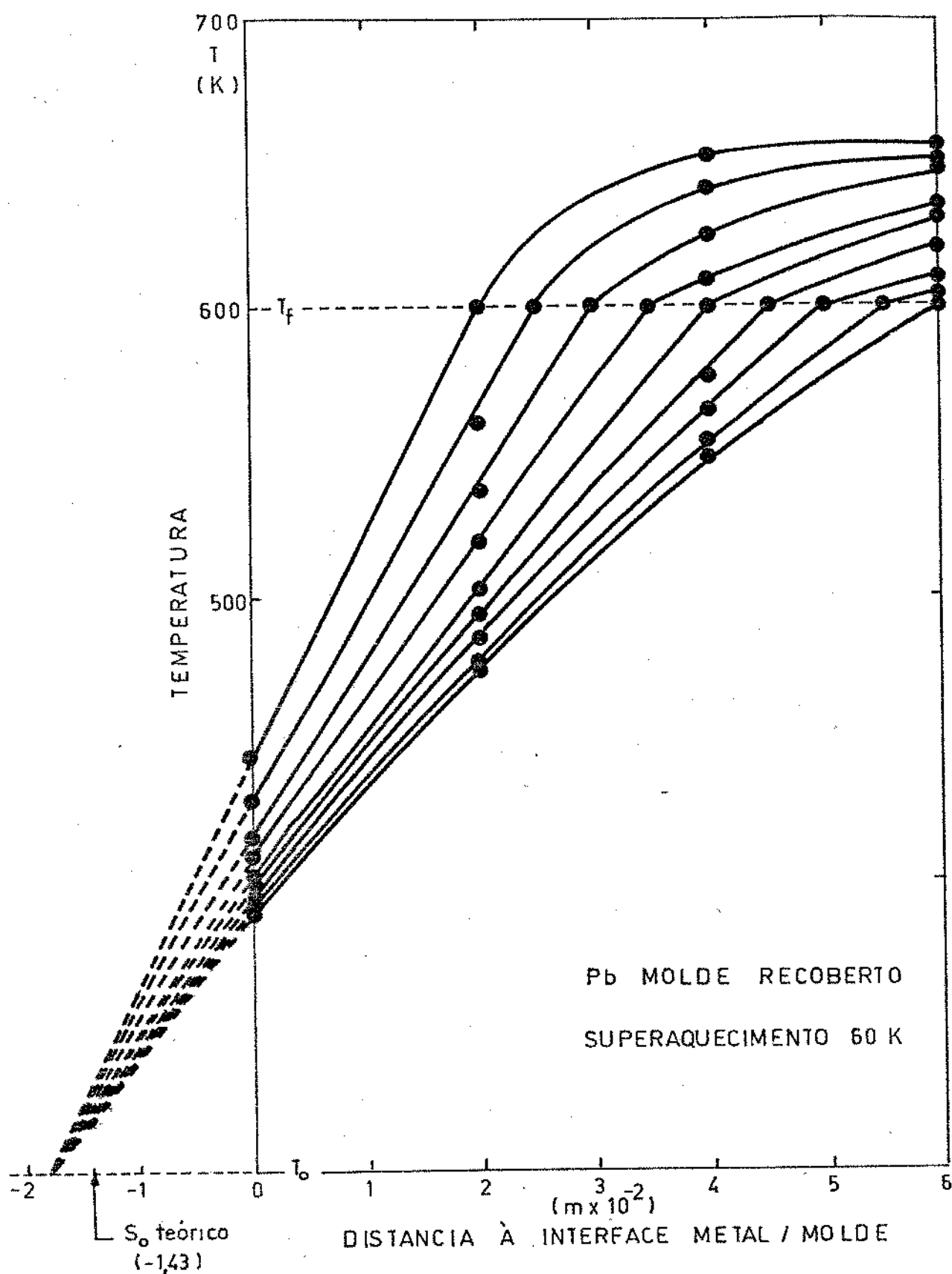


Figura 6.18 - Variação da distribuição de temperaturas ao longo do metal durante a solidificação do Chumbo em molde refrigerado a água, superaquecimento de 60K, indicando o valor calculado da espessura virtual previamente solidificada.

dente ao valor da espessura previamente solidificada, sirvam como uma indicação da validade da hipótese básica assumida no desenvolvimento do modelo [4], não podem ser utilizadas para a determinação experimental precisa do valor de S_0 , uma vez que dependem de extrapolações baseadas em uma sequência não muito extensa de pontos experimentais, o que evidentemente não resulta na obtenção de um ponto de convergência muito confiável, podendo o verdadeiro resultado situar-se dentro de uma faixa de valores em torno do ponto obtido.

6.5. CONFRONTO DO MODELO PROPOSTO COM OUTROS MODELOS EXISTENTES NA LITERATURA

Nesta seção o modelo proposto será confrontado, através de resultados experimentais, com outros modelos ou métodos existentes na literatura. Para tanto, escolheu-se o mais significativo representante de cada classe de soluções: o analítico exato de Schwarz, o analítico aproximado de Hrycak e o numérico de Dusinberre.

6.5.1. Cinética de Solidificação

Utilizando-se as propriedades físicas constantes no Apêndice 6 na equação (2.1), que descreve a cinética de solidificação segundo Schwarz, obtém-se para o Chumbo submetido aos superaquecimentos de 0,30 e 60K, respectivamente as equações:

$$t^* = 0,44 \text{ s}^2 \quad (6.29)$$

$$t^* = 0,51 \text{ s}^2 \quad (6.30)$$

$$t^* = 0,59 \text{ s}^2 \quad (6.31)$$

e para o Alumínio submetido aos superaquecimentos de 0 e 46K, respectivamente:

S*	t* para superaq.de 0K	t* para superaq.de 30K	t* para superaq.de 60K
1	1.1	1.3	1.5
2	3.6	4.1	4.6
3	7.3	8.1	9.1
4	12.2	13.5	14.9
5	18.1	20.0	22.2
6	25.2	27.8	30.7
7	33.4	36.8	40.9
8	42.7	47.0	51.9
9	53.1	58.5	64.5

Tabela 6.2 - Resultados para a cinética de solidificação do Chumbo obtidos pelo modelo de Hrycak.

S^*	t^* para superaq. de OK	t^* para superaq. de 46K
0.05	0,005	0,009
0.10	0,018	0,025
0.15	0,036	0,047
0.20	0,060	0,075
0.25	0,090	0,109
0.30	0,124	0,147
0.35	0,163	0,191

Tabela 6.3 - Resultados para a cinética de solidificação do Alumínio obtidos pelo modelo de Hrycak.

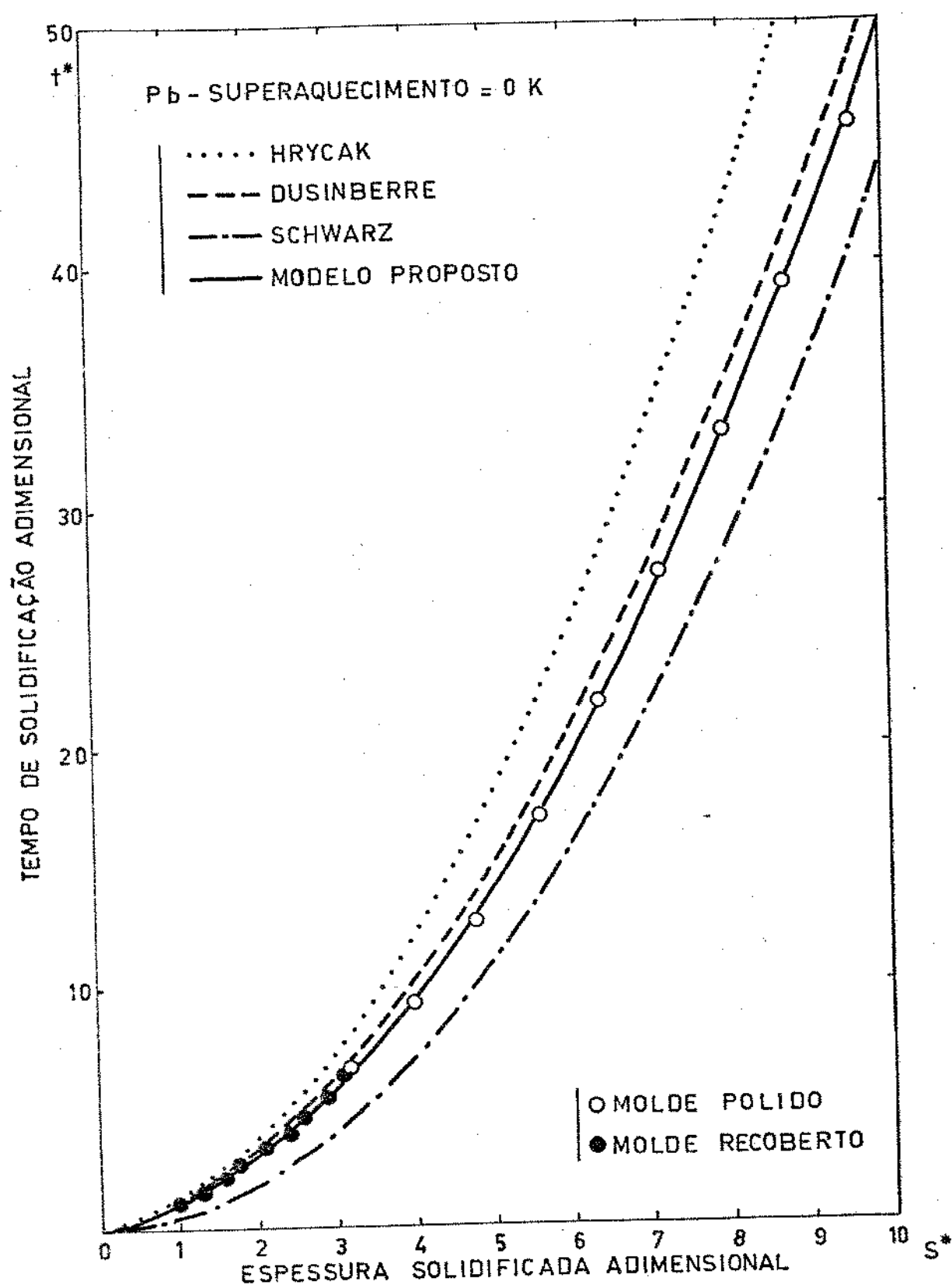


Figura 6.19 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, comparado com as soluções de Hrycak, Schwarz, método numérico de Dusinberre e pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento nulo.

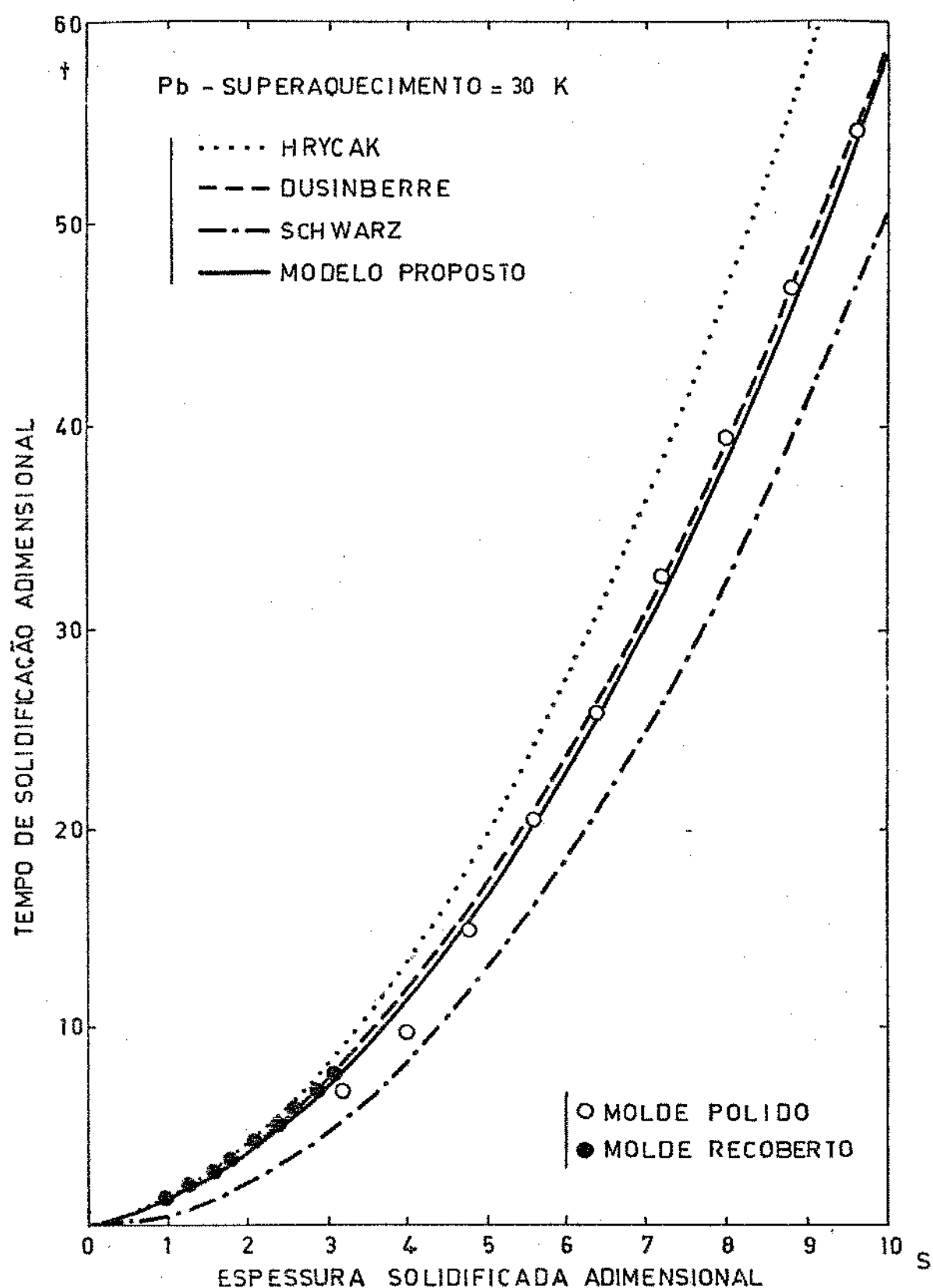


Figura 6.20 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*) segundo o modelo proposto, comparado com as soluções de Hrycak, Schwarz, método numérico de Dusenberre e pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento de 30K.

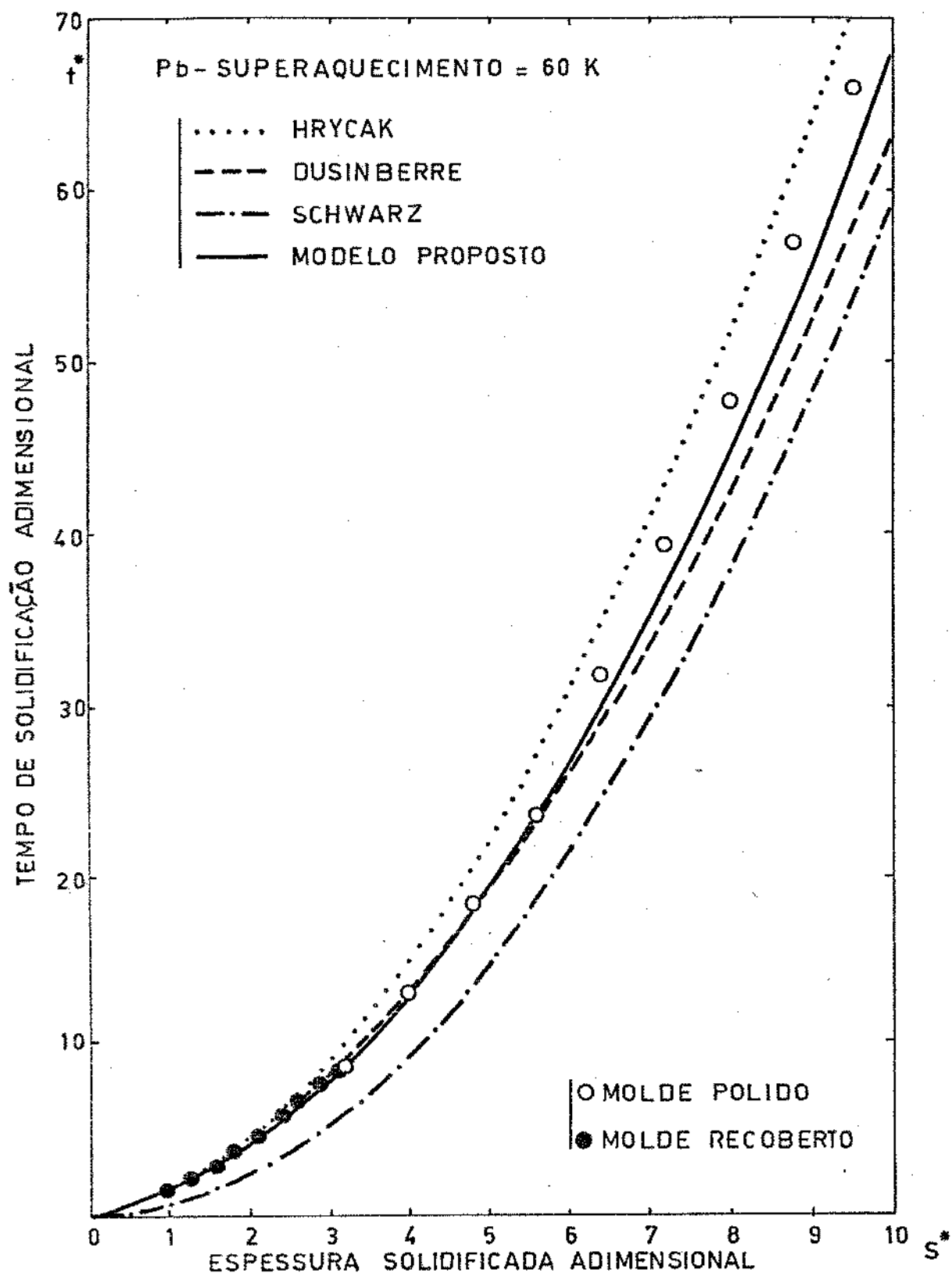


Figura 6.21 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com as soluções de Hrycak, Schwarz, método numérico de Dusinberre e pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento de 60K.

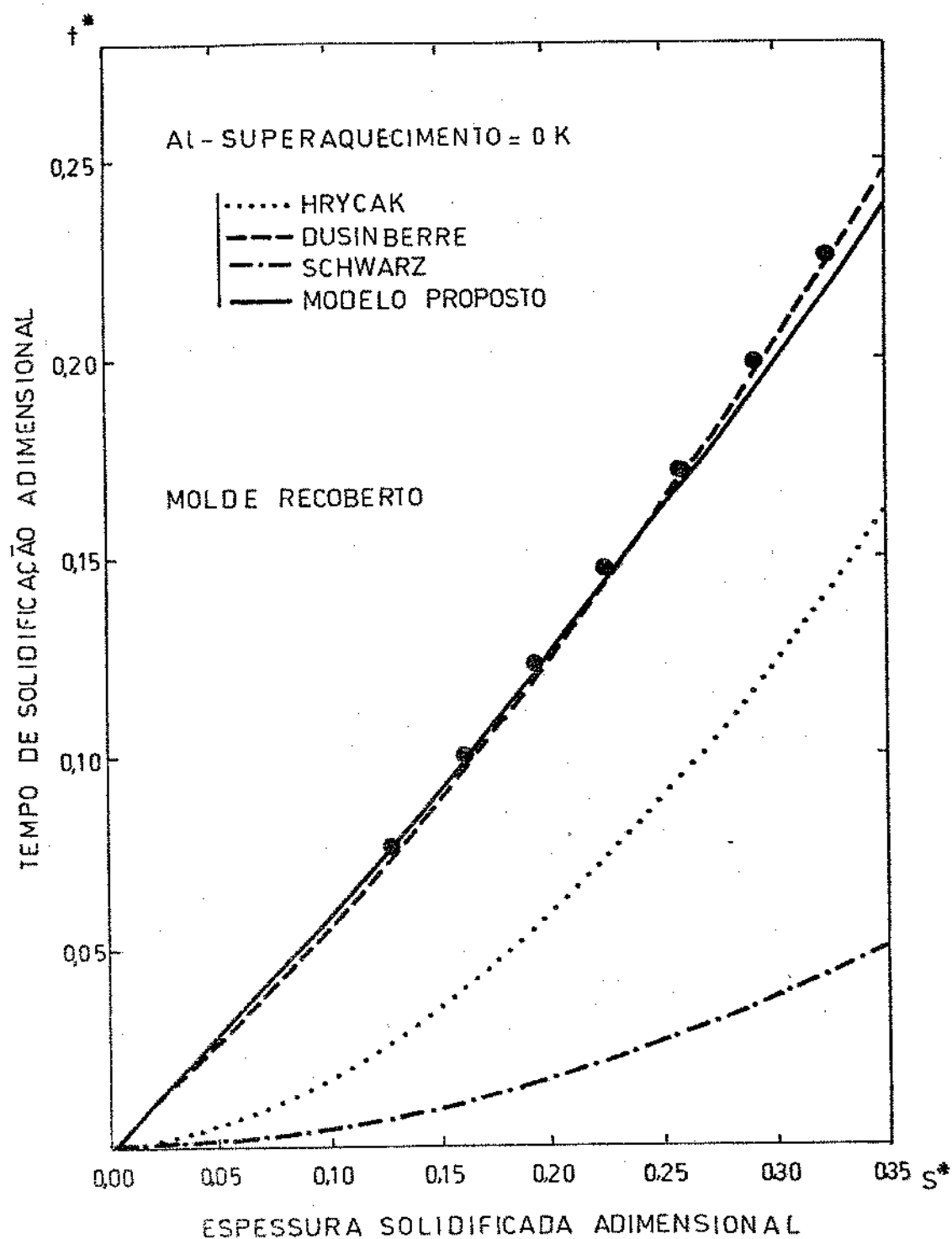


Figura 6.22 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com as soluções de Hrycak, Schwarz, método numérico de Dusinberre e pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água e superaquecimento nulo.

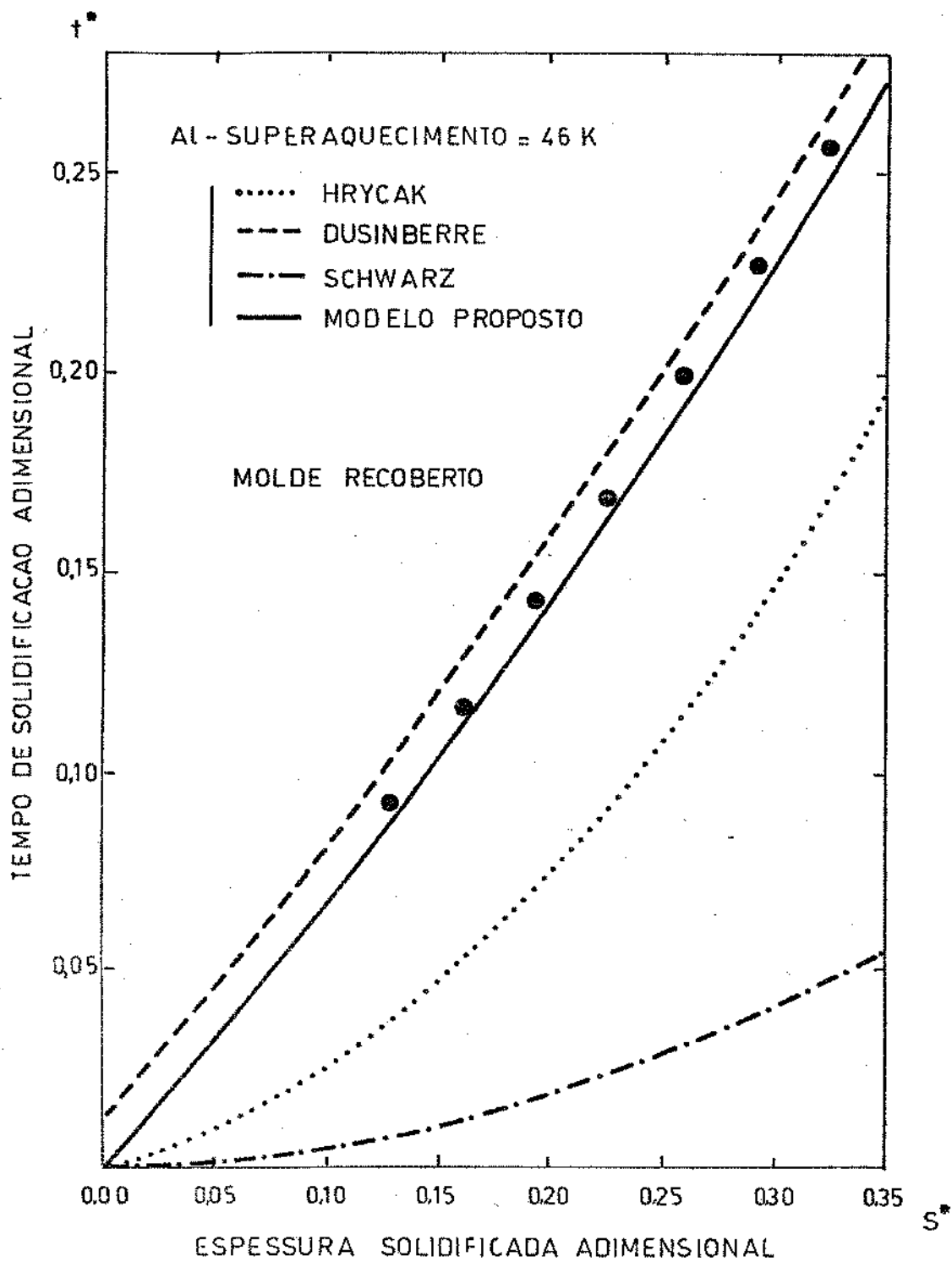


Figura 6.23 - Variação do tempo de solidificação adimensional (t^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com as soluções de Hrycak, Schwarz, método numérico de Dusenberre e pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água e superaquecimento de 46K .

$$t^* = 0,41 \text{ s}^{\wedge}$$

(6.32)

$$t^* = 0,45 \text{ s}^{\wedge 2}$$

(6.33)

Aplicando-se a solução de Hrycak, conforme seção 2.2.1 , para os metais e superaquecimentos especificados acima, obtêm-se os valores apresentados nas Tabelas 6.2 e 6.3.

Finalmente, pode-se aplicar o método numérico de Dusinberre, como descrito na seção 2.4 , por meio do programa SOLI3 (Apêndice 3).

Nas Figuras 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23 acham-se confrontados os resultados experimentais obtidos na cinética de solidificação e o modelo proposto neste trabalho, com as previsões fornecidas pelos diversos métodos de análise acima citados. Por esta série de Figuras pode-se observar que o modelo proposto é bem mais preciso do que as soluções de Schwarz e de Hrycak, principalmente no caso do Alumínio. O método numérico apresenta uma precisão praticamente igual a do modelo proposto, sendo, porém, de muito maior complexidade, além da evidente necessidade de facilidades computacionais, o que o põe em desvantagem em termos de aplicação, principalmente levando-se em consideração o elevado grau de generalização do modelo proposto.

6.5.2. Perfil de Temperaturas na Camada Solidificada

A solução de Hrycak não é adequada para a determinação de temperaturas ao longo do processo de solidificação, uma vez que as soluções analíticas aproximadas são deduzidas a partir de funções arbitrárias impostas para representar o perfil térmico do metal [4]. Assim sendo, efetuar-se-á a comparação do modelo proposto, no que diz respeito a previsão de temperaturas, com o método numérico de Dusinberre e a solução de Schwarz em função dos resultados obtidos para a temperatura da interface metal/molde durante a solidificação do Chumbo e do Alumínio.

Como a solução de Schwarz não leva em conta a resistência Newtoniana na interface metal/molde, considera que a temperatura nesta interface mantém-se constante, sendo igual a T_0 durante

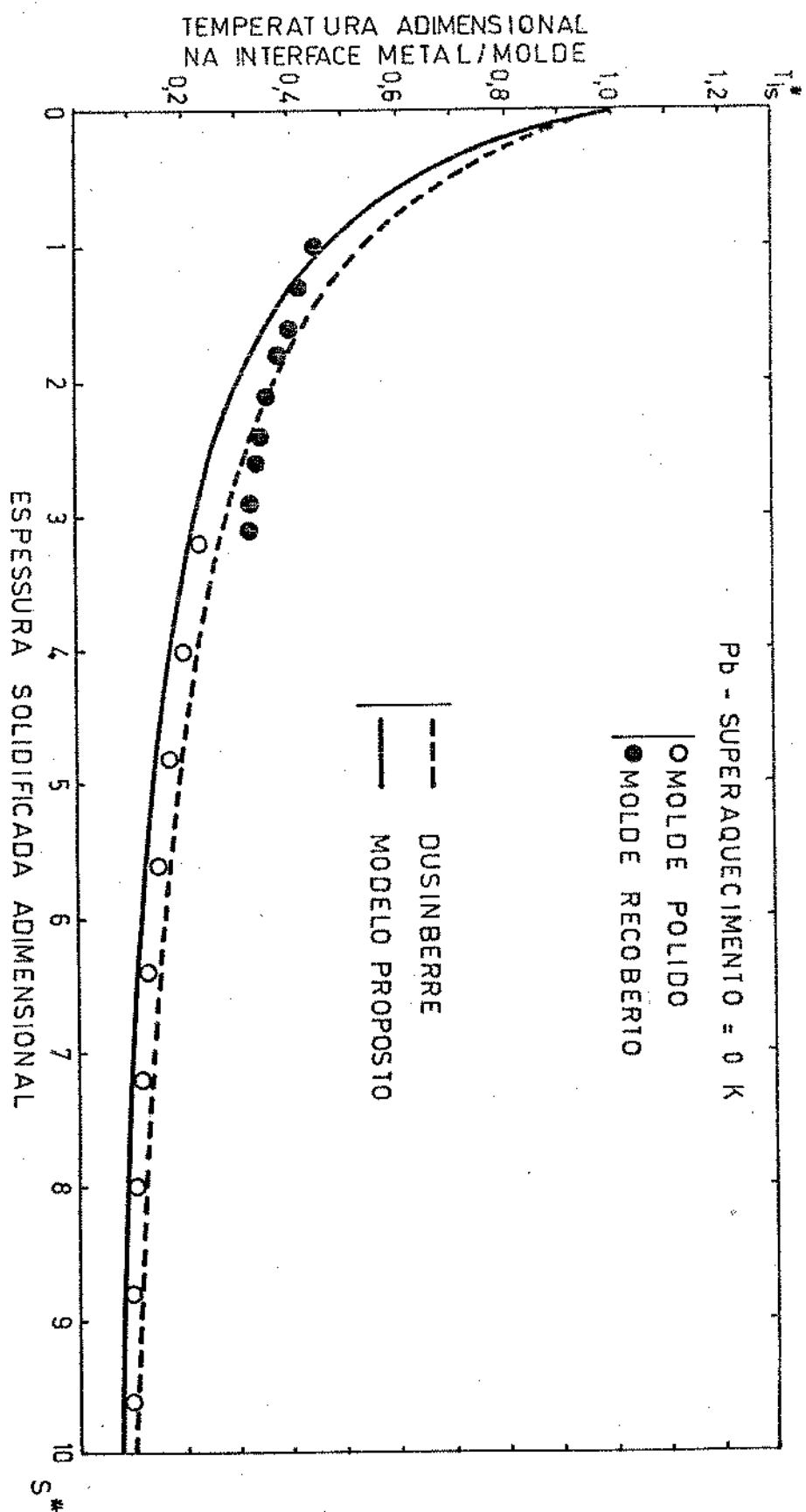


Figura 6.24 - Variação da temperatura da interface metal/molde adimensional (T_{is}^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com o método numérico de Dusenberry e os pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento nulo.

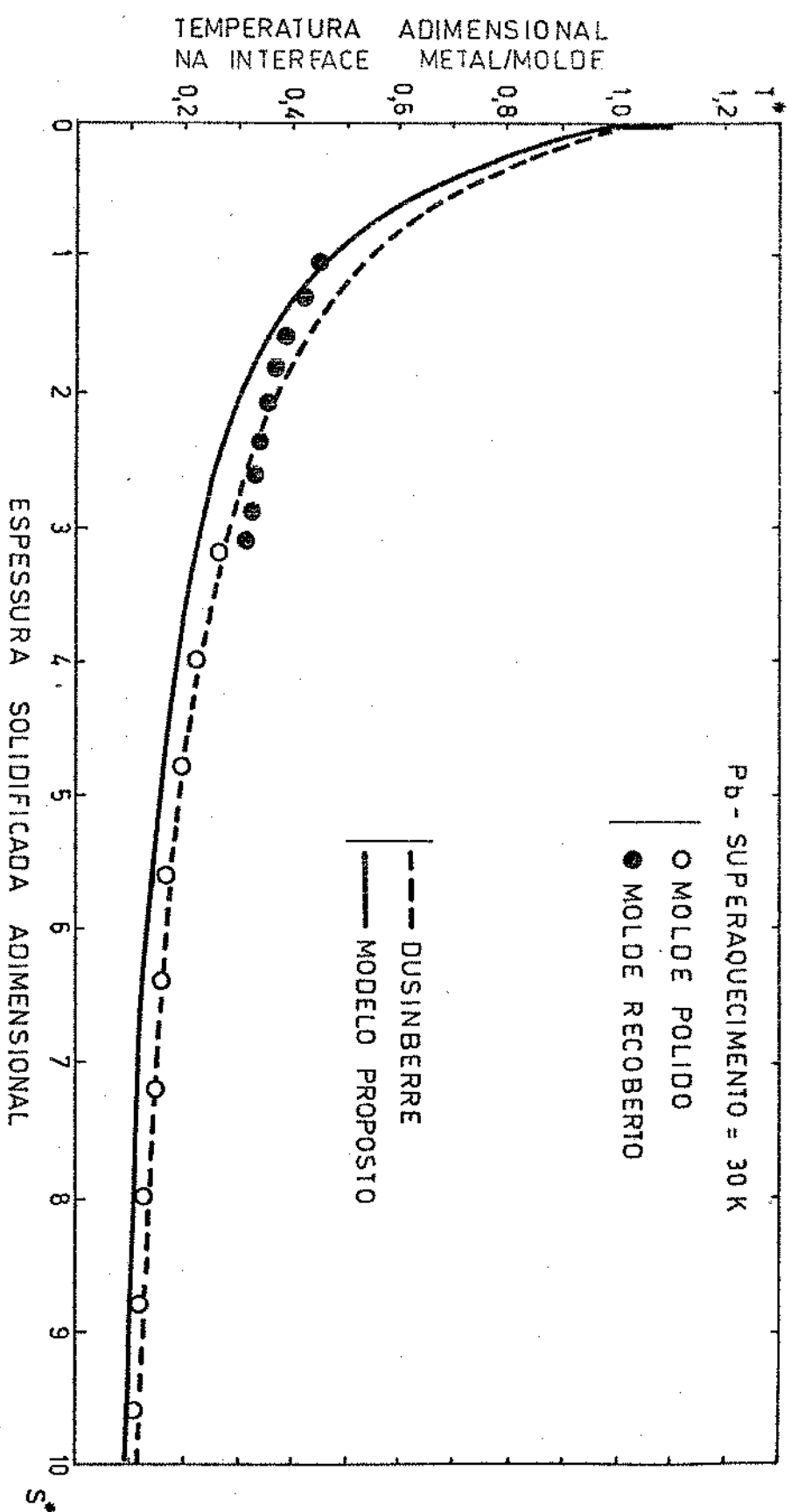


Figura 6.25 - Variação da temperatura da interface metal/molde adimensional (T_{is}^*) em função da espessura solidificada adimensional (s^*), segundo o modelo proposto, comparado com o método numérico de Dusenberre e os pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento de 30K .

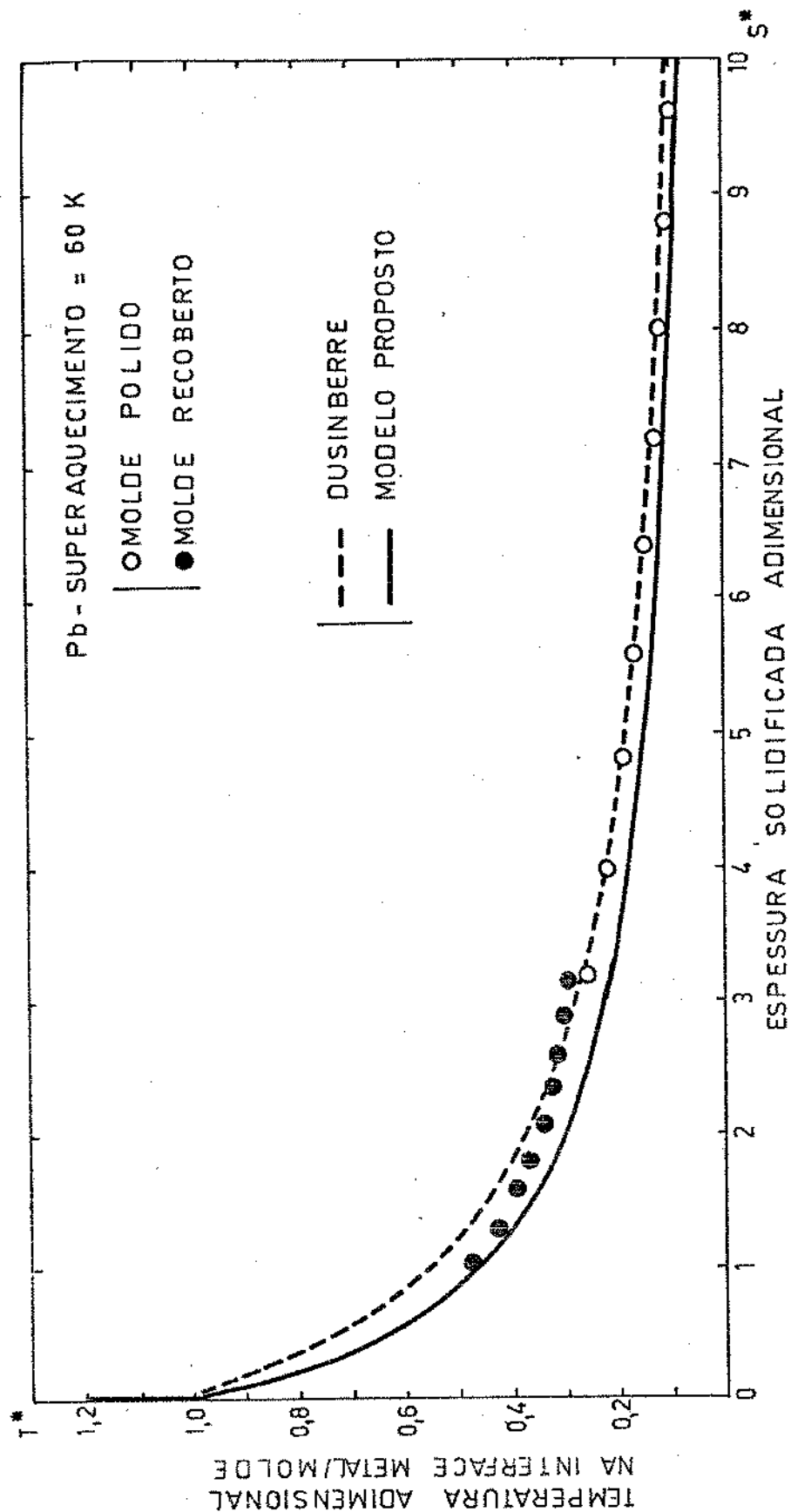


Figura 6.26 - Variação da temperatura da interface metal/molde adimensional (T_{is}^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com o método numérico de Dusenberry e os pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Chumbo em molde refrigerado a água e superaquecimento de 60K.

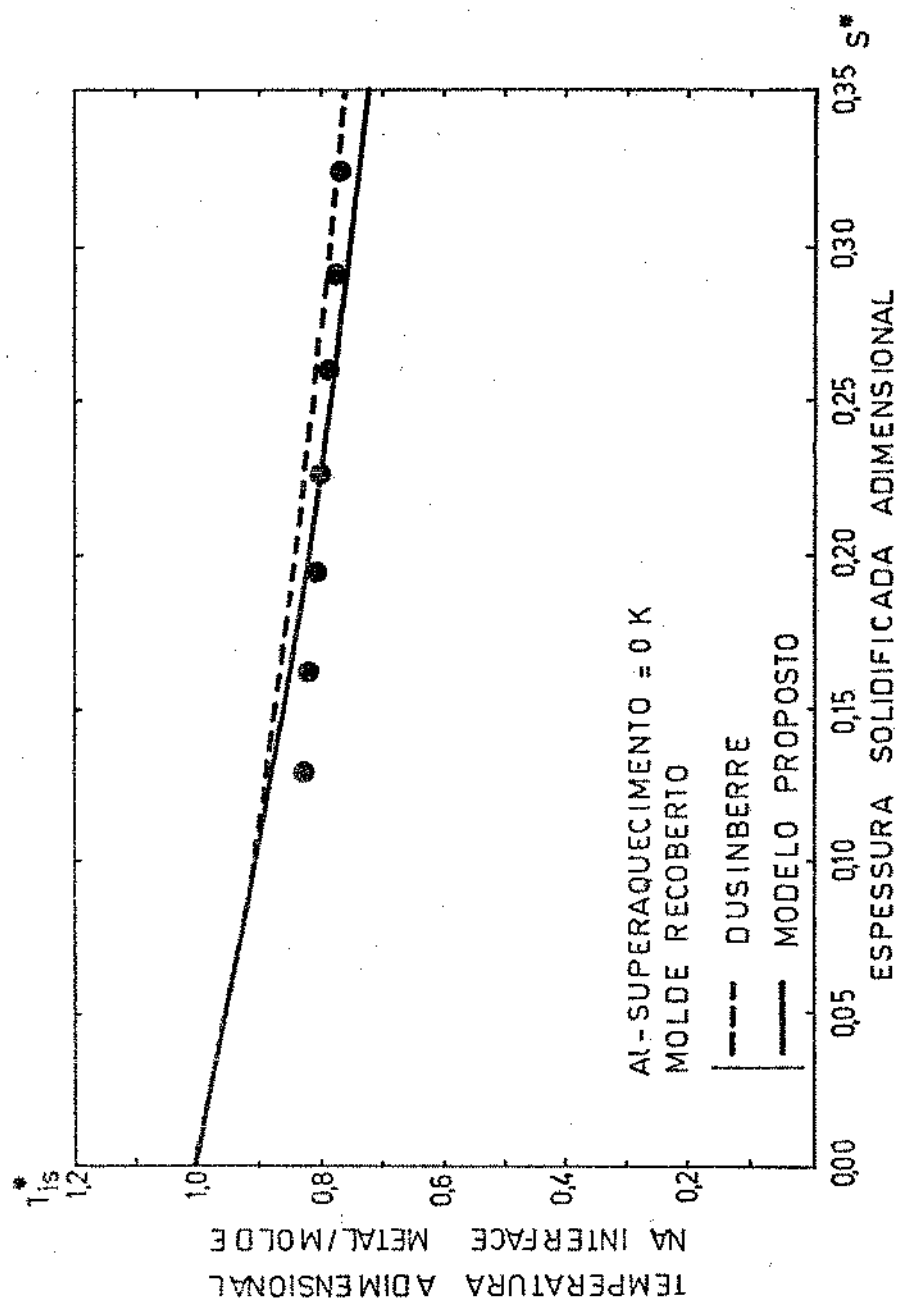


Figura 6.27 - Variação da temperatura da interface metal/molde adimensional (T_{is}^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com o método numérico de Dusingberre e os pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em molde refrigerado a água e superaquecimento nulo.

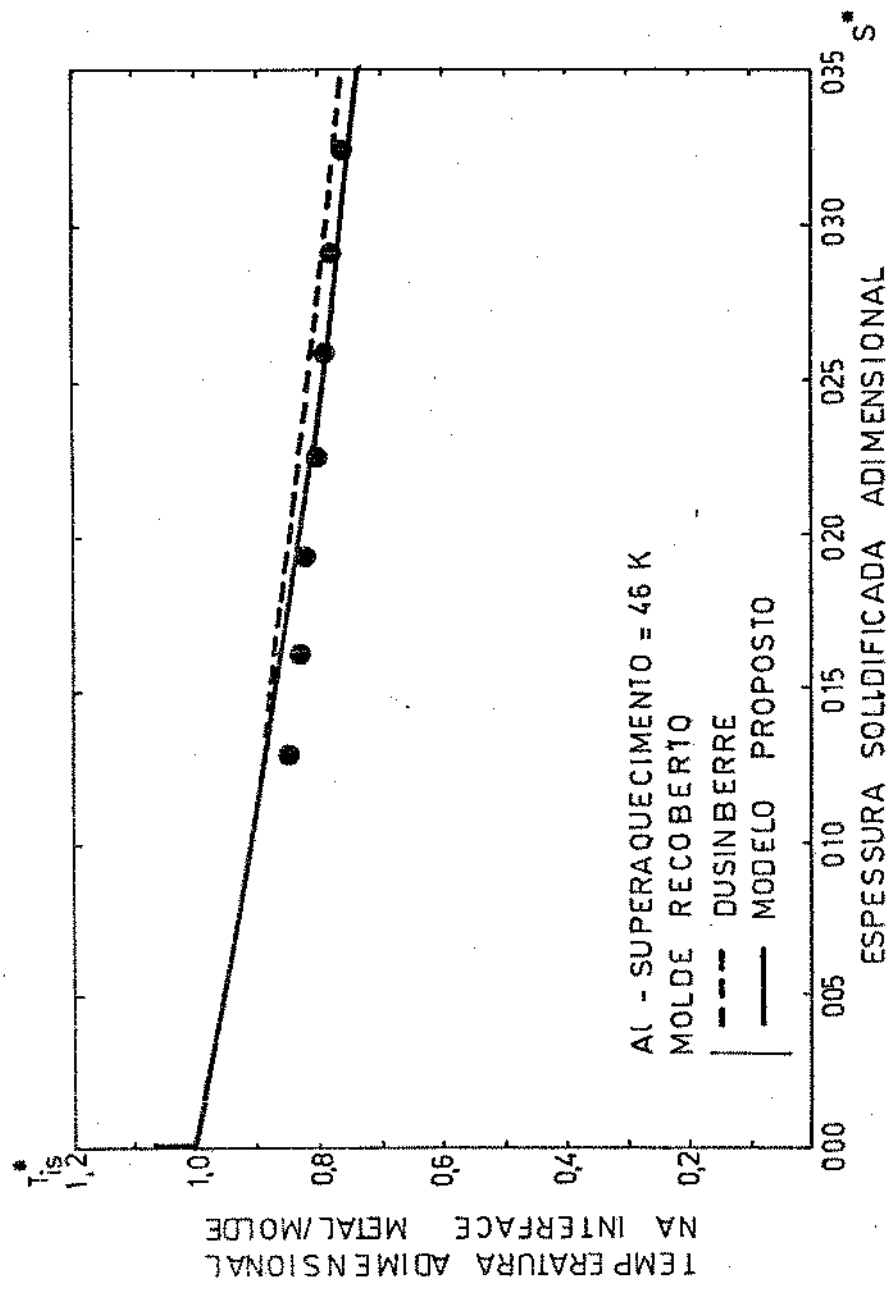


Figura 6.28 - Variação da temperatura da interface metal/molde adimensional (T_{is}^*) em função da espessura solidificada adimensional (S^*), segundo o modelo proposto, comparado com o método numérico de Dusingberre e os pontos experimentais obtidos na solidificação unidirecional do Alumínio em mol de refrigerado a água e superaquecimento de 46K.

todo o processo de solidificação em molde refrigerado. Assim sendo, por Schwarz:

$$T_i^* = 0 \quad (6.34)$$

Pelas Figuras 6.24, 6.25, 6.26, 6.27 e 6.28 pode-se observar que em algumas delas, como na Figura 6.26, o método numérico é ligeiramente mais preciso. Em outras, como na Figura 6.28, é o modelo proposto que apresenta uma precisão um pouco melhor. Em todas, a previsão fornecida pelo modelo de Schwarz, o próprio eixo das abcissas, apresenta-se bem distante dos resultados experimentais, o que ressalta a importância da resistência Newtoniana na solidificação de metais em sistemas metal/molde. Assim, pode-se concluir que a grande vantagem do modelo proposto em relação ao numérico é o fato de, apresentando o mesmo grau de precisão, ser de muito mais fácil aplicação e de um alto grau de generalização.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

As seguintes conclusões podem ser extraídas dos resultados obtidos na solidificação unidirecional de metais em moldes refrigerados e coquilhas metálicas do tipo semi-infinito:

- 7.1. A cinética de solidificação, na presença ou não de superaquecimento, é dada por uma relação parabólica entre o tempo de solidificação t e a correspondente espessura solidificada S , da forma:

$$t = \alpha S^2 + \beta S$$

onde, fixado o metal, α e β dependem das características do molde e do grau de superaquecimento, sendo a constante β , também fortemente influenciada pelo tipo de contato entre o metal e o molde. Tem-se:

$$\alpha = \frac{1}{4a_s \phi^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{c_s d_s}{\sqrt{\pi} \phi h_i \exp(\phi^2) [\operatorname{erf}(\phi) + M]}$$

onde ϕ é a constante de solidificação do sistema metal/molde, a qual, juntamente com os outros símbolos aqui apresentados, estão definidos no Apêndice 1. A velocidade de solidificação, variável de extrema importância pela sua influência na estrutura do material solidificado, pode ser obtida pela derivação da equação da cinética, resultando:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\alpha S + \beta}$$

7.2. A distribuição de temperaturas ao longo do processo de solidificação, na presença ou não de superaquecimento, é dada para o molde, o sólido e o líquido, respectivamente por:

$$T_m = T_o + \frac{(T_f - T_o)M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\phi \frac{2\alpha N x - \beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right]$$

$$T_s = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\phi \frac{2\alpha x + \beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right]$$

$$T_\ell = T_v - \frac{(T_v - T_f)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc} \left(n\phi \frac{2\alpha x + \beta}{2\alpha S + \beta} \right)$$

Em particular, a maior temperatura no molde e a menor no metal solidificado, ambas na interface metal/molde, são dadas respectivamente por:

$$T_{im} = T_o + \frac{(T_f - T_o)M}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(- \frac{\phi\beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right]$$

$$T_{is} = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[M + \operatorname{erf} \left(\frac{\phi\beta}{2\alpha S + \beta} \right) \right]$$

7.3. O dispositivo de solidificação unidirecional refrigerado a água mostrou-se bastante eficiente nos experimentos de solidificação em presença de superaquecimento, obtendo-se macroestruturas tão unidirecionais quanto no caso dos expe

rimentos realizados com superaquecimento nulo, o que demonstra a sua possibilidade de aplicação confiável neste tipo de experiências.

- 7.4. As previsões pelo método numérico de Dusenberre para o caso da solidificação unidirecional em moldes refrigerados a água, apresentam um grau de precisão muito próximo do obtido com o modelo proposto. Isto valoriza o modelo proposto, tendo-se em vista a sua relativa simplicidade e elevado grau de generalização, enquanto que, o método numérico é altamente específico, requerendo a utilização de computadores para tornar viável a sua utilização, fato que restringe e dificulta a sua aplicação em unidades produtivas de pequeno e médio porte, que geralmente não dispõem de tais facilidades.
- 7.5. O modelo analítico exato de Schwarz, que considera perfeito o contato térmico entre metal e molde, e o modelo analítico aproximado de Hrycak, que impõe determinados perfis térmicos no metal, mostraram-se bastante imprecisos quando confrontados com os resultados obtidos na solidificação unidirecional de metais em moldes refrigerados a água, apresentando sempre uma concordância inferior à obtida através do modelo proposto.

LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO

- (a) Verificação do modelo proposto no caso da solidificação unidirecional de metais em moldes maciços, por meio de um dispositivo a ser projetado e construído especialmente para este fim, estudando-se, inclusive, a influência das diferentes espessuras de molde, com proposição de modificações nas equações representativas do modelo proposto.
- (b) Verificação da influência do superaquecimento na solidificação de eutéticos e comprovação da aplicabilidade do modelo proposto na análise da solidificação destas ligas.
- (c) Verificação do modelo proposto frente a resultados experimentais obtidos no lingotamento contínuo de metais.
- (d) Verificação da influência de geometrias de molde não planas na solidificação de metais e ligas eutéticas e proposição de adaptações nas equações representativas do modelo proposto tendo-se em vista a solidificação nestas condições.
- (e) Verificação do teor de soluto na solidificação de ligas fora da composição eutética e proposição de adaptações nas equações representativas do modelo proposto, levando-se em consideração o efeito das temperaturas "liquidus" e "solidus" destas ligas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CAMPOS, C.A.B., PRATES, M. - Coeficiente de Transmissão de Calor da Interface Metal/Molde na Solidificação de Metais, Contribuição Técnica nº 1258, XXX Congresso Anual da ABM, Rio de Janeiro, 1975.
2. YEFIMOV, V.A., KOZDOBA, L.A., LEGENCHUK, V.I. - A Study of Thermal Processes in Solidification of Steel Ingots in Cast-Iron Molds, Heat Transfer Soviet Research, V.2, p.17, 1970.
3. NIKITENKO, N.I., SOKOLOV, L.A., KORNEYCHUK, A.A. - A Study of the Solidification of Continuous Rectangular Ingots, Heat Transfer Soviet Research, V.2, p.95, 1970.
4. GARCIA, A. - Desenvolvimento e Verificação Experimental de Um Modelo Matemático Para Análise da Solidificação Unidirecional de Metais, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia, UNICAMP, 1978.
5. PRATES, M., FISSOLO, J.J., BILONI, H. - Solidificação Unidirecional de Metais: Parâmetros que Controlam a Lei de Crescimento, Contribuição Técnica nº 1015, XXVI Congresso Anual da ABM, Rio de Janeiro, 1972.
6. GARCIA, A., PRATES, M. - Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals: I. Cooled Molds, Metall. Trans., V.9B, p.449, 1978.
7. GARCIA, A., CLYNE, T.W., PRATES, M. - Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals: II. Massive Molds, Metall. Trans., V.10B, p.85, 1979.
8. GARCIA, A., PRATES, M. - Mathematical Model for the Analysis of Plane Front Solidification, Proceedings of the 2nd Multi-Phase Flow and Heat transfer Symposium, University of Miami, p.509, 1979.
9. PRATES, M., DAVIES, G.J. - Solidificação e Fundição de Metais e Suas Ligas, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1978.

10. DAVIES, G.J. - Solidification and Casting- Applied Science, Londres, 1973.
11. COMMITTEE FOR METALLURGY AND FOUNDRY PROPERTIES - International Atlas of Castings Defects, American Foundrymen's Society, U.S.A., 1974.
12. FLEMINGS, M.C., Solidifications Processing, Mc Graw Hill, N.York, 1974.
13. BERRY, I., KONDIC, V., MARTIN, G., AFS Trans., V.45, p.449, 1959.
14. RUDDLE, R.W. - The Solidification of Casting, the Institute of Metals, Londres, 1957.
15. CARSLAW, H.S., JAEGER, J.C. - Heat Conduction in Solids, Oxford University Press, Oxford, 1959.
16. JONES, H. - A Comparison of Approximate Analytical Solutions of Freezing from a Plane Chill, Journal Inst. Metals, V.97, p.39, 1969.
17. HRYCAK, P. - Journal Am. Inst. Chem. Eng., V.8, p.585, 1963.
18. HILLS, A.W.D. - A Generalized Integral- Profile Method for the Analysis of Unidirectional Heat Flow During Solidification, Trans. AIME, V.245, p.1471, 1969.
19. HILLS, A.W.D., MOORE, M.R. - The Solidification of pure Metals Under Unidirectional Heat Flow Conditions. I - Solidification with Zero Superheat, Trans. AIME, V.245, p.1481, 1969.
20. HILLS, A.W.D., MALHOTRA, S.L., MOORE, M.R. - The Solidification of Pure Metals (and Eutectics) Under Unidirectional Heat Flow Conditions. II - Solidification in the Presence of Superheat, Metall.Trans. V. 6B, p.131, 1975.
21. ADAMS, C.M. - Liquid Metals and Solidification, Amer. Soc. Metals, p.187, 1958.

22. DUSINBERRE, G.M.- Numerical Analysis of Heat Flow, Mc Graw Hill Co., N.York, 1949.
23. EYRES, N.R.et al. - Phil. Trans. Roy. Soc., V.A240, p.1, 1946.
24. SARJANT, R.J., SLACK, M.R. - Internal Temperature Distribution in the Cooling and Reheating of Steel Ingots, Journal Iron and Steel Inst., V.177, p. 428, 1954.
25. KREITH, F. - Principios da Transmissão de Calor, Editora, Edgar Blucher Ltda, S. Paulo, 1977.
26. GARCIA, A., PRATES, M. - Determinação Experimental da Condutância Térmica Metal/Molde no Processo de Solidificação - Trabalho a ser apresentado no V COBEM, 1979.
27. PIRES, O.S., PRATES, M., BILONI, H. - Unidirectional Solidification of Metals with Zero Superheat- Case of Cooled Molds, Z.Metalkund, V.65, p.143, 1974.
28. SULLY, L.J.D. - The Termal Interface Between Castings and Chill Molds, AFS Transactions, V.84,p.735, 1976.
29. DURHAN, D.R., VERMA, D. , BERRY, J.T. - Some Further Observations on Freezing From Chills, AFS Trans,V.84, 1976.
30. PRATES, M., FISSOLO, J., BILONI, H. - Heat Flow Parameters Affecting the Unidirectional Solidification of Pure Metals, Metall. Trans., V.3, p.1419, 1972.
31. ABRAMOWITZ, M., STEGUN, R.D. - Handbook of Mathematical Functions, Ed. Dover Publications Inc., N.York,1965.
32. SADOSKY, M. - Calculo Numerico y Grafico, Ediciones Libreria del Colegio, Buenos Aires , 1971.

33. PRATES, M. - Influencia de la Capacidad de Extracion Calorica del Sistema Metal/Molde sobre el Proceso de Solidificacion, Tese de Doutorado, Universidade Nacional del Sur, Argentina, 1971.
34. NISHIDA, Y., SUZUKI, S. - Heat Resistance at the Mold-Ingot Interface, Journal Japan Inst. Metals, V.32, p. 882, 1968.
35. RABINOVICH, A.R. - Initial Metal- Mold Heat Exchange, Russian Castings Production, p.276, 1968.
36. SANOKAWA, K. - Heat Transfer Between Metallic Surfaces in Contact (4th Report, The Effects of the Shape of Surface Roughness and the Waviness, and the Approximate Method of Calculating Thermal Contact Resistance), Journal Japan Mechanical Engineer, V.11, p.287, 1968.
37. ROBERTSON, S.R., FASCETTA, E.F., An Analytical Technique for the Determination of the Thermal Contact Resistance Between a Solidifying Metal and Mold, Metall. Trans., V.8B, p.619, 1977.
38. SMITHELLS, C.J. - Metals Reference Book, Butterworths, Londres, 1976.
39. Metals Handbook, Ed. American Society for Metals, Ohio, V.8, 1973.
40. Enciclopedia del Alumínio, Ediciones Urmo, Bilbao, Espanha, V.2, 1968.
41. MONDOLFO, L.F. - Aluminium Alloys - Structure and Properties, Butterworths, Londres, 1976.

APENDICE 1SIMBOLOGIA UTILIZADA

(1) Parâmetros Dimensionais (unidades SI)

- a - difusividade de temperatura = $K/c\bar{d}$ (m^2/s)
- A - constante de integração da solução da equação diferencial de Fourier para condução de calor em regime transitório (K)
- b - difusividade de calor = $\sqrt{k c \bar{d}}$ ($J/m^2 s^{1/2} K$)
- c - calor específico (J/KgK)
- d - densidade (Kg/m^3)
- E_o - parcela da espessura do molde no sistema virtual (m)
- H - calor latente de fusão (J/Kg)
- h_c - coeficiente de transmissão de calor por convecção da superfície externa do molde para o meio ambiente ($J/m^2 s K$)
- h_i - coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde ($J/m^2 s K$)
- K - condutibilidade térmica (J/msK)
- q - fluxo de calor (J/s)
- R - resistência térmica ($m^2 s K/J$)
- S - espessura solidificada (m)
- S' - espessura solidificada no sistema virtual (m)
- S_o - espessura previamente solidificada no sistema virtual (m)
- t - tempo (s)
- T - temperatura (K)
- t' - tempo no sistema virtual (s)

- T' - temperatura no módulo após o intervalo Δt (K)
 T_f - temperatura de fusão (K)
 t_o - tempo para solidificar a espessura virtual S_o (s)
 T_o - temperatura ambiente (K)
 T_v - temperatura de vazamento (K)
 V - velocidade de solidificação (m/s)
 x - distância à interface metal/molde (m)
 x' - distância à interface metal/molde no sistema virtual (m)
 α - constante das equações representativas do modelo proposto (s/m), ver equação 4.73
 β - constante das equações representativas do modelo proposto (s/m), ver equação 4.74
 $\beta_{\Delta T=0}$ - constante das equações representativas do modelo proposto (s/m) no caso do superaquecimento ser nulo
 λ - parcela do calor latente do método de Dusimberre (K)

(2) Parâmetros Adimensionais

- E_o^* - parcela da espessura do molde no sistema virtual=

$$h_i \cdot E_o / K_s$$

 H^* - calor latente= $H/C_s(T_f - T_o)$
 m - constante do metal= b_ℓ / b_s
 M - constante do sistema metal/molde= b_s / b_m
 M' - módulo do método de Dusinberre= $\Delta x^2 / a \Delta t$
 n - constante do metal= $(a_s / a_\ell)^{1/2}$
 N - constante do sistema metal/molde= $(a_s / a_m)^{1/2}$
 N'_{ex} - módulo do método numérico de Dusinberre= $h_c \cdot \Delta x / K_m$
 N'_{im} - módulo do método numérico de Dusimberre= $h_i \Delta x / K_m$

- N'_{is} - módulo do método numérico de Dusenberre = $h_i \cdot \Delta x / K_s$
 S^* - espessura solidificada = $h_i \cdot S / K_s$
 S^*_O - espessura previamente solidificada no sistema virtual = $h_i \cdot S_O / K_s$
 t^* - tempo = $h_i^2 \cdot t / b_s^2$
 T^* - temperatura = $(T - T_O) / (T_f - T_O)$
 x^* - distância a interface metal/molde = $h_i x / K_s$
 X_ℓ - módulo do método numérico de Dusenberre = $2K_s (K_\ell + K_s)$
 X_s - módulo do método numérico de Dusenberre = $2K_\ell / (K_\ell + K_s)$
 Y - módulo do método numérico de Dusenberre = $h_c \cdot h_i \cdot \Delta x / K_s (h_c + h_i)$
 Z - módulo do método numérico de Dusenberre = $M'_s \cdot K_s + M'_\ell \cdot K_\ell$
 ϕ - constante de solidificação

(3) Sub-índices empregados na identificação de grandezas relativas ao sistema metal/molde

- i - interface metal/molde
 im - ponto do molde na interface metal/molde
 is - ponto do metal na interface metal/molde
 ℓ - metal líquido
 m - molde
 s - metal sólido

(4) Funções utilizadas

- $\text{erf}(x)$ = função erro (definida no apêndice 2)
 $\text{erfc}(x)$ = função erro complementar (definida no apêndice 2)
 $\text{exp}(x)$ = função exponencial

APÊNDICE 2FUNÇÃO ERRO (erf) [31]

a) Definição

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$$

b) Propriedades

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(\infty) &= 1 \\ \operatorname{erf}(-\infty) &= -1 \\ \operatorname{erf}(0) &= 0 \\ \operatorname{erf}(-z) &= -\operatorname{erf}(z) \end{aligned}$$

c) Função erro complementar (erfc)

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-u^2) du$$

d) Derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \\ \frac{d^2}{dz^2} \operatorname{erf}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} z \exp(-z^2) \end{aligned}$$

e) Aproximações

A função erro pode ser calculada pela série:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3.1!} + \frac{z^5}{5.2!} - \frac{z^7}{7.3!} + \dots \right)$$

se $0 \leq z \leq 1$. Para valores de z maiores do que a unidade a precisão dos resultados decresce rapidamente.

APÊNDICE 3PROGRAMAS DESENVOLVIDOS PARA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO DE DUSINBERRE APLICADO A SOLIDIFICAÇÃO DOS METAIS.

Dois programas FORTRAN, respectivamente denominados de SOLI2 e SOLI3, foram desenvolvidos com base no algoritmo esquematizado na Figura 2.11. Ambos utilizam a 2a. hipótese de cálculo descrita na seção 2.4.1(d) (Figura 2.9). Para adoção definitiva desta hipótese foi feito um estudo comparativo entre os resultados obtidos com as duas hipóteses, sendo a segunda a que mostrou melhor concordância com resultados experimentais encontrados na literatura. O SOLI2 encontra-se nas páginas A-3.3 e A-3.4, enquanto que o SOLI3 em A-3.5 e A-3.6. A correspondência entre variáveis físicas e símbolos FORTRAN acha-se na Tabela A-3.1.

A diferença básica entre os dois programas reside principalmente na saída dos resultados. O primeiro escreve passo a passo os perfis térmicos, comportando no máximo 15 pontos nodais, enquanto que o segundo trabalha com sistemas de até 80 pontos nodais, porém só apresenta um perfil térmico quando um dos nódulos solidifica. Nas páginas A-3.9 até A-3.13 encontram-se resultados obtidos com os dois programas para a solidificação unidirecional do Estanho em molde refrigerado, tendo por objetivo evidenciar esta diferença.

Sendo gerais, os programas necessitam de uma padronização na divisão do sistema físico real em subvolumes. Esta padronização é esquematizada na Figura A-3.1. Deve-se lembrar que Δx e Δt precisam ser escolhidos de maneira a atender as diversas condições de estabilidade, além de representar um equilíbrio razoável entre precisão e volume de cálculo. Geralmente é preferível fixar o Δx , ficando o Δt a ser determinado pelos critérios de estabilidade, os quais, por comodidade, encontram-se reunidos na Tabela A-3.2, onde encontra-se também as situações particulares em que cada um deles pode ser dispensável.

Na Figura A-3.2 encontra-se um arquivo de dados típico. Na 1a. linha, pode-se entrar com até 69 caracteres alfanuméricos, os quais serão impressos na saída como um título para os resultados.

Na 2a. linha entra-se em ordem, separados apenas por vírgula, com os valores de: K_s , K_ℓ , K_m , d_s , d_ℓ , d_m , c_s , c_ℓ e c_m . Na 3a. linha procede-se na mesma forma com os valores de T_f , T_o , T_v , IFINAL (inteiro), Δx , Δt , h_c e h_i e H. O programa entende um h_c igual a 9999. como infinito. A 4a. linha é reservada para fornecer a informação do nódulo pertencer ao molde (1) ou ao líquido (3), e finalizando se o molde é maciço (4) ou refrigerado (5).

Na forma em que se encontra, o programa pode ser diretamente utilizado no DEC-SYSTEM, porém para sua utilização por meio de cartões, faz-se necessário, apenas, ligeiras mudanças nos comandos READ e WRITE.

```

C**** PROGRAMA PARA O SUPRREGO DO METODO NUMERICO DE
C**** DUSINGERRE APLICADO A SOLIDIFICACAO
C**** SOLI2 - MARCIO MEDEIROS - DEZ/1978
C****          M M I C A M P
REAL LAMB,MM,MS,ML,NM,NEX,MIS,KS,KL,KM
INTEGER ESTADO,SOLIDO,HOLDE
DIMENSION T(15),TL(15),GUARDA(15),ESTADO(15),METAL(14)
DATA HOLDE,SOLIDO,LIQUID,BACICO,REFRIG/1,2,3,4,5/
IR=23
IS=24
READ(IR,60)(METAL(I),I=1,14),KS,KL,MM,MS,DL,DI,CS,CL,CM,
* TF,TO,TV,IFINAL,DX,DT,HC,HI,3*(ESTADO(I),I=1,IFINAL),THOLDE
60  FORMAT(14A5,/,9G,/,9G,/,15I1)
DO 38 I=1,IFINAL
IF(ESTADO(I).EQ.HOLDE) T(I)=TF
IF(ESTADO(I).EQ.LIQUID) T(I)=TV
38  CONTINUE
WRITE(14,57)(METAL(I),I=1,14),DX,DT,HI,(T(I),I=1,IFINAL)
57  FORMAT(1H1,70(1H*),/,14A5,/,1X,70(1H*),/,/,3X,3HDX=,F6.3,7X,
* 3HDT=,F6.3,7X,3HHI=,F7.1,/,/,2X,2HNP,7H SOMADT,3X,
* 2HTEMPORATURA NOS PONTOS NODAIS,/,1H 0,4X,3H0.0,
* 1HF6.0)
NPASSO=0
SOMADT=0.
MM=DM*CS*(DX**2)/KM/DT
MS=MS*CS*(DX**2)/KS/DT
ML=DL*CL*(DX**2)/KL/DT
NM=MI*DX/KM
NIS=HI*DX/KS
NEX=HC*DX/KM
Y=HC*HI*DX/KS/(HC+HI)
Z=MS*KS+ML*KL
LAMB=L/CS
30  I=0
31  I=I+1
IF(I.EQ.1) GO TO 41
IF(I.EQ.IFINAL) GO TO 44
IF((ESTADO(I-1).EQ.HOLDE).AND.(ESTADO(I+1).EQ.HOLDE))GO TO 46
IF((ESTADO(I).EQ.HOLDE).AND.(ESTADO(I+1).EQ.HOLDE))GO TO 47
IF((ESTADO(I).EQ.HOLDE).AND.(ESTADO(I-1).EQ.HOLDE))GO TO 49
IF(ESTADO(I).EQ.SOLIDO)GO TO 52
IF((ESTADO(I).EQ.LIQUID).AND.(ESTADO(I-1).EQ.SOLIDO))GO TO 54
TL(I)=T(I-1)/ML+T(I+1)/ML+(NM-2.)/ML*T(I)
GO TO 38
41  IF(HC.EQ.9999.) GO TO 42
IF(THOLDE.EQ.BACICO) GO TO 43
TL(I)=2.*Y/MS+TB+2./MS*T(2)+(1.-(2.+2.*Y)/MS)*T(1)
GO TO 38
42  TL(I)=TD
GO TO 31
43  TL(I)=2.*TFX/MM+TD+2./MM*T(2)+(1.-(2.*NEX+2.)/MM)*T(1)
GO TO 31
44  IF(ESTADO(I-1).EQ.SOLIDO) GO TO 45
TL(I)=2./ML*T(I-1)+(ML-2.)/ML*T(I)
GO TO 38
45  TL(I)=4.*KS/Z*T(I-1)+(1.-4.*KS/Z)*T(I)
GO TO 38
46  TL(I)=T(I-1)/MM+T(I+1)/MM+(NM-2.)/MM*T(I)
GO TO 31

```

Continua...

Continuação do SOLI2

```

47  TL(I)=2./MM*T(I-1)+2.*NIM/M*T(I+1)+(1.-(2.*NIM+2.)/MM)*T(I)
    GO TO 31
49  TL(I)=2.*NIS/MS*T(I-1)+2./MS*T(I+1)+(1.-(2.*NIS+2.)/MS)*T(I)
    GO TO 31
52  TL(I)=T(I-1)/MS+T(I+1)/MS+(MS-2.)/MS*T(I)
    GO TO 31
54  TL(I)=2.*KS/Z*T(I-1)+2.*KL/Z*T(I+1)+(1.-2.*(KS+KL)/Z)*T(I)
58  IF((T(I).GE.TF).AND.(TL(I).LT.TF)) GO TO 32
53  IF(I.NE.IFINAL) GO TO 31
    NPASSO=NPASSO+1
    SOMADT=SOMADT+DT
    WRITE(14,35) NPASSO,SOMADT,(TL(I),I=1,IFINAL)
35  FORMAT(1X,I3,F7.1,15F5.0)
    IF(TL(IFINAL).GT.TF) GO TO 36
    DO 37 I=1,IFINAL
    T(I)=TL(I)
37  CONTINUE
    GO TO 30
32  GUARDA(I)=TF-TL(I)+GUARDA(I)
    IF(GUARDA(I).GE.LAMB) GO TO 39
    TL(I)=TF
    GO TO 33
39  ESTADO(I)=SOL100
    GO TO 33
36  STOP
    END

```

```

C**** PROGRAMA PARA O EMPREGO DO METODO NUMERICO DE
C**** DUSINBESSE APLICADO A SOLIDIFICACAO
C**** SOLIB - MARCIO NEDEIROS - DEZ/1978
C**** J N I C A M P
REAL LAMB,MM,MS,ML,DIM,DEX,TIS,KS,KO,KM,KELVIN(90,80)
INTEGER ESTADO,SOLIDO,TMOLDE
DIMENSION T(80),TL(80),GUARDA(80),ESTADO(80),METAL(14)
DATA MOLDE,SOLIDO,LIQUID,BACICO,REFRIG/1,2,3,4,5/
IR=23
IX=33
READ(IR,60)(METAL(I),I=1,14),KS,KL,DM,DS,DL,DM,CS,CL,CM,
* TF,TO,TV,IFINAL,DX,DT,HC,HI,H,(ESTADO(I),I=1,IFINAL),TMOLDE
50 FORMAT(14A5,/,9G,/,9G,/,81I1)
DO 34 I=1,IFINAL
IF(ESTADO(I).EQ.MOLDE) T(I)=TO
IF(ESTADO(I).EQ.LIQUID) T(I)=TV
58 CONTINUE
WRITE(IX,57)(METAL(I),I=1,14),DX,DT,HI
57 FORMAT(1H1,70(1H*),/,14A5,/,1X,70(1H*),//,3X,3HDX=,F6.3,7X,
* 3HDT=,F6.3,7X,3HHI=,F7.1,/,9X,1HI,5X,14HTESP0 SOLIDIF.,//)
SOMADT=0.
MB=DM*CM*(DX**2)/KM/DT
MS=DS*CS*(DX**2)/KS/DT
ML=DL*CL*(DX**2)/KL/DT
NIM=HI*DX/KM
NIS=HI*DX/KS
NEX=HC*DX/KM
Y=HC*HI*DX/KS/(HC+HI)
Z=MS*LS+ML*KL
LAMB=H/CS
30 I=0
31 I=I+1
IF(I.EQ.1) GO TO 41
IF(I.EQ.IFINAL) GO TO 44
IF((ESTADO(I-1).EQ.MOLDE).AND.(ESTADO(I+1).EQ.MOLDE))GOTO46
IF((ESTADO(I).EQ.MOLDE).AND.(ESTADO(I+1).EQ.MOLDE))GO TO 47
IF((ESTADO(I).EQ.MOLDE).AND.(ESTADO(I-1).EQ.MOLDE))GO TO 49
IF(ESTADO(I).EQ.SOLIDO)GOTO52
IF((ESTADO(I).EQ.LIQUID).AND.(ESTADO(I-1).EQ.SOLIDO))GO TO 54
TL(I)=T(I-1)/AL+T(I+1)/AL+(ML-2.)/ML*T(I)
GO TO 38
41 IF(HC.EQ.9999.) GO TO 42
IF(TMOLDE.EQ.BACICO) GO TO 43
TL(I)=2.*Y/MS*TO+2./MS*T(2)+(1.-(2.+2.*Y)/MS)*T(1)
GO TO 38
42 TL(I)=TO
GO TO 31
43 TL(I)=2.*DEX/DM*TO+2./DM*T(2)+(1.-(2.*DEX+2.)/DM)*T(1)
GO TO 31
44 IF(ESTADO(I-1).EQ.SOLIDO) GO TO 45
TL(I)=2./ML*T(I-1)+(ML-2.)/ML*T(I)
GO TO 38
45 TL(I)=4.*KS/Z*T(I-1)+(1.-4.*KS/Z)*T(I)
GO TO 38
46 TL(I)=T(I-1)/HM+T(I+1)/HM+(HM-2.)/HM*T(I)
GO TO 31
47 TL(I)=2./DM*T(I-1)+2.*NIM/DM*T(I+1)+(1.-(2.*NIM+2.)/DM)*T(I)
GO TO 31
49 TL(I)=2.*NIS/MS*T(I-1)+2./MS*T(I+1)+(1.-(2.*NIS+2.)/MS)*T(I)

```

Continua...

```

GO TO 33
52 TL(I)=T(I-1)/48+T(I+1)/48+(HS-2.)/72*T(I)
GO TO 31
54 TL(I)=2.*KS/Z*T(I-1)+2.*KL/Z*T(I+1)+(1.-2.*(KS+KL)/Z)*T(I)
58 IF((T(I).GE.TF).AND.(TL(I).LT.TF)) GO TO 32
33 IF(I.NE.IFINAL) GO TO 31
SOMADT=SOMADT+DT
IF(TL(IFINAL).LT.TF) GO TO 36
GO 37 I=1,IFINAL
T(I)=TL(I)
37 CONTINUE
GO TO 30
32 GUARDA(I)=TF-TL(I)+GUARDA(I)
IF(GUARDA(I).GE.LAMB) GO TO 39
TL(I)=TF
GO TO 33
39 ESTADO(I)=SOLIDO
TSOLID=SOMADT+DT
WRITE(IW,59)I,TSOLID
50 FORMAT(7X,I3,10X,F7.2)
77 J=0
78 J=J+1
IF((T(J).GE.TF).AND.(TL(J).LT.TF)) GO TO 79
GO TO 78
79 GO 80 L=1,IFINAL
KELVIN(J,L)=TL(L)
80 CONTINUE
GO TO 33
36 J=0
98 J=J+1
IF(J.GE.IFINAL) GO TO 99
IF(ESTADO(J).NE.SOLIDO) GO TO 98
WRITE(IS,97)J,(L,KELVIN(J,L),L=1,IFINAL)
97 FORMAT(1H1,3A,
* 5HPERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO,
* 13,/,/,7X,6HODULO,9X,11NTEMPERATURA,/,80(8X,I3,13X,F7.2,/))
GO TO 98
99 STOP
END

```


Tabela A-3.1 - Correspondência entre variáveis físicas e símbolos FORTRAN para os programas que utilizam o método numérico de Dusenberre.

VARIÁVEL FORTRAN	REPRESENTAÇÃO NO TEXTO	DESCRIÇÃO	UNIDADES
CL	c_l	Calor específico do metal líquido	J/KgK
CM	c_m	Calor específico do molde	J/KgK
CS	c_s	Calor específico do metal sólido	J/KgK
DL	d_l	Densidade do metal líquido	Kg/m ³
DM	d_m	Densidade do molde	Kg/m ³
DS	d_s	Densidade do metal sólido	Kg/m ³
DT	Δt	Intervalo de tempo	s
DX	Δx	Distância entre os nós	m
ESTADO	-	Matriz que indica se um nó pertence ao molde, sólido ou líquido	-
GUARDA	-	Matriz que armazena o somatório dos $(T_f - T'_i)$	K
H	H	Calor latente de fusão	J/Kg
HC	h_c	Coefficiente de transmissão de calor da sup. externa do molde	J/m ² sK
HI	h_i	Coefficiente de transm.de calor da interface metal/molde	J/m ² sK
IFINAL	-	Número de pontos nodais	-
KELVIN	-	Matriz que armazena os perfis no instante da solidificação de cada nódulo (somente para o SOLI3)	K
KL	k_l	Condutibilidade térmica no metal líquido	J/msK

Continua...

Cont. Tab. A-3.1.

KM	k_m	Condutibilidade térmica no molde	J/msK
KS	k_s	Condutibilidade térmica do metal sólido	J/msK
LAMB	λ	Parcela que controla a liberação de calor latente	K
METAL	-	Matriz alfanumérica que armazena o título a ser impresso na saída dos resultados	-
ML	M'_ℓ	$M'_\ell = \Delta x^2 / a_\ell \Delta t$	-
MM	M'_m	$M'_m = \Delta x^2 / a_m \Delta t$	-
MS	M'_s	$M'_s = \Delta x^2 / a_s \Delta t$	-
NEX	N'_{ex}	$N'_{ex} = h_c \Delta x / K_m$	-
NIM	N'_{im}	$N'_{im} = h_i \Delta x / K_m$	-
NIS	N'_{is}	$N'_{is} = h_i \Delta x / K_s$	-
NPASSO	-	Contador do número de linhas impressas	-
SOMADT	-	Somatório dos Δt	s
T	T	Matriz que armazena as temperaturas nodais	K
TF	T_f	Temperatura de fusão	K
TL	T'	Matriz que armazena as temperaturas nodais após o intervalo Δt	K
TMOLDE	-	Variável alfanumérica que indica se o molde é refrigerado ou maciço	-
TO	T_o	Temperatura ambiente	K
XL	X_ℓ	$X_\ell = 2K_s / (K_\ell + K_s)$	-
XS	X_s	$X_s = 2K_\ell / (K_\ell + K_s)$	-
Y	Y	$Z = h_c h_i \Delta x / K_s (h_c + h_i)$	-
Z	Z	$Z = M'_s K_s + M'_\ell K_\ell$	-

EXEMPLO DE RESULTADOS OBTIDOS COM O PROGRAMA SOLI2.

1 *****
ESTANHO-SOLIDIFICACAO UNIDIRECIONAL- TV=505

DX= 0.010 DT= 0.000 HI= 5000.0

NP	SOMADT	TEMPERATURA NOS PONTOS NODAIS							
0	0.0	298.	505.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
1	0.8	298.	505.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
2	1.6	298.	505.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
3	2.4	298.	417.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
4	3.2	298.	401.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
5	4.0	298.	398.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
6	4.8	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
7	5.6	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
8	6.4	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
9	7.2	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
10	8.0	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
11	8.8	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
12	9.6	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
13	10.4	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
14	11.2	298.	397.	505.	505.	505.	505.	505.	505.
15	12.0	298.	397.	483.	505.	505.	505.	505.	505.
16	12.8	298.	389.	471.	505.	505.	505.	505.	505.
17	13.6	298.	382.	461.	505.	505.	505.	505.	505.
18	14.4	298.	377.	454.	505.	505.	505.	505.	505.
19	15.2	298.	374.	449.	505.	505.	505.	505.	505.
20	16.0	298.	371.	445.	505.	505.	505.	505.	505.
21	16.8	298.	369.	442.	505.	505.	505.	505.	505.
22	17.6	298.	368.	440.	505.	505.	505.	505.	505.
23	18.4	298.	366.	439.	505.	505.	505.	505.	505.
24	19.2	298.	366.	438.	505.	505.	505.	505.	505.
25	20.0	298.	365.	437.	505.	505.	505.	505.	505.
26	20.8	298.	365.	436.	505.	505.	505.	505.	505.
27	21.6	298.	364.	436.	505.	505.	505.	505.	505.
28	22.4	298.	364.	435.	505.	505.	505.	505.	505.
29	23.2	298.	364.	435.	505.	505.	505.	505.	505.
30	24.0	298.	364.	435.	505.	505.	505.	505.	505.
31	24.8	298.	364.	435.	505.	505.	505.	505.	505.
32	25.6	298.	363.	434.	505.	505.	505.	505.	505.
33	26.4	298.	363.	434.	505.	505.	505.	505.	505.
34	27.2	298.	363.	434.	505.	505.	505.	505.	505.
35	28.0	298.	363.	434.	491.	505.	505.	505.	505.
36	28.8	298.	363.	431.	482.	505.	505.	505.	505.
37	29.6	298.	362.	428.	477.	505.	505.	505.	505.
38	30.4	298.	361.	425.	473.	505.	505.	505.	505.
39	31.2	298.	359.	422.	470.	505.	505.	505.	505.
40	32.0	298.	358.	419.	467.	505.	505.	505.	505.
41	32.8	298.	356.	416.	465.	505.	505.	505.	505.
42	33.6	298.	355.	414.	463.	505.	505.	505.	505.
43	34.4	298.	354.	412.	462.	505.	505.	505.	505.
44	35.2	298.	353.	410.	461.	505.	505.	505.	505.
45	36.0	298.	352.	409.	459.	505.	505.	505.	505.
46	36.8	298.	351.	408.	458.	505.	505.	505.	505.
47	37.6	298.	351.	407.	458.	505.	505.	505.	505.
48	38.4	298.	350.	406.	457.	505.	505.	505.	505.
49	39.2	298.	350.	405.	456.	505.	505.	505.	505.
50	40.0	298.	349.	404.	456.	505.	505.	505.	505.
51	40.8	298.	349.	403.	455.	505.	505.	505.	505.

Continua...

52	41.6	298.	349.	403.	455.	505.	505.	505.	505.
53	42.4	298.	348.	402.	455.	505.	505.	505.	505.
54	43.2	298.	348.	402.	454.	505.	505.	505.	505.
55	44.0	298.	348.	402.	454.	505.	505.	505.	505.
56	44.8	298.	348.	401.	454.	505.	505.	505.	505.
57	45.6	298.	348.	401.	454.	505.	505.	505.	505.
58	46.4	298.	347.	401.	453.	505.	505.	505.	505.
59	47.2	298.	347.	401.	453.	505.	505.	505.	505.
60	48.0	298.	347.	401.	453.	505.	505.	505.	505.
61	48.8	298.	347.	400.	453.	505.	505.	505.	505.
62	49.6	298.	347.	400.	453.	495.	505.	505.	505.
63	50.4	298.	347.	400.	451.	488.	505.	505.	505.
64	51.2	298.	347.	400.	448.	484.	505.	505.	505.
65	52.0	298.	347.	399.	446.	481.	505.	505.	505.
66	52.8	298.	346.	398.	443.	479.	505.	505.	505.
67	53.6	298.	346.	397.	441.	477.	505.	505.	505.
68	54.4	298.	345.	395.	440.	476.	505.	505.	505.
69	55.2	298.	345.	394.	438.	474.	505.	505.	505.
70	56.0	298.	344.	393.	437.	473.	505.	505.	505.
71	56.8	298.	344.	392.	435.	472.	505.	505.	505.
72	57.6	298.	343.	391.	434.	471.	505.	505.	505.
73	58.4	298.	343.	390.	433.	471.	505.	505.	505.
74	59.2	298.	342.	389.	432.	470.	505.	505.	505.
75	60.0	298.	342.	388.	431.	469.	505.	505.	505.
76	60.8	298.	341.	388.	430.	469.	505.	505.	505.
77	61.6	298.	341.	387.	429.	468.	505.	505.	505.
78	62.4	298.	341.	386.	429.	468.	505.	505.	505.
79	63.2	298.	340.	386.	428.	467.	505.	505.	505.
80	64.0	298.	340.	385.	427.	467.	505.	505.	505.
81	64.8	298.	340.	385.	427.	467.	505.	505.	505.
82	65.6	298.	340.	384.	426.	466.	505.	505.	505.
83	66.4	298.	339.	384.	426.	466.	505.	505.	505.
84	67.2	298.	339.	383.	426.	466.	505.	505.	505.
85	68.0	298.	339.	383.	425.	466.	505.	505.	505.
86	68.8	298.	339.	383.	425.	465.	505.	505.	505.
87	69.6	298.	339.	382.	424.	465.	505.	505.	505.
88	70.4	298.	338.	382.	424.	465.	505.	505.	505.
89	71.2	298.	338.	382.	424.	465.	505.	505.	505.
90	72.0	298.	338.	381.	424.	465.	505.	505.	505.
91	72.8	298.	338.	381.	423.	465.	505.	505.	505.
92	73.6	298.	338.	381.	423.	464.	505.	505.	505.
93	74.4	298.	338.	381.	423.	464.	505.	505.	505.
94	75.2	298.	338.	381.	423.	464.	505.	505.	505.
95	76.0	298.	338.	381.	423.	464.	505.	505.	505.
96	76.8	298.	338.	380.	423.	464.	497.	505.	505.
97	77.6	298.	337.	380.	422.	462.	492.	505.	505.
98	78.4	298.	337.	380.	422.	460.	489.	505.	505.
99	79.2	298.	337.	380.	421.	458.	486.	505.	505.
100	80.0	298.	337.	380.	420.	457.	484.	505.	505.
101	80.8	298.	337.	379.	420.	455.	483.	505.	505.
102	81.6	298.	337.	379.	419.	453.	482.	505.	505.
103	82.4	298.	337.	379.	418.	452.	481.	505.	505.
104	83.2	298.	337.	378.	417.	451.	480.	505.	505.
105	84.0	298.	336.	377.	416.	450.	479.	505.	505.
106	84.8	298.	336.	377.	415.	449.	479.	505.	505.
107	85.6	298.	336.	376.	414.	448.	478.	505.	505.
108	86.4	298.	336.	376.	413.	447.	477.	505.	505.

Continua...

109	87.2	298.	335.	375.	413.	447.	477.	505.	505.
110	88.0	298.	335.	375.	412.	446.	476.	505.	505.
111	88.8	298.	335.	374.	411.	445.	476.	505.	505.
112	89.6	298.	335.	374.	411.	445.	476.	505.	505.
113	90.4	298.	334.	373.	410.	444.	475.	505.	505.
114	91.2	298.	334.	373.	410.	444.	475.	505.	505.
115	92.0	298.	334.	373.	409.	443.	475.	505.	505.
116	92.8	298.	334.	372.	409.	443.	474.	505.	505.
117	93.6	298.	334.	372.	408.	442.	474.	505.	505.
118	94.4	298.	333.	371.	408.	442.	474.	505.	505.
119	95.2	298.	333.	371.	407.	441.	474.	505.	505.
120	96.0	298.	333.	371.	407.	441.	474.	505.	505.
121	96.8	298.	333.	370.	406.	441.	473.	505.	505.
122	97.6	298.	333.	370.	406.	440.	473.	505.	505.
123	98.4	298.	333.	370.	406.	440.	473.	505.	505.
124	99.2	298.	332.	370.	405.	440.	473.	505.	505.
125	100.0	298.	332.	369.	405.	440.	473.	505.	505.
126	100.8	298.	332.	369.	405.	439.	472.	505.	505.
127	101.6	298.	332.	369.	405.	439.	472.	505.	505.
128	102.4	298.	332.	369.	404.	439.	472.	505.	505.
129	103.2	298.	332.	368.	404.	439.	472.	505.	505.
130	104.0	298.	332.	368.	404.	438.	472.	505.	505.
131	104.8	298.	332.	368.	404.	438.	472.	505.	505.
132	105.6	298.	332.	368.	403.	438.	472.	505.	505.
133	106.4	298.	332.	368.	403.	438.	472.	505.	505.
134	107.2	298.	331.	368.	403.	438.	472.	505.	505.
135	108.0	298.	331.	368.	403.	438.	471.	505.	505.
136	108.8	298.	331.	367.	403.	437.	471.	505.	505.
137	109.6	298.	331.	367.	403.	437.	471.	505.	505.
138	110.4	298.	331.	367.	402.	437.	471.	498.	505.
139	111.2	298.	331.	367.	402.	437.	470.	494.	505.
140	112.0	298.	331.	367.	402.	437.	468.	492.	505.
141	112.8	298.	331.	367.	402.	436.	467.	490.	505.
142	113.6	298.	331.	367.	402.	435.	465.	488.	505.
143	114.4	298.	331.	367.	402.	435.	464.	487.	505.
144	115.2	298.	331.	366.	401.	434.	463.	486.	505.
145	116.0	298.	331.	366.	401.	433.	462.	485.	505.
146	116.8	298.	331.	366.	400.	432.	461.	484.	505.
147	117.6	298.	331.	366.	400.	432.	460.	484.	505.
148	118.4	298.	331.	366.	399.	431.	459.	483.	505.
149	119.2	298.	330.	365.	399.	430.	458.	483.	505.
150	120.0	298.	330.	365.	399.	430.	458.	482.	505.
151	120.8	298.	330.	365.	398.	429.	457.	482.	505.
152	121.6	298.	330.	365.	398.	428.	456.	482.	505.
153	122.4	298.	330.	364.	397.	428.	456.	481.	505.
154	123.2	298.	330.	364.	397.	427.	455.	481.	505.
155	124.0	298.	330.	364.	396.	427.	455.	481.	505.
156	124.8	298.	330.	363.	396.	426.	454.	480.	505.
157	125.6	298.	329.	363.	395.	426.	454.	480.	505.
158	126.4	298.	329.	363.	395.	425.	454.	480.	505.
159	127.2	298.	329.	363.	395.	425.	453.	480.	505.
160	128.0	298.	329.	362.	394.	425.	453.	479.	505.
161	128.8	298.	329.	362.	394.	424.	452.	479.	505.
162	129.6	298.	329.	362.	394.	424.	452.	479.	505.
163	130.4	298.	329.	362.	393.	423.	452.	479.	505.
164	131.2	298.	328.	361.	393.	423.	452.	479.	505.
165	132.0	298.	328.	361.	393.	423.	451.	479.	505.
166	132.8	298.	328.	361.	392.	422.	451.	478.	494.

TY FOR24.DAT

ESTANHO-SOLIDIFICACAO UNIDIRECIONAL- TV=505

DX= 0.010

DT= 0.800

HI= 5000.0

I TEMPO SOLIDIF.

2	2.40
3	12.00
4	28.00
5	49.60
6	76.80
7	110.40
8	132.80

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 2

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	416.54
3	505.00
4	505.00
5	505.00
6	505.00
7	505.00
8	505.00

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 3

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	397.19
3	483.32
4	505.00
5	505.00
6	505.00
7	505.00
8	505.00

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 4

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	363.31
3	434.24
4	490.78
5	505.00
6	505.00
7	505.00
8	505.00

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 5

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	347.07
3	400.24
4	452.84
5	494.53
6	505.00
7	505.00
8	505.00

Continua...

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 6

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	337.56
3	380.38
4	422.54
5	463.99
6	496.77
7	505.00
8	505.00

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 7

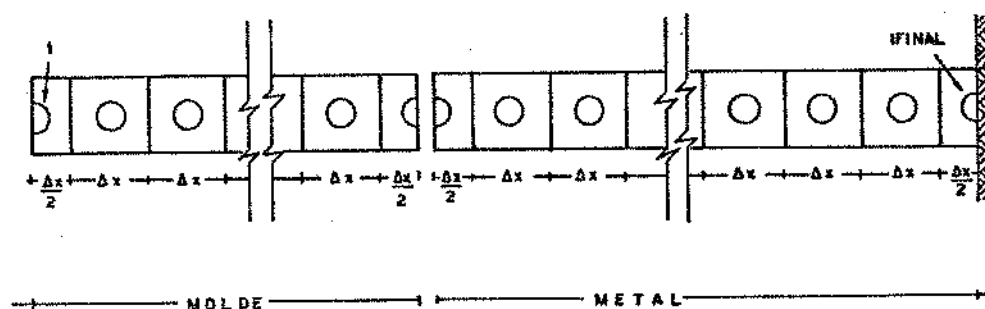
NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	331.19
3	367.13
4	402.50
5	437.18
6	471.27
7	498.23
8	505.00

1 PERFIL TERMICO NO INSTANTE DE SOLIDIFICACAO DO NODULO 8

NODULO	TEMPERATURA
1	298.00
2	328.26
3	360.87
4	392.40
5	422.49
6	451.07
7	478.39
8	494.36

Obs.: O algarismo "1" que surge na primeira coluna à esquerda , no momento de ser impresso um novo perfil, tem por finalidade instruir a impressora a iniciar a escrita em uma nova página. Como os resultados acima foram obtidos via teletipo tal comando não foi obedecido.

a) MOLDES MACIÇOS



b) MOLDES REFRIGERADOS

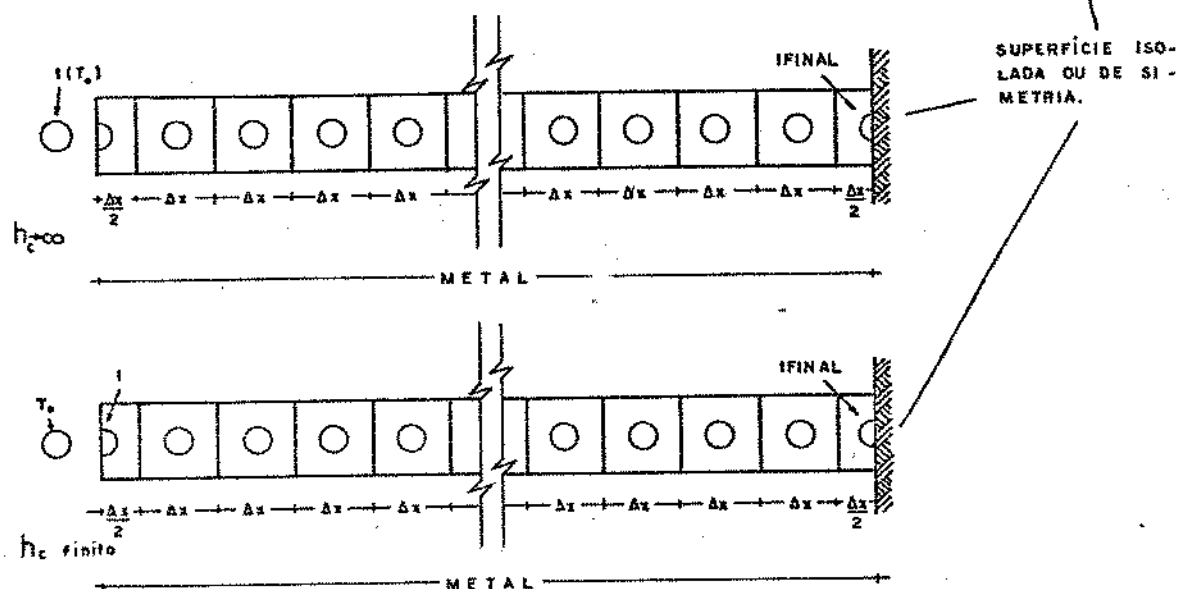


Figura A-3.1 - Padronização adotada para divisão do sistema real em subvolumes.

CRITÉRIO	Nº DA EQ. NO TEXTO	SITUAÇÕES NAS QUAIS NÃO NECESSITA SER SATISFEITO
$M'_m \geq 2$	2.20	MOLDES REFRIGERADOS
$M'_s \geq 2$	2.21	
$M'_l \geq 2$	2.22	
$M'_m \geq 2N'_{ex} + 2$	2.27	MOLDES MACIÇOS SEMI-INFINITOS MOLDES MACIÇOS OU REFRIGERADOS ONDE $h_c \rightarrow \infty$
$M'_m \geq 2N'_{im} + 2$	2.32	MOLDES REFRIGERADOS
$M'_s \geq 2N'_{is} + 2$	2.33	MOLDES REFRIGERADOS COM $h_c \neq \infty$
$M'_s \geq 2Y + 2$	2.35	MOLDES MACIÇOS MOLDES REFRIGERADOS COM $h_c \rightarrow \infty$
$Z \geq 2(K_s + K_l)$	2.41	
$Z \geq 4K_s$	2.46	

Tabela A-3.2 - Critérios de estabilidade para aplicação do Método de Dusi nberre.

CHUMBO--SOLIDIFICADO UNIDIRECIONALMENTE--TV=600
29.7, 16.3, 29.3, 11300., 10600., 7800., 138., 151., 670.
600., 298., 600., 32.0, 0.002, 0.07, 9999., 5000., 25000.
13333333333333333333333333333333

Figura A-3.2 - Um arquivo típico para a entrada dos dados.

APÊNDICE 4

PROGRAMA FORTRAN PARA O CÁLCULO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO

O programa SOLI1 determina a constante de solidificação (ϕ) resolvendo iterativamente a equação:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} - m \frac{(T_v - T_f)}{(T_f - T_o)} \cdot \frac{\exp(-n^2 \phi^2)}{\operatorname{erfc}(n \phi)} - \sqrt{\pi} \cdot H^* \cdot \phi = 0$$

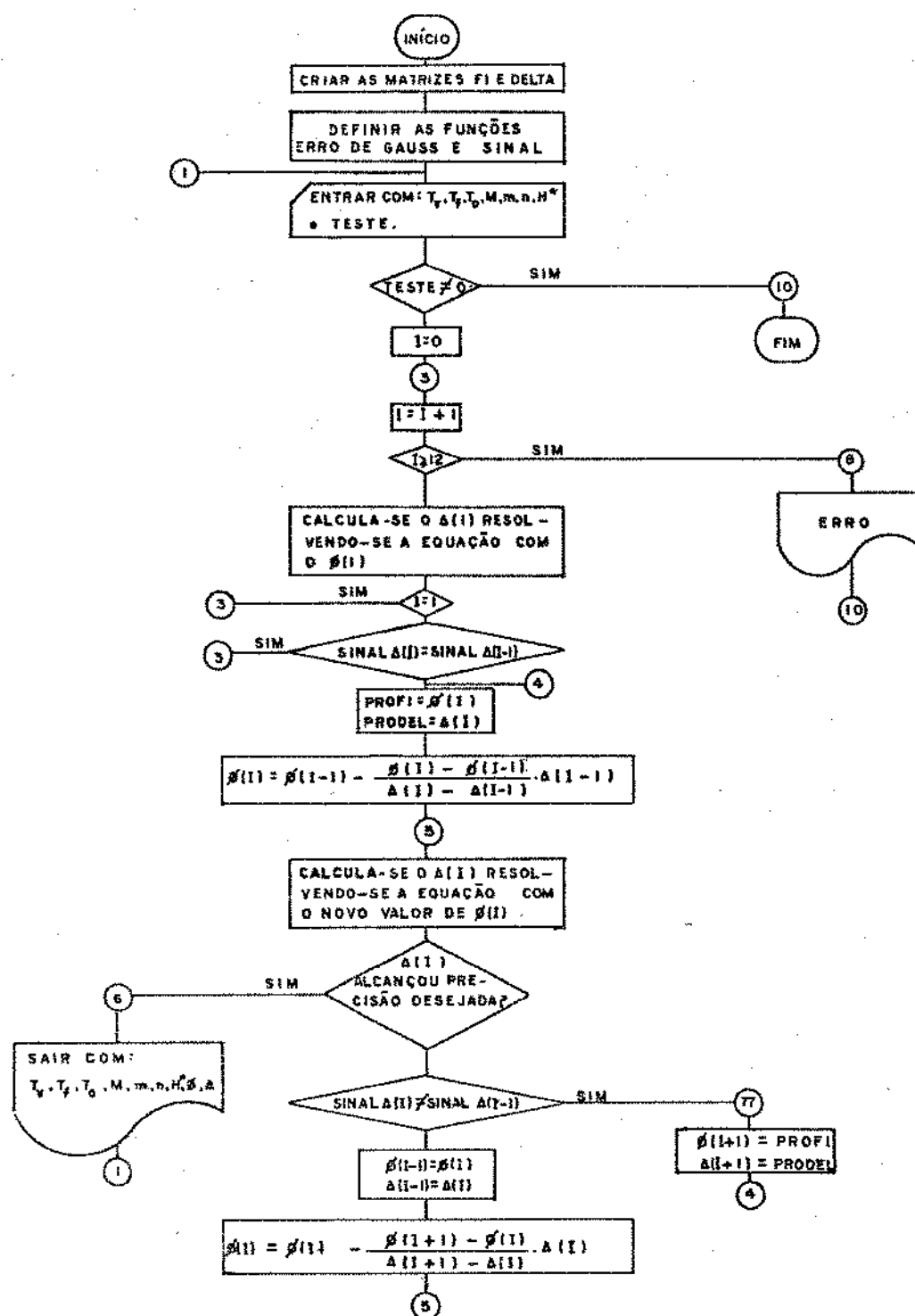
O programa atribui valores sucessivos a constante de solidificação dentro do intervalo (0,01 a 1), até que o resíduo da equação, DELTA, convirja para zero, dentro da precisão desejada.

A convergência é alcançada através do método das partes proporcionais [32].

Para a sua utilização, faz-se apenas necessário a entrada dos dados conforme declarações 1 e 2. No quadro abaixo encontram-se especificadas as diversas variáveis utilizadas no programa.

Variável FORTRAN	Símbolo da eq. no texto	Descrição	Unid.
TV	T_v	Temperatura do vazamento	K
TF	T_f	Temperatura de fusão	K
TO	T_o	Temperatura do meio ambiente	K
M	M	Constante do sist.metal/molde = b_s/b_m	-
EMEMIN	m	Constante do metal = b_l/b_s	-
N	n	Constante do metal = $(a_s/a_l)^{1/2}$	-
H	H^*	Calor latente = $H/C_s(T_f - T_o)$	-
TESTE	-	Indicador do final de dados	-
FI	ϕ	Matriz que armazena os possíveis valores da const. de solidificação	-
DELTA	-	Resíduo da solução da equação	-

Variáveis do Programa FORTRAN, para o cálculo da const. de solidificação (ϕ).



FLUXOGRAMA PARA O CÁLCULO DA CONSTATANTE DE SOLIDIFICAÇÃO (ϕ)

```

C**** PROGRAMA PARA O CALCULO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICACAO
C****          SOLI1 - MARCIO MEDEIROS - DEZ/1978
C****          U N I C A * 2

      REAL N,H
      DIMENSION FI(11),DELTA(11)
      DATA FI/.01,.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9,1./
C**** DEFINICAO DAS FUNCOES ERRO DE GAUSS E SINAL
      ERF(X)=2./1.772454*(X-(X**3)/3.+(X**5)/10.-(X**7)
      * /42.+(X**9)/216.-(X**11)/1320.)
      SINAL(X)=X/ABS(X)
      IR=22
      IW=21
      WRITE(IW,11)
11     FORMAT(1H1,20(1H*),17H SAIDA - SOLI1 ,25(1H*),//,4X,
      * 2HTV,5X,2HTF,5X,2HTO,4X,1HN,3X,6HEMENIN,4X,1HN,7X,1HH,
      * 5X,2HFI,5X,5HDELTA,/)
1     READ(IR,2)TV,TF,TO,H,EMENIN,N,H,TESTE
2     FORMAT(8G)
C**** UM VALOR DIFERENTE DE ZERO NA VARIAVEL TESTE INDICA O
C**** FINAL DE DADOS
      IF(TESTE.NE.0.) GO TO 10
      CONST=EMENIN*(TV-TF)/(TF-TO)
      I=0
3     I=I+1
      IF(I.EQ.12) GO TO 8
      AA=-(FI(I)**2)
      BB=-(N*FI(I))**2)
      CC=N*FI(I)
      DELTA(I)=EXP(AA)/(N+ERF(FI(I)))-CONST*EXP(BB)/(1.-
      * ERF(CC))-1.772454*N*FI(I)
      IF(I.EQ.1) GO TO 3
      IF(SINAL(DELTA(I)).EQ.SINAL(DELTA(I-1))) GO TO 3
4     PROFI=FI(I)
      PRODFI=DELTA(I)
      FI(I)=FI(I-1)-(FI(I)-FI(I-1))/(DELTA(I)-DELTA(I-1))*
      * DELTA(I-1)
      AA=-(FI(I)**2)
      BB=-(N*FI(I))**2)
      CC=N*FI(I)
5     DELTA(I)=EXP(AA)/(N+ERF(FI(I)))-CONST*EXP(BB)/(1.-
      * ERF(CC))-1.772454*N*FI(I)
C**** A DECLARACAO ABAIXO FIXA A PRECISAO DE DELTA
      IF(ABS(DELTA(I))-LT.0.001) GO TO 6
      IF(SINAL(DELTA(I)).NE.SINAL(DELTA(I-1))) GO TO 77
      FI(I-1)=FI(I)
      DELTA(I-1)=DELTA(I)
      FI(I)=FI(I)-(FI(I,1)-FI(I))/(DELTA(I+1)-DELTA(I))*
      * DELTA(I)
      GO TO 5
77     FI(I+1)=PROFI
      DELTA(I+1)=PRODFI
      GO TO 4
6     WRITE(IW,7)TV,TF,TO,H,EMENIN,N,H,FI(I),DELTA(I)
7     FORMAT(1X,F6.1,2F7.1,F6.2,F7.3,F8.3,F7.3,F7.4,1X,F8.5)
      GO TO 1
8     WRITE(IW,9)TV,TF,TO,H,EMENIN,N,H
9     FORMAT(1X,F6.1,2F7.1,F6.2,F7.3,F8.3,F7.3,4HERR0)
10    STOP
      END

```

Como exemplo, temos no quadro abaixo uma típica saída do programa SOLI1. Os resultados foram obtidos para o Alumínio, solidificado em molde refrigerado a diferentes graus de superaquecimento.

```
***** SAIDA ^ SOLI1 *****
TV      TF      TO      M      EMEMIN      N      H      FI      DELTA
933.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7815  -0.00022
938.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7772  -0.00077
943.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7729  -0.00076
948.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7686  -0.00072
953.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7643  -0.00067
958.0    933.0    298.0    0.00    1.624    1.402    0.536    0.7284  -0.00006
963.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7560  -0.00055
968.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7518  -0.00024
973.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7478  -0.00019
978.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7438  -0.00015
983.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7399  -0.00011
988.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7360  -0.00007
993.0    933.0    298.0    0.00    0.624    1.402    0.536    0.7322  -0.00004
```

APÊNDICE 5TABELA A-5.1CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Polido - Superaquecimento Nulo)

S (mx10 ⁻²)	t(s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,06m (K)
2,0	13,5 (12)	368	600	600	600
2,5	19	357	555	600	600
3,0	26	349	525	600	600
3,5	35	343	499	600	600
4,0	45 (40,5)	338	480	600	600
4,5	56	334	464	569	600
5,0	68	331	451	551	600
5,5	80,5	328	440	535	600
6,0	94 (92)	327	430	520	600

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.2

CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Polido - Superaquecimento de 30K)

S(mx10 ⁻²)	t(s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,06m (K)
2,0	14(15,6)	377	600	625	630
2,5	20	366	567	623	628
3,0	30,5	356	528	616	627
3,5	42	347	500	605	624
4,0	53(55)	342	482	600	621
4,5	67	339	472	580	615
5,0	81	334	452	552	609
5,5	96	331	441	535	603
6,0	112(113,7)	328	432	522	600

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.3

CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Polido - Superaquecimento 60K)

S (mx10 ⁻²)	t (s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,06m (K)
2,0	18(19,4)	378	600	653	660
2,5	27	363	557	646	657
3,0	37,5	354	524	633	653
3,5	48,5	348	499	617	647
4,0	65,5 (66,4)	343	477	600	638
4,5	81	338	461	569	628
5,0	98	334	448	549	618
5,5	117	332	439	532	609
6,0	135,5 (138,3)	329	429	518	600

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.4

CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Recoberto - Superaquecimento Nulo)

S (mx10 ⁻²)	t (s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,06m (K)
2,0	21 (18)	434	600	600	600
2,5	29,5	426	557	600	600
3,0	40	420	536	600	600
3,5	50,5	413	522	600	600
4,0	62,5 (64,6)	408	509	600	600
4,5	75,5	404	498	576	600
5,0	89	400	490	561	600
5,5	104,5	398	482	551	600
6,0	120 (123)	397	477	542	600

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.5

CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Recoberto - Superaquecimento 30K)

$S(\text{mx}10^{-2})$	$t(\text{s})$	T $p/x=0,00\text{m}$ (K)	T $p/x=0,02\text{m}$ (K)	T $p/x=0,004\text{m}$ (K)	T $p/x=0,06\text{m}$ (K)
2,0	26,5 (23)	434	600	624	629
2,5	37,5	424	555	617	626
3,0	49,5	416	534	609	623
3,5	63	410	518	601	620
4,0	78 (78)	407	506	600	616
4,5	96	402	495	573	612
5,0	112	400	488	560	607
5,5	129	399	482	553	603
6,0	146 (143)	393	472	538	600

* () Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.6

CHUMBO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Recoberto - Superaquecimento 60K)

S (mx10 ⁻²)	t (s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,06m (K)
2,0	31 (29,3)	444	600	652	656
2,5	43	429	560	640	651
3,0	58,5	416	536	624	647
3,5	74,5	409	518	609	635
4,0	92,5 (96)	402	502	600	630
4,5	113	397	493	576	620
5,0	132	394	485	563	610
5,5	149,5	391	477	553	604
6,0	165 (167,5)	389	474	547	600

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.7

ALUMÍNIO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Recoberto - Superaquecimento Nulo)

S (mx10 ⁻²)	t (s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,03m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,05m (K)
2,0	26 (26.4)	823	933	933	933	933
2,5	33,5	816	910	933	933	933
3,0	41,5 (40.2)	810	895	933	933	933
3,5	49,5	805	880	912	933	933
4,0	58 (58.2)	800	867	898	933	933
4,5	67	794	855	883	916	933
5,0	76 (76.2)	788	844	871	903	933

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

TABELA A-5.8

ALUMÍNIO - MOLDE REFRIGERADO

(Molde Recoberto - Superaquecimento 46K)

S (mx10 ⁻²)	t (s)	T p/x=0,00m (K)	T p/x=0,02m (K)	T p/x=0,03m (K)	T p/x=0,04m (K)	T p/x=0,05m (K)
2,0	31(33.3)	837	933	946	960	967
2,5	39	826	908	936	952	959
3,0	48(50.4)	816	892	933	943	951
3,5	57	808	877	910	935	944
4,0	67(71.7)	799	864	895	933	937
4,5	76,5	791	853	882	916	935
5,0	86,5(90.9)	782	841	870	902	933

*() Valores obtidos por análise térmica das curvas de resfriamento.

APÊNDICE 6PROPRIEDADES FÍSICAS DOS MATERIAIS UTILIZADOS

PROPRIEDADES	MATERIAL		
	CHUMBO [20, 38, 39]	ALUMÍNIO [39, 40, 41]	AÇO DOCE [14, 38]
K_s (J/smK)	29,7	209	29,3
K_ℓ (J/smK)	16,3	93	-
d_s (Kg/m ³)	11300	2600	7800
d_ℓ (Kg/m ³)	10600	2380	-
c_s (J/KgK)	138	1130	670
c_ℓ (J/KgK)	151	1080	-
T_f (K)	600	933	-
T_o (K)	298	293	-
H (J/Kg)	25000	385000	-

APÊNDICE 7EXPRESSÃO SIMPLIFICADA PARA A CONSTANTE β NO CASO DE SUPERAQUECIMENTO NULO

No caso de superaquecimento nulo a equação 3.53, que permite o cálculo do ϕ , fica reduzida a:

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{H}{c_s(T_f - T_o)} \cdot \phi \quad (\text{A-7.1})$$

ou arranjando-se convenientemente:

$$\sqrt{\pi} \phi \exp(\phi^2) [M + \operatorname{erf}(\phi)] = \frac{c_s(T_f - T_o)}{H} \quad (\text{A-7.2})$$

Combinando-se a equação (A-7.2) com a equação (3.74), obtêm-se:

$$\beta_{\Delta T=0} = \frac{H d_s}{h_i(T_f - T_o)} \quad (\text{A-7.3})$$

onde $\beta_{\Delta T=0}$ é o valor da constante β para o caso do superaquecimento ser nulo.