

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA ESPESSURA
DE PAREDE DO MOLDE NA CINÉTICA DE
SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM MOLDES
CILÍNDRICOS MACIÇOS

082/84

Esse exemplar corresponde à
edição final da tese
defendida por Celso Riyoitsi
Sakai e aprovada pela Comissão
Julgadora em 09/09/84

107-5

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DE PAREDE DO MOLDE NA CINÉTICA
DE SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM MOLDES CILÍNDRICOS MACIÇOS

Celso Riyoitsi Sokei

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Rezende Gomes dos Santos
Orientador

Prof. Dr. Amauri Garcia

Prof. Dr. Paulo Roberto Mei

CAMPINAS
1984

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DE PAREDE DO MOLDE NA CINÉTICA
DE SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS EM MOLDES CILÍNDRICOS MACIÇOS

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo teórico-experimental do processo de solidificação de metais em moldes cilíndricos maciços. Inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica dos principais métodos de análise de transferência de calor em sistemas metal/molde. Em seguida, utilizando-se de moldes com diferentes espessuras de parede, várias experiências foram realizadas e os resultados experimentais do tempo em função da espessura solidificada foram obtidos. Posteriormente foi desenvolvido um método para análise da cinética de solidificação em moldes cilíndricos com qualquer espessura de parede, e os resultados obtidos com o emprego do mesmo foram comparados com os resultados experimentais. Finalmente são apresentados exemplos de aplicações do método proposto na solução de problemas práticos de fundição.

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF MOULD THICKNESS IN THE KINETICS OF
SOLIDIFICATION OF METALS IN MASSIVE CYLINDRICAL MOULDS

ABSTRACT

This work presents a theoretical-experimental study on the solidification of metals in massive cylindrical moulds. Initially it was made a review of the existing heat transfer methods applied to solidification in metal/mould systems. Using mould with different thickness, many experiments were realized and experimental data of solidification times as function of mould thickness were obtained. A method was developed to analyse the solidification kinetics in cylindrical moulds with different thickness and the predictions furnished by this method were compared with experimental data obtained. Finally are presented examples of application of the proposed method in the solution of practical problems of foundry process.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. REZENDE GOMES DOS SANTOS pela orientação, incentivo, amizade e sobretudo pelas horas de discussão que tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos colegas ANTONIO LAERTE STRUZIATO, RITA H.B. JACON, LAÉRCIO FREGATI, EMILCIO CARDOSO, LORAINÉ G. MONDINI, WANDERLEI A. SETTO e IVANI CRISTINA SENTOMO DE ARRUDA CASTRO pela dedicação com que colaboraram na elaboração do mesmo.

Finalmente, o autor agradece ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Ilha Solteira que, através do programa do PICD, tornou possível a realização e, em especial, ao Prof. ITAMAR FERREIRA pela amizade e incentivo.

À minha esposa

Elisa

À minha filha

Juliana

Aos meus pais

Iochio e Fideco

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2. OBJETIVOS DESTE TRABALHO	3
CAPÍTULO 2 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA SOLIDIFICAÇÃO EM SISTEMAS METAL/MOLDE	4
2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	4
2.2. MÉTODOS ANALÍTICOS EXATOS	6
2.2.1. GEOMETRIAS PLANAS	6
2.3. MÉTODOS ANALÍTICOS APROXIMADOS	18
2.3.1. GEOMETRIAS PLANAS	18
2.3.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS	22
2.4. MÉTODOS ANALÓGICOS	29
2.5. MÉTODOS NUMÉRICOS	30
2.5.1. GEOMETRIAS PLANAS	30
2.5.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS	31
2.6. TRABALHOS EXPERIMENTAIS	33
2.6.1. GEOMETRIAS PLANAS	33
2.6.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS	37
CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS	42
3.1. METAIS UTILIZADOS	42
3.2. MOLDES UTILIZADOS	42
3.3. FUSÃO E VAZAMENTO	42
3.4. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	44
3.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A PRECISÃO DOS RE SULTADOS EXPERIMENTAIS	48

3.6. ESTIMATIVA DA VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO A PARTIR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS	48
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS	50
4.1. TEMPOS DE SOLIDIFICAÇÃO	50
4.2. PERFIS DE TEMPERATURA	51
4.3. VELOCIDADES DE SOLIDIFICAÇÃO	51
CAPÍTULO 5 - DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS SEM SUPERAQUECIMENTO EM MOLDES CILÍNDRICOS MACIÇOS	64
5.1. SOLUÇÃO DE GARCIA E PRATES	64
5.1.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO	65
5.1.2. PERFIL TÉRMICO DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO	65
5.1.3. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO NA INTERFACE METAL/MOLDE	67
5.1.4. DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO	68
5.1.5. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL DE METAL PREVIAMENTE SOLIDIFICADA	68
5.1.6. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL DO MOLDE	68
5.1.7. FORMA DIMENSIONAL DA SOLUÇÃO ...	69
5.2. FATOR DE CORREÇÃO DE SANTOS E PRATES ..	69

5.3. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS SEM SUPERAQUECIMENTO EM MOLDES MACIÇOS CILÍNDRICOS	70
5.3.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO	70
5.3.2. VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO	72
 CAPÍTULO 6 - APLICAÇÃO DO MÉTODO, COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	 74
6.1. ESTIMATIVA DA CONDUTÂNCIA TÉRMICA METAL/MOLDE	74
6.2. VERIFICAÇÃO DA VALIDADE DO MÉTODO PROPOSTO PARA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIAS CILÍNDRICAS	75
6.2.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO	75
6.2.2. VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO	81
6.3. APLICAÇÕES PRÁTICAS	86
6.3.1. TEMPOS TOTAIS OBTIDOS PELA EQUAÇÃO PROPOSTA EM FUNÇÃO DA ESPESURA DE PAREDE DO MOLDE	86
6.3.2. FATOR DE CORREÇÃO Ψ	88
6.3.3. VARIAÇÃO DA VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO COM A VARIAÇÃO DO RAIO DO MOLDE	88
6.3.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÕES	92
6.4. PERFIS DE TEMPERATURA	95
 CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES	 96

	Pág.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99
APÊNDICE 1 - SIMBOLOGIA UTILIZADA	107
APÊNDICE 2 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADE DA FUNÇÃO ERRO E DA FUNÇÃO ERRO COMPLEMENTAR	110
APÊNDICE 3 - TABELAS DOS TEMPOS EXPERIMENTAIS MÉDIOS DE SOLIDIFICAÇÃO	111

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Somente nas últimas quatro décadas, a solidificação dos metais começou a ser pesquisada envolvendo metodologia científica, embora há milhares de anos venha utilizando a fundição como processo tecnológico de conformação de metais (1, 2).

Numa operação de fundição, para se obter uma peça metálica é necessário que uma determinada massa de metal líquido solidifique dentro da cavidade do molde. Este, por sua vez, apresenta duas funções principais: a primeira é dar o formato da peça e a segunda retirar calor do metal líquido para que esta se solidifique.

A solidificação em sistemas metal/molde é fundamentalmente um processo de extração de calor em regime transiente com mudança de fase, onde uma certa quantidade de energia térmica deve ser transferida para o meio ambiente, possibilitando, assim, a nucleação e crescimento da fase sólida. O estudo da transferência de calor durante a solidificação torna-se necessário, visto que a mesma exerce grande influência tanto na cinética como na distribuição de temperaturas no sistema metal/molde, e a influência que os mesmos exercem na redistribuição de soluto, alterando a forma da interface sólido/líquido, parâmetro este que determina a estrutura e a qualidade das peças obtidas (3-6).

O tempo de solidificação é importante, pois através deste, pode-se determinar o tempo de desmoldagem da peça, e está ligado à velocidade de solidificação que influi diretamente na estrutura e propriedade do material.

Vários são os parâmetros que influenciam o tempo de solidificação, e os mais importantes são: a temperatura do metal líquido no momento de vazamento, formato do molde, espessura de parede do molde, características físicas do metal líquido e do material do molde e o uso de pinturas isolantes nas paredes internas do molde. Estes parâmetros afetam de maneira significativa as condições de transferência de calor.

Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos anos na tentativa de desenvolver métodos de análise da cinética de solidificação, entretanto as equações diferenciais envolvidas apresentam condições de contorno não lineares em função da transferência de calor ocorrer em regime transiente, dificultando a obtenção de soluções analíticas exatas e gerais (7).

Atualmente existem na literatura vários métodos de diferentes autores que tentam prever a cinética e a distribuição de temperaturas em um sistema metal/molde durante a solidificação (7-15). A geometria mais estudada, tanto do ponto de vista experimental como analítico, tem sido a geometria plana, para a qual já foram obtidas soluções analíticas exatas, entre estas podemos citar a desenvolvida por Garcia e Prates (16).

No caso de geometrias cilíndricas, os métodos numéricos são os que apresentam resultados mais precisos, mas são, em geral, bastante específicos e a programação muito trabalhosa.

Recentemente, Santos e Prates desenvolveram um método analítico aproximado de fácil aplicação para análise da cinética de solidificação de metais em moldes cilíndricos refrigerados (17).

Como a geometria cilíndrica, ou mais especificamente moldes maciços cilíndricos são bastante utilizadas na fundição de metais, é de grande interesse o desenvolvimento de modelos que possam ser aplicados a casos práticos.

1.2. OBJETIVOS DESTE TRABALHO

Considerando os fatores já citados, torna-se evidente a conveniência de se estabelecer um método analítico aproximado que permita a análise da influência da espessura de parede do molde na solidificação dos metais em moldes com geometrias cilíndricas. Desta forma, os objetivos deste trabalho são os seguintes:

- 1) Análise experimental da influência da espessura de parede do molde nos tempos de solidificação e nos perfis de temperatura no sistema metal/molde durante o processo de solidificação.
- 2) Extensão do método proposto por Santos e Prates para solidificação em moldes cilíndricos refrigerados para análise da solidificação em moldes maciços semi-infinitos.
- 3) Desenvolvimento de um fator, que leva em conta as propriedades do metal e do molde e balanço de massas entre os mesmos, e que possa ser usada para a determinação da influência da espessura de parede do molde na cinética de solidificação, permitindo, portanto, a extensão do método para a análise da solidificação em moldes maciços finitos.
- 4) Análise preliminar da variação do coeficiente de transmissão de calor, para os casos em que a contração do metal é mais sensível que a contração do molde durante o processo de solidificação.
- 5) Estabelecer possíveis aplicações práticas para o método desenvolvido.

CAPÍTULO 2

TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA SOLIDIFICAÇÃO EM SISTEMAS METAL/MOLDE

2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A solidificação é um processo onde o material sofre transformação passando de um fase líquida para sólida pela liberação de calor em regime não uniforme (7).

A transformação ocorre quando o material atinge um estado termodinâmico necessário para que esta mudança de fase ocorra e o calor latente de fusão seja removido através de alguns dos mecanismos de transferência de calor. No caso específico de moldes de paredes finitas, ocorrerão trocas de calor por condução e convecção na fase líquida se o metal líquido apresentar algum grau de superaquecimento e ainda ocorrerá transferência de calor por condução na camada de metal solidificado. Um outro fator que deve ser analisado é o fato de que na interface metal/molde não existe um contato perfeito e a transferência de calor da superfície interna para a externa se dá por radiação, convecção e condução, também conhecida por transferência newtoniana. No molde, a transferência de calor da superfície interna para a externa se dá apenas por condução, e da superfície externa do molde para o ambiente, a transferência de calor se dá por radiação, convecção e condução, isto pode ser melhor esclarecido pelas figuras 2.1 e 2.2, onde na primeira é apresentado, de maneira esquemática, o sistema metal/molde em um instante qualquer do processo de solidificação localizando um elemento de referência para análise de solidificação nesse sistema. Na figura 2.2 tem-se também de maneira esquemática, os mecanismos de transferência de calor que podem ocorrer durante a solidificação, no elemento re

tirado da figura anterior.

A solidificação dos metais torna-se complexa e de difícil solução, porque vários mecanismos de transferência de calor ocorrem simultaneamente, a velocidade de deslocamento da interface sólido/líquido é variável com o tempo, as temperaturas do metal e do molde são diferentes na interface metal/molde devido ao contato térmico imperfeito e, esta diferença de temperatura, provoca uma variação ao fluxo de calor. Deste modo, a transferência de calor ocorre em regime transiente e, além disso, como as propriedades térmicas do metal e do molde dependem da temperatura, elas variam durante o processo (18).

A obtenção de soluções analíticas exatas são dificultadas em face das equações diferenciais apresentarem condições de contorno não lineares, em função da transferência de calor ocorrer em regime não uniforme, além do avanço da frente de solidificação ocorrer a uma velocidade variável. Entretanto, em certos casos, existe a possibilidade de se obter soluções particulares úteis na resolução de alguns problemas encontrados na prática, mas, para isto, é necessário o uso das hipóteses simplificadoras de caráter físico e/ou matemático.

Algumas soluções para a solidificação foram desenvolvidas levando-se em conta estas aproximações.

Os métodos de análise usados no desenvolvimento destas soluções podem ser analíticos exatos, analíticos aproximados, analógicos, numéricos e experimentais, tendo como objetivo a determinação do avanço da interface sólido/líquido em função do tempo e da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde em função do tempo e do espaço (8, 19, 20).

Estes métodos têm se restringido às geometrias mais simples como: placas planas, cilindros e esferas. As placas planas foram as mais estudadas, devido à maior facilidade no trata

mento matemático, o que permitiu a obtenção de soluções analíticas exatas, mas o mesmo não aconteceu nos estudos das geometrias cilíndricas e esféricas pois envolvem uma maior complexidade matemática.

2.2. MÉTODOS ANALÍTICOS EXATOS

Os métodos analíticos exatos não admitem aproximações de caráter matemático, entretanto são adotadas aproximações de caráter físico, e as soluções obtidas apresentam uma certa limitação quanto a sua utilização, podendo ser aplicado somente a casos específicos e, geralmente, se afastam das condições reais observadas na prática.

2.2.1. GEOMETRIAS PLANAS

Na análise do problema segundo os métodos analíticos exatos, as seguintes hipóteses de natureza física são, em geral, consideradas: o fluxo de calor é unidirecional; a interface metal/molde é macroscopicamente plana, considera-se uma resistência térmica constante na interface metal/molde; as perdas por convecção e radiação para o meio ambiente são desprezíveis e as propriedades do metal são constantes.

Estas hipóteses simplificadoras permitem considerar que a extração de calor do metal ocorra somente por condução, simplificando o equacionamento. A simbologia adotada no desenvolvimento das equações é apresentada no Apêndice 1.

Analisando o elemento infinitesimal do sistema metal/molde (figuras 2.1 e 2.2), a equação geral da condução de calor no sólido pode ser escrita da seguinte forma (7, 8, 21, 22):

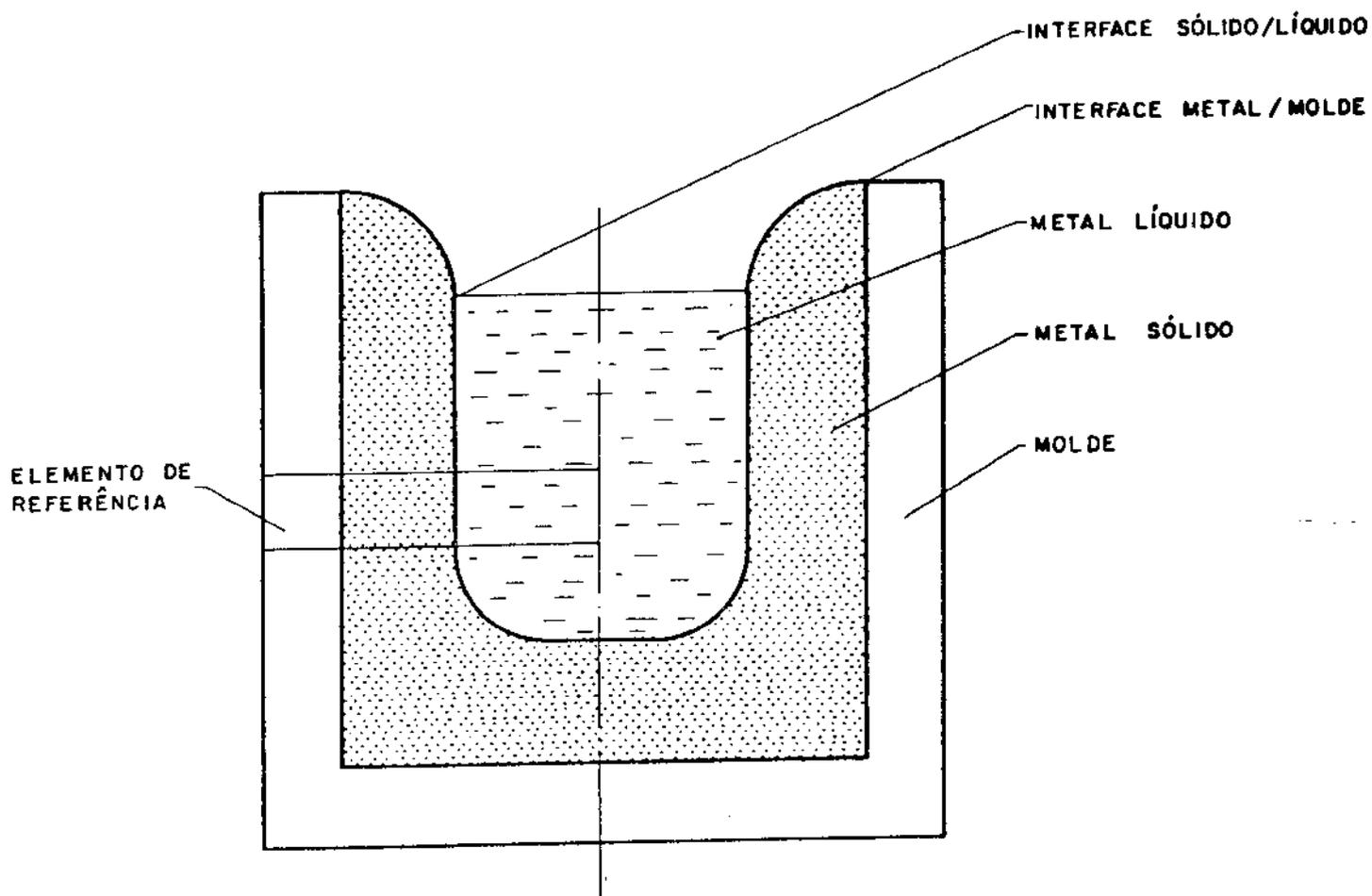
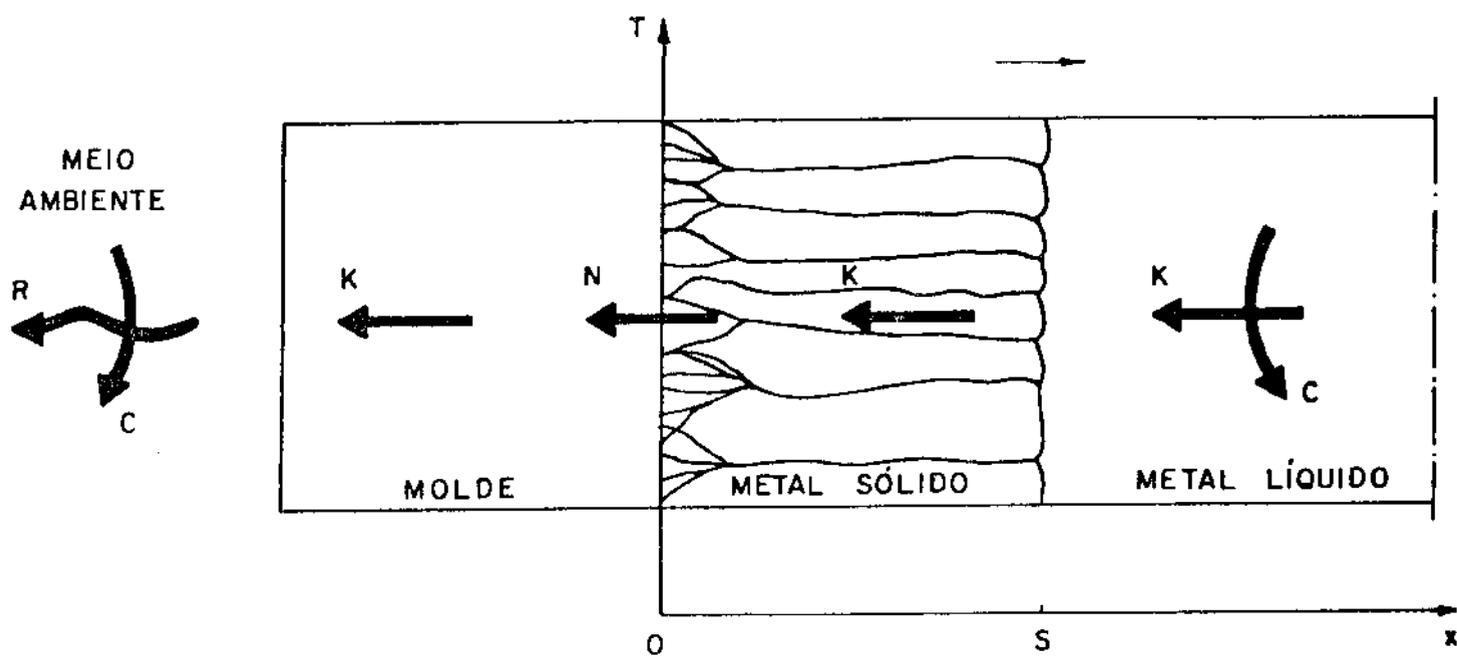


Figura 2.1 - Sistema metal/molde em um instante qualquer do processo de solidificação



K = CONDUÇÃO
 N = TRANSFERÊNCIA NEWTONIANA
 C = CONVECÇÃO
 R = RADIAÇÃO

Figura 2.2 - Elemento de referência do sistema metal/molde com as possíveis formas de transferência de calor que podem ocorrer durante a solidificação

$$\nabla k \nabla T = \rho \frac{\partial (cT)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Considerando que a condutibilidade térmica independe da posição no espaço e o calor específico independe da temperatura, a equação 2.1 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \cdot c} \nabla^2 T \quad (2.2)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \cdot c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

Como o fluxo de calor é unidirecional a equação (2.3) reduz-se a seguinte forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

$$\text{onde } a = \frac{k}{\rho \cdot c} \quad (2.5)$$

O fluxo de calor por unidade de área é dado pela equação de Fourier:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.6)$$

onde:

$$q_x = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \quad (2.7)$$

Dependendo do sistema de referência adotado, tem-se:

$$\begin{array}{ll} x < 0 & \text{molde} \\ x = 0 & \text{interface metal/molde} \end{array}$$

$x > 0$	metal
$x = S$	interface sólido/líquido
$0 < x < S$	metal sólido
$x > S$	metal líquido

Condições de contorno que podem ser estabelecidas ba
seadas nas hipóteses anteriormente assumidas:

$$\text{para } t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \implies T_m = T_o \\ x > 0 \implies T_l = T_v \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

$$\text{para } t > 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -\infty \implies T_m = T_o \\ x = +\infty \implies T_l = T_v \\ x = 0 \implies T_m = T_s = T_l = \text{cte} \\ x = S \implies T_s = T_l = T_f = \text{cte} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

$$(2.12)$$

$$(2.13)$$

Vários métodos analíticos exatos foram desenvolvidos a partir das equações e condições de contorno apresentadas e estes apresentam soluções do tipo (7, 8, 20, 23):

$$T(x,t) = A^* + B^* \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \quad (2.14)$$

onde A^* e B^* são as constantes de integração que são determina
das pela condições de contorno apresentadas e, "erf" é uma fun
ção matemática denominada "função erro" definida por (24):

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} \exp(-u) du \quad (2.15)$$

Resolvendo a equação (2.14) levando-se em conta as con
dições de contorno estabelecidas anteriormente, chegou-se a se

guinte equação que correlaciona o tempo de solidificação em função da espessura solidificada:

$$t = \frac{1}{4a} \left(\frac{S}{\emptyset} \right)^2 \quad (2.16)$$

onde \emptyset é uma constante inerente a cada sistema metal/molde. Desta forma, pode-se determinar:

$$S = f(t) \quad (2.17)$$

e

$$T_{i,l,m,s} = f(x,t) \quad (2.18)$$

Neumann foi o primeiro a demonstrar que a solução da equação diferencial para condução de calor unidirecional, baseada na função erro, satisfazia as condições de contorno do processo de solidificação (1860) (7, 8, 20, 23). Neumann considerou que o material do molde apresenta difusividade de calor infinito (absorvedouro perfeito de calor).

Lightfoot considerou as hipóteses assumidas por Neumann e, admitindo que tanto o molde, metal líquido e o metal sólido apresentam as mesmas propriedades térmicas, propôs uma nova solução que considera a interface sólida/líquida como uma fonte de calor em movimento (25).

Uma solução mais geral baseada nas hipóteses de Neumann foi a de Schwartz que considera propriedades térmicas diferentes entre o metal e o molde (26). Sua solução aplica-se somente a moldes semi-infinitos, mas não é restrita a moldes refrigerados.

Várias soluções particulares foram propostas e são úteis na análise de problemas específicos de solidificação, em

tre elas estão a de Lyubov, Stefan, Chvorinov e a mais recente, a de Garcia e Prates.

No desenvolvimento de seu modelo, Lyubov considerou que o metal é vazado sem superaquecimento, mas não impôs que a difusividade de calor fôsse infinita para o material do molde (27).

Uma solução particular do modelo de Lyubov, foi a proposta por Stefan que considera o vazamento sem superaquecimento e temperatura na interface metal/molde constante, além de considerar que o material do molde apresenta difusividade de calor infinita (28).

A solução proposta por Chvorinov, que também é uma solução particular de Lyubov, considera que o molde apresenta características refratárias, ou seja, baixa capacidade de extração de calor, ou ainda, que a difusividade de calor do molde é bem menor que a do metal.

Garcia e Prates propuseram um modelo matemático para determinação da cinética e da distribuição de temperatura de metais e ligas eutéticas vazadas sem superaquecimento (1978) (16, 18). Este modelo difere dos demais pois é o único modelo analítico exato que considera a resistência térmica existente na interface metal/molde, e que o mesmo permanece constante durante o processo de solidificação e é representada por uma espessura previamente existente em um sistema virtual.

As hipóteses assumidas para o desenvolvimento do modelo de Garcia e Prates são:

- a) O fluxo de calor é unidirecional e o metal e o molde comportam-se como elementos semi-infinitos.
- b) O metal é vazado sem superaquecimento.
- c) O metal solidifica com uma interface sólido/líquido macroscopicamente plana.

d) As perdas por convecção e radiação para o meio ambiente são desprezíveis.

e) As propriedades físicas do metal são constantes.

Conforme mencionado anteriormente, Garcia e Prates admitem, como hipótese adicional, que a resistência térmica do contato metal/molde é representado por espessuras de metal e do molde previamente existentes em dois sistemas virtuais equivalentes, com exceção da origem de cada um deles. A sub-divisão do sistema real em dois componentes virtuais está ilustrada na figura 2.3.

A transformação do sistema real ao virtual é feita com as seguintes relações:

$$x' = x + S_0 \quad (2.19)$$

$$\text{Metal} \quad S' = S + S_0 \quad (2.20)$$

$$t' = t + t_0 \quad (2.21)$$

$$x' = x - E_0 \quad (2.22)$$

$$\text{Molde} \quad t' = t + t_0 \quad (2.23)$$

onde: x = distância à interface metal/molde no sistema real

x' = distância à interface metal/molde no sistema virtual

t = tempo no sistema real

t' = tempo no sistema virtual

S = espessura solidificada no sistema real

S' = espessura solidificada no sistema virtual

S_0 = espessura virtual previamente solidificada

E_0 = parcela virtual da espessura do molde

As hipóteses assumidas permitem que se considere que o calor é transferido apenas por condução. Pode-se, então, aplicar

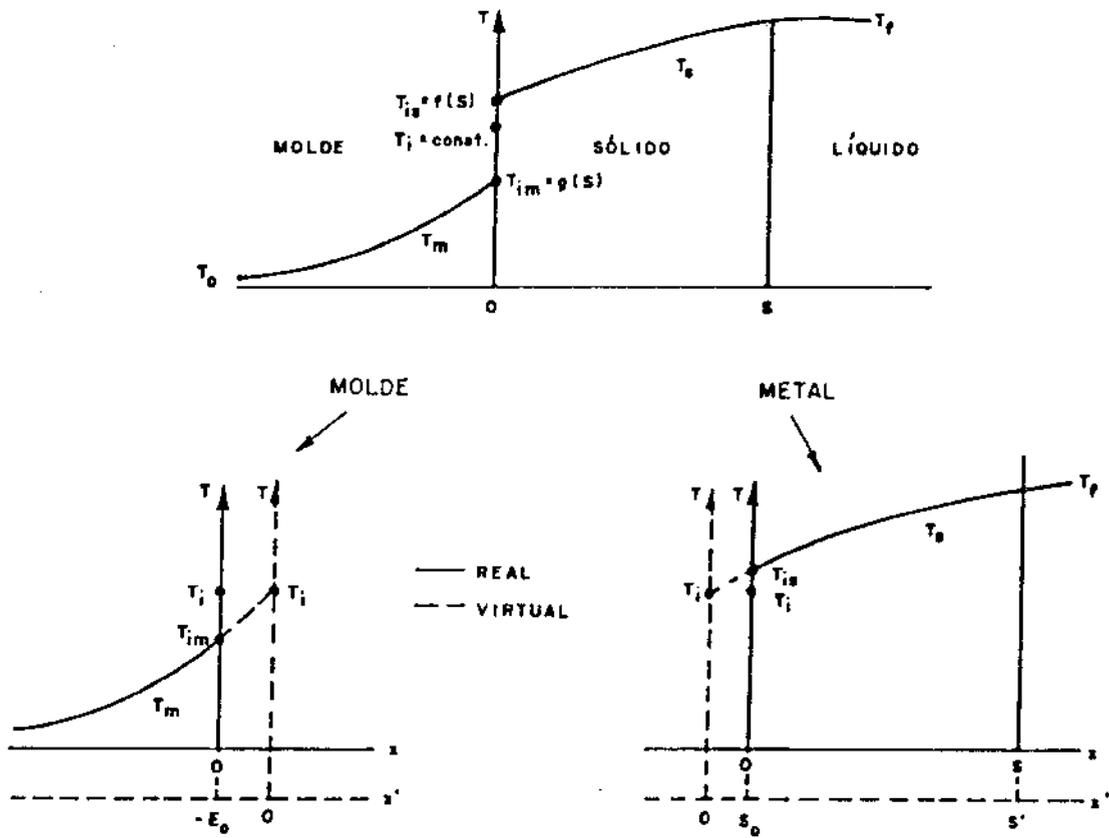


Figura 2.3 - Divisão do sistema real em componentes virtuais relativos ao metal e ao molde

car no sistema virtual a equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} \quad 0 \leq x' \leq S' \quad (2.24)$$

e estabelecer as seguintes condições de contorno:

$$x' = S' \quad \Rightarrow \quad T = T_f = \text{cte} \quad (2.25)$$

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_i = \text{cte} \quad (2.26)$$

A solução geral da equação (2.24) é:

$$T = A + B \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{2\sqrt{at'}} \right) \quad (2.27)$$

Aplicando-se a condição de contorno dada pela relação (2.25) na equação (2.27) tem-se:

$$\frac{S'}{2\sqrt{a_s t'}} = \theta \quad (2.28)$$

ou então

$$t' = \frac{S'^2}{4a_s \theta^2} \quad (2.29)$$

Substituindo-se as equações (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.27), tem-se a equação que descreve o tempo de solidificação em função da espessura solidificada no sistema real:

$$t = \frac{S^2}{4a_s \theta^2} + \frac{S_o \cdot S}{2a_s \theta^2} \quad (2.30)$$

Introduzindo as condições de contorno (2.25) e (2.26) em (2.27), determina-se as constantes A e B.

$$A = T_i \quad (2.31)$$

$$B = \frac{T_f - T_i}{\text{erf}(\emptyset)} \quad (2.32)$$

A equação (2.27) pode, então, ser colocada na forma:

$$T_s = T_i + \frac{T_f - T_i}{\text{erf}(\emptyset)} \text{erf} \left(\emptyset \frac{S_o + x}{S_o + S} \right) \quad (2.33)$$

Aplicando-se as condições de contorno:

$$x' = -\infty \quad \Rightarrow \quad T = T_o = \text{cte} \quad (2.34)$$

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_i = \text{cte} \quad (2.35)$$

Na equação (2.27) determina-se:

$$A_m = T_i \quad (2.36)$$

$$B_m = T_i - T_o \quad (2.37)$$

Portanto, no molde a distribuição de temperatura será dado pela equação:

$$T_m = T_i + (T_i - T_o) - \text{erf} \left[N \emptyset \left(\frac{x - E_o}{S_o + S} \right) \right] \quad (2.38)$$

onde

$$N = \sqrt{\frac{a_s}{a_m}} \quad (2.39)$$

Aplicando-se a condição de igualdade de fluxo de calor ao molde através do plano hipotético, e desenvolvendo-se, chega-se a:

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o) M}{M + \text{erf}(\vartheta)} \quad (2.40)$$

onde M é uma constante do sistema metal/molde, e é dado por:

$$M = \sqrt{\frac{k_s c_s \rho_s}{k_m c_m \rho_m}} \quad (2.41)$$

Efetuada-se um balanço térmico na interface sólido/líquido e combinando-se com a equação (2.40), possibilita a determinação da constante de solidificação ϑ :

$$\sqrt{\pi} \vartheta \exp(\vartheta^2) [M + \text{erf}(\vartheta)] = \frac{c_s (T_f - T_o)}{H} \quad (2.42)$$

A espessura previamente solidificada no sistema virtual (S_o), calculada através do balanço térmico na interface metal/molde, nos instantes iniciais do processo de solidificação é dada pela equação:

$$S_o = \frac{2 a_s \vartheta^2 H \rho_s [M + \text{erf}(\vartheta)]}{h_{i_s} (T_f - T_o) \text{erf}(\vartheta)} \quad (2.43)$$

onde

$$h_{i_s} = \left(1 + \frac{M}{\text{erf}(\vartheta)}\right) h_i \quad (2.44)$$

Substituindo a equação (2.44) em (2.43) tem-se:

$$S_o = \frac{2 a_s \vartheta^2 H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \quad (2.45)$$

Finalmente, substituindo-se (2.45) em (2.30) e (2.33), obtém-se as equações que permitem o cálculo dos tempos de solidificação e da distribuição de temperaturas no processo de solidificação unidirecional de metais em moldes maciços.

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (2.46)$$

onde:

$$\alpha = \frac{1}{4a_s \vartheta^2} \quad (2.47)$$

e

$$\beta = \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \quad (2.48)$$

e

$$T = T_o + \frac{(T_f - T_o) M}{M + \text{erf}(\vartheta)} + \frac{(T_f - T_i)}{\text{erf}(\vartheta)} \text{erf} \left(\vartheta \frac{\beta + 2\alpha x}{\beta + 2\alpha S} \right) \quad (2.49)$$

Derivando-se a equação (2.47) em relação à espessura solidificada S determina-se a equação que descreve a velocidade de solidificação durante o processo:

$$v = \left(\frac{dt}{dS} \right)^{-1} = \left(\frac{\rho_s c_s}{2k_s \vartheta^2} S + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \right)^{-1} \quad (2.50)$$

2.3. MÉTODOS ANALÍTICOS APROXIMADOS

Embora estes métodos admitam simplificações de ordem física e matemática, estes apresentam soluções mais próximas das reais observadas na prática.

2.3.1. GEOMETRIAS PLANAS

Para o desenvolvimento das soluções através dos métodos analíticos aproximados, as seguintes hipóteses de natureza física deverão ser consideradas:

- a) O fluxo de calor é unidirecional.
- b) Inexistência de fluxo de massa no metal líquido.
- c) Existe uma resistência térmica na interface metal/

molde (coeficiente de transmissão de calor finito).

d) A interface metal/molde é macroscopicamente plana.

e) As propriedades físicas do molde e do metal não variam com a temperatura.

No desenvolvimento das soluções analíticas aproximadas consideram-se balanços de fluxo de calor em uma espessura de metal solidificado, num instante qualquer do processo de solidificação. Analisando o esquema da distribuição de temperatura e dos fluxos de calor dado pela figura 2.4 e fazendo-se valer as mesmas condições de contorno no desenvolvimento dos métodos analíticos exatos, com os devidos balanços térmicos tem-se:

Na interface metal/molde ($x = 0$)

$$q_i = -k_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2.51)$$

Na interface sólido/líquido ($x = S$)

$$q_{si} = -k_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=S} + H \rho_s \frac{dS}{dt} \quad (2.52)$$

No metal solidificado ($0 \leq x \leq S$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.53)$$

Integrando-se a equação (2.53), introduzindo-se (2.51) e (2.52) no resultado obtido e aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais resulta:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \int_0^S T_s dx - \frac{q_i - q_{s1}}{\rho_s c_s}}{T_f + \frac{H}{c_s}} \quad (2.54)$$

que é a equação básica para o desenvolvimento das soluções analí

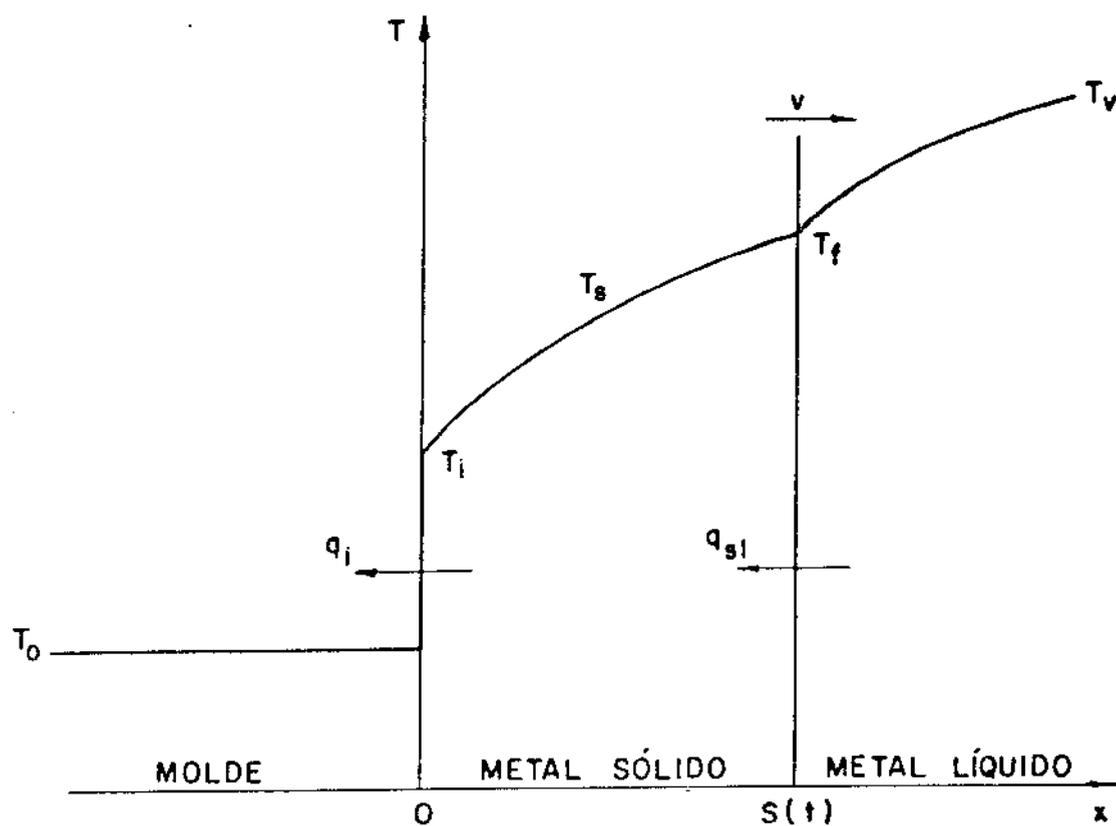


Figura 2.4 - Distribuição de temperaturas e fluxos de calor em um elemento do sistema metal/molde

ticas aproximadas. A sua resolução será mais complexa conforme as funções que representarem os fluxos de calor nas interfaces metal/molde (q_i) e sólido/líquido (q_{s1}), bem como o perfil de temperatura no metal sólido (T_s). Supondo que o coeficiente de transmissão de calor permanece constante durante o processo de solidificação de um metal vazado sem superaquecimento, tem-se:

$$q_i = h(T_i - T_o) \quad (2.55)$$

e

$$q_{s1} = 0 \quad (2.56)$$

Com relação à função que descreve o perfil térmico no metal sólido, diferentes autores adotam funções matemáticas auxiliares que devem obedecer as seguintes condições de contorno:

$$p/x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_s = T_i \quad (2.57)$$

$$p/x = S \quad \Rightarrow \quad T_s = T_f \quad (2.58)$$

London e Seban propuseram uma das primeiras soluções analíticas aproximadas para a solidificação em geometrias planas (30). Eles adotaram uma função linear para representar a distribuição de temperaturas no material que solidifica sem superaquecimento, e admitiram que o efeito do calor específico é desprezível em relação ao do calor latente.

Posteriormente, três soluções foram apresentadas, a de Adams, Megerlin e Hills, e todas admitem funções polinomiais do segundo grau para descrever os perfis de temperaturas no metal solidificado, e consideram que o metal é vazado sem superaquecimento (31-33).

Hrycak propôs uma outra solução analítica aproximada

para a análise da solidificação em geometrias planas (36). Ele desenvolveu o seu modelo considerando o superaquecimento e admitindo duas funções auxiliares, uma linear para representar a distribuição de temperaturas no metal sólido e outra quadrática para representar a distribuição de temperatura no metal líquido.

2.3.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

A forma cilíndrica, apesar de ser geometricamente simples, apresenta grandes dificuldades no seu equacionamento. No trabalho apresentado por Carslaw e Jaeger sobre condução de calor, eles concluíram que, para regiões limitadas interna ou externamente por superfícies cilíndricas, mesmo a temperatura constante, só podem ser resolvidas por soluções aproximadas (7).

Para o desenvolvimento destas soluções, deveremos, entretanto, fazer algumas considerações, ou seja, que o fluxo de calor seja radial; que a interface metal/molde seja circular; que a difusividade de calor do material do molde seja superior a do metal solidificado; que as propriedades térmicas do metal e do molde sejam constantes com a variação da temperatura.

Estas simplificações físicas permitem que se admita que durante a solidificação a extração de calor do metal líquido ocorre por condução na camada solidificada e por transferência newtoniana entre o metal e o molde (moldes maciços) ou o metal e fluido de refrigeração (moldes refrigerados).

Considerando o sistema de referência apresentados na figura 2.5 e ainda o meio isotrópico, o calor específico independente da temperatura, e o fluxo de calor radial, a equação de condução de calor no sólido pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.59)$$

ou então

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.60)$$

Fazendo-se os balanços térmicos, tem-se:

na interface metal/molde ($r = r_o$)

$$q_{r_o} = -k_s \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = h(T_i - T_o) \quad (2.61)$$

na interface sólido/líquido ($r = r_f$)

$$\left(-k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \right)_{r=r_f} - \left(-k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_{r=r_f} = H \rho_s \frac{dr_f}{dt} \quad (2.62)$$

Como o superaquecimento é nulo:

$$\left(-k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_{r=r_f} = 0$$

Logo

$$q_{r_f} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = -H \rho_s \frac{dr_f}{dt} \quad (2.64)$$

London e Seban foram os pioneiros nos trabalhos analíticos para estudar a solidificação em geometrias cilíndricas(30). Seus estudos basearam-se na formação do gelo em moldes cilíndricos refrigerados, desprezando o efeito do calor específico, ou seja, a energia necessária para resfriar o metal já solidificado é desprezível em relação ao calor latente de fusão, permitindo com isso considerar um perfil de temperatura linear no metal solidificado. A solução de London e Seban é bem simples, mas não apresenta bons resultados no caso da solidificação dos metais onde o efeito do calor específico não pode ser desprezado.

Vários trabalhos foram publicados posteriormente e, em

tre eles, podemos citar o de Adams em 1958, o de Shih e Tsay em 1971, Smith e Poots em 1974, Kern e Wells em 1977.

Adams propôs uma solução analítica aproximada, usando a mesma técnica usada na análise da geometria plana (31). A equação de Adams é obtida através da expansão das equações diferenciais em séries de potências e a solução é obtida por aproximações sucessivas. Na sua solução, Adams não considera a resistência térmica da interface metal/molde, e a equação não pode ser integrada analiticamente, podendo, entretanto, ser integrada numericamente. Com este processo ele obteve curvas do inverso da velocidade de solidificação em função do raio e, integrando numericamente estas curvas, obteve os tempos totais de solidificação em função do raio das peças.

Nesta solução, Adams mostra que a velocidade da interface sólido/líquido decresce no início da solidificação e volta a crescer no final do processo.

Shih e Tsay elaboraram um método iterativo que permite a determinação de soluções sucessivas para o tempo de solidificação em função da camada solidificada e do perfil de temperaturas (35). Eles compararam os resultados obtidos através de seu método com resultados experimentais e outros métodos existentes e concluíram que, apesar de possuir uma razoável precisão até uma determinada espessura, o mesmo apresenta um grande desvio no final do processo.

Riley, Smith e Poots apresentaram um método que era composto de duas partes: a primeira, analisava o problema até uma determinada espessura solidificada, e a segunda analisava o final do processo de solidificação (36). Comparando os resultados de seu método com os numéricos, os autores concluíram que o método era impreciso nos instantes finais do processo de solidificação.

Kern e Wells apresentaram um método onde consideravam aproximações de ordem matemática e física, entre as quais podem ser citadas a inexistência da resistência térmica de contato na interface metal/molde e a linearidade do perfil de temperatura no metal solidificado (37). Os autores compararam seu método com um método numérico e, concluíram que este apresentava um grande desvio e, para ajustar os resultados, introduziram um fator empírico determinado através de tentativa e erro.

Mais recentemente, em 1980, Santos e Prates desenvolveram um método de caráter mais geral e extensivo aplicado para a determinação da cinética e da distribuição de temperaturas durante a solidificação em sistemas metal/molde com geometrias cilíndricas (17, 38, 39, 40). Este método é uma expansão do modelo analítico exato proposto por Garcia e Prates para geometrias planas (16, 41, 42) através da introdução de um fator de correção que leva em consideração a curvatura dos moldes cilíndricos. Santos e Prates estudaram as possíveis alterações ocorridas no processo de solidificação provocadas pelo efeito da curvatura do molde e determinaram o fator de correção, baseadas nos estudos comparativos entre os resultados experimentais para os moldes cilíndricos e planos. Com base nestes resultados, os autores chegaram nas seguintes conclusões:

a) É conveniente, para estudos comparativos entre geometrias planas e cilíndricas, plotar os valores dos tempos de solidificação em função da relação entre o volume de metal solidificado e a área de troca de calor na interface metal/molde (V_s/A_i) visto que este parâmetro considera a redução da área de troca de calor na interface sólido/líquido durante a evolução do processo de solidificação nos moldes cilíndricos, ou seja:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{\pi r_o^2 \ell - \pi r_f^2 \ell}{2\pi r_o \ell} \quad (2.65)$$

onde ℓ é a altura do cilindro. Logo, a equação (2.65) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2 r_o} \quad (2.66)$$

para geometrias planas esta equação representa a própria espessura solidificada, pois tem-se que:

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{S \cdot A_i}{A_i} = S \quad (2.67)$$

b) Através das equações (2.66) e (2.67) pode-se concluir que a espessura solidificada em moldes cilíndricos é maior que a espessura solidificada em moldes planos para um mesmo valor de (V_s/A_i) .

c) Nos instantes iniciais do processo, os tempos necessários para solidificar um mesmo (V_s/A_i) apresentam valores bem próximos, entretanto, no final da solidificação o tempo de solidificação em moldes cilíndricos é aproximadamente duas vezes maior, o que foi comprovado experimentalmente através de comparações das curvas de tempo de solidificação versus (V_s/A_i) , para moldes planos e cilíndricos.

d) A taxa de redução do volume de metal líquido remanescente no final da solidificação aumenta mais rapidamente em geometrias cilíndricas que nos moldes planos, reduzindo drasticamente a quantidade de calor latente a ser retirada de moldes cilíndricos.

Baseados nestas condições, Santos e Prates estabelece

ram que, o fator de correção a ser determinado e introduzido na solução de Garcia e Prates (equação 2.46), deveria levar em conta a diferença de geometria entre o plano e o cilíndrico, tendo, para isso, que assumir o valor igual a unidade no instante inicial do processo de solidificação e o valor dois no final da mesma. Isto pode ser comprovado quando se compara uma peça cilíndrica de raio r_o , com uma placa plana refrigerada em uma das faces, de espessura também igual a r_o . Pode-se constatar através das equações (2.66) e (2.67) que a relação entre os valores máximos de (V_s/A_i) para os dois casos, assume um valor igual a dois no final da solidificação, o que sugere que o mesmo pode ser adotado como um dos termos do fator de correção.

Entretanto, no início do processo, a diferença dos tempos de solidificação para as duas geometrias é pequena e tende a aumentar, à medida que aumenta a relação (V_s/A_i) , até que no final do processo o tempo de solidificação para geometria cilíndrica é duas vezes maior que a plana, o que indica a necessidade de introduzir, no fator de correção, um outro termo capaz de atenuar a parcela devido a diferença de geometria no início do processo de solidificação e tenda a zero no final do mesmo. Este termo deve estar relacionado com a variação de volume de metal líquido remanescente e o volume de metal já solidificado em cada instante, que no caso das placas planas é igual a:

$$\left(\frac{V_l}{V_s}\right)_p = \frac{(r_o - S_p) \cdot A_i}{r_o A_i} \quad (2.68)$$

ou

$$\left(\frac{V_l}{V_s}\right)_p = \frac{(r_o - S_p)}{r_o} \quad (2.69)$$

e para o cilindro igual a:

$$\left(\frac{V_l}{V_s} \right)_c = \frac{\pi(r_o - S_c)^2 \cdot \ell}{\pi r_o^2 \ell} \quad (2.70)$$

onde

$$S_c = r_o - r_f \quad (2.71)$$

Nota-se que a relação é linear para a geometria plana, e quadrática para a cilíndrica. Substituindo a equação (2.71) na equação (2.70), esta pode ser escrita na seguinte forma:

$$\left(\frac{V_l}{V_s} \right)_c = \frac{r_f^2}{r_o^2} \quad (2.72)$$

Esta relação é mais adequada para ser usada no segundo termo do fator de correção, pois assume o valor máximo igual a unidade no início da solidificação ($r_f = r_o$), e tende a zero no final ($r_f = 0$).

Desta forma, introduzindo na equação (2.72) o fator 2, que é o responsável pela diferença geométrica entre o plano e o cilíndrico, a correção global θ será dada por:

$$\theta = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \quad (2.73)$$

Introduzindo este fator na equação (2.46), e substituindo S por (V_s/A_i) , obtém-se a equação que permite a determinação do tempo de solidificação em moldes cilíndricos maciços e refrigerados:

$$t = \theta \left[\alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \beta \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (2.74)$$

Finalmente, substituindo a equação (2.47), (2.48) e (2.73) em (2.74), tem-se:

$$t = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4a_s \varnothing^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (2.75)$$

A equação que descreve a variação da velocidade durante o processo, é obtida derivando-se a equação (2.75) em relação à espessura solidificada, que para geometrias cilíndricas, é dada por $(r_o - r_f)$. Logo temos que:

$$v = \left(\frac{d_t}{d(r_o - r_f)} \right)^{-1} \quad (2.76)$$

$$v = \left\{ \frac{k_s c_s \rho_s}{h_i^2} \left(\frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[\frac{h_i^2}{2\varnothing k_s} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H h_i}{c_s (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h_i}{\varnothing k_s} \right)^2 \left(\frac{V_s}{A_i} \right) + \frac{H h_i}{c_s (T_f - T_o)} \right] \right\}^{-1} \quad (2.77)$$

2.4. MÉTODOS ANALÓGICOS

Neste caso, o sistema térmico metal/molde é substituído por um sistema elétrico em regime transiente.

No sistema elétrico existe uma maior facilidade de controle de medição e de registro das diferenças de potencial e intensidade de corrente, que num sistema térmico onde se controla a temperatura e o fluxo de calor. Além disso, parâmetros de difícil análise no sistema térmico, tais como calor latente e formação de uma camada de ar na interface metal/molde, podem ser fa

cilmente analisados em um sistema elétrico com a introdução de uma corrente e introdução de uma resistência, respectivamente.

Paschkis apresentou vários trabalhos de grande importância, na análise de solidificação dos metais, utilizando a analogia entre o sistema elétrico e o térmico. Seus estudos basearam-se na solidificação de peças de aço de geometrias simples, tais como placas, cilindros e esferas (43, 44).

Neste método, o sistema metal/molde é dividido em várias partes, onde as resistências elétricas simulam a resistência do metal e do molde ao fluxo de calor, e os capacitores simulam o efeito do calor específico.

Estes métodos, entretanto, apresentam algumas restrições, entre as quais podemos citar: a necessidade de se conhecer o fluxo de calor na interface metal/molde, a fim de estabelecer uma analogia entre os sistemas térmicos e elétricos; a outra restrição baseia-se no fato de que, a precisão do método está diretamente ligada ao conhecimento das propriedades térmicas dos meios envolvidos e da sua variação durante todo o processo, além disso, estes métodos são bem específicos e exigem a utilização de computadores analógicos.

2.5. MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos são os mais utilizados no estudo da solidificação dos metais em moldes planos e cilíndricos, e isto se deve a grande precisão de seus resultados. Estes métodos têm por base a associação de uma malha ao sistema metal/molde, e na substituição das equações de transferência de calor, que são equações de derivadas parciais, por equações aproximadas chamadas de equações por diferenças finitas, e estas são resolvidas passo a passo para pequenos intervalos de tempo.

2.5.1. GEOMETRIAS PLANAS

Os métodos numéricos são derivados do método gráfico, que foi inicialmente desenvolvido por Schmidt para estudar o aquecimento e resfriamento de materiais com geometria plana (8, 21).

Em 1958, Longwell adaptou o método de Schmidt para o estudo da solidificação dos metais em moldes com geometrias planas, cilíndricas e esféricas (45).

O primeiro método numérico foi desenvolvido por Dusimberre, empregado na solução de problemas de transferência de calor em regime transiente (46). A exemplo de outros métodos baseados em diferenças finitas, o método de Dusimberre consiste em impor ao sistema em estudo, uma malha e aplicar as equações do fluxo de calor em regime permanente entre um ponto da malha e os vizinhos em pequenos intervalos de tempo. A grande vantagem do método de Dusimberre, em relação aos demais, é que envolve cálculos simples e podem ser realizados sem o uso de computador.

O método mais conhecido para o estudo da solidificação em geometria retangular é o método de Sarjant e Slack (47), que também baseia-se na solução das equações por diferenças finitas. Neste método, pode-se levar em conta a variação das propriedades térmicas do molde e do molde com a temperatura.

2.5.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

Baseado no método de Schmidt, Longwell apresentou um interessante método gráfico para o estudo da solidificação de metais em moldes com geometrias cilíndricas (45). As hipóteses assumidas por Longwell foram que: o metal era vazado com superaquecimento, o efeito do calor específico do material não é desprezado e ainda, no desenvolvimento do seu método, considerou que a

transferência de calor no sólido e no líquido ocorre somente por condução.

Outros pesquisadores desenvolveram novos métodos numéricos levando-se em conta a geometria cilíndrica, entre eles estão: o de Schniewind desenvolvido em 1963, o de Kohn e Morillon em 1965, o de Tao em 1967 e Sciama em 1968.

O método desenvolvido por Schniewind permite a determinação do movimento da interface sólido/líquido e a temperatura interna do sólido em função do tempo (48). Este método leva em conta a formação de uma camada de ar na interface metal/molde durante a solidificação e considera o coeficiente de transferência de calor, como função da temperatura, além de considerar o molde maciço e as trocas de calor por convecção e radiação na superfície externa do mesmo através de um coeficiente de convecção variável com a temperatura e de uma emissividade constante.

Kohn e Morillon adaptaram o método de Sarjant e Slack para estudar a solidificação de lingotes cilíndricos de aço com grandes dimensões em moldes de ferro fundido (49).

Um método que atualmente é muito empregado como referência para comparação com métodos analíticos, é o método desenvolvido por Tao (50, 51). O método é aplicado à solidificação em moldes refrigerados, e considera um coeficiente de transferência de calor médio e constante entre a superfície externa do material que se solidifica e o fluido de refrigeração.

Outro método derivado do método de Sarjant e Slack foi o proposto por Sciama, para estudar a solidificação de peças metálicas cilíndricas de pequenas dimensões em moldes maciços (53). Sciama determinou as variações de temperatura em função do tempo em diversos pontos do sistema metal/molde, considerando o caso particular da liga eutética alumínio-silício solidificadas em moldes de ferro fundido com diferentes espessuras de parede. Os

resultados numéricos foram comparados com os experimentais obtidos por termometria, o autor chegou a conclusão que a concordância dos mesmos eram apenas razoável.

2.6. TRABALHOS EXPERIMENTAIS

Estes métodos são desenvolvidos através de observações e comprovações experimentais que permitem eventualmente a criação de modelos aplicáveis a situações particulares ocorridos na prática.

2.6.1. GEOMETRIAS PLANAS

Entre os modelos desenvolvidos para análise de solidificação em moldes planos, o mais interessante foi o proposto por Pires, Biloni e Prates (13). Os autores consideraram como hipóteses, as mesmas adotadas na maioria dos modelos analíticos e, além disso, a atuação de três resistências térmicas durante a solidificação, devido ao metal, ao molde e à interface metal/molde, chegando à seguinte equação:

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (2.78)$$

que posteriormente foi deduzido analiticamente por Garcia e Prates (16, 18, 41, 42).

As velocidades de solidificação do processo podem ser determinadas fazendo-se:

$$v = \left(\frac{dt}{dS} \right)^{-1} \quad (2.79)$$

Este método não permite a determinação da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde.

Outro modelo, que merece ser lembrado, é o de Gulyeaev que possibilita a determinação dos tempos totais de solidificação de peças fundidas de grandes dimensões em geometrias planas, cilíndricas e esféricas, utilizando-se a equação:

$$t = 6 P f e^2 10^3 \text{ [s]} \quad (2.80)$$

onde:

P = fator que depende do metal e do molde (determinado experimentalmente por Gulyeaev)

f = fator que depende da geometria da peça

$f = 1,0$ (geometrias planas)

$f = 0,76$ (geometrias cilíndricas)

$f = 0,47$ (geometrias esféricas)

e = metade da dimensão principal [m]

Além desses trabalhos, podemos citar o de Garcia e Prates, que propuseram uma forma experimental para determinar a condutância térmica metal/molde para solidificação em moldes com geometrias planas refrigeradas ou maciços (16, 41, 42, 63).

Este método utiliza resultados experimentais relativos à cinética de solidificação, para determinar o valor do coeficiente de transmissão de calor na interface metal/molde.

Utilizando-se o modelo desenvolvido por Garcia e Prates, que pode ser descrito pela equação (2.46):

$$t = \alpha S^2 + \beta S$$

onde α e β são dados, respectivamente, pelas equações (2.47) e (2.48)

A equação (2.46) pode ser rearranjada na seguinte forma:

$$\frac{t}{S} = \alpha S + \beta$$

onde o termo t/S contra S apresenta uma variação linear com S . Através da regressão linear dos pontos experimentais, obtêm-se o valor da constante β , que é o valor dado pela intersecção da reta com o eixo das ordenadas t/S , conforme ilustra a figura 2.6. Introduzindo o valor de β na equação (2.48), obtêm-se o valor do coeficiente de transmissão de calor (h_1) na interface metal/molde.

Um outro trabalho interessante que merece ser destacado é o desenvolvido por Santos e Prates, que baseia-se em um dos trabalhos de Sciamia. Estes autores utilizaram a liga eutética alumínio-silício e fizeram vários experimentos utilizando-se de moldes com geometrias planas e cilíndricas com diferentes dimensões. A partir dos resultados experimentais, eles desenvolveram uma equação que descreve a variação do tempo total de solidificação em função da espessura das paredes do molde (52, 54, 55), que é dada por:

$$t = t_{\infty} \operatorname{erf}\left(m \frac{V_m}{V_s}\right) + t_0 \operatorname{erf} c\left(n \frac{V_m}{V_s}\right) \quad (2.81)$$

onde:

t_0 = tempo hipotético para solidificar uma peça sem a influência de qualquer espessura de parede do molde (determinado a partir dos resultados experimentais)

t_{∞} = tempo para solidificar uma peça em molde semi-infinito (medido experimental)

$\frac{V_m}{V_s}$ = relação entre volume do molde e volume da peça

m, n = fatores que levam em conta a geometria e o material do molde (determinado através da equação 2.81)

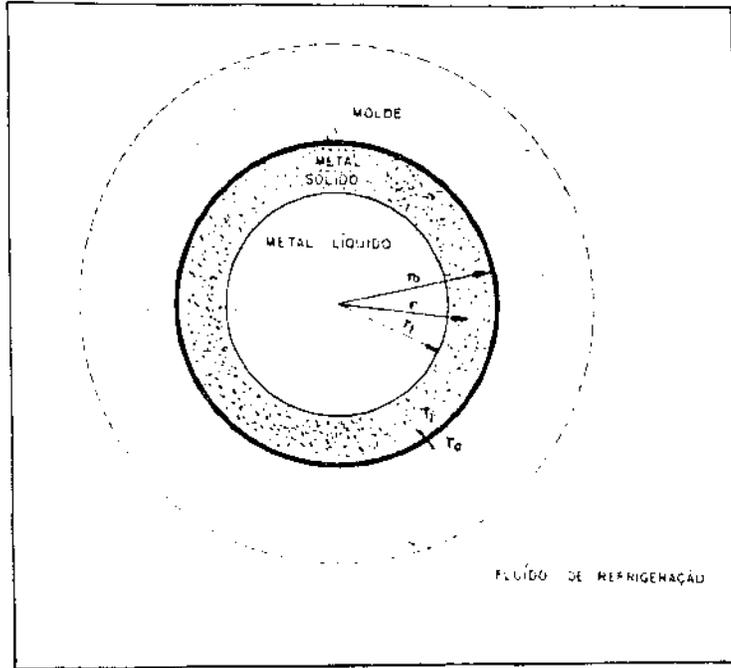


Figura 2.5 - Sistema metal/molde cilíndrico em um instante qualquer do processo de solidificação

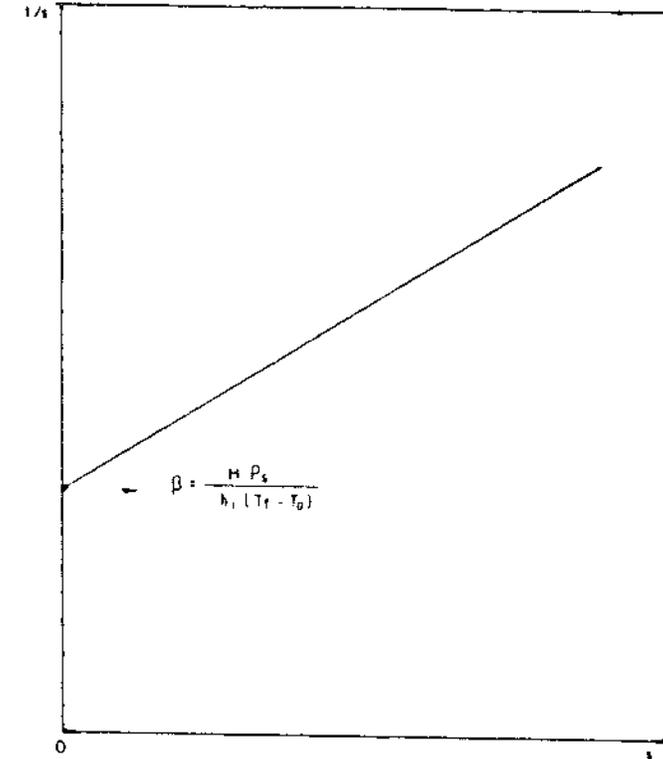


Figura 2.6 - Determinação do coeficiente de transmissão de calor, técnica experimental de Garcia e Prates

2.6.2. GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

Os primeiros trabalhos experimentais de solidificação de metais em moldes cilíndricos foram realizados por Ruddle (56, 57).

Ruddle realizou uma série de experiências com alumínio puro e ligas de alumínio vazados em moldes de areia, determinando, com auxílio de termopares posicionados em diferentes pontos do metal. Através das curvas obtidas, Ruddle determinou o tempo de solidificação e, além disso, estimou a extração de calor por unidade de área nos moldes de geometrias planas e cilíndricas, concluindo que a extração de calor é mais eficiente em moldes de geometrias cilíndricas.

Uma outra série de experiências foi realizada posteriormente por Sciama, utilizando moldes maciços metálicos e de areia (58-60).

Sciama ainda apresentou uma representação esquemática sobre a influência dos fluxos médios de calor com a variação da espessura de parede do molde, o qual tem influência direta sobre o tempo de solidificação e ainda na forma da curva do tempo de solidificação. Esta representação gráfica é apresentada na figura 2.7. Observa-se que o fluxo de calor médio depende da variação do fluxo de calor devido à condução e transferência newtoniana e o fluxo de calor devido à radiação e convecção, e a atuação destes depende da espessura que o molde apresentar. Portanto, nos casos onde o aumento da parcela de fluxo de calor, devido à condução e transferência newtoniana, for menos acentuado que o decréscimo do fluxo de calor devido à radiação e convecção, o valor do fluxo de calor médio decresce até a espessura do molde para o qual estas duas parcelas se igualem. Acima desta espessura, o fluxo médio de calor cresce até atingir uma espessura crí

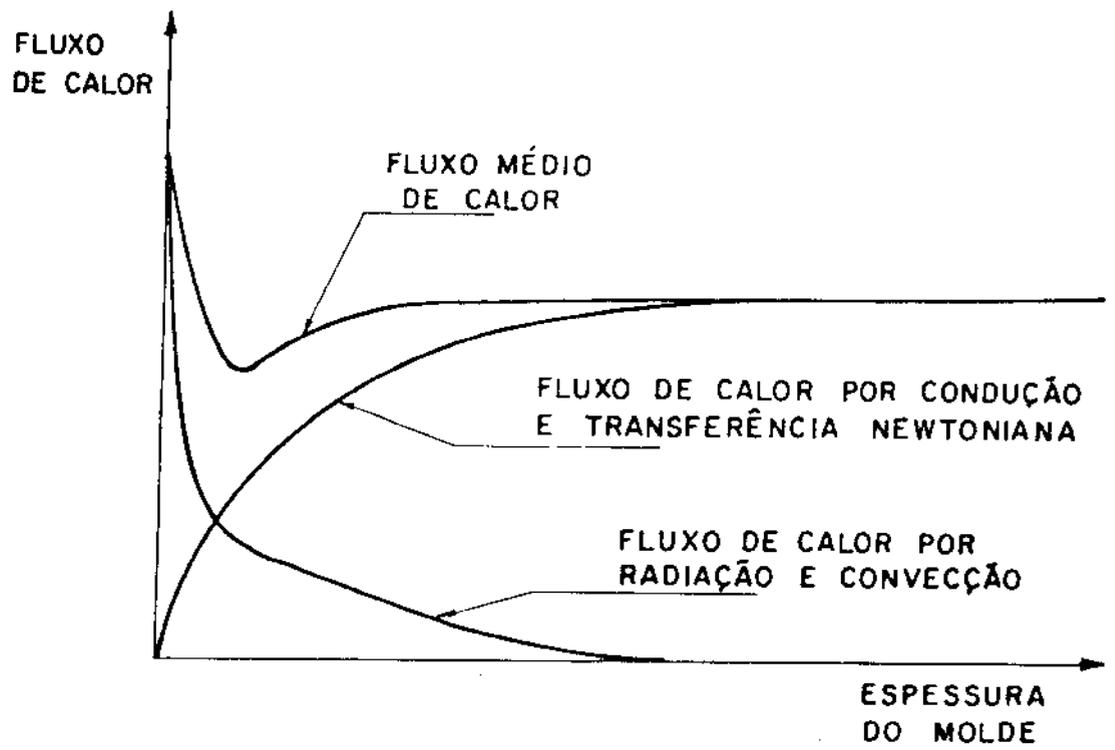


Figura 2.7 - Variação do fluxo de calor com a espessura do molde

tica e, para valores maiores que estes, o fluxo de calor médio se mantém constante. Nos casos onde o aumento do fluxo de calor, devido à condução e transferência newtoniana, for mais acentuado que o decréscimo do fluxo de calor, devido à radiação e convecção, o fluxo de calor médio aumentará com o aumento da espessura de parede do molde até atingir um valor crítico, onde para valores maiores que este, o fluxo de calor médio mantém-se constante.

No caso ideal de solidificação, ou seja, sem a influência do molde, o fluxo de calor, devido à convecção e radiação, é máximo e tende a zero para moldes semi-infinitos, em contrapartida, o fluxo de calor, devido à condução e à transferência newtoniana, é nulo quando a espessura do molde é igual a zero e tende a um valor máximo, e constante para moldes semi-infinitos.

A forma da curva que representa a variação do tempo de solidificação, em função da espessura de parede do molde, é dada conforme apresentado na figura 2.8, visto que o tempo de solidificação é inversamente proporcional ao fluxo médio de calor.

Analisando as curvas que descrevem o tempo total de solidificação em função da espessura solidificada, para moldes de areia (figura 2.9), Sciama concluiu que, a parte crescente dos tempos em relação à espessura do molde corresponde à predominância da transferência de calor por radiação e convecção, e na parte decrescente a condução e transferência newtoniana será predominante. O tempo de solidificação é máximo para uma espessura crítica de molde e tende assintoticamente a um limite quando o molde é considerado semi-infinito.

Além disso, Sciama estudou a influência da condutibilidade térmica e do calor específico sobre a cinética de solidificação, e concluiu o seguinte:

- o aumento da condutibilidade térmica do metal conduz a uma diminuição do tempo de solidificação e modifica muito pou

co as temperaturas no molde.

- o aumento do calor específico do metal conduz a um aumento do tempo de solidificação, entretanto, a variação do calor específico exerce uma maior influência na cinética de solidificação que a variação da condutibilidade térmica.

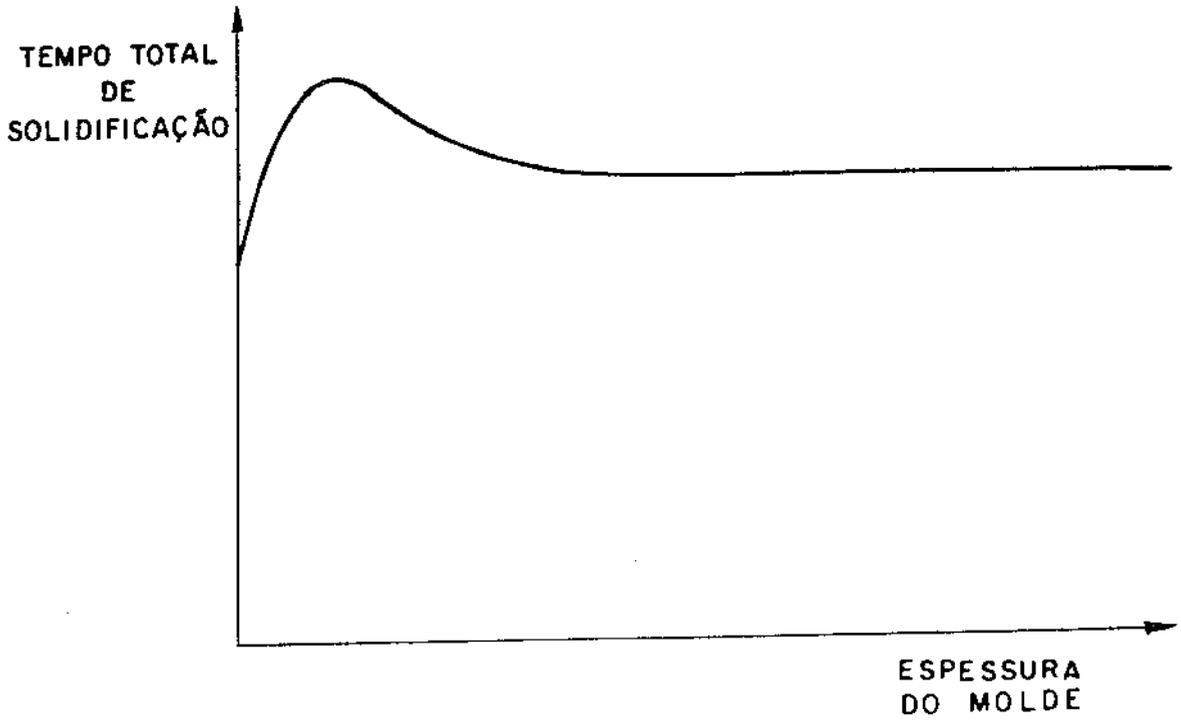


Figura 2.8 - Variação do tempo de solidificação com a espessura do molde

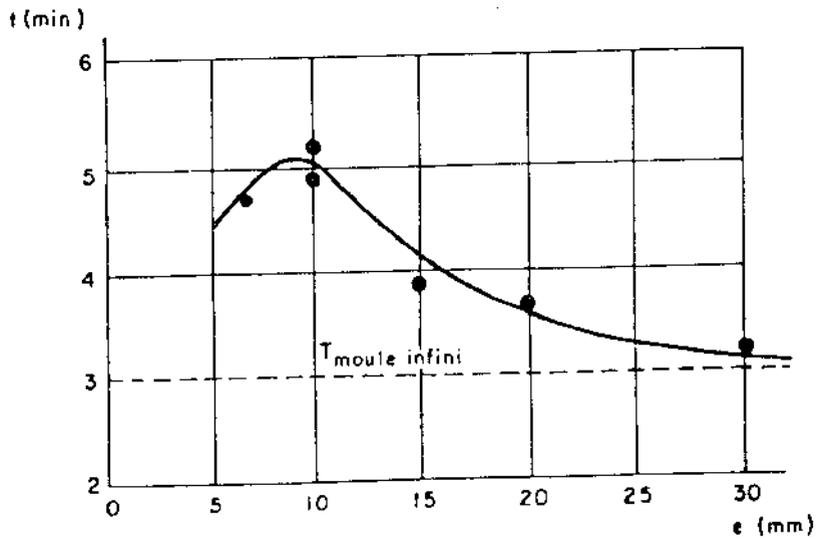


Figura 2.9 - Variação do tempo total de solidificação em função da espessura do molde (arcia) (60)

CAPÍTULO 3

MATERIAIS E MÉTODOS

3.1. METAIS UTILIZADOS

Foram utilizados neste trabalho dois metais diferentes, o estanho e o chumbo. A escolha destes metais foi principalmente devido ao baixo ponto de fusão e no fato das propriedades físicas não sofrerem variações significativas com a temperatura e com a quantidade de impurezas, permitindo um controle mais preciso durante o processo de solidificação. Suas propriedades físicas são mostradas na Tabela 3.1 (61, 62).

3.2. MOLDES UTILIZADOS

Os moldes utilizados foram construídos na forma cilíndrica em aço ABNT 1045, com diâmetro interno de 60 mm, altura de 140 mm e com diâmetros externos de 80, 90, 100, 120 e 160 mm sem fundos, assentados em uma base refratária. A figura 3.1 mostra em corte os detalhes dos moldes utilizados.

3.3. FUSÃO E VAZAMENTO

Estes metais foram fundidos em um forno elétrico tipo mufla, com potência 6 kW e o controle de temperatura do metal líquido, feito através de um termopar Cromel-alumel conectado a um registrador digital de temperatura. Os vazamentos foram efetuados a temperatura de 510 e 605 K, respectivamente para o estanho e o chumbo.

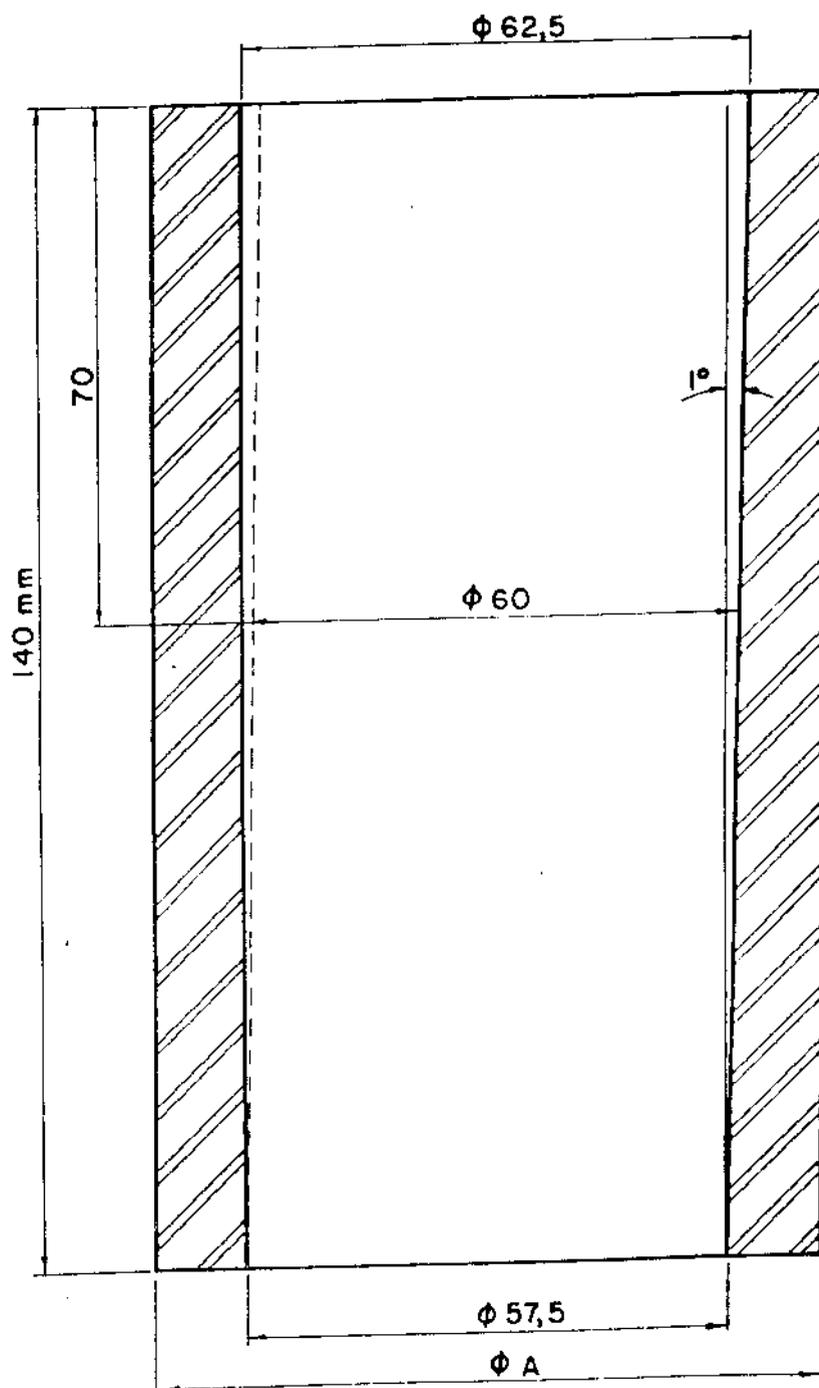


Figura 3.1 - Corte longitudinal dos moldes cilíndricos (diâmetros externos A = 80, 90, 100, 120 e 160 mm)

3.4. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Os moldes eram inicialmente lixados para retirar as camadas de óxidos que se encontravam nas superfícies externas e internas e logo após o metal era colocado no forno através de um cadinho de grafite para se efetuar a fusão. Após a limpeza dos moldes, nestes eram acoplados, através de um dispositivo de fixação, cinco termopares que se posicionavam ao longo do diâmetro do molde, situados a uma altura de 70 mm da base.

Estes termopares estavam distanciados um do outro subsequente de 5 mm a partir do centro da lingoteira, e acoplados a dois registradores gráficos de temperatura (com precisão de $\pm 2,5^{\circ}\text{C}$).

A figura 3.2 mostra o dispositivo de fixação dos termopares e a figura 3.3 mostra a montagem do molde, termopares e registradores gráficos, prontos para o vazamento.

O fundo de escala selecionado nos registradores foi de 20 mV, que corresponde a uma temperatura de 758 K, e a velocidade de arraste do papel foi de 300 cm/h ou 5 cm/min.

Após a montagem, o metal era vazado até completar todo o molde e, em seguida, os registradores gráficos eram acionados. A curva obtida é apresentada na figura 3.4.

Para o cálculo do tempo de solidificação, foram utilizadas estas curvas obtidas pelos registradores gráficos, a partir do ponto de início até o final da solidificação, nos vários pontos considerados, através da equação:

$$t = \frac{f}{v} \quad (3.1)$$

onde:

f = distância do ponto de início até o ponto de solidificação total no ponto considerado

Figura 3.2 - Dispositivo de fixação dos
termopares

Figura 3.3 - Montagem do sistema de ensaio

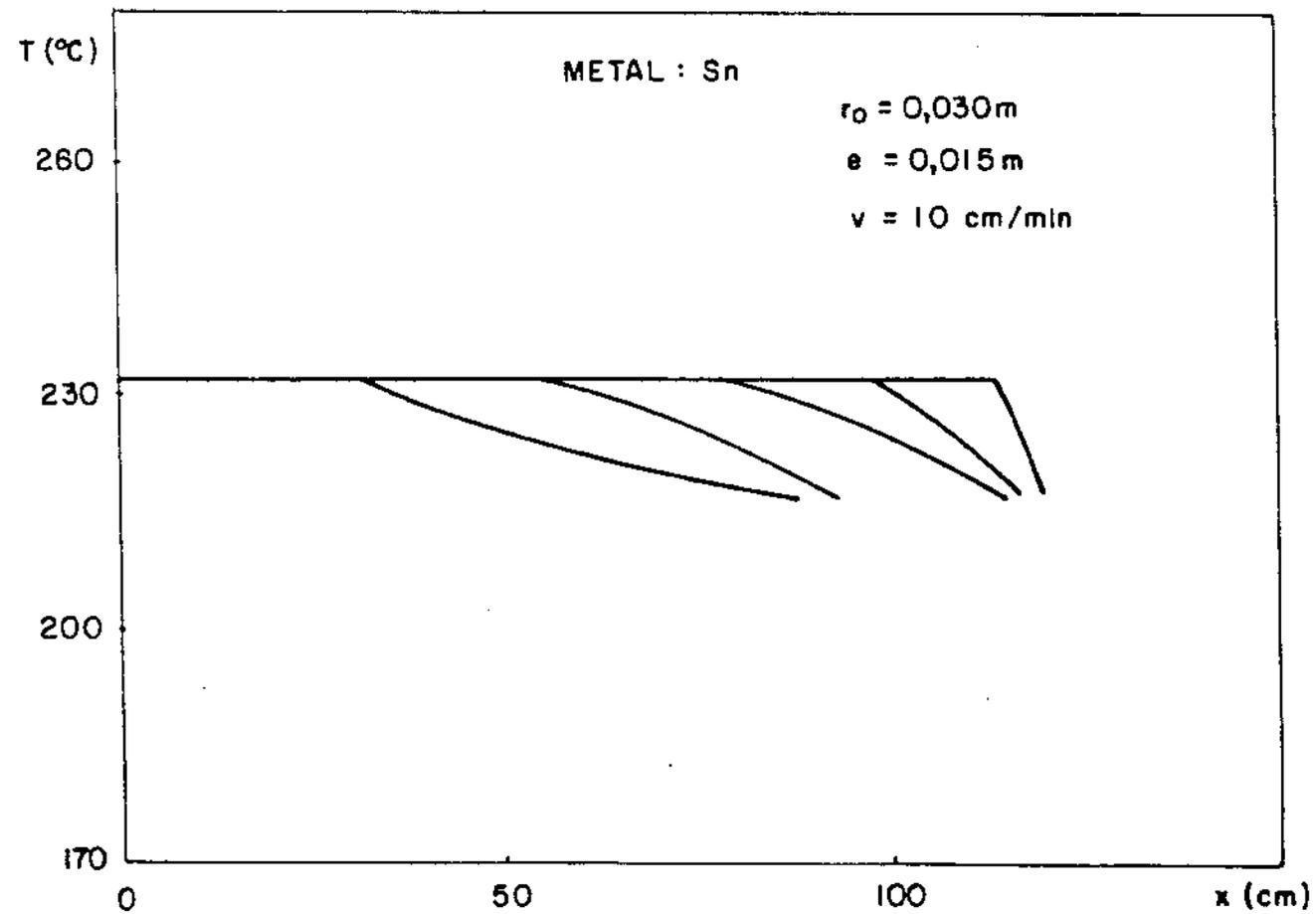


Figura 3.4 - Curva experimental obtida através do registrador gráfico de temperatura

v_a = velocidade de arraste do papel

3.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A PRECISÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

As experiências foram repetidas cinco vezes para cada um dos metais e para cada espessura de molde, com o objetivo de verificar a dispersão dos resultados em torno da média. Os resultados obtidos foram colocados em forma de tabelas, onde, a partir dos resultados experimentais, foram calculados a média (\bar{t}) e o desvio padrão (σ) através das equações:

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{5} \quad (3.2)$$

$$\sigma = \frac{\Sigma (t - \bar{t})^2}{5} \quad (3.3)$$

3.6. ESTIMATIVA DA VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO A PARTIR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Através dos resultados experimentais dos tempos de solidificação, funções polinomiais do segundo ao quinto grau foram obtidas, através do método dos mínimos quadrados, para descrever a variação entre o tempo de solidificação e espessura solidificada, para cada tipo de metal e para cada espessura de parede do molde. Concluiu-se que o polinômio de grau três apresentou os melhores resultados e o mesmo foi derivado em relação à espessura de metal solidificado ($r_o - r_f$), obtendo, deste modo, uma equação capaz de estimar valores para a velocidade de solidificação, a partir dos resultados experimentais.

O levantamento dos perfis de temperatura durante a solidificação foram feitos com base nos cinco termopares posicionados ao longo do diâmetro interno do molde, e com os dados obti

MATERIAL	PROPRIEDADES FÍSICAS					
	c [J/Kg.K]	k [J/m.s.K]	ρ [Kg/m ³]	H [J/Kg]	T _f [K]	T _o [K]
Aço 1045 (Molde)	670	29,3	7.800			
Chumbo	138	29,7	11.300	25.000	600	297
Estanho	260	46,0	7.200	60.000	505	297

Tabela 3.1 - Propriedades físicas dos metais e moldes utilizados nos trabalhos experimentais

dos pela figura 3.4, com os quais monta-se uma curva de T x t, para cada termopar.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo serão apresentados, na forma de gráficos, os resultados experimentais obtidos conforme a técnica descrita no capítulo anterior. Os valores médios e os desvios padrões do tempo de solidificação calculados a partir das cinco experiências realizadas para o estanho e o chumbo vazados em moldes com espessuras de parede variáveis, estão apresentados no Apêndice 3.

4.1. TEMPOS DE SOLIDIFICAÇÃO

Para análise de solidificação em geometrias cilíndricas, constatou-se que é mais conveniente plotar os tempos de solidificação em função da relação entre o volume de metal solidificado e a área de troca de calor na interface metal/molde, e não da espessura solidificada, isto porque esta relação considera redução de área de troca de calor na interface sólido/líquido com a evolução do processo de solidificação (38). Deste modo, os resultados apresentados neste trabalho serão considerados em função desta relação, que foi anteriormente definida pela equação (2.66):

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2 r_o}$$

Os resultados experimentais do tempo de solidificação em função da relação (V_s/A_i) obtidos para o estanho solidificados radialmente em moldes maciços cilíndricos estão apresentados

nas figuras 4.1 a figura 4.5. As figuras 4.6 a figura 4.9 mos tram os resultados obtidos para o chumbo solidificados nas mes mas condições. Observa-se que o tempo de solidificação diminui com o aumento de espessura de parede do molde. As figuras 4.10 e 4.11 mostram a variação do tempo total de solidificação em fun ção da espessura de parede do molde. Observa-se nestas figuras que o tempo total diminui à medida que a espessura de parede do molde aumenta, até atingir um valor constante, para o qual dize mos que nesse limite o molde é considerado semi-infinito. Compa rando-se as figuras 4.1 a 4.5 com as figuras 4.6 a 4.9 e as figu ras 4.10 e 4.11, nota-se que o tempo de solidificação do estanho é maior que a do chumbo para as mesmas condições de resfriamen to.

4.2. PERFIS DE TEMPERATURAS

Nas figuras 4.12 a 4.14 e nas figuras 4.15 a 4.17 são apresentados, respectivamente para o estanho e chumbo, a varia ção da temperatura em função do tempo, respectivamente para o es tanho e chumbo em pontos situados a 0,010; 0,015; 0,020; 0,025 e 0,030 m da parede interna do molde. Nota-se que existe uma forte influência no gradiente de temperatura à medida que ocorre a variação de espessura do molde.

4.3. VELOCIDADES DE SOLIDIFICAÇÃO

As figuras 4.18 a 4.22 mostram os resultados experimen tais da variação do inverso da velocidade de solidificação em função da espessura solidificada ($r_o - r_f$), obtidos para o esta nho nas condições descritas anteriormente. Nas figuras 4.23 a 4.26, são mostradas as curvas correspondentes aos valores expe-

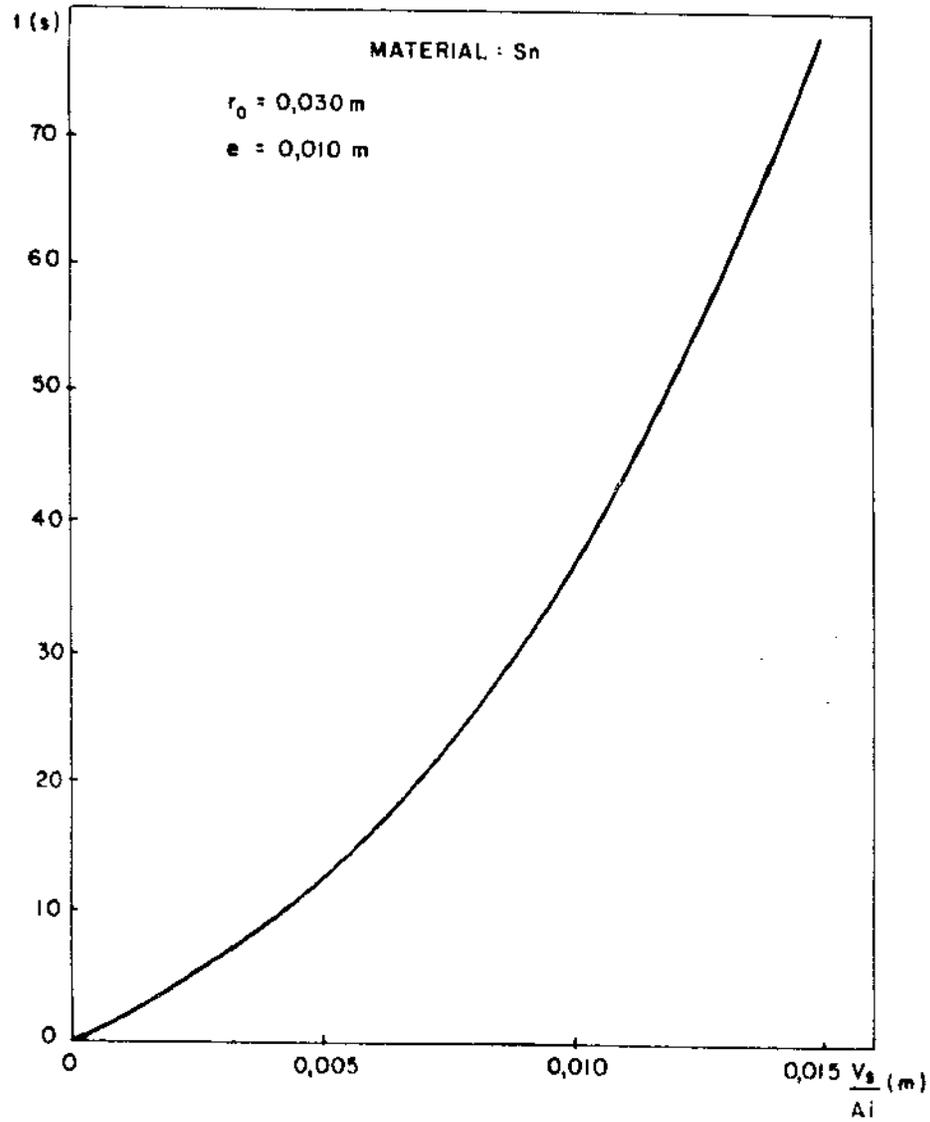


Figura 4.1 - Curva obtida através dos resultados experimentais

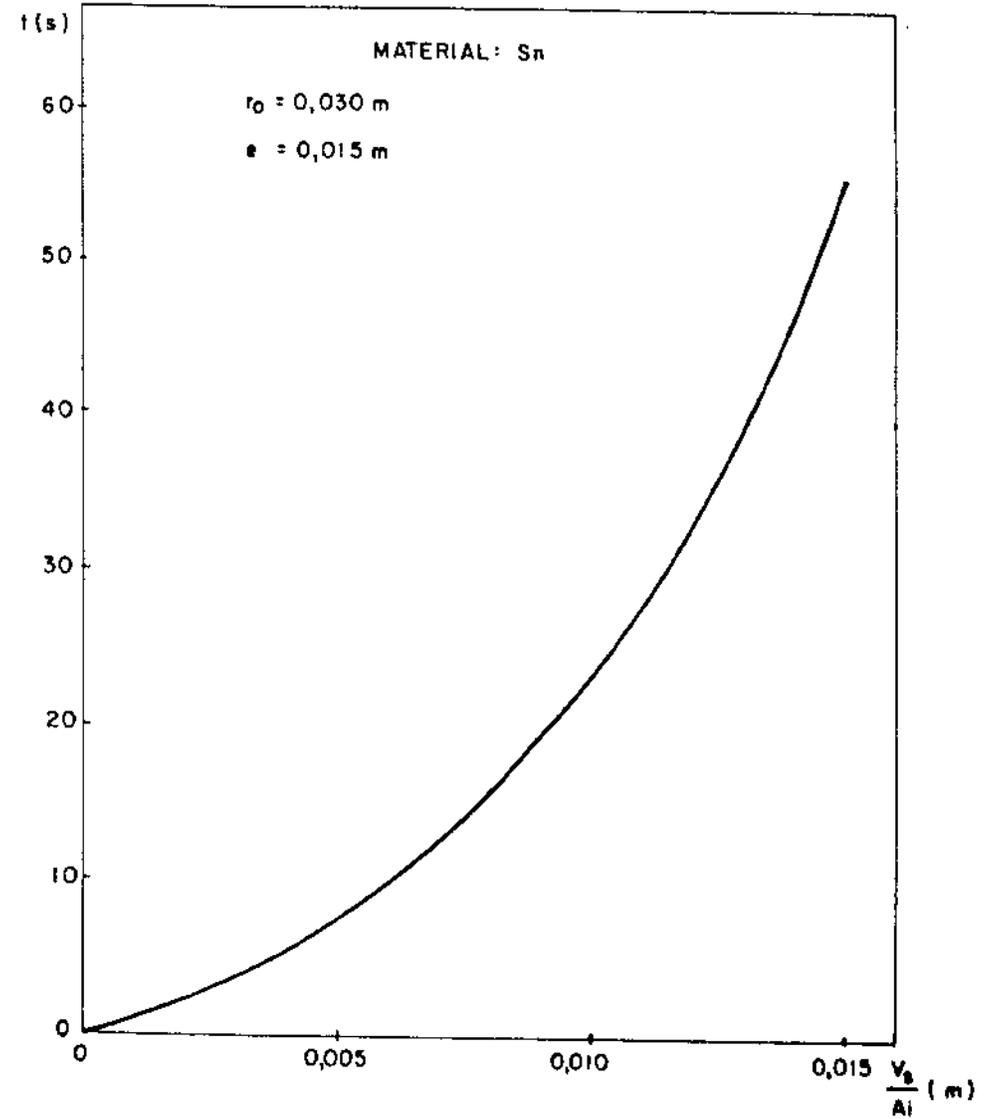


Figura 4.2 - Curva obtida através dos resultados experimentais

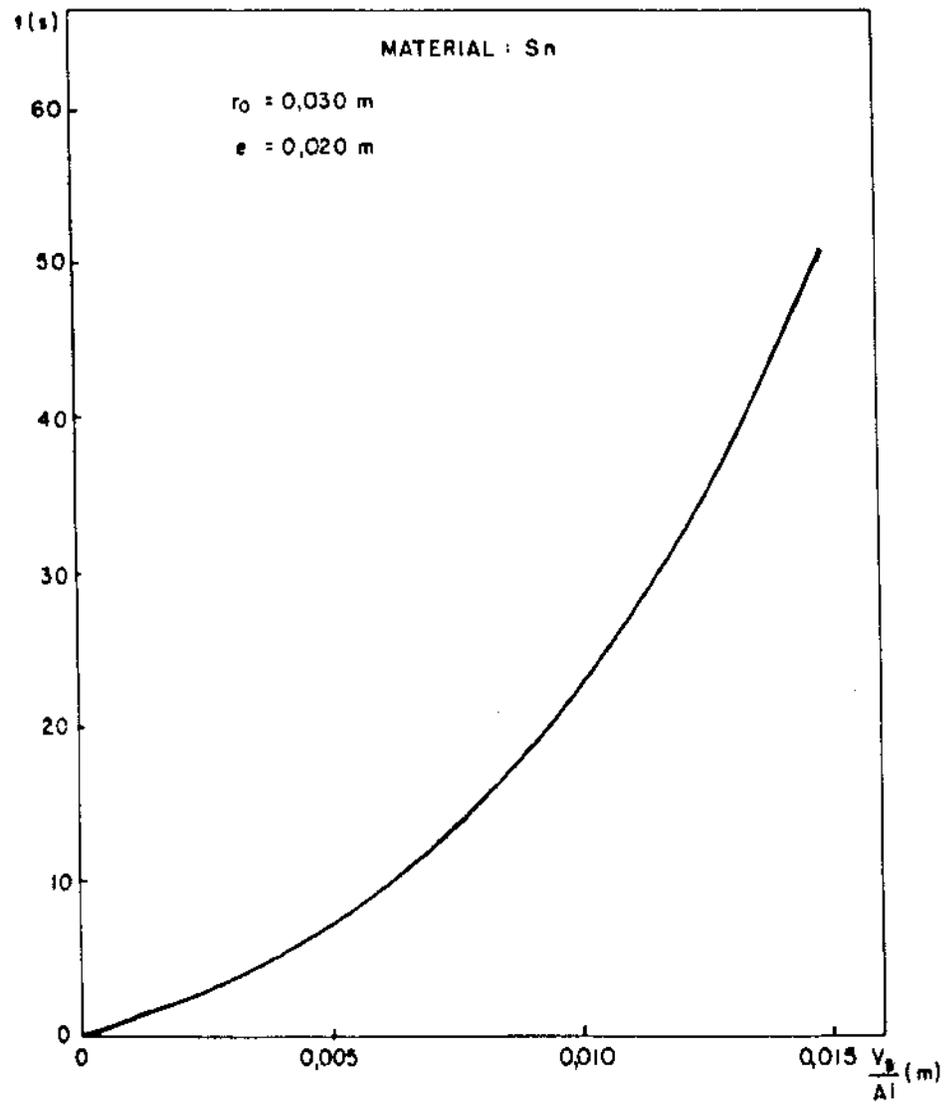


Figura 4.3 - Curva obtida através dos resultados experimentais

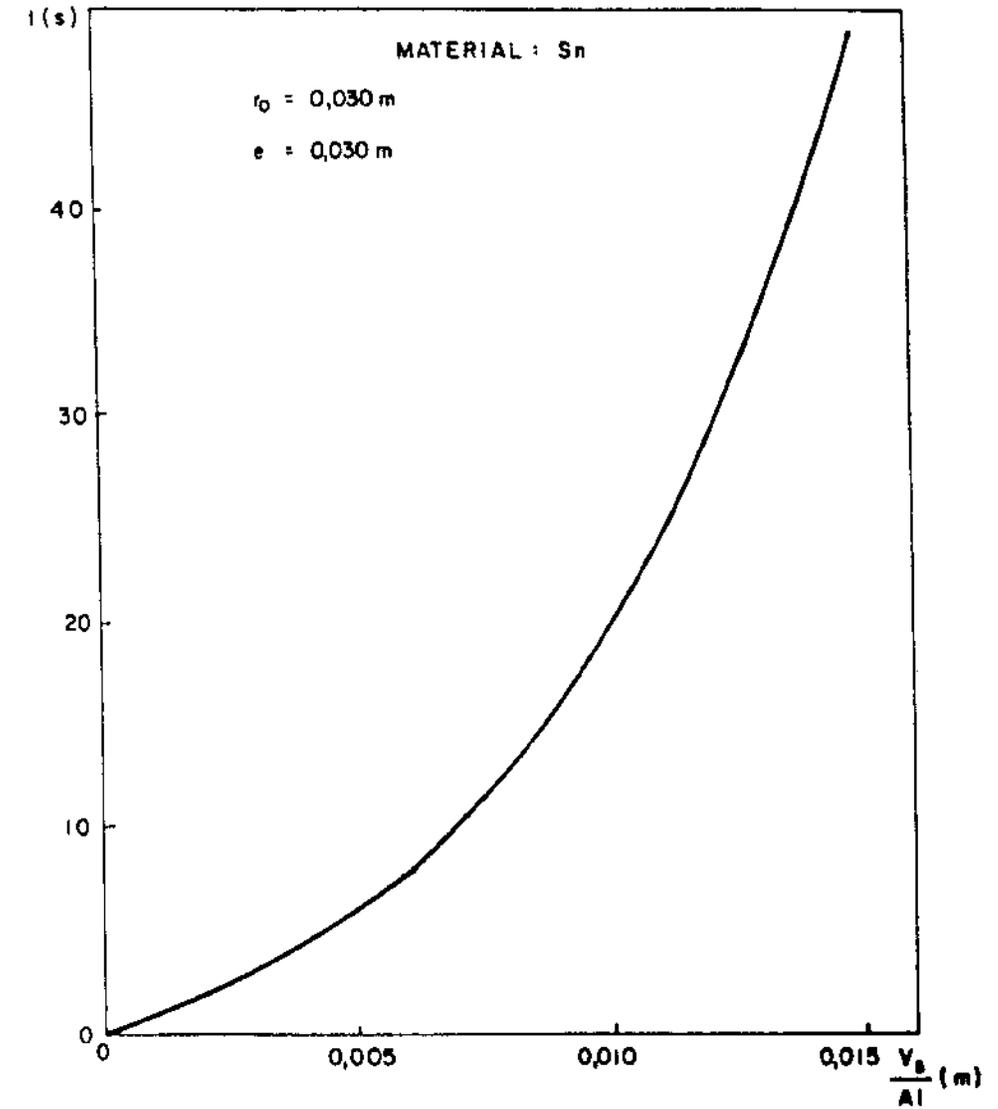


Figura 4.4 - Curva obtida através dos resultados experimentais

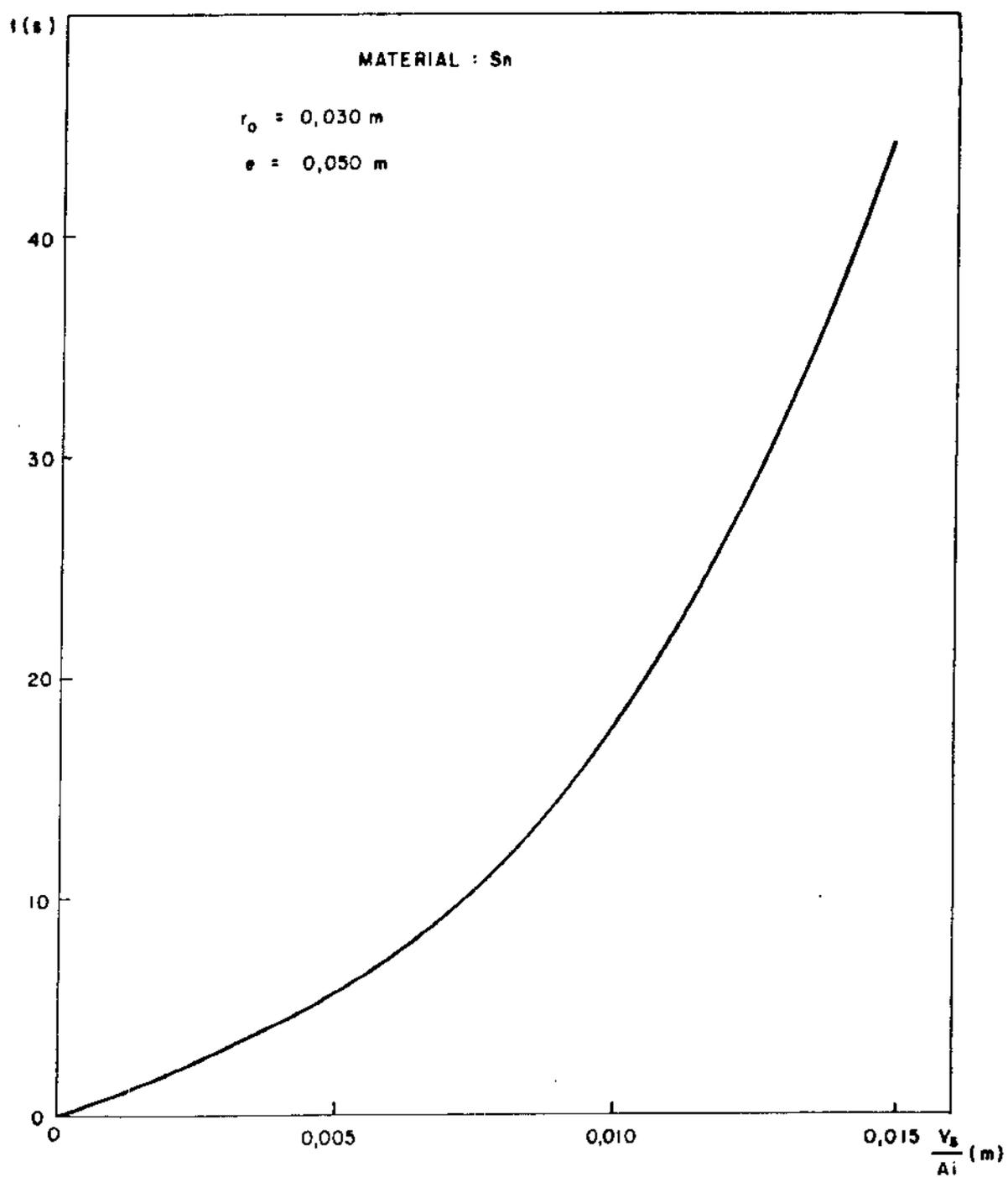


Figura 4.5 - Curva obtida através dos resultados experimentais

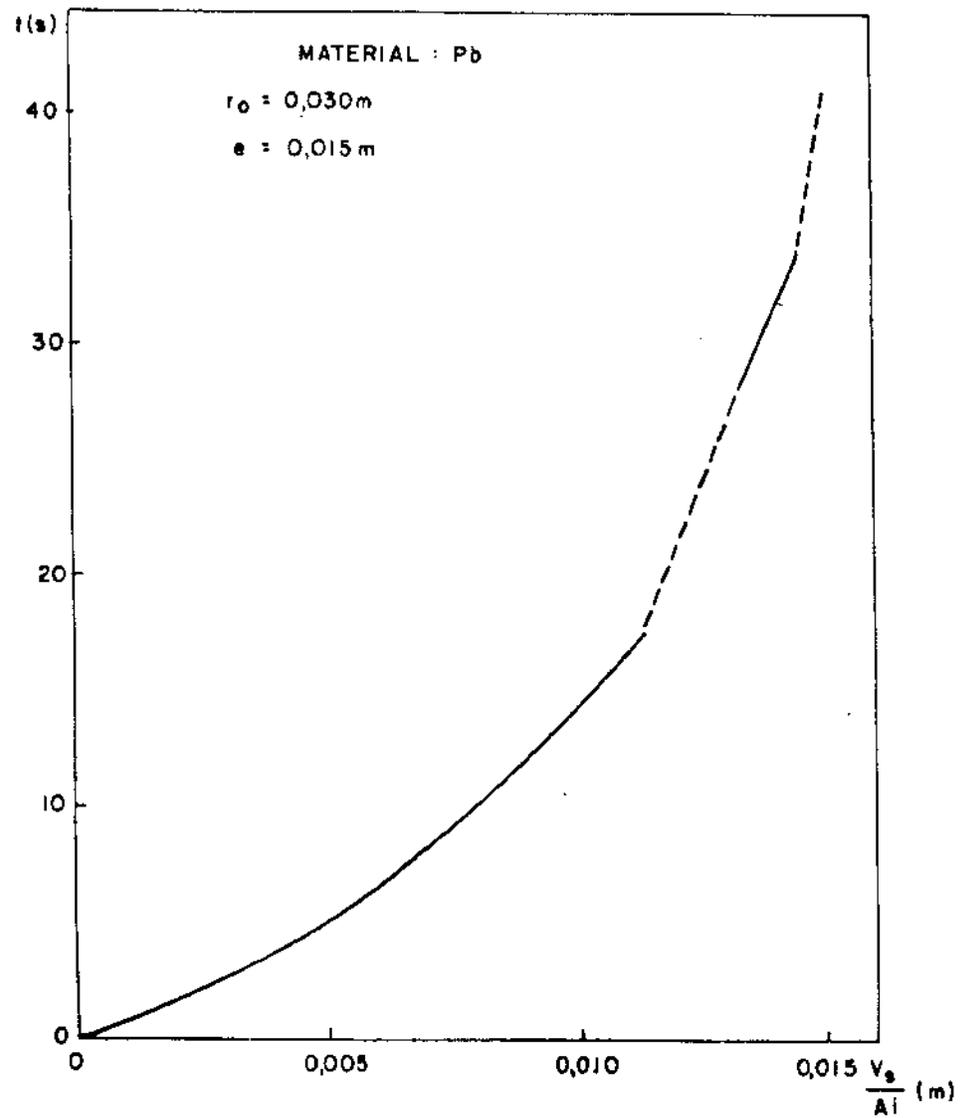


Figura 4.6 - Curva obtida através dos resultados experimentais

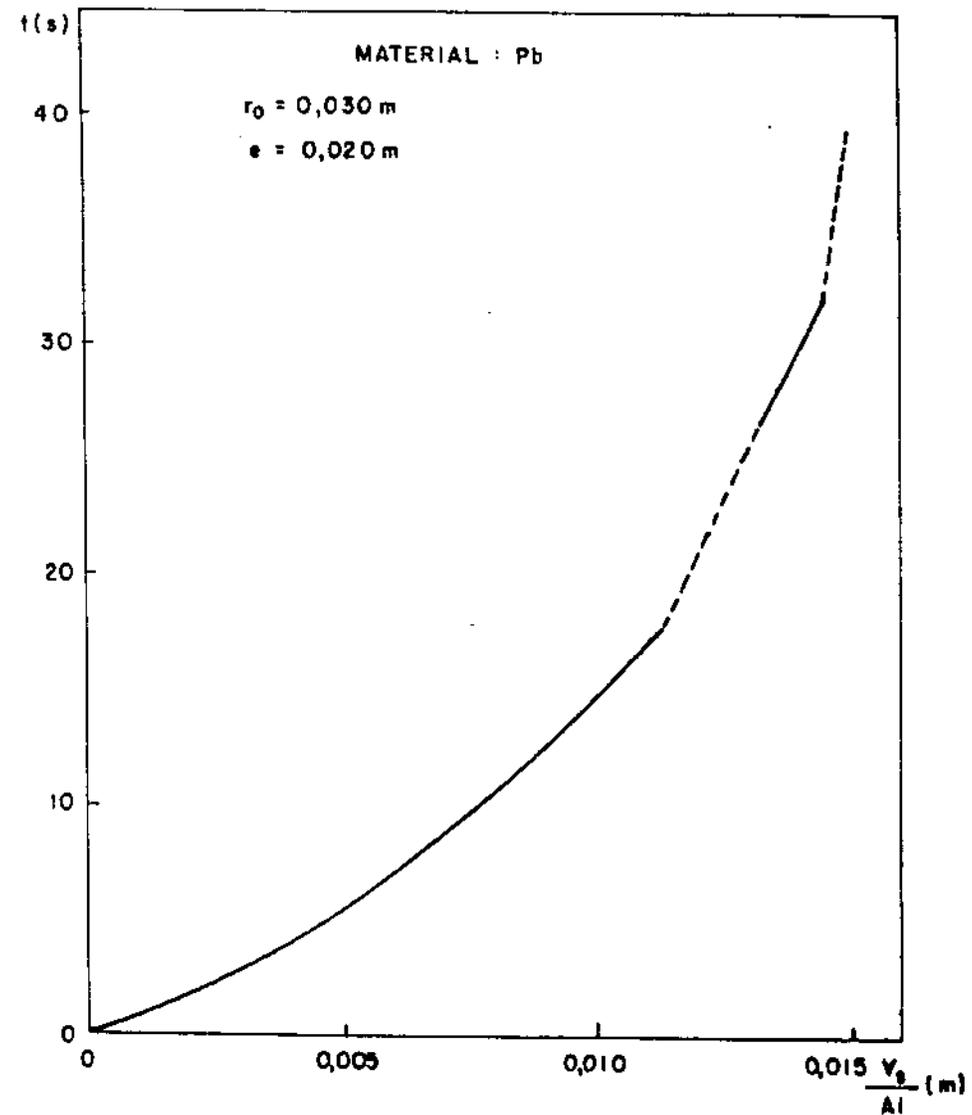


Figura 4.7 - Curva obtida através dos resultados experimentais

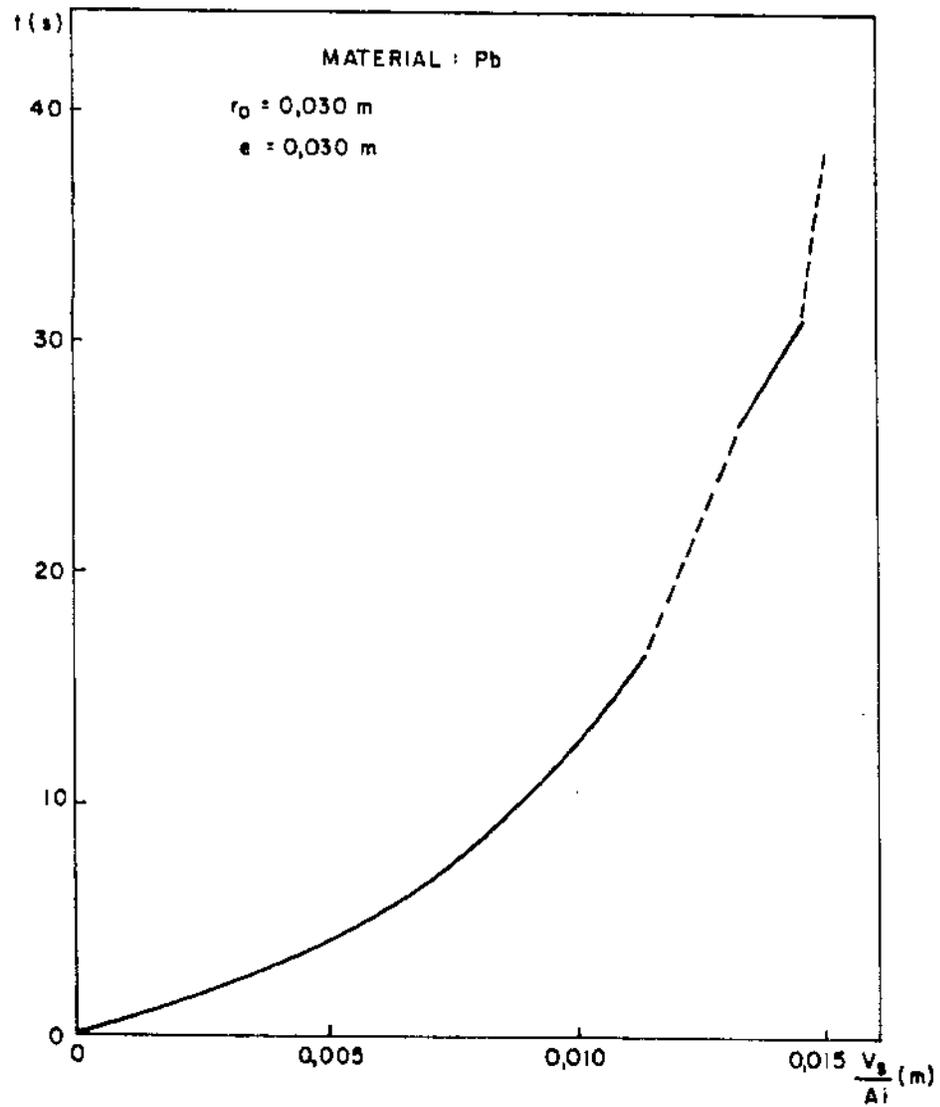


Figura 4.8 - Curva obtida através dos resultados experimentais

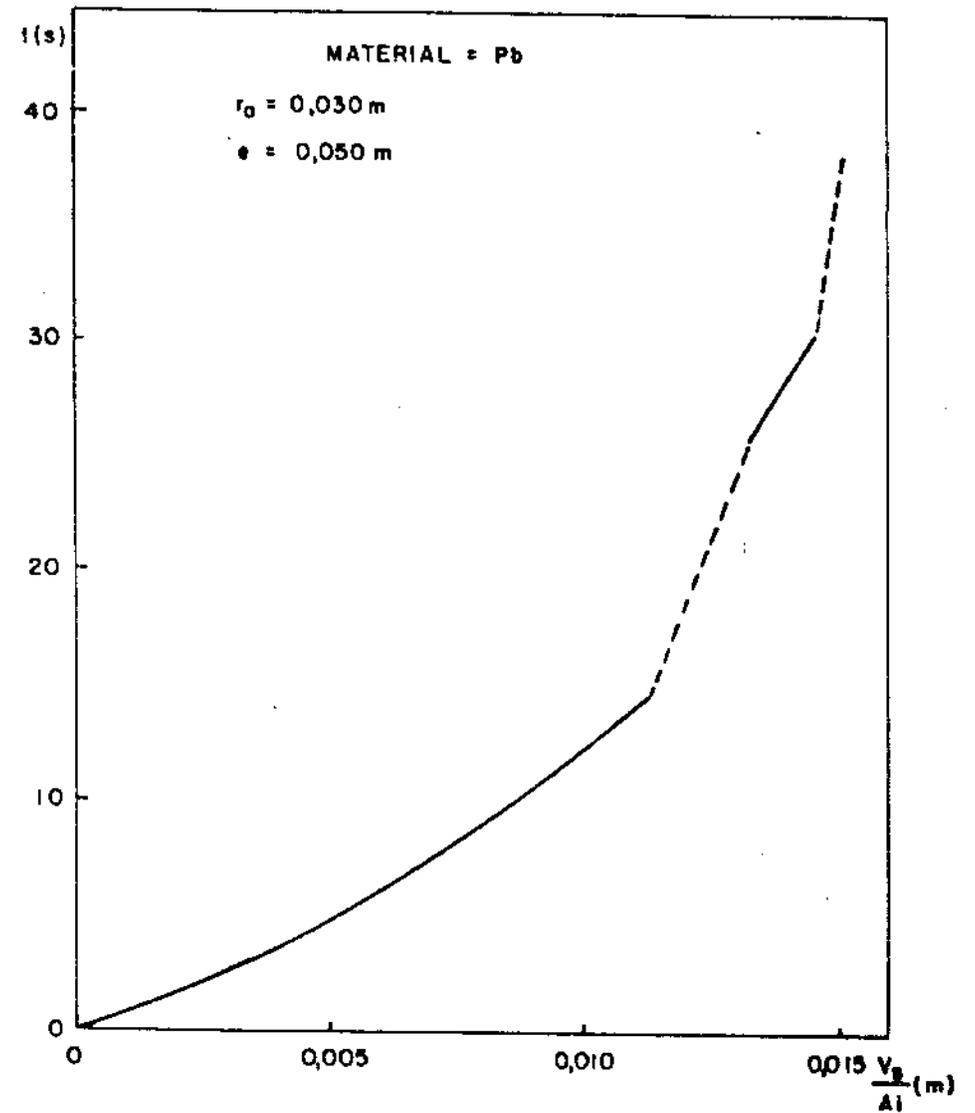


Figura 4.9 - Curva obtida através dos resultados experimentais

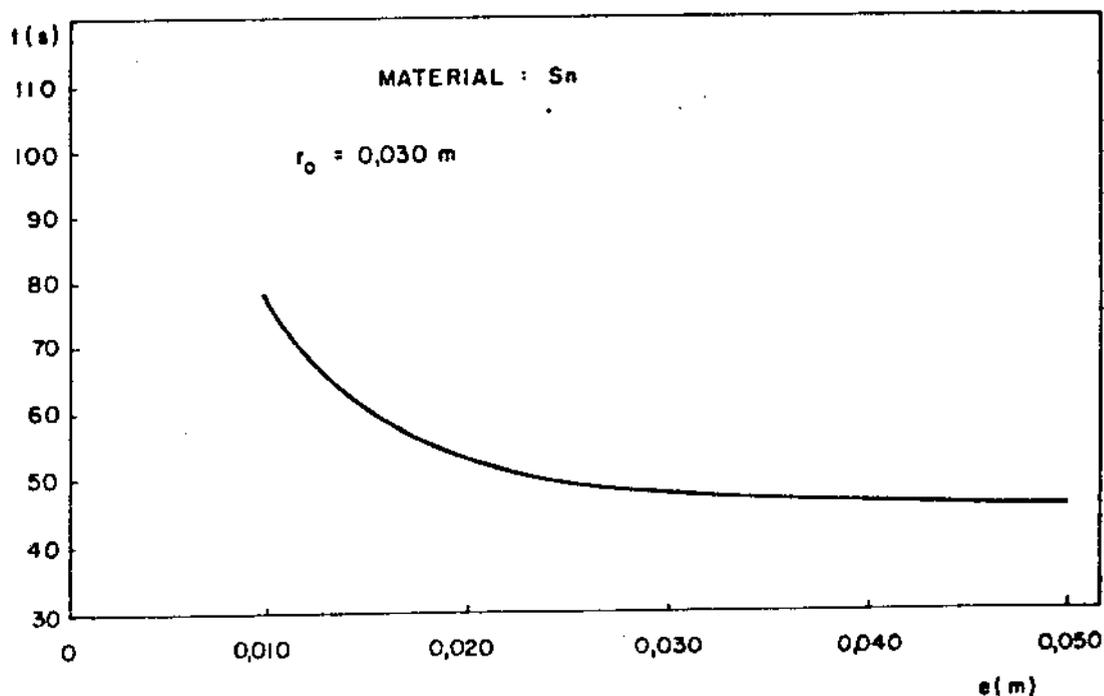


Figura 4.10 - Variação do tempo total em função da espessura do molde (resultados experimentais)

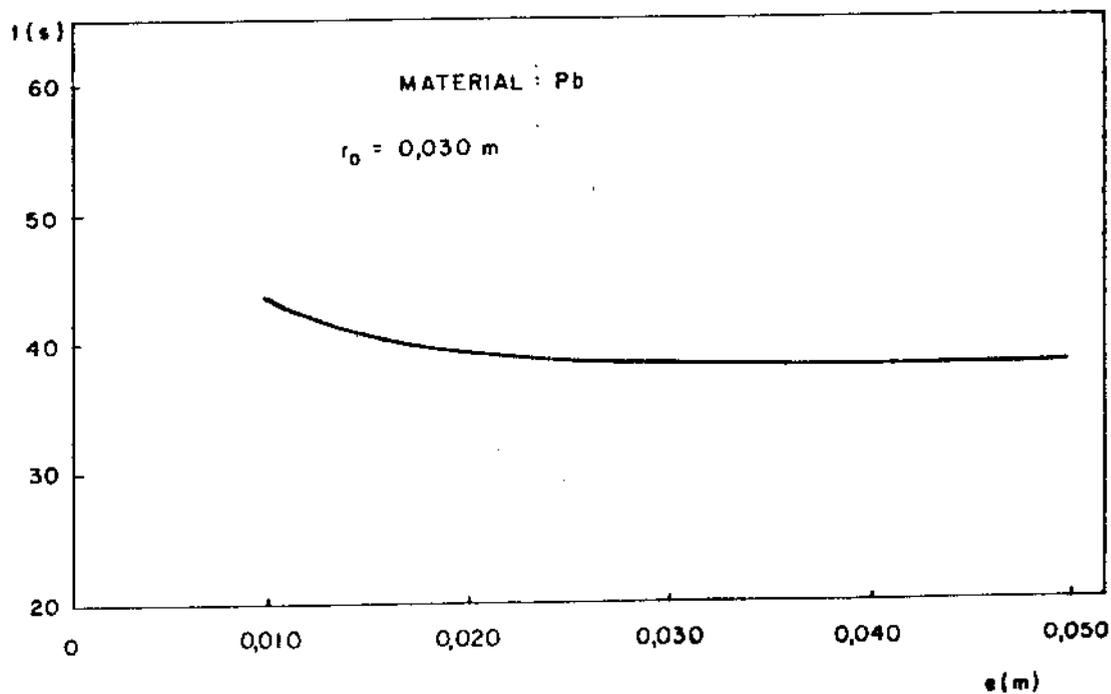


Figura 4.11 - Variação do tempo total em função da espessura do molde (resultados experimentais)

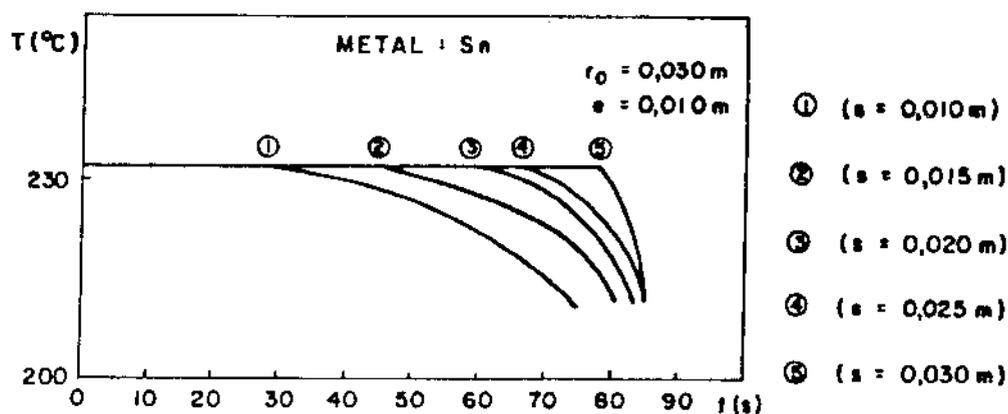


Figura 4.12 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o estanho

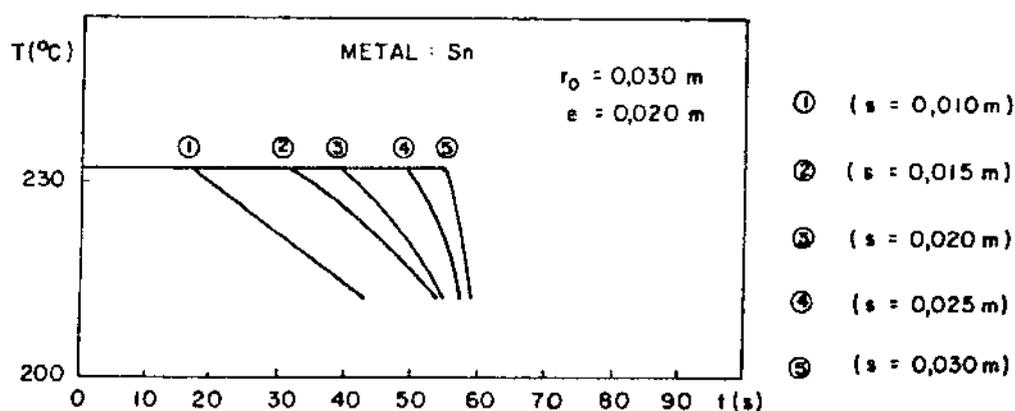


Figura 4.13 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o estanho

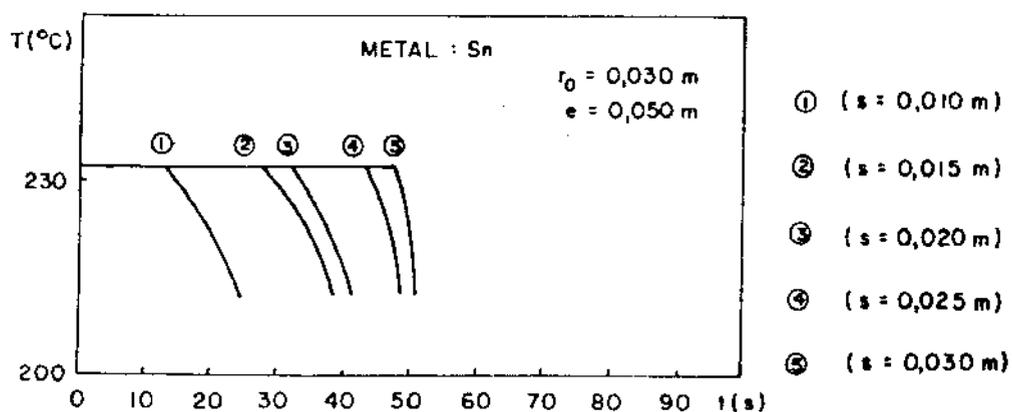


Figura 4.14 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o estanho

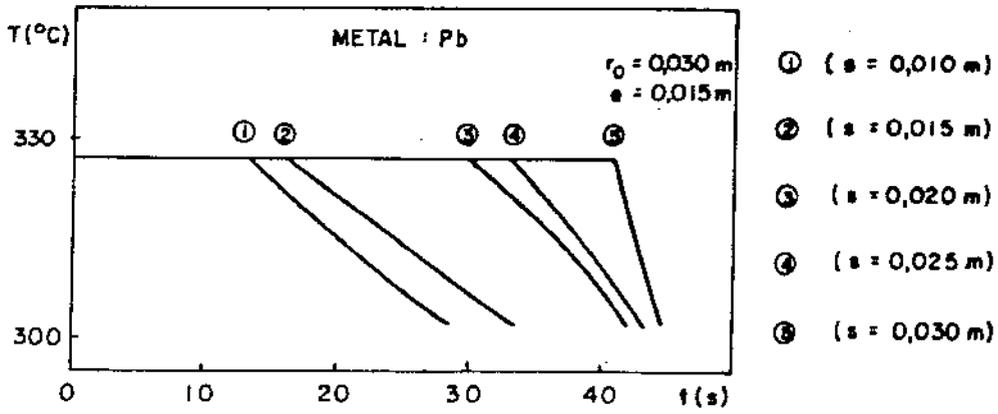


Figura 4.15 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o chumbo

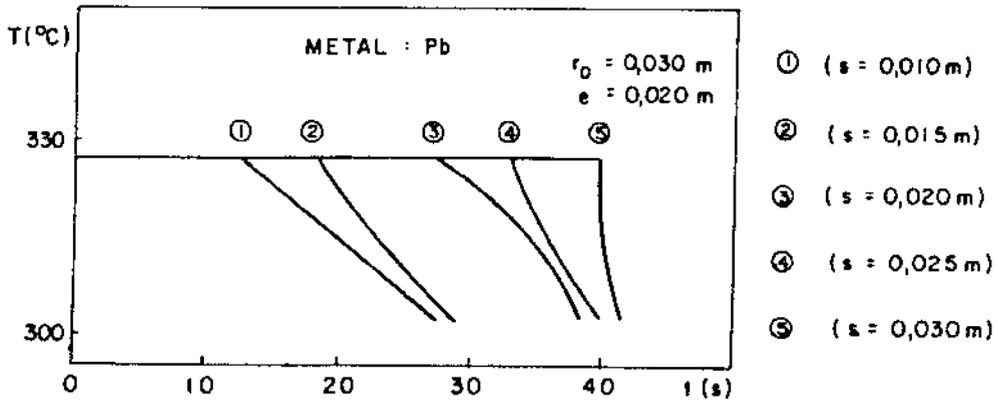


Figura 4.16 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o chumbo

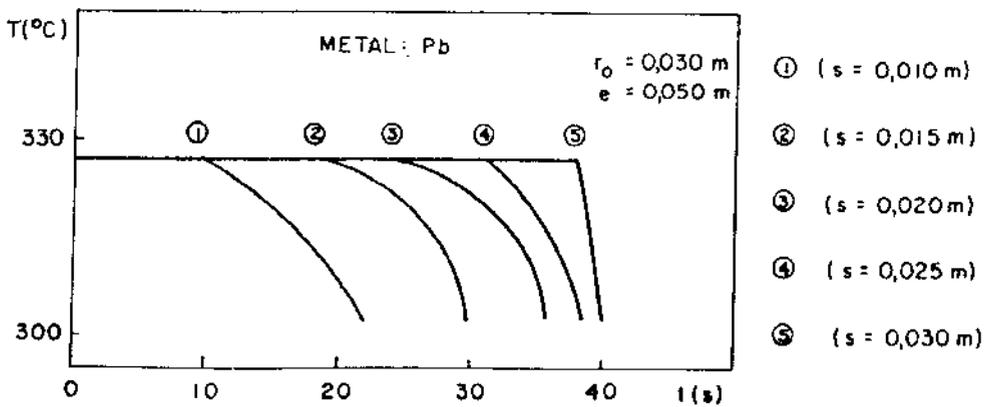


Figura 4.17 - Perfis de temperatura obtidos com termopares posicionados em diferentes pontos para o chumbo

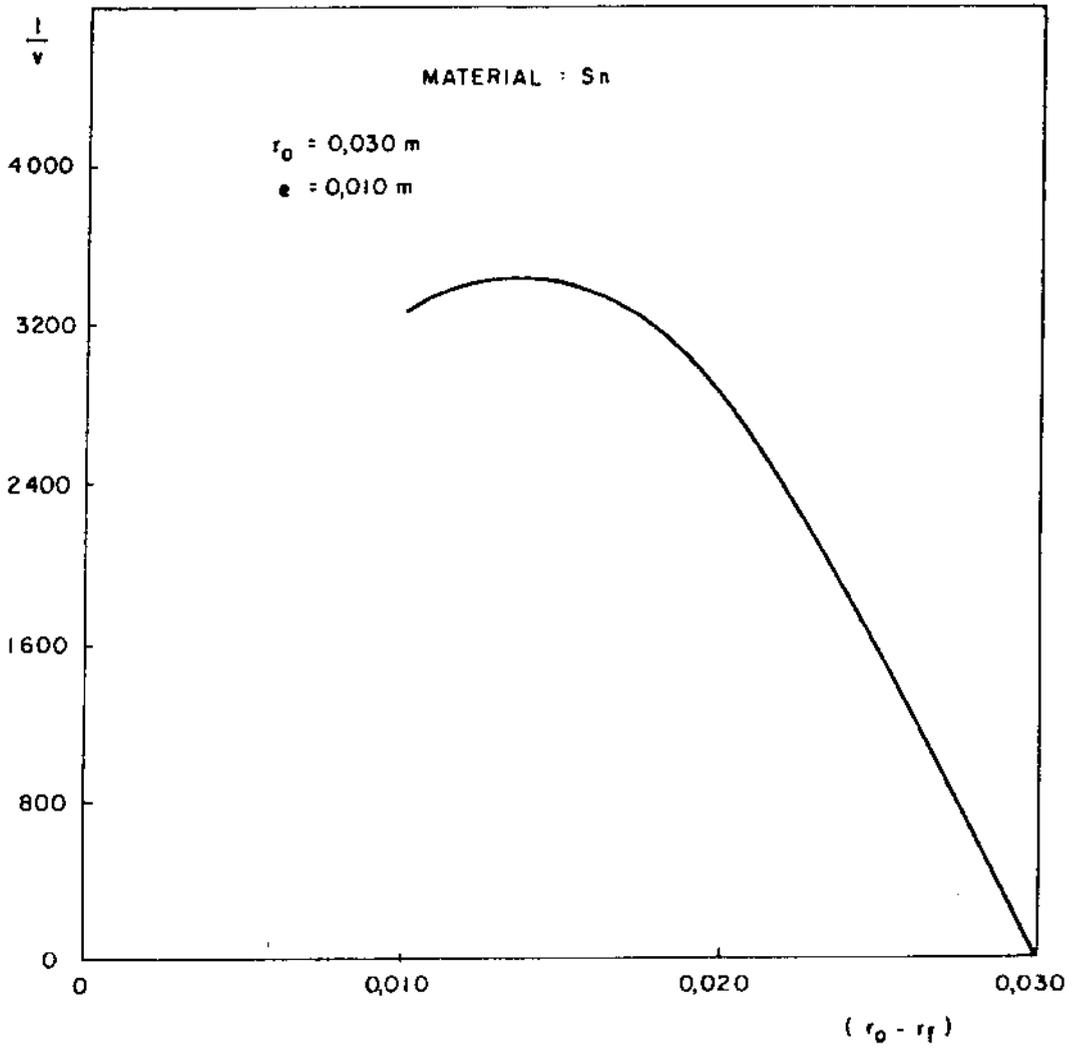


Figura 4.18 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

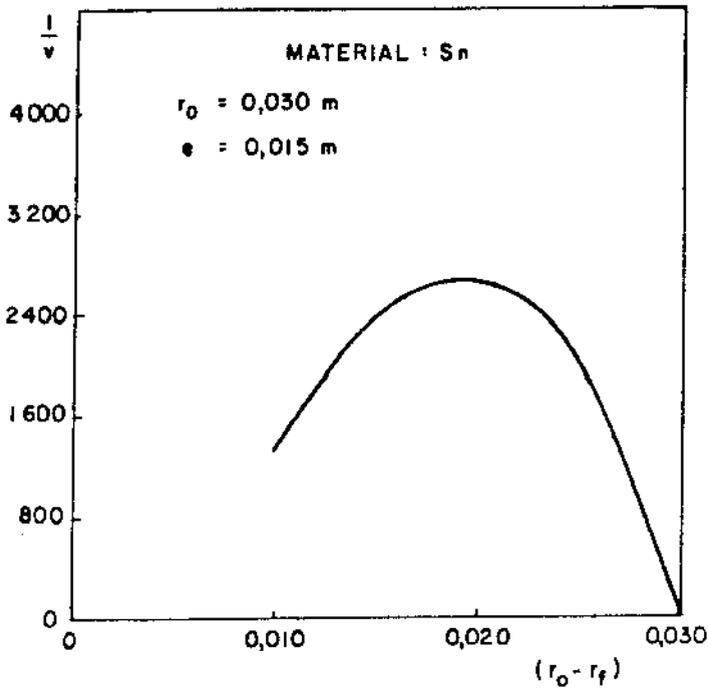


Figura 4.19 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

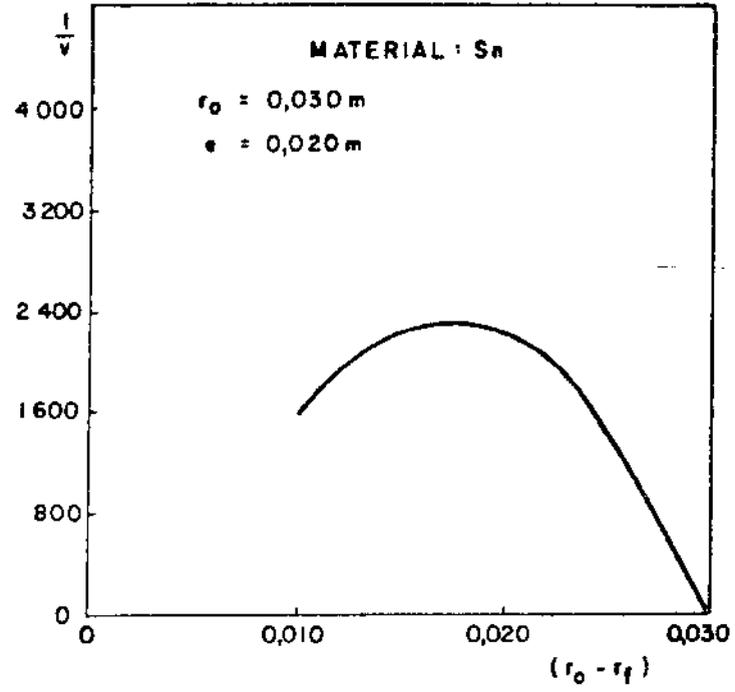


Figura 4.20 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

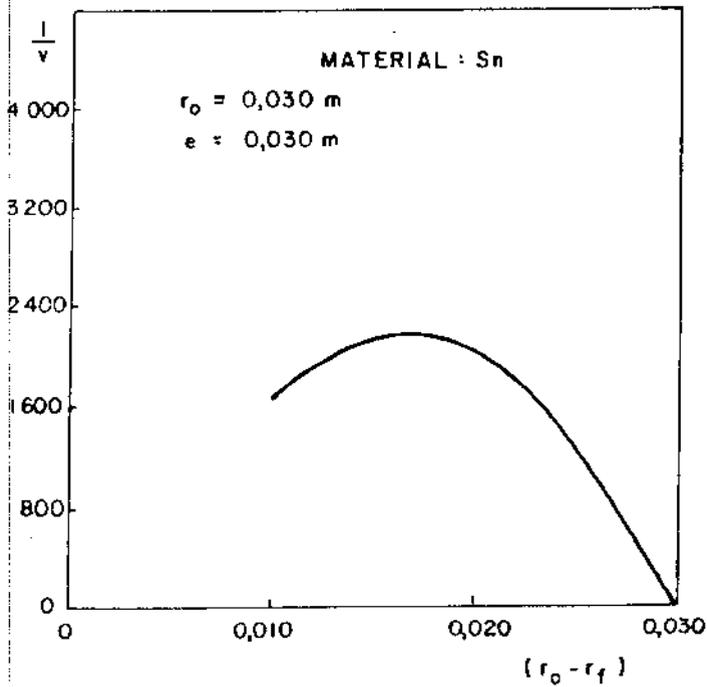


Figura 4.21 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

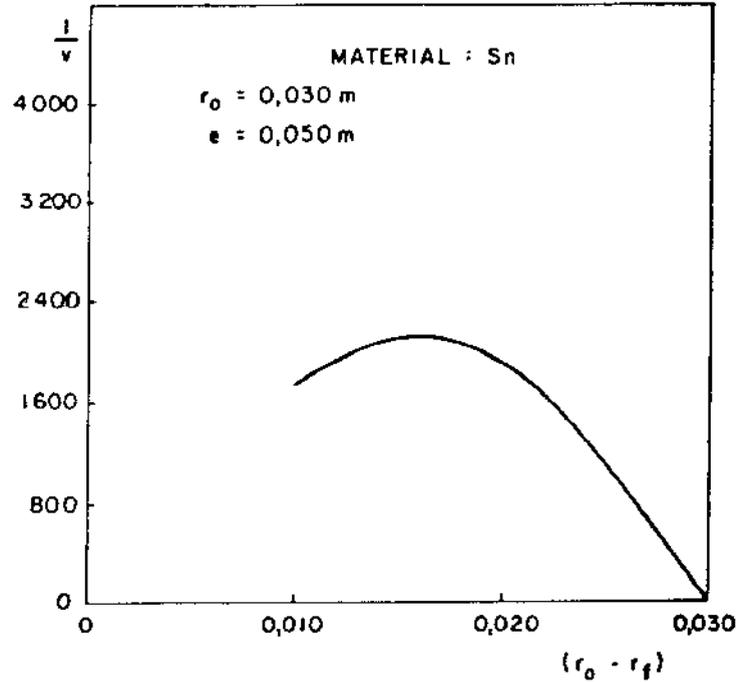


Figura 4.22 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

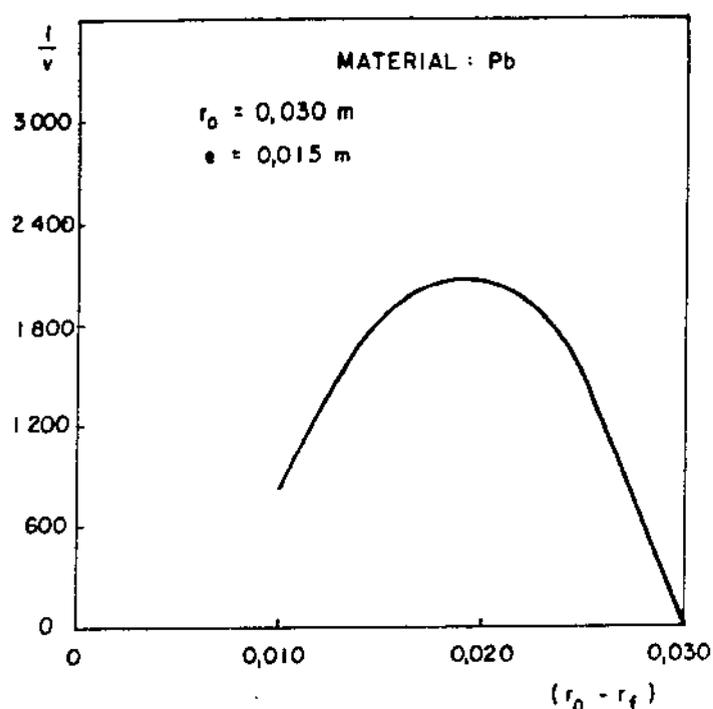


Figura 4.23 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

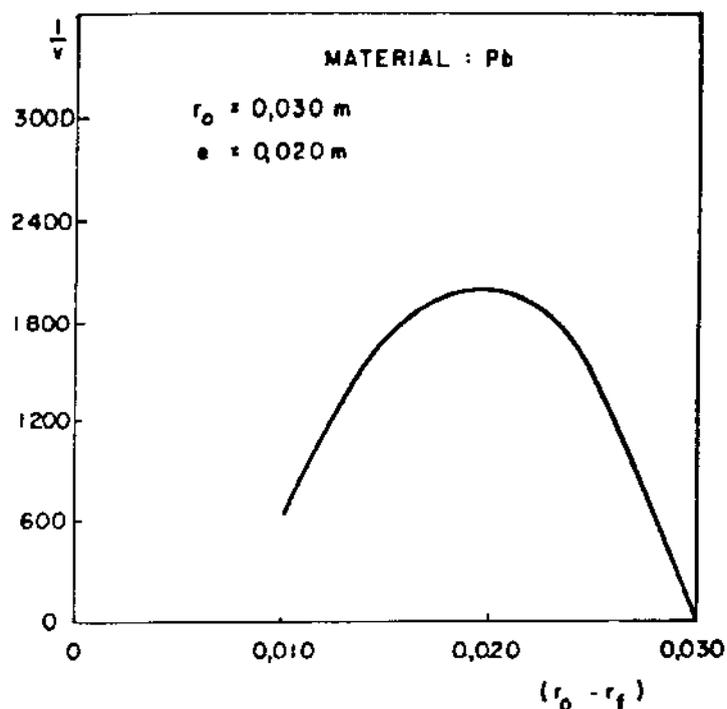


Figura 4.24 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

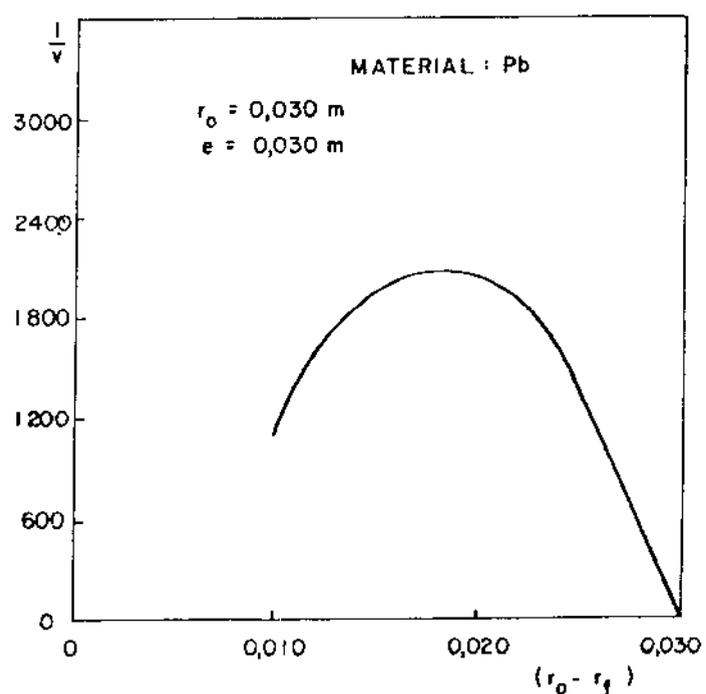


Figura 4.25 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

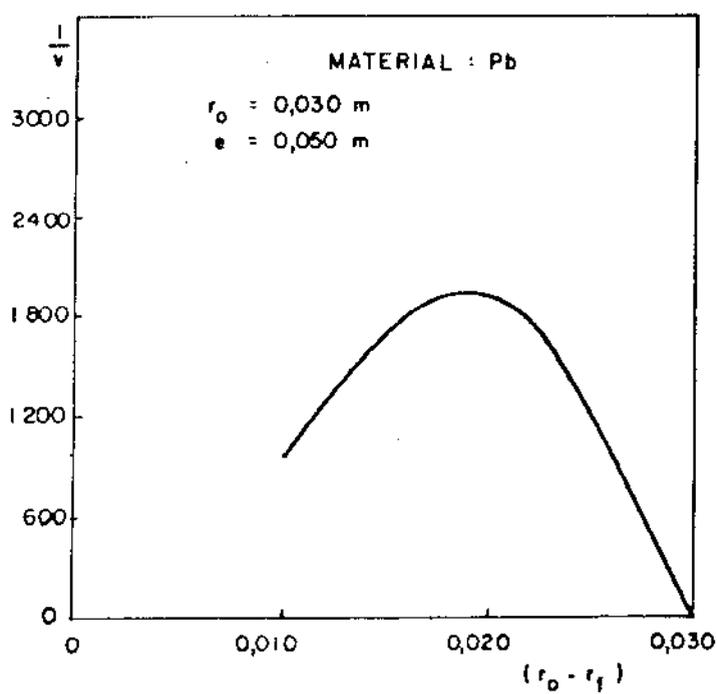


Figura 4.26 - Resultado experimental do inverso da velocidade (s/m) em função de $(r_o - r_f)$ (m)

rimentais obtidos para o chumbo solidificados nas mesmas condições já citadas.

Observa-se em todos os casos que o inverso da velocidade é inicialmente baixa, tende a um valor máximo e decresce no final do processo. Temos, então, que a velocidade de solidificação no início é alta, decresce com o aumento da espessura solidificada até um valor mínimo e volta a crescer indefinidamente até o final do processo de solidificação.

Considerando a variação de espessura de paredes do molde, submetidas as mesmas condições de contato térmico na interface metal/molde, observa-se que a velocidade de solidificação aumenta, à medida que a espessura de parede do molde aumenta, até que para uma determinada espessura de parede do molde considerada semi-infinito, esta velocidade permanece praticamente constante, com o aumento da espessura de parede do molde. Finalmente, observa-se que a velocidade de solidificação do chumbo é maior que a do estanho para as mesmas condições de extração de calor.

CAPÍTULO 5

DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS SEM SUPERAQUECIMENTO EM MOLDES CILÍNDRICOS MACIÇOS

O método para análise da solidificação de metais sem superaquecimento em moldes cilíndricos maciços foi desenvolvido a partir de uma solução apresentada por Garcia e Prates para Geometrias Planas (16, 18), com a introdução de um fator de correção proposto por Santos e Prates, que leva em conta a geometria (17, 38-40).

5.1. SOLUÇÃO DE GARCIA E PRATES

A solução de Garcia e Prates para moldes maciços considera as seguintes hipóteses:

- a) O fluxo é unidirecional e o metal e o molde comportam-se como elementos semi-infinitos.
- b) Considera-se a existência de resistência térmica constante na interface metal/molde.
- c) O metal solidifica com uma interface sólido/líquido macroscopicamente plana.
- d) O metal é vazado sem superaquecimento e as perdas por convecção e radiação para o meio ambiente são desprezíveis.
- e) As propriedades físicas do metal e do molde são constantes.

A solução admite, como hipóteses fundamentais, a existência de resistência térmica de contato metal/molde e que esta permanece constante durante o processo de solidificação, e ainda que possa ser representada por uma espessura previamente existen

te em um sistema virtual. No caso de moldes maciços, deve-se introduzir uma espessura virtual para o metal e molde, para levar-se em consideração a resistência térmica de contato metal/molde, a qual pode ser em duas componentes separadas por um plano hipotético de temperatura constante, enquanto as temperaturas da interface dos lados do metal e do molde variam durante a solidificação. O sistema real e virtual estão apresentados na figura 5.1. A transposição de um sistema para outro é feita através das equações (2.19), (2.20) e (2.21) para o metal e pelas equações (2.22) e (2.23) para o molde, mencionadas anteriormente.

A equação de condução de Fourier pode ser aplicada entre ambos os sistemas virtuais, em função das hipóteses assumidas, e a solução geral é dada pela equação:

$$T = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{2\sqrt{at'}}\right) \quad (5.1)$$

5.1.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO

Aplicando a condição de contorno dada pela equação (2.25) Garcia e Prates desenvolveram a seguinte equação, a partir da equação (2.27):

$$t = \frac{S^2}{4 a_s \theta^2} + \frac{S_o S}{4 a_s \theta^2} \quad (5.2)$$

5.1.2. PERFIL TÉRMICO DURANTE A SOLIDIFICAÇÃO

5.1.2.1. COMPONENTE RELATIVA AO METAL

Aplicando-se as condições de contorno dada pela equação (2.26) na equação (2.27), determina-se as constantes A_s e B_s .

Logo a equação (2.27) pode ser escrita na seguinte forma já transposta para o sistema real:

$$T_s = T_i + \frac{(T_f - T_i)}{\operatorname{erf} \vartheta} \operatorname{erf} \left(\vartheta \frac{S_o + x}{S_o + S} \right) \quad (5.3)$$

5.1.2.2. COMPONENTE RELATIVA AO MOLDE

Aplicando-se as condições de contorno dadas pelas equações (2.34) e (2.35) na equação (2.27), chega-se as equações (2.36) e (2.37). Portanto, no molde a distribuição de temperatura será dado pela equação:

$$T_M = T_i + (T_i - T_o) - \operatorname{erf} \left(N \vartheta \frac{x - E_o}{S_o + S} \right) \quad (5.4)$$

onde N é dado pela equação:

$$N = \sqrt{\frac{a_s}{a_m}} \quad (5.5)$$

5.1.3. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO NA INTERFACE METAL/MOLDE (T_i)

Aplicando-se a condição de igualdade de fluxos de calor do metal no molde, através do plano hipotético, e desenvolvendo-se chega-se a equação:

$$T_i = T_o + \frac{(T_f - T_o) M}{M + \operatorname{erf} \vartheta} \quad (5.6)$$

onde M é uma constante do sistema metal/molde dado pela equação:

$$M = \sqrt{\frac{k_s c_s \rho_s}{k_m c_m \rho_m}} \quad (5.7)$$

5.1.4. DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DE SOLIDIFICAÇÃO

Efetua-se um balanço térmico na interface sólido/líquido e combinando com a equação (5.6), chega-se a:

$$\sqrt{\pi} \ \varnothing \ \exp(\varnothing^2) [M + \operatorname{erf}(\varnothing)] = \frac{c_s (T_f - T_o)}{H} \quad (5.8)$$

onde H é o calor latente de fusão e a constante de solidificação \varnothing pode ser determinada através de processo iterativo, para cada combinação metal/molde.

5.1.5. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL DE METAL PREVIAMENTE SOLIDIFICADA

Fazendo-se o balanço térmico na interface metal/molde, do lado do metal, nos instantes iniciais do processo de solidificação ($S' = S_o$) e desenvolvendo chega-se a:

$$S_o = \frac{2 a_s \varnothing^2 H \rho_s [M + \operatorname{erf}(\varnothing)]}{h_{i_s} (T_f - T_o) \operatorname{erf}(\varnothing)} \quad (5.9)$$

onde h_{i_s} é o coeficiente de transmissão de calor na interface do lado do sólido e é dado pela equação:

$$h_{i_s} = \left(1 + \frac{M}{\operatorname{erf}(\varnothing)} \right) h_i \quad (5.10)$$

5.1.6. DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA VIRTUAL DO MOLDE

Fazendo-se o balanço térmico na interface metal/molde, do lado do molde, nos instantes iniciais do processo de solidificação e desenvolvendo chega-se a:

$$B_0 = \frac{S_0}{N \varnothing} \sqrt{\ln \frac{2N \varnothing k_m}{\sqrt{\pi} h_{im} S_0}} \quad (5.11)$$

onde h_{im} é dado pela equação:

$$h_{im} = \left(\frac{\text{erf}(\varnothing) + M}{M} \right) h_i \quad (5.12)$$

5.1.7. FORMA DIMENSIONAL DA SOLUÇÃO

A equação que descreve o tempo de solidificação em função da espessura solidificada durante o processo de solidificação unidirecional de metais em moldes maciços sem superaquecimento é determinada substituindo a equação (5.10) em (5.9) e o resultado na equação (5.2), e tem-se:

$$t = \frac{1}{4a_s \varnothing^2} S^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_0)} S \quad (5.13)$$

ou na forma simplificada:

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (5.14)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{4a_s \varnothing^2} \quad (5.15)$$

e

$$\beta = \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_0)} \quad (5.16)$$

5.2. FATOR DE CORREÇÃO DE SANTOS E PRATES

Santos e Prates propuseram um método para análise da cinética e da distribuição de temperatura para a solidificação de metais em geometrias cilíndricas (17, 38-40). Este método é uma

extensão do modelo proposto por Garcia e Prates para moldes planos (16, 18, 41, 42). Com os resultados experimentais obtidos durante o processo de solidificação em ambas as geometrias, os autores estabeleceram um fator de correção, baseados na análise das alterações ocorridas durante o processo de solidificação, provocadas pelo efeito de curvatura do molde, e este deveria assumir valor igual a unidade no início do processo ($r_f = r_o$) e o valor dois no final do processo ($r_f = 0$).

Santos e Prates chegaram à seguinte equação que representa o fator de correção:

$$\theta = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \quad (5.17)$$

5.3. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO DE METAIS SEM SUPERAQUECIMENTO EM MOLDES MACIÇOS CILÍNDRICOS

5.3.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO

Introduzindo-se o fator de correção dado pela equação (5.17) na equação (5.13) e substituindo-se S por (V_s/A_i) , determina-se a equação que permite a determinação dos tempos de solidificação de metais sem superaquecimento em moldes maciços cilíndricos semi-infinitos, dada por

$$t = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4a_s \theta^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (5.18)$$

ou de maneira simplificada

$$t = \theta \left[\alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \beta \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (5.19)$$

A análise matemática da solidificação em moldes maciços finitos, ou seja, aqueles em que a parede externa se aquece antes do fim do processo, é mais complexa pois, além da condução de calor, há transferência de calor por radiação e convecção da parede para o meio ambiente.

Dada a impossibilidade de se obter uma solução exata para o equacionamento dos três mecanismos de transferência de calor ocorrendo simultaneamente em regime transiente, procurou-se desenvolver um fator adicional que leve em conta o balanço entre o volume do molde e o volume de metal e as propriedades físicas do metal e do molde. Após várias tentativas e comparações com resultados experimentais, chegou-se ao seguinte fator:

$$\psi = \left[\operatorname{erf} \left(M \frac{V_m}{V_M} \right) \right]^{-1} \quad (5.20)$$

Introduzindo-se este fator na equação (5.18), obtém-se, então, a relação entre o tempo de solidificação e espessura solidificada para metais solidificados em moldes maciços cilíndricos com qualquer espessura, já que o fator tende a unidade quando a espessura do molde tende a valores que possam ser considerados semi-infinitos, logo tem-se:

$$t = \psi \theta \left[\frac{\rho_s c_s}{4k_s \theta^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (5.21)$$

ou de maneira simplificada

$$t = \psi \theta \left[\alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \beta \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (5.22)$$

O fator ψ deve ser aplicado a partir de um instante em que se inicia o aquecimento da parede externa do molde.

5.3.2. VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO

A equação que descreve a variação da velocidade, foi determinada a partir da equação que descreve a variação do tempo de solidificação de metais sem superaquecimento em moldes cilíndricos maciços, durante o processo de solidificação.

Para efeito de derivação, a equação (5.21) foi colocada na seguinte forma dimensional:

$$C_2 t_c = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \Psi \left[\frac{1}{4 \theta^2} C_1 \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + H^* C_1 \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (5.23)$$

onde

$$C_1 = \frac{h_i}{k} \quad (5.24)$$

e

$$C_2 = \frac{h_i^2}{k \rho c} \quad (5.25)$$

e

$$H^* = \frac{H}{c_s (T_f - T_o)} \quad (5.26)$$

Como a velocidade de solidificação está relacionada com o avanço da interface sólido/líquido e, portanto, com o aumento da espessura solidificada, é conveniente colocar a equação (5.23) em função desta espessura solidificada que, para geometrias cilíndricas, é dado por $(r_o - r_f)$, então temos que:

$$t_c = \frac{1}{C_2} \left\{ \Psi \left[2 - \left(\frac{r_o - (r_o - r_f)^2}{r_o} \right) \right] \left\{ \left[\frac{1}{4 \theta^2} \left(C_1 \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right)^2 + H^* C_1 \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right] \right\} \right\} \quad (5.27)$$

Derivando a equação (5.27) em relação à espessura solidificada $(r_o - r_f)$, obtêm-se:

$$\frac{dt_c}{d(r_o - r_f)} = \frac{\psi}{C_2} \left(\frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[\frac{C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right)^2 + H^* C_1 \left(\frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right)^2 \right] \frac{2}{r_o} + \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \right) + H^* C_1 \right] \right\} \quad (5.28)$$

como a velocidade é dada por:

$$v = \frac{d(r_o - r_f)}{dt_c} = \left[\frac{dt_c}{d(r_o - r_f)} \right]^{-1} \quad (5.29)$$

e

$$\frac{V_s}{\Lambda_i} = \frac{2r_o(r_o - r_f) - (r_o - r_f)^2}{2r_o} \quad (5.30)$$

a equação (5.28) apresentará sob a forma de:

$$v = \left\{ \frac{\psi}{C_2} \left(\frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[\frac{C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{V_s}{\Lambda_i} \right)^2 + H^* C_1 \left(\frac{V_s}{\Lambda_i} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{V_s}{\Lambda_i} \right) + H^* C_1 \right] \right\} \right\}^{-1} \quad (5.31)$$

A equação (5.31) é válida tanto para moldes finitos, como para os moldes semi-infinitos, pois como foi definida anteriormente pela equação (5.20), o fator ψ tende a unidade para moldes considerados semi-infinitos.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MÉTODO, COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

6.1. ESTIMATIVA DA CONDUTÂNCIA TÉRMICA METAL/MOLDE

Para estimar os valores do coeficiente de transmissão de calor, utilizou-se a técnica experimental proposta por Garcia e Prates, já descrita anteriormente (16, 18, 41, 42).

No caso de solidificação de metais sem superaquecimento em moldes maciços cilíndricos, a estimativa de β e, consequentemente, o valor do coeficiente de transmissão de calor (h_i) foi feita de maneira semelhante, através da equação:

$$t = \theta \left[\alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \beta \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \quad (6.1)$$

ou ainda,

$$\frac{t}{\theta \frac{V_s}{A_i}} = \alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right) + \beta \quad (6.2)$$

onde α e β são constantes e foram definidas anteriormente pelas equações (2.47) e (2.48), respectivamente, e,

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o} \quad (6.3)$$

A equação (6.2) não apresenta resultados lineares, pois de acordo com a equação (6.3) a relação (V_s/A_i) varia conforme uma função do segundo grau com o raio do metal solidificado (r_f), no entanto, para regiões próximas da interface metal/molde, esta

relação é praticamente linear. Então, apenas para estimar valores do coeficiente de transmissão de calor, utilizou-se a equação (6.2) em regiões próximas dessa interface. Na realidade o que ocorre é que a medida que a solidificação evolui nos moldes cilíndricos, há uma variação da área de troca de calor na interface sólido/líquido, e os valores encontrados do coeficiente de transmissão de calor não são precisos. Uma determinação mais exata do coeficiente de transmissão de calor poderia ser feita utilizando um molde plano com espessura finita e semi-infinita, quando a contração do metal é desprezível em relação ao molde (52), conforme mostra a figura 6.1 e posicionar os termopares em posições pré-determinadas, determinar o tempo de solidificação e aplicar a técnica experimental proposta por Garcia e Prates (16, 41, 42, 63).

Comparando o resultado obtido para o estanho ($4.970 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$) com o obtido por Garcia e Prates para o plano (16), verificou-se que estes apresentam a mesma ordem de grandeza, apesar de serem tomados em geometrias distintas.

6.2. VERIFICAÇÃO DA VALIDADE DO MÉTODO PROPOSTO PARA ANÁLISE DA CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIAS CILÍNDRICAS

6.2.1. TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO

Nas figuras 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 e 6.6 são apresentadas as curvas de variação do tempo de solidificação em função da relação (V_s/A_i), na forma dimensional, obtidas com a aplicação do método proposto (equação 5.21), juntamente com os pontos experimentais, para o estanho solidificado em moldes maciços cilíndricos, com cinco diferentes espessuras de parede do molde sem superaquecimento. Pode-se observar que em todos os casos analisa

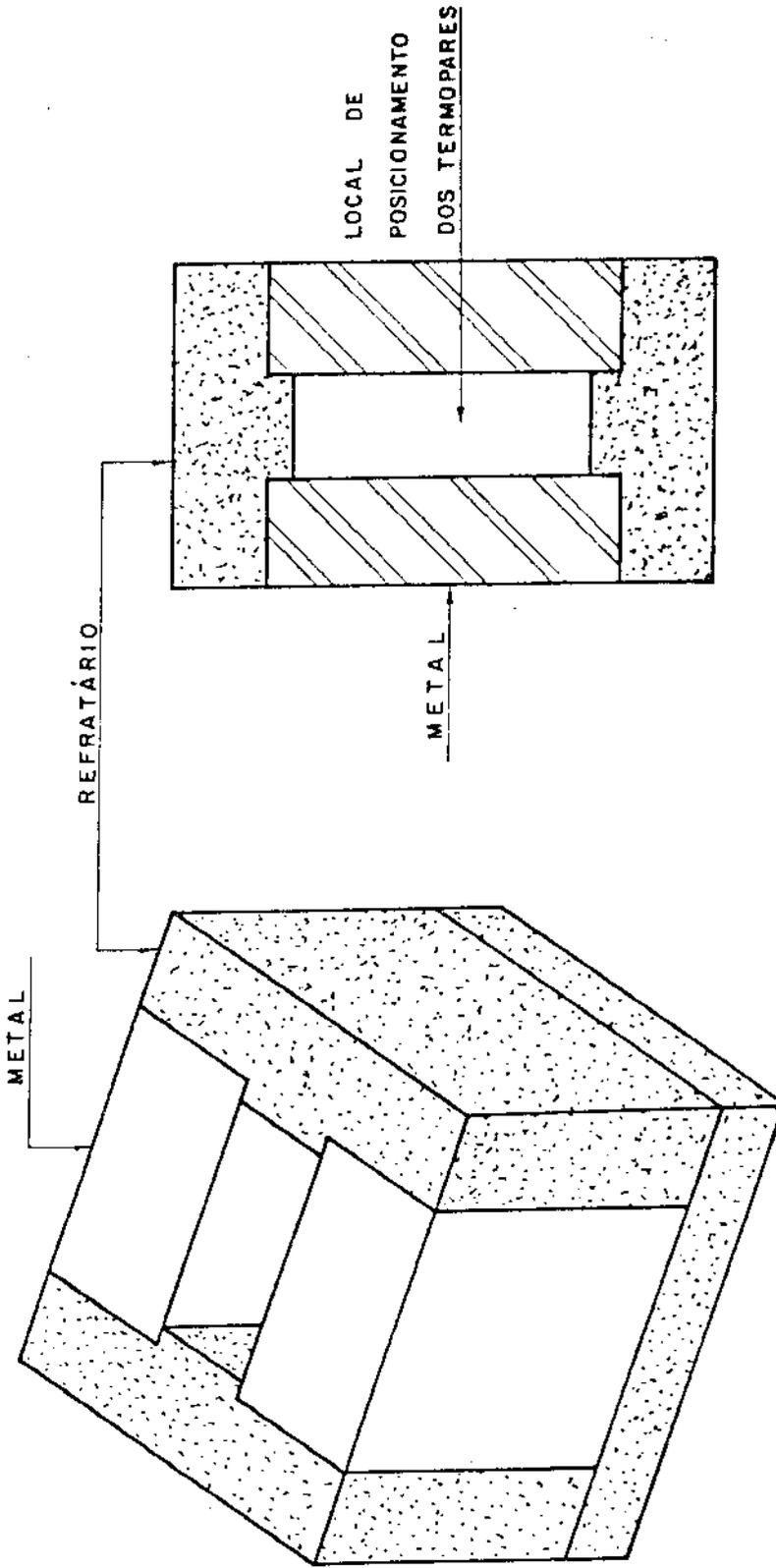


Figura 6.1 - Molde plano para efetuar a medida do coeficiente de transmissão de calor

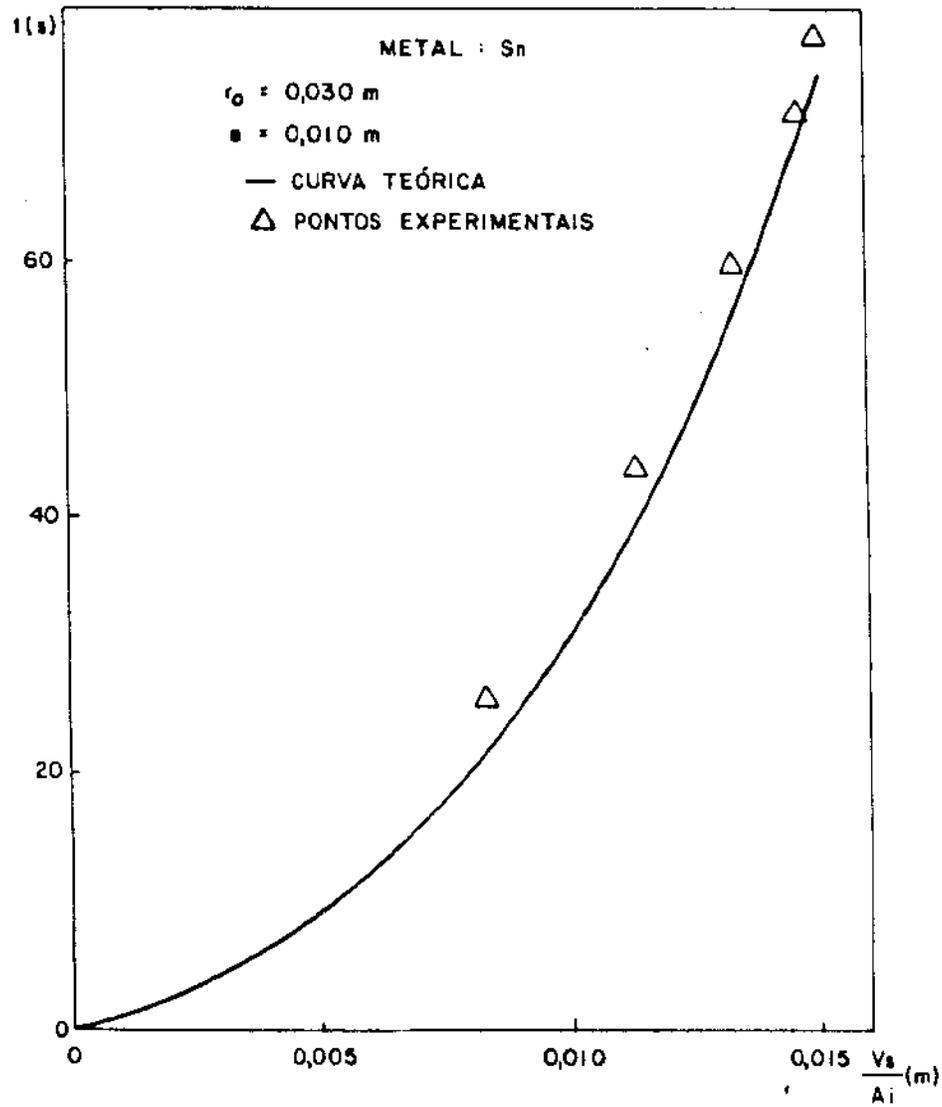


Figura 6.2 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

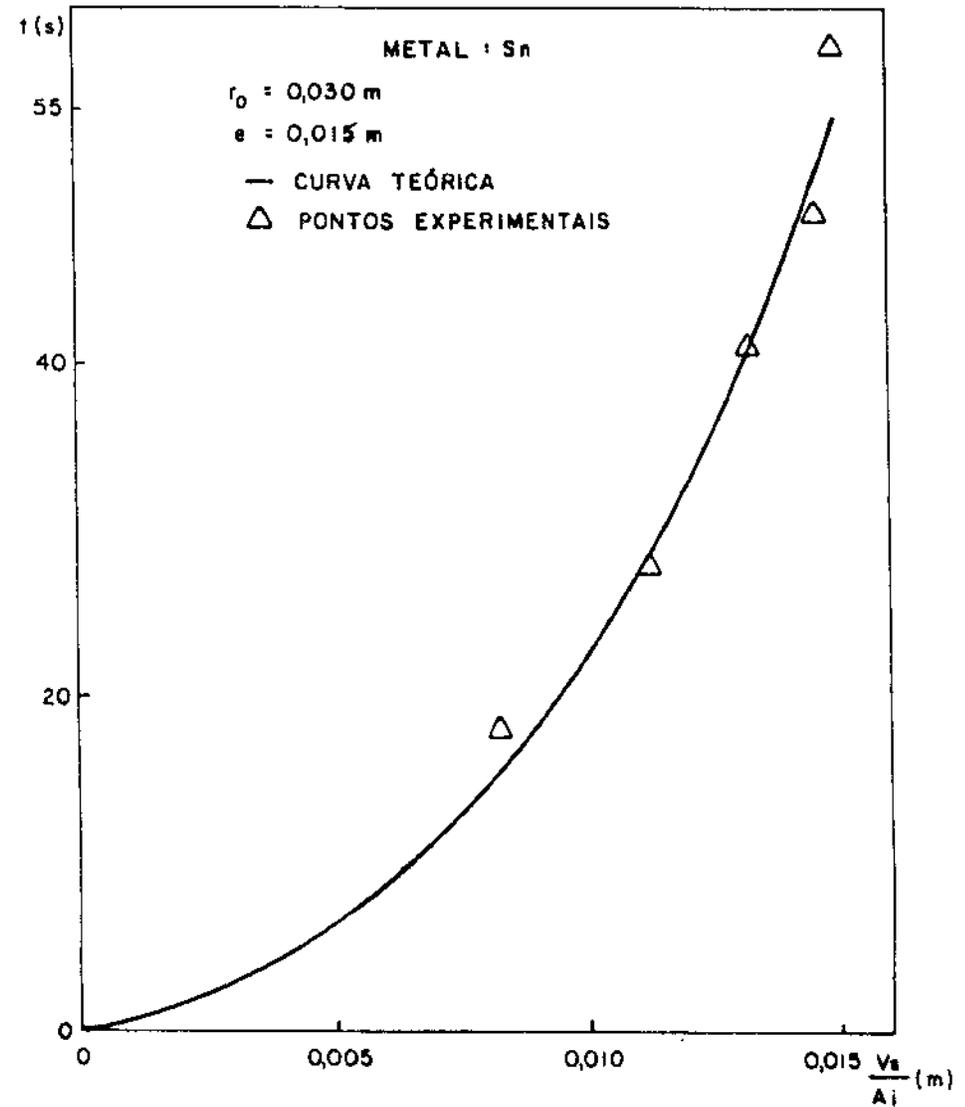


Figura 6.3 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

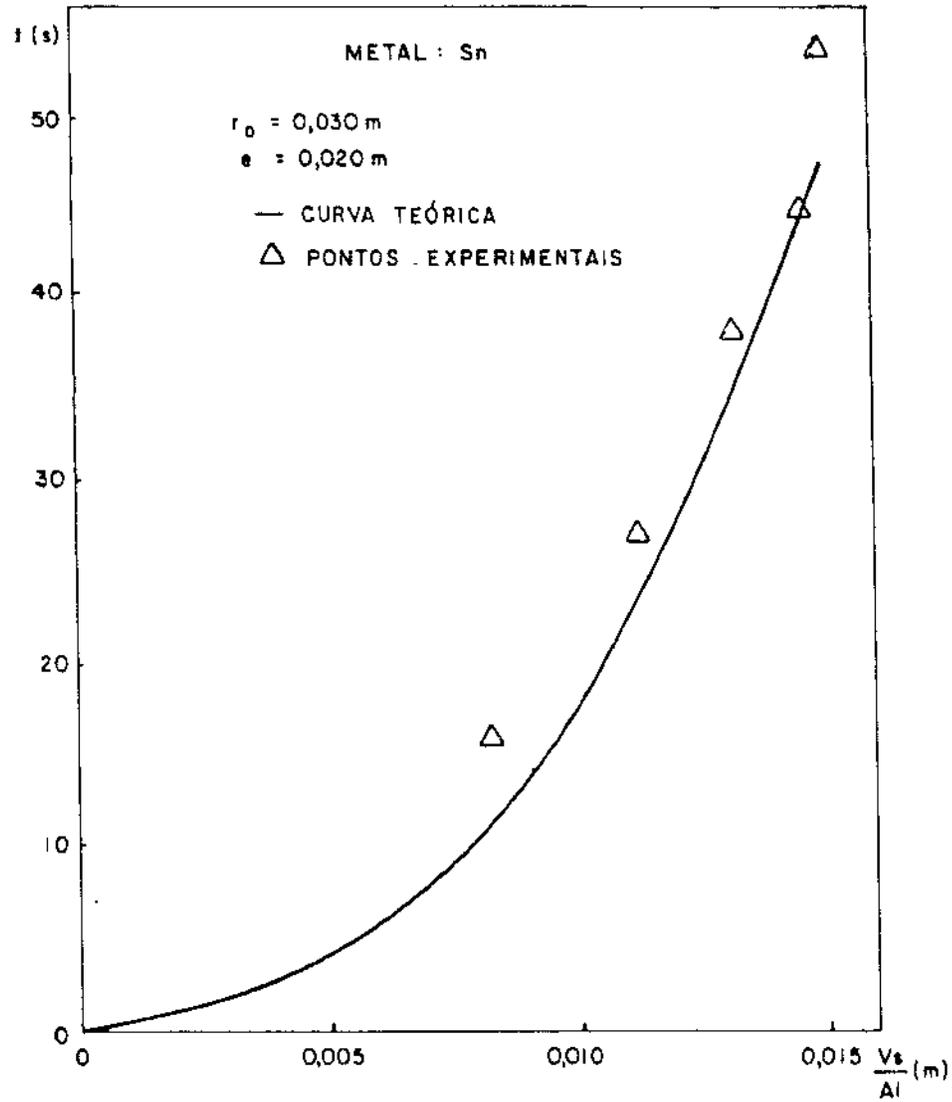


Figura 6.4 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

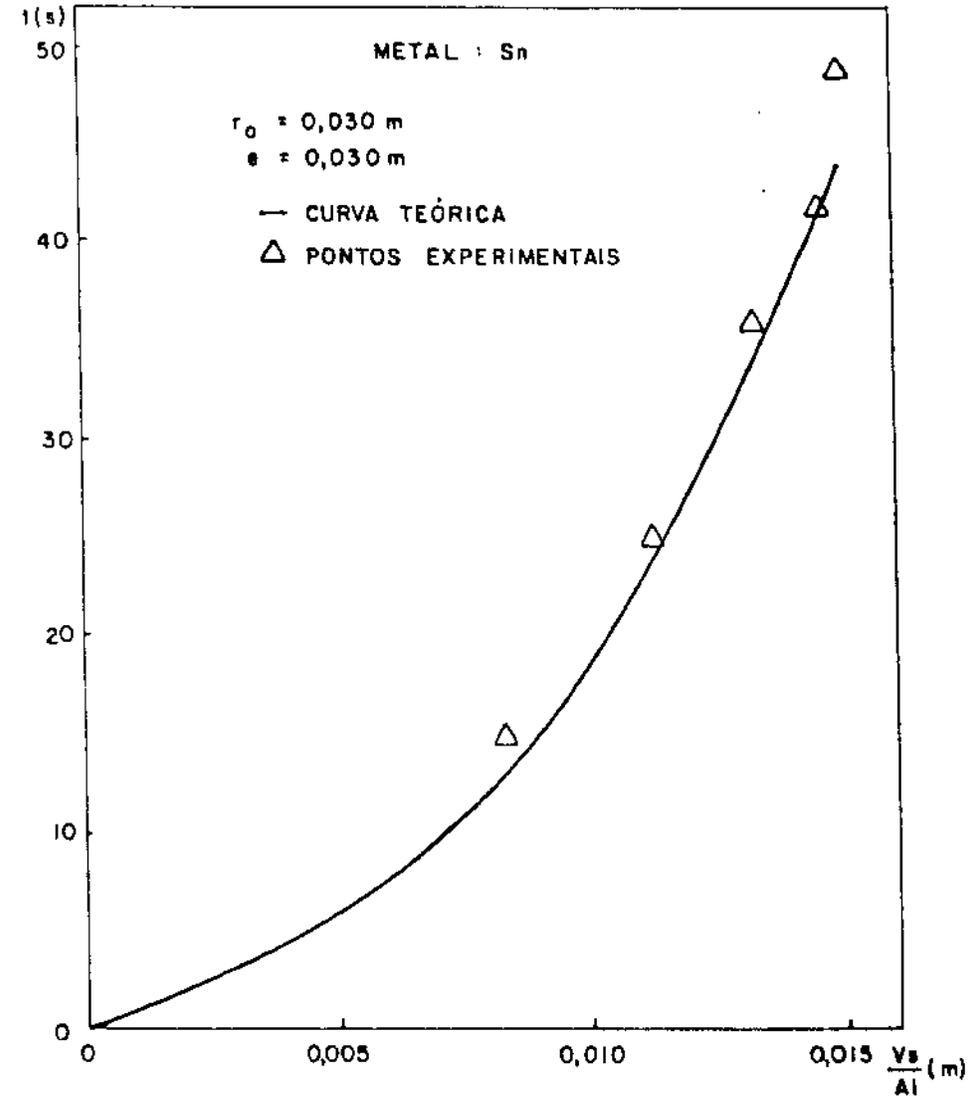


Figura 6.5 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

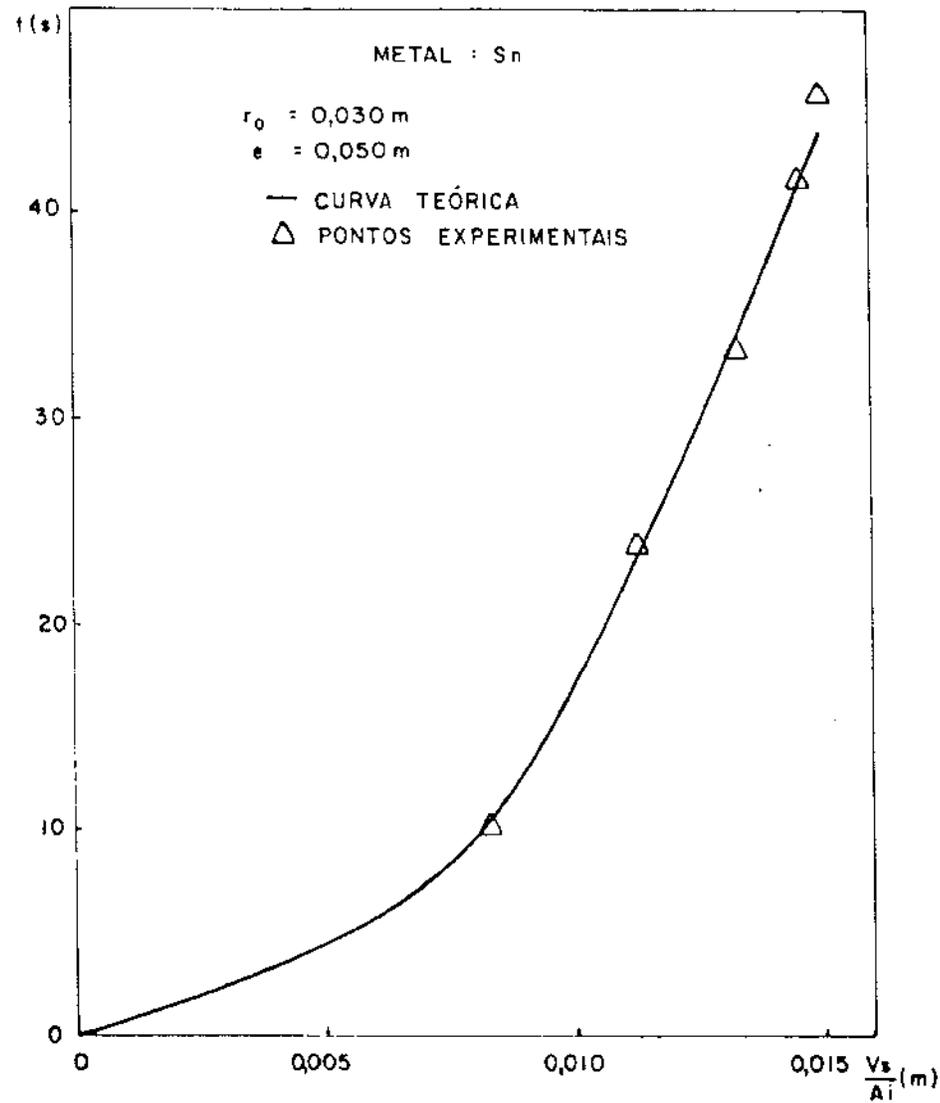


Figura 6.6 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

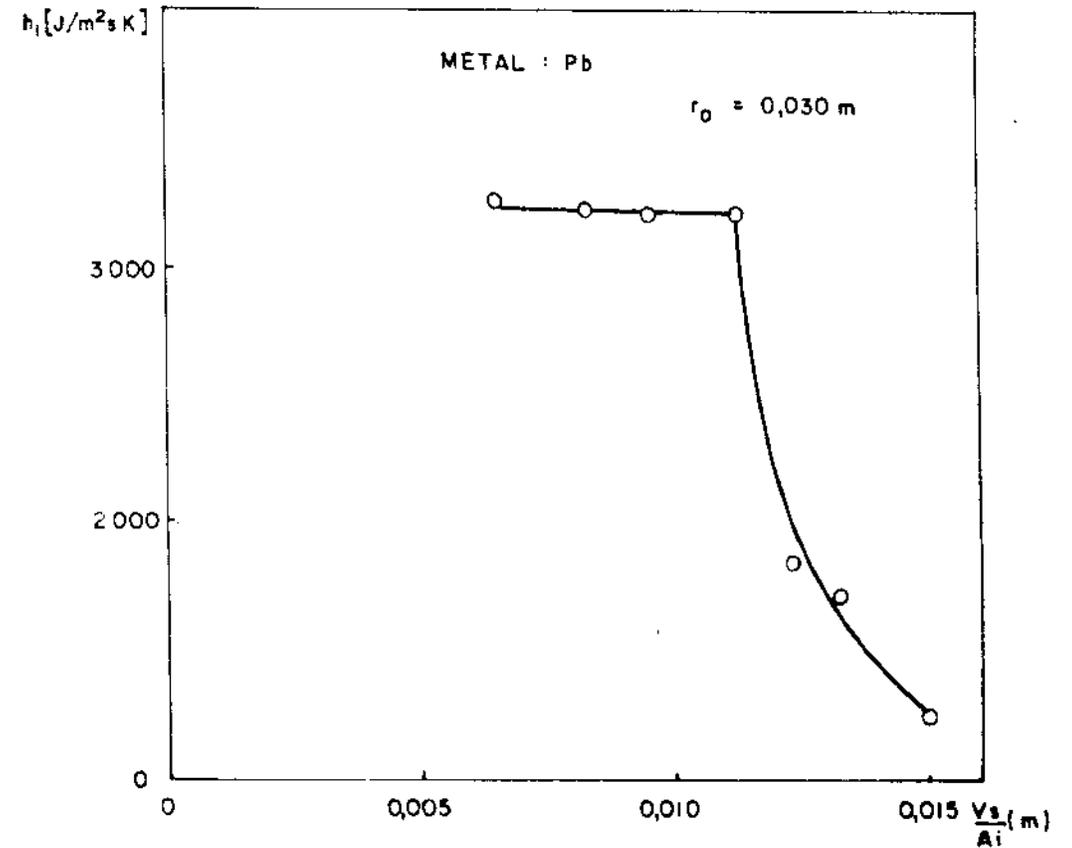


Figura 6.7 - Variação do coeficiente de transmissão de calor em função da relação (V_s/A_i) para o chumbo

dos, há uma boa concordância entre os resultados teóricos e os experimentais comprovando a validade da equação.

No caso do estanho, observa-se que o coeficiente de transmissão permanece praticamente constante durante todo o processo de solidificação. Isto ocorre devido à baixa contração do estanho em relação ao material do molde, inibindo a formação de uma camada de ar na interface metal/molde.

No caso do chumbo, como pode ser observado pela "quebra" de continuidade das curvas experimentais do tempo de solidificação em função da relação (V_s/A_i) (figuras 4.6 a 4.9), devido à variação do coeficiente de transmissão de calor durante o processo de solidificação. Tal fato ocorre devido à contração do chumbo em relação ao material do molde ser mais significativo, provocando, a partir de um certo instante, a formação de uma camada de ar crescente com o tempo.

Utilizando os valores experimentais dos tempos de solidificação em função da relação (V_s/A_i) para moldes semi-infinitos, na equação teórica, foi estimada a variação do coeficiente de transmissão de calor em função da relação (V_s/A_i) . Esta variação está apresentada na figura 6.7. Pode-se observar que o valor do coeficiente de transmissão de calor é inicialmente constante, e após um certo tempo há uma queda brusca e contínua no valor do coeficiente de transmissão de calor devido à formação e o crescimento da camada de ar na interface metal/molde. Além disso, como no caso dos moldes finitos, o perfil de temperatura na camada de metal solidificada é diferente daquele observado nos moldes semi-infinitos. É de se supor que também a variação do coeficiente de transmissão de calor é diferente nesses casos.

De qualquer forma, utilizando alguns valores do coeficiente de transmissão estimados a partir de resultados experimentais para o caso do chumbo, foram determinadas as figuras 6.8,

6.9, 6.10 e 6.11 que mostram as curvas de variação do tempo de solidificação em função da relação (V_s/A_i) , na forma dimensional, obtido através do método proposto (equação 5.21), juntamente com os pontos experimentais, mostrando que existe uma boa concordância.

Uma determinação mais precisa do coeficiente de transmissão de calor exige, no entanto, outros trabalhos experimentais mais elaborados.

6.2.2. VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO

Nas figuras 6.12 e 6.13 são mostradas as curvas teóricas da variação do inverso da velocidade em função da espessura solidificada $(r_o - r_f)$, obtidas com a aplicação do método proposto (equação 5.31) e as curvas experimentais obtidas para o estanho com duas espessuras diferentes de parede. Verifica-se que existe uma boa concordância entre as curvas teóricas e experimentais, o que evidencia a eficiência do método também para o cálculo da velocidade de solidificação.

Na figura 6.14 são apresentadas curvas de variação do inverso da velocidade de solidificação em função da espessura solidificada $(r_o - r_f)$, obtida através da aplicação do método proposto (equação 5.31) para o estanho solidificado em moldes maciços cilíndricos, com cinco diferentes espessuras de parede do molde, sem superaquecimento. Na figura 6.15 são apresentadas curvas teóricas, obtidas para o chumbo, com quatro diferentes espessuras de parede do molde nas mesmas condições citadas anteriormente. Observa-se tanto para o chumbo como para o estanho que, à medida que se aumenta a espessura de parede dos moldes, os pontos das curvas se aproximam, e para os moldes considerados semi-infinitos, estes pontos das curvas tendem a se sobrepor.

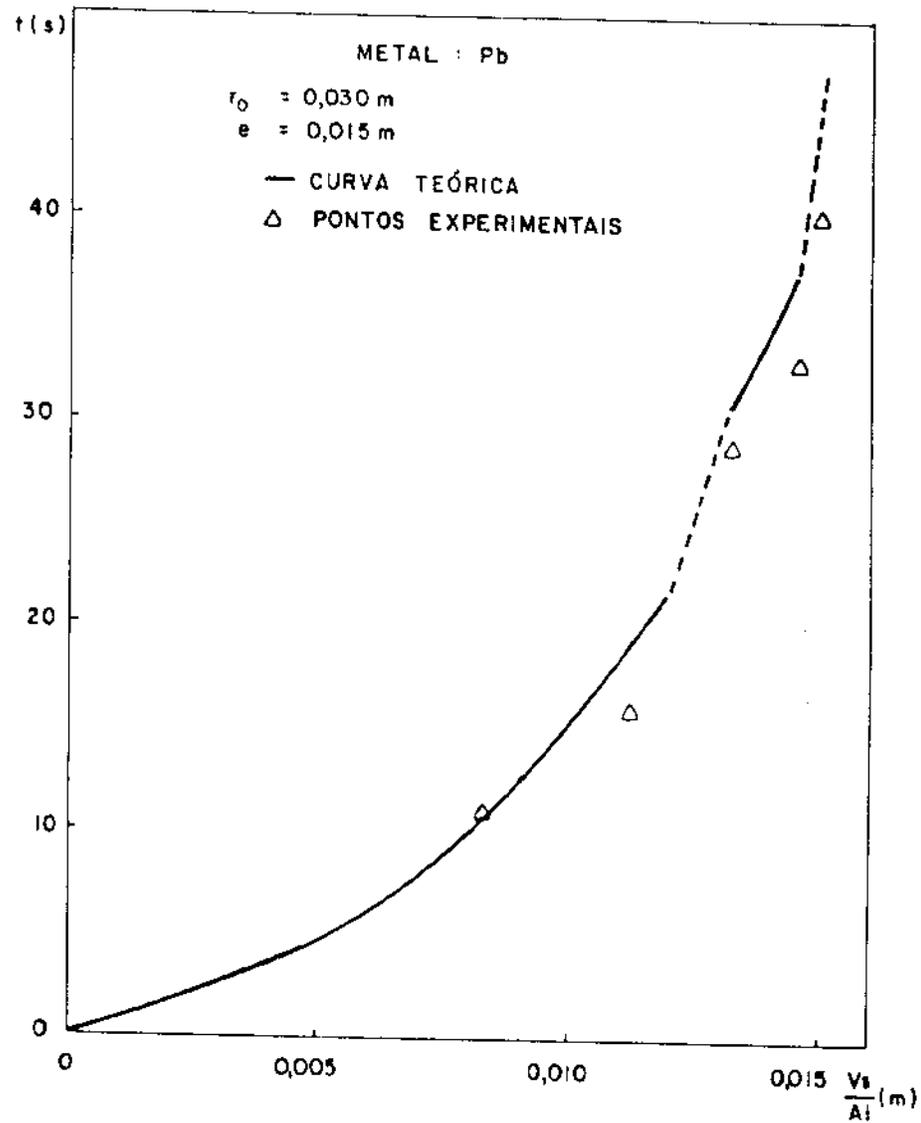


Figura 6.8 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

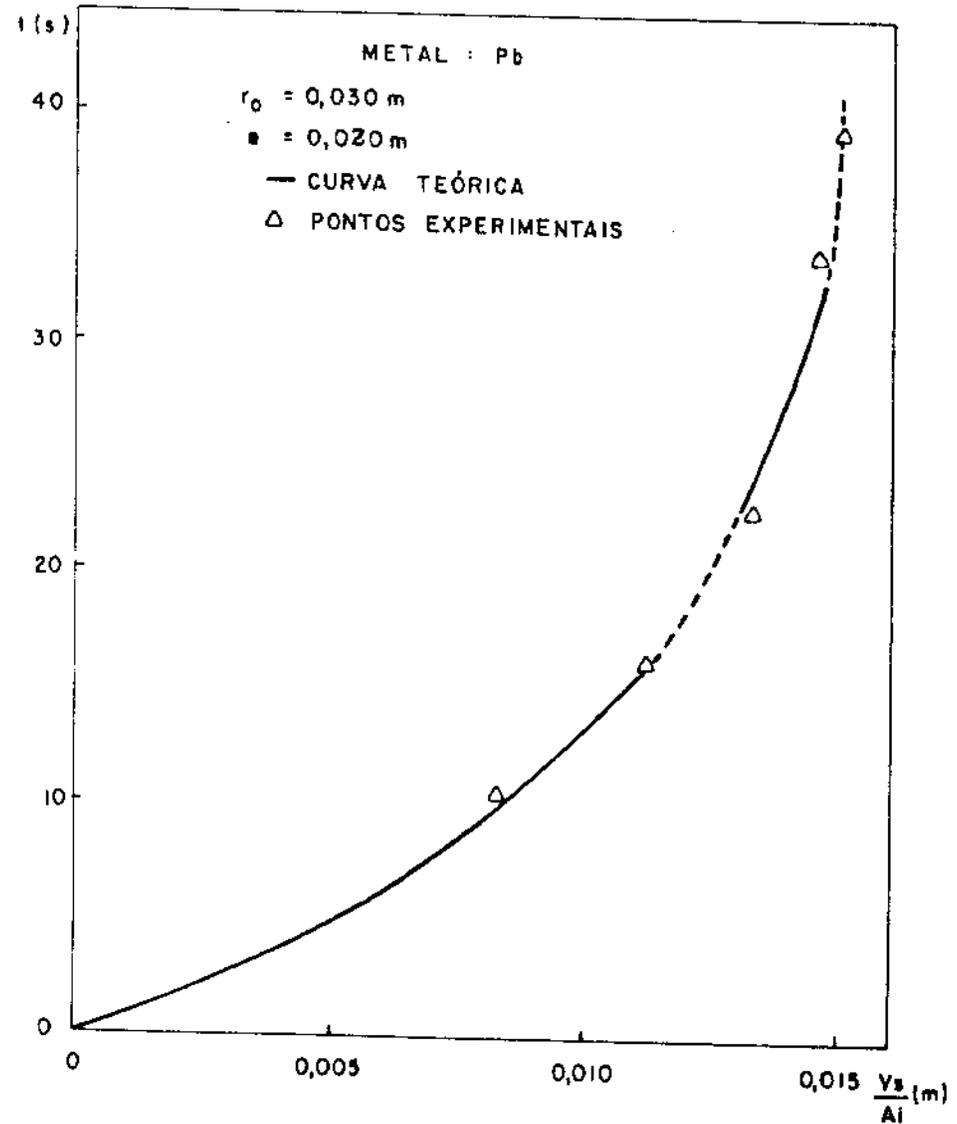


Figura 6.9 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

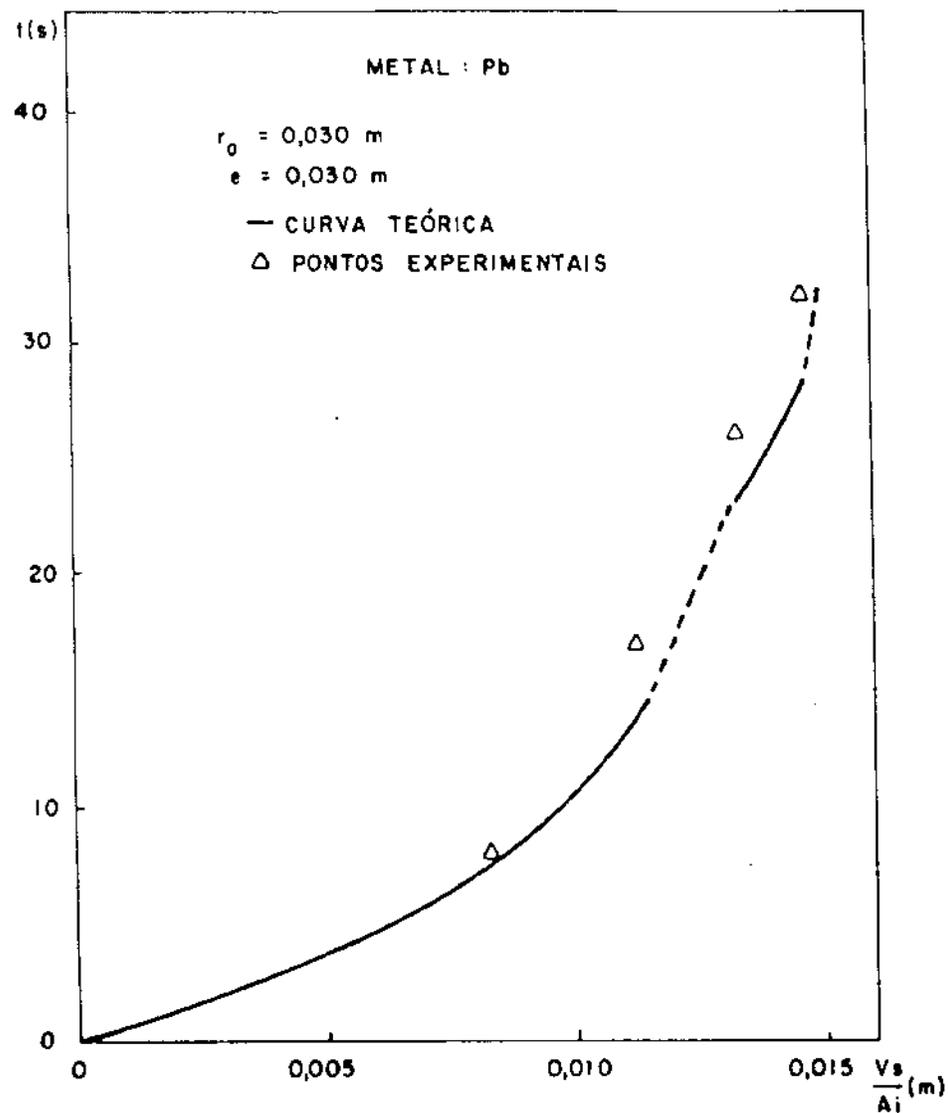


Figura 6.10 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

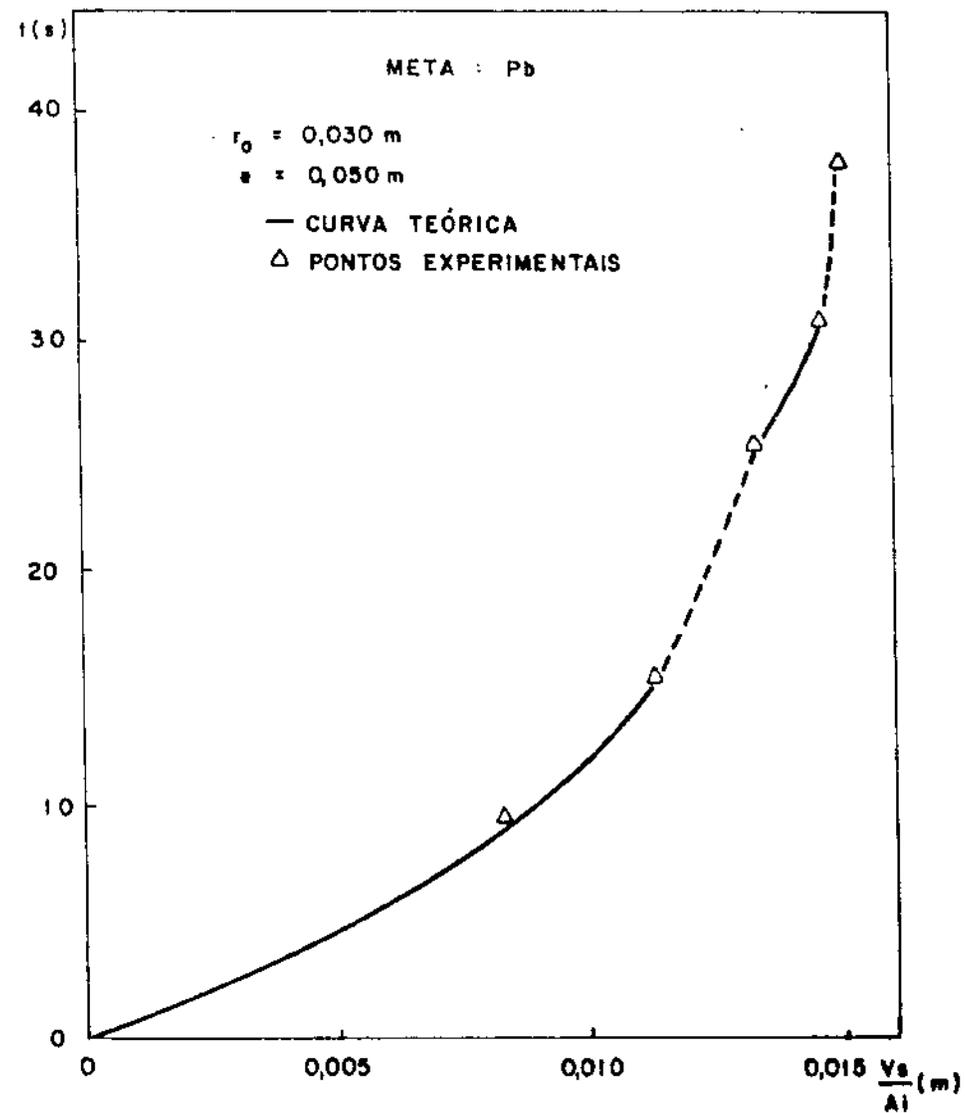


Figura 6.11 - Comparação entre os resultados experimentais e a curva teórica

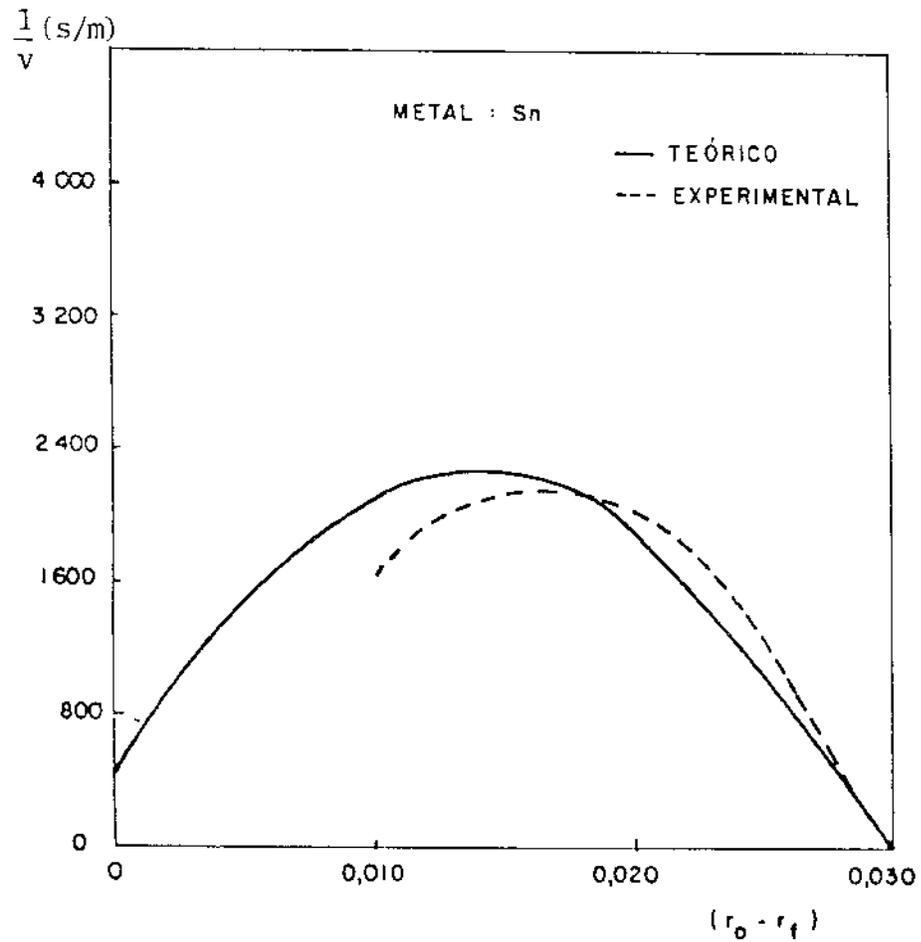


Figura 6.12 - Comparação entre a velocidade teórica e a experimental para o estanho (espessura do molde = 0,030 m)

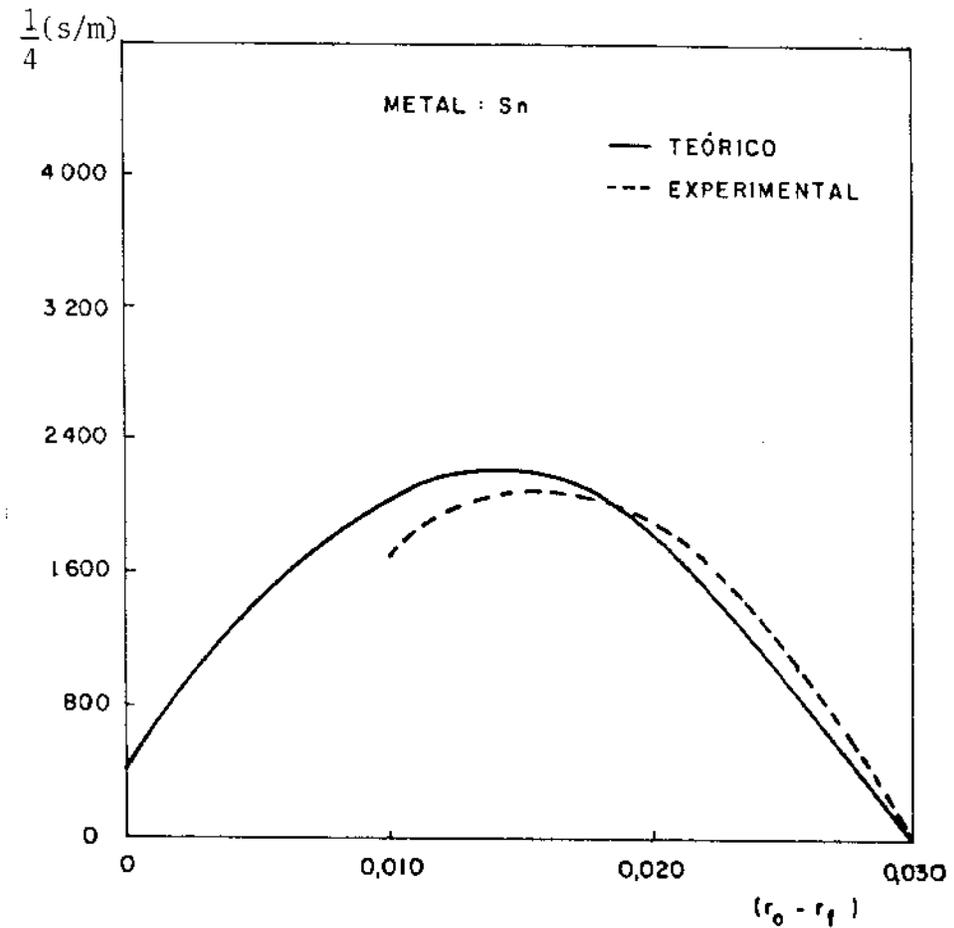


Figura 6.13 - Comparação entre a velocidade teórica e a experimental para o estanho (espessura do molde = 0,050 m)

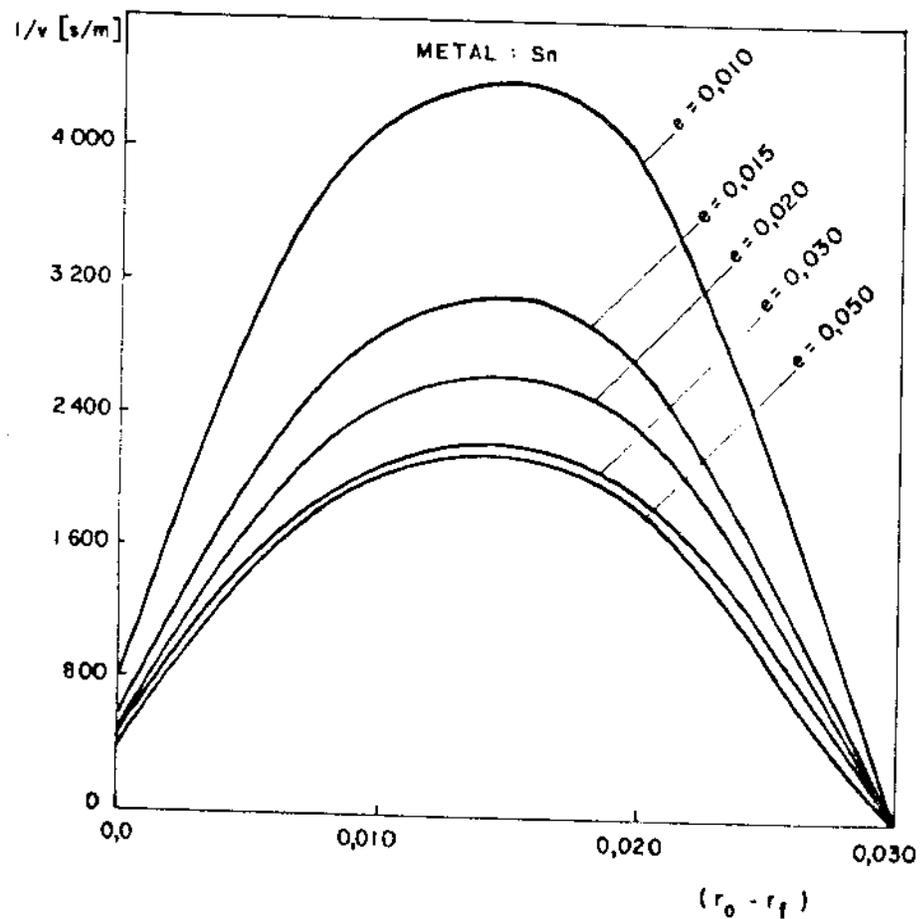


Figura 6.14 - Variação do inverso da velocidade obtida pelo método proposto com diferentes espessuras de parede do molde em função da espessura solidificada para o estanho

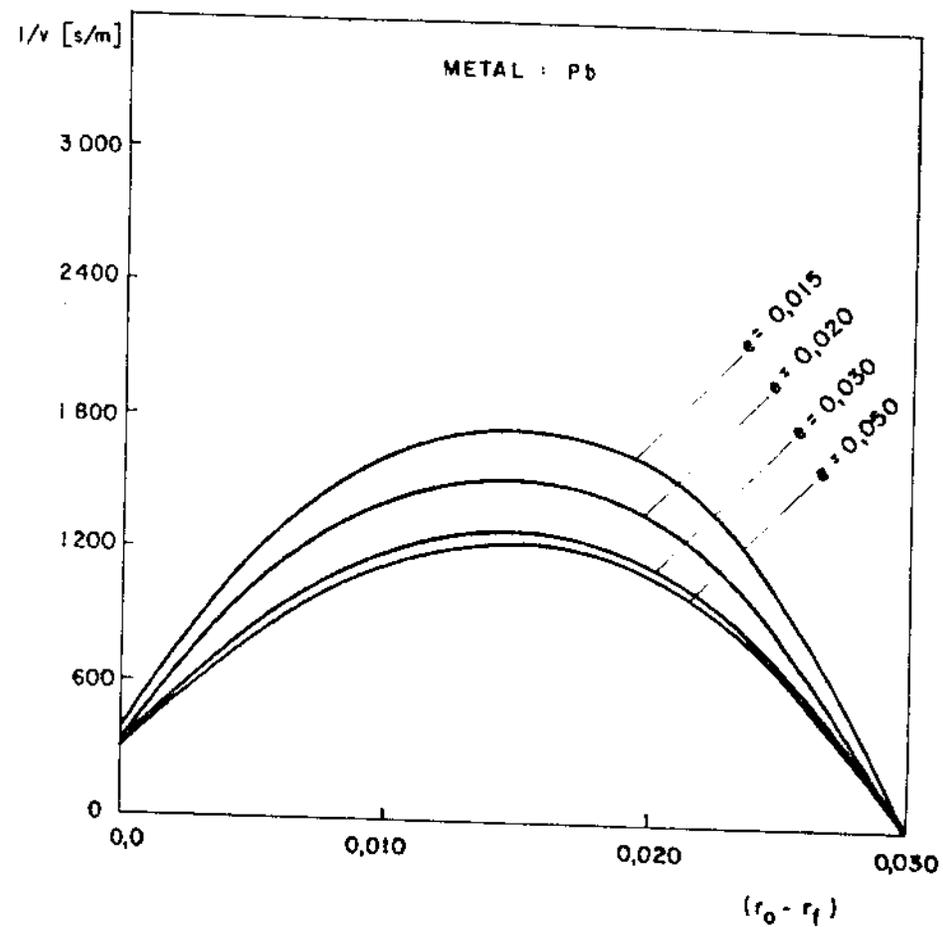


Figura 6.15 - Variação do inverso da velocidade obtida pelo método proposto com diferentes espessuras de parede do molde em função da espessura solidificada para o chumbo

Conforme verificado anteriormente, a velocidade de solidificação inicialmente diminui em uma primeira fase, atinge um valor mínimo durante a segunda fase, e finalmente, volta a crescer em uma terceira fase durante o processo de solidificação. Pelas figuras 6.14 e 6.15, pode-se concluir que a velocidade tende a um valor infinito nos instantes finais da solidificação pelo fato de haver um rápido aumento da taxa de redução do volume de metal líquido remanescente no final do processo, provocada por uma acentuada redução na quantidade de calor latente a ser retirada do sistema.

6.3. APLICAÇÕES PRÁTICAS

6.3.1. TEMPOS TOTAIS OBTIDOS PELA EQUAÇÃO PROPOSTA EM FUNÇÃO DA ESPESSURA DE PAREDE DO MOLDE (e)

A solução desenvolvida para a análise da cinética de solidificação de metais em moldes cilíndricos maciços sem superaquecimento pode ser empregado em várias aplicações de interesse prático.

Nas figuras 6.16 e 6.17 são apresentadas como exemplo, curvas do tempo total de solidificação em função da espessura do molde, na forma dimensional, de cilindros de estanho e chumbo, respectivamente, em moldes de aços polidos, com espessura de paredes variáveis e raios constantes. Observa-se, em ambos os casos, a curva inicialmente decresce até que a partir de uma determinada espessura esta se mantém constante com o aumento da espessura de parede do molde. Este valor constante é atingido quando o molde passa a ser considerado semi-infinito, ou seja, quando a parede do molde não chega a aquecer durante o processo de solidificção.

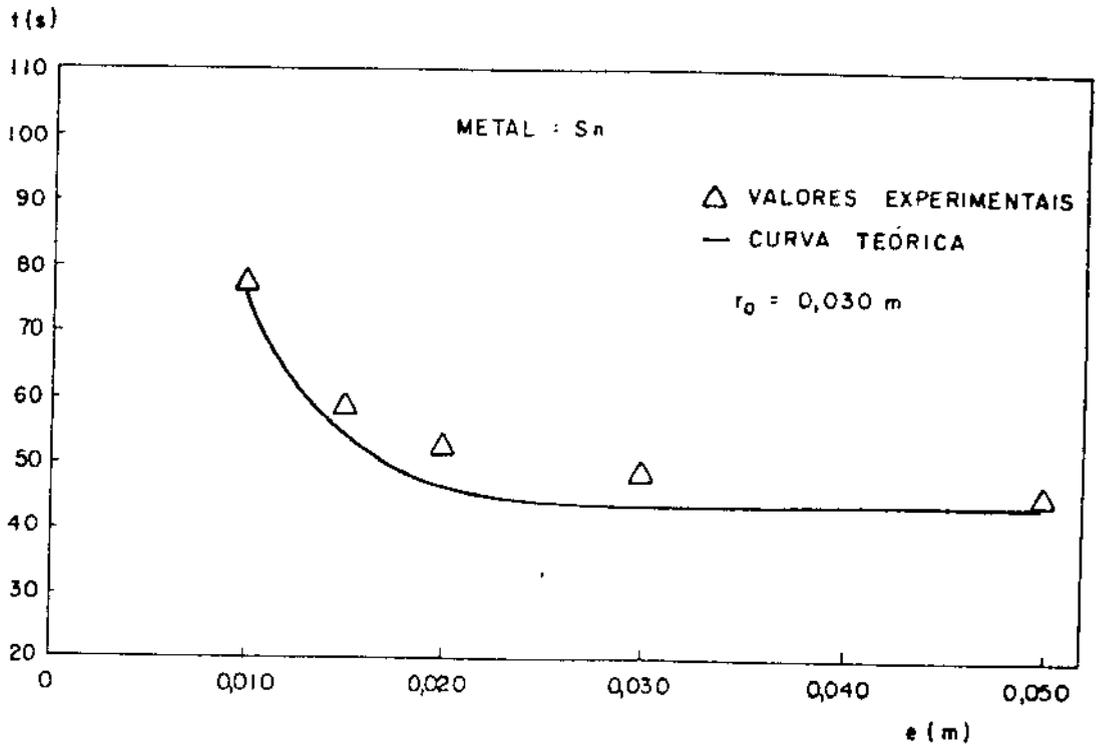


Figura 6.16 - Variação do tempo total de solidificação em função da espessura do molde

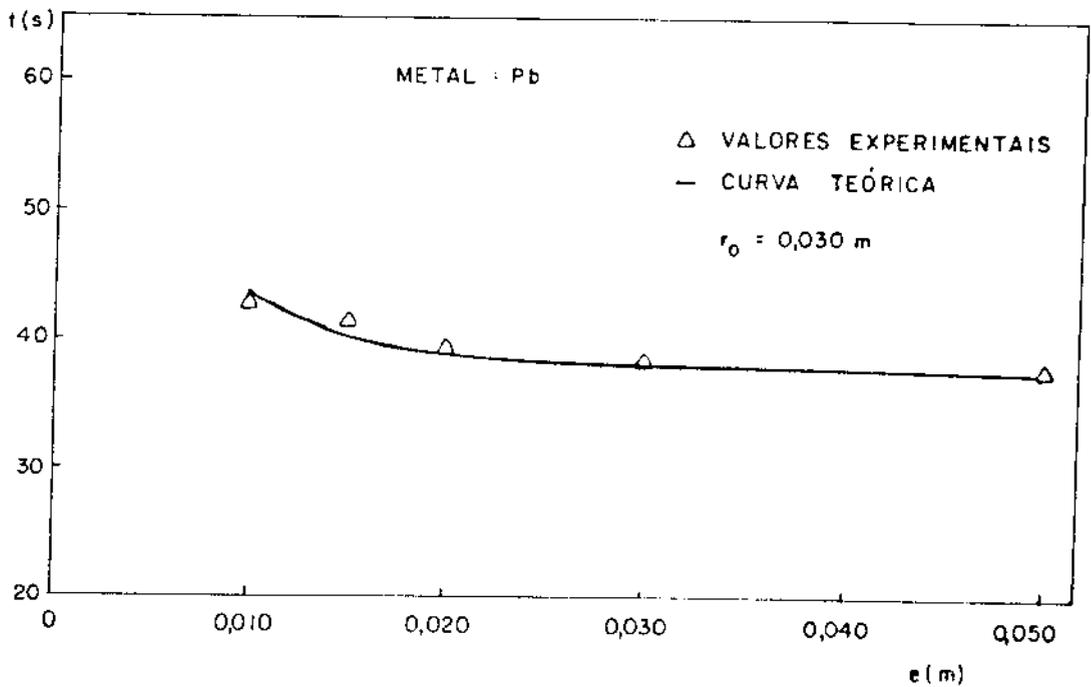


Figura 6.17 - Variação do tempo total de solidificação em função da espessura do molde

O menor tempo de solidificação é obtido quando se utiliza os moldes semi-infinitos, e conhecendo-se a espessura de parede para que isso ocorra, evita-se que empregue moldes com espessuras superdimensionadas que acarretaria no aumento do custo do produto final obtido.

6.3.2. FATOR DE CORREÇÃO Ψ

Este fator é de grande interesse prático, pois com a introdução deste na equação proposta, pode-se determinar os tempos e as velocidades de solidificação, para moldes considerados finitos, ou seja, aqueles em que a parede externa se aquece antes do final do processo de solidificação. Além disso, a análise matemática é mais complexa pois os três mecanismos de transferência de calor ocorrem simultaneamente em regime transiente, impossibilitando dessa forma uma solução exata.

Através do fator Ψ , pode-se estimar, para um determinado raio do molde, qual a espessura de parede que este pode ser considerado finito ou semi-infinito.

Nas figuras 6.18 e 6.19 são apresentadas as curvas de variação do fator Ψ em função da espessura de parede do molde para o estanho e chumbo, respectivamente. Pode-se notar, em ambos os casos, que quanto maior o raio do molde, maior a espessura a partir do qual o molde pode ser considerado semi-infinito.

6.3.3. VARIAÇÃO DA VELOCIDADE DE SOLIDIFICAÇÃO COM A VARIAÇÃO DO RAI DO MOLDE

Nas figuras 6.20 e 6.21 são apresentadas as curvas de variação do inverso da velocidade (obtida através da equação (5.31) em função da relação $(r_o - r_f)/r_o$, respectivamente para o

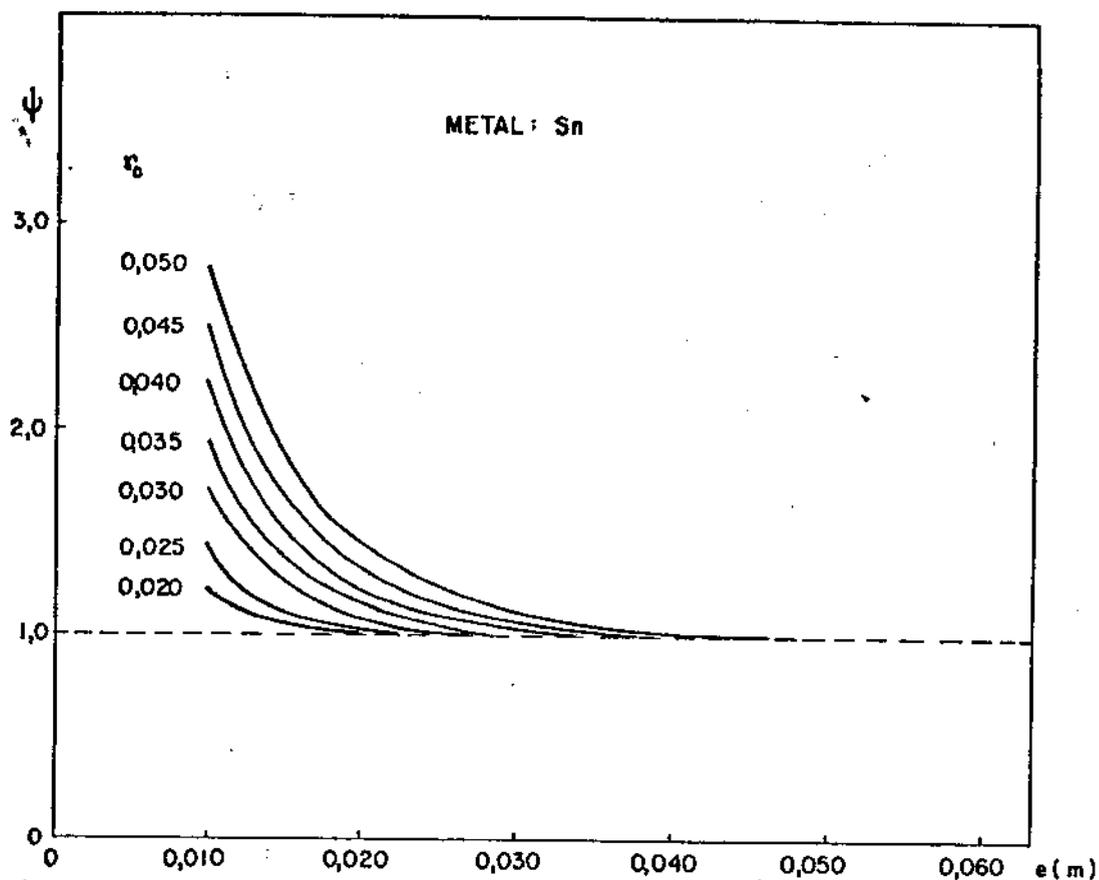


Figura 6.18 - Variação do fator Ψ em função da espessura do molde

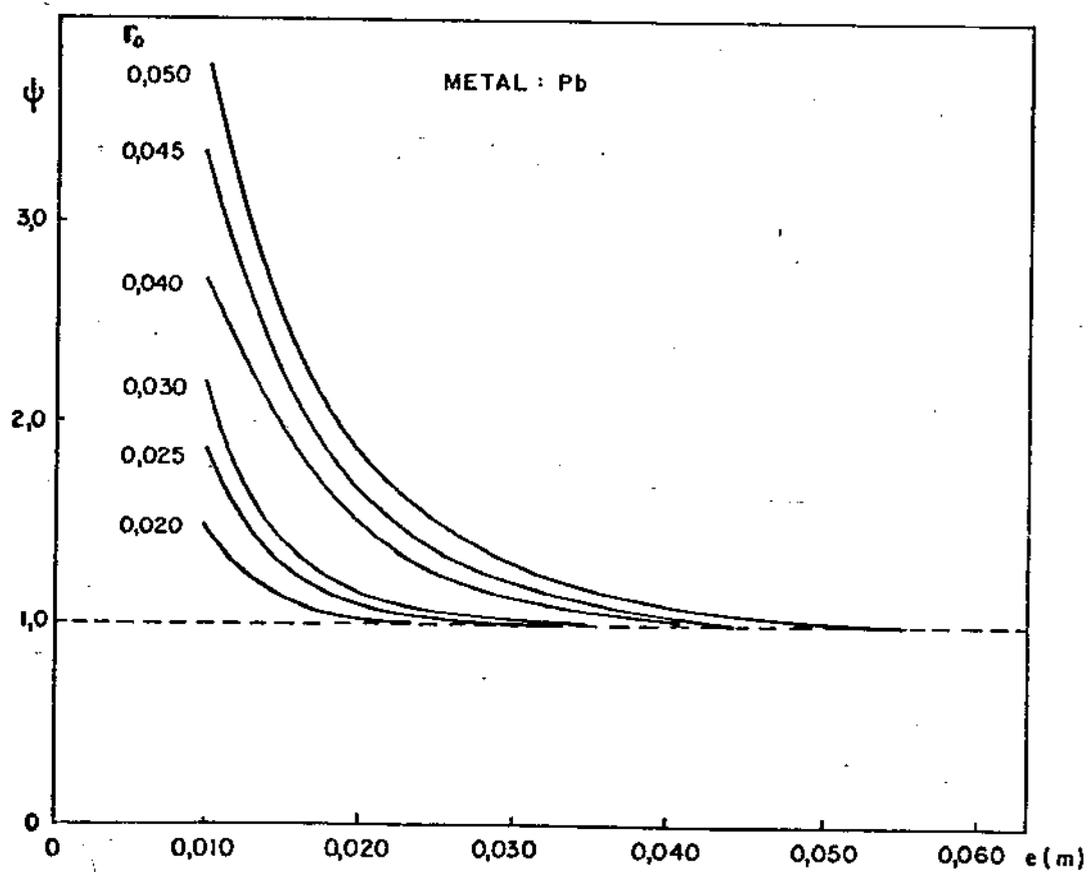


Figura 6.19 - Variação do fator Ψ em função da espessura do molde

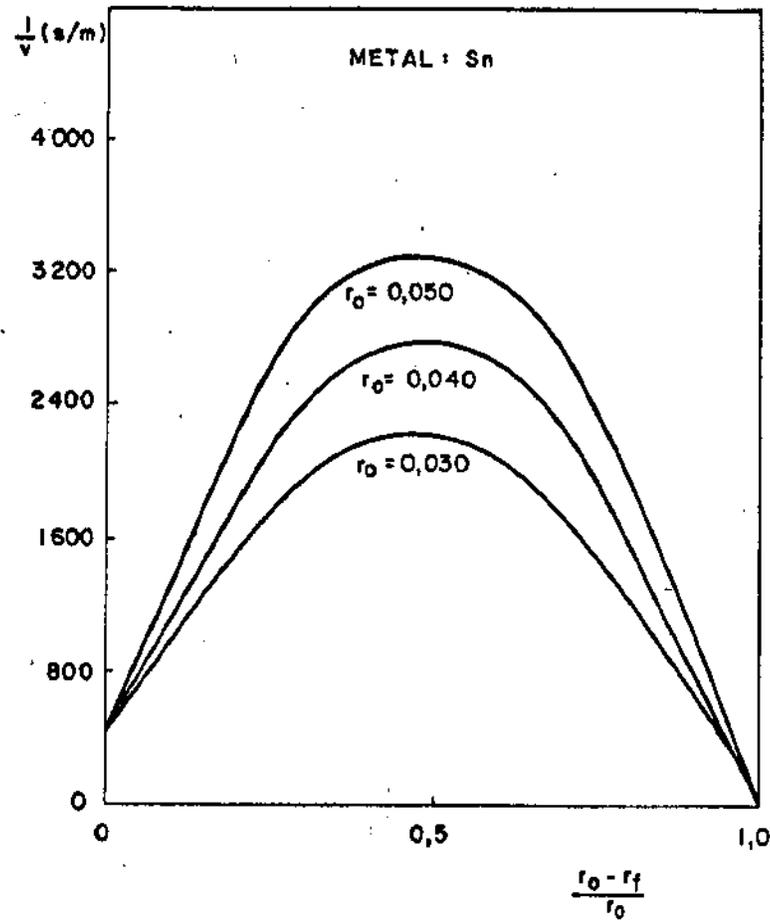


Figura 6.20 - Variação do inverso da velocidade obtida pelo modelo proposto com diferentes raios internos do molde, em função da relação $r_o - r_f/r_o$, para o estanho

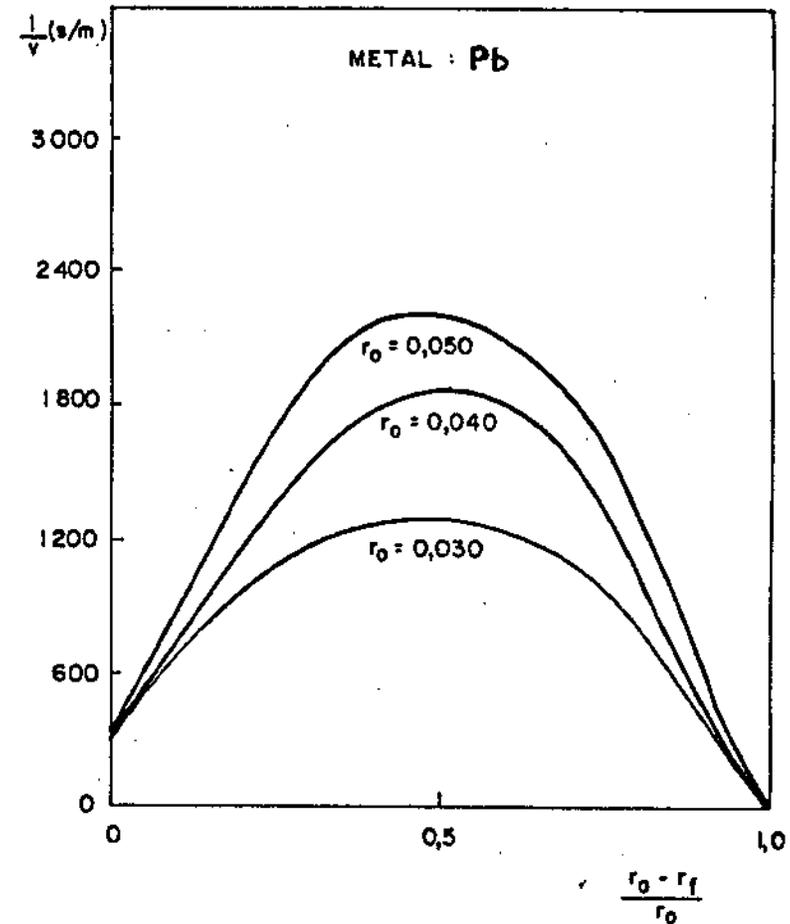


Figura 6.21 - Variação do inverso da velocidade obtida pelo modelo proposto com diferentes raios internos do molde, em função da relação $r_o - r_f/r_o$, para o chumbo

estanho e chumbo com diferentes raios do molde com espessuras consideradas semi-infinitas, solidificados em moldes polidos. Observa-se que a medida que aumenta o raio do molde diminui a velocidade de solidificação. Comparando as figuras 6.20 e 6.21 nota-se que a velocidade de solidificação do estanho é inferior a do chumbo para as mesmas condições de extração de calor e dimensões do molde.

Fazendo-se $r_o = r_f$ na equação (5.31), determina-se a equação que representa a velocidade inicial de solidificação que, na forma dimensional, é dada por:

$$v_o = \psi \frac{C_1 H^*}{C_2}^{-1} \quad (6.4)$$

onde C_1 , C_2 , H^* e ψ são definidos, respectivamente, pelas equações (5.24), (5.25), (5.26) e (5.20). Introduzindo-se estas na equação (6.4), obtém-se:

$$v_o = \psi \frac{H \rho_s}{(T_f - T_o) h_i}^{-1} \quad (6.5)$$

como a velocidade é igual para moldes finitos e semi-infinitos ($\psi = 1$) e

$$v_o = (\beta)^{-1} \quad (6.6)$$

Nos moldes maciços, de acordo com a equação (6.6), a velocidade inicial de solidificação depende apenas das propriedades do metal e da resistência térmica da interface metal/molde sendo igual para cilindros de qualquer raio, isto pode ser observado nas figuras 6.20 e 6.21.

6.3.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Considerando um cilindro de estanho de raio $r = 0,040$ m a ser solidificado em um molde maciço de aço, com o metal líquido inicialmente a temperatura de fusão, determinar:

a) espessura mínima de parede para que o molde possa ser considerado semi-infinito.

b) tempo total de solidificação considerando o molde semi-infinito.

c) o tempo total de solidificação para um molde finito com a espessura de parede $e = 0,020$ m.

d) a velocidade inicial para moldes finitos e semi-infinitos.

RESOLUÇÃO:

a) espessura mínima de parede para que o molde possa ser considerado semi-infinito.

Analisando a figura 6.18, observa-se que para $e = 0,030$ m $\Psi \approx 1$, logo a espessura mínima de parede para o qual o molde pode ser considerado semi-infinito é $e = 0,030$ m.

b) tempo total de solidificação considerando o molde semi-infinito.

Aplicando a equação (5.21):

$$t = \Psi \theta \left[\frac{\rho_s c_s}{4k_s} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right]$$

onde são dados (Tabela 3.1):

p/ o metal: Sn

p/ o molde: Aço

$$c_s = 260 \text{ J/Kg.K}$$

$$c_m = 670 \text{ J/Kg.K}$$

$$\rho_s = 7.200 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_m = 7.800 \text{ Kg/m}^3$$

$$k_s = 46 \text{ J/m.s.K}$$

$$k_m = 29,3 \text{ J/m.s.K}$$

$$H = 6.10^4 \text{ J/Kg}$$

$$h_i = 4.970 \text{ J/m}^2 \cdot \text{s.K}$$

$$T_f = 505 \text{ K}$$

$$T_o = 297 \text{ K}$$

b.1) Determinação da constante de solidificação

Aplicando a equação (2.42) tem-se:

$$\sqrt{\pi} \theta \exp(\theta^2) [M + \text{erf}(\theta)] = \frac{c_s (T_f - T_o)}{H}$$

Resolve-se o método iterativo, chutando-se valores para θ e o resultado encontrado foi $\theta = 0,38$.

Como para moldes semi-infinitos $\Psi = 1$

$$t = \theta \left[\frac{\rho_s c_s}{4k_s \theta^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{h_i (T_f - T_o)} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right]$$

e como estamos nos referindo ao tempo total $r_f = 0$, logo:

$$\theta = \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] = 2$$

logo

$$t = 2 [70.456 (V_s/A_i)^2 + 147 (V_s/A_i)]$$

$$\text{mas } \frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o} = \frac{(0,040)^2}{2.0,040} = \frac{0,040}{2} = 0,020 \text{ m}$$

$$t = 2 [70.456 (0,020)^2 + 147 (0,020)] = 73,0 \text{ s}$$

$$t = 73 \text{ s}$$

c) Tempo total de solidificação para molde finito, com

$$e = 0,020 \text{ m.}$$

c.1) Cálculo da constante do sistema metal/molde M

$$M = \sqrt{\frac{k_s c_s \rho_s}{k_m c_m \rho_m}} = \sqrt{\frac{260 \cdot 7200 \cdot 46}{670 \cdot 7800 \cdot 29,3}} = 0,75$$

c.2) Cálculo do fator Ψ

$$\Psi = \left[\operatorname{erf} \left(M \frac{V_m}{V_M} \right) \right]^{-1}$$

$$\frac{V_m}{V_M} = \frac{D^2 - d^2}{d^2} = 1,25$$

$$\text{onde } d = 0,080 \text{ m}$$

$$D = 0,120 \text{ m}$$

$$M \left(\frac{V_m}{V_M} \right) = 0,9375$$

$$\Psi = |\operatorname{erf}(0,9375)|^{-1} = 1,225$$

$$\Psi = 1,225$$

$$t = \Psi t_{\text{semi-inf.}}$$

$$t = 1,225 \cdot 73 = 89,5 \text{ s}$$

$$t = 89,5 \text{ s}$$

d) Velocidade inicial para molde finito e semi-infinito usando a equação (6.6)

$$v_0 = (\beta)^{-1}$$

$$\text{p/ molde semi-infinito } \Psi = 1$$

$$v_0 = (417)^{-1} = 0,0024 \text{ m/s}$$

$$v_0 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s p/ molde semi-infinito e finito.}$$

p/ molde semi-infinito $\Psi = 1$

$$v_o = (417)^{-1} = 0,0024 \text{ m/s}$$

$$v_o = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \quad \text{p/ molde semi-infinito}$$

6.4. PERFIS DE TEMPERATURA

A análise experimental dos perfis de temperatura no metal sólido durante o processo de solidificação conforme apresentados nas figuras 4.12 a 4.17 mostraram que a queda de temperatura é tanto mais acentuada quanto maior for a espessura de parede do molde, tornando-se constante à medida que os moldes possam ser considerados semi-infinitos.

CAPITULO 7

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho permitem que sejam extraídas as seguintes conclusões:

1) O método desenvolvido pode ser utilizado para o estudo da cinética de solidificação dos metais de baixo e médio ponto de fusão em moldes maciços cilíndricos com qualquer espessura de parede, apresentando boa precisão e facilidade de cálculo. A equação que correlaciona o tempo de solidificação com a relação (V_s/A_i) é a seguinte:

$$t = \left[\operatorname{erf} \left(M \frac{V_m}{V_M} \right) \right]^{-1} \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4a_s \phi^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \frac{H \rho_s}{(T_f - T_o) h_i} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right]$$

que na forma simplificada pode ser escrita na seguinte forma:

$$t = \psi \theta \left[\alpha \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + \beta \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right]$$

onde

$$\frac{V_s}{A_i} = \frac{r_o^2 - r_f^2}{2r_o}$$

2) O tempo de solidificação em função da relação (V_s/A_i) é maior para moldes com espessuras de parede finas, decrescendo à medida que se aumenta a espessura de parede do molde até atingir um valor constante para espessuras que possam ser consideradas semi-infinitas.

3) A velocidade de solidificação pode ser obtida através da derivada da equação do tempo, sendo definida por:

$$v = \left\{ \frac{\Psi}{C_1} \left(\frac{r_f}{r_o} \right) \left\{ \left[\frac{C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right)^2 + H^* C_1 \left(\frac{V_s}{A_i} \right) \right] \frac{2}{r_o} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[2 - \left(\frac{r_f}{r_o} \right)^2 \right] \left[\frac{2C_1^2}{4\phi^2} \left(\frac{V_s}{A_i} \right) + H^* C_1 \right] \right\} \right\}^{-1}$$

4) As velocidades de solidificação em função de (V_s/A_i) são menores para moldes com espessuras de parede finas, aumentam à medida que se aumenta a espessura de parede, até atingir valores constantes para espessuras que possam ser consideradas semi-infinitas.

5) Nos moldes maciços, de acordo com a equação (6.4), a velocidade inicial de solidificação depende apenas das propriedades do metal e da resistência térmica na interface metal/molde, sendo igual para cilindros de qualquer raio. A velocidade inicial de solidificação pode ser escrita da seguinte forma:

$$v_o = (\beta)^{-1}$$

6) A determinação da espessura mínima a partir da qual o molde pode ser considerado semi-infinito, pode ser feito com a utilização do fator Ψ desenvolvido, já que o mesmo tende a unidade à medida que a espessura do molde tende a valores semi-infinitos. A equação que define o fator Ψ é a seguinte:

$$\Psi = \left[\operatorname{erf} \left(M \frac{V_m}{V_M} \right) \right]^{-1}$$

7) A análise experimental dos perfis de temperatura no metal sólido durante o processo de solidificação mostraram que a queda de temperatura é tanto mais acentuada quanto maior for a espessura de parede do molde, tornando-se constante à medida que os moldes possam ser considerados semi-infinitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. WEINBERG, F. "The casting of steel". Metallurgical Transactions A, v.6, p. 1971-1985, novembro, 1975.
2. SIMPSON, B.L. "History of the metal casting industry". 2 ed. Chicago, Ed. American Foundrymen's Society, p. 1-20, 1969.
3. GLISKMAN, M.E. "What we do not know about solidification theory". Materials Science and Engineering, v.25, p. 93-101, 1976.
4. TILLER, W.A. "Grain size control during ingot solidification - Part II: Columnar-equiaxed transition". Transaction Society of AIME, v.224, p. 448-459, junho, 1962.
5. FLEMINGS, M.C. "Solidification processing". Metallurgical Transaction, v.5, p. 2121-2134, outubro, 1974.
6. PRATES, M. ; FISSOLO, J. & BILONI, H. "Heat flow parameters affecting the unidirectional solidification of pure metals". Metallurgical Transaction, v.3, p. 1419-1425, junho, 1972.
7. CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C. "Conduction of heat in solids". 2 ed. Londres, Ed. Oxford University Press, p. 282-296, 1959.
8. RUDDLE, R.W. "The solidification of castings". 2 ed. Londres, Ed. The Institute of Metals, 1957.
9. WINEGARD, W.C. "An introduction to the solidification of metals". 1 ed. Londres, Ed. The Institute of Metals, 1964.

10. OHNO, A. "The solidification of metals". 1 ed. Tokio, Ed. Chigin Shokan, 1976.
11. BILONI, H. "Estado atual da pesquisa na área de solidificação de metais e ligas". Metalurgia, v.26, nº 155, p.803-823, outubro, 1970.
12. DAVIES, G.J. "Solidification of casting". 1 ed. Londres, Applied Science, 1973.
13. FLEMINGS, M.C. "Solidification processing". 1 ed. New York, Ed. McGraw-Hill, 1974.
14. CHALMERS, B. "Principles of solidification". 1 ed. New York, Ed. John Wiley, 1964.
15. PRATES, M. & DAVIES, G.J. "Solidificação e fundição de metais e suas ligas". 1 ed. Rio de Janeiro, Ed. Livros Técnicos e Científicos, p. 1-7 e 83-125, 1978.
16. GARCIA, A. "Desenvolvimento e verificação experimental de um modelo matemático para análise da solidificação de metais". Tese de doutorado, UNICAMP, 1978.
17. SANTOS, R.G. "Desenvolvimento de um método para análise da solidificação de metais em geometrias cilíndricas". Tese de doutorado, UNICAMP, 1980.
18. GARCIA, A. & PRATES, M. "Determinação dos tempos e da distribuição de temperaturas na solidificação unidirecional de metais em moldes maciços". Anais do 3º Congresso CBECIMAT, pL 3.1 - L3.10, 1978.

19. PIRES, O.S.; PRATES, M. & BILONI, H. "Cinética de solidificação unidirecional de metais vazados sem superaquecimento". *Metalurgia*, v.29, nº 193, p. 813-820, dezembro, 1973.
20. PRATES, M. "Influência de la capacidad de extracción calórica del sistema metal/molde sobre el proceso de solidificación". Tese de doutoramento, Universidade Nacional del Sur, Argentina, 1971.
21. KREITH, F. "Princípios da transmissão de calor". 3 ed. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, p. 121-129, 1977.
22. INGERSOL, L.R.; ZOBEL, O.J. & INGERSOL, A.C. "The mathematical theory of heat conduction". 1 ed. New York, Ed. McGraw-Hill, 1948.
23. BILONI, H. "Transferência calórica en el sistema metal/molde". *Siderurgia*, v.2, p. 51-71, julho-setembro, 1975.
24. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. "Handbook of mathematical functions". 1 ed. New York, Ed. Dover, p. 295-329, 1965.
25. LIGHTFOOT, N.M.H. "The solidification of molden steel". *Proceedings, London Mathematical Society*, v.31, p.97, 1930.
26. SCHWARTZ, C. "Mathematics of solidification processes in casting of metals". *Zeitschrift für Angereaudt Mathematik und Mechanik*, v.13, p. 202, 1933.
27. LYUBOV, Y. "Doklay Akad. Nauk S.S.S.R. v.68, p. 847, 1949.

28. STEFAN, J. Ann. Phys. u. Chem. v.42, p. 139, 1981.
29. CHVORINOV, N. "Control of the solidification of casting by calculations". Die Giesserei. v.27, p. 177, 201 e 222, 1940.
30. LONDON, A.L. & SEBAN, R.A. "Rate of ice formation". Transaction of the ASME, v.65, p. 771-778, outubro, 1943.
31. MEGERLIN, F. Tese de doutoramento, Tech. Hochschull, Aaden, 1966.
32. ADAMS JR., C.M. "Thermal considerations in freezing". In: Liquid Metals and Solidifications. 1 ed. Cleveland, Ed. American Society for Metals, p. 187-217, 1958.
33. HILLS, A.W.D. "A generalized integral profile method for the analysis of unidirectional heat flow during solidification". Transaction of the Metallurgical Society of AIME, v. 45, p. 1471-1479, julho, 1969.
34. HRYCAK, P. "Problem of solidification with Newton's cooling at the surface". A.I. Ch. Journal, v.9, nº 5, p. 585-589, setembro, 1963.
35. SHIH, Y.P. & TSAY, S.Y. "Analytical solutions for freezing a saturated liquid inside or outside cilindres". Chemical Engineering Science, v.26, p. 809-816, 1971.
36. RILEY, D.S.; SMITH, F.T. & POOTS, G. "The inward solidification of spheres and circular cylinders". International Journal of Heat and Mass Transfer, v.17, p. 1507-1516, 1974.

37. KERN, J. & WELLS, G.L. "Simple analysis and working equations for the solidification of cylinders". Metallurgical Transactions B, v.8, p. 99-105, março, 1977.
38. SANTOS, R.G. & PRATES, M. "Cálculo dos tempos na solidificação de metais em moldes cilíndricos, refrigerados a água". Metalurgia, v.38, nº 290, p. 13-18, janeiro, 1982.
39. SANTOS, R.G. & PRATES, M. "Solidification of metals in cylindrical moulds". In: Solidification Technology in the Foundry and Cost House; Proceedings. Coventry, University of Warwick; The Metal Society, p. 44-48, setembro, 1980.
40. SANTOS, R.G. & PRATES, M. "Cálculo dos tempos na solidificação de metais em moldes cilíndricos refrigerados a água". Anais do XXXVI Congresso da Associação Brasileira de Metais, Recife, v.4, p. 479-494, julho, 1981.
41. GARCIA, A. & PRATES, M. "Cálculo dos tempos e da distribuição de temperatura na solidificação de não ferrosos em moldes refrigerados a água". Metalurgia, v.35, nº 263, p. 677-683, outubro, 1979.
42. GARCIA, A. & PRATES, M. "Mathematical model for the unidirectional solidification of metals". In: Cooled moulds. Metallurgical Transaction B, v.9, p. 449-457, setembro, 1978.
43. PASCHKIS, V. "Study on solidification of steel spheres". Transaction of American Foundrymen's Society, v.53, p.373, 1948.

44. PASCHKIS, V. "Solidification of cylinders". Transaction of American Foundrymen's Society, v.61, p. 142-149, 1953.
45. LONGWELL, P.A. "A graphical method for solution of freezing problems". A.I.Ch. E. Journal, v.4, nº 1, p. 53-57, março, 1958.
46. DUSIMBERRE, G.M. "Numerical analysis of heat flow". 1 ed. New York, Ed. McGraw-Hill, 1949.
47. SARJANT, R.J. & SLACK, M.R. "Internal temperature distribution in the cooling and reheating of steel ingots". Journal of the Iron and Steel Institute, v.177, p. 428 - 444, agosto, 1954.
48. SCHNIEWIND, J. "Solutions of the solidification problem of a one dimensional medium by a new numerical method". Journal of the Iron and Steel Institute, v.201, nº 7, p. 594-601, julho, 1963.
49. KOHN, A. & MORILLON, Y. "Étude mathématique de la solidification de lingots de 12 connes en acier doux at en acier midur". Revue de Metallurgie, p. 321-338, abril, 1965.
50. TAO, L.C. "Generalized numerical solutions of freezing a saturated liquid in cylinders and spheres". A.I.Ch. E. Journal, v.13, nº 1, p. 165-169, janeiro, 1967.
51. TAO, L.C. "Generalized solutions of freezing a saturated liquid in a convex container". A.I.Ch. E. Journal, v.14, nº 5, p. 720-721, setembro, 1968.

52. SANTOS, R.G. "Influência da espessura de parede de molde no tempo de solidificação e na estrutura de fundição da liga eutética alumínio-12% silício (silumin)". (Tese de mestrado, UNICAMP, 1977.
53. SCIAMA, G. "Calcul du temps de refroidissement de jets cylindriques coulés en moules métalliques". *Founderie*, nº 268, p. 267-284, junho-julho, 1968.
54. SANTOS, R.G. & PRATES, M. "Influência da espessura do molde no tempo de solidificação e na estrutura do silumin". *Metalurgia*, v.34, nº 252, p. 767-771, novembro, 1978.
55. SANTOS, R.G. & PRATES, M. "Otimização da espessura de parede do molde em função do tempo de solidificação e da estrutura final de peças fundidas". *Anais da V Conferência Interamericana de Tecnologia de Materiais*, p. 7-12, 1978.
56. RUDDLE, R.W. "A preliminary study of the solidification of castings". *The Journal of the Institute of Metals*, v.77, p. 1-36, 1950.
57. RUDDLE, R.W. & SKINNER, R.A. "Heat extraction at corners and curved surfaces in sand moulds". *The Journal of the Institute of Metals*, v.79, p. 35-36, 1951.
58. SCIAMA, G. "Solidification des moulages-homotetie et facteurs de forme". *Founderie*, nº 276, p. 135-144, março, 1969.

59. SCIAMA, G. & JEANCOLAS, M. "Temps de solidification de piéces élémentaires coulées en sable". *Founderie*, n° 303, p. 239-250, julho, 1971.
60. SCIAMA, G. "Épaisseurs des moules et vitesses de refroidissiment des pièces moulées". *Founderie*, n° 344, p. 143-151, abril, 1975.
61. SMITHELLS, C.J. "Metals reference book". 5 ed. Londres, Ed. Butterworths, 1976.
62. METALS HANDBOOK. 8 ed. Ohio, Ed. American Society for Metals (ASM), v.8, 1975.
63. GARCIA, A. & PRATES, M. "A versatile technique for characterization of metal/mould heat transfer and correlations with thermal and structural effects". In: *Solidification technology in the foundry and casthouse*. Ed. The Metals Society, Londres, p. 33-40, 1983.

APÊNDICE 1

SIMBOLOGIA UTILIZADA

1. Parâmetros dimensionais

- a - difusividade de temperatura
- A - área de troca de calor
- c - calor específico
- C_1 - constante = h_i/k_s
- C_2 - constante = $h_i^2/k_s \rho_s c_s$
- e - espessura de parede do molde
- E_0 - parcela virtual da espessura do molde
- f - distância do ponto de início até o ponto de solidificação total no ponto considerado
- h - coeficiente de transmissão de calor
- H - calor latente de fusão
- k - condutibilidade térmica
- ℓ - altura do molde cilíndrico
- P - fator de Gulyeaev
- q - fluxo de calor por unidade de área
- Q - quantidade de calor
- r - distância radial a partir do centro em sistemas me
tal/molde cilíndricos
- r_0 - raio do molde
- r_f - raio da interface sólido/líquido
- S - espessura solidificada

- S_o - espessura virtual previamente solidificada
 S' - espessura solidificada no sistema virtual do modelo de Garcia e Prates
 t - tempo de solidificação
 t' - tempo no sistema virtual do modelo de Garcia e Prates
 \bar{t} - tempo experimental médio de solidificação
 T - temperatura
 T_o - temperatura do meio que extrai calor
 T_f - temperatura de fusão
 T_v - temperatura de vazamento
 v - velocidade de solidificação
 v_o - velocidade inicial de solidificação
 v_a - velocidade de arraste do papel
 V - volume
 V_M - volume de metal total
 x - distância da interface metal/molde
 x' - distância da interface metal/molde no sistema virtual do modelo de Garcia e Prates
 x, y, z - coordenadas cartesianas
 α - constante das equações representativas da cinética de solidificação
 β - constante das equações representativas da cinética de solidificação
 θ - fator de correção usado para estender a equação da cinética de solidificação de geometrias planas para geometrias cilíndricas = $[2 - (r_f/r_o)^2]$

- ρ - densidade
- σ - desvio padrão
- \emptyset - constante de solidificação
- Ψ - fator de correção usado para estender a equação da ci
nética de solidificação em geometrias cilíndricas pa
ra moldes semi-infinitos para os moldes finitos

2. Parâmetros adimensionais

M - constante = $\sqrt{k_s \rho_s c_s / k_m \rho_m c_m}$

N - constante = $\sqrt{a_s / a_m}$

3. Sub-índices utilizados na identificação de grandezas relati vas ao sistema metal/molde

- c - molde cilíndrico
- i - interface metal/molde
- l - metal líquido
- m - molde
- p - plana
- s - metal sólido
- M - metal

4. Funções Matemáticas

$\text{erf}(x)$ - função erro

$\text{erfc}(x)$ - função erro complementar

$\text{exp}(x)$ - função exponencial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

APÊNDICE 2

Definição e propriedades da função-erro (erf) e da função-erro complementar (erfc) (24).

a) Definição:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) \, du$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-u^2) \, du$$

b) Propriedades:

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\operatorname{erf}(-\infty) = -1$$

c) Derivada:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$$

APÊNDICE 3

Valores experimentais do tempo médio (\bar{t}) e do desvio padrão (σ) em função da relação (V_S/A_i) (Estanho e Chumbo)
(Tabelas A-3.1 e A-3.2)

$\frac{V_s}{A_i} \times 10^{-3}$ (m)	ESPESSURA DO MOLDE (e)									
	e = 0,010 m		e = 0,015 m		e = 0,020 m		e = 0,030 m		e = 0,050 m	
	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8,33	26,28	1,39	18,36	1,76	16,44	1,68	15,48	1,16	12,84	0,89
11,25	44,16	0,45	28,20	1,10	27,60	2,76	25,80	1,85	24,12	2,74
13,33	60,48	1,16	41,64	1,04	38,04	1,84	36,48	1,62	32,64	0,72
14,58	66,00	2,96	49,68	2,69	45,0	2,40	42,36	1,54	39,36	2,72
15,00	78,24	1,72	59,28	0,96	53,76	1,20	49,80	1,42	45,84	2,06

Tabela A-3.1 - Estanho/Molde Polido

$\frac{V_s}{A_i} \times 10^{-3} \text{ (m)}$	ESPESSURA DO MOLDE (e)									
	e = 0,015 m		e = 0,020 m		e = 0,030 m		e = 0,050 m			
	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]	\bar{t} [s]	σ [s]		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
8,33	11,04	0,58	10,50	1,07	8,02	0,44	0,44	0,96		
11,25	16,62	0,24	17,82	0,36	17,20	0,93	15,72	1,17		
13,33	29,16	1,59	25,14	0,61	26,48	0,74	25,58	0,44		
14,58	33,84	0,57	33,54	0,66	31,80	0,94	31,30	0,40		
15,00	41,40	0,42	39,60	0,32	38,44	0,40	38,10	0,45		

Tabela A-3.2 - Chumbo/Molde Polido