

ESSE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR JOÃO BATISTA  
CAMPOS SILVA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 14/12/98.

Luiz Felipe Moura  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# **Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle**

Autor: João Batista Campos Silva  
Orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura

32/98

Si38s

37594/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

# **Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle**

**Autor: João Batista Campos Silva**

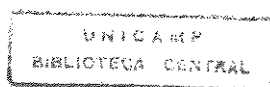
**Orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura**

**Curso: Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Térmica e Fluídos**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 14 de dezembro de 1998  
S.P. - Brasil



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

**TESE DE DOUTORADO**

**Simulação Numérica de Escoamentos de  
Fluidos pelo Método de Elementos Finitos  
Baseado em Volumes de Controle**

**Autor: João Batista Campos Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura**

*Luiz Felipe Moura*

**Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura , Presidente  
DETF/FEM – Universidade Estadual de Campinas**

*Carlos Alberto Carrasco Altemani*

**Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani  
DE/FEM – Universidade Estadual de Campinas**

*Renato Pavanello*

**Prof. Dr. Renato Pavanello  
DMC/FEM – Universidade Estadual de Campinas**

*João Batista Aparecido*

**Prof. Dr. João Batista Aparecido  
DEM/FEIS – UNESP/Ilha Solteira -SP**

*Alcides Padilha*

**Prof. Dr. Alcides Padilha  
DEM/FET – UNESP/Bauru -SP**

Campinas, 14 de dezembro de 1998

À

Leandro, Flavio, João Henrique e Maria Nilva

## Agradecimentos

Aos meus pais: Procides José da Silva e Maria de Lourdes Campos Silva pelo suporte em todos os momentos da minha vida.

À UNESP/FEIS/DEM por permitir minha permanência na UNICAMP para realizar este trabalho.

À CAPES/PICD pelo suporte financeiro durante minha permanência na UNICAMP

Ao meu orientador: Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura pelo incentivo para realizar este trabalho; por sua compreensão e paciência nas fases difíceis.

Ao Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail pelo apoio durante toda a realização deste trabalho

A todos os professores e colegas, no DEM/UNESP/Ilha Solteira, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Aos amigos: João Sidney Ferro, Valdir Barbosa e Fabricio Correia de Souza; Polo Computacional na UNESP/Ilha Solteira; pela colaboração constante na fase de obtenção de resultados.

À Erika Renata Bocchi, DEM/UNESP/Ilha Solteira, pelo apoio na confecção de desenhos e figuras.

Ao Elias Amaral dos Santos; Núcleo de Apoio Computacional no DEM/UNESP/Ilha Solteira; pela colaboração e ajuda durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos: Liana B. Souza e Marcelo Jara por seus preciosos apoios em muitos momentos.

Aos meus amigos de curso, na pós-graduação da FEM/UNICAMP, pelos bons momentos.

# Índice

|                                                                                                                                             |             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Resumo</b>                                                                                                                               | <b>viii</b> |
| <b>Abstract</b>                                                                                                                             | <b>ix</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>                                                                                                                     | <b>x</b>    |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                                                                                     | <b>xiii</b> |
| <b>Nomenclatura</b>                                                                                                                         | <b>xiv</b>  |
| <br>                                                                                                                                        |             |
| <b>Capítulo 1: Um Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle (CVFEM) em Escoamentos de Fluidos e Transferência de Calor</b> | <b>1</b>    |
| 1.1 Introdução                                                                                                                              | 1           |
| 1.2 Objetivos                                                                                                                               | 6           |
| 1.3 Revisão Bibliográfica                                                                                                                   | 7           |
| 1.4 Desenvolvimento do Trabalho e Algumas Considerações                                                                                     |             |
| Adicionais                                                                                                                                  | 14          |
| <b>Capítulo 2: Modelo Matemático</b>                                                                                                        | <b>16</b>   |
| 2.1 Formulação Matemática                                                                                                                   | 16          |
| 2.2 Adimensionalização das Variáveis nas Equações                                                                                           | 18          |

|                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capítulo 3: Desenvolvimento do Modelo Numérico</b>                                                                        | <b>22</b> |
| 3.1 Uma Descrição de Métodos Numéricos Disponíveis para<br>Escoamentos de Fluidos e Transferência de Calor                   | 22        |
| 3.2 Um Resumo sobre o Método de Resíduos Ponderados                                                                          | 27        |
| 3.3 Escoamentos Bidimensionais com Transferência de Calor<br>e/ou Massa                                                      | 29        |
| 3.4 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais                                                                 | 31        |
| 3.5 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle                                                                       | 33        |
| 3.5.1 Discretização no Tempo                                                                                                 | 33        |
| 3.5.2 Discretização Espacial das Equações- Aplicação de um<br>Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle<br>(CVFEM) | 35        |
| 3.5.2.1 Funções de Interpolação                                                                                              | 37        |
| 3.5.2.2 Cálculo das Matrizes nos Elementos                                                                                   | 43        |
| 3.6 Técnica de "Upwind" MAW                                                                                                  | 48        |
| 3.7 Solução do Sistema de Equações Discretizadas                                                                             | 54        |
| 3.8 Estrutura do Programa Computacional                                                                                      | 58        |
| <b>Capítulo 4: Aplicações para Escoamentos com Baixos Números de Reynolds</b>                                                | <b>61</b> |
| 4.1 Escoamento numa Cavidade Quadrada Induzido pelo<br>Movimento da Parede Superior                                          | 62        |
| 4.2 Escoamento num Canal com uma Expansão Assimétrica                                                                        | 77        |

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3 Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular Infinito                                                                                           | 83  |
| 4.4 Escoamento num Canal com um Cilindro Quadrado Bloqueando<br>a Seção                                                                            | 93  |
| <b>Capítulo 5: Aplicações para Escoamentos com Transferência de Calor e<br/>Baixos Números de Reynolds e para Escoamentos em Convecção Natural</b> | 98  |
| 5.1 Cavidade Quadrada com a Parede Superior Móvel e Transferência<br>de Calor                                                                      | 98  |
| 5.2 Escoamento por Convecção Natural numa Cavidade Quadrada                                                                                        | 103 |
| <b>Capítulo 6: Contribuições e Desdobramentos do Trabalho</b>                                                                                      | 112 |
| 6.1 Principais Contribuições deste Trabalho e Conclusões                                                                                           | 112 |
| 6.2 Alguns Desdobramentos deste Trabalho                                                                                                           | 114 |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                                                                                                  | 116 |
| <b>Anexo I: Trecho de programa para montagem da matriz nos elementos</b>                                                                           | 127 |
| <b>Anexo II: Resultados Numéricos</b>                                                                                                              | 131 |



## Resumo

CAMPOS SILVA, João Batista , *Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 159 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho desenvolve-se um método de elementos finitos com formulação por volumes de controle (CVFEM); usando-se elementos quadrilaterais com 9 nós, onde define-se funções de interpolação lineares e quadráticas; para aplicação em simulação de escoamentos transientes incompressíveis de fluidos viscosos, em domínios bidimensionais. O modelo matemático é constituído pelas equações de Navier-Stokes em variáveis primitivas  $u, v, p$ . Alguns problemas testes são resolvidos para validação do programa computacional construído com base no modelo numérico. É feita também uma forma de interpolação para os termos convectivos para eliminar coeficientes negativos nas equações discretizadas e evitar resultados não realísticos, quando os números de Reynolds e de Peclet são altos. Esta interpolação ("upwind") é baseada nos fluxos de massa para os volumes de controle num elemento e é conhecida como interpolação ponderada pela massa (MAW- Mass Weigthed Interpolation). Os resultados obtidos nos problemas testes são comparados com resultados de outros modelos numéricos e/ou resultados experimentais. A concordância entre os resultados é satisfatória

### *Palavras Chave*

Equações de Navier-Stokes, Método de Elementos Finitos, Formulação por Volumes de Controle, Escoamentos Transientes Incompressíveis de Fluidos Viscosos, Convecção Natural.

## Abstract

CAMPOS SILVA, João Batista , *Numerical Simulation of Fluid Flows by a Control Volume-Finite Element Method*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas Campinas, 1998. 159 p. Tese (Doutorado)

In this investigation a control volume-finite element method (CVFEM) using a nine-noded finite element with quadratic interpolation functions has been developed for numerical simulation of incompressible, viscous, transient fluid flows. The Navier-Stokes equations in primitive variables  $u, v, p$  are used as the mathematical model. The mass weighted interpolation (MAW) is also implemented for the convective terms of the equations, into the element considered. The obtained results for some test problems agree quite good with results of other numerical methods and/or experimental results.

### *Key Words*

-Navier-Stokes Equations, Finite Element Method, Control Volume Formulation, Transient Viscous Incompressible Fluid Flows, Natural Convection.

## Lista de Figuras

|                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 Modelos Computacionais                                                                                                  | 2  |
| 1.2 Níveis de aproximação dinâmica de escoamentos.                                                                          | 5  |
| 3.1. Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros                                                                     | 32 |
| 3.2 Elementos subdivididos em subvolumes de controle. (a) Elementos triangulares.                                           |    |
| (b) Elementos quadriláteros                                                                                                 | 32 |
| 3.3 Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de 9 nós                                                      | 39 |
| 3.4 (a) Elemento em coordenadas globais, x-y. (b) Elemento mapeado no elemento mestre em coordenadas locais, $\xi$ - $\eta$ | 44 |
| 3.5. Arranjo das variáveis u, v, p, localmente num elemento                                                                 | 47 |
| 3.6. Elemento subdividido em volumes de controle                                                                            | 49 |
| 3.7. Elemento subdividido em 4 subelementos para implementação de “upwind”                                                  | 50 |
| 3.8 Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal                                                              | 56 |
| 3.9. Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global                                                        | 56 |
| 3.10. Formação do vetor contendo o índice global do primeiro grau de liberdade por nó.                                      | 57 |
| 3.11. Formação do vetor contendo o número de graus de liberdade por nó                                                      | 57 |
| 3.12. Estrutura do Programa Computacional                                                                                   | 60 |
| 4.1. Geometria e condições de contorno                                                                                      | 62 |
| 4.2. Cavidade quadrada discretizada em diferentes malhas                                                                    | 64 |
| 4.3. (a) Variação de u ao longo da linha central vertical da cavidade.                                                      | 66 |
| 4.3 (b) Variação de v ao longo da linha central horizontal da cavidade                                                      | 66 |

|                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4. Velocidades nos instantes de tempo, $t = 35$ e $t = 50$ ; $Re = 400$ e malha $12 \times 12$ .                    | 67 |
| 4.5 Comparação de resultados para $U$ na linha central da cavidade, $X = 0,5$                                         | 68 |
| 4.6. (a) Evolução do perfil de velocidade em função da malha para $Re = 400$ , no instante de tempo, $t = 5$ .        | 69 |
| 4.6. (b) Evolução do perfil de velocidade em função da malha para $Re = 400$ , no instante de tempo, $t = 35$         | 69 |
| 4.7. (a). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 400$                            | 70 |
| 4.7. (b). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 400$                            | 71 |
| 4.7. (c). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 400$                            | 72 |
| 4.8. Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 1000$                                | 73 |
| 4.9. Evolução da velocidade $U$ , em $X = 0,5$ , para diferentes números de Reynolds em instantes de tempo diferentes | 74 |
| 4.10. Canal com uma expansão assimétrica na forma de degrau                                                           | 77 |
| 4.11. Discretização do canal em $4 \times 20$ mais $28 \times 30$ elementos.                                          | 77 |
| 4.12.(a) Perfil de velocidade $U$ em $X = 0$ para $Re = 73$ e $t = 90$                                                | 78 |
| 4.12.(b) Perfil de velocidade $U$ em $X = 0,692$ para $Re = 73$ e $t = 90$                                            | 79 |
| 4.12.(c) Perfil de velocidade $U$ em $X = 4,0388$ para $Re = 73$ e $t = 90$                                           | 79 |
| 4.12.(d) Perfil de velocidade $U$ em $X = 8,2374$ para $Re = 73$ e $t = 90$                                           | 79 |
| 4.13 (a)- Comparação do perfil de velocidade em $X = 2$ para escoamento permanente                                    | 80 |
| 4.13 (b)- Comparação do perfil de velocidade em $X = 6$ para escoamento permanente                                    | 80 |
| 4.14. Linhas de corrente do escoamento numa expansão, em vários instantes                                             |    |

|                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3. (b) Isotermas em diferentes instantes de tempo.                                                                                                                 | 102 |
| 5.4. Variação do componente de velocidade vertical, $V$ , em função de $X$ , na linha media horizontal da cavidade, $Y = 0,5$ , para números de Rayleigh diferentes. | 105 |
| 5.5. Linhas de corrente do escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.                                             | 106 |
| 5.5. Linhas de corrente do escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.                                             | 107 |
| 5.6 Isotermas no escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.                                                       | 108 |
| 5.6 Isotermas no escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.                                                       | 109 |
| 5.7. Nusselt local na parede esquerda da cavidade, $X = 0$ , em $t = 0,5$ .                                                                                          | 111 |
| I.1 Diagrama da matriz global num elemento                                                                                                                           | 130 |

## Lista de Tabelas

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 Variáveis, propriedades e termos na equação (2.9)                                            | 20  |
| 3.1 Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 4 nós                             | 38  |
| 3.2 Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 9 nós                             | 38  |
| 4.1 Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para $Re = 400$ .                     | 75  |
| 4.2 Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para $Re = 1000$ .                    | 76  |
| 4.3 Valores do coeficiente de pressão ao longo da superfície do cilindro, $Re = 40$              | 92  |
| 5.1 Comparação de resultados para valores máximos da função de corrente e<br>velocidade vertical | 110 |
| II.1. Evolução de $U$ ao longo do tempo, malha $12 \times 12$ elementos. Figura 4.3 (a)          | 131 |
| II.2. Evolução de $V$ ao longo do tempo, malha $12 \times 12$ elementos. Figura 4.3 (b)          | 132 |
| II.3.(a) Escoamento evoluindo para regime permanente. Figura 4.4                                 | 133 |
| II.3.(b) Escoamento evoluindo para regime permanente. Figura 4.4.                                | 134 |
| II.3 (c). Comparação de resultados. Figura 4.5.                                                  | 135 |
| II.4.(a) Resultados referentes à Figura 4.6, malha $12 \times 12$                                | 136 |
| II.4.(b) Resultados referentes à Figura 4.6, malha $30 \times 30$                                | 137 |
| II.4.(b) Resultados referentes à Figura 4.6, malha $30 \times 30$ . Cont.                        | 138 |
| II.4.(c) Resultados referentes à Figura 4.6, malha $40 \times 40$                                | 139 |
| II.4.(c) Resultados referentes à Figura 4.6, malha $40 \times 40$ . Cont.                        | 140 |
| II.5 (a). Resultados referentes à Figura 4.9, malha $30 \times 30$                               | 141 |
| II.5 (a). Resultados referentes à Figura 4.9, malha $30 \times 30$ . Cont.                       | 142 |
| II.5 (b). Resultados referentes à Figura 4.9, malha $30 \times 30$                               | 143 |
| II.5 (b). Resultados referentes à Figura 4.9, malha $30 \times 30$ . Cont.                       | 144 |
| II.6 (a) Resultados do presente trabalho referentes à Figura 4.13                                | 145 |
| II.6 (a). Resultados do presente trabalho referentes à Figura 4.13. Cont.                        | 146 |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| II.6 (b). Resultados de Winterscheidt et al. referentes à Figura 4.13. | 146 |
| II.7. Resultados referentes à Figura 4.21                              | 147 |
| II.8. Resultados referentes à figura 4.27                              | 148 |
| II.9. Resultados referentes à figura 4.28                              | 149 |
| II.10. Resultados referentes à Figura 4.31                             | 150 |
| II.10. Resultados referentes à Figura 4.31. Cont                       | 151 |
| II.11. Resultados referentes à Figura 5.1                              | 152 |
| II.11. Resultados referentes à Figura 5.1. Cont.                       | 153 |
| II.12. Resultados referentes à Figura 5.2                              | 154 |
| II.12. Resultados referentes à Figura 5.2. Cont.                       | 155 |
| II.13. Resultados referentes à Figura 5.4 (a).                         | 156 |
| II.13. Resultados referentes à Figura 5.4 (a). Cont.                   | 157 |
| II.14. Resultados referentes à Figura 5.7 .                            | 158 |
| II.14. Resultados referentes à Figura 5.7. Cont.                       | 159 |

Nomenclatura

Letras Latinas

- $A$  – área de um volume de controle  
 $c_p$  – calor específico a pressão constante  
 $D_{12}$  – Coeficiente de difusão de massa da espécie 1 na espécie 2  
 $k$  – condutividade térmica [W/mK]  
 $L$  – comprimento característico [m]  
 $p$  – pressão dimensional [N / m<sup>2</sup>]  
 $P = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2}$  – pressão adimensional  
 $Pr$  – número de Prandtl  
 $Re$  – número de Reynolds  
 $S_{u_i}$  - termo fonte na equação de quantidade de movimento na direção  $x_i$   
 $S_\phi$  - termo fonte numa equação de transporte para a variável  $\phi$   
 $t^*$  – coordenada tempo dimensional [s]. Se adimensional:  $t = t^* u_0 / L$   
 $T$  – temperatura [K]  
 $u$  – componente de velocidade dimensional na direção do eixo x [m / s]  
 $u_i$  – componente de velocidade em notação tensorial cartesiana na direção do eixo  $x_i$  [m / s]  
 $v$  - componente de velocidade dimensional na direção do eixo y [m / s]  
 $U = u / u_0$  – componente de velocidade adimensional na direção do eixo X  
 $U_i$  – componente de velocidade adimensional em notação tensorial cartesiana na direção do eixo  $X_i$   
 $V = v / v_0$  - componente de velocidade adimensional na direção do eixo Y  
 $X = x / L$  - abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas  
 $x_i$  – abscissa no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial  
 $X_i = x_i / L$  - eixos do sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial  
 $Y = y / L$  - ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas  
 $y_i$  – ordenada no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial  
.....

Letras Gregas

- $\alpha$  – índice que indica o número do nó local ou do subvolume de controle num elemento



$\beta$  – coeficiente de expansão térmica, [K]<sup>-1</sup>  
 $\Gamma$  – um coeficiente de difusão nas equações de transporte, Equação (2.4)  
 $\delta_{ij}$  – delta de Kronecker  
 $\eta$  – ordenada do sistema de coordenadas local no elemento de referência  
 $\theta = (T - T_0) / \Delta T$  – temperatura adimensional  
 $\mu$  – viscosidade dinâmica [kg / m s]  
 $\mu_\tau$  – viscosidade dinâmica turbulenta [kg / m s]  
 $\xi$  – abcissa do sistema de coordenadas local no elemento de referência  
 $\rho$  – massa específica [kg / m<sup>3</sup>]  
 $\phi$  – variável qualquer na equação de transporte de um escalar  
 $\psi$  – função de corrente [s]<sup>-1</sup>  
 $\omega_j$  – componente do vetor rotação na direção do eixo  $x_j$   
 .....

***Superescritos***

$n$  – significa grandeza avaliada no tempo  $t$   
 $n+1$  – significa grandeza avaliada no tempo  $t+\Delta t$   
 $k$  – iteração anterior no processo de solução num tempo  $t$  qualquer  
 $k+1$  – iteração  $k$  incrementada no processo de solução num tempo  $t$  qualquer  
 .....

***Subscritos***

$i$  – representa direção do eixo no sistema de coordenadas  
 $\alpha$  – representa o subvolume de controle associado a um nó de elemento  
 $\beta$  – representa a função de interpolação associada ao nó de um elemento  
 $0$  – representa uma variável ou propriedade num estado de referência  
 .....

***Abreviações***

**CFD** – Dinâmica de Fluidos Computacional  
**CVFDM** – Método de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle  
**CVFEM** – Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle  
**FDM** - Método de Diferenças Finitas  
**FEM** - Método de Elementos Finitos  
**FVM** – Métdo de Volumes Finitos  
**MAW** – Método de Upwind pela Massa  
**WRM** – Método de Resíduos Ponderados  
 .....

***Siglas***

**DEM** – Departamento de Engenharia Mecânica

**DETF** - Departamento de Engenharia Térmica e Fluidos  
**DMC** – Departamento de Mecânica Computacional  
**FEIS** – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
**FEM** – Faculdade de Engenharia Mecânica  
**FET** – Faculdade de Engenharia e Tecnologia  
**UNICAMP** – Universidade Estadual de Campinas  
**UNESP** – Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”

.....

# **CAPÍTULO 1**

## **Um Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle (CVFEM) em Escoamentos de Fluidos e Transferência de Calor**

### **1.1 Introdução**

Grande parte dos processos que ocorrem na natureza e em aplicações de engenharia envolvem escoamentos de fluidos. Desta forma, o projeto de muitos equipamentos requer o cálculo desses escoamentos o que, em geral, é feito através de computadores, devido ao fato desses escoamentos serem descritos matematicamente por equações diferenciais não lineares e muitas vezes eles ocorrem em domínios irregulares. Um grande número de pesquisadores, em todo o mundo, tem se dedicado ao campo denominado de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - Computational Fluid Dynamics)<sup>1</sup>, onde vários métodos numéricos tem sido desenvolvidos e aplicados para realização de experimentos computacionais ou simulação numérica de escoamentos de fluidos.

A utilização de métodos numéricos pode reduzir o custo de estudos experimentais que podem ser realizados com parâmetros, até certo ponto otimizados, encontrados através de algum método numérico. A dinâmica dos fluidos computacional (CFD) tem sido usada em muitos casos com a finalidade de se reduzir o tempo de ensaios em laboratórios e túneis de vento. Shaw (1992) mostra vários exemplos, onde a dinâmica dos fluidos computacional

---

<sup>1</sup> As siglas usadas neste trabalho seguem a literatura internacional

(CFD) pode ser utilizada para se prever o comportamento dos escoamentos. Em alguns casos, este é o único meio para se tentar prever o que ocorre no escoamento. Um exemplo típico seria o escoamento dentro de reatores nucleares, onde existe grande dificuldade de realização de experimentos, para se determinar condições de falha. Outros exemplos onde a dinâmica dos fluidos computacional (CFD) é usada são: cálculo de sustentação e arraste de foguetes; escoamentos sobre mísseis; movimento de chamas em queimadores; escoamento de ar para dentro de motores de combustão interna; escoamento de ar de resfriamento dentro de equipamentos elétricos e dispersão de poluentes dentro de rios, oceanos e no ar atmosférico. O processo de simulação numérica pode ser visualizado através da Figura 1.1; Hirsch (1988); onde pode-se distinguir as etapas envolvidas no mesmo.

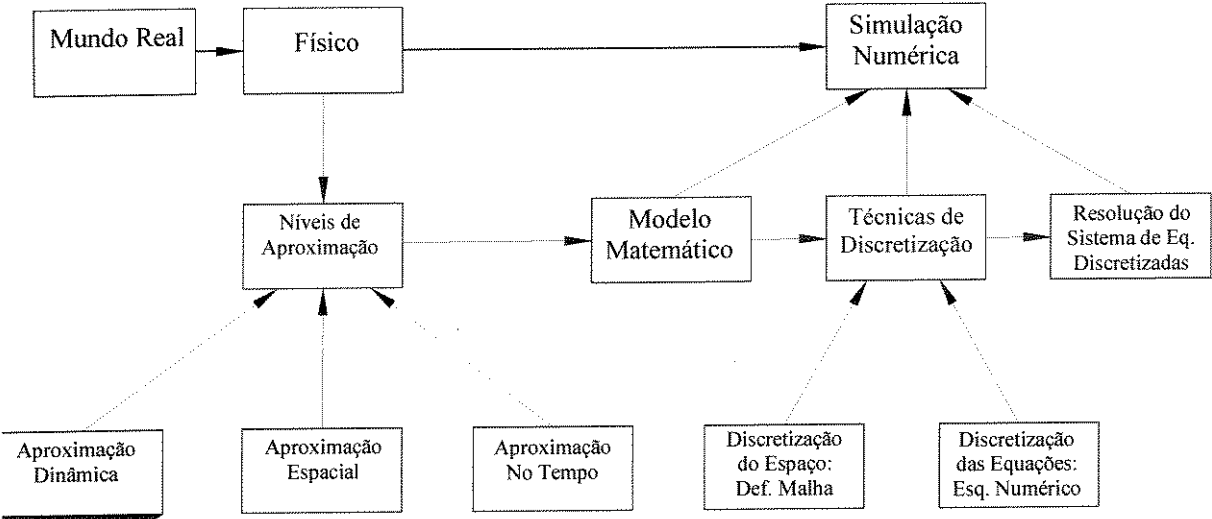


Figura 1.1. Modelos Computacionais

O uso da dinâmica dos fluidos computacional (CFD), como já foi dito, requer o uso de métodos numéricos para se calcular as grandezas de interesse nos escoamentos, em pontos do domínio físico aqui, genericamente, denominados de pontos nodais ou, simplesmente, nós. Os principais métodos utilizados para simulação de escoamentos de fluidos são: Métodos de Diferenças Finitas (FDM - Finite Difference Method); Métodos de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle (CVFDM - Control Volume Finite Difference Method); Método de Volumes Finitos (FVM - Finite Volume Method); Métodos de Elementos Finitos (FEM - Finite Element Method) e Métodos de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - Control Volume-Finite Element Method). Na realidade, todos estes métodos numéricos derivam de um único método conhecido como Método de Resíduos Ponderados

(MWR - Method of Weighted Residuals), sendo que o que diferencia matematicamente um método do outro é a função peso aplicada na obtenção do resíduo. No Capítulo 3, apresenta-se um resumo do método de resíduos ponderados e respectivas funções de ponderação que dão origem aos principais métodos numéricos encontrados na literatura. Alguns comentários sobre os principais métodos utilizados para cálculos de escoamentos de fluidos são feitos a seguir.

O método de diferenças finitas tem sido usado para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor; como pode ser comprovado pela grande quantidade de trabalhos na literatura especializada; existindo muitos códigos computacionais baseados no mesmo. Vários autores afirmam que uma limitação deste método está na discretização de domínios com complexidade geométrica; problema este que foi parcialmente solucionado pelo uso de malhas não-ortogonais.

Um método apresentado por Patankar (1980); denominado na literatura de método de volumes finitos (FVM - Finite Volume Method); também chamado por muitos autores de método de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM - Control Volume Finite Defference Method); se constitui hoje no principal método para análise numérica de escoamentos de fluidos e transferência de calor. A característica principal deste método é a fácil interpretação física dos termos das equações em termos de fluxos, fontes e forças; devido ao fato da formulação resultante ser de natureza conservativa uma vez que ela é obtida através dos princípios de conservação. O método de volumes de controle com malhas ortogonais e não-ortogonais em coordenadas generalizadas, para o tratamento de geometrias irregulares, tem sido implementado por vários grupos de pesquisa e aplicado para solução de problemas de escoamentos de fluidos e transferência de calor.

Devido às dificuldades em se utilizar o método das diferenças finitas em geometrias complexas, o método de elementos finitos, inicialmente desenvolvido para análise de estruturas, começou a ser aplicado para o caso de escoamentos, por causa da sua grande versatilidade na discretização de domínios geometricamente complexos. Algumas referências básicas que tratam da aplicação do método de elementos finitos (FEM) em escoamentos de fluidos são: Connor & Brebbia (1976), Chung (1978) e Baker (1983). O método de elementos finitos tem sido combinado com técnicas de “upwind”, que procuram adequá-lo para o cálculo

de escoamentos de fluidos e transferência de calor para altos números de Reynolds e de Peclet, e atualmente este método é também muito utilizado para simulação numérica tanto de escoamentos laminares quanto turbulentos e/ou transferência de calor. Para o leitor não familiarizado com o termo, "upwind" denomina uma técnica especial de discretizar os termos convectivos das equações de transporte, em problemas nos quais predomina a convecção, de forma que a influência do escoamento à montante tem mais peso sobre os coeficientes da matriz das equações discretizadas. O objetivo é eliminar coeficientes negativos nas equações algébricas que podem levar a resultados sem significado físico.

O método de elementos finitos clássico é conhecido como método de elementos finitos de Galerkin. Outra variante do método de elementos finitos é conhecida como método de elementos finitos de mínimos quadrados. Neste trabalho, é abordada uma terceira vertente do método de elementos finitos conhecida como Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - Control Volume Finite Element Method) o qual foi primeiramente apresentado por Baliga & Patankar (1980), Baliga & Patankar (1983) e Baliga, Pham & Patankar (1983), usando elementos finitos triangulares. Posteriormente, Schneider & Raw (1986, 1987) apresentaram este método para elementos finitos quadrilaterais lineares (elementos com 4 nós). Raw, Schneider & Hassani (1985) utilizaram um elemento finito quadrilateral quadrático (elemento com nove nós) para problemas de condução de calor. Este último elemento finito, sem o nó central, tem sido também utilizado no método de elementos finitos de Galerkin para resolução de problemas de escoamentos.

Um tópico que tem relação direta com a complexidade do modelo matemático é o nível de aproximação dinâmica quando se define que tipo de escoamento representa o problema em análise. A Figura 1.2; Hirsch (1988); ilustra os níveis de aproximação dinâmica que são usados para se modelar os escoamentos de fluidos de uma maneira bem genérica. Hirsch (1988) descreve, em detalhes, os vários níveis de aproximação dinâmica de escoamentos e suas aplicações.

A aplicação de um método numérico pode ser dividida em três etapas principais, as quais na nomenclatura do método de elementos finitos são: pré-processamento, processamento e pós-processamento. Na etapa de pré-processamento, é definida a geometria

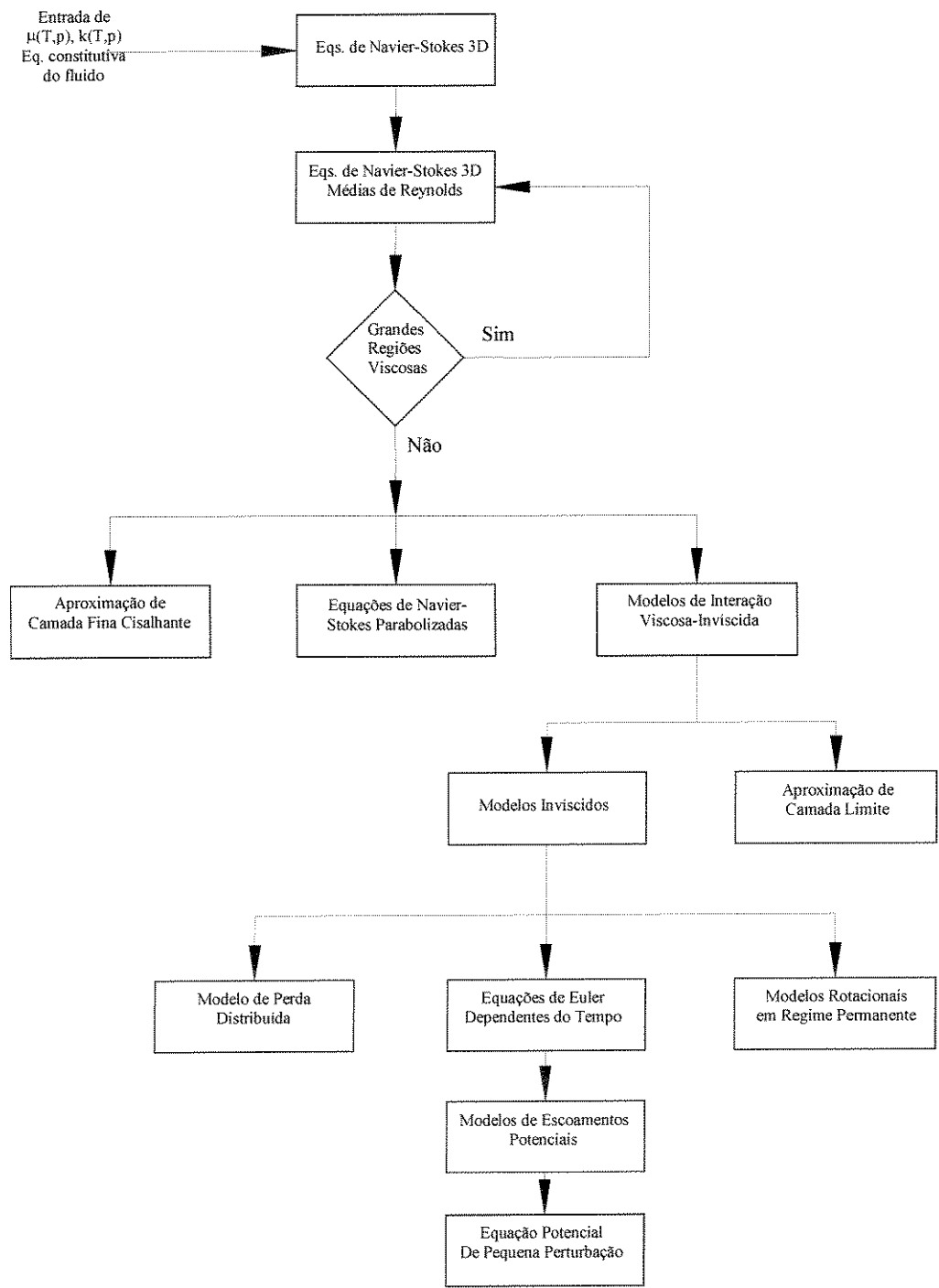


Figura 1.2 Níveis de aproximação dinâmica de escoamentos.

ou domínio físico do problema; domínio este discretizado por algum tipo de elemento, constituindo a malha de elementos finitos. Também nesta etapa podem ser definidas as propriedades físicas do fluido e demais parâmetros (condições de contorno e iniciais) necessários para a solução do problema. Na fase de processamento, aplica-se um “solver” (nome usado na literatura para programas numéricos) baseado no modelo numérico para obtenção das grandezas de interesse (velocidade, pressão, temperatura) em pontos do domínio

denominados de nós dos elementos. Na etapa de pós-processamento os resultados são analisados para se verificar a validade do modelo numérico ou para os propósitos para os quais se resolveu o problema. Técnicas de visualização gráfica, geralmente, são empregadas para análise dos resultados. Uma vez validado o “solver”, pode-se aplicá-lo para o projeto de modelos de equipamentos onde ocorrem os escoamentos. Neste trabalho, concentra-se na fase de processamento, sendo os objetivos principais definidos a seguir.

## 1.2 Objetivos

No presente estudo pretende-se estender e aplicar um método de elementos finitos combinado com o método de volumes de controle usando principalmente um elemento quadrilateral com nove nós; para simulação de alguns casos de escoamentos de fluidos, em variáveis primitivas ( $u, v, p$ ), com ou sem transferência de calor, em geometrias bidimensionais e podendo ser os escoamentos em regime transiente. Uma motivação para este estudo foi o fato de não se ter encontrado na literatura pesquisada, aplicações deste elemento finito com formulação por volumes de controle para simulação de casos de escoamentos de fluidos. Os elementos finitos usados nos métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para cálculos de escoamentos de fluidos, por outros autores, como já foi mencionado, foram elementos triangulares com 3 ou 6 nós ou elementos quadriláteros com 4 nós. O elemento finito quadrilateral com 9 nós contém três nós em cada face e um nó central. Neste elemento podem ser definidas funções de interpolação quadráticas que podem levar a melhores resultados do que com o uso de funções de interpolação lineares. Outra vantagem deste elemento é que ele pode ser deformado para representar, de maneira mais precisa, contornos curvos de muitos domínios com complexidade geométrica onde os escoamentos ocorrem. O uso de elementos finitos lineares pode comprometer a aproximação de contornos irregulares ou curvos se a malha não puder ser suficientemente refinada ou o elemento usado não for apropriado.

O desenvolvimento de um código computacional, para realização de experimentos computacionais em escoamentos de fluidos, é outro dos principais objetivos do presente trabalho. Embora existam códigos computacionais já consagrados comercialmente para tal fim, seu custo e manutenção são altos para a realidade de muitas de nossas universidades.



Outro fator que também motivou este estudo é que, segundo Baliga (1990), aplicações do método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM) para escoamentos de fluidos e outros problemas de transferência de calor e massa têm sido já realizadas, mas ainda há espaço para novos estudos para que estes esforços sejam completos. A idéia é construir um código computacional que sirva de base para futuros desenvolvimentos na continuação deste trabalho. Outro fator que motivou este desenvolvimento, foi o fato de não se ter tido acesso, após várias tentativas, a nenhum código computacional baseado no método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), previamente, construído por outros autores, para simulação de problemas de escoamento de fluidos.

### **1.3 Revisão Bibliográfica**

Esta revisão bibliográfica não tem o intuito de ser completa, mesmo porque a área de simulação numérica de escoamentos de fluidos e transferência de calor está em processo de crescimento muito acentuado e milhares de trabalhos são publicados a cada ano. Por exemplo, uma consulta à base de dados Compendex (1998) mostrou um resultado de 4576 resumos de artigos sobre dinâmica dos fluidos computacional (CFD) publicados, no período de 1990 a 1998, em diversos periódicos. Aqui apresenta-se alguns desenvolvimentos da aplicação do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para solução de problemas de transferência de calor e de escoamentos de fluidos. Ao longo do texto, outras referências sobre métodos numéricos são citadas, complementando esta revisão bibliográfica.

Existem na literatura compilações de trabalhos sobre escoamentos de fluidos e transferência de calor. Por exemplo, Shih (1990) apresenta uma lista de trabalhos sobre simulação numérica de transferência de calor, abordando vários tópicos de interesse. Este autor, geralmente, apresenta a cada dois anos, uma compilação dos trabalhos sobre transferência de calor publicados nos principais periódicos internacionais.

A seguir serão citados trabalhos publicados, nos quais o método de elementos finitos baseado em volumes de controle foi usado como ferramenta para solução dos problemas propostos. Segundo Baliga & Patankar (1980), o desenvolvimento deste método foi uma tentativa no sentido de preencher a necessidade de melhores métodos em problemas de

convecção-difusão; principalmente para o tratamento de geometrias complexas sem o uso de coordenadas generalizadas. Este método tem como característica principal aliar a versatilidade do método de elementos finitos para discretizar geometrias irregulares com o caráter conservativo da formulação por volumes de controle.

Três grupos principais trabalham no método de elementos finitos baseado em volumes de controle. Um é o grupo do Prof. B.R. Baliga; na McGill University, Montreal, Canada; que usa principalmente elementos finitos triangulares lineares e quadráticos; outro é o grupo do Prof. G.E. Schneider, na Universidade de Waterloo, que trabalha com elementos finitos quadrilaterais lineares. O terceiro grupo, na Escola Politécnica de Montreal, trabalha usando formulação em função de corrente-vorticidade e não variáveis primitivas como os dois primeiros. Mais recentemente, tem aparecido trabalhos em outros países. Mas os grupos bem constituídos estão no Canadá.

Pode-se dizer que o trabalho pioneiro sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) foi o trabalho de doutorado de Baliga (1978) com resultados publicados por Baliga & Patankar (1980). Após aquele trabalho vários autores têm usado o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) na solução de problemas de convecção-difusão, bem como na solução de outros problemas relacionados com escoamento e/ou transferência de calor. Os primeiros trabalhos que apareceram na literatura foram os trabalhos de Baliga & Patankar (1980, 1983), basicamente, apresentando o método e de Baliga, Pham & Patankar (1983) que apresentaram resultados para escoamento entre dois cilindros girantes; escoamento laminar numa cavidade quadrada com a parede superior móvel e escoamentos por convecção natural numa cavidade retangular e numa cavidade trapezoidal.

Desde sua apresentação, por volta de 1980, o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) passou por vários melhoramentos como pode ser comprovado pelos trabalhos de Prakash & Patankar (1985), Prakash (1986), Hookey, Baliga & Prakash (1988a,b) e Schneider & Raw (1986, 1987a,b) e tem sido utilizado para a solução de vários problemas em escoamentos de fluidos e transferência de calor. Baliga (1990) apresenta um resumo de vários trabalhos usando o método. A maioria dos desenvolvimentos e aplicações foram para o caso de problemas bidimensionais, obviamente, devido às dificuldades na

análise de problemas tridimensionais. Os novos desenvolvimentos foram basicamente em funções de interpolação e introdução de técnicas de “upwind”. Outros aspectos examinados foram quanto à ordem de interpolação da velocidade e da pressão. Quando se usa o mesmo número de nós para velocidade e pressão, tem-se o que se chama formulação de ordem igual ou de variáveis co-localizadas. Velocidades e pressão interpoladas por número de nós diferentes constitui-se em interpolação por ordem desigual ou de variáveis desencontradas.

No caso de convecção-difusão tridimensional, tem-se o trabalho de LeDain Muir & Baliga (1986). As aplicações foram para condução de calor numa esfera oca girante, transporte convectivo com mudança em degrau no valor de uma variável escalar e convecção-difusão na presença de escoamento radial entre superfícies esféricas concêntricas. São considerados problemas de convecção-difusão aqueles em que se deseja resolver uma equação de transporte de um escalar na presença de um campo conhecido de velocidades. As equações de quantidade de movimento podem ser enquadradas como equações de convecção-difusão, se considerar o termo de pressão como um termo fonte. Neste caso, o campo de velocidades não é conhecido a priori e precisa ser determinado como parte da solução do problema.

Prakash & Patankar (1987a, b) aplicaram o método para problemas de escoamentos parabólicos tridimensionais resolvendo casos de escoamentos em dutos de seções retangular e elíptica e num difusor de seção quadrada. Posteriormente, Forsyth (1991), Forsyth & Shao (1991) e Letniewski & Forsyth (1991) fizeram aplicações para escoamentos bidimensionais e tridimensionais de contaminantes não-aquosos na fase líquida (NAPL), em meios porosos. Neste tipo de problema, as equações resolvidas envolvem gradiente de pressão nas fases e as equações das fases estão acopladas através de uma grandeza chamada de porosidade.

Banaszek (1989) fez uma comparação do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) com o método de elementos finitos de Galerkin (GFEM) para problemas de difusão (condução de calor), usando elementos triangulares com 3 e 6 nós e elementos quadrilaterais com 4 e 9 nós.

Alguns outros trabalhos que utilizaram o método de elementos finitos baseado em volumes de controles são: Elkaim, Reggio & Camarero (1991) para escoamento laminar

reativo usando formulação vorticidade-função de corrente; Krakov (1992) para solução de Navier-Stokes em formulação por vorticidade-função de corrente. Larreteguy (1992) aplicou-o para escoamentos bidimensionais com malhas de triângulos com três nós, dando ênfase ao acoplamento pressão-velocidade. Chow & Cross (1992) usaram o método para problemas de solidificação apenas considerando o efeito de condução de calor e usando malhas de elementos triangulares.

Swaminathan & Voller (1992a, b) compararam os métodos de elementos finitos de Galerkin e de volume de controle, usando um esquema "upwind" de linha de corrente Petrov-Galerkin, em problemas de convecção-difusão.

Jeronymo (1991) desenvolveu um programa numérico usando elementos quadrilaterais com 4 nós e um método de "upwind" proposto por Schneider & Raw (1986), para solução de equações do tipo convecção-difusão com o campo de velocidades conhecido. Naquele trabalho não foi implementada a parte de solução das equações de quantidade como é feito no presente trabalho.

No caso de convecção natural laminar tem-se o trabalho de Kettleborough & Van Dijk (1992) com aplicação para escoamento entre placas paralelas verticais aquecidas.

No caso de escoamentos turbulentos bidimensionais em regime permanente tem-se o trabalho de Elkaim, Reggio & Camarero (1992) que usaram o modelo de  $k-\epsilon$  e formulação vorticidade-função de corrente. Os problemas testes foram escoamentos turbulentos em um tubo e em um difusor. Elkaim, Reggio & Camarero (1993) apresentaram um trabalho sobre cálculo de difusão turbulenta para uma chama confinada, usando também formulação função de corrente vorticidade em regime permanente e o modelo  $k-\epsilon$  para calcular a viscosidade turbulenta, em geometria axissimétrica bidimensional. O modelo foi validado para escoamento num tubo e foram obtidos resultados para a fração de mistura dos produtos de combustão em um queimador axissimétrico. Foram usados elementos triangulares com três nós. Nesta sequência, Elkaim, Mckenty, Reggio & Camarero (1994) apresentaram resultados para escoamentos turbulentos confinados e com região de recirculação numa expansão axissimétrica.

Lin & Ebadian (1996a) investigaram escoamento turbulento tridimensional em tubos helicoidais. Lin & Ebadian (1996b) adicionaram o efeito de transferência de calor ao problema investigado no artigo anterior.

Outros problemas têm sido analisados através do uso do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM). Giammarco & Todini (1994) aplicaram um método CVFEM bidimensional para resolver problemas de escoamentos sobre o solo. Masson & Baliga (1994) resolveram problemas de escoamentos de partículas gás-sólido usando modelos de dois fluidos em geometrias plana e axissimétrica.

Um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para problemas de escoamentos em domínios multi-dimensionais em regime permanente foi desenvolvido por Saabas (1991) usando elementos triangulares com três nós e tetraedros com quatro nós. Saabas fez uma excelente revisão sobre métodos existentes para simulação de escoamentos de fluidos, talvez a mais completa e crítica nos últimos anos. Posteriormente, Saabas & Baliga (1994a, b) apresentaram este desenvolvimento e resultados desse trabalho em revista especializada.

Masson, Saabas & Baliga (1994) também apresentaram um método de elementos finitos baseado em volumes de controle de ordem igual e variáveis co-localizadas para escoamentos incompressíveis de fluidos, em geometria axissimétrica bidimensional, usando elementos triangulares lineares e métodos de “upwind” apresentados no trabalho de Saabas (1991). Os casos estudados foram escoamento laminar em um tubo; escoamento laminar num tubo com uma contração brusca; convecção natural numa cavidade cilíndrica e escoamento laminar em uma réplica de segmento de uma artéria coronária.

Schneider & Karimian (1994) obtiveram alguns avanços do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) em escoamentos compressíveis. O problema teste foi escoamento supersônico unidimensional num bocal convergente-divergente. Eles usaram formulação de variáveis co-localizadas.

Hafez (1995) fez uma combinação de elementos finitos com volumes finitos em malha não estruturada de elementos triangulares lineares, para calcular casos de escoamentos compressíveis e incompressíveis, resolvendo as equações de escoamentos potenciais de Euler e equações de Navier-Stokes. Esse autor usou o método de viscosidade artificial para evitar desacoplamento entre velocidade e pressão e capturar ondas de choque. Termos transientes artificiais também foram introduzidos para garantir convergência para solução de regime permanente. As aplicações foram para escoamentos em torno de perfis aerodinâmicos.

Uma implementação de estimativa de erro para um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) foi feita por Padra & Larreteguy (1996) para problemas do tipo convecção-difusão. Larreteguy (1996) apresentou um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) com formulação de ordem igual para escoamentos de fluidos, em elementos triangulares com funções de interpolação apropriadas para prevenir problemas causados por uma malha com elementos triangulares que tenham ângulos obtusos.

Comini, Giudice & Nonino (1996), através de balanço de energia a nível de elemento e nós, demonstrou que a formulação de métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) e métodos de elementos finitos de Galerkin (GFEM) para problemas de convecção conduzem ao mesmo tipo de conservação das propriedades.

Na área de materiais e processos de fabricação também tem sido utilizado métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM). Ewsuk, Cesarano, Cochran, Blackwell & Adkins, (1995) fizeram caracterização e simulação de um material cerâmico num forno unidimensional. O método foi usado para calcular o processo de transferência de calor no meio considerado como poroso. Kang, Lee, Yoo & Cho (1995) fizeram simulação de processo de enchimento de moldes. Chiu, Wu & Lee (1996) fizeram modelagem do processo de injeção em molde para escoamento de um polímero. Nieh & Lee (1996) simularam transferência de calor em processos de fusão de juntas.

Recentemente, Ferguson (1997) aplicou um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para solução de problemas de “creep” usando uma combinação de

elementos quadrialterais e triangulares lineares com aplicação para secagem de madeira usada em construções.

O método de elementos finitos por volumes de controle tem sido aplicado também para problemas de transferência de calor radiativa. Meng, Mckenty, Elkaim & Camarero (1992) aplicaram para solução da equação radiativa em cavidades bidimensionais retangulares e axissimétrica, num meio que emite e absorve. Rousse, Gautier & Sacadura (1998) apresentaram um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para solução da equação de transferência radiativa testando vários esquemas de interpolação, em processos de combustão turbulenta em geometria irregular. Lin & Ebadian (1998) analisaram um problema de convecção forçada laminar combinada com radiação, com fluido participante, num tubo curvo.

Muitos outros trabalhos sobre simulação numérica de transferência de calor e escoamentos de fluidos existem na literatura. Vários deles tratam da solução direta das equações de Navier-Stokes, que no caso de escoamentos turbulentos requer malhas muito finas e pode ter um custo muito elevado em problemas práticos. Os métodos numéricos usados são, basicamente, o de diferenças finitas, ou de volumes finitos, ou de elementos finitos. Em vários periódicos são publicados, anualmente, muitos trabalhos sobre o tema em questão, de forma que uma revisão completa de todos seria impraticável.

Muita ênfase tem sido dada, também, aos modelos de turbulência, necessários, do ponto de vista prático, quando se usa o modelo de decomposição de Reynolds para obtenção das equações das grandezas médias. Entretanto, a conclusão a que se chega, pelos dados da literatura, é que não existe nenhum método nem modelo perfeito para todos os problemas e sobretudo no campo da modelagem de turbulência talvez alguma coisa possa ainda ser feita de modo a se tratar com maior exatidão os problemas reais. Entretanto, há um sentimento de que com o crescimento acentuado da capacidade de processamento e de armazenamento dos computadores, talvez, em uma década, os modelos de turbulência não serão mais utilizados para cálculos de escoamentos em muitos casos.

## 1.4 Desenvolvimento do Trabalho e Algumas Considerações Adicionais

Neste primeiro capítulo procurou-se delinear os objetivos principais e fazer uma revisão da literatura apresentando vários trabalhos onde métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) foram utilizados como ferramentas para solução dos problemas. São aplicações diversas mostrando a potencialidade do método. No capítulo 2, apresenta-se o modelo matemático constituído pelas equações de Navier-Stokes as quais são adimensionalizadas de modo que mesmo as equações nas variáveis adimensionais possam ser usadas para se resolver os problemas considerando as variáveis com dimensões. No capítulo 3, faz-se uma discussão mais detalhada dos dois principais métodos usados, atualmente, para análise dinâmica de escoamentos com o objetivo de auxiliar o leitor a compreender melhor o estágio atual de desenvolvimento de simulações computacionais de escoamentos de fluidos, bem como, ver mais detalhadamente as diferenças entre os métodos. O objetivo principal, no capítulo 3, é apresentar o desenvolvimento do modelo numérico, seguindo-se alguns passos básicos para implementação de um modelo numérico. No capítulo 4, apresenta-se resultados para problemas de escoamentos considerados como padrões, no intuito de mostrar a validação do código computacional construído com base no modelo numérico. Esses escoamentos são: escoamento numa cavidade quadrada induzido pelo movimento da parede superior; escoamento num canal com uma expansão assimétrica, conhecido como escoamento num degrau; escoamento ao redor de um cilindro de seção circular e escoamento num canal com um obstáculo de seção quadrada. Os testes feitos neste trabalho, embora sejam problemas já há muito investigados, geralmente, são os problemas tomados como padrões para validação de modelos numéricos. No capítulo 5, apresenta-se resultados para problemas de escoamentos não isotérmicos: escoamento por convecção forçada e por convecção natural numa cavidade quadrada. E finalmente, no capítulo 6, apresenta-se as conclusões e possíveis desdobramentos na continuação deste trabalho.

A opção por se utilizar variáveis primitivas ( $u, v, p$ ) visa a extensão natural do método para a solução de problemas tridimensionais bem como para estudos de casos de escoamentos turbulentos. A formulação em função de corrente-vorticidade utilizada em alguns trabalhos, é difícil de ser implementada para escoamentos tridimensionais e a fixação de condições de contorno para vorticidade pode introduzir ainda mais dificuldades. Na medida do possível



procurou-se optar pela simplicidade. A idéia básica foi primeiro construir um protótipo de código computacional que poderá ser modificado facilmente e melhorado no futuro, para se analisar problemas de escoamentos muito mais complexos do que os considerados neste trabalho. A meta principal, nesta etapa, foi mais em desenvolver o modelo numérico, conhecê-lo mais detalhadamente e aplicá-lo para simulação de problemas, relativamente, sem muita complexidade geométrica.

## CAPÍTULO 2

### Modelo Matemático

Neste capítulo é apresentado o modelo matemático para escoamentos incompressíveis, transientes, de fluidos viscosos, com transferência de calor e/ou massa. A formulação é bem conhecida na literatura e as equações são escritas de modo a permitir tanto a simulação de escoamentos em variáveis adimensionais quanto em variáveis com dimensões. Além do mais, na forma como as equações são escritas elas servem tanto para escoamentos laminares quanto turbulentos, embora este último caso não tenha sido abordado neste trabalho .

#### 2.1 Formulação Matemática

Os escoamentos de fluidos podem ser descritos matematicamente, pelas equações de conservação de massa, conservação de quantidade de movimento e conservação de energia. A dedução daquelas equações estão disponíveis nos livros de mecânica dos fluidos.

Na obtenção das equações matemáticas, as seguintes hipóteses são assumidas:

- 1) o efeito de variação da densidade é considerado apenas nas forças gravitacionais (hipótese de Boussinesq), sendo a densidade expressa por

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad ; \quad (2.1)$$

onde  $\rho_0$ ,  $\beta$  e  $T$  são: uma densidade de referência em  $T_0$ , o coeficiente de expansão térmica e a temperatura respectivamente.  $T_0$  é uma temperatura de referência.

- 2) o fluido é considerado como newtoniano;
- 3) poderá ocorrer rotação constante do sistema de referência (efeito de forças centrífugas e de Coriolis);
- 4) os efeitos de dissipação viscosa são desprezados na equação de energia.

Com as hipóteses consideradas, as equações governantes podem ser escritas numa forma genérica em notação tensorial cartesiana como:

#### **Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial \rho^* u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho^* u_i}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + S_{u_i}. \quad (2.3)$$

#### **Equação de transporte de um escalar qualquer:**

$$\frac{\partial \rho^* \phi}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi. \quad (2.4)$$

Nas equações (2.2) a (2.4),  $u_i$  representa os componentes de velocidades ao longo dos eixos coordenados  $x_i$ ;  $p$  é a pressão;  $\rho$  é a massa específica;  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\Gamma_\phi$  é uma propriedade física que depende de qual variável  $\phi$  está sendo transportada;  $S_{u_i}$  e  $S_\phi$  são termos fontes que podem englobar outros termos, inclusive diferenciais, não escritos explicitamente. Na equação (2.2), embora não seja necessário, a massa específica foi deixada dentro da derivada parcial por conveniência na implementação do programa numérico. Isto pode

facilitar, no futuro, a inclusão do termo transiente na equação de continuidade para casos de escoamentos compressíveis. Os asteriscos nas equações anteriores são escritos por conveniência na adimensionalização posterior das mesmas. O termo fonte,  $S_{u_i}$ , na equação (2.3) pode englobar efeitos de convecção natural bem como de rotação do sistema de coordenadas, sendo dado por

$$S_{u_i} = -\rho^* \left[ g_i^* (1 - \beta^* (T - T_0)) + 2\varepsilon_{ijt} \omega_j u_t + (\omega_j x_j) \omega_i - (\omega_j \omega_j) x_i \right]. \quad (2.5)$$

Onde  $g_i^*$  é o componente da aceleração da gravidade na direção eixo  $x_i$  e  $\omega_j$  é o componente da velocidade angular de rotação do escoamento, se for o caso, em torno do eixo  $x_j$ .

Na equação (2.4) a variável  $\phi$  pode representar quaisquer variáveis escalares tais como: temperatura,  $T$ ; energia cinética turbulenta; taxa de dissipação viscosa da energia cinética turbulenta; taxa de dissipação específica da energia cinética turbulenta ou concentração de um contaminante num meio.

## 2.2 Adimensionalização das Variáveis nas Equações

Uma dificuldade de implementação de cálculo de escoamentos representados, matematicamente, pelas equações (2.2) a (2.5), está em se encontrar as propriedades físicas para os mais diversos fluidos. Desta forma, muitas vezes se opta por soluções das equações em variáveis adimensionalizadas, sendo que os parâmetros de referência para adimensionalização devem ser definidos de acordo com as características geométricas, cinemáticas e dinâmicas de cada caso considerado. No caso de escoamentos por convecção forçada ou mista, pode-se definir como grandezas para adimensionalização as seguintes:

$$X_i = \frac{x_i}{L}; \quad U_i = \frac{u_i}{u_0}; \quad P = \frac{p - p_0}{\rho_0 u_0^2}; \quad t = \frac{t^* u_0}{L}; \quad \Phi = \frac{\phi}{\phi_0} \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad (2.6a)$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}; \quad \beta = \frac{\beta^*}{\beta_0}; \quad \Gamma_\phi = \frac{\Gamma_\phi^*}{\Gamma_0} \quad g_i = \frac{g_i^*}{g} \quad \Omega_j = \frac{L\omega_j}{u_0} \quad (2.6b)$$

onde  $L$  é um comprimento característico do domínio e  $u_0$  é uma velocidade característica do escoamento.

Usando as grandezas adimensionais, as equações (2.2) a (2.4) podem ser reescritas como a seguir:

**Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial X_i} = 0 \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + S_{u_i}. \quad (2.8)$$

**Equação de transporte de um escalar qualquer:**

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \Phi}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\Gamma_\phi}{\text{Re}} \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right) + S_\phi. \quad (2.9)$$

O termo fonte na equação (2.8) pode ser reescrito na forma adimensional como

$$S_{u_i} = -\rho \left[ -\frac{Gr}{(\text{Re})^2} g_i \beta \theta + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k U_l + (\Omega_j X_j) \Omega_i - (\Omega_j \Omega_j) X_i \right] \quad (2.10)$$

As equações (2.7) a (2.9), embora, estejam escritas em variáveis adimensionais, podem ser utilizadas para cálculo dos escoamentos nas variáveis com dimensões. Basta para isto fazer Re

unitário naquelas equações. Para cálculo dos escoamentos usando as variáveis adimensionais basta fazer as propriedades físicas unitárias (desde que elas não sejam variáveis, por exemplo com a temperatura) naquelas equações.

Na equação (2.8) a viscosidade efetiva é definida na forma:

$$\mu_e = \begin{cases} \mu & \text{para escoamentos laminares} \\ \mu + \mu_t & \text{para escoamentos turbulentos} \end{cases} \tag{2.11}$$

O cálculo de  $\mu_t$  na equação (2.11) envolve, por exemplo, o uso de modelos de turbulência, o que na maioria dos casos aumenta, significativamente, a complexidade de implementação do modelo numérico. No caso do presente trabalho o efeito de turbulência não é levado em consideração. Desta forma,  $\mu_t$  é nulo nas equações do modelo numérico.

Algumas variáveis representadas pela equação (2.9) são mostradas na Tabela 2.1. Os parâmetros adimensionais: número de Reynolds,  $Re$ ; número de Prandtl,  $Pr$ ; número de Grashof,  $Gr$  e números de Schmidt,  $Sc$ , são definidos em função das propriedades de referência na forma como se segue

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu_0} \quad Pr = \frac{\mu_0 c_p}{k} \quad Gr = \frac{\rho_0^2 g \beta_0 \Delta T L^3}{\mu_0^2} \quad Sc = \frac{\mu_0}{\rho_0 D_{12}} \tag{2.12}$$

Tabela 2.1 Variáveis, propriedades e termos na equação (2.9)

| Nome         | $\phi$                                | $\Gamma_\phi$                         | $S_\phi$         |
|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------|
| Temperatura  | $\frac{\overline{T} - T_0}{\Delta T}$ | $\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$ | Geração de calor |
| Concentração | C                                     | $\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t}$ | Reações químicas |

As propriedades ainda não definidas são: o calor específico a pressão constante,  $c_p$ ; a condutividade térmica,  $k$ ; e a difusividade de uma espécie 1 numa espécie 2,  $D_{12}$  no caso de transferência de massa.

## **CAPÍTULO 3**

### **Desenvolvimento do Modelo Numérico**

Neste capítulo é desenvolvido o modelo numérico para discretização das equações apresentadas, de forma genérica, no capítulo 2. Antes, porém, de apresentar o modelo numérico deste trabalho; descreve-se os principais métodos numéricos para simular escoamentos de fluidos, no item 3.1 e apresenta-se um breve resumo do método de resíduos ponderados; base dos principais métodos numéricos; no item 3.2.

#### **3.1 Uma Descrição de Métodos Numéricos Disponíveis para Escoamentos de Fluidos e Transferência de Calor**

O objetivo de um método numérico é obter valores das variáveis dependentes tais como velocidade, pressão e temperatura em pontos discretos dentro de um domínio físico. A relação entre estes valores nodais é determinada pela discretização algébrica das equações, que são derivadas das equações diferenciais em conjunto com funções de interpolação apropriadas para as variáveis dependentes. As equações discretizadas são então resolvidas por algum método para solução de sistema de equações. O que diferencia um método numérico do outro é a maneira em que as discretizações algébricas (transformações de equações integradas em equações algébricas)



das equações são obtidas. Saabas (1991) faz uma discussão detalhada dos principais métodos para solução de problemas de escoamentos de fluidos e transferência de calor. Duas das principais classes de métodos para obtenção de soluções para problemas de escoamentos de fluidos e outros de convecção-difusão são métodos de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM); Patankar (1980); e métodos de elementos finitos (FEM) Connor & Brebbia (1976); Chung (1978) e Baker (1983). Ambos são subconjuntos do método de resíduos ponderado (MWR), cuja descrição pode ser encontrada em livros de elementos finitos, por exemplo, em Connor & Brebbia (1976).

Os métodos de elementos finitos, no caso de escoamentos bidimensionais, usualmente, requerem: (1) discretização do domínio de cálculo em elementos quadrilaterais e/ou triangulares; (2) prescrição de funções de interpolação baseadas no elemento; (3) derivação de equações discretizadas usando uma forma apropriada do método de resíduos ponderados (WMR); (4) obtenção, considerando cada elemento, dos coeficientes das equações discretizadas; e (5) a solução das equações discretizadas resultantes. O método de elementos finitos convencional para escoamentos de fluidos e transferência de calor emprega o método de resíduos ponderados de Galerkin para derivar as equações discretizadas, onde a função peso é a mesma função de interpolação.

Os Métodos de Volumes Finitos (FVMs); Patankar (1980) e Maliska (1996); podem ser definidos como métodos de resíduos ponderados do tipo subdomínio. Aqui o domínio de solução é dividido em um número de volumes de controle que não se sobrepõem; que coletivamente preenche completamente e exatamente o domínio, e são tais que existe um nó dentro de cada volume de controle. Para cada nó, a função peso é atribuído o valor unitário sobre o volume de controle (subdomínio) e zero fora. As equações diferenciais governantes são, deste modo, integradas sobre cada volume de controle. As equações discretizadas são obtidas através de aproximações algébricas para as equações integrais de conservação. Na obtenção das equações

algébricas, as variáveis dependentes são interpoladas assumindo-se perfis apropriados entre os diferentes pontos da malha. Nos métodos de diferenças finitas baseados em volume de controle (CVFDMs), aproximações algébricas para as integrais dos fluxos convectivos e difusivos são usualmente obtidas pelo emprego de funções de interpolação localmente unidimensionais. Diferentes perfis podem ser usados para aproximar diferentes termos na equação integral de conservação, Patankar (1980). Nestes métodos são satisfeitos os princípios de conservação numérica da massa, da quantidade de movimento e de energia, sobre cada volume de controle, e daí sobre todo o domínio. Esta formulação facilita a interpretação do significado físico dos vários termos nas equações discretizadas.

O método de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM) pode ser ainda subdividido em formulação com malha ortogonal (CVFDM-OG) e malha não-ortogonal (CVFDM-NOG). Entretanto os métodos de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDMs) são considerados mais apropriados para domínios sem muita complexidade geométrica para os quais malhas quase ortogonais e não muito distorcidas podem ser geradas. Isto é porque em malhas não ortogonais, as linhas da malha não são normais às faces dos volumes de controle, e daí a precisão das aproximações algébricas para os fluxos integrais; resultante da integração das equações governantes; pode deteriorar. Deve ser notado que os métodos de elementos finitos (FEMs) não sofrem tanto desta limitação. Sem dúvida, a potencialidade do método de elementos finitos (FEM) reside em sua habilidade para discretizar domínios complexos de cálculo, especialmente, domínios de formas irregulares e geometrias tridimensionais.

Os métodos de elementos finitos baseados em volumes de controle (CVFEMs) combinam aspectos atrativos tanto do método de elementos finitos de Galerkin (FEM) quanto do método de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDM). Os passos definidos previamente para implementação do método de elementos finitos (FEM) são novamente seguidos para derivar as

equações de discretização algébricas. Deste modo, para cada nó na malha de elementos finitos, existe um volume de controle englobando aquele nó, dentro do qual atribui-se o valor unitário para a função peso. Fora do volume de controle a função peso é nula. Consequentemente, como no caso dos métodos de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs), os métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) envolvem a imposição de leis físicas de conservação integral, tais como conservação da massa, da quantidade de movimento e de energia, sobre volumes de controle finitos dentro do domínio de cálculo. Portanto, os métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) também satisfazem princípios de conservação global.

Os métodos de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs) e os métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) são ambos métodos de resíduos ponderados (MWRs) do tipo subdomínio. Aliás, eles são freqüentemente considerados membros do conjunto de métodos chamados Métodos de Volumes Finitos (FVMs). Uma diferença entre os métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) e os métodos de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs) está na maneira como as variáveis dependentes são interpoladas. Nos métodos de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs), as variáveis dependentes são usualmente interpoladas por funções localmente unidimensionais definidas ou ao longo de linha da malha, ou linhas orientadas na direção do escoamento. Por outro lado, nos métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs), as variáveis dependentes são usualmente interpoladas por funções multidimensionais definidas dentro dos elementos finitos que são usados para discretizar os domínios de cálculo. Outra diferença entre os dois métodos, é na escolha do sistema de coordenadas usado para definir as componentes de velocidade. Para sistemas de coordenadas não cartesianos, termos relacionados com a curvatura aparecem nas equações diferenciais devido as transformações das equações de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas. Em ambas formulações malha ortogonal (OG) e malha não ortogonal (NOG), os termos de curvatura podem ser

complicados, e podem conduzir à perda de precisão na solução numérica das equações governantes. A maioria dos métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) usa o sistema de coordenadas cartesianas e daí os termos relacionados com curvatura não estão envolvidos. É por causa destas diferenças fundamentais, que o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) pode conduzir a soluções precisas das equações governantes em domínios com complexidade geométrica.

Os métodos de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs) específicos e os métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs) poderiam diferir em outros detalhes, tais como a escolha de volumes de controle, esquemas deslocados e não-deslocados, formulações com variáveis co-localizadas denominadas de formulação de ordem igual ou formulações com variáveis desencontradas ou de ordem desigual; e procedimentos usados para resolver as equações de discretização.

A aplicação do método de elementos finitos com formulação por volumes de controle, conforme descrito por Saabas (1991), é feita nos seguintes passos básicos: (1) discretização do domínio em elementos finitos; (2) posterior discretização do domínio em volumes de controle com cada volume de controle englobando um nó; (3) integração das equações nos volumes de controle; (4) escolha de funções de interpolação para as variáveis dentro das integrais e derivação de um sistema algébrico de equações e (5) escolha de um método para solução do sistema algébrico resultante.

Neste trabalho, é desenvolvido um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), com base no elemento definido anteriormente. São considerados apenas casos de problemas em domínios bidimensionais, por razões de simplicidade. Em muitos casos, domínios bidimensionais podem representar com razoável precisão os modelos de equipamentos onde os escoamentos ocorrem.

### 3.2 Um Resumo sobre o Método de Resíduos Ponderados

Para que o leitor possa ter mais facilidade em distinguir os métodos de elementos finitos convencionais (FEMs) do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs), apresenta-se a seguir um resumo sobre o método de resíduos ponderados o qual se constitui na base dos principais métodos numéricos tais como: métodos de volumes finitos e métodos de elementos finitos. Considere, por exemplo, uma equação diferencial escrita numa forma compacta como:

$$L(\phi) = 0; \quad (3.1)$$

com condições de contorno apropriadas.  $L$  é um operador diferencial, por exemplo,  $L$  pode ser o operador definido por

$$L() = \frac{\partial()}{\partial t} + u_j \frac{\partial()}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial()}{\partial x_j} \right) + S. \quad (3.2)$$

Se  $\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^N N_i \phi_i$  for uma aproximação para  $\phi$ , onde  $N_i$  são funções de interpolação; pode-se definir o resíduo como  $R = L(\tilde{\phi})$ . Se a função de aproximação representa exatamente a função solução procurada, o resíduo deve ser nulo.

As equações discretizadas podem ser obtidas fazendo o resíduo ponderado ser zero na forma:

$$\int_V WR dV = 0. \quad (3.3)$$

O número de funções de ponderação ou funções peso;  $W$ ; deve ser igual ao número de  $\phi_i$  desconhecidas, obtendo-se um sistema algébrico de dimensões  $N$  por  $N$ . A integração por partes da equação integral do resíduo e a substituição das funções de interpolação dentro da equação resultante conduz a obtenção das equações discretizadas.

Alguns métodos derivados do método de resíduos ponderados (MWR), em função de como são definidas as funções peso  $W$ , são descritos, resumidamente, a seguir:

#### **Método de Elementos Finitos de Bubnov-Galerkin:**

$$\text{MWR com } W_i = N_i \text{ resultando } \int_V N_j L(N_i) \phi_i dV = 0. \quad (3.4)$$

As funções de interpolação  $N_i$  são definidas para cada elemento (triangular, quadrilateral) como será mostrado posteriormente.

#### **Método de Elementos Finitos de Petrov-Galerkin:**

$$\text{MWR com } W_i = N_i + p \text{ resultando } \int_V (N_j + p) L(N_i) \phi_i dV = 0. \quad (3.5)$$

Com  $p$  sendo uma perturbação para fazer um determinado tipo de “upwind”. Swaminathan & Voller (1992b) definem  $p$  na forma:

$$p = A \nabla \cdot (\vec{U} W_i); \quad (3.6)$$

onde  $A$  depende do número de Peclet definido no elemento e do passo de tempo e pode ser encontrado no trabalho de Swaminathan & Voller (1992b).

### Método de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados:

$$\text{MWR com } W_i = \frac{\partial R}{\partial \phi_i} \text{ o que conduz a } \int_V \frac{\partial R^2}{\partial \phi_i} dV = 0. \quad (3.7)$$

### Método de Elementos Finitos de Colocação:

MWR com  $W_i = \delta(x_i, y_i, z_i)$ , onde  $\delta$  é a função delta de Dirac definida por

$$\int_V f(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) dV = f(\bar{\xi}). \quad (3.8)$$

A partir das equações (3.3) e (3.8) obtém-se:

$$\int_V \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) R dV = 0 \text{ ou } R(x_i, y_i, z_i) = 0. \quad (3.9)$$

### Métodos de Subdomínio:

$$\text{MWR com } W_i = \begin{cases} 1 & \text{no subdomínio} \\ 0 & \text{fora do subdomínio} \end{cases} \text{ o que resulta } \int_V R dV = 0. \quad (3.10)$$

Esta última classe inclui os métodos de volumes finitos (FVMs); de diferenças finitas por volumes de controle (CVFDMs) e de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs).

## 3.3 Escoamentos Bidimensionais com Transferência de Calor e/ou Massa

As equações que governam escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos foram apresentadas no capítulo 2, e por conveniência, são novamente reescritas a seguir.

**Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial X_i} = 0 \text{ e} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + S_{u_i}. \quad (3.12)$$

**Equação de transporte de um escalar qualquer:**

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \Phi}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\Gamma_\Phi}{\text{Re}} \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right) + S_\Phi. \quad (3.13)$$

As condições de contorno, geralmente, encontradas são do tipo:

$$U_i = \bar{U}_i \text{ sobre } S_1; \quad (3.14a)$$

$$\nu \frac{\partial U_i}{\partial \bar{n}} - p \bar{n} = \bar{g} \text{ sobre } S_2; \quad (3.14b)$$

$$\Phi = \bar{\Phi}; \text{ em } S_3 \text{ e} \quad (3.14c)$$

$$\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} - h \Phi = C \text{ sobre } S_4. \quad (3.14d)$$

As condições iniciais são:

$$U_i(\vec{X}, 0) = U_0(\vec{X}) \text{ em } \Omega \text{ e} \quad (3.15a)$$



$$\Phi(\vec{X},0) = \Phi_0(\vec{X}) \text{ em } \Omega . \quad (3.15b)$$

Nas equações (3.14) e (3.15),  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  são áreas nas fronteiras do domínio e  $\Omega$  representa o volume do domínio, onde o problema é definido.

### 3.4 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais

Para discretização de domínios bidimensionais pelo método de elementos finitos, os tipos de elementos mais utilizados são triângulos e/ou quadriláteros. Segundo Baker & Pepper (1991), elementos triangulares são os mais simples dos disponíveis para geometrias bidimensionais e se adaptam bem a contornos irregulares. Entretanto, elementos quadriláteros quadráticos também podem ser deformados para representarem contornos irregulares e em alguns casos pode ser conveniente uma combinação dos dois tipos de elementos; Zienkiewicz & Morgan (1993); como mostrado na Figura 3.1. A discretização aqui apresentada serve para ambos tipos de elementos. O elemento finito principal neste trabalho é um elemento quadrilateral quadrático com nove pontos nodais. Este elemento possui a vantagem de poder ser deformado para representar com razoável exatidão fronteiras com curvatura, em domínios com complexidade geométrica.

A Figura 3.2 ilustra elementos triangulares e quadriláteros subdivididos em subvolumes de controle. Cada elemento triangular com nós nos vértices pode ser composto por três subvolumes de controle, obtidos, por exemplo, unindo-se seu centróide aos pontos médios dos lados como nos primeiros trabalhos, ou por dois subvolumes de controle, simplesmente, unindo-se os pontos médios dos lados como no trabalho de Saabas (1991, 1994a). Os elementos quadriláteros com quatro nós são compostos por quatro subvolumes de controle. Desta forma um volume de controle em torno de um nó será um polígono no plano composto pelos lados dos subvolumes de controle de cada elemento que compartilha aquele determinado nó.

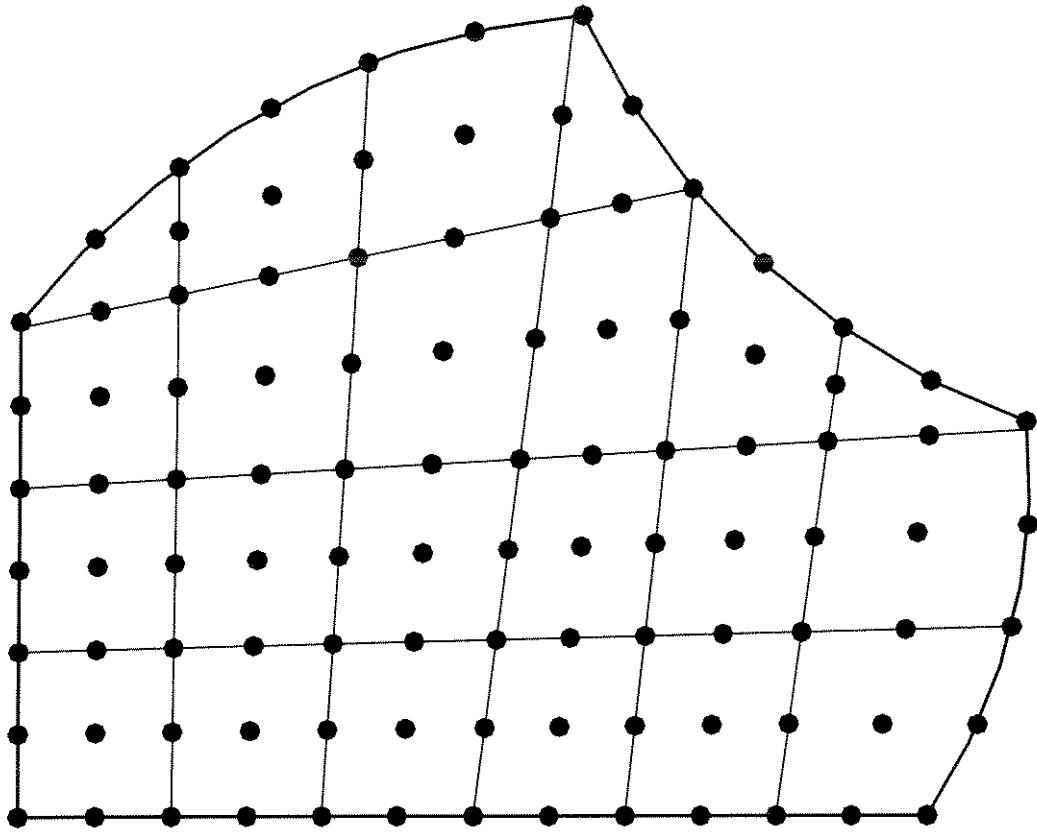


Figura 3.1. Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros.

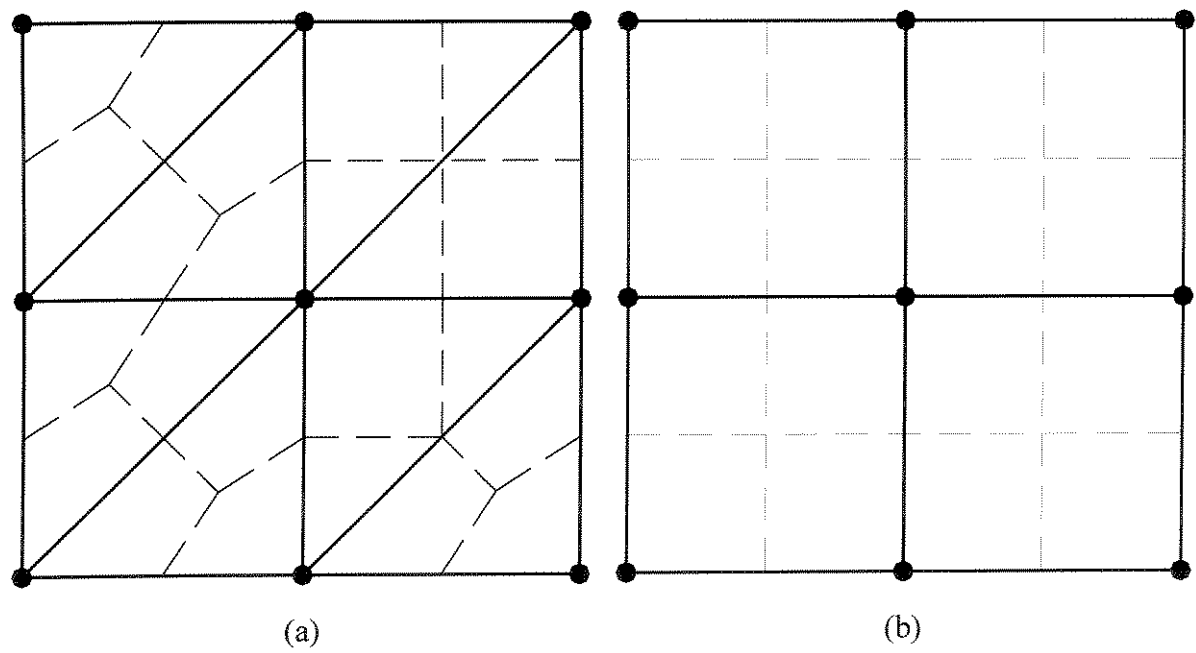


Figura 3.2. Elementos subdivididos em subvolumes de controle. (a) Elementos triangulares. (b) Elementos quadriláteros.

O número de lados do volume de controle dependerá de quantos elementos compartilham um determinado nó. Para nós de fronteira do domínio, geralmente, o volume de controle será composto por dois subvolumes de controle.

Um determinado elemento será, em geral, subdividido em um número de subvolumes de controle igual ao seu número de nós.

### 3.5 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle

Para obtenção das equações discretizadas, as equações diferenciais parciais governantes devem ser integradas nos subvolumes de controle dentro de cada elemento. Em primeiro lugar, é feita a discretização no tempo. Vários esquemas de discretização no tempo podem ser usados: desde um esquema explícito até um esquema totalmente implícito. O esquema totalmente explícito possui limitação quanto ao passo de tempo, por razões de estabilidade da solução. Já no esquema totalmente implícito, o passo de tempo pode ser fixado de acordo com a precisão da solução que se deseja. A princípio, neste esquema, não existe limitação do passo de tempo, sendo o mesmo incondicionalmente estável.

A discretização no espaço é feita a partir da substituição das funções de interpolação nas equações integrais de conservação. Os passos básicos para obtenção das equações discretizadas são descritos a seguir.

#### 3.5.1 Discretização no Tempo

No presente estudo, a discretização no tempo é definida por um parâmetro  $\theta$  que indicará se o esquema será explícito ou implícito. Sejam  $U_i^n$ ,  $P^n$  e  $\Phi^n$ , os campos de velocidade, pressão e uma grandeza escalar qualquer (temperatura, concentração, grandezas turbulentas) no tempo  $t^n$ ,

onde  $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ . A partir de  $U_i^n$  e  $\Phi^n$ , e condições de contornos especificadas, os campos  $U_i^{n+1}$ ,  $P^{n+1}$  e  $\Phi^{n+1}$  são calculados pelas equações a seguir:

$$\frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} + \theta \left( \frac{\partial(\rho U_j U_i)^{n+1}}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^{n+1}}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) = \theta (S_{u_i}^*)^{n+1} + R_{u_i}^n; \quad (3.16a)$$

onde

$$R_{u_i}^n = \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left( \frac{\partial(\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^n}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial P^n}{\partial X_i} - (S_{u_i}^*)^n \right); \quad (3.16b)$$

com a restrição da conservação da massa dada por

$$\frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} = 0 \quad (3.17)$$

e

$$\frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} + \theta \left( \frac{\partial(\rho U_j \Phi)^{n+1}}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{(\Gamma_\phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^{n+1}}{\partial X_j} \right) \right) = +\theta (S_\phi)^{n+1} + R_\phi^n; \quad (3.18a)$$

onde

$$R_\phi^n = \frac{(\rho \Phi)^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left( \frac{\partial(\rho U_j \Phi)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{(\Gamma_\phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^n}{\partial X_j} \right) - (S_\phi)^n \right). \quad (3.18b)$$

Na equação (3.16), o termo fonte com um asterisco;  $S_{u_i}^*$ ; engloba a soma dos dois últimos termos na equação (3.12)

Alguns valores, geralmente, adotados para  $\theta$  são fornecidos por Reddy (1993):

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{para esquema explícito [condicionalmente estável, ordem de acurácia = } O(\Delta t)] \\ 1/2 & \text{para esquema Crank - Nicolson [estável, ordem de acurácia = } O((\Delta t)^2)] \\ 2/3 & \text{para esquema de Galerkin [estável, ordem de acurácia = } O((\Delta t)^2)] \\ 1 & \text{para esquema totalmente implícito [estável, ordem de acurácia = } O(\Delta t)] \end{cases} \quad (3.19)$$

Nas equações (3.16) e (3.18), o passo de tempo para o esquema explícito pode ser fixado de acordo com a natureza da equação (parabólica, elíptica ou hiperbólica). Hirsch (1988) apresenta várias maneiras de se analisar a estabilidade de soluções e de como fixar o passo de tempo para satisfazer esses critérios de estabilidade.

### 3.5.2 Discretização Espacial das Equações - Aplicação de um Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle (CVFEM)

A discretização espacial das equações, no método de elementos finitos, é feita a partir da formulação fraca das mesmas. Esta forma fraca das equações é obtida tomando-se o produto escalar dos termos das equações por funções peso e integrando-se por partes sobre o domínio. Isto, na realidade, corresponde ao método de resíduos ponderados, como demonstrado no item (3.2). No caso de métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEMs), a função peso é feita constante e unitária dentro do volume de controle. Assim, a partir da integração por partes das equações (3.16) a (3.18) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dV + \oint_A \theta \left[ (\rho U_j U_i)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^{n+1}}{\partial X_j} \right] n_j dA + \int_V \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV = \\ & = \theta \int_V (S_{u_i}^*)^{n+1} dV + \int_V (R_{u_i})^n dV \end{aligned} \quad ;(3.20a)$$

onde

$$\int_V R_{u_i}^n dV = \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left[ (\rho U_j U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^n}{\partial X_j} \right] n_j dA -$$

$$- \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + (1-\theta) \int_V (S_{u_i}^*)^n dV \quad ; \quad (3.20b)$$

$$\int_V \frac{\partial (\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dV = 0 ; \quad (3.21)$$

e

$$\int_V \frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} dV + \oint_A \theta \left[ (\rho U_j \Phi)^{n+1} - \frac{(\Gamma_\Phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^{n+1}}{\partial X_j} \right] n_j dA = \int_V \theta (S_\phi)^{n+1} dV + \int_V (R_\phi)^n dV ; (3.22a)$$

onde

$$\int_V (R_\phi)^n dV = \int_V \frac{(\rho \Phi)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left[ (\rho U_j \Phi)^n - \frac{(\Gamma_\Phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^n}{\partial X_j} \right] n_j dA + \int_V (1-\theta) (S_\phi)^n dV .$$

$$(3.22b)$$

Nas equações (3.20) a (3.22),  $n_j$  representa os componentes do vetor normal para fora das áreas de fronteiras dos volumes de controle, apontando na direção do eixo  $X_j$ . Este vetor é definido como

$$\vec{n} dA = (n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j}) dA \quad ; \quad (3.23a)$$

resultando para problemas bidimensionais com integração no sentido anti-horário:

$$\vec{n} dA = dy \vec{i} - dx \vec{j} \quad . \quad (3.23b)$$

Para se obter o sistema algébrico de equações, as equações (3.20) a (3.22) são aplicadas para cada subvolume de controle dentro de um elemento. O sistema completo de equações algébricas é obtido somando-se a contribuição de elemento por elemento. Este procedimento facilita a obtenção das matrizes globais e em nenhuma forma afeta o princípio de conservação; uma vez que quando for levada em consideração a contribuição de cada elemento para todos os nós, a contribuição para os volumes de controle completos terá sido feita. O procedimento adotado na maioria dos trabalhos é integrar as equações para um volume de controle completo similar ao que é feito no método de volumes finitos. No caso deste trabalho foi seguido o procedimento adotado no método clássico de elementos finitos. A diferença básica será na forma das matrizes globais, o que definirá a melhor maneira de se resolver o sistema global.

### 3.5.2.1 Funções de Interpolação

No método de elementos finitos as variáveis desconhecidas podem ser interpoladas, dentro de um elemento, na forma:

$$U_i^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha}^e(\Omega) U_{i\alpha}^e(t); \quad (3.24)$$

$$P^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha'=1}^{NNEL} N_{\alpha'}^e(\Omega) P_{\alpha'}^e(t) \text{ e} \quad (3.25)$$

$$\Phi^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha}^e(\Omega) \Phi_{\alpha}^e(t). \quad (3.26)$$

onde  $N_{\alpha}$  e  $N_{\alpha'}$  são funções de interpolação bidimensionais dentro de um elemento; vide Tabelas 3.1 e 3.2;  $U_{i\alpha}^e$ ,  $P_{\alpha'}^e$  e  $\Phi_{\alpha}^e$  são os valores nodais da velocidade no nó  $\alpha$ , pressão no nó  $\alpha'$  e um escalar qualquer no nó  $\alpha$  de um elemento finito, respectivamente. Usa-se  $\alpha'$  para considerar que a

pressão pode ser interpolada por funções de interpolação de ordem diferente daquela usada para interpolar a velocidade ou outro escalar qualquer. Geralmente, a pressão é interpolada por funções de ordem mais baixa do que as funções de interpolação para a velocidade, para evitar valores não realísticos da pressão.

Tabela 3.1. Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 4 nós.

| $\alpha$ | $N_\alpha$                  | $\partial N_\alpha / \partial \xi$ | $\partial N_\alpha / \partial \eta$ |
|----------|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1        | $\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$ | $\frac{-(1-\eta)}{4}$              | $\frac{-(1-\xi)}{4}$                |
| 2        | $\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$ | $\frac{(1-\eta)}{4}$               | $\frac{-(1+\xi)}{4}$                |
| 3        | $\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$ | $\frac{(1+\eta)}{4}$               | $\frac{(1+\xi)}{4}$                 |
| 4        | $\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$ | $\frac{-(1+\eta)}{4}$              | $\frac{(1-\xi)}{4}$                 |

Tabela 3.2. Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 9 nós.

| $\alpha$ | $N_\alpha$                          | $\partial N_\alpha / \partial \xi$ | $\partial N_\alpha / \partial \eta$ |
|----------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1        | $\frac{(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$  | $\frac{(1-2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$   | $\frac{(1-\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$     |
| 2        | $\frac{-(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2}$  | $(1-\eta)\xi\eta$                  | $\frac{-(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2}$     |
| 3        | $\frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$ | $\frac{-(1+2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$  | $\frac{-(1+\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$    |
| 4        | $\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$    | $\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2}$     | $-(1+\xi)\xi\eta$                   |
| 5        | $\frac{(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$  | $\frac{(1+2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$   | $\frac{(1+\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$     |
| 6        | $\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$   | $-(1+\eta)\xi\eta$                 | $\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$      |
| 7        | $\frac{-(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$ | $\frac{-(1-2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$  | $\frac{-(1-\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$    |
| 8        | $\frac{-(1-\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$   | $\frac{-(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2}$    | $(1-\xi)\xi\eta$                    |
| 9        | $(1-\xi^2)(1-\eta^2)$               | $-2(1-\eta^2)\xi$                  | $-2(1-\xi^2)\eta$                   |

Considera-se, agora, um determinado subvolume de controle associado ao nó  $\alpha$  de um elemento. A discretização das equações (3.20) a (3.22) é feita, no presente trabalho, considerando



elementos quadrilaterais com 9 nós. Este desenvolvimento é baseado principalmente nos trabalhos de Schneider & Raw (1987a, b), Raw et al. (1985) e Schneider (1988). As velocidades e demais grandezas escalares, exceto a pressão, são interpoladas usando-se os 9 nós do elemento. A pressão é interpolada usando-se apenas os 4 nós de cantos, no elemento. Este método de se interpolar a pressão por funções de interpolação diferentes das funções de interpolação para velocidade é conhecido como formulação mista e é equivalente da interpolação por malha deslocada em volumes finitos. Um elemento finito e seus respectivos subvolumes de controle (indicados por linhas tracejadas) são mostrados na Figura 3.3. Cada subvolume de controle é identificado pelo número do nó ao qual ele está associado.

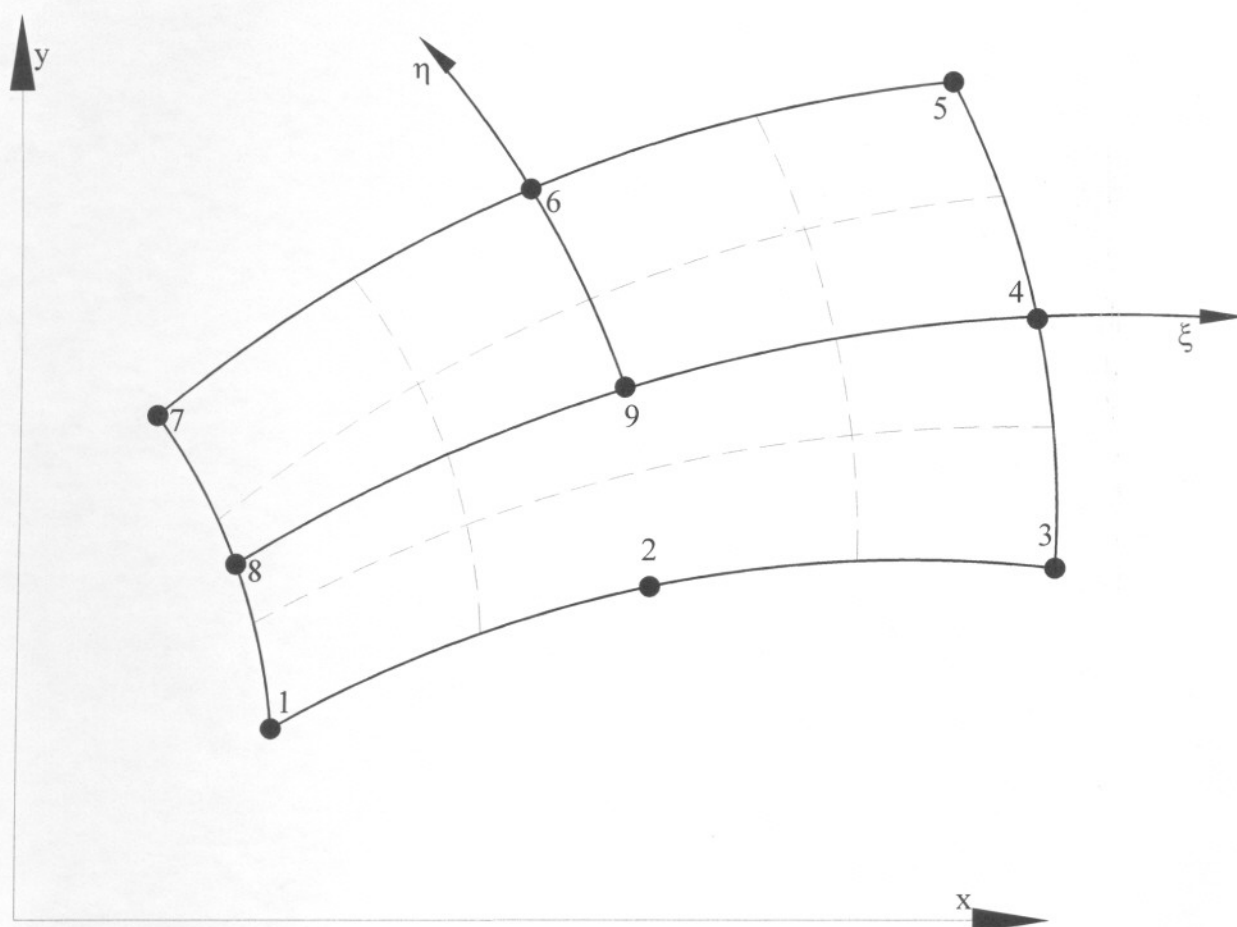


Figura 3.3 Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de 9 nós.

A vantagem do elemento de 9 nós quando comparado com o elemento de 8 nós (elemento de serendipity) é que, no primeiro caso, todas as faces dos subvolumes de controle são linhas de coordenadas constantes dentro do elemento de referência. Isto não seria possível para o segundo elemento que, geralmente, é o mais utilizado no método clássico de elementos finitos de Galerkin para cálculo de escoamentos de fluidos.

No caso de problemas bidimensionais, as integrais (equações 3.20 a 3.22) de volume se transformarão em integrais na área e integrais de área serão simplesmente integrais de linha, em contornos dos subvolumes de controle. Considerando então as equações para um subvolume de controle associado a um determinado nó  $\alpha$  de um elemento obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dA + \theta \sum_{k=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho U U_i)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho V U_i)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^{n+1}}{\partial Y} \right) dX \right] \\ & + \int_{A_\alpha} \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dA - \theta \int_{A_\alpha} (S_{u_i}^*)^{n+1} dA - R_{u_i\alpha}^n + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha + \\ & \text{contribuições de contornos se for o caso} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\int_{A_\alpha} \frac{\partial (\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dA + \text{contribuições de outros elementos para o nó } \alpha = 0 \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{A_\alpha} \frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} dA + \theta \sum_{k=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho U \Phi)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho V \Phi)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^{n+1}}{\partial Y} \right) dX \right] \\ & - \theta \int_{A_\alpha} (S_\Phi)^{n+1} dA - R_{\phi\alpha}^n + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha + \text{contribuições de} \\ & \text{contornos se for o caso} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nas equações (3.27) e (3.29) as expressões para  $R_{u_i\alpha}^n$  e  $R_{\phi\alpha}^n$  são:

$$\begin{aligned}
R_{u_i, \alpha}^n = & \int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dA - (1 - \theta) \sum_{k=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho U U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^n}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho V U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^n}{\partial Y} \right) dX \right] \\
& - (1 - \theta) \int_{A_\alpha} \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dA + (1 - \theta) \int_{A_\alpha} (S_{u_i}^*)^n dA
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi \alpha}^n = & \int_{A_\alpha} \frac{(\rho \Phi)^n}{\Delta t} dA - (1 - \theta) \sum_{k=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho U \Phi)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^n}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{k\alpha}} \left( (\rho V \Phi)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\Phi)^n}{\partial Y} \right) dX \right] \\
& + (1 - \theta) \int_{A_\alpha} (S_\phi)^n dA
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo as funções de interpolação definidas pelas equações (3.24) a (3.26) nas equações (3.27) a (3.29) obtém-se o seguinte sistema, na forma escalar, para um elemento:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} + \theta (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (U_{i\beta}^e)^{n+1} + \theta H_{i\alpha\beta'}^e (P_{\beta'}^e)^{n+1} = & \left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} - (1 - \theta) (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (U_{i\beta}^e)^n + \\
& \theta (S_{i\alpha}^e)^{n+1} + (1 - \theta) \left( (S_{i\alpha}^e)^n - H_{i\alpha\beta'}^e (P_{\beta'}^e)^n \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$D_{i\alpha'\beta}^e (U_{i\beta}^e)^{n+1} = 0 \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} + \theta (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (\Phi_\beta^e)^{n+1} = & \left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} - (1 - \theta) (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (\Phi_\beta^e)^n + \\
& \theta (S_{\Phi\alpha}^e)^{n+1} + (1 - \theta) (S_{\Phi\alpha}^e)^n
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Nas equações (3.32) a (3.34) as matrizes são definidas por

$$M_{\alpha\beta} = \int_{A_{\text{neca}}} \rho N_\beta dA \tag{3.35a}$$

$$C_{\alpha\beta}^n = \oint_{\Gamma_{svca}} \rho N_{\beta} U_j^n n_j d\Gamma \quad ; \quad (3.35b)$$

$$K_{\alpha\beta} = \oint_{\Gamma_{svca}} \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_j} n_j d\Gamma \quad ; \quad (3.35c)$$

$$H_{i\alpha\beta} = \int_{A_{svca}} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} dA \quad ; \quad (3.35d)$$

$$D_{i\alpha\beta} = \int_{A_{svca}} \rho \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} dA \quad ; \quad (3.35e)$$

$$S_{i\alpha}^{n+1} = \oint_{\Gamma_{svca}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} n_j d\Gamma + \int_{A_{svca}} (S_{u_i})^{n+1} dA \quad ; \quad (3.35f)$$

$$S_{\Phi\alpha}^{n+1} = \int_{A_{svca}} S_{\Phi} dA \quad . \quad (3.35g)$$

As funções de interpolação podem ser encontradas em livros de elementos finitos, veja por exemplo, Dhatt & Touzot (1984) ou funções de interpolação especiais podem ser obtidas procurando-se modelar adequadamente os vários termos (convectivos, difusivos, pressão, fontes) para se evitar resultados não realísticos. Resultados sem significado físico podem surgir, principalmente, quando o número de Reynolds é muito elevado e o problema se torna convectivo dominante. Uma forma de se remediar isto é utilizar técnicas de “upwind” para se interpolar os termos convectivos. Entretanto, no nosso entendimento, se a malha puder ser suficientemente refinada, não seria necessário nenhuma técnica de “upwind”. Neste trabalho, fez-se a adaptação de uma técnica de “upwind” baseando-se no trabalho de Saabas (1991). Essa técnica de “upwind” é conhecida como interpolação ponderada pela massa (MAW, mass weighted interpolation). Esta técnica, embora não represente exatamente a direção do escoamento e introduza alguma falsa difusão, ela garante coeficientes positivos nas equações algébricas o que evita resultados espúrios, Saabas (1991). Maliska (1996) em seu livro sobre o método de volumes finitos explica várias técnicas de “upwind”. Saabas (1991) na análise que faz sobre métodos de solução para problemas de escoamentos de fluidos mostra as vantagens e desvantagens de várias técnicas de “upwind” no contexto dos vários métodos.

### 3.5.2.2 Cálculo das Matrizes nos Elementos

Uma vez definida as funções de interpolação, as matrizes definidas nas equações (3.35) podem ser resolvidas para se obter os coeficientes das matrizes nos elementos. Antes de montar a matriz global, necessita-se do cálculo das matrizes nos elementos. Este trabalho é facilitado fazendo-se o mapeamento de cada elemento do domínio real em um elemento de referência denominado de elemento mestre. Este mapeamento é feito em função das coordenadas globais dos nós do elemento e das funções de interpolação definidas em coordenadas locais no elemento. A Figura 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento qualquer no elemento mestre. O elemento finito mostrado na Figura 3.4 (a), que pode ser deformado em coordenadas globais, será um elemento quadrado de comprimento dos lados igual a 2, em coordenadas locais.

As coordenadas globais dentro de um elemento são definidas por

$$X_i^e = \sum_{\alpha=1}^{NNEl} N_{\alpha} X_{i\alpha} \quad ; \quad (3.36)$$

onde  $X_{i\alpha}$ ,  $i = 1, \dots, N \text{ dim}$ , representa as coordenadas do nó  $\alpha$  e  $N_{\alpha}$  são funções de interpolação apresentadas na Tabela 3.1 para elementos lineares e na Tabela 3.2 para elementos quadráticos; onde também são apresentadas as derivadas das funções de interpolação que são necessárias na avaliação das matrizes dos elementos. Estas funções de interpolação podem ser encontradas em vários livros de elementos finitos, por exemplo, em Dhatt & Touzot (1984).

As integrais de áreas, em coordenadas locais nos elementos, podem ser representadas, genericamente, por

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta ; \quad (3.37)$$

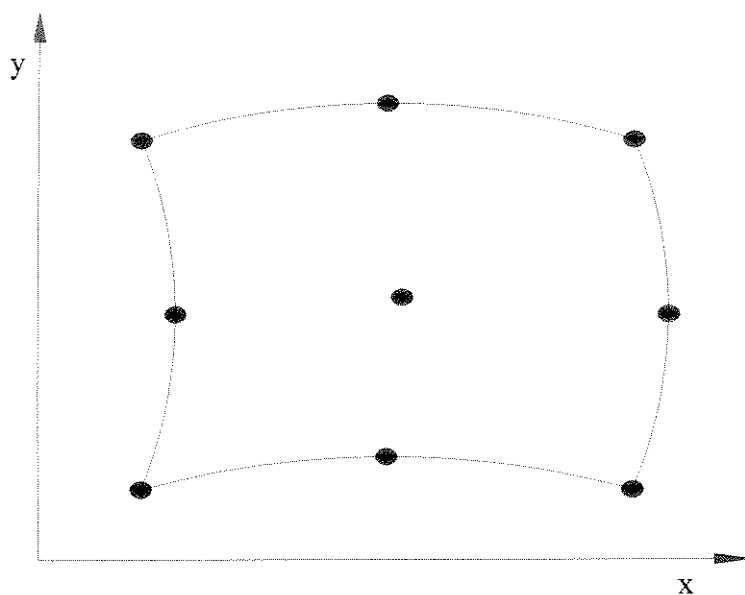


Figura 3.4 (a) Elemento em coordenadas globais, x-y.

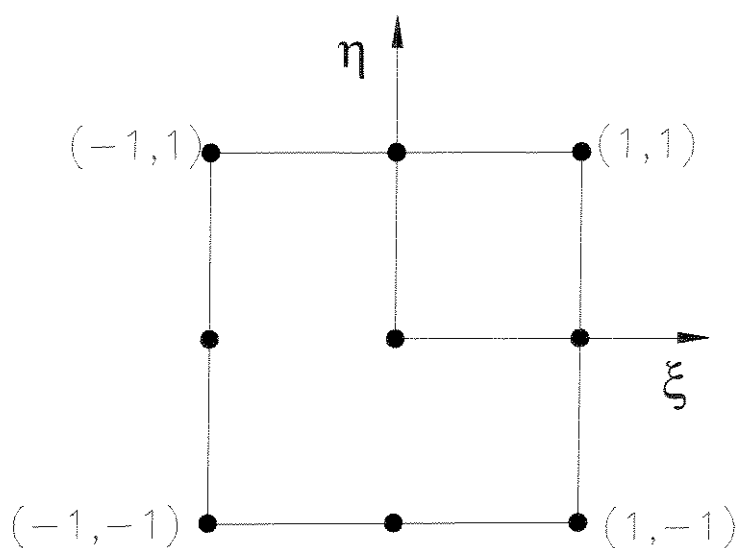


Figura 3.4 (b) Elemento mapeado no elemento mestre em coordenadas locais,  $\xi$ - $\eta$

onde  $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$  é o determinante da matriz jacobiano da transformação de coordenadas globais para as coordenadas locais dada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

As derivadas de qualquer função em relação às coordenadas globais podem ser calculadas por derivadas em coordenadas locais, na forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) e \quad (3.39a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right). \quad (3.39b)$$

As integrais em contornos podem ser transformadas na forma:

$$\int_{\mathcal{S}} f dx_i = \int_{\mathcal{S}} f \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \quad ; \quad (3.40)$$

$$\text{onde } \xi_j = \begin{cases} \xi & \text{para } j = 1 \\ \eta & \text{para } j = 2 \end{cases}.$$

Todas as transformações de coordenadas, para facilitar a integração das equações, são feitas, localmente, a nível de elemento; diferente do que é feito no método de volumes finitos (FVM) em coordenadas generalizadas; em que as equações governantes; escritas em coordenadas cartesianas, são transformadas para equações em coordenadas generalizadas.

O cálculo das matrizes pode ser feito elemento por elemento e montando-se a matriz global no final para se obter a solução do sistema completo. As integrais em contornos de

subvolumes de controle são efetuadas usando 3 pontos de Gauss e em áreas de subvolumes de controle dentro de elementos finitos, 9 pontos de Gauss.

As matrizes convectivas e difusivas, para um elemento, são construídas na forma:

$$\begin{aligned}
 C(1,\beta) &= -FLUC(1,\beta) + FLUC(12,\beta) \\
 C(2,\beta) &= FLUC(1,\beta) + FLUC(2,\beta) - FLUC(3,\beta) \\
 C(3,\beta) &= FLUC(3,\beta) + FLUC(4,\beta) \\
 C(4,\beta) &= -FLUC(4,\beta) + FLUC(5,\beta) + FLUC(6,\beta) \\
 C(5,\beta) &= -FLUC(6,\beta) + FLUC(7,\beta) \\
 C(6,\beta) &= -FLUC(7,\beta) - FLUC(8,\beta) + FLUC(9,\beta) \\
 C(7,\beta) &= -FLUC(9,\beta) - FLUC(10,\beta) \\
 C(8,\beta) &= FLUC(10,\beta) - FLUC(11,\beta) + FLUC(12,\beta) \\
 C(9,\beta) &= -FLUC(2,\beta) - FLUC(5,\beta) + FLUC(8,\beta) + FLUC(11,\beta)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 K(1,\beta) &= -FLUD(1,\beta) + FLUD(12,\beta) \\
 K(2,\beta) &= FLUD(1,\beta) + FLUD(2,\beta) - FLUD(3,\beta) \\
 K(3,\beta) &= FLUD(3,\beta) + FLUD(4,\beta) \\
 K(4,\beta) &= -FLUD(4,\beta) + FLUD(5,\beta) + FLUD(6,\beta) \\
 K(5,\beta) &= -FLUD(6,\beta) + FLUD(7,\beta) \\
 K(6,\beta) &= -FLUD(7,\beta) - FLUD(8,\beta) + FLUD(9,\beta) \\
 K(7,\beta) &= -FLUD(9,\beta) - FLUD(10,\beta) \\
 K(8,\beta) &= FLUD(10,\beta) - FLUD(11,\beta) + FLUD(12,\beta) \\
 K(9,\beta) &= -FLUD(2,\beta) - FLUD(5,\beta) + FLUD(8,\beta) + FLUD(11,\beta)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nas equações (3.41) e (3.42) os fluxos convectivos e difusivos são definidos por

$$FLUC(ip,\beta) = \int_p \left( u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) N_\beta d\eta + \int_p \left( u \frac{\partial y}{\partial \xi} - v \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) N_\beta d\xi \tag{3.43}$$

$$FLUD(ip,\beta) = \int_p \mu_e \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta + \int_p \mu_e \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \tag{3.44}$$



onde  $ip$  representa um determinado contorno de um subvolume de controle dentro de um elemento como mostrado na Figura 3.6.

A matriz de massa é calculada de forma consistente na forma:

$$M(\alpha, \beta) = \int_{A_e} \rho N_\beta J d\xi d\eta \quad (3.45)$$

O arranjo das variáveis dentro de um elemento é mostrado na Figura 3.5. Para os campos de velocidade e pressão, cada elemento conterá 22 graus de liberdade. Em cada nó de canto existirão 3 graus de liberdade: duas componentes de velocidades e uma de pressão. Nos demais nós existirão somente duas componentes de velocidade. Um trecho de programa para montagem das matrizes nos elementos está no Anexo I.

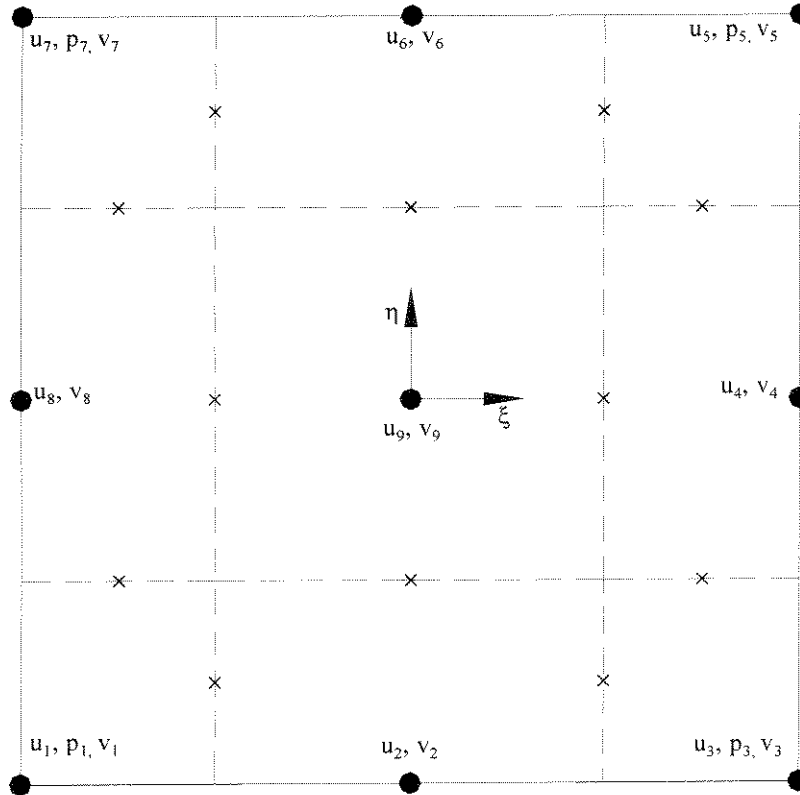


Figura 3.5. Arranjo das variáveis  $u, v, p$ , localmente num elemento.

As matrizes nos elementos são calculadas durante o processo de solução, em cada iteração, devido às não linearidades dos termos convectivos. Parte dos cálculos requeridos tais como valores das funções de interpolação e suas derivadas em pontos de Gauss, nas áreas e contornos de subvolumes de controle, são feitos uma única vez e armazenados em arquivos temporários que são lidos durante o processo de cálculo das matrizes dos elementos. Este procedimento tem por objetivo reduzir o tempo de computação para compensar em parte o tempo gasto no método frontal com leitura de dados no disco. Para um sistema computacional com memória de processamento suficientemente grande, poderia-se armazenar os dados na própria memória o que aceleraria em muito o processo de cálculo. O método de solução, descrito no próximo item, requer a leitura de muitos dados no disco rígido o que eleva o tempo total de processamento. Entretanto, ele é apropriado para sistemas de pequeno porte, em que a capacidade de memória possa ser ainda uma limitação.

### 3.6 Técnica de “Upwind” MAW

Schneider & Raw (1986,1987a, b) apresentaram uma técnica de “upwind” que garante coeficientes positivos, até mesmo a nível de elemento, para elementos finitos com quatro nós. Saabas (1991) fez uma adaptação da técnica de Schneider & Raw para elementos triangulares com três nós e para tetraedros com quatro nós. Esta técnica foi denominada interpolação ponderada pela massa (Mass Weighted Interpolation, MAW). Aqui faz-se uma extensão dessa técnica para o elemento finito de 9 nós utilizado neste trabalho.

Uma dificuldade adicional é implementar a técnica de “upwind” de Saabas (1991) em subvolumes de controle com três lados dentro de um elemento como ocorre no elemento principal usado neste trabalho. Para vencer esta dificuldade cada elemento é subdividido em quatro subelementos e cada subelemento é posteriormente dividido em quatro subvolumes de controle para cálculo das matrizes dos termos convectivos. Da forma como o elemento foi, originalmente, subdividido em volumes de controle existirão 12 pontos de integração, Figura 3.6, que são os contornos de subvolumes onde os fluxos são calculados. Para efeito de cálculo dos termos convectivos usando a técnica de “upwind”, são usados, dezesseis pontos de integração como

mostrado na Figura 3.7. A partir da divisão do elemento em subelementos pode-se seguir a metodologia de Schneider & Raw (1986, 1987a, b) e Saabas (1991) para implementação da técnica de “upwind”. Por conveniência os pontos de integração são numerados como indicado nas Figuras 3.6 e 3.7 para facilitar a implementação computacional.

Considere o ponto de integração,  $ip1$  (todos os pontos assinalados com um  $x$  são denominados pontos de integração). Os fluxos de massa são considerados positivos no sentido das normais indicadas pelas setas na Figura 3.6 ou 3.7. O “upwind” é feito considerando a influência dos pontos mais próximos, na corrente acima, ao ponto de integração em questão. No caso de  $ip1$  os pontos mais próximos são os pontos nó 1 e de integração  $ip4$  ou os pontos nó 2 e de integração  $ip2$ . Assim há duas possibilidades para se avaliar  $\phi_{ip1}$  dependendo se o fluxo de massa é positivo ou negativo. Nesta seção, as variáveis representadas pela letra minúscula,  $\phi$ , referem-se a valores nos pontos de integração. Aquelas variáveis representadas pela letra maiúscula,  $\Phi$ , referem-se a valores nos pontos nodais.

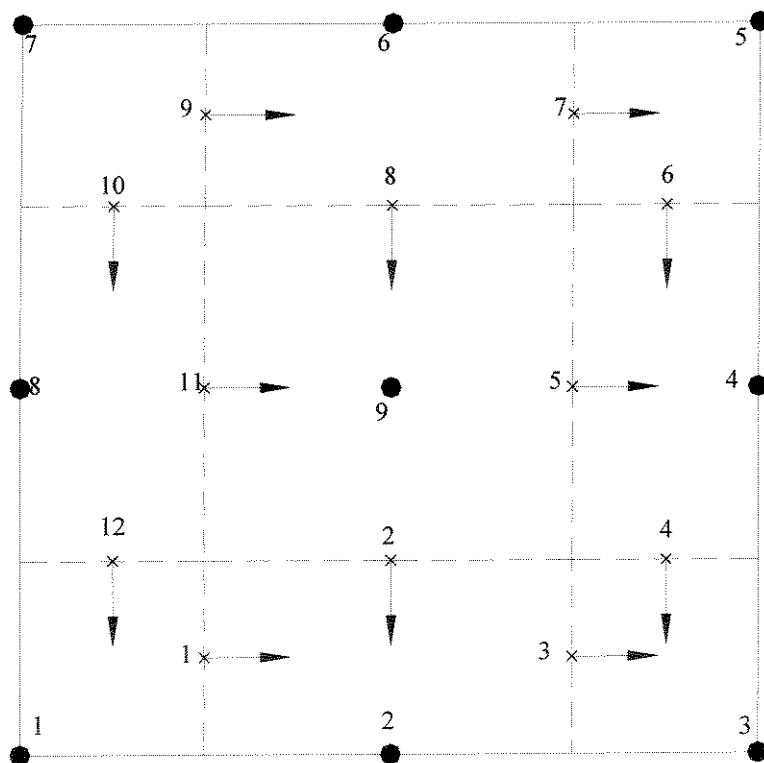


Figura 3.6. Elemento subdividido em volumes de controle

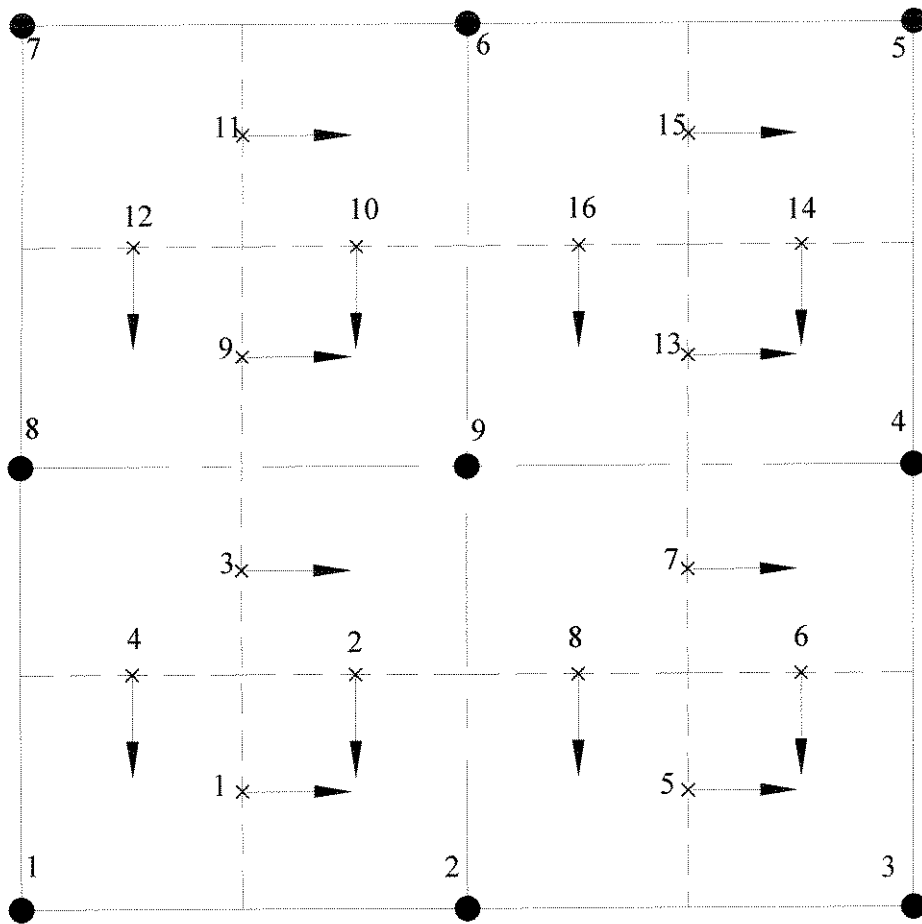


Figura 3.7. Elemento subdividido em 4 subelementos para implementação de “upwind”.

As variáveis,  $\phi_{ip1}$ , nos pontos de integração, para  $\dot{m}_{ipi}$  indicando o fluxo de massa no ponto de integração  $i$ , podem ser avaliadas como a seguir:

**ponto de integração ip1:**

$$\text{se } \dot{m}_{ip1} > 0, \quad \phi_{ip1} = f\phi_{ip4} + (1 - f)\Phi_1 \quad (3.46a)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( \frac{\dot{m}_{ip4}}{\dot{m}_{ip1}}, 0 \right), 1 \right]. \quad (3.46b)$$

$$\text{se } \dot{m}_{ip1} < 0, \quad \phi_{ip1} = f\phi_{ip2} + (1 - f)\Phi_2 \quad (3.46c)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( -\frac{\dot{m}_{ip2}}{\dot{m}_{ip1}}, 0 \right), 1 \right] \quad (3.46d)$$

**ponto de integração ip2:**

$$\text{se } \dot{m}_{ip2} > 0, \quad \phi_{ip2} = f\phi_{ip3} + (1-f)\Phi_9 \quad (3.47a)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( \frac{\dot{m}_{ip3}}{\dot{m}_{ip2}}, 0 \right), 1 \right]. \quad (3.47b)$$

$$\text{se } \dot{m}_{ip2} < 0, \quad \phi_{ip2} = f\phi_{ip1} + (1-f)\Phi_2 \quad (3.47c)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( -\frac{\dot{m}_{ip1}}{\dot{m}_{ip2}}, 0 \right), 1 \right] \quad (3.47d)$$

**ponto de integração ip3:**

$$\text{se } \dot{m}_{ip3} > 0, \quad \phi_{ip3} = f\phi_{ip4} + (1-f)\Phi_8 \quad (3.48a)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( -\frac{\dot{m}_{ip4}}{\dot{m}_{ip3}}, 0 \right), 1 \right]. \quad (3.48b)$$

$$\text{se } \dot{m}_{ip3} < 0, \quad \phi_{ip3} = f\phi_{ip2} + (1-f)\Phi_9 \quad (3.48c)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( \frac{\dot{m}_{ip2}}{\dot{m}_{ip3}}, 0 \right), 1 \right] \quad (3.48d)$$

ponto de integração ip4:

$$\text{se } \dot{m}_{ip4} > 0, \quad \phi_{ip4} = f\phi_{ip3} + (1-f)\phi_8 \quad (3.49a)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( -\frac{\dot{m}_{ip3}}{\dot{m}_{ip4}}, 0 \right), 1 \right]. \quad (3.49b)$$

$$\text{se } \dot{m}_{ip4} < 0, \quad \phi_{ip4} = f\phi_{ip1} + (1-f)\phi_1 \quad (3.49c)$$

$$\text{onde } f = \min \left[ \max \left( \frac{\dot{m}_{ip1}}{\dot{m}_{ip4}}, 0 \right), 1 \right] \quad (3.49d)$$

Dentro de um subelemento (por exemplo definido pelos nós 1, 2, 9 e 8; Figura 3.7) com quatro pontos nodais, existirão quatro pontos de integração. Assim pode-se formar o seguinte sistema matricial para se determinar as relações entre as variáveis em pontos de integração e as variáveis em pontos nodais:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{ip1} \\ \phi_{ip2} \\ \phi_{ip3} \\ \phi_{ip4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_9 \\ \phi_8 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Resolvendo o sistema definido pela equação (3.50) obtém-se as variáveis em pontos de integração em função das variáveis nodais, por uma expressão do tipo:

$$\phi_i = CC_{ij} \phi_j \quad ; i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.51)$$

onde i refere-se ao ponto de integração dentro de um subelemento e j refere-se a valores nos nós principais de um subelemento, numerados localmente no sentido anti-horário com o primeiro nó

no canto inferior esquerdo.  $CC_{ij}$  são elementos da matriz produto da inversa de A pela matriz B,  $[A]^{-1}[B]$ , com  $[A]$  e  $[B]$  sendo as matrizes na equação (3.50). Os coeficientes das matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são obtidos a partir das equações (3.46) a (3.49), aplicadas para cada subelemento dentro do elemento de referência.

A equação (3.20) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dV + \theta \sum_{k=1}^{NIP} (\dot{m}_k u_k)^{n+1} - \theta \oint_A \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^{n+1}}{\partial X_j} n_j dA + \int_V \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV = \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV + \\ & (1-\theta) \left[ \sum_{k=1}^{NIP} (\dot{m}_k u_k)^n - \oint_A \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^n}{\partial X_j} n_j dA \right] - \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + \theta \int_V (S_{u_i}^*)^{n+1} dV + \\ & (1-\theta) \int_V (S_{u_i}^*)^n dV \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando a equação (3.51) para as velocidades,  $u_k$ , nos pontos de integração e substituindo na equação (3.52) obtém-se uma equação similar à equação (3.32), onde, agora os elementos da matriz convectiva são definidos por

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{NIP} \dot{m}_k^\alpha CC_{k\beta} \quad (3.53)$$

onde NIP representa o numero de pontos de integração de um determinado subvolume de controle associado ao nó  $\alpha$  dentro de um elemento,  $\dot{m}_k^\alpha$  é o fluxo de massa no ponto de integração k, cujo sinal deve ser considerado na montagem da matriz dos termos convectivos. No caso, os fluxos de massa são avaliados como:

$$\dot{m}_k^\alpha = \int_{\Gamma_{k\alpha}} \rho U_j n_j d\Gamma \quad (3.54)$$

A diferença entre os termos das matrizes convectivas calculados pelas equações (3.35b) e (3.53) respectivamente, é que no primeiro caso são considerados as influências de todos os nós do

elemento, enquanto que no segundo caso considera-se apenas as influências dos nós que estão mais próximos do ponto de integração, ou seja os nós do subelemento dentro do qual está o ponto de integração. Além do mais, os nós com maior influência sobre o ponto de integração serão aqueles nós que estão à montante do escoamento (“upwind”).

### 3.7 Solução do Sistema de Equações Discretizadas

Neste trabalho adota-se a seguinte estratégia de solução: (1) os campos de velocidades e pressão são calculados resolvendo-se simultaneamente as equações do movimento; (2) obtido o campo de velocidades, resolve-se uma equação de transporte para cada escalar (temperatura, energia cinética turbulenta, dissipação, concentração) separadamente.

O método de solução adotado foi o método frontal; descrito por Taylor & Hughes (1981). O primeiro objetivo do método frontal é a eliminação de variáveis logo após sua introdução, via equações apropriadas, dentro da matriz global. Imediatamente após todas as contribuições de todos os elementos para um nó particular terem sido montadas, então as variáveis correspondentes e associadas com aquele nó podem ser eliminadas. Desta forma, a matriz completa nunca é montada, visto que todas as equações reduzidas podem ser eliminadas da memória e armazenadas em disco. As equações mantidas na memória, com os nós e variáveis correspondentes são denominadas frente e o número de variáveis desconhecidas dentro do frente é denominado largura do frente. A largura do frente muda continuamente visto que uma vez que todas as contribuições para um nó tenham sido completamente somadas, então a redução da equação correspondente baseada sobre um pivotamento diagonal pode ser executada. Nos métodos de solução para matrizes simétricas, apenas a triangular superior da matriz é armazenada em qualquer tempo. Entretanto, para matriz global assimétrica, que é o caso do presente estudo, um procedimento diferente é adotado. Uma área de memória pré assinalada para a matriz global é preenchida de contribuições de elementos; a maior entrada diagonal nesta área pré assinalada de memória é encontrada e usada como pivô num processo de eliminação direta de Gauss. Quando o máximo número pré determinado de equações são eliminadas, as equações reduzidas correspondentes são escritas no disco e mais elementos e equações correspondentes introduzidos



na memória. O requerimento mínimo de memória para matrizes assimétricas é quase duas vezes aquele requerido para matrizes simétricas. As equações, nós e variáveis correntemente na memória são denominados ativos, aqueles guardados em disco são denominados desativados e aqueles para serem ainda introduzidas na memória são denominados inativos. Isto é mostrado esquematicamente na Figura 3.8. Uma rotina construída por Taylor & Hughes (1981) para elementos com oito nós foi modificada e adaptada para aplicação no caso deste trabalho.

O método frontal tem a vantagem de que em nenhum instante a matriz global necessita ser montada completamente, sendo que a maior matriz que é montada é definida por um parâmetro que define o tamanho do fronte. Desta forma a solução do sistema pode ser realizada em computadores com memórias relativamente pequenas e com média capacidade de armazenamento em disco. O preço a se pagar é um tempo maior para solução, visto que durante o processamento serão lidos dados armazenados em disco e este processo ainda é muito lento. Este método também pode ser adaptado facilmente para uma solução segregada, em que cada equação é resolvida separadamente. No caso de problemas tridimensionais, uma solução segregada pode ser mais efetiva em termos de armazenamento de variáveis na memória do computador.

O método frontal de solução foi escolhido também pelo enfoque que se adotou o qual é baseado principalmente no método de montagem da matriz global como no método de elementos finitos de Galerkin. Na maioria dos trabalhos sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM); o enfoque é similar ao do método de volumes finitos; em que o acoplamento pressão-velocidade é resolvido por métodos baseados no método SIMPLE, Patankar (1980). Assim, soluções segregadas são mais utilizadas. Nos métodos de volumes finitos, os sistemas resultantes, geralmente, são matrizes com três, cinco ou nove diagonais, dependendo de quantos nós vizinhos são considerados, para calcular os fluxos para os volumes de controle.

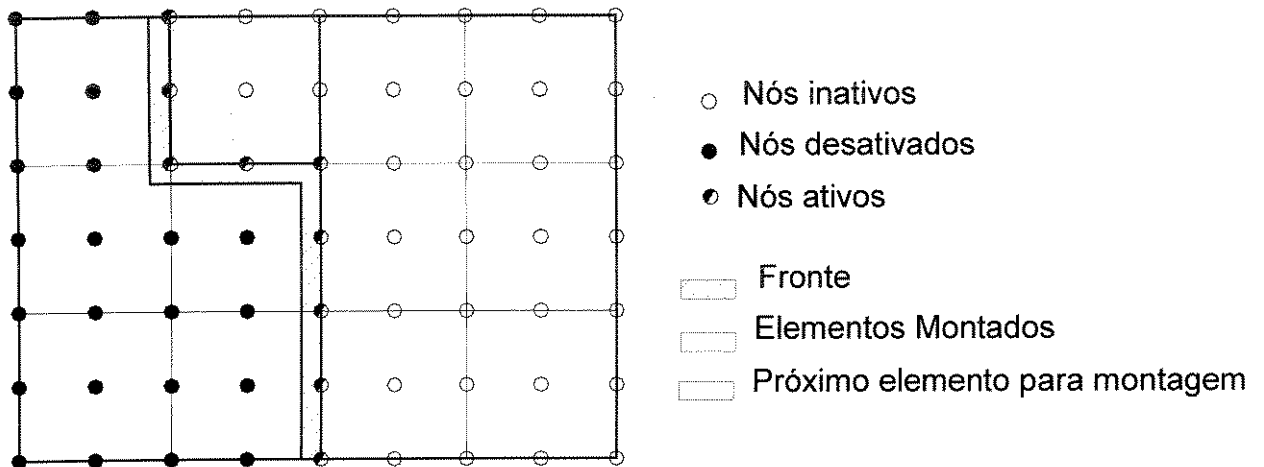


Figura 3.8 Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal

Para se identificar cada variável utiliza-se dois vetores: um que contém o número de graus de liberdade por nó e outro que identifica o número do primeiro grau de liberdade em cada nó. Na solução das equações do movimento, o primeiro grau de liberdade corresponde à componente de velocidade  $U$ ; o segundo à pressão se for um nó de canto e o terceiro grau de liberdade corresponde à velocidade  $V$ . Na solução da equação de grandezas escalares existirá um único grau de liberdade por nó e o processo de montagem das matrizes dos elementos bem como da matriz global é mais simples. Cada nó local num elemento tem um número global que é dado pela matriz de conectividade definida quando se gera a malha. Taylor & Hughes (1981) mostram, numa maneira bem clara, o processo de montagem das matrizes nos elementos e da matriz global.

No presente trabalho, como se adotou o processo de solução misto, isto é, existem mais nós de velocidade do que de pressão, tem-se número de graus de liberdade variável por nó como está mostrado na figura 3.5. No contexto global uma variável é identificada por um índice definido na forma, Taylor & Hughes (1981), Figura 3.9:

$$\begin{aligned} itotu &= nadfm(no) \\ itotv &= nadfm(no) + nodfm(no) - 1 \\ if(nodfm(no).eq.3) itotp &= nadfm(no) + nodfm(no) - 2 \end{aligned}$$

Figura 3.9. Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global

Na Figura 3.9, *nadfm* é um vetor que contém o número global do primeiro grau de liberdade em cada nó, que corresponde a velocidade *u*; *itotv* corresponde ao número global do terceiro grau de liberdade em nós onde são calculados (*u,v,p*) ou ao número global do segundo grau de liberdade onde são calculados (*u,v*). *itotp* representa a variável pressão em nós onde esta é calculada.

No presente caso, o vetor *nadfm* é formado da maneira ilustrada na Figura 3.10, enquanto que o vetor *nodfm*, para um elemento quadrático qualquer, pode ser formado seguindo o procedimento mostrado na Figura 3.11

```

nadfm(1) = 1
do ipoin = 2, npoin
  nadfm(ipoin) = nadfm(ipoin - 1) + nodfm(ipoin - 1)

```

Figura 3.10. Formação do vetor contendo o índice global do primeiro grau de liberdade por nó.

```

ndofm = número máximo de graus de liberdade num nó
do ielem = 1, nelem
do inodp = 1, nnodp - 2, 2
  nodfm(lnods(ielem, inodp)) = ndofm
  nodfm(lnods(ielem, inodp + 1)) = ndofm - 1

```

Figura 3.11. Formação do vetor contendo o número de graus de liberdade por nó.

Na Figura 3.11, *ndofm* = 3 para solução do escoamento, *nelem* é o número de elementos na malha, *nnodp* é o número de nós num elemento e *lnods* é a matriz de conectividade.

O critério de convergência ou de parada da solução, baseando-se em Taylor & Hughes (1981), é definido como:

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^{k+1}} \leq \varepsilon \quad (3.55)$$

O valor de  $\varepsilon$  pode ser definido de acordo com o grau de precisão que se deseja na solução. onde  $\phi$  representa cada variável dentro do sistema global e  $k$  é a iteração no processo de solução. Em cada iteração a nova variável é atualizada usando um fator de relaxação na forma:

$$\tilde{\phi}^{k+1} = relax * \phi^k + (1 - relax) * \phi^{k+1}, \quad 0 < relax < 1 \quad (3.56)$$

O fator de relaxação, geralmente é tomado como variando de 0,5 a 0,9.

### 3.8 Estrutura do Programa Computacional

A estrutura do programa é apresentada na Figura 3.12, onde pode-se ver a seqüência de chamada das várias subrotinas. As subrotinas são descritas a seguir:

#### 1) DIMENS

Nesta subrotina define-se as dimensões máximas da matriz de conectividade, o tamanho do fronte bem como o número máximo de variáveis (o número total de variáveis é calculado na subrotina **DINPUT**). Pode ser modificada para definir um dimensionamento dinâmico das matrizes e vetores usados no programa.

#### 2) DINPUT

Todos os dados tais como: coordenadas e numeração dos pontos nodais, numeração dos elementos na matriz de conectividade, condições de contorno e iniciais, propriedades físicas do fluido são lidos nesta subrotina. Os vetores contendo o numero de graus de liberdade por nó e o número global do primeiro grau de liberdade por nó são também definidos nesta rotina. Nesta subrotina é feita também a verificação da malha bem como de outros parâmetros de entrada através das subrotinas **DIAGN1** (checagem de dimensões) e **DIAGN2** (checagem de coordenadas e da matriz de conectividade).

### 3) DRIVES

Nesta subrotina calcula-se as funções de interpolação e suas derivadas em todos os pontos de Gauss em áreas (9 pontos) e contornos (3 pontos) dos subvolumes de controle dentro dos elementos de referência (9 nós para velocidades e outros escalares, 4 nós para pressão) onde as integrações são realizadas, através da subrotina **SHAPEG**. Estes dados são armazenados em arquivos no disco rígido e são lidos no cálculo das matrizes dos elementos.

### 4) ITERAT

Esta subrotina faz a chamada da subrotina principal **FRONTS** para solução do problema e controla a convergência do processo iterativo através da subrotina **TOLREL**. Os resultados são impressos pela subrotina **WRITER**. A subrotina **FRONTS** formula a matriz global, impõe as condições de contorno e resolve o sistema resultante de equações usando o método frontal não simétrico de solução. **FRONTS** chama a subrotina **MATRIX** que calcula as matrizes dos elementos de acordo com o modelo numérico proposto e o vetor do lado direito do sistema de equações. **MATRIX** por sua vez chama várias outras subrotinas para cálculo dos vários termos das equações. As subrotinas chamadas por **MATRIX** são: **TCEDIF** que calcula os fluxos convectivos e difusivos nos contornos dos subvolumes de controle; **MCONV** que monta a matriz dos termos convectivos; **DIFUS** que monta a matriz dos termos difusivos e calcula a matriz de massa; **PRESSL** que calcula as matrizes dos termos de pressão das equações de quantidade de movimento e as matrizes dos termos da equação de continuidade e a subrotina **TFONTE** que calcula os vetores dos termos fontes das equações de quantidade de movimento.

### 5) SOLUCP

De maneira similar à subrotina **ITERAT**, a subrotina **SOLUCP** controla o processo de solução da equação de transporte de um escalar qualquer.

A subrotina **DJACOB**, chamada em várias subrotinas, calcula o jacobiano da transformação das integrais no elemento real para o elemento de referência.

A estrutura do programa tem sido construída de forma bem modular, o que permite mudanças, relativamente, de forma bem simples e introdução de novos módulos de uma forma direta. Por exemplo, os módulos para calcular viscosidade turbulenta podem ser inseridos na estrutura do programa. Esta estrutura foi baseada principalmente no trabalho de Taylor & Hughes (1981) que desenvolveu um programa baseado no método de elementos finitos de Galerkin usando um elemento com oito nós.

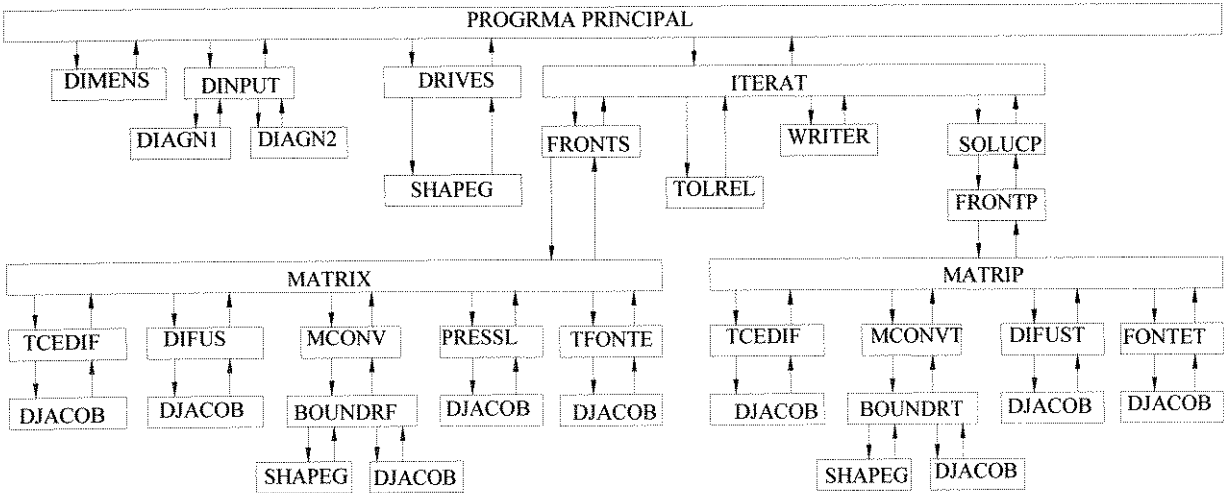


Figura 3.12. Estrutura do Programa Computacional

## **CAPÍTULO 4**

### **Aplicações para Escoamentos com Baixos Números de Reynolds**

Neste capítulo são apresentados resultados de alguns problemas considerados como padrões para validação de métodos numéricos. Os problemas analisados são de escoamentos com número de Reynolds baixos, de modo que o efeito de turbulência não é levado em consideração através de nenhum modelo. Pode-se dizer que este procedimento seria um tipo de simulação numérica direta. Os casos simulados foram os seguintes: escoamento numa cavidade quadrada induzido pelo movimento da parede superior; escoamento num canal com uma expansão assimétrica; escoamento ao redor de um cilindro circular e escoamento num canal com um cilindro de seção quadrada bloqueando o escoamento.

Como o objetivo dos testes, no presente capítulo, foi o de verificar o funcionamento do programa numérico, o valor de  $\varepsilon$  na equação (3.55) foi tomado igual a 0,1. Na maioria dos casos simulados, o valor obtido para  $\varepsilon$ , após a convergência, era em torno de 0,05. Entretanto, valores menores podem ser especificados para a tolerância. Isto vai acarretar um tempo maior para obtenção de soluções. Com o valor adotado para  $\varepsilon$ , raramente, o número de iterações ultrapassou a 30 em cada passo de tempo.

Em todos os escoamentos simulados, foi adotado o esquema totalmente implícito (equação 3.19). Desta forma, não é necessária nenhuma condição inicial para o campo de pressão. Para o primeiro passo de tempo, a condição inicial no campo de velocidades foi tomada igual a zero, exceto, nos contornos onde as velocidades tinham valores especificados não nulos. O passo de tempo foi fixado baseando-se em valores adotados por outros autores

para os mesmos problemas. Vários testes mostraram que, geralmente, no início das soluções, o passo de tempo deve ser menor para a solução convergir. À medida que o tempo cresce, passos de tempo maiores podem ser adotados. O passo de tempo também depende do refinamento da malha. Isto foi verificado em vários testes. Em geral, quanto mais fina a malha, menores devem ser os passos de tempo adotados. Os menores passos de tempo adotados foram em torno de 0,01 para o caso do escoamento ao redor de um cilindro.

#### 4.1 Escoamento numa Cavity Quadrada Induzido pelo Movimento da Parede Superior

O escoamento numa cavidade quadrada induzido pelo movimento de uma parede móvel no topo da mesma é um problema utilizado por muitos autores para se validar e verificar a performance de modelos numéricos. Este problema apresenta como característica recirculação do escoamento, o que se constitui num bom teste para modelos numéricos. Neste problema, considera-se uma cavidade na qual parede superior move-se com velocidade  $u_w$ . A condição de aderência é assumida nas demais paredes. A geometria e condições de contorno do problema são mostradas na Figura 4.1.

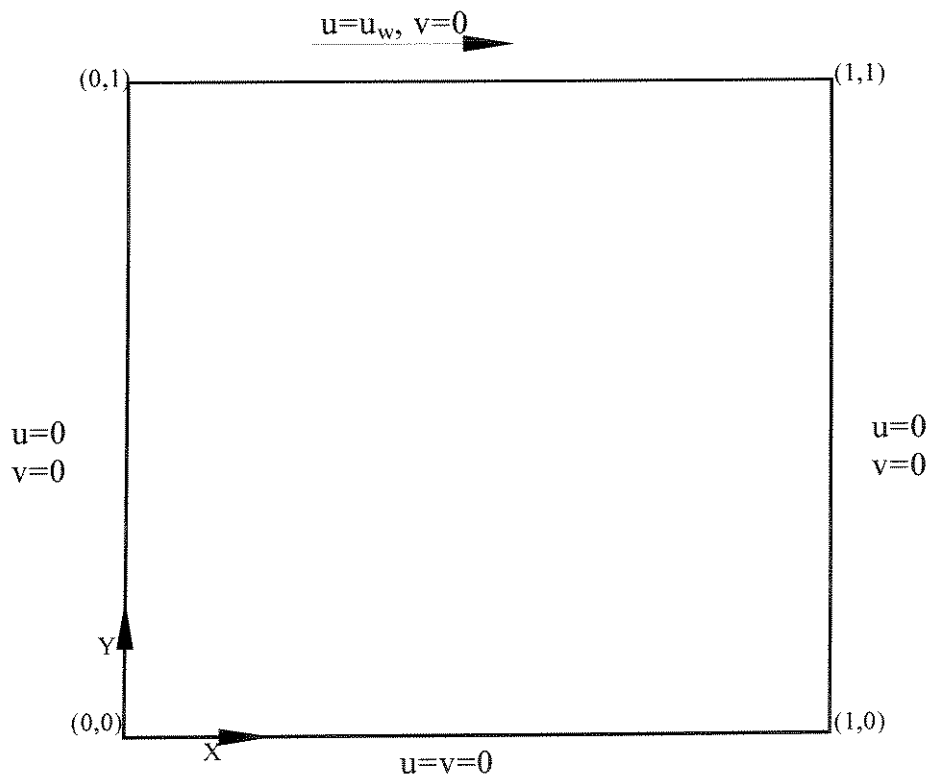


Figura 4.1 Geometria e condições de contorno.



As equações do problema são obtidas pela simplificação das equações (3.11) e (3.12) resultando:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (4.3)$$

As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} U = V = 0 \quad \text{em} \quad X = 0 \text{ e } X = 1 \\ U = V = 0 \quad \text{em} \quad Y = 0 \\ U = 1; V = 0 \quad \text{em} \quad Y = 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como o escoamento é considerado incompressível basta definir a pressão em um único ponto do domínio. Assim define-se

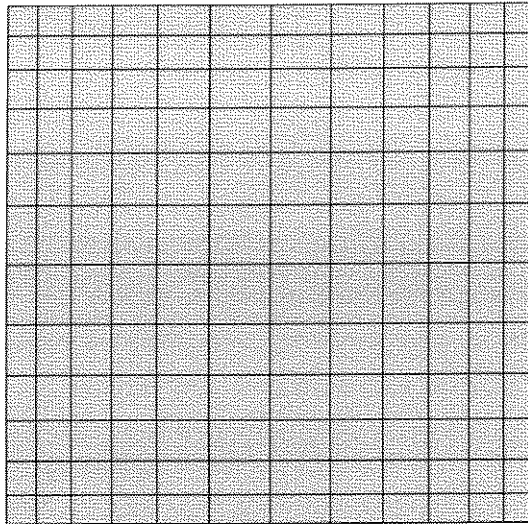
$$P = 0 \quad \text{em} \quad X, Y = 0,5 \quad (4.5)$$

Nas equações anteriores as variáveis adimensionais são definidas por:

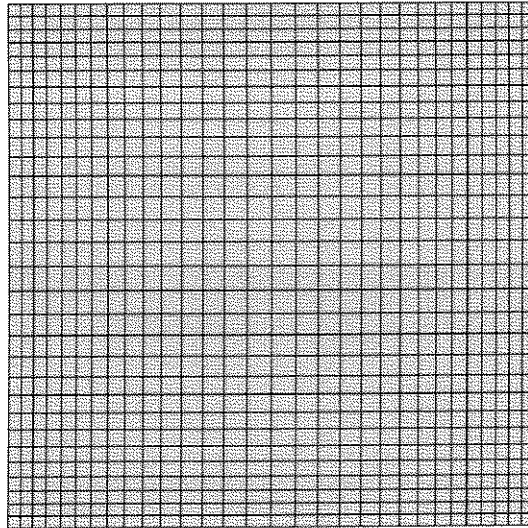
$$X = x/L; \quad Y = y/L \quad U = u/u_w; \quad V = v/u_w; \quad P = \frac{p}{\rho u_w^2} \quad \text{e} \quad \text{Re} = \frac{\rho u_w L}{\mu} \quad (4.6)$$

onde  $L$  é o comprimento dos lados da cavidade.

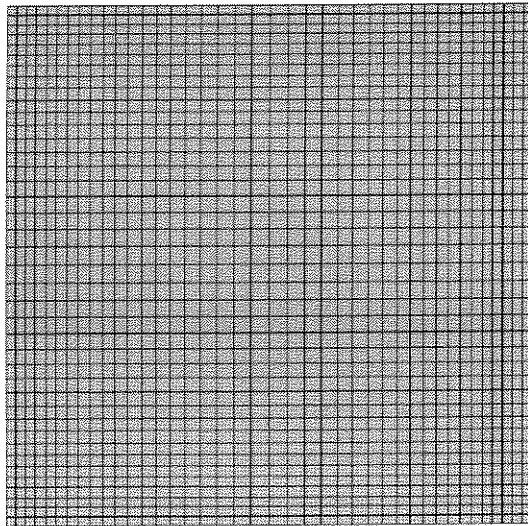
A Figura 4.2 mostra o aspecto das diferentes malhas usadas neste caso. São malhas regulares, não uniformes, geradas usando-se o pré processador do ANSYS 5.2. A malha mais refinada é de 40 x 40 elementos, sendo equivalente a 81 x 81 nós ao longo dos eixos coordenados.



(a) malha de 12 x 12 elementos



(b) malha de 30 x 30 elementos



(c) malha de 40 x 40 elementos

Figura 4.2. Cavidade quadrada discretizada em diferentes malhas

A Figura 4.3 ilustra a evolução dos componentes de velocidade U e V no tempo, para número de Reynolds,  $Re = 400$  e uma malha relativamente grosseira de 12 por 12 elementos (25 por 25 pontos). A Figura 4.4 mostra que para instante de tempo,  $t = 50$ , o escoamento, praticamente, já atingiu o regime permanente, como pode ser visto pela coincidência entre os perfis de velocidade nos instantes de tempo,  $t = 35$  e  $t = 50$ . A Figura 4.5 mostra a comparação da velocidade U para o regime permanente com resultados de Kettleborough, Husain & Prakash (1989) que usaram formulação função de corrente-vorticidade para o escoamento e um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) com elementos triangulares lineares para discretizar o domínio. A malha usada por Kettleborough et al. (1989) foi de 21 x 21 pontos. Alguns dos resultados apresentados nesta seção foram já apresentados por Campos Silva & Moura (1997). Alguns dos resultados mostrados graficamente, neste capítulo e no próximo, estão em tabelas no Anexo II.

A Figura 4.6 mostra a evolução do perfil de velocidade U na linha central vertical da cavidade em função do refinamento da malha. Graficamente, pode-se perceber que o refinamento da malha de 30 x 30 para 40 x 40 elementos não melhorou significativamente os resultados. Mesmo para a malha mais grossa de 12 x 12 elementos, os resultados já são satisfatórios.

A Figura 4.7 mostra as linhas de corrente para diferentes instantes de tempo. As linhas de corrente são obtidas da solução; pelo método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM); da seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.7)$$

Em todas as paredes, foi atribuído valor nulo para a função de corrente. A malha usada na obtenção da linhas de corrente foi de 30 x 30 elementos o que corresponde a 61 nós ao longo dos eixos do sistema de coordenadas.

As regiões de recirculação nos cantos inferiores da cavidade são chamadas de vórtices secundários. Analisando os resultados para as linhas de corrente, através dos gráficos da Figura 4.7, pode-se constatar que o método numérico simulou de maneira satisfatória as características esperadas do escoamento.

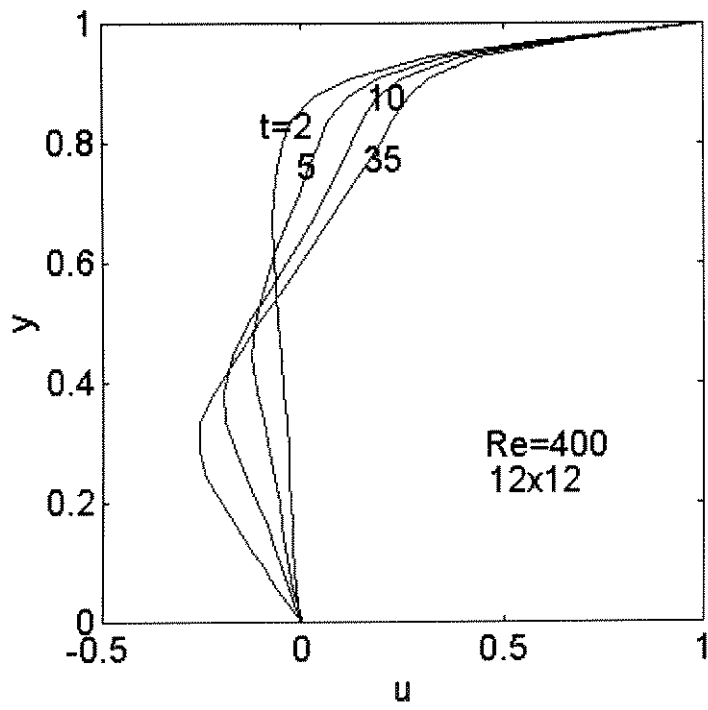


Figura 4.3. (a) Variação de  $u$  ao longo da linha central vertical da cavidade

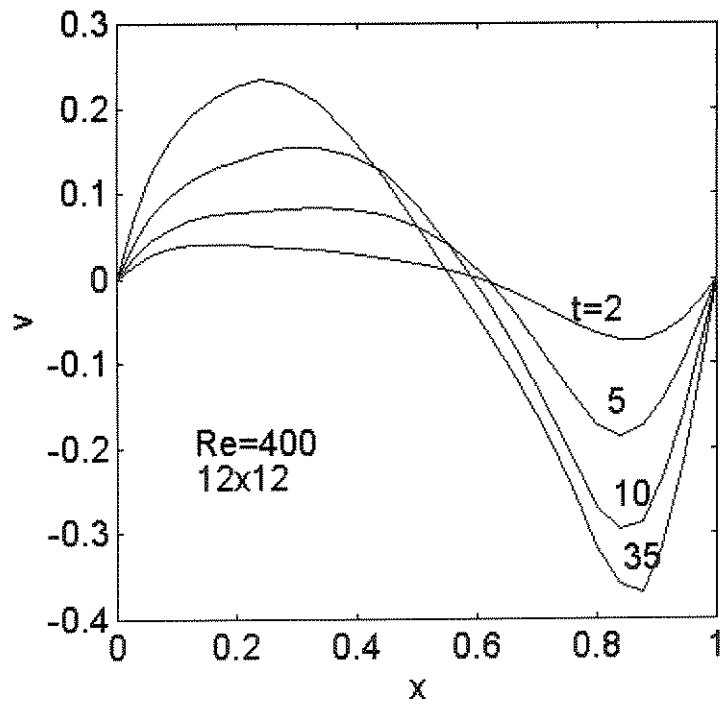


Figura 4.3. (b) Variação de  $v$  ao longo da linha central horizontal da cavidade

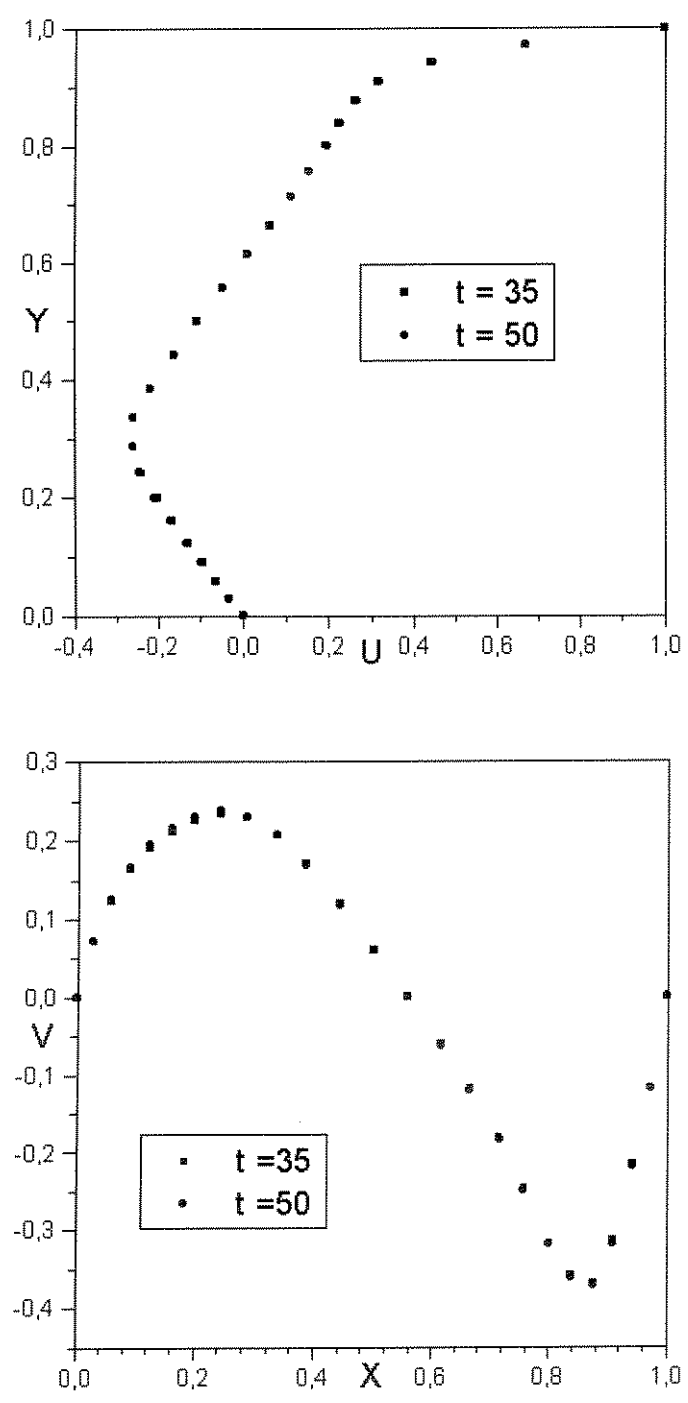


Figura 4.4. Velocidades nos instantes de tempo,  $t = 35$  e  $t = 50$ ;  $Re = 400$  e malha  $12 \times 12$ .

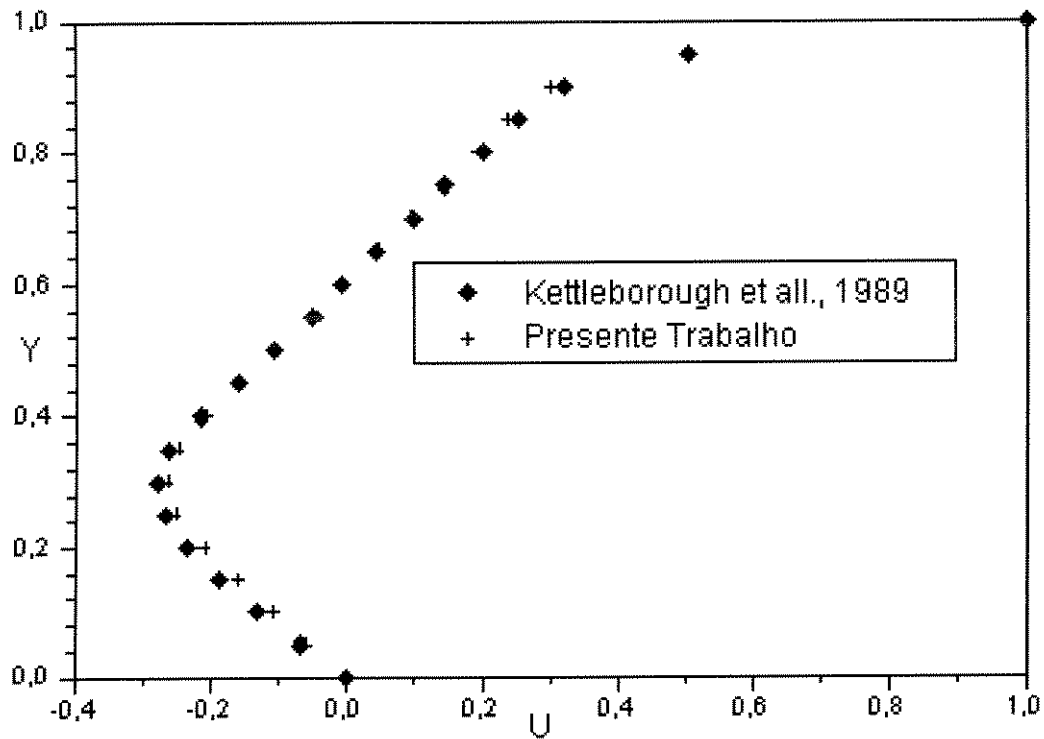


Figura 4.5 Comparação de resultados para  $U$  na linha central da cavidade,  $X = 0,5$ .

A Figura 4.8 mostra as linhas de corrente para a cavidade quadrada e número de Reynolds,  $Re = 1000$ . Neste caso, ocorre um aumento do tamanho da região de recirculação ou vórtice secundário, no canto inferior esquerdo, comparado com o caso do escoamento com número de Reynolds,  $Re = 400$ .

A Figura 4.9 mostra comparações dos perfis de velocidades,  $U$ , para diferentes números de Reynolds em instantes de tempo diferentes, em  $X=0,5$  (linha central vertical da cavidade). A malha usada nos casos das simulações dos resultados mostrados na Figura 4.8 e na Figura 4.9 foi de  $30 \times 30$  elementos.

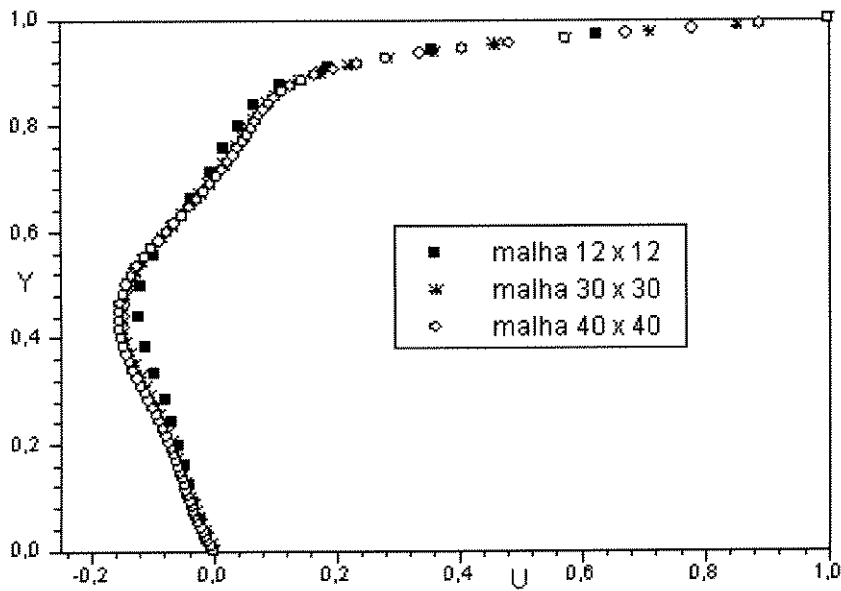


Figura 4.6. (a). Evolução do perfil de velocidade,  $U$ , em função da malha para  $Re = 400$ , no instante de tempo,  $t = 5$ .

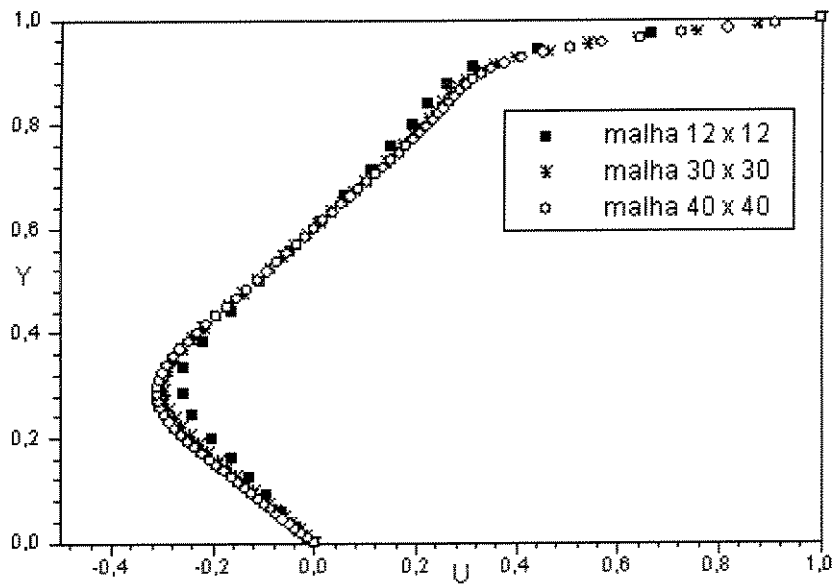


Figura 4.6. (b). Evolução do perfil de velocidade,  $U$ , em função da malha para  $Re = 400$ , no instante de tempo,  $t = 35$ .

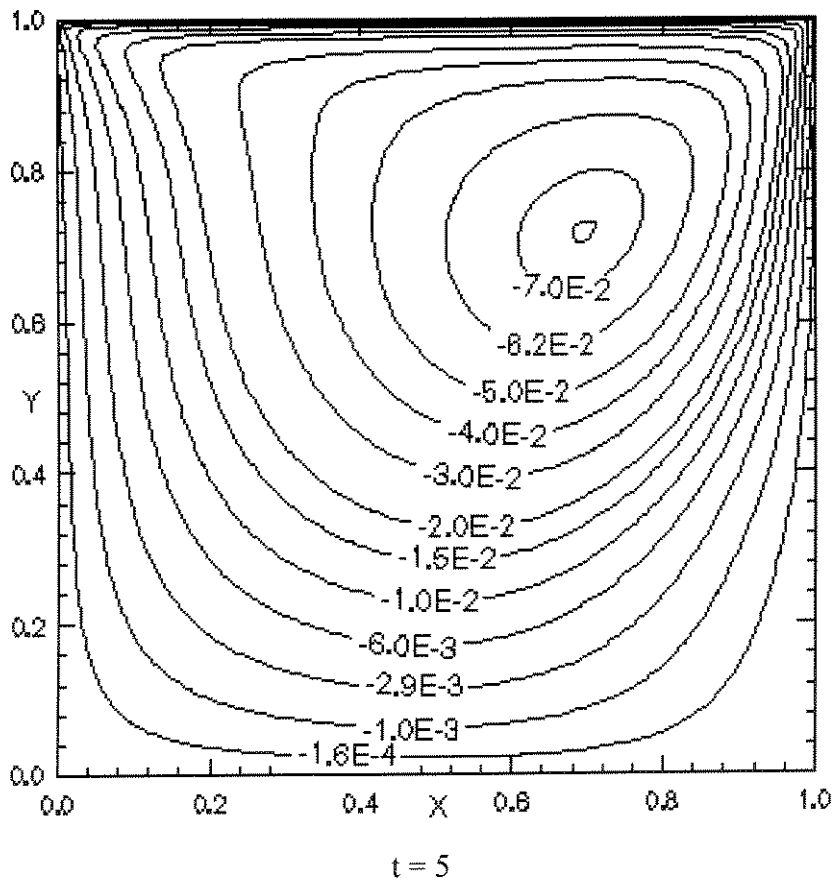
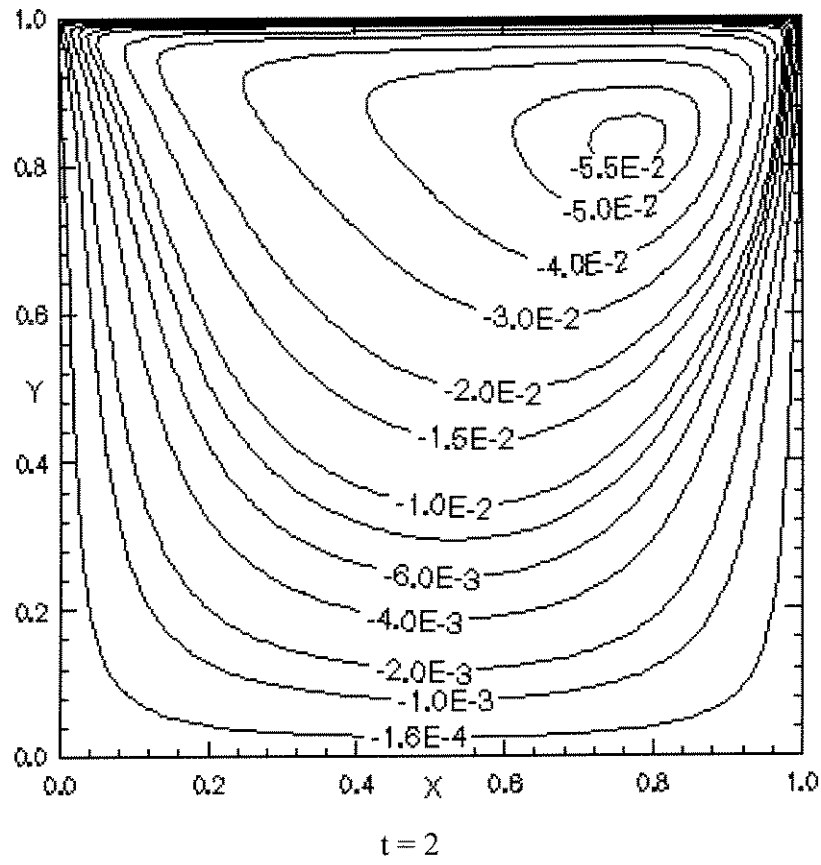


Figura 4.7(a). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para  $Re = 400$ .



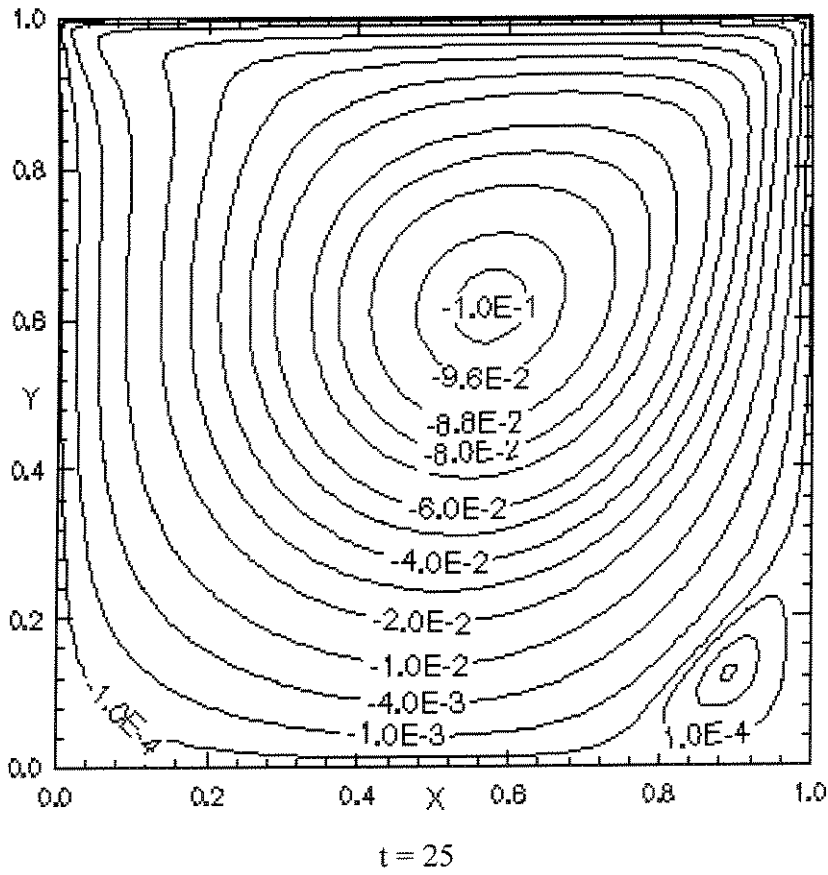
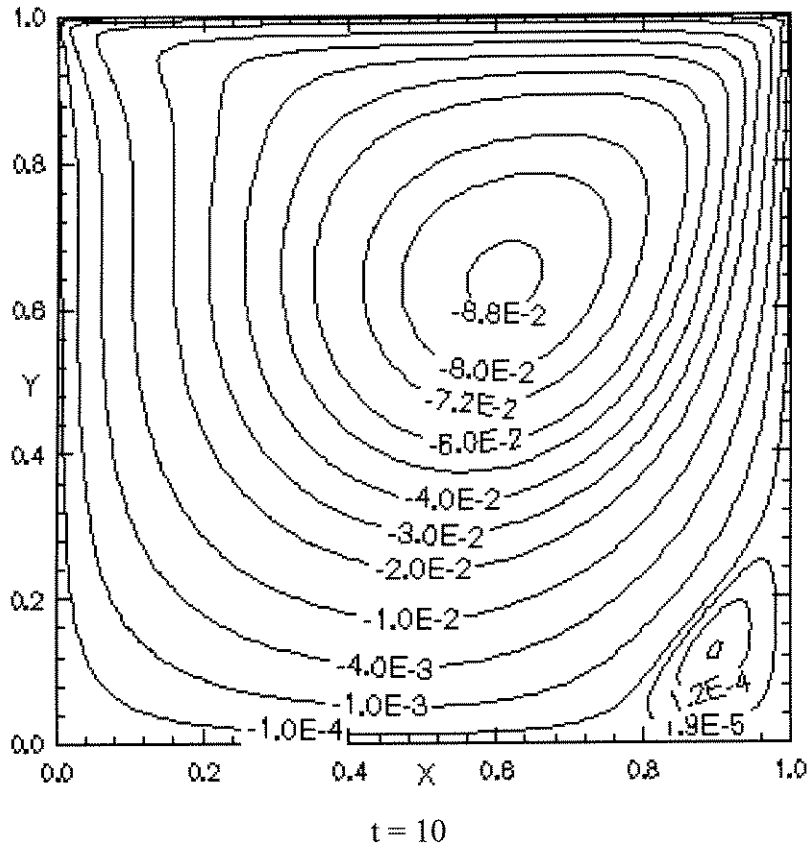


Figura 4.7(b). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para  $Re = 400$ .

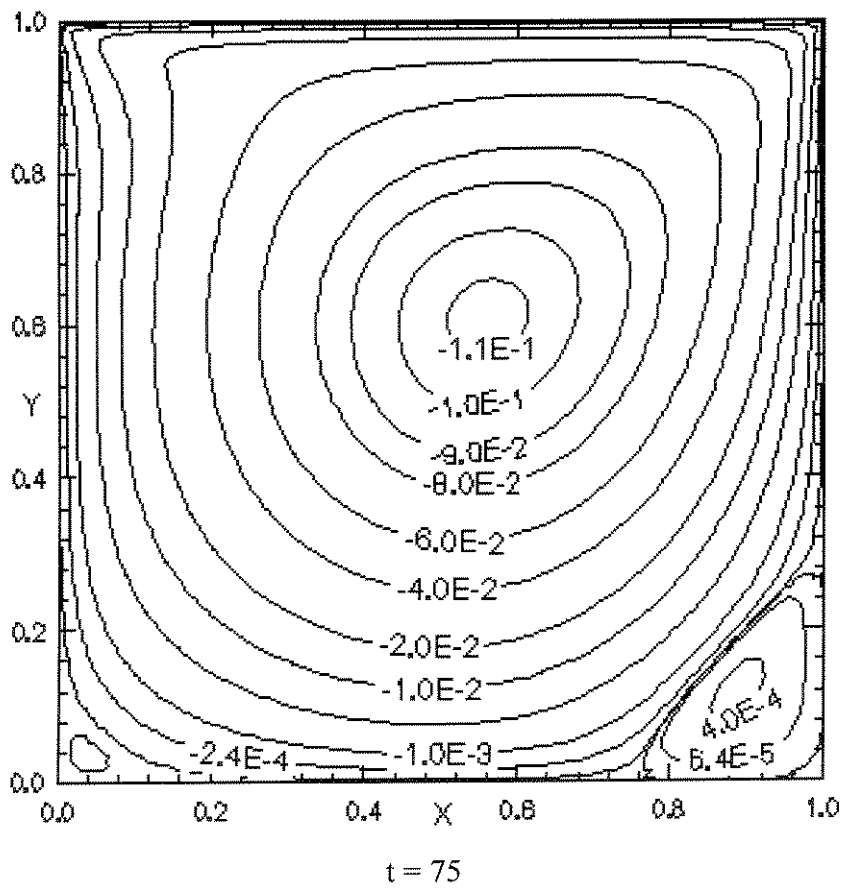
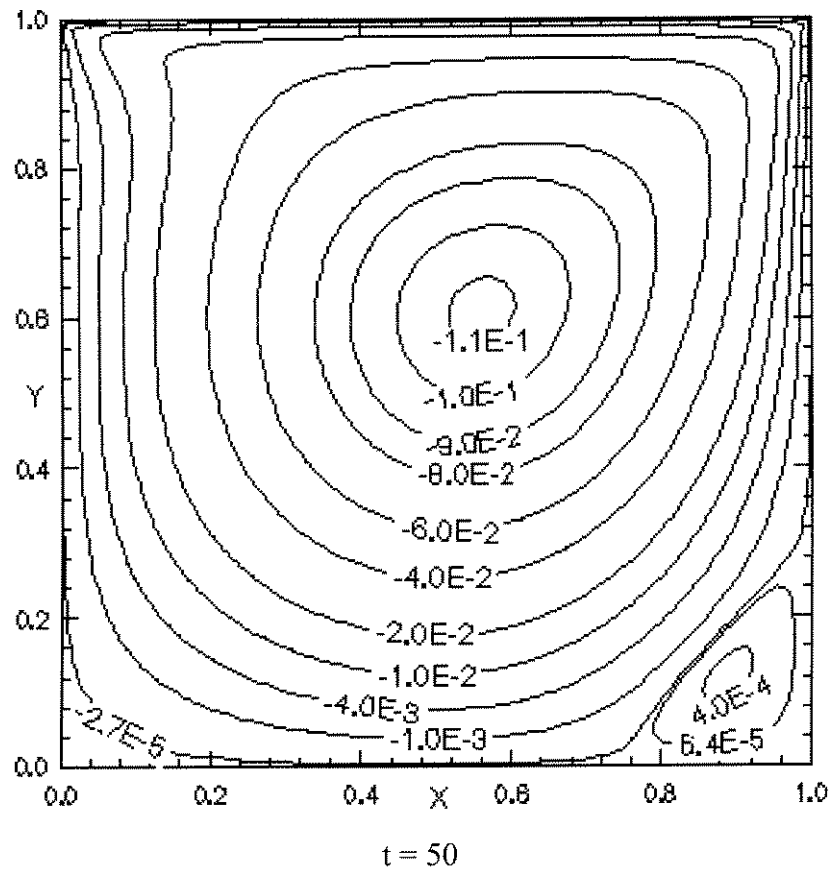


Figura 4.7(c). Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para  $Re = 400$ .

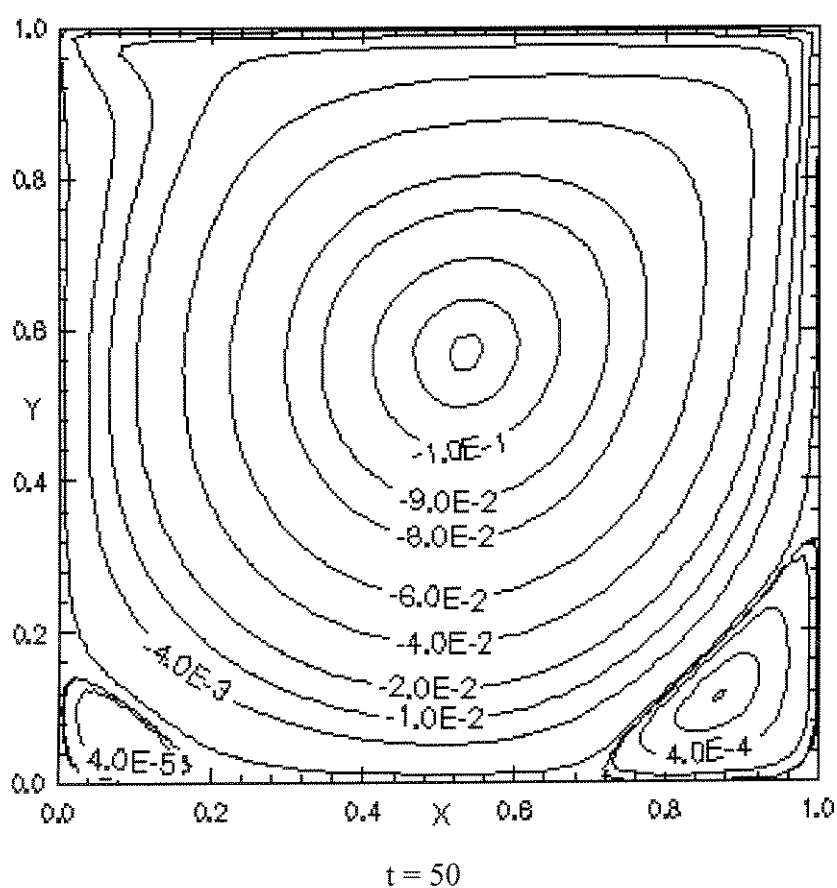
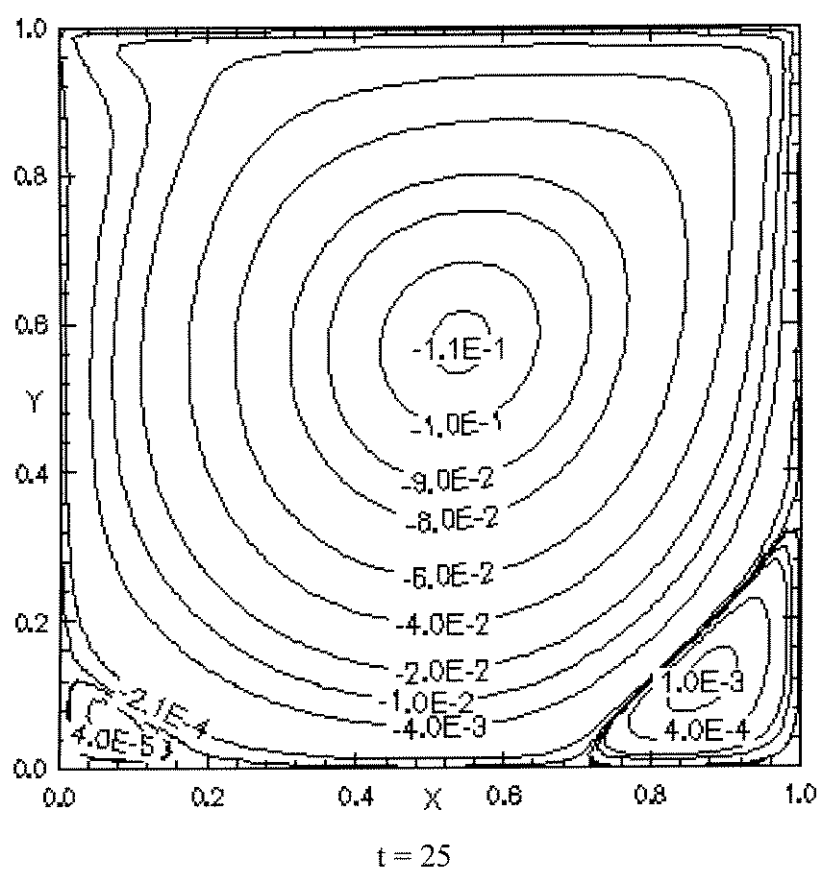


Figura 4.8. Gráficos das linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para  $Re = 1000$ .

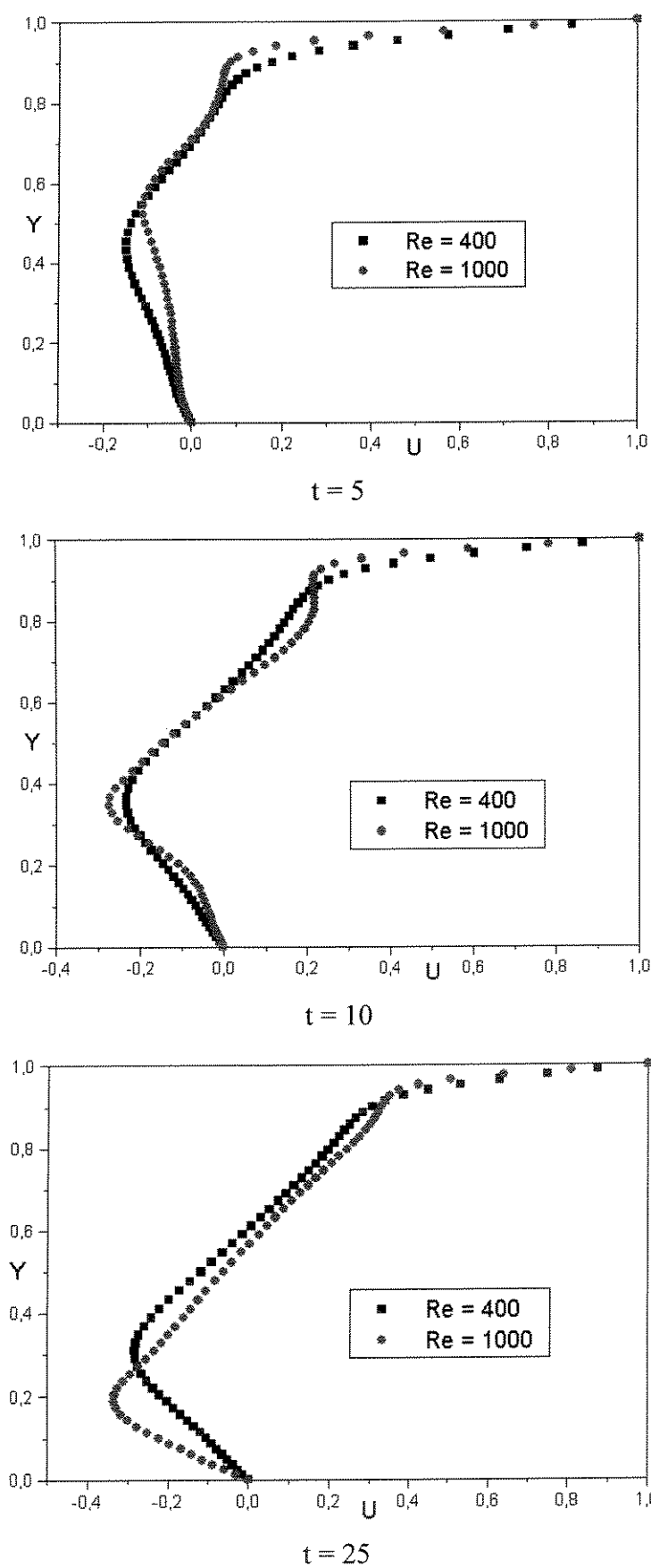


Figura 4.9. Evolução da velocidade  $U$ , em  $X = 0,5$ , em função do número de Reynolds, em instantes de tempo diferentes.

A Tabela 4.1 contém resultados dos valores máximos e mínimos da função de corrente, bem como as coordenadas dos pontos onde aqueles valores estão localizados. Os comprimentos horizontal ( $H_L$ ) e vertical ( $V_L$ ) dos vórtices secundários, nos cantos da cavidade, também estão mostrados naquela tabela. Os valores de  $H_L$  e  $V_L$  foram encontrados fazendo-se uma interpolação através do TECPLOT. A concordância entre a maioria dos resultados deste trabalho e os resultados apresentados por Saabas & Baliga (1994); obtidos por um método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) com elementos triangulares de três nós; é satisfatória. Os resultados de Saabas & Baliga (1994) são para escoamento em regime permanente, enquanto que os resultados deste trabalho são para o instante de tempo,  $t = 40$ . Talvez, isto seja a causa das desvios entre os valores em alguns pontos, porque no caso, o escoamento simulado poderia ainda não ter atingido totalmente o regime permanente, naqueles pontos. A Tabela 4.2 mostra resultados similares para escoamento com número de Reynolds,  $Re = 1000$ .

Tabela 4.1. Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para  $Re = 400$

| Vórtice        |              | Ghia (1982)<br>257 x 257 | Saabas (1994)<br>FLO: 81 X 81 | Saabas(1994)<br>MAW: 81 X 81 | Presente<br>$t = 40, 81 X 81$ |
|----------------|--------------|--------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| Primário       | $\Psi_{min}$ | -0,1139                  | -0,1102                       | -0,1018                      | -0,1089                       |
|                | x            | 0,5547                   | 0,5625                        | 0,5625                       | 0,5564                        |
|                | y            | 0,6055                   | 0,6125                        | 0,6125                       | 0,6053                        |
| Canto Esquerdo | $\Psi_{max}$ | 1,42E-5                  | 1,033E-5                      | 9,91E-6                      | 5,057E-6                      |
|                | x            | 0,0508                   | 0,050                         | 0,050                        | 0,04323                       |
|                | y            | 0,0469                   | 0,050                         | 0,0375                       | 0,0395                        |
|                | $H_L$        | 0,1273                   | 0,105                         | 0,103                        | 0,106                         |
|                | $V_L$        | 0,1081                   | 0,0906                        | 0,0897                       | 0,0888                        |
| Canto Direito  | $\Psi_{max}$ | 6,423E-4                 | 5,815E-4                      | 4,265E-4                     | 5,175E-4                      |
|                | x            | 0,8906                   | 0,8875                        | 0,9                          | 0,8887                        |
|                | y            | 0,125                    | 0,125                         | 0,1125                       | 0,1184                        |
|                | $H_L$        | 0,2617                   | 0,246                         | 0,213                        | 0,2528                        |
|                | $V_L$        | 0,3203                   | 0,298                         | 0,281                        | 0,2731                        |

Tabela 4.2. Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para  $Re = 1000$

| Vórtice        |              | Ghia (1982)<br>129 x 129 | Saabas (1994)<br>FLO: 81 X 81 | Saabas(1994)<br>MAW: 81 X 81 | Presente<br>t = 65, 61 X 61 |
|----------------|--------------|--------------------------|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| Primário       | $\psi_{min}$ | -0,1179                  | -0,1054                       | -0,0965                      | -0,1072                     |
|                | x            | 0,5313                   | 0,5375                        | 0,5375                       | 0,5301                      |
|                | y            | 0,5625                   | 0,5625                        | 0,5625                       | 0,5691                      |
| Canto Esquerdo | $\psi_{max}$ | 2,311E-4                 | 1,746E-4                      | 1,898E-4                     | 1,438E-4                    |
|                | x            | 0,0859                   | 0,0750                        | 0,0750                       | 0,0761                      |
|                | y            | 0,0781                   | 0,0750                        | 0,0750                       | 0,0724                      |
|                | $H_L$        | 0,2188                   | 0,195                         | 0,195                        | 0,2044                      |
|                | $V_L$        | 0,168                    | 0,151                         | 0,1375                       | 0,148                       |
| Canto Direito  | $\psi_{max}$ | 1,751E-3                 | 1,505E-3                      | 1,170E-3                     | 1,366E-3                    |
|                | x            | 0,8594                   | 0,875                         | 0,90                         | 0,8887                      |
|                | y            | 0,1094                   | 0,1125                        | 0,1125                       | 0,1184                      |
|                | $H_L$        | 0,3034                   | 0,277                         | 0,213                        | 0,2528                      |
|                | $V_L$        | 0,3536                   | 0,329                         | 0,295                        | 0,3224                      |

## 4.2 Escoamento num Canal com uma Expansão Assimétrica

O segundo problema teste considerado é o escoamento faceando atrás de um degrau, num canal que se alarga abruptamente em um dos lados. Este escoamento tem a característica de apresentar uma região de recirculação logo após a expansão e um dos objetivos é estimar o comprimento da zona de recirculação comparando-o com resultados de outros trabalhos, para se verificar mais uma vez o desempenho do modelo numérico. A geometria considerada é mostrada na Figura 4.10. A Figura 4.11 mostra o aspecto da malha usada neste caso. A malha é constituída de  $4 \times 20$  elementos no canal de entrada e  $28 \times 30$  elementos no canal mais largo a partir do degrau, num total de 920 elementos e 3805 nós. O escoamento é governado pelas equações (4.1) a (4.3) com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} U &= 1,5(Y - 1)(3 - Y) \quad \text{em } X = -1,5h \quad \text{e} \quad h < Y < 3h \\ U &= V = 0 \quad \text{nas paredes do canal} \\ P &= 0 \quad \text{no canto inferior da seção de saída do canal} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $U$  é a velocidade adimensional com base na velocidade máxima na saída do canal;  $Y = y/h$ , onde  $h$  é a altura do degrau como indicado na Figura 4.10.

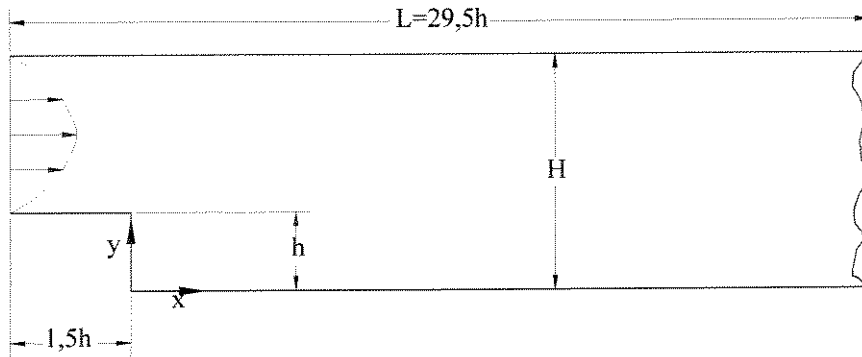


Figura 4.10. Canal com uma expansão assimétrica na forma de degrau.

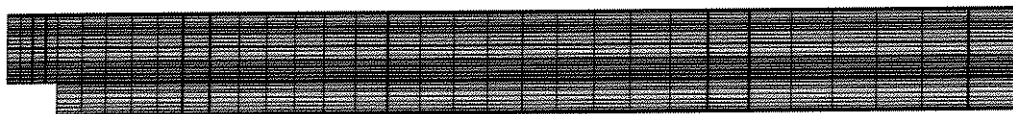


Figura 4.11. Discretização do canal em  $4 \times 20$  mais  $28 \times 30$  elementos.

A Figura 4.12 mostra o perfil de velocidade  $U$ , em diferentes seções do canal. A Figura 4.13 mostra comparações de resultados do presente trabalho com resultados de

A Figura 4.12 mostra o perfil de velocidade  $U$ , em diferentes seções do canal. A Figura 4.13 mostra comparações de resultados do presente trabalho com resultados de Winterscheidt & Surana (1994). Pela Figura 4.13 nota-se que a concordância entre os resultados é muito boa. A partir da Figura 4.14 que mostra as linhas de corrente, pode-se estimar um comprimento da região de recirculação de aproximadamente,  $L_R = 5,0$ . O resultado do comprimento da região de recirculação obtido por Winterscheidt & Surana (1994) foi  $L_R = 5,3$ . Winterscheidt & Surana se referem a um resultado experimental obtido por outros autores para o comprimento da região de recirculação igual a 4. O número de Reynolds considerado nesta simulação é baseado na velocidade média do escoamento e num comprimento característico igual a metade da altura do canal de entrada ( $Re = \rho \bar{U}h/\mu$ ) e foi tomado igual a 73 como no trabalho de Winterscheidt & Surana, (1994).

As Figuras 4.14 e 4.15 mostram as linhas de corrente em diferentes instantes de tempo, onde pode-se verificar a evolução da região de recirculação. A condição de contorno para as linhas de corrente, na entrada do canal, é obtida a partir da integração do perfil de velocidade já desenvolvido na entrada, sendo da forma:

$$\Psi = \frac{\Psi - \Psi_0}{u_{\max} h} = 1,5 \left[ (Y - 1)^2 - \frac{1}{3} (Y - 1)^3 \right] \quad (4.9)$$

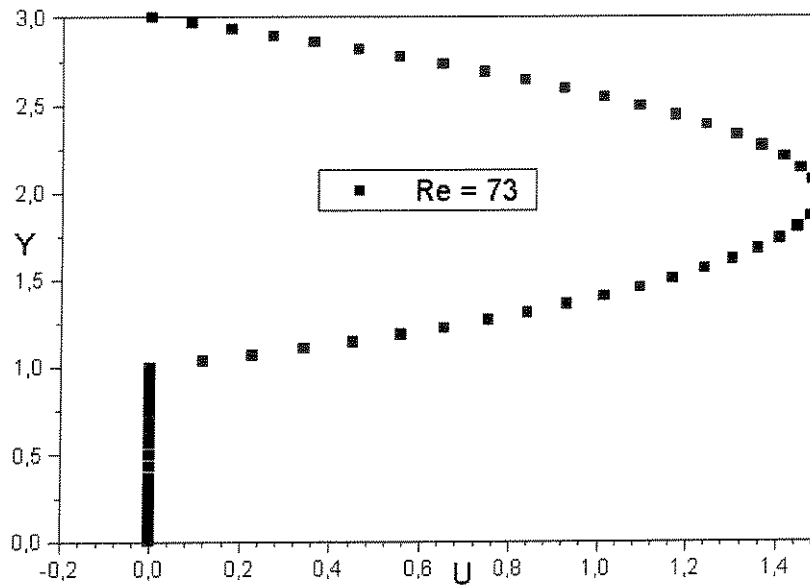


Figura 4.12.(a) Perfil de velocidade  $U$  em  $X = 0$  para  $Re = 73$  e  $t = 90$ .



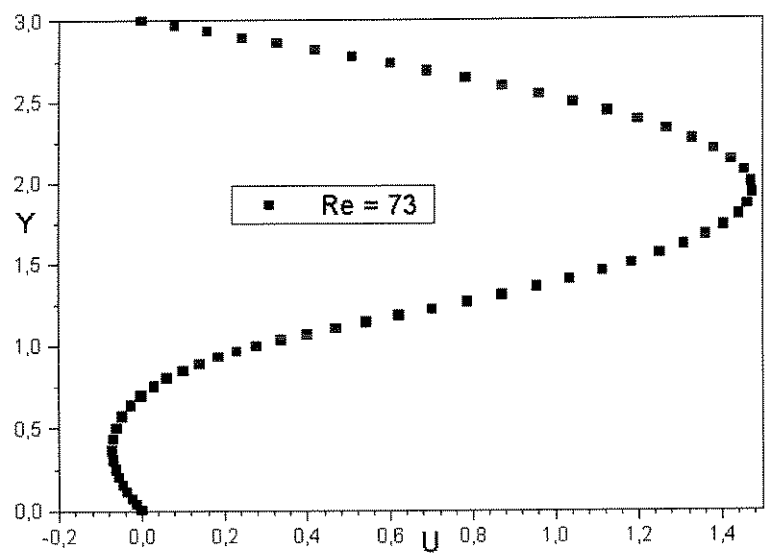


Figura 4.12.(b) Perfil de velocidade  $U$  em  $X = 0,692$  para  $Re = 73$  e  $t = 90$ .

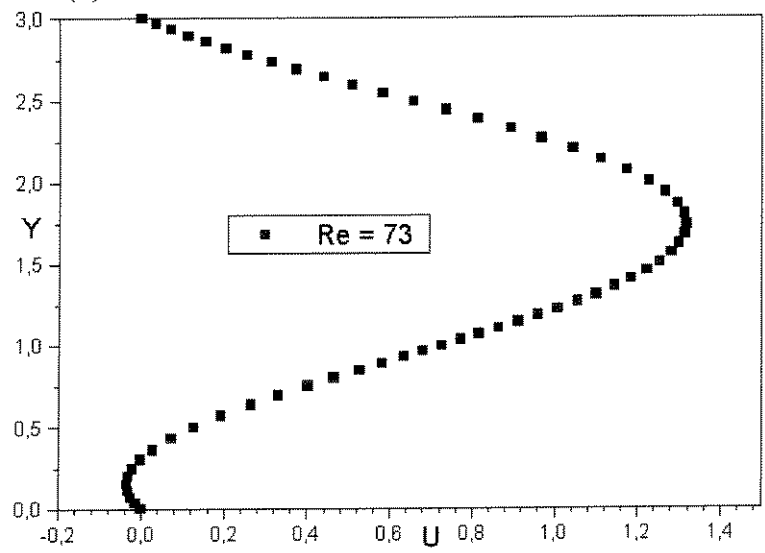


Figura 4.12.(c) Perfil de velocidade  $U$  em  $X = 4,0388$  para  $Re = 73$  e  $t = 90$ .

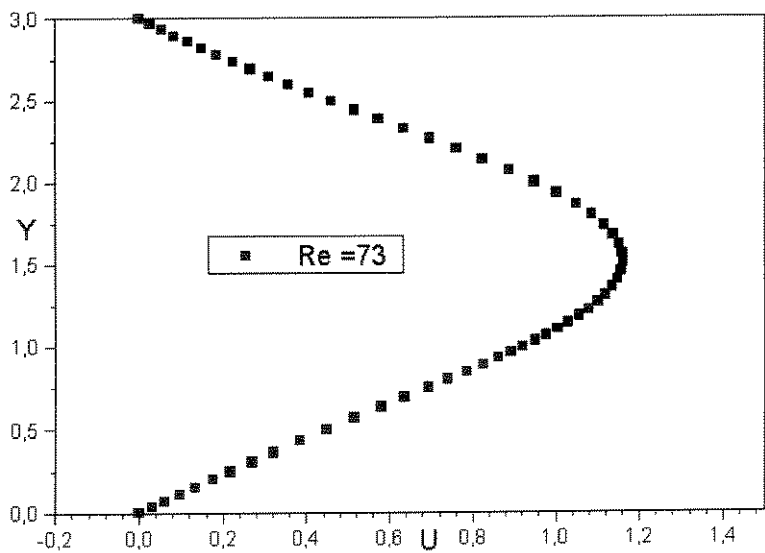


Figura 4.12.(d) Perfil de velocidade  $U$  em  $X = 8,2374$  para  $Re = 73$  e  $t = 90$ .

A Figura 4.16 mostra uma ampliação da região de recirculação para melhor visualização do comprimento dessa região. O resultados da Figura 4.16 foram obtidos no instante de tempo,  $t = 90$ . A partir daquela figura pode-se confirmar um valor do comprimento da região de recirculação em torno de 5,0.

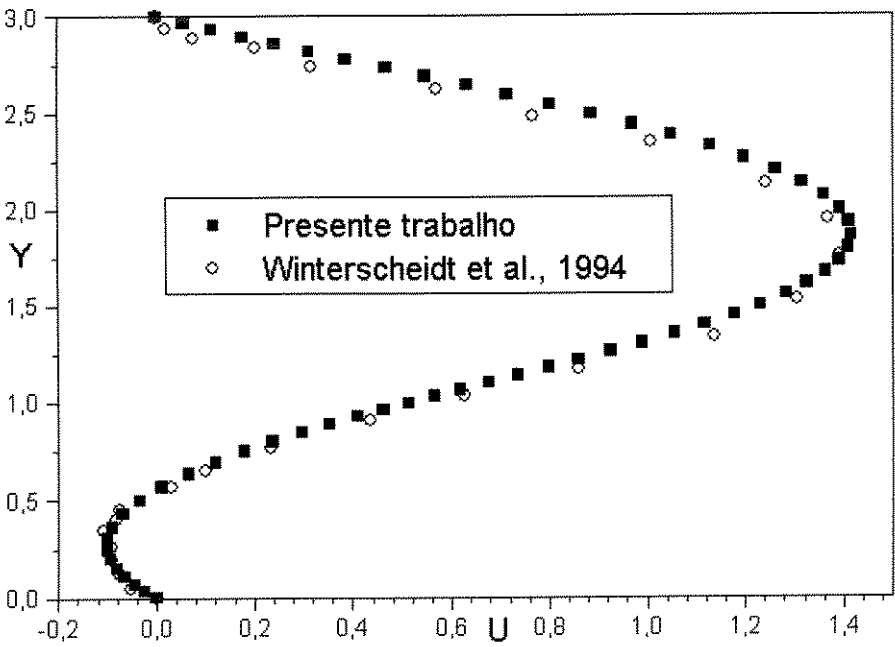


Figura 4.13 (a)- Comparação do perfil de velocidade em  $X = 2$  para escoamento permanente

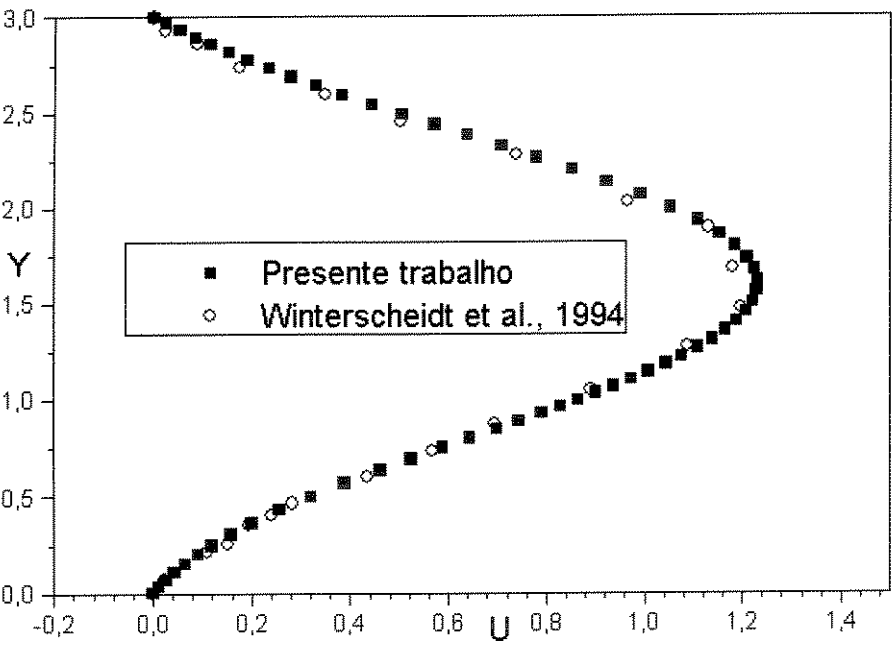


Figura 4.13 (b)- Comparação do perfil de velocidade em  $X = 6$  para escoamento permanente

Os tempos de cálculo no presente exemplo são rápidos, uma vez que a malha é relativamente grosseira e o número de Reynolds é baixo. Foi considerado que o escoamento atingiu o regime permanente quando o número de iterações entre instantes de tempo,  $t$  e  $t+\Delta t$  não ultrapassou a 2. Por exemplo, três iterações com tamanho de frente igual 900, para um total de 8593 graus de liberdade, levava cerca de três horas, numa estação de trabalho IBM RISC/6000 com 128 MegaBytes de RAM.

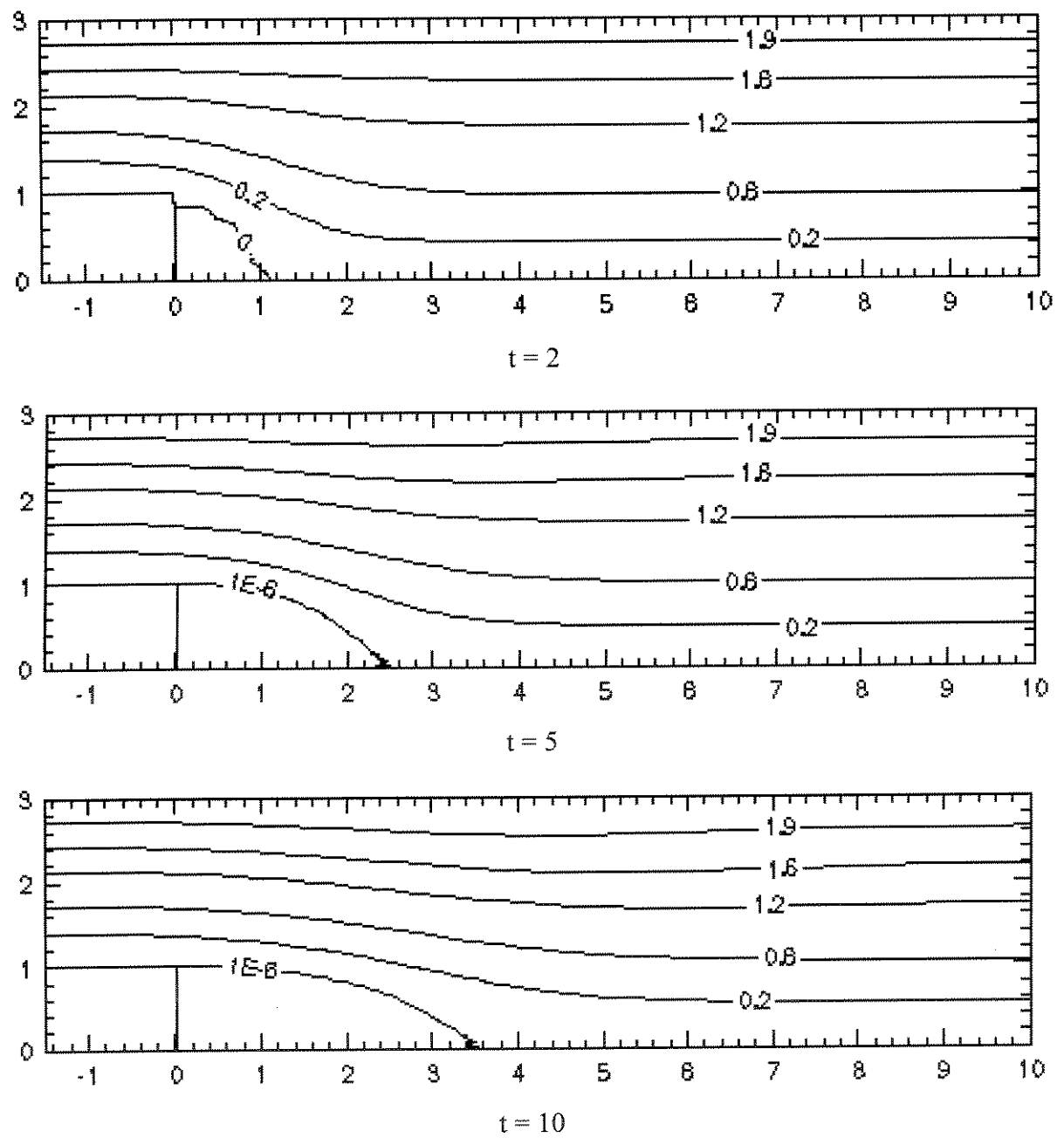


Figura 4.14. Linhas de corrente do escoamento numa expansão, em vários instantes de tempo

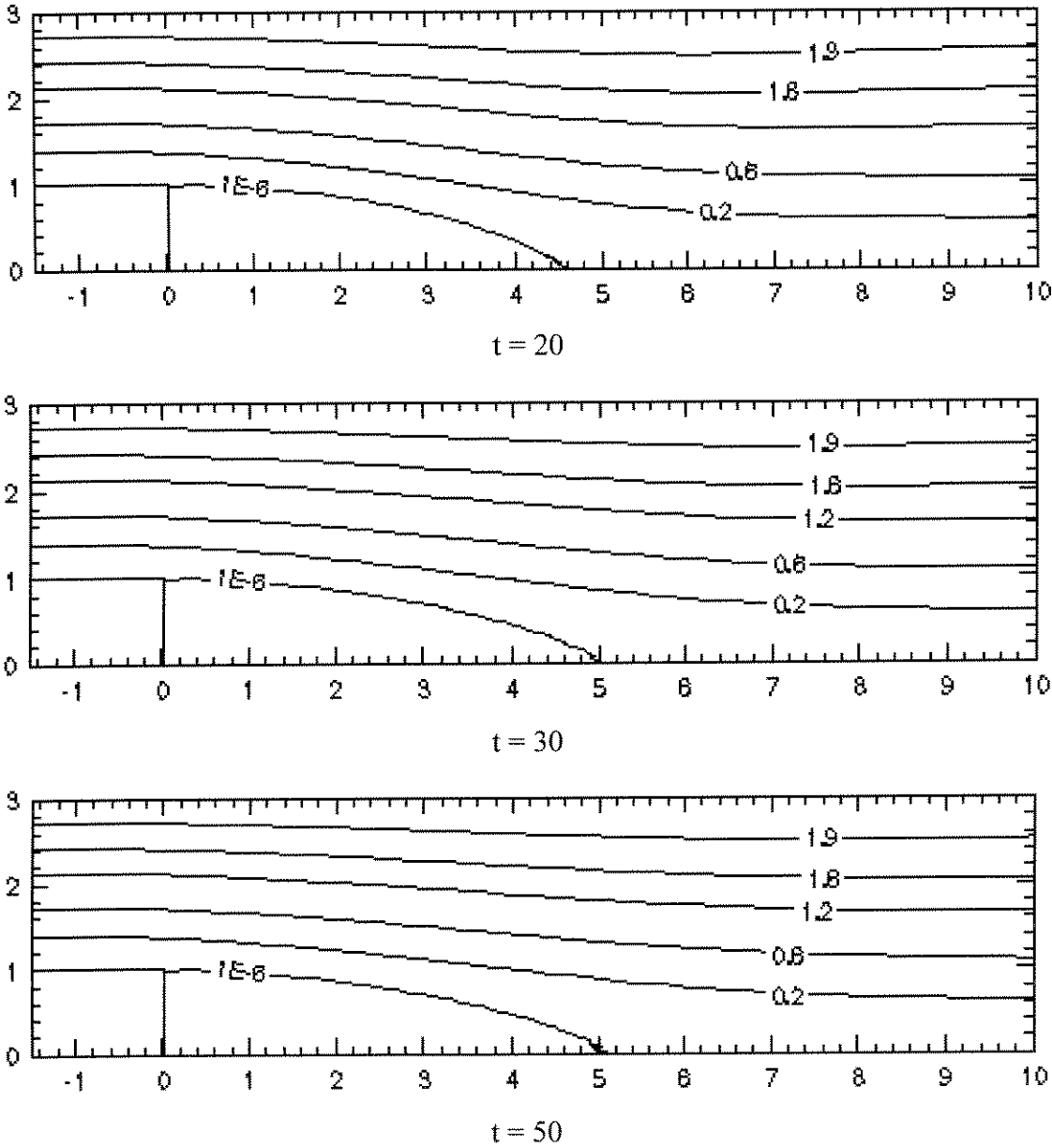


Figura 4.15. Linhas de corrente do escoamento numa expansão, em vários instantes de tempo

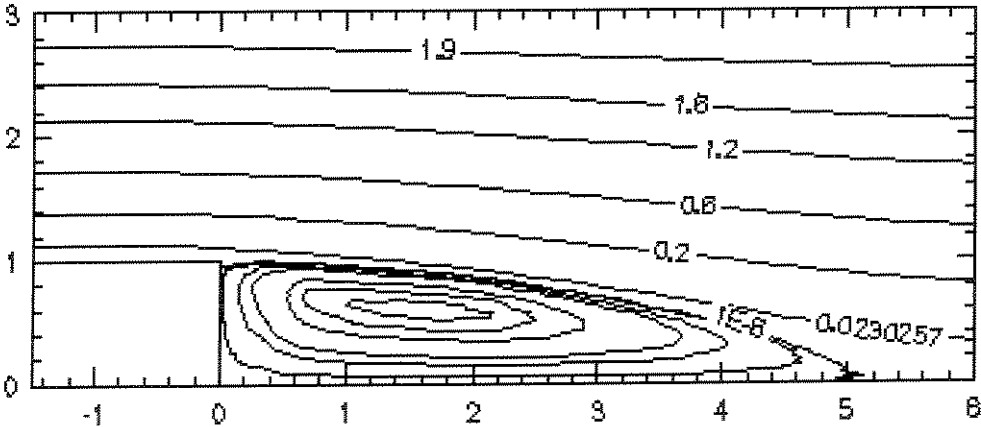


Figura 4.16. Ampliação da região de recirculação atrás de uma expansão num canal,  $t = 90$ .

### 4.3 Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular Infinito

O escoamento ao redor de um cilindro tem várias aplicações em engenharia, por exemplo, algumas delas são: cabos expostos ao vento, pilares de pontes, varetas de combustíveis em reatores nucleares e tubos em trocadores de calor. Este problema tem sido investigado por muitos autores através de métodos experimentais e numéricos. Uma característica peculiar deste tipo de escoamento; segundo informações encontradas na literatura; é que para número de Reynolds ( $Re$  baseado na velocidade da corrente não perturbada e no diâmetro do cilindro),  $Re$ , menor do que 40; o escoamento é em regime permanente. Acima de  $Re = 40$ , o escoamento apresenta características de escoamentos transientes com formação de vórtices na esteira atrás do cilindro. Portanto soluções numéricas para escoamentos permanentes não apresentam bons resultados para valores do número de Reynolds acima de 40, ou podem até mesmo não convergirem devido à natureza transiente do escoamento.

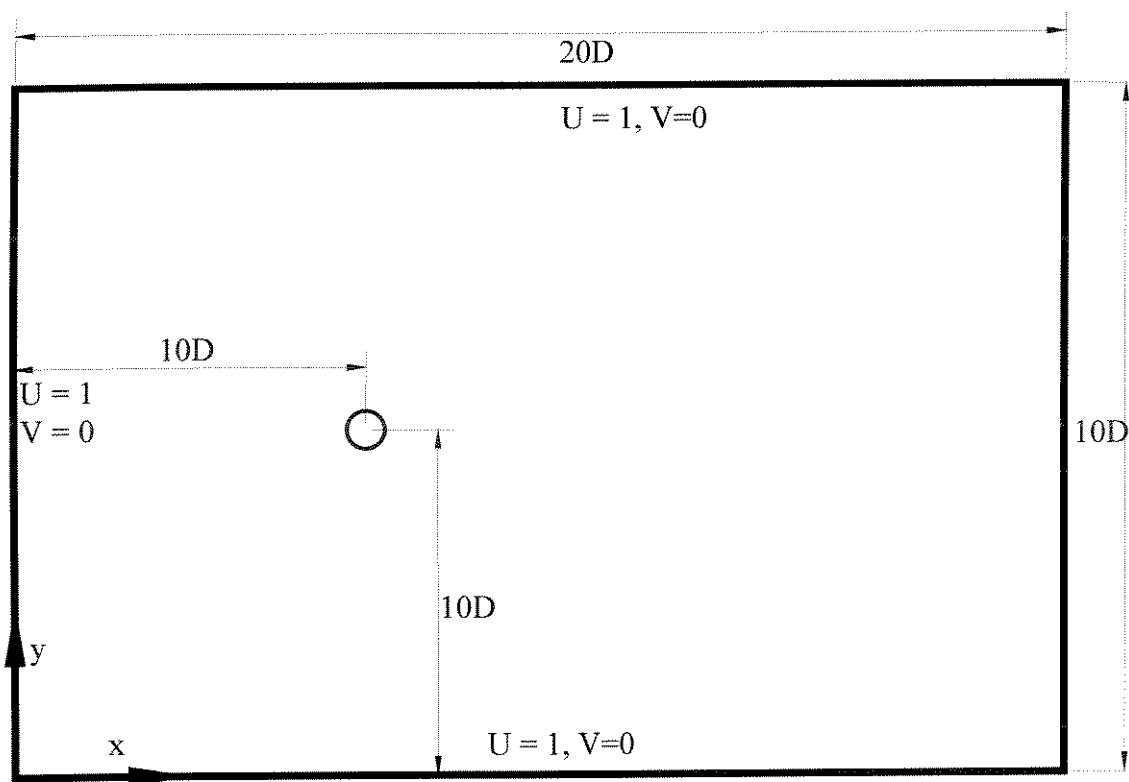


Figura 4.17. Região delimitada em torno do cilindro para análise do escoamento.

Este tipo de escoamento, geralmente, não é confinado por paredes próximas do cilindro, assim para se obter soluções numéricas, há a necessidade de se definir um domínio

para se resolver o problema. Na Figura 4.17 está mostrado a região considerada, em torno do cilindro, para solução do problema.

Aspectos da malha usada estão mostrados na Figura 4.18. Na superfície do cilindro, os pontos são colocados igualmente espaçados, desta forma, a malha tem o aspecto mostrado na Figura 4.19. Na realidade, um refinamento da malha, seria necessário apenas na região da esteira. A malha é constituída por 2.522 elementos o que corresponde a 10.334 nós. Isto representa um total de 23.313 graus de liberdade em  $(u,v,p)$ . O tempo de solução, em cada passo de tempo, numa estação de trabalho IBM RISC/6000 com 128 MegaBytes de RAM, foi de aproximadamente 24 horas.

Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com resultados de Cheng & Armfield (1995) e também com resultados obtidos por visualização do escoamento num túnel hidrodinâmico. Este túnel é operado por efeito gravitacional; tem seção de teste de 146x146x500 mm e encontra-se localizado em laboratório no Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Ilha Solteira-SP; tendo sido construído por Vieira (1997). Parte dos resultados aqui apresentados estão no trabalho de Campos Silva, Vieira & Moura (1998).

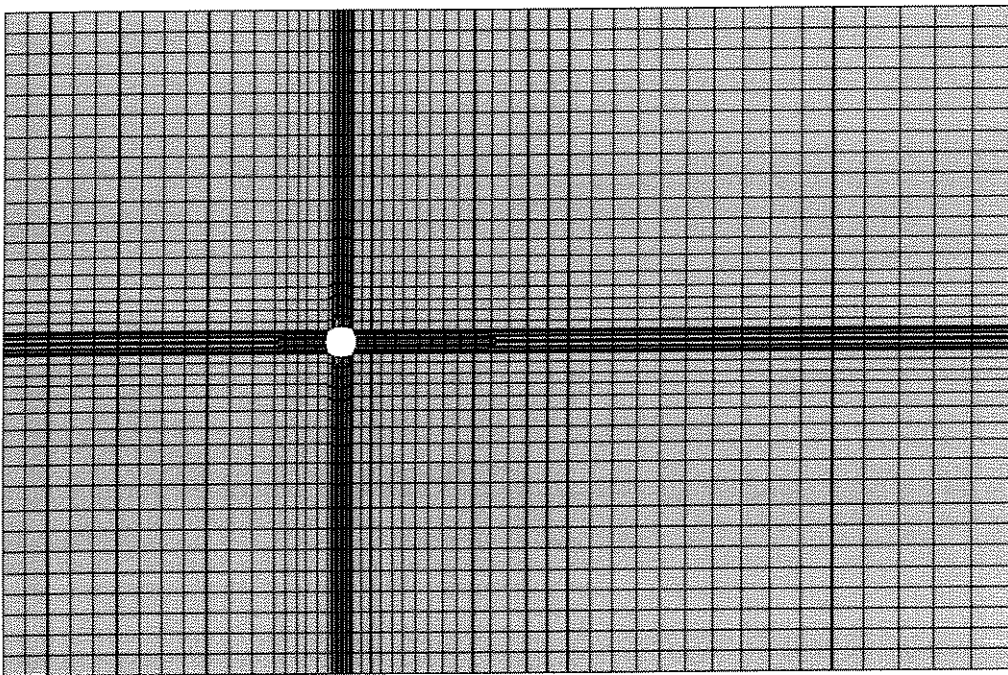


Figura 4.18. Discretização do domínio ao redor de um cilindro

A Figura 4.20 mostra a comparação qualitativa de resultados obtidos neste trabalho, para o comprimento da região de recirculação atrás do cilindro, com resultados experimentais obtidos através de visualização do escoamento, no túnel hidrodinâmico descrito anteriormente, para número de Reynolds,  $Re = 34$ . A captação da imagem no túnel é feita por processo fotográfico automatizado, como descrito por Vieira (1997). Apesar da razão de aspecto das imagens não serem a mesma, o comprimento da região de recirculação calculado numericamente está em boa concordância com o valor medido experimentalmente, sendo  $L/D$  aproximadamente 2.

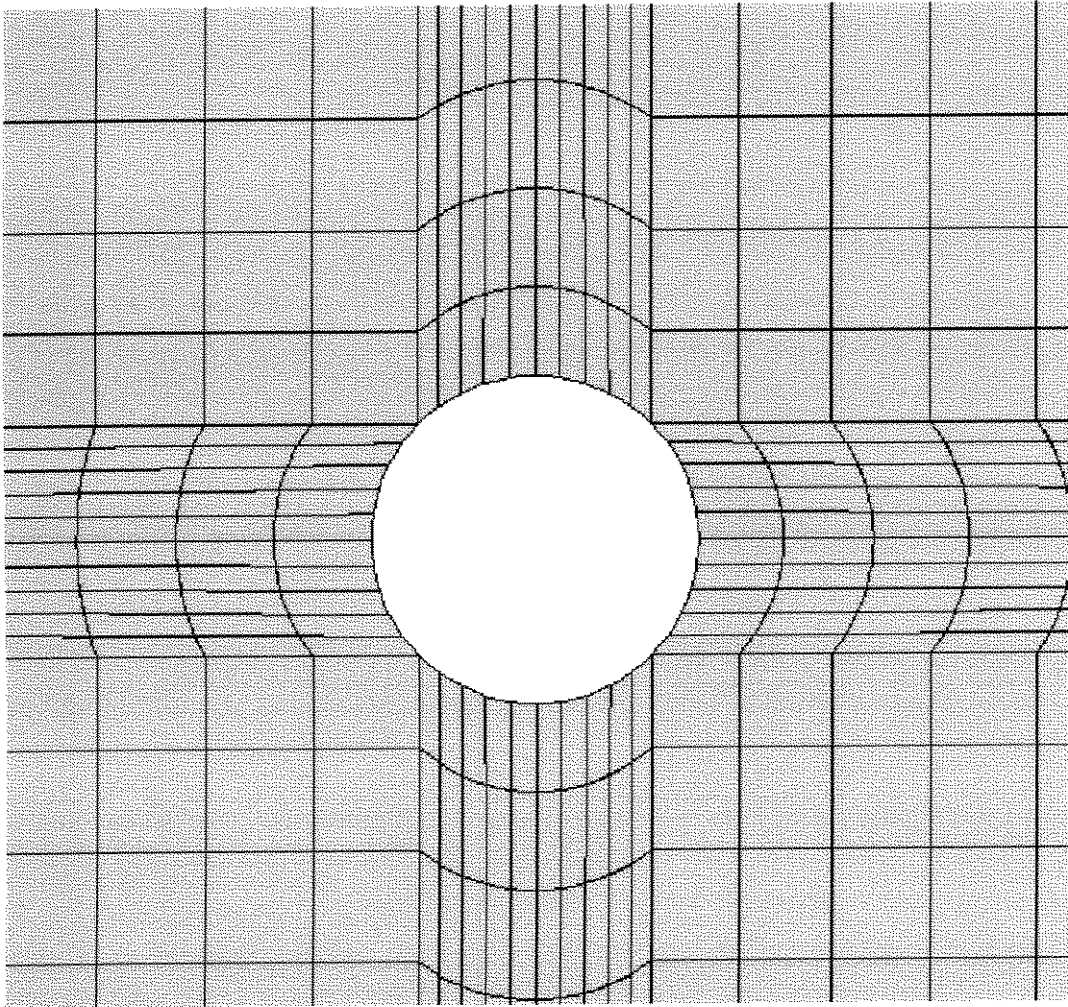


Figura 4.19. Ampliação da malha em torno do cilindro.

A Figura 4.21 mostra a comparação dos resultados do presente trabalho com resultados numéricos de Cheng & Armfield (1995) para número de Reynolds,  $Re = 40$ . A Figura 4.22 mostra linhas de corrente e como a região de recirculação cresce ao longo do tempo.

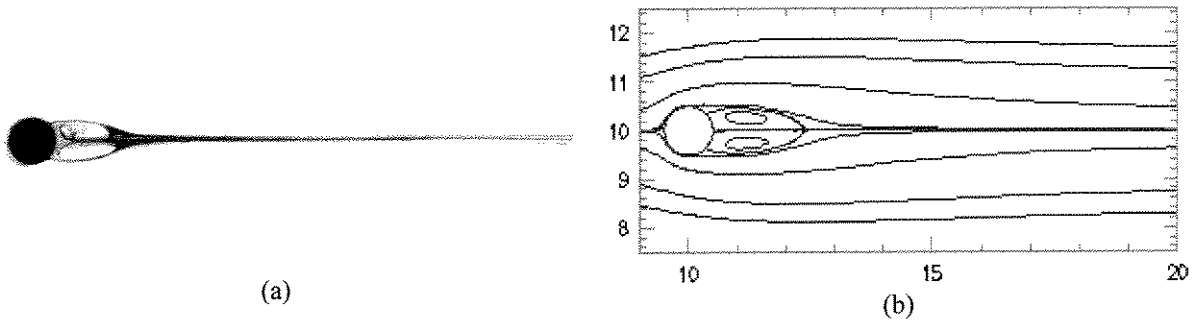


Figura 4.20. (a) Imagem da visualização do escoamento num túnel hidrodinâmico,  $Re = 34$ . (b) Imagem das linhas de corrente do escoamento calculado neste trabalho,  $Re = 34$

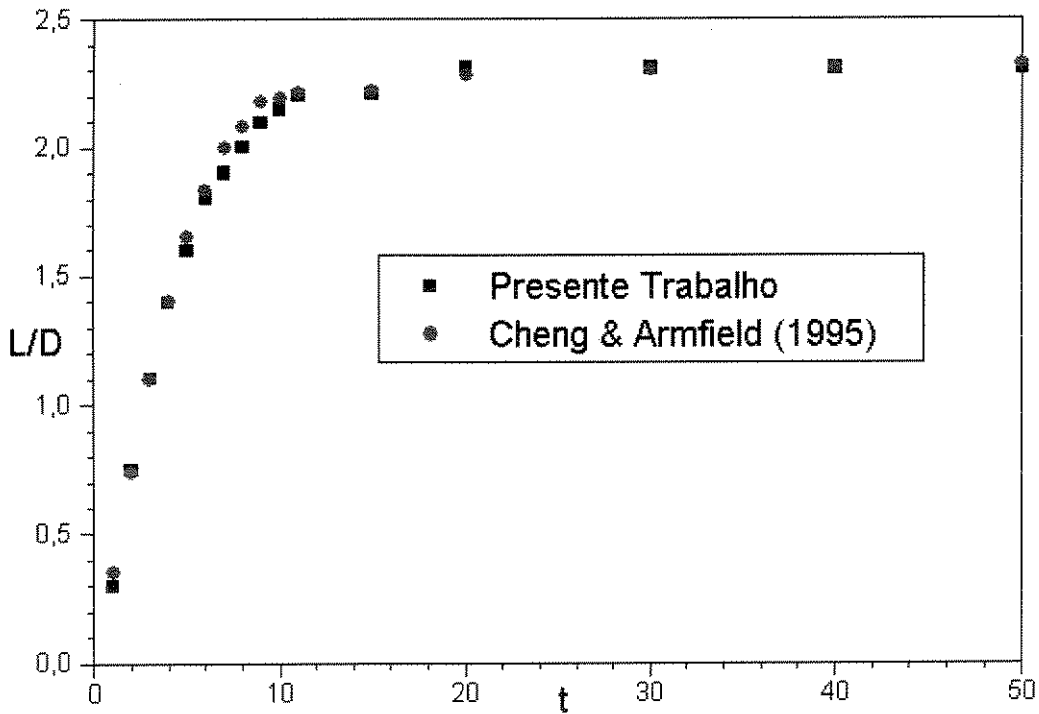


Figura 4.21. Comprimento da região de recirculação atrás de um cilindro em função do tempo.

A Figura 4.23 mostra a comparação do comprimento da região de recirculação para números de Reynolds diferentes. Para número de Reynolds maior, o comprimento da região de recirculação também é maior. Isto é verificado também experimentalmente. Para número de Reynolds,  $Re = 100$ , o programa numérico não simulou a formação de vórtices até o tempo mostrado. Para simular o fenômeno de formação de vórtices, talvez, tenha-se que avançar mais no tempo ou modificar o processo de discretização no tempo. Cheng & Armfield (1995)



afirmam que para simular o fenômeno de formação de vórtices, deve-se introduzir algum tipo de perturbação assimétrica no escoamento.

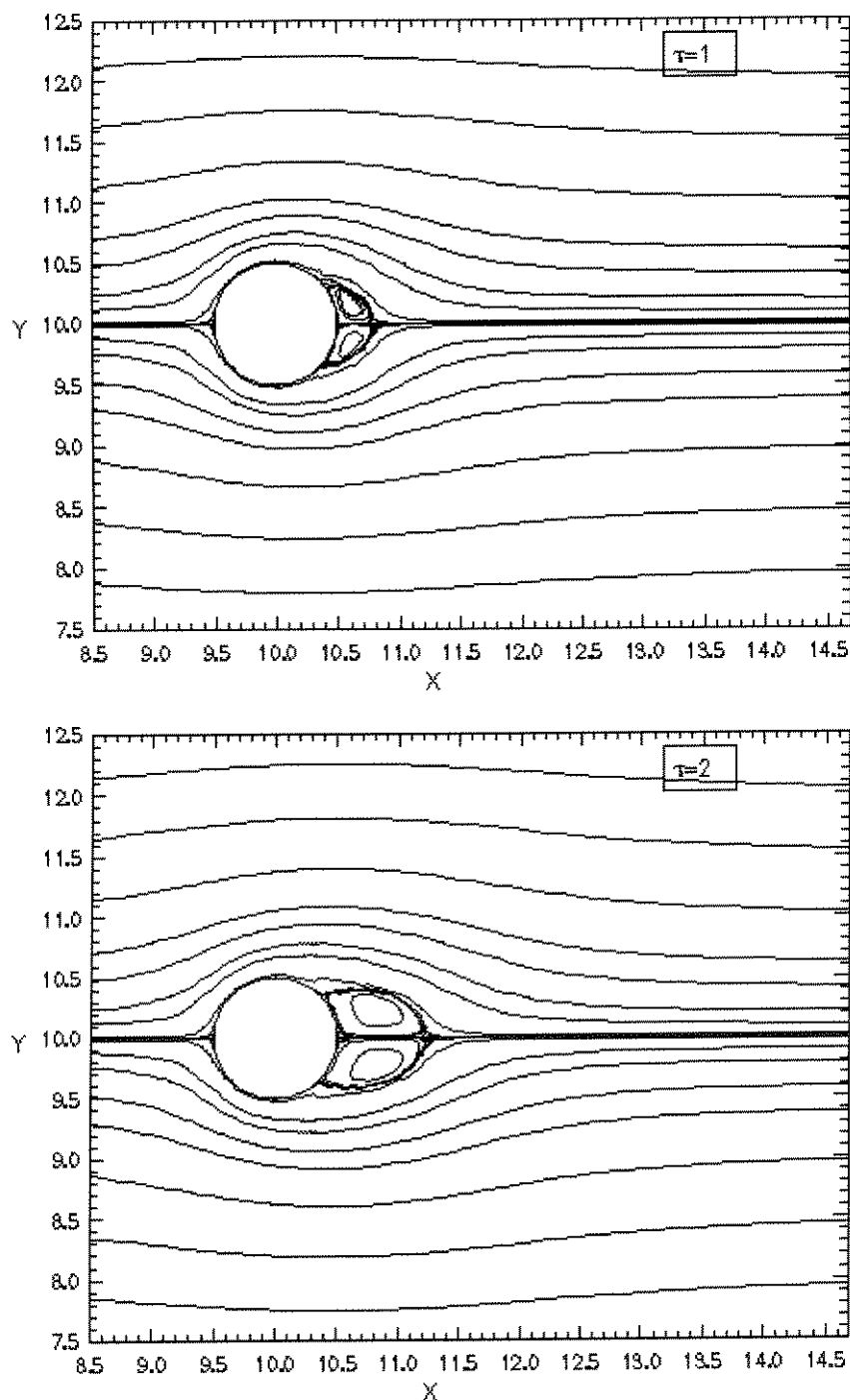


Figura 4.22 (a). Visualização da evolução da região de recirculação ao longo do tempo

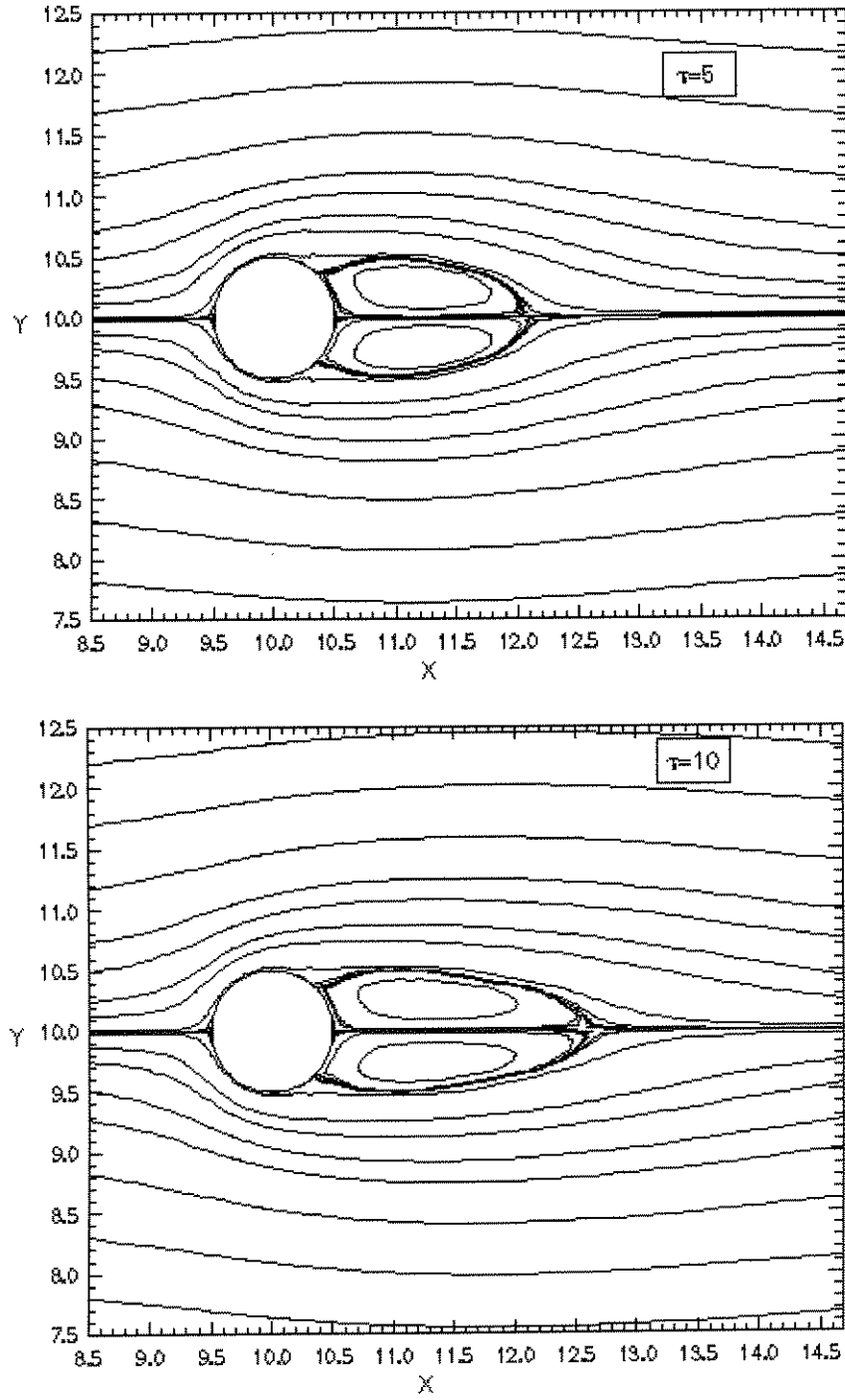


Figura 4.22 (b). Visualização da evolução da região de recirculação ao longo do tempo

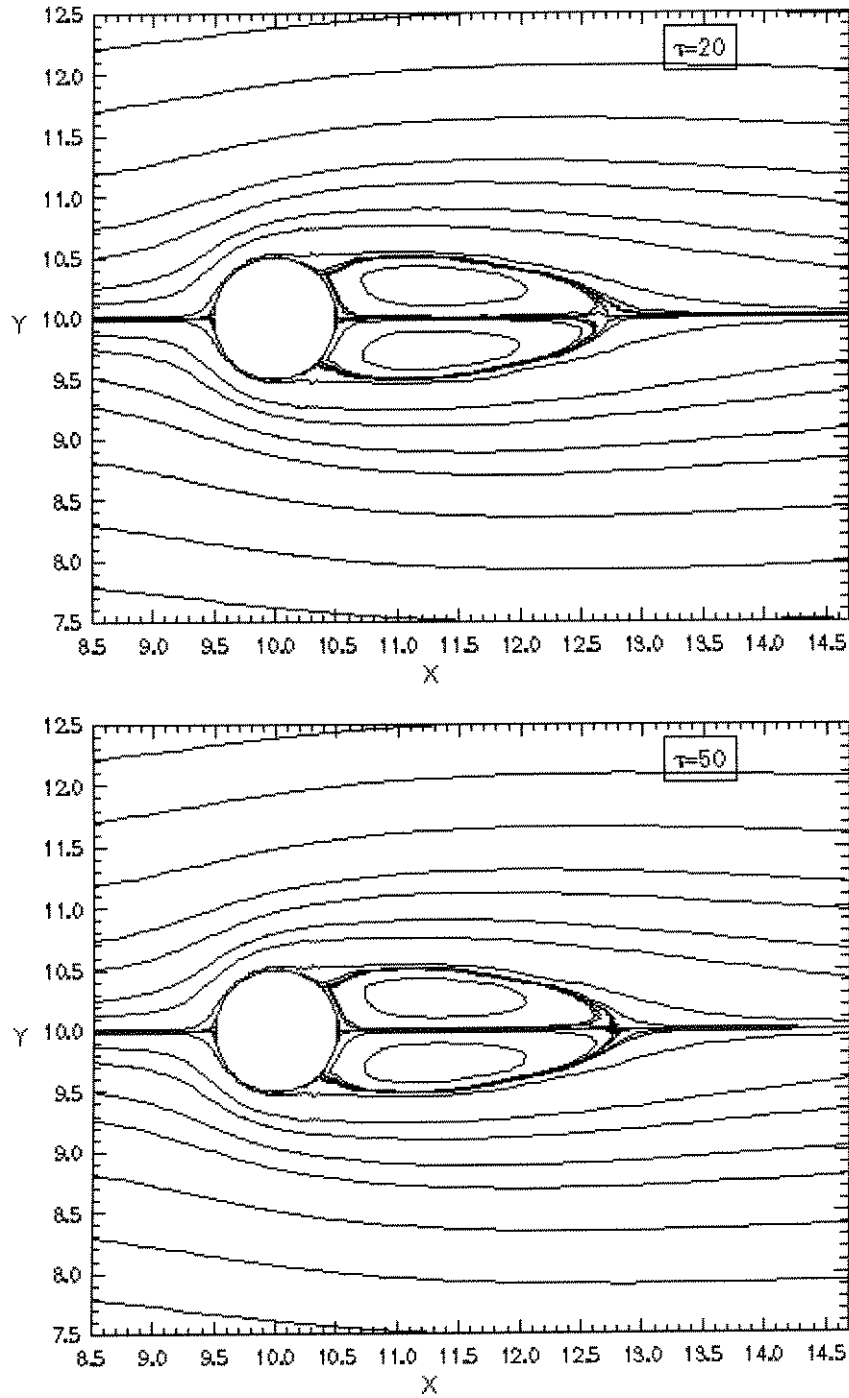
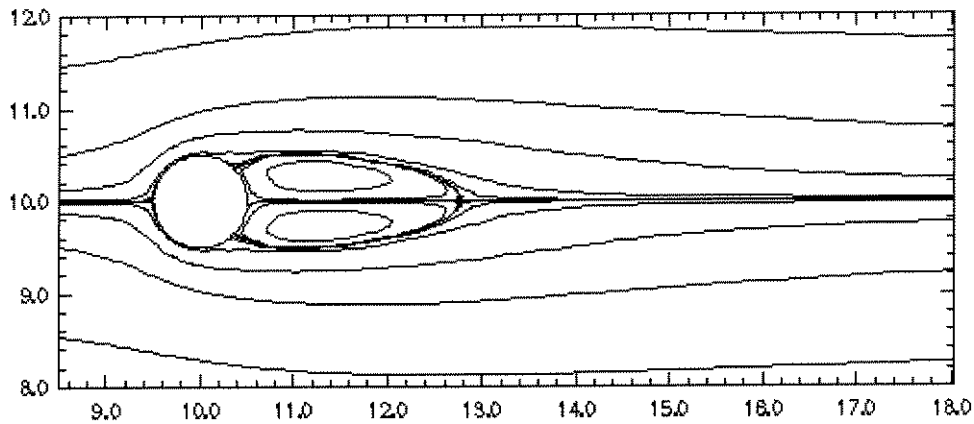


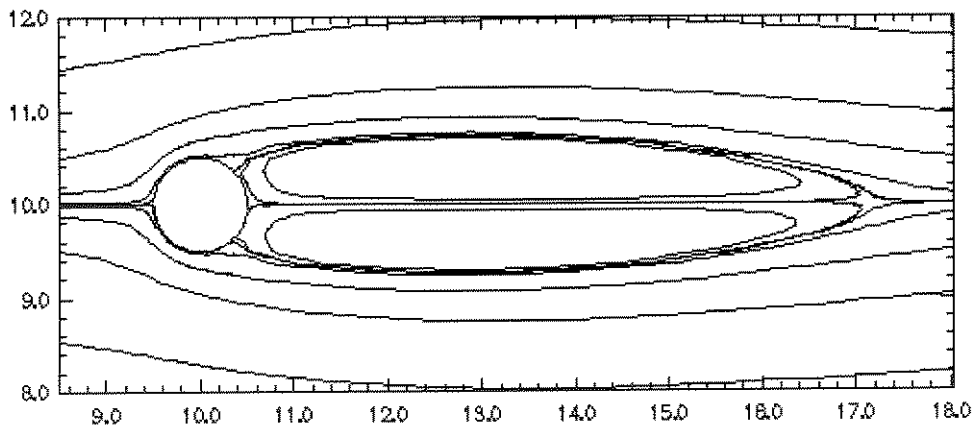
Figura 4.22 (c). Visualização da evolução da região de recirculação ao longo do tempo

O cálculo, neste exemplo, é relativamente lento por causa de se usar uma malha relativamente fina com muitos graus de liberdade, um pouco mais de 23.000. Desta forma,

qualquer teste requer um tempo de solução alto. Uma opção seria refazer alguns cálculos com uma malha mais grossa introduzindo alguma perturbação no modelo numérico para simular a formação de vórtices. Na continuação deste trabalho, serão implementados modelos de turbulência. Talvez isto resolva o problema da não simulação de vórtices pelo modelo numérico, quando o número de Reynolds cresce.



$Re = 40, t = 55$



$Re = 100, t = 55$

Figura 4.23. Comparação de resultados do comprimento da região de recirculação para Reynolds diferentes.

A Figura 4.24 mostra resultados para o coeficiente de pressão na superfície do cilindro desde o ângulo zero, na frente do cilindro onde chega o escoamento, até o ângulo 180 graus, atrás do cilindro. As diferenças entre os resultados podem ser devido ao critério de parada da solução. Devido a tolerância ser um pouco grosseira, pode ser que o resultado não tenha convergido para o valor verdadeiro em cada passo de tempo.

O coeficiente de pressão, no caso, é calculado por

$$C_p = 1 + P_j - P_0. \tag{4.10}$$

Onde  $P_j$  é a pressão adimensional, no ponto nodal  $j$  ao longo da superfície do cilindro, e  $P_0$  é pressão adimensional, no ponto de estagnação na frente do cilindro. Vale lembrar que, neste trabalho, a pressão é adimensionalizada na forma:

$$P = \frac{p}{\rho U_0^2}; \tag{4.11}$$

onde  $U_0$  é velocidade da corrente não perturbada pela presença do cilindro.

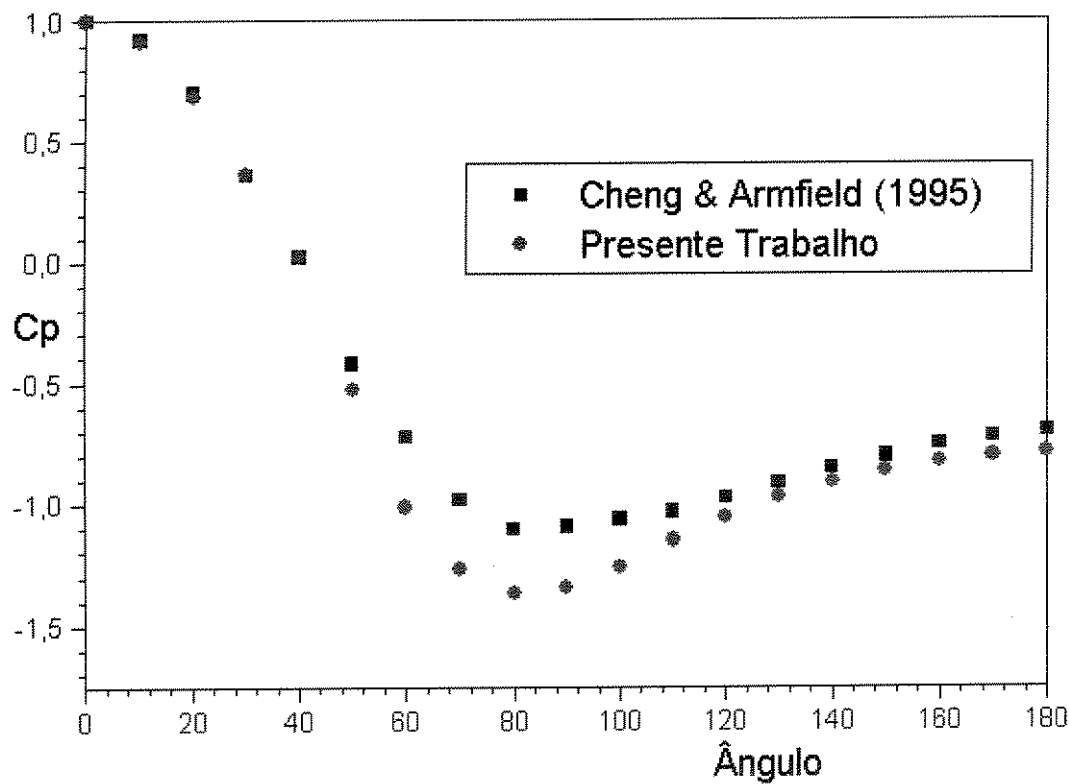


Figura 4.24. Distribuição de pressão ao longo da superfície do cilindro.

A Tabela 4.3 mostra valores numéricos para o coeficiente de pressão calculados no presente trabalho e valores extraídos do trabalho de Cheng & Armfield (1995), para número de Reynolds,  $Re = 40$ .

A solução numérica do escoamento ao redor de um cilindro representa um teste desafiador para modelos numéricos. Segundo Taylor & Hughes (1981), soluções que às vezes podem não ter significado físico, são úteis para indicar se o modelo proposto necessita de correções ou não.

Tabela 4.3. Valores do coeficiente de pressão ao longo da superfície do cilindro,  $Re = 40$

| Ângulo em Graus | $C_p$ , Presente Trabalho | $C_p$ , Cheng & Armfield(1995) |
|-----------------|---------------------------|--------------------------------|
| 0               | 1,000                     | 1,00                           |
| 10              | 0,912                     | 0,92                           |
| 20              | 0,683                     | 0,70                           |
| 30              | 0,364                     | 0,36                           |
| 40              | 0.0196                    | 0,02                           |
| 50              | -0,525                    | -0,42                          |
| 60              | -1,01                     | -0,72                          |
| 70              | -1,263                    | -0.98                          |
| 80              | -1,366                    | -1,10                          |
| 90              | -1,339                    | -1,09                          |
| 100             | -1,254                    | -1,06                          |
| 110             | -1,147                    | -1,03                          |
| 120             | -1,05                     | -0,97                          |
| 130             | -0,967                    | -0,91                          |
| 140             | -0,905                    | -0,85                          |
| 150             | -0,862                    | -0,80                          |
| 160             | -0,824                    | -0,75                          |
| 170             | -0,798                    | -0,72                          |
| 180             | -0,788                    | -0,70                          |

#### 4.4 Escoamento num Canal com um Cilindro Quadrado Bloqueando a Seção

Considera-se, neste teste, o escoamento num canal com um cilindro quadrado bloqueando a seção como indicado na Figura 4.25.

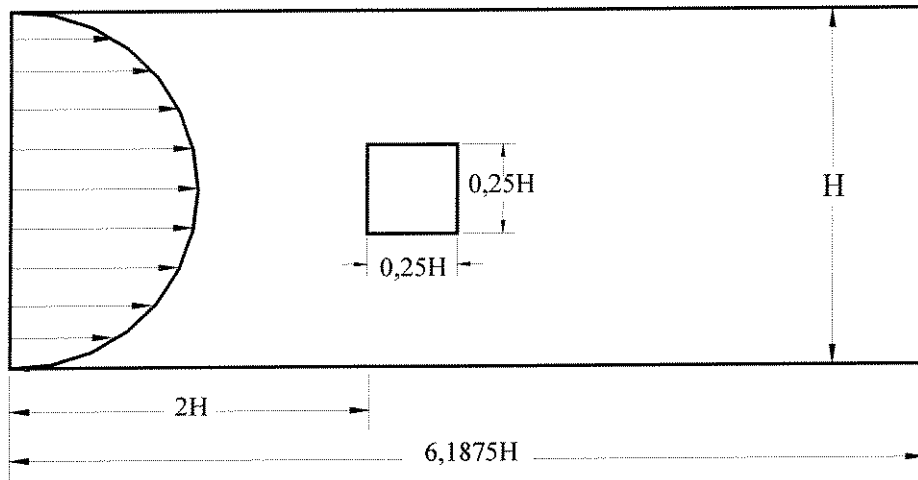


Figura 4.25. Geometria do escoamento num canal com bloqueio por cilindro quadrado.

A Figura 4.26 mostra a malha utilizada. A malha é constituída de  $44 \times 15$  elementos, exceto na região do cilindro, num total de 2.678 nós.

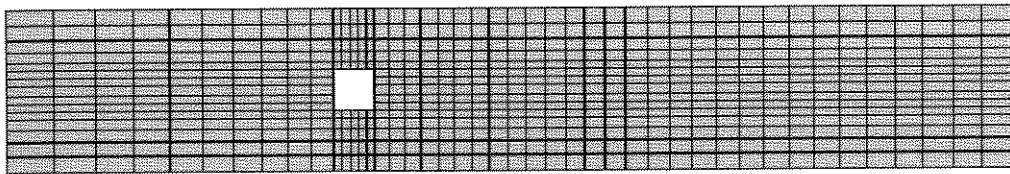


Figura 4.26. Discretização do canal com bloqueio por um cilindro de seção quadrada.

A Figura 4.27 mostra a distribuição de velocidade longitudinal para o caso de escoamento com número de Reynolds igual a 100, em posições diferentes ao longo do canal, no instante de tempo,  $t = 5$ . A posição,  $X = 2$ , coincide com a face esquerda do cilindro e  $X = 2,25$  com a face direita. A Figura 4.28 mostra perfis de velocidade  $U$  para posições ao longo do canal, para coordenadas  $X$  após o cilindro.

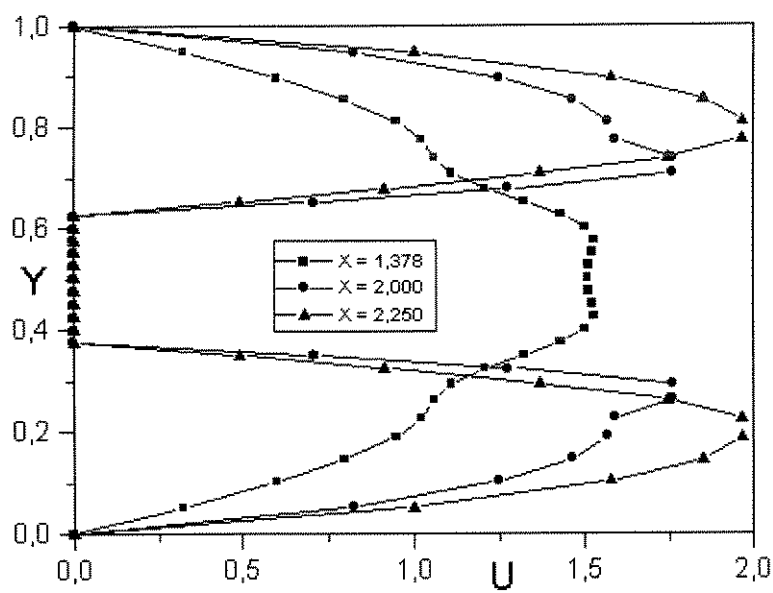


Figura 4.27. Distribuição de velocidade U ao longo do canal para  $Re = 100$ .

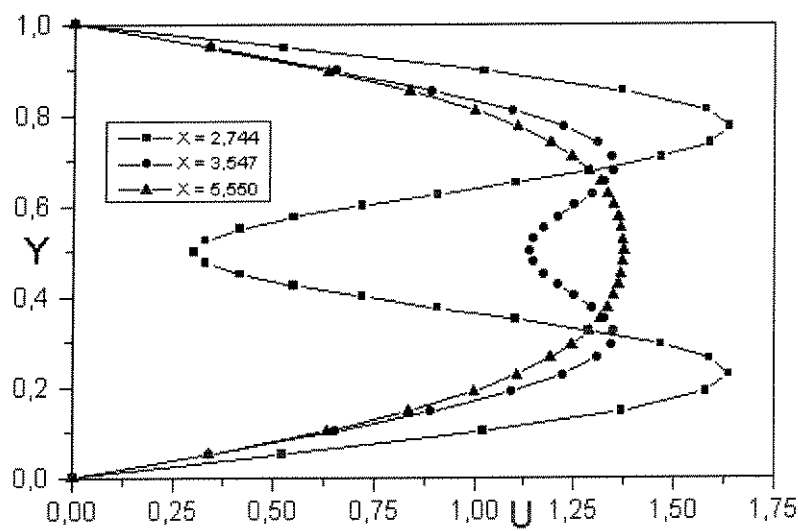
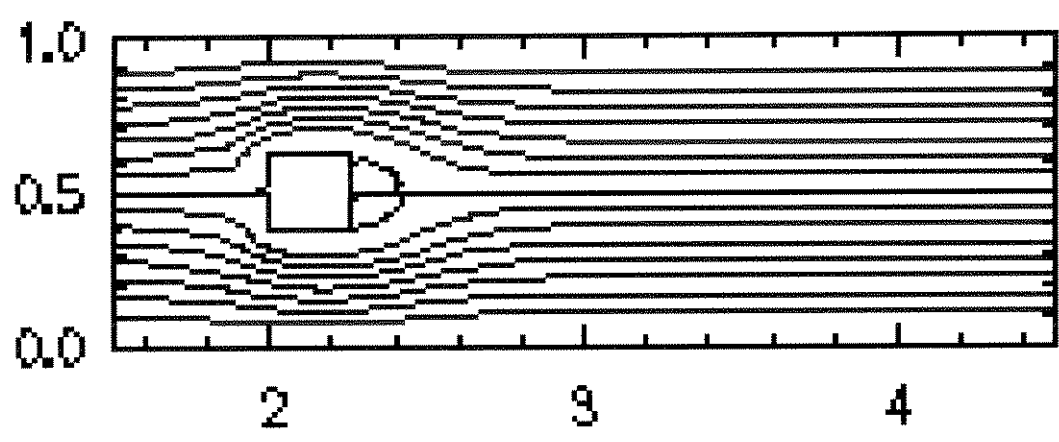


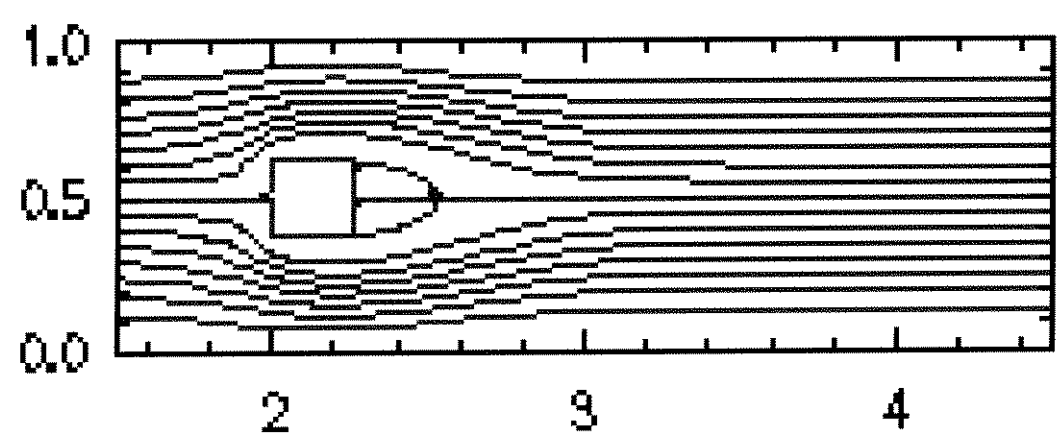
Figura 4.28. Distribuição de velocidade U ao longo do canal para  $Re = 100$ .

A Figura 4.29 mostra as linhas de corrente e a evolução da região de recirculação atrás do cilindro à medida que o tempo aumenta. Comparado com o caso de um cilindro de seção circular no escoamento não confinado por paredes; parece que o efeito da parede, neste caso, faz com que o escoamento atinja o regime permanente mais rapidamente. Pode-se observar que, praticamente, não há mais diferença entre os comprimentos da região de recirculação dos instantes de tempo,  $t = 3$  e  $t = 5$ .

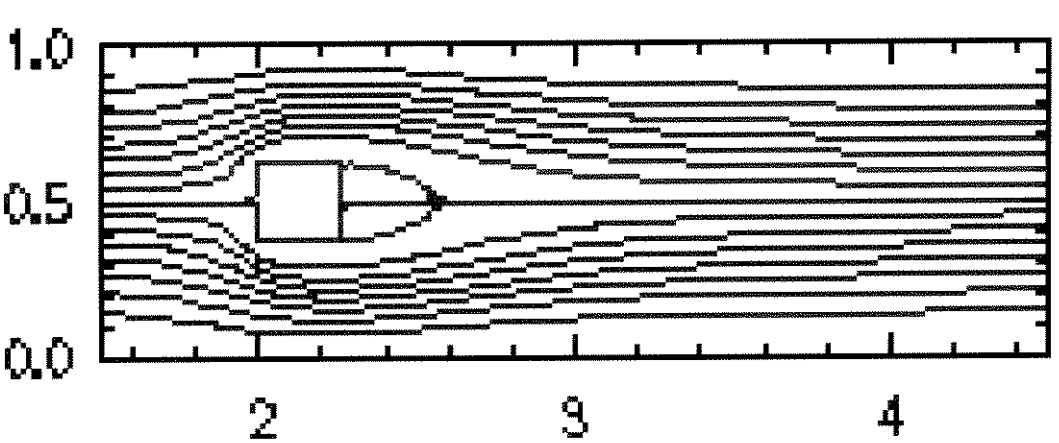




(a)  $t = 0,5$



(b)  $t = 1,0$



(c)  $t = 3,0$

Figura 4.29. Linhas de corrente em diferentes instantes de tempo

A Figura 4.30 mostra uma ampliação da região de recirculação do escoamento em torno do cilindro quadrado, no instante de tempo,  $t = 5$ .

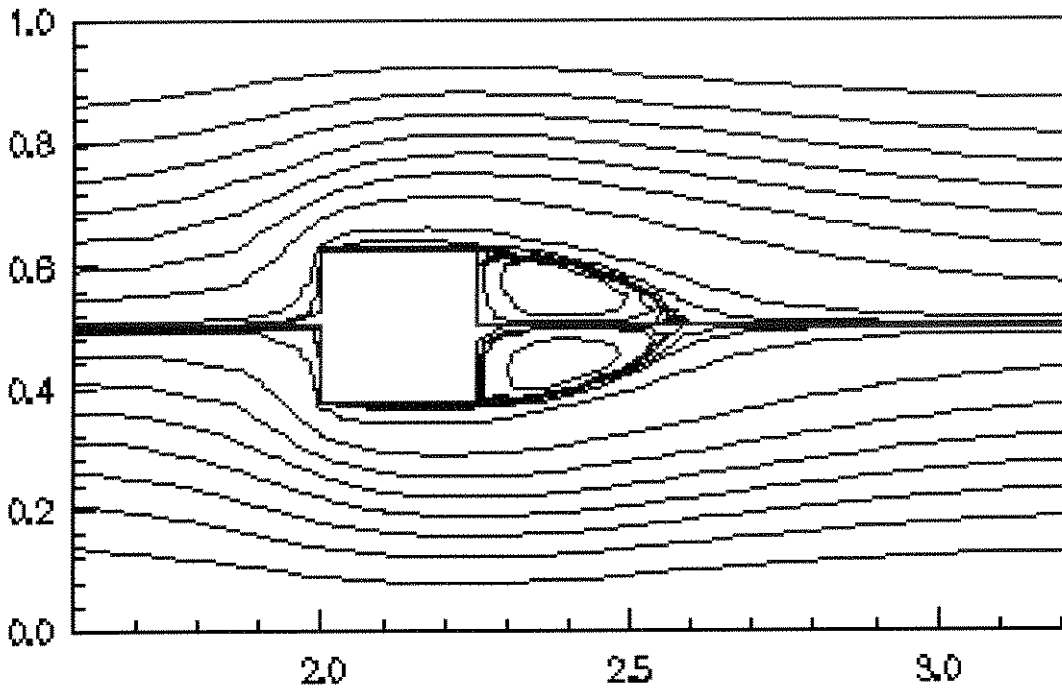


Figura 4.30. Região de recirculação atrás de um cilindro quadrado, em  $t = 5$ .

A Figura 4.31 mostra como varia o coeficiente de atrito local nas paredes inferior e superior do canal. Este coeficiente de atrito é definido na forma:

$$C_f = C_x \text{ Re} = 2 \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{Y=0 \text{ ou } Y=1} \quad (4.12)$$

e

$$C_x = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U_0^2}. \quad (4.13)$$

A derivada na equação (4.12) é avaliada na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum_{\beta=1}^{NEL} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X} U_{\beta}. \quad (4.14)$$

Onde  $N_{\beta}$  são as funções de interpolação e  $U_{\beta}$  são as velocidades nos elementos das paredes consideradas.

Os resultados para o coeficiente de atrito estão em boa concordância com resultados (não mostrados por ser difícil extraí-los do "paper") de Ramaswamy & Jue (1992), exceto no

valor de pico, onde o erro está em torno de 10%. O valor de pico do fator de atrito de Ramaswamy & Jue é de aproximadamente 42, enquanto que valor de pico, na Figura 4.31, é de aproximadamente 47,3.

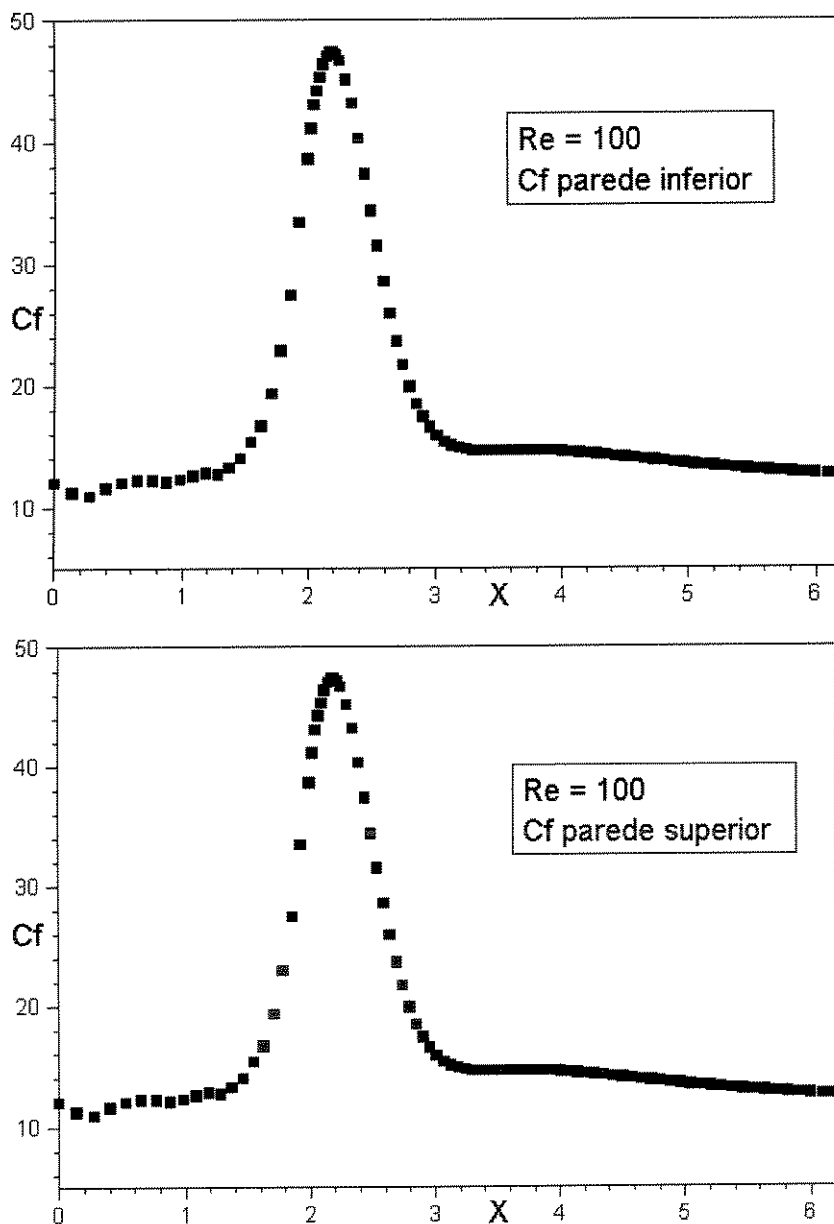


Figura 4.31. Coeficiente de atrito local ao longo das paredes do canal

Em geral, todos os resultados obtidos no presente capítulo estão em boa concordância com resultados de outros trabalhos obtidos ou por métodos numéricos ou experimentais, mostrando que o modelo numérico simulou corretamente características dos escoamentos considerados. Problemas com mais complexidade na formulação ou na geometria deverão ser investigados em futuras aplicações deste trabalho.

## CAPÍTULO 5

### Aplicações para Escoamentos com Transferência de Calor e Baixos Números de Reynolds e para Escoamentos em Convecção Natural.

Neste capítulo são considerados dois casos de escoamentos com transferência de calor. Primeiro considera o escoamento induzido pela parede superior numa cavidade quadrada. Um caso de escoamento que pode ser considerado como sendo por convecção forçada. O segundo caso é o escoamento por convecção natural, também numa cavidade quadrada.

#### 5.1 Cavidade Quadrada com a Parede Superior Móvel e Transferência de Calor

Agora, considera-se o problema do escoamento induzido numa cavidade quadrada pelo movimento da parede superior com transferência de calor. As equações do escoamento e da distribuição de temperatura são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = 0 \quad (5.4)$$

As condições de contorno para a temperatura são:

$$\begin{aligned} \theta &= 1 \quad \text{em} \quad X = 0, \\ \theta &= 0 \quad \text{em} \quad X = 1, \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= 0 \quad \text{em} \quad Y = 0 \quad \text{e} \quad Y = 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $\theta = (T - T_r) / \Delta T$ . Sendo  $T_r$  e  $\Delta T$  uma temperatura e uma diferença de temperatura de referências respectivamente.

Neste caso, foi testada a técnica de “upwind” implementada no capítulo 3. A Figura 5.1 mostra a comparação da distribuição de velocidade  $U$  ao longo da linha central vertical da cavidade,  $X = 0,5$ . O valor adotado para o números de Reynolds foi 400. Os resultados apresentados, foram obtidos discretizando-se a cavidade por uma malha de 40 x 40 elementos e para um instante de tempo,  $t = 15$ . A concordância entre os resultados é satisfatória. Para número de Reynolds elevado pode ser que a solução usando interpolação isoparamétrica; em que as variáveis e coordenadas, dentro do elemento, são interpoladas pelas mesmas funções, não atinjam a convergência; enquanto é esperado que com o “upwind os resultados sejam convergentes, devido a eliminação de coeficientes negativos nas equações discretizadas. Este é um teste que deverá ser feito na continuação deste trabalho.

A Figura 5.2 mostra a variação da temperatura ao longo de  $X$  para  $Y$  constante e igual a 0,5 para  $\text{Pr} = 0,72$ . Na obtenção da distribuição de temperatura foi aplicado o procedimento de “upwind” desenvolvido no Capítulo 3. Pode-se verificar um ligeiro aquecimento do fluido próximo da parede mais fria a medida que o tempo aumenta. A Figura 5.3 mostra como as regiões dentro da cavidade estão aquecidas ao longo do tempo. Pode-se verificar que para tempos mais baixos a região mais fria que se situa próxima ao canto inferior direito é maior. O aspecto das regiões aquecidas, no caso do movimento induzido por cisalhamento, talvez possa ser explicado pela natureza das não linearidades do campo de velocidades. Este aspecto é diferente do aspecto das regiões aquecidas quando se considera o escoamento por convecção natural como apresentado no exemplo posterior do item 5.2.

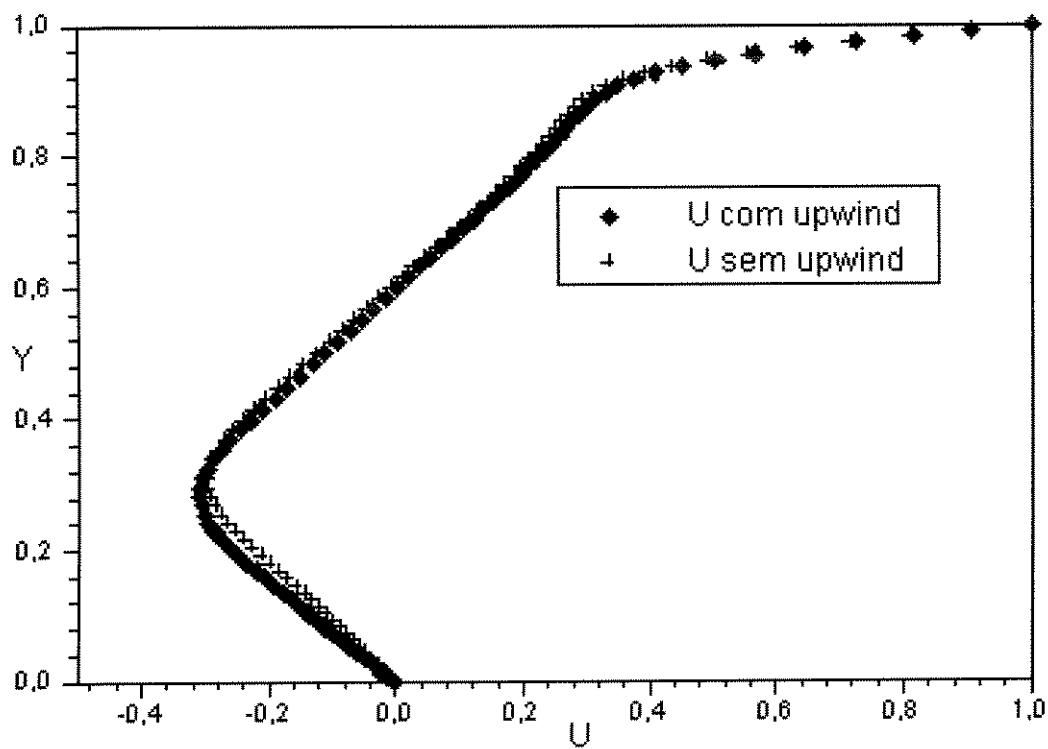


Figura 5.1. Distribuição de velocidade  $U$  em  $X = 0,5$ , para  $Re = 400$  e malha  $40 \times 40$ .

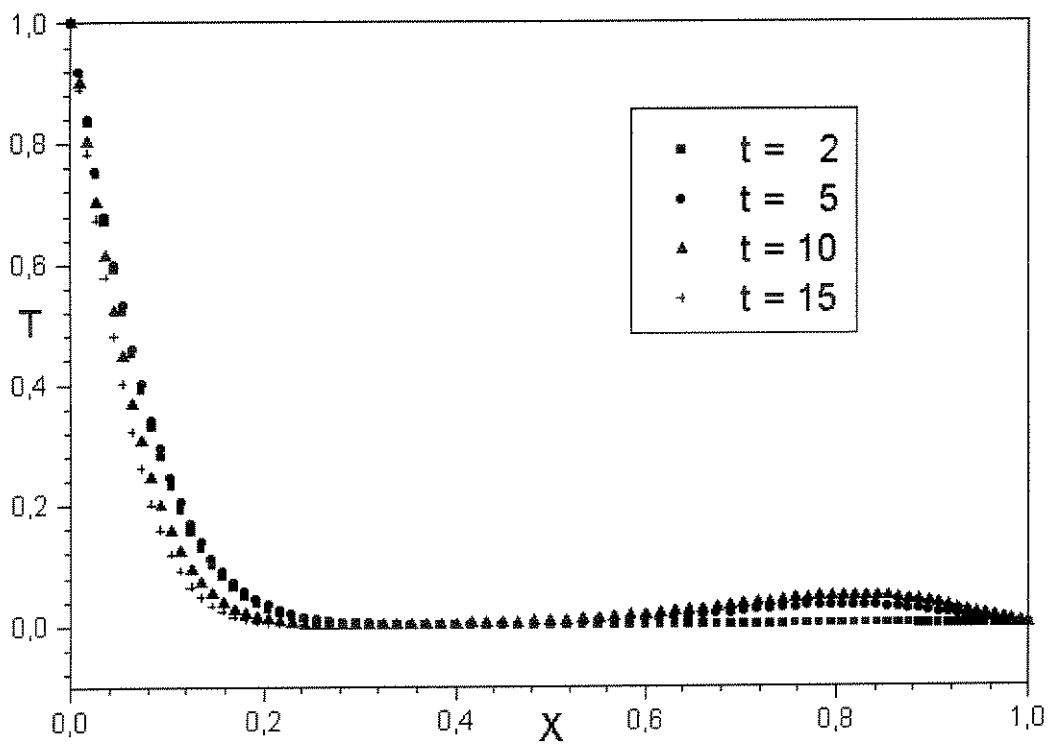


Figura 5.2. Distribuição de temperatura ao longo de  $X$ , para  $Y = 0,5$ .

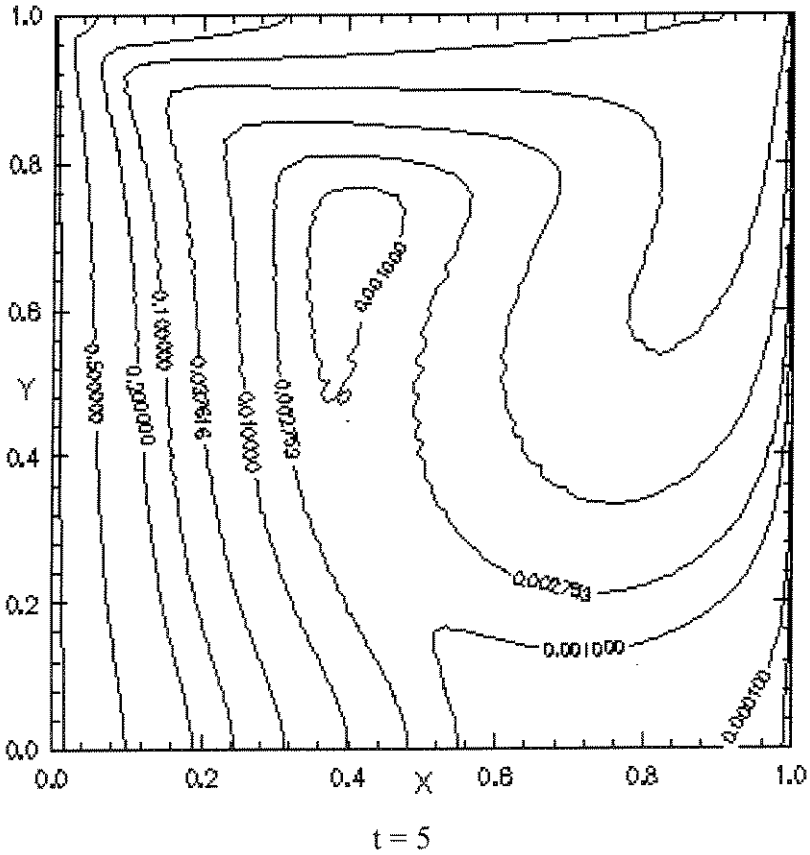
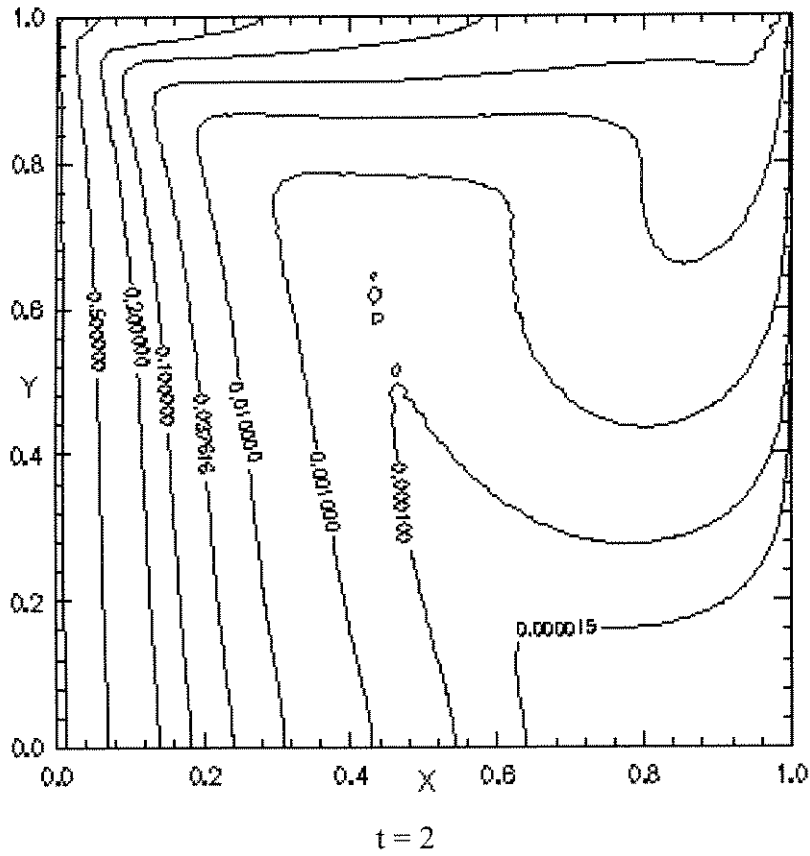


Figura 5.3 (a). Isotermas em diferentes instantes de tempo.

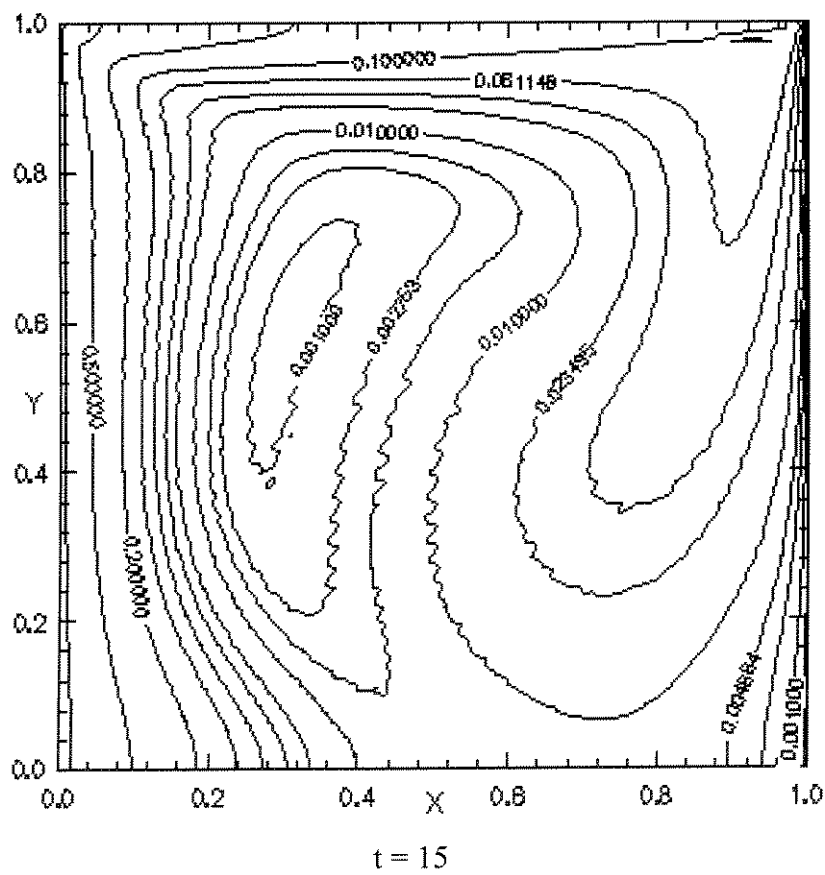
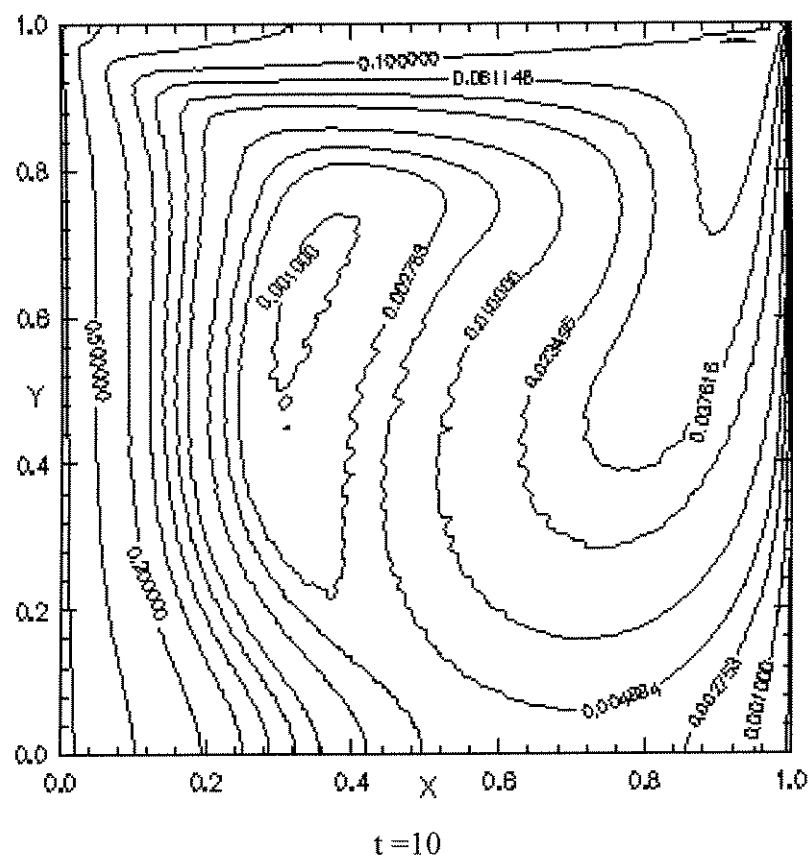


Figura 5.3 (b). Isotermas em diferentes instantes de tempo.



## 5.2 Escoamento por Convecção Natural numa Cavity Quadrada

Neste exemplo, considera-se o escoamento por convecção natural numa cavity quadrada. As equações governantes, neste caso, considerando a hipótese de Boussinesq, são:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{Ra}{Pr} \theta \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = 0 \quad (5.9)$$

As seguintes condições de contorno foram impostas:  $U, V$  iguais a zero em todas as paredes;  $\theta = 1$  em  $X = 0$ ;  $\theta = 0$  em  $X = 1$ ; as paredes superior e inferior foram tomadas como isoladas termicamente e a pressão foi imposta,  $P = 0$ , no centro de gravidade da cavity. As condições iniciais foram tomadas iguais a zero.

Nas equações (5.6) a (5.9) as variáveis adimensionais foram definidas como:

$$X_i = \frac{x_i}{L}, \quad U_i = \frac{u_i L}{v}, \quad t = \frac{t^* v}{L^2}, \quad P = \frac{(p - p_0) L^2}{\rho_0 v^2}, \quad \theta = \frac{T - T_r}{\Delta T}, \quad Pr = \frac{v}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\alpha v} \quad (5.10)$$

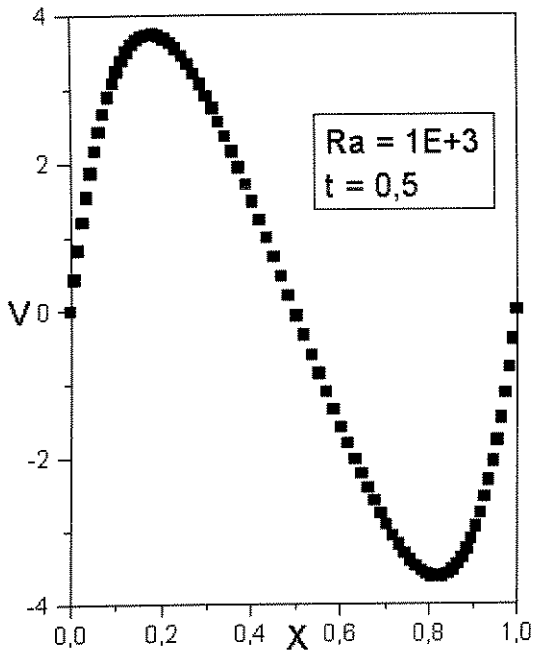
Neste caso, aparece uma dificuldade adicional que é mais um acoplamento entre as equações - o acoplamento das equações (5.8) e (5.9). Foram feitos dois testes: no primeiro, obteve-se a solução simultânea das equações de quantidade de movimento e de energia e, no segundo, resolveu-se as equações de quantidade de movimento e depois a equação de energia. Para número de Rayleigh baixo, as duas soluções apresentaram resultados idênticos. Já para número de Rayleigh mais alto, a segunda opção apresentou melhores resultados. Uma

investigação mais detalhada das causas das diferenças entre as soluções, será feita em futuras aplicações do modelo numérico implementado neste trabalho.

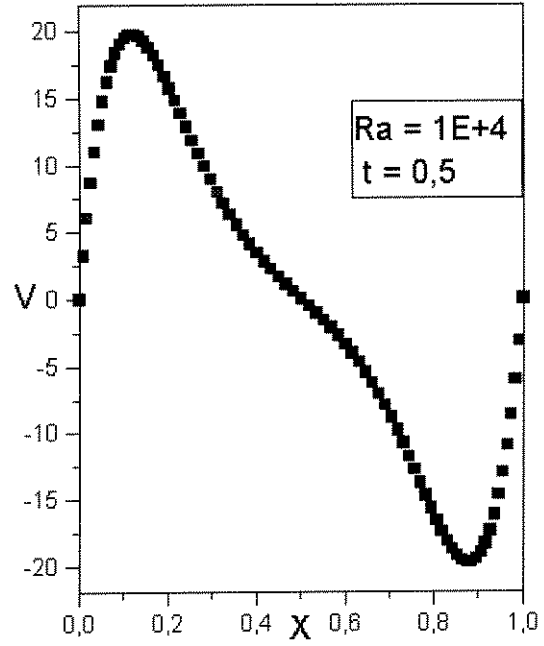
Três casos foram analisados:  $Ra = 1.000$ ,  $Ra = 10.000$  e  $Ra = 100.000$ , ambos com  $Pr = 1$ . A Figura 5.4 mostra resultados para o componente de velocidade vertical na linha horizontal, na metade da altura da cavidade. O resultado mostrado na parte (d) da Figura 5.4 foi extraído de um artigo de Kettleborough et al. (1989). Este resultado concorda qualitativamente bem com o resultado mostrado na parte (c) da Figura 5.4, cujo número de Rayleigh é o mesmo. Foi observado que a medida que o número de Rayleigh aumenta, o passo de tempo deve ser reduzido para a solução convergir. Foi constatado também, que a medida que o tempo cresce, o passo de tempo pode ser aumentado e ainda pode-se obter convergência da solução. Nos casos de  $Ra = 1.000$  e  $Ra = 10.000$ , o passo de tempo foi tomado igual a  $\Delta t = 0,1$ . No caso de  $Ra = 100.000$ , o passo de tempo inicial foi de  $\Delta t = 0,01$  para haver convergência da solução.

Os resultados do caso  $Ra = 1.000$  foram obtidos resolvendo-se as equações de quantidade de movimento e de energia simultaneamente, no processo iterativo, enquanto que para  $Ra = 10.000$ , primeiro resolvia-se as equações de quantidade de movimento e na seqüência a equação de energia, no processo iterativo. No caso de  $Ra = 100.000$ , os testes mostraram que a segunda opção apresentou melhores resultados.

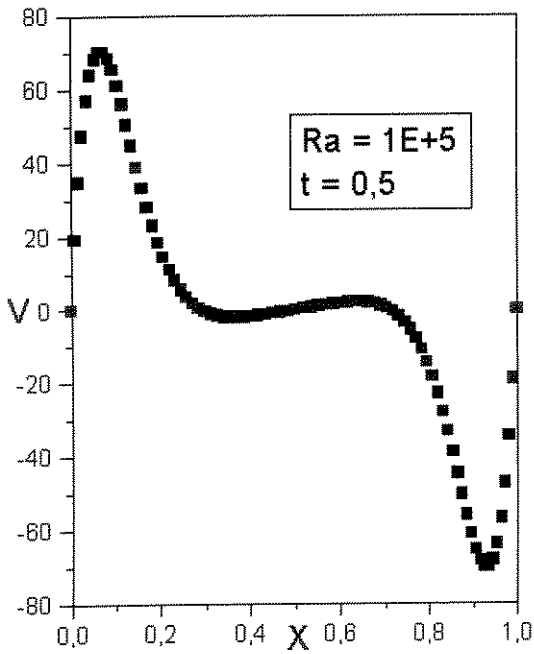
Na Figura 5.5 são mostrados resultados para as linha de corrente, para diferentes números de Rayleigh. Pode se ver a comparação qualitativa dos resultados do presente trabalho com resultados de Ramaswamy (1988); Figura 5.5 (c) e Figura 5.5 (d), respectivamente. Aparentemente a concordância entre os resultados mostrados graficamente é satisfatória.



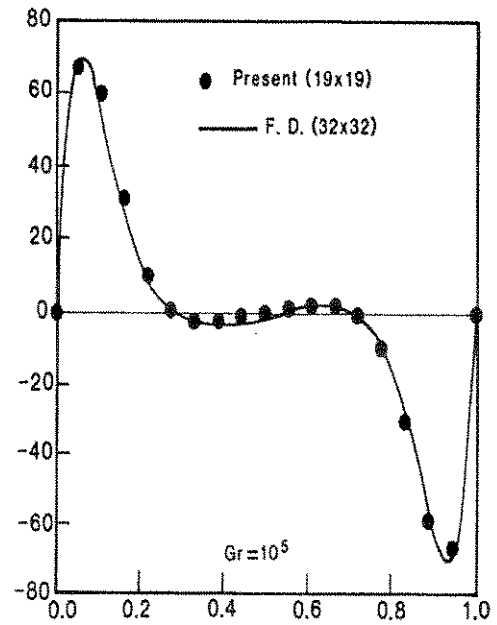
(a)  $Ra = 1.000$



(b)  $Ra = 10.000$

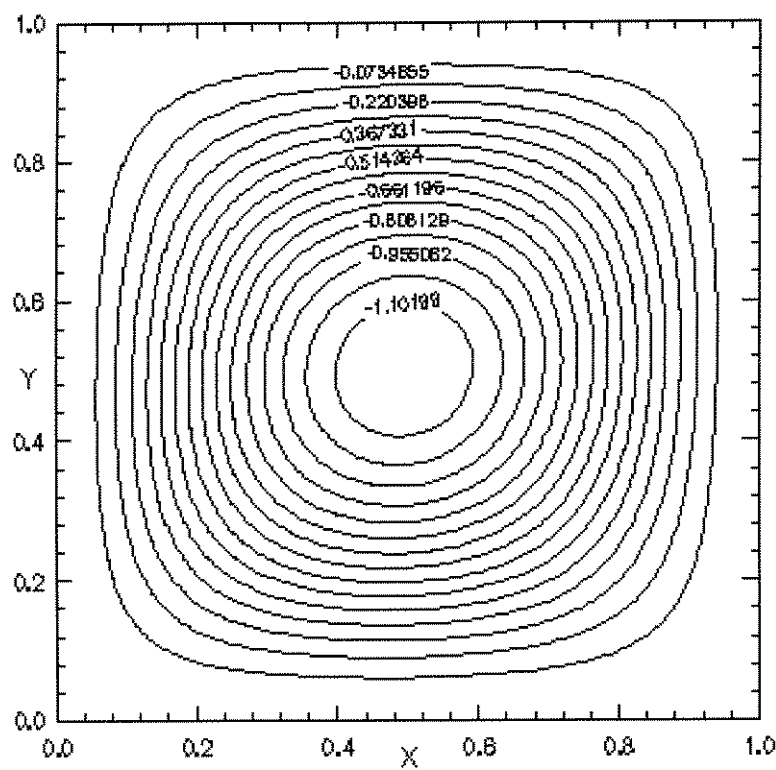


(c)  $Ra = 100.000$

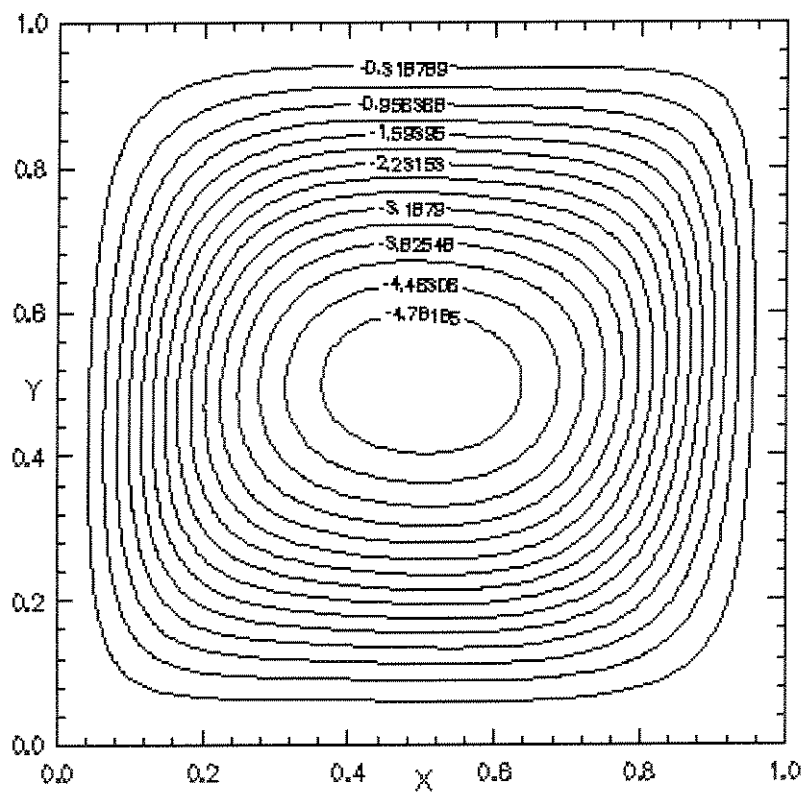


(d)  $Ra = 100000$ , Kettleborough et al. (1989)

Figura 5.4. Variação do componente de velocidade vertical,  $V$ , em função de  $X$ , na linha media horizontal da cavidade,  $Y = 0,5$ .



(a)  $Ra = 1.000$



(b)  $Ra = 10.000$

Figura 5.5. Linhas de corrente do escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.

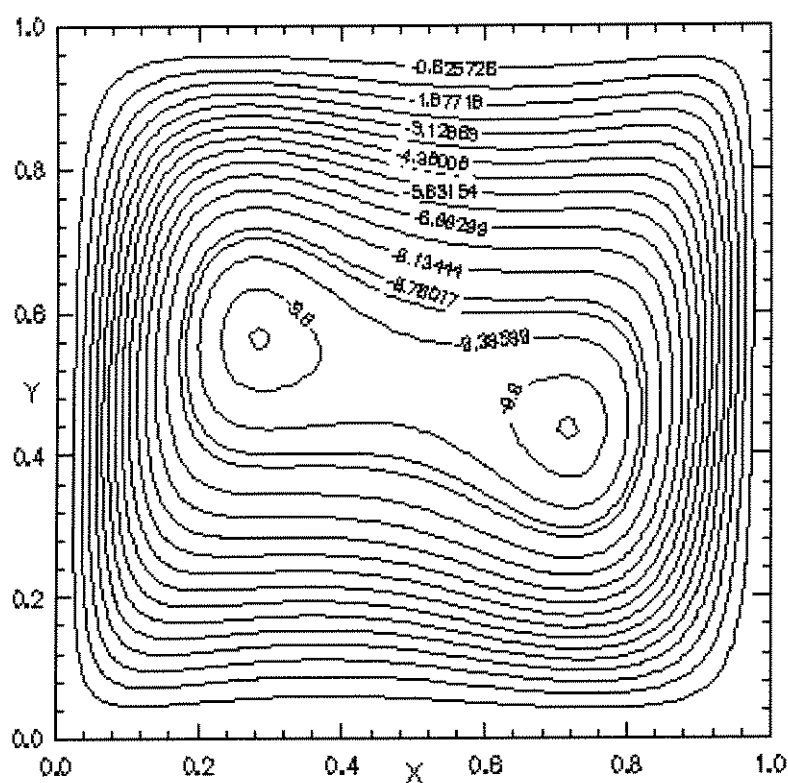
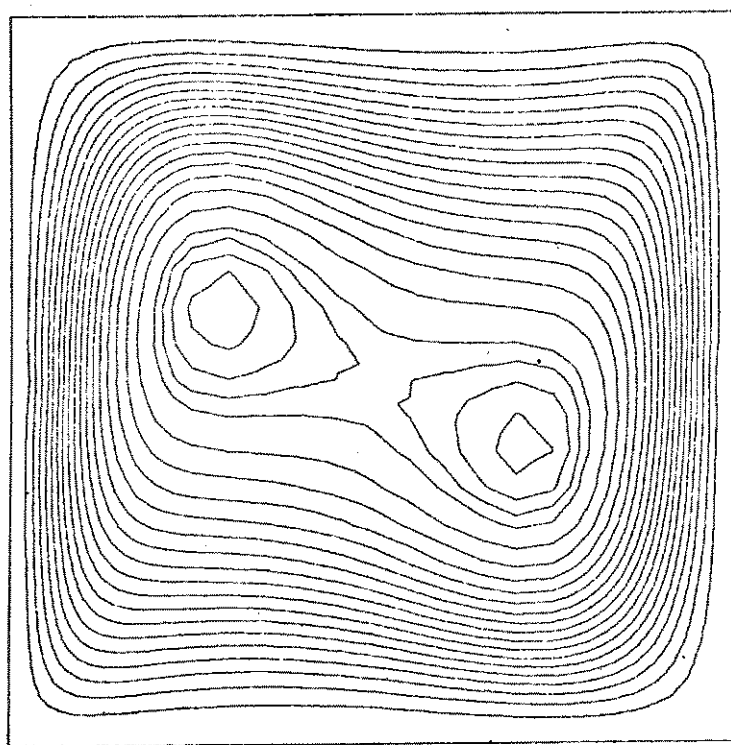
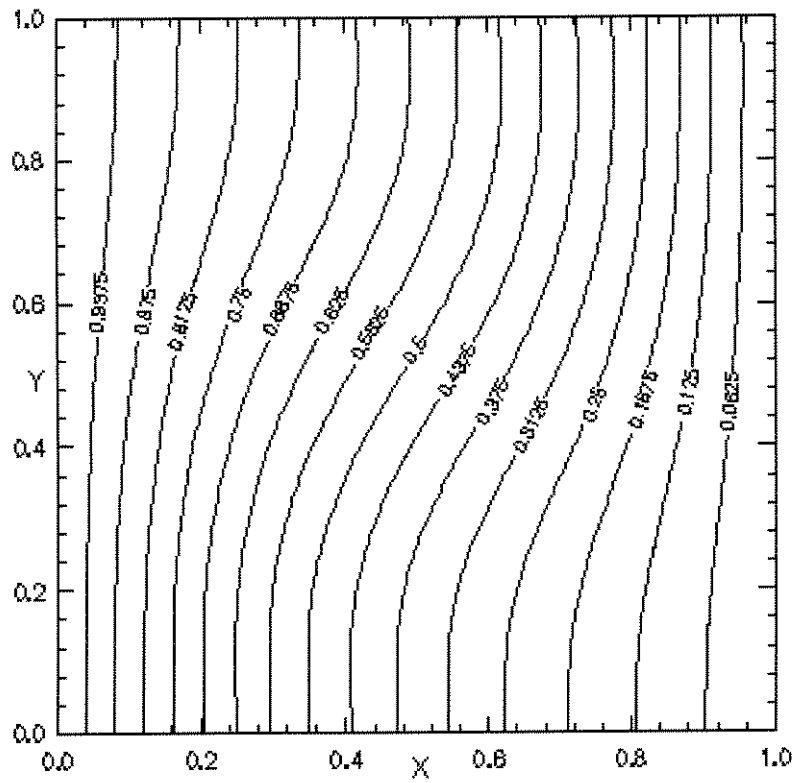
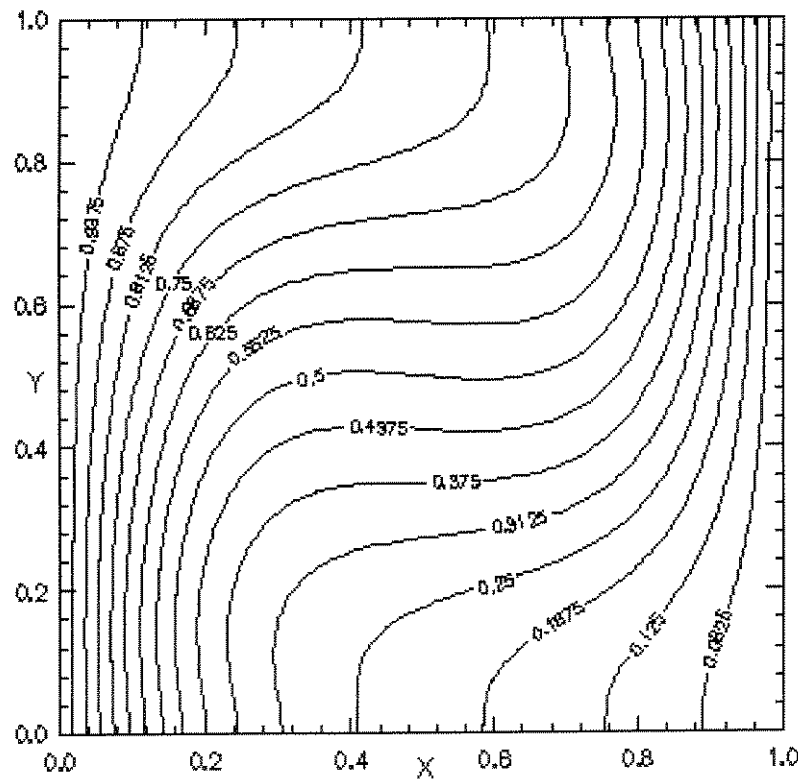
(c)  $Ra = 100.000$ (d)  $Ra = 100.000$ , Ramaswamy. (1988)

Figura 5.5. Linhas de corrente do escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.



(a)  $Ra = 1.000$



(b)  $Ra = 10.000$

Figura 5.6. Isotermas no escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.

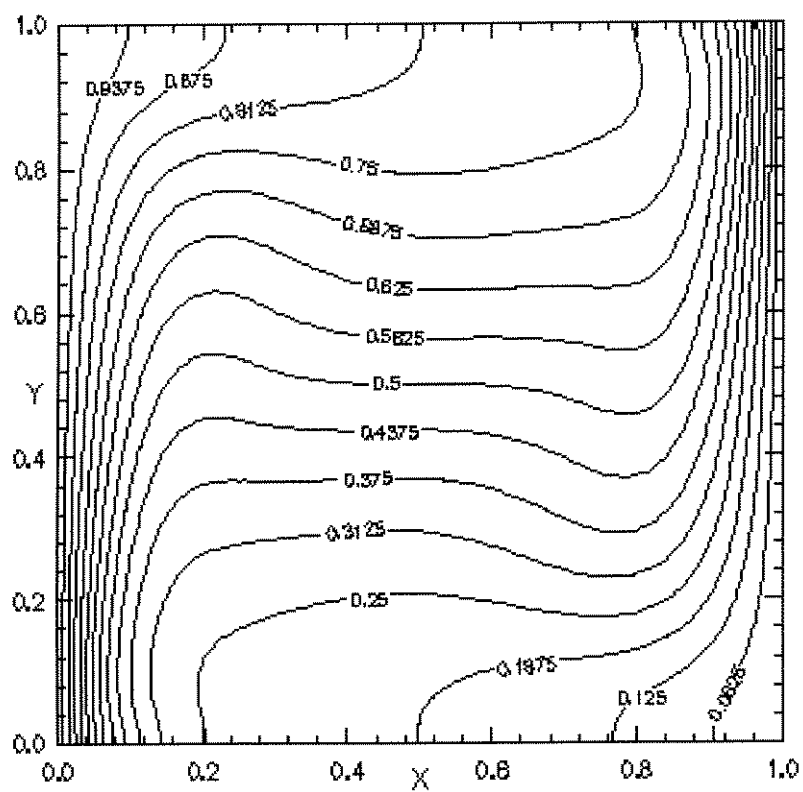
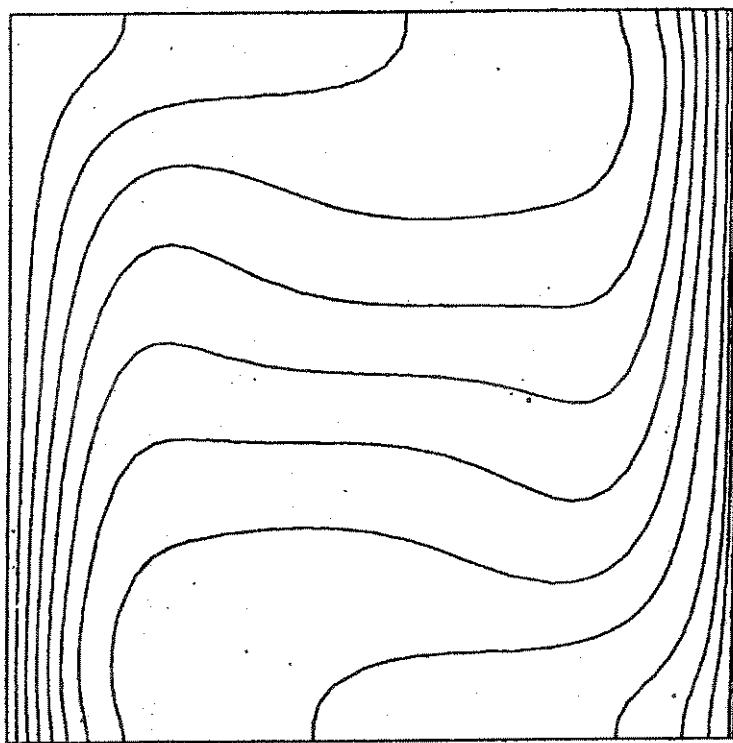
(c)  $Ra = 100.000$ (d)  $Ra = 100.000$ , Ramaswamy (1988)

Figura 5.6. Isotermas no escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para números de Rayleigh diferentes.

A Figura 5.6 mostra resultados para as isotermas com diferente números Rayleigh. De maneira similar à Figuras 5.5, as partes (c) e (d) da Figura 5.6 mostram a comparação qualitativa de resultados do presente trabalho com resultados de Ramaswamy (1988).

A Tabela 5.1 apresenta a comparação de alguns resultados do presente trabalho, para valores máximos de função de corrente e da velocidade vertical, com resultados de Ramaswamy, Jue & Akin (1992).

Tabela 5.1. Comparação de resultados para valores máximos da função de corrente e velocidade vertical.

| Ramaswamy et al. (1992) |                 | Presente Trabalho |
|-------------------------|-----------------|-------------------|
| Ra                      | $ \psi_{\max} $ | $ \psi_{\max} $   |
| 1.000                   | 1,17            | 1,175             |
| 10.000                  | 5,099           | 5,100             |
| 100.000                 | 9,756           | 10,01             |
| Ra                      | $V_{\max}$      | $V_{\max}$        |
| 1.000                   | -               | 3,742             |
| 10.000                  | 19,62           | 19,75             |
| 100.000                 | 68,62           | 70,39             |

Na Figura 5.7, apresentam-se resultados para o número de Nusselt local na parede esquerda da cavidade em função do número de Rayleigh. Este número de Nusselt é definido por

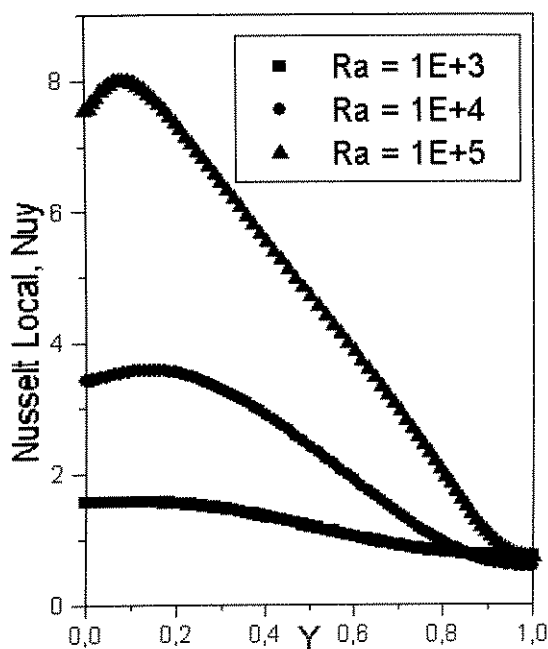
$$Nu_y(Y) = \frac{\dot{q}''L}{k(T_h - T_c)} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_{(X=0)} \tag{5.11}$$

A derivada na equação (5.10) é avaliada usando as funções de interpolação e os valores de temperatura nos pontos nodais, nos elementos que estão na fronteira, da seguinte forma:

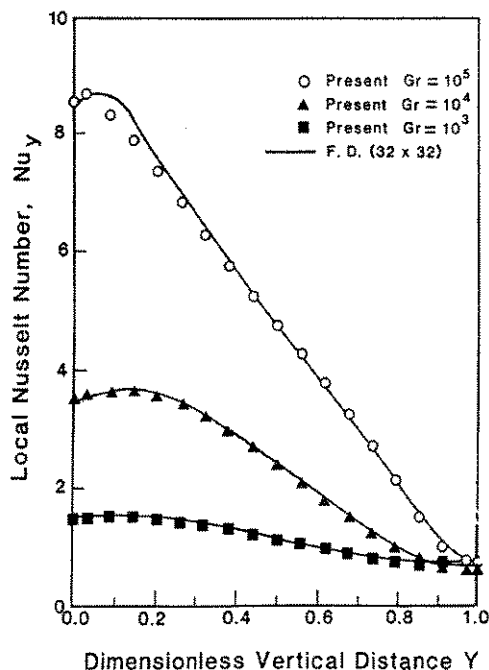
$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \sum_{\beta=1}^{NEL} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X} \theta_{\beta} \tag{5.12}$$



A variação do número de Nusselt local, mostrada na Figura 5.7(a), é similar àquela apresentada por Kettleborough et al. (1989), mostrada na Figura 5.7(b). Os resultados apresentados por Kettleborough et al. foram para a solução de regime permanente. No caso de  $Ra = 1.000$  e  $Ra = 10.000$ , no instante de tempo,  $t = 0,5$ , a solução do presente trabalho, praticamente, já atingiu o regime permanente. Para  $Ra = 100.000$ , não se pode garantir que a solução já atingiu o regime permanente. Isto, talvez, explique a diferença maior entre as soluções para este caso, como pode ser visualizado graficamente.



(a) Resultados do presente trabalho para instante de tempo,  $t = 0,5$



(b) Resultados de Kettleborough et al. para regime permanente.

Figura 5.7. Nusselt local na parede esquerda da cavidade,  $X = 0$ , em  $t = 0,5$ .

Este tipo de teste serviu também para mostrar que a estrutura do programa permite a solução de equações acopladas como ocorre também em casos de escoamentos turbulentos, onde a solução das equações de quantidade de movimento depende da viscosidade turbulenta que pode ser calculada usando modelos de turbulência de 2 equações, com equações similares à equação de energia. No caso de escoamentos turbulentos o acoplamento das equações é através da viscosidade turbulenta. Esses casos de escoamento serão objeto de futuros estudos na continuação deste trabalho.

## **CAPÍTULO 6**

### **Contribuições e Desdobramentos do Trabalho**

As contribuições deste trabalho; sugestões para futuros trabalhos bem como as principais conclusões são apresentados nos itens a seguir.

#### **6.1 Principais Contribuições deste Trabalho e Conclusões**

Um método de elementos finitos com formulação por volumes de controle, CVFEM, como é conhecido na literatura, foi desenvolvido tendo como elemento de referência um elemento quadrilateral quadrático com nove pontos nodais, para simulação de casos de escoamentos incompressíveis transientes e viscosos em domínios bidimensionais. Pode-se dizer que a contribuição principal deste trabalho foi a extensão da formulação com funções de interpolação quadráticas para volumes de controle no elemento considerado. Este método combina a potencialidade e versatilidade do método de elementos finitos, para discretização de domínios com complexidade geométrica, com o caráter conservativo da formulação por volumes de controle. O modelo numérico foi desenvolvido em variáveis primitivas (facilmente extensível para problemas 3D), sem as transformações das equações governantes que, geralmente são feitas nos métodos de diferenças finitas com formulação por volumes de controle (CVFDM). As transformações das equações são feitas apenas localmente, dentro de um elemento de referência, visando facilitar a obtenção das equações discretizadas. Foi adotado o tipo de formulação mista (ordem desigual) para interpolação das velocidades e pressão dentro de um elemento, para se evitar oscilações do campo de pressão que podem ocorrer quando se usa interpolação de ordem igual sem os devidos cuidados. Embora, alguns autores defendam que este tipo de formulação é difícil de ser implementada computacionalmente, isto não representou qualquer dificuldade adicional. Inclusive, uma

rotina computacional genérica foi modificada e adaptada para qualquer elemento quadrático (triangular ou quadrilátero) para montagem da matriz dos elementos com formulação mista, ou seja, com número de graus de liberdade variável por nó.

Um método de “upwind” desenvolvido por Saabas (1991) para elementos triangulares lineares foi estendido para o elemento principal deste trabalho. Esta técnica de “upwind” busca garantir coeficientes positivos através de funções de interpolação especiais para os termos convectivos, levando em consideração de forma aproximada, a direção do escoamento antes de um determinado ponto de integração. Isto permite a aplicação do modelo numérico para casos de escoamentos com altos números de Reynolds. Como é do conhecimento do leitor, cálculos de escoamentos de fluidos e transferência de calor pode conduzir a resultados não realísticos se determinados cuidados não forem tomados na discretização, principalmente dos termos convectivos. Uma maneira prática de se evitar estes resultados sem significado é através de técnicas de “upwind”.

Um programa computacional, baseado no modelo numérico apresentado no Capítulo 3, foi construído para realização de experimentos computacionais de casos de escoamentos de fluidos, tanto internos quanto externos, em domínios bidimensionais. A estrutura básica do programa foi construída de forma que se possa introduzir modelos de turbulência, quando se usa um nível de aproximação dinâmica das equações de escoamentos denominado de Equações Médias de Navier-Stokes; procedimento este muito utilizado para cálculo aproximado de escoamentos turbulentos de forma prática. Embora, não se tenha obtido resultados para estes casos, uma extensão futura deste trabalho, para tais casos, poderá ser conduzida aproveitando a base computacional já construída. A estrutura do programa também permite a obtenção de resultados em computadores relativamente pequenos, embora isto possa ainda demandar um tempo de cálculo talvez longo, por causa do armazenamento temporário de dados em disco rígido usando o método frontal como implementado neste trabalho.

Os casos testes mostraram que mesmo as funções de interpolação originais do elemento finito considerado conduziram a resultados satisfatórios. Isto mostra que o elemento tem potencial para ser utilizado em casos de simulações de escoamentos usando a formulação por volumes de controle ou de subdomínio. Por outro lado a técnica de “upwind” implementada, apresenta-se como uma alternativa para cálculos de escoamentos de forma a se

evitar resultados espúrios. Entretanto, desenvolvimentos adicionais e testes mais severos da técnica devem ser implementados, a fim de se ter mais subsídio sobre sua viabilidade em problemas mais complexos, visto que o uso da mesma requer a inversão de pelo menos 4 matrizes de dimensões  $4 \times 4$  por elemento.

## 6.2 Alguns Desdobramentos deste Trabalho.

Neste item, apresenta-se alguns dos possíveis desdobramentos deste trabalho e que são objetivos a serem atingidos em sua continuação. Estes desdobramentos ou sugestões para futuros trabalhos são listados a seguir:

- (1) Inclusão de um pré processador ao corpo do programa o que permitiria uma fácil discretização de qualquer domínio e adaptação do programa para cálculos que exigissem um refinamento da malha em tempo de processamento. Boa parte do tempo total numa simulação por elementos finitos pode ser consumida na fase de pré processamento (geração da malha, introdução de condições de contorno e propriedades do meio). A geração manual de uma malha de elementos finitos, dependendo do refinamento exigido, pode ser uma tarefa extremamente árdua e tediosa, ou até mesmo impraticável, sem contar que a chance de erros na criação da malha, manualmente, aumenta consideravelmente.
- (2) Extensão do programa para cálculos de escoamentos com números de Reynolds mais elevados dos que os casos considerados neste trabalho. Da forma como o programa foi construído, esta etapa não demandará mais um esforço muito grande, que seria o caso se ponto de partida fosse o “marco zero”. Embora, não se tenha obtido estes resultados no presente trabalho, a estrutura básica do programa ou o alicerce para isto já esta construído.
- (3) Cálculo de escoamentos tridimensionais. Isto, obviamente, exigiria a utilização de elementos finitos tridimensionais. A extensão natural do elemento deste trabalho para o caso tridimensional, seria um elemento com 27 pontos nodais. A estrutura do programa numérico permite a introdução, relativamente, sem muito custo de desenvolvimento adicional, de cálculos de escoamentos em domínios tridimensionais, como seria, por exemplo, o caso de escoamentos em máquinas de fluxo; escoamentos em cilindros de

motores de combustão interna; dispersão de contaminantes na atmosfera. Para problemas tridimensionais pode ser mais viável um método segregado de solução das equações discretizadas. Isto pode ser implementado, até certo ponto, de forma direta na estrutura do programa por ter sido o mesmo construído de forma bem modular.

- (4) Modificação do método de solução das equações discretizadas, o que requer, por exemplo, alteração da forma de montagem das equações nos volumes de controle. Neste trabalho, por razões de simplicidade, optou-se pela fórmula de montagem do método de elementos finitos de Galerkin. O tipo de montagem usado não requer nenhuma informação adicional sobre um determinado nó e seus vizinhos, a não ser a matriz de conectividade cuja obtenção vem do processo de geração da malha. No método de volumes finitos clássico, a forma de montagem da matriz global, requer informações sobre os nós e seus vizinhos e é difícil de ser implementada em malhas não estruturadas. O programa numérico desenvolvido neste trabalho permite o uso de elementos triangulares (malha não estruturadas) de maneira direta.

## Referências Bibliográficas

- ANSYS Revision 5.2. (1996). ANSYS, Inc. 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-0065.
- Baker, A.J. (1983). *Finite Element Computacional Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 510 p.
- Baker, A.J. & Pepper, D.W. (1991). *Finite Element 1-2-3*. McGraw-Hill, Inc. Singapore. 341p.
- Baliga, B.R. & Patankar, S.V. (1980). A New Finite-Element Formulation For Convection-Diffusion Problems. *Numerical Heat Transfer*, 3, p. 393-409.
- Baliga, B.R. & Patankar, S.V. (1983). A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid-Flow and Heat Transfer. *Numerical Heat Transfer*, 6, p. 245-261.
- Baliga, B.R.; Pham, T.T. & Patankar, S.V. (1983). Solution of Some Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems, Using a Control Volume Finite-Element Method. *Numerical Heat Transfer*, 6, p. 263-282.
- Baliga, B.R. (1990). Some Recent Advances in Computational Heat Transfer and Fluid Flow. In: *Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT 90, Mini-Cursos*. Itapema, SC, Brasil, 10 a 12 de dezembro. 160 p.

- Banaszek, J. (1989). Comparison of Control Volume and Galerkin Finite Element Methods for Diffusion-Type Problems. *Numerical Heat Transfer*, V. 16, p. 59-78.
- Campos Silva, J.B. & Moura, L.F.M. (1997). Numerical Simulation of Fluid Flow by the Control Volume-Finite Element Method. *Anais (in CD-ROM) do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica- COBEM97*, Paper code 041, 8p. Bauru-SP, Brasil, 08 a 12 de dezembro.
- Campos Silva, J.B., Vieira, E.D.R. & Moura, L.F.M. (1998) Control Volume-Finite Element and Flow Visualization Methods Applied for Unsteady Viscous Flow Past a Circular Cylinder. *Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica do Norte-Nordeste*, V. II, p. 80-87.. Fortaleza, CE, Brasil, 27 a 30 de outubro.
- Cheng, L. & Armfield, S. (1995) A Simplified Markers and Cell Method for Unsteady Flows on Non-Staggered Grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, V. 21, p. 15-34.
- Chiu, H.-T., Wu, C.-H. & Lee, L. J. (1996). Flow Modeling of Thermoset Injection Molding. *Proceedings of the 1996 54<sup>th</sup> Annual Technical Conference. Part 1 (of 3): Soc of Plastics Engineers Brookfield CT USA* (p. 910-916). Indianapolis, IN, USA.
- Chow, P. & Cross, M.(1992) An Enthalpy Control-Volume-Unstructured-Mesh (CV-UM) Algorithm for Solidification by Conduction Only. *International Journal for Numerical Methods Engineering*, V. 35, p. 1849-1870.
- Chung, T.J. (1978). *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 378 p.

- Comini, G., Giudice, S. Del, & Nonino, C. (1996) Energy Balances in CVFEM and GFEM Formulations of Convection-Type Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V. 39, p. 2249-2263.
- COMPENDEX (1998). InfoTrac SearchBank, Information Access Company  
<http://www.searchbank.com/searchbank/unesp-eng>
- Connor, J.J. & Brebbia, C.A. (1976). *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. Butterworth & Co (Publishers) Ltd., London, 330 p.
- Dhatt, G. & Touzot, G. (1984). Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis. Deuxième Édition, Maloine S.A. Éditeur, Paris 543p.
- Elkaim, D.; Reggio, M. & Camarero, R. (1991). Numerical Solution of Reactive Laminar Flow by a Control-Volume Based Finite-Element Method and Vorticity-Streamfunction Formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, V. 20, p 223-240.
- Elkaim, D.; Reggio, M. & Camarero, R. (1992). Simulating Two-Dimensional Turbulent Flow by Using the k- $\epsilon$  Model and the Vorticity-Streamfunction Formulation. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 14, p. 961-980.
- Elkaim, D.; Reggio, M. & Camarero, R. (1993). Control Volume Finite-Element Solution of a Confined Turbulent Diffusion Flame. *Numerical Heat Transfer, Part A*, V. 23, p 259-279.
- Elkaim, D.; Mckenty, F., Reggio, M. & Camarero, R. (1994). Control Volume Finite Element Solutions of Confined Turbulent Swirling Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, V. 19, p. 135-152.



- Ewsuk, K.G., Cesarano, J. III, Cochran, R.J. Blackwell, B.F. & Adkins, D.R. (1995). Characterizing and Modeling Organic Binder Burnout from Green Ceramic Compacts. *Proceedings of the 1995 27<sup>th</sup> International SAMPE Technical Conference: SAMPE Covina, CA, USA.* (V. 27, p. 914-926). Albuquerque, NM, USA.
- Ferguson, W.J. (1997). A Control Volume Finite Element Numerical Solution of Creep Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V. 40, p. 3463-3475.
- Forsyth, P.A. (1991). A Control Volume Finite Element Approach to NAPL Groundwater Contamination. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, V. 12 N. 5, p 1029-1057.
- Forsyth, P.A. & Shao, B.Y. (1991) Numerical Simulation of Gas Venting for NAPL Site Remediation. *Adv. Water Resources*, V.14 No. 6, p 354-367.
- Ghia, U., Ghia, K.N. & Shin, C.T.(1982) High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*, V. 48, p. 387-411.
- Giammarco, P. Di, Todini, E. (1994). Control Volume Finite Element Method for the Solution of 2D Overland Flow Problems. *Proceedings of the Specialty Conference on Modeling of Flood Propagation Over Initially Dry Area: ASCE New York., NY, USA* (p.82-101). Milan, Italy.
- Hafez, M. (1995) Finite Element/Finite Volume Solutions of Full Potential. Euler and Navier-Stokes Equations for Compressible and Incompressible Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, V. 20, p. 713-741.
- Hirsch, C. (1988) *Numerical Computation of External and Internal Flows*. V. 1: Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons, Chichester. 515p.

- Hookey, N.A.; Baliga. B.R. & Prakash, C. (1988a). Evaluation and Enhancements of Some Control Volume Finite-Element Methods - Part 1. Convection-Diffusion Problems. *Numerical Heat Transfer, V. 14*, p 255-272.
- Hookey, N.A.; Baliga. B.R. & Prakash, C. (1988b). Evaluation and Enhancements of Some Control Volume Finite-Element Methods - Part 2. Incompressible Fluid Flow Problems. *Numerical Heat Transfer, V. 14*, p 273-293.
- Jeronymo, C.E. (1991). *Desenvolvimento de um Programa Numérico Aplicado a Problemas de Convecção-Difusão Usando o Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM/UNICAMP. Brasil (Dissertação de Mestrado).
- Kang, M. K., Lee, W. II, Yoo, J.Y. & Cho, S. M. (1995). Simulation of Mold Filling Process During Resin Transfer Molding. *Journal of Materials Processings and Manufacturing Science*, V. 3, i3, p. 297-313.
- Kettleborough, C.F., Husain, S.R. & Prakash, C. (1989) Solution of Fluid Flow with the Vorticity-Streamfunction Formulation and the Control-Volume-Based Finite-Element Method, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 16, p 31-58.
- Kettleborough, C.F. & Van Dijk, H.N. (1992). Control Volume Finite Element Method as Applied to Transient Free Convection Between Parallel Heated Vertical Plates. *Proceedings of the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer: Computational Mechanics Inc. Billerica, MA, USA* (p.19-36). Milan, Italy.
- Krakov, M.S. (1992). Control Volume Finite Element Method for Navier-Stokes Equations in Vortex-Streamfunction Formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B, V. 21*, p 125-145.

- Lakshminarayana, B. (1986). Turbulence Modeling for Complex Shear Flows. *AIAA Journal*, V. 24 N° 12, p. 1900-1917.
- Larreteguy, A. (1992). An Equal-Order Control Volume Finite Element Method for Fluid Flow in Arbitrary Triangulations. *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*. H. Alder et al. (Eds.), CIMNE, Barcelona.
- Larreteguy, A. (1996). Equal-Order Control Volume Finite Element Method for Fluid Flow in Arbitrary Triangulations. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, V. 28, i4, p. 401-413.
- Launder, B.E. (1988). On the Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows. *Journal of Heat Transfer*, V. 110, p. 1112-1128.
- Ledain Muir, B. & Baliga, B.R. (1986). Solution of Three-Dimensional Convection-Diffusion Problems Using Tetrahedral Elements and Flow-Oriented Upwind Interpolation Functions. *Numerical Heat Transfer*, V. 9, p 143-162.
- Letniowski, F.W. & Forsyth, P.A. (1991) A Control Volume Finite Element Method for Three-Dimensional NAPL Groundwater Contamination. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 13, p. 955-970.
- Lin, C.X. & Ebadian, M.A. (1996a). Turbulent Developing Fluid Flow in Helical Pipes. *Proceedings of the 1996 31st ASME National Heat Transfer Conference. Part 2 (of 8): ASME HTD, New York, NY, USA* (V. 324-i2 p. 65-72). Houston, TX, USA
- Lin, C.X. & Ebadian, M.A. (1996b). Developing Turbulent Convective Heat Transfer in Helical Pipes. *Proceedings of the 1996 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Part 2 (of 4): ASME HTD, New York, NY, USA* (V. 324-i2 p. 77-84). Atlanta, GA, USA

- Lin, C.X. & Ebadian, M.A. (1998). Combined Laminar Forced Convection and Thermal Radiation in a Curved Pipe. *Proceedings of the 1998 7<sup>th</sup> AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference. Part 1 (of 4): ASME HTD, Fairfield, NJ, USA* (V. 357-1 p. 73-80). Albuquerque, NM, USA.
- Maliska, C.R. (1996) *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, Rio de Janeiro. 424p.
- Masson, C., Saabas, H.J. & Baliga, B.R. (1994). . Co-Located Equal-Order Control-Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Axisymmetric Incompressible Fluid Flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, V. 18, p. 1-26.
- Masson, C., & Baliga, B.R. (1994). Control Volume Finite Element Method for Dilute Gas-Solid Particle Flows. *Computer & Fluids*, V. 23, p. 1073-1096
- Meng, F.L., Mckenty, F. Elkaim, D. & Camarero, R. (1992). Predicting Radiative Heat Transfer in Two-Dimensional Rectangular and Axisymmetric Enclosures Using the Discrete transfer Method. *Proceedings of the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer: Computational Mechanics Inc. Billerica, MA, USA* (p.161-180). Milan, Italy.
- Nieh, J.-Y. & Lee, L. J. (1996). Crystalization and Structure Formation of PP in the Vicinity of Hot-Plate Welded Joints. *Journal of engineering and Applied Science*, V. 2, p. 2240-2245.
- Padra, C. & Larreteguy, A. (1996). A-posteriori error estimator for the control-volume Finite-Element Method Applied to Convection-Difusion Problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, V. 27, il, p. 63-80.

- Patankar, S.V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, 525 p.
- Prakash, C. (1986). An Improved Control Volume Finite-Element Method for Heat and Mass Transfer, and for Fluid Flow Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation. *Numerical Heat Transfer*, V. 9, p 253-276.
- Prakash, C. & Patankar, S.V. A Control Volume Finite Element Method for Solving the Navier-Stokes Equations Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation. *Numerical Heat Transfer*, V. 8, p 259-280.
- Prakash, C. & Patankar, S.V. (1987a). A Control Volume Finite Element Method for Predicting Flow and Heat Transfer in Ducts of Arbitrary Cross Sections - Part I: Description of the Method. *Numerical Heat Transfer*, V. 12, p 389-412.
- Prakash, C. & Patankar, S.V. (1987b). A Control Volume Finite Element Method for Predicting Flow and Heat Transfer in Ducts of Arbitrary Cross Sections - Part II: Application to Some Test Problems. *Numerical Heat Transfer*, V. 12, p 413- 437.
- Ramaswamy, B. (1988). Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flows. *Computer and Fluids*, V. 16 No. 4, p349-388.
- Ramaswamy, B. & Jue, T.C. (1992). Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flows. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, V. 35, p 671-707.
- Ramaswamy, B.; Jue, T.C. & Akin, J.E. (1992). Finite Element of Unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes Equations. *Numerical Heat Tarnsfer, Part B*, V. 21, p 147-182.

Raw, M.J.; Schneider, G.E. & Hassani, V. (1985). A Nine-Nodal Quadratic Control-Volume-Based Finite Element for Heat Conduction. *J. Spacecraft, V. 22 No. 5*, p 523-529.

Reddy, J.N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 684p.

Rousse, D.R., Gautier, G. & Sacadura, J.F. (1998). Control Volume Finite Element Method for Radiative Heat Transfer Problems in Irregular Geometries. *Proceedings of the 1998 7<sup>th</sup> AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference. Part 1 (of 4): ASME HTD, Fairfield, NJ, USA (V. 357-1 p. 93-102)*.

Saabas, H.J. (1991). *A Control Volume Finite Element Method for Three-Dimensional, Incompressible, Viscous Fluid Flow*. Dept. of Mech. Eng., McGill University, Montreal, Que, Canada. Ph.D. Thesis.

Saabas, H.J. & Baliga, B.R. (1994a). Co-Located Equal Order Control Volume - Finite Element Method for Multidimensional, Incompressible, Fluid Flow – Part I: Formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, V. 26, p 381-407.

Saabas, H.J. & Baliga, B.R. (1994b). Co-Located Equal-Order Control-Volume Finite-Element Method for Multidimensional, Incompressible, Fluid Flow – Part II: Verification. *Numerical Heat Transfer, Part B*, V. 26, p 409-424.

Schneider, G.E. (1988). Elliptic Systems: Finite-Element Method I, in: *Handbook of Numerical Heat Transfer*, ed. by W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, R.H. Fletcher and G.E. Schneider, New York, Chap. 10, p 379-420.

- Schneider, G.E. & Raw, M.J. (1986). A Skewed, Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element Convection-Diffusion Computation. *Numerical Heat Transfer, V. 9*, p 1-26.
- Schneider, G.E. & Raw, M.J. (1987a). Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 1. Computational Procedure. *Numerical Heat Transfer, V. 11*, p 363-390.
- Schneider, G.E. & Raw, M.J. (1987b). Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 2. Application and Validation. *Numerical Heat Transfer, V. 11*, p 391-416.
- Schneider, G.E. & Karimian, S.M.H. (1984). Advances in Control-Volume-Based Finite-Element Methods for Compressible Flows. *Computational Mechanics, V. 14*, p. 431-446.
- Shaw, C.T. (1992) *Using Computational Fluid Dynamics*. Prentice Hall, New York. 251 p.
- Shih, T.-M. (1990). Literature Survey on Numerical Heat Transfer (1988-1989). *Numerical Heat Transfer, Part A, V. 18*, p. 387-425.
- Swaminathan, C.R. & Voller, V.R. (1992a). Streamline Upwind Scheme for Control Volume - Finite Elements, Part I. Formulations. *Numerical Heat Transfer, Part B, V. 22*, p. 95-107.
- Swaminathan, C.R. & Voller, V.R. (1992b). Streamline Upwind Scheme for Control Volume - Finite Elements, Part II. Implementation and Comparison with the SUPG Finite-Element Scheme. *Numerical Heat Transfer, Part B, V. 22*, p. 109-124.

- Taylor, C. & Hughes, T.G. (1981). *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K. 244 p.
- TECPLOT Version 6. (1996) Amtec Engineering, Inc. P.O. Box 3633, Belevue, WA 98009-3633.
- Vieira, E.D.R.(1997) *Estudo Qualitativo e Quantitativo de Escoamento ao Redor de Corpos Não-Aerodinâmicos Usando Técnicas de Visualização de Escoamentos Hidrodinâmicos*. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica -ITA. Tese de Doutorado.
- Winterscheidt, D. & Surana, K.S. (1994) p-Version Least Squares Finite Element Formulation for Two-Dimensional, Incompressible Fluid Flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 18, p.43-69.
- Zienkiewicz, O.C. & Morgan, K. (1993). *Finite Elements and Approximations*. John Willey & Sons, Inc. Singapore. 328p.



## ANEXO I

### Trecho de Programa para Montagem da Matriz nos Elementos

Um algoritmo genérico para montagem da matriz nos elementos é mostrado a seguir. Este algoritmo pode ser usado para montar matriz de elementos quadráticos tais como: triângulos com 6 nós e quadriláteros com 8 ou 9 nós. Os nós devem ser numerados sequencialmente em qualquer sentido de rotação. No caso, eles são numerados no sentido anti-horário com o primeiro nó no canto inferior esquerdo, em coordenadas locais.

#### C montagem dos termos de velocidade da equação de quantidade de movimento

```
irowu=1
do 180 inodp=1,nnodp
c nnodp = 6 ou 8 ou 9
c lnods é a matriz de conectividade
c nodfm é um vetor que contém o número de graus de liberdade por nó
  noi=iabs(lnods(ielem,inodp))
  irowv=irowu+nodfm(noi)-1
  jcolu=1
  do 190 jnodp=1,nnodp
    noj=iabs(lnods(ielem,jnodp))
    jcolv=jcolu+nodfm(noj)-1
  c
c* colocação dos termos de massa, convectivo e difusivo nas equações de quantidade de
c movimento.
c flumx é a matriz global com todos os graus de liberdade num elemento
```

c elkm corresponde a matriz de massa na equação (3.45)

c conv é matriz dos termos convectivos da equação (3.41)

c elk11, elk22 são idênticas à matriz s da equação (3.42)

```

      flumx(irowu,jcolu)=flumx(irowu,jcolu)+elkm(inodp,jnodp)-
      * (convc(inodp,jnodp)-elk11(inodp,jnodp))
      flumx(irowv,jcolv)=flumx(irowv,jcolv)+elkm(inodp,jnodp)-
      *(convc(inodp,jnodp)-elk22(inodp,jnodp))

```

jcolu=jcolu+nodfm(noj)

190 continue

irowu=irowu+nodfm(noi)

180 continue

**c montagem do termo de pressão da equação de quantidade de movimento**

```

      irowu=1
      do 140 inodp=1,nnodp
        nop=iabs(lnods(ielem,inodp))
        irowv=irowu+nodfm(nop)-1

```

c nnodl = 3 ou 4

```

      do 150 jnodp=1,nnodl

```

c ndofm: máximo numero de graus de liberdade por nó

```

      jcolp=(jnodp-1)*(2*ndofm-1)+2

```

**c\*\*\* colocação dos termos de pressão nas equações de quantidade de movimento**

c hu1p é a matriz do termo de pressão na equação de qtde. de movimento em x

c hu2p é a matriz do termo de pressão na equação de qtde. de movimento em y

```

      flumx(irowu,jcolp)=flumx(irowu,jcolp)+hu1p(inodp,jnodp)
      flumx(irowv,jcolp)=flumx(irowv,jcolp)+hu2p(inodp,jnodp)

```

150 continue

irowu=irowu+nodfm(nop)

140 continue

**c montagem dos termos devido a equação de continuidade**

```

      do 160 inodp=1,nnodl

```

c ndofm: máximo numero de graus de liberdade por nó

```

      irowp=(inodp-1)*(2*ndofm-1)+2

```

```

      jcolu=1

```

```

      do 170 jnodp=1,nnodp

```

```

noc=iabs(lnods(ielem,jnodp))
jcolv=jcolu+nodfm(noc)-1

```

### c\*\*\* formação da equação de continuidade

c huast matriz da velocidade u na equação de continuidade

c hvast matriz da velocidade v na equação de continuidade

```

flumx(irowp,jcolu)=flumx(irowp,jcolu)+huast(inodp,jnodp)
flumx(irowp,jcolv)=flumx(irowp,jcolv)+hvast(inodp,jnodp)
jcolu=jcolu+nodfm(noc)

```

170 continue

160 Continue

Um diagrama mostrando como fica a matriz de um elemento é apresentado na Figura I.1. Pode-se verificar que a matriz global num elemento é composta de várias submatrizes cujas dimensões são  $ndof_i \times ndof_j$ , sendo  $ndof_i$  o número de graus de liberdade em um nó i. Os espaços, ou são zeros ou podem conter termos de outras matrizes se considerar termos difusivos de V na equação de quantidade de movimento em X e termos difusivos de U na equação de quantidade de movimento em Y.

Naquele diagrama os elementos da matriz  $G$  são definidos por

$$G(\alpha, \beta) = M(\alpha, \beta) - [C(\alpha, \beta) - K(\alpha, \beta)] \quad (I.1)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são definidas pelas equações (3.35a, b, c) respectivamente.

A partir das equações (3.35d,e) obtém-se para as outras matrizes indicadas:

$$H(\alpha, \beta') = \int_{A_{sv\alpha}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X} J d\xi d\eta \quad (I.2)$$

$$Q(\alpha, \beta') = \int_{A_{sv\alpha}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial Y} J d\xi d\eta$$

$$D(\alpha', \beta) = \int_{A_{sv\alpha'}} \rho \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X} J d\xi d\eta \quad (I.3)$$

$$R(\alpha', \beta) = \int_{A_{sv\alpha'}} \rho \frac{\partial N_{\beta}}{\partial Y} J d\xi d\eta$$

|    | 1               | 2               | 3               | 4               | 5               | 6               | 7               | 8               | 9               | 10              | 11              | 12              | 13              | 14              | 15              | 16              | 17              | 18              | 19 | 20 | 21 | 22             |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|----|----|----------------|
| 1  | G <sub>11</sub> | H <sub>11</sub> |                 | G <sub>12</sub> | G <sub>13</sub> | H <sub>13</sub> | G <sub>14</sub> | G <sub>15</sub> | H <sub>15</sub> | G <sub>16</sub> | G <sub>17</sub> | H <sub>17</sub> | G <sub>18</sub> | G <sub>19</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>1</sub> |
| 2  | D <sub>11</sub> |                 | R <sub>11</sub> | D <sub>12</sub> | R <sub>12</sub> | D <sub>13</sub> | R <sub>13</sub> | D <sub>14</sub> | R <sub>14</sub> | D <sub>15</sub> | D <sub>16</sub> | R <sub>16</sub> | D <sub>17</sub> | R <sub>17</sub> | D <sub>18</sub> | R <sub>18</sub> | D <sub>19</sub> | R <sub>19</sub> |    |    |    | P <sub>1</sub> |
| 3  |                 | Q <sub>11</sub> | G <sub>11</sub> | G <sub>12</sub> |                 | Q <sub>13</sub> | G <sub>13</sub> | G <sub>14</sub> |                 | Q <sub>15</sub> | G <sub>15</sub> |                 | Q <sub>17</sub> | G <sub>17</sub> | G <sub>18</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>1</sub> |
| 4  | G <sub>21</sub> | H <sub>21</sub> |                 | G <sub>22</sub> | G <sub>23</sub> | H <sub>23</sub> | G <sub>24</sub> | G <sub>25</sub> | H <sub>25</sub> | G <sub>26</sub> | G <sub>27</sub> | H <sub>27</sub> | G <sub>28</sub> | G <sub>29</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>2</sub> |
| 5  |                 | Q <sub>21</sub> | G <sub>21</sub> | G <sub>22</sub> |                 | Q <sub>23</sub> | G <sub>23</sub> | G <sub>24</sub> |                 | Q <sub>25</sub> | G <sub>25</sub> |                 | Q <sub>27</sub> | G <sub>27</sub> | G <sub>28</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>2</sub> |
| 6  | G <sub>31</sub> | H <sub>31</sub> |                 | G <sub>32</sub> | G <sub>33</sub> | H <sub>33</sub> | G <sub>34</sub> | G <sub>35</sub> | H <sub>35</sub> | G <sub>36</sub> | G <sub>37</sub> | H <sub>37</sub> | G <sub>38</sub> | G <sub>39</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>3</sub> |
| 7  | D <sub>31</sub> |                 | R <sub>31</sub> | D <sub>32</sub> | R <sub>32</sub> | D <sub>33</sub> | R <sub>33</sub> | D <sub>34</sub> | R <sub>34</sub> | D <sub>35</sub> | D <sub>36</sub> | R <sub>36</sub> | D <sub>37</sub> | R <sub>37</sub> | D <sub>38</sub> | R <sub>38</sub> | D <sub>39</sub> | R <sub>39</sub> |    |    |    | P <sub>3</sub> |
| 8  |                 | Q <sub>31</sub> | G <sub>31</sub> | G <sub>32</sub> |                 | Q <sub>33</sub> | G <sub>33</sub> | G <sub>34</sub> |                 | Q <sub>35</sub> | G <sub>35</sub> |                 | Q <sub>37</sub> | G <sub>37</sub> | G <sub>38</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>3</sub> |
| 9  | G <sub>41</sub> | H <sub>41</sub> |                 | G <sub>42</sub> | G <sub>43</sub> | H <sub>43</sub> | G <sub>44</sub> | G <sub>45</sub> | H <sub>45</sub> | G <sub>46</sub> | G <sub>47</sub> | H <sub>47</sub> | G <sub>48</sub> | G <sub>49</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>4</sub> |
| 10 |                 | Q <sub>41</sub> | G <sub>41</sub> | G <sub>42</sub> |                 | Q <sub>43</sub> | G <sub>43</sub> | G <sub>44</sub> |                 | Q <sub>45</sub> | G <sub>45</sub> |                 | Q <sub>47</sub> | G <sub>47</sub> | G <sub>48</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>4</sub> |
| 11 | G <sub>51</sub> | H <sub>51</sub> |                 | G <sub>52</sub> | G <sub>53</sub> | H <sub>53</sub> | G <sub>54</sub> | G <sub>55</sub> | H <sub>55</sub> | G <sub>56</sub> | G <sub>57</sub> | H <sub>57</sub> | G <sub>58</sub> | G <sub>59</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>5</sub> |
| 12 | D <sub>51</sub> |                 | R <sub>51</sub> | D <sub>52</sub> | R <sub>52</sub> | D <sub>53</sub> | R <sub>53</sub> | D <sub>54</sub> | R <sub>54</sub> | D <sub>55</sub> | D <sub>56</sub> | R <sub>56</sub> | D <sub>57</sub> | R <sub>57</sub> | D <sub>58</sub> | R <sub>58</sub> | D <sub>59</sub> | R <sub>59</sub> |    |    |    | P <sub>5</sub> |
| 13 |                 | Q <sub>51</sub> | G <sub>51</sub> | G <sub>52</sub> |                 | Q <sub>53</sub> | G <sub>53</sub> | G <sub>54</sub> |                 | Q <sub>55</sub> | G <sub>55</sub> |                 | Q <sub>57</sub> | G <sub>57</sub> | G <sub>58</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>5</sub> |
| 14 | G <sub>61</sub> | H <sub>61</sub> |                 | G <sub>62</sub> | G <sub>63</sub> | H <sub>63</sub> | G <sub>64</sub> | G <sub>65</sub> | H <sub>65</sub> | G <sub>66</sub> | G <sub>67</sub> | H <sub>67</sub> | G <sub>68</sub> | G <sub>69</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>6</sub> |
| 15 |                 | Q <sub>61</sub> | G <sub>61</sub> | G <sub>62</sub> |                 | Q <sub>63</sub> | G <sub>63</sub> | G <sub>64</sub> |                 | Q <sub>65</sub> | G <sub>65</sub> |                 | Q <sub>67</sub> | G <sub>67</sub> | G <sub>68</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>6</sub> |
| 16 | G <sub>71</sub> | H <sub>71</sub> |                 | G <sub>72</sub> | G <sub>73</sub> | H <sub>73</sub> | G <sub>74</sub> | G <sub>75</sub> | H <sub>75</sub> | G <sub>76</sub> | G <sub>77</sub> | H <sub>77</sub> | G <sub>78</sub> | G <sub>79</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>7</sub> |
| 17 | D <sub>71</sub> |                 | R <sub>71</sub> | D <sub>72</sub> | R <sub>72</sub> | D <sub>73</sub> | R <sub>73</sub> | D <sub>74</sub> | R <sub>74</sub> | D <sub>75</sub> | D <sub>76</sub> | R <sub>76</sub> | D <sub>77</sub> | R <sub>77</sub> | D <sub>78</sub> | R <sub>78</sub> | D <sub>79</sub> | R <sub>79</sub> |    |    |    | P <sub>7</sub> |
| 18 |                 | Q <sub>71</sub> | G <sub>71</sub> | G <sub>72</sub> |                 | Q <sub>73</sub> | G <sub>73</sub> | G <sub>74</sub> |                 | Q <sub>75</sub> | G <sub>75</sub> |                 | Q <sub>77</sub> | G <sub>77</sub> | G <sub>78</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>7</sub> |
| 19 | G <sub>81</sub> | H <sub>81</sub> |                 | G <sub>82</sub> | G <sub>83</sub> | H <sub>83</sub> | G <sub>84</sub> | G <sub>85</sub> | H <sub>85</sub> | G <sub>86</sub> | G <sub>87</sub> | H <sub>87</sub> | G <sub>88</sub> | G <sub>89</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>8</sub> |
| 20 |                 | Q <sub>81</sub> | G <sub>81</sub> | G <sub>82</sub> |                 | Q <sub>83</sub> | G <sub>83</sub> | G <sub>84</sub> |                 | Q <sub>85</sub> | G <sub>85</sub> |                 | Q <sub>87</sub> | G <sub>87</sub> | G <sub>88</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>8</sub> |
| 21 | G <sub>91</sub> | H <sub>91</sub> |                 | G <sub>92</sub> | G <sub>93</sub> | H <sub>93</sub> | G <sub>94</sub> | G <sub>95</sub> | H <sub>95</sub> | G <sub>96</sub> | G <sub>97</sub> | H <sub>97</sub> | G <sub>98</sub> | G <sub>99</sub> |                 |                 |                 |                 |    |    |    | U <sub>9</sub> |
| 22 |                 | Q <sub>91</sub> | G <sub>91</sub> | G <sub>92</sub> |                 | Q <sub>93</sub> | G <sub>93</sub> | G <sub>94</sub> |                 | Q <sub>95</sub> | G <sub>95</sub> |                 | Q <sub>97</sub> | G <sub>97</sub> | G <sub>98</sub> |                 |                 |                 |    |    |    | V <sub>9</sub> |

Figura I.1. Diagrama da matriz global num elemento

# ANEXO II

## Resultados Numéricos

Neste Apêndice são apresentadas tabelas com valores numéricos de vários resultados mostrados, graficamente, nos Capítulos 4 e 5. Também está indicada à qual figura os resultados correspondem.

Tabela II.1. Evolução de U ao longo do tempo, malha 12 x 12 elementos. Figura 4.3 (a)

| Y       | U em t = 2      | U em t = 5      | U em t = 10     | U em t = 35     |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00000 | .0000000000E+00 | .0000000000E+00 | .0000000000E+00 | .0000000000E+00 |
| 0.02865 | -.842028627E-02 | -.123332102E-01 | -.177459413E-01 | -.327048630E-01 |
| 0.05731 | -.143716709E-01 | -.222331395E-01 | -.334403556E-01 | -.624911033E-01 |
| 0.09022 | -.190176455E-01 | -.315040581E-01 | -.501959993E-01 | -.948381755E-01 |
| 0.12313 | -.221925185E-01 | -.394242995E-01 | -.669202904E-01 | -1.27346404E-01 |
| 0.16094 | -.249140888E-01 | -.478677709E-01 | -.871420899E-01 | -1.64443444E-01 |
| 0.19875 | -.272953636E-01 | -.565768852E-01 | -1.09728127E-01 | -2.02114474E-01 |
| 0.24218 | -.301505569E-01 | -.674921366E-01 | -1.36649251E-01 | -2.39265310E-01 |
| 0.28561 | -.334484917E-01 | -.801360801E-01 | -1.64833012E-01 | -2.57437159E-01 |
| 0.33550 | -.379868899E-01 | -.953235163E-01 | -1.91937781E-01 | -2.56523805E-01 |
| 0.38539 | -.434720549E-01 | -1.10511813E-01 | -1.93731279E-01 | -2.18221360E-01 |
| 0.44269 | -.506766477E-01 | -1.23345008E-01 | -1.75187412E-01 | -1.61319045E-01 |
| 0.50000 | -.583841157E-01 | -1.16842582E-01 | -1.32644334E-01 | -1.06047319E-01 |
| 0.55731 | -.653281654E-01 | -.958393167E-01 | -.767041820E-01 | -.468483931E-01 |
| 0.61461 | -.695235900E-01 | -.668387031E-01 | -.249377430E-01 | .113368935E-01  |
| 0.66450 | -.701555493E-01 | -.365339164E-01 | .197164224E-01  | .623836606E-01  |
| 0.71439 | -.667670954E-01 | -.589010451E-02 | .607254662E-01  | .110517613E+00  |
| 0.75782 | -.600160456E-01 | .182344722E-01  | .921891344E-01  | .152632429E+00  |
| 0.80125 | -.462543808E-01 | .423708374E-01  | .121584964E+00  | .192072523E+00  |
| 0.83906 | -.239337897E-01 | .654385124E-01  | .146721339E+00  | .223896358E+00  |
| 0.87687 | .298049119E-01  | .111040724E+00  | .185620440E+00  | .262111180E+00  |
| 0.90978 | .125793818E+00  | .189948187E+00  | .248421632E+00  | .314299248E+00  |
| 0.94269 | .314633712E+00  | .357938991E+00  | .395547214E+00  | .441488692E+00  |
| 0.97135 | .598479572E+00  | .623527515E+00  | .642747383E+00  | .666812098E+00  |
| 1.00000 | .1000000000E+01 | .1000000000E+01 | .1000000000E+01 | .1000000000E+01 |

Tabela II.2. Evolução de V ao longo do tempo, malha 12 x 12 elementos. Figura 4.3 (b)

| X       | V em t = 2      | V em t = 5      | V em t = 10     | V em t = 35     |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| 0.02865 | .168728787E-01  | .261707885E-01  | .430613687E-01  | .715742651E-01  |
| 0.05731 | .282897327E-01  | .449856150E-01  | .742104302E-01  | .123124814E+00  |
| 0.09022 | .360290783E-01  | .594563569E-01  | .987317032E-01  | .163105091E+00  |
| 0.12313 | .398334927E-01  | .685029866E-01  | .115187813E+00  | .190129852E+00  |
| 0.16094 | .412144277E-01  | .746426797E-01  | .128327637E+00  | .211727118E+00  |
| 0.19875 | .407855749E-01  | .781587786E-01  | .138270222E+00  | .226424898E+00  |
| 0.24218 | .391541148E-01  | .807234817E-01  | .147265398E+00  | .234559259E+00  |
| 0.28561 | .368019001E-01  | .822892302E-01  | .152956736E+00  | .228742546E+00  |
| 0.33550 | .335748998E-01  | .831088532E-01  | .153862351E+00  | .206736838E+00  |
| 0.38539 | .297473846E-01  | .818730796E-01  | .146355314E+00  | .170241186E+00  |
| 0.44269 | .244902164E-01  | .757211443E-01  | .123987943E+00  | .119237112E+00  |
| 0.50000 | .178195168E-01  | .617143190E-01  | .851289256E-01  | .607076640E-01  |
| 0.55731 | .873244185E-02  | .375824416E-01  | .357775968E-01  | .115357778E-02  |
| 0.61461 | -.354025566E-02 | .560065665E-03  | -.237814975E-01 | -.604341969E-01 |
| 0.66450 | -.180186665E-01 | -.419103146E-01 | -.825363245E-01 | -1.17915124E-01 |
| 0.71439 | -.354119174E-01 | -.928941587E-01 | -1.49419443E-01 | -1.82223423E-01 |
| 0.75782 | -.514620552E-01 | -1.35946346E-01 | -2.09790339E-01 | -2.47217316E-01 |
| 0.80125 | -.653989924E-01 | -1.73673210E-01 | -2.70345919E-01 | -3.17515639E-01 |
| 0.83906 | -.726112408E-01 | -1.85766981E-01 | -2.95492228E-01 | -3.59130411E-01 |
| 0.87687 | -.723838080E-01 | -1.74228372E-01 | -2.86842853E-01 | -3.69346034E-01 |
| 0.90978 | -.639962374E-01 | -1.42489347E-01 | -2.35702887E-01 | -3.14806095E-01 |
| 0.94269 | -.481774979E-01 | -.977953911E-01 | -1.58779876E-01 | -2.16910139E-01 |
| 0.97135 | -.278390048E-01 | -.520261710E-01 | -.844017919E-01 | -1.17403874E-01 |
| 1.00000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  |

Tabela II.3.(a) Escoamento evoluindo para regime permanente. Figura 4.4

| Y       | U em t = 35     | U em t = 50     |
|---------|-----------------|-----------------|
| .00000  | .0000000000E+00 | .0000000000E+00 |
| .02865  | -.327048630E-01 | -.338744531E-01 |
| .05731  | -.624911033E-01 | -.646786910E-01 |
| .09022  | -.948381755E-01 | -.979976679E-01 |
| .12313  | -.127346404E+00 | -.131312611E+00 |
| .16094  | -.164443444E+00 | -.169036612E+00 |
| .19875  | -.202114474E+00 | -.206914962E+00 |
| .24218  | -.239265310E+00 | -.243699799E+00 |
| .28561  | -.257437159E+00 | -.260221726E+00 |
| .33550  | -.256523805E+00 | -.257024082E+00 |
| .38539  | -.218221360E+00 | -.217569250E+00 |
| .44269  | -.161319045E+00 | -.160049215E+00 |
| .50000  | -.106047319E+00 | -.104635608E+00 |
| .55731  | -.468483931E-01 | -.455908733E-01 |
| .61461  | .113368935E-01  | .125983317E-01  |
| .66450  | .623836606E-01  | .637491920E-01  |
| .71439  | .110517613E+00  | .112178362E+00  |
| .75782  | .152632429E+00  | .154721991E+00  |
| .80125  | .192072523E+00  | .194627267E+00  |
| .83906  | .223896358E+00  | .226910642E+00  |
| .87687  | .262111180E+00  | .265275177E+00  |
| .90978  | .314299248E+00  | .317167601E+00  |
| .94269  | .441488692E+00  | .443601578E+00  |
| .97135  | .666812098E+00  | .667954560E+00  |
| 1.00000 | .1000000000E+01 | .1000000000E+01 |

Tabela II.3.(b) Escoamento evoluindo para regime permanente. Figura 4.4.

| X       | V em t = 35     | V em t = 50     |
|---------|-----------------|-----------------|
| .00000  | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| .02865  | .715742651E-01  | .734328559E-01  |
| .05731  | .123124814E+00  | .126262468E+00  |
| .09022  | .163105091E+00  | .167090270E+00  |
| .12313  | .190129852E+00  | .194522727E+00  |
| .16094  | .211727118E+00  | .216198375E+00  |
| .19875  | .226424898E+00  | .230555497E+00  |
| .24218  | .234559259E+00  | .237866891E+00  |
| .28561  | .228742546E+00  | .230807592E+00  |
| .33550  | .206736838E+00  | .207412920E+00  |
| .38539  | .170241186E+00  | .169735495E+00  |
| .44269  | .119237112E+00  | .117991778E+00  |
| .50000  | .607076640E-01  | .592614695E-01  |
| .55731  | .115357778E-02  | -.327665033E-03 |
| .61461  | -.604341969E-01 | -.618391195E-01 |
| .66450  | -.117915124E+00 | -.119257612E+00 |
| .71439  | -.182223423E+00 | -.183477744E+00 |
| .75782  | -.247217316E+00 | -.248585694E+00 |
| .80125  | -.317515639E+00 | -.319176536E+00 |
| .83906  | -.359130411E+00 | -.361449772E+00 |
| .87687  | -.369346034E+00 | -.372551474E+00 |
| .90978  | -.314806095E+00 | -.318086680E+00 |
| .94269  | -.216910139E+00 | -.219459658E+00 |
| .97135  | -.117403874E+00 | -.118883546E+00 |
| 1.00000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  |



Tabela II.3 (c). Comparação de resultados. Figura 4.5.

| Y    | Kettleborough et al. (1989) | Presente Trabalho |
|------|-----------------------------|-------------------|
| 0.00 | 0.00000                     | 0.00000           |
| 0.05 | -0.06667                    | -0.05806          |
| 0.10 | -0.13070                    | -0.10645          |
| 0.15 | -0.18670                    | -0.15806          |
| 0.20 | -0.23470                    | -0.20710          |
| 0.25 | -0.26700                    | -0.25161          |
| 0.30 | -0.28000                    | -0.26452          |
| 0.35 | -0.26400                    | -0.24710          |
| 0.40 | -0.21333                    | -0.20516          |
| 0.45 | -0.16000                    | -0.15484          |
| 0.50 | -0.10670                    | -0.10464          |
| 0.55 | -0.04900                    | -0.05226          |
| 0.60 | -0.00790                    | -0.00645          |
| 0.65 | 0.04530                     | 0.04968           |
| 0.70 | 0.10133                     | 0.09871           |
| 0.75 | 0.14667                     | 0.14710           |
| 0.80 | 0.20000                     | 0.19677           |
| 0.85 | 0.25300                     | 0.23871           |
| 0.90 | 0.32000                     | 0.30194           |
| 0.95 | 0.50667                     | 0.50516           |
| 1.00 | 1.000                       | 1.00000           |

Tabela II.4.(a) Resultados referentes à Figura 4.6, malha 12 x 12

| Y        | U em t = 5      | U em t = 35     |
|----------|-----------------|-----------------|
| 0.000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| 0.028653 | -.123332102E-01 | -.327048630E-01 |
| 0.057306 | -.222331395E-01 | -.624911033E-01 |
| 0.090220 | -.315040581E-01 | -.948381755E-01 |
| 0.123130 | -.394242995E-01 | -.127346404E+00 |
| 0.160940 | -.478677709E-01 | -.164443444E+00 |
| 0.198750 | -.565768852E-01 | -.202114474E+00 |
| 0.242180 | -.674921366E-01 | -.239265310E+00 |
| 0.285610 | -.801360801E-01 | -.257437159E+00 |
| 0.335500 | -.953235163E-01 | -.256523805E+00 |
| 0.385390 | -.110511813E+00 | -.218221360E+00 |
| 0.442690 | -.123345008E+00 | -.161319045E+00 |
| 0.500000 | -.116842582E+00 | -.106047319E+00 |
| 0.557310 | -.958393167E-01 | -.468483931E-01 |
| 0.614610 | -.668387031E-01 | .113368935E-01  |
| 0.664500 | -.365339164E-01 | .623836606E-01  |
| 0.714390 | -.589010451E-02 | .110517613E+00  |
| 0.757820 | .182344722E-01  | .152632429E+00  |
| 0.801250 | .423708374E-01  | .192072523E+00  |
| 0.839060 | .654385124E-01  | .223896358E+00  |
| 0.876870 | .111040724E+00  | .262111180E+00  |
| 0.909780 | .189948187E+00  | .314299248E+00  |
| 0.942690 | .357938991E+00  | .441488692E+00  |
| 0.971350 | .623527515E+00  | .666812098E+00  |
| 1.000000 | .100000000E+01  | .100000000E+01  |

Tabela II.4.(b) Resultados referentes à Figura 4.6, malha 30 x 30

| Y       | U em t = 5      | U em t = 35     |
|---------|-----------------|-----------------|
| .000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| .011520 | -.606614148E-02 | -.157322257E-01 |
| .023040 | -.115971052E-01 | -.307026915E-01 |
| .035144 | -.169034601E-01 | -.457936810E-01 |
| .047248 | -.217626827E-01 | -.604015366E-01 |
| .059967 | -.264621338E-01 | -.754097874E-01 |
| .072686 | -.308180743E-01 | -.902347686E-01 |
| .086050 | -.351028645E-01 | -.105770242E+00 |
| .099415 | -.391648244E-01 | -.121405596E+00 |
| .113460 | -.432731012E-01 | -.138025916E+00 |
| .127500 | -.472935710E-01 | -.154892000E+00 |
| .142260 | -.515064542E-01 | -.172820984E+00 |
| .157010 | -.557787279E-01 | -.190832717E+00 |
| .172520 | -.604103665E-01 | -.209563656E+00 |
| .188020 | -.652497280E-01 | -.227724580E+00 |
| .204310 | -.706152209E-01 | -.245651599E+00 |
| .220600 | -.763144402E-01 | -.261800157E+00 |
| .237720 | -.826743969E-01 | -.276193750E+00 |
| .254840 | -.894184866E-01 | -.287216487E+00 |
| .272830 | -.968523009E-01 | -.294730732E+00 |
| .290810 | -.104565814E+00 | -.297495642E+00 |
| .309710 | -.112788928E+00 | -.295434480E+00 |
| .328610 | -.120938643E+00 | -.288246074E+00 |
| .348470 | -.129075944E+00 | -.275979123E+00 |
| .368330 | -.136427784E+00 | -.259619876E+00 |
| .389200 | -.142844369E+00 | -.239128815E+00 |
| .410070 | -.147419056E+00 | -.216462223E+00 |
| .431990 | -.149849015E+00 | -.191234128E+00 |
| .453920 | -.149319042E+00 | -.165534779E+00 |
| .476960 | -.145515637E+00 | -.138506713E+00 |
| .500000 | -.138197332E+00 | -.111930724E+00 |
| .523040 | -.127679870E+00 | -.857732822E-01 |
| .546080 | -.114441855E+00 | -.600044170E-01 |
| .568010 | -.997778060E-01 | -.356904137E-01 |
| .589930 | -.837384226E-01 | -.114578563E-01 |
| .610800 | -.676394072E-01 | .116504877E-01  |
| .631670 | -.512277693E-01 | .348392073E-01  |
| .651530 | -.356474069E-01 | .570195217E-01  |
| .671390 | -.204012399E-01 | .792468206E-01  |
| .690290 | -.639369829E-02 | .100418230E+00  |
| .709190 | .698696576E-02  | .121467202E+00  |
| .727170 | .190541830E-01  | .141314442E+00  |
| .745160 | .304675527E-01  | .160820112E+00  |
| .762280 | .407326700E-01  | .178979810E+00  |
| .779400 | .505467609E-01  | .196570344E+00  |
| .795690 | .596281581E-01  | .212734242E+00  |

Tabela II.4.(b) Resultados referentes à Figura 4.6, malha 30 x 30. Cont.

| Y        | U em t = 5      | U em t = 35     |
|----------|-----------------|-----------------|
| .523040  | -.127679870E+00 | -.857732822E-01 |
| .546080  | -.114441855E+00 | -.600044170E-01 |
| .568010  | -.997778060E-01 | -.356904137E-01 |
| .589930  | -.837384226E-01 | -.114578563E-01 |
| .610800  | -.676394072E-01 | .116504877E-01  |
| .631670  | -.512277693E-01 | .348392073E-01  |
| .651530  | -.356474069E-01 | .570195217E-01  |
| .671390  | -.204012399E-01 | .792468206E-01  |
| .690290  | -.639369829E-02 | .100418230E+00  |
| .709190  | .698696576E-02  | .121467202E+00  |
| .727170  | .190541830E-01  | .141314442E+00  |
| .745160  | .304675527E-01  | .160820112E+00  |
| .762280  | .407326700E-01  | .178979810E+00  |
| .779400  | .505467609E-01  | .196570344E+00  |
| .795690  | .596281581E-01  | .212734242E+00  |
| .811980  | .688716602E-01  | .228248282E+00  |
| .827480  | .782913075E-01  | .242501261E+00  |
| .842990  | .893397724E-01  | .256500223E+00  |
| .857740  | .102482804E+00  | .270129608E+00  |
| .872500  | .120293171E+00  | .285226070E+00  |
| .886540  | .143781979E+00  | .302631639E+00  |
| .900590  | .177165727E+00  | .325978710E+00  |
| .913950  | .221493753E+00  | .357098995E+00  |
| .927310  | .282483720E+00  | .401785910E+00  |
| .940030  | .359604619E+00  | .461145977E+00  |
| .952750  | .458650200E+00  | .541270658E+00  |
| .964860  | .574273736E+00  | .638032193E+00  |
| .976960  | .709649411E+00  | .753746833E+00  |
| .988480  | .852019776E+00  | .875565009E+00  |
| 1.000000 | .100000000E+01  | .100000000E+01  |

Tabela II.4.(c) Resultados referentes à Figura 4.6, malha 40 x 40

| Y       | U em t = 5      | U em t = 35     |
|---------|-----------------|-----------------|
| .000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| .008646 | -.472075673E-02 | -.128775007E-01 |
| .017293 | -.912413438E-02 | -.252613356E-01 |
| .026260 | -.133862610E-01 | -.376638381E-01 |
| .035228 | -.173701085E-01 | -.496984355E-01 |
| .044528 | -.212394129E-01 | -.618700516E-01 |
| .053829 | -.248739479E-01 | -.738053955E-01 |
| .063475 | -.284280090E-01 | -.860106307E-01 |
| .073121 | -.317953606E-01 | -.981134004E-01 |
| .083126 | -.351248243E-01 | -.110626592E+00 |
| .093131 | -.383215270E-01 | -.123160952E+00 |
| .103510 | -.415322326E-01 | -.136229922E+00 |
| .113880 | -.446669726E-01 | -.149388623E+00 |
| .124650 | -.478801957E-01 | -.163159229E+00 |
| .135410 | -.510814200E-01 | -.177007342E+00 |
| .146570 | -.544261242E-01 | -.191393905E+00 |
| .157730 | -.578286439E-01 | -.205717028E+00 |
| .169310 | -.614514077E-01 | -.220356488E+00 |
| .180880 | -.651943862E-01 | -.234588025E+00 |
| .192890 | -.692349014E-01 | -.248704997E+00 |
| .204900 | -.734564386E-01 | -.261906516E+00 |
| .217350 | -.780372666E-01 | -.274341076E+00 |
| .229800 | -.828375357E-01 | -.285209213E+00 |
| .242720 | -.880459124E-01 | -.294563901E+00 |
| .255630 | -.934731951E-01 | -.301678546E+00 |
| .269030 | -.993084104E-01 | -.306539702E+00 |
| .282420 | -.105308310E+00 | -.308652512E+00 |
| .296320 | -.111641778E+00 | -.307971029E+00 |
| .310210 | -.118001927E+00 | -.304377493E+00 |
| .324620 | -.124510021E+00 | -.297816784E+00 |
| .339030 | -.130802362E+00 | -.288612852E+00 |
| .353970 | -.136925445E+00 | -.276698886E+00 |
| .368920 | -.142469383E+00 | -.262783178E+00 |
| .384420 | -.147397154E+00 | -.246733951E+00 |
| .399920 | -.151280086E+00 | -.229534836E+00 |
| .415990 | -.154011484E+00 | -.210900257E+00 |
| .432070 | -.155215893E+00 | -.191849752E+00 |
| .448740 | -.154739175E+00 | -.171951129E+00 |
| .465410 | -.152367612E+00 | -.152145762E+00 |
| .482710 | -.147925356E+00 | -.131796526E+00 |
| .500000 | -.141487514E+00 | -.111751944E+00 |

Tabela II.4.(c) Resultados referentes à Figura 4.6, malha 40 x 40. Cont.

|          |                 |                 |
|----------|-----------------|-----------------|
| .517290  | -.133210820E+00 | -.919634995E-01 |
| .534590  | -.123287225E+00 | -.723776364E-01 |
| .551260  | -.112397798E+00 | -.536360374E-01 |
| .567930  | -.100475289E+00 | -.349498664E-01 |
| .584010  | -.882231010E-01 | -.169170683E-01 |
| .600080  | -.754922299E-01 | .116114237E-02  |
| .615580  | -.629421762E-01 | .186902693E-01  |
| .631080  | -.503178483E-01 | .363231027E-01  |
| .646030  | -.382104265E-01 | .534406688E-01  |
| .660970  | -.263067994E-01 | .706350855E-01  |
| .675380  | -.151014326E-01 | .872931636E-01  |
| .689790  | -.424142460E-02 | .103977084E+00  |
| .703680  | .584854253E-02  | .120056568E+00  |
| .717580  | .155409813E-01  | .136080158E+00  |
| .730970  | .244756609E-01  | .151414289E+00  |
| .744370  | .330243263E-01  | .166583613E+00  |
| .757280  | .409008210E-01  | .180989295E+00  |
| .770200  | .484751623E-01  | .195124229E+00  |
| .782650  | .555372649E-01  | .208440154E+00  |
| .795100  | .624823749E-01  | .221393402E+00  |
| .807110  | .692027032E-01  | .233531371E+00  |
| .819120  | .761876191E-01  | .245303227E+00  |
| .830690  | .834390432E-01  | .256352739E+00  |
| .842270  | .916787358E-01  | .267240985E+00  |
| .853430  | .101061513E+00  | .277799306E+00  |
| .864590  | .112673224E+00  | .288818975E+00  |
| .875350  | .126843780E+00  | .300457355E+00  |
| .886120  | .145215263E+00  | .314019974E+00  |
| .896490  | .168148325E+00  | .330011878E+00  |
| .906870  | .197952670E+00  | .350508954E+00  |
| .916870  | .234763705E+00  | .376216680E+00  |
| .926880  | .281461052E+00  | .409964769E+00  |
| .936520  | .337324734E+00  | .451935500E+00  |
| .946170  | .405474410E+00  | .505223391E+00  |
| .955470  | .483551634E+00  | .568299509E+00  |
| .964770  | .574127695E+00  | .643399244E+00  |
| .973740  | .672490328E+00  | .726148566E+00  |
| .982710  | .779996241E+00  | .817015338E+00  |
| .991350  | .889130155E+00  | .908615389E+00  |
| 1.000000 | .100000000E+01  | .100000000E+01  |

Tabela II.5 (a). Resultados referentes à Figura 4.9, malha 30 x 30

| Y       | U; t = 5; Re = 400 | U; t = 5; Re = 1000 |
|---------|--------------------|---------------------|
| .000000 | .000000000E+00     | .000000000E+00      |
| .011520 | -.606614148E-02    | -.526826719E-02     |
| .023040 | -.115971052E-01    | -.985929267E-02     |
| .035144 | -.169034601E-01    | -.140266828E-01     |
| .047248 | -.217626827E-01    | -.175986589E-01     |
| .059967 | -.264621338E-01    | -.207961105E-01     |
| .072686 | -.308180743E-01    | -.235082517E-01     |
| .086050 | -.351028645E-01    | -.259246163E-01     |
| .099415 | -.391648244E-01    | -.279817358E-01     |
| .113460 | -.432731012E-01    | -.298426546E-01     |
| .127500 | -.472935710E-01    | -.314734702E-01     |
| .142260 | -.515064542E-01    | -.330182859E-01     |
| .157010 | -.557787279E-01    | -.344567322E-01     |
| .172520 | -.604103665E-01    | -.359211809E-01     |
| .188020 | -.652497280E-01    | -.373915707E-01     |
| .204310 | -.706152209E-01    | -.389965992E-01     |
| .220600 | -.763144402E-01    | -.407079532E-01     |
| .237720 | -.826743969E-01    | -.426618422E-01     |
| .254840 | -.894184866E-01    | -.448138699E-01     |
| .272830 | -.968523009E-01    | -.473204623E-01     |
| .290810 | -.104565814E+00    | -.501191490E-01     |
| .309710 | -.112788928E+00    | -.533992315E-01     |
| .328610 | -.120938643E+00    | -.570893391E-01     |
| .348470 | -.129075944E+00    | -.614047549E-01     |
| .368330 | -.136427784E+00    | -.662835643E-01     |
| .389200 | -.142844369E+00    | -.719065969E-01     |
| .410070 | -.147419056E+00    | -.782324065E-01     |
| .431990 | -.149849015E+00    | -.851645143E-01     |
| .453920 | -.149319042E+00    | -.925718556E-01     |
| .476960 | -.145515637E+00    | -.998513233E-01     |
| .500000 | -.138197332E+00    | -.105873309E+00     |
| .523040 | -.127679870E+00    | -.111427911E+00     |
| .546080 | -.114441855E+00    | -.112158483E+00     |
| .568010 | -.997778060E-01    | -.106856306E+00     |
| .589930 | -.837384226E-01    | -.970921372E-01     |
| .610800 | -.676394072E-01    | -.846726319E-01     |
| .631670 | -.512277693E-01    | -.694955764E-01     |
| .651530 | -.356474069E-01    | -.525976658E-01     |
| .671390 | -.204012399E-01    | -.345433571E-01     |
| .690290 | -.639369829E-02    | -.173166801E-01     |
| .709190 | .698696576E-02     | -.897106072E-03     |
| .727170 | .190541830E-01     | .135425379E-01      |
| .745160 | .304675527E-01     | .264759001E-01      |
| .762280 | .407326700E-01     | .370797793E-01      |
| .779400 | .505467609E-01     | .460027979E-01      |
| .795690 | .596281581E-01     | .529737533E-01      |

Tabela II.5 (a). Resultados referentes à Figura 4.9, malha 30 x 30. Cont.

| Y        | U; t = 5; Re = 400 | U; t = 5; Re = 1000 |
|----------|--------------------|---------------------|
| .523040  | -.127679870E+00    | -.111427911E+00     |
| .546080  | -.114441855E+00    | -.112158483E+00     |
| .568010  | -.997778060E-01    | -.106856306E+00     |
| .589930  | -.837384226E-01    | -.970921372E-01     |
| .610800  | -.676394072E-01    | -.846726319E-01     |
| .631670  | -.512277693E-01    | -.694955764E-01     |
| .651530  | -.356474069E-01    | -.525976658E-01     |
| .671390  | -.204012399E-01    | -.345433571E-01     |
| .690290  | -.639369829E-02    | -.173166801E-01     |
| .709190  | .698696576E-02     | -.897106072E-03     |
| .727170  | .190541830E-01     | .135425379E-01      |
| .745160  | .304675527E-01     | .264759001E-01      |
| .762280  | .407326700E-01     | .370797793E-01      |
| .779400  | .505467609E-01     | .460027979E-01      |
| .795690  | .596281581E-01     | .529737533E-01      |
| .811980  | .688716602E-01     | .586047440E-01      |
| .827480  | .782913075E-01     | .628469372E-01      |
| .842990  | .893397724E-01     | .663109218E-01      |
| .857740  | .102482804E+00     | .691308098E-01      |
| .872500  | .120293171E+00     | .724542449E-01      |
| .886540  | .143781979E+00     | .770343532E-01      |
| .900590  | .177165727E+00     | .861940205E-01      |
| .913950  | .221493753E+00     | .102577872E+00      |
| .927310  | .282483720E+00     | .134130364E+00      |
| .940030  | .359604619E+00     | .186136780E+00      |
| .952750  | .458650200E+00     | .271539141E+00      |
| .964860  | .574273736E+00     | .393463295E+00      |
| .976960  | .709649411E+00     | .563381915E+00      |
| .988480  | .852019776E+00     | .767791093E+00      |
| 1.000000 | .100000000E+01     | .100000000E+01      |



Tabela II.5 (b). Resultados referentes à Figura 4.9, malha 30 x 30

| Y       | U; t = 10; Re = 400 | U; t=10; Re = 1000 |
|---------|---------------------|--------------------|
| .000000 | .000000000E+00      | .000000000E+00     |
| .011520 | -.879023223E-02     | -.584472132E-02    |
| .023040 | -.170832966E-01     | -.111568867E-01    |
| .035144 | -.253752521E-01     | -.162467533E-01    |
| .047248 | -.333464514E-01     | -.209232396E-01    |
| .059967 | -.414948587E-01     | -.255026726E-01    |
| .072686 | -.495237199E-01     | -.298684449E-01    |
| .086050 | -.579482051E-01     | -.343880686E-01    |
| .099415 | -.664748167E-01     | -.390379567E-01    |
| .113460 | -.756514833E-01     | -.443088598E-01    |
| .127500 | -.851470477E-01     | -.502738857E-01    |
| .142260 | -.955494439E-01     | -.576296503E-01    |
| .157010 | -.106436980E+00     | -.665025333E-01    |
| .172520 | -.118411345E+00     | -.778127074E-01    |
| .188020 | -.130897735E+00     | -.915846368E-01    |
| .204310 | -.144436587E+00     | -.108751601E+00    |
| .220600 | -.158244872E+00     | -.128935183E+00    |
| .237720 | -.172702408E+00     | -.152535091E+00    |
| .254840 | -.186750653E+00     | -.178198337E+00    |
| .272830 | -.200517799E+00     | -.205572103E+00    |
| .290810 | -.212685502E+00     | -.230517085E+00    |
| .309710 | -.223132621E+00     | -.254211569E+00    |
| .328610 | -.230450999E+00     | -.268006192E+00    |
| .348470 | -.234395621E+00     | -.275169346E+00    |
| .368330 | -.233886566E+00     | -.272316432E+00    |
| .389200 | -.228752861E+00     | -.258702614E+00    |
| .410070 | -.218859729E+00     | -.241845884E+00    |
| .431990 | -.204095277E+00     | -.219003560E+00    |
| .453920 | -.185605987E+00     | -.195342625E+00    |
| .476960 | -.163091919E+00     | -.170275699E+00    |
| .500000 | -.138708436E+00     | -.144547467E+00    |
| .523040 | -.113120238E+00     | -.118157237E+00    |
| .546080 | -.872113204E-01     | -.908743057E-01    |
| .568010 | -.626451706E-01     | -.637634105E-01    |
| .589930 | -.385176967E-01     | -.356210174E-01    |
| .610800 | -.161238056E-01     | -.803881950E-02    |
| .631670 | .558330613E-02      | .199354640E-01     |
| .651530 | .255434754E-01      | .468097963E-01     |
| .671390 | .447613660E-01      | .734647514E-01     |
| .690290 | .623407895E-01      | .984732501E-01     |
| .709190 | .791754112E-01      | .122456466E+00     |
| .727170 | .944963447E-01      | .144158741E+00     |
| .745160 | .109106366E+00      | .163927066E+00     |
| .762280 | .122360086E+00      | .180657658E+00     |
| .779400 | .134985030E+00      | .194583010E+00     |
| .795690 | .146496281E+00      | .205032599E+00     |

Tabela II.5 (b). Resultados referentes à Figura 4.9, malha 30 x 30. Cont.

| Y        | U; t = 10; Re = 400 | U; t=10; Re = 1000 |
|----------|---------------------|--------------------|
| .523040  | -.113120238E+00     | -.118157237E+00    |
| .546080  | -.872113204E-01     | -.908743057E-01    |
| .568010  | -.626451706E-01     | -.637634105E-01    |
| .589930  | -.385176967E-01     | -.356210174E-01    |
| .610800  | -.161238056E-01     | -.803881950E-02    |
| .631670  | .558330613E-02      | .199354640E-01     |
| .651530  | .255434754E-01      | .468097963E-01     |
| .671390  | .447613660E-01      | .734647514E-01     |
| .690290  | .623407895E-01      | .984732501E-01     |
| .709190  | .791754112E-01      | .122456466E+00     |
| .727170  | .944963447E-01      | .144158741E+00     |
| .745160  | .109106366E+00      | .163927066E+00     |
| .762280  | .122360086E+00      | .180657658E+00     |
| .779400  | .134985030E+00      | .194583010E+00     |
| .795690  | .146496281E+00      | .205032599E+00     |
| .811980  | .157678664E+00      | .212423489E+00     |
| .827480  | .168299369E+00      | .216625305E+00     |
| .842990  | .179518787E+00      | .218362332E+00     |
| .857740  | .191580471E+00      | .217991072E+00     |
| .872500  | .206650531E+00      | .216429844E+00     |
| .886540  | .225752799E+00      | .214473806E+00     |
| .900590  | .252834664E+00      | .214274231E+00     |
| .913950  | .289455444E+00      | .218193583E+00     |
| .927310  | .341412961E+00      | .233318722E+00     |
| .940030  | .409079138E+00      | .266136519E+00     |
| .952750  | .498397345E+00      | .331358196E+00     |
| .964860  | .604645236E+00      | .435107517E+00     |
| .976960  | .730526533E+00      | .590063943E+00     |
| .988480  | .863156863E+00      | .782076672E+00     |
| 1.000000 | .100000000E+01      | .100000000E+01     |

Tabela II.6 (a) Resultados do presente trabalho referentes à Figura 4.13

| Y        | U em $X = 2$    | U em $X = 6$   |
|----------|-----------------|----------------|
| .000000  | .000000000E+00  | 000000000E+00  |
| .034316  | -.241193080E-01 | .121460639E-01 |
| .068632  | -.449688388E-01 | .256452284E-01 |
| .109440  | -.655080048E-01 | .434842833E-01 |
| .150250  | -.814238009E-01 | .633096132E-01 |
| .198780  | -.943570390E-01 | .895409686E-01 |
| .247310  | -.100823003E+00 | .118752122E+00 |
| .305020  | -.100235712E+00 | .157460916E+00 |
| .362740  | -.908514095E-01 | .200578326E+00 |
| .431370  | -.686472717E-01 | .257483657E+00 |
| .500000  | -.349257259E-01 | .320291792E+00 |
| .568630  | .975199765E-02  | .388317400E+00 |
| .637260  | .649177307E-01  | .460725232E+00 |
| .694980  | .119155039E+00  | .524103806E+00 |
| .752690  | .180381094E+00  | .588963639E+00 |
| .801220  | .237057951E+00  | .644052447E+00 |
| .849750  | .298324372E+00  | .699181332E+00 |
| .890560  | .353014502E+00  | .745230244E+00 |
| .931370  | .410395829E+00  | .790759796E+00 |
| .965680  | .460479495E+00  | .828419989E+00 |
| 1.000000 | .511962204E+00  | .865382226E+00 |
| 1.034500 | .564883628E+00  | .901632930E+00 |
| 1.069000 | .618543087E+00  | .936815312E+00 |
| 1.106300 | .677004416E+00  | .973415930E+00 |
| 1.143500 | .735452423E+00  | .100822501E+01 |
| 1.183800 | .798495527E+00  | .104373705E+01 |
| 1.224000 | .860696913E+00  | .107664238E+01 |
| 1.267500 | .926521097E+00  | .110912596E+01 |
| 1.311000 | .990177466E+00  | .113812236E+01 |
| 1.357900 | .105545351E+01  | .116523660E+01 |
| 1.404900 | .111665897E+01  | .118787754E+01 |
| 1.455600 | .117715659E+01  | .120703879E+01 |
| 1.506300 | .123138099E+01  | .122056904E+01 |
| 1.561100 | .128246682E+01  | .122874315E+01 |
| 1.615900 | .132546129E+01  | .123009079E+01 |
| 1.675000 | .136255775E+01  | .122389585E+01 |
| 1.734200 | .138997956E+01  | .120969833E+01 |
| 1.798100 | .140856281E+01  | .118564111E+01 |
| 1.862000 | .141570558E+01  | .115268342E+01 |
| 1.931000 | .141053516E+01  | .110772538E+01 |
| 2.000000 | .139197906E+01  | .105359990E+01 |
| 2.069000 | .136013318E+01  | .991344355E+00 |
| 2.138000 | .131493947E+01  | .921922688E+00 |
| 2.201900 | .126152410E+01  | .852460398E+00 |
| 2.265800 | .119709284E+01  | .779028651E+00 |
| 2.325000 | .112804058E+01  | .708612640E+00 |

Tabela II.6 (a). Resultados do presente trabalho referentes à Figura 4.13. Cont.

| Y        | U em X = 2     | U em X = 6     |
|----------|----------------|----------------|
| 2.384100 | .105044824E+01 | .636937600E+00 |
| 2.438900 | .971473792E+00 | .570147746E+00 |
| 2.493700 | .886278250E+00 | .503753553E+00 |
| 2.544400 | .802787214E+00 | .443292535E+00 |
| 2.595100 | .715506885E+00 | .384240712E+00 |
| 2.642100 | .632108295E+00 | .331127644E+00 |
| 2.689000 | .547224608E+00 | .279976500E+00 |
| 2.732500 | .467787353E+00 | .234386059E+00 |
| 2.776000 | .388299063E+00 | .190732996E+00 |
| 2.816200 | .315378216E+00 | .152214392E+00 |
| 2.856500 | .243257798E+00 | .115431520E+00 |
| 2.893700 | .177931742E+00 | .831515875E-01 |
| 2.931000 | .113905406E+00 | .524285497E-01 |
| 2.965500 | .561830782E-01 | .254958711E-01 |
| 3.000000 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |

Tabela II.6 (b). Resultados de Winterscheidt et al. referentes à Figura 4.13.

| Y      | U em X = 2 | Y       | U em X = 6 |
|--------|------------|---------|------------|
| 0.0000 | 0.0000     | 0.00000 | 0.00000    |
| 0.0500 | -0.0542    | 0.07020 | 0.02174    |
| 0.1200 | -0.0750    | 0.21050 | 0.10870    |
| 0.2000 | -0.0917    | 0.25610 | 0.15220    |
| 0.2600 | -0.0917    | 0.35090 | 0.19570    |
| 0.3433 | -0.1083    | 0.40350 | 0.23910    |
| 0.4000 | -0.0840    | 0.46667 | 0.28260    |
| 0.4533 | -0.0750    | 0.60700 | 0.43480    |
| 0.5733 | 0.0300     | 0.73680 | 0.56520    |
| 0.6567 | 0.100      | 0.87720 | 0.69570    |
| 0.7667 | 0.2333     | 1.05260 | 0.89130    |
| 0.9100 | 0.4335     | 1.27370 | 1.08700    |
| 1.0400 | 0.6250     | 1.47370 | 1.19570    |
| 1.1800 | 0.8583     | 1.68420 | 1.17830    |
| 1.3400 | 1.1375     | 1.89470 | 1.13040    |
| 1.5333 | 1.3042     | 2.03510 | 0.96520    |
| 1.7567 | 1.3917     | 2.28070 | 0.73910    |
| 1.9533 | 1.3667     | 2.45610 | 0.50000    |
| 2.1333 | 1.2417     | 2.59650 | 0.34780    |
| 2.3500 | 1.0083     | 2.73680 | 0.17390    |
| 2.4833 | 0.7667     | 2.85960 | 0.08700    |
| 2.6233 | 0.5708     | 2.92980 | 0.02174    |
| 2.7400 | 0.3208     | 3.00000 | 0.00000    |
| 2.8367 | 0.2042     |         |            |
| 2.8867 | 0.0750     |         |            |
| 2.9367 | 0.0208     |         |            |
| 3.0000 | 0.0000     |         |            |

Tabela II.7. Resultados referentes à Figura 4.21

| Tempo Adimensional | L/D: Cheng & Armfield 1995 | L/D: Presente trabalho |
|--------------------|----------------------------|------------------------|
| 1.                 | 0.35                       | 0.30                   |
| 2.                 | 0.74                       | 0.75                   |
| 3.                 | 1.10                       | 1.10                   |
| 4.                 | 1.40                       | 1.40                   |
| 5.                 | 1.65                       | 1.60                   |
| 6.                 | 1.83                       | 1.80                   |
| 7.                 | 2.00                       | 1.90                   |
| 8.                 | 2.08                       | 2.0                    |
| 9.                 | 2.18                       | 2.10                   |
| 10.                | 2.19                       | 2.15                   |
| 11.                | 2.21                       | 2.20                   |
| 15.                | 2.22                       | 2.21                   |
| 20.                | 2.28                       | 2.31                   |
| 30.                | 2.30                       | 2.31                   |
| 40.                | 2.31                       | 2.31                   |
| 50.                | 2.32                       | 2.31                   |

Tabela II.8. Resultados referentes à figura 4.27

| Y        | U em X = 1,378 | U em X = 2,0   | U em X = 2,25  |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| .000000  | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .051474  | .323425664E+00 | .823669569E+00 | .100068990E+01 |
| .102950  | .601413389E+00 | .124570706E+01 | .157966826E+01 |
| .146230  | .796492962E+00 | .146714810E+01 | .185202686E+01 |
| .189520  | .947982083E+00 | .156670892E+01 | .196743126E+01 |
| .225910  | .102222205E+01 | .158977551E+01 | .196436545E+01 |
| .262310  | .106013767E+01 | .176018280E+01 | .174615294E+01 |
| .292920  | .110887744E+01 | .175924298E+01 | .136869476E+01 |
| .323530  | .120746212E+01 | .127667601E+01 | .913697506E+00 |
| .349260  | .132300935E+01 | .705281910E+00 | .493342461E+00 |
| .375000  | .143480434E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .400000  | .150534231E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .425000  | .152959424E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .450000  | .152585781E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .475000  | .151612913E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .500000  | .151326456E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .525000  | .151612922E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .550000  | .152585803E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .575000  | .152959466E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .600000  | .150534307E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .625000  | .143480544E+01 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .650740  | .132301064E+01 | .705281835E+00 | .493343529E+00 |
| .676470  | .120746341E+01 | .127667585E+01 | .913698696E+00 |
| .707080  | .110887856E+01 | .175924288E+01 | .136869568E+01 |
| .737690  | .106013871E+01 | .176018294E+01 | .174615352E+01 |
| .774090  | .102222327E+01 | .158977542E+01 | .196436566E+01 |
| .810480  | .947983612E+00 | .156670907E+01 | .196743194E+01 |
| .853770  | .796494635E+00 | .146714904E+01 | .185202309E+01 |
| .897050  | .601415137E+00 | .124571081E+01 | .157967226E+01 |
| .948530  | .323403294E+00 | .823631706E+00 | .100063999E+01 |
| 1.000000 | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |

Tabela II.9. Resultados referentes à figura 4.28

| Y        | U em X = 2,744 | U em X = 3,547 | U em X = 5,55  |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| .000000  | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |
| .051474  | .525070792E+00 | .342756992E+00 | .340791396E+00 |
| .102950  | .102330709E+01 | .656617157E+00 | .633072190E+00 |
| .146230  | .136872859E+01 | .892649970E+00 | .836084223E+00 |
| .189520  | .157904752E+01 | .109309324E+01 | .999172171E+00 |
| .225910  | .163867625E+01 | .122389094E+01 | .110694050E+01 |
| .262310  | .158932963E+01 | .130949739E+01 | .119065050E+01 |
| .292920  | .146786095E+01 | .134533598E+01 | .124485618E+01 |
| .323530  | .128696150E+01 | .134767144E+01 | .128648871E+01 |
| .349260  | .110289808E+01 | .132787068E+01 | .131332109E+01 |
| .375000  | .907891278E+00 | .129320700E+01 | .133390573E+01 |
| .400000  | .719978901E+00 | .125159800E+01 | .134887117E+01 |
| .425000  | .551791314E+00 | .120927747E+01 | .135967495E+01 |
| .450000  | .417101824E+00 | .117273508E+01 | .136693704E+01 |
| .475000  | .330316476E+00 | .114839667E+01 | .137111334E+01 |
| .500000  | .300231585E+00 | .113958173E+01 | .137247421E+01 |
| .525000  | .330318208E+00 | .114839686E+01 | .137111344E+01 |
| .550000  | .417105125E+00 | .117273546E+01 | .136693725E+01 |
| .575000  | .551795909E+00 | .120927805E+01 | .135967527E+01 |
| .600000  | .719984416E+00 | .125159877E+01 | .134887160E+01 |
| .625000  | .907897362E+00 | .129320795E+01 | .133390629E+01 |
| .650740  | .110290433E+01 | .132787179E+01 | .131332180E+01 |
| .676470  | .128696741E+01 | .134767268E+01 | .128648958E+01 |
| .707080  | .146786605E+01 | .134533734E+01 | .124485725E+01 |
| .737690  | .158933395E+01 | .130949879E+01 | .119065177E+01 |
| .774090  | .163867876E+01 | .122389234E+01 | .110694200E+01 |
| .810480  | .157904687E+01 | .109309469E+01 | .999173866E+00 |
| .853770  | .136872711E+01 | .892651439E+00 | .836086078E+00 |
| .897050  | .102330591E+01 | .656618521E+00 | .633074094E+00 |
| .948530  | .525024664E+00 | .342731934E+00 | .340767488E+00 |
| 1.000000 | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |

Tabela II.10. Resultados referentes à Figura 4.31

| X       | C <sub>f</sub> Parede Inferior | C <sub>f</sub> Parede Superior |
|---------|--------------------------------|--------------------------------|
| .00000  | .119965807E+02                 | .119984455E+02                 |
| .13802  | .111945014E+02                 | .111952571E+02                 |
| .27604  | .108685603E+02                 | .108691097E+02                 |
| .40383  | .115650059E+02                 | .115652961E+02                 |
| .53162  | .120211102E+02                 | .120213071E+02                 |
| .64993  | .121932141E+02                 | .121935342E+02                 |
| .76825  | .122032486E+02                 | .122035729E+02                 |
| .87780  | .120727209E+02                 | .120728901E+02                 |
| .98734  | .122409509E+02                 | .122411218E+02                 |
| 1.08880 | .125357879E+02                 | .125360813E+02                 |
| 1.19020 | .128045604E+02                 | .128048764E+02                 |
| 1.28410 | .126978268E+02                 | .126980816E+02                 |
| 1.37800 | .132727026E+02                 | .132730178E+02                 |
| 1.46500 | .139799160E+02                 | .139803528E+02                 |
| 1.55190 | .153479871E+02                 | .153485695E+02                 |
| 1.63240 | .166494837E+02                 | .166501838E+02                 |
| 1.71290 | .193415241E+02                 | .193425350E+02                 |
| 1.78740 | .229272480E+02                 | .229286449E+02                 |
| 1.86200 | .274252606E+02                 | .274271513E+02                 |
| 1.93100 | .334207163E+02                 | .334232604E+02                 |
| 2.00000 | .385812629E+02                 | .385843269E+02                 |
| 2.02500 | .410854202E+02                 | .410887597E+02                 |
| 2.05000 | .429849728E+02                 | .429884936E+02                 |
| 2.07500 | .441779266E+02                 | .441815309E+02                 |
| 2.10000 | .452243062E+02                 | .452279736E+02                 |
| 2.12500 | .463301241E+02                 | .463338568E+02                 |
| 2.15000 | .470288617E+02                 | .470325999E+02                 |
| 2.17500 | .473093270E+02                 | .473130193E+02                 |
| 2.20000 | .473044032E+02                 | .473080075E+02                 |
| 2.22500 | .471357819E+02                 | .471392809E+02                 |
| 2.25000 | .466023805E+02                 | .466057133E+02                 |
| 2.29700 | .451003598E+02                 | .451033518E+02                 |
| 2.34400 | .431746500E+02                 | .431772447E+02                 |
| 2.39210 | .402475489E+02                 | .402496320E+02                 |
| 2.44030 | .373526592E+02                 | .373542613E+02                 |
| 2.48970 | .343583335E+02                 | .343594868E+02                 |
| 2.53910 | .315212019E+02                 | .315219572E+02                 |
| 2.58970 | .285267864E+02                 | .285271677E+02                 |
| 2.64030 | .259196885E+02                 | .259197840E+02                 |
| 2.69220 | .236396171E+02                 | .236394987E+02                 |
| 2.74400 | .216873784E+02                 | .216871113E+02                 |
| 2.79720 | .199099642E+02                 | .199095899E+02                 |
| 2.85040 | .185011572E+02                 | .185007355E+02                 |
| 2.90490 | .174108468E+02                 | .174104122E+02                 |
| 2.95940 | .165565664E+02                 | .165561516E+02                 |
| 3.01530 | .158717445E+02                 | .158713664E+02                 |



Tabela II.10. Resultados referentes à Figura 4.31. Cont

| X       | C <sub>f</sub> Parede Inferior | C <sub>f</sub> Parede Superior |
|---------|--------------------------------|--------------------------------|
| 3.07120 | .153813429E+02                 | .153810200E+02                 |
| 3.12850 | .150656864E+02                 | .150654258E+02                 |
| 3.18580 | .148435206E+02                 | .148433259E+02                 |
| 3.24450 | .147007125E+02                 | .147005843E+02                 |
| 3.30320 | .146144827E+02                 | .146144170E+02                 |
| 3.36340 | .145957433E+02                 | .145957373E+02                 |
| 3.42360 | .145875908E+02                 | .145876372E+02                 |
| 3.48530 | .145984045E+02                 | .145984989E+02                 |
| 3.54700 | .146070297E+02                 | .146071641E+02                 |
| 3.61020 | .146315100E+02                 | .146316802E+02                 |
| 3.67350 | .146390883E+02                 | .146392875E+02                 |
| 3.73830 | .146422725E+02                 | .146424968E+02                 |
| 3.80310 | .146290336E+02                 | .146292769E+02                 |
| 3.86960 | .146142837E+02                 | .146145436E+02                 |
| 3.93600 | .145834092E+02                 | .145836814E+02                 |
| 4.00410 | .145406050E+02                 | .145408867E+02                 |
| 4.07230 | .144865255E+02                 | .144868139E+02                 |
| 4.14210 | .144308910E+02                 | .144311851E+02                 |
| 4.21190 | .143645815E+02                 | .143648788E+02                 |
| 4.28350 | .142899626E+02                 | .142902618E+02                 |
| 4.35510 | .142116237E+02                 | .142119236E+02                 |
| 4.42840 | .141317080E+02                 | .141320080E+02                 |
| 4.50180 | .140477211E+02                 | .140480202E+02                 |
| 4.57700 | .139617793E+02                 | .139620772E+02                 |
| 4.65220 | .138754248E+02                 | .138757208E+02                 |
| 4.72930 | .137888434E+02                 | .137891373E+02                 |
| 4.80640 | .137032370E+02                 | .137035286E+02                 |
| 4.88540 | .136165783E+02                 | .136168672E+02                 |
| 4.96450 | .135321153E+02                 | .135324013E+02                 |
| 5.04550 | .134505797E+02                 | .134508632E+02                 |
| 5.12650 | .133709373E+02                 | .133712179E+02                 |
| 5.20950 | .132906533E+02                 | .132909307E+02                 |
| 5.29260 | .132142275E+02                 | .132145018E+02                 |
| 5.37770 | .131415810E+02                 | .131418525E+02                 |
| 5.46280 | .130715023E+02                 | .130717709E+02                 |
| 5.55000 | .130009483E+02                 | .130012137E+02                 |
| 5.63730 | .129353297E+02                 | .129355921E+02                 |
| 5.72670 | .128725643E+02                 | .128728238E+02                 |
| 5.81620 | .128127986E+02                 | .128130550E+02                 |
| 5.90790 | .127531761E+02                 | .127534298E+02                 |
| 5.99950 | .127025238E+02                 | .127027747E+02                 |
| 6.09350 | .126348597E+02                 | .126351059E+02                 |
| 6.18750 | .125917238E+02                 | .125919683E+02                 |

Tabela II.11. Resultados referentes à Figura 5.1

| Y       | U sem upwind    | U com Upwind    |
|---------|-----------------|-----------------|
| .000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| .008646 | -.922433599E-02 | -.998529749E-02 |
| .017293 | -.180893936E-01 | -.195970794E-01 |
| .026260 | -.269726371E-01 | -.292491984E-01 |
| .035228 | -.356091293E-01 | -.386579403E-01 |
| .044528 | -.443737110E-01 | -.482356038E-01 |
| .053829 | -.530107195E-01 | -.577060858E-01 |
| .063475 | -.619002201E-01 | -.674886417E-01 |
| .073121 | -.707852165E-01 | -.773019667E-01 |
| .083126 | -.800588022E-01 | -.875799635E-01 |
| .093131 | -.894500505E-01 | -.980206204E-01 |
| .103510 | -.993670565E-01 | -.109072735E+00 |
| .113880 | -.109497698E+00 | -.120381531E+00 |
| .124650 | -.120280117E+00 | -.132424530E+00 |
| .135410 | -.131335883E+00 | -.144765072E+00 |
| .146570 | -.143086656E+00 | -.157854083E+00 |
| .157730 | -.155100838E+00 | -.171188272E+00 |
| .169310 | -.167771025E+00 | -.185175208E+00 |
| .180880 | -.180551712E+00 | -.199181548E+00 |
| .192890 | -.193796684E+00 | -.213560223E+00 |
| .204900 | -.206858556E+00 | -.227569016E+00 |
| .217350 | -.219978244E+00 | -.241429923E+00 |
| .229800 | -.232431825E+00 | -.254333755E+00 |
| .242720 | -.244365997E+00 | -.266400714E+00 |
| .255630 | -.254988489E+00 | -.276784447E+00 |
| .269030 | -.264348002E+00 | -.285512757E+00 |
| .282420 | -.271697043E+00 | -.291844372E+00 |
| .296320 | -.277001955E+00 | -.295743142E+00 |
| .310210 | -.279701589E+00 | -.296738083E+00 |
| .324620 | -.279720291E+00 | -.294771524E+00 |
| .339030 | -.276837067E+00 | -.289790832E+00 |
| .353970 | -.270973843E+00 | -.281743597E+00 |
| .368920 | -.262341986E+00 | -.271044456E+00 |
| .384420 | -.250855178E+00 | -.257616193E+00 |
| .399920 | -.237187442E+00 | -.242306644E+00 |
| .415990 | -.221174964E+00 | -.224924362E+00 |
| .432070 | -.203779527E+00 | -.206513553E+00 |
| .448740 | -.184731887E+00 | -.186745832E+00 |
| .465410 | -.165113726E+00 | -.166685304E+00 |
| .482710 | -.144450901E+00 | -.145776452E+00 |
| .500000 | -.123815341E+00 | -.125011150E+00 |
| .517290 | -.103316816E+00 | -.104415184E+00 |
| .534590 | -.830609331E-01 | -.840078435E-01 |
| .551260 | -.638043967E-01 | -.644973848E-01 |
| .567930 | -.448041261E-01 | -.450896932E-01 |
| .584010 | -.267002584E-01 | -.264196973E-01 |

Tabela II.11. Resultados referentes à Figura 5.1. Cont.

| Y        | U sem upwind    | U com Upwind    |
|----------|-----------------|-----------------|
| .517290  | -.103316816E+00 | -.104415184E+00 |
| .534590  | -.830609331E-01 | -.840078435E-01 |
| .551260  | -.638043967E-01 | -.644973848E-01 |
| .567930  | -.448041261E-01 | -.450896932E-01 |
| .584010  | -.267002584E-01 | -.264196973E-01 |
| .600080  | -.880473033E-02 | -.777170787E-02 |
| .615580  | .829302367E-02  | .102359037E-01  |
| .631080  | .252377616E-01  | .282687226E-01  |
| .646030  | .414451827E-01  | .456889563E-01  |
| .660970  | .574907171E-01  | .630924748E-01  |
| .675380  | .728168703E-01  | .798534384E-01  |
| .689790  | .879573657E-01  | .965300054E-01  |
| .703680  | .102356867E+00  | .112488112E+00  |
| .717580  | .116525341E+00  | .128266984E+00  |
| .730970  | .129921280E+00  | .143241833E+00  |
| .744370  | .143025725E+00  | .157925039E+00  |
| .757280  | .155342932E+00  | .171740711E+00  |
| .770200  | .167322404E+00  | .185168439E+00  |
| .782650  | .178526112E+00  | .197697029E+00  |
| .795100  | .189376339E+00  | .209771846E+00  |
| .807110  | .199531075E+00  | .220988524E+00  |
| .819120  | .209424941E+00  | .231791584E+00  |
| .830690  | .218817466E+00  | .241885235E+00  |
| .842270  | .228281169E+00  | .251835415E+00  |
| .853430  | .237760227E+00  | .261541927E+00  |
| .864590  | .248098674E+00  | .271820813E+00  |
| .875350  | .259538440E+00  | .282895232E+00  |
| .886120  | .273462659E+00  | .296113049E+00  |
| .896490  | .290393927E+00  | .312026692E+00  |
| .906870  | .312473085E+00  | .332757443E+00  |
| .916870  | .340315737E+00  | .359014191E+00  |
| .926880  | .376773793E+00  | .393656846E+00  |
| .936520  | .421841465E+00  | .436816953E+00  |
| .946170  | .478621188E+00  | .491604298E+00  |
| .955470  | .545390471E+00  | .556410291E+00  |
| .964770  | .624462769E+00  | .633499615E+00  |
| .973740  | .711367626E+00  | .718425393E+00  |
| .982710  | .806781708E+00  | .811720317E+00  |
| .991350  | .903234235E+00  | .905883553E+00  |
| 1.000000 | .100000000E+01  | .100000000E+01  |

Tabela II.12. Resultados referentes à Figura 5.2

| X       | T em t = 2     | T em t = 5     | T em t = 10    | T em t = 15    |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .000000 | .100000000E+01 | .100000000E+01 | .100000000E+01 | 100000000E+01  |
| .008650 | .916086758E+00 | .917211444E+00 | .898949224E+00 | .888963378E+00 |
| .017290 | .834254559E+00 | .837098447E+00 | .802311268E+00 | .783418513E+00 |
| .026260 | .750111764E+00 | .753676322E+00 | .701542233E+00 | .673355613E+00 |
| .035230 | .671819308E+00 | .677621255E+00 | .612586606E+00 | .577856115E+00 |
| .044530 | .592281309E+00 | .598604229E+00 | .520709564E+00 | .479941562E+00 |
| .053830 | .521323057E+00 | .530045025E+00 | .444527423E+00 | .400635857E+00 |
| .063480 | .450388372E+00 | .459370679E+00 | .367257442E+00 | .321505359E+00 |
| .073120 | .389393724E+00 | .400457981E+00 | .306237660E+00 | .260697173E+00 |
| .083130 | .329532683E+00 | .340387022E+00 | .245724805E+00 | .201944366E+00 |
| .093130 | .279719231E+00 | .291970581E+00 | .199857526E+00 | .158758743E+00 |
| .103510 | .231800622E+00 | .243260375E+00 | .155540006E+00 | .118515446E+00 |
| .113880 | .193131307E+00 | .205180072E+00 | .123205522E+00 | .901552417E-01 |
| .124650 | .156670009E+00 | .167419552E+00 | .928274136E-01 | .647282985E-01 |
| .135410 | .128055958E+00 | .138696111E+00 | .714523438E-01 | .475288053E-01 |
| .146570 | .101690983E+00 | .110742916E+00 | .520294839E-01 | .327756587E-01 |
| .157730 | .815192872E-01 | .900113005E-01 | .388461401E-01 | .232006262E-01 |
| .169310 | .633384593E-01 | .702190134E-01 | .272813985E-01 | .153585961E-01 |
| .180880 | .497872482E-01 | .559285862E-01 | .197376657E-01 | .104976838E-01 |
| .192890 | .378415393E-01 | .425660115E-01 | .133680165E-01 | .670656428E-02 |
| .204900 | .291474748E-01 | .331649021E-01 | .938575077E-02 | .447491812E-02 |
| .217350 | .216679499E-01 | .245878789E-01 | .616696403E-02 | .282660637E-02 |
| .229800 | .163545801E-01 | .187234376E-01 | .425997149E-02 | .192886443E-02 |
| .242720 | .118846524E-01 | .135024386E-01 | .278747886E-02 | .130503186E-02 |
| .255630 | .878758402E-02 | .100470995E-01 | .199019249E-02 | .102835638E-02 |
| .269030 | .624473708E-02 | .705487250E-02 | .140723597E-02 | .856907101E-03 |
| .282420 | .452141521E-02 | .515057913E-02 | .116635881E-02 | .863389135E-03 |
| .296320 | .314039653E-02 | .355268202E-02 | .100634108E-02 | .889424885E-03 |
| .310210 | .222552766E-02 | .259357783E-02 | .104689949E-02 | .104793312E-02 |
| .324620 | .151273558E-02 | .181955330E-02 | .108833816E-02 | .117738650E-02 |
| .339030 | .105087220E-02 | .141049751E-02 | .130261907E-02 | .145918861E-02 |
| .353970 | .701696795E-03 | .110015446E-02 | .145916154E-02 | .166999503E-02 |
| .368920 | .481392104E-03 | .100839781E-02 | .183274884E-02 | .209514484E-02 |
| .384420 | .320743016E-03 | .957240668E-03 | .208555995E-02 | .239468551E-02 |
| .399920 | .223943184E-03 | .106473543E-02 | .265644594E-02 | .300695597E-02 |
| .415990 | .157572240E-03 | .117455944E-02 | .301615245E-02 | .341128990E-02 |
| .432070 | .122545837E-03 | .144419599E-02 | .384134421E-02 | .425539831E-02 |
| .448740 | .103328976E-03 | .169018812E-02 | .435824568E-02 | .480336531E-02 |
| .465410 | .100985109E-03 | .213377458E-02 | .545060496E-02 | .585787487E-02 |
| .482710 | .108267894E-03 | .253613201E-02 | .624315132E-02 | .665871116E-02 |
| .500000 | .127596780E-03 | .319846412E-02 | .765143582E-02 | .794564797E-02 |

Tabela II.12. Resultados referentes à Figura 5.2. Cont.

| X        | T em t = 2     | T em t = 5     | T em t = 10    | T em t = 15    |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .517290  | .154269681E-03 | .379854354E-02 | .879162986E-02 | .902727104E-02 |
| .534590  | .193027602E-03 | .472903516E-02 | .105097735E-01 | .105214521E-01 |
| .551260  | .237773374E-03 | .556919727E-02 | .119868980E-01 | .118328026E-01 |
| .567930  | .296867782E-03 | .680027019E-02 | .139580635E-01 | .134893862E-01 |
| .584010  | .361648792E-03 | .792225165E-02 | .156678096E-01 | .149506697E-01 |
| .600080  | .443932473E-03 | .946990413E-02 | .178765889E-01 | .168244480E-01 |
| .615580  | .531182704E-03 | .108681325E-01 | .197521776E-01 | .184542219E-01 |
| .631080  | .640188095E-03 | .126890832E-01 | .222125735E-01 | .205285852E-01 |
| .646030  | .750583039E-03 | .142701986E-01 | .242315485E-01 | .223668614E-01 |
| .660970  | .885815647E-03 | .163770741E-01 | .268661073E-01 | .246252571E-01 |
| .675380  | .101587306E-02 | .180470933E-01 | .289979919E-01 | .267058070E-01 |
| .689790  | .117186453E-02 | .203485762E-01 | .317044999E-01 | .290924211E-01 |
| .703680  | .131317285E-02 | .219732543E-01 | .338985122E-01 | .313434099E-01 |
| .717580  | .147797685E-02 | .242963922E-01 | .365329998E-01 | .337703822E-01 |
| .730970  | .161685538E-02 | .257152140E-01 | .386863763E-01 | .360882321E-01 |
| .744370  | .177229385E-02 | .278320856E-01 | .410111455E-01 | .384500975E-01 |
| .757280  | .189129497E-02 | .288800986E-01 | .428840673E-01 | .406669930E-01 |
| .770200  | .201575895E-02 | .305376035E-01 | .446715684E-01 | .427650440E-01 |
| .782650  | .209699403E-02 | .310738264E-01 | .460249204E-01 | .446019686E-01 |
| .795100  | .217023279E-02 | .320395800E-01 | .471001138E-01 | .461703964E-01 |
| .807110  | .219958646E-02 | .319722842E-01 | .477390664E-01 | .473437903E-01 |
| .819120  | .220824142E-02 | .320871878E-01 | .479565499E-01 | .481074294E-01 |
| .830690  | .217930416E-02 | .313938730E-01 | .477077214E-01 | .483736389E-01 |
| .842270  | .212221094E-02 | .306349017E-01 | .469909828E-01 | .481339743E-01 |
| .853430  | .204053776E-02 | .293630929E-01 | .458168055E-01 | .473646336E-01 |
| .864590  | .193673220E-02 | .278475728E-01 | .441748654E-01 | .460589179E-01 |
| .875350  | .181779510E-02 | .260965697E-01 | .421420516E-01 | .442723029E-01 |
| .886120  | .168329438E-02 | .241415616E-01 | .396928976E-01 | .419881357E-01 |
| .896490  | .154192140E-02 | .221000272E-01 | .369677493E-01 | .393396138E-01 |
| .906870  | .139168030E-02 | .199430721E-01 | .339198933E-01 | .362892981E-01 |
| .916870  | .124113404E-02 | .177906905E-01 | .307256271E-01 | .330210058E-01 |
| .926880  | .108713477E-02 | .155951840E-01 | .273185107E-01 | .294743134E-01 |
| .936520  | .937598160E-03 | .134651343E-01 | .238851680E-01 | .258532991E-01 |
| .946170  | .788358164E-03 | .113391158E-01 | .203388547E-01 | .220733031E-01 |
| .955470  | .646128004E-03 | .930893027E-02 | .168529146E-01 | .183281494E-01 |
| .964770  | .506287240E-03 | .730739763E-02 | .133296520E-01 | .145191256E-01 |
| .973740  | .374056848E-03 | .540747499E-02 | .991853950E-02 | .108150082E-01 |
| .982710  | .244425072E-03 | .353779775E-02 | .651227283E-02 | .710499353E-02 |
| .991350  | .121645345E-03 | .176167522E-02 | .324805608E-02 | .354428859E-02 |
| 1.000000 | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 | .000000000E+00 |

Tabela II.13. Resultados referentes à Figura 5.4 (a).

| X       | V para Ra=1E+3  | V para Ra=1E+4  | V para Ra=1E+5  |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|
| .000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  |
| .008646 | .427719447E+00  | .320476748E+01  | .190843906E+02  |
| .017293 | .822452423E+00  | .606369477E+01  | .346597283E+02  |
| .026260 | .119844830E+01  | .868259780E+01  | .474148292E+02  |
| .035228 | .154208587E+01  | .109692996E+02  | .570236641E+02  |
| .044528 | .186585911E+01  | .130104325E+02  | .640131649E+02  |
| .053829 | .215811267E+01  | .147365548E+02  | .683320398E+02  |
| .063475 | .242958436E+01  | .162165653E+02  | .703880638E+02  |
| .073121 | .267055563E+01  | .174039225E+02  | .703806345E+02  |
| .083126 | .289005295E+01  | .183514539E+02  | .686155622E+02  |
| .093131 | .308031382E+01  | .190352411E+02  | .654740549E+02  |
| .103510 | .324863483E+01  | .194932356E+02  | .611597509E+02  |
| .113880 | .338908421E+01  | .197226948E+02  | .561464326E+02  |
| .124650 | .350751595E+01  | .197485355E+02  | .505249057E+02  |
| .135410 | .359978859E+01  | .195868412E+02  | .447717805E+02  |
| .146570 | .366992952E+01  | .192504667E+02  | .388895906E+02  |
| .157730 | .371593429E+01  | .187708693E+02  | .332741507E+02  |
| .169310 | .374011878E+01  | .181501279E+02  | .278556661E+02  |
| .180880 | .374223555E+01  | .174316870E+02  | .229394658E+02  |
| .192890 | .372309148E+01  | .166078726E+02  | .184012436E+02  |
| .204900 | .368410130E+01  | .157284756E+02  | .144459472E+02  |
| .217350 | .362467427E+01  | .147801943E+02  | .109387101E+02  |
| .229800 | .354775082E+01  | .138142729E+02  | .799549163E+01  |
| .242720 | .345131059E+01  | .128105214E+02  | .548053897E+01  |
| .255630 | .333983135E+01  | .118209156E+02  | .345421845E+01  |
| .269030 | .320994597E+01  | .108200071E+02  | .179546997E+01  |
| .282420 | .306742215E+01  | .985619173E+01  | .523481773E+00  |
| .296320 | .290769331E+01  | .890114499E+01  | -.457797321E+00 |
| .310210 | .273765820E+01  | .799785610E+01  | -.115423234E+01 |
| .324620 | .255179778E+01  | .711713731E+01  | -.163538328E+01 |
| .339030 | .235771645E+01  | .629442731E+01  | -.192097222E+01 |
| .353970 | .214920509E+01  | .550127871E+01  | -.205650394E+01 |
| .368920 | .193437161E+01  | .476573882E+01  | -.206674667E+01 |
| .384420 | .170632036E+01  | .406009427E+01  | -.197795732E+01 |
| .399920 | .147393996E+01  | .340700105E+01  | -.181507053E+01 |
| .415990 | .122948699E+01  | .277864977E+01  | -.158977629E+01 |
| .432070 | .982210728E+00  | .219223709E+01  | -.132466747E+01 |
| .448740 | .723934211E+00  | .162060737E+01  | -.102117350E+01 |
| .465410 | .464495297E+00  | .107709658E+01  | -.699386384E+00 |
| .482710 | .194809886E+00  | .533041660E+00  | -.353777054E+00 |
| .500000 | -.744293203E-01 | -.448184527E-03 | -.312755077E-02 |

Tabela II.13. Resultados referentes à Figura 5.4 (a). Cont.

| X        | V para Ra=1E+3  | V para Ra=1E+4  | V para Ra=1E+5  |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| .517290  | -.342666650E+00 | -.533934962E+00 | .347489910E+00  |
| .534590  | -.609350980E+00 | -.107798748E+01 | .693053521E+00  |
| .551260  | -.864032832E+00 | -.162149040E+01 | .101474947E+01  |
| .567930  | -.111576039E+01 | -.219311186E+01 | .131812325E+01  |
| .584010  | -.135507521E+01 | -.277951167E+01 | .158310043E+01  |
| .600080  | -.159002372E+01 | -.340784828E+01 | .180821980E+01  |
| .615580  | -.181184804E+01 | -.406092297E+01 | .197095592E+01  |
| .631080  | -.202806759E+01 | -.476654602E+01 | .205954491E+01  |
| .646030  | -.223037878E+01 | -.550206154E+01 | .204916147E+01  |
| .660970  | -.242539570E+01 | -.629518230E+01 | .191344802E+01  |
| .675380  | -.260564925E+01 | -.711786263E+01 | .162776440E+01  |
| .689790  | -.277701105E+01 | -.799854784E+01 | .114648836E+01  |
| .703680  | -.293256826E+01 | -.890180228E+01 | .450027436E+00  |
| .717580  | -.307745683E+01 | -.985681056E+01 | -.531294633E+00 |
| .730970  | -.320549749E+01 | -.108205875E+02 | -.180322976E+01 |
| .744370  | -.332085863E+01 | -.118214541E+02 | -.346192392E+01 |
| .757280  | -.341847144E+01 | -.128110188E+02 | -.548811046E+01 |
| .770200  | -.350132128E+01 | -.138147262E+02 | -.800290517E+01 |
| .782650  | -.356558197E+01 | -.147806053E+02 | -.109459089E+02 |
| .795100  | -.361293836E+01 | -.157288424E+02 | -.144528737E+02 |
| .807110  | -.364101015E+01 | -.166081978E+02 | -.184078589E+02 |
| .819120  | -.365011669E+01 | -.174319701E+02 | -.229456665E+02 |
| .830690  | -.363932673E+01 | -.181503720E+02 | -.278614174E+02 |
| .842270  | -.360760676E+01 | -.187710751E+02 | -.332792933E+02 |
| .853430  | -.355558393E+01 | -.192506381E+02 | -.388940844E+02 |
| .864590  | -.348080636E+01 | -.195869808E+02 | -.447754321E+02 |
| .875350  | -.338552432E+01 | -.197486476E+02 | -.505276752E+02 |
| .886120  | -.326566973E+01 | -.197227834E+02 | -.561481313E+02 |
| .896490  | -.312549777E+01 | -.194933083E+02 | -.611603852E+02 |
| .906870  | -.295919815E+01 | -.190352475E+02 | -.654738975E+02 |
| .916870  | -.277280500E+01 | -.183518618E+02 | -.686130582E+02 |
| .926880  | -.255887688E+01 | -.174039317E+02 | -.703784903E+02 |
| .936520  | -.232544860E+01 | -.162174100E+02 | -.703857659E+02 |
| .946170  | -.206327823E+01 | -.147369286E+02 | -.683294664E+02 |
| .955470  | -.178213527E+01 | -.130110562E+02 | -.640113812E+02 |
| .964770  | -.147152918E+01 | -.109700100E+02 | -.570228578E+02 |
| .973740  | -.114258834E+01 | -.868284282E+01 | -.474128562E+02 |
| .982710  | -.783366273E+00 | -.606298960E+01 | -.346538282E+02 |
| .991350  | -.407347856E+00 | -.320636373E+01 | -.190923731E+02 |
| 1.000000 | .000000000E+00  | .000000000E+00  | .000000000E+00  |

Tabela II.14. Resultados referentes à Figura 5.7 .

| Y       | Nu para Ra=1E+3 | Nu para Ra=1E+4 | Nu para Ra=1E+5 |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|
| .000000 | .157216257E+01  | .343000706E+01  | .754668724E+01  |
| .008646 | .157237499E+01  | .343399485E+01  | .757942502E+01  |
| .017293 | .157263073E+01  | .344179024E+01  | .767466202E+01  |
| .026260 | .157319230E+01  | .345310445E+01  | .774780938E+01  |
| .035228 | .157392181E+01  | .346835747E+01  | .783995535E+01  |
| .044528 | .157464328E+01  | .348347713E+01  | .790176028E+01  |
| .053829 | .157540027E+01  | .349981915E+01  | .795401885E+01  |
| .063475 | .157605014E+01  | .351575739E+01  | .798721491E+01  |
| .073121 | .157660448E+01  | .353129252E+01  | .800446059E+01  |
| .083126 | .157691903E+01  | .354542190E+01  | .800437968E+01  |
| .093131 | .157699040E+01  | .355787676E+01  | .798772165E+01  |
| .103510 | .157667792E+01  | .356815239E+01  | .795723989E+01  |
| .113880 | .157599647E+01  | .357601394E+01  | .791306564E+01  |
| .124650 | .157477532E+01  | .358103805E+01  | .785781117E+01  |
| .135410 | .157306367E+01  | .358317703E+01  | .779204922E+01  |
| .146570 | .157067214E+01  | .358205743E+01  | .771810034E+01  |
| .157730 | .156765930E+01  | .357766480E+01  | .763583997E+01  |
| .169310 | .156381649E+01  | .356964727E+01  | .754699838E+01  |
| .180880 | .155928466E+01  | .355841316E+01  | .745321254E+01  |
| .192890 | .155377919E+01  | .354327367E+01  | .735399364E+01  |
| .204900 | .154748638E+01  | .352479857E+01  | .725089816E+01  |
| .217350 | .154010555E+01  | .350230021E+01  | .714354572E+01  |
| .229800 | .153188069E+01  | .347654849E+01  | .703374044E+01  |
| .242720 | .152243797E+01  | .344657880E+01  | .691976427E+01  |
| .255630 | .151213024E+01  | .341356376E+01  | .680474802E+01  |
| .269030 | .150049974E+01  | .337621537E+01  | .668576155E+01  |
| .282420 | .148798172E+01  | .333594124E+01  | .656611150E+01  |
| .296320 | .147405535E+01  | .329125499E+01  | .644255566E+01  |
| .310210 | .145925395E+01  | .324386340E+01  | .631907547E+01  |
| .324620 | .144299052E+01  | .319203690E+01  | .619182141E+01  |
| .339030 | .142586808E+01  | .313764189E+01  | .606459459E+01  |
| .353970 | .140726447E+01  | .307887786E+01  | .593415210E+01  |
| .368920 | .138783460E+01  | .301763050E+01  | .580331774E+01  |
| .384420 | .136691105E+01  | .295197629E+01  | .566867203E+01  |
| .399920 | .134528038E+01  | .288425198E+01  | .553520641E+01  |
| .415990 | .132218501E+01  | .281217633E+01  | .539813816E+01  |
| .432070 | .129846093E+01  | .273801978E+01  | .526073836E+01  |
| .448740 | .127334619E+01  | .265961263E+01  | .511958603E+01  |
| .465410 | .124777965E+01  | .257949881E+01  | .497923452E+01  |
| .482710 | .122090029E+01  | .249515395E+01  | .483460945E+01  |
| .500000 | .119378098E+01  | .240927292E+01  | .468981528E+01  |



Tabela II.14. Resultados referentes à Figura 5.7. Cont.

| Y        | Nu para Ra=1E+3 | Nu para Ra=1E+4 | Nu para Ra=1E+5 |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| .517290  | .116656388E+01  | .232281661E+01  | .454767521E+01  |
| .534590  | .113926522E+01  | .223471020E+01  | .440225690E+01  |
| .551260  | .111309664E+01  | .214954225E+01  | .426306130E+01  |
| .567930  | .108711653E+01  | .206368868E+01  | .412422139E+01  |
| .584010  | .106236285E+01  | .198065155E+01  | .398873593E+01  |
| .600080  | .103800787E+01  | .189747290E+01  | .385363258E+01  |
| .615580  | .101498600E+01  | .181740108E+01  | .372259557E+01  |
| .631080  | .992467469E+00  | .173722995E+01  | .358915066E+01  |
| .646030  | .971338442E+00  | .166033127E+01  | .345913354E+01  |
| .660970  | .950866983E+00  | .158404228E+01  | .332892765E+01  |
| .675380  | .931796542E+00  | .151112989E+01  | .320161344E+01  |
| .689790  | .913436007E+00  | .143900937E+01  | .307233457E+01  |
| .703680  | .896483315E+00  | .137058389E+01  | .294685027E+01  |
| .717580  | .880273379E+00  | .130323318E+01  | .281874079E+01  |
| .730970  | .865437684E+00  | .123977971E+01  | .269429061E+01  |
| .744370  | .851375976E+00  | .117786878E+01  | .256790342E+01  |
| .757280  | .838618588E+00  | .111999826E+01  | .244521260E+01  |
| .770200  | .826626106E+00  | .106394668E+01  | .231994760E+01  |
| .782650  | .815847377E+00  | .101200694E+01  | .219813695E+01  |
| .795100  | .805831184E+00  | .962370424E+00  | .207553658E+01  |
| .807110  | .796911168E+00  | .916765254E+00  | .195596004E+01  |
| .819120  | .788712394E+00  | .873691111E+00  | .183636719E+01  |
| .830690  | .781519345E+00  | .834758429E+00  | .172160372E+01  |
| .842270  | .774962003E+00  | .798221329E+00  | .160605321E+01  |
| .853430  | .769286565E+00  | .765635764E+00  | .149602921E+01  |
| .864590  | .764212018E+00  | .735768608E+00  | .138989393E+01  |
| .875350  | .759893760E+00  | .709573015E+00  | .129057943E+01  |
| .886120  | .756073102E+00  | .685739980E+00  | .119497559E+01  |
| .896490  | .752902146E+00  | .665367532E+00  | .110868562E+01  |
| .906870  | .750155919E+00  | .647235845E+00  | .102870991E+01  |
| .916870  | .747939043E+00  | .632147418E+00  | .959209647E+00  |
| .926880  | .746065757E+00  | .619019895E+00  | .896879186E+00  |
| .936520  | .744619744E+00  | .608583367E+00  | .846597825E+00  |
| .946170  | .743432595E+00  | .599720259E+00  | .802448094E+00  |
| .955470  | .742572726E+00  | .593111214E+00  | .770592736E+00  |
| .964770  | .741919727E+00  | .587908681E+00  | .744760396E+00  |
| .973740  | .741495576E+00  | .584530912E+00  | .732489041E+00  |
| .982710  | .741229888E+00  | .582269967E+00  | .722931178E+00  |
| .991350  | .740991094E+00  | .580478284E+00  | .716600891E+00  |
| 1.000000 | .740560305E+00  | .580115730E+00  | .717566530E+00  |