

ESTÉ EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR MAURO HUGO MATHIAS

E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 17, 12, 1998

  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de  
Processamento de Sinais na Caracterização de  
Estruturas Mecânicas**

Autor : **Mauro Hugo Mathias**

Orientador: **Paulo Roberto Gardel Kurka**

12/98

M426a

36650/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DPM**

**Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de  
Processamento de Sinais na Caracterização de  
Estruturas Mecânicas**

Autor : **Mauro Hugo Mathias**

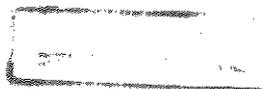
Orientador: **Paulo Roberto Gardel Kurka**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998  
S.P. - Brasil



5455006

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	Ex.
	90/36650
	229/99
	<input type="checkbox"/> D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	05/03/99
N.º CPD	

CM-00121340-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M426a

Mathias, Mauro Hugo

Aplicação da técnica paramétrica ARMA de processamento de sinais na caracterização de estruturas mecânicas. / Mauro Hugo Mathias.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Identificação de sistemas. 2. Processamento de sinais. 3. Análise modal. I. Kurka, Paulo Roberto Gardel. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**DPM**

**TESE DE DOUTORADO**

**Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de  
Processamento de Sinais na Caracterização de  
Estruturas Mecânicas**

Autor : Mauro Hugo Mathias

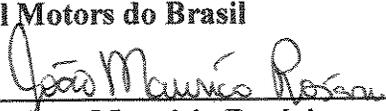
Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente  
UNICAMP - FEM

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Robson Pederiva  
FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni  
EESC/USP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Gabriel Félix Gueler  
General Motors do Brasil

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Maurício Rosário  
FEM/UNICAMP

Campinas, 17 de dezembro de 1998

## **Dedicatória**

À minha esposa Denise e meus filhos Liliane, Larissa e Leandro

Aos meus pais Wilson (In memorian) e Lêda.

Aos meus sogros Genivaldo e Edna

## **Agradecimentos**

Ao professor Doutor Paulo Roberto Gardel Kurka pela atenção cordial e orientação dedicada a este trabalho.

Ao professor Dr. John A. Brandon, da University of Wales-College of Cardiff, pelo apoio técnico, pela inestimável amizade e por ter me oferecido a oportunidade de realizar o programa sanduíche em seu instituto. Extensivo a todos os membros da Division of Mechanical Engineering pela atenção demonstrada.

À CAPES pelo suporte financeiro à bolsa em esquema sanduíche na University of Wales - College of Cardiff, Division of Mechanical Engineering, através do projeto Nº 1473/92-8.

Aos amigos Dr. Roberto Arthur Cornetti, Dr. Victor Orlando Gamarra Rosado, Márcio Boccalletti pelo valioso apoio, e aos amigos do departamento de Mecânica da FEG-UNESP que colaboraram ao desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo Amauri pelo seu valioso suporte ao desenvolvimento da parte experimental do presente trabalho.

Ao colega Cleudimar por gentilmente ter concedido informações valiosas relativas ao modelo de elementos finitos e ao desenvolvimento do procedimento experimental .

Aos inestimáveis amigos da *Heath Evangelical Church* pela acolhida espiritual durante minha estada em Cardiff.

*To every thing there is a season,  
and a time to every purpose  
under the heaven.*

***Ecclesiastes 3:1***

## **Resumo**

MATHIAS, Mauro Hugo, Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de Processamento de Sinais na Caracterização de Estruturas Mecânicas, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 117p. , Tese (Doutorado)

Esta tese trata do estudo de teorias, estratégias e metodologias de identificação de sistemas aplicado à análise de sinais de estruturas mecânicas. A abordagem do problema de identificação no contexto das áreas afins de análise de sinais, análise de séries temporais e análise modal é também discutida no trabalho. O enfoque central da pesquisa consiste em aplicar técnicas paramétricas do domínio do tempo na análise modal de estruturas mecânicas. Os procedimentos de identificação adotados descrevem o sistema estrutural através de modelos derivados da método Auto Regressivo de Médias Móveis (ARMA), correlacionando os parâmetros modais e coeficientes do modelo. Testes de simulação foram desenvolvidos para demonstrar as características dos métodos de identificação estudados. Finalmente um modelo modal experimental foi desenvolvido. Os parâmetros modais identificados do modelo foram estabelecidos a partir dos sinais de excitação e resposta medidos na estrutura através do procedimento experimental.

### *Palavras chave*

- Identificação de sistemas, estudo de séries temporais, estimação de parâmetros, análise modal, análise de sinais, modelos paramétricos, transformada Z.

## **Abstract**

MATHIAS, Mauro Hugo, Application of the ARMA Parametric Technique to Signal Processing on Mechanical Structures Characterisation, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 117p., Tese (Doutorado).

This thesis is related to system identification theories, strategies and methodologies applied to signal analysis of mechanical structures. The approach of the identification problem in the setting of signal analysis, time series models and modal analysis was also discussed in the work. The central subject of the research is outlined on the use of parametric time domain techniques applied to mechanical structural modal analysis. The identification procedures describes the structural system by models derived from an Auto Regressive Moving Average method (ARMA), highlighting the relations between modal parameters and model coefficients. Simulated test cases have been developed to demonstrate the characteristics of the identification methods studied. Finally an experimental modal model has been developed. The identified modal parameters were established from the excitation and response signals measured on the structures through the experimental test.

### *Key words*

- Systems identification, time series analysis, parameter estimation, modal analysis, signal analysis, parametric models, Z transform.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2. Identificação de sistemas dinâmicos</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução	7
2.2 Aspectos do problema de identificação	8
2.3 Identificação de sistemas dinâmicos	10
2.4 Classificação dos métodos de identificação	13
2.4.1 Comparação dos métodos de identificação no domínio do tempo e da frequência	14
2.5 Identificação no contexto das teorias de controle e análise modal	16
2.6 Comentários gerais	17
<b>3. O problema de identificação aplicado à análise modal</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução	19
3.2 Equações básicas do modelo modal	22
3.3 Formulação contínua e discreta da função de transferência	27
3.3.1 Representação contínua da função de transferência	27
3.3.2 Representação discreta da função de transferência	28
<b>4. Métodos de identificação no domínio do tempo</b>	<b>32</b>
4.1 Introdução	32

4.2	Aspectos da formulação dos métodos determinísticos	34
4.3	Discussão dos principais métodos determinísticos	37
4.3.1	Método da Polireferência	37
4.3.2	Método ERA	38
4.3.3	Método de Ibrahim	39
4.4	Abordagem dos métodos determinísticos via modelo ARMA	39
4.5	Comentários gerais	40
<b>5.</b>	<b>Procedimento de estimação de parâmetros e critérios de escolha da ordem de modelos paramétricos ARMA (AR)</b>	<b>41</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>41</b>
5.2	Modelos derivados da estrutura ARMA e principais propriedades	43
5.2.1	Descrição dos modelos da classe ARMA	43
5.2.2	Métodos de estimação aplicado aos modelos da classe ARMA	48
5.2.3	Descrição do modelo AR	50
5.3	Relação dos parâmetros modais com os coeficientes do modelo paramétrico	54
5.4	Critérios de definição da ordem de modelos	55
5.5	Definição do procedimento de identificação adotado	59
<b>6.</b>	<b>Aplicações</b>	<b>61</b>
6.1	Introdução	61
6.2	Simulações numéricas	61
6.2.1	Simulação numérica - caso 1	62
6.2.2	Simulação numérica - caso 2	69
6.3	Aplicação experimental	70
6.3.1	Caracterização da estrutura	70
6.3.2	Aquisição e processamento de sinais	73
6.3.3	Procedimento de análise	77
6.3.4	Apresentação dos resultados	78

<b>7. Conclusões e sugestões</b>	<b>96</b>
7.1 Conclusões gerais	96
7.2 Sugestões para futuros desenvolvimentos	98
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>99</b>
<b>Anexo I Equipamentos utilizados no procedimento experimental</b>	<b>117</b>

## Lista de figuras

2.1	Representação diagramática do problema de identificação	10
6.1	Filtro linear de entrada $f(k)$ e saída $y(k)$	46
6.1	Critério AIC aplicado ao modelo AR	63
6.2	Correlograma da componente residual do modelo AR	68
6.3	Correlograma da componente residual do modelo ARMA	68
6.4	Sistema dinâmico estrutural de três graus de liberdade	69
6.6	Estrutura de Alumínio de teste	71
6.6	Detalhe dos pontos de medidas nas travessas da estrutura	72
6.7	Detalhe dos pontos de medida no quadro da estrutura	73
6.8	Detalhe do ponto de excitação na estrutura	73
6.9	Esquema do aparato experimental de aquisição e processamento de sinais	74
6.10	Foto do aparato instrumental	75
6.11	Sinal típico de excitação na coordenada $z_{315}$	76
6.12	Sinal de aceleração na coordenada $z_4$	77
6.13	Evolução do fator de amortecimento versus ordem do modelo	81
6.14	Evolução da ordem da componente de 840 Hz do ponto $z_{128}$	82
6.16	Evolução da ordem do modelo em componente de baixa frequência	83
6.16	Esquema do primeiro modo de vibrar (73 Hz) obtido do modelo experimental	88
6.17	Esquema do primeiro modo de vibrar (73 Hz) obtido do modelo de elementos finitos	89
6.18	Esquema do segundo modo de vibrar (170 Hz) obtido do modelo experimental	90
6.19	Esquema do segundo modo de vibrar (170 Hz) obtido do modelo de elementos finitos	91
6.20	Esquema do terceiro modo de vibrar (355 Hz) obtido do modelo experimental	92
6.21	Esquema do terceiro modo de vibrar (355 Hz) obtido do modelo de elementos finitos	93
6.22	Esquema do quarto modo de vibrar (472 Hz) obtido do modelo experimental	94
6.23	Esquema do quarto modo de vibrar (472 Hz) obtido do modelo de elementos finitos	95

## Lista de tabelas

6.1	Pólos e resíduos do modelo de 4 graus de liberdade	62
6.2	Performance dos estimadores AR aplicado ao sinal de 2048 pontos	64
6.3	Parâmetros modais estimados do modelo ARMA aplicado ao sinal de 2048 pontos	64
6.4	Parâmetros modais estimados do modelo AR(41) aplicado ao sinal de 512 pontos	65
6.5	Parâmetros modais estimados do modelo ARMA aplicado ao sinal de 512 pontos	65
6.6	Parâmetros modais estimados do modelo AR(30) aplicado ao sinal de 256 pontos	66
6.7	Estimação de parâmetros via modelo ARMA aplicado ao sinal $x_3(t)$	70
6.8	Parâmetros estimados em coordenadas vizinhas	79
6.9	Parâmetros estimados em diferentes localizações	80
6.10	Parâmetros identificados no sistema segundo as diferentes direções	84
6.11	Comparação de resultados de diferentes modelos	85
6.12	Análise do critério de confiança modal	86

## Nomenclatura

$[A], [B], [E], [G], [D]$	Matrizes da equação de estado
$[A(z)], [B(z)]$	Polinômios da função de transferência discreta no tempo
$e(k)$	Componente discreta de um ruído branco
$f_i$	Frequência natural do modo $i$
$[F]$	Vetor $2n \times 1$ de forças generalizadas
$[G(z)]$	Função de transferência de um filtro no domínio transformada Z
$\{g_k\}$	Função de Green (função resposta a um impulso unitário)
$[H(s)]$	Matriz função de transferência
$[H(t)]$	Matriz resposta ao impulso
$[H(z)]$	Função de transferência no domínio da transformada Z
$[L]$	Matriz dos fatores de participação modal
$\langle L \rangle_k$	Vetor linha $1 \times n_i$ das componentes do fator de participação modal de um modo $k$
$[M], [C]$ e $[K]$	Matrizes simétricas $n \times n$ , de massa, amortecimento e rigidez
$[R_k]$	Matriz dos resíduos $n_o \times n_i$
$T$	Período de amostragem
$[V]$	Matriz de autovetores
$\{V\}_k$	Vetor dos coeficientes dos modos de vibrar
$\{y\}, \{f\}$	Vetores $n \times 1$ de excitação e resposta
$\{y(k)\}, \{f(k)\}$	Vetores discretos no tempo das componentes de excitação e resposta
$\{Y\}$	Vetor de estado $2n \times 1$
$\lambda_k$	Pólo associado a um modo $k$
$\alpha_i$	Coefficientes autoregressivos (AR)

$\beta_i$	Coefficientes de médias móveis (MA)
$[\Phi(t)]$	Matriz transição de estado
$[\Lambda]$	Matriz diagonal dos autovalores
$\{\phi_k\}$	Autovetor $n \times 1$ referente ao modo vibrar $k$
$\gamma_i$	Coefficientes da componente exógena
$\sigma_i^2$	Variância da componente de excitação
$[\Psi]$	Matriz modal $2n \times 2n$
$\{\Psi_k\}$	Matriz coluna $2n \times 1$ dos autovetores
$\xi_i$	Fator de amortecimento do modo $i$
$\lambda_k$	Autovalor associado a um modo $k$
AIC	Sigla para o critério de informação de Akaike
AR	Sigla do modelo autoregressivo
ARMA	Sigla do modelo autoregressivo de médias móveis
ARMAV	Sigla do modelo autoregressivo de médias móveis vetorial
ARMAX	Sigla do modelo autoregressivo de médias móveis com entrada exógena
FPE	Sigla para o critério do erro final de predição
ERA	Sigla do modelo “Eigensystem realisation algorithm”
ITD	Sigla do método do domínio do tempo de Ibrahim
MA	Sigla de um processo de médias móveis
MAC	Sigla do critério de confiança modal
MIMO	Sigla para sistemas multivariados (“Multiple Input Multiple Output”)
Ryy	Sigla para função de autocorrelação
SVD	Sigla para o método da decomposição do valor singular
SISO	Sigla para sistemas univariados (“Single Input Single Output”)

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de séries temporais, amplamente aplicado nas áreas de engenharia e ciências, têm seus princípios fundamentados na teoria estatística de processos probabilísticos e estocásticos. O campo de aplicação da teoria de séries temporais é vasto em razão de sua capacidade de revelar relações estatísticas e relações causais de um processo em análise [14]. Na área da análise estrutural de sistemas o uso de séries temporais possibilita a estimação de modelos físicos que guardam características da dinâmica e do comportamento de sistemas. Assim modelos paramétricos formulados com base em séries temporais têm sido utilizados com sucesso em várias aplicações de engenharia, tais como na teoria de identificação modal de sistemas, no monitoramento de máquinas, etc.

A evolução histórica da teoria de análise de séries temporais emergiu do estabelecimento dos modelos paramétricos autoregressivo (AR) e de médias móveis (MA) desenvolvidos nos anos 20 por Yule [153], seguido do desenvolvimento do modelo autoregressivo de médias móveis (ARMA) proposto por Wald [146]. A formulação desses modelos foi fundamentada na teoria estatística com o objetivo de obter equações paramétricas que melhor se ajustassem a um conjunto de dados de análise. O avanço significativo na teoria de identificação de sistemas foi marcado pela utilização dos modelos aplicados à estudos de processos econômicos, propostos em [15]. Paralelamente à evolução ocorrida na teoria de análise de sistemas, grande progresso foi também observado na área de processamento de sinais a partir dos anos 60. O progresso ocorrido foi graças ao prodigioso avanço da tecnologia computacional e ao aparecimento de estimadores mais robustos.

Na época a emergente classe de estimadores foi classificada como *técnicas modernas* de análise espectral [26,124] contrastando com as *técnicas clássicas* de identificação, que se baseavam em modelos de estimação de sinais do domínio da frequência. Os precursores das *técnicas modernas* de análise espectral apareceram no decorrer da segunda grande Guerra em razão da necessidade da análise de sinais discretos provenientes de radares. Como conseqüência do aparecimento dessa classe especial de sinais discretos foi necessário o desenvolvimento de técnicas matemáticas de análise espectral, equivalentes aos pares transformados (ou dual) aplicados à análise de sinais analógicos. O passo inicial para a obtenção das transformadas de seqüências discretas foi estabelecido por Hurewicks [66] e posteriormente o conceito da transformada Z foi introduzido por Ragazzini [127] e Zadeh [154]. A idéia central do par transformado discreto consiste na definição matemática do campo de domínio dos sinais de forma análoga dos pares transformados de Fourier e Laplace, usualmente aplicados na análise de sinais analógicos. Para o sinal discreto o campo de domínio foi estabelecido por números inteiros e o respectivo par transformado foi estabelecido no domínio de um círculo  $\{e^{jw}, -\pi \leq w \leq \pi\}$  [33]. A partir da análise dos pares transformados do sinal discreto e contínuo, Jury [74] estabeleceu a relação de equivalência entre os modelos discreto e contínuo.

No campo da análise estrutural de sistemas dinâmicos a utilização dos modelos paramétricos derivados do modelo ARMA foi consolidada a partir dos trabalhos desenvolvidos por Gersh [53,54], Wu [149] e Pandit [122,123]. A partir desse marco diversas técnicas baseadas no estudo de séries temporais foram propostas na área de análise modal de estruturas. Especificamente as novas técnicas foram apresentadas em duas classes distintas, denominadas *técnicas determinísticas* (ou de resposta livre) e *técnicas estocásticas*. Estas duas classes de modelos paramétricos serão objeto de discussão em capítulos específicos do presente trabalho.

As *técnicas estocásticas*, que são o alvo principal do presente estudo, aparecem na literatura sob diferentes formas, de acordo com a estrutura dos modelos. Os modelos estocásticos podem apresentar-se de diversas maneiras em função das informações de entrada e saída do sistema, da caracterização de um modelo de ruído ou não, de uma estrutura

univariada ou multivariada etc. Os modelos da classe ARMA aparecem na literatura como uma das técnicas mais bem consolidadas na teoria de análise de sinais, controle e identificação. A propriedade de aplicação desses modelos decorre da forte demanda de métodos adequados para a identificação de estruturas operando em condições reais de carregamento.

O presente trabalho é relacionado com o estudo de métodos estocásticos de identificação no domínio do tempo aplicado à análise modal de estruturas. Um estudo teórico é formulado e um processo de identificação é implementado para a análise de sistemas simulados e experimental. A motivação do trabalho, que forma a principal parte desta tese, provêm do consenso que a teoria de identificação não pode operar somente no vácuo da busca de um algoritmo ideal, e sim operar num contexto do melhor entendimento das relações da utilização dos métodos de análise de modelos paramétricos com respeito às diversas áreas de aplicação. O projeto é interdisciplinar envolvendo ferramentas das áreas de: (i) identificação de sistemas e análise de séries temporais, (ii) modelagem estatística e modelos de previsão, (iii) análise de sinais digitais, e (iv) técnicas computacionais. A pesquisa foi desenvolvida através de um processo amplo de pesquisa bibliográfica trazendo formulações e conceituações para a aplicação no campo específico da engenharia mecânica. Após uma análise dos diferentes métodos modelos ARMA e ARMAX foram adotados para identificação dos sistemas. Os parâmetros modais dos sistemas analisados foram obtidos com base nos coeficientes dos modelo de equações de diferenças.

Este trabalho em essência está inserido na linha de pesquisa do Grupo de *Processamento de Sinais e Análise de Sistemas Dinâmicos* (GPSASD) do Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia da Unicamp. Este grupo vem propondo estratégias aplicadas ao processamento de sinais e análise de sistemas dinâmicos voltados ao problema de vibrações em máquinas e sistemas mecânicos. Diversos trabalhos desenvolvidos pelo grupo contam com o suporte de órgãos de pesquisa nacionais e internacionais. Dentre as pesquisas desenvolvidas pode-se citar os trabalhos desenvolvidos por Kurka que tratam de utilização de técnicas de identificação paramétrica, formuladas com base no modelo de Prony [126] para a identificação de parâmetros modais de sistemas mecânicos [79,80,87,88].

Dos trabalhos desenvolvidos no *grupo* podem-se enumerar os seguintes:

- As pesquisas Trieger [138,139,140] que abordam uma sistematização do modelo de Prony aplicado à identificação de parâmetros modais de sistemas estruturais.
- Nos trabalhos de Bazán [6,7,8] e Kurka [84,85] foram desenvolvidas técnicas numéricas visando a otimização do processo de identificação paramétrica no domínio do tempo. Estes trabalhos vem ao encontro com a tendência da utilização de técnicas identificação baseadas nos métodos de decomposição do valor singular (SVD). Em síntese, os métodos propostos objetivaram a estruturação do processo de estimação de parâmetros a partir da **seleção de componentes dos sinais que apresentem um rico conteúdo de informações**. Estas técnicas também foram aplicadas na obtenção da ordem de modelos paramétricos.
- A utilização de técnicas de identificação no domínio da frequência são tratadas nos trabalhos de Dias [45] e Kurka [89].
- Na dissertação de mestrado de Gomes [57] um método multivariado de identificação paramétrica é aplicado na identificação modal de um sistema estrutural.
- Em trabalhos conjuntos do grupo foram ainda utilizados métodos sub-ótimos de identificação, baseados em técnicas de regularização e fatorização de Gauss para a solução de mínimos quadrados de sistemas sobredeterminados [78,86,90,91].
- Nos trabalhos de Araújo [3] e Kurka [81,82,83] são estudados técnicas de síntese modal de estruturas mecânicas. Ressalta-se que o sistema estrutural estudado em [3] foi utilizado como referência ao desenvolvimento experimental desenvolvido na presente pesquisa.
- Como resultado da presente pesquisa foram desenvolvidos trabalhos conjuntos com membros da Universidade de Wales no Reino Unido. Os trabalhos desenvolvidos [18,19,20,21,104,105] em grande parte são relacionados com a manipulação de séries temporais e utilização de modelos paramétricos da classe autoregressivo de médias móveis (ARMA).

A contribuição deste trabalho foi propor estratégias e metodologias na construção de modelos para a identificação de sistemas estruturais com base na teoria de séries temporais estocásticas. O ponto fundamental do estudo é baseado na aplicabilidade dos modelos para a análise modal de estruturas. É esperado estabelecer uma descrição dos métodos e caminhos práticos para implementações.

Em seguida é apresentado de forma resumida o conteúdo dos capítulos da tese:

No capítulo 2 é estabelecido o problema de identificação no contexto da engenharia, juntamente com uma discussão dos métodos clássicos de identificação do domínio da frequência e métodos do domínio do tempo.

No capítulo 3 é dada ênfase à descrição e formulação do modelo modal aplicado aos problemas de identificação estrutural. É discutido ainda a representação do modelo modal discreto e contínuo no tempo.

No capítulo 4 são discutidos aspectos dos métodos de identificação paramétricos do domínio do tempo, abordando os métodos de identificação determinísticos e estocásticos.

No capítulo 5 é apresentada a formulação do modelo ARMA e os modelos derivados dessa estrutura. Ênfase especial é dada ao modelo ARMAX. Neste capítulo também são abordados: (i) os procedimentos de estimação dos parâmetros dos modelos estocásticos, (ii) aspectos do método de estimação de parâmetros, (iii) o método de obtenção dos parâmetros a partir dos coeficientes do modelo paramétrico, (iv) critério da definição da ordem do modelo, (v) estabelecimento do procedimento de identificação adotado.

No capítulo 6 os modelos de identificação são implementados na análise de sinais provenientes de sistemas simulados numericamente com o objetivo de ilustrar a performance dos modelos da classe ARMA. Um procedimento de identificação via o modelo ARMAX foi também implementado na análise de sinais obtidos de um processo experimental realizado com uma estrutura mecânica que apresenta vários modos de vibrar .

Finalizando, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos.

## **Capítulo 2**

### **Identificação de sistemas dinâmicos**

#### **2.1 Introdução**

Este capítulo tem por finalidade apresentar a estrutura do problema de identificação, evidenciando os princípios básicos e conceitos da área estrutural, a qual é a ferramenta principal para o desenvolvimento do estudo em questão.

O campo da análise estrutural é classificado segundo Natke [117] em “problema direto” e “problema inverso”. O problema direto, também conhecido como análise de sistemas, consiste na determinação das variáveis de saída de um sistema dinâmico com base nas variáveis de entrada e propriedades dinâmicas do sistema em análise.

A identificação estrutural é um dos ramos do problema inverso, que é definida por Berman [13] como o processo em que as variáveis de entrada e saída do sistema são empregadas na determinação de modelos matemáticos representativos das características físicas e dinâmicas da estrutura. A distinção dos aspectos da natureza do modelo são fundamentais na classificação do processo de identificação. Os aspectos referidos podem ser relacionados com propriedades lineares ou não-lineares, estacionários ou não-estacionários, etc.

O campo de abrangência do problema de identificação de sistemas engloba diferentes ramos da ciência e conseqüentemente a terminologia utilizada na literatura não é única. No contexto generalizado as aplicações no campo da identificação podem ser divididas como um processo ao longo do tempo, em que informações do passado são aplicadas na análise de comportamento e interpretação de operação; informações do presente são aplicadas na análise de comportamento e monitoramento e informações do futuro são aplicadas à análise de comportamento e predição. Eykhof [47] classifica o problema de obtenção de modelos matemáticos que representem a dinâmica da estrutura em: (i) modelagem e (ii) estimação. Ljung [98] aborda o problema da mesma forma enfatizando ainda que o mesmo consiste num processo de busca de um modelo representativo através da análise de dados observados em **sistemas dinâmicos**.

Na modelagem o sistema é dividido em diversos subsistemas, cujas propriedades são bem conhecidas e entendidas com base na análise de leis físicas, teorias matemáticas, experiências prévias e fundamentos estabelecidos em trabalhos empíricos. O processo de modelagem possibilita a obtenção aproximada da estrutura do modelo ou mesmo de alguns parâmetros essenciais, podendo ser efetuado independentemente de medidas específicas no sistema.

A estimação é o processo que consiste na obtenção de parâmetros que representem a dinâmica do sistema, admitindo-se as seguintes hipóteses: (i) que os parâmetros de interesse governam a dinâmica do processo e se manifestam através do desenvolvimento da saída do sistema ao longo do tempo, (ii) que o processo é afetado por distúrbios de entrada e saída. Os parâmetros do modelo são obtidos com base no modelo de análise previamente definido, no processo de identificação e nas características dos sinais medidos no sistema.

## **2.2 Aspectos do problema de identificação**

Na identificação de sistemas aplicada ao campo da engenharia, o uso de informações de características físicas e empíricas do processo devem ser uma regra, de modo que não sejam envidados esforços na identificação de características já conhecidas [65]. Conseqüentemente o problema de identificação é dividido em duas classe estruturais:

1. **“Black-box”**. Estrutura em que não se tem nenhum conhecimento prévio das propriedades básicas do sistema, tais como: linearidade, características físicas, etc. Neste tipo de estrutura, também conhecida como identificação completa, os parâmetros são vistos como veículos de ajuste de dados e não refletem qualquer aspecto físico do sistema. A solução do problema é atrativa do ponto de vista teórico mas normalmente é complexa. Atualmente com a evolução verificada na área de redes neurais a perspectiva de uso desta estrutura de modelo tem se tornado mais viável [59,61,119]. Em [95] é apresentada uma interessante abordagem de identificação modal em que é feita a correspondência do modelo ARMA e modelo de redes neurais ADALINE.
2. **“Gray-box”**. Estrutura em que o conhecimento prévio de leis físicas e relações que descrevem o sistema são adotadas na construção do modelo estrutural. Esta estrutura também conhecida como *identificação parcial* apresenta solução mais simples se comparada com a identificação completa.

Em aplicações (reais) do campo da engenharia é possível obter diversas informações a respeito do sistema em análise e conseqüentemente o problema de identificação insere-se na estrutura **“gray-box”**. As informações prévias referidas estão associadas aos seguintes aspectos: à hipótese da função resposta ao impulso ser finita, a utilização do modelo, o conhecimento da matriz de covariância e função densidade de probabilidade dos distúrbios etc. Neste contexto o problema é denominado estimação de parâmetros embora, usualmente o termo identificação de parâmetros seja aplicado sem perda de generalidade.

Assim a definição de estimação de parâmetros pode ser formulada como a determinação experimental dos valores dos parâmetros que governam a dinâmica do comportamento do sistema. No caso específico da identificação modal o processo de estimação é visto como um veículo de obtenção dos parâmetros que caracterizam a função de transferência do sistema [148]. O processo pode ser ainda estendido à identificação de parâmetros físicos do sistema em termos das matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

### 2.3 Identificação de sistemas dinâmicos

O problema de identificação de sistemas dinâmicos consiste na obtenção de um modelo representado por uma equação matemática, que relate a entrada  $\{f\}$  e saída  $\{x\}$  do sistema, conforme mostrado na Figura 2.1 [117]. A seqüência de entrada consiste de estímulos externos, os quais normalmente podem ser manipulados pelo observador. Outros sinais presentes no sistema são denominados distúrbios (ruídos) que podem ser classificados em dois tipos: diretamente medidos e aqueles que são observados através de suas influências na saída. Os ruídos podem estar presentes na entrada e saída do sistema e são a principal causa de imprecisões nos modelos de identificação. Conseqüentemente o processo de determinação dos parâmetros do sistema é eminentemente estatístico e a identificação é vista como realizações de uma variável aleatória (vetor aleatório) com função densidade de probabilidade específica.

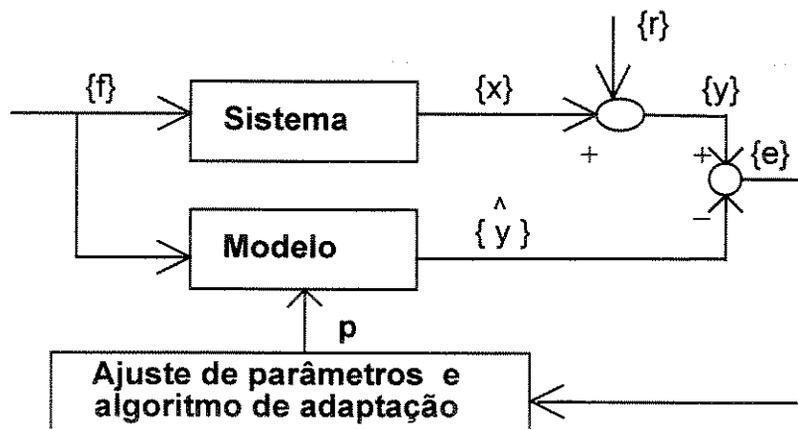


Figura 2.1. Representação diagramática do problema de identificação

A representação adotada na Figura 2.1 é genérica podendo ser distinguida como uma representação de um modelo de identificação espacial discreto ou contínuo no tempo. As técnicas de identificação baseadas na representação discreta do sinais no tempo são mais usuais, dado que a coleta e tratamento dos sinais são normalmente efetuadas na forma digital. Abordagens de identificação, baseadas em modelos contínuos no tempo [141], são fundamentadas no senso original da teoria de cálculo, utilizando como ferramentas derivadas, integrais e operadores contínuos no tempo, etc. A utilização de tal técnica de identificação justifica-se em situações onde ocorrem incertezas no processo de amostragem e discretização de modelos não conhecidos.

Os procedimentos essenciais no processo de identificação de parâmetros podem ser resumidos em :

1. **Aquisição de sinais.** Os dados de entrada e saída do sistema são adquiridos através de experimentos específicos em que o usuário deve decidir quando e quais sinais medir. É de fundamental importância neste estágio delimitar o processo em estudo, de modo a definir o que é parte do processo e quais são as variáveis mensuráveis.
2. **Busca de várias estruturas de modelos.** Procedimento conhecido como *modelagem*, que consiste na procura de um conjunto de estruturas com base no prévio conhecimento dos aspectos relativos a cada campo de aplicação da engenharia e das propriedades físicas inerentes ao sistema. Na modelagem o conhecimento relativo às áreas específicas de aplicação é importante e várias hipóteses devem ser abordadas nesta fase. Tais hipóteses são relativas às aplicações de modelos lineares ou não-lineares, discretização espacial e temporal, e consideração do número de entradas e saídas do sistema. Com respeito ao número de entrada e saídas, os modelos são classificados nos de uma entrada e uma saída (“SISO”) e os de várias entradas e várias saídas (“SIMO, MISO, MIMO”) [98].
3. **Seleção do modelo apropriado e caracterização do método de estimação.** Na busca de um *modelo* os aspectos importantes são: a decisão quanto à aplicação do mesmo, a complexidade em termos do número de parâmetros e caracterização dos distúrbios. Os modelos podem ser caracterizados em explanatório, representativo e de predição. Em geral os modelos postulados devem conter um número pequeno de parâmetros em relação ao universo de dados de análise do modelo.
4. **Validação do modelo.** Etapa que visa verificar se o modelo representa o sistema em análise com respeito aos objetivos finais da processo de identificação. Este processo baseia-se na análise de consistência estatística de parâmetros, de modo a verificar se as informações contidas no processo são explicadas pelo modelo.

A validação do modelo pode ser entendida como a base da estrutura dos algoritmos utilizados no processo de identificação de parâmetros e portanto cabe neste contexto discutir os aspectos referentes a esta questão [77].

O problema da validação do modelo pode ser formulado com base nos dados de entrada e saída do sistema,

$$Z_{\tau} = \{Z(t), t \in \tau\}, \quad (2.1)$$

onde  $Z_{\tau}$  corresponde a seqüência de vetores observados no sistema estrutural e  $\tau$  é uma variável que pode ser discreta ou contínua no tempo. Na hipótese de sinais discretos no tempo selecionar um modelo específico  $M(\theta)$ , parametrizado por um vetor  $\theta$  de dimensão finita, que pertence a uma classe de modelos de identificação  $H$ , tal que:

$$M = \{M(\theta) | \theta \in H\}. \quad (2.2)$$

Para dados de entrada contaminados por ruídos, a seleção do modelo baseia-se na escolha de um critério de otimização, o qual pode ser escrito em termos da discrepância entre a saída do sistema e saída estimada  $\hat{y}(t, \theta)$ . O erro de ajuste, definido em termos da discrepância, é conhecido por erro de predição ou ajuste, definido pela expressão,

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t, \theta). \quad (2.3)$$

A seleção ótima do modelo  $M(\theta)$  é obtida com base em um critério preestabelecido, que defina um vetor parâmetro  $\theta$  que minimize o erro  $\{\varepsilon(t, \theta), t \in \tau\}$ . A expressão do funcional que define o critério pode ser escrita na forma discreta por um critério quadrático [132],

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(t_i, \theta) \quad (2.4)$$

Para a minimização do funcional  $J_N$  existem vários métodos de identificação [101], tais como: máxima verossimilhança ("maximum likelihood"), mínimos quadrados, variável

instrumental, etc. A definição do método de minimização do funcional no processo de identificação depende da forma com que os sinais do sistema coletados são manipulados, portanto o processo de identificação pode ser também subdividido em não-recursivo ou "batch" se a identificação não é efetuada em tempo real, e seqüencial (recursiva) no caso da identificação ser processada em tempo real [131].

A identificação é denominada não-recursiva quando uma grande quantidade de dados é coletada no sistema e pós-processada por completo, de modo que os parâmetros são estimados através de um modelo que apresente um critério de ótimo ajuste, de acordo com uma função custo preestabelecida. Normalmente os algoritmos não-recursivos são mais precisos, visto que, com uma grande quantidade de dados a identificação pode ser reprocessada várias vezes [129].

O método seqüencial é usualmente aplicado à sistemas submetidos a condições incertas e que apresentem sinais não-estacionários. O processo de identificação em tais situações deve ser executado em curto período de tempo, de modo que o ajuste de parâmetros estimados é processado após cada instante de amostragem. O tempo de computação requerido no processo é uma fração do período de amostragem. Na identificação seqüencial não há necessidade de sinais de entrada especiais e os dados são armazenados em blocos de acordo com a aquisição em tempo real. As técnicas de identificação seqüencial são amplamente aplicadas no campo de análise de sinais, controle, e análise estrutural de aeronaves [36,143,144].

## **2.4 Classificação dos métodos de identificação**

Os métodos de identificação estrutural de sistemas são classificados em duas categorias distintas, dependendo se operam no domínio do tempo ou domínio da freqüência. As técnicas do domínio do tempo são métodos que requerem a construção de um modelo do sistema e a estimação dos parâmetros do modelo, a partir de históricos de sinais temporais medidos geralmente na entrada e saída do sistema.

Cronologicamente a utilização de métodos no domínio da freqüência no problema de identificação aparecem em primeiro lugar, e por isto são também denominados métodos

clássicos. Tradicionalmente estes métodos são descritos em termos da função resposta em frequência ou matriz resposta ao impulso. O sucesso das técnicas no domínio da frequência consolidou-se em virtude do advento de equipamentos baseados na transformada rápida de Fourier, ao considerável entendimento dos mecanismos de erros pela maioria dos especialistas, sua eficiência computacional e ao fato de não requerer um conhecimento prévio da estrutura e ordem do modelo [23].

A obtenção dos parâmetros modais de um sistema através dos métodos do domínio da frequência são desenvolvidos de forma indireta, através do ajuste de curvas da função de transferência dos dados experimentais a um modelo teórico da função resposta em frequência ou das informações da resposta impulsiva [25]. As técnicas de ajustes são classificadas em termos de uma relação direta de dois sinais observados no sistema aproximando o modelo em sistemas distintos de um grau de liberdade, ou através de um método global de ajuste da função de transferência em termos da influência das várias entradas e saídas (modelo multivariado).

#### **2.4.1 Comparação dos métodos de identificação no domínio do tempo e da frequência**

A escolha de um método de identificação no domínio da frequência ou no domínio do tempo, em geral, é orientada em termos do conhecimento prévio de determinadas características do sistema estrutural como também das informações requeridas no processo de identificação [63]. Estes métodos tem suas vantagens e desvantagens. Não devem, no entanto ser vistos como alternativas distintas de identificação, mas sim como complementares sempre que possível. A decisão da escolha do método de identificação no domínio do tempo ou da frequência é orientada em função dos aspectos favoráveis e desfavoráveis de cada método, conforme discutido a seguir.

Os aspectos que orientam a escolha entre os métodos de identificação no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência podem ser confrontados em termos de suas vantagens e desvantagens, conforme descrito a seguir:

- Na identificação de estruturas que apresentem modos de vibração com frequências

próximas os métodos do domínio do tempo são considerados mais apropriados. Visto que para os métodos do domínio da frequência uma alta resolução em frequência é obtida somente através da aquisição de grande quantidade de dados [68].

- Usualmente nos métodos no domínio da frequência é necessário a utilização de janelas para minimizar o efeito de distorção de espectro, gerado pelo fenômeno que ocorre pela truncagem das séries temporais. O fenômeno de “leakage” torna-se crítico quando a quantidade de dados é pequena, aspecto que impossibilita uma boa resolução em frequência [128]. O janelamento, que pode ser visto como um processo que força o sinal a tornar-se periódico, tem o efeito de distorcer certas porções do mesmo podendo ocasionar erros de estimativas de amortecimento do sistema.
- Identificação de sistemas estruturais no domínio da frequência é mais apropriado à estruturas com pequeno grau de amortecimento. Para sistemas com alto grau de amortecimento os métodos do domínio do tempo são mais recomendados [92].
- Os métodos domínio do tempo permitem a identificação de sistemas estruturais operando em condições em que não é possível monitorar os sinais de entrada. Ressalta-se, porém, que para determinadas situações os métodos do domínio da frequência também podem ser aplicados às condições mencionadas acima, especialmente em estruturas com comportamento linear e com baixo amortecimento [10].
- Uma vantagem argumentada para as técnicas do domínio do tempo é que os ruídos inerentes ao processo podem ser apropriadamente modelados e separados através da componente estocástica incorporada na componente de erro do modelo, não requerendo para tanto o uso de técnicas específicas para reduzir seus efeitos.
- Uma vez que os métodos do domínio do tempo são baseados em séries temporais é possível prever o comportamento futuro e interpretar eventos passados, possibilitando assim a elaboração de diagnóstico de falhas através de manutenção preventiva e preditiva [48].

- Quando o objetivo da identificação é a estimação de determinados parâmetros que afetem o comportamento do sistema, os métodos no domínio da frequência requerem o ajuste de curvas para a obtenção da função resposta em frequência teórica ou função resposta ao impulso estimada. Ressalta-se que o procedimento de ajuste de curvas é sensível aos problemas de resolução em frequência.
- Um aspecto marcante das técnicas do domínio do tempo, que caracteriza a principal desvantagem das mesmas, está relacionado à dificuldade em definir um critério de estimação da ordem do modelo. A obtenção da ordem do modelo constitui a tarefa mais difícil do processo de identificação. Embora o recurso do uso de sistemas sobre-determinados seja prática usual [24], este procedimento pode apresentar problemas na separação entre os pólos computacionais e reais do sistema, mal condicionamento das matrizes de dados, dificuldade na obtenção da precisão estatística dos parâmetros estimados e aumento no tempo de processamento de dados. Outras desvantagens são os possíveis erros introduzidos nos parâmetros no processo de transformação de um modelo discreto para contínuo no caso de sinais em presença de ruídos. Nas situações em que os modelos de identificação são de ordem inferior a ordem real do sistema, o problema ainda é mais crítico, pois podem ser omitidas informações relevantes da dinâmica do sistema. Na literatura aparece um princípio denominado “*parcimônia*” [100], o qual objetiva obter um modelo de ordem otimizada. Este princípio visa a busca de um modelo de ordem mínima que represente melhor a dinâmica do sistema.

## 2.5 Identificação no contexto das teorias de controle e análise modal

Na teoria de controle o objetivo final do processo de identificação é projetar estratégias de controle para um sistema estrutural particular. Na análise modal o interesse reside em analisar propriedades de um sistema dinâmico tais como: frequências, fatores de amortecimento, etc. No modelo de identificação modal o objetivo fundamental é a busca de um conjunto de parâmetros que estabeleça um modelo matemático que melhor reproduza os dados de ensaio, de acordo com um critério de erro estabelecido. Estes modelos requerem uma descrição adequada da dinâmica do sistema, e conceitualmente os mesmos devem ser mais precisos do que os aplicados à teoria de controle.

Para a comparação dos modelos de identificação modal e de controle é recomendável a utilização da linguagem aplicada à teoria de controle. Tal linguagem descreve o sistema dinâmico através do espaço de estado, associado às frequências e amortecimentos de uma estrutura flexível, bem como de uma matriz de influência de saída relacionada aos modos de vibrar e da matriz de influência de entrada relacionada aos fatores de participação modal.

Na teoria de controle o processo de construir um modelo a partir da observação de dados experimentais denomina-se realização do sistema. A escolha da estrutura do modelo constitui um dos ingredientes básicos na formulação do problema de identificação. A precisão dos parâmetros modais obtidos da realização do sistema (ou identificação) é influenciada pela escolha dos diferentes métodos existentes, embora muitos possam ser matematicamente equivalentes.

## 2.6 Comentários gerais

Em conclusão, pode-se dizer que identificação estrutural de sistemas é uma abordagem em que sinais medidos em estruturas dinâmicas são utilizados diretamente na determinação de um modelo analítico da estrutura, que seja representativo das características físicas e do comportamento dinâmico do sistema. Os parâmetros que podem ser obtidos de um ensaio incluem: resposta transiente, resposta de regime permanente, matrizes de relação entrada-saída, modos normais de vibração e frequências naturais. Em geral, a escolha entre métodos de identificação do domínio do tempo e ou da frequência é orientada pelo conhecimento prévio do sistema e do modelo a ser utilizado. Para sistemas em que a previsão de resposta futura, simulação ou o controle estocástico é almejado, os métodos do domínio do tempo são eventualmente requeridos. No entanto, quando o objetivo da identificação é a determinação de ressonâncias na resposta do sistema ou quando a banda de frequência e resolução são conhecidas de antemão, então os métodos do domínio da frequência podem ser aplicados.

Os aspectos positivos e negativos das abordagens de identificação em grande parte são relacionados a preferências pessoais, quer seja pela estrutura das instituições envolvidas

ou mesmo pelo histórico de formação dos pesquisadores e pela estrutura operacional de laboratórios. No entanto convém frisar que ambas as abordagens guardam a inter-relação associada aos domínios do tempo e da frequência. Portanto quase sempre é possível estabelecer a dualidade entre estas abordagens. Aspectos relativos a tal argumentação são bem fundamentados em [134]

Finalizando este capítulo convém apresentar uma breve argumentação da diferença entre a estimação espectral e estimação de parâmetros. Marple [103] apresenta o problema de estimação espectral como a determinação da função resposta em frequência. A performance do estimador é julgada em termos de como o espectro do sinal medido se ajusta ao espectro do sinal estimado numa faixa de frequência contínua. Por outro lado, na identificação de parâmetros estruturais a diferença é que a performance do estimador é avaliada em regiões de frequências específicas. Assim os métodos de estimação espectral e identificação requerem tratamento estatístico distintos, embora muitas vezes estes se sobreponham.

## Capítulo 3

### O problema de identificação aplicado à análise modal

#### 3.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo caracterizar o sistema dinâmico estrutural, estabelecendo as variáveis e equações fundamentais aplicadas à formulação do problema de identificação modal. O estudo é abordado de modo a relacionar o modelo modal da representação espacial das equações dinâmicas de um sistema linear de vários graus de liberdade com a representação paramétrica do domínio do tempo.

Ao relacionar o problema de identificação com a teoria de análise modal é de fundamental importância estabelecer as variáveis que caracterizam o sistema dinâmico. Estas variáveis podem ser vistas como as que são adotadas na teoria de controle [111], onde o sistema dinâmico é descrito em termos de entradas, distúrbios, saídas e variáveis internas. No sistema estrutural as variáveis de entrada são as que influenciam diretamente a operação do mesmo e estas podem ser manipuladas. Os distúrbios são variáveis que não podem ser manipuladas, mas influenciam a operação do sistema. As saídas são variáveis medidas no sistema que resultam da influência das entradas e dos distúrbios sobre o mesmo. As variáveis relevantes ao comportamento do sistema, ou seja aquelas que guardam as propriedades dinâmicas do mesmo, são as *variáveis de estado*.

No enfoque da teoria de análise modal o objetivo é caracterizar as variáveis internas do sistema em termos das variáveis de entrada e saída. Para estruturas operando sob condições

reais de carregamento, a caracterização das variáveis internas (ou identificação modal) é fortemente influenciada pelos aspectos:

- Entrada do sistema não-observável ,
- relações causais não claras entre as variáveis observadas na entrada e saída ,
- distúrbios no sistema devido à presença de ruídos no processo de monitoramento e aquisição de sinais.

Considerando que testes de análise modal são realizados tanto em condições monitoradas de laboratório como em condições reais de operação, a formulação dos ensaios de análise modal fica caracterizada por três elementos fundamentais:

1. ***A forma com que a estrutura é excitada.*** Na descrição da teoria de controle tal aspecto é relacionado às variáveis de entrada e distúrbios.
2. ***Aquisição de sinais.*** Processo que consiste na coleta das variáveis de entrada e saída do sistema ou coleta das variáveis de saída
3. ***Análise e processamento de sinais.*** Procedimento que possibilita a obtenção das variáveis internas do sistema dinâmico através da identificação de parâmetros.

A forma com que a estrutura é excitada é classificada em *excitação controlada* e *excitação natural*. As técnicas de *excitação controlada* são várias, dentre elas: varredura senoidal, excitação aleatória, excitação pseudo-aleatória e carregamento impulsivo. A discussão dos méritos e desvantagens de cada uma das técnicas acima é amplamente abordada por Stroud [136]. O emprego de fontes de *excitação natural* em análise modal ocorre em situações em que não é possível monitorar as variáveis de entrada do sistema dinâmico. Os métodos de excitação natural são usualmente aplicados em estruturas de grande porte, estruturas muito flexíveis ou em sistemas cuja obtenção das propriedades modais dependem das condições de operação, como por exemplo eixos rotativos apoiados em rolamentos, plataformas de petróleo, pontes, turbinas, etc. Outra aplicação típica da fonte de excitação natural ocorre em sistemas cujas características modais são fatores indicativos de danos acumulados na estrutura [5]. Na análise modal baseada em excitação natural a fonte de excitação é assumida incorporada aos distúrbios de entrada (ruídos), e o processo de

identificação requer o uso de hipóteses estatísticas com respeito à fonte de excitação. Aspectos relativos aos métodos de identificação modal, baseados em técnicas com excitação natural, são discutidos em [19] e estratégias que visam explorar as propriedades inerentes à fonte de excitação natural, baseadas nas aplicações de caracterização estrutural de sistemas mecânicos, são tratados em [18].

Para a caracterização das variáveis internas que descrevem a dinâmica do sistema estrutural, o emprego do modelo modal é de fundamental importância. A formulação deste modelo usualmente baseia-se em um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem (homogêneas e não-homogêneas). O modelo modal pode ser classificado em univariado quando aplicado à descrição de sistemas constituídos de uma entrada e uma saída, e multivariado quando aplicado à descrição de sistemas caracterizados por “n” variáveis de entrada e “m” variáveis de saída.

A representação alternativa do modelo dinâmico baseada no espaço de estado é amplamente aplicada à análise modal. Esta representação consiste no estabelecimento de variáveis de estado que transformam as equações diferenciais de segunda ordem do sistema estrutural em equações de primeira ordem na forma canônica de Hamilton. As variáveis de estado não são únicas e sua escolha é orientada de modo a tornar o processo de estimação de parâmetros mais eficiente [9,16,133]. Do ponto de vista matemático a formulação no espaço de estado é mais elegante, e apresenta a vantagem de simplificar a manipulação numérica e computacional dos modelos de identificação, especialmente na análise de sistemas multivariados [60,115]. Ressalta-se ainda que as equações no espaço não só descrevem as relações de entrada e saída do modelo como também o comportamento interno do sistema para qualquer tipo de condições iniciais [150].

Nos itens seguintes são discutidas as propriedades e parâmetros modais do sistema dinâmico com base no modelo modal na forma canônica. Inicialmente o estudo é desenvolvido a partir das equações dinâmicas de sistemas de vários graus de liberdade representadas por modelos discretos no espaço. Nestes modelos as variáveis de entrada e saída do sistema são admitidas como sinais contínuos no tempo. Em seguida a dinâmica do sistema é representada de forma equivalente considerando-se as variáveis de entrada e saída como

sinais discretos no tempo. O modelo discreto no tempo tem por objetivo investigar aspectos dos modelos de identificação paramétricos do domínio do tempo.

### 3.2 Equações básicas do modelo modal

No presente estudo admite-se o sistema estrutural representado por um modelo dinâmico discreto no espaço de dimensão finita, linear, invariante no tempo, sem a presença de efeitos giroscópios e com amortecimento viscoso. Sob as hipóteses acima, a dinâmica da estrutura é descrita por um sistema vetorial de equações diferenciais linear ordinárias de segunda ordem do tipo:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f\}, \quad (3.1)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, simétricas, positiva semi-definidas e de ordem  $n \times n$ . O vetores de ordem  $n \times 1$   $\{y\}$ ,  $\{\dot{y}\}$  e  $\{\ddot{y}\}$  representam respectivamente as grandezas deslocamento, velocidade e aceleração, descritos através das coordenadas generalizadas do sistema, e o vetor  $\{f\}$  de ordem  $n \times 1$  representa as forças generalizadas aplicadas ao sistema.

Como mencionado a dinâmica do sistema admite uma forma alternativa de representação, que consiste num conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem denominadas equações de estado. A essência deste tipo de estrutura é que as relações de entrada e saída do sistema são processadas através das variáveis de estado, as quais se relacionam com as localizações instantâneas do sistema num espaço de estado de suas coordenadas. A representação no espaço de estado é uma classe especial de variável interna que possibilita sintetizar o efeito de entradas passadas e distúrbios no sistema. Para obter as equações dinâmicas do sistema estrutural na forma de espaço de estado considere o vetor de estado  $\{Y\}^T = \left[ \{y\}^T : \{\dot{y}\}^T \right]$  e o vetor forças generalizadas  $\{F\}^T = \left[ \{f\}^T : \{0\}^T \right]$ , ambos de ordem  $2n \times 1$ , de modo que a equação (3.1) pode ser escrita na forma:

$$[E]\{\dot{Y}\} - [G]\{Y\} = \{F\}, \quad (3.2.a)$$

$$\{y\} = [D]\{Y\}, \quad (3.2.b)$$

onde,

$$[E] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} [-K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

As matrizes  $[E]$  e  $[G]$  de ordem  $2n \times 2n$  e posto  $2n$  são reais simétricas, dado que  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são reais e simétricas. A equação (3.2.b) representa a equação de observação, onde  $[D]$  é a matriz de observação  $n \times 2n$  (ou matriz influência de saída) que controla a parcela do vetor de estado que entra nas observações  $\{y\}$ .

O problema algébrico de autovalor associado a equação (3.2) é dado pela relação [50],

$$(\lambda_k [E] - [G])\{\Psi_k\} = \{0\}, \quad (3.4)$$

onde,  $\{\Psi_k\}$  é o autovetor correspondente ao autovalor complexo  $\lambda_k$ .

A equação (3.4) pode ser rearranjada de maneira equivalente através da relação,

$$[U]\{\Psi_k\} = \frac{1}{\lambda_k} \{\Psi_k\}, \quad (3.5)$$

onde,

$$[U] = [G]^{-1} [E]. \quad (3.6)$$

A solução da equação (3.5) estabelece  $2n$  autovalores  $\lambda_k$  e  $2n$  autovetores  $\{\Psi_k\}$ . Cada autovetor define a configuração espacial do movimento relacionado a um autovalor distinto. Como a matriz  $[E]$  é de ordem  $2n \times 2n$  e de posto (característica)  $2n$ , a solução admite  $2n$  autovalores distintos não nulos. No caso do posto ser menor do que  $2n$  pode ocorrer movimento de corpo rígido [70]. Considerando que o sistema foi admitido com

amortecimento viscoso, a estabilidade assintótica ocorre em pares complexos conjugados,

$$\lambda_k = -\sigma_k + iw_{kD}, \quad (3.7)$$

cuja parte real é negativa.

Seguindo Vigneron [145] a matriz coluna  $\{\Psi_k\}$  pode ser decomposta em matriz coluna superior e matriz coluna inferior, cada uma de ordem  $nx1$ ,

$$\{\Psi_k\} = \begin{Bmatrix} \{\Psi_k\}^s \\ \{\Psi_k\}^i \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.4) pode-se mostrar que os autovetores são da forma,

$$\{\Psi_k\} = \begin{Bmatrix} \{\phi_k\} \\ \lambda_k \{\phi_k\} \end{Bmatrix}, k=1,2,\dots,2n, \quad (3.9)$$

onde  $\{\Psi_k\}$  é um vetor de ordem  $2nx1$  e  $\{\phi_k\}$  denota o autovetor (complexo em geral) de dimensão  $nx1$  referente ao k-ésimo modo de vibrar.

Os autovetores e autovalores do sistema estrutural podem ser escritos em termos da matriz modal  $[\Psi]$  de ordem  $2nx2n$  e da matriz dos autovalores  $[\Lambda]$  de ordem  $2nx2n$ , como representado abaixo,

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} [\phi] & [\phi^*] \\ [\phi][\lambda] & [\phi^*][\lambda^*] \end{bmatrix}, \quad (3.10.a)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] \\ [0] & [\lambda^*] \end{bmatrix}. \quad (3.10b)$$

A matriz modal  $[\Psi]$  considerada possui a seguinte característica de normalização,

$$[\Psi]^T [E] [\Psi] = [I], \quad (3.11.a)$$

$$[\Psi]^T [G] [\Psi] = [\Lambda]. \quad (3.11.b)$$

A obtenção da solução completa da resposta do sistema, envolvendo as condições iniciais e componentes de excitação, é obtida de forma mais conveniente tomando-se a equação de estado representada na forma clássica.

A nova representação equação de estado é obtida pré-multiplicando ambos os lados da equação (3.2.a) pela matriz  $[E]^{-1}$ ,

$$\{\dot{Y}\} = [A]\{Y\} + [B]\{F\}, \quad (3.12.a)$$

$$\{y\} = [D]\{Y\}, \quad (3.12.b)$$

onde,

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B] = [E]^{-1}.$$

A matriz  $[A]$  real, quadrada de ordem  $2n \times 2n$  é conhecida como *matriz sistema*. Esta matriz guarda relações com as propriedades de massa, amortecimento e rigidez do sistema.

O conjunto das matrizes  $\{[A], [B], [D]\}$  é denominado *realização* do sistema. As propriedades de *controlabilidade*, *observabilidade* e *estabilidade* são completamente determinadas através da realização do sistema [33]. Ressalta-se que a realização não é única, sendo possível encontrar para uma certa matriz  $[T]$  não-singular de dimensão apropriada uma nova realização  $\{[T]^{-1}[A][T], [D][T], [T][B]\}$  do sistema, que resulta no mesmo comportamento de entrada e saída. A obtenção de diferentes realizações através de transformação de coordenadas pode afetar o grau de controlabilidade e observabilidade do sistema [1]. A definição formal dos conceitos duais de controlabilidade e observabilidade tem origem na teoria de controle [75]. No entanto é importante ressaltar com respeito a teoria de identificação que os critérios de observabilidade e controlabilidade são parâmetros de

avaliação das restrições relacionadas à estrutura da função de transferência do sistema. A controlabilidade se relaciona com a forma com que os modos da estrutura são excitados pelo sinal de entrada e a observabilidade é um parâmetro de avaliação de como cada modo excitado contribui na saída do sistema.

As possíveis configurações para um sistema cujo comportamento é representado pela função de transferência  $S_i$  são [11, 39]:

$S_1$  sistema controlável e observável,

$S_2$  sistema controlável e não-observável,

$S_3$  sistema não-controlável e observável,

$S_4$  sistema não-controlável e não-observável.

Observe que a função de transferência é a representação precisa do sistema se e somente se o mesmo é controlável e observável. No campo de análise estrutural a ocorrência parcial de elementos não-observáveis e não-controláveis é freqüente. A existência destes elementos na função de transferência implica que no mínimo um modo da função de transferência não afeta o comportamento do sistema. Portanto a verificação de elementos não-observáveis e não-controláveis em sistemas é usualmente efetuada através da análise do cancelamento de pólos e zeros de funções de transferência. No processo de identificação o cancelamento de pólos e zeros é explorado como um dos critérios de obtenção da ordem modelos [101].

Em continuidade à análise dos parâmetros modais da estrutura, observa-se que a *matriz sistema* é relacionada com a matriz modal e a matriz dos autovalores pela expressão,

$$[A] = [\Psi]^{-1}[\Lambda][\Psi]. \quad (3.13)$$

A solução da equação de estado (3.12) pode ser expressa em termos da matriz modal e da matriz dos autovalores [42] na forma,

$$\{Y(t)\} = [\Psi]^{-1}[e^{\Lambda t}][\Psi]\{Y(0)\} + \int_0^t [\Psi]^{-1}[e^{\Lambda(t-\tau)}][\Psi][B]\{F(\tau)\}d\tau. \quad (3.14)$$

A solução acima pode ser expressa de forma mais compacta através da *matriz de transição de estado*,

$$\{Y(t)\} = [\Phi(t)]\{Y(0)\} + \int_0^t \Phi(t-\tau)[B]F(\tau)d\tau, \quad (3.15)$$

onde  $[\Phi(t)] = e^{[A]t}$  de ordem  $2n \times 2n$  é a matriz de transição de estado do sistema e  $\{Y(0)\}$  é o vetor de ordem  $2n \times 1$  contendo informações das condições iniciais do sistema em  $t=0$ .

Na equação (3.15) o primeiro termo à direita representa a contribuição das condições iniciais não nulas à resposta do sistema; o segundo termo representa a influência das forças externas de excitação do sistema (ou resposta não-homogênea). Em situações cuja excitação é completamente estocástica, a resposta do sistema consiste de componentes estocástica e determinística.

### 3.3 Formulação contínua e discreta da função de transferência

No processo de identificação de parâmetros a representação discreta da função de transferência é de fundamental importância, uma vez que os sinais são coletados na forma discreta e a maior parte dos métodos de identificação aplicam algoritmos apropriados para o tratamento de sinais discretos no tempo. O estudo do modelo contínuo no processo de identificação é importante para o entendimento do comportamento físico do sistema, uma vez que do modelo discreto nem sempre é possível inferir de maneira direta as características físicas do sistema. Os parâmetros físicos do sistema dinâmico são obtidos no final do processo de identificação através de equações que relacionam o sistema discreto com o contínuo.

#### 3.3.1 Representação contínua da função de transferência

Na solução da equação (3.2) o vetor  $\{Y(t)\}$  é representado como uma combinação linear dos autovetores complexos  $\{\Psi_k\}$  uma vez que os mesmos definem um espaço vetorial de dimensão  $2n$  [87],

$$\{Y(t)\} = \sum_{k=1}^{2n} \xi_k(t) \{\Psi_k\}, \quad (3.16)$$

onde  $\xi_k(t)$  uma variável escalar complexa.

Levando (3.16) na equação (3.2) e tomando-se a transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) em ambos os membros da equação resultante, segue-se que a solução da equação transformada é da forma,

$$\{Y(s)\} = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \frac{\{\Psi_k\}^T \{F(s)\} \{\Psi_k\}}{s - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \frac{\{\Psi_k\} \{\Psi_k\}^T \{F(s)\}}{s - \lambda_k} \quad (3.17)$$

Dividindo a equação (3.17) em seus pares complexos conjugados obtém-se a função de transferência na forma,

$$[H(s)] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\lambda_k \{\phi_k\} \{\phi_k\}^T}{s - \lambda_k} + \frac{\lambda_k^* \{\phi_k^*\} \{\phi_k^*\}^T}{s - \lambda_k^*} \right), \quad (3.18)$$

onde  $[H(s)]$  é a matriz função de transferência de ordem  $n \times n$ , que é uma função complexa de variável complexa e  $[\phi_k]$  de ordem  $n \times 1$  é o  $k$ -ésimo vetor modal do sistema.

### 3.3.2 Representação discreta da função de transferência

Para um sistema linear invariante no tempo governado pelas equações (3.2), considere o vetor entrada  $\{F(t)\}$  aproximado por uma função constante gerada de um circuito de discretização, de modo que,

$$\{F(t)\} = \{F(kT)\}, \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (3.19)$$

onde  $T$  é o período de amostragem e  $\{F(kT)\}$  é o valor de  $\{F(t)\}$  em  $t = kT$  ( $k=0,1,2,\dots$ ). Se o comportamento nos pontos discretos é o objetivo, então pode-se concluir da equação (3.19) que no intervalo  $kT \leq t < (k+1)T$ , os estados  $\{Y(k+1)\}$  e  $\{Y(k)\}$  são descritos pela equação de

diferenças,

$$\{Y(k+1)\} = e^{[A](k+1)T} \{Y(0)\} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[A](kT+T-t)} [B] \{F(t)\} dt. \quad (3.20)$$

A equação acima pode ser reescrita na forma,

$$\begin{aligned} \{Y(k+1)T\} = e^{[A]T} & \left[ e^{[A]kT} \{Y(0)\} + \int_0^{kT} e^{[A](kT-\tau)} [B] \{F(\tau)\} d\tau \right] + \\ & + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[A](kT+T-\tau)} [B] \{F(\tau)\} d\tau, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\{Y(k+1)\}$  é valor de  $\{Y(t)\}$  em  $t=(k+1)T$ .

Introduzindo uma nova variável  $\eta = kT + T - \tau$  [106] e lembrando que  $\{F(\tau)\}$  foi assumido constante, conclui-se de (3.21) que:

$$Y(k+1) = e^{[A]T} \{Y(k)\} + \left( \int_0^T e^{[A]\eta} d\eta \right) [B] \{F(k)\}. \quad (3.22)$$

Portanto, se a resposta do sistema dinâmico é avaliada em instantes discretos constante, o modelo da equação de estado é dado pela equação de diferenças,

$$\{Y(k+1)\} = [A_k] \{Y(k)\} + [B_k] \{F(k)\}, \quad (3.23.a)$$

$$\{y(k)\} = [D] \{Y(k)\}, \quad (3.23.b)$$

onde  $[A_k] = e^{[A]T}$  e  $[B_k] = \left( \int_0^T e^{[A]\eta} d\eta \right) [B]$  é uma matriz constante.

Observe que o sistema discreto em (3.23) é nada mais do que a saída de um sistema invariante dirigido por um ruído branco.

Na formulação acima considerou-se que as observações  $x(k)$  são isentas de ruídos de modo a simplificar a análise matemática. Considerações à respeito da influência dos ruídos serão tratadas ao longo do trabalho.

As equações (3.23) que descrevem as relações de entrada e saída do sistema são básicas para a identificação estrutural. De modo análogo à representação contínua no tempo as matrizes  $\{[A_k], [B_k], [D]\}$  representam a realização do sistema. Os autovalores da matriz  $[A_k]$  contém informações das frequências e fatores de amortecimento do sistema [97]. O processo de identificação tem por objetivo a obtenção da matriz  $[A_k]$  e  $[D]$ . Observe que se a dimensão do vetor de estado na equação (3.23) for igual a ordem do modelo, então a matriz  $[A_k]$  será não-singular. A presença de modos espúrios no sistema irá tornar a referida matriz singular.

A transição da representação de um espaço de estado para a representação da função de transferência do sistema estrutural na forma discreta pode ser obtida a partir da transformada Z das equações (3.23), obtendo-se o seguinte expressão [109],

$$[H(Z)] = \frac{\{X(Z)\}}{\{F(Z)\}} = [D](Z[I] - [A_k])^{-1}[B_k]T. \quad (3.24)$$

Nesta equação a matriz função de transferência  $[H(z)]$  relaciona a transformada Z das saídas à transformada Z das entradas.

Tomando-se a inversa da transformada Z da matriz função de transferência obtém-se a matriz resposta [137],

$$\{h(n)\} = Z^{-1}[H(Z)]. \quad (3.25)$$

Considerando a equação (3.13) a matriz sistema pode ser escrita por,

$$[A_k] = [\Psi]^{-1}[e^{[\Lambda]T}][\Psi]. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) na equação (3.24) obtém-se a função de transferência em termos da matriz modal e da matriz dos autovalores,

$$[H(Z)] = [D][\Psi]^{-1} [[I] - Z^{-1} e^{[\Lambda]T}]^{-1} [\Psi][B_k]. \quad (3.27)$$

Recorrendo-se a [59] pode-se mostrar que a função de transferência no domínio Z é da forma,

$$H(Z) = \sum_{k=1}^n \left( \lambda_k q_k \frac{\phi_k \phi_k^T}{1 - Z^{-1} Z_k} + \lambda_k^* q_k^* \frac{\phi_k^* \phi_k^{*T}}{1 - Z^{-1} Z_k^*} \right), \quad (3.28)$$

onde  $Z_k = e^{\lambda_k T}$  e  $q_k$  é um elemento da matriz diagonal [Q] indicada abaixo,

$$[Q] = [\lambda_k T - 1]. \quad (3.29)$$

Concluindo os métodos de identificação objetivam a busca de função de transferência a partir de dados experimentais coletados na estrutura. Os diferentes métodos paramétricos do domínio tempo guardam uma relação direta com a expressão da função de transferência apresentada na equação (3.28). Uma vez estabelecida a relação do problema de identificação com os parâmetros modais da estrutura o passo seguinte consiste em apresentar os diferentes modelos paramétricos de identificação modal.

## Capítulo 4

### Métodos de identificação no domínio do tempo

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo são discutidos os principais aspectos dos métodos de identificação paramétrica no domínio do tempo, sendo abordados os pontos relevantes de suas aplicações à resposta de estruturas submetidas a vibrações em regime transiente e regime permanente

As técnicas paramétricas de identificação no domínio do tempo já de uso corrente na análise de sistemas vem progressivamente sendo transferidas para o campo de análise modal, estabelecendo resultados marcantes. A idéia central da identificação modal de sistemas estruturais via modelos paramétricos no domínio do tempo consiste na representação da dinâmica do sistema através de um modelo recursivo de ordem finita, cuja resposta descreva o comportamento dinâmico do sistema de forma satisfatória.

As técnicas de identificação modal no domínio do tempo podem ser divididas em dois grupos [39]. O *primeiro grupo* inclui modelos que em geral derivam de métodos onde a função resposta ao impulso é aproximada por uma superposição ponderada de funções exponenciais complexas. Essas técnicas conhecidas como modelos *determinísticos*, são classificadas como métodos paramétricos de identificação modal aplicados à resposta de regime transiente da estrutura. O *segundo grupo* consiste de técnicas de identificação que se baseiam em modelos estocásticos. Tais técnicas são preponderantemente derivadas da estrutura dos modelos Autoregressivo de Médias Móveis (ARMA).

Nos modelos da classe ARMA admite-se por hipótese que a saída do sistema estrutural é oriunda de um sistema físico linear invariante no tempo. A hipótese acima embora nem sempre seja verdadeira pode ser adotada com segurança quando os sinais do sistema em estudo são estabelecidos em blocos distintos por faixas intervalos de tempo. Na estrutura do modelo é admitida a ação permanente de um sinal estocástico (ruído branco) como a componente de excitação da estrutura, por isso, estes métodos são também classificados como *estocásticos*.

Embora a estimação dos parâmetros modais caracterize o objetivo comum dos dois grupos de técnicas de identificação, ressalta-se que estes diferem na estrutura de abordagem do problema. No grupo dos métodos determinísticos o problema é enfocado de forma direta no contexto da identificação dos parâmetros modais, no entanto, para o grupo dos métodos estocásticos a estimação dos parâmetros modais é um resultado secundário, visto que estes são modelos de ajuste estatístico de dados.

Com relação à aspectos operacionais, ressalta-se que os métodos *determinísticos* são mais simples, pois não requerem condições controladas de excitação e são numericamente mais atrativos. O principal fator que concorre para a escolha destes métodos é a existência de técnicas de identificação global em sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (multivariados) relativamente bem consolidadas. A principal desvantagem destes métodos é que a qualidade dos parâmetros modais é afetada drasticamente na análise de sinais em presença de ruídos, ou seja, a qualidade dos parâmetros decresce à medida que componentes de ruído são mais evidenciadas no sinal [93]. Este aspecto afeta principalmente a estimação dos fatores de amortecimento, visto que na maioria dos sistemas estruturais tais parâmetros apresentam valores muito baixos [76]. Em razão do fator de amortecimento ser baixo a identificação levará a pólos no domínio da transformada  $Z$  próximo do círculo unitário.

Os métodos *estocásticos* fundamentados na formulação de modelos matemáticos com base em sinais coletados na entrada e saída de um sistema estrutural (e ou sinais adquiridos na saída do sistema) [93] apresentam a vantagem de serem mais eficazes no processo de identificação de sinais em presença de ruídos. Por intermédio destes modelos é possível estabelecer medidas estatísticas dos erros dos parâmetros estimados, de forma que, no

processo de estimação os parâmetros que surgem são ponderados evidenciando as informações mais precisas das medidas.

Um critério de escolha entre um método determinístico e ou estocástico é fundamentado com base nas informações estabelecidas na formulação do processo experimental e no procedimento de coleta de dados [121].

As classes de modelos estocásticos e determinísticos podem ser apresentadas em versões multivariadas, ressaltando-se que as dos modelos determinísticos são numericamente mais apropriadas. O emprego de modelos multivariados tem as seguintes vantagens [31]: (i) redução significativa da quantidade de dados coletados e do tempo de processamento, (ii) utilização de um conjunto de dados com informações mais consistentes, (iii) distribuição mais uniforme da energia do sinal de excitação ao longo da estrutura, (iv) parâmetros modais mais consistentes devido a um maior número de pontos de coleta na estrutura, (v) separação mais efetiva de modos múltiplos (acoplados) e (vi) diminuição da probabilidade de perda de modos de vibração. Entre as desvantagens, destacam-se: (i) dificuldade na análise e interpretação da estrutura estocástica, (ii) propensão a erros de convergência e instabilidade dos algoritmos, aspectos que podem conduzir a uma identificação não realística em aplicações práticas.

#### **4.2 Aspectos da formulação dos métodos determinísticos**

Os métodos *determinísticos* de identificação paramétrica no domínio do tempo baseiam-se no tratamento algébrico de sinais discretos (no tempo) relativos à componente homogênea da resposta de um sistema submetido a cargas vibratórias transientes. Os algoritmos de identificação existentes são apresentados sob diferentes formas, mas em geral são equivalentes no senso em que a formulação dos mesmos consiste na obtenção de uma matriz bloco de Hankel a partir dos dados coletados no sistema estrutural em análise. A matriz Hankel é formulada a partir das componentes discretas da resposta ao impulso ou da resposta livre do sistema (relativa a um determinado conjunto de condições iniciais).

Com o objetivo de estabelecer fundamentos para a discussão dos diferentes modelos determinísticos de estimação de parâmetros considere a matriz  $[H(t)]$  de dimensão  $n_o \times n_i$  referente à matriz de resposta ao impulso. Nesta matriz os elementos  $n_o$  correspondem às localizações de resposta e  $n_i$  às localizações de entrada (ou referências). Para um sistema com  $n_m$  modos estruturais é conhecido de [88,110] que a expansão paramétrica de  $[H(t)]$  é da forma,

$$[H(t)] = \sum_{k=1}^{2n_m} [R_k] e^{\lambda_k t}, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda_k$  corresponde ao valor do pólo relativo a um modo  $k$  e  $[R_k]$  é uma matriz de dimensão  $n_o \times n_i$  que corresponde aos resíduos do sistema. Ressalta-se que o número de modos assumidos  $n_m$  deve ser no mínimo igual ao número de modos estruturais esperados [94].

A equação (4.1) pode ser interpretada como uma superposição ponderada das soluções homogêneas de um sistema vibratório discreto no espaço.

A matriz dos resíduos guarda a seguinte relação com os autovetores do sistema,

$$[R_k] = Q_k \{ \phi_k \} \{ \phi_k \}^T, \quad (4.2)$$

onde  $Q_k$  é um escalar complexo.

A matriz dos resíduos pode também ser expressa na forma fatorada,

$$[R_k] = \{ V_k \} \langle L_k \rangle, \quad (4.3)$$

onde  $\{ V_k \}$  é um vetor com  $n_o$  elementos que representa os coeficientes do modo de vibrar e  $\langle L_k \rangle$  é um vetor linha de  $n_i$  elementos relacionado ao fator de participação modal de um determinado modo  $k$ . O fator de participação modal é um indicador de quanto um modo particular  $k$  é excitado por diferentes localizações de entrada. Este fator é relacionado com a matriz de entrada ou ao conjunto de condições iniciais quando a resposta livre é considerada.

Substituindo a equação fatorada da matriz dos resíduos  $[R_k]$  na equação (4.1) obtém-se,

$$[H(t)] = [V][\Lambda][L], \quad (4.4)$$

onde  $[V]$  é uma matriz cujas colunas são associadas aos modos de vibrar da estrutura,  $[L]$  é uma matriz relacionada com os fatores de participação modal de cada modo de vibrar e  $[\Lambda]$  é uma matriz diagonal que contém informações dos autovalores do conjunto de dados observados [17].

A equação fatorada a qual representa a dinâmica do sistema em termos das três matrizes indicadas acima é comum a uma ampla classe de métodos de identificação determinísticos. Esta equação estabelece a base do problema de identificação na forma canônica.

A formulação equivalente discreta no tempo da equação (4.4) é obtida a partir da representação de  $[H(t)]$  em intervalos discretos de tempo  $\Delta t$  igualmente espaçados,

$$[H_k] = [H(kT)] = [V_r] [\Pi]^k [L_s], \quad K \geq 0, \quad (4.5)$$

onde,  $[\Pi^k] = [e^{\lambda kt}]$  é uma função complexa relacionada com a evolução do movimento do sistema. As matrizes  $[V_r]$  e  $[L_s]$  são funções complexas espaciais que afetam a geometria do sistema. Na ótica da representação de espaço de estado  $[V_r]$  é relacionada com a matriz de observabilidade e  $[L_s]$  é associada à matriz de controlabilidade [71].

Seguindo [76] tem-se que  $[H(k)]$  corresponde a solução de uma equação recursiva do tipo,

$$[H(k)] + \sum_{i=1}^s [A_i] [H(k-i)] = [0], \quad (4.6)$$

onde  $[A_i]_{1 \leq i \leq s}$  são matrizes de ordem  $n_0 \times n_0$ ,

### 4.3 Discussão dos principais métodos determinísticos

A equação (4.5) que é não-linear nos parâmetros modais é considerada fundamental para a formulação dos diferentes métodos de identificação determinísticos, tais como, método da polireferência, método de Ibrahim, etc. A seguir é apresentada uma breve discussão dos principais aspectos dos métodos determinísticos de identificação no domínio do tempo.

#### 4.3.1 Método da Polireferência

O método da polireferência é considerado o núcleo dos métodos determinísticos. Este método utiliza um sistema de equações de diferenças finitas sobredeterminadas com matriz de coeficientes  $[H(k)]$  de dimensão  $n_o \times n_i$  e sua solução é formulada como uma combinação de exponenciais complexas e dos fatores de participação modal. Este é um método de estimação global estruturado com base nos sinais da resposta ao impulso de um sistema vibratório. A obtenção do estimador deste método é obtido a partir da solução dos *mínimos quadrados* do sistema de equações e sua formulação é dividida em dois estágios [44]. No primeiro estágio as frequências naturais amortecidas e coeficientes de amortecimento do sistema estrutural são extraídos do modelo com base em informações coletadas (no domínio do tempo) em sistemas de múltiplas referências de saída ou de uma referência. O segundo estágio do processo de estimação consiste na obtenção dos resíduos do sistema, fase que pode ser efetuada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Da análise da formulação do método da *polireferência* conclue-se que o mesmo é a versão **MIMO** do método **SIMO** “*Least-Squares Complex Exponential*”. De fato, ambos os métodos caracterizam-se pela evolução do método de *estimação local* (univariado) da *exponencial complexa* para um procedimento *global de estimação* [25]. O método da *exponencial complexa* que se baseia na formulação de Prony [126], consiste no ajuste da função resposta ao impulso com base nos sinais discretos do sistema. Esta função de acordo com a equação (4.1) permite obter os parâmetros relacionados com os resíduos e autovalores do sistema.

### 4.3.2 Método ERA

O método ERA (“Eigensystem Realization Algorithm”) é uma técnica de identificação global que estabelece um conjunto de parâmetros modais consistentes a partir de dados multivariados [72]. O método evoluiu de uma formulação matemática rigorosa estabelecida com base na teoria de realização de sistemas. O método consiste em construir uma representação de espaço de estado a partir de dados experimentais. O objetivo fundamental do modelo é obter a realização mínima equivalente à representação de uma seqüência de matrizes de Markov (função resposta a um impulso) formulada com base na equação (4.5). Enfatiza-se que a realização mínima estabelece o modelo de menor dimensão de espaço de estado entre os sistemas realizáveis que tenham as mesmas relações de entrada e saída. O procedimento de estimação é estabelecido a partir da formulação da matriz de Hankel com base na equação (4.5) para construir uma representação de espaço de estado que represente o comportamento de um sistema dinâmico linear. Este método é considerado o primeiro modelo modal de identificação paramétrica a utilizar a formulação baseada na análise da decomposição do valor singular de matrizes (SVD) [37]. A análise SVD permite estabelecer a matriz de Hankel (fundamental ao processo de identificação) com base na obtenção de um conjunto de dados que contenham informações relevantes ao comportamento do sistema. A análise dos valores singulares pode ainda ser aplicado como um critério que permite estabelecer a ordem do modelo inicial de trabalho de modo a obter um estimador numericamente estável. Esta técnica reduz a complexidade da solução computacional bem como elimina modos espúrios e modos computacionais que ocorrem em modelos sobredeterminados.

Variações do método ERA surgiram de modo a proceder a estimação com base em dados no domínio da freqüência. A teoria fundamental deste método alternativo é a mesma do ERA no entanto os dados de análise são informações obtidas do espectro de freqüência do sistema em análise [73].

### 4.3.3 Método de Ibrahim

A equação (4.5) pode ser também aplicada para o desenvolvimento do método de identificação de Ibrahim (ITD), que em concepção é um método formulado com base nos dados da resposta livre de sistemas estruturais. Alternativamente o método pode ser aplicado na análise da resposta impulsiva de sistemas. O método é uma técnica global de identificação e foi desenvolvido em sua versão original [112] para análise de sistemas de uma entrada e várias saídas. Posteriormente novas versões do método foram formuladas de modo a trabalhar com sistemas multivariados de várias entradas e várias saídas. Da análise comparativa do método ITD com o ERA verifica-se que diferença básica é relacionada com o fato da matriz de Hankel no método ERA ser formulada através da decomposição do valor singular [51].

O desenvolvimento do procedimento de identificação do método ITD requer um conjunto de medidas de vibração livre para em uma única análise identificar simultaneamente todos os parâmetros modais excitados na estrutura em teste. Este método utiliza uma equação de diferenças finitas de primeira ordem com matriz de coeficientes de dimensão  $2n_m \times 2n_m$  para  $H_k$  e soluções características da forma  $\{V\}_i e^{\lambda_{ik}\Delta t}$ . A formulação básica do método pode ser resumida nos seguintes passos [67]: (i) aplicar os sinais de resposta livre para construir duas matrizes de dados discretos  $H_k$  (sobredeterminadas), defasadas de um intervalo  $\Delta t$ , (ii) construir um sistema de equações ortogonais com base nas duas matrizes defasadas para a obtenção de uma matriz real que contém informações do autovalores e autovetores, (iii) extrair os autovalores e autovetores da matriz de modo a obter as frequências naturais, fatores de amortecimento e resíduos do sistema, e (iv) estabelecer um critério de separação entre os modos espúrios (e computacionais) e os modos estruturais.

### 4.4 Abordagem dos métodos determinísticos via modelo ARMA

Como discutido acima o problema de identificação modal se divide em métodos determinísticos e estocásticos. Para os métodos determinísticos vários algoritmos baseados no método da exponencial complexa são apresentados na literatura. Para os métodos estocásticos o modelo mais usual é a representação dos dados do sistema através do modelo autoregressivo das médias móveis (ARMA).

O modelo ARMA e suas variações podem ser aplicados para representar modelos determinísticos baseados na exponencial complexa amortecida [38,64]. Este tipo de representação é classificado como modelo determinístico autoregressivo das médias móveis (DARMA).

O modelo DARMA representa o comportamento de um sistema vibratório discreto no espaço em termos de uma equação discreta no tempo. A equação representando o modelo DARMA é da forma,

$$\{y_k\} + \sum_{i=1}^{2n} a_i \cdot \{y_{k-i}\} = \sum_{i=0}^{2n-1} [B_i] \cdot \{f_{k-i}\} \quad (4.6)$$

onde  $a_i$  é um escalar real,  $[B_i]$  é uma matriz  $n \times n$  com coeficientes reais e o vetor  $\{f_{k-i}\}$  representa a componente discreta do termo de excitação do sistema.

A breve discussão enfocada neste item objetivou enfatizar que existe uma relação entre os modelos determinísticos e o modelo da classe ARMA. A discussão aprofundada da formulação de modelos derivados da classe ARMA é objeto de estudo do capítulo seguinte.

#### 4.5 Comentários gerais

Neste capítulo o problema de identificação foi abordado de forma geral com o objetivo de evidenciar as classes dos modelos determinísticos e modelos estocásticos. Foi também apresentado um modelo derivado do grupo estocástico o qual guarda uma relação direta com os métodos de estimação determinísticos. A discussão e formulação mais aprofundada dos métodos discutidos no presente capítulo pode ser obtida em [102].

## Capítulo 5

### Procedimento de estimação de parâmetros e critérios de escolha da ordem de modelos paramétricos ARMA(AR)

#### 5.1 Introdução

A identificação estrutural via modelos paramétricos do domínio do tempo tem por objetivo a busca de um modelo discreto recursivo de ordem finita, que represente a dinâmica do sistema estrutural de forma otimizada. O modelo paramétrico que descreve uma relação funcional entre a entrada e saída do sistema é a ferramenta que possibilita extrair informações dos parâmetros físicos do sistema.

Neste capítulo são abordados aspectos da formulação dos modelos da classe ARMA, fundamentados na teoria de séries temporais. Uma série temporal discreta  $Z_t$ ,  $\{t=1,2,\dots,N\}$  caracterizando um sinal pode ser vista como um conjunto de observações de uma dada variável (geralmente em intervalos equidistantes) que contém informações de um processo em investigação. No contexto da identificação estrutural a análise de séries temporais consiste em extrair informações úteis de um bloco discreto de sinais (caracterizado por uma amostra finita de observações) e descartar informações estranhas relativas ao mesmo. As informações úteis são relacionadas às características físicas do sistema e as informações estranhas correspondem a parte do sinal não-correlacionada com as características estruturais do sistema. Estas informações são associadas a imperfeições na estrutura do modelo e a ruídos de medida. Os ruídos classificados em sistemáticos e irregulares constituem a porção do sinal

que não pode ser estimada em termos dos dados de processamento. Os efeitos de ruídos sistemáticos podem ser minimizados através de refinados no processo experimental [121], e os ruídos podem ser incorporados aos modelos como componentes estocásticas distintas. Em modelos derivados da estrutura ARMA os ruídos irregulares são admitidos do tipo Gaussiano (ruído branco). Ruído irregular não-Gaussiano, observado em medidas, caracteriza uma tendência dinâmica de erro, portanto, este deve ser modelado como uma fonte de ruído distinta [56,103].

Considerando que em sistemas reais os sinais são contaminados é evidente que a descrição dos modelos é obtida de forma aproximada. Assim, o uso de ferramentas matemáticas determinísticas de análise deixam de ser válidas, requerendo portanto a utilização de ferramentas estatísticas baseadas na teoria de processos estocásticos.

Na análise de processos estocásticos transformações nos sinais são efetuadas de forma a explorar técnicas que sejam simples de processar e interpretar. Os momentos estatísticos de primeira ordem (valor médio) e de segunda ordem (função de autocovariância e autocorrelação) são considerados as transformações fundamentais no processo de estimação linear de sinais estacionários, ou seja, sinais que se desenvolvem aleatoriamente no tempo com média constante (refletindo uma forma de equilíbrio estável) [27]. A função de correlação (que é a covariância padronizada) é fundamental na análise da dimensão da memória do processo. Esta caracteriza a extensão na qual um valor tomado num dado instante depende de instantes  $t-k$ .

Estudos mais recentes baseados em momentos estatísticos de ordem superior vem sendo aplicados no processo de identificação de modelos e estimação de fase em sistemas cuja hipótese de processo Gaussiano de excitação deixa de ser válida [156]. Os momentos estatísticos de ordem superior não só indicam o grau de correlação de ordem superior, como também estabelecem um parâmetro da medida da distância do processo aleatório da hipótese de Gauss, uma vez que em processos Gaussianos momentos de ordem superior a dois são nulos [108]. Estes aspectos são particularmente importantes na análise do modelo ARMA, o qual por hipótese tem fase mínima, condição que estabelece que os zeros do processo MA sejam localizados dentro de um círculo unitário (no plano  $Z$ ). A hipótese de fase mínima nem sempre é verdadeira, justificando assim a utilização de métodos mais robustos formulados com base em momentos de ordem superior [116].

Em suma as funções de autocovariância e autocorrelação são momentos de segunda ordem fundamentais para formulação e análise de modelos paramétricos. Na realidade na teoria estatística de análise de séries temporais o termo processo de estimação decorre da transformação de um sinal aleatório na função de covariância [32]. Convém evidenciar que o campo de estudo de série temporais consiste de técnicas descritivas e estatísticas de inferência de sinais, onde a representação gráfica mostrando a evolução do fenômeno é fundamental ao processo de análise. A inspeção gráfica é o passo inicial na formulação do modelo matemático, uma vez que esta caracteriza aspectos importantes como tendências e descontinuidades dos sinais.

## **5.2 Modelos derivados da estrutura ARMA e principais propriedades**

### **5.2.1 Descrição dos modelos da classe ARMA**

A função de transferência de um modelo dinâmico estrutural discreto no espaço admite representações discretas no tempo equivalentes. Esta equivalência é justificada pelo fato da função de covariância de saída do modelo discreto (temporal) coincidir com a função de covariância dos dados uniformemente amostrados na saída de um sistema discreto espacial, quando excitado por um ruído branco [22]. O modelo discreto é formulado em termos de equações de recorrência discretas no tempo (equação de diferenças), que podem ser relacionadas aos modelos de análise de séries temporais aplicados em diferentes ramos da ciência. Na teoria de análise estrutural os modelos autoregressivo de médias móveis com entrada auxiliar (ou exógena) ARMAX e ARMA são amplamente utilizados. Esses são modelos que derivam de um processo Box-Jenkins estacionário não-sazonal [62].

Na ótica da teoria de sistemas estruturais a diferença fundamental entre os modelos ARMA e ARMAX é relacionada com a componente de excitação da estrutura. No modelo ARMAX a componente auxiliar é associada ao termo de excitação observado na estrutura e no modelo ARMA a dinâmica do sistema é incorporada a uma série temporal de saída de um processo de ordem  $(2n, 2n-1)$ , cujo termo de entrada (ou excitação) não é observado. No processo ARMA a componente de excitação é admitida ser caracterizada por um processo estocástico estacionário Gaussiano de média zero e variância  $\sigma_f^2$ .

O modelo ARMAX representando uma observação discreta de sinais vibratórios de um sistema invariante no tempo é dada pela seguinte equação escalar de diferenças, linear e estocástica [135],

$$y(k) = \sum_{i=1}^{p=2n-1} \alpha_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{r=2n-1} \gamma_i f(k-i) + \sum_{i=1}^{q=2n-1} \beta_i e(k-i), \quad (5.1)$$

onde os escalares,  $\alpha_i$  ( $i=1 \dots p$ ) representam os coeficientes autoregressivo (AR) que ponderam a influência dos valores prévios da seqüência  $\{y(k)\}$  no valor presente  $y(k)$ ,  $\gamma_i$  ( $i=1 \dots r$ ) são coeficientes que ponderam a componente de excitação e  $\beta_i$  ( $i=1 \dots q$ ) são coeficientes de médias móveis (MA). O termo de defasagem no processo MA caracteriza a memória  $q$  do processo, garantindo que a influência do ruído de excitação no passado sobre um valor presente  $y(k)$  decresça com o tempo. No processo MA observações anteriores a um tempo corrente são ponderadas por observações mais recentes, estabelecendo-se sempre a média atualizada ao instante presente. A variável  $f(k-i)$  é relacionada com as componentes de excitação e  $e(k)$  representa os termos discretos do ruído branco de variância  $\sigma_f^2$ .

A relação que os parâmetros do modelo ARMAX guardam com as características estruturais do sistema é associada: (i) aos coeficientes AR do modelo, que dependem do número de graus de liberdade do sistema e que contém informações das características globais da estrutura (frequências naturais e fatores de amortecimento), (ii) aos coeficientes da componente exógena, relacionados com as características do sinal de excitação e com a transformação aplicada na discretização do sistema contínuo [114] e (iii) aos termos de média móvel, relacionados com a estatística do ruído do processo. No processo ARMAX a componente de ruído não explicada pelo modelo e pela excitação é admitida ter pólos iguais ao da função de transferência do sistema [23] sendo esta a principal justificativa para a utilização do modelo ARMA na identificação dinâmica de determinadas estruturas que operam sob condições em que os termos de excitação não são observados.

Na formulação dos processos de estimação e na análise da função de transferência do sistema a representação do modelo ARMAX através do formalismo polinomial apresentado abaixo é mais conveniente,

$$\alpha(z)y(k) = \gamma(z).f(k) + \beta(z).e(k) \quad (5.2)$$

onde,

$$\alpha(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_p z^{-p}$$

$$\beta(z) = \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_q z^{-q}$$

$$\gamma(z) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \dots + \gamma_r z^{-r}$$

A equação (5.2) é relacionada a equação (5.1) através da relação,

$$y(k) = \frac{\gamma(z)}{\alpha(z)} f(k) + \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} e(k), \quad (5.3)$$

Da equação acima observa-se que em situações em que série temporal da componente de excitação não é observada a equação(5.3) reduz-se ao modelo ARMA,

$$y(k) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} e(k). \quad (5.4)$$

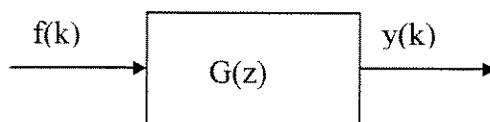
A equação acima é a generalização de um modelo baseado numa única série histórica de dados (modelo univariado de uma entrada e uma saída).

O modelo estrutural ARMA é denominado *paramétrico* baseado na hipótese que os parâmetros  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e  $\gamma_i$  guardam informações relativas à dinâmica do sistema, uma vez que estes são relacionados com a covariância equivalente do sistema e ao processo de excitação [34]. A dificuldade na implementação deste modelo é relativa aos termos não-lineares no sistema de equações, introduzidos pelo processo MA [147].

No processo de identificação modal o uso de modelos que envolvem mais do que uma série temporal (modelos multivariados) são mais apropriados à identificação dos modos de vibrar de estruturas (autovetores), visto que a identificação destes usualmente é aplicada num espaço multi-dimensional [94]. A representação da dinâmica de sistemas através de modelos ARMA multivariado (conhecido como ARMA vetorial-ARMAV) é bastante complexa.

No presente trabalho somente são abordados a formulação e propriedades dos modelos derivados de estrutura ARMA univariada.

O modelo ARMA pode também ser visto como um caso particular de um filtro linear  $G(z)$ , que processa um ruído branco de entrada  $f(k)$  para gerar uma a série temporal  $y(k)$ , conforme representado na Figura 5.1.



**Figura 5.1** Filtro linear de entrada  $f(k)$  e saída  $y(k)$

O filtro de função de transferência  $G(z)$  é real, dado que a convolução do sinal discreto real  $f(k)$  com a resposta ao impulso  $g(k)$  resulta num sinal aleatório real de saída  $y(k)$ , consequentemente os coeficientes do modelo são reais e seus pólos e zeros são simétricos ao eixo real no plano  $z$ . O filtro ARMA também é causal, uma vez que uma observação do sinal num instante corrente depende da observação de entrada no instante corrente e de observações de entrada e saída em instantes prévios, não guardando dependência com observações futuras [43].

A estabilidade do filtro que garante que a seqüência  $\{y(k)\}$  seja estacionária é associada aos parâmetros autoregressivos (AR) do modelo. Se as condições de estabilidade são satisfeitas segue-se que o processo de saída  $\{y(k)\}$  tem variância finita e é estacionário Gaussiano, portanto sua descrição completa no domínio do tempo é obtida a partir dos momentos de primeira ordem (média) e de segunda ordem (autocovariância) do sinal [34].

Uma vez que o modelo ARMA foi caracterizado o objetivo fundamental do problema de identificação consiste em estimar os parâmetros  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , e  $\sigma_f^2$  a partir da seqüência  $\{y(k)\}$ . Os estimadores (processos de estimação) objetivam estabelecer o melhor ajuste dos dados amostrados ao modelo de trabalho. A importância da obtenção da variância  $\sigma_f^2$  do termo de entrada é relacionada à aspectos de estimação espectral, dado que o espectro do sinal de saída pode ser escrito pela relação,

$$S_{yy} = \sigma_f^2 \cdot |G(z)|^2, \quad (5.5)$$

onde,  $S_{yy}(w)$  representa o espectro de potência do sinal de saída e  $G(z)$  a função de transferência do filtro no domínio da transformada Z. A função de transferência  $G(z)$  é dada pela seguinte relação,

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{2n-1} \{\beta_i\} z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{2n} \{\alpha_i\} z^{-i}} \quad (5.6)$$

Da equação acima observa-se que  $4n-1$  parâmetros são suficientes para evidenciar as características espectrais do sinal, indicando assim a importante característica do modelo ARMA com relação aos métodos tradicionais do domínio da frequência que é a diminuição de quantidade de dados para análise. Enfatiza-se que a ordem do polinômio característico  $A(z)$  caracteriza a ordem dinâmica do sistema, isto é, a ordem do espaço de estado associada com a componente determinística do sinal.

A equação (5.6) estabelece uma representação de uma razão de polinômios em que o denominador  $A(z)$  representa um polinômio característico, cujas raízes podem conter informações das frequências e fatores de amortecimento relacionados um sistema estrutural. O polinômio no numerador contém informações de fase e amplitude modal do sistema (resíduos) [64], visto que suas raízes complexas definem frequências de antirressonância [12].

Os polinômios da função de transferência ainda fornecem informações relativas as características do processo em análise. No caso do processo  $y(t)$  ser estável os zeros no numerador devem estar dentro de um círculo unitário. A condição acima caracteriza um sistema inversível permitindo a existência de um processo MA de ordem  $q$  para uma dada função de autocorrelação. Estas propriedades garantem que a equação (5.4) represente um processo ARMA e que  $G(z)$  seja um filtro causal de fase mínima.

A função de transferência do filtro pode também ser representada na forma  $G(z) = \alpha(z)^{-1} \beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}$ . Os termos  $g_k$  na expressão correspondem a função de Green, a qual representa a função resposta a um impulso unitário (função de Kernel) [69]. Esta

---

<sup>1</sup> Função de Kernel é a transformada inversa de um espectro de amplitude (raiz quadrada do espectro de potência)

função corresponde a uma somatória de exponenciais obtidas dos pólos da função de transferência. Observando que diferentes fases levam a diferentes Kernels, a menor representação possível consistente com um dado espectro é obtida da resposta ao impulso gerada de um espectro de mínima fase. O número de parâmetros da função de transferência de mínima fase depende da razão de decaimento da mesma. Para sistemas com pólos próximos ao círculo unitário a resposta impulsiva decai lentamente, o que torna necessário implementar modelos de ordem alta para a descrição dos mesmos [96]. A ordem de modelos paramétricos estimados é ainda influenciada pela contaminação de sinais por ruídos, efeito que mascara o processo de estimação atribuindo graus de liberdade adicionais à dinâmica do sistema.

### 5.2.2 Métodos de estimação aplicados aos modelos da classe ARMA

A obtenção dos parâmetros e da variância do ruído de entrada de modelos da classe ARMA(ARMAX) é um dos principais aspectos do problema de estimação. Os parâmetros podem ser obtidos através de critérios ótimos baseados no método da máxima verossimilhança ou de critérios sub-ótimos baseados nos métodos dos mínimos quadrados e ou métodos da variável instrumental. Estes métodos denominados estimadores na teoria estatística não só permitem a obtenção dos parâmetros do modelo, mas também são apropriados à testes de avaliação da qualidade do modelo através da comparação de modelos rivais e análise das propriedades dos resíduos [11].

O método da máxima verossimilhança é um critério de estimação estocástico, que visa extrair os parâmetros do modelo com base em dados observados na estrutura através da maximização de uma função distribuição de probabilidade. O objetivo principal do critério é obter uma aproximação estocástica que converge para a série temporal observada no sentido de mínimo erro quadrático. Esta aproximação é obtida através de critérios ótimos de busca, guardando a hipótese inerente que o ruído no modelo é Gaussiano [135]. O processo de otimização é estabelecido de modo a maximizar a verossimilhança da amostra observada. Embora estatisticamente este critério apresente boas propriedades assintóticas, seu processamento requer grande quantidade de dados para a obtenção de um estimador com variância pequena. A implementação computacional desse estimador é complexa face a um problema de maximização não-linear [22], além disto a função de verossimilhança pode

apresentar vários pontos de máximo, de modo que a convergência para qualquer um destes pode levar a resultados errôneos [49].

O método da variável instrumental é um método de mínimos quadrados modificado apropriado à análise de sinais contaminados com ruídos. Este método consiste na utilização de seqüências de variáveis denominadas instrumentais. Estas seqüências devem ser correlacionadas com o vetor de dados amostrados do sinal e não correlacionadas com os ruídos. A variável instrumental age como um operador de ortogonalização e o processo de estimação resume-se à busca de variáveis instrumentais mais apropriadas [11]. A eficiência desse método depende do tipo de instrumento selecionado.

No presente estudo os modelos são implementados com base em critérios sub-ótimos, derivados dos métodos dos mínimos quadrados. Estudos aprofundados do desenvolvimento dos vários métodos derivados dos mínimos quadrados são apresentados nas referências [28,29,107].

Os modelos implementados derivam basicamente da função de autocorrelação e autocovariância. Estes estimadores são de grande importância para a descrição de processos estocásticos estacionários e são amplamente aplicados como um artifício para a redução computacional na implementação dos algoritmos de análise [55]. Ressalta-se que a função de autocorrelação é primordial na escolha de modelos de identificação, pois uma vez obtida a função de autocorrelação de uma série temporal o problema reside em estabelecer que processo estocástico irá prover um modelo adequado de identificação. No caso de um dos modelos AR, MA ou ARMA forem considerados adequados ao processo de identificação, a questão crucial residirá na obtenção da ordem destes modelos para então estimar os parâmetros.

No item seguinte são abordados aspectos relativos às características do modelo AR e seus estimadores. Este estudo é motivado em razão do modelo AR ser uma forma especial de representação de modelos da classe ARMA.

### 5.2.3 Descrição do Modelo AR

A definição do método de estimação de parâmetros depende do modelo paramétrico ajustado ao processo estacionário Gaussiano. O modelo AR constitui uma das ramificações da classe de modelo ARMAX. Na teoria de análise de sinais os métodos ARMA e AR são tratados como a abordagem moderna [30] em relação aos modelos ARMAX. A importância do estudo do processo AR é justificada pelos seguintes aspectos: (i) de modo equivalente ao ARMA, o modelo AR é hábil para descrever o elemento estocástico de flutuação da série temporal quando a hipótese de independência dos erros sucessivos é válida, isto é, quando o resíduo é não correlacionado (ii) este modelo é uma ferramenta de extrema importância na teoria moderna de análise de sinais e identificação, (iii) os métodos sub-ótimos de estimação do modelo ARMA são implementados a partir do modelo AR, (iv) o modelo AR apresenta uma representação estatística que não cresce em dimensão à medida que o número de observações aumenta [46], (v) estipulada uma ordem suficientemente grande o modelo AR é rico o suficiente para representar uma grande faixa de processos.

Considerando o modelo ARMA e removendo o processo de médias móveis obtém-se um processo autoregressivo representado pela equação [155],

$$y(k) + \sum_{i=1}^p \alpha_i y(k-i) = e(k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.7)$$

onde,  $y(k)$  é o sinal observado,  $p$  é a ordem do modelo,  $\alpha_i$  corresponde aos coeficientes AR a serem determinados,  $e(k)$  corresponde ao termo de excitação do sistema, o qual é desconhecido e assumido como um processo de ruído branco de média zero e variância  $\sigma_e^2$ .

A equação acima referida como representação de um modelo AR de ordem  $p$  pode ser descrita na forma matricial pela relação,

$$\{y\} = [A] \{\alpha\} + \{e\}, \quad (5.8)$$

onde,

$$\{y\} = \langle y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_p \rangle_{1 \times p}^T,$$

$$[A] = \begin{bmatrix} y(0) & y(-1) & \cdots & y(1-i) \\ y(1) & y(0) & \cdots & y(2-i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & y(N-2) & \cdots & y(N-i) \end{bmatrix}_{N \times i},$$

$$\{\alpha\} = \langle \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p \rangle_{p \times 1}^T$$

Os parâmetros do modelo AR podem ser estimados através de vários algoritmos computacionalmente eficientes, dentre eles: (i) o método dos mínimos quadrados, (ii) método de Burg, (iii) método da covariância, (iv) método da autocorrelação, etc. Os estimadores de parâmetros em sua maioria são formulados como uma variação das equações de Yule-Walker, também conhecida como método da autocorrelação de predição linear [118]. A representação matricial da equação de Yule-Walker é da forma,

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \cdots & R_{yy}(p) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{yy}(p) & R_{yy}(p-1) & \cdots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.9)$$

a equação acima pode ser representada na forma,

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i R_{yy}(k-i) = \sigma_f^2 \delta(k), \quad \forall k \geq 0 \quad (5.10)$$

A representação de Yule-Walker estabelece um conjunto de equações normais de um problema de predição linear, de modo que os parâmetros  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  e  $\sigma_f^2$  são obtidos a partir das funções de autocorrelação  $R_{yy}(k)$  derivadas diretamente de valores experimentais  $y(k)$ .

Vários métodos de estimação podem ser derivados a partir da equação de Yule-Walker, dependendo da seqüência em que os dados do vetor  $\{y(k)\}$  é tomada para a construção da matriz de autocovariância [30,76]. Na hipótese de um modelo AR de ordem  $p$  ajustado a um

vetor de dados  $\{y(k)\}$  de  $N$  pontos discretos e variando os limites admitidos do índice  $k$ , os seguintes métodos podem ser postulados a partir da formulação de Yule-Walker,

1. **Método da autocorrelação janelado:** os vetores coluna da matriz de covariância são construídos com o índice  $k$  variando na faixa  $0 \leq k \leq N-1+p$ . Os valores de  $y(k)$  para  $k < 0$  e  $k > N-1$  são admitidos nulos.
2. **Método da autocorrelação pré-janelado:** os vetores coluna da matriz de covariância são construídos com o índice  $k$  variando na faixa  $0 \leq k \leq N-1$ . Para  $k < 0$  os dados são admitidos nulos. Neste método pode-se assumir que  $y(k)$  corresponde à resposta de um sistema causal em repouso a uma força aplicada num instante zero.
3. **Método da autocorrelação pós-janelado:** os vetores coluna da matriz de covariância são construídos com o índice  $k$  variando na faixa  $p \leq k \leq N-1+p$ , onde os valores de  $\{y(k)\}$  são admitidos nulos após o período de observação  $K > N-1$ , ou seja após o período  $T = N\Delta t$ . Este método, também conhecido como método da correlação, é apropriado ao caso em que  $y(k)$  representa a resposta de um sistema causal a uma força transiente  $f(k)$  aplicada a partir de um instante zero. Admite-se também que tanto a força quanto a resposta decaem a zero durante o período de observação.
4. **Método da covariância não-janelado:** os vetores coluna da matriz de covariância são construídos com o índice  $k$  variando na faixa  $p \leq k \leq N-1$ . Neste método somente os dados disponíveis são utilizados para análise, ou seja, nenhum dado é admitido nulo. Este método pode ser considerado o mais geral e é apropriado à estimação de parâmetros de estruturas em que  $y(k)$  representa a resposta do sistema a uma força aleatória. Neste estimador não há garantia de que os pólos do modelo estejam localizados dentro de um círculo unitário. Este método é eficiente para extrair freqüências de dados consistindo de senóides puras.

Observa-se que os método da autocorrelação (janelado) gera uma matriz de covariância do tipo Toeplitz. Aspecto que caracteriza uma vantagem numérica para a formulação dos algoritmos de estimação. O artifício de adicionar zeros na construção dos vetores colunas da

matriz pode reduzir a resolução do método, especialmente quando a dimensão  $N$  do bloco de dados é pequena [118].

Uma variação do método da covariância é denominado método da covariância modificada (ou método progressivo-regressivo). Este método estabelece o dobro de dados no processo de identificação se comparado aos métodos discutidos acima. De modo semelhante ao método da covariância este procedimento somente processa amostra de dados medidos. Este método apresenta as seguintes características: (i) os parâmetros estimados são mais precisos, pois este utiliza mais dados que os métodos anteriores, (ii) é apropriado para a análise de sinais senoidais contaminados com ruídos branco, (iii) apresenta um razoável desempenho na identificação de sinais com pequenas amostras de dados, (iv) não há garantia dos pólos estarem localizados dentro do círculo unitário, embora tal problema usualmente não ocorra.

Para a solução do sistema de equações do problema de predição linear um método eficiente baseado num procedimento recursivo é o de Durbin-Levinson, comumente conhecido por algoritmo de Levinson. Este algoritmo não requer a obtenção da inversa da matriz de autocorrelação  $\{R_{yy}\}$ , portanto apresenta a vantagem de estimar os parâmetros do modelo de forma mais eficiente através da diminuição do número operações e otimização do uso de memória computacional. Uma variação do algoritmo de Levinson é o método de Burg, algoritmo que processa os dados de forma direta, ao invés de fazer uso das autocorrelações amostrais [113].

O algoritmo de Burg (método da máxima entropia) foi desenvolvido com o objetivo de obter um modelo de mínima fase de forma a evitar o inconveniente de admitir valores nulos em pontos extremos dos dados, problema que ocorre nos métodos de autocorrelação e autocovariância. O método é particularmente vantajoso no ajuste de modelos com amostras pequenas [125]. Neste método admite-se a hipótese de que a autocorrelação não é nula para “lags” fora do intervalo de observação, com a restrição dos dados serem de comprimento finito. No processamento do algoritmo de Burg o que se busca é um sinal com máxima desordem fazendo o mínimo de hipóteses para o intervalo de observação de modo que a função de autocorrelação se ajuste ao sinal observado dentro deste intervalo. Do ponto de vista da análise modal este método pode gerar erros na estimativa de parâmetros, embora o mesmo seja considerado ideal sob a ótica da teoria de análise espectral.

### 5.3 Relação dos parâmetros modais com os coeficientes do modelo paramétrico

Como discutido inicialmente o modelo paramétrico no domínio do tempo é uma forma alternativa de representação da dinâmica do sistema, portanto é perfeitamente possível recuperar os parâmetros modais de um sistema estrutural através de relações de equivalência entre os pólos e zeros da função de transferência contínua no tempo com os da função de transferência discreta. Antes de apresentar estas relações de equivalência é conveniente abordar aspectos inerentes às mesmas.

Os pólos  $s=p_i$ ,  $i=1,\dots,n$ , associados as frequências de ressonância do sistema guardam uma relação direta de equivalência com a representação discreta através da transformada Z. O mesmo não pode ser afirmado com respeito aos zeros pois estes podem ser subdivididos em duas categorias: (i) os que são equivalentes aos zeros da representação contínua e (ii) aqueles que surgem do processo de amostragem (denominados zeros de amostragem) [111].

O comportamento dos pólos e zeros no plano Z é influenciado pela taxa de amostragem  $\Delta t$ , de modo que a medida que a taxa de amostragem se torna pequena os pólos significantes do sistema discreto convergem para o valor unitário e os zeros convergem para uma localização fixa [130]. Este fenômeno afeta a precisão estatística dos métodos numéricos de estimação, e por conseguinte a precisão dos parâmetros modais [48]. Em aplicações práticas o problema acima pode ser solucionado com o uso de técnicas reamostragem de dados, tais como decimação e interpolação de sinais.

Em seqüência as discussões desses aspectos fundamentais são apresentadas as expressões que relacionam os parâmetros modais com os parâmetros do modelo discreto. As frequências naturais e fatores de amortecimento são obtidos a partir da raízes características do polinômio autoregressivo do modelo ARMA. Do polinômio AR descrito em termos de coeficientes reais tem raízes que levam aos pólos complexos conjugados  $z_i = a + jb_i$  do modelo discreto [123]. Os pólos do modelo discreto de equações de diferenças são relacionados aos pólos do modelo modal (descrição contínua no tempo) através da equação,

$$\lambda_j = \sigma_j + j\Omega_j. \quad (5.11)$$

A partir da relação  $z_i = e^{p_i \Delta t}$  pode-se mostrar que ,

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\Delta t} \ln(b_i^2 + a_i^2), \\ \Omega_i &= \frac{1}{\Delta t} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right),\end{aligned}\quad (5.12)$$

de forma que as frequências naturais e fatores de amortecimento são obtidos das relações :

$$\begin{aligned}f_i &= \frac{1}{2\pi} (\sigma_i^2 + \Omega_i^2)^{1/2} \\ \xi_i &= -\frac{\sigma_i}{(\sigma_i^2 + \Omega_i^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (5.13)$$

A análise dos modos de vibrar é associada aos zeros do modelo discreto, porém ressalta-se que nem sempre o mapeamento dos zeros da representação contínua com os zeros da representação discreta no plano Z é obtido de forma direta, como a exemplo dos autovalores. Um interessante estudo da analogia dos zeros do modelo contínuo com resíduos da função de transferência do modelo discreto espacial é apresentado em [52].

#### 5.4 Critérios de definição da ordem de modelos

O problema de identificação através de modelos paramétricos do domínio do tempo é relacionado com a definição de uma estrutura de modelo que é unicamente identificável a partir dos dados de uma série temporal. A estrutura do modelo inclui a definição de fatores como a ordem dinâmica do modelo, o número de coeficientes que aparece nas várias relações que constituem o modelo, a natureza das interconexões entre variáveis no modelo e a escolha do intervalo de discretização.

O estabelecimento da ordem do modelo é considerado um dos aspectos mais importantes no processo de identificação. A dificuldade relativa a este aspecto é relacionada aos erros inerentes à estimação da função de transferência do sistema dinâmico. Os erros podem ser devido a presença de ruídos nos sinais (erros de variância) ou de erros inerentes (erros de tendência) à hipótese de que o modelo parametrizado é no mínimo uma

versão simplificada do verdadeiro sistema. A definição da ordem que melhor representa o sistema pode mudar de acordo com as informações que o analista deseja obter do modelo.

Com relação à análise estrutural a importância da obtenção da ordem do modelo é associada à habilidade do mesmo evidenciar características relevantes à reprodução do comportamento do sistema. Na identificação paramétrica no domínio do tempo as características estruturais estão contidas numa matriz de correlação (ou covariância) dos dados, usualmente denominada matriz de informação [40]. Esta matriz não só guarda aspectos estruturais do sistema como embute os efeitos de contaminação por ruídos. Assim o processo de obtenção da ordem é refletido na análise de características da matriz de informação.

Diferentes critérios de obtenção de ordem de modelos são propostos na literatura. Dentre estes pode-se citar: cancelamento de pólos e zeros, decomposição do valor singular (SVD), critério  $R_t$ , qui-quadrado, AIC, FPE, variável instrumental [151]. Os critérios acima podem ser divididos em critérios puramente estatísticos, onde a ordem do modelo é estabelecida com base numa análise sensitiva de grandezas estatísticas e critérios baseado na análise algébrica do comportamento dos autovalores e autovetores da matriz de informação [84,86].

Observa-se que os testes de ordem de modelo podem ser tanto aplicados na determinação da ordem do processo como na determinação de ordem dinâmica do ruído. Por exemplo o método do cancelamento dos pólos e zeros, que consiste na verificação gráfica dos pólos e zeros que se cancelam mutuamente é somente apropriado para a avaliação da ordem do processo. Para sinais que apresentem uma relação sinal ruído (SNR) baixa o efeito do cancelamento de pólos e zeros é menos pronunciado [142]

O critério da variável instrumental consiste na análise do determinante de uma matriz Hankel construída com base na seqüência de dados da componente exógena do sistema e de uma seqüência de variável instrumental altamente correlacionada com uma saída hipotética (livre de ruídos) do sistema analisado. A variável instrumental gerada pela convolução da componente exógena do sistema com um filtro caracterizado por um sistema estável de ordem  $n$  é admitida não correlacionada com os termos de ruído de contaminação [152].

Os critérios estatísticos (AIC, FPE, Qui-quadrado) são formulados com base na análise comparativa de termos de erros de ajuste (ou resíduos) de modelos de diferentes ordens. Destacam-se dentre estes os critérios do erro final de predição (FPE) e de informação AIC estabelecidos por Akaike. Estes critérios são enfoques robustos na determinação prática da ordem de modelos, porém vem sendo aplicados basicamente à sistemas puramente estocásticos. Na determinação da ordem de modelos o critério FPE pode apresentar um comportamento assintótico e em conseqüência a ordem dos modelos pode ser muito elevada. O critério AIC é uma evolução do critério FPE formulado, a partir de uma função de penalização aplicada ao cálculo de uma estimativa da máxima verossimilhança da função de autocovariância. O critério AIC é definido pela seguinte relação,

$$AIC = (-2) \cdot \ln(\text{máxima verossimilhança}) + 2(\text{número de parâmetros do modelo independentemente ajustável})$$

A expressão acima é utilizada como um método de acompanhamento da função erro de ajuste. Observando que o limite de probabilidade da mesma sofre uma alteração significativa na vizinhança da ordem correta. Essa variação é mais ou menos pronunciada em função da relação sinal ruído do sinal em análise [2].

Os critérios que derivam da análise de características algébrica de matrizes são em sua maioria estabelecidos a partir da avaliação dos valores singulares de uma matriz de informação (matriz de autocorrelação), obtida do processo de estimação de parâmetros. Esta técnica também denominada como decomposição do valor singular é aplicada à análise do condicionamento da matriz de informação. Este método consiste na varredura de um espectro de valores singulares da matriz de informação. Uma queda em sua seqüência indica a ordem do modelo. Esta técnica comumente aplicada à identificação modal apresenta a vantagem de ser facilmente implementada. A análise do valor singular permite uma solução truncada que efetivamente melhora a razão sinal ruído dos dados. Este procedimento pode ser visto como a decomposição do sinal nas componentes efetivas do sistema e componentes do ruídos aditivos. Métodos baseados na análise do valor singular apresentam boa performance quando a relação sinal ruído é moderada. O fator limitante destes métodos é estabelecido pelo tamanho da amostra e pela relação sinal ruído, de forma a que ordem estimada pode ser sobre-determinada ou sub-estimada [156]. Uma característica importante deste método é a possibilidade de implementá-lo sem a execução prévia do algoritmo de estimação [142].

Como mencionado acima a ordem estimada do modelo pode ser sobre-determinada ou sub-estimada, no entanto convém discutir as implicações desses aspectos. A estimação paramétrica a partir de modelos sub-estimados ou seja modelos de ordem menor do que a ordem exata, é considerado uma falha do processo de identificação, visto que o modelo tende a apresentar uma estimação pobre de componentes de alta frequência do sinal e razoável estimação de componentes de baixa frequência. Por outro lado, a utilização de modelos sobre-determinados é prática comum no processo de identificação, em razão da obtenção de parâmetros mais precisos. Este procedimento tem a vantagem de apresentar uma estimação razoável dos parâmetros numa faixa de frequência considerável. Modelos sobre-determinados contém informações relacionadas aos modos do sistema e informações estranhas relativas a porções (modos computacionais) que aparecem no modelo para compensar o efeito de ruídos ou outras irregularidades de medidas. As desvantagens inerentes ao uso de modelos sobre-determinados são relacionadas ao mal condicionamento da matriz de informação (matriz próxima a singular) e às dificuldades de discriminação entre os modos computacionais e modos do sistema dinâmico [41].

O uso de técnicas baseadas em modelos paramétricos regresso aliado a técnicas de decomposição do valor singular da matriz de informação vem sendo considerado uma alternativa viável para a discriminação dos modos do sistema e modos computacionais [64]. O modelo é dito regresso baseado em que a equação de recursão representando um dado  $y(k)$  num tempo presente é escrita em termos de valores futuros, isto é, a resposta num tempo  $k$  é prevista usando o conhecimento de valores da resposta de entrada em tempos maiores ou igual a  $k$ . Na análise deste modelo as raízes características da parte AR do modelo localizadas fora do círculo unitário no plano  $Z$  representam os modos estáveis do sistema estrutural e os modos computacionais ficam localizados em posições distintas do plano  $Z$ . A abordagem deste tipo de técnica foi amplamente estudada por [6].

Finalizando a discussão dos aspectos da ordem do modelo é importante enfatizar que em caso práticos a "ordem" do sistema é uma informação irrelevante já que a natureza do sinal é a rigor de ordem infinita. Ressaltando-se que os algoritmos são desenvolvidos sob a falsa hipótese que o sistema real está inserido no modelo. Pode-se falar entretanto em uma ordem prática, do ponto de vista de acurácia numérica dos parâmetros calculados. A

informação última sobre as dimensões de engenharia do problema vem do conhecimento prévio de suas características obtidas de outras maneiras diversas.

### **5.5 Definição do procedimento de identificação adotado**

O procedimento de identificação é iniciado a partir da compilação dos dados observados ordenados no tempo. Os dados podem ser obtidos de condições experimentais controladas ou condições não controladas. A identificação paramétrica consiste em estabelecer vetores de dados que expressem a dependência dos sinais num espaço vetorial linear de dimensão crescente, o que é equivalente ao ajuste de equações de diferenças finitas de ordem crescente. Tal procedimento é plenamente justificado em razão dos modos ou comportamento do sistema se manifestarem como uma seqüência de sucessivas observações.

O procedimento de identificação de sistemas adotado no trabalho é composto de duas abordagens distintas. Na primeira abordagem modelos ARMA e AR são aplicados a um processo de identificação de sinais provenientes de sistemas dinâmicos simulados. Na outra abordagem o processo de identificação é estabelecido com o objetivo de analisar sinais coletados de uma estrutura real, caracterizada por vários modos de vibração. Neste segundo caso optou-se pela identificação via o modelo ARMAX, em razão de problemas verificados na identificação do sistema com o modelo ARMA. Ressalta-se que inicialmente o objetivo era utilizar o modelo ARMA na identificação de sistemas em que somente o sinal de resposta era conhecido. Embora esta hipótese seja viável para análise de sistemas estruturais simples, o mesmo não ocorre em sistemas que apresente elementos estruturais complexos. Um exemplo mostrando o processo de identificação aplicado na análise de sinais sistema reais é apresentado no capítulo seguinte.

O recurso de utilizar modelos simulados teve por estabelecer subsídios para o melhor entendimento dos procedimentos de identificação adotado, em especial os aspectos relacionados com a ordem do modelo. O procedimento de identificação adotado consistiu em implementar modelos paramétricos da classe ARMA para a obter informações da dinâmica do sistema a partir do sinais observados no mesmo. O processo de identificação basicamente consistiu dos seguintes passos:

1. **Geração de sinais de análise:** os dados de análise consistiram de sinais de sistemas dinâmicos simulados a partir da construção da função resposta ao impulso e de sinais obtidos de um procedimento experimental aplicado a um estrutura mecânica. Para os sinais simulados um procedimento de contaminação dos sinais foi adotado de modo a emular uma condição mais próxima de sinais originados de sistemas reais. Técnicas tais como decimação, que são apropriadas para evidenciar conteúdos de informações específicas dos sinais foram implementadas aos dados coletados no procedimento experimental.
2. **Implementação do modelo:** nesta fase modelos paramétricos de identificação da classe ARMA foram implementados no processo de estimação de parâmetros. Nesta etapa é formulada a matriz de informação dos dados e aplicado o método de identificação da ordem. Com base em estudos preliminares [104,105] optou-se pelo critério AIC para a determinação da ordem dos modelos.
3. **Estimação dos parâmetros do modelo paramétrico:** Estabelecido o modelo e sua ordem, o passo seguinte consistiu na obtenção dos parâmetros do mesmo e sua validação.
4. **Obtenção do polinômio característico:** da matriz de informação é processado o cálculo dos autovalores e no caso do modelo ARMAX a função de transferência é expandida em frações parciais para a obtenção dos modos de vibrar.
5. **Cálculos dos parâmetros estruturais:** Da relações estabelecidas entre a representação paramétrica e modelo contínuo do domínio do tempo são obtidos os parâmetros do sistema estrutural.

Os conceitos discutidos neste capítulo serão aplicados de forma prática no capítulo seguinte, por intermédio da análise de sinais gerados de simulações numéricas e de resultados obtidos em ensaio de laboratório.

## **Capítulo 6**

### **Aplicações**

#### **6.1 Introdução**

O presente capítulo tem por objetivo verificar a performance dos modelos de identificação de sistema através de exemplos de aplicações. Inicialmente as aplicações foram desenvolvidas com sistemas simulados numericamente, com objetivo de verificar características dos modelos da classe ARMA. A seguir o modelo paramétrico ARMAX é aplicado na identificação de sinais de uma estrutura mecânica ensaiada em laboratório.

#### **6.2 Simulações numéricas**

Os dados gerados para análise consistem de simulações de dois casos distintos. No primeiro caso os dados de análise foram obtidos através da obtenção da função resposta ao impulso no domínio do tempo, a partir de parâmetros modais teóricos estabelecidos para um sistema de quatro graus de liberdade. A simulação da resposta ao impulso foi gerada como uma soma de senóides amortecidas. Um ruído aleatório quantificado em termos da relação sinal ruído (valor SNR) foi adicionado à componente da resposta ao impulso. A relação SNR foi estabelecida em termos da potência do sinal (valor RMS) dividida pela potência do ruído. A componente de saída do sistema dinâmico foi obtida através da convolução da função resposta ao impulso (contaminada) com um ruído excitação Gaussiano (ruído branco).

No segundo caso um sistema de três graus de liberdade foi simulado tomando-se a resposta nas coordenadas generalizadas do sistema quando excitado em um ponto específico da estrutura. Este modelo difere do primeiro com relação ao modelo de simulação e por

apresentar frequências naturais mais próximas. De forma semelhante ao primeiro caso o procedimento de identificação foi implementado a partir dos sinais de resposta contaminados com um ruído branco.

O objetivo da análise desses casos foi de utilizar os procedimentos estabelecidos no capítulo 5 de forma a avaliar a eficiência e precisão da estimação dos parâmetros modais obtidos pelas técnicas paramétricas estudadas.

### 6.2.1 Simulação numérica - caso 1

O primeiro caso analisado consistiu na identificação dos parâmetros modais de um sistema de quatro graus de liberdade estudado em Kurka [86]. Os sinais adotados para análise foram obtidos pela convolução da função resposta ao impulso com um ruído branco. Aspecto que difere do modelo adotado em [86], pois neste caso a identificação foi processada diretamente nos dados da função resposta ao impulso. Os pólos e resíduos do sistema analisado são apresentados na Tabela 6.1.

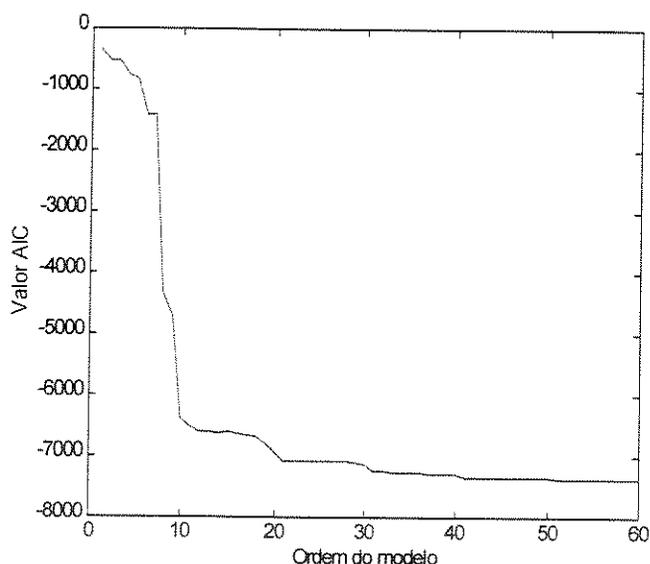
**Tabela 6.1**

Pólos e resíduos do modelo de 4 graus de liberdade

Pólos ( $s_k$ )	Resíduos ( $r_k$ )
$2\pi (-0.01 \pm 5j)$	$-1 \pm j$
$2\pi (-0.01 \pm 10j)$	$1 \pm j$
$2\pi (-0.01 \pm 15j)$	$-0,4 \pm j$
$2\pi (-0.01 \pm 20j)$	$-0,4 \pm j$

A identificação foi processada com amostras de 2048, 512 e 256 pontos de modo a verificar a influência do tamanho da amostra no processo de identificação dos parâmetros modais. Um intervalo de discretização  $\Delta t = 0,0195$  segundos foi estipulado para a análise. Um ruído branco com média e variância ajustada foi adicionado à função resposta ao impulso de forma a estabelecer a relação sinal ruído  $SNR = 5$ . O processo de identificação adotado não possibilita estimar os resíduos do sistema, visto que a estimação dos parâmetros foi formulada somente com o sinal de resposta do sistema.

Inicialmente a identificação foi processada com um modelo autoregressivo (AR) utilizando-se diferentes estimadores. No primeiro caso um modelo AR foi implementado ao sinal de 2048 pontos utilizando-se o estimador da autocorrelação pré-janelado. A ordem do modelo foi estabelecida a partir do critério AIC. Na Figura 6.1 é mostrado um gráfico da evolução dos valores AIC versus a ordem do modelo implementado. A ordem ideal segundo este critério corresponde ao ponto de mínimo identificado na curva. Da análise do gráfico verifica-se que a ordem ideal do modelo segundo esse critério é 53. Observe que do ponto de vista do princípio da plausibilidade um modelo de ordem 52 poderia ser adotado sem maiores problemas. Ressalta-se que por razões de manter a simetria dos pólos complexos conjugados é recomendável escolher modelos de ordem par. No entanto, neste trabalho para efeito de análise considerou-se o modelo de ordem 53.



**Figura 6.1** Critério AIC aplicado ao modelo AR

Na tabela 6.2 são apresentados as frequências ( $f_r$ ) e fatores de amortecimento ( $\zeta$ ) identificados através de diferentes estimadores AR ajustados ao sinal de 2048 pontos. O aspecto relevante observado dos resultados é a baixa performance dos estimadores Burg e da covariância modificada na identificação do fatores de amortecimento do sistema. Ressalta-se que estes estimadores são amplamente adotados na teoria de análise de sinais, face a vantagem de processar a identificação com amostras pequenas de sinais.

**Tabela 6.2**  
Performance dos estimadores AR aplicado ao sinal de 2048 dados

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados</i>							
		<i>Autocorrelação pós-janelado AR(53)</i>		<i>Autocorrelação Pré-janelado AR(53)</i>		<i>Burg AR(53)</i>		<i>Covariância Modificada(53)</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
5	0,0020	5,0004	0,0022	5,0006	0,0020	4,9859	0,0003	5,0004	0,0002
10	0,0010	9,9996	0,0011	10,0001	0,0010	9,9898	0,0001	9,9998	0,0001
15	0,0007	15,0004	0,0007	15,0011	0,0007	15,0062	0,0001	15,0005	0,0001
20	0,0005	20,0000	0,0006	19,9992	0,0005	19,9905	0,0001	20,0000	0,0001

Alternativamente um modelo ARMA foi adotado na estimação dos parâmetros modais do sistema. Os parâmetros estimados para diferentes ordens são apresentados na Tabela 6.3. O ajuste do critério AIC neste caso apresenta maior dificuldade, em razão do processo de otimização da ordem ser baseado nas variáveis relativas à ordem do processo autoregressivo (AR) e do processo de médias móveis (MA). Como consequência deste problema o tempo de processamento do modelo ARMA é superior ao do modelo AR. De acordo com o critério AIC um modelo ARMA de ordem (11x10) é o que melhor se ajusta ao sinal de 2048 pontos. Dos resultados ressalta-se a vantagem do modelo apresentar menor número de parâmetros em comparação ao modelo AR previamente ajustado. Esta vantagem torna o procedimento de separação entre os pólos computacionais e os pólos reais do sistema seja mais fácil.

**Tabela 6.3**  
Parâmetros modais estimados do modelo ARMA aplicado ao sinal de 2048 dados

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados</i>					
		<i>ARMA(11,10)</i>		<i>ARMA(10,9)</i>		<i>ARMA(8,7)</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
		2,6200	1,0000				
5	0,0020	5,0006	0,0021	5,0003	0,0021	4,9994	0,0023
10	0,0010	10,0001	0,0010	10,0009	0,0010	10,0021	0,0069
15	0,0007	15,0004	0,0007	15,0016	0,0007	15,0002	0,0047
20	0,0005	19,9997	0,0005	19,9975	0,0005	19,9975	0,0015
		25,6464	0,0204	23,9796	0,4322		
		33,6340	0,6472				

Da análise dos resultados observa-se que o modelo ARMA (11,10) identifica de forma satisfatória os parâmetros modais (frequência e amortecimento). Este modelo pode ser ainda

racionalizado através de uma metodologia baseada na análise de parâmetros de modelos concorrentes. Esta metodologia proveniente da teoria de séries temporais é conhecida como princípio da plausibilidade. Princípio que consiste na análise da viabilidade de modelos de ordem alternativa que tenham valores AIC próximos ao valor ideal. De acordo com este princípio os parâmetros de um modelo ARMA(10,9) também apresentam resultados satisfatórios.

Com o objetivo de verificar a performance dos modelos na identificação de sinais com amostras menores, os procedimentos estabelecidos acima foram aplicados à amostras de sinais de 512 pontos. Nas Tabelas 6.4 e 6.5 são apresentados respectivamente os resultados relativos ao modelo AR e ARMA.

**Tabela 6.4**

Parâmetros modais estimados do modelo AR(41) aplicado ao sinal de 512 pontos

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados</i>							
		<i>Autocorrelação pós-janelado</i>		<i>Autocorrelação Pré-janelado</i>		<i>Burg</i>		<i>Covariância modificada</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
5	0,0020	5,0026	0,0040	5,0035	0,0020	4,9816	0,0009	5,0007	0,0004
10	0,0010	10,0016	0,0019	10,0015	0,0009	9,9839	0,0004	10,0017	0,0002
15	0,0007	14,9992	0,0017	15,0009	0,0009	15,0078	0,0005	14,9998	0,0003
20	0,0005	20,0000	0,0011	19,9969	0,0006	19,9815	0,0003	20,0003	0,0003

**Tabela 6.5**

Parâmetros modais estimados do modelo ARMA aplicado ao sinal de 512 dados

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados</i>					
		<i>ARMA(14,13)</i>		<i>ARMA(12,11)</i>		<i>ARMA(11,10)</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
		0,8060	1,0000	1,2735	1,0000		
5	0,0020	5,0010	0,0022	5,0016	0,0022	5,0011	0,0024
						9,3748	1,0000
10	0,0010	10,0038	0,0011	10,0008	0,0014	10,0003	0,0012
		12,4737	0,4706				
15	0,0007	14,9977	0,0009	14,9958	0,0008	14,9959	0,0008
20	0,0005	20,0034	0,0005	20,0056	0,0005	20,0030	0,0004
		22,7890	0,0127	21,7009	0,0160	25,6805	0,0554
		27,1834	0,3321	33,4098	0,6411	29,2695	0,4823

Convém ressaltar que na tabela relativa ao modelo AR foram omitidas informações dos modos computacionais do modelo, de forma a obter uma apresentação mais concisa dos dados. Dos resultados obtidos verifica-se que a estimação dos parâmetros é consistente para os modelos AR (autocorrelação pré-janelado) e ARMA.

No processo seguinte considerou-se a estimação implementada através de um modelo AR de ordem 30 (segundo critério AIC), aplicado a amostra de sinais de 256 pontos. O objetivo neste caso foi de verificar o problema relativo a hipótese assumida de que a excitação no processo AR e ARMA é caracterizada por um ruído branco. No caso de amostras pequenas esta hipótese é relaxada, em razão de não haver a garantia de que os processos Gaussianos gerados sejam suficientemente ricos para evidenciar as propriedades do filtro (que guarda as características dinâmica do sistema estrutural).

**Tabela 6.6**

Parâmetros modais estimados do modelo AR(30) aplicado ao sinal de 256 dados

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados</i>							
		<i>1</i>		<i>2</i>		<i>3</i>		<i>4</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
		0,9601	1,0000	2,6242	0,2788	2,9085	1,0000	0,9913	1,0000
		4,1377	0,3328			4,6793	1,0000	2,6957	0,3925
5	0,0020	5,0004	0,0123	5,0233	0,0080	5,0133	0,0424	4,9711	0,0362
		9,1048	0,1418	9,4472	0,2440			5,0121	1,0000
								5,2408	0,1534
								8,7282	0,1013
10	0,0010	10,0374	0,0156	9,9680	0,0122	10,0477	0,0100	10,0653	0,0080
								11,6937	0,1283
15	0,0007	15,0180	0,0027	15,1812	0,0193	14,9541	0,0037	14,9459	0,0072
		17,8357	0,0699	18,3430	0,0899	16,9318	0,2117	15,6784	0,0591
								17,5506	0,0481
20	0,0005	19,9919	0,0021	19,9740	0,0023	19,9826	0,0052	19,9884	0,0035
		22,0793	0,0899	24,7014	0,1256	25,7323	0,0841	20,6798	0,0401
		25,7144	0,0755					23,6979	0,0380
								25,6671	0,0451

Na Tabela 6.6 os dados correspondem à análise de quatro caso distintos, relativos à diferentes níveis de ruído de excitação na entrada do sistema. Observa-se dos resultados que os fatores de amortecimento são influenciados pelos diferentes processos de excitação de ruído. Este problema também é verificado no caso do modelo ARMA. Na estimação

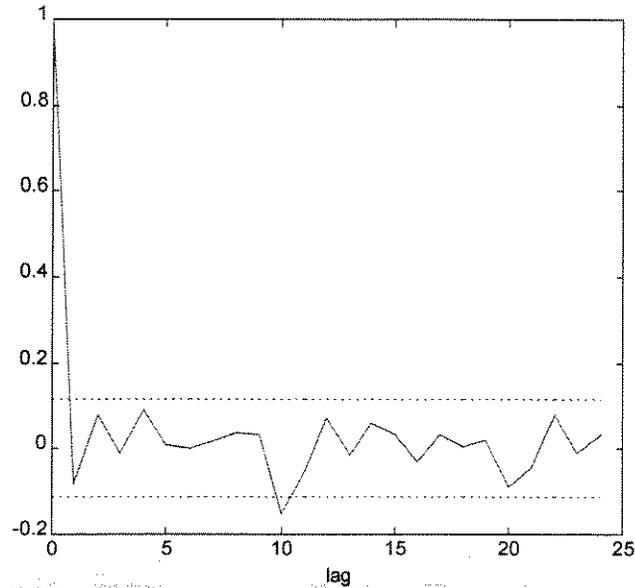
processada com amostras superior a 512 dados não foi verificado tal tipo de problema, em razão de haver uma melhor convergência das características estatísticas do ruído branco.

Embora os aspectos discutidos acima sejam específicos à modelos simulados, é possível traçar um paralelo com casos reais considerando as situações em que: (i) não linearidade presentes na estrutura são atribuídas ao ruídos de excitação, (ii) o processo de excitação não é rico o suficiente para excitar os modos do sistema estrutural, (iii) ocorre a interação da dinâmica do processo de excitação com a dinâmica do sistema. O último caso é tratado em [35] como um fenômeno denominado “force drop-out”, que afeta a hipótese de ruído branco de excitação.

Da análise global dos resultados obtidos pode-se dizer que os modelos AR e ARMA apresentaram uma estimação consistente das características modais. No entanto é recomendável validar estatisticamente o procedimento de identificação. Para o caso em questão serão tomados como exemplo os modelos AR e ARMA aplicados a amostra de 512 pontos.

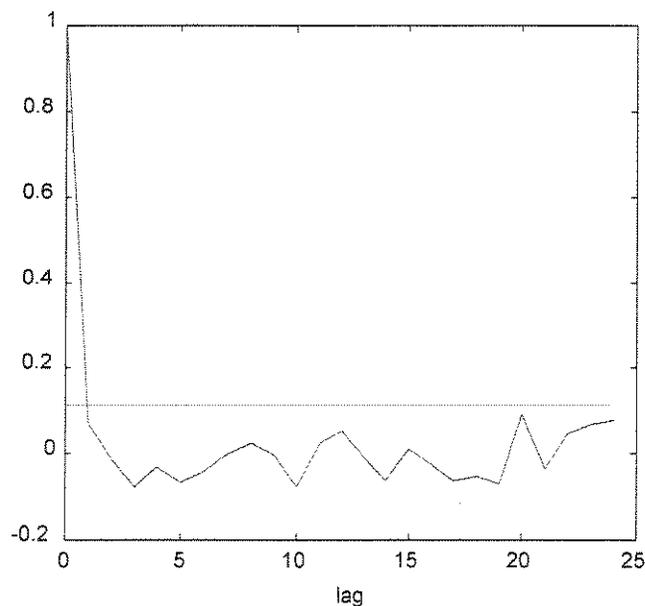
A proposta de validação é baseada na análise do sinal caracterizado pela diferença entre os valores estimados na série e valores reais (sinal residual). Esta análise é fundamentada na hipótese de que a entrada dos processos ARMA e AR são caracterizadas por um ruído branco. Portanto para que a hipótese seja verdadeira é esperado que o sinal residual apresente características de um ruído branco.

O teste clássico de verificação do comportamento do sinal residual baseia-se na análise do gráfico da autocorrelação do mesmo, gráfico denominado correlograma. Uma vez que o processo de excitação é admitido como um ruído branco é esperado que a série temporal obtida pela diferença dos valores estimados e valores reais seja não correlacionada para atrasos superiores a zero. Para o sinal considerado o correlograma é mostrado na Figura 6.2. Os limites especificados no gráfico são relacionados a um intervalo de confiança de 95%. Os valores da autocorrelação fora do intervalo de confiança indicam a possível quebra da hipótese da componente residual apresentar características de um ruído branco.



**Figura 6.2** Correlograma da componente residual do modelo AR

Da análise do gráfico verifica-se que a pequena discrepância existente sugere que um termo de médias móveis de ordem 10 pode ser eventualmente incluído no modelo. Este resultado é confirmado através do critério AIC na estimação do sinal através do modelo ARMA. No caso considerado o modelo ARMA(11,10) é um dos modelos viáveis a identificação do sinal. O correlograma correspondente a este modelo é apresentado na Figura 6.3.

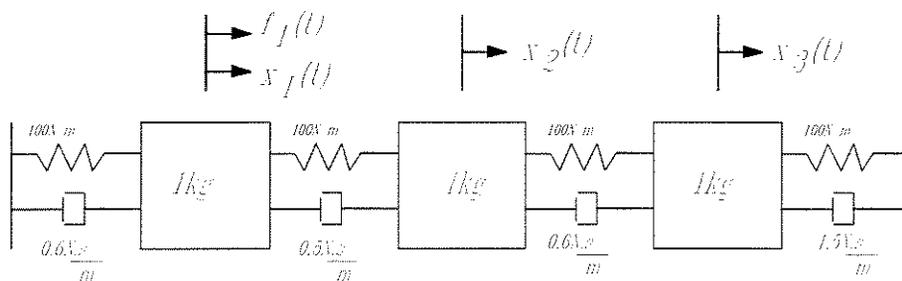


**Figura 6.3** Correlograma da componente residual do modelo ARMA

Da análise do correlograma da Figura 6.3 pode ser observado um melhor comportamento da autocorrelação da componente residual.

### 6.2.2 Simulação numérica - caso 2

No segundo caso o modelo ARMA é aplicado na análise de um sistema estrutural de três graus de liberdade indicado na Figura 6.4. O procedimento de estimação de parâmetros foi processado a partir dos sinais de resposta da estrutura excitada por um ruído branco no ponto correspondente a coordenada generalizada 1. Nesta simulação optou-se pelo uso de um ruído de excitação pseudo-aleatório (prbs). Esta escolha foi adotada em razão deste ruído evidenciar melhor a dinâmica do sistema para sinais derivados de processos AR e ARMA. Os sinais de vibração resultantes foram obtidos integrando as equações do sistema. A análise foi processada com um conjunto de dados de 512 pontos amostrados num intervalo  $\Delta t = 0,1$  segundos e contaminado com um ruído na razão  $SNR=5$ .



**Figura 6.4** Sistema dinâmico estrutural de três graus de liberdade.

Na Tabela 6.7 são apresentados os resultados da estimação processada via o modelo ARMA de ordem  $12 \times 7$  implementado ao sinal de resposta referente a coordenada generalizada  $x_3(t)$ . Os valores estimados correspondem a média da identificação de dez simulações.

**Tabela 6.7**

Estimação de parâmetros via modelo ARMA aplicado ao sinal  $x_3(t)$

<i>Parâmetros teóricos</i>		<i>Parâmetros estimados Modelo ARMA(12,7)</i>	
fr(Hz)	$\zeta$	fr(Hz)	$\zeta$
1,29	0,0271	1,2887±0,0240	0,0381±0,0082
2,06	0,0417	2,0811±0,0217	0,0397±0,0179
2,83	0,0487	2,8402±0,0279	0,0406±0,0092

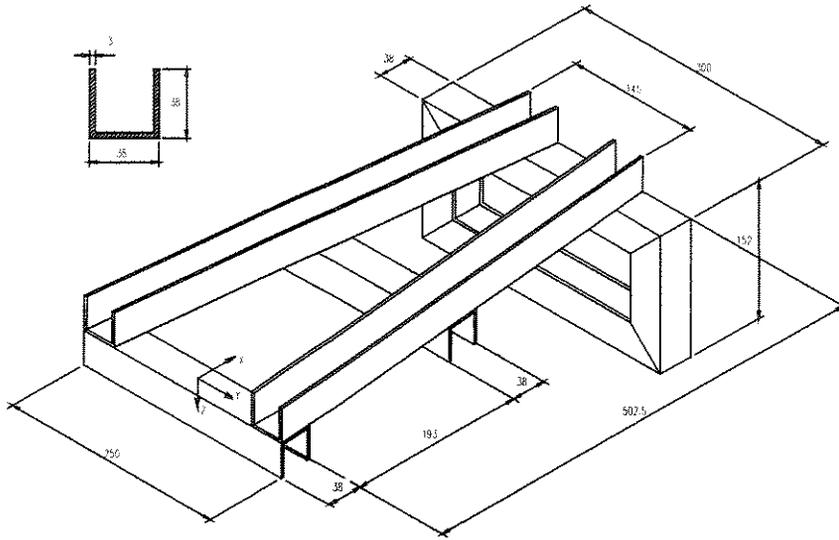
A análise acima teve por objetivo implementar o processo de identificação, bem como estabelecer os procedimentos de análise da ordem e validação do modelo. A seguir os procedimentos de identificação adotados serão aplicados na identificação de sinais obtidos de um ensaio experimental desenvolvido com uma estrutura real. Em razão da complexidade da estrutura optou-se pelo uso do modelo *Autoregressivo de médias móveis com entrada exógena* (ARMAX).

### 6.3 Aplicação experimental

O presente item tem por objetivo verificar a performance de um modelo de identificação de sistema aplicado à análise experimental de estruturas reais. A análise desenvolvida visa verificar a performance do modelo paramétrico *autoregressivo de médias móveis com entrada exógena* (ARMAX) no processo de identificação das características modais de um sistema estrutural mecânico, caracterizado por vários modos de vibrar. A identificação processada consistiu na obtenção das frequências, dos fatores de amortecimento e da estimativa dos modos de vibrar do sistema estrutural estudado.

#### 6.3.1 Caracterização da estrutura

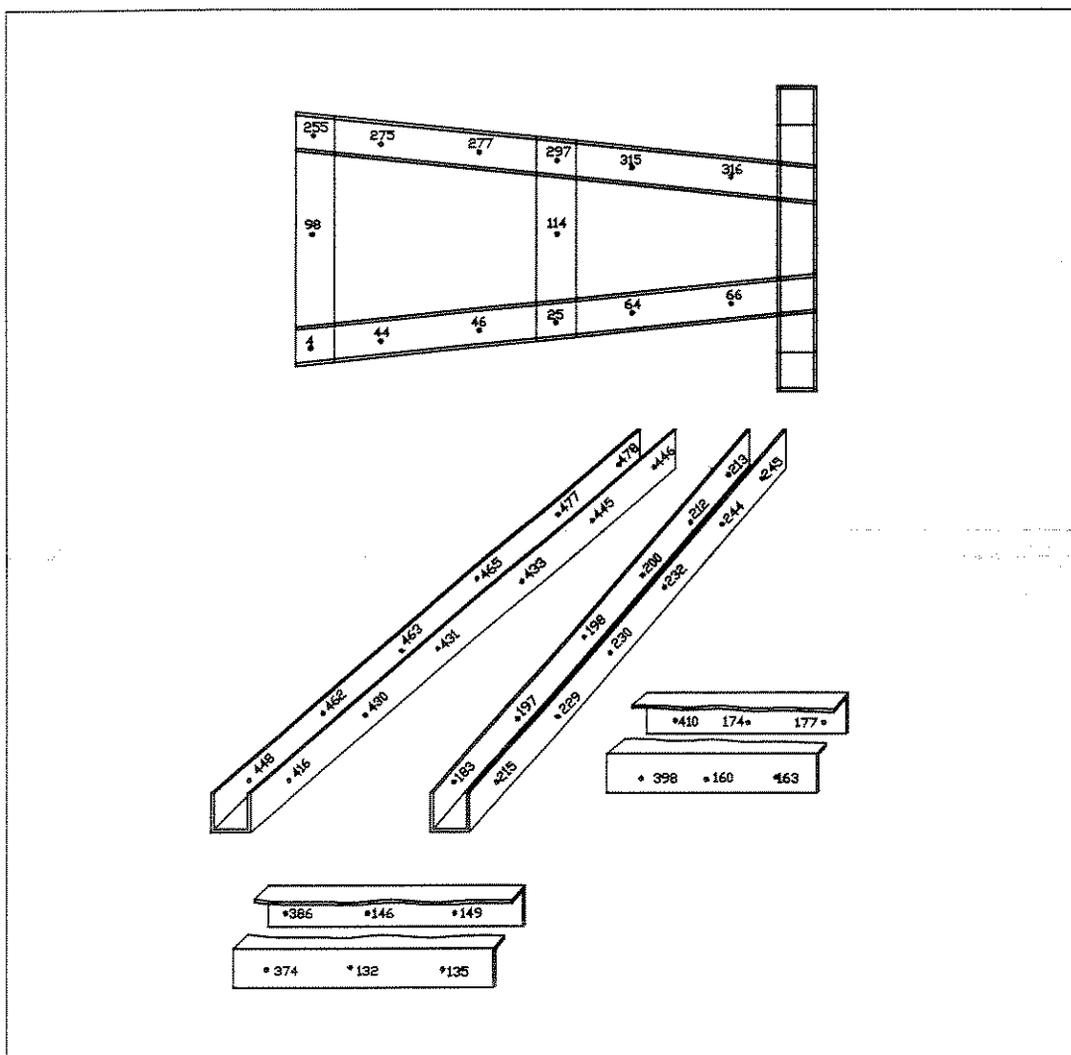
Na Figura 6.5 é apresentado o esquema com as dimensões da estrutura utilizada no desenvolvimento do ensaio experimental. A estrutura analisada tem massa aproximada de 2 Kg e foi confeccionada em perfis U de alumínio. O sistema experimental objetivou representar um modelo aproximado em escala reduzida de uma asa de avião com um tanque na sua extremidade. A montagem dos elementos estruturais do corpo da estrutura bem como do quadro preso à extremidade da mesma foi efetuada através de solda. A junção do quadro com o corpo do sistema foi efetuada por intermédio de parafusos.



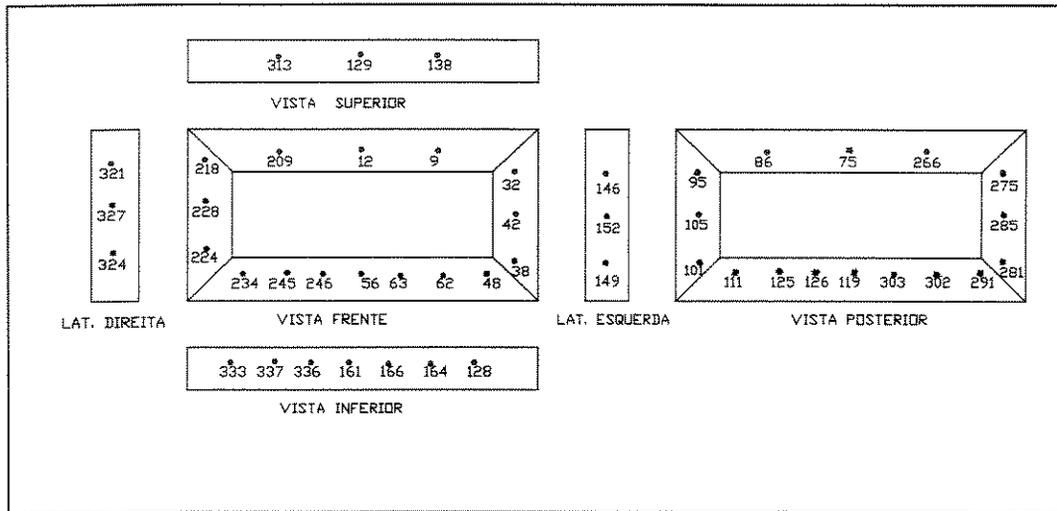
**Figura 6.5** Estrutura de alumínio de teste

O processo de identificação dos parâmetros modais foi desenvolvido com base na análise dos sinais de excitação e resposta da estrutura em estudo. As medidas efetuadas no sistema correspondem aos sinais de aceleração induzidos por um sinal excitação aleatório, aplicado num ponto pré-estabelecido do sistema estrutural. O procedimento de identificação implementado foi desenvolvido com base na análise univariada (SISO) dos sinais. No processo de identificação foram estabelecidos 98 pontos de coleta de dados, sendo 44 na direção x, 30 na direção y e 24 na direção z. Nas Figuras 6.6 e 6.7 são mostrados detalhes dos elementos estruturais do sistema indicando os pontos estabelecidos para medidas. Os pontos de análise foram escolhidos de forma a coincidir com as coordenadas da malha de elementos finitos desenvolvidas no trabalho de Araújo [3]. O referido trabalho trata do desenvolvimento da síntese modal da estrutura, formulada a partir da análise modal da estrutura completa e de suas sub-estruturas. As técnicas de análise modal aplicada ao estudo foram baseadas no processamento de dados da função resposta em frequência dos sinais, medidos nos vários pontos da estrutura e sub-estrutura.

Com relação aos objetivos do presente trabalho o que se almejou foi a identificação dos parâmetros modais da estrutura a partir de um modelo paramétrico de identificação aplicado à análise dos sinais no domínio do tempo. A utilização de diversos pontos de análise foi adotada com objetivo de verificar os problemas referentes a não-linearidades, influência de ruídos, pontos que apresentem uma baixa densidade modal (nós), etc.



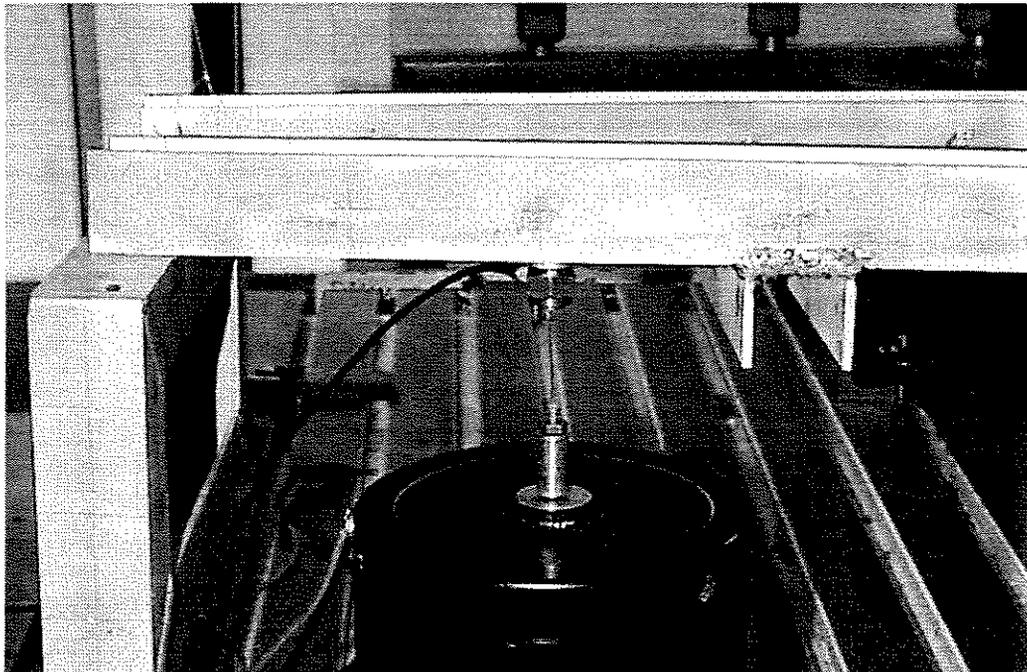
**Figura 6.6** Detalhe dos pontos de medidas nas travessas da estrutura



**Figura 6.7** Detalhe dos pontos de medida no quadro da estrutura

### 6.3.2 Aquisição e processamento de sinais

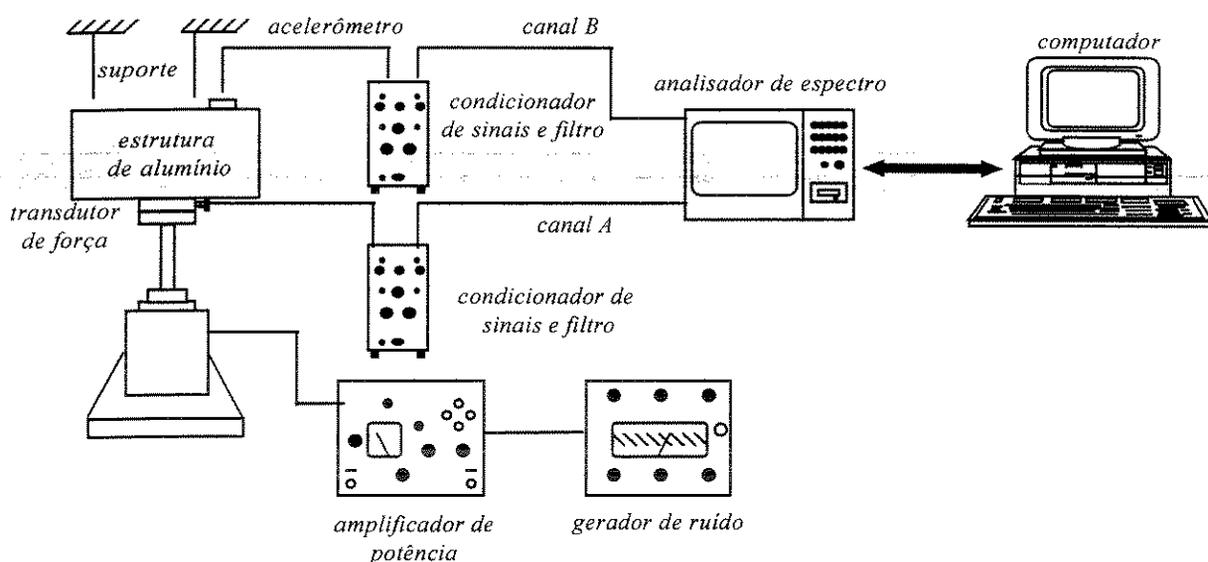
No desenvolvimento do ensaio experimental a estrutura foi suspensa por três pontos através de cordões de nylon, de forma a simular a condição de apoio livre-livre. Os procedimentos de aquisição de sinais foram efetuados aplicando-se um ruído de excitação ao longo da direção vertical  $z$  no ponto de coordenada número 315. Na Figura 6.8 é mostrado a foto da estrutura indicando o ponto de excitação.



**Figura 6.8** Detalhe do ponto de excitação na estrutura

Os sinais de aceleração foram medidos em pontos estabelecidos do sistema segundo as direções definidas através eixos de translação x, y, z indicados na Figura 6.5.

O esquema do aparato experimental utilizado na análise da estrutura, constituído pelos sistemas de aquisição, condicionamento de sinais e processamento de dados é representado na Figura 6.9. Detalhes específicos das características da instrumentação são apresentadas no Anexo I.

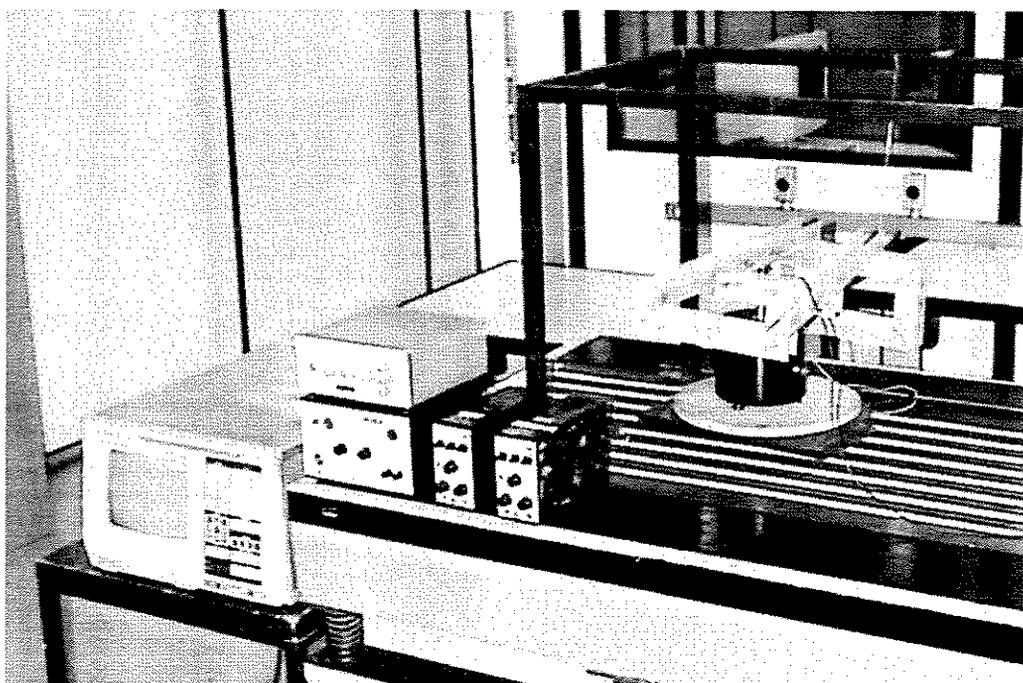


**Figura 6.9** Esquema do aparato experimental de aquisição e processamento de sinais

Na instrumentação indicada um gerador de ruído conectado em linha com um amplificador de sinais estabelece um sinal de entrada com características de um ruído branco no excitador eletromagnético. Medidas dos sinais de aceleração na estrutura foram efetuadas a partir de um acelerômetro devidamente fixado às coordenadas estabelecidas no sistema estrutural. A componente do sinal de excitação foi coletada a partir de um transdutor de força do tipo B&K, posicionado entre o excitador e a estrutura através de um extensor.

A calibração dos sinais foi ajustada a partir dos condicionadores de sinais com base nos valores de sensibilidade do acelerômetro de  $2,97 \text{ pc/m/s}^2$  e do transdutor de força de  $4 \text{ pc/N}$ . Os sinais de excitação e resposta resultantes foram condicionados e filtrados por intermédio de filtros analógicos passa-baixa ajustados na frequência de corte de  $1000 \text{ Hz}$ . A unidade de aquisição de sinais consistiu de um analisador de espectros modelo SD 380 da

“Spectral Dynamics”. Aos sinais coletados não foram efetuadas intervenções como amostragem por médias e janelamento. O aspecto citado caracteriza uma das vantagens das técnicas paramétricas de identificação de sinais. Os sinais foram coletados na frequência de amostragem de 2560 Hz. A identificação foi processada de forma a estudar as componentes modais da estrutura na banda de frequência estipulada de 1000 Hz. Ressalta-se que o sistema de aquisição processa os sinais na razão de  $2,56 \times F_{Nyquist}$ . O tempo total de coleta de cada amostra correspondeu a 2048 pontos discretos de dados espaçados segundo o intervalo de tempo definido a partir da frequência de amostragem. Os sinais coletados seqüencialmente no analisador foram gravados em disquete num formato compatível com o sistema. Após o procedimento de aquisição dos sinais os dados armazenados no disquete foram transferidos do analisador para um microcomputador por intermédio de uma interface GPIB. Os dados em código ASCII foram preparados no formato requerido para o processamento da identificação do sistema. Na Figura 6.10 é mostrada uma foto do aparato instrumental utilizado no procedimento experimental.

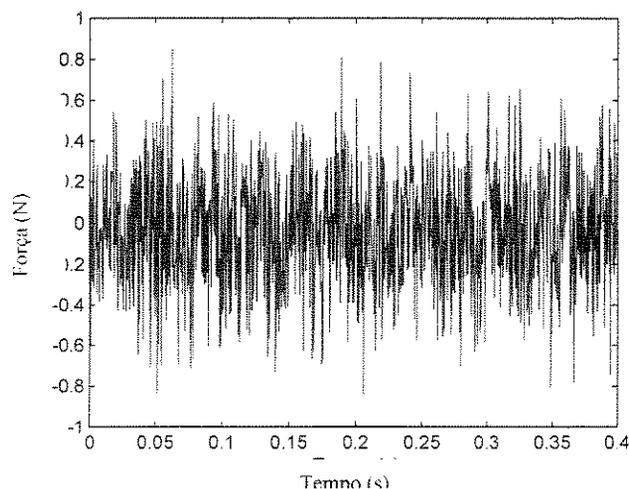


**Figura 6.10** Foto do aparato instrumental

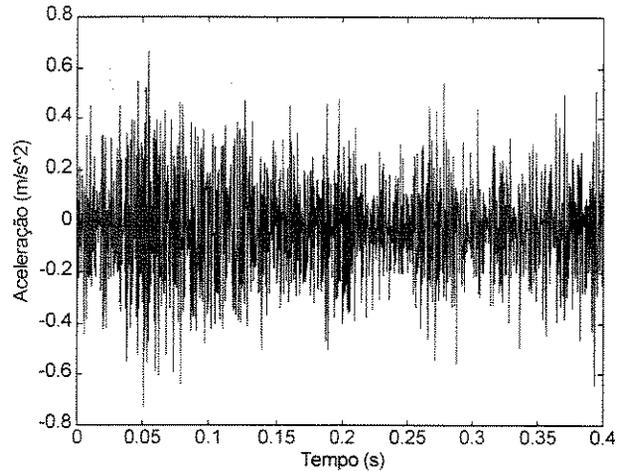
O procedimento experimental foi desenvolvido de acordo com as seguintes etapas:

1. Fixação do acelerômetro em cada ponto de análise,
2. calibração do nível de excitação do sistema de forma a obter sinais de resposta consistentes,
3. ajuste nos condicionadores de sinais dos fatores de calibração, níveis de voltagem e frequências de corte dos filtros,
4. ajuste do nível de voltagem no canal A de entrada do analisador em função do sinal de excitação, de forma a evitar a sobrecarga nos níveis dos sinais e ajuste do nível de voltagem do sinal do acelerômetro no canal B,
5. ajuste dos parâmetros do analisador de espectros para coleta dos sinais nos pontos especificados,
6. gravação dos sinais em disquete,
7. transferência dos sinais para um microcomputador via placa GPIB e conversão dos dados no formato desejado através do software dedicado,
8. preparação dos sinais no formato ASCII para análise posterior via o modelo paramétrico.

Na Figura 6.11 é mostrado um sinal típico de um ruído excitação medido na coordenada z315 da estrutura e na Figura 6.12 é mostrado a componente de resposta do sistema correspondente à coordenada z4 do sistema estrutural.



**Figura 6.11** Sinal típico de excitação na coordenada z315



**Figura 6.12** Sinal de aceleração na coordenada z4

### 6.3.3 Procedimento de análise

A análise dos sinais foi efetuada segundo os procedimentos de identificação paramétrica do domínio do tempo descritos no Capítulo 5. A proposta inicial do trabalho foi de utilizar o modelo ARMA no desenvolvimento da identificação de parâmetros de sistemas que apresentem alta densidade modal. No entanto, de uma análise prévia com sinais obtidos em veículos agrícolas, verificou-se que o modelo ARMA apresentou falhas na estimação dos fatores de amortecimento do sistema. Para o sistema estudado ocorreram problemas relativos a identificação das componentes de frequência. A justificativa para os problemas verificados com o modelo ARMA são relativas a hipótese inerente de que a excitação do sistema é um ruído branco com características Gaussianas. Conseqüentemente, aspectos relevantes do sistema estrutural deixam de ser evidenciados em razão da falta de informações mais precisas da componente de excitação da estrutura. As dificuldades da identificação, via modelo ARMA, são particularmente importantes em estruturas complexas que apresentam alta densidade modal com a presença de modos acoplados. Objetivando obter resultados mais precisos optou-se pelo uso do *modelo autoregressivo de médias móveis com entrada exógena* (ARMAX). Este modelo, cujas informações relativas à entrada do sistema são incorporadas ao processo de identificação, é classificado na literatura como um modelo da classe ARMA. Os procedimentos de identificação foram desenvolvidos através do uso dos recursos do software Matlab<sup>TM</sup> [99]. As rotinas de identificação da ordem de modelo e de ajuste do modelo foram desenvolvidas em microcomputador e em uma estação de trabalho IBM.

Os parâmetros modais frequência e fator de amortecimento do sistema foram obtidos com base na análise dos pólos do polinômio característico, formulado a partir dos coeficientes autoregressivos (AR) estimados do modelo ARMAX. Para cada coordenada de análise foi ajustado um modelo de ordem apropriada. Nos pontos, cujas informações modais de baixa frequência não foram consistentes, optou-se pelo uso de técnicas de tratamento de sinais (decimação) que permitem evidenciar melhor os parâmetros modais. O processo de identificação modal foi desenvolvido segundo eixos coordenados independentes, de forma a verificar possíveis discrepâncias da estimação com relação aos eixos que diferem do eixo principal de excitação.

O procedimento de identificação adotado na análise do sistema estrutural é resumido de acordo com os seguintes etapas:

1. Leitura dos dados de entrada  $\{f(k) \text{ e } y(k)\}$  para  $0 \leq k \leq M-1$ ,
2. remoção de tendências dos sinais,
3. implementação de modelos de diferentes ordens e ajuste da ordem do modelo através do critério AIC,
4. verificação de modelos concorrentes respeitando o princípio da plausibilidade,
5. obtenção do polinômio característico da função de transferência a partir dos coeficientes AR do modelo,
6. cálculo dos pólos do modelo,
7. cálculo dos parâmetros modais: frequência e amortecimento com base em cada pólo complexo,
8. cálculo das amplitudes e fase referente aos modos de vibrar da estrutura, a partir da expansão em frações parciais da função de transferência do modelo.

#### **6.3.4 Apresentação dos resultados**

O processo de identificação foi efetuado de forma individual para os 98 pontos de medidas estabelecidos na estrutura. Da identificação via o modelo ARMAX foram evidenciados dez modos típicos de vibrar. O critério de julgamento dos modos de vibrar foi estabelecido com base na análise da repetibilidade das componentes de frequência, na discriminação dos modos que apresentaram alto grau de amortecimento e na análise dos resíduos obtidos da expansão da função de transferência em frações parciais.

Na Tabela 6.8 são apresentados as frequências e fatores de amortecimento estimados através do modelo paramétrico ARMAX, relativos a um conjunto de pontos de coordenadas vizinhas no extremo da asa. Na tabela os dados apresentados correspondem aos pólos físicos (sombreado) e pólos computacionais do modelo correspondente a cada ponto analisado.

**Tabela 6.8** Parâmetros estimados em coordenadas vizinhas

z255 *(46,45,45,1)		y448 (48,47,47,9)		y416 (46,45,45,4)		x374 (42,41,41,2)		x386 (44,43,43,1)	
fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)
6,72	100,00	18,92	1,33	13,45	100,00	17,03	4,95	18,22	100,00
59,95	0,01	59,94	-0,02	59,33	0,01	59,96	0,01	59,95	-0,07
73,09	0,54	72,76	0,47	73,22	0,54			72,69	0,58
171,06	0,40	170,10	-0,74	170,94	0,60	170,05	0,47	170,80	0,46
182,85	0,71	189,90	-4,67	219,53	16,45	198,26	17,86		
		239,39	-4,64	299,43	0,22	300,25	-0,17	299,58	-0,07
299,83	0,00	269,71	-39,30						
355,81	0,07	355,98	0,10	356,03	0,08	355,99	0,07	356,24	0,09
421,92	1,05	416,61	-1,49	397,28	-4,54	383,56	-3,56		
454,40	100,00							411,87	19,57
472,67	0,08	473,65	0,08	473,11	0,02	471,92	0,08	473,17	0,08
		492,06	-18,56						
546,58	0,13	546,63	0,13	547,62	0,11	545,63	0,14	547,26	0,12
600,98	1,02	643,12	-3,82	556,34	100,00	586,07	-3,07	604,04	7,88
638,56	11,0	699,30	-18,77	622,95	8,94	647,94	0,60		
		713,86	23,47	623,61	-44,78				
				697,87	-3,37	776,07	-4,62	678,87	14,26
724,95	0,12	725,11	0,17	725,18	0,19	724,76	0,13	725,77	0,16
788,35	0,07	788,38	0,09	787,11	0,17	787,73	0,08	788,68	0,08
840,23	0,23	841,18	0,24	841,60	0,25	839,60	0,23	841,52	0,25
888,83	0,30	850,65	0,22						
935,26	0,12	935,96	0,11	935,79	0,11	935,16	0,10	935,93	0,11
		965,07	0,04	965,04	0,04	964,28	0,03	964,92	0,05

\*Os termos entre parênteses indicam a ordem do modelo

Dos resultados da tabela verifica-se um alto grau de repetibilidade das componentes dos modos estruturais, bem como um alto grau de variação e inconsistência das componentes correspondentes aos pólos computacionais do modelo. O critério de repetibilidade foi

suficiente para distinguir os modos computacionais decorrentes da utilização de modelos sobre-determinados.

Resultados de outro exemplo, correspondente à identificação de parâmetros estimados a partir de pontos distintos localizados ao longo da asa e da travessa da estrutura, são apresentados na Tabela 6.9.

**Tabela 6.9** Parâmetros estimados em diferentes localizações

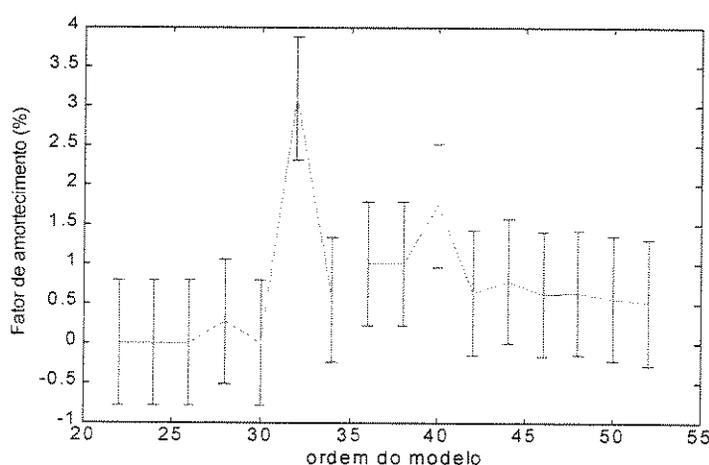
z44 (34,33,33,2)		z275 (48,47,47,1)		z297 (54,53,53,1)		z336 (48,47,47,2)		Z128 (54,53,53,2)	
fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)
29,77	100,00	4,6	100,00	2,45	100,00	13,07	100,00	10,15	-2,45
59,89	0,02	59,92	0,00	59,93	0,02	59,93	-0,01	59,93	0,01
73,07	0,53	73,11	0,48	73,15	0,52	73,22	0,47	73,16	0,50
170,56	0,46	170,67	0,42	170,42	0,27	-	-	169,87	0,41
		242,57	-0,81	179,76	0,02	240,52	0,45	193,69	6,59
				259,28	-1,82	257,79	100,00	240,45	100,00
299,54	0,02	299,83	0,05	299,67	-0,02	299,88	0,11	299,65	-0,04
356,08	0,08	356,10	0,07	356,01	0,07	355,88	0,10	354,62	0,07
		443,49	2,12	415,18	100,00			398,30	43,68
				420,76	-0,21	405,04	1,12	431,71	1,71
473,32	0,06	473,22	0,08	472,34	0,07	472,98	0,08	473,19	0,09
				533,56	13,76			540,28	3,60
547,79	0,13	547,86	0,11	546,67	0,13	547,93	0,10	547,63	0,14
				609,41	-1,60	552,60	-3,14		
		609,45	0,19			620,57	1,92	642,39	0,68
		719,68	6,45	658,11	-0,20	708,94	100,00		
725,89	0,13	725,38	0,16	724,67	0,14	725,83	0,12	725,52	0,11
						764,34	-1,18	731,36	0,56
787,45	0,08	787,02	0,10	788,46	0,07	788,73	0,07	788,64	0,07
840,42	0,23	840,48	0,24	839,84	0,25	840,89	0,25	840,26	0,22
935,03	0,11	934,94	0,11	935,01	0,11	935,03	0,11	935,19	0,12
964,49	0,04	964,41	0,04	964,42	0,04	962,84	0,08	963,72	0,07

\*Os termos entre parênteses indicam a ordem do modelo

Com relação aos resultados obtidos da análise de todos os pontos da estrutura verificou-se que os pontos críticos são aqueles nos quais existe um maior grau de influência

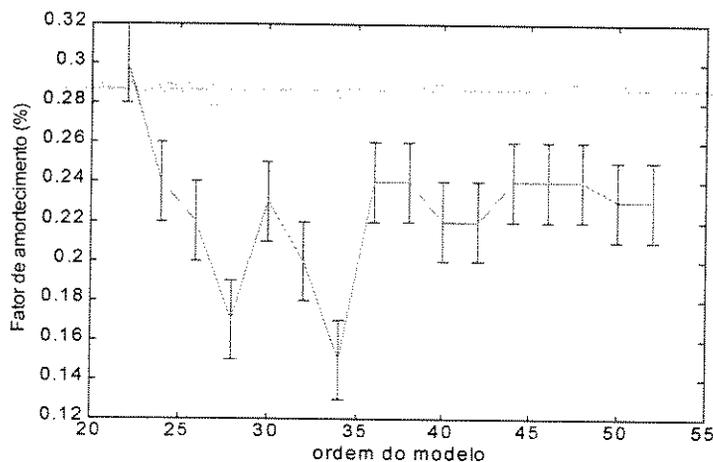
mútua entre os movimentos das coordenadas x, y e z. Estes pontos são aqueles localizados nas regiões próximas às barras transversais que interligam as vigas principais da asa.

Dos resultados apresentados acima pode ser também observado que, para determinados pontos, a ordem do modelo ajustado foi relativamente elevada. De uma análise da evolução dos parâmetros em relação a ordem do modelo, constatou-se que para uma faixa de ordem relativamente pequena, grande parte dos parâmetros foram estimados com um grau de convergência satisfatório. No entanto, o incremento adicional na ordem dos modelos é atribuído em razão da necessidade de atingir a convergência dos parâmetros estimados, com relação a determinadas componentes de frequência do sistema. Este aspecto evidentemente é associado de forma direta com as informações modais contidas em cada ponto analisado. Ressalta-se que no contexto da estrutura estudada o modelo de ordem baixa é aquele no qual a ordem apresenta valor superior a duas vezes o número de modos analisados no sistema. Portanto para o estudo em questão a mínima ordem esperada deve ter valores acima de vinte. Os aspectos discutidos acima podem ser verificados pela análise da Figura 6.13, onde é apresentado um gráfico da evolução do fator de amortecimento relativo a componente de frequência de 73 Hz com relação a ordem do modelo. O exemplo apresentado corresponde a identificação processada com o sinal medido no ponto z128 da estrutura. A justificativa pela escolha do fator de amortecimento como um parâmetro de análise é motivada em razão deste parâmetro ser bastante sensível à efeitos perturbatórios relacionados a ruídos, sensibilidade numérica.



**Figura 6.13** Evolução do fator de amortecimento versus ordem do modelo

Do gráfico mostrado na figura verifica-se que para convergência do fator de amortecimento é necessário que a ordem seja incrementada de forma considerável. Com relação a análise relativa a faixa de frequência de 170 Hz a 724 Hz foi verificado que modelos da ordem 24 eram suficientes para a obtenção dos fatores de amortecimento. Para a componente de frequência de 840 Hz um modelo de ordem 36 foi necessário para se obter um valor do fator de amortecimento consistente, conforme pode ser verificado no gráfico da Figura 6.14. No entanto para o ponto considerado mesmo para modelos de ordem bastante elevadas, não foi possível estimar as frequências de 935 Hz e 964 Hz.

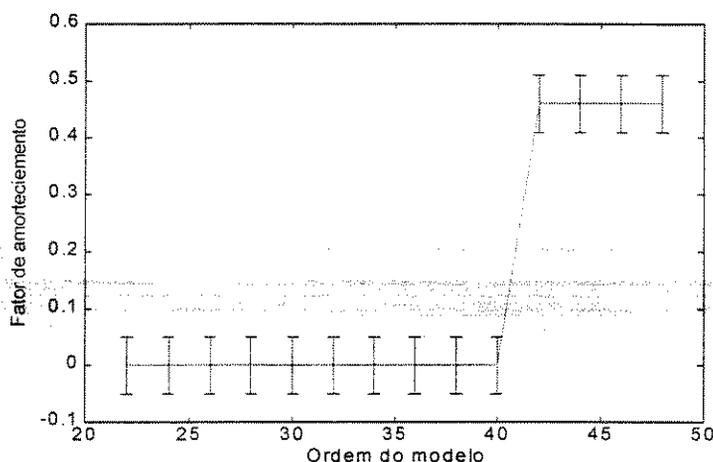


**Figura 6.14** Evolução da ordem da componente de 840 Hz do ponto z128

Dos resultados obtidos pode ser concluído que os aspectos que influenciam a ordem dos modelos ajustados são: (i) a localização dos pontos de análise. Este aspecto é vital para evidenciar ou não determinadas componentes de frequência, (ii) efeitos de ruído no sinal, aspectos que geram influências adversas nos dados e que são inerentes ao processo experimental. Da análise efetuada foi observado que para determinados pontos, embora as componentes de frequência do sistema tenham sido estimadas por modelos de ordem relativamente pequena, o mesmo não ocorreu para os fatores de amortecimento correspondentes. Foi verificado, nestes casos, que com o aumento da ordem do modelo os valores dos fatores de amortecimento não convergiram para níveis satisfatórios, (iii) identificação das componentes de baixa e alta frequência. Este aspecto é a limitação natural dos modelos paramétricos de ajuste, uma vez que o uso de uma taxa de amostragem de larga banda de frequência afetará a identificação das componentes limites de baixa e alta

freqüência. Nas componentes de baixa freqüência a utilização do recurso de decimação é uma alternativa para este problema. Outra alternativa do ponto de vista experimental consiste no uso de filtros analógicos passa banda com o objetivo de ajustar a análise em faixas específicas de freqüência.

Um exemplo da estimação do fator de amortecimento com base na componente de baixa freqüência do sinal é apresentado na Figura 6.15. No exemplo o ponto de análise corresponde à coordenada z275 da estrutura e a componente de freqüência estudada é de 73Hz. Como esperado para a obtenção do fator de amortecimento foi necessário o ajuste de um modelo de ordem relativamente alta. Observe que para a componente estudada a ordem alta obtida está relacionada com o conteúdo das informações estatísticas do sinal, que provavelmente não está associada aos aspectos de mascaramento do sinal devido a influência de sinais espúrios. Esta conclusão é fundamentada no aspecto de que, a partir de um valor limite da ordem do modelo o parâmetro estimado estabilizou-se. É natural que para fundamentar esta conclusão foi necessário comparar as informações dos parâmetros estimados nos diferentes pontos do sistema.



**Figura 6.15** Evolução da ordem do modelo em componente de baixa freqüência

A compilação dos resultados obtidos da análise completa da estrutura são mostrados na Tabela 6.10. Nesta tabela são apresentados os parâmetros identificados a partir dos sinais medidos nos pontos das coordenadas dos eixos x, y, z, para uma faixa de freqüência de 0 a

1000 Hz. Dos resultados pode ser observado que em determinadas direções existe um maior grau de dispersão dos parâmetros. Este problema é relacionado com a dificuldade de observar determinadas componentes nos pontos que evidenciam pólos relativos a orientação principal do sensor. A alta densidade modal em determinados pontos também é um fator que altera a precisão do parâmetros estimados. Variações podem também aparecer nas regiões próximas ao ponto de excitação da estrutura e nos pontos de junção de soldas. As variações verificadas em regiões próximas a componente de excitação são tratadas como o fenômeno de "force drop-out" segundo Cooper [35].

**Tabela 6.10** Parâmetros identificados no sistema segundo as diferentes direções

<i>Eixo x</i>		<i>Eixo y</i>		<i>Eixo z</i>	
fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)	fr (Hz)	$\xi$ (%)
73,20 $\pm$ 0,21	0,56 $\pm$ 0,18	73,29 $\pm$ 0,23	0,50 $\pm$ 0,15	73,13 $\pm$ 0,12	0,51 $\pm$ 0,13
170,38 $\pm$ 0,40	0,45 $\pm$ 0,05	171,08 $\pm$ 0,53	0,50 $\pm$ 0,27	170,51 $\pm$ 0,47	0,47 $\pm$ 0,12
355,58 $\pm$ 0,74	0,09 $\pm$ 0,02	356,00 $\pm$ 0,63	0,08 $\pm$ 0,02	355,94 $\pm$ 0,63	0,09 $\pm$ 0,05
473,06 $\pm$ 0,45	0,08 $\pm$ 0,02	473,20 $\pm$ 0,34	0,12 $\pm$ 0,05	472,90 $\pm$ 0,40	0,09 $\pm$ 0,02
547,61 $\pm$ 0,61	0,14 $\pm$ 0,02	547,49 $\pm$ 0,86	0,13 $\pm$ 0,02	547,40 $\pm$ 0,65	0,13 $\pm$ 0,03
725,51 $\pm$ 0,55	0,13 $\pm$ 0,02	725,70 $\pm$ 0,68	0,16 $\pm$ 0,03	725,35 $\pm$ 0,63	0,13 $\pm$ 0,03
788,66 $\pm$ 0,25	0,08 $\pm$ 0,03	788,31 $\pm$ 0,50	0,08 $\pm$ 0,01	788,43 $\pm$ 0,74	0,10 $\pm$ 0,04
840,61 $\pm$ 0,68	0,24 $\pm$ 0,03	841,24 $\pm$ 0,49	0,25 $\pm$ 0,02	840,23 $\pm$ 0,76	0,25 $\pm$ 0,05
934,72 $\pm$ 1,33	0,13 $\pm$ 0,02	934,28 $\pm$ 1,84	0,13 $\pm$ 0,04	935,09 $\pm$ 0,69	0,16 $\pm$ 0,06
963,83 $\pm$ 0,94	0,05 $\pm$ 0,01	964,60 $\pm$ 0,97	0,04 $\pm$ 0,01	964,11 $\pm$ 1,37	0,05 $\pm$ 0,02

Ressalta-se que os parâmetros ajustados são também afetados pelos pontos de medida que apresentam componentes de baixa amplitude, como os que ocorrem em regiões próximas ao nós relativos a determinadas componentes associadas a um modo de vibrar específico. Por, um processo de comparação das amplitudes obtidas dos sinais medidos pela expansão em frações parciais da função de transferência com os resultados do modelo de elementos finitos, verificou-se que a expansão parcial foi um bom indicador das localizações dos nós da estrutura. Da análise efetuada verificou-se que vários pólos estruturais convergem somente após uma sobredeterminação massiva da ordem do modelo. A sobredeterminação causa o aparecimento de modos computacionais, os quais não devem ser retidos para a análise subsequente.

A comparação dos valores das médias das frequências identificadas via o modelo ARMAX com os valores obtidos do modelo de elementos finitos (MEF) e modelo experimental do domínio da frequência (MEXP) [3] é apresentada na Tabela 6.11.

**Tabela 6.11** Comparação dos resultados de diferentes modelos

modo	Frequência (Hz)		
	MEF	MEXP	ARMAX
1	75,9	74,7	73,2
2	187,7	174,7	172,1
3	402,1	356,3	356,3
4	492,0	475,1	473,1
5	578,8	550,9	547,45
6	784,8	726,3	725,5
7	815,1	790,6	787,8
8	915,9	846,3	840,7
9	952,4	939,7	934,3
10	996,6	966,6	964,1

Uma vez que as frequências e os fatores de amortecimento do sistema estrutural foram determinados o passo seguinte consistiu em estimar os resíduos modais do sistema. Este processo baseou-se na expansão em frações parciais da função de transferência representada pela equação (5.6) [109]. A obtenção da expansão em frações parciais foi estabelecida através da função “*residuez*” do plataforma 4.0 do “toolbox” de identificação de sistemas do Matlab [99]. Os resíduos modais relativos a cada ponto de medida estabelecido na estrutura foram obtidos através da relação dos pólos físicos com os respectivos resíduos modais, correspondentes as componentes do numerador da expressão obtida de expansão em frações parciais. Portanto, para cada ponto de medida foram estabelecidas os modos reais relativos às dez frequências estruturais identificadas. Convém mencionar que este procedimento apresenta melhor acurácia quando utilizam-se modelos multivariados.

A avaliação do desempenho do processo de obtenção dos resíduos foi obtida através da comparação dos resultados do modelo com os modos provenientes da análise de elementos finitos. O parâmetro de comparação entre os modos experimentais e analíticos foi

estabelecido pela análise do critério de confiança modal (“MAC”)<sup>1</sup> [102]. A representação visual dos modos de vibrar foram plotados com a utilização do aplicativo AUTOCAD R14™. Para efeito de sintetização de informações foram apresentados somente a análise relativa aos quatro primeiros modos de vibrar da estrutura. Na Tabela 6.12 são apresentados os valores do MAC correspondente aos quatro primeiros modos.

**Tabela 6.12** Análise do critério de confiança modal

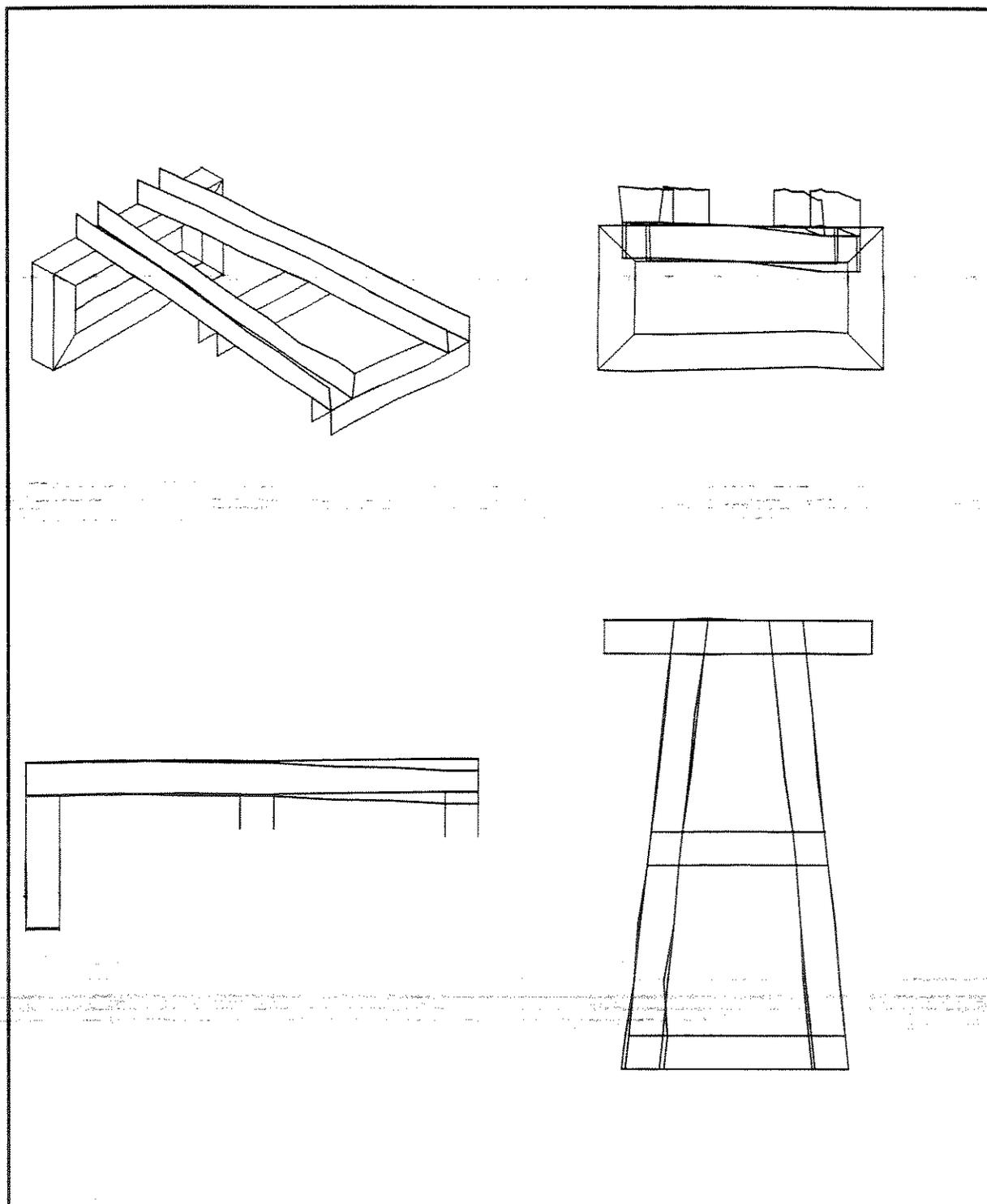
modo	MAC
1	0,60
2	0,63
3	0,48
4	0,26

Dos resultados da Tabela 6.12 observa-se que os valores “MAC” não são satisfatórios. Este problema pode ser justificado em razão dos seguintes fatores: (i) a influência dos pontos nos quais determinadas freqüências não foram identificadas, (ii) influência dos pontos de junção dos elementos estruturais, e (iii) diferenças do conteúdo de informações dos dados do modelo de elementos finitos e dados do modelo experimental. Uma das justificativas ao problema correspondente ao item (i) está relacionada com a limitação do modelo univariado, pois a componente de excitação pode estar atuando nas proximidades de linhas nodais de determinados modos de vibrar relevantes da estrutura. Com relação ao item (iii) pode-se dizer que as informações de cada ponto de medida no modelo de elementos finitos são mais completas, visto que estas são relativas às coordenadas tridimensionais de movimento, por outro lado as medidas experimentais são relativas somente a uma direção, em razão da utilização de um acelerômetro unidirecional. Portanto, para determinados pontos os modos foram estimados de forma aproximada com base nas informações dos pontos das coordenadas vizinhas. Uma possível razão para este problema seria a utilização de acelerômetros tridimensionais, ou proceder a análise somente na direção principal de vibração, isto é, na mesma direção da componente de excitação.

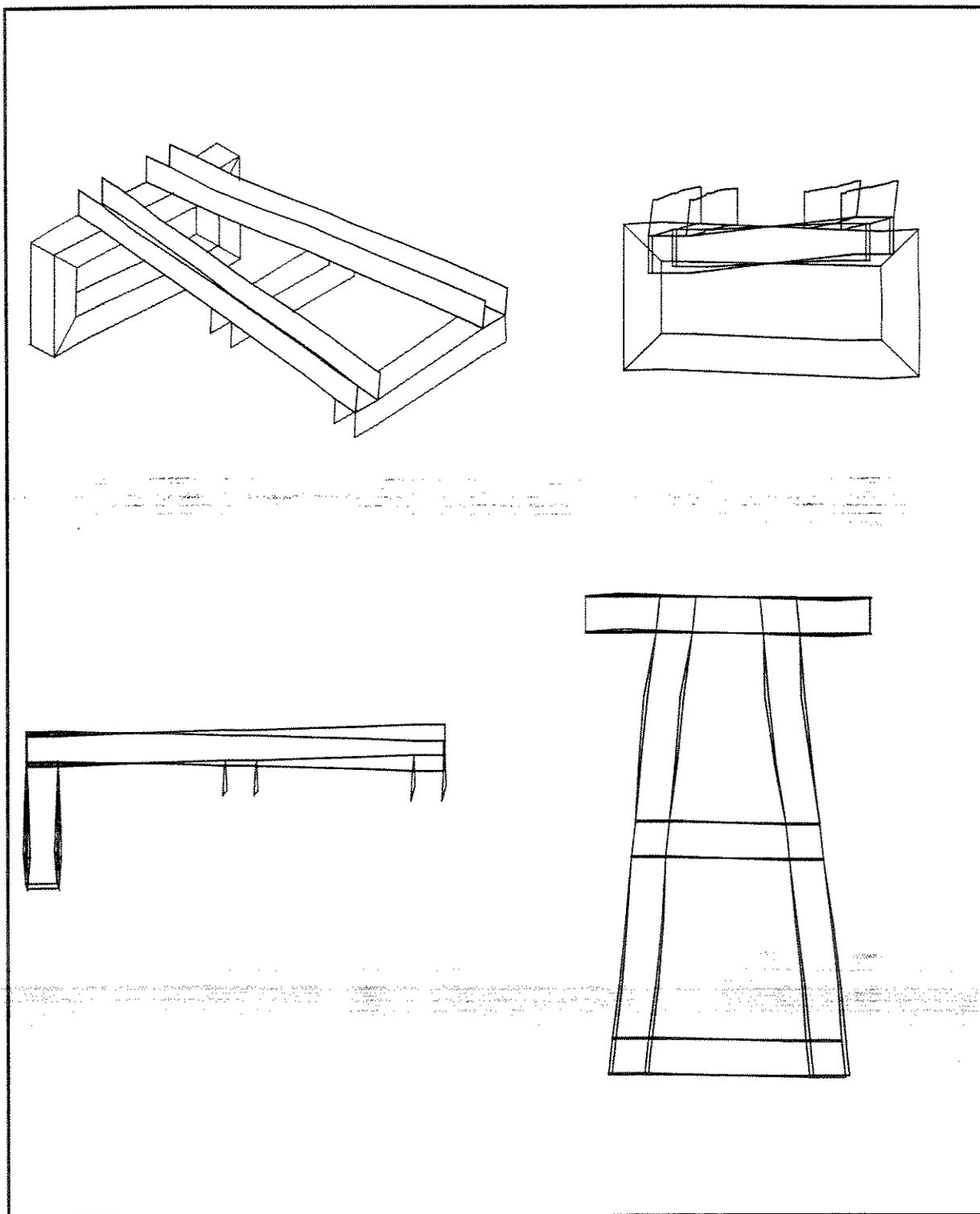
---

<sup>1</sup> O valor MAC estabelecido pela relação  $\frac{|\{\phi_i\}^T \{\bar{\phi}_i\}|^2}{(\{\phi_i\}^T \{\phi_i\})(\{\bar{\phi}_i\}^T \{\bar{\phi}_i\})}$ , onde  $\{\phi_i\}$  corresponde ao i-ésimo modo do modelo de elementos finitos e  $\{\bar{\phi}_i\}$  é o modo i do modelo experimental

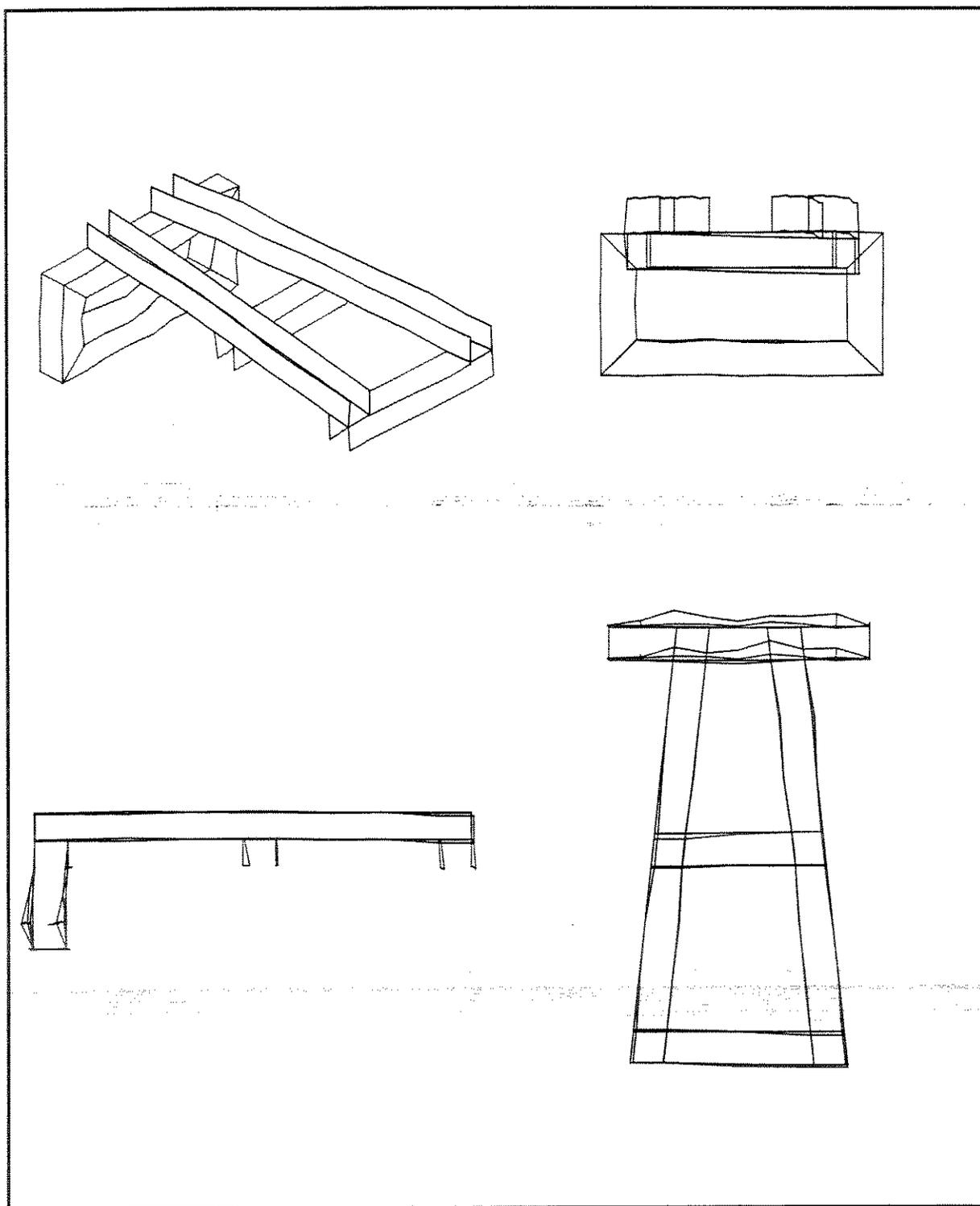
Em seguida, para uma visualização comparativa entre os modos de vibrar obtidos do modelo de elementos finitos e do procedimento de identificação experimental são apresentadas nas Figuras 6.16 a 6.23. As Figuras 6.16 e 6.17 correspondem respectivamente ao primeiro modo na frequência de 73 Hz obtido do processo de identificação experimental e do modelo de elementos. Das figuras observa-se um grau de semelhança bem razoável na forma de vibrar de grande parte dos elementos estruturais do sistema analisado. Para o segundo modo na frequência de 170 Hz a semelhança entre os resultados pode também ser verificada através das Figuras 6.18 e 6.19. No terceiro modo correspondente a frequência de 356 Hz, conforme indicam as Figuras 6.20 e 6.21, verifica-se um discrepância considerável da forma de vibração do quadro da estrutura com relação a coordenada de movimento na direção x. Finalmente nas Figuras 6.22 e 6.23 são indicados os gráficos relativos aos resultados da análise do quarto modo de vibrar correspondente à frequência de 472 Hz. Dos resultados do último caso, observou-se que as variações verificadas foram principalmente relacionadas aos níveis baixos de amplitude dos resíduos modais do modelo experimental. No entanto a forma de vibrar dos elementos do sistema guardam um certo grau de similaridade.



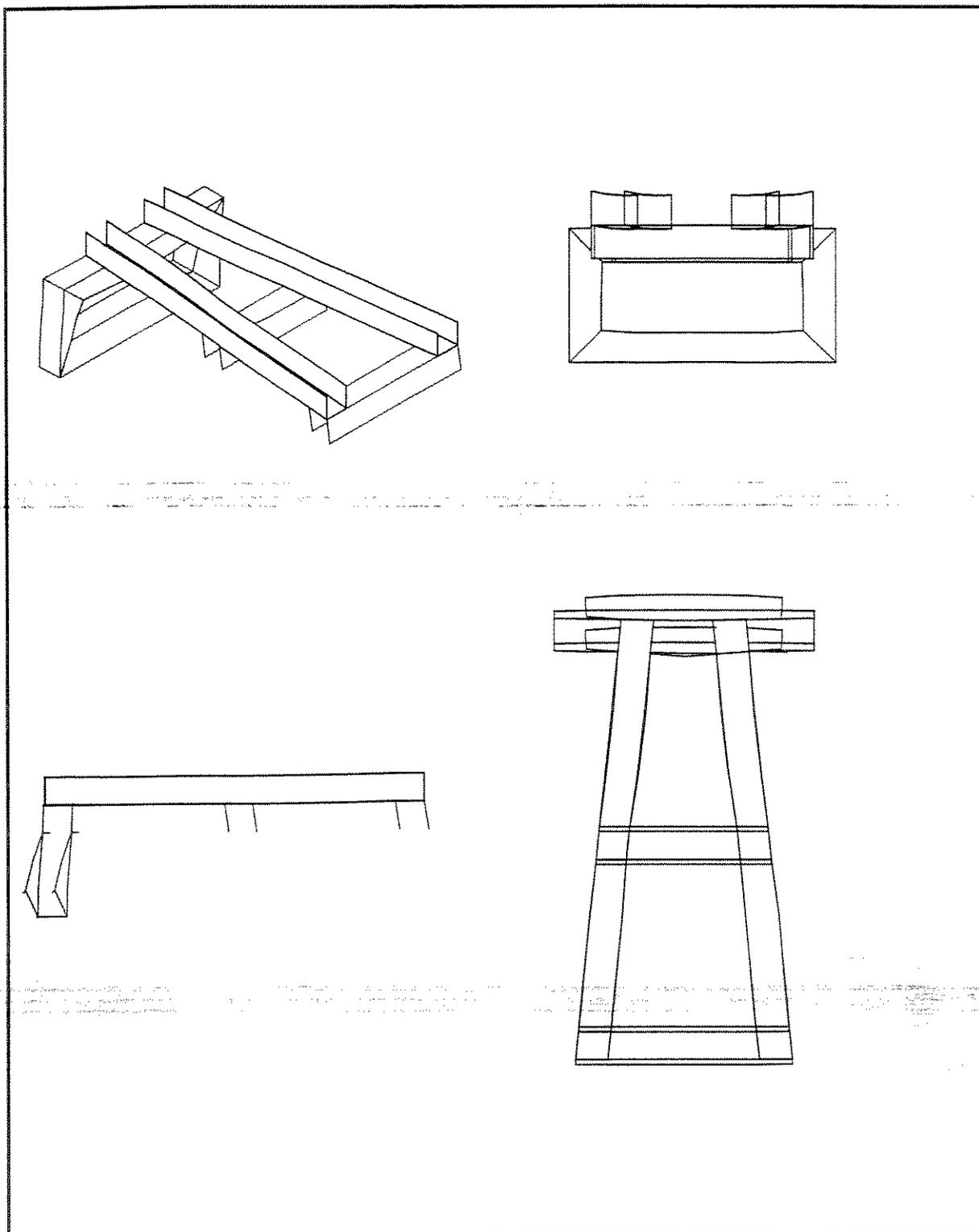
**Figura 6.16** Esquema do primeiro modo de vibrar (73 Hz) obtido do modelo experimental.



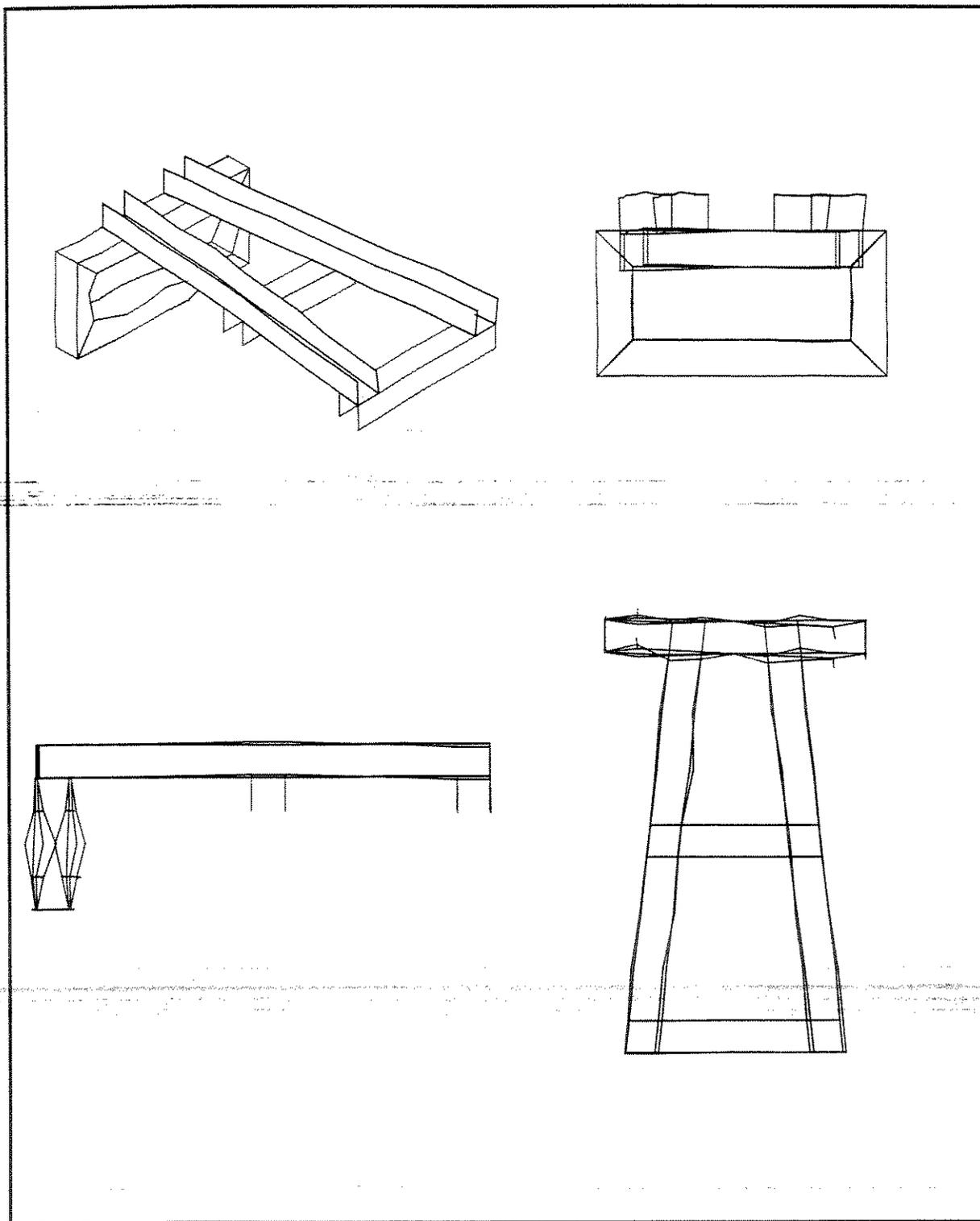
**Figura 6.17** Esquema do primeiro modo de vibrar (73 Hz) obtido do modelo de elementos finitos.



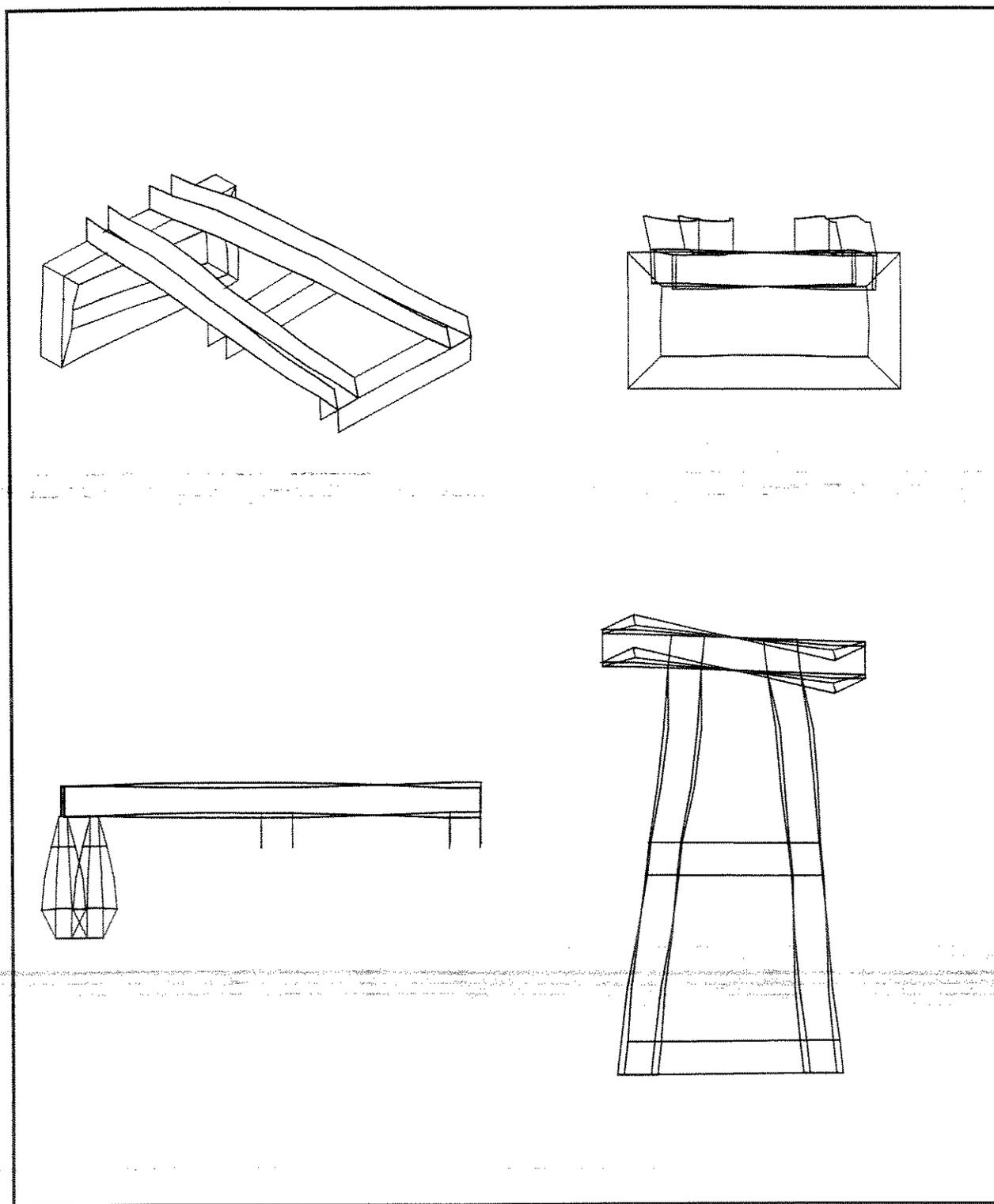
**Figura 6.18** Esquema do segundo modo de vibrar (170 Hz) obtido do modelo experimental.



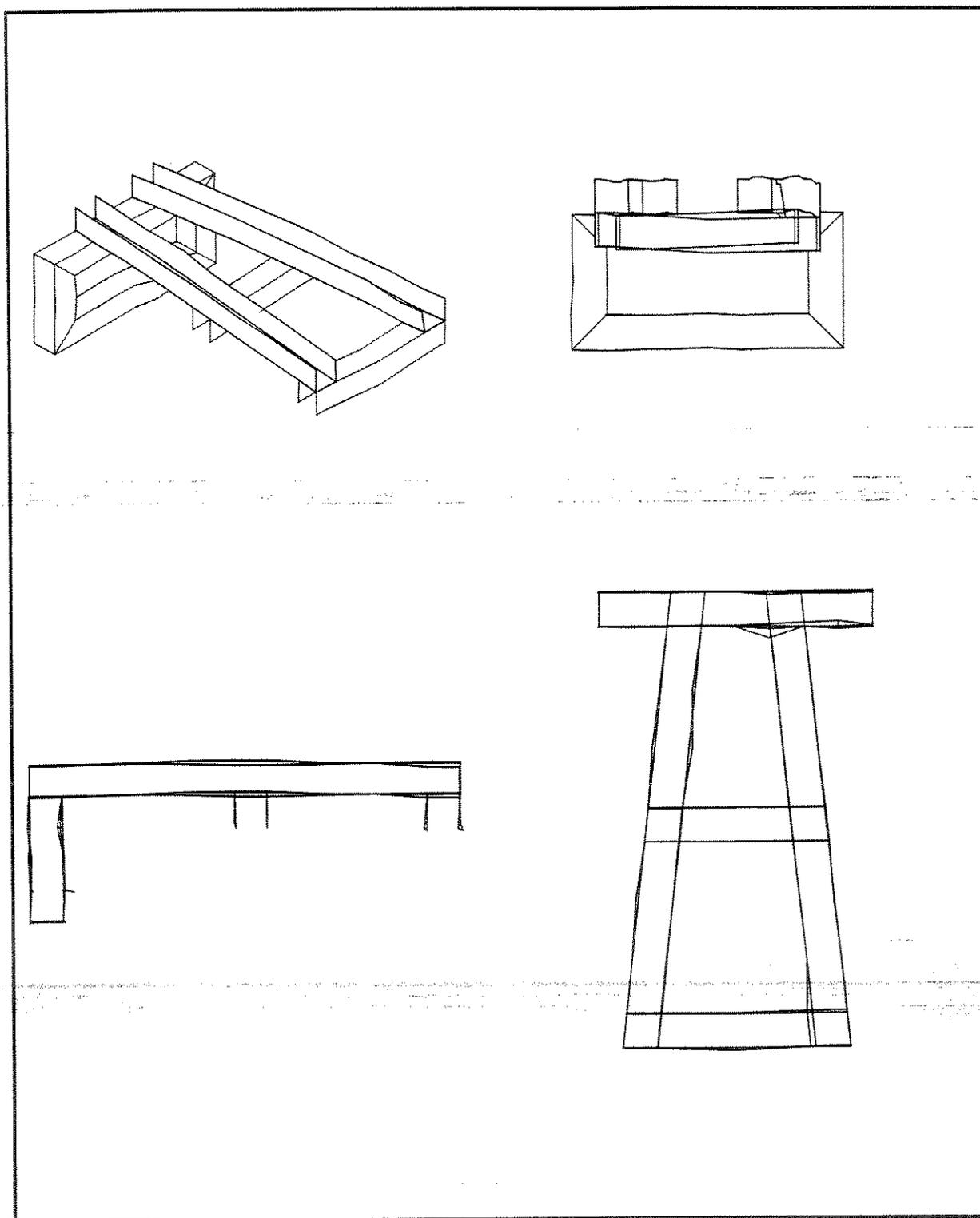
**Figura 6.19** Esquema do segundo modo de vibrar (170 Hz) obtido do modelo de elementos finitos.



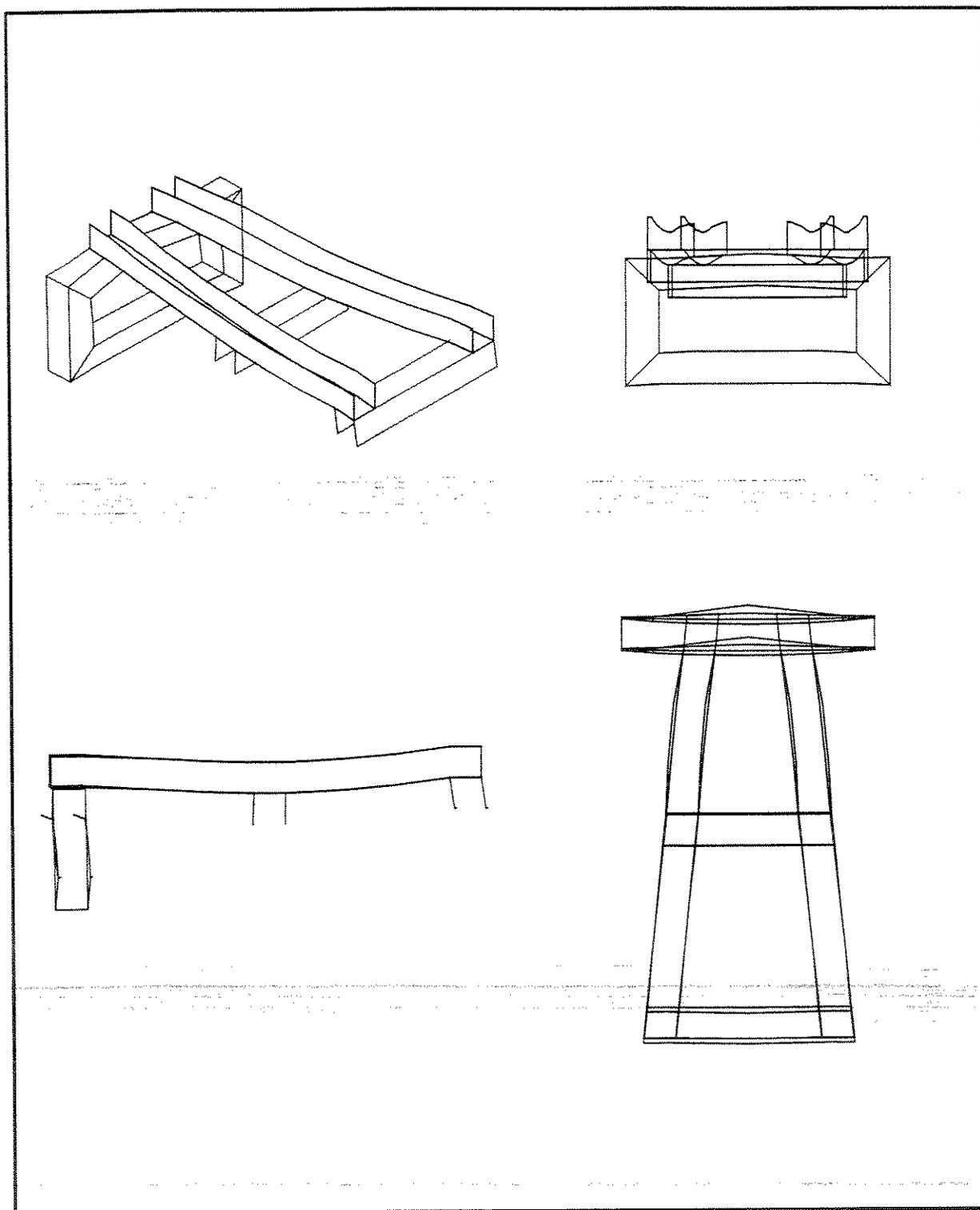
**Figura 6.20** Esquema do terceiro modo de vibrar (355 Hz) obtido do modelo experimental



**Figura 6.21** Esquema do terceiro modo de vibrar (355 Hz) obtido do modelo de elementos finitos



**Figura 6.22** Esquema do quarto modo de vibrar (472 Hz) obtido do modelo experimental



**Figura 6.23** Esquema do quarto modo de vibrar (472 Hz) obtido do modelo de elementos finitos

## Capítulo 7

### Conclusões e sugestões

#### 7.1 Conclusões gerais

Esta pesquisa objetivou estabelecer um estudo da teoria de identificação no domínio do tempo aplicada à análise modal de estruturas mecânicas. O problema de identificação foi abordado no enfoque das teorias de análise de sinais, do estudo de séries temporais, análise de sistemas e especificamente análise modal de estruturas. Os procedimentos de estimação propostos objetivaram identificar os parâmetros modais de um sistema a partir de sinais de entrada e saída. Os modelos de estimação adotados processam os sinais no domínio do tempo evitando problemas relativos aos erros de truncagem introduzidos pelos métodos da transformada discreta de Fourier. Os modelos de identificação no domínio do tempo utilizados no processo de estimação de parâmetros modais foram derivados da classe de modelos autoregressivo de médias móveis (ARMA). A identificação de sinais obtidas de sistemas simulados numericamente foi desenvolvida com o objetivo de verificar o desempenho e características dos modelos de identificação adotados no estudo. Um ensaio experimental foi formulado de modo a proceder a análise modal de um sistema estrutural caracterizado por vários modos de vibrar. A princípio o modelo ARMA foi escolhido para processar a estimação dos parâmetros modais da estrutura. Este modelo apresentou baixo desempenho no processo de estimação. Portanto o modelo ARMAX de estrutura computacional mais robusta foi adotado como o modelo de identificação. Na implementação e no estudo dos modelos, problemas relacionados a ruídos, escolha da taxa de amostragem dos sinais foram amplamente discutidos. Critérios de escolha da ordem dos modelos e técnicas decimação foram implementadas de modo a evidenciar melhor o conteúdo de informações

dos sinais de análise. As componentes modais identificadas no sistema estrutural foram compatíveis com os resultados obtidos de uma análise de elementos finitos. Um procedimento de obtenção dos resíduos modais foi formulado, possibilitando a representação dos modos de vibrar da estrutura. A avaliação dos resíduos estimados foi estabelecida com relação ao modelo de elementos finitos através de um critério de confiança modal (MAC). Os resultados obtidos foram pouco satisfatórios. A justificativa principal para este problema são as limitações no processo experimental com relação as informações das coordenadas de movimento do modelo de elemento finitos. No entanto da análise comparativa dos resíduos verificou-se que os nós da estrutura foram identificados com uma boa precisão. Também pela comparação das formas dos modos experimentais e modos de elementos finitos observa-se que estes guardam uma boa semelhança. Acredita-se que a aplicação de modelos multivariados (SIMO ou MIMO) podem melhorar de forma considerável a identificação dos resíduos.

## 7.2 Sugestões para futuros desenvolvimentos

Durante a elaboração desta pesquisa surgiram as seguintes idéias e sugestões para futuros desenvolvimentos:

- Proceder de maneira mais criteriosa e detalhada a análise nos pontos de medidas considerados críticos do sistema estrutural. Estes procedimentos podem ser viabilizados através da filtragem de sinais em faixas específicas, variação da taxa de amostragem na coleta dos sinais, posicionamento do excitador em diferentes coordenadas para identificar componentes modais próximas de linhas nodais.
- Implementar variações do modelo ARMAX que permitam desenvolver uma análise de modelos modais multivariados. Isto poderá favorecer a identificação mais precisa dos resíduos modais.
- Desenvolver formulações de identificação com ferramentas da teoria de redes neurais e lógica difusa.
- Estudar métodos alternativos de critérios de identificação da ordem de modelos.

- Desenvolver estudo de critérios que possibilitem a avaliação da precisão estatística de parâmetros modais estimados.
- Utilizar aplicativos e desenvolver interface gráfica com a finalidade de facilitar a comparação dos modos obtidos de modelos experimentais com os modos do modelos de elementos finitos.
- Utilizar acelerômetros triaxiais ou limitar a análise modal ao longo do eixo principal de excitação da estrutura, de forma a obter uma base de comparação mais apropriada entre os modos do modelo experimental e do modelo de elementos finitos.

## Referências bibliográficas

- [1] AGUIRE, L. A. Controllability and observability of linear systems: some noninvariant aspects. *IEEE Transactions on Education*, v.38, n.1, p.33-39, 1995.
- [2] AKAIKE, H. A. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transaction Automatic Control*, p.716-723, 1974.
- [3] ARAUJO, C. A. *Modelagem dinâmica de sistemas conservativos e não conservativos através da síntese modal utilizando um superconjunto de flexibilidade residual*. Universidade Estadual de Campinas, 1998. Tese (Doutorado).
- [4] ASTRÖM, K. J., WITTENMARK, B. *Computer - controlled systems: theory and design*. 3.ed. Prentice Hall, 1997.
- [5] BASSEVILLE, M. et al. In situ damage monitoring in vibration mechanics: diagnostics and predictive maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.7, n.5, p.401-423, 1993.
- [6] BAZÁN, F. S. V. *Desenvolvimento de ferramentas de identificação paramétrica de sistemas mecânicos no domínio do tempo*. Universidade Estadual de Campinas, 1993. Tese (Doutorado).
- [7] BAZÁN, F. S., KURKA, P. R. G. O problema de representação de sinais por uma soma finita de exponenciais complexas. In: XV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA À COMPUTAÇÃO, São Carlos, 07-10 set.1992.

- [8] BAZÁN, F. S., KURKA, P. R. G. Truncated singular value decomposition regularization (TSVD) and the inverse problem of parameter identification in mechanical structures (IPPIMS) in the time domain. In: IV DINAME, Florianópolis: Santa Catarina, 01-05 mar.1993.
- [9] BÉLIVEAU, J. G. Eigenrelations in structural dynamics. *AIAA Journal*, v.5, n.7, p.1039-1041, 1977.ghh
- [10] BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. New York: John Wiley, 1993.
- [11] BENETT, R. J. *Spatial time series: analysis - forecasting - control*. London: Pion, 1979.
- [12] BENSAIBI, M., GONTIER, C. Identification of transfer function in frequency domain and time domain. In: CONFERENCE ON IDENTIFICATION IN ENGINEERING SYSTEMS. Swansea-Wales, 1996, p.184-193.
- [13] BERMAN, A. System identification of structural dynamic models: theoretical and practical bounds. AIAA SDM Conference, Paper 84-0929, p.123-128, 1984.
- [14] BINGLIN, Z. *Model building and machine fault diagnosis*. Cardiff: Division of Mechanical Engineering and Energy Studies, University of Wales College of Cardiff, 1994. 248p. PhD (Thesis).
- [15] BOX, G. E. P., JENKINS, G. M. *Time series analysis, forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day, 1970.
- [16] BRANDON, J. A. A discussion of alternative Duncan formulation of the eigenproblem for the solution of non-classicaly, viscously damped linear systems. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, v.51, n.4, p.904-906, 1984.

- [17] BRANDON, J. A. On the use of oversized models for modal identification in structural dynamics. In: 3rd. INTERNATIONAL CONFERENCE RECENT ADVANCES IN STRUCTURAL DYNAMICS, Southampton: U.K., 1988, p.319-327.
- [18] BRANDON, J. A., MATHIAS, M. H., KURKA, P. R. G. Construction of structural models from ambient environmental excitation data. In: INTERNATIONAL CONFERENCE STRUCTURAL DYNAMICS MODELLING TEST, ANALYSIS AND CORRELATION, (Edited by Dynamic Testing Agency & NAFEMS), Milton Keynes: UK, 7-9 jul.1993, p.19-28.
- [19] BRANDON, J. A., KURKA, P. R. G., MATHIAS, M. H. Identification methods based on passive measurements of ambient vibration - an overview. In: CONFERENCE ON MODERN PRACTICE IN STRESS AND VIBRATION ANALYSIS (Ed. J. L. Wearing), Academic Press: Sheffield, UK, 22-23 apr.1993, p.533-543.
- [20] BRANDON, J. A., MATHIAS, M. H. Complex oscillatory behaviour in a cracked beam under sinusoidal excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v.186, n.2, p.350-354, 1995.
- [21] BRANDON, J. A., MATHIAS, M. H., HOLFORD, K. M. Life cycle modelling actively controlled structures. In: ISMA 19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven, 12-14 sep. 1994, p.991-997.
- [22] BRAUN, S. (Ed.) *Mechanical signature analysis: theory and applications*. London: Academic Press, 1986.
- [23] BRAUN, S. SISO and MIMO time domain methods for vibrating structures. In: 9th INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Florence: Italy, 1991, p.735-738.

- [24] BRAUN, S., RAM, Y. M. Determination of structural modes via the Prony model: system order and noise induced poles. *Journal of Acoustical Society of America*, v.81, n.5, p.1447-1459, 1987.
- [25] BROWN, D., ALLEMANG, R., ZIMMERMAN, R., MERGEAY, M. *Parameter estimation techniques for modal analysis*. SAE paper n.790221, p.828-846, 1979.
- [26] BURG, J. P. Maximum entropy spectral analysis. In: 37th MEETING OF THE SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS, Oklahoma City, Oct. 1967.
- [27] BUSTOS, O. Algumas idéias de robustez aplicada à estimação paramétrica em séries temporais. In: VII SIMPÓSIO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, Campinas: São Paulo, 1986.
- [28] CADZOW, J. A. Least squares, modelling and signal processing. *Digital Signal Processing*, v.4, p.2-20, 1994.
- [29] CADZOW, J. A. Total least squares, matrix enhancement and signal processing. *Digital Signal Processing*, v.4, p.21-39, 1994.
- [30] CANDY, J. V. *Signal processing: the modern approach*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [31] CARRASCOSA, L. I., BUSTURIA, J. M., GIMENEZ, J. G. Global experimental modal analysis, a comparison of different methods. In: 3rd. INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Orlando: Florida, 1985, p.311-321.
- [32] CHATFIELD, C. *The analysis of time series: an introduction*. London: Chapman & Hall, 1992.
- [33] CHUI, C. K., CHEN, G. *Signal processing and systems theory: selected topics*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

- [34] CONTE, J. P., PISTER, K. S., MAHIN, S. A. Nonstationary ARMA modeling of seismic motions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v.11, p.411-426, 1992.
- [35] COOPER, J. E. Comparison of some time-domain-system identification techniques using approximate data correlations. *Journal of Modal Analysis*. p.51-57, 1989.
- [36] COOPER, J. E. Identification of time varying modal parameters. *European forum on aerolasticity and structural dynamics*. Aachen: W. Germany, paper 89-025, apr.1989, p.1-9.
- [37] COOPER, J. E., WRIGHT, J. R. Application of time domain decomposition techniques to aircraft ground vibration and flutter test data. In: THE EUROPEAN FORUM ON AEROELASTICITY AND STRUCTURAL DYNAMICS, Aachen: Germany, 1989, p. 235-243.
- [38] CREMONA, C. F. A comparison of system realization theory and "autoregressive moving average" methods for modal parameter identification. In: NUMETA 90, Swansea: U.K., 1990, p. 574-581.
- [39] CREMONA, C. F. *Recursive time domain modal identification techniques*. University of Wales: College of Cardiff, 1990. PhD (Thesis).
- [40] CREMONA, C. F., BRANDON, J. A. Modal identification algorithm with unmeasured input. *Journal of Aerospace Engineering*, v.5, n.4, p.442-449, 1992.
- [41] CREMONA, C. F., BRANDON, J. A. Model order testing in discrete time domain identification methods. *Mechanical System and Signal Processing*, v.6, n.3, p.229-236, 1992.
- [42] D'ALESSANDRO, G., et al. ARMAV model technique for multiple input/output system identification. In: 9th INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE. Firenze: Italy, 15-18 Apr.1991, p.246-249.

- [43] DAVIES, P. *The analysis of vibration (and acoustic) data using time domain methods*. Southampton: University of Southampton, 1985. 414p. PhD (Thesis).
- [44] DEBLAUWE, F., BROWN, D. L., ALLEMANG, R. J. The polyreference time domain technique. In: 5th INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE. London, 1987, p.832-845.
- [45] DIAS, N. E. *Identificação de parâmetros e análise modal em uma estrutura do tipo garfo mecânico*. Universidade Estadual de Campinas, 1992. Dissertação (Mestrado).
- [46] DICKINSON, B. W. Properties and applications of Gaussian autoregressive process in detection theory. *IEEE Transaction Information Theory*, v.27, p.343-347, 1981.
- [47] EYKHOFF, P. *System Identification, parameter and state estimation*. London: John Wiley & Sons, 1974.
- [48] FASSOIS, S. D., EMAN, K. F., WU, S. M. A linear time domain method for structural dynamics identification. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, v.112, p.98-106, 1990.
- [49] FASSOIS, S. D., LEE, J. E. Suboptimum maximum likelihood identification of ARMAX processes. *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v.112, n.4, p.586-595, 1990.
- [50] FOSS, K. Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, v.25, n.2, p.361-364, 1958.
- [51] FÜLLEKRUG, U. Survey of parameter estimation methods in experimental modal analysis. In: 5th INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE. London: England, 1987, p.460-467.

- [52] GAO, Y., RANDALL, R. B. Zeros vs. residues. In: 17th INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, Belgium: Katholieke Universiteit, Leuven. p.1643-1654, 1993.
- [53] GERSH, W. Parameter identification: stochastic process techniques. *Shock and Vibration Digest*, v.7, n.11, p.71-86, 1975.
- [54] GERSH, W., LIU, R. S-Z. Time series methods for synthesis of random vibration systems. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, v.43, p.159-165, 1976.
- [55] GERSH, W., NIELSEN, N. N., AKAIKE, H. Maximum likelihood estimation of structural parameters from random vibration data. *Journal of Sound and Vibration*, v.31, n.3, p.295-308, 1973.
- [56] GHANEM, R., SHINOZUCA, M. Structural system identification. I: Theory. *ASCE - Journal of Engineering Mechanics*, v.121, n.2, p.255-264, 1995.
- [57] GOMES, A. E. *Identificação paramétrica multi-canal de sistemas mecânicos no domínio do tempo*. Universidade Estadual de Campinas, 1992. Dissertação (Mestrado).
- [58] GONTIER, C., SMAIL, M., GAUTIER, P. E. A time domain method for the identification of dynamic parameters of structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.7, n.1, p.45-56, 1993.
- [59] HARRIS, C. J. *Advances in intelligent control*. London: Taylor & Francis, 1994.
- [60] HARVEY, A. C. *Forecasting structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [61] HAYKIN, S. *Neural networks: a comprehensive foundation*. New York: Macmillan, 1994.

- [62] HIPEL, K. W., McLEOD, A. I. *Time series modelling of water resources and environmental systems*. Amsterdam: Elsevier, 1994.
- [63] HJELMSTAD, K. D., BANAN, M. R., BANAM, M. R. Time-domain, parameter estimation algorithm for structures. I: Computational aspects. *ASCE - Journal of Engineering Mechanics*, v.121, n.3, p.424-434, 1995.
- [64] HOLLKAMP, J. J., BATIL, S. M. Structural identification using order overspecified time-series models. *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, v.114, n.1, p.27-33, 1992.
- [65] HSIA, T. C. *System identification*. Lexington Books: D. C. Heath and Company, Lexington, 1977.
- [66] HUREWIKS, W. Filters and servo system with pulsed data. In: JAMES, H. M. et al., (Ed). *Theory of servomechanism*. New York: MacGraw-Hill, 1947.
- [67] IBRAHIM, S. R. An upper Hessenberg space matrix algorithm for modal identification on minicomputers. In: 26th STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE, Orlando: Florida, 15-17 Apr. 1985. p.664-672.
- [68] IBRAHIM, S. R., MIKULCIK, E. C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. *Shock and Vibration Bulletin*. v.46, n.5, p.187-196, 1976.
- [69] JEFFERYS, E. R. Time series generation and transformation - the pole of phase. *Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering*, v.112, p.21-26, 1990.
- [70] JENNINGS, A. *Matrix computation for engineers and scientists*. Chicester: John Wiley & Sons, 1988.

- [71] JUANG, J.-N. Mathematical correlation of modal-parameter-identification methods via system realization theory. *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v.2, n.1, p.1-18, 1987.
- [72] JUANG, J.-N., PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, v.8, n.5, p.620-627, 1985.
- [73] JUANG, J.-N., SUZUKI, H. An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification. *ASME - Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design*, v.110, p.24-29, 1988.
- [74] JURY, E. I. *Theory and application of the Z-transform method*. New York: John Wiley, 1964.
- [75] KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL. Moscow, 1961, p.481-492.
- [76] KANO, H. An identification method of multi-input, multi-output linear dynamical systems for the experimental modal analysis of mechanical structures. *ASME - Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, v.111, n.2, p.146-152, 1989.
- [77] KOZIN, F., NATKE, H. G. System identification techniques. *Structural Safety*, n.3, p.269-316, 1986.
- [78] KURKA, P. R. G. Current techniques in time domain system identification. J. M. BALTHAZAR, P. B. GONÇALVES, J. CLAYSSSEN (Ed.) In: Non-linear dynamics, chaos, control and their applications to the engineering sciences. Published by: Associação de Ciências Mecânicas (ABCM), Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional and Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM ISBN 85-90351, p. 155-161, 1998.

- [79] KURKA, P. R. G. *Investigation of dynamic identification techniques and their applications*. England: Institute of Science and Technology, University of Manchester, 1989. PhD (Thesis).
- [80] KURKA, P. R. G. Modal order determination in a time domain identification algorithm. In: IX INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Florence: Italy, 15-19 feb.1991, p.971-976.
- [81] KURKA, P. R. G., ARAÚJO, C. A. Practical application of a selection criteria for constructing the superset of residual flexibility mode used in modal synthesis methods. IN: PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS (ISMA 23), 16-18 September 1998, V. 1, p. 195-201.
- [82] KURKA, P. R. G., ARAUJO, C. A. Dynamic modeling through time domain identification and substructuring techniques. In: VI DINAME, Caxambu: Minas Gerais, 06-10 mar. 1995, p.6-8.
- [83] KURKA, P. R. G., ARAUJO, C. A. Processo automático para determinação do subconjunto modal de flexibilidade residual utilizado no método de síntese modal. 1999. Trabalho em publicação.
- [84] KURKA, P. R. G., BAZÁN, F. S. Regularization techniques in the time domain modal parameters identification. In: 17th INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, Belgium: Catholic University of Leuven, 21-25 sep.1992, p.733- 741.
- [85] KURKA, P. R. G., BAZÁN, F. S. V. A Prony-moments method for parameter identification in overdetermined systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.8, n.2, p.145-154, 1994.
- [86] KURKA, P. R. G., BRAUN, S. System identification and order determination via the regularized suboptimal solution (RSOS). In: XIV INTERNATIONAL MODAL

ANALYSIS CONFERENCE AND EXHIBIT, Dearborn, 12-15 feb. 1996, p.943-949.

- [87] KURKA, P. R. G., COWLEY, A. Modal parameter identification from the time impulse response of complex dynamic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.2, n.1, p.49-58, 1988.
- [88] KURKA, P. R. G., COWLEY, A. Modal parameter identification in the time domain from a random excitation force. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.4, n.5, p.393-404, 1990.
- [89] KURKA, P. R. G., DIAS, N. E. Gradient-Least squares modal parameter determination in the frequency domain. In: IV DINAME, Florianópolis: Santa Catarina, 01-05 mar.1993.
- [90] KURKA, P. R. G., FERREIRA, R. P. Application of a time domain regularized suboptimal solution in the deflection shape analysis of a diesel engine timing drive over. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS (ISMA 21), 18-20 sep. 1996, p.1149-1155.
- [91] KURKA, P. R. G., GOMES, A. E., BAZÁN, F. S. V. Gauss factorization for least squares solutions in over determined techniques. In: VI DINAME, Caxambu: Minas Gerais, 06-10 mar.1995, p.218-221.
- [92] LANG, G. F. Modal Density - A limiting factor in analysis. *Sound & Vibration*, p.20-22, mar, 1993.
- [93] LEE, J. E., FASSOIS, S. D. Suboptimum maximum likelihood estimation of structural parameters from multiple-excitation vibration data. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, v.114, n.2, p.260-271, 1992.
- [94] LEURIDAN, J. M. *Some direct parameter models identification methods applicable for multiple input modal analysis*. Cincinnati: University of Cincinnati, 1984. 384 p. PhD (Thesis).

- [95] LIM, T. W., CABELL, R. H., SILCOX, R. J. On-line identification of modal parameters using artificial neural network. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, v.118, p.649-656, 1996.
- [96] LINDSKOG, P., WAHLBERG, B. Applications of Kautz models in system identification. In: IFAC 12th TRIENNIAL WORLD CONGRESS, Sidney: Australia, 1993, p.41-44.
- [97] LIU, K., MILLER, D. W. Time domain state space identification of structural systems. *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v.117, n.4, p.608-618, 1995.
- [98] LJUNG, L Perspectives on the process of identification. In: 12th IFAC TRIENAL WORLD CONGRESS, Sydney: Australia, 1993, p.931-939.
- [99] LJUNG, L System identification toolbox: for use with Matlab. The Math Work Inc.
- [100] LJUNG, L, GOLVER, K. Frequency domain versus time domain methods in system identification. *Automatica*, v.17, n.1, p.71-86, 1981.
- [101] LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [102] MAIA, M., SILVA, J. M. M. *Theoretical and experimental modal analysis*. Tauton: Research Studies Press, 1997.
- [103] MARPLE, S. L. JR. *Digital spectral analysis with applications*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [104] MATHIAS, M. H., BRANDON, J. A., KURKA, P. R. G. Performance of ARMA algorithms on a time series from a simple vibrating system. In: FIFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN STRUCTURAL DYNAMICS, Southampton: England, sep. 1994, p.592-599.

- [105] MATHIAS, M. H., KURKA, P. R. G., BRANDON, J. A. A parametric method applied to the signal analysis of a cracked beam. J. M. BALTHAZAR, D. T. MOOK, J.M. ROSÁRIO (Ed.) In: *Non-linear dynamics, chaos, control and their applications to the engineering sciences*. Published by: American Academy of Mechanics (AAM) and Associação de Ciências Mecânicas (ABCM), v.1, p.68-72, 1997.
- [106] MEIROVITCH, L. *Computational methods in structural dynamics (Mechanics: dynamic systems, n.4)*. The Netherlands: Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhof, 1980.
- [107] MENDEL, J. M. *Discrete techniques of parameter estimation: the equation error formulation*. New York: Marcel Dekker, Inc. 1973.
- [108] MENDEL, J. M., WANG, L. Identification of moving-average systems using higher order statistics and learning. In: *Neural networks for signal processing* (Ed. KOSKO, B.), London: Prentice Hall, 1992.
- [109] MICKLEBOROUGH, N. C., PI, Y. L. Modal parameter identification using Z-Transforms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.28, n.10, p.2307-2321, 1989.
- [110] MICKLEBOROUGH, N. C., PI, Y. L. System model identification using free vibration data. *Journal of Structural Engn. and Earthquake Engn.*, v.6, n.2, p.217s-228s, 1989.
- [111] MIDDLETON, R. H., GOODWIN, G. C. *Digital control and estimation: a unified approach (Prentice-Hall information and system sciences series)*. London: Prentice-Hall, 1990.
- [112] MIKULCIK, E. C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. *Shock and Vibration Bulletin*, v.47, n.4, p.183-198, 1977.
- [113] MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M. C. *Previsão de séries temporais*. São Paulo: Ed. Atual. 1985.

- [114] MRAD, R. B. Recursive identification of vibrating structures from noise-corrupted observations, Part I: Identification approaches. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, v.113, n. 3, p. 354-361, 1991.
- [115] MÜLLER, P. C., SCHIELEHLEN, W. O. *Linear vibrations: a theoretical treatment of multi-degree-of-freedom vibrating systems (Mechanics, dynamical systems, v.7)*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [116] NANDI, A., MEHLAN, R. Parameter estimation and phase reconstruction of moving average process using third order cumulants. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.8, n.4, p.421-436, 1994.
- [117] NATKE, H. G. Identification of vibrating structures. *CISM Courses and Lectures*, Wien: Springer-Verlag, n.272, 1982.
- [118] ORFANIDIS, S. J. *Optimum signal processing*. New York: MacGraw-Hill, 1988.
- [119] PAL, C., KAYABA, N., MORISHITA, S., HAGINARA, I. Dynamic system identification by neuralnetwork (a new learning method based on error propagation). *JSME- International Journal*, series C, v.3, n.4, p.686-692.
- [120] PANDIT, S. M. Analysis of vibration records by data dependent systems. *Shock and Vibration Bulletin*, n.47, p.161-174, 1977.
- [121] PANDIT, S. M. *Modal and spectrum analysis: data dependent systems in state space*. New-York: John Wiley & Sons, 1991.
- [122] PANDIT, S. M. Stochastic linearization by data dependent systems. *ASME - Journal of Dynamic Systems. Measurement and Control*, v.99, p.221-226, 1977.
- [123] PANDIT, S. M., MEHTA, N. P. Data dependent systems approach to modal analysis via state space. *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v. 107, p.132-137, 1985.

- [124] PARZEN, E. Time series modeling, spectral analysis and forecasting. In: Brillinger, D.R. and Tiao, G. C. (eds). *Directions in time series*. Institute of Mathematical Statistics, 1984, p.80-111.
- [125] PERCIVAL, D. B., WALDEN, A. T. *Spectral analysis for physical applications: multitaper and conventional univariate techniques*. Cambridge University Press, 1993.
- [126] PRONY, R. Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool, à différents températures. *Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris*, v.1 n.2 ,p.24-76, 1795.
- [127] RAGAZZINI, J. R., FRANKLIN, G. F. *Sampled-data control systems*. New York: MacGraw-Hill, 1958.
- [128] ROMBERG, T. M., CASSAR, A. G., HARRIS, R. W. A comparison of traditional Fourier and maximum entropy spectral methods for vibration analysis. *ASME-Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. v.106, p.36-39, 1984.
- [129] SAGE, A. P., SELSA, J. L. *System Identification*. New York: Academic Press, 1971.
- [130] SANO, A., TSUJI, H. Optimal sampling rate for system identification based on decimation and interpolation. In: IFAC 12th TRIENNIAL CONGRESS, Sidney: Australia, 1993, p.297-302.
- [131] SINHA, N. K., KUSZTA, B. *Modeling and identification of dynamic systems*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1993.
- [132] SJÖBERG, J., MC.KELVEY, T, LJUNG, L. On the use of regularization in system identification. In: 12th IFAC TRIENAL WORLD CONGRESS, Sydney: Australia, 1993, p.75-80.

- [133] SKVORTSOV, L. M. Realizing a matrix transfer function in canonical state equations. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, v.33, n.4, p.53-59, 1995.
- [134] SMITH, C. C., DAHL, J. F., THORNHIL, R. J. The duality of leakage and aliasing and improved digital spectral analysis techniques. *ASME - Journal of Dynamics, Measurement and Control*, v.118, p. 741-747, 1996.
- [135] SÖDERSTRON, T., STOICA, P. *System identification*. New York: Prentice Hall, 1989.
- [136] STROUD, R. C. Excitation, measurement and analysis methods for modal testing in combined experimental / analytical modeling of dynamical structural systems. MARTINEZ, D. R., MILLER, A. K. (Eds). In: JOINT ASCE/ASME MECHANICS CONFERENCE, Albuquerque: New Mexico, p.49-78, 1985.
- [137] STRUM, R. D., KIRK, D. E. *Contemporary linear systems*. Boston: PWS Publishing Company, 1994.
- [138] TREIGUER, J. M. *De sistemas a séries estocásticas - aplicações à análise de vibrações no domínio do tempo*. Universidade Estadual de Campinas, 1992. Tese (Doutorado).
- [139] TREIGUER, J. M., KURKA, P. R. G. Techniques for mechanical system identification based on time discretization analysis. In: XI INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Orlando, 01-05 feb.1993, p.599-605.
- [140] TREIGUER, J. M., KURKA, P. R. G. Técnicas de análise discreta no tempo para identificação modal de sistemas mecânicos. In: XII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, Brasília, 07-10 dez.1993.
- [141] UNBEHAUEN, H., RAO, G. P. Identification of continuous systems: *systems and control series*. Amsterdam: North-Holland, v.10, 1987.
- [142] VAN DEN BOOM, A. J. W., VAN DEN ENDEM, A. W. M. The determination of the orders of process and noise dynamics. *Automatica*. v.10, p.245-256, 1974.

- [143] VAN DER AUWERAER, H., VOLD, H., LEURIDAN, J. Analysis of nonstationary noise and vibration signals. In: ISMA19 - TOOLS FOR NOISE AND VIBRATION ANALYSIS, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven, 12-14 sep.1994, p.385-405.
- [144] VAN DER AUWERAER, H., WYCKAERT, K., TOP, J. Spectral estimation of time-variant signals. In: 17th INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven, 1993, p.207-223.
- [145] VIGNERON, F. R. A natural modes model and modal identities for damped linear structures. *Journal of Applied Mechanics*, v.53, n.1, p.33-38, 1986.
- [146] WALD, A. *Sequential Analysis*. New York: John Wiley, 1947.
- [147] WANG, Z. -N., FANG, T. A time-domain method for identifying modal parameters. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, v.53, p.28-33, 1986.
- [148] WOLF, B. Identification of linear structures. *ASME - Journal of Dynamic Measurements and Control*, v.106, p.300-304, 1984.
- [149] WU, S. M. Dynamic data system: a new modeling approach. *ASME - Journal of Engineering of Industry*, v.99, p.708-714, 1977.
- [150] YANG, Q. J., et al. A system theory approach to multi-input multi-output modal parameters identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.8, n.8, p.159-174, 1994.
- [151] YOUNG, P. Some observations on instrumental variable methods of time series analysis. *International Journal of Control*, v.23, p.593-612, 1976.
- [152] YOUNG, P., JAKEMAN, A., Mc.MURTRIE, R. An instrumental variable method for model order identification. *Automatica*, v.16, p.281-294, 1980.

- [153] YULE, G. U. On a method of investigating periodicities in disturbed series with special references to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, (London), ser. A, v.226, p.267-298, 1927.
- [154] ZADEH, L. A., DESOER, C. A. *Linear system theory*. New York: MacGraw-Hill, 1963.
- [155] ZELNIKER, G., TAYLOR, F. J. *Advanced digital signal processing: theory and applications*. New York: M. Dekker, 1994.
- [156] ZHANG, X., ZHANG, Y.-S. Singular value decomposition-based MA order determination of non-Gaussian ARMA models. *IEEE Transactions on Signal Processing*. v.41, n.8, p.2657-2664, 1993.

## **Anexo I**

### **Equipamentos utilizados no procedimento experimental**

1. Gerador de ruído branco (2 -50 KHz) - General Radio Company
2. Amplificador de potência Brüel & Kjaer, tipo 2706
3. Excitador de vibração Brüel & Kjaer, tipo 4809
4. Transdutor de força Brüel & Kjaer, tipo 8200  
Sensibilidade: 4 pc/N  
Massa            21 g
5. Acelerômetro Endveco  
Sensibilidade: 2,97 pc/N  
Massa            2,4 g
6. Condicionador de sinais Brüel & Kjaer, tipo 2626
7. Analisador de espectros Spectral Dynamics, tipo SD380