

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO
DE HIDROGERADORES

042/85

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Renato Pavanello

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientadores: Prof. Dr. José Roberto França Arruda

Prof. Dr. Fernando Iguti

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Renato Pavanello e aprovada pela Comissão Julgadora em 26/04/85.

José Roberto França Arruda
Francisco

CAMPINAS - SP

ABRIL DE 1985

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Para Vanda e Ettore

ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
SÍMBOLOS	iv
INTRODUÇÃO	vi
PARTE I - DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS MATEMÁTICOS	1
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS MODELOS MATEMÁTICOS DO MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA (MMT)	2
CAPÍTULO 2 - VIBRAÇÕES LIVRES USANDO MODELOS DE MASSAS CON- CENTRADAS	4
2.1 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PA- RA UM SISTEMA EIXO-DISCO-MANCAL	4
2.2 - MÉTODO DE RESOLUÇÃO PARA O CÁLCULO DAS FREQUÊN- CIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS DE VIBRAÇÃO ...	13
2.3 - EXEMPLOS TÍPICOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS	17
2.3.1 - Exemplo de um eixo de gerador	18
2.3.2 - Eixos com extremidades livres	19
2.3.3 - Exemplo de um rotor de Laval apoiado em mancais rígidos	21
2.4 - ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MASSAS CON- CENTRADAS NA PRECISÃO DO MODELO	25
CAPÍTULO 3 - VIBRAÇÕES LIVRES USANDO MODELOS CONTÍNUOS	29
3.1 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PA- RA EIXOS USANDO UM MODELO "EXATO"	29

	Pág.
3.2 - EXEMPLOS DE MODELOS CONTÍNUOS - COMPARAÇÃO COM ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	42
3.3 - DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO COMBINADO MMT (MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA) MEF (MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS)	46
3.4 - COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS - RESULTADOS NUMÉRICOS	54
 CAPÍTULO 4 - DIFICULDADES NUMÉRICAS	 59
4.1 - ESTUDO DAS CAUSAS DAS DIFICULDADES NUMÉRICAS DO MMT	59
4.2 - MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA MODIFICADO	65
4.2.1 - Desenvolvimento analítico do MMT modificado	66
4.2.2 - Desenvolvimento numérico do MMT modificado	70
4.2.3 - Problemas numéricos do MMT modificado	74
4.3 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MMT MODIFICADO	76
 CAPÍTULO 5 - VIBRAÇÕES FORÇADAS USANDO MODELOS CONTÍNUOS ..	 80
5.1 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA EIXOS	81
5.2 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PARA DISCOS E MANCAIS	85
5.3 - MÉTODO DE RESOLUÇÃO PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	92
5.4 - APLICAÇÕES EM UM ROTOR DE LAVAL	96
5.5 - APLICAÇÕES EM UM MODELO DE LABORATÓRIO - ESTUDO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE FASE.	103
 PARTE II - APLICAÇÕES EM HIDROGERADORES	 112
 CAPÍTULO 6 - INTRODUÇÃO AO MODELAMENTO DE HIDROGERADORES ..	 113

	Pág.
CAPÍTULO 7 - VIBRAÇÕES LIVRES EM HIDROGERADORES	116
7.1 - DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO	116
7.2 - RESULTADOS OBTIDOS E COMPARAÇÃO COM O MEF	118
CAPÍTULO 8 - VIBRAÇÕES FORÇADAS EM HIDROGERADORES	124
8.1 - DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO	124
8.2 - ESTUDO DE UM MANCAL HIDRODINÂMICO SEGMENTADO .	125
8.3 - RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS E COMPARAÇÃO COM O ESPECTRO DA RESPOSTA OBTIDA EXPERIMENTALMEN- TE	130
CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE	134
9.1 - CONCLUSÕES	134
9.2 - SUGESTÕES DE CONTINUIDADE	135
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	137
APÊNDICE 1 - ALGORÍTMO E LISTAGENS DO PROGRAMA COMPUTACIO- NAL PARA CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS USAN- DO O MMT	140
APÊNDICE 2 - ESTUDO DO EFEITO GIROSCÓPICO	152
APÊNDICE 3 - DIAGRAMA DE BLOCOS E LISTAGENS DO PROGRAMA PA- RA CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS DE VIBRAÇÃO USANDO O MMT MODIFICADO .	158
APÊNDICE 4 - DIAGRAMA DE BLOCOS E LISTAGEM DO PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA USANDO O MMT	168

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO FRANÇA ARRUDA e Prof. Dr. FERNANDO IGUTI, pela orientação no trabalho e constante incentivo que me têm dado.

Ao ARMANDO ARRUDA pela dedicada confecção dos desenhos.

À TAKA OTA PERRONI pelo competente trabalho de datilografia.

E a todos que me auxiliaram de maneira direta ou indireta, em particular ao pessoal do GEPRON pela constante boa vontade demonstrada.

TÍTULO: ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE HIDROGERADORES

R E S U M O

Com o objetivo de analisar o comportamento dinâmico de hidrogeradores, desenvolve-se neste trabalho modelos matemáticos de sistemas mecânicos constituídos de eixos, discos e mancais. Estudam-se modelos discretos, contínuos e exatos, procurando-se caracterizar a eficiência de cada um destes modelos.

Utiliza-se a técnica de resolução de matriz de transferência, uma vez que os sistemas possuem simetria axial e implementa-se os modelos em um microcomputador digital. Algumas variações deste método — MMT modificado e método combinado MMT-MEF — são apresentadas para resolver problemas numéricos inerentes ao método e problemas de geometria irregular.

Os modelos desenvolvidos são aplicados a hidrogeradores, analisando-se o problema de vibrações livres e forçadas, e incluindo-se algumas características típicas destas máquinas tais como mancais hidrodinâmicos segmentados, excitações de origem hidráulica e excitações de origem magnética.

A B S T R A C T

This thesis deals with some mathematical models of shaft-rotor-bearing mechanical systems for analysing the dynamic behaviour of hydroelectric machines.

Lumped, continuous and exact models are analysed and the efficiency of each one is studied.

The transfer matrix technique is adopted because it is very convenient to be used with micro-computers when the structure is uni-dimensional or has some sort of symmetry or repeated pattern. Because of numerical difficulties that arise with the use of the classical formulation, a modified transfer matrix method is presented and for overcoming problems when the structure has an irregular shape a hybrid transfer matrix-finite element method is suggested.

The studied techniques are applied to free and forced vibration problems of hydroelectric machines. Some typical characteristics found in this type of machine, such as tilting-pad (hydrodynamic) bearings, hydraulic and magnetic excitations are taken into account.

SÍMBOLOS

a	- Amplitude do semi-eixo maior do movimento elíptico de um eixo.
A	- Área
A_s	- Área efetiva
$[C]$	- Matriz de amortecimento
$C_{z,y}$	- Coeficiente de amortecimento viscoso
d	- Índice que representa posição à direita de uma estação pontual.
E	- Módulo de elasticidade do material
e	- Índice que representa posição à esquerda de uma estação pontual.
$F_{y,z}$	- Forças externas nas direções y e z
$[F]$	- Matriz de campo
G	- Módulo de elasticidade transversal
\vec{H}_0	- Quantidade de movimento angular
$I_{x,y,z}$	- Momento de inércia de massa em relação aos eixos x, y e z , respectivamente
$i_{y,z}$	- Raio de giração em relação aos eixos y e z respectivamente.
$J_{y,z}$	- Momento de inércia da secção transversal em relação aos eixos y e z respectivamente
$K_{y,z}$	- Coeficiente de rigidez linear nas direções y e z respectivamente.
$K_{\theta,\psi}$	- Coeficiente de rigidez torcional nos planos xy e xz respectivamente
K_s	- Fator geométrico para correção da área efetiva
$[K]$	- Matriz de rigidez
l	- Comprimento de um campo
m	- Massa
$M_{y,z}$	- Momento fletor em relação aos eixos y e z respectivamente

m_d	- Massa de um disco
m_e	- Massa de um eixo
$[M]$	- Matriz de massa
$[P]$	- Matriz de ponto
$[P]^k$	- Matriz de ponto para uma estação de suporte elástico
$\{s\}_i$	- Vetor de estado na estação i
t	- Tempo
$u_{\xi,\eta}$	- Momento de desbalanceamento em relação aos eixos ξ e η respectivamente
$[U]$	- Matriz de transferência do sistema
$V_{y,z}$	- Força cortante nas direções y e z respectivamente
X	- Fator geométrico para o cálculo da distribuição de tensões de cisalhamento
Z, Y	- Deslocamentos
α, β, γ	- Ângulos
β_i	- Ângulo de referência do desbalanceamento na estação i
Δ	- Determinante de freqüências
ϵ_i	- Raio de excentricidade de desbalanceamento
ξ, η	- Sistema de coordenadas girante
θ, ψ	- Inclinação nos planos xy e xz respectivamente
μ	- Massa por unidade de comprimento
ρ	- Peso específico do material
τ	- Tensão de cisalhamento
ϕ	- Ângulo de fase
ω	- Freqüência de vibração
ω_n	- Freqüência natural de vibração
Ω	- Freqüência de rotação

INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos vem se constituindo em área de grande importância tecnológica. O problema do comportamento dinâmico de hidrogeradores, constituiu-se em assunto de interesse principalmente para os usuários deste tipo de sistema, e o Brasil, como um dos maiores deles, certamente deveria desempenhar papel importante nesta área de pesquisa.

No presente trabalho entende-se por hidrogeradores os sistemas rotativos de uma central hidroelétrica (máquina hidroelétrica), sendo formado basicamente de um eixo, dois rotores (gerador e turbina) e mancais (guia e escora).

O estudo do comportamento dinâmico de hidrogeradores apresenta-se como um caso particular do estudo de máquinas rotativas possuindo algumas características típicas de construção e operação tais como baixas velocidades de rotação, eixo vertical, mancais hidrodinâmicos segmentados e forças hidráulicas de excitação desconhecidas.

Dentro do panorama atual da engenharia, acentua-se a relevância deste estudo, na medida em que se constroem máquinas maiores que são mais exigidas (projeto otimizado). A partir desta tendência é de se esperar que surjam problemas de vibrações excessivas, e, desta forma, recomenda-se um estudo dinâmico detalhado para este tipo de sistema mecânico. Atualmente várias publicações tratam deste assunto [3, 33, 34, 35], procurando relacionar falhas mecânicas aos fenômenos dinâmicos.

A elaboração de modelos matemáticos que simulem os fenômenos dinâmicos dos hidrogeradores faz-se necessária uma vez que, devido às grandes dimensões dos mesmos, torna-se impraticável em função do custo o processo de otimização do projeto a partir de um protótipo construído.

Na parte I deste trabalho pretende-se estudar os modelos matemáticos adequados à representação de hidrogeradores. Várias técnicas de modelamento foram desenvolvidas nas últimas décadas, conjuntamente com as técnicas matriciais [1, 2]. Como existe a preocupação neste estudo em desenvolver modelos que possam ser implementados em computadores digitais de pequeno porte (Microcomputadores) o Método das Matrizes de Transferência (MMT) se

mostra como uma técnica adequada. Sabe-se também que usualmente os sistemas a serem modelados (eixo-disco-mancal), possuem simetria axial, o que novamente sugere a escolha do MMT como técnica mais conveniente. Quando da existência de elementos de geometria irregular no sistema torna-se necessária a utilização de técnicas mistas de modelamento estrutural, das quais foi apresentada uma formulação combinada MMT (Método das Matrizes de Transferência) - MEF (Método dos Elementos Finitos).

Neste trabalho analisam-se somente as vibrações de flexão pois para aplicações em hidrogenadores sabe-se que as excitações predominantes são transversais tais como desbalanceamento mecânico, excitações magnéticas e forças hidráulicas [4]. Não se consideram as vibrações torcionais e axiais neste primeiro estudo pois as mesmas são mais significativas em problemas de máquinas rotativas do tipo motores de combustão, sistemas engrenados, etc.

Na segunda parte deste trabalho aplicam-se os métodos desenvolvidos ao problema dos hidrogenadores, procurando mostrar a validade dos modelos desenvolvidos. A otimização destes modelos implica na utilização de técnicas de identificação de parâmetros, que estão fora do escopo deste trabalho.

PARTE I - DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS MATEMÁTICOS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS MODELOS MATEMÁTICOS DO MÉTODO DAS
MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

O desenvolvimento de modelos matemáticos para descrição de fenômenos dinâmicos em estruturas tem se constituído em ferramenta poderosa no projeto e no estudo do desempenho de sistemas mecânicos. Uma das técnicas bastante utilizadas para este tipo de análise é o Método das Matrizes de Transferência (MMT). Nesta primeira parte do trabalho desenvolve-se os modelos matemáticos do MMT.

Genericamente, pode-se entender o método como um artifício de álgebra matricial favorável para ser resolvido em computadores digitais. O método permite ao engenheiro descrever o sistema estrutural subdividido em estações. A cada estação associa-se uma matriz de transferência que contém as informações referentes àquela parte da estrutura e que relacionam as variáveis de estado em estações consecutivas de uma estrutura. As variáveis de estado contém as informações do sistema mecânico e estão armazenadas em vetores denominados vetores de estado.

O MMT é apropriado a sistemas onde verifica-se simetria ou repetibilidade no seu modelo físico como por exemplo [6] placas simétricas, sistemas rotativos, discos, vigas, grelhas, cascas esféricas, etc.

Aos modelos físicos de geometria muito irregular usualmente aplicam-se outras técnicas de análise estrutural, tais como [7] o método dos elementos finitos, método dos "elementos de contorno", etc.

Nesta parte do trabalho procura-se atingir dois objetivos básicos. O primeiro consiste em conseguir descrever com precisão o fenômeno físico e o segundo em adequar os métodos numéricos de solução a aplicações em computadores de pequeno porte. Atingidos estes objetivos pode-se dispor de um conjunto de rotinas convenientes para computadores de pequeno porte de ampla aplicabilidade nesta área de engenharia.

Nos capítulos 2, 3 e 4 preocupa-se em analisar o problema das vibrações livres em sistemas rotativos (determinação de frequências naturais e modos próprios de vibração) onde modelam-se sistemas mecânicos compostos de eixos, discos e mancais. Para cada tipo de estação define-se uma matriz que proporciona a transferência das variáveis de estado estudadas procurando-se incluir todos os efeitos relevantes para este estudo tais como inércias envolvidas, efeito de mola e de amortecedor dos mancais, flexibilidade dos eixos, etc.

No capítulo 2 propõe-se um modelo de massas concentradas para a representação dos eixos e discutem-se as suas limitações.

No capítulo 3 estuda-se uma representação matemática mais elaborada com modelos contínuos. Desenvolve-se modelos contínuos "exatos" e usa-se um modelo aproximado clássico de elementos finitos. Propõe-se o método combinado MMT-MEF [26-27] e compararam-se os modelos estudados.

No capítulo 4 constata-se a existência de dificuldades numéricas na resolução de grande parte dos problemas de máquinas rotativas e desenvolve-se o método das matrizes de transferência modificado (MMTmodificado) para a solução dos mesmos.

Finalmente, no capítulo 5, desenvolve-se a teoria de vibrações forçadas (determinação da resposta em frequência de um sistema conhecido o espectro da excitação) para vários tipos de excitações e estuda-se o comportamento da variação do ângulo de fase para alguns casos especiais de sistemas rotativos.

CAPÍTULO 2

VIBRAÇÕES LIVRES USANDO MODELOS DE MASSAS CONCENTRADAS

2.1. DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PARA UM SISTEMA EIXO-DISCO-MANCAL

Para a descrição de sistemas rotativos convencionais necessita-se basicamente representar três tipos de estações distintas: eixos, discos e mancais. Entende-se como eixo uma estação de flexibilidade elevada e no seu estudo incluem-se os efeitos de rigidez e inércia que influem no comportamento dinâmico.

Para a determinação da matriz de transferência de um eixo com massas concentradas em vibração transversal no plano (xz) usa-se a configuração [8] mostrada na Figura 2.1.

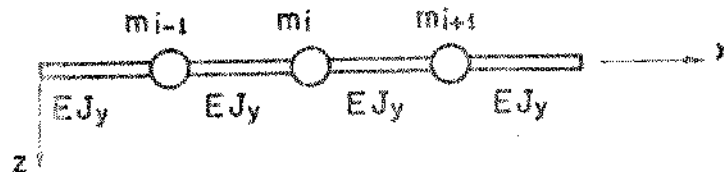


Fig. 2.1 - Modelo físico com massas concentradas.

onde:

E - módulo de elasticidade do material do eixo.

J_y - momento de inércia da secção transversal em relação ao eixo y .

m - massa concentrada.

Considera-se no modelo as massas como concentradas e os eixos com rigidez de flexão proporcional a EJ_y .

No estudo das vibrações livres define-se inicialmente o modelo sem rotação em torno do eixo x , o que permite a análise do problema usando-se uma teoria simplificada de viga. Este procedimento é usado em todo o desenvolvimento do trabalho. Posteriormente acrescenta-se a esta teoria o efeito da rotação.

A partir do cálculo das deformações das vigas, integrando-se a equação da linha elástica (2.1),

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{M(x)}{EJ} \quad (2.1)$$

Pode-se deduzir [9] para um eixo de comprimento ℓ as expressões da deflexão z e da inclinação ψ , conforme as figuras 2.2 e 2.3 em função do tipo da solicitação aplicada:

$$z = \frac{+V\ell^2}{3EJ} \quad (2.2a)$$

$$\psi = \frac{-V\ell}{2EJ} \quad (2.2b)$$

$$z = \frac{-M\ell^2}{2EJ} \quad (2.2c)$$

$$\psi = \frac{+M\ell}{EJ} \quad (2.2d)$$

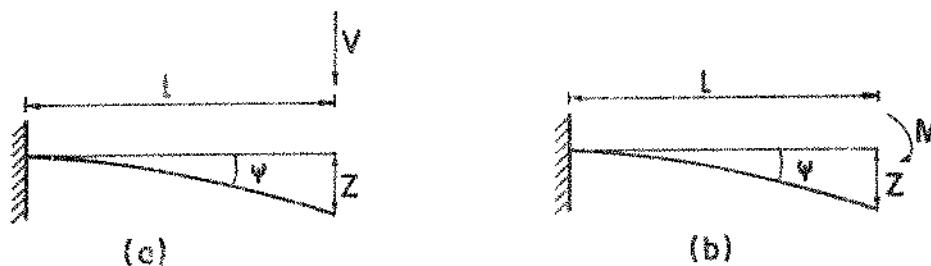


Fig. 2.2 - Obtenção dos coeficientes de rigidez à flexão.
 (a) esforço cortante unitário;
 (b) momento fletor unitário.

Segundo o método proposto, transfere-se os valores da deflexão Z , inclinação ψ , momento M e esforço cortante V_z ao longo do eixo conforme o esquema da figura 2.3.

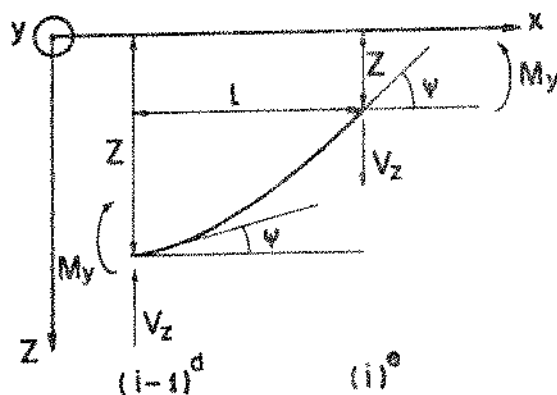


Fig. 2.3 - Diagrama de esforços e deflexões para eixo sem massa.

O procedimento é simples. Armazenam-se as variáveis em um vetor de estado $\{S\}$ e monta-se uma matriz que executa esta transferência. Chama-se de matriz de campo $[F]$ a matriz que executa a transferência das variáveis de estado à direita (indicada por d) de um ponto de massa $i-1$ até as variáveis de estado à esquerda (indicada por e) do ponto de massa i .

As relações de equilíbrio (Fig. 2.3) são dadas pelas equações:

$$V_{z(i)}^e = V_{z(i-1)}^d \quad (2.3a)$$

$$M_{y(i)}^e = M_{y(i-1)}^d + V_{z(i-1)}^d \cdot l \quad (2.3b)$$

Superpondo as equações (2.2) obtêm-se as relações da resistência dos materiais aplicadas ao modelo:

$$Z = \frac{V_z \ell^3}{3EJ_y} - \frac{M_y \ell^2}{2EJ_y} \quad (2.4a)$$

$$\psi = -\frac{V_z \ell^2}{2EJ_y} + \frac{M_y \ell}{EJ_y} \quad (2.4b)$$

Usando-se a convenção de sinais indicada na figura 2.3 e linearizando-se os ângulos de inclinação ψ tem-se:

$$Z_{(i)}^e = Z_{(i-1)}^d - \psi_{(i-1)}^d \cdot \ell - M_{y(i)}^e \frac{\ell^2}{2EJ_y} + V_{z(i)}^e \frac{\ell^3}{3EJ_y} \quad (2.5)$$

$$\psi_{(i)}^e = \psi_{(i-1)}^d + M_{y(i)}^e \frac{\ell}{EJ_y} - V_{z(i)}^e \frac{\ell^2}{2EJ_y} \quad (2.6)$$

Substituindo as equações (2.3) em (2.5) e (2.6) pode-se relacionar os pontos $(i-1)^d$ e $(i)^e$ como segue:

$$-Z_{(i)}^e = -Z_{(i-1)}^d + \psi_{(i-1)}^d \cdot \ell + M_{y(i-1)}^d \frac{\ell^2}{2EJ_y} + V_{z(i-1)}^d \frac{\ell^3}{6EJ_y} \quad (2.7a)$$

$$\psi_{(i)}^e = \psi_{(i-1)}^d + M_{y(i-1)}^d \frac{\ell}{EJ_y} + V_{z(i-1)}^d \frac{\ell^2}{2EJ_y} \quad (2.7b)$$

$$M_{y(i)}^e = M_{y(i-1)}^d + V_{z(i-1)}^d \cdot \ell \quad (2.7c)$$

$$V_{z(i)}^e = V_{z(i-1)}^d \quad (2.7d)$$

Agrupando o sistema de equações (2.7) na forma matricial obtém-se,

$$\{s\}_{i-1}^e = [F]_{i-1} \{s\}_{i-1}^d \quad (2.8)$$

$$\begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EJ_y} & \frac{\ell^3}{6EJ_y} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EJ_y} & \frac{\ell^2}{2EJ_y} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_{i-1}^d \quad (2.9)$$

Outro fenômeno físico importante a ser levado em conta é o efeito de tensões de cisalhamento [10]. Analisando-se um eixo submetido a cargas transversais, observa-se que, além das deflexões já consideradas, pode-se introduzir uma nova componente para a equação da linha elástica levando-se em conta as deformações que aparecem devido às tensões de cisalhamento agindo na secção transversal do eixo.

Demonstra-se, da resistência dos materiais, que as tensões de cisalhamento de uma secção submetida a carregamento transversal variam de um valor máximo na linha neutra da secção a um valor mínimo nas extremidades inferior e superior.

Do elemento do eixo da figura 2.4 e considerando a hipótese de pequenas deformações, obtêm-se as relações:

$$G = \frac{\text{Tensão de cisalhamento}}{\text{Deformação devido ao cisalhamento}} \quad (2.10)$$

$$\frac{\tau}{G} = \frac{dz}{dx} \quad (2.11)$$

onde

G - módulo transversal de elasticidade

τ - tensão de cisalhamento

$\frac{dz}{dx}$ - rotação

A - área da secção transversal.

X - fator geométrico para a distribuição das tensões de cisalhamento [11],

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{V X}{AG} \quad (2.12)$$

para uma secção circular, $X = 4/3$.

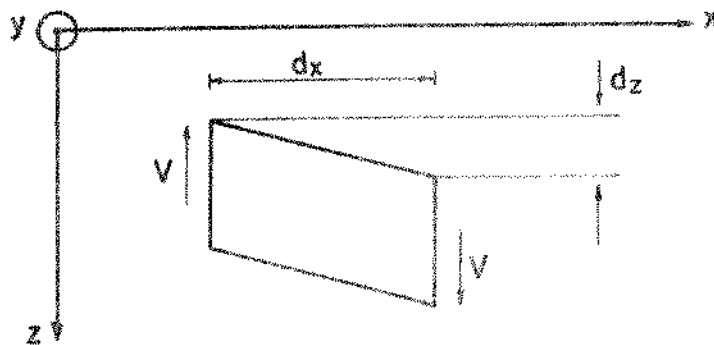


Fig. 2.4 - Diagrama de esforços de um elemento de eixo submetido a esforço cortante V.

Calcula-se o valor da deflexão devido ao efeito do cisalhamento integrando-se a expressão (2.12) ao longo do comprimento l do eixo de secção constante e tem-se:

$$Z = \frac{V X l}{AG} \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.5) e utilizando as equações de equilíbrio (2.3), tem-se uma nova equação para as deflexões incluindo o efeito de deformação devido ao cisalhamento:

$$Z_{(i)}^e = Z_{(i-1)}^d - \psi_{(i-1)}^d M_{y(i-1)}^d \frac{\ell^2}{2EJ_y} - V_{z(i-1)}^d \frac{\ell^2}{6EJ} + V_{z(i-1)}^d \frac{X\ell}{AG} \quad (2.14)$$

A nova matriz de campo, incluindo o efeito do cisalhamento, é:

$$\begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EJ_y} & \left(\frac{\ell^2}{6EJ} - \frac{X\ell}{AG} \right) \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EJ_y} & \frac{\ell^2}{2EJ_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i-1} \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_{i-1} \quad (2.15)$$

A transferência das variáveis de estado de uma massa concentrada é feita usando-se uma matriz de ponto [P]. Um "ponto" de massa concentrada, quando utilizado corretamente, pode representar aproximadamente a massa de um eixo ou de um disco rígido. Usa-se este tipo de estação para a representação de turbinas, rotores, geradores, acoplamentos, flanges, etc.

Usando-se o Princípio de D'Alembert da Mecânica Clássica e supondo-se a massa concentrada como um corpo rígido com dois graus de liberdade (deflexão e rotação), obtém-se o diagrama da figura 2.5. Considera-se vibrações livres e harmônicas onde ω é a frequência de vibração.

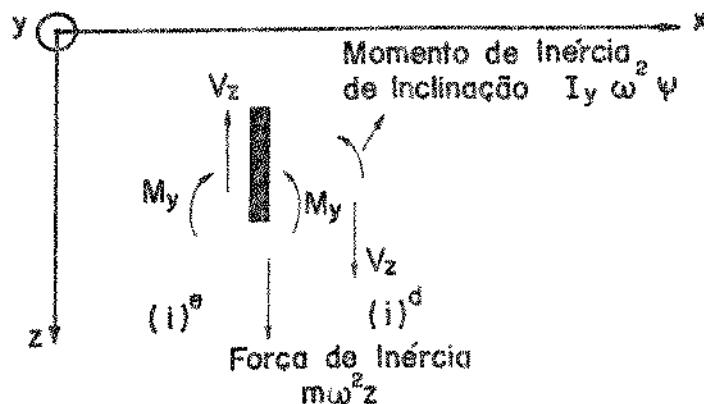


Fig. 2.5 - Diagrama de equilíbrio usando o princípio de D'Alembert.

As equações (2.16) mostram o equilíbrio do diagrama da figura 2.5:

$$z_{(i)}^d = z_{(i)}^e \quad (2.16a)$$

$$\psi_{(i)}^d = \psi_{(i)}^e \quad (2.16b)$$

$$M_{y(i)}^d = M_{y(i)}^e - I_y \omega^2 \psi_{(i)}^e \quad (2.16c)$$

$$V_{z(i)}^d = V_{z(i)}^e - m_i \omega^2 z_{(i)}^e \quad (2.16d)$$

onde I_y é o momento de inércia de massa do "ponto" considerado. Em muitos casos (eixos delgados) pode-se desprezar este efeito na representação de eixos. Caso seja considerada a rotação em x do sistema, aparece o efeito giroscópico, que está equacionado no apêndice 2, e pode ser relevante em algumas aplicações.

Passando-se as equações (2.16) para a forma matricial obtém-se a matriz de ponto $[P]$ onde se pode notar a descontinuidade no momento fletor e no esforço cortante.

$$\{s\}_i^d = [P]_i \{s\}_i^e \quad (2.17)$$

ou

$$\begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_i^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_y \omega^2 & 1 & 0 \\ m \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_i^e \quad (2.18)$$

Para melhor representar o sistema procurou-se incluir outros efeitos. Por exemplo, em muitos sistemas físicos é de grande importância incluir a rigidez dos mancais no modelo. Num equacionamento genérico, quando se analisa um modelo em um plano, pode-se incluir o efeito de mola, massa e amortecedor no mancal. Limita-se, a princípio, a representar os mancais como molas e o modelo fica segundo o esquema mostrado na figura 2.6.

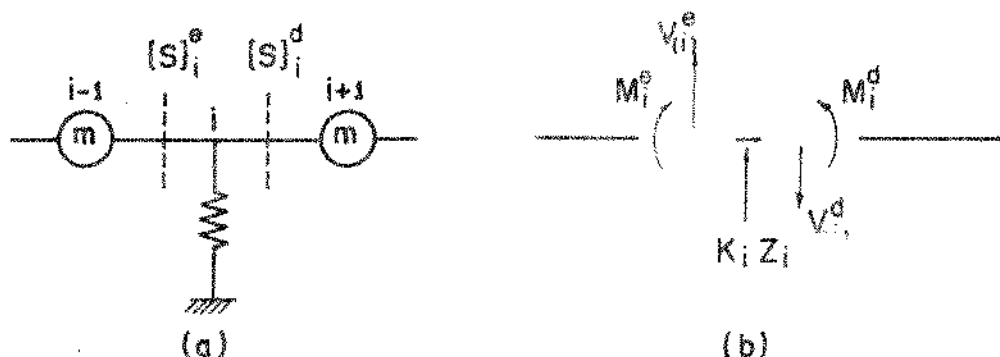


Fig. 2.6 - Mancal Flexível

(a) Modelo físico

(b) Diagrama de Equilíbrio.

A deflexão (Z), a inclinação (ψ) e o momento (M) são constantes e contínuos ao passar-se por uma seção deste tipo, mas o esforço cortante recebe a contribuição da força da mola que vale $K_i Z_i$, sendo K a rigidez da mola (mancal). Portanto, a matriz para um mancal flexível será uma matriz de ponto e pode-se escrever:

$$\{S\}_i^d = [F]_i^k \{S\}_i^e \quad (2.19)$$

ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_e \quad (2.20)$$

Com as matrizes de transferência desenvolvidas neste capítulo pode-se resolver boa parte dos problemas de sistemas rotativos.

2.2. MÉTODO DE RESOLUÇÃO PARA O CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS DE VIBRAÇÃO

Uma vez elaboradas as matrizes de transferência pode-se aplicá-las na resolução de problemas de vibrações livres, ou seja, no cálculo de frequências naturais e modos próprios de vibração. Da teoria de vibrações livres sabe-se que as frequências naturais são raízes da equação característica que advém da equação diferencial que descreve o movimento do sistema. A procura das mesmas e dos modos de vibrar é feita utilizando-se métodos interativos, o que a torna um problema de aplicação típica em computadores digitais. Observa-se, no procedimento de resolução, um grande número de multiplicações matriciais, o que mais uma vez caracteriza o método como um caso de aplicação em computadores.

O procedimento básico consiste em obter a matriz de transferência de um extremo a outro do sistema estrutural estudado. Para executar esta transferência usa-se a equação matricial:

$$\{s\}_n = [F]_n [F]_{n-1} [F]_{n-1} \dots [F]_2 [F]_1 [F]_1 \{s\}_0 = [U] \cdot \{s\}_0 \quad (2.21)$$

Chama-se a matriz $[U]$ de matriz de transferência do sistema ou simplesmente matriz do sistema e, nos vetores de estado

das extremidades $\{S\}_n$ e $\{S\}_0$, impõem-se as condições de contorno do problema. Considerando-se as características dos apoios do eixo, obtêm-se as condições de contorno do problema e, a partir destas, resolve-se a equação (2.21).

No estudo da dinâmica de máquinas rotativas é uma boa aproximação considerar-se mancais rígidos quando a rigidez dos mesmos é igual ou maior que 10 vezes a rigidez do eixo [12]. Desta forma, ao idealizar-se mancais rígidos com movimento de inclinação livre, tem-se as condições de contorno definidas como segue:

$$Z_{(n)} = 0 \quad M_{y(n)} = 0 \quad Z_{(0)} = 0 \quad M_{y(0)} = 0 \quad (2.22)$$

e, da equação (2.21), obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_n = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_0 \quad (2.23)$$

Da equação (2.23) é evidente que:

$$\begin{bmatrix} U_{12} & U_{14} \\ U_{32} & U_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ V_z \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

A equação (2.24) é um sistema de equações lineares homogêneo, onde procuram-se as soluções ω que são as frequências naturais do sistema. Para uma solução não trivial do sistema pode-se encontrar as frequências naturais do sistema por processos itera-

tivos variando-se o valor da frequência ω na matriz $[U]$. Uma solução não trivial do sistema implica em ter o determinante da equação (2.25) igual a zero.

$$\begin{vmatrix} U_{12} & U_{14} \\ U_{32} & U_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

Na maioria das aplicações não se consegue determinar analiticamente os termos da matriz do sistema. Nestes casos, para cada iteração, repetem-se as multiplicações indicadas em (2.21), o que caracteriza a conveniência de se usar computadores digitais.

O próximo passo consiste em calcular os modos próprios de vibrar e, para tanto, segue-se o procedimento descrito a seguir. Considerando um modelo apoiado em mancais rígidos que não exercem momento, as condições de contorno são mostradas na equação (2.22). Uma vez calculadas as frequências naturais pode-se definir os termos da matriz $[U]$ para um dado modo de vibração associado a uma dada frequência natural. A partir da matriz $[U]$ pode-se determinar os vetores de estado para o ponto 0 (zero). Desenvolvendo a equação matricial (2.23) obtém-se as seguintes equações:

$$U_{12} \psi_0 + U_{14} V_{z0} = 0 \quad (2.26a)$$

$$U_{22} \psi_0 + U_{24} V_{z0} = \psi_n \quad (2.26b)$$

$$U_{32} \psi_0 + U_{34} V_{z0} = 0 \quad (2.26c)$$

$$U_{42} \psi_0 + U_{44} V_{z0} = V_{zn} \quad (2.26d)$$

Utilizando as equações (2.26a) e (2.26c) e normalizando o valor de ψ_0 igual a 1 no ponto inicial, pode-se determinar o vetor de estado no ponto 0 (zero). Desta forma, tem-se o valor de V_{z0} a partir das equações (2.26), que será:

$$V_{z0} = -\frac{U_{12}}{U_{14}} \psi_0 = -\frac{U_{32}}{U_{34}} \psi_0 \quad (2.27)$$

Adotando-se a normalização sugerida (ψ_0 igual a 1), o vetor de estado neste ponto será dado por:

$$\{S\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -U_{12}/U_{14} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

A equação (2.21) permite transferir $\{S\}_0$ para qualquer ponto intermediário do sistema e, desta forma, obter os modos próprios de vibração.

Pode-se ainda determinar os diagramas de momento e esforço cortante para sistemas eixo-discos-mancais e ainda o perfil modal em inclinação e deflexão.

Desenvolve-se para outras condições de contorno procedimento análogo [10]. No caso de sistemas com extremidades livres, por exemplo, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$M_y(0) = 0 \quad V_z(0) = 0 \quad M_y(n) = 0 \quad V_z(n) = 0$$

$$e \begin{Bmatrix} z \\ \psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} U(\omega) \begin{Bmatrix} z \\ \psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_0 \quad (2.29)$$

Neste caso o determinante de frequências é dado por

$$\begin{vmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.30)$$

e o vetor estado:

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ U_{31}/U_{32} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

A partir deste método de resolução implementou-se um conjunto de rotinas computacionais em linguagem HP-BASIC (interpretado) num micro-computador HP-9845A. O diagrama de blocos e listagem encontram-se no apêndice 1. Da estrutura de dados de entrada utilizada no programa nota-se que é possível analisar uma grande variedade de problemas envolvendo máquinas rotativas e que o programa procura permitir grande generalidade de aplicação.

2.3. EXEMPLOS TÍPICOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS

A seguir, alguns exemplos de aplicações típicas em máquinas rotativas onde usam-se modelos de massas concentradas para a representação do eixo são apresentados.

Indica-se o número de massas concentradas em cada exemplo. No capítulo 2.4 deste trabalho, a influência do número de massas na precisão dos resultados é investigada.

2.3.1. Exemplo de um Eixo de Gerador

Dado um modelo simplificado de gerador, pretende-se analisar o conjunto eixo-motor separadamente e propõe-se para o conjunto um modelo de massas concentradas segundo a figura 2.7.

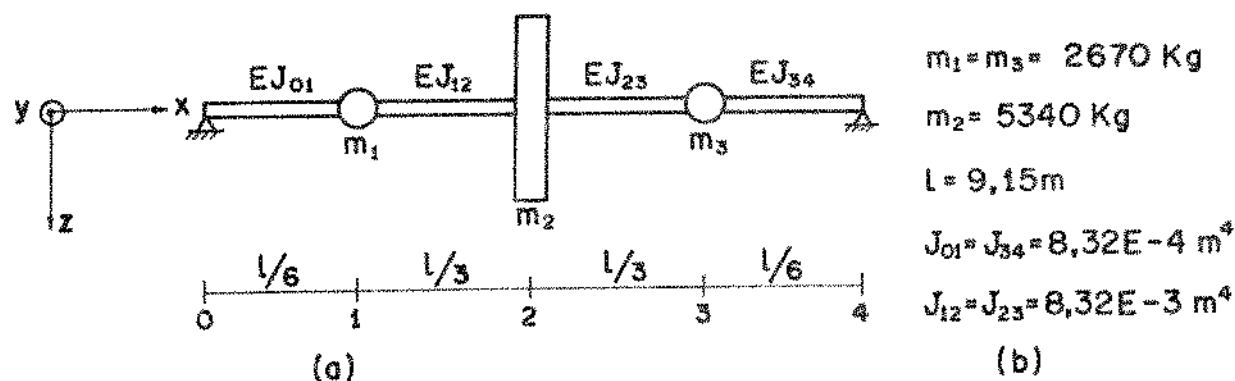


Fig. 2.7 - Sistema eixo-rotor de um gerador

(a) Modelo Físico

(b) Lista de Dados.

Na figura 2.7, a massa dos eixos é representada por m_1 e m_3 e o gerador é idealizado como um disco rígido de massa m_2 (ponto de massa concentrada). Os dados do problema estão listados na figura 2.7 e os resultados obtidos estão listados na tabela 2.1. Comparam-se os resultados com os descritos na referência [8].

TABELA 2.1 - Freqüências naturais do modelo da figura 2.7

	Referencia [8]	Resultados obtidos	Desvios [%]
Freq. Natural-1	16.0	16.4	2.4
Freq. Natural-2	50.0	50.4	.8
Freq. Natural-3	86.0	86.0	0.0

2.3.2. Eixos com Extremidades Livres

Um caso simples de pouca aplicação prática porém útil para a investigação do efeito da interpolação, é a seguir apresentado. Mostra-se que, no cálculo iterativo das frequências naturais, ocorrem erros numéricos na procura das raízes da função determinante, equação (2.30). A precisão do valor encontrado é função do passo usado nas iterações uma vez que neste trabalho usa-se uma interpolação linear em torno da raiz da função determinante, Fig. (2.8).

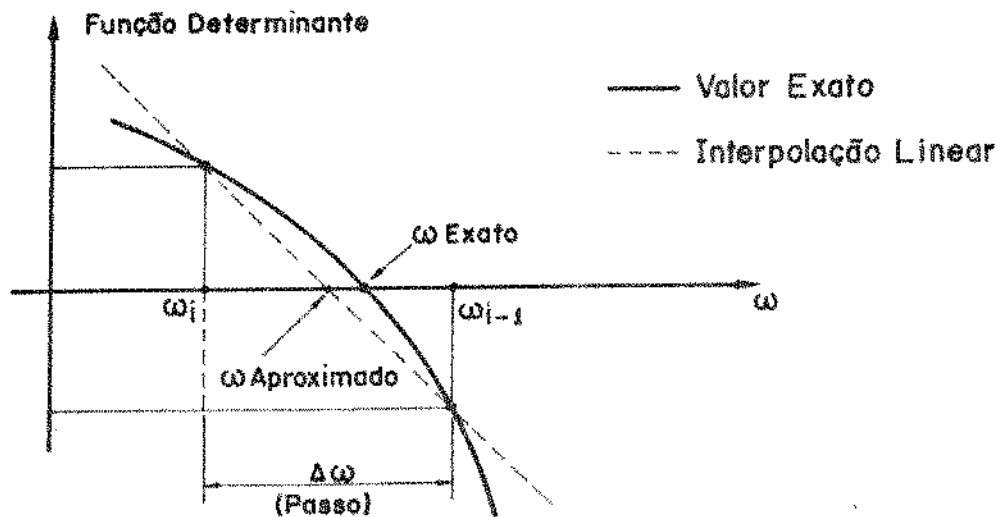


Fig. 2.8 - Interpolação linear no cálculo das frequências naturais.

Representa-se o exemplo na figura 2.9, bem como os dados utilizados. Usou-se 30 pontos de discretização para o cálculo das frequências naturais e os resultados obtidos estão listados na tabela 2.2.

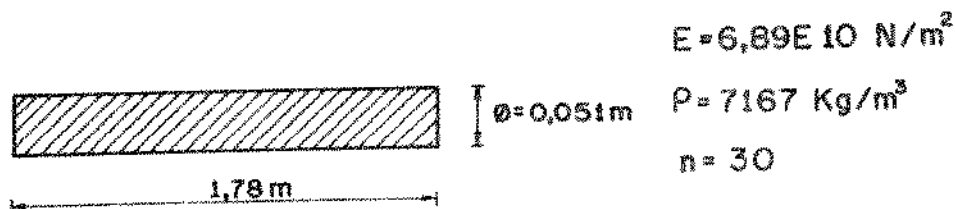


Fig. 2.9 - Modelo físico de um eixo de seção circular.

TABELA 2.2 - Influência do passo de iteração na precisão dos resultados.

PASSOS	Freq-1 [rad/s]	DETERMINANTE	Freq-2 [rad/s]	DETERMINANTE
200.00	402.010	7010329636	1277.639	-759055870961
100.00	460.708	3321391069	1314.903	-125393720787
50.00	474.132	1060607570	1310.513	-53420130458
25.00	478.743	147618075	1320.692	-7880323937
10.00	479.409	9576267	1321.025	-846287906
5.00	479.441	2811210	1321.047	-377807474
1.00	479.453	439030	1321.065	-5584206
.50	479.455	36018	1321.065	-2572202
.10	479.455	4306	1321.065	-193047
.01	479.455	49	1321.065	-14911

Pode-se notar, dos resultados obtidos, que a magnitude do erro numérico é função do passo de iteração utilizado. O valor da função determinante para a frequência interpolada é mostrado na tabela 2.2 e é um indicativo do grau de precisão do resultado numérico obtido. Observa-se que não é necessário reduzir muito o passo de discretização pois mantendo-o na faixa de 5% do valor da frequência natural que se deseja analisar mantém-se a precisão de cálculo dentro de uma faixa de erros numéricos de 1 a 2%. Conclui-se, desta forma, que é necessário, para todo exemplo estudado, analisar os resultados dentro de uma faixa de precisão definida em função do passo utilizado.

2.3.3. Exemplo de um Rotor de Laval Apoiado em Mancais Rígidos

Na figura 2.10 mostra-se o modelo físico de um rotor de Laval bem como os dados referentes ao mesmo. Um rotor de Laval é um caso típico de um modelo de laboratório para estudo de fenômenos dinâmicos. Um motor elétrico, um volante para armazenamento de energia, uma ferramenta de corte de uma retificadora e muitos outros sistemas físicos podem ser estudados baseando-se em teoria desenvolvida a partir de um modelo deste tipo.

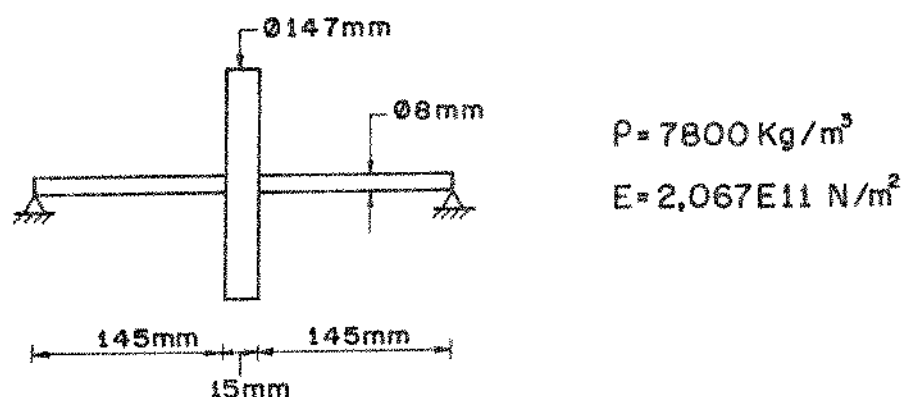


Fig. 2.10 - Modelo físico de um rotor de Laval apoiado em mancais rígidos.

Duas comparações são estabelecidas para este exemplo. Na primeira, usa-se uma formulação de uma massa concentrada [13]:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48 EJ}{l^3 (m_d + 0,5 m_e)}} \quad (2.32)$$

onde,

m_d - massa do disco

m_e - massa do eixo

Substituindo-se os dados da Fig. 2.10 na equação (2.32) obtém-se o resultado listado na tabela 2.3.

Neste exemplo, pode-se também comparar os resultados obtidos experimentalmente conforme a referência [14]. Segundo a referência citada, o valor da velocidade crítica é de 1920 rpm, o que corresponde a uma frequência natural de 32.1 Hz.

Como no 1º modo natural de vibração o disco não sofre deflexão angular e como o eixo é bastante delgado é de se esperar que os valores da velocidade crítica e frequência natural sejam bem próximos.

Na tabela 2.3 estão comparados os resultados teóricos e experimental.

TABELA 2.3 - Frequências naturais do sistema da figura 2.10.

	MMT (61 massas)	Referencia [13]	Valor experimental
Freq-1 [Hz]	31.84	31.50	32.10
Freq-2 [Hz]	126.40		

Os gráficos da figura 2.11 mostram os modos de vibrar obtidos pelo MMT e estão normalizados em função de uma inclinação unitária na extremidade esquerda.

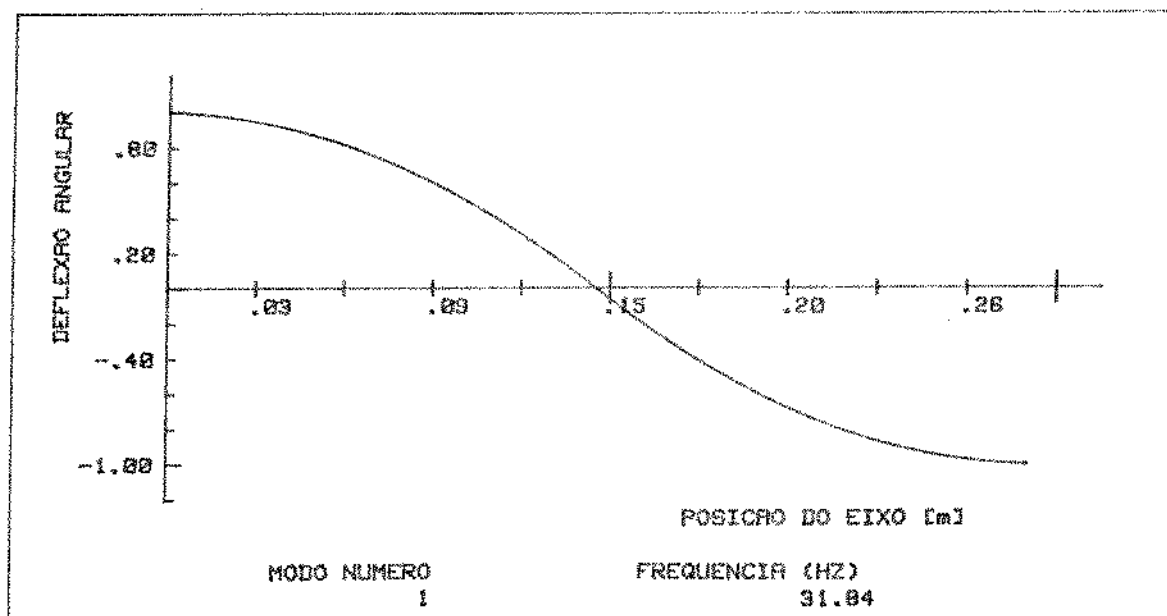
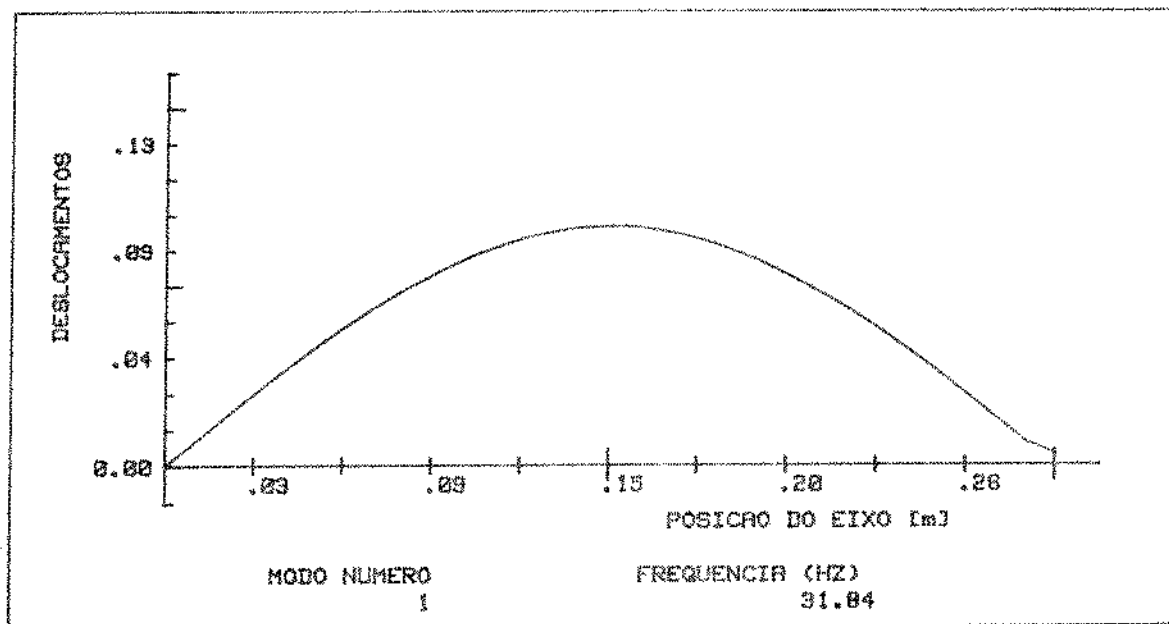


Fig. 2.11 - Frequências Naturais e Modos próprios da vibração.

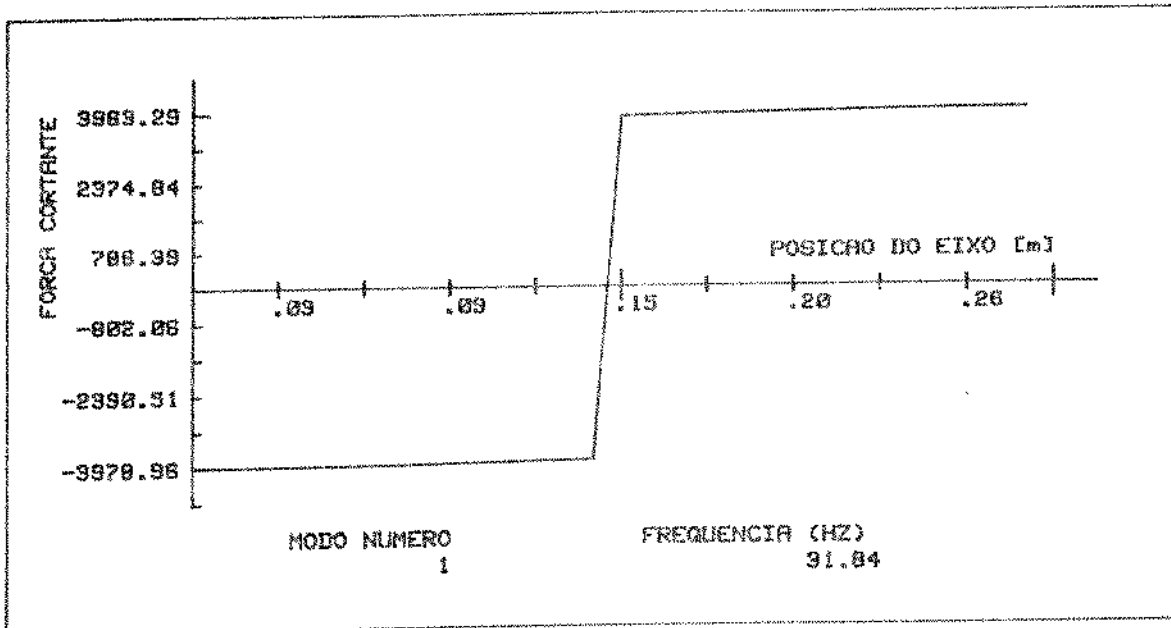
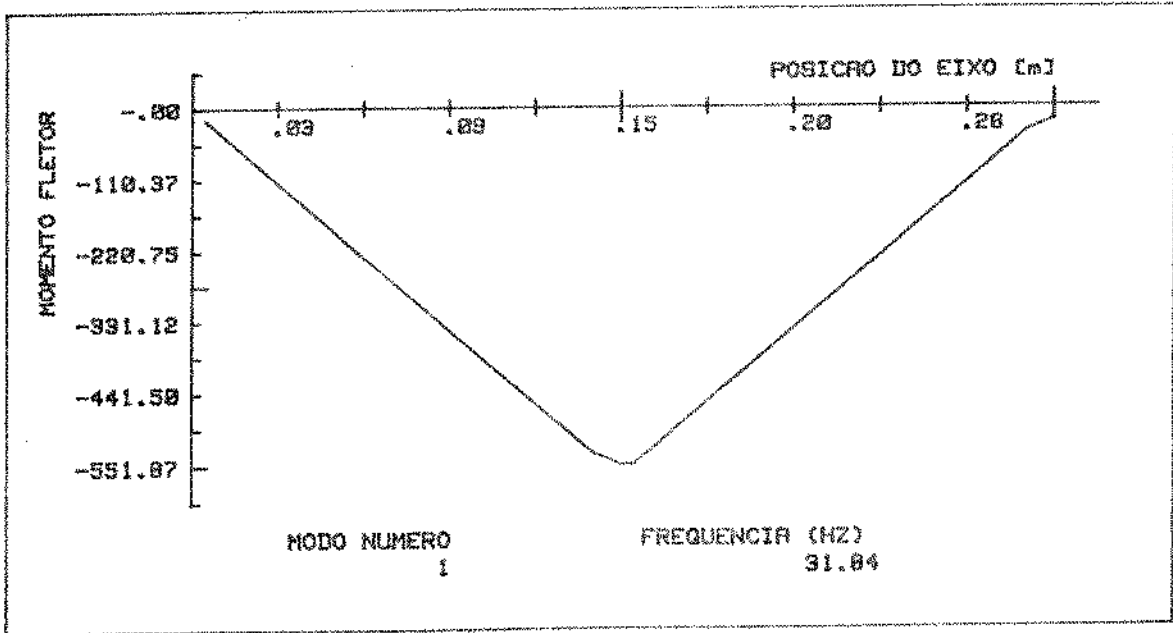


Fig. 2.11 - Continuação.

2.4. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MASSAS CONCENTRADAS NA PRECISÃO DO MODELO

Pretende-se discutir a influência do número de massas concentradas no modelamento de um eixo [15] tendo-se como objetivo levantar um critério de discretização.

Para tanto, é importante determinar, a partir das relações entre comprimento (l) e diâmetro (D) de um dado eixo, a influência dos efeitos da inércia de inclinação, do número de discretizações e do efeito das deformações devido ao cisalhamento. Para um estudo completo seria necessário estudar diversas relações l/D , entretanto é tratado apenas o caso onde $l/D=10$, cujos resultados podem ser estendidos para exemplos onde as características sejam semelhantes.

Inicialmente, mostra-se a influência do número de pontos de discretização no cálculo das frequências naturais. Considere-se o exemplo simples da figura 2.12. De um eixo livre-livre cujos dados estão listados na referida figura:



Diâmetro (D) - 0,0254 m

Comprimento (L) - 0,254 m

Massa Específica (P) - 7847 Kg/m³

Módulo de Elasticidade - 2,067E11 N/m²

Fig. 2.12 - Modelo Físico de um eixo livre-livre.

Utilizando-se o MMT obtiveram-se os resultados mostrados na tabela 2.4, sendo que, para este estudo, desprezou-se o efeito da inércia de inclinação e o efeito do cisalhamento. Utilizou-se o conjunto de rotinas descritas no apêndice I para o cálculo computacional.

TABELA 2.4 - Freqüências naturais obtidas em função do número de pontos de discretização.

Numero de massas de discretizacao	Freq-1 [Hz]	Freq-2 [Hz]	Freq-3 [Hz]	Freq-4 [Hz]	Freq-5 [Hz]
10	2186	6157	12194	20322	*
20	1964	5492	10812	17925	*
30	1896	5297	10426	17249	*
40	1872	5212	10234	16934	*
60	1850	5121	10125	16638	24857
Solucao exata [13]	1802	4964	9734	16090	23979

*Fora da faixa de análise (0 - 25000 Hz).

Pode-se concluir, destes resultados, que há necessidade de se considerar muitos pontos de discretização para uma aproximação razoável dos resultados. Porém isto implica em uma majoração sensível no tempo de computação [16]. Esta majoração é indesejável principalmente em programas implementados em micro-computadores.

Para um compromisso entre a precisão dos resultados (mantendo-a dentro de uma faixa de erro de 5%) e o tempo de computação, sugere-se adotar 30 pontos de discretização como valor base para a comparação com outros modelos. É importante frisar que, se outros efeitos forem incluídos no modelamento, este parâmetro $n=30$ pode ser alterado.

Ainda sobre a precisão do modelo, usando-se o mesmo exemplo da figura 2.12 e mantendo-se o número de massas concentradas fixo e igual a 30 ($n=30$), pode-se verificar a influência de alguns efeitos sobre o cálculo das freqüências naturais. Os resul

tados estão na tabela 2.5.

TABELA 2.5 - Freqüências naturais obtidas em função do tipo de modelo utilizado (n=30).

Modelos Utilizados	Freq-1 [Hz]	Freq-2 [Hz]	Freq-3 [Hz]	Freq-4 [Hz]	Freq-5 [Hz]
1	1896	5297	10426	17249	*
2	1861	5019	9527	15131	21618
3	1877	5032	9377	14528	20161
4	1845	4886	8794	13429	18478
Solucao exata [13]	1802	4964	9734	16090	23979

Fora da faixa de análise (0-25000 Hz)

- 1- Modelo simplificado (eixo sem massa e massa concentrada sem inércia de inclinação)
- 2- Modelo incluindo inércia de inclinação nos pontos de massa con centrada.
- 3- Modelo simplificado incluindo o efeito das deformações devido ao cisalhamento nos eixos sem massa.
- 4- Modelo incluindo inércia de inclinação nos pontos de massa con centrada e o efeitos do cisalhamento nos eixos sem massa.

Alguns comentários importantes podem ser feitos. O efeito do cisalhamento só é relevante para algumas relações λ/D . A partir do presente estudo, não é possível levantar dados conclusivos a este respeito. Os modelos devem incluir o efeito de inércia de inclinação, uma vez que este efeito exerce grande influência, principalmente para o 2º modo. É fácil observar que qualquer

efeito incluído no modelo simplificado torna-o mais flexível. Cabe salientar que a solução exata é um modelo contínuo que será estudado no capítulo 3. Em primeira aproximação, a utilização de modelos com massas concentradas usando o MMT fornece bons resultados para o cálculo das frequências naturais e pode ser utilizado em estimativas preliminares sem muito detalhamento.

O problema referente ao número de massas concentradas para a discretização de estações tipo eixo pode ser superado através de uma representação contínua discutida no terceiro capítulo. Em muitas referências consultadas, faz-se menção das dificuldades numéricas para o cálculo das frequências naturais de ordem elevada ou para os casos onde existem mancais intermediários. Estes assuntos serão discutidos no quarto capítulo deste trabalho.

CAPÍTULO 3

VIBRAÇÕES LIVRES USANDO MODELOS CONTÍNUOS

3.1. DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PARA EIXOS USANDO UM MODELO "EXATO"

Na formulação matemática do segundo capítulo, o modelamento do comportamento dinâmico de eixos apresenta algumas limitações. O objetivo deste capítulo é apresentar uma formulação alternativa que permita superar algumas destas limitações.

O problema a ser abordado refere-se ao efeito do número de massas concentradas a ser escolhido. Um número elevado de massas majora o tempo de computação, por outro lado um número reduzido pode implicar em grandes erros de discretização estrutural visto que, na realidade, os eixos são contínuos. Para minimizar estes erros pode-se modelar os eixos como estações contínuas.

Este modelo para vibração de eixos de secção constante inclui os efeitos de deformação devido ao cisalhamento, inércia de inclinação e distribuição contínua de massa. A dedução a seguir encontra-se nas referências [8, 10]. Pode-se ainda considerar outros aspectos, como por exemplo o efeito da velocidade de rotação, no cálculo das precessões diretas e retrógradas, ou mesmo incluir no modelo a rigidez da fundação, caso o eixo seja apoiado em algum tipo de estrutura elástica. Incluiu-se neste trabalho a dedução a seguir pois trata-se de um caso típico de determinação de uma matriz de transferência a partir da equação diferencial do movimento.

O primeiro fenômeno a ser equacionado refere-se ao efeito das deformações devido ao esforço cortante. Se for feita a analogia de um eixo com um pacote de cartões é fácil observar que, devido aos esforços de flexão, o eixo se deforma com um ângulo ψ como mostrado na figura 3.1. Devido ao esforço cortante, há um deslizamento dos cartões, de modo que a linha de centro do eixo se inclina de dz/dx . Observa-se que o elemento não gira e sim a sua linha de centro, configurando-se deste modo uma deformação devido ao esforço de cisalhamento.

Da figura 3.1 é fácil notar que o ângulo total denominado α é dado por:

$$\alpha = \frac{dz}{dx} + \psi \quad (3.1)$$

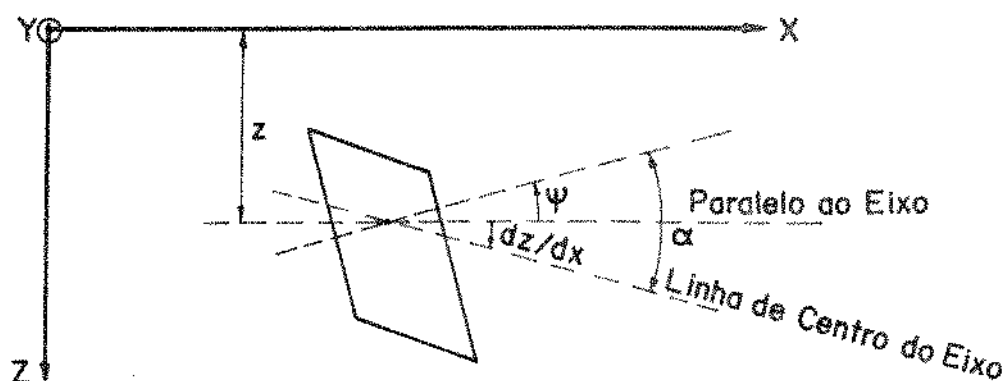


Fig. 3.1 - Analogia de um elemento de eixo com um pacote de cartões.

Da resistência dos materiais sabe-se que a relação entre o ângulo α e a força de cisalhamento é dada por:

$$V_z = G \cdot A_S \cdot \alpha \quad (3.2)$$

onde A_S é a área efetiva e o seu valor é dado por:

$$A_S = \frac{A}{K_S} \quad (3.3)$$

onde K_S é o fator de forma para correção da área efetiva [11, 17].
Desta forma:

$$V_z = G \cdot A_s \left(\frac{dZ}{dx} + \psi \right) \quad (3.4)$$

A equação usual da linha elástica pode ser expressa por:

$$M_y = EJ_y \frac{d\psi}{dx} \quad (3.5)$$

Considerando o elemento de eixo e as forças que agem no mesmo, tem-se o diagrama de corpo livre mostrado na figura 3.2, onde aplica-se o princípio D'Alembert.

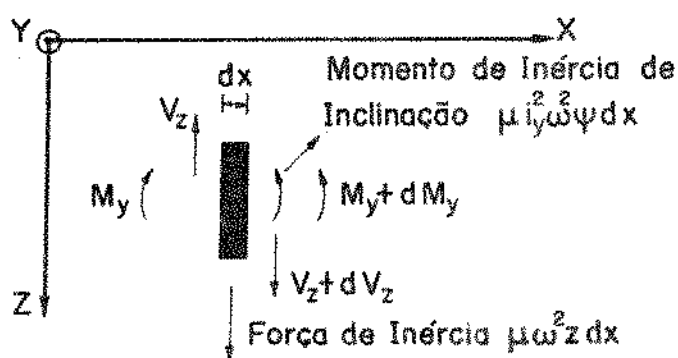


Fig. 3.2 - Diagrama de corpo livre de um elemento de viga.

Pode-se definir as seguintes condições de equilíbrio, sendo:

μ - massa por unidade de comprimento

i_y - raio de giração em relação ao eixo y .

$$dM_y = V_z dx - \mu i_y^2 \omega^2 \psi dx \quad (3.6)$$

$$dV_z = -\mu \omega^2 Z dx \quad (3.7)$$

ou,

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z - \mu i_y^2 \omega^2 \psi \quad (3.8)$$

$$\frac{dV_z}{dx} = -\mu \omega^2 Z \quad (3.9)$$

Por outro lado, derivando-se a expressão (3.4) obtém-se

$$\frac{dV_z}{dx} = \frac{d}{dx} \left[G \cdot A_s \left(\frac{dz}{dx} + \psi \right) \right] \quad (3.10)$$

$$\frac{dV_z}{dx} = G \cdot A_s \left[\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} \right] \quad (3.11)$$

Desta forma, obtém-se um valor para $d\psi/dx$ a partir da equação (3.11).

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{dV_z}{dx} \right) \cdot \frac{1}{GA_s} - \frac{d^2 Z}{dx^2} \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.12) em (3.5),

$$M_y = EJ_y \left[\left(\frac{dV_z}{dx} \right) \frac{1}{GA_s} - \frac{d^2 Z}{dx^2} \right] \quad (3.13)$$

Substituindo a equação de equilíbrio para $\frac{dV_z}{dx}$ da equação (3.9) na equação (3.13) segue-se,

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{\mu \omega^2}{G \cdot A_s} \cdot Z + \frac{M_y}{EJ_y} = 0 \quad (3.14)$$

Derivando a equação (3.8) em relação a x :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dM_y}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[V_z - \mu i_y^2 \omega^2 \psi \right] \quad (3.15)$$

ou

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = \frac{dV_z}{dx} - \mu i_y^2 \omega^2 \frac{d\psi}{dx} \quad (3.16)$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.9) em (3.16) e reagrupando os termos obtêm-se:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{\mu i_y^2 \omega^2}{EJ_y} M_y + \mu \omega^2 Z = 0 \quad (3.17)$$

Procedendo-se à eliminação do momento fletor M_y das equações (3.14) e (3.17), pode-se obter uma equação em deflexão Z de 4.^a ordem, expressa por:

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} + \frac{\mu \omega^2}{EJ_y} \left(\frac{EJ_y}{G \cdot A_s} + i_y^2 \right) \frac{d^2 Z}{dx^2} - \frac{\mu \omega^2}{EJ_y} \left(1 - \frac{\mu i_y^2 \omega^2}{G \cdot A_s} \right) Z = 0 \quad (3.18)$$

Definindo-se

$$\sigma = \frac{\mu \omega^2}{G \cdot A_s} \ell^2 \quad (3.19)$$

$$\tau = \frac{\mu i_y^2 \omega^2}{EJ_y} \ell^2 \quad (3.20)$$

$$\beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EJ_y} \ell^4 \quad (3.21)$$

E introduzindo estes valores na equação (3.18) obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} + \left(\frac{\sigma + \tau}{\ell^2} \right) \frac{d^2 Z}{dx^2} - \left(\frac{\beta^4 - \sigma \cdot \tau}{\ell^4} \right) \cdot Z = 0 \quad (3.22)$$

onde ℓ é o comprimento total do eixo.

A partir desta equação diferencial ordinária de coeficientes constantes, pode-se deduzir a matriz de transferência relativa deste eixo. A solução da equação diferencial é do tipo:

$$Z = \bar{C} e^{\lambda x / \ell} \quad (3.23)$$

onde \bar{C} é uma constante arbitrária. A partir das condições de contorno do problema pode-se determinar o valor desta constante diferenciando a solução sugerida:

$$\frac{dZ}{dx} = \bar{C} \frac{\lambda}{\ell} e^{\lambda x / \ell} \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \bar{C} \frac{\lambda^2}{\ell^2} e^{\lambda x / \ell} \quad (3.25)$$

$$\frac{d^3 Z}{dx^3} = \bar{C} \frac{\lambda^3}{\ell^3} e^{\lambda x / \ell} \quad (3.26)$$

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} = \bar{C} \frac{\lambda^4}{\ell^4} e^{\lambda x / \ell} \quad (3.27)$$

Substituindo estas derivadas na expressão (3.22) pode-se chegar

ã seguinte equação característica em λ do problema:

$$\lambda^4 + (\sigma + \tau)\lambda^2 - (\beta^4 - \sigma\tau) = 0 \quad (3.28)$$

A equação (3.28) é uma equação biquadrada e as raízes encontradas são duas raízes reais e duas raízes complexas conjugadas ou seja:

$$\pm \lambda_1 \quad \text{e} \quad \pm j\lambda_2$$

onde j é a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$) e os seus valores são:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{-\left(\frac{\sigma + \tau}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + \tau)^2 + (\beta^4 - \sigma\tau)}} \quad (3.29)$$

Desta forma, a solução da equação diferencial (3.22) é dada por:

$$z = \bar{C}_1 e^{\lambda_1 x/\ell} + \bar{C}_2 e^{-\lambda_1 x/\ell} + \bar{C}_3 e^{j\lambda_2 x/\ell} + \bar{C}_4 e^{-j\lambda_2 x/\ell} \quad (3.30)$$

Usando as relações de Euler e substituindo-as na solução da equação diferencial (3.30), obtém-se a solução na seguinte forma:

$$z = C_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + C_3 \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \quad (3.31)$$

onde

$$C_1 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \quad (3.32a)$$

$$C_2 = \bar{C}_1 - \bar{C}_2 \quad (3.32b)$$

$$C_3 = \bar{C}_3 + \bar{C}_4 \quad (3.32c)$$

$$C_4 = j(\bar{C}_3 - \bar{C}_4) \quad (3.32d)$$

De posse desta solução, pode-se chegar às expressões para o esforço cortante, momento fletor e à deflexão angular do eixo.

Observando-se que as expressões para a solução das variáveis independentes (Z , ψ , M_y , V_z) têm a mesma forma, pode-se atribuir ao esforço cortante uma solução do tipo:

$$V_z = \Delta_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_2 \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_3 \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) + \Delta_4 \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \quad (3.33)$$

Para a obtenção das outras equações, usam-se as expressões já estabelecidas. Usando a expressão (3.9) pode-se expressar o deslocamento do sistema em função das constantes Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 .

$$Z = -\frac{1}{\mu\omega^2} \left[\frac{d}{dx} \Delta_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_2 \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_3 \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) + \Delta_4 \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \right] \quad (3.34)$$

e

$$Z = -\frac{\ell^4}{\beta^4 E J_y} \left[\Delta_1 \frac{\lambda_1}{\ell} \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_2 \frac{\lambda_1}{\ell} \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) - \Delta_3 \frac{\lambda_2}{\ell} \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) + \Delta_4 \frac{\lambda_2}{\ell} \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \right] \quad (3.35)$$

Analogamente, usando as expressões (3.4), (3.19) e as expressões de V_z e Z (3.33), (3.35), a expressão para a deflexão angular é:

$$\psi = \frac{\ell^2}{\beta^4 E J_y} \left\{ (\sigma + \lambda_1^2) \left[\Delta_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_2 \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) \right] + (\sigma - \lambda_2^2) \left[\Delta_3 \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) + \Delta_4 \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \right] \right\} \quad (3.36)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.36) na expressão (3.5), obtém-se:

$$M_y = -\frac{\ell^2}{\beta^4} \left\{ (\sigma + \lambda_1^2) \frac{\lambda_1}{\ell} \left[\Delta_1 \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) + \Delta_2 \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) \right] - (\sigma - \lambda_2^2) \frac{\lambda_2}{\ell} \left[\Delta_3 \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) - \Delta_4 \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \right] \right\} \quad (3.37)$$

Colocando as equações (3.33), (3.35), (3.36) e (3.37) convenientemente na forma matricial, obtêm-se a seguinte matriz para as variáveis Z , ψ , M_y e V_z :

$$\begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^3 \lambda_1}{\beta^4 E J_y} \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \frac{\ell^3 \lambda_1}{\beta^4 E J_y} \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & -\frac{\ell^3 \lambda_2}{\beta^4 E J_y} \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) & \frac{\ell^3 \lambda_2}{\beta^4 E J_y} \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \\ \ell^2 (\sigma + \lambda_1^2) \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \frac{\ell^2 (\sigma + \lambda_1^2)}{\beta^4 E J_y} \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \ell^2 (\sigma - \lambda_2^2) \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) & \ell^2 (\sigma - \lambda_2^2) \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \\ \ell \lambda_1 (\sigma + \lambda_1^2) \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \frac{\ell \lambda_1 (\sigma + \lambda_1^2)}{\beta^4} \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & -\frac{\ell \lambda_2 (\sigma - \lambda_2^2)}{\beta^4} \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) & \frac{\ell \lambda_2 (\sigma - \lambda_2^2)}{\beta^4} \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \\ \cosh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \sinh\left(\frac{\lambda_1 x}{\ell}\right) & \cos\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) & \sin\left(\frac{\lambda_2 x}{\ell}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

ou ainda:

$$\{S\}_x = [B(x)] \cdot \{\Delta\} \quad (3.39)$$

Considerando-se um eixo uniforme de comprimento l entre as estações $i-1$ e i conforme a figura 3.3.

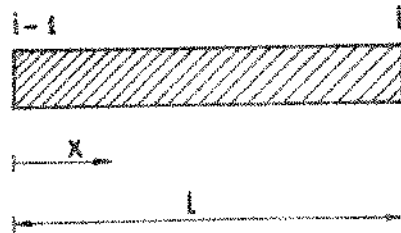


Fig. 3.3 - Modelo físico de um eixo de secção constante.

Pode-se estabelecer a seguinte expressão matricial para $x=0$ ou seja o ponto $i-1$:

$$\{S\}_0 = \{S\}_{i-1} \quad (3.40)$$

Logo a expressão para $x=0$ em (3.39) é,

$$\{S\}_{i-1} = [B(0)] \{\Delta\}$$

ou ainda:

$$\begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^3 \lambda_1}{\beta^4 E J_y} & 0 & \frac{\ell^3 \lambda_2}{\beta^4 E J_y} \\ \frac{\ell^2 (\sigma + \lambda_1^2)}{\beta^4 E J_y} & 0 & \frac{\ell^2 (\sigma - \lambda_2^2)}{\beta^4 E J_y} & 0 \\ 0 & \frac{\ell \lambda_1 (\sigma + \lambda_1^2)}{\beta^4} & 0 & \frac{\ell \lambda_2 (\sigma - \lambda_2^2)}{\beta^4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Pode-se, então, definir o vetor das constantes arbitrárias como sendo:

$$\{\Delta\} = [B(0)]^{-1} \{S\}_{i-1} \quad (3.42)$$

e também as relações para a outra extremidade (ponto i) ou seja $x=\ell$. Neste ponto vale a seguinte relação:

$$\{S\}_i = [B(\ell)] \{\Delta\} \quad (3.43)$$

Substituindo a expressão (3.42) em (3.43) obtém-se,

$$\{S\}_i = [B(\ell)] [B(0)]^{-1} \{S\}_{i-1} \quad (3.44)$$

$$\{S\}_i = [U_i] \{S\}_{i-1} \quad (3.45)$$

onde

$$[U_i] = [B(\ell)] [B(0)]^{-1} \quad (3.46)$$

Desta forma, tem-se em $[U_i]$ a matriz de transferência relacionando o vetor de estado na estação i e $i-1$. A matriz $[B(\ell)]$ é obtida diretamente de $[B(x)]$ para $x=\ell$. Para obter a matriz de transferência é necessário calcular a matriz inversa, $[B(0)]^{-1}$ e em seguida executar a multiplicação (3.46).

Considerando-se novamente o equacionamento matricial em (3.41), na forma:

$$\begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} \\ b_{41} & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Observando-se a disposição das linhas e colunas desta equação matricial pode-se dividi-la em duas submatrizes desacopladas tal que:

$$\begin{pmatrix} -Z \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \psi \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Para o cálculo das constantes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ procede-se à inversão das matrizes de ordem 2:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32}} \begin{bmatrix} b_{34} & -b_{14} \\ -b_{32} & b_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -Z \\ M_y \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (3.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41}} \begin{bmatrix} b_{43} & -b_{23} \\ -b_{41} & b_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \psi \\ v_z \end{Bmatrix}_{i-1}$$

Fazendo as substituições dos coeficientes b_{ij} e recompondo a matriz inversa $[B(o)]^{-1}$ obtém-se:

$$[B(o)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta^4 \Lambda \frac{EJ_y}{\ell^2} & 0 & \Lambda_2 \\ \frac{\beta^4 \Lambda_2}{\lambda_1} \frac{EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{\beta^4 \Lambda}{\lambda_1 \ell} & 0 \\ 0 & \beta^4 \Lambda \frac{EJ_y}{\ell^2} & 0 & \Lambda_1 \\ -\frac{\beta^4 \Lambda_1}{\lambda_2} \frac{EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{\beta^4 \Lambda}{\lambda_2 \ell} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Os valores de Λ estão descritos nas equações (3.52) a seguir:

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.52a)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\sigma + \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.52b)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda_2^2 - \sigma}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.52c)$$

O que se está procurando é o valor de $[U_1]$, a matriz de transferência do eixo e para tanto deve-se usar a expressão (3.46). Desta forma obtém-se:

$$\begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_0 - \sigma C_2 & \ell [C_1 - (\sigma + \tau) C_3] & \frac{\ell^2 C_2}{EJ_y} & \frac{\ell^3}{\beta^4 EJ_y} [-\sigma C_1 + (\beta^4 + \sigma^2) C_3] \\ \frac{\beta^4}{\ell} C_3 & C_0 - \tau C_2 & \ell [C_1 - \tau C_3] & \frac{\ell^2}{EJ_y} C_2 \\ \frac{\beta^4 EJ_y}{\ell^2} C_2 & \frac{EJ_y}{\ell} [-\tau C_1 + (\beta^4 + \tau^2) C_3] & C_0 - \tau C_2 & \ell [C_1 - (\sigma + \tau) C_3] \\ \frac{\beta^4 EJ_y}{\ell^3} (C_1 - \sigma C_3) & \beta^4 \frac{EJ_y}{\ell^2} C_2 & \frac{\beta^4}{\ell} C_3 & C_0 - \sigma C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_{i-1} \quad (3.53)$$

Os valores das constantes C_0, C_1, C_2, C_3 estão nas expressões (3.54) a seguir:

$$C_0 = \Lambda \left(\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_2^2 \cos \lambda_2 \right) \quad (3.54a)$$

$$C_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right) \quad (3.54b)$$

$$C_2 = \Lambda \left(\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2 \right) \quad (3.54c)$$

$$C_3 = \Lambda \left(\frac{\sinh \lambda_1}{\lambda_1} - \frac{\sin \lambda_2}{\lambda_2} \right) \quad (3.54d)$$

Uma vez definida a matriz de transferência para eixos contínuos de secção constante elimina-se o problema do número de pontos de discretização. Elaborou-se uma rotina computacional para a representação dos eixos mantendo-se toda estrutura de dados anterior e usando-se o mesmo esquema computacional mostrado no Apêndice 1.

3.2. EXEMPLOS DE MODELOS CONTÍNUOS - COMPARAÇÃO COM A ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Dado um modelo experimental de um eixo apoiado com 3 discos utilizado para ensaios de balanceamento e comportamento dinâmico, realizou-se uma análise teórico-experimental do mesmo.

Inicialmente realizou-se um estudo teórico utilizando o MMT desenvolvido no capítulo 3.1, onde usa-se para representação das estações do tipo eixo um modelo contínuo com solução exata. O esquema geral da montagem é apresentado na Figura 3.3.

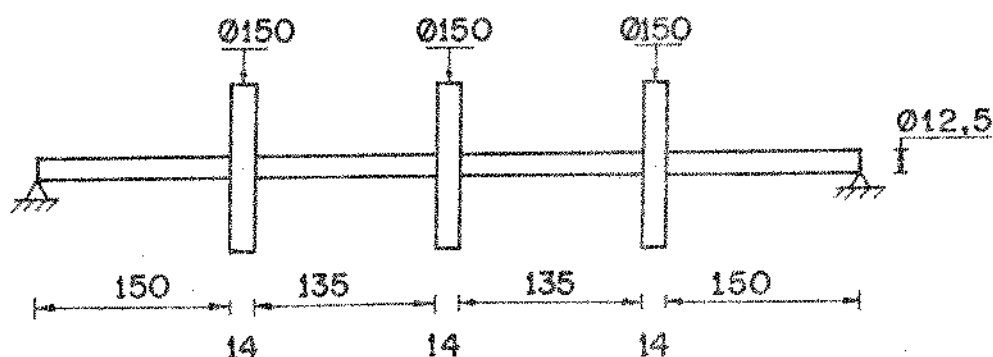


Fig. 3.3 - Modelo físico do sistema estudado.

Idealizou-se um apoio simples rígido pois os graus de liberdade referentes à inclinação nos mancais estão livres (mancais auto-compensadores) e o eixo é muito mais flexível do que o suporte. A rigidez do conjunto suporte/rolamento é de difícil determinação teórica (incluindo possíveis efeitos não lineares dos lubrificantes), sendo que para aplicações práticas este valor pode ser identificado aplicando-se técnicas de impedância mecânica [10,18].

Incluiu-se, no modelo, eixos contínuos com efeito de inércia de inclinação e influência de cisalhamento, e para os discos, o efeito de inércia de inclinação.

A Figura 3.4 apresenta os resultados obtidos registrando as frequências e modos de vibração em flexão.

Com o objetivo de comprovar experimentalmente o modelo, fez-se uma análise modal da estrutura. A análise modal é feita no domínio de frequência. A identificação dos parâmetros modais é realizada utilizando-se uma excitação impulsiva em diversos pon-

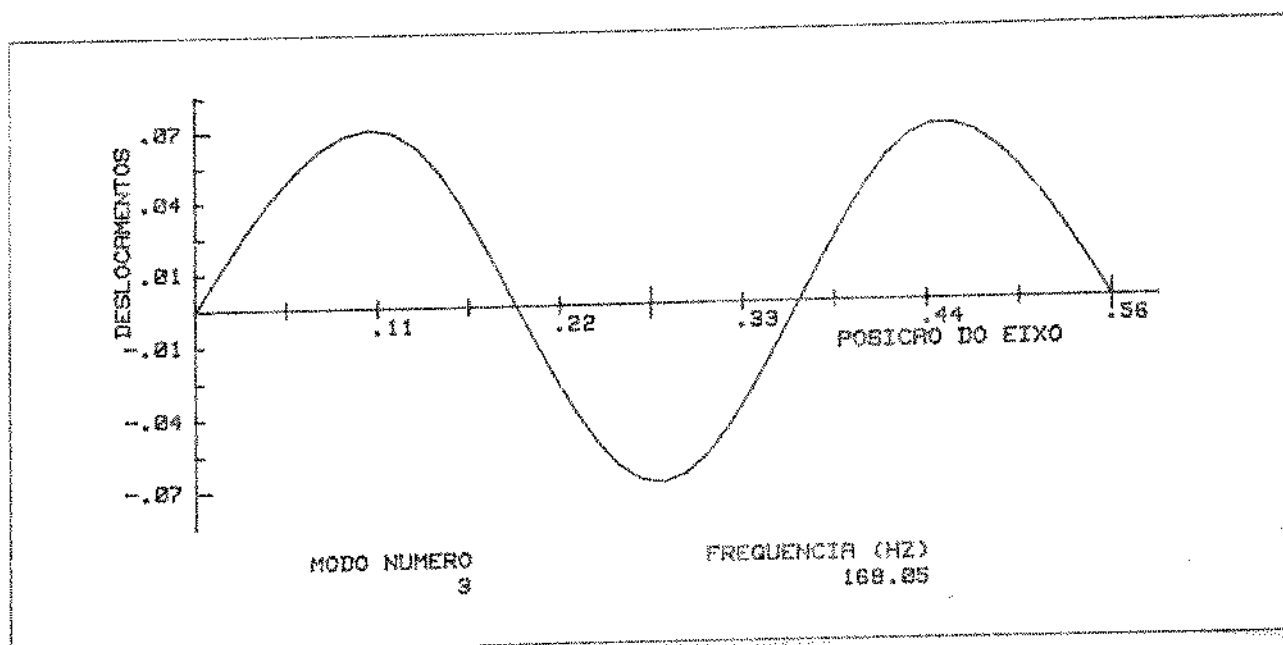
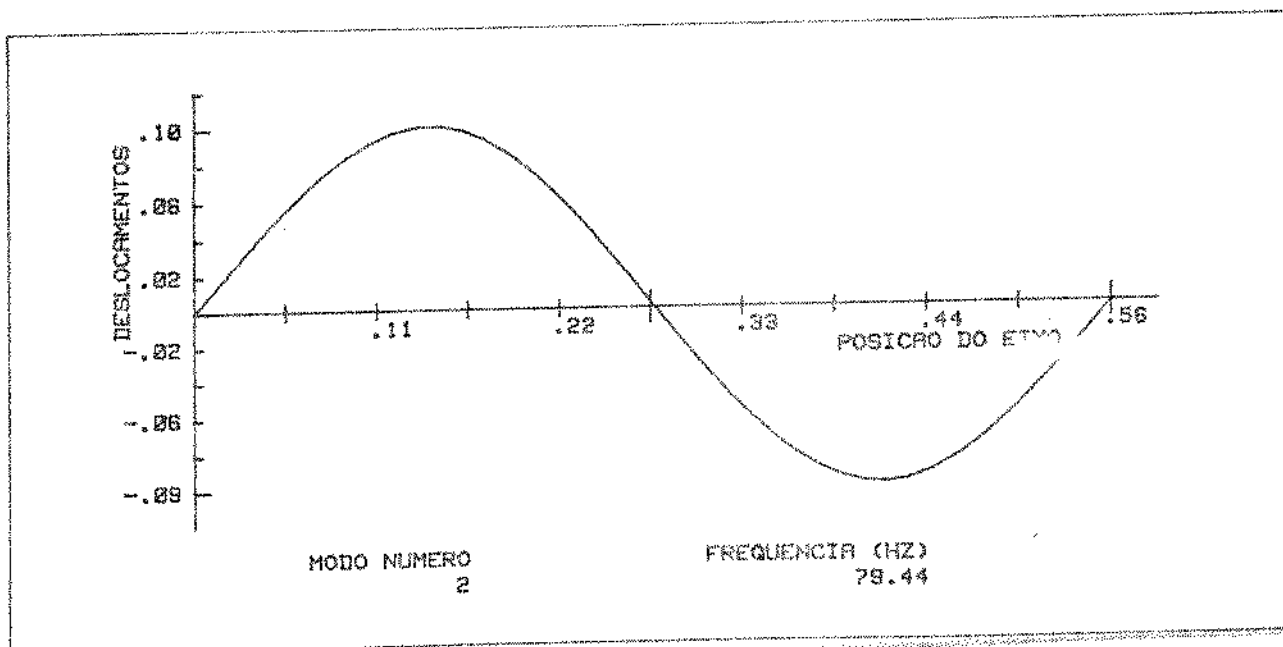
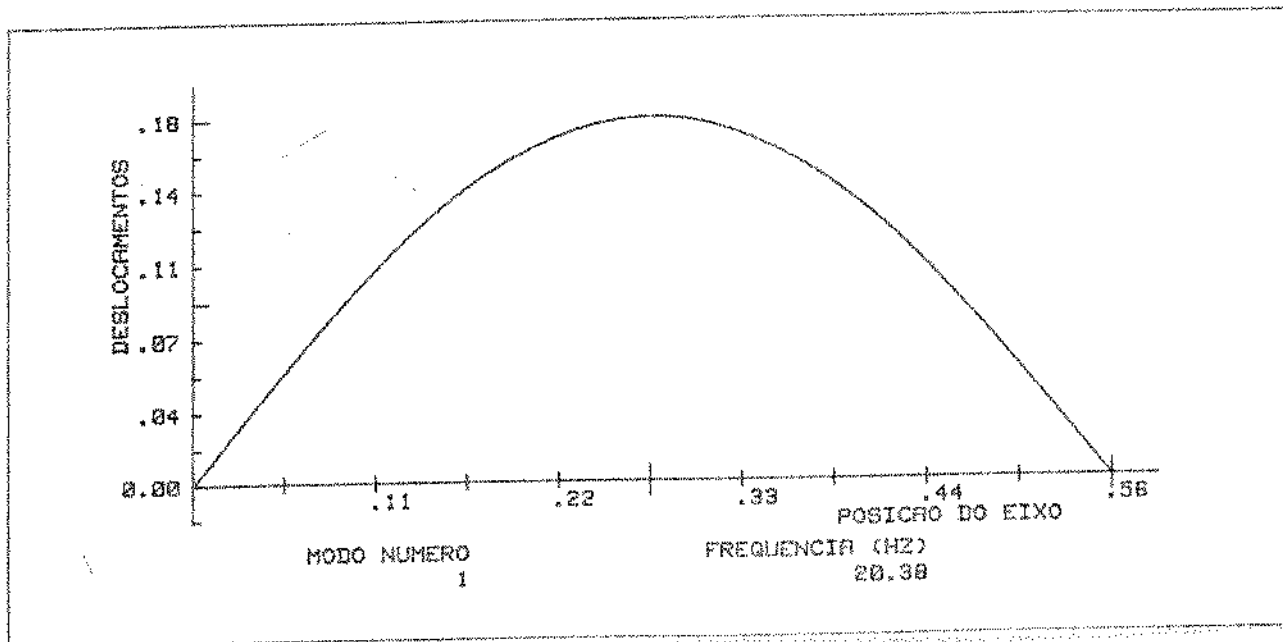


Fig. 3.4 - Frequências naturais e modos próprios de vibração obtidos pelo MMT.

tos (foram utilizados um total de seis pontos) [19,20]. Esta análise modal foi realizada utilizando-se um programa implementado em um sistema HP-5451C Fourier Analyser instalado no GEPRON. O método experimental ajusta a função de resposta em frequência usando a teoria de minimização dos erros quadráticos a partir dos dados de excitação e resposta medidos.

Na Figura 3.5 mostra-se os modos de vibração obtidos na análise modal e suas respectivas frequências naturais.

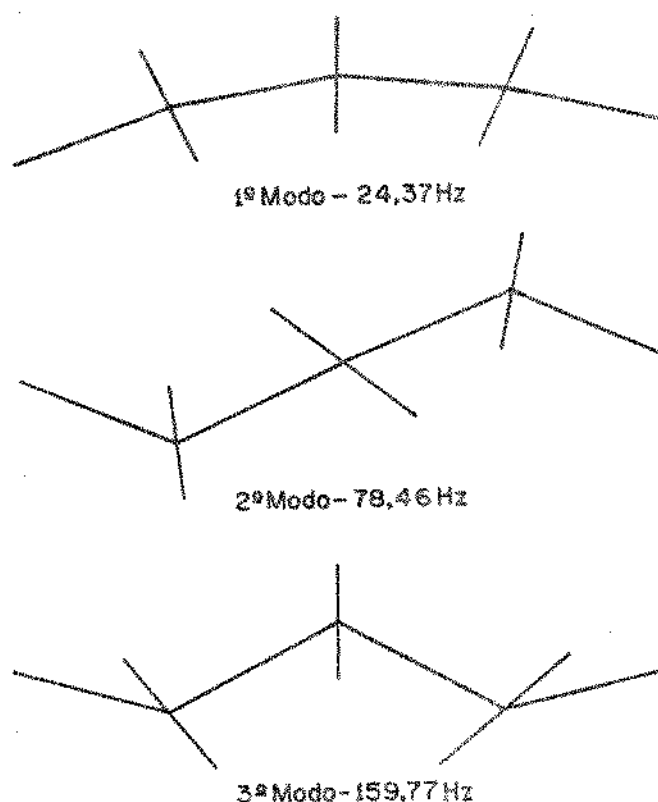


Fig. 3.5 - Frequências naturais e modos próprios de vibração obtidos na análise modal.

A comparação dos resultados e estimativas de desvios é mostrada na tabela 3.1.

TABELA 3.1 - Frequências naturais em [Hz] e desvios.

	Modelo MMT	Análise Modal	Desvios [%]
Freq-1 [Hz]	20.30	24.37	16.00
Freq-2 [Hz]	79.44	78.46	1.20
Freq-3 [Hz]	160.05	159.77	4.90

Justificam-se as diferenças encontradas principalmente pelo modelamento aproximado dos mancais, pois sabe-se dos exemplos anteriores, que o modelamento dos outros elementos é bastante eficaz.

Quanto à análise modal, pode-se detectar erros numéricos provenientes do programa de identificação e também erros de medição e processamento de sinais.

Devido à ordem de grandeza dos desvios principalmente na primeira frequência natural, se faz necessário proceder a novos testes para o modelo de matriz de transferência. Com este intuito propõe-se uma comparação com os resultados obtidos de modelos utilizando a técnica dos elementos finitos. Para tanto, resolveu-se o mesmo problema através do programa GEDIM [21] desenvolvido no laboratório de projeto mecânico e implementado em um micro-computador HP-9845A. O programa utiliza a técnica de elementos finitos para a solução de problemas dinâmicos e inclui os mesmos efeitos do modelo de matriz de transferência exceto a solução exata para eixos contínuos. O modelo de elemento finito consiste em uma idealização de massa consistente mostrada no capítulo 3.5.

Para a discretização por elementos finitos tomou-se a precaução de dividir os estágios de eixos e discos de forma a aproximar as 3 primeiras frequências naturais com boa precisão. O problema de vibração de flexão foi analisado com 10 graus de liberdade e a idealização dos mancais foi feita considerando-os vinculados no movimento de translação e livre para o movimento de rotação, ou seja, a mesma representação considerada no modelo de matriz de transferência.

As diferenças entre os resultados obtidos com os dois modelos estão listados na tabela 3.2.

TABELA 3.2 - Frequências naturais em [Hz] e desvios.

	Modelo MMT	Modelo MEF	Desvios [%]
Freq-1 [Hz]	20.38	20.41	.15
Freq-2 [Hz]	79.44	79.61	.21
Freq-3 [Hz]	168.05	168.93	.52

Esta faixa de erros é perfeitamente aceitável e conclui-se dos resultados da análise modal que as diferenças são provenientes do modelamento aproximado dos mancais e de problemas de medição implícitos nos métodos de identificação experimental.

3.3. DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO COMBINADO MMT (MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA) MEF (MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS)

A introdução de modelos contínuos "exatos" no MMT é de grande utilidade como está mostrado nos capítulos 3.1 e 3.2. Algumas limitações nestes modelos aparecem quando se deseja representar estruturas de geometria irregular pois sabe-se que o MMT não é apropriado a estes tipos de aplicações. Desta forma deseja-se, neste capítulo, introduzir um modelamento contínuo aproximado alternativo que permita a representação de estruturas de geometria irregular.

O método combinado MMT-MEF foi desenvolvido nas duas últimas décadas [26,27] e consiste em um método que utiliza para algumas estações as técnicas de modelamento por elementos finitos sendo que para a resolução numérica usa-se a estrutura matricial do MMT. Neste método combinado aproveita-se as potencialidades do MEF no modelamento de estruturas com geometria irregular tais como placas, cascas, estado plano de tensão ou deformação, estado triplo de tensão, problemas dinâmicos no plano e no espaço, etc., e usa-se a estrutura matricial do MMT pois sabe-se que este método não requer grandes capacidades de memória computacional, proporcionando assim a possibilidade de resolver problemas grandes em micro-computadores.

Com o objetivo de apresentar o método combinado MMT-MEF aplica-se o mesmo a problemas simples de modelamento de eixos. Pode-se generalizar este estudo para modelos de estruturas de geometria irregular tais como turbinas, discos flexíveis, engrenagens, rotores de motores elétricos, geradores de uma central hidroelétrica, eixos de geometria irregular, etc.

No modelamento por elementos finitos de um eixo em flexão parte-se da hipótese de que o campo de deflexão de um elemento pode ser descrito por um polinômio do 3º grau. Usando-se esta

hipótese e as equações de energia de deformação e energia cinética encontram-se as matrizes de rigidez $[K]$ (Eq. 3.55) e matriz de massa consistente $[M]$ (Eq. 3.56) conforme desenvolvido na referência [28].

$$[K] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \text{SIM} & & 12 & 6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$[M] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ \text{SIM} & & 156 & 22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde

ρ - massa específica do material do eixo

A - área da secção do eixo

l - comprimento do eixo

E - módulo de elasticidade do material do eixo

J_z - momento de inércia de área da secção do eixo em relação a z

Este modelo está implementado no programa GEDIM [21] e os resultados obtidos são descritos no capítulo 3.4.

Pode-se mostrar que existe uma transformação que passa as matrizes de rigidez e massa para a forma de matriz de transferência. Alguns cuidados quanto à convenção de sinais adotada nos dois modelos devem ser levados em conta. Em um problema típico de

eixo modelado por elementos finitos tem-se a seguinte equação dinâmica, válida no domínio de um elemento:

$$\left[[K] - \omega^2 [M] \right] \{ \delta \} = \{ F \} \quad (3.57)$$

onde:

- ω - frequência de vibração
- $\{ \delta \}$ - vetor dos deslocamentos nodais
- $\{ F \}$ - vetor das forças nodais.

Um elemento de eixo de secção constante é mostrado na Figura 3.6, bem como a convenção de sinais adotada.

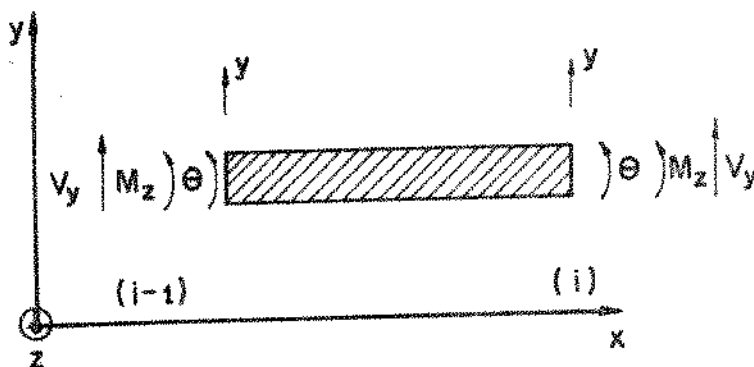


Fig. 3.6 - Diagrama de equilíbrio de um elemento de viga.

Segundo a técnica de elementos finitos usa-se a equação (3.57) na resolução do problema de vibrações livres, onde:

$$\{ \delta \}^T = \left[Y_{i-1} \quad \theta_{i-1} \quad Y_i \quad \theta_i \right] \quad (3.58)$$

$$\{ F \}^T = \left[V_{y_{i-1}} \quad M_{z_{i-1}} \quad V_{y_i} \quad M_{z_i} \right] \quad (3.59)$$

Desta forma a matriz de rigidez equação 3.55, relaciona forças e deslocamentos segundo a equação 3.60:

$$\begin{Bmatrix} V_{y(i-1)} \\ M_{z(i-1)} \\ V_{y(i)} \\ M_{z(i)} \end{Bmatrix} = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \text{SIM} & & 12 & 6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{(i-1)} \\ \theta_{(i-1)} \\ Y_{(i)} \\ \theta_{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Reagrupando as linhas e colunas e utilizando a mesma convenção de sinais do MMT Figura 2.3, obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{z(i-1)} \\ V_{y(i-1)} \\ M_{z(i)} \\ V_{y(i)} \end{Bmatrix} = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & -4l^2 & -6l & -2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{(i-1)} \\ \theta_{(i-1)} \\ Y_{(i)} \\ \theta_{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

A equação (3.61) pode ser representada na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{(i-1)} \\ F_{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{(i-1)} \\ \delta_{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

onde

$$[A] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & -4l^2 \\ -12 & 6l \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$[B] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} -6l & -2l^2 \\ 12 & 6l \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$[C] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} -6l & 2l^2 \\ -12 & 6l \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$[D] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 4l^2 \\ 12 & 6l \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\{F_{(i-1)}\}^T = \{M_{z(i-1)} \quad V_{y(i-1)}\} \quad (3.67)$$

$$\{F_{(i)}\}^T = \{M_{z(i)} \quad V_{y(i)}\} \quad (3.68)$$

$$\{\delta_{(i-1)}\}^T = \{Y_{(i-1)} \quad \theta_{(i-1)}\} \quad (3.69)$$

$$\{\delta_{(i)}\}^T = \{Y_{(i)} \quad \theta_{(i)}\} \quad (3.70)$$

Desenvolvendo a equação matricial (3.62) obtêm-se:

$$\{F_{(i-1)}\} = [A] \{\delta_{(i-1)}\} + [B] \{\delta_{(i)}\} \quad (3.71)$$

$$\{F_{(i)}\} = [C] \{\delta_{(i-1)}\} + [D] \{\delta_{(i)}\} \quad (3.72)$$

Procurando deixar o sistema de equações (3.71) e (3.72) na forma adequada ao método das matrizes de transferência, isolam-se os termos em (i) e (i-1) da expressão (3.71) e consegue-se a relação descrita a seguir:

$$\{\delta_{(i)}\} = -[B]^{-1} [A] \{\delta_{(i-1)}\} + [B]^{-1} \{F_{(i-1)}\} \quad (3.73)$$

Substituindo (3.73) em (3.72) tem-se:

$$\left\{ F_{(i)} \right\} = [C] \left\{ \delta_{(i-1)} \right\} + [D] \left(-[B]^{-1} [A] \left\{ \delta_{(i-1)} \right\} + [B]^{-1} \left\{ F_{(i-1)} \right\} \right) \quad (3.74)$$

$$\left\{ F_{(i)} \right\} = \left([C] - [D] [B]^{-1} [A] \right) \left\{ \delta_{(i-1)} \right\} + [D] [B]^{-1} \left\{ F_{(i-1)} \right\} \quad (3.75)$$

Agrupando a equação (3.73) e a equação (3.75) na forma matricial pode-se obter:

$$\begin{pmatrix} Y_{(i)} \\ \theta_{(i)} \\ M_{z(i)} \\ V_{y(i)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -[B]^{-1} [A] & [B]^{-1} \\ [C] - [D] [B]^{-1} [A] & [D] [B]^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_{(i-1)} \\ \theta_{(i-1)} \\ M_{z(i-1)} \\ V_{y(i-1)} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Efetuada-se estas transformações para as matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ definidas nas expressões (3.63) a (3.66) tem-se:

$$[B]^{-1} = \frac{\ell^3}{EJ_z} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\ell} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\ell^2} & \frac{1}{2\ell} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$[B]^{-1} [A] = \frac{\ell^3}{EJ_z} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\ell} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{2\ell} \end{bmatrix} \frac{EJ_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6\ell & -4\ell^2 \\ -12 & 6\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$[C] - [D][B]^{-1}[A] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} -6l & 2l^2 \\ -12 & 6l \end{bmatrix} - \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 4l^2 \\ 12 & 6l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & l \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$[D][B]^{-1} = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 4l^2 \\ 12 & 6l \end{bmatrix} \frac{l^3}{EJ_z} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{l^2} & \frac{1}{2l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Substituindo os resultados obtidos na equação (3.76) encontra-se:

$$\begin{pmatrix} Y \\ \theta \\ M_z \\ V_y \end{pmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & -l & -l^2/2EJ_z & -l^3/6EJ_z \\ 0 & 1 & l/EJ_z & l^2/2EJ_z \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \theta \\ M_z \\ V_y \end{pmatrix}_{(i-1)} \quad (3.81)$$

e usando a mesma estrutura utilizada no método de resolução das matrizes de transferência, ou seja, tomando-se $Y = -Y$ para todas as estações, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} -Y \\ \theta \\ M_z \\ V_y \end{pmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EJ_z & l^3/6EJ_z \\ 0 & 1 & l/EJ_z & l^2/2EJ_z \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -Y \\ \theta \\ M_z \\ V_y \end{pmatrix}_{(i-1)} \quad (3.82)$$

Como se pode observar, a equação (3.82) é idêntica à matriz de transferência desenvolvida no capítulo 2.1, equação (2.9) que faz a transferência de uma estação tipo eixo sem massa e rígida

dez proporcional a EJ_z . Isto demonstra que as transformações realizadas são coerentes. Desta forma, pode-se usar modelos desenvolvidos por MEF e resolvê-los por MMT. Sendo assim, podem ser exploradas as vantagens já descritas que são, economia de memória computacional (devido ao método de resolução do MMT) e possibilidade de modelar estruturas de geometria irregular (devido ao método dos elementos finitos).

Para a solução de problemas de vibrações é necessário montar a matriz dinâmica $[D]$ dada na equação (3.57) e posteriormente passá-la para a forma adequada para o cálculo das frequências naturais usando-se o método das multiplicações sucessivas descrito no capítulo 2.2 que é usual do MMT. Desta forma a matriz dinâmica do elemento será dada por:

$$[D] = [K] - \omega^2 [M] \quad (3.83)$$

Substituindo os valores de $[K]$ (matriz de rigidez do elemento) e $[M]$ (matriz de massa consistente de um elemento) tem-se,

$$[D] = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \text{SIM} & & 12 & 6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 A\rho l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ \text{SIM} & & 156 & 22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Transformando a matriz dinâmica da forma convencional dos modelos de elementos finitos para a forma de matriz de transferência segundo a equação (3.76) e compatibilizando a convenção de sinais pode-se obter a matriz de transferência que fornece uma solução aproximada para um eixo.

Implementou-se uma rotina computacional simplificada para o cálculo de eixos pelo método combinado MMT-MEF onde a estru-

tura de dados utilizada é a mesma descrita no Apêndice 1, sendo que as modificações introduzidas são mostradas nas listagens do Apêndice 1.

3.4. COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS - RESULTADOS NUMÉRICOS

Propõe-se, neste capítulo, realizar um breve estudo comparativo entre os modelos matemáticos desenvolvidos neste trabalho. Pretende-se fornecer alguns indicativos sobre a influência do modelamento nos resultados sem incluir uma explicação teórica aprofundada. O objetivo deste estudo comparativo é dar alguns subsídios para a escolha da melhor representação de uma estação tipo eixo em função dos fenômenos que se deseja estudar.

O modelo estudado está descrito na figura 3.7, bem como os dados do mesmo.

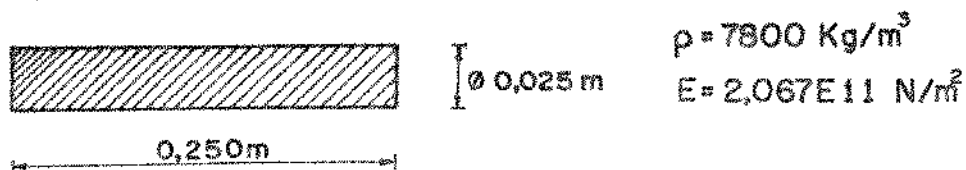


Fig. 3.7 - Modelo físico de um eixo livre-livre.

O estudo é relevante e ilustrativo, principalmente quando se deseja comparar resultados teóricos. Os métodos de modelamento matricial são comparados de maneira breve fazendo-se um paralelo entre o método dos elementos finitos e o método das matrizes de transferência. Posteriormente apresentam-se os resultados do método combinado MMT-MEF desenvolvido no capítulo 3.3.

Inicialmente descrevem-se os modelos utilizados:

- 1- Modelo por elementos finitos com 5 elementos de discretização incluindo o efeito da inércia de inclinação. Programa desenvolvido no Laboratório de Projeto Mecânico (GEPROM) [21].
- 2- Modelo de matriz de transferência usando a técnica de resolução de multiplicações sucessivas (capítulo

2.2), para massas concentradas (30 pontos de discretização) e eixo com rigidez de flexão EJ.

- 3- Idem 2 mais efeito da inércia de inclinação.
- 4- Idem 3 mais efeito da deformação devido ao cisalhamento.
- 5- Modelo contínuo de matriz de transferência com matrizes diretamente da equação diferencial.
- 6- Idem 5 mais o efeito da inércia de inclinação.
- 7- Idem 6 mais o efeito da deformação devido ao cisalhamento.
- 8- Solução exata [13], sem efeito da deformação devido ao cisalhamento e sem inércia de inclinação.

Os resultados numéricos obtidos estão listados na tabela 3.3.

TABELA 3.3 - Resultados numéricos.

Modelos	1	2	3	4	5	6	7	8
Freq-1 [10^3 Hz]	1.806	1.931	1.889	1.861	1.833	1.806	1.783	1.803
Freq-2 [10^3 Hz]	4.904	5.401	5.209	4.969	5.053	4.889	4.684	5.055
Freq-3 [10^3 Hz]	9.456	10.616	10.004	9.164	9.908	9.373	8.634	9.914
Freq-4 [10^3 Hz]	15.252	17.566	16.089	14.062	16.374	15.086	13.303	16.306
Freq-5 [10^3 Hz]	24.273	26.278	23.290	19.411	24.460	21.865	18.454	24.432

Alguns comentários breves podem ser feitos a partir dos resultados numéricos obtidos.

O modelo de massas discretas usando MMT (modelo 2) é bastante rígido e fornece uma estimativa inicial pouco precisa, aproximando os valores das frequências naturais por cima quando comparado à solução exata (modelo 8). Observa-se mesmo assim que os resultados são satisfatórios em termos de engenharia e que o número de massas concentradas utilizado é relativamente elevado ($n=30$). Incluindo-se os efeitos de inércia de inclinação e deformação devido ao cisalhamento (modelos 3 e 4), as frequências naturais diminuem de valor como era de se esperar pois o modelo é mais flexível, mas mesmo assim é mais rígido do que o modelo contínuo (modelo 7).

Na procura do valor zero da função determinante faz-se uma interpolação linear em torno de suas raízes, o que pode introduzir erros a partir da terceira casa decimal (ver capítulo 2.3). Neste caso, para uma comparação coerente dos modelos deve-se usar somente os três primeiros algarismos significativos dos resultados obtidos nos modelos 2, 3 e 4.

Conforme pode ser visto nas colunas 6 e 7, os efeitos de inércia de inclinação e deformação devido ao cisalhamento tornam os modelos contínuos mais flexíveis. As oscilações dos resultados obtidos com o modelo contínuo 5 em torno das soluções clássicas da coluna 8 aparecem devido a erros de truncamento no cálculo computacional ou devido à interpolação linear das raízes da função determinante no método das matrizes de transferência.

A princípio o modelo de elementos finitos (coluna 1) e o modelo de matriz de transferência com massa distribuída (coluna 6) podem ser comparados pois incluem-se os mesmos efeitos. Os resultados mostram que o modelamento contínuo (coluna 6) é um pouco mais flexível, o que era de se esperar pois, como é mencionado na literatura, os modelos de elementos finitos geralmente são mais rígidos que os "exatos". O modelo totalmente compatível com a solução de massa distribuída do MMT é desenvolvido por outro método matricial "exato" na referência [29].

Em termos gerais pode-se concluir, a partir deste trabalho, que é recomendável usar o modelo da coluna 7 da tabela 3.3. Mesmo assim, os erros encontrados nos outros modelos são admissíveis em termos de engenharia.

Sobre o efeito do cisalhamento, é importante frisar que o mesmo varia com a relação de diâmetro e comprimento e neste trabalho não se incluiu este estudo.

Outro resultado numérico importante pode ser obtido utilizando-se da teoria desenvolvida no capítulo 3.3. Deseja-se mostrar que, uma vez usados modelamentos compatíveis para métodos de resolução diferentes, deve-se obter o mesmo resultado a menos de erros de truncamento inerentes ao método numérico de resolução.

Entende-se por modelamento estrutural a obtenção das matrizes, sejam as de transferência ou sejam as de elementos finitos. A manipulação das mesmas para obtenção dos resultados é considerada como método de resolução. Pode-se generalizar este conceito para outros métodos matriciais.

Com o intuito de formalizar estas afirmações modelou-se o eixo mostrado na Figura 3.7 por elementos finitos e obtiveram-se as soluções usando dois métodos de resolução. Uma resolução matricial convencional usando o algoritmo QR [31], para a determinação dos auto-valores e auto-vetores e uma resolução pelo método combinado MMT-MEF que está descrita no capítulo 3.3.

Desprezando-se os efeitos de inércia de inclinação e de cisalhamento, os resultados obtidos estão dispostos na tabela 3.4.

TABELA 3.4 - Resultados numéricos

	MEF	Combinado MMT-MEF
Freq-1 [10 ³ Hz]	1.8339	1.8339
Freq-2 [10 ³ Hz]	5.0690	5.0689
Freq-3 [10 ³ Hz]	10.0010	10.0010
Freq-4 [10 ³ Hz]	16.5390	16.5380
Freq-5 [10 ³ Hz]	27.2150	27.2150

Como era de se esperar, os resultados são compatíveis, sendo que, no cálculo dos zeros da função determinante, utilizou-se um incremento pequeno de frequência para que não fossem introduzidos erros na interpolação linear aproximada. Desta forma, mostra-se que caso os modelos sejam compatíveis os resultados provenientes de diferentes métodos de resolução devem ser bem aproximados.

CAPÍTULO 4

DIFICULDADES NUMÉRICAS

Neste capítulo pretende-se discutir o problema das dificuldades numéricas inerentes aos métodos apresentados nos capítulos 2 e 3 deste trabalho. Entende-se por dificuldades numéricas os erros computacionais que aparecem em alguns tipos de aplicações provenientes da formulação do método das matrizes de transferência.

4.1. ESTUDO DAS CAUSAS DAS DIFICULDADES NUMÉRICAS DO MMT

Entre os casos mais comuns onde aparecem dificuldades numéricas destacam-se dois problemas: o cálculo de frequências naturais de ordem elevada e o estudo de problemas onde existem suportes elásticos intermediários de rigidez elevada.

Pode-se mostrar os problemas de dificuldades numéricas que aparecem no cálculo de frequência naturais altas analisando-se o exemplo da Figura 4.1.

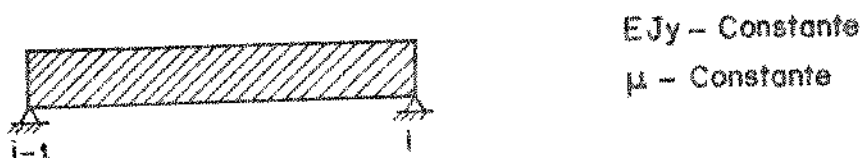


Fig. 4.1 - Modelo físico de um eixo de seção constante.

Usando a teoria desenvolvida no capítulo 3.1 de modelos contínuos para a representação de eixos e desprezando-se os efeitos de inércia de inclinação ($\tau=0$) e deformação devido ao cisalhamento ($\sigma=0$), a equação matricial (3.55) que proporciona a transferência de um eixo reduz-se a:

$$\begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_0 & lC_1 & aC_2 & alC_3 \\ \frac{\beta^4 C_3}{l} & C_0 & \frac{aC_1}{l} & aC_2 \\ \frac{\beta^4 C_2}{a} & \frac{\beta^4 lC_3}{a} & C_0 & lC_1 \\ \frac{\beta^4 C_1}{al} & \frac{\beta^4 C_2}{a} & \frac{\beta^4 C_3}{l} & C_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (4.1)$$

onde:

$$a = \frac{1}{EJ_y} \quad (4.2)$$

$$\beta^4 = \frac{\mu\omega^2 l^4}{EJ_y} \quad (4.3)$$

$$C_0 = \frac{1}{2} (\cosh\beta + \cos\beta) \quad (4.4)$$

$$C_1 = \frac{1}{2\beta} (\sinh\beta + \sin\beta) \quad (4.5)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\beta^2} (\cosh\beta - \cos\beta) \quad (4.6)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\beta^3} (\sinh\beta - \sin\beta) \quad (4.7)$$

Observando a Figura 4.1 pode-se estabelecer as condições de contorno segundo a expressão 4.8:

$$Z_{i-1} = M_{y_{i-1}} = Z_i = M_{y_i} = 0 \quad (4.8)$$

Seguindo o procedimento padrão de solução para o MMT des

critério no capítulo 2.2 obtêm-se o determinante segundo a expressão:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ell C_1 & a \ell C_3 \\ \frac{\beta^4 \ell C_3}{a} & \ell C_1 \end{vmatrix} = \ell^2 C_1^2 - \beta^4 \ell^2 C_3^2 \quad (4.9)$$

Sabe-se que a condição necessária para caracterizar uma solução é a de determinante igual a zero. Desenvolvendo a equação (4.9) obtêm-se:

$$\Delta = \ell^2 \left[\frac{1}{4\beta^2} (\sinh\beta + \sin\beta)^2 - \frac{1}{4\beta^2} (\sinh\beta - \sin\beta)^2 \right] = 0 \quad (4.10)$$

ou

$$\Delta = \ell^2 \left[\frac{1}{4\beta^2} \sinh^2\beta + \frac{2}{4\beta^2} \sinh\beta \sin\beta + \frac{1}{4\beta^2} \sin^2\beta - \frac{1}{4\beta} \sinh^2\beta + \frac{2}{4\beta^2} \sinh\beta \sin\beta - \frac{1}{4\beta} \sin^2\beta \right] = 0 \quad (4.11)$$

donde:

$$\Delta = \frac{\ell^2}{4\beta^2} \left[4\sinh\beta \cdot \sin\beta \right] = 0 \quad (4.12)$$

Observando a equação (4.12) pode-se notar que a igualdade só é verdadeira se:

$$\sinh\beta = 0 \quad (4.13)$$

ou

$$\beta_K = K\pi \quad (4.14)$$

Substituindo a expressão (4.14) em (4.3) obtêm-se:

$$\omega^2 = \frac{(K\pi)^4 \cdot EJ}{\mu l^4} y \quad (4.15)$$

É evidente que a função $\text{sen}\beta$ proporciona os valores de determinante nulo mas este pode ser descaracterizado pela função $\text{senh}\beta$, que atinge valores muito elevados para frequências altas sendo que a partir de um dado limite há um truncamento no número de dígitos utilizados na computação o que pode tornar ineficaz a representação do produto de dois valores de grandeza muito diferentes. Da Figura 4.2 observa-se que para valores elevados de β a variação da função determinante em torno das raízes torna-se muito sensível em relação à variação de β . Recomenda-se portanto o uso de passos pequenos na procura das frequências naturais de ordem elevada.

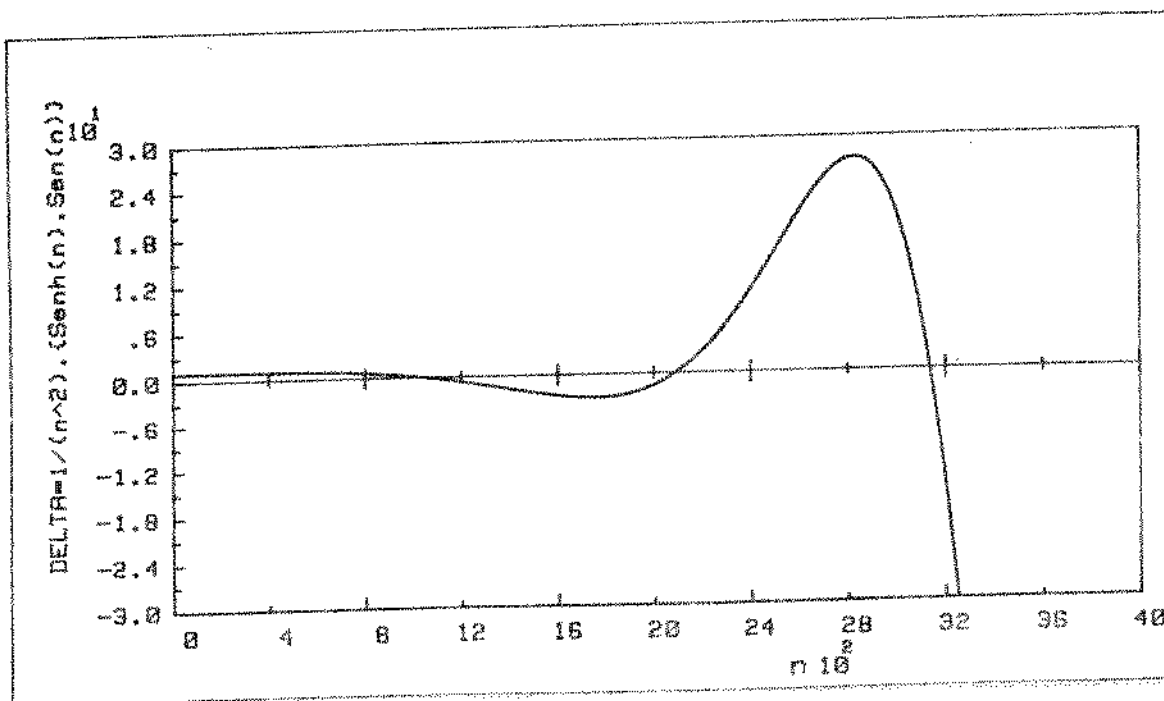


Fig. 4.2 - Gráfico da variação da função Δ .

Outro problema numérico freqüente decorre da existência de suportes elásticos de rigidez elevada. Caracteriza-se rigidez elevada quando existe uma grande diferença entre a rigidez do eixo e a rigidez do suporte elástico intermediário.

Pode-se ilustrar este problema estudando-se o exemplo

mostrado na Figura 4.3.

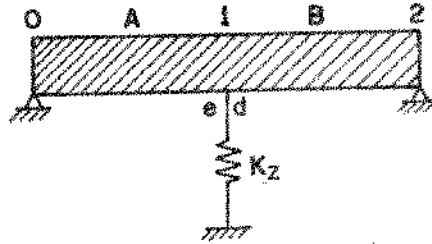


Fig. 4.3 - Eixo apoiado em suporte intermediário de rigidez K_z .

Descrevendo um eixo genérico com partes A e B, e procedendo-se à transferência do sistema do ponto zero até o ponto 2 obtém-se o produto matricial da equação (4.16). A forma compactada desta equação | 8 | proporciona uma melhor visualização do MMT e da técnica de resolução através de multiplicações sucessivas.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} a_{ij} \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_1^e \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_1^d \\
 & \left[\begin{array}{c} b_{ij} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_{ij} \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{pmatrix}_2 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

onde:

$$d_{42} = -K_z a_{12} + a_{42} \quad (4.17a)$$

$$d_{44} = -K_z a_{14} + a_{44} \quad (4.17b)$$

e

$$\begin{bmatrix} U_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde:

$$U_{12} = a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{32} b_{13} + b_{14} (-K_z a_{12} + a_{42}) \quad (4.19)$$

$$U_{32} = a_{12} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{32} b_{33} + b_{34} (-K_z a_{12} + a_{42}) \quad (4.20)$$

$$U_{14} = a_{14} b_{11} + a_{24} b_{12} + a_{34} b_{13} + b_{14} (-K_z a_{14} + a_{44}) \quad (4.21)$$

$$U_{34} = a_{14} b_{31} + a_{24} b_{32} + a_{34} b_{33} + b_{34} (-K_z a_{14} + a_{44}) \quad (4.22)$$

Observa-se que os termos da matriz do sistema $[U]$ que aparecem no determinante Δ da equação abaixo estão mostradas nas equações (4.19) a (4.22).

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_{12} & U_{14} \\ U_{32} & U_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

Substituindo as expressões U_{ij} na expressão do determinante e procedendo-se a algumas manipulações obtém-se:

$$\Delta = K_z^2 (a_{12} a_{14} b_{14} b_{34} - a_{12} a_{14} b_{14} b_{34}) + K_z \left(\begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{31} & b_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \right) \quad (4.24)$$

Da expressão (4.24) pode-se identificar as causas das dificuldades numéricas que aparecem em problemas onde existem suportes elásticos intermediários de rigidez K_z elevada. Nota-se que a 1.^a parcela é composta do produto de K_z^2 (que é um valor bastante grande, principalmente se o valor da rigidez do suporte for elevada) por um fator que deverá ser zero ($a_{12} a_{14} b_{14} b_{34} - a_{12} a_{14} b_{14} b_{34}$). Efetuando-se estes cálculos em computadores, o fator que se espera nulo pode não o ser devido a erros de truncamento da máquina que são função do número de dígitos na representação de uma variável real. Com isso, o produto $K_z^2 (a_{12} a_{14} b_{14} b_{34} - a_{12} a_{14} b_{14} b_{34})$ introduz elevados erros numéricos.

Estes dois exemplos típicos mostram duas das principais causas de erros numéricos, que podem ser eliminados procurando-se métodos opcionais que não resultem em problemas de determinante nulo na procura das frequências naturais.

4.2. MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA MODIFICADO

Para a solução dos problemas de dificuldades numéricas existem diversos métodos que são ilustrados nas referências [8,22]. Neste trabalho, limitou-se a investigação ao estudo do método das

matrizes de transferência modificado (MMT modificado) que é adequado para solução destes problemas e mais ainda pode ser generalizado para matrizes de qualquer ordem.

4.2.1. Desenvolvimento Analítico do MMT modificado

O MMT modificado propõe-se a eliminar os problemas de diferenças entre números grandes de valores próximos (problema associado à diferença de flexibilidade entre eixos e mancais) e também a eliminar problemas envolvidos no cálculo de freqüências naturais de ordem elevada. Para isso estuda-se um método que estima os valores do vetor de estado na estação inicial e aplica-se uma condição de dependência linear entre as linhas da matriz do sistema procurando-se desta forma eliminar as dificuldades numéricas que aparecem no cálculo das freqüências naturais.

Sabe-se da formulação clássica desenvolvida no capítulo 2 que o vetor de estado na estação inicial é:

$$\left\{ S \right\}_0^e = \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Considerando-se a condição de contorno de extremidades livres ou extremidades sob mancais flexíveis pode-se definir a seguinte configuração para o vetor de estado na estação inicial:

$$\left\{ S \right\}_0^e = \begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Observa-se que para uma matriz de transferência de ordem p qualquer, pode-se eliminar $p/2$ incógnitas a serem determinadas. Ainda usando a teoria clássica do MMT propõe-se, na análise dos modos próprios de vibração, uma normalização das incógnitas, atribuindo-se o valor unitário para Z_0^e ($Z_0^e = 1$). Desta forma continua-se com um valor $\psi_0^e \neq 0$ a ser determinado que satisfaz uma relação apresentada na equação (4.27).

$$\psi_0^e = \lambda Z_0^e \quad (4.27)$$

Agrupando-se as relações estabelecidas na forma matricial e introduzindo o fator de correção K_i na expressão (4.27) obtém-se:

$$\left\{ S \right\}_0^e = \begin{Bmatrix} -1 \\ \lambda_i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + K_i \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

As variáveis λ_i e K_i são utilizadas com índices pois o problema é resolvido iterativamente e os mesmos indicam o número da iteração que se está realizando.

Prova-se facilmente a equação (4.28) desenvolvendo-a conforme [10]:

$$-Z_0^e = -1 \quad (4.29)$$

$$\psi_0^e = \lambda_i + K_i \quad (4.30)$$

Observa-se que a expressão das inclinações (ψ) está coerente pois na mesma adota-se o valor unitário para Z_0^e ou seja:

$$\psi_0^e = \lambda_1 Z_0^e + K_1 \quad (4.31)$$

Adotando-se $Z_0^e = 1$ e quando o valor de K_1 convergir a zero obtêm-se a expressão correta para as inclinações, ou seja, o valor de K_1 será um parâmetro de ajuste do valor de λ adotado inicialmente. Adotando-se pequenos incrementos na variação de ω (frequência) pode-se esperar bons resultados do método mesmo que o valor inicial λ_1 arbitrado seja impreciso.

É procedimento padrão na solução numérica adotar-se $\lambda_1 = 1$ para a primeira iteração. Desta forma obtêm-se:

$$\{s\}_0^e = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + K_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Utilizando o procedimento padrão do método das matrizes de transferência pode-se obter o sistema matricial da equação (4.33), onde $[U]$ é a matriz de transferência do sistema e $\{s\}_0^e$ e $\{s\}_n^d$ são os vetores de estado no ponto inicial e final:

$$\{s\}_n^d = [U] \{s\}_0^e \quad (4.33)$$

Da equação (4.32) que descreve o vetor de estado na estação inicial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} U_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ij} \end{bmatrix} K_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Aplicando-se as condições de contorno de extremidades livres na estação n obtêm-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 + K_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Observando-se que as equações lineares em (4.35) são decorrentes do sistema matricial (4.34) pode-se concluir que, se forem obtidos valores idênticos para K_1 nas duas equações acima, configura-se uma situação onde duas linhas da matriz do sistema de equações são linearmente dependentes, o que implica em um valor nulo do seu determinante.

Neste caso observa-se que o valor da freqüência ω utilizada corresponde a uma freqüência natural do sistema (ou mesmo uma rotação crítica).

Usando a equação (4.35) pode-se calcular dois valores para o fator de correção K_1 , dada pelas seguintes expressões:

$$K_A = + \frac{U_{31}}{U_{32}} - 1 \quad (4.36)$$

$$K_B = + \frac{U_{41}}{U_{42}} - 1 \quad (4.37)$$

Desta forma define-se um critério para caracterizar o determinante nulo usando uma função resíduo R_i escrito como:

$$R_i = K_B - K_A \quad (4.38)$$

Para cada freqüência calculada estabelece-se uma correção para o valor de λ arbitrado inicialmente igual a 1. Sabe-se que freqüentemente os valores de K_A e K_B encontrados são distintos e para a correção de λ é usual utilizar o valor médio dos K_i

encontrados:

$$K_1 = \frac{K_A + K_B}{2} \quad (4.39)$$

Substituindo-se este novo valor de K_1 na expressão do vetor estado inicial obtém-se um novo valor de λ_1 dado pela equação a seguir:

$$\lambda_2 = (\lambda_1 + K_1) \quad (4.40)$$

ou

$$\lambda_2 = (1,0 + K_1) \quad (4.41)$$

Com este novo valor de λ_1 procede-se da mesma forma e para esta iteração calculam-se novos valores dos fatores de correção K_1 e da função resíduo R_1 . Após poucas iterações (na maioria dos casos duas) o valor do fator de correção K_1 converge a zero. Mostra-se desta forma que o valor atribuído à variável ψ_0 é uma boa aproximação, sendo assim faz-se desnecessário repetir esta operação para um mesmo valor de frequência ω . Ao mesmo tempo que o fator de correção K_1 tende a zero, o valor da função resíduo R_1 deve se manter inalterado e o mesmo é analisado para várias frequências. Os valores de ω que anulam R_1 correspondem às frequências naturais do sistema analisado.

Para que a convergência do fator de correção K_1 seja mais rápida recomenda-se que entre dois valores consecutivos de ω dentro da faixa de frequência pesquisada adote-se o valor do parâmetro λ_1 da iteração anterior, na iteração imediatamente posterior [10]. Consegue-se desta forma uma melhor aproximação para o valor inicial do vetor de estado $\{S\}_0^e$.

4.2.2. Desenvolvimento Numérico do MMT modificado

Com o objetivo de ilustrar o procedimento padrão de resolução do MMT modificado que foi implementado em um micro-compu-

tador (HP9845A), apresenta-se um exemplo numérico do método. As rotinas implementadas estão descritas no Apêndice 3.

O exemplo utilizado pode ser encontrado na referência | 8 |, sendo que são introduzidas algumas modificações para que haja coerência na formulação e notação utilizadas neste trabalho.

Dado um eixo engastado conforme a figura 4.4, modelado com pontos discretos de massa e eixos com rigidez de flexão proporcionais a EJ , segundo as técnicas descritas no capítulo 2, aplica-se numericamente o MMT modificado.

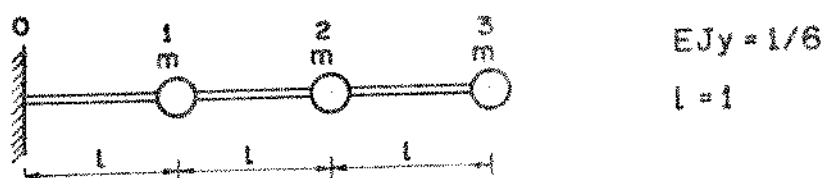


Fig. 4.4 - Modelo físico de um eixo engastado.

Utilizando-se as matrizes de campo para os segmentos do eixo, e de ponto para as massas concentradas desenvolvidas no capítulo 2.1 tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EJ_y & l^3/6EJ_y \\ 0 & 1 & l/EJ_y & l^2/2EJ_y \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/EJ_y & l^3/6EJ_y \\ 0 & 1 & l/EJ_y & l^2/2EJ_y \\ 0 & 0 & 1 & l \\ m\omega^2 & m\omega^2 l & \frac{m\omega^2 l^2}{2EJ_y} & 1 + \frac{m\omega^2 l^3}{6EJ_y} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

que consiste na matriz de transferência do sistema eixo-massa concentrada. Pode-se substituir os valores das variáveis na equação (4.42) e processar as multiplicações sucessivas até encontrar a matriz $[U]$ do sistema. Tomando-se inicialmente o valor unitário para $m\omega^2$ ($m\omega^2 = 1$), obtém-se a seguinte matriz de transferência do sistema.

$$\begin{bmatrix} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 66 & 44 \\ 18 & 22 & 99 & 66 \\ 4 & 5 & 22 & 14 \\ 14 & 18 & 84 & 55 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Sabe-se que o sistema da Figura 4.4 tem as condições de contorno descritas pelas equações (4.44):

$$Z_0 = \psi_0 = 0 \quad (4.44a)$$

$$(4.44b)$$

$$V_{z3} = M_{y3} = 0$$

Utilizando-se a formulação desenvolvida no capítulo 4.2.1. segundo a equação (4.34) obtêm-se a seguinte configuração para o MMI modificado:

$$\begin{pmatrix} -Z \\ \psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_d = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 66 & 44 \\ 18 & 22 & 99 & 66 \\ 4 & 5 & 22 & 14 \\ 14 & 18 & 84 & 55 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 14 & 66 & 44 \\ 18 & 22 & 99 & 66 \\ 4 & 5 & 22 & 14 \\ 14 & 18 & 84 & 55 \end{bmatrix} \cdot K_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Considerando-se as condições de contorno obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 22 & 14 \\ 84 & 55 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Usando a formulação analítica pode-se determinar o valor do fator de correção K_1 a seguir:

$$K_A = -\frac{22}{14} - 1 = -2,571 \quad (4.47)$$

$$K_B = -\frac{84}{55} - 1 = -2,527 \quad (4.48)$$

O valor da função resíduo R_1 para este valor de frequência é dado pela expressão (4.38) e vale:

$$R_1 = -2,527 - (-2,571) = 0,0440 \quad (4.49)$$

Para este valor de frequência deve-se ainda corrigir o valor estimado inicialmente para λ_1 conforme a equação (4.40). Deste modo tem-se a seguinte expressão para o vetor de estado inicial.

$$\left\{ S \right\}_0^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_1 + K_1 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

onde o resíduo K_1 é calculado usando-se a expressão (4.39) e vale:

$$K_1 = \frac{-2,527 + (-2,571)}{2} = -2,55 \quad (4.51)$$

Uma vez definido um novo valor para o vetor de estado inicial repete-se o procedimento com o mesmo valor de frequência e obtém-se um novo sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{bmatrix} 22 & 14 \\ 84 & 55 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1,55 + K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

e calculando o fator de correção e da função resíduo tem-se:

$$K_2 = 0,00065 \quad (4.53)$$

$$R_1 = 0,0441 \quad (4.54)$$

Pode-se observar que o valor do fator de correção K_1 tende a zero e da mesma forma o valor da função resíduo R_1 permanece praticamente inalterado. Conclui-se que este valor de frequência não é uma raiz da função resíduo R_1 e conseqüentemente não é uma frequência natural do sistema. É mais ainda que a estimativa do vetor de estado inicial é boa pois o fator de correção tende a zero.

Para o cálculo das frequências naturais repete-se este procedimento até que sejam encontradas as raízes da função resíduo R_1 . Na determinação dos modos próprios de vibração segue-se o procedimento descrito no capítulo 2.2 usando-se o vetor de estado inicial referente a um valor mínimo do fator de correção. Desta forma garante-se uma boa estimativa para o vetor de estado inicial e conseqüentemente uma boa aproximação da forma modal.

Usando as informações obtidas nesse desenvolvimento numérico pode-se estudar melhor o algoritmo descrito no Apêndice 3.

4.2.3. Problemas Numéricos do MMT modificado

Várias referências indicam métodos alternativos de resolução [8,23] para modelos de matriz de transferência. Utilizou-se neste trabalho um método que apresenta problemas numéricos facilmente controláveis em aplicações computacionais.

O problema predominante neste método, advém do fato de

que a função resíduo R_i nem sempre é contínua e desta forma deve-se tomar alguns cuidados especiais no cálculo das raízes da mesma. Descontinuidades podem ser observadas no gráfico qualitativo mostrado na Figura 4.5.

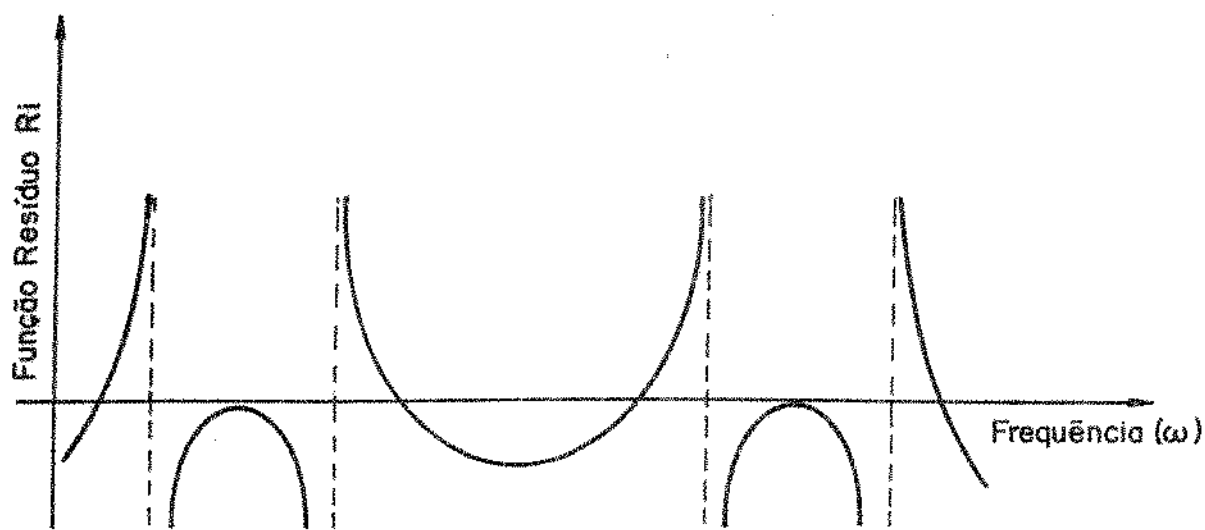


Fig. 4.5 - Gráfico qualitativo do comportamento da função resíduo R_i .

Observando o comportamento da curva é fácil ver que a função resíduo R_i muda de sinal algumas vezes, sendo que nem todos os pontos de mudança se constituem em raízes da função. Assim sendo, a variação do sinal da função resíduo não é um critério suficiente para a obtenção das raízes.

Na solução deste tipo de problema tomaram-se alguns cuidados especiais no algoritmo numérico. Adotaram-se incrementos menores para os valores de frequência ω nas proximidades dos pontos onde a função resíduo R_i muda de sinal. Fez-se também o estudo das derivadas da função nestes pontos pois são se constituem em valores de frequências naturais os pontos onde a função muda de sinal e há continuidade de sua derivada.

Outros casos que apresentam problemas numéricos referem-se a sistema estruturais representados por matrizes de ordem

superior a 4 onde se calculam mais de uma função resíduo. Nestes casos deve-se observar a possibilidade de superposição das funções resíduo que podem representar raízes repetidas.

4.3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MMT MODIFICADO

Com o objetivo de testar o método desenvolvido neste capítulo propõe-se a solução de um problema típico onde ocorrem dificuldades numéricas. A Figura 4.6 mostra o modelo físico de um eixo de uma máquina rotativa. O eixo possui duas secções com propriedades distintas e é suportado por três mancais de mesma rigidez.

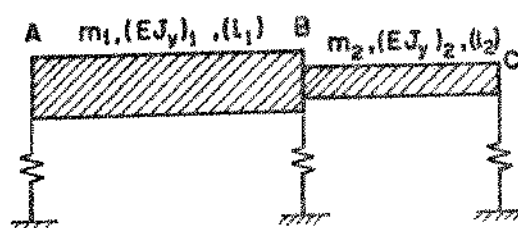


Fig. 4.6 - Modelo físico de um eixo de uma máquina rotativa.

Pretende-se resolver o problema de vibrações livres em flexão usando o modelo contínuo descrito no capítulo 3. Incluiu-se os efeitos de inércia de inclinação e deformação devido ao cisalhamento. Sabe-se que boa parte das máquinas rotativas possuem mancais hidrodinâmicos, mas em primeira aproximação pode-se modelar a rigidez do filme de óleo usando uma mola de rigidez constante segundo a teoria desenvolvida no capítulo 2.1.

Na tabela 4.1 mostram-se os dados do modelo estudado,

TABELA 4.1 - Dados do Modelo

Variável	Símbolo	Unidades	Valor
Massa do eixo 1	m_1	Kg	16,89 E 3
Massa do eixo 2	m_2	Kg	4,33 E 3
Rigidez de flexão do eixo 1	$(EJ_y)_1$	N.m ²	2.07 E 9
Rigidez de flexão do eixo 2	$(EJ_y)_2$	N.m ²	5.41 E 8
Comprimento do eixo 1	(l_1)	m	6,00
Comprimento do eixo 2	(l_2)	m	3,00
Rigidez dos mancais	(K_z)	N/m	2,01 E 9
Fator de forma para cisalhamento	(K_s)	-	1,185

Observa-se que os problemas numéricos surgem principalmente em função do comprimento dos eixos. O aumento dos mesmos leva a uma flexibilidade maior do sistema mesmo que a rigidez dos mancais não sejam elevadas.

Os resultados estão dispostos na figura 4.7 e se comparados aos obtidos na referência citada pode-se observar que os mesmos são coerentes.

Os desvios estão na faixa de 3% sendo que os modelos utilizados não são idênticos.

Uma vez resolvidos estes tipos de problemas numéricos no MMT, pode-se incluir outros fenômenos no estudo da vibração de flexão como por exemplo molas de torção, rigidez das fundações, massa dos mancais e outros. Para tanto, basta aplicar os diagramas de corpo livre e montar as equações de equilíbrio dos sistemas conforme o método desenvolvido no capítulo 2.

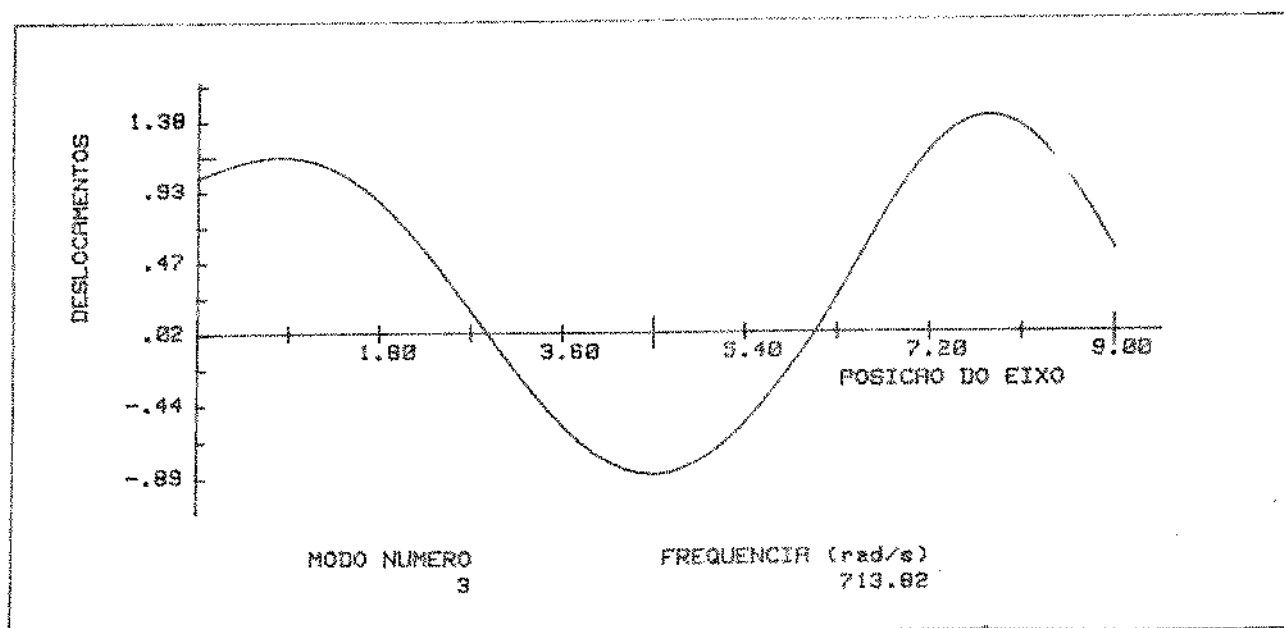
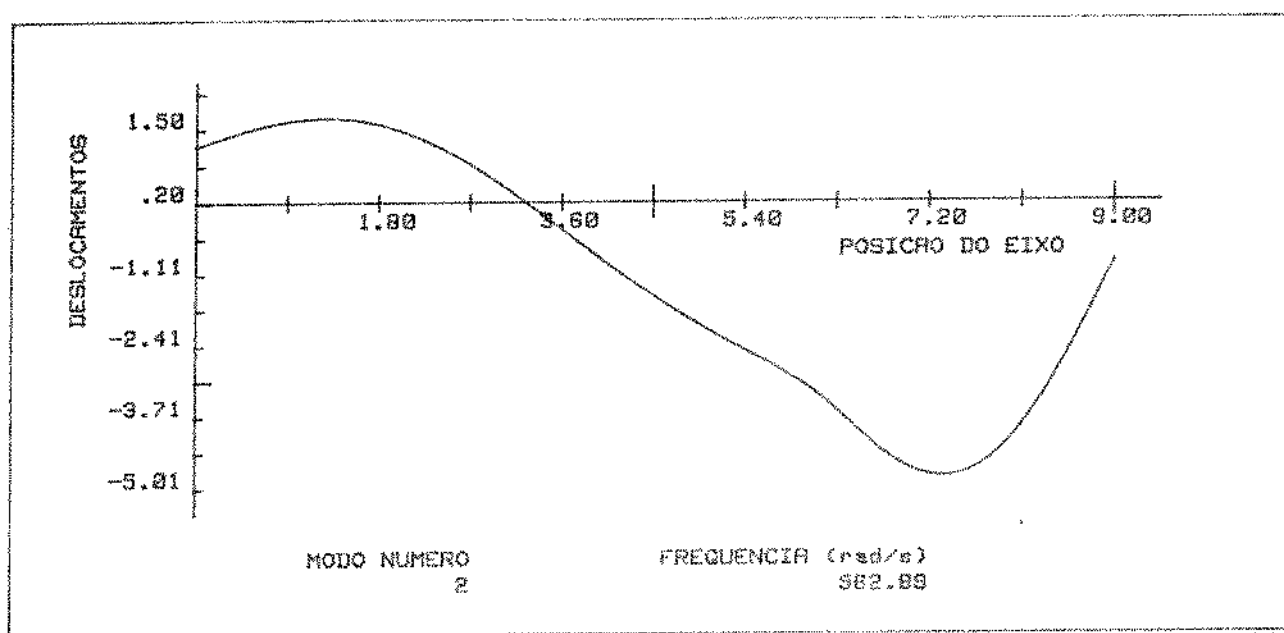
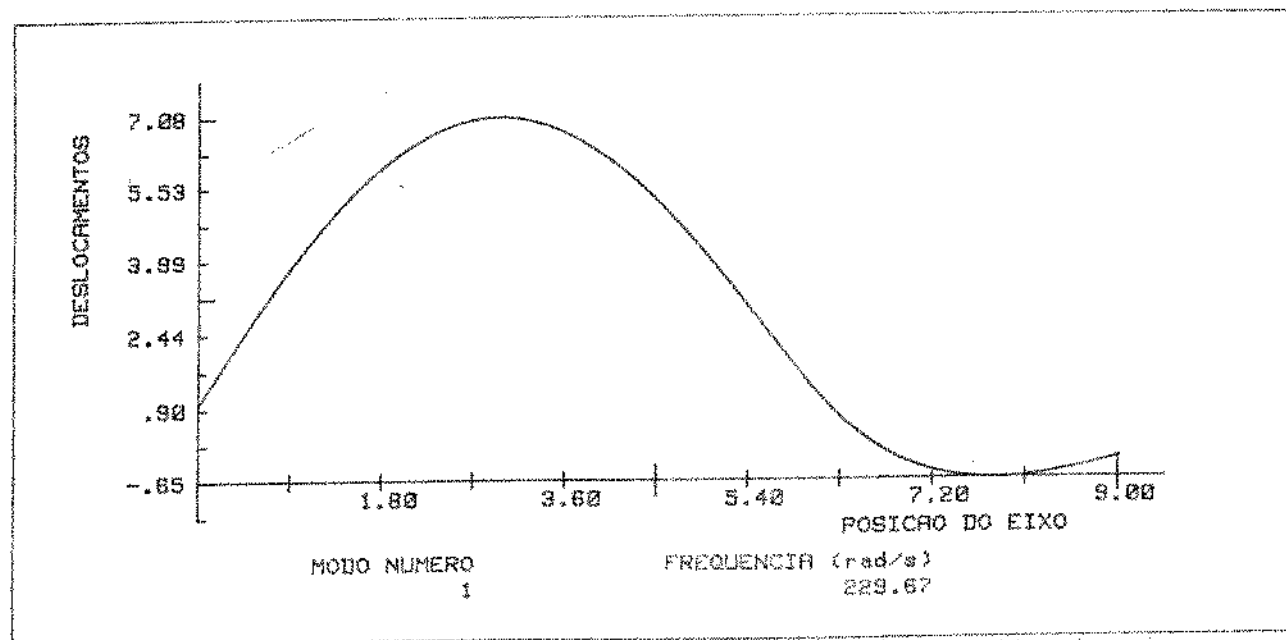


Fig. 4.7 - Frequências naturais e modos próprios de vibração.

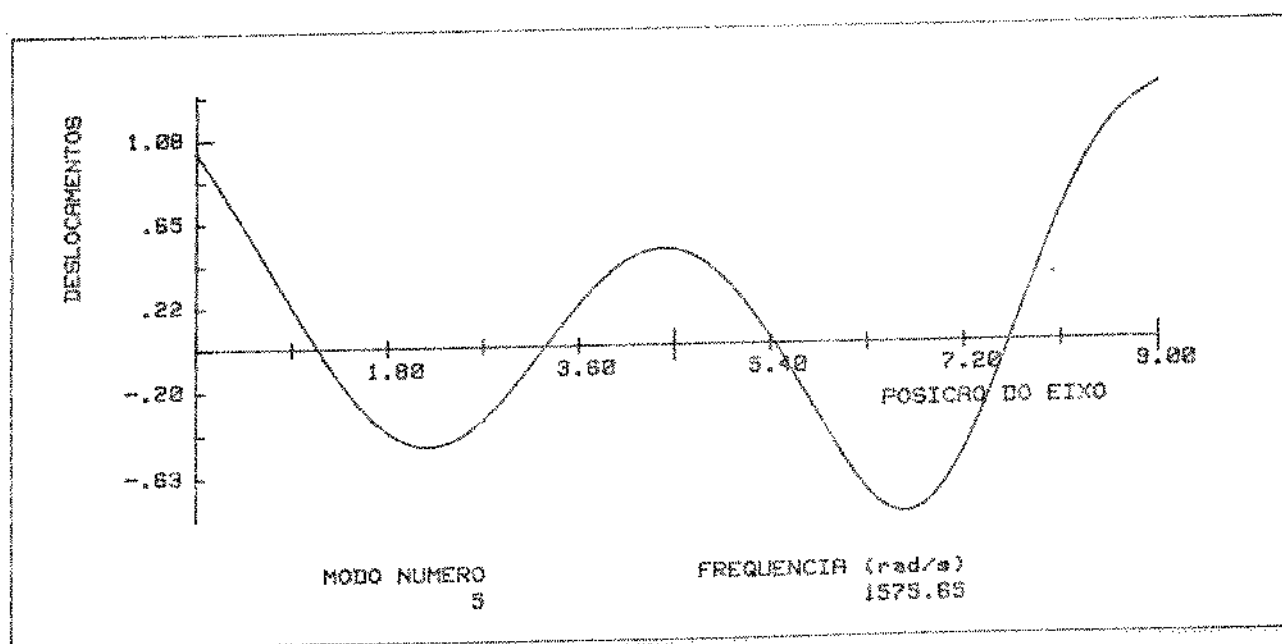
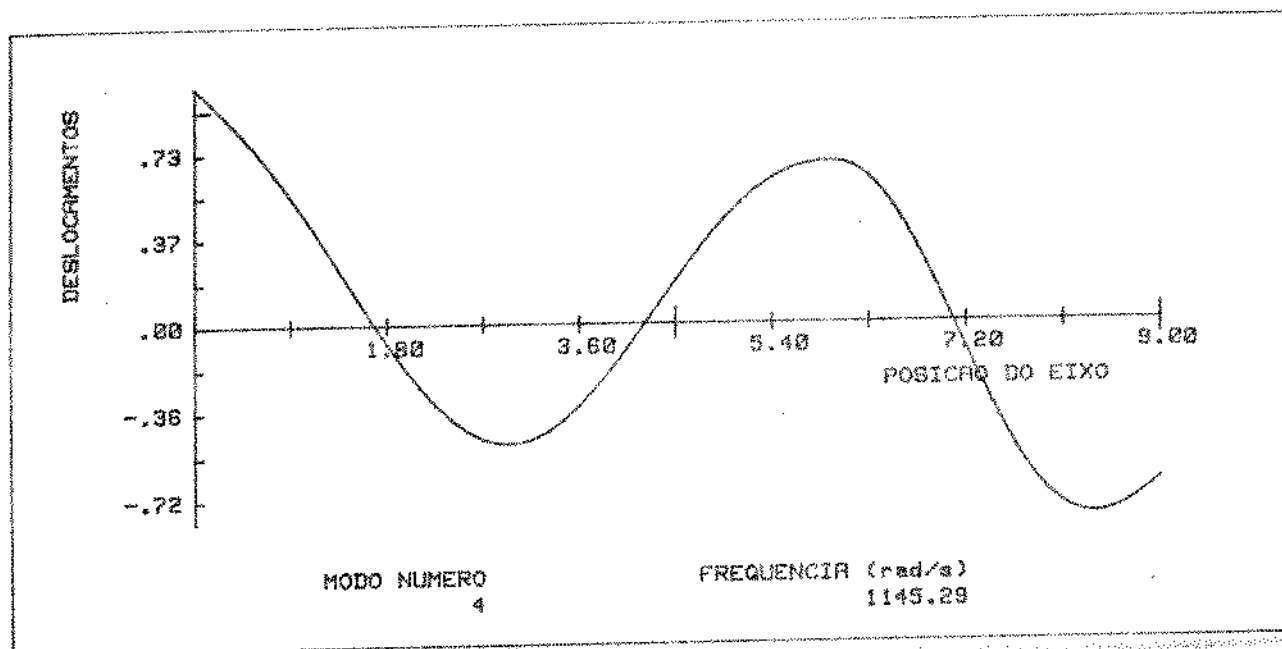


Fig. 4.7 - Continuação.

CAPÍTULO 5

VIBRAÇÕES FORÇADAS USANDO MODELOS CONTÍNUOS

O estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos quando submetidos a excitações externas ou mesmo auto-excitados é de fundamental importância no auxílio ao projeto destes sistemas.

Sabe-se que uma das principais causas de vibrações excessivas em sistemas rotativos é o desbalanceamento, sendo que o mesmo está presente em qualquer sistema rotativo e é introduzido por erros no processo de fabricação, deficiências na homogeneidade do material, existência de rasgos de chaveta, ranhuras nos eixos, etc.

O objetivo deste capítulo é levantar as características vibratórias de um sistema rotativo excitado por forças externas e por forças de desbalanceamento, que variam com a velocidade de rotação. Pretende-se nesta etapa do trabalho analisar os espectros em frequência das respostas em amplitude e em fase das estruturas.

O movimento dos sistemas mecânicos pode ser descrito por equações diferenciais do tipo mostrado na equação (5.1).

$$[M] \{ \ddot{z} \} + [K] \{ z \} + [C] \{ \dot{z} \} = \{ F_t \} \quad (5.1)$$

onde:

- $\{ z \}$ - vetor dos deslocamentos e inclinações
- $[M]$ - matriz de massa
- $[K]$ - matriz de rigidez
- $[C]$ - matriz de amortecimento
- $\{ F_t \}$ - forças que atuam no sistema.

As forças externas podem ser de origem hidráulica, magnética, mecânica, etc. que por sua vez podem ser consideradas como funções aleatórias ou funções periódicas.

Para a solução deste problema propõe-se o uso do método de matriz de transferência.

5.1. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA EIXOS

Analogamente ao capítulo 3 desenvolve-se a matriz de campo para o modelamento de eixos. Basicamente formulou-se o problema em dois planos de vibração, sendo que para um caso geral pode-se considerar um comportamento anisotrópico. Considera-se um modelamento contínuo de massa distribuída com solução teórica exata. Para o estudo das vibrações forçadas, usa-se um modelo no espaço cujo esquema está ilustrado na Figura 5.1 [24].

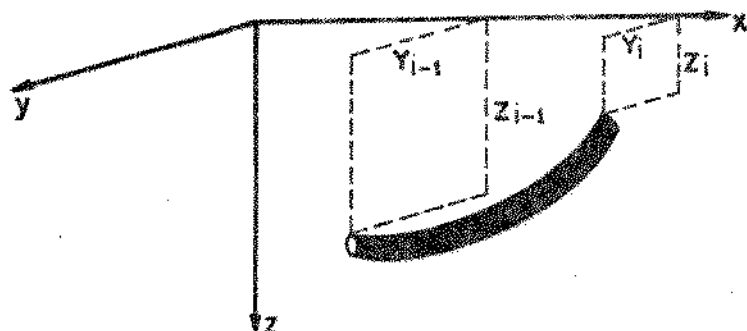


Fig. 5.1 - Modelo físico de um eixo contínuo no espaço.

Pode-se analisar o modelo em dois planos, sendo assim, montam-se os diagramas de esforços e de deflexão como mostrados na Figura 5.2.

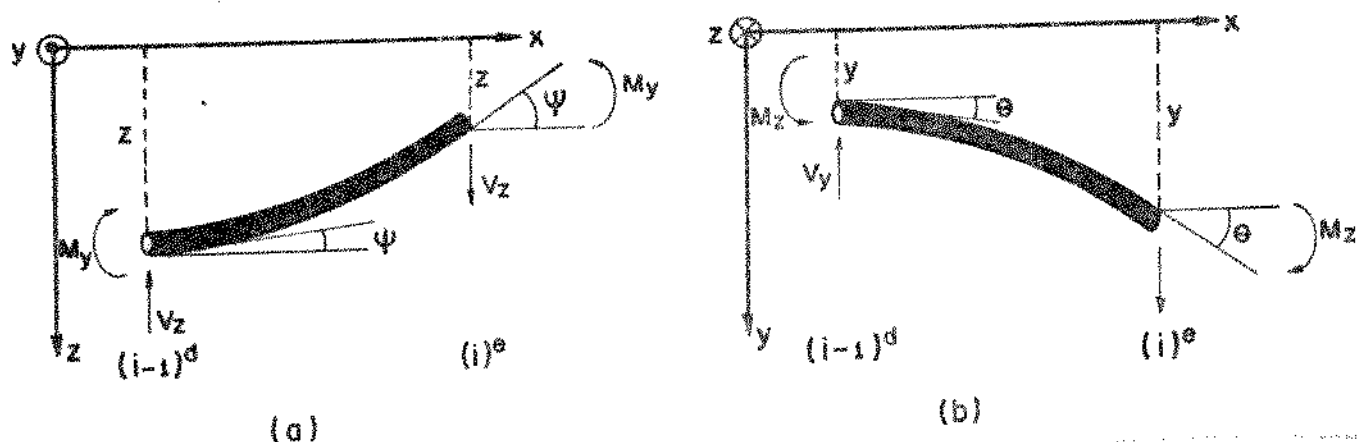


Fig. 5.2 - Diagrama de esforços e deflexão de um eixo

a) plano xz b) plano xy.

Desta forma o vetor de estado em cada ponto do sistema tem a seguinte configuração:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \{S\}_z \\ \{S\}_y \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde

$$\{S\}_z = \begin{Bmatrix} -Z \\ \psi \\ M_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\{S\}_y = \begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M_z \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Sendo assim, utilizando as matrizes de transferência desenvolvidas no capítulo 3.1 para o modelamento contínuo de eixos com solução exata [8], pode-se montar a matriz de campo que efetue a transferência de um estágio de eixo [24]:

$$\begin{Bmatrix} \{S\}_z \\ \{S\}_y \end{Bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} \{S\}_z \\ \{S\}_y \end{Bmatrix}_{i-1}^d \quad (5.4)$$

onde [0] é uma matriz quadrada nula de ordem 4 e as matrizes [A] e [B] são calculadas segundo as expressões (5.5) a (5.19).

$$[A] = [B] = \begin{bmatrix} C_0 - \delta C_2 & \ell [C_1 - (\sigma + \tau) C_3] & a C_2 & \frac{a \ell}{\beta^4} [-\sigma C_1 + (\beta^4 + \sigma^2) C_3] \\ \frac{\beta^4 C_3}{\ell} & C_0 - \tau C_2 & \frac{a}{\ell} [C_1 - \tau C_3] & a C_2 \\ \frac{\beta^4 C_2}{a} & \ell/a [-\tau C_1 + (\beta^4 + \tau^2) C_3] & C_0 - \tau C_2 & \ell [C_1 - (\sigma + \tau) C_3] \\ \frac{\beta^4}{a \ell} (C_1 - \sigma C_3) & \frac{\beta^4 C_2}{a} & \frac{\beta^4 C_3}{\ell} & C_0 - \sigma C_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

sendo

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\sigma - \tau)^2} \pm \frac{1}{2}(\sigma + \tau)} \quad (5.6)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (5.7)$$

$$C_0 = \Lambda (\lambda_2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cos \lambda_2) \quad (5.8)$$

$$C_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right) \quad (5.9)$$

$$C_2 = \Lambda (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2) \quad (5.10)$$

$$C_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right) \quad (5.11)$$

Para [A] tem-se:

$$a = \frac{\ell^2}{EJ_y} \quad (5.12)$$

$$\beta^4 = \frac{\mu \omega^2 \ell^4}{EJ_y} \quad (5.13)$$

$$\sigma = \frac{\mu \omega^2 \ell^2}{GA_{sz}} \quad (5.14)$$

$$\tau = \frac{\ell^2 \mu i_y^2 \omega^2}{EJ_y} \quad (5.15)$$

Para [B] tem-se:

$$a = \frac{\ell}{EJ_z} \quad (5.16)$$

$$\beta^4 = \frac{\mu \omega^2 \ell^4}{EJ_z} \quad (5.17)$$

$$\sigma = \frac{\mu \omega^2 \ell^2}{G A_{sy}} \quad (5.18)$$

$$\tau = \frac{\ell^2 \mu i_z \omega}{EJ_z} \quad (5.19)$$

onde:

- i_y - raio de giração em relação ao eixo y
- i_z - raio de giração em relação ao eixo z
- A_{sz} - área efetiva da secção quando submetida a esforços cortantes V_z
- A_{sy} - área efetiva da secção quando submetida a esforços cortantes V_y

No caso de eixos circulares ou de sistemas com simetria nos dois planos, as matrizes [A] e [B] são idênticas. Os modelos contínuos usados como mostrados nos capítulos 3 e 4 fornecem a solução exata a menos de erros numéricos nos cálculos computacionais. Deste modelamento em dois planos obtém-se as matrizes de campo com ordem dobrada (8x8) mas em alguns casos pode-se simplificar o sistema (4x4) utilizando a isotropia.

5.2. DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA PARA DISCOS E MANCAIS

As matrizes do ponto fornecem a transferência de estações pontuais do tipo massa concentrada, mola, amortecedor, etc. As estações de massa concentrada correspondem aos discos dos sistemas rotativos e este tipo de elemento pode ser utilizado na idealização de rotores de geradores, turbinas, etc.

Para a determinação das matrizes de ponto de massas concentradas aplica-se o princípio de D'Alembert e monta-se o diagrama de equilíbrio como mostrado na Figura 5.3, onde se analisa o movimento de translação e rotação de um "ponto" de massa em dois planos.

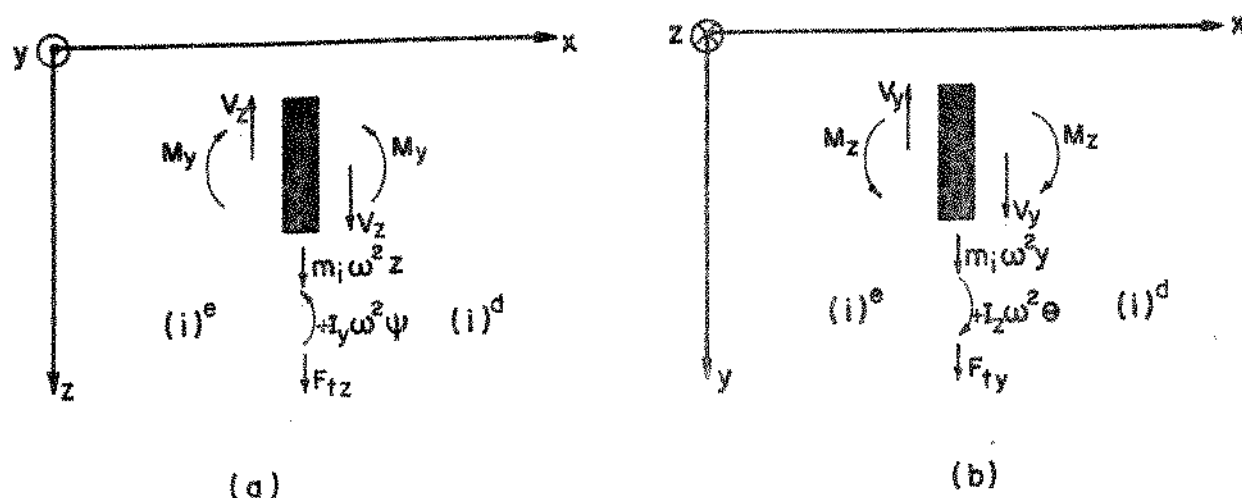


Fig. 5.3 - Diagrama de equilíbrio de um ponto de massa.

a) Plano xz b) Plano xy

No diagrama de equilíbrio do disco analisado inclui-se o movimento de rotação e a componente inercial do mesmo é representada por $I_z \omega^2$ ou $I_y \omega^2$ onde I_z e I_y representam os momentos de inércia de massa referentes aos planos xy e xz respectivamente.

A partir destes diagramas de equilíbrio (Figura 5.3) pode-se equacionar as forças envolvidas como segue:

$$V_{z1}^d = V_{z1}^e - m_1 \omega^2 z_1 - F_{Tz} \quad (5.20)$$

$$V_{y_i}^d = V_{y_i}^e - m_i \omega^2 y_i - F_{T_y} \quad (5.21)$$

$$M_{z_i}^d = M_{z_i}^e - I_z \omega^2 \theta \quad (5.22)$$

$$M_{y_i}^d = M_{y_i}^e - I_y \omega^2 \psi \quad (5.23)$$

Nas equações de equilíbrio supõe-se que só existem excitações do tipo força (F_{T_y} e F_{T_z}). Podem-se incluir nas equações (5.22) e (5.23) excitações do tipo momento.

Excitações de diversas origens (hidráulica, magnética, desbalanceamento, etc.) podem ser modeladas a partir desta formulação.

Observa-se também que, para montar a matriz de ponto, deve-se incluir as forças externas e com essa finalidade usa-se a formulação de matriz de transferência estendida. A configuração estendida das matrizes é usual [6,24] e consiste em definir mais uma coluna na matriz de transferência onde incluem-se as excitações. Para a compatibilidade do equacionamento acrescenta-se uma equação identidade ao sistema, obtendo-se desta forma multiplicações de matrizes com ordem compatível. A matriz de ponto estendida é apresentada na equação (5.24):

$$\begin{Bmatrix} \{s\}_z \\ \{s\}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_i^d = \begin{bmatrix} [P_z] & [0] & \{F_{T_z}\} \\ [0] & [P_y] & \{F_{T_y}\} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\}_z \\ \{s\}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_i^e \quad (5.24)$$

onde:

$$[F_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_y \omega^2 & 1 & 0 \\ m \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$[P_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_z \omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\{F_{Tz}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -F_{Tz}\} \quad (5.27)$$

$$\{F_{Ty}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -F_{Ty}\} \quad (5.28)$$

Estudam-se neste capítulo as vibrações harmônicas em regimes permanente e observa-se que a formulação aplicada permite introduzir qualquer tipo de excitações através de sua representação no domínio da frequência, ou seja, uma vez conhecido o espectro em frequência da excitação pode-se obter o espectro em frequência da resposta.

Para a representação da força de desbalanceamento utiliza-se um sistema de coordenadas girantes (ξ, η) solidário ao corpo e definido em qualquer instante por um ângulo Ωt (onde Ω é a frequência de rotação do sistema e t é o tempo), em relação às coordenadas inerciais conforme a Figura 5.4.

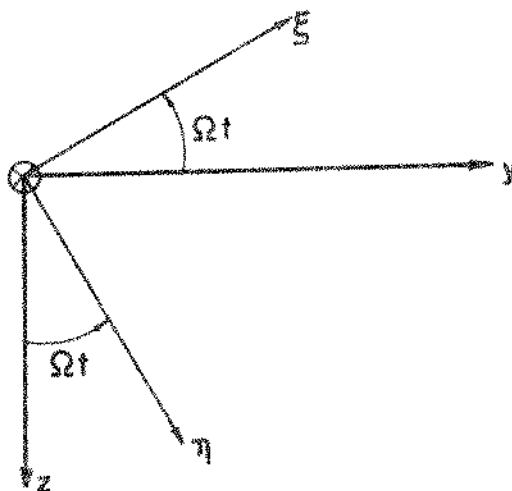


Fig. 5.4 - Sistema de coordenadas girantes (ξ, η) .

Pode-se definir uma força de desbalanceamento concentrando-se a massa do disco fora de seu centro de gravidade (CG) e representando-a por um vetor nas coordenadas (ξ, η) conforme mostrado na Figura 5.5.

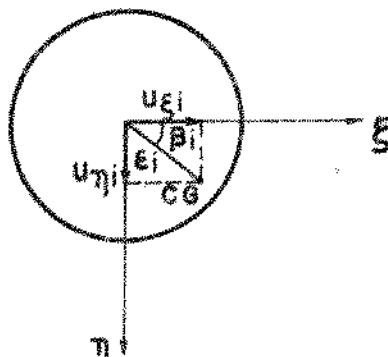


Fig. 5.5 - Definição das componentes do desbalanceamento.

O vetor que define o desbalanceamento tem amplitude ϵ_i e a sua posição no disco é definido pelo ângulo β_i . Desta forma representa-se o momento de desbalanceamento através das equações 5.29 e 5.30, o qual, para o modelamento utilizado, é uma excitação harmônica na frequência de rotação do sistema:

$$U_{\xi i} = m_i \epsilon_i \cos \beta_i \quad (5.29)$$

$$U_{\eta i} = m_i \epsilon_i \sin \beta_i \quad (5.30)$$

Descreve-se o desbalanceamento em coordenadas inerciais decompondo-o conforme mostrado na Figura 5.6.

Observa-se da Figura 5.6 que os momentos de desbalanceamento giram com a rotação Ω e provocam uma força proporcional ao quadrado desta rotação.

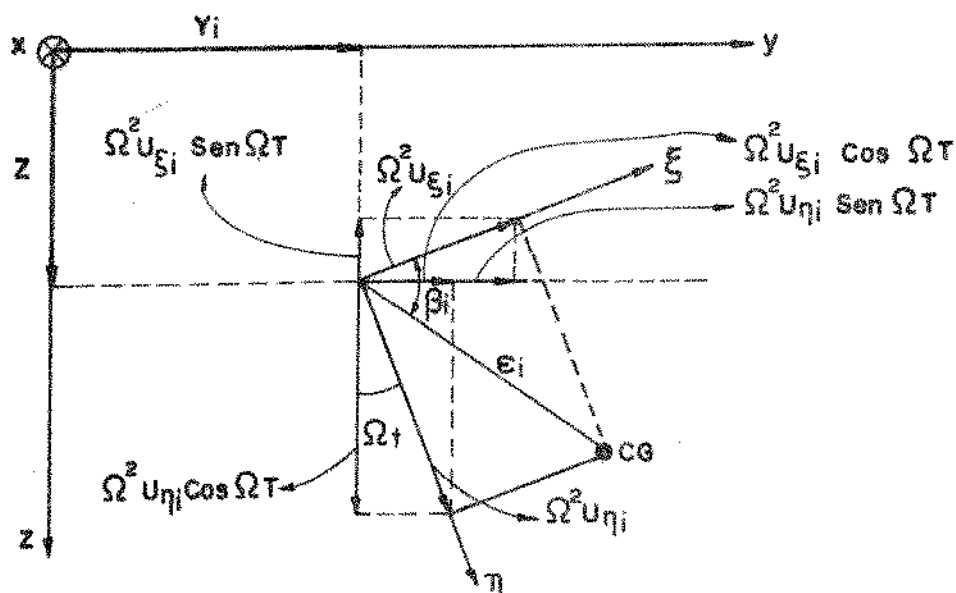


Fig. 5.6 - Decomposição do desbalanceamento em coordenadas inerciais.

As equações a seguir mostram as forças de desbalanceamento em coordenadas inerciais:

$$\Omega^2 U_{y_i} = \Omega^2 U_{\xi_i} \cos \Omega t + \Omega^2 U_{\eta_i} \sin \Omega t \quad (5.31)$$

$$\Omega^2 U_{z_i} = \Omega^2 U_{\eta_i} \cos \Omega t - \Omega^2 U_{\xi_i} \sin \Omega t \quad (5.32)$$

Usando a notação complexa obtêm-se:

$$\Omega^2 \bar{U}_{y_i} = \Omega^2 U_{\xi_i} - j \Omega^2 U_{\eta_i} \quad (5.33)$$

$$\Omega^2 \bar{U}_{z_i} = \Omega^2 U_{\eta_i} + j \Omega^2 U_{\xi_i} \quad (5.34)$$

Os vetores de excitação por desbalanceamento são dados por (5.35) e (5.36) e observa-se que suas componentes podem ser decompostas em parte real e imaginária.

$$\{ F_{t_y} \} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \Omega^2 \bar{U}_{y_i} \right\} \quad (5.35)$$

$$\{ F_{t_z} \} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \Omega^2 \bar{U}_{z_i} \right\} \quad (5.36)$$

Outra matriz de ponto a ser formulada é a matriz que faz a transferência de uma estação do tipo mancal. Existem diversas idealizações para diferentes tipos de mancais [6,24] sendo que as representações mais simples consistem em levar em conta apenas a rigidez. Modelos mais sofisticados podem representar mancais hidrodinâmicos onde há acoplamento nas equações de movimento em relação às coordenadas y e z e seus parâmetros variam de forma não linear.

Propõe-se neste capítulo o estudo de mancais com efeitos desacoplados (planos xy e xz independentes) sendo que se inclui no modelo a rigidez e o amortecimento viscoso. Supõe-se vibrações harmônicas com frequência ω .

A Figura 5.7 mostra o modelo físico do mancal e o seu diagrama de equilíbrio, onde C_z e C_y são os coeficientes de amortecimento.

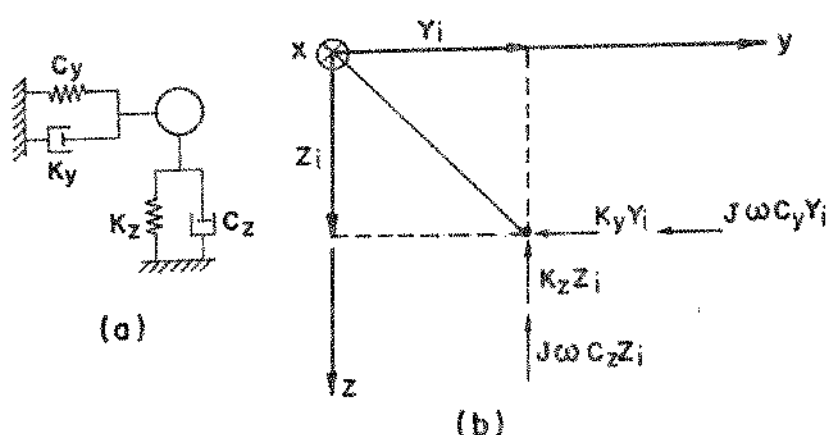


Fig. 5.7 - (a) Modelo físico de um mancal.

(b) Diagrama de equilíbrio do mancal.

Como se pode notar, quando se supõe uma vibração harmônica para o sistema mecânico e tem-se um modelo de amortecimento viscoso obtêm-se uma força de amortecimento proporcional à fre-

quência e defasada de 90° da força de mola (eixo imaginário), [8, 13].

As equações de equilíbrio do sistema são dadas a seguir:

$$V_z^d = V_z^e - K_z Z_i - j \omega C_z Z_i \quad (5.37)$$

$$V_y^d = V_y^e - K_y Y_i - j \omega C_y Y_i \quad (5.38)$$

Usando a formulação das matrizes de transferência estendida obtêm-se as seguintes matrizes complexas:

$$\begin{Bmatrix} \{s\}_z \\ \{s\}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_i^d = \begin{bmatrix} [C] & [0] & \{0\} \\ [0] & [D] & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\}_z \\ \{s\}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_i^e \quad (5.39)$$

onde:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_z - j\omega C_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_y - j\omega C_y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

No capítulo 5.3 introduz-se a técnica de manipulação com matrizes de transferência complexas e mostra-se como trabalhar com a formulação das matrizes estendidas.

5.3. MÉTODO DE RESOLUÇÃO PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Todos os modelos desenvolvidos neste capítulo pressupõem que os sistemas mecânicos vibram em regime permanente e a solução proposta é harmônica para as variáveis de estado. Introduziu-se no modelo forças de excitação sendo que para o caso específico do desbalanceamento nota-se que existem componentes de força com parte real e imaginária. A existência de termos complexos nas matrizes de transferência, como é o caso dos termos proporcionais à velocidade (amortecimento viscoso), implica no uso do cálculo com variáveis complexas.

Sabendo que as vibrações são harmônicas pode-se definir as variáveis do problema de flexão como mostrado nas equações a seguir:

$$z = \operatorname{Re} (\bar{z} e^{j\omega t}) \quad (5.42)$$

$$\psi = \operatorname{Re} (\bar{\psi} e^{j\omega t}) \quad (5.43)$$

$$M_y = \operatorname{Re} (\bar{M}_y e^{j\omega t}) \quad (5.44)$$

$$V_z = \operatorname{Re} (\bar{V}_z e^{j\omega t}) \quad (5.45)$$

onde

$$\bar{z} = z^R + j z^I \quad (5.46)$$

$$\bar{\psi} = \psi^R + j \psi^I \quad (5.47)$$

e assim por diante. Desta forma é fácil observar que todas as variáveis possuem parte real (índice R) e parte imaginária (índice I). Uma vez definidas as matrizes complexas do capítulo 5.2 pode-

se esperar que a matriz de transferência do sistema também seja complexa. Denominando-se $[\bar{U}]$ como a matriz de transferência complexa do sistema pode-se escrever que:

$$\{\bar{s}\}_i = [\bar{U}]_i \{\bar{s}\}_{i-1} \quad (5.48)$$

onde o vetor de estado complexo \bar{s} é:

$$\{\bar{s}\}_i = \{s\}_i^R + j\{s\}_i^I \quad (5.49)$$

e a matriz de transferência complexa vale:

$$[\bar{U}]_i = [U]_i^R + j[U]_i^I \quad (5.50)$$

Desenvolvendo-se a expressão (5.48) e usando-se as notações utilizadas em (5.49) e (5.50) tem-se:

$$\{s\}_i^R + j\{s\}_i^I = ([U]_i^R + j[U]_i^I) (\{s\}_{i-1}^R + j\{s\}_{i-1}^I) \quad (5.51)$$

$$\{s\}_i^R + j\{s\}_i^I = ([U]_i^R \{s\}_{i-1}^R - [U]_i^I \{s\}_{i-1}^I) + j([U]_i^R \{s\}_{i-1}^I + [U]_i^I \{s\}_{i-1}^R) \quad (5.52)$$

Passando para a notação matricial e mantendo-se a forma estendida das matrizes tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \{s\}_i^R \\ \{s\}_i^I \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} [U]_i^R & -[U]_i^I & \{F_t\}_i^R \\ [U]_i^I & [U]_i^R & \{F_t\}_i^I \\ (0) & (0) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\}_{i-1}^R \\ \{s\}_{i-1}^I \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (5.53)$$

Desta forma para o estudo de um caso genérico definem-se as matrizes de transferência de ordem (17x17) e à medida que são feitas hipóteses simplificadoras a ordem do sistema pode ser alterada. Alguns casos típicos permitem um tratamento simplificado tais como simetria nos planos de vibração (neste caso as vibrações são iguais nas duas direções e não é necessário calculá-las duas vezes) ou mesmo inexistência de parte imaginária nas matrizes utilizadas (mancais sem amortecimento - neste caso as componentes reais e imaginárias são iguais se a excitação só possui componentes reais). Sempre que possível é interessante reduzir a ordem do sistema pois economiza-se memória e tempo computacional.

Para a resolução do problema deve-se inicialmente determinar o vetor de estado na posição inicial. Para tanto monta-se a matriz de transferência do sistema usando o método das multiplicações sucessivas exposto no capítulo 2.2 e obtém-se o sistema matricial abaixo para um caso geral com n estações:

$$\{\bar{S}\}_{n,17 \times 1} = [\bar{F}]_n [\bar{P}]_n [\bar{F}]_{n-1} \dots [\bar{F}]_2 [\bar{P}]_1 [\bar{F}]_1 \{\bar{S}\}_0 = [\bar{U}]_{17 \times 17} \{\bar{S}\}_0, 17 \times 1 \quad (5.54)$$

onde:

- $[\bar{F}]$ - matriz de campo complexa (17x17)
- $[\bar{P}]$ - matriz de ponto complexa (17x17)
- $[\bar{U}]$ - matriz complexa do sistema (17x17)

Como se pode notar a equação (5.54) representa um sistema de equações lineares de onde, aplicadas as condições de contorno nas estações iniciais e finais, obtém-se a solução para cada frequência de vibração do sistema mecânico.

Para exemplificar o procedimento indica-se a solução para o problema de um sistema bi-apoiado em mancais flexíveis onde os vetores de estado estendidos são dados pelas expressões a seguir:

$$\{\bar{S}\}_0^T = \left\{ \begin{matrix} z^R & \psi^R & 0 & 0 \\ -y^R & \theta^R & 0 & 0 \\ -z^I & \psi^I & 0 & 0 \\ -y^I & \theta^I & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (5.55)$$

$$\{\bar{S}\}_n^T = \left\{ \begin{array}{cccc} Z^R & \psi^R & 0 & 0 \\ -Y^R & \theta^R & 0 & 0 \\ -Z^I & \psi^I & 0 & 0 \\ -Y^I & \theta^I & 0 & 0 \end{array} \right\} 1 \left\{ \right\}_n \quad (5.56)$$

Levando-se em conta a equação (5.54) conjuntamente com as condições de contorno mostradas em (5.55) e (5.56) obtêm-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} [U] & \{q\} \\ \hline [0] & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} -Z^R \\ \psi^R \\ -Y^R \\ \theta^R \\ -Z^I \\ -\psi^I \\ -Y^I \\ \theta^I \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \{0\} \quad (5.57)$$

onde

$\{q\}$ - vetor das forças de excitação.

Como se deseja as variáveis de estado da estação inicial monta-se o seguinte sistema de equações lineares:

	1	2	5	6	9	10	13	14
3	U_{ij}							
4								
7								
8								
11								
12								
15								
16								

$$\begin{pmatrix} -Z^R \\ \psi^R \\ -Y^R \\ \theta^R \\ -Z^I \\ -\psi^I \\ -Y^I \\ \theta^I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{3,17} \\ -q_{4,17} \\ -q_{7,17} \\ -q_{8,17} \\ -q_{11,17} \\ -q_{12,17} \\ -q_{15,17} \\ -q_{16,17} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

onde a numeração das linhas e colunas referem-se às linhas e colunas da matriz do sistema inicial, equação (5.55).

Na resolução do sistema de equações mostrado na equação (5.58) pode-se usar desde a simples inversão da matriz $[U]$ até métodos numéricos de resolução de sistemas de equações lineares mais elaborados [25].

Para calcular a resposta em outras estações retorna-se à forma das multiplicações sucessivas, equação (5.54). Repete-se o procedimento para outros valores de frequência obtendo-se o espectro da resposta para qualquer ponto do sistema. O Apêndice 4 mostra o diagrama de blocos e a listagem do programa implementado.

5.4. APLICAÇÕES EM UM ROTOR DE LAVAL

Sabe-se que um rotor de Laval é um sistema simples porém de grande utilidade na compreensão dos fenômenos da dinâmica de rotação. Considere-se um rotor de Laval em um plano conforme a Figura 5.8.

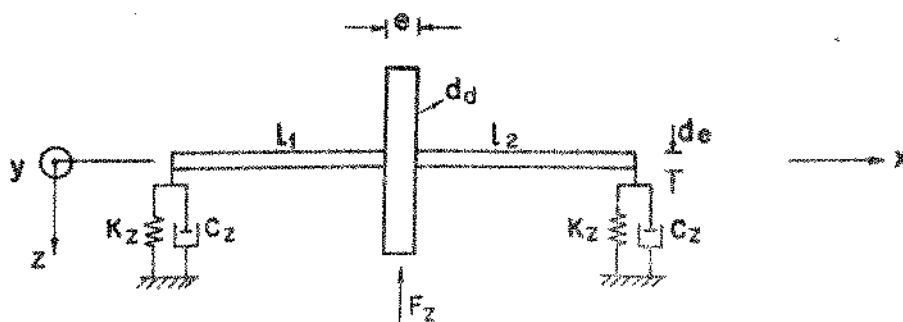


Fig. 5.8 - Modelo físico de um rotor de Laval.

Os valores das variáveis do modelo estão descritos na tabela 5.1.

TABELA 5.1 - Descrição dos dados do sistema da Figura 5.8.

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	VALOR	UNIDADES
K_z	Rigidez dos mancais na direção z	8,15 E 4	N/m
d_e	Diâmetro dos eixos	8	mm
l_1, l_2	Comprimento dos eixos	142,5	mm
d_d	Diâmetro do disco	147	mm
C_z	Amortecimento dos mancais na direção z	4,15 E 2	N.s/m

Analisa-se inicialmente o modelo apresentado sem incluir o efeito de amortecimento nos mancais ($C_z=0$). O modelamento para os eixos foi realizado incluindo-se os efeitos de massa distribuída, inércia de inclinação e deformação devido ao cisalhamento com solução exata derivada diretamente da equação diferencial (Capítulo 5.1).

O disco foi modelado por uma matriz de ponto. Simulou-se uma excitação externa no disco do tipo senoidal:

$$F_z = A \sin \omega T \quad (5.59)$$

e variou-se a sua frequência entre 0 e 500 rad/s.

Calculou-se a resposta no disco segundo a formulação descrita no capítulo 5.3, sendo esta, dada pela equação:

$$Z = \sqrt{(Z^R)^2 + (Z^I)^2} \quad (5.60)$$

onde:

Z^R - parte real da resposta do sistema em deslocamento

Z^I - parte imaginária da resposta do sistema em deslocamento

Z - amplitude da resposta em deslocamento.

Para o ângulo de fase entre a excitação e a resposta ob

têm-se a seguinte expressão:

$$\phi = \text{ATAN} \left(\frac{Z^I}{Z^R} \right) \quad (5.61)$$

onde

ϕ - ângulo de fase entre a excitação e a resposta.

Os resultados obtidos estão graficados na Figura 5.9.

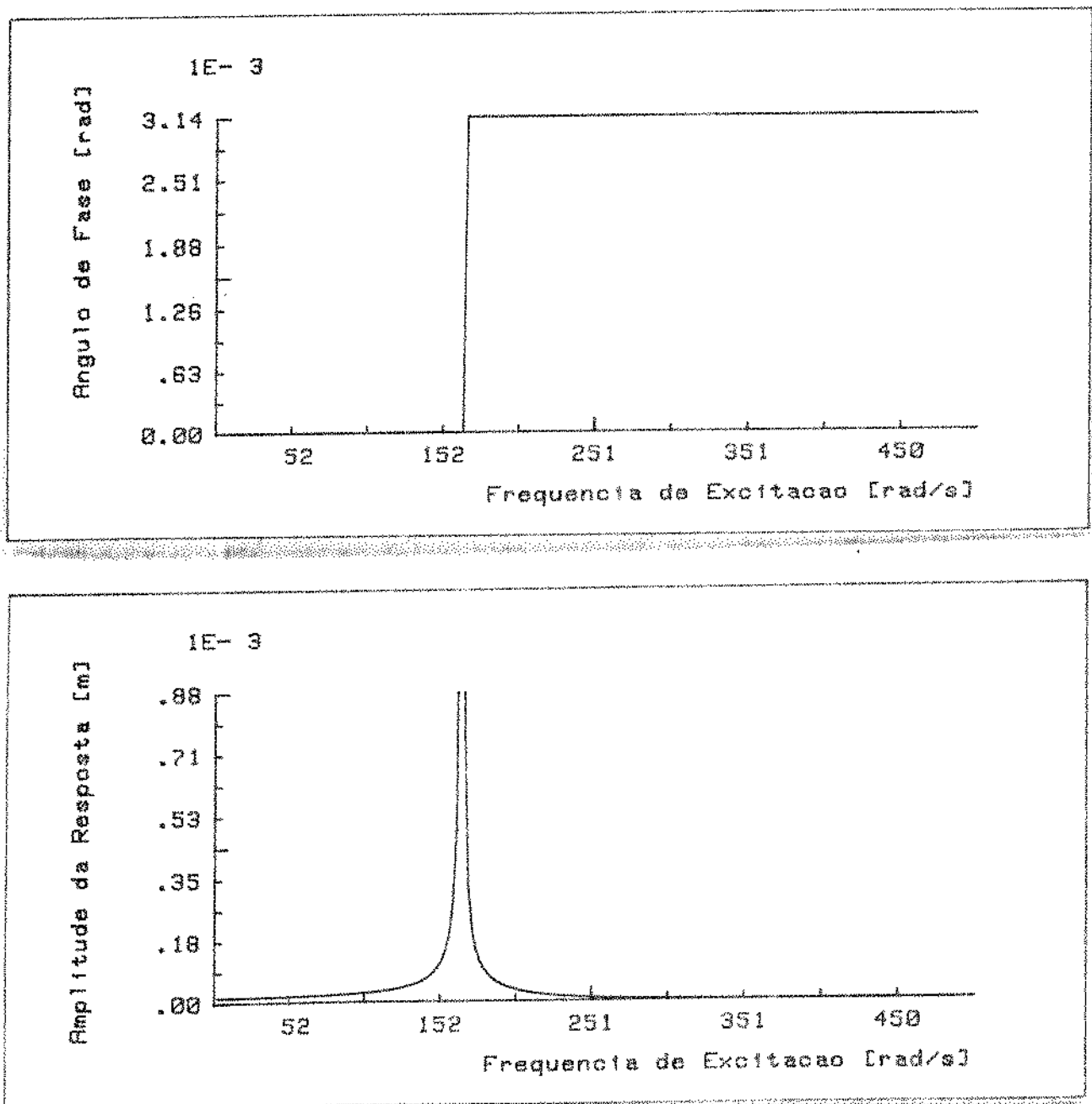


Fig. 5.9 - Ângulo de fase e amplitude da resposta devido a uma excitação senoidal do modelo da Figura 5.8.

Observa-se que os picos de amplitude são finitos para um exemplo onde não há amortecimento pois usou-se uma resolução discreta em frequência. Considera-se neste estudo que o rotor não está girando. Pode-se observar dos resultados obtidos que a existência de mancais flexíveis diminui o valor das frequências naturais em relação ao exemplo calculado no capítulo 2. Dada a simetria do modelo a resolução pode ser feita usando um sistema matricial de ordem 5x5 pois supõe-se simetria nos planos de vibração, a parte imaginária da resposta é nula e só existe excitação com parte real, não havendo amortecimento para acoplar as coordenadas reais e imaginárias.

Um segundo modelo foi analisado incluindo-se o efeito do amortecimento no sistema. Segundo o rotor de Laval mostrado na Figura 5.8 introduziu-se um amortecimento do tipo viscoso nos mancais onde:

$$C_2 = 4,15E 2 \frac{N.s}{m} \quad (5.62)$$

com isto a parte imaginária fica diferente de zero e, portanto, a ordem do sistema matricial será (9x9).

Em função do amortecimento introduzido pode-se observar uma variação contínua no ângulo de fase e uma redução nos níveis de amplitude do deslocamento. O efeito giroscópico do sistema é desprezível na análise deste modo natural de vibração pois o disco do rotor de Laval não possui movimento de rotação no eixo y e os eixos são bastante delgados.

Os resultados obtidos estão dispostos na Figura 5.10.

Pode-se definir outro tipo de excitação e estudar os seus efeitos. Tomou-se o mesmo exemplo da Figura 5.8 com amortecimento e dobrou-se a ordem do sistema matricial na análise da vibração em dois planos inicialmente isotrópicos.

Definiu-se uma excitação de desbalanceamento no disco com parte real e imaginária nas duas direções. ($m_i \xi_i = 1$)

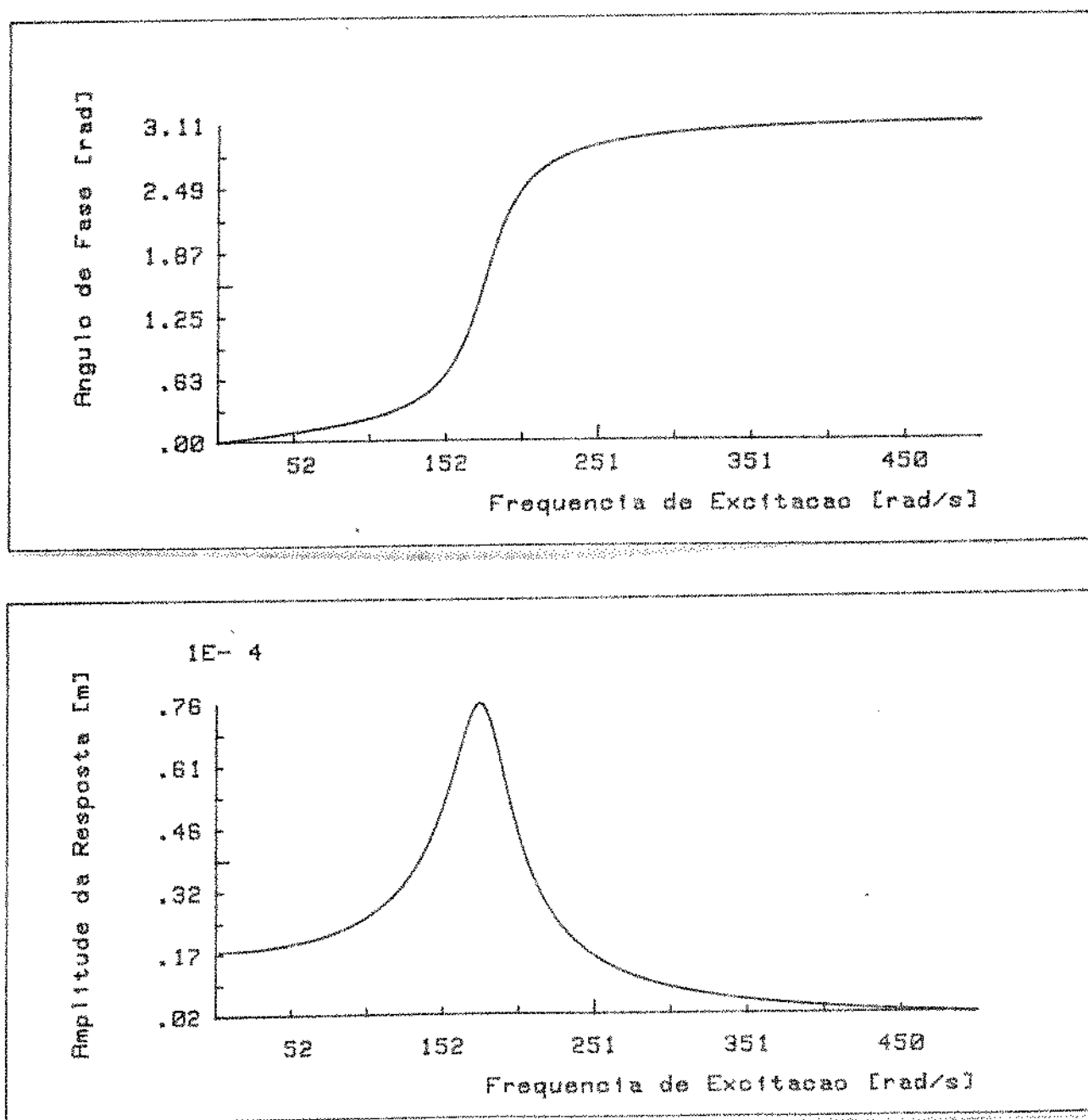


Fig. 5.10 - Ângulo de fase e amplitude da resposta devido a uma excitação senoidal incluindo amortecimento.

Neste caso o movimento do centro do disco é circular. Quando ocorre anisotropia nas características do sistema nos planos de vibração define-se uma trajetória elíptica do centro do disco. Considerando-se uma solução harmônica para cada plano de vibração pode-se mostrar que o semi-eixo maior do movimento elíp-

tico é dado por |10|.

$$a = \left[\frac{1}{2} \left(Z^R{}^2 + Z^I{}^2 + Y^R{}^2 + Y^I{}^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(Z^R{}^2 + Z^I{}^2 - Y^R{}^2 - Y^I{}^2 \right)^2 + \left(Z^R Y^R - Z^I Y^I \right)^2} \right]^{1/2} \quad (5.63)$$

E o ângulo de fase para o movimento elíptico no espaço é definido como sendo a fase entre a direção da amplitude máxima e o referencial inercial, já que a excitação é fixa a um referencial móvel (ξ, η) . O ângulo de fase é dado por |10|.

$$\phi = \frac{1}{2} \text{ATAN} \left[\frac{2 \left(Z^R Y^R + Z^I Y^I \right)}{Z^R{}^2 + Z^I{}^2 + Y^R{}^2 - Y^I{}^2} \right] + \frac{1}{2} \text{ATAN} \left[\frac{2 \left(Z^R Z^I + Y^R Y^I \right)}{Z^R{}^2 - Z^I{}^2 + Y^R{}^2 - Y^I{}^2} \right] \quad (5.64)$$

Os resultados obtidos estão dispostos nos gráficos da Figura 5.11.

Com o intuito de verificar o comportamento genérico de um rotor de Laval em flexão no espaço propõe-se o estudo do mesmo com mancais anisotrópicos com rigidez diferentes nos dois planos e usa-se o modelo da Figura 5.8 sendo que as propriedades dos eixos e discos continuam as mesmas e modeladas utilizando-se as mesmas hipóteses anteriores.

As propriedades dos mancais estão descritas a seguir:

$$K_z = 8,15 \text{ E } 4 \quad \text{N/m} \quad (5.65)$$

$$K_y = 4,15 \text{ E } 4 \quad \text{N/m} \quad (5.66)$$

$$C_z = 4,15 \text{ E } 1 \quad \text{N.s/m} \quad (5.67)$$

$$C_y = 4,15 \text{ E } 1 \quad \text{N.s/m} \quad (5.68)$$

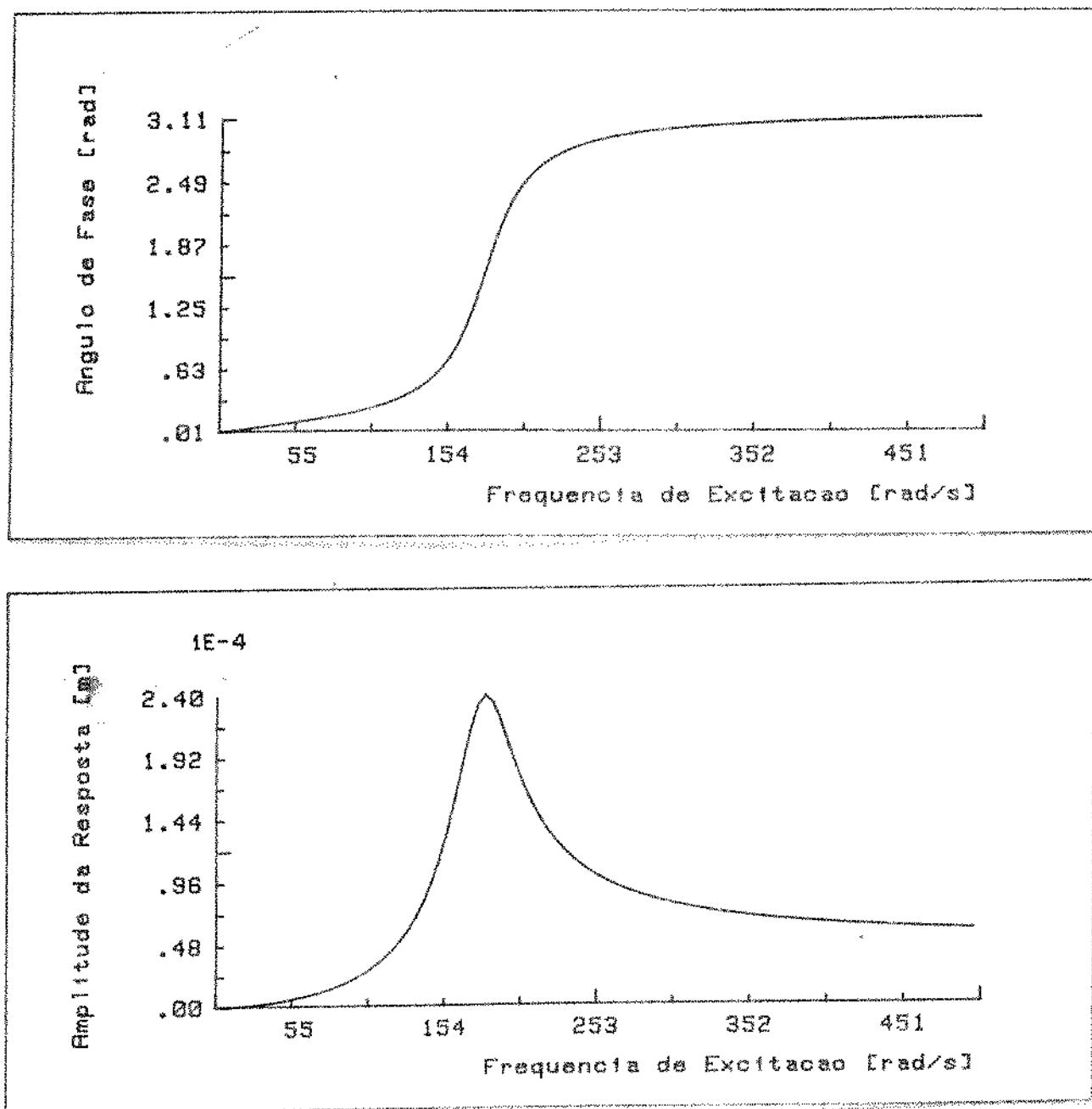


Fig. 5.11 - Ângulo de fase e amplitude da resposta devido a uma excitação de desbalanceamento do modelo da Figura 5.8.

Os valores utilizados estão baseados em resultados experimentais obtidos em [14]. Definiu-se para este modelo uma excitação de desbalanceamento no disco e calculou-se a amplitude máxima da resposta no disco, equação (5.63). Os resultados obtidos estão no gráfico da Figura 5.12.

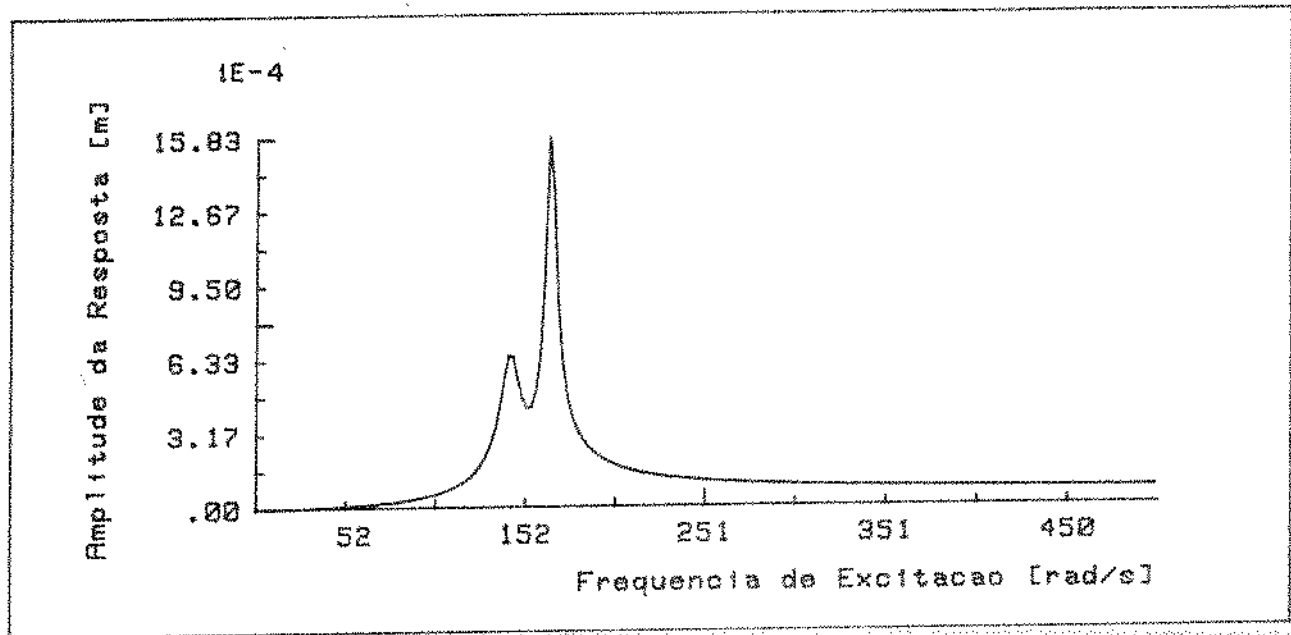


Fig. 5.12 - Amplitude da resposta ao desbalanceamento de um rotor de Laval com mancais anisotrópicos.

Como era de se esperar aparecem duas velocidades críticas no sistema, uma em cada plano de vibração já que as propriedades nas duas direções são diferentes.

5.5. APLICAÇÕES EM UM MODELO DE LABORATÓRIO - ESTUDO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE FASE

Para estudar o comportamento do ângulo de fase da função de resposta em frequência utiliza-se o modelo físico da Figura 5.13.

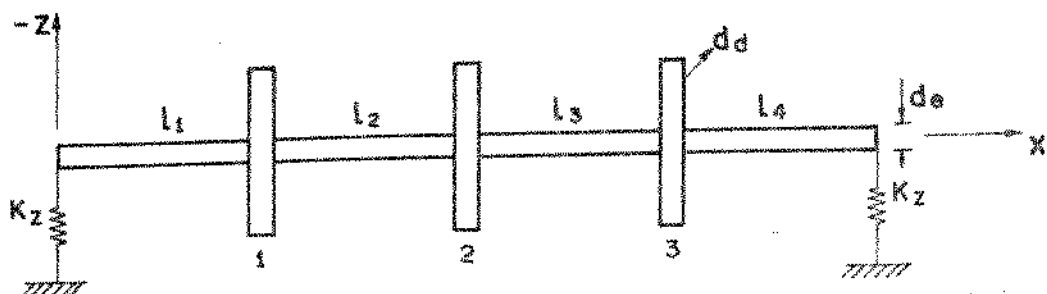


Fig. 5.13 - Modelo físico para o estudo da variação do ângulo de fase.

Os dados do modelo da Figura 5.13 estão na Tabela 5.2.

TABELA 5.2 - Dados do modelo da Figura 5.13.

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	VALOR	UNIDADES
d_e	Diâmetro do eixo	12,5	mm
d_d	Diâmetro do disco	150	mm
e	Espessura do disco	14	mm
l_1	Comprimento do eixo	150	mm
$l_2=l_3=l_4$	Comprimento do eixo	135	mm
K_z	Rigidez dos mancais na direção z	7 E 7	N/m

Modelou-se o sistema considerando-o sem rotação em x e concentrou-se em matrizes de ponto os discos incluindo o efeito de inércia de inclinação. Para os eixos manteve-se o mesmo modelo contínuo com efeitos de inércia de inclinação, deformação devido ao cisalhamento e massa distribuída. Nos mancais utilizou-se uma matriz de ponto com efeito de mola. O estudo é feito considerando a isotropia para os dois planos e com isto o sistema matricial é da ordem (9x9).

Propõe-se uma excitação senoidal unitária com a frequência variando de 0 a 2000 rad/s aplicada no disco 1 e calcula-se a resposta neste mesmo ponto. Os resultados teóricos obtidos estão mostradas na Figura 5.14.

Simulou-se o exemplo experimentalmente usando um sistema de excitação eletromagnético ("shaker") controlado onde reproduziu-se uma excitação senoidal de frequência variável. A força transmitida foi medida utilizando-se um transdutor de força piezoelétrico e a resposta obtida no mesmo disco foi medida utilizando-se um transdutor de deslocamento sem contato. Com um voltímetro

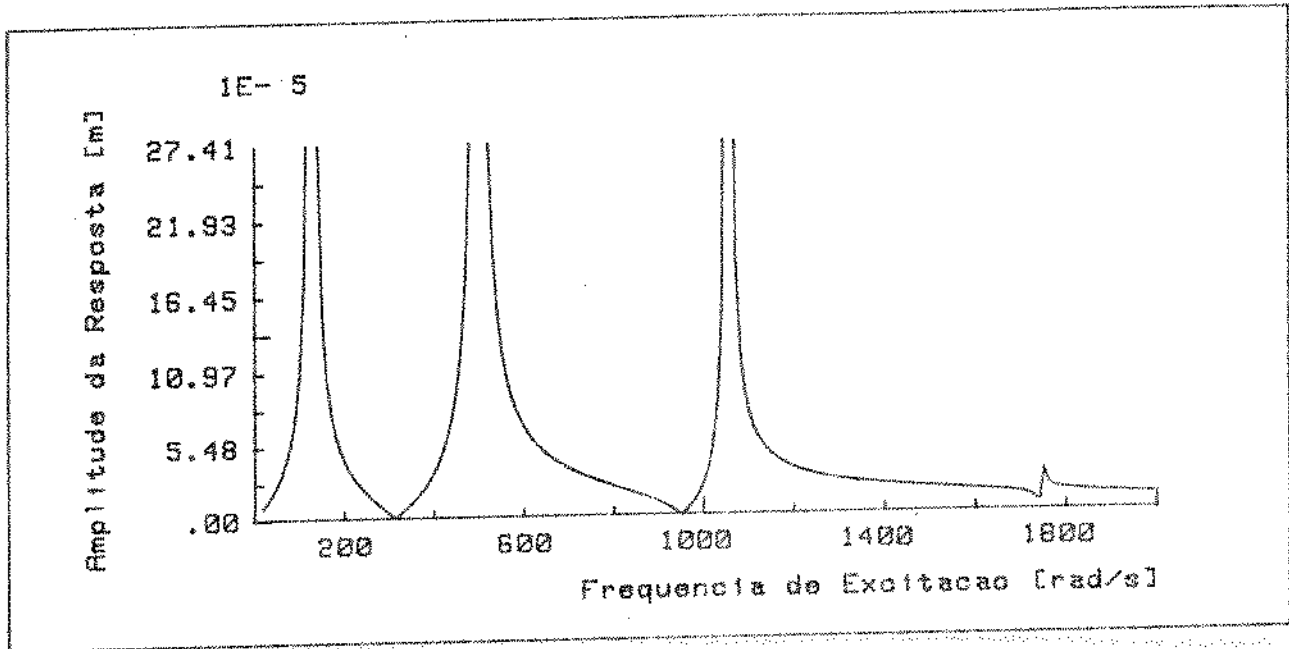


Fig. 5.14 - Amplitude da resposta em função da frequência de excitação.

de valor rms e um registrador x.t registrou-se amplitude da resposta em frequência do sistema (Figura 5.15).

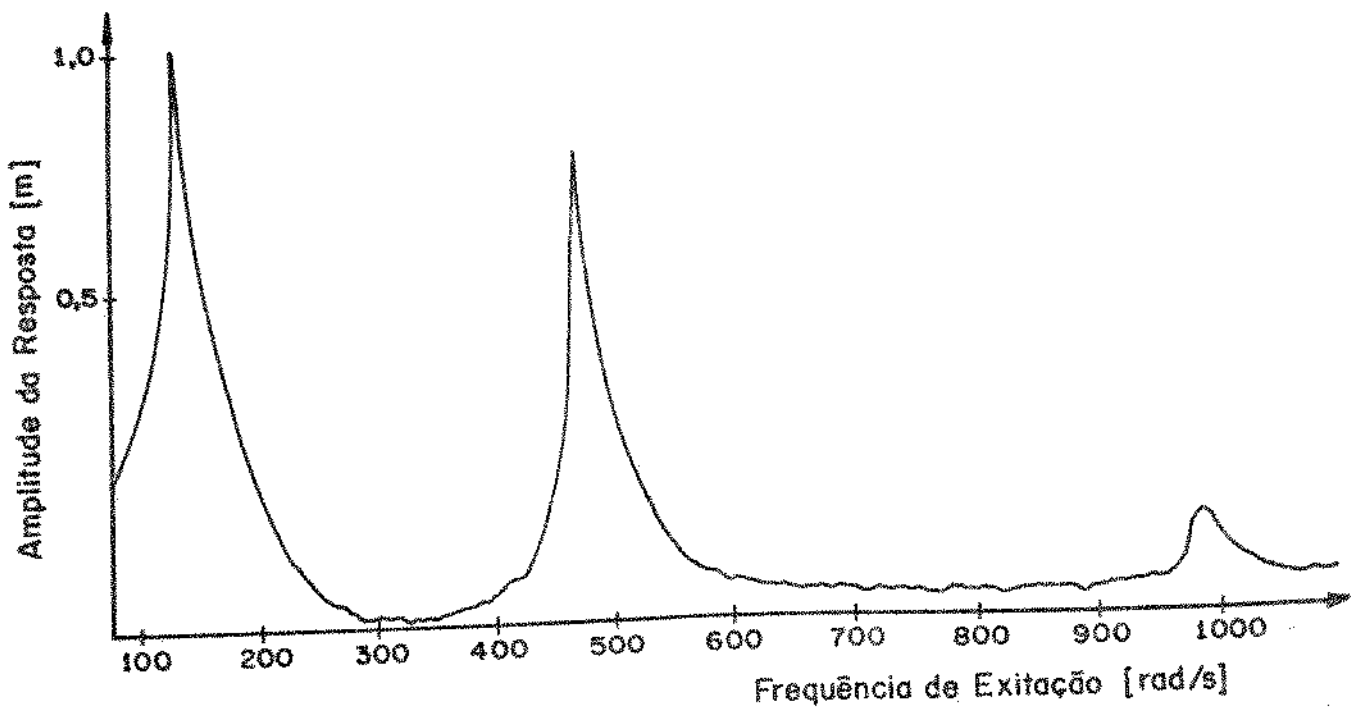


Fig. 5.15 - Amplitude da resposta obtida experimentalmente.

Os valores teóricos e experimentais obtidos para as frequências de ressonância do sistema estão apresentadas na Tabela 5.3. Os erros foram calculados tomando-se como referência os valores teóricos e estão na faixa de 9% e são provenientes principalmente do modelamento dos mancais onde foram utilizados valores elevados para a rigidez.

TABELA 5.3 - Frequência de ressonância do sistema rad/s

	Teóricas	Experimentais	Desvios [%]
Freq-1 [rad/s]	141.1	127.0	9.99
Freq-2 [rad/s]	513.0	463.7	9.61
Freq-3 [rad/s]	1069.6	980.2	8.37

Não é de interesse para este exemplo ajustar o modelo matemático pois deseja-se principalmente estudar o comportamento do ângulo de fase entre a força de excitação e a resposta em deslocamento. Para tanto calculou-se neste mesmo exemplo o ângulo de fase em função da frequência de excitação e o resultado é apresentado no gráfico da Figura 5.16.

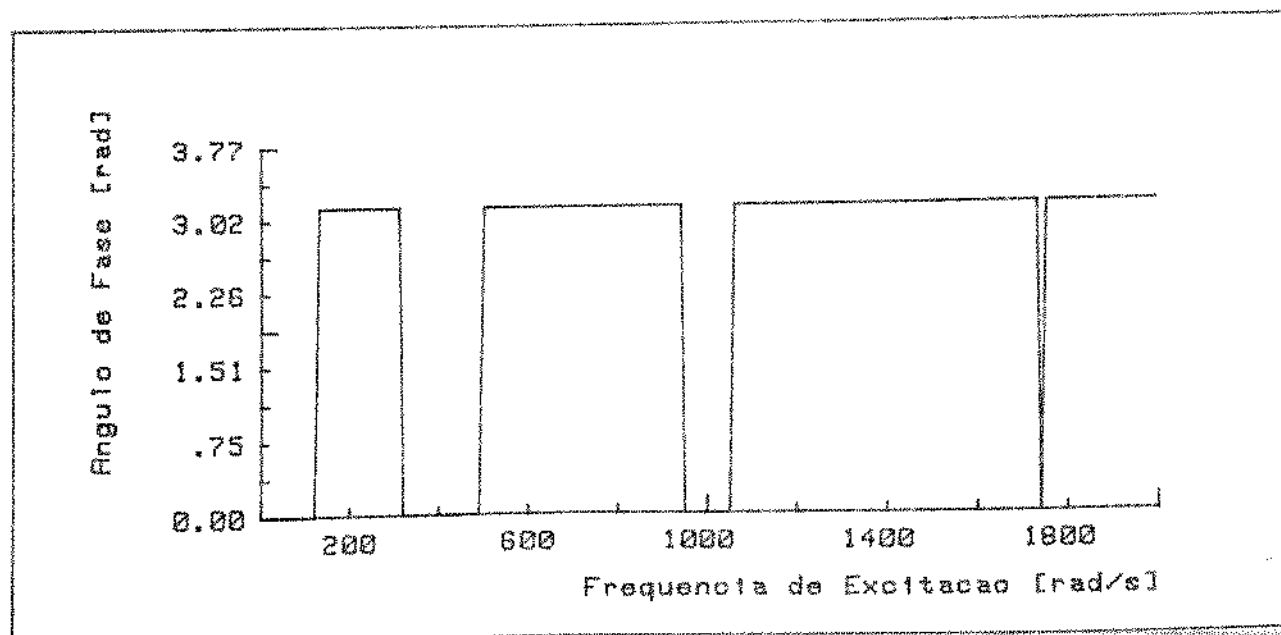


Fig. 5.16 - Ângulo de fase em função da frequência de excitação.

Sendo o sistema sem amortecimento observa-se no gráfico a mudança de fase em pontos de ressonância mas pode-se observar também que há mudanças de fase em pontos intermediários de anti-ressonância. Usando-se a mesma montagem experimental anterior utilizou-se um medidor de fase com saída DC proporcional e registrou-se a fase entre a excitação medida na célula de carga piezoelétrica e a resposta medida com o sensor de deslocamento sem contato. Os resultados qualitativos obtidos estão no gráfico da Figura 5.17. Procurou-se definir apenas a mudança de fase e não o seu valor absoluto. Algumas flutuações no sinal aparecem devido a problemas de saturação ("overflow") na entrada do medidor de fase. A análise foi feita variando-se a frequência do excitador eletromagnético na faixa de 0 a 1400 rad/s. Os pontos 1, 2, 3 da Figura 5.17 mostram os pontos referentes as ressonâncias e os pontos 4, 5 registram a mudança de fase nos pontos de anti-ressonância. Observa-se da Figura 5.17 que o ponto de anti-ressonância do terceiro modo de vibração não ficou caracterizado dentro da faixa de análise.

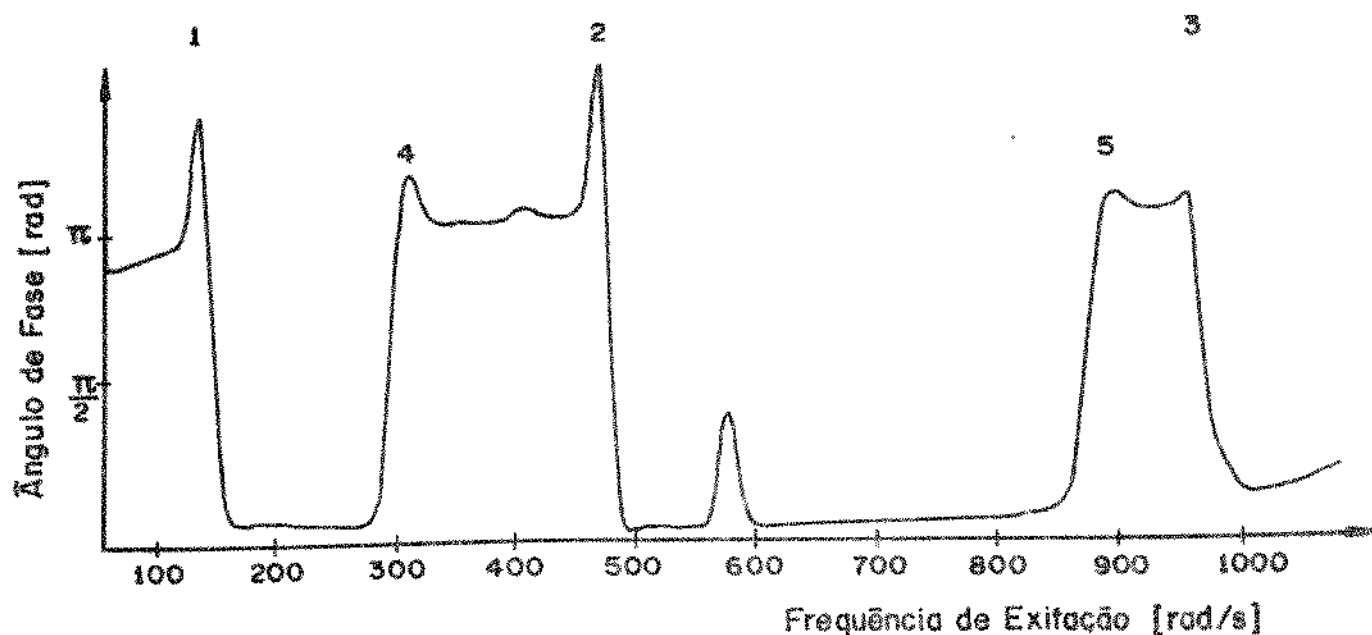


Fig. 5.17 - Ângulo de fase em função da frequência de excitação.

A resposta em frequência de um sistema mecânico com vá-

rios graus de liberdade é função do ponto de excitação e do ponto de medição (resposta). Para alguns casos define-se as anti-ressonâncias e para outros as mesmas não aparecem [30]. Os pontos de ressonância são pontos singulares nos modelos matemáticos para sistemas não amortecidos onde o valor da solução analítica tende para o infinito. Já os pontos de anti-ressonância são pontos onde o valor da amplitude se anula ($Z^R=0$).

Na Figura 5.18 mostra-se a função de resposta no disco 1 para uma excitação aplicada no disco 2. Os valores das frequências de ressonância não se alteram embora os valores dos picos tenham sido modificados pois a contribuição da excitação para cada modo de vibração é diferente.

Para sistemas não amortecidos e solução discreta em frequência, a comparação dos picos de amplitude para cada ponto de excitação não tem significado.

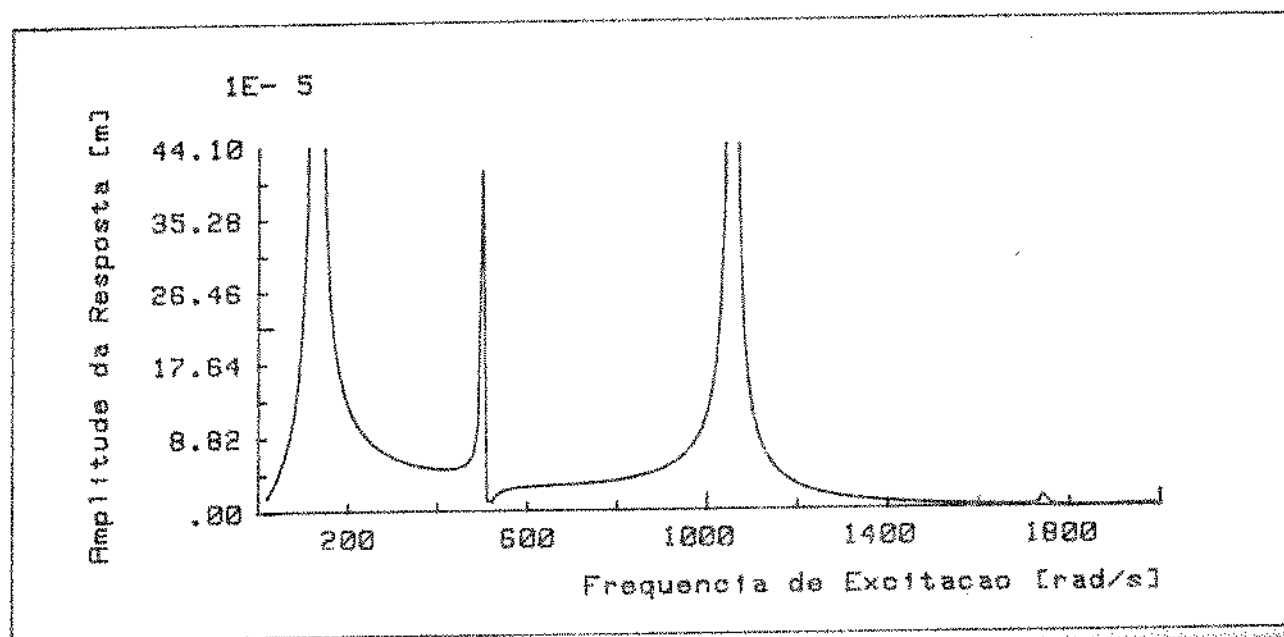


Fig. 5.18 - Amplitude da resposta no ponto 1 em função da frequência de excitação no ponto 2 (Modelo Fig. 5.13).

Outra observação importante é sobre a assimetria do modelo. Tal como foi construído o modelo de laboratório os eixos não possuem exatamente o mesmo comprimento e os nós modais não ficam

portanto situados nos pontos de massa concentrada. Desta forma, qualquer excitação aplicada em um dos discos excita todos os mo dos. Observa-se na Figura 5.18 que só há um ponto onde fica bem definida a anti-ressonância.

Observa-se no gráfico do ângulo de fase em função da frequência de excitação, Figura 5.19, que as mudanças de fase são definidas nas ressonâncias (pontos 1, 2, 3, 4) e apenas em um pon to de anti-ressonância (ponto 5) que é bem definido no gráfico da Figura 5.18.

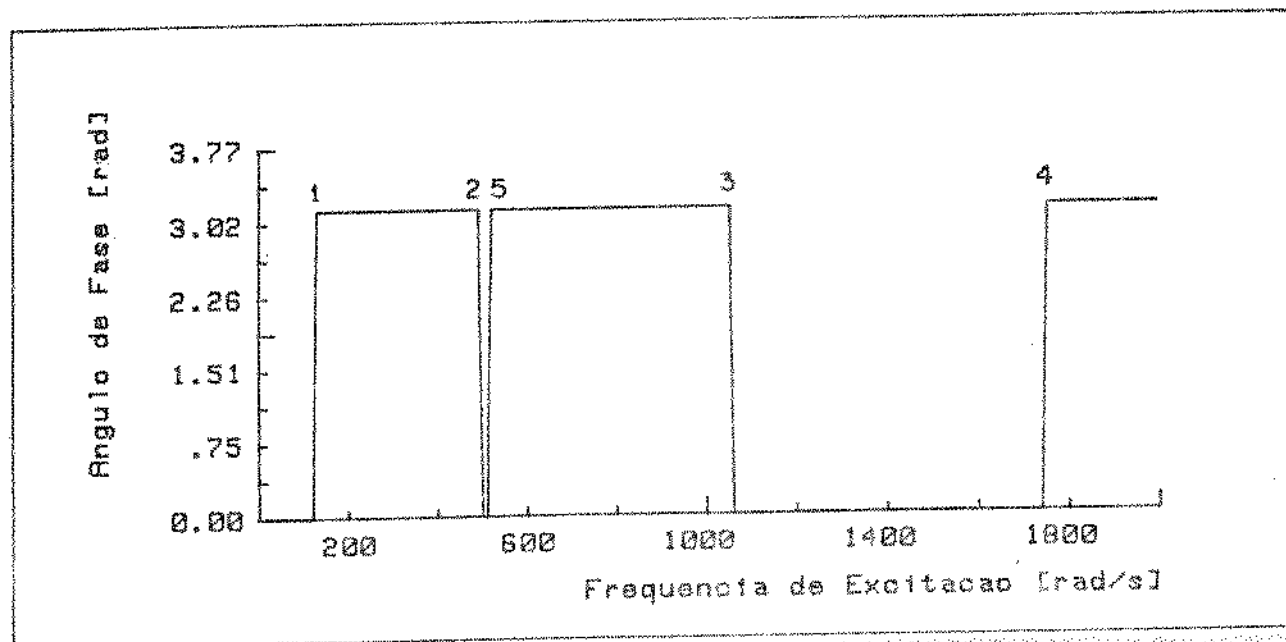


Fig. 5.19 - Ângulo de fase em função da frequência de excitação.

Outra forma de visualizar a anti-ressonância é verificar o valor da parte real da resposta, já que para alguns pontos singulares a curva degenera-se para o infinito (caso de ressonância) e para outros a resposta se anula (ponto de anti-ressonância).

A Figura 5.20 mostra a variação da parte real da resposta.

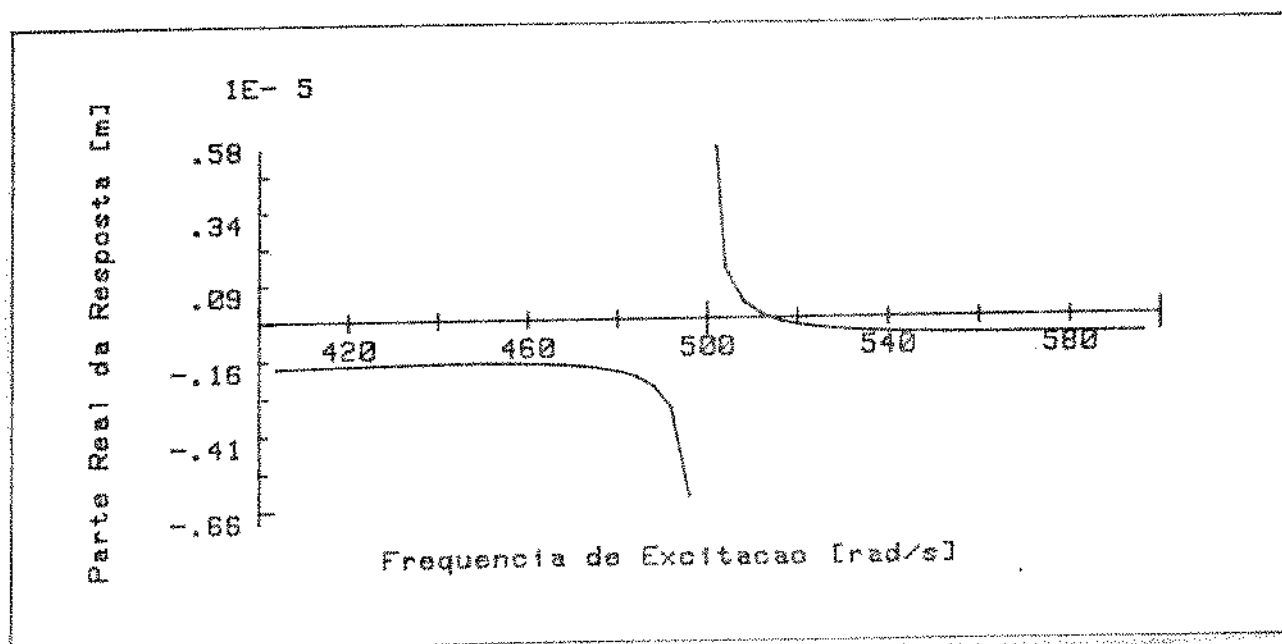
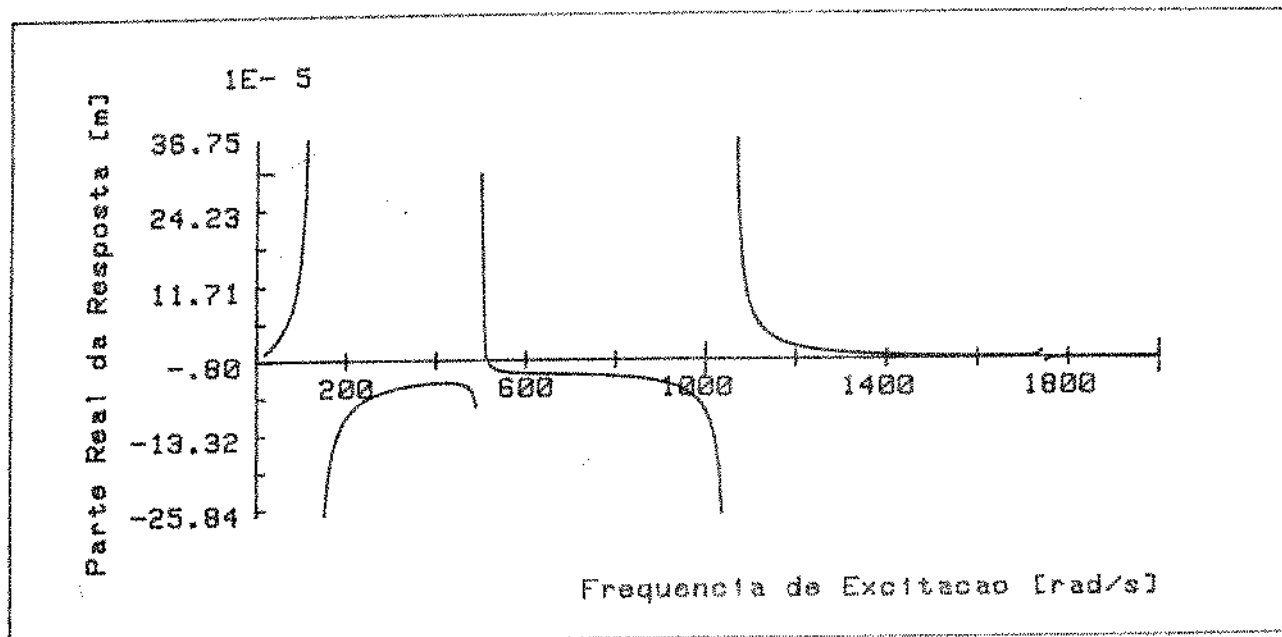


Fig. 5.20 - Parte real de resposta em deslocamento.
 (a) em toda a faixa de freqüências estudada;
 (b) em torno da freqüência de anti-ressonância.

Outra constatação importante para a utilização do modelo é a observação dos nós modais da estrutura, verificando sempre a sua influência na definição dos pontos escolhidos para a excitação e a resposta.

No exemplo utilizado não há simetria, logo nenhum nó modal está localizado nos discos, mas, com uma boa aproximação, o segundo disco é um ponto próximo a um nó do segundo modo de vibração. Desta forma, se excitarmos a estrutura no 2º disco e obtivermos a resposta no mesmo, verifica-se que a amplitude registrada é

pouco amplificada nas vizinhanças da segunda frequência natural. Calculou-se esta resposta e os resultados em amplitude estão registrados na Figura 5.21. Observa-se que a segunda frequência de ressonância quase não foi registrada. O mesmo aconteceu com a quarta frequência de ressonância pois o ponto 2 é também um nó da mesma.

Este resultado pode ser mascarado em função da discretização em frequência utilizada pois teoricamente todos os pontos de ressonância deveriam ir até o infinito já que o sistema não é amortecido.

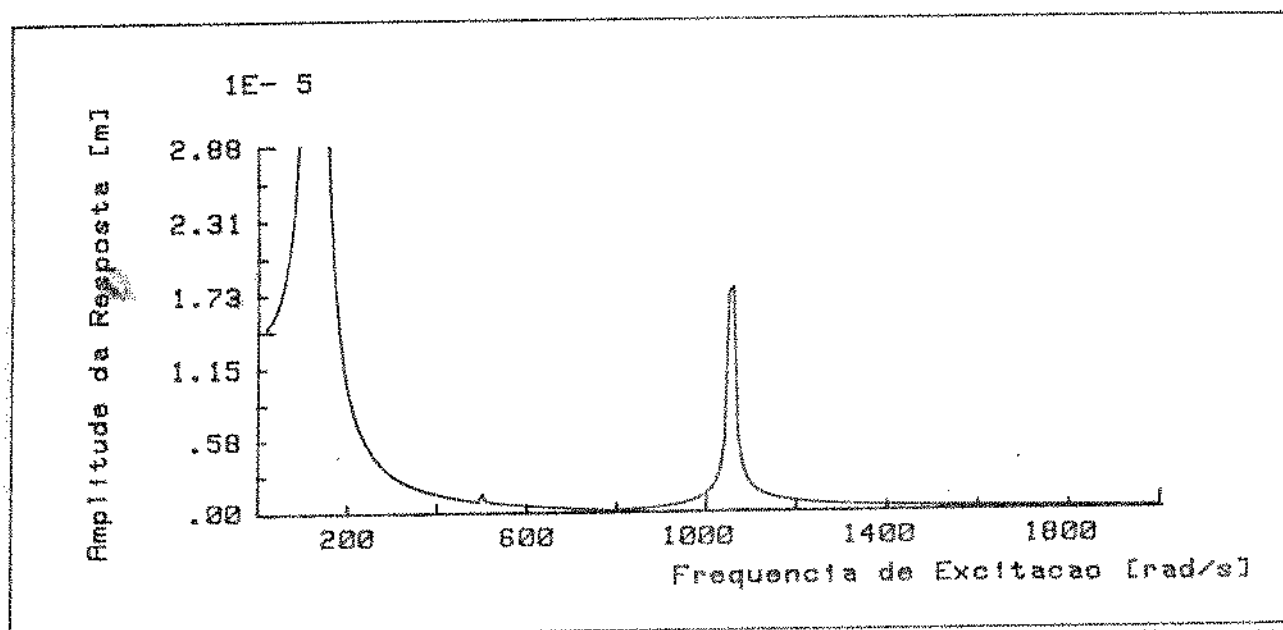


Fig. 5.21 - Amplitude da excitação em função da frequência de excitação.

Normalmente, os estudos sobre comportamento dinâmico de sistemas rotativos limita-se à análise da amplitude da função de resposta em frequência. Os aspectos aqui levantados sobre o comportamento em fase da resposta podem ser úteis na análise das vibrações destes sistemas.

PARTE II - APLICAÇÕES EM HIDROGERADORES

CAPÍTULO 6

INTRODUÇÃO AO MODELAMENTO DE HIDROGERADORES

Considerando uma central hidroelétrica como um sistema que pode ser dividido em sub-sistemas, pretende-se nesta 2.^a Parte do trabalho estudar modelos matemáticos para hidrogeradores que se constituem em um dos principais sub-sistemas destas centrais. Um hidrogerador é uma máquina rotativa constituída basicamente de uma turbina e um gerador suportados por mancais e eixos. Procurando-se desenvolver modelos para centrais hidroelétricos freqüentemente encontradas no país, estuda-se neste trabalho um caso bastante típico que são os hidrogeradores que utilizam turbinas tipo Francis. Estas máquinas possuem características comuns por exemplo, baixas rotações, pás fixas nas turbinas, mancais hidrodinâmicos, excitação de origem hidráulica em larga faixa de freqüência, excitação magnética oriunda do sistema rotor-gerador, etc.

O procedimento utilizado na elaboração dos modelos é descrito de forma esquemática no diagrama da Figura 6.1.

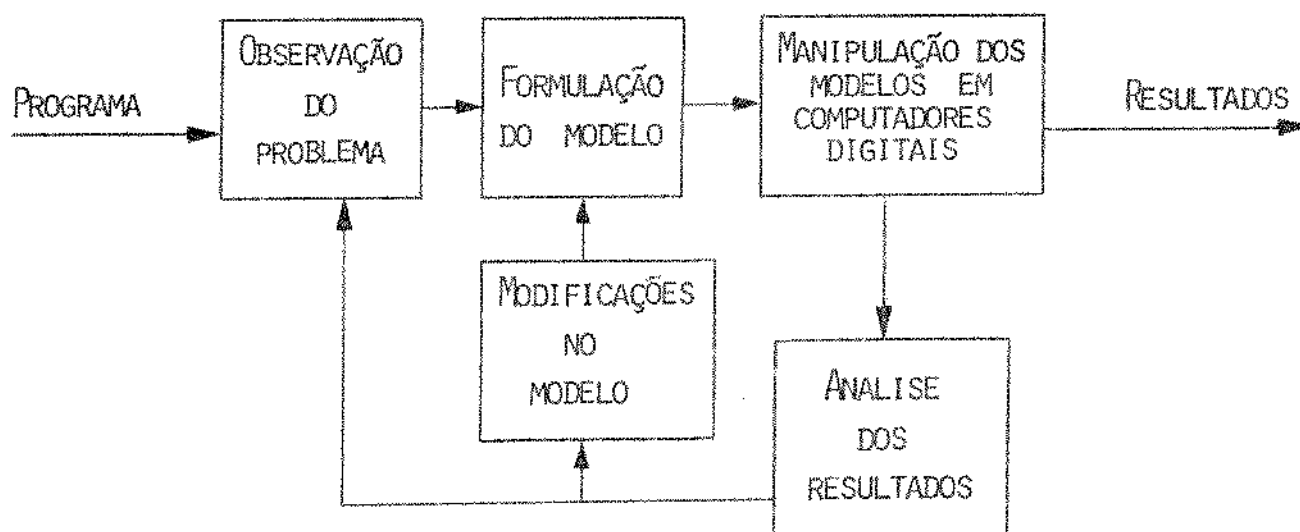


Fig. 6.1 - Diagrama de Blocos do procedimento para elaboração dos modelos.

A observação do problema das vibrações em hidrogeradores foi possível devido a um convênio entre a UNICAMP e a CESP [3], dentro do qual realizam-se medições de vibração no campo em vários pontos dos hidrogeradores da Usina de Ilha Solteira (SP). Algumas características do sistema estudado são: turbina tipo Francis com 12 pás, rotor do gerador com 13,2m de diâmetro, potência de cada máquina de 160 MW, velocidade controlada de operação 85,7 rpm, queda d'água útil 46m, vazão 389,7 m³/s.

Na Figura 6.2 mostra-se um desenho do sistema e os pontos onde se realizaram as medidas de vibração.

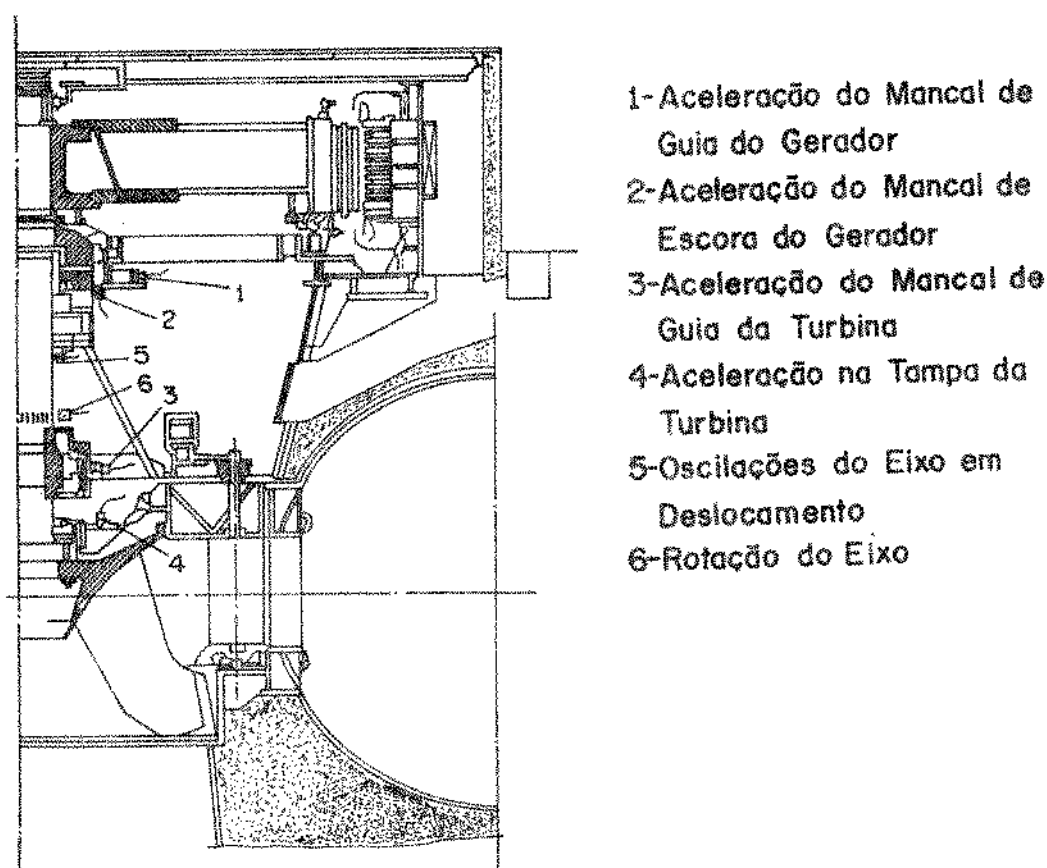


Fig. 6.2 - Hidrogerador e pontos de medição de vibrações.

A formulação dos modelos foi feita usando o método das matrizes de transferência descrito na parte I deste trabalho. A análise dos resultados e modificações no modelo matemático foram feitas com base nos desvios dos resultados teóricos obtidos em relação aos resultados experimentais medidos. Enquanto o nível de

desvios dos resultados é elevado a iteração no processo da Figura 6.1 é feita voltando-se diretamente ao modelo físico e propondo uma nova formulação nos modelos para solução de problemas como por exemplo modelar mancais com amortecimento, incluir o efeito da rotação, etc.

O tratamento dos modelos foi feito em um microcomputador HP 9845A e as rotinas utilizadas estão descritas nos Apêndices 1, 3 e 4. Consideram-se os resultados satisfatórios quando os modelos matemáticos são ajustados minimizando os desvios dos resultados teóricos obtidos em relação aos valores experimentais.

Além da comparação com resultados experimentais são feitas ainda comparações com resultados de modelos conhecidos de elementos finitos.

É conveniente ressaltar que muitos dos parâmetros presentes nos modelos matemáticos não foram levantados para as máquinas reais nem pela CESP nem pelos fabricantes das máquinas. Alguns destes parâmetros necessitam de fato estudos aprofundados para sua determinação, como é o caso do efeito da água na turbina, da selagem da turbina, ao efeito de rigidez negativa no gerador, etc. Desta forma, o ajuste dos modelos matemáticos se constituiu em tarefa bastante desgastante que seria grandemente facilitada caso os dados do projeto fossem verificados experimentalmente em testes no comissionamento das máquinas.

CAPÍTULO 7

VIBRAÇÕES LIVRES EM HIDROGERADORES

7.1. DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO

As máquinas de Ilha Solteira que servem de base neste estudo são de eixo vertical tipo "umbrella" com suporte na tampa da turbina Francis e com peso das partes girantes de aproximadamente 715 ton.

A dificuldade maior no modelamento de hidrogeradores é exatamente a quantificação dos parâmetros estruturais. Como foi dito, existem parâmetros de difícil obtenção analítica como os valores de rigidez e amortecimento do filme de óleo nos mancais, efeito de amortecimento do selo mecânico, efeito da água passando pela turbina, etc.

Uma maneira de obter estes parâmetros consiste em atribuir-lhes valores de tal modo que a resposta do sistema real (a própria máquina) a uma dada excitação coincide com a resposta simulada pelos métodos de cálculo estrutural. A este processo chama-se identificação de parâmetros. Várias técnicas de identificação para estes modelos são estudadas na referência [4].

Utilizando-se das técnicas de modelamento matemático desenvolvidas na Parte I deste trabalho (Capítulos 2, 3, 4) pode-se descrever o comportamento dinâmico de um hidrogerador. Propõe-se neste capítulo um modelo de matriz de transferência usando a técnica do método modificado (Capítulo 4). A utilização desta técnica se justifica por duas razões básicas. Em primeiro lugar pela existência de flexibilidades bem distintas entre mancais e eixos o que acarretaria dificuldades numéricas. Em segundo lugar pretende-se implementar estes modelos em microcomputadores e o método proposto traz como vantagem economia de memória para o processamento de problemas com muitos graus de liberdade.

Inicialmente, modelou-se o sistema para o estudo das vibrações livres sem considerar o efeito do amortecimento nos mancais, considerando-os como uma mola de rigidez constante. As máquinas modeladas possuem eixos de secção circular vazada conforme indicado na Figura 7.1.

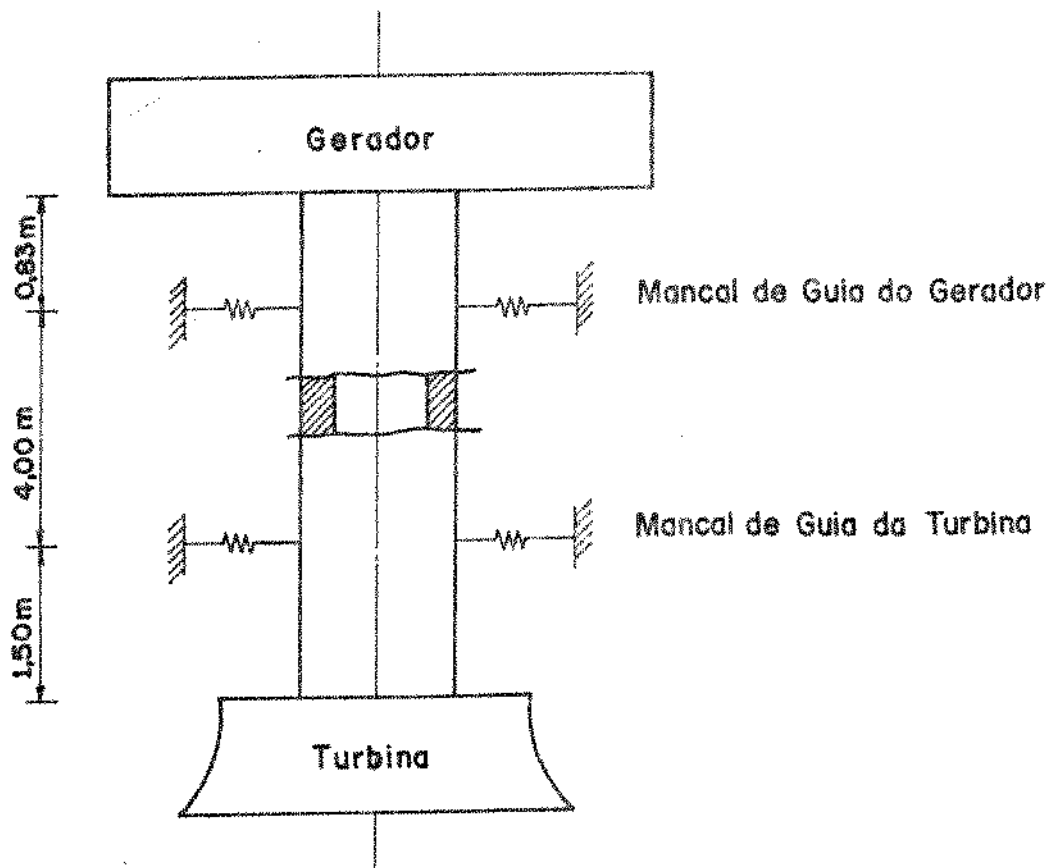


Fig. 7.1 - Modelo físico de um hidrogenador.

Os valores dos parâmetros utilizados foram:

Momento de inércia diametral (Kg.m^2)	
do gerador	4,8 E 6
da turbina	5,0 E 4
do mancal de guia do gerador	1,37 E 4
do mancal de guia da turbina	0,5 E 3
Massa (Kg)	
do rotor do gerador	4,95 E 5
do rotor da turbina	1,45 E 5
do mancal de guia da turbina	2,87 E 3
do mancal de guia do gerador	2,1 E 4
Massa específica do eixo (Kg/m^3)	7,8 E 3
Rigidez (N/m)	
do mancal de guia do gerador	1,5 E 11
do mancal de guia da turbina	1,5 E 11
Módulo de elasticidade do material (N/m^2)	

do eixo	2,07 E 11
Diâmetro (m)	
externo do eixo	1,3 E 0
interno do eixo	0,4 E 0

Modelou-se o sistema incluindo a massa dos mancais pois a estrutura do eixo é modificada na região dos mesmos ficando com inércia maior.

7.2. RESULTADOS OBTIDOS E COMPARAÇÃO COM O MEF

A partir do modelo físico mostrado no capítulo 7.1, desenvolveu-se um modelo matemático usando o MMT e outro modelo usando o MEF.

Para a resolução usando o MMT desenvolveu-se uma rotina para solução de eixos contínuos de secção circular vazada, onde as grandezas características da secção foram calculadas usando-se as seguintes expressões:

$$I_d = \frac{m(d_e^2 + d_i^2)}{16} \quad (7.1)$$

$$J_y = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{64} \quad (7.2)$$

$$A = \frac{\pi(d_e^2 - d_i^2)}{4} \quad (7.3)$$

onde:

- m - massa do eixo [kg]
- d_e - diâmetro externo do eixo [m]
- d_i - diâmetro interno do eixo [m]
- I_d - momento de inércia de massa [Kg.m²]
- J_y - momento de inércia de área [m⁴]

Estas grandezas são distribuídas de forma contínua ao longo do comprimento l do eixo.

Para considerar o efeito do cisalhamento necessita-se do fator de forma da secção, que para um valor de coeficiente de Poisson igual a 0,3 (para aços) é dado por [11]

$$K_s = 1,1282 + \frac{3,02564(d_i/d_e)^2}{(1 + (d_i/d_e)^2)^2} \quad (7.4)$$

Na representação do gerador e da turbina, considerou-se massas concentradas com efeito de inércia de inclinação. Os resultados obtidos estão mostrados na Figura 7.2.

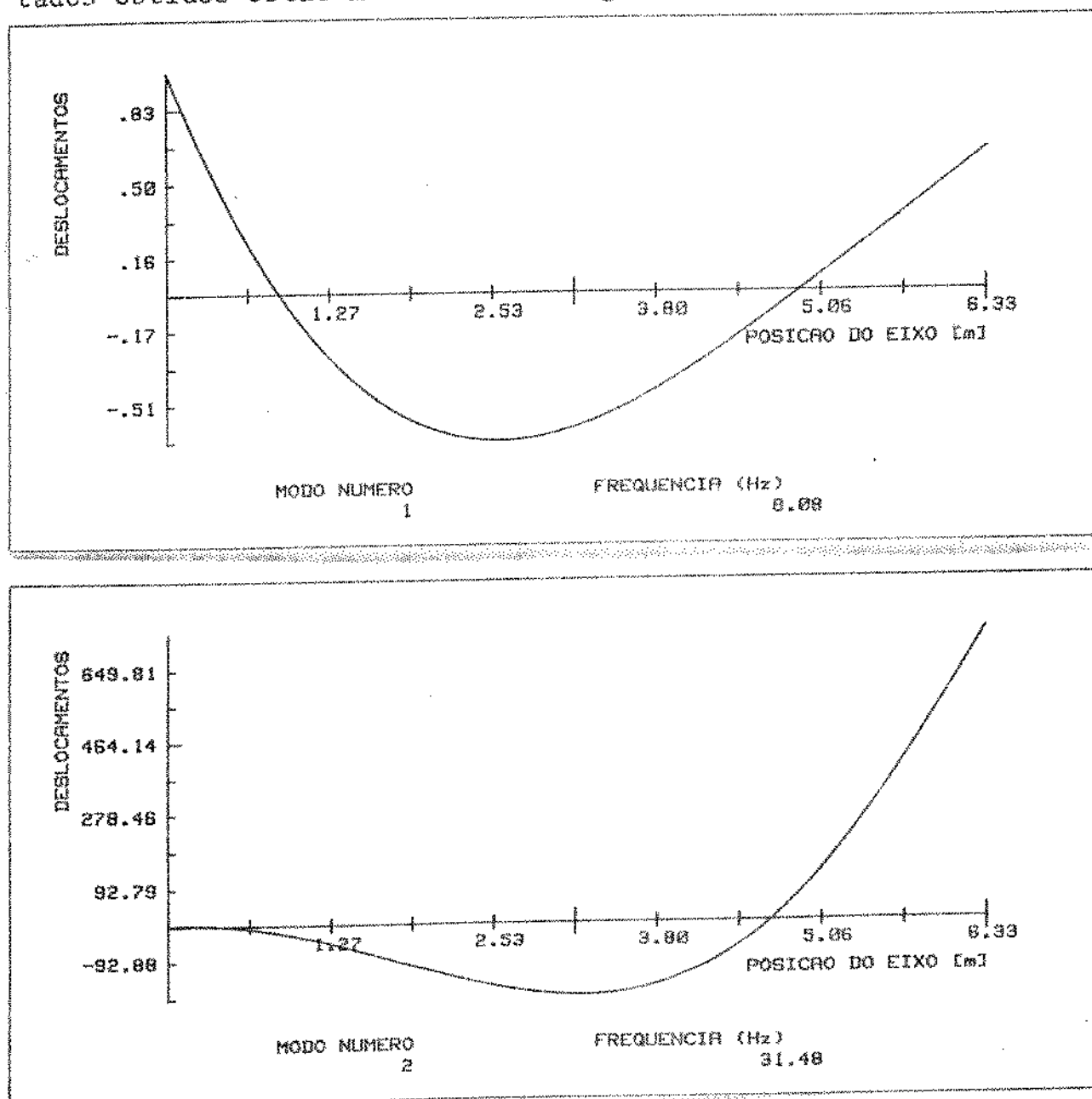


Fig. 7.2 - Frequências naturais e modos próprios de vibração do hidrogenador usando o MMT.

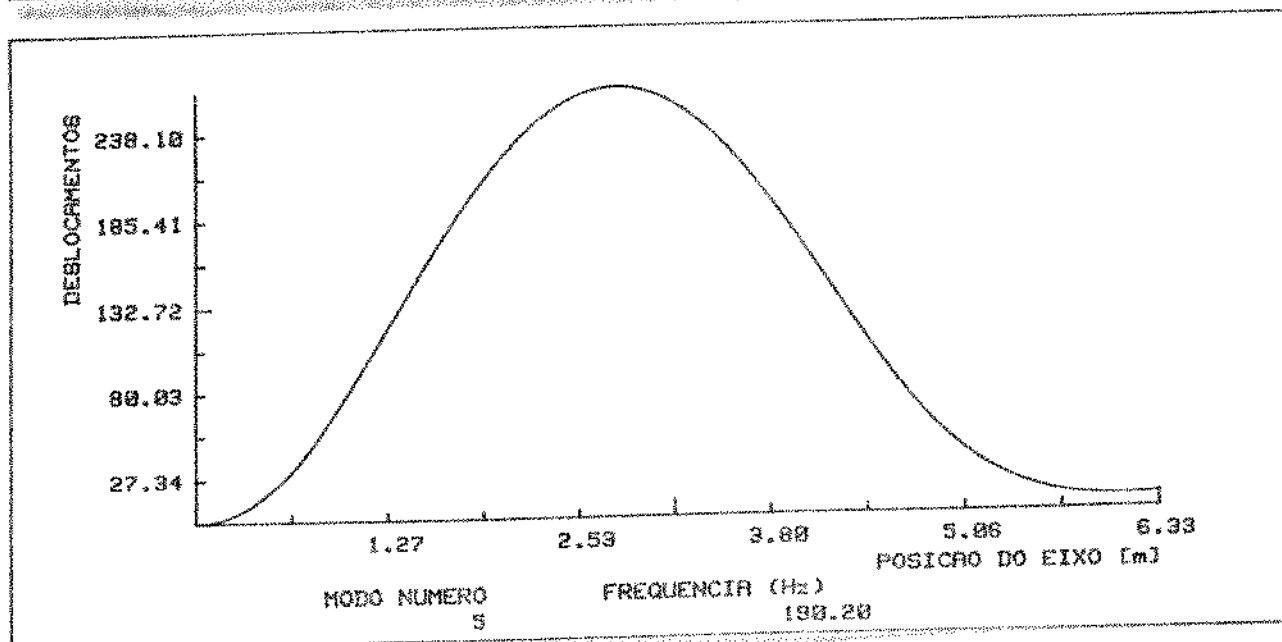
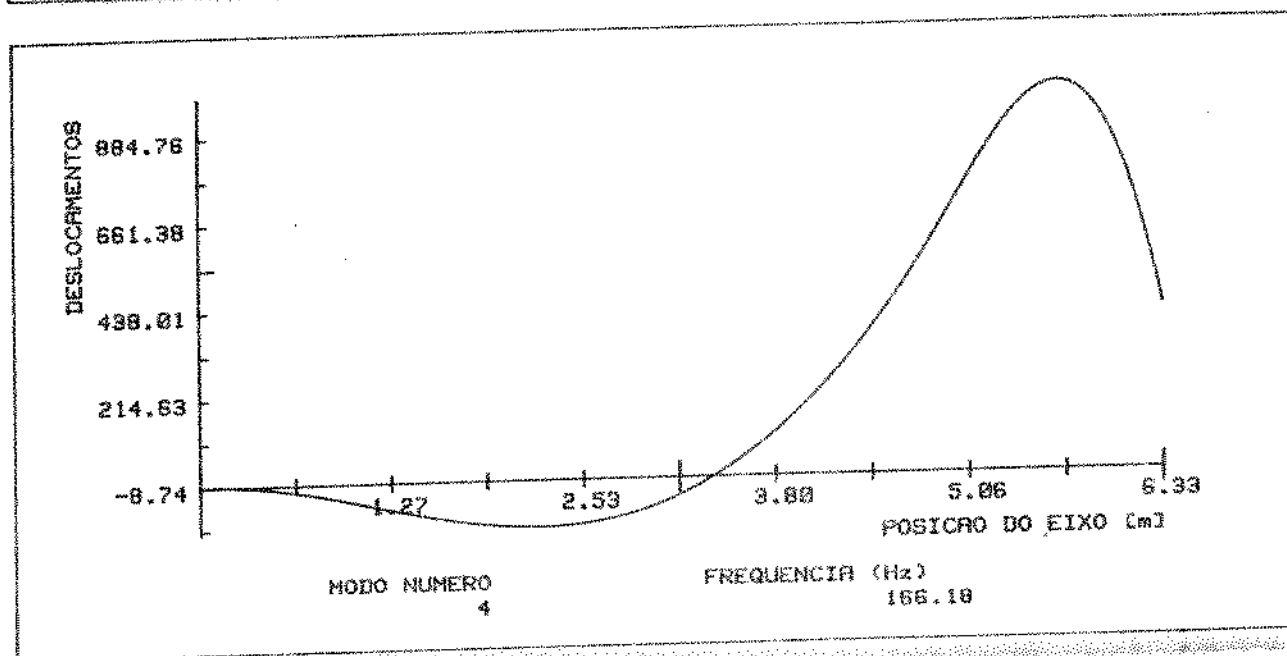
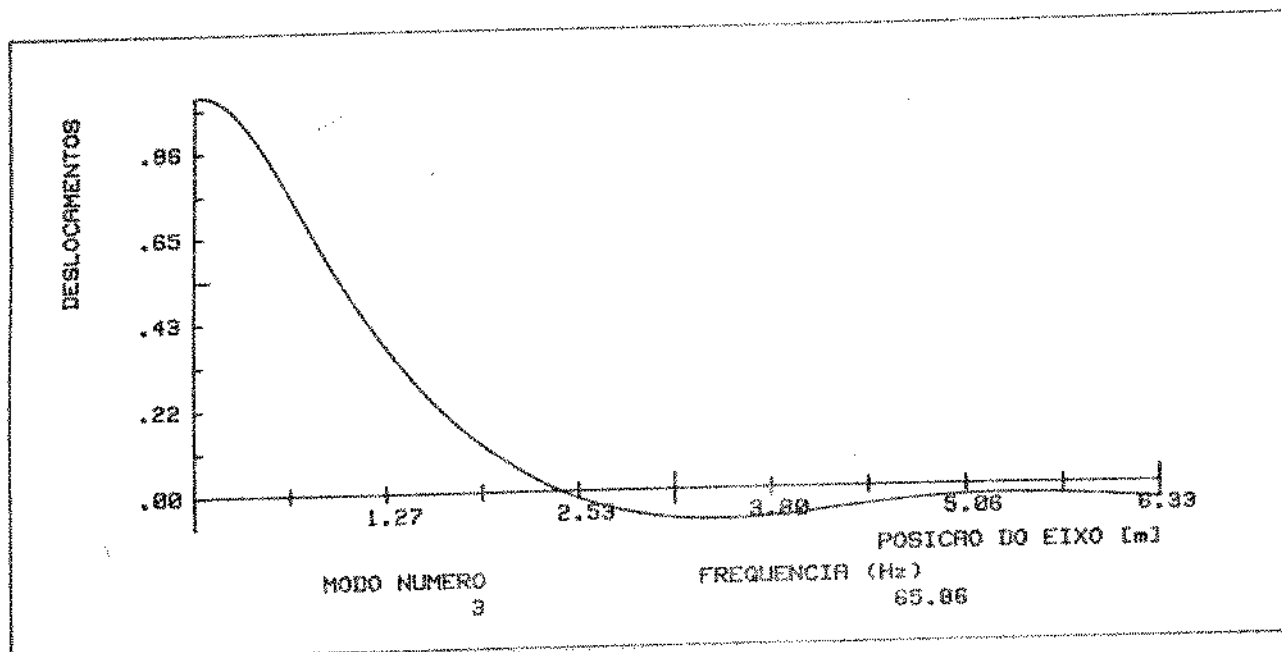


Fig. 7.2 - Continuação.

Desenvolveu-se outro modelo, usando o MEF [21], resolvendo o mesmo problema com 13 elementos de discretização, sendo que as estações de eixos foram subdivididas em dois elementos o que proporciona uma boa aproximação nos modos mais baixos. Inclui-se no modelo de elementos finitos o efeito de inércia de inclinação nos pontos de massa concentrada, e para os eixos usa-se a representação de massa consistente descrita no capítulo 3.3. Os resultados estão mostrados na Figura 7.3.

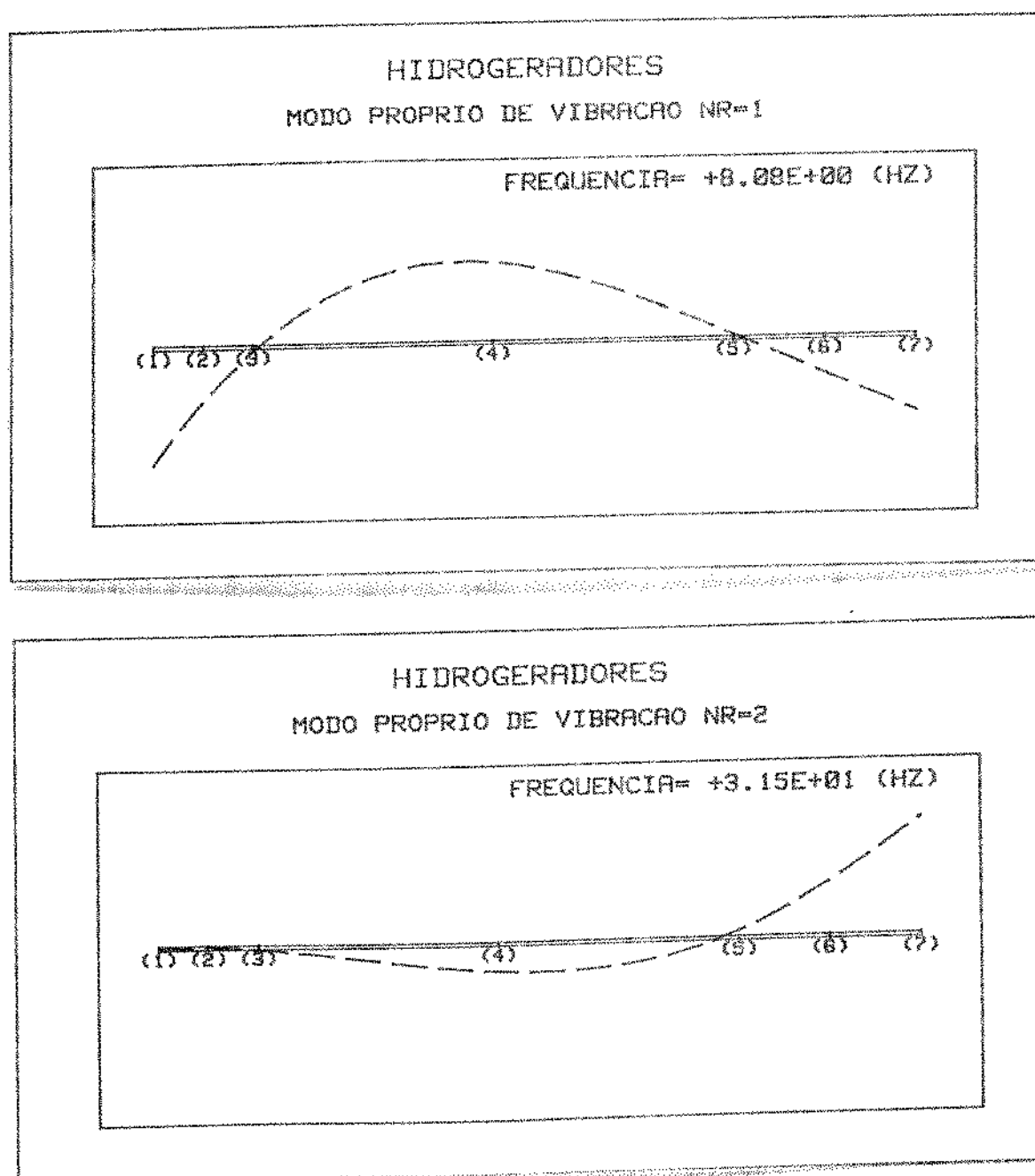


Fig. 7.3 - Frequências naturais e modos próprios de vibração do hidrogenador usando o MEF.

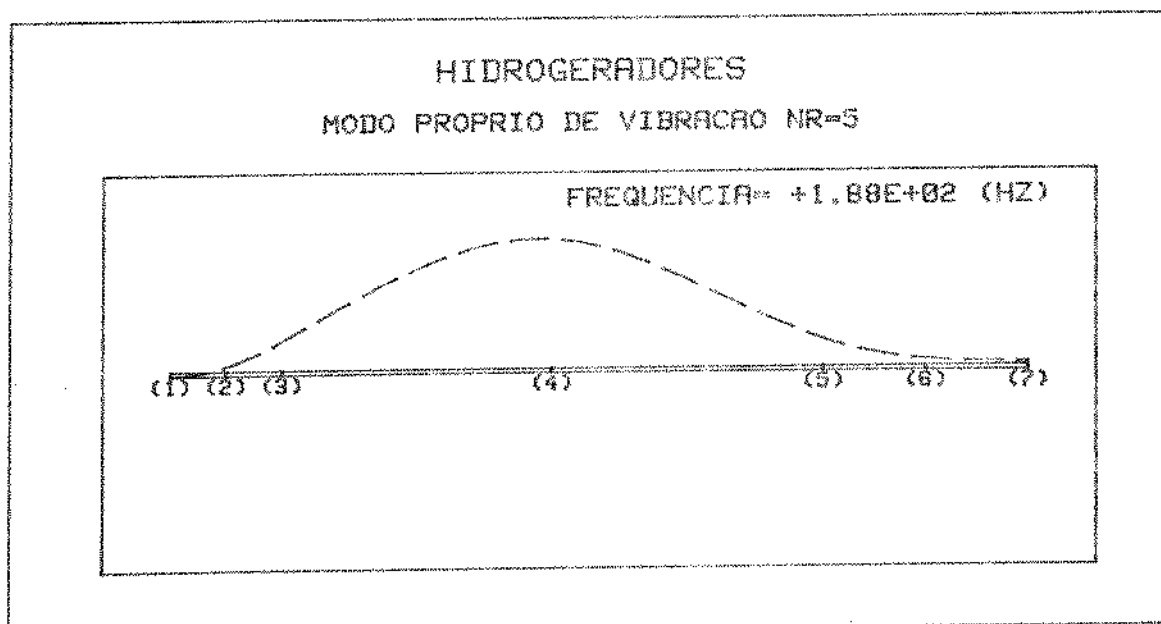
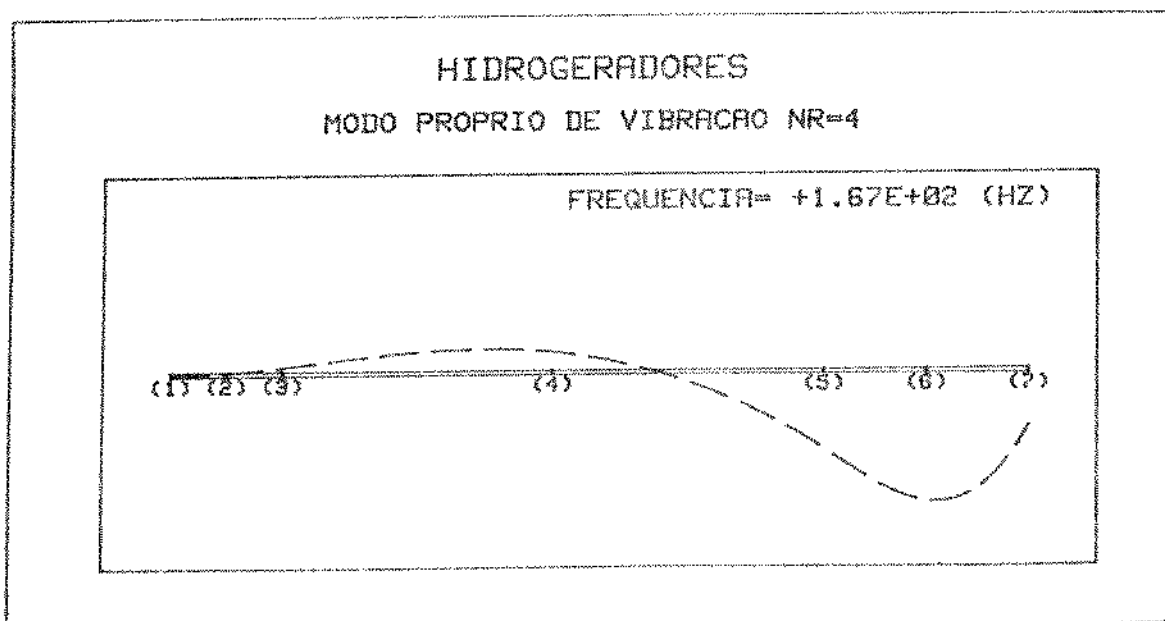
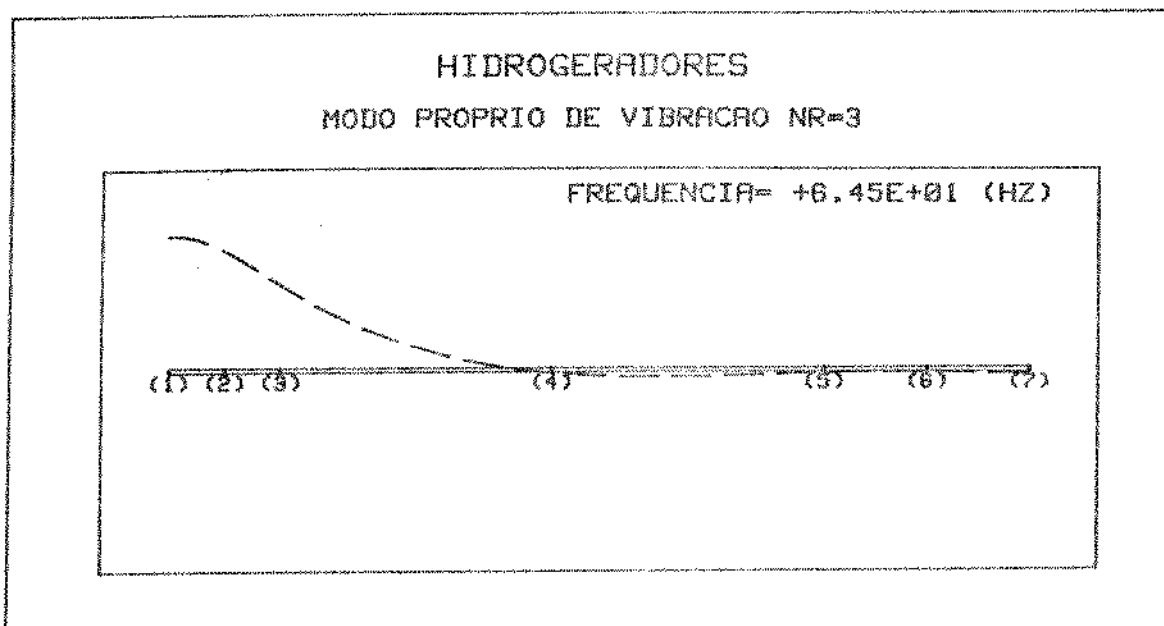


Fig. 7.3 - Continuação.

O efeito da rotação própria do sistema (efeito giroscópico) foi desconsiderado pois sabe-se que para baixas rotações o mesmo é desprezível. O efeito do "mancal de água" na turbina também foi desconsiderado embora seja possível modelar este efeito incluindo um amortecimento viscoso na turbina.

Os modelos fazem normalizações diferentes para os modos de vibração, o que justifica algumas diferenças nos gráficos. A forma modal está coerente para os modos calculados e as primeiras frequências mostram uma boa aproximação entre os modelos.

Na Tabela 7.1 estão mostrados os desvios dos resultados obtidos:

TABELA 7.1 - Frequências naturais do modelo da Figura 7.1. Desvios em relação ao MEF.

	MEF	MMT	Desvios [%]
Freq-1 [Hz]	8.08	8.08	0.00
Freq-2 [Hz]	31.52	31.48	.10
Freq-3 [Hz]	64.49	65.86	2.10
Freq-4 [Hz]	166.62	166.18	.30
Freq-5 [Hz]	187.73	190.20	1.30

É difícil estabelecer uma comparação precisa em termos de modelamento quando se resolvem problemas extensos mas a faixa dos desvios encontrados é pequena, o que mostra uma coerência nos resultados obtidos. A análise dos modos próprios de vibração é importante na determinação dos pontos onde é mais conveniente medir as vibrações (vide Capítulo 5, Item 5.5.).

CAPÍTULO 8

VIBRAÇÕES FORÇADAS EM HIDROGERADORES

8.1. DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO

Simulou-se o comportamento da resposta em frequência de um hidrogerador e neste estudo incluiu-se novos efeitos. O mancal do gerador é combinado (escora-guia). Desta forma, para representar este efeito, acrescenta-se uma mola de torção conforme mostrado na Figura 8.1, que simula as restrições elásticas à torção.

Os mancais de guia são do tipo hidrodinâmico segmentado sendo que o efeito de amortecimento e rigidez do filme de óleo bem como a rigidez da estrutura de sustentação são modelados de forma simplificada item 8.2.

Propõe-se neste capítulo simular a resposta em frequência em deslocamento de um dado ponto do sistema onde pode-se medir a resposta experimentalmente. Assim é necessário apresentar as características das forças que aparecem no sistema. As excitações transversais consideradas mais significativas são: forças hidráulicas, desbalanceamento mecânico e desbalanceamento magnético. As forças de desbalanceamento mecânico podem estar localizadas em qualquer estação do sistema, embora devido à distribuição irregular de massa no gerador e à grande inércia do mesmo espera-se que os efeitos de desbalanceamento mecânico predominem nesta estação. Como se sabe, as forças de desbalanceamento aparecem na frequência de origem eletromecânica que surge no gerador na frequência de rotação devido por exemplo à excentricidade de construção do rotor do gerador que reflete no campo magnético do estator do gerador, originando forças resultantes girantes com a mesma rotação do sistema. Também de origem magnética podem surgir forças com frequência igual ao dobro da frequência de rotação devido à ovalização do rotor do gerador [33]. As excitações de origem hidráulica aparecem na turbina e podem ser consideradas como funções aleatórias de espectro constante estendendo-se em uma certa faixa de frequência [34].

A Figura 8.1 mostra um modelo físico de um hidrogerador.

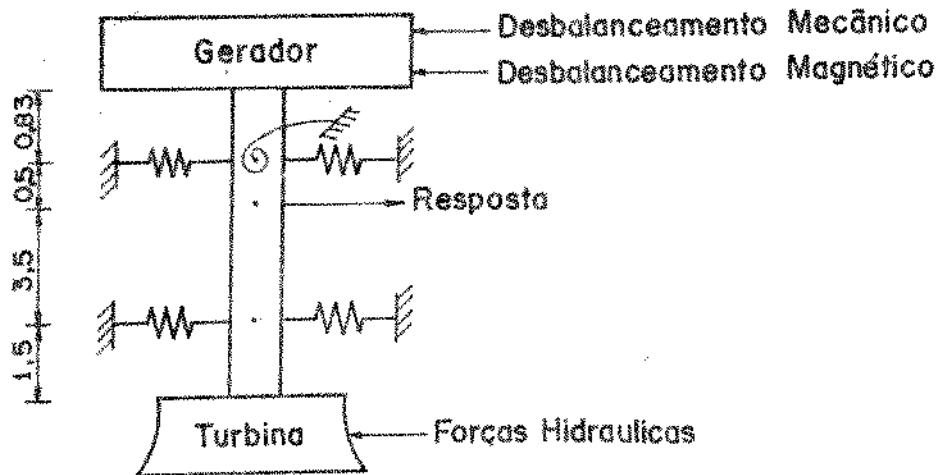


Fig. 8.1 - Modelo físico de um hidrogerador.

Os valores dos parâmetros utilizados estão descritos no capítulo 7.1, acrescentando-se a rigidez torcional do mancal do gerador tomada com o valor de 4×10^{11} N.m.

No capítulo 8.3 mostram-se os resultados obtidos e definem-se os modelos matemáticos utilizados.

8.2. ESTUDO DE UM MANCAL HIDRODINÂMICO SEGMENTADO

Dado um mancal hidrodinâmico segmentado que é um tipo comumente utilizado em hidrogeradores, propõe-se um modelo simplificado que aproxime o comportamento dinâmico real do mesmo.

Inicialmente estudou-se a influência da massa do segmento do mancal. Tomou-se para estudo um mancal com 12 segmentos pivotados com folga radial pequena e estrutura de sustentação dos segmentos ("aranha") flexível dentro da faixa de frequências em análise no problema. Estas características correspondem às dos mancais dos hidrogeradores da Usina de Ilha Solteira.

Considerou-se as seguintes hipóteses: massa do sistema eixo-turbina-gerador muito maior que a massa do segmento do mancal, rigidez do filme de óleo próxima da rigidez da estrutura de suporte do segmento do mancal e não variando com a frequência de vibração.

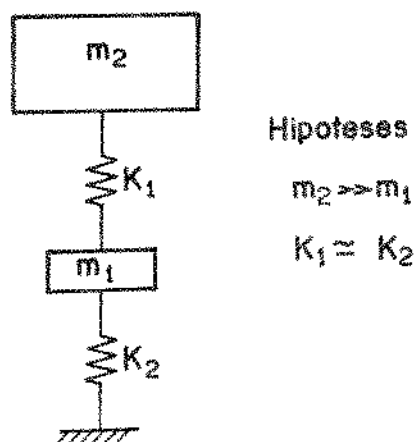


Fig. 8.2 - Modelo de um mancal segmentado.

Tomando o sistema da Figura 8.2, com:

- m_1 - massa do segmento do mancal
- m_2 - massa do sistema eixo-gerador-turbina
- K_1 - rigidez do filme de óleo
- K_2 - rigidez do suporte do segmento do mancal

As freqüências naturais deste sistema de dois graus de liberdade são dadas por:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 K_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2}{2m_1 m_2} \pm \left[\frac{(m_1 K_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2)^2 - 4m_1 m_2 K_1 K_2}{4m_1^2 m_2^2} \right]^{1/2} \quad (8.1)$$

Fazendo-se m_1 tender a zero já que $m_1 \ll m_2$ e desprezando-se a freqüência ω_2 (mais alta) pois está fora da faixa de interesse nesta análise, obtêm-se:

$$\omega_1^2 = \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{m_1 K_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2 - \sqrt{m_1^2 K_2^2 + 2m_1 m_2 K_2 (K_1 + K_2) + m_2^2 (K_1 + K_2)^2 - 4m_1 m_2 K_1 K_2}}{2m_1 m_2} \quad (8.2)$$

ou

$$\omega_1^2 = \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2 - \sqrt{m_1^2 k_2^2 + m_2^2 (k_1 + k_2)^2 + 2m_1 m_2 k_2 (k_2 - k_1)}}{2m_1 m_2} \quad (8.3)$$

Aplicando-se L'Hospital para sair da indeterminação do limite da equação (8.3), tem-se:

$$\omega_1^2 = \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{k_2 - 1/2 [m_1^2 k_2^2 + m_2^2 (k_1 + k_2)^2 + 2m_1 m_2 k_2 (k_2 - k_1)]^{-1/2} [2m_1 k_2^2 + 2m_2 k_2 (k_2 - k_1)]}{2m_2} \quad (8.4)$$

ou

$$\omega_1^2 = \frac{k_2 - 1/2 (m_2 (k_1 + k_2)^2)^{-1/2} 2m_2 k_2 (k_2 - k_1)}{2m_2} \quad (8.5)$$

E, finalmente, tem-se

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m_2 (k_1 + k_2)}} \quad (8.6)$$

Pode-se mostrar que a segunda frequência natural é dada pela expressão:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \quad (8.7)$$

que é de ordem de grandeza bem mais elevada e fora da faixa de análise, podendo-se associá-la ao movimento da massa m_1 do segmento do mancal. Deste modo, desprezando-se a massa m_1 no modelamento pode-se idealizar um segmento de mancal conforme a Figura 8.3.

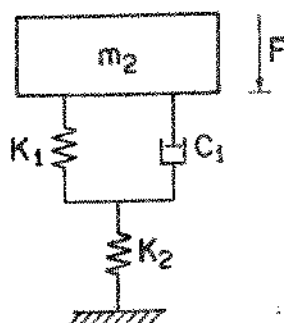


Fig. 8.3 - Modelo adotado para um segmento de mancal.

onde:

C_1 - Amortecimento do filme de óleo

F - Força de excitação do sistema

Observa-se que considerou-se que as fundações do sistema são rígidas, o que só é válido para uma certa banda de frequências. Em modelos mais sofisticados pode-se incluir a influência destas fundações na dinâmica do sistema.

Aplicando os conceitos de impedância mecânica, pode-se calcular um valor de rigidez equivalente (K_{eq}) e amortecimento equivalente (C_{eq}) para o sistema da Figura 8.3, supondo a excitação F na massa m_2 e deslocamento desta dado por X .

A impedância do filme de óleo será:

$$\frac{F}{X} = K_1 + j\omega C_1 \quad (8.8)$$

Associando-se em série os dois sistemas, filme de óleo e suporte do mancal segmentado obtém-se:

$$\frac{F}{X} = \frac{K_2 (K_1 + j\omega C_1)}{K_2 + (K_1 + j\omega C_1)} \quad (8.9)$$

ou

$$\frac{F}{X} = K_{eq} + j \omega C_{eq} \quad (8.10)$$

Para obter a expressão de K_{eq} e C_{eq} desenvolve-se a expressão 8.9 e obtêm-se:

$$\frac{F}{X} = \frac{(K_2 K_1)(K_2 + K_1) + K_2 \omega^2 C_1^2}{(K_2 + K_1)^2 + \omega^2 C_1^2} + j \frac{K_2 \omega C_1 (K_2 + K_1) - K_2 K_1 \omega C_1}{(K_2 + K_1)^2 + \omega^2 C_1^2} \quad (8.11)$$

ou seja

$$K_{eq} = \frac{(K_2 K_1)(K_2 + K_1) + K_2 \omega^2 C_1^2}{(K_2 + K_1)^2 + \omega^2 C_1^2} \quad (8.12)$$

$$C_{eq} = \frac{K_2 \omega C_1}{(K_2 + K_1)^2 + \omega^2 C_1^2} \quad (8.13)$$

Considerando-se ainda que o mancal é pivotado (logo tem um grau de liberdade de rotação livre) pode-se desprezar a existência de forças tangenciais e conseqüentemente modelar o sistema sem acoplamento nas coordenadas nas direções y e z . Desta forma obtêm-se a configuração do mancal segmentado segundo o modelo da Figura 8.4.

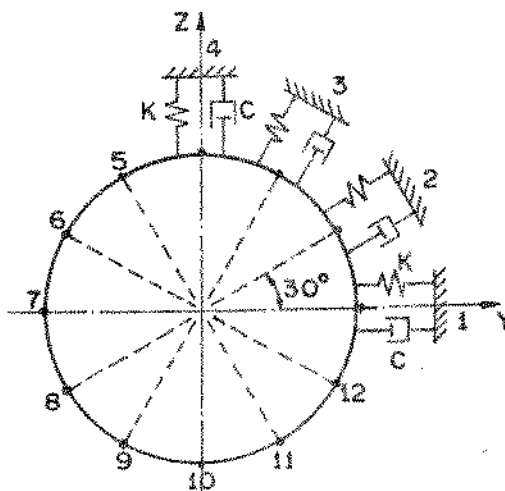


Fig. 8.4 - Modelo físico de um mancal segmentado (12 segmentos).

Considerando que as folgas radiais são bem pequenas e que, para qualquer movimento, as molas e amortecedores de todos os segmentos estão atuando associados segundo as suas posições diametralmente opostas, caracterizam-se as propriedades do mancal nas direções y e z. Considerando isotropia radial tem-se:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_{12} = K_{eq} \quad (8.14)$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_{12} = C_{eq} \quad (8.15)$$

e com isto

$$K_y = K_z = 2K_{eq} + 4K_{eq} \cos^2 30^\circ + 4K_{eq} \cos^2 60^\circ = 6,0 K_{eq} \quad (8.16)$$

$$C_y = C_z = 2C_{eq} + 4C_{eq} \cos^2 30^\circ + 4C_{eq} \cos^2 60^\circ = 6,0 C_{eq} \quad (8.17)$$

As equações (8.16) e (8.17) associadas às expressões (8.12) e (8.13) podem ser introduzidas facilmente na formulação de matriz de transferência desenvolvida no Capítulo 5.2 e implementadas no programa computacional para o cálculo da resposta em frequência de sistemas de hidrogeradores.

8.3. RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS E COMPARAÇÃO COM ESPECTRO DA RESPOSTA OBTIDO EXPERIMENTALMENTE

O modelo físico da Figura 8.1 adota para os eixos a representação contínua com solução exata, incluindo os efeitos de inércia de inclinação, deformação devido ao cisalhamento e massa distribuída, considerando-se que o mesmo possui secção circular vazada. Os mancais foram representados conforme o modelo desenvolvido no item 8.2 sendo:

$$\text{Rigidez do filme de óleo } (K_f) \quad 1,5 \text{ E } 11 \quad \text{N/m}$$

Amortecimento do filme de óleo (C_1) 0,75 E 11 N.s/m
 Rigidez do suporte do segmento (K_2) 1,5 E 11 N/m

O gerador e a turbina foram considerados como ponto de massa concentrada incluindo-se o efeito de inércia de inclinação.

Conforme o esquema da Figura 8.1, considerou-se as forças de excitação (desbalanceamento mecânico, desbalanceamento magnético, forças hidráulicas) unitárias, quando o sistema gira 85,7 rpm, e inclui-se o efeito da rotação (efeito giroscópico) conforme apêndice 2. O espectro da resposta obtida no ponto indicado na Figura 8.1 foi calculado e é mostrado na Figura 8.5 para duas faixas de frequência diferentes.

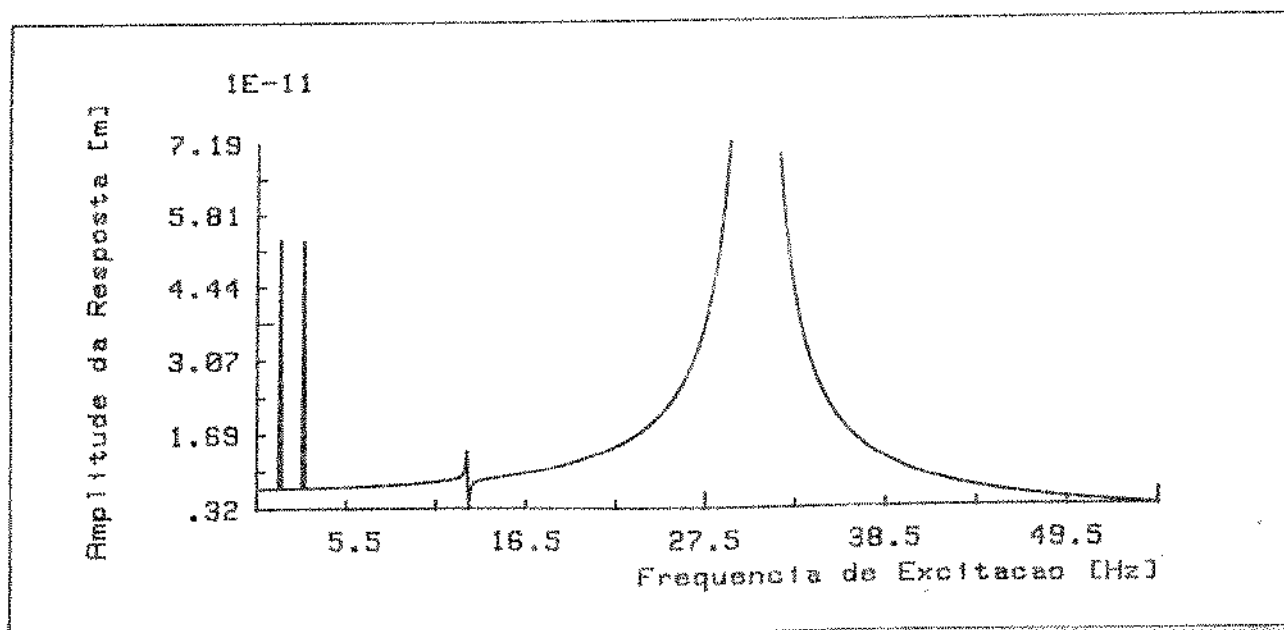
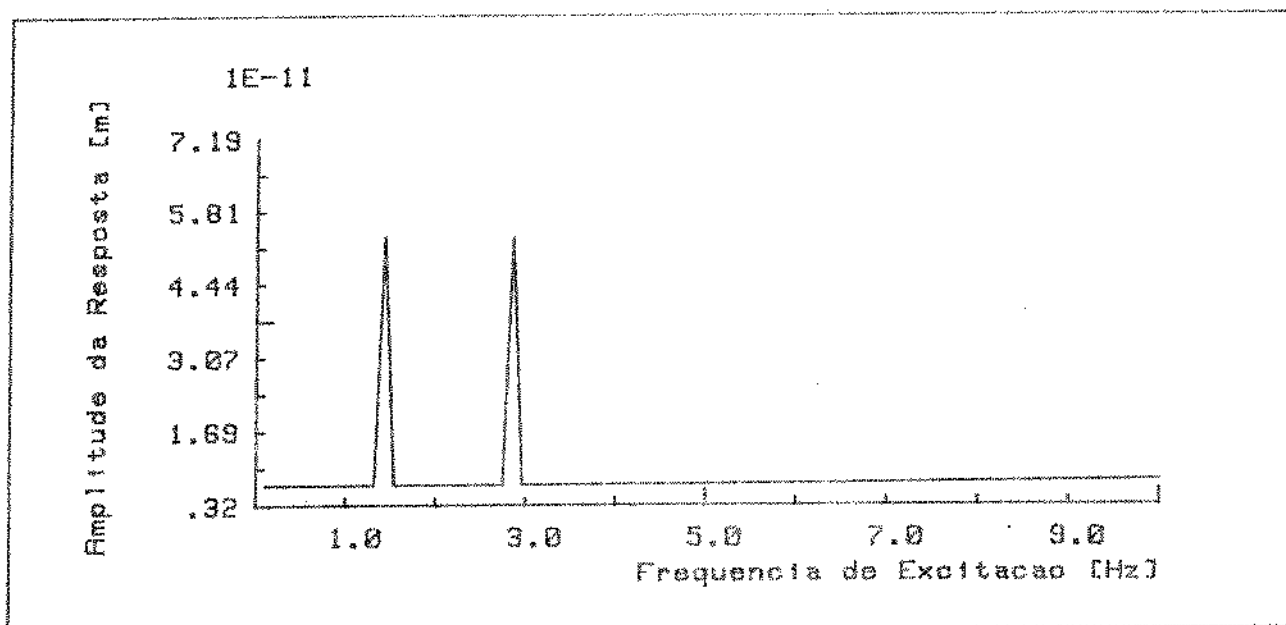


Fig. 8.5 - Espectro da resposta de um hidrogerador.

Considerou-se as forças hidráulicas com espectro constante até 55 Hz, desta forma os picos em 12,9 Hz e 30,4 Hz mostram os valores das frequências naturais. Dois picos em 1,46 Hz e 2,92 Hz correspondem à resposta da estrutura às excitações de desbalanceamento mecânico e magnético e excitação devido a ovalização do rotor do gerador (item 8.1) respectivamente. Nas medições das oscilações dos eixos (transdutor de deslocamento mostrado na Figura 6.2) realizadas na Usina de Ilha Solteira [3] obteve-se gráficos de espectro de frequência do tipo mostrado na Figura 8.6.

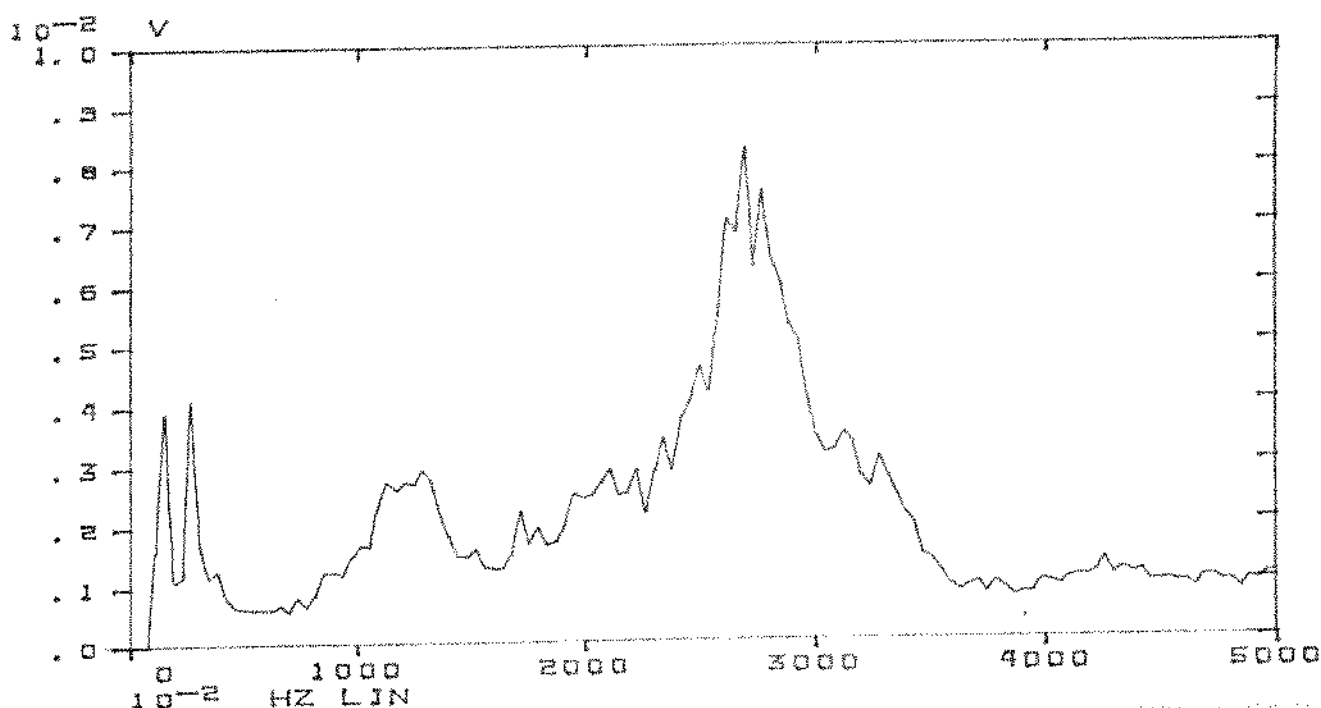


Fig. 8.6 - Espectro de frequências de oscilações do eixo típico.

Observa-se que fundamentalmente o espectro teórico obtido (Figura 8.5) é coerente com o espectro obtido experimentalmente sendo que o ajuste dos valores das frequências naturais pode ser feito por métodos de identificação que não serão tratados neste trabalho. O modelo é grosseiro no sentido de que por falta de dados mais detalhados da máquina real não foi possível levar em conta com exatidão a distribuição de massa e rigidez da turbina, do gerador e dos mancais. O objetivo principal foi construir modelos coerentes para o estudo das vibrações em hidrogeradores.

O ajuste dos resultados é função dos dados obtidos a respeito da máquina modelada. Desta forma, pode-se considerar que os resultados obtidos foram satisfatórios.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

9.1. CONCLUSÕES

Apresentam-se as conclusões deste trabalho com base nos objetivos pré-fixados no início do mesmo.

O método matricial utilizado para o modelamento matemático de hidrogeradores, Métodos das Matrizes de Transferência, mostrou-se bastante conveniente para aplicações em microcomputadores. Usando-se um computador HP-9845 A com 64K bytes de memória conseguiu-se resolver problemas em máquinas grandes de razoável complexidade. É importante frisar que esta técnica matricial é conveniente para problemas que possuam alguma simetria, o que é o caso dos modelos físicos analisados.

Vários modelos foram desenvolvidos e validados através de dados de teste (exemplos teóricos com solução exata), e os modelos de elementos contínuos desenvolvidos mostraram um bom desempenho na representação estrutural, sendo aconselhável sempre que possível direcionar as pesquisas para a utilização dos mesmos. A importância de se estudar várias formulações diferentes, e testá-las utilizando exemplos conhecidos, é evidente na medida em que a precisão dos resultados pode ser comparada. Contudo cabe salientar que a escolha dos modelos matemáticos representa uma solução de compromisso em engenharia onde relacionam-se custos computacionais, precisão dos resultados e dificuldade de implementação.

Os problemas de geometria irregular são difíceis de serem modelados por este método (MMT). Para solucionar este problema apresentou-se um método combinado MMT-MEF que, associado a técnicas de subestruturação, pode resolver uma gama bem grande de problemas de geometria irregular.

Um dos problemas mais críticos encontrados neste trabalho foram os erros numéricos provenientes dos métodos de resolução utilizados no MMT. Algumas dificuldades numéricas foram ultrapassadas embora em aplicações com muitos graus de liberdade ain-

da possam aparecer erros numéricos. Vários cuidados quanto aos erros numéricos foram tomados na implementação dos programas computacionais embora este ponto não tenha sido abordado em toda a sua profundidade.

Os modelos matemáticos validados foram aplicados ao problema dos hidrogenadores. Os dados referentes às estruturas analisadas foram levantados de forma aproximada, e, a partir dos resultados experimentais, fez-se um primeiro ajuste nestes parâmetros. A obtenção precisa dos parâmetros estruturais inclui uma parte teórica e uma parte experimental na área de identificação, o que não está no escopo deste trabalho.

A idealização dos hidrogenadores segundo as técnicas utilizadas, mostrou-se eficiente em termos de engenharia na representação do modelo físico, mesmo considerando que os parâmetros não puderam ser criteriosamente ajustados. Deu-se maior ênfase, na maior parte deste trabalho, à elaboração das técnicas de modelamento. Desta forma as verificações experimentais e o problema de identificação de parâmetros foram limitados.

9.2. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Dentro das perspectivas atuais de engenharia e pesquisa na área de comportamento dinâmico de máquinas rotativas, e especificamente dentro do contexto de continuidade deste trabalho, listam-se a seguir algumas sugestões:

Desenvolver um algoritmo para determinação das raízes de uma função. Um método de rápida convergência que pode ser utilizado é o método de Newton-Raphson [32]. Este algoritmo deve ser introduzido na procura das frequências naturais no MMT eliminando parcialmente o problema numérico decorrente do passo utilizado nos problemas iterativos.

Desenvolver métodos alternativos para cálculo da resposta no tempo a uma excitação transiente e para o estudo da estabilidade dinâmica, facilmente implementáveis a partir do estado atual deste trabalho.

Estudar, para os modelos desenvolvidos, a possibilidade de se impor deslocamentos ou inclinações constantes em alguma es-

tação do sistema mecânico, ou seja expandir o campo das condições de contorno dos problemas.

Realizar uma abordagem experimental mais ampla nos problemas de hidrogeradores buscando-se identificar os parâmetros estruturais dos modelos físicos e serem estudados, implementando métodos de identificação de parâmetros no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Incluir nos modelos matemáticos os efeitos do "selo de água" na turbina, da interação do hidrogerador com as fundações e solo, da flexibilidade das pás da turbina e da estrutura do gerador (usando possivelmente o método combinado MMT-MEF com subestruturação) e das excitações provenientes do campo magnético do gerador.

Verificar as frequências naturais torcionais e axiais que devem ser mais elevadas, procurando também possíveis efeitos de acoplamento.

Utilizar as técnicas desenvolvidas neste trabalho entre outras coisas na elaboração de critérios de manutenção preditiva para centrais hidroelétricas a partir da medida de vibração [3], na solução de problemas de identificação de forças hidráulicas [4] ou ainda para simular alguns processos de balanceamento [5] ou estudar a estabilidade dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| ESHLEMAN, R.L. - Flexible Rotor Bearing System Dynamics
I-Critical Speeds and Response of Flexible Rotor Systems
ASME, 1972.
- |2| RIEGER, N.F. - Rotor Bearing State of the art. Mechanism and
Machine Theory 1977, Vol. 12, pp. 261-270.
- |3| Relatório I a VI Projeto CESP/FUNCAMP - "CRITÉRIOS PARA AVA-
LIAÇÃO PELA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE CONDIÇÃO DE OPERAÇÃO
DE MÁQUINAS ROTATIVAS" - Campinas, SP, 1984.
- |4| ARRUDA, R, DANA, S.S., IGUTI, F., PAVANELLO, R. - "Estimation
of Hydraulic Forces on Hydraulic Turbine Runners". CANCAM,
1985.
- |5| YANG, J.L., CHU, F.H., LEE, W.T., "Heuristic Optimization in
the Balancing of High Speed Rotor", Journal of Dynamic
Systems, Measurement, and Control ASME, June 1984, Vol.
106, pp. 163-169.
- |6| PILKEY, W.D., CHANG, P.Y., Modern Formulas for Statics and
Dynamics. McGraw-Hill, 1978 (1st Edition).
- |7| ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method - (3^{ed} Edition)
McGraw-Hill (UK) 1982.
- |8| PESTEL, E., LECKIE, F. - Matrix Method in Elastomechanics -
McGraw-Hill - 1963 - USA.
- |9| BEER, F., JOHNSTON, E. - Resistência dos Materiais - McGraw-
Hill - 1982 - São Paulo.
- |10| CRANFIELD INSTITUTE OF TECHNOLOGY - School of Mechanical
Engineering - Rotor Dynamics.
- |11| COWPER, G.R. - "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam
Theory" - Journal of Applied Mechanics, June 1966.

- |12| GASH, R., PFÜTZNER H. - Rotordynamik Eine Einführung Springer Verlag - Berlin, 1975.
- |13| HARTOG, D. - "Vibrações nos Sistemas Mecânicos", Ed. Edgard Blücher, 1972, São Paulo.
- |14| WEBER, H.I., PEDERIVA ROBSON - "Montagem Experimental de um Modelo para Análise de Efeitos Dinâmicos em Rotores" , COBEM 79, C22.
- |15| R.L. RUHL, J.F. BOOKER - "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", Journal of Engineering for Industry, 1972, Feb.
- |16| PAVANELLO, R. ARRUDA, J.R.F., IGUTI, F. - Estudo do Comportamento Dinâmico de Vigas Contínuas, V Seminário ADUNESP-GUARATINGUETÁ, Outubro, 1984.
- |17| SHANLEY, F.R. - "Strength of Materials", McGraw Hill Book Company, New York, 1955.
- |18| SILVA, V.M.C. - "Análise Dinâmica de um Volante Supercrítico para armazenamento de Energia", Tese de Mestrado UNICAMP, 1984.
- |19| PEDERIVA, R. - "Análise Modal", Publicação Interna - GEPRON-FEC-DEM-UNCAMP.
- |20| GOYDER, H.G.D. - "Methods and Application of Structural Frequency Response Data", J. Sound and Vibration (1980), 68.
- |21| MANUAL DE UTILIZAÇÃO GEDIM - Publicação Interna - GEPRON-FEC-DEM-UNCAMP.
- |22| HORNER, G.C., PILKEY, W.D. - "The Riccati Transfer Matrix Method", Journal of Mechanical Design, April 1978, Vol. 100 pp 297/302.
- |23| UHRIG, R. - "The Transfer Matrix Method seen as one Method of Structural Analyses Among Others", Journal Sound and Vibration, 1966, 4(2), pp. 136-148.

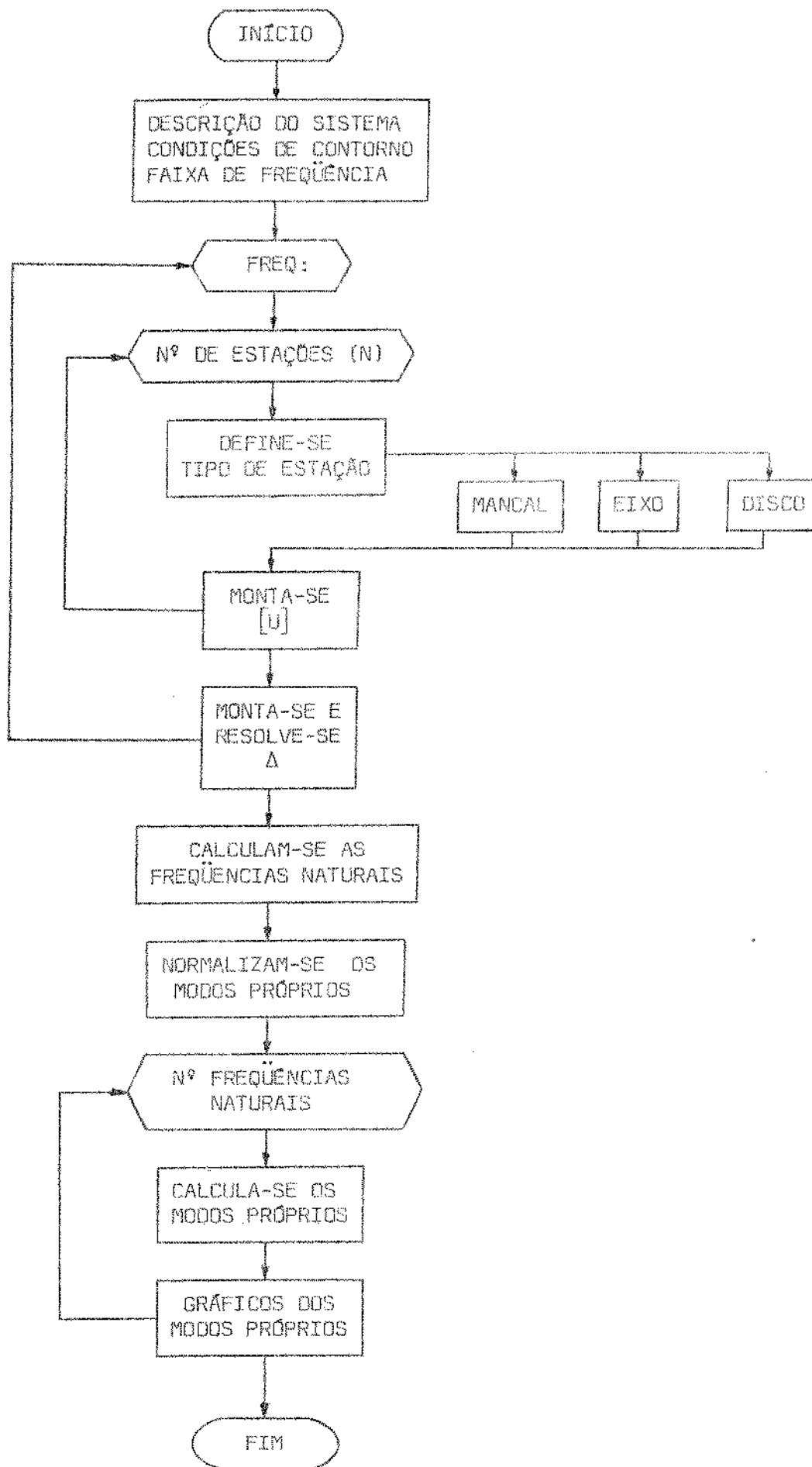
- [24] RAO, J.S. - "Rotor Dynamics", Ed. John Wiley e Sons, 1983, New Delhi.
- [25] WESTLAKE, J.R. - A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations, John Wiley e Sons - New York, 1968.
- [26] DOKAINISH M.A. - A New Aproach for Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix an Finite Element Technique. Journal of Engineering for Industry - May, 1972.
- [27] CHIATI, G., SESTIERI, A. - Analysis of Static and Dynamic Structural Problems by a Combined Finite Element - Transfer Matrix Method, Journal of Sound and Vibration (1979) 67(1), 35-42.
- [28] PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [29] BULENT A. O. - Dynamics of Frameworks by Continuous Mass Method, Computers and Structures, Vol. 4, 1061-1089 (1974).
- [30] VIERCK, K.R. - Vibration Analysis, International Text Book Company, USA, 1969.
- [31] Bowdler, H., et al. - "The Qr and QL algorithms for symetric Matrices", John Wiley e Sons, New York, 1967.
- [32] WILLIAM, S.D., MCCRACKEN, D.D. - Cálculo Numérico com estudos de Casos em Fortran IV, Editora Campus, 1978, RJ.
- [33] SCHWIRZER, T. - Bewertung und Überwachung des Schwingungszustands Grober Wasserkraftmaschinen, Siemens, 1972.
- [34] SCHWIRZER, T. - Dynamic Stressing of Hydroelectric Units by Stochastic Hydraulic forces on the Turbine Runner. Water Power & Dam Construction, January 1977 (39,44).
- [35] CLATTFELDER A.H., GREIN, H., DÖRFLER, P.K. - System Vibrations in Hydroplants, Ercher Wyss News, 1/1981 (pg. 27-31).

APÊNDICE 1

ALGORÍTMO E LISTAGENS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO
DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS USANDO O MMT

Desenvolveu-se um programa para aplicação em um micro-computador HP 9845A com 64K bytes de memória em linguagem HP-BASIC. Este programa resolve frequências naturais e modos próprios de vibração usando o MMT conforme teoria dos capítulos 2 e 3. O diagrama de blocos mostra a seqüência dos cálculos e a estrutura do programa.

As listagens a seguir mostram o programa utilizado e as sub-rotinas específicas para a representação contínua de eixos com solução exata e representação aproximada de eixos usando o método combinado MMT-MEF.



```

10 *****
20 ***** MODELOS DICRETOS *****
30 *****
40 ***** CALCULO DE FREQUENCIAS NATURAIS(OME=0) E MODOS PROPRIOS DE VIBRACAO DE
50 ***** SISTEMAS MECANICOS COMPOSTOS DE EIXOS-DISCOS-MANCALIS
60 ***** CONSIDERANDO-SE EFEITO DE INERCIA DE INCLINACAO E
70 ***** (DICRETIZACAO PARA OS EIXOS COM TRINTA PONTOS DE MASSA)
80 *****
90 OPTION BASE 1
100 DIM U1(4,4),U2(4,4),U3(4,4),Delta(2,2),Freq(0),A(4,2),Mes(25,7),G(202,2),Pr
(4,4),S(4)
110 PRINTER IS 15
120 PRINT "CONFIGURACAO DO SISTEMA DA ESQUERDA PARA DIREITA"
130 PRINT USING "// "
140 INPUT "NUMERO DE ESTAGIOS =?",Mes
150 PRINT "NUMERO DE ESTAGIOS DO SISTEMA=",Mes
160 FOR Es=1 TO Mes
170 INPUT "ENTRE O NUMERO DO ESTAGIO",Es
180 INPUT "ESTAGIO TIPO : (1)MANCAL,(2)EIXO,(3)ROTOR,(4)EIXO OCC,(5)MANCAL DE TO
RCAO",Ties
190 Mes(Es,1)=Es
200 Mes(Es,6)=Ties
210 IF Ties=1 THEN 280
220 IF Ties=2 THEN 300
230 IF Ties=4 THEN 350
240 ON Ties GOTO 280,300,230,350,410
250 INPUT "DIAMETRO DO ROTOR ",Mes(Es,2)
260 INPUT "LARGURA DO ROTOR ",Mes(Es,3)
270 INPUT "PESO ESPECIFICO DO ROTOR",Mes(Es,4)
280 INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO ROTOR",Mes(Es,5)
290 GOTO 420
300 INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL",Mes(Es,2)
310 GOTO 420
320 INPUT "DIAMETRO DO EIXO ",Mes(Es,2)
330 INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO NESTE ESTAGIO ",Mes(Es,3)
340 INPUT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ",Mes(Es,4)
350 INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO EIXO ",Mes(Es,5)
360 GOTO 420
370 INPUT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO",Mes(Es,2)
380 INPUT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO",Mes(Es,3)
390 INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO OCC",Mes(Es,4)
400 INPUT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL",Mes(Es,5)
410 INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE",Mes(Es,7)
420 GOTO 420
430 INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO",Mes(Es,2)
440 NEXT Es
450 INPUT "MANCALIS RIGIDOS(1);EXTREMIDADES LIVRES/MANCALIS FLEXIVEIS(2);ENCASTAD
O/LIVRE(3)",Cl
460 INPUT "QUAL A FAIXA DE FREQUENCIAS A SER PESQUISADA(RAD/SEG)",Omeg1,Omeg2
470 PRINT USING "// "
480 FOR N=1 TO Mes
490 ON Mes(N,6) GOTO 490,520,500,530,570,770
500 PRINT "MANCAL NO ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
510 PRINT USING "/" "
520 PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL ",Mes(N,2)
530 GOTO 810
540 PRINT "EIXO ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
550 PRINT USING "/" "
560 PRINT "DIAMETRO DO EIXO ",Mes(N,2)
570 PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO ",Mes(N,3)
580 PRINT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ",Mes(N,4)
590 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE ",Mes(N,5)
600 PRINT USING "// "
610 GOTO 810

```

```

600 PRINT "ROTOR ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
610 PRINT USING "/"
620 PRINT "DIAMETRO DO ROTOR ",Mes(N,2)
630 PRINT "LARGURA DO ROTOR ",Mes(N,3)
640 PRINT "PESO ESPECIFICO ",Mes(N,4)
650 PRINT "MODULO DE ELATICIDADE ",Mes(N,5)
660 PRINT USING "/"
670 GOTO 810
680 PRINT "EIXO OCO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
690 PRINT USING "/"
700 PRINT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO",Mes(N,2)
710 PRINT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO OCO",Mes(N,3)
720 PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO OCO",Mes(N,4)
730 PRINT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL",Mes(N,5)
740 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE",Mes(N,7)
750 PRINT USING "/"
760 GOTO 810
770 PRINT "MANCAL DE TORCAO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
780 PRINT USING "/"
790 PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO",Mes(N,2)
800 PRINT USING "/"
810 NEXT N
820 I=1
830 Omestp=(Omeg2-Omeg1)/100
840 FOR Omeg=Omeg1+Omestp TO Omeg2 STEP Omestp
850 FOR N=1 TO Mes
860 ON Mes(N,6) GOSUB Mancal,Eixo,Rotor,Eixoco,Mantor
870 Eixo: CALL Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
880 GOTO Nxt
890 Mancal:CALL Mancal(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
900 GOTO Nxt
910 Rotor:CALL Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
920 GOTO Nxt
930 Eixoco:CALL Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
940 GOTO Nxt
950 Mantor:CALL Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
960 Nxt: NEXT N
970 ON Mes(N-1,6) GOTO 1000,980,1000,980,1000
980 MAT U3=U2
990 GOTO 1020
1000 MAT U3=U1
1010 IF Ct=3 THEN 1130
1020 IF Ct=1 THEN 1080
1030 Delta(1,1)=U3(3,1)
1040 Delta(1,2)=U3(3,2)
1050 Delta(2,1)=U3(4,1)
1060 Delta(2,2)=U3(4,2)
1070 GOTO 1170
1080 Delta(1,1)=U3(1,2)
1090 Delta(1,2)=U3(1,4)
1100 Delta(2,1)=U3(3,2)
1110 Delta(2,2)=U3(3,4)
1120 GOTO 1170
1130 Delta(1,1)=U3(3,3)
1140 Delta(1,2)=U3(3,4)
1150 Delta(2,1)=U3(4,3)
1160 Delta(2,2)=U3(4,4)
1170 Y=DET(Delta)
1180 G(I,1)=Omeg
1190 G(I,2)=Y
1200 PRINT G(I,1),G(I,2),I
1210 I=I+1
1220 NEXT Omeg
1230 K=1
1240 FOR I=1 TO 99

```

```

1250 IF G(I,2)>0 THEN 1280
1260 IF G(I+1,2)<0 THEN 1310
1270 GOTO 1290
1280 IF G(I+1,2)>0 THEN 1310
1290 Freq(K)=(-G(I+1,2)*G(I,1)+G(I,2)*G(I+1,1))/(G(I,2)-G(I+1,2))
1300 K=K+1
1310 NEXT I
1320 Nfreq=K-1
1330 FOR K=1 TO Nfreq
1340 Freq(K)=Freq(K)/(2*PI)
1350 NEXT K
1360 PRINT USING "/"
1370 PRINT "FREQUENCIAS NATURAIS EM HZ "
1380 FOR K=1 TO Nfreq
1390 PRINT Freq(K)
1400 NEXT K
1410 PRINT USING "//"
1420 PRINT "FREQUENCIAS NATURAIS EM RAD/SEG"
1430 FOR K=1 TO Nfreq
1440 Freq(K)=Freq(K)*2*PI
1450 PRINT Freq(K)
1460 NEXT K
1470 INPUT "DESEJA OS MODOS DE VIBRAR (1)SIM (2)NAO ",Mp
1480 IF Mp=1 THEN Modos
1490 GOTO Fim
1500 Modos:CALL Modos(Mes(*),U1(*),U2(*),Freq(*),N,Omeg,Hes,Nfreq,Ct)
1510 Fim:END
1520 SUB Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1530 OPTION BASE 1
1540 REAL C(4,4),P(4,4),U3(4,4),Ar,G
1550 L=Mes(N,3)/31
1560 Ee=Mes(N,5)
1570 Ar=Mes(N,2)^2*PI/4
1580 G=Ee/(2*(1+.9))
1590 Jie=PI*Mes(N,2)^4/64
1600 Ve=PI*Mes(N,2)^2/4*L
1610 Me=Mes(N,4)*Ve
1620 C(1,1)=1
1630 C(1,2)=L
1640 C(1,3)=L^2/(2*Ee+Jie)
1650 C(1,4)=L^3/(6*Ee+Jie)
1660 C(2,2)=1
1670 C(2,3)=L/(Ee+Jie)
1680 C(2,4)=L^2/(2*Ee+Jie)
1690 C(3,3)=1
1700 C(3,4)=L
1710 C(4,4)=1
1720 MAT P=IDN
1730 P(3,2)=-Me*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
1740 P(4,1)=Me*Omeg^2
1750 IF N=1 THEN MAT U1=IDN
1760 IF N=1 THEN GOTO 1780
1770 IF Mes(N-1,5)=2 THEN MAT U1=U2
1780 MAT U2=C*U1
1790 FOR J=1 TO 30
1800 MAT U3=P*U2
1810 MAT U2=C*U3
1820 NEXT J
1830 SUBEND
1840 SUB Manca(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1850 OPTION BASE 1
1860 REAL Man(4,4)
1870 MAT Man=IDN
1880 Man(4,1)=-Mes(N,2)
1890 IF N=1 THEN MAT U2=IDN

```

```

1900 IF N=1 THEN 1920
1910 IF (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=1) THEN MAT U2=U1
1920 MAT U1=Man*U2
1930 SUBEND
1940 SUB Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1950 OPTION BASE 1
1960 REAL Pr(4,4)
1970 MAT Pr=IDN
1980 Vr=PI*Mes(N,2)^2/4*Mes(N,3)
1990 Mr=Mes(N,4)*Vr
2000 Pr(3,2)=-Mr*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
2010 Pr(4,1)=Mr*Omeg^2
2020 IF N=1 THEN MAT U2=IDN
2030 IF N=1 THEN 2050
2040 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
2050 MAT U1=Pr*U2
2060 SUBEND
2070 SUB Modos(Mes(*),U1(*),U2(*),Freq(*),N,Omeg,Mes,Nfreq,Ct)
2080 OPTION BASE 1
2090 REAL S(4),U3(4,4),Mmopr(5,200),K
2100 FOR I=1 TO Nfreq
2110 Ki=0
2120 Omeg=Freq(I)
2130 FOR N=1 TO Mes
2140 ON Mes(N,6) GOSUB Manca1,Eixo,Rotor,Eixoco,Mantor
2150 Eixo:Ki=Ki+30
2160 CALL Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2170 GOTO Nx
2180 Manca1:Ki=Ki+1
2190 CALL Manca1(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2200 GOTO Nx
2210 Rotor:Ki=Ki+1
2220 CALL Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2230 GOTO Nx
2240 Eixoco:Ki=Ki+30
2250 CALL Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2260 GOTO Nx
2270 Mantor:Ki=Ki+1
2280 CALL Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2290 Nx:NEXT N
2300 ON Mes(N-1,6) GOTO 2330,2310,2330,2310,2330
2310 MAT U3=U2
2320 GOTO 2340
2330 MAT U3=U1
2340 IF Ct=1 THEN GOTO 2400
2350 Vest:S(1)=-1
2360 S(2)=U3(3,1)/U3(3,2)
2370 S(3)=0
2380 S(4)=0
2390 GOTO 2440
2400 S(2)=1
2410 S(4)=-U3(1,2)/U3(1,4)
2420 S(1)=0
2430 S(3)=0
2440 K=0
2450 Li=1
2460 FOR N=1 TO Mes
2470 ON Mes(N,6) GOSUB Mpmanca1,Mpeixo,Mprotor,Mpeixoco,Mpmantor
2480 Mpeixo:CALL Mpeixo(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
2490 GOTO Nxt
2500 Mpmanca1:CALL Mpmanca1(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
2510 GOTO Nxt
2520 Mprotor:CALL Mprotor(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
2530 GOTO Nxt
2540 Mpeixoco:CALL Mpeixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)

```

```

2550 GOTO Nxt
2560 Mpmantor:CALL Mpmantor(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
2570 Nxt:NEXT N
2580 PRINT "MODO NUMERO",I
2590 PRINT "FREQUENCIA EM RPM",Omeg/(2*PI)*60
2600 PRINT "DESLOCAMENTOS Y E POSICAO DO EIXO "
2610 FOR M1=1 TO Ki+1
2620 PRINT Mmopr(1,M1),Mmopr(5,M1)
2630 NEXT M1
2640 INPUT "DESEJA OS GRAFICOS DESTE MODO SIM(1)/NAO(2)",Degr
2650 IF Degr=2 THEN 2680
2660 CALL Graficos(Mmopr(*),Omeg,Ki,I)
2670 INPUT "APORTE ZERO PARA PROCESSAR O PROXIMO MODO",Degr
2680 NEXT I
2690 SUBEND
2700 SUB Mpeixo(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
2710 OPTION BASE 1
2720 REAL C(4,4),P(4,4),U3(4,4),Aux(4),L,Ar,G
2730 L=Mes(N,3)/31
2740 Ee=Mes(N,5)
2750 Ar=Mes(N,2)^2*PI/4
2760 G=Ee/(2*(1+.3))
2770 Jie=PI*Mes(N,2)^4/64
2780 Ve=PI*Mes(N,2)^2/4*L
2790 Me=Mes(N,4)*Ve
2800 C(1,1)=1
2810 C(1,2)=L
2820 C(1,3)=L^2/(2*Ee*Jie)
2830 C(1,4)=L^3/(6*Ee*Jie)
2840 C(2,2)=1
2850 C(2,3)=L/(Ee*Jie)
2860 C(2,4)=L^2/(2*Ee*Jie)
2870 C(3,3)=1
2880 C(3,4)=L
2890 C(4,4)=1
2900 MAT P=IDN
2910 P(3,2)=-Me*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
2920 P(4,1)=Me*Omeg^2
2930 IF N=1 THEN GOTO 2960
2940 IF (Mes(N-1,6)=2) OR (Mes(N-1,6)=4) THEN MAT U1=U2
2950 GOTO 3010
2960 MAT U1=IDN
2970 Mmopr(5,Li)=0
2980 FOR M=1 TO 4
2990 Mmopr(M,1)=S(M)
3000 NEXT M
3010 MAT U2=C*U1
3020 FOR J=1 TO 30
3030 MAT U3=P*U2
3040 K=K+L
3050 Li=Li+1
3060 MAT Aux=U3*S
3070 FOR M=1 TO 4
3080 Mmopr(M,Li)=Aux(M)
3090 NEXT M
3100 Mmopr(5,Li)=K
3110 MAT U2=C*U3
3120 NEXT J
3130 K=K+L
3140 Mmopr(5,Li)=K
3150 SUBEND
3160 SUB Mprotor(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
3170 OPTION BASE 1
3180 REAL Pr(4,4),Aux(4)
3190 MAT Pr=IDN

```

```

3200 Vr=PI*Mes(N,2)^2/4*Mes(N,3)
3210 Mr=Mes(N,4)*Vr
3220 Pr(3,2)=-Mr*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
3230 Pr(4,1)=Mr*Omeg^2
3240 IF N=1 THEN 3270
3250 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
3260 GOTO 3320
3270 MAT U2=IDN
3280 Mmopr(5,Li)=0
3290 FOR M=1 TO 4
3300 Mmopr(M,1)=S(M)
3310 NEXT M
3320 MAT U1=Pr*U2
3330 Li=Li+1
3340 K=K+Mes(N,3)
3350 Mmopr(5,Li)=K
3360 MAT Aux=U1*S
3370 FOR M=1 TO 4
3380 Mmopr(M,Li)=Aux(M)
3390 NEXT M
3400 SUBEND
3410 SUB Mpmancal(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
3420 OPTION BASE 1
3430 REAL Man(4,4),Aux(4)
3440 MAT Man=IDN
3450 Man(4,1)=-Mes(N,2)
3460 IF N=1 THEN 3490
3470 IF (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
3480 GOTO 3500
3490 MAT U2=IDN
3500 MAT U1=Man*U2
3510 Li=Li+1
3520 Mmopr(5,Li)=K
3530 MAT Aux=U1*S
3540 FOR M=1 TO 4
3550 Mmopr(M,Li)=Aux(M)
3560 NEXT M
3570 SUBEND
3580 SUB Graficos(Mmopr(*),Omeg,Ki,I)
3590 OPTION BASE 1
3600 REAL Kj,Ord(5,200),Xmin,Xmax,Detet,Ymin,Ymax,Aju
3610 PLOTTER IS 7,5,"9872A"
3620 PLOTTER 7,5 IS ON
3630 I PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
3640 GRAPHICS
3650 INPUT "DESEJA DESLOCAMENTOS(1), INCLINACAO(2), MOMENTOS(3), CORTANTE(4)",Kj
3660 LIMIT 15,15+250,10,10+100
3670 FRAME
3680 LOCATE 20,140,20,90
3690 Xmin=0
3700 Xmax=Mmopr(5,Ki+1)
3710 MAT Ord=Mmopr
3720 Detet=0
3730 FOR J=1 TO Ki
3740 IF Ord(Kj,J)>Ord(Kj,J+1) THEN 3760
3750 GOTO Next
3760 Aju=Ord(Kj,J)
3770 Ord(Kj,J)=Ord(Kj,J+1)
3780 Ord(Kj,J+1)=Aju
3790 Detet=1
3800 Next: NEXT J
3810 IF Detet=1 THEN 3720
3820 Ymin=Ord(Kj,1)
3830 Ymax=Ord(Kj,Ki+1)
3840 Xstep=(Xmax-Xmin)/10

```



```

3850 Ystep=(Ymax-Ymin)/10
3860 SCALE Xmin,Xmax+Xstep/2,Ymin-Ystep,Ymax+Ystep
3870 LINE TYPE 1
3880 AXES Xstep,Ystep,0,0,5,5,5
3890 CSIZE 3
3900 LDIR 0
3910 LORG 5
3920 FOR Xposition=Xmin TO Xmax+Xstep STEP Xstep*2
3930 MOVE Xposition,-Ystep/2
3940 LABEL USING "3D.DD X ";Xposition
3950 NEXT Xposition
3960 CSIZE 3
3970 LDIR 0
3980 LORG 8
3990 FOR Yposition=Ymin TO Ymax STEP Ystep
4000 MOVE Xmin,Yposition
4010 LABEL USING "M4D.DDX";Yposition
4020 NEXT Yposition
4030 LORG 8
4040 CSIZE 3
4050 LDIR 0
4060 MOVE Xmin+3*Xstep,-2*Ystep
4070 LABEL USING "K";"MODO NUMERO"
4080 LABEL USING "DD";I
4090 MOVE Xmin+8*Xstep,-2*Ystep
4100 LABEL USING "K";"FREQUENCIA (HZ) "
4110 LABEL USING " DDDD.DD ";Omeq/(2*PI)
4120 MOVE Xmin+9*Xstep,-1.5*Ystep
4130 ON Kj GOTO 4140,4160,4180,4200
4140 LABEL USING "K";"POSICAO DO EIXO X DESLOCAMENTOS"
4150 GOTO 4210
4160 LABEL USING "K";"INCLINACAO"
4170 GOTO 4210
4180 LABEL USING "K";"MOMENTOS"
4190 GOTO 4210
4200 LABEL USING "K";"ESFORCO CORTANTE"
4210 FOR J=1 TO Ki+1
4220 FOR J=1 TO Ki+1
4230 PLOT Mmopr(5,J),Mmopr(Kj,J),1
4240 NEXT J
4250 PAUSE
4260 INPUT "DESEJA OUTRO GRAFICO DESTA MODO?(1)SIM,(2)NAO",Deog
4270 IF Deog=1 THEN GOTO 3580
4280 SUBEND
4290 SUB Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeq,X1,X2,Rot)
4300 OPTION BASE 1
4310 REAL C(4,4),P(4,4),U3(4,4),Ar,G
4320 L=Mes(N,4)/31
4330 Ee=Mes(N,7)
4340 Ar=PI*(Mes(N,2)^2-Mes(N,3)^2)/4
4350 G=Ee/(2*(1+.3))
4360 Jie=PI*(Mes(N,2)^4-Mes(N,3)^4)/64
4370 Ve=Ar*L
4380 Me=Mes(N,5)*Ve
4390 C(1,1)=1
4400 C(1,2)=L
4410 C(1,3)=L^2/(2*Ee*Jie)
4420 C(1,4)=L^3/(6*Ee*Jie)
4430 C(2,2)=1
4440 C(2,3)=L/(Ee*Jie)
4450 C(2,4)=L^2/(2*Ee*Jie)
4460 C(3,3)=1
4470 C(3,4)=L
4480 C(4,4)=1
4490 MAT F=IDN

```

```

4500 P(3,2)=-Me*Jie
4510 P(4,1)=Me*Omeg^2
4520 IF N=1 THEN MAT U1=IDN
4530 IF N=1 THEN 4550
4540 IF (Mes(N-1,6)=2) OR (Mes(N-1,6)=4) THEN MAT U1=U2
4550 MAT U2=C*U1
4560 FOR J=1 TO 30
4570 MAT U3=P*U2
4580 MAT U2=C*U3
4590 NEXT J
4600 SUBEND
4610 SUB Mpeixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
4620 OPTION BASE 1
4630 REAL C(4,4),P(4,4),U3(4,4),Aux(4),L,Ar,G,Jie
4640 L=Mes(N,4)/31
4650 Ee=Mes(N,7)
4660 Ar=PI*(Mes(N,2)^2-Mes(N,3)^2)/4
4670 G=Ee*(2*(1+.3))
4680 Jie=PI*(Mes(N,2)^4-Mes(N,3)^4)/64
4690 Me=Ar*L+Mes(N,5)
4700 C(1,1)=1
4710 C(1,2)=L
4720 C(1,3)=L^2/(2*Ee*Jie)
4730 C(1,4)=L^3/(6*Ee*Jie)
4740 C(2,2)=L
4750 C(2,3)=L/(Ee*Jie)
4760 C(2,4)=L^2/(2*Ee*Jie)
4770 C(3,3)=1
4780 C(3,4)=L
4790 C(4,4)=1
4800 MAT P=IDN
4810 P(3,2)=-Me*Jie
4820 P(4,1)=Me*Omeg^2
4830 IF N=1 THEN 4860
4840 IF (Mes(N-1,6)=2) OR (Mes(N-1,6)=4) THEN MAT U1=U2
4850 GOTO 4910
4860 MAT U1=IDN
4870 Mmopr(5,Li)=0
4880 FOR M=1 TO 4
4890 Mmopr(M,1)=S(M)
4900 NEXT M
4910 MAT U2=C*U1
4920 FOR J=1 TO 30
4930 MAT U3=P*U2
4940 K=K+L
4950 Li=Li+1
4960 MAT Aux=U3*S
4970 FOR M=1 TO 4
4980 Mmopr(M,Li)=Aux(M)
4990 NEXT M
5000 Mmopr(5,Li)=K
5010 MAT U2=C*U3
5020 NEXT J
5030 K=K+L
5040 Mmopr(5,Li)=K
5050 SUBEND
5060 SUB Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
5070 OPTION BASE 1
5080 REAL Man(4,4)
5090 MAT Man=IDN
5100 Man(4,1)=Mes(N,2)
5110 IF N=1 THEN MAT U2=IDN
5120 IF N=1 THEN 5140
5130 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
5140 MAT U1=Man*U2

```

```

5150 SUBEND
5160 SUB Mpmantor(Mes(*),U1(*),U2(*),Mmopr(*),S(*),K,N,Omeg,Li)
5170 OPTION BASE 1
5180 REAL Man(4,4),Aux(4)
5190 MAT Man=IDN
5200 Man(4,1)=Mes(N,2)
5210 IF N=1 THEN 5240
5220 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
5230 GOTO 5250
5240 MAT U2=IDN
5250 MAT U1=Man*U2
5260 Li=Li+1
5270 Mmopr(5,Li)=K
5280 MAT Aux=U1*S
5290 FOR N=1 TO 4
5300 Mmopr(N,Li)=Aux(N)
5310 NEXT N
5320 SUBEND

```

```

1510 | *****
1520 | ***** MODELO CONTINUO COM SOLUCAO "EXATA" [MNT] *****
1530 | *****
1540 SUB Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1550 OPTION BASE 1
1560 REAL U3(4,4),Acte,Beta,Sig,Tau,Lam1,Lam2,C0,C1,C2,C3,Gama
1570 Acte=Mes(N,3)^2/(Mes(N,5)*(PI*Mes(N,2)^4/64)
1580 Beta=16*Mes(N,4)*Mes(N,3)^4/(Mes(N,5)*Mes(N,2)^2)*Omeg^2
1590 Sig=Mes(N,3)^2*Mes(N,4)*2.6/(Mes(N,5)*.75)*Omeg^2
1600 Tau=1*Mes(N,3)^2*Mes(N,4)/Mes(N,5)*Omeg^2
1610 Lam1=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5-.5*(Sig+Tau))^-.5
1620 Lam2=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5+.5*(Sig+Tau))^-.5
1630 Gama=1/(Lam1^2+Lam2^2)
1640 C0=Gama*(Lam2^2*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2*COS(Lam2))
1650 C1=Gama*(Lam2^2/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2/Lam2*SIN(Lam2))
1660 C2=Gama*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2-COS(Lam2))
1670 C3=Gama*(1/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)-1/Lam2*SIN(Lam2))
1680 U3(1,1)=C0-Sig*C2
1690 U3(1,2)=Mes(N,3)*(C1-(Sig+Tau)*C3)
1700 U3(1,3)=Acte*C2
1710 U3(1,4)=Acte*Mes(N,3)/Beta*(-Sig*C1+(Beta+Sig^2)*C3)
1720 U3(2,1)=Beta*C3/Mes(N,3)
1730 U3(2,2)=C0-Tau*C2
1740 U3(2,3)=Acte/Mes(N,3)*(C1-Tau*C3)
1750 U3(2,4)=U3(1,3)
1760 U3(3,1)=Beta*C2/Acte
1770 U3(3,2)=Mes(N,3)/Acte*(-Tau*C1+(Beta+Tau^2)*C3)
1780 U3(3,3)=U3(2,2)
1790 U3(3,4)=U3(1,2)
1800 U3(4,1)=Beta/(Acte*Mes(N,3))*(C1-Sig*C3)
1810 U3(4,2)=U3(3,1)
1820 U3(4,3)=U3(2,1)
1830 U3(4,4)=U3(1,1)
1840 IF N=1 THEN MAT U1=IDN
1850 IF N=1 THEN GOTO 1870
1860 IF Mes(N-1,6)=2 THEN MAT U1=U2
1870 MAT U2=U3*U1
1880 SUBEND

```

```

4130 | *****
4140 | ***** METODO COMBINADO MMT-NEF *****
4150 | ***** DINAMICA DE EIXOS *****
4160 | *****
4170 SUB Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
4180 OPTION BASE 1
4190 REAL A(2,2),B(2,2),C(2,2),Ar,G,D(2,2),E(2,2),F(2,2),G(2,2),H(2,2),U3(4,4)
4200 L=Mes(N,3)
4210 Ee=Mes(N,5)
4220 Ar=PI*Mes(N,2)^2/4
4230 Jie=PI*Mes(N,2)^4/64
4240 Alfa=Ee*Jie/L^3
4250 Beta=Omeg^2*(Mes(N,4)*Ar*L)/420
4260 A(1,1)=6*L*Alfa-22*L*Beta
4270 A(1,2)=-4*L^2*Alfa+4*L^2*Beta
4280 A(2,1)=-12*Alfa+156*Beta
4290 A(2,2)=6*L*Alfa-22*L*Beta
4300 B(1,1)=-6*L*Alfa-13*L*Beta
4310 B(1,2)=-2*L^2*Alfa-3*L^2*Beta
4320 B(2,1)=12*Alfa+54*Beta
4330 B(2,2)=6*L*Alfa+13*L*Beta
4340 C(1,1)=-6*L*Alfa-13*L*Beta
4350 C(1,2)=2*L^2*Alfa+3*L^2*Beta
4360 C(2,1)=-12*Alfa-54*Beta
4370 C(2,2)=6*L*Alfa+13*L*Beta
4380 D(1,1)=A(1,1)
4390 D(1,2)=-A(1,2)
4400 D(2,1)=-A(2,1)
4410 D(2,2)=A(2,2)
4420 MAT E=INV(B)
4430 MAT G=D*E
4440 MAT F=E*(-1)
4450 MAT H=F*A
4460 MAT B=G*(-1)
4470 MAT F=B*A
4480 MAT B=C+F
4490 U3(1,1)=H(1,1)
4500 U3(1,2)=-H(1,2)
4510 U3(2,1)=-H(2,1)
4520 U3(2,2)=H(2,2)
4530 U3(1,3)=-E(1,1)
4540 U3(1,4)=-E(1,2)
4550 U3(2,3)=E(2,1)
4560 U3(2,4)=E(2,2)
4570 U3(3,1)=-B(1,1)
4580 U3(3,2)=B(1,2)
4590 U3(4,1)=-B(2,1)
4600 U3(4,2)=B(2,2)
4610 U3(3,3)=G(1,1)
4620 U3(3,4)=G(1,2)
4630 U3(4,3)=G(2,1)
4640 U3(4,4)=G(2,2)
4650 IF N=1 THEN MAT U1=IDN
4660 IF N=1 THEN GOTO 4680
4670 IF (Mes(N-1,6)=2) OR (Mes(N-1,6)=4) THEN MAT U1=U2
4680 MAT U2=U3*U1
4690 SUBEND

```

APÊNDICE 2

ESTUDO DO EFEITO GIROSCÓPICO [10]

Da dinâmica clássica tem-se que a variação da quantidade de movimento angular é igual à magnitude do momento resultante do sistema:

$$\vec{M}_o = \frac{d}{dt} (I_o \vec{\omega}) \quad (\text{a.2.1})$$

onde:

I_o = momento de inércia em relação ao ponto o (tensor de inércia)

$\vec{\omega}$ = velocidade angular

\vec{M}_o = Momento resultante

A Figura a.2.1 mostra o diagrama de momentos em um disco de espessura desprezível. Pode-se determinar que a quantidade de movimento angular, denotada por \vec{H}_o , em relação ao eixo Ox' é dada por:

$$\vec{H}_o = I_p \Omega \quad (\text{a.2.2})$$

Dado um deslocamento angular ϕ , com componentes γ e β as quantidades de movimento angular valem $I_d \dot{\gamma}$ e $I_d \dot{\beta}$ respectivamente em relação a y' e z' . Das componentes sobre os eixos Ox e Oy tem-se que a projeção de $I_p \Omega$ sobre o eixo Oy devido à rotação β será:

$$I_p \Omega \sin \beta \quad (\text{a.2.3})$$

soma-se o efeito de $I_d \dot{\gamma}$ devido a rotação β que vale:

$$I_d \dot{\gamma} \cos \beta \quad (\text{a.2.4})$$

e desta forma obtêm-se:

$$\vec{H}_{Oy} = I_p \Omega \operatorname{sen} \beta - I_d \dot{\gamma} \cos \beta \quad (\text{a.2.5})$$

Analogamente para o eixo Oz tem-se:

$$\vec{H}_{Oz} = I_p \Omega \operatorname{sen} \gamma + I_d \dot{\beta} \cos \gamma \quad (\text{a.2.6})$$

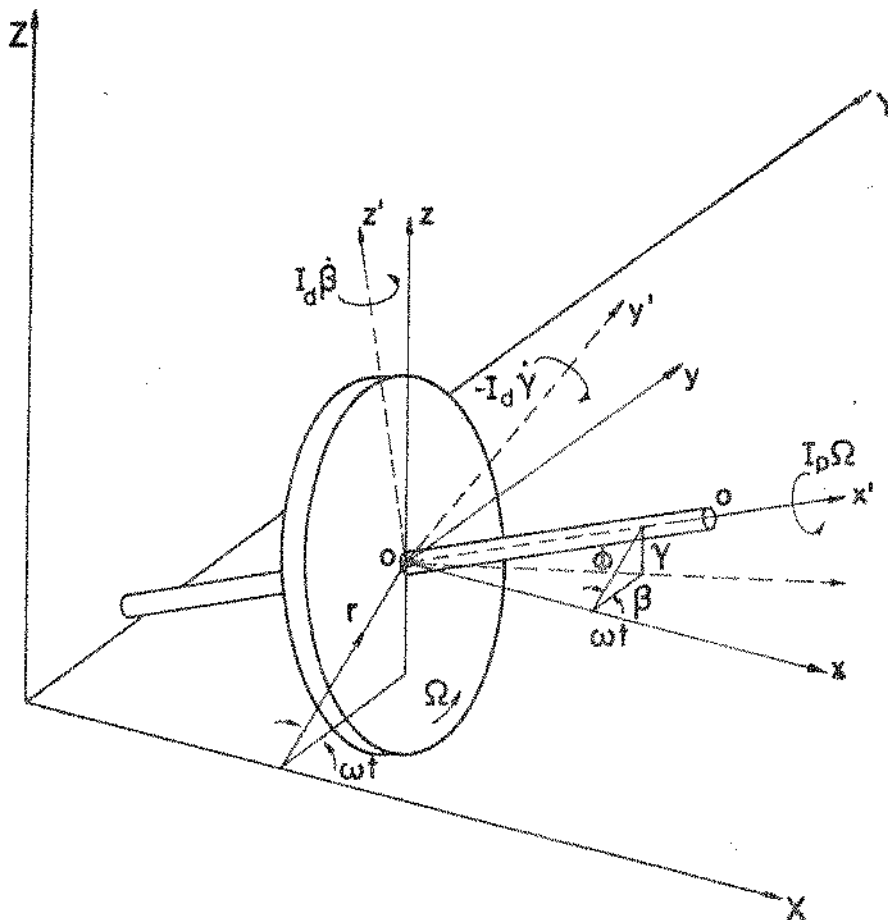


Fig. a.2.1 - Diagrama de momentos de um disco delgado.

Linearizando para pequenos ângulos e usando o princípio da variação da quantidade de movimento angular obtêm-se:

$$M_y = \frac{d}{dT} (I_p \Omega \beta - I_d \dot{\gamma}) \quad (\text{a.2.7})$$

$$M_z = \frac{d}{dT} (I_p \Omega \gamma + I_d \dot{\beta}) \quad (\text{a.2.8})$$

Derivando (a.2.7) e (a.2.8) pode-se obter os momentos da seguinte forma:

$$M_y = I_p \Omega \dot{\beta} - I_d \ddot{\gamma} \quad (\text{a.2.9})$$

$$M_z = I_p \Omega \dot{\gamma} + I_d \ddot{\beta} \quad (\text{a.2.10})$$

Considerando que para um dado instante de tempo, as vibrações estão somente no plano xy com amplitude r e inclinação de o-o em relação a x de θ , pode-se escrever

$$y = r \cos \omega T \quad (\text{a.2.11})$$

$$z = r \sin \omega T \quad (\text{a.2.12})$$

$$\beta = \theta \cos \omega T \quad (\text{a.2.13})$$

$$\gamma = \theta \sin \omega T \quad (\text{a.2.14})$$

Derivando e substituindo nas equações de momento obtém-se para uma vibração em regime permanente:

$$M_y = (-I_p \Omega \omega \theta + I_d \omega^2 \theta) \sin \omega T \quad (\text{a.2.15})$$

$$M_z = (I_p \Omega \omega \theta - I_d \theta \omega^2) \cos \omega T \quad (\text{a.2.16})$$

Supondo ainda que as vibrações e velocidades de rotação são síncronas, $\omega = \Omega$ ("synchronous whirl"), chega-se finalmente à amplitude de descontinuidade de momento, que está associado a amplitude das inclinações (θ):

$$M_z = I_p \omega^2 \theta - I_d \omega^2 \theta \quad (\text{a.2.17})$$

$$M_z = (I_p - I_d) \omega^2 \theta \quad (\text{a.2.18})$$

Para discos de espessura desprezível pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$I_p = 2I_d \quad (\text{a.2.19})$$

sendo assim, o termo para efeito giroscópico com velocidades em precessão direta será idêntico ao efeito de inércia de inclinação com sinal trocado:

$$M_z = I_d \omega^2 \theta \quad (\text{a.2.20})$$

Se considerarmos o movimento retrógrado $\Omega = -\omega$, então a expressão será:

$$M_z = -3I_d \omega^2 \theta$$

O efeito giroscópico pode ser considerado em estações tipo eixo ou discos.

Com o objetivo de mostrar a variação das frequências naturais em função da rotação do sistema usa-se o procedimento descrito a seguir.

Para o sistema mostrado na Figura a.2.2, fixando-se valores de Ω entre 0 a 1200 rad/s, pode-se calcular os valores das frequências naturais, em precessão direta e retrógrada, e observar sua

variação com a velocidade de rotação. Estes resultados são mostrados graficamente na Figura a.2.3.

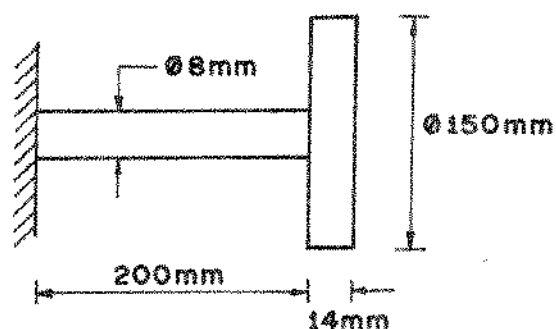


Fig. a.2.2 - Modelo físico estudado.

Para identificar as rotações críticas basta traçar uma reta de inclinação $\Omega = \omega$ (a frequência de excitação coincide com a frequência natural) e os pontos de intersecção com as curvas de finem as rotações críticas.

O modelamento foi executado usando sistema com eixo contínuo onde estão incluídos efeito de cisalhamento e inércia de inclinação, considerou-se o disco rígido pois caracteriza-se mais acentuadamente o efeito da descontinuidade dos momentos.

- 1 Freqüências naturais em precessão direta 1º modo
- 2 Freqüências naturais em precessão retrógrada 1º modo
- 3 Freqüências naturais em precessão direta 2º modo
- 4 Freqüências naturais em precessão retrógrada 2º modo

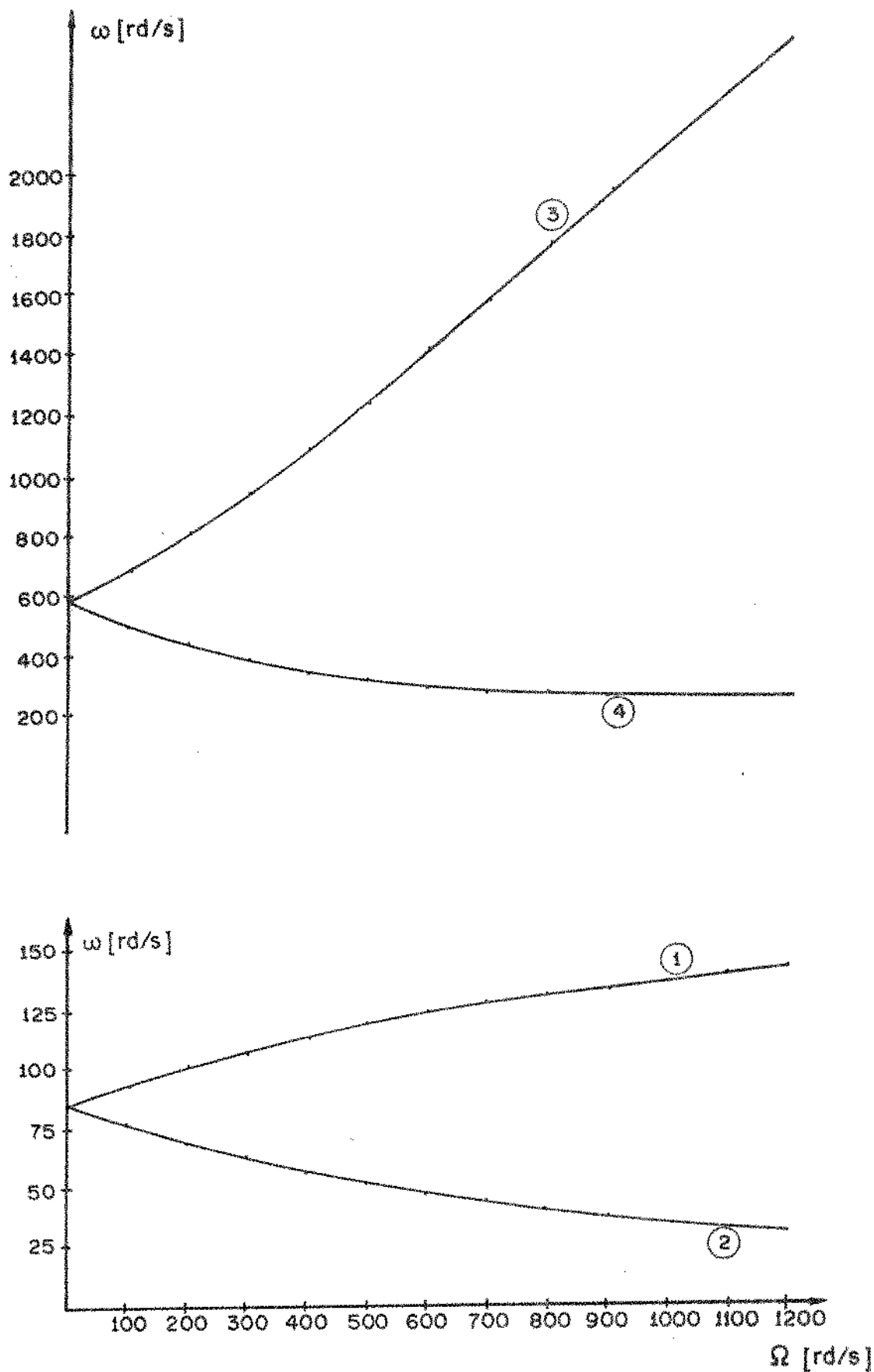
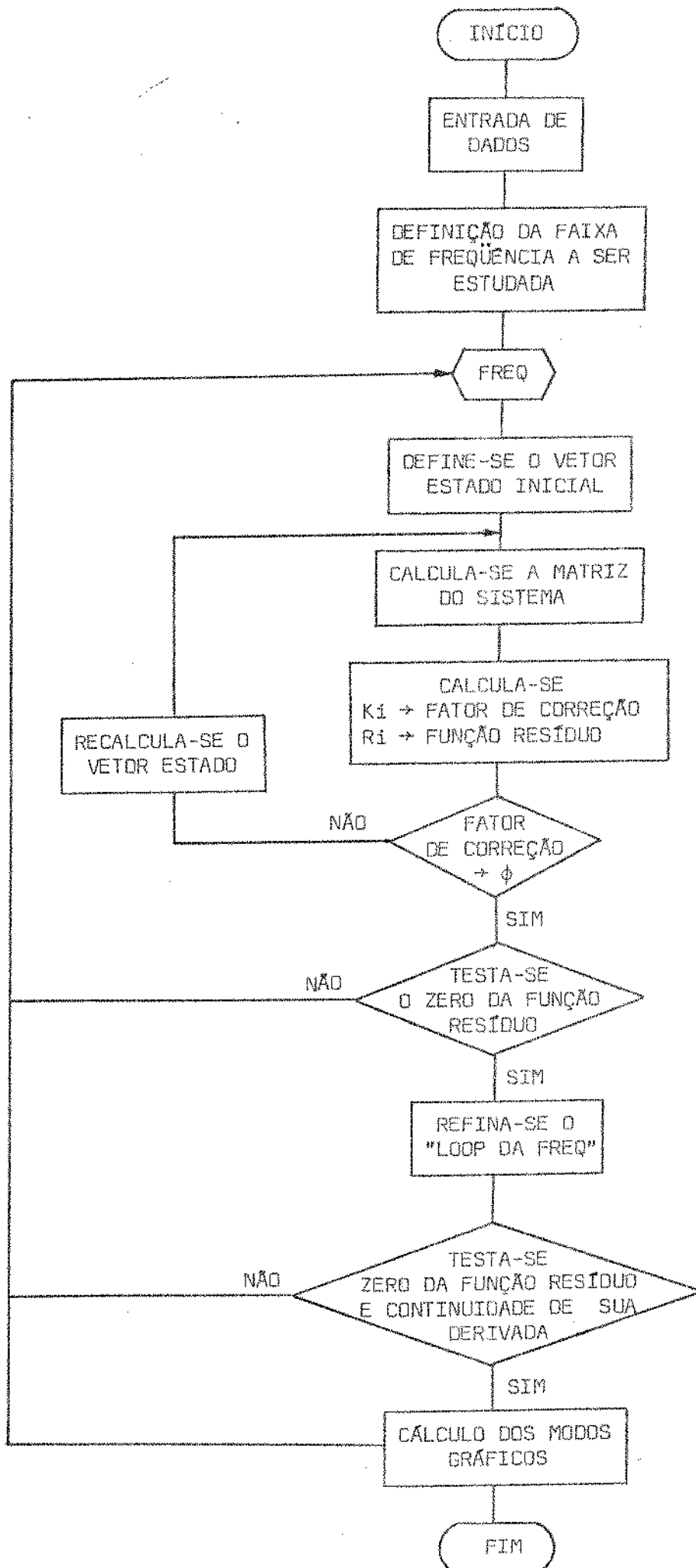


Fig. a.2.3 - Mapas das freqüências naturais do modelo da Fig.(a.2.2)

APÊNDICE 3

DIAGRAMA DE BLOCOS E LISTAGEM DO PROGRAMA PARA CÁLCULO DAS
FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS DE VIBRAÇÃO USANDO O
MMT MODIFICADO

O programa desenvolvido para o MMT modificado aproveita a estrutura de dados dos programas anteriores. Sendo assim são descritas a seguir apenas as modificações mais importantes. Segue a listagem do mesmo.



```

10 | *****
20 | *****  MODELOS CONTINUOS *****
30 | *****  MMT MODIFICADO *****
40 | *****  CALCULO DE FREQUENCIAS NATURAIS(OME=0) E NODOS PROPRIOS DE VIBRACAO *
50 | *****
60 | OPTION BASE 1
70 | DIM U1(4,4),U2(4,4),U3(4,4),S1(4),S2(4),Freq(8),S3(4),G(202,2),Pr(4,4),S4(4
),K(200),R(200),S01(4),S02(4)
80 | COM Mes(25,7),Mmopr(5,200)
90 | PRINTER IS 16
100 | PRINT "CONFIGURACAO DO SISTEMA DA ESQUERDA PARA DIREITA"
110 | PRINT USING "// "
120 | INPUT "NUMERO DE ESTAGIOS =?",Nes
130 | PRINT "NUMERO DE ESTAGIOS DO SISTEMA=",Nes
140 | FOR Es=1 TO Nes
150 | INPUT "ENTRE O NUMERO DO ESTAGIO",Es
160 | INPUT "ESTAGIO TIPO : (1)MANCAL, (2)EIXO, (3)ROTOR, (4)EIXO OCO, (5)MANCAL DE TO
RCAO",Ties
170 | Mes(Es,1)=Es
180 | Mes(Es,6)=Ties
190 | ON Ties GOTO 250,270,200,320,380
200 | INPUT "DIAMETRO DO ROTOR ",Mes(Es,2)
210 | INPUT "LARGURA DO ROTOR ",Mes(Es,3)
220 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO ROTOR",Mes(Es,4)
230 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO ROTOR",Mes(Es,5)
240 | GOTO 390
250 | INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL",Mes(Es,2)
260 | GOTO 390
270 | INPUT "DIAMETRO DO EIXO ",Mes(Es,2)
280 | INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO NESTE ESTAGIO ",Mes(Es,3)
290 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ",Mes(Es,4)
300 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO EIXO ",Mes(Es,5)
310 | GOTO 390
320 | INPUT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO",Mes(Es,2)
330 | INPUT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO",Mes(Es,3)
340 | INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO OCO",Mes(Es,4)
350 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL",Mes(Es,5)
360 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE",Mes(Es,7)
370 | GOTO 390
380 | INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO",Mes(Es,2)
390 | NEXT Es
400 | INPUT "MANCAIS RIGIDOS(1);EXTREMIDADES LIVRES/MANCAIS FLEXIVEIS(2);ENGASTAD
O/LIVRE(3)",Ct
410 | INPUT "QUAL A FAIXA DE FREQUENCIAS A SER PESSQUISADA(RAD/SEG)",Omeg1,Omeg2
420 | PRINT USING "// "
430 | FOR N=1 TO Nes
440 | ON Mes(N,6) GOTO 450,490,570,650,740
450 | PRINT "MANCAL NO ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
460 | PRINT USING "/ "
470 | PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL ",Mes(N,2)
480 | GOTO 780
490 | PRINT "EIXO ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
500 | PRINT USING "/ "
510 | PRINT "DIAMETRO DO EIXO ",Mes(N,2)
520 | PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO ",Mes(N,3)
530 | PRINT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ",Mes(N,4)
540 | PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE ",Mes(N,5)
550 | PRINT USING "// "
560 | GOTO 780
570 | PRINT "ROTOR ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
580 | PRINT USING "/ "
590 | PRINT "DIAMETRO DO ROTOR ",Mes(N,2)
600 | PRINT "LARGURA DO ROTOR ",Mes(N,3)
610 | PRINT "PESO ESPECIFICO ",Mes(N,4)

```

```

620 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE ",Mes(N,5)
630 PRINT USING "//"
640 GOTO 780
650 PRINT "EIXO OCO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
660 PRINT USING "/"
670 PRINT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO",Mes(N,2)
680 PRINT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO OCO",Mes(N,3)
690 PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO OCO",Mes(N,4)
700 PRINT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL",Mes(N,5)
710 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE",Mes(N,7)
720 PRINT USING "//"
730 GOTO 780
740 PRINT "MANCAL DE TORCAO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
750 PRINT USING "/"
760 PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO",Mes(N,2)
770 PRINT USING "//"
780 NEXT N
790 Omestp=(Omeg2-Omeg1)/100
800 KI=1
810 Refino=0
820 Ref: IF Refino=1 THEN Est=J
830 Flag=0
840 J=1
850 Ni=1
860 K(I)=0
870 FOR Omeg=Omeg1+Omestp TO Omeg2 STEP Omestp
880 PRINT Omeg1,Omeg2,Omestp,Omeg
890 I=1
900 Flag=0
910 IF (Ct=2) AND (J=1) THEN S01(2)=1
920 IF (Ct=2) AND (J<>1) THEN S01(2)=0
930 IF Ct=2 THEN GOTO Q
940 IF J<>1 THEN S01(4)=0
950 IF J=1 THEN S01(4)=1
960 Q: IF Flag=0 THEN GOTO Qq
970 FOR Jj=1 TO 4
980 Mmopr(Jj,Ni)=S01(Jj)+S02(Jj)*K(I+1)
990 NEXT Jj
1000 Ni=Ni+1
1010 GOTO D
1020 Qq: ON Ct GOTO A,B,C
1030 A: S01(1)=0
1040 S01(2)=1
1050 S01(3)=0
1060 S01(4)=S01(4)+K(I)
1070 S02(1)=0
1080 S02(2)=0
1090 S02(3)=0
1100 S02(4)=1
1110 GOTO D
1120 B: S01(1)=1
1130 S01(2)=S01(2)+K(I)
1140 S01(3)=0
1150 S01(4)=0
1160 S02(1)=0
1170 S02(2)=1
1180 S02(3)=0
1190 S02(4)=0
1200 GOTO D
1210 C: S01(1)=0
1220 S01(2)=0
1230 S01(3)=1
1240 S01(4)=S01(4)+K(I)
1250 S02(1)=0
1260 S02(2)=0

```

```

1270 S02(3)=0
1280 S02(4)=1
1290 D: FOR N=1 TO Mes
1300 ON Mes(N,6) GOTO Mantor,Eixo,Rotor,Eixoco,Mantor
1310 Mantor: CALL Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1320 Label1: IF N/2-INT(N/2)=0 THEN CALL E(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*))
1330 IF N/2-INT(N/2)<>0 THEN CALL F(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*),N,S01
(*),S02(*))
1340 GOTO Nxt
1350 Eixo: CALL Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot,Flag,Ni,Pos,Mmopr(*),
S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),S01(*),S02(*),K(*),Kk,I)
1360 Label2: IF N/2-INT(N/2)=0 THEN CALL G(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),Mmopr(*),
Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
1370 IF N/2-INT(N/2)<>0 THEN CALL H(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),N,S01(*),
S02(*),Mmopr(*),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
1380 GOTO Nxt
1390 Rotor: CALL Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
1400 IF N/2-INT(N/2)=0 THEN CALL E(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*))
1410 IF N/2-INT(N/2)<>0 THEN CALL F(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*),N,S01(*),
S02(*))
1420 GOTO Nxt
1430 Eixoco: CALL Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot,Flag,Ni,Pos,Mmopr(*),
S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),S01(*),S02(*),K(*),Kk,I)
1440 GOTO Label2
1450 Mantor: CALL Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Ome,X1,X2,Rot)
1460 GOTO Label1
1470 Nxt: NEXT N
1480 IF (N-1)/2-INT((N-1)/2)=0 THEN GOTO Label5
1490 ON Ct GOTO N,0,0
1500 N: R(I)=-S3(3)/S4(3)--S3(1)/S4(1)
1510 K(I+1)=(-S3(3)/S4(3)+S3(1)/S4(1))/2
1520 GOTO M
1530 O: R(I)=-S3(4)/S4(4)--S3(3)/S4(3)
1540 K(I+1)=(-S3(4)/S4(4)+S3(3)/S4(3))/2
1550 GOTO M
1560 Label5: ON Ct GOTO K,L,L
1570 K: R(I)=-S1(3)/S2(3)--S1(1)/S2(1)
1580 K(I+1)=(-S1(3)/S2(3)+S1(1)/S2(1))/2
1590 GOTO M
1600 L: R(I)=-S1(4)/S2(4)--S1(3)/S2(3)
1610 K(I+1)=(-S1(4)/S2(4)+S1(3)/S2(3))/2
1620 M: IF Flag=0 THEN 1670
1630 IF Kk=0 THEN GOTO 1950
1640 INPUT "DESEJA OS MODOS DE VIBRACAO GRAFICADOS (1)SIM ,(2)NAO",Gr
1650 IF Gr=1 THEN CALL Graficos(Mmopr(*),Omeg,K1,Ni)
1660 GOTO Bt
1670 IF ABS(K(I+1))<1E-6 THEN GOTO P
1680 PRINT I,R(I),K(I+1)
1690 I=I+1
1700 GOTO O
1710 P:K(1)=K(I)
1720 G(J,1)=Omeg
1730 G(J,2)=R(I)
1740 IF J=1 THEN GOTO Bb
1750 IF G(J-1,2)>0 THEN GOTO Ra
1760 IF G(J,2)<0 THEN GOTO Bb
1770 GOTO Cc
1780 Ra: IF G(J,2)>0 THEN GOTO Bb
1790 Cc: Freq(K1)=(-G(J,2)*G(J-1,1)+G(J-1,2)*G(J,1))/(G(J-1,2)-G(J,2))
1800 IF Refino=1 THEN GOTO 1890
1810 Deri=G(J-1,2)-G(J-2,2)
1820 Est1=G(J,2)
1830 Refino=1
1840 Omeq1=G(J-1,1)
1850 Omeq2=G(J,1)

```

```

1860           Omestp=(Omeg2-Omeg1)/20
1870           Omeg=G(J-1,1)
1880           GOTO Ref
1890           IF ABS(G(J,2)-G(J-1,2))>5*ABS(Deri) THEN GOTO Bt
1900 PRINT Freq(KI)
1910 KI=KI+1
1920 Omeg=Freq(KI-1)
1930 Kk=0
1940 GOTO 1960
1950 Kk=1
1960 Ni=1
1970 Pos=0
1980 Flag=1
1990 GOTO 0
2000 Bt:       Omeg=G(J,1)
2010           Omeg1=G(J,1)
2020           Omestp=20*Omestp
2030           Omeg2=100*Omestp
2040           G(Est,2)=Est1
2050           J=Est+1
2060           Refino=0
2070           GOTO 850
2080 Bb:       J=J+1
2090 NEXT Omeg
2100 Nfreq=KI
2110 FOR KI=1 TO Nfreq
2120 Freq(KI)=Freq(KI)/(2*PI)
2130 NEXT KI
2140 PRINT USING "/"
2150 PRINT "FREQUENCIAS NATURAIS EM HZ "
2160 FOR KI=1 TO Nfreq
2170 PRINT Freq(KI)
2180 NEXT KI
2190 PRINT USING "/"
2200 PRINT "FREQUENCIAS NATURAIS EM RAD/SEG"
2210 FOR KI=1 TO Nfreq
2220 Freq(KI)=Freq(KI)*2*PI
2230 PRINT Freq(KI)
2240 NEXT KI
2250 Fin:END
2260 SUB Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot,Flag,Ni,Pos,Mmopr(*),S1(*),S2(*),
S3(*),S4(*),S01(*),S02(*),K(*),Kk,I)
2270 OPTION BASE 1
2280 REAL U3(4,4),Acte,Beta,Sig,Tau,Lam1,Lam2,C0,C1,C2,C3,Gama
2290 A=Mes(N,3)
2300 IF Flag=0 THEN GOTO 2350
2310 IF In=40 THEN GOTO 2600
2320 B=.025*(In+1)
2330 Pos=Pos+.025*A
2340 Mes(N,3)=A*B
2350 Acte=Mes(N,3)^2/(Mes(N,5)*(PI*Mes(N,2)^4/64))
2360 Beta=16*Mes(N,4)*Mes(N,3)^4/(Mes(N,5)*Mes(N,2)^2)*Omeg
2370 Sig=Mes(N,3)^2*Mes(N,4)*2.6/(Mes(N,5)*.75)*Omeg^2
2380 Tau=1*Mes(N,3)^2*Mes(N,4)/Mes(N,5)*Omeg^2
2390 Lam1=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5-.5*(Sig+Tau))^.5
2400 Lam2=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5+.5*(Sig+Tau))^.5
2410 Gama=1/(Lam1^2+Lam2^2)
2420 C0=Gama*(Lam2^2*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2*COS(Lam2))
2430 C1=Gama*(Lam2^2/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2/Lam2*SIN(Lam2))
2440 C2=Gama*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2-COS(Lam2))
2450 C3=Gama*(1/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)-1/Lam2*SIN(Lam2))
2460 U3(1,1)=C0-Sig*C2
2470 U3(1,2)=Mes(N,3)*(C1-(Sig+Tau)*C3)
2480 U3(1,3)=Acte*C2
2490 U3(1,4)=Acte*Mes(N,3)/Beta*(-Sig*C1+(Beta+Sig^2)*C3)

```



```

2500 U3(2,1)=Beta*C3/Mes(N,3)
2510 U3(2,2)=C0-Tau*C2
2520 U3(2,3)=Acte/Mes(N,3)*(C1-Tau*C3)
2530 U3(2,4)=U3(1,3)
2540 U3(3,1)=Beta*C2/Acte
2550 U3(3,2)=Mes(N,3)/Acte*(-Tau*C1+(Beta+Tau^2)*C3)
2560 U3(3,3)=U3(2,2)
2570 U3(3,4)=U3(1,2)
2580 U3(4,1)=Beta/(Acte*Mes(N,3))*(C1-Sig*C3)
2590 U3(4,2)=U3(3,1)
2600 U3(4,3)=U3(2,1)
2610 U3(4,4)=U3(1,1)
2620 MAT U2=U3
2630 IF Flag=0 THEN GOTO 2680
2640 In=In+1
2650 IF N/2-INT(N/2)=0 THEN CALL G(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),Maopr(*),
),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
2660 IF N/2-INT(N/2)<>0 THEN CALL H(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),N,S01(*),
),S02(*),Mmopr(*),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
2670 GOTO 2310
2680 SUBEND
2690 SUB Manca1(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2700 OPTION BASE 1
2710 REAL Man(4,4)
2720 MAT Man=IDN
2730 Man(4,1)=-Mes(N,2)
2740 MAT U1=Man
2750 SUBEND
2760 SUB Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2770 OPTION BASE 1
2780 REAL Pr(4,4)
2790 MAT Pr=IDN
2800 Vr=PI*Mes(N,2)^2/4*Mes(N,3)
2810 Mr=Mes(N,4)*Vr
2820 Pr(4,1)=Mr*Omeg^2
2830 Pr(3,2)=-Mr*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
2840 MAT U1=Pr
2850 SUBEND
2860 SUB Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg,X1,X2,Rot)
2870 OPTION BASE 1
2880 REAL Man(4,4)
2890 MAT Man=IDN
2900 Man(3,2)=Mes(N,2)
2910 MAT U1=Man
2920 SUBEND
2930 SUB E(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*))
2940 OPTION BASE 1
2950 MAT S1=U1*S3
2960 MAT S2=U1*S4
2970 SUBEND
2980 SUB F(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U1(*),N,S01(*),S02(*))
2990 OPTION BASE 1
3000 IF N=1 THEN GOTO 3040
3010 MAT S3=U1*S1
3020 MAT S4=U1*S2
3030 GOTO Fim
3040 MAT S3=U1*S01
3050 MAT S4=U1*S02
3060 Fim:SUBEND
3070 SUB G(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),Mmopr(*),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
3080 OPTION BASE 1
3090 MAT S1=U2*S3
3100 MAT S2=U2*S4
3110 IF Flag=0 THEN GOTO 3170
3120 FOR Jj=1 TO 4

```

```

3130     Mmopr(Jj, Ni)=S1(Jj)+S2(Jj)*K(I+1)
3140     NEXT Jj
3150     Mmopr(5, Ni)=Pos
3160     Ni=Ni+1
3170 SUBEND
3180 SUB H(S1(*), S2(*), S3(*), S4(*), U2(*), N, S01(*), S02(*), Mmopr(*), Flag, Pos, Ni, K(
*), J, Kk)
3190 OPTION BASE 1
3200 IF N=1 THEN GOTO 3240
3210 MAT S3=U2*S1
3220 MAT S4=U2*S2
3230 GOTO Fim
3240 MAT S3=U2*S01
3250 MAT S4=U2*S02
3260 Fim: IF Flag=0 THEN GOTO 3320
3270     FOR Jj=1 TO 4
3280     Mmopr(Jj, Ni)=S3(Jj)+S4(Jj)*K(I+1)
3290     NEXT Jj
3300     Mmopr(5, Ni)=Pos
3310     Ni=Ni+1
3320 SUBEND
3330 SUB Graficos(Mmopr(*), Omeg, KI, Ni)
3340 OPTION BASE 1
3350 REAL Kj, Xmin, Xmax, Detet, Ymin, Ymax, Bju, Km
3360 INPUT "DESEJA NO CRT(1), OU PLOTTER(2)", Km
3370 IF Km=1 THEN PLOTTER IS 13, "GRAPHICS"
3380 IF Km=1 THEN 3410
3390 PLOTTER IS 7, 5, "9872A"
3400 PLOTTER 7, 5 IS ON
3410 GRAPHICS
3420 INPUT "DESEJA DESLOCAMENTOS(1), INCLINACAO(2), MOMENTOS(3), CORTANTE(4)", KJ
3430 LIMIT 15, 15+165, 10, 10+80
3440 FRAME
3450 LOCATE 30, 185, 20, 90
3460 Xmin=0
3470 Xmax=Mmopr(5, Ni-1)*12*25.4/1000
3480 Ymax=-1.0E11
3490 Ymin=1.0E11
3500 FOR J=1 TO Ni-1
3510 Ymax=MAX(Ymax, Mmopr(Kj, J))
3520 Ymin=MIN(Ymin, Mmopr(Kj, J))
3530 NEXT J
3540 Xstep=(Xmax-Xmin)/10
3550 Ystep=(Ymax-Ymin)/10
3560 SCALE Xmin, Xmax, Ymin, Ymax
3570 LINE TYPE 1
3580 AXES Xstep, Ystep, 0, 0, 5, 5, 5
3590 CSIZE 4
3600 LDIR 0
3610 LORG 5
3620 FOR Xposition=Xmin+Xstep*2 TO Xmax STEP Xstep*2
3630 MOVE Xposition, -Ystep/2
3640 LABEL USING "3D.DD X "; Xposition
3650 NEXT Xposition
3660 CSIZE 4
3670 LDIR 0
3680 LORG 0
3690 FOR Yposition=Ymin+Ystep TO Ymax STEP Ystep*2
3700 MOVE Xmin, Yposition
3710 LABEL USING "M5D.DDX"; Yposition
3720 NEXT Yposition
3730 LORG 0
3740 CSIZE 4
3750 LDIR 0
3760 MOVE Xmin+3*Xstep, Ymin-1.3*Ystep

```

```

3770 LABEL USING "K"; "MODO NUMERO"
3780 LABEL USING "DD"; KI-1
3790 MOVE Xmin+9*Xstep, Ymin-1.3*Ystep
3800 LABEL USING "K"; "FREQUENCIA (rad/s)"
3810 LABEL USING "   DDDD:DD   "; Omeg
3820 MOVE Xmin+9.6*Xstep, -1.3*Ystep
3830 ON KJ GOTO 3840, 3900, 3920, 3940
3840 LABEL USING "K"; "POSICAO DO EIXO "
3850 LDIR PI/2
3860 MOVE Xmin-1.3*Xstep, Ymax-Ystep*.4
3870 LABEL USING "K"; "DESLOCAMENTOS"
3880 LDIR 0
3890 GOTO 3950
3900 LABEL USING "K"; "INCLINACAO"
3910 GOTO 3950
3920 LABEL USING "K"; "MOMENTOS"
3930 GOTO 3950
3940 LABEL USING "K"; "ESFORCO CORTANTE"
3950 FOR J=1 TO Ni-2
3960 PLOT Mmopr(5, J), Mmopr(Kj, J), 1
3970 NEXT J
3980 PAUSE
3990 INPUT "DESEJA OUTRO GRAFICO DESTE NODO?(1)SIM, (2)NAO", Deog
4000 IF Deog=1 THEN GOTO 3330
4010 SUBEND
4020 SUB Eixoco(Mes(*), U1(*), U2(*), N, Omeg, X1, X2, Rot, Flag, Ni, Pos, Mmopr(*), S1(*), S
2(*), S3(*), S4(*), S01(*), S02(*), K(*), Kk, I)
4030 OPTION BASE 1
4040 RERL U3(4, 4), Acte, Beta, Sig, Tau, Lam1, Lam2, C0, C1, C2, C3, Gama
4050 A=Mes(N, 4)
4060 Ks=1.1282+3.02564*(Mes(N, 2)/Mes(N, 3))^2/(1+(Mes(N, 2)/Mes(N, 3))^2)^2
4070 IF Flag=0 THEN GOTO 4120
4080 IF In=40 THEN GOTO 4450
4090 B=.025*(In+1)
4100 Pos=Pos+.025*A
4110 Mes(N, 4)=A*B
4120 Acte=Mes(N, 4)^2/(Mes(N, 7)*(PI*(Mes(N, 2)^4-Mes(N, 3)^4)/64))
4130 Beta=16*Mes(N, 5)*Mes(N, 4)^4/(Mes(N, 7)*(Mes(N, 2)^2-Mes(N, 3)^2))*Omeg^2
4140 Sig=Mes(N, 4)^2*Mes(N, 5)*2.6*Ks/Mes(N, 7)*Omeg^2*0
4150 Tau=1*Mes(N, 4)^2*Mes(N, 5)/Mes(N, 7)*Omeg^2
4160 Lam1=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5-.5*(Sig+Tau))^.5
4170 Lam2=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5+.5*(Sig+Tau))^.5
4180 Gama=1/(Lam1^2+Lam2^2)
4190 C0=Gama*(Lam2^2*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2*COS(Lam2))
4200 C1=Gama*(Lam2^2/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2/Lam2*SIN(Lam2))
4210 C2=Gama*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2-COS(Lam2))
4220 C3=Gama*(1/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)-1/Lam2*SIN(Lam2))
4230 U3(1, 1)=C0-Sig*C2
4240 U3(1, 2)=Mes(N, 4)*(C1-(Sig+Tau)*C3)
4250 U3(1, 3)=Acte*C2
4260 U3(1, 4)=Acte*Mes(N, 4)/Beta*(-Sig*C1+(Beta+Sig^2)*C3)
4270 U3(2, 1)=Beta*C3/Mes(N, 4)
4280 U3(2, 2)=C0-Tau*C2
4290 U3(2, 3)=Acte/Mes(N, 4)*(C1-Tau*C3)
4300 U3(2, 4)=U3(1, 3)
4310 U3(3, 1)=Beta*C2/Acte
4320 U3(3, 2)=Mes(N, 4)/Acte*(-Tau*C1+(Beta+Tau^2)*C3)
4330 U3(3, 3)=U3(2, 2)
4340 U3(3, 4)=U3(1, 2)
4350 U3(4, 1)=Beta/(Acte*Mes(N, 4))*(C1-Sig*C3)
4360 U3(4, 2)=U3(3, 1)
4370 U3(4, 3)=U3(2, 1)
4380 U3(4, 4)=U3(1, 1)
4390 MAT U2=U3
4400 IF Flag=0 THEN GOTO 4450

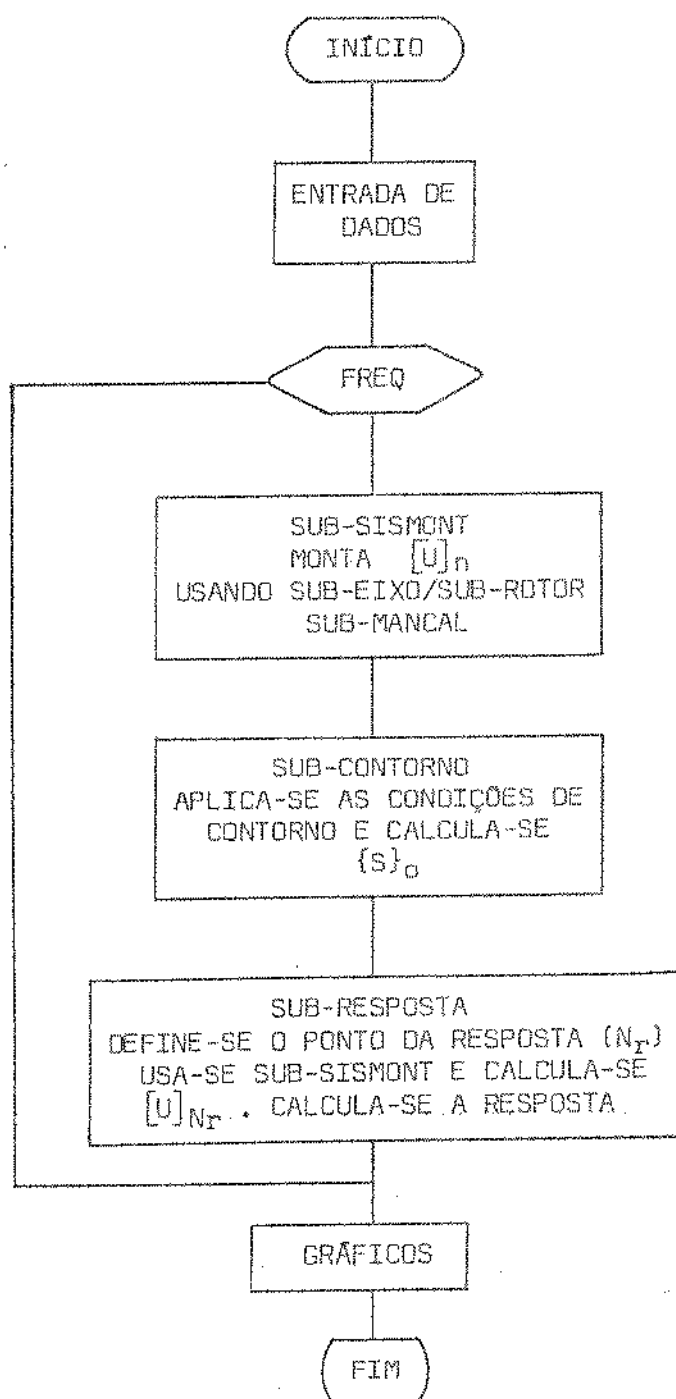
```

```
4410 In=In+1
4420 IF N/2-INT(N/2)=0 THEN CALL G(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),Mmopr(
),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
4430 IF N/2-INT(N/2)<>0 THEN CALL H(S1(*),S2(*),S3(*),S4(*),U2(*),N,S01(
*),S02(*),Mmopr(*),Flag,Pos,Ni,K(*),I,Kk)
4440 GOTO 4000
4450 SUBEND
```

APÊNDICE 4

DIAGRAMA DE BLOCOS E LISTAGEM DO PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA USANDO O MMT

O programa para o cálculo da resposta em frequência aproveita a estrutura de dados dos programas anteriores. Desta forma mostra-se o diagrama de blocos simplificado. Segue listagem do mesmo.



```

10 | *****
20 | ***** MODELOS CONTINUOS *****
30 | ***** CALCULO DA RESPOSTA EM FREQUENCIA-MMT ESTENDIDO *****
40 | *****
50 | OPTION BASE 1
60 | COM INTEGER J, REAL Mes(25,7)
70 | DIM B(4,4), V0(9), Resp(400,4), B(9,9), U1(9,9), U2(9,9), Res(400), Gxx(50), Gyy(1
40), H(50), Aju(50)
80 | CALL Dados(Mes(*), Mes)
90 | Stp=55*2*PI/100
100 | J=1
110 | Mes=9
120 | FOR Omeg=3.44 TO 55*2*PI STEP Stp
130 | CALL Sismont(Mes(*), B(*), Mes, Omeg, U1(*), U2(*))
140 | CALL Contorno(B(*), V0(*), B(*))
150 | CALL Resposta(Mes(*), B(*), Resp(*), V0(*), Omeg, Mes, U1(*), U2(*), Res(*))
160 | NEXT Omeg
170 | CALL Graficos(Resp(*), Res(*), Gxx(*), Gyy(*), H(*), Aju(*))
180 | END
190 | SUB Dados(Mes(*), Mes)
200 | OPTION BASE 1
210 | PRINTER IS 16
220 | PRINT "CONFIGURACAO DO SISTEMA DA ESQUERDA PARA DIREITA"
230 | PRINT USING "// "
240 | INPUT "NUMERO DE ESTAGIOS =?", Mes
250 | PRINT "NUMERO DE ESTAGIOS DO SISTEMA=", Mes
260 | FOR Es=1 TO Mes
270 | INPUT "ENTRE O NUMERO DO ESTAGIO", Es
280 | INPUT "ESTAGIO TIPO : (1)MANCAL, (2)EIXO, (3)ROTOR, (4)EIXO OCO, (5)MANCAL DE TO
RCAD", Ties
290 | Mes(Es,1)=Es
300 | Mes(Es,6)=Ties
310 | ON Ties GOTO 370, 420, 320, 470, 530
320 | INPUT "DIAMETRO DO ROTOR ", Mes(Es,2)
330 | INPUT "LARGURA DO ROTOR ", Mes(Es,3)
340 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO ROTOR", Mes(Es,4)
350 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO ROTOR", Mes(Es,5)
360 | GOTO 540
370 | INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL NA DIRECAO Z ", Mes(Es,2)
380 | INPUT "RIGIDEZ MANCAL NA DIRECAO Y", Mes(Es,3)
390 | INPUT "AMORTECIMENTO DO MANCAL NA DIRECAO Z ", Mes(Es,4)
400 | INPUT "AMORTECIMENTO DO MANCAL NA DIRECAO Y ", Mes(Es,5)
410 | GOTO 540
420 | INPUT "DIAMETRO DO EIXO ", Mes(Es,2)
430 | INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO NESTE ESTAGIO ", Mes(Es,3)
440 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ", Mes(Es,4)
450 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE DO MATERIAL DO EIXO ", Mes(Es,5)
460 | GOTO 540
470 | INPUT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO OCO", Mes(Es,2)
480 | INPUT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO OCO", Mes(Es,3)
490 | INPUT "COMPRIMENTO DO EIXO OCO", Mes(Es,4)
500 | INPUT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL", Mes(Es,5)
510 | INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE", Mes(Es,7)
520 | GOTO 540
530 | INPUT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO", Mes(Es,2)
540 | NEXT Es
550 | PRINT USING "// "
560 | FOR N=1 TO Mes
570 | ON Mes(N,6) GOTO 580, 650, 730, 810, 900
580 | PRINT "MANCAL NO ESTAGIO NUMERO ", Mes(N,1)
590 | PRINT USING "// "
600 | PRINT "RIGIDEZ DO MANCALNA DIRECAO Z", Mes(N,2)
610 | PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL NA DIRECAO Y", Mes(N,3)
620 | PRINT "AMORTECIMENTO NA DIRECAO Z ", Mes(N,4)

```

```

630 PRINT "AMORTECIMENTO NA DIRECAO Y ",Mes(N,5)
640 GOTO 940
650 PRINT "EIXO ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
660 PRINT USING "/"
670 PRINT "DIAMETRO DO EIXO ",Mes(N,2)
680 PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO ",Mes(N,3)
690 PRINT "PESO ESPECIFICO DO EIXO ",Mes(N,4)
700 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE ",Mes(N,5)
710 PRINT USING "//"
720 GOTO 940
730 PRINT "ROTOR ESTAGIO NUMERO ",Mes(N,1)
740 PRINT USING "/"
750 PRINT "DIAMETRO DO ROTOR ",Mes(N,2)
760 PRINT "LARGURA DO ROTOR ",Mes(N,3)
770 PRINT "PESO ESPECIFICO ",Mes(N,4)
780 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE ",Mes(N,5)
790 PRINT USING "//"
800 GOTO 940
810 PRINT "EIXO OCO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
820 PRINT USING "/"
830 PRINT "DIAMETRO EXTERNO DO EIXO OCO",Mes(N,2)
840 PRINT "DIAMETRO INTERNO DO EIXO OCO",Mes(N,3)
850 PRINT "COMPRIMENTO DO EIXO OCO",Mes(N,4)
860 PRINT "PESO ESPECIFICO DO MATERIAL",Mes(N,5)
870 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE",Mes(N,7)
880 PRINT USING "//"
890 GOTO 940
900 PRINT "MANCAL DE TORCAO ESTAGIO NUMERO",Mes(N,1)
910 PRINT USING "/"
920 PRINT "RIGIDEZ DO MANCAL DE TORCAO",Mes(N,2)
930 PRINT USING "//"
940 NEXT N
950 SUBEND
960 SUB Sismont(Mes(*),B(*),Mes,Omeg,U1(*),U2(*))
970 OPTION BASE 1
980 FOR N=1 TO Mes
990 ON Mes(N,6) GOSUB Mancal,Eixo,Rotor,Eixoco,Mantor
1000 Eixo:CALL Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1010 GOTO Nxt
1020 Mancal:CALL Mancal(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1030 GOTO Nxt
1040 Rotor:CALL Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1050 GOTO Nxt
1060 Eixoco:CALL Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1070 GOTO Nxt
1080 Mantor:CALL Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1090 Nxt:NEXT N
1100 ON Mes(N-1,6) GOTO 1130,1110,1130,1110,1130
1110 MAT B=U2
1120 GOTO 1140
1130 MAT B=U1
1140 SUBEND
1150 SUB Contorno(BI(*),V0(*),B(*))
1160 OPTION BASE 1
1170 REAL Aux(4,4),Exc(4,1),S(4,1)
1180 FOR J=0 TO 2 STEP 2
1190 FOR I=1 TO 2 STEP 1
1200 BI(1,I+J)=B(3,I+2*J)
1210 BI(2,I+J)=B(4,I+2*J)
1220 BI(3,I+J)=B(7,I+2*J)
1230 BI(4,I+J)=B(8,I+2*J)
1240 NEXT I
1250 NEXT J
1260 MAT Aux=INV(BI)
1270 Exc(1,1)=-B(3,9)

```

```

1280 Exc(2,1)=-B(4,9)
1290 Exc(3,1)=-B(7,9)
1300 Exc(4,1)=-B(8,9)
1310 MAT S=Aux*Exc
1320 MAT V0=ZER
1330 V0(1)=S(1,1)
1340 V0(2)=S(2,1)
1350 V0(5)=S(3,1)
1360 V0(6)=S(4,1)
1370 SUBEND
1380 SUB Resposta(Mes(*),B(*),Resp(*),V0(*),Omeg,Mes,U1(*),U2(*),Res(*))
1390 OPTION BASE 1
1400 DIM INTEGER J
1410 REAL Z(9)
1420 Mes=5
1430 CALL Sismont(Mes(*),B(*),Mes,Omeg,U1(*),U2(*))
1440 MAT Z=B*V0
1450 Resp(J,2)=Omeg
1460 Resp(J,4)=Z(1)
1470 Resp(J,1)=(.5*(Z(1)^2+Z(9)^2+Z(5)^2+Z(13)^2)+(.25*(Z(1)^2+Z(9)^2-Z(5)^2-Z(13)^2)^2+(Z(1)*Z(5)+Z(9)*Z(13))^2)^.5
1480 Resp(J,3)=.5*ATN(2*(Z(1)*Z(5)+Z(9)*Z(13))/(Z(1)^2+Z(9)^2-Z(5)^2-Z(13)^2))+.5*ATN(2*(Z(1)*Z(9)+Z(5)*Z(13))/(Z(1)^2-Z(9)^2+Z(5)^2-Z(13)^2))
1490 PRINT Resp(J,1),Omeg,Resp(J,3),J,Z(1),Z(5)
1500 Mes=10
1510 J=J+1
1520 SUBEND
1530 SUB Eixo(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1540 OPTION BASE 1
1550 REAL U3(9,9),Acte,Beta,Sig,Tau,Lam1,Lam2,C0,C1,C2,C3,Gama
1560 Acte=Mes(N,3)^2/(Mes(N,5)*(PI*Mes(N,2)^4/64))
1570 Beta=15*Mes(N,4)*Mes(N,3)^4/(Mes(N,5)*Mes(N,2)^2)*Omeg^2
1580 Sig=Mes(N,3)^2*Mes(N,4)*2.6/(Mes(N,5)*.75)*Omeg^2
1590 Tau=1*Mes(N,3)^2*Mes(N,4)/Mes(N,5)*Omeg^2
1600 Lam1=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5-.5*(Sig+Tau))^.5
1610 Lam2=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5+.5*(Sig+Tau))^.5
1620 Gama=1/(Lam1^2+Lam2^2)
1630 C0=Gama*(Lam2^2*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2*COS(Lam2))
1640 C1=Gama*(Lam2^2/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2/Lam2*SIN(Lam2))
1650 C2=Gama*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2-COS(Lam2))
1660 C3=Gama*(1/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)-1/Lam2*SIN(Lam2))
1670 FOR J=0 TO 4 STEP 4
1680 U3(1+J,1+J)=C0-Sig*C2
1690 U3(1+J,2+J)=Mes(N,3)*(C1-(Sig+Tau)*C3)
1700 U3(1+J,3+J)=Acte*C2
1710 U3(1+J,4+J)=Acte*Mes(N,3)/Beta*(-Sig*C1+(Beta+Sig^2)*C3)
1720 U3(2+J,1+J)=Beta*C3/Mes(N,3)
1730 U3(2+J,2+J)=C0-Tau*C2
1740 U3(2+J,3+J)=Acte/Mes(N,3)*(C1-Tau*C3)
1750 U3(2+J,4+J)=U3(1,3)
1760 U3(3+J,1+J)=Beta*C2/Acte
1770 U3(3+J,2+J)=Mes(N,3)/Acte*(-Tau*C1+(Beta+Tau^2)*C3)
1780 U3(3+J,3+J)=U3(2,2)
1790 U3(3+J,4+J)=U3(1,2)
1800 U3(4+J,1+J)=Beta/(Acte*Mes(N,3))*(C1-Sig*C3)
1810 U3(4+J,2+J)=U3(3,1)
1820 U3(4+J,3+J)=U3(2,1)
1830 U3(4+J,4+J)=U3(1,1)
1840 NEXT J
1850 U3(9,9)=1
1860 IF N=1 THEN MAT U1=IDN
1870 IF N=1 THEN GOTO 1890
1880 IF Mes(N-1,6)=2 THEN MAT U1=U2
1890 MAT U2=U3*U1
1900 SUBEND

```



```

1910 SUB Manca1(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
1920 OPTION BASE 1
1930 REAL Man(9,9)
1940 MAT Man=IDN
1950 Keq=7.4641*(2*Mes(N,2)^3+Mes(N,2)*Omeg^2*Mes(N,4)^2)/(4*Mes(N,2)^2+Omeg^2*Mes(N,4)^2)
1960 Ceq=7.4641*(Mes(N,2)^2*Omeg*Mes(N,4))/(4*Mes(N,2)^2+Omeg*Mes(N,4)^2)
1970 Man(4,1)=-Keq
1980 Man(8,5)=-Keq
1990 Man(4,5)=Ceq*Omeg
2000 Man(8,1)=-Ceq*Omeg
2010 Man(3,2)=Mes(N,3)
2020 Man(7,6)=Mes(N,3)
2030 IF N=1 THEN MAT U2=IDN
2040 IF N=1 THEN 2060
2050 IF (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=1) THEN MAT U2=U1
2060 MAT U1=Man*U2
2070 SUBEND
2080 SUB Rotor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
2090 OPTION BASE 1
2100 REAL Pr(9,9)
2110 MAT Pr=IDN
2120 Vr=PI*Mes(N,2)^2/4*Mes(N,3)
2130 Mr=Mes(N,4)*Vr
2140 Pr(3,2)=-Mr*Mes(N,2)^2/16*Omeg^2
2150 Pr(7,6)=Pr(3,2)
2160 Pr(4,1)=Mr*Omeg^2
2170 Pr(8,5)=Pr(4,1)
2180 IF N=10 THEN Pr(4,9)=-1
2190 IF N=1 THEN MAT U2=IDN
2200 IF N=1 THEN 2220
2210 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
2220 MAT U1=Pr*U2
2230 SUBEND
2240 SUB Eixoco(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omeg)
2250 OPTION BASE 1
2260 REAL U3(8,8),Acte,Beta,Sig,Tau,Lam1,Lam2,C0,C1,C2,C3,Gama
2270 Acte=Mes(N,3)^2/(Mes(N,5)*(PI*Mes(N,2)^4/64))
2280 Beta=16*Mes(N,4)*Mes(N,3)^4/(Mes(N,5)*Mes(N,2)^2)*Omeg^2
2290 Sig=Mes(N,3)^2*Mes(N,4)*2.6/(Mes(N,5)*Omeg^2)
2300 Tau=1*Mes(N,3)^2*Mes(N,4)/Mes(N,5)*Omeg^2
2310 Lam1=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5-.5*(Sig+Tau))^.5
2320 Lam2=((Beta+.25*(Sig-Tau)^2)^.5+.5*(Sig+Tau))^.5
2330 Gama=1/(Lam1^2+Lam2^2)
2340 C0=Gama*(Lam2^2*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2+COS(Lam2))
2350 C1=Gama*(Lam2^2/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)+Lam1^2/Lam2*SIN(Lam2))
2360 C2=Gama*((EXP(Lam1)+EXP(-Lam1))/2-COS(Lam2))
2370 C3=Gama*(1/Lam1*((EXP(Lam1)-EXP(-Lam1))/2)-1/Lam2*SIN(Lam2))
2380 U3(1,1)=C0-Sig*C2
2390 U3(1,2)=Mes(N,3)*(C1-(Sig+Tau)*C3)
2400 U3(1,3)=Acte*C2
2410 U3(1,4)=Acte*Mes(N,3)/Beta*(-Sig*C1+(Beta+Sig^2)*C3)
2420 U3(2,1)=Beta*C3/Mes(N,3)
2430 U3(2,2)=C0-Tau*C2
2440 U3(2,3)=Acte/Mes(N,3)*(C1-Tau*C3)
2450 U3(2,4)=U3(1,3)
2460 U3(3,1)=Beta*C2/Acte
2470 U3(3,2)=Mes(N,3)/Acte*(-Tau*C1+(Beta+Tau^2)*C3)
2480 U3(3,3)=U3(2,2)
2490 U3(3,4)=U3(1,2)
2500 U3(4,1)=Beta/(Acte*Mes(N,3))*(C1-Sig*C3)
2510 U3(4,2)=U3(3,1)
2520 U3(4,3)=U3(2,1)
2530 U3(4,4)=U3(1,1)
2540 IF N=1 THEN MAT U1=IDN

```

```

2550 IF N=1 THEN GOTO 2570
2560 IF Mes(N-1,6)=2 THEN MAT U1=U2
2570 MAT U2=U3*U1
2580 SUBEND
2590 SUB Graficos(Resp(*),Res(*),Gxx(*),Gyy(*),H(*),Aju(*))
2600 OPTION BASE 1
2610 REAL KJ,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax
2620 INPUT "DESEJA NO PAPEL(1), OU NO CRT(0,CONT)",B
2630 IF B=1 THEN PLOTTER IS 7,5,"9872A"
2640 IF B=1 THEN PLOTTER 7,5 IS ON
2650 IF B=0 THEN PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
2660 GRAPHICS
2670 LIMIT 15,15+165,10,10+80
2680 FRAME
2690 LOCATE 40,185,20,80
2700 Xmin=0
2710 Xmax=2000
2720 Ymin=1E20
2730 Ymax=-1E20
2740 INPUT "DESEJA AMPLITUDE(1) OU FASE(2)",A
2750 FOR J=1 TO 199
2760 IF A=1 THEN Ymax=MAX(Resp(J,1),Ymax)
2770 IF A=1 THEN Ymin=MIN(Resp(J,1),Ymin)
2780 IF A=2 THEN Ymax=MAX(Resp(J,3),Ymax)
2790 IF A=2 THEN Ymin=MIN(Resp(J,3),Ymin)
2800 NEXT J
2810 Xstep=(Xmax-Xmin)/10
2820 Ystep=(Ymax-Ymin)/10
2830 SCALE Xmin,Xmax,Ymin,Ymax
2840 LINE TYPE 1
2850 AXES Xstep,ABS(Ystep),Xmin,0,5,5,5
2860 CSIZE 5
2870 LDIR 0
2880 LORG 6
2890 FOR Xposition=Xmin+Xstep TO Xmax STEP Xstep*2
2900 MOVE Xposition,-Ystep*2
2910 LABEL USING "4D X ";Xposition
2920 NEXT Xposition
2930 CSIZE 5
2940 LDIR 0
2950 LORG 9
2960 FOR Yposition=Ymin TO Ymax+Ystep STEP Ystep*2
2970 MOVE Xmin,Yposition
2980 LABEL USING "MSD.DDX";Yposition/1E-5
2990 NEXT Yposition
3000 LORG 8
3010 CSIZE 5
3020 LDIR 0
3030 MOVE Xmin+11*Xstep,Ymin-Ystep*1.8
3040 LABEL USING "K";"Frequencia de Excitacao [rad/s]"
3050 LORG 4
3060 LDIR PI/2
3070 CSIZE 5
3080 MOVE Xmin-1.7*Xstep,Ystep*5+Ymin
3090 IF A=1 THEN LABEL USING "K";"Amplitude da Resposta [m]"
3100 IF A=2 THEN LABEL USING "K";"Angulo de Fase [rad]"
3110 LDIR 0
3120 MOVE Xmin+9*Xstep,Ymax+Ystep
3130 MOVE Xmin,Ymax+Ystep*1.5
3140 LABEL USING "K";"1E-5"
3150 MOVE Xmin,Ymin
3160 FOR J=1 TO 199
3170 PLOT Resp(J,2),Resp(J,3)
3180 NEXT J
3190 INPUT "DESEJA OUTRO GRAFICO DESTA MODO?(1)SIM,(2)NAO",Deog

```

```
3200 IF Deog=1 THEN GOTO 2610
3210 SUBEND
3220 SUB Mantor(Mes(*),U1(*),U2(*),N,Omag)
3230 OPTION BASE 1
3240 REAL Man(9,9)
3250 MAT Man=IDN
3260 Man(4,1)=Mes(N,2)
3270 IF N=1 THEN MAT U2=IDN
3280 IF N=1 THEN 3300
3290 IF (Mes(N-1,6)=1) OR (Mes(N-1,6)=3) OR (Mes(N-1,6)=5) THEN MAT U2=U1
3300 MAT U1=Man*U2
3310 SUBEND
```