

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

**Modelagem Semi-Analítica Pseudo
Tridimensional de Propagação e Fechamento
de Fraturas Induzidas em Rochas**

Autor : **Paulo Dore Fernandes**

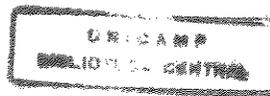
Orientador : **José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa**

Curso : Engenharia de Petróleo

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 1998

S.P. - Brasil



990437

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	FLUNICAMP
	EBLN
V. Ex.	
TOMBO BC/	36.548
PROC.	229/99
C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	13/02/99
N.º CPD	

CM-00120998-1

FICHA CATALOGráfICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F391m Fernandes, Paulo Dore
 Modelagem semi-analítica pseudo tridimensional de
 propagação e fechamento de fraturas induzidas em rochas.
 / Paulo Dore Fernandes.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

 Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Poços de petróleo – Fraturamento hidráulico. 2.
 Mecânica da fratura. 3. Rochas – Deformação. 4.
 Modelos matemáticos. I. Sousa, José Luiz Antunes de
 Oliveira e. II. Universidade Estadual de Campinas.
 Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

TESE DE DOUTORADO

**Modelagem Semi-Analítica Pseudo -
Tridimensional de Propagação e Fechamento
de Fraturas Induzidas em Rochas**

Autor : Paulo Dore Fernandes

Orientador : José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

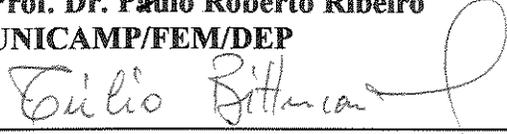
Banca Orientadora :



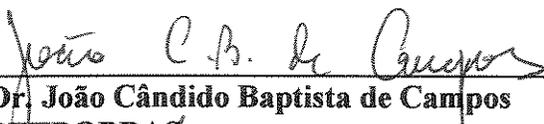
Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa, Presidente
UNICAMP/FEC



Prof. Dr. Paulo Roberto Ribeiro
UNICAMP/FEM/DEP



Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt
EP-USP



Dr. João Cândido Baptista de Campos
PETROBRAS



Dr. Marcos Antônio Rosolen
PETROBRAS

Campinas, 03 de setembro de 1998

Dedicatória :

Dedico este trabalho à minha esposa, Déia, meus filhos, Eric, Mariana e Gabriela e também a meus pais, a quem muito devo.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à Petrobras, pela oportunidade que me foi dada para realização deste trabalho que, com certeza, me permitiu obter uma maior capacitação técnica. Os conhecimentos por mim adquiridos no programa de doutorado em Engenharia de Petróleo serão de grande importância no desempenho de minhas atribuições na empresa.

Agradeço ao Professor José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa, que foi o orientador deste trabalho, pelo suporte técnico e incentivo prestados a mim durante todo o período em que estive participando do curso de doutorado.

Agradeço ao Professor Euclides Bonet pela grande ajuda prestada na execução dos ensaios de laboratório.

Ao Professor Paulo Roberto Ribeiro sou grato pelos recursos laboratoriais cedidos para o desenvolvimento deste estudo.

Quero expressar, também, meus agradecimentos aos técnicos Luiz Benedicto Pompeo Neto e Leandro Augusto Fernandes e aos acadêmicos Vanessa Caldas Leite, Cassiano Afonso Andrade Costa e Francisco Gioielli, cuja participação foi fundamental para a execução dos ensaios de laboratório que fazem parte deste trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, pela presteza e pelo apoio que sempre me foi dado, ajudando de forma direta ou indireta no desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

FERNANDES, Paulo Dore. Modelagem Semi Analítica Pseudo Tridimensional de Propagação e Fechamento de Fraturas Induzidas em Rochas. Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. Tese (Doutorado)

Neste trabalho é proposto um modelo matemático semi analítico, para simulação de propagação de fraturas induzidas hidraulicamente em rochas portadoras de hidrocarbonetos. O modelo leva em conta a variação das três dimensões da fratura (abertura, altura e comprimento) durante o processo de propagação. A exemplo de outros modelos pseudo tridimensionais existentes na literatura, algumas hipóteses básicas são admitidas pelo modelo, tais como o fluxo unidimensional no interior da fratura, contraste simétrico de tensões confinantes e ausência de contraste de propriedades mecânicas entre a zona de interesse e as zonas adjacentes. As relações fundamentais utilizadas pelo modelo são a equação de England e Green, para determinação da abertura da fratura, equação de fluxo entre placas paralelas, para determinar a distribuição de pressão no interior da fratura, equação de Rice, que fornece uma relação entre a altura da fratura e a pressão de propagação e, por fim, equação da continuidade, que determina a perda de fluido devida à filtração pelas faces da fratura. O critério de propagação da fratura baseia-se no conceito de fator crítico de intensidade de tensões. Algumas simulações numéricas foram feitas, comparando os resultados do modelo desenvolvido com simuladores apresentados na literatura e utilizados na indústria, obtendo uma boa concordância. São apresentados alguns resultados de simulações em laboratório. É desenvolvida uma metodologia de análise de fechamento da fratura, com base no declínio de pressão, que permite uma avaliação da fratura resultante de uma operação de fraturamento e sua comparação com os objetivos previstos no projeto, constituindo-se numa importante ferramenta para engenheiros de campo.

Palavras Chave

- Poços de petróleo - fraturamento hidráulico, mecânica da fratura, rochas - deformação, modelos matemáticos

Obs. : O termo “fratura” foi utilizado no escopo deste trabalho para designar a fissura ou trinca resultante do ato do fraturamento hidráulico, constituindo-se numa falha do material (rocha) devido à aplicação de tensão, por meio da pressurização do fluido fraturante.

Abstract

FERNANDES, Paulo Dore. Semi-Analytical Pseudo-Three-Dimensional Model for Analysis of Fracture Propagation and Closure in Rocks . Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. Tese (Doutorado)

This investigation describes a semi-analytical model which simulates fracture propagation in petroleum reservoir rocks. The model permits evaluating the three fracture dimensions parameters (width, height and length) during propagation. Like other pseudo 3D models, some assumptions are used to solve the fracture three-dimensional propagation problem, such as one-dimensional fluid flow in the crack, symmetrical confining stress contrasts and no contrasts in Young's moduli and Poisson's ratio. The governing equations of the model are : England & Green equation, which is used to determine the width-opening pressure relationship; fluid flow equation , to describe the pressure distribution in the crack; Rice's equation, to describe a relationship between crack height and propagation pressure and the mass continuity equation, which describes the leak-off flow at the crack surface. The fracture propagation criteria is based on the concept of critical stress intensity factor (or fracture toughness). Numerical simulations were made and compared with existing simulators results and good agreements were found. Some laboratory results are shown. A fracture closure analysis based on the pressure decline is described; it is an important tool to verify the success of a hydraulic fracturing simulator.

Key Words

- Petroleum wells - hydraulic fracturing, fracture mechanics, rocks - strain, mathematical models

Índice

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
Nomenclatura	xv
1. Introdução	1
1.1 O Fraturamento Hidráulico na Indústria do Petróleo	2
1.2 Revisão da Literatura	3
1.3 Objetivo do Trabalho	12
1.4 Forma de Apresentação	13
2. Crescimento Vertical de Fraturas Durante a Propagação	15
2.1 Energia de Superfície (Teoria de Griffith)	15
2.2 Tenacidade ao Fraturamento	16
2.3 Forças de Coesão (Teoria de Barenblatt)	18
2.4 Contraste entre Propriedades Mecânicas de Formações	21
3. Desenvolvimento do Modelo de Propagação	27
3.1 Determinação da Geometria da Seção Vertical Transversal da Fratura	29
3.2 Determinação da Abertura Média da Seção Vertical da Fratura	36
3.3 Distribuição de Pressão na Fratura	42
3.4 Cálculo do Volume da Fratura	46
3.5 Cálculo das Dimensões Médias da Fratura e Pressão de Propagação	52

4. Efeito da Filtração na Geometria da Fratura	
4.1 Distribuição de Vazão ao Longo da Fratura	58
4.2 Determinação da Pressão Líquida no Interior da Fratura	61
4.3 Cálculo do Volume e Dimensões Médias da Fratura	64
4.4 Determinação da Eficiência Volumétrica	69
4.5 Cálculo do Comprimento e Pressão de Propagação em Função do Tempo	75
5. Fluidos Fraturantes com Modelo Reológico de Potência	77
6. Modelo de Propagação Radial	83
6.1 Determinação da Geometria da Fratura	84
6.2 Distribuição de Pressão na Fratura	86
6.3 Cálculo das Dimensões da Fratura e Pressão de Propagação	87
6.4 Influência da Filtração na Geometria da Fratura	90
6.5 Equações para Fluidos Fraturantes com Modelo Reológico de Potência	96
7. Avaliação da Fratura pelo Declínio de Pressão Durante o Fechamento	99
7.1 Vazões e Volumes de Filtração Através das Faces da Fratura	100
7.2 Variação da Pressão Durante o Fechamento da Fratura	113
7.3 Cálculo do Coeficiente Global de Filtração e Dimensões da Fratura	116
7.4 Cálculos para o Modelo de Propagação Radial	118
8. Estudo Comparativo com Outros Modelos de Fraturamento	122
8.1 Simuladores de Fraturamento Utilizados na Comparação de Resultados	122
8.2 Exemplos de Propagação Radial	123
8.3 Exemplos de Propagação Tridimensional Não-Radial	126
9. Resultados Experimentais	134
9.1 Descrição do Simulador Físico de Fraturamento Hidráulico	134
9.2 Corpos de Prova e Fluido Fraturante	136
9.3 Objetivos e Procedimento de Ensaio	138
9.4 Alguns Resultados de Ensaio Comparados com Resultados do Modelo Teórico	141
9.5 Comentários Sobre os Resultados Encontrados	149

10. Conclusões e Recomendações	151
Referências Bibliográficas	154
Anexo 1 - Aproximação da Função $y = \text{sen } x$	159
Anexo 2 - Aproximação da Função $y = \text{arcsen } x$	160
Anexo 3 - Aproximação da Função $y = \text{arccos } x$	161
Apêndice 1 Modelo de Carter para Filtração Durante a Propagação da Fratura	162
Apêndice 2 Valores da Função $e^{\alpha^2} \text{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1$	165

Lista de Figuras

Figura	Página
1.1 Modelos de Fratura de Sneddon	5
1.2 Geometria do Modelo KGD	5
1.3 Geometria do Modelo PKN	6
2.1 Distribuição Teórica de Tensões próximo à Ponta da Fratura	19
2.2 Distribuição Real de Tensões e Zona de Processos Inelásticos	19
2.3 Fratura Confinada entre Zonas de Diferentes Propriedades	22
2.4 Fratura Propagando entre Zonas com Contraste de Tensões Tipo Degrau	23
2.5 Influência da Tenacidade ao Fraturamento na Crescimento Vertical	25
2.6 Penetração Vertical para Valores de Tenacidade e Contraste de Tensões	26
3.1 Geometria da Seção Vertical da Fratura	36
3.2 Representação Gráfica das Equações 3.25 e 3.26	42
3.3 Solução Numérica da Equação 3.35	44
3.4 Perfil de Distribuição de Pressão na Fratura	46
3.5 Variação da Altura da Fratura ao Longo da Direção de Propagação	47
3.6 Representação Esquemática de Propagação da Fratura	48
3.7 Geometria Horizontal da Fratura	49
3.8 Integração Numérica da Equação 3.49	51
3.9 Comportamento da Pressão em Função do Tempo e do Volume Bombeado	54
4.1 Distribuição de Vazão para Fluxo com Filtração entre Placas Planas Paralelas ...	58
4.2 Distribuição de Pressão na Fratura com Ocorrência de Filtração	63
4.3 Perfil Comparativo de Distribuição de Pressão Com e Sem Filtração de Fluido ...	64
4.4 Perfil Longitudinal Comparativo de Fratura Com e Sem Filtração	66
4.5 Integração Numérica da Equação 4.24	68
4.6 Representação Gráfica da Função $y = e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \left(\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right) - 1$	74

5.1	Curvas Reológicas de Fluidos Modelo de Potência	78
5.2	Curva de Pressão de Propagação versus Tempo	82
6.1	Distribuição de Pressão em Fratura Radial	89
7.1	Esquema de Evolução da Área da Fratura Durante a Propagação	101
7.2	Gráfico semi-log da Função $f(\Delta t_D)$	108
7.3	Gráfico semi-log do termo $f(\Delta t_D) - f_0$ versus Δt_D	109
9.1	Vista Geral do Simulador Físico de Fraturamento Hidráulico	135
9.2	Célula de Carga com Corpo de Prova	136
9.3	Corpos de Prova Fraturados	137
9.4	Macaco Plano, Corpo de Prova e Fluido Fraturante	138
9.5	Curva Característica de Pressão dos Ensaios de Fraturamento	140
9.6	Curva de Pressão de Propagação e Fechamento do Caso A	141
9.7	Curva de Declínio de Pressão para o Caso A	142
9.8	Curva de Pressão de Propagação e Fechamento do Caso B	144
9.9	Curva de Declínio de Pressão para o Caso B	145
9.10	Curva de Pressão de Propagação e Fechamento do Caso C	147
9.11	Curva de Declínio de Pressão para o Caso C	148

Lista de Tabelas

Tabela	Página
2.1 Valores Típicos de Tenacidade ao Fraturamento	18
2.2 Valores de Energia Superficial de Rochas	21
7.1 Valores da Função “ f “ para Diferentes Valores de β e Δt_D	110
8.1 Dados de Entrada para o Caso 1	124
8.2 Resultados Obtidos para o Caso 1	124
8.3 Dados de Entrada para o Caso 2	125
8.4 Resultados Obtidos para o Caso 2	126
8.5 Dados de Entrada para o Caso 3	127
8.6 Resultados Obtidos para o Caso 3	127
8.7 Dados de Entrada para o Caso 4	128
8.8 Resultados Obtidos para o Caso 4	128
8.9 Dados de Entrada para o Caso 5	129
8.10 Resultados Obtidos para o Caso 5	130
8.11 Dados de Entrada para o Caso 6	130
8.12 Resultados Obtidos para o Caso 6	131
8.13 Dados de Entrada para o Caso 7	132
8.14 Resultados Obtidos para o Caso 7	132

Nomenclatura

Letras Latinas

A	área permeável de uma asa da fratura	m^2 (in^2)
A_f	área total de uma asa da fratura	m^2 (in^2)
A_l	parâmetro de filtração para modelo pseudo 3D	
A_r	parâmetro de filtração para modelo radial	
a	variável auxiliar	
a	semi-eixo maior da seção elíptica da fratura	m (ft)
arccos	função inversa do cosseno	rd
arcsen	função inversa do seno	rd
arctan	função inversa da tangente	rd
b	semi-eixo maior da seção elíptica da fratura	m (ft)
c_f	complacência da fratura	m/Pa (in/psi)
C_L	coeficiente global de filtração	m/\sqrt{s} (ft/\sqrt{s})
dv/dr	taxa de deformação de fluxo	s^{-1}
cos	função cosseno	
E	módulo de elasticidade linear	Pa (psi)
$f(\Delta t_D)$	função adimensional de filtração	
f_1, f_2	variáveis auxiliares de integração	
f_h	altura adimensional (z/h)	
f_l	comprimento adimensional (x/L)	
f_R	altura adimensional do reservatório (h_R/h)	
G	módulo de elasticidade ao cisalhamento	Pa (psi)
h	altura da fratura	m (ft)
\bar{h}	altura média da fratura	m (ft)
h_R	altura do reservatório	m (ft)
k	índice de consistência do fluido	$Pa \cdot s^n$

k'	módulo de coesão	$Pa \cdot \sqrt{m}$ ($psi \cdot \sqrt{in}$)
k_a	índice de consistência aparente	$Pa \cdot s^n$
K_I	fator de intensidade tensões (modo I)	$Pa \cdot \sqrt{m}$ ($psi \cdot \sqrt{in}$)
K_{ic}	fator crítico de intensidade de tensões	$Pa \cdot \sqrt{m}$ ($psi \cdot \sqrt{in}$)
L	comprimento de uma asa da fratura	m (ft)
m	declividade da curva de declínio de pressão	Pa (psi)
p	pressão de fluido na fratura	Pa (psi)
\bar{p}	pressão média na fratura	Pa (psi)
q	vazão constante em uma asa da fratura	m^3 / s (bbl / min)
\bar{q}	vazão média em uma asa da fratura	m^3 / s (bbl / min)
q_0	vazão na entrada de uma asa da fratura	m^3 / s (bbl / min)
q_L	vazão de filtração em uma asa fratura	m^3 / s (bbl/min)
Q	vazão total na fratura (2 asas)	m^3 / s (bbl / min)
\bar{Q}	vazão média total da fratura (2 asas)	m^3 / s (bbl / min)
Q_0	vazão total na entrada da fratura (2 asas)	m^3 / s (bbl / min)
Q_L	vazão total de filtração (2 asas)	m^3 / s (bbl / min)
r	distância radial à ponta da fratura	m (ft)
R	raio da fratura	m (ft)
s	variável de Laplace	
sen	função seno	
t	tempo de propagação	s
tan	função tangente	
v	velocidade de fluxo	m / s (ft / s)
v_{sp}	volume de filtração instantânea (spurt)	m^3 / m^2 (ft ³ / ft ²)
V	volume de uma asa da fratura	m^3 (ft ³)
V_i	volume injetado em uma asa de fratura	m^3 (ft ³)
w	abertura da fratura	m (in)
\bar{w}	abertura média da seção vertical da fratura	m (in)
w_{eq}	abertura média da fratura	m (in)
x, y, z	coordenadas cartesianas	

x	distância na direção de propagação	m (ft)
z	distância vertical	m (ft)

Letras Gregas

α	parâmetro do modelo de Carter	
α_1	parâmetro de filtração do modelo desenvolvido	
α_r	parâmetro de filtração do modelo radial	
β	expoente do tempo na relação entre as áreas de filtração	
γ	energia superficial	J / m ²
Γ	função de geometria do modelo de Meyer	
Δp	pressão líquida na fratura	Pa (psi)
$\Delta\sigma$	contraste de tensões confinantes	Pa (psi)
η	eficiência de fluxo	
θ	variável de integração numérica	
μ	viscosidade absoluta	Pa.s (cp)
μ_{ap}	viscosidade aparente	Pa.s (cp)
ν	coeficiente de Poisson	
σ_1	tensão confinante na zona de interesse	Pa (psi)
σ_2	tensão confinante na zona adjacente	Pa (psi)
σ_c	tensão crítica de propagação	Pa (psi)
τ	tempo de propagação correspondente a um ponto na fratura	s
τ_{xy}	tensão de cisalhamento	Pa (psi)
ψ	ângulo com o eixo da fratura	

Subscritos

c	valor crítico
C	valor no instante do fechamento da fratura

D	grandeza adimensional
eq	equivalente
f	fratura
h	grandeza relativa à altura da fratura
l	grandeza relativa ao comprimento da fratura
L	perda de filtrado
LP	perda de filtrado durante o período de propagação
LS	perda de filtrado durante o período de fechamento
p	relativo ao período de propagação
r	fratura radial
R	grandeza relativa ao reservatório (zona de interesse)
s	relativo ao período de fechamento
0	valor da grandeza na entrada da fratura (parede do poço)
1	valor da grandeza na zona de interesse
2	valor da grandeza nas zonas adjacentes

Símbolos

\int	integral
\mathcal{L}	transformada de Laplace
$ $	módulo

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é feita uma apresentação acerca do trabalho desenvolvido nos capítulos posteriores. Define-se, primeiramente, a operação de fraturamento hidráulico, seus objetivos e aspectos de projeto e execução.

Em seguida, é relatada a revisão da bibliografia sobre o assunto objeto deste trabalho. Procura-se mostrar a evolução do tema em ordem cronológica, apresentando o conhecimento básico sobre o assunto, relatado na literatura.

Por fim, é apresentada uma visão global do trabalho, incluindo a importância do tema, a justificativa de sua escolha, o objetivo da pesquisa e a forma de apresentação.

1.1 O Fraturamento Hidráulico na Indústria do Petróleo

A exploração de jazidas portadoras de hidrocarbonetos assume um papel de fundamental importância na matriz energética mundial, nos tempos atuais. Neste contexto, tanto mais econômica será a exploração da jazida, quanto melhores forem as características produtivas da rocha sedimentar portadora de gás ou óleo (rocha reservatório). Dentre estas características, figuram como fundamentais as propriedades permo-porosas da rocha, a pressão de fluido nos poros e o comportamento reológico do fluido de interesse.

A Engenharia de Petróleo tem como um de seus principais objetivos o desenvolvimento e a aplicação de tecnologias capazes de tornar as características da rocha e do fluido favoráveis à exploração econômica da jazida. Dentre estas tecnologias, pode-se citar a recuperação secundária de hidrocarbonetos, a restauração de poços e a estimulação de rochas-reservatório, sendo esta última objeto do presente trabalho.

Denomina-se estimulação de uma rocha-reservatório a qualquer operação ou intervenção feita em uma jazida portadora de hidrocarboneto, de forma a aumentar sua permeabilidade, favorecendo o escoamento de fluido dos poros da rocha para o poço.

Dentre as operações de estimulação de rochas-reservatório, destaca-se o Fraturamento Hidráulico, tema do trabalho desenvolvido nesta dissertação. Fraturamento Hidráulico é uma operação de estimulação que consiste na injeção de um fluido na rocha reservatório (fluido fraturante) sob pressão suficientemente alta para exercer na rocha uma tensão maior do que a soma de sua resistência à tração mais a menor tensão confinante. Desta forma, ocorre a falha do material (rocha), iniciando, então, a fratura. Esta fratura continua se propagando, à medida que o fluido fraturante continua sendo bombeado. Associado ao fluido fraturante, é introduzido na fratura um agente granular (agente de sustentação), de tal forma que, cessado o bombeio, a fratura se fecha sobre este agente, promovendo, desse modo, um canal permanente, de alta condutividade, entre a rocha e o poço, para o fluxo de hidrocarbonetos.

A técnica de Fraturamento Hidráulico tem sido, ao longo dos anos, responsável pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos, em todo o mundo. A primeira operação de fraturamento hidráulico projetada com fins específicos de aumento de produtividade de um poço de petróleo foi realizada no campo de Hugoton, no estado de Kansas (EUA), em 1947. A partir de então, até o ano de 1988, já haviam sido realizadas cerca de 1 milhão de operações de fraturamento em todo o mundo. Cerca de 40% de todos os poços de petróleo perfurados são estimulados com fraturamento hidráulico. Aproximadamente 40% de todo o volume de petróleo produzido nos EUA é proveniente de poços de reservatórios fraturados (Veatch, 1989).

A tecnologia de fraturamento hidráulico tem apresentado um desenvolvimento bastante significativo nos últimos anos. Equipamentos computadorizados de bombeio, mistura de

fluidos e monitoramento da operação garantem um bom controle dos parâmetros de bombeio. Fluidos fraturantes com alto grau de complexidade propiciam o transporte adequado do agente de sustentação para o interior da fratura, em formações de altas ou baixas temperaturas. Agentes de sustentação de elevada resistência à compressão garantem o sucesso de operações de fraturamento em formações de grande profundidade.

Simultaneamente à essas tecnologias, modelos matemáticos mais complexos têm sido desenvolvidos, de forma a descrever de maneira mais exata as geometrias de fraturas obtidas, melhorando a qualidade dos projetos de fraturamento. Com o conhecimento disponível, na atualidade, da modelagem matemática de fraturamento, pode-se realizar estudos de custo x benefício de operações de fraturamento, de forma a maximizar o retorno financeiro deste tipo de estimulação. O conhecimento prévio da geometria de fratura resultante de cada tipo de tratamento e o respectivo aumento de produtividade proporcionado, constitui-se numa poderosa ferramenta da engenharia de reservatórios na escolha do projeto de fraturamento.

A modelagem matemática do fraturamento hidráulico, de forma a descrever a geometria de fratura resultante, pressões de propagação e volumes de fluido fraturantes envolvidos no processo são alguns dos tópicos desenvolvidos nos capítulos posteriores do presente trabalho.

1.2 Revisão da Literatura

Um modelo matemático de propagação de fratura é imprescindível para relacionar vazão de injeção, tempo de tratamento e perda de fluido por filtração com os parâmetros de geometria de fratura, ou seja, comprimento, abertura e altura. Desta forma, começaram a ser desenvolvidos, no início dos anos 60, os chamados modelos bidimensionais de fratura, que assumem uma geometria de perfil vertical retangular. Esses modelos, utilizados durante muitos anos, ainda encontram algumas aplicações na engenharia do petróleo.

Sneddon (1946) publicou o primeiro trabalho de modelagem de fraturas pressurizadas em meios linearmente elásticos. Nesse modelo bidimensional, uma das dimensões da fratura era considerada infinitamente maior do que a outra, particularizando sobremaneira a solução

do problema. O trabalho de Sneddon serviu de base para os primeiros modelos bidimensionais relatados na literatura.

England e Green, em 1963, publicaram um artigo em que propunham uma equação para descrever a geometria de uma fratura aberta em um meio homogêneo e isotrópico, submetido a um estado plano de deformações, sustentada por um fluido pressurizado. A Equação de England e Green apresentou uma evolução em relação aos trabalhos de Sneddon, possibilitando calcular a abertura de uma fratura submetida a um carregamento variável. Desta forma, tornou-se possível determinar a geometria de fraturas submetidas a tensões confinantes variáveis ao longo de sua extensão.

1.2.1 Modelos Bidimensionais de Propagação de Fratura

A primeira modelagem de geometria de fratura induzida publicada na literatura, foi formulada por Sneddon e Elliot (1946), para fraturas bidimensionais, onde uma das dimensões é conhecida e a outra tem extensão infinita, reduzindo o problema ao cálculo da abertura (w). Paralelamente, Sneddon publicou um estudo de modelagem de fraturas radiais em meios linearmente elásticos, caracterizadas por uma única dimensão, o raio da fratura. Este modelo foi batizado pelo autor de “penny shaped”. Para ambos os modelos, a abertura da fratura resultante tem forma elíptica, sendo proporcional a uma das dimensões da fratura (d ou R) e à pressão líquida (Δp , igual à pressão de fluido menos a tensão confinante) e inversamente proporcional ao Módulo de Deformação Plana [$E' = E / (1 - \nu^2)$].

Para o caso linear, o modelo apresenta a seguinte equação :

$$w_{max} = \frac{2\Delta p d}{E'} \quad (1.1)$$

Para o caso radial :

$$w_{max} = \frac{8\Delta p R}{\pi E'} \quad (1.2)$$

A Figura 1.1 mostra a geometria dos modelos de fratura de Sneddon (linear e radial).

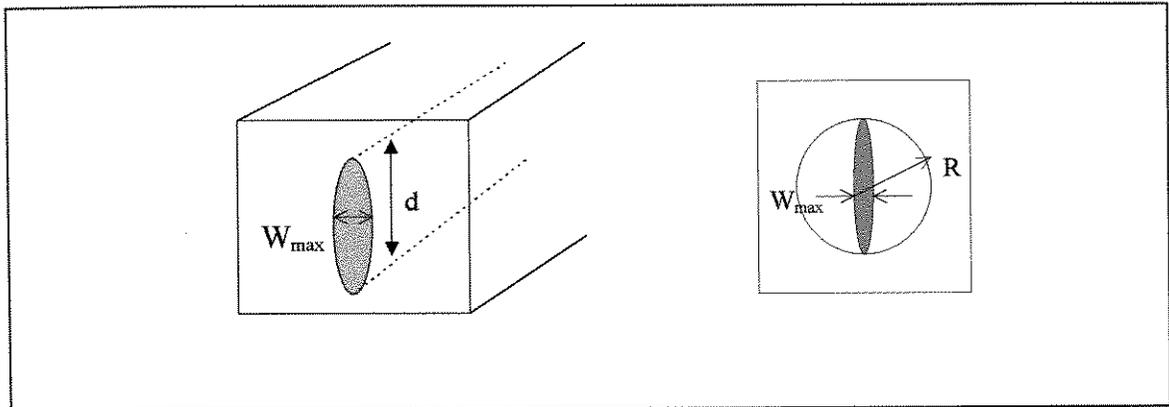


Figura 1.1 - Modelos de Fratura de Sneddon (Bidimensional e Radial)

As relações matemáticas do modelo de propagação bidimensional de Sneddon e Elliot foram utilizadas de duas formas distintas para outras modelagens de propagação de fraturas. Khristianovic e Zheltov (1955) e Geertsma e de Klerk (1969) utilizaram os mesmos princípios do modelo de Sneddon, assumindo a dimensão “d” do seu modelo como sendo o comprimento da fratura. Por analogia, a dimensão infinita seria a altura da fratura. Esse modelo de propagação, conhecido como modelo KGD, é mais apropriado quando o comprimento da fratura é menor do que a altura. O modelo KGD assume estados planos de deformação nas seções horizontais da fratura, resultando numa geometria vertical retangular. A abertura da fratura ao longo do seu comprimento é calculada pela Equação de England e Green. As seções horizontais da fratura apresentam geometria elíptica. A Figura 1.2 mostra o esquema da geometria do modelo KGD.

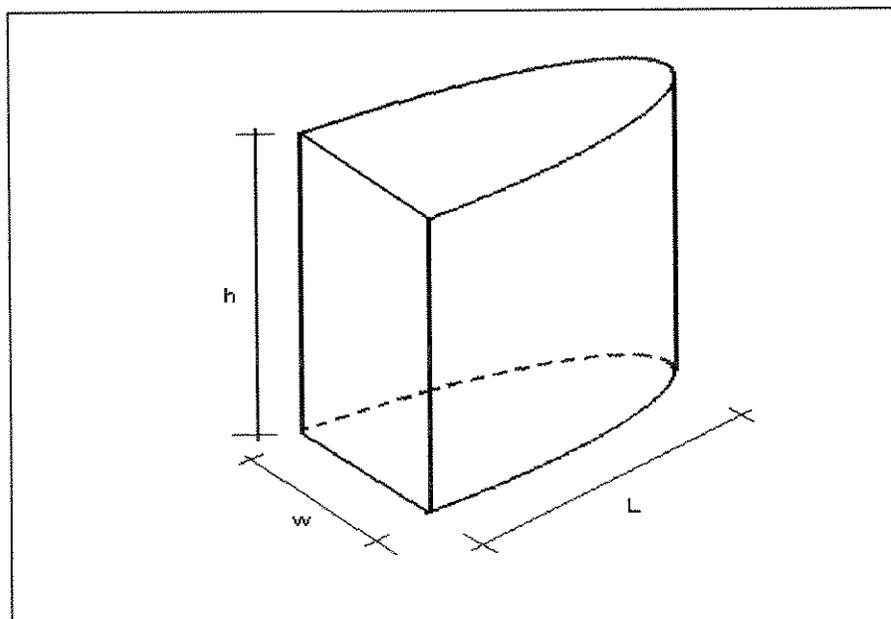


Figura 1.2 Geometria do Modelo KGD

A outra conotação dada ao modelo de Sneddon e Elliot assumiu a dimensão finita da fratura como sendo a sua altura. Esta hipótese foi utilizada por Perkins e Kern (1961) e depois aperfeiçoada por Nordgren, que incluiu o efeito de perda de fluido devido à filtração pelas faces da fratura durante a propagação. Esse modelo, conhecido como PKN, assume, implicitamente, uma correspondência entre o comprimento da fratura e a dimensão infinita do modelo de Sneddon. O modelo PKN é mais adequado para simulação de propagação de fraturas alongadas, em que o comprimento é muito maior do que a altura. O modelo assume estado de deformação plana para as seções verticais da fratura; desta forma, o modelo desconsidera qualquer tipo de acoplamento entre as seções verticais, ou seja, cada seção se deforma independentemente das suas vizinhas. O único acoplamento, considerado pelo modelo, entre as seções verticais, é devido ao fluxo de fluido fraturante na direção de propagação, onde a pressão em cada seção obedece à equação de perda de carga na fratura. A Figura 1.3 mostra a geometria do modelo PKN de propagação de fraturas.

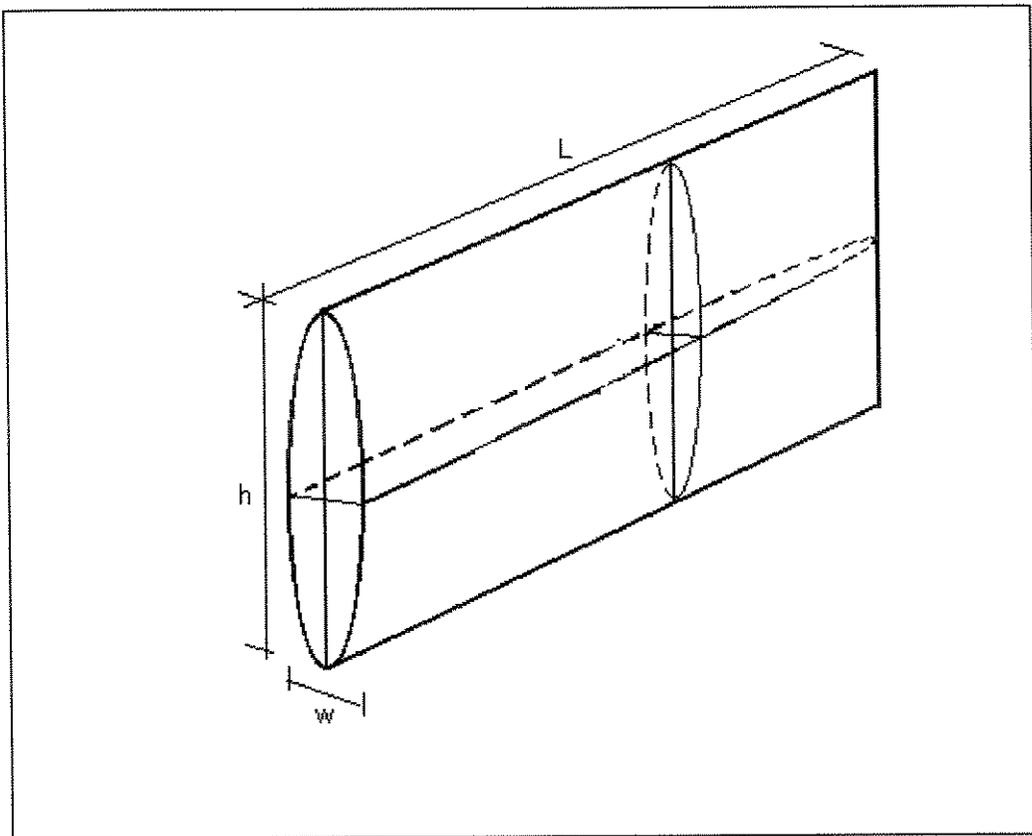


Figura 1.3 - Geometria do modelo PKN de propagação de fratura

1.2.2 Modelos Pseudo-Tridimensionais de Propagação de Fratura

Para simulações mais reais de propagação de fraturas induzidas hidraulicamente, a hipótese de altura da fratura constante no tempo e no espaço, adotada pelos modelos bidimensionais, mostra-se bastante restritiva, tornando-se, até mesmo, uma aproximação bastante grosseira na maioria dos casos práticos. Para simular a geometria de fraturas de forma mais real, passaram a ser desenvolvidos os modelos em que o problema de propagação de fraturas é resolvido em três dimensões : comprimento, altura e abertura. Isto requer tratamentos matemáticos mais complexos, maiores esforços computacionais e maior quantidade de dados de entrada, o que, muitas vezes, limita a utilização prática destes modelos nos projetos de fraturamento hidráulico. Para contornar estas limitações, passaram a ser desenvolvidos modelos que levam em conta o crescimento das três dimensões da fratura, adotando, porém, algumas hipóteses simplificadoras em relação aos modelos tridimensionais. Estes modelos são denominados pseudo-tridimensionais e assumem, a exemplo do modelo bidimensional PKN, que cada seção vertical da fratura deforma-se independentemente das outras. A extensão vertical (altura) de cada seção depende de sua posição ao longo da direção de propagação e do tempo de tratamento decorrido. Nestes modelos, passa-se a considerar duas componentes de fluxo de fluido no interior da fratura, uma componente horizontal, que promove o crescimento do comprimento da fratura, e outra vertical, responsável pela variação da altura. Normalmente, os modelos pseudo-tridimensionais levam a fraturas de geometria alongada, ou seja, de comprimento algumas vezes maior do que a altura. Deste modo, muitas vezes, a componente vertical de fluxo é desprezada, em relação à componente horizontal, sem acarretar maiores erros. A hipótese de fluxo vertical desprezível é uma aproximação utilizada por vários modelos pseudo-tridimensionais, a fim de simplificar a solução da distribuição de pressão no interior da fratura.

Os modelos pseudo-tridimensionais de propagação de fraturas podem ser divididos em duas categorias distintas, em relação às suas equações fundamentais :

a) **modelos que seguem o equacionamento básico do modelo PKN** de propagação bidimensional, calculando a geometria de cada seção vertical da fratura independentemente das outras, acoplado com a solução de distribuição de pressão, governada pela equação de fluxo entre placas. A partir da pressão em cada ponto, determina-se a altura ao longo da fratura.

Esses modelos adotam a hipótese de estado plano de deformações nas várias seções verticais da fratura, que constitui-se numa boa aproximação quanto mais alongada for a fratura.

Settari (1986) propôs um modelo pseudo-tridimensional, baseado no acoplamento da solução de Perkins e Kern, para descrever a propagação longitudinal da fratura, com a solução de Geertsma e De Klerk, para descrever a propagação vertical. Desta forma, o modelo adota um estado plano de deformações para as seções verticais da fratura. O modelo trata as duas componentes de fluxo, vertical e horizontal, separadamente. Na direção longitudinal, o fluxo é equacionado de acordo com a lei de fluxo entre placas. Na direção vertical, a distribuição de pressão segue a do modelo KGD, apresentando pressão praticamente constante na maior parte da extensão vertical, concentrando a quase totalidade de perda de carga próximo às extremidades. Além da perda de fluido, por filtração, para as faces da fratura, o modelo considera uma perda adicional devido ao crescimento da altura e abertura.

Morales (1989) desenvolveu um modelo similar ao de Settari, para fraturas alongadas ($L/h > 1$), admitindo estado plano de deformações nas seções verticais da fratura. O modelo de Morales considera contraste assimétrico de tensões confinantes e de módulos de elasticidade. O fluxo de fluido predominante na fratura ocorre na direção longitudinal. Para corrigir crescimentos irrealistas da altura da fratura, o que invalidaria a hipótese de estado plano de deformações, o modelo adota um fator de correção para o gradiente de pressão vertical, à medida em que a razão entre comprimento e altura da fratura se aproxima de 1. Esse fator de correção é proporcional ao gradiente de pressão de fluxo horizontal. A tensão de carregamento na fratura é decomposta em quatro componentes: pressão de fluido, tensões confinantes na zona de interesse e zonas adjacentes, acima e abaixo. A solução final é encontrada através da superposição de soluções. Os critérios de propagação horizontal e longitudinal são baseados na tenacidade ao fraturamento.

Meyer (1989), apresentou um modelo desenvolvido de forma numérica, onde o sistema formado pelas equações governantes da elasticidade da rocha e do escoamento de fluido são resolvidas pelo método das integrais. O modelo é aplicável a um amplo intervalo de relações de geometria ($1/3 < L/h < \infty$) e inclui grande variedade de situações, tais como, contraste assimétrico de tensões confinantes, contraste de tenacidade, vazão variável, reologia do fluido fraturante variável no tempo, perda de fluido por filtração e perda instantânea inicial (*spurt*

loss). O fluxo bidimensional na fratura foi considerado através da ponderação das soluções numéricas das equações governantes acopladas às leis constitutivas. A metodologia de solução matemática do modelo consiste, através de uma transformação de variáveis, em linearizar as equações diferenciais e resolvê-las numericamente, através de um algoritmo iterativo. O modelo utiliza, como equações governantes do processo de propagação, a equação de conservação de massa para fluido incompressível, equação de conservação de momentum, equação da continuidade e equação de deformação da fratura, supondo comportamento linearmente elástico, para cálculo da abertura. O modelo calcula a abertura da fratura em função dos parâmetros mecânicos da rocha e da pressão no ponto considerado. A equação para cálculo da abertura da fratura é descrita por uma expressão do tipo :

$$w = \Gamma_w(\lambda, x, z, t) \frac{2(1-\nu)}{G} h \Delta p \quad (1.3)$$

A função Γ_w depende de vários parâmetros da formação e fluido fraturante, tais como, Módulo de Elasticidade, Coeficiente de Poisson, contraste de tensões, tempo de tratamento, e índice de comportamento do fluido, além de um fator de geometria da fratura. Para o modelo bidimensional de Geertsma e De Klerk, por exemplo, o fator Γ_w seria igual a L/h . O trabalho de Meyer não detalha o método utilizado para determinação da função Γ_w . O critério de propagação de fratura do modelo é baseado no fator de intensidade crítica de tensões ou tenacidade ao fraturamento.

Weng (1991), propôs um modelo em que o fluxo de fluido é decomposto em duas direções, vertical e horizontal, de maneira a melhorar a modelagem de fluxo proposta por Settari. O modelo de Weng assume uma geometria de fratura elíptica sendo percorrida por um fluxo radial de fluido, cujas linhas são sempre normais ao contorno da fratura.

b) modelos que adotam geometria inicial elíptica no plano xz, com distribuição de pressão no interior da fratura descrita por uma equação polinomial. Esses modelos baseiam-se no trabalho de Shah e Kobayashi (1971), que consiste, basicamente, na determinação dos coeficientes de função polinomial de terceiro grau, que descreve a distribuição de pressão em uma fratura de geometria elíptica no plano de propagação. A partir da pressão em cada ponto, calcula-se a abertura e altura da fratura. A metodologia de solução do modelo baseia-

se em, conhecendo-se o carregamento interno ao qual a fratura está submetida, procurar a função que descreve o estado de tensões ao longo da fratura. O modelo de Shah e Kobayashi não foi desenvolvido para simulação de fraturas induzidas em meios porosos, mas serviu de base para vários modelos de fraturamento hidráulico.

Boutéca (1987) desenvolveu um modelo baseado na metodologia de Shah e Kobayashi, assumindo uma distribuição de pressão na fratura descrita por um polinômio de segundo grau em x e z (coordenadas cartesianas). A fratura, a exemplo do modelo de Shah e Kobayashi, apresenta geometria elíptica no plano xz . O modelo considera a zona de interesse e suas adjacentes, superior e inferior, com contraste simétrico de tensões confinantes e mesmas propriedades mecânicas. O critério de propagação baseia-se na tenacidade ao fraturamento.

Rueda (1994) propôs um modelo similar ao de Boutéca, acrescentando mais dois termos ao polinômio que descreve a distribuição de pressão na fratura. As hipóteses básicas são similares às dos modelos de Shah e Boutéca.

1.2.3 Modelos Tridimensionais

Os modelos tridimensionais de propagação de fraturas, simulam, matematicamente, o comportamento das três dimensões da fratura durante o processo de propagação, sem a utilização de hipóteses simplificadoras em relação ao fluxo de fluidos, contraste de tensões, geometria da fratura ou propriedades mecânicas das rochas-reservatório ou adjacentes.

O fluxo de fluido fraturante, nos modelos tridimensionais, é tratado como fluxo laminar bidimensional de um fluido incompressível de reologia de potência. Assume-se comportamento de fluxo entre placas paralelas porosas. A filtração de fluido pelas faces da fratura, que ocorre durante a propagação, é calculada com base no diferencial entre pressão de fluxo na fratura e pressão de poros da rocha. O fluxo é governado pelo sistema formado pela equação da continuidade e equação de gradiente de pressão na fratura.

O comportamento mecânico da formação é assumido ser linearmente elástico e os efeitos de poroelasticidade são, normalmente, desprezados. A distribuição de tensões nas camadas envolvidas no processo de fraturamento varia ao longo da direção vertical.

A propagação da fratura é controlada pelo critério da mecânica da fratura elástico linear, a exemplo dos modelos pseudo-tridimensionais, ou seja, o fator de intensidade crítico de tensões.

A formulação matemática dos modelos tridimensionais leva a complexos sistemas de equações diferenciais não lineares. Segundo Ben-Naceur (1989), diferentes métodos numéricos são utilizados para resolução destes sistemas, sendo mais freqüente a utilização do método de elementos finitos e do método de elementos de contorno.

O método dos elementos finitos consiste na discretização do domínio, de tal forma que as incógnitas do problema (tensões e deslocamentos) são calculadas numericamente para um conjunto de pontos (malha). No caso de fraturas tridimensionais, utiliza-se malhas com grande número de elementos, o que implica na resolução de sistemas algébricos muito extensos.

A partir dos anos 70, o método de elementos de contorno tornou-se uma técnica usual para resolução de sistemas de equações integrais. O método consiste na discretização do contorno do domínio e leva a relações implícitas entre tensões e deslocamentos no contorno da fratura. Este método de resolução leva a um sistema de equações algébricas mais simples do que o do método de elementos finitos.

O primeiro modelo de propagação totalmente tridimensional de fraturas foi desenvolvido por Abou-Sayed (1984). O modelo utiliza o método de elementos de contorno e seu critério de propagação baseia-se na energia mínima de superfície da fratura. O modelo permite variações na distribuição vertical e longitudinal de tensões e requer uma grande quantidade de dados de entrada relativos à formação, estado de tensões e fluido fraturante. Considera formações homogêneas e isotrópicas, de comportamento linearmente elástico.

Outros modelos totalmente tridimensionais, incluindo fraturas não-planares, foram apresentados, posteriormente, por Lam (1986), Touboul (1986), Vandamme (1986) e Sousa (1992). A maioria destes modelos é baseada na resolução de um sistema de equações de

elasticidade linear através da técnica de elementos de contorno. Este sistema de equações é, na sua forma mais geral, composto de :

- relação tensão-deslocamento
- critério de propagação, geralmente baseado no fator crítico de intensidade de tensões
- equação de perda de carga relativa ao fluxo de fluido fraturante no interior da fratura
- equação de conservação de massa na fratura, relacionando vazão de entrada em cada elemento da fratura com a soma da vazão de saída, vazão de filtração e estocagem devido à variação da abertura.

A maior limitação dos modelos totalmente tridimensionais consiste na grande quantidade de dados de entrada requerida pelos mesmos que, na maioria das vezes não são disponíveis ou confiáveis, levando a resultados fora da realidade. De uma maneira geral, independente do modelo que se utiliza para dimensionar uma operação de fraturamento hidráulico, é de suma importância o conhecimento prático do projetista acerca da formação a ser fraturada e, ainda, que as hipóteses assumidas pelo modelo utilizado sejam aplicáveis à situação que se deseja simular. A qualidade dos resultados obtidos por um modelo depende significativamente da aplicabilidade das suas hipóteses ao caso prático. Desta forma, para cada situação haverá um modelo mais adequado.

1.3 Objetivo do Trabalho

É objetivo desta dissertação a proposição de um novo modelo pseudo tridimensional de fraturas induzidas em rochas portadoras de hidrocarbonetos, de forma a detalhar as equações básicas que descrevem o fenômeno de propagação e, desta forma, entender melhor o mecanismo de fraturamento e a influência dos vários fatores envolvidos no processo. O desenvolvimento matemático do modelo é feito de forma semi-analítica, de forma a se obter equações explícitas para a geometria da fratura (comprimento, abertura e altura), distribuição de pressão no seu interior e eficiência volumétrica do tratamento. A obtenção de equações explícitas, ao contrário dos resultados obtidos pelos métodos numéricos, permite uma análise

de sensibilidade mais apurada e mais rápida do modelo, de modo a facilitar o ajuste dos parâmetros de fluido e de tratamento pelos engenheiros de campo.

Outro objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia para análise de declínio de pressão durante o fechamento da fratura, que permita a avaliação pós-tratamento, similar à metodologia desenvolvida por Nolte (1979, 1986), para modelos bidimensionais. O método de análise de declínio de pressão objeto desta dissertação é aplicável ao modelo de propagação pseudo tridimensional desenvolvido, constituindo-se numa inovação na literatura relativa à avaliação de operações de fraturamento hidráulico.

Por fim, pode ser considerado como objetivo indireto, a obtenção de uma melhor capacitação técnica acerca do processo de propagação de fraturas induzidas em rochas-reservatório e da sua sensibilidade em relação aos vários parâmetros envolvidos no processo.

1.4 Forma de Apresentação

Este trabalho está organizado em dez capítulos, de forma a apresentar as várias etapas de seu desenvolvimento.

No presente capítulo é apresentado o estado da arte da modelagem matemática de fraturamento hidráulico e os objetivos desta dissertação.

No Capítulo 2 é apresentado um estudo preliminar de crescimento vertical de fraturas durante o processo de propagação, mostrando os fatores que controlam o crescimento da altura da fratura.

No Capítulo 3 é desenvolvido o modelo de propagação, inicialmente, sem levar em conta a filtração de fluido pelas faces da fratura e considerando apenas fluidos de reologia newtoniana.

No Capítulo 4 é introduzido o efeito da perda de fluido por filtração, durante a propagação da fratura.

No Capítulo 5 são desenvolvidas equações de geometria do modelo de propagação para fluidos fraturantes com modelo reológico de potência (*power law*).

No Capítulo 6 é apresentado um caso particular de propagação de fraturas, quando não há contraste de propriedades mecânicas das formações nem contraste de tensões confinantes, caracterizando um modelo de propagação radial (*penny shaped*).

No Capítulo 7 é desenvolvido um método de análise de declínio de pressão durante o fechamento da fratura, para o modelo de propagação desenvolvido nos capítulos 3, 4, 5 e 6. Esta metodologia de análise pós-tratamento permite a avaliação da operação de fraturamento quanto aos seus objetivos.

No Capítulo 8 é feita a comparação de resultados de simulações, obtidos com o modelo desenvolvido neste trabalho, com resultados obtidos com outros modelos disponíveis na literatura. Esta comparação tem por objetivo verificar a qualidade dos resultados fornecidos pelo modelo.

No Capítulo 9 são apresentados alguns resultados de simulações físicas de fraturamento hidráulico feitas em laboratório, a fim de comparar resultados experimentais com resultados teóricos fornecidos pelo modelo.

Por fim, no Capítulo 10 são apresentadas as conclusões do trabalho e as recomendações para subsidiar futuros estudos que tenham como enfoque a modelagem tridimensional de propagação e fechamento de fraturas induzidas.

Capítulo 2

Crescimento Vertical de Fraturas Durante a Propagação

A teoria do fraturamento hidráulico de rochas baseia-se na Mecânica da Fratura aplicada a meios porosos, que são materiais predominantemente frágeis. Os estudos de propagação e equilíbrio de fraturas hidráulicas apresentados na literatura são, portanto, baseados no comportamento linearmente elástico de materiais frágeis.

2.1 - Energia de Superfície (Teoria de Griffith)

A primeira teoria aceitável que tratou de explicar a propagação de fraturas em materiais frágeis foi formulada por Griffith (1921), quando estudava a baixa resistência à tração de cristais e materiais vítreos. Através de uma análise microscópica, Griffith verificou a presença de várias microfissuras na estrutura do material, o que justificava a sua baixa resistência a tensões. Admitindo que essas microfraturas tinham uma geometria elíptica, de semi-eixos “a” e “b”, Griffith elaborou um estudo acerca da energia envolvida no processo de crescimento dessas fissuras, determinando o trabalho realizado durante a sua propagação. Para uma fratura elíptica, sob condições de carregamento simples e estado plano de deformações, Griffith desenvolveu uma equação para o cálculo da energia dissipada pelo material no processo de propagação da fratura :

$$dW = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E} a \cdot da \quad (2.1)$$

A variação mínima de energia por unidade de comprimento, necessária à propagação da fratura, pode ser calculada com base no parâmetro “energia superficial” (γ), característico de cada material, por meio da seguinte expressão :

$$dW = 2.\gamma.da \quad (2.2)$$

Comparando as equações 2.1 e 2.2, pode-se calcular um valor crítico ou mínimo de tensão para que haja propagação da fratura :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2.E.\gamma}{\pi.(1-\nu^2).a}} \quad (2.3)$$

2.2 - Tenacidade ao Fraturamento

A formulação de Griffith, baseada na Mecânica de Fratura Linearmente Elástica, foi modificada, posteriormente, por Irwin (1957), de forma a incluir considerações sobre processos de dissipação de energia, como os que ocorrem na zona de processos inelásticos, na vizinhança da ponta da fratura. Esses efeitos foram incorporados através do conceito de fator de intensidade de tensões, que quantifica a intensidade das tensões atuantes na ponta da fratura.

Irwin classificou três diferentes modos de fratura, de acordo com o tipo de deslocamento associado à sua propagação: abertura, cisalhamento no plano e cisalhamento anti-plano (ou fora do plano). Desta forma, pode-se definir três diferentes fatores de intensidade de tensões, K_I , K_{II} e K_{III} , respectivamente.

Para a grande maioria dos casos práticos de fraturamento hidráulico, apenas o modo I de propagação (abertura) é considerado e, conseqüentemente, só leva-se em conta a influência do fator K_I na propagação da fratura.

A relação entre as tensões na região da ponta da fratura e o fator de intensidade de tensões é dada por :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cos \psi / 2 \begin{bmatrix} 1 - \sin(\psi / 2) \sin(3\psi / 2) \\ 1 + \sin(\psi / 2) \sin(3\psi / 2) \\ \sin(\psi / 2) \cos(3\psi / 2) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde “r” é a distância do ponto de aplicação da tensão até a ponta da fratura e “ ψ ” é o ângulo com o eixo principal da fratura..

Para uma fratura de comprimento 2a, submetida a um carregamento $\sigma(x)$, o fator K_I pode ser calculado pela equação de Rice (1968) :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a}} \int_{-a}^a \sigma(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (2.5)$$

Para uma fratura sujeita a um carregamento uniforme, a equação 2.5 se reduz a :

$$K_I = \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \sigma \quad (2.6)$$

Para que haja propagação da fratura, para um dado comprimento de fratura (2a), é necessário um valor mínimo ou crítico de tensão, tal que :

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \cdot a}} \quad (2.7)$$

Onde K_{Ic} é denominado Fator Crítico de Intensidade de Tensões ou Tenacidade ao Fraturamento, e representa o valor mínimo de K_I requerido para que haja propagação de fratura, num estado plano de deformações. Este parâmetro é uma característica do material, para uma dada taxa de carregamento e temperatura.

Substituindo o valor de σ_c da equação 2.3 na equação 2.7, tem-se :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot E}{1 - \nu^2}} \quad (2.8)$$

A Tabela 2.1 apresenta valores característicos de tenacidade ao fraturamento para alguns tipos de rocha, extraídos de Warpinski e outros (1989).

Tabela 2.1 : Valores Típicos de Tenacidade ao Fraturamento

Litologia	K_{Ic} (MPa.m ^{1/2})
Arenito Cozzette	1,57
Arenito Mesaverde	1,35
Folhelho Mancos	1,43
Calcário Indiana	0,93
Granito Westerly	2,60
Folhelho Devoniano	0,82 - 1,32
Folhelho Green River	0,80 - 1,1
Arenito Benson	1,58 - 1,74
Folhelho Benson	0,58

2.3 - Forças de Coesão (Teoria de Barenblatt & Dugdale)

Analisando a Equação 2.4, pode-se concluir, a princípio, que numa região ao redor da ponta da fratura, para pequenos valores de “r”, as tensões atuantes tendem a valores infinitos. Isto não ocorre, entretanto, devido à existência de uma zona de processos inelásticos, próxima à ponta da fratura, onde não se aplicam as equações da elasticidade linear, de forma que as tensões atuantes nesta região apresentam valores finitos.

Uma estimativa do tamanho desta zona de processos inelásticos pode ser obtida, substituindo-se, na Equação 2.4, o valor de σ_y por σ_{ys} (tensão de propagação), tomando-se um plano cujo ângulo $\psi = 0$. Desta forma, pode-se calcular o valor de r_p , que é o raio da zona de processos inelásticos :

$$r_p = \frac{K_I^2}{2 \pi \sigma_{ys}^2} \quad (2.9)$$

A Figura 2.1 mostra a distribuição teórica de tensões na região próxima à ponta da fratura, admitindo que o comportamento do material fraturado é linearmente elástico, ou seja, a distribuição de tensões sendo definida pela Equação 2.4.

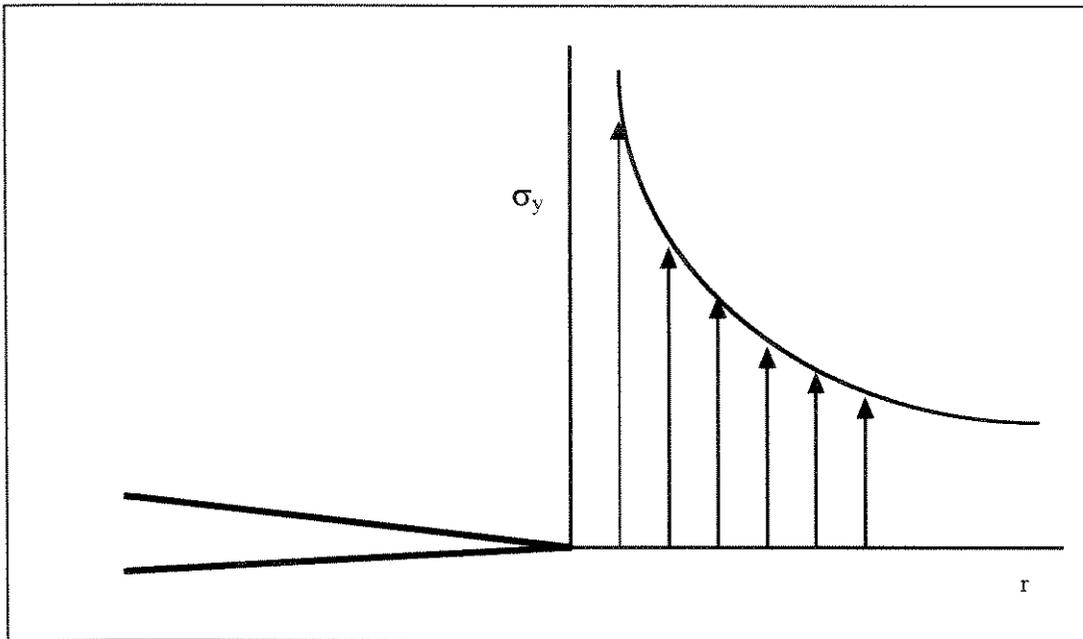


Figura 2.1 - Distribuição teórica de tensões próximo à ponta da fratura

A Figura 2.2 mostra uma distribuição real de tensões na região próxima à ponta da fratura, destacando a zona de processos inelásticos, onde ocorre uma alteração no valor da tensão atuante.

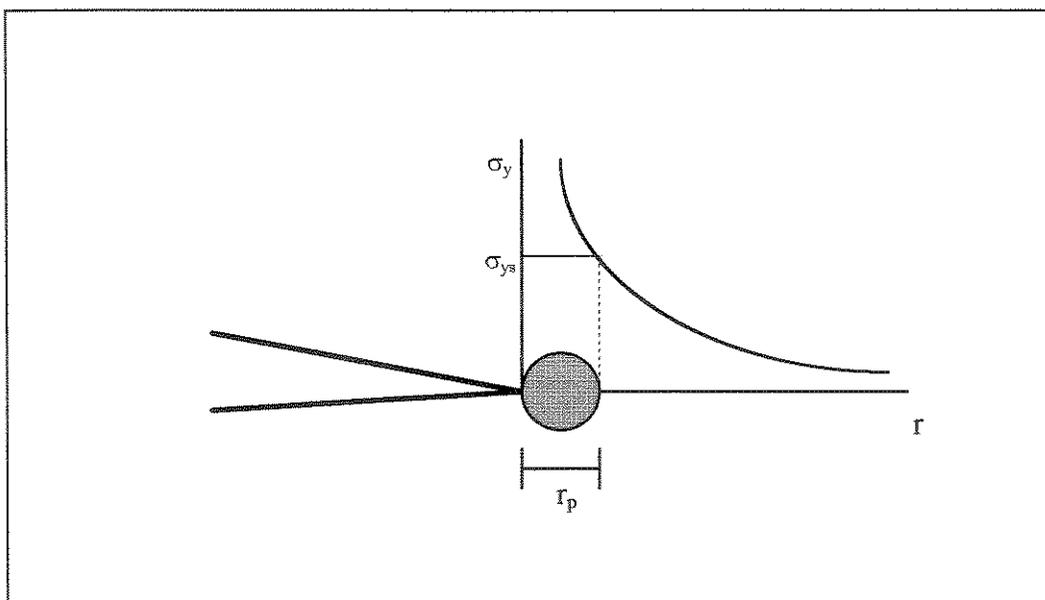


Figura 2.2 - Distribuição real de tensões e zona de processos inelásticos

Barenblatt (1962) propôs a existência de forças atuantes na estrutura microscópica do material, denominadas “forças de coesão”. Essas forças atuam em pequenas regiões ao redor da ponta da fratura, de forma que, numa situação de equilíbrio, elas anulariam os efeitos das tensões de carregamento (σ_{ys}), ou seja, a atuação dessas forças na ponta da fratura resultaria num efeito de contenção à sua propagação.

O limite das forças de coesão, correspondente ao valor mínimo da tensão de carregamento necessário para que a fratura se propague é caracterizado por uma propriedade do material denominada Módulo de Coesão, definido da seguinte forma :

$$k' = \sqrt{\frac{\pi \cdot \gamma \cdot E}{(1 - \nu^2)}} \quad (2.10)$$

onde : γ = energia superficial do meio fraturado

E = Módulo de Elasticidade

ν = Coeficiente de Poisson

Para uma fratura submetida a um carregamento simples, tem-se, comparando as equações 2.10 e 2.3 :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2}{a} \frac{k'}{\pi}} \quad (2.11)$$

Comparando-se as Equações 2.8 e 2.10, obtém-se uma relação entre o Fator de Intensidade Crítico de Tensões e o Módulo de Coesão :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k' \quad (2.12)$$

A Equação 2.12 mostra que a Tenacidade ao Fraturamento e o Módulo de Coesão são grandezas análogas, diferindo apenas em magnitude, que representam, fisicamente, uma capacidade do meio de resistir à propagação da fratura.

A Tabela 2.2 mostra alguns valores típicos de energia superficial determinados experimentalmente por Friedeman e outros, apresentado por Warpinski (1989).

Tabela 2.2 : Valores de Energia Superficial de Rochas

À pressão atmosférica	
Litologia	J/m ²
Calcário Carthage	38,0
Calcário Lueders	19,0
Calcário Indiana	42,0
Arenito Arizona	127,0
Arenito Tennessee	88,0
Arenito Coconino	25,0
Quartzito Chilhowee	50,0
Granito Chelmsford	50,0
Mármore Danby	50,0
Sob compressão de 20 MPa (2900 psi)	
Calcário Lueders	219,0
Calcário Carthage	158,0
Arenito Tennessee	201,0

2.4 - Contraste entre Propriedades Mecânicas de Formações

Considera-se uma zona permeável, portadora de hidrocarboneto, de propriedades mecânicas E_1 e ν_1 , isolada acima e abaixo por dois intervalos impermeáveis, de mesmas propriedades mecânicas E_2 e ν_2 , conforme a Figura 2.3. O problema a ser resolvido consiste

na modelagem matemática do crescimento vertical da fratura, quando é atingida a interface entre a zona de interesse e as zonas adjacentes.

A Figura 2.3 representa esquematicamente uma fratura bidimensional, que se propaga num plano ortogonal ao plano da página, com uma pressão de fluido “p”, no seu interior.

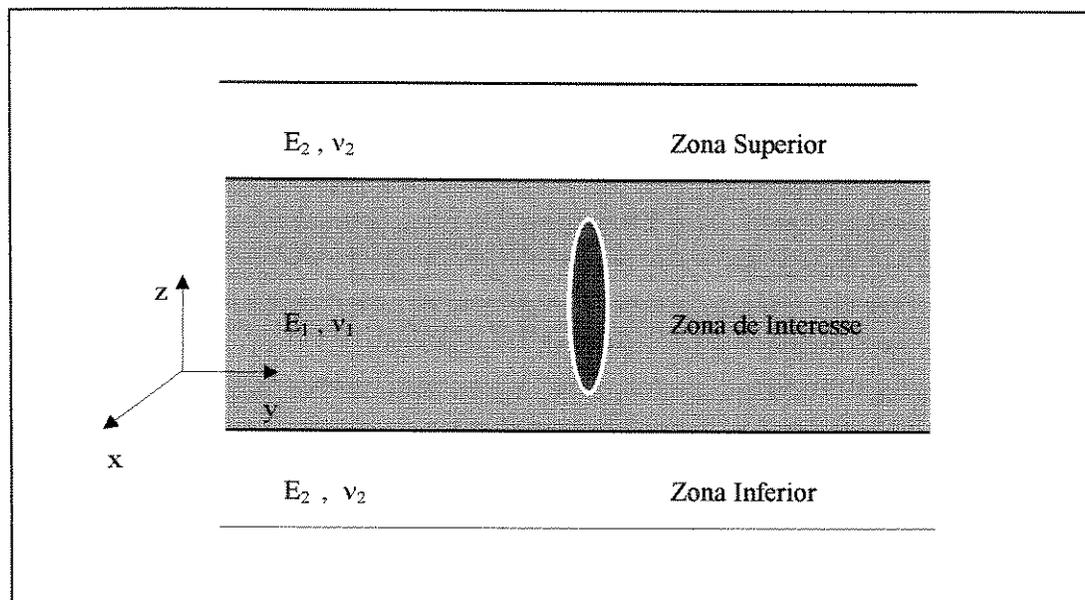


Figura 2.3 - Fratura confinada entre zonas de diferentes propriedades

Para uma fratura totalmente contida na zona de interesse, como visto na Equação 2.6, tem-se a seguinte expressão para o fator de intensidade de tensões :

$$K_I = \sqrt{\pi \cdot a} \cdot (p - \sigma_1)$$

A medida que a fratura se propaga, ela cresce verticalmente, até que ultrapassa os limites da zona de interesse e penetra nas zonas adjacentes, tendo-se, então, a situação mostrada na Figura 2.4. Neste caso, aplica-se a Equação de Rice (1968), para cálculo do Fator de Intensidade de Tensões :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a}} \int_{-a}^a \sigma(z) \sqrt{\frac{a+z}{a-z}} dz \quad (2.13)$$

onde :

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= p - \sigma_2 = \Delta p_2 & -a \leq z < -b \\ \sigma(z) &= p - \sigma_1 = \Delta p_1 & -b \leq z < +b \\ \sigma(z) &= p - \sigma_2 = \Delta p_2 & +b \leq z < +a \end{aligned}$$

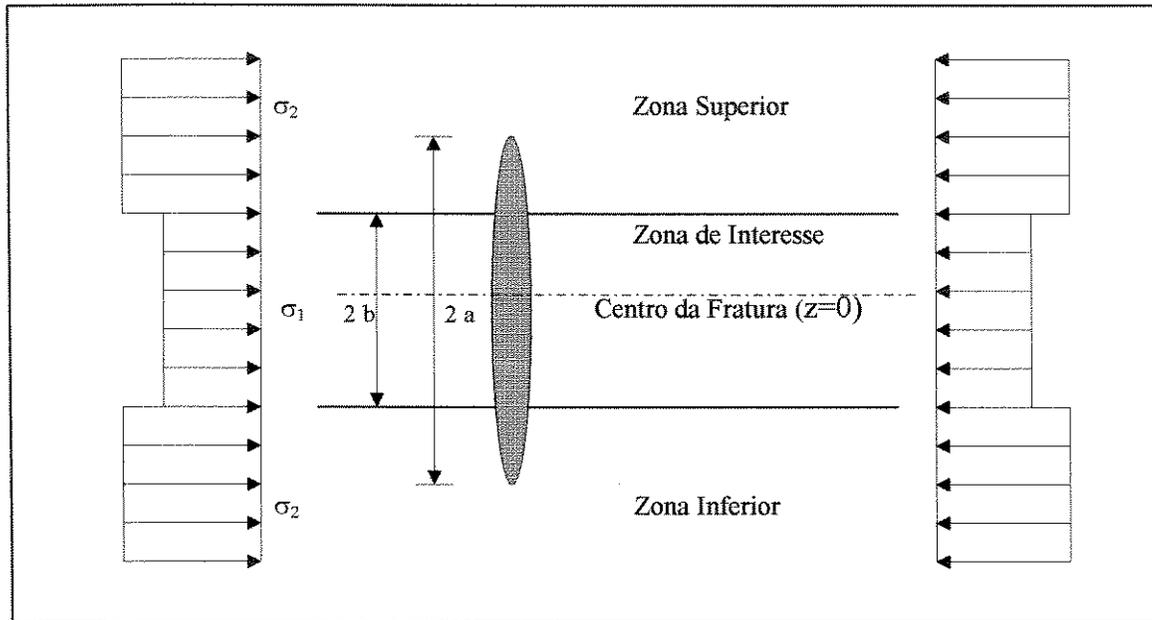


Figura 2.4 - Fatura propagando entre zonas com contraste de tensões tipo degrau

Substituindo a distribuição de tensões na Equação de Rice :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot a} \left(\int_{-a}^{-b} (p - \sigma_2) \sqrt{\frac{a+z}{a-z}} dx + \int_{-b}^b (p - \sigma_1) \sqrt{\frac{a+z}{a-z}} dx + \int_b^a (p - \sigma_2) \sqrt{\frac{a+z}{a-z}} dx \right) \quad (2.14)$$

Onde :

$$\int \frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{a-z}} dz = -\sqrt{a^2 - z^2} + a \cdot \text{sen}^{-1}(z/a)$$

Supondo um valor mínimo de pressão para propagar a fratura, de forma a se aplicar uma tensão crítica de fraturamento, tem-se, resolvendo a Equação 2.13, uma expressão para o Fator Crítico de Intensidade de Tensões ou Tenacidade ao Fraturamento :

$$K_{Ic} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[\Delta P_2 \left(\frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1}(b/a) \right) + \Delta P_1 \text{sen}^{-1}(b/a) \right] \quad (2.15)$$

A Equação 2.15 mostra que quanto maior for a tenacidade ao fraturamento na zona adjacente, maior será a pressão requerida para a propagação da fatura nesta zona, ou seja, maior será a sua contenção vertical.

Fazendo-se $b=a$ na Equação 2.15, ou seja, adotando-se o caso particular da fratura totalmente contida na zona de interesse, obtém-se uma expressão equivalente à Equação 2.6.

Para situações práticas, em que exista uma razoável contenção ao crescimento vertical da fratura, pode-se desprezar o valor de K_{Ic} na Equação 2.15, sem grande perda de precisão no cálculo da penetração vertical da fratura. Assim, obtém-se a seguinte expressão :

$$\frac{\pi}{2} \Delta p_2 + \left[\arcsen(b/a) (\Delta p_1 - \Delta p_2) \right] = 0 \quad (2.16)$$

Essa aproximação, entretanto, só é válida para valores negativos de Δp_2 , ou seja, supondo-se que a pressão de fluido no interior da fratura (p) é sempre menor que a tensão confinante das zonas adjacentes (σ_2). Logicamente, quanto mais próximo desta tensão confinante for o valor da pressão de tratamento, maior será o erro decorrente desta aproximação. No caso extremo de $\Delta p_2=0$ ($p=\sigma_2$), para que a aproximação fosse válida, a altura da fratura tenderia a infinito, o que invalidaria o modelo.

Valores positivos de Δp_2 significam, no caso de K_{Ic} igual a zero, que não existe mecanismo de contenção ao crescimento vertical da fratura. O modelo desenvolvido neste trabalho não é, portanto, aplicável a esta situação.

A Figura 2.5 mostra a curva da penetração adimensional da fratura na zona adjacente em função do parâmetro $\Delta p_1/\Delta\sigma$, para valores de tenacidade ao fraturamento de $1000 \text{ psi.in}^{0,5}$ ($1,10 \text{ MPa.m}^{0,5}$), $500 \text{ psi.in}^{0,5}$ ($0,55 \text{ MPa.m}^{0,5}$) e zero; contraste entre as tensões confinantes igual a 800 psi ($5,5 \text{ MPa}$) e altura da zona reservatório igual a 50 ft (15 m).

Para ilustrar o erro acarretado no cálculo da altura da fratura com a hipótese de Tenacidade ao Fraturamento igual a zero, pode-se comparar, na Figura 2.5, as curvas de tenacidade $1000 \text{ psi.in}^{0,5}$ ($1,1 \text{ MPa.m}^{0,5}$) e zero. Para valores de pressão líquida na fratura (Δp_1), iguais a 50%, 70% e 85% do contraste de tensões ($\Delta\sigma$), ocorre uma diferença de 4%, 8% e 15%, respectivamente, entre as duas curvas.

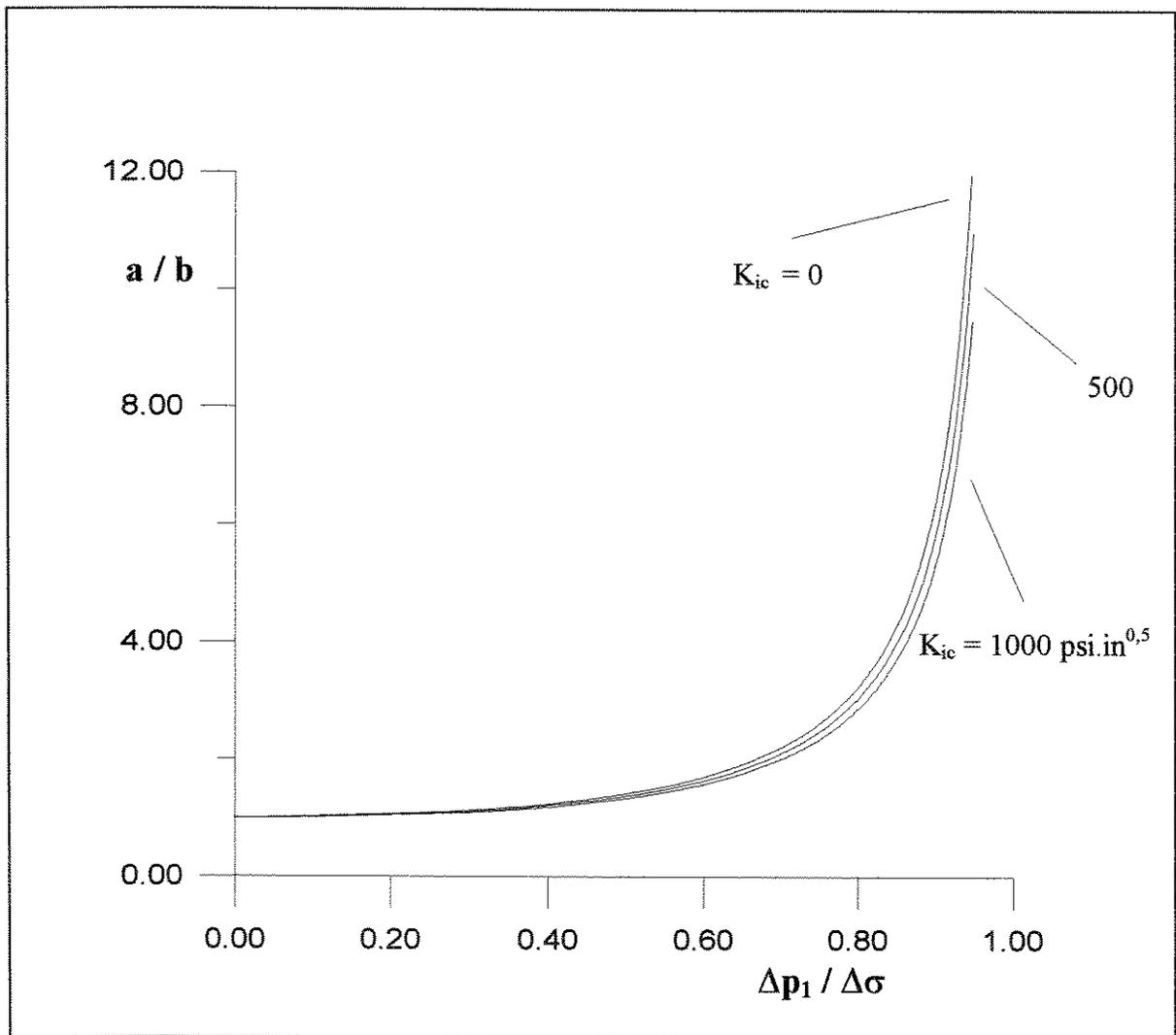


Figura 2.5 - Influência da Tenacidade ao Fraturamento no crescimento vertical

Comparando as curvas de tenacidade $500 \text{ psi.in}^{0,5}$ ($0,55 \text{ MPa.m}^{0,5}$) e zero, essas diferenças caem para 2%, 5% e 7%.

A Figura 2.6 mostra curvas de penetração adimensional da fratura em função do parâmetro $|\Delta p_2| / \Delta \sigma$, para valores de tenacidade à fratura (K_{Ic}) iguais a $1000 \text{ psi.in}^{0,5}$ ($1,1 \text{ MPa.m}^{0,5}$) e zero, e diferentes contrastes de tensão.

Pode-se, ainda, fazer as seguintes substituições de variáveis :

$2b = h_R$ (Altura do Reservatório)

$2a = h$ (Altura da Fratura)

$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \sigma_2 - \sigma_1 = \Delta \sigma$ (Contraste de Tensões)

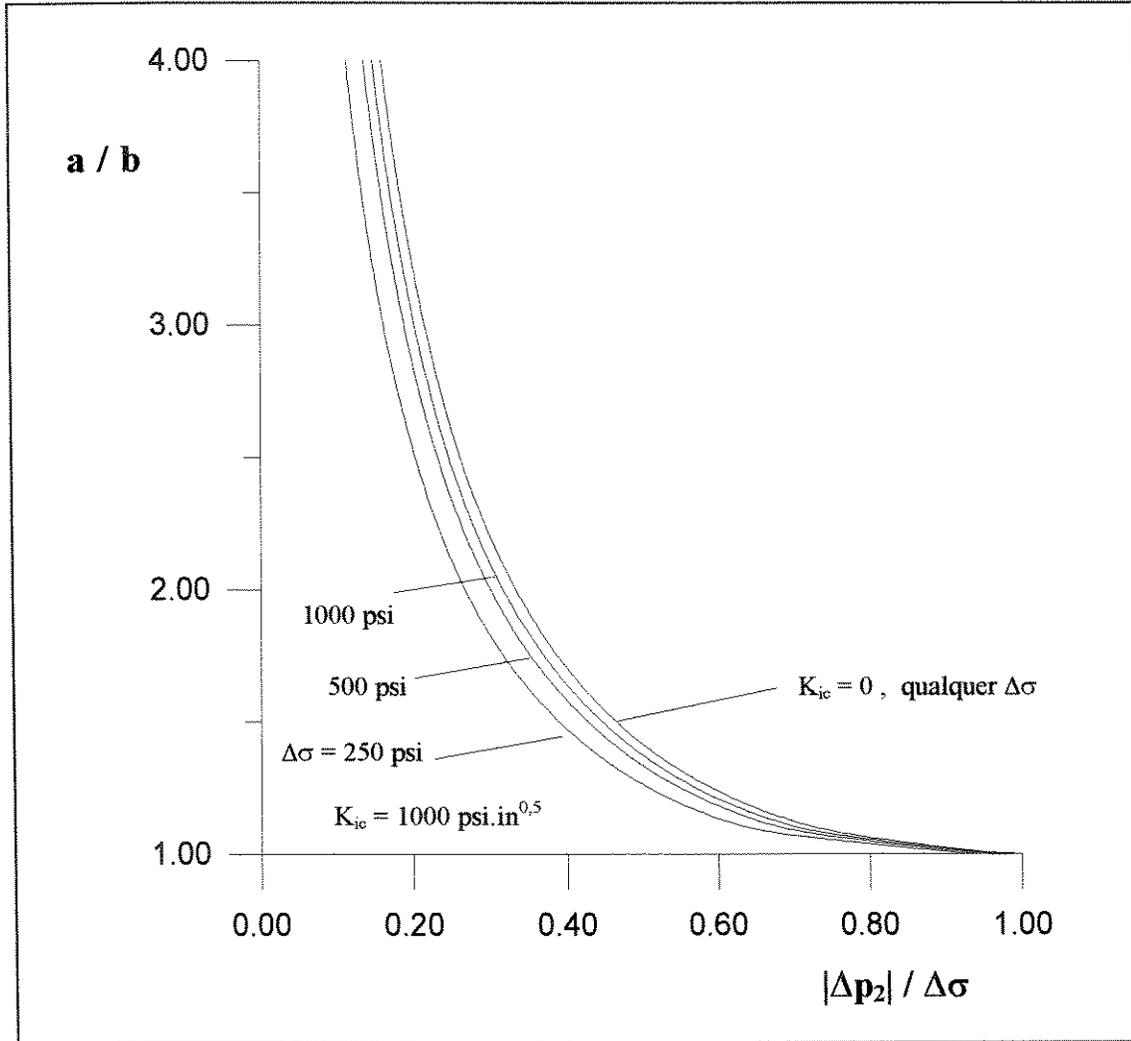


Figura 2.6 - Penetração vertical para diferentes valores de Tenacidade e Contraste de Tensões

Portanto, a Equação 2.16 pode ser escrita da seguinte forma :

$$\Delta\sigma \cdot \arcsen\left(\frac{h_R}{h}\right) = -\frac{\pi}{2} \Delta p_2 = \frac{\pi}{2} |\Delta p_2|$$

Donde resulta a relação entre altura do reservatório e altura da fratura :

$$\frac{h_R}{h} = f_R = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{|\Delta p_2|}{\Delta\sigma}\right) \quad (2.17)$$

Capítulo 3

Desenvolvimento do Modelo de Propagação

Neste capítulo é feito o desenvolvimento matemático das equações que descrevem a geometria da fratura nas suas três dimensões, durante o processo de propagação.

Para tanto, o modelo admite algumas hipóteses básicas que simplificam, de certa forma, o problema físico da propagação da fratura em uma zona delimitada, acima e abaixo, por um contraste simétrico de tensões, conforme a Figura 2.2. Tais hipóteses, como já comentado no Capítulo 1, não invalidam o modelo, haja vista que, na maioria dos casos, não se dispõe de dados confiáveis que permitam a resolução do problema levando em conta todas as variáveis envolvidas no processo.

No desenvolvimento do modelo, são assumidas, portanto, as seguintes considerações :

- contraste simétrico de tensões;

O modelo considera um contraste simétrico de tensões confinantes, descrito por uma função degrau, com descontinuidades nas interfaces entre a zona de interesse e as zonas adjacentes. Esta hipótese pode ser modificada, de forma que se possa estudar diferentes distribuições de tensões nas rochas envolvidas no processo de fraturamento, porém isto não é objeto do presente trabalho.

- propriedades mecânicas da rocha reservatório e adjacentes;

O modelo não considera o contraste entre as propriedades mecânicas (E , ν) da zona de interesse e das zonas adjacentes. Isto não acarreta maiores erros, haja vista que o modelo considera o contraste de tensões confinantes, que é consequência direta do contraste de ν .

- rocha reservatório e adjacentes são homogêneas e isotrópicas;

Esta hipótese, muito comum na Engenharia de Petróleo, deve-se, principalmente à grande complexidade de um modelo anisotrópico e à dificuldade de caracterização da rocha. Na grande maioria dos casos, é aceita como uma boa aproximação do modelo real.

- fratura iniciando em toda a extensão da rocha reservatório;

Significa que todo o intervalo de interesse encontra-se canhoneado, ou seja, em contato com o poço, de forma que, no início da propagação, todo o intervalo esteja submetido à pressão de fraturamento. Nos casos em que isso não ocorre, há um pequeno período de propagação radial, de forma a alterar a geometria da fratura numa pequena região próxima à sua extremidade.

- vazão de tratamento constante durante todo o processo de propagação;

Na prática, a variação é muito pequena. É desejável que a vazão de tratamento seja mantida constante, uma vez que todo o projeto de fraturamento baseia-se nesta premissa.

- fluido fraturante de reologia newtoniana;

Inicialmente, o fluido fraturante é considerado de reologia newtoniana. No decorrer do trabalho, são desenvolvidas equações para fluidos de reologia não-newtoniana, que representam de forma mais adequada o comportamento reológico de fluidos gelificados.

- fluxo de fluido predominantemente linear, no sentido da propagação da fratura.

É considerado, apenas, o gradiente de pressão na direção principal de propagação da fratura (x). Ao longo da altura da fratura (direção z), a pressão é considerada constante. O gradiente de pressão na direção vertical, resultante do fluxo de fluido fraturante nesta direção, é considerado desprezível, em comparação com o gradiente de pressão na direção longitudinal. Segundo Clifton (1989), esta hipótese não acarreta grandes erros, quando o crescimento

vertical da fratura é controlado. Logicamente, à medida que a fratura passa a apresentar um modo de propagação radial, o gradiente de pressão na direção vertical passa a ser um fator bastante relevante na determinação da sua geometria.

- Tenacidade ao fraturamento da rocha desprezível

No presente trabalho não é considerado o efeito de contenção vertical da fratura devido à Tenacidade ao Fraturamento da rocha. Isto significa que o modelo só é válido para valores de pressão de tratamento inferiores à tensão confinante das zonas adjacentes à zona fraturada. No caso de valores positivos para Δp_2 , o modelo indicaria um valor infinito para a altura da fratura, face à ausência de qualquer outro mecanismo de contenção que não seja o contraste de tensões. Como mostrado no Capítulo 2, para fraturas que apresentam crescimento vertical controlado (valores positivos de Δp_2), o efeito da Tenacidade ao Fraturamento pode ser desprezado sem acarretar maiores erros no cálculo da altura da fratura.

3.1 Determinação da Geometria da Seção Vertical Transversal da Fratura

A abertura (w) de uma fratura submetida a uma pressão interna (p) de fluido fraturante e a um campo de tensões conforme esquema da Figura 2.2, considerando um estado plano de deformações, pode ser calculada pela equação desenvolvida por England e Green (1963) :

$$w(f_h) = \frac{2(1-\nu)h}{\pi \cdot G} \int_{f_h}^1 \frac{f_2 \cdot df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p \cdot df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \quad (3.1)$$

$$\text{onde, } \Delta p = \begin{cases} \Delta p_1 = p - \sigma_1, & -f_R \leq f_h \leq +f_R \\ \Delta p_2 = p - \sigma_2, & -1 \leq f_h < -f_R \quad , \quad +f_R < f_h \leq +1 \end{cases} \quad \text{é a pressão líquida.}$$

$f_h = 2z/h$; $f_R = h_R/h$ (Figura 2.4, sendo $h = 2a$; $h_R = 2b$)

f_1 e f_2 : variáveis auxiliares, representam coordenadas genéricas no eixo-z

G e ν são o Módulo de Cisalhamento e Coeficiente de Poisson, respectivamente.

As direções x , y e z são definidas na Figura 2.3 .

Resolvendo a Equação 3.1 para a distribuição de pressão proposta, determina-se a geometria das seções verticais da fratura, uma vez que é obtida uma relação entre a abertura w e a altura adimensional f_h . Desta forma, dividindo-se o domínio da função $w(f_h)$ em dois intervalos e resolvendo a Equação 3.1 separadamente para cada um deles, tem-se a seguinte solução :

$$a) 0 \leq f_h \leq f_R \quad (\text{zona de interesse})$$

Pela Equação de England e Green (1963) :

$$w(f_h) = \frac{2(1-\nu)h}{\pi.G} \int_{f_h}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}}$$

onde :

$$\int_{f_h}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \quad (3.2)$$

Resolvendo, separadamente, as duas integrais duplas do segundo membro da Equação 3.2, tem-se :

$$\begin{aligned} \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} &= \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \Delta p_1 \cdot \arcsen \frac{f_1}{f_2} \Big|_0^{f_2} \\ \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} &= \frac{\pi}{2} \Delta p_1 \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \\ \int_{f_h}^{f_R} \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} &= \frac{\pi}{2} \Delta p_1 \sqrt{f_R^2 - f_h^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por outro lado, resolvendo a segunda integral :

$$\int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \left(\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \right) \quad (3.4)$$

onde, $\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \Delta p_1 \cdot \arcsen \frac{f_1}{f_2} \Big|_0^{f_R} + \Delta p_2 \cdot \arcsen \frac{f_1}{f_2} \Big|_{f_R}^{f_2}$

$$\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \Delta p_1 \cdot \arcsen \frac{f_R}{f_2} + \Delta p_2 \left(\arcsen 1 - \arcsen \frac{f_R}{f_2} \right)$$

$$\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 + (\Delta p_1 - \Delta p_2) \arcsen \frac{f_R}{f_2}$$

sendo que, $\Delta p_1 - \Delta p_2 = p - \sigma_1 - p + \sigma_2 = \Delta \sigma$

Então, $\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 + \Delta \sigma \arcsen \frac{f_R}{f_2}$ (3.5)

Substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.4, tem-se :

$$\int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \left(\frac{\pi}{2} \Delta p_2 + \Delta \sigma \arcsen \frac{f_R}{f_2} \right)$$

$$\int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \int_{f_R}^1 \frac{\pi/2 \Delta p_2 f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} + \int_{f_R}^1 \frac{\Delta \sigma f_2 \arcsen(f_R/f_2) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \quad (3.6)$$

Sendo que :

$$\int_{f_R}^1 \frac{\pi/2 \Delta p_2 f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 \sqrt{f_2^2 - f_R^2} \Big|_{f_R}^1 = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 \sqrt{1 - f_R^2} \quad (3.7)$$

e, por sua vez :

$$\int_{f_R}^1 \frac{\Delta\sigma f_2 \arcsen(f_R/f_2) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} = \Delta\sigma \left[\sqrt{f_2^2 - f_R^2} \arcsen f_R/f_2 + f_R \ln(f_2) \right]_{f_R}^1$$

$$\int_{f_R}^1 \frac{\Delta\sigma f_2 \arcsen(f_R/f_2) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} = \Delta\sigma \left(\sqrt{1 - f_R^2} \arcsen f_R - f_R \ln(f_R) \right) \quad (3.8)$$

O resultado da Equação 3.6 é, portanto, a soma das Equações 3.7 e 3.8 :

$$\int_{f_R}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_R^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 \sqrt{1 - f_R^2} + \Delta\sigma \left(\sqrt{1 - f_R^2} \arcsen f_R - f_R \ln(f_R) \right) \quad (3.9)$$

Finalmente, a solução da Equação 3.2 é a soma das Equações 3.3 e 3.9 :

$$\int_{f_h}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_1 \sqrt{f_R^2 - f_h^2} + \frac{\pi}{2} \Delta p_2 \sqrt{1 - f_R^2} + \Delta\sigma \left(\sqrt{1 - f_R^2} \arcsen f_R - f_R \ln(f_R) \right) \quad (3.10)$$

Substituindo a Equação 3.10 na Equação 3.1, obtém-se a solução para o cálculo da abertura da fratura no domínio $0 \leq f_h \leq f_R$:

$$w(f_h) = \frac{h(1-\nu)}{G} \left[\sqrt{f_R^2 - f_h^2} \Delta p_1 + \sqrt{1 - f_R^2} \Delta p_2 + 0.64 \left(\sqrt{1 - f_R^2} \arcsen(f_R) - f_R \ln(f_R) \right) \Delta\sigma \right] \quad (3.11)$$

A Equação 2.17 pode ser aproximada, utilizando o método dos mínimos quadrados, pela seguinte expressão (Anexo 1) :

$$f_R = 1,136 \left(\frac{|\Delta p_2|}{\Delta\sigma} \right)^{3/4}, \text{ ou } \Delta p_2 = -0,84 \Delta\sigma f_R^{1,33} \quad (3.12)$$

E, sabendo-se que :

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 + \Delta\sigma$$

$$h = h_R / f_R$$

$$\text{Então : } \Delta p_1 = \Delta \sigma - 0,84 \Delta \sigma f_R^{1,33} \quad (3.13)$$

Utilizando as Equações 3.12 e 3.13, a Equação 3.11 pode ser simplificada, de modo a eliminar as variáveis Δp_1 , Δp_2 e h :

$$w(f_h) = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \left(\frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} \Delta \sigma - 0,84 \frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} f_R^{1,33} \Delta \sigma - 0,84 \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} f_R^{1,33} \Delta \sigma + \right. \\ \left. + 0,64 \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \arcsen(f_R) \Delta \sigma - 0,64 \ln(f_R) \Delta \sigma \right) \\ w(f_h) = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \left(\frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} - 0,84 \sqrt{f_R^2 - f_h^2} f_R^{0,33} - 0,84 \sqrt{1-f_R^2} f_R^{0,33} + \right. \\ \left. + 0,64 \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \arcsen(f_R) - 0,64 \ln(f_R) \right) \Delta \sigma \quad (3.14)$$

b) $f_R < f_h \leq 1$ (zonas adjacentes)

Novamente, o problema consiste na resolução da Equação de England e Green :

$$w(f_h) = \frac{2(1-\nu)h}{\pi \cdot G} \int_{f_h}^1 \frac{f_2 \cdot df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta p \cdot df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}}$$

onde :

$$\int_0^{f_2} \frac{\Delta p \cdot df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 \cdot df_1}{f_2^2 - f_1^2} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 \cdot df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}}$$

$$\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 \cdot df_1}{f_2^2 - f_1^2} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 \cdot df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \Delta p_1 \arcsen \frac{f_1}{f_2} \Big|_0^{f_R} + \Delta p_2 \arcsen \frac{f_1}{f_2} \Big|_{f_R}^{f_2}$$

$$\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{f_2^2 - f_1^2} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \Delta p_1 \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) + \Delta p_2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right)\right)$$

$$\int_0^{f_R} \frac{\Delta p_1 df_1}{f_2^2 - f_1^2} + \int_{f_R}^{f_2} \frac{\Delta p_2 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{\pi}{2} \Delta p_2 + \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) \Delta \sigma \quad (3.15)$$

Substituindo a Equação 3.15 na Equação 3.1, tem-se :

$$w(f_h) = \frac{2 \cdot h \cdot (1 - \nu)}{\pi \cdot G} \int_{f_h}^1 \frac{\left(\frac{\pi}{2} \Delta p_2 + \Delta \sigma \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right)\right)}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} f_2 df_2$$

$$w(f_h) = \frac{h(1 - \nu)}{G} \Delta p_2 \sqrt{1 - f_h^2} + \frac{2h(1 - \nu) \Delta \sigma}{\pi \cdot G} \int_{f_h}^1 \frac{f_2 \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} \quad (3.16)$$

A integral do segundo membro da Equação 3.16 não admite solução analítica. Desta forma, $y = \arcsen x$ é aproximado por $y = 1,400 x^3 - 1,377 x^2 + 1,411 x - 0,024$, pelo método dos mínimos quadrados (Anexo 2). A integral, então, pode ser resolvida analiticamente.

$$\int_{f_h}^1 \frac{f_2 \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} = \int_{f_h}^1 \frac{\left[1,400\left(\frac{f_R^3}{f_2^3}\right) - 1,377\left(\frac{f_R^2}{f_2^2}\right) + 1,411 f_R - 0,024 f_2\right]}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}}$$

$$\int_{f_h}^1 \frac{f_2 \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} = -2,163\left(\frac{f_R^3}{f_h}\right) - 0,024\sqrt{1 - f_h^2} + 1,400\left(\frac{f_R^3}{f_h^2}\right)\sqrt{1 - f_h^2} +$$

$$+ 1,377\left(\frac{f_R^2}{f_h}\right) \arctan\left(\frac{f_h}{\sqrt{1 - f_h^2}}\right) + 1,411 f_R \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - f_h^2}}{f_h}\right)$$

onde :

$$\arctan\left(\frac{f_h}{\sqrt{1 - f_h^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cot\left(\frac{f_h}{\sqrt{1 - f_h^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{1 - f_h^2}}{f_h}$$

então :

$$\int_{f_h}^1 \frac{f_2 \arcsen\left(\frac{f_R}{f_2}\right) df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_h^2}} = 1,400\left(\frac{f_R^3}{f_h^2}\right)\sqrt{1-f_h^2} - 0,024\sqrt{1-f_h^2} - 1,377\left(\frac{f_R^2}{f_h}\right)\arctan\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} +$$

$$+ 1,411f_R \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h}\right) \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação 3.17 na Equação 3.16, tem-se :

$$w(f_h) = \frac{h(1-\nu)}{G} \left[\sqrt{1-f_h^2} \Delta p_2 + \left(0,890 \frac{f_R^3}{f_h^2} \sqrt{1-f_h^2} - 0,015 \sqrt{1-f_h^2} - 0,880 \frac{f_R^2}{f_h} \arctan \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 0,900 f_R \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right) \right) \Delta \sigma \right] \quad (3.18)$$

Similarmente ao caso anterior, pode-se expressar Δp_1 e Δp_2 em função de f_R , de modo que a Equação 3.18 pode ser reescrita da seguinte forma :

$$w(f_h) = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \left(0,890 \frac{f_R^2}{f_h^2} \sqrt{1-f_h^2} - 0,015 \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_R} + 0,900 \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right| - \right.$$

$$\left. - 0,880 \frac{f_R}{f_h} \arctan \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} - 0,840 \sqrt{1-f_h^2} f_R^{0,330} \right) \Delta \sigma \quad (3.19)$$

A Figura 3.1 mostra a representação gráfica das Equações 3.14 e 3.19, para uma fratura propagando em uma rocha reservatório de 15 m de espessura, com Módulo de Elasticidade (E) igual a 5×10^6 psi ($3,45 \times 10^4$ MPa) e Coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2. Foi arbitrado para este exemplo que a altura adimensional do reservatório (f_R) é igual a 0,4; ou seja, a altura da fratura é igual a 37,5 m no instante de propagação considerado.

A escala do eixo x, que representa a abertura da fratura na Figura 3.1, foi ampliada, a fim de detalhar a geometria da uma seção vertical da fratura. As curvas apresentam um ponto de inflexão em f_R , que, no exemplo da Figura 3.1, é igual a 0,4. Como visto no desenvolvimento matemático, este ponto de inflexão é decorrente da variação da tensão confinante na interface

da zona de interesse com as zonas adjacentes, que caracteriza um contraste de tensões tipo degrau.

O segmento vertical compreendido entre $-f_R$ e f_R corresponde, graficamente, à espessura (h_R) da rocha reservatório.

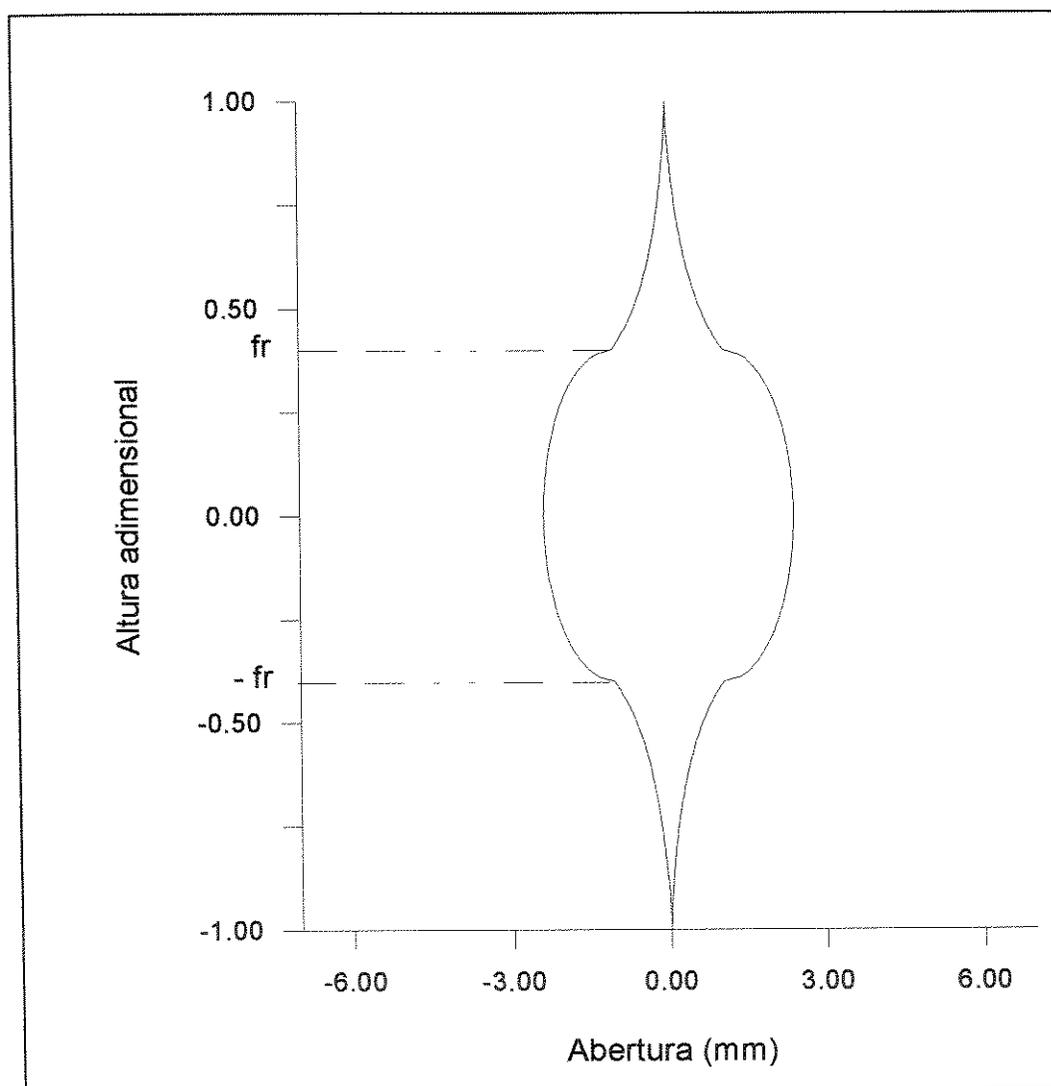


Figura 3.1 - Geometria de uma Seção Vertical da Fratura

3.2 Determinação da Abertura Média da Seção Vertical da Fratura

Como é visto mais adiante, para os cálculos relacionados ao volume da fratura, é interessante utilizar um valor médio da abertura, de modo que se possa utilizar uma geometria mais simples de fratura.

Pela definição de valor médio de uma função em um determinado intervalo do domínio, pode-se determinar a equação que calcula a abertura média de uma fratura cuja geometria num plano vertical é definida pelas Equações 3.14 e 3.19 :

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(f_h) df_h$$

ou, sabendo-se que a fratura é simétrica em relação ao plano x-y :

$$\bar{w} = \int_0^1 w(f_h) df_h$$

$$\bar{w} = \int_0^{f_R} w(f_h) df_h + \int_{f_R}^1 w(f_h) df_h \quad (3.20)$$

Resolvendo-se separadamente as duas integrais do segundo membro da Equação 3.20, tem-se:

$$a) 0 \leq f_h \leq f_R$$

De acordo com a Equação 3.14, pode-se escrever:

$$\int_0^{f_R} w(f_h) df_h = \int_0^{f_R} \frac{1-\nu}{G} h_R \left(\frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} - 0,84 \sqrt{f_R^2 - f_h^2} f_R^{0,33} - 0,84 \sqrt{1 - f_R^2} f_R^{0,33} + \right. \\ \left. + 0,64 \frac{\sqrt{1 - f_R^2}}{f_R} \arcsen(f_R) - 0,64 \ln(f_R) \right) \Delta \sigma \quad (3.21)$$

$$\int_0^{f_R} w(f_h) df_h = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \left(\int_0^{f_R} \frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} df_h - 0,84 \int_0^{f_R} \sqrt{f_R^2 - f_h^2} f_R^{0,33} df_h + \right.$$

$$\left. -0,84 \int_0^{f_R} \sqrt{1-f_R^2} f_R^{0,33} df_h + 0,64 \int_0^{f_R} \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \arcsen(f_R) df_h - 0,64 \int_0^{f_R} \ln(f_R) df_h \right)$$

onde :

$$\bullet \int_0^{f_R} \frac{\sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{f_R} df_h = \frac{1}{f_R} \left[\frac{f_h \sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{2} + \frac{f_R^2}{2} \arcsen\left(\frac{f_h}{f_R}\right) \right]_0^{f_R} = \frac{\pi}{4} f_R = 0,785 f_R$$

$$\bullet \int_0^{f_R} \sqrt{f_R^2 - f_h^2} f_R^{0,33} df_h = f_R^{0,33} \left[\frac{f_h \sqrt{f_R^2 - f_h^2}}{2} + \frac{f_R^2}{2} \arcsen\left(\frac{f_h}{f_R}\right) \right]_0^{f_R} = \frac{\pi}{4} f_R^{2,33} = 0,785 f_R^{2,33}$$

$$\bullet \int_0^{f_R} \sqrt{1-f_R^2} f_R^{0,33} df_h = \sqrt{1-f_R^2} f_R^{1,33}$$

$$\bullet \int_0^{f_R} \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \arcsen(f_R) df_h = \sqrt{1-f_R^2} \arcsen(f_R)$$

$$\bullet \int_0^{f_R} \ln(f_R) df_h = f_R \ln(f_R)$$

Desta forma, tem-se a seguinte solução para a Equação 3.21 :

$$\int_0^{f_R} w(f_h) df_h = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \left(0,785 f_R - 0,66 f_R^{2,33} - 0,84 \sqrt{1-f_R^2} f_R^{1,33} + 0,64 \sqrt{1-f_R^2} \arcsen(f_R) + \right. \\ \left. - 0,64 f_R \ln(f_R) \right) \quad (3.22)$$

$$b) f_R \leq f_h \leq 1$$

De acordo com a Equação 3.19, pode-se escrever :

$$\int_{f_R}^1 w(f_h) df_h = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \int_{f_R}^1 \left(0,89 \frac{f_R^2}{f_h^2} \sqrt{1-f_h^2} - 0,015 \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_R} + 0,9 \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right| + \right. \\ \left. - 0,88 \frac{f_R}{f_h} \arctan \left(\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right) - 0,84 f_R^{0,33} \sqrt{1-f_h^2} \right) \Delta \sigma \cdot df_h \quad (3.23)$$

$$\int_{f_R}^1 w(f_h) df_h = \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \left(0,89 \int_{f_R}^1 \frac{f_R^2}{f_h^2} \sqrt{1-f_h^2} df_h - 0,015 \int_{f_R}^1 \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_R} df_h + 0,9 \int_{f_R}^1 \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right| df_h + \right. \\ \left. - 0,88 \int_{f_R}^1 \frac{f_R}{f_h} \arctan \left(\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right) df_h - 0,84 \int_{f_R}^1 f_R^{0,33} \sqrt{1-f_h^2} df_h \right)$$

onde :

$$\bullet \int_{f_R}^1 \frac{f_R^2}{f_h^2} \sqrt{1-f_h^2} df_h = f_R^2 \left[-\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} - \arccos(f_h) \right]_{f_R}^1 = -1,57 f_R^2 + f_R \sqrt{1-f_R^2} + f_R^2 \arccos(f_R)$$

$$\bullet \int_{f_R}^1 \frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_R} df_h = \frac{1}{f_R} \left[\frac{f_h \sqrt{1-f_h^2}}{2} + \frac{\arccos(f_h)}{2} \right]_{f_R}^1 = \frac{0,785}{f_R} - \frac{\sqrt{1-f_R^2}}{2} - \frac{\arccos(f_R)}{2 f_R}$$

$$\bullet \int_{f_R}^1 \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right| df_h = \left[\arccos(f_h) + f_h \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right) \right]_{f_R}^1 \\ = 1,57 - \arccos(f_R) - f_R \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \right)$$

$$\bullet \int_{f_R}^1 \frac{f_R}{f_h} \arctan \left(\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right)$$

Neste caso, como $f_R \leq f_h \leq 1$, então, $\arctan \left(\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h} \right) = \arccos(f_h)$

Para que a integral acima possa ser resolvida de forma analítica, a função $\arccos(f_h)$, por sua vez, utilizando método dos mínimos quadrados, pode ser aproximada pelo seguinte polinômio (Anexo3) :

$$\arccos(f_h) = -1,4f_h^3 + 1,377f_h^2 - 1,411f_h + 1,595$$

Então :

$$\begin{aligned} \int_{f_R}^1 \frac{f_R}{f_h} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-f_h^2}}{f_h}\right) df_h &= f_R \int_{f_R}^1 \left(-1,4f_h^2 + 1,377f_h - 1,411 + \frac{1,595}{f_h}\right) df_h \\ &= f_R \left[-0,467f_h^3 + 0,688f_h^2 - 1,411f_h + 1,595\ln(f_h)\right]_{f_R}^1 \\ &= 0,467f_R^4 - 0,688f_R^3 + 1,411f_R^2 - 1,595f_R \ln(f_R) - 1,189f_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{f_R}^1 f_R^{0,33} \sqrt{1-f_h^2} df_h &= f_R^{0,33} \left[\frac{f_h \sqrt{1-f_h^2}}{2} + \frac{\arcsen(f_h)}{2} \right]_{f_R}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} f_R^{0,33} - \frac{f_R^{1,33} \sqrt{1-f_R^2}}{2} - \frac{f_R^{0,33} \arcsen(f_R)}{2} \end{aligned}$$

Desta forma, a Equação 3.23, tem a seguinte solução :

$$\begin{aligned} \int_{f_R}^1 w(f_h) df_h &= \\ &= \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \left[-1,4f_R^2 + 0,89f_R \sqrt{1-f_R^2} + 0,89f_R^2 \arcsen(f_R) - \frac{0,012}{f_R} + 0,007\sqrt{1-f_R^2} + \right. \\ &+ \frac{0,007 \arcsen(f_R)}{f_R} + 1,414 - 0,9 \arcsen(f_R) - 0,9f_R \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-f_R^2}}{f_R}\right) - 0,411f_R^4 + 0,605f_R^3 + \\ &\left. - 1,242f_R^2 + 1,404f_R \ln(f_R) + 1,046f_R - 0,66f_R^{0,33} + 0,42f_R^{1,33} \sqrt{1-f_R^2} + 0,42f_R^{0,33} \arcsen(f_R) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

A solução da Equação 3.20 é a soma das Equações 3.22 e 3.24 . Somando estas duas equações e simplificando os termos comuns, chega-se à seguinte expressão para o cálculo da abertura média vertical da fratura :

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \left[\left(0,64 \sqrt{1-f_R^2} + 0,89 f_R^2 + 0,42 f_R^{0,33} + \frac{0,007}{f_R} - 0,9 \right) \arcsen(f_R) + \right. \\ & + \left(0,89 f_R - 0,42 f_R^{1,33} + 0,007 \right) \sqrt{1-f_R^2} + 0,764 f_R \ln(f_R) - 0,9 f_R \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_R^2}}{f_R} \right) + \\ & \left. - 0,411 f_R^4 + 0,605 f_R^3 - 2,642 f_R^2 + 1,831 f_R - 0,66 f_R^{2,33} - 0,66 f_R^{0,33} - \frac{0,012}{f_R} + 1,414 \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

A Equação 3.25 pode ser aproximada por uma função trigonométrica, pelo método dos quadrados mínimos. Para valores de f_R situados entre 0,05 e 1, tem-se a seguinte aproximação:

$$\bar{w} = 0,52 \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta \sigma \arccos(f_R) \quad (3.26)$$

onde :

$$\arccos(f_R) = \frac{\pi}{2} - \arcsen(f_R) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta p_1}{\Delta \sigma} \quad (3.27)$$

Considerando que a pressão líquida na fratura varia ao longo da direção de fluxo, tem-se, substituindo a Equação 3.27 na Equação 3.26 :

$$\bar{w}(x) = 0,817 \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta p_1(x) \quad (3.28)$$

A Figura 3.2, mostra a representação gráfica das Equações 3.25 e 3.26, para efeito comparativo, tomando-se o valor de $\left[(1-\nu) h_R \Delta \sigma / G \right]$ igual a 1.

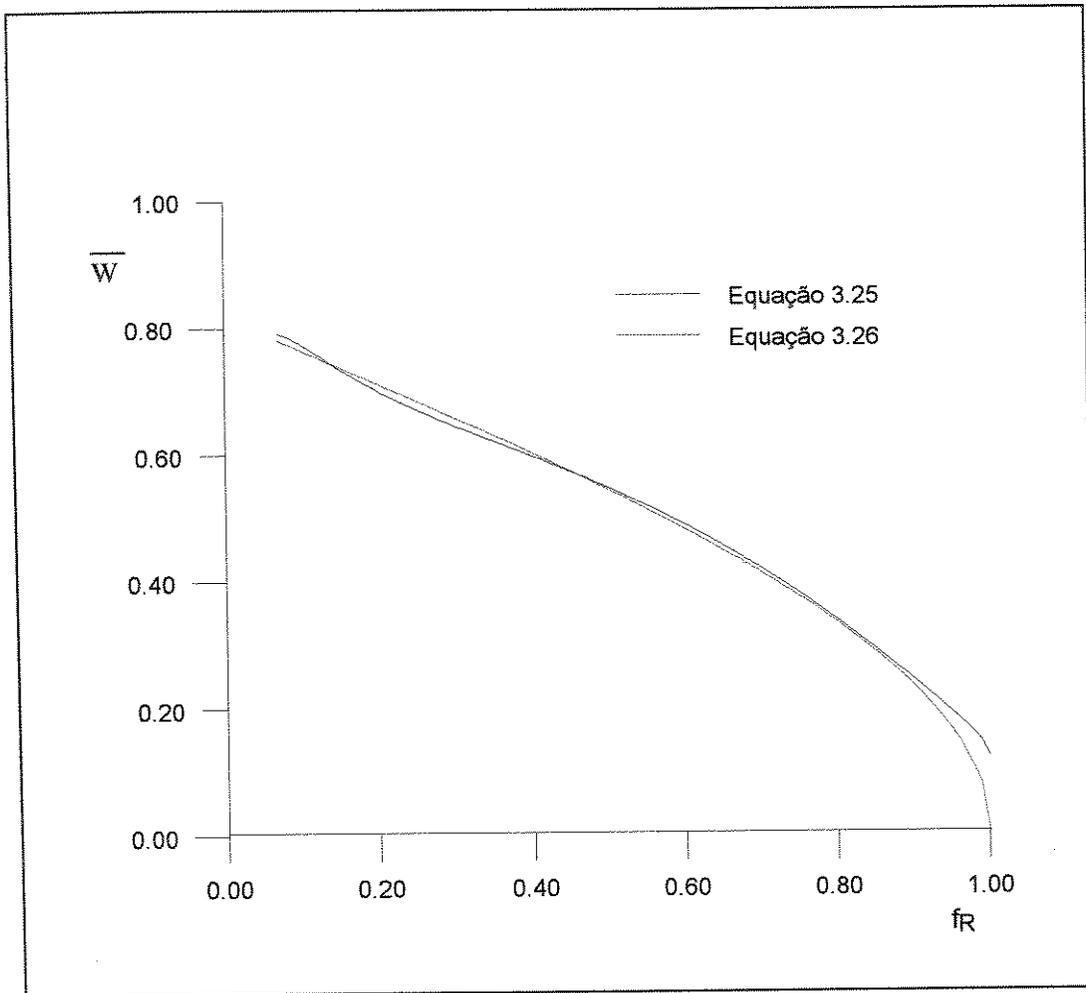


Figura 3.2 - Representação Gráfica das Equações 3.25 e 3.26

3.3 - Distribuição de Pressão na Fratura

Para efeito de estudo do fluxo de fluido no interior da fratura, são consideradas, por questão de simplicidade, seções verticais retangulares, de altura h e abertura igual à abertura média de cada seção.

A variação de pressão decorrente de um fluxo de fluido newtoniano entre duas placas planas paralelas é calculada pela seguinte expressão (Perkins, 1961) :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu v}{w^2} = -\frac{12\mu q}{hw^3} \quad (3.29)$$

$$\text{onde, } h = \frac{h_R}{f_R} = \frac{h_R}{\text{sen}\left(\frac{\pi |\Delta p_2|}{2 \Delta \sigma}\right)} \quad (3.30)$$

Considerando a pressão líquida em cada ponto da fratura, tem-se :

$$\Delta p = p - \sigma$$

$$\text{e lembrando que : } \Delta p_1 = \Delta p_2 + \Delta \sigma$$

$$\text{Logo, } \frac{dp}{dx} = \frac{d\Delta p_1}{dx} = \frac{d\Delta p_2}{dx} \quad (3.31)$$

Substituindo as Equações 3.28, 3.30 e 3.31 na Equação 3.29, tem-se :

$$\frac{\left(-\frac{\pi |\Delta p_2|}{2 \Delta \sigma} + 1,571\right)^3}{\text{sen}\left(\frac{\pi |\Delta p_2|}{2 \Delta \sigma}\right)} d\Delta p_2 = -\frac{12\mu q}{0,141\left(\frac{1-\nu}{G}\right)^3 \Delta \sigma^3 h_R^3} dx \quad (3.32)$$

Fazendo-se :

$$\theta = \frac{\pi |\Delta p_2|}{2 \Delta \sigma}$$

$$d\theta = \frac{\pi}{2\Delta \sigma} d|\Delta p_2| = -\frac{\pi}{2\Delta \sigma} d\Delta p_2$$

E substituindo-se na Equação 3.32, tem-se :

$$\frac{(-\theta + 1,571)^3}{\text{sen } \theta} d\theta = \frac{134\mu q}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 dx \quad (3.33)$$

Considerando que, na extremidade da fratura ($x=L$), a pressão líquida (Δp_1) é igual a zero, ocorre a seguinte condição de contorno :

$$|\Delta p_2| = \Delta \sigma \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad (3.34)$$

Integrando-se ambos os membros da Equação 3.33 e aplicando-se a condição de contorno 3.34, tem-se :

$$\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{(-\theta + 1,571)^3}{\text{sen } \theta} d\theta = \frac{134 \mu q}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 (L-x) \quad (3.35)$$

A integral do primeiro membro da Equação 3.35, pode ser resolvida numericamente, para vários valores de θ , resultando na curva apresentada graficamente pela Figura 3.3.

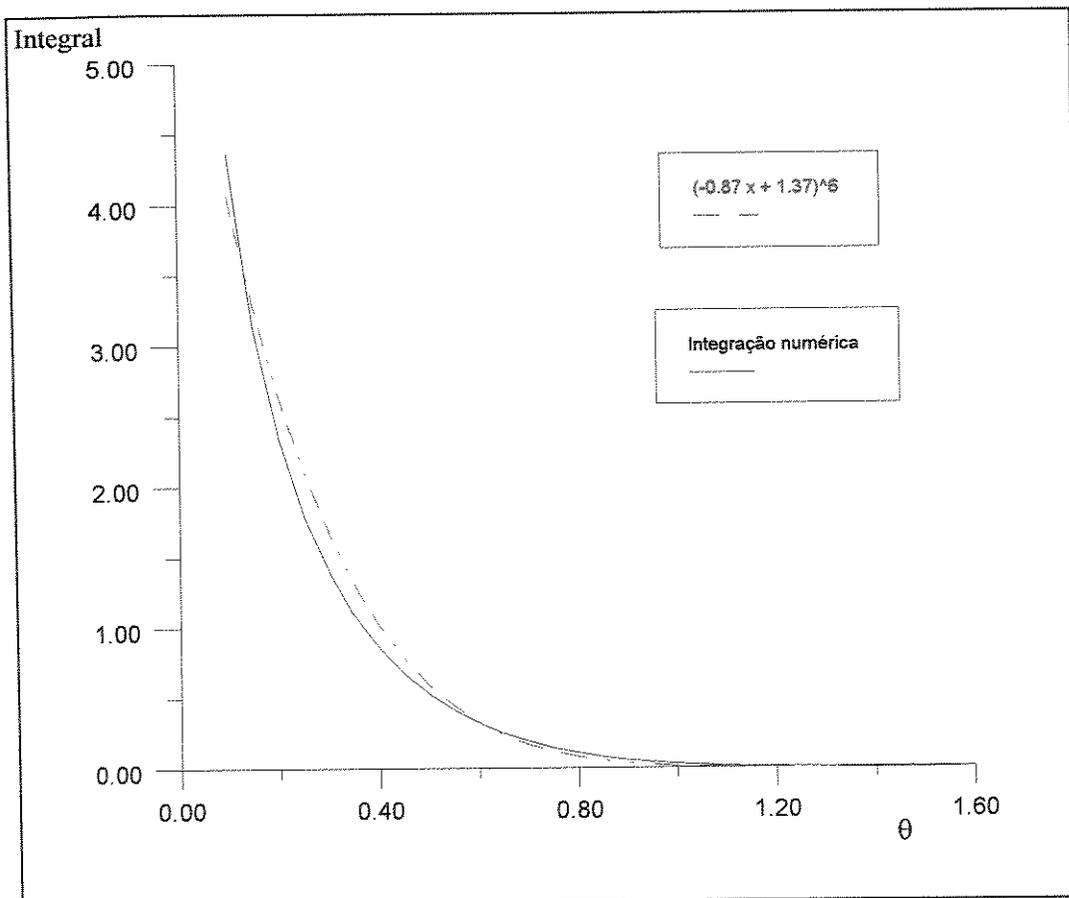


Figura 3.3 - Solução Numérica da Equação 3.35

Utilizando o método dos quadrados mínimos, a solução numérica da Equação 3.35 pode ser aproximada pela função $(-0,87\theta + 1,37)^6$, conforme mostrado na Figura 3.3.

Substituindo a aproximação numérica na Equação 3.35, tem-se :

$$(-0,87\theta + 1,37)^6 = \frac{134q\mu}{h_R^4\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (L-x) \quad (3.36)$$

E substituindo o valor de θ , na Equação 3.36 :

$$\left[-0,87\left(\frac{\pi|\Delta p_2|}{2\Delta\sigma}\right) + 1,37\right]^6 = \frac{134q\mu}{h_R^4\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (L-x)$$

$$-1,37\frac{|\Delta p_2|}{\Delta\sigma} + 1,37 = \left[\frac{134q\mu L}{h_R^4\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (1-f_l)\right]^{1/6}$$

onde, $f_l = x/L$ é o comprimento adimensional, sendo L o comprimento total da fratura.

$$|\Delta p_2| = \Delta\sigma - 1,58\Delta\sigma \left[\frac{q\mu L}{h_R^4\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (1-f_l)\right]^{1/6}$$

Como visto no Capítulo 2, o modelo baseia-se na hipótese de que $\Delta p_2 < 0$, para que haja contenção ao crescimento vertical da fratura. Desta forma :

$$\Delta p_2 = -\Delta\sigma + 1,58 \left[\frac{q\mu L\Delta\sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (1-f_l)\right]^{1/6} \quad (3.37)$$

Lembrando que $\Delta p_1 = \Delta p_2 + \Delta\sigma$, tem-se, a partir da Equação 3.37 :

$$\Delta p_1 = 1,58 \left[\frac{q\mu L\Delta\sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 (1-f_l)\right]^{1/6} \quad (3.38)$$

A Figura 3.4 mostra uma curva de distribuição de pressão (Δp_1) no interior de uma fratura, a partir da Equação 3.38, atribuindo-se valores para a vazão de tratamento (em barris por minuto), viscosidade do fluido, altura e propriedades mecânicas da rocha reservatório.

Observando a figura, pode-se notar que existe uma região próxima à extremidade da fratura, onde ocorre uma queda brusca de pressão, enquanto que para regiões mais distantes da ponta a perda de carga é bastante atenuada.

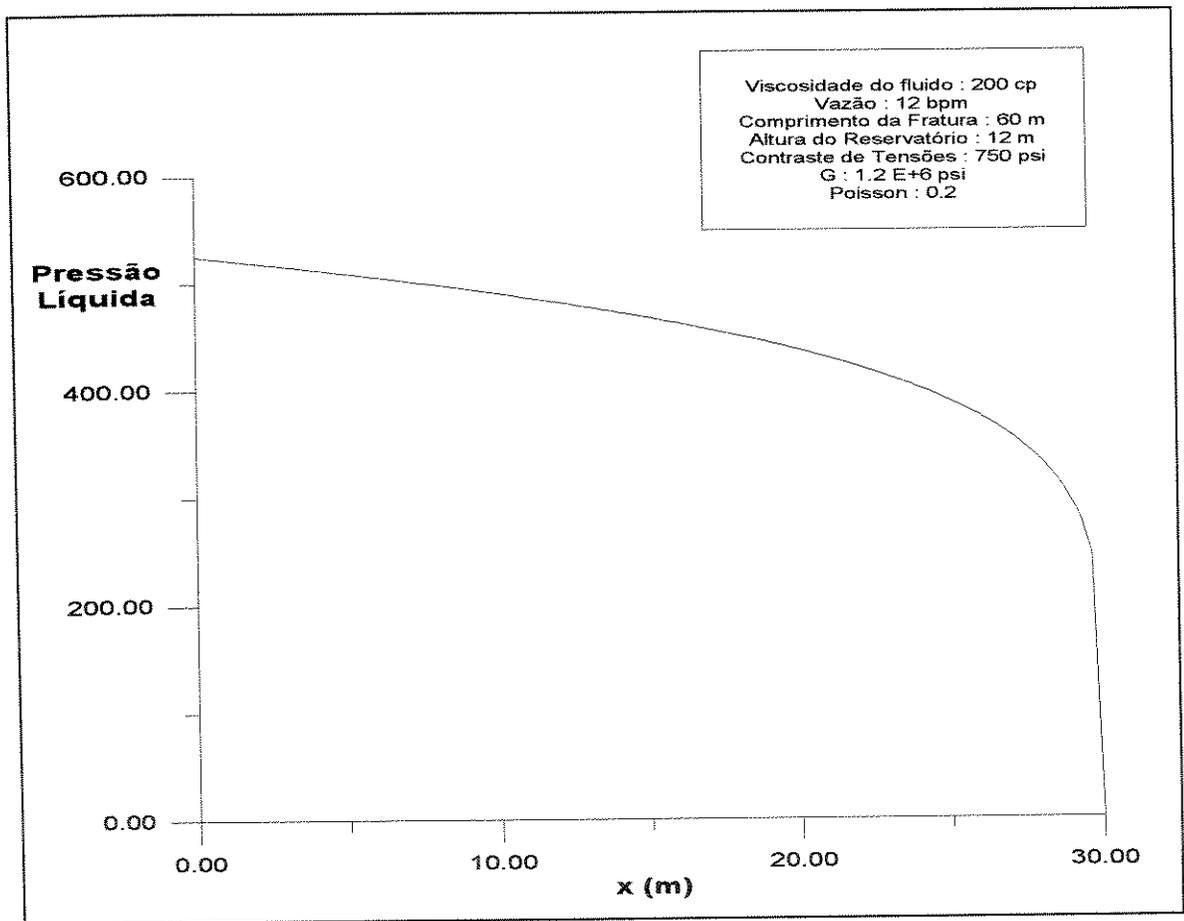


Figura 3.4 - Perfil de distribuição de pressão da fratura

3.4 Cálculo do Volume de uma Asa da Fratura

A partir da distribuição de pressão no interior da fratura, pode-se determinar a geometria das seções verticais longitudinais da fratura (ao longo da direção de propagação).

Da Equação 2.17, tem-se :

$$h = \frac{h_R}{f_R} = \frac{h_R}{1,136 \left(\frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} \right)^{3/4}} \quad (3.39)$$

Substituindo a Equação 3.37 na Equação 3.39 :

$$h = 0,88 h_R \left\{ 1 - 1,58 \left[\frac{q \mu L}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1 - \nu} \right)^3 (1 - f_l) \right]^{1/6} \right\}^{-3/4} \quad (3.40)$$

A Figura 3.5 mostra um perfil da altura da fratura ao longo da sua direção de propagação, para valores hipotéticos de vazão de fluxo, viscosidade de fluido, comprimento de fratura, altura e propriedades mecânicas da rocha reservatório.

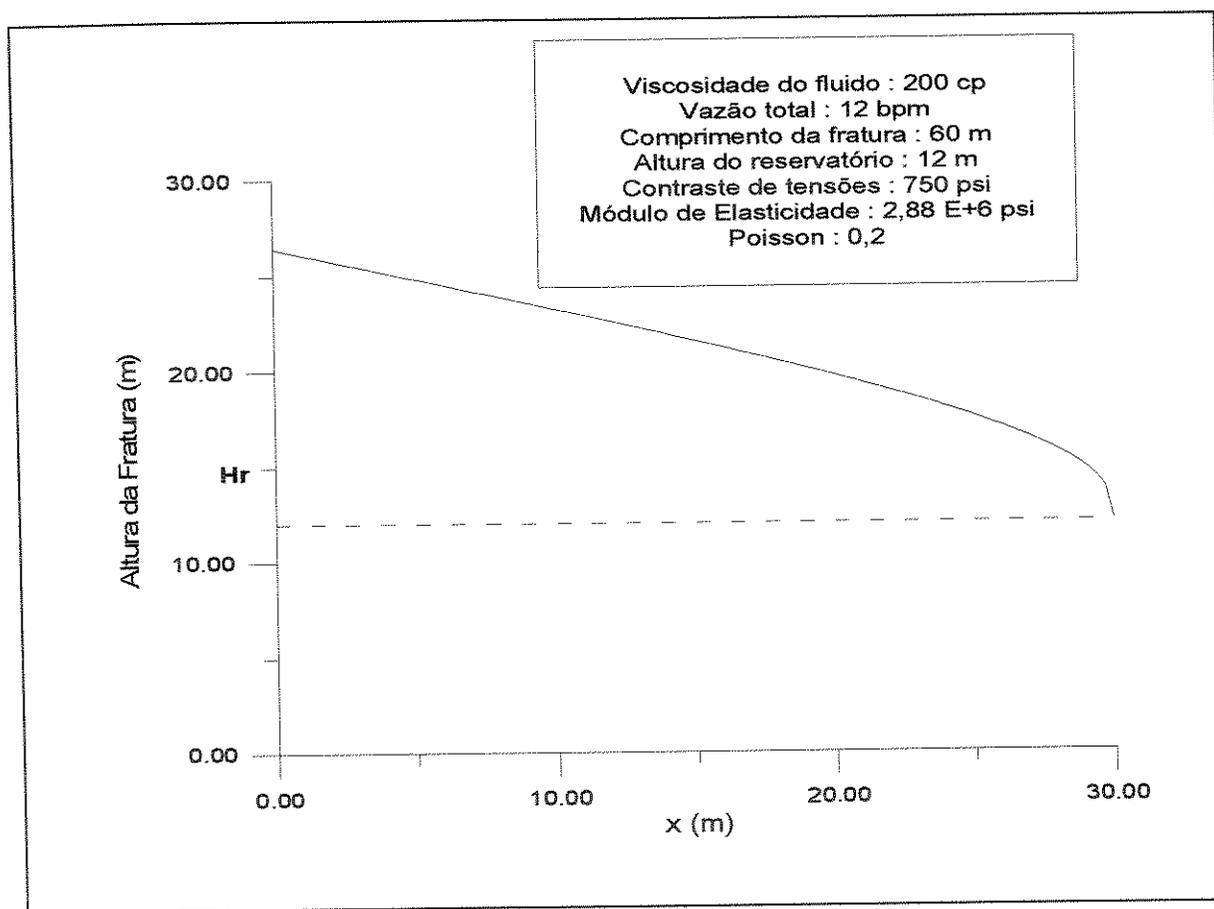


Figura 3.5 - Variação da altura da fratura ao longo da direção de propagação

A Figura 3.6 mostra um esquema representativo do perfil (seção vertical) de uma fratura propagando em uma rocha-reservatório, de acordo com a configuração mostrada pela Figura 2.4.

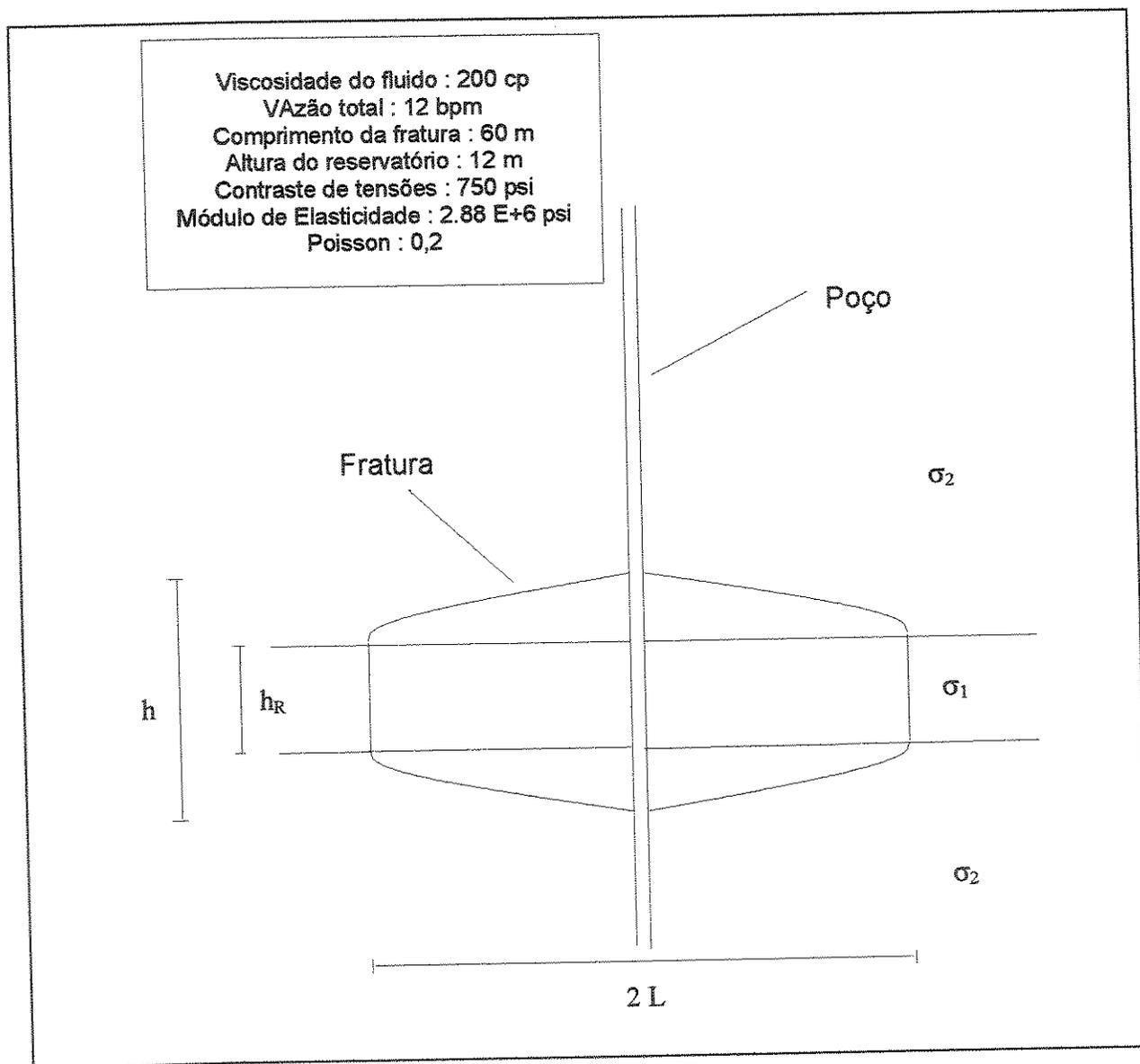


Figura 3.6 - Representação esquemática de propagação da fratura

Para descrever a geometria horizontal da fratura, basta encontrar uma equação que relacione a abertura da fratura (\bar{w}) em cada ponto da fratura, com a sua posição ao longo da direção de propagação (x).

Substituindo a Equação 3.38 na Equação 3.28 :

$$\bar{w}(f_i) = 1,29 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 (1-f_i) \right]^{1/6} \quad (3.41)$$

No ponto $f_i = 0$, a Equação 3.41 se reduz a:

$$\bar{w}(0) = 1,29 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (3.42)$$

Dividindo a Equação (3.41) pela Equação (3.42) :

$$\frac{\bar{w}(f_i)}{\bar{w}(0)} = (1-f_i)^{1/6} \quad (3.43)$$

A Equação 3.43 descreve a forma geométrica das seções horizontais da fratura; sua representação gráfica é mostrada na Figura 3.7.

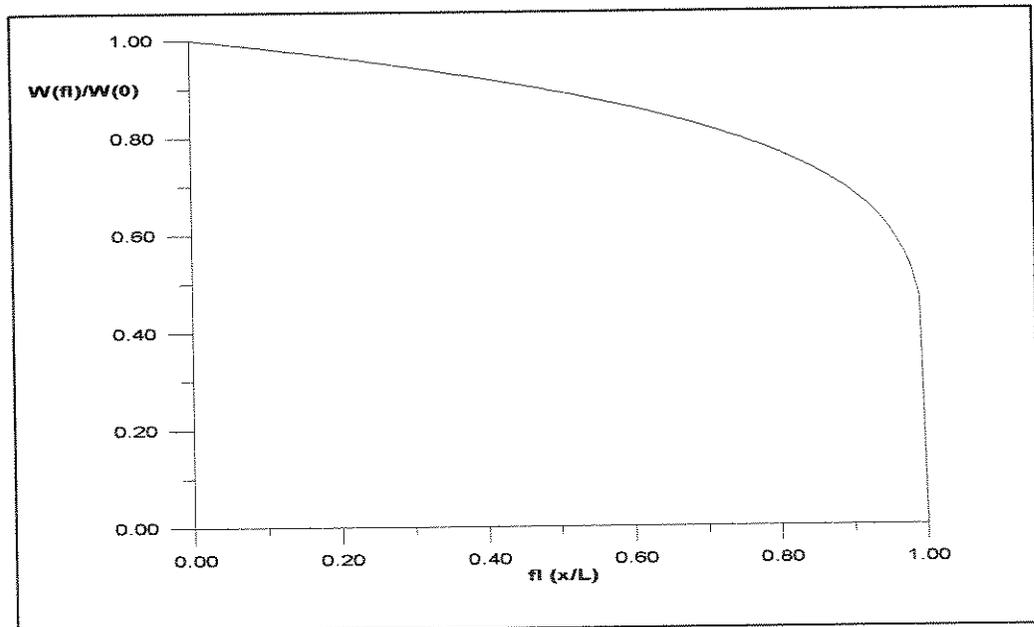


Figura 3.7 - Geometria horizontal da fratura

Para o cálculo do volume de uma asa da fratura, considera-se um elemento compreendido entre duas seções verticais de abertura média \bar{w} , altura h e espessura infinitesimal dx , de modo que : $dx = L \cdot df_i$

O volume do elemento de fratura é calculado pela expressão :

$$dV = h(f_i)\bar{w}(f_i)Ldf_i \quad (3.44)$$

A fim de simplificar o desenvolvimento analítico, define-se, a partir da Equação 3.40, um parâmetro “a”, da seguinte forma :

$$a = 1,58 \left[\frac{q\mu L}{h_R^4 \Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (3.45)$$

Assim, a Equação 3.40 pode ser escrita em função de “a” :

$$h(f_i) = 0,88h_R \left[1 - a(1-f_i)^{1/6} \right]^{3/4} \quad (3.46)$$

Similarmente, a Equação 3.41 pode ser escrita da seguinte forma :

$$\bar{w}(f_i) = 0,82.a \frac{(1-\nu)}{G} h_R \Delta\sigma (1-f_i)^{1/6} \quad (3.47)$$

Substituindo as Equações 3.46 e 3.47 na Equação 3.44, tem-se :

$$\begin{aligned} dV &= 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \Delta\sigma h_R^2 a (1-f_i)^{1/6} \left[1 - a(1-f_i)^{1/6} \right]^{3/4} df_i \\ dV &= 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \Delta\sigma h_R^2 L \left[a^{-4/3} (1-f_i)^{-2/9} - a^{-1/3} (1-f_i)^{-1/18} \right]^{3/4} df_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

O volume de uma asa de fratura é calculado pela integração da Equação 3.48, no intervalo de $x = 0$ ($f_i = 0$) a $x = L$ ($f_i = 1$) :

$$V = 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \Delta\sigma h_R^2 L \int_0^1 \left[a^{-4/3} (1-f_i)^{-2/9} - a^{-1/3} (1-f_i)^{-1/18} \right]^{3/4} df_i \quad (3.49)$$

A Equação 3.49 não admite solução analítica. Resolvendo-se numericamente a integral, para vários valores de “a”, obtém-se a curva mostrada na Figura 3.8.

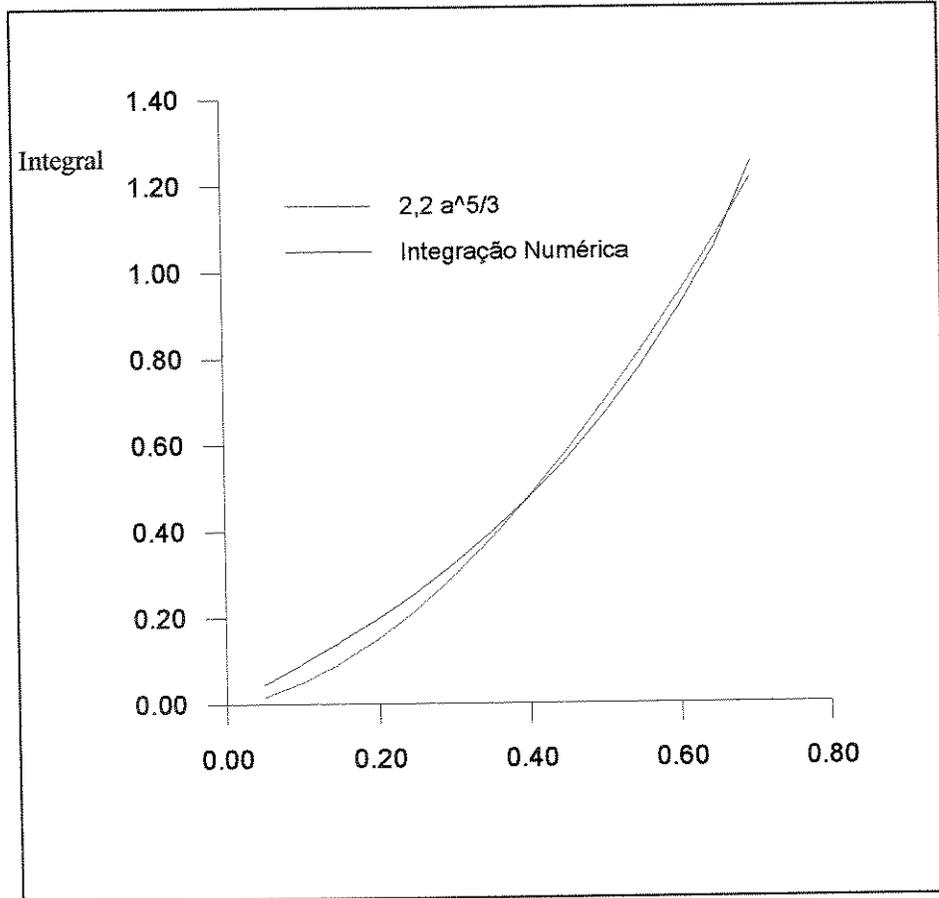


Figura 3.8 - Integração numérica da Equação 3.49

Como já discutido no Capítulo 2, a Equação 2.14 só é válida para valores negativos de Δp_2 , ou seja, para valores de Δp_1 menores que $\Delta \sigma$. Substituindo a Equação 3.45 na Equação 3.38, tem-se a seguinte relação entre Δp_1 e “a”:

$$\Delta p_1 (f_i) = \Delta \sigma \cdot a \cdot (1 - f_i)^{1/6}$$

Isto mostra que para valores de “a” próximos de 1, a hipótese de Tenacidade à Fratura desprezível, adotada pelo modelo, deixa de ser uma boa aproximação. Isto ocorre para valores muito baixos de contraste de tensões e altura do reservatório. Neste caso, para $f_i = 0$, a pressão líquida atingiria valores próximos de $\Delta \sigma$ e não haveria contenção vertical da fratura.

Para valores de “a” compreendidos entre 0,05 e 0,8, a curva resultante da integração numérica da Equação 3.49 pode ser aproximada pela equação $y = 2,2 a^{5/3}$, conforme mostrado na Figura 3.8.

Substituindo a integral da Equação 3.49 pela sua respectiva solução numérica aproximada, tem-se a seguinte expressão para o cálculo do volume de uma asa da fratura :

$$V = 1,58 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \Delta \sigma h_R^2 L a^{5/3} \quad (3.50)$$

Aplicando o valor de “a” definido pela Equação 3.45 na Equação 3.50, resulta :

$$V = 1,58 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \Delta \sigma h_R^2 L \left\{ 1,58 \left[\frac{q \mu L}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6} \right\}^{5/3}$$

$$V = 3,4 \left[\frac{h_R^{16} \mu^5 q^5 L^{23}}{\Delta \sigma^2} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/18} \quad (3.51)$$

3.5 Cálculo das Dimensões Médias da Fratura e Pressão de Propagação

De acordo com a hipótese de vazão de tratamento constante, pode-se calcular o volume de uma asa de fratura, no caso de eficiência volumétrica igual a 1, pela seguinte expressão :

$$V = q.t \quad (3.52)$$

Igualando as Equações 3.51 e 3.52 :

$$qt = 3,4 \left[\frac{h_R^{16} \mu^5 q^5 L^{23}}{\Delta \sigma^2} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/18}$$

$$L^{23/18} = \frac{qt\Delta\sigma^{2/18}}{3,4h_R^{16/18}\mu^{5/18}q^{5/18}} \left(\frac{g}{1-\nu}\right)^{3/18}$$

$$L = 0,38 \left[\frac{\Delta\sigma^2 q^{13}}{h_R^{16} \mu^5} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 \right]^{1/23} t^{18/23} \quad (3.53)$$

A Equação 3.53 calcula o comprimento de uma asa da fratura em cada instante do processo de propagação, para uma eficiência de fluxo (razão entre volume da fratura e volume total injetado) igual a 1, ou seja, sem filtração através das faces da fratura.

A pressão de propagação líquida da fratura em um ponto situado na parede do poço (Δp_{1w}), em função do tempo de tratamento, pode ser determinada fazendo-se $f_i = 0$ na Equação 3.53 e substituindo na Equação 3.38 :

$$\Delta p_{1w} = 1,35 \left[\frac{q\mu\Delta\sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 \right]^{1/6} \left[\frac{\Delta\sigma^2 q^{13}}{h_R^{16} \mu^5} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 \right]^{1/138} t^{18/138}$$

$$\Delta p_{1w} = 1,35 \left[\frac{\Delta\sigma^8 q^6 \mu^3}{h_R^{18}} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^{12} \right]^{1/23} t^{3/23} \quad (3.54)$$

A Equação 3.54 mostra que a pressão de propagação do modelo é crescente com o tempo. Sua representação em um gráfico log-log resultaria em uma reta com declividade igual a 3/23.

A Figura 3.9 mostra a representação gráfica da Equação 3.54. Para traçar a curva foram utilizados valores de Coeficiente de Poisson de 0,2 ; altura do reservatório igual a 12 m , Módulo de Elasticidade igual a 5×10^6 psi ($3,45 \times 10^4$ MPa), contraste de tensões de 750 psi, viscosidade do fluido fraturante igual a 200 cp e vazão total igual a 12 bpm ($0,0318 \text{ m}^3/\text{s}$).

O volume injetado na fratura, obviamente, é diretamente proporcional ao tempo, uma vez que a vazão é constante e igual a 6 bpm ($0,0159 \text{ m}^3/\text{s}$) em cada asa da fratura.

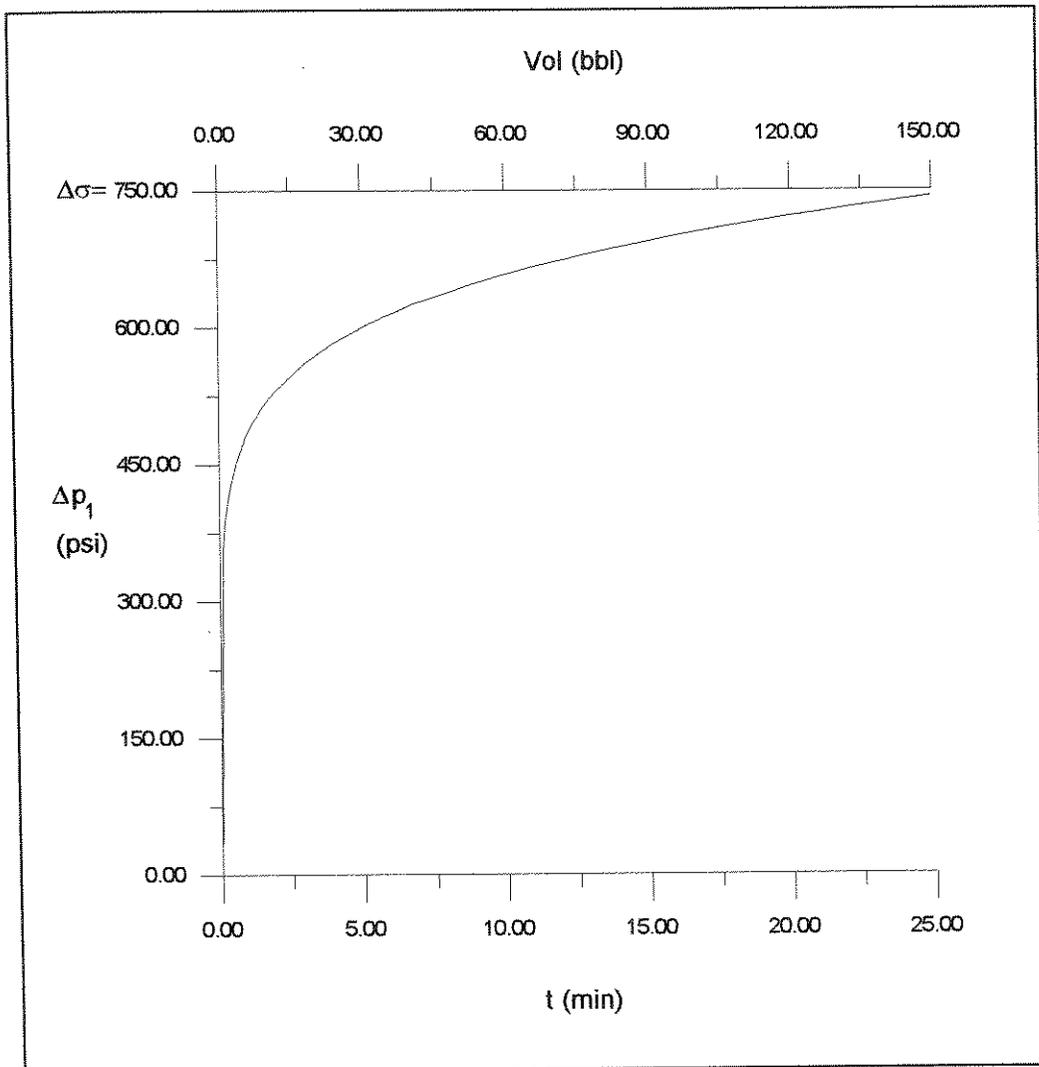


Figura 3.9 - Comportamento da pressão em função do tempo e do volume bombeado

A abertura média da fratura pode ser calculada determinando-se o ponto médio da Equação 3.41, que calcula as aberturas das seções verticais, no intervalo $f_i = 0$ a $f_i = 1$.

Desta forma, tem-se :

$$w_{eq} = 1,29 \int_0^1 \left[q \mu L h_R^2 \Delta \sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 (1-f_i) \right]^{1/6} df_i \quad (3.55)$$

Onde :

Onde :

$$\int_0^1 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 (1-f_l) \right]^{1/6} df_l = -\frac{6}{7} \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \left[(1-f_l)^{7/6} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 (1-f_l) \right]^{1/6} df_l = 0,86 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6}$$

Então :

$$w_{eq} = 1,11 \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (3.56)$$

A Equação 3.56 calcula a abertura média ou equivalente da fratura durante o processo de propagação, para um dado valor do seu comprimento.

Conhecendo-se as dimensões médias da fratura e o seu comprimento (de uma asa), pode-se determinar o volume de uma asa pela seguinte equação :

$$V = w_{eq} \cdot L \cdot \bar{h} \quad (3.57)$$

A altura média da fratura pode ser obtida igualando-se as Equações 3.51 e 3.57.

$$V = 3,4 \left[\frac{h_R^{16} \mu^5 q^5 L^{23}}{\Delta\sigma^2} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/18} = W_{eq} L \bar{h}$$

$$\bar{h} = \frac{3,4}{W_{eq} L} \left[\frac{h_R^{16} \mu^5 q^5 L^{23}}{\Delta\sigma^2} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/18}$$

Substituindo o valor de W_{eq} pela Equação 3.56, tem-se :

$$\bar{h} = \frac{3,4}{1,11L} \left[\frac{h_R^{16} \mu^5 q^5 L^{23}}{\Delta\sigma^2} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/18} \left[q\mu L h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{-1/6}$$

$$\bar{h} = 3,07 \left[\frac{q\mu L h_R^5}{\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/9} \quad (3.58)$$

As equações desenvolvidas neste capítulo definem a geometria e o comportamento da pressão de propagação com o tempo, do modelo pseudo-tridimensional objeto deste estudo. Foi considerada eficiência volumétrica igual a 100 % e utilizada reologia newtoniana para o fluido fraturante. Nos próximos capítulos são desenvolvidas equações para determinação da geometria e pressão de propagação da fratura para diferentes valores de eficiência volumétrica e modelo reológico não newtoniano para o fluido de fraturamento.

Capítulo 4

Efeito da Filtração na Geometria da Fratura

No capítulo anterior foram desenvolvidas equações que descrevem a geometria da fratura durante o processo de propagação, bem como o comportamento da pressão de fluido no interior da fratura. O desenvolvimento matemático foi baseado na premissa de que todo o fluido injetado na fratura flui no sentido de propagação, não havendo, portanto, filtração através das faces da fratura, caracterizando um processo de eficiência igual a 100%. Matematicamente, isto pode ser expresso pela condição $q(x) = q$, constante em toda a extensão da fratura.

Neste capítulo é feito o desenvolvimento de equações que descrevam a geometria da fratura, no caso de propagação com eficiência de fluxo menor que 100%, ou seja, levando em consideração a filtração de fluido pelas paredes da fratura. Neste caso, a vazão de fluido no interior da fratura varia em cada ponto.

O primeiro modelo para estudar o efeito da filtração na geometria de uma fratura induzida hidraulicamente foi desenvolvido por Carter (1957). Nesse modelo, a fratura apresentava uma geometria de paralelepípedo, com altura e abertura constantes, de forma que toda a variação do volume da fratura era refletida apenas no aumento do seu comprimento.

O Apêndice 1 apresenta todo o desenvolvimento matemático do Modelo de Carter, bem como o esquema de geometria da fratura resultante.

4.1 Distribuição de Vazão ao Longo da Fratura

O problema básico para determinação da eficiência volumétrica de um fluxo no interior de uma fratura em propagação consiste em se determinar uma função que expresse a distribuição de vazão ao longo da direção do fluxo. Segundo Geertsma (1989), a distribuição de velocidade do fluido no interior de uma fratura pode ser determinada em função de um parâmetro adimensional A_f , onde :

$$A_f = \frac{\bar{h}LC_L^2}{q_0 w_{eq}} \quad (4.1)$$

Sendo \bar{h} , L e w_{eq} a altura média, comprimento de uma asa e abertura média da fratura, respectivamente, C_L é o coeficiente global de filtração e q_0 é a vazão no poço ($x=0$).

A Figura 4.1 mostra a distribuição de vazão no interior de uma fratura, representada por duas placas planas paralelas, em função do parâmetro A_f .

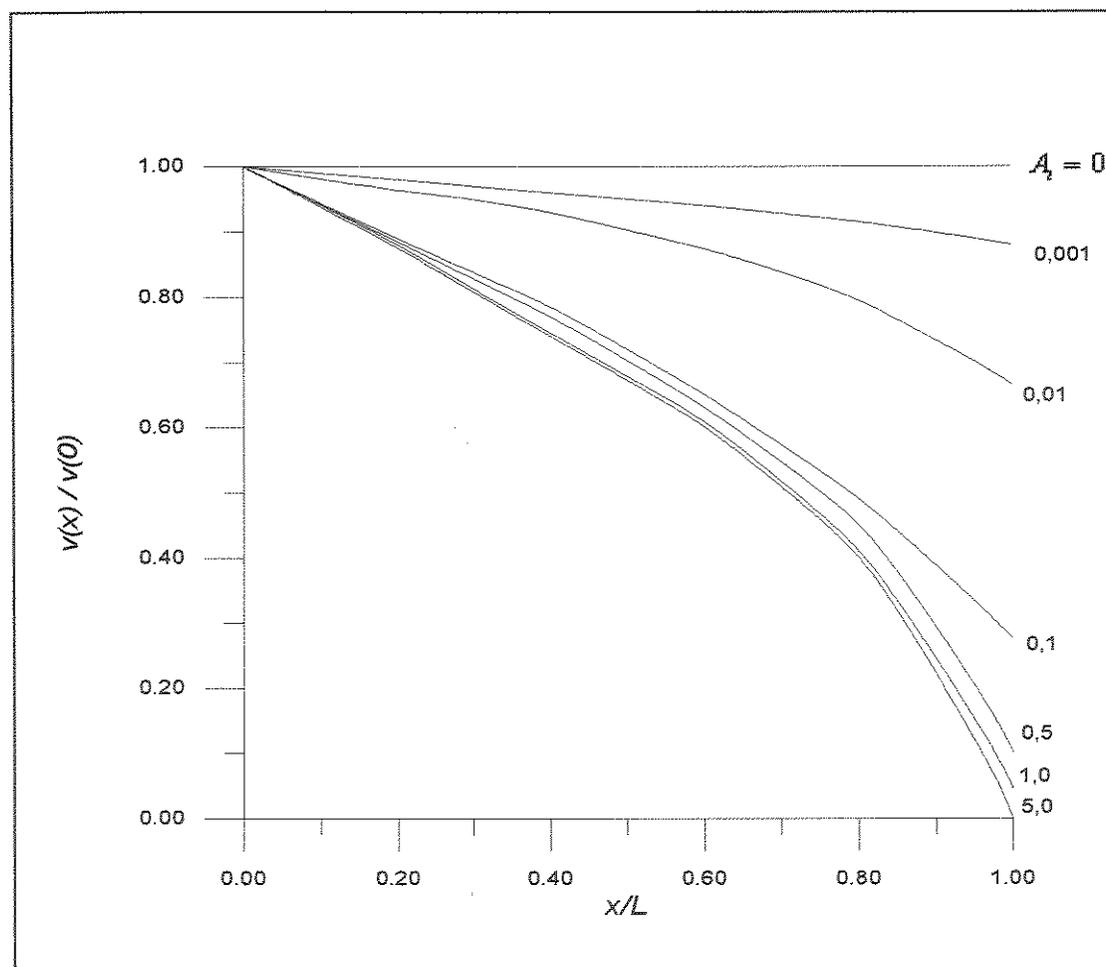


Figura 4.1 - Distribuição de vazão para um fluxo com filtração entre placas planas paralelas

Utilizando o parâmetro α definido no modelo de Carter (Apêndice 1) :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\pi}C_L}{w_{eq}}\sqrt{t} \quad (4.2)$$

Ou, explicitando o Coeficiente Global de Filtração :

$$C_L = \frac{w_{eq}\alpha}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \quad (4.3)$$

Combinando as Equações 4.1 e 4.3, pode-se escrever :

$$A_l = \frac{\bar{h}LC_L^2}{q_0w_{eq}} = \frac{\bar{h}L}{q_0w_{eq}} \frac{w_{eq}^2\alpha^2}{4\pi t} = \frac{V\alpha^2}{4\pi q_0 t} \quad (4.4)$$

Onde o produto $q_0.t$ representa o volume de fluido injetado em uma asa da fratura até o instante de propagação considerado. Definindo a Eficiência Volumétrica (η) do tratamento como sendo a relação entre o volume da fratura (V) e o volume injetado (V_i), a Equação 4.4 pode ser escrita da seguinte forma :

$$A_l = \frac{V\alpha^2}{4\pi V_i} = \eta \frac{\alpha^2}{4\pi} \quad (4.5)$$

Conforme mostrado por Geertsma (1989), para valores de A_l maiores que 1, a distribuição de vazão na fratura é descrita pela seguinte expressão :

$$\frac{q(x)}{q_0} = \frac{v(x)}{v(0)} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsen f_l \quad (4.6)$$

Generalizando a Equação 4.6, de modo a representar uma faixa mais ampla de valores do parâmetro A_l , conforme as curvas apresentadas na Figura 4.1, pode-se fazer, com boa precisão, a seguinte aproximação numérica, utilizando o método dos mínimos quadrados :

$$\frac{q(x)}{q_0} = 1 - a_1 \cdot \arcsen f_1 \quad (4.7)$$

onde, $a_1 = 0,08 \ln A_1 + 0,63$

Para efeitos práticos, pode-se admitir, para o desenvolvimento do modelo, que o fluido fraturante utilizado tenha uma eficiência volumétrica entre 0,40 e 0,90 . Para este intervalo de eficiência, de acordo com a tabela do Apêndice 2, extraída de Geertsma (1989), tem-se o seguinte intervalo para o parâmetro α : $0,14 \leq \alpha \leq 1,20$.

A partir da Equação 4.5, pode-se escrever, para o intervalo de fluidos utilizados no presente modelo : $0,0014 \leq A_1 \leq 0,06$.

Feitas as considerações acima, pode-se, então, calcular um valor médio para o parâmetro a_1 , de forma a representar o intervalo de fluidos considerado pelo modelo.

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{0,06} \int_{0,0014}^{0,06} [0,08 \ln(A_1) + 0,63] dA_1$$

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{0,06} [0,08 A_1 \ln(A_1) - 0,08 A_1 + 0,63 A_1]_{0,0014}^{0,06}$$

$$\bar{a}_1 = 0,325$$

Então, para fluidos fraturantes de eficiência volumétrica situada entre 40% e 90%, pode-se rescrever a Equação 4.7, de modo a representar uma distribuição média de vazão no interior da fratura :

$$q(x) = q_0 (1 - 0,325 \cdot \arcsen f_1) \quad (4.8)$$

A partir da Equação 4.8, pode-se, agora, calcular a vazão média no interior da fratura.

$$\bar{q} = \int_0^1 q_0 (1 - 0,325 \arcsen f_i) df_i$$

$$\bar{q} = q_0 \left[f_i - 0,325 \left(f_i \arcsen f_i + \sqrt{1 - f_i^2} \right) \right]_0^1$$

$$\bar{q} = 0,814 q_0 \quad (4.9)$$

4.2 Determinação da Pressão Líquida no Interior da Fratura

Pode-se, agora, determinar a distribuição de pressão no interior da fratura levando-se em conta a variação de vazão devido à filtração, diferentemente do que foi desenvolvido no Capítulo 3, onde a eficiência de fluxo foi considerada igual a 1. A partir da Equação 3.36, pode-se escrever :

$$\left(-1,37 \frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} + 1,37 \right)^6 = \int_{f_i}^1 \frac{134 L \mu \left(\frac{G}{1 - \nu} \right)^3}{h_R^4 \Delta \sigma^4} q(f_i) df_i \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação 4.8 na Equação 4.10 :

$$\left(-1,37 \frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} + 1,37 \right)^6 = \frac{134 L \mu \left(\frac{G}{1 - \nu} \right)^3}{h_R^4 \Delta \sigma^4} q_0 \int_{f_i}^1 (1 - 0,325 \arcsen f_i) df_i \quad (4.11)$$

Onde :

$$\int_{f_i}^1 (1 - 0,325 \arcsen f_i) df_i = \left[f_i - 0,325 \left(f_i \arcsen f_i + \sqrt{1 - f_i^2} \right) \right]_{f_i}^1$$

$$\int_{f_i}^1 (1 - 0,325 \arcsen f_i) df_i = 0,489 - f_i + 0,325 \left(f_i \arcsen f_i + \sqrt{1 - f_i^2} \right) \quad (4.12)$$

Substituindo 4.12 em 4.11 :

$$\left(-1,37 \frac{|\Delta p_2|}{\Delta \sigma} + 1,37\right)^6 = \frac{134L\mu}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 q_0 \left[0,489 - f_i + 0,325(f_i \arcsen f_i + \sqrt{1-f_i^2})\right]$$

$$\Delta p_2 = -\Delta \sigma + 0,7\Delta \sigma \left[\frac{134L\mu}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 q_0 (0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1-f_i^2})\right]^{1/6}$$

$$\Delta p_2 = -\Delta \sigma + 1,58 \left[\frac{L\mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 q_0 (0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1-f_i^2})\right]^{1/6}$$
(4.13)

Lembrando que $\Delta p_1 = \Delta p_2 + \Delta \sigma$:

$$\Delta p_1 = 1,58 \left[\frac{L\mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 q_0 (0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1-f_i^2})\right]^{1/6}$$
(4.14)

No poço ($f_i = 0$), tem-se :

$$\Delta p_1(0) = \Delta p_{1w} = 1,54 \left[\frac{L\mu q_0 \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3\right]^{1/6}$$
(4.15)

A pressão líquida média no interior da fratura é :

$$\overline{\Delta p_1} = 1,58 \int_{f_l}^1 \left[\frac{L\mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 q_0 (0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1-f_i^2})\right]^{1/6} df_i$$

$$\overline{\Delta p_1} = 1,28 \left[\frac{Lq_0 \mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3\right]^{1/6}$$
(4.16)

Dividindo-se a Equação 4.14 pela Equação 4.15 , tem-se :

$$\frac{\Delta p_1(f_i)}{\Delta p_1(0)} = \left(0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1 - f_i^2}\right)^{1/6} \quad (4.17)$$

A Equação 4.17 representa a forma da curva de distribuição de pressão líquida no interior da fratura, adimensionalizada pela pressão no poço (x=0).

A Figura 4.2 mostra uma curva de distribuição de pressão numa fratura que se propaga com vazão variável devido à filtração pelas suas faces. Os dados utilizados, para fins de comparação, foram os mesmos da Figura 3.4.

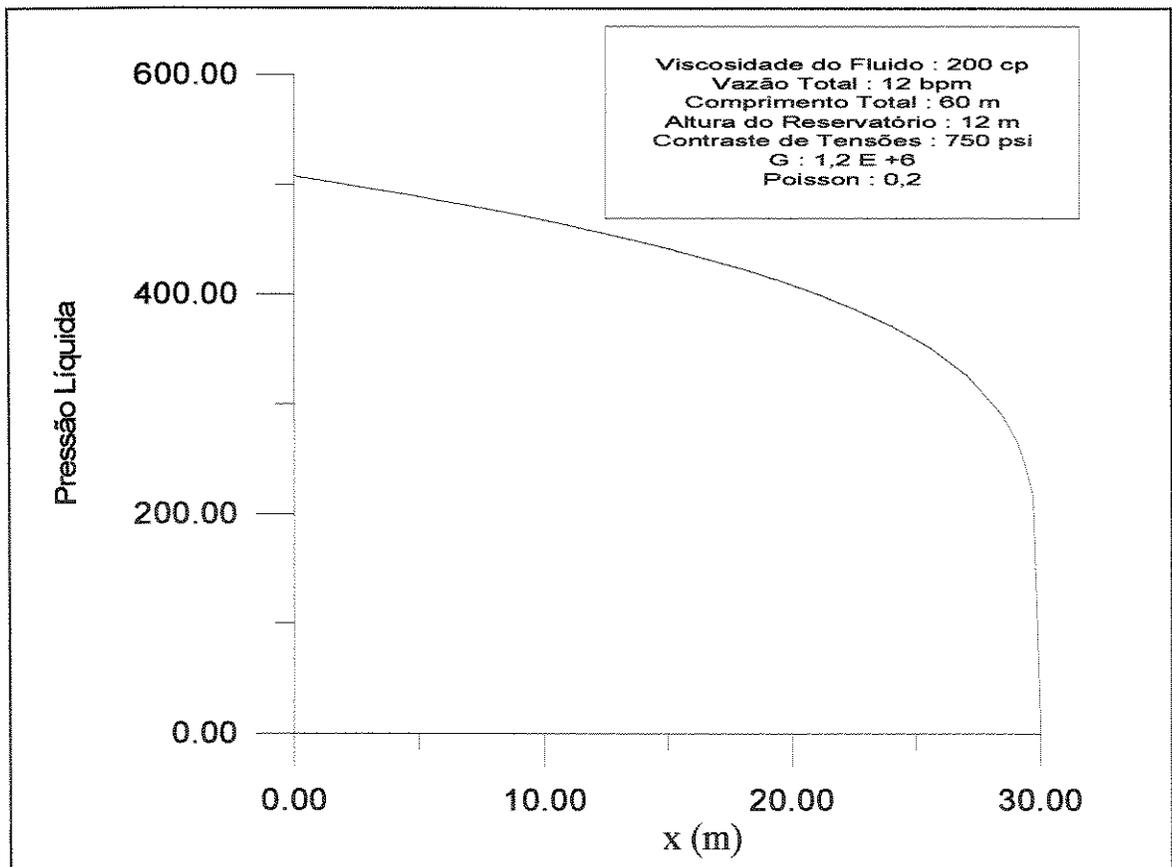


Figura 4.2 - Distribuição de pressão na fratura com ocorrência de filtração

A Figura 4.3 mostra uma comparação entre as distribuições de pressão em uma fratura que se propaga sem filtração (eficiência igual a 1) e outra que se propaga com perda de fluido

por filtração. Os valores de viscosidade do fluido, vazão, comprimento de fratura e propriedades do reservatório são os mesmos da Figura 4.2.

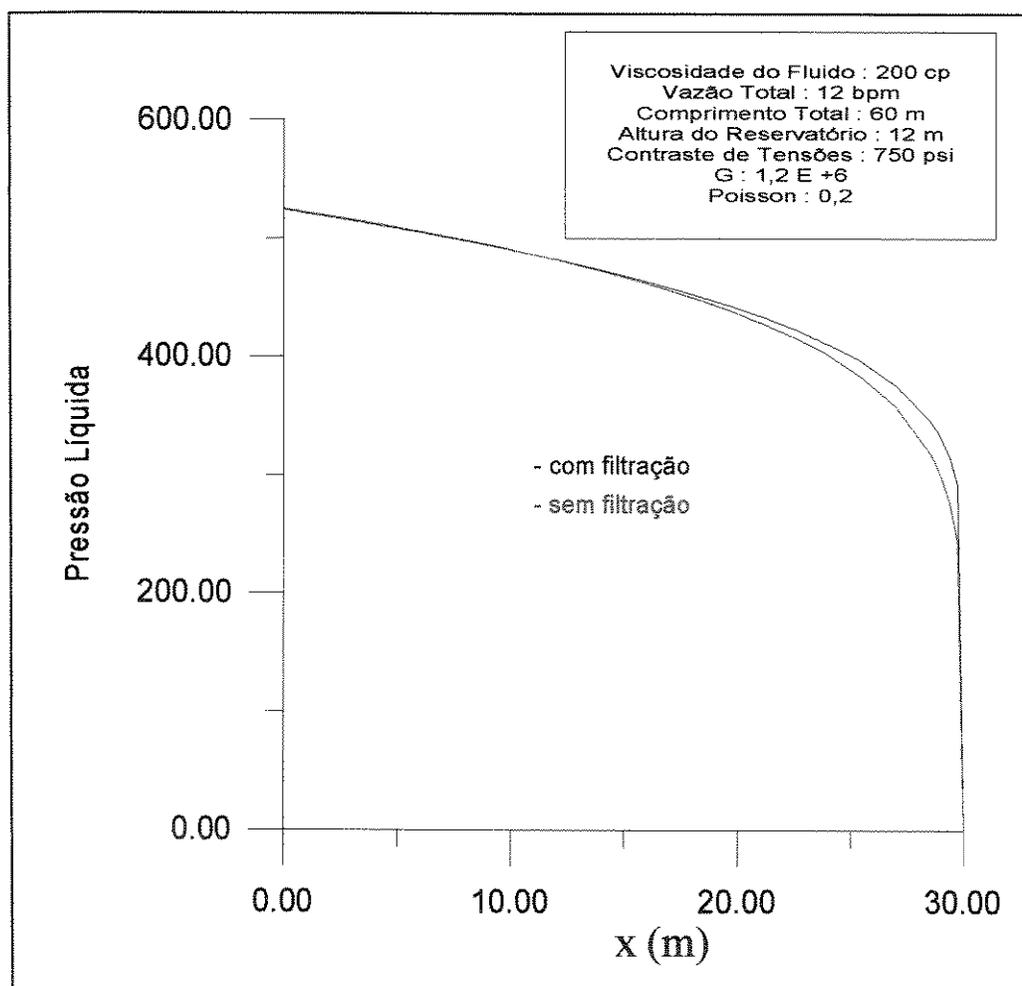


Figura 4.3 - Perfil comparativo de distribuição de pressão com e sem filtração de fluido

4.3 Cálculo do Volume e Dimensões Médias da Fratura

Conhecendo-se, agora, a distribuição de pressão no interior da fratura, considerando a perda de fluido por filtração, pode-se, então, determinar a geometria das seções horizontais da fratura.

Substituindo a Equação 4.14 na Equação 3.28, tem-se :

$$\bar{w}(f_l) = 1,29 \left[\mu L h_R^2 \Delta \sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 q_0 \left(0,489 - f_l + 0,325 f_l \arcsen f_l + 0,325 \sqrt{1-f_l^2} \right) \right]^{1/6} \quad (4.18)$$

Comparando as Equações 4.18 e 4.17, pode-se observar que a geometria das seções horizontais da fratura, representada por uma curva de abertura versus distância (x ou f_l) ao poço, tem aspecto semelhante ao da curva de distribuição de pressão ao longo da fratura, mostrada na Figura 4.2.

Pode-se, mais uma vez, utilizar a variável auxiliar “a”, definida na Equação 3.45, substituindo a vazão constante (q) pela vazão no poço (q_0) correspondente a uma asa :

$$a = 1,58 \left[\frac{q_0 \mu L}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (4.19)$$

Desta forma, a Equação 4.18 pode ser reescrita :

$$\bar{w}(f_l) = 0,82 a \left(\frac{1-\nu}{G} \right) h_R \Delta \sigma \left(0,489 - f_l + 0,325 f_l \arcsen f_l + 0,325 \sqrt{1-f_l^2} \right)^{1/6} \quad (4.20)$$

A abertura média ou equivalente da fratura pode ser calculada a partir da Equação 4.18 :

$$w_{eq} = 1,29 \left[\mu L q_0 h_R^2 \Delta \sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \int_0^1 \left(0,489 - f_l + 0,325 f_l \arcsen f_l + 0,325 \sqrt{1-f_l^2} \right)^{1/6} df_l$$

$$\text{Onde,} \quad \int_0^1 \left(0,489 - f_l + 0,325 f_l \arcsen f_l + 0,325 \sqrt{1-f_l^2} \right)^{1/6} df_l = 0,81$$

$$\text{Logo,} \quad w_{eq} = 1,05 \left[\mu L q_0 h_R^2 \Delta \sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (4.21)$$

A altura da fratura em cada ponto pode ser determinada, substituindo-se a Equação 4.13 na Equação 3.39 :

$$h(f_i) = 0,88h_R \left\{ 1 - 1,58 \left[\frac{L\mu}{h_R^4 \Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 q_0 \left(0,489 - f_i + 0,325 f_i \arcsen f_i + 0,325 \sqrt{1-f_i^2} \right) \right]^{1/6} \right\}^{-3/4} \quad (4.22)$$

A Figura 4.4 mostra o perfil de alturas de duas fraturas, ao longo da direção de propagação, levando em conta a variação de vazão devido à perda de filtrado, e sem filtração. Os dados relativos à vazão de fluido, viscosidade, comprimento da fratura e propriedades da zona de interesse são os mesmos utilizados no exemplo representado na Figura 3.5.

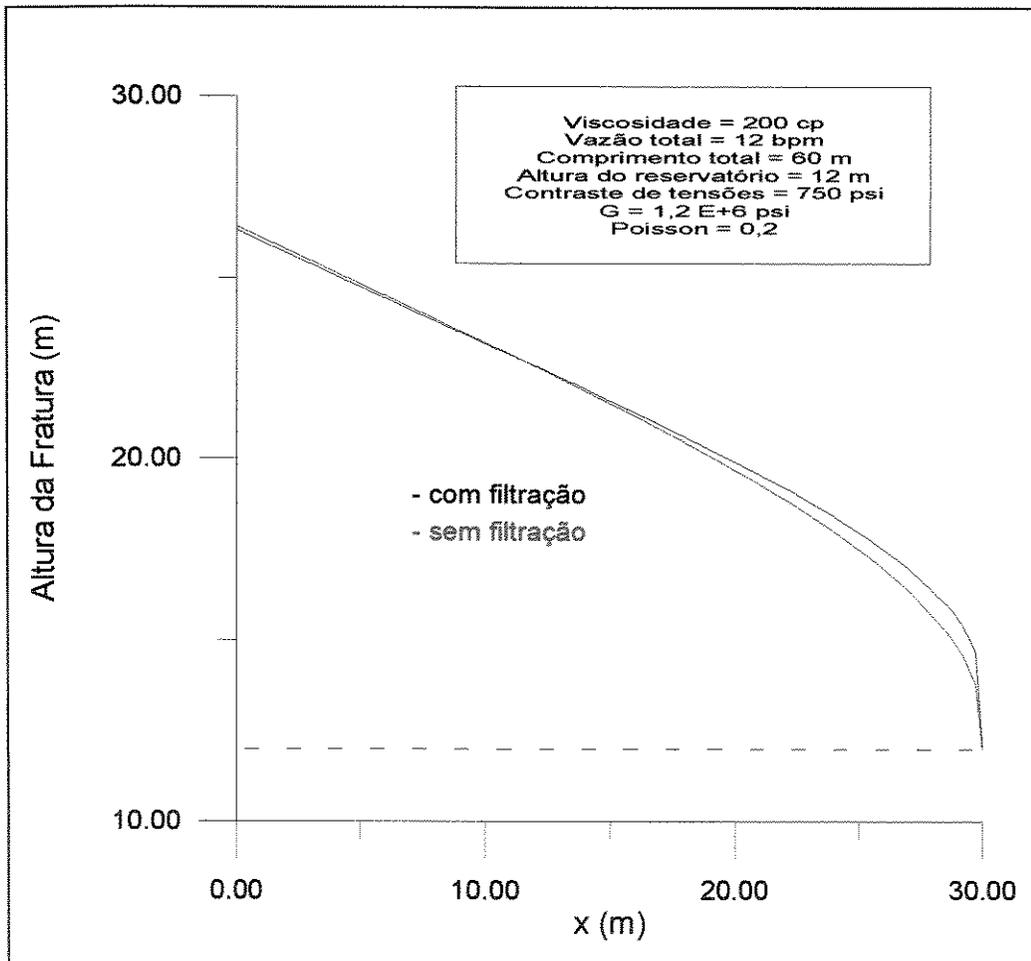


Figura 4.4 - Perfil longitudinal comparativo de fratura com e sem filtração

Da mesma forma feita com a abertura, pode-se expressar a altura da fratura em função da variável “a”, substituindo a Equação (4.19) na Equação (4.22) :

$$h(f_i) = 0,88h_R \left[1 - a \left(0,489 - f_i + 0,325f_i \arcsen f_i + 0,325\sqrt{1-f_i^2} \right)^{1/6} \right]^{-3/4} \quad (4.23)$$

Considera-se, então, um elemento infinitesimal da fratura, de dimensões \bar{w} , h e dx , sendo que $dx = L df_i$. Pode-se calcular o volume deste elemento pela seguinte expressão :

$$dV = \bar{w}(f_i).h(f_i).L.df_i \quad (4.24)$$

Substituindo as Equações 4.23 e 4.20 na Equação 4.24, tem-se :

$$\begin{aligned} dV &= 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) h_R^2 \Delta\sigma L \left[a^{-4/3} \left(0,489 - f_i + 0,325\sqrt{1-f_i^2} + 0,325f_i \arcsen f_i \right)^{-2/9} + \right. \\ &\quad \left. - a^{-1/3} \left(0,489 - f_i + 0,325\sqrt{1-f_i^2} + 0,325f_i \arcsen f_i \right)^{-1/18} \right]^{-3/4} df_i \\ V &= 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) h_R^2 \Delta\sigma L \int_0^1 \left[a^{-4/3} \left(0,489 - f_i + 0,325\sqrt{1-f_i^2} + 0,325f_i \arcsen f_i \right)^{-2/9} + \right. \\ &\quad \left. - a^{-1/3} \left(0,489 - f_i + 0,325\sqrt{1-f_i^2} + 0,325f_i \arcsen f_i \right)^{-1/18} \right]^{-3/4} df_i \quad (4.25) \end{aligned}$$

A integral da Equação 4.25 não apresenta solução analítica. Pode ser calculada, numericamente, para vários valores de "a", obtendo-se a curva mostrada na Figura 4.5.

A solução numérica da integral pode ser aproximada, pelo método dos mínimos quadrados, pela equação $y = 2.a^{8/5}$, cuja curva é representada na Figura 4.5.

Desta forma, a Equação 4.25 pode ser escrita da seguinte forma :

$$V = 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) L h_R^2 \Delta\sigma \left(2a^{8/5} \right)$$

Substituindo o valor de "a" pela Equação 4.19 :

$$V = 0,72 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) L h_R^2 \Delta\sigma \times 2 \left\{ 1,58 \left[\frac{\mu L q_0}{h_R^4 \Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6} \right\}^{8/5}$$

$$V = 3 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^{19} h_R^{14}}{\Delta \sigma} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/15} \quad (4.26)$$

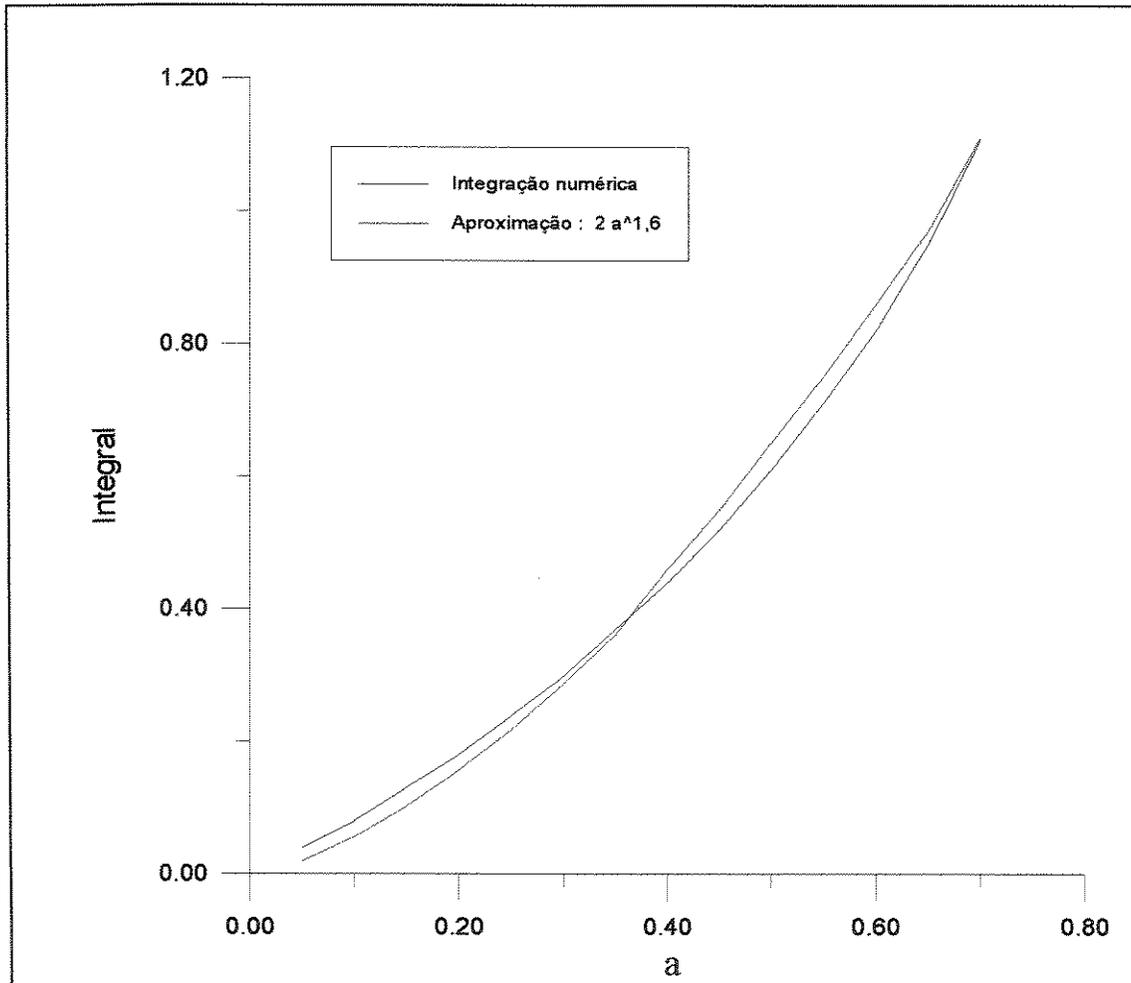


Figura 4.5 - Integração numérica da Equação 4.24

A partir das Equações 4.26 e 4.21 pode-se, agora, calcular a altura média da fratura, através da seguinte relação :

$$V = w_{eq} \bar{L} \bar{h}$$

$$\text{Então : } \bar{h} = \frac{V}{w_{eq} \bar{L}} = \frac{3 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^{19} h_R^{14}}{\Delta \sigma} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/15}}{1,05 L \left[\mu q_0 h_R^2 \Delta \sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6}}$$

$$\bar{h} = 2,86 \left[\frac{\mu^3 q_0^3 L^3 h_R^{18}}{\Delta\sigma^{12}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^9 \right]^{1/30} \quad (4.27)$$

4.4 Determinação da Eficiência Volumétrica

A Eficiência Volumétrica de um fraturamento hidráulico é definida como a razão entre o volume da fratura obtida ao final de um determinado tempo de bombeio e o volume total bombeado para propagar a fratura. É um parâmetro que quantifica as perdas de fluido ocorridas durante o bombeio, devido à filtração através das paredes permeáveis da fratura.

Fazendo um balanço de massa no interior da fratura, pode-se escrever :

$$\frac{dV}{dt} = q_0 - q_l - v_{sp} \frac{dA}{dt} \quad (4.28)$$

A Equação 4.28, traduzida fisicamente, significa que a variação do volume da fratura com o tempo é igual ao volume injetado menos a perda por filtração, onde q_l significa a vazão de filtração e v_{sp} é o volume de filtração por unidade de área antes da formação de reboco (*spurt loss*).

De acordo com a Equação de Carter (1957), tem-se :

$$q_l = C_L \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (4.29)$$

Onde,

A : área de filtração = $2 h_R L$

$$\frac{dA}{dt} = 2h_R \frac{dL}{dt} \quad (4.30)$$

$$V = w_{eq} L \bar{h}$$

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d(w_{eq} \bar{h})}{dt} + w_{eq} \bar{h} \frac{dL}{dt} = \left[L \frac{d(w_{eq} \bar{h})}{dL} + w_{eq} \bar{h} \right] \frac{dL}{dt} \quad (4.31)$$

Sendo que : $w_{eq} \bar{h} = \frac{V}{L} = 3 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^4 h_R^{14}}{\Delta \sigma} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/15}$

$$L \frac{d(w_{eq} \bar{h})}{dL} = \frac{4}{5} \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^4 h_R^{14}}{\Delta \sigma} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/15} = \frac{4}{15} w_{eq} \bar{h}$$

Logo : $L \frac{d(w_{eq} \bar{h})}{dL} + w_{eq} \bar{h} = \frac{19}{15} w_{eq} \bar{h} = 1,267 w_{eq} \bar{h}$ (4.32)

Substituindo a Equação 4.32 na Equação 4.31 :

$$\frac{dV}{dt} = \left[L \frac{d(w_{eq} \bar{h})}{dL} + w_{eq} \bar{h} \right] \frac{dL}{dt} = 1,267 w_{eq} \bar{h} \frac{dL}{dt} \quad (4.33)$$

Assim, Equação 4.28 pode ser escrita em termos de dimensões médias da fratura :

$$1,267 w_{eq} \bar{h} \frac{dL}{dt} = q_0 - 2h_R C_L \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 2h_R v_{sp} \frac{dL}{d\tau}$$

$$\left(1,267 w_{eq} \bar{h} + 2h_R v_{sp} \right) \frac{dL}{dt} = q_0 - 2h_R C_L \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\left(1,267 w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp} \right) \frac{dL}{dt} = \frac{q_0}{h_R} - 2C_L \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q_0}{h_R \left(1,267 w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp} \right)} - \frac{2C_L}{\left(1,267 w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp} \right)} \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (4.34)$$

Segundo Geertsma (1989), as variações que ocorrem na altura e abertura da fratura durante a sua propagação, para tratamentos de longa duração, são desprezíveis em relação à variação do seu comprimento. Desta forma, pode-se considerar, sem comprometer a precisão da solução da Equação 4.34, que w_{eq} e \bar{h} são constantes com o tempo, quando comparadas com a variação do comprimento (L).

Assim, tem-se, aplicando Transformadas de Laplace à Equação 4.34 :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dL}{dt}\right\} = \frac{q_0}{h_R \left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} \frac{1}{s} - \frac{2C_L}{\left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} \left(\mathcal{L}\left\{\frac{dL}{dt}\right\} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right\} \right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dL}{dt}\right\} \left[1 + \frac{2C_L}{\left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \right] = \frac{q_0}{h_R \left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} \frac{1}{s}$$

$$\left\{\frac{dL}{dt}\right\} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{q_0}{h_R \left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)}}{\sqrt{s} \left[\sqrt{s} + \frac{2C_L \sqrt{\pi}}{\left(1,267w_{eq} \frac{\bar{h}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} \right]} \right]$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q_0}{h_R \left(1,267 \frac{\bar{h} w_{eq}}{h_R} + 2v_{sp}\right)} e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 \quad (4.35)$$

onde,

$$\alpha_1 = \frac{2C_L \sqrt{\pi}}{1,267 \frac{\bar{h}}{h_R} w_{eq} + 2v_{sp}} \sqrt{t} \quad (4.36)$$

Integrando a Equação 4.35, em relação ao tempo, tem-se :

$$L(t) = \frac{q_0}{h_R \left(1,267 \frac{\bar{h} w_{eq}}{h_R} + 2v_{sp} \right)} \int_0^t e^{\alpha_1^2 t} \operatorname{erfc} \alpha_1 dt$$

$$L(t) = \frac{\left(1,267 \bar{h} w_{eq} + 2v_{sp} h_R \right) q_0}{4\pi C_L^2 h_R^2} \left(e^{\alpha_1^2 t} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right) \quad (4.37)$$

$$\text{onde, } C_L^2 = \frac{\alpha_1^2 \left(1,267 \frac{\bar{h}}{h_R} w_{eq} + 2v_{sp} \right)^2}{4\pi t} \quad (4.38)$$

Substituindo (4.38) em (4.37) :

$$L(t) = \frac{q_0 t}{1,267 \bar{h} w_{eq} + 2v_{sp} h_R} \frac{\left(e^{\alpha_1^2 t} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)}{\alpha_1^2} \quad (4.39)$$

De acordo com o modelo de Nordgren (1972), para tratamentos de longa duração, a perda instantânea (*spurt loss*) se torna desprezível em relação ao volume total bombeado. Assim, pode-se fazer a seguinte aproximação :

$$1,267 \frac{\bar{h}}{h_R} w_{eq} \gg 2v_{sp}$$

Desta forma :

$$L(t) = \frac{q_0 t}{1,267 \bar{h} w_{eq}} \frac{\left(e^{\alpha_1^2 t} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)}{\alpha_1^2}$$

Comparando a equação acima com a equação do comprimento de uma asa da fratura do modelo de Carter (Apêndice 1), pode-se escrever :

$$\eta = \frac{\left(e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)}{\alpha_1^2} \quad (4.40)$$

$$w_{ap} = 1,267 w_{eq} \quad (4.41)$$

Onde η é a eficiência de fluxo do tratamento e w_{ap} é a abertura aparente da fratura.

O comprimento de uma asa da fratura em função do tempo de propagação é, então :

$$L(t) = 0,8 \frac{q_0 t}{hw_{eq}} \frac{\left(e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)}{\alpha_1^2} \quad (4.42)$$

O termo que representa a eficiência volumétrica, na Equação 4.42, que é idêntico à expressão da eficiência volumétrica desenvolvida por Carter (1957), por ser de manipulação muito trabalhosa, foi tabelado por Marx e Langenheim (1960).

A tabela com valores de α , $(e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha)$ e $\left[e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right) - 1 \right]$ é apresentada no Apêndice 2.

A Figura 4.6 mostra a curva de $e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \left(\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right) - 1$ versus α_1 , levantada a partir de valores tabelados.

Para valores de α_1 situados entre 0,14 e 1,2 a função $y = e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \left(\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right) - 1$ pode ser aproximada, através de método numérico, pela função $y = 0,56 \alpha^{1,86}$, conforme mostrado na Figura 4.6. Esse intervalo de variação de α_1 , de acordo com o Apêndice 2 (Geertsma, 1989), inclui valores de eficiência volumétrica situados entre 0,9 e 0,4, representando a maioria dos fluidos fraturantes utilizados na prática.

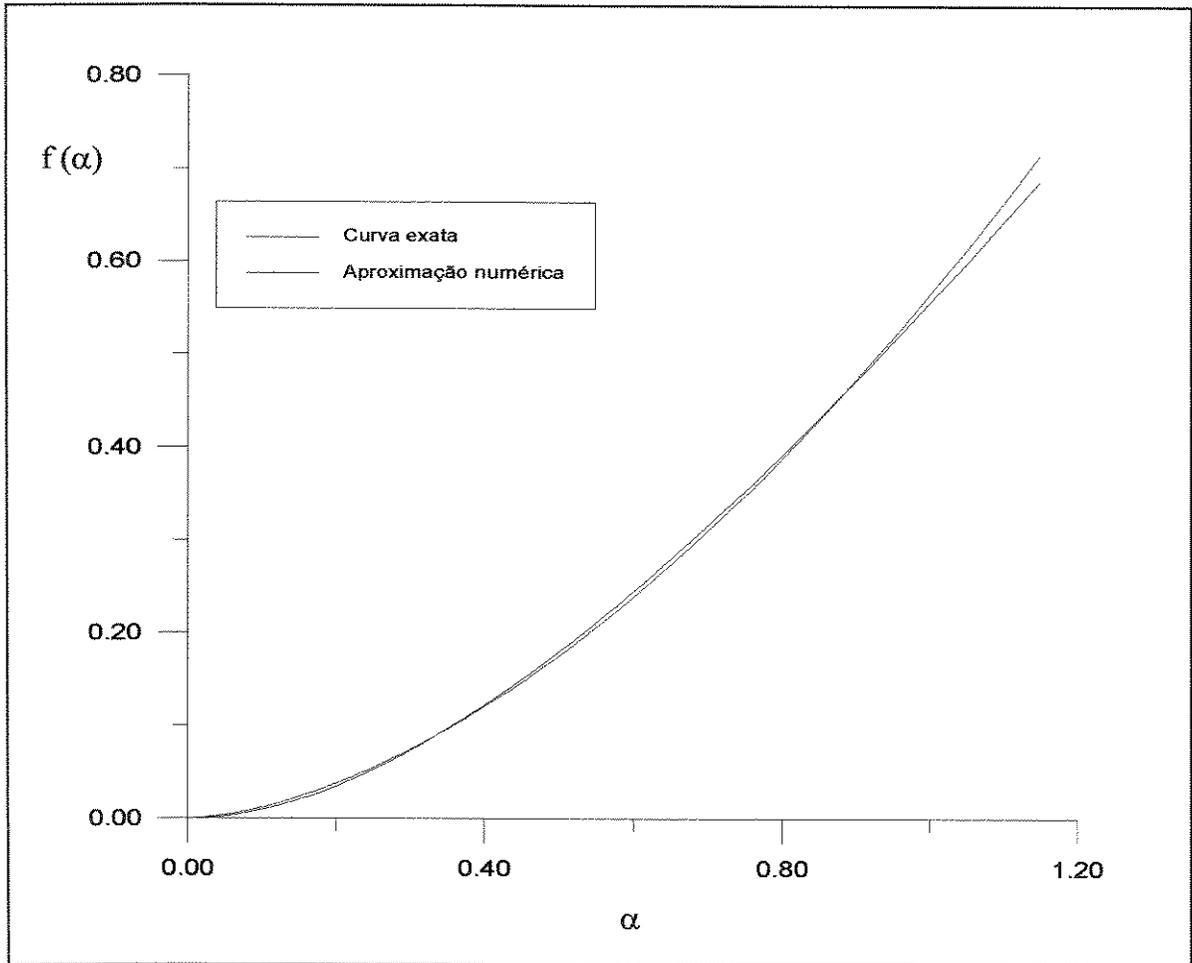


Figura 4.6 - Representação gráfica da função $y = e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \left(\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right) - 1$

Utilizando a aproximação $y = 0,56 \alpha_1^{1,86}$ na Equação 4.40, a eficiência volumétrica do tratamento pode ser expressa da seguinte forma :

$$\eta = 0,56 \alpha_1^{-0,14} \quad (4.43)$$

Substituindo a Equação 4.36 na Equação 4.43, desprezando o valor de v_{sp} , tem-se :

$$\eta = 0,56 \left[\frac{2\sqrt{\pi} h_R C_L \sqrt{t}}{1,267 w_{eq} \bar{h}} \right]^{-0,14}$$

Substituindo os valores da abertura e altura médias pelas Equações 4.21 e 4.27, respectivamente :

$$\eta = 0,57 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^4}{\Delta \sigma h_R C_L^{15}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/107} t^{-0,07} \quad (4.44)$$

4.5 Cálculo do Comprimento da Asa e Pressão de Propagação em Função do Tempo

Para o cálculo do comprimento de uma asa da fratura, pode-se rescrever a Equação 4.42 em termos da eficiência volumétrica :

$$L(t) = 0,8 \frac{q_0 t}{h w_{eq}} \frac{\left(e^{\alpha_1^2} \operatorname{erfc} \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)}{\alpha_1^2} = 0,8 \frac{q_0 t}{h w_{eq}} \eta$$

Substituindo os valores de abertura média, altura média e eficiência volumétrica definidos pelas Equações 4.21, 4.27 e 4.44, respectivamente :

$$L(t) = 0,8 \frac{q_0 t}{3 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^4 h_R^{14}}{\Delta \sigma} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/15}} \cdot 0,57 \left[\frac{\mu^4 q_0^4 L^4}{\Delta \sigma h_R C_L^{15}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/107} t^{-0,070}$$

$$L(t) = 0,21 \frac{q_0^{0,627} \Delta \sigma^{0,046}}{\mu^{0,186} h_R^{0,767} C_L^{0,114}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,140} t^{0,756} \quad (4.45)$$

A equação da pressão de propagação pode ser determinada substituindo-se a Equação 4.45 na Equação 4.15 :

$$\Delta p_1(0) = \Delta p_{1w} = 1,54 \Delta \sigma \left[\frac{\mu q_0}{h_R^4 \Delta \sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6} \left[0,21 \frac{q_0^{0,627} \Delta \sigma^{0,046}}{\mu^{0,186} h_R^{0,767} C_L^{0,114}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,14} t^{0,756} \right]^{1/6}$$

$$\Delta p_{1w} = 1,19 \frac{\Delta \sigma^{0,341} \mu^{0,136} q_0^{0,271}}{h_R^{0,795} C_L^{0,019}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,523} t^{0,126} \quad (4.46)$$

A Equação 4.46 determina o comportamento da pressão de propagação em função do tempo de propagação. Pode-se observar que a pressão de propagação do modelo é crescente ao longo do tempo de tratamento. Num gráfico log-log, a curva de pressão de bombeio versus tempo apresenta uma reta com declividade igual a 0,126.

Comparando a Equação 4.46 com a Equação 3.54, que calcula a pressão de propagação para um fluxo sem filtração, observa-se que naquele caso a pressão apresenta um crescimento mais rápido com o tempo (expoente em $t = 0,13$), ou seja, a ocorrência de filtração faz com que a pressão de propagação apresente um crescimento mais lento, além de diminuir o comprimento da fratura.

Capítulo 5

Fluidos Fraturantes com Modelo Reológico de Potência

Nos capítulos anteriores, o modelo de propagação de fratura foi desenvolvido com base na hipótese de que o fluido fraturante apresentava modelo de reologia newtoniana, onde a tensão de cisalhamento é uma função linear da taxa de deformação, cuja declividade é denominada “viscosidade absoluta” do fluido. Porém, a grande maioria dos fluidos utilizados em operações de fraturamento hidráulico apresenta um comportamento reológico que pode ser melhor representado por uma relação não linear entre tensão cisalhante e taxa de deformação. Um modelo de reologia muito utilizado na literatura para representar o comportamento dos fluidos fraturantes é o chamado modelo de potência ou “power law”, que pode ser representado pela seguinte equação :

$$\tau = k \left(-\frac{dv}{dr} \right)^{n'} \quad (5.1)$$

onde,

- τ : tensão de cisalhamento (Pa.m)
- k : índice de consistência do fluido (Pa.s^{n'})
- dv/dr : taxa de deformação (1/s)
- n' : índice de comportamento do fluido
- r : distância do ponto ao eixo do conduto (m)
- v : velocidade de fluxo (m/s)

A Figura 5.1 mostra as curvas reológicas de um fluido modelo de potência, para diferentes valores do índice de comportamento.

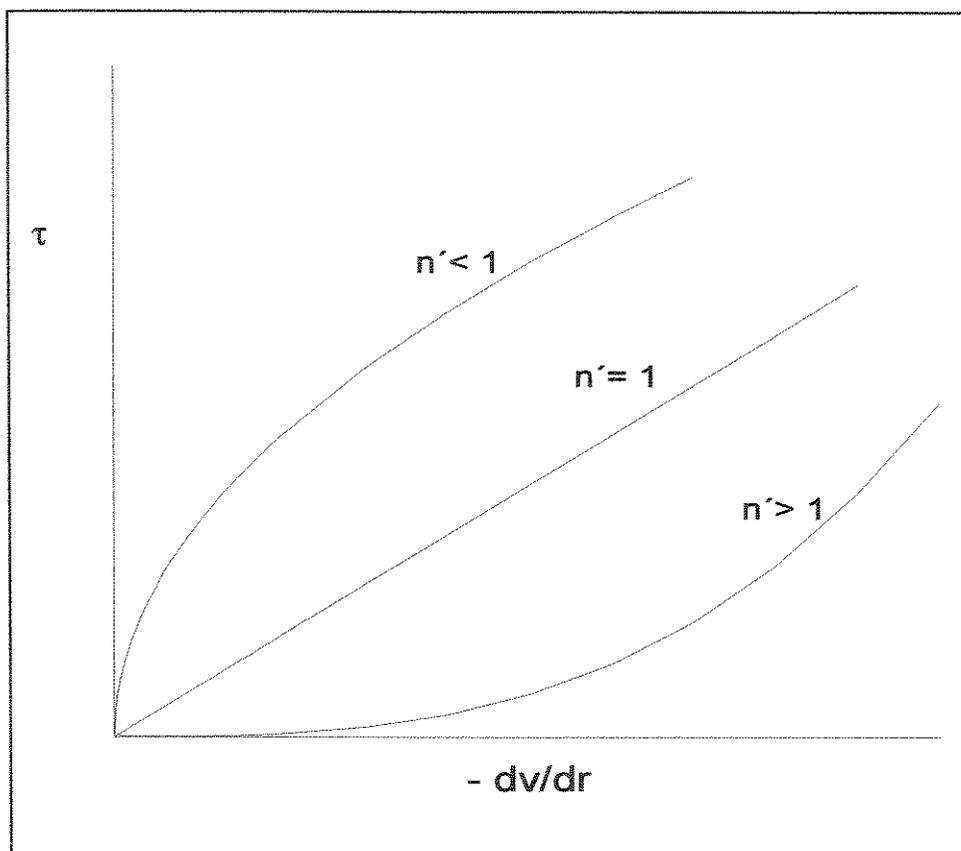


Figura 5.1 - Curvas reológicas de fluidos modelo de potência

Os fluidos de potência que apresentam índice de comportamento (n') menor do que 1 são ditos fluidos pseudo-plásticos e são os que melhor se aproximam dos fluidos gelificados utilizados nas operações de fraturamento hidráulico. Por outro lado, fluidos com o parâmetro n' maior do que 1 são chamados “dilatantes”. Quando o índice de comportamento é igual à unidade, o fluido de potência assume o caso particular do modelo newtoniano, sendo que, neste caso, o índice de consistência é igual à viscosidade absoluta. Neste trabalho serão considerados apenas os fluidos fraturantes de reologia newtoniana ou pseudo-plástica, ou seja, o índice de comportamento é sempre menor ou igual a 1.

Como visto no Capítulo 3 (Equação 3.29) a variação de pressão ao longo de um conduto representado por duas placas planas paralelas, percorrido por um fluido newtoniano, obedece à seguinte relação :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu v}{\bar{w}^2} = -\frac{12q\mu}{hw^3}$$

onde :

p = pressão de fluxo num ponto qualquer (kg/cm²)

x = coordenada na direção do fluxo (m)

μ = viscosidade absoluta ou aparente do fluido (Pa.s)

v = velocidade de fluxo (m/s)

\bar{w} = abertura média ou distância entre as placas paralelas (m)

h = altura do conduto (m)

q = vazão de fluxo (m³/s)

No caso de fluxo de um fluido de modelo reológico de potência , a distribuição de pressão entre duas placas planas, ao longo da direção de fluxo, é determinada pela seguinte equação (Perkins, 1961) :

$$\frac{dp}{dx} = -2k \left(\frac{4n'+2}{n'} \right)^{n'} \frac{v^{n'}}{w^{n'+1}} = -2k \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \left(\frac{2\bar{q}}{h} \right)^{n'} \left(\frac{1}{w} \right)^{2n'+1} \quad (5.2)$$

onde :

k = índice de consistência do fluido

n' = índice de comportamento do fluido

Igualando-se as Equações 5.2 e 3.29 e utilizando os valores médios da abertura e altura da fratura, pode-se definir uma viscosidade aparente para toda a fratura, de forma que as perdas de carga de ambos os fluxos sejam equivalentes :

$$-\frac{12\bar{q}\mu_{ap}}{hw_{eq}^3} = -2k \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \left(\frac{2\bar{q}}{h} \right)^{n'} \left(\frac{1}{w_{eq}} \right)^{2n'+1}$$

$$\mu_{ap} = \frac{1}{6} k (\bar{q})^{n'-1} (\bar{h})^{1-n'} (w_{eq})^{2-2n'} 2^{n'} \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'}$$

$$\mu_{ap} = k \left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} \left(\frac{6\bar{q}}{hw_{eq}^2} \right)^{n'-1}$$

onde,

$$k \left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} = k_a \quad (\text{Índice de Consistência Aparente})$$

$$\bar{q} = 0,814 q_0 \quad (\text{da Equação 4.9})$$

Desta forma, tem-se a seguinte equação para a viscosidade aparente :

$$\mu_{ap} = k_a \left(\frac{4,9q_0}{hw_{eq}^2} \right)^{n'-1} \quad (5.3)$$

Substituindo a altura média e a abertura média pelas Equações 4.27 e 4.21, respectivamente, na Equação 5.3, tem-se :

$$\mu_{ap} = k_a \left\{ \frac{4,9q_0}{1,1 \left[\mu_{ap} L q_0 h_R^2 \Delta\sigma \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/3} 2,86 \left[\frac{\mu_{ap}^3 q_0^3 L^3 h_R^{18}}{\Delta\sigma^{12}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^9 \right]^{1/30}} \right\}^{n'-1}$$

$$\mu_{ap} = k_a 1,55^{n'-1} \left[\frac{\mu_{ap}^{13} \Delta\sigma^8 h_R^{38} L^{13}}{q_0^{17}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^{21} \right]^{1-n'}$$

$$\mu_{ap}^{17+13n'} = k_a 1,55^{n'-1} \left[\frac{\Delta\sigma^8 h_R^{38} L^{13}}{q_0^{17}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^{21} \right]^{1-n'}$$

$$\mu_{ap} = 1,55^{\frac{30n'-30}{13n'+17}} k_a^{\frac{30}{13n'+17}} \left[\frac{\Delta\sigma^8 h_R^{38} L^{13}}{q_0^{17}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^{21} \right]^{\frac{1-n'}{13n'+17}} \quad (5.4)$$

Substituindo a Equação 5.4 na Equação 4.45 :

$$L(t) = 0,21 \frac{q_0^{0,627} \Delta \sigma^{0,046}}{h_R^{0,767} C_L^{0,114}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,14} t^{0,756} \left\{ 1,55^{\frac{30n'-30}{13n'+17}} k_a^{\frac{30}{13n'+17}} \left[\frac{\Delta \sigma^8 h_R^{38} L^{13}}{q_0^{17}} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^{21} \right]^{\frac{1-n'}{13n'+17}} \right\}^{-0,186}$$

Efetuada as operações e simplificando os termos comuns, tem-se a seguinte equação para o cálculo do comprimento de uma asa da fratura :

$$L(t) = \left[0,21^{17+13n'} 11,5^{1-n'} k_a^{-5,6} q_0^{13,8+5n'} \Delta \sigma^{-0,7+2,1n'} h_R^{-20,1-2,9n'} C_L^{-1,9-1,5n'} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{6,3-2,1n'} \right]^{\frac{1}{19,4+10,6n'}} t^{\frac{12,8+9,9n'}{19,5+10,5n'}} \quad (5.5)$$

De posse das equações da viscosidade aparente (5.4) e do comprimento de uma asa da fratura (5.5), pode-se, utilizando a Equação 4.46, determinar a variação da pressão de propagação com o tempo, isto é, o expoente da variável “t” na equação da pressão. Desta forma :

$$\Delta p_{1w} = \text{constante} \times t^{-\left[\frac{0,136 (9,9n'+12,8)(-13n'+13)}{(10,6n'+19,4)(13n'+17)} \right] + 0,126} \quad (5.6)$$

Supondo que o intervalo do índice de comportamento dos fluidos utilizados esteja entre $n'=0,1$ e $n'=1$, traçando uma curva de pressão de propagação no poço versus tempo de bombeio num gráfico log-log, obtém-se uma reta com declividade variando entre 0,126 e 0,185.

O modelo de propagação proposto neste trabalho, portanto, apresenta pressão de propagação crescente com o tempo. A Figura 5.2 ilustra o comportamento da pressão durante a propagação da fratura.

Substituindo a Equação 5.4 na Equação 4.27, obtém-se uma expressão para o cálculo da altura média da fratura :

$$\bar{h} = 2,86 \cdot 1,55^{\frac{3n'-3}{13n'+17}} \cdot k_a^{\frac{3}{13n'+17}} \cdot q_0^{\frac{3n'}{13n'+17}} \cdot h_R^{\frac{4n'+14}{13n'+17}} \cdot \Delta\sigma^{\frac{-6n'-6}{13n'+17}} \cdot \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^{\frac{6n'+3}{13n'+17}} \cdot L^{\frac{3}{13n'+17}} \quad (5.7)$$

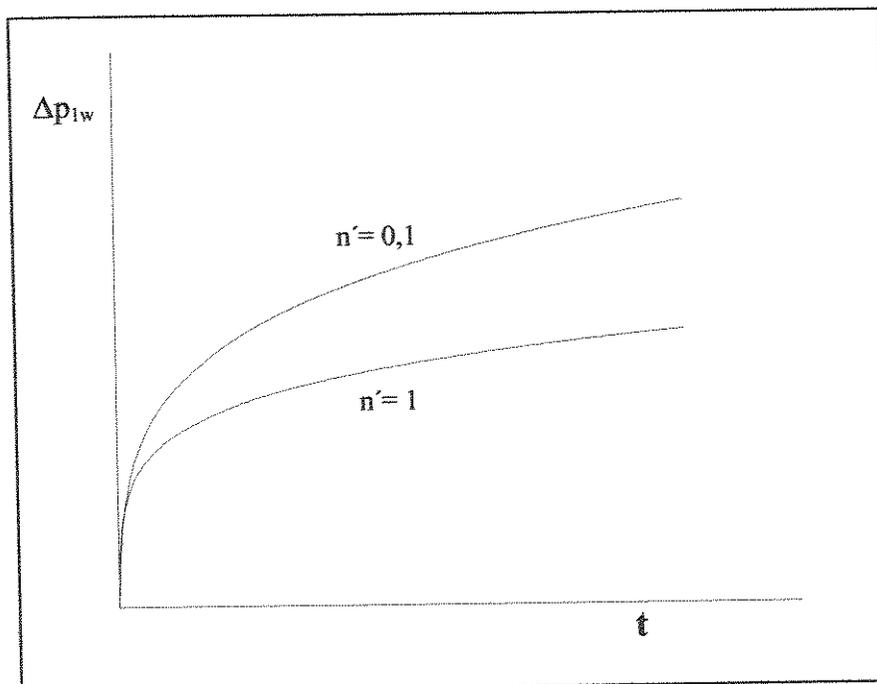


Figura 5.2 - Curva de pressão de propagação versus tempo

Capítulo 6

Modelo de Propagação Radial

A propagação radial (mesma velocidade de propagação em todas as direções) de uma fratura é caracterizada por velocidades de crescimento iguais em todas as direções, resultando, numa situação ideal, em uma fratura de seções longitudinais de geometria circular. Um modelo de propagação radial de fraturas pode ser considerado, portanto, um caso particular de propagação tridimensional, onde a altura e comprimento da fratura são iguais, ou seja, a fratura cresce verticalmente e longitudinalmente ao poço, com velocidades iguais.

Os modelos bidimensionais de Perkins e Kern (1961) e Geertsma e DeKlerk (1969) descrevem com boa precisão o crescimento radial de fraturas, com pequenas modificações nas equações de fluxo e geometria de fratura em relação aos modelos de propagação linear.

O modelo a ser desenvolvido neste capítulo admite as mesmas hipóteses básicas do modelo de propagação pseudo-tridimensional desenvolvido nos capítulos anteriores, no que diz respeito a homogeneidade e isotropia da rocha reservatório, vazão constante e tenacidade ao fraturamento desprezível.

Na propagação radial, admite-se uma geometria inicial da fratura em que as dimensões vertical (altura) e horizontal (comprimento) são iguais a um valor " r_w ". Ao contrário do modelo pseudo 3-D, o intervalo canhoneado representa uma pequena fração da zona de interesse, configurando uma fonte pontual de injeção de fluido na fratura. Admite-se, também, que a altura da rocha reservatório seja suficientemente grande ou o volume de tratamento seja

insuficiente para que a fratura atinja as interfaces com as zonas adjacentes. Desta forma, a fratura estará totalmente contida na zona de interesse.

6.1 Determinação da Geometria da Fratura

O modelo utiliza a equação desenvolvida por Sneddon (1946), que descreve a geometria de uma fratura radial em um meio linearmente elástico, calculando a abertura (w) em cada ponto, em função da distância (r) à fonte de injeção (furos) e das propriedades mecânicas do meio, para um carregamento constante.

$$w(f_r) = \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \int_{f_r}^1 \frac{df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_r^2}} \int_{f_{rw}}^{f_2} \frac{\Delta p f_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \quad (6.1)$$

Onde :

R = raio da fratura (m)

$f_r = r/R$

$f_{rw} = r_w/R$

r = distância do ponto ao centro da fratura (furo de injeção) (m)

r_w = raio inicial da fratura, equivale à extensão do intervalo canhoneado (m)

f_1 e f_2 = variáveis auxiliares adimensionais

Δp = pressão líquida (kg/cm^2)

Resolvendo a Equação 6.1, considerando um valor de f_{rw} muito próximo de zero, resulta:

$$w(f_r) = \frac{4(1-\nu)R \Delta p}{\pi G} \int_{f_r}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_r^2}}$$

$$w(f_r) = \frac{4(1-\nu)R \Delta p}{\pi G} \sqrt{1 - f_r^2} \quad (6.2)$$

No ponto $f_r = f_{rw} \cong 0$, tem-se a seguinte abertura :

$$w(f_{rw}) = w_w = \frac{4(1-\nu)R \Delta p}{\pi G} \quad (6.3)$$

A Equação 6.2 representa uma elipse para cada seção radial da fratura.

A abertura média ou equivalente da fratura pode ser calculada, de forma que a fratura resultante tenha abertura constante ao longo do raio. Portanto :

$$w_{eq} = \frac{1}{R} \int_0^R w(r) dr \quad (6.4)$$

Sendo :

$$r = R \cdot f_r \quad dr = R df_r$$

Fazendo a substituição na Equação 6.4, obtém-se a seguinte expressão :

$$w_{eq} = \frac{1}{R} \int_0^1 w(f_r) R df_r \quad (6.5)$$

Substituindo a Equação 6.2 na Equação 6.5, obtém-se :

$$w_{eq} = \frac{4(1-\nu)R \Delta p}{\pi G} \int_0^1 \sqrt{1-f_r^2} df_r$$

$$w_{eq} = \frac{4(1-\nu)R \Delta p}{\pi G} \left[\frac{f_r \sqrt{1-f_r^2}}{2} + \frac{\arcsin(f_r)}{2} \right]_0^1$$

$$w_{eq} = \frac{(1-\nu)R \Delta p}{G} \quad (6.6)$$

Ou, ainda, substituindo a Equação 6.3 na Equação 6.6 :

$$w_{eq} = \frac{\pi}{4} w_w \quad (6.7)$$

6.2 Distribuição de Pressão na Fratura

A perda de carga ao longo de uma fratura radial é calculada pela Equação de Poiseuille (Geertsma, 1969) :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{6 \mu Q}{\pi r w_{eq}^3} \quad (6.8)$$

Onde :

p = pressão em cada ponto da fratura

μ = viscosidade absoluta do fluido

Q = vazão total de fluido

r = distância do ponto ao ponto de injeção

w_{eq} = abertura média ou equivalente da fratura

$$dp = -\frac{6 \mu Q}{\pi w_{eq}^3} \frac{dr}{r}$$

Integrando entre os pontos r e R , com a condição de contorno $p(R) = \sigma_c$, ou seja, na ponta da fratura a pressão de fluido sendo igual à tensão confinante :

$$\int_p^{\sigma_c} dp = -\frac{6 \mu Q}{\pi w_{eq}^3} \int_r^R \frac{dr}{r}$$

$$\sigma_c - p = -\frac{6\mu Q}{\pi W_{eq}^3} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$\Delta p = p - \sigma_c = -\frac{6\mu Q}{\pi W_{eq}^3} \ln(f_r) \quad (6.9)$$

A Equação 6.9 determina a pressão na fratura para valores de f_r maiores do que f_{rw} . Para valores de f_r menores do que f_{rw} não é considerada a perda de carga, sendo o valor da pressão para qualquer ponto deste intervalo de domínio igual ao valor da pressão no ponto f_{rw} . Desta forma :

$$\Delta p = p - \sigma_c = -\frac{6\mu Q}{\pi W_{eq}^3} \ln(f_{rw}) \quad (0 \leq f_r \leq f_{rw}) \quad (6.10)$$

6.3 Cálculo das Dimensões da Fratura e Pressão de Propagação

O cálculo da abertura, feito a partir da Equação de Sneddon, foi baseado em uma pressão constante no interior da fratura. Pode-se calcular uma pressão média em relação à área da fratura :

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta p \cdot dA \quad (6.11)$$

Fazendo as substituições :

$$A = \pi R^2$$

$$r = R \cdot f_r$$

$$dA = 2 \pi r dr = 2 \pi R^2 f_r df_r$$

E substituindo Δp pela Equações 6.9 e 6.10, resolve-se, então, a Equação 6.11 :

$$\overline{\Delta p} = -\frac{1}{\pi R^2} \frac{12\mu Q}{\pi w_{eq}^3} \left\{ \int_0^{f_{rw}} 2\pi R^2 f_r \ln(f_r) df_r + \int_{f_{rw}}^1 2\pi R^2 f_r \ln(f_{rw}) df_r \right\}$$

$$\overline{\Delta p} = -\frac{24\mu Q}{\pi w_{eq}^3} \left[-\frac{1}{4} - \frac{f_{rw}^2 \ln(f_{rw})}{2} + \frac{f_{rw}^2}{4} + \frac{f_{rw}^2 \ln(f_{rw})}{2} \right]$$

Supondo um valor de f_{rw} tendendo para zero, tem-se :

$$\overline{\Delta p} = \frac{6\mu Q}{\pi w_{eq}^3} \quad (6.12)$$

Substituindo a Equação 6.12 na pressão líquida da Equação 6.6 :

$$w_{eq} = \frac{(1-\nu)R}{G} \times \frac{6\mu Q}{\pi w_{eq}^3}$$

$$w_{eq} = 1,22 \left[\frac{(1-\nu)\mu QR}{G} \right]^{1/4} \quad (6.13)$$

Substituindo, agora, a Equação 6.13 na Equação 6.9, obtém-se uma nova expressão para a distribuição de pressão na fratura :

$$\Delta p = p - \sigma_c = -\frac{6\mu Q}{\pi} \ln(f_r) \times 0,579 \left[\frac{G}{(1-\nu)\mu QR} \right]^{3/4}$$

$$\Delta p = -1,2 \left[\frac{\mu Q}{R^3} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/4} \ln(f_r) \quad (f_{rw} \leq f_r \leq 1) \quad (6.14)$$

$$\Delta p = -1,2 \left[\frac{\mu Q}{R^3} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/4} \ln(f_{rw}) \quad (0 \leq f_r \leq f_{rw}) \quad (6.15)$$

A figura 6.1 mostra a representação gráfica das Equações 6.14 e 6.15, para um fluido de viscosidade igual a 200 mPa.s (200 cp), vazão de tratamento de 0,0318 m³/s (12 bpm), raio da fratura igual a 20 m, Módulo de Elasticidade ao Cisalhamento (G) igual a 8,275 x 10³ MPa (1,2 x 10⁶ psi), Coeficiente de Poisson igual a 0,2 e raio inicial de propagação (r_w) igual a 0,05m.

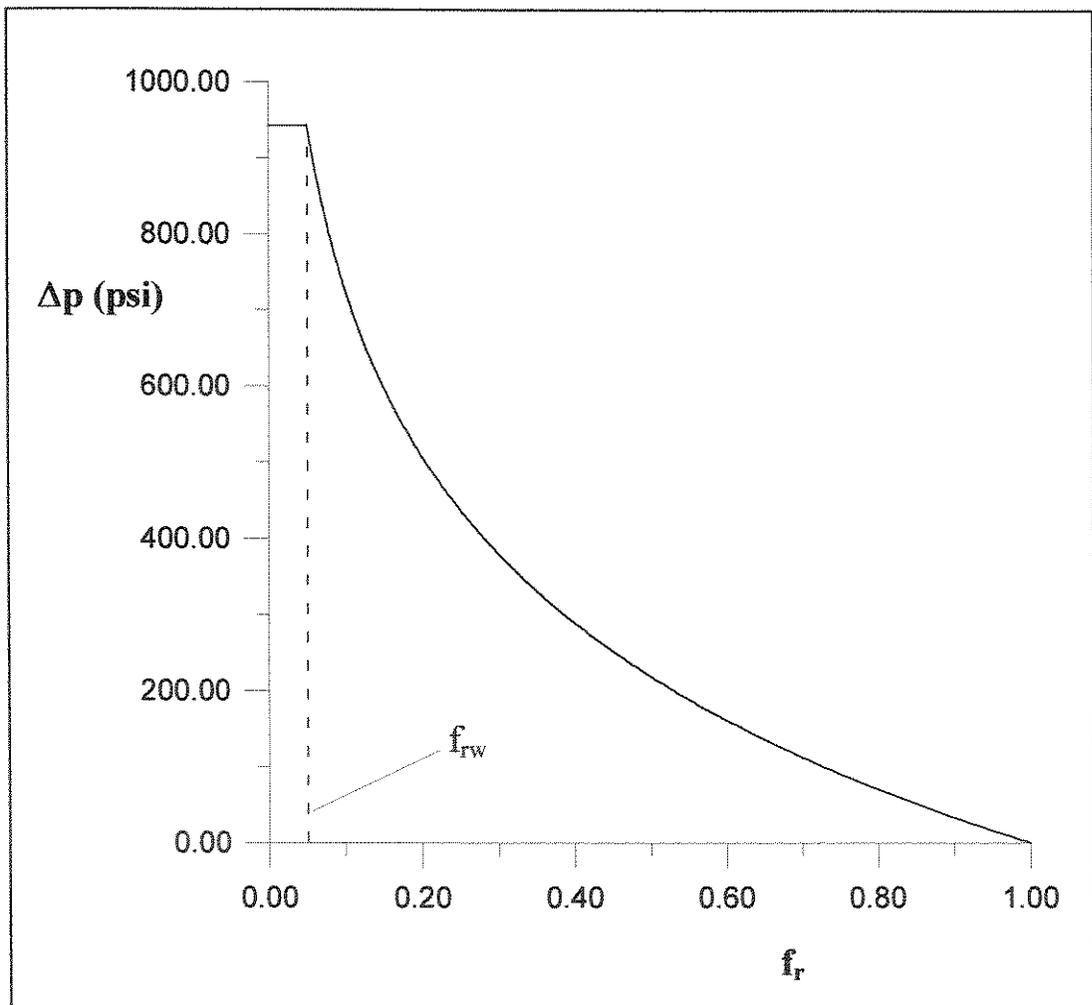


Figura 6.1 - Distribuição de Pressão em Fratura Radial

Para um tratamento sem perda de filtrado, ou seja, com Eficiência Volumétrica igual a 1, pode-se calcular o raio da fratura, em um determinado instante durante a propagação, a partir do volume injetado :

$$V_i = Q.t = V = \pi R^2 w_{eq}$$

$$R^2 = \frac{Q \cdot t}{\pi w_{eq}} = \frac{Q t}{1,22 \pi} \left[\frac{G}{(1-\nu)\mu QR} \right]^{1/4}$$

$$R = 0,55 \left[\left(\frac{G}{1-\nu} \right) \frac{Q^3}{\mu} \right]^{1/9} t^{4/9} \quad (6.16)$$

A partir da Equação 6.15, pode-se determinar o comportamento da pressão de propagação em função do tempo. Para $f_r = 0$:

$$\Delta p_w = -1,2 \left[\frac{\mu Q}{R^3} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/4} \ln(f_{rw}) \quad (6.17)$$

Substituindo o valor de R pela Equação 6.16 :

$$\Delta p_w = -1,89 \ln(f_{rw}) \mu^{1/3} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{2/3} t^{-1/3} \quad (6.18)$$

A Equação 6.18 indica que a pressão de propagação de uma fratura radial é decrescente com o tempo. Para o caso particular de Eficiência Volumétrica igual a 1, num gráfico log-log a curva de pressão versus tempo é representada por uma reta de declividade igual a - 1/3 .

6.4 Influência da Filtração na Geometria da Fratura

Analogamente ao desenvolvimento do modelo pseudo-3D com filtração, feito no Capítulo 4, a distribuição de vazão ao longo de uma fratura que se propaga radialmente pode ser determinada pelo Modelo de Carter (1957), em função de um parâmetro A_r , definido da seguinte forma :

$$A_r = \frac{\pi R^2 C_L^2}{Q_0 w_{eq}} \quad (6.19)$$

Utilizando o valor de C_L definido pela Equação 4.3, pode-se escrever :

$$A_r = \frac{\pi R^2 w_{eq}^2 \alpha^2}{Q_0 w_{eq} 4\pi t} = \frac{1}{4\pi} \eta \alpha^2 \quad (6.20)$$

Como visto no Capítulo 4, para valores de Eficiência Volumétrica situados entre 0,4 e 0,9 ($0,0014 \leq A_r \leq 0,06$), tem-se a seguinte relação média entre a vazão de injeção (Q_0) e a vazão em um ponto qualquer da fratura (Q) :

$$\frac{Q(r)}{Q_0} = 1 - 0,325 \operatorname{arcsen}(f_r) \quad (6.21)$$

A partir da Equação 6.21, define-se uma vazão média ao longo da fratura :

$$\bar{Q} = Q_0 \int_0^1 [1 - 0,325 \operatorname{arcsen}(f_r)] df_r$$

$$\bar{Q} = 0,814 Q_0 \quad (6.22)$$

A pressão de propagação (Δp_w) pode ser escrita de forma mais precisa, substituindo-se a Equação 6.22 na Equação 6.17 :

$$\Delta p_w = -1,14 \left[\frac{\mu Q_0}{R^3} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/4} \ln(f_{rw}) \quad (6.23)$$

Da mesma forma, substituindo o valor da vazão média na Equação 6.12 :

$$\frac{\bar{Q}}{\Delta p} = \frac{1,55 \mu Q_0}{w_{eq}^3} \quad (6.24)$$

A abertura média, definida na Equação 6.13, pode ser rescrita, utilizando-se o valor da

vazão média, no lugar da vazão constante :

$$w_{eq} = 1,18 \left[\frac{(1-\nu)\mu Q_0 R}{G} \right]^{1/4} \quad (6.25)$$

A Eficiência Volumétrica de um fraturamento hidráulico de propagação radial, é calculada, a exemplo do modelo pseudo 3-D, a partir do balanço de massa na fratura, admitindo que o fluido fraturante seja incompressível. Desta forma o balanço de massa é equivalente ao balanço de volumes abaixo :

$$\frac{dV}{dt} = Q_0 - Q_L - v_{sp} \frac{dA}{dt} \quad (6.26)$$

Onde Q_0 representa a vazão de injeção, Q_L é a vazão total de filtração pelas faces da fratura, v_{sp} é a perda instantânea (spurt loss) por filtração. V é o volume total da fratura e A é a área total permeável.

A vazão de filtração é calculada pela Equação de Carter :

$$Q_L = C_L \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (6.27)$$

$$A = 2 \pi R^2 \quad \frac{dA}{dt} = 4\pi R \frac{dR}{dt}$$

$$V = \pi R^2 w_{eq} \quad \frac{dV}{dt} = 2\pi w_{eq} R \frac{dR}{dt} + \pi R^2 \frac{dw_{eq}}{dt} = \left(\pi R^2 \frac{dw_{eq}}{dR} + 2\pi w_{eq} R \right) \frac{dR}{dt}$$

Utilizando a Equação 6.25 :

$$\frac{dw_{eq}}{dR} = \frac{d}{dR} 1,18 \left[\frac{(1-\nu)\mu Q_0 R}{G} \right]^{1/4} = \frac{1}{4} \frac{w_{eq}}{R}$$

Logo :

$$\frac{dV}{dt} = \left(\pi R^2 \frac{w_{eq}}{4R} + 2\pi w_{eq} R \right) \frac{dR}{dt} = 7,07 R w_{eq} \frac{dR}{dt}$$

Portanto, a Equação 6.26 pode ser rescrita da seguinte forma :

$$\frac{dV}{dt} = 7,07 R w_{eq} \frac{dR}{dt} = Q_0 - 4\pi C_L \int_0^t R \frac{dR}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 4\pi v_{sp} R \frac{dR}{dt}$$

$$(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp}) R \frac{dR}{dt} = Q_0 - 4\pi C_L \int_0^t R \frac{dR}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q_0}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} - \frac{4\pi C_L}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} \int_0^t R \frac{dR}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q_0}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} - \frac{4\pi C_L}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} \int_0^t R \frac{dR}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\mathfrak{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{Q_0}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} \frac{1}{s} - \frac{4\pi C_L}{(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \mathfrak{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\}$$

$$\mathfrak{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{\frac{Q_0}{s(7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp})}}{1 + \frac{4\pi C_L \sqrt{\pi}}{7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp}} \frac{1}{\sqrt{s}}}$$

$$\mathfrak{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{\frac{Q_0}{7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp}}}{\sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \frac{4\pi \sqrt{\pi} C_L}{7,07 w_{eq} + 4\pi v_{sp}} \right)}$$

$$\mathfrak{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{\frac{Q_0}{4\sqrt{\pi}(w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}})}}{\sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \frac{\pi C_L}{w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}}} \right)}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{Q_0}{4\sqrt{\pi}(w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}})}}{\sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \frac{\pi C_L}{w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}}} \right)} \right\}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi}(w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}})} e^{\alpha_r^2 t} \operatorname{erfc} \alpha_r \quad (6.28)$$

$$\text{Onde : } \alpha_r = \frac{\pi C_L}{w_{eq} + \sqrt{\pi v_{sp}}} \sqrt{t} \quad (6.29)$$

Resolvendo a Equação 6.28, admitindo $w_{eq} \gg \sqrt{\pi v_{sp}}$, no intervalo de tempo de 0 a t :

$$\frac{R^2}{2} = \frac{Q_0 t}{4\sqrt{\pi} w_{eq}} \frac{e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r + \left(\frac{2\alpha_r}{\sqrt{\pi}} \right) - 1}{\alpha_r^2} = \frac{Q_0 t}{2\pi w_{ap}} \eta \quad (6.30)$$

$$\text{Onde : } \frac{e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r + \left(\frac{2\alpha_r}{\sqrt{\pi}} \right) - 1}{\alpha_r^2} = \eta \quad (\text{Eficiência Volumétrica}) \quad (6.31)$$

w_{ap} = abertura aparente

A Eficiência Volumétrica definida pela Equação 6.31 é idêntica àquela definida no Modelo de Carter (Apêndice 1) e no modelo pseudo 3-D desenvolvido no Capítulo 4 .

Como já visto no Capítulo 4, para valores de Eficiência Volumétrica compreendidos entre 0,4 e 0,9 ($0,14 \leq \alpha_r \leq 1,2$), pode-se fazer a seguinte aproximação :

$$e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r + \left(\frac{2\alpha_r}{\sqrt{\pi}} \right) - 1 = 0,56\alpha_r^{1,86}$$

Portanto, a Equação 6.31 pode ser rescrita da seguinte forma :

$$\eta = 0,56\alpha_r^{-0,14} \quad (6.32)$$

Substituindo o valor de α_r , definido na Equação 6.29, na Equação 6.32 :

$$\eta = 0,56 \left(\frac{\pi C_L \sqrt{t}}{w_{eq}} \right)^{-0,14} \quad (6.33)$$

Desta forma, pode-se rescrever a Equação 6.30 :

$$R^2 = 0,134 Q_0 C_L^{-0,14} t^{0,93} w_{eq}^{-0,86} \quad (6.34)$$

Substituindo a Equação 6.25 na Equação 6.34, obtém-se :

$$R^2 = 0,119 Q_0^{0,785} C_L^{-0,14} \mu^{-0,215} t^{0,93} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^{-0,215} R^{-0,215}$$

$$R = 0,365 \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,097} \frac{Q_0^{0,354} t^{0,42}}{C_L^{0,062} \mu^{0,097}} \quad (6.35)$$

Substituindo, agora, a Equação 6.25 na Equação 6.33, obtém-se uma expressão para o cálculo da Eficiência Volumétrica do tratamento, em função do raio da fratura e do tempo de propagação :

$$\eta = 0,49 \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right) \frac{\mu Q_0 R}{C_L^4} \right]^{0,035} t^{-0,07} \quad (6.36)$$

6.5 Equações para Fluidos Fraturantes com Modelo Reológico de Potência

Como já descrito no Capítulo 5, os fluidos de modelo reológico de potência representam melhor o comportamento dos fluidos fraturantes gelificados, utilizados normalmente na indústria do petróleo.

Em um fluxo de fluido newtoniano entre duas placas planas paralelas, a distribuição de pressão é regida pela Equação 3.29 :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu v}{w_{eq}^2}$$

Enquanto que, para um fluido de reologia de potência, o fluxo apresenta uma distribuição de pressão descrita pela Equação 5.2 :

$$\frac{dp}{dx} = -2k \left(\frac{4n'+2}{n'} \right)^{n'} \frac{v^{n'}}{w_{eq}^{1+n'}}$$

Pode-se definir uma viscosidade aparente média para um fluido de reologia não newtoniana, de forma a caracterizar um fluido newtoniano que apresente uma perda de carga equivalente, nas mesmas condições de fluxo. Desta forma, pode-se equacionar o problema da seguinte forma :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{12\mu_{ap}v}{w_{eq}^2} = -2k \left(\frac{4n'+2}{n'} \right)^{n'} \frac{v^{n'}}{w_{eq}^{1+n'}} \quad (6.37)$$

Para o caso de fluxo radial, a dimensão linear “x”, que representa a distância ao poço (intervalo canhoneado) é substituída pela distância ao ponto de injeção, “r”.

Resolvendo a Equação 6.37 para μ_{ap} , obtém-se :

$$\mu_{ap} = \frac{1}{6} k \left(\frac{4n'+2}{n'} \right)^{n'} v^{n'-1} w_{eq}^{1-n'}$$

$$\mu_{ap} = k_a \left(\frac{6v}{w_{eq}} \right)^{n'-1} \quad (6.38)$$

$$\text{onde :} \quad k_a = k \left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} \quad (6.39)$$

Para o cálculo da viscosidade aparente média, deve ser utilizado um valor médio de velocidade de fluxo na fratura. Para um fluxo qualquer, pode-se escrever :

$$\bar{v} = \frac{\bar{Q}}{A} \quad (6.40)$$

$$\text{Da Equação 6.22, tem-se :} \quad \bar{Q} = 0,814 Q_0$$

A área transversal ao fluxo é dada por $A = 2 \pi r \bar{w}$. A área média pode ser calculada, portanto, por meio da seguinte integração :

$$\bar{A} = \frac{1}{R} \int_0^R 2\pi w_{eq} r dr = \pi \bar{w} R \quad (6.41)$$

Substituindo as Equações 6.41 e 6.22 na Equação 6.40 :

$$\bar{v} = \frac{0,814 Q_0}{\pi w_{eq} R} \quad (6.42)$$

Substituindo o valor da velocidade média na Equação 6.38, obtém-se a seguinte expressão para a viscosidade aparente média :

$$\mu_{ap} = k_a \left(\frac{4,88 Q_0}{\pi R W_{eq}^2} \right)^{n'-1} \quad (6.43)$$

Substituindo o valor da abertura equivalente definido pela Equação 6.25 na Equação 6.43 :

$$\mu_{ap} = k_a^{\frac{2}{1+n'}} \left[0,73 \frac{R^3}{Q_0} \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{1-n'}{1+n'}} \quad (6.44)$$

Escrevendo, agora, a Equação 6.35 em termos de viscosidade aparente média :

$$R = 0,365 \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,097} \frac{Q_0^{0,354} t^{0,42}}{C_L^{0,062} \mu_{ap}^{0,097}} \quad (6.45)$$

Substituindo, na Equação 6.45, o valor da viscosidade aparente da Equação 6.44 :

$$R = \left[0,38.0,35^{n'} . k_a^{-0,194} Q_0^{0,451+0,257n'} C_L^{-0,062-0,062n'} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{0,194} t^{0,42+0,42n'} \right]^{\frac{1}{1,291+0,709n'}} \quad (6.46)$$

Capítulo 7

Avaliação da Fratura pelo Declínio de Pressão Durante o Fechamento

O fraturamento hidráulico, a exemplo de outras intervenções realizadas em rochas reservatório, é de difícil avaliação, devido ao fato de que a fratura resultante, obviamente, não pode ser observada diretamente. A avaliação dos resultados da operação tem de ser feita por meio de métodos indiretos, baseados em parâmetros que possam ser registrados durante o processo de propagação.

Nos últimos quinze anos, análises de fraturamentos baseadas no comportamento da pressão durante e após a propagação da fratura têm sido desenvolvidas por alguns autores. O comportamento de pressão de propagação permite uma análise qualitativa acerca do crescimento da fratura, indicando a ocorrência de crescimento radial ou com confinamento vertical, determinando o modelo de propagação mais adequado. Por outro lado, a análise de pressão durante o fechamento da fratura fornece uma avaliação quantitativa dos volumes de fluido envolvidos no processo de propagação e filtração, e, conseqüentemente, das dimensões da fratura resultante.

O modelo de análise de declínio de pressão durante o fechamento da fratura, que é apresentado neste capítulo, segue a mesma equação básica de filtração, desenvolvida por Carter (1957) e balanço de massa, apresentada por Nolte (1979, 1986). O desenvolvimento matemático para determinação dos volumes filtrados durante a propagação e fechamento da fratura é similar ao modelo de Nolte. A relação entre geometria da fratura e pressão interna e os desenvolvimentos posteriores foram desenvolvidos especificamente para o modelo de

geometria de fratura apresentado no presente trabalho. Consequentemente, seus resultados não são extensíveis a outros modelos de diferentes geometrias.

O desenvolvimento matemático é feito levando-se em consideração as mesmas hipóteses básicas do modelo de Nolte:

- vazão constante durante todo o período de propagação da fratura;
- coeficiente global de filtração (C_L) independente da pressão;
- área de filtração constante durante o período de fechamento da fratura
- perda inicial instantânea (spurt loss) e abertura de fraturas naturais durante a propagação não são considerados

7.1 Vazões e Volumes de Filtração Através das Faces da Fratura

A equação básica para determinação da vazão de filtração em um elemento de área filtrante “da”, já utilizada no Capítulo 4, foi desenvolvida por Carter (1957) :

$$q_f(t, da) = \frac{2C_L da}{\sqrt{t - \tau}} \quad (7.1)$$

onde “da” representa um elemento de área permeável da fratura. O termo (t- τ) representa o tempo de exposição do elemento filtrante ao fluxo de fluido.

A Figura 7.1 mostra a representação esquemática de uma asa de uma fratura se propagando em uma zona permeável, limitada, acima e abaixo, por zonas selantes. A_p representa a área permeável da fratura ao final do bombeio, no instante t_p . A e a são áreas permeáveis em dois instantes diferentes do período de propagação, t e τ . Assim, pode-se escrever, para o modelo pseudo tridimensional :

$$a = h_R \cdot L_1 \quad , \quad A = h_R \cdot L_2 \quad , \quad A_p = h_R \cdot L_p \quad (7.2)$$

sendo L_1 , L_2 e L_p os comprimentos da fratura (uma asa) nos instantes τ , t e t_p .

Para o modelo radial, tem-se a seguinte relação :

$$a = \pi R_1^2 \quad , \quad A = \pi R_2^2 \quad , \quad A_P = \pi R_P^2 \quad (7.3)$$

onde R_1 , R_2 e R_P são os raios da fratura nos instantes τ , t e t_P .

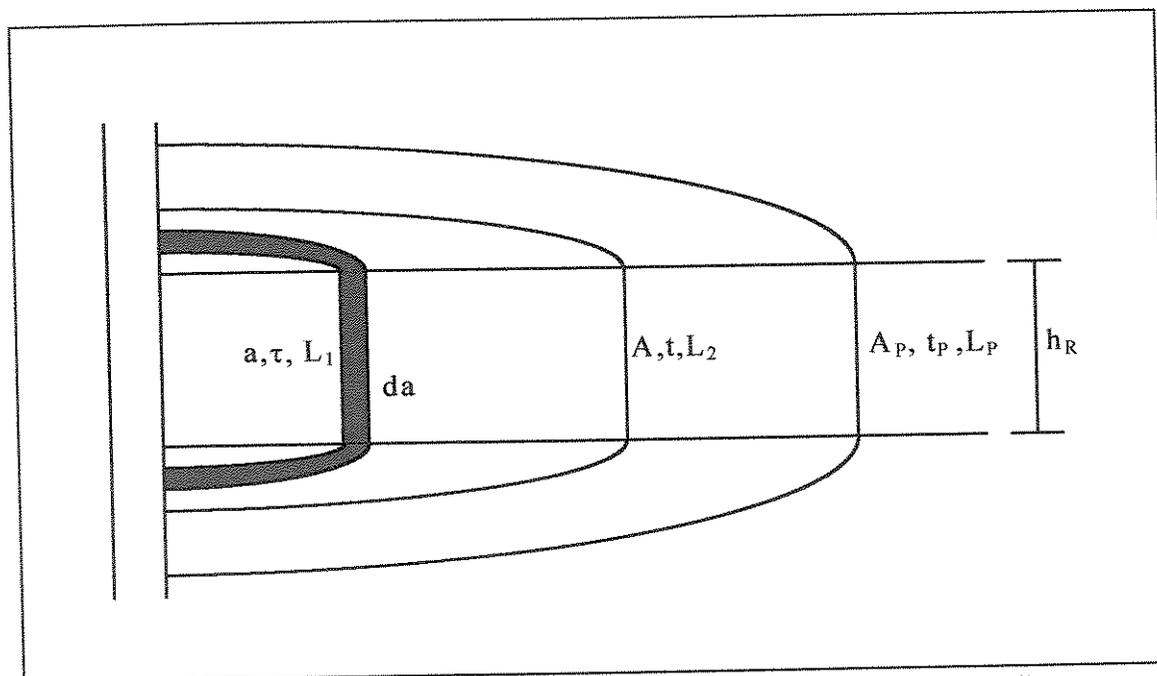


Figura 7.1 - Esquema da evolução da área da fratura durante propagação

A partir das Equações 7.2 e 7.3 pode-se escrever, para o modelo pseudo tridimensional :

$$\frac{a}{A} = \frac{L_1}{L_2} \quad (7.4)$$

E, para o modelo radial :

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \quad (7.5)$$

Substituindo-se a Equação 5.5 na Equação 7.4, obtém-se a seguinte relação :

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\frac{9,9n'+12,8}{10,4n'+19,6}} \quad (7.6)$$

Substituindo-se a Equação 6.46 na Equação 7.5 :

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\frac{0,84n'+0,84}{0,709n'+1,291}} \quad (7.7)$$

Desta forma, pode-se definir um expoente β :

$$\beta = \frac{9,9n'+12,8}{10,4n'+19,6} \quad (\text{modelo pseudo tridimensional}) \quad (7.8)$$

$$\beta = \frac{0,84n'+0,84}{0,709n'+1,291} \quad (\text{modelo radial}) \quad (7.9)$$

Para o intervalo de índice de comportamento $0,1 \leq n' \leq 1$:

$$0,67 \leq \beta \leq 0,76 \quad (\text{pseudo tridimensional})$$

$$0,68 \leq \beta \leq 0,84 \quad (\text{radial})$$

Desta forma, as Equações 7.6 e 7.7 podem ser rescritas :

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\beta}$$

$$da = \frac{\beta A}{t} \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\beta-1} d\tau \quad (7.10)$$

Substituindo-se a Equação 7.10 na Equação 7.1 :

$$q_l(t, da) = 2C_L \beta A \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\beta-1} \frac{d\tau}{t\sqrt{t-\tau}} \quad (7.11)$$

Dentro do intervalo de variação do parâmetro β , a Equação 7.11 não possui solução analítica. Assim sendo, a exemplo da solução adotada pelo modelo de Nolte, a equação é resolvida para dois valores particulares de β : 0,5 e 1. Para os valores compreendidos dentro deste intervalo, adota-se uma solução interpolada.

A solução da Equação 7.11 é, portanto :

- $\beta=1$

$$q_l(t, da) = 2C_L A \frac{d\tau}{t\sqrt{t-\tau}}$$

$$q_l(t, a) = \frac{2C_L A}{t} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$q_l(t, a) = -\frac{4C_L A}{t} \sqrt{t-\tau} \Big|_0^{\tau}$$

$$q_l(t, a) = -\frac{4C_L A}{t} (\sqrt{t} - \sqrt{t-\tau}) \quad (7.12)$$

- $\beta=0,5$

$$q_l(t, da) = \frac{C_L A}{\sqrt{t}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}$$

$$q_l(t, a) = \frac{C_L A}{\sqrt{t}} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}$$

$$q_l(t, a) = \frac{C_L A}{\sqrt{t}} \left[2 \arcsen \sqrt{\frac{\tau}{t}} \right]_0^{\tau}$$

$$q_l(t, a) = \frac{2C_L A}{\sqrt{t}} \arcsen \sqrt{\frac{\tau}{t}} \quad (7.13)$$

Durante o período de propagação, tem-se a seguinte relação :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A_p} = \frac{t}{t_p} \quad (\beta = 1) \\ \frac{A}{A_p} = \left(\frac{t}{t_p}\right)^{0,5} \quad (\beta = 0,5) \end{array} \right. \quad (7.14)$$

Substituindo o sistema de equações 7.14 nas Equações 7.12 e 7.13, obtém-se :

$$q_l(t, a) = \frac{4C_L A_p}{t_p} (\sqrt{t} - \sqrt{t - \tau}) \quad (\beta = 1) \quad (7.15)$$

$$q_l(t, a) = \frac{2C_L A_p}{\sqrt{t_p}} \arcsen \sqrt{\frac{\tau}{t}} \quad (\beta = 0,5) \quad (7.16)$$

No instante em que cessa o bombeio de fluido fraturante ($t=t_p$), a vazão de filtração em toda a área permeável é :

$$q_l(t_p, A_p) = \frac{4C_L A_p}{\sqrt{t_p}} \quad (\beta = 1) \quad (7.17)$$

$$q_l(t_p, A_p) = \frac{\pi C_L A_p}{\sqrt{t_p}} \quad (\beta = 0,5) \quad (7.18)$$

O volume perdido por filtração, através das faces da fratura, durante o período de propagação, pode ser calculado pela integração das Equações 7.15 e 7.16, fazendo-se $\tau = t$, uma vez que considerar-se-á a filtração em toda a área permeável ($a = A$).

Desta forma, pode-se escrever :

- $\beta = 1$

$$V_{LP} = \int_0^{t_p} \frac{4C_L A_p}{t_p} (\sqrt{t} - \sqrt{t - \tau}) dt = \int_0^{t_p} \frac{4C_L A_p}{t_p} \sqrt{t} dt$$

$$V_{LP} = \frac{8}{3} C_L A_P \sqrt{t_P} \quad (7.19)$$

- $\beta = 0,5$

$$V_{LP} = \int_0^{t_P} \frac{2C_L A_P}{\sqrt{t_P}} \arcsen \sqrt{\frac{\tau}{t}} dt = \int_0^{t_P} \frac{\pi C_L A_P}{\sqrt{t_P}} dt$$

$$V_{LP} = \pi C_L A_P \sqrt{t_P} \quad (7.20)$$

As Equações 7.15 e 7.16 podem ser extrapoladas para tempos posteriores ao tempo de propagação ($t > t_p$). Neste caso, tem-se $\tau = t_p$. Desta forma, os volumes de filtração durante o fechamento da fratura são calculados pelas seguintes expressões :

- $\beta = 1$

$$V_{LS} = \int_{t_p}^t \frac{4C_L A_P}{t_P} (\sqrt{t} - \sqrt{t-t_p}) dt$$

$$V_{LS} = \frac{4C_L A_P}{t_P} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{3} (t-t_p)^{3/2} \right]_{t_p}^t$$

$$V_{LS} = \frac{4C_L A_P}{t_P} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{3} (t-t_p)^{3/2} - \frac{2}{3} t_p^{3/2} \right] \quad (7.21)$$

- $\beta = 0,5$

$$V_{LS} = \int_{t_p}^t \frac{2C_L A_P}{\sqrt{t_P}} \arcsen \sqrt{\frac{t_P}{t}} dt$$

$$V_{LS} = \frac{2C_L A_P}{\sqrt{t_P}} \left[\sqrt{t_P(t-t_p)} + t \arcsen \sqrt{\frac{t_P}{t}} \right]_{t_p}^t$$

$$V_{LS} = \frac{2C_L A_P}{\sqrt{t_P}} \left[\sqrt{t_P(t-t_P)} + t \arcsen \sqrt{\frac{t_P}{t} - \frac{\pi}{2} t_P} \right] \quad (7.22)$$

Durante o período de fechamento (ou “shut in”), pode-se definir um tempo adimensional, da seguinte forma :

$$\Delta t_D = \frac{t-t_P}{t_P} \quad (7.23)$$

Substituindo o valor de Δt_D , definido na Equação 7.23, nas Equações 7.21 e 7.22, obtém-se as seguintes expressões :

- ($\beta = 1$)

$$V_{LS} = \frac{8}{3} C_L A_P \sqrt{t_P} \left[(1 + \Delta t_D)^{3/2} - \Delta t_D^{3/2} - 1 \right] \quad (7.24)$$

- ($\beta = 0,5$)

$$V_{LS} = 2C_L A_P \sqrt{t_P} \left[\sqrt{\Delta t_D} + (1 + \Delta t_D) \arcsen \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta t_D} - \frac{\pi}{2}} \right] \quad (7.25)$$

Pode-se, ainda, definir uma função $f(\Delta t_D)$, tal que :

- $\beta = 1$

$$f(\Delta t_D) = \frac{4}{3} \left[(1 + \Delta t_D)^{3/2} - \Delta t_D^{3/2} \right] \quad (7.26)$$

$$f(\Delta t_D = 0) = f_0 = \frac{4}{3}$$

- $\beta = 0,5$

$$f(\Delta t_D) = \sqrt{\Delta t_D} + (1 + \Delta t_D) \arcsen \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta t_D} - \frac{\pi}{2}} \quad (7.27)$$

$$f(\Delta t_D = 0) = f_0 = \frac{\pi}{2}$$

Utilizando a função $f(\Delta t_D)$ definida nas Equações 7.26 e 7.27, pode-se redefinir os volumes de filtração nos períodos de propagação e fechamento da fratura, definidos nas Equações 7.19, 7.20, 7.24 e 7.25, respectivamente. Assim, tem-se :

$$V_{LP} = 2C_L A_P \sqrt{t_P} f_0 \quad (7.28)$$

$$V_{LS} = 2C_L A_P \sqrt{t_P} [f(\Delta t_{CD}) - f_0] \quad (7.29)$$

O conjunto de Equações 7.26 a 7.29 determina os volumes de fluido perdidos por filtração através das faces da fratura durante os períodos de propagação e fechamento, sendo Δt_{CD} o tempo adimensional de fechamento da fratura.

A Figura 7.2 mostra curvas de $f(\Delta t_D)$ em função de Δt_D , para valores do expoente β iguais a 1 e 0,5. Para valores intermediários de β , como não há solução analítica para o modelo, os valores de $f(\Delta t_D)$ são obtidos através de interpolação. Como pode ser observado na figura, as curvas de $f(\Delta t_D)$ para $\beta = 1$ e $\beta = 0,5$ apresentam uma diferença muito pequena, menor que 15%. Desta forma, a interpolação linear pode ser usada para valores intermediários de β , sem comprometer a precisão dos resultados. Pode-se observar ainda, a partir da figura, que a maior diferença entre as curvas ocorre para $\Delta t_D = 0$, ou seja, ao final da propagação, ou início do fechamento. A partir deste ponto, a diferença entre as curvas diminui com o tempo. Isto indica que, durante a propagação existe maior influência do expoente “ β ” no cálculo dos volumes de filtração.

A Figura 7.3 apresenta as curvas de $f(\Delta t_D) - f_0$, para valores de β igual a 1 e 0,5. Estas curvas dão uma melhor idéia do volume de filtração durante o fechamento da fratura, uma vez que não levam em conta o volume de filtração durante a propagação. O termo $f(\Delta t_D) - f_0$ é utilizado nas Equação 7.29 para o cálculo de V_{LS} . Observa-se que a diferença entre as curvas em $\Delta t_D = 5$ é de apenas 5%. Neste caso, a interpolação linear, utilizada para valores intermediários de β , deve apresentar um erro desprezível.

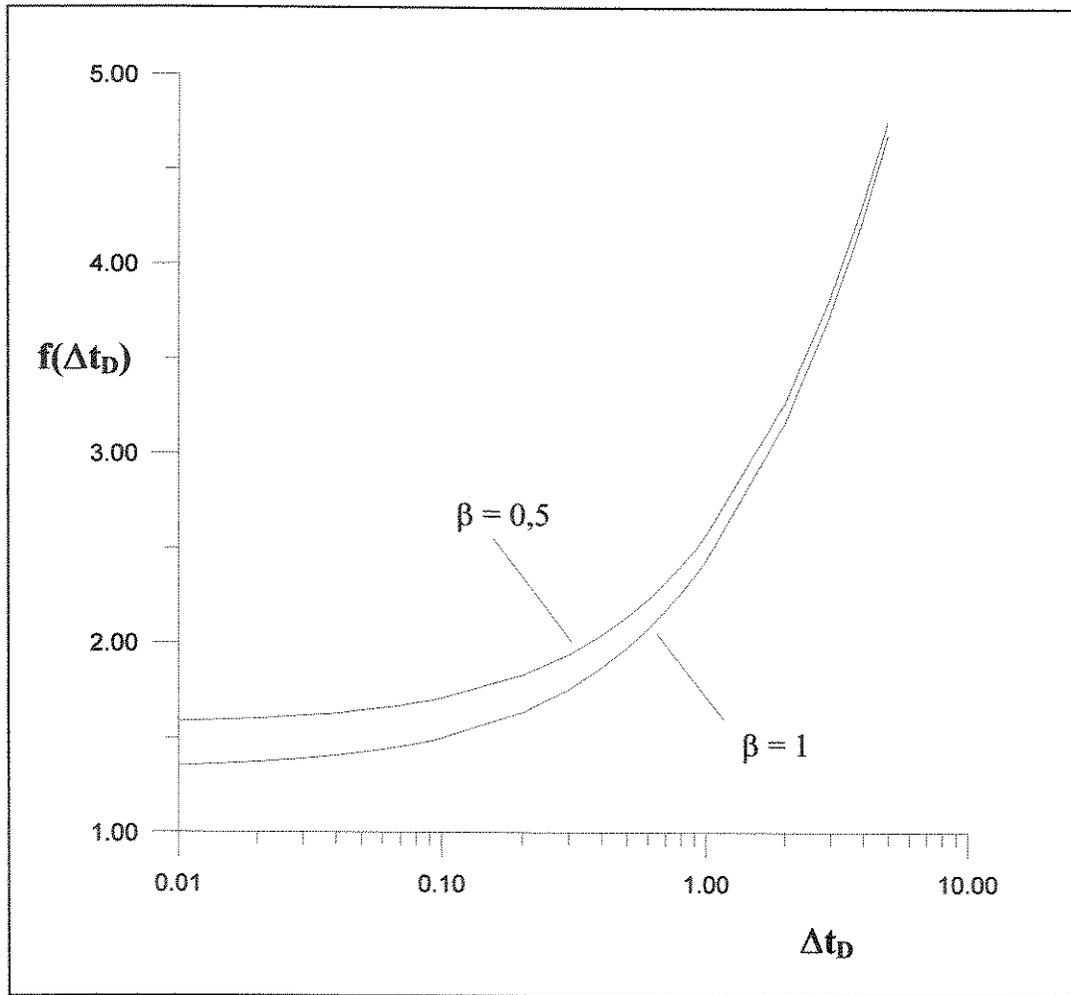


Figura 7.2 - Gráfico semi-log da função $f(\Delta t_D)$

A Eficiência de Fluxo do tratamento é definida como a relação entre o volume da fratura ao final do bombeio (V_{fp}) e o volume total injetado (V_i), incluindo o agente de sustentação. Desta forma, tem-se :

$$\eta = \frac{V_{fp}}{V_i} \quad (7.30)$$

onde :

$$V_{fp} = V_{LS} + V_{prop}$$

$$V_i = V_{LS} + V_{prop} + V_{LP}$$

$$V_{prop} = \text{volume do pacote de agente de sustentação} = \frac{m_{prop}}{(1-\phi)\rho_{prop}}$$

m_{prop} e ρ_{prop} são a massa total e a massa específica do agente de sustentação

ϕ é a porosidade do pacote de agente de sustentação

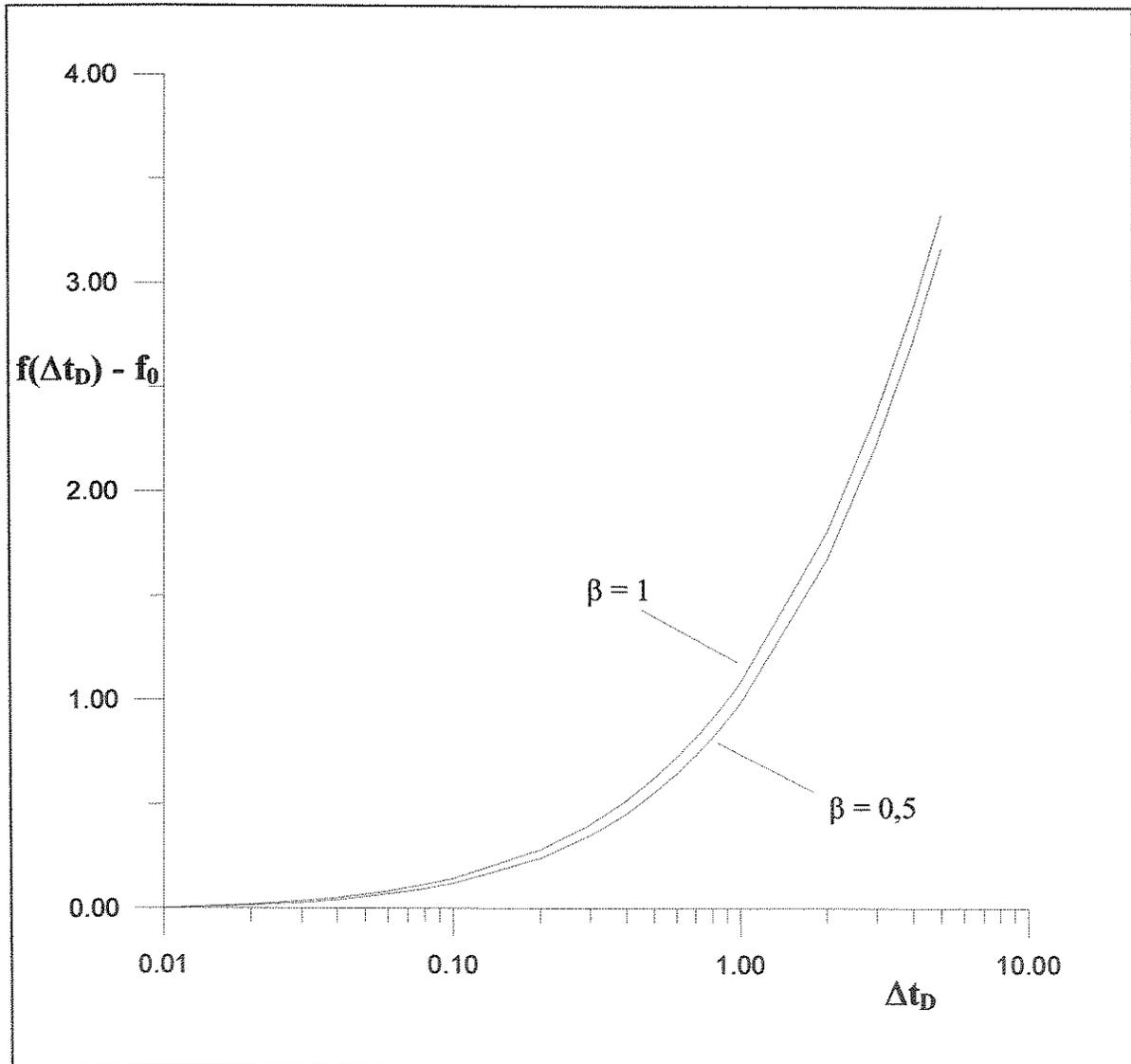


Figura 7.3 - Gráfico semi-log do termo $f(\Delta t_D) - f_0$ versus Δt_D

Fazendo as devidas substituições, pode-se rescrever a Equação 7.30 :

$$\eta = \frac{V_{LS} + V_{prop}}{V_{LS} + V_{prop} + V_{LP}} \quad (7.31)$$

Substituindo-se as Equações 7.28 e 7.29 na Equação 7.31, obtém-se a seguinte expressão para a eficiência volumétrica :

$$\eta = \frac{2C_L A_P \sqrt{t_P} [f(\Delta t_{CD}) - f_0] + V_{prop}}{2C_L A_P \sqrt{t_P} f(\Delta t_{CD}) + V_{prop}} \quad (7.32)$$

Quando o volume total injetado for um dado disponível, o cálculo da eficiência volumétrica torna-se muito mais simples. Neste caso, a Equação 7.30 pode ser escrita da seguinte forma :

$$\eta = \frac{V_{fp}}{V_i} = \frac{V_i - V_{LP}}{V_i} = 1 - \frac{2C_L A_P \sqrt{t_P} f_0}{V_i}$$

Para os tratamentos de calibração (“mini-frac” ou teste de injetividade), onde não é utilizado o agente de sustentação, a Equação 7.32 se reduz a :

$$\eta = \frac{f(\Delta t_{CD}) - f_0}{f(\Delta t_{CD})} \quad (7.33)$$

A Tabela 7.1 apresenta valores da função $f(\Delta t_D)$ para diferentes valores do expoente “ β ”.

Tabela 7.1 - Valores da função “f” para diferentes valores de β e Δt_D

β	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Δt_D	$f(\Delta t_D)$					
0	1.57	1.52	1.48	1.43	1.38	1.33
0.02	1.60	1.55	1.51	1.46	1.42	1.37
0.04	1.63	1.58	1.54	1.49	1.45	1.40
0.06	1.66	1.61	1.57	1.52	1.48	1.44
0.08	1.68	1.64	1.60	1.55	1.51	1.47
0.1	1.71	1.66	1.62	1.58	1.54	1.50
0.12	1.73	1.69	1.65	1.61	1.57	1.52

0.14	1.76	1.72	1.68	1.63	1.59	1.55
0.16	1.78	1.74	1.70	1.66	1.62	1.58
0.18	1.80	1.76	1.73	1.69	1.65	1.61
0.2	1.83	1.79	1.75	1.71	1.67	1.63
0.22	1.85	1.81	1.77	1.74	1.70	1.66
0.24	1.87	1.84	1.80	1.76	1.72	1.68
0.26	1.89	1.86	1.82	1.78	1.75	1.71
0.28	1.92	1.88	1.84	1.81	1.77	1.73
0.3	1.94	1.90	1.87	1.83	1.79	1.76
0.32	1.96	1.92	1.89	1.85	1.82	1.78
0.34	1.98	1.95	1.91	1.87	1.84	1.80
0.36	2.00	1.97	1.93	1.90	1.86	1.83
0.38	2.02	1.99	1.95	1.92	1.88	1.85
0.4	2.04	2.01	1.97	1.94	1.91	1.87
0.42	2.06	2.03	1.99	1.96	1.93	1.89
0.44	2.08	2.05	2.02	1.98	1.95	1.91
0.46	2.10	2.07	2.04	2.00	1.97	1.94
0.48	2.12	2.09	2.06	2.02	1.99	1.96
0.5	2.14	2.11	2.08	2.04	2.01	1.98
0.52	2.16	2.13	2.09	2.06	2.03	2.00
0.54	2.18	2.15	2.11	2.08	2.05	2.02
0.56	2.20	2.17	2.13	2.10	2.07	2.04
0.58	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.06
0.6	2.23	2.20	2.17	2.14	2.11	2.08
0.65	2.28	2.25	2.22	2.19	2.16	2.13
0.7	2.32	2.29	2.26	2.23	2.20	2.17
0.75	2.37	2.34	2.31	2.28	2.25	2.22
0.8	2.41	2.38	2.35	2.32	2.29	2.27
0.85	2.45	2.42	2.39	2.37	2.34	2.31
0.9	2.49	2.46	2.44	2.41	2.38	2.35
0.95	2.53	2.50	2.48	2.45	2.42	2.40

1	2.57	2.54	2.52	2.49	2.46	2.44
1.1	2.65	2.62	2.60	2.57	2.55	2.52
1.2	2.72	2.70	2.67	2.65	2.62	2.60
1.3	2.80	2.77	2.75	2.72	2.70	2.67
1.4	2.87	2.84	2.82	2.80	2.77	2.75
1.5	2.94	2.91	2.89	2.87	2.84	2.82
1.6	3.00	2.98	2.96	2.94	2.91	2.89
1.7	3.07	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96
1.8	3.14	3.11	3.09	3.07	3.05	3.03
1.9	3.20	3.18	3.16	3.14	3.11	3.09
2	3.26	3.24	3.22	3.20	3.18	3.16
2.2	3.38	3.36	3.34	3.32	3.30	3.28
2.4	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40
2.6	3.61	3.59	3.57	3.55	3.54	3.52
2.8	3.72	3.70	3.68	3.67	3.65	3.63
3	3.83	3.81	3.79	3.77	3.76	3.74
3.2	3.93	3.91	3.90	3.88	3.86	3.84
3.4	4.03	4.01	4.00	3.98	3.96	3.95
3.6	4.13	4.11	4.10	4.08	4.06	4.05
3.8	4.22	4.21	4.19	4.18	4.16	4.14
4	4.32	4.30	4.29	4.27	4.26	4.24
4.2	4.41	4.39	4.38	4.36	4.35	4.33
4.4	4.50	4.48	4.47	4.46	4.44	4.43
4.6	4.59	4.57	4.56	4.54	4.53	4.51
4.8	4.67	4.66	4.65	4.63	4.62	4.60
5	4.76	4.75	4.73	4.72	4.70	4.69
5.5	4.97	4.95	4.94	4.92	4.91	4.90
6	5.16	5.15	5.14	5.12	5.11	5.10
6.5	5.35	5.34	5.33	5.32	5.30	5.29
7	5.54	5.52	5.51	5.50	5.49	5.48
7.5	5.71	5.70	5.69	5.68	5.67	5.66
8	5.89	5.88	5.86	5.85	5.84	5.83

8.5	6.05	6.04	6.03	6.02	6.01	6.00
9	6.22	6.21	6.20	6.19	6.17	6.16
9.5	6.38	6.37	6.36	6.34	6.33	6.32
10	6.53	6.52	6.51	6.50	6.49	6.48

7.2 Variação de Pressão Durante o Fechamento da Fratura

Conforme visto nos Capítulos 3 e 4, o fluxo de fluido fraturante durante a propagação da fratura cria um gradiente de pressão no sentido poço-extremidade da fratura. As Figuras 4.2 e 4.3 mostram a distribuição de pressão no interior da fratura num determinado instante de propagação.

De acordo com simulações numéricas publicadas por Nolte (1986) e Economides (1989), após cessado o bombeio, continua existindo fluxo de fluido no interior da fratura, durante todo o período de fechamento, devido à redistribuição de fluido fraturante, que migra da região próxima ao poço, onde há maior abertura, para as regiões próximas à extremidade da fratura, onde a vazão de filtração é maior, de tal forma que a razão entre pressão média e pressão máxima no interior da fratura seja constante. Desta forma, o gradiente de pressão no interior da fratura é mantido até que haja seu completo fechamento.

Para o modelo de propagação desenvolvido neste trabalho, a razão entre pressão média e pressão máxima na fratura pode ser obtida a partir das Equações 4.16 e 4.15 :

$$\frac{\overline{\Delta p_l}}{\Delta p_{lw}} = \frac{1,28 \left[\frac{Lq_0 \mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6}}{1,54 \left[\frac{Lq_0 \mu \Delta \sigma^2}{h_R^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6}} = 0,831 \quad (7.34)$$

Pode-se definir ainda, para o modelo desenvolvido neste trabalho, um parâmetro que relacione a abertura média da fratura e a pressão média necessária para manter esta abertura. Da Equação 4.16, tem-se a pressão média no interior da fratura :

$$\overline{\Delta p_1} = 1,28\Delta\sigma \left[\frac{Lq_0\mu}{h_R^4\Delta\sigma^4} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^3 \right]^{1/6}$$

Da Equação 4.21, tem-se a abertura média ou equivalente da fratura :

$$w_{eq} = 1,05 \left[\mu L q_0 h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6}$$

O parâmetro resultante da razão entre a abertura média e a pressão média no interior da fratura é definido como “complacência” , pela seguinte expressão :

$$c_f = \frac{w_{eq}}{\Delta p_1} = 0,82 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) h_R \quad (7.35)$$

A complacência é um parâmetro característico do modelo de propagação e da rocha reservatório, e independe do fluido ou dimensões da fratura. Relaciona abertura e pressão médias da fratura em qualquer instante, seja na propagação ou fechamento.

Durante o fechamento, a variação de volume de uma asa da fratura e a filtração de fluido através das suas faces podem ser relacionadas através do seguinte balanço de massa :

$$\frac{dV}{dt} = - q_L$$

Onde, $V = A_f w_{eq}$, sendo A_f a área total de uma asa da fratura.

$$\text{Logo,} \quad \frac{dV}{dt} = A_f \frac{dw_{eq}}{dt} \quad (7.36)$$

Da Equação 7.35, tem-se :

$$w_{eq} = c_f \overline{\Delta p_1} = 0,82 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) h_R \overline{\Delta p_1} \quad (7.37)$$

Da Equação 7.34, tem-se a relação entre Δp_{1W} e $\overline{\Delta p_1}$:

$$\overline{\Delta p_1} = 0,831 \Delta p_{1W} \quad (7.38)$$

Substituindo a Equação 7.38 na Equação 7.37 :

$$w_{eq} = 0,831 c_f \Delta p_{1W} \quad (7.39)$$

Desta forma, a Equação 7.36 pode ser rescrita em função de Δp_{1W} :

$$\frac{dV}{dt} = 0,831 c_f A_f \frac{d\Delta p_{1W}}{dt} = - q_L \quad (7.40)$$

Resolvendo a Equação 7.40, tem-se :

$$- 0,831 c_f A_f d\Delta p_{1W} = q_L dt$$

$$- 0,831 c_f A_f \int d\Delta p_{1W} = \int q_L dt$$

Integrando ambos os membros, de 0 ($t=t_p$) a Δt_D , e fazendo $\Delta p_{W1} = p_{W1} - \sigma_c$, tem-se :

$$0,831 c_f A_f (p_{WS} - p_W) = \int_{t_p}^t q_L(t, A_p) dt$$

Onde, a integral do 2º membro corresponde ao volume perdido por filtração em uma asa da fratura durante o fechamento, calculado pela Equação 7.29. Então, pode-se escrever :

$$0,831 c_f A_f (p_{WS} - p_W) = 2C_L A_p \sqrt{t_p} [f(\Delta t_D) - f_0]$$

$$p_w(\Delta t_D) = p_{WS} - \frac{2,41C_L A_P \sqrt{t_P}}{c_f A_f} [f(\Delta t_D) - f_0] \quad (7.41)$$

Sendo $\frac{A_P}{A_f} = \frac{h_R L}{h L} = \frac{h_R}{h}$

$$p_w(\Delta t_D) = p_{WS} - \frac{2,41C_L h_R \sqrt{t_P}}{c_f h} [f(\Delta t_D) - f_0]$$

Num gráfico de $p_w(\Delta t_D)$ versus $[f(\Delta t_D) - f_0]$, tem-se uma reta com a seguinte declividade:

$$m = \frac{2,41C_L h_R \sqrt{t_P}}{c_f h} \quad (7.42)$$

Como a pressão de fluido na fratura é decrescente com o tempo, o valor da declividade da reta obtida no gráfico é negativa, sendo “m” igual ao valor absoluto desta declividade.

7.3 Cálculo do Coeficiente Global de Filtração e Dimensões da Fratura

O Coeficiente Global de Filtração da formação em relação ao fluido fraturante pode ser obtido diretamente da Equação 7.42 :

$$C_L = 0,415 \frac{m c_f \bar{h}}{h_R \sqrt{t_P}} \quad (7.43)$$

Substituindo a Equação 7.35 na Equação 7.43 :

$$C_L = 0,34 \frac{(1 - \nu) m \bar{h}}{G \sqrt{t_P}} \quad (7.44)$$

O comprimento de uma asa da fratura pode ser calculado a partir do volume perdido por filtração durante a propagação :

$$V_{LP} = (1 - \eta)V_i \quad \text{onde :}$$

$$V_{LP} = 2C_L A_p \sqrt{t_P} f_0$$

$$A_p = 2 h_R L$$

Então, pode-se escrever :

$$4 C_L h_R \sqrt{t_P} f_0 L = (1 - \eta) V_i$$

$$L = \frac{(1 - \eta)V_i}{4 C_L h_R \sqrt{t_P} f_0} \quad (7.45)$$

Substituindo a Equação 7.44 na Equação 7.45 :

$$L = \frac{(1 - \eta)V_i}{4 h_R \sqrt{t_P} f_0} \times \frac{G \sqrt{t_P}}{0,34(1 - \nu)m \bar{h}}$$

$$L = 0,735 \frac{(1 - \eta) V_i}{h_R f_0 m \bar{h}} \left(\frac{G}{1 - \nu} \right) \quad (7.46)$$

A Equação 5.7, que calcula a altura média da fratura (\bar{h}) em função de L, pode ser utilizada na Equação 7.46. Desta forma, pode-se escrever :

$$L = 0,735 \frac{(1 - \eta) V_i}{h_R f_0 m} \left(\frac{G}{1 - \nu} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{2,86} 1,55^{\frac{-3n'+3}{13n'+17}} k_a^{\frac{-3}{13n'+17}} q_0^{\frac{-3n'}{13n'+17}} h_R^{\frac{-4n'-14}{13n'+17}} \Delta\sigma^{\frac{6n'+6}{13n'+17}} \left(\frac{G}{1 - \nu} \right)^{\frac{-6n'-3}{13n'+17}} L^{\frac{-3}{13n'+17}}$$

$$L = 1,55^{13n'+20} k_a^{-3} \left[\frac{0,257(1-\eta)V_i}{m f_0} \right]^{13n'+17} q_0^{-3n'} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{7n'+14}{13n'+20}} \Delta\sigma^{\frac{6n'+6}{13n'+20}} h_R^{-\frac{17n'-31}{13n'+20}} \quad (7.47)$$

A abertura média da fratura pode ser calculada pela razão entre o volume do pacote de areia e a área da fratura :

$$w_{eq} = \frac{V_i - (V_{LP} + V_{LS})}{h L} = \frac{V_i - 2C_L A_P \sqrt{t_P} f(\Delta t_{CD})}{h L}$$

$$w_{eq} = \frac{V_i - 2C_L h_R L \sqrt{t_P} f(\Delta t_{CD})}{h L} \quad (7.48)$$

Para calcular a abertura da fratura na parede do poço, utiliza-se a Equação 4.18, fazendo $f_1 = 0$. Então :

$$\bar{w}(0) = w_W = 1,25 \left[\mu L q_0 h_R^2 \Delta\sigma^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^3 \right]^{1/6} \quad (7.49)$$

Dividindo-se a Equação 7.49 pela Equação 4.21, tem-se :

$$w_W = 1,19 w_{eq} \quad (7.50)$$

7.4 Cálculos para o Modelo de Propagação Radial

No modo radial de propagação, a fratura caracteriza-se por estar totalmente contida na zona de interesse, não havendo penetração nas zonas adjacentes impermeáveis. Desta forma, toda a área da fratura é permeável e apresenta filtração de fluido durante a propagação.

A Complacência da fratura radial pode ser calculada utilizando a Equação 6.24, que calcula a pressão média na fratura radial :

$$c_f = \frac{w_{eq}}{1,55 \frac{\mu Q_0}{w_{eq}^3}} \quad (7.51)$$

Substituindo a abertura média, na Equação 7.51, pela Equação 6.25 :

$$c_f = 1,25 \left(\frac{1-\nu}{G} \right) R \quad (7.52)$$

Substituindo a Equação 7.52 na Equação 7.41 e fazendo $A_f = A_p$ (área total da fratura igual à área permeável) :

$$p_w(\Delta t_D) = p_{ws} - \frac{2,41 C_L \sqrt{t_P}}{c_f} [f(\Delta t_D) - f_0] \quad (7.53)$$

A Equação 7.53, representada graficamente em termos de p_w versus $[f(\Delta t_D) - f_0]$ corresponde à uma reta com declividade (m) igual a :

$$m = \frac{2,41 C_L \sqrt{t_P}}{c_f}$$

Ou, substituindo o valor da Complacência definido pela Equação 7.52 :

$$m = \frac{1,93 C_L \sqrt{t_P}}{R} \left(\frac{G}{1-\nu} \right) \quad (7.54)$$

O valor do Coeficiente Global de Filtração pode ser calculado diretamente da Equação 7.54 :

$$C_L = \frac{0,52 m R (1-\nu)}{\sqrt{t_P} G} \quad (7.55)$$

Analogamente ao cálculo do comprimento de uma asa da fratura de propagação tridimensional, o raio da fratura radial pode ser calculado a partir do volume filtrado durante a propagação da fratura :

$$V_{LP} = (1 - \eta) V_i$$

onde :

$$V_{LP} = 2C_L A_P \sqrt{t_P} f_0$$

$$A_P = 2 \pi R^2$$

Então, pode-se escrever :

$$4\pi C_L \sqrt{t_P} f_0 R^2 = (1 - \eta) V_i$$

$$R = \sqrt{\frac{(1 - \eta) V_i}{4\pi C_L \sqrt{t_P} f_0}} \quad (7.56)$$

Substituindo a Equação 7.55 na Equação 7.56, obtém-se :

$$R = 0,5 \left[\frac{(1 - \eta) V_i}{m f_0} \left(\frac{G}{1 - \nu} \right) \right]^{1/3} \quad (7.57)$$

Utilizando, agora, o valor de R calculado pela Equação 7.57, a Equação 7.55 pode ser escrita da seguinte forma :

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{t_P}} \left[\frac{(1 - \eta) V_i m^2}{f_0} \left(\frac{1 - \nu}{G} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (7.58)$$

As equações desenvolvidas neste capítulo permitem uma avaliação posterior ao tratamento para verificação dos objetivos do fraturamento em relação ao projeto. A partir de dados de declínio de pressão durante o fechamento da fratura, pode-se calcular a eficiência de

fluxo, o coeficiente global de filtração, a abertura e o comprimento (ou raio) da fratura, de forma a comparar o resultado final da operação com o resultado previsto no programa de fraturamento. Diferentemente do método desenvolvido por Nolte (1979, 1986), o método de análise aqui proposto não é iterativo, uma vez que os valores do expoente “ β ”, para os modelos de fratura desenvolvidos neste trabalho, independem da eficiência de fluxo do tratamento. Esta característica torna o modelo mais ágil e simples de ser utilizado.

Capítulo 8

Estudo Comparativo com Outros Modelos de Fraturamento

Nos capítulos anteriores foi desenvolvido um modelo pseudo-tridimensional de propagação e fechamento de fraturas induzidas em meios homogêneos, isotrópicos e permeáveis. Para que se possa testar a validade do modelo, bem como definir em que situações o mesmo apresenta boa aplicabilidade, faz-se necessário comparar seus resultados com os de outros modelos que sejam, reconhecidamente, aplicáveis a situações práticas.

No presente capítulo são apresentados alguns resultados de simulações realizadas com o modelo proposto, comparando-os com resultados de outros modelos de fraturamento hidráulico encontrados na literatura.

8.1 Simuladores de Fraturamento Hidráulico Utilizados na Comparação de Resultados

Abou-Sayed (1984) publicou um estudo de propagação tridimensional de fraturas induzidas, descrevendo um modelo de simulação de fraturamento hidráulico (HYFRAC) e os resultados obtidos a partir desta modelagem, para várias situações práticas. Boutéca (1987), Meyer (1989) e Rueda (1994), entre outros, utilizaram o trabalho de Abou-Sayed para comparação de resultados. Garcia (1996), propôs um modelo pseudo-tridimensional de propagação de fraturas, com base no modelo de Shah e Kobayashi, apresentando uma comparação de resultados com os demais simuladores, para as situações propostas no trabalho de Abou-Sayed.

No presente trabalho são utilizados os mesmos dados de entrada de Abou-Sayed (1984), em virtude da disponibilidade de resultados, na literatura, de modelos que utilizam esses dados.

Os resultados obtidos são comparados com os modelos de Abou-Sayed (HyFrac), Boutéca (Frank), Rueda (SAHFrac), Meyer (MFrac II) e Garcia (Q3DFrac).

O modelo de Abou-Sayed baseia-se, de forma geral, na solução do problema de fluxo bidimensional de um fluido de reologia não newtoniana na fratura acoplado ao problema de mecânica da fratura linear elástica. Dos modelos utilizados no presente trabalho, é o único totalmente tridimensional, sendo seu desenvolvimento matemático feito pelo método de Elementos Finitos.

O modelo de Boutéca baseia-se na teoria de Shah e Kobayashi para fraturas planas elípticas. Adota uma equação polinomial para descrever a distribuição de pressão no interior da fratura e apresenta um desenvolvimento matemático na forma “quasi” analítica.

O modelo de Rueda é muito similar ao de Boutéca, diferindo apenas no número de termos do polinômio que descreve a distribuição de pressão na fratura. O modelo de Garcia, similar ao de Boutéca e Rueda, apresenta modificações na determinação da perda de fluido para a formação e do comportamento reológico do fluido fraturante.

O modelo de Meyer, muito utilizado na indústria, é um modelo pseudo-tridimensional, aplicável a um grande número de situações, incluindo contrastes assimétricos de tensões, múltiplas camadas adjacentes, contrastes de propriedades mecânicas entre as rochas reservatório e selantes e vazões de tratamento variáveis. No presente trabalho só são considerados aqueles resultados que possam ser comparados com o modelo proposto.

8.2 Exemplos de Propagação Radial

A Tabela 8.1 apresenta os dados de entrada para cálculo dos parâmetros de uma fratura radial, extraídos de Abou-Sayed (1984). O valor do Módulo de Elasticidade, considerado muito baixo se comparado com situações práticas, pode ser considerado apenas para fins didáticos.

Tabela 8.1 - Dados de Entrada para o Caso 1

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	517,10 MPa (75000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0
Tenacidade ao Fraturamento (K_{Ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	Não disponível
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	5,75 Pa.s ⁿ
Índice de Comportamento (n')	0,39
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

A Tabela 8.2 apresenta os resultados para os vários modelos consultados na literatura e o modelo proposto no presente trabalho (SP3D).

Tabela 8.2 - Resultados obtidos para o Caso 1

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	258,80	0,180	89,00	41,91	57,57	50,99
FRANK	254,00	0,150	90,20	37,34	57,70	55,59
MFrac II	-	0,160	-	41,15	57,48	57,54
HYFRAC	255,30	0,240	89,87	33,02	59,28	68,20
Q3DFrac	260,70	0,157	89,40	38,55	55,03	55,00
SP3D	238,95	0,125	89,34	28,35	64,80	64,80

Pode-se observar que o valor encontrado para a meia-altura da fratura é igual ao valor do comprimento de uma asa, uma vez que, devido à ausência de contraste de tensões, foi utilizado o modelo radial para o cálculo dos parâmetros da fratura, uma vez que o modelo SP3D não considera a tenacidade ao fraturamento como fator de contenção. Desta forma, o modelo considera que a fratura se propaga com a mesma velocidade nas direções vertical e horizontal, caracterizando um crescimento radial. De acordo com Abou-Sayed, o baixo valor de Módulo de Elasticidade faz deste exemplo um caso meramente teórico. O modelo que mais se aproximou dos resultados do SP3D foi o modelo HYFRAC (Abou-Sayed). Nota-se, também, que apesar das aberturas máximas terem sido bem maiores que a abertura máxima do modelo SP3D, o volume final da fratura apresentou aproximação razoável, o que demonstra que as aberturas médias têm valores próximos ao do modelo proposto.

Tabela 8.3 - Dados de Entrada para o Caso 2

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	5171,0 MPa (750000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0
Tenacidade ao Fraturamento (K_{ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	Não disponível
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	5,75 Pa.s ^{n'}
Índice de Comportamento (n')	0,39
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

O Caso 2 difere do Caso 1 apenas em relação ao Módulo de Elasticidade, que é dez vezes maior. Todos os demais dados de entrada são iguais ao do caso anterior. A Tabela 8.4 apresenta os resultados obtidos para o Caso 2.

Tabela 8.4 - Resultados obtidos para o Caso 2

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	248,20	0,640	74,70	18,54	86,78	84,51
FRANK	255,60	0,500	72,60	15,24	89,67	93,59
MFrac II	-	0,390	-	14,48	99,82	99,79
HYFRAC	253,40	0,380	74,10	12,70	87,45	102,50
Q3DFrac	248,70	0,464	70,90	14,79	89,43	89,43
SP3D	244,39	0,320	73,77	14,09	99,50	99,50

Pode-se observar, pelos resultados da Tabela 8.4, que os resultados obtidos para o modelo SP3D estão bastante consistentes, apresentando boa aproximação com os demais modelos. Os resultados estão bem próximos daqueles obtidos pelo modelo MFrac II, que também é um modelo pseudo tridimensional de desenvolvimento semi-analítico. É importante, mais uma vez, ressaltar que os valores de comprimento e meia altura são iguais devido à utilização do modelo SP3D Radial, que calcula um único valor de raio da fratura, em qualquer direção, resultando, sempre, em uma fratura de seção circular.

Nota-se que, no caso de valores mais altos do Módulo de Elasticidade (Caso 2), os valores encontrados com o simulador SP3D foram mais próximos dos demais modelos do que no caso de baixos valores daquele parâmetro (Caso 1).

8.3 Exemplos de Propagação Tridimensional Não-Radial

São mostrados, a seguir, outros casos extraídos do trabalho de Abou-Sayed, com resultados obtidos através de vários simuladores, para propagação tridimensional com contenção vertical. Todos os modelos utilizados neste trabalho, com a finalidade de comparação de resultados, admitem hipótese simplificadora similar à do modelo proposto, no que diz respeito à inexistência de contraste de Módulo de Elasticidade (E) e Coeficiente de Poisson (ν) entre a zona de interesse e as adjacentes a ela.

O Caso 3, a exemplo do Caso 1, apresenta um valor muito baixo para o Módulo de Elasticidade, não sendo representativo para fins práticos. A Tabela 8.5 apresenta os dados de entrada para o Caso 3. Nota-se, agora, a existência de contraste de tensões confinantes ($\Delta\sigma$).

Tabela 8.5 - Dados de Entrada para o Caso 3

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	517,10 MPa (75000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0,69 MPa (100 psi)
Tenacidade ao Fraturamento (K_{Ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	68,00 m
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	5,75 Pa.s ⁿ
Índice de Comportamento (n')	0,39
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

Tabela 8.6 - Resultados obtidos para o Caso 3

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	249,40	0,240	90,30	52,58	69,59	35,99
FRANK	254,10	0,210	91,60	47,24	80,19	33,25
MFrac II	-	0,240	-	48,77	70,89	34,55
HYFRAC	257,20	0,230	92,60	50,04	58,09	38,36
Q3DFrac	248,00	0,238	89,40	43,86	74,13	39,12
SP3D	244,50	0,179	80,40	42,39	67,95	36,73

O Caso 4 difere do anterior apenas em relação ao Módulo de Elasticidade, mantendo inalterados os demais dados de entrada, conforme mostra a Tabela 8.7.

Tabela 8.7 - Dados de Entrada para o Caso 4

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	5171,0 MPa (750000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0,69 MPa (100 psi)
Tenacidade ao Fraturamento (K_{Ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	68,00 m
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	5,75 Pa.s ^{n'}
Índice de Comportamento (n')	0,39
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

Tabela 8.8 - Resultados obtidos para o Caso 4

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	251,90	0,850	76,80	21,84	103,27	63,51
FRANK	250,60	0,689	74,70	17,53	112,20	65,59
MFrac II	-	0,600	-	19,05	117,59	60,44
HYFRAC	249,60	0,630	80,00	19,05	130,09	76,40
Q3DFrac	255,80	0,707	74,40	18,87	110,29	65,17
SP3D	246,52	0,592	73,53	14,24	116,19	76,54

Observa-se que os resultados obtidos para o Modelo SP3D estão bastante coerentes com os demais modelos, diferindo um pouco apenas no valor da abertura máxima da fratura. Como o volume final da fratura obtido pelo modelo está bastante próximo dos demais modelos, conclui-se que, apesar da diferença entre os valores da abertura máxima, a abertura média da fratura obtida pelo modelo está bastante próxima dos demais modelos.

A pressão máxima de propagação obtida pelo Modelo SP3D ficou bastante próxima do valor obtido pelo Modelo MFrac II, que, a exemplo daquele, é um modelo pseudo tridimensional.

O Caso 5, mostrado abaixo, apresenta uma modificação em relação ao fluido fraturante, mantendo os demais dados de entrada do Caso 4.

Tabela 8.9 - Dados de Entrada para o Caso 5

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	5171,0 MPa (750000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0,69 MPa (100 psi)
Tenacidade ao Fraturamento (K_{Ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	68,00 m
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	3,351 Pa.s ⁿ
Índice de Comportamento (n')	0,75
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

Tabela 8.10 - Resultados obtidos para o Caso 5

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	234,00	0,850	83,40	21,34	99,00	61,40
FRANK	242,20	0,760	76,10	18,80	100,19	67,59
MFrac II	-	0,610	-	19,81	108,17	62,45
HYFRAC	242,00	0,760	84,00	20,32	115,00	78,50
Q3DFrac	242,50	0,697	74,10	18,38	107,61	64,81
SP3D	247,06	0,538	74,76	15,18	117,39	71,65

A exemplo do que já havia sido observado no Caso 4, a abertura máxima calculada pelo Modelo SP3D é um pouco menor do que as aberturas calculadas pelos demais modelos. Como o volume final da fratura está bastante consistente com o dado de entrada (250 m³), conclui-se que o valor da abertura média da fratura obtido pelo modelo está coerente com os demais simuladores.

O Caso 6, mostrado a seguir, apresenta os mesmos dados de entrada do caso anterior, diferindo apenas quanto ao fluido, que passa a ter reologia newtoniana, com viscosidade muito próxima à da água. Esta situação não é usual na prática, uma vez que os fluidos fraturantes apresentam viscosidades bem mais elevadas.

Tabela 8.11 - Dados de Entrada para o Caso 6

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	5171,0 MPa (750000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	0,69 MPa (100 psi)
Tenacidade ao Fraturamento (K_{ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	68,00 m

Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	0,0009576 Pa.s ⁿ
Índice de Comportamento (n)	1
Coefficiente Global de Filtração (C _L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

Tabela 8.12 - Resultados obtidos para o Caso 6

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	235,60	0,340	67,70	9,65	233,87	41,56
FRANK	-	-	-	-	-	-
MFrac II	-	0,250	-	6,35	446,99	35,75
HYFRAC	238,30	0,530	69,00	21,59	202,69	50,20
Q3DFrac	241,50	0,248	54,20	5,84	261,90	46,84
SP3D	240,08	0,216	55,44	4,68	431,46	37,31

Observa-se que os resultados obtidos para o Caso 6 apresentam certa discrepância. O Modelo SP3D, objeto do presente trabalho, apresentou valores próximos aos resultados do Modelo MFrac II, que é também um modelo pseudo tridimensional, que adota hipóteses básicas muito parecidas com a do SP3D. O trabalho de Boutéca (FRANK) não apresentou resultados para o Caso 6. O modelo de Abou Sayed (TeraFrac) apresentou valor da abertura final inconsistente com a teoria, uma vez que, para um fluido de baixíssima viscosidade, como é o do caso em questão, a abertura da fratura deve apresentar valores mais baixos, fato que pode ser confirmado pelos resultados dos demais modelos.

Por último, o Caso 7 é apresentado a seguir, com os dados de entrada mostrados na

Tabela 8.13. Observa-se que, neste caso, o contraste de tensões ($\Delta\sigma$) foi aumentado para 3,45 MPa (500 psi). O fluido utilizado neste caso volta a ser de reologia de potência. Os demais dados são iguais aos do caso anterior.

Tabela 8.13 - Dados de Entrada para o Caso 7

Dados da Formação	
Módulo de Elasticidade (E)	5171,0 MPa (750000 psi)
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20
Contraste de Tensões ($\Delta\sigma$)	3,45 MPa (500 psi)
Tenacidade ao Fraturamento (K_{Ic})	1,1 MPa.m ^{1/2} (1000 psi.in ^{1/2})
Espessura da Zona de Interesse (h_R)	68,00 m
Dados de Fluido e Tratamento	
Índice de Consistência (k)	3,351 Pa.s ⁿ
Índice de Comportamento (n)	0,75
Coefficiente Global de Filtração (C_L)	6,395 x 10 ⁻⁶ m/s ^{1/2}
Coefficiente de "Spurt Loss"	0,00102 m ³ /m ²
Vazão Total	0,106 m ³ /s (40 bbl/min)
Volume Total	250 m ³ (1572 bbl)

Tabela 8.14 - Resultados obtidos para o Caso 7

Modelo	Volume Total (m ³)	Pressão Máxima (MPa)	Eficiência (%)	Abertura Máxima (mm)	Comprimento da asa (m)	Meia Altura (m)
SAHFrac	272,10	1,060	79,70	27,94	152,13	39,52
FRANK	267,40	0,980	80,00	25,15	171,08	36,15
MFrac II	-	1,040	-	23,62	145,08	36,74
HYFRAC	268,60	0,950	83,00	22,86	134,69	36,80
Q3DFrac	254,50	1,092	76,80	21,83	150,87	43,12
SP3D	254,19	0,933	75,14	23,30	133,59	38,28

Observa-se, para o Caso 7, que os valores obtidos para todos os modelos são bastante coerentes. Isso pode ser explicado pelo fato do maior contraste de tensões em relação aos casos anteriores, fazendo com que a tenacidade ao fraturamento tenha uma contribuição muito pequena na contenção do crescimento vertical. Desta forma, os modelos que não consideram a tenacidade ao fraturamento apresentam valores muito parecidos com aqueles que levam em conta esse fator.

Com base nos resultados obtidos nos sete exemplos mostrados neste capítulo, pode-se dizer que o Modelo SP3D, objeto do presente trabalho, apresenta resultados bastante coerentes com os demais modelos disponíveis na literatura. Os resultados apresentados são, também, bastante consistentes no que diz respeito à variação dos dados de entrada, seja em relação ao fluido fraturante ou em relação à formação fraturada.

Capítulo 9

Resultados Experimentais

Neste capítulo são apresentados alguns resultados obtidos a partir de simulações físicas realizadas no Simulador de Fraturamento Hidráulico do Laboratório de Estimulação da UNICAMP. São descritos os equipamentos utilizados nos ensaios, fluido fraturante, corpos de prova e procedimentos para execução dos experimentos. São mostrados alguns resultados de simulações e comparados com os resultados do modelo teórico.

9.1 Descrição do Simulador Físico de Fraturamento Hidráulico

O simulador físico de fraturamento hidráulico utilizado para os ensaios deste trabalho é composto de uma célula de carga de aço, projetada para ensaios de corpos de prova cúbicos de 10 cm de lado. As tensões confinantes são aplicadas sobre os corpos de prova através de macacos planos infláveis, colocados entre cada face do corpo de prova e a célula. Uma bomba alternativa Waters é utilizada para a pressurização dos macacos planos. A pressão de cada macaco, bem como a pressão de injeção aplicada no corpo de prova, são medidas por meio de transdutores de pressão, conectados a um sistema de aquisição de dados, composto por um microcomputador Pentium 200 e uma placa de aquisição de dados National.

A Figura 9.1 mostra a célula de carga utilizada nos ensaios, com o corpo de prova no seu interior (encoberto), os macacos planos e os transdutores de pressão. Ao fundo, pode-se observar os painéis indicativos de pressão, conectados aos transdutores, bem como a placa de

aquisição de dados conectada ao microcomputador. Atrás da célula, pode ser vista a bomba alternativa Waters, que é utilizada tanto para a pressurização dos macacos, quanto para o fraturamento propriamente dito. Ao lado da bomba, pode-se observar o painel de medidores de pressão, utilizado para indicação de pressão na saída da bomba.

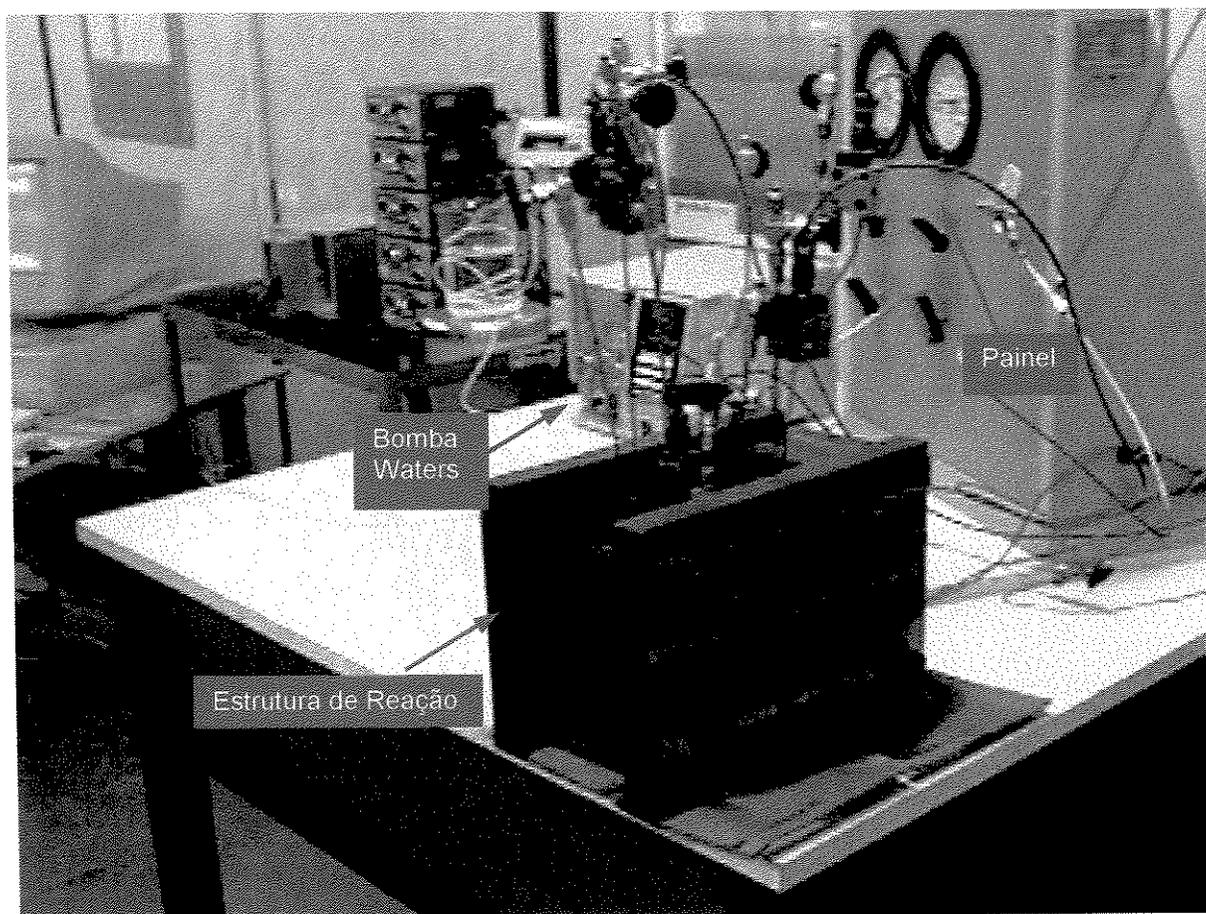


Figura 9.1 - Vista geral do Simulador Físico de Fraturamento Hidráulico

Uma balança eletrônica de precisão é utilizada em conjunto com os demais equipamentos de aquisição da dados, a fim de registrar a massa de fluido que é injetada no corpo de prova durante o fraturamento, de forma que se possa controlar o volume de fluido fraturante efetivamente utilizado no processo de propagação da fratura.

A Figura 9.2 mostra a célula, de outro ângulo, onde pode-se observar o corpo de prova no seu interior, com os macacos planos e seus respectivos transdutores de pressão.

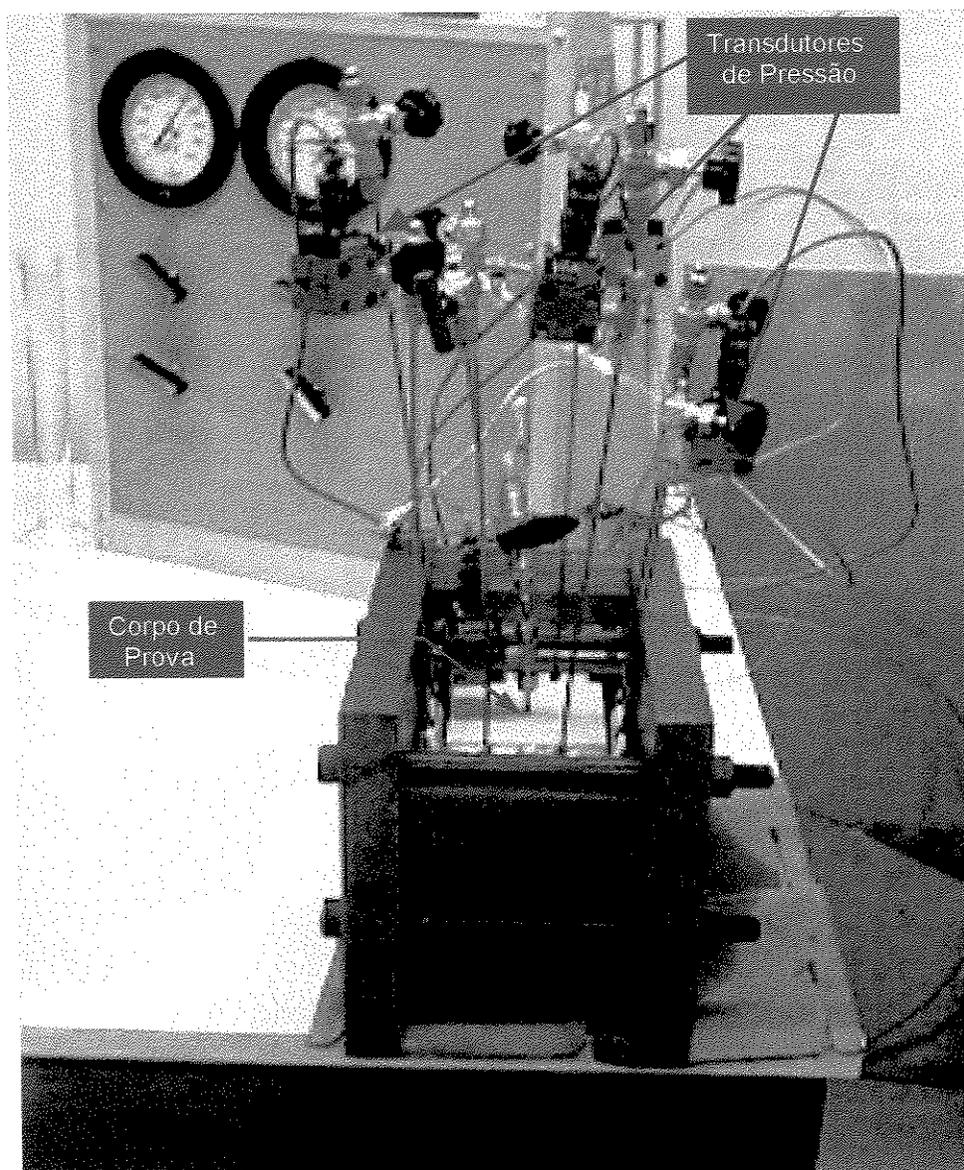


Figura 9.2 - Célula de carga com corpo de prova

9.2 Corpos de Prova e Fluido Fraturante

Nos ensaios de laboratório foram utilizados corpos de prova de gesso, de formato cúbico, com 10 cm de lado. A escolha do gesso como matéria-prima na confecção dos blocos foi baseada em outros trabalhos similares publicados (Abass, 1992 e Kim, 1991). O gesso, além do seu baixo custo, mostrou-se de fácil manuseio e apresentou bons resultados nos ensaios de propagação de fraturas. O gesso utilizado apresentou, em ensaios de laboratório, um Módulo de Elasticidade igual a 1,00 GPa e Coeficiente de Poisson igual a 0,39.

A Figura 9.3 mostra alguns corpos de prova utilizados nos ensaios de fraturamento realizados no presente trabalho, onde pode-se observar as fraturas radiais registradas nos corpos por meio de corante adicionado ao fluido.

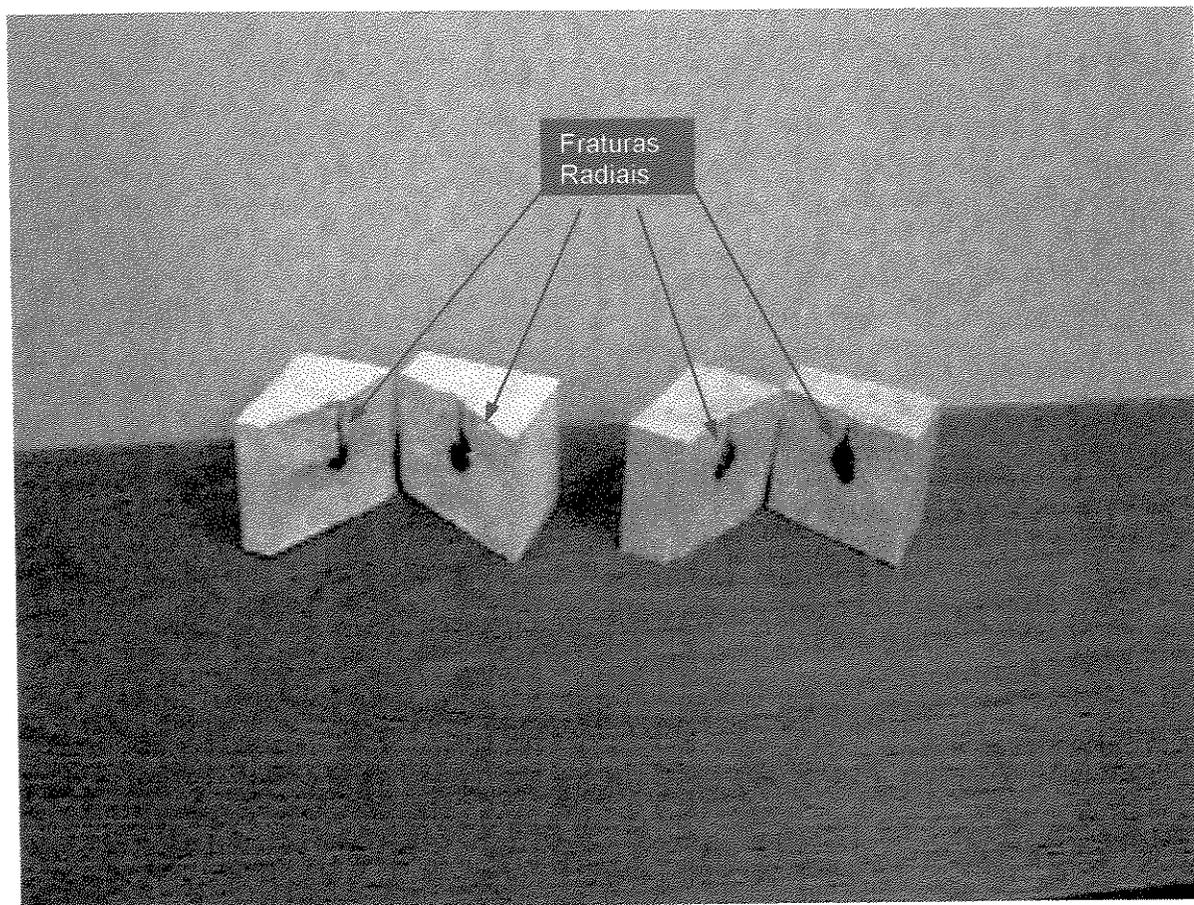


Figura 9.3 - Corpos de prova fraturados

O fluido fraturante utilizado nos ensaios foi óleo à base de silicone, de reologia newtoniana, de viscosidade absoluta igual a 4950 cp. A alta viscosidade do fluido foi bastante adequada ao tipo de ensaio, uma vez que proporcionou uma baixa velocidade de propagação da fratura. Desta forma, foi possível limitar o crescimento da fratura, evitando atingir os limites do corpo de prova.

Este fato pode ser melhor compreendido observando-se as Equações 4.45 e 6.35, onde o comprimento e raio da fratura e, conseqüentemente, suas derivadas em relação ao tempo, decrescem com o aumento da viscosidade absoluta.

A Figura 9.4 mostra o fluido utilizado, ao lado de um corpo de prova e um macaco hidráulico plano. Observa-se que o fluido é tingido com um corante (tinta óleo), a fim de deixar a fratura registrada no corpo de prova.

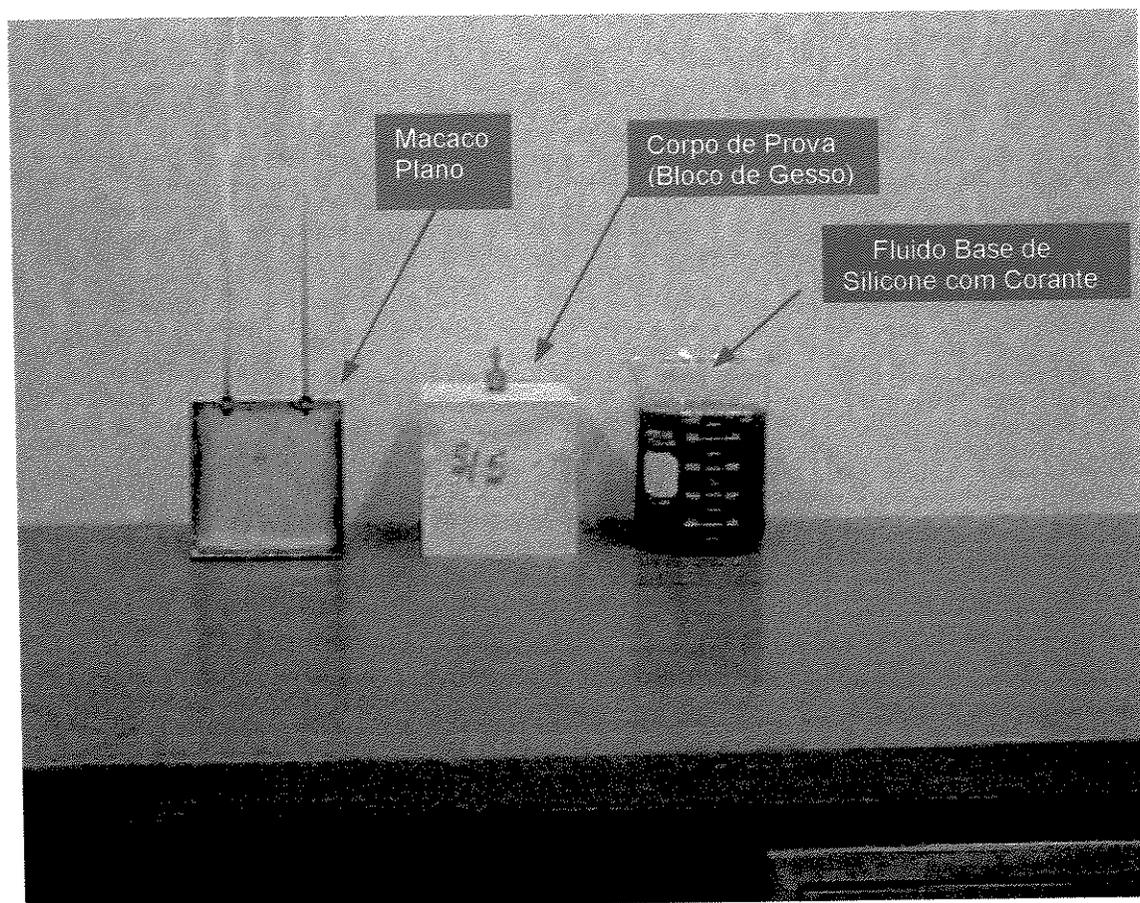


Figura 9.4 - Macaco plano, corpo de prova e fluido com corante

9.3 Objetivos e Procedimento de Ensaio

Os ensaios de laboratório foram realizados com o objetivo de validar experimentalmente os modelos de propagação de fratura desenvolvidos neste trabalho. Devido a uma limitação física do simulador utilizado, não foi possível simular um contraste de tensões confinantes do tipo degrau. Desta forma, os resultados obtidos nos ensaios foram aplicáveis somente ao modelo de propagação radial, que não considera nenhum contraste de tensões na zona fraturada.

Os ensaios foram realizados com vazão de fluido igual a 4 ml/min. O aspecto crítico dos ensaios que, por isso, mereceu maiores cuidados, foi o controle do crescimento da fratura, a fim de que a mesma não atingisse os limites do corpo de prova e inutilizasse os resultados. Deste modo, a vazão utilizada nos ensaios, bem como a alta viscosidade do fluido, mostraram-se bastante adequadas aos seus objetivos.

Foram utilizados dois ciclos de propagação. O primeiro ciclo, realizado com fluido colorido, teve como objetivo a propagação da fratura propriamente dita e a análise de declínio de pressão durante o fechamento. Por meio da análise de declínio de pressão, foram utilizadas as equações desenvolvidas nos Capítulos 6 e 7, para cálculo do coeficiente global de filtração e do raio da fratura, que foi, então, comparado com o valor do raio de fratura medido diretamente no corpo de prova.

O segundo ciclo, realizado com fluido sem corante, teve por objetivo constatar a propagação de fratura no primeiro ciclo, por meio de comparação entre pressão de quebra (1º ciclo) e pressão de reabertura (2º ciclo). A diferença entre estes dois valores de pressão corresponde à resistência do corpo de prova à tração. O segundo ciclo foi prolongado até a ruptura completa do bloco. Com o bloco rompido, foi possível observar a fratura estampada pelo fluido colorido utilizado no primeiro ciclo e, desta forma, medir diretamente o valor do raio.

Os ensaios foram realizados com tensões confinantes diversas. Foi possível observar que, para baixos valores de tensões confinantes horizontais (abaixo de 200 psi), as fraturas obtidas foram sempre verticais, independentemente de haver ou não tensão confinante vertical. Pode-se concluir, desta forma, que o fluido fraturante utilizado nos ensaios apresenta, nestes casos, comportamento de fluido não penetrante. Para valores de tensões confinantes horizontais acima de 200 psi, a não aplicação de tensão vertical resultou, em todos os casos, em fraturas horizontais.

A Figura 9.5 mostra uma curva típica de pressão versus tempo, relativa aos ensaios realizados neste trabalho. Pode-se observar a existência de dois ciclos de propagação, conforme relatado anteriormente.

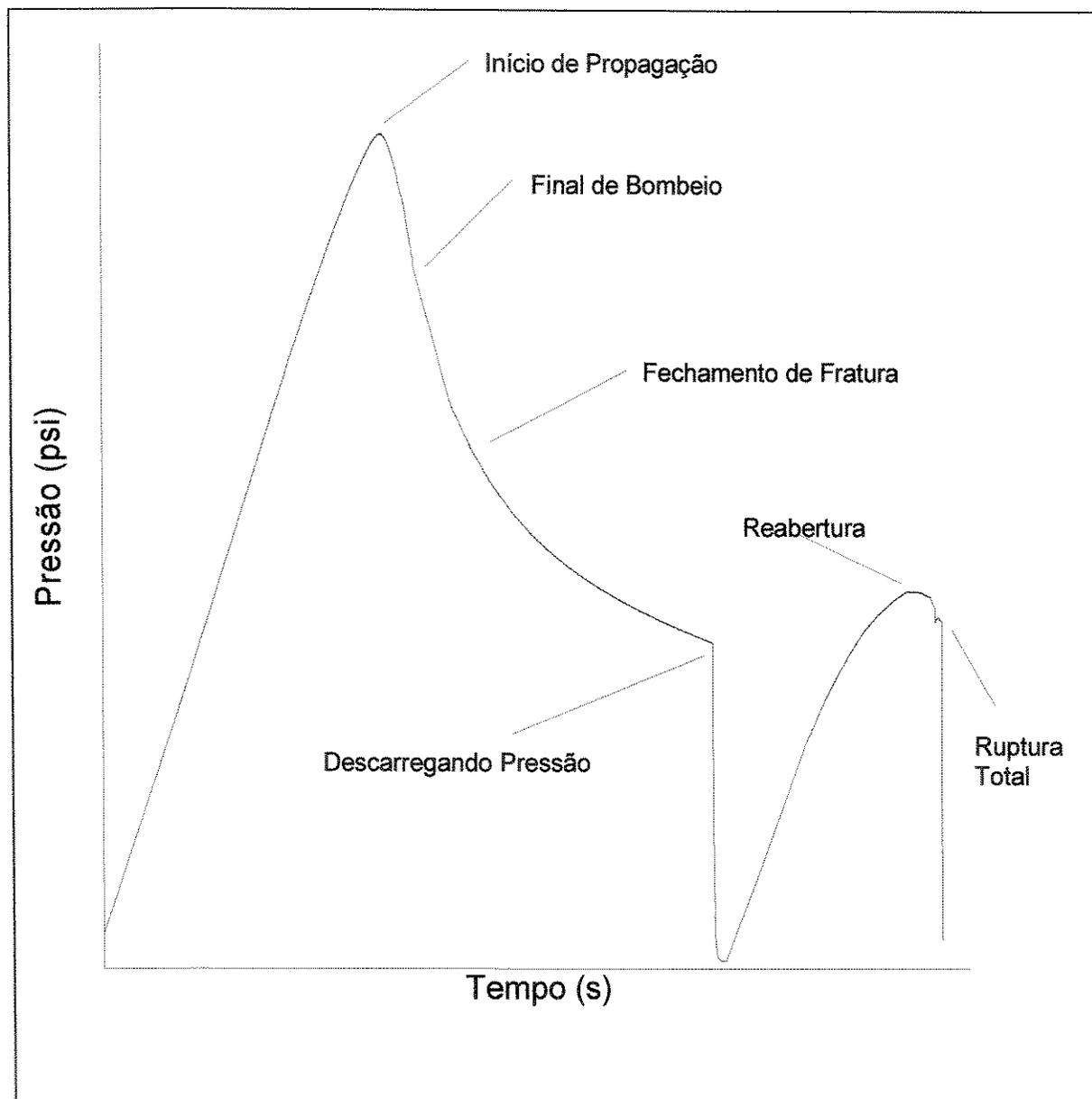


Figura 9.5 - Curva característica de pressão dos ensaios de fraturamento

Como visto na Equação 6.18, observa-se que a pressão de propagação da fratura radial apresenta comportamento decrescente com o tempo. Pode-se observar, também, a partir da figura que, com a ruptura total do corpo de prova a pressão cai, bruscamente, para valores próximos de zero.

9.4 Alguns Resultados de Ensaio Comparados com Resultados do Modelo Teórico

Nesta seção são mostrados alguns resultados de ensaios de laboratório e a comparação entre os raios de fratura obtidos e os valores calculados a partir do modelo matemático. Como os ensaios são repetitivos, uma vez que não houve alteração dos parâmetros de tratamento (vazão, material do corpo de prova e viscosidade do fluido) de um ensaio para outro, os resultados apresentam poucas variações. Deste modo, são mostrados apenas aqueles casos com melhor qualidade de registro de dados.

CASO A

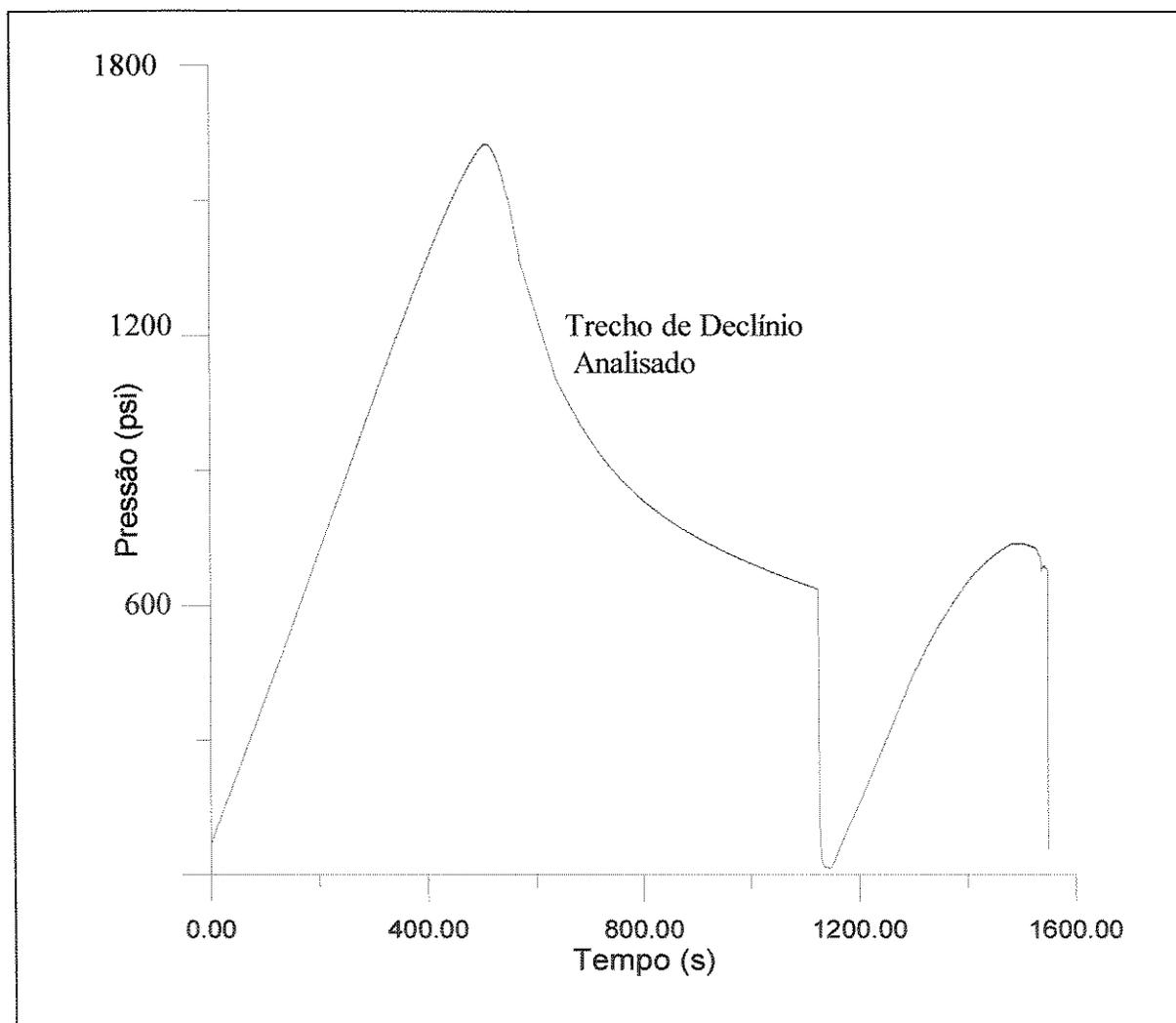


Figura 9.6 - Curva de pressão de propagação e fechamento do Caso A

A Figura 9.7 mostra a curva de pressão versus $f(\Delta t_D)$ para o Caso A . Baseado na Equação 7.9, para um índice de comportamento (n') igual a 1, o expoente “ β ” é igual a 0,84. Fazendo-se a interpolação, na Tabela 7.1, para valores de “ β ” situados entre 0,8 e 0,9 , obtém-se os valores de $f(\Delta t_D)$. O tempo de propagação (t_p) é igual a 75 s e o volume injetado (V_i) para uma vazão de 4 ml/min, é igual a 5 ml.

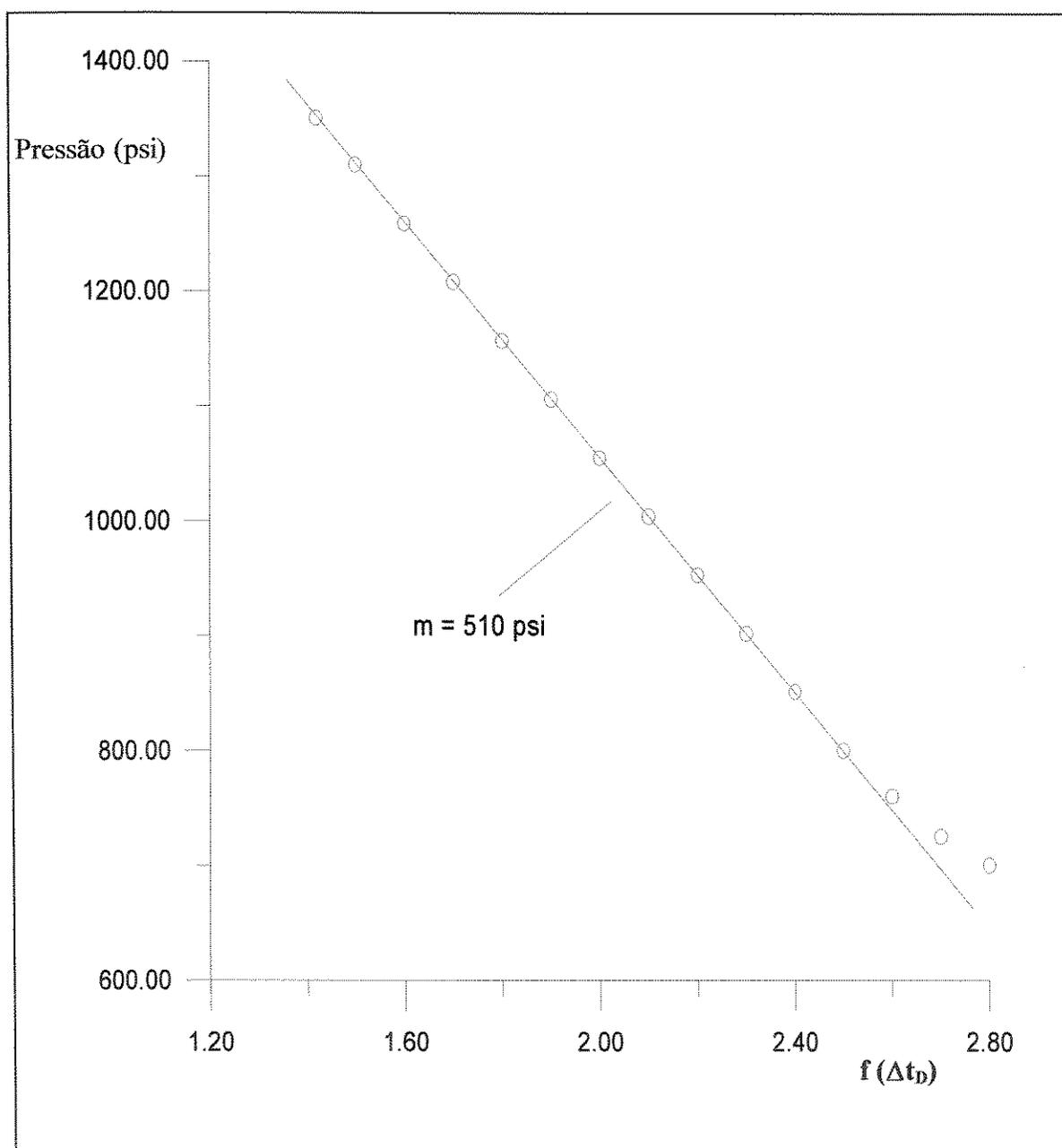


Figura 9.7 - Curva de declínio de pressão para o Caso A

Diretamente da curva, obtém-se a declividade do trecho linear igual a 3,5 MPa (510 psi).

A Eficiência de Fluxo pode ser calculada pela Equação 7.33, fazendo $f(\Delta t_{CD}) = 2,86$.

$$\eta = \frac{f(\Delta t_{CD}) - f_0}{f(\Delta t_{CD})} = \frac{2,86 - 1,41}{2,86} = 0,51$$

Utilizando a Equação 7.57 para o cálculo do raio da fratura, obtém-se o seguinte resultado:

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-\eta)V_i}{m f_0} \left(\frac{G}{1-\nu} \right) \right]^{1/3}$$

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-0,51) \times 5 \times 10^{-6}}{3,5 \times 1,41} \left(\frac{350}{1-0,39} \right) \right]^{1/3} = 0,032 \text{ m}$$

O valor do raio da fratura, medido diretamente no corpo de prova foi igual a 0,029 m. O resultado calculado pelo modelo apresenta, portanto, uma diferença de aproximadamente 9 % em relação ao resultado do ensaio.

O Coeficiente Global de Filtração é calculado pela Equação 7.58 :

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{t_P}} \left[\frac{(1-\eta)V_i m^2}{f_0} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \right]^{1/3}$$

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{75}} \left[\frac{(1-0,51) \times 5 \times 10^{-6} \times 3,5^2}{1,41} \left(\frac{1-0,39}{350} \right)^2 \right]^{1/3} = 1,2 \times 10^{-5} \text{ m}/\sqrt{\text{min}}$$

CASO B

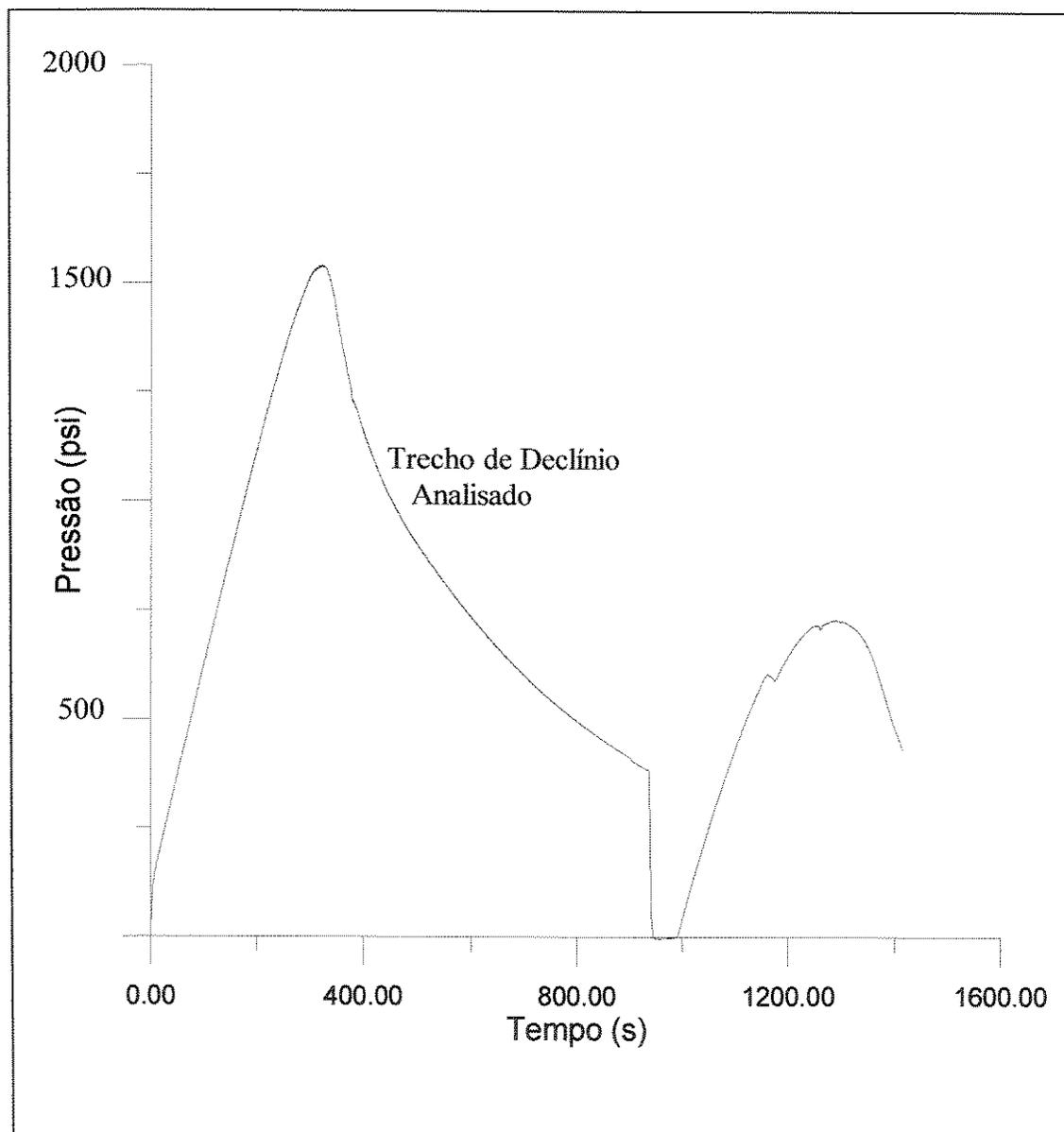


Figura 9.8 - Curva de pressão de propagação e fechamento do Caso B

A Figura 9.9 mostra a curva de pressão versus $f(\Delta t_D)$ para o Caso B. Baseado na Equação 7.9, para um índice de comportamento (n') igual a 1, o expoente " β " é igual a 0,84. Fazendo-se a interpolação, na Tabela 7.1, para valores de " β " situados entre 0,8 e 0,9, obtém-se os valores de $f(\Delta t_D)$. O tempo de propagação (t_p) é igual a 50 s (0,83 min) e o volume injetado, para uma vazão de 4,00 ml/min, é igual a 3,30 ml.

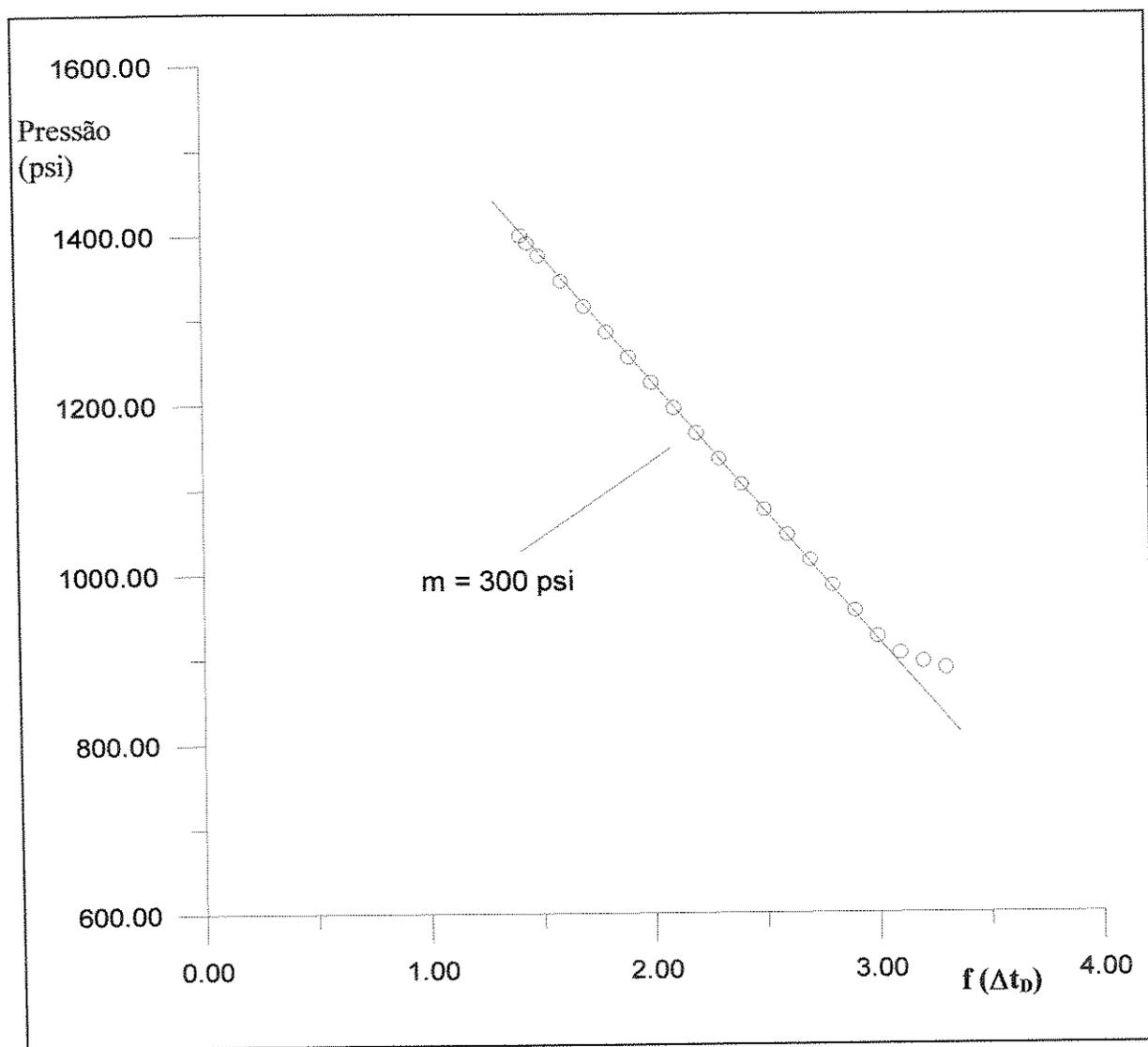


Figura 9.9 - Curva de declínio de pressão para o Caso B

Diretamente da curva, obtém-se a declividade do trecho linear igual a 2,1 MPa (300 psi).

A Eficiência de Fluxo pode ser calculada pela Equação 7.33, fazendo $f(\Delta t_{CD}) = 4,27$.

$$\eta = \frac{f(\Delta t_{CD}) - f_0}{f(\Delta t_{CD})} = \frac{4,27 - 1,41}{4,27} = 0,67$$

Utilizando a Equação 7.57 para o cálculo do raio da fratura, obtém-se o seguinte resultado:

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-\eta)V_i}{m f_0} \left(\frac{G}{1-\nu} \right) \right]^{1/3}$$

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-0,67) \times 3,3 \times 10^{-6}}{2,1 \times 1,41} \left(\frac{350}{1-0,39} \right) \right]^{1/3} = 0,028 \text{ m}$$

O valor do raio da fratura, medido diretamente no corpo de prova foi igual a 0,025 m. O resultado calculado pelo modelo apresenta, portanto, uma diferença de aproximadamente 12 % em relação ao resultado do ensaio.

O Coeficiente Global de Filtração é calculado pela Equação 7.58 :

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{t_P}} \left[\frac{(1-\eta)V_i m^2}{f_0} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \right]^{1/3}$$

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{50}} \left[\frac{(1-0,67) \times 3,3 \times 10^{-6} \times 2,1^2}{1,41} \left(\frac{1-0,39}{350} \right)^2 \right]^{1/3} = 8,01 \times 10^{-6} \text{ m}/\sqrt{\text{min}}$$

CASO C

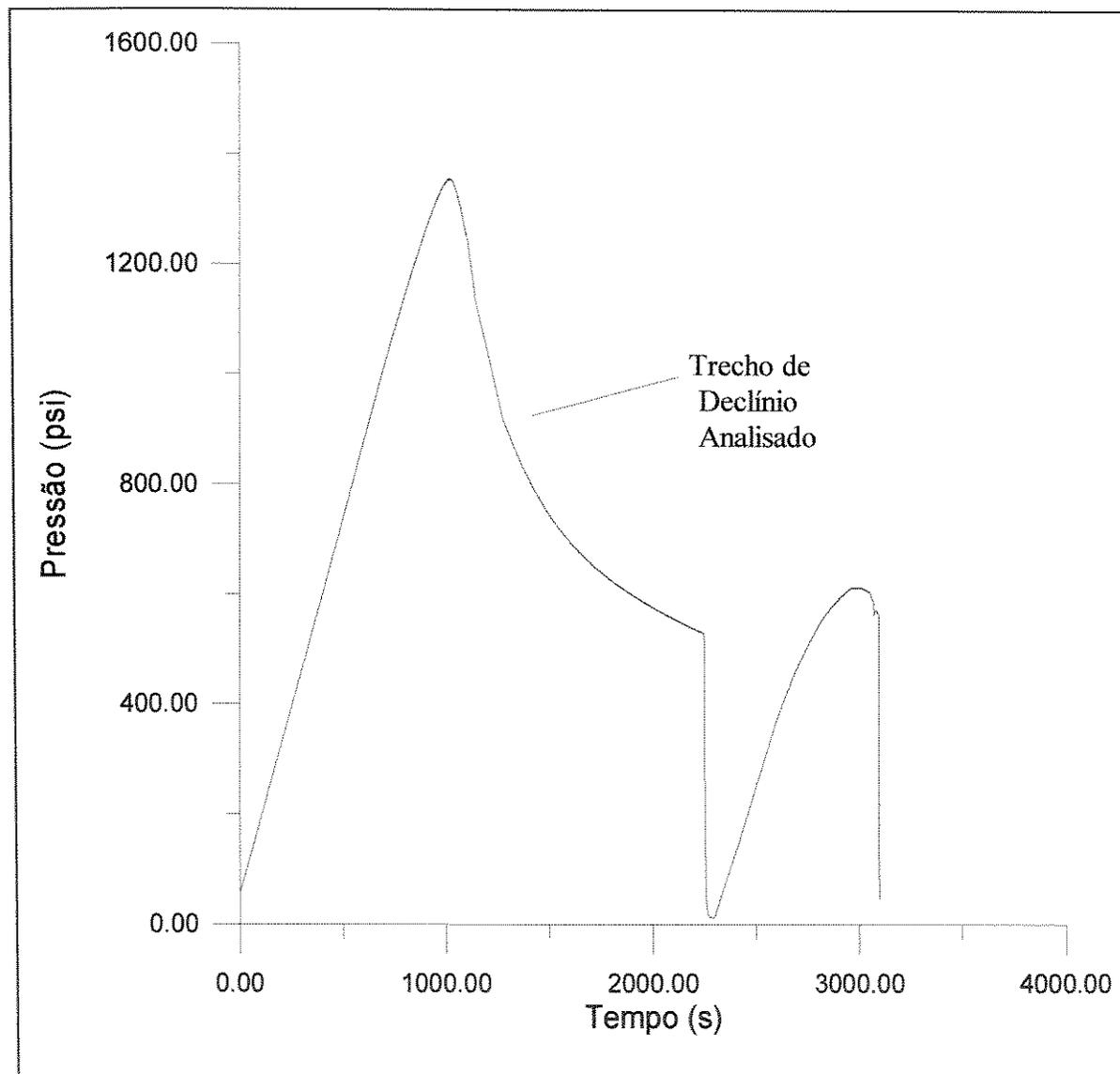


Figura 9.10 - Curva de pressão de propagação e fechamento do Caso C

A Figura 9.11 mostra a curva de pressão versus $f(\Delta t_D)$ para o Caso C. Baseado na Equação 7.9, para um índice de comportamento (n') igual a 1, o expoente " β " é igual a 0,84. Fazendo-se a interpolação, na Tabela 7.1, para valores de " β " situados entre 0,8 e 0,9, obtém-se os valores de $f(\Delta t_D)$. O tempo de propagação (t_p) é igual a 75 s (1,25 min) e o volume injetado, para uma vazão de 4,00 ml/min, é igual a 5,0 ml.

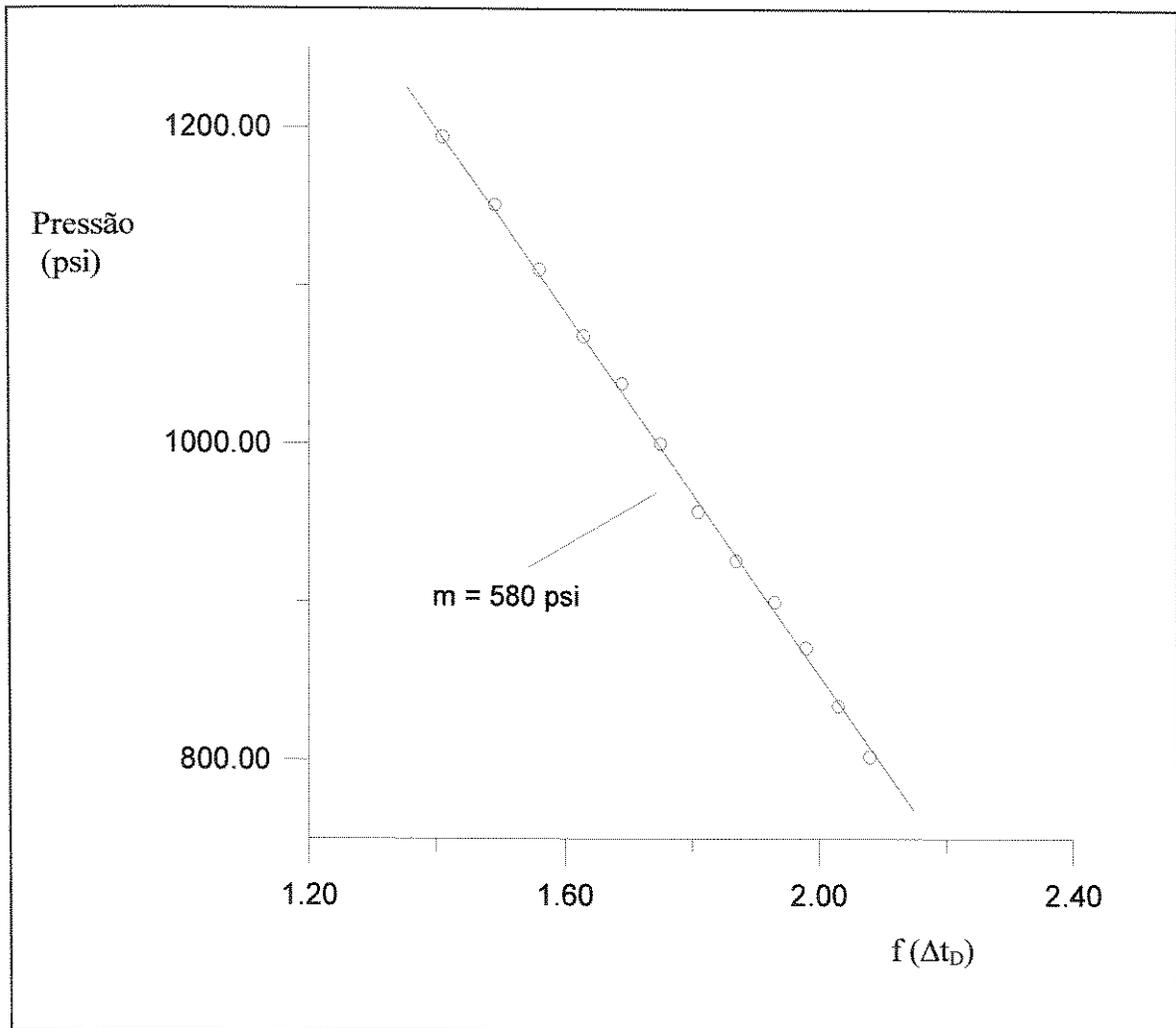


Figura 9.11 - Curva de declínio de pressão para o Caso C

Diretamente da curva, obtém-se a declividade do trecho linear igual a 4,0 MPa (580 psi).

A Eficiência de Fluxo pode ser calculada pela Equação 7.33, fazendo $f(\Delta t_{CD}) = 2,13$.

$$\eta = \frac{f(\Delta t_{CD}) - f_0}{f(\Delta t_{CD})} = \frac{2,13 - 1,41}{2,13} = 0,35$$

Utilizando a Equação 7.57 para o cálculo do raio da fratura, obtém-se o seguinte resultado:

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-\eta)V_i}{m f_0} \left(\frac{G}{1-\nu} \right) \right]^{1/3}$$

$$R = 0,5 \left[\frac{(1-0,35) \times 5 \times 10^{-6}}{4,0 \times 1,41} \left(\frac{350}{1-0,39} \right) \right]^{1/3} = 0,033 \text{ m}$$

O valor do raio da fratura, medido diretamente no corpo de prova foi igual a 0,029 m. O resultado calculado pelo modelo apresenta, portanto, uma diferença de aproximadamente 13,8% em relação ao resultado do ensaio.

O Coeficiente Global de Filtração é calculado pela Equação 7.58 :

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{t_P}} \left[\frac{(1-\eta)V_i \text{ m}^2}{f_0} \left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \right]^{1/3}$$

$$C_L = \frac{0,26}{\sqrt{75}} \left[\frac{(1-0,35) \times 5 \times 10^{-6} \times 4^2}{1,41} \left(\frac{1-0,39}{350} \right)^2 \right]^{1/3} = 1,45 \times 10^{-5} \text{ m}/\sqrt{\text{min}}$$

9.5 Comentários Sobre os Resultados Encontrados

Com base na comparação entre os resultados encontrados nos diversos ensaios realizados neste trabalho, pode-se chegar a algumas conclusões a respeito do modelo matemático e do procedimento experimental :

- observa-se que os corpos de prova apresentam propriedades permo-porosas variáveis de um ensaio para outro, fato que foi possível constatar por meio de ensaios de laboratório para determinação de propriedades permo-porosas e mecânicas. Isto pode significar falta de uniformização de procedimento para confecção dos corpos de prova ou variação da permeabilidade do gesso em função do tempo de cura. Os três ensaios relatados neste

capítulo foram feitos com corpos de prova preparados em datas diferentes, com tempo de cura variando de 12 a 20 dias;

- os corpos de prova utilizados nos Casos A e C foram preparados com adição de cloreto de sódio na mistura de gesso e água. No Caso B, não houve adição de cloreto de sódio no preparo do corpo de prova. Analisando os resultados do Coeficiente Global de Filtração, pode-se concluir que o sal, quando adicionado à composição do gesso, aumenta a permeabilidade do corpo de prova, diminuindo, desta forma, a eficiência de fluxo;
- nos ensaios de compressão uniaxial, para determinação das propriedades mecânicas do gesso, foi observado um comportamento considerado não linear, o que pode explicar a diferença entre os valores calculados dos raios de fratura e os valores medidos diretamente, uma vez que a formulação dos modelos desenvolvidos no presente trabalho baseia-se no comportamento linearmente elástico do material fraturado;
- no Caso C, o cálculo da eficiência de fluxo indicou um valor de 0,35 , o que, de certa forma, invalida a aplicação do modelo matemático, que é desenvolvido para eficiências de fluxo situadas entre 0,4 e 0,9. A título de ilustração, os resultados foram mostrados, com o objetivo de verificar o erro acarretado no cálculo das dimensões da fratura quando o modelo é utilizado para fluidos fraturantes de baixa eficiência.

Capítulo 10

Conclusões e Recomendações

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um modelo matemático semi-analítico para simulação de propagação pseudo-tridimensional de fraturas induzidas em meios porosos. O modelo proposto baseia-se, fundamentalmente, no modelo bidimensional desenvolvido por Perkins e Kern, ao adotar o critério de seções verticais que se deformam independentemente umas das outras. O único acoplamento considerado entre as seções verticais é descrito pela Equação de Fluxo entre placas paralelas, que define a distribuição de pressão no interior da fratura. O cálculo da altura da fratura em cada ponto do eixo-x, que corresponde à direção de propagação, é feito pela relação entre alturas da zona de interesse e da fratura e o fator de intensidade crítico de tensões. O critério de propagação da fratura baseia-se no fator de intensidade crítico de tensões (tenacidade ao fraturamento), que no modelo foi considerado igual a zero.

Diferentemente de outros modelos pseudo-tridimensionais baseados no modelo de Perkins e Kern, o cálculo das aberturas da fratura é feito por meio da resolução da Equação de England e Green, sendo que a tensão de carregamento da fratura foi representada por uma função tipo degrau. O desenvolvimento semi-analítico do modelo levou a expressões de geometria (comprimento, altura, abertura), pressão de propagação e eficiência volumétrica explícitas em relação aos parâmetros de tratamento (vazão e tempo de propagação), fluido fraturante (parâmetros de reologia) e propriedades de rocha (Módulo de Elasticidade, Coeficiente de Poisson, contraste de tensões confinantes, tenacidade ao fraturamento). Essas equações explícitas tornam a análise de sensibilidade do modelo extremamente simples, possibilitando a tomada de decisões em situações de campo, onde não se dispõe de recursos

computacionais. Além disso, a elaboração de programas computacionais que tenham por base o presente trabalho mostra-se bastante fácil, devido à simplicidade da solução matemática do modelo.

Baseado em trabalhos anteriores de Nolte (1979, 1986), desenvolvidos para modelos bidimensionais, o presente trabalho propôs uma metodologia de avaliação pós-tratamento, através da análise de declínio de pressão durante o fechamento da fratura, para um modelo de propagação tridimensional. Esta metodologia permite, na prática, verificar a conformidade de uma operação de fraturamento hidráulico com o projeto de tratamento.

Na simulação de casos práticos relatados na literatura, a comparação dos resultados obtidos pelo modelo proposto com os obtidos por outros modelos considerados de “boa reputação”, demonstra que o modelo SP3D tem boa validade para os casos onde as hipóteses simplificadoras são aplicáveis : fraturas alongadas, contrastes simétricos de tensões confinantes e ausência de contraste de propriedades mecânicas entre zonas de interesse e adjacentes.

Na comparação de resultados de simulações físicas, o modelo de propagação radial mostrou-se bastante coerente com a realidade. Nestas simulações de laboratório, foi possível verificar a validade do modelo de análise de declínio de pressão que, associado às equações de geometria de fratura, apresentou resultados significativamente coerentes com os experimentos.

Não se conseguiu simular em laboratório a propagação pseudo tridimensional, devido à impossibilidade de reproduzir o contraste de tensões confinantes adotado pelo modelo.

Seguindo a linha de trabalho apresentada nesta dissertação, é recomendável que o modelo seja aperfeiçoado no que diz respeito às suas hipóteses simplificadoras, de forma a incluir um número maior de situações práticas. Contrastes assimétricos de tensões confinantes e zonas de interesse e adjacentes com diferentes propriedades mecânicas são situações que, introduzidas no modelo, tornariam suas análises mais abrangentes. Equações explícitas para determinação da geometria da fratura que levem em conta as situações descritas acima, possibilitariam análises de sensibilidade bastante completas e de fácil execução, permitindo um maior entendimento do processo de propagação tridimensional. Além disso, o modelo de

análise de fechamento da fratura levaria a resultados mais realistas, constituindo-se numa excelente ferramenta de aferição indireta do tratamento, após sua execução.

Referências Bibliográficas

Abass, H. H. , Hedayati, S. , Meadows, D. L. Nonplanar Fracture Propagation From a Horizontal Wellbore : Experimental Study, SPE 24823. In : 67th Annual Technical Conference and Exhibition of Society of Petroleum Engineers, October 1992, Washington, DC.

Abou-Sayed, A. S., Sinha, K. P. Evaluation of the Influence of In-Situ Reservoir Conditions on the Geometry of Hydraulic Fractures Using a 3-D Simulator : Part 1 - Technical Approach, SPE 12877 . In : Unconventional Recovery Symposium, May 1984, Pittsburgh

Abou-Sayed, A. S., Clifton, R. J., Dougherty, R. L., Morales, R. H. Evaluation of the Influence of In-Situ Reservoir Conditions on the Geometry of Hydraulic Fractures Using a 3-D Simulator : Part 2 - Case Studies, SPE 12878. In : Unconventional Recovery Symposium, May 1984, Pittsburgh.

Abramowitz, M. , Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications, Inc. , 1972, 1046 p

Barenblatt, G. I. Mathematical Theory of Equilibrium Cracks. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, 55 p , May 1962.

Ben - Naceur, K. B. Simulation of Fluid Flow in Hydraulic Fracturing : Implications for 3D Propagation, SPE 16032. In : SPE Symposium on Reservoir Stimulation, February 1987, San Antonio.

Ben - Naceur, K. B. Mechanisms Controlling Fracture- Height Growth in Layered Media, SPE 16433. In : SPE/DOE Low Permeability Reservoirs Symposium, May 1987, Denver.

Ben - Naceur, K. B. *Reservoir Stimulation*. New Jersey : Prentice Hall, 1989. Cap. 3 : Modeling of Hydraulic Fractures, 31 p.

Bouteca, M. J. Hydraulic Fracturing Model Based on a Three-Dimensional Closed Form : Tests, Analysis of Fracture Geometry, and Containment, SPE/DOE 16432. In : SPE/DOE Low Permeability Reservoirs Symposium, May 1987, Denver.

Carter, R. D. Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension . Drilling and Production Practices, API, 1957, 267 p.

Clifton, R. J. *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*. Monograph vol. 12 Richardson, TX : SPE, 1989. Cap. 5 : Three-Dimensional Fracture-Propagation Models, p. 95-108.

Broek, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publishers, 1987, 516 p

Economides, M. J. , Nolte, K. G. *Reservoir Stimulation*. New Jersey : Prentice Hall, 1989, 336 p

England, A. H., Green, A. E. Some Two-Dimensional Punch and Crack Problems in Classical Elasticity. Proc, Cambridge Philosophy Society , 1963, v. 59, p. 489.

Garcia, José Eduardo de Lima. *Um Modelo Quasi-Analítico para Simulação Tridimensional de Propagação de Fratura Hidráulica*. Campinas, SP : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 110 p. Tese (Mestrado).

Geertsma, J., de Klerk, F. A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulically Induced Fractures. Journal of Petroleum Technology , Transactions of AIME, v. 246 , p. 1571-81, December 1969.

Geertsma, J., Haafkens, R. A Comparison of the Theories for Predicting Width and Extent of Vertical Hydraulically Induced Fractures. *Transactions of ASME* , v. 101, p. 8-19, March 1979.

Geertsma, J. *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*. Monograph vol. 12 Richardson, TX : SPE, 1989. Cap. 4 : Two-Dimensional Fracture-Propagation Models, p. 81-94.

Griffith, A. A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Transactions of Royal Society of London*, A221, p. 163-198, 1921.

Irwin, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 361, 1952.

Kim, C. M. and Abass, H. H. Hydraulic Fracture Initiation from Horizontal Wellbores : Laboratory Experiments. In : 32nd U. S. Symposium on Rock Mechanics, July 1991, Norman.

Khristianovitch, S. A. , Zheltov, J. P. Formation of Vertical Fractures by Means of a Highly Viscous Fluid. In : Fourth World Petroleum Congress, 1955, Rome. p. 579-86.

Lam, K. Y., Cleary, M. P. , Barr, D. T. A Complete Three-Dimensional Simulator for Analysis and Design of Hydraulic Fracturing, SPE 15226. In : SPE Formation Evaluation, December 1986, Houston.

Marx, J. W. , Langenheim, R. H. Reservoir Heating by Hot Fluid Injection, *Transactions of AIME*, v. 219, p. 312-315, 1960.

Meyer, B. R. Three-Dimensional Hydraulic Fracturing Simulation on Personal Computers : Theory and Comparison Studies, SPE 19329. In : SPE Eastern Regional Meeting, October 1989, Morgantown.

Meyer, B. R. Real Time 3-D Hydraulic Fracturing Simulation : Theory and Field Case Studies, SPE 20658. In : 65th Annual Technical Conference and Exhibition of SPE, September 1990, New Orleans.

Morales, R. H. Microcomputer Analysis of Hydraulic Fracture Behavior with a Pseudo-Three-Dimensional Simulator. In : SPE Formation Evaluation , February 1989, p. 69-74.

Nolte, K. G. , Smith, M. B. Interpretation of Fracturing Pressures, SPE 8297. In : 54th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of Society of Petroleum Engineers of AIME, September 1979, Las Vegas.

Nolte, K. G. Determination of Fracture Parameters from Fracturing Pressure Decline, SPE 8341. In : 54th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of Society of Petroleum Engineers of AIME, September 1979, Las Vegas.

Nolte, K. G. A General Analysis of Fracturing Pressure Decline with Application to Three Models, SPE 12491. In : SPE Formation Evaluation, December 1986, Houston.

Nordgren, R. P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. In : SPE 45th Annual Fall Meeting , August 1972, Houston. Transactions of American Institute of Mining , Metallurgical and Petroleum Engineers , v. 253.

Perkins, T. K., Kern, L. R. Widths of Hydraulic Fractures. Journal of Petroleum Technology, September 1961, p. 937-949.

Rice, J. R. A Path Independent Integral and the Aproximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics of American Society of Mechanical Engineers*, v. 35, p. 379-386, 1968.

Rueda, J. I., Rahim, Z., Holditch, S. A. A Semi-Analitical Solution in Three Dimensional Hydraulic Fracture Propagation in Multistress Media, SPE 27711. In : SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference , March 1994, Midland.

Settari, A., Cleary, M. P. Three-Dimensional Simulation of Hydraulic Fracturing, SPE 10504. In : SPE Reservoir Simulation Symposium, January 1982, New Orleans.

Settari, A. , Cleary, M. P. Development and Testing of a Pseudo-Three-Dimensional Model of Hydraulic Fracture Geometry , SPE 10505. In : SPE Reservoir Simulation Symposium, January 1982, New Orleans.

Settari, A. Quantitative Analysis of Factors Influencing Vertical and Lateral Fracture Growth, SPE 13862. In : Low Permeability Gas Reservoirs , May 1986, Denver.

Shah, R. C. , Kobayashi, A. S. Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack under Arbitrary Normal Loading. Engineering Fracture Mechanics, 1971, v. 3, p. 71-96.

Sneddon, I. N. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. Proc. Royal Soc. , 1946, London. A187, 229.

Sneddon, I. N., Elliott, A. A. The opening of a Griffith Crack Under Internal Pressure. Quart. Appl. Mathematics , vol IV, p. 262, 1946.

Sousa, J.L.A.O. Three Dimensional Simulation of Near-Wellbore Phenomena Related to Hydraulic Fracturing from a Perforated Wellbore, Tese de Doutorado, Cornell University, Maio 1992.

Touboul, E., Bern-Naceur, K., Thiercelin, M. Variational Methods in the Simulation of Three-Dimensional Fracture Propagation. In : 27th U. S. Symposium on Rock Mechanics, 1986, Tuscaloosa, p. 659-668.

Vandamme, L., Jeffrey, R. G. Pressure Distribution in Three-Dimensional Hydraulic Fractures, SPE 15265. In : SPE Formation Evaluation, December 1986, Houston.

Veatch Jr., R. W. , Moschovidis, Z. A., Fast, C. R. *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*. Monograph vol. 12 Richardson, TX : SPE, 1989. Cap. 1 : An Overview of Hydraulic Fracturing, p. 1-38.

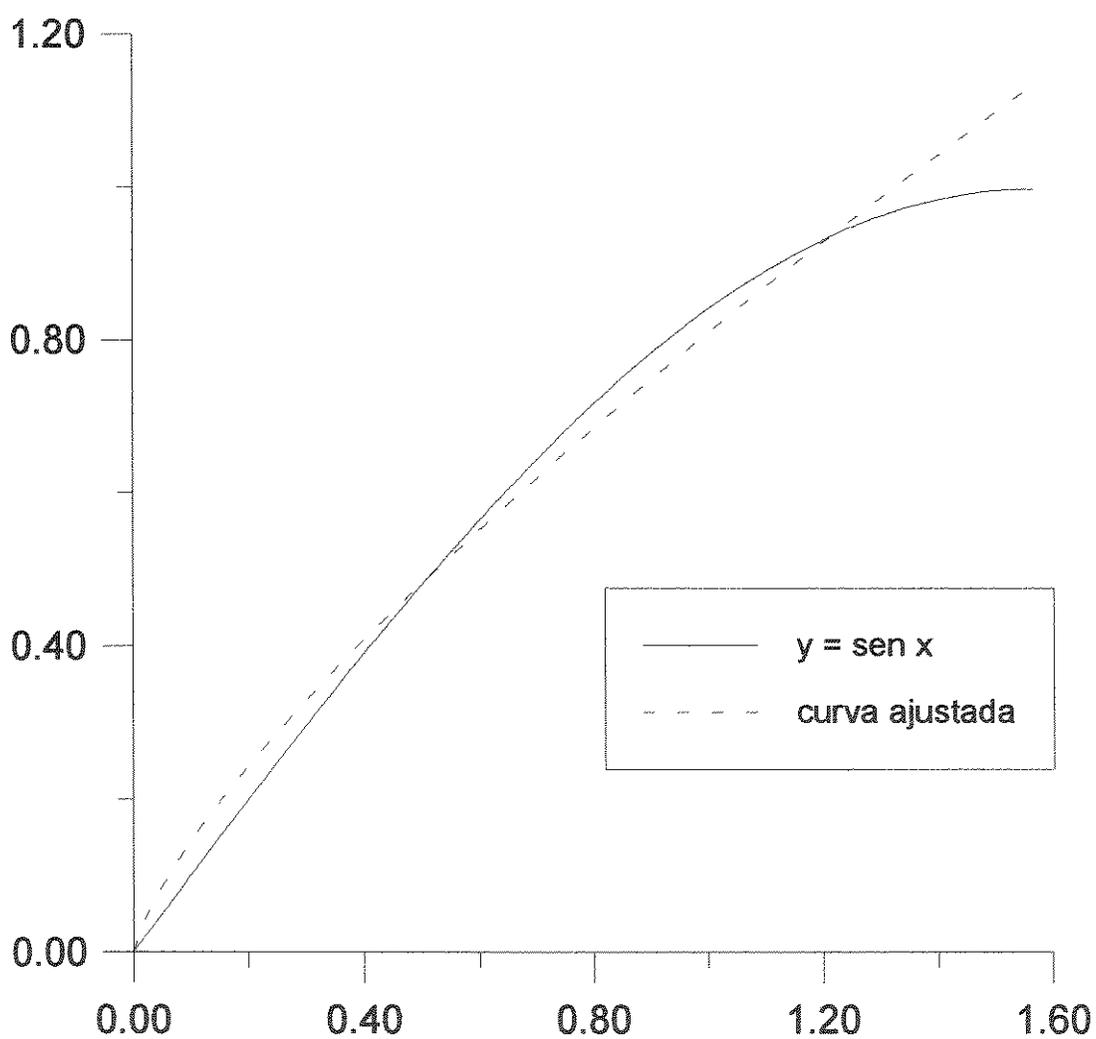
Warpinski, N.R. , Smith, M. B. *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*. Monograph vol. 12 Richardson, TX : SPE, 1989. Cap. 3 : Rock Mechanics and Fracture Geometry, p. 57-80.

Warpinski, N. R., Parker, C. D. Comparison Study of Hydraulic Fracturing Models : Test Case, SPE 25890. GRI-Staged Field Experiment No. 3. In : SPE Rocky Mountain Regional / Low Permeability Reservoirs Symposium, April 1993, Denver.

Weng, X. Incorporation of 2D Fluid Flow into a Pseudo-3D Hydraulic Fracturing Simulator, SPE 21849. In : SPE Rocky Mountain Regional Meeting and Low Permeability Reservoirs Symposium, April 1991, Denver.

ANEXO 1

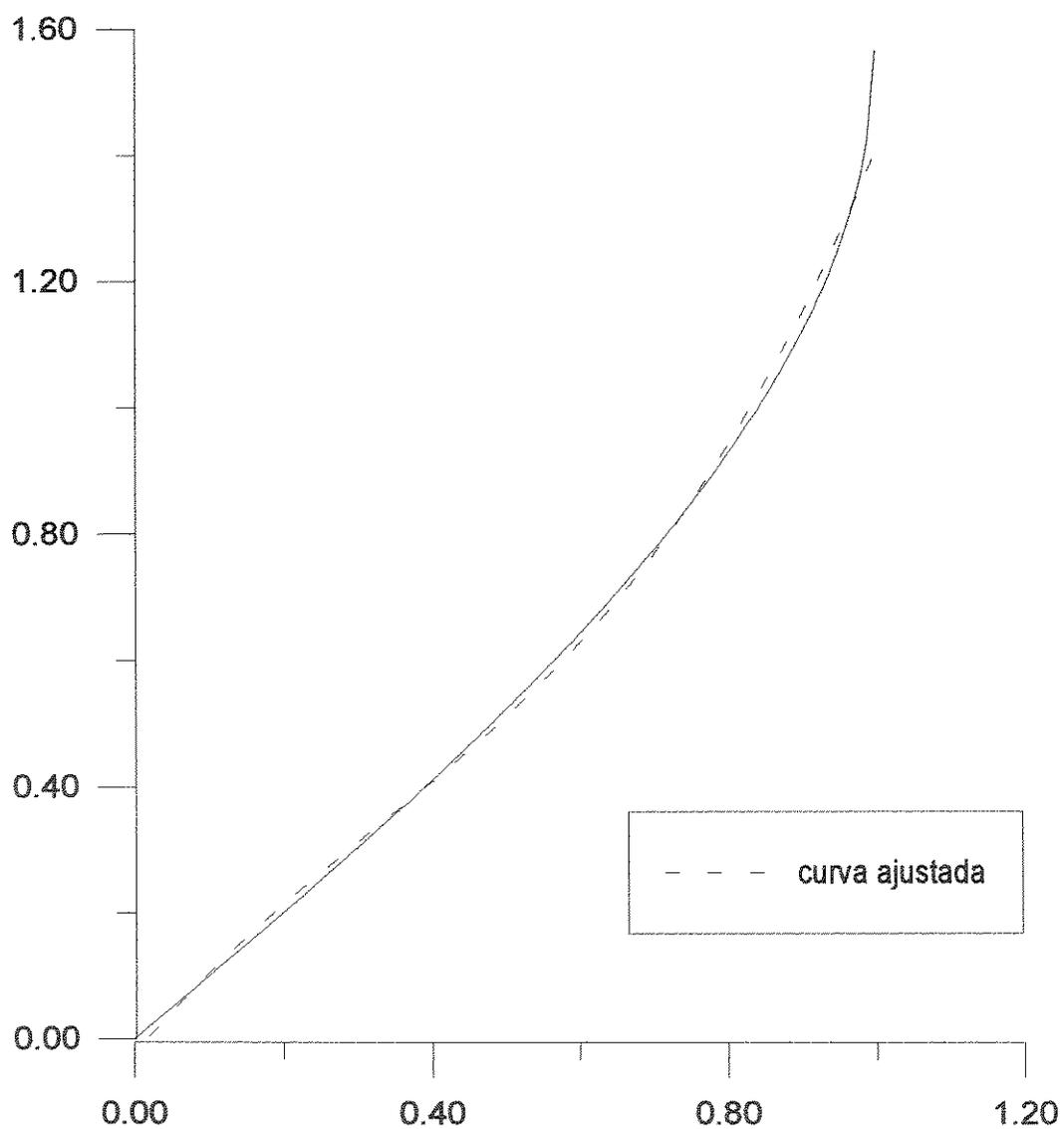
Aproximação da Função $y = \text{sen } x$ pela Equação $y = 0,81 x^{3/4}$



ANEXO 2

Aproximação da Função $y = \text{arc sen } x$ pela Equação

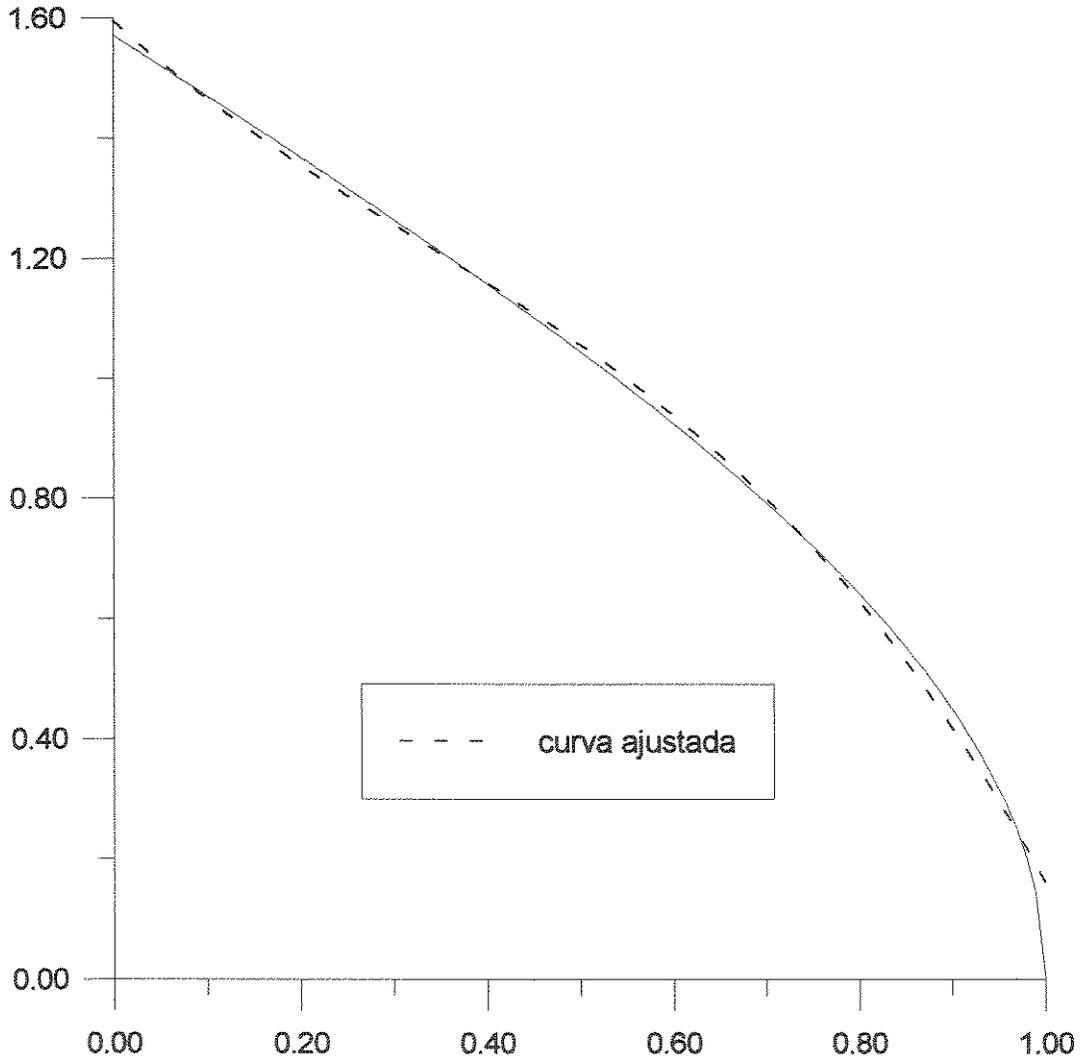
$$y = 1,400 x^3 - 1,377 x^2 + 1,411 x - 0,024$$



ANEXO 3

Aproximação da Função $y = \arccos x$ pela Equação

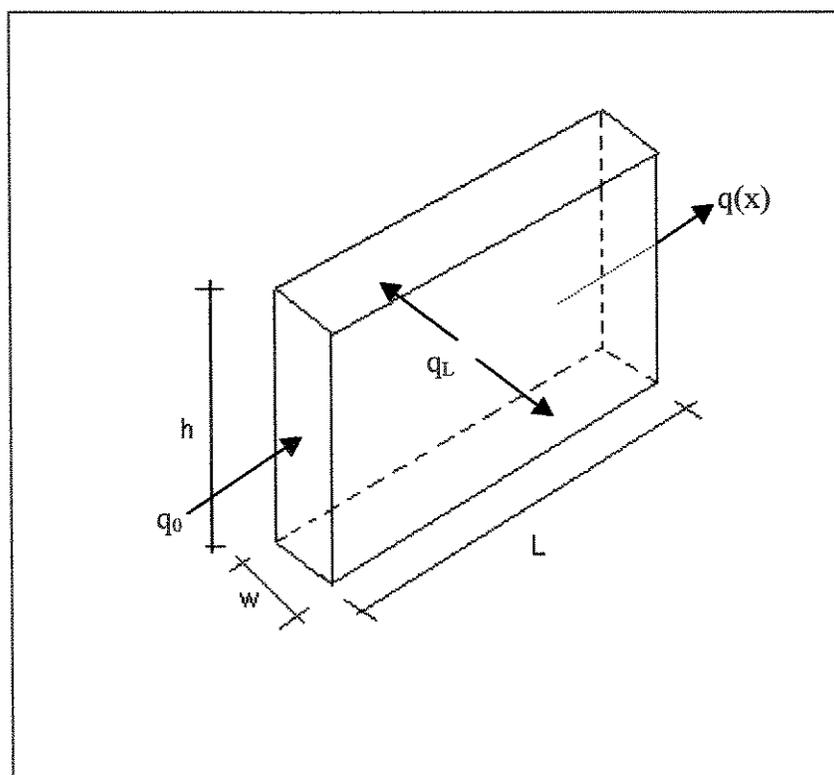
$$y = -1,400 x^3 + 1,377 x^2 - 1,411 x + 1,595$$



APÊNDICE 1

Modelo de Carter para Filtração Durante a Propagação da Fratura

Carter (1957) propôs um modelo de geometria simplificada, para estudo do efeito da filtração de fluido pelas faces da fratura durante o processo de propagação.



Esquema do modelo de fratura de Carter

No modelo de Carter a abertura e altura da fratura são constantes no tempo e no espaço. Desta forma, toda a variação de volume da fratura deve-se ao aumento do comprimento.

Fazendo um balanço de massa na fratura :

$$\frac{dV}{dt} = q - q_L - v_{sp} \frac{dA}{dt}$$

$$\text{onde : } q_L = \int_0^A v_L dA = \int_0^A v_L \frac{dA}{d\tau} d\tau = C_L \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$A = 2.h.L \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2.h.\frac{dL}{dt}$$

$$V = h.w.L \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = h.w.\frac{dL}{dt}$$

Portanto :

$$h.w.\frac{dL}{dt} = q - C_L \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - v_{sp} \frac{dA}{dt}$$

$$h.w.\frac{dL}{dt} = q - 2.h.C_L \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 2.h.v_{sp} \frac{dL}{dt}$$

$$(w + 2.v_{sp}) \frac{dL}{dt} = \frac{q}{h} - 2.C_L \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q}{(w + 2.v_{sp})h} - \frac{2.C_L}{(w + 2.v_{sp})} \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

Resolvendo a equação acima por Transformadas de Laplace e aplicando a propriedade da convolução :

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{dL}{dt} \right\} \left(1 + \frac{2.C_L}{(w + 2.v_{sp})} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \right) = \frac{q}{(w + 2.v_{sp})h} \frac{1}{s}$$

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{q}{(w + 2.v_{sp})h}}{\sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \frac{2.C_L}{(w + 2.v_{sp})} \sqrt{\pi} \right)} \right\}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q}{(w + 2.v_{sp})h} e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha$$

onde : $\alpha = \frac{2.C_L \sqrt{\pi}}{(w + 2.v_{sp})} \sqrt{t}$

$$L(t) = \frac{q}{(w + 2.v_{sp})h} \int e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha dt$$

$$L(t) = \frac{q(w + 2.v_{sp})}{4\pi h C_L^2} \left(e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)$$

Fazendo-se $w + 2.v_{sp} = w_{ap}$ (abertura aparente)

$$L(t) = \frac{qt}{hw_{ap}} \left(\frac{e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1}{\alpha^2} \right)$$

onde : $\frac{e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1}{\alpha^2} = \eta$ (Eficiência de Fluxo)

APÊNDICE 2

Valores da Função $e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1$

α	$e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1$	α	$e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} - 1$
0,00	0,00000	1,80	1,30964
0,02	0,00039	1,85	1,35991
0,04	0,00155	1,90	1,41043
0,06	0,00344	1,95	1,46118
0,08	0,00603	2,00	1,51215
0,10	0,00929	2,05	1,56334
0,12	0,01320	2,10	1,61472
0,14	0,01771	2,15	1,66628
0,16	0,02282	2,20	1,71803
0,18	0,02849	2,25	1,76994
0,20	0,03470	2,30	1,82201
0,22	0,04142	2,35	1,87424
0,24	0,04865	2,40	1,92661
0,26	0,05635	2,45	1,97912
0,28	0,06451	2,50	2,03175
0,30	0,07311	2,60	2,13740
0,32	0,08214	2,70	2,24350
0,34	0,09157	2,80	2,35001
0,36	0,10139	2,90	2,45960
0,38	0,11158	3,00	2,56414
0,40	0,12214	3,10	2,67169
0,42	0,13304	3,20	2,77954
0,44	0,14428	3,30	2,88766
0,46	0,15584	3,40	2,99602
0,48	0,16771	3,50	3,10462

0,50	0,17988	3,60	3,21343
0,52	0,19234	3,70	3,32244
0,54	0,20507	3,80	3,43163
0,56	0,21807	3,90	3,54099
0,58	0,23133	4,00	3,65052
0,60	0,24483	4,10	3,76019
0,62	0,25858	4,20	3,87000
0,64	0,27256	4,30	3,97994
0,66	0,28676	4,40	4,09001
0,68	0,30117	4,50	4,20019
0,70	0,31580	4,60	4,31048
0,72	0,33062	4,70	4,42087
0,74	0,34564	4,80	4,53136
0,76	0,36085	4,90	4,64194
0,78	0,37624	5,00	4,75260
0,80	0,39180	5,20	4,97417
0,82	0,40754	5,40	5,19602
0,84	0,42344	5,60	5,41814
0,86	0,43950	5,80	5,64049
0,88	0,45571	6,00	5,86305
0,90	0,47207	6,20	6,08581
0,92	0,48858	6,40	6,30874
0,94	0,50523	6,60	6,53184
0,96	0,52201	6,80	6,75508
0,98	0,53892	7,00	6,97845
1,00	0,55596	7,20	7,20195
1,05	0,59910	7,40	7,42557
1,10	0,64295	7,60	7,64929
1,15	0,68746	7,80	7,87311
1,20	0,73259	8,00	8,09702
1,25	0,77830	8,20	8,32101
1,30	0,82454	8,40	8,54508

1,35	0,87127	8,60	8,76923
1,40	0,91847	8,80	8,99344
1,45	0,96611	9,00	9,21772
1,50	1,01415	9,20	9,44206
1,55	1,06258	9,40	9,66645
1,60	1,11136	9,60	9,89090
1,65	1,16048	9,80	10,11539
1,70	1,20991	10,00	10,33993
1,75	1,25964		