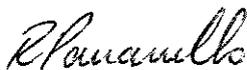


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

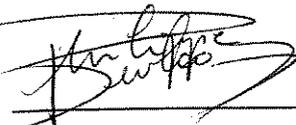
**Estudo de Cavidades Acústicas Usando o  
Método de Elementos Finitos via  
Galerkin/Mínimos Quadrados**

Autor : Khaled Mohamed Ahmida



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente

FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Philippe R. B. Devloo

FEC/UNICAMP



Prof. Dr. Fernando Iguti

FEM/UNICAMP

Campinas, 28 de Junho de 1996

6070000

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Ah55e      Ahmida, Khaled Mohamed  
Estudo de cavidades acústicas usando o método de  
elementos finitos via Galerkin/mínimos quadrados /  
Khaled Mohamed Ahmida.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Renato Pavanello.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Acústica. 2. Métodos dos elementos finitos. 3.  
Galerkin, Métodos de. 4. Helmholtz, Equação de. I.  
Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

ESTE TRABALHO FOI APROVADO  
DA TESE DEFENDIDA POR Khaled Mohamed  
Ahmida E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 28/06/1996  
Renato Pavanello  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

# **Estudo de Cavidades Acústicas Usando o Método de Elementos Finitos via Galerkin/Mínimos Quadrados**

Autor : **Khaled Mohamed Ahmida**

Orientador: **Renato Pavanello**

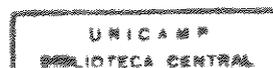
Curso : Engenharia Mecânica

Área de Concentração : Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S. P. Brasil



## **Dedicatória**

**Dedico este trabalho aos meus queridos pais.**

## **Agradecimentos**

A Deus, inexclusivamente por tudo.

A minha família, pelo constante apoio ao longo da minha vida.

Ao prof. Dr. Renato Pavanello, pela amizade, dedicação e indispensável orientação na realização deste trabalho.

A todos os colegas da pós graduação no DMC, Faculdade de Engenharia Mecânica, pela amizade e convivência.

Aos professores do DMC, pelo conhecimento recebido.

Aos funcionários do DMC, a Sra. Fátima, a Sra. Sônia, pela disposição e ajuda.

# Conteúdo

<b>RESUMO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>iii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>vi</b>
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>vii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Gerais Sobre a Acústica	1
1.2 O MEF e a Acústica	4
1.3 Revisão Bibliográfica	7
1.4 Descrição do Trabalho	9
<b>2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>11</b>
2.1 Propagação do Som em Fluidos	11
2.1.1 Introdução e Conceitos Básicos	11
2.1.2 A equação de Estado	14
2.1.3 A Equação da Continuidade	16
2.1.4 A Equação de Euler e a Equação da Onda Linearizada	19
2.2 Soluções Analíticas para Cavidades Bidimensionais de Geometria Regular	24
2.2.1 Vibrações Livres de Cavidades Retangulares	25
2.2.2 Vibrações Forçadas de Cavidades Retangulares	29
<b>3 FORMULAÇÃO INTEGRAL E APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>32</b>
3.1 Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais	32
3.2 Método de Galerkin Aplicado à Equação de Helmholtz	34
3.3 Determinação das Matrizes Elementares - Coordenadas Isoparamétricas	39

3.4	Método dos Mínimos Quadrados Aplicado à Equação de Helmholtz	41
3.5	Método de Galerkin/Mínimos Quadrados (GMQ) Aplicado à Equação de Helmholtz	45
3.6	Limites das Soluções Numéricas Baseadas no Método de Galerkin	48
3.7	Comportamento das Soluções Numéricas Baseadas no Método de Galerkin/Mínimos Quadrados	57
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>61</b>
4.1	Problemas de Decaimento	61
4.1.1	Estudo Numérico da Convergência para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais	64
4.1.2	Aplicação do Método GMQ à Malhas Regulares e Irregulares de Elementos Finitos Triangulares	68
4.2	Problemas de Propagação de Ondas Planas	73
4.2.1	Estudo Numérico da Convergência para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais	75
4.2.2	Aplicação do Método GMQ à Malhas de Elementos Finitos Triangulares	78
4.3	Problemas de Propagação de Ondas com Excitação Pontual	86
4.3.1	Estudo Numérico do Comportamento dos Métodos G e GMQ para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais	87
4.3.2	Estudo Numérico do Comportamento dos Métodos G e GMQ para Malha Regular de Elementos Triangulares	94
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS</b>	<b>103</b>

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

## Resumo

A solução numérica da equação de Helmholtz, via o Método de Elementos Finitos ou Diferenças Finitas, possui uma característica dispersiva ao contrário do que ocorre com a solução exata. Soluções discretas deste tipo são funções do número de onda discreto, que é dependente da frequência. O Método de Elementos Finitos (MEF) via a formulação clássica de Galerkin pode ser aplicado na solução da equação de Helmholtz sem que exista um limite teórico para o número de onda a ser analisado. Todavia, quando utiliza-se o MEF via Galerkin para elevados números de onda, faz-se necessário o uso de malhas extremamente refinadas para se obter soluções com precisão satisfatória e dispersão mínima o que conduz ao custo computacional muitas vezes proibitivo. Como regra geral, procura-se resguardar uma resolução de malha da ordem de dez elementos por período o que conduz a um número de equações muito elevado a ser resolvido, na medida em que se deseja resolver problemas da equação de onda no domínio das médias e altas frequências, como é o caso de interesse em acústica, tema deste trabalho.

O método de Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ), derivado a partir de uma modificação na forma integral do problema, pode eliminar a poluição ou o erro na solução por elementos finitos da equação de Helmholtz em domínios unidimensionais. Em domínios bidimensionais, esta poluição numérica pode ser reduzida mas não eliminada. A aplicação do método GMQ na solução da equação de Helmholtz, para elevados números de onda, permite o uso de malhas com resolução da ordem de somente quatro elementos por período, o que aumenta consideravelmente o alcance das soluções numéricas.

Neste trabalho, o método GMQ é aplicado em problemas bidimensionais da equação de Helmholtz, baseando-se em resultados numéricos obtidos para exemplos unidimensionais. Exemplos de decaimento exponencial e propagação de onda para condições de contorno de Dirichlet, serão apresentados. Elementos lineares, triangulares e quadrilaterais, em malhas regulares e irregulares, serão utilizados para a obtenção dos resultados numéricos.

## **Abstract**

The numerical solution of the Helmholtz equation, as finite element or finite difference solution, does not preserve the nondispersive character of the exact solution. Discrete solutions of this type are functions of a discrete wave number that depends on the frequency. The Galerkin finite element method is capable of modeling increasingly higher wave numbers by refining the mesh. However, this may become prohibitively expensive, as long as, an acceptable resolution of ten elements per wave, according to rule of thumb, is to be considered. This would result in a large number of equations to be solved.

The method of Galerkin Least Square (GLS), here utilized, for the numerical solution of the Helmholtz equation can possibly eliminate the dispersive numerical effects by modification of the variational model in one-dimensional problems. However, in two-dimensional problems, it is not possible to eliminate the pollution in the finite element error but can still be reduced. A resolution of four elements per wave is required for good results.

In this work, the GLS method is applied to two-dimensional problems described by Helmholtz equation, using results obtained in one-dimensional problems. Exponential decay problems and wave propagation problems with Dirichlet boundary conditions are considered. Numerical results are obtained using linear triangular and quadrilateral finite elements.

## Lista de Figuras

1.1	Análise numérica de um problema físico	5
2.1	Fluxo de massa do fluido na direção $x$ no volume fixo $dV$	11
2.2	Cavidade retangular de paredes rígidas	21
2.3	Modos acústicos de uma cavidade totalmente fechada	29
3.1	Elemento quadrilateral de 4 nós	40
3.2	Malha de elementos unidimensionais lineares	49
3.3	Erro de fase usando-se uma aproximação do tipo Galerkin	54
3.4	Amplitude da formulação de Galerkin na região de propagação	55
3.5	Erro de amplitude da formulação de Galerkin na região de decaimento	56
3.6	Soluções nodalmente exatas via GMQ	59
4.1	Cavidade acústica bidimensional e suas condições de contorno	62
4.2	Malha de elementos finitos quadriláteros de quatro nós, para a cavidade acústica	65
4.3	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método Galerkin em um problema de decaimento exponencial	66
4.4	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial	66
4.5	Malha regular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavidade acústica	68
4.6	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método de Galerkin em um problema de decaimento exponencial	69
4.7	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial. $h=h_{\text{médio}}$	69
4.8	Malha irregular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavidade acústica	70
4.9	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método Galerkin em um problema de decaimento exponencial	71

4.10	Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial. $h=h_{\text{médio}}$	71
4.11	Cavidade acústica bidimensional e suas condições de contorno	72
4.12	O comportamento unidimensional de ondas planas	74
4.13	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz (33 elementos/onda). Elementos quadrilaterais	76
4.14	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.77 Hz (~10 elementos/onda). Elementos quadrilaterais	77
4.15	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz (~6 elementos/onda). Elementos quadrilaterais	77
4.16	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz (~4 elementos/onda). Elementos quadrilaterais	78
4.17	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{médio}}$	79
4.18	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.77 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{médio}}$	80
4.19	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{médio}}$	80
4.20	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{médio}}$	81
4.21	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{cateto}}=0.125$	82
4.22	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz. Malha triangular regular com $h=h_{\text{cateto}}=0.125$	82
4.23	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz. Malha triangular irregular com $h=h_{\text{médio}}$	83
4.24	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 0.77 Hz. Malha triangular irregular com $h=h_{\text{médio}}$	84
4.25	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz. Malha triangular irregular com $h=h_{\text{médio}}$	84
4.26	Resposta analítica e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz. Malha triangular irregular com $h=h_{\text{médio}}$	85

- 4.27 Cavityde acústica bidimensional e suas condições de contorno
- 4.28 Malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, para a cavityde acústica
- 4.29 Resposta em 0.208 Hz
- 4.30 Resposta em 1.04 Hz
- 4.31 Resposta em 1.214 Hz
- 4.32 Resposta em freqüência para a faixa (0--0.64)Hz
- 4.33 Resposta em freqüência para a faixa (0.64--1.1)Hz
- 4.34 Resposta em freqüência para a faixa (1.1--1.4)Hz
- 4.35 Malha regular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavityde acústica
- 4.36 Resposta na freqüência 0.208 Hz
- 4.37 Resposta na freqüência 1.04 Hz
- 4.38 Resposta na freqüência 1.214 Hz
- 4.39 Resposta em freqüência para a faixa (0--0.64)Hz
- 4.40 Resposta em freqüência para a faixa (0.64--1.1)Hz
- 4.41 Resposta em freqüência para a faixa (1.1--1.4)Hz

## Lista de Tabelas

4.1	Erros máximos e norma do erro para diferentes malhas regulares de elementos finitos quadrilaterais	6
4.2	Erros máximos e norma do erro para malhas de elementos quadrilaterais e triangulares	7
4.3	Frequências naturais numéricas obtidas via os métodos G e GMQ comparadas com as analíticas	9
4.4	Frequências naturais numéricas obtidas via os métodos G e GMQ comparadas com as analíticas	10

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$\{a\}$	vetor de aceleração de fluido.
$B$	módulo adiabático de compressibilidade.
$[B]$	matriz das derivadas das funções de interpolação no espaço global.
$[B]_{\xi}$	matriz das derivadas das funções de interpolação no espaço isoparamétrico.
$c$	velocidade do som em meio qualquer.
$c_p$	calor específico em pressão constante.
$c_v$	calor específico em volume constante.
$\det$	determinante de matriz qualquer.
$d\{f\}$	força líquida aplicada no fluido.
$df_x$	força líquida aplicada no fluido na direção $x$ .
$df_y$	força líquida aplicada no fluido na direção $y$ .
$df_z$	força líquida aplicada no fluido na direção $z$ .
$dm$	massa líquida do fluido.
$dV$	volume fixo de fluido.
$\ e\ $	norma do erro da solução numérica em relação à solução exata.
$\ e\ _G$	norma do erro calculada utilizando a solução numérica via o método de Galerkin.
$\ e\ _{GMQ}$	norma do erro calculada utilizando a solução numérica via o método de Galerkin/Mínimos Quadrados.
$\ e\ _{\max}$	erro máximo da solução numérica em relação à solução exata.
$E_{\Omega}$	erro de aproximação de elementos finitos.
$E_r$	erro global da aproximação de elementos finitos.
$f$	força compressiva aplicada no fluido.
$\{f\}$	força líquida aplicada no elemento volumétrico $dV$ do domínio fluido.
$\{f\}_G^e$	vetor de força elementar via o método de Galerkin.

$\{F\}_{MQ}^e$	vetor de força elementar via o método de Mínimos Quadrados.
$\{F\}_{GMQ}^e$	vetor de força elementar via o método de Galerkin/Mínimos Quadrados.
$f_{nm}$	freqüência natural em Hertz.
$\{f\}_G^e$	vetor de força calculado via o método de Galerkin.
$\{f\}_{MQ}^e$	vetor de força calculado via o método de Mínimos Quadrados.
$g_0$	valor imposto nulo do potencial $\phi$ .
$g_1$	valor imposto unitário do potencial $\phi$ .
$h$	parâmetro de malha de elementos finitos, ou, tamanho de elemento finito.
$h_i$	comprimento de lado $i$ do elemento triangular.
$h_{cateto}$	parâmetro de malha calculado como sendo o tamanho do cateto de elemento.
$h_{médio}$	parâmetro de malha calculado como sendo uma média aritmética dos lados do elemento triangular isoparamétrico.
$[J]$	Jacobiano.
$k$	número de onda.
$k^h$	número de onda calculado numericamente.
$k_x$	número de onda para a direção $x$ .
$k_z$	número de onda para a direção $z$ .
$[k]_G^e$	matriz de rigidez elementar via o método de Galerkin.
$[K]_G$	matriz de rigidez elementar via o método de Galerkin.
$[K]_{GMQ}^e$	matriz de rigidez elementar via o método de Galerkin/Mínimos Quadrados.
$[K]_{MQ}^e$	matriz de rigidez elementar via o método de Mínimos Quadrados.
$L$	operador de Helmholtz.
$L_x$	comprimento da cavidade acústica na direção $x$ .
$L_y$	comprimento da cavidade acústica na direção $y$ .
$L_z$	comprimento da cavidade acústica na direção $z$ .
$[m]_G^e$	matriz de massa elementar via o método de Galerkin.
$[M]_G$	matriz de rigidez elementar via o método de Galerkin.
$[M]_{GMQ}^e$	matriz de rigidez elementar via o método de Galerkin/Mínimos Quadrados.
$[M]_{MQ}^e$	matriz de rigidez elementar via o método de Mínimos Quadrados.
$M_0$	vetor de modo operacional.

[N]	matriz das funções de interpolação clássicas da família Lagrange definidas no espaço isoparamétrico.
p	a variação da pressão ou a pressão acústica em qualquer ponto do domínio fluido.
$p_c$	pressão constante de equilíbrio do domínio fluido.
$p_i$	pressão instantânea em qualquer ponto no fluido.
{r}	vetor de posição de equilíbrio de uma partícula de fluido.
$\mathfrak{R}$	domínio limitado de um problema.
R	constante de gás.
$R_\Omega$	resíduo de aproximação no domínio $\Omega$ .
Re	resposta em frequência de sistema.
S	área transversal do fluido.
s	condensação de fluido em qualquer ponto.
t	tempo em segundos.
$T_k$	temperatura absoluta em Kelvin.
$u_x$	velocidade de partícula na direção x.
$u_y$	velocidade de partícula na direção y.
$u_z$	velocidade de partícula na direção z.
{u}	vetor de velocidade de partícula de um fluido.
W	função de interpolação.
{x}	vetor unitário na direção x ou vetor das coordenadas nodais de elemento dado na direção x.
X	valor da função potencial $\psi$ na direção x.
$x_A$	coordenadas nodais de elemento linear unidimensional.
$(x_d, y_d)$	coordenada de ponto d.
$(x_f, y_f)$	coordenada de ponto f onde a força é aplicada.
{y}	vetor unitário na direção y ou vetor das coordenadas nodais de elemento dado na direção y.
Z	valor da função potencial $\psi$ na direção z.
{z}	vetor unitário na direção z ou vetor das coordenadas nodais de elemento dado na direção z.

## Letras Gregas

$\alpha^h$	parâmetro que caracteriza o comportamento do método de Galerkin.
$\alpha_{GMQ}$	parâmetro de penalidade para o método de Galerkin/Mínimos Quadrados.
$\nabla$	operador de Laplace.
$\nabla \cdot$	operador de divergência.
$\psi$	função potencial que representa a distribuição espacial.
$\phi$	potencial de velocidade.
$\{\phi\}^e$	potencial de velocidade a nível elementar
$\phi^f$	modos naturais de sistema calculados no ponto f onde a força é aplicada.
$\phi^d$	modos naturais de sistema calculados em qualquer ponto d.
$\ddot{\phi}$	derivada segunda de potencial em relação ao tempo.
$\hat{\phi}$	aproximação por elementos finitos para a função $\phi$ .
$\phi_{mn}^h$	solução numérica calculada no ponto (mn).
$\rho$	massa específica instantânea em qualquer ponto em $\text{kg/m}^3$ .
$\rho_0$	massa específica constante de equilíbrio de fluido em $\text{kg/m}^3$ .
$\rho^\wedge$ e $\phi_\Delta$	soluções numéricas nodais de elementos finitos para malha unidimensional.
$\rho_1$	solução numérica nodal da equação de Helmholtz, que corresponde a propagação de onda.
$\rho_2$	solução numérica nodal da equação de Helmholtz, que corresponde a decaimento exponencial de onda.
$\gamma$	razão de calor específico.
$\Omega$	domínio de elementos finitos.
$\omega$	freqüência em rad/seg.
$\{\xi\}$	vetor de deslocamento de partícula de posição de equilíbrio.
$\xi_x$	deslocamento de partícula na direção x.
$\xi_y$	deslocamento de partícula na direção y.
$\xi_z$	deslocamento de partícula na direção z.

$(\xi, \eta, \zeta)$  espaço local isoparamétrico do elemento finito.

$\chi$  coordenada local de elemento finito unidimensional.

$\tau$  parâmetro de penalidade do método Galerkin/Mínimos Quadrados.

### **Abreviações**

G método de Galerkin.

GMQ método de Galerkin/Mínimos Quadrados.

MQ método de Mínimos Quadrados.

# Capítulo 1

## Introdução

*Neste capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica e um breve histórico sobre Acústica e sobre o Método de Elementos Finitos. Algumas metodologias numéricas desenvolvidas para a solução de problemas de acústica física, governada pela equação de Helmholtz, são discutidas. Apresenta-se também um histórico do desenvolvimento do método de Galerkin Mínimos Quadrados para a solução da equação de Helmholtz considerando elevados números de onda. Finalmente, apresenta-se uma descrição do presente trabalho.*

### 1.1 Considerações Gerais Sobre a Acústica

Os fenômenos de propagação de ondas aparecem normalmente como perturbações em diferentes tipos de meios. Por exemplo, as ondas sonoras propagando-se no ar induzem uma perturbação que provoca o deslocamento das partículas do ar que oscilam harmonicamente em torno de uma posição de equilíbrio inicial. Como consequência, pode-se definir a propagação de onda como uma maneira de transmitir energia de um ponto para outro sem transferência líquida de matéria.

Neste contexto, a acústica pode ser definida como o estudo da propagação de ondas em um meio fluido considerado perfeito e compressível. Uma classificação possível dos fenômenos da acústica refere-se à faixa de frequência em que estas ondas se propagam definindo-se geralmente interesses técnicos bastante distintos. As oscilações que aparecem em frequências muito baixas são conhecidas como tremores. Os fenômenos que ocorrem entre as frequências de 16 Hz e 16 kHz são conhecidos como sônicos e acima de 16 kHz como

supersônicos. Neste trabalho, interessa-se por fenômenos que se situam dentro da faixa audível, ou seja entre 16 Hz e 16 kHz, com especial ênfase na solução de problemas com fortes oscilações e gradientes elevados. Outra classificação possível refere-se ao campo de aplicação dos estudos da acústica. Hueter e Bolt [Kinsler et al, 1982] propõe neste sentido a seguinte subdivisão : acústica fisiológica, biológica, musical, acústica de comunicação, acústica física e acústica sônica. Na acústica física pode-se incluir o estudo das vibrações mecânicas e dos fenômenos de propagação de ondas em sólidos e fluidos.

No que se refere a direção de propagação pode-se distinguir, em função dos meios e da geometria do fenômeno, os seguintes tipos de ondas: ondas longitudinais, transversais ou torcionais de superfície. Os estudos e os fundamentos teóricos da acústica foram estabelecidos ainda no início do século passado [Kinsler et al, 1982]. Chladni em 1802, através de estudos experimentais de vibração torcional, definiu e calculou a velocidade de propagação das ondas para geometrias cilíndricas. Na mesma época foram desenvolvidos e apresentados para a comunidade o princípio do Huyghens e a teoria de onda de Young. Mais tarde, Euler publicou resultados de seus estudos sobre a teoria de vibração em cordas. Ainda neste período, Lagrange, Bernoulli, D'Alambert e Laplace formalizaram o que é conhecido atualmente como a mecânica racional, o que permitiu consolidar os estudos dos fundamentos da acústica física.

Neste mesmo período, 1860, Helmholtz se preocupava com os fenômenos relativos a acústica fisiológica, procurando estudar e formalizar os mecanismos de propagação de onda e sua interação com o aparelho auditivo humano. Baseando-se nas transformações propostas por Fourier, Helmholtz estabeleceu as equações diferenciais que governam os problemas de propagação de ondas em regime harmônico, conhecida como equação de Helmholtz, que é até hoje a base para o estudo dos problemas fundamentais da acústica. Em 1877 Rayleigh concluiu sua obra "Theory of Sound", onde sintetizou o conhecimento da área de acústica disponível até aquele momento.

Assim, o estudo da acústica, tal como ele é efetuado neste trabalho, constitui-se em formular a equação da onda linearizada, ou seja, equação de Helmholtz, estabelecer as condições iniciais e as condições de contorno para uma dada aplicação física específica, e na seqüência propor esquemas de solução para o problema.

Com relação as condições de contorno, duas classes básicas de problemas podem ser estudadas: acústica de cavidades (problemas interiores) e problemas de radiação e reflexão de ondas (problemas exteriores de domínios ilimitados). Neste trabalho interessa-se pelos problemas de acústica de cavidades, não sendo estudados os problemas de domínios ilimitados, normalmente tratados aplicando-se a condição de radiação de Sommerfeld.

No estudo destas cavidades acústicas podem ser determinadas as frequências naturais e os modos acústicos do sistema realizando-se uma análise modal analítica, numérica ou experimental. As formas dos modos acústicos encontradas são análogos as formas dos modos estruturais no sentido que ambos descrevem a distribuição de energia do sistema. Contudo, as formas dos modos acústicos e estruturais são diferentes no sentido que os modos estruturais manifestam-se como variações do deslocamento dos corpos sólidos, e os modos acústicos representam a variação de pressão de meio fluido em relação a pressão de equilíbrio do meio.

Dentre as aplicações de engenharia para os problemas interiores da acústica destacam-se o estudo do conforto de ambientes em habitações e veículos, controle ativo de ruído, modelagem da voz e do aparelho auditivo,...etc. Nestas aplicações, o conhecimento das formas modais acústicas são de interesse pois podem ser usadas como parâmetro nos algoritmos de controle ativo de ruído na faixa de baixas e médias frequências. Salienta-se que esta área tem-se tornado um tópico bastante estudado na indústria automobilística, com vistas a otimização do conforto nos habitáculos de veículos. O conhecimento dos modos acústicos e das frequências naturais correspondentes é também informação útil para o projeto de sistemas mecânicos [Little e Van Karsen, 1992] tais como o projeto de aeronaves, projetos de salas e auditórios, e também nos casos onde os fenômenos de interação entre fluido compressível e estrutura flexível são importantes.

Em quase todas estas aplicações, as forças de excitação são normalmente ricas em componentes de altas frequências, conseqüentemente, a análise harmônica ou modal requer geralmente um número de modos elevado. Aliado a este fato, nota-se que nas cavidades acústicas o número de modos aumenta rapidamente a medida que se percorre o espectro em frequência do problema, o que implica em se estudar fenômenos ondulatórios com elevados números de onda e que envolve geralmente geometrias bastante complexas.

Sabendo-se que as soluções analíticas desta classe de problemas restringe-se a formas regulares, faz-se necessário então o uso de métodos aproximados de solução. Diversos métodos numéricos foram desenvolvidos para este tipo de análise. Pode-se citar as soluções baseadas em diferenças finitas, elementos finitos [Graggs, 1973] e elementos de contorno [Kirkup e Amini, 1993].

O método de elementos finitos, que é baseado no método de resíduos ponderados, tornou-se o método numérico bastante usado na solução de diferentes classes de problemas de valor de contorno [Harari e Hughes, 1992]. Em geral, os métodos de elementos de contorno são restritos a problemas homogêneos, isotrópicos e lineares o que não acontece com o método de elementos finitos. Por outro lado, o método de elementos de contorno tem a vantagem de reduzir a ordem das malhas, isto é, um problema de três dimensões é necessário somente a discretização das superfícies, ao contrário do método de elementos finitos onde é preciso discretizar o volume inteiro. Esta vantagem resulta em número de equações relativamente baixo para ser resolvido, todavia, o sistema de equações resultante não é simétrico e é cheio, ao contrário do método dos elementos finitos que conduz a sistemas de equações simétricos e esparsos.

Neste trabalho foi escolhido o Método dos Elementos Finitos e usa-se uma formulação baseada no método de Galerkin e no Método dos Mínimos Quadrados, com o objetivo de se analisar os problemas acústicos em uma faixa mais larga de frequência, mantendo-se os custos computacionais dentro de limites aceitáveis [Harari e Hughes, 1991].

## **1.2 O MEF e a Acústica**

Atualmente, alguns projetos são extremamente complexos, caros e sujeitos a restrições rigorosas de confiabilidade e segurança. Os métodos de análise estrutural e acústica tem sido estudados por engenheiros e cientistas com o objetivo de se desenvolver técnicas de simulação que permitam se levar em conta os requisitos de proteção ambiental, controle de poluição térmica, química e acústica,...etc. Os modelos matemáticos de simulação podem ser usados ainda no estado do projeto permitindo desta forma uma redução de custo considerável.

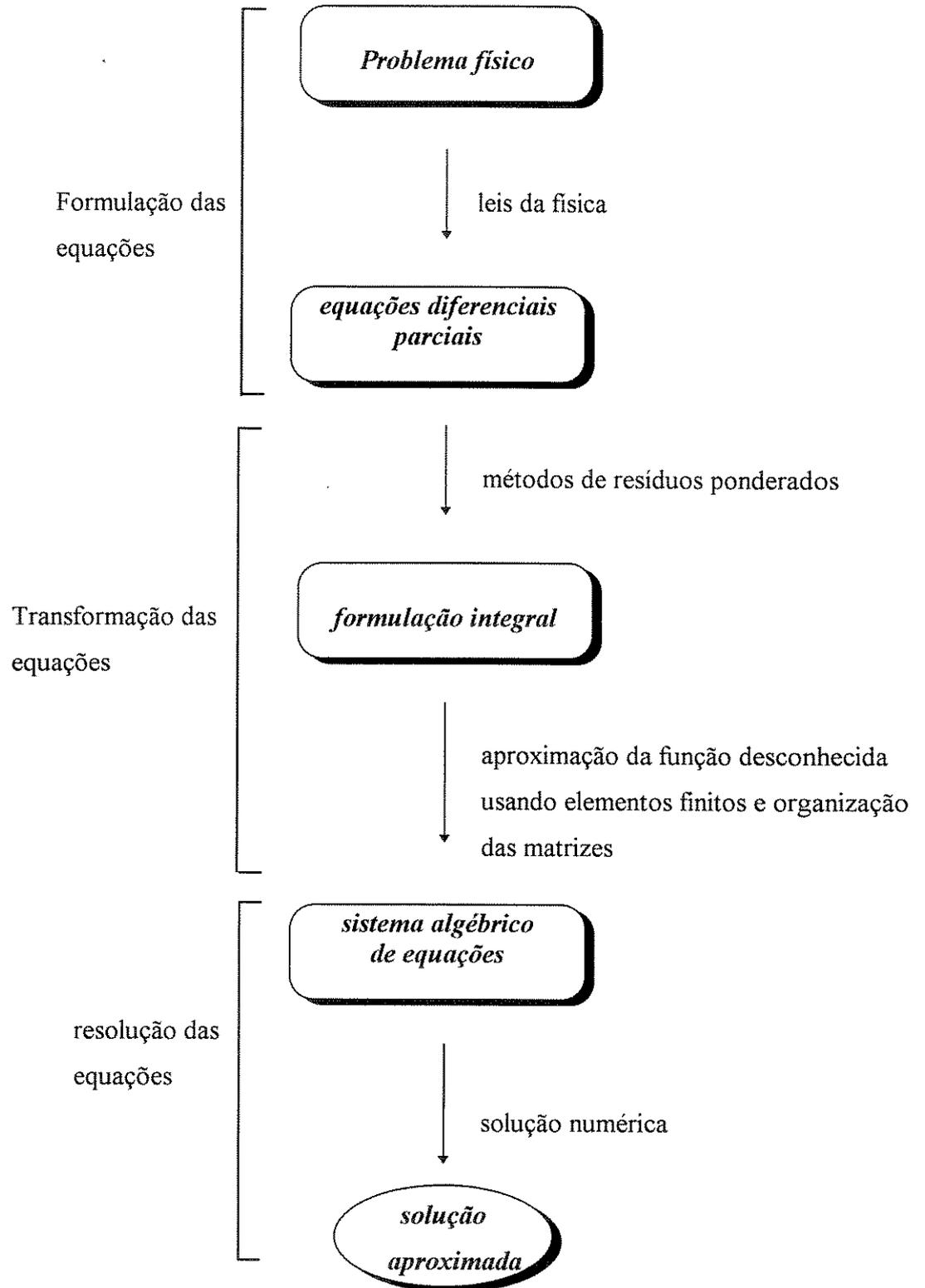


Fig. (1.1) Análise numérica de um problema físico.

Muitos sistemas físicos podem ser descritos por equações diferenciais parciais. A melhor maneira de resolver um problema físico governado por equações diferenciais é obter a solução analítica, mas, há muitas situações onde esta solução analítica fica difícil de ser obtida devido a irregularidade dos domínios e dos contornos. Como alternativa, pode-se utilizar soluções aproximadas que geralmente só são viáveis no contexto de uma implementação computacional. O método de elementos finitos é um dos procedimentos para obter soluções destas equações [Seegerlind, 1984].

O MEF aliado aos desenvolvimentos da tecnologia de computação pode ser aplicado com sucesso para se achar as soluções de problemas estacionários e transientes nos domínios lineares e não-lineares para geometrias arbitrárias uni-, bi- e tri-dimensionais.

É difícil documentar a origem do método de elementos finitos. Os conceitos básicos desenvolveram-se na década de 50, quando foram publicados uma série de artigos, onde se estendeu os conceitos de análise matricial de estruturas discretas à soluções dos problemas da mecânica do contínuo. Na mesma época, o surgimento dos computadores permitiu a resolução de problemas de estruturas complexas no entanto, o método era dificilmente aceito pela comunidade industrial. Turner, Clough, Martin e Topp introduziram o conceito de elementos finitos em 1956 [Dhatt et al, 1984]. Quase no mesmo período Argyris e Kelsey desenvolveram conceitos similares numa série de publicações sobre os teoremas de energia. Em relação aos princípios do MEF, Courant, Hrennikoff e McHenry podem ser considerados como os precursores do método. Muitos livros foram escritos naquela época, no entanto, somente com a publicação do livro de Zienkiewicz em 1967, o MEF foi realmente difundido internacionalmente. No que se refere à aplicação do MEF na solução da equação de onda no domínio das baixas frequências, pode-se citar os trabalhos publicados por [Givoli e Keller, 1989], [Graggs, 1973], [Nefske et al, 1982], [Petyt et al, 1976], [Petyt et al, 1977].

Teoricamente não existe limitação para a aplicação de método de elementos finitos na sua forma clássica de Galerkin na resolução de problemas da acústica no domínio das médias e altas frequências. Todavia, nestes casos, faz-se necessário um refinamento excessivo das malhas de elementos finitos o que pode inviabilizar o uso do método. Assim, do ponto de vista técnico, restam dois problemas práticos para se utilizar o método de elementos finitos, na sua forma de Galerkin, para solução da equação de Helmholtz, em domínios fechados, para elevados números de onda ou em regiões de forte decaimento.

O primeiro problema se refere ao custo computacional proibitivo, uma vez que para se obter resultados satisfatórios é preciso resguardar uma resolução da ordem de 10 elementos por período o que conduziria a malhas excessivamente refinadas. Isso resultaria em números de equações muito elevado a ser resolvido [Harari e Hughes, 1991].

O segundo problema está relacionado com o condicionamento numérico das matrizes obtidas pelo método de elementos finitos que possuem seu número de condições proporcional ao número de onda da equação de Helmholtz. Desta forma, para elevados números de onda, tem-se sistemas matriciais mal condicionados que dificultam ou mesmo inviabilizam a sua resolução numérica [Thompson e Pinsky, 1995].

Por outro lado, no que se refere a problemas com fronteiras ilimitadas, onde a condição de Sommerfeld deve ser respeitada, os métodos de equação integral são geralmente mais adequados, todavia, técnicas baseadas no método de elementos finitos também são efetivas e conduzem a bons resultados [Harari e Hughes, 1992].

Neste trabalho é estudada uma técnica, baseada em uma formulação mista, obtida a partir da combinação dos métodos de Galerkin e de Mínimos Quadrados, sendo usado o MEF para a solução das equações integrais resultantes. O objetivo é viabilizar o uso do MEF na solução de problemas da acústica (solução da equação da onda) no domínio das médias frequências à custos computacionais compatíveis. No próximo item uma breve revisão bibliográfica do desenvolvimento desta técnica é apresentada.

### **1.3 Revisão Bibliográfica**

Nos últimos anos várias metodologias foram desenvolvidas para melhorar a exatidão das soluções numéricas da equação da onda usando-se o método de elementos finitos. Goldstein [Harari e Hughes, 1992] desenvolveu a metodologia de elementos finitos fracos para a solução da equação de Helmholtz onde a solução local em cada elemento é aproximada por uma soma de exponenciais. Nesta metodologia, a continuidade nos contornos dos interelementos é inadequadamente imposta. Segundo [Harari e Hughes, 1991] a aplicação

desta metodologia aos problemas bidimensionais conduz à soluções numéricas de baixa qualidade.

Park & Jansen e Alvin & Park [Harari e Hughes, 1991] usaram a análise discreta de Fourier para obter uma modificação nas matrizes elementares de rigidez e massa obtidas pelo método padrão de Galerkin. Esta modificação é dependente de número de onda da equação de Helmholtz. As matrizes modificadas são calculadas com o intuito de se minimizar o erro de dispersão numérica para uma dada faixa de número de onda e de frequência.

O problema que pode ser observado nestas metodologias é que elas não têm base matemática sólida para provar a estabilidade e convergência das soluções obtidas, ou seja, não possuem a mesma consistência que existe no método de Galerkin, no qual a convergência é melhorada pelo uso de funções de interpolação de ordem maior.

Mais recentemente, novas formulações de elementos finitos, baseando-se em resíduos, foram desenvolvidas. Estes métodos consistem em adicionar termos complementares de resíduo à equação variacional clássica de Galerkin.

Métodos deste tipo foram originalmente desenvolvidos por Hughes e Brooks para melhorar a estabilidade das soluções numéricas das equações de convecção-difusão. Estes métodos são conhecidos por "Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG)" [Hughes et al, 1988].

Estas idéias foram estendidas [Hughes et. al., 1989], que desenvolveram o conceito de Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ). Este método consiste em adicionar termos residuais, na forma de mínimos quadrados, à formulação clássica de Galerkin. Estes termos podem ser avaliados à nível elementar preservando a consistência do método de Galerkin.

Uma importante característica do método GMQ é a introdução de um parâmetro local de malha nas equações variacionais do problema. Isso pode resultar em soluções aceitáveis para vários tipos de malhas, regulares e irregulares.

Recentemente, o método GMQ foi aplicado em problemas de acústica governados pela equação de Helmholtz, para modelos unidimensionais [Harari e Hughes, 1992], sendo que o parâmetro de malha foi determinado baseando-se em soluções analíticas disponíveis.

Mais tarde, o parâmetro de malha do método GMQ foi desenvolvido para problemas bidimensionais [Thompson-Pinsky, 1995] e [Babuska et al, 1995]. Dada a direção de propagação de onda, pode-se achar o valor ótimo deste parâmetro usando a análise bidimensional de Fourier. Neste caso, a precisão obtida nas soluções não é tão boa como nos casos anteriores.

Na maior parte dos artigos publicados até o presente, usou-se elementos finitos quadrilaterais bilineares, e geralmente abordaram-se problemas com malhas regulares. Neste trabalho, uma implementação do método GMQ foi realizada para elementos quadrilaterais bilineares e triangulares lineares, para a modelagem de geometrias bidimensionais.

#### **1.4 Descrição do Trabalho**

Neste trabalho procura-se determinar uma metodologia para a resolução de problemas fechados governados pela equação de Helmholtz, considerando elevados números de onda. O método variacional de Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ) é aplicado. A definição do parâmetro de malha, fundamental para a aplicação do método, é feita baseando-se em resultados numéricos obtidos para problemas unidimensionais realizados por [Harari-Hughes, 1992]. Problemas de decaimento e propagação de onda com condições de contorno de Dirichlet são apresentados onde elementos triangulares e quadrilaterais lineares, em malhas regulares e irregulares, são utilizados para a obtenção dos resultados numéricos.

No capítulo II são apresentados as formulações matemáticas das equações fundamentais da mecânica dos fluidos e a equação de Helmholtz sujeita a diferentes tipos de condições de contorno. São apresentadas também algumas soluções analíticas da equação de Helmholtz, que são usadas como parâmetro de comparação para a validação do método GMQ.

No capítulo III apresenta-se a formulação integral do método de elementos finitos via Galerkin, via o método de Mínimos Quadrados e a formulação da equação de Helmholtz via Galerkin/Mínimos Quadrados (GMQ).

O capítulo IV contém os resultados numéricos onde é feita uma análise do método GMQ para problemas de decaimento exponencial e problemas de propagação de ondas planas e não planas. Estes resultados são obtidos em várias faixas de frequência usando elementos finitos lineares, triangulares e quadriláterais.

No capítulo V são apresentados as conclusões obtidas do exposto no trabalho. Sugestões para desenvolvimentos subsequentes nesta área são indicadas.

## Capítulo 2

### Formulação Matemática

*Neste capítulo é apresentada a formulação matemática básica da acústica, escrevendo-se a equação de Helmholtz e diferentes tipos de condições de contorno. Apresenta-se também algumas soluções analíticas para casos de geometrias simples, que serão utilizadas na validação dos métodos numéricos apresentados no capítulo III.*

#### 2.1 Propagação do Som em Fluidos

##### 2.1.1 Introdução e Conceitos Básicos

As ondas acústicas surgem-se devido a variação da pressão ao longo de um fluido compressível. O fluido pode ser definido como um material que não pode suportar uma tensão de cisalhamento quando está em repouso. Ondas acústicas em fluidos não viscosos são do tipo longitudinais que aparecem devido ao movimento das moléculas para trás e para frente na direção de propagação de onda, produzindo regiões adjacentes de compressão e de rarefação que são similares com aquelas produzidas em uma barra em vibração axial. Fluidos exibem menos restrições para deformação que os sólidos, portanto, a força de restituição responsável pela propagação de uma onda é simplesmente devido a mudança de pressão que ocorre quando o fluido é comprimido ou expandido.

Considera-se inicialmente a equação tridimensional da onda, adotando-se a hipótese de ondas planas. Estas ondas planas podem ser produzidas em um fluido, confinado por

paredes consideradas rígidas, através do movimento harmônico em baixa frequência de uma das fronteiras da cavidade acústica.

A propriedade característica destas ondas planas é que cada variável acústica, como deslocamento de partícula, pressão e massa específica, tem amplitude constante em qualquer plano perpendicular a direção de propagação de onda. A partícula de um fluido é um elemento volumétrico que é grande o bastante para conter milhões de moléculas para que seja considerado como um meio contínuo e é ainda pequeno para considerar-se que todos as variáveis acústicas são aproximadamente constantes no elemento volumétrico.

Para se chegar na teoria clássica de propagação do som em fluidos, as seguintes definições são consideradas [Kinsler, 1982]:

$$\{r\} = x\{x\} + y\{y\} + z\{z\} \quad (2.1)$$

onde,  $\{r\}$  representa o vetor da posição de uma partícula do fluido medida no referencial cartesiano  $(x,y,z)$ , e  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  e  $\{z\}$  representam os vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

$$\{\xi\} = \xi_x\{x\} + \xi_y\{y\} + \xi_z\{z\} \quad (2.2)$$

onde,  $\{\xi\}$  representa o vetor dos deslocamentos da partícula medidos a partir de uma posição de equilíbrio e

$$\{u\} = \frac{\partial}{\partial t}\{\xi\} = u_x\{x\} + u_y\{y\} + u_z\{z\} \quad (2.3)$$

onde,  $\{u\}$  representa o vetor das velocidades da partícula.

$$s = (\rho - \rho_0) / \rho_0 \quad (2.4)$$

onde,  $s$  representa a condensação em qualquer ponto,  $\rho$  é massa específica instantânea em qualquer ponto, e  $\rho_0$  é massa específica constante para uma dada condição de equilíbrio do fluido.

$$p = p_i - p_c \quad (2.5)$$

onde,  $p_i$  é a pressão instantânea em qualquer ponto,  $p_c$  é a pressão constante para uma dada condição de equilíbrio no fluido, e  $p$  representa a variação da pressão ou a pressão acústica em qualquer ponto do domínio fluido.

Finalmente, define-se o potencial de velocidade de acordo com a expressão abaixo,

$$\{u\} = \nabla\Phi \quad (2.6)$$

onde,  $\nabla\Phi$  indica o vetor gradiente do potencial de velocidade  $\Phi$ .

As definições (2.3) à (2.6) são baseadas nas seguintes hipóteses gerais simplificadoras:

- H1 -Despreza-se o efeito da força de gravidade o que permite considerar que  $\rho_0$  e  $p_c$  têm valores uniformes no domínio fluido considerado.
- H2 -O fluido é homogêneo e isotrópico.
- H3 -Os efeitos dissipativos devido a viscosidade ou condução de calor são desconsiderados. Processo adiabático e fluido inviscido.
- H4 -A análise será limitada às pequenas variações do estado do fluido em torno de uma posição de equilíbrio inicial tal que a mudança na massa específica do meio será desprezível, ou seja,  $|s| \ll 1$ .

Baseando-se nas definições apresentadas nas equações (2.1) à (2.6) e nas hipóteses H1 à H4, pode-se derivar as equações que governam o comportamento do fluido. Coloca-se inicialmente as equações fundamentais de estado, da continuidade e Euler que servem de base para a derivação da equação da onda.

### 2.1.2 A equação de Estado

Para um fluido, a equação de estado é aquela que relaciona as forças restauradoras internas e as deformações correspondentes. Dos princípios da termodinâmica, a equação de estado de um gás perfeito é dada por,

$$p_i = \rho R T_k \quad (2.7)$$

onde,  $p_i$  é a pressão instantânea total em Pascal (Pa),  $\rho$  é a massa específica do fluido em  $\text{kg/m}^3$ ,  $T_k$  é a temperatura absoluta em Kelvin (K) e  $R$  é constante de gás perfeito em questão.

Para o caso de um fluido perfeito no interior de uma cavidade com paredes que são altamente condutivas termicamente, considera-se que após uma pequena variação de volume da cavidade a temperatura do fluido permanecerá constante. Esta hipótese é plausível para os casos onde as paredes da cavidade ou ambiente tiveram capacidade térmica suficiente para dissipar o calor gerado. Isto é, adota-se a hipótese que as transformações são isotérmicas o que permite escrever,

$$\frac{p_i}{p_e} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.8)$$

Experimentalmente foi determinado que os processos acústicos são processos adiabáticos [Kinsler, 1982]. Em processos adiabáticos não há ganho ou perda de calor, isto é, há intercâmbio insignificante de energia térmica entre as partículas do fluido e então pode-se escrever a equação adiabática de estado da seguinte forma,

$$\frac{p_i}{p_c} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.9)$$

onde,  $\gamma$  é a razão de calor específico dada por,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.10)$$

onde,  $c_p$  é o calor específico em pressão constante e  $c_v$  é o calor específico em volume constante.

Para que a perturbação acústica de um fluido seja adiabática, sua condutividade térmica e o gradiente de temperatura da perturbação do fluido devem ser bastante pequenos, o que implica na inexistência de fluxo térmico durante o tempo da perturbação. Para as faixas de frequência e amplitude envolvido nos fenômenos da acústica, estas hipóteses podem ser adotadas.

Para outros fluidos que não sejam gases perfeitos, a equação adiabática de estado é mais complicada. Neste caso é preferido determinar experimentalmente a relação isentrópica entre as flutuações de pressão e massa específica.

Dada a relação (2.8) pode-se escrever a seguinte expansão de Taylor,

$$p_i = p_c + \left( \frac{\partial p_i}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p_i}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (2.11)$$

As derivadas parciais da equação (2.11) são constantes e pode ser determinadas para a compressão e a expansão adiabáticas do fluido tomando-se como referência a sua massa específica de equilíbrio  $\rho_0$ . Para pequenas flutuações, despreza-se os termos de ordem superior, o que conduz à,

$$p_i = p_c + \left( \frac{\partial p_i}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (2.12)$$

ou seja,

$$p_i - p_c = B \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (2.13)$$

onde, B é o módulo adiabático de compressibilidade dado por,

$$B = \rho_0 \left( \frac{\partial p_i}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (2.14)$$

Em termos da pressão acústica p e da condensação s pode-se escrever finalmente a equação do estado da seguinte forma,

$$p = B s \quad , \text{ com } |s| \ll 1 \quad (2.15)$$

### 2.1.3 A Equação da Continuidade

Considerando-se um elemento volumétrico de fluido de uma forma retangular de volume  $dV = dx dy dz$  fixo no espaço, mostrado na figura (2.1), pode-se determinar a equação do balanço de massa na entrada e saída, que para a direção x toma a seguinte forma,

$$\left( \rho u_x - \left( \rho u_x + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx \right) \right) dy dz = - \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (2.16)$$

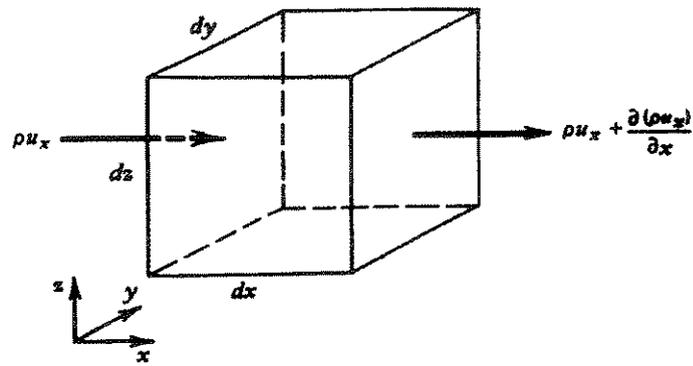


Fig. (2.1) Fluxo de massa do fluido na direção x no volume fixo  $dV$

Nas direções y e z tem-se expressões similares. O balanço global de massa permite escrever,

$$-\left(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right) dV = -(\nabla \cdot (\rho \{u\})) dV \quad (2.17)$$

onde,  $\nabla \cdot$  é o operador de divergência. Este operador é diferente para diferentes sistemas de coordenadas.

A variação da massa no volume  $dV$  é dada por  $(\partial\rho/\partial t)dV$  e o fluxo líquido deve ser igual a variação da massa, logo tem-se a seguinte expressão,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -(\nabla \cdot (\rho \{u\})) dV \quad (2.18)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \{u\}) = 0 \quad (2.19)$$

que é conhecida como a equação de continuidade. Esta equação é não-linear, todavia, pode ser linearizada considerando-se  $\rho = \rho_0 (1+s)$ , com  $\rho_0$  constante, e assumindo-se que  $s$  é muito pequeno,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0(1+s)) + \nabla \cdot (\rho_0(1+s)\{u\}) = 0 \quad (2.20)$$

o que permite escrever,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \{u\} = 0 \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é a equação de continuidade linearizada. Integrando-se esta equação em relação ao tempo e lembrando-se que,

$$\int (\nabla \cdot \{u\}) dt = \nabla \cdot \int \{u\} dt = \nabla \cdot \int \left( \frac{\partial \{\xi\}}{\partial t} \right) dt = \nabla \cdot \{\xi\} \quad (2.22)$$

e substituindo-se na equação de continuidade (2.21) tem-se,

$$s = - \nabla \cdot \{\xi\} \quad (2.23)$$

Da equação de estado (2.15) também tem-se,

$$p = -B \nabla \cdot \{\xi\} \quad (2.24)$$

que é conhecida como a equação de força. Para ondas unidimensionais a força compressiva é dada por,

$$f = pS \quad (2.25)$$

onde S representa uma área e o vetor dos deslocamentos unidimensional é dado por,

$$\nabla \cdot \{\xi\} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \quad (2.26)$$

Da equação (2.24) tem-se a força compressiva f dada por,

$$f = -SB \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.27)$$

O sinal negativo existe porque as forças de compressão resultam em deformações negativas.

#### 2.1.4 A Equação de Euler e a Equação da Onda Linearizada

Existe dois métodos importantes e normalmente usados para especificar o movimento de um fluido. O primeiro, conhecido tecnicamente como o método Lagrangiano, que pode ser descrito como histórico desde que seguimos a história de cada partícula individual do fluido. A partícula pode ser definido com suas coordenadas espaciais no momento  $t=0$ ; e suas coordenadas em tempo  $t$  qualquer são funções do tempo  $t$  e das coordenadas iniciais.

O segundo método conhecido tecnicamente como o método Euleriano pode ser descrito como o método "cinematográfico" desde que a concepção básica é o estado de velocidade em toda a região ocupada pelo fluido num momento, e o estado completo é dado pela sucessão destes estados de fluxo. O estado é considerado constante quando o movimento é estável.

Para um elemento de fluido  $dV$ , com massa específica  $dm$ , movendo-se com o fluido, a força líquida  $d\{f\}$  no elemento pode acelerar-lo de acordo com a segunda lei de Newton dada por,

$$d\{f\} = \{a\}dm \quad (2.28)$$

Ignorando-se o efeito de condutividade térmica e considerando-se um fluido não viscoso, a variação da força atuando sobre o fluido na direção  $x$  é dada por,

$$df_x = \left( p_i - \left( p_i + \left( \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) dx \right) \right) dy dz \quad (2.29)$$

As forças nas direções  $y$  e  $z$  são dadas por expressões similares. Então o vetor completo é dado por,

$$d\{f\} = df_x \{x\} + df_y \{y\} + df_z \{z\} \quad (2.30)$$

ou seja,

$$d\{f\} = - \nabla p_i dV \quad (2.31)$$

A velocidade do elemento do fluido é dada por  $\{u(x,y,z,t)\}$  medida no referencial cartesiano  $(x,y,z)$  e no tempo  $t$ , e ele move-se para outro ponto  $(x+dx,y+dy,z+dz)$  depois do tempo  $t+dt$ , assumindo um novo valor de velocidade dado por  $\{u(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)\}$  e então a aceleração é dada por,

$$\{a\} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{u(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt)\} - \{u(x, y, z, t)\}}{dt} \quad (2.32)$$

onde,

$$u_x dt = dx, \quad u_y dt = dy \quad \text{e} \quad u_z dt = dz. \quad (2.33)$$

Usando-se a expressão da série de Taylor e considerando-se só os primeiros termos para um pequeno incremento  $dx, dy, dz$ , tem-se a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \{u(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt)\} &= \{u(x, y, z, t)\} \\ &+ \frac{\partial \{u\}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \{u\}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \{u\}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \{u\}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.34)$$

substituindo-se na equação (2.32) tem-se a seguinte expressão,

$$\{a\} = \frac{\partial \{u\}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \{u\}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \{u\}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \{u\}}{\partial z} \quad (2.35)$$

ou na forma mais simplificada,

$$\{a\} = \frac{\partial \{u\}}{\partial t} + (\{u\} \cdot \nabla) \{u\} \quad (2.36)$$

utilizando-se a equação (2.28) dada por,

$$d\{f\} = \{a\} dm = \{a\} \rho dV \quad (2.37)$$

tem-se,

$$d\{\bar{f}\} = \rho \left( \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial t} + (\{\bar{u}\} \cdot \nabla) \{\bar{u}\} \right) dV \quad (2.38)$$

Substituindo-se a equação (2.31) na equação (2.38) tem-se a seguinte expressão,

$$-\nabla p_i = \rho \left( \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial t} + (\{\bar{u}\} \cdot \nabla) \{\bar{u}\} \right) \quad (2.39)$$

Essa é uma equação não-linear para um fluido não-viscoso, conhecida como a equação de Euler. Ela pode ser simplificada considerando a hipótese H4, ou seja,  $|s| \ll 1$ , e considerando também que,

$$|(\{\bar{u}\} \cdot \nabla)\{\bar{u}\}| \ll \left| \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial t} \right| \quad (2.40)$$

e então,  $(\{u\} \cdot \nabla)\{u\}$  pode ser cancelada da equação (2.39), o que corresponde a desconsiderar os termos convectivos da aceleração, ou seja, considerar o fluido como irrotacional, e então pode-se rescrever a equação simplificada de Euler da seguinte forma,

$$-\nabla p_i = \rho \frac{\partial \{u\}}{\partial t} \quad (2.41)$$

Desde que  $p_c$  é constante pode-se substituir,

$$-\nabla p_i = \nabla p \quad (2.42)$$

e desde que  $|s| \ll 1$  pode-se substituir  $\rho$  por  $\rho_0$ , e então tem-se

$$\rho_0 \frac{\partial \{u\}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.43)$$

que é a equação de Euler considerando o fluido não-viscoso aplicada aos problemas da acústica onde são consideradas pequenas perturbações em relação a uma posição de equilíbrio inicial.

Calculando-se a divergência da equação (2.43) tem-se,

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \{u\}}{\partial t} = -\nabla^2 p \quad (2.44)$$

e calculando-se a derivada, em relação do tempo, da equação da continuidade(2.21) tem-se a seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\partial (\nabla \cdot \{u\})}{\partial t} = 0 \quad (2.45)$$

substituindo-se na equação(2.44) tem-se,

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (2.46)$$

e usando-se a equação do estado (2.15) obtém-se finalmente a equação da onda,

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.47)$$

onde,  $c$ , é a velocidade de fase das ondas acústicas em fluidos ou a velocidade de propagação do som no meio.

A equação (2.47) é conhecida como a equação linearizada da onda para a propagação de som em fluidos.

Finalmente, a equação do estado (2.15) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$p = \rho_0 c^2 s \quad (2.48)$$

onde, a condensação  $s$  satisfaz a equação da onda e então a massa específica instantânea  $\rho$  também satisfaz a equação de onda. Considerando-se que,

$$\{u\} = \nabla\Phi \quad (2.49)$$

onde,  $\Phi$  é a velocidade potencial que é uma função escalar, então  $\Phi$  também satisfaz a equação de onda.

A velocidade de propagação do som em qualquer gás perfeito é dada por,

$$c = \sqrt{\gamma R T_k} \quad (2.50)$$

onde,  $T_k$  é a temperatura absoluta em Kelvin,  $R$  é o constante de gás e  $\gamma$  é a razão de calores específicos.

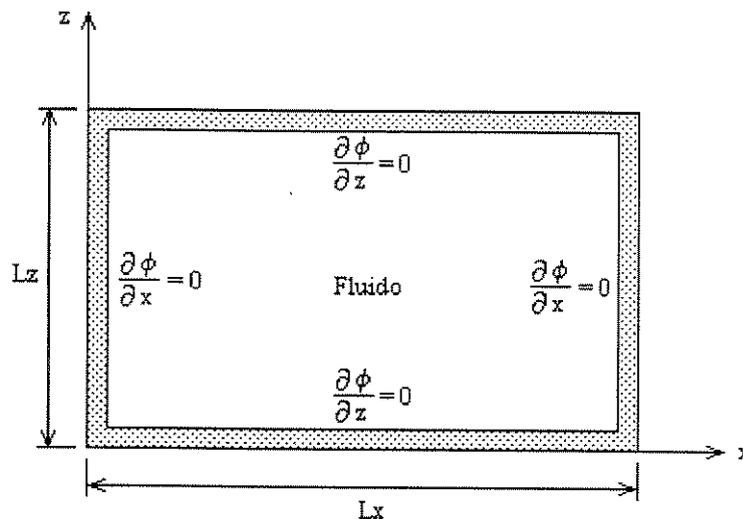
## 2.2 Soluções Analíticas para Cavidades Bidimensionais de Geometria Regular

Uma vez definida as equações que governam o problema das pequenas oscilações harmônicas de um fluido invíscido e irrotacional, serão estabelecidas neste item algumas soluções fechadas para o problema.

Nos problemas estudados, considera-se que o fluido está inicialmente em repouso, e interessa-se pelas suas características modais e sua resposta em frequência. As soluções analíticas encontradas serão usadas na validação e testes das soluções numéricas obtidas. As soluções de referência obtidas permitem o teste das soluções da acústica, no domínio das baixas e médias frequências, faixa na qual as soluções numéricas fornecem resultados satisfatórios permitindo, de uma forma geral, a análise acústica de cavidades de dimensões não muito elevadas, tais como habitações, habitáculos de veículos, cabinas de aeronaves, reservatórios etc.

### 2.2.1 Vibrações Livres de Cavidades Retangulares

Uma das geometrias mais simples que pode ser estudada é a de uma cavidade bidimensional retangular totalmente fechada por paredes rígidas, conforme mostrado na figura (2.2). Embora esta configuração seja bastante simples, muitos fenômenos da acústica podem ser qualitativamente observados no estudo destes exemplos.



**Fig. (2.2) Cavidade retangular de paredes rígidas**

Assim, considerando as hipóteses da acústica linear, e as hipóteses de cavidade totalmente fechada por paredes rígidas tem-se a seguinte equação que governa o problema,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial t^2} \quad (2.51)$$

sujeito as condições de contorno definidas da seguinte forma,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x=0 \text{ e } x=L_x \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=L_z \quad (2.53)$$

onde,  $\phi(x,z,t)$  representa o potencial de velocidades ou a pressão da cavidade no ponto  $(x,y)$ ,  $c$  é a velocidade de propagação do som no meio e  $t$  indica tempo. Considerando a hipótese de oscilações harmônicas, tem-se uma solução da seguinte forma,

$$\phi(x,z,t)=\psi(x,z)e^{i\omega t} \quad (2.54)$$

onde, a função potencial  $\psi(x,z)$  representa a distribuição espacial e o termo exponencial indica a hipótese adotada para variação temporal do potencial de velocidade  $\phi$ .

Considerando a separação de variáveis, tempo e espaço, definida na equação (2.54), e substituindo equação (2.54) na equação de onda (2.51) tem-se a equação de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.55)$$

onde,

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2.56)$$

sendo  $\omega$  a pulsação e  $k$  o número de onda.

Usando-se novamente uma separação das variáveis de espaço, pode-se rescrever a equação (2.55) da seguinte forma,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (2.57)$$

onde,  $X$  e  $Z$  são obtidos a partir de:

$$\psi(x,z)=X(x) Z(z) \quad (2.58)$$

O primeiro termo desta equação é função de  $x$  e o segundo termo é função somente de  $z$ . Partindo-se da hipótese de separação das variáveis espaciais, pode-se definir um número de onda para cada direção da seguinte forma,

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \quad (2.59)$$

que conduz a,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (2.61)$$

A solução das equações (2.60) e (2.61) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\phi(x, z, t) = A \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_z z + \phi_z) e^{i\omega t} \quad (2.62)$$

onde,  $A$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_z$  são constantes determinados a partir da aplicação das condições de contorno (2.52) e (2.53). Isto é, substituindo a equação (2.62) nas equações (2.52) e (2.53) obtém-se,

$$\phi_x = \phi_z = \pi/2 \quad (2.63)$$

$$\sin(k_x L_x) = \sin(k_z L_z) = 0 \quad (2.64)$$

que permite determinar os modos acústicos que são dados por,

$$\phi(x, z, t) = A \cos(k_x L_x) \cos(k_z L_z) e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

com,

$$k_x = \frac{n\pi}{L_x}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.66)$$

$$k_z = \frac{m\pi}{L_z}, \quad m=0,1,2,3,\dots \quad (2.67)$$

As equações (2.66) e (2.67) definem os valores para  $k_x$  e  $k_z$ , em consequência as frequências características são dadas por,

$$f_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} \quad (2.68)$$

onde,  $f_{nm}$  são as frequências acústicas de oscilação da cavidade, medidas em Hertz (Hz).

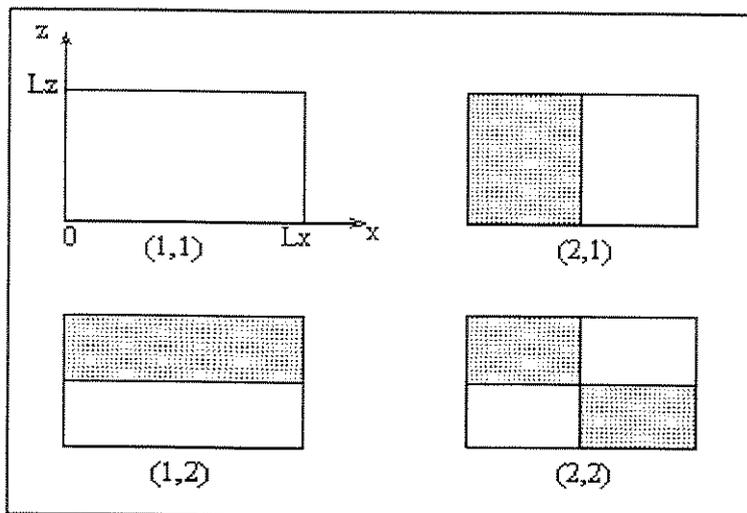
Considerando a relação entre o número de onda  $k$ , e as pulsações próprias  $\omega$ , equação (2.56), pode-se escrever,

$$\omega_{nm} = k c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} c \quad (2.69)$$

levando-se em conta as equações (2.66), (2.67), (2.68) e (2.69), tem-se finalmente,

$$f_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_z}\right)^2} \quad (2.70)$$

A frequência fundamental do sistema é obtida quando  $n$  e  $m$  têm valores unitários, e os modos subsequentes de acordo com as soluções de equações (2.66) e (2.67). Alguns modos de vibração desta cavidade retangular são mostrados na figura (2.3) onde, a região clara vibra em posição de fase em relação a região escura, e os pares de números indicam o modo estudado.



**Fig. (2.3) Modos acústicos de uma cavidade totalmente fechada**

Observa-se que no caso de cavidades totalmente fechadas uma oscilação de frequência nula é obtida, correspondendo ao modo (0,0), que é um modo que pode ser denominado como sendo um modo de corpo rígido.

As soluções obtidas para as frequências naturais, equação (2.70), e para os modos acústicos, equação (2.65), são utilizadas para validação das soluções numéricas propostas para o problema.

### 2.2.2 Vibrações Forçadas de Cavidades Retangulares

Outro tipo padrão de resultado que pode ser obtido da análise dinâmica são as respostas em frequência do sistema, ou o campo de pressões para uma dada frequência de excitação (modo operacional). Neste item apresenta-se uma formulação analítica para a obtenção dos modos operacionais bem como a curva de resposta em frequência, para uma cavidade acústica bidimensional mostrada na figura (2.2).

Os modos operacionais do sistema podem ser calculados, em todos os pontos da cavidade, a partir de uma superposição modal de acordo com a seguinte expressão [Craig, 1981],

$$Mo_{\omega} = \sum_i \sum_j \frac{\phi_{ij}^f \phi_{ij}^d}{f_{ij}^2 - \omega^2} \quad ,i=0,1,2,3,\dots,I \quad j=0,1,2,3,\dots,J \quad (2.71)$$

onde,  $\omega$  é a frequência, em rad/sec, na qual o modo operacional é desejado,  $I$  é o número de modos utilizados na direção  $i$  e  $J$  é o número de modos utilizados na direção  $j$ ,  $f_{ij}$  é a frequência natural do sistema calculada em rad/sec, equação (2.70),  $\phi_{ij}^f$  representa os modos naturais calculados no ponto  $f$  onde a força é aplicada e  $\phi_{ij}^d$  representa os modos naturais calculados em qualquer ponto  $(x,y)$  da cavidade retangular. Estes modos naturais podem ser determinados a partir da equação (2.65), isto é,

$$\phi_{ij}^f = \cos\left(\frac{i\pi x_f}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j\pi y_f}{L_y}\right) \quad (2.72)$$

$$\phi_{ij}^d = \cos\left(\frac{i\pi x_d}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j\pi y_d}{L_y}\right) \quad (2.73)$$

onde,  $(x_f, y_f)$  são as coordenadas do ponto onde a força é aplicada, e  $(x_d, y_d)$  são as coordenadas de cada ponto da cavidade.

A resposta em frequência do sistema pode ser igualmente calculada por superposição modal de acordo com a seguinte expressão [Craig, 1981],

$$Re_l = \sum_i \sum_j \frac{\phi_{ij}^f \phi_{ij}^r}{f_{ij}^2 - \omega_l^2} \quad ,i=0,1,2,3,\dots,I \quad j=0,1,2,3,\dots,J \quad (2.74)$$

onde,  $l$  é o número de pontos em frequência adotado,  $\omega_l$  são as frequências em rad/s,  $\phi_{ij}^r$  representa os modos naturais calculados no ponto  $r$  onde a resposta é desejada, equação (2.65), e  $\phi_{ij}^f$  representa os modos acústicos calculados no ponto  $f$  onde a força é aplicada, equação (2.65).

*No próximo capítulo, apresenta-se o método de Resíduos Ponderados, e as formulações integrais dos métodos de Galerkin, Mínimos Quadrados e Galerkin-Mínimos Quadrados, para a solução da equação de Helmholtz. As soluções numéricas definidas serão testadas no capítulo IV.*

## Capítulo 3

### Formulação Integral e Aproximação por Elementos Finitos

*Neste capítulo apresenta-se inicialmente uma introdução de alguns métodos numéricos para a solução de equações diferenciais. Na seqüência, o método dos Resíduos Ponderados, e a formulação clássica de Galerkin para a solução da equação de Helmholtz são desenvolvidos. Apresenta-se também a formulação integral via o método de Mínimos Quadrados para a equação de Helmholtz. Finalmente, a formulação do método de Galerkin-Mínimos Quadrados (GMQ) é mostrada sendo que o seu campo de validade é discutido. Para todos os casos estudados é proposta uma solução, via o método dos elementos finitos, para aproximação das soluções em domínios de geometrias arbitrárias e condições de contorno quaisquer.*

#### 3.1 Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais

Inúmeros métodos numéricos foram desenvolvidos nas últimas décadas para a solução de equações diferenciais. Segundo [Seegerlind, 1984], alguns destes métodos podem ser classificados em grupos apresentados a seguir.

##### **Método de Diferenças Finitas**

Este método utiliza equações em diferenças para a aproximação das derivadas das equações que governam o problema físico estudado. O método fornece geralmente bons resultados em problemas de transferência de calor e em problemas de mecânica dos fluidos, para regiões bidimensionais com eixos paralelos aos eixos coordenados. O método é

deficiente em regiões curvas com contornos irregulares, sendo inadequado para uma implementação computacional genérica.

### **Métodos Baseados em uma Formulação Variacional**

Os métodos baseados em uma formulação variacional consistem em minimizar funcionais que estão associados geralmente a definições de estados de energia do sistema. Trata-se, por exemplo, de se aplicar o princípio da estacionaridade da energia do sistema para se determinar pontos de equilíbrio estático ou dinâmico. Assim, o método pode ser abordado como a minimização de uma forma integral que pode ser escrita como se segue:

$$\Pi = \int_0^H \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (3.1)$$

onde,  $y$  é uma função incógnita,  $D$  e  $Q$  são constantes conhecidas e o domínio do problema é definido por  $0 \leq x \leq H$ . Se a função  $y=f(x)$  for uma função que minimiza  $\Pi$ , então  $y$  é uma solução do problema associado a equação (3.1).

Nem todas as equações diferenciais que contém derivadas de primeira ordem podem ser resolvidas através deste método. Isto se caracteriza em uma grande desvantagem [Segerlind, 1984]

### **Métodos dos Resíduos Ponderados**

Estes métodos também envolvem uma formulação integral para o problema, e baseiam-se em uma formulação diferencial do problema.

O método consiste em propor uma solução aproximada para a equação diferencial que governa o problema, definindo-se desta forma um resíduo  $R$  que representa a diferença entre a solução exata e a solução aproximada. Procuram-se soluções para o problema aplicando-se a condição de que o resíduo, ponderado por diferentes critérios(funções), deve ser mínimo no domínio. Para cada escolha das funções ponderadoras, definem-se diferentes métodos de

aproximação. Os mais usados são o método de colocação por pontos ou subdomínios, o método dos Mínimos Quadrados e o método de Galerkin.

Neste trabalho serão aplicados o método de Galerkin e o método dos Mínimos Quadrados, bem como a combinação dos dois, na solução da equação de onda definida no capítulo II. As formas integrais resultantes da aplicação destes métodos são solucionadas usando-se uma aproximação clássica de elementos finitos.

### 3.2 Método de Galerkin Aplicado à Equação de Helmholtz

Trata-se de estudar o problema de cavidades acústicas com geometrias arbitrárias, aplicando o método dos elementos finitos e uma formulação de Galerkin. A equação diferencial que governa o comportamento do campo de pressão de uma cavidade acústica é a equação da onda. Dentre outros, esta equação pode descrever a fenômeno de propagação de ondas sonoras, ondas de superfícies ou ondas de tensão em sólidos.

Para o caso da acústica, as ondas sonoras podem ser representadas através das oscilações de pressão ou de potencial de velocidades em um fluido.

Baseando-se nas hipóteses da acústica linear, a equação da onda pode ser escrita da seguinte forma,

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = -F \quad (3.2)$$

onde,  $\Phi$  representa, de uma forma genérica, o potencial de velocidades ou a pressão do fluido,  $c$  é a velocidade de propagação do som no meio, e  $F$  é o termo fonte de excitação.

Considerando-se uma solução e uma excitação de forma harmônica do tipo,

$$\Phi = \phi e^{i\alpha x} \quad (3.3)$$

$$F = f e^{i\alpha t} \quad (3.4)$$

para um domínio limitado  $\mathfrak{R} \subset \mathbf{R}^d$ , onde  $d$  indica a dimensão do espaço considerado. Substituindo as equações (3.3) e (3.4) na equação (3.2) tem-se a equação de Helmholtz expressada na seguinte forma,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \phi = -f \quad (3.5)$$

onde,  $\omega$  é a pulsação em rad/s e  $k=\omega/c$  é definido como o numero de onda. Para um sistema tridimensional o operador Laplaciano em coordenadas retangulares é dado por,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.6)$$

Assim, o problema da acústica a ser solucionado consiste em,

achar  $\phi$  tal que:

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -f \quad \text{no domínio } \Omega \quad (3.7)$$

sujeito a:

$$\phi=0 \quad \text{em } \Gamma_L \text{ (superfície livre)} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_R \text{ (parede rígido)} \quad (3.9)$$

onde  $n$  indica a direção normal exterior do domínio  $\Omega$ .

Usando o método dos resíduos ponderados, o erro  $E_\Omega$  da aproximação é definido da seguinte forma,

$$E_\Omega = \phi - \hat{\phi} \quad (3.10)$$

onde,  $\phi$  é a solução exata e  $\hat{\phi}$  representa a solução aproximada do problema. Nota-se da equação (3.10) que  $E_\Omega$  é uma função da posição em que se está avaliando o erro dentro do domínio  $\Omega$ . Define-se também o resíduo da aproximação  $R_\Omega$  como sendo,

$$R_{\Omega} = \nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} + f \quad (3.11)$$

onde esse resíduo é a quantidade a ser minimizada para que o erro  $E_{\Omega}$  tenda a zero.

Aplicando-se a definição do método dos resíduos ponderados [Dhatt et al, 1984], tem-se a seguinte forma integral forte para o problema,

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.12)$$

onde,  $W_i$  é o conjunto de  $J$  funções independentes de ponderação. Para que haja convergência da equação (3.12), requer-se que  $\hat{\phi} \rightarrow \phi$  quando  $J \rightarrow \infty$ , o que implica em  $E_{\Omega} \rightarrow 0$ , e por consequência a igualdade (3.12) é satisfeita.

Particularizando-se a formulação para o caso da equação de Helmholtz (3.7) tem-se,

$$\int_{\Omega} W_i [\nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} + f] d\Omega = 0 \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.13)$$

onde,

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} \quad (3.14)$$

onde  $\hat{\phi}$  é uma aproximação para a função  $\phi$ .

Adotando-se uma aproximação polinomial por subdomínio, tal como a aproximação de elementos finitos [Dhatt et al, 1984], tem-se a seguinte expressão,

$$\hat{\phi} = [N]^e \{\phi\}^e = \sum_{m=1}^J N_m^e \phi_m^e \quad (3.15)$$

$$\ddot{\hat{\phi}} = [N]^e \{\ddot{\phi}\}^e = \sum_{m=1}^J N_m^e \ddot{\phi}_m^e \quad (3.16)$$

que pressupõe que o domínio  $\Omega$  foi subdividido em subdomínios chamados elementos, indicados pelo índice  $e$ . Nas expressões (3.15) e (3.16),  $[N]$  representa a matriz das funções de interpolação clássicas da família Lagrange, e  $\{\phi\}^e$  e  $\{\ddot{\phi}\}^e$  representam as variáveis nodais e suas derivadas segundas com relação ao tempo, para cada elemento  $e$ .

Substituindo a expressão (3.14) na equação (3.13) tem-se, para cada elemento a seguinte expressão,

$$\int_{\Omega^e} \left( W_i \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + W_i \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + W_i \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} + k^2 W_i \hat{\phi} + W_i f \right) dx dy dz = 0 \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.17)$$

com o objetivo de se relaxar as condições de derivabilidade do problema faz-se uma integração por partes da equação (3.17), o que conduz a seguinte expressão,,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right] dx dy dz + \int_{\Omega^e} k^2 W_i \hat{\phi} dx dy dz + \int_{\Omega^e} W_i f dx dy dz \\ + \int_{\Gamma_x^e} W_i \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} dy dz + \int_{\Gamma_y^e} W_i \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} dx dz + \int_{\Gamma_z^e} W_i \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} dx dy = 0 \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.18) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno da equação (3.9), levando-se em conta a equação (3.15) tem-se a forma fraca elementar do problema,

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right] dx dy dz - \int_{\Omega^e} k^2 W_i \hat{\phi} dx dy dz = \int_{\Omega^e} W_i f dx dy dz \quad (3.19)$$

sujeita às condições de contorno de Dirichlet (3.8).

Dada a discretização do domínio e das fronteiras, tem-se em notação indicial para cada elemento,

$$\hat{\phi} = [N]^e \{\phi\}^e = \sum_{m=1}^J N_m(x, y, z) \phi_m \quad (3.20)$$

onde,  $J$  é o número de nós de cada elemento que neste caso é idêntico ao número de graus de liberdade do elemento, e  $\phi_m$  são as variáveis nodais, neste caso as pressões ou potenciais de velocidade nodais. Observa-se da equação (3.20) que somente as funções de forma  $N_m$  são dependentes da posição  $(x, y, z)$ , sendo as variáveis nodais interpretadas como parâmetros da aproximação a serem ajustados, que são funções do tempo.

Aplicando-se o método de Galerkin, ou seja funções de ponderação  $W_i$  idênticas as funções de forma  $N^e$  e substituindo-se a equação (3.20) em (3.19), obtém-se para cada elemento,

$$\sum_{m=1}^J \left[ \phi_m \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \right] d\Omega - \phi_m k^2 \int_{\Omega^e} N_i N_m d\Omega \right] = \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega \quad (3.21)$$

Após a montagem do sistema global [Zienkiewicz, 1994], a equação (3.21) corresponde a um sistema de equações algébricas que podem ser escritas na seguinte forma matricial,

$$[[K]_G - k^2 [M]_G] \{\phi\} = \{F\}_G \quad (3.22)$$

onde,  $[K]_G$  representa a matriz de rigidez,  $[M]_G$  a matriz de massa, e  $\{F\}_G$  o vetor de força, sendo que o subscrito  $G$  indica que o método empregado é o método de Galerkin.

A equação (3.22) pode ser usada para se obter a resposta do sistema, em função do número de onda  $k$ , ou da frequência  $\omega$ . Outro tipo de análise possível é o estudo das soluções próprias da equação homogênea associada à equação (3.22) que pode ser escrita em função da frequência, conforme mostrado abaixo,

$$\left[ [K]_G - \frac{\omega^2}{c^2} [M]_G \right] \{\phi\} = 0 \quad (3.23)$$

Este problema admite pares de soluções que correspondem às frequências acústicas e aos modos naturais correspondentes, trata-se de um problema de autovalores/autovetores reais, que podem ser solucionados por algoritmos convencionais de valores próprios.

### 3.3 Determinação das Matrizes Elementares - Coordenadas Isoparamétricas

Com o objetivo de se simplificar os cálculos das matrizes elementares do problema, propõe-se o caso de um referencial local definido pela seguinte aproximação geométrica,

$$x=[N]_i\{x\}_i \quad (3.24)$$

$$y=[N]_i\{y\}_i \quad (3.25)$$

$$z=[N]_i\{z\}_i \quad (3.26)$$

onde,  $\{x\}_i$ ,  $\{y\}_i$  e  $\{z\}_i$  são vetores das coordenadas nodais de cada elemento, e  $[N]_i$  são as funções de interpolação definidas no espaço  $\xi, \eta, \zeta$ . Usando uma notação matricial genérica, pode-se escrever as matrizes elementares como se segue,

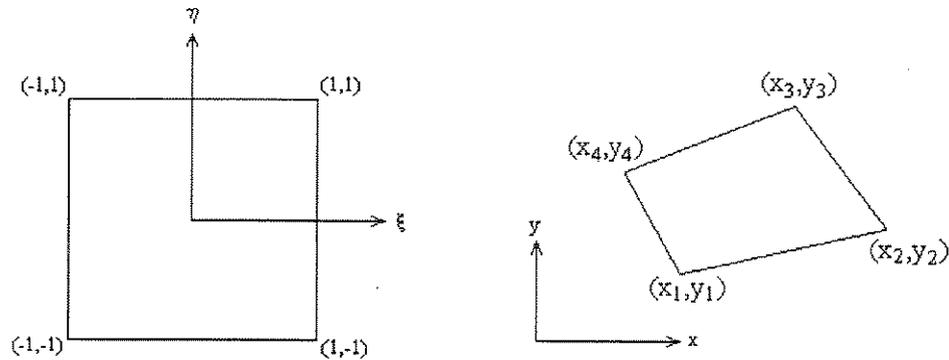
$$[k]_G^e = \int_{\Omega_e} [B]_e^T [B]_e d\Omega \quad (3.27)$$

$$[m]_G^e = \int_{\Omega_e} [N]_e^T [N]_e d\Omega \quad (3.28)$$

onde  $[B]_e$  é a matriz das derivadas das funções de forma, que é dada por,

$$[B]_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [N]_e \quad (3.29)$$

Particularizando-se a transformação geométrica, equações (3.24) à (3.26) para o caso de elementos bidimensionais quadrilaterais de 4 nós, conforme mostrado na figura (3.1), e levando-se em conta a transformação isoparamétrica, pode-se escrever as matrizes do sistema da seguinte forma,



**Fig. (3.1) Elemento quadrilateral de 4 nós**

$$[k]_G^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [[J]^{-1} [B]_\xi]^T [J]^{-1} [B]_\xi \det[J] d\xi d\eta \quad (3.30)$$

$$[m]_G^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]_\xi^T [N]_\xi \det[J] d\xi d\eta \quad (3.31)$$

$$\{f\}_G^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]_\xi^T f \det[J] d\xi d\eta \quad (3.32)$$

onde o Jacobiano  $[J]$  é definido por,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e podemos notar que,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e o símbolo  $[B]_{\xi}$  indica a matriz das derivadas das funções de forma no espaço  $(\xi, \eta)$  isoparamétrico.

Os limites de integração são agora  $\pm 1$  para as variáveis  $\xi$  e  $\eta$ , sendo que as equações (3.30) à (3.32) podem ser avaliadas usando diferentes técnicas de integração numérica, tais como quadratura gaussiana para elementos quadrilaterais [Dhatt et al, 1984].

A forma geral para  $[K]_G^e$ ,  $[M]_G^e$  e  $\{f\}_G^e$  pode ser facilmente adaptada para um suporte geométrico triangular linear alterando-se o número de nós e os limites de integração.

### 3.4 Método dos Mínimos Quadrados Aplicado à Equação de Helmholtz

Outra possibilidade para a resolução da equação de Helmholtz é a aplicação do método dos Mínimos Quadrados, no contexto de uma aproximação de elementos finitos. Este método consiste em minimizar a seguinte forma integral,

$$E_r = \int_{\Omega} [R(x, y, z)]^2 d\Omega \quad (3.35)$$

onde  $E_r$  é o erro global da aproximação e  $R(x, y, z)$  é o resíduo da aproximação. Este erro é minimizado em relação aos coeficientes desconhecidos da solução aproximada de elementos finitos. Para a equação de Helmholtz o resíduo  $R$  pode ser escrito na seguinte forma,

$$R = \nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} + f \quad (3.36)$$

onde  $\hat{\phi}$  é a solução aproximada. A fim de simplificar a notação, escreve-se a equação de Helmholtz na seguinte forma,

$$L\hat{\phi} = -f \quad (3.37)$$

onde  $L$  é o operador de Helmholtz,  $L = \nabla^2 + k^2$ . Desta forma, o resíduo  $R$  pode ser escrito da seguinte forma,

$$R = -L\hat{\phi} - f \quad (3.38)$$

consequentemente, substituindo a equação (3.38) em (3.35), tem-se,

$$Er = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [-L\hat{\phi} - f]^2 d\Omega \quad (3.39)$$

Minimizando o erro  $Er$  em relação aos parâmetros  $\{\phi\}^e$  da aproximação, tem-se, para cada elemento, a seguinte condição,

$$\frac{dEr}{d\{\phi\}^e} = 0 \quad (3.40)$$

onde  $\{\phi\}^e$  são os parâmetros nodais da aproximação de elementos finitos definidos genericamente da seguinte forma,

$$\hat{\phi} = [N]\{\phi\}^e = \sum_{m=1}^J N_m(x, y, z) \phi_m^e \quad (3.41)$$

onde,  $\hat{\phi}$  é a solução aproximada de cada elemento,  $[N]$  é a matriz das funções de forma, e  $\{\phi\}^e$  são as variáveis nodais. Substituindo-se a expressão (3.39) na equação (3.40), pode-se escrever,

$$\int_{\Omega^e} \frac{d}{d\{\phi\}^e} [-L\hat{\phi} - f]^2 d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega^e} (L\hat{\phi} + f) \frac{d}{d\{\phi\}^e} (L\hat{\phi} + f) d\Omega = 0 \quad (3.43)$$

baseando-se na aproximação de elementos finitos definida em (3.41), pode-se escrever,

$$L\hat{\phi} = LN_i \phi_i^e \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.44)$$

realçando o fato de que somente as funções de forma N são dependentes da geometria, sendo os parâmetros nodais  $\{\phi\}^e$  valores atribuídos para cada nó da malha. Substituindo-se equação (3.44) na equação (3.43), e tendo em vista a equação (3.20), tem-se,

$$\int_{\Omega^e} LN_i L\hat{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega^e} LN_i f d\Omega \quad , i=1,2,3,\dots,J \quad (3.45)$$

onde J representa o número de graus de liberdade do elemento e.

Aplicando-se a definição do operador de Helmholtz L, tem-se a seguinte forma diferencial para a i-ésima equação do problema,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} + k^2 \hat{\phi} \right) d\Omega \\ = - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) f d\Omega \quad , i=1,2,3,\dots,J \end{aligned} \quad (3.46)$$

o que pode ser escrito em função das variáveis nodais elementares (tendo em vista a equação(3.41)), da seguinte forma matricial,

$$[[K]_{MQ}^e - k^2 [M]_{MQ}^e] \{\phi\}^e = \{F\}_{MQ}^e \quad (3.47)$$

onde,  $[K]_{MQ}^e$  e  $[M]_{MQ}^e$  indicam as matrizes de rigidez e massa elementares calculadas usando o método dos mínimos quadrados, e  $\{f\}_{MQ}^e$  são as forças nodais equivalentes calculadas

usando o método dos mínimos quadrados. Usando-se uma notação matricial para se especificar o cálculo das matrizes de cada elemento, tem-se,

$$[K]_{MQ}^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \\ + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.48)$$

$$[M]_{MQ}^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \right) N_m \\ + \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} \right) k^2 N_i + k^4 N_i N_m \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.49)$$

$$\{F\}_{MQ}^e = - \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) f \right] d\Omega \quad (3.50)$$

onde  $i$  e  $m$  variam de 1 até o número de graus de liberdade de cada elemento.

Observa-se que este método requer continuidade  $C^1$  das funções de interpolação, sendo desta forma pouco utilizado em sua forma padrão. Muitos autores [Zienkiewicz, 1994] propuseram transformações nas equações diferenciais do problema, com o intuito de se reduzir a ordem das derivadas do operador  $L$ , todavia, este enfoque conduz geralmente a um número de variáveis incógnitas mais elevado.

Neste trabalho, usa-se a combinação do método de Galerkin e do método de Mínimos Quadrados para resolução da equação da onda. Esta formulação é apresentada no próximo item.

### 3.5 Método de Galerkin/Mínimos Quadrados (GMQ) Aplicado à Equação de Helmholtz

Nas áreas de acústica [Petyt et al, 1976] e vibroacústica [Nefske et al, 1982], [Grosh e Pinsky, 1994] e [Graggs, 1973], o método de elementos finitos (MEF) tem sido freqüentemente utilizado. Acoplado com o método de elementos de contorno, o MEF tem permitido a solução de problemas em meios limitados ou ilimitados, homogêneos ou não, e principalmente acoplados ou desacoplados das fronteiras flexíveis. Para este tipo de análise, dois impedimentos fundamentais podem ser destacados: o problema de domínio ilimitado e o problema de estabilidade numérica em relação aos altos números de onda. Para superar o problema de domínio exterior pode-se usar funções de interpolação exponenciais, gerando desta forma os chamados elementos infinitos [Zienkiewicz, 1978]. Outra alternativa é considerar a condição de radiação no infinito no exterior de um domínio limitado, transformando-se a condição de radiação em uma condição equivalente de Dirichlet [Harari e Hughes, 1991].

Com o intuito de se solucionar os problemas de precisão e instabilidade numérica, encontrados nos modelos de elementos finitos, para altos números de onda, propõe-se aplicar neste trabalho uma formulação que combina os métodos de Galerkin e de Mínimos Quadrados [Harari, Hughes, 1992].

Usando-se a formulação de Galerkin e de Mínimos Quadrados definidas anteriormente e fazendo-se a combinação linear dos dois métodos, equações (3.19) e (3.46), tem-se a seguinte formulação integral para cada elemento,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) d\Omega - k^2 \int_{\Omega^e} N_i \hat{\phi} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega^e} \tau \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} + k^2 \hat{\phi} \right) d\Omega \\
 & = \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega - \int_{\Omega^e} \tau \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) f d\Omega, \quad i=1,2,3,\dots,J \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

A variável  $\tau$  pode ser uma quantidade local para ser definida a nível elementar como uma função de tamanho  $h$  de cada elemento. Tal enfoque permite a aplicação deste método

para malhas irregulares. Para uma malha irregular de elementos lineares,  $\tau$  passa ser definido como uma matriz diagonal dada por  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$  onde  $n$  é o número de graus de liberdade total no sistema. O método padrão de Galerkin pode ser obtido como um caso especial de GMQ considerando a variável  $\tau = 0$ .

A forma integral, equação (3.51), pode ser reescrita na seguinte forma matricial elementar,

$$[[\mathbf{K}]_{\text{GMQ}}^e - k^2[\mathbf{M}]_{\text{GMQ}}^e] \{\phi\}^e = \{\mathbf{F}\}_{\text{GMQ}}^e \quad (3.52)$$

onde  $[\mathbf{K}]_{\text{GMQ}}^e$  é a matriz de rigidez elementar do método GMQ e é dada por,

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]_{\text{GMQ}}^e = & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \right. \\ & + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} \\ & \left. + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.53)$$

e a matriz  $[\mathbf{M}]_{\text{GMQ}}^e$  representa a matriz de massa do método GMQ e pode ser escrita conforme a expressão abaixo,

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{\text{GMQ}}^e = & \int_{\Omega^e} N_i \hat{\phi} d\Omega - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \hat{\phi} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \hat{\phi} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \hat{\phi} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} N_i + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} N_i \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} N_i + k^2 N_i \hat{\phi} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.54)$$

sendo finalmente  $\{\mathbf{F}\}_{\text{GMQ}}^e$  a força nodal equivalente do método GMQ, escrita como se segue,

$$\{\mathbf{F}\}_{\text{GMQ}}^e = \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega - \int_{\Omega^e} \tau \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + k^2 N_i \right) f d\Omega \quad (3.55)$$

Considerando-se o caso de uma aproximação por elementos finitos lineares, diversos termos da equação (3.51) acabam desaparecendo tendo em vista a ordem de derivação envolvida. Isto é, no caso de uma formulação utilizando o método de Galerkin/Mínimos Quadrados e elementos finitos lineares, os seguintes termos podem ser simplificados,

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.57)$$

Assim, o método GMQ pode ser rescrito como uma combinação linear das matrizes de rigidez e massa do método de Galerkin, conforme mostrado abaixo,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) d\Omega - k^2 \int_{\Omega^e} N_i \hat{\phi} d\Omega + \tau k^4 \int_{\Omega^e} N_i \hat{\phi} d\Omega \\ & = \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega - \tau k^2 \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega \end{aligned}$$

(3.58)

ou ainda,

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) d\Omega - (1 - \tau k^2) k^2 \int_{\Omega^e} N_i \hat{\phi} d\Omega = (1 - \tau k^2) \int_{\Omega^e} N_i f d\Omega \quad (3.59)$$

Em forma matricial global, ou seja após a superposição de todos os elementos, esta equação é dada por,

$$[[\mathbf{K}]_G - (1 - \tau k^2) k^2 [\mathbf{M}]_G] \{\phi\} = (1 - \tau k^2) \{F\}_G \quad (3.60)$$

onde, as matrizes de rigidez e de massa e o vetor de força são todas montadas da mesma maneira que o método de Galerkin. Isto é, uma variação do método de Galerkin é realizada simplesmente com a modificação dos coeficientes escalares que multiplicam as matrizes de massa e o vetor de força do método de Galerkin por um fator  $(1 - \tau k^2)$ . Estas modificações

podem ser feitas a nível elementar o que simplifica consideravelmente a programação do método.

### 3.6 Limites das Soluções Numéricas Baseadas no Método de Galerkin

A solução da equação de Helmholtz encontra aplicações em diversos campos, conforme discutido no capítulo I. Dentre outras, destaca-se a aplicação na área de acústica, interesse maior deste trabalho.

Observando mais em detalhe o comportamento das soluções esperadas para a equação de Helmholtz, observa-se que em função do número de onda  $k$ , tem-se comportamentos bastante distintos para as soluções.

Em geral, duas grandes categorias de problemas podem ser identificadas: problemas de propagação de ondas, onde o número de onda é um número real, e problemas "super-amortecidos" ou de decaimento onde o número de onda é um número imaginário puro.

Observando-se o método de Galerkin/Mínimos Quadrados (GMQ), derivado no item anterior, pode-se notar que o parâmetro  $\tau$  é básico para a implementação do mesmo, e deve ser projetado conforme o tipo de solução que se pretende obter. Com o objetivo de se estabelecer valores limites para o parâmetro  $\tau$ , estuda-se na seqüência o comportamento das soluções numéricas da equação de Helmholtz.

Parte-se da equação de Helmholtz unidimensional, que pode ser escrita da seguinte forma,

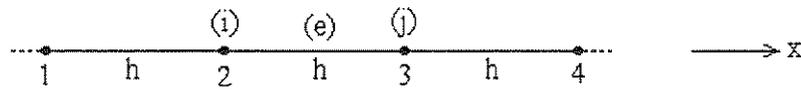
$$\left( \frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi \right) = -f \quad (3.61)$$

Adotando-se a formulação de Galerkin, tem-se a seguinte forma matricial para o problema autovalores-autovetores,

$$[[K] - k^2[M]] \{\phi\} = 0 \quad (3.62)$$

onde,  $k$  é o número de onda e  $\phi$  é o vetor dos potenciais de velocidade ou a pressão nodal. O sistema admite pares de soluções  $(k, \{\phi\})$  que correspondem aos autovalores e autovetores da equação (3.62).

Considerando uma malha de elementos unidimensionais lineares, conforme mostrado na figura (3.2),



**Fig. (3.2) Malha de elementos unidimensionais lineares**

tem-se as seguintes funções clássicas de ponderação  $N$  para um elemento numérico  $(e)$  de nós  $i$  e  $j$ ,

$$N_i^e = \frac{\chi}{h^e} \quad (3.63)$$

$$N_j^e = \frac{h^e - \chi}{h^e} \quad (3.64)$$

onde,  $\chi$  é a coordenada local que varia de 0 até  $h^e$ , sendo  $h^e$  o comprimento de cada elemento.

Aplicando-se o método de Galerkin e a aproximação baseada em (3.63) e (3.64), tem-se a seguinte configuração para as matrizes elementares do problema,

$$[K]_{ij}^e = [K]_{ji}^e = \int_0^{h^e} \left[ \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} \right] d\chi = -\frac{1}{h^e} \quad (3.65)$$

$$[\mathbf{K}]_{ii}^e = [\mathbf{K}]_{jj}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 \right] d\chi = \frac{1}{h^e} \quad (3.66)$$

$$[\mathbf{M}]_{ij}^e = [\mathbf{M}]_{ji}^e = \int_0^{h^e} [N_i^e N_j^e] d\chi = \frac{h^e}{6} \quad (3.67)$$

$$[\mathbf{M}]_{ii}^e = [\mathbf{M}]_{jj}^e = \int_0^{h^e} [(N_i^e)^2] d\chi = \frac{h^e}{3} \quad (3.68)$$

Assim, para um caso geral, o modelo básico (nós 1 até 4) do sistema apresentado na figura (3.2), independente dos efeitos de borda, isto é, das condições de contorno, pode ser representado através das seguintes matrizes globais do método de Galerkin,

$$[\mathbf{K}]_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} & -\frac{1}{h^e} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^e} & \frac{2}{h^e} & -\frac{1}{h^e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^e} & \frac{2}{h^e} & -\frac{1}{h^e} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^e} & \frac{1}{h^e} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$[\mathbf{M}]_G = \begin{bmatrix} \frac{h^e}{3} & \frac{h^e}{6} & 0 & 0 \\ \frac{h^e}{6} & \frac{2h^e}{3} & \frac{h^e}{6} & 0 \\ 0 & \frac{h^e}{6} & \frac{2h^e}{3} & \frac{h^e}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h^e}{6} & \frac{h^e}{3} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Substituindo as equações (3.69) e (3.70) na equação (3.62), tem-se,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{3} & \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} & 2\left(\frac{1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{3}\right) & \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} & 2\left(\frac{1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{3}\right) & \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{6} & \frac{1}{h^e} - \frac{k^2 h^e}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.71)$$

Para estudar o comportamento das soluções no domínio interior da malha considera-se então o estêncil interior do sistema (3.71), que pode ser escrito da seguinte forma,

$$\frac{12 + 2k^2 h^2}{12} \phi_1 + \frac{8k^2 h^2 - 24}{12} \phi_2 + \frac{12 + 2k^2 h^2}{12} \phi_3 = 0 \quad (3.72)$$

Definindo-se o parâmetro  $\alpha^h$  como se segue,

$$\alpha^h = \frac{(kh)^2}{12} \quad (3.73)$$

e substituindo (3.73) em (3.72), tem-se,

$$(2\alpha^h + 1) \phi_1 + 2(4\alpha^h - 1) \phi_2 + (2\alpha^h + 1) \phi_3 = 0 \quad (3.74)$$

Vale ressaltar que o domínio computacional unidimensional foi discretizado por uma malha regular de  $n$  elementos lineares. Considerando a ausência do termo fonte, a solução analítica para este problema, independente de valor de  $k$ , pode ser escrita da seguinte forma,

$$\phi = e^{ikx} \quad (3.75)$$

sendo que os valores nodais da solução exata são dados por,

$$\phi(x_A) = \phi_A = (e^{ikh})^A \quad (3.76)$$

onde, as coordenadas nodais  $x_A$  são definidas por,

$$x_A = Ah \quad , \quad A=0,1,2,\dots,n \quad (3.77)$$

Assim, para um estêncil típico interior, que não leva em consideração as condições de contorno as quais separam as soluções físicas das soluções não físicas, a A-ésima equação é dada por,

$$(2\alpha^h + 1) \phi_{A-1} + 2(4\alpha^h - 1) \phi_A + (2\alpha^h + 1) \phi_{A+1} = 0 \quad (3.78)$$

Seja a solução numérica nodal denotada por  $\rho^A$ , e procurando-se soluções que sejam iguais as soluções exatas nos nós (soluções nodalmente exatas), ou seja,  $\rho^A \sim \phi_A$ , tem-se,

$$\rho^A = (e^{ikh})^A \quad (3.79)$$

Substituindo equação (3.79) na equação (3.78) tem-se a seguinte forma quadrática em  $\rho$ ,

$$(2\alpha^h + 1) \rho^2 + 2(4\alpha^h - 1) \rho + (2\alpha^h + 1) = 0 \quad (3.80)$$

A solução da equação quadrática (3.80) que corresponde ao fenômeno de propagação de onda pode ser escrita da seguinte forma,

$$\rho_1 = \frac{(1 - 4\alpha^h) + \sqrt{12\alpha^h(\alpha^h - 1)}}{1 + 2\alpha^h} \quad (3.81)$$

e de acordo com os valores de  $\alpha^h$ , diferentes comportamentos podem ser apreciados.

(1) Se o número de onda  $k$  é real então a solução do problema corresponde ao caso de propagação de ondas, conforme a equação (3.75), e tendo em vista a equação (3.73), pode-se definir o seguinte limite para a constante  $\alpha^h$ ,

$$\alpha^h > 0 \quad (3.82)$$

neste caso  $\alpha^h$  pode ter valores de  $\alpha^h \leq 1$  ou  $\alpha^h > 1$ .

**(1.a)** Para  $\alpha^h \leq 1$ ,  $\rho_1$  pode ser imaginário, e para que a solução seja nodalmente exata, tem-se,

$$\rho_1 = e^{ik^h h} \quad (3.83)$$

onde,  $k^h$  é o número de onda aproximado usado no cálculo numérico. Este parâmetro é dependente do tamanho de elemento quando considera-se uma malha regular. Substituindo equação (3.82) em (3.83) pode-se escrever,

$$e^{ik^h h} = \frac{(1 - 4\alpha^h) + \sqrt{12\alpha^h(\alpha^h - 1)}}{1 + 2\alpha^h} \quad (3.84)$$

Definindo-se a igualdade da parte real da equação (3.84), tem-se,

$$\cos(k^h h) = \frac{(1 - 4\alpha^h)}{1 + 2\alpha^h} \quad (3.85)$$

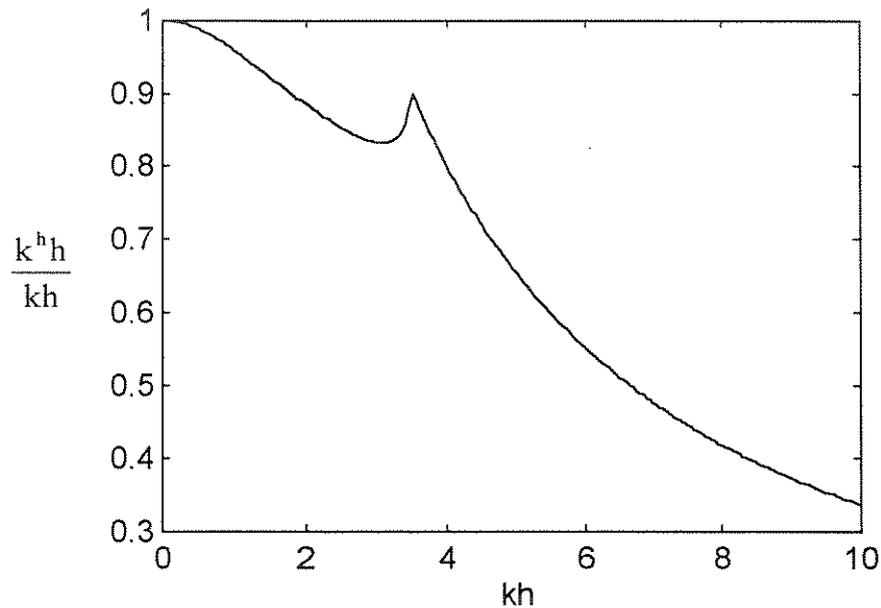
ou ainda,

$$k^h h = \arccos\left(\frac{1 - 4\alpha^h}{1 + 2\alpha^h}\right) \quad (3.86)$$

Substituindo equação (3.73) em (3.86), obtém-se uma relação entre o número de onda aproximado  $k^h$  e o número de onda exato  $k$ , conforme a equação abaixo,

$$k^h h = \arccos\left(\frac{6 - 2(kh)^2}{6 + (kh)^2}\right) \quad (3.87)$$

A expressão (3.87) é uma medida do erro na fase, sendo que um comportamento pode ser avaliado a partir do gráfico apresentado na figura (3.3).



**Fig. (3.3) Erro de fase usando-se uma aproximação do tipo Galerkin**

A partir da relação entre o número de onda calculado  $k^h$  e o número de onda teórico  $k$ , observa-se da figura (3.3) que para valores de

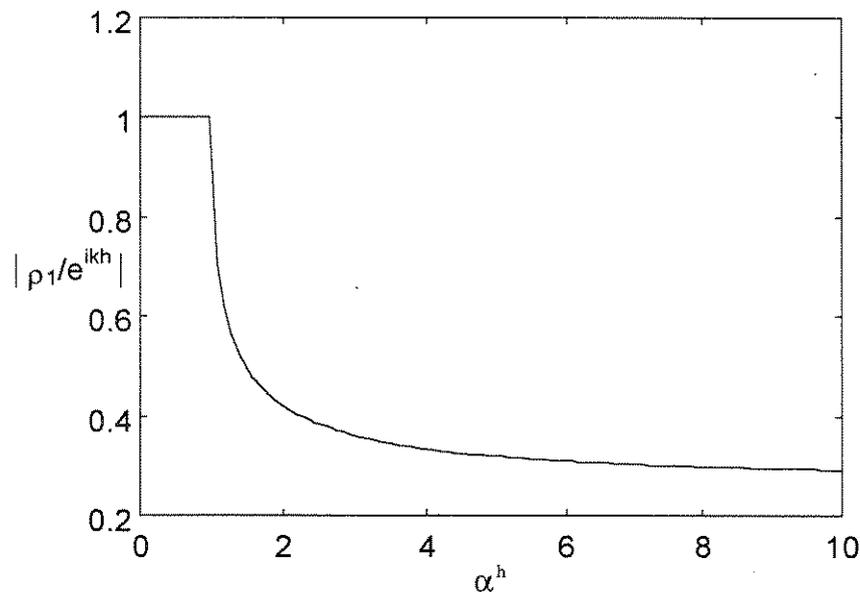
$$0 \leq kh \leq \sqrt{12} \quad (3.88)$$

o erro na relação de fase pode ser considerado aceitável, enquanto a magnitude da solução é avaliada corretamente, conforme mostrado na figura (3.4). A partir de  $kh > \sqrt{12}$  a solução deteriora-se rapidamente. Levando-se em conta a equação (3.73), define-se os limites para o parâmetro  $\alpha^h$  da seguinte maneira,

$$0 \leq \alpha^h \leq 1 \quad (3.89)$$

Assim, pode-se observar que para se obter bons resultados utilizando o método de Galerkin, precisa-se manter o valor de  $kh$  dentro da faixa especificada, ou seja, para números elevados de onda precisa-se refinar a malha de elementos finitos, mantendo-se  $\alpha^h$  dentro de limites aceitáveis.

(1.b) Para  $\alpha^h > 1$ , a solução numérica nodal  $\rho_1$  é real, e assume valores que variam de  $-1 < \rho_1 < \sqrt{3} - 2$ . Neste caso, a magnitude da solução sofre uma queda, conforme mostrado na figura (3.4). Ou seja, a perda de solução na malha implica em uma repentina perda de precisão na amplitude das soluções.



**Fig. (3.4) Amplitude da formulação de Galerkin na região de propagação**

(2) Se o número de onda  $k$  é imaginário então a solução do problema corresponde ao caso de decaimento exponencial, conforme a equação (3.75). A solução correspondente  $\rho_2$  é dada como a inversa de  $\rho_1$ , ou seja,

$$\rho_2 = \frac{1 + 2\alpha^h}{(1 - 4\alpha^h) + \sqrt{12\alpha^h(\alpha^h - 1)}} \quad (3.90)$$

A partir da expressão (3.90) pode-se obter uma relação entre a solução numérica de decaimento  $\rho_2$  e a solução exata dada por equação (3.75), conforme mostrado na figura (3.5),

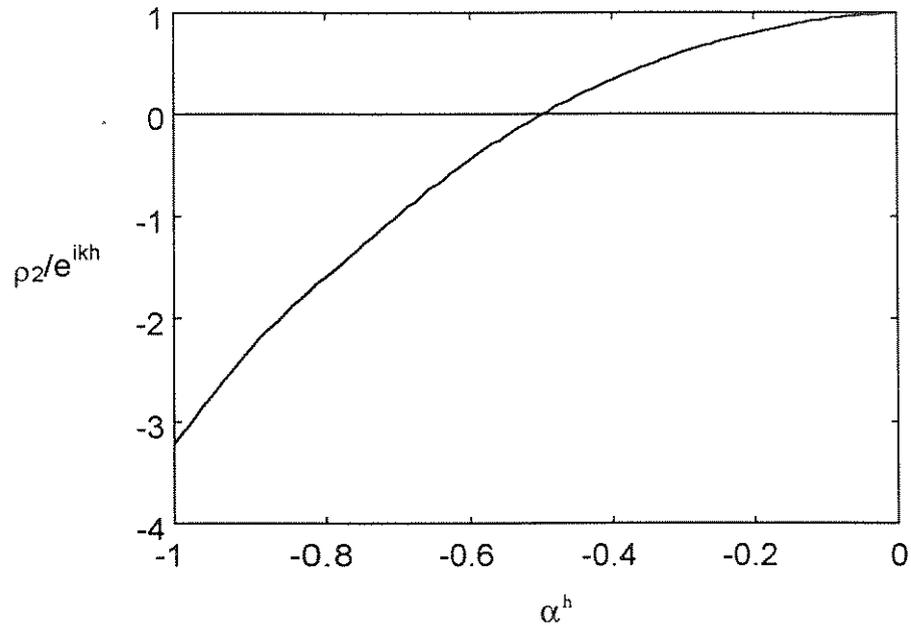


Fig. (3.5) Erro de amplitude da formulação de Galerkin, na região de decaimento

neste caso , observa-se duas faixas para  $\alpha^h$ ,

**(2.a)** Para  $\alpha^h > -0.5$ ,  $\rho_2$  assume valores positivos que variam de  $0 < \rho_2 < 1$ . Neste caso, pode-se considerar que não existe problema conceptual, conforme a figura (3.5).

**(2.b)** Para  $\alpha^h < -0.5$ ,  $\rho_2$  assume valores negativos que variam de  $\sqrt{3} - 2 < \rho_2 < 0$ . Tendo em vista a solução exata (3.75), que assume valores sempre positiva, a solução numérica  $\rho_2$  nesta faixa resulta em oscilações espúrias que são localizadas perto das camadas de contorno. Estas oscilações não poluem necessariamente toda a solução numérica obtida para o problema.

Por último, vale ressaltar as seguintes observações:

**(1)** O método de Galerkin pode estimar a solução exata para números altos de onda ou para razões elevadas de decaimento com o refinamento da malha de elementos finitos.

**(2)** Não existe um limite de número de onda para que uma boa aproximação da solução possa ser obtida, todavia, este tipo de refinamento pode conduzir a um número muito elevado de graus de liberdade, aumentando desta forma o custo computacional.

(3) Neste método de Galerkin, então, a performance das soluções numéricas pode ser caracterizada pelo parâmetro  $\alpha^h$  onde  $h$  representa o tamanho de elemento usado. O parâmetro  $\alpha^h$  deve assumir valores na faixa  $0 \leq \alpha^h \leq 1$  para se obter uma solução nodalmente exata.

### 3.7 Comportamento das Soluções Numéricas Baseadas no Método de Galerkin/Mínimos Quadrados

O problema de autovalores/autovetores, para a formulação baseada na combinação dos métodos de Galerkin e Mínimos Quadrados, pode ser dada pela seguinte forma matricial,

$$[[\mathbf{K}]_G - k^2(1 - \tau k^2) [\mathbf{M}]_G] \{\phi\} = 0 \quad (3.91)$$

Usando-se a malha de elementos finitos unidimensionais lineares, conforme mostrado na figura (3.2), e substituindo as matrizes de rigidez e massa do método GMQ, tem-se o seguinte estêncil para o problema,

$$(2\alpha_{GMQ} + 1) \phi_{A-1} + 2(4\alpha_{GMQ} - 1) \phi_A + (2\alpha_{GMQ} + 1) \phi_{A+1} = 0 \quad (3.92)$$

onde,

$$\alpha_{GMQ} = \alpha^h (1 - \tau k^2) \quad (3.93)$$

e  $\alpha^h$  é definida pela equação (3.73). Da mesma maneira que foi usado no método de Galerkin,  $\alpha_{GMQ}$  tem que assumir valores entre 0 e 1 para que se obter soluções nodalmente exatas na região de propagação, ou seja,

$$0 \leq \alpha_{GMQ} \leq 1 \quad (3.94)$$

que conduz à,

$$0 \leq \alpha^h (1 - \tau k^2) \leq 1 \quad (3.95)$$

ou seja, tendo em vista a equação (3.73),

$$0 \leq \frac{(kh)^2}{12} (1 - \tau k^2) \leq 1 \quad (3.96)$$

o que permite escrever finalmente a seguinte faixa admissível de valores de número de onda,

$$1 - \frac{1}{\alpha^h} \leq \tau k^2 \leq 1, \quad \forall \alpha^h \geq 0 \quad (3.97)$$

Tendo em vista as restrições impostas para os valores do parâmetro  $\alpha_{\text{GMQ}}$  através da equação (3.94), adota-se o seguinte modelo para a variação deste parâmetro,

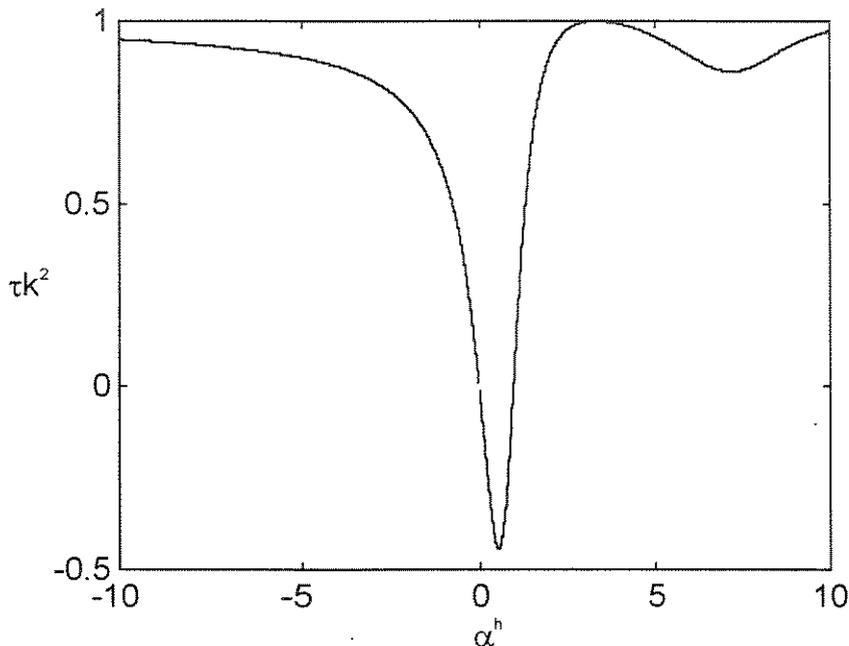
$$\alpha_{\text{GMQ}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(kh)}{2 + \cos(kh)} \quad (3.98)$$

o que limita a função  $\alpha_{\text{GMQ}}$  entre os valores 0 e 1, produzindo desta forma soluções nodalmente exatas.

Usando-se a função (3.98), pode-se obter a relação entre  $\tau k^2$  e  $\alpha^h$ , dada pela seguinte expressão,

$$\tau k^2 = 1 - \frac{1 - \cos(kh)}{2\alpha^h (2 + \cos(kh))} \quad (3.99)$$

Esta relação pode ser representada graficamente, conforme mostrado na figura (3.6),



**Fig. (3.6) Soluções nodalmente exatas via GMQ**

Deste gráfico pode-se ressaltar que aproximações mais simples podem ser adotadas para a equação (3.99) obtendo ainda assim soluções nodalmente exatas na região de propagação. O mesmo procedimento pode ser estendido para a região de decaimento.

Esta aproximação conveniente é sugerida por [Harari e Hughes, 1992] onde o domínio da curva (3.99) é dividido em três regiões, conforme mostrado na equação (3.100).

$$\tau k^2 = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2\alpha^h} & , \alpha^h < -1 \\ -\frac{1}{2}\alpha^h & , -1 \leq \alpha^h < 0 \\ \frac{\alpha^h}{\alpha^h - 1} & , 0 \leq \alpha^h \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.101)$$

Observa-se que a aproximação proposta em (3.100) mantém continuidade com a equação (3.98) e pode ser estendida para a região de propagação além do limite de resolução.

Por último, vale mencionar as seguintes observações:

- (1) A forma de  $\alpha_{\text{GMQ}}$  dada na equação (3.93) é válida somente para elementos finitos lineares em malhas regulares.
- (2) Para elementos de ordem maior, o método GMQ não pode ser obtido pela substituição de  $\alpha^h$  por  $\alpha_{\text{GMQ}}$ .
- (3) Em malhas irregulares de elementos lineares, o parâmetro  $\tau$  deve ser calculado a nível elementar, e o parâmetro  $h$  de malha passa a ser o tamanho de cada elemento individual.

*No próximo capítulo, apresenta-se os resultados obtidos para o problema de decaimento exponencial e para o problema de propagação de onda em cavidades acústicas, para diferentes faixas de frequência. Os problemas estudados são sujeitos a diferentes condições de contorno.*

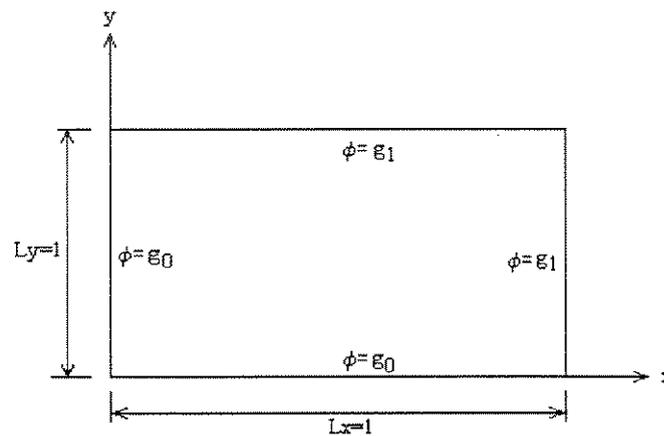
## Capítulo 4

### Resultados Numéricos

*A fim de verificar a eficiência e a validade do método de Galerkin/Mínimos Quadrados (GMQ), aqui proposto, apresenta-se neste capítulo duas classes de problemas relacionados a cavidades acústicas. A validade da abordagem utilizada é mostrada através da simulação de problemas governados pela equação de Helmholtz para diversas faixas de frequência e variadas condições de contorno. A primeira classe trata do problema de decaimento exponencial, onde é estudada a resposta de uma cavidade retangular, com dois lados adjacentes sujeitos a condição homogênea de Dirichlet e os outros dois lados sujeitos ao valor imposto unitário de pressão acústica, ou potencial de velocidade. Na segunda classe trata-se do fenômeno de propagação de onda para diferentes faixas de frequência. São estudados os problemas de resposta livre e forçada de cavidades sujeitas a condições de Dirichlet e Neumann. Em todos os casos uma comparação entre as respostas dinâmicas calculadas via o método clássico de Galerkin e via o método de GMQ são apresentadas. Os resultados numéricos são obtidos via o desenvolvimento de programas computacionais de elementos finitos, utilizando a linguagem FORTRAN e o pacote comercial MATLAB®. Elementos finitos lineares do tipo triangulares de três nós, e quadrilaterais de quatro nós, são utilizados para a obtenção destes resultados.*

#### 4.1 Problemas de Decaimento

Considera-se o domínio  $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}$  homogêneo, isotrópico bidimensional de uma cavidade acústica, cuja velocidade de propagação da onda é  $c$ , conforme mostrado na figura (4.1).



**Fig. (4.1) Cavidade acústica bidimensional e suas condições de contorno**

O comportamento harmônico deste sistema é descrito por funções potenciais  $\phi(x,y)$  (potencial de velocidade ou pressão) que satisfazem a equação de Helmholtz escrita como se segue,

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + k^2 \phi = -f \quad , \text{ em } \Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\} \quad (4.1)$$

sujeita as seguintes condições de contorno mostradas na figura (4.1) que podem ser escritas da seguinte forma,

$$\phi(L_x, y) = \phi(x, L_y) = g_1 = 1 \quad , \quad x > 0, y > 0 \quad (4.2)$$

$$\phi(x, 0) = \phi(0, y) = g_0 = 0 \quad (4.3)$$

onde,  $g_1 = 1$ , é o valor constante imposto. Uma força distribuída de superfície de valor  $f = 10^8$  é aplicada em todo o domínio  $\Omega$ , e adota-se o valor  $k^2 = -10^8$  o que corresponde a um número de onda imaginário puro, isto é um problema cuja solução é da seguinte forma,

$$\phi = e^{ikh} \quad (4.4)$$

ou seja, um problema típico de decaimento exponencial. Os valores numéricos escolhidos para  $k^2$  e  $f$  conduzem a uma solução exata de valor unitário em todo o domínio. Dimensões unitárias foram adotadas para cavidade,  $L_x = 1$  e  $L_y = 1$ .

O domínio  $\Omega$  mostrado na figura (4.1) foi discretizado com elementos finitos lineares triangulares e quadrilaterais, e o efeito da regularidade e refinamento da malha foi estudado.

Três conjuntos de resultados foram usados para a comparação: soluções analíticas, soluções numéricas obtidas pelo método de Galerkin (G) (equação (3.22)) e soluções numéricas obtidas pelo método de Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ) (equação (3.60)). Os sistemas de equações lineares, resultantes das formulações G e GMQ, foram resolvidos usando o método de eliminação de Gauss.

Baseando-se em soluções de problemas unidimensionais, projetou-se no item (3.7) estimativas para o parâmetro de penalidade  $\tau$ , que podem ser aplicadas neste caso [Harari e Hughes, 1991]. De acordo com a equação (3.73) define-se o parâmetro de malha  $\alpha^h$  da seguinte forma,

$$\alpha^h = \frac{(kh)^2}{12} = -\frac{10^8 h^2}{12} \quad (4.5)$$

que assume valores inferiores a  $-0.5$ , enquanto  $h$  for maior que  $2.45 \cdot 10^{-4}$ , o que corresponde a uma malha de aproximadamente  $4082 \cdot 4082$  elementos finitos quadrilaterais. Assim, para refinamentos inferiores a esse, ou seja, malhas mais grosseiras que  $4082 \cdot 4082$ , o limite de  $\alpha^h < -0.5$  é mantido e o parâmetro de penalidade pode ser calculado de acordo com a equação (3.101) como se segue,

$$\tau k^2 = 1 + \frac{1}{2\alpha^h} \quad (4.6)$$

Em função do refinamento  $h$  adotado, define-se então o parâmetro de penalidade, e pode-se finalmente aplicar o método GMQ.

A fim de verificar a eficiência do método GMQ, a norma do erro é calculada em todos os pontos nodais, usando a seguinte expressão [Thompson e Pinsky, 1995],

$$\|e\|^2 = \sum_m \sum_n (\phi_{mn}^h - \phi(x_m, y_n))^2 \quad (4.7)$$

onde,  $\phi^h$  é a solução numérica no ponto  $(m,n)$ , e  $\phi(x,y)$  é a solução exata  $\phi=1$ ,  $\forall (x_m, y_n)$ . O erro máximo,  $e_{\max}$  é também calculado, representando a diferença máxima entre a solução exata e a solução numérica.

Observa-se neste caso que a norma adotada acima acumula os erros para malhas mais refinadas, sendo ineficiente para provar a convergência do método. Todavia, a medida definida na equação (4.7) foi adotada tendo em vista que a mesma é adequada para a comparação entre os métodos estudados, G e GMQ.

Para elementos triangulares, o tamanho de elemento,  $h$ , é calculado como sendo a média dos três lados do elemento, ou seja

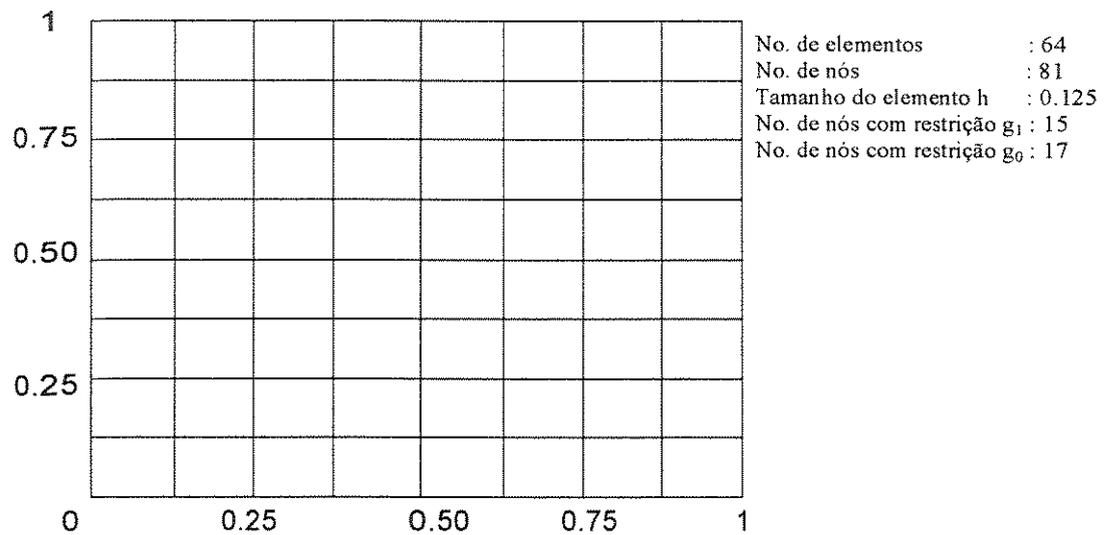
$$h = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 h_i \quad (4.8)$$

onde,  $h_i$  é o comprimento de lado  $i$  do elemento triangular. Outra forma aqui utilizada é considerar o parâmetro  $h$  como sendo o menor cateto do elemento triangular ( $h_{\text{cateto}}$ ). Na seqüência apresentam-se os resultados obtidos para este problema.

#### 4.1.1 Estudo Numérico da Convergência para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais

O objetivo deste exemplo é o de verificar a efetividade da modelagem, em função do refinamento adotado, bem como mostrar a performance dos métodos estudados.

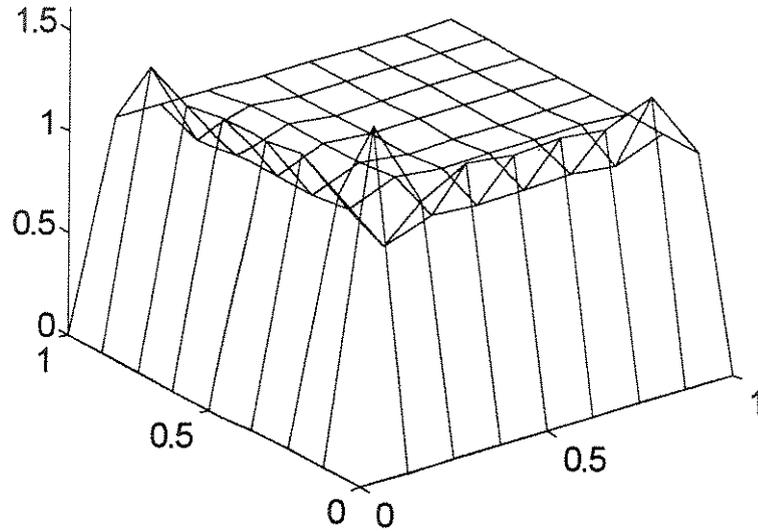
O sistema físico descrito na figura (4.1) é modelado com elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, conforme mostrado na figura (4.2), onde são apresentados os principais dados da malha utilizada.



**Fig. (4.2) Malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, para a cavidade acústica**

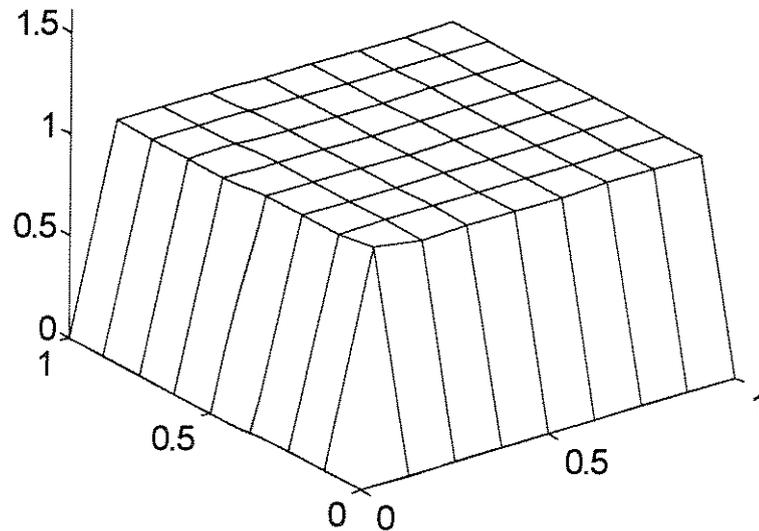
O parâmetro  $\tau k^2$  é calculado usando-se as equações (4.5) e (4.6) e assume o valor  $\tau k^2=0.99999616$ . Todos os cálculos são realizados em dupla precisão e uma rotina de cálculo, baseada na linguagem FORTRAN, foi desenvolvida para montagem e resolução das equações matriciais. Para este exemplo, a solução numérica do sistema linear de equações é obtida usando-se o método direto de Gauss com pivoteamento.

Resolvendo-se o problema pelos métodos G e GMQ, obtem-se os resultados mostrados nas figuras (4.3) e (4.4), respectivamente.



**Fig. (4.3) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método de Galerkin em um problema de decaimento exponencial.**

Norma do erro  $\|e\| = 1.1494$        $e_{\max}=0.607739$



**Fig. (4.4) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial.**

Norma do erro  $\|e\| = 0.0317$        $e_{\max}=0.031557$

Observa-se das figuras (4.3) e (4.4) que a resposta obtida utilizando o método GMQ é visivelmente mais bem comportada, sendo que as oscilações espúrias nas regiões do contorno

do método G desaparecem, e a norma do erro  $\|e\|$  e o erro máximo  $e_{\max}$  indicam uma melhor precisão do método GMQ.

A fim de estudar a convergência dos dois métodos (G e GMQ), foram feitos ensaios numéricos, variando-se o refinamento da malha de elementos finitos adotada. Foram estudados os casos de malhas com 9, 25, 81 e 121 nós, sendo que os resultados obtidos são apresentados na tabela (4.1).

**Tabela (4.1) Erros máximos e norma do erro para diferentes malhas regulares de elementos finitos quadrilaterais**

Refinamento da malha	Indicador do erro	Método G	Método GMQ
9 nós	$e_{\max}$	0.687499	0.031269
	$\ e\ $ Eq.(4.7)	0.687499	0.031272
25 nós	$e_{\max}$	0.617026	0.031557
	$\ e\ $ Eq.(4.7)	0.850016	0.031734
81 nós	$e_{\max}$	0.607739	0.031557
	$\ e\ $ Eq.(4.7)	1.149413	0.031740
121 nós	$e_{\max}$	0.607691	0.031557
	$\ e\ $ Eq.(4.7)	1.276840	0.031743

Pode-se notar da tabela (4.1) que os valores de erros  $\|e\|$ , tanto para o método G como para o método GMQ, aumentam a medida que a malha é refinada, o que comprova o efeito de que este índice é inadequado para a análise de convergência. Todavia, para todas as malhas estudadas, nota-se que os erros obtidos com o método G são bastante superiores que aqueles obtidos com o método GMQ.

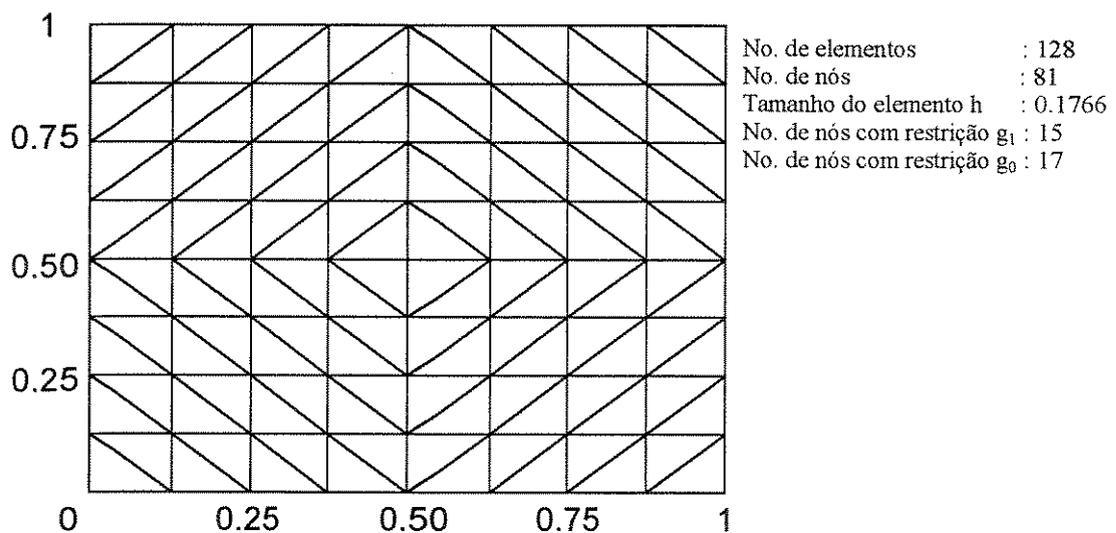
No que se refere a convergência, apresenta-se na tabela (4.1) os erros máximos obtidos,  $e_{\max}$ , com as duas soluções em relação as soluções analíticas. Este indicador mostrou que os dois métodos, G e GMQ, apresentam convergência, mas novamente neste caso o método GMQ apresentou melhores resultados.

De uma forma global, nota-se que os resultados obtidos com o método GMQ são melhores que os obtidos com o método G, todavia, os resultados não são nodalmente exatos, pois os parâmetros de penalidade  $\tau$  foram calculados baseando-se em problemas unidimensionais, e os casos aqui estudados são bidimensionais.

#### 4.1.2 Aplicação do Método GMQ à Malhas Regulares e Irregulares de Elementos Finitos Triangulares

Neste caso, estuda-se a aplicação do método GMQ para malhas de elementos finitos triangulares lineares. Verifica-se a precisão obtida em relação às malhas de elementos quadrilaterais, e estuda-se o efeito da regularidade das malhas.

O sistema físico descrito na figura (4.1) é modelado com elementos finitos triangulares de três nós, conforme mostrado na figura (4.5), onde são apresentados os principais dados da malha utilizada.

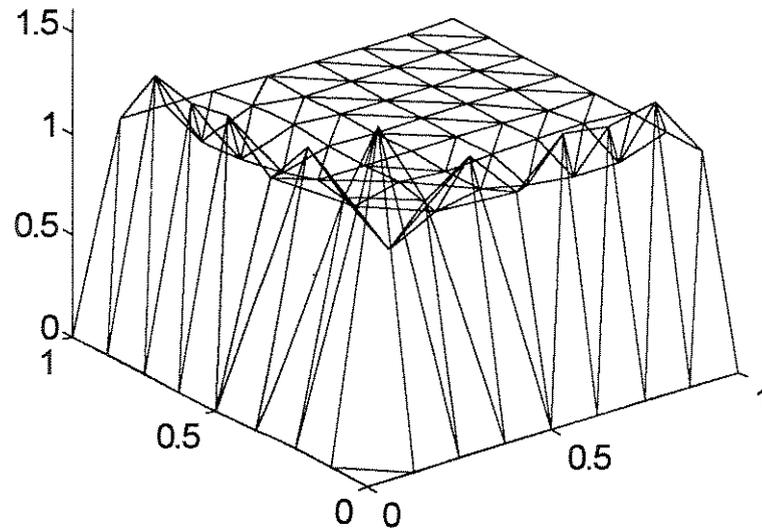


**Fig. (4.5) Malha regular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavidade acústica**

Adotou-se o padrão de refinamento de malhas com 81 nós, malha que mostra resultados com razoável convergência, e o parâmetro  $\tau k^2$  é calculado usando-se as equações

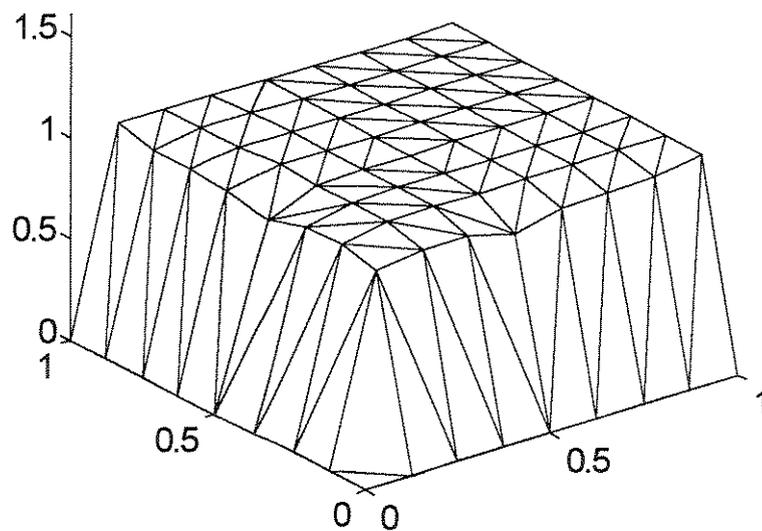
(4.5) e (4.6), a nível de cada elemento, onde é usada a equação (4.8) para a definição do parâmetro  $h$ , ou seja, o parâmetro de malha é calculado como sendo a média dos três lados de cada triângulo.

Os resultados obtidos pelos métodos G e GMQ são apresentados nas figuras (4.6) e (4.7), respectivamente.



**Fig. (4.6) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método de Galerkin em um problema de decaimento exponencial.**

Norma do erro  $\|e\| = 1.1008$        $e_{\max} = 0.608471$

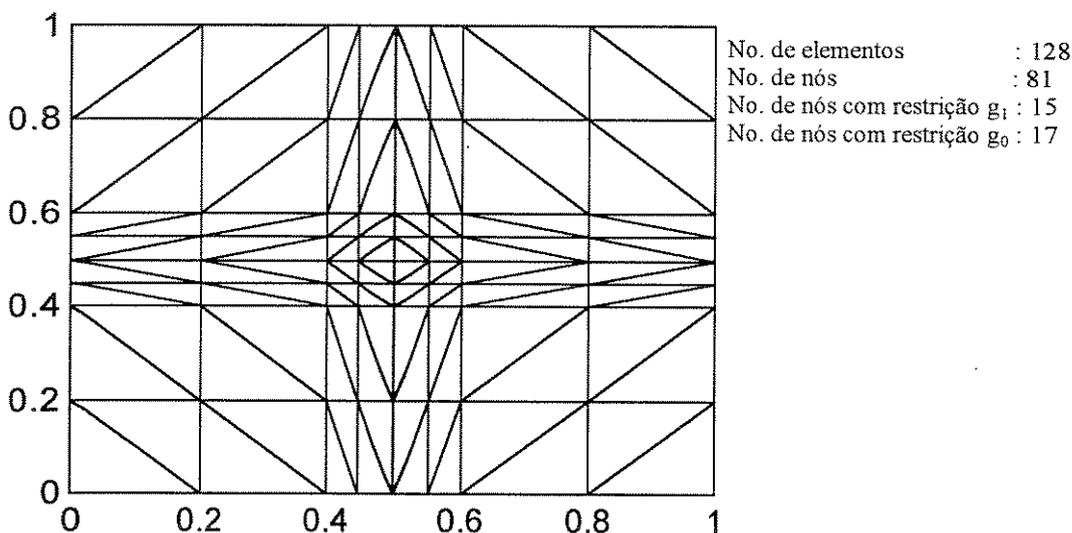


**Fig. (4.7) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial.  $h = h_{\text{medio}}$**

Norma do erro  $\|e\| = 0.2285$        $e_{\max} = 0.108187$

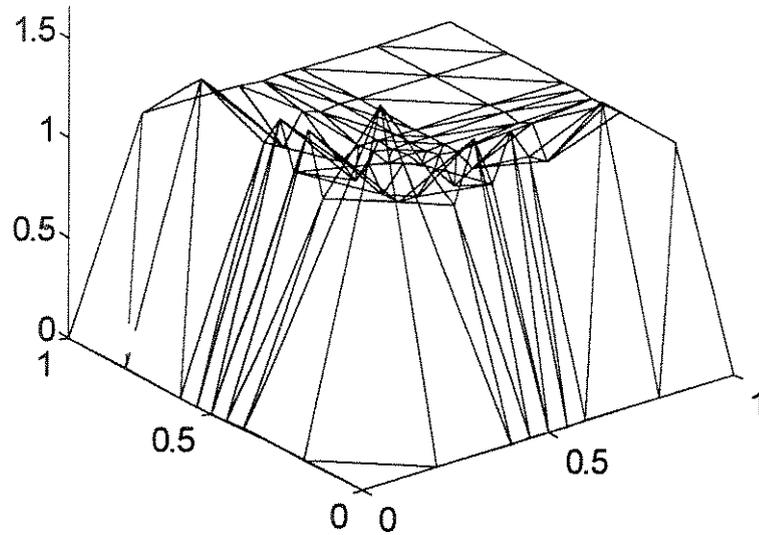
Neste caso, também, o método GMQ fornece resultados visivelmente melhores, sendo as oscilações espúrias do método de Galerkin eliminadas.

Com o intuito de verificar a performance do método com malhas irregulares de elementos finitos triangulares, que são mais genéricas para a representação de geometrias arbitrárias, propõe-se estudar o problema de decaimento da figura (4.1) usando-se a malha da figura (4.8).



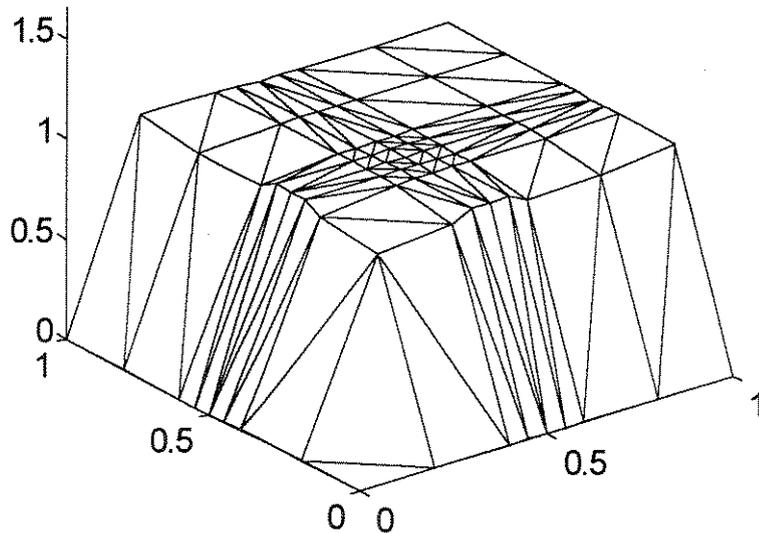
**Fig. (4.8) Malha irregular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavidade acústica**

Os resultados obtidos pelos métodos G e GMQ são apresentados nas figuras (4.9) e (4.10), respectivamente. Novamente neste caso, os parâmetros de penalidade são calculados a nível elementar como sendo a média dos lados de cada triângulo.



**Fig. (4.9) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método de Galerkin em um problema de decaimento exponencial.**

Norma do erro  $\|e\| = 1.1126$        $e_{\max}=0.653014$



**Fig. (4.10) Resposta da cavidade acústica calculada usando o método GMQ em um problema de decaimento exponencial.  $h=h_{\text{médio}}$**

Norma do erro  $\|e\| = 0.1376$        $e_{\max}=0.081428$

Assim como nos casos anteriores, o método GMQ fornece resultados mais bem comportados, o que mostra que o refinamento irregular da malha não introduz nenhum tipo de alteração significativa na performance do método ao menos para este problema. Testes

numéricos em relação a simetria da malha também foram realizados, indicando que este fato também não altera a qualidade dos resultados obtidos em problemas de decaimento.

A fim de sintetizar os resultados obtidos neste item, apresenta-se na tabela (4.2) os erros obtidos para malhas de elementos triangulares, comparados com os de elementos quadriláteros, para refinamento com 81 nós adotado para fins de comparação entre os casos estudados.

**Tabela (4.2) Erros máximos e norma do erro para malhas de elementos quadriláteros e triangulares**

Tipo da malha	Indicador do erro	Método G	Método GMQ
Malha regular de Elementos quadriláteros	$e_{\max}$	0.607739	0.031557
	$\ e\ $	1.149413	0.031740
Malha regular de elementos triangulares $h=h_{\text{médio}}$	$e_{\max}$	0.608471	0.108187
	$\ e\ $	1.100866	0.228561
Malha regular de elementos triangulares usando $h=h_{\text{cateto}}$	$e_{\max}$	0.608471	0.073124
	$\ e\ $	1.100866	0.104528
Malha irregular de elementos triangulares usando $h=h_{\text{médio}}$	$e_{\max}$	0.653014	0.081428
	$\ e\ $	1.112622	0.137624

Observa-se da tabela (4.2) que os erros máximos e suas normas são inferiores para o método GMQ, sendo que a norma do erro para elementos triangulares é significativamente superior que a norma do erro dos elementos quadriláteros, para o método GMQ. Para o caso do método G, esta variação não é tão importante. Observa-se, também, que a utilização do parâmetro  $h$ , para malhas regulares de elementos finitos triangulares, como sendo o menor cateto do elemento ( $h_{\text{cateto}}$ ), neste caso 0.125, resultou em erros menores do que quando usou-se  $h$  como sendo a média aritmética dos lados do elemento. Este fato indica que uma escolha mais adequada do parâmetro  $h$  em malhas irregulares pode melhorar significativamente o desempenho do método GMQ.

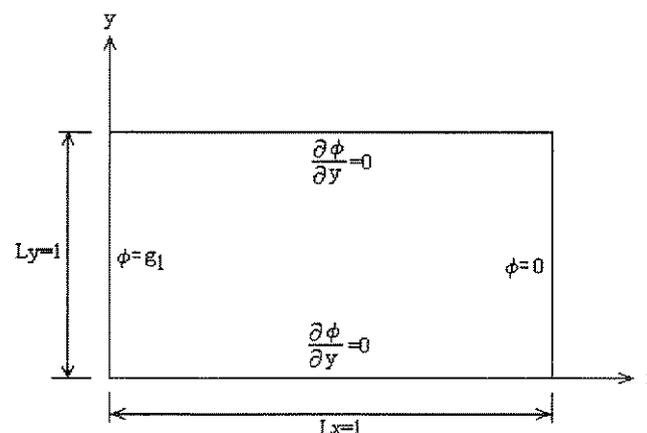
De uma forma global, observa-se que nas soluções obtidas via Galerkin aparecem oscilações espúrias nas camadas próximas às condições de contorno de Dirichlet, notadamente nas regiões onde há variação brusca das soluções. Estas oscilações desaparecem após o uso da formulação de GMQ. Observa-se também que nas malhas de elementos triangulares a norma do erro, calculada em todos os pontos nodais, é maior que a norma calculada nas malhas de elementos quadrilaterais devido ao fato que o parâmetro  $h$  é exato para os elementos quadrilaterais e aproximado para os elementos triangulares.

Constata-se também, que as soluções encontradas com o método GMQ, apesar de serem bem superiores a aquelas encontradas pelo método de Galerkin, não são nodalmente exatas. Isto ocorre pois a metodologia adotada para se determinar o parâmetro de penalidade  $\tau$  é baseado em soluções unidimensionais.

Neste item estudou-se os problemas de soluções que caem exponencialmente, e no próximo serão abordados problemas de propagação.

#### 4.2 Problemas de Propagação de Ondas Planas

Considera-se o mesmo domínio homogêneo, isotrópico, bidimensional, utilizado no item 4.1, conforme a figura (4.11).



**Fig. (4.11) Cavidade acústica bidimensional e suas condições de contorno**

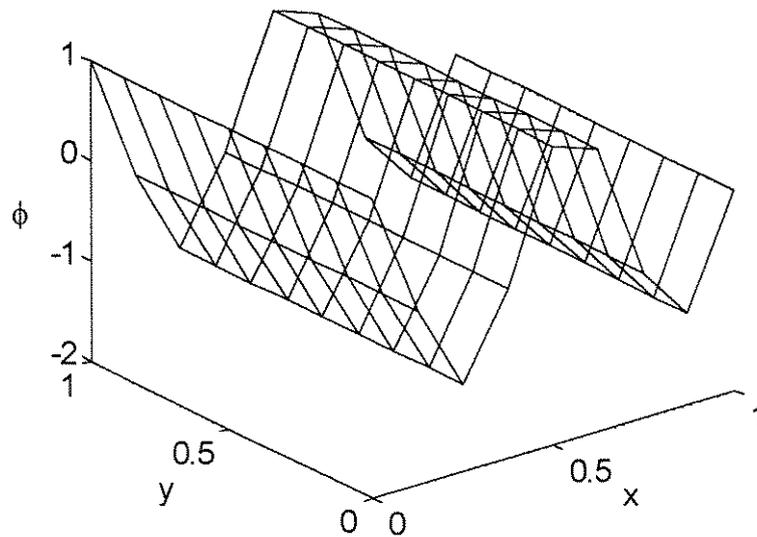
O comportamento harmônico deste sistema é descrito por funções potenciais  $\phi(x,y)$ , que satisfazem a equação de Helmholtz (4.1), sujeita as seguintes condições de contorno, mostradas na figura (4.11), que podem ser escritas da seguinte forma,

$$\phi(0,y) = g_1 \quad (4.9)$$

$$\phi(L_x, y) = 0 \quad (4.10)$$

$$\phi_{,y}(x,0) = \phi_{,y}(x, L_y) = 0 \quad (4.11)$$

onde,  $g_1$  é o valor constante imposto. As condições de contorno escolhidas, associadas a um dado valor de  $k$ , conduzem a uma solução exata caracterizada pela representação unidimensional de uma onda plana que possui a forma padrão mostrada na figura (4.12).



**Fig. (4.12) O comportamento unidimensional de ondas planas**

A solução exata para esta onda plana pode ser dada pela seguinte expressão [Thompson e Pinsky, 1995),

$$\phi(x/k) = g_1 \frac{\sin(k(L_x - x))}{\sin(kL_x)} \quad (4.12)$$

onde  $k$  é o número de onda, e  $L_x$  é o comprimento da cavidade no eixo- $x$ . Três conjuntos de resultados foram usados para a comparação: soluções analíticas, soluções numéricas conforme a formulação do método de Galerkin e soluções numéricas conforme a formulação de Galerkin Mínimos Quadrados (GMQ). Baseando-se em resultados de problemas unidimensionais, projetou-se de acordo com o item 3.7 estimativas para o parâmetro de penalidade  $\tau$ , que podem ser aplicados neste exemplo. De acordo com a equação (3.73), define-se o parâmetro  $\alpha^h$  da seguinte forma,

$$\alpha^h = \frac{(kh)^2}{12} \quad (4.13)$$

que, para este exemplo, assume valores positivos sendo que em problemas de propagação, o número de onda  $k$  assume valores reais. De acordo com a equação (3.101), o parâmetro de penalidade pode ser calculado como se segue,

$$\tau k^2 = \frac{\alpha^h}{\alpha^h - 1} \quad (4.14)$$

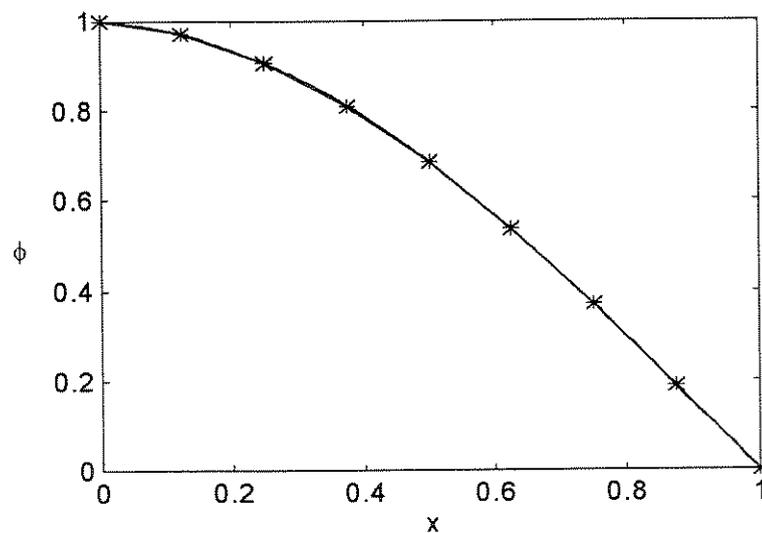
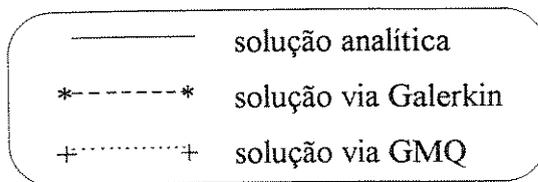
A fim de verificar o comportamento do método de Galerkin e a eficiência do método GMQ, a norma do erro  $\|e\|$  é calculada em todos os pontos nodais da malha usada, usando a expressão (4.7). Esta medida é adequada para a comparação dos métodos estudados. Para elementos triangulares, o parâmetro  $h$  de malha é calculado como sendo a média dos três lados do elemento, conforme a equação (4.8). Outra forma aqui utilizada é considerar o parâmetro  $h$  como sendo o cateto do elemento triangular  $h_{\text{cateto}}$  medido na direção de propagação da onda plana.

#### 4.2.1 Estudo Numérico da Convergência para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais

O objetivo deste exemplo é verificar a eficiência do método de GMQ, quando comparados elementos clássicos baseados no método de Galerkin. O sistema físico descrito

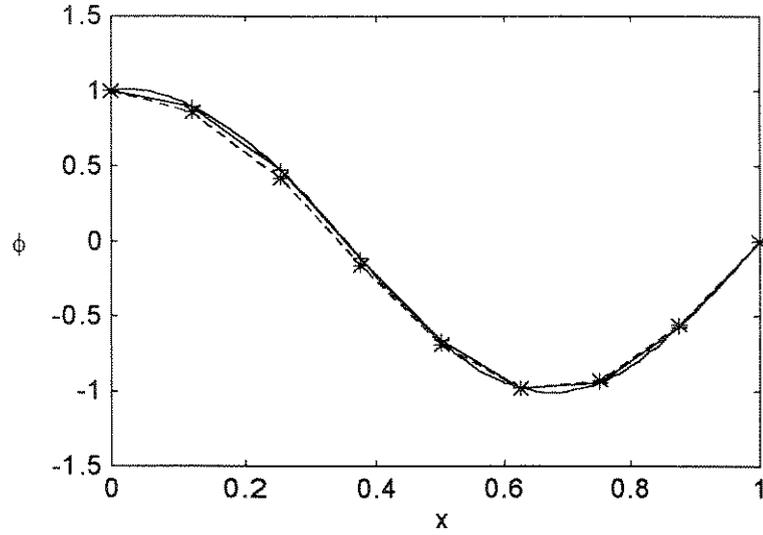
na figura (4.11) é modelado com elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, conforme mostrado na figura (4.2), ou seja, malha regular com 81 nós.

Resolvendo-se o problema pelos métodos G e GMQ, para várias números de onda, obtem-se os resultados mostrados nas figuras (4.13) a (4.16). Neste caso, as condições de contorno de Dirichlet não homogêneas, equação (4.9), representam as excitações do problema e o sistema linear para cada valor de  $k$  é resolvido pelo método de eliminação de Gauss. Estas respostas são mostradas ao longo do eixo  $-x$  ( $y=0.3 L_y$ ). A legenda usada nas figuras com os resultados é definida por,



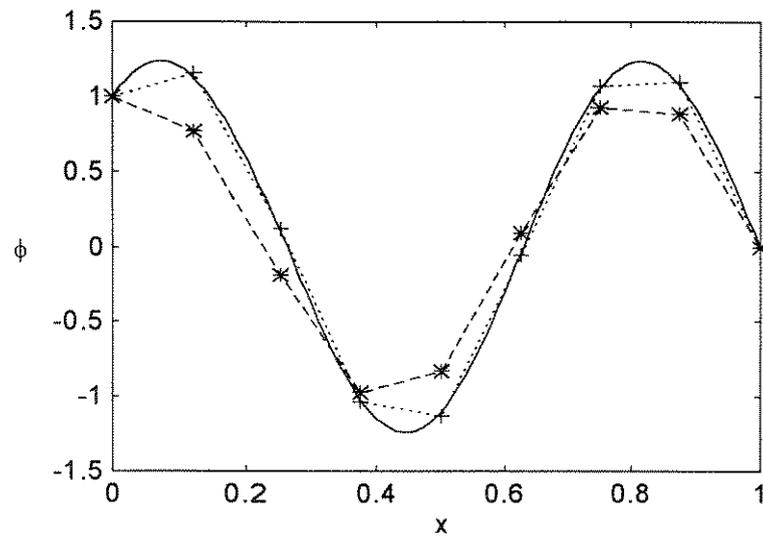
**Fig. (4.13) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz(33 elementos/onda). Elementos quadrilaterais.**

$$\|e\|_G = 0.004391 \quad \|e\|_{GMQ} = 7.83e-06$$



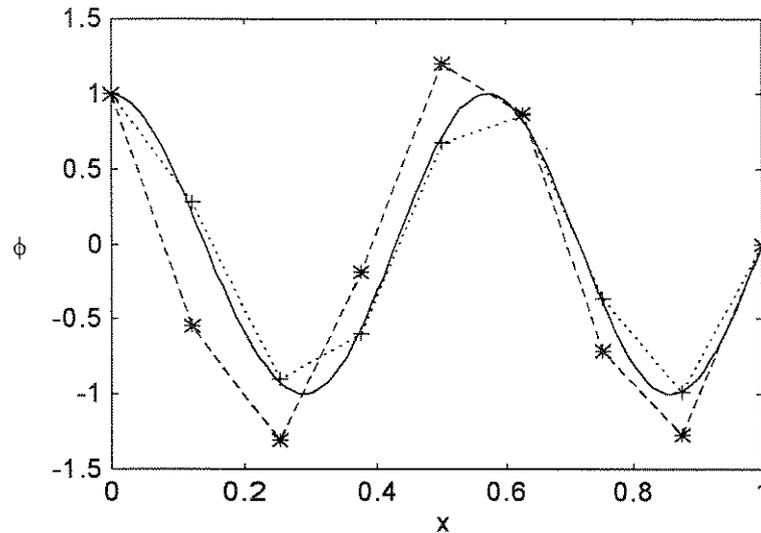
**Fig. (4.14) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ, em 0.77 Hz (~10 elementos/onda). Elementos quadrilaterais.**

$$\|e\|_G = 0.241477 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.004746$$



**Fig. (4.15) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ, em 1.35 Hz (~6 elementos/onda). Elementos quadrilaterais.**

$$\|e\|_G = 1.804749 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.165751$$



**Fig. (4.16) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ, em 1.75 Hz (~4 elementos/onda). Elementos quadrilaterais.**

$$\|e\|_G = 3.387450 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.314253$$

Observa-se das figuras (4.13) a (4.16) que as respostas obtidas utilizando o método GMQ tem boa convergência, sendo que seus resultados nodais se aproximam bastante das respostas analíticas, até o limite de quatro elementos por onda. Observa-se, também, que as respostas obtidas pelo método G são aceitáveis até o limite de dez elementos por onda. O limite de dez elementos por onda para o método de Galerkin conduz a resultados de excelente qualidade, sendo possível o seu uso para malhas com resolução menor. O limite de quatro elementos por onda para o método GMQ mantém a qualidade das soluções nodais. Assim, pode-se concluir que o método GMQ, quando usa-se elementos quadrilaterais, conduz a resultados melhores que aqueles obtidos pelo método de Galerkin. Os resultados aqui apresentados estão de acordo com os resultados apresentados por [Thompson e Pinsky, 1995], para modelos similares.

#### 4.2.2 Aplicação do Método GMQ a Malhas de Elementos Finitos Triangulares

Neste caso, estuda-se a aplicação do método GMQ, em problemas de propagação, para malhas de elementos finitos triangulares lineares de três nós. Verifica-se, também, o comportamento dos métodos G e GMQ, para malhas regulares e irregulares. O parâmetro  $h$

de malha é calculado como sendo uma média dos lados de elemento, ou como sendo o tamanho do cateto da coordenada-x do elemento triangular.

O sistema físico descrito na figura (4.11) é modelado com elementos triangulares regulares, conforme mostrado na figura (4.5). O parâmetro  $\tau k^2$  é calculado usando-se as equações (4.13) e (4.14), a nível de cada elemento. Os resultados obtidos pelos métodos G e GMQ são apresentados nas figuras (4.17) a (4.20). A legenda usada nas figuras com os resultados é definida por,

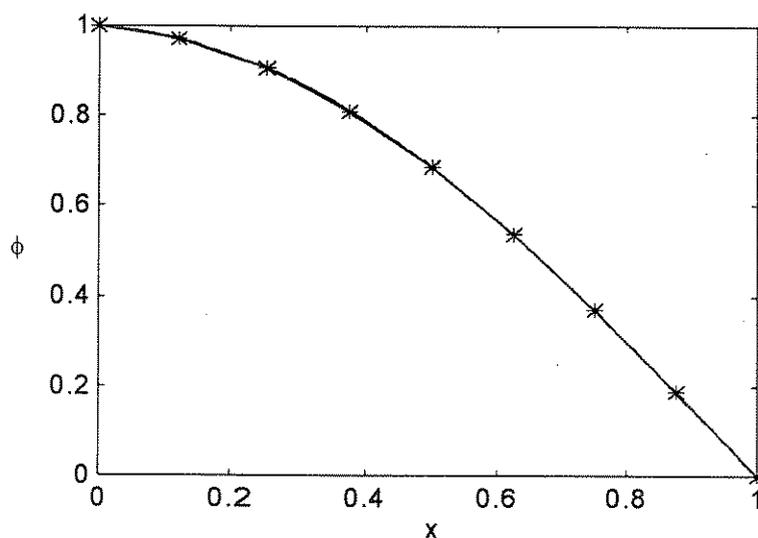
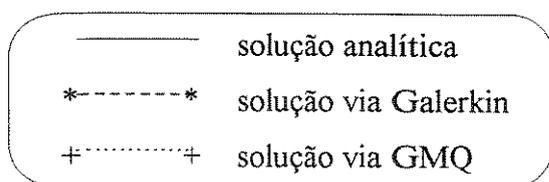
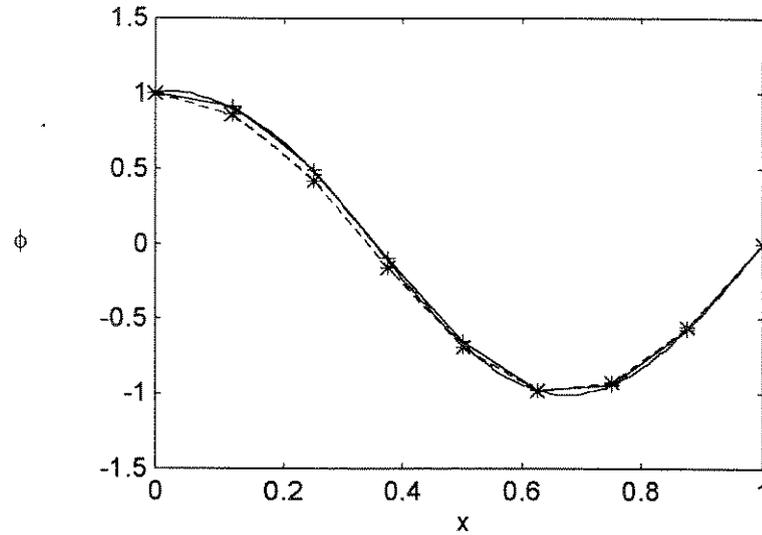


Fig. (4.17) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz.

Malha triangular regular com  $h=h_{\text{médio}}$

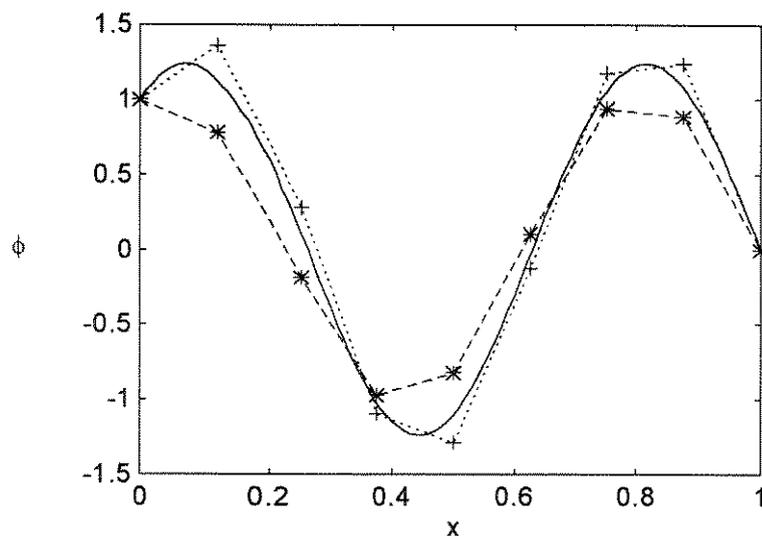
$$\|e\|_G = 0.007954 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.007681$$



**Fig. (4.18)** Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 0.77 Hz.

**Malha triangular regular com  $h=h_{\text{médio}}$**

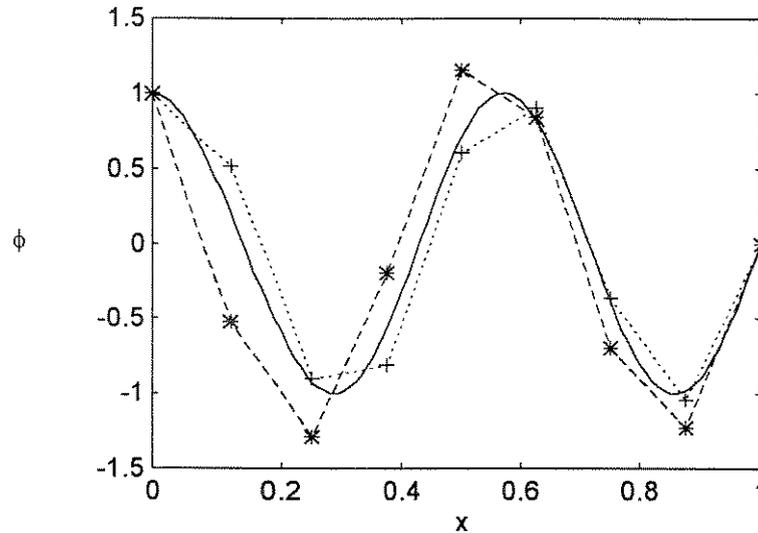
$$\|e\|_G = 0.242606 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.113968$$



**Fig. (4.19)** Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz.

**Malha triangular regular com  $h=h_{\text{médio}}$**

$$\|e\|_G = 1.806168 \quad \|e\|_{GMQ} = 1.706634$$



**Fig. (4.20) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz.**

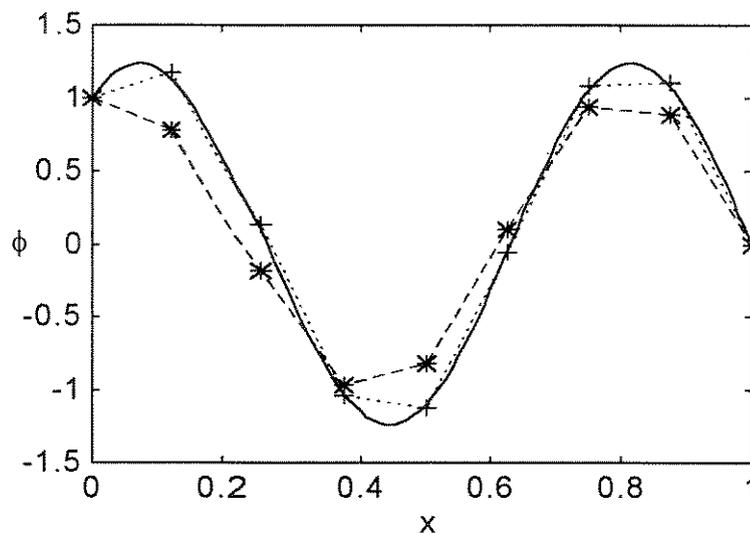
**Malha triangular regular com  $h=h_{\text{médio}}$**

$$\|e\|_G = 3.296578 \quad \|e\|_{\text{GMQ}} = 2.383777$$

Neste caso, também, o método GMQ fornece resultados melhores para frequências altas, comparados com os resultados obtidos pelo método G, mesmo não sendo soluções nodalmente exatas. Observa-se, também, que a norma do erro da resposta calculada via o método G é mais alta o que a norma da resposta calculada via o método GMQ.

Todavia, embora o método G para elementos quadrilaterais e triangulares tenha fornecido soluções com precisões bastante próximas, o método GMQ para elementos triangulares apresenta uma poluição numérica elevada, principalmente para valores de frequências elevadas.

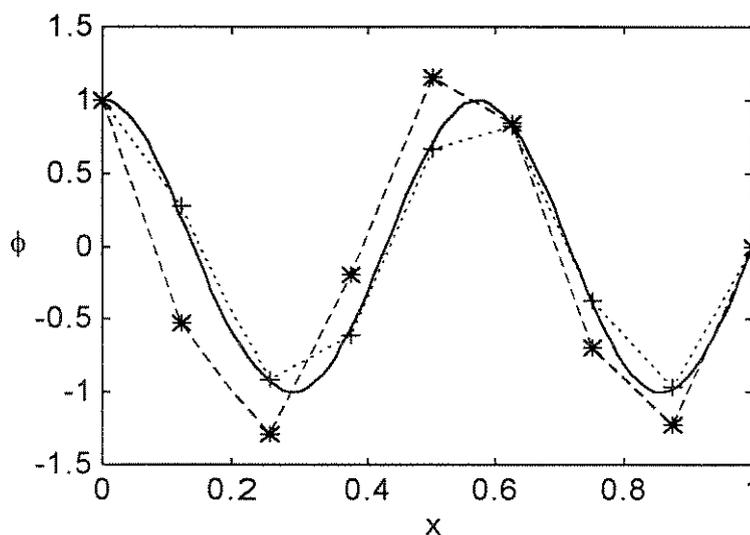
Sabendo a direção de propagação de onda plana, que neste exemplo é a direção do eixo-x, foram calculadas as respostas nas frequências 1.35 Hz e 1.75 Hz, utilizando a mesma malha de elementos triangulares regulares, tal que, o parâmetro  $h$  da malha é agora calculado como sendo o cateto ( $h_{\text{cateto}}$ ) do elemento medido na direção de propagação, que neste caso assume o valor  $h=0.125$ . Utilizando  $h_{\text{cateto}}$  no método de GMQ, foram obtidos os seguintes resultados, conforme mostrado nas figuras (4.21) e (4.22).



**Fig. (4.21)** Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz.

**Malha triangular regular com  $h=h_{\text{cateto}}=0.125$**

$$\|e\|_G = 1.806168 \quad \|e\|_{\text{GMQ}} = 0.852341$$



**Fig. (4.22)** Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz.

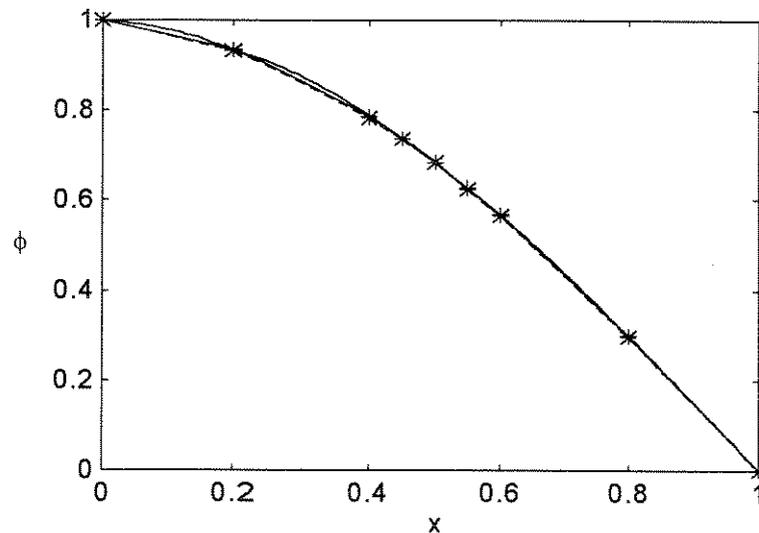
**Malha triangular regular com  $h=h_{\text{cateto}}=0.125$**

$$\|e\|_G = 3.296578 \quad \|e\|_{\text{GMQ}} = 0.928629$$

Observa-se das figuras (4.21) e (4.22) que as respostas obtidas utilizando o parâmetro  $h$  da malha como sendo  $h_{\text{cateto}}$  resultou em respostas bem mais comportadas numericamente,

tendo o erro se reduzido a menor da metade dos casos anteriores. Isto mostra a forte influência que o parâmetro  $h$  de malha exerce sobre as soluções obtidas pelo método GMQ.

Com o intuito de verificar a performance do método GMQ com malhas irregulares de elementos finitos triangulares, que são mais genéricas para a representação de geometrias arbitrárias, propõe-se estudar o problema de propagação de ondas planas usando-se a malha mostrada na figura (4.8). Os resultados obtidos pelos métodos G e GMQ são apresentados nas figuras (4.23) a (4.26). Novamente, neste caso, os parâmetros de penalidade são calculados a nível elementar.



**Fig. (4.23) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 0.24 Hz.**

**Malha triangular irregular com  $h=h_{\text{médio}}$**

$$\|e\|_G = 0.022266 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.020103$$

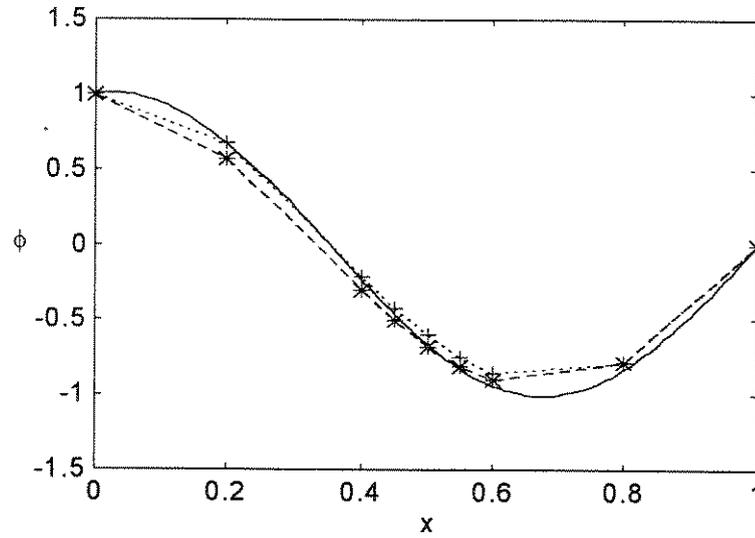


Fig. (4.24) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 0.77 Hz.

Malha triangular irregular com  $h = h_{\text{médio}}$

$$\|e\|_G = 0.415936 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.371909$$

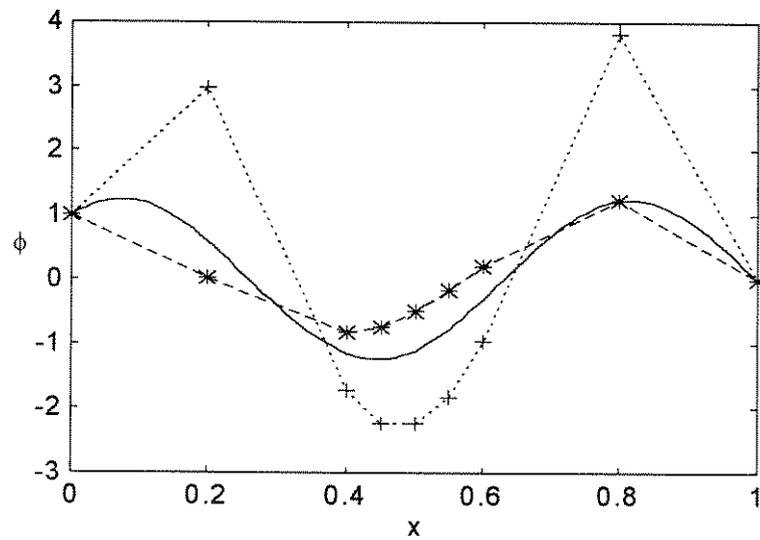


Fig. (4.25) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.35 Hz.

Malha triangular irregular com  $h = h_{\text{médio}}$

$$\|e\|_G = 3.369130 \quad \|e\|_{GMQ} = 15.093939$$

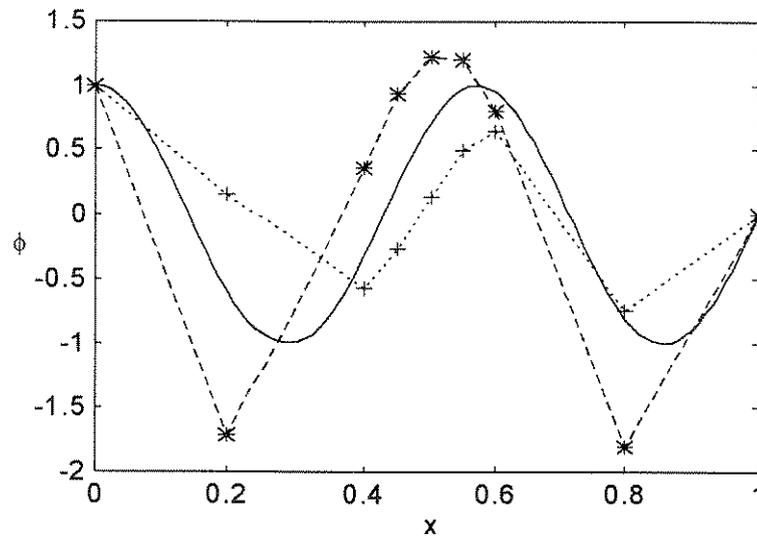


Fig. (4.26) Resposta analítica, e numérica calculada via G e GMQ em 1.75 Hz.

**Malha triangular irregular com  $h = h_{\text{médio}}$**

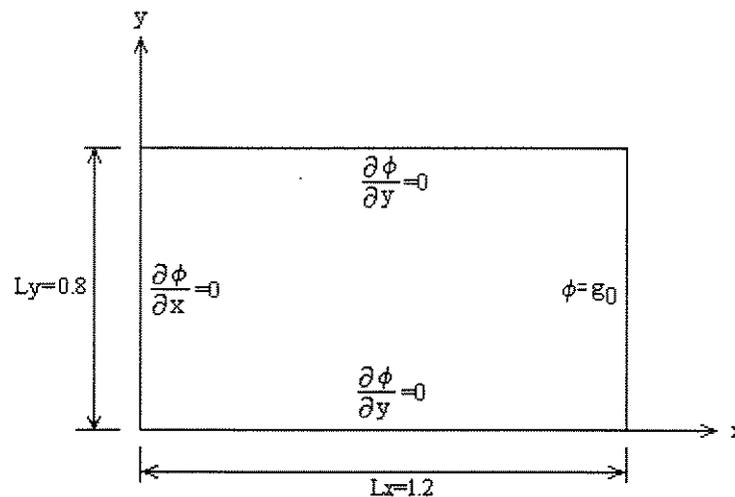
$$\|e\|_G = 5.777545 \quad \|e\|_{\text{GMQ}} = 4.981038$$

Observa-se das respostas apresentadas nas figuras (4.23) a (4.26) que mesmo para malhas irregulares o método GMQ resultou em respostas mais bem comportadas o que o método G, pelo menos até um certo número de onda. As soluções obtidas pelo GMQ para frequências mais altas mostraram um comportamento inferior ou não muito diferente do que as soluções obtidas via o método G. Isto pode ser devido a baixa resolução adotada nas regiões próximas as condições de contorno da cavidade ( $x=0$  à  $x=0.4$ ). Observa-se da figura (4.26) que mais ou menos um período da onda foi modelado por somente dois elementos finitos, o que é muito mais baixo que o limite da resolução dos métodos G e GMQ.

Ainda em relação aos resultados obtidos com malhas triangulares, pode-se observar das figuras (4.22) e (4.26) que o erro na fase das soluções é bem mais acentuado no método de Galerkin, constatação que concorda com os resultados publicados por [Ihlenburg e Babuska, 1995].

### 4.3 Problemas de Propagação de Ondas com Excitação Pontual

A fim de mostrar o comportamento das soluções numéricas utilizando os métodos G e GMQ, para ondas não planas, ou seja, problemas de vibração forçada, considera-se o domínio bidimensional, homogêneo, isotrópico, de uma cavidade acústica, cuja o comportamento harmônico desta cavidade é descrito por funções potenciais que satisfazem a equação de Helmholtz, equação (4.1), sujeita as seguintes condições de contorno mostradas na figura (4.27), que podem ser escritas da seguinte forma,



**Fig. (4.27) Cavidade acústica bidimensional e suas condições de contorno**

$$\phi(L_x, y) = g_0 = 0 \quad (4.15)$$

$$\phi_{,y}(x, 0) = \phi_{,y}(x, L_x) = \phi_{,x}(0, y) = 0 \quad (4.16)$$

Os comprimentos dos lados da cavidade ( $L_x=1.2$ ,  $L_y=0.8$ ) foram escolhidos de tal forma que não se obtenha frequências naturais repetidas. Uma força nodal é aplicada no ponto das coordenadas ( $x=0, y=0$ ) do modelo, que assume o valor de,

$$f=100 \cos \omega t \quad (4.17)$$

O domínio  $\Omega$  mostrado na figura (4.27) é discretizado com elementos finitos lineares, triangulares e quadrilaterais, adotando-se o padrão de refinamento de malhas com 117 nós

para os testes das malhas de elementos triangulares e quadrilaterais. A equação de Helmholtz para este problema é resolvida numericamente, utilizando os métodos G e GMQ, e analiticamente através da expressão (2.74), conforme item 2.2.2. Na solução analítica utilizou-se 15 modos naturais de vibração nas direções i e j.

Baseando-se em resultados de problemas unidimensionais, e de acordo com a equação (3.101), o parâmetro de penalidade pode ser calculado como se segue,

$$\tau k^2 = \frac{\alpha^h}{\alpha^h - 1} \quad (4.18)$$

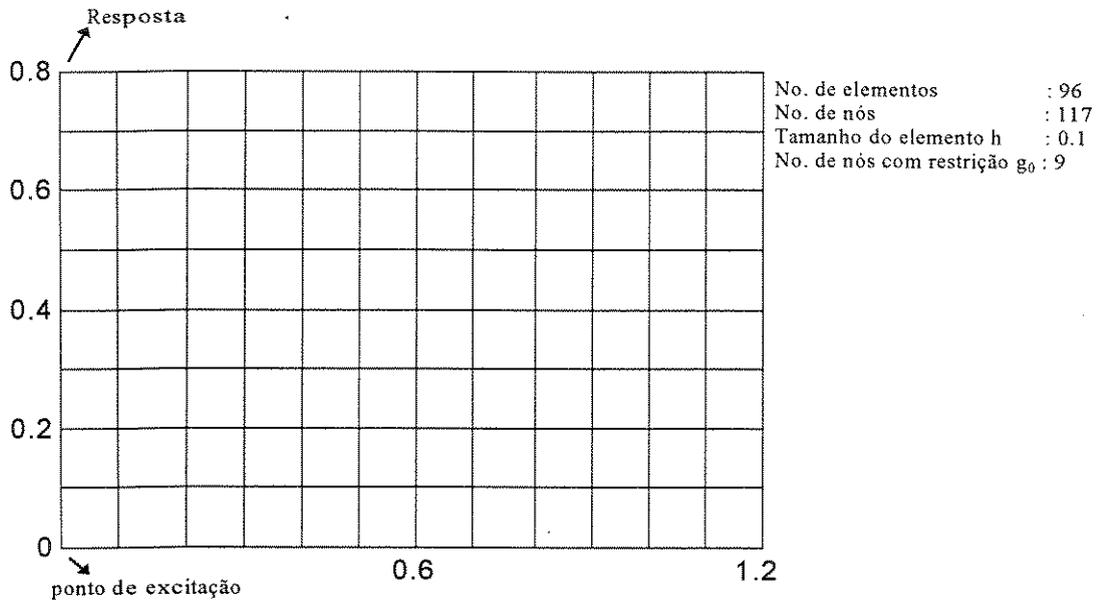
Para elementos triangulares, o parâmetro h de malha é calculado como sendo a média aritmética dos três lados do elemento.

A fim de verificar a eficiência do método GMQ e o comportamento do método G, a norma do erro, utilizando a expressão (4.7), é calculada em todos os pontos nodais menos o ponto onde a força é aplicada. Esta norma é considerada adequada apenas para a comparação das soluções exatas com as soluções numéricas obtidas pelos dois métodos estudados.

#### **4.3.1 Estudo Numérico do Comportamento dos Métodos G e GMQ para Malha Regular de Elementos Quadrilaterais**

O objetivo deste exemplo é o de verificar a efetividade da modelagem, bem como mostrar a eficiência do método GMQ e o desempenho dos métodos estudados G e GMQ.

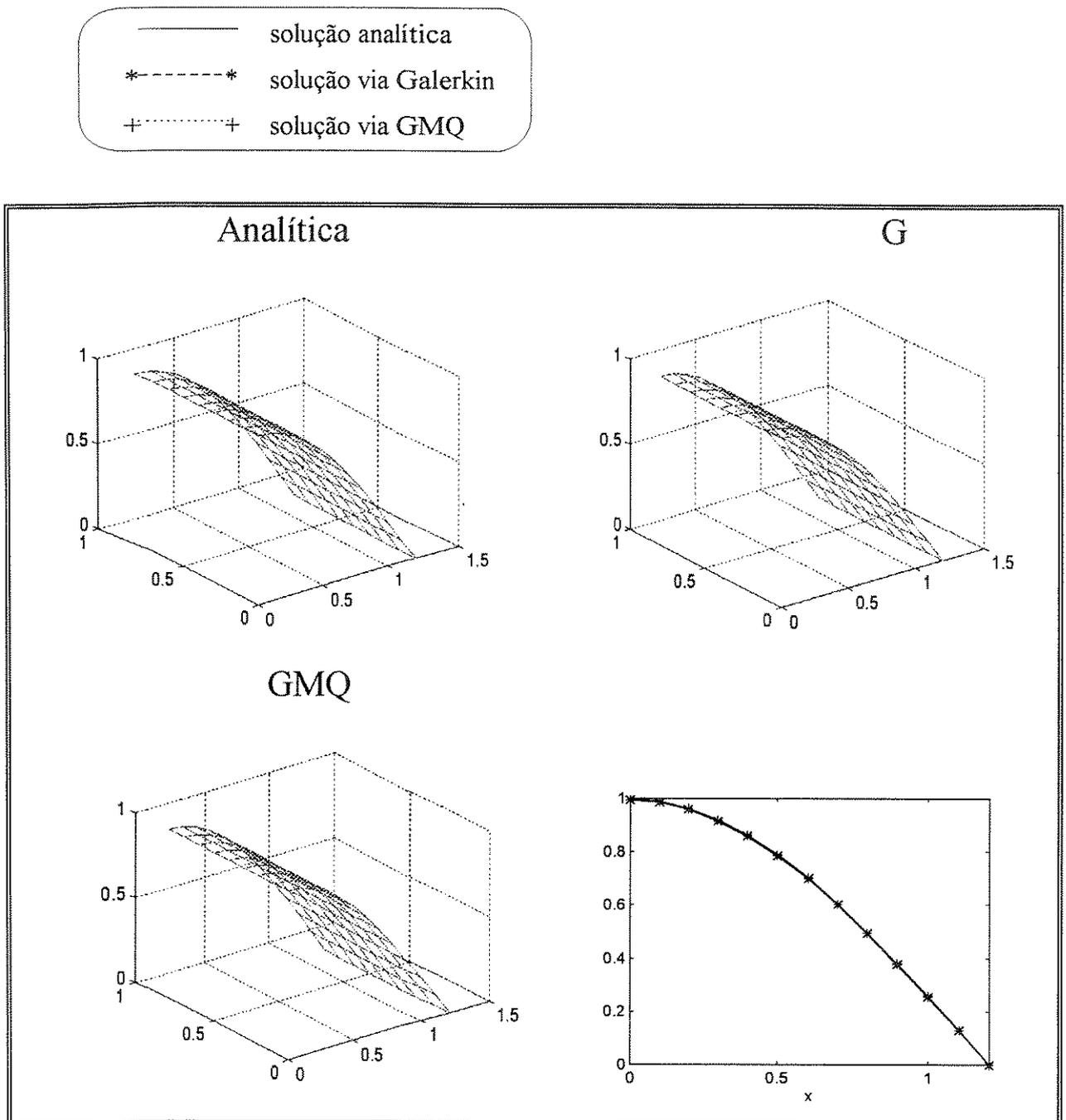
O sistema físico descrito na figura (4.27) é modelado com elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, conforme mostrado na figura (4.28), onde são apresentados os principais dados da malha adotada.



**Fig. (4.28) Malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, para a cavidade acústica**

Tendo em vista as condições de contorno e as fontes adotadas observa-se que as ondas neste caso não são mais planas.

Resolvendo-se o problema pelos métodos G e GMQ, para vários números de onda, obtem-se os seguintes resultados mostrados nas figuras (4.29) a (4.32). Estas respostas são mostradas em todos os pontos nodais (3D) e também o longo do eixo-x ( $y=0.2 L_y$ ). A legenda utilizada nas figuras de resultados é definida por,

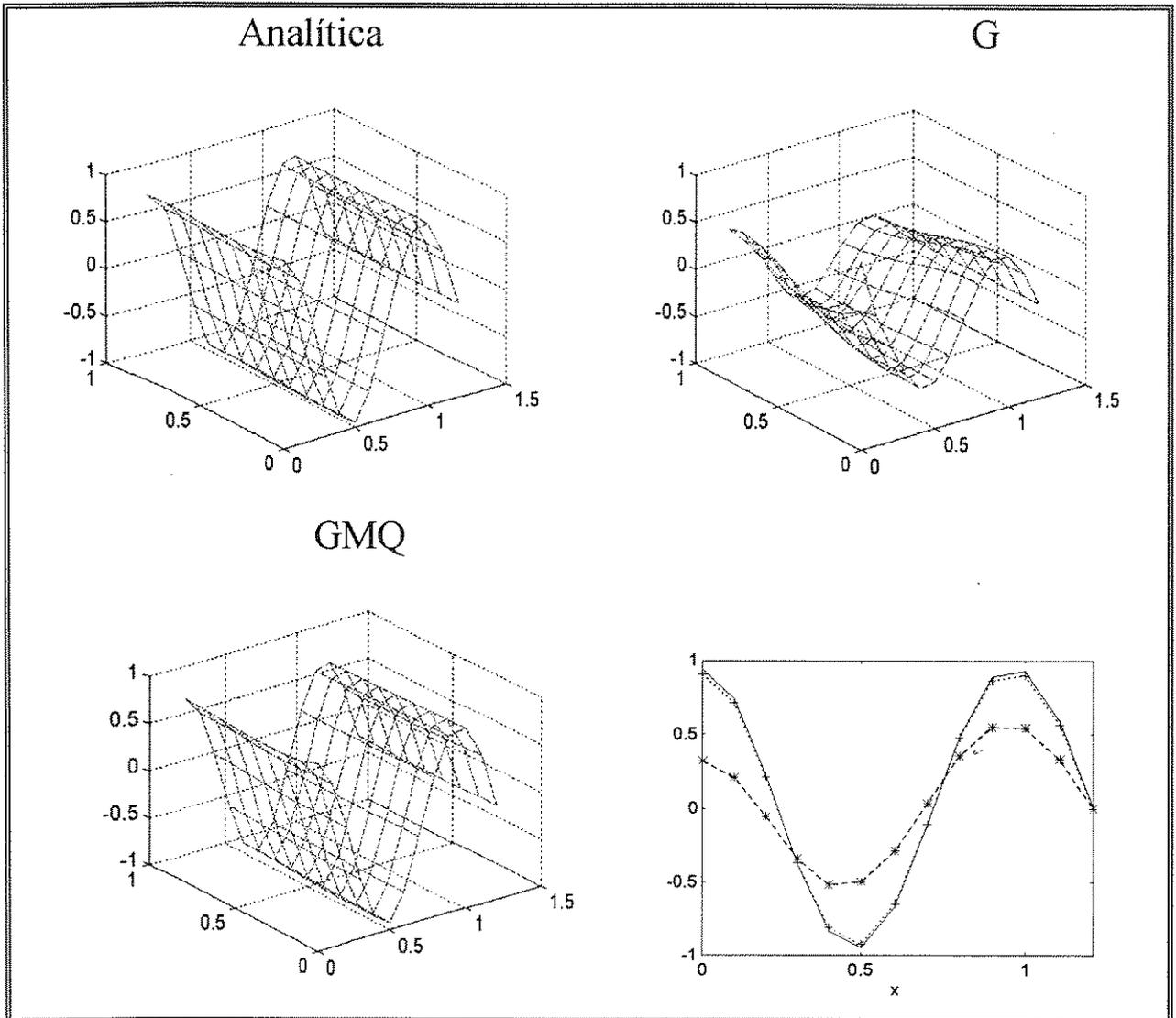


**Fig. (4.29) Resposta em 0.208 Hz**

$$\|e\|_G = 0.041483 \quad \|e\|_{GMQ} = 0.021165$$

Observa-se que as respostas obtidas, tanto pelo o método G como pelo o método GMQ, são comportadas para baixos números de onda onde um período da onda é modelado

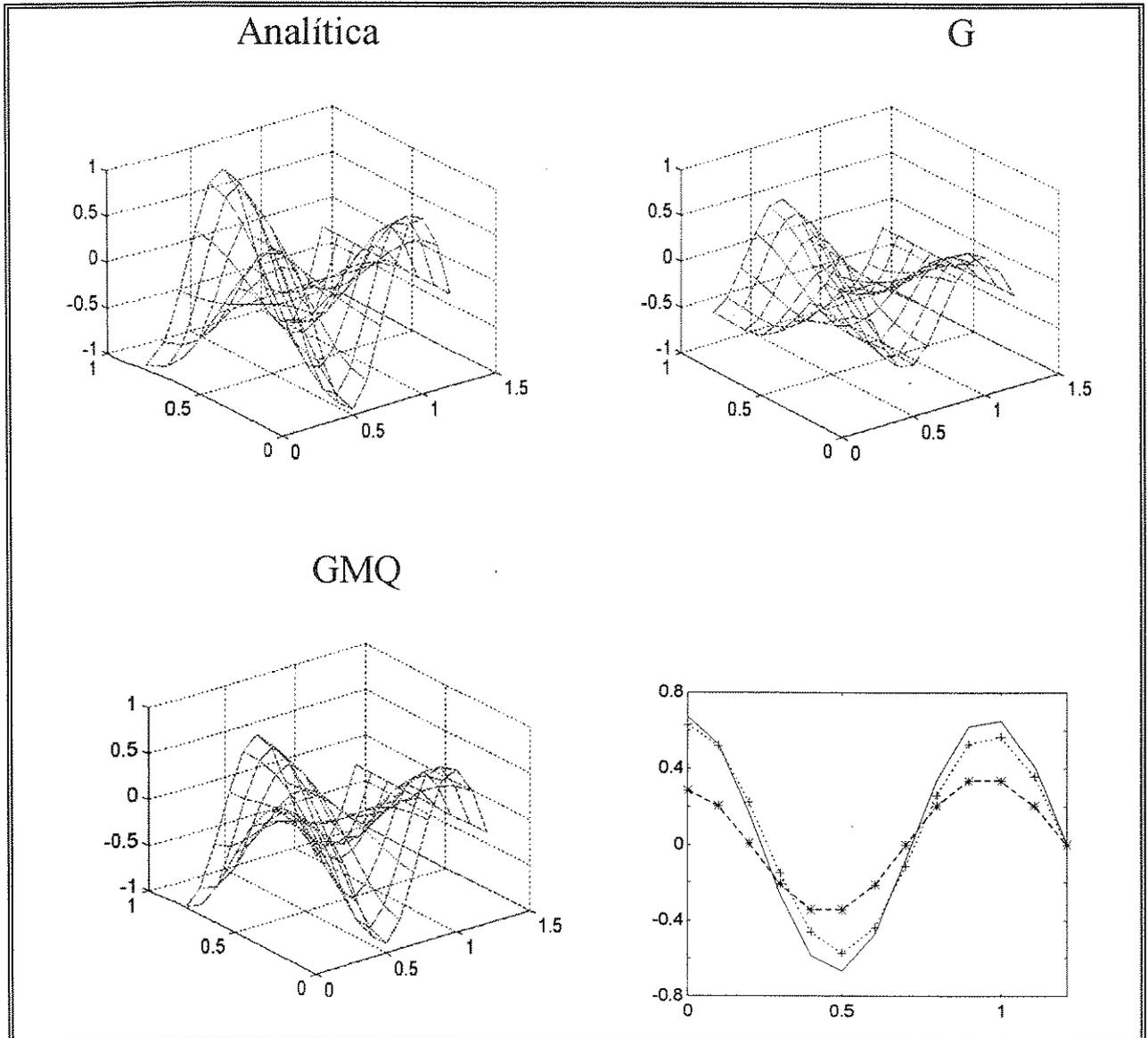
com 48 elementos finitos. Observa-se no entanto que o valor obtido para  $\|e\|_{GMQ}$  não é nulo, o que mostra que as soluções obtidas não são nodalmente exatas.



**Fig. (4.30) Resposta em 1.04 Hz**

$$\|e\|_G=3.898450$$

$$\|e\|_{GMQ}=0.231092$$



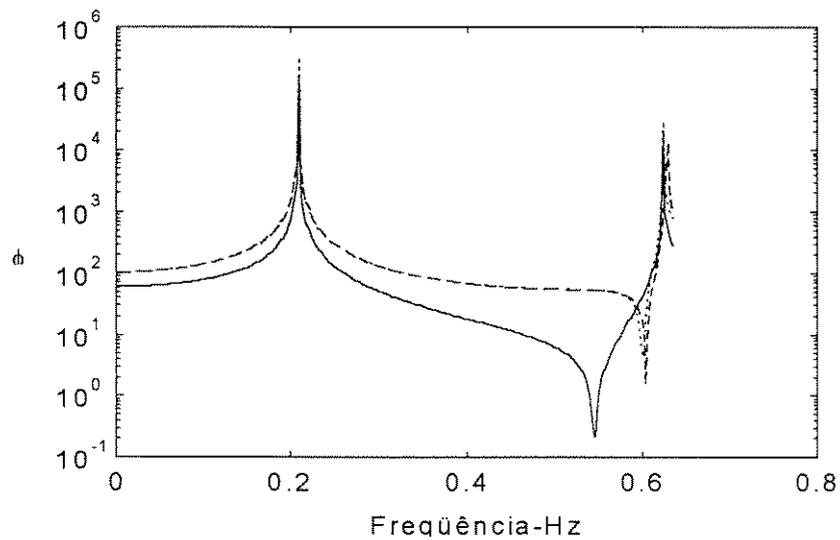
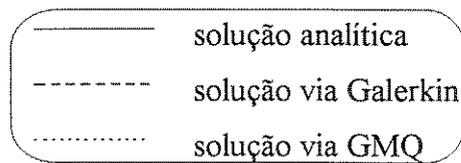
**Fig. (4.31) Resposta em 1.214 Hz**

$$\|e\|_G=2.467794 \quad \|e\|_{GMQ}=1.852606$$

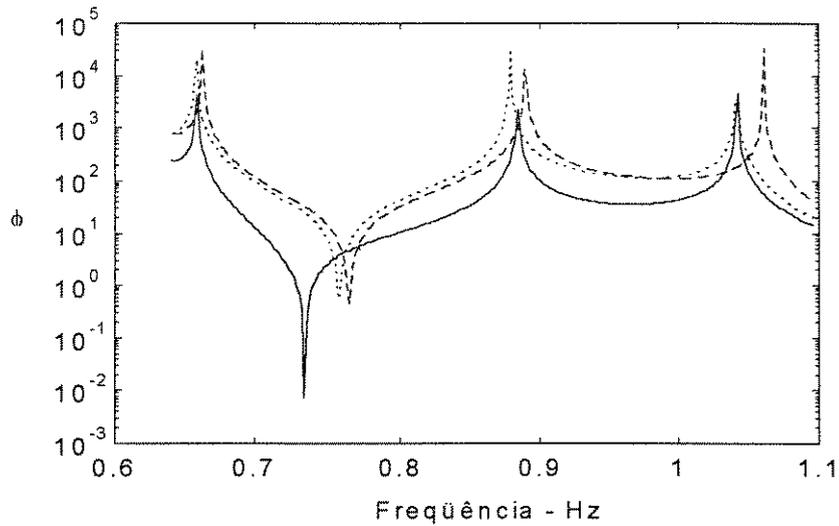
A medida que o número de onda analisado aumenta, a resposta obtida através do método G tende deteriorar-se. Pode-se notar que para resolução de dez elementos por período, que era o limite da resolução do método G nos exemplos de vibração livre, a resposta obtida pelo método G mostrou uma forte tendência de aumentos dos erros calculados. De uma forma global, nota-se que os resultados obtidos com o método GMQ são melhores o que os obtidos com o método G, todavia os resultados não são nodalmente

exatos, pois o parâmetro de penalidade  $\tau$  foi calculado baseando-se em problemas unidimensionais, que não é o caso aqui estudado.

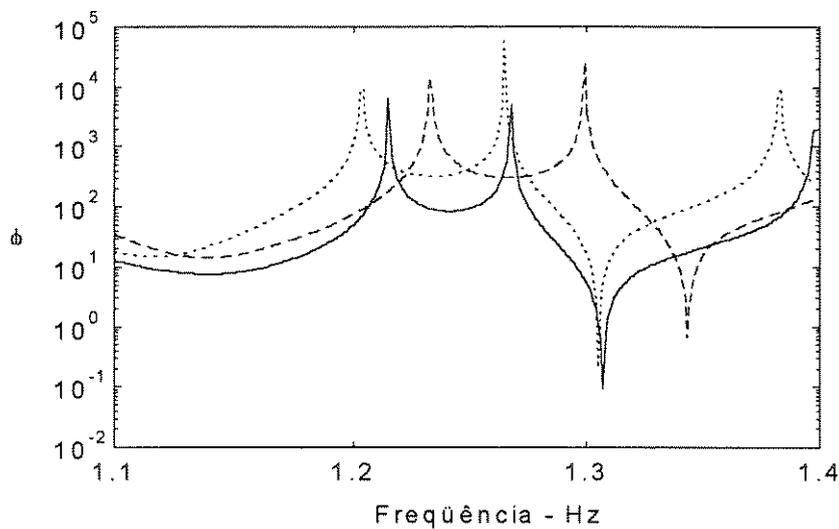
Como último conjunto de resultados deste exemplo, apresenta-se nas figuras (4.32) a (4.34) as curvas da resposta em frequência do sistema, medida no nó com as coordenadas  $(x=0, y=L_y)$ , conforme a figura (4.28), para a excitação de amplitude constante aplicada no nó com as coordenadas  $(x=0, y=0)$ . A legenda usada nas figuras com os resultados é definida por,



**Fig. (4.32) Resposta em frequência para a faixa (0--0.64) Hz**



**Fig. (4.33) Resposta em frequência para a faixa (0.64--1.1) Hz**



**Fig. (4.34) Resposta em frequência para a faixa (1.1--1.4) Hz**

Os resultados obtidos mostram que para frequências mais altas, as soluções via o método GMQ apresentam melhor resultados, seguindo de forma mais precisa os picos das curvas analíticas. A fim de sintetizar os resultados obtidos neste item, apresenta-se na tabela (4.3) as frequências naturais obtidas através do método G e do método GMQ. Estas frequências são comparadas com as exatas dadas pela expressão (2.70) do capítulo 2, e o erro destas frequências numéricas é calculado em relação as frequências exatas.

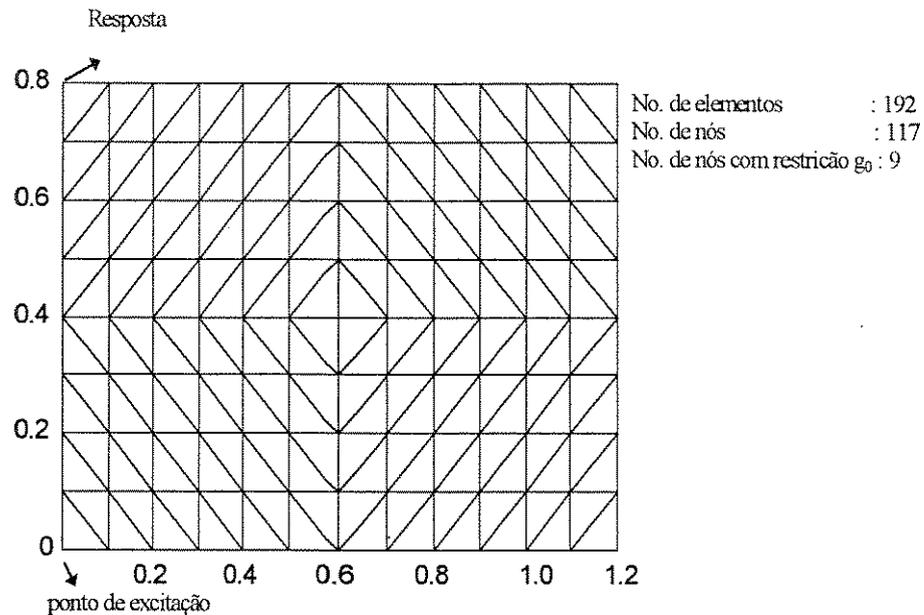
**Tabela (4.3) Freqüências naturais numéricas obtidas via os métodos G e GMQ, comparadas com as analíticas. Elementos Quadrilaterais.**

Modo	i	j	Analítica	Galerkin	erro %	GMQ	erro %
1	1	0	0.2083	0.2084	0.0480	0.2084	0.0480
2	3	0	0.6250	0.6294	0.7040	0.6251	0.0160
3	1	1	0.6588	0.6629	0.6223	0.6583	0.0758
4	3	1	0.8838	0.8891	0.5996	0.8784	0.6109
5	5	0	1.0416	1.0603	1.7953	1.0419	0.0288
6	5	1	1.2147	1.2326	1.4736	1.2037	0.9055
7	1	2	1.2672	1.2993	2.5331	1.2645	0.2130
8	3	2	1.3975	1.4279	2.1753	1.3831	1.0304
9	7	0	1.4583	1.5096	3.5177	1.4558	0.1714
10	7	1	1.5866	1.6352	3.0631	1.5684	1.1471

Pode-se notar da tabela (4.3) que os valores absolutos de erro calculados para o método G são maiores que os erro calculados para o método GMQ. A medida que a ordem do modo analisado aumenta, o erro para as soluções obtidas pelo método G também aumentam. Nota-se que somente para o modo número 4, o erro calculado para o método GMQ é da mesma ordem de grandeza que o erro do método G.

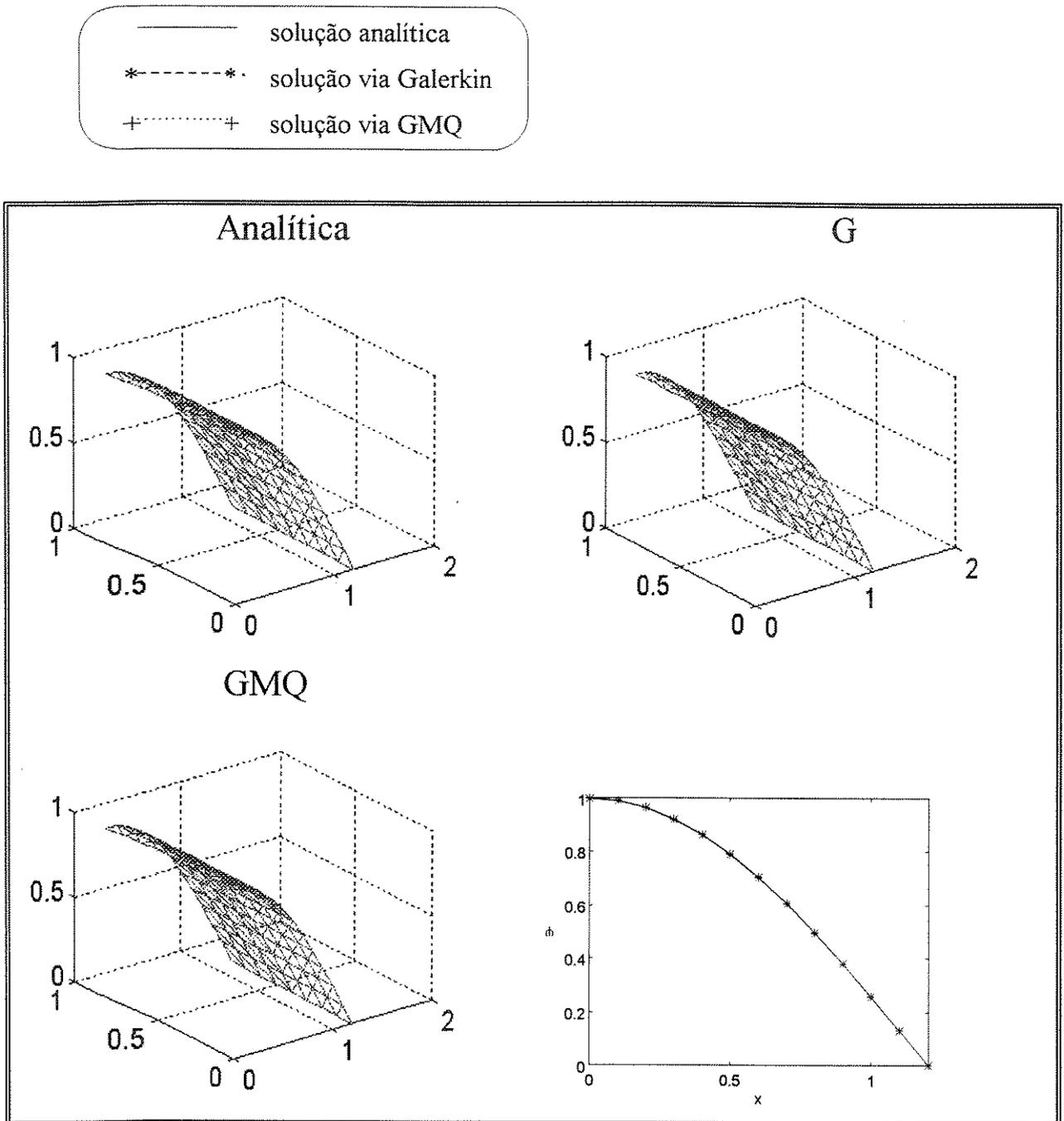
#### **4.3.2 Estudo Numérico do Comportamento dos Métodos G e GMQ para Malha Regular de Elementos Triangulares**

Neste item, verifica-se o comportamento do método GMQ para malhas de elementos triangulares, considerando o caso de vibrações forçadas. Verifica-se, também, a precisão obtida em relação às malha de elementos quadrilaterais. O modelo físico descrito na figura (4.27) é modelado com elementos triangulares. Foi utilizada uma malha com o mesmo número de nós, 117 nós, usada no estudo de comportamento do método GMQ para malhas de elementos quadrilaterais, conforme mostrado na figura (4.35).



**Fig. (4.35) Malha regular de elementos finitos triangulares de três nós, para a cavidade acústica**

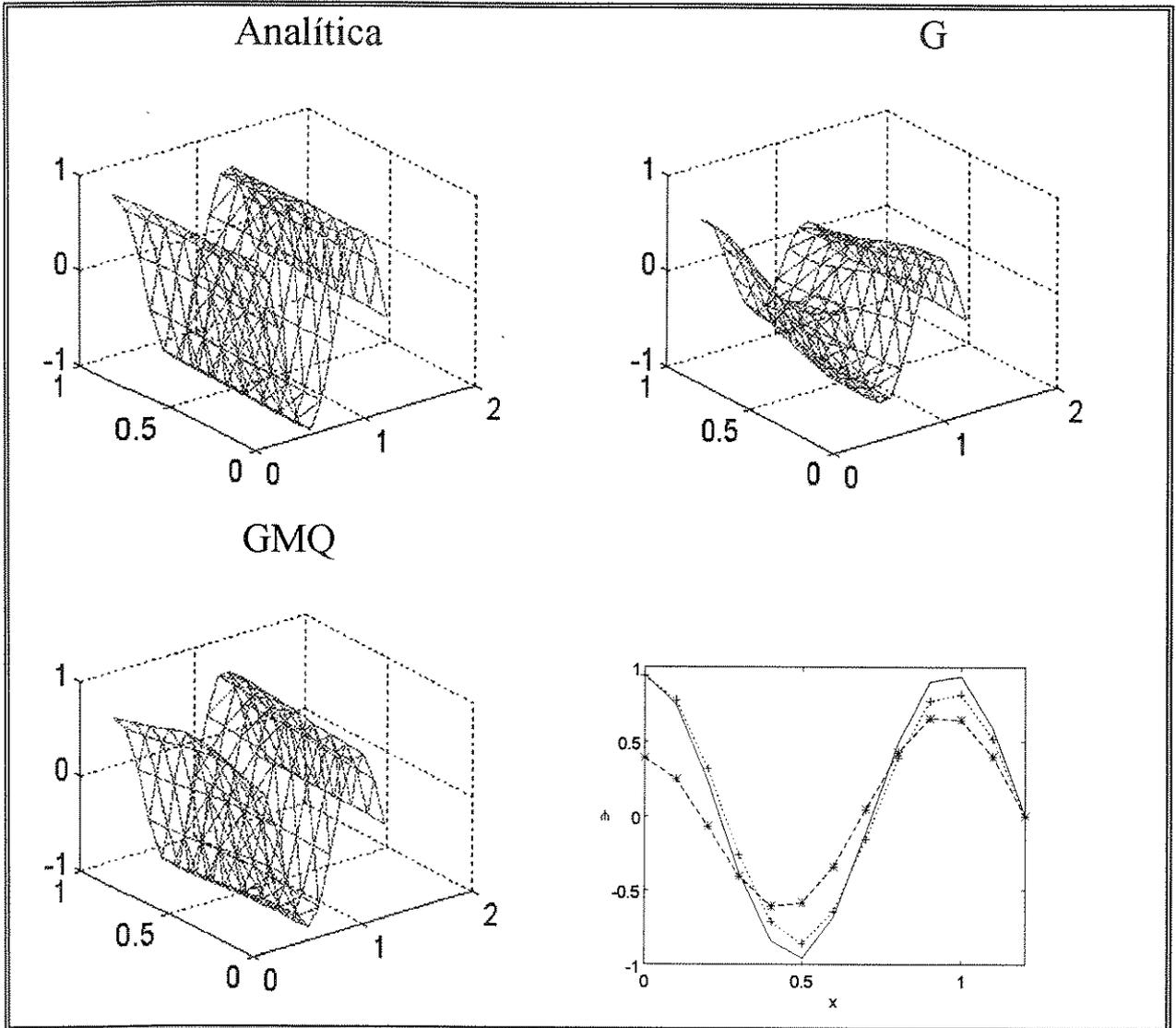
Resolvendo-se a equação de Helmholtz pelos métodos G e GMQ, para vários números de onda, obteve-se os resultados mostrados nas figuras (4.36) a (4.38). Estas respostas são apresentadas em todos os pontos nodais (vista tridimensional) e também o longo do eixo-x ( $y=0.2 L_y$ ). Observa-se que para a estimação do parâmetro de penalidade  $\tau$  foi calculado o parâmetro  $h$  da malha como sendo a média aritmética dos lados do elemento triangular. A legenda utilizada nas figuras de resultados é definida por,



**Fig. (4.36) Resposta na frequência 0.208 Hz**

$$\|e\|_G=0.0185 \quad \|e\|_{GMQ}=0.0066$$

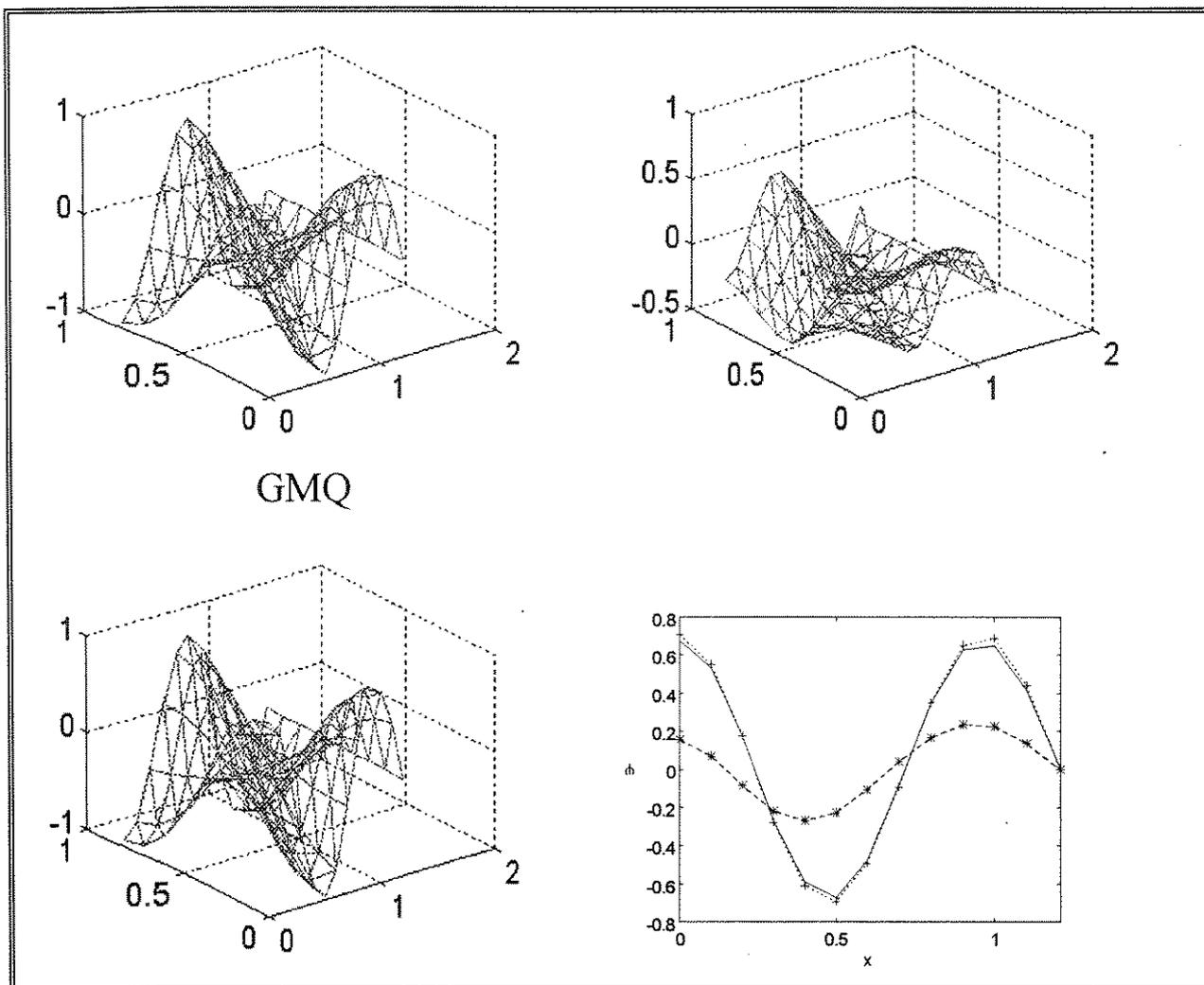
Observa-se que as respostas obtidas, tanto para o método G como para o método GMQ, mostraram-se bem comportadas para baixas frequências, onde a resolução usada para modelar a propagação de onda é bem alta.



**Fig. (4.37) Resposta na frequência 1.04 Hz**

$$\|e\|_G = 3.3637$$

$$\|e\|_{GMQ} = 0.7888$$



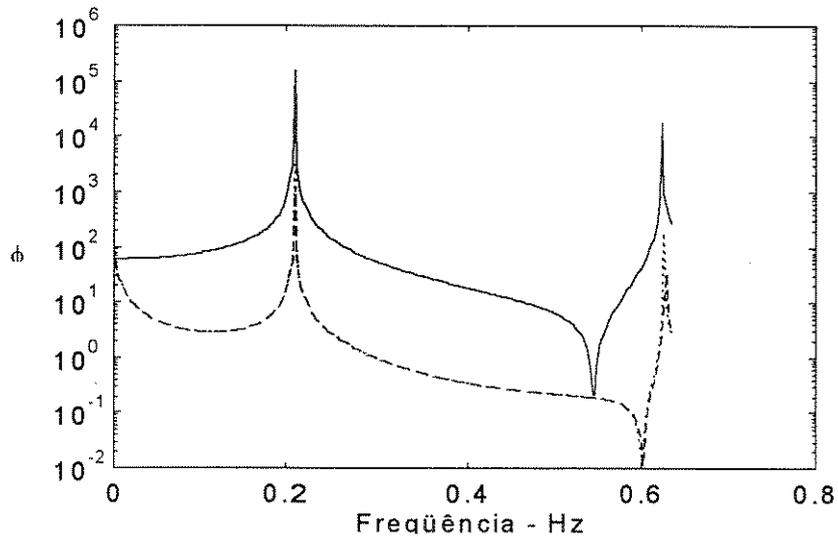
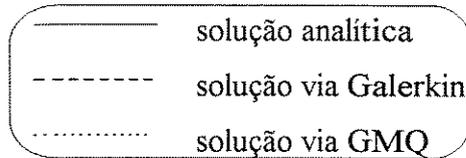
**Fig. (4.38) Resposta na frequência 1.214 Hz**

$$\|e\|_G=3.2690 \quad \|e\|_{GMQ}=0.2477$$

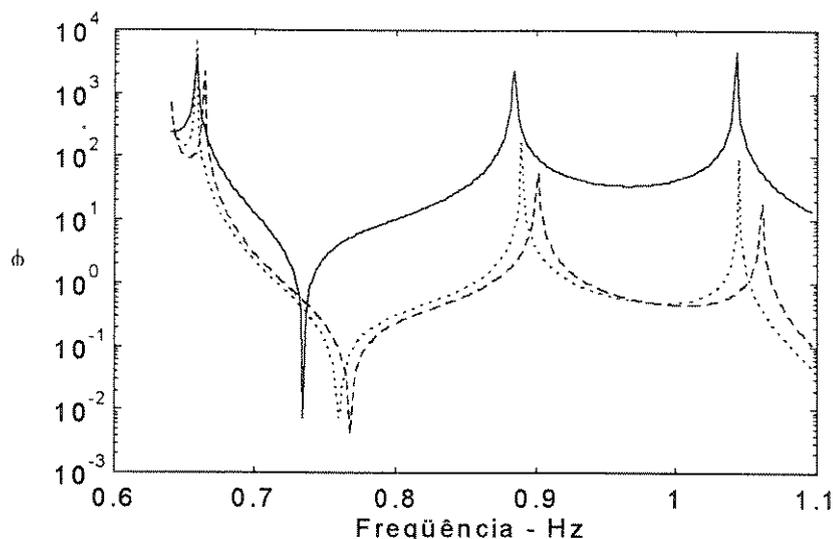
Por outro lado, observa-se que para frequências mais altas, as respostas obtidas pelo método G deterioraram-se mais rapidamente que as respostas obtidas pelo método GMQ. Da figura (4.38) nota-se que um período da onda foi modelado por aproximadamente dez elementos finitos e neste caso o resultado do GMQ mostrou um comportamento bastante superior que o método G.

Outro resultado marcante refere-se as soluções obtidas pelos métodos G e GMQ em 1.04 Hz e 1.214 Hz, respectivamente figuras (4.37) e (4.38), onde para a frequência mais baixa as aproximações foram menos precisas com os dois métodos.

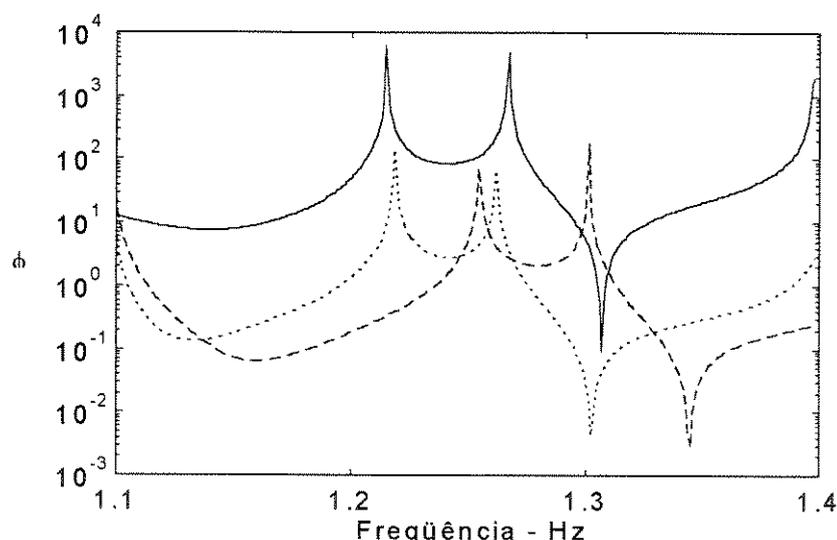
Como último conjunto de resultados apresenta-se nas figuras (4.39) a (4.41) as curvas da resposta em frequência do sistema, medida no nó com as coordenadas  $(x=0, y=L_y)$ , conforme mostrado na figura (4.35). Foi considerado uma excitação de amplitude constante, aplicada no nó cujas coordenadas são  $(x=0, y=0)$ . A legenda usada nas figuras com os resultados é definida por,



**Fig. (4.39) Resposta em frequência para a faixa (0--0.64) Hz**



**Fig. (4.40) Resposta em frequência para a faixa (0.64--1.1) Hz**



**Fig. (4.41) Resposta em frequência para a faixa (1.1--1.4) Hz**

Das curvas de resposta acima mostradas, nota-se que para frequências baixas, os comportamentos das soluções obtidos via os métodos G e GMQ não são muito diferentes do comportamento das soluções exatas. Para frequências mais altas, as soluções via o método GMQ apresentam melhor resultados que aquelas calculadas com o método de Galerkin. Nota-se, também, que existe uma diferença na amplitude entre as resposta numéricas e as respostas exatas. Isto pode ser devido ao número baixo dos modos utilizados nas direções  $i$  e  $j$  (15 em cada direção), para o cálculo da resposta exata. A fim de sintetizar os resultados obtidos neste item, apresenta-se na tabela (4.4) as frequências naturais obtidas através do método G e do

método GMQ. Estas frequências são comparadas com as exatas dadas pela expressão (2.70). Apresenta-se também na tabela (4.4) os erros das frequências numéricas calculado em relação as frequências exatas.

**Tabela (4.4) Frequências naturais numéricas obtidas via os métodos G e GMQ, comparadas com as analíticas. Elementos Triangulares.**

Modo	i	j	Analítica	Galerkin	erro %	GMQ	erro %
1	1	0	0.2083	0.2084	0.0480	0.2084	0.0480
2	3	0	0.6250	0.6294	0.7040	0.6272	0.3520
3	1	1	0.6588	0.6645	0.8652	0.6583	0.0758
4	3	1	0.8838	0.9013	1.9800	0.8891	0.5996
5	5	0	1.0416	1.0603	1.7953	1.0435	0.1824
6	5	1	1.2147	1.2545	3.2765	1.2186	0.3210
7	1	2	1.2672	1.3013	2.6909	1.2625	0.3708
8	3	2	1.3975	1.4532	3.9856	1.3950	0.1788
9	7	0	1.4583	1.5103	3.5657	1.4439	0.9874
10	7	1	1.5866	1.6671	5.0737	1.5847	0.1197

Observa-se da tabela (4.4) que as normas do erro são inferiores para o método GMQ, quando comparadas com as normas do erro para o método G. Isto pode justificar a eficiência do método GMQ para modelar cavidades acústicas, tanto para o caso de elementos finitos triangulares lineares como para o caso de elementos quadrilaterais. Para o método G, estas normas do erro aumentaram com o aumento do valor da frequência analisada, o mesmo não ocorre com o método GMQ onde há uma clara oscilação.

Observa-se em todos os resultados obtidos uma forte dependência do método GMQ com relação aos valores adotados para o parâmetro de penalidade  $\tau$ . Neste caso em particular, os erros devido à definição do parâmetro  $h$  para elementos triangulares, associado ao fato de que o fenômeno não envolve ondas planas, conduzem neste caso a soluções melhoradas via o método GMQ, mas certamente estudos mais específicos sobre a

determinação dos parâmetros de malha se fazem necessário para a consideração deste tipo de técnica.

Cumprе salientar no entanto que para praticamente todos os casos estudados, o método GMQ mostrou-se mais preciso que o método G.

*No próximo capítulo apresenta-se as conclusões obtidas do exposto no trabalho, e algumas sugestões para desenvolvimentos subsequentes nesta área serão indicados.*

## Conclusões Gerais

Estudou-se, neste trabalho, uma aplicação do método dos elementos finitos para a solução de problemas de acústica em domínios fechados, governados pela equação de Helmholtz, usando a formulação de GMQ. O método GMQ foi aplicado a problemas bidimensionais baseando-se, para a escolha dos parâmetros de penalidade, em resultados numéricos obtidos para problemas unidimensionais. Os fenômenos de decaimento e propagação de onda planas e não planas foram apresentados. Elementos lineares quadrilaterais de quatro nós e triangulares de três nós foram utilizados em malhas regulares e irregulares para a obtenção dos resultados numéricos.

O método GMQ mostrou-se relativamente eficiente quando comparado com as implementações clássicas baseadas no método de Galerkin, principalmente no domínio de altas frequências, onde aparecem fortes gradientes nas soluções.

Comprovou-se que soluções nodalmente exatas para malhas regulares de elementos finitos lineares de quatro nós podem ser obtidas, até o limite de resolução de quatro elementos por período, quando considerado o ajuste correto para o parâmetro de penalidade  $\tau$  do método de GMQ. No método de Galerkin obteve-se resultados satisfatórios trabalhando-se com resolução de malha da ordem de dez elementos por onda. Esta ordem da resolução conduz a malhas excessivamente refinadas, com um número elevado de equações a serem resolvidas se comparado com o método GMQ.

Para malhas discretizadas com elementos triangulares lineares de três nós, o método GMQ não obtém soluções nodalmente exatas devido ao parâmetro  $h$  de malha que foi calculado como uma média dos três lados de cada elemento triangular. Soluções melhoradas podem ser obtidas, até o limite de quatro elementos por período. Quando se conhecer a direção de propagação da onda plana usa-se o parâmetro  $h$  como sendo o comprimento do cateto de cada elemento medido na direção de propagação da onda acústica. O método GMQ

mostrou-se ser eficiente para elevados números de onda, mesmo para malhas irregulares de elementos triangulares.

Quanto a norma do erro utilizada, ela pode ser usada somente para a comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos, G e GMQ. No método G esta norma mostrou valores superiores aos valores obtidos para o método GMQ, em problemas de decaimento e propagação. Em relação ao problema de decaimento exponencial, os valores do erro obtidos para o método G não variam muito com um maior refinamento da malha de elementos finitos. Além disto, os valores da norma do erro no método GMQ são menores quando comparados aos obtidos para o método G.

Apesar dos resultados obtidos pelo método GMQ serem superiores à aqueles obtidos pelo método G, é necessário ainda um grande investimento em pesquisa para se estabelecer critérios efetivos para a definição dos parâmetros de malha, e também das leis de recorrência do parâmetro  $\tau$ . Sem uma melhor definição destes parâmetros torna-se praticamente impossível a aplicação do método GMQ à problemas industriais de geometrias complexas.

Pesquisas futuras devem ser desenvolvidas para se avaliar uma melhor escolha dos parâmetros  $h$  e  $\tau$  no método GMQ, com vistas a aplicação deste método em malhas irregulares em domínios tridimensionais, tanto para problemas de propagação de onda como também nos problemas de interação fluido-estrutura.

## Referências Bibliográficas

- [1] AHMIDA, K. M., PAVANELLO, R.; "*Análise Acústica de Cavidades Utilizando um Método de Elementos Finitos do tipo Galerkin/Minimos Quadrados*", aceito para publicação no congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Recife, Brasil, 1996.
- [2] AUGUSZTINOVICZ, F., OTTE, D., SAS, P., LARSSON, P. O.; "*Analytical and Experimental Study of Complex Modes in Acoustical Systems*", International Modal Analysis Congress (IMAC), 1992.
- [3] BABUSKA, I., IHLENBURG, F., PAIK, E. T., SAUTER, S. A.; "*A generalized Finite Element Method for Solving the Helmholtz Equation in two Dimensions with Minimal Pollution*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.128, pp.325-359, 1995.
- [4] BLEVINS, R. D.; "*Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes*", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979.
- [5] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E.; "*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*", John Wiley & Sons, 1989.
- [6] CRAIG, R. R. Jr.; "*Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*", John Wiley & Sons, 1981.
- [7] DHATT, G., TOUZOUT, G., CANTIN, G.; "*The Finite Element Method Displayed*", John Wiley & Sons, 1984.

- [8] DONEA, J., BELYTSCHKO, T., SMOLINSKI, P.; "*A Generalized Galerkin Method for Steady State Convection-Diffusion Problems with Applications to Quadratic Shape Functions*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.48, pp.25-49, 1985.
- [9] DUNCAN, W. J., THOM, A. S., YOUNG, A. D.; "*Mechanics of Fluids*", 2nd edition, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1970.
- [10] EASON, E. D.; "*A Review of Least-squares Methods for Solving Partial Differential Equations*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.10, pp.1022-1046, 1976.
- [11] FRANCA, L. P., DUTRA DO CARMO, E. G.; "*The Galerkin Gradient Least-square Method*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.74, pp.41-54, 1989.
- [12] FRANCA, L. P., HUGHES, T. J. R.; "*Two Classes of Mixed Finite Element Methods*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.69, pp.89-129, 1988.
- [13] GERGES, S. N. Y.; "*Ruído: Fundamentos e Controle*", 1a. edição, 1992.
- [14] GIVOLI, D., KELLER, J. B.; "*A Finite Element Method for Large Domains*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.76, pp.41-66, 1989.
- [15] GOUGH, W., RICHARDS, J. P. G, WILLIAM, R. P.; "*Vibration and Waves*", Ellis Horwood, *England*, 1989.
- [16] GRAGGS, A.; "*An Acoustic Finite Element Approach for Studying Boundary Flexibility and Sound Transmission Between Irregular Enclosures*", Journal of Sound and Vibration, v.30(3), pp.343-357, 1973.

- [17] GROSH, K., PINSKY, P. M.; "*Complex Wave-number Dispersion Analysis of Galerkin and Galerkin Least-squares Methods for Fluid-loaded Plates*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.113, pp.67-98, 1994.
- [18] HARARI, I., HUGHES, T. J. R.; "*A Cost Comparison of Boundary Element and Finite Element Methods for Problems of Time-Harmonic Acoustics*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.97, pp.77-102, 1992.
- [19] HARARI, I., HUGHES, T. J. R.; "*Analysis of Continuous Formulations Underlying the Computation of Time-harmonic Acoustics in Exterior Domains*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.97, pp.103-124, 1992.
- [20] HARARI, I., HUGHES, T. J. R.; "*Finite Element Methods for the Helmholtz Equation in an Exterior Domain: Model Problems*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.87, pp.59-96, 1991.
- [21] HARARI, I., HUGHES, T. J. R.; "*Galerkin/Least Squares Finite Element Methods for the Reduced Wave Equation with Non-Reflecting Boundary Conditions in Unbounded Domain*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.98, pp.411-454, 1992.
- [22] HUEBNER, K. H., THORNTON, E. A.; "*The finite Element Method for Engineers*", 2nd edition, John Wiley & Sons, 1982.
- [23] HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., HULBERT, G. M., JOHAN, Z., SHAKIB, F.; "*The Galerkin/Least Squares Method for Advective-Diffusive Equations*", In *Recent Developments in Computational Fluid Mechanics* (eds. T. E. Tezduyar and T. J. R. Hughes), AMD 95, ASME, 1988.
- [24] HUGHES, T. J. R., MALLET, M., MIZUKAMI, A.; "*A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: II. Beyond SUPG*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.54, pp.341-355, 1986.

- [25] IHLENBURG, F., BABUSKA, I.; "*Dispersion Analysis and Error Estimation of Galerkin Finite Element Methods for the Helmholtz Equation*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.38, pp.3745-3774, 1995.
- [26] KINSLER, L. E., FREY, A. R., COPPENS, A. B., SANDERS, J. V.; "*Fundamentals of Acoustics*", 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [27] KIRKUP, S. M., AMINI, S.; "*Solution of the Helmholtz Eigenvalue Problems via the Boundary Element Method*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.36, pp.321-330, 1993.
- [28] LITTLE, E. F., VAN KARSEN, C. D.; "*Characterizing Acoustic Mode Shapes in Arbitrary Enclosures*", International Modal Analysis Congress (IMAC), 1992.
- [29] LYNN, P. P., ARYA, S. K.; "*Finite Elements Formulated by the Weighted Discrete Least Squares Method*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.8, pp.71-90, 1974.
- [30] LYNN, P. P., ARYA, S. K.; "*Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.6, pp.75-88, 1973.
- [31] NEFSKE, D. J., WOLF, J. A. Jr., HOWELL, L. J.; "*Structural-Acoustic Finite Element Analysis of the Automobile Passenger Compartment: a review of current practice*", Journal of Sound and Vibration, v.80(2), pp.247-266, 1982.
- [32] NEPOMUCENO, L. X.; "*Acústica Técnica*", 1a. edição, 1968.
- [33] PETYT, M., KOOPMANN, G. H., PINNINGTON, R. J.; "*The Acoustic Modes of a Rectangular Cavity Containing a Rigid, Incomplete Partition*", Journal of Sound and Vibration, v.53(1), pp.71-82, 1977.

- [34] PETYT, M., LEA, J., KOOPMANN, G. H.; "*A Finite Element Method for Determining the Acoustic Modes of Irregular Shaped Cavities*", *Journal of Sound and Vibration*, v.45(4), pp.495-502, 1976.
- [35] PIRONNEAU, O., LIOU, J., TEZDUYAR, T.; "*Characteristic-Galerkin and Galerkin/Least-squares Space-time Formulations for the Advection-diffusion Equation with Time-dependent Domains*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.100, pp.117-141, 1992.
- [36] SEGERLIND, L. J. ; "*Applied Finite Element Analysis*", 2nd edition, John Wiley & Sons, 1984.
- [37] SURANA, K. S., HUELS, C. R.; "*A Least Square Finite Element Solution of the Inverse Problem of Aquifer Transmissivity*", *Computers & Structures*, v.31, No.2, pp.249-268, 1989.
- [38] THOMPSON, L. L., PINSKY, P. M.; "*Galerkin Least-squares Finite Element Method for the Two-dimensional Helmholtz Equation*", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, pp.371-397, 1995.
- [39] ZIENKIEWICZ, O. C., BETTESS, P.; "*Fluid-Structure Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment*", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.13, pp.1-16, 1978.
- [40] ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN K.; "*Finite Elements and Approximation*", John Wiley & Sons, 1983.
- [41] ZIENKIEWICZ, O. C., OWEN, D. R. J., LEE, K. N.; "*Least Square-Finite Element for Elasto-Static Problems. Use of 'Reduced' Integration*", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.8, pp.341-358, 1974.
- [42] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L.; "*The Finite Element Method*", 4th edition, Mc Graw Hill, 1994.